

THÈSE

MODÉLISATION DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DISQUE AUBES MULTI-ÉTAGES. EFFETS DES INCERTITUDES

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Bartolomé SEGUI VASQUEZ

Thèse soutenue le jour mois année devant la Commission d'examen

Jury

P. SWIDER	Professeur, Université Toulouse 3	Rapporteur
C. BLANZÉ	Professeur, CNAM	Rapporteur
G. JACQUET-RICHARDET	Professeur, INSA de Lyon	Directeur de thèse
B. FAVERJON	Maître de Conférences, INSA de Lyon	Co-directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quinquennal 2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 65 55 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Insa : H. CHARLES	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Samia VUILLERMOZ Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04 72 68 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM	Mme Sylvie CALABRETTO Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 infomaths@univ-lyon1.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.ec-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Résumé

Les conceptions récentes de turbomachines ont tendance à évoluer vers des liaisons entre étages de plus en plus souples et des niveaux d'amortissement faibles, donnant lieu à des configurations où les modes sont susceptibles de présenter des niveaux de couplages inter-étages forts. En général, les ensembles disques aubes multi-étagés n'ont aucune propriété de symétrie cyclique d'ensemble et l'analyse doit porter sur un modèle de la structure complète donnant lieu à des calculs très coûteux. Pour palier ce problème, une méthode récente appelée symétrie cyclique multi-étages peut être utilisée pour réduire le coût des calculs des rotors composés de plusieurs étages, même lorsque les étages ont un nombre différent de secteurs. Cette approche profite de la symétrie cyclique inhérente à chaque étage et utilise une hypothèse spécifique qui aboutit à des sous-problèmes découplés pour chaque ordre de Fourier spatial. La méthodologie proposée vise à étudier l'effet des incertitudes sur le comportement dynamique des rotors en utilisant l'approche de symétrie cyclique multi-étages et l'expansion en Chaos Polynomial. Les incertitudes peuvent découler de l'usure des aubes, des changements de température ou des tolérances de fabrication. En première approche, seules les incertitudes provenant de l'usure uniforme de l'ensemble des aubes sont étudiées. Celles-ci peuvent être modélisées en considérant une variation globale des propriétés du matériau de l'ensemble des aubes d'un étage particulier. L'approche de symétrie cyclique multi-étages peut alors être utilisée car l'hypothèse de secteurs identiques est respectée. La positivité des matrices aléatoires concernées est assurée par l'utilisation d'une loi gamma très adaptée à la physique du problème impliquant le choix des polynômes de Laguerre comme base pour le chaos polynomial. Dans un premier temps des exemples numériques représentatifs de différents types de turbomachines sont introduits dans le but d'évaluer la robustesse de la méthode de symétrie cyclique multi-étages. Ensuite, les résultats de l'analyse modale aléatoire et de la réponse aléatoire obtenus par le chaos polynomial sont validés par comparaison avec des simulations de Monte-Carlo. En plus des résultats classiquement rencontrés pour les fréquences et réponses forcées, les incertitudes considérées mettent en évidence des variations sur les déformées modales qui évoluent entre différentes familles de modes dans les zones de forte densité modale. Ces variations entraînent des modifications sensibles sur la dynamique globale de la structure analysée et doivent être considérées dans le cadre des conceptions robustes.

MOTS CLÉS: dynamique disques aubes, symétrie cyclique multi-étages, analyse modale aléatoire, expansion en chaos polynomial

Abstract

Recent designs in turbomachinery tend to have more flexible inter-stage rims and to be more lightly damped, resulting in configurations where modes might not be confined to only one stage. In general, multi-stage rotors have no particular axial symmetry property and the computationally costly analysis of the whole structure becomes mandatory. However, a multi-stage cyclic symmetry approach can be used for reducing the cost of modeling rotors composed of several stages even when the stages have different numbers of sectors. This approach takes advantage of the inherent cyclic symmetry of each stage and uses a specific assumption that results in decoupled subproblems for each spatial Fourier harmonic. The methodology proposed in this work allows including uncertainties in the analysis of multi-stage rotors using the multi-stage cyclic symmetry approach and the Polynomial Chaos Expansion. Uncertainties in rotors may arise from in-use wear of blades, temperature changes or manufacturing tolerances. As a first approach, only uncertainties arising from uniform in-use wear of the set of blades are included. These may be modeled by considering a global variation of the material properties of the set of blades of a particular stage. The multi-stage cyclic symmetry approach can then be used since the underlying assumption of identical sectors is respected. The positiveness of the random matrices involved is reached by using gamma-distributed random variables which imply the use of Laguerre's polynomials as basis for the polynomial chaos. Numerical examples representative of various types of turbomachinery are introduced in order to assess the robustness of the method of multi-stage cyclic symmetry. Uncertainties results for the free and forced response analyses obtained by the polynomial chaos are validated by comparison with Monte Carlo simulations. The considered uncertainties induce variations on the mode shapes that evolve between different families of modes in areas of high modal density. These variations result in significant changes in the global dynamics of the structure and must be considered in the context of robust designs.

KEYWORDS: bladed disc dynamics, multi-stage cyclic symmetry, stochastic modal analysis, polynomial chaos expansion

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
0.1 Contexte général	1
0.1.1 Réduction des modèles	2
0.1.2 Modélisation de rotors multi-étages	3
0.1.3 Méthodes probabilistes en dynamique des structures	6
0.2 Positionnement de l'étude	9
0.3 Plan du manuscrit	10
1 Dynamique globale des rotors multi-étages	13
1.1 Modélisation des structures en symétrie cyclique	14
1.1.1 Transformée de Fourier spatiale	14
1.1.2 Ecriture énergétique du problème en symétrie cyclique	15
1.2 Phénoménologie vibratoire dans les systèmes multi-étages	24
1.2.1 Dédoublment des fréquences propres inhérent aux systèmes multi-étages	26
1.2.2 Déformées modales multi-étages	31
1.2.3 Réponse forcée multi-étages	34
1.3 Méthode de symétrie cyclique multi-étages	38
1.3.1 Couplage des ordres de Fourier dans les calculs multi-étages	39
1.3.2 Hypothèse sur le découplage des ordres de Fourier	42
1.3.3 Formulation relative aux ordres de Fourier de chaque étage	43

