

THÈSE

Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Assaf GHANEM
Ingénieur de l'UTBM

Thèse soutenue le 22/01/2013 devant la Commission d'examen

Jury

BEN DHIA HACHMI	Professeur, École Centrale Paris	Président
LEBON FRÉDÉRIC	Professeur, Université Aix-Marseille	Rapporteur
PRUDHOMME SERGE	Chercheur, École polytechnique de Montréal	Rapporteur
BARANGER THOURAYA	Maître de Conférences, HDR Université Lyon1	Directrice
CARTRAUD PATRICE	Professeur, École Centrale de Nantes	Examineur
COMBESCURE ALAIN	Professeur, INSA-Lyon	Examineur
MASSIN PATRICK	Directeur du LaMSID	Examineur
TORKHANI MOHAMED	Ingénieur Recherche EDF R&D	Examineur

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal
2007-2010**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTE</u> Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	<u>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</u> http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	<u>ScSo*</u> M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements à Thouraya Baranger, qui a dirigé ce travail de thèse, pour sa grande disponibilité, ses nombreux conseils et pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet.

Je remercie vivement Mohamed Torkhani, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité, et ses conseils. Ses qualités humaines, scientifiques et pédagogiques ont contribué au bon déroulement de cette thèse.

Ce travail a été mené à la fois, au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, et au département Analyses Mécaniques et Acoustique (AMA) de la division R&D d'EDF. J'exprime ma reconnaissance à chacun de leurs membres.

Par ailleurs, je remercie Hachmi Ben Dhia pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance, et Frédéric Lebon et Serge Prudhomme pour avoir accepté de rapporter ce travail, et pour leurs remarques et questions pertinentes.

Je remercie tous les membres du LaMSID et du groupe "Acoustique, vibrations sous écoulement & dynamique des machines" pour leur bonne humeur.

Mes remerciements vont aussi aux stagiaires, doctorants et agents que j'ai croisés au cours de ces trois années, pour leur aide et pour l'ensemble des moments passés ensemble...

Enfin, un énorme merci pour ma copine, ma sœur, et mes parents, qui n'ont jamais cessé de m'encourager.

Résumé

Les machines tournantes sont le siège de phénomènes vibratoires particuliers liés à des sources d'excitation variées dues à l'effet de rotation, au couplage vibrations/mouvements de rotation/écoulements tournants, à la symétrie périodique ou quasi-périodique des structures, et à l'amortissement interne et externe. Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire portent sur le développement d'une méthodologie de couplage de modèles *1D poutre* et *3D* pour l'analyse dynamique avancée des machines tournantes.

La méthode Arlequin est une méthode de raccord de modèles autorisant par l'intermédiaire d'une technique de superposition, de coupler des modèles numériques de nature différente. L'extension de cette méthode au cadre de la dynamique des machines tournantes offre la possibilité de mieux traiter les aspects énergétiques et propagation d'ondes à travers la zone de recouvrement. À cette fin, plusieurs points sont abordés. Le premier point concerne l'écriture du formalisme Arlequin en régime dynamique transitoire dans le cadre du raccord 1D-3D. À partir des formulations continue et discrétisée, les questions de couplage multi-schémas/multi-échelles en temps sont traitées en se basant sur la conservation de l'énergie globale des sous-domaines couplés. Dans le second point, une méthode de raccord multi-schémas/mono-échelle en temps fondée sur une pondération de type partition de l'unité des paramètres du schéma de Newmark dans la zone de collage est proposée. Elle permet de garantir l'équilibre énergétique du système global et assure la continuité des quantités cinématiques à l'interface. Cette approche est ensuite généralisée au cadre des raccords multi-schémas/multi-échelles. Ce nouveau formalisme, basé sur la continuité en déplacement, autorise l'intégration numérique avec des schémas et des échelles de temps différents dans un contexte de raccord avec recouvrement tout en préservant l'équilibre énergétique global. Le dernier point traite deux volets principaux. Dans le premier volet, une formulation mixte ciblant les applications machines tournantes pour lesquelles un repère fixe et un autre tournant coexistent, est mise en place. Dans le second volet, le formalisme multi-schémas/multi-échelles en temps est étendu à la formulation mixte dans le but d'obtenir une approche générale permettant l'analyse de modélisations avancées de machines tournantes. La pertinence de ces travaux est illustrée par un cas semi-industriel représentant une application de type machines tournantes.

Mots clés: Machines tournantes, Méthode Arlequin, Éléments finis, Dynamique transitoire, Analyse multi-échelles / multi-schémas, Décomposition de domaines

Abstract

Rotating machinery are subjected to specific vibratory phenomena related to various sources of excitation arising from rotation, vibration / rotation movements coupling, symmetry of the periodic or quasi-periodic structures, and internal and external damping. This work focuses on developing a methodology for coupling beam and 3D models for advanced dynamic analysis of rotating machinery.

The Arlequin method is a multi-scale computation strategy allowing the coupling of numerical models of different nature through a technique of superposition. The extension of this method to the dynamics of rotating machinery framework offers the possibility of a better treatment of the energy aspects and wave propagation through the overlapping zone. To this end, several points are discussed. The first one concerns writing the Arlequin formalism in a transient dynamic regime for a 1D-3D coupling. Using the continuous and discrete formulations, questions regarding coupling different integration schemes and heterogeneous time scales are studied based on the total energy conservation of the coupled sub-domains. In the second point, a multi-scheme integration method based on a weighting partition of unity function of the Newmark's scheme parameters in the gluing zone is proposed. It ensures the energy balance of the overall system and the continuity of kinematic quantities at the interface. This approach is then generalized to a multi-scheme / multi-scale framework. Based on displacement continuity in the recovering area, this new formalism allows the numerical integration with different time scales and heterogeneous time schemes while preserving the overall energy balance. The last point deals with two main components. In the first phase, a mixed formulation aiming at rotating machinery applications where a rotating and a fixed frame coexist is developed. In the second phase, the multi-scheme / multi-scale framework is extended and applied to the mixed formulation in order to obtain a general approach for analyzing advanced modeling of rotating machinery. The relevance of this work is illustrated by a representative application of rotating machines.

Keywords Rotating machinery, Arlequin Method, Finite elements, Structural dynamics, Multi-scales / Multi-schemes, Domain decomposition

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 État de l’art	5
1.1 Introduction	7
1.2 Couplage sans recouvrement	7
1.2.1 Méthode de Schur primale	8
1.2.2 Méthode de Schur duale	9
1.2.3 Approches mixtes	11
1.2.4 Autres méthodes de couplage sans recouvrement	12
1.3 Couplage avec recouvrement	13
1.3.1 La méthode de Schwarz	14
1.3.2 La méthode hp-d	15
1.3.3 La “splitting method”	17
1.3.4 La méthode Arlequin	19
1.4 Les méthodes multi-échelles en temps	21
1.4.1 Écriture de l’équilibre	22
1.4.2 Le modèle couplé	23
1.4.3 Intégration temporelle	25
1.4.4 Différentes approches multi-schémas/multi-échelles	42
2 La méthode Arlequin en dynamique	61
2.1 Formalisme Arlequin en dynamique	62
2.1.1 Problème de référence	64
2.1.2 Formulation continue du problème Arlequin	65
2.1.3 Discrétisation de la formulation variationnelle	70
2.2 Conservation de l’énergie	71
2.2.1 Conservation de l’énergie en continu	71
2.2.2 Conservation de l’énergie en discret	73

3	Spécificités des machines tournantes	77
3.1	Modélisation tridimensionnelle	79
3.1.1	Cinématique du solide	80
3.1.2	Équilibre d'un système en rotation	81
3.1.3	Équation du mouvement	82
3.2	Modélisation poutre	84
3.2.1	Énergie cinétique	86
3.2.2	Énergie potentielle	86
3.2.3	Équation d'équilibre	86
3.3	Bi-modèle Arlequin 3D-1D en dynamique à l'arrêt	87
3.3.1	Discrétisations des champs de déformations et contraintes	88
3.3.2	Discrétisation des multiplicateurs de Lagrange	89
3.3.3	Mise en place des opérateurs de collage	90
3.4	Dynamique de rotation : couplage 3D-1D multi-repères	93
3.4.1	Définitions	94
3.4.2	Opérateurs de couplage	95
4	Nouvelle approche de raccord multi-échelles/multi-schémas	99
4.1	Problème de déséquilibre énergétique	101
4.2	Approche mono-échelle/multi-schémas	102
4.2.1	Démarche	103
4.2.2	Algorithme multi-schémas/mono-échelle en temps	106
4.3	Approche multi-échelles/multi-schémas	110
4.3.1	Formulation discrétisée	111
4.3.2	Conservation de l'énergie	113
4.3.3	Algorithme multi-schémas/multi-échelles	118
4.3.4	Spécificités du couplage Explicite Implicite	121
4.4	Analyse de convergence	123
4.4.1	Couplage multi-schémas	124
4.4.2	Couplage multi-échelles en temps	126
4.5	Applications numériques	127
4.5.1	Raccord 1D-1D multi-schémas : Conservation de l'énergie	127
4.5.2	Raccord 2D-1D multi-échelles : Conservation de l'énergie	132
4.5.3	Raccord 3D-1D : Couplage multi-échelles implicite/explicite	135
5	Raccord multi-échelles/schémas pour les machines tournantes	139
5.1	Formulation continue en dynamique de rotation	140
5.2	Rotation d'ensemble en mono-échelle / multi-schémas	140
5.2.1	Formulation discrétisée	140
5.2.2	Résidu d'interface	141
5.2.3	Méthode de résolution	144
5.3	Rotation d'ensemble en multi-échelles / multi-schémas	147
5.3.1	Formulation discrétisée	148

5.3.2	Résidu d'interface	151
5.3.3	Méthode de résolution	151
5.4	Applications numériques	155
5.4.1	Rotation d'ensemble en mono-échelle en temps	155
5.4.2	Rotation d'ensemble en multi-échelles en temps	161
5.4.3	Transitoire de vitesse de vitesse en mono-échelle en temps	161
5.4.4	Transitoire de vitesse de vitesse en multi-échelles en temps	164
6	Application numérique	167
6.1	Présentation du cas test	168
6.2	Mise en place du contact	168
6.2.1	Présentation du modèle de contact	169
6.2.2	Mise en équation	170
6.3	Résultats numériques	171
6.3.1	Étude à vitesse nominale	173
6.3.2	Étude d'un transitoire de vitesse	175
	Conclusion et perspectives	179
	Annexe A	183
	Annexe B	187
	Bibliographie	189

Table des figures

1	Figure d'un groupe turbo-alternateur 1300 MW	2
2	Comparaison des différentes modélisations possibles	2
1.1	Décomposition de domaine de Schur	7
1.2	Illustration du couplage Poutre-3D	13
1.3	Décomposition de domaine de Schwarz	14
1.4	Illustration de la méthode hp-d	16
1.5	Représentation de la "Splitting method"	18
1.6	Problème mécanique générique	20
1.7	Illustration du raccord Arlequin	21
1.8	Représentation du mono-modèle Ω	22
1.9	Représentation de Ω partitionné en Ω_1 et Ω_2	23
1.10	Domaines de stabilité du schéma de Newmark [NEW 59]	28
1.11	Évolution linéaire de l'accélération	31
1.12	Illustration de la méthode de Houbolt	32
1.13	Illustration de la méthode de Runge-Kutta	36
1.14	Représentation des deux échelles de temps	43
2.1	Variation du paramètre γ_i	62
2.2	Opérations Arlequin	63
2.3	Couplage Arlequin	66
3.1	Repères fixe et mobile	80
3.2	Élément volumique à 20 noeuds	83
3.3	Élément de poutre à 6 degrés de liberté par noeud	85
3.4	Illustration du couplage 3D-1D	91
3.5	Maillage du couplage 3D-1D	93
3.6	Zoom sur la zone de collage Ω_0	93
3.7	Résultats nodaux du couplage 3D-1D	94
3.8	Changement de repère	95
4.1	Intégration numérique multi-schémas	103
4.2	Évolution du paramètre ξ_i	104
4.3	Nouvelle approche multi-schémas	106
4.4	Système couplé à quatre ddl	124

4.5	Ordres de convergence d'un mono-modèle de Newmark	125
4.6	Convergence de l'approche multi-schémas	125
4.7	Convergence de l'approche multi-échelles	126
4.8	Représentation du couplage 1D-1D	127
4.9	Couplage 1D-1D multi-schémas	128
4.10	Couplage 1D-1D d'un modèle encastree-libre	128
4.11	Bilan d'énergie : $\gamma_1 = 0.7; \beta_1 = 0.36$ et $\gamma_2 = 0.6; \beta_2 = 0.3025$	129
4.12	Bilan d'énergie : $\gamma_1 = 0.6; \beta_1 = 0.3025$ et $\gamma_2 = 0.7; \beta_2 = 0.36$	129
4.13	Bilan d'énergie - Nouvelle approche multi-schémas	130
4.14	Nouvelle approche multi-schémas : $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$	130
4.15	Exemple de maillages hiérarchiques	131
4.16	Paramètre γ constant	131
4.17	Travail Arlequin - Maillages incompatibles	132
4.18	Représentation du couplage 2D-1D	132
4.19	Méthode GCbis	133
4.20	Bilan d'énergie - Nouvelle approche	134
4.21	Résultats nodaux	134
4.22	Couplage Arlequin 3D-1D	135
4.23	Bilan d'énergie - Couplage implicite/explicite	136
4.24	Déplacement - Couplage implicite/explicite	136
5.1	Discretisation temporelles -Approche tournant/fixe	149
5.2	Couplage Arlequin 3D-1D ; Section carré	157
5.3	Déplacement selon l'axe Z à 100 tr/min	157
5.4	Trajectoire du rotor à 100 tr/min	158
5.5	Déplacement en z - multi-échelles en temps	159
5.6	Trajectoire - multi-échelles en temps	160
5.7	Travail d'interface en fonction de Δt	161
5.8	Trajectoire - multi-échelles en temps	162
5.9	Couplage Arlequin 3D-1D ; Section circulaire	163
5.10	$\check{w}_1 = 416.7t$ - Approche mono-échelle en temps	164
5.11	$\check{w}_1 = 416.7t$ - Approche multi-échelles en temps	165
6.1	Couplage Arlequin 3D-1D	168
6.2	Illustration du contact rotor/stator	169
6.3	Zoom sur le patch 3D	172
6.4	Déplacement nodal 3D selon l'axe Y avec/sans contact	173
6.5	Déplacement nodal 3D selon l'axe Z avec/sans contact	174
6.6	Comparaison de la trajectoire d'un noeud avec et sans contact	174
6.7	$\check{w}_1 = 5000t$	175
6.8	$\check{w}_1 = 5000t$ - Déplacement selon l'axe Y avec/sans contact	176
6.9	$\check{w}_1 = 5000t$ - Déplacement selon l'axe Z avec/sans contact	176
6.10	$\check{w}_1 = 5000t$ - Orbite d'un noeud de contact du patch 3D	177

6.11 Rotor à un seul disque	183
6.12 $\check{w}_1 = 416,7t$	184
6.13 $\check{w}_1 = 1250t$	185
6.14 $\check{w}_1 = 5000t$	185

Liste des tableaux

1.1	Algorithme de la méthode de Schur primale	9
1.2	Algorithme de la méthode de Schur duale	11
1.3	Algorithme correspondant au schéma de Newmark	27
1.4	Différents algorithmes du schéma de Newmark	29
1.5	Expression des quantités avec/sans liaison sur Ω_1 et Ω_2	46
1.6	Algorithme de la méthode GC	57
1.7	Algorithme de la méthode PH	58
1.8	Algorithme GCbis	59
4.1	Paramètre du couplage multi-schémas	106
4.2	Algorithme mono-échelle en temps/multi-schémas	111
4.3	Paramètres du couplage multi-échelles en temps	117
4.4	Algorithme multi-schémas/multi-échelles en temps	122
4.5	Construction de l'opérateur de condensation	123
5.1	Algorithme mono-échelle en temps/multi-schémas/multi-repères	148
5.2	Algorithme multi-schémas/multi-échelles/multi-repères	156
6.1	Caractéristiques du rotor	168
6.2	Algorithme de détection/correction du contact	172
6.3	Algorithme de contact	188

Introduction

Le travail de thèse que nous présentons dans ce document s'inscrit dans le cadre d'une collaboration CIFRE entre le laboratoire de mécanique des contacts et des structures de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA) et le groupe d'acoustique, vibrations sous écoulement, et dynamique des machines tournantes d'EDF. Ce groupe fait partie du département d'Analyse Mécanique et Acoustique (AMA) de la division recherche et développement d'EDF.

Cette introduction générale vise à expliquer les motivations industrielles de la thèse et à présenter le cadre général, les objectifs, ainsi que les réalisations développées dans les différents chapitres de ce manuscrit.

Ce travail poursuit des travaux de collaborations antérieurs [ZAM 05, RAT 03] sur la méthode Arlequin dans le domaine quasi-statique.

La simulation de modèles de machines tournantes en régime dynamique est généralement basée sur des modélisations de type poutre (structures filaires et élancées). La prise en compte d'un phénomène localisé (de type fissure, contact, impact) en se basant sur ces modèles globaux n'est pas fiable, et une étude basée sur un mono-modèle tridimensionnel fin est alors nécessaire.

Dans le cadre de la mise en place d'une démarche d'analyse avancée pour l'étude des machines tournantes, plusieurs aspects physiques et numériques doivent être pris en compte dans le but de répondre à des exigences de qualité et d'efficacité. Dans ce contexte, les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit constituent la première pierre d'un projet de recherche ambitieux où toutes les briques élémentaires nécessaires aux études poussées de machines tournantes doivent être posées. L'enjeu de ce projet consiste alors à développer une modélisation poutre permettant de reproduire le comportement global des machines tournantes (figure 1), et d'y superposer localement des modèles tridimensionnels autorisant la prise en compte de non-linéarités localisées telles que les phénomènes de contact et de propagation de fissures, à moindres coûts tant humains que numériques. Cette approche permettra, grâce à la richesse des modèles 3D, d'étudier tout autre phénomène physique apparaissant au cours du fonctionnement au niveau des zones susceptibles de voir initier des phénomènes d'endommagement (les plateaux d'accouplement, les alésages et les racines des disques et des ailettes, etc.).

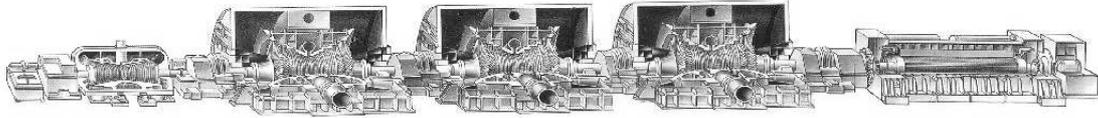


Fig. 1: Figure d'un groupe turbo-alternateur 1300 MW

Dans la littérature, plusieurs méthodes adaptatives [LI 05, CAR 95] proposent des solutions pour traiter ce type de problèmes. Cependant, la mise en œuvre de ces approches s'avère compliquée puisqu'elles nécessitent dans la plupart des cas la mise en place de stratégies de remaillage. Dans ce contexte, la méthode Arlequin [BEN 99, BEN 01, BEN 10] offre un cadre rigoureux, flexible, et bien adapté pour traiter ce type de difficultés. Elle est basée sur une partition de modèles, ce qui permet de coupler des domaines de dimensions et de finesses différentes, d'où une économie en taille du problème par rapport à une mono-modélisation fine complète. La modélisation Arlequin permet la restitution du comportement global d'un modèle donné tout en ayant la possibilité de mettre en évidence des effets qui apparaissent aux échelles plus fines. La mise en place d'un couplage Arlequin 3D-1D (figure 2) représentant un cas-test de type de machines tournantes et son application en dynamique constitue le premier objectif des travaux de thèse présentés ci dessous.

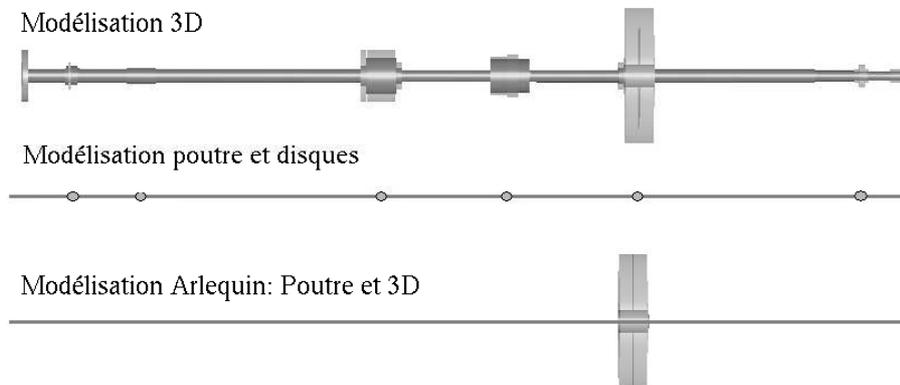


Fig. 2: Comparaison des différentes modélisations possibles

L'utilisation d'une méthode de raccord de modèles pour des études en régime dynamique s'avère très efficace du fait de la richesse d'informations disponibles à travers les modélisations fines en espace d'une part, et grâce à l'économie du temps de calcul nécessaire pour une étude similaire effectuée sur un mono-modèle fin équivalent d'une autre part. Par ailleurs, le traitement séparé des domaines autorise le développement de différentes approches d'intégration numérique permettant d'associer à chacun des sous-domaines ses propres paramètres d'intégration

temporelle : Schéma d'intégration numérique et échelle de temps. Ces approches permettent d'adapter les problèmes à résoudre en fonction du phénomène que l'on souhaite observer. Il est ainsi possible de combiner des schémas de Newmark conservatifs (implicites ou bien explicites) et des échelles de temps fines d'une part, avec des schémas de Newmark dissipatifs et des discrétisations temporelles grossières de l'autre, et inversement. Néanmoins, une attention spéciale doit être accordée aux aspects énergétiques qui peuvent être à la base de perturbations capables de rendre les calculs instables, ou bien de générer des phénomènes de réflexion d'ondes résiduelles au niveau de l'interface entre les modèles couplés. Dans [PRA 04, COM 02, GRA 01, MAH 10, BAT 10] les auteurs appliquent des méthodes de raccord de modèles sans recouvrement en régime dynamique où la continuité à l'interface est assurée à travers les vitesses. La conservation de l'énergie de ces méthodes est démontrée par une méthode dite énergétique [HUG 78a, HUG 78b].

Malgré les nombreux avantages offerts par la zone de recouvrement du cadre Arlequin, cette dernière peut être le lieu de phénomènes de cumul d'énergie dans le cadre d'une intégration numérique où chaque sous-domaine possède son propre schéma numérique et évolue sur sa propre échelle de temps. Notons toutefois que des phénomènes identiques se produisent au niveau des méthodes de raccord sans recouvrement évoquées ci-dessus, mais la réduction de la zone de recouvrement à une interface rend l'effet de tels phénomènes négligeable (pas de cumul du résidu énergétique). Un deuxième objectif qui s'inscrit toujours dans le cadre du développement de méthodes d'analyses avancées des machines tournantes, vise à mettre en place les ingrédients d'un cadre rigoureux autorisant le contrôle des paramètres de l'intégration numérique sur chaque sous-domaine, de façon indépendante, tout en garantissant l'équilibre énergétique du système global. Nous démontrons dans le chapitre 4 que le point clé de cette approche repose sur la continuité en déplacement dans la zone de collage. Ce point est essentiel du fait que la plupart des codes éléments finis travaillent avec les déplacements comme variable de résolution ce qui facilite le développement et la capitalisation des travaux dans `CODE_ASTER`.

Par ailleurs, le troisième objectif de la thèse consiste à mettre en place une méthodologie de couplage des modèles *1D poutre* et *3D* pour l'analyse des machines tournantes en dynamique transitoire. Ceci nécessite une compréhension des phénomènes physiques issus principalement de l'effet rotationnel des machines en vue d'adapter le cadre Arlequin. La particularité de la configuration avec rotation d'ensemble réside dans le mélange de différents niveaux d'analyse en associant des formulations 1D et 3D. Cette coexistence de modélisations de natures différentes demande une réflexion théorique particulière dans l'optique de mettre en place un cadre permettant de tenir compte des spécificités de chaque modèle. Ceci concerne principalement le mouvement des sous-domaines dans leurs propres repères (repère Galiléen et repère tournant), l'écriture du raccord en fonction du temps, et l'appari-

tion de nouvelles grandeurs telles que la matrice d'accélération centrifuge qui existe uniquement sur le modèle 3D. Le développement de cette approche théorique, ainsi que la mise à profit des objectifs précédents constituent un cadre permettant de réaliser des études de machines tournantes où le comportement global de la ligne d'arbres est restitué tout en tenant compte de la présence locale d'une éventuelle non-linéarité.

La suite de ce document est composée de six chapitres :

- Le chapitre 1 dresse un état de l'art des principales méthodes de raccord en espace sans recouvrement et avec recouvrement, et présente une vue globale sur les schémas d'intégration numérique avant de détailler la mise en place de quelques approches multi-échelles en temps, leurs spécificités, ainsi que les aspects énergétiques correspondants.
- Le chapitre 2 expose les formulations continue et discrétisée de la méthode Arlequin dans le cadre dynamique. La conservation de l'énergie à travers cette approche est également abordée dans le but de mieux comprendre les phénomènes énergétiques qui peuvent survenir lors de l'extension de cette méthode au cadre multi-schémas/multi-échelles en temps.
- Le chapitre 3 est dédié à l'exposition d'une nouvelle formulation mixte basée sur la méthode Arlequin en vue de l'utiliser dans des applications machines tournantes. L'origine de cette réflexion consiste à écrire l'équation d'équilibre dans le repère fixe pour la modélisation de poutre, et dans le repère tournant pour le modèle tridimensionnel.
- Le chapitre 4 présente deux contributions importantes qui portent sur l'intégration numérique multi-schémas pour une méthode de raccord avec recouvrement, ainsi que sur une nouvelle méthode de couplage multi-échelles / multi-schémas dans le même contexte de raccord spatial. Ces travaux sont basés sur une continuité en déplacement dans la zone de collage, ainsi que sur la conservation de l'énergie totale des systèmes couplés pendant l'intégration numérique.
- Le chapitre 5 est consacré à l'extension de l'approche multi-échelles / multi-schémas du chapitre 4 au cadre des machines tournantes. Cette généralisation permet de mettre en oeuvre la démarche d'analyse avancée pour les études de machines tournantes.
- Le chapitre 6 illustre l'utilisation de l'approche finale présentée dans le chapitre 5 dans le cadre d'une application représentative de type machines tournantes. Le contact entre un rotor composé d'un patch 3D (1800 degrés de liberté) couplé à une ligne d'arbre modélisée en poutre de Timoshenko (330 degrés de liberté) et un stator rigide fixe est étudié pendant une montée en vitesse. Le modèle est soumis à un effet de balourd au niveau d'un disque.

Chapitre 1

État de l'art

Dans ce premier chapitre nous présentons une étude de l'état de l'art portant sur les méthodes de calcul multi-échelles. Une première partie est consacrée aux aspects multi-échelles en espace. Nous balayons quelques méthodes de raccord sans recouvrement, ainsi que d'autres plus complexes, où une zone commune coexiste entre les différents domaines couplés, notamment la méthode Arlequin. Une deuxième partie principale évoque les aspects multi-échelles en temps où les domaines couplés possèdent des échelles de temps distinctes. Ces méthodes de couplage sont très intéressantes et permettent d'effectuer des économies importantes en termes de temps de calcul.

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Couplage sans recouvrement	7
1.2.1	Méthode de Schur primale	8
1.2.2	Méthode de Schur duale	9
1.2.3	Approches mixtes	11
1.2.4	Autres méthodes de couplage sans recouvrement	12
1.3	Couplage avec recouvrement	13

1.3.1	La méthode de Schwarz	14
1.3.2	La méthode hp-d	15
1.3.3	La “splitting method”	17
1.3.4	La méthode Arlequin	19
1.4	Les méthodes multi-échelles en temps	21
1.4.1	Écriture de l'équilibre	22
1.4.2	Le modèle couplé	23
1.4.3	Intégration temporelle	25
1.4.4	Différentes approches multi-schémas/multi-échelles	42

1.1 Introduction

De manière générale, la représentation d'une solution qui traduit une réponse réaliste des problèmes de la mécanique du solide peut être résumée par une description approximative du comportement du matériau. D'autre part, on peut rencontrer des situations qui mettent en jeu des modèles de dimensions très variables qui font que les variations d'échelles doivent être prises en compte afin de pouvoir étudier les phénomènes considérés comme microscopiques par rapport à la taille globale du problème (fissuration, endommagement...).

Actuellement, plusieurs difficultés (calcul, capacité, vitesse,...) empêchent la modélisation numérique complète sur les différentes échelles. Dans ce contexte, plusieurs approches tenant compte de ces difficultés sont proposées et permettent de modéliser ces phénomènes.

Simuler ces problèmes mécaniques implique la prise en compte de modèles éléments finis où on peut distinguer au moins deux échelles : une locale où des modèles raffinés sont indispensables pour représenter les petits détails, et l'autre globale où un modèle grossier représente le comportement de la pièce saine.

Deux types de couplages existent afin de relier les différents modèles :

- ◇ Couplage sans recouvrement
- ◇ Couplage avec recouvrement

1.2 Couplage sans recouvrement

Dans un couplage sans recouvrement [GLO 04], un domaine Ω est divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une frontière donnée comme le montre la figure 1.1. Le couplage des deux sous-domaines s'effectue par un jeu d'échange de conditions limites entre les deux modèles.

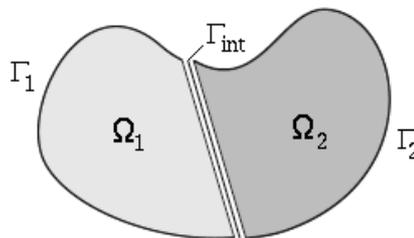


Fig. 1.1: Décomposition de domaine de Schur

En général, les méthodes sans recouvrement sont basées sur la méthode de type

Schur, elles sont très utilisées dans le calcul des structures. On trouve plusieurs versions de cette méthode : primale, duale et mixte.

1.2.1 Méthode de Schur primale

Cette méthode, dite aussi, Balancing Domain Decomposition Method, est qualifiée de primale car le problème à l'interface traite les déplacements comme inconnus. Le travail est concentré sur l'interface Γ_{int} où on vérifie de manière forte la condition de continuité en déplacement :

$$\mathbf{U}^1(X) = \mathbf{U}^2(X) \quad \forall X \in \Gamma_{int} \quad (1.1)$$

À partir de la discrétisation de la formulation continue, un problème statique élastique linéaire se présente de la façon suivante :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.2)$$

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{où } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (1.3)$$

En tenant compte de la condition de continuité à l'interface 1.1, le problème statique 1.2 peut être réécrit sous une forme matricielle en regroupant les degrés de liberté internes au sous domaines Ω_1 , Ω_2 , et Ω_{int} et en numérotant les variables du système afin de séparer les noeuds d'interface des noeuds internes.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 & \mathbf{K}_{1i} \\ 0 & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{2i} \\ \mathbf{K}_{i1} & \mathbf{K}_{i2} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^i \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

\mathbf{K}_{11} et \mathbf{K}_{22} représentent les matrices de rigidité des noeuds des deux parties situées à l'intérieur des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 tout en excluant les interfaces. Le terme \mathbf{K}_{ii} correspond à la matrice de rigidité des noeuds situés exclusivement dans l'interface Γ_{int} . Les termes \mathbf{K}_{ki} et \mathbf{K}_{ik} ($k=1, 2$) décrivent les interactions entre les noeuds de l'interface et ceux à l'intérieur de Ω_1 et Ω_2 . On recherche la valeur du vecteur \mathbf{U} au niveau de l'interface Γ_{int} .

En considérant les matrices \mathbf{K}_{11} et \mathbf{K}_{22} inversibles, on peut éliminer les inconnus \mathbf{U}^1 et \mathbf{U}^2 et obtenir le problème d'interface ou bien le problème condensé basé sur les inconnues primales \mathbf{U}^i . Cela nous ramène à la résolution du système propre aux méthodes de décomposition sans recouvrement :

$$\mathbf{A} \mathbf{U}^i = \mathbf{B} \quad (1.5)$$

$$\text{où } \mathbf{A} = \mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{i1} \cdot \mathbf{K}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{1i} - \mathbf{K}_{i2} \cdot \mathbf{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{2i}$$

$$\text{et } \mathbf{B} = \mathbf{F}^i - \mathbf{K}_{i1} \cdot \mathbf{K}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{F}^1 - \mathbf{K}_{i2} \cdot \mathbf{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{F}^2$$

Le problème d'interface 1.5 peut être résolu soit par une méthode directe où on doit expliciter l'écriture de la matrice \mathbf{A} , soit par une méthode itérative.

Phase d'initialisation

$$\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{1i}, \mathbf{K}_{i1}, \mathbf{F}^1 \quad | \quad \mathbf{K}_{22}, \mathbf{K}_{2i}, \mathbf{K}_{i2}, \mathbf{F}^2$$

(1) Évaluation du complément de Schur Primale

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{ii} - (\mathbf{K}_{1i}[\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{K}_{i1} + \mathbf{K}_{2i}[\mathbf{K}_{22}]^{-1}\mathbf{K}_{i2})$$

(2) Calcul du problème sans liaison

$$\mathbf{U}_{sl}^1 = [\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{F}^1 \quad | \quad \mathbf{U}_{sl}^2 = [\mathbf{K}_{22}]^{-1}\mathbf{F}^2$$

(3) Calcul du problème d'interface

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^i - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{U}_{sl}^1 - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{U}_{sl}^2$$

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

(4) Calcul du problème avec liaison

$$\mathbf{U}_{al}^1 = -[\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{K}_{1i}\mathbf{U}_i \quad | \quad \mathbf{U}_{al}^2 = [\mathbf{K}_{22}]^{-1}\mathbf{K}_{2i}\mathbf{U}_i$$

(5) Mise à jour des quantités cinématiques

$$\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}_{sl}^1 + \mathbf{U}_{al}^1 \quad | \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}_{sl}^2 + \mathbf{U}_{al}^2$$

Tab. 1.1: Exemple d'un algorithme basé sur une formulation de Schur primale

1.2.2 Méthode de Schur duale

La différence principale entre cette méthode et la précédente est l'introduction d'une variable supplémentaire (un multiplicateur de Lagrange) qui prend en compte la contrainte à l'interface.

En effet, la condition de continuité en déplacement posée dans la méthode primale $\mathbf{U}^1(X) = \mathbf{U}^2(X) \quad \forall X \in \Gamma_{int}$ est dualisée avec des équations d'intégrales contenant des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^2)$.

Si on décompose les contributions de chacun des sous domaines ($\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{K}_{ii}^1 + \mathbf{K}_{ii}^2$ et $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_i^2$) et on effectue une permutation au niveau des lignes du système matriciel 1.4, on peut le réécrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{1i} & 0 \\ \mathbf{K}_{i1} & \mathbf{K}_{ii}^1 + \mathbf{K}_{ii}^2 & \mathbf{K}_{2i} \\ 0 & \mathbf{K}_{i2} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_i^2 \\ \mathbf{F}^2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Afin de pouvoir écrire la contribution de chaque sous-domaine on duplique les nœuds situés à l'interface.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{1i} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{i1} & \mathbf{K}_{ii}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{ii}^2 & \mathbf{K}_{2i} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{i2} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_i^1 \\ \mathbf{U}_i^2 \\ \mathbf{U}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_i^2 - \mathbf{K}_{ii}^2 \cdot \mathbf{U}^i - \mathbf{K}_{2i} \cdot \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{F}_i^2 + \mathbf{F}_i^1 - \mathbf{K}_{ii}^1 \cdot \mathbf{U}^i - \mathbf{K}_{i1} \cdot \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

On définit un vecteur d'interface :

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}_i^2 - \mathbf{K}_{ii}^2 \cdot \mathbf{U}^i - \mathbf{K}_{2i} \cdot \mathbf{U}^2 \quad (1.8)$$

$$= -(\mathbf{F}_i^1 - \mathbf{K}_{ii}^1 \cdot \mathbf{U}^i - \mathbf{K}_{i1} \cdot \mathbf{U}^1) \quad (1.9)$$

Cette notion de vecteur d'interface 1.8 intégrée au système 1.7 permet de réaliser une décomposition matricielle propre à chacun des sous-domaines :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{1i} \\ \mathbf{K}_{i1} & \mathbf{K}_{ii}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}_i^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (-1) \cdot \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{2i} \\ \mathbf{K}_{i2} & \mathbf{K}_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}_i^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Cette écriture matricielle peut être résumée de la façon suivante :

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{U}^1 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\lambda} \quad \text{où } \mathbf{L}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1)^1 I_d \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^2 - \mathbf{L}_2 \boldsymbol{\lambda} \quad \text{où } \mathbf{L}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1)^2 I_d \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

D'autre part, la continuité des déplacements à l'interface entre les sous-domaines couplés se présente comme suit :

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{U}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{U}^2 = 0 \quad (1.14)$$

À ce stade, les systèmes 1.12, 1.13 et 1.14 peuvent être réunis dans un système matriciel représentant l'écriture de l'équilibre du modèle couplé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 & \mathbf{L}_1 \\ 0 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_1^t & \mathbf{L}_2^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

On effectue à nouveau une condensation sur les inconnues d'interface (multiplicateur de Lagrange) en éliminant les déplacements sur chaque sous-domaine. Ceci nous amène à la résolution du problème d'interface suivant :

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{L}_i^t \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{L}_i$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{L}_i^t \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F}_i$$

Dans ce cas, les matrices de rigidité des sous-domaines \mathbf{K}_{11} et \mathbf{K}_{22} contiennent les informations sur l'interface aussi. Le vecteur multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ représente les forces d'interaction entre les sous domaines. Les noeuds sur l'interface Γ_{int} sont localisés à partir des matrices de contraintes \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_2 . Dans cette méthode, la continuité cinématique est assurée entre les sous-domaines ce qui permet de vérifier l'équilibre de la structure.

(1) Phase d'initialisation
$\mathbf{K}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{F}^1 \quad \quad \mathbf{K}_2, \mathbf{L}_2, \mathbf{F}^2$
(2) Évaluation du complément de Schur dual
$\mathbf{A}_I = \mathbf{L}_1^t [\mathbf{K}_1]^{-1} \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2^t [\mathbf{K}_2]^{-1} \mathbf{L}_2$
(3) Calcul du problème sans liaison
$\mathbf{U}_{sl}^1 = [\mathbf{K}_1]^{-1} \mathbf{F}^1 \quad \quad \mathbf{U}_{sl}^2 = [\mathbf{K}_2]^{-1} \mathbf{F}^2$
(4) Calcul du problème d'interface
$\mathbf{B}_I = \mathbf{F}^I - \mathbf{A}_{I1} \mathbf{U}_{sl}^1 - \mathbf{A}_{I2} \mathbf{U}_{sl}^2$
$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I$
(5) Calcul du problème avec liaison
$\mathbf{U}_{al}^1 = -[\mathbf{K}_1]^{-1} \mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda} \quad \quad \mathbf{U}_{al}^2 = [\mathbf{K}_2]^{-1} \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}$
(6) Mise à jour des quantités cinématiques
$\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}_{sl}^1 + \mathbf{U}_{al}^1 \quad \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}_{sl}^2 + \mathbf{U}_{al}^2$

Tab. 1.2: Exemple d'un algorithme basé sur une formulation de Schur duale

1.2.3 Approches mixtes

Ce type d'approches se base principalement sur une formulation mixte en efforts et déplacements du problème d'interface. L'interface entre deux sous-domaines peut

être assimilée (ou pas) à une structure à part entière. C'est le cas, par exemple, d'une approche de type LATIN [Lad99] (LArge INcrement method). La différence principale avec les deux approches précédentes est dans l'absence d'un problème condensé à l'interface. Bénéficiant d'un sens physique (équations d'équilibres et de comportements, propres inconnus,...), cette dernière autorise la prise en compte de différents comportements physiques plus ou moins complexes. Cette approche permet d'obtenir une approximation de la solution globale des domaines couplés puisqu'elle est basée sur une résolution itérative sur la plage de temps étudiée. La flexibilité de cette méthode a motivé son extension à plusieurs domaines de la mécanique. On peut notamment mentionner son application à des problèmes de dynamique non linéaire [ROY 90], des applications multi-échelles en temps [LAD 03], le suivi de fissures [GUI 08], ainsi que les applications portant sur l'élasto-plasticité [BOI 98], et sur la viscoplasticité [COG 89].

1.2.4 Autres méthodes de couplage sans recouvrement

1.2.4.1 Raccord Poutre-3D (ou Poutre-2D)

Dans le cadre des méthodes de raccord sans recouvrement, plusieurs méthodes plus ou moins générales sont développées. Dans cette optique, on peut évoquer les raccords Poutre-2D et Poutre-3D [AND 96]. On s'intéressera ici au raccord Poutre-3D comme le montre la figure 1.2.

Cette méthode permet de se passer des modélisations 3D complètes et ce en remplaçant les parties situées à une distance suffisamment loin de la zone d'intérêt à analyser par des modélisations de type poutre (principe de Saint Venant). Le but de la modélisation par des poutres est de transférer des conditions limites réalistes aux bord du maillage 3D. La formulation faible de l'équilibre de l'interface s'écrit :

$$\int_S (\sigma \cdot N \cdot v) ds = R \cdot V + M \cdot \Omega \quad (1.17)$$

Avec :

V et Ω respectivement les vecteurs de translation et de rotation infinitésimales de la poutre.

R et M respectivement la résultante et le moment dans la poutre au point de raccord.

$\sigma \cdot N$: Champ de vecteur contraintes défini sur la trace de la section S .

Le premier membre de cette égalité va fournir le produit scalaire grâce auquel on définira la composante poutre d'un champ de déplacement 3D défini sur la section de la poutre. En utilisant ce produit scalaire, on garantira la symétrie de l'approche entre les conditions cinématiques et statiques de raccord. D'autre part, on remarque qu'il est théoriquement possible de traiter des comportements quelconques de part et d'autre du raccord surfacique Poutre-3D puisqu'aucun aspect ayant trait au comportement n'apparaît dans l'égalité d'équilibre utilisée.

La condition statique de raccord est donnée par les équations suivantes :

$$R = \int_S \sigma \cdot N \, ds \quad (1.18)$$

$$M = \int_S GM(x) \wedge \sigma \cdot N \, ds \quad (1.19)$$

$$\int_S \sigma \cdot N \cdot v \, ds = 0 \quad \forall v \in \bar{T} \quad (1.20)$$

où S : Section droite de la poutre

N : Normale au plan de S

G : Centre de gravité de S

\bar{T} : Supplément orthogonal de T qui est l'espace des champs de déplacements de $V = L^2(S)^3$

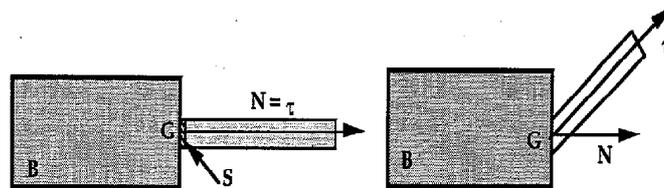


Fig. 1.2: Illustration du couplage Poutre-3D

• Bilan et remarques

Les méthodes de collage sans recouvrement sont efficaces quand les modèles considérés sont locaux et que l'un se déduit de l'autre localement. Elles présentent beaucoup d'avantages, spécialement quand elles sont appliquées dans des études industrielles de grandes tailles où l'économie au niveau temps de calcul est facile à identifier. Cependant, dans le cadre de la dynamique, des phénomènes de réflexion d'ondes peuvent apparaître au niveau des interfaces reliant les différents domaines couplés (en surface), d'où l'intérêt des méthodes de raccord avec recouvrement (en volume).

1.3 Couplage avec recouvrement

Les méthodes basées sur un recouvrement utilisent la séparation des échelles pour définir une projection plus ou moins complexe qui puisse éliminer des degrés de liberté dans une zone de l'espace, et non plus brutalement en surface comme le font les méthodes sans recouvrement. L'opérateur de projection utilisé pour séparer les échelles est la première caractérisation d'une méthode par recouvrement et il a beaucoup plus d'importance dans ce cadre que pour les méthodes sans recouvrement où la décomposition est triviale.

La manière dont on va retirer les degrés de liberté a également toute son importance. Une différence principale entre ce genre de méthodes et celles sans recouvrement se traduit par l'absence des équations d'interface entre les sous-domaines voisins.

1.3.1 La méthode de Schwarz

La méthode de Schwarz [SCH 69, CAR 95] a servi de base pour une grande partie des méthodes avec recouvrement. Le but de Schwarz était d'étudier l'opérateur de Laplace sur deux sous-domaines. À la base cette méthode est développée pour la résolution de problèmes elliptiques.

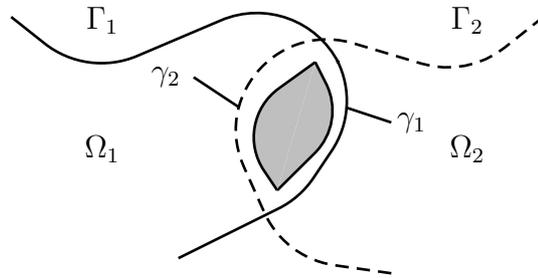


Fig. 1.3: Décomposition de domaine de Schwarz

C'est une méthode itérative qui consiste à résoudre, par exemple, un problème de statique linéaire de façon alternée sur les deux domaines. Le problème discrétisé à résoudre se présente comme suit :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \text{ sur } \Omega \quad (1.21)$$

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} \text{ sur } \Gamma \quad \text{où } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (1.22)$$

Pour chaque itération, en se plaçant dans un sous-domaine Ω_1 , une condition limite sur la frontière virtuelle correspondante γ_2 est imposée par le deuxième sous-domaine Ω_2 . À un instant (i) la solution est calculée pour \mathbf{U}_1 et ensuite pour \mathbf{U}_2 . On distingue deux versions :

- L'algorithme dit multiplicatif : on prend comme conditions de Dirichlet les dernières valeurs des déplacements d'interface calculés pour le sous-domaine voisin.

La solution globale du système vaut :

$$\mathbf{U}^i(m) = \begin{cases} \mathbf{U}_1^i(m) & \text{pour } m \in \Omega \setminus \Omega_2 \\ \mathbf{U}_2^i(m) & \text{pour } m \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{KU}_1^i = \mathbf{F}_1 \text{ sur } \Omega_1 & \mathbf{KU}_2^i = \mathbf{F}_2 \text{ sur } \Omega_2 \\ \mathbf{U}_1^i = \tilde{\mathbf{U}} \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Gamma_1 & \mathbf{U}_2^i = \tilde{\mathbf{U}} \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Gamma_2 \\ \mathbf{U}_1^i = \mathbf{U}_2^{i-1} \text{ sur } \gamma_1 & \mathbf{U}_2^i = \mathbf{U}_1^i \text{ sur } \gamma_2 \end{array}$$

- L'algorithme dit additif : on prend comme conditions de Dirichlet pour un sous-domaine les valeurs des déplacements donnés par le domaine voisin à l'itération précédente.

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{KU}_1^i = \mathbf{F}_1 \text{ sur } \Omega_1 & \mathbf{KU}_2^i = \mathbf{F}_2 \text{ sur } \Omega_2 \\ \mathbf{U}_1^i = \tilde{\mathbf{U}} \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Gamma_1 & \mathbf{U}_2^i = \tilde{\mathbf{U}} \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Gamma_2 \\ \mathbf{U}_1^i = \mathbf{U}_2^{i-1} \text{ sur } \gamma_1 & \mathbf{U}_2^i = \mathbf{U}_1^{i-1} \text{ sur } \gamma_2 \end{array}$$

Un point très important dans ce type de problèmes est la vitesse de convergence des calculs. Ce paramètre augmente avec la taille de la zone de superposition. Par contre, il faut essayer de trouver le meilleur compromis entre l'augmentation de la taille de cette zone de recouvrement et l'ampleur des calculs des degrés de liberté attachés aux différents sous domaines qui elle-même va s'élever aussi.

• Bilan et remarques

Le raccord avec recouvrement permet de faire dialoguer les modèles à raccorder, avec un échange d'informations à l'interface commune qui est beaucoup plus important que pour un raccord en surface. Le surcoût en termes de temps de calcul par rapport aux méthodes sans recouvrement est justifié par l'apport supplémentaire au sens physique de ces méthodes. En effet, par exemple, la propagation des ondes basses et hautes fréquences entre les sous-domaines couplés est mieux adressée grâce aux zones de recouvrement [ZAM 05].

Le choix d'une méthode (avec ou sans recouvrement) doit être basé sur différentes considérations prenant en compte la nature de l'étude, les phénomènes à observer et à étudier, ainsi que le coût à payer en termes de finesses de modélisation et de temps de calcul.

1.3.2 La méthode hp-d

Inspirée des travaux sur l'adaptativité [RAN 92], la méthode hp-d [RAN 97, KRA 03] adresse les problèmes de défauts locaux (trous, hétérogénéités, ...) pouvant altérer la solution globale dans le domaine de la mécanique des structures. Basée sur l'idée de raccord de modèle avec recouvrement, la méthode hp-d consiste à superposer de façon partielle les modèles dans une zone d'intersection.

L'idée principale consiste à raffiner le maillage autour de la zone d'intérêt (domaine Ω_h) et de raccorder cette dernière à un domaine Ω_p constitué d'un maillage grossier où l'ordre des éléments augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la zone contenant l'irrégularité.

Pour la majorité des méthodes avec recouvrement, la solution à trouver est constituée d'une combinaison des solutions des domaines couplés.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_h \quad (1.24)$$

Afin que les systèmes d'équations puissent être correctement résolus, l'indépendance linéaire des modèles couplés est garantie par la construction de maillages hiérarchiques dans la zone de collage. Par conséquent, aucun chevauchement des maillages n'est autorisé et les degrés de libertés du domaine fin sont supprimés dans le cas où les mêmes existent dans le modèle grossier.

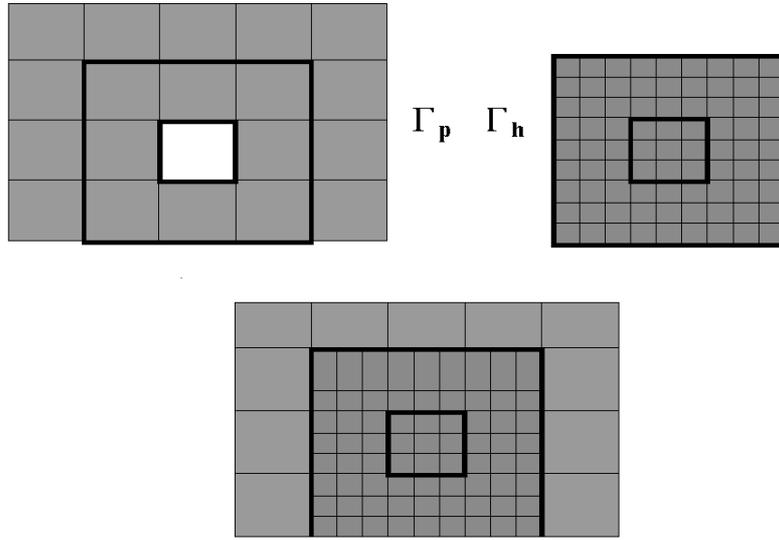


Fig. 1.4: Illustration de la méthode hp-d

On note que la continuité des quantités cinématiques à l'interface est imposée sur les bordures communes des modèles couplés. Dans le cas où cette condition de continuité est imposée sur les déplacements aux interfaces, les équations correspondantes se présentent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_h = 0 & \text{sur } \Gamma_h \\ \mathbf{U}_p = 0 & \text{sur } \Gamma_p \end{cases} \quad (1.25)$$

Résolution du système

En statique linéaire, le système discrétisé représentant l'équilibre du modèle couplé se présente comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ph} \\ \mathbf{K}_{ph}^t & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_h \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Dans cette écriture matricielle on distingue les termes correspondant aux matrices de rigidité \mathbf{K}_{hh} et \mathbf{K}_{pp} appartenant respectivement aux domaines Ω_h et Ω_p ,

ainsi que les termes extra-diagonaux \mathbf{K}_{ph} et \mathbf{K}_{ph}^t représentant les matrices de couplage.

Les auteurs proposent de résoudre ce système 1.26 en utilisant la méthode de Gauss-Seidel par blocs. Ramenés aux seconds membres, les termes \mathbf{K}_{ph} et \mathbf{K}_{ph}^t sont alors considérés, à un instant donné ($i + 1$), comme des pré-charges résultant du calcul effectué à l’instant précédent (i) :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{pp} \mathbf{U}_p^{i+1} = \mathbf{F}_p - \mathbf{K}_{ph} \mathbf{U}_h^i \\ \mathbf{K}_{hh} \mathbf{U}_h^{i+1} = \mathbf{F}_h - \mathbf{K}_{ph}^t \mathbf{U}_p^i \end{cases} \quad (1.27)$$

On note que ces termes ont des valeurs assez faibles par rapport à ceux de la diagonale. En effet, ces termes sont nuls dans la méthode des éléments finis hiérarchiques.

L’implémentation de cette méthode a permis d’effectuer plusieurs applications. Ces réalisations basées sur des adaptations et des améliorations de la méthode portent sur des enrichissements de modèles de poutres par des modèles 2D [DUS 07], ainsi que sur des couplages de modèles 2D avec des modèles 3D. D’autres applications [DUS 99] portant sur des sujets différents ont été réalisés tel que la plasticité, l’élasticité, ainsi que des application portant sur des problématiques de réaction-diffusion.

- **Bilan et remarques**

La méthode hp-d présente une approche pertinente et assez efficace autorisant une facilité de mise en place et d’implémentation. Cependant, quelques limitations telle que l’exigence de maillages hiérarchiques sont requises afin de ne pas en complexifier la mise en place et l’utilisation.

1.3.3 La “splitting method”

La “splitting method” [BAB 05] a été développée dans l’optique de traiter un des micro-défauts les plus connus, la fissure. L’idée principale porte sur la capacité de traiter simultanément plusieurs fissures dans une structure unique. Ce traitement est effectué dans un cadre linéaire élastique sans que l’utilisateur soit contraint à remailler la structure dans la zone d’intérêt.

Deux étapes de base constituent les fondements de cette approche :

- remplacer le modèle global fissuré par un modèle équivalent sain sans fissure
- remplacer chaque zone d’intérêt par un modèle local de géométrie simple contenant la fissure (le problème local correspondant est appelé “problème hand-book”)

La solution finale est le résultat de la superposition des réponses des différents modèles. Elle prend la forme suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_g + (\mathbf{V}_l + \mathbf{W}_g) \quad (1.28)$$

Où \mathbf{U}_g , \mathbf{V}_l , et \mathbf{W}_g représentent respectivement la solution du modèle sain global, la solution sur un modèle local fissuré, ainsi qu'un terme autorisant la continuité des quantités cinématiques au niveau de la bordure des domaines locaux Γ_w .

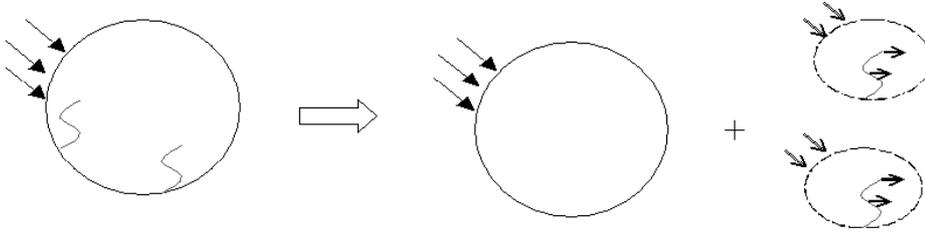


Fig. 1.5: Représentation de la “Splitting method”

L'algorithme correspondant à cette méthode est fonction des solutions locales des multiples zones d'intérêts contenant les fissures. Les auteurs [BAB 05] proposent la démarche suivante :

1. Résolution du modèle sain non fissuré : Ceci permet d'obtenir une première solution en déplacement \mathbf{U}_g .
2. Calcul des réponses sur les modèles locaux fissurés : C'est une réponse à des chargements \mathbf{F}_i imposés sur les lèvres de la fissure. Une série de déplacements élémentaires \mathbf{V}_l sur chaque zone est établie.
3. Calcul de la réponse du modèle sain non fissuré : L'effort de réaction résultant de l'étape (2) permet de calculer et réactualiser la réponse du modèle sain global. Cette étape fait apparaître des termes correctifs \mathbf{W}_g sur le modèle global.
A ce stade, le traitement des différents efforts sur les modèles correspondants peut s'avérer coûteux en terme de temps de calcul.
4. Évaluation et actualisation de la solution globale :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_g + \sum_{i=1} \sum_{j=1} \beta_j^i (\mathbf{V}_l^i + \mathbf{W}_g^i) \quad (1.29)$$

Où β_j^i représente un coefficient à déterminer pour vérifier au mieux la condition de bord libre sur les lèvres des fissures.

• **Bilan et remarques**

La résolution simultanée du problème fissuré sur les domaines locaux permet un gain de temps non négligeable par rapport à la méthode des éléments finis généralisée. L'utilisation de modèles ne nécessitant pas d'opérations de remaillage rend cette méthode assez robuste. Par ailleurs, cette méthode est restreinte au cadre linéaire, et sa mise en oeuvre requiert des ingrédients avancés (solveur adapté,...).

1.3.4 La méthode Arlequin

La méthode Arlequin [BEN 05, BEN 08a, BEN 99, BEN 01, BAU 08, PRU 08, BAU 09] est une méthode de raccord avec recouvrement. Elle concerne les problèmes de la mécanique où le domaine d'étude global peut être subdivisé suivant plusieurs zones distinctes nécessitant des niveaux d'analyse différents.

L'objectif de cette approche est de proposer une stratégie permettant de mener les calculs simultanément sur ces différentes échelles, tout en étant flexible, simple d'emploi et peu coûteuse en temps pour l'utilisateur et la machine. Pour ce faire, les différentes zones sont associées à des états mécaniques issus de modélisations pouvant être de natures très diverses, tant au niveau des discrétisations (finesse, ordre, ...) que des formulations mises en jeu (analytique, numérique, mécanique, ...).

Par souci de flexibilité, les domaines de ces modèles ne sont pas astreints à présenter, entre eux, des interfaces géométriquement compatibles, mais peuvent se recouvrir totalement ou partiellement de façon non conforme. Il est tout de même préférable, pour des raisons évidentes de commodités d'implémentation et d'utilisation des codes éléments finis, d'utiliser dans la pratique des maillages conformes au moins sur une partie de la zone de recouvrement. Une particularité de la méthode Arlequin est alors de raccorder ces modèles, non pas en surface, comme cela se fait classiquement, mais dans le volume. De cette façon, dans les zones de coexistence, la modélisation globale est obtenue par le mélange de plusieurs modélisations concurrentes.

Dans ce qui suit, on présente brièvement sur un problème mécanique d'élasticité linéaire, les étapes de base de la méthode Arlequin. Dans ce cadre, le problème (figure 1.6) consiste à déterminer l'équilibre d'une structure occupant l'ouvert connexe Ω . Sur une partie Γ_u (de mesure non nulle) de la frontière $\partial\Omega$, cette structure est encastée, tandis que sur une partie distincte Γ_g , elle subit l'action d'un champ de forces surfaciques \mathbf{g} . En outre, elle est soumise sur tout son volume, à un champ de forces volumiques \mathbf{f} . On fait l'hypothèse que ces champs de force, \mathbf{f} et \mathbf{g} , sont des éléments de $L^2(\Omega)$ et de $L^2(\Gamma_g)$, respectivement.

En désignant par \mathbf{u}_0 le champ de déplacement qui satisfait l'équilibre, ce problème s'écrit classiquement comme suit :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_0; \forall \mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}_0; \mathbf{k}_0(\mathbf{u}_0; \mathbf{v}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{v}_0) \quad (1.30)$$

Dans cette équation, \mathbf{W}_0 représente l'espace des champs des déplacements cinématiquement admissibles. En outre, \mathbf{k}_0 et \mathbf{f}_0 désignent respectivement les travaux virtuels des efforts internes et extérieurs, dont on rappelle ci-dessous les expressions :

$$\forall \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}_0, \mathbf{k}_0(\mathbf{u}_0; \mathbf{v}_0) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0) \quad (1.31)$$

$$\forall \mathbf{v}_0 \in \mathbf{W}_0, \mathbf{f}_0(\mathbf{v}_0) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_0 + \int_{\Gamma_g} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_0 \quad (1.32)$$

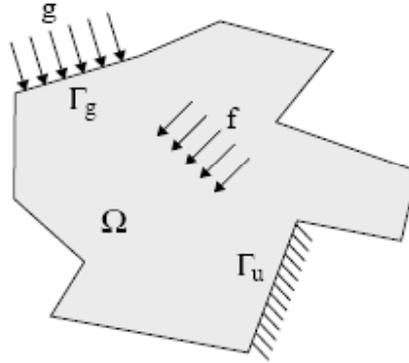


Fig. 1.6: Problème mécanique générique

où le tenseur des contraintes $\sigma(u_0)$ est relié au tenseur des déformations linéaires $\varepsilon(u_0)$ par la loi de Hooke dans le cadre de l'élasticité linéarisée.

Supposons maintenant que l'on souhaite "altérer" localement le mono-modèle global Ω . Pour former une partition avec recouvrement du domaine d'étude Ω , on considère deux sous-domaines définis sur deux ouverts connexes Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Les principales étapes de la méthode Arlequin sont les suivantes :

- Superposer les différents états mécaniques dans la zone commune ou zone de recouvrement S (figure 1.7).
- Les raccorder de manière faible : pour recoller en volume les deux modèles dans leur zone commune, l'idée est d'activer des forces fictives de couplage contrôlant, sur la zone de recouvrement, l'écart entre leurs états mécaniques (déplacement, déformations, contraintes, ...). Afin de laisser une certaine liberté d'expression aux deux modèles sur une partie, dite sans collage ou libre et notée S_{sc} , de la zone de superposition S , le raccord peut être seulement écrit sur une partie, dite de collage et notée S_c , de cette dernière (avec $S = S_c + S_{sc}$).
- Répartir l'énergie globale : Pour ne pas compter deux fois l'énergie du système global dans la zone de recouvrement, chacun des travaux virtuels associés aux deux modèles est pondéré par des fonctions, dites de pondération ou de mélange, qui forment une partition de l'unité sur l'ensemble du domaine d'étude.

Ces fonctions sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_1 & : \Omega_1 \longrightarrow [0, 1] \\ \alpha_2 & : \Omega_2 \longrightarrow [0, 1] \end{aligned}$$

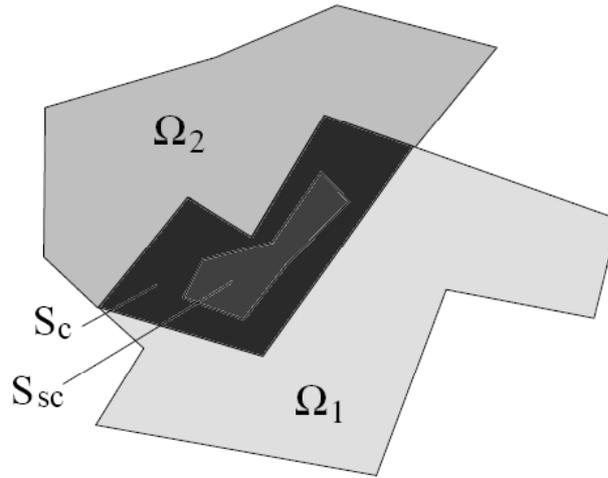


Fig. 1.7: Illustration du raccord Arlequin

avec :

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{sur} \quad \Omega_1 \setminus \Omega_2 \quad (1.33)$$

$$\alpha_2 = 1 \quad \text{sur} \quad \Omega_2 \setminus \Omega_1 \quad (1.34)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \text{sur} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \quad (1.35)$$

Ces champs scalaires de pondération représentent un ingrédient important de la méthode, puisqu'elles déterminent le niveau de mélange entre les deux modèles dans la zone de recouvrement. De plus, suivant leur valeur, elles précisent quels degrés de confiance et de pertinence sont accordés à chacun des modèles.

- **Bilan et remarques**

La méthode Arlequin étant le sujet de cette thèse, elle est présentée et détaillée dans le cadre d'une extension aux problèmes de la dynamique. Les avantages du recouvrement et de la distribution de l'énergie présentés par cette méthode seront mis à profit afin de développer une nouvelle approche de raccord en temps avec recouvrement spatial.

