

Thèse

Modélisation du comportement dynamique non-linéaire et transitoire de turbomoteur avec multitouches rotor/stator

Présentée devant
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le grade de Docteur

Formation Doctorale : Mécanique
École doctorale: MEGA

Par
Celio DURAN
Ingénieur

Soutenue le 15 Juillet 2014 devant la commission d'examen

Jury

BERLIOZ, Alain, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse,
BONNEAU, Olivier, Professeur, Université de Poitiers,
BORDEGARAY, Céline, Ingénieur R&D, Turboméca, Bordes,
DION, Jean-Luc, Maître de Conférences HDR, Supméca, Paris
MANIN, Lionel, Maître de Conférences, INSA Lyon,
DUFOUR, Régis, Professeur, INSA Lyon

Cette recherche a été menée au laboratoire de mécanique des contacts et des structures
UMR CNRS 5259 (LaMCoS) de l'INSA de Lyon.

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Ranae EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bat ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tel : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edera.sc-lyon.fr Sec : M.C. HAVGODOUKIAN esa@sc-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Gey de Collongue 69134 ECULLY Tel : 04.72.18.60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerald.scorletti@sc-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.univ-lyon1.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Darwin - UCB Lyon 1 04.72.43.28.91 Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bat Ferrié 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tel : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Hôpital Louis Pradel - Bron 04 72 68 49 09 Insa : M. LAGARDE Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 69621 Villeurbanne Tel : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Ranae EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e étage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tel : 04.72.43.80.46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.univ-lyon1.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tel : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://imera.univ-lyon1.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tel :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Isabelle VON BUOLTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tel : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

Les travaux de cette thèse CIFRE ont pu avoir lieu grâce à l'accueil d'une part, des professeurs Alain COMBESCURE puis David DUREISSEIX directeurs du LaMCoS CNRS UMR 5259 de l'INSA de Lyon, et d'autre part, de Mr. Jean-Michel PY responsable du service Intégration de Turboméca Bordes. Je les en remercie vivement.

La direction et l'encadrement de cette thèse ont été effectués à l'INSA par le professeur Régis DUFOUR et le docteur Lionel MANIN, et à Turboméca par le docteur Céline BORDEGARAY. Leurs conseils avisés, leurs compétences notamment dans le domaine de la dynamique des rotors, leur écoute et leurs investissements fort appréciables ont conduit à la finalisation de cette recherche dans de très bonnes conditions. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude et ma reconnaissance.

J'ai également apprécié la pertinence des commentaires du docteur Frédéric BATLLE chef de groupe de dynamique de ligne d'arbre à Turboméca. Je lui en suis très reconnaissant.

Le professeur Olivier BONNEAU et le docteur Jean-Luc DION ont consacré de leur précieux temps à l'expertise de ce mémoire. Le professeur Alain BERLIOZ m'a fait l'honneur de présider le jury de la soutenance. Je leur exprime à tous les trois, mes remerciements les plus sincères. Je suis sensible de l'intérêt du docteur Mohamed TORKHANI de EDF R&D, sur mes travaux de thèse, et je l'en remercie.

Enfin mes derniers remerciements vont à mes proches, ma famille, mes collègues de Turboméca et du LaMCoS, car ils m'ont permis de mener cette thèse à son terme.

Durant le déroulement de cette thèse, deux oncles proches m'ont quitté. Que mes pensées les plus affectueuses les accompagnent.

Introduction

L'amélioration des performances des turbines à gaz pousse les constructeurs à réduire les jeux fonctionnels, tout en garantissant robustesse et fiabilité. Cela nécessite la maîtrise des situations à risques telles que les interactions rotor/stator entre les parties fixes et tournantes. Les manœuvres de l'hélicoptère, la perte d'aubes, les accélérations soudaines et importantes du rotor, l'ingestion de corps étrangers sont autant d'évènements susceptibles de provoquer des « touches » rotor/stator dans le turbomoteur. Le contact étant un phénomène non-linéaire, il est délicat de pouvoir le modéliser de manière précise en dynamique, sur des architectures complexes.

Bien que la littérature soit assez dense sur les modèles de contact, il reste difficile de connaître en détail les conditions d'apparition des interactions rotor/stator et les conséquences dynamiques engendrées ; la faute aux nombreux phénomènes mis en jeu, à la fois multi-physiques (élasticité, hydro- et aérodynamique, tribologie, thermomécanique, plasticité), multi-échelle (dynamique de structure et mécanique du contact), non-linéaires (interaction rotor/stator, balourd soudain, matériau) et dans un contexte de grandes vitesses de rotation.

Dans le cadre des turbomoteurs, le but est de prévoir le comportement dynamique de la ligne d'arbre lors d'une perte d'aube causée par exemple par une ingestion de corps étrangers ou lors d'une simple touche rotor/stator occasionnée, par exemple, par des manœuvres de l'aéronef. Plusieurs régimes de contact peuvent alors intervenir. Le plus couramment observé et étudié est le « full annular rub », *i.e.* un contact permanent dont le mouvement s'effectue en précession directe. Le contact partiel se traduit par une série périodique ou quasi-périodique de rebonds du rotor sur le stator. Le mouvement de précession peut aussi bien s'effectuer dans le sens directe ou indirect. Le « dry friction backward whirl », *i.e.* un contact permanent en précession indirecte, se caractérise par un comportement vibratoire mettant en jeu des mouvements et des efforts de très grandes amplitudes. Une préoccupation essentielle concerne les conditions de son déclenchement. Ce phénomène s'avère auto-entretenu et capable de mener le système à sa ruine (phénomène « dry whip »).

Cette thèse traite de la dynamique non-linéaire multi-contact des ensembles rotor/stator et s'applique en particulier aux turbomoteurs d'hélicoptère conçus par Turboméca, groupe Safran.

Dans un premier temps, il s'agit de présenter une synthèse bibliographique des principaux phénomènes physiques rencontrés suite à une touche rotor/stator, en s'appuyant sur l'expérimentation et le calcul. Un bilan sur les différents modèles numériques de gestion du contact frottant est détaillé. La dualité entre méthodes temporelles et fréquentielles est aussi abordée comme la méthode de la balance harmonique (HBM) et les schémas d'intégration temporelle de la famille de Newmark. Le chapitre de bibliographie se conclut par une présentation de techniques propres à la modélisation et l'analyse des phénomènes non-linéaires. Deux méthodes de condensation dynamique sont ainsi mises en lumière. On décrit aussi deux outils d'analyse fréquentielle : le spectrogramme permettant d'analyser

l'évolution d'un spectre fréquentiel dans le temps, le full-spectrum (*i.e.* spectre complet) permettant de déduire les sens de rotations des différents modes de précessions du rotor.

Le deuxième chapitre de ce mémoire décrit les différents choix de modélisation effectués. L'intégration temporelle pas à pas est la méthode retenue pour la résolution dynamique. Un oscillateur avec double butées élastiques est ainsi développé et résolu semi-analytiquement. Le but étant de pouvoir comparer la solution semi-analytique avec les résultats obtenus par intégration numérique et, tester l'influence du pas de temps sur la robustesse du schéma choisi. Une présentation du modèle éléments finis est ensuite réalisée. Le rotor est modélisé par éléments finis de poutre type Euler-Bernoulli de haute précision prenant en compte aussi bien les degrés de libertés (ddl) de flexion, que ceux de torsion et traction/compression. Chaque nœud comporte 10 ddl pour respecter la théorie de la mécanique des milieux continus. Le contact rotor/stator est modélisé par une méthode de pénalité combinée à une régularisation dynamique de la raideur. Le modèle de gestion du contact par pénalisation est éprouvé sur un rotor de Jeffcott à 2 ddl emprunté à la littérature. Les modèles et méthodes de résolutions sont choisis en fonction de leur capacité à représenter, qualitativement et quantitativement, les phénomènes et les comportements usuels constatés après une ou plusieurs touches rotor/stator. Un modèle de référence de rotor à 3 disques rigides, dont l'un est susceptible de rentrer en contact rotor/stator, est étudié. Les choix de modélisation effectués précédemment sont appliqués au modèle.

L'ensemble de la modélisation est mise en œuvre sous l'environnement Matlab et se traduit au final par un logiciel nommé ToRoS (**T**ouche **R**otor-**S**tator). Celui-ci permet de modéliser par éléments finis (EF) un système multi-rotor et de simuler son comportement dans le temps après un ou plusieurs contacts rotor/stator.

Dans le dernier chapitre, la dynamique transitoire d'un rotor de turbomoteur soumis à de multiples touches, consécutifs à un départ d'aubes est simulée. Le cas industriel de la turbine libre d'un Ardiden 1H est considéré, il s'agit notamment à partir des résultats de simulation de déterminer quel type de régime de contact intervient. Une présentation du modèle linéaire (sans contact) recalé est d'abord décrite. Les paramètres numériques de raideur caractérisant les contacts et les stators sont identifiés par analyse sur Ansys des modèles 3D des pièces susceptibles d'entrer en interaction. Les résultats de simulation d'une perte d'aubes sont exposés et interprétés. Un test sur l'influence de la raideur de contact conclut l'étude du cas industriel.

Table des matières

Modélisation du comportement dynamique non-linéaire et transitoire de turbomoteur avec multitoches rotor/stator	1
Remerciements.....	3
Introduction.....	4
Chapitre 1 : Bibliographie et état de l'art.....	9
1. Phénoménologie Contact Rotor/Stator.....	9
1.1 Introduction au fonctionnement d'une turbine à gaz et au phénomène de contact rotor/stator	9
1.2 Comportements physiques observés.....	14
1.2.1 Contact permanent en précession directe.....	15
1.2.2 Contact partiel en précession directe.....	16
1.2.3 Contact partiel en précession indirecte.....	18
1.2.4 Contact permanent en précession inverse.....	20
1.3 Etat de l'art de la modélisation du contact.....	25
1.3.1 Formulation variationnelle et aspect théorique.....	25
1.3.2 Modélisation de l'effort de contact.....	28
1.3.3 Modélisation de l'effort frottant.....	34
1.4 Paramètres et facteurs influents.....	39
1.4.1 Les paramètres du contact.....	39
1.4.2 Vitesse de rotation et régime de fonctionnement.....	40
1.4.3 Propriétés mécaniques des parties fixes et tournantes.....	40
1.4.3 Déclenchement de la touche.....	42
1.4.4 Dissymétries du système.....	43
2. Résolution dynamique des systèmes non-linéaires – Dualité	
Temporelle/Fréquentielle.....	44
2.1 Méthode de recherche de solutions dans le domaine fréquentiel.....	45
2.2 Méthode de recherche de solutions dans le domaine temporel.....	47
3. Techniques propres à la modélisation et l'analyse des phénomènes non-linéaires ..	50
3.1 Condensation dynamique.....	50
3.2 Analyse fréquentielle des phénomènes non-linéaires.....	51
3.2.1 Analyse par full spectrum.....	51
3.2.2 Analyse par spectrogramme.....	53
4. Synthèse.....	56
Chapitre 2 : Modélisation.....	57
1. Oscillateur académique avec double butées élastiques.....	57
1.1 Mise en équation théorique du système à 1 degré de liberté.....	57
1.1.1 Présentation du système.....	57
1.1.2 Détermination de la solution semi-analytique.....	59
1.2 Calcul numérique par intégration temporelle.....	61
1.2.1 Choix d'algorithmes.....	61
1.2.2 Régularisation numérique de la pénalité de contact par la fonction arc tangente.....	61
1.3 Comparaison résultats numériques vs solution analytique.....	62
1.4 Synthèse.....	65
2. Modélisation éléments finis du système multi-rotor.....	66
2.1 Mise en équation des éléments tournants.....	67
2.1.1 Définition des repères d'étude.....	67
2.1.2 Expressions des énergies des éléments tournants.....	68
2.1.3 Modélisation EF du rotor.....	73
2.2 Modélisation du contact frottant.....	75
2.2.1 Définition des normales au contact.....	75

2.2.2	Evaluation du jeu entre les structures.....	76
2.2.3	Calcul de la composante normale de l'effort de contact	77
2.2.4	Calcul de la composante tangentielle de l'effort de contact	78
2.2.5	Implémentation du modèle de contact dans l'équation matricielle dynamique	80
2.3	Synthèse.....	82
3.	Rotor de Jeffcott.....	83
3.1	Présentation du rotor de Jeffcott avec contact rotor/stator et solution analytique	83
3.2	Résolution numérique du système de Jeffcott avec contact rotor/stator.....	85
3.3	Synthèse.....	102
4.	Etude d'un rotor académique à 3 disques rigides	103
4.1	Description de la ligne d'arbre	103
4.2	Discretisation en éléments finis du rotor	104
4.3	Analyse modale dans le domaine linéaire	105
4.4	Résultats de calculs numériques	106
4.4.1	Réponses temporelles et post-traitement fréquentiel en configuration sans contact.....	107
4.4.2	Réponses temporelles avec touche rotor/stator	109
4.4.3	Post-traitement fréquentiel des résultats de simulations avec touche rotor/stator.....	121
4.5	Comparaison des méthodes de calcul : intégration temporelle vs HBM	126
4.5.1	Présentation du système d'étude	126
4.5.2	Calcul d'une réponse non-linéaire d'un rotor à 3 disques sans frottement	126
4.5.3	Calcul d'une réponse non-linéaire d'un rotor à 3 disques avec frottement.....	127
4.6	Synthèse.....	128
Chapitre 3 : Application industrielle : Réponse dynamique d'un turbomoteur		
 sujet à des multitouches provoquées par une perte d'aubes 130		
1.	Présentation d'un turbomoteur type Ardiden 1H	130
2.	Modélisation de la ligne d'arbre, des carters et des contacts rotor/stator	132
2.1	Modélisation de la ligne d'arbre	133
2.2	Modélisation des carters.....	139
2.2.1	Positionnement du problème	139
2.2.2	Détermination des raideurs radiales équivalentes des carters.....	141
2.3	Modélisation des contacts rotor/stator.....	145
2.3.1	Approche expérimentale (loi de contact labyrinthe).....	145
2.3.2	Contact disque + aubes / anneau abrasable	151
2.3.3	Butées paliers	158
3.	Résultats de simulation du départ d'aubes	160
3.1	Réponses temporelles.....	161
3.2	Post-traitement fréquentiel des résultats.....	166
3.3	Influence des raideurs de contacts	171
4.	Synthèse.....	174
Conclusion et perspectives..... 176		
Annexes 179		
1.	Schémas d'intégration temporelle	179
1.1.	Méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4	179
1.2	Méthode des différences finies centrées	181
1.3	Autres types de schéma d'intégration temporelle.....	182
2.	Condensation dynamique	184
2.1	Méthode de Craig et Bampton	184
2.2	Méthode de Craig et Martinez	185
3.	Modélisation EF du rotor	187
3.1	Arbre	187
Contributions en Flexion.....		187
Contributions en torsion.....		191

Contributions en traction/compression	193
3.2 Disque.....	194
Sollicitation en flexion.....	194
Sollicitations en torsion	195
Traction/compression.....	196
3.3 Balourd	196

Chapitre 1 : Bibliographie et état de l'art

1. Phénoménologie Contact Rotor/Stator

1.1 Introduction au fonctionnement d'une turbine à gaz et au phénomène de contact rotor/stator

Les turbomachines fonctionnent sur le principe d'un échange d'énergie entre un fluide et une chaîne cinématique, l'énergie motrice du système pouvant être aussi bien fournie par l'un ou l'autre. Les turbines à gaz sont constituées d'un **générateur de gaz (GG)** autonome et d'un récepteur. Le générateur de gaz se compose de trois éléments qui ont des fonctions distinctes. Le compresseur élève la pression du gaz frais, initialement à pression ambiante. La chambre de combustion augmente la température du gaz comprimé tandis que la **turbine** de détente fournit l'énergie mécanique nécessaire à l'entraînement du compresseur.

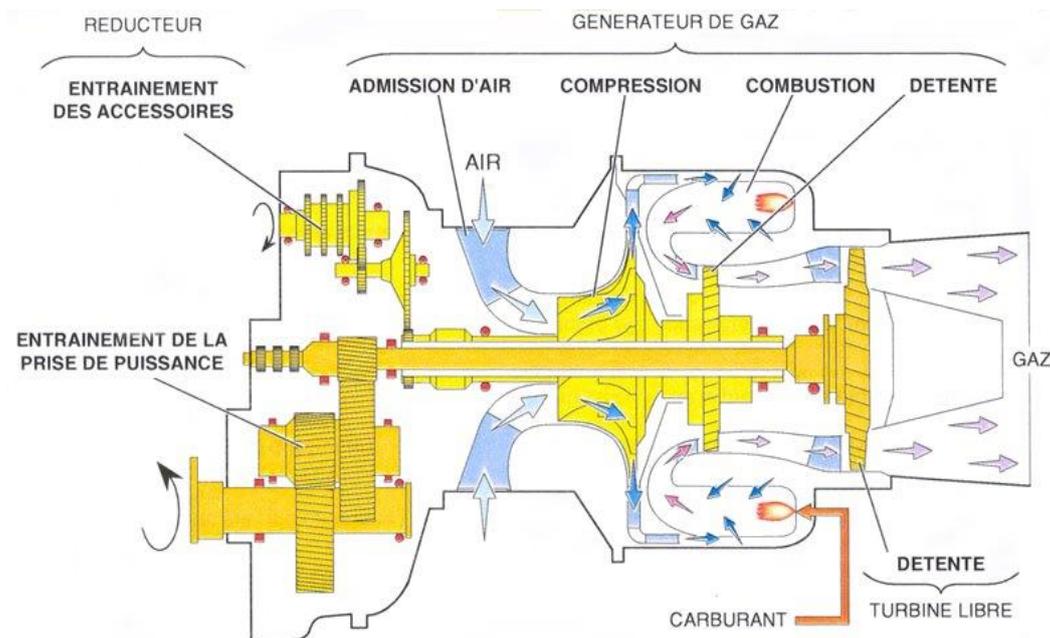


Figure 1-1 : Turbomoteur à turbine libre (TL)

Selon l'exploitation des gaz en sortie du générateur, on peut distinguer deux grandes familles de turbomachines :

- les turbo réacteurs
- les turbomoteurs, à turbine soit liée soit libre.

Dans le cas d'un turbo réacteur, le récepteur est une tuyère d'éjection qui transforme la pression et la température des gaz en énergie cinétique. La quantité de mouvement ainsi pro-

duite permet de générer de la poussée utilisée pour propulser le véhicule. Ce type de réacteur est utilisé dans la propulsion d'avions dits rapides, militaires ou civils.

Dans le cas d'un turbomoteur, le récepteur est un nouvel ensemble de détente qui entraîne une charge utile via un arbre de transmission et éventuellement un réducteur. La tuyère ne sert qu'à l'éjection des gaz.

On distingue dans un premier temps le turbomoteur à turbine liée, dans lequel la puissance mécanique est transmise par le même arbre au compresseur et à la charge utile. Ce système impose donc que le compresseur et le récepteur aient la même vitesse de rotation, ce qui entraîne une mauvaise consommation spécifique en bas régime. Depuis 1970 est apparu le turbomoteur à **turbine libre (TL)**. Dans ce cas, les gaz sont détendus dans deux ensembles de turbines (*Figure 1-1*). Le premier est celui du générateur de gaz qui entraîne le compresseur et le deuxième est appelé étage de puissance et entraîne le récepteur. La turbine du générateur de gaz est appelée **turbine haute pression (THP)** et la turbine de puissance est appelée **turbine libre (TL)**. De construction plus complexe, cette configuration offre des avantages mécaniques dont celui de ne pas être équipé d'un embrayage (longueur ~1m), une plus grande souplesse de fonctionnement (générateur et charge sont indépendants) et surtout une meilleure consommation spécifique.

Les Turbomoteurs conçus par Turboméca sont des turbomachines de dimensions réduites, légères (~300 kg) dont les parties tournantes sont entraînées à de très hautes vitesses de rotations. Le groupe moteur d'un turbomoteur est constitué de deux lignes d'arbre indépendantes (**Générateur de Gaz** et **Turbine Libre**) disposées coaxialement l'une par rapport à l'autre. Les deux rotors ont des vitesses de rotations contrarotatives comprises entre 30 000 et 50 000 rpm pour l'arbre générateur, entre 20 000 à 35 000 rpm pour l'arbre de puissance.

La ligne d'arbre générateur de gaz (**GG** en bleu *Figure 1-2*) se compose en général d'un arbre creux supporté par deux roulements montés à chacune des extrémités de l'arbre. Le premier est le plus souvent un roulement à bille intégré à une cage souple et amorti radialement par un squeeze film (film d'huile pressurisé) tandis que le second est un roulement à rouleaux monté rigidement. L'air capté dans l'environnement est comprimé par un ou plusieurs étages compresseurs de type centrifuge (rouet) ou axial afin d'assurer une alimentation en air sous pression vers la chambre de combustion. L'air accéléré par combustion est ensuite évacué vers la partie turbine libre (**TL** en rouge *Figure 1-2*) par le biais d'un ou 2 étages de turbines générateurs à haute pression.

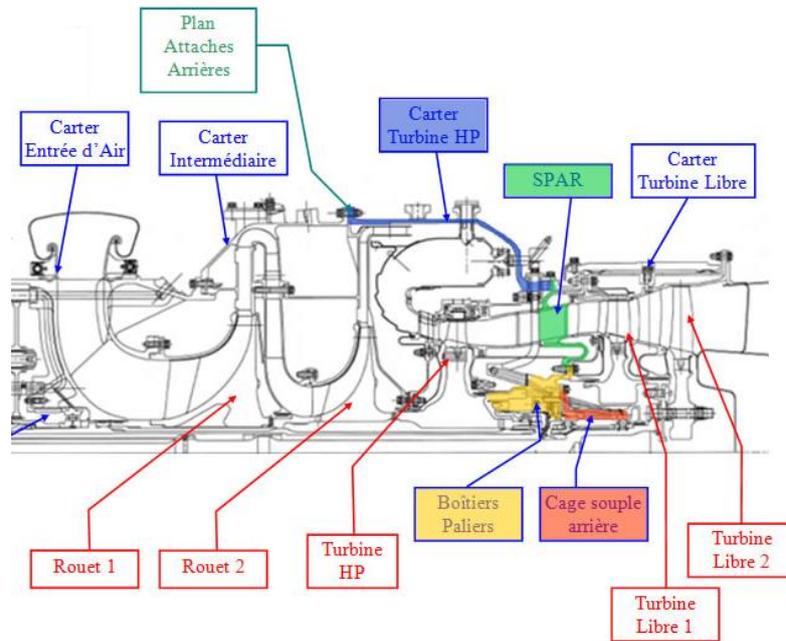


Figure 1-2 : Architecture d'un turbomoteur type « Ardiden 1H »

La ligne d'arbre turbine libre communément appelée arbre de puissance, se compose d'un arbre plein monté coaxialement avec celui du **générateur de gaz (GG)**. Elle est supportée par 3 voire 4 paliers dont un couple de 2 roulements à rouleaux, et un ou deux roulements à billes qui encaissent les efforts axiaux provenant de la **boîte de transmission de puissance (BTP en orange Figure 1-2)**. Les roulements à billes sont parfois montés sur une cage souple avec squeeze film à l'entrée ou la sortie d'un ou deux étages de roue de turbines (Figure 1-3). Le module **TL** a pour rôle de transformer l'énergie cinétique des gaz brûlés, à la fois en énergie de propulsion et en énergie mécanique permettant l'entraînement des pales de l'hélicoptère via la BTP et le rotor.

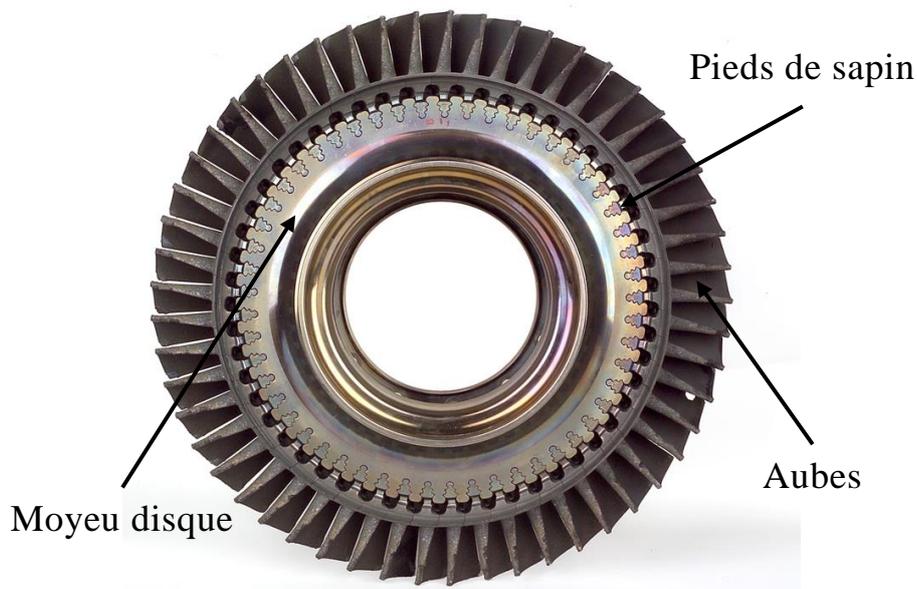


Figure 1-3 : Disque turbine libre

Les différents disques et compresseurs de turbine du GG sont assemblés par un accouplement à denture (curvic-coupling, *Figure 1-4*) qui sous l'effet d'une précharge axiale du tirant permet de réduire d'éventuels problèmes de désalignement. L'étanchéité entre parties fixes et tournantes est assurée par des joints à lèvres de type labyrinthes. Un revêtement abrasable est déposé localement sur les parties fixes susceptibles d'entrer en contact avec les parties tournantes, *i.e.* au niveau des compresseurs axiaux et centrifuges, et des joints labyrinthes. Le support de palier arrière est une pièce très souple, reliée à plusieurs parties du carter transmettant ainsi les vibrations perçues au niveau des paliers.

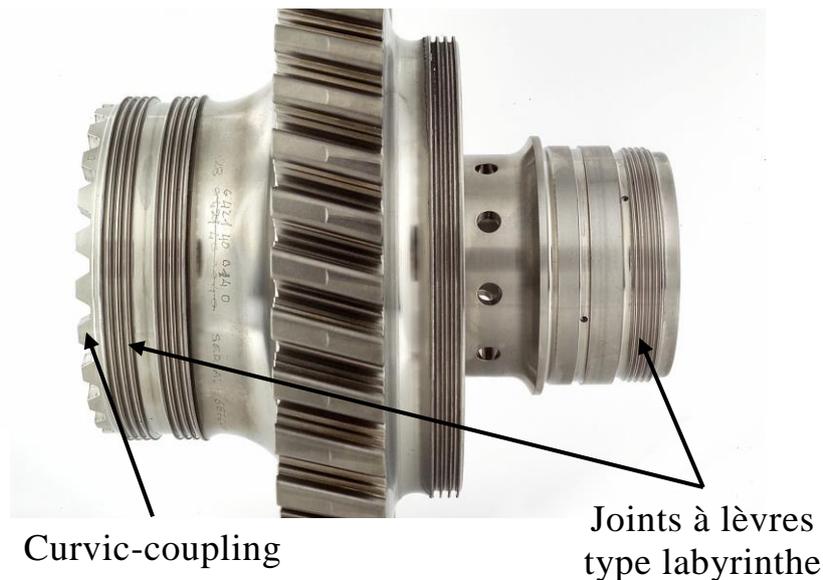


Figure 1-4 : Moyeu disque turbine haute pression (THP)

D'un point de vue dynamique, la ligne d'arbre GG est dimensionnée pour un régime sous-critique. C'est-à-dire que la fréquence du régime nominal moteur est nettement inférieure à celle du premier mode de flexion d'arbre. Durant la montée en régime, seuls un ou deux modes de paliers (modes coniques ou cylindriques) sont franchis. Des films d'huile de type **squeeze-film** (**SqF**, *Figure 1-5(a)*) apportent l'amortissement suffisant afin que les jeux ne soient pas consommés lors du passage des vitesses critiques.

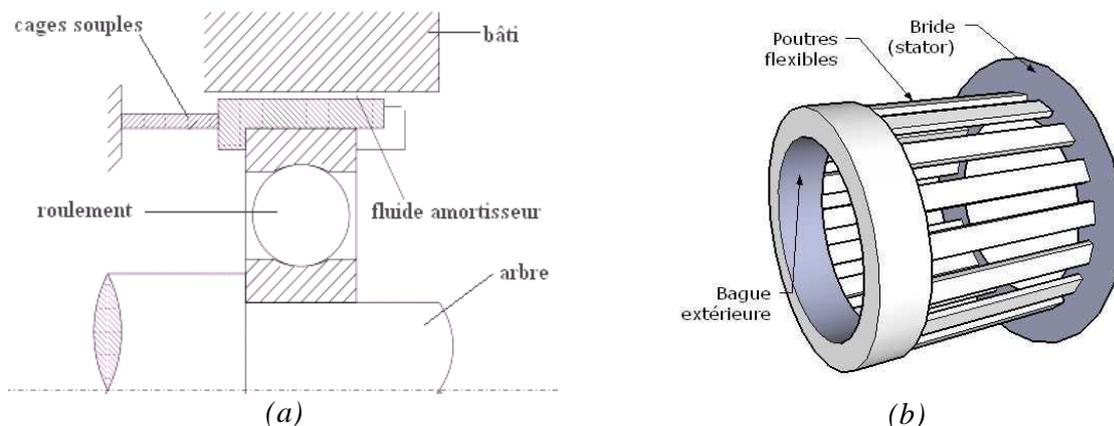


Figure 1-5 : Visualisation d'un palier : (a) ensemble roulement à billes, cage souple et squeeze-film, (b) perspective d'une cage souple

La TL est en revanche dimensionnée sur-critique en grande partie dû au fait que l'arbre de « puissance » traverse celui du générateur. On situe sa première fréquence de flexion d'arbre en dessous du régime nominal et la deuxième nettement au-dessus. Le montage de roulement avec cage souple et squeeze film est disposé sur la partie arrière de la TL en raison des amplitudes de vibrations majoritairement localisées près des disques. Jouer sur les dimensions de la cage d'écureuil souple permet d'ajuster la raideur de montage du roulement, et contrôle par voie de conséquences les vitesses critiques.

Le support de palier arrière (SPAR) est une pièce cylindrique, reliée au un ensemble de carter TL.

L'interaction rotor/stator intervient dans différentes zones où les jeux sont réduits au minimum dans l'optique d'optimiser le rendement. Parmi elles, on recense les zones :

- aubes/anneaux de turbines (ou secteurs),
- compresseur centrifuge (rouet)/couvercle,
- joints d'étanchéité labyrinthe/carter d'étanchéité,
- cage souple/support palier lorsqu'un roulement est en butée,
- aubes/diffuseurs ou distributeurs (contact axial).

Dans la plupart des zones où le risque de touche rotor/stator est élevé, des matériaux abrasibles recouvrent la surface des parties fixes (couvercles, anneaux HP, butées labyrinthe...), tandis que des matériaux abrasifs sont introduits en surface des zones de contacts sur les parties tournantes (en sommet d'aubes par exemple). Lors des premières rotations, les aubes viennent consommer le surplus d'abrasible, ce qui assure un jeu minimal en régime nominal. *A contrario* l'abrasion de couche en surface des aubes créerait un jeu global sur toute la rotation entraînant une perte de rendement bien plus importante (*Figure 1-6*). Les matériaux abrasibles présentent l'avantage de garder un coefficient de frottement relativement faible et constant lorsque la vitesse de glissement est importante. De plus la présence de matériaux abrasibles évite de déformer plastiquement les parties tournantes lors des contacts et ainsi d'accroître le niveau de balourd de la ligne d'arbre, le risque de nouvelles touches et de ruine du turbomoteur.

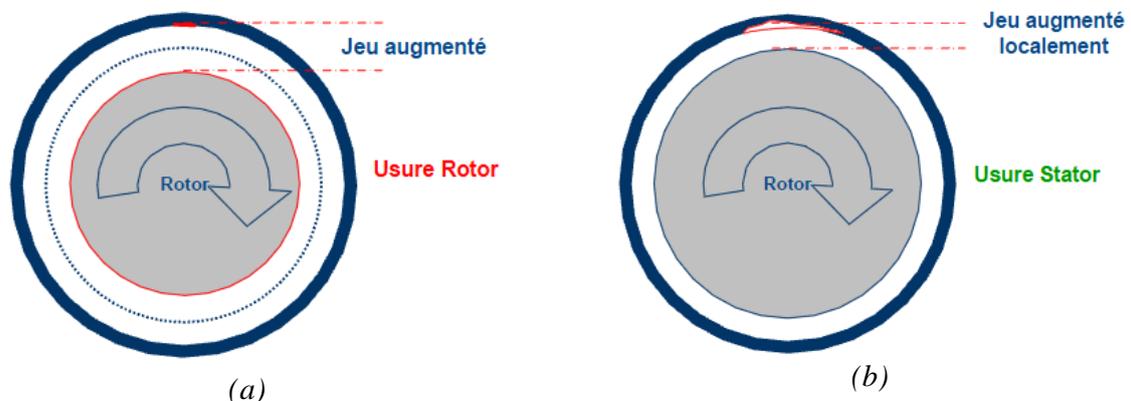


Figure 1-6 : (a) Usure des aubes ou des lèvres labyrinthes créant un jeu global, (b) Usure de l'abrasible sur le stator créant un jeu local

1.2 Comportements physiques observés

Les recherches sur le phénomène du contact rotor/stator se sont multipliées durant les 20 dernières années et ont mis en évidence une très grande diversité du comportement vibratoire suivant une touche. Le contact rotor/stator génère une force de frottement source d'instabilité, provoquant parfois un phénomène de précession indirecte, auto-entretenu et indépendant de l'excitation des balourds.

Le contact rotor/stator s'identifie sous différentes formes :

- contact partiel : « partial rub » (série de rebonds, périodique, quasi-périodique ou chaotique) observé expérimentalement *Erreur ! Source du renvoi introuvable.*(a)
- contact permanent : « full annular rub » (roulement avec/sans glissement des parties tournantes sur parties fixes) observé expérimentalement *Erreur ! Source du renvoi introuvable.*(b)

Plusieurs études expérimentales ont été réalisées dans le but de valider des modèles numériques ([LIN 90], [WAN 11], [DAI 02], [CHO 02], [PEN 09], [CHO 94], [BEN 02], [LAH 12], [MUS 95], [AHM 10], [WIL 10], [FAT 99], [BAR 00], [ISM 95]). Les comportements évoqués ci-dessus ont tous été constatés une ou plusieurs fois chez Turboméca.



Figure 1-7 : Contact rouet/couvercle d'un moteur Ardiden 1H de Turboméca
 (a) Contact partiel dans le coude de la méridienne durant un essai d'endurance
 (b) Contact permanent en sortie de méridienne durant un essai givrage

1.2.1 Contact permanent en précession directe

Il s'agit du cas « classique » de comportement suite à un contact rotor/stator. Après consommation du jeu, le rotor évolue dans un mouvement orbital synchrone de la vitesse de rotation du rotor (« full annular rub »). On observe, sur le spectre complet du déplacement du centre d'une section du rotor (full-spectrum, voir §3.2.1), une composante en fréquence positive égale à la fréquence de rotation du rotor (ordre 1), confirmant bien que la précession s'effectue dans le sens direct.

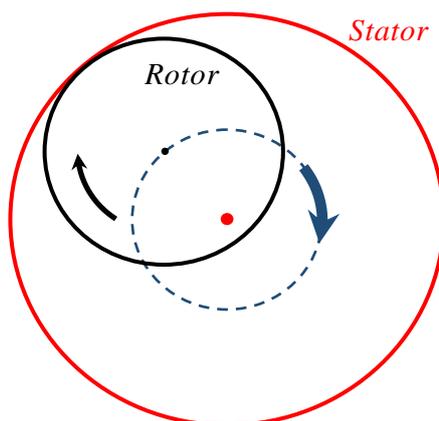


Figure 1-8 : Mouvement orbital du centre du rotor lors d'un contact permanent en précession directe

Dans [BEN 02], l'étude réalisée à partir d'un banc rotor (Figure 1-9) sur les zones d'existence du « full annular rub » dans les joints d'étanchéité (seal), introduit un jeu rotor/stator inférieur à l'amplitude de l'orbite du rotor au passage de sa vitesse critique. Le coefficient de frottement est très faible et les surfaces ont été préalablement lubrifiées.

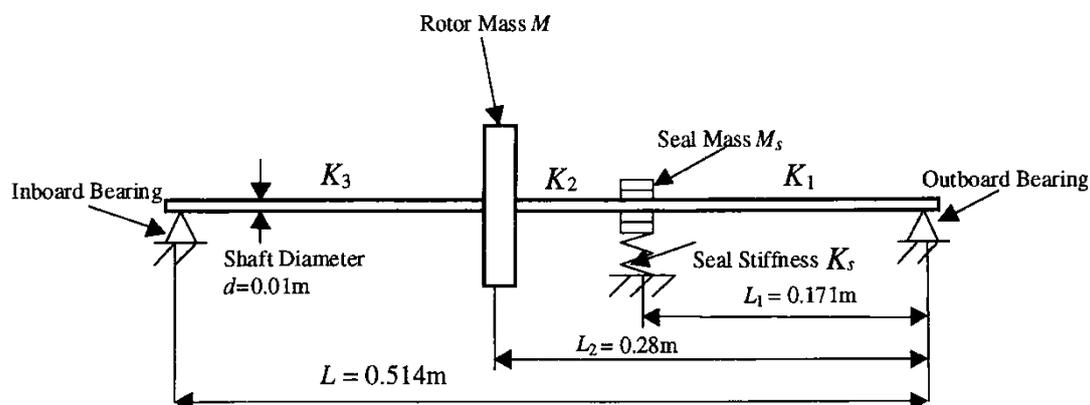


Figure 1-9 : Schéma du montage rotor/joint d'étanchéité [BEN 02]

Lors de la montée en vitesse, le rotor sous l'influence des forces de balourd finit par toucher le stator. Il entre tout de suite en contact permanent avec un régime de précession directe, synchrone de la vitesse de rotation (voir Figure 1-10(a)). Le joint d'étanchéité agit alors

comme un palier additionnel et le système se comporte ainsi comme un nouveau système linéaire. Le contact est perdu lorsque la vitesse de rotation atteint environ 1750 rpm. La courbe non-linéaire de descente en vitesse a aussi été tracée. Après perte du contact, la vitesse est réduite, jusqu'à ce qu'à l'approche de la vitesse critique où le contact rotor/stator a lieu de nouveau. Le « full annular rub » finit par s'établir lorsque l'amplitude du système linéaire est suffisante pour consommer le jeu disponible. Le rotor subit ainsi un saut en amplitude (*Figure 1-10(b)*) pour revenir sur un point de fonctionnement (amplitude ; vitesse) similaire à celui obtenu lors de la montée en vitesse. Les amplitudes et les efforts générés durant le contact permanent en précession directe restent très faibles, et ne causent que peu de dommages aux interfaces en contact.

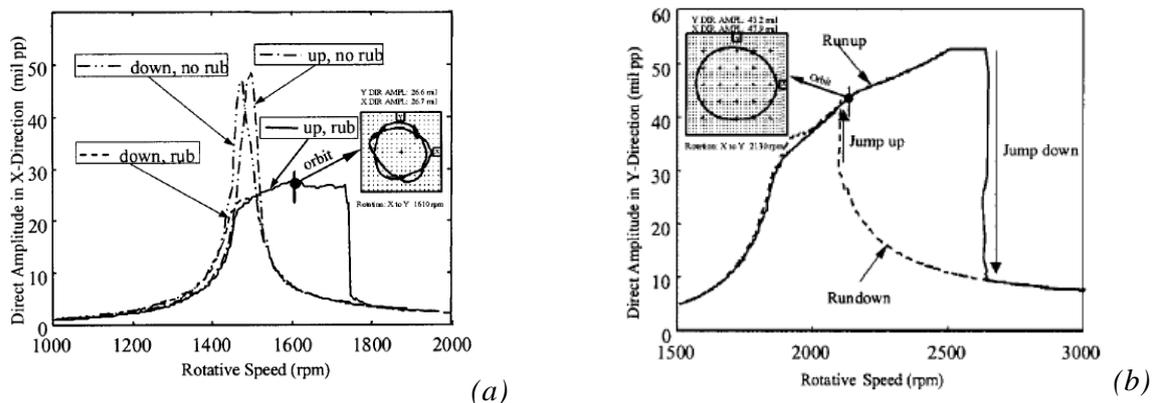


Figure 1-10 : Réponse non-linéaire expérimentale d'un rotor à 2 disques suite à une montée et une descente en vitesse [BEN 02]

Les travaux de Jiang sur les différents comportements rotor-stator existant sont réalisés à partir d'un modèle analytique d'un rotor de Jeffcott [JIA 09], [JIA 00]. Il montre que le domaine d'existence du « full annular rub » existe en tout point de fonctionnement où la touche est possible et particulièrement lorsque le frottement entre les surfaces est nul.

1.2.2 Contact partiel en précession directe

Le contact partiel en précession directe, aussi nommé « mouvement orbital non-synchrone » s'établit en général comme le comportement qui suit chronologiquement le « full annular rub ». L'augmentation de la vitesse de rotation entraîne l'apparition dans le full spectrum, d'une ou plusieurs raies de fréquences positives et négatives avec parfois des ordres multiples ou sous-multiples de la vitesse de rotation (ordre 1 *Figure 1-11(b)*). Cela implique l'émergence de modes de précession non synchrones de la vitesse de rotation, dont le sens de rotation peut-être directe ou indirecte. Le mouvement orbital du rotor est alors modifié. Lorsque les raies « secondaires » atteignent une amplitude suffisamment importante pour contrebalancer l'amplitude de la fréquence synchrone de la vitesse de rotation du rotor, le contact permanent prend fin et un contact partiel en précession directe prend place. Lorsque le contact partiel est établi, l'augmentation de la vitesse de rotation accroît l'amplitude des rebonds et par conséquent les efforts de contact générés.

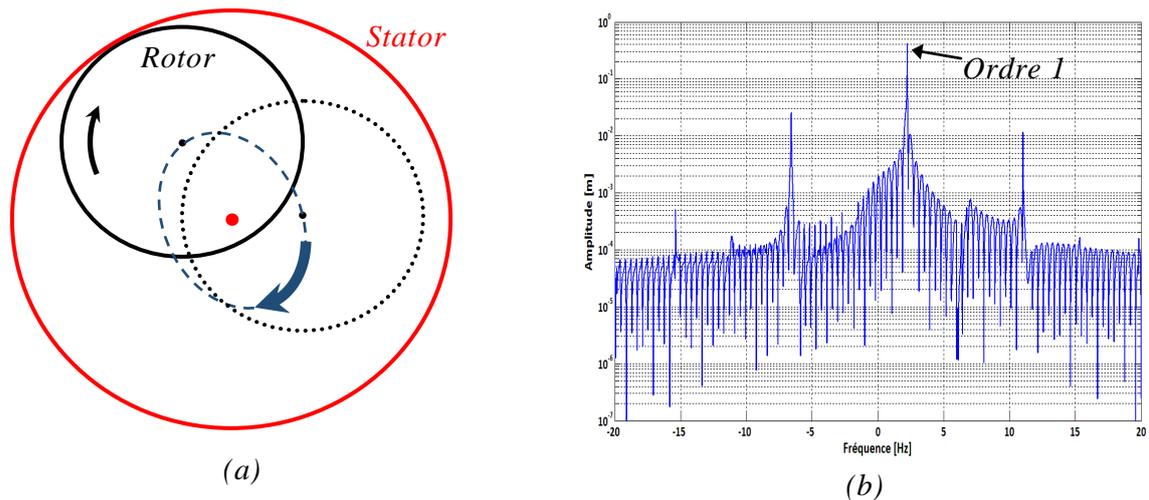


Figure 1-11 : Contact partiel en précession directe : (a) Mouvement orbital du centre du rotor, (b) Full spectrum d'une simulation temporelle

Von Groll [GRO 02] met en place un petit banc d'essai afin d'étudier les réponses sous-harmoniques d'un contact rotor/stator. Le banc est composé d'un rotor à diamètre constant et d'un stator monté sur cage d'écureuil afin de pouvoir jouer sur la raideur du système couplé. La fréquence propre du stator (9.2 Hz) est inférieure à celle du rotor (17.1 Hz). Il soumet l'idée que les ordres et sous-ordres des harmoniques secondaires générées lors du contact partiel, dépendent du rapport entre la fréquence du système couplé (12 Hz) et la fréquence de rotation du rotor. L'exemple *Figure 1-12* montre l'évolution du mouvement orbital lors du contact partiel ainsi que le spectre du mouvement après 300 révolutions. Le rapport de la fréquence du système couplé sur celle de la vitesse de rotation du rotor est proche de 6/11. On peut ainsi observer l'existence d'ordres de composantes 1/11 de la vitesse de rotation (1, 2, ..., 7, 11, 16). Lors des simulations numériques, il n'a en revanche pas réussi à faire apparaître les mêmes ordres sans introduire un désalignement du rotor et/ou du stator.

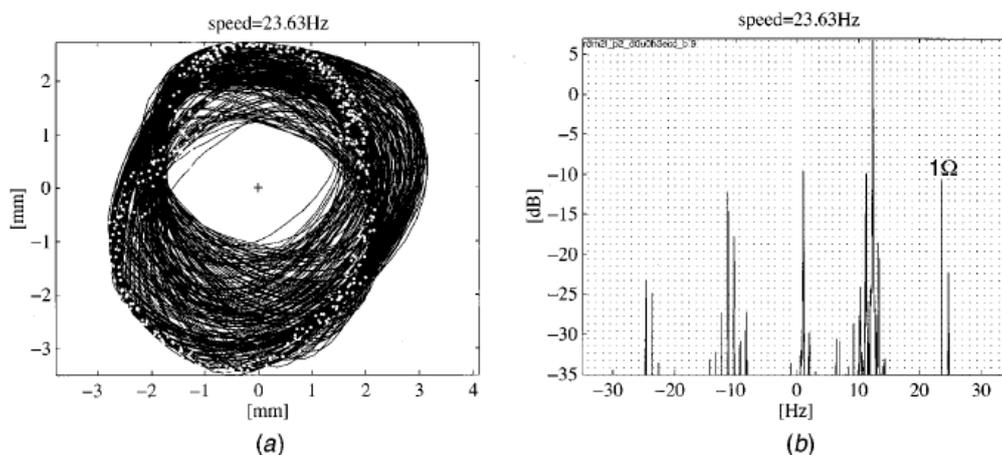


Figure 1-12 : Mouvement orbital mesuré et full-spectrum associé lors d'un contact partiel avec apparition d'harmoniques proportionnelles au rapport de la fréquence du système couplé sur la fréquence de rotation rotor [GRO 02]

Abuzzaid [ABU 09] a lui aussi étudié les phénomènes quasi-périodiques lors de touches partielles rotor/stator. Il en conclut après expérimentation, qu'un contact léger est généralement caractérisé par des sur-harmoniques d'ordres 1, 2, 3 alors qu'un contact violent est identifié par un spectre contenant des sous-harmoniques à $1/3$ et $2/3$ de la vitesse de rotation.

Ismeurt [ISM 95] identifie les différentes phases de frottement lors du contact frottant, soit en roulement avec glissement guidé par la loi de coulomb, soit en roulement sans glissement guidé par la relation cinématique annulant la vitesse de glissement. Il valide sa maquette numérique par le biais d'essais sur un banc similaire à celui de [LIN 90]. Le contact est généré par une montée en vitesse vers la première vitesse critique. Il met en évidence un comportement en roulement avec glissement, avec apparition de composantes d'ordre 1, 2, 6, 7, 9, 10 et 16. Les ordres des harmoniques de la vitesse de rotation sont intimement liés au nombre de rebonds à chaque révolution.

1.2.3 Contact partiel en précession indirecte

Le contact partiel en précession indirecte, communément nommé « partial rub in backward whirl », découle de celui en précession directe. L'augmentation d'amplitude des rebonds accroît les efforts de contact frottant. Ils finissent par être suffisamment importants pour entraîner le rotor dans un mouvement de précession inverse (Figure 1-13(a)). Cela se traduit dans le domaine fréquentiel par un pic de fréquence négative qui devient prédominant en amplitude par rapport au pic d'ordre 1. D'autres pics font aussi leur apparition, l'amplitude des pics secondaires n'est plus négligeable par rapport à celui d'ordre 1 (Figure 1-13(b)). La transition entre contact partiel en précession directe et indirecte est souvent marquée par un régime chaotique quasi-périodique.

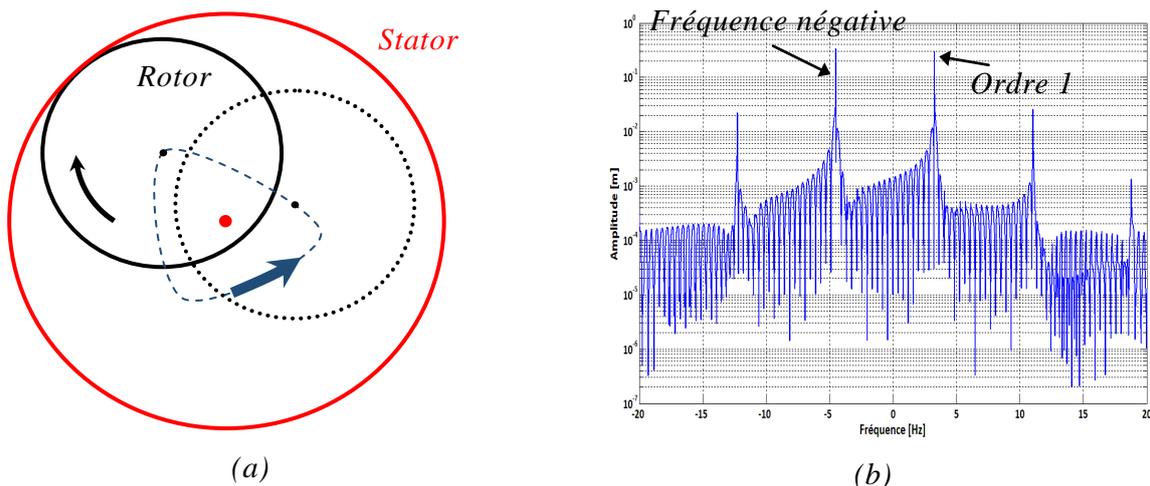


Figure 1-13 : Contact partiel en précession indirecte : (a) Mouvement orbital du centre du rotor, (b) Full spectrum d'une simulation temporelle

Une étude expérimentale [BEN 02] est réalisée sur la recherche d'un régime instable liée à un comportement quasi-périodique en précession indirecte. Il y est observé, l'augmentation

des amplitudes de vibrations ainsi que le nombre d'harmoniques sollicitées. Durant sa montée en vitesse, ce phénomène représente la dernière étape avant le déclenchement du régime instable. Le banc d'essai étant non-symétrique, un changement d'axe de l'ellipse orbitale a lieu (*Figure 1-14*).

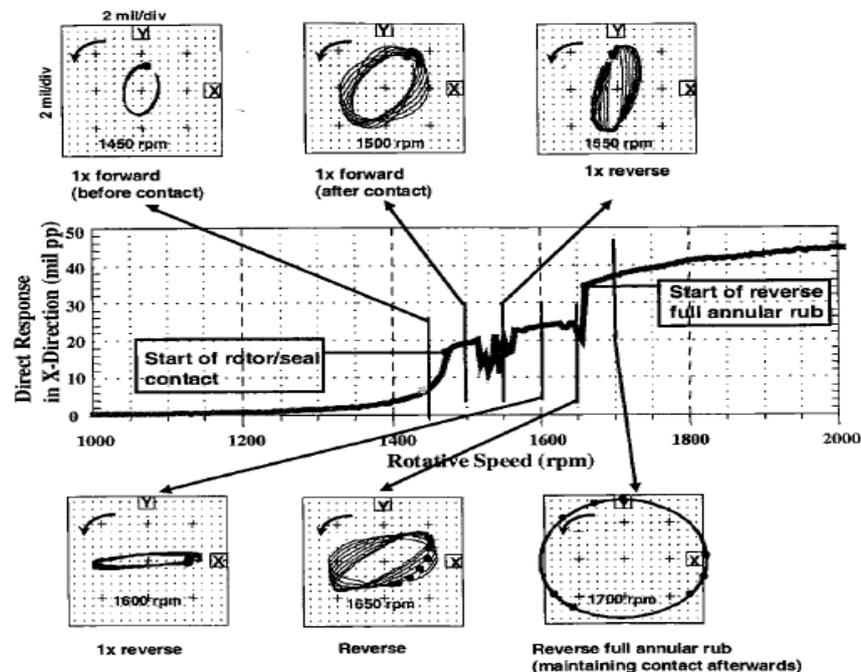


Figure 1-14 : Réponse non-linéaire expérimentale lors d'une montée en vitesse avec interaction rotor/stator - Evolution des différents comportements physiques observés [BEN 02]

D'autres recherches ont permis de caractériser le « partial rub in backward whirl », comme celle de Fatarella [FAT 99] où les différents comportements, suite à une touche, sont étudiés numériquement et expérimentalement. Fatarella met en évidence le régime chaotique qui s'intercale entre les deux comportements quasi-périodiques. Il montre aussi l'augmentation d'amplitude des pics secondaires durant la transition, ainsi que la dominance du pic principal de fréquence négative.

Bartha [BAR 00] s'intéresse à la condition de déclenchement du dry whip. Il introduit la notion de vitesse de glissement critique et d'angle d'impact, ce dernier joue un rôle important dans le déclenchement de l'instabilité. En effet, pour des angles compris entre 90° et 0° , *i.e.* lorsque le rotor effectue un mouvement en précession directe, la vitesse critique de glissement diminue fortement en fonction de l'angle d'impact jusqu'à devenir minimum pour un angle de -45° , soit l'angle critique pour lequel le risque de déclenchement d'instabilité est le plus grand (*Figure 1-15*). Lorsque l'angle d'impact est compris entre 0° et -90° , la valeur de la vitesse critique de glissement reste très faible et stagne approximativement sur celle à -45° . Une touche, lorsque le mouvement s'effectue en précession inverse, est donc favorable au déclenchement du dry whip. On peut ainsi en conclure qu'un contact partiel quasi-périodique en précession inverse est déjà un régime à risque.

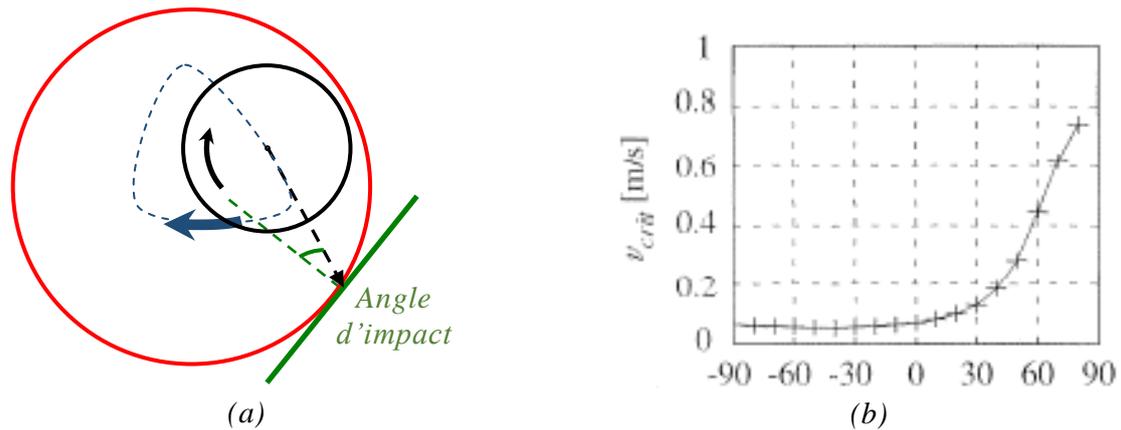


Figure 1-15 : Définition de l'angle d'impact selon Bartha [BAR 00] : (a) Schéma théorique, (b) Evolution de la vitesse critique d'impact en fonction de l'angle d'impact en degré

1.2.4 Contact permanent en précession inverse

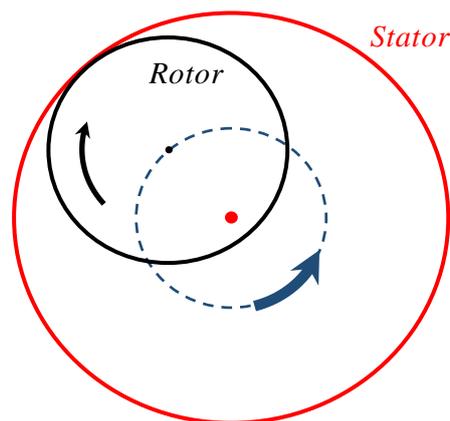


Figure 1-16 : Mouvement orbital du centre du rotor lors d'un contact permanent en précession inverse – dry whirl/whip

Pour une vitesse donnée où le rotor évolue en précession directe, le contact permanent en précession indirecte (inverse) intervient lorsque l'effort frottant est suffisamment important pour changer le signe de la vitesse de précession (Figure 1-16). Une composante d'amplitude importante et de fréquence négative et non synchrone apparaît dans le spectre complet (full-spectrum). On distingue alors deux comportements :

- le « dry whirl », comportement qui intervient en configuration de roulement sans glissement. La vitesse de précession du rotor est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor par un facteur de rapport entre le rayon extérieur du rotor sur le jeu disponible,
- le « dry whip » intervient en configuration de roulement avec glissement. Le rotor est alors excité par une fréquence proche de celle du système couplé rotor/stator.

Ces deux phénomènes possèdent la particularité d'être auto-entretenus. Lors d'une montée en vitesse, le dry whip se présente comme la succession d'un régime dry whirl. Il est jugé dangereux dans l'industrie des rotors en raison des importantes amplitudes de vibrations qu'il génère. Il est source d'instabilité dynamique et peut mener à la ruine les différents composants du système.

Wilkes [WIL 10] réalise une étude analytique, numérique et expérimentale sur le dry whirl/whip et des transitions possibles entre ces phénomènes. Dans un premier temps, il procède au développement d'une solution analytique (reprise dans [ISM 95]) sur un rotor de Jeffcott en interaction avec un anneau rigide suspendu. Il expose en s'inspirant du domaine de Black [BLA 68], les domaines d'existence théoriques du dry whirl. A partir de la condition de roulement sans glissement il en déduit les expressions reliant respectivement le coefficient de frottement et l'effort normal critique en fonction de la vitesse de rotation. La courbe bleue de la Figure 1-17 représente le coefficient de frottement minimum et nécessaire pour déclencher un comportement de type dry whirl.

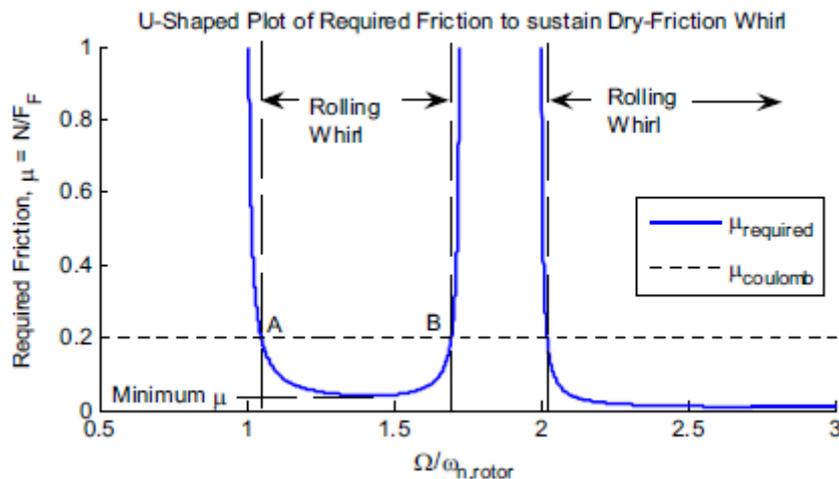


Figure 1-17 : Courbe de coefficient de frottement limite en fonction de la vitesse de rotation

Black [BLA 68] montre aussi que pour des systèmes complexes (à N ddl), le nombre de domaines où le « rolling whirl », *i.e.* dry whirl, existe est accru. Il adapte sa formulation analytique à des systèmes condensés contenant plusieurs modes d'une structure complexe. Entre chaque régime de dry whirl, il existe une transition en dry whip. Pour le prouver, un banc expérimental équipé d'un ensemble rotor-stator [WIL 10] est mis en place. La touche est provoquée par un coup de marteau sur la ligne d'arbre pendant la montée en régime. Rapidement une branche dry whirl est accrochée. La fréquence de précession est alors proportionnelle à la vitesse de rotation par le rapport du rayon extérieur du rotor sur le jeu rotor-stator ($R_{\text{rotor}}/\text{jeu}$). Durant la montée en vitesse, le rotor va à plusieurs reprises transiter entre un régime whirl/whip et whip/whirl (Figure 1-18).

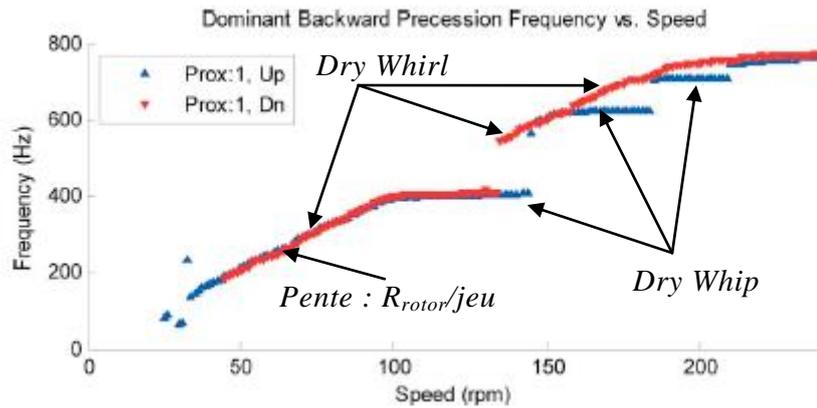


Figure 1-18 : Diagramme de Campbell d'un rotor entraîné en précession indirecte (backward whirl) par contact rotor/stator (bleue : montée en vitesse, rouge : descente en vitesse)

Dans [CHO 02], une étude expérimentale d'un banc rotor entrant en interaction durant une montée en vitesse avec deux stators de matériaux différents (aluminium et acryl) est réalisée. Durant la montée en vitesse le dry whirl est déclenché à environ 3 Hz, et perdure jusqu'à 5-6 Hz. Le système entre alors dans un comportement en dry whip et se met à vibrer à la première fréquence du système couplé (environ 50 Hz). La montée en régime se poursuit jusqu'à 17 Hz, et le rotor subit alors un phénomène de saut (« jump »), aussi bien en fréquence (Figure 1-19) qu'en amplitude (Figure 1-20(d)). Le rotor adopte à nouveau un comportement en dry whirl. La principale différence entre ces deux stators intervient lors de la descente en vitesse, le phénomène de saut lors de la transition whirl/whip s'effectue à 12 Hz pour le stator en aluminium, et 14 Hz pour le stator en acryl.

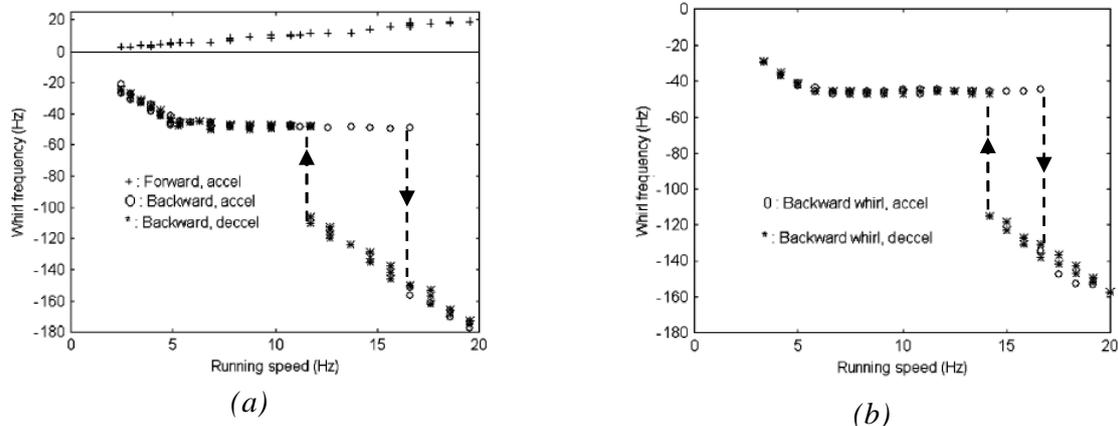


Figure 1-19 : Montée en régime avec transition dry whirl/whip et whip/whirl [CHO 02] : (a) Stator en aluminium, (b) Stator en acryl

La Figure 1-20 illustre l'orbite décrite par le centre du rotor au niveau du stator lors des différentes phases du contact. Le dry whip est le mouvement le plus dangereux notamment à cause des grandes amplitudes provoquées. Les amplitudes du dry whirl sont insuffisantes pour mener à la ruine du système. A titre de comparaison, les amplitudes mesurées lors du dry whirl sont inférieures à celles obtenues lors du contact permanent en précession directe. Le phénomène de « saut en amplitude » lors de la transition whirl/whip est observable sur la Figure 1-20(d).

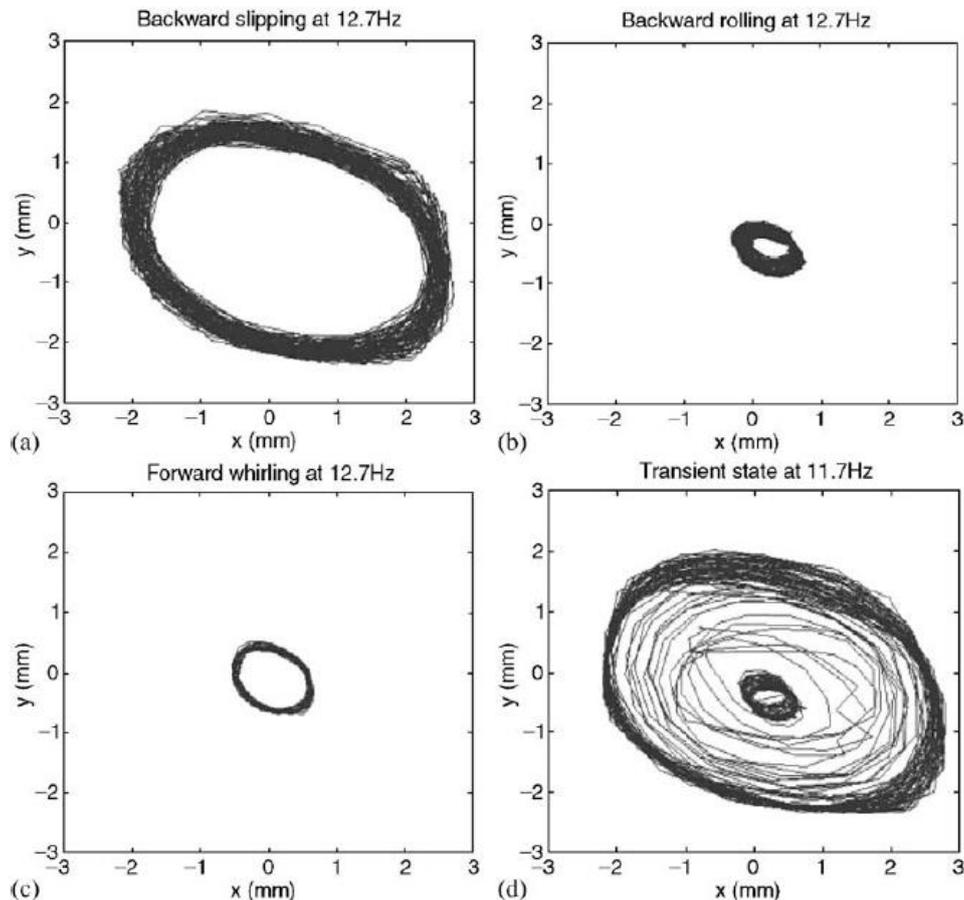


Figure 1-20 : Mouvement orbital du centre du rotor mesuré à différentes vitesses de rotations [CHO 02] : (a) dry whip, (b) dry whirl, (c) contact permanent en précession directe, (d) transitoire dry whirl/whip durant la descente en vitesse.

Lingener [LIN 90], met en place une étude du contact permanent en précession inverse sur un banc dédié à la « touche » schématisé Figure 1-21. Il teste le banc suivant différentes configurations de stator (type cage d'écureuil), niveaux de balourd, jeux rotor/stator, coefficients de frottements... La touche est provoquée soit par un coup de marteau, soit par consommation du jeu lors d'une montée ou descente en vitesse. Il en conclut qu'il est impossible d'éviter le contact permanent en précession indirecte lorsqu'une touche est provoquée à une fréquence de rotation proche de la fréquence du système couplé.

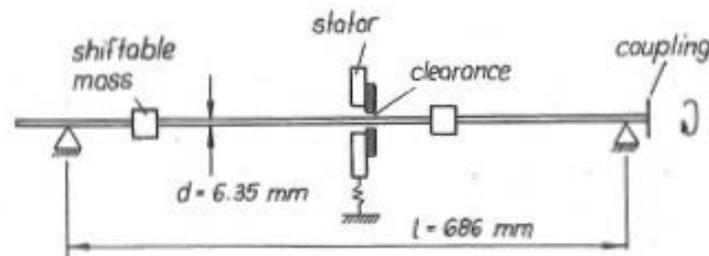


Figure 1-21 : Schéma du banc rotor dédié à l'analyse du comportement après touche rotor/stator [LIN 90]

Les différents comportements à la touche ont été testés expérimentalement par certains auteurs. Les systèmes étudiés ne sont toutefois pas représentatifs d'une véritable ligne d'arbre en raison de :

- faibles vitesses de rotations,
- jeux rotor/stator très importants,
- architectures très simples : rotor de section constante, stator de type cage d'écureuil,
- conditions de « touche » non représentatives d'un contact type joints labyrinthe/carter d'étanchéité, aubes/anneau de turbine ou compresseur centrifuge/couvercle.

Différents comportements à la suite d'une touche rotor/stator ont été évoqués. Dans la partie qui suit, la modélisation du contact est traitée.

1.3 Etat de l'art de la modélisation du contact

La non-linéarité de type contact est l'une des plus difficiles à traiter en raison des changements brusques d'états contact/non-contact et adhérence/glissement lorsque l'on prend en compte le frottement. Les méthodes pour traiter le contact sont diverses et variées selon le type d'application. Ce sous-chapitre propose un regard critique sur la manière d'aborder le contact dans un système de dynamique transitoire. Dans un problème de contact rotor/stator, il est intéressant de se limiter dans un premiers temps au cadre de petites déformations et petits déplacements. Le traitement du contact nécessite de réaliser les étapes suivantes :

- définir les surfaces en contact,
- définir le vecteur normal au contact,
- évaluer le jeu entre les structures,
- calculer les efforts extérieurs dans les directions normales et tangentielles en présence de frottement

Ce dernier point est traité sur les deux derniers paragraphes. On propose ici différentes méthodes pouvant être utilisées dans le calcul des efforts de contact, puis des outils permettant d'inclure le frottement dans le cadre d'un contact frottant.

1.3.1 Formulation variationnelle et aspect théorique

On considère deux solides élastiques en contact frottant l'un avec l'autre (*Figure 1-22*). Soit $\delta\Omega^{(i)}$ les surfaces continûment différentiables du domaine $\Omega^{(i)}$ de chaque solide. Les surfaces de contact sont définies par $\Gamma_c^{(i)}$ tandis que la normale au contact par rapport au solide 1 est caractérisée par le vecteur \vec{n} . Les solides sont soumis à des efforts et des déplacements imposés respectivement sur $\Gamma_u^{(i)}$ et $\Gamma_F^{(i)}$, ainsi que des forces volumiques $\vec{f}_v^{(i)}$ [COU 09].

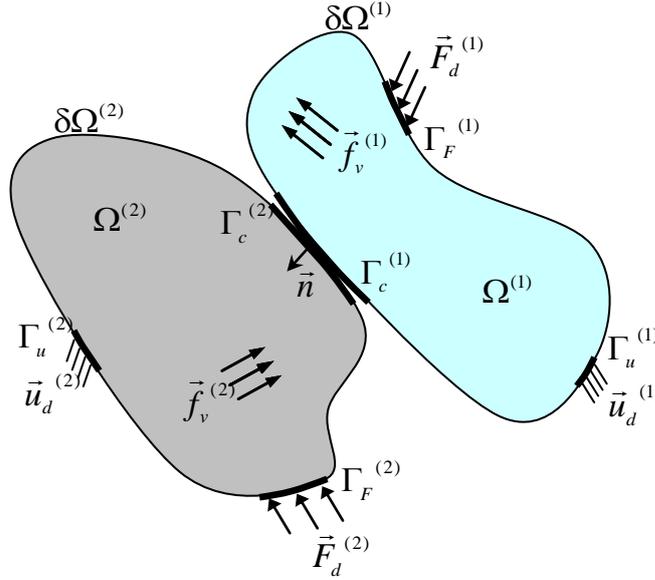


Figure 1-22 : Exemple de 2 corps élastiques en contact l'un avec l'autre

L'équation fondamentale de la dynamique des milieux continus élastiques et la relation entre les champs de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ sont exprimées par la relation (1-1), où A est le tenseur élastique de Hooke et \vec{f}_v les forces de volume. Les équations (1-2) et (1-3) désignent respectivement les conditions aux limites de type équilibre (force) et cinématique (déplacement) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f}_v = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega^{(i)} \\ \underline{\underline{\sigma}} = A : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases} \quad (1-1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F}_d \quad \text{sur } \Gamma_F^{(i)} \quad (1-2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{sur } \Gamma_u^{(i)} \quad (1-3)$$

Soit δ_n l'interférence de contact (interpénétration), *i.e.* la distance entre un point de $\Gamma_c^{(1)}$ et son projeté orthogonal sur $\Gamma_c^{(2)}$. Le modèle de Signorini, *Figure 1-23(a)*, est traduit par les conditions de contact unilatéral reliant l'effort normal de contact \vec{F}_n soumis au solide 1, et l'interférence de contact entre les deux solides δ_n :

$$\delta_n \geq 0 \quad (1-4)$$

$$\vec{F}_n \cdot \vec{n} \leq 0 \quad (1-5)$$

$$\delta_n \cdot \|\vec{F}_n\| = 0 \quad (1-6)$$

La relation (1-4) traduit la condition de non pénétration entre les deux solides, (1-5) confirme que les efforts de contact sont des efforts de compression dirigés vers l'intérieur du solide, (1-6) appelée équation de complémentarité, indique qu'il y a, soit contact ($\delta_n = 0$), soit décollement ($\|\vec{F}_n\| = 0$).

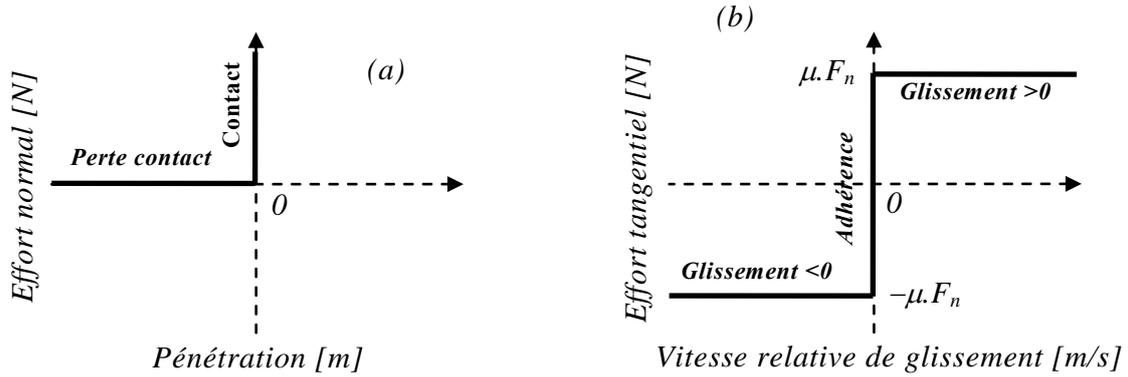


Figure 1-23 : (a) Modèle de Signorini, (b) Loi de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb appliquée à un élément de $\Gamma_c^{(i)}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \|\vec{F}_t\| \leq \mu \|\vec{F}_n\| \\ \|\vec{F}_t\| = \mu \|\vec{F}_n\| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 / \vec{v}_t = -\lambda \vec{F}_t & (\text{glissement}) \\ \|\vec{F}_t\| < \mu \|\vec{F}_n\| \Leftrightarrow \|\vec{v}_t\| = 0 & (\text{adhérence}) \end{cases} \quad (1-7)$$

μ est le coefficient de frottement de Coulomb dépendant de la nature des matériaux et de l'état des surfaces en contact. La relation (1-7) et la Figure 1-23(b) montrent le caractère multivoque du contact frottant. Dans le cadre de la dynamique des rotors, la condition d'adhérence exprime un mouvement de roulement sans glissement du rotor sur le stator.