2	Robustesse de la symétrie cyclique multi-étages	47
2.1	Analyse détaillée de la nature des modes des systèmes multi-étages. . . .	49
2.1.1	Repliement lié au nombre de secteurs par étage	51
2.1.2	Contenu harmonique des modes. Modes multi-harmoniques	54
2.1.3	Modes multi-étages	58
2.2	Outils utilisés pour l'analyse de performance de la symétrie cyclique multi-étages	60
2.2.1	Écart en fréquences propres	60
2.2.2	Comparaison des déformées modales	62
2.2.3	Écart sur la réponse forcée	64
2.3	Analyse de différentes configurations	64
2.3.1	Modèles de type A	68
2.3.2	Modèles de type B	71
2.3.3	Modèle de type C	73
3	Prise en compte de l'effet des incertitudes sur les vibrations du système	75
3.1	Modèle aléatoire en dynamique des structures	76
3.1.1	Modèle général	76
3.1.2	Choix de la loi de probabilité	76
3.1.3	Développement en chaos polynomial (PCE)	77
3.2	Modèle incertain du système multi-étages	78
3.2.1	Quantités incertaines du problème	78
3.2.2	Analyse modale aléatoire du système	79
3.2.3	Réponse forcée aléatoire du système	84
3.2.4	Grandeurs caractéristiques aléatoires	85
3.3	Application numérique	87
3.3.1	Description du système multi-étages	87
3.3.2	Calcul des fréquences propres aléatoires	90
3.3.3	Calcul des déformées modales aléatoires	93
3.3.4	Calcul de la réponse forcée aléatoire	93
	Conclusion	97
	A Transformée de Fourier en notation réelle	99
	B Produit de Kronecker	101

C	Ordres de Fourier découplés en symétrie cyclique	103
D	Modes doubles en symétrie cyclique	105
E	Loi de Probabilité Gamma	107
F	Polynômes de Laguerre	109
G	Moments statistiques en PCE	113
H	Réponse aléatoire pour un amortissement de 0,5%	115
	Bibliographie	119

Table des figures

1.1	Schéma des frontières inter-secteurs pour une structure à symétrie cyclique.	17
1.2	Secteur de base d'une structure à symétrie cyclique, (a) secteur non couplé, (b) secteur couplé avec des conditions aux limites inter-secteur	18
1.3	Diagramme en zig-zag qui montre les diamètres nodaux potentiellement associés à un ordre de Fourier k . (a) Cas où N est impair, (b) cas où N est pair	21
1.4	Maillages éléments finis : (a) modèle complet composé de deux étages à symétrie cyclique ; (b) étage 1, composé de 15 secteurs ; (c) étage 2, composé de 23 secteurs ;	25
1.5	Fréquences pour l'étage 1, composé de 15 secteurs, (a) représentation typique montrant les fréquences à différents diamètres nodaux reliées par ordre d'apparition ; (b) représentation reliant les fréquences des modes appartenant à une même famille	27
1.6	Fréquences pour l'étage 2, composé de 23 secteurs, (a) représentation typique montrant les fréquences à différents diamètres nodaux reliées par ordre d'apparition ; (b) représentation reliant les fréquences des modes appartenant à une même famille	28
1.7	Fréquences propres de la structure multi-étages issues du calcul complet (360°)	29
1.8	Fréquence et dédoublement en fonction du nombre d'éléments à l'interface inter-étages, (a) mode de disque multi-étages ; (b) mode d'aube confiné à l'étage 1	30
1.9	Participation au mouvement relatif à chaque étage pour les 160 premiers modes	31

1.10	Superposition des fréquences multi-étages et fréquences correspondant aux étages isolés.	33
1.11	Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)	34
1.12	Familles de modes multi-étages identifiées dans la plage de fréquence 2800-5000 Hz.	35
1.13	Réponse à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 1 : (—) calcul multi-étages ; (- - -) calcul étage 1 seul.	35
1.14	Réponse à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 2 : (—) calcul multi-étages ; (- - -) calcul étage 2 seul.	36
1.15	Réponse de tous les secteurs de l'étage 1 à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliqué sur l'étage 1	37
1.16	Réponse de tous les secteurs de l'étage 2 à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliqué sur l'étage 1	38
1.17	Réponse des secteurs de l'étage 1 à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ sur l'étage 1 et $H = 4$ sur l'étage 2	39
1.18	Paire d'étages adjacents $[s_1, s_2]$, représentés par leur secteur de référence	41
1.19	Diagramme des ordres de Fourier k_1 (—) vs. ordres de Fourier k_2 (- - -). (a) Pour $k_2 > \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$ il n'y a pas de correspondant direct dans l'ensemble des k_1 possibles, (b) ordres de Fourier supposés compatibles pour N_1 impair, (c) ordres de Fourier supposés compatibles pour N_1 pair.	43
2.1	Discretisation éléments finis des secteurs de référence des deux étages. .	50
2.2	Familles de modes multi-étages identifiés dans la plage de fréquence 2800-5000 Hz.	50
2.3	Représentation matricielle du facteur de couplage $\mathcal{D}(k_2, k_1)$ entre les ordres de Fourier des deux bases cycliques. (a) $N_1 = 16$ et $N_2 = 24$, (b) $N_1 = 15$ et $N_2 = 24$ et (c) $N_1 = 15$ et $N_2 = 23$	52
2.4	Contenu harmonique des modes de la plage de fréquence [2800-5000] Hz. Répartition d'énergie relative à chaque étage et ordres de Fourier normalisés relatifs à chaque étage, (a) modes issus du calcul complet ; (b) modes issus du calcul en symétrie cyclique multi-étages	56

2.5	Contenu harmonique des modes de la plage de fréquence [2800-5000] Hz. Ordres de Fourier normalisés relatifs à la structure complète, (a) modes issus du calcul complet ; (b) modes issues du calcul en symétrie cyclique multi-étages	57
2.6	Modes de cylindre avec déformation globale de la structure multi-étages .	59
2.7	Mode à 3 diamètres dans la famille d'aube étage 1 E1 :1T1S : (a) déformée modale ; (b) pourcentage d'énergie par composant.	60
2.8	Mode à 3 diamètres disques en opposition de phase D(0C) : (a) déformée modale ; (b) pourcentage d'énergie par composant.	61
2.9	Écart des fréquences propres entre le calcul complet et la méthode de symétrie cyclique multi-étages.	62
2.10	Matrice de MAC entre les modes obtenus par un calcul complet et par la méthode de symétrie cyclique multi-étages : (a) sans normalisation en phase ; (b) avec normalisation en phase.	65
2.11	Valeurs sur la diagonale de la matrice de MAC après normalisation en phase.	66
2.12	Corrélation en réponse, excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 1. Amplitude du secteur 1 de l'étage 1.	66
2.13	Corrélation en réponse, excitation d'ordre moteur $H = 3$ sur l'étage 1 et $H = 4$ sur l'étage 2. Amplitude du secteur 13 de l'étage 1.	67
2.14	Modèles utilisés pour tester la méthode de symétrie cyclique multi-étages. (a) modèle A-N, (b) modèles A-F et A-M, (c) modèle B-N, (d) modèle B-F et (e) modèle C	69
2.15	Modèle A-N. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)	70
2.16	Modèle A-M. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)	71
2.17	Modèle B-F. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)	72
2.18	Modèle B-F. Corrélation en réponse, excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 1. Amplitude du secteur 1 de l'étage 1.	73
2.19	Modèle C. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)	74