1.4 Les méthodes multi-échelles en temps

La modélisation de phénomènes physiques complexes nécessite le développement de méthodes multi-échelles en temps dans le but de pouvoir se rapprocher au maximum du cas réel. La prise en compte des aspects multiphysiques est l'un des exemples les plus représentatifs du besoin et des avantages de la mise en place de ces méthodes de calcul avancées. L'association de physiques différentes pouvant évoluer sur des échelles de temps très différentes peut exiger des descriptions hétérogènes. Une monodescription peut, dans ce cas de figure, générer un coût supplémentaire en terme de

temps de calcul si la discrétisation temporelle est très fine par exemple. Par ailleurs, l'étude de phénomènes microscopiques (contact, fissuration, ...) sur des structures où la physique du modèle à étudier est identique sur tout le domaine peut exiger la mise en place de deux, voire plusieurs échelles de temps dans le but de pouvoir reproduire la réalité avec les moindres coûts, tant humains que numériques [GRA 01, COM 02].

Plusieurs approches sont développées dans le but de répondre à ces nouvelles problématiques. Les premières démarches portent sur l'application de schémas d'intégrations numériques différents sur les modèles couplés. Ces méthodes appelées méthodes mixtes [MAR 84] ou multi-schémas concernent principalement l'association de schémas implicites et explicites. Cette mise en place de schémas hétérogènes constitue un premier pas vers le traitement des sous-domaines de façon indépendante.

Dans le même esprit d'offrir la possibilité d'effectuer des études de plus en plus précises et pertinentes tout en réalisant des économies sur les coûts des études en termes de temps de calculs, des approches permettant la prise en compte de plusieurs échelles en temps sont développées. Ces méthodes de sous-cyclage ou multi-pas en temps ont été ensuite associées aux approches mixtes [BRU 11, GUI 07] ce qui a abouti à des cadres complets autorisant une certaine liberté aux différents sous-domaines couplés. Elles permettent à chaque sous-domaine d'avoir ses propres caractéristiques temporelles (échelles et des schémas d'intégrations) de façon indépendante des propriétés correspondantes dans les domaines voisins. On note que ces caractéristiques sont exigées par la nature du phénomène à étudier.

1.4.1 Écriture de l'équilibre

Avant de présenter les approches mixtes et multi-échelles en temps, il est nécessaire d'introduire l'équilibre sur un mono-modèle de base. On considère un domaine Ω de frontière Γ_Ω (Figure 1.8). Il subit un chargement linéaire et dépendant du temps $\mathbf{f}(t)$. Une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis ou par la méthode des différences finies permet d'aboutir à l'équation d'équilibre du domaine Ω .

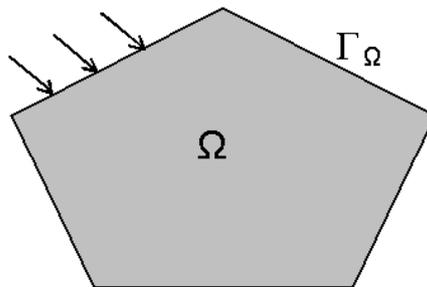


Fig. 1.8: Représentation du mono-modèle Ω

La formulation discrète de l'équilibre dynamique de ce système s'exprime de la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (1.36)$$

Où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement, et de rigidité du système concerné. Le vecteur $\mathbf{f}(t)$ est celui des forces externes appliquées et $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ et \mathbf{u} constituent les vecteurs d'accélération, de vitesse, et de déplacement.

1.4.2 Le modèle couplé

Dans cette section on considère une partition du mono-modèle Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 (Figure 1.9). L'interface Γ_i constitue la frontière entre les deux sous-domaines.

On attribue à chaque sous-domaine ses propres paramètres d'intégration temporelle. Ainsi, Ω_1 est intégré sur une échelle de temps grossière (pas de temps ΔT), tandis que Ω_2 évolue sur une échelle fine en temps (pas de temps Δt).

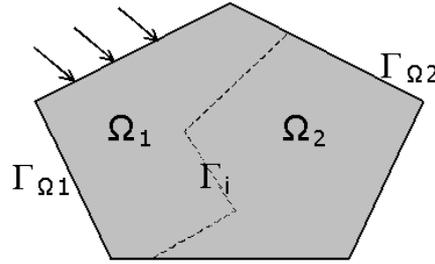


Fig. 1.9: Représentation de Ω partitionné en Ω_1 et Ω_2

Les deux échelles de temps sont liées par un ratio $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 1$ (échelles hiérarchiques) :

$$\Delta T = m\Delta t \quad (1.37)$$

En considérant un instant initial t_0 , le passage de cet état à l'instant suivant t_m sur l'échelle grossière s'effectue en ajoutant un incrément en temps ΔT tel que $t_m = t_0 + \Delta T$. De façon similaire, l'évolution temporelle sur l'échelle fine est décrite aux instants t_j , $j \in [1, m]$ à l'aide du pas de temps fin Δt ($t_j = t_{j-1} + \Delta t$).

L'équilibre établi sur le mono-modèle Ω (1.36) est réécrit sur les deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 en tenant compte d'une condition de raccord qui permet de garantir le collage à l'interface Γ_i .

Sur Ω_1 l'équilibre discrétisé en espace et en temps s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}_1\ddot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{K}_1\mathbf{u}_m^1 + \mathbf{L}_1^t\boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{f}_m^1 \quad (1.38)$$

En même temps, sur Ω_2 l'équilibre est établi m fois (i.e. $\forall j \in [1, m]$) à l'intérieur de l'intervalle $[t_0, t_m]$,

$$\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{u}}_j^2 + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{u}}_j^2 + \mathbf{K}_2\mathbf{u}_j^2 + \mathbf{L}_2^t\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{f}_j^2 \quad (1.39)$$

Le collage est assuré par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange λ_j et λ_m . Le choix de l'échelle de temps sur laquelle la condition de raccord est imposée dépend principalement du temps de calcul. L'approche la plus ancienne consiste à écrire le raccord sur l'échelle microscopique (1.40).

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{w}_j^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{w}_j^2 = 0 \quad (1.40)$$

Les travaux de recherche qui ont eu lieu ultérieurement [GRA 01] ont abouti à des formulations basées sur des raccords écrits sur l'échelle grossière. L'avantage principal à tirer de ces avancées repose sur le gain en temps de calcul. Dans ce cas, le raccord peut être écrit sur l'échelle de temps macroscopique (1.41).

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{w}_m^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{w}_m^2 = 0 \quad (1.41)$$

Des détails plus approfondis portant sur ces deux approches sont développés ultérieurement (Section 1.4.4).

Par ailleurs, on note que le vecteur \mathbf{w} représente la quantité cinématique à travers laquelle la continuité à l'interface est imposée. Elle peut porter sur les déplacements ou bien sur les vitesses. Ce choix est très délicat et il joue un rôle principal dans l'établissement de l'équilibre énergétique du modèle complet ($\Omega_1 \cup \Omega_2$), ainsi que dans la stabilité de l'algorithme. Nous abordons ces aspects dans le chapitre 4.

On peut réécrire chacune des équations (1.38) et (1.39) en fonction des forces extérieures et des forces de raccord :

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{u}}^i + \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{u}}^i + \mathbf{K}_i \mathbf{u}^i = \mathbf{f}_{ext}^i - \mathbf{L}_i^t \boldsymbol{\lambda} \quad (1.42)$$

Cette façon de présenter les équations de l'équilibre permet d'identifier facilement deux problèmes distincts à résoudre. Le premier problème, appelé problème sans liaison, est indépendant des multiplicateurs de Lagrange, il concerne les quantités spécifiques à chaque sous domaine et son deuxième membre est constitué des forces externes. Dans le deuxième problème, appelé problème avec liaison, le deuxième membre comporte uniquement les forces de raccord. Ainsi pour chaque sous-domaine, l'équilibre peut se présenter de la façon suivante :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{sl}^i + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{sl}^i + \mathbf{K} \mathbf{u}_{sl}^i = \mathbf{f}_{ext}^i \quad (1.43a)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{al}^i + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{al}^i + \mathbf{K} \mathbf{u}_{al}^i = \mathbf{L}_i^t \boldsymbol{\lambda} \quad (1.43b)$$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{sl}^i + \mathbf{u}_{al}^i \quad (1.43c)$$

Cette approche est résolue avec l'algorithme de Schur dual (Section 1.2.2) où des calculs parallèles sont envisageables sur les parties avec et sans liaison, ce qui rend ce genre de méthodes assez rapide et efficace.

De façon générale, les équations différentielles de type (1.43a) et (1.43b) sont résolues par l'intermédiaire de schémas numériques d'intégration en temps. Dans la section suivante, nous détaillons la famille des schémas de Newmark. Cette famille

a servi de base pour une grande partie des méthodes développées ultérieurement et constitue une partie importante des travaux de cette thèse. Nous présentons ensuite une vue globale des autres schémas implicites et explicites les plus utilisés.

1.4.3 Intégration temporelle

Différents types de schémas d'intégration temporelle ont été mis en place et développés depuis les années 1950. Parmi les plus répandus et les plus utilisés on trouve la méthode de Newmark [NEW 59], la "méthode θ de Wilson" [WIL 68], la méthode de collocation [HIL 78], la méthode de Houbolt, la "Park method" [PAR 75], la méthode HHT [HIL 77, HUG 83], la méthode α généralisée, ainsi que, plus récemment, la méthode de Krenk [KRE 06]. Un passage en revue synthétique des principales approches d'intégration temporelle est présentée dans ce qui suit. Cette revue porte sur les points clés aboutissant aux différents algorithmes, ainsi que sur les principaux avantages et inconvénients de chaque méthode évoquée.

1.4.3.1 Le schéma de Newmark

Le schéma de Newmark [NEW 59] est un des plus anciens schémas d'intégration numérique et fait partie des schémas les plus utilisés dans le domaine de la dynamique des structures. Mise en place en 1959, cette méthode est aussi performante dans la résolution des équations des régimes forcés pour des comportements linéaires et non linéaires, que pour la résolution temporelle des équations découplées par superposition modale. Durant les 40 dernières années cette méthode a été développée et modifiée par plusieurs scientifiques.

Cette méthode connue aussi sous le nom de la méthode généralisée des trapèzes du second ordre ou bien la méthode β repose sur une intégration temporelle à pas unique.

Dans le but de présenter cette approche on se base sur l'équation de l'équilibre dynamique linéaire (1.36) du mono-modèle défini sur le domaine Ω . On note que dans l'optique de faciliter la mise en place des chapitre suivants, nous faisons le choix de développer la formulation en déplacement du schéma de Newmark :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (1.44)$$

Un développement en série de Taylor permet d'obtenir une formulation approchée mais assez précise de l'expression des déplacements et des vitesses :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{u}}_n + \dots \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{\mathbf{u}}_n + \dots \end{aligned}$$

Ces deux équations sont réduites par Newmark. On obtient donc une expression générale des déplacements et des vitesses :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^3 \ddot{\mathbf{u}} + \theta(\Delta t^4) \quad (1.45)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}} + \theta(\Delta t^3) \quad (1.46)$$

Avec :

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_n}{\Delta t} + \theta(\Delta t) \quad (1.47)$$

L'expression finale des déplacements et des vitesses du schéma de Newmark est obtenue en intégrant l'équation (1.47) dans les formules (1.45) et (1.46) :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.48)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.49)$$

L'expression des accélérations à l'instant t_{n+1} peut être déduite à partir de l'équation des déplacements au même instant (1.48) :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_n - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1} \quad (1.50)$$

À ce stade, l'expression générale de l'équilibre (1.36) peut être réécrite en fonction d'une seule inconnue. Il est possible de la formuler en fonction des déplacements, des vitesses, ou bien des accélérations. Le résultat est identique, mais des contraintes de type logiciel peuvent imposer une résolution de l'algorithme correspondant suivant une de ces trois quantités cinématiques.

À chaque fois, la substitution de deux des trois expressions (1.48), (1.49), et (1.50) dans l'écriture générale de l'équilibre (1.36) permet d'obtenir une des trois formulations. Nous faisons le choix d'adopter l'approche en déplacements :

$$\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M}^p \ddot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{C}^p \dot{\mathbf{u}}_n \quad (1.51)$$

Avec

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (1.52a)$$

$${}^p \dot{\mathbf{u}}_n = -\left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t}\right) \mathbf{u}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (1.52b)$$

$${}^p \ddot{\mathbf{u}}_n = -\left(\frac{1}{\beta \Delta t^2}\right) \mathbf{u}_n - \left(\frac{1}{\beta \Delta t}\right) \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (1.52c)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{M}}$ représente la nouvelle matrice de rigidité modifiée du système. D'autre part, les termes ${}^p \dot{\mathbf{u}}_n$ et ${}^p \ddot{\mathbf{u}}_n$, construits à partir des quantités calculées à l'instant t_n , sont des opérateurs principaux dans la construction de l'algorithme du

schéma de Newmark. Ils représentent les opérateurs de prédiction des vitesses et des accélérations calculées au début de chaque pas de temps et permettent le calcul des quantités correspondantes à la fin de chaque itération :

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.53)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = {}^p\ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{u}_{n+1} \quad (1.54)$$

Algorithme du schéma de Newmark

L'implémentation informatique de cette approche s'effectue à l'aide d'un algorithme spécifique (Tab. 1.3). Il est constitué d'une phase d'initialisation, et d'une autre formée d'une boucle sur le temps.

• Phase d'initialisation

- Conditions initiales : $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$
- Définition de γ, β , et Δt
- Assemblage des matrices \mathbf{M}, \mathbf{C} , et \mathbf{K}
- Construction de la matrice de rigidité modifiée $\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}$

• Boucle sur le temps

1. Calcul du second membre de l'équilibre (1.51) : $\tilde{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M}^p\ddot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{C}^p\dot{\mathbf{u}}_n$
2. Résoudre l'équilibre à l'instant t_{n+1} : $\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{f}}_{n+1}$
3. Calculer les vitesses $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ et les accélérations $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$
4. Retour à l'étape (1) pour un nouveau pas de temps ou bien arrêt de la boucle

Tab. 1.3: Algorithme correspondant au schéma de Newmark

Stabilité du schéma de Newmark

Les deux paramètres γ et β jouent un rôle principal dans les algorithmes de Newmark. De manière générale, le paramètre γ permet de gérer la dissipation numérique, tandis que le paramètre β autorise le contrôle de la stabilité du schéma. Une vue rapide sur les équations de base de l'algorithme (1.48) et (1.49) donne l'impression que la variation de γ et β est restreinte à l'intervalle $[0, 1]$. Une étude plus approfondie montre que ces deux paramètres appartiennent à un domaine plus large (Figure 1.10).

Par ailleurs, on note que pour une grande majorité des études réalisées, γ et β varient comme suit :

$$1/2 \leq \gamma \leq 3/4 \quad (1.55)$$

$$0 \leq \beta \leq 1/4 \quad (1.56)$$

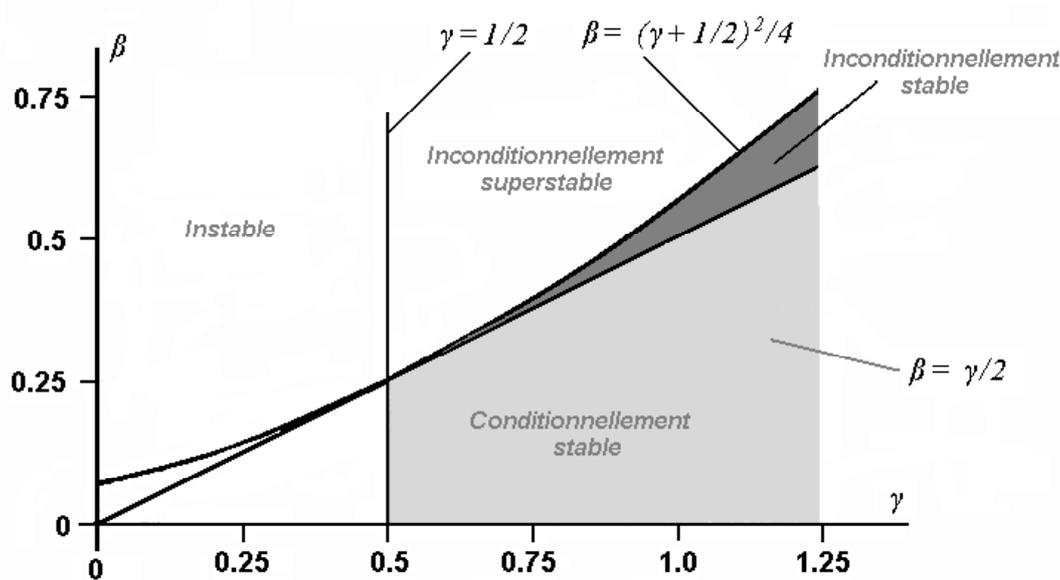


Fig. 1.10: Domaines de stabilité du schéma de Newmark [NEW 59]

Le graphe présenté dans le tableau (Tab. 1.10) offre une idée globale et précise des combinaisons possibles des deux paramètres du schéma.

En résumé, pour garantir une “superstabilité inconditionnelle” on doit imposer les conditions suivantes :

$$\gamma \geq 1/2 \quad (1.57)$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (1.58)$$

D’autre part, le jeu de paramètre le plus utilisé, et qui garantit une stabilité inconditionnelle est :

$$\gamma \geq 1/2 \quad (1.59)$$

$$\beta \geq \gamma/2 \quad (1.60)$$

Une troisième plage de valeurs figure sur le graphe :

$$\gamma \geq 1/2 \quad (1.61)$$

$$\beta < \gamma/2 \quad (1.62)$$

À l'intérieur de ce domaine la stabilité est conditionnelle. Ceci implique une condition supplémentaire pour garantir la stabilité du schéma. En effet, le choix du pas de temps doit respecter l'inégalité suivante :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega} \frac{\eta \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\eta^2 \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)}}{\gamma/2 - \beta} \quad (1.63)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\gamma/2 - \beta}} \quad \text{si} \quad \eta = 0 \quad (1.64)$$

où les valeurs ω et η sont respectivement la pulsation propre du système non amorti, et l'amortissement visqueux. La valeur maximale que peut prendre Δt est le pas de temps critique à ne pas dépasser afin de garantir la stabilité de l'algorithme. Il est intéressant de constater qu'une augmentation de l'amortissement visqueux entraîne un accroissement du pas temps critique et par suite du domaine de stabilité. Le phénomène inverse prend lieu en amplifiant la valeur de γ . Cette relation entre l'amortissement et γ explique pourquoi cette grandeur est assimilée à un paramètre de dissipation numérique.

Enfin, on note que le schéma est instable pour :

$$\forall \gamma < 1/2 \quad (1.65)$$

Différentes familles du schéma de Newmark

Au cours du temps, les changements introduits à la formulation de Newmark ont abouti à une multitude de schémas dédiés à des applications diverses. Par ailleurs, d'autres schémas de la famille de Newmark existent et sont identifiables grâce aux paramètres γ et β . Une liste non exhaustive des schémas de la famille de Newmark est dressée dans le tableau (Tab. 1.4).

Algorithme	γ	β	Limite de stabilité $\omega\Delta t$	Ordre de convergence
Accélération moyenne	1/2	1/4	∞	2
Accélération linéaire	1/2	1/6	3.464	2
Accélération constante par demi-pas	1/2	1/8	2.828	2
Fox et Goodwin	1/2	1/12	2.449	2
Différences centrées	1/2	0	2	2
Accélération constante	0	0	0	x

Tab. 1.4: Différents algorithmes du schéma de Newmark

Quelques remarques rapides peuvent être effectuées concernant ces différents schémas. La première concerne une combinaison fréquemment utilisé où $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$. L'importance de ce schéma d'accélération moyenne réside dans sa stabilité inconditionnelle pour tout pas de temps. Par ailleurs, une variante, dite schéma

d'accélération moyenne modifié, du schéma d'accélération moyenne, permet si besoin d'introduire de la dissipation numérique. Un autre algorithme qui attire particulièrement l'attention est celui des différences centrées où $\beta = 0$. Il est intéressant puisqu'il autorise le passage à une version explicite (conditionnellement stable) en écrivant la matrice de masse sous forme diagonale (matrice "lumpée"). La méthode de l'accélération constante est mentionnée à titre indicatif, elle est presque inutilisée à cause de sa limite de stabilité très restreinte. On note finalement que tous ces schémas possèdent un ordre de convergence de 2.

Erreur de consistance du schéma de Newmark

Il s'agit de l'erreur que génère l'utilisation du schéma numérique sur un pas. Cette erreur doit bien évidemment rester raisonnable si on veut espérer obtenir une solution approchée \mathbf{u}_n proche de la solution exacte (inconnue) $\mathbf{u}(t_n)$. La consistance d'un schéma numérique est une propriété locale de l'algorithme. Elle concerne essentiellement la capacité du schéma à représenter une solution régulière satisfaisant localement les équations aux dérivées partielles. Un schéma consistant est un schéma numérique qui est tel que cette erreur tend vers 0 lorsque l'on discrétise de plus en plus finement le temps ($\Delta t \rightarrow 0$). En effet, il faut noter un point important : plus le pas de temps choisi est grand, moins le schéma est précis.

La consistance du schéma de Newmark est démontrée à partir des équations (1.48), (1.49), et (1.50). L'approche est consistante si :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_n \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n}{\Delta t} = \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (1.66)$$

À partir de (1.48) et (1.49) on démontre que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right] = \dot{\mathbf{u}}_n \quad (1.67)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \simeq \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (1.68)$$

On vérifie ainsi que le schéma de Newmark est consistant. La stabilité et la consistance de l'approche de Newmark autorisent la convergence de l'algorithme vers la solution exacte quand le pas de temps Δt tend vers 0.

1.4.3.2 La "méthode θ de Wilson"

La méthode d'intégration Wilson-Theta [WIL 68] est une extension de la méthode d'accélération moyenne de Newmark. Elle suppose que la variation de l'accélération est linéaire entre les bornes de chaque intervalle de temps (Figure 1.11). C'est une technique de résolution temporelle pas à pas, où le calcul de la solution à un instant donné t est effectué en approximant l'accélération en un point situé à l'extérieur de l'intervalle de temps correspondante $[t_n \ t_{n+1}]$.

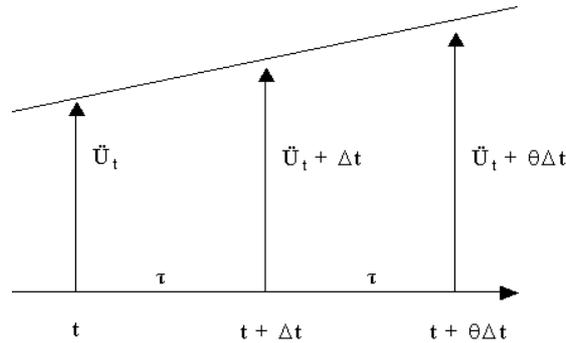


Fig. 1.11: Évolution linéaire de l'accélération

En considérant la variable τ comme la variation en temps t entre les deux instants t et $t + \theta\Delta t$, l'accélération appartenant à l'intervalle de temps correspondante se présente comme suit :

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \quad (1.69)$$

Cette méthode est utilisée pour résoudre les équations de mouvement non couplées. Le schéma correspondant est basé sur un seul paramètre θ , et présente une convergence du second ordre. La valeur de ce paramètre θ permet de contrôler la stabilité numérique. Ainsi, si $\theta = 1$, la formulation de la solution est semblable à celle de la méthode d'accélération linéaire de Newmark. D'autre part, dans le cas où θ est supérieur ou égal à (1.37), la méthode Wilson est inconditionnellement stable. On note qu'en dynamique non linéaire, la valeur de $\theta = 1.4$ est souvent utilisée puisqu'elle représente un compromis acceptable entre la stabilité et la précision du schéma numérique.

1.4.3.3 La méthode de collocation

La méthode de collocation [HIL 78] combine les aspects de la méthode de Newmark ainsi que celles de la "méthode θ de Wilson". L'algorithme correspondant est basé sur trois paramètres de base : γ, θ, β . De manière générale, la méthode est inconditionnellement stable et présente une convergence du second ordre lorsque les paramètres satisfont les conditions suivantes :

- $\theta \geq 1$
- $\gamma = 1/2$
- $\theta/(2\theta + 2) \geq \beta \geq (2\theta^2 - 1)/(8\theta^3 - 4)$

Les vecteurs accélération et la vitesse utilisés pour établir l'équilibre (1.70) sont définis comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (1.70)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\theta+1} = \frac{\gamma}{\beta\theta\Delta t}(\mathbf{U}_{n+\theta+1} - \mathbf{U}_{n+1}) + (1 - \frac{\gamma}{\beta})\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\theta\Delta t\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.71)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+\theta+1} = \frac{\gamma}{\beta(\theta\Delta t)^2}(\mathbf{U}_{n+\theta+1} - \mathbf{U}_{n+1}) - (\frac{1}{\beta\theta\Delta t})\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + (1 - \frac{1}{2\beta})\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.72)$$

On peut remarquer que les valeurs accordées aux paramètres θ , γ , et β permettent de basculer vers le schéma de Newmark en choisissant $\theta = 1$. D'autre part, les paramètres du schéma d'accélération linéaire $\gamma = 1/2$, et $\beta = 1/6$ ramènent le schéma à la méthode Wilson. On note que les différents niveaux de dissipation numérique peuvent être gérés à travers le paramètre β .

1.4.3.4 La méthode de Houbolt

La méthode de Houbolt est développée à l'origine pour les études numériques du comportement en régime forcé des structures aéronautiques.

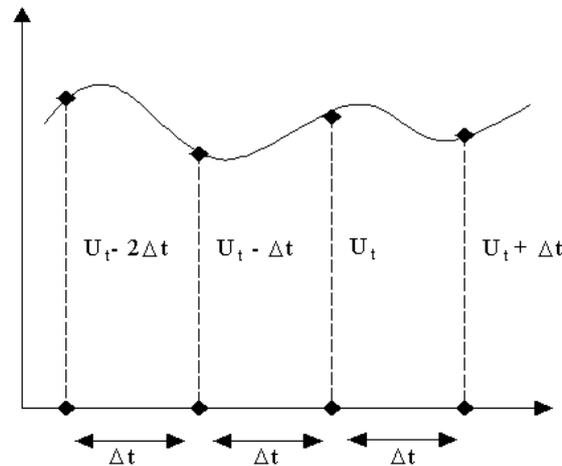


Fig. 1.12: Illustration de la méthode de Houbolt

Elle est basée essentiellement sur l'idée de construire des courbes du troisième ordre passant à travers quatre valeurs successives de déplacement (Figure 1.12). L'algorithme de Houbolt représente une procédure d'intégration temporelle du second ordre à trois pas. C'est une technique inconditionnellement stable, de type implicite, ayant une convergence du second ordre. Les équations de base de cette méthode sont

les suivantes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (1.73)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t}(11\mathbf{U}_{n+1} - 18\mathbf{U}_n + 9\mathbf{U}_{n-1} - 2\mathbf{U}_{n-2}) \quad (1.74)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2}(2\mathbf{U}_{n+1} - 5\mathbf{U}_n + 4\mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-2}) \quad (1.75)$$

On peut constater que pour calculer les valeurs des vitesses et des accélérations à l'instant t_{n+1} il faut remplacer les déplacements au même instants par leurs valeurs dans les équations 1.74 et 1.75.

Par ailleurs, on remarque qu'un inconvénient principal de cette méthode, retrouvé dans d'autres approches ("Park method"), réside dans le calcul des valeurs initiales aux instants t_{n-1} et t_{n-2} . Exigé durant l'étape d'initialisation de l'algorithme, le calcul de ces quantités dans cette approche nécessite un recours à des techniques spéciales de démarrage (algorithme de différence centrée, équations auxiliaires).

1.4.3.5 La "Park-method"

La "Park-method" est une méthode implicite de résolution temporelle à trois pas inconditionnellement stable. Elle est caractérisée par une convergence du second ordre. De façon similaire à la méthode de Houbolt, la vitesse et l'accélération à un instant t_{n+1} sont définis grâce à une fonction polynomiale cubique passant par quatre intervalles de temps successives.

La "Park-method" est définie par les équations suivantes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (1.76)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t}(10\mathbf{U}_{n+1} - 15\mathbf{U}_n + 6\mathbf{U}_{n-1} - \mathbf{U}_{n-2}) \quad (1.77)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t}(10\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - 15\dot{\mathbf{U}}_n + 6\dot{\mathbf{U}}_{n-1} - \dot{\mathbf{U}}_{n-2}) \quad (1.78)$$

Il est donc évident que pour calculer les valeurs des grandeurs à l'instant t_{n+1} , la méthode de Park se base sur les résultats obtenus à t_n , t_{n-1} , et t_{n-2} . On note que de façon similaire à l'approche de Houbolt, cette méthodologie nécessite une capacité ordinateur importante à fin d'être capable de stocker les valeurs des quantités cinématiques au cours des trois intervalles des temps précédents.

1.4.3.6 La méthode Hilber, Hughes, et Taylor

Les instabilités numériques créés par l'existence d'ondes hautes fréquences est un des problèmes majeurs auxquels il faut faire face lors de l'utilisation d'algorithmes d'intégration temporelle. La solution adoptée dans les différents schémas de la famille de Newmark consiste à introduire de l'amortissement numérique à travers le paramètre γ qui prend des valeurs strictement supérieures à $1/2$.

Bien qu'efficace, cette démarche présente l'inconvénient de dégrader l'ordre de convergence du schéma d'intégration. Dans l'optique de conserver cet ordre de précision du schéma tout en conservant la possibilité d'amortir les perturbations numériques résultants de la propagation des ondes hautes fréquences que la méthode HHT [HIL 77] est mise en place.

L'idée de base de cette méthode repose sur la pondération des forces internes du système en question entre les pas de temps successifs t_n et t_{n+1} . La forme générale du vecteur déplacement et par suite celle des vitesses est identique à celle du schéma de Newmark.

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.79)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.80)$$

Le changement principal intervient au niveau de l'écriture de l'équilibre du système :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+\alpha} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+\alpha} = \mathbf{F}_{n+\alpha} \quad (1.81)$$

avec

$$(\bullet)_{n+\alpha} = (1 + \alpha)(\bullet)_{n+1} - \alpha(\bullet)_n \quad (1.82)$$

Les paramètres β et γ représentent les facteurs du schéma de Newmark classique. La variable adimensionnel α , généralement inférieur à la valeur $1/3$, est le paramètre de contrôle principal de l'approche HHT. On peut remarquer que la mise à zéro de cet élément rend la méthode de Newmark et celle de Hilber-Hughes-Taylor identiques.

Une analyse approfondie de la matrice d'amplification conduit à une série de conditions sur les paramètres de l'algorithme permettant une précision de convergence du second ordre, ainsi qu'une stabilité inconditionnelle :

$$\alpha \in \left] -\frac{1}{3}, 0 \right[\quad (1.83)$$

$$\beta = \frac{(1 - \alpha^2)}{4} \quad (1.84)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha \quad (1.85)$$

On mentionne que $\left] -\frac{1}{3}, 0 \right[$ est l'intervalle pertinent d'utilisation de la méthode HHT. Il s'agit d'un choix particulier permettant d'obtenir une famille de schémas à un pas avec possibilité de contrôle de la dissipation numérique. En effet, cette méthode autorise la dissipation numérique des ondes hautes fréquences et ce en affectant de façon moindre les ondes basses fréquences (rayon spectral de la méthode HHT proche de 1 à basses fréquences) et en n'altérant pas l'ordre de convergence.

1.4.3.7 La méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta [HOU 91] est une approche explicite basée sur le principe de l'itération. En d'autres termes, une estimation de base de la solution est employé dans le but de calculer une deuxième approximation plus précise. Ce principe est répété plusieurs fois, plusieurs itérations sont nécessaires pour effectuer un pas.

Cette méthode ne nécessite pas de techniques de démarrage spéciales, tous les paramètres utilisés dans l'algorithme sont initialisés à l'instant initial. Plusieurs versions de cette approche existent. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est la plus simple, elle combine deux itérations successives de la méthode d'Euler explicite.

Dans ce qui suit on s'intéresse à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). L'étape principale de cette approche consiste à réduire l'équation différentielle du second ordre en deux équations du premier ordre. En effet l'équilibre peut être écrit comme suit :

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\mathbf{M}}[\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{K}\mathbf{U}] = f(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) \quad (1.86)$$

En passant par un changement de variable, l'équilibre (1.86) du second ordre peut être réduit à deux équations du premier ordre :

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_2 \quad (1.87)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_2 = f(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, t) \quad (1.88)$$

On définit

$$\bar{\mathbf{U}}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_1(t) \\ \mathbf{U}_2(t) \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{F}}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_2 \\ f(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, t) \end{array} \right\}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par l'équation :

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t}{6} (\bar{\mathbf{k}}_1 + 2\bar{\mathbf{k}}_2 + 2\bar{\mathbf{k}}_3 + \bar{\mathbf{k}}_4) \quad (1.89)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_1 &= \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}_n, t_n) \\ \bar{\mathbf{k}}_2 &= \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}\Delta t\bar{\mathbf{k}}_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \\ \bar{\mathbf{k}}_3 &= \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}\Delta t\bar{\mathbf{k}}_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \\ \bar{\mathbf{k}}_4 &= \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}_n + \Delta t\bar{\mathbf{k}}_3, t_{n+1}) \end{aligned}$$

La procédure repose alors sur l'idée d'estimer la valeur de $\bar{\mathbf{U}}_{n+1}$ à l'aide de la somme de la valeur à l'instant t_n et du produit de la taille de l'intervalle Δt par la pente correspondante. cette dernière est obtenue par une moyenne pondérée de plusieurs pentes (Figure 1.13).

On remarque que $\bar{\mathbf{k}}_2$ et $\bar{\mathbf{k}}_3$ représentent toutes les deux les pentes situées au milieu de l'intervalle, ceci permet d'obtenir une meilleure approximation de la solution. Par

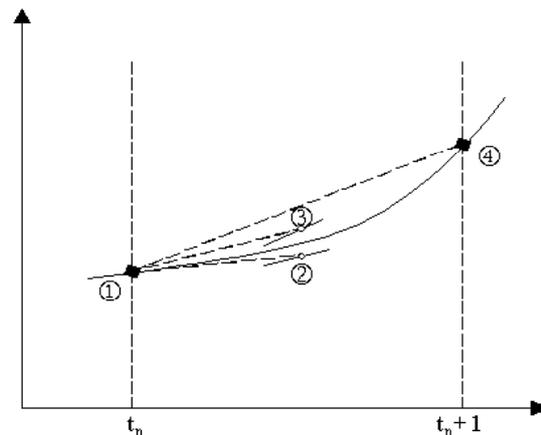


Fig. 1.13: Illustration de la méthode de Runge-Kutta

définition, elles possèdent un poids plus important que celles du début ($\bar{\mathbf{k}}_4$) et de la fin ($\bar{\mathbf{k}}_4$). En effet, en évaluant quatre fois la dérivée, cette méthode permet d'obtenir une précision au quatrième ordre. On note que le désavantage principal réside dans le coût en terme de temps de calcul vu le nombre d'itérations nécessaires pour effectuer un pas. Cette approche est couramment utilisées car elle allie précision, stabilité et simplicité.

1.4.3.8 Le schéma du point milieu

De manière générale, les algorithmes d'intégration numérique sont développés dans l'optique de les appliquer dans un cadre de dynamique linéaire. Une fois la méthode validée, des extensions et des application aux cadre linéaire prennent lieu. Le schéma du point milieu est mis en place en tenant compte de ces applications. Il permet de mettre en place un algorithme stable et physiquement cohérent dans un cadre non linéaire. Ce schéma permet le calcul des quantités cinématiques à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ à partir des quantités calculés à l'instant précédent t_n . De façon similaire à un nombre d'algorithmes, le schéma du point milieu se base sur les équations de Newmark dans le but d'établir les expressions du déplacement et des vitesses en fonction du temps, en attribuant des valeurs précises aux paramètres du schéma :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.90)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (1.91)$$

pour

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4}$$

Dans ce schéma les efforts externes et internes s'expriment à l'instant $t_{n+1/2}$. Par suite l'équilibre se présente comme suit :

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{f}_{n+1/2}^{int} = \mathbf{f}_{n+1/2}^{ext} \quad (1.92)$$

La subtilité de cette méthode repose dans la définition des efforts internes autorisant la stabilité du schéma dans un contexte non-linéaire. Celles ci peuvent être formulées en fonction du déplacement (1.90) et de la pulsation de l'oscillateur harmonique ω comme suit :

$$\mathbf{f}_{n+1/2}^{int} = \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n}{2} \right) \omega^2 \quad (1.93)$$

L'algorithme du point milieu est inconditionnellement stable et précis au second ordre. D'autre part, la conservation de l'énergie est vérifiée dans le domaine non-linéaire. Un avantage principal par rapport à la méthode réside dans la taille du pas de temps utilisé. En effet, la convergence de l'algorithme est garantie avec l'augmentation du pas de temps. Par ailleurs, l'augmentation de la taille de la discrétisation temporelle peut nuire à la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson, ainsi que des phénomènes de propagation d'ondes hautes fréquences peuvent avoir lieu d'où la nécessité d'introduction de la dissipation numérique.

1.4.3.9 Le schéma de Krenk

Le schéma de Krenk [KRE 06], assez récent par rapport aux schémas évoqués ci dessus, est un schéma dissipatif du premier ordre. Il est principalement utilisé pour étudier les phénomènes irréguliers comme les chocs.

Adoptant une approche différente de ce qu'on connaît jusqu'à présent, l'auteur propose d'adopter une écriture en équation d'état basée sur l'équation de l'équilibre. En effet, l'introduction d'une nouvelle variable (\mathbf{u}) représentant les vitesses, permet de réduire l'équilibre dynamique du second ordre à un système augmenté du premier ordre.

On note

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} \quad (1.94)$$

La forme discrétisée de ce système est obtenue en multipliant cette relation (1.94) par la matrice de masse \mathbf{M} , et en l'associant à l'équation d'équilibre dynamique classique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Avec $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^t$ comme vecteur d'état.

L'intégration des deux premiers termes de ce système (1.95) n'est pas identique. En effet, sur un intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ où les matrices sont supposées

constantes, le premier terme contient les dérivées $\dot{\mathbf{u}}(t)$ et $\dot{\mathbf{v}}(t)$ peut être intégré exactement et aboutit à des incréments en déplacements et en vitesses :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n \quad (1.96)$$

Le deuxième terme agissant sur le vecteur d'état est intégré en fonction d'une variable temporelle $\tau = t - t^*$ où $t^* \in [t_n, t_{n+1}]$. Par suite, l'intégration du vecteur d'état peut être résumé à travers une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{u}(t) dt &= [\tau \mathbf{u}]_n^{n+1} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tau \mathbf{v}(t) dt \\ &\simeq \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}(t) dt &= [\tau \mathbf{v}]_n^{n+1} + \mathbf{M}^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tau (\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{C} \mathbf{v} - \mathbf{f}) dt \\ &\simeq \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \end{aligned} \quad (1.98)$$

Le vecteur de forces est intégré en fonction du temps. Son expression est la suivante :

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t) dt \quad (1.99)$$

En remplaçant les équations (1.96) à (1.99) dans le système (1.95) on obtient finalement l'écriture discrétisé dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) \\ \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

On note que de l'amortissement numérique peut être introduit par l'intermédiaire de termes supplémentaires sur la diagonale de la première matrice du système (1.100). Des variantes plus ou moins complexes peuvent être mises en place, elles permettent dans certains cas de s'approcher de l'amortissement caractéristique des schémas HHT.

Plusieurs versions de ce schéma ont été proposées. On peut aboutir à des schémas où la précision est d'ordre 4 en intégrant les termes du système discrétisé (1.95) de façon plus fine. Un inconvénient partagé avec la "méthode θ de Wilson" est l'absence d'indication pour le calcul du vecteur accélérations. Par conséquent, les deux solutions les plus courantes se basent soit sur la formulation du schéma de Newmark, soit sur un calcul à partir de l'inverse de la matrice de masse à la fin de chaque pas de temps. De manière globale il est préférable de construire l'accélération avec la formule de Newmark puisque la deuxième solution peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul.

1.4.3.10 Bilan d'énergie du schéma de Newmark

Une autre méthode d'analyse des schémas numériques consiste à étudier la conservation de l'énergie entre deux pas de temps. Pour ce faire, nous abordons de manière détaillée la notion de bilan d'énergie [KRE 06] d'un schéma d'intégration numérique et plus particulièrement du schéma de Newmark. On précise tout de même que le bilan énergétique constitue une condition nécessaire et non suffisante de stabilité des schémas de Newmark. Néanmoins, pour une équation d'équilibre homogène, le bilan permet d'analyser la cohérence des résultats d'un point de vue énergétique (dissipation, conservation, ...).

L'évaluation de cette variation énergétique s'effectue entre deux instants successifs t_n et t_{n+1} . Pour ce faire, l'équation d'équilibre (1.36) multipliée par le vecteur vitesses $\dot{\mathbf{u}}^t$ peut être écrite de la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \right) = \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{f} - \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} \quad (1.101)$$

Le premier membre de cette écriture désigne la variation de l'énergie mécanique d'un système. Il est constitué de la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie de déformation E_p :

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (1.102)$$

Les variations de l'énergie cinétique et potentielle entre t_n et t_{n+1} sont données respectivement par :

$$E_{c/n+1} - E_{c/n} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) \quad (1.103a)$$

$$E_{p/n+1} - E_{p/n} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)^t \mathbf{K} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \quad (1.103b)$$

En se basant sur les formules (1.103a) et (1.103b), la variation de l'énergie peut être exprimée en fonction d'incrément et de valeurs moyennes de vitesses et de déplacements :

$$\left[E_c + E_p \right]_n^{n+1} = \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}})^t \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{u})^t \mathbf{K} (\mathbf{u}) \right]_n^{n+1} \quad (1.104a)$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) \quad (1.104b)$$

$$+ \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)^t \mathbf{K} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \quad (1.104c)$$

Pour la suite de la démonstration on reprend les écritures des déplacements (1.48) et des vitesses (1.49) du schéma de Newmark, et on les réécrit en fonction d'incrément

et de valeurs moyennes :

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \Delta t (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n) + (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.105a)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{u}}_n) + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.105b)$$

Ces deux nouvelles expressions de déplacements (1.105a) et vitesses (1.105b) sont intégrées dans l'équation (1.104) en vue d'éliminer les incréments correspondants à ces quantités :

$$\left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \right]_n^{n+1} = \frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t \mathbf{M} (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (1.106)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} (\gamma - \frac{1}{2}) (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.107)$$

$$+ \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)^t \mathbf{K} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n) \quad (1.108)$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} (\beta - \frac{1}{2} \gamma) (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)^t \mathbf{K} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.109)$$

Ce remplacement nous permettra d'introduire les efforts extérieurs.

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \right]_n^{n+1} &= \frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t (\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n) + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - \frac{1}{2}) (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} (\beta - \frac{1}{2} \gamma) (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)^t \mathbf{K} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Dans le but de réduire cette équation d'équilibre à une forme quadratique, le premier terme du second membre $\frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^t$ est remplacé par la relation (1.105b) :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} \right]_n^{n+1} &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^t (\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n) + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \{ \mathbf{K} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n) - (\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n) \} \end{aligned}$$

Les deux premiers termes entre accolades sont des termes incrémentaux et peuvent être remplacés par $[\dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}]_n^{n+1}$ dans le premier membre en se basant sur l'équation de l'équilibre :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \frac{1}{2} \Delta t^2 \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \right]_n^{n+1} &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^t (\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n) \\ &+ \frac{\Delta t}{2} (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n) \end{aligned}$$

En réutilisant la relation (1.105b) on peut éliminer la moyenne des vitesses du membre de droite :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \right]_n^{n+1} &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^t (\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n) \\ &+ (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta \mathbf{u}^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} - (\gamma - \frac{1}{2}) (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Finalement, on peut reformuler le second terme du membre de droite et aboutir à la formulation générale de l'écriture discrète du bilan d'énergie dans le cas d'un schéma de Newmark :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \right]_n^{n+1} &= \Delta \mathbf{u}^t \left(\bar{\mathbf{f}} + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta \mathbf{f} \right) \\ &- (\gamma - \frac{1}{2}) \left\{ \Delta \mathbf{u}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \right\} \quad (1.110) \end{aligned}$$

Suite à cette démarche, on note que l'énergie mécanique 'théorique' présentée dans (5.4a) est légèrement modifiée dans l'écriture finale du bilan d'énergie. En réalité, un terme conservatif supplémentaire intervient dans la formulation générale de l'énergie mécanique. C'est un terme purement numérique résultant du schéma de Newmark :

$$\left[\left(\beta - \frac{1}{2} \gamma \right) \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \right]_n^{n+1} \quad (1.111)$$

Le terme important à observer dans l'équilibre (1.110) est :

$$\Delta \mathcal{D}_{n,n+1} = -(\gamma - \frac{1}{2}) \left\{ \Delta \mathbf{u}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2} \gamma) \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \right\}$$

En considérant les forces extérieures nulles, les aspects énergétiques du bilan de Newmark (conservation, dissipation,...) sont expliqués grâce à ce terme $\Delta \mathcal{D}_{n,n+1}$. La modification des valeurs des paramètres γ et β dans $\Delta \mathcal{D}_{n,n+1}$ expliquent la variation énergétique dans le bilan du schéma de Newmark. On distingue trois cas de figures possible.

1. Conservation de l'énergie :

$$\Delta \mathcal{D}_{n,n+1} = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \text{si} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad (1.112)$$

La valeur du terme $\Delta \mathcal{D}_{n,n+1}$ s'annule pour $\gamma = \frac{1}{2}$. Il en résulte que la variation de l'énergie mécanique entre deux pas de temps successifs est nulle. Le schéma le plus utilisé dans cette configuration est celui de l'accélération moyenne ($\gamma = 1/2$; $\beta = 1/4$). Cette configuration mène à un schéma implicite conservatif tirant profit d'une convergence du second ordre et d'une grande précision.

2. Dissipation numérique : Le graphe figurant dans (Tab. 1.10) montre que les conditions de stabilité conditionnelle et inconditionnelle du schéma de Newmark exigent une plage de valeurs commune concernant la valeur du paramètre γ .

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (1.113)$$

Dans le cas où on exclut la valeur $\gamma = 1/2$, on remarque que les schémas de Newmark inconditionnellement stables sont tous dissipatifs. On constate une diminution de l'énergie au cours du temps même si le problème traité est conservatif.

$$-(\gamma - \frac{1}{2}) \left\{ \Delta \mathbf{u}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2}\gamma) \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \right\} \leq 0 \quad \forall \quad \gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \beta \geq \frac{\gamma}{2} \quad (1.114)$$

3. Introduction de l'énergie non physique : Cette configuration correspond aux schémas de Newmark conditionnellement stables, et peut apparaître pour la condition suivante :

$$\left\{ \Delta \mathbf{u}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + (\beta - \frac{1}{2}\gamma) \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^t \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \right\} < 0 \quad \forall \quad \gamma > \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \beta \leq \frac{\gamma}{2} \quad (1.115)$$

On peut constater que la variation des valeurs des paramètres de Newmark entraîne des effets sur le bilan d'énergie du système. Il est important de prendre conscience de ces relations dans le but de bien interpréter les résultats dans des situations plus complexes tels que les approches multi-schémas et multi-échelles en temps appliquées à des méthodes de raccord avec recouvrement.

D'autres méthodes existent pour établir le bilan d'énergies telle que la méthode de Krenk et la méthode énergétique de Hughes et Liu.

1.4.4 Différentes approches multi-schémas/multi-échelles

La mise en place des approches multi-échelles en espace présentées dans les sections précédentes, ainsi que le développement des algorithmes d'intégration numériques en temps évoqués également, ont motivé l'orientation des recherches vers les approches multi-schémas dans un premier temps, puis vers les méthodes multi-échelles en temps. Dans ce contexte, plusieurs techniques basées sur la méthode de Schur duale [FAR 94] sont mises en place, généralement dans un cadre de raccord sans recouvrement. Une des premières approches assez complètes est celle de Gravouil et Combescure [GRA 01], la "GC method". Les auteurs proposent de coupler des schémas de Newmark hétérogènes (implicite-explicite) dans un cadre multi-échelles en temps pour des applications dynamiques non-linéaires. Afin de présenter cette méthode, on considère le modèle couplé (Section 1.4.2) constitué des

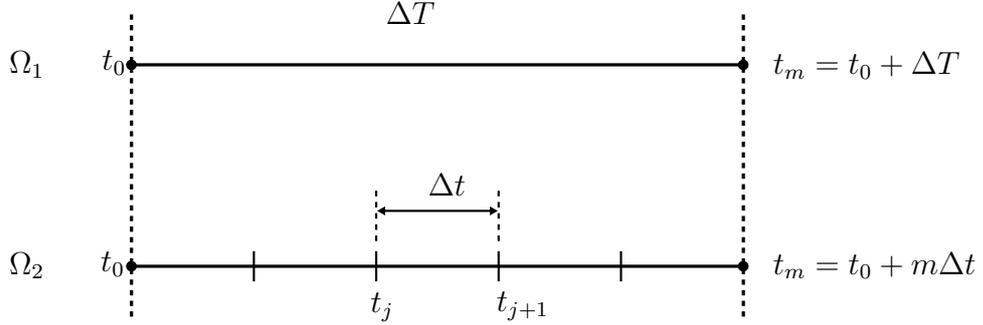


Fig. 1.14: Représentation des deux échelles de temps

deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . La zone Ω_1 est intégrée sur une échelle macroscopique en temps ΔT , tandis que celle correspondant à Ω_2 évolue sur une échelle temporelle fine Δt . On garde toujours le rapport m ($m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 1$) entre les deux échelles de temps.

$$\Delta T = m\Delta t$$

On applique deux jeux de paramètres différents dans le but d'obtenir des schémas de Newmark différents sur Ω_1 et Ω_2 : (γ_1, β_1) et (γ_2, β_2) . Dans l'optique de simplifier le problème, nous allons illustrer la méthode en considérant un pas de temps grossier ΔT évoluant d'un instant initial t_0 jusqu'au suivant t_m tel que $t_m = t_0 + \Delta T$ comme le montre la figure 1.14.

L'équilibre discrétisé sur le domaine Ω_1 est le suivant (écriture du schéma de Newmark en accélération) :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_m^1 + \mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{f}_m^1, \quad (1.116a)$$

$$\mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta_1\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_m^1, \quad (1.116b)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma_1) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_m^1. \quad (1.116c)$$

La première équation (4.46a) représente l'équilibre dynamique sur Ω_1 à l'instant t_m . La deuxième et la troisième équations sont celles du schéma de Newmark adaptées au pas de temps et aux paramètres propres au premier sous-domaine. De façon identique, les équations discrétisées correspondant au sous domaine $\Omega_2 \forall j \in 1, 2, \dots, m$

s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_j^2 + \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{f}_j^2, \quad (1.117a)$$

$$\mathbf{u}_j^2 = \mathbf{u}_{j-1}^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta_2\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2, \quad (1.117b)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j^2 = \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + (1 - \gamma_2) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2. \quad (1.117c)$$

La série d'équations (4.47) doit être résolue m fois en fonction du pas de temps fin Δt en vue de coïncider avec une seule itération effectuée sur l'échelle grossière en temps ΔT . Nous avons évoqué précédemment (Section 1.4.2) la notion de continuité à l'interface par l'intermédiaire d'une quantité cinématique \mathbf{w} qui peut prendre la forme de déplacements ou bien de vitesses :

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{w}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{w}^2 = 0$$

1.4.4.1 La méthode GC (Gravouil-Combesure)

Dans la méthode **GC** les auteurs imposent la continuité à l'interface sur les vitesses. Une autre particularité de cette méthode réside dans le calcul des multiplicateurs de Lagrange λ_j calculées sur l'échelle fine. La condition de continuité correspondante est donc :

$$\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = 0 \quad (1.118)$$

La résolution du système correspondant à cette méthode s'effectue en se basant sur l'approche avec/sans liaison présentée brièvement à travers la série d'équations (1.43). Nous allons dans ce qui suit résumer les points clés de cette méthode permettant la mise en place de l'algorithme de résolution numérique. De manière générale on peut évoquer trois quantités caractéristiques de ces approches multi-échelles :

1. Les vitesses du problème grossier en temps sans liaisons \mathbf{u}_{sl}^1

$$\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 \quad (1.119)$$

Les vitesses du problème sans liaison appartenant à l'échelle grossière sont interpolées linéairement entre les deux instants grossiers $[t_0, t_m]$ selon la variation de t_j . Ces déplacements "fictifs" servent au calcul des multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle fine.

2. Les vitesses du problème avec liaisons $\dot{\mathbf{u}}_{al}^1$

$$\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 \quad (1.120)$$

De façon similaire, les vitesses du problème avec liaison sont interpolées linéairement en fonction des quantités correspondant sur l'échelle grossière.

3. Le calcul des multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle fine Λ_{j+1}

$$\Lambda_{j+1} = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2) \quad (1.121)$$

Les multiplicateurs de Lagrange calculés sur l'échelle fine exigent le calcul des vitesses de l'échelle grossière $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1$ et $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2$ aux instants fins t_j . Celles ci sont interpolées linéairement comme le montre l'étape 2.

Cette technique rend le calcul sur l'échelle fine dépendant des résultats de l'échelle grossière dans la partie sans liaison. Il en résulte que la méthode perd au niveau efficacité puisque cette étape effectuée à chaque pas de temps fin peut rendre les calculs numériques assez lourds.

Dans le cadre le méthode **GC**, vue que le collage à l'interface est imposé à travers les dérivées des déplacements, il est nécessaire de noter que les équations du schéma de Newmark présentées dans cette partie sont fondées sur une formulation en accélération. À partir de ces idées de base, la démarche aboutissant à l'algorithme de la méthode **GC** peut se résumer comme suit :

- Problème sans liaison

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = \mathbf{f}_m^1 - \mathbf{K}_1 {}^p \mathbf{u}_m^1 \quad (1.122a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = \mathbf{f}_{j+1}^2 - \mathbf{K}_2 {}^p \mathbf{u}_{j+1}^2 \quad (1.122b)$$

On note la matrice $\tilde{\mathbf{M}}$ ainsi que l'opérateur ${}^p \mathbf{u}$ sont respectivement la matrice de rigidité modifiée et l'opérateur de prédiction du schéma de Newmark présentés dans les équations (1.51, 1.52) mais dans le cadre d'une formulation en déplacement. En notant $h_1 = \Delta T$ et $h_2 = \Delta t$, on obtient sur un domaine Ω_i / $i = 1, 2$ à un instant t_{j+1} :

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \mathbf{M}_i + \beta_i h_i \mathbf{K}_i \quad (1.123a)$$

$${}^p \mathbf{u}_{j+1}^i = \mathbf{u}_j^i + h_i \dot{\mathbf{u}}_j^i + \frac{1 - 2\beta_i}{2} h_i^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^i \quad (1.123b)$$

- Condition de continuité

$$\sum_{i=1,2} \mathbf{L}_i (\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^i + \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^i) = 0 \quad (1.124)$$

- Problème avec liaison

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = \mathbf{L}_1^t \Lambda_m \quad (1.125a)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \mathbf{L}_2^t \Lambda_{j+1} \quad (1.125b)$$

Finalement, les déplacements et les vitesses sont obtenus en additionnant les quantités sans et avec liaison sur les domaines Ω_1 et Ω_2 en se référant à (1.48) et (1.49) :

$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m/sl}^1 &= {}^p\mathbf{u}_m^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 & \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 &= {}^p\mathbf{u}_{j+1}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 \\ \mathbf{u}_{m/al}^1 &= \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 & \mathbf{u}_{j+1/al}^2 &= \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 &= {}^p\dot{\mathbf{u}}_m^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 & \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 &= {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 &= \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 & \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 &= \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \end{aligned}$
--

Tab. 1.5: Expression des quantités avec/sans liaison sur Ω_1 et Ω_2

L'algorithme de résolution par la méthode **GC** est décrit dans le tableau 1.6 pour le couplage de deux sous-domaines avec des schémas de Newmark et des échelles de temps différents. Pour plus de détails sur le développement et la mise en oeuvre de cette méthode, on renvoie à [GRA 01, MAH 10, COM 02].

On note que dans cet algorithme (Tab. 1.6) les paramètres de Newmark sont distribués comme suit :

$$\gamma = \gamma_1 \text{ dans } \Omega_1 \quad ; \quad \gamma = \gamma_2 \text{ dans } \Omega_2; \quad (1.126)$$

$$\beta = \beta_1 \text{ dans } \Omega_1 \quad ; \quad \beta = \beta_2 \text{ dans } \Omega_2; \quad (1.127)$$

1.4.4.2 La méthode PH

La méthode **PH** de Prakash et Hjelmstad [PRA 04] est une méthode multi-échelles en temps autorisant le couplage de schémas de Newmark différents qui a été développée suite à la mise en place de la méthode **GC** [GRA 01]. Inspirée de cette dernière, la méthode **PH** propose une approche multi-échelles en temps basée sur le calcul des multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle grossière. En effet, les auteurs proposent de calculer les multiplicateurs de Lagrange λ_m sur les instants grossiers t_m et de les interpoler sur les instants t_j de l'échelle fine en temps. Les multiplicateurs de Lagrange λ_j correspondants aux instants fins t_j ne constituent pas la solution d'un calcul direct mais le résultat d'une interpolation entre deux instants grossiers successifs t_0 et t_m . Cette différence principale par rapport à la méthode **GC** a pour avantage majeur une économie considérable en temps de calcul. L'intégration numérique du système couplé s'effectue en deux étapes indépendantes. Dans un premier temps, on résout le problème sous l'effet des efforts extérieurs (problème sans liaison (sl)). Ensuite, on résout le même système en tenant compte des efforts de collage exprimés à l'aide des multiplicateurs de Lagrange (problème avec liaison (al)).

Avant de présenter la formulation de cette méthode, on définit les quantités suivantes :

$$\mathbb{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{K}_1 \\ -\gamma_1 \Delta T \cdot \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\beta_1 \Delta T^2 \cdot \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1 - \gamma_1) \Delta T \cdot \mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 \\ -(0.5 - \beta_1) \Delta T^2 \cdot \mathbf{I} & -\Delta T \cdot \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{K}_2 \\ -\gamma_2 \Delta t \cdot \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\beta_2 \Delta t^2 \cdot \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1 - \gamma_2) \Delta t \cdot \mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 \\ -(0.5 - \beta_2) \Delta t^2 \cdot \mathbf{I} & -\Delta t \cdot \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{L}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{L}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{U}_{n+1}^{1d} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \\ \mathbf{u}_{n+1}^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}_{n+1}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{U}_{n+1}^2 = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 \\ \mathbf{u}_{n+1}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}_{n+1}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équilibre correspondant au modèle couplé peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\mathbb{M}_1 \mathbb{U}_m^1 + \mathbb{L}_1^t \boldsymbol{\Lambda}_m + \mathbb{N}_1 \mathbb{U}_0^1 = \mathbb{F}_m^1 \quad (1.128a)$$

$$\mathbb{M}_2 \mathbb{U}_j^2 + \mathbb{L}_2^t \boldsymbol{\Lambda}_j + \mathbb{N}_2 \mathbb{U}_{j-1}^2 = \mathbb{F}_j^2 \quad (1.128b)$$

$$\mathbb{L}_1 \mathbb{U}_m^1 + \mathbb{L}_2 \mathbb{U}_m^2 = 0 \quad (1.128c)$$

Le point clé de cette méthode consiste à interpoler les multiplicateurs de Lagrange calculés aux instants grossiers sur le maillage fin en temps. Dans le cadre de la méthode **PH** les auteurs proposent d'interpoler les $\boldsymbol{\lambda}_m$ comme suit :

$$\boldsymbol{\Lambda}_j = \mathbf{S}_j + \frac{j}{m} \boldsymbol{\Lambda}_m \quad (1.129)$$

Où \mathbf{S}_j représente les efforts d'interfaces libres non-équilibrés aux instants t_j de l'échelle fine :

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{L}_1 (\mathbf{F}_j^1 - \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{j/sl}^1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{j/sl}^1) \quad (1.130)$$

En remplaçant (1.129) dans l'équation (1.128b) il est possible de la réécrire comme suit :

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{U}_j^2 + \frac{j}{m} \mathbb{L}_2^t \mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{F}_j^2 - \mathbf{N}_2 \mathbf{U}_{j-1}^2 - \mathbb{L}_2^t \mathbf{S}_j \quad (1.131)$$

Une fois que les multiplicateurs de Lagrange sur le maillage fin sont exprimés en fonction de ceux du grossier et des efforts extérieurs, il devient possible de présenter les équations d'équilibre sous la forme d'un problème avec liaison et d'un autre sans liaison :

Problème sans liaison

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{U}_{m/sl}^1 = \mathbf{F}_m^1 - \mathbf{N}_1 \mathbf{U}_0^1 \quad (1.132a)$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{U}_{j/sl}^2 = \mathbf{F}_j^2 - \mathbf{N}_2 \mathbf{U}_{j-1}^2 - \mathbb{L}_2^t \mathbf{S}_j \quad (1.132b)$$

Problème avec liaison

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{U}_{m/al}^1 = -\mathbb{L}_1^t \mathbf{\Lambda}_m \quad (1.133a)$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{U}_{j/al}^2 = -\frac{j}{m} \mathbb{L}_2^t \mathbf{\Lambda}_m \quad (1.133b)$$

Avant de rentrer dans les détails de la résolution des problèmes avec et sans liaison, il est intéressant de formuler le système matriciel global correspondant aux équations (1.132), (1.133), et (1.128c) :

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} \mathbf{M}_2 & & & & \frac{1}{m} \mathbb{L}_2^t & \mathbf{U}_1^2 \\ \mathbf{N}_2 & \mathbf{M}_2 & & & \frac{2}{m} \mathbb{L}_2^t & \mathbf{U}_2^2 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \mathbf{N}_2 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{U}_m^2 \\ \hline & & & \mathbf{M}_1 & \mathbb{L}_1^t & \mathbf{U}_m^1 \\ \hline & & & \mathbb{L}_2 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{F}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_m^2 \\ \hline \mathbf{F}_m^1 \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (1.134)$$

avec

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{F}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_m^2 \\ \hline \mathbf{F}_m^1 \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_1^2 - \mathbf{N}_2 \mathbf{U}_0^2 - \mathbb{L}_2^t \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{F}_2^2 - \mathbb{L}_2^t \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m^2 - \mathbb{L}_2^t \mathbf{S}_m \\ \hline \mathbf{F}_m^1 - \mathbf{N}_1 \mathbf{U}_0^1 \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right]$$

La dernière ligne de l'écriture matricielle (1.134) exprime la continuité des vitesses aux instants grossiers t_m à l'interface entre les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Le système à résoudre peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{L} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Lambda}_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (1.135)$$

Les deux premières lignes du système (1.135) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}_m &= \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{M}\mathbf{U}_{sl} + \mathbf{M}\mathbf{U}_{al} + \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}_m &= \tilde{\mathbf{F}} \\ \Rightarrow (\mathbf{M}\mathbf{U}_{sl} - \tilde{\mathbf{F}}) &= (\mathbf{M}\mathbf{Y} + \mathbf{L}) \mathbf{\Lambda}_m = 0 \end{aligned} \quad (1.136)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{U}_{al} \\ \mathbf{U}_{sl} &= \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{U}_{al} &= -\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}_m \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L} \end{aligned} \quad (1.137)$$

Nous avons alors :

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_{sl} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{al} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{U}_{sl} = \mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}_m \quad (1.138)$$

Cinq étapes principales sont nécessaires afin de pouvoir calculer les inconnues du problème à résoudre :

1. Calcul des quantités sans liaison : $\mathbf{U}_{sl} = \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}$
2. Calcul de $\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$
3. Calcul de l'opérateur d'interface : $\mathbf{H} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$
4. Calcul des réactions d'interface : $\mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{sl}$
5. Calcul des quantités avec liaison : $\mathbf{U}_{al} = -\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}_m$

Le détail du calcul matriciel des étapes (1) à (5) est présenté dans ce qui suit :

1) Calcul des quantités sans liaison :

Cette première étape consiste à résoudre le système correspondant à Ω_1 pour un seul incrément de temps grossier ΔT . Une fois cette étape achevée, il est possible de calculer les efforts \mathbf{S}_j aux instants t_j , ce qui permet de réaliser m itérations de pas de temps Δt ($\Delta T = m\Delta t$, j variant de 1 à m) sur le système à résoudre pour

Ω_2 .