Le principe des travaux virtuels s'établit en multipliant l'équation (1-1) par un champ de déplacement virtuel \vec{v}^* cinématiquement admissible puis en l'intégrant sur le domaine Ω :

$$\iiint_{\Omega} \left(\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{f}_v - \rho \vec{u} \right) \cdot \vec{v}^* d\Omega = 0 \quad (1-8)$$

La forme variationnelle associée au problème dynamique avec contact frottant s'exprime par l'inégalité (1-9) :

$$\iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v}^* d\Omega + \iint_{\Gamma_F} \vec{F}_d \cdot \vec{v}^* d\Gamma \geq \iiint_{\Omega} \left(\sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}^*) + \rho \vec{u} \cdot \vec{v}^* \right) d\Omega \quad (1-9)$$

L'inégalité variationnelle traduit la non-linéarité de contact et n'est pas adaptée pour la formulation éléments finis. La condition de Signorini est donc relaxée et transformée en un problème de minimisation. Pour tout champ \vec{v}^* cinématiquement admissible, la relation (1-9) s'écrit comme le minimum d'une fonctionnelle énergétique J dont on a négligé les efforts de volumes et d'inerties :

$$\min \left(J(\vec{v}^*) = \frac{1}{2} a(\vec{u}, \vec{v}^*) - b(\vec{v}^*) \right) \quad (1-10)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} a(\vec{u}, \vec{v}^*) = \iiint_{\Omega} \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}^*) d\Omega \\ b(\vec{v}^*) = \iint_{\Gamma_F} \vec{F}_d \cdot \vec{v}^* d\Gamma \end{cases}$$

La minimisation de la fonctionnelle J est impossible à cause de l'inégalité (I-9). L'inégalité est donc supprimée, et l'énergie J est complexifiée par les contributions des efforts de contact [COU 09], [ROQ 09], [MEZ 07], [LIN 05], [BAT 09], [MEG 08].

1.3.2 Modélisation de l'effort de contact

De nombreux modèles de gestion du contact ont été développés et étudiés dans diverses applications, mais seuls quelques-uns se révèlent physiquement « acceptables » dans le domaine de l'étude des interactions rotor/stator.

Bon nombre d'entre eux sont issus de deux « familles » élémentaires de gestion du contact :

- les méthodes de pénalité,
- les méthodes des multiplicateurs de Lagrange.

Les deux approches sont complètement différentes, voire complémentaires, et nombreuses sont les variantes développées à partir de ces deux méthodes.

Méthodes de pénalité de contact

La loi de pénalité est très utilisée dans les modèles de contact en statique et dynamique. Sa facilité de mise en œuvre, et sa capacité à s'adapter à tout type de problèmes dynamiques sont les principales raisons de son succès.

La méthode de pénalité de contact consiste à ajouter une énergie quadratique pénalisée à la fonctionnelle énergétique J :

$$\min \left(J(\vec{v}^*) + \frac{1}{2} \iint_{\Gamma} \left[k_c (\delta_n(\vec{v}^*))^2 \right] d\Gamma \right) \quad (I-11)$$

L'ajout de cette expression rend la fonctionnelle dérivable et adaptée aux calculs par éléments finis. Le minimum de l'énergie potentielle correspondant à l'état d'équilibre du système s'écrit :

$$\underline{\text{grad}} \left(J(\vec{v}^*) \right) + \iint_{\Gamma} \left[k_c \cdot \delta_n(\vec{v}^*) \cdot \partial \delta_n \right] d\Gamma \quad (I-12)$$

L'effort normal de contact F_n est ainsi simulé par le biais d'une raideur de contact k_c et de l'interpénétration (ou jeu dynamique) δ_n entre les deux pièces suivant la relation :

$$F_n = k_c \cdot \delta_n \quad (1-13)$$

Les méthodes de pénalité de contact ne respectent pas tout à fait la règle de Signorini puisqu'elle autorise l'interpénétration entre les pièces (*Figure 1-24*). Elle reste néanmoins acceptable physiquement, puisqu'elle simule une élasticité numérique semblable à celle de la déformation de deux pièces en contact. L'un des inconvénients majeurs de la méthode de pénalité est la forte non-linéarité introduite lors du changement d'état entraînant un mauvais conditionnement du système. La raideur de contact doit être suffisamment importante pour limiter l'interpénétration et éviter le risque d'instabilité de l'algorithme d'intégration numérique.

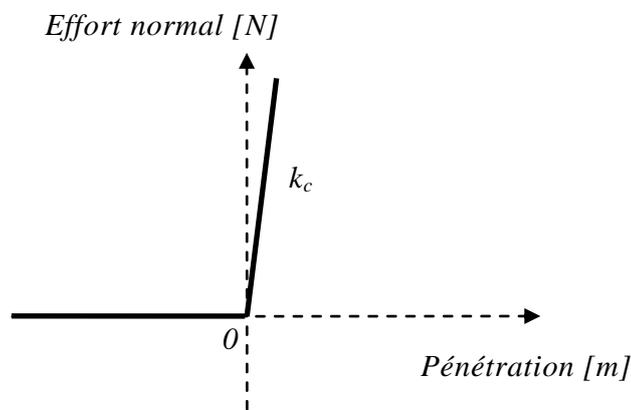


Figure 1-24 : Loi de contact pénalisée

Des auteurs tels que Guskov [*GUS 07*] et Demailly [*DEM 09*] modélisent les non linéarités provenant des roulements par un contact de Hertz dont l'effort est régi par la relation suivante :

$$F_n = k_c \cdot \delta_n^m \quad (1-14)$$

Le réel m est choisi supérieur à 1 ce qui rend la loi d'effort dérivable en 0. Selon la théorie de Hertz, il faut $10/9$ pour des roulements à rouleaux et $3/2$ pour des roulements à billes. La raideur k_c varie en fonction des surfaces en contact, elle est donc mise à jour à chaque pas de temps [*POP 10*]. Une telle modélisation est toutefois limitée dans l'application du contact rotor/stator car l'hypothèse sur les rayons des corps en contact n'est pas respectée.

Lahriri [*LAH 12*] adoucit une loi de pénalité classique en introduisant un coefficient d'amortissement de contact et un facteur puissance sur l'interpénétration :

$$F_n = \left(k_c \cdot \delta_n^m + c_c \cdot \dot{\delta}_n \right) \quad (1-15)$$

Ismeurt [ISM 95] utilise aussi cette loi de pénalité « amortie » avec un coefficient m égal à 1 (loi linéaire de contact). L'introduction de l'amortissement de contact permet de rendre plus stable le schéma vis-à-vis de la raideur de contact choisie. Il modélise en outre, la perte d'énergie induite par la déformation des corps en contact. En revanche il ne respecte plus du tout la condition de Signorini puisque lorsque la force de contact s'annule, la pénétration des deux pièces est encore positive du fait du changement de signe de la vitesse de pénétration durant le contact (Figure 1-25(a)).

La dynamique du forage pétrolier rotatif est sujet à des contacts tige/puits [BER 96]. Dans [MEL 99] et [MEL 03], le contact est modélisé par des lois de pénalités radiale, tangentielle.

Von Groll [GRO 02] et Fumagalli [FUM 97] proposent une loi permettant de pallier les défauts de la loi « linéaire » de pénalité amortie. Ils s'inspirent de la théorie du contact de Hertz et de la pénalité « amortie » en proposant une formulation non-linéaire qui annule la force de contact lorsque la pénétration s'annule, tout en limitant la pénétration entre les deux corps par un terme d'amortissement de contact Figure 1-25(b) :

$$F_n = k_c \cdot \delta_n^m \left(1 + m \cdot c_c \cdot \dot{\delta}_n \right) \quad (1-16)$$

Bartha [BAR 00] utilise les lois linéaires et non-linéaires de contact par pénalité (respectivement (1-15) et (1-16)). Après une batterie de tests, il en conclut que la loi non-linéaire s'adapte bien au contact des lèvres de joints labyrinthes sur les carters d'étanchéité, tandis que la loi linéaire simule mieux le contact disque rigide/anneau de turbine.

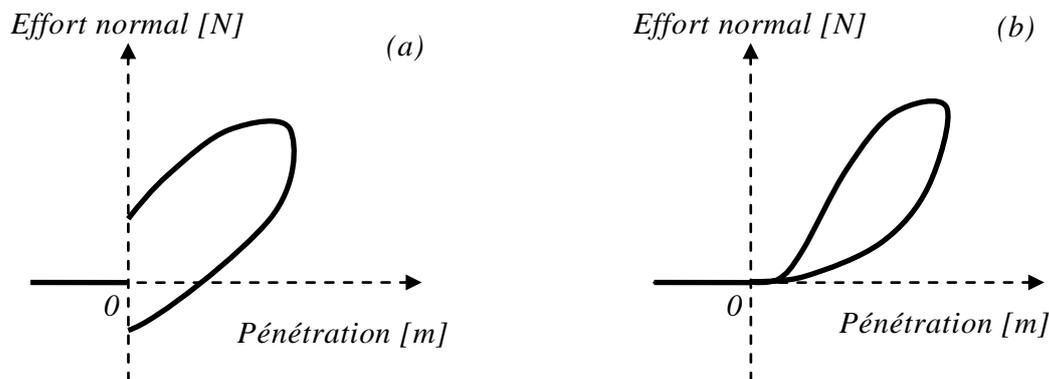


Figure 1-25 : Modèles de contact par pénalité amortie : (a) loi linéaire (b) loi non-linéaire [FUM 97]

Dai [DAI 02] modélise l'interaction rotor/stator à l'aide d'une pénalité de raideur variable en fonction de la pénétration des deux corps. La raideur de contact augmente au fur et à mesure que le rotor pénètre le stator rendant la loi d'effort de contact linéaire par morceaux (Figure 1-26).

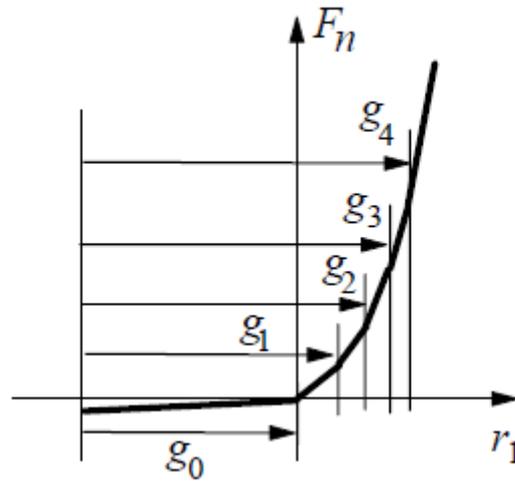


Figure 1-26 : Loi d'effort de contact linéaire par morceaux [DAI 02]

On peut citer une loi d'effort de contact régularisé par une fonction continue de type exponentielle (1-17). Cette loi est très intéressante d'un point de vue numérique, elle possède l'avantage d'être semblable à une pénalité classique avec un effort qui tend vers une tangente oblique égale à la raideur de contact lorsque le contact est installé. Cette loi possède la propriété d'être continue et dérivable en 0 Figure 1-27.

$$F_n = -k_c \cdot \delta_n \cdot (e^{-\delta_n/\delta_0} - 1) \quad (1-17)$$

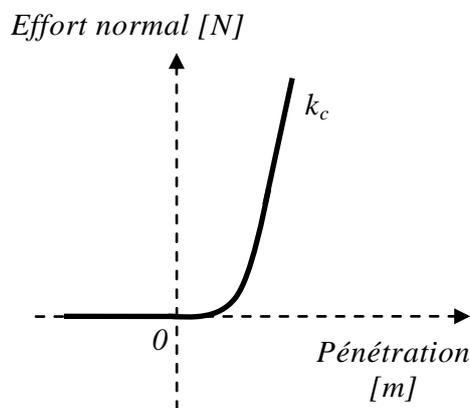


Figure 1-27 : Loi de contact régularisée par la fonction exponentielle

Wang [WAN 11] propose une modélisation du contact par pénalité en introduisant un effort axial fonction de l'angle d'inclinaison de la section de l'élément poutre concerné.

Engelvin. [ENG 01], Couderc, [COU 97] et Bordegaray [BOR 07] s'appuient sur une raideur de contact variable, pour modéliser les non-linéarités issues des jeux de dentures dans les transmissions par engrenages de boîtes de vitesses automobiles, la raideur de contact est régularisée par une loi arc tangente (1-18).

$$K_C(\delta_n) = \frac{k_c}{2} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(\pi \lambda (\delta_n - d)) + 1 \right) \quad (1-18)$$

La raideur pilotée par la fonction arc tangente (*Figure 1-28*) se rapproche d'une loi de pénalité classique discontinue en gardant les propriétés mathématiques d'une fonction continue et de dérivée continue. Une telle modélisation possède l'avantage d'être robuste vis-à-vis de l'intégration numérique temporelle, et simplement implémentable en se passant de nombreux tests sur la présence ou non de contact. La raideur de contact étant calculée à tout instant, cette méthode s'avère parfaitement adaptée à la gestion des problèmes multi-contacts. Le choix du coefficient λ est relié à celui du pas de temps Δt . Pour que la fonction arc tangente soit efficace numériquement, il est préférable de choisir une valeur de λ pour laquelle 3-4 points au minimum soient « captés » dans la pente et les incurvations de l'arc tangente lors d'un contact quelconque.

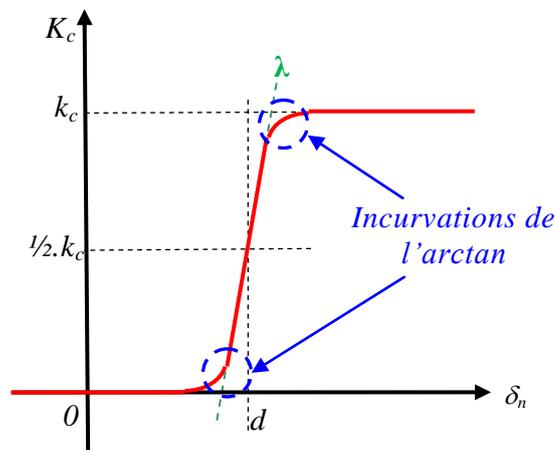


Figure 1-28 : Raideur de contact variable régularisée par une loi arctangente

Méthodes des multiplicateurs de Lagrange

La méthode de calcul des multiplicateurs de Lagrange est aussi très utilisée dans la gestion du contact, car elle offre certains avantages par rapport aux méthodes de pénalité. En effet, dans un premier temps, cette méthode interdit toute pénétration (alors que par exemple la méthode de pénalité non). En second lieu, elle ne demande pas de connaître ou de bien évaluer un coefficient supplémentaire comme une raideur de contact pour pouvoir être résolue. Il est néanmoins nécessaire de rajouter des inconnues au système pour chaque contact et d'alourdir les processus itératifs d'intégration par une étape prédiction/correction à chaque pas de temps.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de respecter exactement les conditions de Signorini durant un contact entre solides déformables. Pour cela, on ajoute à la fonctionnelle énergétique J (1-10), les termes suivants :

$$\min \left(J(\vec{v}^*) + \iint_{\Gamma} [\lambda_n \delta_n(\vec{v}^*)] \right) \quad (1-19)$$

λ_n est le multiplicateur de Lagrange et δ_n l'interférence de contact entre les 2 solides vérifiant les conditions de Signorini. La minimisation de la fonctionnelle induit la relation suivante :

$$\text{grad} \left(J(\vec{v}^*) \right) + \iint_{\Gamma} \lambda_n \cdot \partial \delta_n(\vec{v}^*) + \iint_{\Gamma} \partial \lambda_n \cdot \delta_n(\vec{v}^*) = \vec{0} \quad (1-20)$$

Le problème de minimisation (1-20) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} K.U + G.\lambda = F_d \\ G.U \leq 0 \end{cases} \quad (1-21)$$

G aussi appelé système holonome est la matrice globale contenant les conditions de contacts de non pénétrabilité, λ représente l'effort de contact dans la direction normale.

Sahinkaya [SAH 04], [SAH 07], présente une étude complète des méthodes des multiplicateurs de Lagrange appliquées à la problématique du contact rotor/stator, et son adaptation aux problèmes multi-contacts. Roques [ROQ 07], [ROQ 10], fait aussi appel à la méthode des multiplicateurs de Lagrange dans le cadre d'étude de la dynamique de ligne d'arbre d'un groupe turbo-alternateur en situation accidentelle.

Autres méthodes

Les modèles d'impact par coefficient de restitution utilisent les principes de conservation d'énergie cinétique et/ou de quantité de mouvement. Ils relient les vitesses du rotor avant et après contact en supposant que le contact ne dure qu'un temps insignifiant. Les temps d'impacts ainsi que les déformations induites ne sont pas pris en compte, ce qui rend le modèle non valable dans le cadre d'un contact rotor/stator [BAR 00], [FUM 97].

La méthode du Lagrangien augmenté est une variante des multiplicateurs de Lagrange. Une pénalité de contact est ajoutée pour améliorer la vitesse de convergence à l'aide d'un algorithme d'Uzawa. Toutefois, un mauvais choix de valeur de pénalité de contact entraîne une augmentation des temps de calcul. La méthode du Lagrangien augmenté est complexe et difficile à implanter, elle permet néanmoins de combiner certains avantages des deux méthodes présentées ci-avant :

- respect des conditions de non pénétrabilité,
- robustesse numérique,
- vitesse de convergence.

1.3.3 Modélisation de l'effort frottant

Le frottement est, malgré son omniprésence dans les systèmes mécaniques, un phénomène physique très difficile à maîtriser en raison de son caractère fortement non-linéaire. De nombreux modèles ont été développés afin de simuler son influence dans les interactions entre deux surfaces en contact, deux grandes familles se distinguent suivant le domaine d'application :

- les macros-modèles traduisant le mouvement global d'un solide par rapport à un autre par génération d'une force opposée au sens du déplacement (loi de Coulomb),
- les micros-modèles décrivant les phénomènes engendrés lors d'un contact en tenant compte des aspects « matériaux ».

Les macros-modèles

Les macros-modèles sont en général issus de modèles statiques où l'on simule la contribution du frottement par le biais d'un coefficient de frottement constant ou non, reliant l'effort normal de contact à l'effort tangentiel selon le principe ou une variante de la loi de Coulomb (1-7). L'effort frottant est modélisé par une loi le reliant à la composante normale de l'effort de contact, le coefficient de frottement des matériaux et la vitesse tangentielle ou le déplacement tangentiel relatif des deux corps en contact. On retrouve dans les macros-modèles essentiellement des variantes des lois de frottement de Coulomb et/ou visqueux.

Olsson [OLS 97] expose plusieurs modélisations de frottement visqueux statique ou dynamique incluant une dépendance linéaire avec la vitesse relative tangentielle lorsque celle-ci est importante.

Les expressions (1-22), (1-23) et (1-24) caractérisent différentes modélisations du frottement visqueux. La relation (1-22) dit « loi de frottement visqueux statique » ne prend en compte qu'un seul et unique coefficient de frottement statique μ_s . L'effort de frottement croît linéairement en fonction de la vitesse tangentielle. Le terme k_μ symbolise le caractère visqueux du modèle. Lorsque la vitesse est nulle, le coefficient de frottement se situe dans l'intervalle $]-\mu_s ; \mu_s[$.

$$\begin{cases} F_t(v_t) = |F_n| \cdot v_t \cdot \left(\frac{\mu_s}{|v_t|} + k_\mu \right) & \text{si } v_t \neq 0 \\ |F_t(v_t)| < \mu_s |F_n| & \text{si } v_t = 0 \end{cases} \quad (1-22)$$

Deux exemples de modèles dynamiques de frottement visqueux exposés Figure 1-29 illustrent les relations (1-23) et (1-24) [WOU 05]. Deux coefficients de frottement distincts statique μ_s et dynamique μ_d , avec $\mu_s > \mu_d$, sont considérés. Cette modélisation se révèle plus

en accord avec la physique car, dans certains cas la différence entre les valeurs de μ_s et μ_d n'est pas négligeable.

$$\begin{cases} F_t(v_t) = |F_n| \cdot v_t \cdot \left(\frac{\mu_d}{|v_t|} + k_\mu \right) & \text{si } v_t \neq 0 \\ |F_t(v_t)| < \mu_s |F_n| & \text{si } v_t = 0 \end{cases} \quad (1-23)$$

$$\begin{cases} F_t(v_t) = |F_n| \cdot v_t \cdot \left(\frac{\mu_d + (\mu_s - \mu_d) e^{-|v_t/v_{ref}|}}{|v_t|} + k_\mu \right) & \text{si } v_t \neq 0 \\ |F_t(v_t)| < \mu_s |F_n| & \text{si } v_t = 0 \end{cases} \quad (1-24)$$

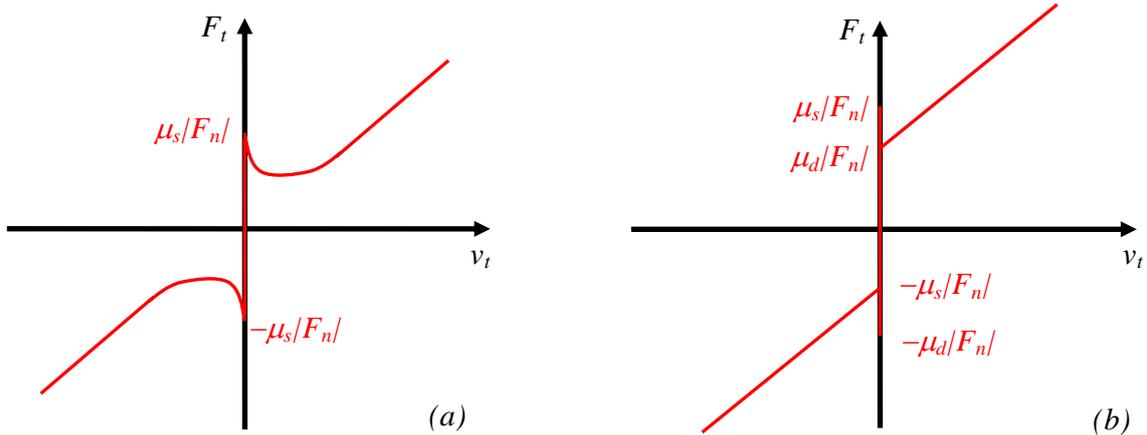


Figure 1-29 : Frottement visqueux modélisé par : (a) une loi exponentielle (1-24) (b) une loi linéaire (1-23)

Plusieurs modèles de lois de Coulomb statiques ou dynamiques existent et sont similaires aux lois de frottement visqueux présentées. Les expressions des lois de Coulomb sont identiques à celles des lois de frottement visqueux après suppression du terme k_μ ((1-22), (1-23) et (1-24)). Contrairement au modèle visqueux, le coefficient de frottement dans une loi de Coulomb ne peut excéder la valeur du coefficient de frottement statique des matériaux en contact.

Ces macros modèles restent limités pour plusieurs raisons :

- ils sont numériquement potentiellement instables à cause de la discontinuité en 0, source de sa grande non-linéarité,
- ils ne prennent pas en compte le comportement en roulement sans glissement lorsqu'il y a adhérence des pièces en contact,

- les coefficients de frottement statique et dynamique sont supposés constants, or, par expérience ils varient en fonction des états de surface, de la durée du contact, de l'effort normal, du champ local de température, etc.

Un modèle de loi de Coulomb pénalisé est très souvent implémenté dans les codes de calculs usuels. Lorsque la vitesse relative de glissement est proche de 0 m/s, le coefficient de frottement devient proportionnel à celle-ci par l'intermédiaire d'une raideur tangentielle k_t , *Figure 1-30(a)*. Lorsque la vitesse de glissement est importante en valeur absolue, le coefficient de frottement est en valeur absolue égale au coefficient de frottement statique (1-25). La loi de Coulomb pénalisée permet de simuler numériquement un pseudo-comportement de roulement sans glissement en considérant des coefficients de frottements inférieurs au coefficient de frottement statique lorsque la vitesse relative de glissement est très proche de 0.

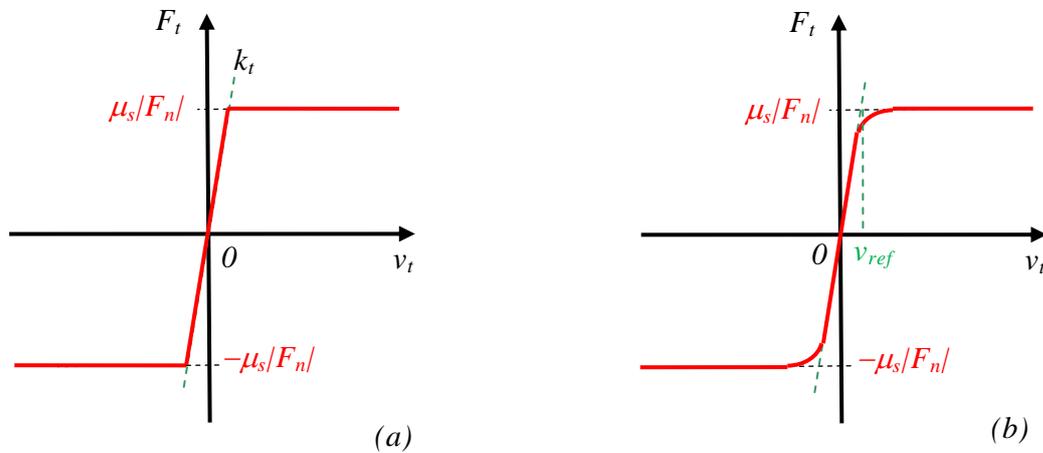


Figure 1-30 : Frottement de Coulomb modélisé par : (a) une loi de pénalité (1-25) (b) une loi arctangente (1-26)

$$\begin{cases} F_t(v_t) = |F_n| \cdot v_t \cdot \frac{\mu_s}{|v_t|} & \text{si } |v_t| \geq \frac{\mu_s}{k_t} \\ |F_t(v_t)| = |F_n| \cdot k_t \cdot v_t & \text{si } |v_t| < \frac{\mu_s}{k_t} \end{cases} \quad (1-25)$$

La fonction arctangente (1-26) permet de régulariser la loi de Coulomb rendant ainsi le modèle plus robuste en rapport à de possibles instabilités numériques. La loi de Coulomb régularisée par une fonction arctangente possède les avantages de la loi de Coulomb pénalisée en gardant les propriétés mathématiques d'une fonction continue de dérivée continue *Figure 1-30(b)*.

$$F_t(v_t) = |F_n| \cdot \mu_s \left(\frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_t}{v_{ref}} \right) + 1 \right) \quad (1-26)$$

O. Ismeurt [ISM 95] prend en compte les différentes phases de glissement durant un contact frottant. Lorsque la vitesse relative de glissement est non-négligeable ($|v_t| > \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$), le frottement est modélisé par une phase de « roulement avec glissement », le coefficient de frottement est constant et égal au coefficient de frottement statique des matériaux en contact. Lorsque la vitesse de glissement devient négligeable ($|v_t| < \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$), le frottement est modélisé par une phase de « roulement sans glissement ». L'effort tangentiel devient alors une inconnue du système et est calculé de manière à respecter l'équilibre de l'équation dynamique et la conservation de la relation cinématique imposant une vitesse de glissement nulle ($v_t = 0$). Le comportement en roulement sans glissement est considéré comme un état d'équilibre du contact frottant. La condition de changement d'état du système frottant est obtenue lorsque la valeur absolue de l'effort tangentiel calculée, est supérieure au produit de la valeur absolue de l'effort normal par le coefficient de frottement statique (soit $|F_t| > \mu_s |F_n|$). Le système adopte alors un comportement en « roulement avec glissement ». Cette modélisation bien que coûteuse en raison des changements d'états et de l'augmentation du nombre d'inconnues du système, permet de respecter précisément les conditions du modèle de Coulomb.

Les micros-modèles

Les micro-modèles décrivent les phénomènes engendrés au niveau du contact en tenant compte des états de surfaces. Le modèle de Dahl permet d'exprimer la dérivée de l'effort tangentiel par rapport au déplacement tangentiel relatif en introduisant le phénomène dissipatif d'hystérésis lors de mouvements périodiques *Figure 1-31*. La micro-raideur tangentielle σ_0 (1-27) correspond à la pente de la courbe de l'effort de friction dans le domaine élastique, l'inverse $1/\sigma_0$ est couramment nommé « distance de relaxation ». On identifie la puissance η qui module l'hystérésis tracé par l'effort tangentiel $F(x)$ en tenant compte du caractère ductile ($\eta = \{1, 2\}$), ou cassant ($\eta = 0$ pour Coulomb, $1/4$ ou $1/2$ sinon) des matériaux en contact. F_c représente la valeur de l'effort tangentiel de Coulomb. F_s est la valeur qui annule la dérivée de l'effort frottant $F(x)$, elle est identifiée dans la zone plastique.

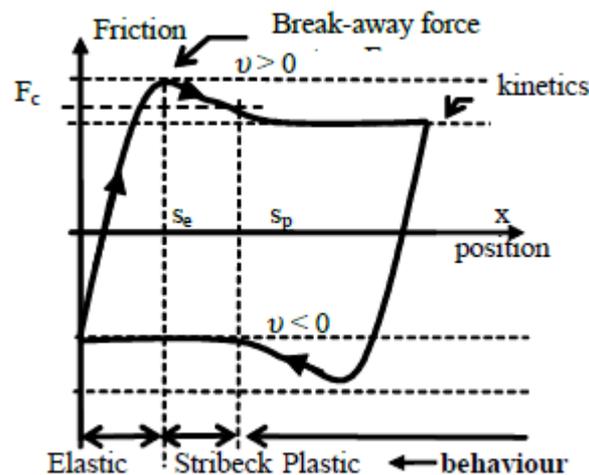


Figure 1-31 : Cycle d'hystérésis du modèle de Dahl [NUN 06]

Le modèle de Dahl cité dans [NUN 06], [OLS 97], est très souvent employé dans la simulation du contrôle actif de systèmes frottants. Il est plus difficilement implémentable dans un code de calcul par EF mais permet de prendre en compte les pertes d'énergies liées aux déformations élastique et plastique des matériaux en contact ($x = \delta_t$) :

$$\begin{cases} \frac{dF(\delta_t)}{d\delta_t} = \sigma_0 \cdot \text{sign}\left(1 - \frac{F(\delta_t)}{F_t}\right) \cdot \left|1 - \frac{F(\delta_t)}{F_t}\right|^n \\ \frac{dF(\delta_t)}{dt} = \frac{dF(\delta_t)}{d\delta_t} \cdot \frac{d\delta_t}{dt} = \frac{dF(\delta_t)}{d\delta_t} \cdot v_g(t) \end{cases} \quad (1-27)$$

Al Majid et Dufour [ALM 02], [ALM 04], ont proposé une généralisation du modèle de Dahl pour prendre en compte au niveau macroscopique les butées à frottement sec. Ce modèle a été utilisé par la suite dans [MIC 05], [BAS 07] et [CHA 08].

Le modèle de Bristle introduit par Haessig et Friedland [HAE 91] prend en compte la rugosité des surfaces frottantes comme un ensemble de cils élastiques en nombre N , de localisation aléatoire b_i par le biais de la relation (1-28) [OLS 97], [NUN 06]. Lorsque la distance relative ($x_i - b_i$) atteint une valeur limite z_0 , il y a brusque rupture du contact et déclenchement d'un frottement glissant. La difficulté de la méthode réside dans la valeur de N qui est non constante et croissante au cours du frottement.

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (1-28)$$

La méthode « Reset Integrator Model » [NUN 06], permet de contourner cette difficulté en s'affranchissant de la distribution aléatoire des cils par l'introduction d'une variable d'état z simulant le débattement des cils (avec $z < z_0$) de raideur σ_0 et une éventuelle striction $a(z)$:

$$a(z) = \begin{cases} a & \text{si } |z| < z_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1-29)$$

Le terme dz/dt représente l'amortissement d'un mouvement type « adhérent-glissant » (« stick-slip »), actif uniquement lors de la phase « adhérente » et s'exprime par la relation suivante :

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } (v_g > 0 \text{ et } z \geq z_0) \text{ ou } (v_g > 0 \text{ et } z \leq -z_0) \\ v_g & \text{sinon} \end{cases} \quad (1-30)$$

L'effort de frottement est alors calculé par l'expression :

$$F = (1 + a(z)) \cdot \sigma_0 \cdot (v_g) \cdot z + \sigma_v \cdot \frac{dz}{dt} \quad (1-31)$$

Les micros-modèles possèdent la particularité de prendre en compte un grand nombre de phénomènes non-simulables par les macros-modèles :

- mémoire du frottement : le frottement évolue en fonction du temps de contact,
- phénomènes d'hystérésis : les pertes énergétiques causées par échauffement et/ou déformation plastique...

Les micros-modèles sont néanmoins plus difficiles à introduire dans un code de calcul en raison d'un plus grand nombre d'inconnues, et de paramètres qui ne sont pas systématiquement identifiables expérimentalement. Dans cette étude, les macros-modèles apparaissent plus adaptés.

1.4 Paramètres et facteurs influents

L'ensemble de la bibliographie citée dans ce mémoire permet de mettre en place une liste non-exhaustive de paramètres et facteurs qui influent sur le comportement d'un moteur après contact rotor/stator. L'intérêt ici est porté sur une instabilité dynamique de type dry whip, fortement redoutée dans l'industrie. Une brève synthèse qualitative de chaque famille de paramètres est présentée dans les paragraphes suivants.

1.4.1 Les paramètres du contact

Les paramètres du contact sont certainement les facteurs ayant la plus grande influence sur le déclenchement d'une instabilité dynamique en précession indirecte.

En premier intervient le coefficient de frottement. Il conditionne la valeur de l'effort frottant et accroît le risque de déclenchement du dry whip. L'inconvénient majeur est qu'il représente le paramètre le moins maîtrisable et le plus difficile à modéliser. Pennacchi [PEN 09] montre expérimentalement qu'il varie énormément notamment à l'approche des vitesses critiques lorsque la touche est prolongée. Sans coefficient de frottement, le risque de déclenchement d'instabilité n'existerait pas sur un système parfaitement symétrique.

La rigidité et l'amortissement de contact sont aussi particulièrement influents. Un contact rigide augmente l'effort résultant et donc le risque d'apparition du phénomène instable. Un contact amorti permet au contraire d'éloigner le domaine d'existence du dry whip. Tout comme le coefficient de frottement, les paramètres de rigidité et d'amortissement de contact sont très difficiles à modéliser et à maîtriser.

Les jeux rotor/stator influencent le déclenchement de l'instabilité ainsi que le comportement après touche. La réduction du jeu rotor/stator augmente le risque de touches ainsi que les efforts de contact. La diminution des jeux réduit la zone d'existence du dry whirl puisqu'il

rend la pente du whirl (ratio rayon/jeu) beaucoup plus importante. Si les dommages occasionnés lors d'une potentielle instabilité dynamique sont accrus, le risque du déclenchement de l'instabilité ne l'est pas forcément. En effet, un jeu réduit augmente l'effort frottant nécessaire pour inverser le sens de précession lors du contact. Bently [BEN 02] n'a pas réussi, durant sa campagne d'essais, à provoquer un contact permanent en précession indirecte en configuration de très grand ratio rayon/jeu (>40).

Les surfaces frottantes des parties fixes des turbomoteurs sont équipées d'une couche de matériaux abrasables qui améliore les conditions d'un contact rotor/stator. Les matériaux abrasables sont moins rigides que les métaux sur lesquels ils sont thermiquement projetés en raison d'un module d'Young nettement inférieur. Leur caractéristique d'abrasable leur permet d'emmagasiner une plus grande quantité d'énergie par évacuation de chaleur et déformations plastiques, améliorant ainsi les propriétés d'amortissement au contact. De plus, ils possèdent à haute vitesse de rotation, un coefficient de frottement relativement faible et stable.

Les jeux fonctionnels sont en revanche très faibles et de nombreuses interrogations subsistent sur leur influence dans le déclenchement de l'instabilité.

1.4.2 Vitesse de rotation et régime de fonctionnement

La vitesse de rotation joue un rôle important non seulement sur le déclenchement de l'instabilité en précession indirecte, mais aussi sur le comportement successif à une touche quelconque. Von Groll [GRO 02] met en évidence expérimentalement et numériquement que les sur- et sous-harmoniques du mouvement quasi-périodique lors d'un contact partiel sont directement dépendantes de la vitesse de rotation. Jiang [JIA 09] utilise une solution analytique d'un rotor de Jeffcott en contact avec un stator rigide pour montrer que le risque de déclenchement d'instabilité par excitation balourd est très important à l'approche de la vitesse critique du système rotor/stator couplé. Lingener [LIN 90] remarque à partir de ses essais expérimentaux que la plus petite fréquence de déclenchement du dry whirl est supérieure à la première fréquence propre du rotor.

Les lignes d'arbres générateurs des architectures Turboméca sont dimensionnées sous-critiques par rapport au point de fonctionnement en régime nominal. La première fréquence propre de flexion du rotor est ainsi bien plus importante que la vitesse nominale. Cette marge de sécurité améliore la stabilité du système dans le cas éventuel d'une touche en régime nominal.

1.4.3 Propriétés mécaniques des parties fixes et tournantes

Les propriétés mécaniques des parties fixes et tournantes sont aussi très importantes dans le comportement d'un rotor après touche. D'une manière générale, un système composé d'un

stator rigide et d'un rotor avec une grande inertie se révèle potentiellement plus dangereux qu'un système flexible et léger [VIN 06]. Lorsque les parties fixes sont rigides, les efforts de contact restitués au rotor deviennent plus importants. Jiang [JIA 09] établit à partir de sa solution analytique, un diagramme [raideur rotor/raideur stator β ; vitesse de rotation Ω] (Figure 1-32). La vitesse de rotation est adimensionnée par rapport à la pulsation propre du système couplé. Les différents domaines colorés indiquent l'existence ou la coexistence d'un ou plusieurs comportements successifs à une touche sur un rotor de Jeffcott. Ω_1 et Ω_u situent un intervalle de vitesse pour lequel l'amplitude d'excentricité orbitale du rotor linéaire (sans contact) est supérieure au jeu (résonance). La zone « 0 » est caractérisée par la coexistence d'un comportement linéaire sans touche et d'un contact permanent en précession indirecte (dry whirl/whip) provoquée par un effort non-synchrone comme un coup de marteau par exemple. Les contacts permanent en précession directe et indirecte coexistent dans la zone « 1 ». La limite HF fait apparaître une bifurcation vers un régime quasi-périodique : le contact partiel, aussi bien en précession directe et indirecte, et le contact permanent en précession indirecte composent la zone « 2 ». La zone d'existence du « dry whip » déclenchable par le balourd est délimitée par les frontières DW et HF. Un stator suffisamment souple, *i.e.* avec une valeur importante de β (stiffness ratio), il est impossible de déclencher le dry whip, uniquement par les forces de balourd.

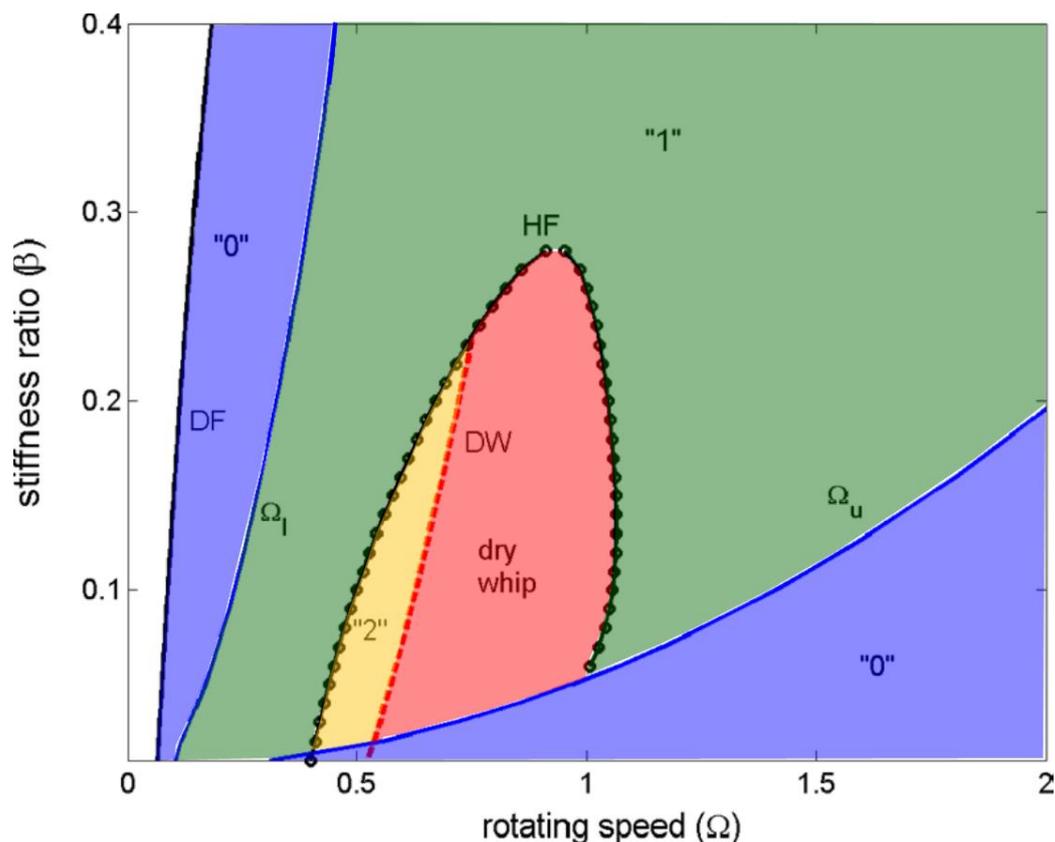


Figure 1-32 : Influence du rapport des raideurs rotor/stator sur les zones d'existences des comportements à la touche [JIA 09]

La caractéristique principale des turbomoteurs concerne le grand rapport puissance/masse qui est un critère fondamental lors de la conception et la fabrication. Les architectures sont

de masses faibles, et les carters (stators) relativement souples. Les choix de conception effectués sont bénéfiques sur la stabilité et la robustesse des lignes d'arbres.

1.4.3 Déclenchement de la touche

L'effort de contact et la direction de déplacement du centre du rotor avant contact impactent directement la condition de déclenchement du dry whip. Lorsque l'effort frottant est suffisant pour inverser le sens de précession, le dry whip se déclenche. Un contact provoqué pendant que le rotor suit un mouvement de précession indirecte augmente le risque de déclenchement du dry whip (voir *Figure 1-15*, [BAR 00]).

Le déclenchement du dry whip se révèle très sensible au type de sollicitation générant la première touche. Un contact rotor/stator initié par balourd se révèle moins dangereux qu'un autre provoqué par une perturbation externe et non-synchrone de type coup de marteau. Bently [BEN 02] déclenche l'instabilité par le biais d'un coup de marteau à des fréquences de rotations où le balourd n'est pas suffisant pour le provoquer. La *Figure 1-33* présente un diagramme [coefficient de frottement μ ; vitesse de rotation Ω]. Les zones de couleurs correspondent à celles observées sur la *Figure 1-32*. Jiang [JIA 09] montre un vaste domaine d'existence du contact permanent en précession indirecte initiée par des perturbations extérieures *Figure 1-33*. La limite DF met en relief le domaine d'existence du contact permanent en précession indirecte, alors que la courbe DW illustre la limite à partir de laquelle le dry whip peut être déclenché par excitation balourd.

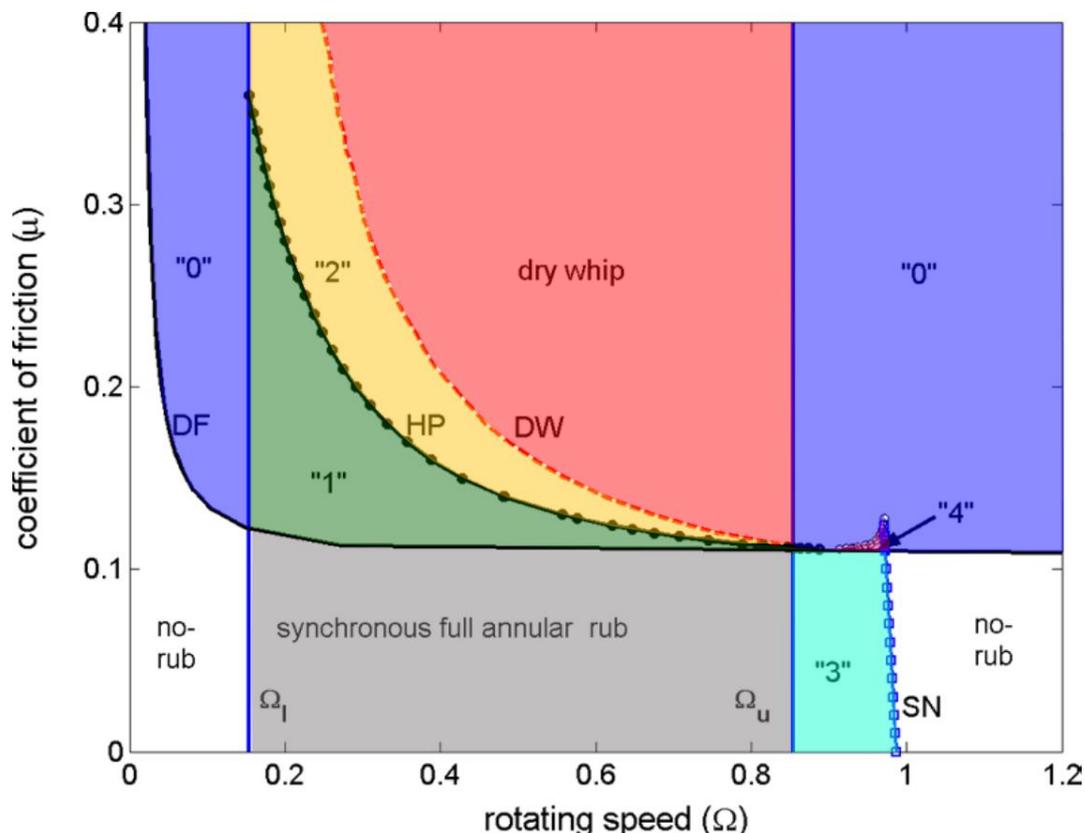


Figure 1-33 : Diagramme des zones d'existence des différents comportements après touche

rotor/stator en fonction du coefficient de frottement et de la vitesse de rotation [JIA 09]

1.4.4 Dissymétries du système

La dissymétrie du rotor augmente le risque de déclenchement de l'instabilité. En effet, les fréquences de flexion ne sont plus égales et le rotor peut alors suivre un mouvement en précession indirecte dans le domaine linéaire. Une touche dans cette plage de vitesse peut même entraîner l'apparition du dry whip en l'absence totale de frottement.

La dissymétrie du stator peut en contrepartie, aussi bien favoriser l'apparition de l'instabilité que la repousser. Le taux de dissymétrie semble jouer un rôle important sur sa capacité à être moteur ou non dans le déclenchement du contact permanent en précession indirecte [ISM 95], [JIA 00].

2. Résolution dynamique des systèmes non-linéaires – Dualité Temporelle/Fréquentielle

Les méthodes numériques qui traitent la résolution des problèmes dynamiques non-linéaires se sont multipliées au cours des années, mais restent néanmoins issues de deux approches distinctes, fréquentielle et temporelle. Le choix entre ces deux approches est défini en fonction de la nature du problème traité (fortement ou faiblement non-linéaire), du type de solution recherchée (transitoire, périodique, quasi-périodique), des coûts en temps de calcul. Les méthodes fréquentielles sont souvent utilisées pour des problèmes dynamiques avec de faibles non-linéarités et qui généralement ont des solutions périodiques. Elles sont reconnues pour être plus rapides que les méthodes d'intégration temporelle. De nombreux travaux ont néanmoins été élaborés afin de pouvoir travailler sur des problèmes comportant de fortes non-linéarités comme ceux de Peletan [PEL 12] et Demailly [DEM 06]. Les méthodes temporelles s'avèrent en revanche bien adaptées à la dynamique transitoire et la recherche de solutions apériodique ou chaotique.

2.1 Méthode de recherche de solutions dans le domaine fréquentiel

La méthode de la balance harmonique (HBM, « Harmonic Balance Method ») permet de construire une solution périodique du système non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Le principe de la méthode HBM consiste à supposer que la solution de l'équation dynamique suivante est périodique :

$$M\ddot{q}(t) + C(\omega)\dot{q}(t) + Kq(t) + f^{NL}(q(t), \dot{q}(t)) = f^{Ext}(t) \quad (I-32)$$

Elle s'applique très bien à la dynamique des machines tournantes puisque les excitations créées par balourd sont périodiques aussi. On décompose donc la solution du problème dynamique sous forme de série de Fourier tronquée à l'ordre N :

$$q(t) = Q_0 + \sum_{j=0}^N Q_{2j-1} \cos(k_j \omega t) + Q_{2j} \sin(k_j \omega t) \quad (I-33)$$

$Q_i (i=1..2N)$ sont les vecteurs de coefficients harmoniques et les $k_j (j=0..N)$ sont les harmoniques retenues dans la décomposition modale tronquée de la solution approchée. ω représente la pulsation fondamentale du système dynamique. On peut ainsi analytiquement décomposer, les efforts non-linéaires et ceux issues de l'excitation par balourd, en série de Fourier :

$$\begin{cases} f^{Ext}(t) = f_0^{Ext} + \sum_{j=0}^N f_{2j-1}^{Ext} \cos(k_j \omega t) + f_{2j}^{Ext} \sin(k_j \omega t) \\ f^{NL}(t) = f_0^{NL} + \sum_{j=0}^N f_{2j-1}^{NL} \cos(k_j \omega t) + f_{2j}^{NL} \sin(k_j \omega t) \end{cases} \quad (I-34)$$

En injectant (I-34) dans l'équation dynamique (I-32), on obtient un nouveau système d'équations dynamiques dont le résidu est orthonormalisé par une procédure de Galerkin. La relation qui en découle représente l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel :

$$R(Q, \omega) = A(\omega)Q + F^{NL}(Q) - F^{Ext} = 0 \quad (I-35)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} A^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A^{N_h} \end{bmatrix}, \begin{cases} A^0 = K \\ A^k = \begin{bmatrix} K - (k_j \omega)^2 M & k_j \omega C \\ -k_j \omega C & K - (k_j \omega)^2 M \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Et } F^{NL} = \langle F_0^{NL} \quad F_1^{NL} \quad \dots \quad F_{2N}^{NL} \rangle^T, F^{Ext} = \langle F_0^{Ext} \quad F_1^{Ext} \quad \dots \quad F_{2N}^{Ext} \rangle^T$$

L'équation (I-35) est un système algébrique ayant pour inconnues, les coefficients de Fourier des déplacements Q . Usuellement cette équation non-linéaire est traitée par une méthode itérative de Newton-Raphson qui consiste à minimiser le résidu $R(Q, \omega)$. L'itération de Newton-Raphson s'écrit :

$$Q^{k+1} = Q^k + \left(\frac{\partial F^{NL}}{\partial Q} \right)_{Q^k}^{-1} R(Q^k) \quad (I-36)$$

Le caractère non-linéaire du problème de contact rend impossible la détermination des coefficients de Fourier des efforts non-linéaires dans le domaine fréquentiel puisqu'ils dépendent eux-mêmes des coefficients de Fourier des déplacements. Une méthode type AFT (« Alternating Frequency Time ») permet de contourner le problème. Elle consiste à calculer dans le domaine temporel, la solution approchée en déplacement par simple transformée inverse à chaque itération de Newton-Raphson. Une fois dans le domaine temporel, le calcul des efforts non-linéaires est rendu possible. Les coefficients harmoniques des efforts non-linéaires sont ainsi obtenus par une transformée de Fourier directe de la réponse temporelle des efforts non-linéaires avant d'être utilisés dans une nouvelle boucle d'itérations de Newton-Raphson.

La méthode de balance harmonique est couplée à une technique de continuation de type « pseudo longueur d'arc » [PEL 12], [GRO 01], ou « incrémentale » [DEM 06], afin de suivre l'évolution de la solution en fonction d'un paramètre de contrôle λ que l'on fait varier (vitesse de rotation, frottement, raideur de contact...). Un algorithme de prédiction-correction est à nouveau utilisé afin d'obtenir un couple solution (Q, λ) .

La non-linéarité du système peut provoquer l'existence de plusieurs solutions. La solution initiale Q_0 conditionne la solution approchée vers laquelle l'algorithme converge. Par ailleurs, il est possible que la solution calculée soit instable. Une solution instable est une solution pour laquelle une infime perturbation l'éloignera de son état d'équilibre : elle n'est physiquement pas observable. L'étude de stabilité des solutions périodiques repose en général sur la théorie de Floquet ou des exposants de Lyapunov.

2.2 Méthode de recherche de solutions dans le domaine temporel

L'intégration numérique temporelle permet de résoudre un système d'équations différentielles dépendantes du temps. La solution est ainsi construite progressivement dans le temps. Les schémas d'intégration temporelle fonctionnent, sous réserve de précautions, pour tout type de problème linéaire ou non. Le principe consiste à intégrer à partir des conditions initiales une solution dans un intervalle de temps fini.

Cependant ces intégrateurs, bien que simples en pratique, peuvent se révéler très coûteux en temps de calcul pour les structures faiblement amorties. Il existe deux types de schémas d'intégration temporelle : les schémas explicites et implicites.

Les schémas explicites présentent l'avantage d'être facilement implémentables du fait que l'équation dynamique est résolue à l'instant t en fonction des inconnues (à t et $t-\Delta t$). Ce type de schéma nécessite néanmoins de choisir un pas de temps Δt très faible pour éviter les instabilités numériques durant les calculs.

Les schémas implicites sont plus coûteux car ils nécessitent à chaque itération temporelle une étape de prédiction/correction en raison du fait que l'équation dynamique est résolue à l'instant $t+\Delta t$ et que l'on ne connaît pas encore toutes les inconnues. Ils sont en revanche plus avantageux sur le choix du pas de temps qui peut être plus important en raison de leur stabilité conditionnelle et inconditionnelle.

Dans le contexte de régime forcé par l'intermédiaire de balourds, les solutions à long terme sont de 3 types :

- T-périodiques : T étant un multiple de la période T_f de l'excitation,
- quasi-périodiques : avec apparition d'un certain nombre de sur- et sous-harmoniques,
- chaotiques : ces comportements s'observent en général comme transitions entre des zones adjacentes où la réponse est non-synchrone.

Pour ces deux derniers types, l'intégration temporelle directe permet de facilement les calculer. La méthode d'intégration choisie est celle des schémas de Newmark présenté dans le paragraphe suivant. Les schémas de Runge-Kutta, des différences finies centrées et d'autres sont décrits dans l'*Annexe 1*.

Famille des schémas de Newmark

Les schémas d'intégration de Newmark reposent sur un développement limité des inconnues à calculer. La fonction de déplacement $q(t)$ dérivable n fois peut être approchée par un développement polynomial de Taylor à l'ordre n :

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t.q'(t) + \frac{\Delta t^2}{2}q''(t) + \sum_{i=3}^n \frac{\Delta t^i}{i!}q^{(i)}(t) \quad (1-37)$$

Dans le cadre d'une intégration temporelle, le développement de Taylor est limité à l'ordre 3 pour la solution approchée en vitesse et en déplacement :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + \Delta t.\dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{q}_n + \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t.\ddot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\dddot{q}_n \end{cases} \quad (1-38)$$

Les dérivées 3^{èmes} sont supprimées tandis que des paramètres d'amortissement numérique γ et β ainsi que la dérivée seconde du déplacement à l'incrément $n+1$ (q_{n+1}) sont introduits [ROQ 09], [LIN 05] :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + \Delta t.\dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2}((1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t((1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \end{cases} \quad (1-39)$$

Les inconnues en vitesse et déplacements sont ensuite injectées dans l'équation de la dynamique à l'incrément temporel $n+1$:

$$M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = f_{n+1}^{Ext} + f^{NL}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \quad (1-40)$$

En introduisant la relation (1-39) dans l'expression de l'équation dynamique (1-40), on obtient le vecteur d'accélération nodal à l'incrément temporel $n+1$:

$$\left(M + \gamma.\Delta t.C + \frac{\beta}{2}\Delta t^2.K \right) \ddot{q}_{n+1} = H_N(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) + f_{n+1}^{Ext} + f^{NL}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \quad (1-41)$$

$$\text{Avec } H_N(q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) = - \left(Kq_n + (C + \Delta t.K)\dot{q}_n + \Delta t \left((1-\gamma)C + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t.K \right) \ddot{q}_n \right)$$

Dans le cadre des systèmes non-linéaires comme ceux concernés par le contact rotor/stator, le système de Newmark (1-41) peut être résolu par une procédure itérative de type prédicteur/correcteur de Newton-Raphson [GHO 07].

La stabilité des schémas de Newmark dépend des paramètres γ et β (voir Figure 1-34) :

- si $\gamma < 1/2$, le schéma est instable quel que soit β ,
- si $\gamma \geq 1/2$, le schéma est :
 - inconditionnellement stable si $\beta \geq (\gamma + 1/2)^2 / 4$,
 - conditionnellement stable si $\beta < (\gamma + 1/2)^2 / 4$.

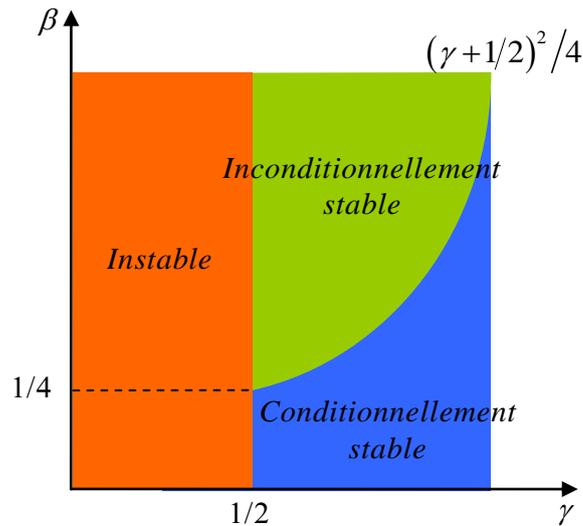


Figure 1-34 : Stabilité des schémas de Newmark [COM 06]

Le *Tableau 1-1* permet de choisir la valeur des paramètres en fonction du schéma d'intégration ciblé. Deux schémas se montrent particulièrement intéressants :

- accélération linéaire, le plus précis parmi les schémas conditionnellement stable,
- accélération moyenne, le meilleur compromis possible entre stabilité inconditionnelle et précision.

Nom du Schéma	Paramètres		Ordre de précision $O(\Delta t^n)$	Limite de stabilité $\omega_{max} \cdot \Delta t$
	γ	β		
Accélération linéaire	1/2	1/6	3	3.46
Accélération moyenne	1/2	1/4	2	∞
Différences finies centrées	1/2	0	2	2
Fox Godwin	1/2	1/12	2	2.45
Différences finies à droite	3/2	1	1	∞

Tableau 1-1 : Classification des différents schémas d'intégration de Newmark [COM 06]

Lorsque $\beta=0$, le schéma est de type explicite, le schéma aux différences finies centrées est un cas particulier de la famille des schémas de Newmark. De nombreux auteurs [GAN 11], [GHO 07], [CAV 06], [LIN 05], utilisent les algorithmes de Newmark pour des problèmes non-linéaires en dynamique rapide.

3. Techniques propres à la modélisation et l'analyse des phénomènes non-linéaires

3.1 Condensation dynamique

Les calculs numériques par intégration temporelle sont très coûteux aussi bien en temps de calcul qu'en taille mémoire. Le concept de la réduction modale consiste à définir un sous-espace de dimension P , réduite par rapport à N ($P \ll N$), dimension de l'espace initial du système global, dans le but d'approcher les vecteurs d'état Q par un vecteur q_C de dimension restreinte. On considère l'équation de la dynamique dans l'espace initial :

$$M.\ddot{Q}(t) + C.\dot{Q}(t) + K.Q(t) = F(t, Q) \quad (1-42)$$

Avec M la matrice de masse, C la matrice d'amortissement et K la matrice de rigidité toutes de tailles $N \times N$. On note Q le vecteur de déplacements des nœuds et F le vecteur des efforts extérieurs de dimension $N \times 1$.

En projetant l'équation de la dynamique sur le sous-espace de dimension réduite on diminue la taille du système à résoudre :

$$\widehat{M}\ddot{q}_C(t) + \widehat{C}\dot{q}_C(t) + \widehat{K}q_C(t) = f_C(t, q_C) \quad (1-43)$$

Avec ,

$\widehat{M} = \Phi^T M \Phi$	matrice de masse réduite de dimension $P \times P$
$\widehat{C} = \Phi^T C \Phi$	matrice d'amortissement réduite de dimension $P \times P$
$\widehat{K} = \Phi^T K \Phi$	matrice de rigidité réduite de dimension $P \times P$
$q_C = \Phi^T Q$	vecteur des déplacements projetés de dimension $P \times 1$
$f_C = \Phi^T F$	vecteur des efforts projetés de dimension $P \times 1$

où, Φ matrice de dimension $N \times P$ représente la base de vecteurs propres du sous-domaine, avec P le nombre de vecteurs retenus.

De nombreuses techniques de condensation dynamique existent notamment lorsque le domaine d'étude se restreint à des systèmes linéaires, mais très peu s'appliquent à des systèmes non-linéaires. Lorsque les non-linéarités sont localisées on peut toutefois adapter ces techniques de condensation en distinguant les degrés de libertés linéaires et non-linéaires, comme celles de Craig et Bampton à interface fixe et de Craig et Martinez à interface libre, *Annexe 2*.

3.2 Analyse fréquentielle des phénomènes non-linéaires

La caractérisation des phénomènes dynamiques non-linéaires est compliquée à établir à partir d'une simple réponse temporelle. Des outils fréquentiels ont été développés afin de pouvoir caractériser la dynamique d'arbre et d'éléments tournants. Deux méthodes parfaitement adaptables à la dynamique d'un contact rotor/stator sont présentées dans ce mémoire :

- le spectre complet (full spectrum d'un mouvement de rotation)
- le spectrogramme (diagramme temps/fréquence)

3.2.1 Analyse par full spectrum

L'analyse par full spectrum (spectre complet) est très utilisée dans l'industrie aéronautique durant la caractérisation des comportements vibratoires de ligne d'arbre. Son principe innovant, permet non seulement d'obtenir les informations en amplitudes et les fréquences sollicitées durant les vibrations, mais aussi le sens de rotation des mouvements de précession [TAL 04].

Mettre en place un full spectrum nécessite de positionner deux capteurs de proximité à 90° d'angle l'un par rapport à l'autre comme l'illustre la Figure 1-35. Cette méthode utilise ensuite les déphasages respectifs et les coefficients spectraux du signal pour reconstruire le spectre de la réponse fréquentielle.

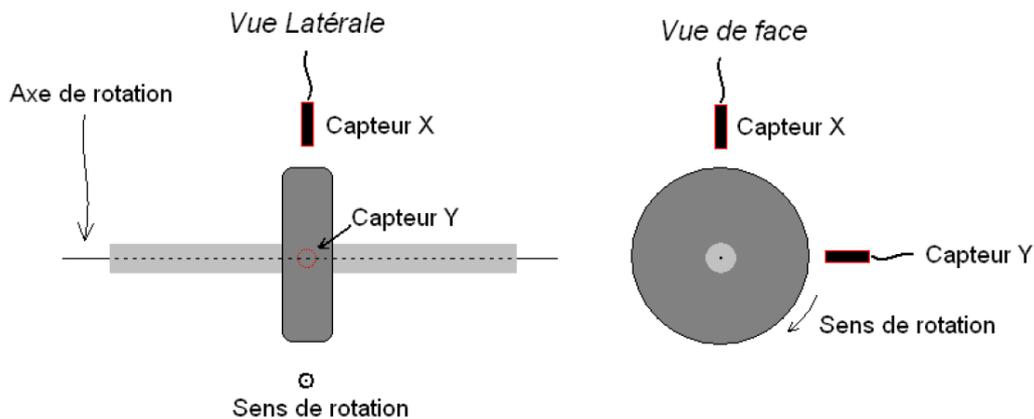


Figure 1-35 : Placement des capteurs lors d'une analyse Full spectrum [TAL 04]

Dans le cas général les signaux temporels des vibrations mesurées par les capteurs ont pour transformée de Fourier discrète :

$$\begin{cases} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{jn\omega t + \phi_n} \\ Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \cdot e^{jn\omega t + \varphi_n} \end{cases} \quad (1-44)$$

Il est possible pour chaque fréquence, de décomposer le spectre de vibrations dans le sens direct et indirect :

$$R_n = R_{n\omega+} e^{jn\omega t + \alpha_n} + R_{n\omega-} e^{-(jn\omega t + \beta_n)} \quad (1-45)$$

Les amplitudes de vibrations dans le sens direct et indirect sont calculées pour chaque fréquence par le biais du système suivant :

$$\begin{cases} R_{n\omega+} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n \cdot \sin(\phi_n - \varphi_n)} \\ R_{n\omega-} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cdot \sin(\phi_n - \varphi_n)} \end{cases} \quad (1-46)$$

La relation (1-46) s'interprète graphiquement par deux pics de fréquences $n\omega$ et $-n\omega$ et d'amplitudes respectives $R_{n\omega+}$ et $R_{n\omega-}$ (Figure 1-36).

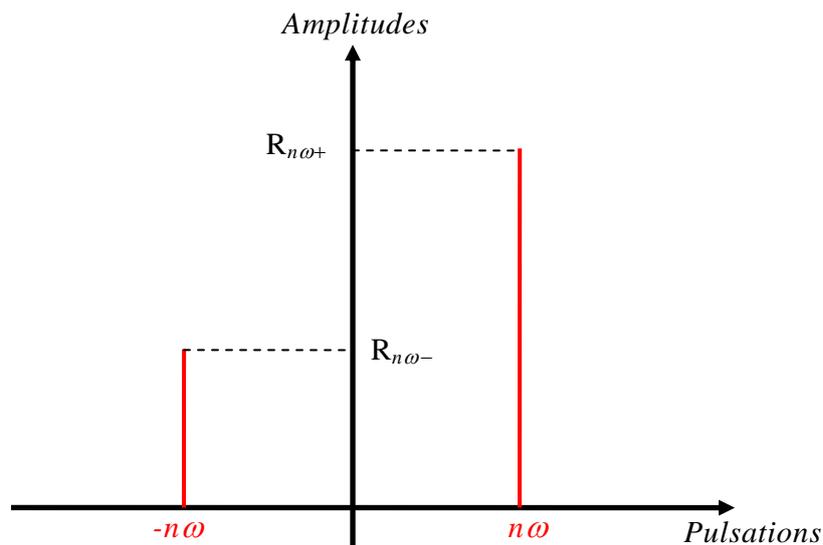


Figure 1-36 : Représentation graphique d'une décomposition en full-spectrum d'une pulsation de valeur $n\omega$

L'analyse full-spectrum est très souvent utilisée lors du dépouillement de mesures d'essais vibratoires, elle fait l'objet dans ce mémoire d'une utilisation particulièrement efficace et adaptée aux résultats numériques de calculs temporels.

3.2.2 Analyse par spectrogramme

Le spectrogramme est une technique d'analyse par résolution d'un diagramme temps-fréquence, qui est couramment utilisée durant la mesure d'essais vibratoires dans l'industrie aéronautique. Elle permet d'analyser l'évolution des fréquences propres et de leurs amplitudes au cours du temps, et ainsi, mettre en relief d'éventuels phénomènes non-linéaires et/ou transitoires.

Construction d'un diagramme temps-fréquence de type spectrogramme

Avant de se pencher sur la résolution d'un diagramme temps-fréquence, il est important d'assimiler la notion de transformée de Fourier à fenêtre glissante définie par la relation (1-47) extraite de [TAL 06] :

$$X(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot w(t - \tau) \cdot e^{-2i\pi ft} dt \quad (1-47)$$

$w(t - \tau)$ est une fenêtre de pondération d'analyse temporelle centrée en τ tandis que $X(f, \tau)$ contient la description temps-fréquence du signal temporel $x(t)$. Les fonctions de pondérations sont généralement modélisées par des fonctions sinus cardinal. L'illustration *Figure 1-37* de la fonction sinus cardinal permet de visualiser les différentes caractéristiques d'une fenêtre d'analyse temporelle.

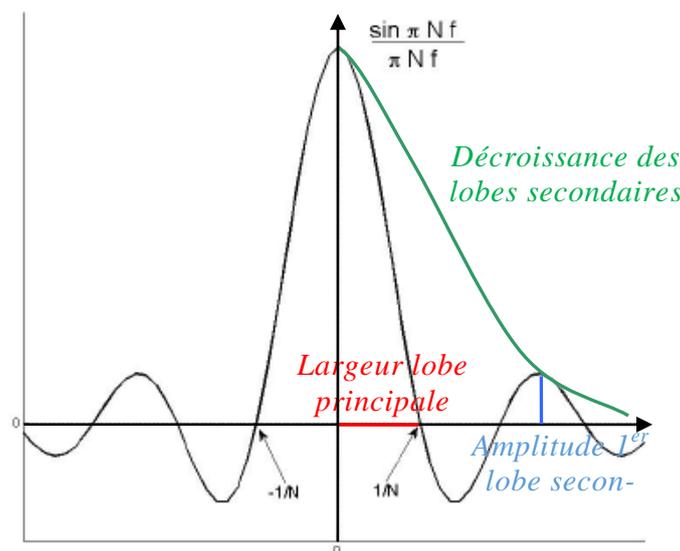


Figure 1-37 : *Fonction sinus cardinal et paramétrage d'une fenêtre de pondération [TAL 06]*

Le choix de la fenêtre d'analyse temporelle est réalisé en fonction de la précision souhaitée sur les valeurs de fréquences et/ou d'amplitudes. Une fenêtre possédant un lobe principal large se révèle moins précise sur la résolution fréquentielle. Le niveau du second lobe ainsi que la décroissance des lobes secondaires sont des critères permettant d'évaluer la précision

en amplitude du fenêtrage. Le *Tableau 1-2* permet d'avoir une vision globale des caractéristiques des fenêtres de pondérations usuelles. Les fenêtres Hamming et Hanning constituent un bon compromis entre précision sur la résolution en fréquence et en amplitude.

Type de fenêtre	Largeur du lobe principal	Niveau du premier lobe secondaire (dB)	Décroissance des lobes secondaires (dB)
Rectangulaire	2/N	-13	-6
Hanning	3/N	-31.5	-18
Hamming	4/N	-43	-6
Blackman	5.5/N	-53	-18

Tableau 1-2 : Caractéristiques des fenêtres de pondération [TAL 06]

Le spectrogramme se définit comme une répartition de l'énergie vibratoire dans le plan temps-fréquence. Il peut être exprimé sous la forme d'une densité spectrale de puissance (autospectrum) ou d'amplitude :

$$\begin{aligned}
 P(f, \tau) &= |X(f, \tau)|^2 && \text{autospectrum} \\
 \sqrt{P(f, \tau)} &= |X(f, \tau)| && \text{amplitude}
 \end{aligned}
 \tag{1-48}$$

On utilise en règle générale la densité spectrale de puissance pour réaliser une analyse spectrogramme couplée avec une échelle logarithmique :

$$P(f, \tau) = 10 \log \left(|X(f, \tau)|^2 \right) = 20 \log \left(|X(f, \tau)| \right)
 \tag{1-49}$$

La résolution du plan temps-fréquence doit vérifier les conditions d'Heisenberg (1-50). Cette condition implique d'effectuer un choix entre précision sur la résolution temporelle ou fréquentielle :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}
 \tag{1-50}$$

Où Δt et Δf représentent la taille de la fenêtre temporelle et fréquentielle. Il est toujours possible d'améliorer la précision temporelle et fréquentielle en autorisant un taux de recouvrement de façon à réduire Δt sans diminuer la taille de la fenêtre glissante comme le démontre la *Figure 1-38*.

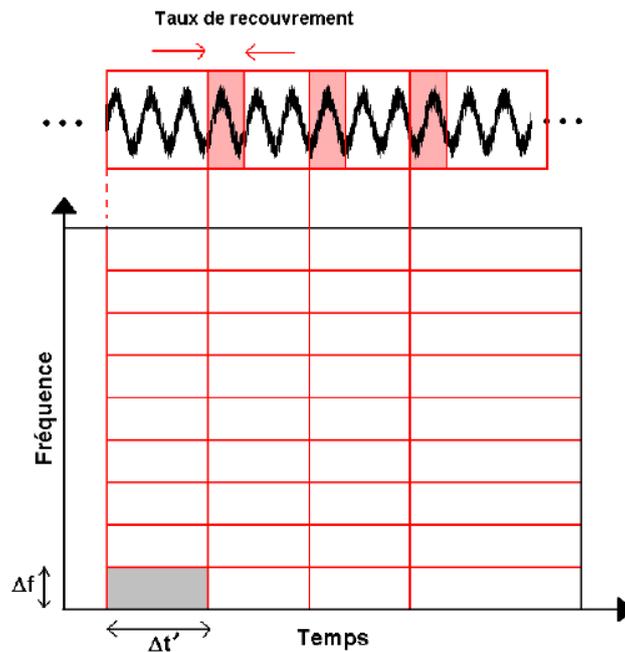


Figure 1-38 : Pavage temps-fréquence avec recouvrement [TAL 06]

Lecture et interprétation d'un spectrogramme expérimental

Un exemple de spectrogramme expérimental est illustré *Figure 1-39*. La réponse temporelle correspondante est représentée *Figure 1-40*. L'essai concerne l'étude de différentes configurations de cages souples et de géométries de squeeze film sur un banc partiel d'une architecture Turboméca. La cage souple est instrumentée de jauges de déformations afin d'analyser les phénomènes vibratoires générés. En début d'essai, l'arbre subit une montée en régime. Lorsque le rotor atteint un régime proche du nominal, la cavitation du squeeze film est déclenchée provoquant ainsi la mise en butée de la cage souple. La montée en régime se poursuit pendant 70 secondes avant d'être arrêtée.

Sur le spectrogramme *Figure 1-39*, la mise en butée de la cage souple est mise en évidence par l'enrichissement du spectre à partir de 85 secondes. Les amplitudes subissent une croissance soudaine, les ordres 1 et 2 du régime nominal sont alors prépondérants. Des raies (de fréquences négatives) modulées sur les ordres entiers font leur apparition traduisant bien le caractère quasi-périodique du mouvement lors de la mise en butée de la cage souple. Après 110-120 secondes, des sous-harmoniques d'ordres 1/2, 1/3 et 2/3 font leur apparition révélant ainsi que les touches deviennent de plus en plus violentes. Lorsque la vitesse décroît l'évènement vibratoire finit par disparaître à environ 155 secondes.

Il est *a priori* impossible de conclure uniquement à partir du spectrogramme que la raie modulée sur l'ordre 2 est de fréquence négative, une analyse full-spectrum peut en complément le confirmer. Il est aussi tout à fait possible d'implémenter une technique hybride du « full spectrum » et du « spectrogramme ». Il suffit de construire deux diagrammes temps-fréquences (fréquences positives et négatives) similaire à deux spectrogrammes, en prenant en compte le déphasage entre les signaux de deux capteurs placés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre (voir §3.2.2).

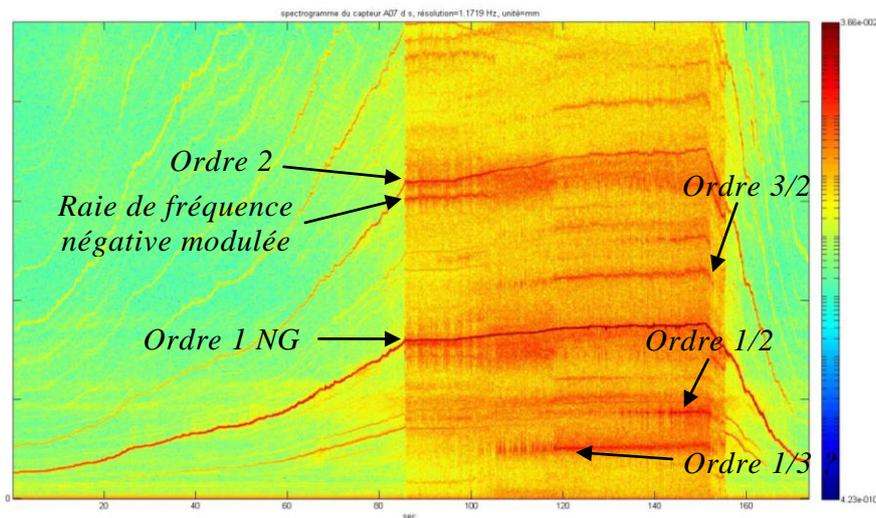


Figure 1-39 : Spectrogramme de l'évènement vibratoire lors de la montée en régime

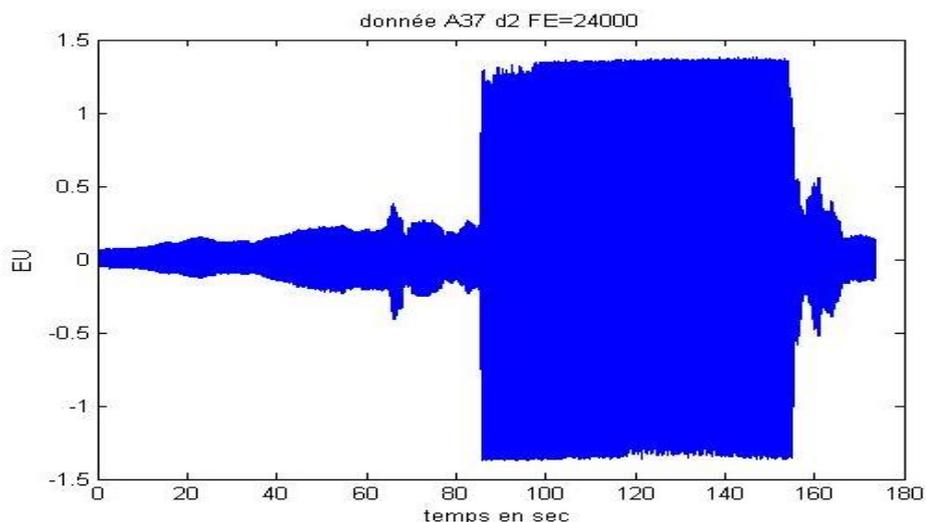


Figure 1-40 : Réponse du signal temporel des jauges de déformations

Ces deux méthodes sont par la suite utilisées pour analyser le comportement simulé d'un rotor suite à une touche rotor/stator.