3.1	Maillage éléments finis du modèle multi-étages composé de deux étages à 15 et 23 secteurs	88
3.2	Fréquences propres vs. diamètres nodaux. Familles de modes : 1/ E2 :1T1S : torsion–flexion aubes dans le plan secondaire, étage 2 ; 2/ E2 :1T 1ère torsion aubes, étage 2 ; 3/ E1 :1T : 1ère torsion aubes, étage 1 ; 4/ E1 :1T1S : torsion–flexion aubes dans le plan secondaire, étage 1 ; 5/ D(0C) : disque en opposition de phase, 0 cercle nodaux ; D(0C) :Phase : disque en phase, 0 cercle nodaux	89
3.3	Déformées modales (a) mode 1, D(0C)Phase à 3488.4 [Hz] prédominant disque se déformant en phase ; (b) mode 2, E1 :1T1S à 3670 [Hz] torsion–flexion aubes de l’étage 1 dans le plan secondaire.	89
3.4	Réponse déterministe à une force extérieure $H = 3$ pour un amortissement structural égale à 2%. Norme de déplacement pour un noeud en bout d’aube de l’étage 1.	90
3.5	Fonction de Densité de Probabilité du module d’Young aléatoire $\hat{E}$	91
3.6	PDF des fréquences propres aléatoires. (a) Mode 1. D(0C)Phase, (b) Mode 2. E1 :1T1S, (c) Mode 3. E1 :1T, (d) Mode 4. D(0C), (e) Mode 5. E2 :1T and (f) Mode 6. E2 :1T1S.	92
3.7	Contributions, au sens statistique, des modes aléatoires aux modes déterministes. (a) Moyenne, (b) Moyenne×variance . Les modes déterministes sont : Mode 1. D(0C)Phase, Mode 2. E1 :1T1S, Mode 3. E1 :1T, Mode 4. D(0C), Mode 5. E2 :1T et Mode 6. E2 :1T1S.	93
3.8	Distribution de l’énergie de déformation à travers les différents composants. Comparaison entre (a) mode 1 déterministe et (b) mode 1 aléatoire pour $\hat{E} = 0.925 \times \langle \hat{E} \rangle$; (c) mode 2 déterministe. Les composants sont : les aubes, disques, arbre et anneau inter-étage ; pour l’étage 1 ou 2.	94
3.9	Moyenne de l’amplitude de réponse de l’étage 1. Comparaison entre les simulations Monte-Carlo (—) et le PCE d’ordre 2 (- - -).	95
3.10	Écart type de l’amplitude de réponse de l’étage 1. Comparaison entre les simulations Monte-Carlo (—) et le PCE d’ordre 2 (- - -).	95
3.11	Enveloppes d’amplitude de réponse de l’étage 1. Comparaison entre les simulations Monte-Carlo (—) et le PCE d’ordre 2 (- - -).	96

Liste des tableaux

1.1	Principales caractéristiques du modèle complet (360°).	24
2.1	Ordres de Fourier couplés entre les étages selon l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages. (a) $N_1 = 16$ et $N_2 = 24$, (b) $N_1 = 15$ et $N_2 = 24$ et (c) $N_1 = 15$ et $N_2 = 23$	53
2.2	Fréquences issues des calculs complets et en symétrie cyclique multi-étages (ordre de Fourier $k_1 = p$ seul ou ordres $k_2 = p$ où $k_2 = \{p, N_1 - p\}$ considérés simultanément.	54
3.1	Moments statistiques des fréquences propres aléatoires : moyenne, écart-type et coefficient de variation. Comparaison avec des simulations de Monte-Carlo.	91

Introduction

0.1 Contexte général

Les travaux présentés concernent la modélisation du comportement dynamique des rotors typiquement rencontrés dans les turbomachines avec prise en compte et analyse de l'effet des incertitudes. Ces rotors, aussi bien dans les turbines que dans les compresseurs, sont composés d'un ensemble d'étages montés sur un arbre commun formés par des aubages mobiles et intercalés avec des aubages fixes liés au stator. Les roues aubagées mobiles d'un étage sont constituées d'aubes montées sur un disque ou sont intégralement usinées dans la masse sur certaines configurations récentes.

La dynamique de ces structures est habituellement étudiée à partir de deux approches découplées : l'approche en dynamique des rotors et l'approche en dynamique des ensembles aubés. La dynamique des rotors s'intéresse au comportement de l'arbre et utilise des masses et des inerties ponctuelles pour modéliser les disques. Les analyses de type disques aubés quant à elles s'intéressent à la flexibilité des aubages mais supposent que l'arbre reste rigide.

L'approche en dynamique des rotors modélise généralement l'arbre à l'aide de la théorie des poutres et conduit à des modèles compacts bien adaptés à la prise en compte de supports asymétriques et des effets de rotation [1]. Une description axisymétrique avec une expansion de Fourier du déplacement circonférentiel du rotor permet une modélisation plus fine [2]. Cependant, cette approche ne donne des résultats intéressants que pour les cas où le nombre d'aubes est important et se révèle délicate de mise en oeuvre.

Les disques aubés ont un comportement dynamique très riche dont la modélisation fait l'objet de nombreuses études [3, 4]. Chaque disque est souvent modélisé comme un système isolé. Cette simplification permet la mise en place de techniques de réduction efficaces qui rendent possible l'utilisation de modèles éléments finis 3D fins. En particulier,

l'étage isolé peut être vu comme étant composé d'un ensemble de secteurs identiques. Cette caractéristique, appelée symétrie cyclique, permet la prédiction du comportement de l'étage à partir de la discrétisation d'un seul secteur en décomposant le déplacement circonférentiel sur une base de Fourier discrète [5, 6].