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{M}_2 & & \\ \mathbb{N}_2 & \mathbb{M}_2 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \mathbb{N}_2 & \mathbb{M}_2 \\ \hline & & & \mathbb{M}_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{1/sl}^2 \\ \mathbb{U}_{2/sl}^2 \\ \vdots \\ \mathbb{U}_{m/sl}^2 \\ \hline \mathbb{U}_{m/sl}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_1^2 \\ \tilde{\mathbb{F}}_2^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^2 \\ \hline \tilde{\mathbb{F}}_m^1 \end{bmatrix} \quad (1.139)$$

2) **Calcul de \mathbb{Y}** : Le calcul de \mathbb{Y} revient à résoudre le système sur le domaine Ω_1 sous l'effet des efforts de collage uniquement aux noeuds de l'interface pour un incrément ΔT . Simultanément sur l'interface, le système correspondant à Ω_2 est résolu avec m itérations sous l'effet de l'effort de collage proportionnel à $\frac{j}{m}$ pour $j \in [1 m]$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{M}_2 & & \\ \mathbb{N}_2 & \mathbb{M}_2 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \mathbb{N}_2 & \mathbb{M}_2 \\ \hline & & & \mathbb{M}_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_1^2 \\ \mathbb{Y}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^2 \\ \hline \mathbb{Y}_m^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \mathbb{L}_2^t \\ \frac{2}{m} \mathbb{L}_2^t \\ \vdots \\ \mathbb{L}_2^t \\ \hline \mathbb{L}_1^t \end{bmatrix} \quad (1.140)$$

3) **Calcul de l'opérateur d'interface \mathbb{H}** :

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbb{L}_2 & \mathbb{L}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_1^2 \\ \mathbb{Y}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^2 \\ \hline \mathbb{Y}_m^1 \end{bmatrix} \quad (1.141)$$

$$(1.142)$$

Calcul du deuxième membre du problème d'interface \mathbb{BU}_{sl} :

Cette étape est nécessaire pour calculer le problème d'interface dans l'étape suivante.

$$\mathbb{BU}_{sl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbb{L}_2 & \mathbb{L}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{1/sl}^2 \\ \mathbb{U}_{2/sl}^2 \\ \vdots \\ \mathbb{U}_{m/sl}^2 \\ \hline \mathbb{U}_{m/sl}^1 \end{bmatrix} \quad (1.143)$$

4) **Problème d'interface :**

$$\mathbb{H}\Lambda_m = \mathbb{B}U_{sl} \quad (1.144)$$

d'où

$$(\mathbf{L}_1 \mathbf{Y}_m^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{Y}_m^2) \Lambda_m = \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^2 \quad (1.145)$$

On note que les étapes (3) et (4), nécessaires pour le calcul du problème d'interface, donnent le même résultat que celui de la méthode **GC** dans le cas où les pas de temps sont identiques (ie. $\Delta T = \Delta t$).

5) **Calcul du problème avec liaison :**

La résolution du problème avec liaison s'effectue à la suite de celle du problème d'interface par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange aux instants grossiers Λ_m .

$$U_{al} = -\mathbb{Y}\Lambda_m = - \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_1^2 \\ \mathbb{Y}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^2 \\ \frac{\mathbb{Y}_m^1}{\mathbb{Y}_m^2} \end{bmatrix} \Lambda_m \quad (1.146)$$

À ce stade, la solution globale du système couplé peut être mise à jour avant de calculer une nouvelle itération :

$$U = U_{sl} + U_{al} \quad (1.147)$$

A l'exception de l'étape (3), les étapes (1) à (5) sont résolues à chaque instant de l'échelle grossière en temps. En effet, l'opérateur d'interface \mathbb{H} est indépendant du temps et peut donc être calculé uniquement à l'instant initial t_0 . L'algorithme de résolution est résumé dans le tableau (1.7). De manière générale, cette approche apporte une amélioration remarquable au niveau temps de calcul par rapport à la méthode **GC**. Par ailleurs, il est important de mentionner que la parallélisation complète des calculs n'est pas envisageable avec cette méthode du fait de la dépendance du problème sans liaison sur l'échelle fine en temps des résultats du même problème sur l'échelle grossière. Il est tout de même possible de paralléliser le calcul de l'étape (5) de l'algorithme (1.7). Cette partie permet de résoudre le problème avec liaison où les calculs sur les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sont complètement indépendants.

1.4.4.3 La méthode GCbis

La méthode **GCbis** s'inscrit dans le cadre des méthodes multi-échelles en temps autorisant le couplage de schémas de Newmark différents. Elle apporte une amélioration supplémentaire des méthodes précédentes

[GRA 01, COM 02, MAH 10, BAT 10] du point de vue algorithmique. Dans cette approche les auteurs proposent de reprendre l'idée de l'interpolation linéaire des quantités sans liaison de la méthode **GC** et de l'appliquer plutôt aux multiplicateurs de Lagrange en s'inspirant de la méthode **PH**. Cette mise en place permet séparer les résolutions des équilibres sur Ω_1 et Ω_2 et de rendre les problèmes sans et avec liaison complètement indépendants sur les sous-domaines respectifs.

Afin d'introduire cette approche, nous rappelons ci-dessous l'interpolation linéaire, sur l'échelle fine en temps, des quantités cinématiques du problème sans liaison sur l'échelle grossière :

$$\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 \quad (1.148)$$

Le système discrétisé en espace et en temps correspondant au problème couplé multi-échelles en temps est identique à celui présenté dans la méthode **PH**, où la continuité à l'interface est assurée aux instants grossiers à travers les vitesses :

$$\mathbb{M}_1 \mathbf{U}_m^1 + \mathbb{L}_1^t \boldsymbol{\Lambda}_m + \mathbb{N}_1 \mathbf{U}_0^1 = \mathbb{F}_m^1 \quad (1.149a)$$

$$\mathbb{M}_2 \mathbf{U}_j^2 + \mathbb{L}_2^t \boldsymbol{\Lambda}_j + \mathbb{N}_2 \mathbf{U}_{j-1}^2 = \mathbb{F}_j^2 \quad (1.149b)$$

$$\mathbb{L}_1 \mathbf{U}_m^1 + \mathbb{L}_1 \mathbf{U}_m^2 = 0 \quad (1.149c)$$

La différence principale entre les méthodes **GCbis** et **PH** réside dans la manière dont les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}_j$ sont calculés sur l'échelle fine en temps. En effet, avec l'extension de l'interpolation linéaire sur l'échelle fine, formulée dans l'équation (1.148) pour les quantités cinématiques du problème sans liaison, aux quantités cinématiques du problème avec liaison ainsi qu'aux multiplicateurs de Lagrange, il devient possible de résoudre le problème de manière indépendante :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{j+1} = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \boldsymbol{\Lambda}_0 + \frac{j}{m} \boldsymbol{\Lambda}_m \quad (1.150a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 \quad (1.150b)$$

À partir de (1.150a) on est capable de réécrire le système (1.149) comme suit :

$$\mathbb{M}_1 \mathbf{U}_m^1 + \mathbb{L}_1^t \boldsymbol{\Lambda}_m = \mathbb{F}_m^1 - \mathbb{N}_1 \mathbf{U}_0^1 \quad (1.151a)$$

$$\mathbb{M}_2 \mathbf{U}_j^2 + \frac{j}{m} \mathbb{L}_2^t \boldsymbol{\Lambda}_m = \mathbb{F}_j^2 - \mathbb{N}_2 \mathbf{U}_{j-1}^2 - \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbb{L}_2^t \boldsymbol{\Lambda}_0 \quad (1.151b)$$

$$\mathbb{L}_1 \mathbf{U}_m^1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{U}_m^2 = 0 \quad (1.151c)$$

Cette approche, tout comme les approches décrites précédemment, impose la continuité à l'interface à travers les vitesses dans l'équation (1.151c) où :

$$\mathbb{L}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Comme pour la méthode **PH**, on a recours à une stratégie de résolution du problème ci-dessus en plusieurs étapes : problème sans liaison, problème d'interface puis problème avec liaison.

Problème sans liaison

$$\mathbb{M}_1 \mathbf{U}_{m/sl}^1 = \mathbb{F}_m^1 - \mathbb{N}_1 \mathbf{U}_0^1 \quad (1.152a)$$

$$\mathbb{M}_2 \mathbf{U}_{j/sl}^2 = \mathbb{F}_j^2 - \mathbb{N}_2 \mathbf{U}_{j-1}^2 - \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbb{L}_2^t \mathbf{\Lambda}_0 \quad (1.152b)$$

Problème avec liaison

$$\mathbb{M}_1 \mathbf{U}_{m/al}^1 = -\mathbb{L}_1^t \mathbf{\Lambda}_m \quad (1.153a)$$

$$\mathbb{M}_2 \mathbf{U}_{j/al}^2 = -\frac{j}{m} \mathbb{L}_2^t \mathbf{\Lambda}_m \quad (1.153b)$$

L'écriture matricielle générale résumant la mise en équation de cette approche est la suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{M}_2 & & \frac{1}{m} \mathbb{L}_2^t \\ \mathbb{N}_2 & \mathbb{M}_2 & \frac{2}{m} \mathbb{L}_2^t \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathbb{L}_2^t \\ \hline & \mathbb{N}_2 & \mathbb{M}_2 \\ \hline & & \mathbb{M}_1 \\ & & \mathbb{L}_1 \\ \hline & \mathbb{L}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^2 \\ \mathbf{U}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_m^2 \\ \hline \mathbf{U}_m^1 \\ \hline \mathbf{\Lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_1^2 \\ \tilde{\mathbb{F}}_2^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^2 \\ \hline \tilde{\mathbb{F}}_m^1 \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.154)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_1^2 \\ \tilde{\mathbb{F}}_2^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^2 \\ \hline \tilde{\mathbb{F}}_m^1 \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_1^2 - \mathbb{N}_2 \mathbf{U}_0^2 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \mathbb{L}_2^t \mathbf{\Lambda}_0 \\ \mathbb{F}_2^2 - \left(1 - \frac{2}{m}\right) \mathbb{L}_2^t \mathbf{\Lambda}_0 \\ \vdots \\ \mathbb{F}_m^2 \\ \hline \mathbb{F}_m^1 - \mathbb{N}_1 \mathbf{U}_0^1 \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

La mise en oeuvre algorithmique de cette approche est identique à celle détaillée pour la méthode **PH** dans les systèmes d'équations (1.134) à (1.147). Nous nous contentons de présenter l'algorithme correspondant à cette approche dans le tableau

1.8. On définit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^1 &= \{\mathbf{f}_m^1 - \mathbf{K}_1^p \mathbf{u}_{m/sl}^1\} \\
 \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^2 &= \left\{ \mathbf{f}_{j+1}^2 - \mathbf{K}_2^p \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 - \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} \\
 \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^1 &= \{-\mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{K}_1^p \mathbf{u}_{m/al}^1\} \\
 \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^2 &= \left\{ \frac{j}{m} \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{K}_2^p \mathbf{u}_{j+1/al}^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{1.155}$$

1.4.4.4 Bilan sur la mise en place des approches multi-échelles en temps

De manière générale, nous pouvons remarquer une certaine similarité entre les différentes approches multi-échelles en temps. Tout en assurant la continuité à l'interface à travers les vitesses, elles sont toutes basées sur le principe de séparation des efforts dans le but de résoudre un problème avec liaison et un autre sans liaison. La particularité de chacune de ces approches réside dans le traitement des efforts d'interface. En effet, la méthode **GC** propose de calculer les multiplicateurs de Lagrange directement sur l'échelle fine, tandis que la méthode **PH** propose d'estimer les multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle fine $\boldsymbol{\Lambda}_j$ à partir des multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle grossière $\boldsymbol{\Lambda}_m$ et des quantités sans liaison émanant du problème grossier en temps (équation (1.156a)). L'amélioration principale concerne le gain en terme de temps de calcul du fait que les multiplicateurs de Lagrange ne sont plus calculés mais plutôt estimés aux instants de l'échelle fine en temps. La troisième méthode **GCbis** propose une interpolation linéaire des $\boldsymbol{\Lambda}_j$ entre deux instants grossiers successifs à partir de $\boldsymbol{\Lambda}_0$ et $\boldsymbol{\Lambda}_m$ uniquement (équation (1.156b)). Cette façon de faire autorise la parallélisation des calculs grâce à l'indépendance des problèmes avec et sans liaison sur les sous-domaines couplés.

$$\text{PH} \quad \boldsymbol{\Lambda}_j = \mathbf{S}_j + \frac{j}{m} \boldsymbol{\Lambda}_m \tag{1.156a}$$

$$\text{GCbis} \quad \boldsymbol{\Lambda}_j = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \boldsymbol{\Lambda}_0 + \frac{j}{m} \boldsymbol{\Lambda}_m \tag{1.156b}$$

1.4.4.5 Conservation de l'énergie pour les méthodes multi-échelles en temps

Les aspects énergétiques constituent un élément important à contrôler lors de la mise en place d'une méthode d'intégration numérique. Ceci est d'autant plus important pour les méthodes multi-échelles en temps où des sources de déséquilibre énergétique supplémentaires peuvent intervenir à travers l'interface tel que le ratio entre les échelles de temps, la discrétisation spatiale de l'interface, la quantité cinématique autorisant le raccord, etc.

Une méthode d'intégration numérique ne doit pas introduire de l'énergie dans le système à intégrer dans le but de conserver sa stabilité. En définissant $\Delta\xi$ comme le travail d'interface, la méthode d'intégration numérique doit satisfaire la condition suivante :

$$\Delta\xi \leq 0 \quad (1.157)$$

Dans le cas où $\Delta\xi < 0$ la méthode d'intégration numérique dissipe de l'énergie à travers l'interface mais conserve la stabilité numérique du système.

La conservation de l'énergie de la méthode **GC** est démontrée dans la [GRA 00, GRA 01] par le biais de la méthode énergétique [HUG 78a, HUG 78b]. On démontre que la contribution du travail d'interface est la suivante :

$$\Delta\xi = \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 \quad (1.158a)$$

$$= \frac{1}{\Delta T} (\dot{\mathbf{u}}_m^1 - \dot{\mathbf{u}}_0^1) \mathbf{L}_1^t (\boldsymbol{\Lambda}_m - \boldsymbol{\Lambda}_0) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^m (\dot{\mathbf{u}}_j^2 - \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2) \mathbf{L}_2^t (\boldsymbol{\Lambda}_j - \boldsymbol{\Lambda}_{j-1}) \quad (1.158b)$$

Les auteurs de la méthode **GC** ont démontré dans [GRA 00] que ce terme est égal à la somme des carrés négatifs suivants :

$$\begin{aligned} \Delta\xi = & \frac{1}{m\gamma_1\Delta t} \left((\dot{\mathbf{u}}_m^1 - \dot{\mathbf{u}}_0^1)^t \tilde{\mathbf{M}}_1 (\dot{\mathbf{u}}_m^1 - \dot{\mathbf{u}}_0^1) \right. \\ & \left. - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\dot{\mathbf{u}}_j^2 - \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2)^t \tilde{\mathbf{M}}_2 (\dot{\mathbf{u}}_j^2 - \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2) \right) \end{aligned} \quad (1.159)$$

On peut alors conclure que la méthode **GC** dissipe de l'énergie à l'interface mais conserve la stabilité générale du système.

Dans le cadre de la méthode **PH**, le travail d'interface prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\xi = & \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 \\ = & \frac{1}{\Delta T} (\dot{\mathbf{u}}_m^1 - \dot{\mathbf{u}}_0^1) \mathbf{L}_1^t (\boldsymbol{\Lambda}_m - \boldsymbol{\Lambda}_0) + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^m \Delta\dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 \mathbf{L}_2^t (\boldsymbol{\Lambda}_j - \boldsymbol{\Lambda}_{j-1}) \end{aligned} \quad (1.160)$$

Dans [PRA 04] on démontre que cette expression peut être réécrite comme suit :

$$\Delta\xi = -\frac{1}{m\Delta t} (\mathbf{L}_1 (\dot{\mathbf{u}}_m^1 - \dot{\mathbf{u}}_0^1) + \mathbf{L}_2 (\dot{\mathbf{u}}_m^2 - \dot{\mathbf{u}}_0^2))^t \boldsymbol{\Lambda}_0 \quad (1.161)$$

Dans le cas où la continuité à l'interface est assurée à travers les vitesses, la démonstration de la conservation de l'énergie par l'approche énergétique prouve que la méthode **PH** conserve l'énergie (ie. $\Delta\xi = 0$). La même démarche est appliquée dans le but de quantifier la contribution du travail d'interface généré par la méthode **GCbis**. En effet, dans [MAH 10] on montre que $\Delta\xi$ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\xi = & \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 \\ = & \left(\frac{1}{m\Delta T} (\dot{\mathbf{u}}_m^1 - \dot{\mathbf{u}}_0^1) \mathbf{L}_1^t + \frac{1}{m\Delta t} \sum_{j=1}^m (\dot{\mathbf{u}}_j^2 - \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2) \mathbf{L}_2^t \right) (\boldsymbol{\Lambda}_m - \boldsymbol{\Lambda}_0) \end{aligned} \quad (1.162)$$

L'expression (1.162) peut être simplifiée grâce à la somme de la série télescopique des différences de vitesses sur l'échelle fine :

$$\sum_{j=1}^m (\dot{\mathbf{u}}_j^2 - \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2) = \dot{\mathbf{u}}_m^2 - \dot{\mathbf{u}}_0^2 \quad (1.163)$$

On peut alors écrire :

$$\Delta\xi = \frac{1}{m\Delta t} ((\mathbf{L}_1\dot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{L}_2\dot{\mathbf{u}}_m^2) - (\mathbf{L}_1\dot{\mathbf{u}}_0^1 + \mathbf{L}_2\dot{\mathbf{u}}_0^2))^t (\boldsymbol{\Lambda}_m - \boldsymbol{\Lambda}_0) \quad (1.164)$$

La valeur de ce terme représentant le travail d'interface de la méthode **GCbis** s'annule selon la démonstration de la méthode énergétique dans le cas où la continuité à l'interface est imposée sur les vitesses aux instants grossiers, ie. :

$$\mathbf{L}_1\dot{\mathbf{u}}_0^1 + \mathbf{L}_2\dot{\mathbf{u}}_0^2 = 0 \quad (1.165)$$

$$\mathbf{L}_1\dot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{L}_2\dot{\mathbf{u}}_m^2 = 0 \quad (1.166)$$

De manière globale, nous pouvons constater que ces méthodes multi-échelles en temps respectent la condition de stabilité dans le sens où aucune introduction d'énergie n'a lieu à l'interface au sens de la méthode énergétique. La méthode **GCbis** semble être la mieux adaptée et la plus au point puisqu'elle rassemble les avantages des autres approches en termes de conservation d'énergie et d'algorithmie. Par ailleurs, il est important de remarquer que la démonstration de la conservation de l'énergie des approches multi-échelles en temps est effectuée à partir de la méthode énergétique, ce qui amène à des expressions du travail d'interface $\Delta\xi$ en fonctions des vitesses. Ces termes s'annulent lorsque la quantité cinématique utilisée pour imposer le collage à l'interface est la vitesse. Dans le chapitre 2, nous démontrons que cette condition n'est pas toujours suffisante pour assurer l'équilibre énergétique du modèle couplé.

(1) Calcul des matrices de rigidité modifiées

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}_1 &= \mathbf{M}_1 + \beta \Delta T^2 \mathbf{K}_1 \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 &= \mathbf{M}_2 + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_2\end{aligned}$$

(2) Conditions initiales

$$\mathbf{u}_0^1, \dot{\mathbf{u}}_0^1, \ddot{\mathbf{u}}_0^1, \quad \mathbf{u}_0^2, \dot{\mathbf{u}}_0^2, \ddot{\mathbf{u}}_0^2$$

(3) Évaluation de l'opérateur de condensation

$$\mathbf{H} = \gamma \Delta T \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \mathbf{L}_1^t + \gamma \Delta t \mathbf{L}_2 \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \mathbf{L}_2^t$$

(4) Problème sans liaison sur le modèle grossier

$$\begin{aligned}{}^p \mathbf{u}_m^1 &= \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \frac{1-2\beta}{2} \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1 \\ {}^p \dot{\mathbf{u}}_m^1 &= \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1-\gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 &= \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} [\mathbf{f}_m^1 - \mathbf{K}_1 {}^p \mathbf{u}_m^1] \\ \mathbf{u}_{m/sl}^1 &= {}^p \mathbf{u}_m^1 + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1; \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = {}^p \dot{\mathbf{u}}_m^1 + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1\end{aligned}$$

(5.0) **Boucle sur** $j \in [0, m-1]$: Problème sans liaison sur le modèle fin

$$\begin{aligned}{}^p \mathbf{u}_{j+1}^2 &= \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \frac{1-2\beta}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2 \\ {}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 &= \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 &= \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} [\mathbf{f}_{j+1}^2 - \mathbf{K}_2 {}^p \mathbf{u}_{j+1}^2] \\ \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 &= {}^p \mathbf{u}_{j+1}^2 + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2; \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = {}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2\end{aligned}$$

(5.1) Interpolation des vitesses du problème grossier

$$\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1$$

(5.2) Calcul du problème d'interface

$$\boldsymbol{\Lambda}_{j+1} = \mathbf{H}^{-1} (L_1 \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 + L_2 \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2)$$

(5.3) **Boucle sur** $j \in [0, m-1]$: Problème avec liaison sur le modèle fin

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 &= \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} [\mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\Lambda}_{j+1}] \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 &= \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\ \mathbf{u}_{j+1/al}^2 &= \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \Rightarrow \mathbf{u}_{j+1}^2 = \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 + \mathbf{u}_{j+1/al}^2 \\ \text{Si } j < m &: \text{Retour à (5.0)}\end{aligned}$$

(6) Problème avec liaison sur le modèle grossier

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 &= \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} [\mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\Lambda}_m] \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_m^1 = \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 &= \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 \\ \mathbf{u}_{m/al}^1 &= \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 \Rightarrow \mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_{m/sl}^1 + \mathbf{u}_{m/al}^1\end{aligned}$$

Tab. 1.6: Algorithme de la méthode **GC** multi-schémas/multi-échelles en temps

(1) Calcul des matrices de rigidité modifiées
 $\tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1 + \beta_1 \Delta T^2 \mathbf{K}_1$; $\tilde{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2 + \beta_2 \Delta t^2 \mathbf{K}_2$

(2) Conditions initiales
 $\mathbf{u}_{0/sl}^1, \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1, \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1, \quad \mathbf{u}_{0/sl}^2, \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^2, \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^2$

(3) Problème sans liaison sur le modèle grossier

$${}^p \mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \frac{1-2\beta_1}{2} \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1$$

$${}^p \dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma_1) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} [\mathbf{f}_m^1 - \mathbf{K}_1 {}^p \mathbf{u}_m^1]$$

$$\mathbf{u}_{m/sl}^1 = {}^p \mathbf{u}_m^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 ; \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = {}^p \dot{\mathbf{u}}_m^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1$$

(4) Boucle sur $j \in [0, m - 1]$: Problème sans liaison sur le modèle fin

$$\mathbf{u}_{j+1/sl}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{u}_0^1 + \frac{j}{m} \mathbf{u}_{m/sl}^1 ; \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \frac{j}{m} \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1$$

$$\mathbf{S}_{j+1} = \mathbf{L}_1 \left(\mathbf{F}_{j+1}^1 - \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{j+1/sl}^1 \right)$$

$${}^p \mathbf{u}_{j+1}^2 = \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \frac{1-2\beta_2}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2$$

$${}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1 - \gamma_2) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} [\mathbf{f}_{j+1}^2 - \mathbf{K}_2 {}^p \mathbf{u}_{j+1}^2 - \mathbf{L}_2 \mathbf{S}_j]$$

$$\mathbf{u}_{j+1/sl}^2 = {}^p \mathbf{u}_{j+1}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 ; \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = {}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2$$

(5) Calcul du problème d'interface
 $\mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2)$

(6) Résolution du problème avec liaison :

$\mathbf{u}_{0/al}^1 = \mathbf{0} ; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 = \mathbf{0} ; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 = \mathbf{0} ;$ ${}^p \mathbf{u}_{m/al}^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta_1\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1$ ${}^p \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma_1) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1$ $\mathbf{u}_{m/al}^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \{ \mathbf{L}_1 \mathbf{\Lambda}_m - \mathbf{K}_1 {}^p \mathbf{u}_{0/al}^1 \}$ $\mathbf{u}_{m/al}^1 = {}^p \mathbf{u}_{m/al}^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$ $\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = {}^p \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$	$\mathbf{u}_{0/al}^2 = \mathbf{0} ; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^2 = \mathbf{0} ; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^2 = \mathbf{0} ;$ <p style="text-align: center;">Boucle sur $j \in [0, m - 1]$</p> ${}^p \mathbf{u}_{j+1/al}^2 = \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta_2\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2$ ${}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1 - \gamma_2) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \{ \mathbf{L}_2 \mathbf{\Lambda}_m - \mathbf{K}_2 {}^p \mathbf{u}_{j+1/al}^2 \}$ $\mathbf{u}_{j+1/al}^2 = {}^p \mathbf{u}_{j+1/al}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = {}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ <p style="text-align: center;">If $j = m$, Fin de la boucle</p>
--	--

(7) Mise à jour :

$\mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_{m/sl}^1 + \mathbf{u}_{m/al}^1$ $\dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$ $\ddot{\mathbf{u}}_m^1 = \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$	<p style="text-align: center;">Boucle sur $j \in [0, m - 1]$</p> $\mathbf{u}_{j+1}^2 = \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 + \mathbf{u}_{j+1/al}^2$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ <p style="text-align: center;">If $j = m$, Fin de la boucle</p>
---	--

Tab. 1.7: Algorithme de la méthode **PH** multi-schémas/multi-échelles en temps

Boucle principale

(1) Résolution du problème sans liaison :

$$\begin{array}{l|l}
 \mathbf{u}_{0/sl}^1 = \mathbf{u}_0^1; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 = \ddot{\mathbf{u}}_0^1; & \mathbf{u}_{0/sl}^2 = \mathbf{u}_0^2; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^2 = \dot{\mathbf{u}}_0^2; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^2 = \ddot{\mathbf{u}}_0^2; \\
 & \text{Boucle sur } j \in [0, m-1] \\
 {}^p\mathbf{u}_{m/sl}^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta_1\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1 & {}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^2 = \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta_2\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2 \\
 {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma_1) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1 & {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1 - \gamma_2) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2 \\
 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^1 & \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^2 \\
 \mathbf{u}_{m/sl}^1 = {}^p\mathbf{u}_{m/sl}^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 & \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 = {}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 \\
 \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 & \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 \\
 & \text{If } j = m, \text{ Fin de la boucle}
 \end{array}$$

(2) Résolution du problème d'interface :

$$\boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^2 \right\}$$

(3) Résolution du problème avec liaison :

$$\begin{array}{l|l}
 \mathbf{u}_{0/al}^1 = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 = \mathbf{0}; & \mathbf{u}_{0/al}^2 = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^2 = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^2 = \mathbf{0}; \\
 & \text{Boucle sur } j \in [0, m-1] \\
 {}^p\mathbf{u}_{m/al}^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta_1\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1 & {}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^2 = \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta_2\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2 \\
 {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma_1) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1 & {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1 - \gamma_2) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2 \\
 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^1 & \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^2 \\
 \mathbf{u}_{m/al}^1 = {}^p\mathbf{u}_{m/al}^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 & \mathbf{u}_{j+1/al}^2 = {}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\
 \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 & \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\
 & \text{If } j = m, \text{ Fin de la boucle}
 \end{array}$$

(4) Mise à jour :

$$\begin{array}{l|l}
 & \text{Boucle sur } j \in [0, m-1] \\
 \mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_{m/sl}^1 + \mathbf{u}_{m/al}^1 & \mathbf{u}_{j+1}^2 = \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 + \mathbf{u}_{j+1/al}^2 \\
 \dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 & \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\
 \ddot{\mathbf{u}}_m^1 = \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 & \ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 \\
 & \text{If } j = m, \text{ Fin de la boucle}
 \end{array}$$

Fin de la boucle principale

Tab. 1.8: Algorithme multi-schémas/multi-échelles en temps - Méthode GCbis

Chapitre 2

La méthode Arlequin en dynamique

Dans ce second chapitre, nous présentons la méthode Arlequin dans le cadre dynamique. En premier temps, nous abordons les aspects théoriques de la formulation continue. Ensuite, nous procédons à la discrétisation spatiale et temporelle du problème continu. Enfin, nous évoquons les aspects de la conservation d'énergie à travers cette approche aux niveaux continu et discret.

Sommaire

2.1	Formalisme Arlequin en dynamique	62
2.1.1	Problème de référence	64
2.1.2	Formulation continue du problème Arlequin	65
2.1.3	Discrétisation de la formulation variationnelle	70
2.2	Conservation de l'énergie	71
2.2.1	Conservation de l'énergie en continu	71
2.2.2	Conservation de l'énergie en discret	73

2.1 Formalisme Arlequin en dynamique

La méthode Arlequin est une méthode de couplage avec recouvrement basée sur la combinaison de modèles de finesses et/ou de modélisations différentes. Elle permet le mélange ainsi que le raccord “en volume” des formulations de comportements hétérogènes, et ce sans imposer a priori des contraintes sur les maillages à coller. Elle est fondée sur deux idées principales :

- Le raccord des sous domaines par l’intermédiaire d’une formulation faible : l’introduction des multiplicateurs de Lagrange dans la zone de collage garantit le couplage des modèles, la continuité des quantités cinématiques, ainsi que le contrôle des écarts des contraintes et des déformations entre les zones couplées. On note que cela dépend de l’opérateur de collage choisi.
- La distribution de l’énergie entre domaines et modèles : dans le but de ne pas compter deux fois l’énergie du système global dans la zone de recouvrement, les travaux virtuels associés aux deux modèles sont pondérés par des fonctions de pondération qui forment une partition de l’unité sur l’ensemble du domaine d’étude (Figure 4.2). On note que pour deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , la zone de recouvrement Ω_0 est définie par :

$$\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 \quad (2.1)$$

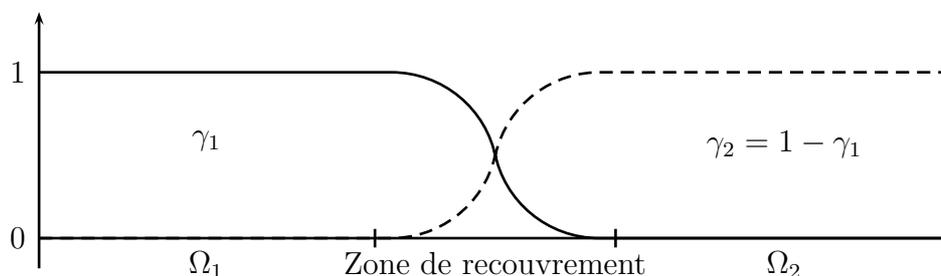


Fig. 2.1: Exemple de l’évolution d’un des paramètres de pondération Arlequin (γ_i), à travers la zone de collage

Cette technique s’inscrit dans le cadre des approches descendantes très utilisées dans le domaine de la mécanique des structures. L’idée étant de transposer les informations provenant d’une première étude sur l’échelle macroscopique du modèle global, vers l’échelle fine où on s’intéresse à étudier un phénomène local nécessitant une finesse importante du maillage. Cette démarche est généralement réalisée en deux étapes séparées. Dans le cadre Arlequin ces deux étapes se résument en une seule étape.

Actuellement, il est possible d'envisager trois types d'utilisation de la méthode Arlequin comme le montre la figure 2.2 :

- **Le zoom**

Ce type d'application vise la détection et l'étude d'un phénomène local (contact, usure,...) au niveau d'une zone précise appartenant à un domaine globale. Un "patch" fin est superposé au modèle grossier existant, dans le but de raffiner la solution aux voisinages des zones d'intérêt. Dans ce cas de figure, la zone de collage $\Omega_{0/c}$ est égale à un domaine complet Ω_i .

$$\Omega_{0/c} = \Omega_1 \quad \text{ou} \quad \Omega_{0/c} = \Omega_2 \quad (2.2)$$

- **La jonction**

Le but principal visé par cette application consiste à relier deux modèles qui peuvent être de natures et/ou de finesses différentes. Dans cette configuration, la zone de collage $\Omega_{0/c}$ est strictement égale à la zone de recouvrement Ω_0 des deux domaines.

$$\Omega_0 = \Omega_{0/c} \quad (2.3)$$

- **La substitution**

Cette opération consiste à substituer localement un modèle existant par un autre plus fin. Cette technique s'avère très utile pour introduire avec une grande flexibilité, un défaut dans un modèle sain tel que la fissuration. Contrairement aux deux cas précédents, en appliquant la substitution, la zone de collage constitue un sous-domaine de la zone de recouvrement des deux modèles.

$$\Omega_{0/c} \subsetneq \Omega_0 \quad (2.4)$$

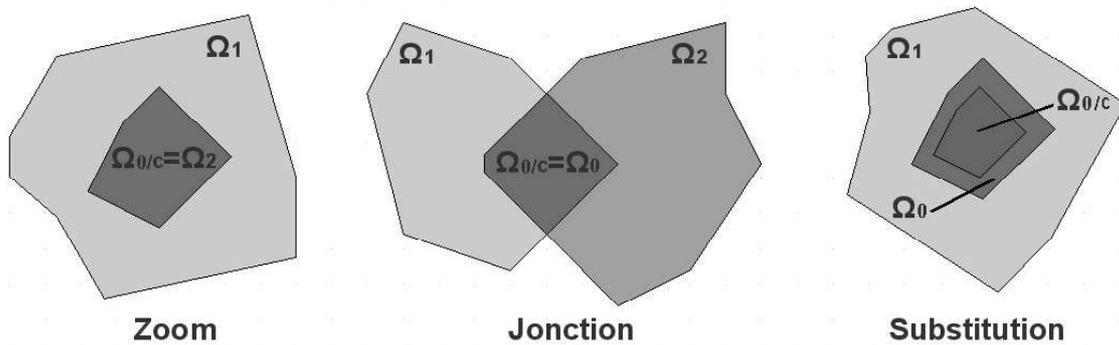


Fig. 2.2: Opérations Arlequin

De manière générale l'application de la méthode Arlequin à la dynamique présente plusieurs avantages, dont principalement :

- Un gain de temps de calcul CPU (Central Processing Unit), ainsi qu'une économie au niveau de la stratégie globale aboutissant au calcul microscopique, vu qu'elle permet d'effectuer moins d'étapes. Ce point a été suffisamment étayé dans la littérature spécialisée et sera abordé succinctement dans le chapitre 2.
- La possibilité de faire transiter des ondes entre modèles/échelles différents, sans piéger l'énergie au niveau des échelles fines. Ces aspects physiques sont traités dans le chapitre 4 de la thèse.
- Tirer profit du principe de recouvrement dans le but de traiter les aspects multi-schémas/multi-échelles en temps de façon "propre" au niveau énergétique. On note que ces problématiques sont visitées en détails dans le chapitre 3.

2.1.1 Problème de référence

Nous nous intéressons à l'écriture de la formulation Arlequin en régime dynamique transitoire dans un cadre élastique. Pour ce faire, on considère un modèle élastique isotrope de référence défini par un domaine matériel Ω délimité par un contour régulier $\partial\Omega$. Les champs \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, et $\ddot{\mathbf{u}}$ représentent respectivement les vecteurs des déplacements, des vitesses, et des accélérations. Les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy, et celui des déformations. Les forces volumiques appliquées au domaine Ω sont rassemblées dans le vecteur \mathbf{f} .

Dans un cadre élastique linéaire, les deux tenseurs des contraintes et des déformations sont reliés par la loi de Hooke généralisée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

Avec \mathcal{D} le tenseur d'ordre 4 modélisant le comportement élastique du matériau. Le tenseur des déformations linéarisé se définit par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad (2.6)$$

Nous avons fait le choix de présenter la démarche dans un cadre élastique linéaire, dans le but de simplifier la mise en équation du problème. Toutefois, il est parfaitement possible de considérer la même approche tout en adoptant un modèle non-linéaire, dont le comportement du matériau est dépendant de l'histoire du chargement. Sur l'intervalle d'étude $[0, T]$, la formulation forte du problème initial aux

conditions limites se résume par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \Gamma_u \times [0, T] \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma_h \times [0, T] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.7a) \\ (2.7b) \\ (2.7c) \\ (2.7d) \\ (2.7e) \end{array}$$

Les termes $\boldsymbol{\rho}$ et \mathbf{n} représentent respectivement la densité du matériau et la normale sortante à la frontière $\partial\Omega$. Les équations (2.7b) et (2.7c) représentent respectivement les conditions aux limites où on impose les déplacements $\bar{\mathbf{u}}$ (conditions limites de Dirichlet) et les forces surfaciques \mathbf{h} (conditions limites de Neumann). Les champs des déplacements et des vitesses à $t = 0$ sont donnés par : \mathbf{u}_0 et $\dot{\mathbf{u}}_0$.

Étant donnés les champs \mathbf{f} , $\bar{\mathbf{u}}$, \mathbf{h} , \mathbf{u}_0 , et $\dot{\mathbf{u}}_0$, la formulation faible correspondant à ce problème de référence se présente comme suit :

Trouver $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{V}$, $t \in [0, T]$, tel que $\forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_0$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_h \quad (2.8a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (2.8b)$$

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad (2.8c)$$

Où \mathcal{V} et \mathcal{V}_0 sont les espaces des champs de déplacement cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{V}_0 = \{ \delta \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \delta \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_h \} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{u}(t) \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (2.10)$$

2.1.2 Formulation continue du problème Arlequin

2.1.2.1 Définitions et hypothèses

Nous considérons le problème de référence décrit sur le domaine Ω . Ce domaine peut être divisé en deux (ou plusieurs) sous-domaines Ω_i possédant des zones communes $\Omega_{0/i}$ entre elles. La méthode Arlequin consiste à raccorder ces sous-domaines de manière faible à travers leurs zones de recouvrement (non-vides) correspondantes. Dans ce cadre, nous découpons le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 de contours respectifs $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ (Figure 2.3) tel que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (2.11)$$

$$\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 \quad (2.12)$$

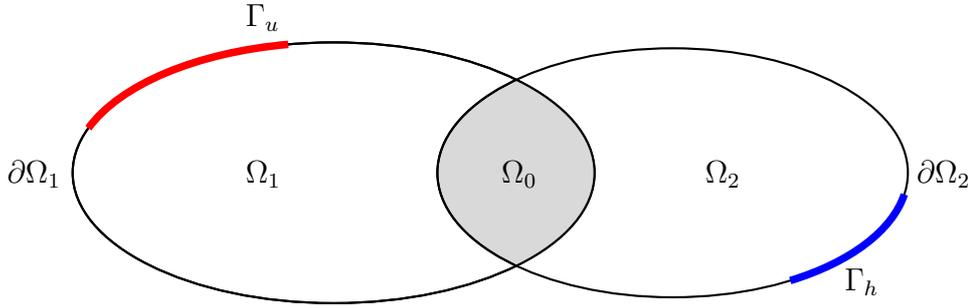


Fig. 2.3: Illustration des sous-domaines Ω_1 , Ω_2 et de la zone de recouvrement Ω_0 .

Dans le cadre le plus général, ce sous-domaine de recouvrement Ω_0 est constitué d'une zone de collage $\Omega_{0/c}$ et d'une zone de superposition ou de non-collage $\Omega_{0/nc}$ où :

$$\Omega_0 = \Omega_{0/c} \cup \Omega_{0/nc} \quad (2.13)$$

Pour simplifier les notations, nous faisons le choix d'appliquer les conditions limites sur chacun des sous-domaines de manière exclusive :

$$\Gamma_u \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \quad (2.14)$$

$$\Gamma_h \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \quad (2.15)$$

Dans la suite de la présentation de la méthode Arlequin nous nous plaçons dans le cadre de l'application de la jonction :

$$\Omega_0 = \Omega_{0/c} \quad (2.16)$$

Opérateurs de couplage

La méthode de couplage utilisée par la méthode Arlequin est celle des multiplicateurs de Lagrange. Le raccord des différents sous-domaines se réalise par la projection des champs cinématiquement admissibles de chacun des sous-domaines sur l'espace médiateur ou bien l'espace pivot \mathcal{M} . Ces opérations de projection s'effectuent à l'aide d'opérateurs spécifiques à la méthode Arlequin [BEN 05, BEN 11, BEN 08a, RAT 03, GUI 07] appelés opérateurs de couplage. La construction de ces opérateurs peut prendre lieu par le biais de multiples produits scalaires. Avant de définir notre choix, nous présentons brièvement ci-dessous les différents opérateurs existants. Dans ce qui suit, les notations $\boldsymbol{\lambda}$ et $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ désignent, respectivement, un multiplicateur de Lagrange et un champ-jeu de type déplacement ou vitesse généralisés.

1. Couplage L^2

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \delta\tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta\tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 \quad (2.17)$$

2. Couplage L_p^2

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \delta \tilde{\mathbf{u}}) = E_i \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 \quad (2.18)$$

Il constitue l'équivalent du couplage L^2 mais pondéré par le module de Young.

3. Couplage H^1

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_0} [\boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta \tilde{\mathbf{u}}) + l^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \tilde{\mathbf{u}})] \, d\Omega_0 \quad (2.19)$$

Le paramètre l permet d'homogénéiser les deux termes sous l'intégrale. Il a la dimension d'une longueur.

4. Couplage énergétique

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \delta \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega_0 \quad (2.20)$$

Dans ces différentes formulations les champs des multiplicateurs de Lagrange sont symbolisés par le paramètre $\boldsymbol{\lambda}$. L'écart $\delta \tilde{\mathbf{u}}$, comme nous l'avons précisé précédemment, peut être construit à partir de chacune des quantités cinématiques : déplacements, vitesses, accélérations. Notre travail se concentre sur le champ de déplacement où $\delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$, un choix justifié et argumenté dans le chapitre 3.

De manière globale, l'efficacité et la précision de chacun de ces opérateurs varient selon l'application. En effet, le couplage L^2 peut présenter des problèmes de conditionnement de la matrice de rigidité globale. Il peut être résolu à l'aide des couplages H^1 [RAT 03] et L_p^2 [HU 08] ainsi que du couplage énergétique [BEN 08b, ELK 07].

Dans la thèse de G. Rateau [RAT 03] une étude approfondie portant sur les couplages H^1 et L^2 a démontré qu'en discret, des difficultés de résolution peuvent apparaître sur le couplage L^2 lorsque les discrétisations sont suffisamment fines. L'auteur conclut que l'opérateur H^1 permet de bien poser le problème, et présente un meilleur conditionnement de la matrice de rigidité globale.

Par ailleurs, dans [HU 08] les auteurs ont étudié l'effet de la pondération du couplage L^2 par le module de Young, ce qui a abouti au couplage L_p^2 . Les résultats de cette étude s'avèrent intéressants et montrent que cet opérateur autorise un meilleur conditionnement. L'idée principale de cette pondération est d'augmenter l'ordre de grandeur des matrices de couplage afin d'avoisiner celle des matrices de rigidité des sous-domaines couplés. Il est donc possible de remplacer le module de Young par toute autre grandeur proche des valeurs des raideurs classiques des sous-domaines couplés. Il est important de noter que pour des modélisations hétérogènes, les valeurs du module de Young attribuées à chacun des opérateurs de couplage peuvent influencer les résultats des champs de déplacement \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 . De plus, il est aussi important de remarquer que pour une extension au cadre dynamique, le conditionnement de la matrice globale de masse remplace celui de la matrice globale de rigidité, dans le cas où la continuité n'est pas assurée à travers les déplacements.

Une autre démarche, plus naturelle peut être envisagée dans le but d'éviter les problèmes de conditionnement des matrices. Elle consiste à appliquer l'opérateur de couplage énergétique (2.20), relativement récent [BEN 08b] par rapport à ceux évoqués ci dessus. L'avantage principale de cette approche est d'autoriser un collage propre et bien conditionné, tout en permettant à l'utilisateur d'éviter la mise au point de paramètres dont les valeurs peuvent influencer les résultats numériques. Toutefois, dans le cadre d'une application en régime quasi-statique ce couplage ne permet pas d'éviter les mouvements de corps rigides entre les différents modèles. D'où la nécessité d'introduire un terme de pénalisation pour éviter ces mouvements de corps rigides. Néanmoins, nous remarquons que cette contrainte disparaît dans un cadre dynamique, où les sous-domaines subissent un chargement dynamique variable en fonction du temps.

À partir de ce résumé global sur les opérateurs de couplage et en tenant compte du cadre de la thèse qui porte principalement sur la méthode Arlequin en dynamique, nous faisons le choix d'adopter l'opérateur de couplage énergétique pour la suite des travaux. Il sera utilisé pour l'élaboration de notre nouvelle approche multi-échelles/multi-schémas.

Formulation continue en dynamique

En tenant compte des éléments évoqués ci-dessus, il est possible d'appréhender le problème Arlequin. Étant donné $\bar{\mathbf{u}}$, \mathbf{f} et \mathbf{h} , la formulation faible du problème bi-modèle Arlequin s'écrit comme suit :

Trouver $(\mathbf{u}^1(t), \mathbf{u}^2(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \in \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2 \times \mathcal{M}$, $t \in [0, T]$, tel que :

$$\forall \delta \mathbf{u}^1 \in \mathcal{V}_0^1 \quad M_1(\mathbf{u}^1, \delta \mathbf{u}^1) + K_1(\mathbf{u}^1, \delta \mathbf{u}^1) + C(\boldsymbol{\lambda}, \delta \mathbf{u}^1) = f_1(\delta \mathbf{u}^1) \quad (2.21a)$$

$$\forall \delta \mathbf{u}^2 \in \mathcal{V}^2 \quad M_2(\mathbf{u}^2, \delta \mathbf{u}^2) + K_2(\mathbf{u}^2, \delta \mathbf{u}^2) - C(\boldsymbol{\lambda}, \delta \mathbf{u}^2) = f_2(\delta \mathbf{u}^2) \quad (2.21b)$$

$$\forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M} \quad C(\delta \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) = 0 \quad (2.21c)$$

Les espaces mentionnés dans les équations 2.21a, 2.23f, et 2.21c sont définis comme suit :

$$\mathcal{V}^1 = \{\mathbf{u}^1(t) \in [H^1(\Omega_1)]^3 \mid \mathbf{u}^1(t) = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (2.22a)$$

$$\mathcal{V}^2 = [H^1(\Omega_2)]^3 \quad (2.22b)$$

$$\mathcal{V}_0^1 = \{\delta \mathbf{u}^1 \in [H^1(\Omega_1)]^3 \mid \delta \mathbf{u}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \quad (2.22c)$$

$$\mathcal{M} = [H^1(\Omega_0)]^3 \quad (2.22d)$$

Dans cette formulation, on voit apparaître les applications bilinéaires permettant de définir les travaux virtuels cinétiques, les travaux virtuels de déformation et les

travaux des forces externes :

$$M_1(\mathbf{u}^1, \delta\mathbf{u}^1) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}}^1 \delta\mathbf{u}^1 \quad (2.23a)$$

$$M_2(\mathbf{u}^2, \delta\mathbf{u}^2) = \int_{\Omega_2} \alpha_2 \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}}^2 \delta\mathbf{u}^2 \quad (2.23b)$$

$$K_1(\mathbf{u}^1, \delta\mathbf{u}^1) = \int_{\Omega_1} \eta_1 \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{u}^1) : \boldsymbol{\varepsilon}^1(\delta\mathbf{u}^1) \, d\Omega_1 \quad (2.23c)$$

$$K_2(\mathbf{u}^2, \delta\mathbf{u}^2) = \int_{\Omega_2} \eta_2 \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{u}^2) : \boldsymbol{\varepsilon}^2(\delta\mathbf{u}^2) \, d\Omega_2 \quad (2.23d)$$

$$f_1(\delta\mathbf{u}^1) = \int_{\Omega_1} \varphi_1 \mathbf{f} \delta\mathbf{u}^1 \, d\Omega_1 \quad (2.23e)$$

$$f_2(\delta\mathbf{u}^2) = \int_{\Omega_2} \varphi_2 \mathbf{f} \delta\mathbf{u}^2 \, d\Omega_2 + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \delta\mathbf{u}^2 \, d\Gamma_h \quad (2.23f)$$

Les quantités $C(\boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}^1)$ et $C(\boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}^2)$ expriment les travaux de raccord à l'interface.

Les fonctions de pondération α_i , η_i et φ_i évoluent comme le montre la figure 4.2 et elles sont définies de la manière suivante :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.24a)$$

$$\eta_1 + \eta_2 = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.24b)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.24c)$$

$$\alpha_i = \eta_i = \varphi_i = 1 \quad \text{sur } \Omega_i \setminus \Omega_0 \quad \text{pour } i=1,2 \quad (2.24d)$$

Ces fonctions de pondération permettent la distribution (au sens de la partition de l'unité) de l'énergie entre les sous-domaines couplés à travers la zone de collage, ce qui constitue un point crucial de la méthode Arlequin. Cette pondération permet d'éviter de prendre en compte l'énergie plusieurs fois dans la même zone et autorise ainsi une certaine liberté à l'utilisateur pour le choix du modèle prédominant. En effet, elle permet de mettre le poids sur le modèle que l'on souhaite faire exprimer.

Par ailleurs, dès que des finesses différentes ou bien des modélisations hétérogènes sont couplées, il est préconisé de discrétiser les multiplicateurs de Lagrange sur le modèle grossier en espace. Ceci permet d'éviter le phénomène de verrouillage numérique et, par conséquent, d'autoriser plus de liberté à chacun des modèles en permettant au modèle fin d'exprimer sa richesse. Il en résulte que l'espace éléments finis \mathcal{M}_h de ces multiplicateurs de Lagrange est construit sur le modèle grossier.

On note également que dans ce cas de figure nous avons fait le choix de présenter l'opérateur de collage en fonction des écarts de déplacement $\delta\mathbf{u}$. Ce choix sera justifié dans le chapitre suivant. Toutefois on précise que la continuité à l'interface peut être imposée à travers les déplacements, les vitesses, ou bien sur les accélérations. Dans la section suivante (Section 2.1.2.1) nous présentons cet opérateur et ses principales caractéristiques.

Remarque 1 *Remarquons que dans le cadre théorique 2.23 nous présentons les pondérations des différentes quantités comme étant des fonctions distinctes : α_i , η_i , φ_i . Dans la pratique, nous supposons que la pondération s'effectue de manière similaire sur les énergies cinétique, potentielle, ainsi que sur les efforts. Notons qu'il sera intéressant de mener une réflexion théorique dans le but d'étudier les effets des pondérations dans le cas où chacune des quantités cinématiques possède sa propre fonction de pondération.*

2.1.3 Discrétisation de la formulation variationnelle

Les équations d'équilibre du bi-modèle dynamique linéaire Arlequin (2.21) sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Nous considérons que les paramètres de pondération de l'énergie entre les sous-domaines couplés sont indépendants du temps. Par contre, ils peuvent être définis en fonction des coordonnées physiques des noeuds. L'intégration numérique du problème discrétisé est réalisée à l'aide de l'algorithme de Newmark [NEW 59] présenté dans le premier chapitre. L'intégration numérique prend effet sur un intervalle de temps $[0, T]$, par incrément constant Δt , tel que $\Delta t = T/N$ avec N entier strictement positif. Les quantités cinématiques sont évaluées à la fin de chaque pas de temps aux instants t_{n+1} tel que :

$$t_{n+1} = t_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \Delta t \text{ avec } t_0 = 0 \text{ et } t_N = T \quad (2.25)$$

Le problème discrétisé à résoudre à chaque instant t_{n+1} s'écrit comme suit :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{n+1}^1 + \mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^1, \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_{n+1}^2 + \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^2, \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{u}_{n+1}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_{n+1}^2 = 0. \quad (2.26c)$$

Dans le but de simplifier l'écriture du problème discrétisé (2.26), les paramètres de pondération α_i , η_i et φ_i sont pris en compte implicitement dans les expressions de \mathbf{M}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{K}_i qui sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement, et de rigidité correspondant aux sous-domaines Ω_i pour $i = 1, 2$. Les vecteurs \mathbf{f}^1 et \mathbf{f}^2 représentent les forces externes.

Les termes en relation avec le couplage des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sont la matrice de couplage assemblées \mathbf{L}_i^t et les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. Ces quantités existent uniquement dans la zone commune aux deux modèles Ω_0 . Dans les équations (2.26a) et (2.26b), $\mathbf{L}_i^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ représentent les forces fictives qui assurent la continuité des déplacements dans l'équation (2.26c).

Les trois champs inconnus de ce système couplé sont discrétisés à l'aide des fonctions de forme. Dans un cadre général, en considérant \mathbf{N}_{Ω_1} , \mathbf{N}_{Ω_2} , et \mathbf{N}_{Ω_0} les

fonctions de forme respectives de Ω_1 , Ω_2 , et Ω_0 , la discrétisation des inconnus est la suivante :

$$\mathbf{u}^1 = \langle \mathbf{N}_{\Omega_1} \rangle \{q_e^1\} \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{u}^2 = \langle \mathbf{N}_{\Omega_2} \rangle \{q_e^2\} \quad (2.27b)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \langle \mathbf{N}_{\Omega_0} \rangle \{\boldsymbol{\lambda}_e\} \quad (2.27c)$$

Les vecteurs \mathbf{u}^i sont les champs de déplacement nodaux sur chacun des domaines Ω_i , et $\boldsymbol{\lambda}_e$ est le vecteur élémentaire des forces fictives. Ces champs sont discrétisés à l'aide des éléments finis de Lagrange. On note que nous avons fait le choix de présenter la continuité à l'interface à travers les déplacements dans l'équation (2.26b), dans le but de rester en cohérence avec la formulation continue (2.21c). Dans la littérature, une grande majorité des approches de couplages [COM 02] propose les vitesses comme quantité cinématique de continuité à l'interface.

2.2 Conservation de l'énergie

2.2.1 Conservation de l'énergie en continu

En évaluant la variation de l'énergie mécanique par rapport au temps, nous pouvons étudier la contribution énergétique apportée par le cadre Arlequin à l'interface de raccord. Dans la thèse de S. Zammali [ZAM 05], il est démontré que le couplage par l'approche Arlequin permet de conserver l'énergie totale du système mécanique en supposant les multiplicateurs de Lagrange constants par rapport au temps. Dans ce qui suit, en se basant sur les travaux de S. Zammali, nous allons établir l'écriture globale de l'énergie mécanique. Notre objectif est de démontrer que la méthode Arlequin permet de conserver cette énergie sans imposer aucune hypothèse sur les multiplicateurs de Lagrange.

On définit respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sur Ω_1 et Ω_2 par :

$$E_c = \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} \alpha_i \rho (\dot{\mathbf{u}}^i)^2 d\Omega_i \quad (2.28a)$$

$$E_p = \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} \eta_i \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{u}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{u}^i) d\Omega_i \quad (2.28b)$$

La formulation de l'énergie mécanique totale E_{tot} sur les deux sous-domaines se présente comme suit :

$$E_{tot} = E_c + E_p = \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} [\alpha_i \rho (\dot{\mathbf{u}}^i)^2 + \eta_i \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{u}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{u}^i)] d\Omega_i \quad (2.29)$$

Nous allons évaluer la variation de cette énergie par rapport au temps. On note que plus de détails sur ces équations et leur dérivation peuvent être trouvés dans [MAR 84]. La dérivée par rapport au temps de (2.29) donne :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Omega_i} [\alpha_i \rho \dot{\mathbf{u}}^i \ddot{\mathbf{u}}^i + \eta_i \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{u}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}^i(\dot{\mathbf{u}}^i)] d\Omega_i \quad (2.30)$$

Nous assimilons les écarts des champs virtuels $\delta \mathbf{u}^i$ à des champs de vitesse :

$$\delta \mathbf{u}^i = \dot{\mathbf{u}}^i \quad (2.31)$$

En tenant compte de cette hypothèse dans les équations (2.21a) et (2.23f) de la formulation faible, nous pouvons écrire :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2) + \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f} \dot{\mathbf{u}}^i d\Omega_i + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \dot{\mathbf{u}}^2 d\Gamma_h \quad (2.32)$$

À ce stade, nous dérivons la condition de raccord Arlequin (2.21c) par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{C}(\delta \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)] = \mathcal{C}\left(\frac{d(\delta \boldsymbol{\lambda})}{dt}, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right) + \mathcal{C}(\delta \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2) \quad (2.33)$$

La condition arlequin (2.21c) est valable pour $\forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}$. La dérivée de ce champ virtuel $\delta \boldsymbol{\lambda}$ par rapport au temps appartenant au même espace \mathcal{M} , nous pouvons écrire :

$$\mathcal{C}\left(\frac{d(\delta \boldsymbol{\lambda})}{dt}, \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right) = 0 \quad \forall \frac{d\delta \boldsymbol{\lambda}}{dt} \in \mathcal{M} \quad (2.34)$$

Les équations (2.21c) et (2.34) impliquent :

$$\mathcal{C}(\delta \boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2) = 0 \quad (2.35)$$

Le résultat (2.35) est vrai pour $\forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}$. Il en résulte que pour $\delta \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2) = 0 \quad (2.36)$$

Dans le cas où les forces externes sont considérées nulles, le résultat de (2.36) permet d'annuler l'équation (2.32) et par suite montrer **la conservation de l'énergie totale** d'un système couplé par la méthode Arlequin dans le cadre continu. Le point clé de cette démarche est de laisser les **multiplicateurs de Lagrange libres de toute contrainte**.

Dans [ZAM 05], et comme nous l'avons déjà précisé au début de cette section, la conservation de l'énergie en continu suppose que les multiplicateurs de Lagrange $\delta\lambda$ sont indépendants du temps. Par ailleurs, à cause du cumul (dans l'espace et dans le temps) d'énergie résiduelle dans l'interface de raccord, des instabilités peuvent apparaître au niveau discret. D'autre part, dans [COM 02] il est montré que le couplage de schémas hétérogènes ou bien d'échelles de temps différentes, ne satisfait pas l'équilibre énergétique du système global de façon naturelle dans le cadre continu.

Dans la section suivante, nous allons établir le bilan d'énergie issu d'un couplage de deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , intégrés chacun avec son propre schéma de Newmark :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\neq \gamma_2 \\ \beta_1 &\neq \beta_2\end{aligned}$$

Le but de cette démarche est de faire le constat de la présence d'éventuels déséquilibres énergétiques au niveau de la zone de raccord dans le cadre Arlequin. Ensuite, en se basant sur les résultats de la conservation de l'énergie globale en continu par la méthode Arlequin, nous allons proposer une solution permettant de réaliser l'équilibre énergétique dans le cas discret.

2.2.2 Conservation de l'énergie en discret

Nous reprenons la démonstration du bilan d'énergie du schéma de Newmark présentée dans le chapitre 1. Nous allons l'appliquer au raccord bi-modèle Arlequin, dans l'optique d'étudier l'effet du couplage sur l'équilibre énergétique global du système. Nous considérons le couplage des deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 intégrés sur la même échelle Δt de temps et des schémas de Newmark différents (γ_1, β_1 sur Ω_1 , et γ_2, β_2 sur Ω_2). En reprenant l'équation (1.106) du premier chapitre, nous pouvons exprimer la variation de l'énergie entre deux instants t_n et t_{n+1} :

$$\Delta E = \sum_{i=1,2} \left[E_c^i + E_p^i \right]_n^{n+1} = \sum_{i=1,2} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\dot{\mathbf{u}}^i) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}^i)^t \mathbf{K}_i (\mathbf{u}^i) \right]_n^{n+1} \quad (2.37a)$$

$$= \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i (\dot{\mathbf{u}}_n^i - \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i) \quad (2.37b)$$

$$+ \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{u}_n^i)^t \mathbf{K}_i (\mathbf{u}_n^i - \mathbf{u}_{n+1}^i) \quad (2.37c)$$

La résolution de l'équilibre discrétisé (2.26) avec le schéma de Newmark s'effectue à partir des expressions des déplacements et des vitesses suivantes ($i = 1, 2$) :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+1}^i &= \mathbf{u}_n^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^i + \left(\frac{1}{2} - \beta_i\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n^i + \beta_i \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i \\ &= {}^p\mathbf{u}_{n+1}^i + \beta_i \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i,\end{aligned}\quad (2.38a)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i &= \dot{\mathbf{u}}_n^i + (1 - \gamma_i) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n^i + \gamma_i \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i \\ &= {}^p\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \gamma_i \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i.\end{aligned}\quad (2.38b)$$

Ces termes (2.38) peuvent être réécrits sous forme d'incrément et de valeurs moyennes comme le montre l'équation (2.38). L'introduction de leurs nouvelles expressions dans (2.37), élimine les incréments en vitesse et en accélération :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_{i=1,2} \left[\frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \ddot{\mathbf{u}}_n^i) \right. \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma_i - \frac{1}{2}\right) (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i \Delta \ddot{\mathbf{u}}^i \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4} (\mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{u}_n^i)^t \mathbf{K}_i (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i) \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\beta_i - \frac{1}{2}\gamma_i\right) (\mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{u}_n^i)^t \mathbf{K}_i \Delta \ddot{\mathbf{u}}^i \right]\end{aligned}$$

Dans un second temps, la manipulation de ces équations permet d'intégrer la notion de **travail d'interface** ou de collage dans l'expression de l'équilibre :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_{i=1,2} \left[\frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i)^t [(\mathbf{f}_{n+1}^i + \mathbf{f}_n^i) - (\mathbf{L}_i^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \mathbf{L}_i^t \boldsymbol{\lambda}_n)] \right. \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\gamma_i - \frac{1}{2}\right) (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i \Delta \ddot{\mathbf{u}}^i \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\beta_i - \frac{1}{2}\gamma_i\right) (\mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{u}_n^i)^t \mathbf{K}_i \Delta \ddot{\mathbf{u}}^i \right]\end{aligned}\quad (2.39)$$

Ensuite, une série d'opérations mathématiques développées en détail dans le chapitre 1 dans le cadre mono-modèle, aboutit à la forme générale bien connue [KRE 06] du bilan d'énergie du schéma de Newmark.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t (\bar{\mathbf{f}}^i + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \Delta \mathbf{f}^i) \\ &\quad + \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t (\mathbf{L}_i^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_i^t \Delta \boldsymbol{\lambda}) \\ &\quad - \sum_{i=1,2} (\gamma_i - \frac{1}{2}) \left\{ (\Delta \mathbf{u}^i)^t \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u}^i + \left(\beta_i - \frac{1}{2}\gamma_i\right) \Delta t^2 (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^i) \right\}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Avec, $\Delta(\bullet)^i = (\bullet)_{n+1}^i - (\bullet)_n^i$ et $(\bar{\bullet})^i = \frac{1}{2} [(\bullet)_{n+1}^i + (\bullet)_n^i]$.

Dans cette expression finale (2.40), la variation de l'énergie ΔE devient :

$$\Delta E = \sum_{i=1,2} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\dot{\mathbf{u}}^i) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}^i)^t \mathbf{K}_i (\mathbf{u}^i) + (\beta_i - \frac{1}{2} \gamma_i) \frac{1}{2} \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\ddot{\mathbf{u}}^i) \right]_n^{n+1} \quad (2.41)$$

Le terme conservatif supplémentaire $(\beta_i - \frac{1}{2} \gamma_i) \frac{1}{2} \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\ddot{\mathbf{u}}^i)$, est un terme numérique résultant du schéma numérique propre à chacun des sous-domaines.

Analyse

Nous cherchons à travers la démarche développée ci dessus, de mettre en évidence la contribution énergétique du travail de raccord Arlequin dans la zone de collage Ω_0 . Le terme représentant ce travail dans l'équation (2.40) est :

$$\Delta \mathcal{W} = \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t (\mathbf{L}_i^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_i^t \Delta \boldsymbol{\lambda}) \quad (2.42a)$$

$$= (\Delta \mathbf{u}^1)^t (\mathbf{L}_1^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_1 - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_1^t \Delta \boldsymbol{\lambda}) \quad (2.42b)$$

$$+ (\Delta \mathbf{u}^2)^t (\mathbf{L}_2^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_2 - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_2^t \Delta \boldsymbol{\lambda}) \quad (2.42c)$$

Deux cas de figure se présentent :

- ★ Conservation de l'énergie $\Delta \mathcal{W} = 0$: Dans le cas particulier où les deux sous-domaines sont couplés avec le même schéma de Newmark ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$), il est possible d'écrire (2.42b) et (2.42c) sous la forme suivante :

$$(\mathbf{L}_1 \Delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{L}_2 \Delta \mathbf{u}^2) [\bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta \boldsymbol{\lambda}] \quad (2.43)$$

Nous remarquons que la condition de continuité à l'interface (2.26c) permet d'annuler ce terme, et par suite conserver l'énergie globale du système $\Delta \mathcal{W} = 0$ dans le cadre discret.