4. Synthèse

Cette première partie a introduit l'état de l'art des phénomènes physiques induits par la touche rotor/stator, les modèles de contact, l'influence des paramètres dans la cinématique du contact, les méthodes de résolutions des équations non-linéaires, les techniques particulières de traitement de ces équations et de leurs solutions. Ainsi il a pu être dégagé les modèles et les outils pour analyser au mieux dans les chapitres suivants, l'impact de multi-touches rotor/stator sur la dynamique de ligne d'arbre de rotor, d'abord choisis académiques (*Chapitre 2*), puis industriels (*Chapitre 3*).

Chapitre 2 : Modélisation

1. Oscillateur académique avec double butées élastiques

La double butée rend l'oscillateur non-linéaire et plus particulièrement non régulier. Le système non-linéaire est résoluble analytiquement. Il sert à tester et assimiler la théorie sur les schémas d'intégration. Le schéma de Newmark à accélération moyenne est ici préféré à d'autres comme celui de Runge-Kutta ou des différences finies centrées (voir *Annexe I*). Il représente un bon compromis entre les critères de stabilité, vitesse de calcul, et simplicité d'implémentation. Les résultats numériques sont finalement comparés à la solution semi-analytique.

1.1 Mise en équation théorique du système à 1 degré de liberté

1.1.1 Présentation du système

Soit un oscillateur représentatif de la dynamique des rotors en 1 dimension, au sens des masses, raideurs et jeux considérés (*Figure 2-1*). Un corps rigide de masse M , se déplace sur un plan horizontal. Il est relié au bâti par un système ressort-amortisseur de raideur K et d'amortissement C . Deux butées élastiques de raideurs k_C disposées de manière symétrique simulent un éventuel contact élastique entre la masse mobile et le bâti lorsque le jeu initial j_0 est consommé.

Les paramètres M , C et K peuvent analogiquement s'associer aux matrices de masses, amortissement et raideur d'un système dynamique de rotor quelconque.

Une force d'excitation $F(t)=F_0 \cdot \cos(\omega t)$ modélise l'effort des balourds sur la ligne d'arbre.

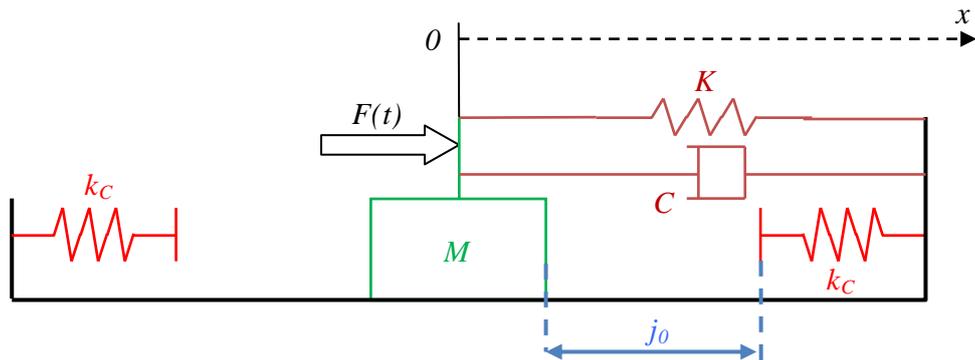


Figure 2-1 : Schéma de l'oscillateur avec double butées élastiques

L'oscillateur est testé suivant une configuration dynamique « rapide » avec des fréquences propres et d'excitation de l'ordre de celles de la dynamique des rotors. Le tableau suivant donne les paramètres fixés de l'oscillateur :

K [N/m]	C [N/m/s]	M [kg]	ω_{dsc} [rad/s]	ω [rad/s]	F_0 [N]	j_0 [m]	Temps si- mulation [s]
1^9	50	100	3162.3	1256.6	201240	4^e-4	0.5

Tableau 2-1 : Paramètres de l'oscillateur non-linéaire

1.1.2 Détermination de la solution semi-analytique

La résolution analytique est simple, puisqu'il suffit de résoudre un système masse-ressort-amortisseur. L'entrée en contact de la masse dans les butées provoque un changement soudain de la raideur du système K . En réalité, il suffit de résoudre deux équations différentielles d'ordre 2 pour pouvoir établir l'espace de l'ensemble des solutions du problème. On rappelle l'expression de l'excitation : $F(t)=F_0 \cdot \cos(\omega t)$.

Soit ε le paramètre traduisant l'état contact/non-contact du système. L'équation différentielle qui régit la dynamique du système s'écrit :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + \tilde{K}x(t) = F(t) + \varepsilon k_c j_0 \quad (2-1)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \tilde{K} = K & \text{si } |x| < j_0 \\ \varepsilon = 0 & \end{cases} \begin{cases} \tilde{K} = K + k_c & \text{si } |x| \geq j_0 \\ \varepsilon = \text{sign}(x) & \end{cases}$$

Le comportement pseudo-périodique d'un tel système est décrit par l'expression générale de sa solution :

$$x_i(t) = e^{-t/\tau} \cdot [A_i \cos(\tilde{\omega}_d t) + B_i \sin(\tilde{\omega}_d t)] + \tilde{\alpha} \cos(\omega t) + \tilde{\beta} \sin(\omega t) + \varepsilon \frac{k_c}{\tilde{K}} \quad (2-2)$$

La constante de temps τ , la pulsation propre $\tilde{\omega}_0$, le taux d'amortissement $\tilde{\xi}$, et la pseudo-pulsation propre du système amorti $\tilde{\omega}_d$, sont respectivement exprimés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tau = 2 \frac{M}{C} \\ \tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{M}} \\ \tilde{\xi} = \frac{C}{2\sqrt{\tilde{K}M}} \\ \tilde{\omega}_d = \tilde{\omega}_0 \sqrt{1 - \tilde{\xi}^2} \end{cases} \quad (2-3)$$

Les changements d'états non-contact/contact ou contact/non-contact entraînent la variation de la raideur du système K et par conséquent de sa pulsation naturelle $\tilde{\omega}_0$. Chaque paramètre du système (2-3) peut prendre alors deux valeurs possibles en fonction de la présence ou non de contact.

La solution particulière de l'équation différentielle s'écrit :

$$\begin{cases} x_p(t) = \tilde{\alpha} \cos(\omega t) + \tilde{\beta} \sin(\omega t) \\ \dot{x}_p(t) = -\omega [\tilde{\alpha} \sin(\omega t) - \tilde{\beta} \cos(\omega t)] \\ \ddot{x}_p(t) = -\omega^2 [\tilde{\alpha} \cos(\omega t) + \tilde{\beta} \sin(\omega t)] \end{cases} \quad (2-4)$$

Après injection de la solution particulière (2-4) dans l'équation différentielle (2-1), l'identification des paramètres $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ est rendue possible par le système matriciel (2-5) :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K} - \omega^2 M & C\omega \\ -C\omega & \tilde{K} - \omega^2 M \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-5)$$

Les paramètres $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ peuvent prendre deux valeurs possibles en fonction de la présence ou non de contact.

Pour pouvoir calculer les coefficients A_i et B_i , il est impératif de connaître les dates tc_i pour lesquelles le système change d'état. La suite $(tc_i)_N$ s'écrit :

$$tc_{i+1} = \min \left\{ t \in \mathbb{R}_+ / (t > tc_i \ \& \ x_i(t) = \pm j_0) \right\} \quad (2-6)$$

La condition $tc_{i+1} = \{\}$ signifie que la masse mobile n'entre plus en interaction avec les butées bilatérales et reprend alors un comportement linéaire. La solution semi-analytique du système non-linéaire est donc une suite de fonctions sinusoïdales par morceaux.

La solution en vitesse du système différentiel est exprimée par la loi suivante :

$$\dot{x}(t) = e^{-t/\tau} \left[\left(\tilde{\omega}_d B_i - \frac{A_i}{\tau} \right) \cos(\tilde{\omega}_d t) - \left(\tilde{\omega}_d A_i + \frac{B_i}{\tau} \right) \sin(\tilde{\omega}_d t) \right] + \dot{x}_p(t) \quad (2-7)$$

On suppose le déplacement et la vitesse de la masse mobile, continus notamment à chaque changement d'états ($t=tc_i$). Les coefficients A_{i+1} et B_{i+1} sont solutions du système (2-8) :

$$\begin{Bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\omega}_d tc_i) & \sin(\tilde{\omega}_d tc_i) \\ -\left(\tilde{\omega}_d \sin(\tilde{\omega}_d tc_i) + \frac{1}{\tau} \cos(\tilde{\omega}_d tc_i) \right) & \left(\tilde{\omega}_d \cos(\tilde{\omega}_d tc_i) - \frac{1}{\tau} \sin(\tilde{\omega}_d tc_i) \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} D_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

Le vecteur traduisant la condition de continuité en vitesse et déplacement à l'instant tc_i s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} D_i \\ V_i \end{Bmatrix} = e^{tc_i/\tau} \begin{Bmatrix} x_i(tc_i) - \tilde{\alpha} \cos(\omega tc_i) - \tilde{\beta} \sin(\omega tc_i) - \varepsilon \frac{k_C}{K} \\ \dot{x}_i(tc_i) + \omega(\tilde{\alpha} \sin(\omega tc_i) - \tilde{\beta} \cos(\omega tc_i)) \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

1.2 Calcul numérique par intégration temporelle

L'oscillateur avec double-butées élastiques fait l'objet dans ce paragraphe d'une analyse comparative entre deux applications du schéma de Newmark à accélération moyenne (voir *Chapitre 1 §1.3.2*).

1.2.1 Choix d'algorithmes

Deux applications du schéma de Newmark à accélération moyenne ont été testées avec :

- une étape de prédiction/correction par procédure de Newton-Raphson,
- une régularisation de la raideur de contact par une loi arctangente.

Pour rappel, les schémas de Newmark sont « implicites » et ainsi résolus à l'incrément $i+1$. Toute la difficulté réside dans l'estimation des efforts et des paramètres du système à l'incrément temporel suivant. Lorsque le système est sujet à de forts changements d'états, une procédure de Newton-Raphson doit être réalisée à chaque incrément temporel afin de converger vers une solution précise. Le pas de temps peut alors être choisi plus élevé que pour un schéma explicite. Le schéma à accélération moyenne possède la propriété d'être inconditionnellement stable et donc de ne pas diverger numériquement si le pas de temps est élevé.

Dans les problèmes de dynamique non-linéaire, le pas de temps doit être environ 100 fois inférieur à la plus petite période du système. Sur un schéma inconditionnellement stable, cette condition implique un filtrage des fréquences supérieures.

1.2.2 Régularisation numérique de la pénalité de contact par la fonction arc tangente

La régularisation numérique de la pénalité de contact par la fonction arc tangente permet de se dispenser du processus de Newton-Raphson puisque les changements d'états ne sont plus aussi brusques qu'avec une méthode de pénalité classique. Une erreur d'arrondi ne génère plus d'importants changements lors des transitions contact/non-contact puisque la non-linéarité de contact a été régularisée. Il est toutefois important de choisir une valeur de pente λ de la fonction arc tangente en corrélation avec le pas de temps choisi (*Figure 1-23*).

Le système étant symétrique, pour des raisons évidentes de simplification, les butées bilatérales ne sont traitées qu'une seule fois. Le coefficient λ choisi est le même sur chacune d'elle.

Le schéma à accélération moyenne de Newmark est celui qu'il convient d'utiliser durant la résolution numérique. On ne s'intéresse pas à la variable de déplacement x mais directement à $|x| - j_0$. La raideur dynamique régularisée K_C se calcule par la relation suivante :

$$K_C(x) = \frac{k_c}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi\lambda(|x| - j_0)) + 1 \right] \quad (2-10)$$

La *Figure 2-2* montre une interprétation graphique de la loi de régularisation de la raideur de contact de la double butée.

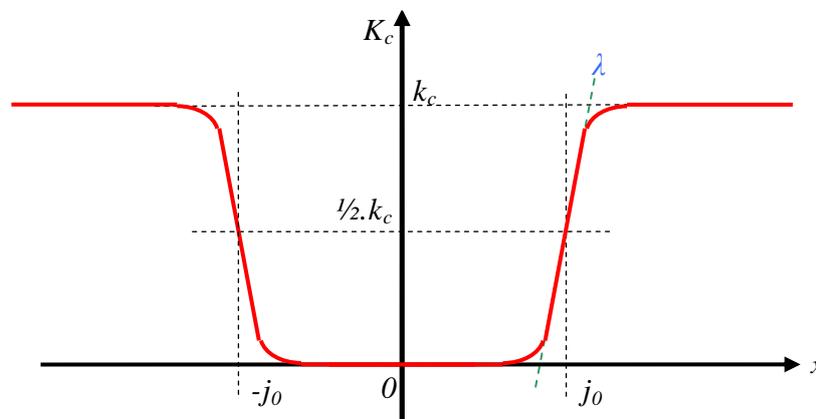


Figure 2-2 : Loi de régularisation de la raideur de contact de la double butée

L'expression suivante permet de déterminer l'effort de contact F_C de la butée sur la masse à tout instant :

$$F_C = \text{sign}(x) \cdot K_C(|x| - j_0) \quad (2-11)$$

Cet effort est ensuite inclus dans la résolution des équations de la dynamique.

1.3 Comparaison résultats numériques vs solution analytique

Dans ce sous-chapitre, deux applications du schéma de Newmark à accélération moyenne, avec procédure de Newton-Raphson et avec régularisation de la raideur, sont testées et comparées sur un système « rapide » dynamiquement représentatif d'un rotor à grande vitesse. La régularisation de la pénalité de contact par la loi arc tangente est ainsi validée.

Une série de calculs est présentée en utilisant un même pas de temps de 1^{-6} s. Ce pas de temps a été choisi de manière à obtenir une réponse précise au regard de la solution semi-analytique. Un résidu de 1^{-9} sur l'estimation des déplacements avec un maximum de 1000 itérations par incrément temporel est configuré sur la procédure de Newton-Raphson. Le coefficient λ de la loi de régularisation de la raideur de contact est fixé à une valeur de 7^{e7} m^{-1} . Les figures suivantes montrent les résultats de calculs obtenus.

Les courbes *Figure 2-3* se superposent pratiquement. Le schéma de Newmark avec procédure de Newton-Raphson est le plus précis au regard de la solution semi-analytique. Un léger déphasage est observé avec la solution obtenue par le schéma de Newmark avec régularisation de la raideur lorsqu'il n'y a pas de contact durant 2 périodes successives, *i.e.* lorsque $t = [0.404 ; 0.407]$ s. Lors de la reprise du contact le déphasage est rattrapé.

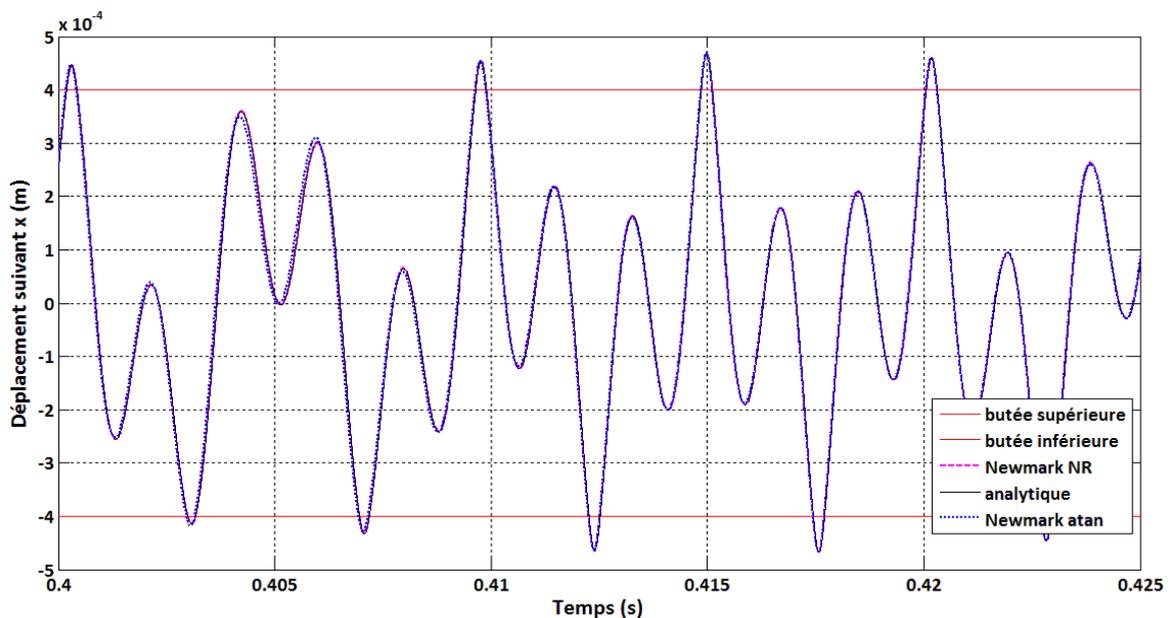


Figure 2-3 : Réponses temporelles en déplacement de l'oscillateur non-linéaire

Le schéma de Newmark avec procédure de Newton-Raphson est le plus coûteux. Le schéma de Newmark avec pénalité régularisée se révèle très précis aussi en étant aussi robuste et moins couteux en temps de calcul (*Tableau 2-2*) :

Schéma	Newmark NR	Newmark régularisé
Temps de calcul [s]	45.1	0.2

Tableau 2-2 : Temps de calcul des schémas d'intégration pour une simulation de 0.5 s

La courbe de raideur de contact du schéma de Newmark avec pénalité régularisée est disponible *Figure 2-4*. Un certain nombre de points est pris en compte dans la pente et les incurvations inférieure et supérieure de l'arctangente.

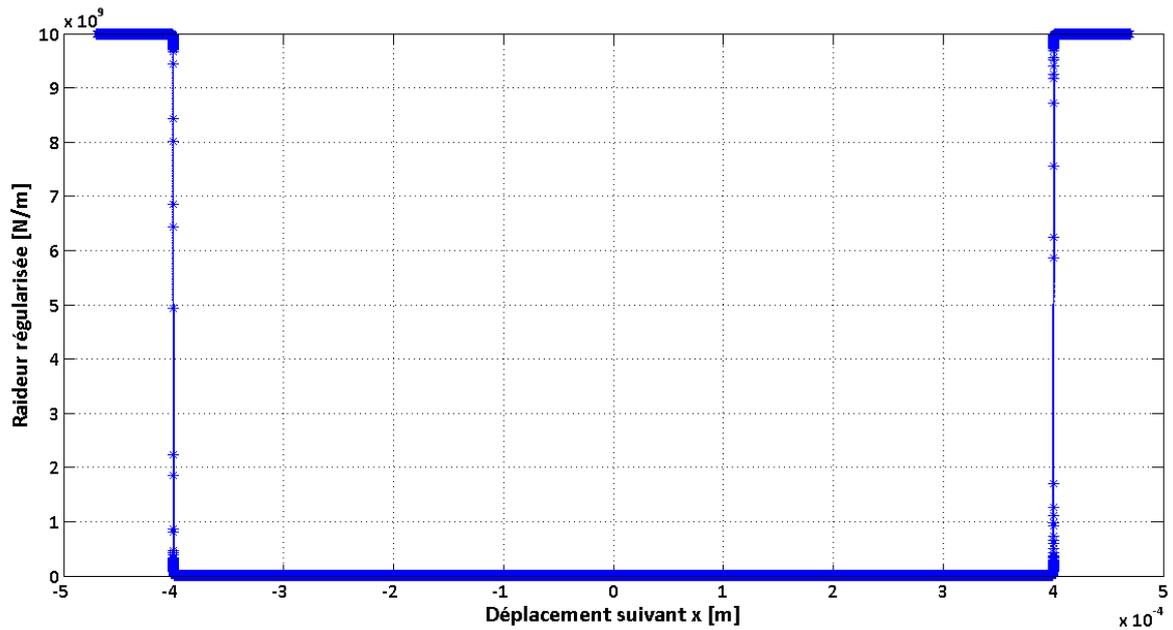


Figure 2-4 : Courbe de la raideur dynamique régularisée en fonction du déplacement ($\lambda = 7^e 7 \text{ m}^{-1}$)

La Figures 2-5 et 2-6 montrent respectivement, les réponses temporelles de la vitesse de la masse mobile et de la norme de l'effort de contact, associées à celle en déplacement (Figure 2-3). Les courbes se superposent de nouveaux mettant ainsi en relief une précision supérieure à l'ordre 1. Le léger déphasage observé précédemment, provient de l'estimation de l'effort de contact précédent l'intervalle $t = [0.404 ; 0.407]$ s. Les efforts de contact d'importantes amplitudes sont parfaitement reproduits tandis que les plus faibles, *i.e.* ceux susceptibles d'entraîner une instabilité numérique, le sont moins.

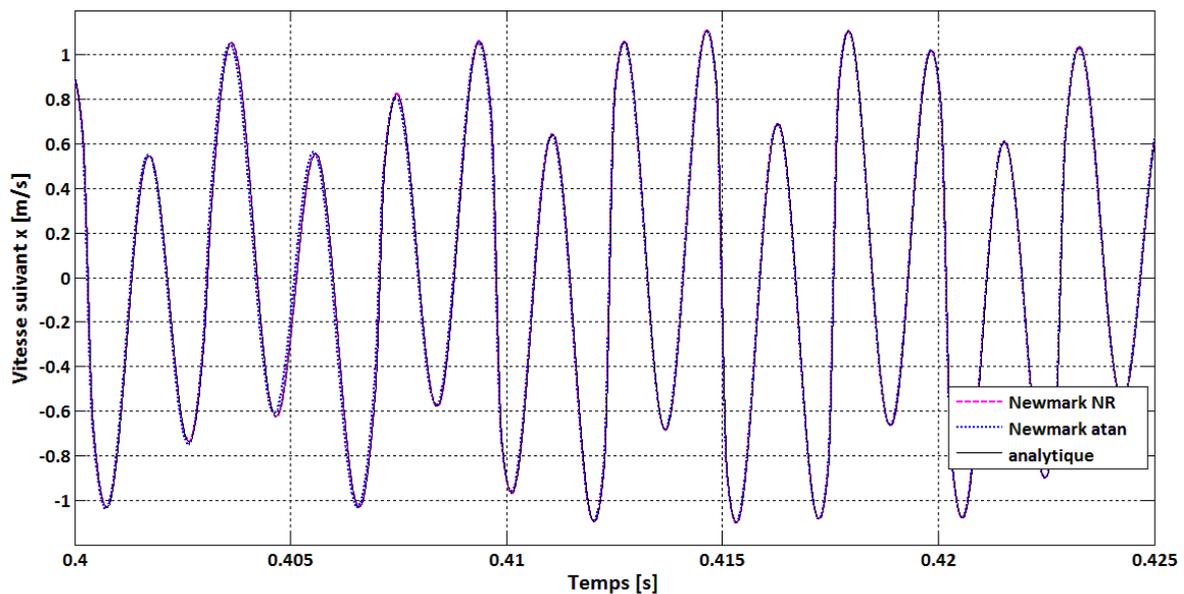


Figure 2-5 : Réponses temporelles en vitesse de l'oscillateur non-linéaire

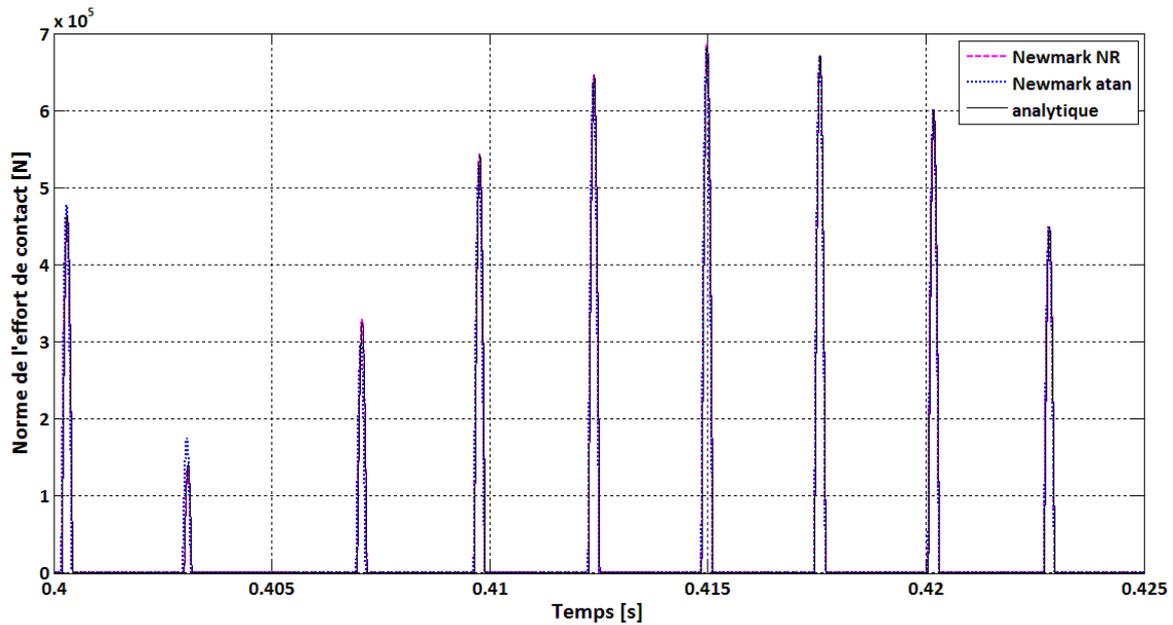


Figure 2-6 : Réponses temporelles de la norme des efforts de contact de l'oscillateur non-linéaire

1.4 Synthèse

Un oscillateur non-linéaire avec doubles butées élastiques a été mis en œuvre dans l'optique d'effectuer un choix sur un algorithme d'intégration temporelle et de valider la méthode de régularisation de la raideur de contact par une loi en arc tangente. Le schéma de Newmark à accélération moyenne avec procédure de prédiction/correction de Newton-Raphson est le plus précis et le plus robuste au regard du pas de temps. Il est cependant beaucoup plus coûteux en temps de calcul sur un oscillateur non-linéaire. Sur un modèle EF, les temps de calculs de la procédure Newton-Raphson sont encore bien plus importants. Le schéma de Newmark à accélération moyenne avec régularisation de la raideur de contact se révèle être un bon compromis entre précision, robustesse, stabilité et coût en temps de calcul. Il possède l'avantage d'offrir une bonne robustesse vis-à-vis du pas de temps choisi, et d'être simple à implémenter notamment lorsqu'un problème multi-contact est considéré.

2. Modélisation éléments finis du système multi-rotor

Un code de calcul sous environnement Matlab, simulant le comportement d'une ligne d'arbre avec prise en compte de contact rotor/stator a été développé dans le cadre de la thèse et a été dénommé ToRoS, acronyme de **Touche Rotor-Stator**. Les éléments tournants d'une ligne d'arbre sont modélisés par des éléments finis de poutre de haute précision prenant en compte les différentes sollicitations en flexion, torsion et traction/compression. Bien que la mise en équation de la dynamique des rotors soit aujourd'hui classique [LAL 98], elle est tout de même reprise ci-après car elle intègre des EF de poutre à 2 nœuds et 8 ddl/nœud. Les contacts sont simulés par deux modèles de type pénalisation en fonction de la nature du contact étudié : contact labyrinthe/joint d'étanchéité ou contact disque de turbine/anneau. Les contributions modales des stators sont introduites par des matrices de masse-ressort-amortissement au niveau du nœud situé sur la fibre neutre de la portion de rotor susceptible de toucher. La vitesse de rotation des rotors peut-être constante ou variable, mais constitue une donnée d'entrée imposée par l'utilisateur.

Le calcul de la réponse temporelle est réalisé par deux schémas d'intégration de Newmark : accélération linéaire et accélération moyenne.

2.1 Mise en équation des éléments tournants

2.1.1 Définition des repères d'étude

Il est utile dans la première phase de mise en équation de définir le vecteur vitesse instantanée de rotation dans l'espace d'un point solide de la fibre neutre du rotor décrivant un mouvement quelconque. La *Figure 2-7* présente un élément de disque circulaire à l'état initial et déformé à un instant quelconque. u , v et w représentent respectivement les déplacements suivant les axes \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z} du nœud rotor [ROQ 09], [LAL 98]. On considère 3 repères :

- $R_g(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ repère global ou absolu du référentiel Galiléen ;
- $R_l(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère intermédiaire de rotation ;
- $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère tournant lié à la section droite de la poutre en configuration déformée ;

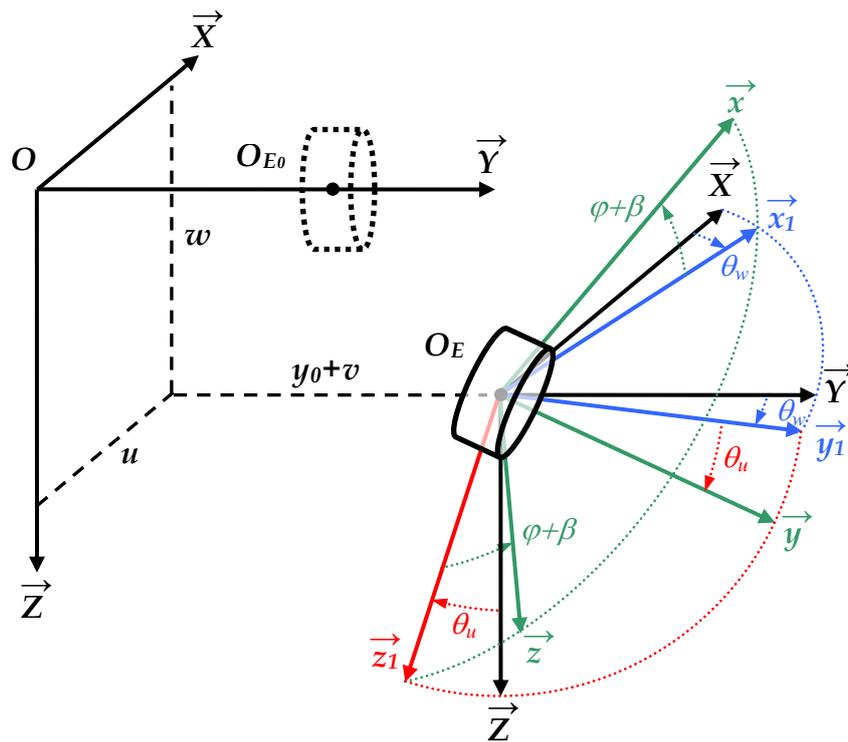


Figure 2-7 : Repères et angles de Cardan d'un élément disque dans l'espace

Le passage du repère R_g au repère tournant R est réalisé par l'intermédiaire de 3 rotations successives (*Figure 2-8*) autour de :

- $\vec{Z} \Leftrightarrow \theta_w$ (Lacet)
- $\vec{x}_1 \Leftrightarrow \theta_u$ (Tangage)
- $\vec{y} \Leftrightarrow \theta_v = \varphi + \beta$ (Roulis)

L'angle de « Roulis » de la poutre θ_v est composé de la rotation de corps rigide φ et de l'angle de torsion β .

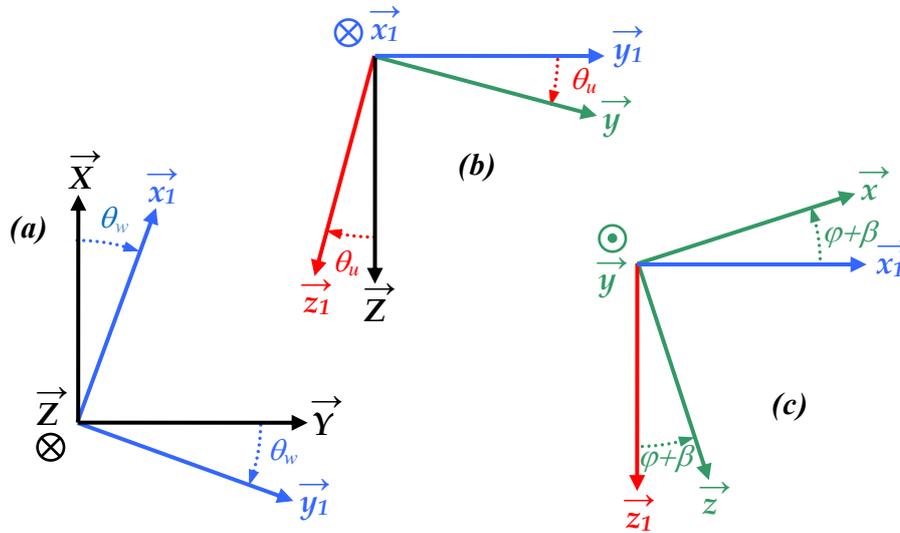


Figure 2-8 : Schémas plans des angles de Cardan entre le repère tournant et le repère global. Angles de : (a) Lacet (indirect), (b) Tangage (indirect), (c) Roulis

Par définition, la vitesse de rotation du solide s'écrit dans les différents repères :

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}_w \vec{Z} + \dot{\theta}_u \vec{x}_1 + (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \vec{y} \quad (2-12)$$

A l'aide de la *Figure 2-8*, on établit les relations de passage entre les différents repères, afin d'exprimer les composantes du vecteur vitesse instantanée de rotation dans le repère global R_g :

$$\vec{\Omega}_{R/R_g}^R = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\theta}_w \cos(\theta_u) \sin(\varphi + \beta) + \dot{\theta}_u \cos(\varphi + \beta) \\ \dot{\theta}_w \sin(\theta_u) + \dot{\varphi} + \dot{\beta} \\ \dot{\theta}_w \cos(\theta_u) \cos(\varphi + \beta) + \dot{\theta}_u \sin(\varphi + \beta) \end{array} \right\}_{R_g} \quad (2-13)$$

2.1.2 Expressions des énergies des éléments tournants

Disque rigide

On considère un disque symétrique infiniment rigide, soumis à une vitesse de rotation variable. Le disque étant indéformable, son énergie de déformation est donc nulle, il suffit seulement de calculer l'énergie cinétique. Le champ de déplacement est décrit par la relation :

$$\overrightarrow{OO_D} = \overrightarrow{OO_{D_0}} + \vec{q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_g} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{R_g} = \begin{Bmatrix} u \\ v + y_0 \\ w \end{Bmatrix}_{R_g} \quad (2-14)$$

Par application de la formule de Huygens, l'énergie cinétique du disque s'obtient en ajoutant l'énergie de translation du solide à l'énergie de rotation :

$$2E_{C|R_g}^D = M_D \vec{V}_{O_D}^{R_g} \cdot \vec{V}_{O_D}^{R_g} + \vec{\Omega}_{R/R_g}^R \cdot [J_{|O_D}] \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g}^R \quad (2-15)$$

Où les différentes quantités sont :

- M_D la masse du disque ;
- V_{O_D} le vecteur vitesse instantané du centre du disque avec O fixe dans R_g ;
- $[J_{|O_D}]$ l'opérateur d'inertie du disque. Les axes principaux du disque étant \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} , et compte tenu des symétries, l'opérateur d'inertie s'écrit :

$$[J_{|O_D}] = \begin{bmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Tout calcul fait, l'expression exacte de l'énergie cinétique se factorise selon l'équation suivante :

$$2E_C^D = M_D V_D^2 + I_{D_x} \omega_x^2 + I_{D_y} \omega_y^2 \quad (2-17)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} V_D^2 = \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \\ \omega_w^2 = \dot{\theta}_w^2 \cos^2(\theta_u) + \dot{\theta}_u^2 \\ \omega_u^2 = \dot{\theta}_w^2 \sin^2(\theta_u) + (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})\dot{\theta}_w \sin(\theta_u) \end{cases}$$

En se plaçant dans le cadre des petites perturbations, cette quantité peut être approchée par un développement limité en considérant toutes les quantités angulaires, φ exceptée et leurs dérivées, petites devant l'unité. Il est classique de travailler avec des équations de mouvement linéarisées, obtenues à partir des énergies développées à l'ordre 2. Dans le cas présent, une telle approximation se traduirait par la suppression du couplage faible entre les vibrations latérales et torsionnelles de la turbine. L'expression de l'énergie cinétique est développée en gardant les termes d'ordre 3 :

$$2E_C^D = M_D (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_{D_x} (\dot{\theta}_w^2 + \dot{\theta}_u^2) + I_{D_y} \left[(\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})\dot{\theta}_w \theta_u \right] \quad (2-18)$$

Après application du principe de Lagrange sur l'expression de l'énergie cinétique du disque rigide, le système d'équations se révèle. Les différents couplages torsion/flexion sont négligés, seuls les couplages avec la rotation de corps rigide (φ et ses dérivées) sont conservés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^D}{\partial \dot{u}} \right) = M_D \ddot{u} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^D}{\partial \dot{v}} \right) = M_D \ddot{v} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^D}{\partial \dot{w}} \right) = M_D \ddot{w} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^D}{\partial \dot{\theta}_u} \right) - \frac{\partial E_C^D}{\partial \theta_u} = I_{D_x} \ddot{\theta}_u - I_{D_y} \dot{\varphi} \dot{\theta}_w \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^D}{\partial \dot{\beta}} \right) = I_{D_y} (\ddot{\varphi} + \ddot{\beta}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^D}{\partial \dot{\theta}_w} \right) = I_{D_x} \ddot{\theta}_w + \ddot{\varphi} \theta_u + \dot{\varphi} \dot{\theta}_u \end{array} \right. \quad (2-19)$$

Arbre

Dans un premier temps l'arbre est modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli en rotation. La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est obtenue par extension du cas du disque. L'énergie d'une tranche de poutre, de longueur infinitésimale dy , est celle d'un disque de même dimension. Ainsi, en intégrant l'équation (2-18) sur la longueur L de l'arbre, il vient :

$$E_C = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[S(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_x(\dot{\theta}_w^2 + \dot{\theta}_u^2) + I_p \left((\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \dot{\theta}_w \theta_u \right) \right] dy \quad (2-20)$$

L'expression de l'énergie de déformation d'une poutre de Timoshenko en rotation s'écrit :

$$2E_D = \int_0^L \left[ES \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + EI_x \left(\left(\frac{\partial \theta_w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_u}{\partial y} \right)^2 \right) + GI_p \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + kGS \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \theta_w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_u \right)^2 \right) \right] dy \quad (2-21)$$

Où k est le facteur de correction pour la rigidité en cisaillement et est calculé par la relation suivante [COW 66] :

$$k = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2} \quad (2-22)$$

Avec m ratio du rayon intérieur sur rayon extérieur de l'élément poutre ($m=R_i/R_e$).

Dans le cas simplifié où on considère une poutre de Bernoulli, on suppose :

$$\begin{cases} \theta_w = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \theta_u = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2-23)$$

Le dernier terme de l'équation (2-21) peut alors être supprimé.

Un terme non linéaire du 3^{ème} ordre du champ de déformation peut être pris en compte afin de considérer la contribution d'une force axiale F (exemple de chargement d'un tirant). La contribution de ce terme non linéaire se manifeste dans l'équation de l'énergie de déformation par la relation suivante :

$$E_{D_f} = \frac{F}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2-24)$$

L'équation suivante révèle l'expression du travail d'un couple axial C appliqué à l'élément rotor de longueur L . Ce type d'effort est non conservatif, son travail virtuel se calcule en projetant le couple dans les axes liés à la section [DUF 98] :

$$\delta W_{couple} = C \int_0^L \left[\theta_w \delta \left(\frac{\partial \theta_u}{\partial y} \right) - \theta_u \delta \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial y} \right) \right] dy \quad (2-25)$$

Balourd

Les balourds sont modélisés par des masses ponctuelles m_B situées à une distance r_B de l'axe de rotation. La Figure 2-9 illustre la position d'un balourd B sur une section rotor de centre C. Une approximation est faite sur les axes de projection : les axes \vec{x}_1 et \vec{z}_1 sont respectivement remplacés par les axes \vec{X} et \vec{Z} . Cette simplification est justifiée par le fait qu'on limite l'approximation des efforts générés par le balourd à l'ordre 2.

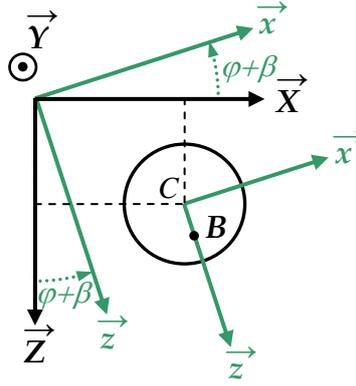


Figure 2-9 : Illustration du positionnement du balourd sur le repère global

En considérant les notations introduites *Figure 2-9*, le champ de déplacement associé au balourd est déterminé par la relation :

$$\overrightarrow{OB}_{R_g} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \begin{Bmatrix} u + r_B \sin(\varphi + \beta) \\ v + y_C \\ w + r_B \cos(\varphi + \beta) \end{Bmatrix}_{R_g} \quad (2-26)$$

Ainsi la vitesse instantanée du balourd s'écrit :

$$\vec{V}_{B_{R_g}} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + r_B (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \cos(\varphi + \beta) \\ \dot{v} \\ \dot{w} - r_B (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \sin(\varphi + \beta) \end{Bmatrix}_{R_g} \quad (2-27)$$

Le balourd étant considéré comme une masse ponctuelle, son énergie interne est nulle. L'expression de l'énergie cinétique du balourd est donnée par la relation suivante :

$$2E_C^B = m_B \left\| \vec{V}_{B_{R_g}} \right\|^2 \quad (2-28)$$

Soit :

$$2E_C^B = m_B \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + r_B^2 (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2r_B (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) (\dot{u} \cos(\varphi + \beta) - \dot{w} \sin(\varphi + \beta)) \right] \quad (2-29)$$

L'équation (2-29) montre que le balourd excite le rotor en torsion et fait apparaître un couplage fort entre l'angle de torsion et la position angulaire de l'arbre. La masse du balourd s'intègre dans celle du rotor, certains termes sont ainsi supprimés. De même, très souvent on néglige β et ses dérivées successives devant φ et ses dérivées successives.

Le théorème de Lagrange est appliqué à l'expression de l'énergie cinétique apportée par le balourd. Les dérivées temporelles des ddl (u, v, w, β) sont supposées négligeables devant les dérivées de l'angle de rotation rotor ($\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$). Le terme d'accélération angulaire $\ddot{\varphi}$ est conservé en raison des fortes décélérations constatées durant des situations accidentelles. Après simplification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^B}{\partial \dot{u}} \right) = m_B r_B (\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^B}{\partial \dot{w}} \right) = -m_B r_B (\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^B}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_C^B}{\partial \beta} = m_B r_B^2 \ddot{\varphi} \end{cases} \quad (2-30)$$

Les paliers

Dans les turbomoteurs, les lignes d'arbres sont supportées par des paliers à squeeze film, *i.e.* des paliers à roulements auxquels sont associés une cage souple (type cage d'écureuil) afin de maîtriser la raideur introduite. Un film d'huile très fin est disposé entre la cage souple et sa butée assurant ainsi, un amortissement conséquent lors des passages de vitesses critiques de paliers. Avec l'hypothèse des petits déplacements, les coefficients de raideur et d'amortissement peuvent être calculés en linéarisant les équations de Reynolds autour de la position d'équilibre. Ces valeurs sont généralement données par le constructeur. Les paliers exercent alors un travail externe qui a pour expression :

$$\delta W_{\text{palier}} = [F_u \quad F_w] \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta w \end{Bmatrix} \quad (2-31)$$

Avec F_u et F_w les composantes de la force généralisée agissant sur les paliers. Après linéarisation, ces forces sont réécrites sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx}^p & k_{xz}^p \\ k_{zx}^p & k_{zz}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx}^p & c_{xz}^p \\ c_{zx}^p & c_{zz}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

2.1.3 Modélisation EF du rotor

L'arbre est modélisé par des éléments de poutre à 2 nœuds, type Euler Bernoulli, de sections circulaires et constantes. La *Figure 2-10* représente un EF rotor de longueur L avec ses contributions en flexion, torsion et traction/compression. Utiliser des EF de haute précision en traction/compression et en torsion affine la précision dans le cas de rotor avec des changements de sections brutaux. Afin de respecter la continuité imposée par la théorie de la mé-

canique des milieux continus, les pentes des déplacements, axial et angulaire de torsion, sont laissées libres. Ainsi chaque nœud porte 10 ddl inter-élément.

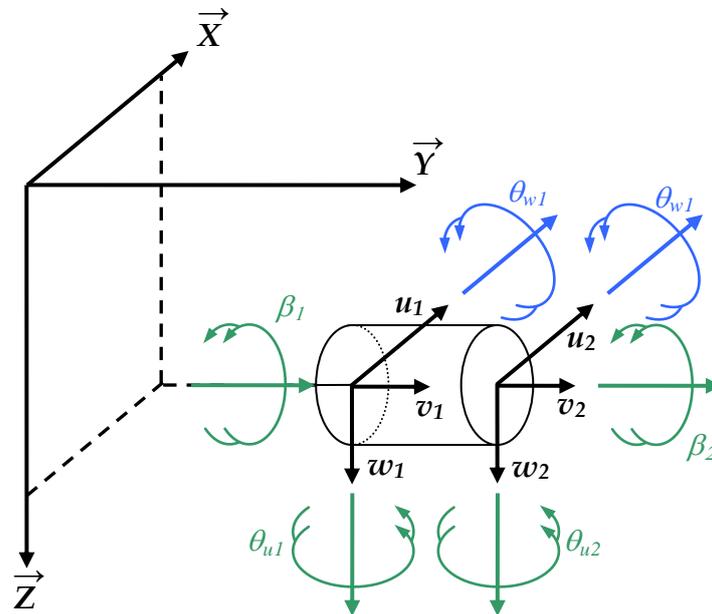


Figure 2-10 : Schéma d'un élément fini rotor

Les fonctions de formes cubiques suivantes sont donc utilisées pour les 3 types de mouvement :

$$\begin{cases} N_1(y) = 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \\ N_2(y) = -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \\ N_3(y) = \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \\ N_4(y) = \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{cases} \quad (2-33)$$

Avant la procédure d'assemblage, chaque contribution est introduite indépendamment des autres. La taille des matrices élémentaires est ainsi réduite, et l'utilisateur est alors libre de choisir si oui ou non il veut la prendre en compte durant ses calculs.

La modélisation EF du rotor retenu est disponible dans l'Annexe 3.

2.2 Modélisation du contact frottant

La modélisation du contact frottant requiert la définition des frontières des domaines schématisées *Figure 1-17*. La frontière $\Gamma_c^{(i)}$ s'identifie à l'aide des degrés de liberté impliqués lors du contact :

- degrés de libertés du rotor : on se limite aux déplacements suivant \vec{X} et \vec{Z} au nœud rotor où le contact aura potentiellement lieu afin de définir $\Gamma_c^{(1)}$
- degrés de libertés du stator : on considère un diaphragme mobile mais rigide, les déplacements suivant x et z du stator forment la frontière $\Gamma_c^{(2)}$

On considère que le contact a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'arbre, et que les sections du rotor et du stator sont circulaires, constantes et rigides dans ce plan.

2.2.1 Définition des normales au contact

Soient O_R et O_S les centres respectifs des sections de rotor et stator, \vec{n} le vecteur normal de contact, et \vec{t} le vecteur tangentiel. δ_n représente la pénétration du rotor dans le stator, j_0 est la valeur du jeu initial. Les sections circulaires du rotor et du stator sont supposées coaxiales à l'état de repos. Afin de simplifier les équations, le jeu rotor/stator j_0 à une valeur constante.

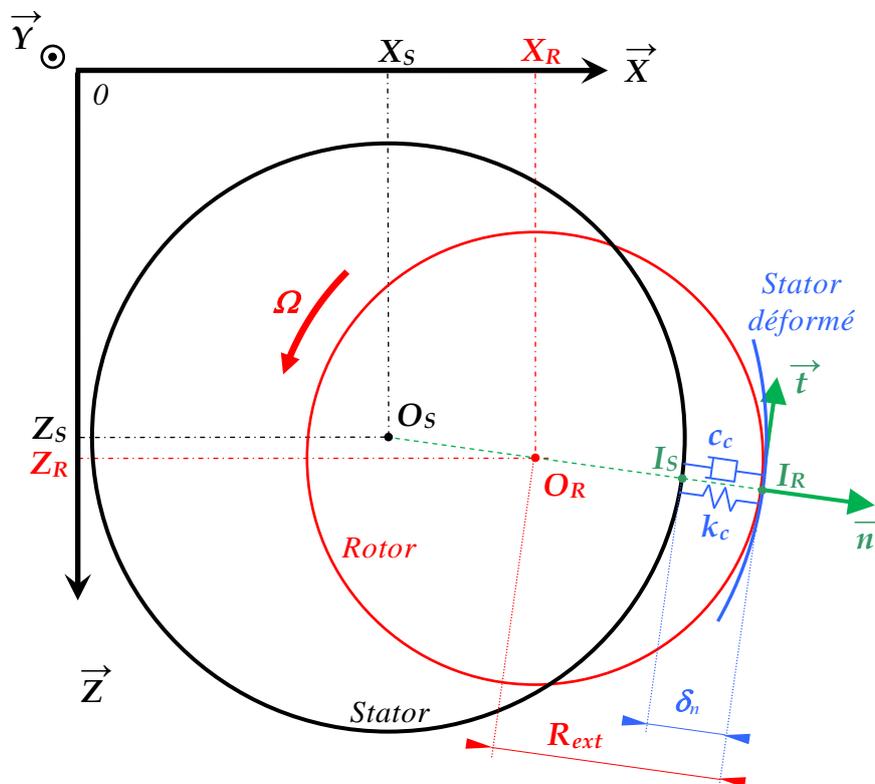


Figure 2-11 : Schéma 2D d'une section de rotor pénétrant une section de stator

Le vecteur unitaire \vec{n} n'est donc défini que par la position des centres du rotor et du stator et se calcule avec la relation :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{O_S O_R}}{\|\overrightarrow{O_S O_R}\|} = \frac{1}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} \begin{Bmatrix} X_R - X_S \\ 0 \\ Z_R - Z_S \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

En présence de frottement, il est utile de définir un vecteur unitaire \vec{t} qui sert à déterminer le sens et la direction de l'effort de friction. Par convention, celui-ci est perpendiculaire à \vec{n} et \vec{Y} . La base $(\vec{Y}, \vec{n}, \vec{t})$ forme une base orthonormée directe :

$$\begin{cases} \vec{t} = \vec{Y} \wedge \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} X_R - X_S \\ 0 \\ Z_R - Z_S \end{Bmatrix} \\ \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} \begin{Bmatrix} Z_R - Z_S \\ 0 \\ -(X_R - X_S) \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2-35)$$

L'effort perçu par le rotor lors du contact, possède une composante liée à l'effort normal et une autre à l'effort tangentiel de frottement. Le vecteur de contact F_C peut-être décrit par la relation :

$$\vec{F}_C = -(F_N \cdot \vec{n} + F_T \vec{t}) \quad (2-36)$$

2.2.2 Evaluation du jeu entre les structures

Le jeu dynamique entre deux corps est défini comme la distance minimale entre deux pièces proches. Le choix de la définition du vecteur normal repose sur l'approche maître-esclave des méthodes de pénalité. Les nœuds maîtres, dans ce cas d'étude, sont portés sur ceux du rotor. La distance minimale entre les deux pièces est donc définie par le vecteur normal aux nœuds frontières du rotor. Soit les points I_R et I_S des corps 1 (rotor) et 2 (stator) représentés *Figure 2-12*. Par convention, une interpénétration positive indique qu'un contact a lieu entre les deux corps. L'expression du jeu dynamique δ_n s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{\delta}_n = \delta_n \cdot \vec{n} \\ \delta_n = \overrightarrow{I_S I_R} \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (2-37)$$

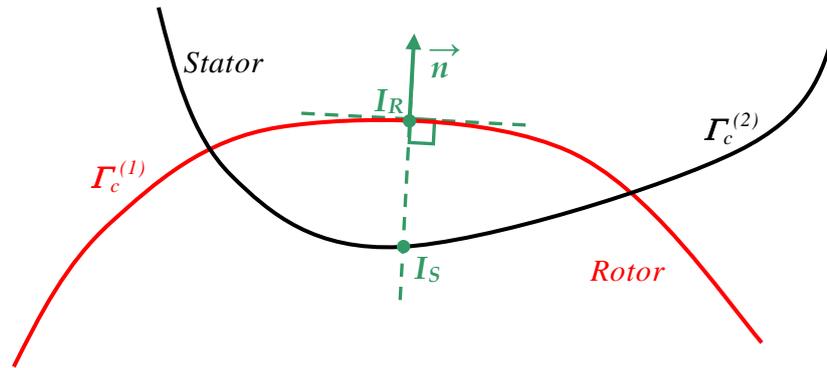


Figure 2-12 : Schéma du jeu dynamique entre les deux corps en contact

On suppose la pénétration δ_n positive lorsqu'il y a contact et négative sinon. La définition des points I_R et I_S Figure 2-12, peut s'écrire sous une autre forme en utilisant les coordonnées des points O_R et O_S dans les équations du système :

$$\begin{cases} \delta_n = (\overline{O_S O_R} - j_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \\ \delta_n = \sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2} - j_0 \end{cases} \quad (2-38)$$

Avec j_0 le jeu initial.

Cette estimation simple du jeu permet d'évaluer un effort de contact afin de l'introduire dans les équations de la dynamique.

2.2.3 Calcul de la composante normale de l'effort de contact

Conformément aux résultats de la thèse de Bartha [BAR 00], il est montré qu'une loi non-linéaire de pénalité amortie s'adapte bien aux touches sur les joints labyrinthes, tandis que la loi linéaire de pénalité amortie convient bien aux contacts au niveau des disques rigides.

Deux modèles de traitement du contact sont retenus (Figure 1-22). Les efforts normaux de contact entre joints labyrinthes et carters d'étanchéité sont modélisés par une loi non-linéaire de pénalité amortie (2-39) :

$$\begin{cases} F_N = K_C \delta_n^m (1 + C_C \dot{\delta}_n) \\ m > 1 \end{cases} \quad (2-39)$$

L'effort normal de tout autre type d'interaction rotor/stator est calculé par une loi linéaire de pénalité amortie :

$$F_N = (K_C \delta_n + C_C \dot{\delta}_n) \quad (2-40)$$

Le choix des modèles présentés implique de prendre en compte une vitesse de pénétration afin de simuler les pertes d'énergie pendant le contact durant la déformation des matériaux, par un terme d'amortissement. La vitesse de pénétration se présente comme la dérivée temporelle de la fonction de pénétration δ_n :

$$\dot{\delta}_n = \frac{d\delta_n}{dt} = \frac{(X_R - X_S)(\dot{X}_R - \dot{X}_S) + (Z_R - Z_S)(\dot{Z}_R - \dot{Z}_S)}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} \quad (2-41)$$

Ces modèles de simulation de contact sont couplés avec une méthode de régularisation de la raideur et de l'amortissement de contact par une loi arc tangente. Son adaptation aux modèles retenus se traduit par la relation suivante :

$$\begin{cases} K_C(\delta_n) = \frac{k_C}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi\lambda(\delta_n - d)) + 1 \right] \\ C_C(\delta_n) = \frac{c_C}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi\lambda(\delta_n - d)) + 1 \right] \end{cases} \quad (2-42)$$

2.2.4 Calcul de la composante tangentielle de l'effort de contact

La prise en compte du frottement implique l'estimation d'une vitesse de glissement v_g au niveau du point de contact, évaluée par la vitesse tangentielle relative du système rotor/stator au point de contact (*Figure 2-11*) dans le repère global :

$$v_g = \left[\left(\frac{d\overline{OI}_R}{dt} \right)_{R_g} - \left(\frac{d\overline{OI}_S}{dt} \right)_{R_g} \right] \vec{i} \quad (2-43)$$

Il est possible d'exprimer v_g par la relation (2-44). R_{orb} ($= \|\overline{O_S O_R}\|$) et ω_{prec} représentent respectivement, l'amplitude de déplacement orbital et la vitesse angulaire de précession autour de l'axe \vec{y} , du nœud au centre du rotor à tout instant. $\dot{\phi}$ est la vitesse de rotation du rotor autour de l'axe \vec{y} et R_{ext} le rayon extérieur de la section de rotor concernée.

$$v_g = \omega_{prec} \cdot R_{orb} + \dot{\phi} \cdot R_{ext} \quad (2-44)$$

Tous calculs faits, l'expression de la vitesse de glissement s'écrit :

$$v_g = \frac{(\dot{X}_R - \dot{X}_S)(Z_R - Z_S) - (\dot{Z}_R - \dot{Z}_S)(X_R - X_S)}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} + \dot{\phi} R_{ext} \quad (2-45)$$

La direction du frottement est guidée par le signe de la vitesse de glissement. Une loi de frottement de Coulomb dynamique régularisée a été développée et testée. Analogue à celle

de la raideur de contact par la fonction arc tangente, elle possède les propriétés d'une fonction mathématique continue et de dérivée continue en 0. v_{REF} représente une vitesse de référence permettant de piloter la pente à vitesse nulle (facteur $1/v_{REF}$). Les paramètres μ_d et μ_s représentent respectivement le coefficient de frottement dynamique et statique :

$$\mu(v_g) = \frac{v_g}{2v_{REF}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}}}{1 + \frac{|v_g|}{2v_{REF}\mu_d} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}}\right)} + \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}}}{\left(1 + \frac{|v_g|}{2v_{REF}\mu_d} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}}\right)\right)^2} \right) \quad (2-46)$$

Avec $\mu_d \leq \mu_s$

Cette formule, bâtie sur des fractions polynomiales, remplace la fonction arc tangente dans la régularisation de la loi de Coulomb.

La Figure 2-13 montre les deux modélisations possibles de la loi de frottement exprimée équation (2-46).

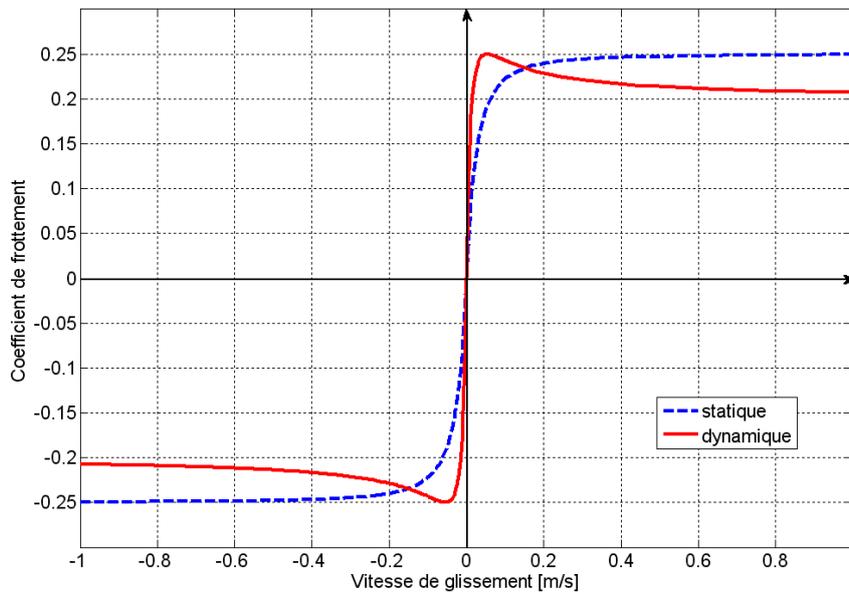


Figure 2-13 : Courbe d'évolution du coefficient de frottement régularisé ; *statique* : $\mu_s = \mu_d = 0.25$ et $v_{ref} = 0.1$, *dynamique* : $\mu_s = 0.25$, $\mu_d = 0.2$ et $v_{ref} = 0.033$

Le maximum μ_s est atteint pour une valeur v_{gMAX} . Lorsque le coefficient de frottement dynamique μ_d est égal au coefficient de frottement statique μ_s , le maximum local n'est jamais atteint ($v_{gMAX} \rightarrow +\infty$), le coefficient de frottement est donc piloté par une loi de Coulomb classique :

$$v_{gMAX} = \frac{2\mu_d v_{REF}}{\left(1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}\right) \sqrt{1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}}} \quad (2-47)$$

Cette régularisation de la loi de frottement s'adapte donc à tout type de loi de Coulomb (dynamique et statique) et améliore la robustesse et la stabilité numérique des schémas d'intégration temporelle.

La composante tangentielle de l'effort de contact est calculée par la relation suivante :

$$F_T = \mu(v_g).F_N \quad (2-48)$$

2.2.5 Implémentation du modèle de contact dans l'équation matricielle dynamique

L'effort de contact défini dans les deux derniers chapitres présente un caractère non-linéaire en regard des degrés de libertés du système rotor/stator. Pour l'introduire efficacement dans une équation dynamique matricielle, on différencie dans son expression, un terme linéaire et un autre non-linéaire. La relation suivante exprime le vecteur de l'effort de contact perçu par le rotor dans le repère global (\vec{X}, \vec{Z}) . Par mesure de simplification du formalisme, δ_n devient δ et $\mu(v_g)$ devient μ :

$$\begin{cases} \vec{F}_{C_R} = -F_N(\delta, \dot{\delta})(\vec{n} + \mu\vec{t}) \\ \vec{F}_{C_R} = -\frac{F_N(\delta, \dot{\delta})}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} \left(\begin{Bmatrix} X_R - X_S \\ Z_R - Z_S \end{Bmatrix} + \mu \begin{Bmatrix} Z_R - Z_S \\ -(X_R - X_S) \end{Bmatrix} \right) \end{cases} \quad (2-49)$$

Dans un premier cas, la loi linéaire de pénalité amortie est traitée en considérant un amortissement de contact nul. On pose $U = X_R - X_S$ et $W = Z_R - Z_S$, les déplacements relatifs respectivement suivant l'axe \vec{X} et \vec{Z} du nœud rotor par rapport au nœud stator. L'expression du vecteur de l'effort de contact s'écrit dans ce cas :

$$\vec{F}_C = -\frac{K_C(\delta)(\sqrt{U^2 + W^2} - j_0)}{\sqrt{U^2 + W^2}} \begin{Bmatrix} U + \mu W \\ W - \mu U \end{Bmatrix} = -\left(K_C(\delta) - \frac{j_0}{\sqrt{U^2 + W^2}} \right) \begin{Bmatrix} U + \mu W \\ W - \mu U \end{Bmatrix} \quad (2-50)$$

Ainsi sont différenciés un terme « linéaire » de l'expression de l'effort de contact et un autre « non-linéaire ». Les différentes contributions sont remplacées par leur valeur à l'incrément i et $i+1$:

$$\vec{F}_{C_{i+1}} = -K_C(\delta_i) \begin{bmatrix} 1 & \mu_i \\ -\mu_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{i+1} \\ W_{i+1} \end{Bmatrix} + \frac{K_C(\delta_i)j_0}{\sqrt{U_i^2 + W_i^2}} \begin{Bmatrix} U_i + \mu_i W_i \\ W_i - \mu_i U_i \end{Bmatrix} \quad (2-51)$$

Le premier terme « linéaire » est réécrit sous forme de produit d'une matrice de raideur avec un vecteur réduit de déplacement nodal à l'incrément $i+1$. La matrice extraite (K_{i+1}^{VAR}) est injectée dans la matrice de raideur du système dynamique complet. Le deuxième terme est

écrit sous forme d'un vecteur d'efforts (F_{i+1}^{NL}) reliant les vecteurs de déplacements nodaux à l'incrément i par une loi non-linéaire :

$$\begin{cases} K_{i+1}^{VAR} = K_C(\delta_i) \begin{bmatrix} 1 & \mu_i \\ -\mu_i & 1 \end{bmatrix} \\ F_{i+1}^{NL(K)} = \frac{K_C(\delta_i) j_0}{\sqrt{U_i^2 + W_i^2}} \begin{Bmatrix} U_i + \mu_i W_i \\ W_i - \mu_i U_i \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2-52)$$

Le processus est adapté de façon analogue à la composante issue de l'amortissement de contact. Toutes simplifications faites, on obtient :

$$\begin{cases} C_{i+1}^{VAR} = C_C(\delta_i) \begin{bmatrix} 1 & \mu_i \\ -\mu_i & 1 \end{bmatrix} \\ F_{i+1}^{NL(C)} = \frac{C_C(\delta_i) \cdot \omega_{prec} \cdot R_{orb}}{\sqrt{U_i^2 + W_i^2}} \begin{Bmatrix} W_i - \mu_i U_i \\ -U_i - \mu_i W_i \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2-53)$$

$$\text{Avec } \omega_{prec} \cdot R_{orb} = \frac{\dot{U}_i \cdot W_i - \dot{W}_i \cdot U_i}{\sqrt{U_i^2 + W_i^2}} \quad (\text{voir (2-44) et (2-45)})$$

Dans le cadre d'utilisation de la loi non-linéaire de pénalité amortie exprimée en (2-39), le calcul de la raideur et de l'amortissement de contact variable est modifié de manière à inclure les termes non-linéaires introduits par le réel m , facteur de puissance :

$$\begin{cases} K_C^{NL}(\delta_i) = K_C(\delta_i) \cdot \delta_i^{m-1} \\ C_C^{NL}(\delta_i) = C_C(\delta_i) \cdot \delta_i^m \end{cases} \quad (2-54)$$

L'équation matricielle dynamique du système à l'incrément temporel $i+1$ s'écrit :

$$[M_{i+1}] \{\ddot{q}_{i+1}\} + [C_{i+1}] \{\dot{q}_{i+1}\} + [K_{i+1}] \{q_{i+1}\} = \{F_{i+1}^{EXT}\} \quad (2-55)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} [M_{i+1}] = [M_{lin}] \\ [C_{i+1}] = [C_{lin}] + \dot{\varphi}_{i+1} [G_{lin}] + [C_{i+1}^{VAR}(q_i, \dot{q}_i)] \\ [K_{i+1}] = [K_{lin}] + \ddot{\varphi}_{i+1} [G_{lin}^{COR}] + [K_{i+1}^{VAR}(q_i, \dot{q}_i)] \\ \{F_{i+1}^{EXT}\} = \{F_{i+1}^{balourd}\} + \ddot{\varphi}_{i+1} \{g_{lin}^{t/rot}\} + \{F_{i+1}^{NL}(q_i, \dot{q}_i)\} \end{cases}$$

2.3 Synthèse

Dans le but de pouvoir modéliser des rotors industriels, il a été présenté la mise en œuvre de la méthode des éléments finis qui prend en considération un élément de poutre de haute précision en flexion mais aussi en torsion et en mouvement longitudinal, et qui intègre des lois type pénalité amortie, linéaire pour les contacts au niveau des disques et/ou des butées paliers, et non-linéaire au niveau des joints labyrinthes. Dans ces lois de contacts, raideurs et amortissements sont régularisés avec une loi de type arc tangente. Le coefficient de frottement liant force de frottement tangentiel à la force normale est quant à lui modéliser par une loi originale composée de fractions polynomiales qui assure aussi la régularisation.

La méthode des éléments finis décrite associée aux lois de contacts et de frottement est implémentée dans le code de calcul ToRoS, développé sous Matlab.

3. Rotor de Jeffcott

Un rotor de Jeffcott à 2 ddl, résolvable analytiquement a été développé par Jiang [JIA 00]. Il établit, en fonction des paramètres modaux du système, différentes zones d'existence des comportements à la touche décrits dans le premier paragraphe du *Chapitre 1*. La méthode de gestion du contact par la pénalité permet de retranscrire chaque phénomène conformément à ce que Jiang a prédit avec son modèle à 2 ddl. Le modèle de Jiang est utilisé dans ce sous-chapitre dans le but de comparer la méthode d'intégration temporelle de Newmark avec la réponse analytique développé dans le domaine fréquentiel.

3.1 Présentation du rotor de Jeffcott avec contact rotor/stator et solution analytique

Le rotor de Jeffcott se compose d'un arbre sans masse, de raideur k_s , d'amortissement c , et d'un disque de rayon R_{disk} et de masse m , placé au milieu de l'arbre en 0. Le rotor qui tourne à la vitesse de rotation ω est supporté par des liaisons pivots en chaque extrémité de l'arbre. Le système est considéré parfaitement symétrique en 0 selon les 3 axes \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z} . Sous l'effet du balourd me , le jeu r_0 peut être consommé, le disque rentre alors en contact avec un stator cylindrique de rigidité k_b ([JIA 00], [JIA 05], [JIA 07], [JIA 09]).

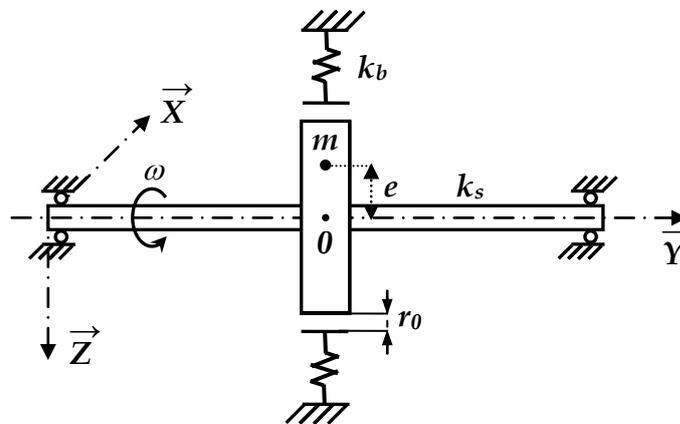


Figure 2-14 : Schéma 1D du rotor de Jeffcott

Soit r l'amplitude d'excentricité orbitale du centre du rotor, et Θ un paramètre d'état qui prend la valeur 1 quand il y a contact rotor/stator et 0 sinon. Avec u et w les déflexions latérales du rotor, l'équation du mouvement en flexion du rotor s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \Theta k_b \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = me\omega^2 \begin{Bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{Bmatrix} \quad (2-56)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} r = \sqrt{u^2 + w^2} \\ \Theta = \frac{\text{sign}(r - r_0) + 1}{2} \end{cases}$$

A noter que, compte tenu de la position centrale du disque, il n'y a pas de phénomène gyroscopique sur le premier mode de flexion.

Jiang dans son étude, réécrit les équations (2-56) sous formes adimensionnées. Les équations sont alors résolues dans le domaine fréquentiel. La pulsation propre du système rotor/stator couplée s'écrit :

$$\omega_{\text{couplée}} = \sqrt{\frac{k_s + k_b}{m}} \quad (2-57)$$

Le graphe de la *Figure 2-15* présente l'existence des différentes zones de comportements du rotor après une touche rotor-stator, dans le plan (Ω, μ) , avec : $\Omega = \omega/\omega_{\text{couplée}}$ et les paramètres indiqués dans le *Tableau 2-3*. Les valeurs sont calculées en fonction d'un jeu de paramètres adimensionnés précisés dans [JIA 00]. Elles n'ont pas réellement de signification physique, néanmoins elles ont l'avantage de permettre un calcul rapide (pas de temps élevé) et d'éprouver la modélisation développée par rapport aux résultats de la littérature.

k_s [N/m]	k_b [N/m]	c [N/m.s]	m [kg]	r_0 [m]	R_{disk} [m]	μ	e [m]
100	2500	5	1	0.2	4	0.2	0.1905

Tableau 2-3 : Paramètres du rotor de Jeffcott

La limite DF marque la frontière d'existence du contact permanent en précession indirecte sous toutes ses formes (dry whirl/whip). La ligne HP caractérise une bifurcation d'Hopf à partir de laquelle le contact partiel et quasi-périodique est obtenu par excitation balourd. $\Omega_l = 0.154$ et $\Omega_u = 0.854$ indiquent l'intervalle de vitesse pour lequel l'excentricité orbitale du rotor est supérieure au jeu r_0 en l'absence de contact (résonance dans le domaine linéaire). Elle indique aussi l'existence du contact permanent en précession directe (« full annular rub »). La limite DW détermine la vitesse de rotation minimum pour laquelle le contact permanent en précession indirecte est déclenché par excitation balourd. Dans la zone (0) coexistent deux comportements : linéaire sans contact, et le contact permanent en précession indirecte (déclenché par un effort asynchrone ou un coup de marteau par exemple). Le niveau de balourd n'est pas suffisamment important pour déclencher la touche. Dans la zone (1) coexistent, le contact permanent en précession indirecte ainsi que le contact permanent en précession directe. La zone (2) se caractérise par la coexistence du contact partiel en précession directe ou indirecte (quasi-périodique) et du contact permanent en précession indirecte. La zone « dry whip » met en relief le domaine où le contact permanent en précession indirecte est déclenché par excitation balourd et dans laquelle, seul le « dry whip » est possible. Un comportement linéaire sans touche ou un contact permanent en précession directe coexistent dans la zone (3). Tous les comportements présentés précédemment coexistent dans la zone (4).

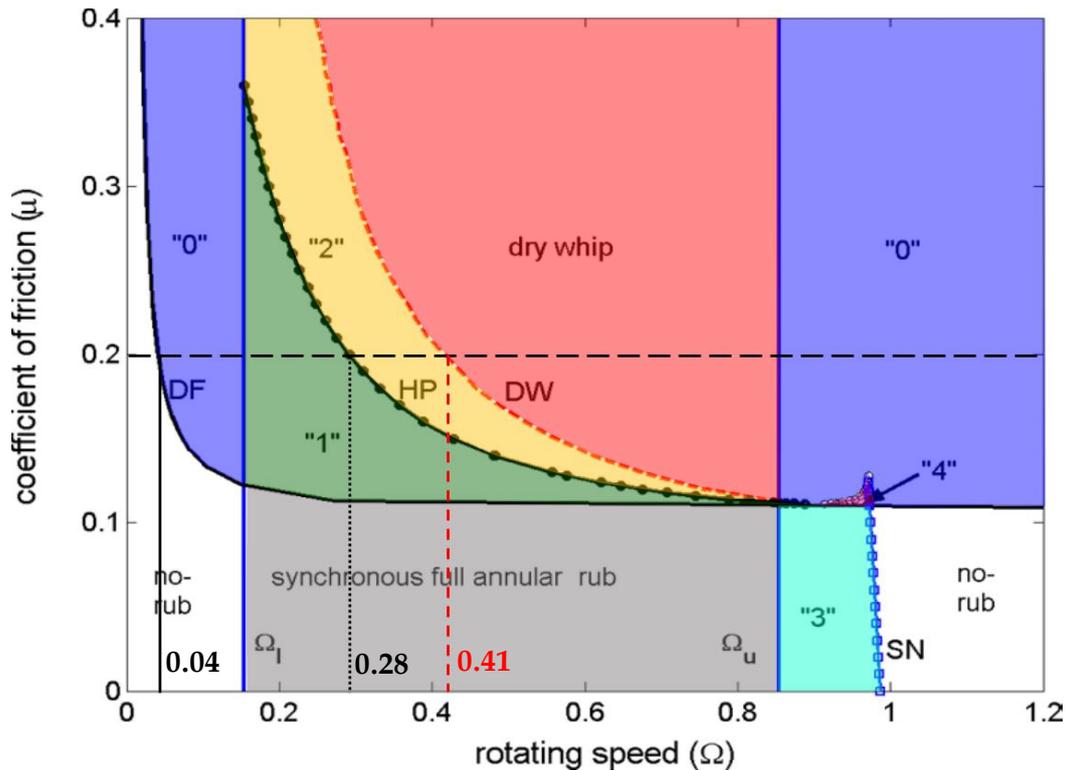


Figure 2-15 : Graphique (Ω, μ) présentant les zones d'existence des différents comportements déclenchés suite à un contact rotor/stator [JIA 00]

3.2 Résolution numérique du système de Jeffcott avec contact rotor/stator

Dans l'optique de montrer que le modèle de contact par pénalité permet de retranscrire les comportements usuels d'une ligne d'arbre soumise à un contact rotor/stator, une réponse non-linéaire du rotor de Jeffcott a été construite à partir de résultats de simulations temporelles.