Ces approches découplées ont un champ d'application large mais il est clair que leurs hypothèses de base imposent des limites. En particulier les approches découplées ne permettent pas de modéliser de manière satisfaisante les interactions dynamiques possibles entre l'arbre et les roues ou entre les différents étages de disques aubés.

Sur un autre plan, la prise en compte des incertitudes est reconnue aujourd'hui comme un élément important dans le processus de conception des systèmes mécaniques. Les incertitudes dans les rotors de turbomachines peuvent provenir des hypothèses de modélisation ou d'une méconnaissance de certains paramètres du modèle.

Dans les ensembles disque-aubes chaque aube est supposée être identique. En réalité il existe des variations dans les caractéristiques structurales qui sont le résultat des tolérances de fabrication, de l'usure ou d'autres facteurs. Ces variations, appelées désaccordage, sont inévitables et représentent une des sources d'incertitude dont l'effet peut être important [7].

0.1.1 Réduction des modèles

Les problématiques envisagées sont complexes et les modèles éléments finis nécessaires sont généralement fins, ce qui a particulièrement motivé le développement de techniques de réduction. Les premières méthodologies proposées ont été basées sur la synthèse modal (CMS) de type Craig et Chang [8] en considérant le disque et chaque aube comme sous structure [9, 10]. Des méthodologies CMS hybrides ont ensuite été développées, soit en combinant les modes d'aube encastrée à la base et les déformées de l'aube induites par la vibration du disque [11–13], soit en supposant un mouvement de corps rigide à l'interface disque-aubes [14]. Dans le but de mieux modéliser la cinématique aux interfaces disque-aubes, Bladh et al. [15, 16] proposent d'utiliser une méthode de CMS de type Craig-Bampton [17] associée à une condensation modale *a posteriori* des degrés de liberté (ddl) aux interfaces. Tran et al [18] et Moyroud et al. [19] utilisent comme composants de base les différents secteurs (l'aube plus la partie de disque correspondant).

Yang et Griffin [20] montrent que les modes du système accordé forment une très bonne base pour représenter les modes désaccordés et proposent d'utiliser une méthode

basée sur une réduction modal classique. Avec cette méthodologie, appelée *Subset of Nominal Modes* (SNM), le désaccordage est introduit par l'intermédiaire des caractéristiques des matrices des aubes ensuite projetées en base modale. Feiner et Griffin [21] proposent une simplification de la SNM adaptée au cas d'étude d'une seule famille de modes d'aubes.

Une approche basée sur la relation entre réponse accordée et désaccordée est proposée par Petrov et al. [22] qui introduisent le désaccordage à l'aide de masses, ressorts et amortisseurs ponctuels attachés à quelques ddl des aubes. Lim et al. [23] proposent une méthodologie qui utilise une réduction similaire à la SNM et modélise le désaccordage à l'aide des modes de l'aube encastrée à la base. Dans cette méthodologie, appelée *Component Mode Synthesis* (CMM), le désaccordage est projeté sur le modèle réduit à l'aide de facteurs de participation qui relient les modes des aubes aux modes du système accordé. Cette manière de prise en compte du désaccordage est une extension de la méthode développée par Bladh et al. [13].

Les méthodologies de réduction de modèles disque-aubes récents permettent d'obtenir de manière efficace des représentations compactes qui conservent une grande précision par rapport aux modèles initiaux. Ceci ouvre la possibilité d'effectuer des études probabilistes efficaces. En revanche, l'hypothèse d'étages dynamiquement isolés limite les capacités d'analyse de systèmes réels. D'autres phénomènes ne sont classiquement pas pris en compte dans les approches classiques comme le couplage aérodynamique, les non-linéarités structurales et les effets de rotation.

0.1.2 Modélisation de rotors multi-étages

Le couplage entre les vibrations de l'arbre et des différents étages aubés est maintenant bien mis en évidence dans la littérature, en particulier le couplage entre la torsion de l'arbre et la flexion des aubes [24–28]. Ces travaux illustrent la richesse du comportement dynamique d'ensemble à partir d'équations de mouvement établies analytiquement. Pour les prédictions de réponse de structures réelles il convient d'utiliser des modèles éléments finis permettant de prendre en compte tous les couplages possibles entre les différents composants. L'influence de la flexibilité de l'arbre sur la dynamique globale de la structure arbre-disques aubés est montrée par Jacquet-Richardet et al. [29] à l'aide d'une discrétisation éléments finis 3D de l'ensemble. Cette étude suppose une symétrie cyclique d'ensemble et prend en compte tous les effets de rotation. Chatelet et al. [30] utilisent cette méthodologie pour étudier la dynamique d'une structure en rotation composée

de plusieurs étages aubés montés sur un arbre flexible dans un cas particulier où chaque étage a le même nombre d'aubes. Le recalage de modèle pour un arbre avec un disque aubé modélisé en symétrie cyclique est proposée par Irwanto et al. [31].

Le couplage dynamique entre deux étages aubés adjacents est étudié par Bladh et al. [32] à l'aide de modèles éléments finis sans réduction. Ils confirment que les prédictions de réponses obtenues pour les ensembles multi-étages peuvent être très différentes des prédictions obtenues sur les étages isolés. Ils montrent également que l'analyse d'un seul étage avec des conditions limites supposées représentatives à l'interface inter-étages ne permet généralement pas de modéliser correctement la dynamique de l'ensemble. Rzadkowski et Sokolowski [33] utilisent un modèle éléments finis sans réduction avec prise en compte des effets de rotation pour étudier le couplage entre l'arbre et deux étages aubés. Ils montrent que la prise en compte de la flexibilité de l'arbre peut modifier significativement les fréquences données par les analyses des étages isolés. Une méthodologie permettant le couplage d'un arbre modélisé par des éléments 1D et des modèles disque-aubes 3D réduits par CMS est proposée dans [34, 35]. Cette méthodologie permet de mettre en évidence les couplages entre l'arbre et les disques mais est limitée par l'hypothèse de couplage rigide.

De manière générale, les conceptions récentes de turbomachines ont tendance à aller vers des liaisons inter-étages plus flexibles entraînant l'apparition de modes globaux qui ne sont pas confinés à un seul étage. Les interactions entre modes de plusieurs étages et leurs effets sur la réponse restent encore mal maîtrisés. Les modélisations globales présentent plusieurs challenges. D'une part, la périodicité spatiale est brisée dans le cas multi-étages car en général le nombre d'aubes est différent sur chaque étage. Le problème ne peut plus être découplé comme dans le cas de symétrie cyclique classique et les modèles de la structure complète s'imposent théoriquement. Ceci implique des efforts de calculs souvent prohibitifs. D'autre part, l'interprétation et le classement des modes sont plus difficiles à partir de calculs effectués sur la structure complète.