- ★ Introduction/Dissipation de l'énergie $\Delta \mathcal{W} > 0$: Dans le cas général, où Ω_1 et Ω_2 sont intégrés avec leurs propres schémas de Newmark ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), la condition de continuité à travers (2.42b) et (2.42c) n'est pas satisfaite. Une introduction ou bien une dissipation de l'énergie à travers Ω_0 est alors observée.

Remarque 2 À travers l'approche globale développée dans le cadre de ce travail de thèse nous souhaitons coupler des sous-domaines ayant chacun ses propres caractéristiques : modélisations 1D/3D, repères tournant/fixe, discrétisations spatiales hétérogènes, maillages linéaires/quadratiques, échelles de temps fines/grossières, et divers schémas d'intégration numérique. Ces différences doivent être gérées dans un cadre rigoureux où les problèmes énergétiques et les aspects de propagation d'ondes

sont traités correctement. Le chapitre suivant présente les briques de base nécessaires au développement de l'approche pour les machines tournantes. Nous développons la formulation des opérateurs de collage présentés dans 2.1.2 tout en tenant compte de la rotation des repères à travers une matrice orthogonale de passage Φ .

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté le cadre Arlequin en dynamique, où les formulations d'un bi-modèle Arlequin en continu et en discret ont été développées. La dernière partie de ce chapitre a porté sur les aspects énergétiques du couplage à travers l'interface. Nous avons démontré que dans un cadre général, l'intégration numérique de deux sous-domaines avec deux schémas de Newmark différents, induit un déséquilibre du bilan d'énergie global du système. Les approches multi-schémas/multi-échelles, ainsi que les aspects énergétiques correspondants sont abordés en détail dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Spécificités des machines tournantes

Nous abordons dans ce chapitre les aspects de modélisation des machines tournantes. Nous présentons les formulations propres aux repères fixe et tournant des modèles 1D et 3D. Ensuite, nous proposons une formulation mixte, basée sur la méthode Arlequin, où les deux repères coexistent.

Sommaire

3.1	Modélisation tridimensionnelle	79
3.1.1	Cinématique du solide	80
3.1.2	Équilibre d'un système en rotation	81
3.1.3	Équation du mouvement	82
3.2	Modélisation poutre	84
3.2.1	Énergie cinétique	86
3.2.2	Énergie potentielle	86
3.2.3	Équation d'équilibre	86
3.3	Bi-modèle Arlequin 3D-1D en dynamique à l'arrêt	87
3.3.1	Discrétisations des champs de déformations et contraintes	88
3.3.2	Discrétisation des multiplicateurs de Lagrange	89
3.3.3	Mise en place des opérateurs de collage	90

3.4	Dynamique de rotation : couplage 3D-1D multi-repères . .	93
3.4.1	Définitions	94
3.4.2	Opérateurs de couplage	95

Introduction

Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe, soit dans un repère mobile tournant à la même vitesse de rotation que le rotor. Dans le cas où des modélisations simplifiées sont étudiées (modélisation poutre), le choix par défaut s'oriente vers le repère fixe, ce qui est aussi le choix de CODE_ASTER. D'autre part, dès qu'il s'agit de modélisations plus complexes (modèles full 3D), les équations de Lagrange peuvent être formulées dans un repère fixe ou mobile. Dans ce cas de figure, il revient à l'utilisateur de juger la configuration la plus pertinente et le cadre le plus approprié.

D'autres approches, plus compliquées, proposent de mélanger des modélisations hétérogènes ($2D - 1D$; $3D - 1D$) en vue de pouvoir étudier des phénomènes locaux, tout en préservant un temps de calcul acceptable. Ce type d'études s'avère très performant afin d'étudier des phénomènes spécifiques aux problématiques machines tournantes tels que la fissuration ou bien le contact entre rotor et stator. En effet, une modélisation tridimensionnelle permet de tenir compte des phénomènes locaux tandis qu'une modélisation, beaucoup moins coûteuse, de type poutre peut être adoptée pour le reste de la structure.

À ce stade, il est intéressant de se poser la question sur la notion de repère de référence où toutes les équations doivent être formulées. En effet, lorsque plusieurs composants sont considérés (rotors et stators), il peut être préférable de formuler l'équation du mouvement dans le repère fixe. Par ailleurs, il est toujours possible d'envisager des formulations dans le repère tournant. Dans ce qui suit, nous allons présenter une approche fondée sur un compromis des deux idées. Nous étudions un raccord entre un modèle volumique écrit dans un repère tournant et un modèle de poutre écrit dans un repère fixe. Le couplage se fait en volume à travers la méthode Arlequin. Cette formulation permet de combiner les avantages des modélisations simplifiées et volumiques tout en étant non intrusive et facile à implémenter puisque chaque modèle évolue dans son propre repère.

3.1 Modélisation tridimensionnelle

On établit tout d'abord la formulation théorique de l'équation d'équilibre d'un système en rotation autour d'un axe déterminé.

Définition des repères

On définit :

- $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$: le repère inertiel fixe (galiléen) orthonormé
- $\mathbf{R}_r(x, y, z)$: le repère rotationnel lié au corps en mouvement

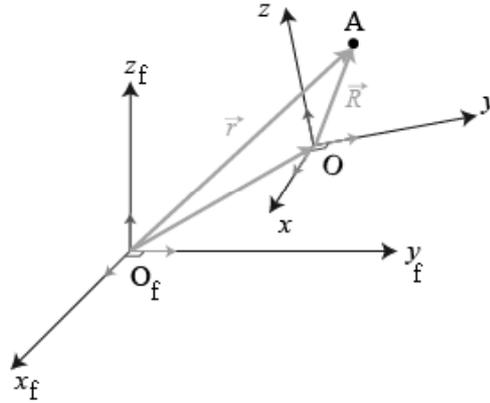


Fig. 3.1: Illustration des repères fixe $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$ et mobile $\mathbf{R}_r(x, y, z)$

3.1.1 Cinématique du solide

3.1.1.1 Position en statique

On considère un corps flexible Ω de frontière $\partial\Omega$. Dans la configuration de base, les deux repères $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$ et $\mathbf{R}_r(x, y, z)$ sont confondus. À un instant initial t_0 , une particule quelconque (A) est repérée par un vecteur position $\mathbf{P}_A = \langle x_f, y_f, z_f \rangle^t$ dans le repère inertiel.

Soumise à un champ de déplacement initial $\mathbf{u}_f(\mathbf{P}, t)$ à un instant $t > 0$, la particule occupe la position suivante :

$$\mathbf{v}_f(\mathbf{P}, t) = \mathbf{P}_A + \mathbf{u}_f(\mathbf{P}, t) \quad (3.1)$$

3.1.1.2 Position en mouvement

On considère le même corps Ω en mouvement à un instant $t > 0$. Le corps a subi une déformation dans une position quelconque. Cette position est une combinaison d'une translation $\mathbf{s}(t)$ par rapport au repère fixe $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$ et d'une rotation autour d'un axe à définir. La vitesse de rotation angulaire de Ω autour d'un axe quelconque (axe de rotation du système tournant) est donnée par un vecteur $\check{\mathbf{w}}(t) = \langle \check{w}_1, \check{w}_2, \check{w}_3 \rangle^t$.

Dans le repère rotationnel, la position du point (A) définie à l'instant t_0 devient :

$$\mathbf{v}_r(\mathbf{P}, t) = \mathbf{P}_A + \mathbf{u}_r(\mathbf{P}, t) \quad (3.2)$$

Où $\mathbf{u}_r(\mathbf{P}, t)$ représente le vecteur résultant de déplacement suite à une déformation dynamique du corps. Avant de définir la position du point dans le repère inertiel, on introduit la matrice $\Phi(t)$ qui est une matrice orthogonale de passage. Elle permet de réaliser le changement de repère entre $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$ et $\mathbf{R}_r(x, y, z)$. La dérivée par rapport au temps de $\Phi(t)$ est :

$$\dot{\Phi} = \Phi \cdot \Omega_{R_r R_f} \quad (3.3)$$

La matrice $\Omega_{R_r R_f}$ est une matrice antisymétrique, constituée à partir des composantes du vecteur des vitesses angulaires $\check{\mathbf{w}}(t)$:

$$\Omega_{R_r R_f} = \begin{bmatrix} 0 & -\check{w}_3 & \check{w}_2 \\ \check{w}_3 & 0 & -\check{w}_1 \\ -\check{w}_2 & \check{w}_1 & 0 \end{bmatrix} = \Phi^t \cdot \dot{\Phi} \quad (3.4)$$

Si l'on omet dorénavant l'indice r et que l'on pose $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r$, alors la position du point (A) vue du repère fixe est donnée par :

$$\mathbf{y}_f(\mathbf{P}, t) = \mathbf{s}(t) + \Phi \cdot \mathbf{v}(\mathbf{P}, t) \quad (3.5a)$$

$$= \mathbf{s}(t) + \Phi [\mathbf{P}_A + \mathbf{u}(\mathbf{P}, t)] \quad (3.5b)$$

Où $s(t)$ représente la translation du repère mobile par rapport au repère fixe. La dérivée de $\mathbf{y}_f(\mathbf{P}, t)$ par rapport au temps est :

$$\dot{\mathbf{y}}_f(\mathbf{P}, t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\Phi} \cdot (\mathbf{P}_A + \mathbf{u}) + \Phi \dot{\mathbf{u}} \quad (3.6)$$

3.1.2 Équilibre d'un système en rotation

Les équations du mouvement du système peuvent être écrites de deux manières différentes. La première est basée sur le principe fondamental de la dynamique (PFD), où l'accélération est obtenue à partir de la dérivée de $\mathbf{y}_f(\mathbf{P}, t)$. L'intégration des équations aux dérivées partielles permet d'établir la formulation faible. La deuxième façon de faire implique l'utilisation de la méthode énergétique. En se basant sur les expressions de l'énergie cinétique et potentielle, les équations de Lagrange permettent d'établir l'équation du mouvement sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{F}_d}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (3.7)$$

où \mathbf{T} , \mathbf{U} et \mathbf{F}_d sont les énergies cinétique et potentielle et le travail des forces dissipatives. Leurs expressions sont données dans la sous-section qui suit.

3.1.2.1 Expressions des énergies cinétique et potentielle et de la force de dissipation

Énergie cinétique

Sous sa forme générale, l'énergie cinétique est donnée par :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}_f^t \dot{\mathbf{y}}_f d\Omega \quad (3.8)$$

En remplaçant les dérivées temporelles (3.6) par leurs valeurs dans (3.8) on obtient :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\Phi} \cdot (\mathbf{P}_A + \mathbf{u}) + \Phi \cdot \dot{\mathbf{u}} \right)^t \left(\dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\Phi} \cdot (\mathbf{P}_A + \mathbf{u}) + \Phi \cdot \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega \quad (3.9)$$

Après développement et en notant $\Omega = \Omega_{R_r R_f}$, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^t \Omega \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^t \Omega^2 \mathbf{u} \, d\Omega \quad (3.10a)$$

$$- \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^t \Omega \left(\Phi^t \dot{\mathbf{s}} + \Omega \mathbf{P}_A \right) \, d\Omega \quad (3.10b)$$

$$+ \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^t \Omega \left(\Phi^t \dot{\mathbf{s}} + \Omega \mathbf{P}_A \right) \, d\Omega \quad (3.10c)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left(\dot{\mathbf{s}}^t \mathbf{s} + 2 \dot{\mathbf{s}}^t \Phi \Omega \mathbf{P}_A - \mathbf{P}_A^t \Omega^2 \mathbf{P}_A \right) \, d\Omega \quad (3.10d)$$

Énergie potentielle totale

L'expression de l'énergie potentielle est composée de l'énergie de déformation, ainsi que du travail virtuel des forces surfaciques t et volumiques de Lagrange \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathcal{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{f} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^t t \, d(\partial\Omega) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^t \mathcal{D} (\nabla \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^t \mathbf{f} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^t t \, d(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Où \mathcal{D} est la matrice modélisant le comportement élastique du matériau. Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}$ représente les déformations tel que :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Fonction de dissipation

On introduit la fonction de dissipation de type amortissement visqueux sous la forme :

$$\mathbf{F}_d = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^t \mathcal{D} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (3.13)$$

3.1.3 Équation du mouvement

On discrétise les déplacements \mathbf{u} par la méthode des éléments finis. Nous considérons à titre d'exemple, des éléments volumiques hexaédriques quadratiques à 20 noeuds (Figure 3.2).

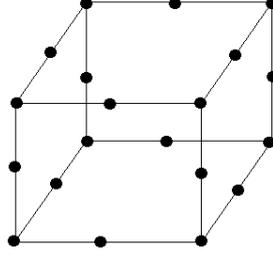


Fig. 3.2: Élément volumique à 20 noeuds

Dans ce cas, la discrétisation du champ de déplacement correspondant aux éléments volumiques à chaque noeud est exprimée sous la forme suivante :

$$u = \langle N_u^{3d} \rangle \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} = \langle N_1^{3d} \ 0 \ 0 \ \dots \ N_{20}^{3d} \ 0 \ 0 \rangle \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_{20} \ v_{20} \ w_{20} \}^t \quad (3.14a)$$

$$v = \langle N_v^{3d} \rangle \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} = \langle 0 \ N_1^{3d} \ 0 \ \dots \ 0 \ N_{20}^{3d} \ 0 \rangle \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_{20} \ v_{20} \ w_{20} \}^t \quad (3.14b)$$

$$w = \langle N_w^{3d} \rangle \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} = \langle 0 \ 0 \ N_1^{3d} \ \dots \ 0 \ 0 \ N_{20}^{3d} \rangle \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_{20} \ v_{20} \ w_{20} \}^t \quad (3.14c)$$

Où les fonctions N_i^{3d} pour $i \in [1, 20]$ sont les fonctions de forme à chaque noeud de l'élément hexaédrique et où \mathbf{q}_e^{3d} est le vecteur des coordonnées généralisées correspondantes. La définition de ces fonctions se trouve, par exemple, dans la documentation de référence de CODE_ASTER [R3.08.01]. Le vecteur $\{ \mathbf{q}_e^{3d} \}$ est celui des déplacements nodaux de l'élément volumique. Dans le but de simplifier l'écriture, nous rassemblons les trois équations de (3.14) par une matrice contenant les fonctions de forme du modèle 3D :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{3d} & 0 & 0 & \dots & N_{20}^{3d} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{3d} & 0 & \dots & 0 & N_{20}^{3d} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{3d} & \dots & 0 & 0 & N_{20}^{3d} \end{bmatrix} \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} \quad (3.15)$$

La discrétisation des déplacements en fonction du champ des fonctions de forme \mathbf{H} permet d'écrire \mathbf{T} , \mathbf{U} , et \mathbf{F}_d respectivement comme suit :

- Énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{G} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t (\Phi^t \dot{\mathbf{s}} + \Omega \mathbf{P}_A) \, d\Omega \\ &+ \dot{\mathbf{q}}^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t (\Phi^t \dot{\mathbf{s}} + \Omega \mathbf{P}_A) \, d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^t \dot{\mathbf{s}} + 2 \dot{\mathbf{s}}^t \Phi \Omega \mathbf{P}_A - \mathbf{P}_A^t \Omega^2 \mathbf{P}_A) \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.16a)$$

- Énergie potentielle :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{D} \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \int_{\Omega} \mathbf{H}^t \mathbf{f} \, d\Omega - \mathbf{q}^t \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^t t \, d(\partial\Omega) \quad (3.17a)$$

- Travail des forces dissipatives :

$$\mathbf{F}_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.18)$$

En notant $\mathbf{q}^{3d} = \mathbf{q}$ le vecteur de tous les déplacements généralisés nodaux 3D, l'application des équations de Lagrange sur ces trois quantités permettent d'établir l'équation du mouvement d'un corps dans un repère tournant :

$$\boxed{\mathbf{M}_{3d} \ddot{\mathbf{q}}^{3d} + (\mathbf{D}_{3d} + \mathbf{G}_{3d}) \dot{\mathbf{q}}^{3d} + (\mathbf{K}_{3d} + \mathbf{P}_{3d} + \mathbf{N}_{3d}) \mathbf{q}^{3d} = \mathbf{r}^{3d} + \mathbf{f}^{3d}} \quad (3.19)$$

Dans cette équation (3.19) on distingue respectivement les quantités suivantes : la matrice de masse \mathbf{M}_{3d} , la matrice d'amortissement \mathbf{D}_{3d} , la matrice de gyroscopie \mathbf{G}_{3d} , la matrice de raideur \mathbf{K}_{3d} , la matrice d'accélération centrifuge \mathbf{N}_{3d} , la matrice d'accélération angulaire \mathbf{P}_{3d} , le vecteur des forces d'inertie \mathbf{r}^{3d} et vecteur des forces externes \mathbf{f}^{3d} .

$$\mathbf{M}_{3d} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \mathbf{H} \, d\Omega \quad (3.20)$$

$$\mathbf{D}_{3d} = \int_{\Omega} \eta (\nabla \mathbf{H})^t \mathcal{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \quad (3.21)$$

$$\mathbf{G}_{3d} = 2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \Omega \mathbf{H} \, d\Omega \quad (3.22)$$

$$\mathbf{P}_{3d} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \dot{\Omega} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (3.23)$$

$$\mathbf{N}_{3d} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \Omega^2 \mathbf{H} \, d\Omega \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}_{3d} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^t \mathcal{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \quad (3.25)$$

$$\mathbf{r}^{3d} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^t \left(\mathbf{R}^t \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\Omega} \mathbf{P}_A + \Omega^2 \mathbf{P}_A \right) \, d\Omega \quad (3.26)$$

$$\mathbf{f}^{3d} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^t \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{H}^t t \, d(\partial\Omega) \quad (3.27)$$

3.2 Modélisation poutre

Dans cette section, considérons une ligne d'arbres élancée modélisée par des éléments de poutre et nous allons établir son équation du mouvement de rotation autour de son axe principal. La démarche est très similaire à celle suivie dans la section 3.1. Dans cette approche nous considérons éléments de structure de type poutres de Timoshenko droites de section constante sur la longueur (Figure 3.3). La section droite de la poutre est indéformable et le déplacement transversal est uniforme sur la section droite avec prise en compte du cisaillement transverse.

Pour simplifier les notations, nous supposons que :

- x est l'axe de la fibre neutre de la poutre,
- y et z sont les axes principaux d'inertie de la section,

Nous adoptons la convention utilisée dans `CODE_ASTER` qui définit le sens positif suivant l'axe de rotation comme étant le sens trigonométrique positif de rotation.

Ces hypothèses permettent d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la section, en fonction d'un accroissement de déplacement dû à la rotation de la section autour des axes transversaux. Le déplacement d'un point (p) de la section droite de la poutre s'écrit sous forme générale :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x) & z\theta_y(x) & -y\theta_z(x) & 0 \\ 0 & 0 & v(x) & -(z - z_c)\theta_x(x) \\ 0 & w(x) & 0 & (y - y_c)\theta_x(x) \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Ce champ est constitué de la somme respective de quatre champs distincts : Le

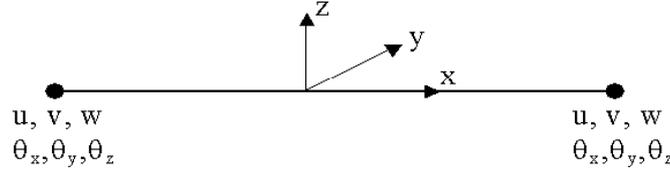


Fig. 3.3: Élément de poutre à 6 degrés de liberté par noeud

déplacement de la membrane, la flexion par rapport à l'axe des y , la flexion par rapport à l'axe des z et la torsion. Les quantités u , v , et w sont les translations selon les axes x , y , et z . θ_x , θ_y , et θ_z sont les rotations autour des mêmes axes respectifs.

Énergies cinétique et potentielle

La démarche suivie est identique à celle présentée dans la section 3.1.2. Le vecteur $\{\mathbf{q}_e^{1d}\}$ est celui des degrés de liberté d'un élément de poutre de Timoshenko (figure 3.3).

$$\{\mathbf{q}_e^{1d}\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}\}^t \quad (3.29)$$

On définit les interpolations suivantes :

$$u = \langle N_u^{1d} \rangle \{\mathbf{q}_e^{1d}\} = \langle N_1^{1d} \ N_2^{1d} \rangle \{u_1 \ u_2\}^t \quad (3.30a)$$

$$v = \langle N_v^{1d} \rangle \{\mathbf{q}_e^{1d}\} = \langle N_3^{1d} \ N_4^{1d} \ N_5^{1d} \ N_6^{1d} \rangle \{v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2}\}^t \quad (3.30b)$$

$$w = \langle N_w^{1d} \rangle \{\mathbf{q}_e^{1d}\} = \langle N_7^{1d} \ N_8^{1d} \ N_9^{1d} \ N_{10}^{1d} \rangle \{w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2}\}^t \quad (3.30c)$$

Les fonctions N_i^{1d} pour $i \in [1, 10]$ sont les fonctions de forme de flexion de la poutre. Les paramètres y et z sont les coordonnées dans les deux directions de l'épaisseur (`CODE_ASTER` :R3.08.01).

3.2.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un élément de rotor de longueur L_e et de section constante est la suivante :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\rho S \int_0^{L_e} [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx + \frac{1}{2}\rho \mathbf{I}_{yz} \int_0^{L_e} [\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2] dx \quad (3.31a)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho \mathbf{I}_x \cdot L \cdot \check{w}_1^2 + \rho \check{w}_1 \mathbf{I}_x \int_0^{L_e} \dot{\theta}_y \dot{\theta}_z dx \quad (3.31b)$$

avec ρ la densité, S la section, \check{w}_1 la vitesse angulaire autour de l'axe principal et I le moment d'inertie diamétral. Dans cette expression de l'énergie cinétique, le premier terme représente l'énergie cinétique de translation, le deuxième et le troisième termes sont ceux de l'énergie cinétique de rotation, et finalement l'effet gyroscopique apparaît dans le dernier terme. Le remplacement des expressions de (3.30) dans la formulation de l'énergie cinétique donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{1}{2} \langle \delta \dot{\mathbf{u}} \rangle \mathbf{M}_1 \{ \delta \dot{\mathbf{u}} \} + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{\mathbf{w}} \rangle (\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4) \{ \delta \dot{\mathbf{w}} \} + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{\mathbf{v}} \rangle (\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5) \{ \delta \dot{\mathbf{v}} \} \\ & + \check{w}_1 \langle \delta \dot{\mathbf{v}} \rangle \mathbf{M}_6 \{ \delta \dot{\mathbf{w}} \} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{I}_x \check{w}_1^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.2.2 Énergie potentielle

L'énergie de déformation d'une poutre de Timoshenko en rotation est égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \left[ES w_{,x}^2 + EI_{yz} (\theta_{y,x}^2 + \theta_{z,x}^2) + GI_x \check{w}_{1,x}^2 \right. \\ & \left. + kGS ((v_{,x} - \theta_z)^2 + (w_{,x} + \theta_y)^2) \right] dx \end{aligned} \quad (3.33)$$

où k est le facteur de correction pour la rigidité en cisaillement.

3.2.3 Équation d'équilibre

Dans le cadre de cette modélisation de poutre, les équations de Lagrange pour l'énergie cinétique se présentent comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \text{où } \mathbf{q} = \langle u \ v \ w \rangle \quad (3.34)$$

En appliquant l'équation de Lagrange (3.34) sur l'expression de l'énergie cinétique (3.32) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\delta \dot{\mathbf{u}})} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\delta \mathbf{u})} &= \mathbf{M}_1 \{ \delta \ddot{\mathbf{u}} \} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\delta \dot{\mathbf{v}})} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\delta \mathbf{v})} &= (\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5) \{ \delta \ddot{\mathbf{v}} \} - \check{\omega}_1 \mathbf{M}_6 \{ \delta \dot{\mathbf{w}} \} - \frac{d\check{\omega}_1}{dt} \mathbf{M}_6 \{ \delta \mathbf{w} \} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\delta \dot{\mathbf{w}})} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\delta \mathbf{w})} &= (\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4) \{ \delta \ddot{\mathbf{w}} \} + \check{\omega}_1 \mathbf{M}_6^t \{ \delta \dot{\mathbf{v}} \}
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

En notant $\mathbf{q}^{1d} = \mathbf{q}q$ le vecteur de tous les déplacements généralisés nodaux 1D, l'équation d'équilibre d'une modélisation poutre en rotation autour de son axe s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\mathbf{M}_{1d} \ddot{\mathbf{q}}^{1d} + \mathbf{G}_{1d} \dot{\mathbf{q}}^{1d} + (\mathbf{K}_{1d} + \mathbf{P}_{1d}) \mathbf{q}^{1d} = \mathbf{f}^{1d}} \quad (3.36)$$

Les matrices \mathbf{M}_{1d} et \mathbf{K}_{1d} sont respectivement les matrices de masse et de rigidité de la poutre. La matrice \mathbf{G}_{1d} est la matrice d'amortissement gyroscopique, constituée à partir de la matrice \mathbf{M}_6 et de sa transposée et multipliée par la vitesse angulaire $\check{\omega}_1$. La matrice \mathbf{P}_{1d} est la matrice de raideur gyroscopique de la poutre, construite à partir de la matrice \mathbf{M}_6 et multipliée par l'accélération angulaire. \mathbf{f}^{1d} est le vecteur des forces externes s'exerçant sur la poutre (force de balourd, par exemple). Notons que, contrairement au cas 3D, il n'y a pas de matrice d'accélération centrifuge \mathbf{N}_{1d} .

3.3 Bi-modèle Arlequin 3D-1D en dynamique à l'arrêt

Nous nous intéressons dans cette section aux spécificités de la mise en oeuvre du couplage Arlequin des éléments volumique 3D avec des éléments de poutre 1D. Dans un premier temps et afin de découpler les difficultés, nous considérons une configuration de bi-modèle 1D-3D à l'arrêt, i.e. en l'absence d'une dynamique de rotation d'ensemble. Dans ce cadre, le modèle grossier est assimilé aux éléments de poutre à six degrés de liberté par noeuds et le modèle fin à la modélisation tridimensionnelle par des éléments tridimensionnels iso-paramétriques. Dans le but de simplifier l'implémentation numérique, nous faisons le choix d'utiliser des maillages hiérarchiques (Figure 3.4). On note que dans le cas où les éléments 3D et 1D se chevaucheraient, l'approche reste valable. Une étape supplémentaire est néanmoins nécessaire. Elle consiste à construire un maillage pseudo-compatible aux deux maillages non conformes sur la zone de recouvrement ainsi qu'à trouver les liens de parenté entre ces différents maillages (opérateur de projection).

3.3.1 Discrétisations des champs de déformations et contraintes

Dans le but de construire les opérateurs de couplage énergétique Arlequin, nous avons besoins, dans un premier temps, d'explicitier les champs de déformations et de contraintes associées aux champs de déplacement définis dans la section précédente.

3.3.1.1 Élément poutre

Les déformations d'un point quelconque de la section de la poutre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ 2\varepsilon_{xy}(x, y, z) \\ 2\varepsilon_{xz}(x, y, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{l} z \frac{\partial \theta_y(x)}{\partial x} \\ 0 \\ \theta_y + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \end{array} + \begin{array}{l} -y \frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} \\ -\theta_z + \frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ 0 \end{array} + \begin{array}{l} 0 \\ -z \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \\ y \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

Avec les notations de la section précédente, nous définissons la matrice \mathbf{B}_{1d} , construite à partir des fonctions de forme des poutres et de leurs dérivées :

$$\mathbf{B}_{1d} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial N_{co}^{1d}}{\partial x} & y \frac{\partial N_5^{1d}}{\partial x} & z \frac{\partial N_5^{1d}}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial N_6^{1d}}{\partial x} & -y \frac{\partial N_6^{1d}}{\partial x} \\ 0 & N_5^{1d} + \frac{\partial N_1^{1d}}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_{to}^{1d}}{\partial x} & 0 & -N_6^{1d} - \frac{\partial N_2^{1d}}{\partial x} \\ 0 & 0 & N_5^{1d} + \frac{\partial N_1^{1d}}{\partial x} & y \frac{\partial N_{to}^{1d}}{\partial x} & N_6^{1d} + \frac{\partial N_2^{1d}}{\partial x} & 0 \\ + \frac{\partial N_{co}^{1d}}{\partial x} & y \frac{\partial N_7^{1d}}{\partial x} & z \frac{\partial N_7^{1d}}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial N_8^{1d}}{\partial x} & -y \frac{\partial N_8^{1d}}{\partial x} \\ + 0 & N_7^{1d} + \frac{\partial N_3^{1d}}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_{to}^{1d}}{\partial x} & 0 & -N_8^{1d} - \frac{\partial N_4^{1d}}{\partial x} \\ + 0 & 0 & N_7^{1d} + \frac{\partial N_3^{1d}}{\partial x} & y \frac{\partial N_{to}^{1d}}{\partial x} & N_8^{1d} + \frac{\partial N_4^{1d}}{\partial x} & 0 \end{array} \right]$$

Ainsi, le champ de déformation (3.37) discrétisé correspondant aux éléments de poutre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{array} \right\} = \mathbf{B}_{1d} \{ \mathbf{q}_e^{1d} \} \quad (3.38)$$

En tenant compte de la loi de comportement élastique isotrope, la relation entre les tenseurs des contraintes et des déplacements pour les éléments de poutre est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) \\ \sigma_{xz}(x, y, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} E\varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ 2G\varepsilon_{xy}(x, y, z) \\ 2G\varepsilon_{xz}(x, y, z) \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

3.3.1.2 Élément volumique

Le vecteur de déformation correspondant est discrétisé en dérivant la matrice des fonctions de forme volumiques :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial y} & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial z} & \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial z} & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{3d}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial y} & \frac{\partial N_{20}^{3d}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} = \mathbf{B}_{3d} \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} \quad (3.40)$$

3.3.2 Discrétisation des multiplicateurs de Lagrange

Nous présentons dans ce qui suit la discrétisation du champ des multiplicateurs de Lagrange en faisant attention au phénomène de verrouillage. Dans cette optique, ces multiplicateurs évoluent sur le champ du modèle grossier et sont discrétisés de manière identique aux éléments poutres. Il est alors possible de présenter la discrétisation du champ de déformation correspondant aux multiplicateurs de Lagrange comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(\lambda) \\ 2\varepsilon_{xy}(\lambda) \\ 2\varepsilon_{xz}(\lambda) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{1d} \{ \boldsymbol{\lambda}_e \} \quad (3.41)$$

La matrice des fonctions de forme et de leurs dérivées \mathbf{B}_{1d} associée au champ de déformation est celle des poutres. Le vecteur des degrés de liberté associé aux forces fictives $\{ \boldsymbol{\lambda}_e \}$ est défini par :

$$\{ \boldsymbol{\lambda}_e \} = \left\{ \lambda_u^1 \ \lambda_v^1 \ \lambda_w^1 \ \lambda_{\theta_x}^1 \ \lambda_{\theta_y}^1 \ \lambda_{\theta_z}^1 \ \lambda_u^2 \ \lambda_v^2 \ \lambda_w^2 \ \lambda_{\theta_x}^2 \ \lambda_{\theta_y}^2 \ \lambda_{\theta_z}^2 \right\}^t \quad (3.42)$$

De façon identique à (3.39), nous pouvons écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(\lambda) \\ \sigma_{xy}(\lambda) \\ \sigma_{xz}(\lambda) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\varepsilon_{xx}(\lambda) \\ 2G\varepsilon_{xy}(\lambda) \\ 2G\varepsilon_{xz}(\lambda) \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Nous nous contentons de la présentation des champs de déformation (3.42) et de contrainte (3.43), puisqu'ils constituent les ingrédients de base du couplage énergétique (2.20) développé dans la section suivante.

3.3.3 Mise en place des opérateurs de collage

3.3.3.1 Opérateur de couplage associé à la zone 1D

La discrétisation de l'opérateur de couplage énergétique (2.20) permet d'obtenir la matrice de couplage élémentaire correspondante sur un élément donné. Nous présentons cette démarche sur un élément de poutre donné de domaine Ω_e :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{1d}) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{1d}) d\Omega_e \\
 &= \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_{1d} \mathcal{D}_{1d} \{ \boldsymbol{\lambda}_e \} \right)^t \left(\mathbf{B}_{1d} \{ \mathbf{q}_e^{1d} \} \right) d\Omega_e \\
 &= \{ \boldsymbol{\lambda}_e \}^t \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{1d}^t \mathcal{D}_{1d}^t \mathbf{B}_{1d} d\Omega_e \right) \{ \mathbf{q}_e^{1d} \} \\
 &= \{ \boldsymbol{\lambda}_e \}^t \mathbf{L}_{1d}^e \{ \mathbf{q}_e^{1d} \}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

La matrice de couplage élémentaire attribuée aux éléments de poutre est la suivante :

$$\mathbf{L}_{1d}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{1d}^t \mathcal{D}_{1d}^t \mathbf{B}_{1d} d\Omega_e \tag{3.45}$$

L'intégration numérique de (3.45) se réalise à travers la méthode de quadrature de Gauss qui permet d'approximer la valeur numérique de l'intégrale :

$$\mathbf{L}_{1d}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{1d}^t \mathcal{D}_{1d}^t \mathbf{B}_{1d} d\Omega_e \tag{3.46}$$

$$\simeq \sum_{g=1}^n w_g J \cdot \left(\mathbf{B}_{1d}^t(\xi_{1d}) \mathcal{D}_{1d}^t \mathbf{B}_{1d}(\xi_{1d}) \right) \tag{3.47}$$

Les w_g sont les coefficients de poids de Gauss. Le paramètre J est le déterminant de la matrice jacobienne de transformation qui autorise le passage entre l'élément de référence et l'élément physique. Les matrices des fonctions de forme de poutre sont évaluées dans un élément de référence aux différents points de Gauss de la poutre. Nous notons, au passage, que la matrice de couplage \mathbf{L}_{1d}^e correspond à la matrice de rigidité d'un élément de poutre. Elle peut, par conséquent, être calculée de façon analytique.

3.3.3.2 Opérateur de couplage associé à la zone 3D

La matrice élémentaire de couplage élémentaire \mathbf{L}_{3d}^e est développée à partir des champs de déplacement des éléments volumiques, ainsi que des multiplicateurs de Lagrange discrétisés sur le modèle 1D :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{3d}) = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{3d}) d\Omega_e$$

La démarche de construction de cette matrice sur le modèle fin en espace (3D) est plus délicate que celle du modèle grossier. La complexité de ce couplage réside dans la coexistence de deux champs appartenant à des espaces différents. Nous présentons ce cadre en deux étapes. Dans un premier temps, nous commençons par introduire les ingrédients techniques indispensables. Ensuite, nous développons l'expression issue de l'intégration numérique de l'opérateur de couplage.

Ingrédients techniques :

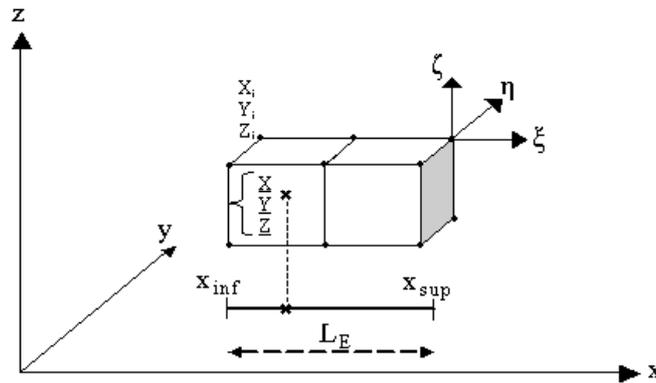


Fig. 3.4: Illustration du couplage 3D-1D

- Les matrices des fonctions de forme 3D sont évaluées dans un élément de référence aux différents points de Gauss ξ_{3d} , η_{3d} , et ζ_{3d} .
- Les coordonnées physiques de chaque noeud des éléments 3D sont définies par $\{X_i \ Y_i \ Z_i\}$. **Pour chaque point de Gauss** dans l'élément 3D nous calculons les interpolations suivantes :

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^{N_{\max}} N_i X_i(\xi_{3d}, \eta_{3d}, \zeta_{3d}) \quad (3.48a)$$

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^{N_{\max}} N_i Y_i(\xi_{3d}, \eta_{3d}, \zeta_{3d}) \quad (3.48b)$$

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^{N_{\max}} N_i Z_i(\xi_{3d}, \eta_{3d}, \zeta_{3d}) \quad (3.48c)$$

avec N_{\max} le nombre de noeuds de l'élément 3D. Les fonctions de forme N_i sont présentées dans la section 3.3.1.2.

- Les fonctions de forme de poutre sont calculées en fonction du paramètre $\bar{\xi}_{1d}$. Il est défini par la projection du point de Gauss concerné dans l'élément 3D sur l'élément de poutre correspondant :

$$\bar{\xi}_{1d} = \frac{X - X_{inf}}{L_E} \quad (3.49)$$

- Les coordonnées dans les deux directions de l'épaisseur de la poutre sont données par :

$$y = \underline{Y} \quad ; \quad z = \underline{Z} \quad (3.50)$$

Cette technique permet de discrétiser les multiplicateurs de Lagrange sur les éléments de poutre. Les équations (3.48), (3.49), et (3.50) résument les points clés nécessaires à ce travail.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{3d}) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{3d}) d\Omega_e \\ &= \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_{1d} \mathcal{D}_{3d} \{ \boldsymbol{\lambda}_e \} \right)^t \left(\mathbf{B}_{3d} \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} \right) d\Omega_e \\ &= \{ \boldsymbol{\lambda}_e \}^t \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{1d}^t \mathcal{D}_{3d}^t \mathbf{B}_{3d} d\Omega_e \right) \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} \\ &= \{ \boldsymbol{\lambda}_e \}^t \mathbf{L}_{3d}^e \{ \mathbf{q}_e^{3d} \} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Une quadrature numérique de Gauss permet d'écrire ce qui suit :

$$\mathbf{L}_{3d}^e = \sum_{g=1}^n w_g \cdot J \cdot \left(\mathbf{B}_{1d}^t(\bar{\xi}_{1d}) \mathcal{D}_{3d}^t \mathbf{B}_{3d}(\xi_{3d}, \eta_{3d}, \zeta_{3d}) \right) \quad (3.52)$$

Pour le calcul de la matrice de couplage \mathbf{L}_{3d}^e , une quadrature numérique classique à 27 points de Gauss est utilisée et donne entière satisfaction.

3.3.3.3 Application sur une poutre encastree libre

Dans cette section nous présentons un cas-test simple dans le but de vérifier le raccord 3D-1D dans le cadre dynamique (Figure 3.5). On considère un couplage 3D-1D représentant une poutre encastree - libre de section constante (carré de côté $c = 0.02$ m). Ce modèle est fixé à l'extrémité gauche (modèle 3D) et soumis à un chargement sinusoïdal $\mathbf{F}(t) = A \sin(2\pi t/3)$ au niveau du côté droit (modèle poutre). Le modèle global est décomposé en deux sous-domaines de longueur $L_{3D} = 0.12$ m et $L_{1D} = 0.28$ m. Dans la zone de collage (Figure 3.6) de longueur $l_{\Omega_0} = 0.04$ m, deux éléments de poutre (6 degrés de liberté par noeud) sont couplés avec 36 éléments 3D (20 noeuds). Les caractéristiques matériaux sont les suivantes : module de Young $E = 2.10^{11}$ N.m², masse volumique $\rho = 7800$ Kg.m³, et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. L'intégration numérique sur les deux sous-domaines est effectuée avec le même schéma d'accélération moyenne de Newmark et sur la même échelle de temps. La courbe de référence est obtenue par une modélisation 3D de toute la structure. La figure 3.7-a montre la flèche du modèle couplé à l'instant $t = 10$ s. Ce graphe permet de s'assurer de la tenue du couplage à un instant donné. Les figures 3.7-b, 3.7-c, et 3.7-d représentent respectivement le déplacement transversal, la vitesse, et



Fig. 3.5: Maillage du couplage 3D-1D

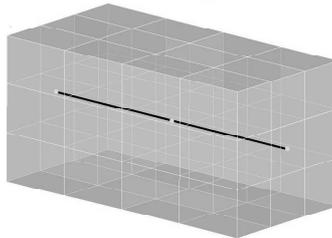


Fig. 3.6: Zoom sur la zone de collage Ω_0

l'accélération à l'extrémité de la poutre, à l'instant final du calcul $t = 30$ s. Ces résultats montrent une bonne correspondance des résultats avec les résultats issus du calcul de référence. On note que ce cas test constitue une première vérification simple du raccord 3D-1D. Ce cadre sera appliqué et testé dans des configurations plus compliquées et plus sévères dans les chapitres suivants.

Remarque 3 Dans ce cas de figure, où le modèle 3D est de section carrée, la finesse du maillage de la section n'influence pas la qualité du couplage du fait que la représentation de la géométrie est exacte. Par ailleurs, dans le cas où des patches 3D cylindriques sont couplés avec des modèles de poutre correspondants, la qualité du couplage dépend fortement de la finesse du maillage de la section du patch.

3.4 Bi-modèle Arlequin 3D-1D en dynamique de rotation : couplage multi-repères

L'application de la méthode Arlequin à la dynamique des machines tournantes nécessite une réflexion théorique particulière. Les modèles de poutre étant modélisés par défaut dans un repère Galiléen fixe, nous faisons le choix d'écrire l'équation du mouvement du modèle 3D dans le repère tournant. Ce choix nécessite des développements théoriques spécifiques. Nous fixons ci après quelques points clés pris en compte lors de la mise en équation de ce cadre :

- Les équations du mouvement de chacun des modèles 1D et 3D doivent être écrites dans les repères fixe et tournant, respectivement (cohérence avec le code EF).
- Les multiplicateurs de Lagrange sont toujours traités dans le repère fixe car ils sont définis sur le même espace que celui du modèle 1D.

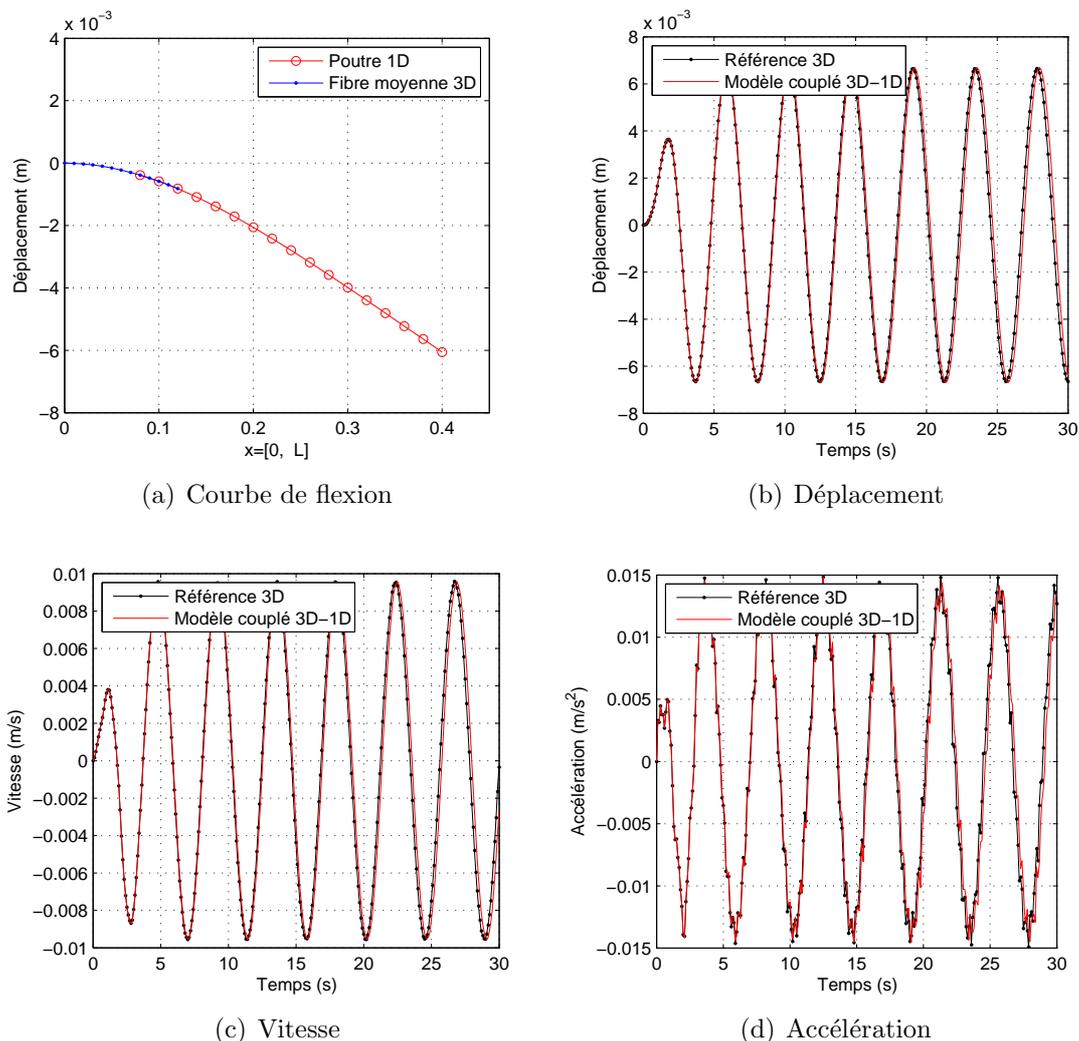


Fig. 3.7: Résultats nodaux du couplage 3D-1D

- La condition de couplage Arlequin doit être écrite dans le repère fixe et, par conséquent, les déplacements du modèle 3D doivent être projetés dans ce repère.

3.4.1 Définitions

Nous définissons la matrice de rotation élémentaire Φ_e d'un vecteur \overrightarrow{OM} autour de l'axe des longitudinal des abscisses d'origine O comme suit :

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\check{\omega}_1 t) & -\sin(\check{\omega}_1 t) \\ 0 & \sin(\check{\omega}_1 t) & \cos(\check{\omega}_1 t) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

La matrice Φ constitue ainsi l'assemblage des matrices élémentaires Φ_e autorisant la rotation de plusieurs vecteurs, ainsi que le passage d'une matrice d'un repère à l'autre.

Ainsi, un vecteur \mathbf{u}_r dans le repère tournant $\mathbf{R}_r(x_r, y_r, z_r)$ est projeté dans le repère fixe $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$ et inversement, comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_f = \Phi \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_r = \Phi^t \mathbf{u}_f \end{cases} \quad (3.54)$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned} u_{x_f} &= u_{x_r} \\ u_{y_f} &= u_{y_r} \cos(\check{\omega}_1 t) - u_{z_r} \sin(\check{\omega}_1 t) \\ u_{z_f} &= u_{y_r} \sin(\check{\omega}_1 t) + u_{z_r} \cos(\check{\omega}_1 t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

La projection du champ des multiplicateurs de Lagrange entre les deux repères

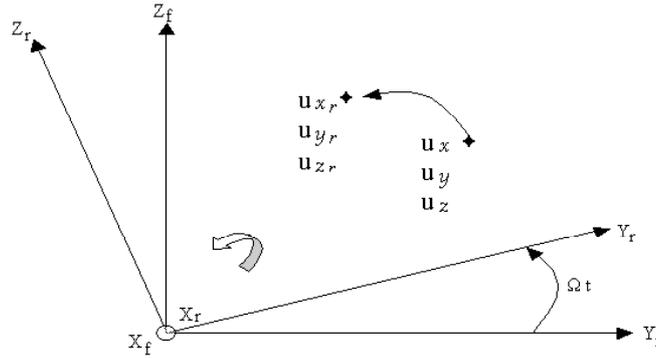


Fig. 3.8: Changement de repère

s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_f = \Phi \lambda_r \\ \lambda_r = \Phi^t \lambda_f \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes pour un champ quelconque \mathbf{X} :

- \mathbf{X}_f évolue dans le repère fixe
- \mathbf{X}_r évolue dans le repère rotationnel

3.4.2 Opérateurs de couplage

Nous reprenons la formulation continue présentée dans la section (2.1.2) du chapitre 2. La formulation faible du problème Arlequin bi-modèle s'écrit comme suit :

Trouver $(\mathbf{u}_f^{1d}(t), \mathbf{u}_r^{3d}(t), \lambda_f(t)) \in \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2 \times \mathcal{M}$, $t \in [0, T]$, tel que :

$$\forall \delta \mathbf{u}_f^{1d} \in \mathcal{V}_0^1 \quad M_{1d}(\mathbf{u}_f^{1d}, \delta \mathbf{u}_f^{1d}) + K_{1d}(\mathbf{u}_f^{1d}, \delta \mathbf{u}_f^{1d}) + C_{1d}(\boldsymbol{\lambda}_f, \delta \mathbf{u}_f^{1d}) = \mathbf{f}_{1d}(\delta \mathbf{u}_f^{1d}) \quad (3.57a)$$

$$\forall \delta \mathbf{u}_r^{3d} \in \mathcal{V}^2 \quad M_{3d}(\mathbf{u}_r^{3d}, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) + K_{3d}(\mathbf{u}_r^{3d}, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) - C_{3d}(\boldsymbol{\lambda}_r, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) = \mathbf{f}_{3d}(\delta \mathbf{u}_r^{3d}) \quad (3.57b)$$

$$\forall \delta \boldsymbol{\lambda}_f \in \mathcal{M} \quad C(\delta \boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{u}_f^{1d} - \mathbf{u}_f^{3d}) = 0 \quad (3.57c)$$

avec $\boldsymbol{\lambda}_r = \boldsymbol{\Phi}^t \boldsymbol{\lambda}_f$ et $\mathbf{u}_r^{3d} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}_f^{3d}$. Dans ce système (3.57), l'équation (3.57a) correspond à la formulation du modèle poutre qui évolue dans le repère fixe, et l'équation (3.57b) représente la modélisation 3D qui progresse dans le repère tournant.

L'opérateur de collage $C_{3d}(\boldsymbol{\lambda}_f, \delta \mathbf{u}_r^{3d})$ de l'équation (3.57b) s'applique sur les déplacements \mathbf{u}_r^{3d} en rotation, ainsi que sur la projection des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_f$ discrétisés sur le modèle grossier :

$$\begin{aligned} \forall \delta \mathbf{u}_r^{3d} \in \mathcal{V}^2, \quad C_{3d}(\boldsymbol{\lambda}_r, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\delta \mathbf{u}_r^{3d}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}_r) d\Omega_e \\ &= \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_{3d} \mathcal{D}_{3d} \{ \delta \mathbf{q}_r^{3d} \} \right)^t \left(\mathbf{B}_{3d} \{ \boldsymbol{\lambda}_r \} \right) d\Omega_e \\ &= \{ \delta \mathbf{q}_r^{3d} \}^t \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{3d}^t \mathcal{D}_{3d}^t \mathbf{B}_{1d} d\Omega_e \right) \{ \boldsymbol{\lambda}_r \} \quad (3.58) \\ &= \{ \delta \mathbf{q}_r^{3d} \}^t (\mathbf{L}_{3d}^e)^t \{ \boldsymbol{\lambda}_r \} \\ &= \{ \delta \mathbf{q}_r^{3d} \}^t (\mathbf{L}_{3d}^e)^t \boldsymbol{\Phi}^t \{ \boldsymbol{\lambda}_f \} \\ &= \{ \delta \mathbf{q}_r^{3d} \}^t ([\mathbf{L}_{3d}^e]^r)^t \{ \boldsymbol{\lambda}_f \} \end{aligned}$$

Dans l'équation (3.57c), l'opérateur de collage $C(\delta \boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{u}_f^{1d} - \mathbf{u}_f^{3d})$ s'applique sur la projection des déplacements \mathbf{u}_r^{3d} et sur les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_f$. Il est alors possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall (\delta \boldsymbol{\lambda}_f) \in \mathcal{M}, \quad C(\delta \boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{u}_f^{3d}) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\delta \boldsymbol{\lambda}_f) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_f^{3d}) d\Omega_e \\ &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\delta \boldsymbol{\lambda}_r) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_r^{3d}) d\Omega_e \\ &= \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_{1d} \mathcal{D}_{3d} \{ \delta \boldsymbol{\lambda}_r \} \right)^t \left(\mathbf{B}_{3d} \{ \mathbf{q}_r^{3d} \} \right) d\Omega_e \quad (3.59) \\ &= \{ \delta \boldsymbol{\lambda}_r \}^t \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{1d}^t \mathcal{D}_{3d}^t \mathbf{B}_{3d} d\Omega_e \right) \{ \mathbf{q}_r^{3d} \} \\ &= \{ \delta \boldsymbol{\lambda}_r \}^t \mathbf{L}_{3d}^e \{ \mathbf{q}_r^{3d} \} \\ &= \{ \delta \boldsymbol{\lambda}_f \}^t \boldsymbol{\Phi} \mathbf{L}_{3d}^e \{ \mathbf{q}_r^{3d} \} \\ &= \{ \delta \boldsymbol{\lambda}_f \}^t [\mathbf{L}_{3d}^e]^r \{ \mathbf{q}_r^{3d} \} \end{aligned}$$

Les équations de (3.58) et (3.59) montrent l'effet du changement de repère sur la matrice de couplage calculée sur le modèle fin. En effet, dans le but d'homogénéiser chacune des équations (5.1b) et (5.1c), des projections entre $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$ et

$\mathbf{R}_r(x_r, y_r, z_r)$ sont effectuées. Ces projections sont prises en compte dans une nouvelle matrice de couplage Arlequin projetée $[\mathbf{L}_{3d}^e]^r = \Phi \mathbf{L}_{3d}^e$.

Bilan

Ce chapitre a été dédié à la mise en place des briques élémentaires qui permettent de poser les bases de l'extension du cadre Arlequin à la dynamique des machines tournantes. Nous avons introduit les notions de repère Galiléen et de repère tournant, ainsi que la formulation de l'équilibre dans chacun de ces derniers. Ensuite, nous avons présenté le couplage Arlequin 3D-1D qui constitue un élément essentiel des applications visées dans le domaine des machines tournantes. La dernière partie a été consacrée à l'écriture des opérateurs de couplage Arlequin dans le contexte multi-repères. Ces éléments constituent les fondements d'une approche mixte basée sur la coexistence d'un repère tournant et d'un autre fixe dans le cadre Arlequin. Cette méthode développée pour des applications de type machines tournantes est détaillée et étendue au cadre multi-échelles en temps dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Nouvelle approche de raccord multi-échelles/multi-schémas

Ce chapitre est consacré au traitement des problèmes multi-échelles/multi-schémas et aux aspects énergétiques qui y sont liés. Il est divisé en deux parties principales.

Dans un premier temps, nous proposons un cadre rigoureux pour l'intégration mono-échelle / multi-schémas en temps pour le raccord de modèles avec recouvrement.

Dans un second temps, nous présentons une nouvelle méthode de couplage multi-échelles / multi-schémas, dans un contexte de raccord spatial avec recouvrement basé sur la méthode Arlequin.

Sommaire

4.1	Problème de déséquilibre énergétique	101
4.2	Approche mono-échelle/multi-schémas	102
4.2.1	Démarche	103
4.2.2	Algorithme multi-schémas/mono-échelle en temps	106
4.3	Approche multi-échelles/multi-schémas	110
4.3.1	Formulation discrétisée	111
4.3.2	Conservation de l'énergie	113

4.3.3	Algorithme multi-schémas/multi-échelles	118
4.3.4	Spécificités du couplage Explicite Implicite	121
4.4	Analyse de convergence	123
4.4.1	Couplage multi-schémas	124
4.4.2	Couplage multi-échelles en temps	126
4.5	Applications numériques	127
4.5.1	Raccord 1D-1D multi-schémas : Conservation de l'énergie . .	127
4.5.2	Raccord 2D-1D multi-échelles : Conservation de l'énergie . .	132
4.5.3	Raccord 3D-1D : Couplage multi-échelles implicite/explicite .	135

4.1 Problème de déséquilibre énergétique

Contexte

La décomposition de domaine permet d'associer à chaque sous-domaine ses propres paramètres de discrétisation numérique : schéma d'intégration et échelle de temps. Cette démarche est motivée par plusieurs considérations physiques, numériques, et informatiques. Par exemple, en cas de non traitement "propre" à l'interface, les ondes hautes fréquences "parasites" résultant d'un phénomène local (fissurations, fortes vibrations, chocs et contact-impact, défauts, ...) sont piégés dans les modèles locaux, modifiant ainsi la solution du problème au voisinage des zones d'intérêt. La dissipation de ces ondes à l'aide de schémas dissipatifs constitue une solution intéressante. Dans des situations similaires, il est pertinent de mettre en place des approches multi-schémas. Elles autorisent la dissipation numérique dans les zones d'intérêts, tout en conservant l'indépendance de l'intégration numérique (par exemple à l'aide de schémas conservatifs) sur le reste du modèle.

Par ailleurs, l'étude de phénomènes non-linéaires tels que le contact exige une certaine finesse du maillage en espace et, par conséquent, une discrétisation temporelle représentative. Ce niveau de détail, nécessaire pour capter la réponse du modèle, peut être assuré par les schémas d'intégration explicites. Précis, et faciles à implémenter (absence de matrices à inverser), ces algorithmes sont bien adaptés à ces applications où des pas de temps fins sont indispensables pour capter les instants de contact, par exemple. Notons toutefois que dans un cadre industriel, où des maillages à grand nombre de degrés de liberté sont utilisés, le temps de calcul peut considérablement augmenter et devenir rédhibitoire si la discrétisation temporelle est assez fine. D'un autre côté, substituer le schéma explicite par un autre implicite avec un pas de temps grossier, ne permet pas de reproduire une réponse précise du modèle.

Dans ce contexte, il est très judicieux de coupler l'approche multi-schémas à une méthode multi-échelles en temps. En présence de non linéarités localisées, par exemple, une telle stratégie permet d'utiliser des schémas d'ordre peu élevé au voisinage des zones d'intérêt et des schémas d'ordre supérieur loin des zones critiques (pour éviter la dispersion numérique). Cette stratégie permet, en l'occurrence, d'intégrer la zone d'intérêt avec un schéma explicite et des pas temps fins, tandis que le reste de la structure est intégré avec un schéma implicite (dissipatif ou bien conservatif) et une discrétisation temporelle plus grossière. La stabilité globale du système est garantie par la stabilité locale de chacun des sous-domaines. Ce cadre présente également un bon compromis entre la précision du schéma et l'efficacité des calculs. Des applications récentes de ces approches ont prouvé leur efficacité et leur valeur ajoutée par rapport aux approches traditionnelles. Dans [BRU 11], un code EF implicite est couplé à un autre code EF explicite dans le but de réaliser une étude non-linéaire, sur des structures en béton armé de taille réelle. Les résultats de cette étude dans un cadre multi-échelles en temps, montrent une réduction de 50%

du coût de calcul par rapport à un calcul explicite sur tout le modèle. Une approche similaire est présentée dans [DUP 11]. Elle porte sur l'analyse des phénomènes de délaminage au niveau des matériaux composites dans les structures aéronautiques.

Dans un premier temps, nous travaillons sur une échelle de temps commune aux deux sous-domaines, avant d'étendre le formalisme proposé à des échelles de temps différentes.

4.2 Approche mono-échelle/multi-schémas

Dans la section 2.2.2 du chapitre 2, nous avons démontré la conservation de l'énergie en continu par la méthode Arlequin pour $\mathbf{f} = 0$ et $\mathbf{h} = 0$:

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2) + \sum_{i \in \{1,2\}} \int_{\Omega_i} \varphi_i \mathbf{f} \dot{\mathbf{u}}^i d\Omega_i + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \dot{\mathbf{u}}^2 d\Gamma_h = 0 \quad (4.1)$$

D'autre part, nous avons établi le bilan d'énergie, au niveau discret, du schéma de Newmark d'un couplage de deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t (\bar{\mathbf{f}}^i + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \Delta \mathbf{f}^i) \\ &+ \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t (\mathbf{L}_i^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_i^t \Delta \boldsymbol{\lambda}) \\ &- \sum_{i=1,2} (\gamma_i - \frac{1}{2}) \{ (\Delta \mathbf{u}^i)^t \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u}^i + (\beta_i - \frac{1}{2} \gamma_i) \Delta t^2 (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^i) \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous avons également introduit la notion de travail d'interface $\Delta \mathcal{W}$. Il caractérise la contribution énergétique des efforts de collage dans la zone commune Ω_0 :

$$\Delta \mathcal{W} = \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t (\mathbf{L}_i^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_i^t \Delta \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3a)$$

$$= (\mathbf{L}_1 \Delta \mathbf{u}^1)^t (\bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_1 - \frac{1}{2}) \Delta \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3b)$$

$$+ (\mathbf{L}_2 \Delta \mathbf{u}^2)^t (\bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_2 - \frac{1}{2}) \Delta \boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3c)$$

Dans le cas particulier où les deux domaines sont intégrés avec le même schéma numérique de Newmark (ie. $\gamma_1 = \gamma_2$), la condition de raccord Arlequin $\mathbf{L}_1 \Delta \mathbf{u}^1 + \mathbf{L}_2 \Delta \mathbf{u}^2 = 0$ permet d'annuler le travail d'interface ($\Delta \mathcal{W} = 0$) et, donc, de conserver l'énergie totale du bi-modèle Arlequin dans le cadre discret. Ce résultat montre une consistance entre les formulations continue (4.1) et discrète (4.2).

Nous nous intéressons au cadre général où deux schémas de Newmark hétérogènes sont couplés ($\gamma_1 \neq \gamma_2$; $\beta_1 \neq \beta_2$). Cette configuration révèle une incompatibilité avec le résultat en continu, puisqu'un déséquilibre énergétique est observé au niveau de l'interface :

$$\Delta \mathcal{W} \neq 0 \quad (4.4)$$

L'aboutissement de cette démarche dans le cadre général confirme les hypothèses et les résultats présentés dans [ZAM 05, COM 02]. Dans ce qui suit, nous allons proposer une approche permettant d'intégrer deux schémas de Newmark différents, tout en assurant l'équilibre énergétique dans le cadre discret. Ce travail est fondé sur deux idées principales :

- Utiliser une méthode de raccord avec recouvrement : Nous appliquons cette approche dans le cadre de la méthode Arlequin. Nous verrons plus loin que grâce à la zone de recouvrement, il est possible de proposer une méthode qui assure l'équilibre énergétique.
- Garantir la liberté des multiplicateurs de Lagrange : Annuler l'énergie d'interface sans intervenir au niveau des multiplicateurs de Lagrange, permet d'intégrer numériquement les équations d'équilibre de façon naturelle. Les grandeurs cinématiques permettant le collage à l'interface peuvent s'exprimer sans aucune contrainte.

4.2.1 Démarche

Cadre et objectif

Nous rappelons que nous souhaitons intégrer Ω_1 et Ω_2 avec deux schémas de Newmark différents et sur la même échelle de temps (Figure 4.3). D'après la définition (4.3), cette intégration numérique génère un travail d'interface non nul et implique un déséquilibre énergétique $\Delta \mathcal{W} \neq 0$.

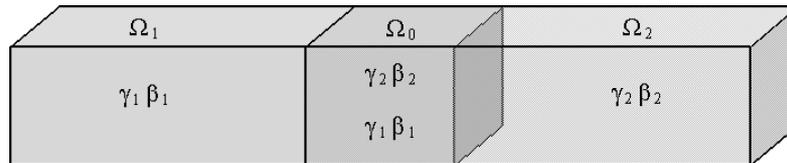


Fig. 4.1: Intégration numérique multi-schémas

L'objectif de ce travail vise à effectuer cette intégration numérique tout en assurant un travail d'interface nul. L'idée est de se ramener à des paramètres d'intégration numérique communs dans la zone commune comme pour le cas où $\gamma_1 \neq \gamma_2$; $\beta_1 \neq \beta_2$. Dans cette optique, nous rappelons la condition de continuité à l'interface présentée dans le chapitre 2 :

$$\forall t_k \quad \mathbf{L}_1 \mathbf{u}_k^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_k^2 = 0 \quad (4.5)$$

En reprenant l'écriture explicite du travail d'interface (4.2), il est possible de faire apparaître cette condition (4.5) en termes d'écart de déplacement, en considérant un paramètre du schéma de Newmark unique appliqué sur les deux modèles seulement dans la zone de recouvrement. Ce paramètre sera appelé $\tilde{\gamma}$ par la suite. À partir de cette supposition, il est possible de réécrire (4.3) de la façon suivante :

$$\Delta\mathcal{W} = \sum_{i=1,2} (\Delta\mathbf{u}^i)^t (\mathbf{L}_i^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_i^t \Delta\boldsymbol{\lambda}) \quad (4.6a)$$

$$= (\mathbf{L}_1 \Delta\mathbf{u}^1 + \mathbf{L}_2 \Delta\mathbf{u}^2)^t (\bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}) \Delta\boldsymbol{\lambda}) \quad (4.6b)$$

$$= 0 \quad (4.6c)$$

En vue d'annuler ce terme tout en offrant la possibilité d'intégrer les deux modèles avec deux schémas indépendants, nous proposons d'appliquer $\tilde{\gamma}$ comme paramètre commun uniquement dans la zone de collage. L'idée est de tirer profit du recouvrement Ω_0 dans le but de construire $\tilde{\gamma}$, et ce sans affecter les zones libres de chaque modèle.