La pulsation propre du système couplé est de 50 rad/s, soit environ 8 Hz. La réponse non-linéaire est développée de la manière suivante :

- un calcul temporel est réalisé en un point de fonctionnement jusqu'à établissement d'un régime périodique ou quasi-périodique
- l'amplitude maximale d'excentricité du nœud rotor est placée dans le graphique à la vitesse de rotation considérée
- les derniers vecteurs de déplacements de la simulation temporelle précédente sont sauvegardés et réutilisés comme conditions initiales de la simulation suivante après incrémentation de la vitesse de rotation

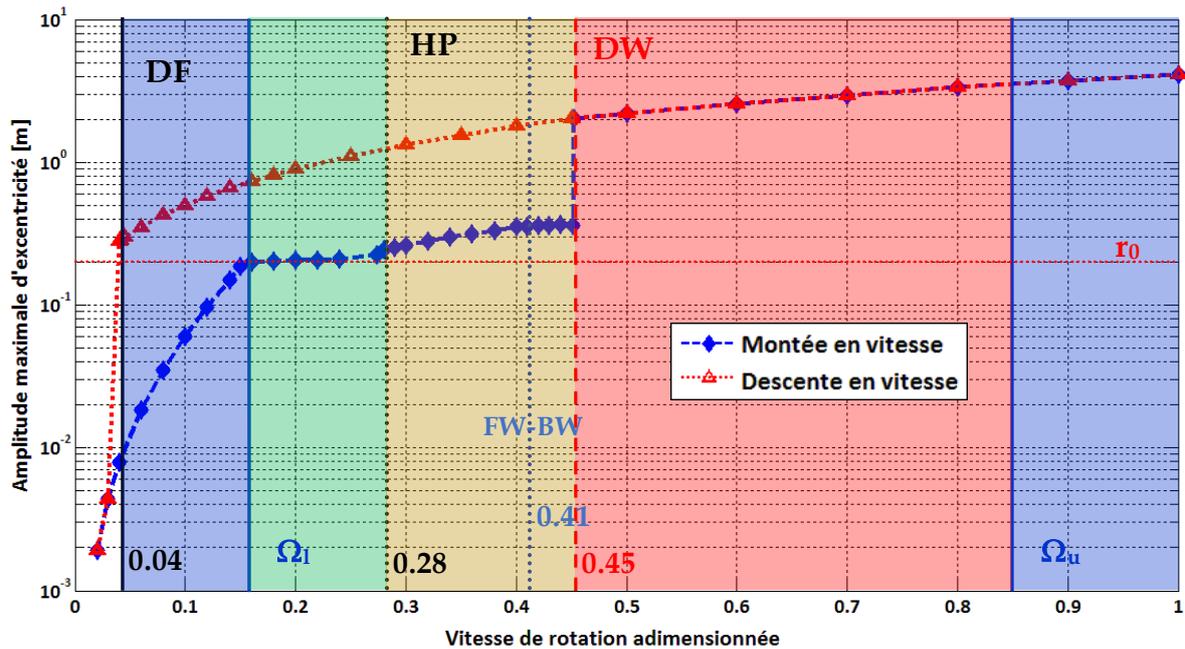


Figure 2-16 : Réponse non-linéaire issue de l'intégration temporelle du rotor de Jeffcott

La réponse non-linéaire permet de caractériser les différents comportements suite à une touche rotor/stator lors d'une montée puis une descente en vitesse. La Figure 2-16 montre l'évolution de l'amplitude maximale d'excentricité orbitale en fonction de la vitesse de rotation adimensionnée. Le rotor entre en interaction avec le stator à une vitesse Ω d'environ 0.16 et suit alors un mouvement de contact permanent en précession directe. L'amplitude maximale est relativement faible et proche du jeu qui vient d'être consommé.

Cas $\Omega=0.24$

La Figure 2-17 présente le mouvement orbital du centre du rotor, à une vitesse $\Omega=0.24$, lorsque le régime est établi. Le cercle rouge symbolise le jeu radial rotor/stator. On observe le phénomène permanent du contact, le rotor pénètre continuellement le stator et la pénétration se stabilise à une valeur constante, ce qui est montré sur l'évolution de l'effort normal tracé par la Figure 2-18.

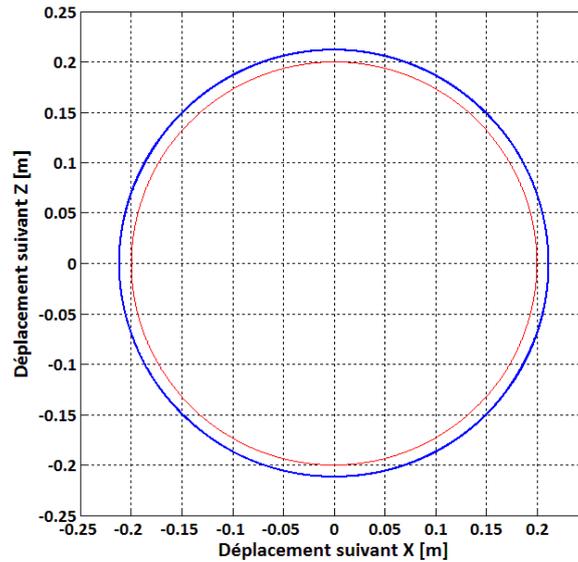


Figure 2-17 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.24$, mouvement orbital du centre du rotor

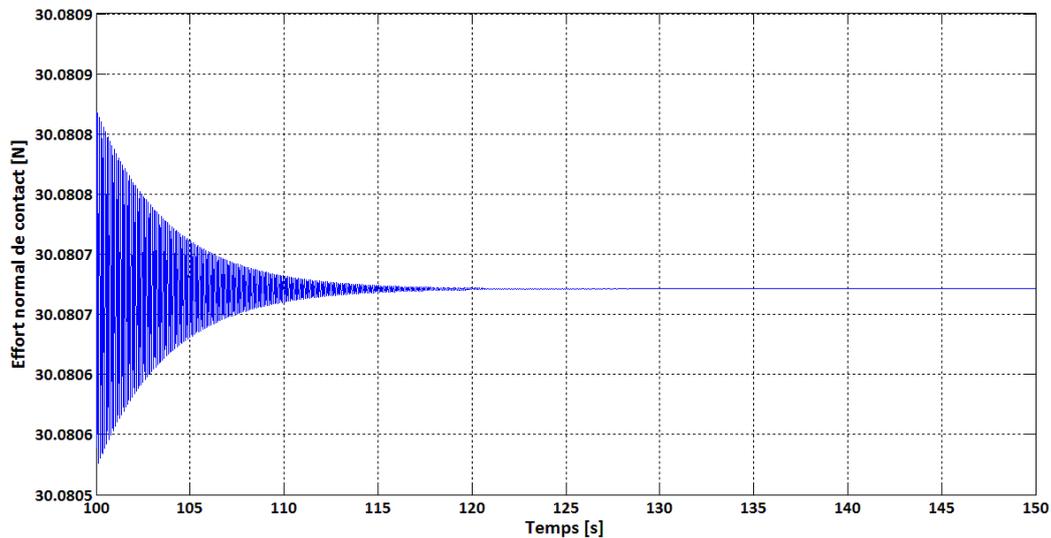


Figure 2-18 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.24$, évolution temporelle de l'effort normal de contact

La Figure 2-19 montre l'évolution dans le temps de la vitesse instantanée de précession. Elle représente la vitesse périphérique de précession du rotor (voir (2-44) et (2-45)). Cette vitesse est obtenue avec la relation (2-58) :

$$v_{prec} = \omega_{prec} \cdot r = \frac{\dot{u} \cdot w - \dot{w} \cdot u}{r} \quad (2-58)$$

La vitesse instantanée de précession finit aussi par converger vers une valeur constante et positive confirmant ainsi qu'il s'agit bien d'un mouvement en précession directe.

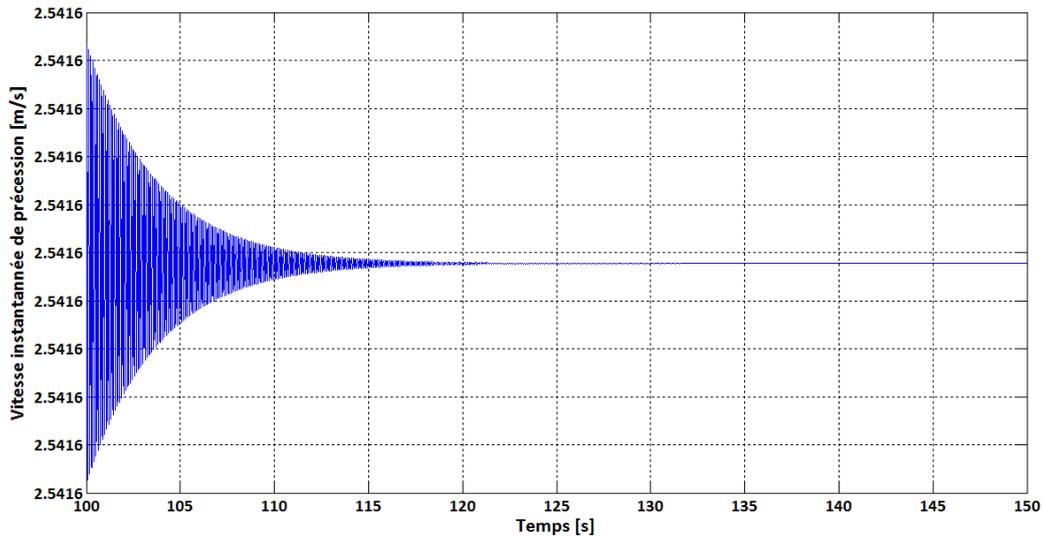


Figure 2-19 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.24$, évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession

La Figure 2-20 montre le spectre complet (full-spectrum Chapitre 1 §3.2.1) du signal de déplacement du centre du rotor dans le plan XZ (Figure 2-14). Un seul pic de fréquence synchrone à celle de la vitesse de rotation prédomine. Ce type de spectre est caractéristique d'un contact permanent en précession directe.

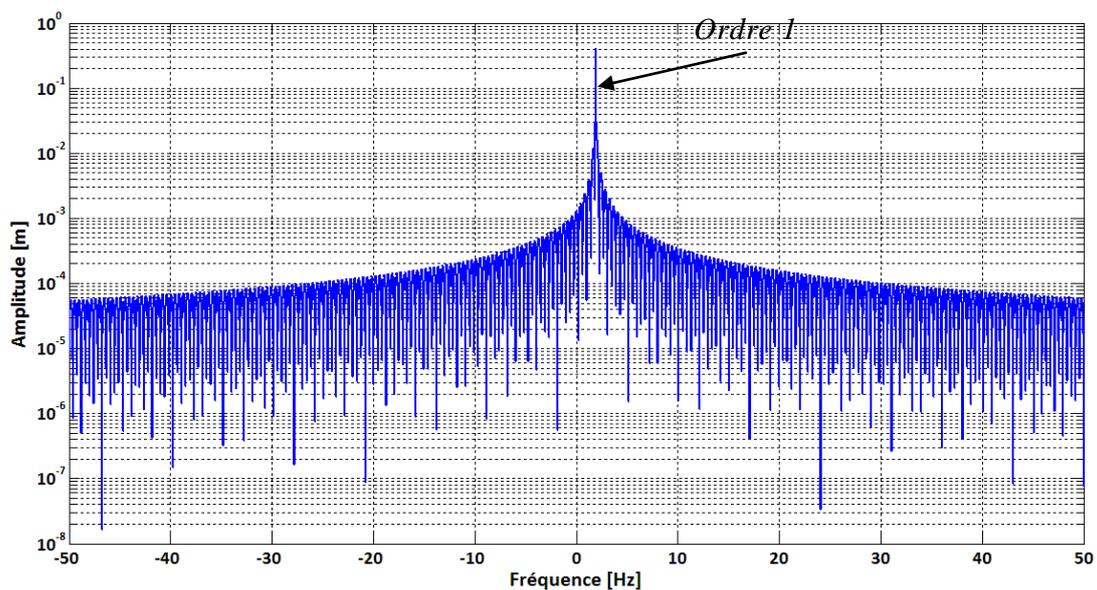


Figure 2-20 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.24$, spectre complet des déplacements

Le contact permanent en précession directe cesse lorsque la vitesse adimensionnée Ω atteint 0.28, un contact partiel quasi-périodique en précession directe est ainsi déclenché.

Cas $\Omega=0.28$

La *Figure 2-21* présente le mouvement orbital du centre du rotor à $\Omega=0.28$. Le caractère partiel du contact se distingue par un mouvement orbital du centre du rotor qui s'étend en dedans et en dehors du jeu. La pénétration maximale du rotor dans le stator augmente singulièrement.

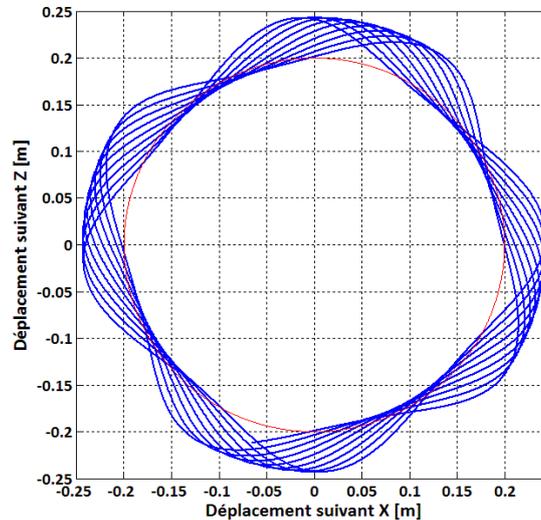


Figure 2-21 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.28$, mouvement orbital du centre du rotor

L'évolution temporelle de l'effort normal de contact sur une période de rotation du rotor, lorsque le régime quasi-périodique est établi, est tracée *Figure 2-22*. L'effort de contact oscille entre une valeur nulle et une valeur maximum (110 N) bien plus importante que celle obtenue lors d'un contact permanent en précession directe. Le caractère partiel du contact est parfaitement reproduit. Le rotor touche le stator environ 4 fois par cycle de rotation du rotor.

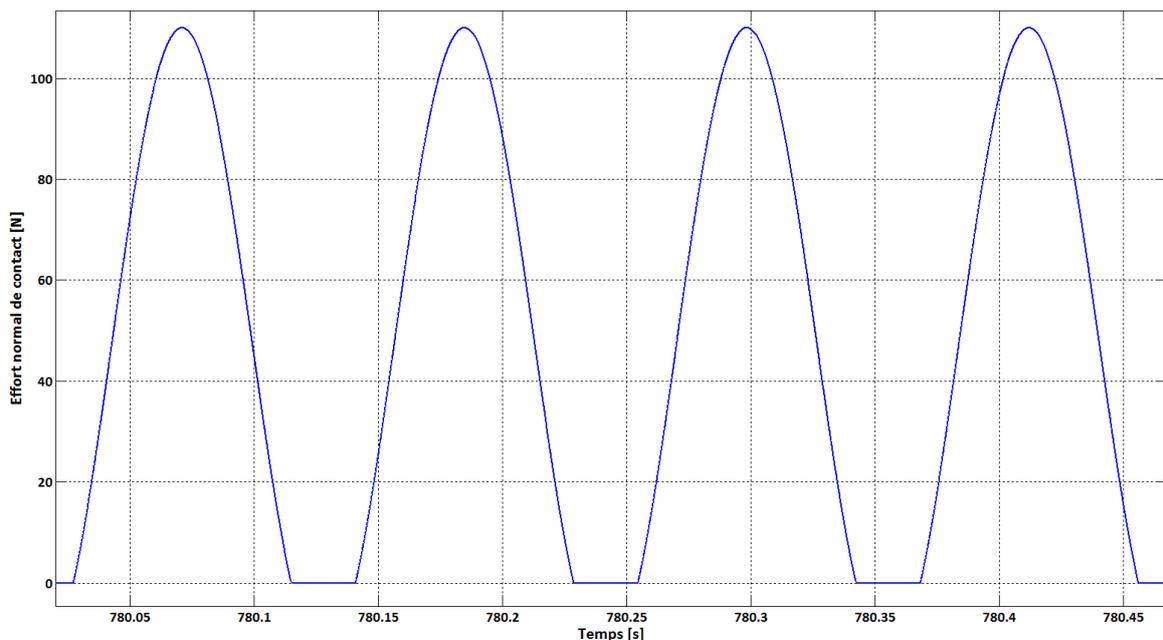


Figure 2-22 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.28$, évolution temporelle de l'effort normal de contact sur un cycle de rotation du rotor : T_{rot}

La vitesse instantanée de précession reste positive tout au long de la simulation (*Figure 2-23*), le contact partiel est effectué en précession directe. La période d'oscillation de la vitesse instantanée de précession et des rebonds est légèrement inférieure à $\frac{1}{4}$ de celle de rotation du rotor.

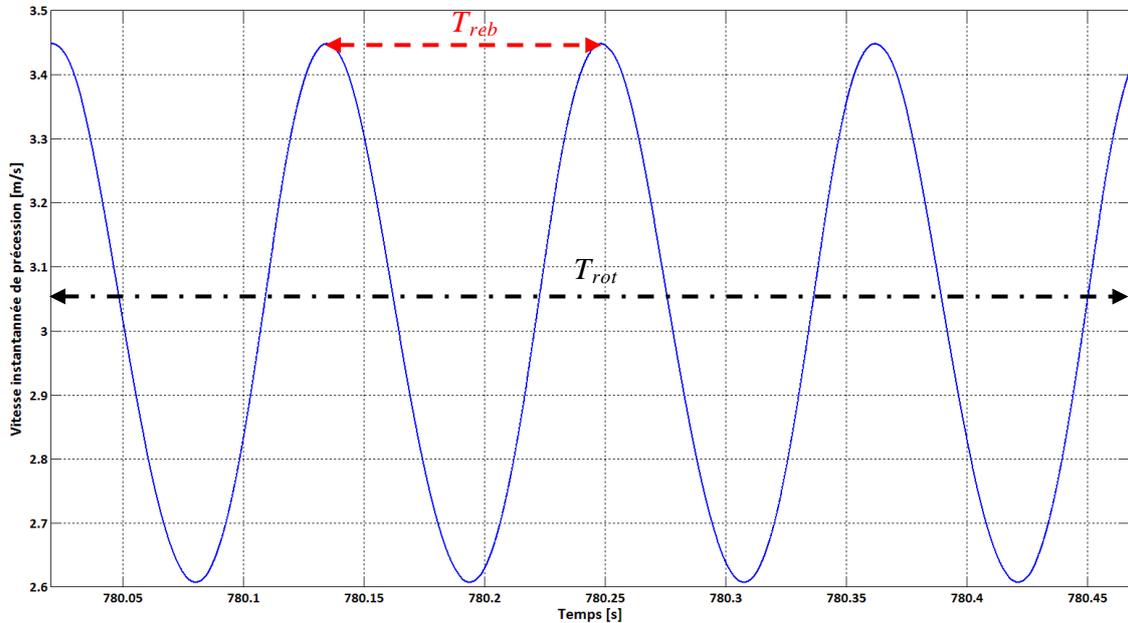


Figure 2-23 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.28$, évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession sur un cycle de rotation du rotor : T_{rot}

L'orbite est non-linéaire avec une précession directe. Elle se décompose sur les différents ordres avec des orbites linéaires de précession directe et indirecte. La *Figure 2-24* montre l'apparition de sur-harmoniques de fréquences positives et négatives. Le pic d'ordre 1 reste prépondérant en termes d'amplitude de déplacement. Les sur-harmoniques de fréquences positives sont symétriques de celles de fréquences négatives par rapport l'ordre 1. Soit T_{reb} la période d'oscillation des touches, T_{rot} et f_{rot} respectivement la période et la fréquence de rotation du rotor (ordre 1) alors la modulation en fréquence Δf se déduit de la relation suivante :

$$\Delta f = \frac{T_{rot}}{T_{reb}} \cdot f_{rot} \quad (2-59)$$

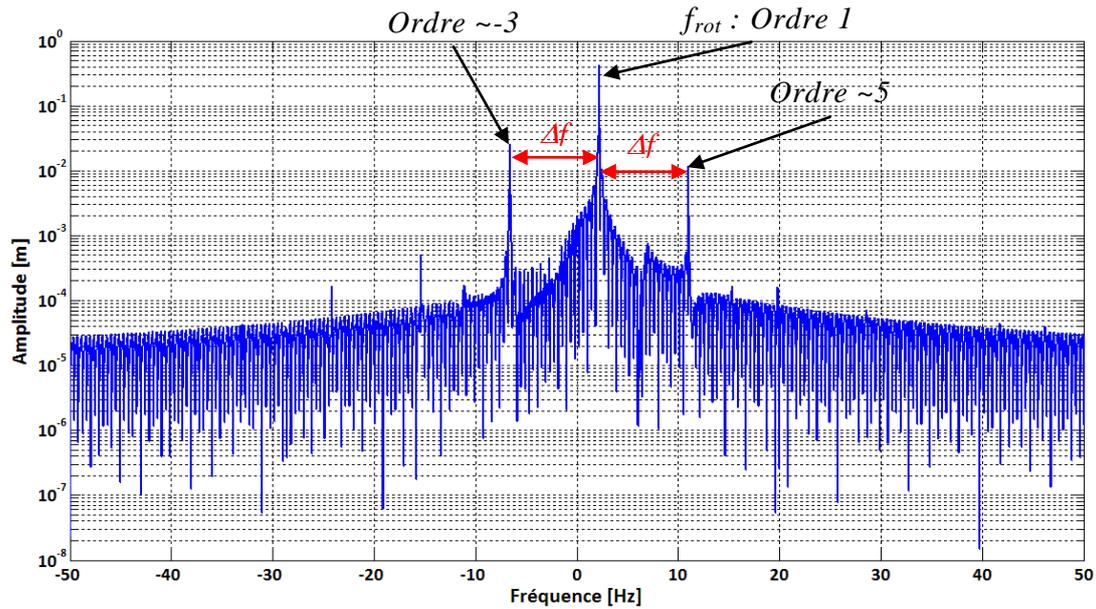


Figure 2-24 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.28$, spectre complet des déplacements

L'émergence d'un premier pic de fréquence négative d'ordre $-n$ se traduit physiquement par l'observation de $n+1$ touches par cycle de rotation du rotor ($n+1 \sim 4$ ici).

Le contact partiel en précession directe est conservé tant que $\Omega < 0.38$. Ensuite démarre alors une transition vers un contact partiel avec des modes de précession indirecte de plus en plus importants. Il est difficile d'approcher les vitesses exactes pour lesquelles la transition démarre et prend fin, en raison de la présence de la zone de bifurcation de type Hopf. L'influence des conditions initiales ou des paramètres de contact sur le comportement du rotor s'avère plus grande.

Cas $\Omega=0.38$

La Figure 2-25 présente le mouvement orbital du centre du rotor pour une vitesse $\Omega=0.38$. Les boucles effectuées par le centre du rotor durant la pénétration ne sont plus aussi prononcées, elles se replient sur elle mêmes mettant ainsi en valeur le bref changement de sens de précession. La pénétration maximale du rotor dans le stator a encore augmenté.

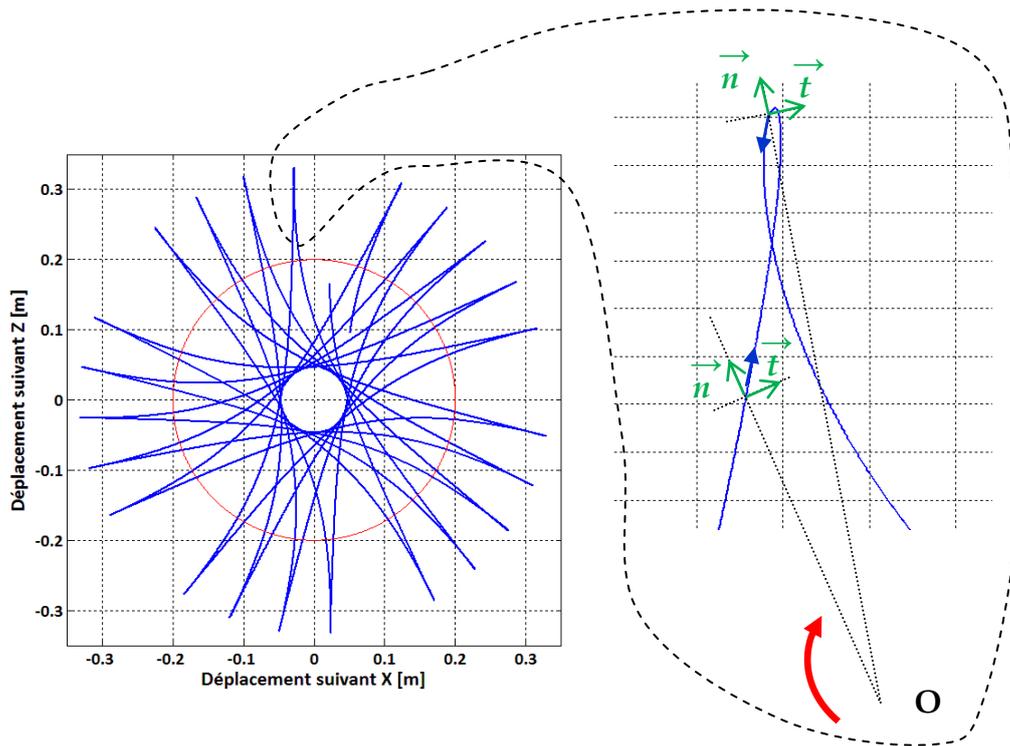


Figure 2-25 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.38$, mouvement orbital du centre du rotor

La courbe d'évolution de l'effort de contact Figure 2-26 confirme le caractère partiel du contact. Les rebonds du rotor sur le stator deviennent de plus en plus violents au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente. Le rotor rentre en contact environ 5 fois avec le stator tous les 2 cycles de rotation du rotor.

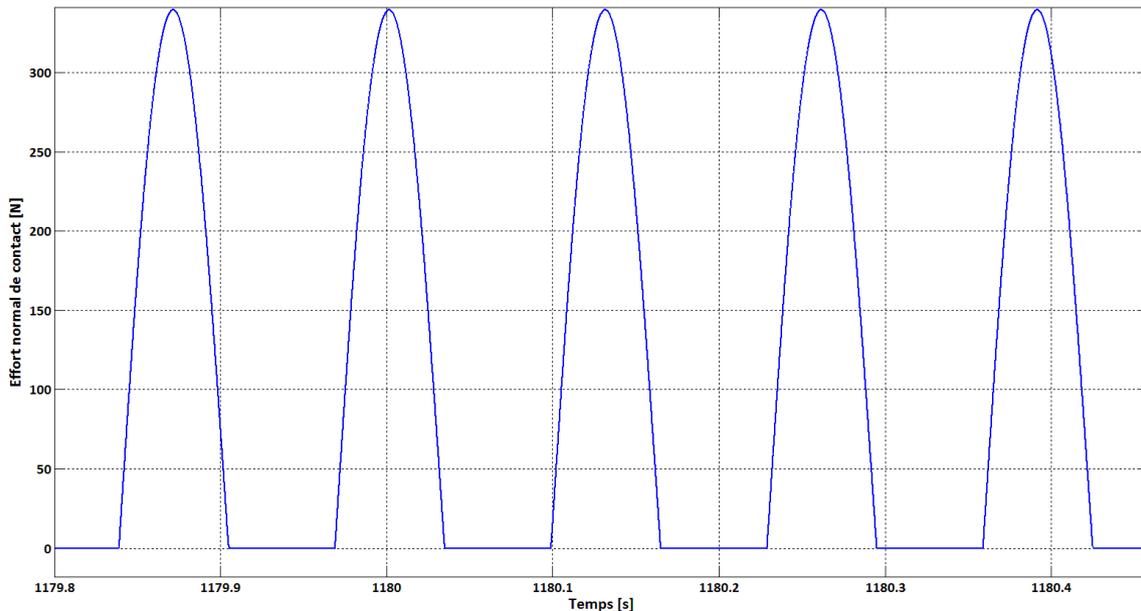


Figure 2-26 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.38$, évolution temporelle de l'effort normal de contact sur deux cycles de rotation du rotor : $2T_{rot}$

La Figure 2-27 montre l'évolution de la vitesse instantanée de précession qui devient négative périodiquement : le rotor effectue périodiquement et momentanément un mouvement en

précession indirecte pendant le contact. Néanmoins le mouvement orbital de précession sur un cycle de rotation reste globalement dans le sens direct. La pulsation d'oscillation provoquée par les rebonds est légèrement inférieure à $5/2$ de la pulsation de rotation du rotor.

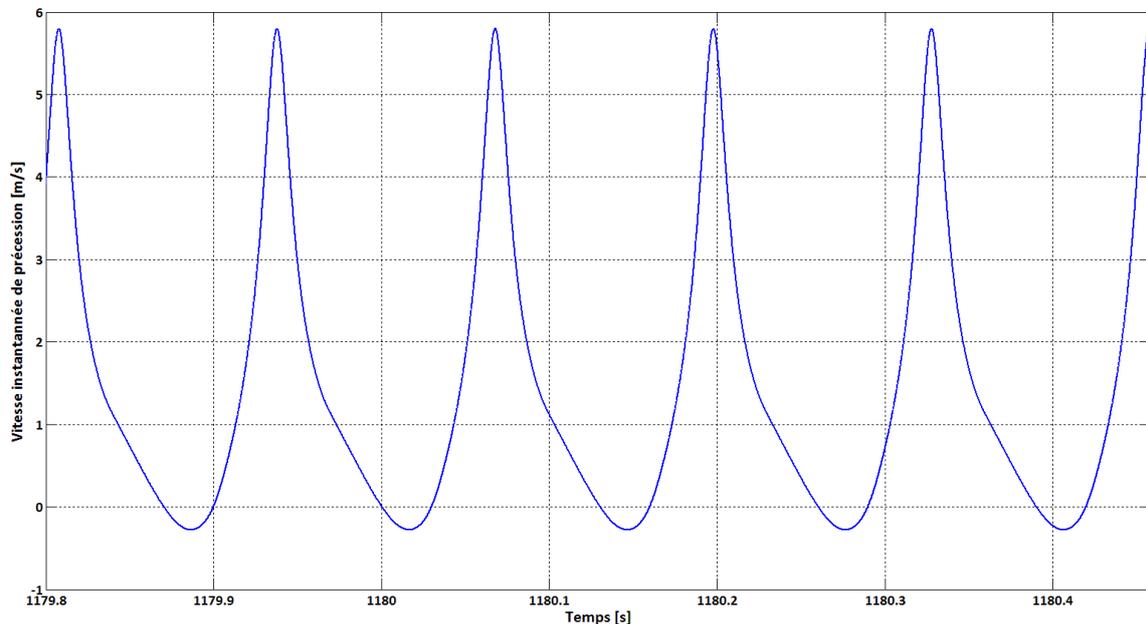


Figure 2-27 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.38$, évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession sur deux cycles de rotation du rotor : $2T_{rot}$

La Figure 2-28 montre le spectre des déplacements du rotor lors du contact partiel à une vitesse $\Omega=0.38$. Le premier pic de fréquence négative d'ordre environ $-3/2$ ($n+1 \sim 5/2$ ici) devient aussi important que celui d'ordre 1. L'amplitude des pics secondaires de fréquences négatives devient presque aussi importante que celle des pics de fréquences positives.

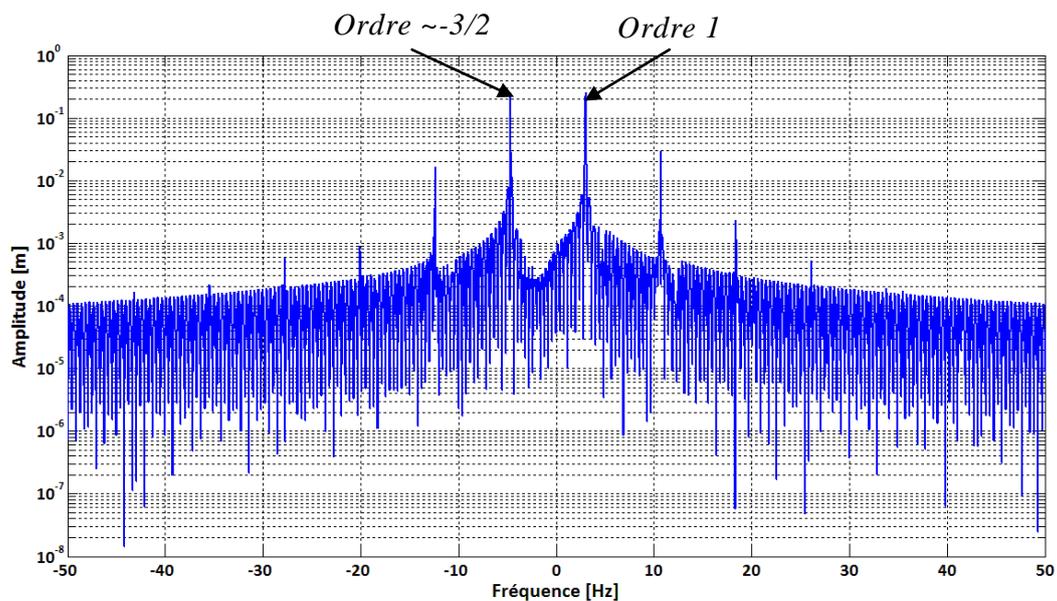


Figure 2-28 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.38$, spectre complet des déplacements

Cas $\Omega=0.41$

Le mouvement orbital du centre du rotor à une vitesse $\Omega=0.41$ est caractérisé par un contact partiel. La pénétration *Figure 2-29* ainsi que les efforts de contacts *Figure 2-30* sont toujours en hausses. Les boucles parcourues par le centre du rotor lorsque celui-ci pénètre dans le stator redeviennent plus prononcées. Le centre du rotor, lorsqu'il n'est plus en contact, passe presque par le centre du stator. Ces indices permettent de prévoir un contact partiel en précession indirecte.

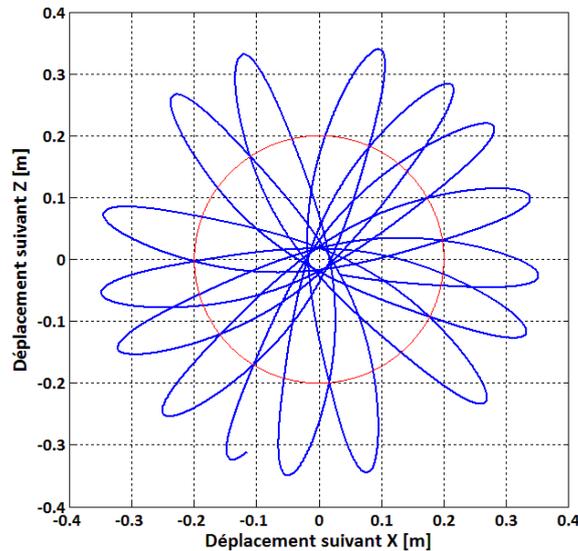


Figure 2-29 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.41$, mouvement orbital du centre du rotor

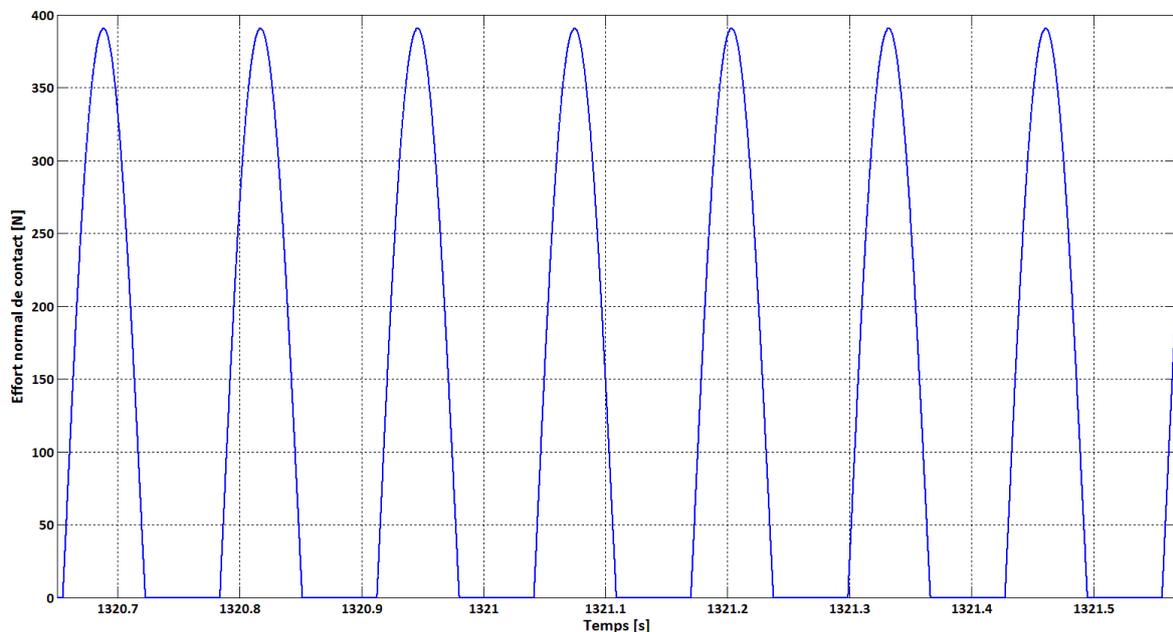


Figure 2-30 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.41$, évolution temporelle de l'effort normal de contact sur trois cycles de rotation du rotor : $3T_{rot}$

La *Figure 2-31* montre que la vitesse de précession devient exclusivement négative, elle confirme que le changement de précession a bien eu lieu. La pulsation d'oscillation des rebonds est légèrement supérieure à $7/3$ de la pulsation de rotation du rotor.

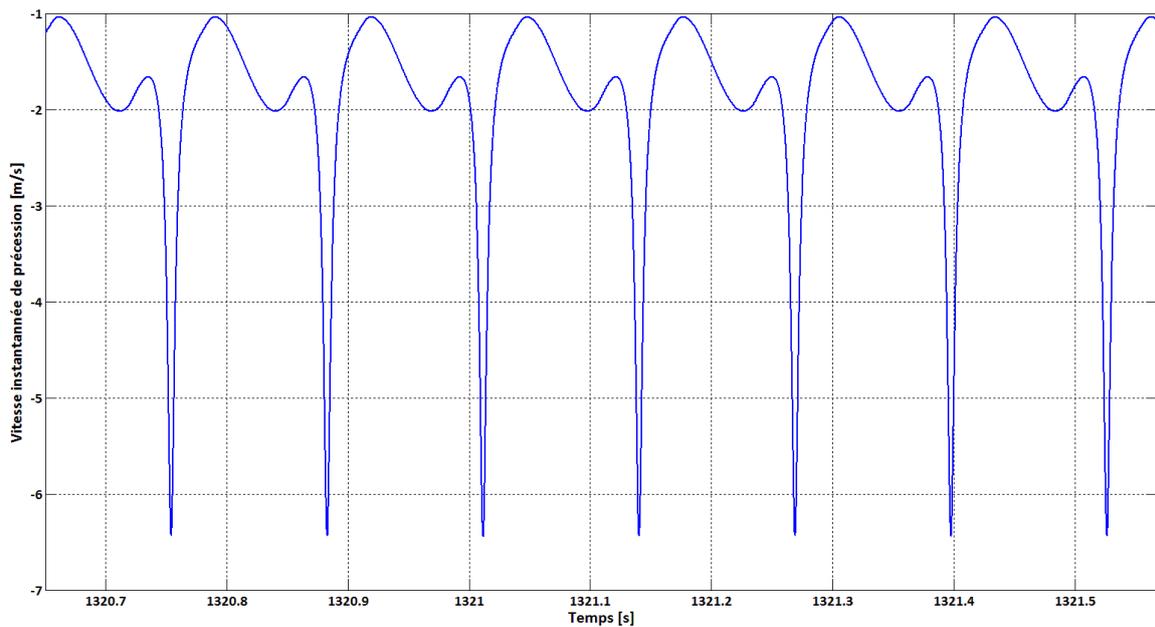


Figure 2-31 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.41$, évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession sur trois cycles de rotation du rotor : $3T_{rot}$

La Figure 2-32 présente un spectre des déplacements similaire à celui obtenu pour une vitesse $\Omega=0.38$ (Figure 2-28). L'amplitude du pic d'ordre environ $-4/3$ ($n+1 \sim 7/3$) devient supérieur à celui d'ordre 1. Les amplitudes et les fréquences des différents pics correspondent, pourtant le changement de précession a bien eu lieu et le comportement n'est plus le même. Les deux spectres se distinguent par l'émergence de nouveaux pics secondaires d'ordres supérieurs après augmentation de la vitesse de rotation.

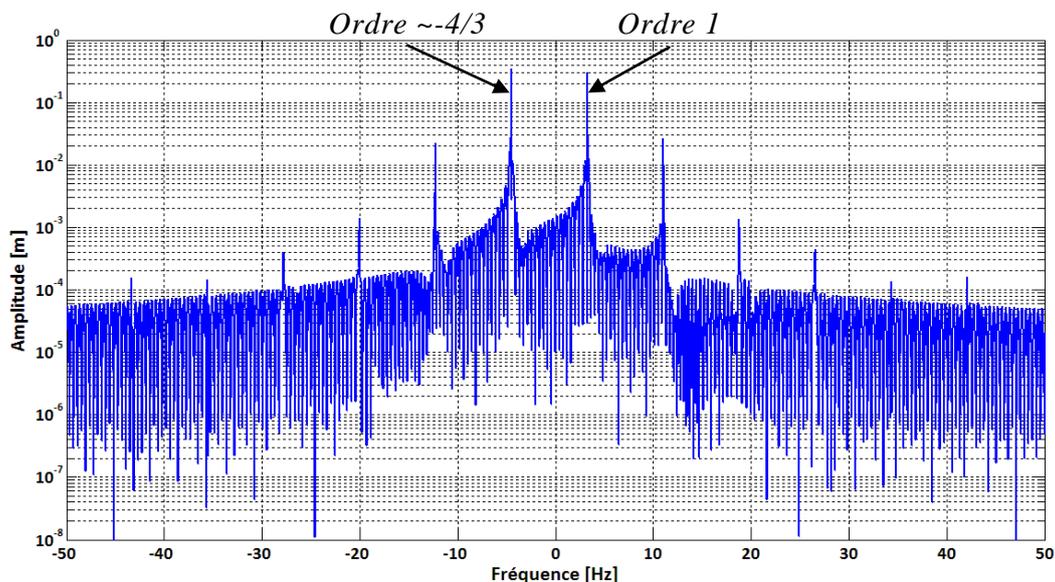


Figure 2-32 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.41$, spectre complet des déplacements

La transition entre le contact partiel en précession indirecte et le contact permanent en précession indirecte de type dry whip est observée pour des vitesses comprises entre $\Omega=0.41$ et $\Omega=0.45$ en fonction des conditions initiales choisies. On note une forte influence aux para-

mètres de contact et aux conditions initiales lorsque le contact partiel s'effectue en précession indirecte.

Cas $\Omega=0.45$

La Figure 2-33 illustre l'évolution de l'effort normal de contact dans le temps à une vitesse $\Omega=0.45$. Elle met en évidence cette transition, entre le contact partiel et le contact permanent en précession indirecte (BW : backward whirl), par un important saut en amplitude des efforts générés durant les touches.

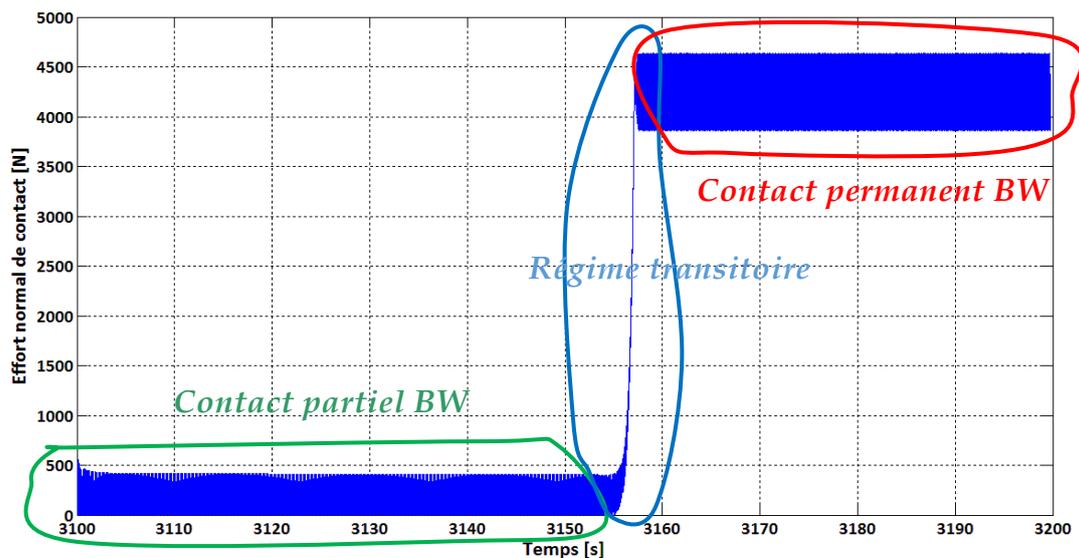


Figure 2-33 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, évolution temporelle de l'effort normal de contact

La vitesse instantanée de précession subit elle aussi un saut en amplitude durant le changement de régime Figure 2-34. Elle finit par osciller autour d'une valeur qui annule la vitesse de glissement.

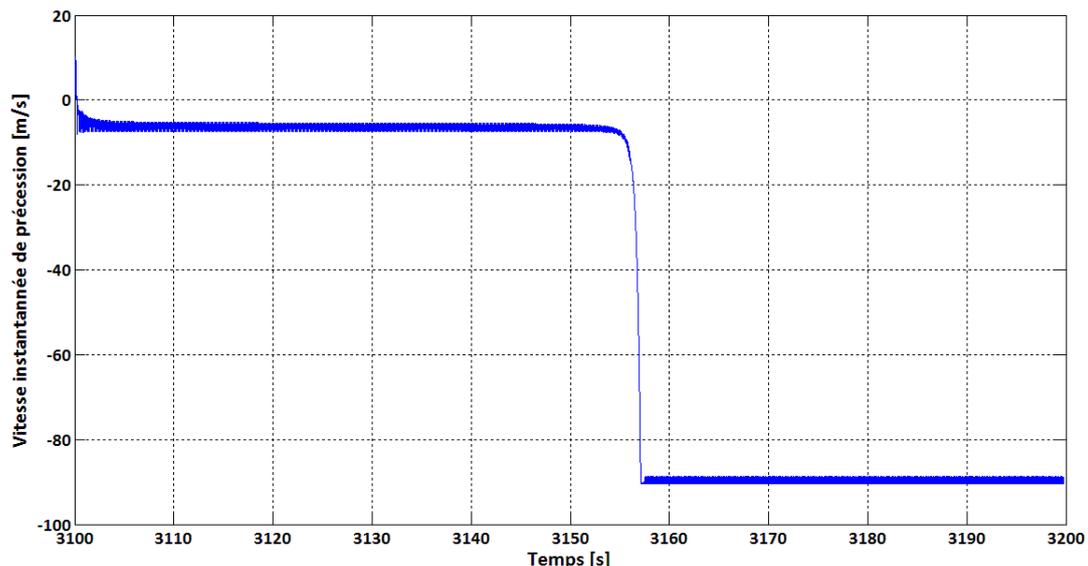


Figure 2-34 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, évolution temporelle de la vitesse instantanée de

précession

La *Figure 2-35* présente le mouvement orbital du rotor durant le contact partiel en précession indirecte juste avant la transition menant au dry whip. L'amplitude minimale de l'excentricité orbitale du rotor atteint presque celle du jeu.

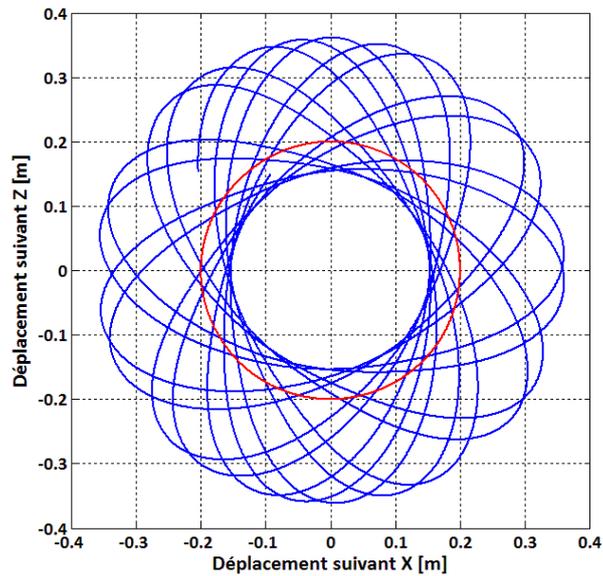


Figure 2-35 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, mouvement orbital du centre du rotor – contact partiel BW

La *Figure 2-36* montre le mouvement orbital du centre du rotor durant le régime transitoire. Un important saut en amplitude des déplacements est également observé sur les déplacements du centre du rotor. Une fois le dry whip installé *Figure 2-37*, le comportement du rotor devient périodique

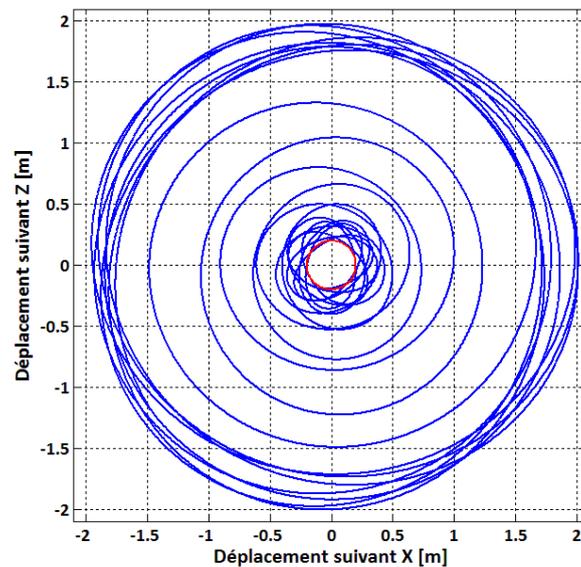


Figure 2-36 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, mouvement orbital du centre du rotor – régime transitoire

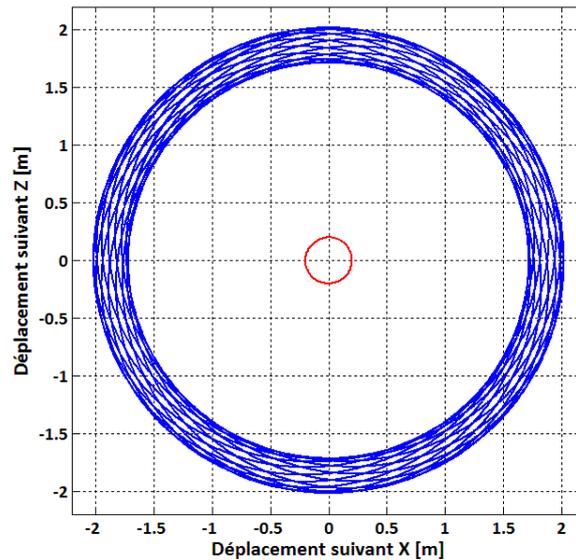


Figure 2-37 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, mouvement orbital du centre du rotor – Dry Whip

La Figure 2-38 présente un diagramme temps-fréquence du spectre complet des déplacements du rotor (spectrogramme complet). Elle met en relief un saut en fréquence des ordres sollicités durant la touche après le régime transitoire. La fréquence négative du premier ordre (entouré en noir) prédomine sur les autres avant de se positionner sur une valeur négative proche de la fréquence couplée du système rotor/stator (~ -8 Hz).

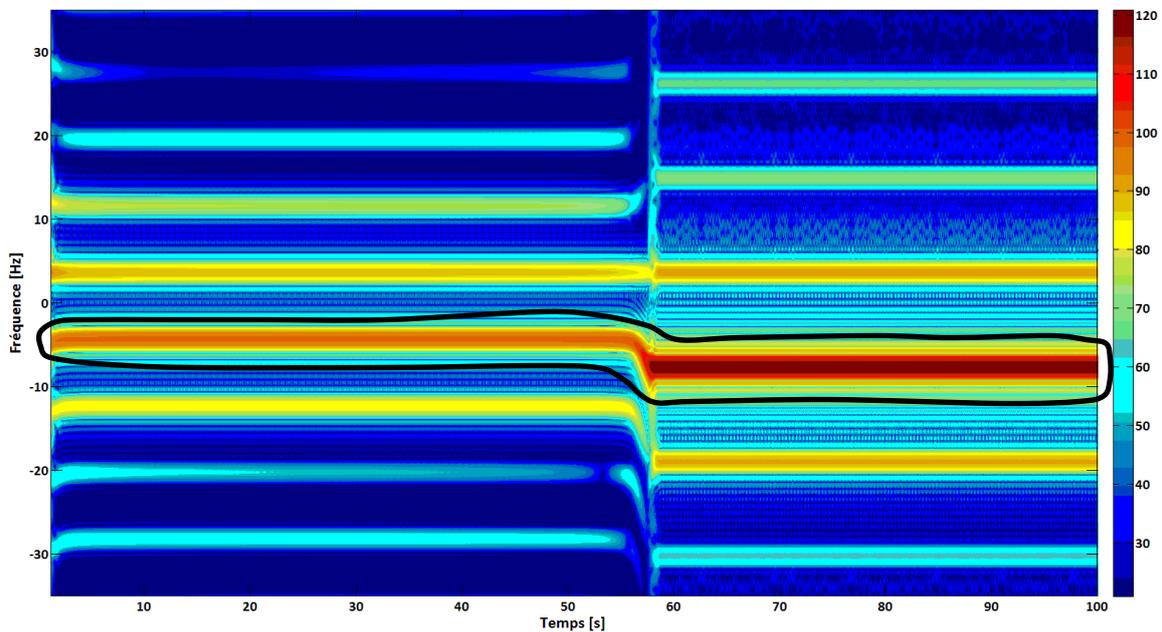


Figure 2-38 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, spectrogramme complet des déplacements

La Figure 2-39 expose un spectrogramme classique ou partiel des déplacements du rotor. Il n'apporte pas autant d'informations que le spectrogramme complet mais il aide tout de même à constater que la modulation en fréquence, entre les sur-harmoniques de fréquences positives et celles de fréquences négatives, est constante.

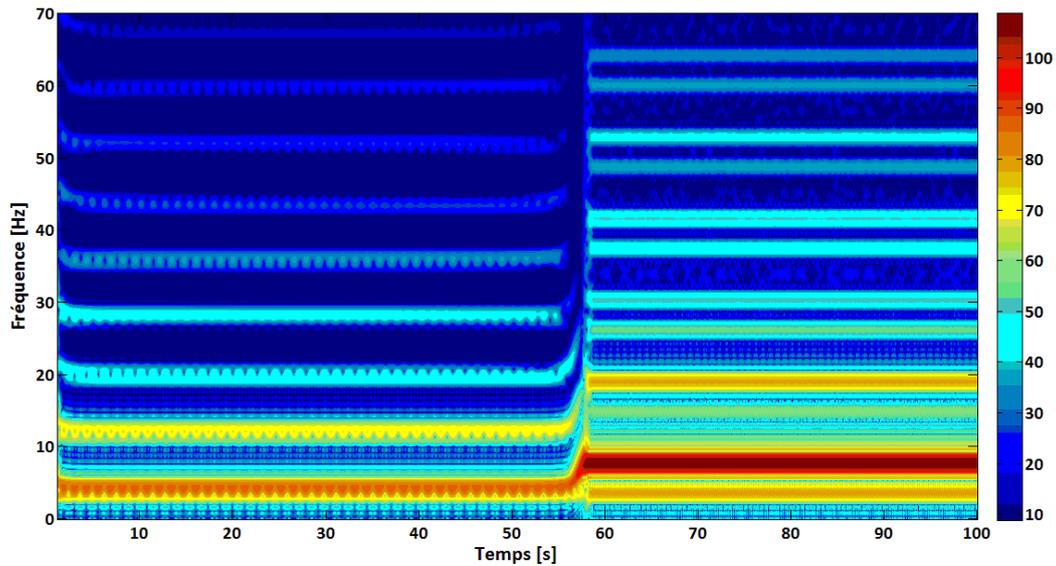


Figure 2-39 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, spectrogramme partiel des déplacements

Les spectres complets des déplacements du centre du rotor durant le contact partiel et le contact permanent en précession inverse sont respectivement illustrées *Figures 2-40* et *2-41*. Les fréquences sollicitées durant le contact partiel, correspondent à celles observées sur les simulations à $\Omega=0.38$ et $\Omega=0.41$. L'amplitude du premier pic de fréquence négative est devenue prépondérante.

Durant le contact permanent en précession inverse (« Dry Whip »), l'ensemble du spectre subit un saut en amplitude. Le système se met alors à vibrer à une fréquence proche de celle du système couplé rotor/stator (-8 Hz).

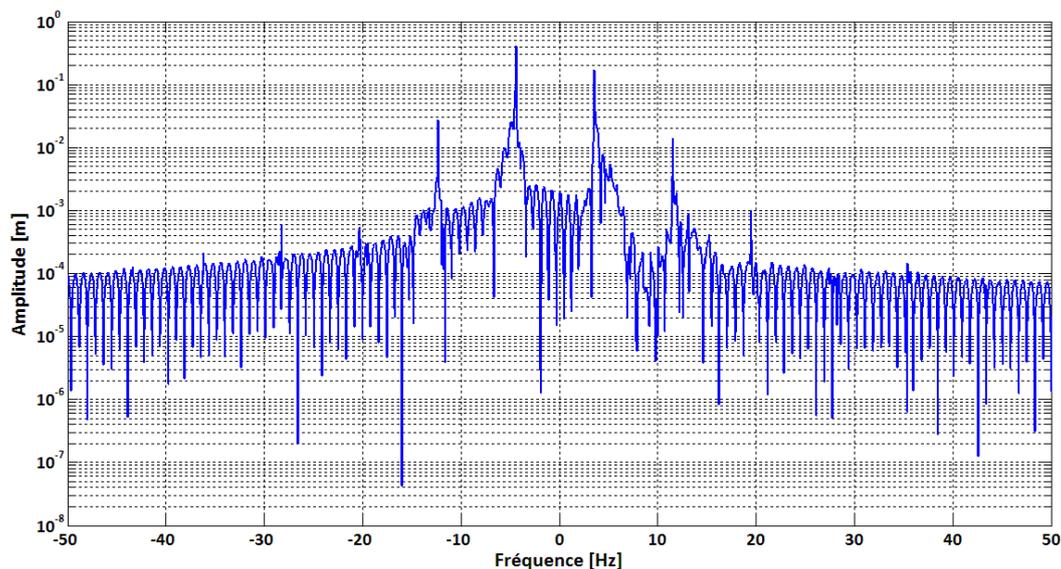


Figure 2-40 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, spectre complet des déplacements – contact partiel *BW*

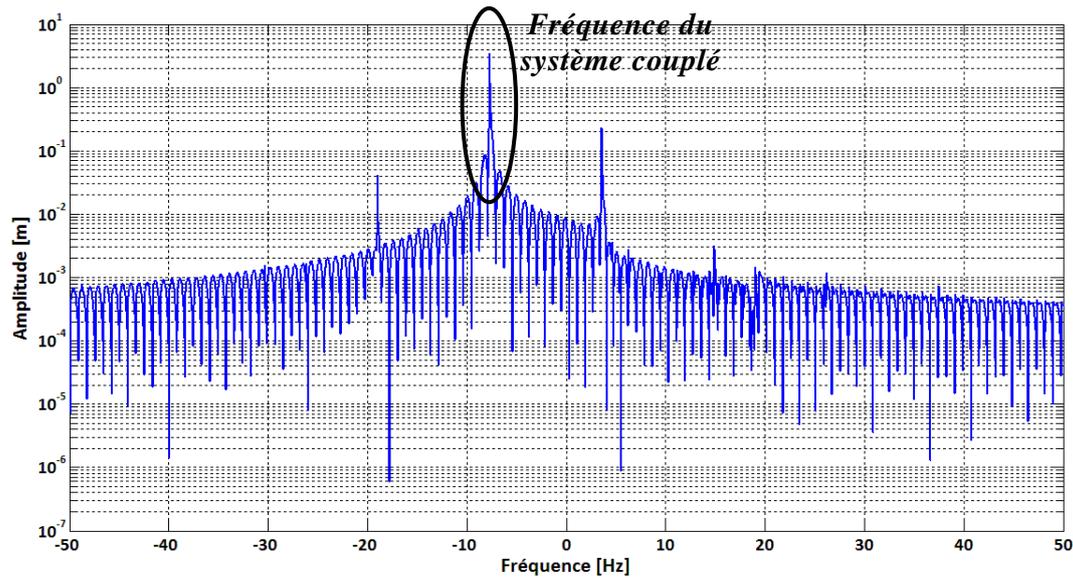


Figure 2-41 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.45$, spectre complet des déplacements – dry whip

Cas $\Omega=0.5$

Les Figures 2-42 et 2-43 montrent respectivement le mouvement orbital du rotor à une vitesse $\Omega=0.5$, lorsque le dry whip est installé, et l'évolution de la composante normal du contact dans le temps. Les amplitudes de pénétration ainsi que les efforts de contact continuent de croître avec la vitesse de rotation. Les résultats numériques n'ont plus de validité car les hypothèses émises lors de la gestion du contact ne sont plus respectées. Ces résultats permettent néanmoins de caractériser de manière qualitative le dry whip et montrer pourquoi il est considéré comme un phénomène dangereux pour tout système dynamique tournant. La période d'oscillation de l'effort de contact ainsi que du mouvement orbital est $1/3$ de celle d'un cycle de rotation du rotor ($n+1 \sim 3$ ici).

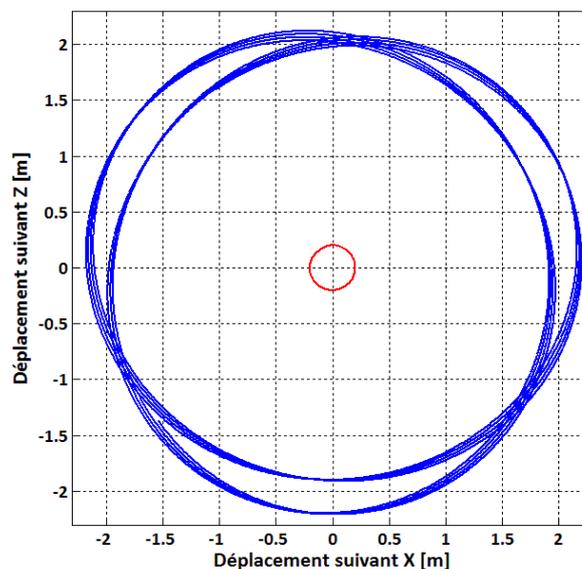


Figure 2-42 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.5$, mouvement orbital du centre du rotor

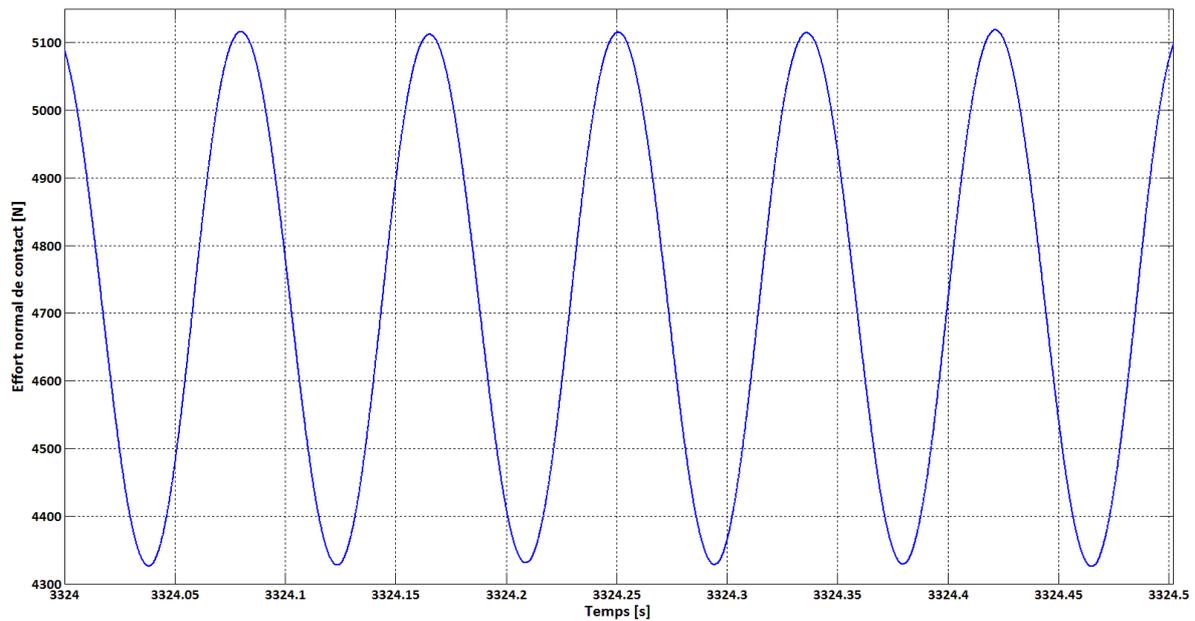


Figure 2-43 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.5$, évolution temporelle de l'effort normal de contact sur deux cycles de rotation du rotor : $2T_{rot}$

Lorsque le contact permanent en précession indirecte est installé, la vitesse instantanée de précession oscille autour d'une valeur qui annule la vitesse de glissement. A $\Omega=0.5$, la vitesse périphérique du rotor est de 100 m/s.

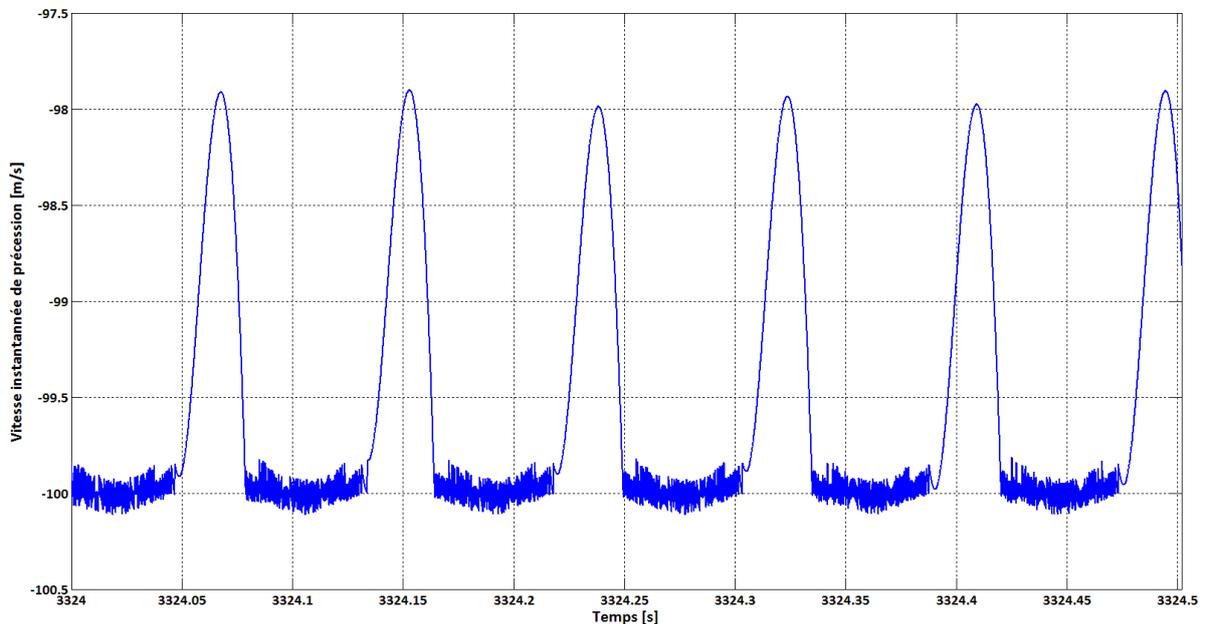


Figure 2-44 : Rotor de Jeffcott $\Omega=0.5$, évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession sur deux cycles de rotation du rotor : $2T_{rot}$

Le spectre complet des déplacements du rotor durant le dry whip est présenté *Figure 2-45*. L'amplitude du premier pic de fréquence négative continue d'augmenter, tandis que sa fréquence est fixée sur celle du système couplé à environ -8 Hz. Les vibrations du système couplé sont observées par la prépondérance du pic de fréquence négative et d'ordre -2

($n+1\sim 3$), ce qui s'explique par le fait que le rotor tourne à une vitesse de rotation ($\Omega=0.5$) deux fois moins importantes que la pulsation du système couplé ($\Omega=1.0$).

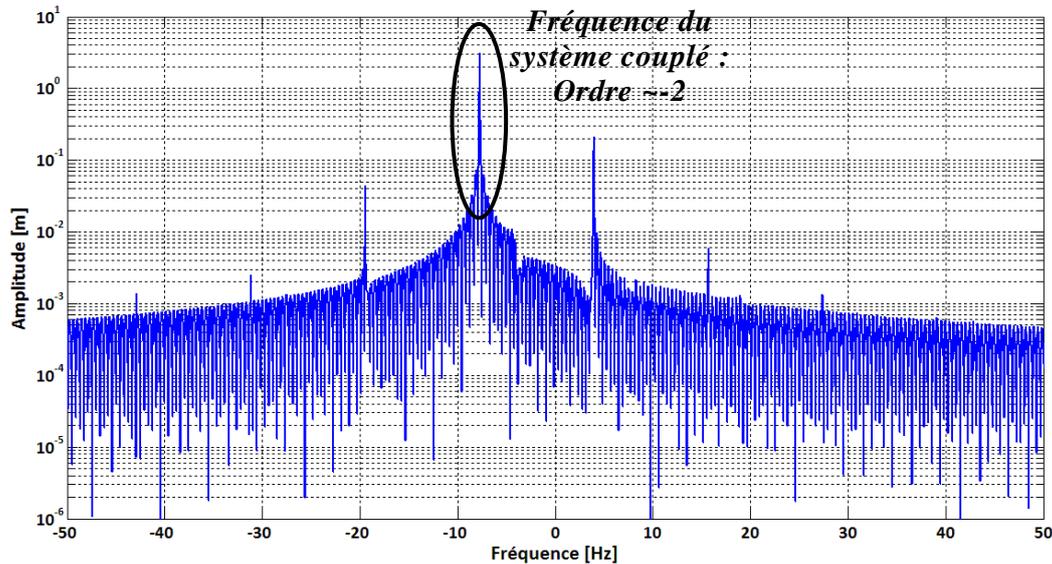


Figure 2-45 : Rotor de Jeffcott avec $\Omega=0.5$, spectre complet des déplacements

3.3 Synthèse

Le rotor de Jeffcott, même s'il ne prend pas en compte l'effet gyroscopique, est un système permettant de valider le modèle de gestion de contact choisi au regard des différents phénomènes observés durant une ou plusieurs touches. Il permet en outre de caractériser ces phénomènes par leurs amplitudes et leurs fréquences de vibrations. Plusieurs conclusions peuvent être émises :

- le contact permanent en précession directe s'avère incontournable et relativement bénin pour la sécurité d'une machine,
- le contact partiel existe dans une plage de vitesse relativement restreinte où coexistent aussi bien un mouvement de précession dans le sens direct et indirect,
- le dry whip s'avère dangereux de par les hautes amplitudes de vibrations générées et les fréquences du système rotor/stator couplé qui sont sollicitées. Les résultats numériques durant les phénomènes ne sont pas exploitables quantitativement,
- les ordres des sur-harmoniques sont liés aux nombres de rebonds (ou d'oscillations de l'effort de contact) du rotor sur le stator durant un cycle de rotation,
- les vitesses de rotation limitant les différents domaines d'existences calculés numériquement correspondent à celles obtenues par Jiang [JIA 09].

4. Etude d'un rotor académique à 3 disques rigides

Dans ce sous-chapitre un cas de référence est considéré pour appliquer la modélisation développée précédemment. Il s'agit d'un rotor à 3 disques (*Figure 2-46*) dont la dynamique sans contact est bien connue [*LAL 98*]. L'objectif est d'introduire une zone de contact potentielle, entre le deuxième disque (D2) et un stator infiniment rigide, ceci afin d'éprouver la robustesse du modèle. Le frottement est implanté via un modèle de Coulomb, constant durant la simulation. Les contacts du rotor à 3 disques sont engendrés par l'augmentation soudaine du balourd à une date choisie par l'opérateur. Il est cependant supposé que :

- seuls les 4 degrés de libertés en flexion sont pris en compte,
- la vitesse de rotation est imposée constante au cours du temps.

La modélisation utilise des éléments finis de poutre 1D de Bernoulli tel que détaillé au *Chapitre 2 §2.1*. La résolution temporelle est réalisée par l'implémentation d'un schéma de Newmark à accélération moyenne. Deux lois de contact par pénalité amortie sont considérées :

- loi linéaire (2-40) : $F_N = K_C \delta_n + C_C \dot{\delta}_n$ (loi 1)
- loi non-linéaire (2-39) :
$$\begin{cases} F_N = K_C \delta_n^m (1 + C_C \dot{\delta}_n) \\ m > 1 \end{cases}$$
 (loi 2)

Les deux lois de contact sont combinées à une régularisation de la raideur de contact par la

$$\text{fonction arc tangente (2-42) : } \begin{cases} K_C(\delta_n) = \frac{k_C}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi \lambda (\delta_n - d)) + 1 \right] \\ C_C(\delta_n) = \frac{c_C}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi \lambda (\delta_n - d)) + 1 \right] \end{cases}$$

Une solution avec modélisation du contact par la méthode des multiplicateurs de Lagrange est aussi recherchée [*DUR 12*].

4.1 Description de la ligne d'arbre

La ligne d'arbre est composée d'un rotor de longueur 1.3 m, de section circulaire constante et de diamètre 10 cm. Le rotor tourne à une vitesse constante de 6000 tr/min et est entièrement constitué d'acier, voir la *Figure 2-46*.

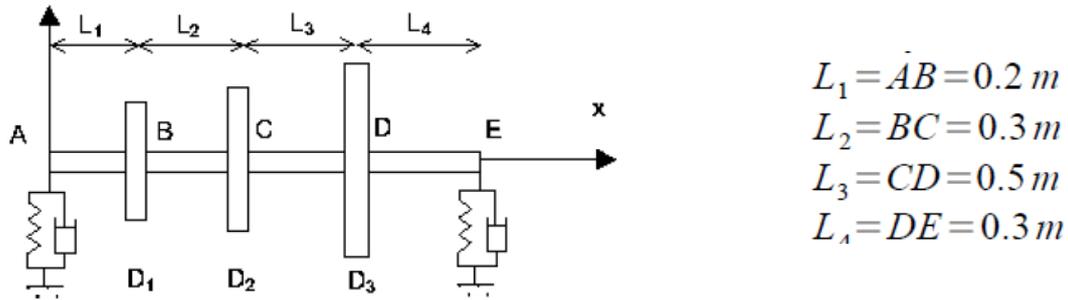


Figure 2-46 : Schéma du rotor académique à 3 disques

Les caractéristiques des trois disques rigides sont données dans le tableau suivant :

Disque	Masse [kg]	Inertie polaire [kg.m ²]	Inertie diamétrale [kg.m ²]
D1	14.58	0.123	0.0646
D2	45.95	0.976	0.498
D3	55.13	1.176	0.602

Tableau 2-4 : Caractéristiques des disques rigides

Les paliers situés en A et E Figure 2-46, sont tout deux identiques et isotropes. On modélise linéairement le comportement des paliers par un système ressort + amortisseur. Leurs caractéristiques sont détaillées dans le Tableau 2-5.

$k_{xx}=k_{zz}$ [N/m]	$k_{xz}=k_{zx}$ [N/m]	$c_{xx}=c_{zz}$ [N/m.s]	$c_{xz}=c_{zx}$ [N/m.s]
7 ^e 7	0	7 ^e 2	0

Tableau 2-5 : Caractéristiques des paliers linéaires

4.2 Discrétisation en éléments finis du rotor

Le rotor est discrétisé en 14 nœuds soit 13 éléments de longueur constante 0.1 m. Le système comporte donc 56 degrés de libertés. Le maillage éléments finis du rotor est représenté sur la Figure 2-47.

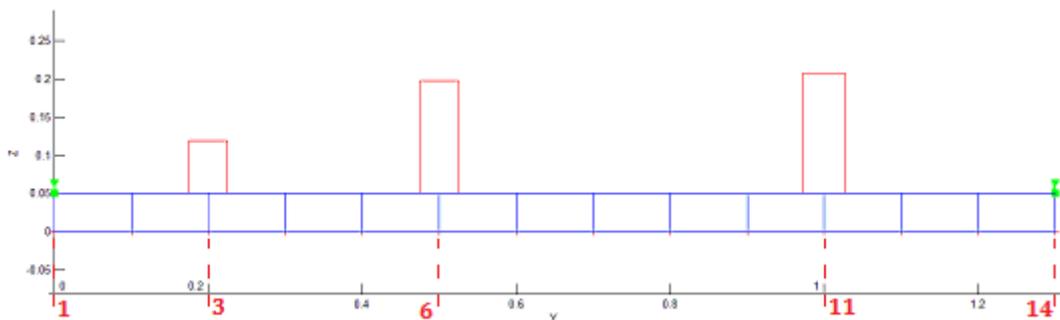


Figure 2-47 : Maillage du rotor à 3 disques

Les paliers du rotor sont disposés à chaque extrémité de l'arbre. Le balourd ainsi que les contacts sont introduits au niveau du disque milieu D2 (nœud 6). Les positions nodales des différents éléments composant la ligne d'arbre sont résumées dans le *Tableau 2-6*.