Plusieurs séries de travaux récents ont eu pour objectif le développement de méthodologies permettant la modélisation réaliste et efficace des structures multi-étages. Parmi ceux-ci certains utilisent comme point de départ des méthodologies précédemment développées pour les systèmes disque-aubes. Bladh et al. [36] ont adapté la méthode présentée dans [15] pour obtenir explicitement les ddl aux interfaces inter-étages permettant ainsi de coupler les modèles réduits de plusieurs étages. Des équations cinématiques (MPC) permettent d'assurer la compatibilité de mouvement à l'interface inter-étages dans le cas de maillages éléments finis non coïncidents. Ils obtiennent une bonne précision par

rapport aux modèles initiaux mais la réduction est pénalisée par le nombre élevé de ddl à retenir aux interfaces.

Song et al. [37] proposent une CMS de type Craig-Bampton dont les composants sont les étages. Les ddl aux interfaces inter-étages apparaissent explicitement dans la formulation et le couplage des étages est simplement réalisé par assemblage des composants. Ils proposent de projeter le mouvement à l'interface entre deux étages sur une base commune définie à l'aide d'une série de Fourier tronquée. Le nombre de termes de Fourier est limité par le nombre d'éléments présents à l'interface dans la direction circonférentielle. Cette méthodologie est utilisée par les mêmes auteurs pour le problème inverse d'identification de paramètres [38] et pour la détection des défauts [39].

Une approche qui est en rupture par rapport aux méthodologies de synthèse modale classique est introduite par Laxalde et al. [40, 41]. Il s'agit d'une extension de la méthode de symétrie cyclique classiquement utilisée dans le cas des étages isolés. En effet, dans le cas multi-étages la périodicité spatiale est brisée du fait que chaque étage a un nombre différent de secteurs empêchant ainsi le découplage du problème par ordres de Fourier. La méthode proposée, appelée symétrie cyclique multi-étages, consiste à modéliser un secteur par étage avec des conditions aux limites cycliques et à conserver seulement certains couplages entre les ordres de Fourier des différents étages. Ceci introduit une approximation car l'influence des autres couplages est négligée. Néanmoins, cette méthodologie présente plusieurs intérêts pratiques associés au découplage du problème en ordres de Fourier et permet d'obtenir une bonne précision par rapport aux calculs complets avec des réductions très importantes en coût de calcul. Sternchüss et al. [42, 43] intègrent les modes calculés en symétrie cyclique multi-étages dans une approche de CMS qui utilise les secteurs de chaque étage comme composants. Ils proposent de réduire le problème dans une base modale formée par : a.- un ensemble de modes issus du calcul en symétrie cyclique multi-étages, b.-un ensemble de modes propres des secteurs à interfaces fixes. Un processus itératif de type Gram-Schmidt doit être utilisé pour obtenir une base ortho-normée à partir de ces ensembles des modes.

Une réduction modale du système multi-étages est introduite par Sinha [44] pour des systèmes masse-ressort et Bhartiya et Sinha [45] pour des modèles éléments finis. Ils proposent de projeter les matrices du système complet dans une base modale composée de : a.-un ensemble de modes de chaque étage avec interface inter-étages libre, b.-un ensemble de modes de chaque étage avec interface inter-étages encastree. Les modes qui composent la base peuvent être obtenus par des calculs en symétrie cyclique pour chaque étage. En revanche, les manipulations des matrices assemblées de la structure complète

peuvent s'avérer encombrantes pour les modèles éléments finis de taille importante.

Certaines études prennent en compte les effets du désaccordage dans les systèmes mutli-étages à l'aide de simulations de type Monte-Carlo (MC). Laxalde et Pierre [46] introduisent une réduction multi-niveau basée sur la symétrie cyclique multi-étages. Ils proposent la projection des différents sous-problèmes associés aux ordres de Fourier multi-étages dans leur base modale propre. Les problèmes réduits en coordonnées modales sont rassemblés dans le but de pouvoir introduire du désaccordage par la méthode de projection CMM. D'Souza et Epureanu [47] adaptent la méthode développée par Song et al. [37] pour introduire du désaccordage également par CMM. Bhartiya et Sinha [44] ont étudié le désaccordage géométrique en combinant l'analyse par domaine modal modifié (MMDA) [48] et la réduction modal multi-étages introduite dans [44]. La MMDA est une méthodologie de synthèse modale qui utilise les modes du système accordé avec des variations appliquées sur les caractéristiques géométriques des aubes considérées importantes à partir d'une analyse préparatoire. Rzadkowski et Drewczynski [49] considèrent un modèle éléments finis de 8 étages disque-aubes et montrent l'évolution des fréquences entre le cas accordé et désaccordé.

Des extensions récentes aux méthodes multi-étages ont été proposées permettant la modélisation des effets de rotation [50], les non-linéarités dues au contact frottant [51] ou la présence d'un aubage fissuré [52] ainsi que les effets du désalignement des disques [53].

0.1.3 Méthodes probabilistes en dynamique des structures

La prise en compte de manière quantitative des incertitudes sur les chargements ou sur les caractéristiques structurales devient de plus en plus importante pour les analyses dynamiques. Le but principal de cette étude est d'analyser les effets des incertitudes de caractéristiques des aubes sur la dynamique globale des ensembles multi-étages. Les incertitudes auxquelles on s'intéresse sont modélisées par des variations sur les caractéristiques matériaux de l'ensemble des aubes de chaque étage. Une usure uniforme de l'ensemble des aubes ou des caractéristiques du modèle mal maîtrisées (amortissement aérodynamique, effets thermiques, etc) peuvent être à l'origine de ses incertitudes. Il s'agit de trouver des méthodologies efficaces permettant la prise en compte de l'effet des incertitudes sur les fréquences et modes propres ainsi que sur la réponse dynamique. En général, pour les méthodes existantes, la taille du problème déterministe associé et le nombre de paramètres incertains considérés ont une influence majeure sur le coût du

calcul et conditionnent directement leur applicabilité. Même pour des systèmes linéaires la réponse sera légèrement ou modérément non-linéaire par rapport à l'incertitude sur les paramètres structuraux. Ceci implique des restrictions évidentes aux méthodes basées sur des approximations linéaires de variation.

Les méthodes discutées ici sont les méthodes de Monte-Carlo, les méthodes de perturbation, les méthodes spectrales et l'approche par matrices aléatoires.