Construction de $\tilde{\gamma}$: Nous proposons de construire le nouveau paramètre de Newmark $\tilde{\gamma}$ à partir des paramètres γ_1 et γ_2 correspondant aux schémas respectifs de Ω_1 et Ω_2 . Pour ce faire, et en s'inspirant de l'esprit du cadre Arlequin, nous proposons d'utiliser une fonction de partition de l'unité ξ (Figure 4.2), définie par :

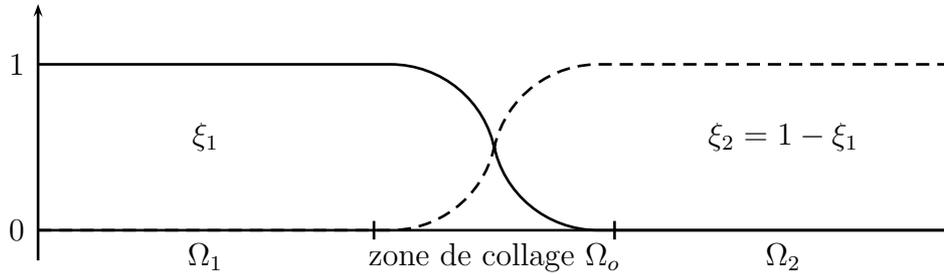


Fig. 4.2: Évolution des paramètres ξ_1 et ξ_2 à travers les différents sous-domaines

$$\xi_1 = 1 \quad \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega_0 \quad (4.7a)$$

$$\xi_2 = 1 \quad \text{sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 \quad (4.7b)$$

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.7c)$$

Le paramètre $\tilde{\gamma}$ est défini de la manière suivante :

$$\boxed{\tilde{\gamma} = \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2} \quad (4.8)$$

La continuité des déplacements à l'interface étant imposée à chaque instant t_k , la conservation de l'énergie $\Delta E = 0$ est assurée par la condition suivante :

$$\mathbf{L}_1 \Delta\mathbf{u}^1 + \mathbf{L}_2 \Delta\mathbf{u}^2 = 0 \quad (4.9)$$

Amélioration de la stabilité L'utilisation d'approches multi-schémas pose la question de la stabilité numérique du système global. Dans [ORT 86], les auteurs montrent que la stabilité de ces méthodes dépend uniquement des paramètres des schémas numériques concernés. Comme rappelé dans le chapitre bibliographique, la stabilité inconditionnelle des schémas de Newmark est donnée par les conditions suivantes :

$$\gamma_i \geq \frac{1}{2} \quad (4.10a)$$

$$\beta_i \geq \frac{\gamma_i}{2} \quad (4.10b)$$

D'après la définition (4.8) on a :

$$\tilde{\gamma} \in [\gamma_1, \gamma_2] \text{ pour } \gamma_1 < \gamma_2 \text{ et } \xi_i \in [0, 1] \quad (4.11)$$

En supposant que la condition de stabilité (4.10a) du schéma de Newmark est assurée sur chacun des sous-domaines Ω_i , nous pouvons déduire qu'elle est automatiquement garantie sur $\tilde{\gamma}$:

$$\frac{1}{2} \leq \gamma_1 \leq \tilde{\gamma} \leq \gamma_2 \quad (4.12)$$

Cette condition n'est pas suffisante pour assurer la stabilité inconditionnelle dans la zone de collage. En effet, les configurations où $\tilde{\gamma} > 2\beta_1$ ou bien $\tilde{\gamma} > 2\beta_2$ sont instables. Nous proposons de satisfaire cette condition à travers un paramètre $\tilde{\beta}$ défini dans la zone de collage comme suit :

$$\boxed{\tilde{\beta} = \xi_1 \beta_1 + \xi_2 \beta_2} \quad (4.13)$$

Il est ainsi possible d'écrire :

$$\tilde{\gamma} \geq \frac{1}{2} \quad (4.14a)$$

$$\tilde{\beta} \geq \frac{\tilde{\gamma}}{2} \quad (4.14b)$$

Les équations (4.8) et (4.13) aboutissent à un schéma de Newmark construit à partir des schémas des domaines couplés (Figure 4.3) et respectant les conditions de stabilité de cette famille de schémas. La distribution des paramètres γ et β dans les zones avec et sans collage des deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 est la suivante :

Remarque 4 *Dans le cadre de cette approche, les paramètres $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$ sont automatiquement construits à partir des paramètres d'intégration numérique (et de pondération) des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Dans le cas général, on prend $\xi_1 = \xi_2 = 0.5$ et aucune étape supplémentaire n'est alors requise de la part de l'utilisateur.*

$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_0 & ; & \quad \beta = \beta_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega \\ \gamma &= \gamma_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 & ; & \quad \beta = \beta_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 \\ \gamma &= \tilde{\gamma} \text{ sur } \Omega_0 & ; & \quad \beta = \tilde{\beta} \text{ sur } \Omega_0 \end{aligned}$
--

Tab. 4.1: Distribution des paramètres de Newmark - Couplage Arlequin multi-schémas/mono-échelle en temps

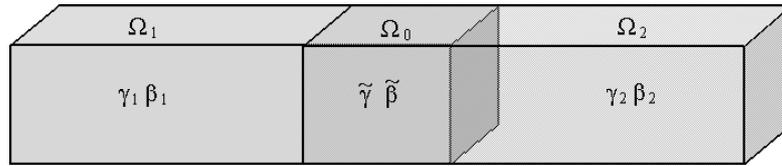


Fig. 4.3: Nouvelle approche d'intégration numérique multi-schémas

4.2.2 Algorithme multi-schémas/mono-échelle en temps

Dans cette section, on développe l'algorithme de résolution correspondant à l'approche présentée ci-dessus. Nous rappelons le problème discrétisé mono-échelle/multi-schémas correspondant aux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 à chaque instant t_{n+1} :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{n+1}^1 + \mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^1, \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_{n+1}^2 + \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^2, \quad (4.15b)$$

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{u}_{n+1}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_{n+1}^2 = 0. \quad (4.15c)$$

On note que les matrices de masse \mathbf{M}_i , d'amortissement \mathbf{C}_i et de raideur \mathbf{K}_i , ainsi que les forces externes \mathbf{f}_{n+1}^i sont pondérées entre les modèles de manière implicite avec les paramètres de partition de l'unité. À partir des équations du schéma de Newmark écrites en déplacement, et en adoptant l'approche de Schur duale, nous réécrivons le système (4.15) de la façon suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{L}^t \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F}, \quad (4.16a)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = {}^p \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (4.16b)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = {}^p \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}\mathbf{U} \quad (4.16c)$$

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = 0. \quad (4.16d)$$

Ce système (4.16) est résolu par une technique de condensation à l'interface. Dans le cadre d'une méthode avec recouvrement, l'interface est représentée par la zone de

collage Ω_0 . Les matrices figurant dans l'équation (4.16a) sont des matrices diagonales par blocs définies sur Ω_1 et Ω_2 :

$$\mathbb{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_1 & \\ \hline & \mathbf{M}_2 \end{array} \right], \quad (4.17)$$

$$\mathbb{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_1 & \\ \hline & \mathbf{C}_2 \end{array} \right], \quad (4.18)$$

$$\mathbb{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_1 & \\ \hline & \mathbf{K}_2 \end{array} \right], \quad (4.19)$$

$$\mathbb{F} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_{n+1}^1 \\ \mathbf{f}_{n+1}^2 \end{array} \right]. \quad (4.20)$$

Les matrices de couplage Arlequin qui permettent d'exercer les forces fictives dans (4.16a), assurant la continuité des quantités cinématiques dans (4.16d), sont assemblées dans l'opérateur \mathbb{L} :

$$\mathbb{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2]. \quad (4.21)$$

Les inconnues recherchées du système à chaque instant t_{n+1} sont aussi définies par blocs :

$$\ddot{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 \end{array} \right], \quad (4.22)$$

$$\dot{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 \end{array} \right], \quad (4.23)$$

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{n+1}^1 \\ \mathbf{u}_{n+1}^2 \end{array} \right] \quad (4.24)$$

Ingrédients du schéma de Newmark : À partir de la définition (4.2.1), nous présentons les opérateurs de prédiction du schéma de Newmark (équations 4.16b et 4.16c) de manière unifiée sur Ω_1 , Ω_2 et Ω_0 :

$${}^p\dot{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c} -\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{u}_n^1 + \frac{\beta-\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_n^1 + \Delta t \frac{2\beta-\gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^1 \\ -\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{u}_n^2 + \frac{\beta-\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_n^2 + \Delta t \frac{2\beta-\gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^2 \end{array} \right], \quad (4.25)$$

$${}^p\ddot{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{u}_n^1 - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n^1 - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^1 \\ -\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{u}_n^2 - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n^2 - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^2 \end{array} \right], \quad (4.26)$$

Dans le cadre d'une formulation en déplacement du schéma de Newmark, les matrices \mathbb{N} et \mathbb{P} s'écrivent de la manière suivante :

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\beta\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta\Delta t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta\Delta t^2} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

La dernière étape de l'établissement de la formulation du schéma de Newmark pour le bi-modèle arlequin substituer à intégrer les équations (4.16b) et (4.16c) dans l'équation du mouvement (4.16a). Ce remplacement aboutit à la formulation en déplacement de l'équilibre, écrite en introduisant une matrice de rigidité modifiée $\tilde{\mathbb{M}}$:

$$\tilde{\mathbb{M}} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbb{M}}_1 & \\ \hline & \tilde{\mathbb{M}}_2 \end{array} \right] \quad (4.28)$$

Avec

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \mathbf{K}_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}_i + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}_i \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.29)$$

Le système (4.16) à résoudre devient :

$$\tilde{\mathbb{M}}\mathbf{U} + \mathbf{L}^t\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F} - \mathbf{M}^p\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C}^p\dot{\mathbf{U}}, \quad (4.30a)$$

$$\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{U}^p, \quad (4.30b)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{U}^p, \quad (4.30c)$$

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (4.30d)$$

Résolution du problème : Les inconnues du système (4.16) sont les quantités cinématiques \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{U}}$ et $\ddot{\mathbf{U}}$ sur Ω_1 et Ω_2 , ainsi que le champ des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}$ sur Ω_0 à l'instant t_{n+1} . Pour résoudre ce système, nous écrivons les équations (4.28), (4.30b), (4.30c) et (4.30d) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\mathbb{M}} & \mathbf{L}^t \\ \mathbf{I} & 0 & -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{N} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{U}^p \\ \mathbf{U}^p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

Le second membre \mathbf{G} est défini par :

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{M}^p\ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{C}^p\dot{\mathbf{U}} \quad (4.32)$$

Le tenseur \mathbf{I} est une matrice d'identité par blocs :

$$\mathbf{I} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \\ \hline & \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (4.33)$$

La première ligne du système matriciel (4.31a) correspond à l'équilibre local sur les deux sous-domaines. La résolution de l'équation correspondante donne :

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \{ \mathbf{G} - \mathbf{L}^t \boldsymbol{\Lambda} \} \quad (4.34)$$

Le remplacement de (4.34) dans la dernière ligne de (4.31a) qui exprime la condition de continuité, permet d'écrire :

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{G} \quad (4.35)$$

où le complément de Schur dual \mathbf{H} se définit comme suit :

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^t \quad (4.36)$$

À ce stade, à partir de (4.34), on définit un champ de déplacement libre sans liaison \mathbf{U}_{sl} , et un autre avec liaison \mathbf{U}_{al} :

$$\mathbf{U}_{sl} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{G} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{U}_{al} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^t \boldsymbol{\Lambda} \quad (4.38)$$

L'équation (4.37) est résolue puis \mathbf{U}_{sl} est remplacé dans (4.35) afin d'obtenir $\boldsymbol{\Lambda}$ à l'instant t_{n+1} . Cette étape permet de calculer les déplacements \mathbf{U}_{al} du problème avec liaison (4.38). La dernière phase consiste à additionner les deux quantités, et obtenir l'expression du déplacement à l'instant t_{n+1} :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{U}_{al} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{n+1/sl}^1 + \mathbf{u}_{n+1/al}^1 \\ \mathbf{u}_{n+1/sl}^2 + \mathbf{u}_{n+1/al}^2 \end{array} \right] \quad (4.39)$$

L'algorithme de couplage qui permet de résoudre le système (4.31a) se résume en trois étapes principales : 1) problème sans liaison, 2) problème d'interface et 3) problème avec liaison.

- **Étape de prédiction** : Les quantités cinématiques sont calculées uniquement sous l'effet des efforts extérieurs, sans tenir compte de l'effet des efforts de collage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{sl} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{G} \\ \dot{\mathbf{U}}_{sl} = {}^p \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{N} \mathbf{U}_{sl} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{sl} = {}^p \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{P} \mathbf{U}_{sl} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Cette étape correspond à l'étape (1) de l'algorithme 4.2.

- **Problème d'interface** : Les efforts d'interface $\boldsymbol{\Lambda}$ sont calculés à travers l'équation (4.35) :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{H}^{-1} \left(\sum_{i=1,2} \mathbf{L}_i \mathbf{u}_{n+1/sl}^i \right) \quad (4.41)$$

où les déplacements sans liaison sont le résultat de l'étape précédente (4.40). L'opérateur de condensation \mathbf{H} est défini comme un complément de Schur dual :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1,2} \mathbf{L}_i \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{L}_i^t \quad (4.42)$$

Notons que l'opérateur de condensation \mathbf{H} est constant et indépendant du temps. Il est intégré à l'extérieur de la boucle en temps. C'est l'étape (2) de l'algorithme 4.2.

- **Problème avec liaison** : À partir des valeurs de $\mathbf{\Lambda}$ dans (4.41), les champs cinématiques correspondant au problème sous contraintes peuvent être calculés.

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{al} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}^t \mathbf{\Lambda} \\ \dot{\mathbf{U}}_{al} = \mathbf{N} \mathbf{U}_{al} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{al} = \mathbf{P} \mathbf{U}_{al} \end{cases} \quad (4.43)$$

Les équations (4.43) sont développées dans l'étape (3) de l'algorithme 4.2. La dernière étape de cet algorithme consiste à mettre à jour les champs calculés en additionnant les quantités avec et sans liaison.

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{U}_{al} \\ \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{sl} + \dot{\mathbf{U}}_{al} \\ \ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}_{sl} + \ddot{\mathbf{U}}_{al} \end{cases} \quad (4.44)$$

L'implémentation numérique de cet algorithme est décrit dans le tableau 4.2.

4.3 Approche multi-échelles/multi-schémas

Dans cette partie nous abordons les aspects multi-schémas et multi-échelles en temps dans le cadre de la méthode Arlequin. Une première mise en oeuvre de cette approche a mis en évidence des instabilités numériques que nous allons expliciter en vue de les adresser. Dans la section (4.2) nous avons considéré le cas général d'un couplage de deux schémas de Newmark différents et nous avons développé le schéma de Newmark sur la base d'une formulation en déplacement. Cette formulation correspond à l'implémentation numérique de cet algorithme dans la majorité de codes industriels, tel que le `CODE_ASTER`. Dans cette partie, notre démarche sera basée sur une formulation de Newmark en accélération. Nous montrons que ce choix permet d'assurer un passage naturel entre les schémas, ce qui en facilite l'implémentation numérique, surtout quand il s'agit de couplage explicite/implicite, où le raccord multi-échelles en temps est nécessaire et bien justifié.

Distribution des paramètres

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_0, \quad \gamma = \gamma_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 \text{ et } \gamma = \tilde{\gamma} = \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2 \text{ sur } \Omega_0 \\ \beta &= \beta_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_0, \quad \beta = \beta_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 \text{ et } \beta = \tilde{\beta} = \xi_1 \beta_1 + \xi_2 \beta_2 \text{ sur } \Omega_0 \end{aligned}$$

(1) Résolution du problème sans liaison :

$$\begin{array}{l|l} \begin{aligned} {}^p \dot{\mathbf{u}}_n^1 &= -\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_n^1 + \frac{\beta - \gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_n^1 + \Delta t \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^1 \\ {}^p \ddot{\mathbf{u}}_n^1 &= -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_n^1 - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n^1 - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^1 \\ \mathbf{u}_{n+1/sl}^1 &= \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \{ \mathbf{f}_{n+1}^1 - \mathbf{M}_1 {}^p \ddot{\mathbf{u}}_n^1 - \mathbf{C}_1 {}^p \dot{\mathbf{u}}_n^1 \} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^1 &= {}^p \dot{\mathbf{u}}_n^1 + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{n+1/sl}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^1 &= {}^p \ddot{\mathbf{u}}_n^1 + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1/sl}^1 \end{aligned} & \begin{aligned} {}^p \dot{\mathbf{u}}_n^2 &= -\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_n^2 + \frac{\beta - \gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_n^2 + \Delta t \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^2 \\ {}^p \ddot{\mathbf{u}}_n^2 &= -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_n^2 - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n^2 - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n^2 \\ \mathbf{u}_{n+1/sl}^2 &= \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \{ \mathbf{f}_{n+1}^2 - \mathbf{M}_2 {}^p \ddot{\mathbf{u}}_n^2 - \mathbf{C}_2 {}^p \dot{\mathbf{u}}_n^2 \} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^2 &= {}^p \dot{\mathbf{u}}_n^2 + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{n+1/sl}^2 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^2 &= {}^p \ddot{\mathbf{u}}_n^2 + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1/sl}^2 \end{aligned} \end{array}$$

(2) Résolution du problème condensé :

$$\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{L}_1 \mathbf{u}_{n+1/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_{n+1/sl}^2 \right\}$$

(3) Résolution du problème avec liaison :

$$\begin{array}{l|l} \begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1/al}^1 &= -\tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \{ \mathbf{L}_1^T \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{n+1/al}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^1 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1/al}^1 \end{aligned} & \begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1/al}^2 &= -\tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \{ \mathbf{L}_2^T \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^2 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}_{n+1/al}^2 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^2 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1/al}^2 \end{aligned} \end{array}$$

(4) Mise à jour :

$$\begin{array}{l|l} \begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^1 &= \mathbf{u}_{n+1/sl}^1 + \mathbf{u}_{n+1/al}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^1 + \dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^1 &= \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^1 + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^1 \end{aligned} & \begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^2 &= \mathbf{u}_{n+1/sl}^2 + \mathbf{u}_{n+1/al}^2 \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^2 \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 &= \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^2 + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^2 \end{aligned} \end{array}$$

Tab. 4.2: Algorithme de couplage de deux schémas de Newmark différents sur la même échelle de temps - Cadre Arlequin

4.3.1 Formulation discrétisée

Dans cette section nous présentons la discrétisation spatio-temporelle du couplage Arlequin multi-échelles/multi-schémas. Pour ce faire, nous nous sommes inspirés de la méthode **GCbis**, qui est développée par **Gravouil** et **Combesure** et présentée dans [MAH 10]. La seule différence réside dans le fait que nous appliquons cette approche dans le cadre d'un raccord avec recouvrement.

On considère le même bi-modèle Arlequin présenté dans la section (4.2.2). Le domaine global Ω est divisé en Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$. On associe une échelle grossière en temps ΔT et un schéma de Newmark (γ_1, β_1) au sous-domaine Ω_1 , ainsi qu'une échelle fine Δt et un autre schéma de Newmark (γ_2, β_2) au sous-domaine Ω_2 . Les deux échelles de temps sont liées par un ratio $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 1$

(échelles hiérarchiques) :

$$\Delta T = m\Delta t \quad (4.45)$$

Dans le but de simplifier le développement de la formulation et sa mise en oeuvre, on considère un intervalle d'étude $[t_0, t_m]$ avec un pas de temps grossier ΔT tel que $t_m = t_0 + \Delta T$.

La discrétisation spatio-temporelle sur le domaine Ω_1 s'écrit de la forme suivante :

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{u}}_m^1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_m^1 + \mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{f}_m^1, \quad (4.46a)$$

$$\mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta_1\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1 + \beta_1 \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_m^1, \quad (4.46b)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma_1) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1 + \gamma_1 \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_m^1. \quad (4.46c)$$

L'équation (4.46a) décrit l'équilibre sur le sous-domaine Ω_1 à l'instant t_m . Les équations (4.46b) et (4.46c) sont les relations de Newmark, écrites en accélération, qui permettent l'intégration numérique du système.

De façon similaire, la discrétisation sur Ω_2 aux instants fins $t_j \forall j \in [1, m]$ est la suivante :

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2 + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_j^2 + \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{f}_j^2, \quad (4.47a)$$

$$\mathbf{u}_j^2 = \mathbf{u}_{j-1}^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta_2\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + \beta_2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2, \quad (4.47b)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j^2 = \dot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + (1 - \gamma_2) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j-1}^2 + \gamma_2 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2. \quad (4.47c)$$

Sur l'intervalle d'étude, les équations (4.47) sont résolues m fois pour l'intervalle de temps fin alors qu'une seule résolution des équations (4.46) prend lieu sur l'intervalle de temps grossier. Une dernière équation manque aux systèmes (4.46) et (4.47). Il s'agit de la condition suivante de continuité à l'interface :

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{u}_0^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_0^2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_1 \mathbf{u}_m^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_m^2 = 0. \quad (4.48)$$

La formulation de (4.48) montre que la continuité s'écrit pour les déplacements aux instants grossiers. Cette technique, proposée initialement dans [PRA 04], a été améliorée dans la méthode **GCbis** [MAH 10]. Dans ce formalisme, les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ sont calculés uniquement aux instants grossiers t_m et sont interpolés linéairement entre ces instants dans le but d'estimer la valeur de ces multiplicateurs sur l'échelle fine $\boldsymbol{\lambda}_j \forall j = 1, 2, \dots, (m - 1)$:

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \boldsymbol{\lambda}_0 + \frac{j}{m} \boldsymbol{\lambda}_m \quad (4.49)$$

Remarque 5 *Il est important de remarquer que, contrairement à la méthode **GCbis** qui colle en vitesse, la continuité à l'interface dans (4.48) est imposée à travers les déplacements. Nous allons justifier ce choix dans la section 4.3.2.*

4.3.2 Conservation de l'énergie

La mise en oeuvre de la formulation développée dans la section précédente (4.3.1) sur la base de cas-tests numériques a permis de mettre en évidence un déséquilibre énergétique à l'interface ainsi que des instabilités numériques par cumul du résidu d'interface en temps. Le travail présenté dans cette section vise à décrire l'origine de ces phénomènes et à proposer une solution rigoureuse pour adresser ce problème.

Bilan d'énergie

On reprend les termes du bilan d'énergie développé dans la section (2.2.2) du chapitre 2. On désigne par h_i le pas de temps sur le domaine $i \in [1, 2]$ avec $h_1 = \Delta T$ et $h_2 = \Delta t$. D'après le dernier terme de l'équation (2.40) du chapitre 2, nous pouvons exprimer l'énergie mécanique sur un domaine Ω_i , à un instant quelconque t_n de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_n^i = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i (\dot{\mathbf{u}}_n^i) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_n^i)^t \mathbf{K}_i (\mathbf{u}_n^i) + \frac{1}{2} (\beta_i - \frac{1}{2}\gamma_i) h_i^2 (\ddot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i (\ddot{\mathbf{u}}_n^i) \quad (4.50)$$

Nous rappelons que le terme supplémentaire $\frac{1}{2} (\beta_i - \frac{1}{2}\gamma_i) h_i^2 (\ddot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i (\ddot{\mathbf{u}}_n^i)$ est un terme conservatif du schéma de Newmark. De façon similaire, l'équation (2.41) exprime l'incrément du travail d'interface sur la zone de collage Ω_0 entre deux instants t_n et $t_{n+1} = t_n + h_i$:

$$\Delta \mathcal{W}_{n,n+1}^i = (\Delta \mathbf{u}^i)^t \left\{ \mathbf{L}_i^t \frac{\boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \boldsymbol{\lambda}_n}{2} + (\gamma_i - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_i^t (\boldsymbol{\lambda}_{n+1} - \boldsymbol{\lambda}_n) \right\} \quad (4.51)$$

Finalement, l'équation (2.2.2) exprime la formulation de l'énergie du schéma de Newmark dissipée entre t_n et $t_{n+1} = t_n + h_i$:

$$\Delta \mathcal{D}_{n,n+1}^i = - \left(\gamma_i - \frac{1}{2} \right) \left\{ (\Delta \mathbf{u}^i)^t \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{u}^i + (\beta_i - \frac{1}{2}\gamma_i) h_i^2 (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^i)^t \mathbf{M}_i (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^i) \right\} \quad (4.52)$$

L'incrément en déplacement $\Delta \mathbf{u}^i$ figurant dans les équations (4.51) et (4.52), est défini par $\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_n^i$. Les termes introduits par l'expression (4.52) définissent l'amortissement numérique introduit par le schéma de Newmark, qui a une valeur nulle ou bien négative. Ceci est garanti à travers les paramètres γ_i et β_i des deux schémas de Newmark.

La variation de l'énergie sur Ω_1 et Ω_2 sur l'intervalle $[t_0, t_m = t_0 + \Delta T]$ se présente comme suit :

$$\Delta E = \mathbf{E}_m^1 - \mathbf{E}_0^1 + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{E}_{j+1}^2 - \mathbf{E}_j^2 \quad (4.53)$$

$$= \Delta \mathcal{W}_{0,m}^1 + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathcal{W}_{j,j+1}^2 + \Delta \mathcal{D}_{0,m}^1 + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \mathcal{D}_{j,j+1}^2 \quad (4.54)$$

Dans cette expression, le terme de gauche représente la variation de l'énergie sur un pas de temps grossier. Cette variation doit être définie positive. Le terme de droite exprime une dissipation positive.

Dans l'équation de l'équilibre (4.54), nous nous intéressons tout particulièrement au travail des efforts d'interface. Le travail résultant du collage Arlequin à l'interface est le suivant :

$$\Delta\mathcal{W} = \Delta\mathcal{W}_{0,m}^1 + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta\mathcal{W}_{j,j+1}^2 \quad (4.55)$$

Le travail $\Delta\mathcal{W}$ peut s'écrire de manière explicite :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{W} = & \{ \mathbf{u}_m^1 - \mathbf{u}_0^1 \}^t \mathbf{L}_1^t \left\{ \frac{\boldsymbol{\lambda}_m + \boldsymbol{\lambda}_0}{2} + \left(\gamma_1 - \frac{1}{2} \right) (\boldsymbol{\lambda}_m - \boldsymbol{\lambda}_0) \right\} \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \mathbf{u}_{j+1}^2 - \mathbf{u}_j^2 \}^t \mathbf{L}_2^t \left\{ \frac{\boldsymbol{\lambda}_{j+1} + \boldsymbol{\lambda}_j}{2} + \left(\gamma_2 - \frac{1}{2} \right) (\boldsymbol{\lambda}_{j+1} - \boldsymbol{\lambda}_j) \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ce terme est à l'origine du déséquilibre énergétique observé. La différence principale entre cette expression et celle trouvée dans le cadre mono-échelle/multi-schémas (4.3) réside dans l'apparition des contribution des efforts de collage sur les incréments de temps entre les instants fins t_j et t_{j+1} . Nous constatons donc que l'approche multi-schémas s'avère insuffisante dans ce cas de figure.

Solution : Le but de notre démarche consiste à trouver les conditions nécessaires pour annuler le travail d'interface (4.56) dans l'expression (4.53), tout en conservant la liberté des multiplicateurs de Lagrange dans Ω_0 .

La définition du travail d'interface (4.56) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{W} = & \{ \mathbf{u}_m^1 - \mathbf{u}_0^1 \}^t \mathbf{L}_1^t \left\{ \gamma_1 \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \gamma_1) \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \{ \mathbf{u}_{j+1}^2 - \mathbf{u}_j^2 \}^t \mathbf{L}_2^t \left\{ \gamma_2 \boldsymbol{\lambda}_{j+1} + (1 - \gamma_2) \boldsymbol{\lambda}_j \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Dans cette formulation, nous pouvons remarquer qu'en plus de la différence des paramètres du schéma de Newmark γ_i et β_i , des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_j \forall j \in [0, m]$ apparaissent sur l'échelle fine. Ces multiplicateurs génèrent des contributions qui n'ont aucune raison de contre-carrer les contributions sur l'échelle grossière.

Pour s'en affranchir, le travail réalisé consiste à trouver la condition nécessaire permettant de satisfaire la relation suivante à chaque pas de temps :

$$\boxed{\gamma_2 \boldsymbol{\lambda}_{j+1} + (1 - \gamma_2) \boldsymbol{\lambda}_j = \tilde{\gamma} \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma}) \boldsymbol{\lambda}_0 \quad \forall j \in [0, m - 1]} \quad (4.58)$$

Cette condition permet de masquer, dans l'équation (4.57), les contributions des multiplicateurs de Lagrange λ_j définis à l'intérieur de l'échelle fine en temps, i.e. aux instants ne figurant pas dans l'échelle grossière. Ces contributions seront donc éliminées automatiquement par la condition de continuité Arlequin si une approche de type multi-schémas est appliquée.

En partant de la relation (4.58), nous pouvons formuler l'expression des multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle fine λ_{j+1} aux instants t_{j+1} :

$$\lambda_{j+1} = \frac{\tilde{\gamma}\lambda_m + (1 - \tilde{\gamma})\lambda_0}{\gamma_2} + \frac{(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2}\lambda_j \quad \forall j \in [0, m - 1] \quad (4.59)$$

L'expression établie dans (4.59) est de la forme $\lambda_{j+1} = b + a\lambda_j$ où :

$$a = \frac{(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\tilde{\gamma}\lambda_m + (1 - \tilde{\gamma})\lambda_0}{\gamma_2}.$$

Il s'agit de la forme générale d'une suite arithmetico-géométrique $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ à coefficients constants, généralisant les définitions des suites arithmétiques et géométriques [RAD 95]. En posant dans le cas qui nous intéresse $r = \frac{b}{1 - a} = (1 - \tilde{\gamma})\lambda_0 + \tilde{\gamma}\lambda_m$, l'expression générale de cette série est :

$$\lambda_j = a^{j-j_0}(\lambda_{j_0} - r) + r \quad \forall j \geq j_0$$

Pour $j_0 = 0$, le j -ième terme de la suite $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda_j &= a^j(\lambda_0 - r) + r \\ &= (1 - \tilde{\gamma}(1 - a^j))\lambda_0 + \tilde{\gamma}(1 - a^j)\lambda_m \end{aligned} \quad (4.60)$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme d'une interpolation linéaire entre λ_0 et λ_m en fonction d'un paramètre α_j :

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (1 - \alpha_j)\lambda_0 + \alpha_j\lambda_m \quad \forall j \in [0, m] \\ \text{où} \quad \alpha_j &= \tilde{\gamma}(1 - a^j) \end{aligned} \quad (4.61)$$

En comparaison à l'équation (4.49), l'équation (4.61) représente une nouvelle manière de calculer les multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle fine λ_j . Ils sont interpolés linéairement par morceaux en fonction d'un paramètre α_j entre les valeurs correspondantes λ_0 et λ_m sur l'échelle grossière. Cette relation est vérifiée pour $j = 0$ où on obtient $\lambda_j = \lambda_0$. À ce stade du développement théorique de l'approche, la valeur du nouveau paramètre de Newmark $\tilde{\gamma}$ dans la zone de collage n'est toujours pas définie. Pour ce faire, l'équation (4.61) doit aboutir à $\lambda_j(j = m) = \lambda_m$.

L'équation (4.61) montre que cette condition est satisfaite pour $\tilde{\gamma}(1 - a^m) = 1$. Cette condition permet d'établir la formule générale du paramètre $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{1 - a^m} \quad \text{if } a^m \neq 1 \quad (4.62)$$

Remarque 6 *On note que $a^m = 1$ dans la configuration où $\gamma_2 = 1/2$ et le ratio m entre les pas de temps est un nombre pair. Dans ce cas de figure nous proposons d'utiliser un ordre impair entre les incréments Δt et ΔT . Ceci est, en l'occurrence, le cas pour le couplage en multi-échelles d'un schéma implicite d'accélération moyenne et d'un schéma explicite de différences centrées.*

En remarquant que (suite télescopique) :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \{\mathbf{u}_{j+1}^2 - \mathbf{u}_j^2\} = \{\mathbf{u}_m^2 - \mathbf{u}_0^2\} \quad (4.63)$$

et en tenant compte de l'hypothèse (4.58), l'expression (4.57) peut être simplifiée et réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{W} = & \{\mathbf{u}_m^1 - \mathbf{u}_0^1\}^t \mathbf{L}_1^t \left\{ \gamma_1 \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \gamma_1) \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} \\ & + \{\mathbf{u}_m^2 - \mathbf{u}_0^2\}^t \mathbf{L}_2^t \left\{ \tilde{\gamma} \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma}) \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.64)$$

L'expression (4.64) est le premier résultat de notre démarche. Néanmoins, nous remarquons que la valeur de $\Delta \mathcal{W}$ n'est pas encore nulle. L'équation (4.64) est très similaire à l'équation (4.3) où deux schémas différents de paramètres respectifs (γ_1, β_1) et $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ sont couplés sur l'échelle grossière en temps. Nous proposons alors de tirer profit de la zone de collage Arlequin afin d'imposer la condition suivante :

$$\gamma_1 = \tilde{\gamma} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (4.65)$$

Il est alors possible d'écrire l'équation (4.64) :

$$\boxed{\Delta \mathcal{W} = \left[\mathbf{L}_1 \{\mathbf{u}_m^1 - \mathbf{u}_0^1\} + \mathbf{L}_2 \{\mathbf{u}_m^2 - \mathbf{u}_0^2\} \right] \left\{ \tilde{\gamma} \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma}) \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} = 0} \quad (4.66)$$

Nous constatons que le choix d'imposer la continuité dans Ω_0 à travers les déplacements dans l'équation (4.48) permet d'annuler le travail d'interface $\Delta \mathcal{W}$ et, par conséquent, de rétablir rigoureusement l'équilibre énergétique dans un cadre multi-échelles en temps.

$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_0 & ; & \quad \beta = \beta_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_0 \\ \gamma &= \gamma_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 & ; & \quad \beta = \beta_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_0 \\ \gamma &= \tilde{\gamma} \text{ sur } \Omega_0 & ; & \quad \beta = \tilde{\beta} \text{ sur } \Omega_0 \end{aligned}$
avec
$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma_2^m}{\gamma_2^m - (1 - \gamma_2)^m} \text{ sur } \Omega_0 \text{ pour } \gamma_2 > 0.5 \text{ et } m \geq 1.$
$\tilde{\beta} = 0.25(0.5 + \tilde{\gamma})^2 \text{ sur } \Omega_0.$

Tab. 4.3: Distribution des paramètres de Newmark - Couplage Arlequin multi-schémas/multi-échelles en temps

Stabilité inconditionnelle : Dans le cas général, la stabilité inconditionnelle du schéma de Newmark est assurée pour $\gamma_i \geq 0.5$ et $\beta_i \geq \gamma_i/2$ pour $i = 1, 2$. En effet, pour $\gamma_2 \geq 0.5$, on obtient : $-1 \leq a < 1$. D’après (4.62), la variation de (a) implique directement que $\tilde{\gamma} \geq 0.5$. Dans le but d’assurer la stabilité inconditionnelle, nous proposons de procéder comme dans la section (4.2.1), et d’intégrer un nouveau paramètre $\tilde{\beta}$ sur Ω_0 tel que $\tilde{\beta} \geq \tilde{\gamma}/2$. En plus, pour garantir une “superstabilité inconditionnelle”, $\tilde{\beta}$ peut prendre la forme suivante : $\tilde{\beta} \geq 0.25(0.5 + \tilde{\gamma})^2$.

Remarque 7 • *Il est important de noter que les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 conservent leurs propres paramètres d’intégration numérique, respectivement (γ_1, β_1) et (γ_2, β_2) , en dehors de la zone de recouvrement. Dans cette zone de recouvrement les deux sous-domaines sont intégrés avec un même et nouveau jeu de paramètres $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$. Les paramètres du schéma de Newmark dans cette zone sont imposés pour Ω_1 (pour, rappelons-le, équilibrer le bilan d’énergies) alors qu’ils découlent naturellement pour Ω_2 par construction des multiplicateurs de Lagrange sur l’échelle fine de temps.*

- *afin d’éviter les passages abrupts entre les paramètres d’intégration numérique à l’interface du domaine Ω_1 , la transition peut être gérée en définissant des fonctions infiniment régulières permettant de raccorder, de manière lisse, (γ_1, β_1) sur $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ à $(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ sur Ω_0 . Ce traitement permet d’adresser toute éventuelle discontinuité des champs cinématiques à l’interface. En 1D par exemple (abscisse x), les paramètres d’intégration numérique peuvent être construits comme suit :*

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{1-x^2}}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in]-\infty, a] \\ (f(\frac{x-b}{b-a}) / (2f(\frac{1}{2}))) & \text{pour } x \in]a, \frac{a+b}{2}] \\ (2f(\frac{1}{2}) - f(\frac{x-b}{b-a} + 1)) / (2f(\frac{1}{2})) & \text{pour } x \in [\frac{a+b}{2}, b[\\ 1 & \text{pour } x \in [b, +\infty[\end{cases} \quad (4.67)$$

La fonction g est alors infiniment régulière et elle vaut 0 avant a , entre 0 et 1 entre a et b (avec $b > a$ et en particulier $\frac{1}{2}$ au milieu ie. $\frac{a+b}{2}$) et 1 après b . Les valeurs $(\tilde{\gamma} - \gamma_1)g(x) + \gamma_1$ et $(\tilde{\beta} - \beta_1)g(x) + \beta_1$ permettent de construire les paramètres d'intégration dépendant de x .

4.3.3 Algorithme multi-schémas/multi-échelles

Le système d'équations (4.46), (4.47) et (4.48) peut être exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbb{K}\mathbf{U} + \mathbb{L}^t \mathbf{\Lambda} = \mathbb{F}, \quad (4.68a)$$

$$\mathbf{U} - \mathbb{N}\ddot{\mathbf{U}} = {}^p\mathbf{U}, \quad (4.68b)$$

$$\dot{\mathbf{U}} - \mathbb{P}\ddot{\mathbf{U}} = {}^p\dot{\mathbf{U}}, \quad (4.68c)$$

$$\mathbb{B}\mathbf{U} = 0. \quad (4.68d)$$

Les matrices de masse, amortissement, et rigidité s'expriment respectivement :

$$\mathbb{M} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{M}_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{M}_2 & \\ \hline & & & \mathbf{M}_1 \end{array} \right], \quad \mathbb{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{C}_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{C}_2 & \\ \hline & & & \mathbf{C}_1 \end{array} \right],$$

$$\mathbb{K} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{K}_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{K}_2 & \\ \hline & & & \mathbf{K}_1 \end{array} \right],$$

Notons que par rapport à l'approche mono-échelle (équation 4.17), le bloc correspondant au sous-domaine Ω_2 est répété m fois, selon le ratio entre les échelles en temps $\Delta T = m\Delta t$. Les forces de collage appliquées sont représentées à travers la matrice rectangulaire par blocs \mathbb{L}^t . Contrairement au cas mono-échelle en temps, la continuité à l'interface est assurée à travers la matrice \mathbb{B} , différente de la matrice \mathbb{L}^t .

Par ailleurs, les équations (4.68d) et (4.48) sont équivalentes.

$$\mathbb{L}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{L}_2^t \\ \mathbf{L}_1^t \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mathbf{L}_2 \mid \mathbf{L}_1] \quad (4.69)$$

Les inconnues du système sont respectivement les accélérations, les vitesses, les déplacements, et les multiplicateurs de Lagrange :

$$\ddot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1^2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}_m^2 \\ \frac{\ddot{\mathbf{u}}_m^2}{\dot{\mathbf{u}}_m^1} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1^2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_m^2 \\ \frac{\dot{\mathbf{u}}_m^2}{\dot{\mathbf{u}}_m^1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^2 \\ \frac{\mathbf{u}_m^2}{\mathbf{u}_m^1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_m \\ \frac{\boldsymbol{\lambda}_m}{\boldsymbol{\lambda}_m} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

En utilisant la distribution des paramètres du schéma de Newmark présentée dans le tableau (4.3.2), nous exprimons les relations (4.68b) et (4.68c) à travers les matrices \mathbb{N} et \mathbb{P} (formulation en accélération) :

$$\mathbb{N} = \left[\begin{array}{c|c} \beta \Delta t^2 & \\ \hline & \ddots \\ & \beta \Delta t^2 \end{array} \right], \quad \text{et} \quad \mathbb{P} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma \Delta t & \\ \hline & \ddots \\ & \gamma \Delta t \\ \hline & \gamma \Delta T \end{array} \right], \quad (4.71)$$

Les opérateurs de prédiction des déplacements et des vitesses sont les suivants :

$${}^p\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{m-1}^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{m-1}^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m-1}^2 \\ \hline \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1 \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

$${}^p\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_0^2 + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_0^2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{u}}_{m-1}^2 + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{m-1}^2 \\ \hline \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

À partir de l'expression des multiplicateurs de Lagrange (4.61) et des matrices de couplage Arlequin (4.69), les forces de collage $\mathbb{L}^t \boldsymbol{\Lambda}$ s'écrivent :

$$\mathbb{L}^t \boldsymbol{\Lambda} = \mathbb{L}_0^t \boldsymbol{\lambda}_0 + \mathbb{L}_m^t \boldsymbol{\lambda}_m \quad (4.74)$$

Les matrices \mathbb{L}_0^t et \mathbb{L}_m^t sont définies comme suit :

$$\mathbb{L}_0^t = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1) \mathbf{L}_2^t \\ \vdots \\ (1 - \alpha_m) \mathbf{L}_2^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{L}_m^t = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{L}_2^t \\ \vdots \\ \alpha_m \mathbf{L}_2^t \\ \mathbf{L}_1^t \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Le système d'équation (4.68) peut être réécrit sous forme matricielle de manière identique au cas mono-échelle en temps (4.31). Les expressions de Newmark dans les équations (4.68b) et (4.68c) ainsi que la formulation des multiplicateurs de Lagrange (4.74) sont substituées dans l'équation (4.68a). Finalement, le système (4.68) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbb{L}_m^t \\ -\mathbf{N} & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{P} & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{G} - \mathbb{L}_0^t \boldsymbol{\lambda}_0 \\ {}^p \ddot{\mathbf{U}} \\ {}^p \dot{\mathbf{U}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Le second membre \mathbb{G} est défini par :

$$\mathbb{G} = \mathbf{F} - \mathbf{C} {}^p \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{K} {}^p \mathbf{U} \quad (4.77)$$

La matrice de rigidité modifiée $\tilde{\mathbf{M}}$ est :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{\mathbf{M}}_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{\mathbf{M}}_2 & \\ \hline & & & \mathbf{M}_1 \end{array} \right] \quad (4.78)$$

avec $\tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1 + \gamma \Delta T \mathbf{C}_1 + \beta \Delta T^2 \mathbf{K}_1$ et $\tilde{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2 + \gamma \Delta t \mathbf{C}_2 + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_2$. L'algorithme final décrivant l'intégration numérique est décrit dans le tableau 4.4 pour un pas de temps grossier ΔT de t_0 à t_m . Le tableau 4.5 présente l'algorithme permettant d'effectuer la condensation à l'interface. Le système (4.76) peut être résolu à l'aide d'une approche de type prédiction-correction comme dans la section 4.2, où trois étapes principales sont identifiées :

- **Étape de prédiction** : Sur le sous-domaine Ω_1 , la solution évolue a cours d'un pas de temps grossier ΔT sous l'effet des efforts extérieurs. En même temps, sur le sous-domaine Ω_2 , l'équilibre est résolu m fois sous l'effet des efforts extérieurs et d'un terme provenant de la pondération des multiplicateurs de Lagrange $(1 - \alpha_j) \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_0$, avec $j \in [0, m - 1]$. C'est la première étape du tableau 4.4.

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{sl} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \{ \mathbb{G} - \mathbb{L}_0^t \boldsymbol{\lambda}_0 \} \\ \dot{\mathbf{U}}_{sl} = {}^p \dot{\mathbf{U}}_{sl} + \mathbf{P} \ddot{\mathbf{U}}_{sl} \\ \mathbf{U}_{sl} = {}^p \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{N} \ddot{\mathbf{U}}_{sl} \end{cases} \quad (4.79)$$

- **Problème d'interface** : Le problème d'interface peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_m = \{ \mathbf{L}_1 \mathbf{u}_{m/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_{m/sl}^2 \} \quad (4.80)$$

où \mathbf{H} est le complément de Schur dual. Le problème d'interface (4.80) est résolu aux instants grossiers t_m dans le but de calculer les multiplicateurs de Lagrange correspondants. Le détail de la construction de l'opérateur \mathbf{H} est présenté dans le tableau 4.5. Cette partie correspond à l'étape (2) de l'algorithme 4.4.

- **Étape de correction** : De façon similaire à l'étape de prédiction, le problème sur le sous domaine Ω_1 évolue sous l'effet des forces de collage d'un pas de temps ΔT , pendant que le même travail est effectué m fois sur Ω_2 . Les efforts de collage $\alpha_j \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_m$ sont pondérés sur Ω_2 avec le paramètre α_j avec $j \in [0, m-1]$. C'est l'étape (3) du tableau 4.4.

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{al} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{L}_m^t \boldsymbol{\lambda}_m \\ \dot{\mathbf{U}}_{al} = {}^p \dot{\mathbf{U}}_{al} + \mathbf{P} \ddot{\mathbf{U}}_{al} \\ \mathbf{U}_{al} = {}^p \mathbf{U}_{al} + \mathbf{N} \ddot{\mathbf{U}}_{al} \end{cases} \quad (4.81)$$

Finalement, les quantités avec et sans liaison peuvent être additionnées dans le but de mettre à jour le système et procéder vers une nouvelle itération sur Ω_1 et m itérations sur Ω_2 .

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{U}_{al} \\ \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{sl} + \dot{\mathbf{U}}_{al} \\ \ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}_{sl} + \ddot{\mathbf{U}}_{al} \end{cases} \quad (4.82)$$

Dans l'organigramme 4.4, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^1 &= \{ \mathbf{f}_m^1 - \mathbf{C}_1^p \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 - \mathbf{K}_1^p \mathbf{u}_{m/sl}^1 \} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^2 &= \{ \mathbf{f}_{j+1}^2 - \mathbf{C}_2^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 - \mathbf{K}_2^p \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 - (1 - \alpha_j) \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_0 \} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^1 &= \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \{ -\mathbf{L}_1^t \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{C}_1^p \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 - \mathbf{K}_1^p \mathbf{u}_{m/al}^1 \} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^2 &= \{ \alpha_j \mathbf{L}_2^t \boldsymbol{\lambda}_m - \mathbf{C}_2^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 - \mathbf{K}_2^p \mathbf{u}_{j+1/al}^2 \} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Cette méthode de couplage multi-schémas/multi-échelles, par ailleurs publiée dans [GHA 12b] sur la base d'une écriture en déplacement du schéma de Newmark, a été reprise en utilisant ici une écriture en accélération.

4.3.4 Spécificités du couplage Explicite Implicite

Toujours dans le cadre de la famille de Newmark, les jeux de paramètres $(\gamma_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{1}{4})$ et $(\gamma_2 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 0)$ permettent d'obtenir, respectivement, le schéma

Distribution des paramètres	
$\gamma = \gamma_1$ sur $\Omega_1 \setminus \Omega_0$, $\gamma = \gamma_2$ sur $\Omega_2 \setminus \Omega_0$ et $\gamma = \tilde{\gamma} = \frac{\gamma_2^m}{\gamma_2^m - (1 - \gamma_2)^m}$ sur Ω_0 pour $\gamma_2 > 0.5$ $\beta = \beta_1$ sur $\Omega_1 \setminus \Omega_0$, $\beta = \beta_2$ sur $\Omega_2 \setminus \Omega_0$ et $\beta = 0.25(0.5 + \tilde{\gamma})^2$ sur Ω_0 .	
Boucle principale	
(1) Résolution du problème sans liaison :	
$\mathbf{u}_{0/sl}^1 = \mathbf{u}_0^1; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^1 = \ddot{\mathbf{u}}_0^1;$ ${}^p\mathbf{u}_{m/sl}^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1$ $\ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^1$ $\mathbf{u}_{m/sl}^1 = {}^p\mathbf{u}_{m/sl}^1 + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1$ $\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1$	$\mathbf{u}_{0/sl}^2 = \mathbf{u}_0^2; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^2 = \dot{\mathbf{u}}_0^2; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^2 = \ddot{\mathbf{u}}_0^2;$ Boucle sur $j \in [0, m - 1]$ ${}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^2 = \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^2$ $\mathbf{u}_{j+1/sl}^2 = {}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^2 + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2$ If $j = m$, Fin de la boucle
(2.1) Calcul de l'opérateur de condensation :	
$\mathbf{H} = \mathbf{L}_1 \mathbf{Y}_m^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{Y}_m^2$	
(2.2) Résolution du problème d'interface :	
$\boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{L}_1 \mathbf{u}_{m/sl}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{u}_{m/sl}^2 \right\}$	
(3) Résolution du problème avec liaison :	
$\mathbf{u}_{0/al}^1 = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^1 = \mathbf{0};$ ${}^p\mathbf{u}_{m/al}^1 = \mathbf{u}_0^1 + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^1$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = \dot{\mathbf{u}}_0^1 + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^1$ $\ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^1$ $\mathbf{u}_{m/al}^1 = {}^p\mathbf{u}_{m/al}^1 + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$ $\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1 + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$	$\mathbf{u}_{0/al}^2 = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^2 = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^2 = \mathbf{0};$ Boucle sur $j \in [0, m - 1]$ ${}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^2 = \mathbf{u}_j^2 + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^2$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \dot{\mathbf{u}}_j^2 + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^2$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^2$ $\mathbf{u}_{j+1/al}^2 = {}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^2 + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2 + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ If $j = m$, Fin de la boucle
(4) Mise à jour :	
$\mathbf{u}_m^1 = \mathbf{u}_{m/sl}^1 + \mathbf{u}_{m/al}^1$ $\dot{\mathbf{u}}_m^1 = \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$ $\ddot{\mathbf{u}}_m^1 = \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^1 + \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^1$	Boucle sur $j \in [0, m - 1]$ $\mathbf{u}_{j+1}^2 = \mathbf{u}_{j+1/sl}^2 + \mathbf{u}_{j+1/al}^2$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^2 = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^2 + \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^2$ If $j = m$, Fin de la boucle

Fin de la boucle principale

Tab. 4.4: Algorithme multi-schémas/multi-échelles en temps - Cadre Arlequin

(1) Initialisation	
$\mathbf{Y}_0^1 = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{Y}}_0^1 = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{Y}}_0^1 = \mathbf{0}$	$\mathbf{Y}_0^2 = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{Y}}_0^2 = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{Y}}_0^2 = \mathbf{0}$
(2A) Échelle macroscopique	(2B) Fine microscopique - Boucle $\forall j \in [0 \dots m - 1]$
${}^p\dot{\mathbf{Y}}_0^1 = -\frac{\gamma_1}{\beta\Delta T} \mathbf{Y}_0^1 + \frac{\beta-\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{Y}}_0^1 + \Delta T \frac{2\beta-\gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{Y}}_0^1$ ${}^p\ddot{\mathbf{Y}}_0^1 = -\frac{1}{\beta\Delta T^2} \mathbf{Y}_0^1 - \frac{1}{\beta\Delta T} \dot{\mathbf{Y}}_0^1 - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{Y}}_0^1$ $\mathbf{Y}_m^1 = \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \left\{ \mathbf{L}_1^T - \mathbf{M}_1 {}^p\ddot{\mathbf{Y}}_0^1 - \mathbf{C}_1 {}^p\dot{\mathbf{Y}}_0^1 \right\}$ $\dot{\mathbf{Y}}_m^1 = {}^p\dot{\mathbf{Y}}_0^1 + \frac{\gamma}{\beta\Delta T} \mathbf{Y}_m^1$ $\ddot{\mathbf{Y}}_m^1 = {}^p\ddot{\mathbf{Y}}_0^1 + \frac{1}{\beta\Delta T^2} \mathbf{Y}_m^1$	${}^p\dot{\mathbf{Y}}_j^2 = -\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{Y}_j^2 + \frac{\beta-\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{Y}}_j^2 + \Delta t \frac{2\beta-\gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{Y}}_j^2$ ${}^p\ddot{\mathbf{Y}}_j^2 = -\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{Y}_j^2 - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{Y}}_j^2 - \frac{1-2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{Y}}_j^2$ $\mathbf{Y}_{j+1}^2 = \tilde{\mathbf{M}}_2^{-1} \left\{ \alpha_j \mathbf{L}_2^T - \mathbf{M}_2 {}^p\ddot{\mathbf{Y}}_j^2 - \mathbf{C}_2 {}^p\dot{\mathbf{Y}}_j^2 \right\}$ $\dot{\mathbf{Y}}_{j+1}^2 = {}^p\dot{\mathbf{Y}}_j^2 + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{Y}_{j+1}^2$ $\ddot{\mathbf{Y}}_{j+1}^2 = {}^p\ddot{\mathbf{Y}}_j^2 + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{Y}_{j+1}^2$
(3) Opérateur de condensation :	
$\mathbf{H} = \mathbf{L}_1 \mathbf{Y}_m^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{Y}_m^2$	
γ et β sont les paramètres du schéma de Newmark définies dans (4.3.2)	

Tab. 4.5: Construction de l'opérateur de condensation

implicite de l'accélération moyenne et le schéma explicite des différences centrées. Dans ce cas particulier, l'écriture du schéma de Newmark en accélération permet un passage implicite-explicite naturel à l'interface entre les deux sous-domaines [GRA 01]. Éventuellement, on pourra "travailler" sur le paramètre β et ce afin de rétablir rigoureusement l'équilibre énergétique.

4.4 Analyse de convergence

Dans cette section nous présentons une analyse de convergence des deux approches présentées dans les sections (4.2) et (4.3). Deux cas de figure sont pris en compte : une étude mono-échelle en temps, et une autre multi-échelles en temps. Pour chaque exemple, un schéma d'accélération moyenne est couplé à un schéma de Newmark dissipatif. Un problème à quatre degrés de liberté [BON 08] (masses, ressorts) est appliqué dans le but d'effectuer cette première étude. Le modèle de référence est constitué de quatre masses $m_i = 20000 \text{ kg}$ et quatre ressorts $k_i = 10^6 \text{ N/m}$. Le système est supposé non amorti, et ne subit pas d'efforts extérieurs. L'équation du mouvement correspondant à ce problème est la suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathbf{u}^t = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle. \quad (4.84)$$

Les conditions initiales sont :

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (4.85)$$

Le problème couplé correspondant au système quatre masses-ressorts de référence est illustré dans la figure 4.4. Dans cet exemple, un couplage nodal est adopté puis-

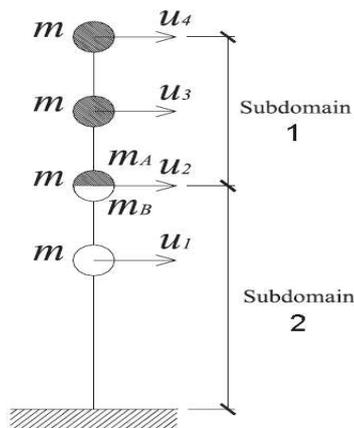


Fig. 4.4: Système couplé à quatre degrés de liberté

qu'une seule masse m_i est divisée en deux parties identiques m_A et m_B où $m_A = m_B$. Les masses résultant de la division de m sont maintenues collées grâce aux multiplieurs de Lagrange. Dans ce cas de figure, l'ordre de convergence du système couplé est évalué par comparaison avec la solution analytique du modèle de référence. L'erreur globale e_T est définie comme suit :

$$e_T = \|\chi - \chi_e\| \quad (4.86)$$

Où χ et χ_e sont, respectivement, les vecteurs d'état à l'instant final T correspondant aux solutions numérique et exacte du système couplé (4.84-4.85). On définit l'ordre de convergence d'un schéma de Newmark par le paramètre k . Théoriquement, le schéma d'accélération moyenne ainsi que les autres schémas de Newmark où $\gamma = \frac{1}{2}$ présentent une précision du second ordre $k = 2$. Par ailleurs, lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$ l'ordre de convergence se dégrade jusqu'à $k = 1$.

4.4.1 Couplage multi-schémas

La première étape consiste à vérifier l'ordre de convergence théorique du modèle utilisé dans cette étude. Dans ce cas de figure on utilise un mono-modèle où aucun couplage est introduit. Les figures ci dessous représentent l'erreur globale $|e_T|$ en fonction du pas de temps ΔT . Les conditions initiales appliquées tout au long de l'étude de convergence sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^t &= \langle 0, 0, 0, 1 \rangle \\ \mathbf{v}_0^t &= \langle 0, 0, 0, 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.87)$$

Les ordres de convergence théorique du schéma de Newmark sont vérifiés sur le mono-modèle à travers la figure (4.5) où un schéma d'accélération moyenne d'ordre 2 est présenté dans (4.5-a), et un autre dissipatif dans (4.5-b). La figure (4.6-a)

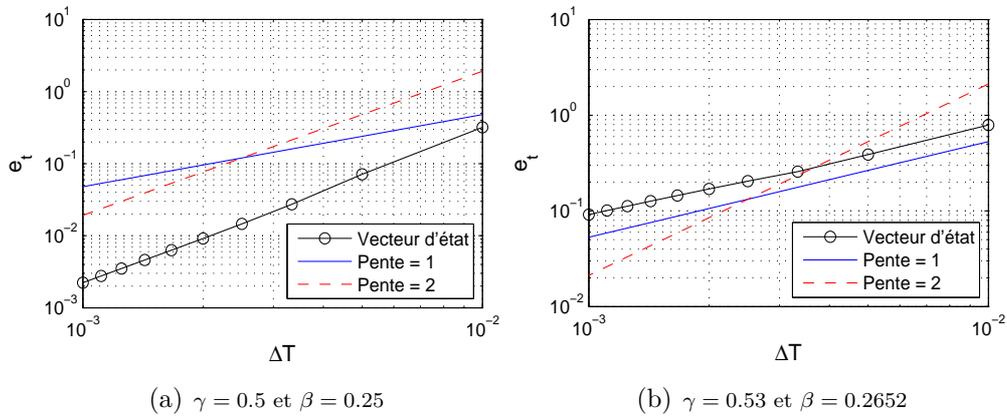


Fig. 4.5: Ordres de convergence d'un mono-modèle de Newmark

présente le couplage de deux schémas d'accélération moyenne ($\gamma_i = 0.5$; $\beta_i = 0.25$ pour $i = 1, 2$) en utilisant l'approche multi-schémas (section 4.2). Le résultat correspondant présente une précision du second ordre. D'autre part, dans la figure (4.6-b) nous couplons un schéma d'accélération moyenne ($\gamma_1 = 0.5$; $\beta_1 = 0.25$) avec un schéma dissipatif ($\gamma_2 = 0.53$; $\beta_2 = 0.2652$). Dans cette configuration, la précision globale chute au premier ordre. En conclusion, nous remarquons que cette méthode de couplage conserve l'ordre de convergence théorique, et lorsque deux schémas hétérogènes sont couplés, l'ordre de convergence global correspond au plus faible des deux schémas.

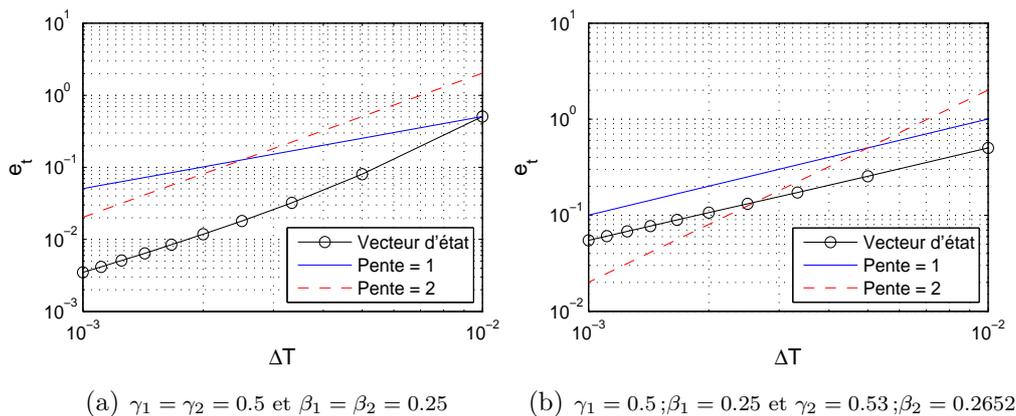


Fig. 4.6: Analyse de convergence de l'approche mono-échelle/multi-schémas

4.4.2 Couplage multi-échelles en temps

Dans cette section nous présentons l'analyse de convergence de l'approche multi-échelles en temps. L'étude porte sur trois ratios différents entre les échelles de temps ($\Delta T = m\Delta t$ pour $m = 3; 19; 49$). Dans un premier temps, deux schémas d'accélération moyenne sont couplés dans le cadre multi-échelles en temps où $\Delta T = 3\Delta t$ (Figure 4.7-a). Ensuite, dans les figures (4.7-b) et (4.7-c), nous augmentons le ratio tel que $m = 19$, puis $m = 49$, respectivement. Nous constatons que la précision est du second ordre pour les trois exemples. Cet ordre de convergence reste stable en augmentant le ratio entre les échelles de temps. Dans la figure (4.7-d) un schéma d'accélération moyenne est couplé avec un schéma de Newmark dissipatif tel que $m = 49$. La convergence dans cet exemple est du premier ordre puisque $\gamma > \frac{1}{2}$. Nous pouvons conclure que l'approche multi-échelles en temps proposée conserve l'ordre de convergence théorique des schémas couplés.

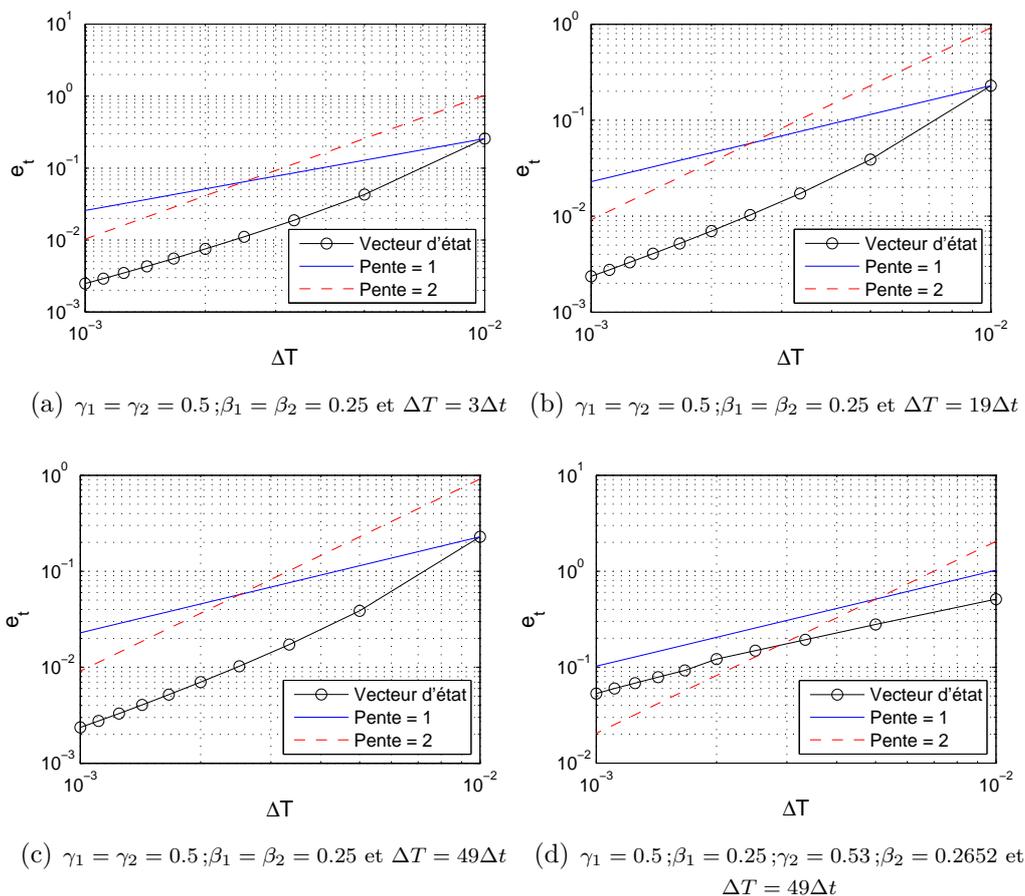


Fig. 4.7: Analyse de convergence de l'approche mono-schéma/multi-échelles et multi-schémas/multi-échelles en temps

4.5 Applications numériques

Dans cette section, nous validons les approches développées dans les sections 4.2 et 4.3 à travers plusieurs études de couplage dans le cadre multi-schémas et multi-échelles en temps.