Eléments du rotor	N° du nœud d'emplacement
Palier 1	1
Palier 2	14
Disque 1	3
Disque 2	6
Disque 3	11
Balourd	6
Contact	6

Tableau 2-6 : Nomenclature des différents éléments de la ligne d'arbre

4.3 Analyse modale dans le domaine linéaire

Le calcul dynamique du rotor sur le modèle éléments finis a permis d'établir le diagramme de Campbell, *Figure 2-48*, à l'aide du code de calcul Matlab ToRoS, sur la plage de vitesse [0 ; 8000] rpm. Le point de fonctionnement encadré en vert est situé entre la première et la deuxième vitesse critique d'arbre (encadrées en rouge). Une vitesse de 6000 tr/min paraît insuffisante pour solliciter le 2^{ème} mode d'arbre.

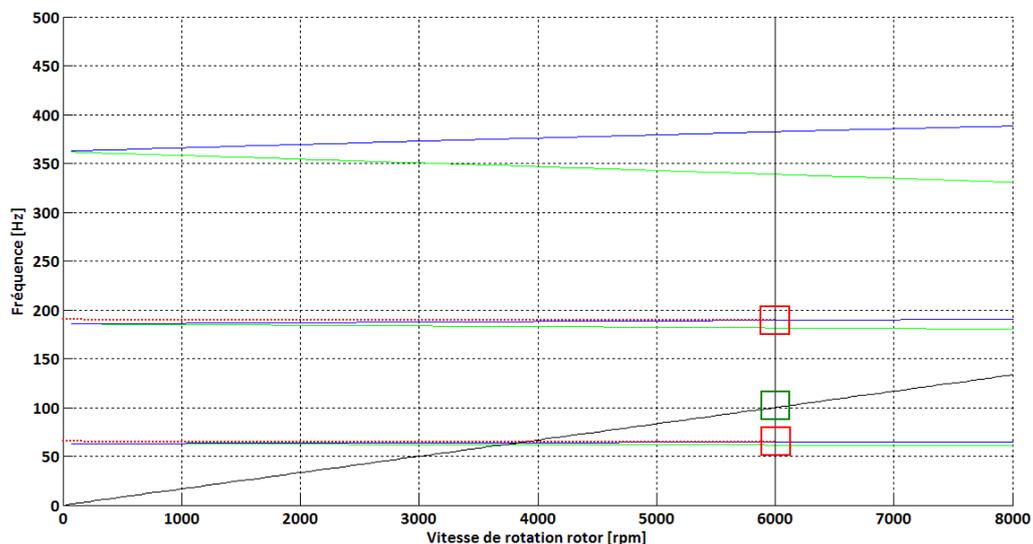


Figure 2-48 : Diagramme de Campbell du rotor à 3 disques

Le Diagramme de Campbell permet d'évaluer les fréquences propres en rotation du système linéaire à 6000 rpm. Voir aussi *Tableau 2-7*.

	Fréquence [Hz]
1 ^{er} mode de flexion	64.5
Ordre 1 excitation balourd	100.0
2 ^{ème} mode de flexion	189.2

Tableau 2-7 : Position des fréquences potentiellement sollicitées

L'analyse modale est suivie par un calcul de réponse au balourd sur la même plage de vitesse de rotation [0 ; 8000] tr/min. Le calcul a été réalisé avec un balourd de valeur $2^{\circ}-4$ kg.m. L'amplitude du mouvement en régime permanent est lisible sur la *Figure 2-49* et s'élève à environ $2.3 \cdot 10^{-6}$ m. On remarque aussi la bonne concordance entre le diagramme de Campbell et la réponse forcée, car le pic de fréquence est rencontré à 3840 rpm, soit 64 Hz.

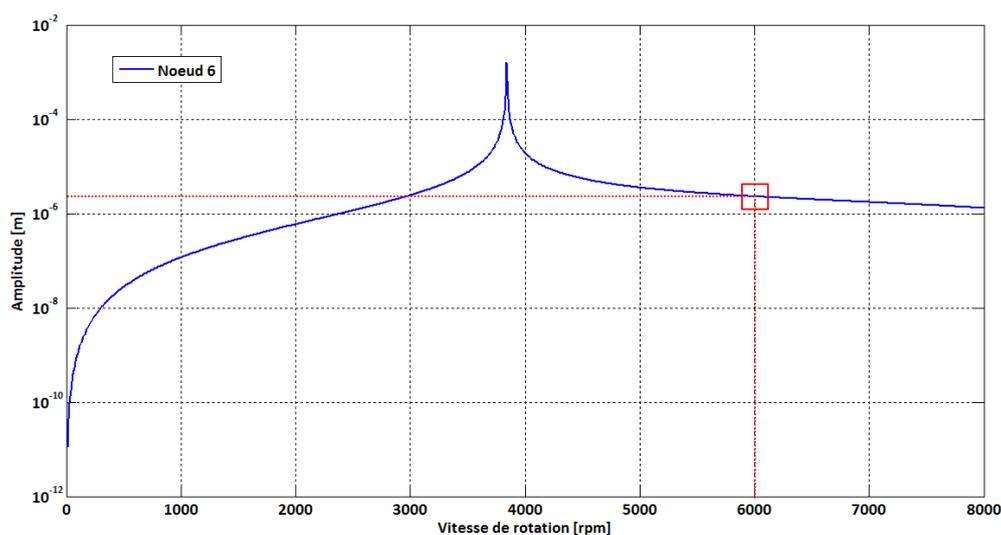


Figure 2-49 : Réponse au balourd du rotor à 3 disques

Les résultats d'analyse modale dans le domaine linéaire obtenus par ToRoS ont été comparés avec ceux issus de ROTORINSA[®]. Les résultats sont parfaitement identiques, ce qui confirme la validité du modèle EF de ligne d'arbre du code Matlab.

4.4 Résultats de calculs numériques

Une série de résultats de calculs temporels est décrite dans ce chapitre. Un premier calcul sur le rotor en configuration sans contact est présenté comme résultat de référence.

Des calculs en configuration de contact rotor/stator sont ensuite étudiés. Deux configurations de touche sont provoquées et simulées par le biais de 3 modèles de gestion de contact. Le contact est numériquement provoqué en introduisant une augmentation soudaine du balourd par un facteur 100. La valeur 100 a été choisie conformément aux machines industrielles : le départ d'une ou deux aubes provoque un balourd 50 à 100 fois plus important que celui installé en fonctionnement normal.

Les différentes réponses temporelles sont finalement post-traitées dans le domaine fréquentiel.

4.4.1 Réponses temporelles et post-traitement fréquentiel en configuration sans contact

Une première série de calculs a été réalisée sur le rotor dans le domaine linéaire sans possibilité de contact rotor/stator. L'augmentation soudaine du balourd intervient à la date $t=2$ s, la simulation est de 10 secondes. Ces choix sont justifiés par le fait que les phénomènes transitoires (en début de simulation ou après la première touche) durent plusieurs secondes. L'intégration temporelle est effectuée avec un schéma à accélération moyenne de Newmark, inconditionnellement stable. Une étude de convergence permet d'obtenir un pas de temps maximum à utiliser durant les calculs. Le pas de temps retenu dans le cadre du calcul linéaire est $\Delta t=10^{-5}$ s. On présente ci-dessous les résultats de calcul au niveau du nœud potentiel de contact dans le domaine linéaire (nœud 6).

La *Figure 2-50* trace le mouvement orbital du centre du rotor au cours du temps. L'orbite présentée n'est pas exploitable en raison du régime transitoire. On remarque néanmoins qu'en régime transitoire après apparition du balourd soudain, l'amplitude orbital dépasse 6×10^{-4} m.

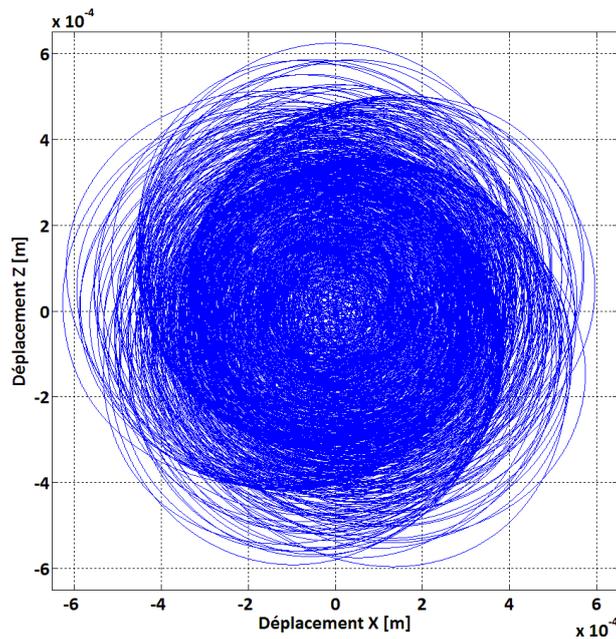


Figure 2-50 : Orbite au nœud de contact, sans contact

La *Figure 2-51* montre l'évolution temporelle de la norme du vecteur déplacement du nœud 6. La courbe confirme qu'après apparition du balourd soudain, l'amplitude de déplacement dépasse 6×10^{-4} m, puis le régime pseudo-périodique semble se stabiliser pour des amplitudes qui oscillent entre 2×10^{-5} m et 3×10^{-5} m. Avec un balourd 100 fois plus important, l'amplitude en régime permanent s'élève à 2.291×10^{-4} m (*Figure 2-49*) conformément aux résultats de calculs temporels.

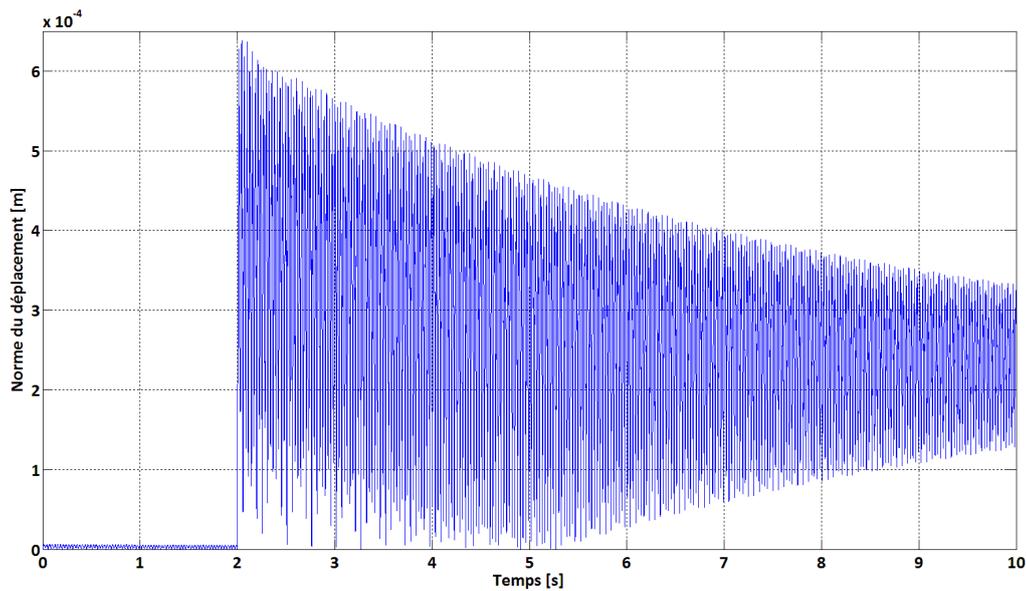


Figure 2-51 : Norme du vecteur déplacement, sans contact

La Figure 2-52 montre la courbe d'évolution de la vitesse instantanée de précession du rotor. Une valeur positive traduit un mouvement en précession directe, tandis qu'une valeur négative décrit un mouvement en précession indirecte. Durant le régime transitoire causé par l'introduction du fort balourd, le mouvement orbital alterne périodiquement entre précession directe et indirecte. En régime permanent, un mouvement de précession directe finit par s'installer.

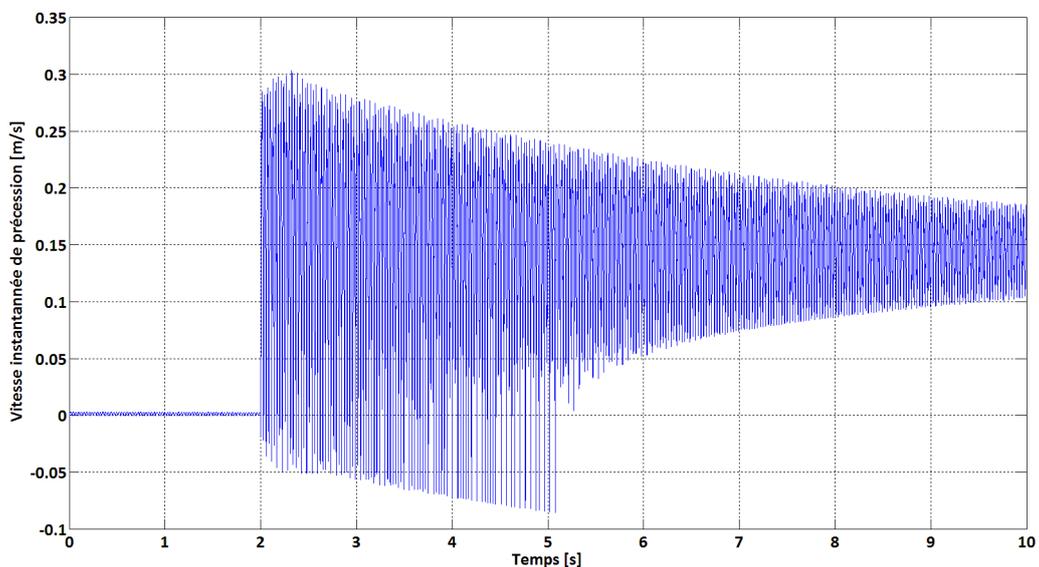


Figure 2-52 : Vitesse instantanée de précession, sans contact

Un premier spectrogramme, Figure 2-53, a été réalisé sur les résultats de calculs dans le domaine linéaire. Il servira de référence afin de pouvoir comparer l'influence d'une touche sur le spectre à tout instant. L'échelle de couleurs représente le gain d'amplitude en décibel (dB). Il montre un phénomène vibratoire initié par l'apparition soudaine d'un fort balourd. En effet, les amplitudes sont beaucoup plus importantes, et diverses fréquences propres du

système semblent sollicitées. Le système reprend ensuite très vite un comportement linéaire en gardant un spectre similaire avec celui entrevu avant l'apparition du balourd soudain. Les amplitudes causées par le fort balourd sont en revanche bien plus importantes.

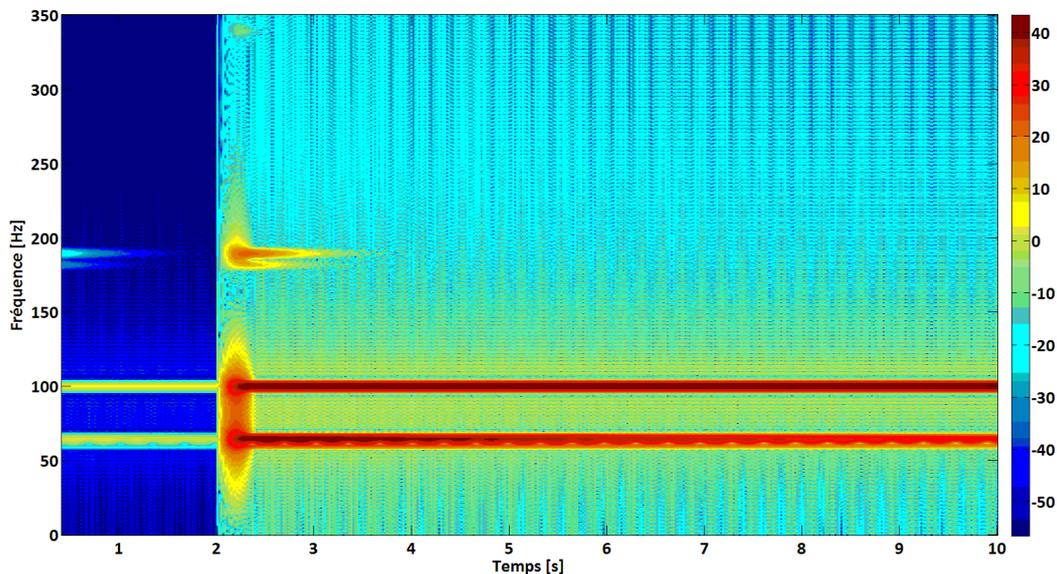


Figure 2-53 : Spectrogramme du vecteur vitesse, sans contact

4.4.2 Réponses temporelles avec touche rotor/stator

Dans cette partie on présente une série de résultats de calculs obtenus par intégration temporelle afin de pouvoir évaluer l'influence du modèle de contact sur la dynamique du rotor. Deux types de touche ont été traités sur le rotor à 3 disques :

- un contact permanent synchrone en précession directe,
- une série de rebonds provoquant un contact partiel très bref et léger.

Les données indiquées dans le *Tableau 2-8* permettent de retrouver les 2 comportements cités. Les jeux choisis sont du même ordre de grandeur que ceux rencontrés dans les turbines industrielles (plusieurs dixièmes de millimètres).

N° configuration touche	Coefficient de frottement sec	Jeu initial rotor/stator [m]
1	0.0	$4.0 \cdot 10^{-4}$
2	0.1	$5.9 \cdot 10^{-4}$

Tableau 2-8 : Jeux de paramètres des deux configurations de contact

Les valeurs de paramètres de contact utilisées lors de ces calculs sont les suivantes. Elles sont choisies conformément à la littérature. La raideur de contact k_c est généralement comprise entre 1 et 1000 fois le module d'Young [ROQ 09]. Une valeur $1^e 4$ à $1^e 5$ fois inférieure à celle de la raideur de contact k_c est appliquée à l'amortissement de contact c_c [BAR 00], [ISM 95] :

- loi linéaire de pénalité amortie (loi 1) : $k_C = 1^e 10$ N/m, $c_C = 1^e 4$ N/m (2-40)
- loi non-linéaire de pénalité amortie (loi 2) : $m=3/2$, $k_C = 1^e 12$ N^{2/3}.m^{-2/3}, $c_C = 0$ m⁻¹.s (2-39)

- multiplicateurs de Lagrange : pas de paramètres pour caractériser le contact

Ces jeux de paramètres sont fixés pour l'ensemble des calculs traitant les deux configurations de touche. Les paramètres λ et d_n de la fonction arctangente (2-42) sont respectivement fixés aux valeurs $1^{\text{e}}50 \text{ m}^{-1}$ et 0.0 m . Le pas de temps constant utilisé est de $1^{\text{e}}-6 \text{ s}$ en raison des non linéarités de contact introduites. La durée de simulation ainsi que la date d'apparition du balourd soudain restent inchangées par rapport au cas linéaire.

4.4.21 1^{ère} configuration de touche rotor/stator

Le premier cas de touche, fait intervenir un comportement en régime permanent relativement connu en dynamique du contact rotor/stator. En effet avec un coefficient de frottement inférieur à 0.03 (il vaut 0 dans les 3 simulations présentées à la suite), la touche provoque un contact permanent en précession directe à vitesse synchrone.

Les orbites de la première simulation avec contact rotor/stator sont représentées *Figures 2-54, 2-55 et 2-56*. Le contact permanent s'effectue très vite après quelques rebonds. La trajectoire du nœud 6 après le premier contact diffère selon la méthode de gestion de contact choisie. En régime permanent un contact permanent en précession direct s'installe. La méthode de contact n'influe alors que sur la pénétration moyenne observée durant le contact permanent.

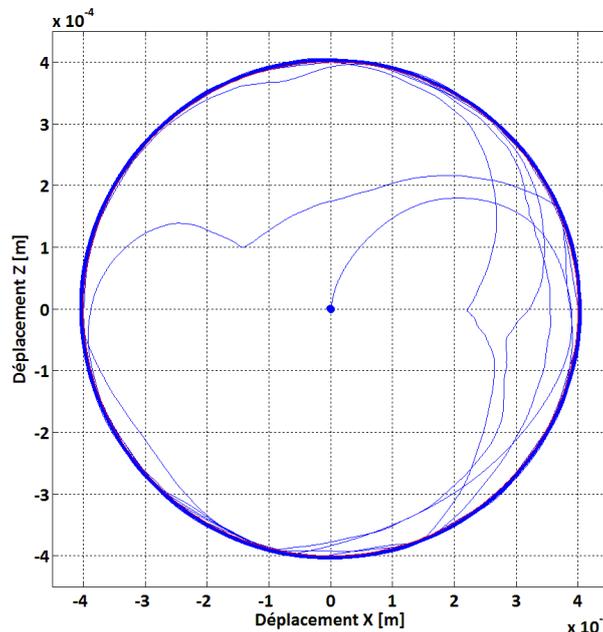


Figure 2-54 : Orbite au nœud de contact, pénalité amortie : loi 1

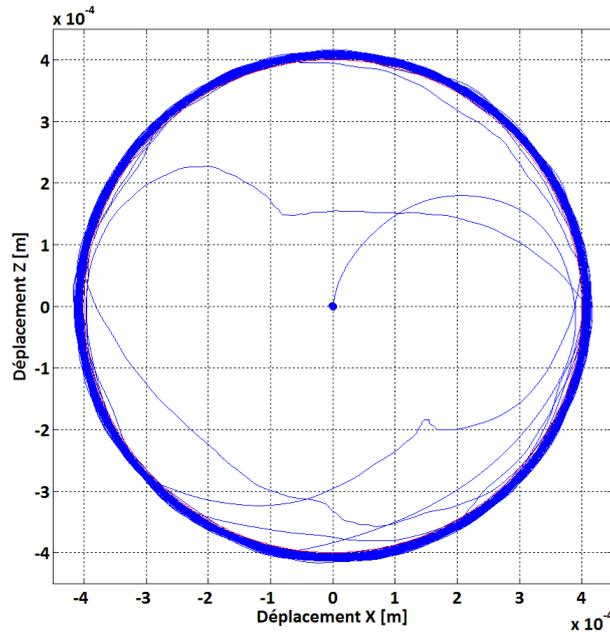


Figure 2-55 : Orbite au nœud de contact, pénalité amortie : loi 2

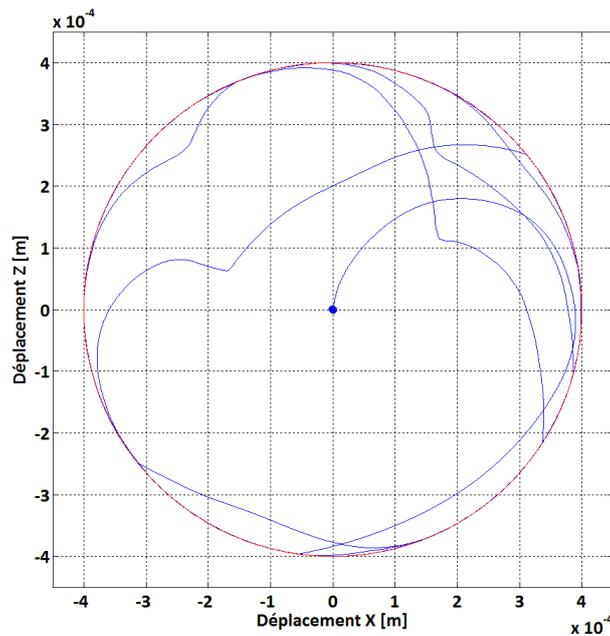


Figure 2-56 : Orbite au nœud de contact, multiplicateurs de Lagrange

Les courbes d'évolutions temporelles de la composante normale du vecteur déplacement du nœud de contact (nœud 6) sont disponibles Figures 2-57, 2-58 et 2-59. La ligne horizontale rouge symbolise le jeu rotor/stator initialement introduit. La première série de rebonds est mise en évidence dans l'intervalle $t = [2 ; 4]$ s, soit juste après l'apparition du balourd soudain. Avec les deux méthodes de gestion de contact par pénalité, la série de rebonds est suivie d'un régime transitoire avant que le contact permanent s'installe. L'absence de pénétration du rotor dans le stator, avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, ne fait pas apparaître ce régime transitoire. La pénétration en régime établi est beaucoup plus importante avec la loi 2 de pénalité amortie.

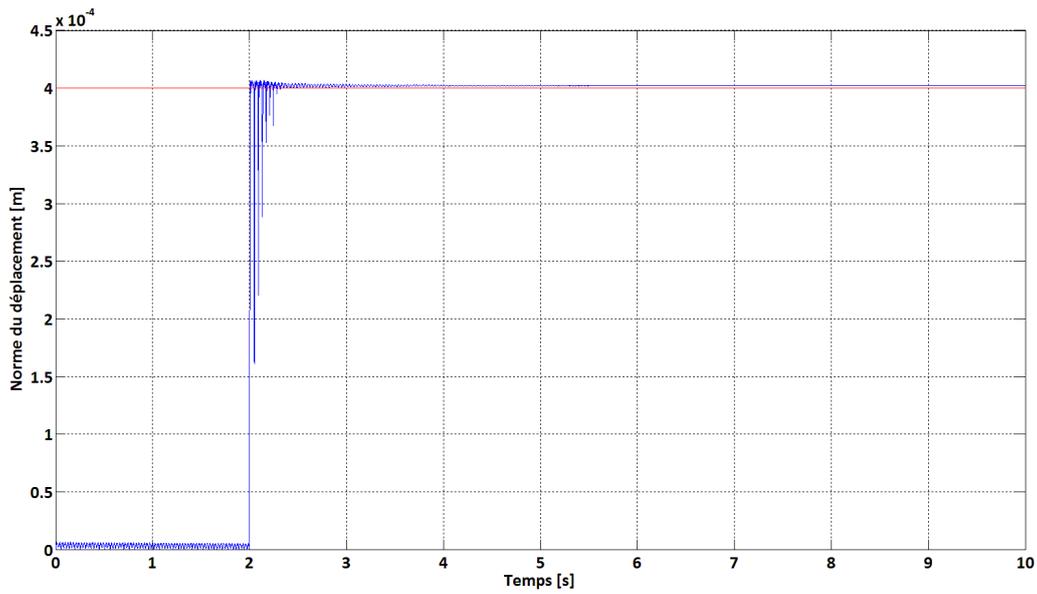


Figure 2-57 : Norme du vecteur déplacement, pénalité amortie : loi 1

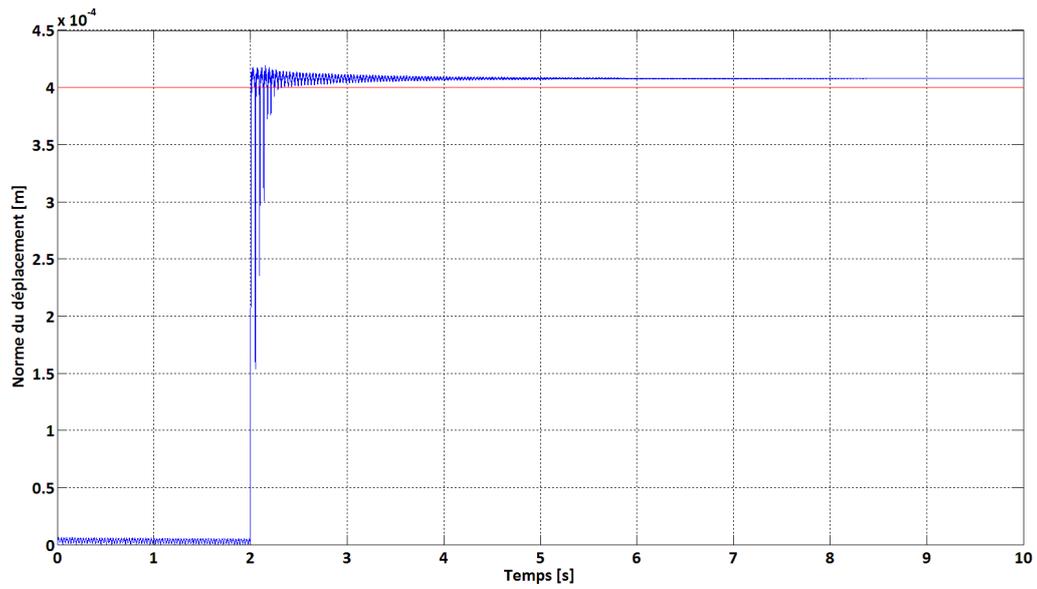


Figure 2-58 : Norme du vecteur déplacement, pénalité amortie : loi 2

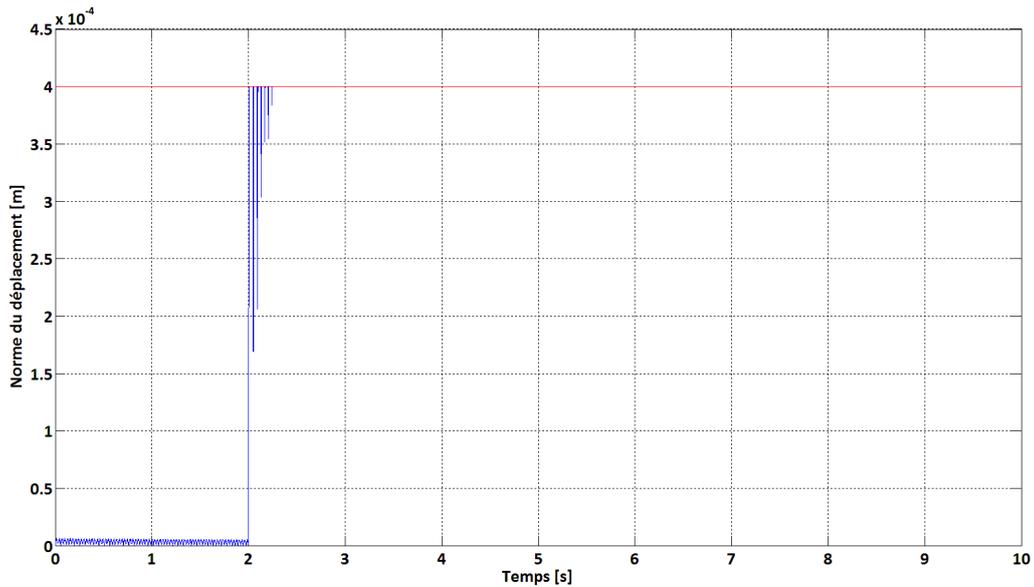


Figure 2-59 : Norme du vecteur déplacement, multiplicateurs de Lagrange

Les 3 courbes d'évolutions dans le temps des *Figure 2-60, 2-61 et 2-62*, montrent la composante normale de l'effort de contact. La série de rebonds est mise en évidence par des valeurs nulles de l'effort de contact durant les 0.4 secondes qui suivent l'augmentation soudaine du balourd. L'intensité des efforts ainsi que le nombre de rebonds diffèrent selon la méthode de gestion de contact considérée. Après un régime transitoire de 3-4 secondes, l'effort normal converge vers une valeur limite d'environ 2100 N quel que soit le modèle de contact choisit. Le rotor en contact permanent avec un mouvement en précession directe se comporte comme un nouveau système linéaire.

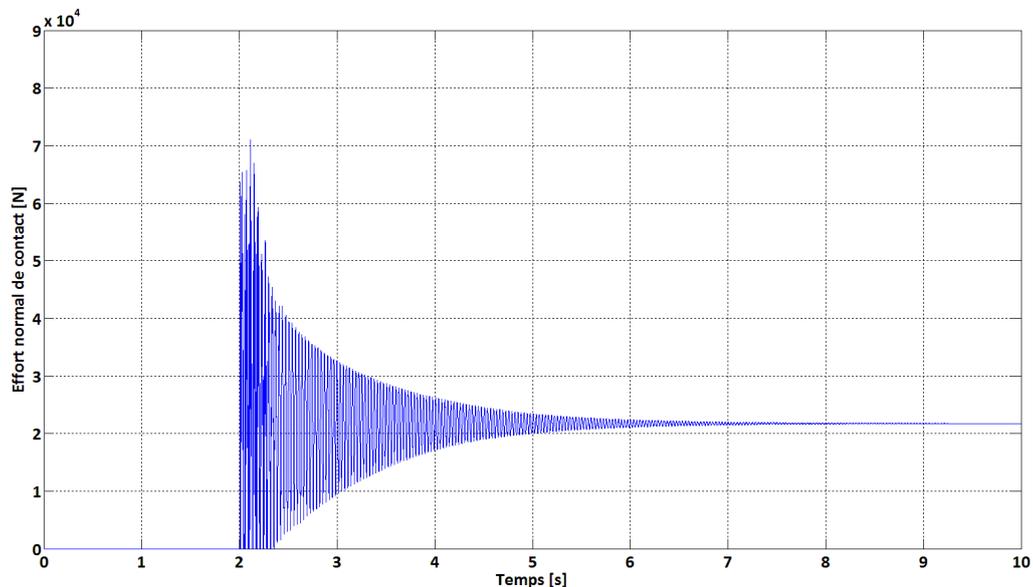


Figure 2-60 : Effort normal de contact, pénalité amortie : loi 1

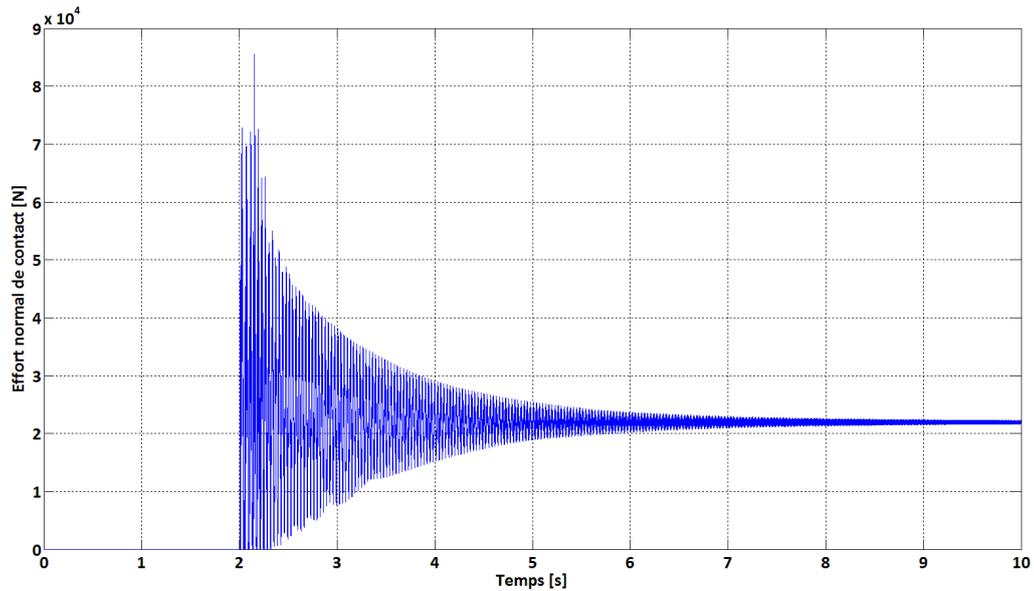


Figure 2-61 : Effort normal de contact, pénalité amortie : loi 2

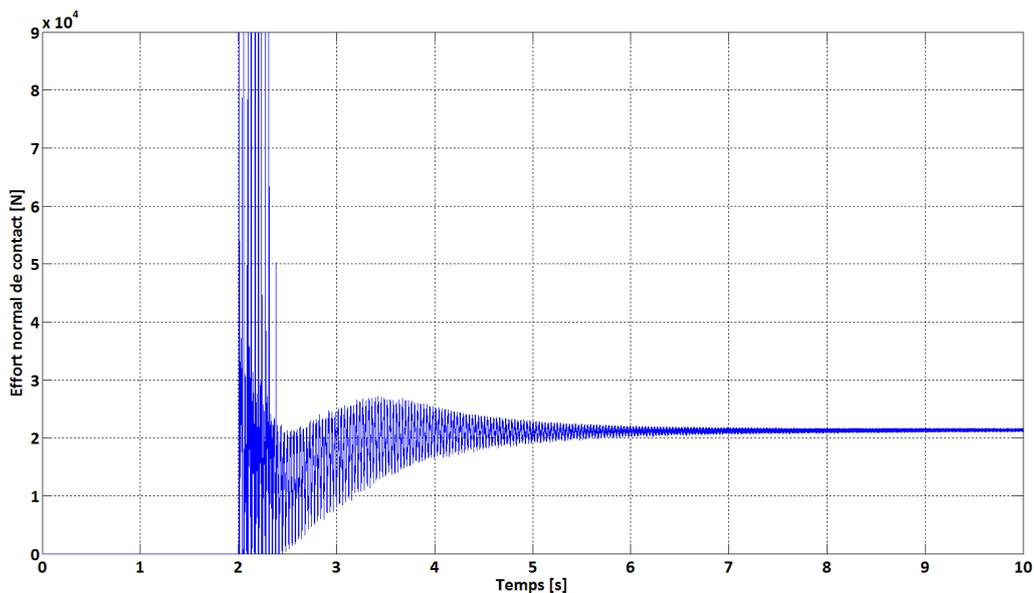


Figure 2-62 : Effort normal de contact, multiplicateurs de Lagrange

L'évolution de la vitesse instantanée de précession est tracée sur les 3 figures ci-dessous suivant la loi de contact considérée. En raison d'un très faible coefficient de frottement, la vitesse de précession devient exclusivement positive traduisant ainsi un mouvement en précession directe. En régime permanent la vitesse instantanée de précession converge vers une valeur fixe d'environ 0.25 m/s supérieure à celle observée en configuration sans contact.

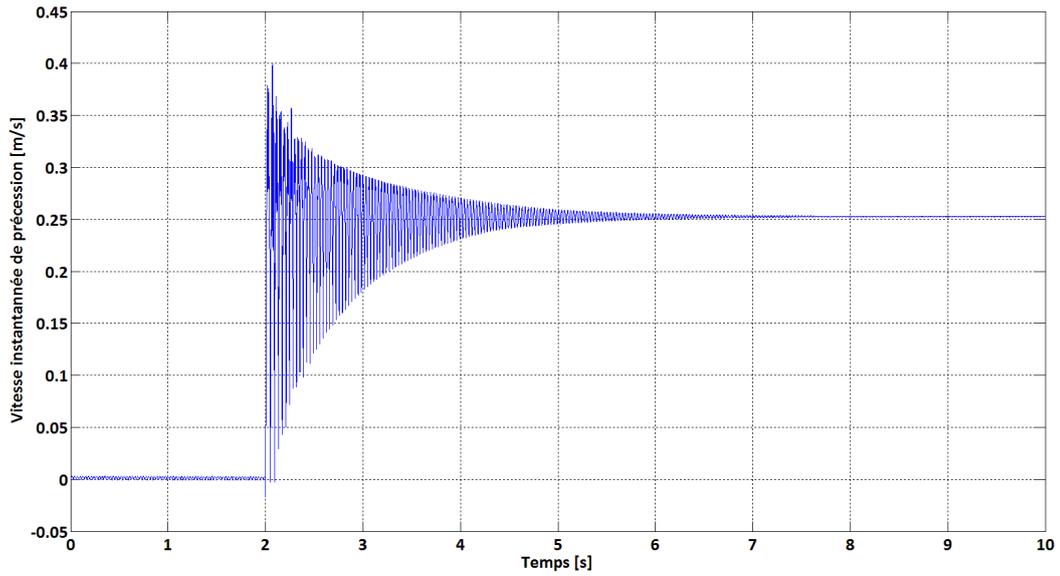


Figure 2-63 : Vitesse instantanée de précession, pénalité amortie : loi 1

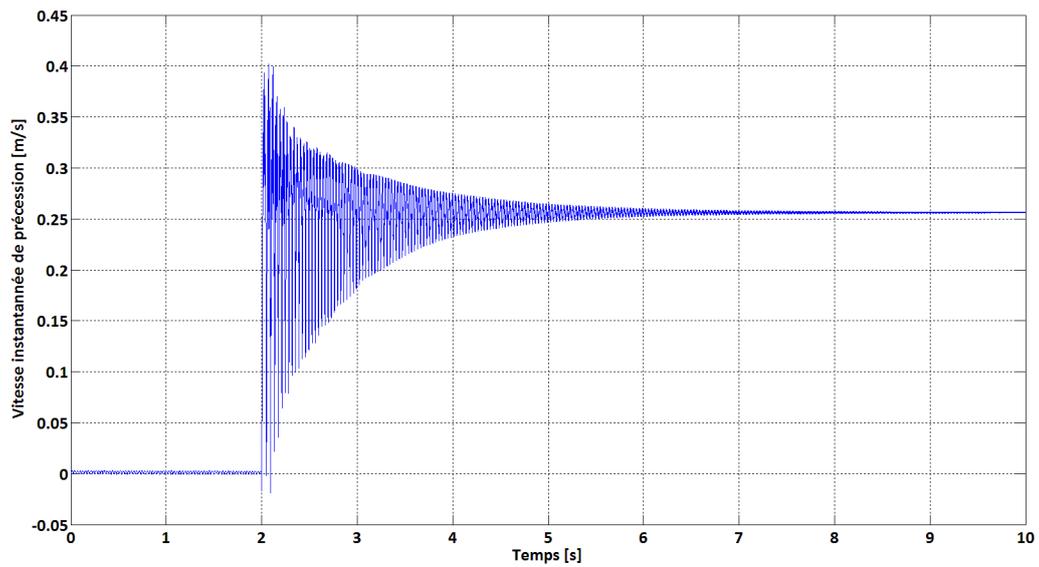


Figure 2-64 : Vitesse instantanée de précession, pénalité amortie : loi 2

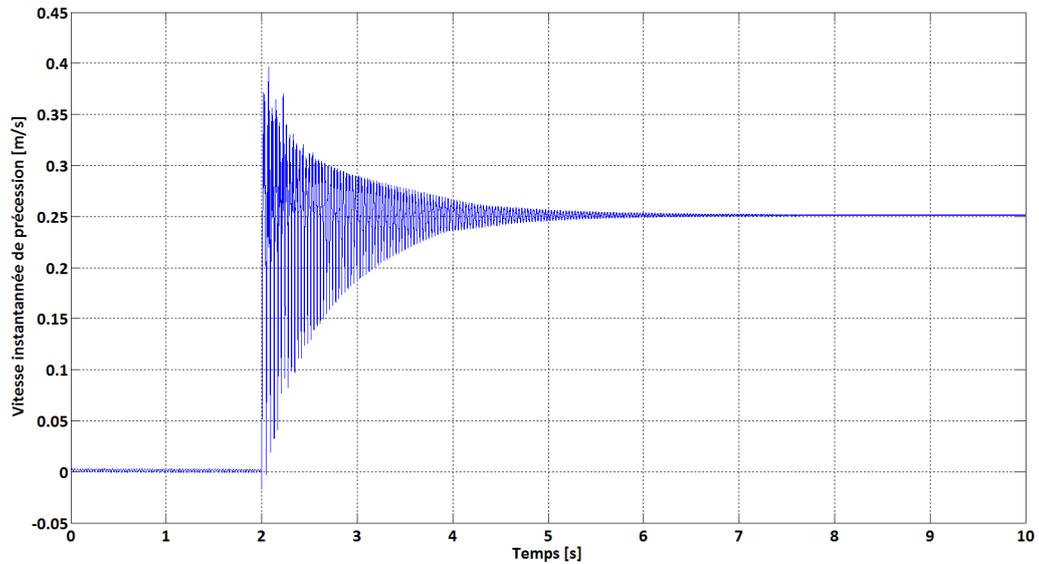


Figure 2-65 : Vitesse instantanée de précession, multiplicateurs de Lagrange

4.4.22 2^{ème} configuration de touche rotor-stator

Dans le cas de touche, occasionnant un contact partiel symbolisé par des rebonds entre les parois du stator, il est question de savoir quels effets sont provoqués sur la dynamique du système. Les figures suivantes présentent les orbites obtenues par calcul avec un contact rotor/stator.

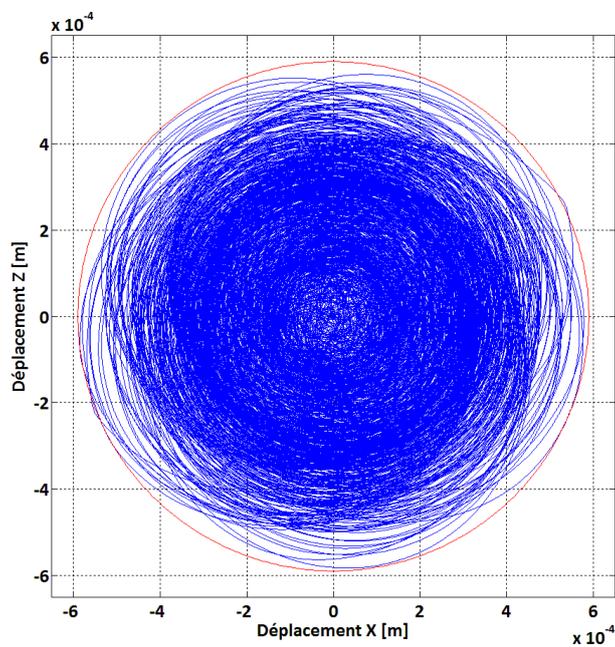


Figure 2-66 : Orbite au nœud de contact, pénalité amortie : loi 1

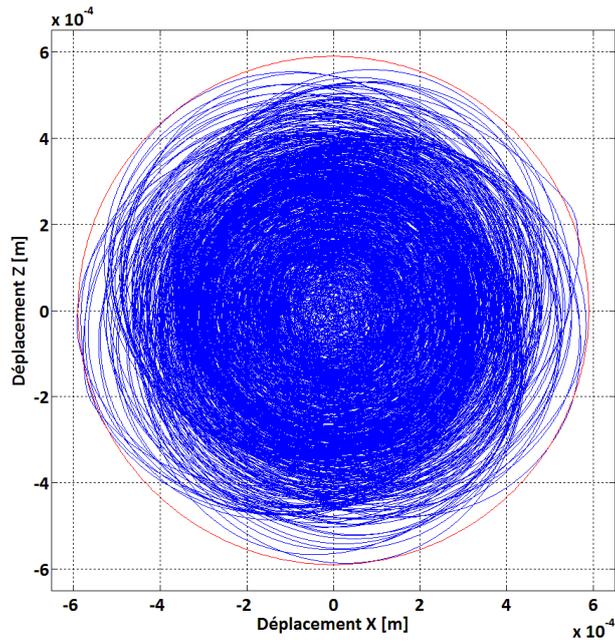


Figure 2-67 : *Orbite au nœud de contact, pénalité amortie : loi 2*

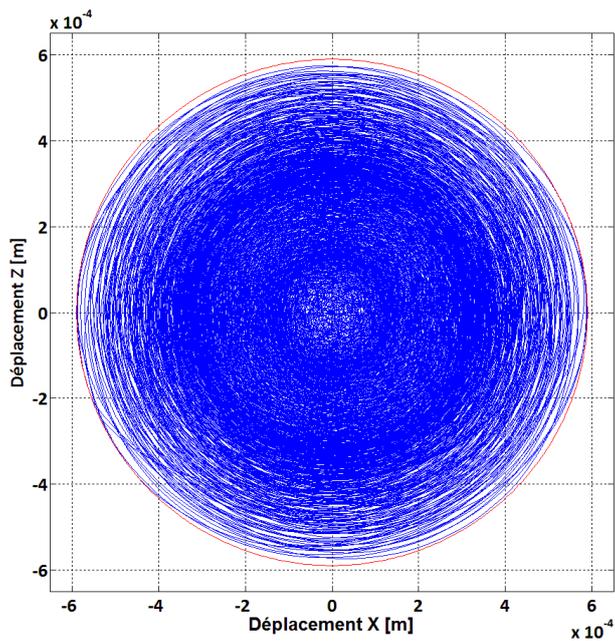


Figure 2-68 : *Orbite au nœud de contact, multiplicateurs de Lagrange*

Les 3 figures suivantes montrent l'évolution temporelle de l'amplitude d'excentricité du nœud n°6. Le nombre de touches est restreint et relativement différent suivant le modèle de contact utilisé. Après une série finie de rebonds, le rotor reprend un comportement linéaire, semblable à celui du rotor en configuration sans contact (*Figure 2-51*).

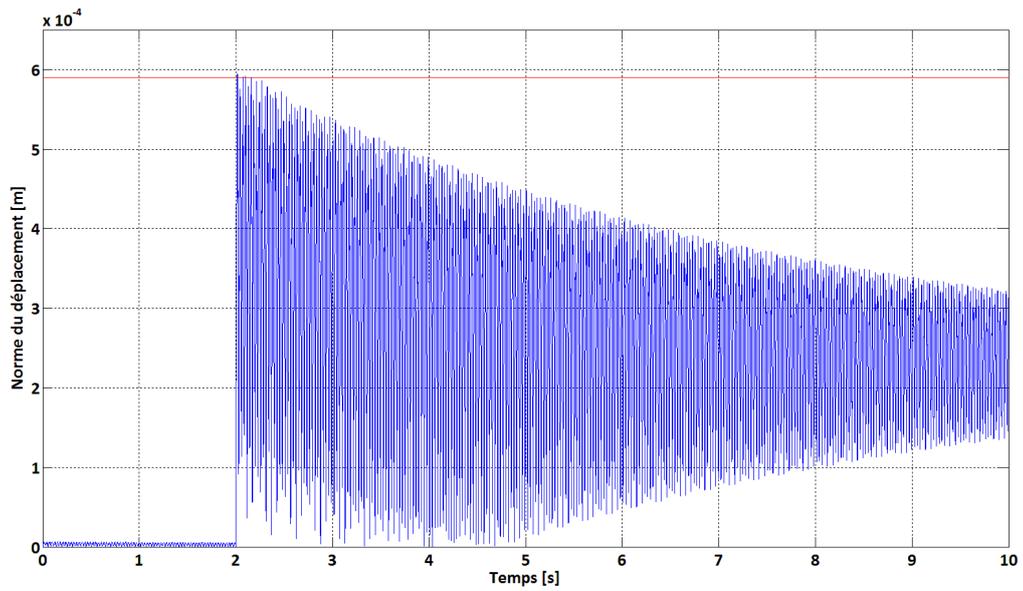


Figure 2-69 : Norme du vecteur déplacement, pénalité amortie : loi 1

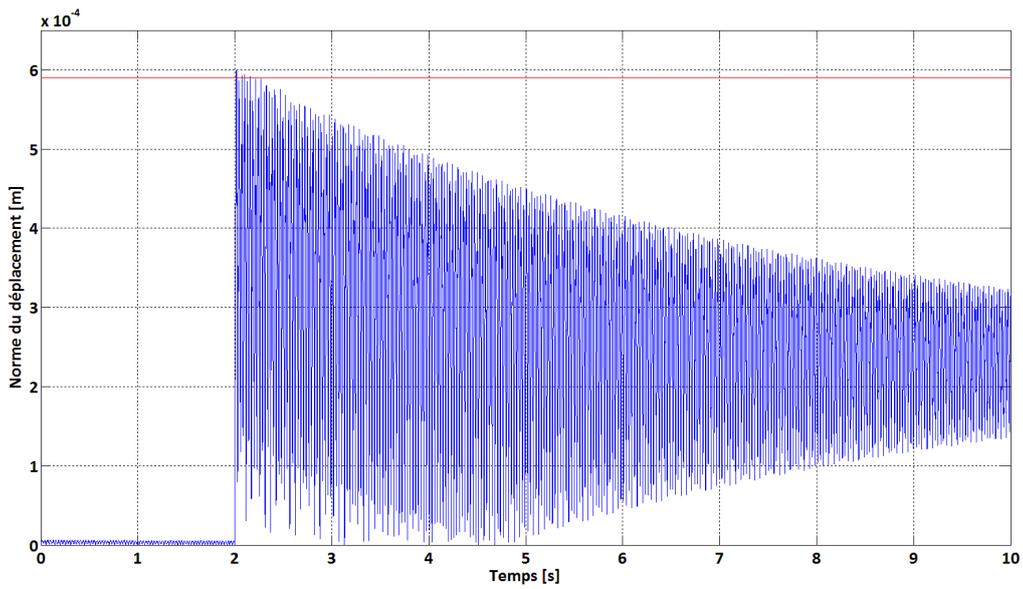


Figure 2-70 : Norme du vecteur déplacement, pénalité amortie : loi 2

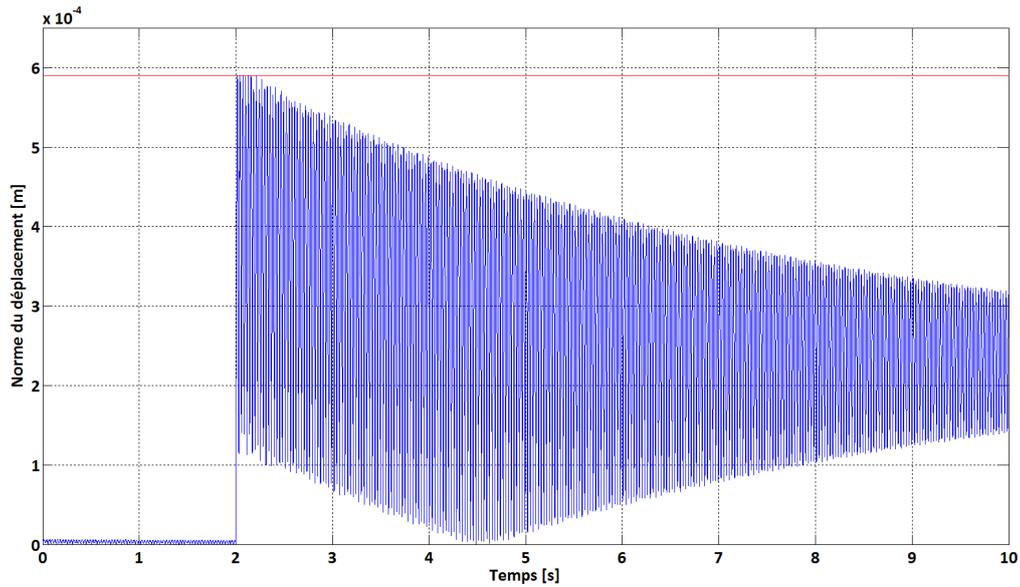


Figure 2-71 : Norme du vecteur déplacement, multiplicateurs de Lagrange

On présente *Figure 2-72* l'évolution temporelle de l'effort normal de contact calculé suivant les 3 méthodes de gestion de contact présentées. La force de contact est une succession de pics à instants rapprochés dont les amplitudes décroissent rapidement dans le temps. Le premier contact entraîne une petite série de rebonds (5 pour les modèles de pénalités et 6 pour celui des multiplicateurs de Lagrange) avant que le système ne reprenne son comportement linéaire. Le système se met alors à régime pseudo-permanent. L'effort normal lors du premier choc s'élève à :

- $4.5 \cdot 10^4$ N avec la loi 1 de pénalité amortie (PA : L)
- $2.6 \cdot 10^4$ N avec la loi 2 de pénalité amortie (PA : NL)
- $2.8 \cdot 10^6$ N avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (M Lagrange)

Les valeurs d'efforts de contact générés par les différents modèles de contact sont très différentes. Les modèles de pénalités provoquent des conséquences similaires sur le plan qualitatif. Les différents rebonds ont lieu aux mêmes dates malgré d'importantes différences sur la valeur des efforts de contact. Le modèle ainsi que les paramètres de contact ont une grande influence sur les phénomènes transitoires ou quasi-périodique déclenchés suite à une touche rotor/stator. En revanche ils s'avèrent beaucoup plus robustes en respect aux phénomènes périodiques comme le contact permanent.

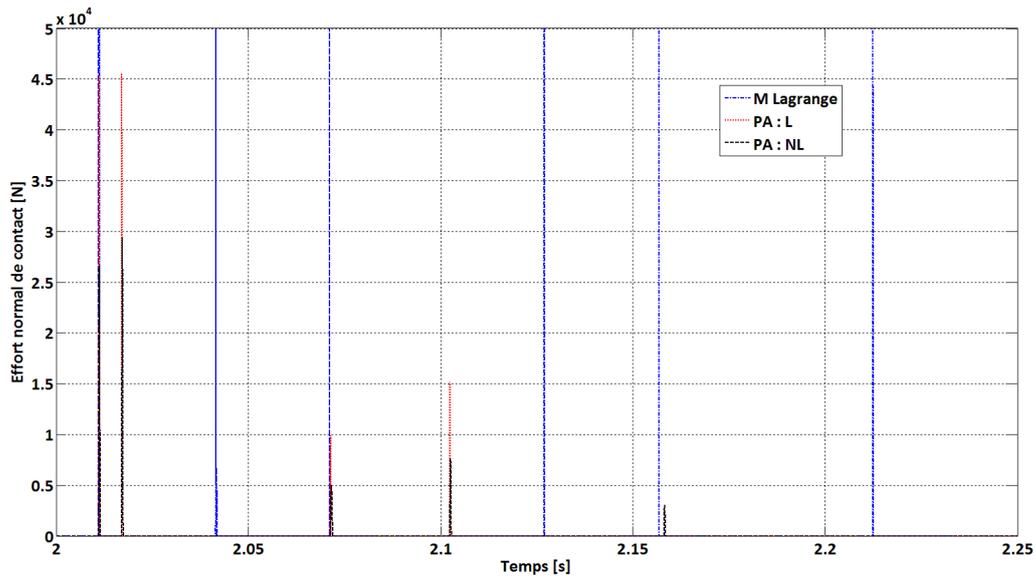


Figure 2-72 : Effort normal de contact

Les Figures 2-73 à 2-75 présentent l'évolution du vecteur instantané de vitesse de précession du rotor suivant les 3 modèles de contact. Durant le régime transitoire, la vitesse de précession prend périodiquement des valeurs négatives. Les courbes d'évolution sont très semblables à celle obtenue en configuration sans contact (Figure 2-52).

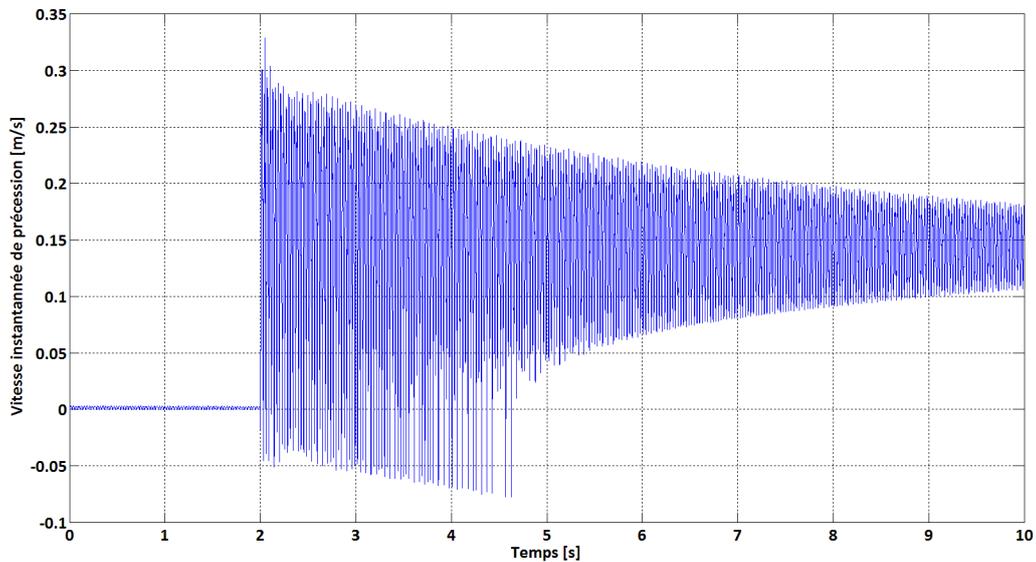


Figure 2-73 : Vitesse instantanée de précession, pénalité amortie : loi 1

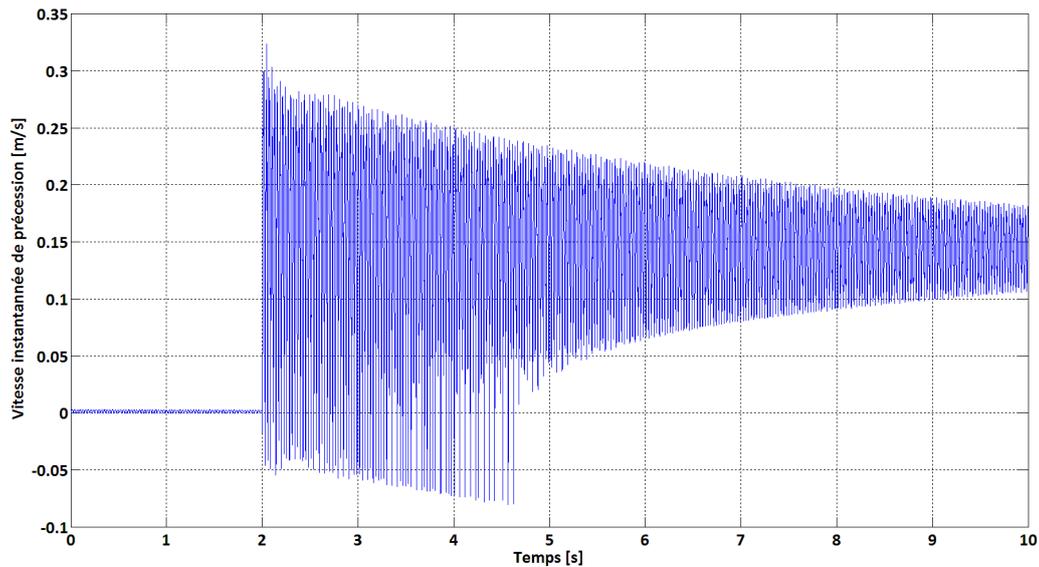


Figure 2-74 : Vitesse instantanée de précession, pénalité amortie : loi 2

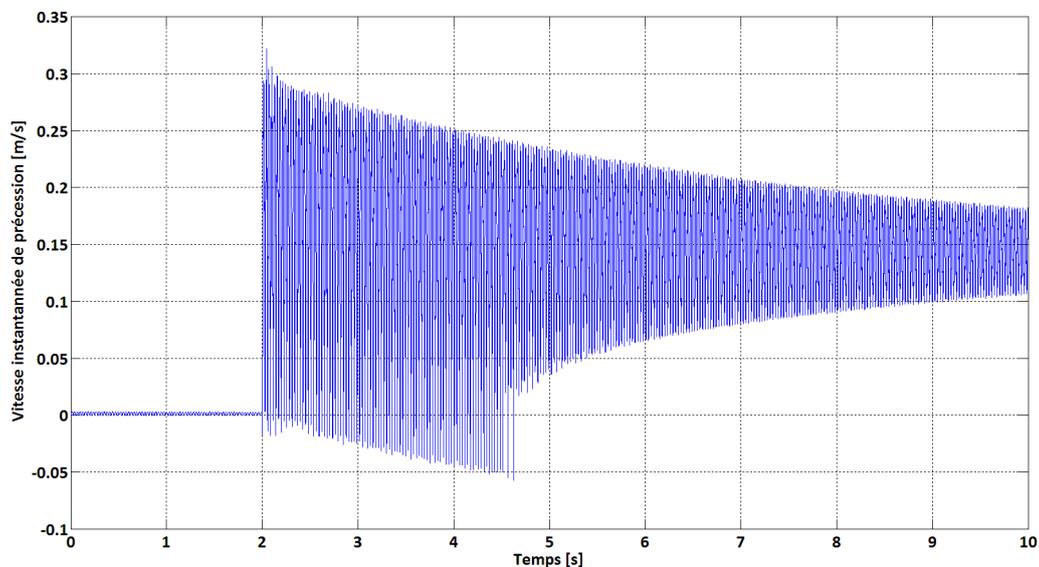


Figure 2-75 : Vitesse instantanée de précession, multiplicateurs de Lagrange

4.4.3 Post-traitement fréquentiel des résultats de simulations avec touche rotor/stator

L'analyse temporelle-fréquentielle porte sur les résultats de calculs du chapitre précédent. Les données en entrée utilisées pour calculer et tracer les différents spectrogrammes sont indiquées dans le *Tableau 2-9*. Le type de fenêtre utilisée est une fenêtre de Hanning. Le signal temporel choisi est celui issu du vecteur vitesse suivant l'axe X au point de contact. Ce signal est préalablement échantillonné à 10 kHz afin de faciliter l'exploitation de la fonction « spectrogram » disponible sur la toolbox « signal processing » de Matlab.

Taille de la fenêtre d'intégration temporelle		Taux de recouvrement [%]	pas de temps fréquentiel [Hz]	Fréquence de coupure [Hz]
[points]	[secondes]			
4096	0.4096	95	0.2	350

Tableau 2-9 : Données d'entrée de la fonction spectrogramme

4.4.31 1^{ère} configuration de touche rotor/stator

Les spectrogrammes des *Figure 2-76, 2-77 et 2-78*, montrent les conséquences d'un contact permanent sur le spectre à tout instant. Les spectrogrammes sont très proches, et il semblerait que les différents modèles de contact traduisent un même comportement dans ce cas précis. On y remarque aussi, l'apparition de raies d'ordre 2/3 et 4/3 principalement, mais aussi d'autres avec des amplitudes de vibrations plus petites synonymes de « fortes touches » durant le régime transitoire. En contact permanent, un mouvement orbital en précession directe est établi, le système ne vibre plus du tout suivant les fréquences propres du système, mais uniquement suivant la fréquence d'excitation du balourd. Ce cas de « touche » précisément entraîne donc un mouvement orbital synchrone.

L'exploitation fréquentielle des résultats donne une bonne concordance entre les différents modèles bien qu'elle soit difficile à observer dans le domaine temporel durant le régime transitoire

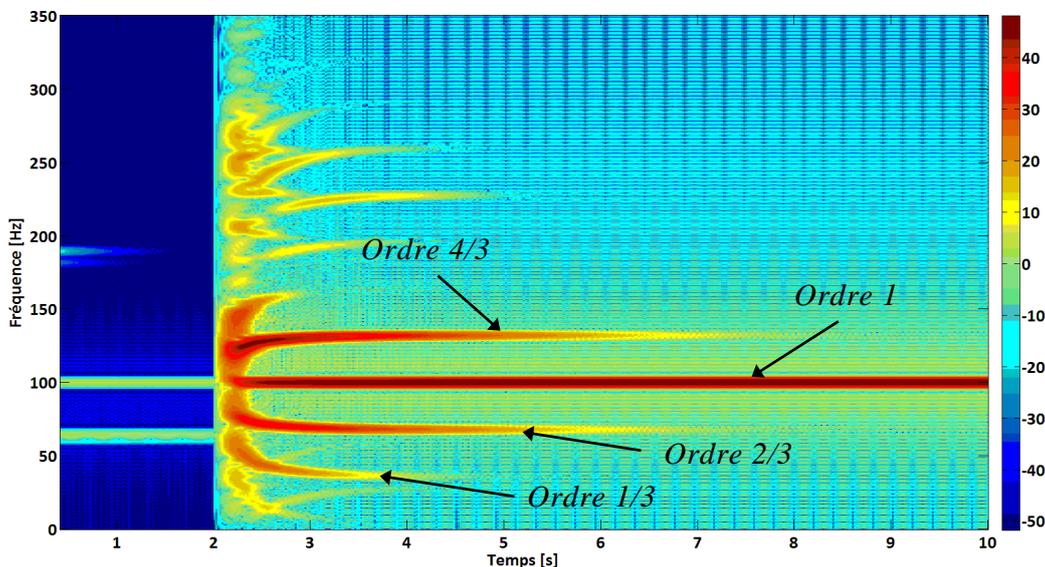


Figure 2-76 : Spectrogramme du vecteur vitesse, pénalité amortie : loi 1

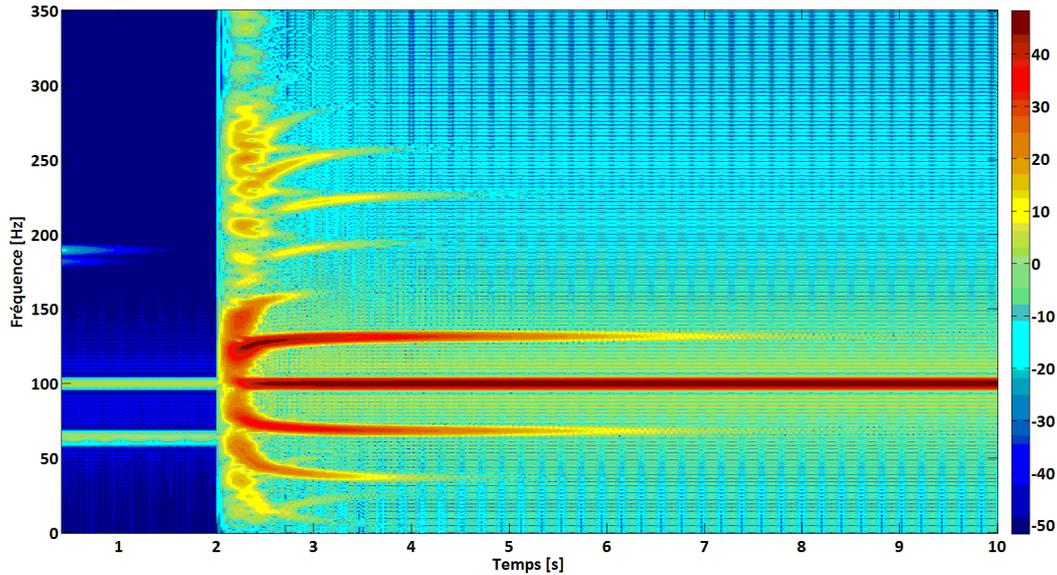


Figure 2-77 : Spectrogramme du vecteur vitesse, pénalité amortie : loi 2

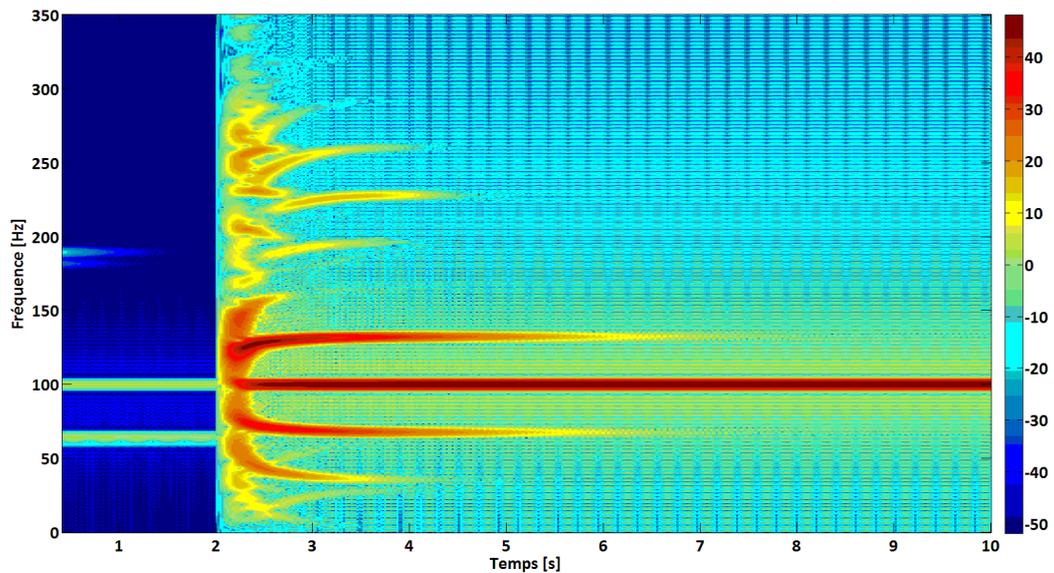


Figure 2-78 : Spectrogramme du vecteur vitesse, multiplicateurs de Lagrange

Un full-spectrum du régime transitoire, entre les dates $t = 2.5$ s et $t = 3.5$ s, lorsque le contact permanent en précession direct s'établit est tracé Figure 2-79. Des pics d'ordre $1/3$, $2/3$, 1 et $4/3$ se révèlent sur le contenu spectral conformément à la lecture des spectrogrammes présentés précédemment. Un léger décalage en fréquence est observé entre les résultats issus de la loi 1 et 2.

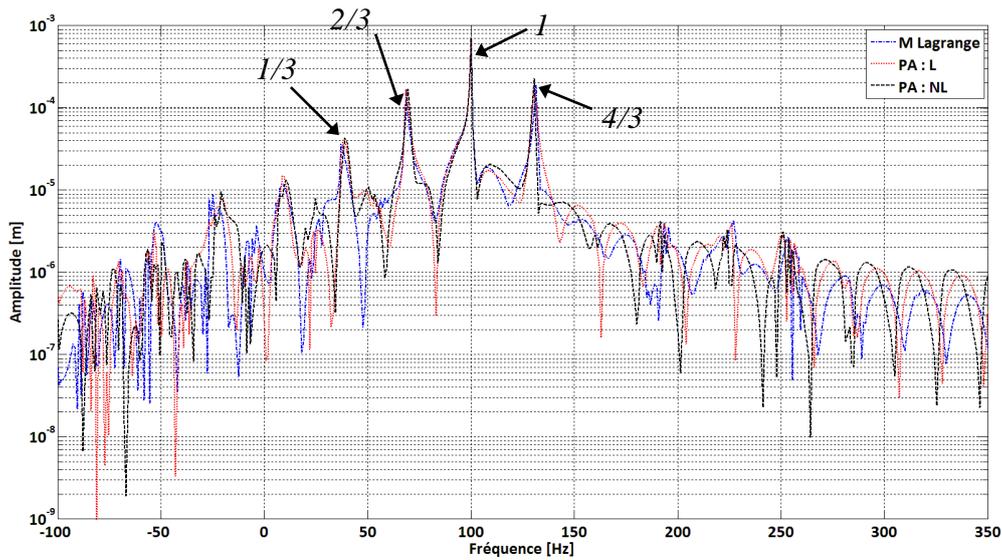


Figure 2-79 : full-spectrum du régime transitoire en contact permanent dans l'intervalle [2.5 ; 3.5] s

4.4.32 2^{ème} configuration de touche rotor/stator

La deuxième série de spectrogrammes a été réalisée sur les réponses avec un contact partiel. Durant ce cas de « touche », divers rebonds ont été détectés avant que le rotor ne suive un comportement linéaire. Les spectrogrammes Figures 2-80 à 2-82 dévoilent le comportement linéaire en fin de simulation. La principale différence entre ces spectres et celui de la Figure 2-53 se situe au niveau de la date du premier contact. Il semblerait que le contact sollicite l'ensemble des fréquences du spectre, notamment celles qui sont proches d'une fréquence propre du système. On y observe aussi, une forte concordance entre les spectrogrammes alors que les modèles de contact sont intrinsèquement différents.