Les méthodes de Monte-Carlo (MC) [54, 55] sont souvent utilisées en ingénierie car elle permettent une analyse numérique directe sans complexification par rapport au problème déterministe. De plus la taille du problème augmente beaucoup moins avec le nombre de variables aléatoires qu'avec les méthodes analytiques et les non-linéarités structurales peuvent être considérées directement. Dans un cadre probabiliste les méthodes de MC permettent la génération des échantillons à partir d'une distribution probabiliste et la propagation se fait via le modèle dans le but d'obtenir la variabilité de la réponse par estimations de ses moments statistiques (typiquement la moyenne et l'écart-type). Les incertitudes doivent être représentées par des variables aléatoires et des échantillons indépendants sont obtenus facilement à l'aide de générateurs de variables aléatoires disponibles. Pour chaque échantillon le système dynamique associé est complètement déterminé et la méthode consiste tout simplement à le résoudre pour un nombre important d'échantillons. Des calculs purement algébriques sur l'ensemble des réalisations, pour la réponse ou toute autre sortie, permettent d'obtenir les statistiques associées à leur variabilité. En revanche, des moments statistiques exacts sont obtenus seulement pour un nombre infini de réalisations. Une des caractéristiques commune à toutes les méthodes de Monte-Carlo est qu'elles demandent un nombre très important de réalisations et ont un taux de convergence faible. Des procédures de type expansion de Neumann [56] ont pour but de réduire le coût de calcul en profitant du fait que les solutions aléatoires ne sont pas très éloignées de la solution déterministe. La théorie des valeurs extrêmes a été utilisée par Castanier et Pierre [12] pour réduire significativement le nombre de réalisations de MC nécessaires pour estimer la distribution du maximum de réponse d'un système disque aubes.

Les méthodes de perturbation, très répandues pour les analyses déterministes, ont été utilisées très tôt dans le développement des éléments finis stochastiques [57, 58]. Elles sont basées sur un développement en série de Taylor des quantités aléatoires sur une base de variables aléatoires de moyenne nulle. Pour l'étude de la variabilité en analyse modale des systèmes linéaires, les matrices structurales aussi bien que les fréquences et les modes sont représentés par un développement en série de Taylor. Le calcul des mo-

ments statistiques associés aux développements de premier ordre nécessite l'évaluation des dérivées partielles des valeurs propres et des vecteurs propres. Des techniques ont été proposées pour permettre l'évaluation efficace des dérivées partielles des vecteurs propres à partir d'une base modale tronquée et pour améliorer l'efficacité globale et la précision des méthodes de perturbation [59, 60]. Néanmoins, les calculs des termes de perturbation au delà du premier ordre restent très coûteux ce qui limite l'application de ces méthodes aux cas des très faibles niveaux d'incertitudes. Sinha et Chen [61] ont utilisé un développement en série de Taylor pour calculer le maximum de réponse d'un ensemble disque aubes. Lalanne [62] introduit une méthodologie de perturbation pour les structures à symétrie cyclique qui permet le calcul des facteurs d'amplification de la réponse en présence d'incertitudes. Des expressions analytiques de la densité de probabilité de l'amplitude de réponse pour un système disque aubes désaccordé ont été proposées par Mignolet et al. [63] se basant sur une technique de perturbation et des techniques d'optimisation [64, 65]. Une extension des techniques introduites dans [64, 65] est utilisée pour étudier la réponse d'un système multi-étages composé de deux disques aubés [66].

Les méthodes spectrales sont des méthodes numériques qui utilisent la méthode de Galerkin pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. La solution de l'équation s'écrit comme une somme de fonctions de base dont les coefficients sont déterminés de façon à obtenir la meilleure représentation possible. Pour représenter des processus stochastiques avec des variables aléatoires on peut utiliser le développement de Karhunen-Loève (K-L)[67, 68] qui consiste en la décomposition du processus sur la base de fonctions orthogonales déterministes de coefficients des variables aléatoires de moyenne nulle. Dans le cas des variables aléatoires qui suivent une distribution normale, l'expansion de K-L permet la représentation la plus efficace d'un processus gaussien et est capable de décrire ses deux premiers moments statistiques. Cependant, son implémentation demande la connaissance de la fonction de covariance du processus représenté. Pour un système dynamique elle peut être bien adaptée car les variabilités des caractéristiques structurales peuvent être facilement décrites. Les réponses en revanche, pour lesquelles la covariance n'est pas connue, doivent être représentées par un développement alternatif appelé expansion en chaos polynomial (PCE) [68–70]. Il s'agit d'un développement sur une base de fonctions aléatoires connues avec des coefficients déterministes qui doivent être recherchés de manière à minimiser l'erreur introduite par l'approximation avec un nombre fini de termes. Les fonctions utilisées sont des polynômes orthogonaux dépendent des variables aléatoires. La détermination des coefficients déterministes implique soit la résolution d'un système d'équations augmenté

[70, 71] soit l'utilisation d'une méthode d'échantillonnage [72]. Dans sa forme originale la méthode PCE consiste en une expansion, de convergence en moyenne quadratique, à partir de polynômes d'Hermite multidimensionnels de variables gaussiennes [68]. Sinha [73] utilise la PCE pour les calculs de maxima de réponse d'un système disque aubes désaccordé. Récemment, la méthode PCE a été appliquée au problème modal pour représenter la statistique à la fois des fréquences et des déformées modales [74–78]. Des extensions de la méthode de PCE à des représentations qui utilisent des polynômes orthogonaux autres que les polynômes d'Hermite ont aussi été développées [79–81].

Une méthodologie basée sur la théorie des matrices aléatoires permettant la prise en compte des incertitudes dans les problèmes structuraux a été développée par Soize [82–85]. Cette méthodologie, appelée approche non-paramétrique, permet de prendre en compte des incertitudes sur la modélisation en plus des incertitudes sur les données. Le principe de maximum d'entropie est utilisé dans un espace modal réduit pour calculer un seul paramètre de dispersion permettant de décrire la variabilité de chaque matrice structurale. L'approche non-paramétrique a été utilisée par Capiez-Lernout et. al [86] pour la modélisation du désaccordage dans les structures disque aubes et pour la définition des tolérances de fabrication pour les aubes [87]. Avalos et Mignolet [88] utilisent l'approche non-paramétrique pour étudier le désaccordage induit par des incertitudes sur la modélisation de l'interface entre les aubes et le disque.