- Dans un premier temps nous abordons les aspects de conservation d'énergie d'un couplage mono-échelle de schémas de Newmark différents mis en oeuvre pour un bi-modèle Arlequin 1D-1D représentant une barre soumise à un effort de traction/compression.
- Dans un second temps, nous présentons les résultats obtenus par l'approche multi-échelles en temps sur la base d'un bi-modèle Arlequin 2D-1D représentant une poutre encastree - libre de section constante et soumise au même type de chargement.
- La dernière partie concerne un bi-modèle Arlequin 3D-1D où un couplage de schémas implicite/explicite de Newmark et d'échelles de temps différentes est mis en oeuvre.

4.5.1 Raccord 1D-1D multi-schémas : Conservation de l'énergie

Cette section vise à exemplifier l'intérêt de l'approche multi-schémas (section 4.2) notamment au niveau énergétique. Dans un premier temps, nous considérons le modèle couplé illustré dans la figure 4.8 où un chargement sinusoïdal de traction/compression est appliqué. Les données du problème sont les suivantes : Module de Young $E = 1 \text{ Pa}$, densité $\rho = 1 \text{ Kg.m}^{-3}$, longueur totale $L = 3.9 \text{ m}$, section carré $A = 1 \text{ m}^2$. La longueur de chaque sous-domaine est $L_i = 2 \text{ m}$ et la zone de recouvrement couvre 0.1 m . Le modèle couplé subit un chargement sinusoïdal $\mathbf{F} = 0.01 \sin(2\pi/3)$ à son extrémité. La figure 4.9 montre le passage "propre", à

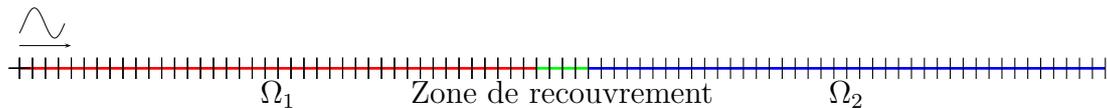


Fig. 4.8: Représentation du couplage 1D-1D

travers la zone de collage, de l'onde de traction-compression du domaine Ω_1 , intégré avec un schéma de Newmark d'accélération moyenne ($\gamma_1 = 0.5$; $\beta_1 = 0.25$), au domaine Ω_2 , intégré avec un schéma dissipatif ($\gamma_2 = 0.6$; $\beta_2 = 0.3025$). L'avantage du cadre Arlequin est de faire transiter l'onde entre les deux modèles sans piéger l'énergie au niveau du modèle fin par réflexions parasites. La diminution de l'amplitude de l'onde dans Ω_2 est due à l'utilisation du schéma dissipatif dans ce domaine. Dans ce qui suit nous nous concentrons sur les aspects énergétiques du problème. À partir d'un mono-modèle de référence équivalent au modèle couplé, nous allons

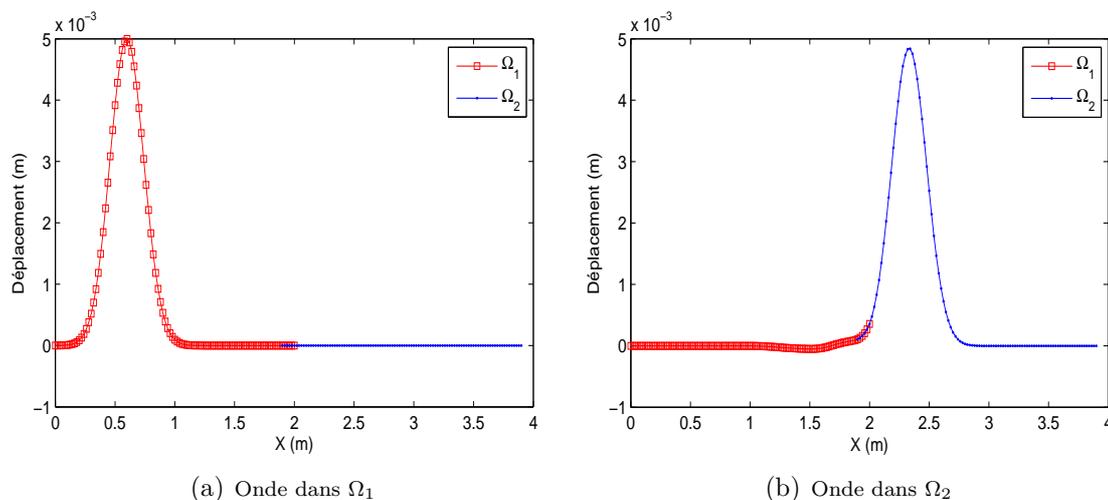


Fig. 4.9: Propagation de l'onde à travers le couplage multi-schémas Arlequin

valider l'approche multi-schémas présenté dans la section 4.2, le but étant de vérifier que cette méthode garantit l'équilibre énergétique. Pour ce faire, nous considérons toujours le bi-modèle 1D-1D présenté dans la figure 4.10. Chacun des sous-domaines est constitué de 45 éléments de valeur unitaire et la zone de collage s'étend sur 4 éléments communs. Un chargement sinusoïdal est généré au niveau de l'extrémité libre de Ω_2 . Dans ce cas test les deux sous-domaines sont intégrés avec des schémas de Newmark dissipatifs : $(\gamma_1 = 0.7; \beta_1 = 0.36)$ sur Ω_1 et $(\gamma_2 = 0.6; \beta_2 = 0.3025)$ sur Ω_2 . La distribution des paramètres du schéma de Newmark sur tout le domaine $\Omega_1 \cup \Omega_2$ respecte la description détaillée dans le tableau 4.2.1. Dans les figures 4.11-a

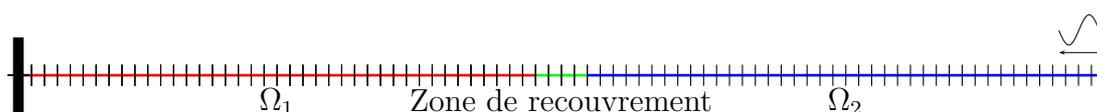


Fig. 4.10: Couplage 1D-1D d'un modèle encastree-libre

et 4.12-a nous présentons le bilan d'énergie du schéma de Newmark sans intervenir au niveau la zone de collage. Il est évident de remarquer le déséquilibre entre les termes de gauche et de droite du bilan, ce qui correspond à l'équation (4.2). En effet, dans la section 4.2, nous avons démontré que le travail des efforts d'interface $\Delta \mathcal{W}$ est à l'origine de ce déséquilibre énergétique. Les figures 4.11-b et 4.12-b montrent la contribution de ces efforts formulée dans l'équation (4.3). Selon le jeu de valeurs des paramètres de Newmark γ_i et β_i en présence, il est possible d'observer soit une introduction de l'énergie comme le montre la figure 4.11, soit une dissipation de l'énergie à travers l'interface comme le montre la figure 4.12. Les figures 4.13 montrent les résultats de la même étude en appliquant l'approche multi-schémas décrite dans la

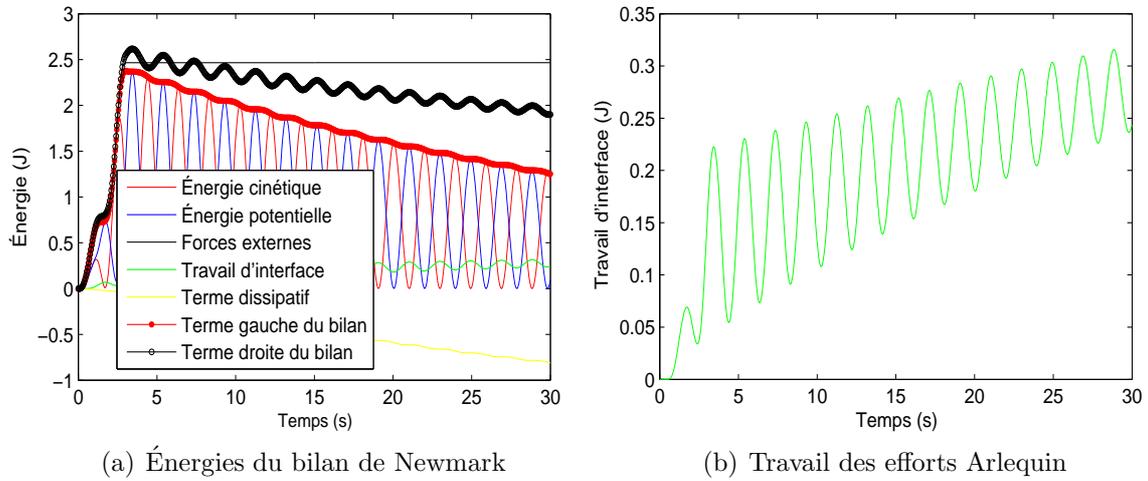


Fig. 4.11: Bilan d'énergie du schéma de Newmark pour $(\gamma_1 = 0.7; \beta_1 = 0.36)$ sur Ω_1 et $(\gamma_2 = 0.6; \beta_2 = 0.3025)$ sur Ω_2

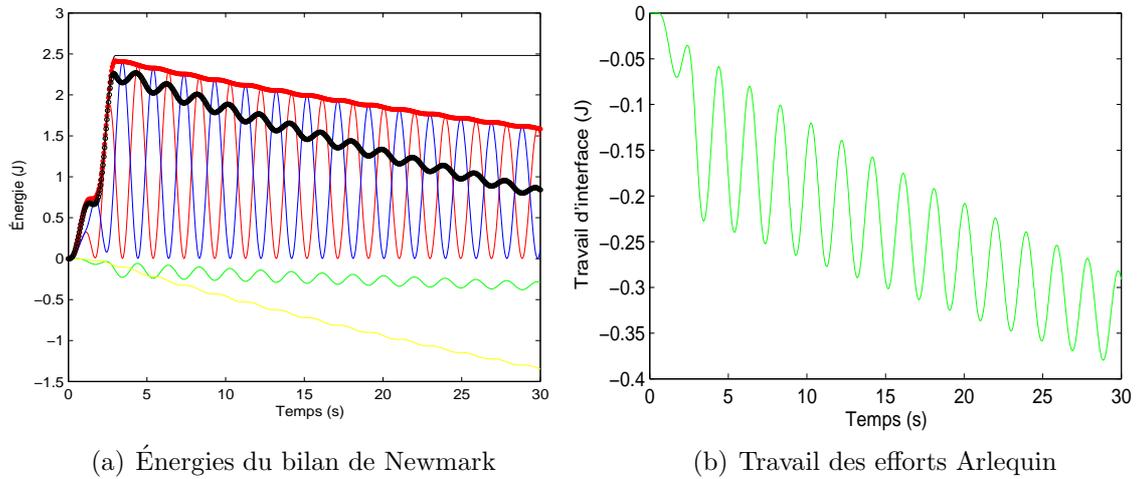


Fig. 4.12: Bilan d'énergie du schéma de Newmark pour $(\gamma_1 = 0.6; \beta_1 = 0.3025)$ sur Ω_1 et $(\gamma_2 = 0.7; \beta_2 = 0.36)$ sur Ω_2

section 4.2. Dans ce cas de figure, les paramètres de Newmark sont distribués selon le tableau 4.2.1. Nous pouvons constater que l'énergie totale est conservée comme le montrent les figures 4.13-a et 4.13-b. En effet et de manière conforme à ce qui est prévu dans l'équation (4.6), le bilan d'énergie du schéma de Newmark est rigoureusement équilibré et la contribution du travail des efforts d'interface est annulée. Les trois quantités cinématiques (déplacements, vitesses, accélérations) pour un noeud

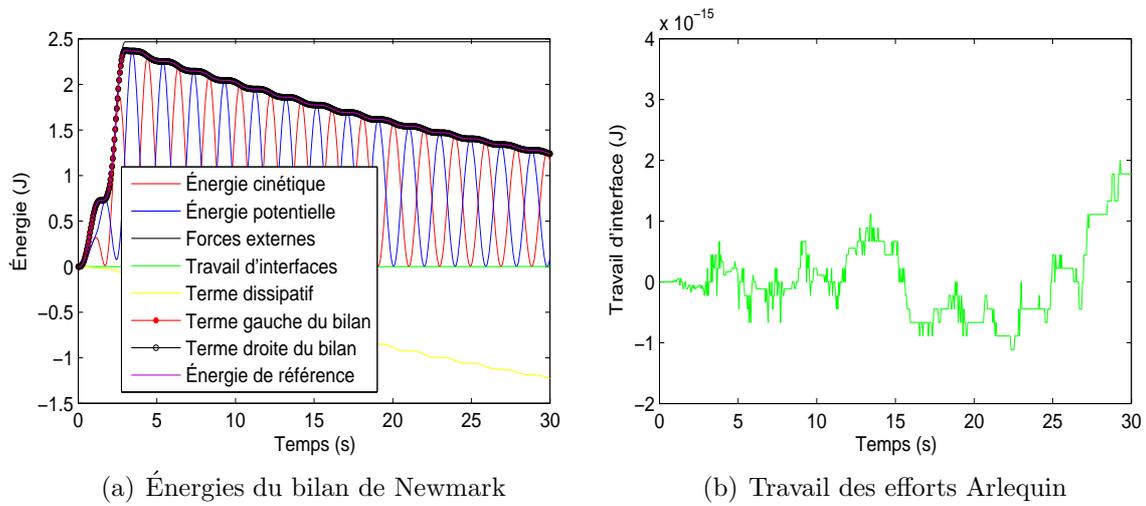


Fig. 4.13: Bilan d'énergie du schéma de Newmark selon l'approche multi-schémas introduite dans la section 4.2

choisi sur la zone libre du domaine Ω_2 sont représentées dans la figure 4.14. Les résultats présentés dans les figures 4.13 et 4.14 sont en parfaite concordance avec la solution de référence et permettent de valider l'approche multi-schémas proposé dans le cadre Arlequin. Dans cet exemple nous avons fait le choix d'imposer la continuité à travers les déplacements mais nous pouvons remarquer qu'elle est également assurée pour les vitesses et les accélérations.

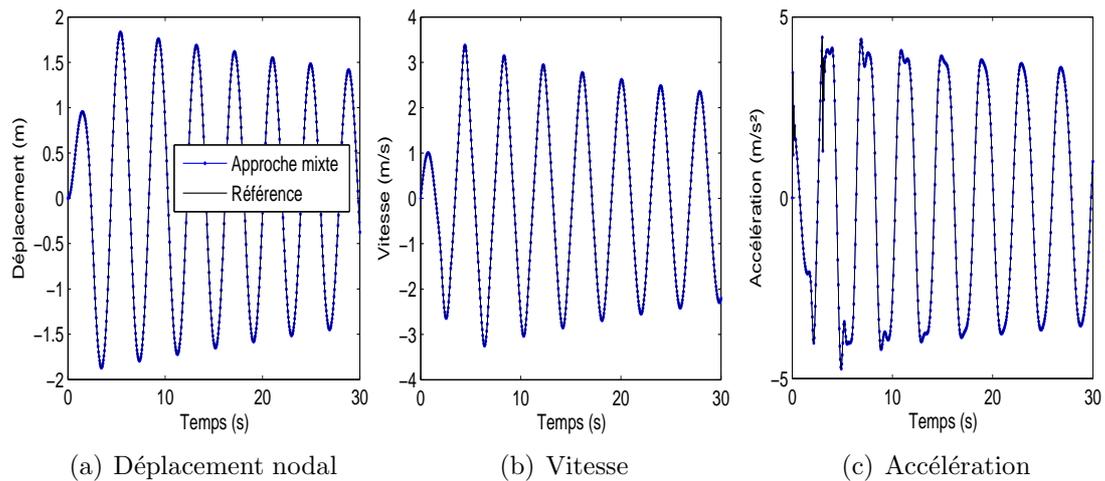


Fig. 4.14: Déplacement, vitesse, et accélération sur un noeud appartenant à Ω_2

Remarque 8 Utilisation des paramètres distribués γ et β dans la zone de recouvrement Ω_0 .

L'application de l'approche multi-schémas avec un paramètre γ qui varie dans la zone de collage Ω_0 comme présenté dans la figure 4.2 est simple et efficace dans le cas où les maillages sont compatibles. Par contre, lorsque les maillages sont hiérarchiques ou bien totalement incompatibles, nous recommandons l'utilisation de valeurs constantes de γ .

En effet, le paramètre de Newmark γ , par exemple, défini dans (4.2.1) présente une distribution propre à chaque domaine. Chaque distribution dépend de la position des noeuds de chaque domaine dans la zone de collage (figure 4.2). Dans ce cas de figure, la condition de continuité $\mathbf{L}_1\Delta\mathbf{u}^1 + \mathbf{L}_2\Delta\mathbf{u}^2$ ne s'annule pas et présente une erreur résiduelle qui peut être adressée de deux façons différentes. La première consiste à remailler la zone de collage pour la rendre pseudo-compatible avec les maillages de Ω_1 et Ω_2 et, par conséquent, une distribution homogène de γ . Ce choix peut s'avérer coûteux en terme de temps de calcul. Une deuxième solution, plus rapide et plus efficace, consiste à utiliser une valeur constante de γ sur Ω_0 comme le montre la figure 4.16. Dans ce cas de figure, la méthode multi-schémas présentée dans la section 4.2.2 reste valide et la condition Arlequin est assurée. Dans le but d'illustrer ce point, nous présentons un exemple de deux maillages hiérarchiques dans la figure (4.15).

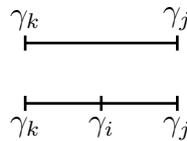


Fig. 4.15: Exemple de maillages hiérarchiques

Dans ce qui suit nous présentons deux cas de figure :

- Deux distributions différentes du paramètre γ sur Ω_1 et Ω_2 à l'intérieur de Ω_0 . Chaque distribution dépend de la discrétisation spatiale du maillage et implique la construction de paramètres de Newmark $\gamma_i(x_i)$ propres à chaque noeud (x_i) de chacun des deux maillages.
- Des valeurs constantes de γ et β sur Ω_1 et Ω_2 à l'intérieur de Ω_0 (figure 4.16).

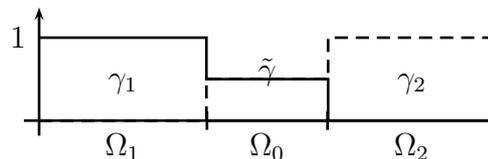


Fig. 4.16: Paramètre γ constant

La figure 4.17-a trace la valeur du travail des efforts Arlequin dans ce cas de maillages incompatibles pour des distributions différentes de γ sur Ω_0 . Nous constatons que le

travail à l'interface est bien inférieur à celui identifié dans les figures 4.11-b et 4.12-b, mais qu'il reste non négligeable. Cette contribution énergétique résiduelle disparaît en utilisant des valeurs constantes du paramètre de Newmark γ (4.17-b).

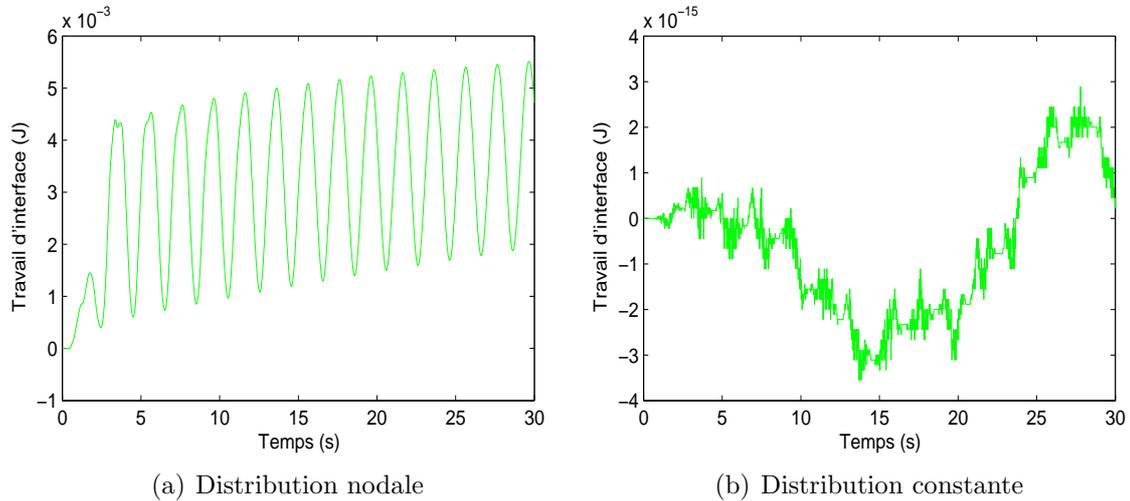


Fig. 4.17: Travail des efforts Arlequin - Maillages incompatibles

4.5.2 Raccord 2D-1D multi-échelles/multi-schémas : Conservation de l'énergie

Cette section vise à exemplifier l'intérêt de l'approche multi-échelles/multi-schémas proposé dans la section 4.3.

Nous considérons le couplage 2D (en déformations planes)-1D (poutre) présenté dans la figure 4.18 où les éléments sont de longueur unitaire. Les caractéristiques

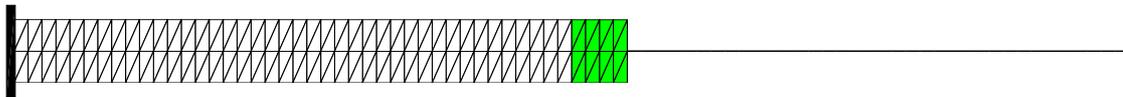
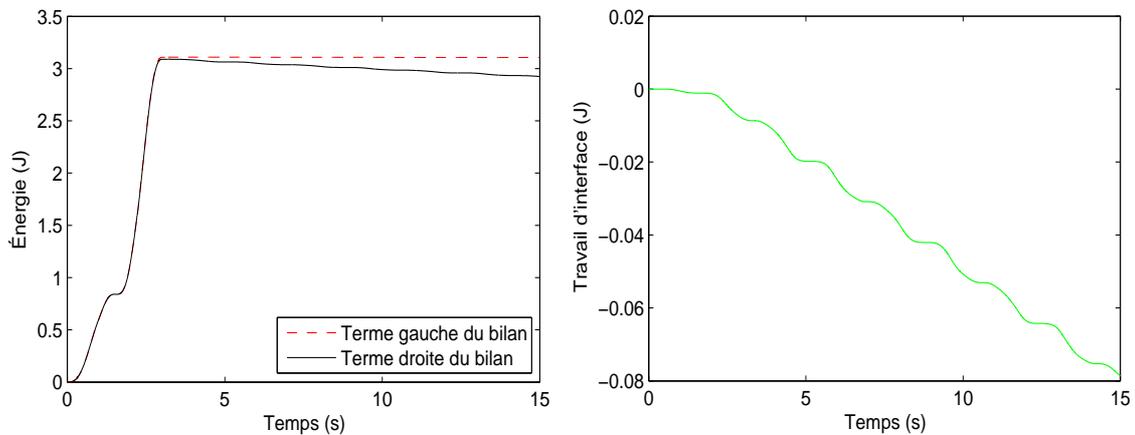


Fig. 4.18: Représentation du couplage 2D-1D

matériaux sont les suivantes : module de Young $E = 1 \text{ Pa}$, masse volumique $\rho = 1 \text{ kg.m}^3$ et coefficient de Poisson $\nu = 0$. Les conditions aux limites imposées correspondent à un encastrement sur l'extrémité de Ω_1 située hors recouvrement et d'un chargement sinusoïdal au niveau du dernier noeud libre de Ω_2 . L'intégration numérique est réalisée à travers les paramètres du schéma de Newmark suivants : $\gamma_1 = 0.9$, $\beta_1 = 0.49$ et $\gamma_2 = 0.60$, $\beta_2 = 0.3025$. Une échelle de temps fine $\Delta t = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

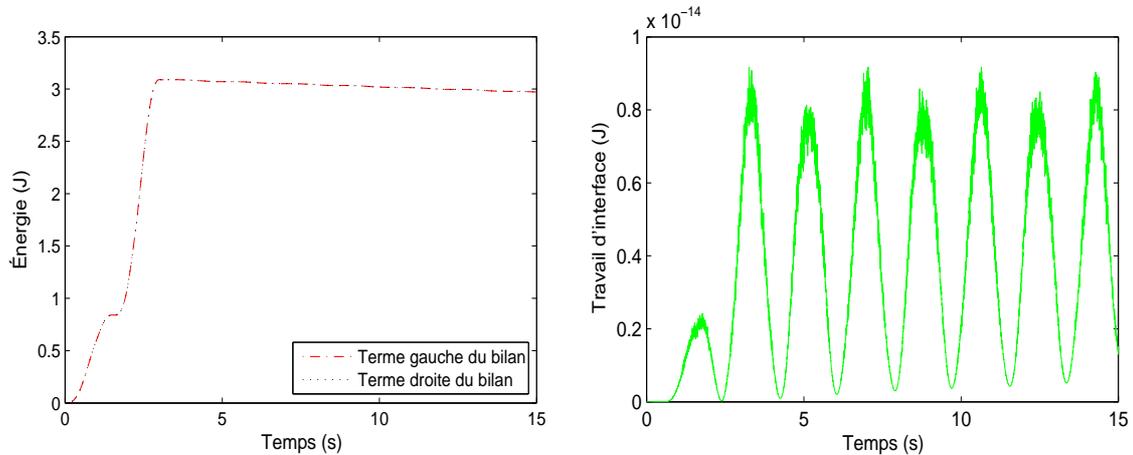
est employée sur le modèle 2D et une autre grossière est utilisée sur le modèle poutre tel que $\Delta T = m\Delta t$ et $m = 100$. Dans la zone de collage (figure 4.18), chaque élément poutre est couplé avec quatre éléments surfaciques 2D et la continuité dans cette zone est assurée à travers les déplacements. Dans un premier temps, nous comparons les résultats de l'approche multi-échelles en temps avec ceux obtenus en appliquant la méthode **GCbis** présentée dans [BAT 10]. Dans un second temps, nous comparons ces résultats par rapport au modèle de référence constitué d'un mono-modèle 2D complet équivalent au bi-modèle Arlequin. La figure 4.19-a permet d'observer



(a) Termes de gauche et de droite de l'équation (4.53) (b) Travail des multiplicateurs de Lagrange (4.56)

Fig. 4.19: Bilan d'énergie du schéma de Newmark - Méthode **GCbis**

le déséquilibre du bilan d'énergie obtenu lors de l'application de la méthode **GCbis** au cadre Arlequin de raccord avec recouvrement. Il est important de souligner que la méthode **GCbis** impose la continuité à l'interface à travers les vitesses. La figure 4.19-b trace la contribution du travail des efforts à l'interface (4.56) qui est à l'origine du déséquilibre du bilan énergétique. D'autre part, les figures 4.20 montrent le bilan d'énergie obtenu lors de l'application au cadre Arlequin de la nouvelle méthode multi-échelles en temps présentée dans la section 4.3. La figure 4.20-b montre que l'équilibre du bilan d'énergie est complètement rétabli et qu'aucune introduction ou dissipation d'énergie n'est détectée à l'interface. Ces observations sont confirmées par la figure 4.20-b où le travail des forces de collage à l'interface est identiquement nul. Les différentes simulations effectuées ont montré la stabilité de cette approche pour toutes les valeurs de ratio m testées (m allant de 1 à 10000). Les figures 4.21 montrent respectivement les déplacements, vitesses et accélérations obtenus par la nouvelle approche, la méthode **GCbis** ainsi que la méthode de référence (discrétisation fine en temps sur tout le mono-modèle de référence 1D). Nous remarquons une bonne concordance entre les différents résultats. Par ailleurs, nous



(a) Termes de gauche et de droite de l'équation (4.53) (b) Travail des multiplicateurs de Lagrange (4.56)

Fig. 4.20: Bilan d'énergie du schéma de Newmark - Nouvelle approche

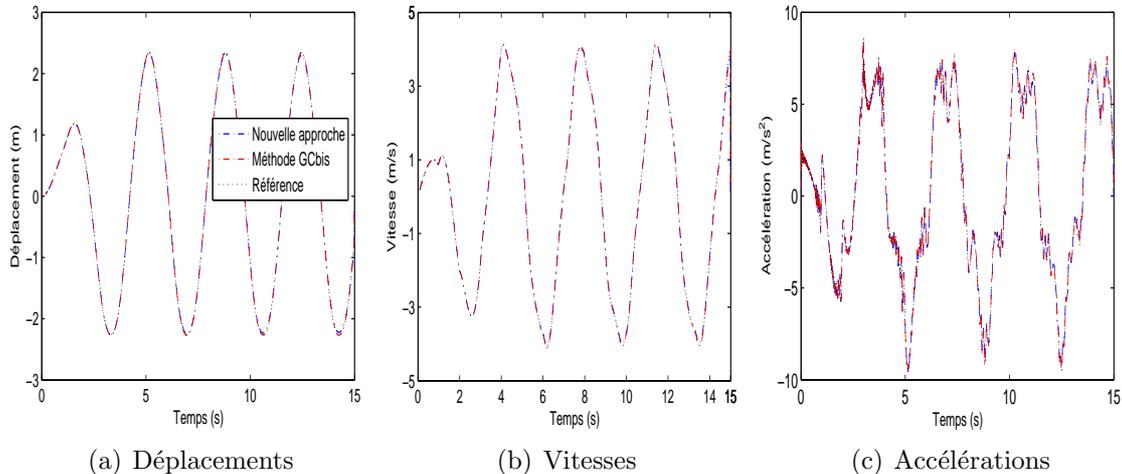


Fig. 4.21: Déplacements, vitesses et accélérations en un noeud choisi de la poutre

n'avons pas observé des instabilités numériques de la méthode **GCbis** tout au long de l'intervalle de l'étude $[0, 15]$. Ceci s'explique par le fait que le résidu énergétique reste négligeable par rapport à l'énergie totale dans ce cas de figure.

4.5.3 Raccord 3D-1D : Couplage multi-échelles implicite/explicite

Les applications numériques précédentes ont porté sur des couplage de schémas Newmark de type implicite. Dans ce qui suit, nous présentons un couplage 3D-1D multi-échelles en temps où un schéma d'accélération moyenne de type Newmark implicite ($\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$) est couplé à un schéma de différences centrées de type Newmark explicite ($\gamma = 0.5$, $\beta = 0$).

Nous considérons le couplage 3D-1D présenté dans la figure 4.22. Il s'agit d'une poutre de longueur $L = 0.4$ m et de section constante (carré de côté $c = 0.02$ m), en appuis simples sur ses deux extrémités et orientée selon l'axe x . Le modèle est constitué d'éléments de poutre de Timoshenko à 6 degrés de liberté par noeud. Un patch 3D constitué d'éléments volumiques à 20 noeuds est placé au tiers de la longueur L . Les caractéristiques matériaux utilisées sont les suivantes : module de Young $E = 1$ N.m², masse volumique $\rho = 1$ kg.m³ et coefficient de Poisson $\nu = 0$. Le modèle est soumis à un chargement sinusoïdal $\mathbf{F}(t) = A \sin(2\pi t/3)$ au niveau d'un noeud de la poutre situé à l'extérieur de la zone de recouvrement. La courbe de référence est obtenue par une mono-modélisation de la structure élancée et mince par des éléments de type poutre. Nous faisons le choix d'intégrer le modèle



Fig. 4.22: Couplage Arlequin 3D-1D

1D avec le schéma implicite et des pas de temps grossiers ($\Delta T = 10^{-2}$ s). Le modèle 3D, quant à lui, est intégré avec le schéma explicite et une échelle de temps fine telle que le pas de temps $\Delta t = \Delta T/55$. Les deux zones de collage de part et d'autre de la zone libre sont constituées chacune d'un élément de poutre couplé avec 9 éléments volumiques. La zone libre comporte les deux autres éléments de poutre de la zone de recouvrement et couvre donc 18 éléments volumiques. L'algorithme écrit en accélération, présenté dans le tableau 4.4, est utilisé ici car il facilite la résolution numérique en présence d'un schéma explicite. La figure 4.23 montre les termes de gauche et de droite du bilan d'énergie du schéma de Newmark dans le cadre multi-échelles en temps (section 4.3). Le couplage explicite/implicite (accélération moyenne) est non dissipatif. Ceci est visible à travers la figure 4.23 où nous pouvons aussi identifier l'équilibre énergétique du système et le valider par rapport à l'énergie équivalente du mono-modèle de référence de poutre. Dans la même figure on met également en évidence la contribution du travail d'interface du bi-modèle Arlequin puisqu'on y constate l'absence d'apport énergétique au niveau de l'interface. La figure 4.24 trace les déplacements de deux noeuds distincts appartenant au bi-modèle Arlequin (en dehors de la zone de collage). La figure 4.24-a compare

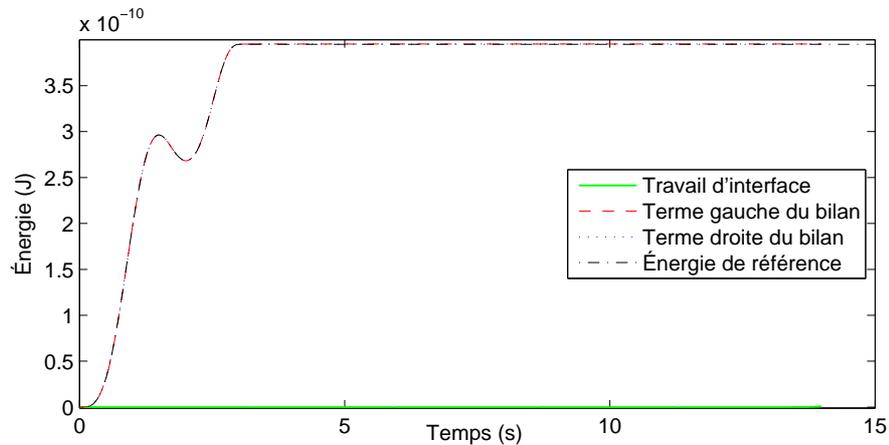


Fig. 4.23: Bilan d'énergie - Couplage implicite/explicite dans le cadre multi-échelles en temps

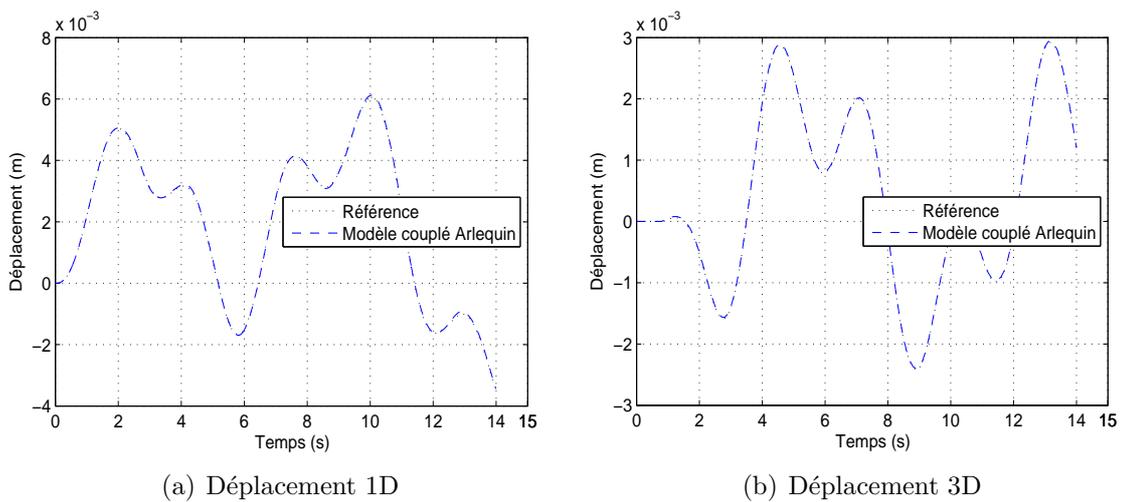


Fig. 4.24: Déplacement - Couplage implicite/explicite dans le cadre multi-échelles en temps

le déplacement d'un nœud du patch 3D géométriquement positionné sur la fibre neutre de la poutre avec le déplacement du même nœud dans le mono-modèle de référence 3D. La figure 4.24-b montre une comparaison entre le déplacement du dernier nœud de la zone libre de la poutre et son équivalent dans le modèle 1D de référence. Les résultats des figures 4.24-a et 4.24-b montrent une bonne cohérence avec les résultats de référence. Le couplage multi-échelles en temps dans ce cadre implicite/explicite présente des résultats concordants avec les résultats de référence tout en garantissant un bilan énergétique rigoureusement équilibré du modèle couplé.

Bilan

Dans ce chapitre nous avons proposé un formalisme général autorisant un couplage multi-modèles / multi-échelles / multi-schémas dans le cadre Arlequin. Nous avons démontré qu'à partir d'une pondération de type partition de l'unité des paramètres du schéma de Newmark dans la zone de collage, il est tout à fait possible d'assurer la continuité des quantités cinématiques et de garantir l'équilibre du bilan énergétique dans un contexte mono-échelle/multi-schémas. De plus, dans le cadre multi-échelles en temps, nous avons prouvé que la continuité des déplacements à l'interface permet d'annuler la contribution énergétique du travail à l'interface et, par conséquent, de garantir un équilibre énergétique rigoureux. L'analyse de convergence de l'approche proposée a démontré que cette méthode conserve les ordres de précision théoriques des schémas couplés. Cette démarche s'est avérée stable pour une grande plage de ratios entre les pas de temps des échelles couplées. Par ailleurs, l'implémentation informatique de cette méthode dans un cadre parallèle est facilement envisageable.

Chapitre 5

Raccord multi-échelles/schémas pour les machines tournantes

Dans ce chapitre, nous étendons le périmètre de validité de l'approche multi-échelles / multi-schémas présentée dans le chapitre 4 au cadre des machines tournantes.

Sommaire

5.1	Formulation continue en dynamique de rotation	140
5.2	Rotation d'ensemble en mono-échelle / multi-schémas . . .	140
5.2.1	Formulation discrétisée	140
5.2.2	Résidu d'interface	141
5.2.3	Méthode de résolution	144
5.3	Rotation d'ensemble en multi-échelles / multi-schémas . . .	147
5.3.1	Formulation discrétisée	148
5.3.2	Résidu d'interface	151
5.3.3	Méthode de résolution	151
5.4	Applications numériques	155
5.4.1	Rotation d'ensemble en mono-échelle en temps	155
5.4.2	Rotation d'ensemble en multi-échelles en temps	161
5.4.3	Transitoire de vitesse de vitesse en mono-échelle en temps . .	161
5.4.4	Transitoire de vitesse de vitesse en multi-échelles en temps .	164

Dans ce qui suit, nous allons aborder la mise en place de l'approche bi-modèle Arlequin avec rotation d'ensemble en deux étapes distinctes :

1. Une application au cadre multi-schémas/mono-échelle en temps. Cette partie est basée sur les développements présentés dans la section (4.2) du chapitre 4. Nous traitons cette approche dans le contexte d'une formulation multi-repères qui tient compte d'une modélisation volumique évoluant dans un repère tournant et d'une modélisation poutre formulée dans un repère fixe.
2. Une approche multi-schémas/multi-échelles en temps. Cette seconde étape concerne l'extension du point 1 cité ci-dessus à la nouvelle méthode multi-échelles en temps formulée dans la section 4.3. Ce cadre autorise, en l'occurrence, la coexistence d'un schéma explicite avec une échelle fine en temps sur un modèle 3D tournant d'une part, ainsi qu'un modèle 1D intégré dans son repère fixe à l'aide d'un schéma implicite et des pas de temps grossiers d'autre part.

5.1 Formulation continue en dynamique de rotation

Nous rappelons dans ce qui suit la formulation faible du problème bi-modèle Arlequin qui s'écrit de la manière suivante :

Trouver $(\mathbf{u}_f^{1d}(t), \mathbf{u}_r^{3d}(t), \boldsymbol{\lambda}_f(t)) \in \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2 \times \mathcal{M}$, $t \in [0, T]$, tel que :

$$\forall \delta \mathbf{u}_f^{1d} \in \mathcal{V}_0^1 \quad M_{1d}(\mathbf{u}_f^{1d}, \delta \mathbf{u}_f^{1d}) + K_{1d}(\mathbf{u}_f^{1d}, \delta \mathbf{u}_f^{1d}) + C_{1d}(\boldsymbol{\lambda}_f, \delta \mathbf{u}_f^{1d}) = \mathbf{f}_{1d}(\delta \mathbf{u}_f^{1d}) \quad (5.1a)$$

$$\forall \delta \mathbf{u}_r^{3d} \in \mathcal{V}^2 \quad M_{3d}(\mathbf{u}_r^{3d}, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) + K_{3d}(\mathbf{u}_r^{3d}, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) - C_{3d}(\boldsymbol{\lambda}_r, \delta \mathbf{u}_r^{3d}) = \mathbf{f}_{3d}(\delta \mathbf{u}_r^{3d}) \quad (5.1b)$$

$$\forall \delta \boldsymbol{\lambda}_f \in \mathcal{M} \quad C(\delta \boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{u}_f^{1d} - \mathbf{u}_f^{3d}) = 0 \quad (5.1c)$$

avec $\boldsymbol{\lambda}_r = \boldsymbol{\Phi}^t \boldsymbol{\lambda}_f$ et $\mathbf{u}_f^{3d} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{u}_r^{3d}$. Dans ce système (5.1), l'équation (5.1a) correspond à la formulation du modèle poutre qui évolue dans le repère fixe. Par conséquent, la rotation d'ensemble n'impacte pas le calcul de ce terme. L'équation (5.1b) est celle de la modélisation 3D qui évolue dans le repère tournant.

5.2 Rotation d'ensemble en mono-échelle / multi-schémas

5.2.1 Formulation discrétisée

À partir de l'équation d'équilibre du modèle 1D dans le repère fixe (3.34), et celle du 3D dans le repère tournant (3.36) nous allons discrétiser le système correspondant au bi-modèle Arlequin (5.1). La différence principale par rapport à l'approche

présentée dans le chapitre 4 (section 4.2) est introduite à travers les équations (3.58) et (3.59). L'intégration numérique est effectuée sur un intervalle de temps $[0, T]$ par incrément de temps constant Δt tel que $\Delta t = T/N$ avec N entier strictement positif. Les quantités cinématiques sont évaluées à la fin de chaque pas de temps aux instants t_{n+1} telles que :

$$t_{n+1} = t_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \Delta t \text{ avec } t_0 = 0 \text{ et } t_N = T \quad (5.2)$$

Dans le but d'alléger les écritures, nous considérons que tout champ ayant l'indice $\{1d\}$ évolue dans le champ fixe et que tout champ ayant l'indice $\{3d\}$ évolue dans le repère tournant. Deux exceptions à cette règle concernent la matrice de couplage assemblée \mathbf{L}_{3d} qui, par construction même, ne contient pas de notion de rotation, ainsi que les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ écrits toujours dans le repère fixe. Le problème discrétisé à chaque instant t_{n+1} est le suivant :

$$\mathbf{M}_{1d}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} + \mathbf{C}_{1d}\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} + \mathbf{K}_{1d}\mathbf{u}_{n+1}^{1d} + \mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{1d}, \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{M}_{3d}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} + \mathbf{C}_{3d}\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} + \mathbf{K}_{3d}\mathbf{u}_{n+1}^{3d} + \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{3d}, \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{L}_{1d}\mathbf{u}_{n+1}^{1d} + \boldsymbol{\Phi}_{n+1}\mathbf{L}_{3d}\mathbf{u}_{n+1}^{3d} = 0. \quad (5.3c)$$

On rappelle que les paramètres de pondération α_i , η_i et φ_i , pour $i \in (1d, 3d)$, sont pris en compte implicitement dans les expressions de \mathbf{M}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{K}_i qui sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement global (amortissement \mathbf{D}_i et gyroscopie \mathbf{G}_i) et de raideur globale correspondant aux sous-domaines Ω_i . En l'occurrence ici, les matrices de raideur contiennent les contributions gyroscopiques et centrifuges. Les vecteurs \mathbf{f}_{n+1}^{1d} et \mathbf{f}_{n+1}^{3d} représentent les forces externes et où $\boldsymbol{\Phi}_{n+1} = \boldsymbol{\Phi}(t_{n+1})$.

5.2.2 Résidu d'interface

L'implémentation de cette méthode a montré une présence d'un résidu numérique. Dans ce qui suit nous allons établir le bilan d'énergie du schéma de Newmark dans le but d'expliquer ce résidu pour pouvoir le quantifier. Pour ce faire, nous nous basons sur les éléments de la démonstration de la conservation d'énergie dans le cas discret mono-échelle / multi-schémas du chapitre 2 (section (2.2.2)). Nous considérons le couplage des deux sous-domaines Ω_{1d} et Ω_{3d} intégrés sur la même échelle Δt de temps et des schémas de Newmark différents ($\gamma = \gamma_{1d}$, $\beta = \beta_{1d}$ sur Ω_{1d} , et $\gamma = \gamma_{3d}$, $\beta = \beta_{3d}$ sur Ω_{3d}). Nous appliquons l'approche multi-schémas/mono-échelle en temps (section (4.2) du chapitre 4), ce qui permet d'écrire : $\gamma = \tilde{\gamma}$, $\beta = \tilde{\beta}$ sur Ω_0 . À partir de cette distribution générale des paramètres γ et β , la variation

de l'énergie entre deux instants t_n et t_{n+1} peut être exprimée comme suit :

$$\sum_{i=1d,3d} \left[E_c^i + E_p^i \right]_n^{n+1} = \sum_{i=1d,3d} \left[\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}})^t \mathbf{M}_i (\dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{u})^t \mathbf{K}_i (\mathbf{u}) \right]_n^{n+1} \quad (5.4a)$$

$$= \sum_{i=1d,3d} \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \dot{\mathbf{u}}_n^i)^t \mathbf{M}_i (\dot{\mathbf{u}}_n^i - \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i) \quad (5.4b)$$

$$+ \sum_{i=1d,3d} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1}^i + \mathbf{u}_n^i)^t \mathbf{K}_i (\mathbf{u}_n^i - \mathbf{u}_{n+1}^i) \quad (5.4c)$$

La résolution de l'équilibre discrétisé (5.3) avec le schéma de Newmark s'effectue à partir des expressions des déplacements et des vitesses suivantes ($i = 1d, 3d$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1}^i &= \mathbf{u}_n^i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^i + \left(\frac{1}{2} - \beta_i \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n^i + \beta_i \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i \\ &= {}^p \mathbf{u}_{n+1}^i + \beta_i \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i, \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i &= \dot{\mathbf{u}}_n^i + (1 - \gamma_i) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n^i + \gamma_i \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i \\ &= {}^p \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \gamma_i \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i. \end{aligned} \quad (5.5b)$$

L'introduction de ces termes (5.5) réécrits sous forme d'incrément et de valeurs moyennes dans (5.4), permet d'éliminer les incréments en vitesse et en accélération. Ensuite, une série d'opérations algébriques permet de faire apparaître le terme correspondant au **travail de collage à l'interface** dans l'expression de l'équilibre :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} + \dot{\mathbf{u}}_n^{1d})^t [(\mathbf{f}_{n+1}^{1d} + \mathbf{f}_n^{1d}) - (\mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_n)] \\ &+ \frac{\Delta t}{2} (\gamma_{1d} - \frac{1}{2}) (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} + \dot{\mathbf{u}}_n^{1d})^t \mathbf{M}_{1d} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^{1d} + \frac{\Delta t^2}{2} (\beta_{1d} - \frac{1}{2} \gamma_{1d}) (\mathbf{u}_{n+1}^{1d} + \mathbf{u}_n^{1d})^t \mathbf{K}_{1d} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^{1d} \\ &+ \frac{\Delta t}{4} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} + \dot{\mathbf{u}}_n^{3d})^t [(\mathbf{f}_{n+1}^{3d} + \mathbf{f}_n^{3d}) - (\mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t + \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{\Phi}_n^t)] \\ &+ \frac{\Delta t}{2} (\gamma_{3d} - \frac{1}{2}) (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} + \dot{\mathbf{u}}_n^{3d})^t \mathbf{M}_{3d} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^{3d} + \frac{\Delta t^2}{2} (\beta_{3d} - \frac{1}{2} \gamma_{3d}) (\mathbf{u}_{n+1}^{3d} + \mathbf{u}_n^{3d})^t \mathbf{K}_{3d} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^{3d} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le nouvel élément dans cette écriture (5.6) concerne l'apparition des matrices de projection $\boldsymbol{\Phi}$.

Nous rappelons les notations suivantes :

$$\Delta(\bullet)^i = (\bullet)_{n+1}^i - (\bullet)_n^i \quad \text{et} \quad (\bar{\bullet})^i = \frac{1}{2} [(\bullet)_{n+1}^i + (\bullet)_n^i] \quad (5.7)$$

À l'aide de ces termes, il est possible d'établir le bilan d'énergie du schéma de Newmark dans le cadre d'un couplage multi-schémas / multi-repères / mono-échelle

en temps :

$$\begin{aligned}
 \Delta E = & (\Delta \mathbf{u}^{1d})^t \left[\bar{\mathbf{f}}^{1d} + (\gamma_{1d} - \frac{1}{2}) \Delta \mathbf{f}^{1d} \right] + (\Delta \mathbf{u}^{1d})^t \left[\mathbf{L}_{1d}^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_{1d} - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_{1d}^t \Delta \boldsymbol{\lambda} \right] \\
 & - (\gamma_{1d} - \frac{1}{2}) \left[(\Delta \mathbf{u}^{1d})^t \mathbf{K}_{1d} \Delta \mathbf{u}^{1d} + (\beta_{1d} - \frac{1}{2} \gamma_{1d}) \Delta t^2 (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^{1d})^t \mathbf{M}_{1d} (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^{1d}) \right] \\
 & + (\Delta \mathbf{u}^{3d})^t \left[\bar{\mathbf{f}}^{3d} + (\gamma_{3d} - \frac{1}{2}) \Delta \mathbf{f}^{3d} \right] \\
 & + (\Delta \mathbf{u}^{3d})^t \left[\frac{1}{2} (\mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_n^t \boldsymbol{\lambda}_n) + (\gamma_{3d} - \frac{1}{2}) (\mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} - \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_n^t \boldsymbol{\lambda}_n) \right] \\
 & - (\gamma_{3d} - \frac{1}{2}) \left[(\Delta \mathbf{u}^{3d})^t \mathbf{K}_{3d} \Delta \mathbf{u}^{3d} + (\beta_{3d} - \frac{1}{2} \gamma_{3d}) \Delta t^2 (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^{3d})^t \mathbf{M}_{3d} (\Delta \ddot{\mathbf{u}}^{3d}) \right]
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Cette expression permet d'isoler le travail d'interface dans la zone de collage Arlequin :

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{W} = & (\Delta \mathbf{u}^{1d})^t \left[\mathbf{L}_{1d}^t \bar{\boldsymbol{\lambda}} + (\gamma_{1d} - \frac{1}{2}) \mathbf{L}_{1d}^t \Delta \boldsymbol{\lambda} \right] \\
 & + (\Delta \mathbf{u}^{3d})^t \left[\frac{1}{2} (\mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_n^t \boldsymbol{\lambda}_n) + (\gamma_{3d} - \frac{1}{2}) (\mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} - \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_n^t \boldsymbol{\lambda}_n) \right]
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

En développant cette expression, on arrive à l'expression suivante du travail $\Delta \mathcal{W}$ à l'interface :

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{W} = & (\Delta \mathbf{u}^{1d})^t [\tilde{\gamma} \mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + (1 - \tilde{\gamma}) \mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_n] \\
 & + (\Delta \mathbf{u}^{3d})^t [\tilde{\gamma} \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + (1 - \tilde{\gamma}) \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_n^t \boldsymbol{\lambda}_n]
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

En utilisant les conditions de raccord Arlequin (5.3c), nous constatons qu'il subsiste le résidu d'interface \mathcal{R}_e suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_e = & (1 - \tilde{\gamma}) \boldsymbol{\lambda}_n^t [\boldsymbol{\Phi}_n \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_{n+1}^{3d} - \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_{n+1}^{3d}] \\
 & + \tilde{\gamma} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^t [\boldsymbol{\Phi}_n \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_n^{3d} - \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_n^{3d}]
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

La non annulation de ces termes est due à la coexistence des champs de déplacement et des matrices de projection à des instants différents.

Évaluation du résidu

Dans le but de quantifier ce résidu, nous définissons, pour la vitesse de rotation Ω , les positions angulaires $\theta_n = \Omega t_n$ et $\theta_{n+1} = \Omega t_{n+1}$ aux instants t_n et t_{n+1} . Avec ces notations, nous avons $\theta_{n+1} = \Omega t_{n+1} = \Omega t_n + \Omega \Delta t$. En notant $\Delta \theta = \Omega \Delta t$, le

passage de Φ_n à Φ_{n+1} se fait par composition des rotations. On peut donc écrire que $\Phi_{n+1} = \Phi(\theta_{n+1}) = \Phi(\theta_n + \Delta\theta) = \Phi(\Delta\theta)\Phi(\theta_n)$. Nous avons alors :

$$\Phi_{n+1} = \Phi(\Delta\theta)\Phi_n \quad (5.12a)$$

$$\Phi_n = \Phi^t(\Delta\theta)\Phi_{n+1} \quad (5.12b)$$

En remplaçant les équations (5.12) dans la formulation du résidu on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e &= (1 - \tilde{\gamma}) \lambda_n^t [\mathbf{L}_{3d} (\Phi_n - \Phi_{n+1}) \mathbf{u}_{n+1}^{3d}] \\ &\quad + \tilde{\gamma} \lambda_{n+1}^t [\mathbf{L}_{3d} (\Phi_n - \Phi_{n+1}) \mathbf{u}_n^{3d}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

où alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e &= (1 - \tilde{\gamma}) \lambda_n^t [\mathbf{L}_{3d} (\mathbf{I} - \Phi(\Delta\theta)) \Phi_n \mathbf{u}_{n+1}^{3d}] \\ &\quad + \tilde{\gamma} \lambda_{n+1}^t [\mathbf{L}_{3d} (\mathbf{I} - \Phi(\Delta\theta)) \Phi_n \mathbf{u}_n^{3d}] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Si le produit $\Omega\Delta t$ est petit alors $\Delta\theta$ est suffisamment petit. On a alors $\cos(\Delta\theta) \simeq 1$ et $\sin(\Delta\theta) \simeq \Delta\theta$.

L'expression de $\Phi(\Delta\theta)$ est la suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \simeq 1 & \simeq -\Delta\theta \\ 0 & \simeq \Delta\theta & \simeq 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Avec ces hypothèses, l'opérateur $\mathbf{I} - \Phi(\Delta\theta)$ qui figure dans (5.14) s'écrit comme suit :

$$\mathbf{I} - \Phi(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \simeq 0 & \simeq -\Delta\theta \\ 0 & \simeq \Delta\theta & \simeq 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Nous pouvons remarquer que lorsque le produit $\Omega\Delta t$ tend vers 0, alors l'opérateur $\mathbf{I} - \Phi(\Delta\theta)$ tend vers 0 et, par conséquent, le résidu \mathcal{R}_e tend vers 0. Ce développement théorique est validé à l'aide d'une application numérique dans la section 5.4 (figure (5.7)).

5.2.3 Méthode de résolution

Les opérateurs de projection qui apparaissent au niveau des équations (5.3b) et (5.3c) impactent la résolution du système (5.3). Dans ce qui suit nous présentons la résolution correspondante à ce système ainsi que l'algorithme correspondant pour une formulation de Newmark en accélération.

Il est possible de réécrire les équations de (5.3) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{1d} & \mathbf{0} & \mathbb{L}_{1d}^t \\ \mathbf{0} & \mathbb{M}_{3d} & \mathbb{L}_{3d}^t \Phi_{n+1}^t \\ \mathbb{L}_{1d} & \Phi_{n+1} \mathbb{L}_{3d} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{n+1}^{1d} \\ \mathbb{U}_{n+1}^{3d} \\ \Lambda_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{n+1}^{1d} \\ \mathbb{F}_{n+1}^{3d} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{N}_{1d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{N}_{3d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_n^{1d} \\ \mathbb{U}_n^{3d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

avec

$$\mathbb{M}_{1d} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1d} & \mathbf{C}_{1d} & \mathbf{K}_{1d} \\ -\gamma_{1d}\Delta t_{1d}\cdot\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\beta_{1d}\Delta t_{1d}^2\cdot\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_{1d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1-\gamma_{1d})\Delta t_{1d}\cdot\mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 \\ -(0.5-\beta_{1d})\Delta t_{1d}^2\cdot\mathbf{I} & -\Delta t_{1d}\cdot\mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M}_{3d} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{3d} & \mathbf{C}_{3d} & \mathbf{K}_{3d} \\ -\gamma_{3d}\Delta t_{3d}\cdot\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\beta_{3d}\Delta t_{3d}^2\cdot\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{N}_{3d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(1-\gamma_{3d})\Delta t_{3d}\cdot\mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 \\ -(0.5-\beta_{3d})\Delta t_{3d}^2\cdot\mathbf{I} & -\Delta t_{3d}\cdot\mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}_{3d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{L}_{3d} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}_{1d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{L}_{1d} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{U}_{n+1}^{1d} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{1d} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}_{n+1}^{1d} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{1d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{U}_{n+1}^{3d} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{3d} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}_{n+1}^{3d} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{3d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système est résolu en 3 étapes : résolution d'un problème sans liaison, résolution d'un problème avec liaison et résolution d'un problème d'interface. La démarche suivie est identique à celle du cadre mono-échelle / multi-schémas sans rotation d'ensemble. La différence de base concerne l'apparition des opérateurs de projection dépendant du temps Φ au niveau des matrices de couplage du modèle fin \mathbf{L}_{3d} .

Les champs cinématiques \mathbb{U}_{n+1}^{1d} et \mathbb{U}_{n+1}^{3d} peuvent être exprimés sous forme de la somme de deux quantités, une avec liaison et l'autre sans liaison :

$$\mathbb{U}_{n+1}^{1d} = \mathbb{U}_{n+1/sl}^{1d} + \mathbb{U}_{n+1/al}^{1d} \quad (5.18)$$

$$\mathbb{U}_{n+1}^{3d} = \mathbb{U}_{n+1/sl}^{3d} + \mathbb{U}_{n+1/al}^{3d} \quad (5.19)$$

La condition de collage Arlequin à l'interface devient :

$$\mathbf{L}_{1d}\mathbf{u}_{n+1/al}^{1d} + \mathbf{L}_{3d}\mathbf{u}_{n+1/al}^{3d} = -\mathbf{L}_{1d}\mathbf{u}_{n+1/sl}^{1d} - \mathbf{L}_{3d}\mathbf{u}_{n+1/sl}^{3d} \quad (5.20)$$

La résolution du système sans liaison ne subit aucune modification puisqu'elle est réalisée sous la seule contribution des efforts extérieurs :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1/sl}^{1d} \\ \mathbf{U}_{n+1/sl}^{3d} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n+1}^{1d} \\ \mathbf{F}_{n+1}^{3d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{3d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n^{1d} \\ \mathbf{U}_n^{3d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Le problème général avec liaison s'écrit alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1d} & \mathbf{0} & \mathbb{L}_{1d}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3d} & \mathbb{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \\ \mathbb{L}_{1d} & \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbb{L}_{3d} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1/al}^{1d} \\ \mathbf{U}_{n+1/al}^{3d} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbb{L}_1 \mathbf{U}_{n+1/sl}^{1d} - \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbb{L}_{3d} \mathbf{U}_{n+1/sl}^{3d} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

À partir de ce système, nous calculons les quantités suivantes :

- les multiplicateurs de Lagrange à l'aide d'une condensation sur l'interface
- les quantités avec liaison /al

La condensation à l'interface à partir du système (5.22) permet d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{1d} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d} + \mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d} = -\tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \mathbf{L}_{1d}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad (5.23)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{3d} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d} + \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d} = -\tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad (5.24)$$

$$\mathbb{H} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_{n+1/sl}^{1d} + \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_{n+1/sl}^{3d} \quad (5.25)$$

Où \mathbb{H} est l'opérateur de condensation qui se définit comme suit :

$$\mathbb{H} = \beta_{1d} \Delta t_{1d} \mathbf{L}_{1d} \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \mathbf{L}_{1d}^t + \beta_{3d} \Delta t_{3d} \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbf{L}_{3d} \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \mathbf{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \quad (5.26)$$

et où $\tilde{\mathbf{M}}_{1d} = \mathbf{M}_{1d} + \gamma_{1d} \Delta t_{1d} \mathbf{C}_{1d} + \beta_{1d} \Delta t_{1d}^2 \mathbf{K}_{1d}$ et $\tilde{\mathbf{M}}_{3d} = \mathbf{M}_{3d} + \gamma_{3d} \Delta t_{3d} \mathbf{C}_{3d} + \beta_{3d} \Delta t_{3d}^2 \mathbf{K}_{3d}$.

Remarque 9 Il est important de remarquer que l'opérateur de condensation \mathbb{H} varie en fonction du temps. En effet, l'opérateur de rotation $\boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t$ doit être actualisé à chaque pas de temps. Par contre, les termes $\beta_{1d} \Delta t_{1d} \mathbf{L}_{1d} \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \mathbf{L}_{1d}^t$ et $\beta_{3d} \Delta t_{3d} \mathbf{L}_{3d} \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \mathbf{L}_{3d}^t$ sont indépendants du temps et peuvent être calculés, comme à l'arrêt, à l'extérieur de la boucle en temps. Par conséquent, seule l'opération de sommation de ces termes est effectuée à l'intérieur de la boucle en temps de l'algorithme.

En injectant l'opérateur de condensation \mathbb{H} dans (5.22) nous obtenons le système matriciel à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1d} & \mathbf{0} & \mathbb{L}_{1d}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3d} & \mathbb{L}_{3d}^t \boldsymbol{\Phi}_{n+1}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1/al}^{1d} \\ \mathbf{U}_{n+1/al}^{3d} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbb{L}_{1d} \mathbf{U}_{n+1/sl}^{1d} - \boldsymbol{\Phi}_{n+1} \mathbb{L}_{3d} \mathbf{U}_{n+1/sl}^{3d} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

On résout ce système en deux étapes :

- Calcul des multiplicateurs de Lagrange à partir de la troisième ligne de (5.27) :

$$\mathbb{H}\Lambda_{n+1} = -\mathbb{L}_{1d}\mathbb{U}_{n+1/sl}^{1d} - \Phi_{n+1}\mathbb{L}_{3d}\mathbb{U}_{n+1/sl}^{3d} \quad (5.28)$$

- Calcul des quantités avec liaison :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{1d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{M}_{3d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{n+1/al}^{1d} \\ \mathbb{U}_{n+1/al}^{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{L}_{1d}^t \Lambda_{n+1} \\ -\mathbb{L}_{3d}^t \Phi_{n+1}^t \Lambda_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Les quantités finales que nous souhaitons trouver sont équivalentes à la somme des résultats sans et avec déplacement :

$$\mathbb{U}_{n+1}^{1d} = \mathbb{U}_{n+1/sl}^{1d} + \mathbb{U}_{n+1/al}^{1d} \quad (5.30a)$$

$$\mathbb{U}_{n+1}^{3d} = \mathbb{U}_{n+1/sl}^{3d} + \mathbb{U}_{n+1/al}^{3d} \quad (5.30b)$$

L'algorithme correspondant à cette démarche est présenté dans le tableau (5.1).

5.3 Rotation d'ensemble en multi-échelles / multi-schémas

L'approche multi-échelles en temps présente de multiples avantages lors du couplage de modèles de finesses différentes tel que l'économie au niveau du temps de calcul, ainsi que la possibilité d'employer des stratégies d'adaptation du pas de temps en fonction des sous-domaines et des schémas d'intégration. Afin d'intégrer les spécificités de la dynamique en rotation d'ensemble, il est intéressant d'établir le bi-modèle tournant 1D-3D dans un cadre multi-échelles / multi-schémas en temps.