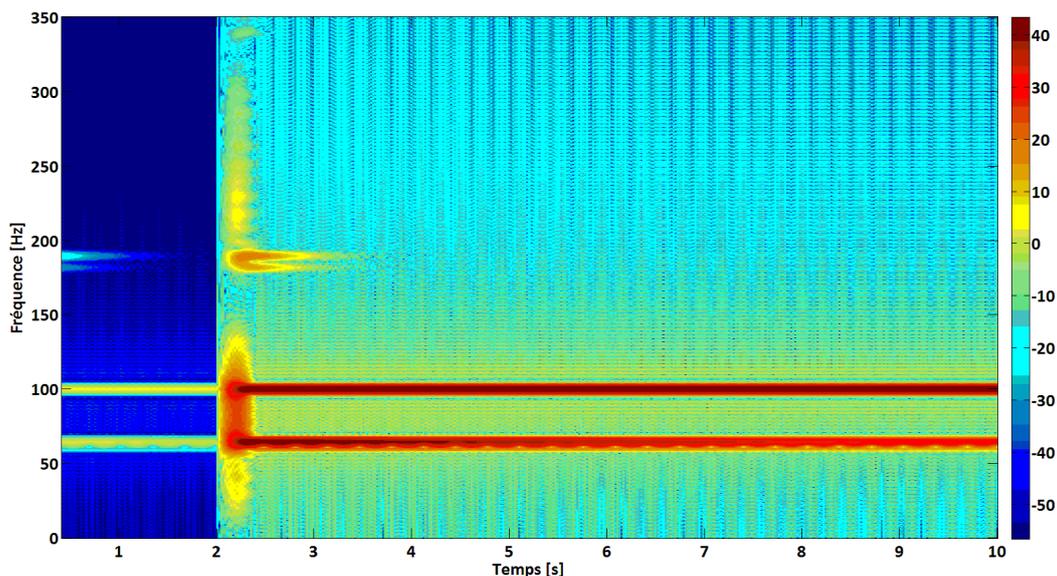


Figure 2-80 : Norme du vecteur déplacement, pénalité amortie : loi 1

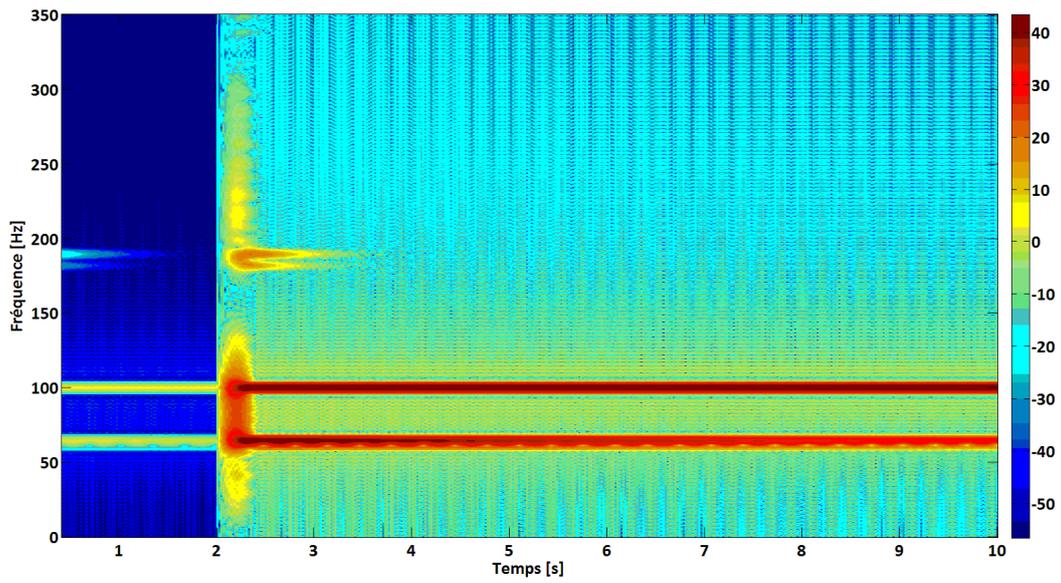


Figure 2-81 : Norme du vecteur déplacement, pénalité amortie : loi 2

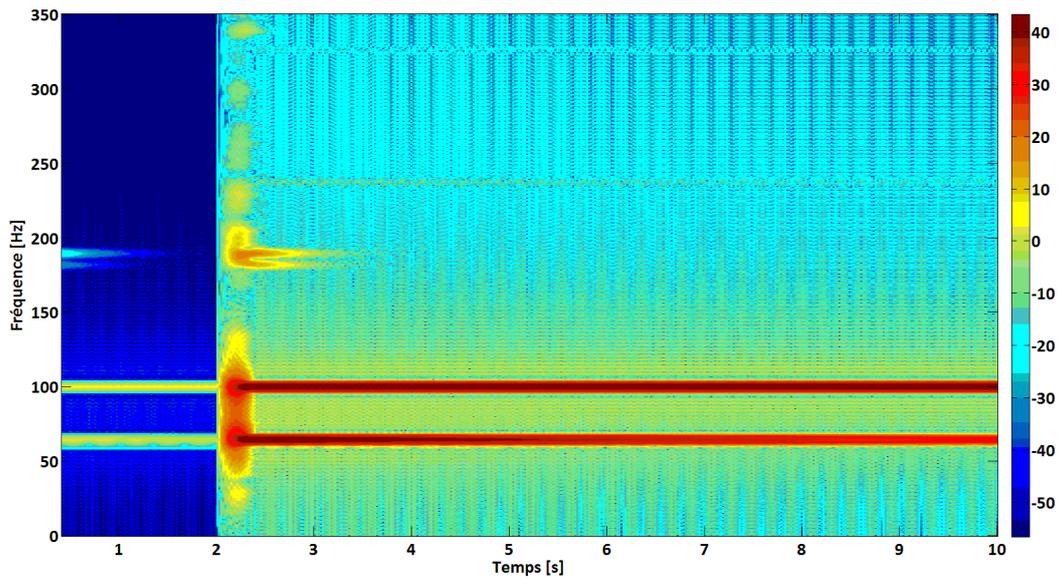


Figure 2-82 : Norme du vecteur déplacement, multiplicateurs de Lagrange

4.5 Comparaison des méthodes de calcul : intégration temporelle vs HBM

L'analyse sur le comportement en régime permanent et pseudo-permanent suite à une touche a été effectuée. Il s'agit de confronter les résultats de simulation dans les domaines fréquentiel et temporel. Cette analyse a été menée avec Peletan [PEL 12], qui a développé dans le Code Aster (EDF) des modules pour la HBM (méthode de la balance harmonique). Les simulations temporelles ont été réalisées avec ToRoS et avec le Code Aster.

4.5.1 Présentation du système d'étude

Le système étudié est celui du rotor à 3 disques schématisé *Figure 2-46*. Les caractéristiques des disques sont inscrites *Tableau 2-4*, celles des paliers sont répertoriées *Tableau 2-5*.

La procédure consiste tout d'abord à s'assurer que les deux codes de calcul donnent la même réponse linéaire, puis de comparer les résultats avec prise en compte d'un contact possible avec et sans frottement. Les résultats dans le domaine fréquentiel sont très rapides via la méthode HBM qui s'occupe de rechercher le régime permanent ou pseudo-permanent à chaque point de fonctionnement. Dans le domaine temporel, le travail est beaucoup plus coûteux, il faut que la simulation soit suffisamment longue pour atteindre un régime pseudo-périodique. Une fois trouvée, les vecteurs de déplacements nodaux sont réutilisés comme condition initiale pour les calculs avec la vitesse de rotation suivante. Le but est de tracer une courbe de réponse non-linéaire du rotor où évolue l'amplitude maximale d'excentricité (rayon maximum de l'orbite) en fonction de la vitesse de rotation. Un coefficient de frottement de Coulomb de 0.1 a été choisi pour les calculs avec contact frottant. Le pas de temps varie de $1e-5$ s à $1e-6$ s durant la simulation au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente. L'algorithme de Newmark à accélération moyenne a été choisi. Aucune réduction modale n'est faite durant les calculs.

4.5.2 Calcul d'une réponse non-linéaire d'un rotor à 3 disques sans frottement

La courbe non-linéaire du rotor à 3 disques sans frottement est disponible *Figure 2-83*. Les résultats obtenus par la méthode HBM et ceux calculés avec ToRoS (CM) concordent parfaitement. Durant la phase où le contact n'a pas lieu, les courbes suivent parfaitement la réponse linéaire du rotor. Une fois le premier contact établi, les deux codes numériques laissent apparaître un contact permanent avec des amplitudes d'orbites identiques. La perte de contact apparaît simultanément sur les résultats des 2 codes numériques à environ 8900 rpm.

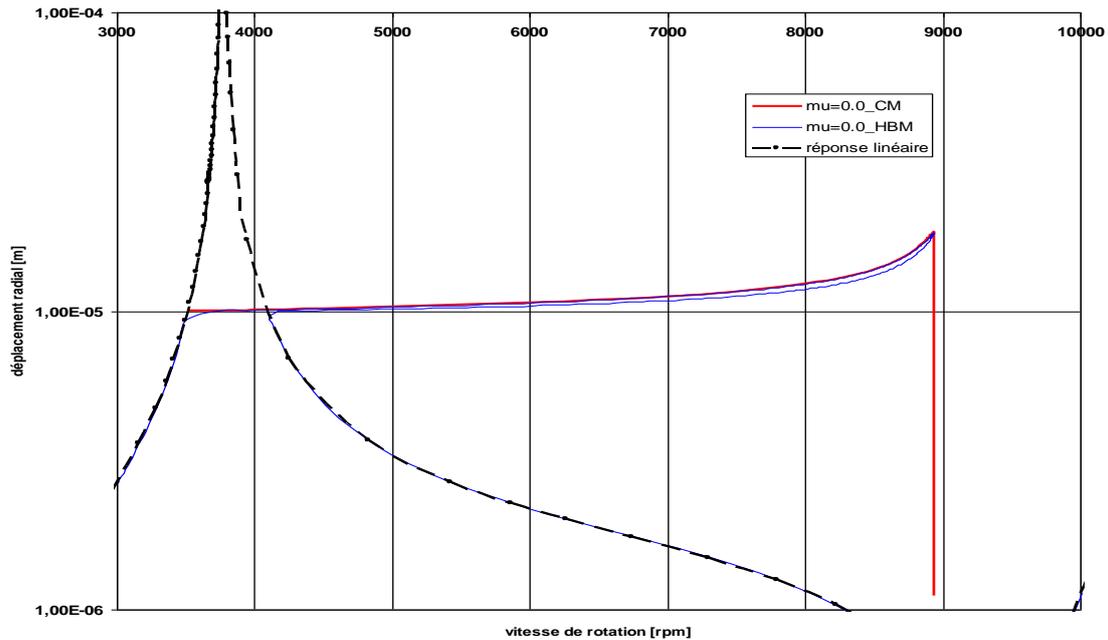


Figure 2-83 : Réponse non-linéaire du rotor à 3 disques sans frottement

4.5.3 Calcul d'une réponse non-linéaire d'un rotor à 3 disques avec frottement

La courbe non-linéaire du rotor à 3 disques *Figure 2-84* avec prise en compte du contact frottant montre des résultats bien différents. On constate que l'algorithme de calcul employant la méthode HBM donne des résultats similaires au cas sans frottement. L'évolution de l'amplitude est la même, seul le point singulier de retour est différent puisqu'il apparaît à une vitesse d'environ 7800 rpm. Les courbes issues de modèles d'intégration temporelle du code Matlab ToRoS (CM) et de Code Aster (CA) montrent une augmentation croissante de l'amplitude d'orbite par rapport au cas sans frottement. A une vitesse d'environ 6000-6500 rpm la courbe non-linéaire décroche complètement pour revenir sur un régime linéaire du rotor sans contact.

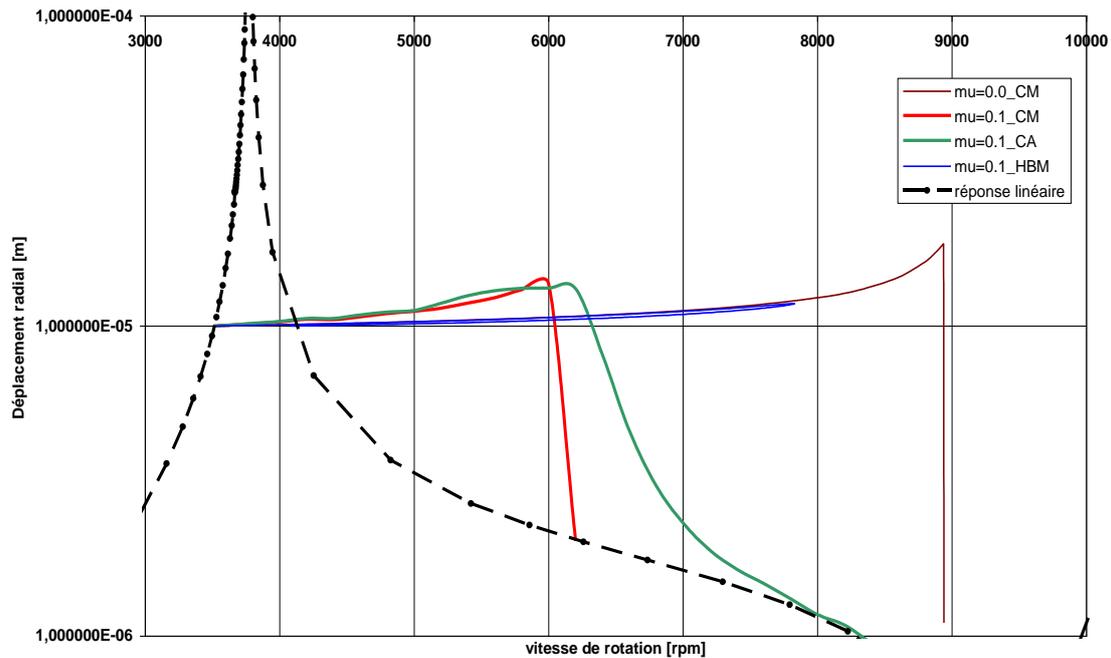


Figure 2-84 : Réponse non-linéaire du rotor à 3 disques avec frottement

Il est aujourd'hui encore difficile d'expliquer de telles différences. La méthode HBM procède à une réduction modale au préalable, et il semblerait que le contact frottant ne soit pas parfaitement considéré ici. Les différences entre résultats issus de Code Aster et du code ToRoS sous Matlab sont moins importantes, les 2 courbes se suivent jusqu'au point de décrochage. Le rotor simulé avec ToRoS revient plus vite à un régime linéaire que celui simulé avec Code Aster.

4.6 Synthèse

Un système académique de rotor à 3 disques rigides extrait de [LAL 98] a été développé sous la forme d'un modèle éléments finis rotor. L'analyse modale du modèle linéaire informe que le rotor est dimensionné sur-critique par rapport à la vitesse de rotation.

Deux comportements typiques d'un contact rotor/stator ont été déclenchés durant les calculs temporels :

- un contact permanent en précession directe,
- une série finie de rebonds.

Ces deux phénomènes ont été reproduits par le biais de 3 lois de gestion du contact distinctes :

- une loi linéaire de pénalité (loi 1),
- une loi non-linéaire de pénalité (loi 2),
- les multiplicateurs de Lagrange.

Une analyse fréquentielle des réponses temporelles obtenues par calculs a été réalisée par l'intermédiaires de spectrogrammes.

Les réponses temporelles, durant les deux comportements à la touche provoqués, ont montré une grande robustesse vis-à-vis du modèle de contact choisi en reproduisant qualitativement le même comportement.

Le contact permanent en précession directe se distingue par le fait qu'il s'assimile à un nouveau système linéaire rotor + stator. Le rotor pénètre continuellement dans le stator, la composante normale de l'effort de contact ainsi que la vitesse de précession du rotor convergent vers deux valeurs fixes, en régime établi, indépendamment du choix de la loi de contact. D'une manière générale, les régimes transitoires sont différents, mais les 3 modèles de contact provoquent un régime établi identique.

Les conclusions sur les réponses temporelles simulant la série finie de rebonds sont identiques. Les régimes transitoires diffèrent selon la loi de contact, en revanche, le rotor finit par décrocher du stator et reprendre un comportement linéaire sans contact.

Les spectrogrammes des réponses temporelles du contact permanent en précession directe font apparaître des ordres multiples ou sous-multiples d' $1/3$ de la vitesse de rotation. Le choix de la loi de contact n'apporte aucune différence sur les spectres de la réponse, confirmant ainsi la grande robustesse du phénomène vis-à-vis des paramètres de contact.

Les spectrogrammes des réponses temporelles du contact partiel avec série finie de rebonds sont similaires à ceux obtenues sur le système linéaire (sans contact). Les fréquences sollicitées durant les rebonds sont identiques quel que soit la loi de contact choisie.

Chapitre 3 : Application industrielle : Réponse dynamique d'un turbomoteur sujet à des multitouches provoquées par une perte d'aubes

Les travaux de cette thèse ciblent en particulier les turbomoteurs conçus par Turboméca, groupe SAFRAN. Ce chapitre est consacré en particulier à la prévision du comportement dynamique de l'arbre de turbine libre (TL) d'un turbomoteur coaxial, suite à un départ d'aubes sur la 2^{ème} roue (TL2).

1. Présentation d'un turbomoteur type Ardiden 1H

L'étude porte sur un turbomoteur de type Ardiden 1H utilisé par la société Indienne HAL dans la motorisation des hélicoptères Drhuv et LCH. Il offre une puissance de 1 MW.

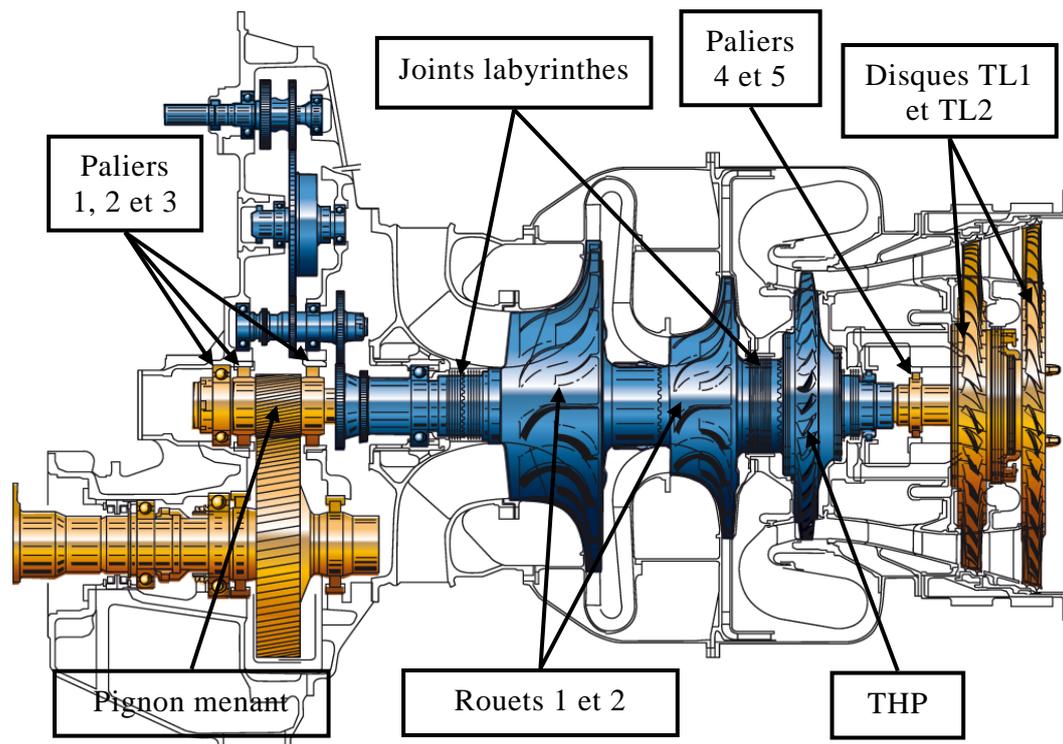


Figure 3-1 : Architecture d'un « Ardiden 1H »

L'architecture d'un Ardiden 1H se compose de deux lignes d'arbre coaxiales : un générateur de gaz (GG en bleu) et une turbine libre (TL), voir *Figure 3-1*.

La ligne d'arbre GG se compose d'un arbre creux supporté par deux roulements montés à chacune des extrémités de l'arbre. Le premier est un roulement à billes intégré à une cage souple et amorti radialement par un film d'huile pressurisé (squeeze film : SqF) à l'avant du générateur tandis que le second est un roulement à rouleaux monté rigidement à l'arrière. L'air capté dans l'environnement est comprimé par 2 étages de compresseurs centrifuges (rouet) afin d'assurer une alimentation en air sous pression vers la chambre de combustion (*Figure 3-2*). L'air accéléré par combustion est ensuite évacué vers la partie turbine libre (TL) par le biais d'un étage de turbine haute pression (THP). L'alignement des éléments tournants est assuré par des curvic-couplings maintenus par un tirant traversant, mis en tension.

La ligne d'arbre turbine libre supporte deux disques TL et un arbre palier assure la liaison entre les 2 disques et l'arbre. Un pignon menant est monté à l'avant de la ligne d'arbre par l'intermédiaire de cannelures. Le rotor comporte 5 paliers, les 3 premiers paliers entourent le pignon menant constitués de deux roulements à rouleaux (paliers 2 et 3) et d'un roulement à billes (palier 1). Deux roulements à rouleaux sont également disposés à l'arrière de la TL, dont un est intégré à une cage souple (palier 4). Ils sont équipés d'un squeeze film assurant ainsi l'amortissement des vibrations de la partie arrière de la TL au passage des vitesses critiques.

La vitesse nominale de la turbine libre sert de référence et est désignée par : 100% du régime nominal TL (NTL). La plage de fonctionnement en régime stabilisé est comprise entre 90% et 108.4% NTL.

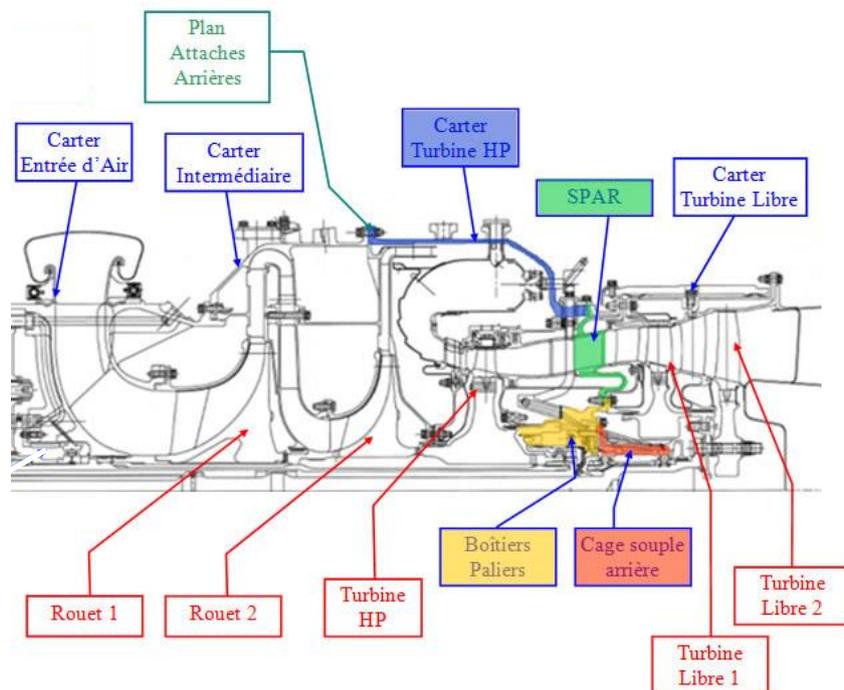


Figure 3-2 : Plan 2D de l'ensemble du moteur Ardiden 1H

2. Modélisation de la ligne d'arbre, des carters et des contacts rotor/stator

Les simulations portent sur un essai de départ d'aubes du disque TL2, [MIL 07]. Les touches radiales observées ont principalement eu lieu entre (*Figure 3-3*) :

- les aubes du disque TL2 et l'anneau du distributeur TL2 (DTL2),
- le joint labyrinthe inter-disques et le distributeur TL2,
- les aubes du disque TL1 et l'anneau de turbine libre,
- le joint labyrinthe du disque TL1 et le distributeur TL1 (DTL1),
- surface extérieure de la cage souple sur le boîtier palier (ensemble SPAR),
- bague extérieure du palier 5 sur le boîtier palier.

Les surfaces de contact des éléments fixes, hors butées paliers, sont revêtues d'une couche d'abrasable.

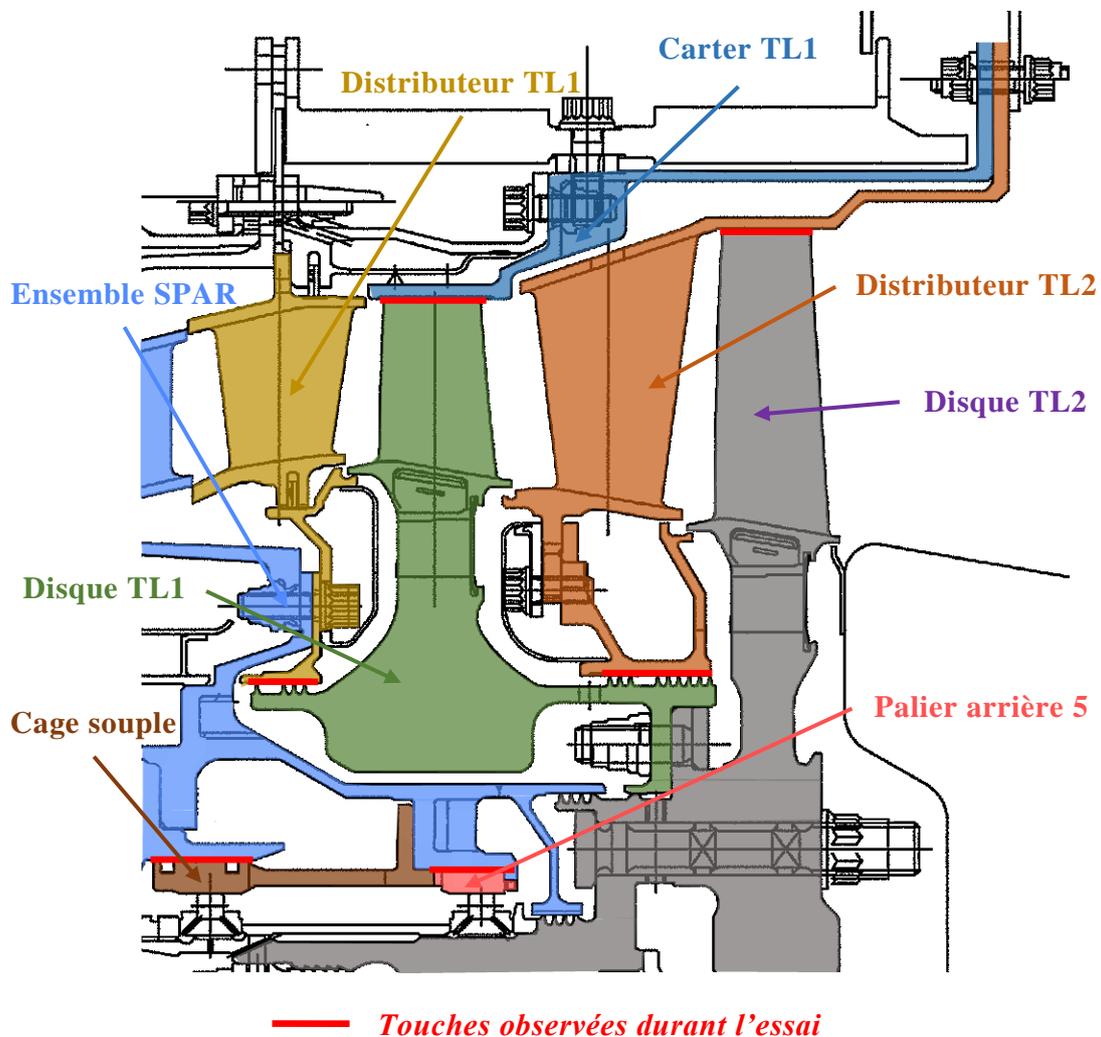


Figure 3-3 : Zones de touches observées durant le départ des aubes

2.1 Modélisation de la ligne d'arbre

Un modèle éléments finis de la ligne d'arbre TL de l'Ardiden 1H a été construit à l'aide d'éléments finis de poutre détaillés *Chapitre 2 §2*. Seules les contributions en flexion sont ici considérées.

Le rotor est discrétisé en 87 nœuds et 87 éléments. Le système tournant comporte 348 ddl. Pour des raisons de visibilité, seuls les labels des nœuds des principaux composants de la machine sont indiqués.

Les hypothèses prises sur les différents composants du rotor (*Figure 3-4*) sont :

- Les deux disques TL1 et TL2 sont modélisés par des éléments finis de poutre très rigides et de masse négligeable ($E=1^{e5}$ GPa et $\rho=1$ kg/m³), les propriétés massiques des disques étant affectées aux nœuds centraux 83 et 76.
- L'arbre TL et l'arbre palier sont modélisés en deux branches par des éléments de poutre classique. Le disque TL est raccordé à l'arbre palier par des éléments finis de poutre.
- Les deux disques TL et l'arbre palier ont le nœud 73 en commun pour modéliser leurs liaisons boulonnées.

Des nœuds ont été placés au milieu des 6 zones susceptibles d'entrer en contact avec les parties fixes durant la simulation :

- joints labyrinthe TL1 au nœud 80, en contact avec le distributeur TL1 au nœud 90,
- double joints labyrinthe inter-disque au nœud 87, en contact avec le diaphragme du distributeur TL2 au nœud 91,
- centre du disque TL1 au nœud 83, en contact avec l'anneau du distributeur TL1 au nœud 88,
- centre du disque TL2 au nœud 76, en contact avec l'anneau du carter TL au nœud 89,
- palier arrière n°4 (cage souple) au nœud 65,
- palier arrière n°5 au nœud 69.

L'ensemble SPAR est pris en compte lors du phénomène de butée par de nouvelles caractéristiques raideur-amortissement des paliers.

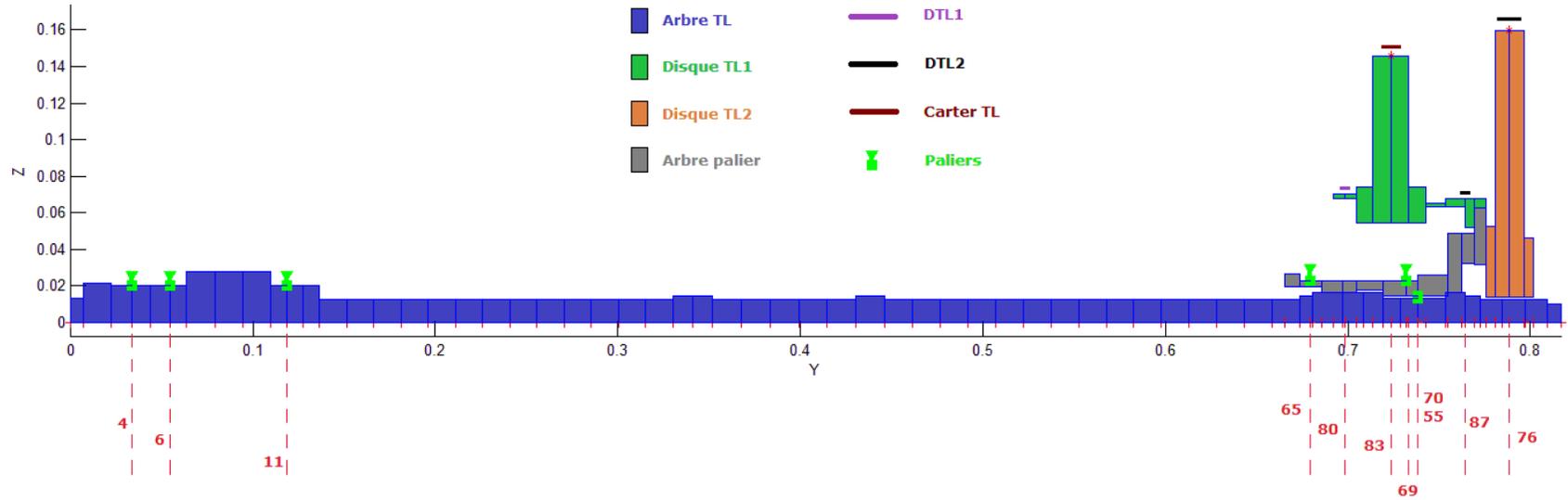


Figure 3-4 : Maillage EF de l'arbre TL Ardiden 1H

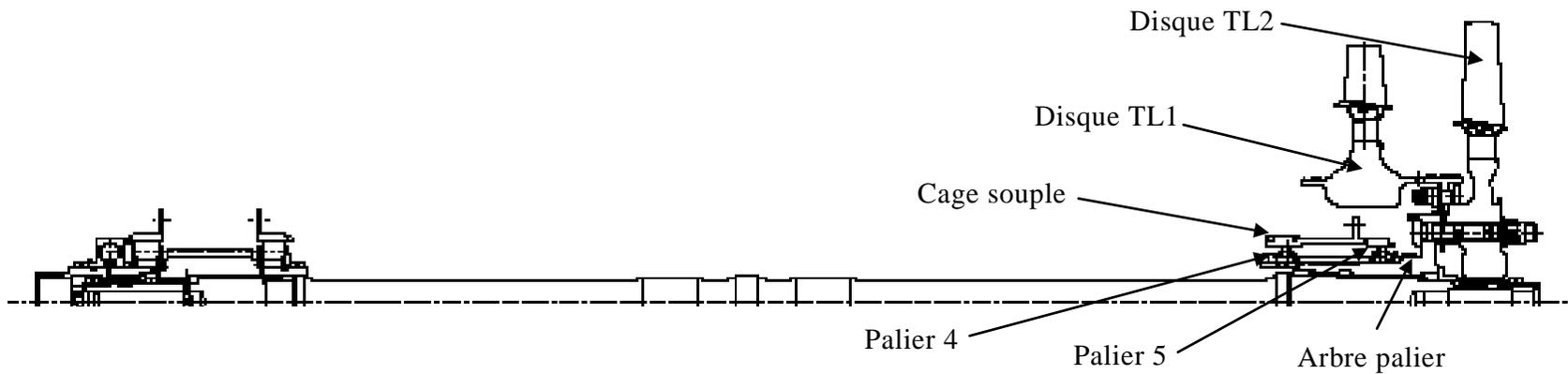


Figure 3-5 : Schéma plan de l'arbre TL Ardiden 1H

La même ligne d'arbre a aussi été modélisée avec le module dynamique des rotors d'ANSYS, pour servir de validation sur le logiciel d'analyse des touches développé. Les tests de validation concernent :

- les fréquences à l'arrêt du diagramme de Campbell,
- les amplitudes de la réponse au balourd au niveau des deux disques.

Les paliers sont supposés symétriques, une seule valeur de raideur et d'amortissement suffit donc à les caractériser.

Les fréquences à l'arrêt (*Figure 3-6*) sont recensées dans le *Tableau 3-1*. Les valeurs des fréquences sont adimensionnées par rapport à la fréquence de rotation du rotor en régime nominal (100% NTL) :

$$F_{\text{adimensionné}}^{\%} = 100 \cdot \frac{F_{\text{propre}}}{F_{\text{NTL}}}$$

Mode n°	1	2	3
Désignation	1 ^{ère} flexion arbre	palier 5	2 ^{ème} flexion d'arbre
Fréquence [%]	33.4	83.0	108.7

Tableau 3-1 : Liste des modes utilisés durant le calage en fréquence

Les valeurs de raideurs de paliers sont adimensionnées par rapport à celle du palier équipé de la cage souple (palier 4) : $k_{\text{adimensionné}}^{\text{palier}} = k^{\text{palier}} / k^{\text{palier}_4}$. Les caractéristiques adimensionnées des paliers utilisées durant le calage sont répertoriées dans le *Tableau 3-2* :

Palier n°	1, 2 et 3	4	5	6
Nœud d'application	4, 6 et 11	65	69	55-70
Raideur adimensionnée	4.5	1	4.5	1000

Tableau 3-2 : Caractéristiques des paliers isotropes

La *Figure 3-6* montre le diagramme de Campbell qui en découle. L'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation est monotone et ne justifie pas l'utilisation de critères de tri comme présentés dans [MOG 14]. Le 1^{er} mode de flexion d'arbre et le mode de palier arrière sont situés à 61% et 86% respectivement du régime nominal. Les vitesses critiques correspondantes seront franchies durant la descente en vitesse due au départ des aubes. La 2^{ème} vitesse critique de flexion d'arbre est située à 220% du régime nominal.

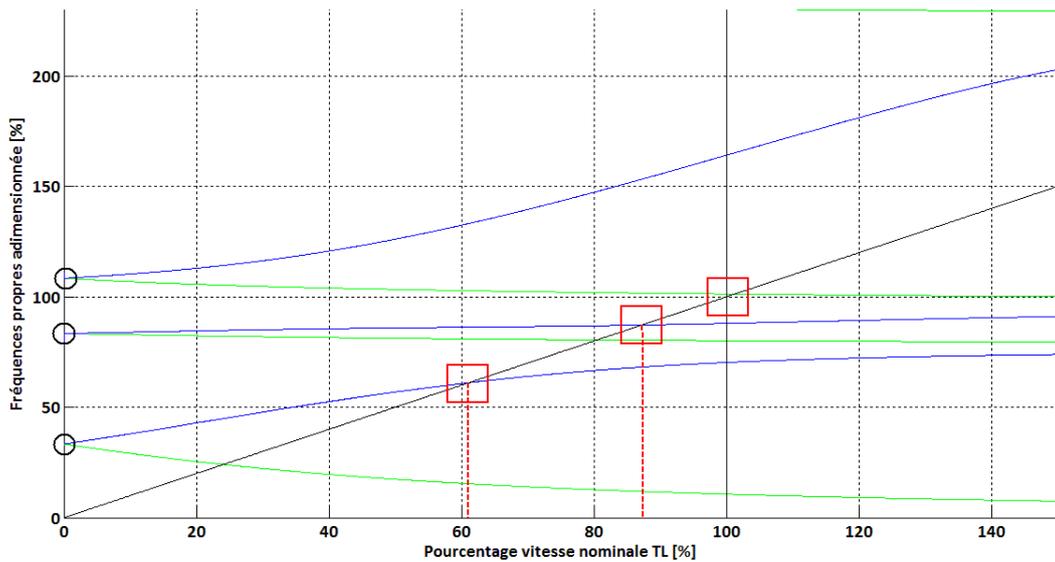


Figure 3-6 : Diagramme de Campbell arbre TL Ardiden 1H

La Figure 3-7 montre la déformée de la fibre neutre du rotor des 3 premiers modes du diagramme de Campbell. Elle confirme que les modes 1 et 3 correspondent bien aux deux premiers modes de flexion d'arbre et que le mode 2 est un mode de palier.

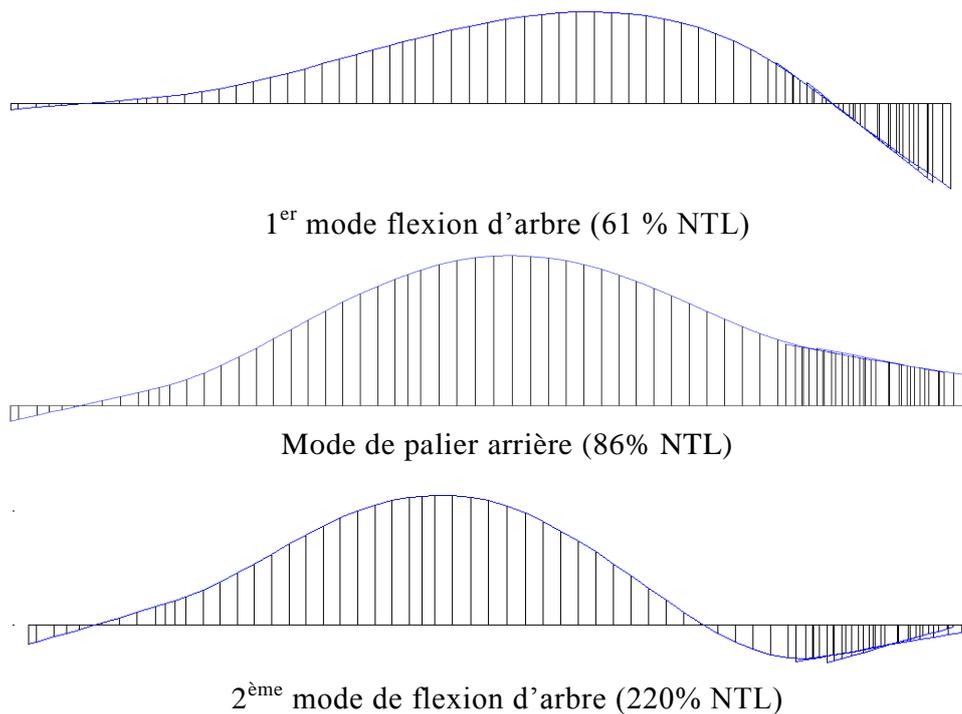


Figure 3-7 : Déformées dynamiques aux 3 premières vitesses critiques de l'arbre TL

Les valeurs d'amortissement des paliers sont adimensionnées par rapport à celle du palier 1 (2 et 3) qui est le moins amorti. Les paliers 1, 2 et 3 possèdent le même amortissement, leur valeur adimensionnée est donc de 1. Le palier 6 n'apporte aucun amortissement, il ne s'agit que d'un appui rigide entre deux éléments du rotor.

Le calage sur les amplitudes de la réponse au balourd permettent de déterminer l'amortissement apporté par chacun des squeeze film (SqF) des paliers 4 et 5. Trois balourds sont introduits sur la TL, dont 2 aux centres des 2 disques, et un au milieu de l'arbre TL. Les valeurs de balourds disposées dans le *Tableau 3-3*, sont adimensionnées par rapport au

balourd présent au centre du disque TL1 : $b_{\text{adimensionné}} = \frac{b}{b_{\text{disque_TL1}}}$:

Placement balourd	Centre arbre TL	Centre disque TL1	Centre disque TL2
Nœud d'application	31	83	76
Balourd adimensionné	0.22	1	1

Tableau 3-3 : Caractéristiques des balourds

Les valeurs adimensionnées d'amortissement des paliers obtenues durant le calage de la réponse au balourd sont, 12 pour le palier 4 et 8 pour le palier 5.

La réponse au balourd du modèle complet calé est tracée *Figure 3-8*. Les amplitudes d'excentricité orbitale des nœuds 83 et 76, centres des disques TL1 et TL2, sont adimensionnées par rapport à la valeur de leur jeu rotor/stator respectif.

Lors du passage de la vitesse critique d'arbre, le centre du disque TL2 consomme 1/3 du jeu disponible, alors que le centre du disque TL1 en consomme 1/5. En configuration non accidentelle, le contact rotor/stator n'est pas possible numériquement. La réponse au balourd des deux disques est cohérente avec celle obtenue dans la note interne [BAT 06].

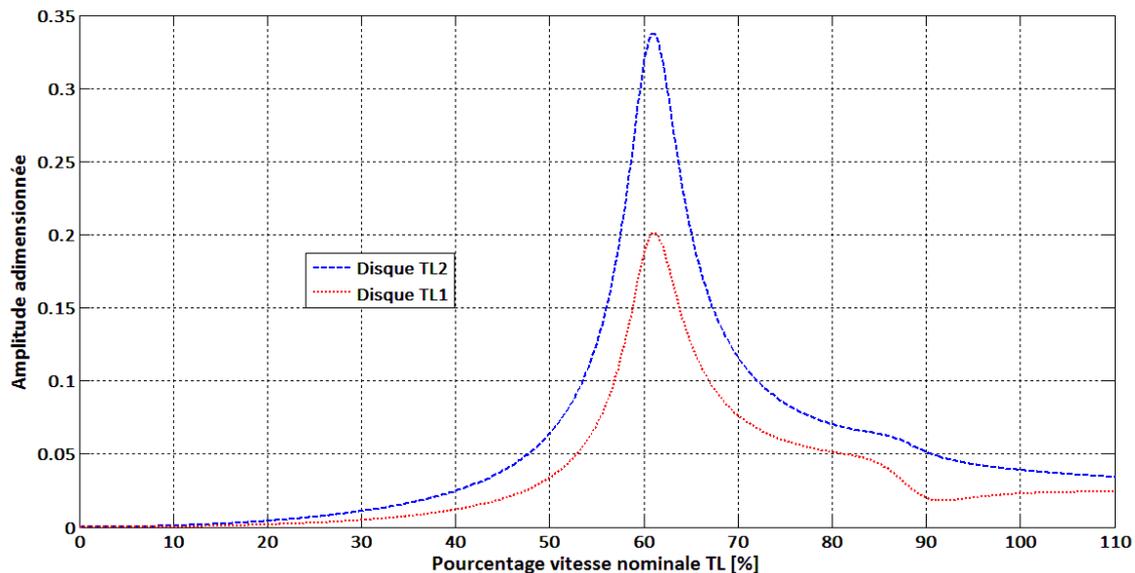


Figure 3-8 : Réponse aux balourds des disques TL1 et TL2

Une réponse aux balourds avec prise en compte du balourd apporté par le départ des aubes est présentée *Figure 3-9*. Les amplitudes générées par le nouveau balourd, en régime stabilisé, sont largement supérieures aux différents jeux rotor-stator. Le franchissement du mode de palier arrière montre un phénomène d'antirésonance uniquement sur l'ensemble « disque TL1 + labyrinthe TL1 ».

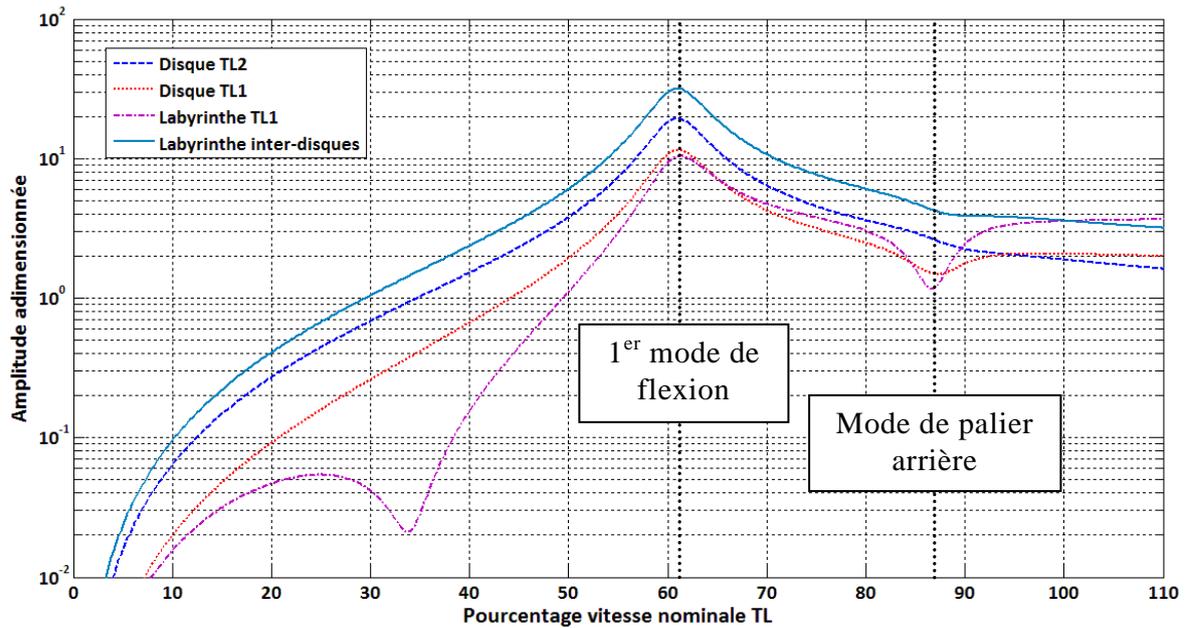


Figure 3-9 : Réponse au balourd du rotor après départ des aubes

La Figure 3-10 montre la déformée de la ligne d'arbre sous excitation balourd à respectivement 86% du régime nominal TL (mode de palier). Le balourd introduit en fonctionnement normal ainsi que celui apporté par la perte des aubes sont considérés. Le phénomène d'anti-résonance observé sur la réponse au balourd (Figure 3-9) s'explique par la présence d'un nœud de vibration très proche de l'ensemble « disque TL1 + labyrinthe TL1 ».

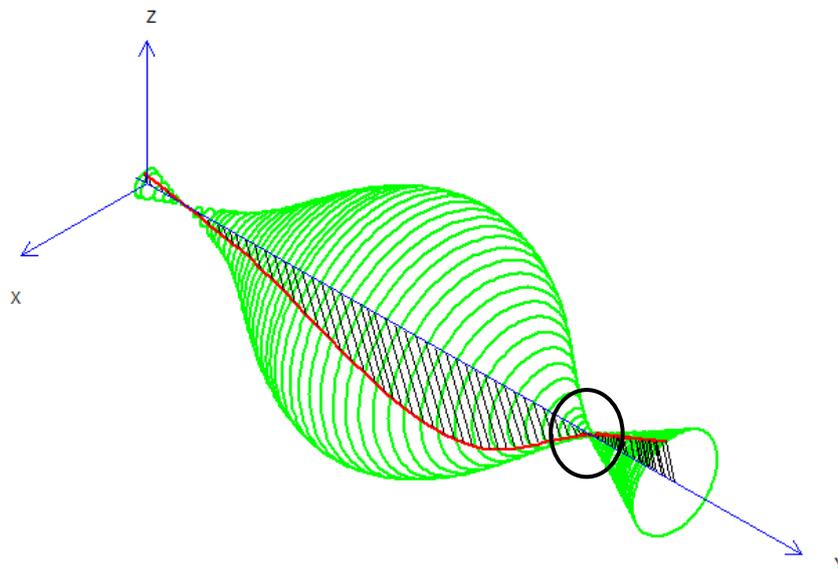


Figure 3-10 : Déformée sous excitation à fort balourd à 86% NTL

2.2 Modélisation des carters

2.2.1 Positionnement du problème

Les carters sont modélisés par des anneaux circulaires, supposés infiniment rigides et suspendus. Le comportement mécanique du carter est décrit par les mouvements du centre de la couronne circulaire (*Figure 3-11*).

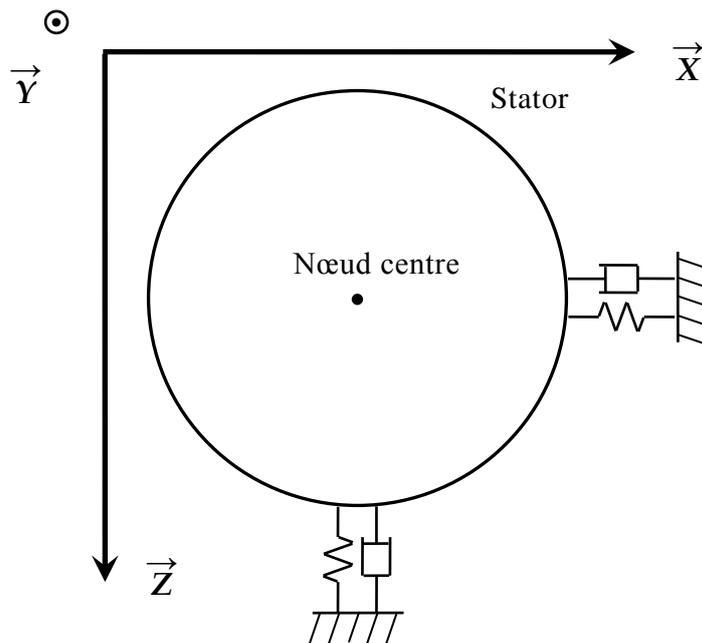


Figure 3-11 : Schéma d'un carter 2D

Des matrices de masse, raideur et amortissement sont adjointes au nœud centre afin de prendre en compte les contributions modales du carter. Dans ce contexte, les carters sont supposés parfaitement symétriques, et leur nœud possède les translations suivant les deux directions du plan XZ (2 ddl). Un calcul statique, basé sur la modélisation EF d'ANSYS du carter dont la géométrie est récupérée d'un logiciel CAO, donne la raideur radiale équivalente du carter.

La masse de l'élément stator est approchée par la masse totale du carter impliqué dans le contact.

Le coefficient d'amortissement est évalué de manière analogique à celui d'un oscillateur :

$$c_{eq} = 2\zeta \sqrt{k_{eq} \cdot m_{eq}} \quad (3-1)$$

Un taux d'amortissement $\zeta = 0.1\%$ est introduit puisque les carters sont composés essentiellement d'acier.

Dans le cas du départ des aubes de l'Ardiden 1H, les 4 éléments carters susceptibles d'entrer en contact avec les parties tournantes sont :

- distributeur TL1 (DTL1),
- carter TL (CTL1),
- diaphragme du distributeur TL2 (DTL2),
- anneau du distributeur TL2 (ADTL2).

Les faibles jeux en fonctionnement entre parties fixes et tournantes utilisés dans la conception des turbomoteurs poussent les constructeurs à tolérer de possibles touches rotor/stator. Une touche est jugée acceptable si la profondeur d'abradable consommée n'excède pas 0.1 mm, valeur seuil des déformations plastiques et de dommages irréversibles des éléments en contact. La théorie des modèles de pénalité repose essentiellement sur l'élasticité des corps en contact. La raideur de contact est supposée maximale lorsque la pénétration atteint cette valeur de 0.1 mm.

La surface de contact d'un stator, d'un point de vue géométrique, s'apparente à un cylindre creux de longueur finie. La pénétration d'une section de rotor sur une section de stator correspond à l'intersection d'un cercle dans un autre dans le plan perpendiculaire à l'axe du rotor (*Figure 3-12*).

Une pénétration de 0.1 mm au niveau d'un disque TL en contact avec son anneau génère un demi-angle de contact d'environ $\alpha=35^\circ$, mettant en interaction 9 à 10 aubes successives dans le cas d'un disque TL de l'Ardiden 1H. Concernant un contact entre un joint labyrinthe et son carter d'étanchéité, une pénétration de 0.1 mm correspond à un demi-angle de contact d'environ $\alpha=45^\circ$. Ces critères sont utilisés pour caractériser :

- la rigidité d'un contact type « disque + aubes / anneau »,
- la rigidité équivalente d'un carter au niveau d'une zone possible de contact.

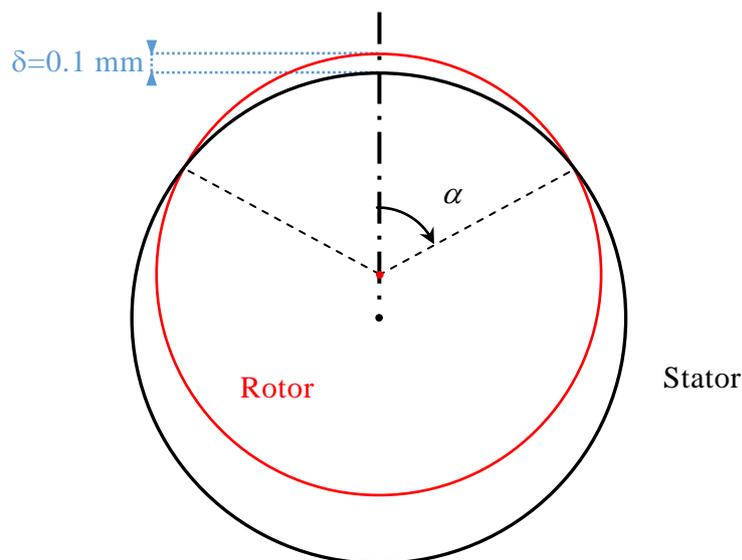


Figure 3-12 : Intersection d'une section rotor dans une section de stator

2.2.2 Détermination des raideurs radiales équivalentes des carters

La détermination de la raideur radiale équivalente d'un élément stator nécessite un calcul statique préalable sur la géométrie 3D des pièces issue de modèle CAO. Le carter TL ainsi que le distributeur TL2 ont été modélisés dans le cadre de cette étude. Le maillage EF volumique du carter TL présenté *Figure 3-13* est réalisé avec le logiciel ANSYS.

Des conditions aux limites d'encastrement sont imposées aux niveaux des perçages sur les brides de fixation (en orange).

La couronne du stator impliquée dans le contact est reliée à son centre par des éléments de raideurs axiales infiniment rigides ($1^{e}15$ N/m). L'ensemble de ces éléments représentent les 10 aubes en appui sur le stator.

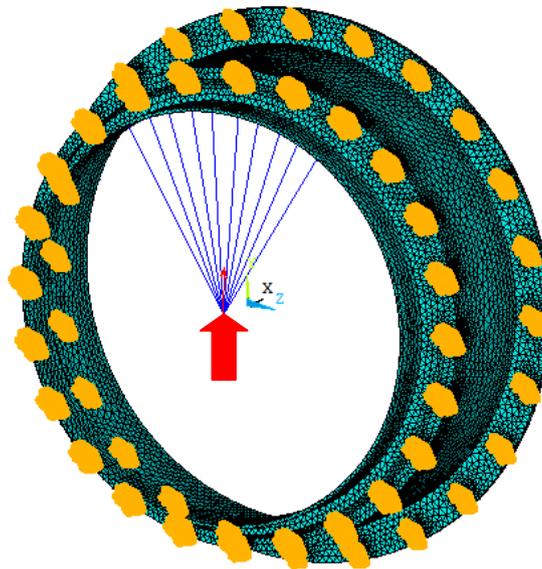


Figure 3-13 : Maillage EF de la géométrie du carter TL (ANSYS)

L'effort de contact est simulé par une force ponctuelle au nœud centre (flèche rouge), libre de translater suivant les deux directions du plan ZY du référentiel ANSYS (*Figure 3-13*). Le déplacement statique du nœud centre calculé suivant la direction de l'effort donne l'estimation de la rigidité radiale de l'élément « Carter TL » *Figure 3-14*. La valeur adimensionnée de raideur obtenue est de 10.6 sachant que le palier 4 donne la raideur de référence, *Tableau 3-2*.

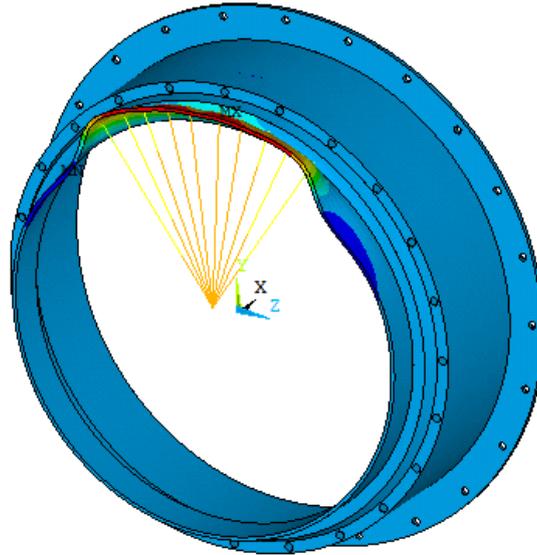


Figure 3-14 : Déformée du modèle 3D de Carter TL (ANSYS)

La masse équivalente de l'élément stator est estimée par la masse totale du carter considéré (Figure 3-14). La valeur adimensionnée de la masse équivalente du carter TL est de 1. La valeur adimensionnée du coefficient d'amortissement équivalent obtenu est de $2.9 \cdot 10^{-2}$ (palliers 1, 2, 3 : amortissement de référence pour l'adimensionnement, Chapitre 3 § 2.1.1).

Le distributeur TL2 est une pièce relativement complexe où coexistent deux zones d'interactions rotor/stator possibles (Figure 3-15):

- labyrinthe inter-disques/diaphragme du distributeur (1)
- disque TL2/anneau du distributeur (2)

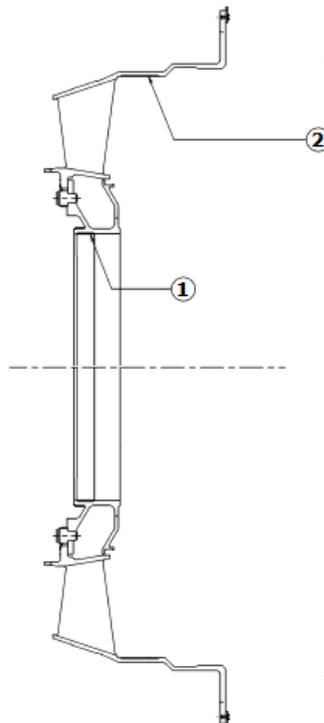


Figure 3-15 : Schéma plan du distributeur TL2

La *Figure 3-16* montre le maillage éléments finis du distributeur TL2. Le critère de touche décrit précédemment sur un contact type joint labyrinthe/carter d'étanchéité *Figure 3-15 (1)* est traité différemment. Le nœud centre est relié à tous les nœuds de la couronne circulaire sur un arc de cercle d'environ 90° d'angle.

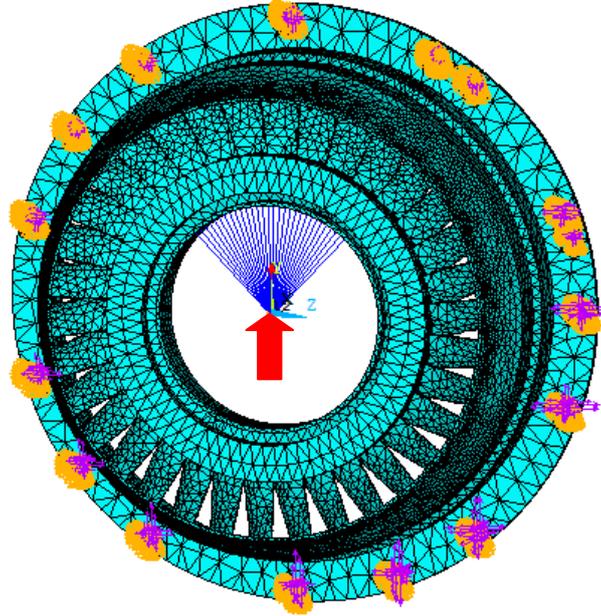


Figure 3-16 : Maillage EF de la géométrie du distributeur TL2 (ANSYS)

Contrairement au carter TL, les déformations du distributeur causées par l'effort sur le nœud centre sont d'ordre global. Les ailettes transmettent l'effort de contact au diaphragme sur toute sa circonférence.

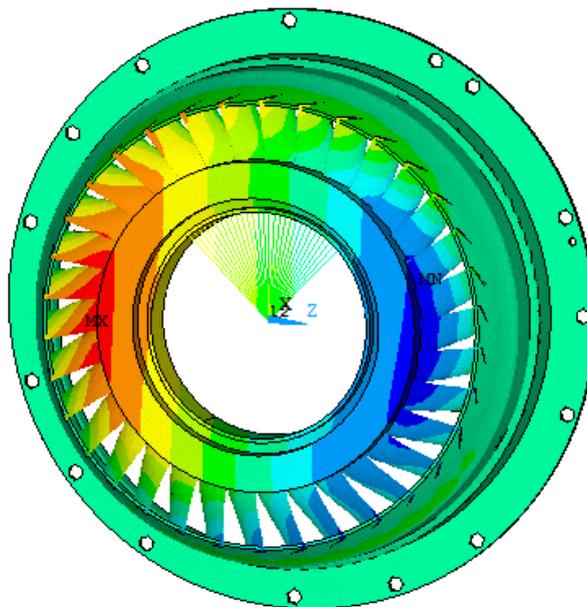


Figure 3-17 : Déformée statique du distributeur suite à un effort sur la surface intérieure du diaphragme *Figure 3-15 (1)* (ANSYS)

La raideur radiale adimensionnée du diaphragme du distributeur TL2 est évaluée à 8.2. La valeur adimensionnée de masse équivalente du carter est celle de l'ensemble du diaphragme, soit environ 1.3. La valeur adimensionnée d'amortissement équivalent est estimée à $9.6 \cdot 10^{-2}$.

L'anneau du distributeur TL2 est susceptible d'entrer en contact avec les aubes du disque TL2, *Figure 3-15(2)*. Un nouveau nœud centre est créé et relié par des éléments de raideurs à certains nœuds de la couronne circulaire afin de simuler l'appui des 10 aubes du disque sur l'anneau du distributeur. Un nouvel effort est introduit suivant l'axe Y du référentiel ANSYS.

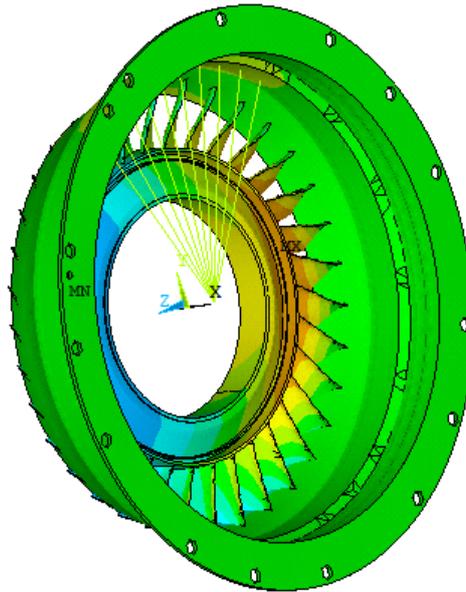


Figure 3-18 : Déformée statique du distributeur TL2 suite à un effort sur la surface intérieure de l'anneau *Figure 3-15 (2)* (ANSYS)

Comme précédemment les déformations statiques générées par l'effort sont globales et touchent l'ensemble du diaphragme ainsi que la partie cylindrique de l'anneau intérieur du distributeur. Une valeur de raideur radiale adimensionnée de 8.8 est déduite du calcul statique.

La valeur adimensionnée de la masse équivalente du carter « anneau DTL2 » de 1.3. Le coefficient d'amortissement adimensionné est estimé à environ $9.6 \cdot 10^{-2}$.

Le distributeur TL1 (DTL1) n'ayant pas été modélisé en 3D, le choix d'utiliser les mêmes caractéristiques raideur-amortissement que celles du distributeur TL2 a été fait. Le *Tableau 3-4* recense les valeurs adimensionnées des caractéristiques modales des stators.

Nom du carter	DTL1	Carter TL	DTL2	Anneau DTL2
Rigidité	8.2	10.6	8.2	8.8
Masse	1	1.2	1.3	1.3
Amortissement	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$

Tableau 3-4 : Valeurs adimensionnées des caractéristiques modales des carters

Une telle modélisation suppose que chaque tronçon de carter soit relié rigidement au bâti.

2.3 Modélisation des contacts rotor/stator

Le *Chapitre 1* a présenté les deux lois de contact suivantes :

- La loi non-linéaire de pénalité amortie :
$$\begin{cases} F_C = -K_C \delta^m (1 + C_C \dot{\delta}) \\ m > 1 \end{cases}$$
- La loi linéaire classique de pénalité amortie :
$$F_C = -(K_C \delta + C_C \dot{\delta})$$

Ici ces deux lois sont enrichies par la régularisation de la raideur K_C et de l'amortissement

$$C_C \text{ de contact par la loi arc tangente : } \begin{cases} K_C(\delta) = \frac{k_C}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi\lambda(\delta-d)) + 1 \right] \\ C_C(\delta) = \frac{c_C}{2} \left[\frac{2}{\pi} \arctan(\pi\lambda(\delta-d)) + 1 \right] \end{cases}$$

La recherche bibliographique, notamment Bartha [BAR 00], von Groll [GRO 02] montre que la première loi convient bien à un contact joint labyrinthe / revêtement abrasable (« loi labyrinthe »), alors que la seconde à un contact de type aubes / revêtement abrasable (« loi aubes »).

Les paramètres des deux lois utilisés par la simulation sont calés par les deux approches suivantes :

- expérimentale, pour la « loi labyrinthe ». Le calage est obtenu à partir d'un essai où une éprouvette labyrinthe vient usiner un logement revêtu d'abrasable, avec des conditions de vitesse de rotation et de pénétration proches de celles d'une touche produite par un départ d'aube.
- numérique, pour la « loi aubes ». Un modèle EF qui met en jeu un secteur d'aubes et de ruban abrasable est exploité sur ANSYS. Un calcul statique est effectué sur un modèle 3D de ruban abrasable dans le but d'extraire une rigidité de contact de l'abrasable. Chaque aube est discrétisée par un EF de poutre de caractéristiques équivalentes.

La touche lors de la mise en butée d'un palier linéaire est traitée par la modification de ses caractéristiques en raideur et amortissements (voir §2.3.3).

2.3.1 Approche expérimentale (loi de contact labyrinthe)

La problématique du contact entre un joint labyrinthe et un revêtement abrasable fait l'objet d'une thèse démarrée à Turboméca. Le sujet concerne la caractérisation de plusieurs technologies d'abrasables utilisées dans le revêtement des surfaces des parties fixes susceptibles d'entrer en contact avec le rotor. Plusieurs campagnes d'essais ont déjà eu lieu dont deux font l'objet d'une attention particulière dans ce chapitre.

Présentation du banc

Un banc simulant un contact rotor/stator a été mis en place à l'aide d'une machine d'usinage à grande vitesse (UGV) [CRA 11]. La machine est équipée de paliers magnétiques, et de deux éprouvettes de type joint labyrinthe et logement abrasable *Figure 3-19*.



Figure 3-19 : photos des éprouvettes du joint labyrinthe et de son alésage avec revêtement d'abrasable

Le principe de l'essai consiste à provoquer une touche de l'éprouvette labyrinthe sur l'abrasable à l'aide du palier magnétique en contrôlant certains paramètres influents du contact tels que la valeur de pénétration maximale, la vitesse de pénétration, la vitesse de rotation de broche, et le type de revêtement abrasable utilisé.

Dans l'essai 1, les efforts de contacts sont mesurés suivant les 2 directions radiales par le biais de paliers magnétiques montés sur la broche de la machine UGV (*Figure 3-20*). Lors d'une touche, les efforts de contact sont transmis aux paliers par un couple induit. Ces efforts sont alors compensés par une modification des consignes d'asservissement des paliers qui sont proportionnelles aux efforts radiaux transmis durant la touche, et donnent ainsi accès au coefficient de frottement de Coulomb moyen. Cette mesure a l'inconvénient de ne pas évaluer de manière directe et quantitative la valeur maximale de l'effort généré lors de la touche. Ces essais ont dégagé de nombreuses informations sur le comportement des abrasables durant une touche, mais avec une précision de mesure jugée insuffisante.

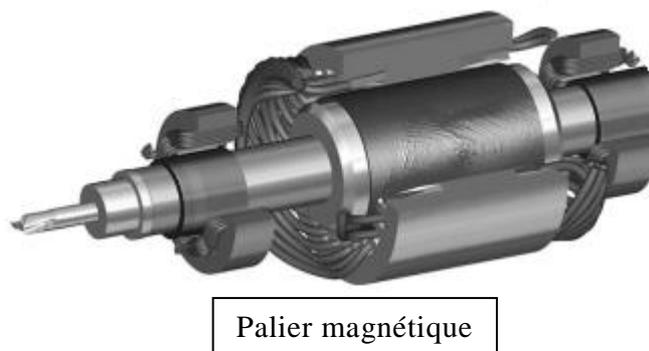


Figure 3-20 : Illustration du palier magnétique de la broche UGV

Dans l'essai 2, une platine d'effort Kistler a été introduite pour mesurer les efforts de contact encaissés par l'éprouvette abrasable, *Figure 3-21*. Un filtrage est ensuite réalisé entre les mesures de la platine et du palier magnétique. La norme du vecteur d'effort de contact obtenu cale les différents paramètres de contact de la loi non-linéaire de pénalité

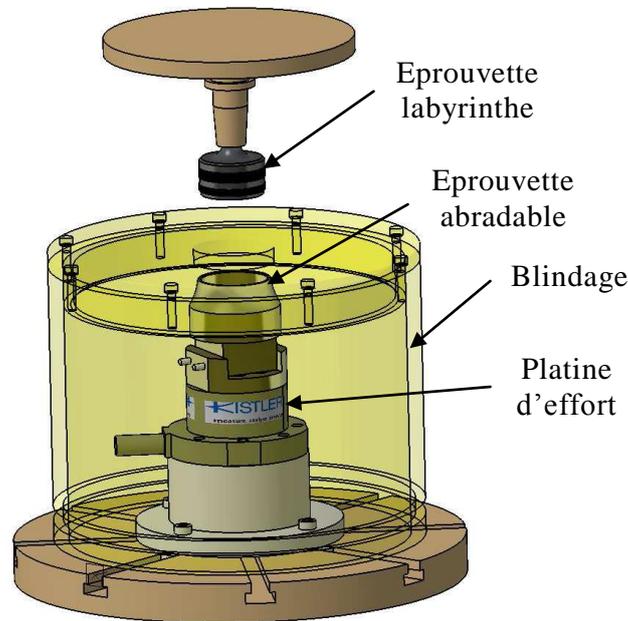


Figure 3-21 : Schéma partiel du banc instrumenté d'une platine d'effort Kistler

Exploitation des résultats d'essais

Plusieurs enseignements ont été tirés de ces essais. Les matériaux abrasables se comportent très bien à hautes vitesses et lors de contact prolongé. Les efforts restitués lors des touches sont moins importants, l'abrasable emmagasine plus d'énergie, le coefficient de frottement chute et se stabilise. Lorsque le contact est permanent, les conditions de touches sont similaires à celles d'une pièce usinant l'éprouvette abrasable. Le matériau s'use davantage et plus proprement, augmentant ainsi les jeux, réduisant les efforts de contact et améliorant les propriétés tribologiques des surfaces en contact. Les touches type impact à basse vitesse sont les plus défavorables. La vitesse de pénétration est un facteur plus influent que la pénétration. Les efforts de contact maximaux augmentent avec la vitesse de pénétration.

La *Figure 3-22* montre l'évolution temporelle des deux composantes radiales de l'effort de contact mesurée durant l'essai 1. Après l'entrée en contact du joint labyrinthe dans l'abrasable, l'outil continue de pénétrer l'alésage à une vitesse de pénétration constante (vitesse de déplacement de l'outil) jusqu'à atteindre la valeur de pénétration (déplacement de l'outil) souhaitée. Le contact est ensuite maintenu avant que l'outil ne revienne à son point de départ suivant les mêmes conditions qu'à l'aller (même vitesse en sortie de touche). Lors de l'entrée en contact, la croissance de l'effort n'est pas soudaine. L'effort de touche augmente progressivement durant le déplacement de l'outil. Lorsque la broche s'arrête sur la valeur de déplacement souhaitée, l'effort oscille autour d'une valeur constante. Commence alors un phénomène de rodage, l'abrasable se consomme et le jeu rotor/stator augmente tandis que le contact est maintenu. La consommation d'abrasable entraîne une diminution

de la pénétration provoquant ainsi une chute subite de l'effort de contact lorsque l'outil se déplace à nouveau.

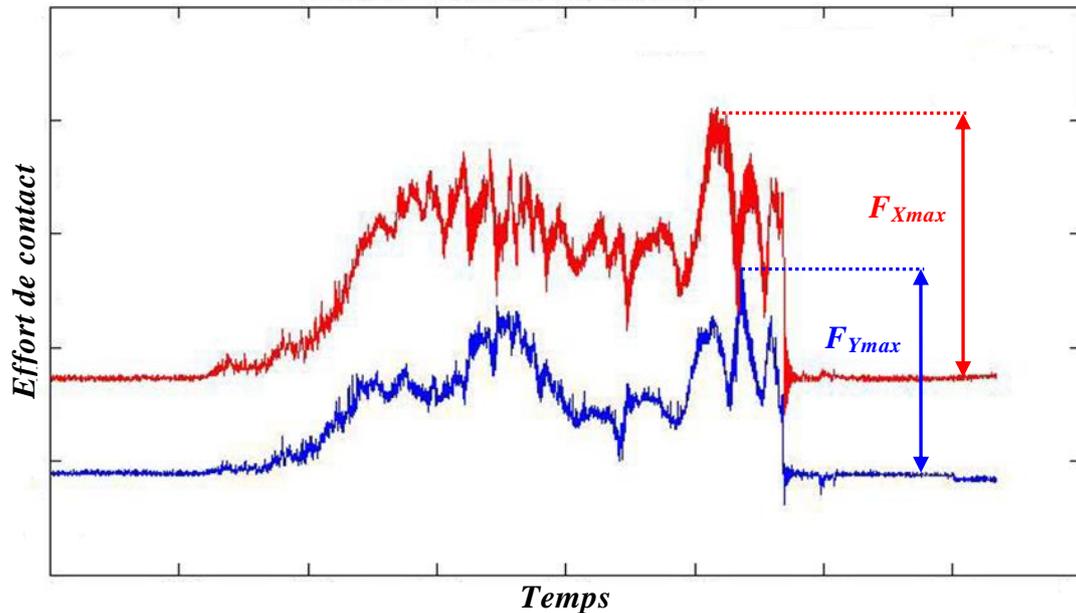


Figure 3-22 : Exemple de courbe des efforts mesurés par les paliers magnétiques durant l'essai n°1

L'axe de la broche et l'axe des paliers sont disposés à 45° d'angle l'un de l'autre (Figure 3-23). La relation (3-2) permet de calculer le coefficient de frottement à l'aide des valeurs maximales d'effort de contact (Figure 3-22) :

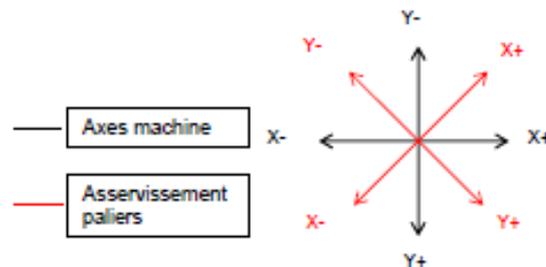


Figure 3-23 : Positionnement angulaire des axes machine et paliers

$$\mu_s = \left| \frac{F_{X \max} - F_{Y \max}}{F_{X \max} + F_{Y \max}} \right| \quad (3-2)$$

Le processus est ensuite répété sur les autres résultats d'essais. Le coefficient de frottement varie entre 0.1 et 0.15 (0.05 pour les très faibles vitesses de pénétrations). Les paramètres de modélisation du frottement choisis pour la simulation sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètres	Coefficient de frottement statique μ_s	Coefficient de frottement dynamique μ_d	Vitesse de glissement référence v_{REF} [m/s]
valeur	0.15	0.125	1

Tableau 3-5 : Paramètres numériques du modèle de frottement

Les essais de perte d'aubes sur la turbine libre de l'Ardiden 1H, montrent une violente chute de la vitesse de rotation, passant de 108% à 20% du régime nominal. Durant la descente en vitesse les deux vitesses critiques de palier et d'arbre sont franchies à respectivement 86% et 61% du régime NTL. L'apparition soudaine, du fort balourd généré par la perte des aubes, provoque une augmentation considérable des niveaux d'amplitudes vibratoires. Un essai avec une vitesse de pénétration très importante et une vitesse de rotation située à 60% du régime nominal semble représentatif et adapté au recalage du modèle de contact.

Les courbes d'efforts de contact mesurées durant l'essai préconisé sont disponibles *Figure 3-24*. Quatre types d'abradable ont été testés : trois à base d'alliage AlSi et un en feutre de NiCr. Le recalage est réalisé sur les efforts encaissés par l'éprouvette abradable en AlSi6%. La courbe linéaire par morceau représente la consigne de déplacement de l'outil.