0.2 Positionnement de l'étude

Avec les méthodologies de réduction de modèles adaptées aux systèmes multi-étages et basées sur la synthèse modale, la précision des calculs dépend des bases modales utilisées. Ainsi, des plages de fréquences d'intérêt doivent être définies et ciblées. Des stratégies de réduction multi-niveau (réduction modale a posteriori) sont également proposées mais leur mise en oeuvre reste assez compliquée. La méthodologie de symétrie cyclique multi-étages [40, 41], qui n'est pas basée sur la synthèse modale, sera utilisée dans ce travail. Elle présente plusieurs intérêts pratiques. En termes de réduction, le problème est transformé en plusieurs problèmes définis sur un secteur de chaque étage en utilisant une hypothèse d'ordres de Fourier découplés. En terme de calcul, le découplage des ordres de Fourier permet d'améliorer les problèmes de convergence associés à la forte densité modale du problème complet. De plus, l'utilisation de cette hypothèse permet directement de classer les modes par diamètres nodaux comme dans le cas de la symétrie

cyclique classique. L'interprétation des interactions entre modes dominés par le disque et modes d'aubes est ainsi facilitée.

Des approximations sont introduites dans les calculs en symétrie cyclique multi-étages qui négligent l'influence de certains couplages entre ordres de Fourier. Une investigation plus poussée que celles publiées sur la robustesse de la méthode a été jugée nécessaire avant de pouvoir l'utiliser pour la prise en compte des incertitudes.

Dans les structures disque aubes, l'étude des déformées modales est aussi importante que l'étude des fréquences propres pour la maîtrise des mécanismes de réponse. Ceci a motivé le choix d'une méthode permettant d'étudier les variabilités non seulement sur les fréquences et les réponses, classiquement rencontrées, mais aussi sur les déformées modales. Des développements de la méthode PCE [77, 78] permettent de traiter le problème modal en présence d'incertitudes. Le coût de la méthode PCE n'est pas exorbitant car le nombre de variables aléatoires utilisées pour la prise en compte des variations sur les matériaux des ensembles d'aubes reste très faible.

Suivant les données accessibles associées aux moments statistiques de la loi pour les variables aléatoires, celle-ci sera définie via le principe de maximum d'entropie. Dans le cas des incertitudes matériaux, la loi Gamma de support positif est très clairement adaptée [89].

0.3 Plan du manuscrit

Dans le chapitre 1 la méthodologie classique de calculs dynamiques en symétrie cyclique est tout d'abord présentée. Ceci permet d'établir les bases théoriques nécessaires aussi bien pour les discussions sur des phénomènes vibratoires dans les systèmes disque-aubes que pour l'introduction de la méthodologie de calculs en symétrie cyclique multi-étages. Ensuite, les caractéristiques vibratoires propres aux systèmes multi-étages sont illustrées à l'aide d'un modèle de deux roues aubées adjacents. Du fait du nombre de secteurs différents pour chaque étage, l'ensemble n'est plus symétrique. La pertinence des calculs prenant en compte le couplage entre plusieurs étages est mise en évidence par comparaison avec les résultats de calculs qui considèrent les étages séparément. La méthodologie de calculs en symétrie cyclique multi-étages est ensuite présentée. Les couplages entre les ordres de Fourier des étages adjacents, du fait du couplage inter-étage, sont mis en évidence ainsi que les gains importants amenés par l'hypothèse qui consiste à négliger certains couplages.

Dans le chapitre 2 la robustesse de la méthode de symétrie cyclique multi-étages est établie en évaluant sa capacité à représenter correctement la dynamique de roues de différents types. Des analyses permettant de mieux comprendre les déformées modales des systèmes multi-étages sont introduites et discutées. L'évaluation de la robustesse de la méthode consiste à comparer les prédictions issues des calculs en symétrie cyclique et les prédictions issues des calculs sur la structure complète. Les différents types de calculs utilisés dans cette partie sont détaillés et les résultats sont présentés pour les différents modèles considérés.

Le chapitre 3 a pour but d'étudier les effets de la prise en compte des incertitudes liées au matériau des aubes sur la dynamique globale des systèmes multi-étages. La méthode du Chaos Polynomial peut être introduite dans la méthodologie de symétrie cyclique multi-étages. Les développements du Chaos Polynomial sont présentés pour une loi de probabilité Gamma adaptée à la physique du problème. Par conséquent, la base polynomiale du chaos est construite avec des polynômes de Laguerre. Des développements permettant d'étudier les fréquences et modes propres aléatoires sont donnés.

Chapitre 1

Dynamique globale des rotors multi-étages

Sommaire

1.1	Modélisation des structures en symétrie cyclique	14
1.1.1	Transformée de Fourier spatiale	14
1.1.2	Ecriture énergétique du problème en symétrie cyclique	15
1.2	Phénoménologie vibratoire dans les systèmes multi-étages	24
1.2.1	Dédoublage des fréquences propres inhérent aux systèmes multi-étages	26
1.2.2	Déformées modales multi-étages	31
1.2.3	Réponse forcée multi-étages	34
1.3	Méthode de symétrie cyclique multi-étages	38
1.3.1	Couplage des ordres de Fourier dans les calculs multi-étages	39
1.3.2	Hypothèse sur le découplage des ordres de Fourier	42
1.3.3	Formulation relative aux ordres de Fourier de chaque étage	43

1.1 Modélisation des structures en symétrie cyclique

Une structure à symétrie cyclique est composée de secteurs identiques disposés autour d'un axe de symétrie et liés de manière identique entre eux. Une telle structure se referme sur elle-même et présente une périodicité spatiale qui permet l'analyse de la structure complète à partir de la discrétisation d'un seul secteur considéré de référence.

1.1.1 Transformée de Fourier spatiale

Le vecteur des déplacements (ou tout autre quantité physique) d'une structure à symétrie cyclique composée de N secteurs peut être partitionné comme suit :

$$\mathbf{u} = \left\{ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N \right\}^T, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (1.1)$$

où $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ décrit les déplacements du n ème secteur discrétisé avec m degrés de liberté.

La périodicité géométrique permet d'utiliser la transformée de Fourier discrète pour exprimer le vecteur des déplacements physiques $\mathbf{u}$ en coordonnées cycliques complexes $\tilde{\mathbf{u}} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_0 \quad \tilde{\mathbf{u}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_k \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_{N-1} \right\}^T$:

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(n-1)} \tilde{\mathbf{u}}_k \quad (1.2)$$

où la quantité généralisée $\tilde{\mathbf{u}}_k$ est appelée composante cyclique d'ordre k . Par convention on choisi de noter $\tilde{\mathbf{u}}_0$ la première composante cyclique et $\mathbf{u}_1$ les déplacements physiques du premier secteur.