Cette partie reprend donc deux approches présentées précédemment :

- La méthode multi-échelles en temps présentée dans la section (4.3) du chapitre 4.
- L'approche mono-échelle en temps multi-schémas/multi-repères développée dans la section (5.2) de ce chapitre.

Cette démarche constitue l'aboutissement des développements théoriques évoqués jusqu'à présent. Elle permet de montrer son apport sur des exemples de type machines tournantes afin de viser des applications plus concrètes.

Avant d'aborder différents aspects de cette approche, on résume dans ce qui suit les différentes propriétés associés à chacun des modèles couplés :

- Modèles 3D : échelle temporelle fine (Δt), repère tournant $\mathbf{R}_r(x_r, y_r, z_r)$, schéma de Newmark explicite ou implicite (selon l'application).
- Modèles 1D : échelle temporelle grossière (ΔT), repère fixe (galiléen) $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$, schéma de Newmark implicite (conservatif ou bien dissipatif).

Distribution des paramètres	
$\gamma = \gamma_{1d}$ sur $\Omega_{1d} \setminus \Omega_0$, $\gamma = \gamma_{3d}$ sur $\Omega_{3d} \setminus \Omega_0$ et $\gamma = \tilde{\gamma} = \xi_1 \gamma_{1d} + \xi_2 \gamma_{3d}$ sur Ω_0	
$\beta = \beta_{1d}$ sur $\Omega_{1d} \setminus \Omega_0$, $\beta = \beta_{3d}$ sur $\Omega_{3d} \setminus \Omega_0$ et $\beta = \tilde{\beta} = \xi_1 \beta_{1d} + \xi_2 \beta_{3d}$ sur Ω_0	
(1) Résolution du problème sans liaison :	
$p\mathbf{u}_n^{1d} = \mathbf{u}_n^{1d} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^{1d} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n^{1d}$ $p\dot{\mathbf{u}}_n^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_n^{1d} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n^{1d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{1d} = \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \{ \mathbf{f}_{n+1}^{1d} - \mathbf{K}_{1d} p\mathbf{u}_n^{1d} - \mathbf{C}_{1d} p\dot{\mathbf{u}}_n^{1d} \}$ $\mathbf{u}_{n+1/sl}^{1d} = p\mathbf{u}_n^{1d} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{1d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{1d} = p\dot{\mathbf{u}}_n^{1d} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{1d}$	$p\mathbf{u}_n^{3d} = \mathbf{u}_n^{3d} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^{3d} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n^{3d}$ $p\dot{\mathbf{u}}_n^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_n^{3d} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n^{3d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{3d} = \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \{ \mathbf{f}_{n+1}^{3d} - \mathbf{K}_{3d} p\mathbf{u}_n^{3d} - \mathbf{C}_{3d} p\dot{\mathbf{u}}_n^{3d} \}$ $\mathbf{u}_{n+1/sl}^{3d} = p\mathbf{u}_n^{3d} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{3d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{3d} = p\dot{\mathbf{u}}_n^{3d} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{3d}$
(2.0) Calcul de la matrice de projection : Φ_{n+1}	
(2.1) Calcul de l'opérateur de condensation :	
$\mathbf{H} = \beta \Delta t_{1d} \mathbf{L}_{1d} \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \mathbf{L}_{1d}^t + \beta \Delta t_{3d} \Phi_{n+1} \mathbf{L}_{3d} \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \mathbf{L}_{3d}^t \Phi_{n+1}^t$	
(2.2) Résolution du problème condensé :	
$\lambda_{n+1} = \mathbf{H}^{-1} \{ \mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_{n+1/sl}^{1d} + \Phi_{n+1} \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_{n+1/sl}^{3d} \}$	
(3) Résolution du problème avec liaison :	
$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d} = -\tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \{ \mathbf{L}_{1d}^t \lambda_{n+1} \}$ $\mathbf{u}_{n+1/al}^{1d} = \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d} = \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d}$	$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d} = -\tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \{ \mathbf{L}_{3d}^t \Phi_{n+1}^t \lambda_{n+1} \}$ $\mathbf{u}_{n+1/al}^{3d} = \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d} = \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d}$
(4) Mise à jour :	
$\mathbf{u}_{n+1}^{1d} = \mathbf{u}_{n+1/sl}^{1d} + \mathbf{u}_{n+1/al}^{1d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{1d} + \dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{1d} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{1d} + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{1d}$	$\mathbf{u}_{n+1}^{3d} = \mathbf{u}_{n+1/sl}^{3d} + \mathbf{u}_{n+1/al}^{3d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{3d} + \dot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{3d} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/sl}^{3d} + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/al}^{3d}$

Tab. 5.1: Algorithme de couplage de deux schémas de Newmark différents sur deux repères différents et la même échelle de temps - Cadre Arlequin

5.3.1 Formulation discrétisée

Sur le domaine Ω_{1d} , on considère un pas de temps grossier ΔT qui varie de t_0 jusqu'à t_m tel que $t_m = t_0 + \Delta T$ comme le montre la figure 5.1. De façon similaire, la discrétisation sur Ω_{3d} est faite aux instants $t_j \forall j \in 1, 2, \dots, m$.

Le point-clé de l'extension du cadre multi-échelles en temps dans la configuration en rotation d'ensemble consiste à introduire les projetés, dans le repère tournant, des

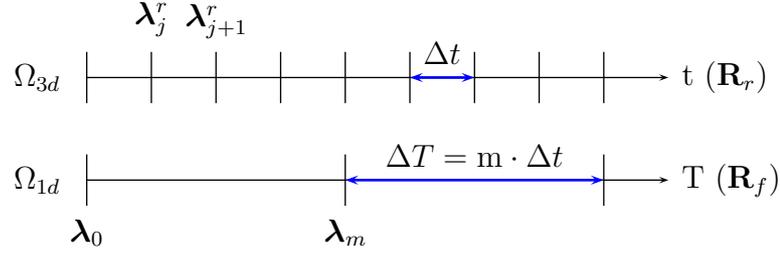


Fig. 5.1: Discrétisation temporelles sur les repères fixe \mathbf{R}_f et rotationnel \mathbf{R}_r .

multiplicateurs de Lagrange fictifs sur l'échelle fine λ_j . Ces projetés sont désignés par λ_j^r et sont définis par $\lambda_j^r = \Phi_j^t \lambda_j$.

La formulation discrétisée en espace et en temps du bi-modèle Arlequin 1D-3D est la suivante :

$$\mathbf{M}_{1d} \ddot{\mathbf{u}}_m^{1d} + \mathbf{C}_{1d} \dot{\mathbf{u}}_m^{1d} + \mathbf{K}_{1d} \mathbf{u}_m^{1d} + \mathbf{L}_{1d}^t \lambda_m = \mathbf{f}_m^{1d}, \quad (5.31a)$$

$$\mathbf{M}_{3d} \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d} + \mathbf{C}_{3d} \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + \mathbf{K}_{3d} \mathbf{u}_j^{3d} + \mathbf{L}_{3d}^t \lambda_j^r = \mathbf{f}_j^{3d}, \quad (5.31b)$$

$$\mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_m^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_m^{3d} = 0 \quad (5.31c)$$

On rappelle que l'amortissement global \mathbf{C}_i est constitué des matrices d'amortissement \mathbf{D}_i et de gyroscopie \mathbf{G}_i , ainsi que les matrices de raideur contiennent les contributions gyroscopiques et centrifuges.

Par définition même, ces multiplicateurs doivent respecter les conditions suivantes :

$$\lambda_0^r = \Phi_0^t \lambda_0 \quad (5.32)$$

$$\lambda_m^r = \Phi_m^t \lambda_m \quad (5.33)$$

Dans ce qui suit, nous proposons d'adapter la méthode multi-échelles en temps [GHA 12b, GHA 11b, GHA 11a] dans le but de prendre en compte le changement de repères tout en préservant la conservation de l'énergie globale [GHA 12a, GHA 13]. L'idée principale est toujours de faire apparaître la condition de raccord Arlequin au niveau de l'expression du travail d'interface en vue d'annuler ce dernier.

Par analogie avec le chapitre 4, nous démontrons que le travail d'interface $\Delta \mathcal{W}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{W} = & \left\{ \mathbf{u}_m^{1d} - \mathbf{u}_0^{1d} \right\}^t \mathbf{L}_{1d}^t \left\{ \gamma_{1d} \lambda_m + (1 - \gamma_{1d}) \lambda_0 \right\} \\ & + \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \mathbf{u}_{j+1}^{3d} - \mathbf{u}_j^{3d} \right\}^t \mathbf{L}_{3d}^t \left\{ \gamma_{3d} \lambda_{j+1}^r + (1 - \gamma_{3d}) \lambda_j^r \right\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

En effet, cette expression est obtenue au travers des expressions de l'équilibre de chacun des domaines couplés. En ayant introduit les multiplicateurs de Lagrange fins directement dans le repère tournant dans (5.31), la démonstration reste donc toujours valable dans le cadre multi-repères/multi-échelles en temps. Le but de cette

démarche est de ramener l'expression (5.34) à une forme qui s'exprime en fonction de la condition de collage (5.31c) en vue d'annuler le terme correspondant. Pour ce faire, nous proposons de trouver la condition nécessaire, permettant de satisfaire la relation suivante à chaque pas de temps :

$$\boxed{\gamma_{3d}\boldsymbol{\lambda}_{j+1}^r + (1 - \gamma_{3d})\boldsymbol{\lambda}_j^r = \tilde{\gamma}\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma})\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0 \quad \forall j \in [0, m - 1]} \quad (5.35)$$

À partir de (5.35), nous pouvons formuler l'expression des multiplicateurs de Lagrange sur l'échelle fine $\boldsymbol{\lambda}_{j+1}^r$ aux instants t_{j+1} :

$$\boldsymbol{\lambda}_{j+1}^r = \frac{\tilde{\gamma}\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma})\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0}{\gamma_{3d}} + \frac{(\gamma_{3d} - 1)}{\gamma_{3d}}\boldsymbol{\lambda}_j^r \quad \forall j \in [0, m - 1] \quad (5.36)$$

L'expression (5.36) est de la forme $\boldsymbol{\lambda}_{j+1}^r = b + a\boldsymbol{\lambda}_j^r$ où :

$$a = \frac{(\gamma_{3d} - 1)}{\gamma_{3d}} \quad \text{et} \quad b = \frac{\tilde{\gamma}\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma})\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0}{\gamma_{3d}}.$$

De manière similaire à la démarche à l'arrêt, nous démontrons qu'il s'agit de la forme générale d'une suite arithmetico-géométrique à coefficients constants $(\boldsymbol{\lambda}_j^r)_{j \in \mathbb{N}}$ [RAD 95]. En posant $r = \frac{b}{1 - a} = \tilde{\gamma}\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma})\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0$, l'expression générale de cette série est :

$$\boldsymbol{\lambda}_j^r = a^{j-j_0}(\boldsymbol{\lambda}_{j_0}^r - r) + r \quad \forall j \geq j_0$$

Pour $j_0 = 0$, le j -ième terme de la suite $(\boldsymbol{\lambda}_j^r)_{j \in \mathbb{N}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_j^r &= a^j(\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0 - r) + r \\ &= (1 - \tilde{\gamma}(1 - a^j))\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0 + \tilde{\gamma}(1 - a^j)\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m \end{aligned} \quad (5.37)$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme d'une interpolation linéaire entre $\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0$ et $\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m$ en fonction d'un paramètre α_j :

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_j^r &= (1 - \alpha_j)\boldsymbol{\Phi}_0^t\boldsymbol{\lambda}_0 + \alpha_j\boldsymbol{\Phi}_m^t\boldsymbol{\lambda}_m \quad \forall j \in [0, m] \\ \text{où } \alpha_j &= \tilde{\gamma}(1 - a^j) \end{aligned}} \quad (5.38)$$

L'équation (5.38) représente l'interpolation, sur l'échelle fine en temps t_j , de la projection des multiplicateurs de Lagrange du repère fixe au repère tournant.

La construction du paramètre de Newmark $\tilde{\gamma}$ dans la zone de collage Ω_0 reste identique :

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{1 - a^m} \quad \text{if } a^m \neq 1 \quad (5.39)$$

Remarque 10 Cette pondération des multiplicateur de Lagrange sur l'échelle fine en tenant compte de la rotation des repères formulée dans (5.38), constitue un cadre général qui couvre l'approche en dynamique sans rotation d'ensemble. En effet, pour des angles de rotation nulles, les matrices Φ_0 et Φ_m sont équivalentes à une matrice identité, ce qui nous ramène du cadre général (5.38) à un cadre plus particulier (5.35).

5.3.2 Résidu d'interface

En remarquant que :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \{\mathbf{u}_{j+1}^{3d} - \mathbf{u}_j^{3d}\} = \{\mathbf{u}_m^{3d} - \mathbf{u}_0^{3d}\} \quad (5.40)$$

et en tenant compte de l'hypothèse (5.35), l'expression (5.34) peut être simplifiée et réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{W} = & \{\mathbf{u}_m^{1d} - \mathbf{u}_0^{1d}\}^t \mathbf{L}_{1d}^t \left\{ \gamma_{1d} \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \gamma_{1d}) \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} \\ & + \{\mathbf{u}_m^{3d} - \mathbf{u}_0^{3d}\}^t \mathbf{L}_{3d}^t \left\{ \tilde{\gamma} \Phi_m^t \boldsymbol{\lambda}_m + (1 - \tilde{\gamma}) \Phi_0^t \boldsymbol{\lambda}_0 \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Toujours par analogie avec la configuration à l'arrêt, nous imposons la condition suivante dans la zone de collage :

$$\gamma_{1d} = \tilde{\gamma} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (5.42)$$

Il est alors possible d'écrire l'équation (5.41) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{W} = & \tilde{\gamma} \boldsymbol{\lambda}_m^t [\mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_m^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_m^{3d}] - (1 - \tilde{\gamma}) \boldsymbol{\lambda}_0^t [\mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_0^{1d} + \Phi_0 \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_0^{3d}] \\ & - \tilde{\gamma} \boldsymbol{\lambda}_m^t [\mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_0^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_0^{3d}] + (1 - \tilde{\gamma}) \boldsymbol{\lambda}_0^t [\mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_m^{1d} + \Phi_0 \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_m^{3d}] \end{aligned} \quad (5.43)$$

La continuité dans Ω_0 étant imposée à travers les déplacements dans l'équation (5.31c), les deux premiers termes disparaissent alors que les deux autres termes subsistent dans le travail Arlequin à l'interface. Comme en mono-échelle en temps, le bilan d'énergie n'est donc pas rigoureusement équilibré dans le cadre de dynamique de rotation d'ensemble en multi-échelles en temps. Il est important de noter que l'on retrouve également le même résidu à l'interface que pour le cas mono-échelle en temps (équation (5.11)).

5.3.3 Méthode de résolution

Nous abordons à présent la mise en œuvre algorithmique de l'approche présentée ci dessus.

Le système (5.31) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathbb{M}_{1d}\mathbb{U}_m^{1d} + \mathbb{L}_{1d}^t \mathbf{\Lambda}_m = \mathbb{F}_m^{1d} - \mathbb{N}_{1d}\mathbb{U}_0^{1d} \quad (5.44a)$$

$$\mathbb{M}_{3d}\mathbb{U}_j^{3d} + \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Lambda}_j = \mathbb{F}_j^{3d} - \mathbb{N}_{3d}\mathbb{U}_{j-1}^{3d} \quad (5.44b)$$

$$\mathbb{L}_{1d}\mathbb{U}_m^{1d} + \mathbf{\Phi}_m \mathbb{L}_{3d}\mathbb{U}_m^{3d} = 0 \quad (5.44c)$$

Le remplacement de (5.38) dans (5.44b) donne :

$$\mathbb{M}_{3d}\mathbb{U}_j^{3d} + \alpha_j \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \mathbf{\Lambda}_m = \mathbb{F}_j^{3d} - \mathbb{N}_{3d}\mathbb{U}_{j-1}^{3d} - (1 - \alpha_j) \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_0^t \mathbf{\Lambda}_0 \quad (5.45)$$

En remplaçant l'équation (5.44b) par (5.45), nous pouvons présenter cette écriture discrétisée sous la forme de deux problèmes sans et avec liaison :

Problème sans liaison

$$\mathbb{M}_{1d}\mathbb{U}_{m/sl}^{1d} = \mathbb{F}_m^{1d} - \mathbb{N}_{1d}\mathbb{U}_0^{1d} \quad (5.46a)$$

$$\mathbb{M}_{3d}\mathbb{U}_{j/sl}^{3d} = \mathbb{F}_j^{3d} - \mathbb{N}_{3d}\mathbb{U}_{j-1}^{3d} - (1 - \alpha_j) \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_0^t \mathbf{\Lambda}_0 \quad (5.46b)$$

Problème avec liaison

$$\mathbb{M}_{1d}\mathbb{U}_{m/al}^{1d} = -\mathbb{L}_{1d}^t \mathbf{\Lambda}_m \quad (5.47a)$$

$$\mathbb{M}_{3d}\mathbb{U}_{j/al}^{3d} = -\alpha_j \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \mathbf{\Lambda}_m \quad (5.47b)$$

Le système matriciel global (5.44) peut être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{M}_{3d} & & \alpha_1 \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \\ \mathbb{N}_{3d} & \mathbb{M}_{3d} & \alpha_2 \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \\ \hline & & \mathbb{M}_{1d} \\ & & \mathbb{L}_{1d}^t \\ \hline & \mathbf{\Phi}_m \mathbb{L}_{3d} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbb{U}_1^{3d} \\ \mathbb{U}_2^{3d} \\ \vdots \\ \mathbb{U}_m^{3d} \\ \mathbb{U}_m^{1d} \\ \mathbf{\Lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_1^{3d} \\ \tilde{\mathbb{F}}_2^{3d} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^{3d} \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^{1d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_1^{3d} \\ \tilde{\mathbb{F}}_2^{3d} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^{3d} \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^{1d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_1^{3d} - \mathbb{N}_{3d}\mathbb{U}_0^{3d} - \mathbb{L}_{3d}^t (1 - \alpha_1) \mathbf{\Phi}_0^t \mathbf{\Lambda}_0 \\ \mathbb{F}_2^{3d} - \mathbb{L}_{3d}^t (1 - \alpha_2) \mathbf{\Phi}_0^t \mathbf{\Lambda}_0 \\ \vdots \\ \mathbb{F}_m^{3d} \\ \hline \mathbb{F}_m^{1d} - \mathbb{N}_{1d}\mathbb{U}_0^{1d} \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Ce système est de la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \hline \mathbf{\Lambda}_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{F}} \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5.49)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{U}_{al} \\ \mathbf{U}_{sl} &= \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{U}_{al} &= -\mathbf{Y} \mathbf{\Lambda}_m \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (5.50)$$

La première ligne du système (5.49) donne :

$$\mathbf{M} \mathbf{U} + \mathbf{L} \mathbf{\Lambda}_m = \tilde{\mathbf{F}} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{M} \mathbf{U}_{al} + \mathbf{L} \mathbf{\Lambda}_m = \tilde{\mathbf{F}} \quad (5.52)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{M} \mathbf{U}_{sl} - \tilde{\mathbf{F}}) = (\mathbf{M} \mathbf{Y} + \mathbf{L}) \mathbf{\Lambda}_m \quad (5.53)$$

La deuxième ligne du système (5.49) donne :

$$\mathbf{B} \mathbf{U}_{sl} + \mathbf{B} \mathbf{U}_{al} \Rightarrow \mathbf{B} \mathbf{U}_{sl} = [\mathbf{B} \mathbf{Y}] \mathbf{\Lambda}_m = \mathbf{H} \mathbf{\Lambda}_m \quad (5.54)$$

Les étapes de résolution de ce système sont les suivantes :

1. Problème sans liaison : $\mathbf{M} \mathbf{U}_{sl} = \tilde{\mathbf{F}}$
2. Calcul de $\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}$
3. Calcul de l'opérateur d'interface : \mathbf{H}
4. Calcul du problème d'interface
5. Calcul du problème avec liaison : \mathbf{U}_{al}

1) **Problème sans liaison :**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{M}_{3d} & & & & & \\ \mathbf{N}_{3d} & \mathbf{M}_{3d} & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{N}_{3d} & \mathbf{M}_{3d} \\ \hline & & & & & \mathbf{M}_{3d} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_{1/sl}^{3d} \\ \mathbf{U}_{2/sl}^{3d} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{m/sl}^{3d} \\ \hline \mathbf{U}_{m/sl}^{1d} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{F}}_1^{3d} \\ \tilde{\mathbf{F}}_2^{3d} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_m^{3d} \\ \hline \tilde{\mathbf{F}}_m^{1d} \end{array} \right] \quad (5.55)$$

2) Calcul de \mathbb{Y} :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbb{M}_{3d} & & & & & \\ \mathbb{N}_{3d} & \mathbb{M}_{3d} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{N}_{3d} & \mathbb{M}_{3d} \\ \hline & & & & & \mathbb{M}_{3d} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_1^{3d} \\ \mathbb{Y}_2^{3d} \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^{3d} \\ \hline \mathbb{Y}_m^{1d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbb{L}_{3d}^t \Phi_m^t \\ \alpha_2 \mathbb{L}_{3d}^t \Phi_m^t \\ \vdots \\ \mathbb{L}_{3d}^t \Phi_m^t \\ \hline \mathbb{L}_{1d}^t \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

3) Calcul de l'opérateur d'interface \mathbb{H} :

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Phi_m \mathbb{L}_{3d} & \mathbb{L}_{1d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_1^{3d} \\ \mathbb{Y}_2^{3d} \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^{3d} \\ \hline \mathbb{Y}_m^{1d} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$(5.58)$$

d'où

$$\mathbb{H} = \mathbb{L}_{1d} \mathbb{Y}_m^{1d} + \Phi_m \mathbb{L}_{3d} \mathbb{Y}_{3d}^{-1} \mathbb{L}_{3d}^t \Phi_m^t \quad (5.59)$$

Calcul du deuxième membre du problème d'interface $\mathbb{B}\mathbb{U}_{sl}$:

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Phi_m \mathbb{L}_{3d} & \mathbb{L}_{1d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{1/sl}^{3d} \\ \mathbb{U}_{2/sl}^{3d} \\ \vdots \\ \mathbb{U}_{m/sl}^{3d} \\ \hline \mathbb{U}_{m/sl}^{1d} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$(5.61)$$

4) Problème d'interface :

$$\mathbb{H}\Lambda_m = \mathbb{B}\mathbb{U}_{sl} \quad (5.62)$$

d'où

$$\left(\mathbb{L}_{1d} \mathbb{Y}_m^{1d} + \Phi_m \mathbb{L}_{3d} \mathbb{Y}_m^{3d} \Phi_m^t \right) \Lambda_m = \mathbb{L}_{1d} \mathbf{u}_{m/sl}^{1d} + \Phi_m \mathbb{L}_{3d} \mathbf{u}_{m/sl}^{3d} \quad (5.63)$$

5) Calcul du problème avec liaison :

$$\mathbb{U}_{al} = -\mathbb{Y}\Lambda_m = - \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_1^{3d} \\ \mathbb{Y}_2^{3d} \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^{3d} \\ \hline \mathbb{Y}_m^{1d} \end{bmatrix} \Lambda_m \quad (5.64)$$

La solution peut être mise à jour avant de passer à l'itération suivante :

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_{sl} + \mathbb{U}_{al} \quad (5.65)$$

L'implémentation numérique de ces développements est résumée dans le tableau (5.2) où les notations suivantes sont définies :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^{1d} &= \{ \mathbf{f}_m^{1d} - \mathbf{C}_{1d}^p \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} - \mathbf{K}_{1d}^p \mathbf{u}_{m/sl}^{1d} \} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^{3d} &= \{ \mathbf{f}_{j+1}^{3d} - \mathbf{C}_{3d}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} - \mathbf{K}_{3d}^p \mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} - (1 - \alpha_j) \mathbf{L}_{3d}^t \Phi_0^t \lambda_0 \} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^{1d} &= \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \{ -\mathbf{L}_{1d}^t \lambda_m - \mathbf{C}_{1d}^p \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} - \mathbf{K}_{1d}^p \mathbf{u}_{m/al}^{1d} \} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^{3d} &= \{ \alpha_j \mathbf{L}_{3d}^t \Phi_m^t \lambda_m - \mathbf{C}_{3d}^p \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} - \mathbf{K}_{3d}^p \mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} \} \end{aligned} \quad (5.66)$$

5.4 Applications numériques

5.4.1 Couplage 3D-1D mono-échelle en temps avec rotation d'ensemble

Dans cette partie nous appliquons l'approche multi-repères/mono-échelle en temps (section 5.2) à un cas test dans le but de valider ce formalisme. Il s'agit d'une ligne d'arbres horizontale de longueur L et de section constante en rotation autour de l'axe (\vec{X}) sous des conditions d'appui simple au niveau de ses extrémités. Elle est modélisée par des éléments finis de type poutre de Timoshenko à six degrés de liberté par nœud. Un disque est placé aux $2/3$ de la longueur L et un patch 3D, constitué d'éléments volumiques à 20 nœuds et extrudant une partie linéique du rotor, est introduit au tiers de la longueur L . La partie 3D est constituée de deux zones de collage et d'une zone libre. Le modèle est soumis à un effort de type balourd au niveau du disque.

Cette partie présente une première étude concernant la réponse de la ligne d'arbre à une vitesse stabilisée où nous vérifions principalement les trajectoires et les déplacements des nœuds du patch 3D. Ensuite, une deuxième étude dans

Distribution des paramètres	
$\gamma = \gamma_{1d}$ sur $\Omega_{1d} \setminus \Omega_0$, $\gamma = \gamma_{3d}$ sur $\Omega_{3d} \setminus \Omega_0$ et $\gamma = \tilde{\gamma} = \frac{\gamma_{3d}^m}{\gamma_{3d}^m - (1 - \gamma_{3d})^m}$ sur Ω_0 pour $\gamma_{3d} > 0.5$ $\beta = \beta_{1d}$ sur $\Omega_{1d} \setminus \Omega_0$, $\beta = \beta_{3d}$ sur $\Omega_{3d} \setminus \Omega_0$ et $\beta = \tilde{\beta} = 0.25(0.5 + \tilde{\gamma})^2$ sur Ω_0 .	
Boucle principale	
(1) Résolution du problème sans liaison :	
$\mathbf{u}_{0/sl}^{1d} = \mathbf{u}_0^{1d}; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{1d}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{1d} = \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d};$ ${}^p\mathbf{u}_{m/sl}^{1d} = \mathbf{u}_0^{1d} + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d}$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} = \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^{1d}$ $\mathbf{u}_{m/sl}^{1d} = {}^p\mathbf{u}_{m/sl}^{1d} + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d}$	$\mathbf{u}_{0/sl}^{3d} = \mathbf{u}_0^{3d}; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{3d}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{3d} = \ddot{\mathbf{u}}_0^{3d};$ Boucle sur $j \in [0, m - 1]$ ${}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} = \mathbf{u}_j^{3d} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d}$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} = \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^{3d}$ $\mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} = {}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d}$ If $j = m$, Fin de la boucle
(2.0) Calcul de la matrice de projection : Φ_m	
(2.1) Calcul de l'opérateur de condensation :	
$\mathbf{H} = \mathbf{L}_{1d} \mathbf{Y}_m^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{Y}_m^{3d} \Phi_m^t$	
(2.2) Résolution du problème d'interface :	
$\lambda_m = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_{m/sl}^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_{m/sl}^{3d} \right\}$	
(3) Résolution du problème avec liaison :	
$\mathbf{u}_{0/al}^{1d} = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^{1d} = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^{1d} = \mathbf{0};$ ${}^p\mathbf{u}_{m/al}^{1d} = \mathbf{u}_0^{1d} + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d}$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} = \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^{1d}$ $\mathbf{u}_{m/al}^{1d} = {}^p\mathbf{u}_{m/al}^{1d} + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d}$	$\mathbf{u}_{0/al}^{3d} = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^{3d} = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^{3d} = \mathbf{0};$ Boucle sur $j \in [0, m - 1]$ ${}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} = \mathbf{u}_j^{3d} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d}$ ${}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} = \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^{3d}$ $\mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} = {}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d}$ If $j = m$, Fin de la boucle
(4) Mise à jour :	
$\mathbf{u}_m^{1d} = \mathbf{u}_{m/sl}^{1d} + \mathbf{u}_{m/al}^{1d}$ $\dot{\mathbf{u}}_m^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} + \dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_m^{1d} = \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} + \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d}$	Boucle sur $j \in [0, m - 1]$ $\mathbf{u}_{j+1}^{3d} = \mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} + \mathbf{u}_{j+1/al}^{3d}$ $\dot{\mathbf{u}}_{j+1}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} + \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{3d} = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} + \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d}$ If $j = m$, Fin de la boucle
Fin de la boucle principale	

Tab. 5.2: Algorithme multi-schémas/multi-échelles /multi-repères - Cadre Arlequin



Fig. 5.2: Couplage Arlequin 3D-1D ; Section carré

le domaine transitoire est réalisée. Elle porte sur l'application d'une montée en vitesse du rotor de 0 tr/min jusqu'à stabilisation à la vitesse de 5000 tr/min. Cette deuxième section permet de caractériser le comportement de la ligne d'arbre en déterminant la vitesse critique où un maximum d'amplitude est observé.

Dans le but de valider de différentes modélisations, nous présentons la première étude dans le cadre d'une modélisation poutre de section carré et un patch 3D de même section (figure 5.2), et dans la deuxième partie nous considérons une modélisation poutre de section circulaire et un patch 3D cylindrique (figure 5.9).

5.4.1.1 Études à vitesses nominales

5.4.1.2 Rotation à faible vitesse

À présent, nous nous intéressons aux résultats en rotation de cette approche multi-repères dans le cadre multi-schémas/mono-échelle en temps. Nous présentons une première étude en rotation sur le même cas test dans le but de valider cette approche. Dans ce premier test nous présentons le bi-modèle 3D-1D tournant à

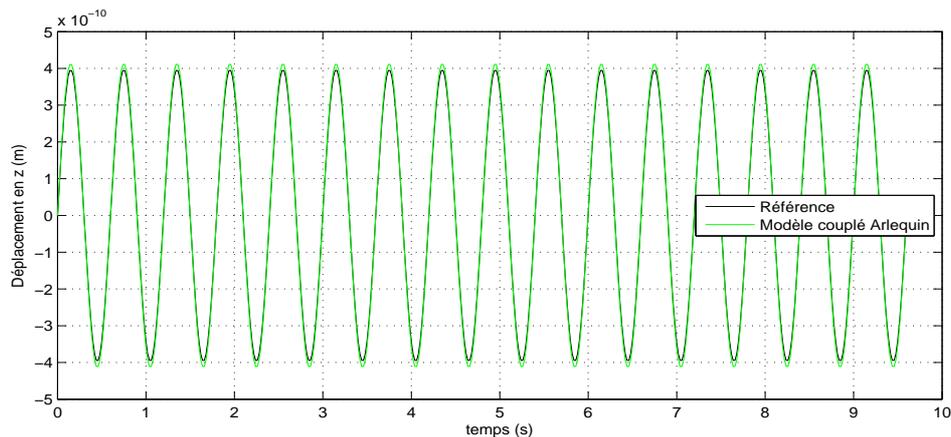


Fig. 5.3: Déplacement selon l'axe Z à 100 tr/min

une vitesse faible de 100 tr/min comme le montre la trajectoire de la figure 5.4. Le couplage s'effectue pour les paramètres de Newmark suivants : $\gamma_{1d} = 0.5$, $\beta_{1d} = 0.25$,

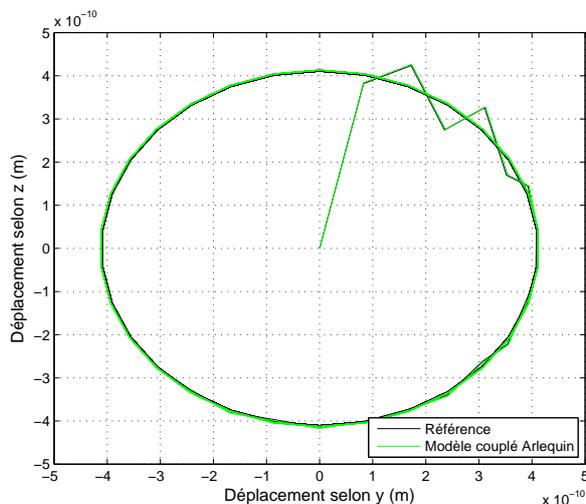


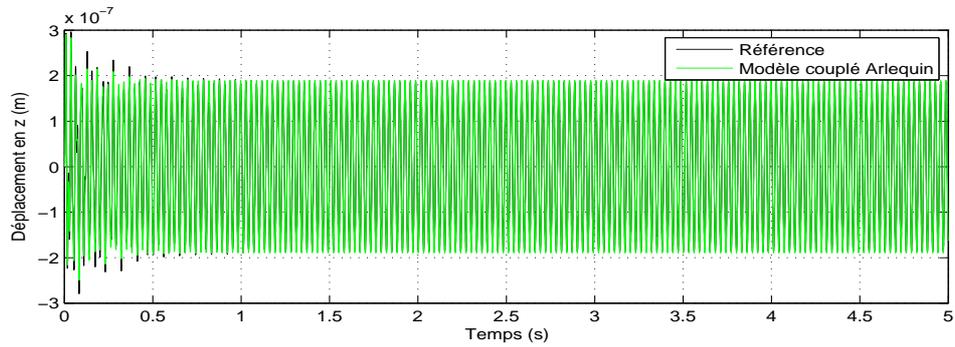
Fig. 5.4: Trajectoire du rotor à 100 tr/min

$\gamma_{3d} = 0.6$, $\beta_{3d} = 0.3036$. La comparaison est réalisée avec un modèle identique modélisé avec des éléments de poutre.

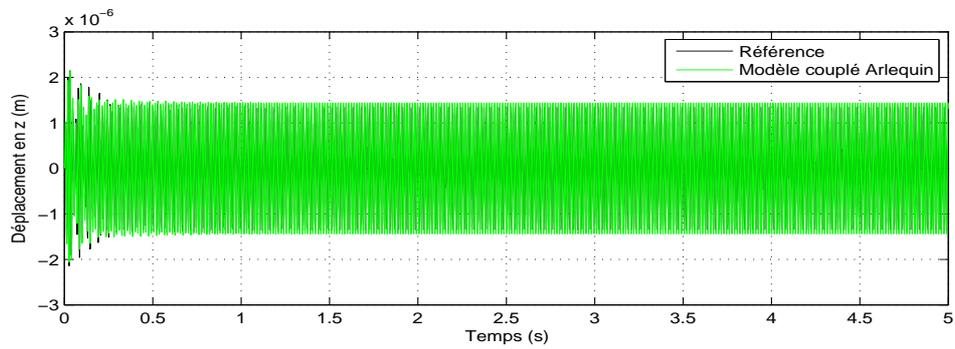
La figure 5.3 montre le déplacement selon l'axe (\vec{Z}) du nœud de comparaison. En effet, à cette faible vitesse de rotation, nous remarquons que la trajectoire se stabilise instantanément et que la phase transitoire est quasi-absente (figure 5.4). Par ailleurs nous constatons que les résultats présentés dans les figures 5.4 et 5.3 montrent une bonne concordance.

5.4.1.3 Étude de plusieurs vitesses de rotation

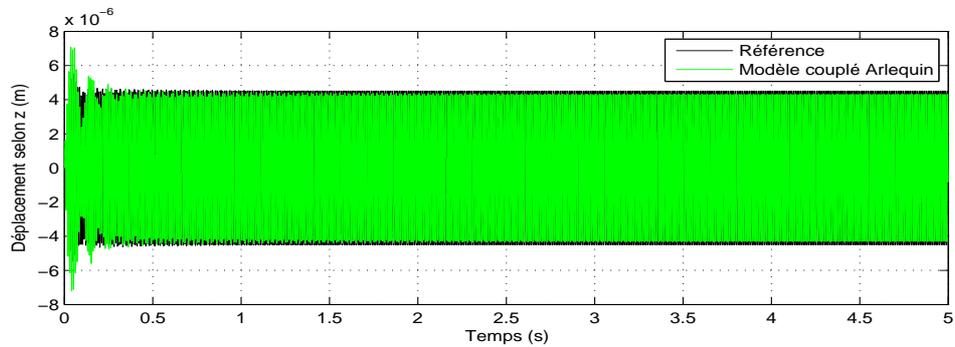
Dans ce qui suit nous allons étudier et comparer la réponse de la structure à des vitesses de rotation différentes. Deux schémas de Newmark différents sont attribués aux sous-domaines, un premier conservatif sur le modèle 3D ($\gamma_{3d} = 0.5$, $\beta_{3d} = 0.25$), et un autre schéma dissipatif sur la partie poutre ($\gamma_{1d} = 0.7$, $\beta_{1d} = 0.36$). La figure 5.5 présente le déplacement selon l'axe (\vec{Z}) aux vitesses de rotation suivantes : 2000 tr/min, 4000 tr/min, 6000 tr/min, 8000 tr/min. Nous remarquons que les déplacements du modèle couplé correspondent à ceux du modèle de référence. Dans le but de confirmer ces résultats, nous traçons dans ce qui suit les trajectoires correspondants à ces déplacements. Dans la figure (5.6) nous comparons les trajectoires du modèle couplé avec celles du modèle de référence aux mêmes vitesses de rotation de la figure (5.6). Nous constatons que les trajectoires sont très similaires pour les différentes vitesses de rotation. Une légère différence apparaît au niveau de la phase transitoire due à la présence de différentes modélisations dans le modèle couplé. Cet écart disparaît au niveau de la phase stabilisée.



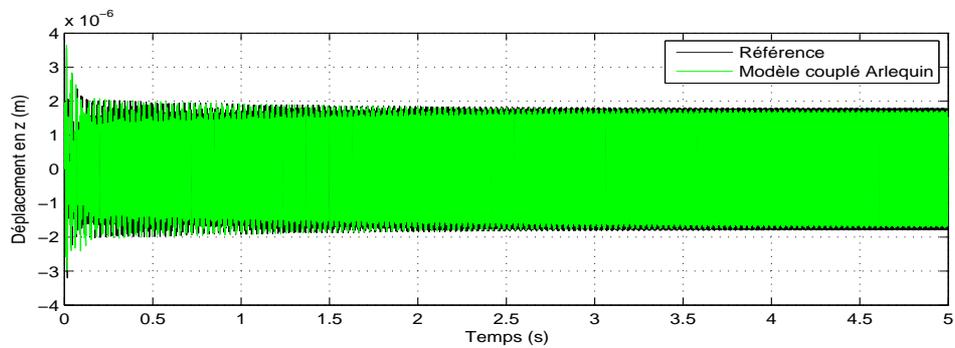
(a) 2000 tr/min



(b) 4000 tr/min



(c) 6000 tr/min



(d) 8000 tr/min

Fig. 5.5: Déplacement en z à différentes vitesses de rotation - Approche mono-échelle en temps

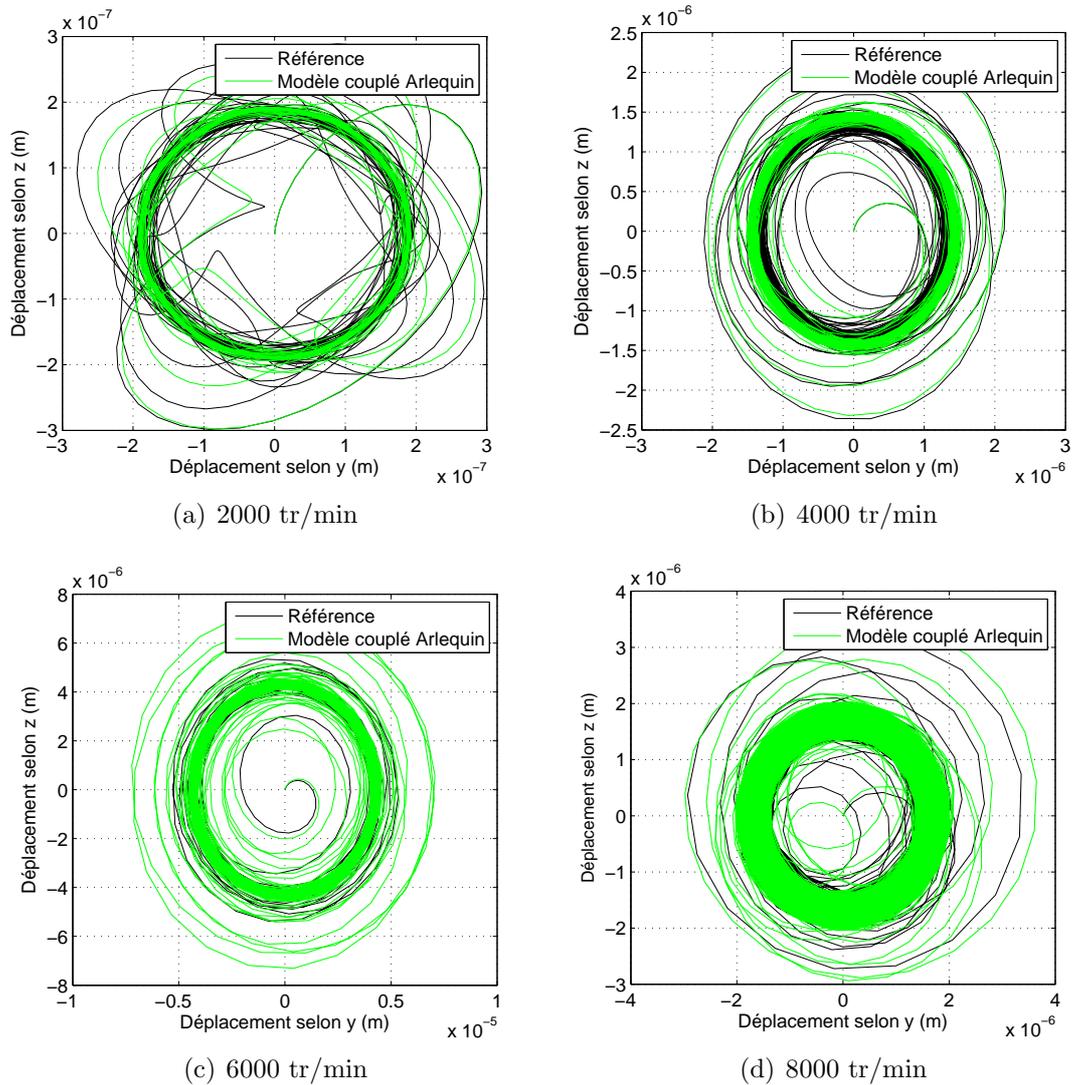


Fig. 5.6: Trajectoire du rotor à différentes vitesses de rotation - Approche mono-échelle en temps

5.4.1.4 Variation du résidu en fonction du pas de temps

Nous souhaitons à présent mettre en évidence l'effet du pas de temps sur le résidu du travail d'interface \mathcal{R}_e formulé dans l'équation (5.11). À la vitesse constante de 1500 tr/min, nous faisons diminuer le pas de temps dans les deux modèles. La figure 5.7 trace la variation du résidu pour les pas de temps suivants $\Delta t = 0.005/k$ pour $k \in [1 \ 14]$. Nous constatons que la valeur absolue du résidu diminue au fur et à mesure que le pas de temps diminue. En effet, une meilleur stabilité du système est assurée quand la valeur absolue de \mathcal{R}_e est faible. Par ailleurs, nous remarquons une dissipation numérique lorsque le système est intégré avec des pas de temps grossiers.

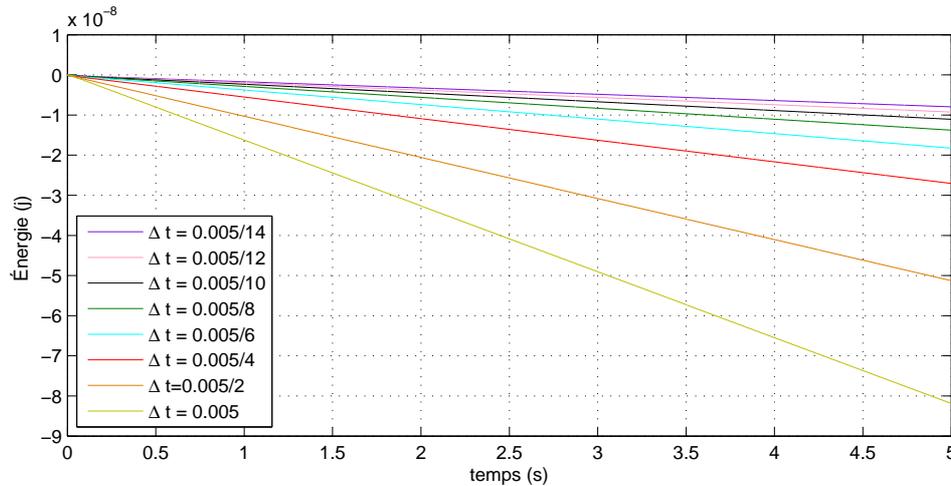


Fig. 5.7: Variation du travail d'interface en fonction du pas de temps

5.4.2 Couplage 3D-1D multi-échelles en temps avec rotation d'ensemble

5.4.2.1 Étude de plusieurs vitesses de rotation

Cette section vise à valider l'approche multi-échelles en temps en reprenant l'étude présentée dans la section 5.4.1.1. Une différence principale réside au niveau de l'intégration temporelle où le modèle 1D est intégré avec une échelle de temps grossière ΔT , et le 3D avec une échelle fine Δt telle que $\Delta T = 10\Delta t$. Nous faisons le choix de coupler deux schémas de Newmark dissipatifs différents : $\gamma_{3d} = 0.6$, $\beta_{3d} = 0.3036$, $\gamma_{1d} = 0.7$, $\beta_{1d} = 0.36$. Le modèle de référence de poutre est intégré avec le schéma de Newmark le plus dissipatif $\gamma = 0.7$, $\beta = 0.36$. La figure 5.8 présente la trajectoire aux vitesses de rotation suivantes : 2000 tr/min, 4000 tr/min, 6000 tr/min, 8000 tr/min. Ces courbes de déplacement montrent une concordance avec les résultats de référence. Ils correspondent en même temps à ceux de l'approche mono-échelle en temps de la figure 5.5. Cet accord entre les résultats des approches mono-échelle et multi-échelles en temps justifie l'intérêt des approches multi-échelles en temps en terme de gain de temps de calcul, dans le sens où des résultats identiques peuvent être obtenus en économisant du temps par l'intermédiaire d'une échelle grossière sur une partie de la modélisation.

5.4.3 Réponse temporelle à un transitoire de vitesse en mono-échelle en temps

Dans cette partie nous appliquons le nouveau formalisme général à un cas test documenté dans la littérature [LAL 98] dans le but de valider cette approche dans un cadre semi-industriel.

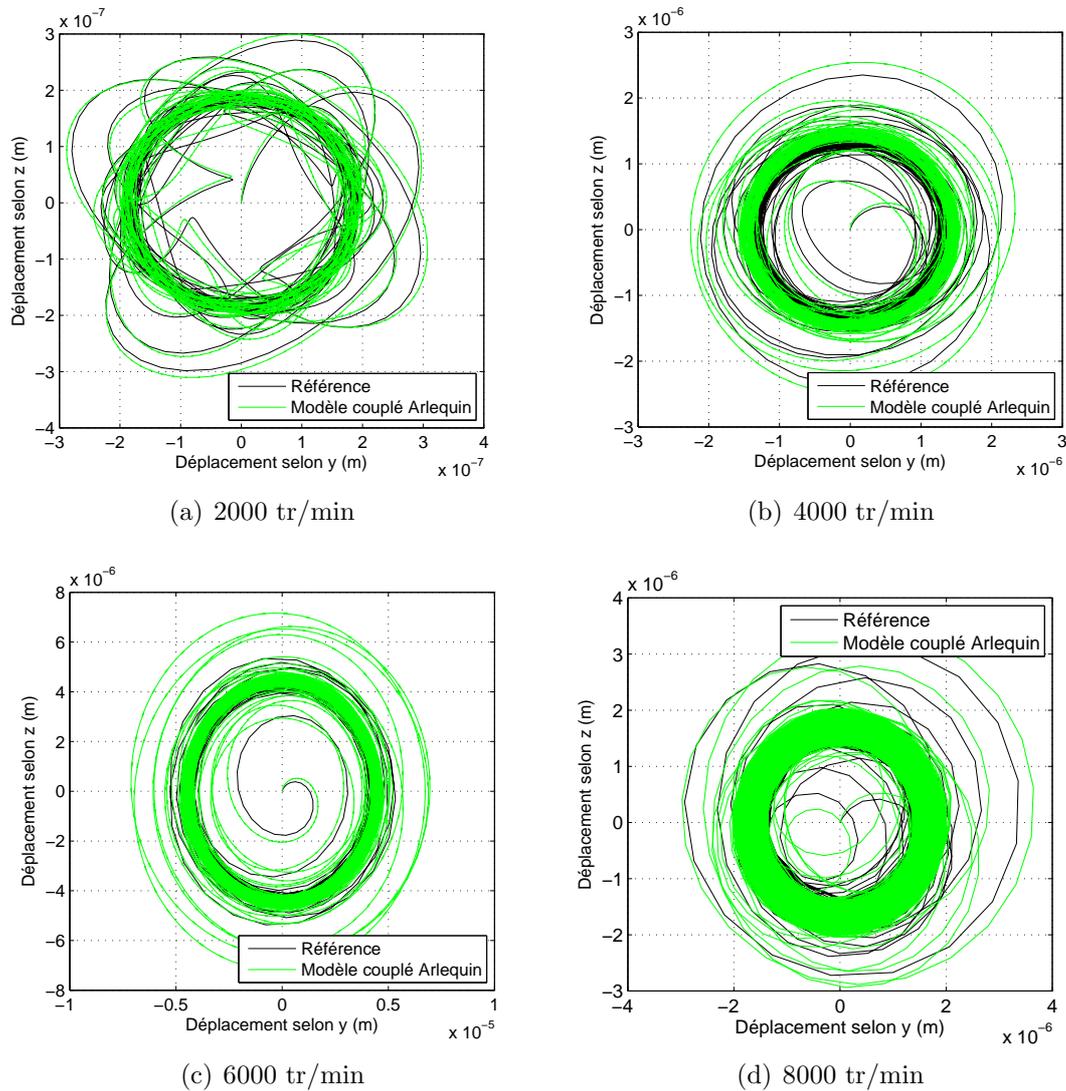


Fig. 5.8: Trajectoire du rotor à différentes vitesses de rotation - Approche multi-échelles en temps

5.4.3.1 Présentation du cas test

La modélisation présentée dans cette section concerne une ligne d'arbres horizontale de longueur L (modélisée avec des éléments finis de type poutre de Timoshenko) et de section circulaire constante en rotation autour de l'axe (\vec{X}) sous des conditions d'appui simple au niveau de ses extrémités. Un disque est placé aux $1/3$ de la longueur L et un patch 3D cylindrique, constitué d'éléments volumiques à 20 nœuds est introduit au tiers de la longueur L . Le modèle subit un effort de type balourd au niveau du disque. Il est caractérisé par une masse de 10^{-4} kg, une distance à la fibre

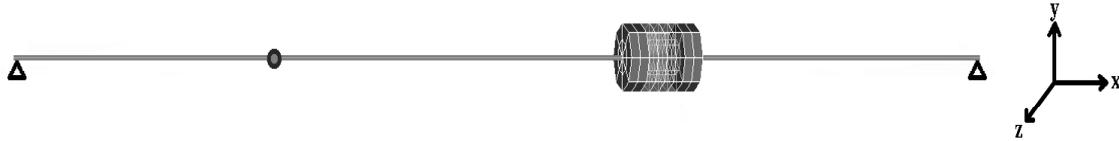


Fig. 5.9: Couplage Arlequin 3D-1D ; Section circulaire

neutre de l'arbre de 0.15 m et un déphasage initial nul. La partie 3D est constituée de deux zones de collage et d'une zone libre (figure 5.9). De plus, un palier avec amortissement visqueux vient s'ajouter aux deux tiers de la longueur du rotor. Les coefficients de ce palier sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} K_{yy} &= 2.10^5 N.m^{-1} & ; & K_{zz} = 5.10^5 N.m^{-1} & ; & K_{zy} = K_{yz} = 0 \\ C_{yy} &= 4.10^1 N/m.s^{-1} & ; & C_{zz} = 1.10^2 N/m.s^{-1} & ; & C_{zy} = C_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Remarque 11 *Les résultats suivants sont comparés avec un modèle de référence validé à l'aide d'un cas test documenté dans [LAL 98]. Dans l'annexe A nous présentons la validation de notre modèle de référence par rapport aux résultats correspondants dans [LAL 98].*

5.4.3.2 Résultats numériques

Nous observons le comportement de la structure lors d'une montée en vitesse de type linéaire du rotor suivie d'une stabilisation à 5000 tr/min. La loi linéaire de montée en vitesse appliquée est la suivante :

$$\ddot{w}_1 = 416.7t \quad (5.68)$$

Nous nous intéressons particulièrement à l'instant pour lequel l'excentricité vibratoire atteint son maximum ainsi que l'amplitude maximale correspondante. La figure 5.10 trace les valeurs des maxima d'amplitude pour le nœud correspondant au disque, et ce pour la loi de montée en vitesse de rotation allant de 0 à 5000 tr/min durant 12 s. Nous traçons l'évolution de la courbe jusqu'au début de la phase de stabilisation à 9 s. Nous comparons les résultats de l'approche multi-repères / multi-schémas avec une modélisation de référence de poutre [LAL 98]. Le patch 3D est intégré avec un schéma de Newmark dissipatif ($\gamma_1 = 0.6$ et $\beta_1 = 0.3036$), et la modélisation poutre avec un schéma de Newmark conservatif d'accélération moyenne ($\gamma_1 = 0.5$ et $\beta_1 = 0.25$). Le modèle de référence est intégré avec le même schéma dissipatif de Newmark appliqué au patch 3D ($\gamma_1 = 0.6$ et $\beta_1 = 0.3036$) dans le but de tenir compte de la diminution de l'amplitude du bi-modèle Arlequin. En comparant les allures des deux courbes plusieurs niveaux de remarques peuvent être faits. De manière générale, nous remarquons que l'allure globale des deux courbes sont assez similaires, et le modèle couplé est capable de reproduire la réponse complète de

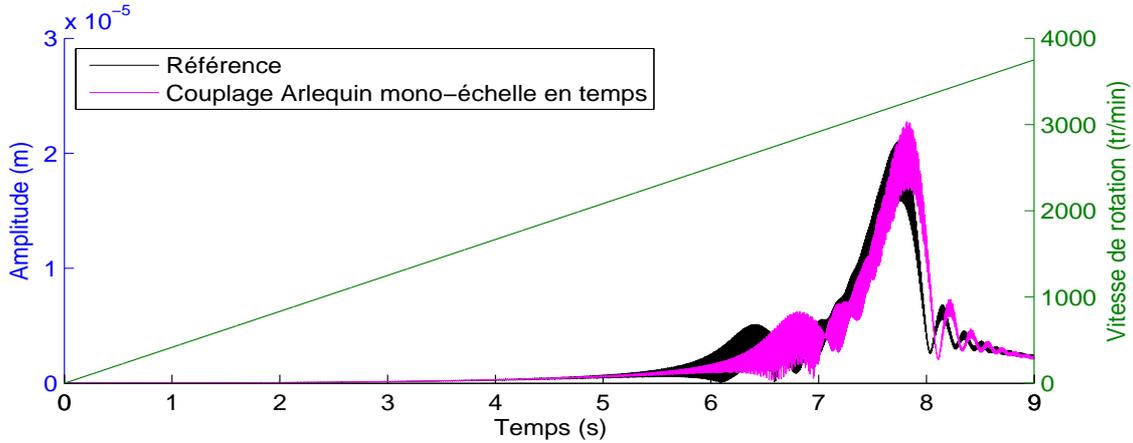


Fig. 5.10: $\ddot{w}_1 = 416.7t$ - Approche mono-échelle en temps

la ligne d'arbre en terme de présence d'une critique de vitesse bien marquée, ainsi qu'au niveau de l'aspect global de l'amortissement des amplitudes. D'autre part, nous pouvons remarquer que le modèle couplé présente plus de flexibilité du fait de la présence du modèle 3D ce qui explique les légers écarts de déplacement entre la courbe de référence de poutre et celle du bi-modèle Arlequin. Par ailleurs, nous constatons que l'excentricité vibratoire maximale dans le modèle poutre de référence est atteinte à la vitesse de 3232 tr/min au bout de 7.75 s, et à 3251 tr/min après 7.81 s dans le cadre de notre approche. Théoriquement, nous pouvons prévoir un maximum d'amplitude qui apparaît au niveau du bi-modèle Arlequin avant celui de la référence grâce à la flexibilité du patch 3D. Par contre, deux paramètres font que la vitesse critique est presque la même sur les deux modèles. En effet, la taille du patch constitue 8% de la taille du modèle global et ne permet pas d'influencer le comportement du modèle de manière importante. D'autre part, la présence d'une matrice de rigidité supplémentaire dans le modèle 3D à cause de l'effet de la rotation (matrice d'accélération centrifuge) implique une augmentation de la rigidité globale du modèle 3D. Par ailleurs, il est important de rappeler que la finesse du patch 3D (remarque 3 du chapitre 3) peut influencer la qualité du raccord, et par suite la précision des résultats. Ceci montre l'intérêt d'implémenter cette approche dans un code industriel (CODE_ASTER) où on peut utiliser des maillages fins impliquant un nombre important de degrés de liberté dans le but de pouvoir mettre à profit cette méthode.

5.4.4 Réponse temporelle à un transitoire de vitesse en multi-échelles en temps

Le travail présenté dans cette section reprend l'application étudiée dans la partie précédente (section 5.4.3), le but étant de valider l'approche mixte formulée dans

la section 5.3 dans le cadre multi-échelles en temps.

L'intégration numérique dans le cadre multi-échelles en temps s'effectue pour différents ratios m entre les pas de temps fin et grossier ($\Delta T = \Delta t$, $\Delta T = 15\Delta t$, $\Delta T = 30\Delta t$). Le patch 3D est intégré avec un schéma de Newmark dissipatif ($\gamma_1 = 0.6$ et $\beta_1 = 0.3036$), et la modélisation poutre avec un schéma de Newmark conservatif d'accélération moyenne ($\gamma_1 = 0.5$ et $\beta_1 = 0.25$). Nous conservons le même modèle de référence présenté dans la section 5.4.3. La figure 5.11 montre

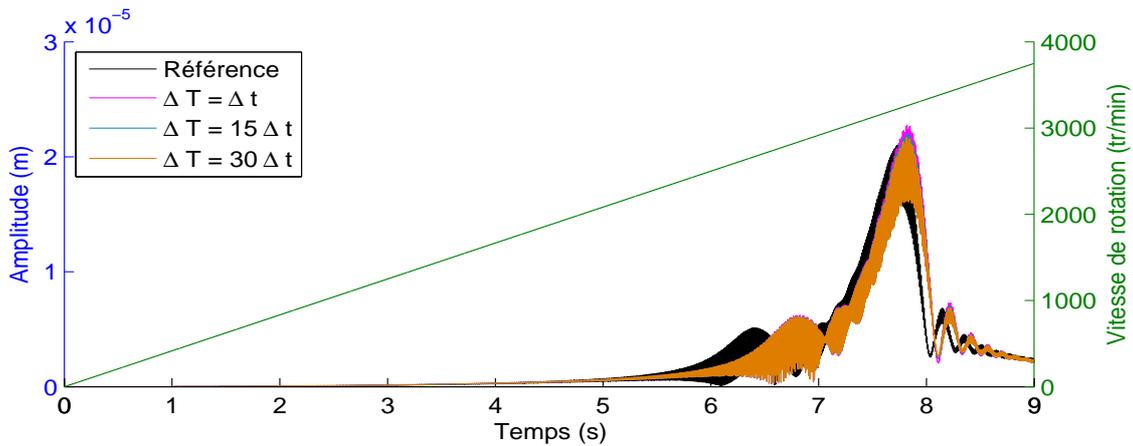


Fig. 5.11: $\check{w}_1 = 416.7t$ - Approche multi-échelles en temps

l'évolution des maxima de la réponse de la ligne d'arbre au niveau du disque pour des différents ratios entre les échelles de temps. Nous conservons la loi de montée en vitesse de rotation entre 0 et 5000 tr/min durant 12s. Nous comparons les résultats par rapport à la même courbe utilisée pour l'approche mono-échelle en temps.

La courbe où $\Delta T = \Delta t$ est calculée avec l'approche multi-échelles en temps pour $m = 1$. Elle présente une excentricité vibratoire maximale à la vitesse de 3251 tr/min au bout de 7.75 s. Elle est identique à celle présentée dans la figure 5.10 dans le cadre mono-échelle en temps. En outre, nous pouvons constater que les courbes où le rapport entre les pas de temps est de $m = 15$ et $m = 30$ permettent de reproduire la même allure générale de la courbe de réponse de la ligne d'arbre, ainsi que d'obtenir le maximum d'amplitude à la bonne vitesse critique. Par ailleurs, il est possible de constater un léger amortissement qui apparaît au niveau des amplitudes de ces deux courbes. Ceci est dû aux paramètres du nouveau schéma d'intégration numérique de Newmark ($\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\beta}$) dans la zone de collage (chapitre 4) de l'approche multi-schémas / multi-échelles en temps.

Remarque 12 *À travers les développements théoriques et les applications numériques de ce chapitre, nous constatons qu'il est intéressant de mener une étude approfondie sur le traitement de la matrice d'accélération centrifuge dans la zone de*

collage. Présente dans les modèles volumiques, la matrice d'accélération centrifuge n'existe pas sur les modélisations de poutre. Cette différence théorique visitée d'une manière plus détaillée, doit permettre de se prononcer sur une méthodologie de traitement permettant d'obtenir le comportement le plus proche de la réalité physique.

Bilan

Dans ce chapitre nous avons étendu le formalisme général développé dans le chapitre 4 au cadre des machines tournantes. Nous avons mis en évidence la présence d'un résidu énergétique qui apparaît à l'interface. Nous avons aussi démontré théoriquement et à travers un cas test que la valeur absolue de ce résidu tend vers zéro lorsque la valeur du pas de temps diminue. On note que ces remarques sont valables dans le cadre mono-échelle en temps ainsi que dans le cadre multi-échelles temps. Finalement ces approches ont été validés à travers deux cas tests, un premier dans le domaine stabilisé à vitesse constante, ainsi qu'un deuxième à travers un transitoire de vitesse.

Chapitre 6

Application numérique

Ce chapitre illustre à l'aide d'un exemple numérique une application type de l'approche proposée où nous étudions les aspects numériques liés à la modélisation d'un problème de contact entre un rotor et un stator. Le cadre multi-échelles/multi-schémas/multi-repères/multi-modèles est mise en oeuvre dans le but de représenter le contact entre un patch 3D en rotation et un mur fixe illustrant un stator. Une première étude à vitesse nominale est présentée, ensuite une étude avec une montée en vitesse suivie d'une stabilisation de la vitesse est exposée.

Sommaire

6.1	Présentation du cas test	168
6.2	Mise en place du contact	168
6.2.1	Présentation du modèle de contact	169
6.2.2	Mise en équation	170
6.3	Résultats numériques	171
6.3.1	Étude à vitesse nominale	173
6.3.2	Étude d'un transitoire de vitesse	175

6.1 Présentation du cas test

Dans cette partie nous étudions le phénomène de contact entre un rotor et un stator. Il s'agit d'une ligne d'arbre horizontale en rotation autour de l'axe (\vec{X}). Elle est modélisée avec un modèle de poutre de Timoshenko à six degrés de liberté par noeud, de section circulaire constante, et en appui simple sur ses deux extrémités. Un disque est placé aux $2/3$ de sa longueur et un patch 3D constitué d'éléments volumiques à 20 noeuds représentant une partie volumique du rotor est introduit au $1/3$ de la longueur. La partie 3D est constituée de deux zones de collage (64 éléments) et d'une zone de recouvrement (64 éléments). Chaque élément de poutre est couplé avec 16 éléments 3D. Le couplage 3D-1D est présenté dans la figure 6.1. Le



Fig. 6.1: Couplage Arlequin 3D-1D

modèle est soumis à un effet de balourd au niveau du disque. On calcul la réponse au balourd de la ligne d'arbre sur base physique et on surveille l'écart en déplacement entre le rotor et le stator.