La zone (1) représente un intervalle de temps durant lequel il n'y a pas encore de touches. L'outil commence tout juste à se déplacer et à consommer le jeu disponible. La vitesse de déplacement de l'outil est constante. La zone (2) marque l'entrée en contact des éprouvettes labyrinthes dans l'abradable. Les efforts encaissés par les abradables à base d'AlSi subissent une montée identique jusqu'en fin de zone (2). L'outil finit sa course et le contact est alors maintenu. Dans la zone (3), les efforts de contact continuent d'augmenter tandis que l'outil ne se déplace plus. L'abradable à base d'AlSi6% est celui qui encaisse les efforts les plus importants. Tandis que le contact est maintenu, le labyrinthe continue d'usiner le revêtement abradable entraînant ainsi la chute des efforts de touches. La zone (4) marque l'intervalle de temps durant lequel l'outil sort du contact avec l'abradable. Les efforts de contact descendent alors très vite à zéro.

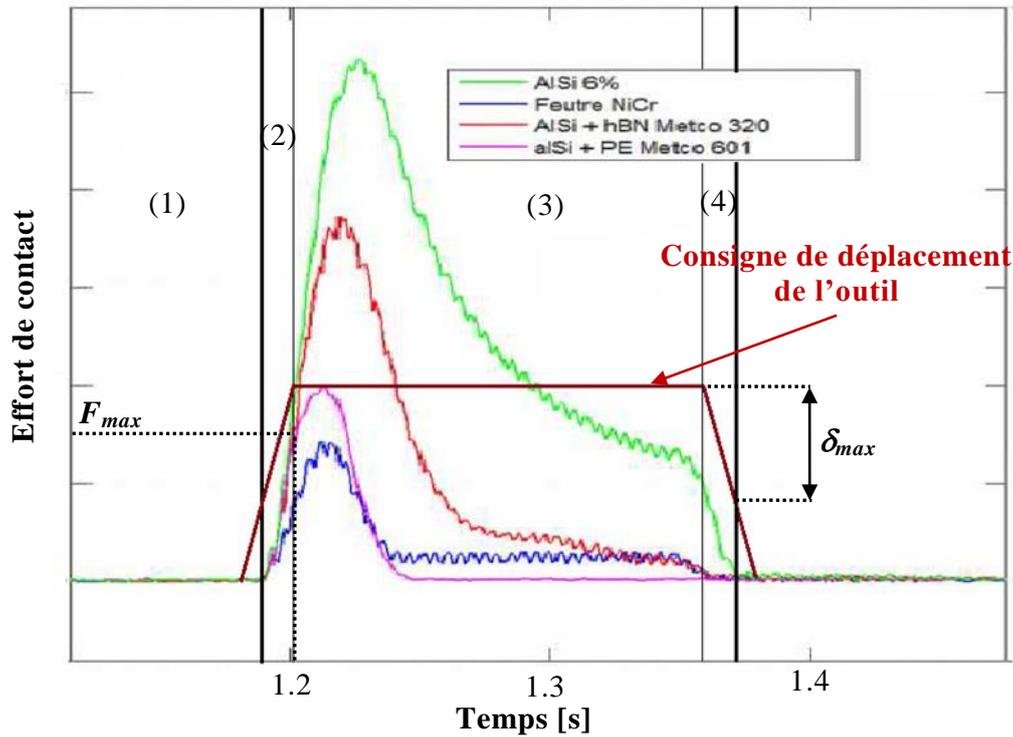


Figure 3-24 : Evolutions des efforts de contact mesurés durant l'essai n°2

La loi non-linéaire de pénalité amortie est rappelée dans la relation suivante :

$$\begin{cases} F_C = -K_C \delta^\tau (1 + C_C \dot{\delta}) \\ \tau > 1 \end{cases} \quad (3-3)$$

Le modèle de contact est calé sur la montée des efforts de contact. On se limite au petit intervalle de temps durant lequel l'outil se déplace dans le logement abrasable (zone (2)). A la fin de cet intervalle, la pénétration du labyrinthe dans l'abrasable s'élève à δ_{\max} , et l'effort de contact est évalué à F_{\max} . La zone (3) n'a pas été prise en compte durant le recalage puisque le modèle de pénalité ne permet pas de simuler la courbe des efforts sur cette zone. La loi exprimée par la relation (3-3) ne peut reproduire une augmentation des efforts alors que la pénétration reste constante. Par ailleurs l'augmentation du jeu par consommation de matière de l'abrasable n'est pas considérée.

Les paramètres de recalage du modèle de contact, sont répertoriés dans le *Tableau 3-6*. La raideur de contact de la loi non-linéaire ne possède pas les mêmes unités qu'une raideur classique. On ne parle plus de raideur adimensionnée mais de rapport entre deux raideurs. L'amortissement non-linéaire non plus ne s'exprime pas suivant les mêmes unités qu'un amortissement classique.

Paramètres	Rigidité de contact / rigidité palier 4 : k_C/k_{p4} [m ^{1-τ}]	Terme d'amortissement c_C [s/m]	Facteur de puissance du modèle τ
Valeurs	23	0.5	1.6

Tableau 3-6 : Paramètres du modèle de contact recalé sur les mesures

La courbe du modèle recalé sur la mesure de l'effort durant la pénétration de l'abradable est montrée *Figure 3-25*.

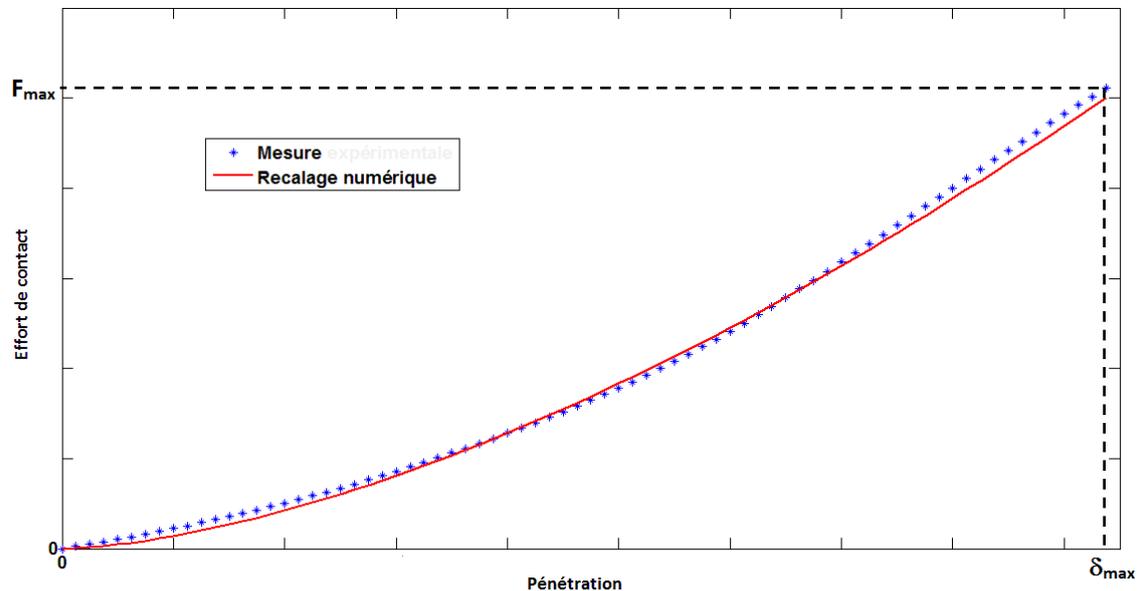


Figure 3-25 : Courbe de recalage du modèle de contact numérique

Le modèle EF de l'Ardiden 1H considère deux zones de contact possibles au niveau des joints d'étanchéités. Le labyrinthe du disque TL1 possède des dimensions semblables à celles des éprouvettes utilisées durant les essais. La valeur de raideur de contact du labyrinthe inter-disques est deux fois plus importante puisqu'il s'agit en fait d'un double labyrinthe. Les valeurs du terme d'amortissement et du facteur de puissance associé au modèle sont en revanche conservées. Les paramètres de contact utilisés sont donnés dans le *Tableau 3-7* :

Paramètres	Rigidité de contact / rigidité palier 4 : k_C/k_{p4} [m ^{1-τ}]	Terme d'Amortissement [s/m]	Facteur de puissance du modèle τ
Labyrinthe TL1/DTL1	23	0.5	1.6
Labyrinthe inter-disques/DTL2	46	0.5	1.6

Tableau 3-7 : Paramètres numériques du modèle de contact d'un joint labyrinthe

La loi non-linéaire de pénalité amortie ne nécessite pas de régularisation de la raideur de contact puisqu'elle est déjà incluse dans la loi.

2.3.2 Contact disque + aubes / anneau abradable

Une loi linéaire de pénalité est choisie pour la touche au niveau d'un disque TL. Le contact aubes / revêtement abradable n'a à ce jour pas encore fait l'objet d'une campagne d'essai.

L'identification des paramètres de contact est effectuée en simplifiant le système aubes + secteur d'abrasable en contact, par un modèle équivalent. Les disques sont supposés parfaitement rigides. Les éléments susceptibles de se déformer durant une touche sont l'ensemble des 10 aubes en contact (voir § 2.2.1) et le revêtement abrasable. Un modèle associant un ensemble de 10 aubes en appuis sur une portion d'abrasable est développé afin de déterminer les paramètres de contact, *Figure 3-26*. Deux modèles 3D ont donc été réalisés et ensuite traités sur ANSYS :

- un secteur d'abrasable
- une aube du disque TL2 (→ 10 aubes)

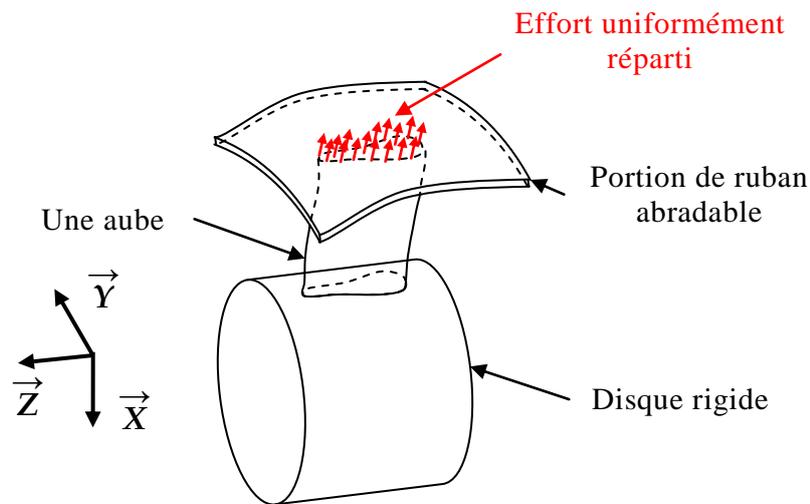


Figure 3-26 : Schéma d'un modèle hybride prenant en compte la flexibilité d'une aube et d'une portion d'abrasable

Calcul de la raideur radiale d'un ruban d'abrasable

Un modèle 3D d'une portion de ruban d'abrasable a été développé sur ANSYS. La géométrie du modèle s'assimile à un cylindre partiel et creux. Les dimensions du ruban sont celles du revêtement abrasable présent sur l'anneau du distributeur TL2 (*Figure 3-15 (2)*). Les caractéristiques du matériau abrasable choisi sont celles d'un revêtement par projection thermique en AlSi6% [FAR 05] ($E = 17$ GPa, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700$ kg/m³).

Une condition d'encastrement est introduite sur tous les nœuds appartenant à la surface extérieure du ruban, *Figure 3-27*. Un groupe de nœuds maîtres est défini sur une surface rectangulaire d'aire équivalente à celle d'une aube en son sommet. On impose à chacun des nœuds maîtres d'avoir le même déplacement suivant l'axe X.

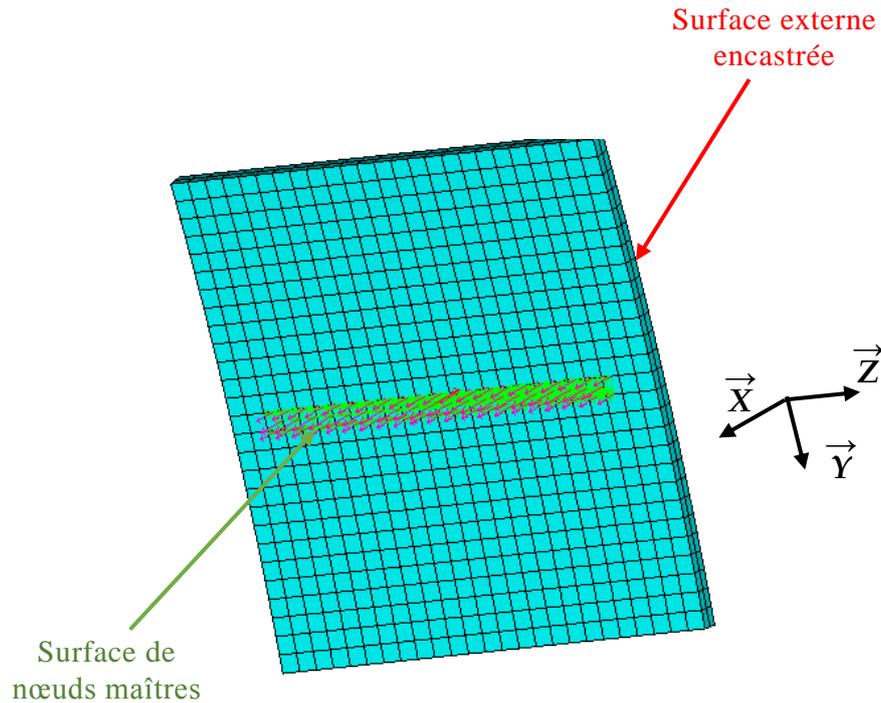


Figure 3-27 : Maillage d'une portion du ruban abrasable avec définition des nœuds maîtres (ANSYS)

Un effort statique suivant l'axe X négatif est introduit sur l'un de ces nœuds maîtres avant la résolution statique sur ANSYS. La *Figure 3-28* montre que la déformée statique obtenue est d'ordre local. Le déplacement suivant l'un des nœuds maîtres permet de déduire une valeur adimensionnée de raideur radiale de 150. La couche fine d'abrasable offre une raideur supérieure à celle d'un carter ou d'une aube et contribue à la raideur axiale de l'ensemble « aube + ruban abrasable ».

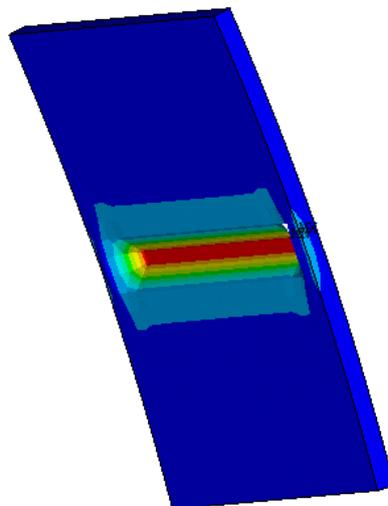


Figure 3-28 : Déformée statique du ruban d'abrasable (ANSYS)

Calcul des raideurs de flexion et de traction d'une aube suivant les 3 directions de l'espace

La deuxième partie du travail de détermination des paramètres de contact disque + aubes / abrasable consiste à simuler le comportement mécanique d'une aube par des éléments de poutre non-symétriques.

Un modèle 3D d'une aube du disque TL2 est traitée sur ANSYS (*Figure 3-29*) dans le but de déterminer les rigidités en flexion (axes Y et Z) et traction/compression (axe X) de la aube. Une condition d'encastrement est introduite sur les surfaces inférieures du pied de sapin de l'aube (en orange). Un ensemble de nœuds maîtres, composé des nœuds de la surface en tête d'aube, est défini (en vert sur les *Figure 3-29, 3-30*).

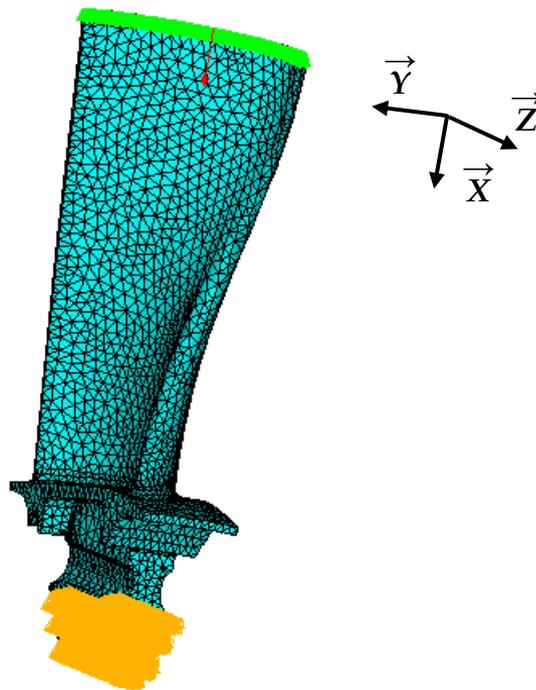


Figure 3-29 : Maillage d'une aube du disque TL2 avec définition des nœuds maîtres (ANSYS)

On impose à chacun des nœuds maîtres d'avoir le même déplacement suivant l'axe X. Un effort suivant l'axe X est introduit à l'un des nœuds maître.

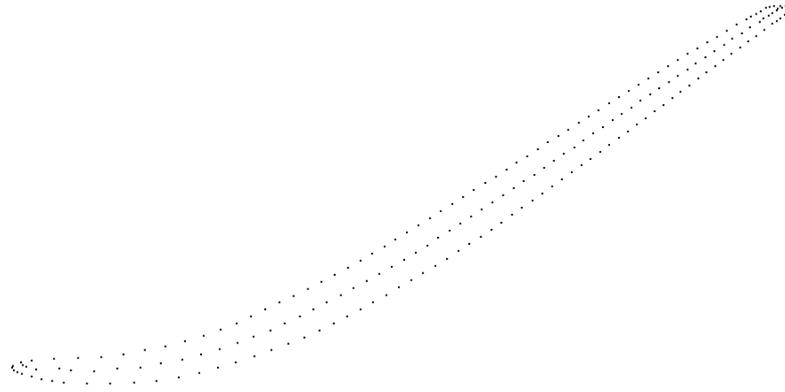


Figure 3-30 : Nœuds maîtres du modèle 3D d'aube (ANSYS)

Le déplacement statique calculé suivant l'axe X d'un nœud maître permet de déterminer une rigidité en traction/compression de l'aube. La valeur adimensionnée de cette raideur est de 6 *Figure 3-31*.

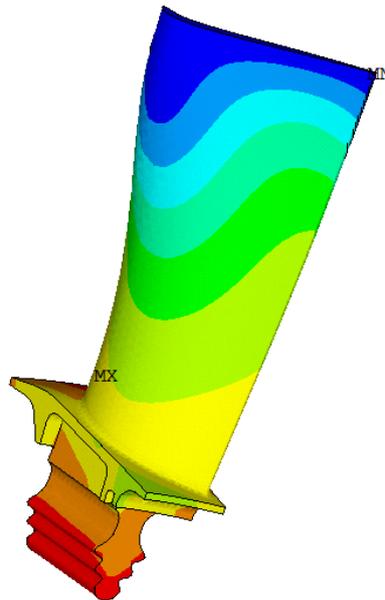


Figure 3-31 : Déformée statique d'une aube en traction (ANSYS)

Le processus est ensuite réitéré suivant les 2 autres directions de l'espace afin de caractériser l'aube en flexion. Lorsque l'effort est appliqué suivant l'axe Y, on impose à chaque nœud maître d'avoir le même déplacement suivant l'axe Y, idem pour l'axe Z. Les valeurs adimensionnées des rigidités de l'aube en flexion suivant les axes Y et Z sont respectivement 1^e-1 et 2.5^e-2 .

Modélisation du contact par l'association d'un modèle ruban abrasable / aubes de turbine

Les caractéristiques mécaniques d'une aube et d'une portion d'abrasable obtenues précédemment permettent de finaliser le modèle de contact. L'idée d'une telle association, con-

siste à modéliser le système aube + portion d'abradable, soit poutre + raideur longitudinale, par une poutre seule *Figure 3-32*.

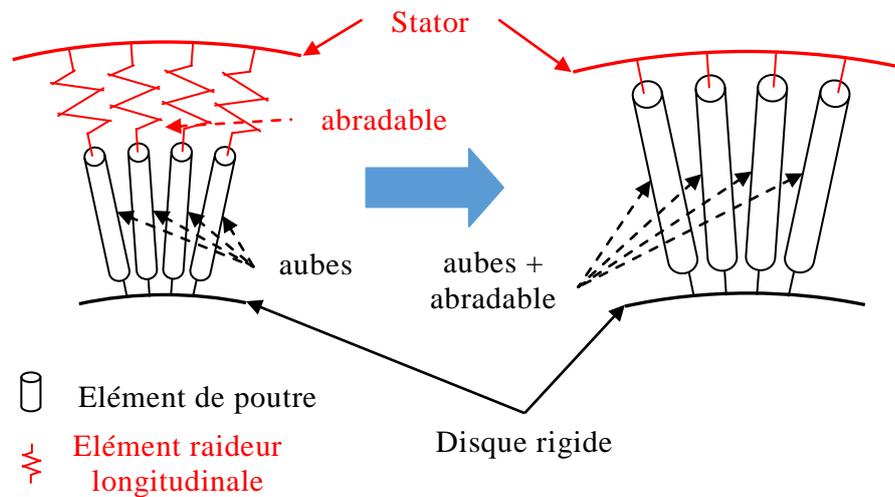


Figure 3-32 : Rigidité de contact modélisée par des éléments de poutre simulant l'interaction du système aubes + abradable

La raideur longitudinale apportée par la portion d'abradable agit sur la direction en traction/compression de l'aube. On identifie le système abradable + aube comme l'association de 2 raideurs en série suivant la direction longitudinale de la poutre. La raideur équivalente en traction/compression du système abradable + aube se calcule via la relation suivante :

$$k_{eq}^{traction} = \frac{1}{\frac{1}{k_{pale}^{traction}} + \frac{1}{k_{abradable}}} \quad (3-4)$$

La valeur adimensionnée de raideur en traction équivalente est d'environ 5.8. L'association des deux raideurs en série est plus souple. On détermine à l'aide de la théorie des poutres en 1D les nouvelles dimensions de la poutre simulant le système aube + portion d'abradable.

Un nouveau modèle 3D prenant en compte l'association des 10 aubes supposément en contact est réalisée sur ANSYS *Figure 3-33*. Un nœud centre symbolisant le centre du disque est créé. Des nœuds placés au centre des fixations des pieds de sapin des aubes sont introduits. Ils sont reliés au nœud centre par des éléments de raideur longitudinale. On simule le caractère parfaitement rigide du disque en définissant les éléments de raideurs infiniment rigide ($1^{e}15 \text{ N/m}$), et en encastrant les ddl de rotations des nœuds concernés. Le déplacement relatif d'un nœud frontière du disque par rapport au nœud centre est ainsi toujours nul.

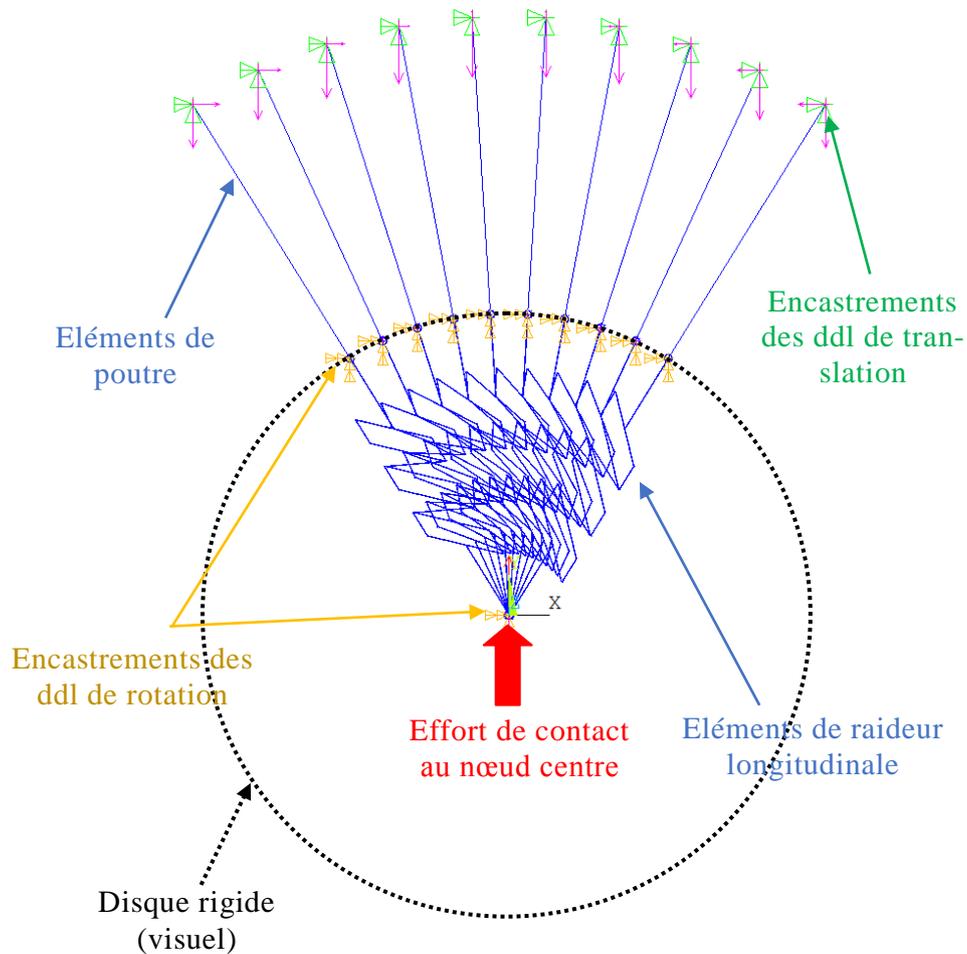


Figure 3-33 : Modèle d'un disque rigide avec 10 aubes en contact (ANSYS)

Des éléments de poutre modélisant le système aube + abrasable sont créés à partir des nœuds symbolisant la frontière du disque rigide (*Figure 3-33*). Les ddl en translations des nœuds à l'extrémité des éléments de poutre sont bloqués de manière à simuler l'ensemble des 10 aubes en appui sur un carter parfaitement rigide. Un effort de contact est finalement défini au nœud centre.

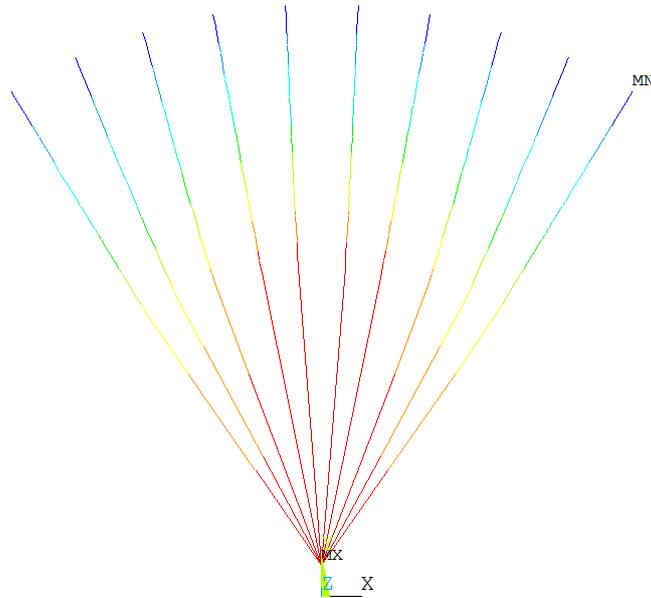


Figure 3-34 : Déformée du système comprenant le disque et les 10 aubes en appui sur un carter rigide (ANSYS)

La résolution statique montre que le système composé de l'ensemble des 10 aubes se déforme aussi bien en flexion qu'en traction/compression dans le plan XY (Figure 3-34). La valeur adimensionnée de raideur de contact obtenue est d'environ 50. La valeur adimensionnée d'amortissement de contact est fixée à une valeur de 3, conformément à la littérature, [BAR 00], [ISM 95].

La pente λ permet la régularisation de la raideur de contact via la loi arc tangente tandis que le décalage d pilote le centrage par rapport à une pénétration nulle. On suppose que lorsqu'une pénétration de 0.1 mm est atteinte, la raideur de contact régularisée vaut 99.9% de k_C , Tableau 3-8. Lorsque la pénétration est nulle, la raideur de contact régularisée vaut 1% de k_C . Les valeurs des paramètres λ et d qui en découlent sont respectivement 1^e6 m^{-1} et 9.66^e-6 m .

Paramètres	Raideur de contact adimensionnée k_C	Amortissement de contact adimensionnée c_C	Pente arctangente $\lambda \text{ [m}^{-1}\text{]}$	Décalage $d \text{ [m]}$
Valeurs	50	7	1^e6	9.66^e-6

Tableau 3-8 : Paramètres de contact aubes/abradable

2.3.3 Butées paliers

La modélisation éléments finis de l'ensemble des composants intervenants dans la chaîne de transmission des efforts une fois que le contact est établi entre paliers 4 et 5 et butées, voir Figure 3-3, a attribué au niveau de chaque palier, une raideur radiale adimensionnée de 10. Le retour d'expérience du constructeur quantifie un amortissement adimensionné réduit à 1 lorsque le film d'huile des squeeze-film est rompu par le phénomène de butée.

Pour simuler la butée palier, la loi linéaire classique de pénalité amortie est mise en œuvre. Le *Tableau 3-9* synthétise les valeurs de paramètres.

	Raideur de contact adimensionnée k_C	Amortissement de-contact adimensionnée c_C	Pente arctangente λ [m^{-1}]	Décalage d [m]
Palier 4	9	-11	1^e6	9.66^e-6
Palier 5	5.5	-7	1^e6	9.66^e-6

Tableau 3-9 : Paramètres de contact paliers/butée

3. Résultats de simulation du départ d'aubes

L'objectif d'étude de ce cas industriel repose sur plusieurs points :

- vérifier la bonne tenue dynamique du système vibratoire durant la descente en vitesse déclenché par le départ de plusieurs aubes,
- observer les différents comportements possibles intervenants durant les touches,
- s'assurer que les résultats obtenus sont en accord sur le plan qualitatif avec les conclusions établis sur le compte rendu d'essais (efforts suffisamment importants pour générer des déformations plastiques, des touches plus fortes localement...).

Pour la simulation numérique de la réponse de la TL, une loi de vitesse variable a été imposée en entrée afin de prendre en compte la forte décroissance de la vitesse de rotation de l'arbre TL après le départ des aubes, *Figure 3-35, [MIL 07]*.

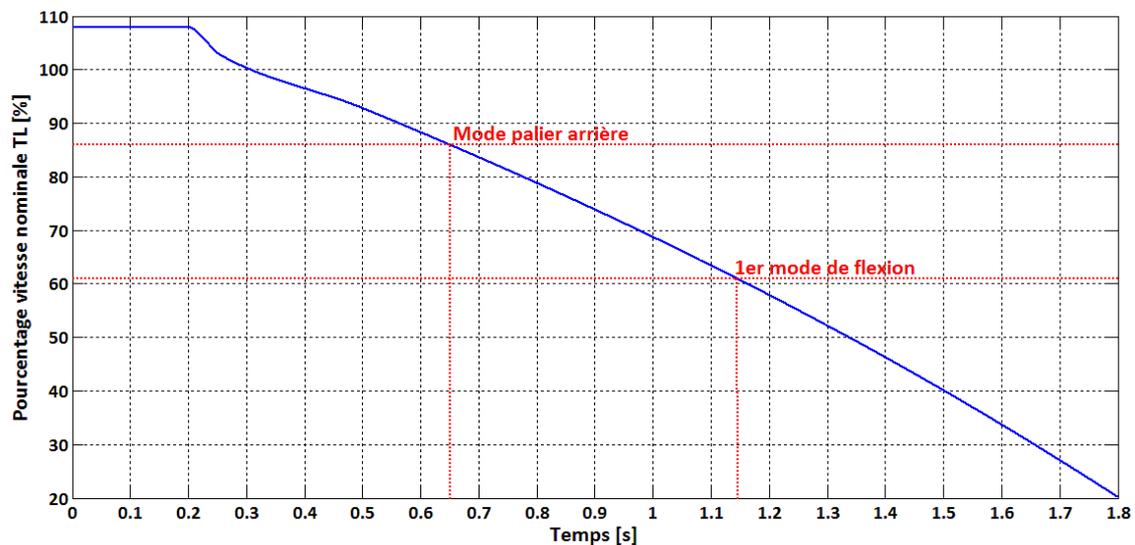


Figure 3-35 : Loi de vitesse de rotation imposée durant la simulation

Les différents jeux introduits sur les 4 contacts possibles sont de l'ordre de plusieurs dixièmes de millimètres. Les jeux au niveau des joints labyrinthes sont approximativement deux fois moins importants que ceux présents au niveau des disques TL. Le départ des aubes est simulé par l'apparition d'un balourd soudain à la date 0.2s. Le balourd apporté par le départ des 2 aubes et demie sur la TL2 est environ 130 fois plus importants que celui déjà présent en fonctionnement normal [MIL 07].

L'algorithme d'intégration temporelle choisi est celui de Newmark à accélération constante, avec un pas de temps constant de 5^{-7} s pour procurer une bonne précision des résultats lorsque les fréquences sollicitées sont inférieures à 20 kHz (100 fois le pas de temps). Le temps de simulation total est de 1.8 s.

3.1 Réponses temporelles

Il s'agit de présenter les réponses temporelles au niveau des deux paliers, des deux disques et des deux joints labyrinthes qui sont sujets à des touches rotor-stator.

La *Figure 3-36* présente l'évolution temporelle de la déflexion latérale relative des nœuds aux centres de chaque palier : $(r-j)/j$ avec r le rayon d'orbite et j le jeu rotor/stator initial. Lorsque la déflexion latérale devient positive un contact rotor/stator a lieu.

Les dates de franchissement des vitesses critiques dans le domaine linéaire sont marquées par deux traits verticaux en pointillé.

Dès l'apparition du balourd soudain, les paliers atteignent instantanément la butée. Les touches qui suivent la perte d'aubes sont les plus violentes. L'amortissement apporté par les squeeze-film chute alors violemment et la déflexion devient très vite importante (15 fois la valeur du jeu pour le palier 5). Lorsque la 1^{ère} vitesse critique est franchie, la déflexion latérale du palier équipé de la cage souple décroît jusqu'à la perte du contact. S'installe alors un régime quasi-périodique avec un contact partiel (cercle rouge). La cage souple rebondit à plusieurs reprises sur la butée palier, la période des oscillations de la déflexion diminue au fur et à mesure que la vitesse de rotation diminue. Les phases contact / non-contact peuvent être prolongés sur plusieurs cycles de rotations. Une fois le contact partiel terminé, la cage souple finit par suivre de nouveau un mouvement de contact permanent jusqu'à la fin de la simulation ($t \sim 1.72$ s). Le palier 5, une fois la perte d'aubes déclenchée, reste en butée tout au long de la simulation ($t \sim 1.75$ s).

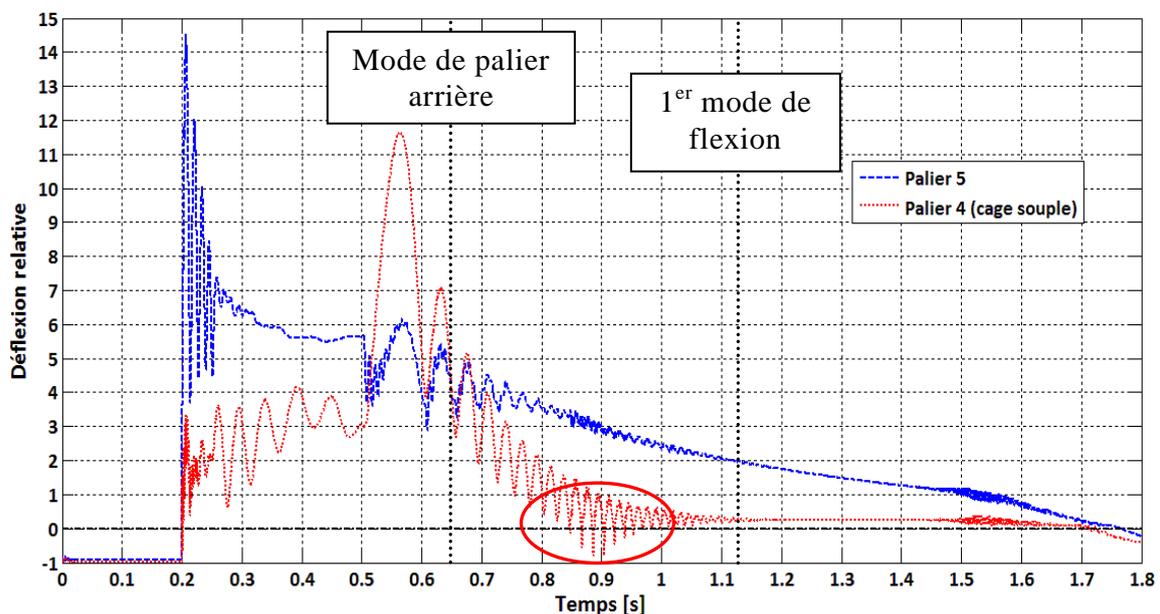


Figure 3-36 : Déflexion relative adimensionnée des paliers $(r-j)/j$

L'évolution de la déflexion relative des nœuds aux centres des deux disques est présentée *Figure 3-37*. Comme précédemment, le contact permanent est immédiatement déclenché à la suite de la perte d'aubes. Les valeurs de déflexion relative observées sont bien moins importantes qu'au niveau des paliers (< 0.5). Le disque TL1 est le premier à perdre contact, après franchissement de la 1^{ère} vitesse critique. Un régime quasi-périodique s'installe (cercle rouge), et les périodes d'oscillations sont identiques à celles constatées au niveau de la cage

souple. Le disque TL2 reste en contact permanent jusqu'à la date $t \sim 1.5$ s, avant de suivre un mouvement de contact partiel (cercle bleu). Les pénétrations moyennes calculées lorsque les disques touchent le stator sont du même ordre de grandeur que celle utilisée pour le calcul des paramètres de contact (§2.2.1 et §2.2.2). Les hypothèses posées durant le calage s'avèrent cohérentes. Néanmoins, le compte-rendu d'expertise d'essai constate des valeurs de pénétration bien plus importantes. Les revêtements abrasable ont été entièrement consommés (couche d'abrasable de l'ordre du millimètre). De nombreuses aubes du disque TL2 ont aussi été détruites indiquant ainsi que les touches au niveau des disques ont été plus violentes que celles calculées.

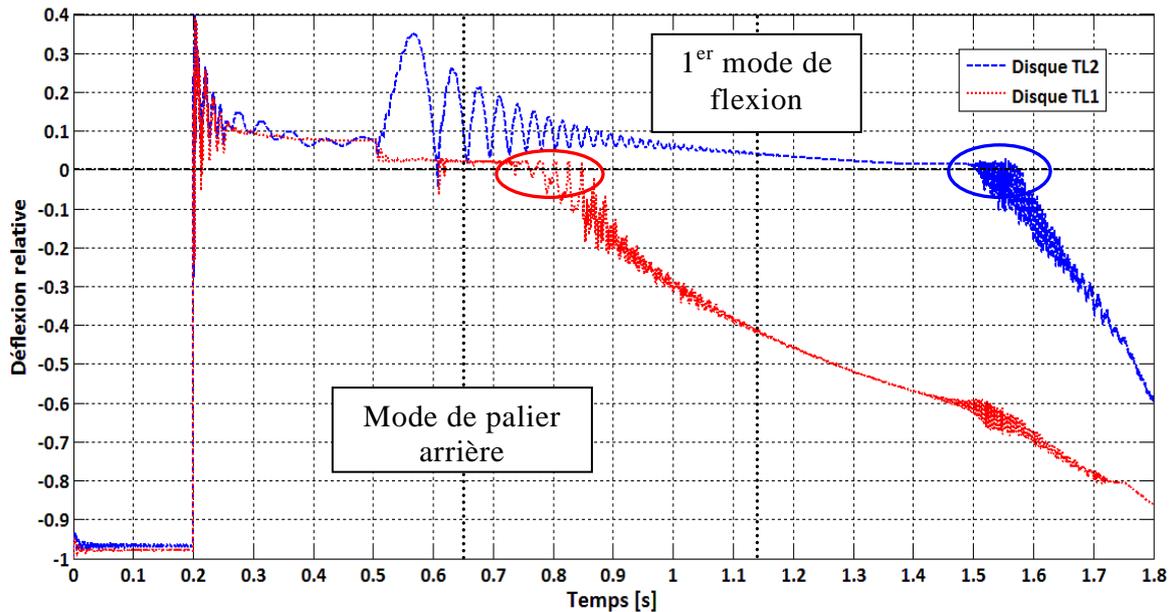


Figure 3-37 : Déflexion relative adimensionnée des disques $(r-j)/j$

La *Figure 3-38* expose un zoom de la *Figure 3-37*, sur le mouvement quasi-périodique généré par la touche partielle au niveau du disque TL2, durant un cycle de rotation du rotor. Si le disque TL2 touche 6 fois le stator, l'enveloppe de l'amplitude de déflexion relative parcourt un peu plus de deux périodes d'oscillation. Des sur-harmoniques d'ordre environ 2, 3 et donc 6 sont à prévoir sur le contenu fréquentiel de la réponse. Les valeurs de déflexions montrent que les touches sont toutefois relativement faibles, et peu dangereuses d'un point de vue vibratoire vis-à-vis du système dynamique.

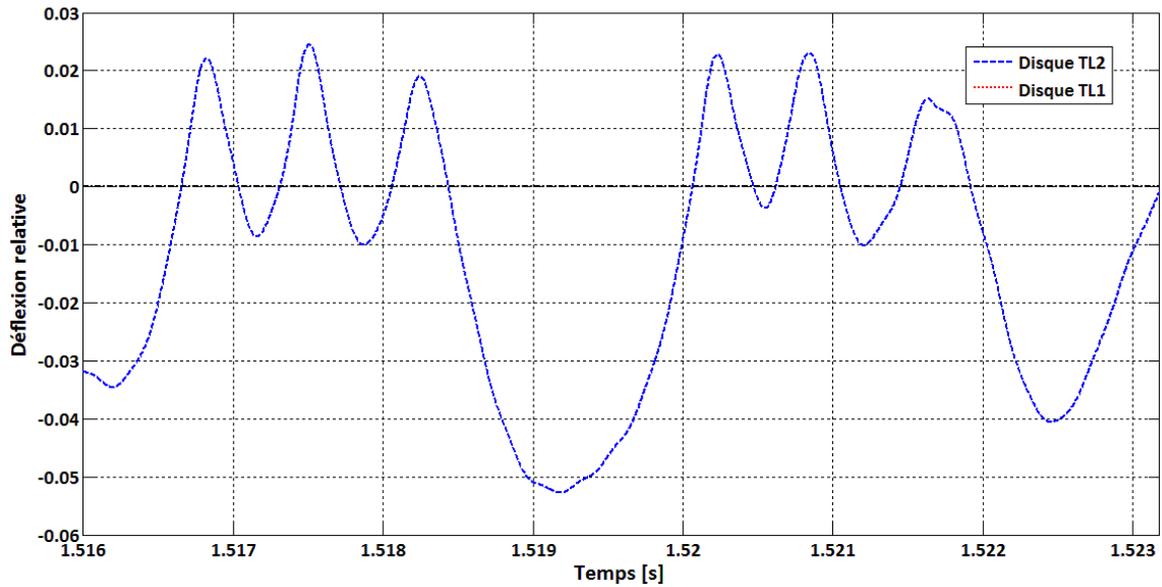


Figure 3-38 : Déflexion relative adimensionnée des disques $(r-j)/j$ – zoom sur le mouvement quasi-périodique sur un cycle de rotation rotor. $t=[1.516-1.523]$ s.

La Figure 3-39 présente l'orbite relative du centre du disque TL1 par rapport au centre de l'anneau du distributeur TL1 sur un cycle de rotation du rotor ($t=[1.516 ; 1.523]$ s). Les valeurs des déplacements relatifs sont adimensionnées par rapport aux jeux rotor/stator. Le cercle rouge symbolise la butée du stator (valeur 1). L'orbite relative montre un contact partiel (6 touches par cycle) en précession directe durant le régime quasi-périodique. Les amplitudes d'efforts et de pénétration calculées durant cet intervalle de temps ne sont toutefois pas suffisamment importantes pour mettre en danger le système dynamique. A titre de comparaison, les valeurs d'efforts calculées durant cet intervalle sont 10 fois moins importantes que lors des premiers impacts qui suivent la perte d'aubes.

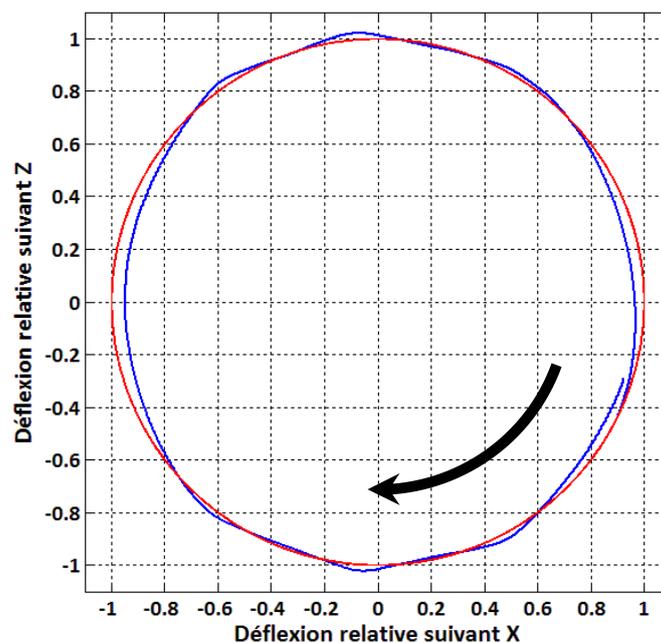


Figure 3-39 : Orbite relative du centre du disque TL1 par rapport au centre de l'anneau du distributeur TL1 – zoom sur le mouvement quasi-périodique $t=[1.516-1.523]$ s

Une vérification sur la validité du modèle de loi arc tangente utilisée est mise en relief *Figure 3-40*. Elle concerne l'une des touches observée précédemment sur le disque TL1 lors du mouvement quasi-périodique. Un nombre suffisant de points est capté lors du changement brutal d'état contact/non-contact, ce qui confirme que les oscillations du régime quasi-périodique ne sont pas numériques.

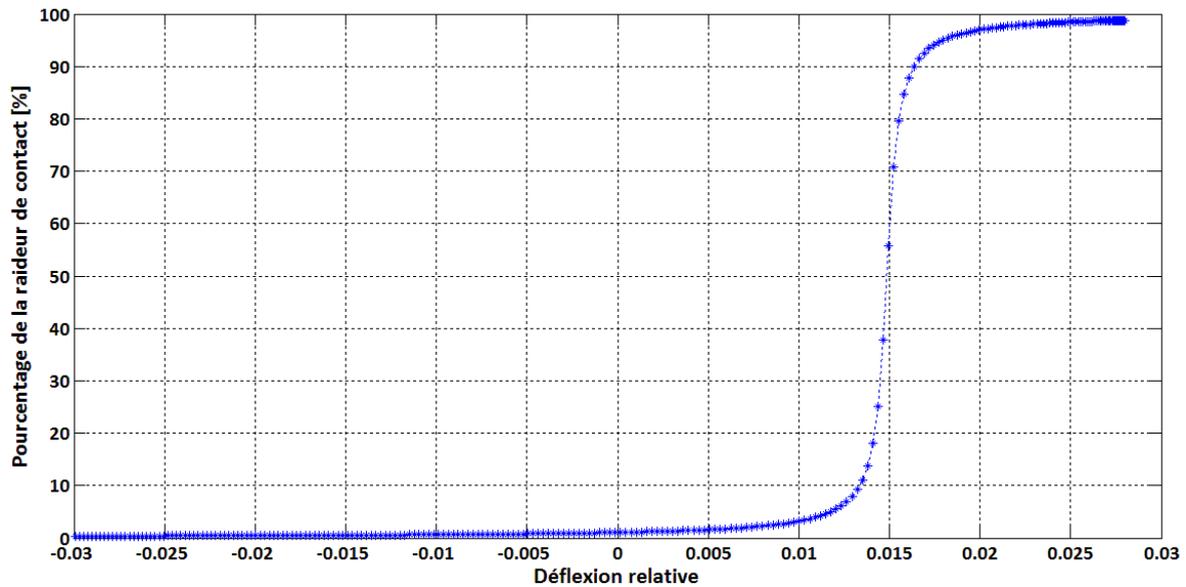


Figure 3-40 : Courbe de la raideur arc tangente en fonction de la déflexion relative sur le premier contact durant le mouvement quasi-périodique $t=[1.516-1.523]$ s

On présente *Figure 3-41*, l'évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession des centres, respectivement des deux disques et des deux labyrinthes. Elle symbolise la vitesse périphérique de précession du nœud rotor associé. On identifie le sens de précession à chaque instant à partir de son signe. La relation permettant de la calculer est rappelée ci-dessous :

$$v_{prec} = \frac{(\dot{X}_R - \dot{X}_S)(Z_R - Z_S) - (\dot{Z}_R - \dot{Z}_S)(X_R - X_S)}{\sqrt{(X_R - X_S)^2 + (Z_R - Z_S)^2}} \quad (3-5)$$

Les courbes montrent que la vitesse de précession des centres des deux disques est positive à tout instant. Ce résultat indique que les touches entraînent bien un contact permanent en précession directe.

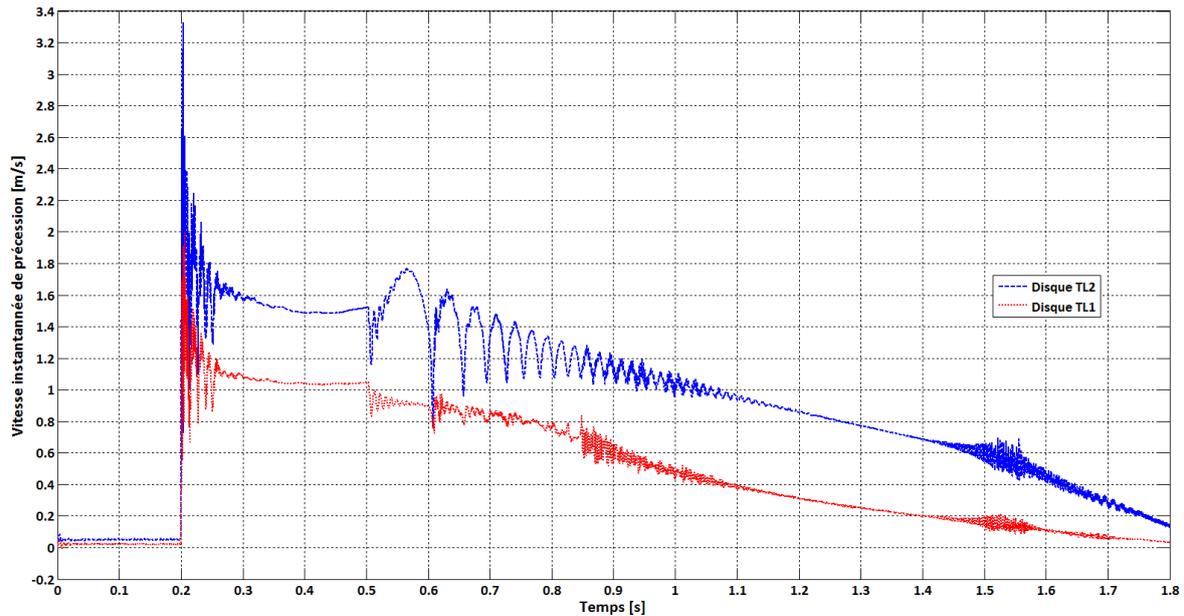


Figure 3-41 : Vitesse instantanée de précession des centres des disques

L'évolution temporelle de la déflexion relative adimensionnée des labyrinthes est tracée sur la Figure 3-42. D'importantes valeurs de déflexions sont observées durant le régime transitoire généré par les premières touches. Ces valeurs dépassent le millimètre. Elles deviennent plus cohérentes lorsque le régime pseudo-établi s'installe ($t > 0.3$ s). Les périodes d'oscillations de la déflexion relative, lors du régime en contact partiel du labyrinthe TL1 (cercle rouge) sont les mêmes que celles observées au niveau des paliers, Figure 3-36.

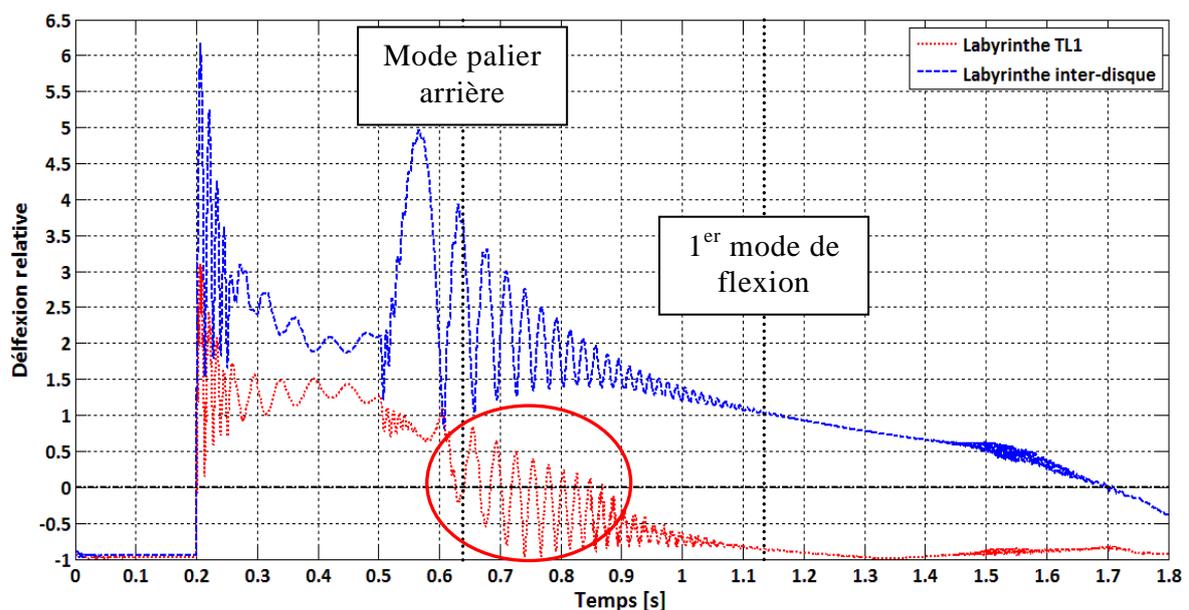


Figure 3-42 : Déflexion relative des centres des joints labyrinthes $(r-j)/j$

L'évolution temporelle de la vitesse instantanée de précession des centres des labyrinthes est exposée *Figure 3-43*. A l'instar des deux disques, les centres des labyrinthes suivent un mouvement de précession directe presque à tout instant.

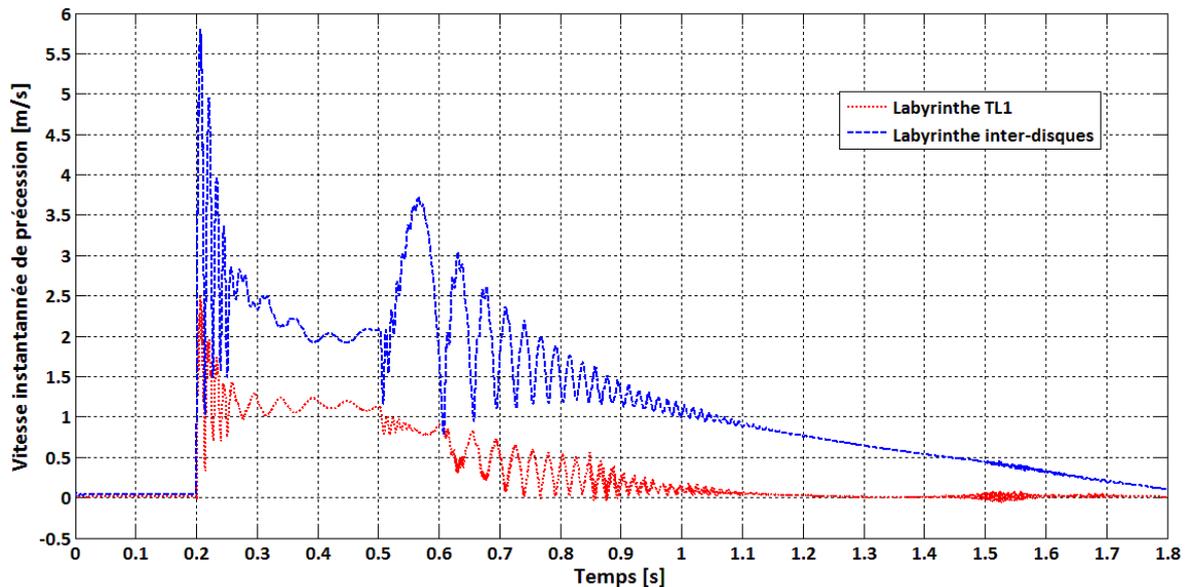


Figure 3-43 : Vitesse instantanée de précession des centres des labyrinthes

3.2 Post-traitement fréquentiel des résultats

Les résultats présentés précédemment ont été post-traités dans le domaine fréquentiel dans le but d'observer l'influence des différentes phases de touches sur le spectre fréquentiel. Les spectrogrammes complets (full-spectrogram) sont paramétrés selon les indications du *Tableau 3-10* (voir *Chapitre 1 : §3.2*). La fréquence de coupure a une valeur en pourcentage de la fréquence de rotation du régime nominal TL (100% NTL), de même pour le pas de temps du fenêtrage fréquentiel. Deux types de signaux sont utilisés. Les composantes suivant X et Z :

- des déflexions relatives latérales des nœuds rotor concernés par les touches
- des efforts de contact frottant (composantes normale et tangentielle) appliqués à ces nœuds

Les signaux ont été préalablement ré-échantillonnés à une fréquence de 100 kHz (pas de temps de 10^{-5} s).

Taille de la fenêtre d'intégration temporelle		Taux de recouvrement [%]	Type de fenêtre	pas de temps fréquentiel [%]	Fréquence de coupure [%]
[points]	[secondes]				
8192	0.08192	99	Hanning	0.43	5500

Tableau 3-10 : Paramètres du post-traitement fréquentiel

Les spectrogrammes relatifs aux nœuds aux centres du disque TL2 et du palier 4, sont exposés ci-après. Deux spectrogrammes complets du vecteur déplacement du nœud au centre du disque TL2 sont présentés dans la *Figure 3-44* et la *Figure 3-45* (zoom sur les fréquences

basses). La prépondérance de l'ordre 1 confirme le caractère majoritairement synchrone du contact durant la simulation. Les premières touches génèrent les plus grandes amplitudes de déplacement. Le franchissement de la vitesse critique ($t \sim 0.5$ s) du mode de palier arrière est marqué par une brève augmentation des amplitudes.

Le zoom du spectrogramme sur des fréquences plus basses montre l'émergence de trois sur-harmoniques de fréquences positives (ordres ~ 2 , $5/2$ et 3) et trois autres de fréquences négatives (ordres $\sim 1/2$, -1 , $-3/2$). Elles sont générées lors du régime transitoire successif aux premières touches. Les fréquences de ces raies évoluent proportionnellement à celle d'ordre 1 synchrone de la vitesse de rotation. Les amplitudes des raies restent toutefois très inférieures à celle d'ordre 1.

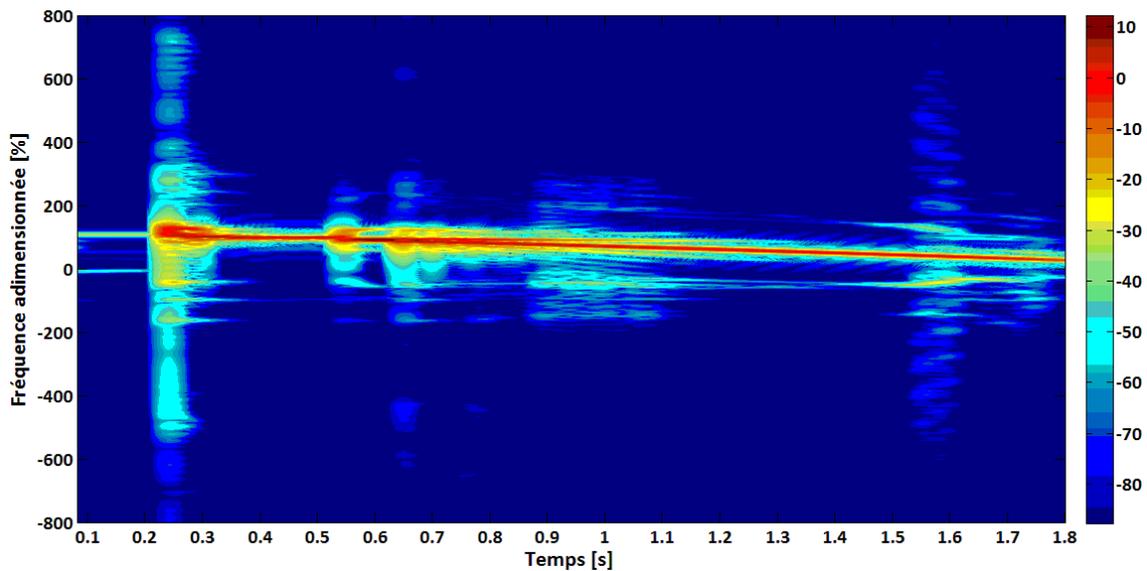


Figure 3-44 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud au centre du disque TL2

Le zoom du spectrogramme ci-dessus, *Figure 3-45*, montre l'émergence de deux raies de fréquences positives au passage de la première vitesse critique. Leur fréquence évolue non proportionnellement à celle d'ordre 1, et est déclenchée par le phénomène de butée des paliers (voir ellipse blanche).

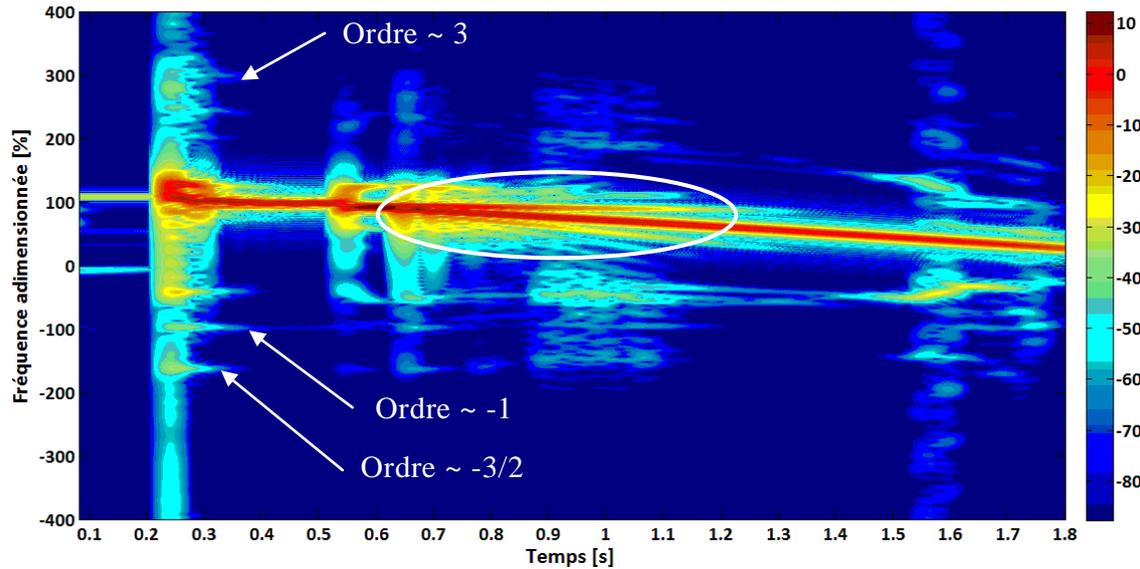


Figure 3-45 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud au centre du disque TL2 (zoom sur les basses fréquences)

Les Figures 3-46 et 3-47 montrent le spectrogramme complet des déflexions latérales du nœud au centre du palier 4. Le contenu fréquentiel est semblable à celui obtenu au niveau du disque TL2. Les amplitudes des fréquences sollicitées ainsi que l'énergie libérée lors des touches sont plus importantes au niveau des paliers.

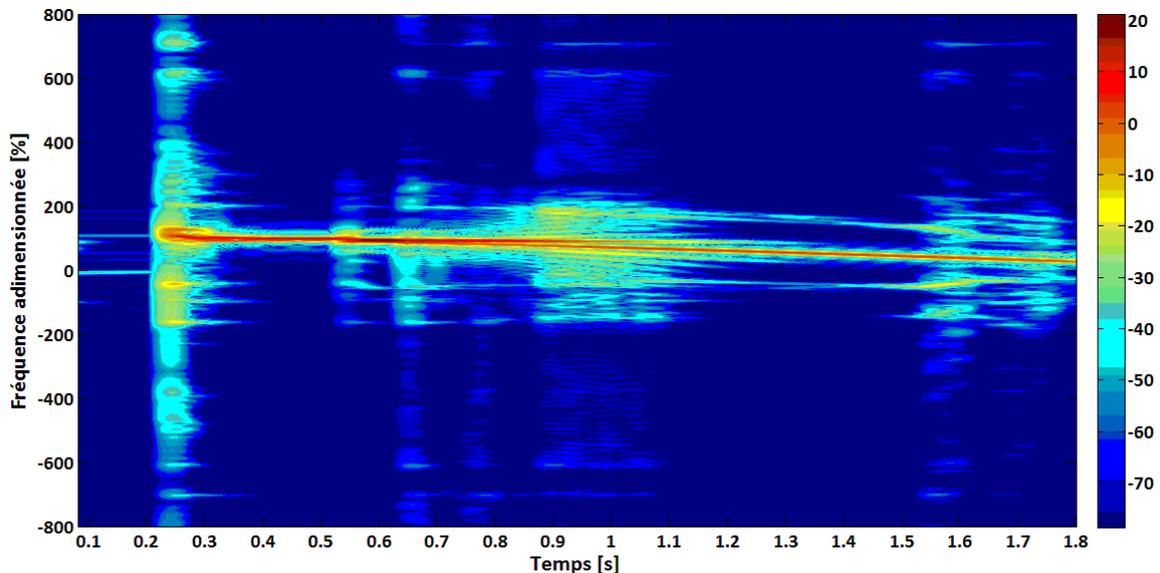


Figure 3-46 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud centre du palier 4 (cage souple)

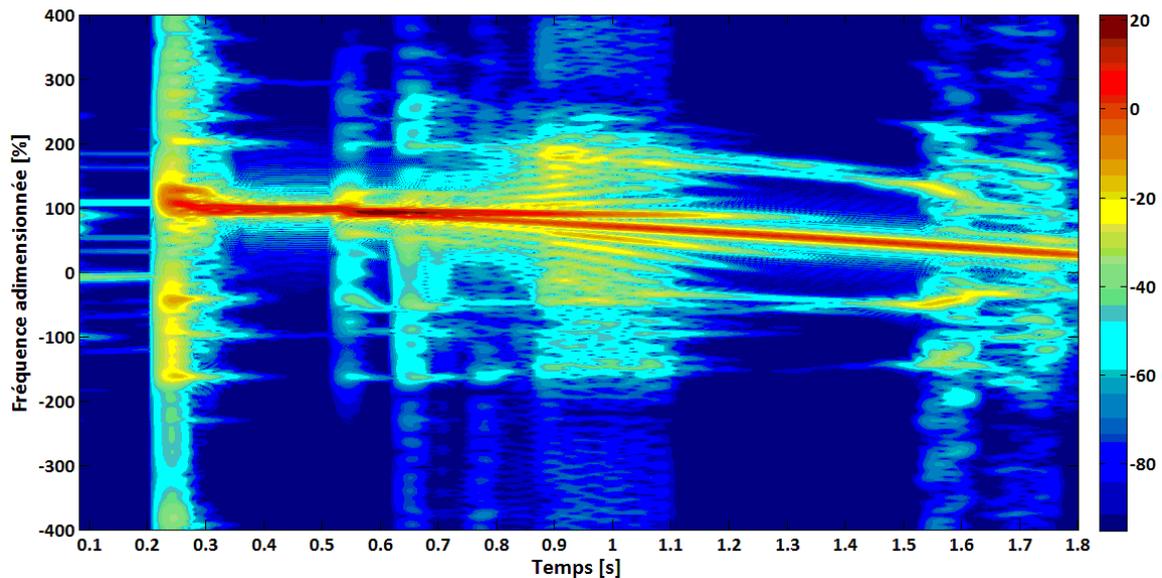


Figure 3-47 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud centre du palier 4 (cage souple, zoom sur les basses fréquences)

Les spectrogrammes complets des composantes radiales et tangentielles de l'effort de touche au niveau du disque TL2 sont montrés *Figure 3-48* et *3-49*. Ils sont identiques à ceux calculés sur les déflexions relatives du centre du disque TL2, néanmoins les fréquences sollicitées se distinguent plus aisément.

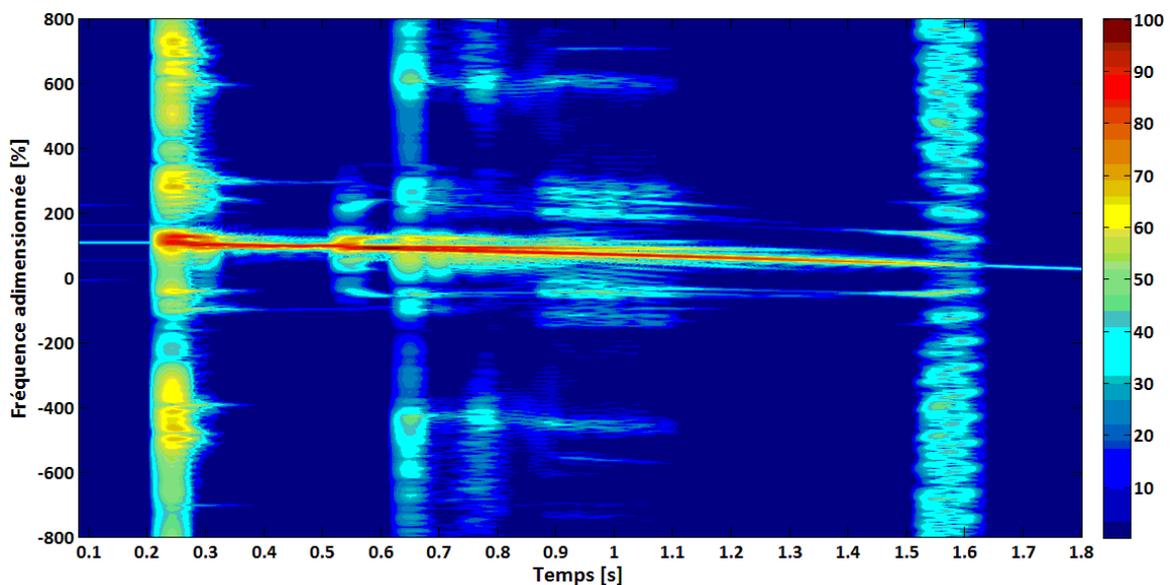


Figure 3-48 : Spectrogramme du vecteur d'effort de contact du nœud au centre du disque TL2

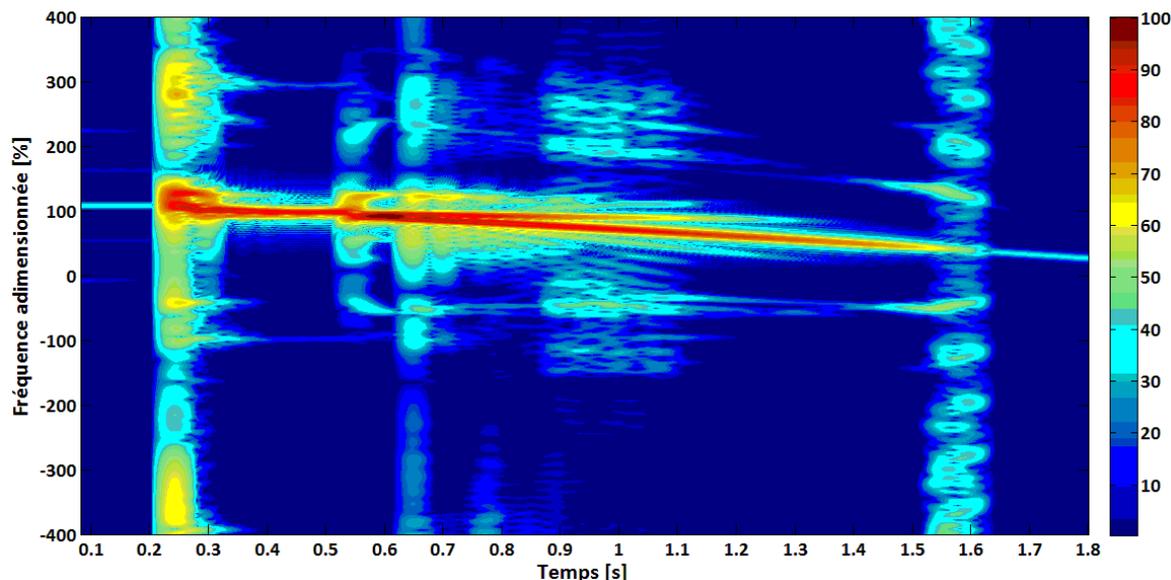


Figure 3-49 : Spectrogramme du vecteur d'effort de contact du nœud au centre du disque TL2 (zoom sur les basses fréquences)

Les figures exposées par la suite sont des spectres complets (full-spectrum) des différents signaux sur un intervalle de temps très court. Ces courbes permettent d'observer plus précisément les fréquences et amplitudes des harmoniques sollicités durant les premières touches à $t \sim 0.3s$.

Le spectre complet des déflexions relatives du centre du disque TL2 est exposé *Figure 3-50* tandis que celui du centre du palier équipé de la cage souple est présenté *Figure 3-51*. Le pic d'ordre 1 synchrone de la vitesse de rotation est prépondérant et son amplitude est suffisante pour consommer le jeu (>1). D'autres harmoniques de fréquences positives et négatives font timidement leur apparition : $\sim -3/2, -1, -1/2, 1, 2, 5/2, 3$, et même $7/2$.

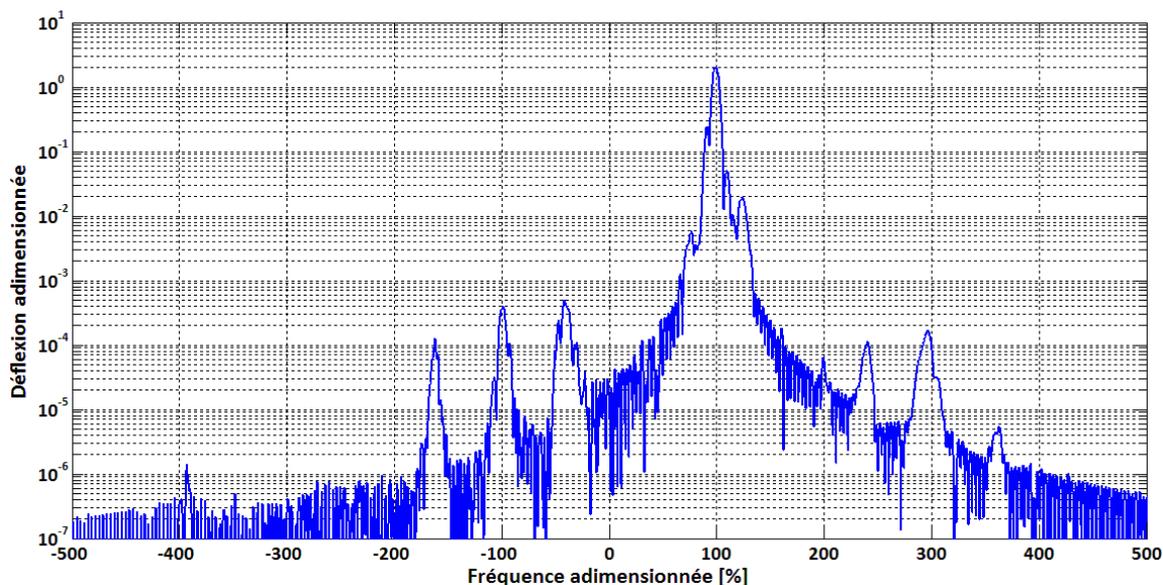


Figure 3-50 : Spectre complet des déflexions relatives latérales du nœud au centre du disque TL2 sur l'intervalle $t=[0.292 ; 0.3739] s$

Le spectre des déflexions relatives du centre du palier 4 est semblable au précédent, mais il montre d'autres pics de fréquences, en valeur absolue, plus importantes. La butée des paliers génère un contenu fréquentiel plus riche que la touche d'un disque sur le stator.