Les données caractérisant la poutre sont présentées dans le tableau 6.1 :

Rayon	Longueur	Module de Young ($N.m^2$)	Masse volumique ($kg.m^3$)	Coefficient de Poisson
$r = 0.01 m$	$L = 0.4m$	$E = 2.10^{11}$	$\rho = 7800$	$\nu = 0.3$

Tab. 6.1: Caractéristiques du rotor

6.2 Mise en place du contact

L'application du contact dans le cadre multi-repères (figure 6.2) nécessite des développements spécifiques supplémentaires. En plus, la mise à jour des matrices de rigidité autorisant la prise en compte des efforts de contact doit être considérée au moment du calcul de la condensation à l'interface. Ci après nous résumons les principales étapes permettant la mise en place de la démarche :

- Calcul des quantités cinématiques 1D et 3D dans leurs propres repères successifs.
- Projection des déplacements des noeuds 3D concernés par le contact du repère tournant au repère fixe.
- Test sur le contact dans le repère fixe au niveau des instants de l'échelle fine en temps $t_j \in [t_0 t_m]$.

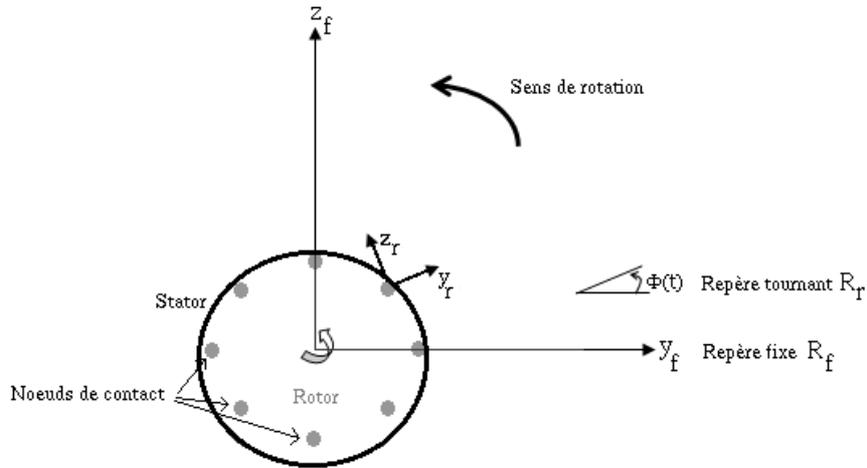


Fig. 6.2: Illustration du contact rotor/stator

- Prise en compte des efforts de contact dans le modèle 3D dans le repère fixe.
- Projection des quantités corrigées dans le repère tournant à l'instant t_0 .

6.2.1 Présentation du modèle de contact

Il existe une variété de méthodes numériques permettant de gérer le contact entre deux solides, ou bien entre un solide et une surface rigide (la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode hybride). Dans le cadre des applications présentées ci après, nous avons fait le choix de mettre en place la méthode de pénalisation. Elle permet de gérer le contact entre des noeuds de frontière d'un domaine élastique d'une part, et une surface rigide ou bien un segment d'un autre corps élastique d'autre part. C'est une méthode relativement simple à implémenter par rapport au autres approches, par contre le principal inconvénient réside au niveau de sa stabilité à cause du conditionnement de la matrice globale, lié au choix des facteurs de pénalité [BAI 96]. En conséquence, des faibles valeurs de ce facteurs impliquent des pénétrations importantes et des résultats irréalistes [LEE 93], tandis que de très grandes valeurs rigidifient le problème et peuvent causer des divergences des calculs [MOT 92, JU 99].

Le principe de base de cette méthode consiste à augmenter l'énergie totale du système par une fonction de pénalisation [COO 02] :

$$\Pi^*(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{k_c}{2} \varrho^t \cdot \varrho \quad (6.1)$$

Avec $\Pi(\mathbf{u})$ la fonctionnelle de l'énergie totale des corps en contact, \mathbf{u} le vecteur de déplacement, et ϱ le facteur d'interpénétration nodale entre les modèles. Dans le cas des applications présentées ci après, une légère pénétration ϱ des noeuds de contact

dans le corps rigide est autorisée à l'instant de contact t_c .

Dans ce qui suit, nous traitons le contact entre les noeuds du patch 3D et une couronne circulaire rigide fixe (6.2) représentant un stator d'une ligne d'arbre avec la méthode de pénalité. Le contact est détecté à travers un jeu défini par la distance entre la position du stator et celle de chacun des noeuds de contact. Dans la pratique, la formulation équivalente du problème est impactée par une force de contact $\mathbb{F}_{\text{contact}}$ qui vient s'ajouter aux forces externes du modèle avec contact, ainsi que par une matrice de rigidité $\mathbb{K}_{\text{contact}}$ qui augmente la rigidité globale du même modèle.

6.2.2 Mise en équation

Nous allons présenter dans cette section les modifications nécessaires permettant la prise en compte de la correction due au contact. Nous commençons par rappeler l'écriture discrétisée correspondant au bi-modèle couplé Arlequin dans la configuration avec rotation d'ensemble :

$$\mathbb{M}_{1d}\mathbf{U}_m^{1d} + \mathbb{L}_{1d}^t \mathbf{\Lambda}_m = \mathbb{F}_m^{1d} - \mathbb{N}_{1d}\mathbf{U}_0^{1d} \quad (6.2a)$$

$$\mathbb{M}_{3d}\mathbf{U}_j^{3d} + \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Lambda}_j = \mathbb{F}_j^{3d} - \mathbb{N}_{3d}\mathbf{U}_{j-1}^{3d} \quad (6.2b)$$

$$\mathbb{L}_{1d}\mathbf{U}_m^{1d} + \mathbf{\Phi}_m \mathbb{L}_{1d}\mathbf{U}_m^{3d} = 0 \quad (6.2c)$$

La détection du contact et sa correction nécessitent la prise en compte d'un effort de contact évalué à chaque instant permettant la reproduction du phénomène physique. Dans le cadre de cette approche multi-repères, une fois le contact détecté, le changement principal intervient au niveau de la matrice \mathbb{M}_{3d} et des efforts extérieurs \mathbb{F}_j^{3d} du modèle concerné par le contact. Ces deux quantités sont notées \mathbb{M}_{3d}^c et $\mathbb{F}_j^{3d/c}$, et elles sont définies comme suit :

$$\mathbb{M}_{3d}^c = \mathbb{K}_{3d} + \mathbb{K}_{\text{contact}} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbb{C}_{3d} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbb{M}_{3d} \quad (6.3a)$$

$$\mathbb{F}_j^{3d/c} = \mathbb{F}_j^{3d} + \mathbb{F}_{\text{contact}} \quad (6.3b)$$

Le système matriciel global correspondant à (6.2) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{M}_{3d}^c & & \alpha_1 \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t & \\ \mathbb{N}_{3d} & \mathbb{M}_{3d}^c & \alpha_2 \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t & \\ & \ddots & \vdots & \\ & & \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t & \\ \hline & & \mathbb{M}_{1d} & \mathbb{L}_{1d}^t \\ \hline & \mathbf{\Phi}_m \mathbb{L}_{3d} & \mathbb{L}_{1d} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{3d} \\ \mathbf{U}_2^{3d} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_m^{3d} \\ \mathbf{U}_m^{1d} \\ \mathbf{\Lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{F}}_1^{3d/c} \\ \tilde{\mathbb{F}}_2^{3d/c} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^{3d/c} \\ \tilde{\mathbb{F}}_m^{1d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Le développement de cette approche sous l'effet de la correction aboutit à des systèmes d'équation très similaires à ceux obtenus dans le cadre sans contact présenté

dans la section 5.4.2 du chapitre 5 en remplaçant \mathbb{M}_{3d} par \mathbb{M}_{3d}^c et \mathbb{F}_j^{3d} par $\mathbb{F}_j^{3d/c}$. Cependant, la différence principale réside au niveau du calcul de l'opérateur de condensation qui doit tenir compte de la rigidité de contact. En effet, nous avons précédemment démontré que la construction de cet opérateur s'effectue à partir du système suivant :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{M} & \mathbb{L} \\ \hline \mathbb{B} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbb{U} \\ \hline \mathbf{\Lambda}_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{F}} \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (6.5)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \mathbb{U}_{sl} + \mathbb{U}_{al} \\ \mathbb{U}_{sl} &= \mathbb{M}^{-1} \tilde{\mathbb{F}} \\ \mathbb{U}_{al} &= -\mathbb{Y} \mathbf{\Lambda}_m \\ \mathbb{Y} &= \mathbb{M}^{-1} \mathbb{L} \end{aligned} \quad (6.6)$$

La dernière ligne de (6.6) permet de calculer les quantités nécessaires pour le calcul du problème d'interface. L'écriture explicite correspondante est :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{M}_{3d}^c & & & \\ \mathbb{N}_{3d} & \mathbb{M}_{3d}^c & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbb{N}_{3d} & \mathbb{M}_{3d}^c \\ \hline & & & & \mathbb{M}_{1d} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbb{Y}_1^{3d} \\ \mathbb{Y}_2^{3d} \\ \vdots \\ \mathbb{Y}_m^{3d} \\ \hline \mathbb{Y}_m^{1d} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \\ \alpha_2 \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \\ \vdots \\ \mathbb{L}_{3d}^t \mathbf{\Phi}_m^t \\ \hline \mathbb{L}_{1d}^t \end{array} \right] \quad (6.7)$$

Il est possible de constater que la prise en compte du contact doit être considérée dans le calcul de \mathbb{Y} . Il en résulte que dans ce cas de figure il est impératif d'intégrer le calcul et la mise à jour de l'opérateur de condensation dans la boucle en temps de l'algorithme d'intégration numérique (étape 1-bis du tableau (6.3)). Nous présentons dans le tableau 6.2 la partie de l'algorithme d'intégration numérique concernée par la détection du contact. L'algorithme général implémenté dans le cadre de cette approche est développé dans le tableau (6.3) de l'annexe B.

6.3 Résultats numériques

La validation numérique et la pertinence de la méthode est mise en valeur à travers deux application en régime dynamique non-linéaire.

La première partie concerne l'étude d'un cas de contact entre le patch 3D représentant une partie de la ligne d'arbre du rotor, et un stator. Cette étude est réalisée dans le cadre du couplage multi-schémas / multi-échelles en temps / multi-repères, et permet de valider ce formalisme global dans le cadre d'une

(4) Mise à jour du problème fin avec liaison :

◦ Projection des déplacements de $\mathbf{R}_r(x, y, z)$ vers $\mathbf{R}_f(x_f, y_f, z_f)$:

$$(\mathbb{U}_{j+1}^{3d})_{\text{fixe}} = \Phi \mathbb{U}_{j+1}^{3d}$$

◦ Si contact :

◦ Correction et projection de la matrice de contact et des efforts correspondants :

$$\mathbf{F}_j^{3d} = \mathbf{F}_j^{3d} + \Phi^t(\mathbf{F}_{\text{contact}})$$

$$\mathbf{K}_{3d} = \mathbf{K}_{3d} + \Phi^t(\mathbf{K}_{\text{contact}})$$

Et passage à (1-bis)

◦ Si non contact :

Suite de la boucle et passage à (1)

(1-bis) Résolution du problème condensé avec les nouvelles valeurs de \mathbf{K}_{3d} et \mathbf{F}_{3d}

Fin de la boucle principale

Tab. 6.2: Algorithme multi-schémas/multi-échelles en temps/multi-repères - Cadre Arlequin avec contact

application non linéaire pour une vitesse de rotation constante de 3000 tr/min.

La deuxième section concerne l'étude du comportement du rotor lors d'une montée en vitesse de type linéaire, suivie d'une stabilisation à 5000 tr/min. À l'issue de ce travail, une étude avec un contact localisé au niveau de la première vitesse critique sera présentée. Dans les deux cas de figure nous nous concentrons

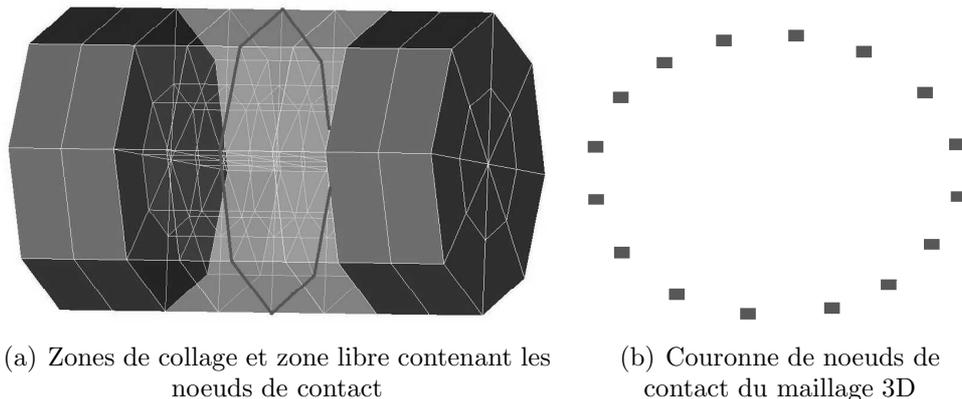


Fig. 6.3: Zoom sur le patch 3D

sur la couronne de noeuds présents au centre de la zone libre (figure 6.3). On note que le patch 3D n'est pas très fin en espace. Ce choix est induit par des contraintes de temps de calcul et de mémoire CPU disponible pour une maquette Matlab. Ceci

justifie et motive le développement de cette approche dans un code industriel tel que CODE_ASTER.

6.3.1 Étude à vitesse nominale

Cette première application s'effectue pour un ratio $m = 15$ entre les échelles de temps, et pour un couplage d'un schéma de Newmark dissipatif sur le modèle 3D où $\gamma_1 = 0.7$ et $\beta_1 = 0.36$, avec un autre conservatif d'accélération moyenne sur la modélisation poutre ($\gamma_1 = 0.5$ et $\beta_1 = 0.25$).

La distribution générale des paramètres du schéma de Newmark sur la poutre, le patch 3D, et la zone de collage est décrite dans le tableau 4.3.2 du chapitre 4. Les figures 6.4 et 6.5 tracent respectivement les déplacements dans le plan selon les axes (\vec{Y}) et (\vec{Z}) d'un noeud de la couronne de contact (figure 6.3) en fonction du temps. Dans ce cas de figure, nous faisons le choix de tenir compte de la présence du contact à partir de l'instant $t_0 = 0.25s$ dans le but de se placer dans le domaine stabilisée. Dans ces deux graphiques nous représentons les déplacements nodaux pour la configuration sans contact, ainsi que ceux pour la configuration qui tient compte du contact. Nous remarquons qu'à partir de t_0 le contact est détecté correctement et que les déplacements respectifs selon les axes (\vec{Y}) et (\vec{Z}) tiennent compte de la présence d'un plafond de contact. La figure 6.6 montre l'orbite du

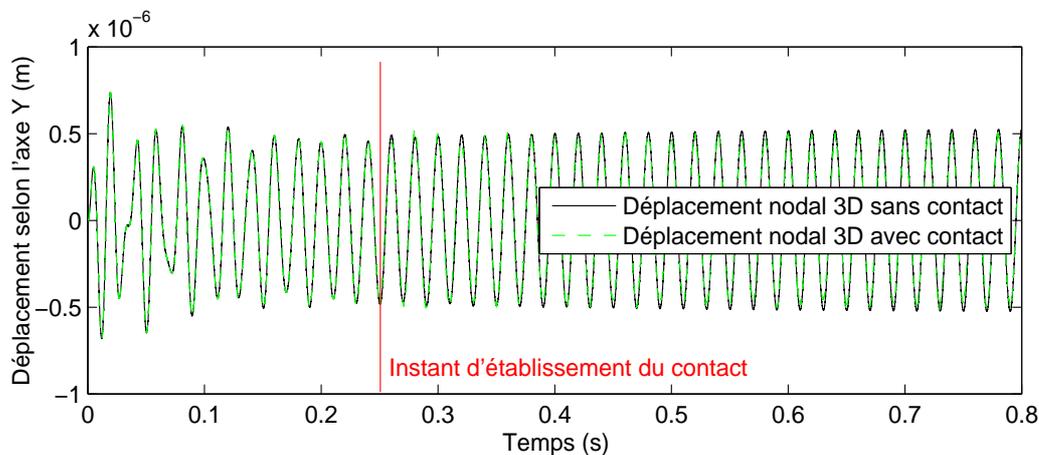


Fig. 6.4: Déplacement nodal 3D selon l'axe Y avec/sans contact

même noeud de la couronne utilisé pour tracer les figures 6.4 et 6.5. Dans ce graphe il est possible de distinguer trois courbes : L'orbite du noeud dans une configuration qui ne tient pas compte du contact, la même orbite corrigée en présence du contact, ainsi que l'illustration du stator. Nous pouvons distinguer la différence entre la trajectoire sans contact et celle qui tient compte de la correction des efforts de

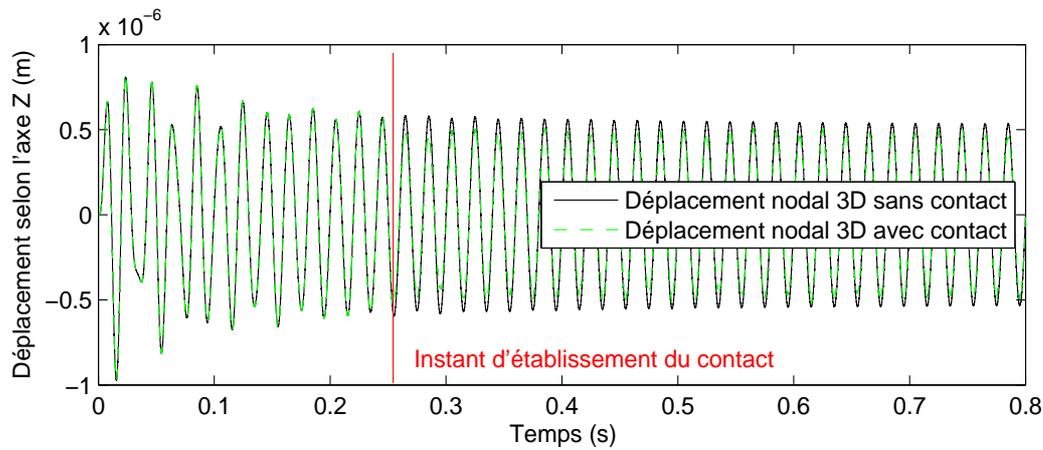


Fig. 6.5: Déplacement nodal 3D selon l'axe Z avec/sans contact

contact. Il est par ailleurs possible de remarquer l'interpénétration autorisée entre la trajectoire des noeuds de contact et la position du stator.

Cette application à vitesse stabilisée constitue une première validation de l'approche globale multi-échelles / multi-schémas / multi-repères.

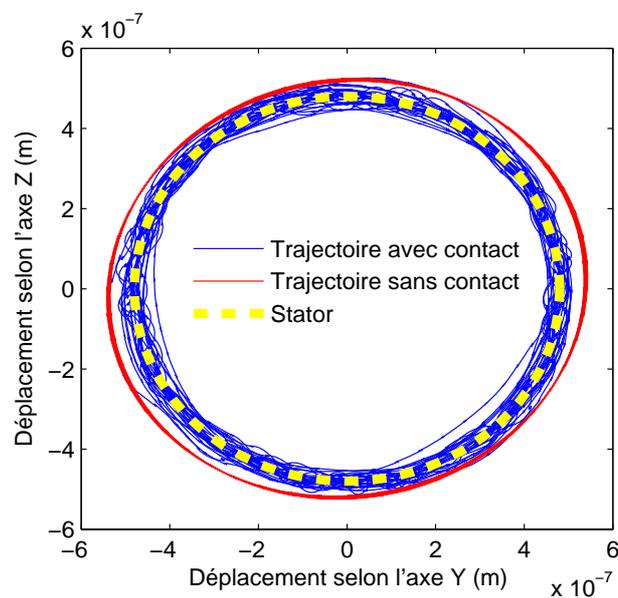


Fig. 6.6: Comparaison de la trajectoire d'un noeud avec et sans contact

6.3.2 Étude d'un transitoire de vitesse

Dans ce qui suit nous appliquons l'exemple présenté ci dessus (section 6.3.1) au nouveau formalisme général multi-modèles / multi-échelles / multi-schémas. Il s'agit de la même modélisation décrite dans la section 6.3.1 en ajoutant un palier avec amortissement visqueux aux environs du patch 3D du rotor. Les coefficients du palier sont définis comme suit :

$$K_{yy} = 2.10^5 N.m^{-1} ; K_{zz} = 5.10^5 N.m^{-1} ; K_{zy} = K_{yz} = 0 \quad (6.8)$$

$$C_{yy} = 4.10^1 N/m.s^{-1} ; C_{zz} = 1.10^2 N/m.s^{-1} ; C_{zy} = C_{yz} = 0 \quad (6.9)$$

Le couplage multi-échelles en temps s'effectue pour $\Delta T = 20\Delta t$. Le patch 3D est intégré avec un schéma de Newmark dissipatif ($\gamma_1 = 0.6$ et $\beta_1 = 0.3036$), et la modélisation poutre avec un schéma de Newmark conservatif d'accélération moyenne ($\gamma_1 = 0.5$ et $\beta_1 = 0.25$). Nous nous intéressons à présent par la détection

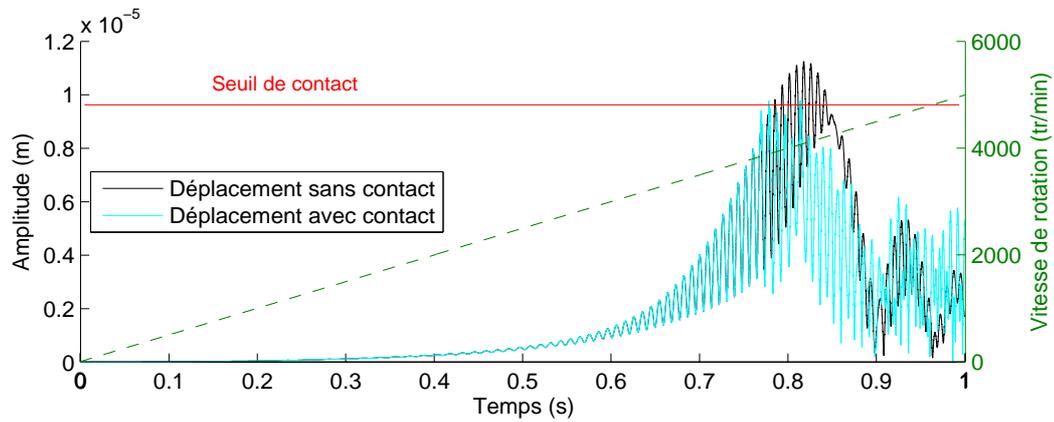


Fig. 6.7: $\ddot{w}_1 = 5000t$

du contact, la prise en compte des efforts de contact correspondants, ainsi que par l'effet de ce phénomène sur les caractéristiques de la vitesse critique par l'intermédiaire de l'approche décrite dans la section 6.3.1. Nous déterminons le seuil de contact à 25% de l'amplitude maximale du déplacement dans la configuration sans contact soit à $0,95.10e^{-5}m$. On note que pour un instant t_0 où un contact est détecté, la prise en compte de l'effort de contact correspondant s'effectue à l'instant grossier suivant $t_m = t_0 + \Delta T$. Cette correction à posteriori permet de reproduire et analyser le comportement de la ligne d'arbre quand des phénomènes non-linéaires similaires prennent lieu.

La figure 6.7 montre l'amplitude de la montée linéaire en vitesse de la ligne d'arbre pendant 1 seconde de 0 tr/min à 5000 tr/min avant de stabiliser à 5000 tr/min :

$$\ddot{w}_1 = 5000t \quad (6.10)$$

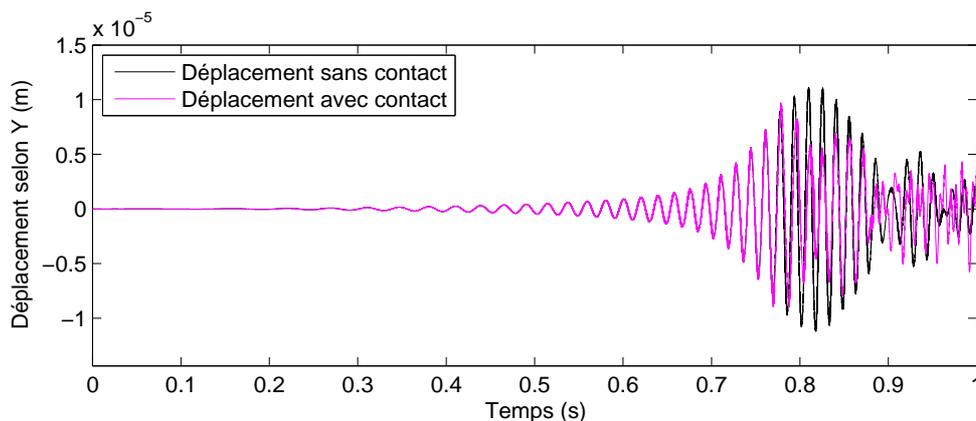


Fig. 6.8: $\ddot{w}_1 = 5000t$ - Déplacement selon l'axe Y avec/sans contact

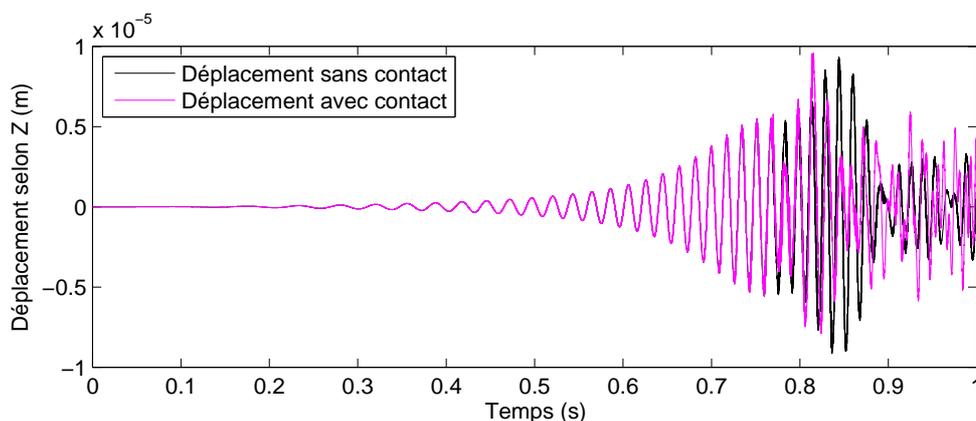


Fig. 6.9: $\ddot{w}_1 = 5000t$ - Déplacement selon l'axe Z avec/sans contact

Le post-traitement s'effectue au niveau des noeuds 3D situés sur la couronne définie dans la figure 6.3. Nous pouvons constater qu'à l'instant $t = 0.78s$ un premier contact est établi. À ce niveau, plusieurs remarques peuvent être faites. En effet, en comparant la solution observée au niveau du patch 3D avec la solution de référence de poutre au même noeud il est possible de constater une diminution de l'amplitude globale des déplacements dans le plan (YOZ) où la rotation a lieu. Cette correction entraîne une perte de contact aux instants suivants. Ensuite, l'effet de rotation provoque un deuxième contact à l'instant $t = 0.814s$. Ce dernier est aussi pris en compte et corrigé.

Une fois les amplitudes des déplacements ne dépassent plus le seuil de contact, il est possible de remarquer que le comportement général du bi-modèle Arlequin suit l'allure de la réponse du modèle sans contact.

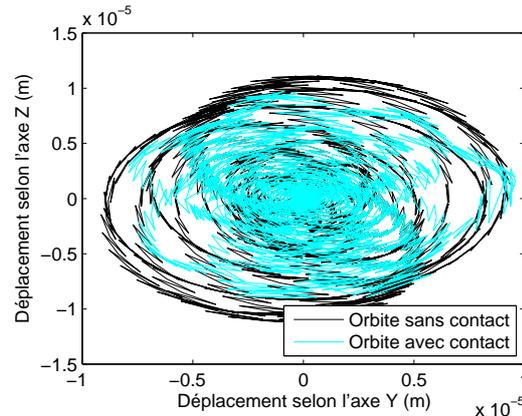


Fig. 6.10: $\check{w}_1 = 5000t$ - Orbite d'un noeud de contact du patch 3D

Les figures 6.8, 6.9 montrent respectivement les déplacements selon les axes (\vec{Y}) , (\vec{Z}) . Le jeu de contact défini à 25% de l'amplitude maximale est à l'origine des décalages observés par rapport à la courbe de référence et montre la prise en compte du contact.

Nous pouvons par ailleurs remarquer l'effet du premier contact à $t = 0.78s$ au niveau des déplacements en (Y) dans figure 6.8, et celui du second contact en (Z) à $t = 0.814s$ dans la figure 6.9. Ces mêmes constatations sont visibles à travers la figure 6.10 qui trace la trajectoire au niveau d'un noeud de contact 3D. Ce graphique permet de mieux visualiser la modification de l'orbite causée par le contact entre le patch 3D et le stator.

Bilan

Dans ce chapitre nous avons validé le formalisme général autorisant un couplage multi-modèles / multi-échelles / multi-schémas dans le cadre Arlequin. À partir d'un cas test numérique et d'une application semi-industrielle nous avons montré l'efficacité de cette approche. Par l'intermédiaire de la non-linéarité de contact nous avons montré la faisabilité et l'utilité d'une telle approche dans le cadre d'une analyse avancée de machines tournantes. En se basant sur ces résultats encourageant, il est important de viser l'implémentation de cette approche dans un code industriel dans l'optique de réaliser des analyses avancées de machines tournantes tel que l'étude de la propagation de fissures en 3D.

Conclusion et perspectives

Conclusion

L'objectif de ce travail de thèse a été de développer une méthodologie de couplage des modèles *1D poutre* et 3D pour l'analyse dynamique des modélisations avancées de machines tournantes. La contribution de la thèse s'appuie principalement sur le couplage de modèles par décomposition de domaine avec recouvrement dans le cadre Arlequin. Nous proposons un formalisme général de raccord multi-repères / multi-échelles / multi-schémas. Cette approche est basée sur le principe d'assurer l'équilibre énergétique global des systèmes couplés à travers une continuité à l'interface par l'intermédiaire des déplacements.

La mise en place de la nouvelle approche d'intégration temporelle a eu lieu suite à une étude bibliographique approfondie portant sur les différentes méthodes existantes dans la littérature. D'un point de vue général, les approches actuelles n'introduisent pas d'énergie à l'interface dans le sens de la méthode énergétique [HUG 78a, HUG 78b] puisqu'elles proposent d'assurer la continuité à l'interface à travers les vitesses. Nous avons constaté que la méthode **GCbis** [MAH 10] est une méthode multi-échelles en temps stable énergétiquement et propose un algorithme d'intégration numérique assez efficace, puisque l'intégration numérique a lieu de façon indépendante sur chacun des sous-domaines couplés.

Nous avons présenté la formulation continue et discrétisée en dynamique du cadre Arlequin dans le chapitre 2. Une partie importante a été consacrée aux aspects de conservation de l'énergie dans le cadre Arlequin en dynamique. Nous avons démontré à travers la formulation continue que cette approche est capable de conserver l'énergie totale du système sans avoir besoin d'imposer des conditions particulières sur les multiplicateurs de Lagrange. Par la suite, nous avons prouvé que dans le cadre discret, l'intégration numérique de deux sous-domaines avec deux schémas de Newmark différents, induit un déséquilibre du bilan d'énergie global du système. Cette démonstration détaillée de l'aspect énergétique à l'interface est la base des réflexions menées dans le chapitre 4, et reprises pour extension dans le chapitre 5.

Le chapitre 3 a porté sur l'extension de la méthode Arlequin aux applications machines tournantes. Dans le cadre de la mise en place d'une stratégie de modélisation avancée de machines tournantes, des modèles tridimensionnels fins en espaces sont couplés à des modélisations de structures minces de type poutre. Ces couplages sont validés par l'intermédiaire d'un cas-test simple d'une poutre encastrée-libre.

Par ailleurs, l'écriture de l'équilibre dans un modèle volumique en configuration tournante dans son propre référentiel implique l'introduction de la notion de repère tournant. De plus, la formulation du même problème dans le cadre d'une modélisation de poutre s'écrit naturellement dans le repère galiléen. Dans le but de gérer correctement la coexistence de ses deux modélisations hétérogènes nous avons développé un cadre théorique qui tient compte de l'évolution des quantités cinématiques de chaque sous-domaine dans son propre repère d'une part, ainsi que de l'écriture du raccord de manière cohérente avec l'approche Arlequin tout en respectant les spécificités évoquées ci-dessus d'autre part.

Les aspects énergétiques de l'approche Arlequin appliquée en régime dynamique évoqués dans le chapitre 2 sont étudiés en détails dans le chapitre 4. Dans le cadre d'un couplage multi-schémas / mono-échelle en temps, nous avons démontré que l'existence de paramètres d'intégration hétérogènes dans la zone de collage sont à l'origine d'une introduction ou bien d'une dissipation d'énergie dans la zone de recouvrement. Nous avons ainsi proposé une approche basée sur l'écriture d'un schéma numérique commun dans la zone de collage. Il est construit à partir d'une pondération de type partition de l'unité des paramètres du schéma de Newmark dans la zone de collage. À travers un collage en déplacement, cette méthode permet d'assurer la continuité des quantités cinématiques dans la zone de collage, et respecte les conditions de stabilité des sous-domaines couplés.

La deuxième partie de ce chapitre a visé l'extension de l'approche multi-schémas vers une approche générale autorisant un couplage multi-échelles / multi-schémas dans le cadre Arlequin. L'étude du bilan d'énergie du schéma de Newmark dans une configuration multi-échelles en temps nous a permis de démontrer que la condition de continuité des vitesses à l'interface n'est pas suffisante pour assurer l'équilibre énergétique du modèle couplé. L'approche proposée utilise les déplacements comme quantité cinématique pour coller les deux modèles à l'interface. Ceci permet d'assurer la stabilité de la démarche pour une grande plage de ratios entre les pas de temps des échelles couplées, et garantit l'équilibre du bilan énergétique du système global. Dans la dernière partie de ce chapitre, il a été démontré à travers une analyse de convergence que le formalisme proposé conserve les ordres de précision théoriques des schémas couplés. La pertinence de ces deux contributions est exemplifiée à travers des raccords 1D-1D, 2D-1D, et 3D-1D dans les cadres mono-échelle / multi-schémas et multi-échelles / multi-schémas où, par exemple, des schémas de Newmark implicites sont couplés avec des schémas de Newmark explicites et des échelles de temps hétérogènes.

Le chapitre 5 est l'aboutissement des trois chapitres précédents. En effet, l'approche générale d'intégration numérique multi-échelles en temps développée dans le chapitre 4 est étendue au cadre des machines tournantes en régime dynamique développé dans les chapitres 2 et 3. Les développements théoriques ont permis de mettre en évidence la présence d'un résidu numérique qui apparaît à cause de l'effet de rotation et du changement résultant de repères entre les modèles couplés. Nous avons prouvé par des développements théoriques et numériques que ce résidu est le même dans les approches mono-échelle et multi-échelles en temps, et que sa valeur absolue tend vers zéro lorsque la valeur du pas de temps diminue. La démarche globale est validée par l'intermédiaire de cas tests 3D-1D représentant un transitoire de vitesse d'un rotor.

Le chapitre 6 est consacré à une application représentative des problématiques machines tournantes où nous étudions le contact entre un rotor et un stator lors d'une montée en vitesse de ce dernier. La partie concernée par le contact est modélisée par un maillage tridimensionnel quadratique, tandis que le reste du rotor est modélisé à l'aide d'éléments de poutre de Timoshenko. Une échelle fine en temps est associée au patch 3D afin de mieux gérer le contact, et une autre plus grossière est attribuée au reste du modèle. Des développements particuliers ont été nécessaires pour la mise en place du contact tout en tenant compte de la rotation d'ensemble. Cette application type montre la faisabilité et la pertinence de cette approche qui offre des résultats précis à des moindres coûts numériques que les méthodes préexistantes.

Perspectives

Les perspectives à l'issue de ce travail de recherche sont multiples. Différentes voies complémentaires sont envisageables et quelques-unes sont déjà en phase de développement.

Du côté industriel, vue la complexité des systèmes à étudier, l'industrialisation ne peut se faire qu'en intégrant les développements effectués dans cette thèse au sein d'un logiciel adapté tel que `CODE_ASTER`. La perspective industrielle consistera à mettre à profit les résultats de l'approche générale développée pour une analyse dynamique locale 3D d'un rotor fissuré. L'étude cible permettra d'évaluer l'apport de la nouvelle méthode mixte en dynamique en 3D par rapport à la méthode existante en quasi-statique et 1D (cas d'une fissure respirante). Cette dernière permet de caractériser le comportement global de la ligne d'arbres mais ne permet pas d'analyser localement la nocivité des fissures. Dans cette optique, les développements nécessaires pour la prise en compte des matrices de gyroskopie sur les modèles volumiques 3D dans `CODE_ASTER` sont déjà effectués. Une deuxième

étape achevée a porté sur l'écriture et la vérification des opérateurs de couplage élémentaires 1D-3D. En vue de la mise en place de la perspective industrielle, la prochaine étape concerne le développement de la routine d'assemblage des matrices rectangulaires de couplage élémentaires.

Du point de vue des perspectives théoriques et scientifiques, le résidu observé avec rotation d'ensemble a été quantifié et mérite une réflexion complémentaire. L'origine de l'erreur générée par ce résidu étant bien identifiée, il est possible d'envisager une réflexion sur les vraies parades permettant d'annihiler l'énergie résiduelle correspondante. Actuellement, plusieurs pistes sont en cours d'exploration telles que le développement d'un collage Arlequin moyenné en temps.

L'approche globale étant développée principalement pour coupler des schémas de la famille de Newmark, elle permet sous réserve de quelques adaptations mineures de coupler des schémas complètement différents tels qu'un schéma de Newmark avec un schéma HHT. De façon globale, il est intéressant d'envisager une extension supplémentaire de ce formalisme dans le but de coupler une grande variété de schémas numériques totalement indépendants. Une étude préalable sur la faisabilité de cette extension est alors nécessaire, car elle n'est pas évidente et dépend principalement de la compatibilité entre les bilans d'énergie des différentes méthodes d'intégration numérique.

Une autre perspective pertinente concerne l'application du formalisme développé dans le cadre d'un couplage implicite / explicite (section 4.5.3 du chapitre 4) à un phénomène non linéaire local tel que le contact (chapitre 6). Cette stratégie permet d'intégrer la zone d'intérêt avec un schéma explicite et des pas de temps fins, tandis que le reste de la structure est intégré avec un schéma implicite (dissipatif ou bien conservatif) et une discrétisation temporelle plus grossière. À travers cette application type, le formalisme global développé dans cette thèse permet de combiner plusieurs avantages tels que la stabilité inconditionnelle du système couplé, la conservation de l'énergie, la dissipation numérique contrôlée qui permet d'annihiler les oscillations non physiques, un gain de temps de calcul, et une solution riche et représentative du fait de la présence du modèle 3D.

Annexe A

Les différents résultats sont comparés avec un modèle de référence validé à l'aide d'un cas test documenté dans [LAL 98] et présenté ci après. Cet exemple est composé d'une ligne d'arbres horizontale de longueur L de section circulaire constante en rotation autour de l'axe (x) et soumise à des conditions d'appui simple au niveau de ses extrémités. La structure complète est modélisée par des éléments finis de type poutre de Timoshenko à six degrés de liberté par noeud. Un disque est placé aux $1/3$ de la longueur L et le rotor est appuyé sur un palier élastique avec amortissement visqueux au deux tiers de sa longueur. Le modèle est soumis à un effort de type balourd au niveau du disque. Il est caractérisé par une masse de 10^{-4} kg , une distance à la fibre neutre de l'arbre de 0.15 m et un déphasage initial nul. Nous observons le comportement de la structure lors d'une montée en vitesse de type linéaire du rotor suivie d'une stabilisation à 5000 tr/min. Les caractéristiques géométriques résumant la mise en place de ce cas de référence sont illustrés dans la figure 6.11. Nous effectuons la validation par rapport à trois lois linéaires de montée

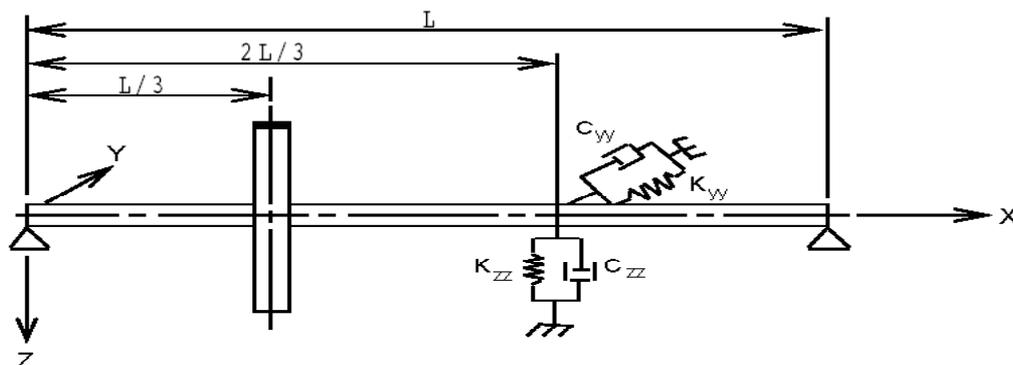


Fig. 6.11: Rotor à un seul disque

en vitesse :

$$\begin{aligned}
 \ddot{w}_1 &= 416,7t \\
 \ddot{w}_1 &= 1250t \\
 \ddot{w}_1 &= 5000t
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

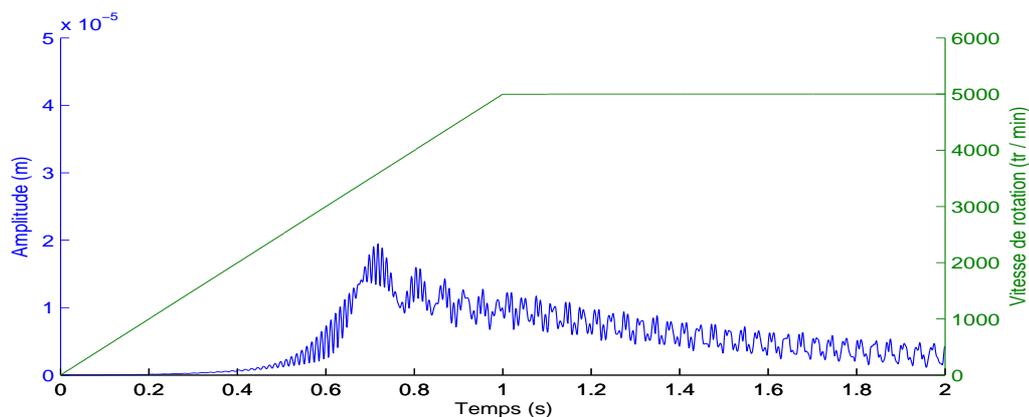
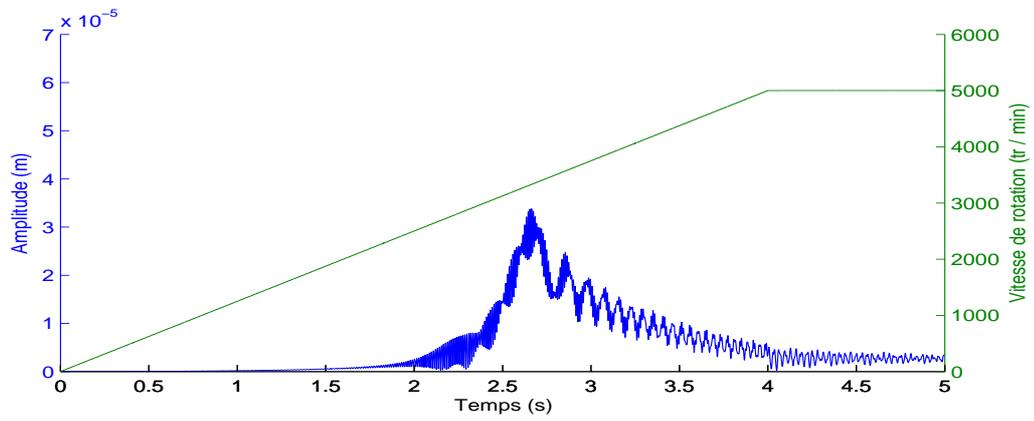
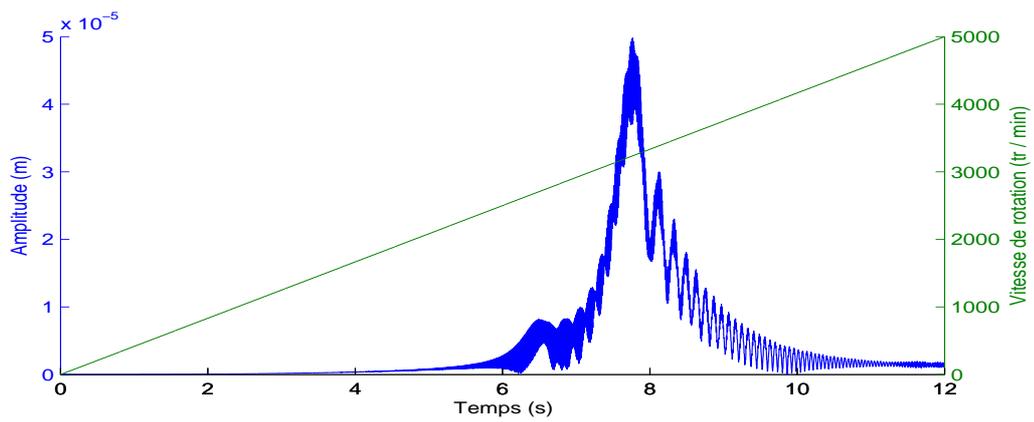


Fig. 6.12: $\ddot{w}_1 = 416,7t$

La figure 6.12 trace les valeurs des maxima d'amplitude pour le noeud correspondant au disque, et ce pour la loi de montée en vitesse de rotation allant de 0 à 5000 tr/min durant 2s. Nous nous intéressons particulièrement à l'instant pour lequel l'excentricité vibratoire atteint son maximum ainsi que l'amplitude maximale correspondante. Dans le premier cas test (figure 6.12) le rotor subit une montée en vitesse assez rapide puisqu'il atteint la vitesse de 5000 tr/min en 1s. Les deux applications suivantes (figure 6.13 et 6.14) présentent des lois de montées en vitesse qui s'étalent sur des intervalles de temps plus importantes ce qui permet aux modèles de mieux s'exprimer et d'obtenir des résultats plus riches en informations. La comparaison des résultats des figures 6.12, 6.13, et 6.14 avec ceux documentés dans [LAL 98] montre une bonne concordance en terme d'allure globale des courbes, ainsi qu'en terme de la localisation et l'amplitude des vitesses critiques. Cette partie nous a permis de valider ce mono-modèle poutre dans le but de l'utiliser comme référence pour la partie qui suit.

Fig. 6.13: $\ddot{w}_1 = 1250t$ Fig. 6.14: $\ddot{w}_1 = 5000t$

Annexe B

Boucle principale

(1) Résolution du problème sans liaison :

$$\begin{array}{l|l}
\mathbf{u}_{0/sl}^{1d} = \mathbf{u}_0^{1d}; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{1d}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{1d} = \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d}; & \mathbf{u}_{0/sl}^{3d} = \mathbf{u}_0^{3d}; \dot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{3d}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/sl}^{3d} = \ddot{\mathbf{u}}_0^{3d}; \\
{}^p\mathbf{u}_{m/sl}^{1d} = \mathbf{u}_0^{1d} + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d} & \text{Boucle sur } j \in [0, m-1] \\
{}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d} & {}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} = \mathbf{u}_j^{3d} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d} \\
\ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} = \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/sl}^{1d} & {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d} \\
\mathbf{u}_{m/sl}^{1d} = {}^p\mathbf{u}_{m/sl}^{1d} + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} & \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} = \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/sl}^{3d} \\
\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/sl}^{1d} & \mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} = {}^p\mathbf{u}_{j+1/sl}^{3d} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} \\
& \dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/sl}^{3d}
\end{array}$$

(2.0) Calcul de la matrice de projection : Φ_m

(2.1) Calcul de l'opérateur de condensation :

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}_{1d} \mathbf{Y}_m^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{Y}_m^{3d} \Phi_m^t$$

(2.2) Résolution du problème d'interface :

$$\lambda_m = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{L}_{1d} \mathbf{u}_{m/sl}^{1d} + \Phi_m \mathbf{L}_{3d} \mathbf{u}_{m/sl}^{3d} \right\}$$

(3) Résolution du problème avec liaison :

$$\begin{array}{l|l}
\mathbf{u}_{0/al}^{1d} = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^{1d} = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^{1d} = \mathbf{0}; & \mathbf{u}_{0/al}^{3d} = \mathbf{0}; \dot{\mathbf{u}}_{0/al}^{3d} = \mathbf{0}; \ddot{\mathbf{u}}_{0/al}^{3d} = \mathbf{0}; \\
{}^p\mathbf{u}_{m/al}^{1d} = \mathbf{u}_0^{1d} + \Delta T \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d} & \text{Boucle sur } j \in [0, m-1] \\
{}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} = \dot{\mathbf{u}}_0^{1d} + (1 - \gamma) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_0^{1d} & {}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} = \mathbf{u}_j^{3d} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d} \\
\ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} = \tilde{\mathbf{M}}_{1d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{m/al}^{1d} & {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} = \dot{\mathbf{u}}_j^{3d} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_j^{3d} \\
\mathbf{u}_{m/al}^{1d} = {}^p\mathbf{u}_{m/al}^{1d} + \beta \Delta T^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} & \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} = \tilde{\mathbf{M}}_{3d}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j+1/al}^{3d} \\
\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} + \gamma \Delta T \ddot{\mathbf{u}}_{m/al}^{1d} & \mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} = {}^p\mathbf{u}_{j+1/al}^{3d} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} \\
& \dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} = {}^p\dot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{j+1/al}^{3d}
\end{array}$$

(4) Mise à jour :

$$\mathbb{U}_m^{1d} = \mathbb{U}_{m/sl}^{1d} + \mathbb{U}_{m/al}^{1d}$$

Boucle sur $j \in [0, m-1]$

$$\mathbb{U}_{j+1}^{3d} = \mathbb{U}_{j+1/sl}^{3d} + \mathbb{U}_{j+1/al}^{3d}$$

Projection :

$$(\mathbb{U}_{j+1}^{3d})_{\text{fixe}} = \Phi \mathbb{U}_{j+1}^{3d}$$

Si contact :

$$\mathbf{K}_{3d} = \mathbf{K}_{3d} + \Phi^t (\mathbf{K}_{\text{contact}})$$

$$\mathbf{F}_j^{3d} = \mathbf{F}_j^{3d} + \Phi^t (\mathbf{F}_{\text{contact}})$$

Et passage à (1-bis)

Si non contact :

Suite de la boucle et passage à (1)

(1-bis) Résolution du problème condensé avec $\mathbf{K}_{3d} = \mathbf{K}_{3d} + \Phi^t (\mathbf{K}_{\text{contact}})$
et $\mathbf{F}_{3d} = \mathbf{F}_j^{3d} + \Phi^t (\mathbf{F}_{\text{contact}})$

Fin de la boucle principale

Bibliographie

- [AND 96] ANDRIEUX S.
Raccord Poutre-3D, Coque-3D et généralisations. rapport, 1996, EDF-R&D Division.
- [BAB 05] BABUSKA I., ANDERSSON B.
The Splitting Method as a Tool for Multiple Damage Analysis. *SIAM J. Scientific Computing*, 2005, p. 1114-1145.
- [BAI 96] BAILLET L., BRUNET M., BERTHIER Y.
Experimental and numerical dynamic modelling of ironing process. *Journal of Material Processing Technology*, vol. 60, 1996, p. 677-684.
- [BAT 10] BATTI A., BRUN M., MAHJOUBI N., GRAVOUIL A., COMBESURE A.
Comparison of external code couplers based on four monolithic subdomain decomposition methods. *Advances in Engineering Software*, submitted, 2010.
- [BAU 08] BAUMAN P., BEN DHIA H., ELKHODJA N., ODEN J., PRUDHOMME S.
On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum Models. *Computational Mechanics*, vol. 42, 2008, p. 511-530.
- [BAU 09] BAUMAN P., ODEN J., PRUDHOMME S.
Adaptive multiscale modeling of polymeric materials : Arlequin coupling and goals algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, 2009, p. 799-818.
- [BEN 99] BEN DHIA H.
Numerical modelling of multiscale problems : the Arlequin method. *CD ECCM99*, 1999, p. 1-1.
- [BEN 01] BEN DHIA H., RATEAU G.
Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I*, vol. 332, 2001, p. 649-654.
- [BEN 05] BEN DHIA H., RATEAU G.
The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 62, n° 11, 2005, p. 1442-1462, Wiley Online Library.
- [BEN 08a] BEN DHIA H.
Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *Int. J. Multiscale Comp. Engr*, vol. 6, n° 3, 2008, p. 215-232.

- [BEN 08b] BEN DHIA H., ELKHODJA N., ROUX F.-X.
Multimodeling of multi-alterated structures in the arlequin framework. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 17, n° 5-7, 2008, p. 969-980.
- [BEN 10] BEN DHIA H., JAMOND O.
On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, 2010, p. 1403-1414.
- [BEN 11] BEN DHIA H., TORKHANI M.
Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, n° 1, 2011, p. 61-83, John Wiley and Sons, Ltd.
- [BOI 98] BOISSE P., LADEVÈZE P., ROUGEE P.
A large time increment method for elastoplastic problems. *European journal of mechanics*, vol. 8, 1998, p. 257-275.
- [BON 08] BONELLI A., BURSI O., HE L., MAGONETTE G., PEGON P.
Convergence analysis of a parallel interfield method for heterogeneous simulations with dynamic substructuring. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 75, n° 7, 2008, p. 800-825, Wiley Online Library.
- [BRU 11] BRUN M., BATTI A., LIMAN A., COMBESCURE A., GRAVOUIL A.
Co-simulation implicite/explicite multi-pas de temps : application à une structure en béton armé sous séismes. *AFPS*, 2011.
- [CAR 95] CARLENZOLI C., QUARTERONI A.
Adaptive domain decomposition methods for advection-diffusion problems. *Institute for Mathematics and Its Applications*, vol. 75, 1995, page 165.
- [COG 89] COGNARD J.
Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la méthode à grand incrément de temps. 1989.
- [COM 02] COMBESCURE A., GRAVOUIL A.
A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, 2002, p. 1129-1157.
- [COO 02] COOK R., MALKUS D., PLESHA M., WITT R.
Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley, New York, 2002.
- [DUP 11] DUPLEIX-COUDERC C., ALLIX O., GATUINGT F., MALHERBE B.
Vers une stratégie multi-échelle temps-espace pour l'analyse des grands délaminages en dynamique transitoire. *Dixième colloque national en calcul des structures - Giens - Actes*, 2011.
- [DUS 99] DUSTER A., RANK E., STEINL G., WUNDERLICH W.
A combination of an h- and a p- version of the finite element method for elastic-plastic problems. *ECCM 99*, 1999.

-
- [DUS 07] DUSTER A., NIGGL A., RANK E.
Applying the hp-d version of the FEM to locally enhance dimensionally reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, 2007, p. 3524-3533.
- [ELK 07] ELKHODJA N., BEN DHIA H., ROUX F.-X.
Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines. *Colloque National en Calcul de Structures*, 2007.
- [FAR 94] FARHAT C., ROUX X.
The dual Schur complement method with well-posed local neumann problems. *BIT*, vol. 157, 1994, p. 193-201.
- [GHA 11a] GHANEM A., BARANGER T., TORKHANI M., MAHJOUBI N.
Arlequin framework for structural dynamics. *Proceedings of the Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Greece*, 2011.
- [GHA 11b] GHANEM A., BARANGER T., TORKHANI M., MAHJOUBI N.
Aspects dynamiques du couplage 3D-1D dans la méthode Arlequin. *10e colloque national en calcul des structures, Giens*, vol. HAL : 00592776, 2011.
- [GHA 12a] GHANEM A., BARANGER T., TORKHANI M.
Arlequin framework for rotating machinery applications : a space/time multi-model/multiscale approach. *6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, At Vienna, Austria*, 2012.
- [GHA 12b] GHANEM A., TORKHANI M., MAHJOUBI N., BARANGER T., COMBESURE A.
Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. DOI : 10.1016/j.cma.2012.08.019, 2012.
- [GHA 13] GHANEM A., BARANGER T., TORKHANI M., ALTMAYER G.
Méthode Arlequin pour la modélisation multi-échelles en temps des machines tournantes. *11e colloque national en calcul des structures, Giens, (Soumis)*, 2013.
- [GLO 04] GLOWINSKI R.
A multi-domain method for solving numerically multi-scale elliptic problems. *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 338, n° 9, 2004, p. 741-746.
- [GRA 00] GRAVOUIL A.
Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaine pour la dynamique non-linéaire des structures. 2000.
- [GRA 01] GRAVOUIL A., COMBESURE A.
A Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 1, 2001, p. 199-225, Wiley Online Library.
-

- [GUI 07] GUIDAULT P.-A., BELYTSCHKO T.
On the L2 and the H1 couplings for an overlapping domain decomposition method using Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, 2007, p. 322-350.
- [GUI 08] GUIDAULT P., ALLIX O., CHAMPANEY L., CORNUAULT S.
A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 381-399.
- [HIL 77] HILBER H., HUGHES T., TAYLOR R.
Earthquake Engineering and Structural Dynamics. *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*, vol. 5, 1977, p. 283-292.
- [HIL 78] HILBER H., HUGHES T.
Collocation, dissipation and overshoot for time integration schemes in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 6, 1978, p. 99-118.
- [HOU 91] VAN DER HOUWEN P., SOMMEIJER B., CONG N.
Stability of collocation based Runge-Kutta-Nystrom methods. *BIT*, vol. 31, 1991, p. 469-481.
- [HU 08] HU H., BELOUETTAR S., POTIER-FERRY M., DAYA E.
Multi-scale modelling of sandwich structures using the Arlequin method Part I : Linear modelling. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 45, n° 1, 2008, p. 37-51, Elsevier.
- [HUG 78a] HUGHES T., LIU W.
Implicit-explicit finite elements in transient analysis : Implementation and numerical examples. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 375-378.
- [HUG 78b] HUGHES T., LIU W.
Implicit-explicit finite elements in transient analysis : Stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 371-375.
- [HUG 83] HUGHES T.
Transient algorithms and stability. *Computational Methods for Transient Analysis*, vol. 5, 1983, p. 283-292.
- [JU 99] JU S., ROWLANDS R.
A Three-dimensional Frictional Contact Element Whose Stiffness Matrix is Symmetric. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 66, 1999, p. 460-467.
- [KRA 03] KRAUSE R., RANK E.
Multiscale computations with a combination of the h- and p- versions of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, 2003, p. 3959-3983.
- [KRE 06] KRENK S.
State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear dynamic systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 65, 2006, p. 595-619.

-
- [LAD 03] LADEVÈZE P., NOUY A.
On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, 2003, p. 3061-3087.
- [Lad99] *Non linear Computational Structural Mechanics - New approaches and Non-Incremental Methods*. Springer Verlag, 1999.
- [LAL 98] LALANE M., FERRARIS G.
Rotordynamics prediction in engineering. John Wiley, New York, 1998.
- [LEE 93] LEE S.
Rudimentary Considerations for adaptative Gap/friction Element Based on the Penalty Method. *Computer and Structures*, vol. 47, 1993, p. 1043-1056.
- [LI 05] LI R.
On multi-mesh h-adaptive methods. *Journal of Scientific Computing*, vol. 24, n° 3, 2005, p. 321-341, Springer.
- [MAH 10] MAHJOUBI N.
Méthode générale de couplage de schémas d'intégration multi-échelles en temps en dynamique des structures. 2010.
- [MAR 84] MARSDEN J., HUGHES T.
Mathematical Foundations of Elasticity. Dover Publications, 1984.
- [MOT 92] MOTTERSHEAD J., PASCOE S., ENGLISH R.
A General Finite Element Approach for Contact Stress Analysis. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, vol. 33, 1992, p. 765-779.
- [NEW 59] NEWMARK N.
A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, vol. 85, 1959, p. 67-94.
- [ORT 86] ORTIZ M., NOUR-OMID B.
Unconditionally stable concurrent procedures for transient finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, 1986, p. 151-174.
- [PAR 75] PARK K.
Evaluating time integration methods for nonlinear dynamic analysis. *Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Behaviour*, 1975, p. 35-58.
- [PRA 04] PRAKASH A., HJELMSTAD K.
A FETI-based multi-time-step coupling method for Newmark schemes in structural dynamics. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 61, n° 13, 2004, p. 2183-2204, Wiley Online Library.
- [PRU 08] PRUDHOMME S., BEN DHIA H., BAUMAN P., ELKHODJA N., ODEN J.
Computational Analysis of Modeling Error for the Coupling of Particle and Continuum Models by the Arlequin Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, 2008, p. 3399-3409.
-

- [RAD 95] RADE L., WESTERGREN B.
Mathematics handbook for science and engineering. Birkhauser Boston, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1995.
- [RAN 92] RANK E.
Adaptive remeshing and h - p domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 101, 1992, p. 299-313.
- [RAN 97] RANK E., KRAUSE R.
A multiscale finite element method. *Computers and Structures*, vol. 64, 1997, p. 139-144.
- [RAT 03] RATEAU G.
Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles. 2003.
- [ROY 90] ROYER C.
Une approche des problèmes de dynamique non-linéaires par la méthode à grand incrément de temps. 1990.
- [SCH 69] SCHWARZ H.
Über einige abbildungsaufgaben. *Ges. Math. Abh.*, vol. 11, 1869, p. 65-83.
- [WIL 68] WILSON E.
A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures. *SESM Report 68-1; Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California*, 1968.
- [ZAM 05] ZAMMALI C.
Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact. 2005.

NOM : GHANEM

DATE de SOUTENANCE : 22/01/2013

Prénoms : Assaf

TITRE : Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2013-ISAL-0006

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

RÉSUMÉ :

Les machines tournantes sont le siège de phénomènes vibratoires particuliers liés à des sources d'excitation variées dues à l'effet de rotation, au couplage vibrations/mouvements de rotation/écoulements tournants, à la symétrie périodique ou quasi-périodique des structures, et à l'amortissement interne et externe. Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire portent sur le développement d'une méthodologie de couplage de modèles "1D poutre" et 3D pour l'analyse dynamique avancée des machines tournantes. La méthode Arlequin est une méthode de raccord de modèles autorisant par l'intermédiaire d'une technique de superposition, de coupler des modèles numériques de nature différente. L'extension de cette méthode au cadre de la dynamique des machines tournantes offre la possibilité de mieux traiter les aspects énergétiques et propagation d'ondes à travers la zone de recouvrement. À cette fin, plusieurs points sont abordés. Le premier point concerne l'écriture du formalisme Arlequin en régime dynamique transitoire dans le cadre du raccord 1D-3D. À partir des formulations continue et discrétisée, les questions de couplage multi-schémas/multi-échelles en temps sont traitées en se basant sur la conservation de l'énergie globale des sous-domaines couplés. Dans le second point, une méthode de raccord multi-schémas/mono-échelle en temps fondée sur une pondération de type partition de l'unité des paramètres du schéma de Newmark dans la zone de collage est proposée. Elle permet de garantir l'équilibre énergétique du système global et assure la continuité des quantités cinématiques à l'interface. Puis cette approche est généralisée au cadre des raccords multi-schémas/multi-échelles. Ce nouveau formalisme autorise l'intégration numérique avec des schémas et des échelles de temps différents dans un contexte de raccord avec recouvrement tout en préservant l'équilibre énergétique global. Le dernier point traite deux volets principaux. Dans le premier volet, une formulation mixte ciblant les applications machines tournantes pour lesquelles un repère fixe et un autre tournant coexistent, est mise en place. Dans le second volet, le formalisme multi-schémas/multi-échelles en temps est étendu à la formulation mixte dans le but d'obtenir une approche générale permettant l'analyse de modélisations avancées de machines tournantes. La pertinence de ces travaux est illustrée par une application semi-industrielle représentant une application de type machines tournantes.

MOTS-CLÉS : Machines tournantes, Méthode Arlequin, Éléments finis, Dynamique transitoire, Analyse multi-échelles / multi-schémas, Décomposition de domaines.

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
18-20 rue des Sciences
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Mme. Thouraya BARANGER

Président du jury : BEN DHIA Hachmi

Composition du jury : BARANGER Thouraya	LEBON Frédéric
BEN DHIA Hachmi	MASSIN Patrick
CARTRAUD Patrice	PRUDHOMME Serge
COMBESURE Alain	TORKHANI Mohamed