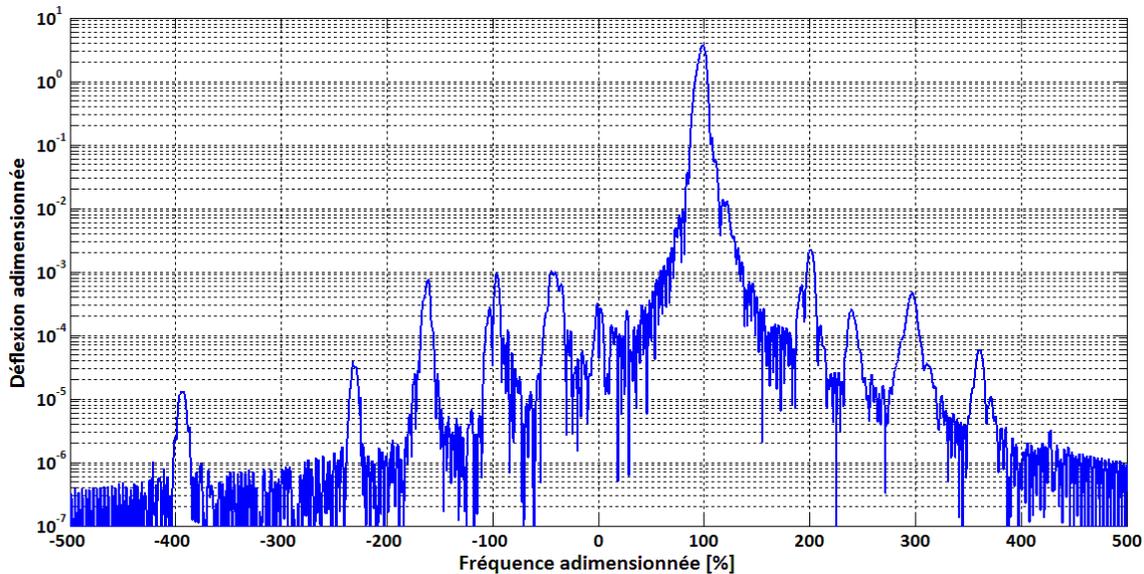


Figure 3-51 : Spectre complet des déflexions relatives latérales du nœud au centre du palier 4 sur l'intervalle $t=[0.292 ; 0.3739]$ s

3.3 Influence des raideurs de contacts

Dans les simulations précédentes, 6 contacts ont été mis en jeu : 2 disques / anneaux, 2 labyrinthes / carter, 2 paliers / butée. Toujours dans le but de tester la robustesse de ToRoS, 3 autres simulations ont été réalisées. Dans un souci de concision de présentation des résultats, seuls les spectrogrammes des déflexions au niveau du disque TL2 sont présentés.

La première simulation ne prend pas en compte les deux butées au niveau des paliers, voir *Figure 3-52*. Après franchissement de la vitesse critique du mode de palier arrière, l'émergence de raies non proportionnelles à celle d'ordre 1, observées sur la *Figure 3-45*, n'existe plus.

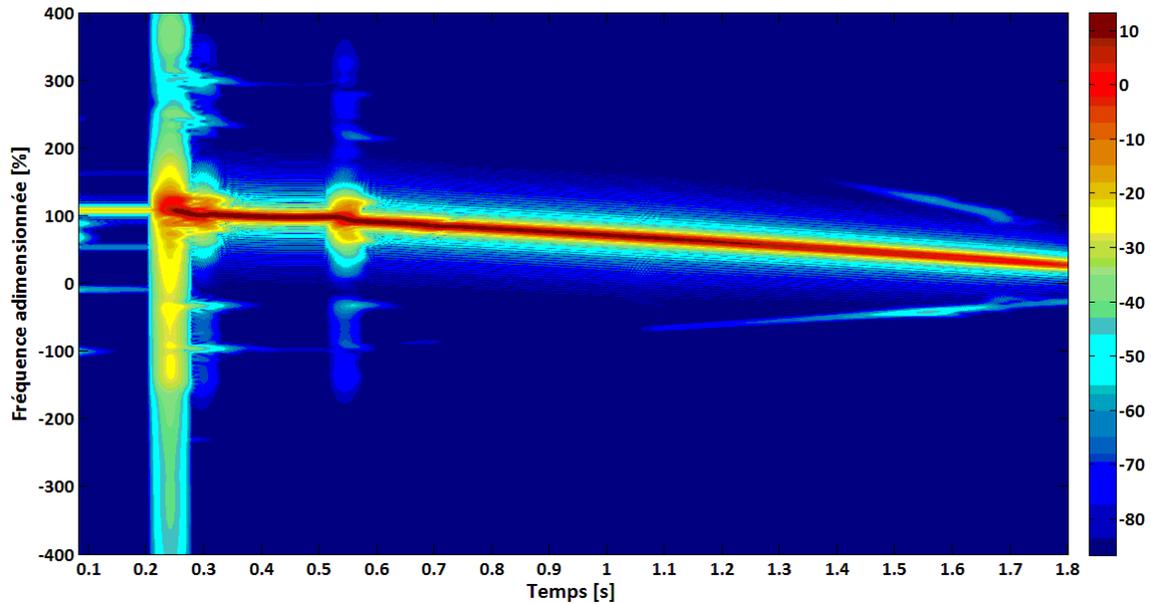


Figure 3-52 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud au centre du disque TL2 (sans butée paliers)

La seconde simulation prend en compte les 6 contacts mais en multipliant par 10 les raideurs de contact labyrinthes, *Figure 3-53*.

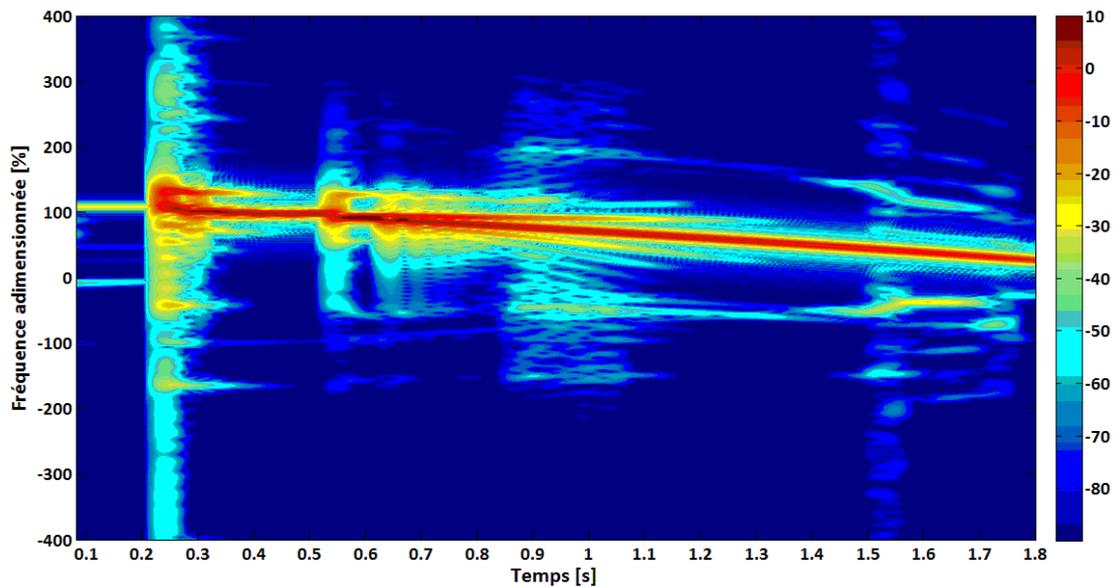


Figure 3-53 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud au centre du disque TL2 (raideurs contacts labyrinthes $\times 10$)

Dans la dernière simulation, les 4 raideurs disques/anneaux et paliers/butées sont multipliées par 5 alors que les raideurs de contacts labyrinthes/carter restent multipliées par 10, voir *Figure 3-54*.

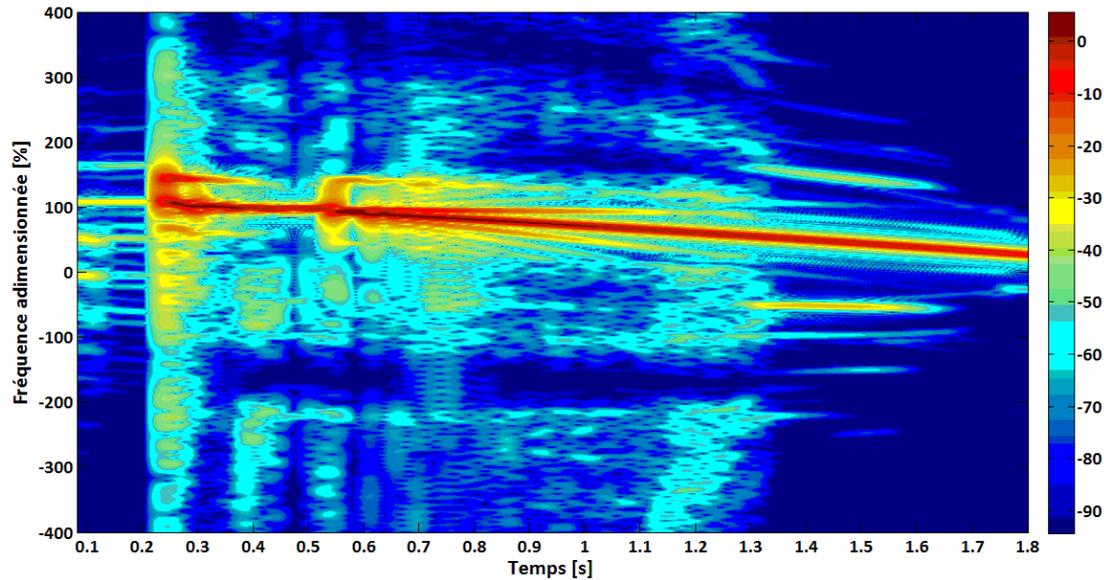


Figure 3-54 : Spectrogramme des déflexions relatives latérales du nœud au centre du disque TL2 (raideurs contacts : disques & butées paliers x5, labyrinthes x10)

Il est constaté que plus les raideurs augmentent plus les spectrogrammes s'enrichissent de raies supplémentaires avec une légère augmentation fréquentielle. Cependant, les spectres obtenus pour ces simulations restent globalement similaires, démontrant une certaine robustesse du modèle.

4. Synthèse

Les différentes simulations présentées dans ce chapitre mettent en évidence les points suivants :

- les touches sur l'ensemble TL1 « disque TL1 + labyrinthe TL1 » sont moins violentes et durent moins longtemps que sur l'ensemble TL2 « disque TL2 + labyrinthe TL2 », ce qui est en accord avec l'expérience. Ce comportement est logique car il s'explique d'une part, par la position de l'ensemble TL1 proche du nœud de la déformée dynamique sur la plage de vitesse de rotation, et d'autre part par la présence du balourd soudain sur l'ensemble TL2,
- les efforts calculés au niveau des disques sont suffisants pour entraîner la déformation plastique des aubes, notamment celles du disque TL2 qui ont été les plus endommagées durant l'essai,
- les valeurs de pénétrations obtenues sont compatibles avec l'observation expérimentale de la profondeur des sillons creusés dans les revêtements abrasable.

Même si d'importants endommagements mécaniques ont été constatés lors des essais, sur l'ensemble des composants de la turbine libre, le départ des aubes n'entraîne généralement pas de phénomènes dynamiques instables. Les résultats de simulations se montrent en accord avec cette conclusion. Les joints labyrinthes jouent un rôle essentiel dans la stabilité du rotor à la touche. En effet l'apport d'amortissement de la loi non-linéaire de pénalité, qui est appliquée au contact labyrinthe/carter, génère logiquement plus de pertes d'énergie durant la touche que celui de la loi linéaire de pénalité utilisée pour les contacts disques/anneaux et/ou butées paliers. Cette loi favorise en outre le contact permanent en précession directe au comportement stable et bénin dynamiquement. Comme les jeux au niveau des labyrinthes sont plus faibles que ceux au niveau des disques ils sont toujours partie prenante dans les touches rotor/stator.

Il va de soi que fonctionner proche des vitesses d'anti-résonnances réduit le nombre de touches rotor/stator. Le risque de déclenchement d'une instabilité dynamique est plus faible lors d'une descente en vitesse que lors d'une montée.

Ainsi, sur le plan numérique, la loi de contact labyrinthe donne des résultats tout à fait satisfaisants aussi bien en termes d'efforts de contact, que de pénétrations. Le comportement après un contact d'un joint labyrinthe est qualitativement reproduit par le modèle non-linéaire de pénalité amortie. Les résultats de simulation sur les contacts au niveau des disques est cohérent avec les hypothèses posées durant l'estimation des paramètres numériques de contact.

Au niveau des disques TL, les valeurs de pénétrations calculées sont inférieures à celles mesurées. Cependant l'amplitude des efforts calculés est suffisante pour indiquer l'endommagement des aubes, sachant que la plastification n'est pas considérée dans le code de calcul.

La régularisation de la raideur de contact par la loi arc tangente facilite la gestion du multi-contact et améliore la robustesse du schéma d'intégration.

Les résultats de simulations avec des amplifications de raideur de contact confirment que le modèle est robuste vis-à-vis des paramètres de contact. Les post-traitements fréquentiels décrivent un comportement global similaire à ceux obtenus avec les paramètres de contact calculés. La raideur de contact est déterminante dans le cas de régime quasi-périodique sollicitant

les hautes fréquences, mais moins influente dans le cas d'un contact permanent en précision directe.

Conclusion et perspectives.

Concevoir des turbomoteurs pour hélicoptères qui puissent avoir un comportement robuste et maîtrisé, nécessite d'élaborer un modèle de dynamique de ligne d'arbre le plus fiable possible. Il a en particulier à intégrer les non-linéarités dues à de potentielles multi-touches rotor/stator induites par exemple par un balourd soudain dû à une perte d'aubes. Comme les touches interviennent à différents niveaux de l'architecture du turbomoteur (aubes de disques ou rouet, mise en butée de palier, joint d'étanchéité), il s'agit de pouvoir mettre en œuvre et de gérer plusieurs types de lois de contact, ce qui apporte des difficultés dans le développement du modèle.

La bibliographie entreprise a identifié les comportements variés successifs à une touche rotor/stator. Elle les a classifiés en fonction des amplitudes atteintes et des fréquences sollicitées : contact permanent en précession directe (orbite périodique), contact partiel (orbite quasi-périodique ou chaotique) en précession directe puis indirecte, contact permanent en précession indirecte (dry whirl/whip). Le déclenchement de ces différents comportements dépend, du mode de précession, des paramètres de contacts, des conditions initiales, de la dissymétrie du système, des caractéristiques dynamiques du rotor et du stator, ainsi que du régime de fonctionnement. L'influence de cette multitude de paramètres sur la dynamique non-linéaire a été hiérarchisée. L'analyse bibliographique s'est complétée par la description d'une part, des modèles de contacts existants issus des méthodes de pénalité et de Lagrange, et d'autre part des micro- et macro-modèles de gestion du frottement. Comme la problématique de touche induit des régimes transitoires, l'analyse s'est portée sur les méthodes d'intégration numérique et notamment sur les schémas de la famille de Newmark car offrant le meilleur compromis, temps de calcul, robustesse, stabilité et simplicité d'implémentation. Le contenu fréquentiel des réponses temporelles calculées a été par des outils d'analyse fréquentielle en particulier les « full-spectrum » et « full-spectrogramme » qui ont le gros avantage de séparer les raies fréquentielles des modes de précessions directes et indirectes, ce qui facilite grandement l'interprétation et l'identification des comportements après touches.

La solution analytique d'un oscillateur forcé et non-linéaire, car à doubles butées élastiques, a permis de tester d'une part les modèles de pénalités irrégulière puis régularisée par une loi arc tangente et d'autre part les schémas d'intégration de Newmark. Il a été démontré qu'utiliser la méthode de Newmark avec la loi de pénalité régularisée ne nécessitait pas de procédure itérative de Newton-Raphson à chaque pas de temps, ce qui apporte un gain appréciable de temps de calcul.

Le modèle EF de rotor développé sous Matlab, dénommé ToRoS pour **T**ouche **R**otor/**S**tator, utilise des éléments de poutre en flexion classiques (4 ddl/nœud), mais aussi des éléments de haute précision (10 ddl/nœud) prenant en compte aussi bien les déflexions latérales que les contributions en torsion et traction/compression.

Les deux lois de contact type « pénalité amortie » retenues ont été adaptées pour la touche rotor/stator. Elles sont utilisées pour simuler différents types de touches : une loi linéaire pour le contact aubes/stator, ainsi que pour la mise en butée d'un palier, et une autre loi non-linéaire pour les contacts au niveau des joints d'étanchéité. Il a été proposé une loi ori-

ginale généralisant le frottement de Coulomb dans le cas de coefficient de frottement dynamique et statique différent voire égaux. Cette loi qui apporte de plus de la régularisation est construite à l'aide d'une expansion de fractions polynomiales. Sa versatilité lui permet de retomber sur la loi de Coulomb initiale.

Le rotor de Jeffcott a par la suite fait l'objet d'une modélisation prenant en particulier la loi linéaire de pénalité et le frottement de Coulomb classique. Les simulations calculées ont été validées avec les résultats du modèle quasi-analytique de Jiang. Le diagramme d'existence obtenue dans le plan coefficient de frottement – vitesse de rotation montre les régions où cohabitent les comportements successifs à la touche.

L'objectif étant de modéliser des rotors industriels, l'étape suivante a porté sur la modélisation éléments finis d'un rotor académique à 3 disques. La technique des multiplicateurs de Lagrange et deux lois de pénalités ont été utilisées associées à la loi généralisée de Coulomb. Une étude paramétrique sur le jeu et le coefficient de frottement rotor/stator a réussi à dégager deux types de comportements et ceci indépendamment de la méthode de gestion de contact sélectionnée : contact permanent en précession directe et une série finie de rebonds. Le régime transitoire pour atteindre le premier comportement génère des harmoniques multiples du 1/3 de la vitesse de rotation et laisse la place en régime établi à une seule harmonique d'ordre 1. Le second comportement a un transitoire fugace impactant peu le spectrogramme malgré l'importance des forces de contact. Il a été montré que les pics de résonances calculés avec différentes méthodes de la littérature (méthode de la balance harmonique, Code Aster) et celle proposée (ToRoS) étaient identiques dans le cas non-frottant mais pouvait marquer certaines différences en présence du frottement.

Fort de la connaissance apportée par les différents chapitres, le dernier volet de la thèse a traité le comportement post-perte d'aubes d'une turbine libre d'un turbomoteur d'hélicoptère. L'originalité de la modélisation éléments finis réalisée avec ToRoS est apportée par la prise en compte des multi-touches de différentes nature car produites en différents lieux de l'architecture de la turbine. Les données du modèle éléments-finis 1D ont été fournies pour certains par différentes expérimentations (loi de descente en vitesse, contact joints labyrinthe,...) conduites par le constructeur et pour d'autres par des modélisations éléments finis 3D (caractéristiques modales des stators, raideur équivalente de contact aube/abradable anneau,...). Bien entendu les comportements s'avèrent plus riches en harmonique que sur les autres modèles, ceci est dû à l'architecture plus élaborée et à une descente en vitesse importante (50% de la vitesse nominale par seconde). Il y a une prépondérance du contact permanent en précession directe, le moins destructeur, avec des séquences de contact partiel en précession directe sitôt que le rotor se décolle du stator. Ainsi les harmoniques qui peuvent naître ne cessent d'évoluer au cours du temps.

Les simulations effectuées avec des modifications de raideur de contact démontrent en régime permanent en précession directe, la robustesse du modèle multitouches rotor/stator. Dans le cas d'un régime quasi-périodique, la raideur de contact demeure influente.

Les avancées réalisées et les réflexions menées lors de cette thèse ont dégagé les perspectives décrites ci-après.

Classiquement pour améliorer le code de calcul, il conviendrait de mieux modéliser la souplesse des carters, l'évolution des raideurs et des amortissements de contact ainsi que leur coefficient de frottement.

Actuellement le modèle développé est rendu non-linéaire par la prise en compte des multi-touches rotor/stator.

Comme le jeu au niveau des paliers-squeeze-film peut-être consommé, leur comportement peut devenir non-linéaire. Les étages d'engrènement sont eux aussi sources de non-linéarités dues principalement aux jeux de denture. Intégrer ces deux types de non-linéarités affinerait le modèle.

D'autre part, les turbomoteurs sont soumis à des couples de transmissions variables, et il conviendrait de les prendre en compte pour établir la loi de vitesse de rotation et intégrer les couplages torsion/flexion.

Par nature, les turbomoteurs sont embarqués dans l'aéronef sujet à des manœuvres violentes et des atterrissages sévères. Les récents développements de modèle de rotor embarqué démontrant des comportements instables dus notamment aux rotations d'ensemble, sont aussi une voie possible d'amélioration du code de calcul [DUC 06], [DAK 14a], [DAK 14b].

Valider toute ou partie de ce modèle multitouche nécessite de mener des expérimentations, d'abord sur des rotors académiques puis industriels. Les futurs modules d'essais de l'EquipEX PHARE lyonnais offre de telles perspectives.

Annexes

1. Schémas d'intégration temporelle

1.1. Méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4

Le principe de la méthode de Runge-Kutta consiste à réécrire le système d'équations dynamiques du second ordre, sous forme d'une équation différentielle du premier ordre du type :

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t) \quad (\text{A-6})$$

Dans le cadre d'une résolution dynamique, on reformule l'équation en posant $X = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$ et

$\dot{X} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$. On obtient le système sous forme d'état :

$$A.\dot{X}(t) = B.X(t) + d(t) \quad (\text{A-7})$$

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix} \text{ et } d(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f^{Ext}(t) \end{bmatrix}.$$

Avec la méthode RK4 on détermine le vecteur $X(t+\Delta t)$ après avoir préalablement calculé 4 vecteurs pentes dérivées k_1, k_2, k_3 et k_4 .

Le schéma de la *Figure A-55* montre le principe de construction des différentes pentes nécessaire durant le calcul de Runge-Kutta. La première pente est estimée par le vecteur vitesse à l'instant t . L'intervalle $[t ; t+\Delta t]$ est divisé en deux par introduction d'un demi-pas à $t+\Delta t/2$. k_2 est calculé par le biais de k_1 au demi-pas $t+\Delta t/2$. De même pour k_3 avec k_2 . k_4 est calculé à l'aide de k_3 au pas $t+\Delta t$. Le système d'équation permettant de calculer les 4 vecteurs pentes s'écrit :

$$\begin{cases} k_1 = \dot{X}(t) = F(X(t), t) \\ k_2 = F\left(X(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 = F\left(X(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 = F(X(t) + \Delta t k_3, t + \Delta t) \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

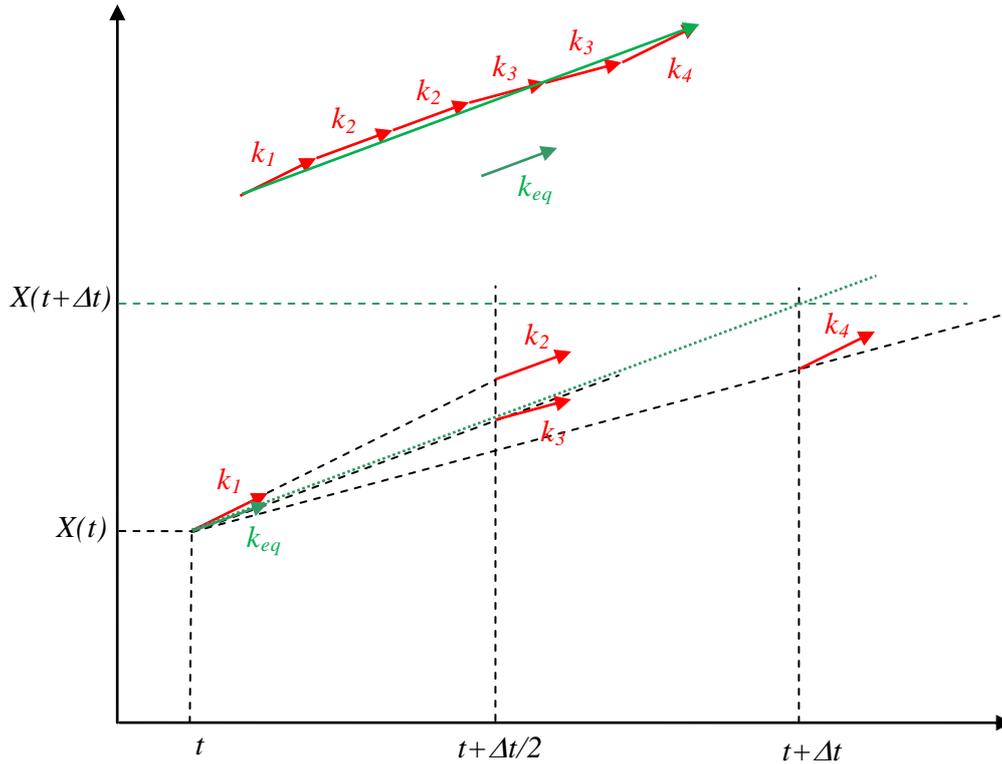


Figure A-55 : Schéma de l'approche de Runge-Kutta à l'ordre 4

La pente équivalente sur l'intervalle $[t ; t+\Delta t]$ est estimée en faisant une moyenne des 4 pentes et en pondérant double les pentes k_2 et k_3 concernées par le demi-pas de temps. Le calcul du vecteur $X(t+\Delta t)$ est rendu possible par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta t \cdot k_{eq} \\ k_{eq} = \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

La dérivée du déplacement X à l'instant $t+\Delta t$ se calcule facilement par le biais de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{X}(t+\Delta t) = F(X(t+\Delta t), t+\Delta t) \quad (\text{A-10})$$

La méthode de Runge-Kutta est une approche numérique très utilisée en physique. Elle procure une grande robustesse et une grande stabilité. L'erreur sur le calcul du déplacement d'un tel schéma est d'ordre 5, ce qui implique une grande précision (ordre 4).

L'inconvénient majeur est qu'elle nécessite de réécrire le système à l'ordre 1 et donc de doubler sa taille, ce qui la rend très coûteuse en temps de calcul.

Ismeurt [ISM 95] utilise la méthode RK4 en introduisant les efforts normaux et tangentiels issus du contact comme des inconnues du problème. Il prend en compte les différentes phases de glissement en y introduisant une relation cinématique sur le roulement sans glissement. La loi régissant la fonction non-linéaire $F(X,t)$ n'est donc pas la même suivant les différentes phases de glissement.

1.2 Méthode des différences finies centrées

Le schéma d'intégration des différences finies centrées représente un cas particulier des schémas de Newmark. C'est un intégrateur explicite qui nécessite de réécrire le système d'équations dynamiques à l'instant t_n , date que l'on utilise comme centre de l'intervalle d'intégration :

$$M\ddot{q}_n + C\dot{q}_n + Kq_n = f_n^{Ext} + f^{NL}(q_n, \dot{q}_{n-1}) \quad (A-11)$$

Le principe du schéma des différences finies centrées est d'exprimer les vitesses et accélérations à l'incrément temporel n , en fonction des déplacements aux incréments $n-1$, n et $n+1$:

$$\begin{cases} \dot{q}_n = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{\Delta t^2} \end{cases} \quad (A-12)$$

En introduisant les vecteurs vitesse et accélération (A-12) dans l'équation de la dynamique (A-11), on peut exprimer le vecteur de déplacement à l'incrément temporel $n+1$:

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}C\right)q_{n+1} = \Delta t^2 \left(f_n^{Ext} + f^{NL}(q_n, \dot{q}_{n-1})\right) + H_C(q_n, q_{n-1}) \quad (A-13)$$

$$\text{Avec } H_C(q_n, q_{n-1}) = (2M - \Delta t^2 K)q_n + \left(\frac{\Delta t}{2}C - M\right)q_{n-1}$$

Il est possible de simplifier l'équation en utilisant l'expression de la vitesse à l'incrément temporel $n-1/2$:

$$\begin{cases} \dot{q}_{n-1/2} = \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \\ M\ddot{q}_n + C\dot{q}_{n-1/2} + Kq_n = f_n^{Ext} + f^{NL}(q_n, \dot{q}_{n-1/2}) \end{cases} \quad (A-14)$$

L'équation d'équilibre dynamique exprimée en fonction du déplacement à l'incrément $n+1$ devient :

$$\frac{1}{\Delta t^2}Mq_{n+1} = f_n^{Ext} + f^{NL}(q_n, \dot{q}_{n-1/2}) - C\dot{q}_{n-1/2} - \frac{1}{\Delta t^2}M(2q_n - q_{n-1}) \quad (A-15)$$

La résolution du système (A-15) nécessite uniquement d'inverser la matrice de masse qui dans certaines applications peut être constante au cours du temps. Une inversion préliminaire aux calculs peut être effectuée afin de gagner du temps.

Dans le cas où la matrice de masse n'est pas constante au cours du temps, il est possible d'utiliser une matrice de masse condensée [OWE 80], [ZIE 00], diagonale et immédiatement inversible.

Le schéma aux différences finies centrées, bien que très facilement implémentable dans un code de calcul [ROQ 09] est bien moins robuste et stable que d'autres issus de la famille des schémas de Newmark. Il nécessite d'utiliser un pas de temps très faible au regard de la plus petite période propre du système non-linéaire.

1.3 Autres types de schéma d'intégration temporelle

Méthode- α Hilbert, Hugues et Taylor

L'une des méthodes d'intégration temporelle les plus utilisées dans les codes de calculs modernes est la méthode- α de Hilbert, Hugues et Taylor (HHT) [COM 06], [XIE 95].

Le principe repose sur le même que celui des schémas de Newmark, à savoir approcher les vecteurs vitesses et déplacements par un développement de Taylor (I-37) et (I-38). L'équation d'équilibre n'est plus vérifiée à l'étape $n+1$ mais est « décalée » grâce au coefficient α :

$$M\ddot{q}_{n+1} + (1-\alpha)(C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1}) + \alpha(C\dot{q}_n + Kq_n) = (1-\alpha)f_{n+1} + \alpha f_n^{tot} \quad (\text{A-16})$$

Avec $f_i^{tot} = f_i^{Ext} + f^{NL}(q_i, \dot{q}_i)$

L'algorithme HHT est du second ordre et possède la propriété d'amortir les hautes fréquences par l'intermédiaire du coefficient α lorsque les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \gamma = \frac{1}{2} + \alpha \\ \beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2 \end{cases} \quad (\text{A-17})$$

Le schéma de Newmark à accélération moyenne est un cas particulier de la méthode HHT ($\alpha=0$) et respecte les conditions du système (A-17).

Le schéma d'Houbolt

Le schéma d'intégration d'Houbolt [XIE 95] est un des premiers algorithmes à avoir été développés pour la simulation numérique de calculs de structures en aéronautique. L'équation d'équilibre est résolue à l'instant $t+\Delta t$ comme pour la famille des schémas de Newmark. Les vecteurs vitesses et accélérations sont calculés par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \frac{11q_{n+1} - 18q_n + 9q_{n-1} - 2q_{n-2}}{6\Delta t} \\ \ddot{q}_{n+1} = \frac{2q_{n+1} - 5q_n + 4q_{n-1} - q_{n-2}}{\Delta t^2} \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

L'algorithme d'Houbolt n'est pas simple à implémenter et nécessite l'initialisation des vecteurs déplacements à l'incrément n , $n-1$ et $n-2$. Il offre toutefois la possibilité de se dispenser du calcul des vecteurs vitesses et accélérations à chaque incrément lorsque l'on s'intéresse uniquement à la solution en déplacement.

2. Condensation dynamique

2.1 Méthode de Craig et Bampton

La réduction modale par la méthode de Craig et Bampton passe dans un premier temps par la distinction des ddl intérieurs et de contour. On note les indices i comme indice des ddl intérieurs et c indice des ddl de contour. Les matrices et vecteurs sont réorganisés de la manière suivante :

$$K = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ci} \\ K_{ic} & K_{ii} \end{bmatrix} \quad (A-19)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_c \\ F_i \end{bmatrix}$$

L'application de la méthode de Craig et Bampton sur un système non-linéaire est possible en définissant les ddl de contour comme les ddl non-linéaires qui sont en général en faible nombre par rapport aux ddl intérieurs. La base modale de projection est construite à partir des modes statiques et encastrés d'où son appellation de méthode à « interface fixe ».

Les modes statiques correspondent aux déformées du système lorsque l'on applique un déplacement unitaire sur les ddl de contour. La base ϕ_c contenant les modes statiques se calcule à l'aide du système (A-20) :

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ci} \\ K_{ic} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_d \\ \phi_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \phi_c = -K_{ii}^{-1} \cdot K_{ic} \quad (A-20)$$

Les modes encastrés sont solutions du problème aux valeurs propres suivant:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ci} \\ K_{ic} & K_{ii} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A-21)$$

La base modale est ensuite tronquée afin de ne conserver que les modes susceptibles d'être excités. Soit P le nombre de modes conservés et $\varphi_{i,P}$ la base tronquée des modes encastrés. La base modale de projection de la technique de Craig et Bampton Φ_{CB} est alors construite par l'intermédiaire de l'expression (A-22) :

$$\Phi_{CB} = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ \phi_c & \varphi_{i,P} \end{bmatrix} \quad (A-22)$$

La méthode de Craig et Bampton possède l'avantage d'être stable et facilement implémentable. Elle donne de bons résultats pour des systèmes de tailles raisonnables et s'adapte particulièrement aux problèmes liés aux non-linéarités de contact.

2.2 Méthode de Craig et Martinez

La méthode de Craig et Martinez est une méthode à interface libre, *i.e.* la troncature modale s'effectue sur tout le domaine en laissant libre tous les ddl. La base modale libre φ est solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$(K - \omega^2 M)\{\varphi\} = \{0\} \quad (\text{A-23})$$

On note P le nombre de modes conservés durant la troncature modale, φ_P la matrice des vecteurs propres de la base modale tronquée, N-P et φ_{N-P} respectivement le nombre et la base des vecteurs propres des modes non conservés :

$$Q = \varphi_P \cdot q_P + \varphi_{N-P} \cdot q_{N-P} \quad (\text{A-24})$$

Le principe de la méthode de Craig et Martinez consiste à projeter les vecteurs d'états sur la base tronquée et introduire la correction pseudo-statique $R \cdot F$:

$$\begin{cases} Q = \varphi_P \cdot q_P + R \cdot F \\ R = \varphi_P \left(\varphi_P^T \cdot K \cdot \varphi_P \right)^{-1} \varphi_P^T \end{cases} \quad (\text{A-25})$$

La matrice R est nommée matrice de flexibilité statique résiduelle. L'équation peut se réécrire en considérant que le chargement est nul sur les ddl internes ($\{F_i\} = \{0\}$) et en distinguant, comme précédemment, les ddl internes et de contour :

$$\begin{bmatrix} Q_c \\ Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{P,c} \\ \varphi_{P,i} \end{bmatrix} \{q_P\} + \begin{bmatrix} R_{cc} \\ R_{ic} \end{bmatrix} \{F_c\} \quad (\text{A-26})$$

En injectant la seconde ligne du système (A-26) dans la première ligne on obtient :

$$Q_i = \left(\varphi_{P,i} \cdot R_{i,c} \cdot R_{cc}^{-1} \cdot \varphi_{P,c} \right) q_P + R_{ic} \cdot R_{cc}^{-1} \cdot Q_c \quad (\text{A-27})$$

La relation (A-6) permet alors de construire une base de projection de la méthode de Craig et Martinez en conservant les ddl de contour :

$$\Phi_{CM} = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ \mathbf{R}_{ic} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} & \varphi_{P,i} \cdot \mathbf{R}_{ic} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \varphi_{P,c} \end{bmatrix} \quad (\text{A-28})$$

La base modale de Craig et Martinez Φ_{CM} peut être enrichie par l'ajout de modes d'attaches dans la base modale tronquée, permettant ainsi un gain en précision mais aussi une détérioration de la stabilité numérique. La méthode de Craig et Martinez est toutefois plus complexe à coder que celle de Craig et Bampton, mais permet d'intégrer dans le calcul des sous-structures, des données expérimentales.

3. Modélisation EF du rotor

3.1 Arbre

L'élément de poutre utilisé pour modéliser l'arbre, ainsi que les fonctions de formes décrivant les 3 mouvements (flexion, torsion et traction/compression) sont rappelés *Chapitre 2 §2.1.3*.

Contributions en Flexion

Le vecteur de déplacement nodal de sollicitations en flexion est décrit par la relation suivante :

$$\{q_f\} = \langle u_1 \quad w_1 \quad \theta_{u1} \quad \theta_{w1} \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_{u2} \quad \theta_{w2} \rangle^T \quad (\text{A-29})$$

Les vecteurs lignes d'interpolations géométriques sont exprimés dans le système suivant :

$$\begin{cases} \langle N_u(y) \rangle = \langle N_1(y) & 0 & 0 & N_2(y) & N_3(y) & 0 & 0 & N_4(y) \rangle \\ \langle N_w(y) \rangle = \langle 0 & N_1(y) & -N_2(y) & 0 & 0 & N_3(y) & -N_4(y) & 0 \rangle \end{cases} \quad (\text{A-30})$$

Le système d'équations (A-31) est utilisé lors du calcul du champ de déplacement en flexion de l'EF rotor :

$$\begin{cases} u(y) = \langle N_u(y) \rangle \{q_f\} \\ w(y) = \langle N_w(y) \rangle \{q_f\} \\ \theta_u(y) = \frac{\partial w}{\partial y}(y) = \left\langle \frac{dN_w}{dy}(y) \right\rangle \{q_f\} \\ \theta_w(y) = \frac{\partial u}{\partial y}(y) = - \left\langle \frac{dN_u}{dy}(y) \right\rangle \{q_f\} \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

Le premier terme de l'expression de l'énergie cinétique (2-20) est utilisé afin de calculer la matrice élémentaire de masse de l'élément poutre :

$$[M_{masse}^e] = \left[\rho S \int_0^L \left[\langle N_u \rangle^T \langle N_u \rangle + \langle N_w \rangle^T \langle N_w \rangle \right] dy \right] \quad (\text{A-32})$$

La matrice élémentaire de masse est exprimée par la relation suivante :

$$[M_{masse}^e] = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (A-33)$$

Le second terme met en évidence le calcul de la matrice élémentaire d'inertie :

$$[M_{inertie}^e] = \left[\rho I_x \int_0^L \left[\left\langle \frac{dN_u}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_u}{dy} \right\rangle + \left\langle \frac{dN_w}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_w}{dy} \right\rangle \right] dy \right] \quad (A-34)$$

La matrice élémentaire d'inertie s'écrit :

$$[M_{inertie}^e] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (A-35)$$

L'expression de l'équation suivante est utilisée dans le calcul de la matrice gyroscopique qui couple les contributions en flexion suivant les deux directions avec la vitesse de rotation propre de l'élément rotor :

$$[G_{1/2}^e] = \left[-\rho \int_0^L \left[\left\langle \frac{dN_u}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_w}{dy} \right\rangle \right] dy \right] \quad (A-36)$$

L'application des équations de Lagrange en considérant la vitesse de rotation non-constante permet de déterminer les différentes matrices élémentaires issues des contributions en flexion du rotor :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_f} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_f} = [M_f^e] \{ \ddot{q}_f \} + \dot{\phi} [G^e] \{ \dot{q}_f \} + \ddot{\phi} [G_{COR}^e] \{ q_f \} \quad (A-37)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} [M_f^e] = [M_{masse}^e] + [M_{inertie}^e] \\ [G^e] = [G_{1/2}^e] - [G_{1/2}^e]^T \\ [G_{COR}^e] = [G_{1/2}^e] \end{cases}$$

La matrice élémentaire d'effet gyroscopique s'écrit :

$$[G^e] = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-38})$$

La matrice élémentaire gyroscopique introduite par l'effet Coriolis est exprimée dans la relation suivante :

$$[G_{COR}^e] = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-39})$$

Le second terme de la relation de l'énergie de déformation de l'élément rotor (2-21) permet d'extraire la matrice de raideur en flexion :

$$[K_D^e] = \left[EI_x \int_0^L \left[\left\langle \frac{d^2 N_u}{dy^2} \right\rangle^T \left\langle \frac{d^2 N_u}{dy^2} \right\rangle + \left\langle \frac{d^2 N_w}{dy^2} \right\rangle^T \left\langle \frac{d^2 N_w}{dy^2} \right\rangle \right] dy \right] \quad (\text{A-40})$$

La matrice de raideur en flexion d'un élément d'arbre s'écrit :

$$[K_D^e] = \frac{EI}{(1+\lambda)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+\lambda)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-\lambda)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+\lambda)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-\lambda)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-\lambda)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+\lambda)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-\lambda)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+\lambda)L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-41})$$

$$\text{Avec } \lambda = \frac{12EI}{GkSL^2}$$

L'énergie de déformation engendrée par l'application d'une précharge axiale statique sur un élément d'arbre se calcule avec (2-24). La matrice raideur qui en découle est semblable à la matrice de masse inertielle issue de (A-34) :

$$[K_{Faxial}^e] = \left[F \int_0^L \left[\left\langle \frac{dN_u}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_u}{dy} \right\rangle + \left\langle \frac{dN_w}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_w}{dy} \right\rangle \right] dy \right] \quad (\text{A-42})$$

L'expression du travail du couple axial appliqué à l'élément rotor permet d'extraire une matrice de rigidité non symétrique :

$$[K_{Couple}^e] = \left[C \int_0^L \left[\left\langle \frac{dN_w}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{d^2 N_u}{dy^2} \right\rangle - \left\langle \frac{dN_u}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{d^2 N_w}{dy^2} \right\rangle \right] dy \right] \quad (\text{A-43})$$

Les matrices élémentaires de raideur induites respectivement par application d'un effort axial et d'un couple sont exprimées par les relations (A-44) et (A-6) :

$$[K_{Faxial}^e] = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-44})$$

$$[K_{Couple}^e] = \frac{C}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & L & 2 & 0 & 0 & L \\ 0 & -2 & -L & 0 & 0 & 2 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -L & -2 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 2 & L & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-45)$$

L'expression de l'énergie de déformation relève d'une énergie potentielle, ainsi l'application des équations de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\partial E_D}{\partial q_f} = [K_f^e] \{q_f\} \quad (A-46)$$

$$\text{Avec } [K_f^e] = [K_D^e] + [K_{Faxial}^e] + [K_{Couple}^e]$$

Contributions en torsion

Le vecteur des déplacements des ddl de torsion s'exprime :

$$\{q_f\} = \langle \beta_1 \quad \gamma_1 \quad \beta_2 \quad \gamma_2 \rangle^T \quad (A-47)$$

Le vecteur d'interpolation géométrique ainsi que le champ de déplacement sont liés par les équations du système suivant :

$$\begin{cases} \langle N_\beta(y) \rangle = \langle N_1(y) & -N_2(y) & N_3(y) & -N_4(y) \rangle \\ \beta(y) = \langle N_\beta(y) \rangle \{q_f\} \end{cases} \quad (A-48)$$

On évalue la matrice de masse en torsion à partir des derniers termes de l'énergie cinétique (2-20) :

$$[M_t^e] = \left[\rho I_P \int_0^L \langle N_\beta \rangle^T \langle N_\beta \rangle dy \right] \quad (A-49)$$

La matrice élémentaire de masse en torsion s'écrit :

$$\left[M_t^e \right] = \frac{\rho IL}{210} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-50})$$

Le terme couplant la contribution en torsion à la rotation de corps rigide de l'élément rotor permet de calculer un vecteur gyroscopique :

$$\left\{ g_{t/rot}^e \right\} = \left[-\rho I_P \int_0^L \langle N_\beta \rangle^T dy \right] \quad (\text{A-51})$$

Le vecteur élémentaire gyroscopique couplant les sollicitations en torsion avec la rotation propre du rotor s'exprime :

$$\left\{ g_{t/rot}^e \right\} = \frac{\rho IL}{6} \begin{Bmatrix} -6 \\ -L \\ -6 \\ L \end{Bmatrix} \quad (\text{A-52})$$

L'application des équations de Lagrange conduit à l'expression suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_t} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_t} = \left[M_t^e \right] \{ \ddot{q}_t \} - \ddot{\phi} \left\{ g_{t/rot}^e \right\} \quad (\text{A-53})$$

Le dernier terme de l'expression de l'énergie de déformation est utilisé afin de calculer la matrice élémentaire de raideur en torsion :

$$\left[K_t^e \right] = \left[G I_P \int_0^L \left[\left\langle \frac{dN_\beta}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_\beta}{dy} \right\rangle \right] dy \right] \quad (\text{A-54})$$

La matrice élémentaire de raideur en torsion s'écrit :

$$\left[K_{torsion}^e \right] = \frac{GI}{15L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-55})$$

$$\text{Avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Contributions en traction/compression

Le vecteur de déplacements nodaux des ddl en traction/compression est exprimé ci-dessous :

$$\{q_c\} = \langle v_1 \quad \zeta_1 \quad v_2 \quad \zeta_2 \rangle^T \quad (\text{A-56})$$

Le vecteur d'interpolation géométrique ainsi que les champs de déplacements nodaux s'écrivent :

$$\begin{cases} \langle N_v(y) \rangle = \langle N_\beta(y) \rangle \\ v(y) = \langle N_v(y) \rangle \{q_c\} \end{cases} \quad (\text{A-57})$$

La matrice de masse issue des contributions en traction est extraite du premier terme de l'expression de l'énergie cinétique :

$$[M_c^e] = \left[\rho S \int_0^L \langle N_v \rangle^T \langle N_v \rangle dy \right] \quad (\text{A-58})$$

Les matrices élémentaires de masse et raideur en traction sont décrites par la relation suivante :

$$[M_c^e] = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-59})$$

L'application des équations de Lagrange révèle la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_c} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_c} = [M_c^e] \{\ddot{q}_c\} \quad (\text{A-60})$$

La matrice de rigidité en traction/compression est extraite du premier terme de la relation de l'énergie de déformation :

$$[K_c^e] = \left[ES \int_0^L \left\langle \frac{dN_v}{dy} \right\rangle^T \left\langle \frac{dN_v}{dy} \right\rangle dy \right] \quad (\text{A-61})$$

$$[K_c^e] = \frac{ES}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-62})$$

3.2 Disque

Un élément de disque rigide est décrit par ses caractéristiques de masse M_D et d'inerties I_{Dx} et I_{Dy} . Son centre d'inertie est situé à l'emplacement d'un nœud i du modèle EF.

Sollicitation en flexion

Le vecteur de déplacement nodal associé aux contributions en flexion du disque s'écrit :

$$\{q_i\} = \langle u_i \quad w_i \quad \theta_{u_i} \quad \theta_{w_i} \rangle^T \quad (\text{A-63})$$

Le système d'équations de Lagrange issu de l'expression de l'énergie cinétique du disque permet de construire une matrice de masse élémentaire :

$$[M_f^{disque}] = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix} \quad (\text{A-64})$$

La matrice gyroscopique du disque est décrite par la relation suivante :

$$[G^{disque}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-65})$$

La matrice gyroscopique induite par l'accélération de Coriolis s'écrit :

$$\left[G_{COR}^{disque} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_Y} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-66})$$

Les 2 matrices ci-dessus doivent être multipliées respectivement par la vitesse et l'accélération de rotation comme le rappelle l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q_i} = \left[M_f^{disque} \right] \{ \ddot{q}_i \} + \dot{\phi} \left[G^{disque} \right] \{ \dot{q}_i \} + \ddot{\phi} \left[G_{COR}^{disque} \right] \{ q_i \} \quad (\text{A-67})$$

Sollicitations en torsion

Le vecteur de déplacement nodal des ddl de torsion s'écrit :

$$\{ q_i \} = \langle \beta_i \quad \gamma_i \rangle^T \quad (\text{A-68})$$

La matrice de masse en torsion du disque est décrite par la relation :

$$\left[M_t^{disque} \right] = \begin{bmatrix} I_{D_Y} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-69})$$

Un vecteur gyroscopique issu du couplage entre les ddl de torsion et l'accélération angulaire du rotor est révélé :

$$\{ g_{t/rot}^{disque} \} = -I_{D_Y} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-70})$$

L'équation de Lagrange appliquée aux contributions en torsion est décrite par la relation (A-71). Le vecteur (A-70) multiplié par l'accélération angulaire du rotor permet de construire un vecteur force élémentaire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C^d}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_C^d}{\partial q_i} = \left[M_{torsion}^{disque} \right] \{ \ddot{q}_i \} - \ddot{\phi} \{ g_{t/rot}^{disque} \} \{ q_i \} \quad (\text{A-71})$$

Traction/compression

L'équation suivante montre l'expression du vecteur de déplacement nodal des ddl de traction/compression du disque :

$$\{q_i\} = \langle v_i \quad \zeta_i \rangle^T \quad (\text{A-72})$$

La matrice de masse élémentaire qui en découle s'écrit :

$$\left[M_c^{disque} \right] = \begin{bmatrix} M_D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-73})$$

3.3 Balourd

Un élément balourd est modélisé par sa masse m_B , son entraxe r_B , et son déphasage initial ϕ_B . Sa contribution provient donc uniquement de son énergie cinétique. Il est placé sur une section de l'arbre dont le centre est un nœud i du modèle EF.

Le vecteur de force provoqué par l'excitation du balourd se calcule à chaque pas de temps à l'aide de la relation :

$$\{F_f^{balourd}\} = m_B r_B \begin{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \sin(\varphi + \phi_B) - \ddot{\phi} \cos(\varphi + \phi_B) \\ \dot{\phi}^2 \cos(\varphi + \phi_B) + \ddot{\phi} \sin(\varphi + \phi_B) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-74})$$

Le vecteur de déplacement nodal des ddl de torsion du balourd est le même que celui du disque (A-68). Le vecteur d'effort de torsion résultant est calculé et s'exprime par :

$$\{F_t^{balourd}\} = -\ddot{\phi} m_B r_B^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-75})$$

Références bibliographiques

- [ABU 09] ABUZAID M., ELSHAKY M., ZEDAN M.**
Effect of partial rotor-to-stator rub on shaft vibration. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 23, 2009, 170-182. DOI : 10.1007/s12206-008-0717-x
- [AHM 10] AHMAD S.**
Rotor casing contact phenomenon in rotor dynamics – Literature Survey. *Journal of Vibration and Control*, vol. 16, n° 9, 2010, p. 1369-1377
- [ALM 02] AL MAJID A., DUFOUR R.**
Formulation of a hysteresis restoring force model. Application to vibration isolation. *Non-linear Dynamics*, vol. 27, n° 1, 2002, p. 69-85.
- [ALM 04] AL MAJID A., DUFOUR R.**
Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator: experiments and prediction. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 277, n° 1-2, 2004, p. 391-403.
- [BAC 06] BACHSCHMID N., MAZZA M., TANZI E.**
Dynamic bending and torsion behaviour of a cracked pump shaft. *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics*, Vienna, Austria, 25-28 September 2006, Paper-ID: 166
- [BAI 11] BAIZ S.**
Etude expérimentale du contact aube/abradable : Contribution à la caractérisation mécanique des matériaux abradables et de leur interaction dynamique sur banc rotatif avec une aube. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2011.
- [BAR 00] BARTHA A. R.**
Dry friction backward whirl of rotors. Thèse de doctorat, Swiss Federal Institute of Technology, 2000.
- [BAR 77] BARANGER J.**
Introduction à l'analyse numérique. Hermann, 1977.
- [BAS 07] BASTIEN J., MICHON G., MANIN L., DUFOUR R.**
An analysis of the Masing and modified Dahl models. Application to a belt tensioner. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, 2007, p. 841-864.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2006.12.013>
- [BAT 06] BATLLE F.**
ARDIDEN 1H : Analyse dynamique des ensembles tournants. *NT interne TURBOMECA*, 2006. REF : AA008064

- [BAT 08] BATAILLY A.**
Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [BAT 09] BATAILLY A., LEGRAND M., CARTRAUD P., PIERRE C., LOMBARD J-P.**
Evaluation d'une méthode de réduction modale pour la détection de cas d'interaction modale lors de contacts rotor stator. *19^{ème} Congrès Français de Mécanique*, Marseille, France, 2009, hal-00413704
- [BAT 09b] BATLLE F.**
Synthèse de l'instabilité rotor à la touche. Application au 1800TI. *Document interne TURBOMECA*, 2006.
- [BAT 12] BATAILLY A., LEGRAND M., MILLECAMP A., GARCIN F.**
Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 134, n° 8, 2012, p. 082504.1-082504.11.
DOI : 10.1115/1.4006446
- [BEA 85] BEATTY R. F.**
Differentiating rotor response due to radial rubbing. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, vol. 107, n° 2, 1985, p. 151-160. DOI : 10.1115/1.3269238
- [BEN 02a] BENTLY D. E., YU J. J., GOLDMAN P., MUSZYNSKA A.**
Full annular rub in mechanical seals part I : experimental results. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 8, n° 5, 2002, p. 319-328. DOI : 10.1155/S1023621X02000301
- [BEN 02b] BENTLY D. E., GOLDMAN, P. YU J. J.**
Full annular rub in mechanical seals part II : analytical study. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 8, n° 5, 2002, p. 329-336. DOI : 10.1155/S1023621X02000313
- [BER 96] BERLIOZ A., DER HAGOPIAN J. DUFOUR R., DRAOUI E.**
Dynamic behavior of a drill-string. Experimental investigation of lateral instabilities. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 118, n° 3, 1996, p. 292-298.
- [BIL 06] BILLIARD N.**
Blade row interference and clocking effect in a one and half stage turbine. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [BLA 68] BLACK H. F.**
Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus. *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 10, n° 2, 1968, p. 1-12.
DOI : 10.1243/JMES_JOUR_1968_010_003_02
- [BOR 07] BORDEGARAY C.**
Comportement dynamique des directions assistées électriques automobiles : théorie et expé-

rimentation. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.

[BOR 09] BORDEGARAY C.

Pratique d'utilisation des Whole Engine Models. *PC interne TURBOMECA*, 2009. REF : AA046586

[BRA 91] BRACH R.

Mechanical Impact Dynamics : Rigid Body Collisions. Wiley, 1991.

[BRO 98] BROGLIATO B., ORHANT P.

Contact stability analysis of a one degree-of-freedom robot. *Dynamics and Control*, vol. 8, n° 1, 1998, p. 37-53

[BUR 11] BURD V.S.

Resonance vibrations of impact oscillator with biharmonic excitation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 241, n° 22, p. 1956-1961.

DOI : 10.1016/j.physd.2011.07.014

[CHA 04] CHAMORET D., SAILLARD P., RASSINEUX A., BERGHEAU J-M.

New smoothing procedures in contact mechanics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 168, n° 1-2, 2004, p. 107-116.

[CHA 06] CHANG-JIAN C-W., CHEN C-K.

Chaos and bifurcation of a flexible rub-impact rotor supported by oil film bearings with nonlinear suspension. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, n° 3, 2007, p. 312-333.

DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2006.03.007

[CHA 08] CHATELET E., MICHON G., MANIN L., JACQUET G.

Stick/slip phenomena in dynamics: Choice of contact model. Numerical predictions & experiments. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, vol. 43, n° 10, 2008, p. 1211-1224.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.11.001>

[CHE 05] CHEVALIER G.

Etude des vibrations de broutement provoquées par le frottement sec. Application aux systèmes d'embrayage. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2007.

[CHI 07] CHILD D. W., BHATTACHARYA A.

Prediction of dry-friction whirl and whip between a rotor and a stator. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 129, n° 3, 2007, p. 355-362.

DOI : 10.1115/1.2731412

[CHI 79] CHILD D. W.

Rub-induced parametric excitation in rotors. *Journal of Mechanical Design*, vol. 101, n° 4, 1979, p. 640-644. DOI : 10.1115/1.3454114

[CHO 02] CHOI Y. S.

Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, n° 1, 2002, p. 191-198. DOI : 10.1006/jsvi.5091

[CHO 94] CHOI Y. S.

Dynamics of rotor rub in annular clearance with experimental evaluation. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 8, n° 4, 1994, p. 404-413.
DOI : 10.1007/BF02944712

[COL 08] COLE M. O. T.

On stability of rotordynamic systems with rotor–stator contact interaction. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, vol. 464, n° 2100, 2008, p. 3353-3375. DOI : 10.1098/rspa.2008.0237

[COM 06] COMBESURE D.

Eléments de dynamique des structures. Illustrations à l'aide de CAST3M. Cours sur la dynamique dans CAST3M, 2006.

Lien : <http://www-cast3m.cea.fr/index.php?xml=supportcours>

[COU 09] COUDEYRAS N.

Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2009.

[COU 97] COUDERC P.

Comportement dynamique des chaînes de transmission automobiles. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1997.

[DAH 68] DAHL P. R.

A solid friction model. *The Aerospace Corporation. Technical report*, 1968.

[DAH 77] DAHL P. R.

Measurement of solid friction parameters of ball bearings. *The Aerospace Corporation. Technical report*, 1977.

[DAI 02] DAI X., JIN Z., ZHANG X.

Dynamic behavior of the full rotor-stop rubbing : numerical simulation and experimental verification. *Journal of Sound and vibration*, vol. 251, n° 5, 2002, p. 807-822. DOI : 10.1006/jsvi.2001.3998

[DAK 14a] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R.

Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, n° 10, 2014, p. 2774-2799

[DAK 14b] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R.

Steady-state dynamic behavior of an on-board rotor under combined base motions. *Journal of Vibration and Control*. DOI : 10.1177/1077546313483791

[DEM 03] DEMAILLY D.

Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel : application à la dynamique rotor. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003.

[DIN 02] DING Q.

Hopf bifurcation analysis of a rotor/seal system. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 252, n° 2, 2002, p. 817-833. DOI : 10.1006/jsvi.2001.3711

[DUC 06] DUCHEMIN M., BERLIOZ A., FERRARIS G.

Dynamic behaviour and stability of a rotor under base excitation. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 128, n° 5, 2006, p. 576-585.

[DUR 12] DURAN C., MANIN L., ANDRIANOELY M-A., BORDEGARAY C., DUFOUR R.

An analysis of rotor-stator interaction, *IMechE – VIRM10 London*, September 11-13, 2012.

[EDW 99] EDWARDS S., LEES A. W., FRISWELL M. I.

The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, n° 4, 1999, p. 767-778.
DOI : 10.1006/jsvi.1999.2302

[ENG 01] ENGELVIN O.

Comportement dynamique des chaînes de transmission automobiles. Mémoire de master, INSA de Lyon, 2001.

[FAT 99] FATARELLA F.

On the dynamics of reverse whirl due to rotor/stator interaction. Thèse de doctorat, Politecnico di Torino, 1999.

[FUM 97] FUMAGALLI M. A.

Modeling and measurement analysis of the contact interaction between a high speed rotor and its stator. Thèse de doctorat, Swiss Institute of Technology, 1997.

[GAN 11] GANGADHAR V.

Rub-impact analysis in rotor dynamic systems. Thèse de doctorat, National Institute of Technology, Rourkela, 2011.

[GIN 06] GINOUX J-M.

Stabilité de Systèmes Dynamiques Chaotiques et Variétés Singulières. Thèse de doctorat, Université du Sud Toulon Var, 2006.

[GMU 97] GMÜR T.

Dynamique des Structures : Analyse modale numérique. Les Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[GRO 00] GROLL F. V., EWINS D. J.

Frequency Domain Analysis in Rotor/Stator Contact Problems. Rolls-Royce, 2000.

[GRO 01] VON GROLL G., EWINS D. J.

The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241, n° 2, 2001, p. 223-233. DOI : 10.1006/jsvi.2000.3298

[GRO 02] GROLL F. V., EWINS D. J.

A mechanism of low subharmonic response in rotor/stator contact-measurements and simulations. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, n° 2, 2002, 350-358. DOI : 10.1115/1.1467648

[GRU 11] GRUIN M., THOUVEREZ F., SARROUY E. JEAN P.

Modélisation et analyse d'un bi-rotor aubagé avec non-linéarité de type jeu en tête d'aube. *10ème Colloque National en Calcul des Structures*, Presqu'île de Giens (Var), France, Mai 2011.

[GUS 07] GUSKOV M.

Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors. Etudes numérique et expérimentale. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[HAL 03] HALL L. D., MBA D.

Diagnosis of continuous rotor-stator rubbing in large scale turbine units using acoustic emissions. *Ultrasonics*, vol. 41, n° 9, 2004, p. 765-773. DOI : 10.1016/j.ultras.2003.09.002

[HAN 05] HA J-L., FUNG R-F., HAN C-F., CHANG J-R.

Effects of frictional models on the dynamic response of the impact drive mechanism. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 128, n° 1, 2005, 88-96. DOI : 10.1115/1.2128641

[HER 88] EHRICH F. F.

High order subharmonic response of high speed rotors in bearing clearance. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 110, n° 1, 1988, p. 9-16. DOI : 10.1115/1.3269488

[HOF 01] HOFFMAN J. D.

Numerical Methods for Engineers and Scientists, Second Edition. Marcel Dekker Inc, 2001.

[ISM 95] ISMEURT O.

Contribution à l'étude d'influence du frottement rotor/stator sur le comportement dynamique des machines tournantes. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1995.

[JIA 01] JIANG J., ULBRICH H.

Stability analysis of sliding whirl in a nonlinear jeffcott rotor with cross-coupling stiffness coefficients. *Nonlinear Dynamics*, vol. 24, n° 3, 2001, p. 269-283. DOI :

10.1023/A:1008376412944

[JIA 03] JIANG J., ULBRICH H.

Stability analysis of full annular rub in rotor-to-stator systems. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 2, n° 1, 2003, p. 88-89.

DOI : 10.1002/pamm.200310030

[JIA 05] JIANG J., ULBRICH H.

The physical reason and the analytical condition for the onset of dry whip in rotor-to-stator contact systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 127, n° 6, 2005, p. 594-603. DOI :

10.1115/1.1888592

[JIA 07] JIANG J.

The analytical solution and the existence condition of dry friction backward whirl in rotor-to-stator contact systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 129, n° 2, 2007, p. 260-264. DOI : 10.1115/1.2345677

[JIA 09] JIANG J.

Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact. *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, n° 3, 2009, p. 351-361. DOI :

10.1007/s11071-008-9446-z

[JIA 10] JIANG J., SHANG Z., HONG L.

Characteristics of dry friction backward whirl - A self-excited oscillation in rotor-to-stator contact systems. *Science China. Technological Sciences*, vol. 53, n° 3, 2010, p. 674-683.

DOI : 10.1007/s11431-010-0075-7

[KAS 84] KASCAK A. F., TOMKO J. J.

Effects of different rub models on simulated rotor dynamics. *NASA Lewis Research Center. Technical report*, 1984.

[KIM 90] KIM Y. B., NOAH S. T.

Bifurcation analysis for a modified jeffcott rotor with bearing clearances. *Nonlinear Dynamics*, vol. 1, n° 3, 1990, p. 221-241. DOI : 10.1007/BF01858295

[KUM 10] KUMAR D. D.

Backward precessional whip and whirl for a two-point rubbing contact model of a rigid rotor supported by an elastically supported rigid stator. Thèse de doctorat, Texas A&M University, 2010.

[LAH 12] LAHRIRI S., WEBER H., SANTOS I. F., HARTMANN H.

Rotor-stator contact dynamics using a non-ideal drive - Theoretical and experimental aspects. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n° 20, 2012, p. 4518-4536. DOI :

10.1016/j.jsv.2012.05.008

[LAL 90] LALANNE M., FERRARIS G.

Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley & Sons, 1990.

[LAX 07] LAXALDE D.

Etudes d'amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[LEG 09] LEGRAND M., PIERRE C., CARTRAUD P., LOMBARD J-P.

Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, n° 1-2, 2009, p. 366-391. DOI : 10.1016/j.jsv.2008.06.019

[LEG 12] LEGRAND M., BATAILLY A., MAGNAIN B., PIERRE C., CARTRAUD P., LOMBARD J-P.

Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n° 11, 2012, p. 2578-2601. DOI : 10.1016/j.jsv.2012.01.017

[LEI 08] LEIB N.

Modélisation du comportement impactant d'un ensemble câble gaine dans le domaine fréquentiel. Applications aux commandes de vitesse à câbles. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008.

[LES 07] LESAFFRE N.

Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor/stator. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[LIN 05] LINCK V.

Modélisation numérique temporelle d'un contact frottant. Mise en évidence d'instabilités locales de contact : conséquences tribologiques. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2005.

[LIN 90] LINGENER A.

Experimental investigation of reverse whirl of a flexible rotor. *Proceedings of 3rd International Conference on Rotordynamics*, Lyon, France, 1990.

[LIU 09] LIU C. L., ZHANG X. L., CUI L., JIANG J., ZHENG J. R.

On the bifurcation and stability of periodic motion of the rotor-bearing system with rub-impact and oil whirl. *Materials Science Forum*, vols. 626-627, 2009, p. 517-522. DOI : 10.4028/www.scientific.net/MSF.626-627.517

[MAD 90] MADRIERE J-C.

Modélisation de rotors par éléments finis : déterminations des vitesses critiques et des réponses. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 1990.

[MAH 10] MAHJOUBI N.

Méthode générale de couplage de schéma d'intégration multi-échelles en temps en dynamique des structures. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.

[MEG 08] MEGUID S. A., CZEKANSKI A.

Advances in computational contact mechanics. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 4, n°4, 2008, p. 419-443.

DOI : 1007/s10999-008-9077-z

[MEL 03] MELAKHESSOU H., BERLIOZ A., FERRARIS G.

A nonlinear well-drillstring interaction model. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 125, n° 13, 2003, p. 46-52. DOI : 10.1115/1.1523071

[MEL 99] MELAKHESSOU H.,

Dynamique des trains de tiges de forage etude des instabilites et du contact tige-puits. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1999.

[MEZ 07] MEZIANE A.

Apports des analyses numériques temporelle et fréquentielle dans l'étude des instabilités de contact - Validation expérimentale. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2007.

[MEZ 09] MEZIANE A., BAILLET L., LAULAGNET B.

Dynamique linéaire et non linéaire d'un contact frottant. *9ème colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, 2009.

[MIC 05] MICHON G., MANIN L., DUFOUR R.

Hysteretic behavior of a belt tensioner: modelling and experimental investigation. *Journal of Vibration and Control*, vol. 11, n° 9, 2005, p. 1147-1158.

[MOG 14] MOGENIER G., NOURI-BARANGER T., FERRARIS G., DUFOUR R., DURANTAY L.

A criterion for mode shape tracking. Application to Campbell diagram. *Journal of Vibration and Control*, vol. 20, n° 2, 2014, p. 179-190.

[MOO 02] MOON B-Y., KANG B-S.

Vibration analysis of harmonically excited non-linear system using the method of multiple scales. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 263, n° 1, 2003, p. 1-20. DOI : 10.1016/S0022-460X(02)01016-7

[MUS 95] MUSZYNSKA A., GOLDMAN P.

Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 5, n° 9, 1995, p. 1683-1704.

DOI : 10.1016/0960-0779(94)00171-L

[NAC 02] NACIVET S.

Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.

[NEL 80] NELSON H. D.

A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. *Journal of Mechanical Design*, vol. 102, n° 4, p. 793-803. DOI : 10.1115/1.3254824

[NUN 06] NUNINGER W., PERRUQUETTI W., RICHARD J-P.

Bilan et enjeux des modèles de frottements : tribologie et contrôle au service de la sécurité des transports. *JEF'06, 5th European Conference on Braking*, Lille, France, 2006.

[OLS 98] OLSSON H., ASTROM K. J., CANUDAS DE WIT C., GAFVERT M., LISCHINSKY P.

Friction Models and Friction Compensation. *European Journal of Control*, vol. 4, n° 3, 1998, p. 176-195.

[PEL 12] PELETAN L.

Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non-linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2012.

[PEN 09] PENNACCHI P., BACHSCHMID N., TANZI E.

Light and short arc rubs in rotating machines : Experimental tests and modelling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 7, 2009, p. 2205-2227. DOI : 10.1016/j.ymssp.2009.03.008

[PER 01] PERSSON B. N. J.

Theory of rubber friction and contact mechanics. *Journal of Chemical Physics*, vol. 115, n° 8, 2001, p. 3840-3861. DOI : 10.1063/1.1388626

[POP 10] POPOV V. L.

Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications. Springer, 2010.

[PUG 10] PUGNET J-M.

Dynamique des machines tournantes pour la conception des turbines à vapeur et des compresseurs centrifuges : de la théorie à la pratique. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2010.

[QUE 07] QUENARDEL A.

Rapport de fin de phase 1 : P5. Contact rotor : Effets sur la dynamique d'ensemble. Extrait de *PPRC DYNA*. ONERA, SNECMA & TURBOMECA, 2007. REF : NI_YHM_2007_158

[RIV 10] RIVIN E. I.

Handbook of Stiffness & Damping in Mechanical Design. American Society of Mechanical Engineers, 2010.

[ROD 03] ASSIS RODRIGUES F.

Etude de la dynamique non linéaire d'amortisseurs du type squeeze film. Thèse de doctorat,

Ecole Centrale de Lyon, 2003.

[ROQ 07] ROQUES S., LEGRAND M., STOISSER C. M., CARTRAUD P., PIERRE C.

Transitoire de vitesse d'un turbogénérateur avec contact rotor-stator. *8ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var), France, 2007.

[ROQ 09] ROQUES S.

Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2009.

[ROQ 10] ROQUES S., LEGRAND M., STOISSER C. M., CARTRAUD P., PIERRE C.

Modeling of a rotor speed transient response with radial rubbing. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 5, 2010, p. 527-546.

DOI : 10.1016/j.jsv.2009.09.016

[RUF 09] RUFFIN K., MASSA F., TISON T., LALLEMAND B.

Réponse non-linéaire de structures à paramètres imprécis. *9ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var), France, 2009. pp. 289-294.

[SAH 04] SAHINKAYA M. N., ABULRUB A-H. G., KEOGH P. S.

On the modelling of flexible rotor/magnetic bearing systems when in contact with retainer bearings. *9th International Symposium on Magnetic Bearings*, Lexington, Kentucky, 2004.

[SAH 07] SAHINKAYA M. N., ABULRUB A-H. G., KEOGH P. S., BURROWS C. R.

Multiple sliding and rolling contact dynamics for a flexible rotor/magnetic bearing system. *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 12, n° 2, p. 179-189. DOI : 10.1109/tmech.2007.892827

[SAW 98] SAWICKI J. T., PADOVAN J., AL-KHATIB R.

The dynamics of rotor with rubbing. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 5, n° 4, 1999, p. 295-304. DOI : 10.1155/S1023621X99000263

[SRI 12] SRINIVASAN A., KUMAR D.

Application of the modified rosenbrock algorithm for transient rotordynamic analysis. *Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, USA, 2012.

[STA 86] STACKLEY S. J.

Dynamic of full annular rotor rub. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003. Massachusetts Institute of Technology, 1986.

[TAL 06] TALON A.

Guide de traitement du signal. *NT interne TURBOMECA*, 2006. REF : AA008131

[TOU 98] TOULEMONDE C., GONTIER C.

Sticking motions of impact oscillators. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 17, n° 2, 1998, p. 339-366.

DOI : 10.1016/S0997-7538(98)80090-9

[VIL 05] VIANA SERRA VILLA C.

Dynamique non linéaire des rotors. Applications numériques et expérimentales à un rotor flexible. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2005.

[VIN 06] VINAS T.

Contact rotor/stator dans les turbomachines. Rapport de stage, TURBOMECA, 2006.

[WAN 11] WANG W., GAO J., ZHANG Y., YAO J.

Numerical and experimental investigation on the controlling for rotor-to-stationary part rubbing in rotating machinery. *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2011: Power for Land, Sea and Air GT2011*, Vancouver, Canada, 2011. Paper No. GT2011-46250, p. 425-434. DOI : 10.1115/GT2011-46250

[WIL 08] WILKES J. C.

A perspective on the numerical and experimental characteristics of multi-mode dry-friction whip and whirl. Thèse de doctorat, Texas A&M University, 2008.

[WIL 10] WILKES J. C., CHILDS D. W., DYCK B. J., PHILLIPS S. G.

The numerical and experimental characteristics of multimode dry-friction whip and whirl. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 132, n° 5, 2010, p. 052503.1-052503-9. DOI : 10.1115/1.3204658

[WOU 06] VAN DE WOUW N., MIHAJLOVIC N., HENDRIKS M. P. M., NIJ-MEIJER H.

Friction-induced limit cycling in flexible rotor systems : An experimental drill-string set-up. *Nonlinear Dynamics*, vol. 46, n° 3, 2006, p 273-291.

DOI : 10.1007/s11071-006-9042-z

[WRI 02] WRIGGERS P.

Computational Contact Mechanics. John Wiley & Sons, 2002.

[XIE 95] XIE Y. M.

An assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 192, n° 1, 1996, p. 321-331.

DOI : 10.1006/jsvi.1996.0190

[YU 02] YU J. J., GOLDMAN P., BENTLY D. E., MUZYNSKA A.

Rotor/seal experimental and analytical study on full annular rub. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 124, n° 2, 2002, p. 340-350.

DOI : 10.1115/1.1416691

[YUA 06] YUAN Z., CHU F., RUJIANG H.

Simulation of rotor's axial rub-impact in full degrees of freedom. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, 2007, p. 763-775.

DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2006.07.001

[ZHA 07] ZHANGA W-M., MENGA G., CHENB D., ZHOUA J-B., CHENA J-Y.

Nonlinear dynamics of a rub-impact micro-rotor system with scale-dependent friction model. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 309, n° 3-5, 2008, p. 756-777. DOI : 10.1016/j.jsv.2007.07.077

[ZHA 82] ZHANG W.

Flexible shaft whirl induced by dry friction and its stability. *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 3, n° 5, 1982, p. 731-738.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : DURAN DATE de SOUTENANCE : 15 Juillet 2014

Prénoms : Celio, Alexandre

TITRE : Modélisation du comportement dynamique non-linéaire et transitoire de turbomoteur avec multitoches rotor/stator.

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2014ISAL0144

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique

RESUME :

Cette thèse traite de la dynamique non-linéaire multi-contact des ensembles rotor/stator et s'applique en particulier aux turbomoteurs d'hélicoptère conçus par Turboméca, groupe Safran.

L'amélioration des performances des turbines à gaz pousse les constructeurs à réduire les jeux fonctionnels rotor-stator notamment, tout en garantissant robustesse et fiabilité. Cela nécessite de développer des modèles les plus précis possible afin de prévoir et maîtriser des situations à risques telles que les interactions rotor/stator entre les parties fixes et tournantes déclenchées principalement, dans le cas des turbomoteurs d'hélicoptère, par la perte d'aubes.

La partie 1 présente une synthèse bibliographique des principaux phénomènes physiques rencontrés suite à une touche rotor/stator en s'appuyant sur l'expérimentation et le calcul. Un bilan sur les différents modèles numériques de gestion du contact frottant est détaillé. La dualité entre méthodes temporelles et fréquentielles est aussi abordée comme la méthode de la balance harmonique et les schémas d'intégration temporelle de la famille de Newmark. Il est aussi décrit deux outils d'analyse fréquentielle : le spectrogramme pour analyser l'évolution d'un spectre fréquentiel dans le temps, le full-spectrum pour prendre en compte les précessions du rotor.

La partie 2 se focalise sur des systèmes dynamiques académiques : un oscillateur forcé à double butées, un rotor de Jeffcott et un rotor à 3 disques avec tous deux une interaction disque/carter. Compte tenu du caractère transitoire du comportement des turbomoteurs, il s'agit de tester des méthodes d'intégration temporelle pas à pas et aussi des lois de contact. Il en ressort que la méthode de Newmark à accélération moyenne, et les lois de contact type « pénalité amortie » combinées à une régularisation de la raideur et de l'amortissement par une fonction arc tangente sont pertinentes. La modélisation de rotor en flexion en régime transitoire et avec plusieurs touches possibles est réalisée avec la méthode des éléments finis et l'intégration des méthodes et techniques précédentes. L'ensemble de la modélisation est mise en œuvre sous l'environnement Matlab et se traduit au final par un logiciel nommé ToRoS (Touche Rotor-Stator).

Le turbomoteur de l'Ardiden 1H fait l'objet de la dernière partie. Le logiciel ToRoS développé est utilisé pour prévoir la dynamique transitoire de sa turbine libre soumise à de multiples touches, consécutifs à un départ d'aubes. Les lois de contacts appliquées dépendent du type de contact : disque/carter, labyrinthe/stator, palier/butée. Durant la descente en vitesse, la ligne d'arbre adopte, en fonction du niveau de balourd, de la vitesse de rotation, des paramètres du contact et du frottement, un comportement avec un contact quasi-permanent en précession directe.

MOTS-CLES :

Dynamique des rotors, interaction rotor/stator, multi-contacts, transitoire, dynamique non-linéaire, turbomoteur. Rotordynamics, rotor/stator interaction, multi-contacts, transient behaviour, nonlinear dynamics, turbo-engine.

Laboratoire (s) de recherche : INSA Lyon, LaMCoS UMR 5259, 8, Rue des Sciences, 69621, Villeurbanne Cedex,

Directeurs de thèse : Professeur Régis DUFOUR, Dr Lionel MANIN.

Président de jury : Professeur Alain BERLIOZ.

Composition du jury :

BERLIOZ	Alain	Professeur des Universités,
BONNEAU	Olivier	Professeur des Universités,
BORDEGARAY	Céline	Ingénieur R&D,
DION	Jean-Luc	Maître de Conférences HDR,
MANIN	Lionel	Maître de Conférences,
DUFOUR	Régis	Professeur des Universités.