Les composantes cycliques $\tilde{\mathbf{u}}_k$ permettent la représentation des quantités physiques et de la propagation d'onde associée, avec la partie complexe qui correspond au type d'onde se propageant dans la structure. Elles sont définies par rapport aux quantités physiques en utilisant l'inverse de la transformée de Fourier discrète :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n-1)} \mathbf{u}_n \quad (1.3)$$

Une transformation équivalente permettant de décrire les composantes physiques en fonction des composantes cycliques réelles peut également s'écrire à l'aide des séries trigonométriques, comme rappelé dans l'Annexe A.

1.1.1.1 Notation matricielle et champs discrets

Soit le vecteur suivant composé des éléments de la transformation de Fourier :

$$\mathbf{e}_N^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ 1 \quad e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad e^{j\frac{2\pi}{N}k(2)} \quad \dots \quad e^{j\frac{2\pi}{N}k(N-1)} \right\}^T \quad (1.4)$$

La transformation complexe décrite dans l'équation (1.2) peut s'écrire pour l'ensemble des secteurs $\mathbf{u} = \left\{ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_N \right\}^T$ de manière compacte :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{e}_N^k \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k, \quad \mathbf{e}_N^k \in \mathbb{C}^N, \tilde{\mathbf{u}}_k \in \mathbb{C}^m \quad (1.5)$$

où $\otimes$ représente le produit de Kronecker décrit dans l'Annexe B.

À l'aide de la matrice de Fourier $\mathbf{E}_N$ dont les colonnes sont les vecteurs de Fourier de l'équation (1.4) :

$$\mathbf{E}_N = \left[\mathbf{e}_N^0 \quad \mathbf{e}_N^1 \quad \dots \quad \mathbf{e}_N^{N-1} \right], \quad \mathbf{E}_N \in \mathbb{C}^{N,N} \quad (1.6)$$

on peut écrire la transformation de l'équation (1.5) comme un changement entre une base physique et une base cyclique complexe, pour l'ensemble des secteurs n et pour tous les ordres de Fourier k à la fois :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{E}_N \otimes \mathbf{I}_m) \tilde{\mathbf{u}} \quad (1.7)$$

où $\mathbf{I}_m$ est la matrice identité de la taille des vecteurs $\tilde{\mathbf{u}}_k$ ou $\mathbf{u}_n$.

La matrice $\mathbf{E}_N$ est orthogonale ($\mathbf{E}_N^{-1} = \mathbf{E}_N^*$) et la transformation inverse de l'équation (1.7) devient simplement :

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{E}_N^* \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{u} \quad (1.8)$$

où $[\ast]$ dénote la matrice transposée conjuguée.

1.1.2 Ecriture énergétique du problème en symétrie cyclique

Dans le cas où les secteurs ne seraient pas couplés entre eux, les matrices $\mathbf{Z} = \{\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}\}$ (masse, raideur et amortissement) de la structure complète ont la forme sui-

vante :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{Z}_n & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{Z}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N \times m, N \times m} \quad (1.9)$$

où $\mathbf{Z}_n \in \mathbb{R}^{m,m}$ représente le n ème secteur discrétisé avec m degrés de libertés et appartenant à une structure à symétrie cyclique composée de N secteurs. Dans le repère cylindrique lié à l'axe de symétrie, les matrices $\mathbf{Z}_n$ sont identiques pour tous les secteurs et on peut exprimer les matrices de la structure complète en fonction des matrices d'un seul secteur de base :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1 \quad (1.10)$$

La projection des matrices de la structure complète $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1$ dans la base cyclique complexe définie par l'équation (1.7) donne :

$$\tilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{E}_N^* \otimes \mathbf{I}_m) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1) (\mathbf{E}_N \otimes \mathbf{I}_m) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1) \quad (1.11)$$

où la transformation $(\mathbf{E}_N^* \otimes \mathbf{I}_m) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1) (\mathbf{E}_N \otimes \mathbf{I}_m)$ donne exactement la même matrice $(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1)$. Ceci est facilement démontrable en constatant que $\mathbf{E}_N^* \mathbf{E}_N = \mathbf{I}$ et en appliquant les propriétés du produit de Kronecker décrit dans l'Annexe B.

L'équation (1.11) montre que les matrices structurales $\tilde{\mathbf{Z}}$ exprimées dans la base cyclique complexe sont formées par des sous-blocs découplés. Les différents sous-blocs sont identiques dans la mesure où les secteurs ne sont pas couplés entre eux. Néanmoins, dans une structure à symétrie cyclique, un secteur peut être couplé à n'importe quel autre secteur à condition que ces couplages soient périodiques. Le cas le plus courant consiste en des secteurs couplés seulement aux secteurs adjacents avec lesquels ils partagent une interface commune.

En partant d'une formulation qui considère les secteurs non couplés on doit rajouter des conditions aux limites inter-secteurs pour obtenir le comportement de la structure complète assemblée.

1.1.2.1 Conditions aux limites inter-secteur

Le couplage des différents secteurs s'obtient en rajoutant des conditions aux limites qui expriment simplement la continuité des déplacements sur la frontière entre secteurs

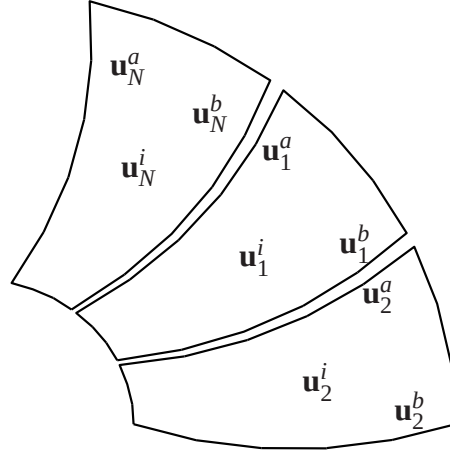


FIG. 1.1: Schéma des frontières inter-secteurs pour une structure à symétrie cyclique.

adjacents :

$$\mathbf{u}_N^b = \mathbf{u}_1^a \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_n^b = \mathbf{u}_{n+1}^a, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (1.12)$$

où les indices a et b indiquent les restrictions des quantités aux frontières inter-secteurs comme montré FIG.1.1. Le vecteur des déplacements physiques du n ème secteur a la forme suivante :

$$\mathbf{u}_n = \left\{ \mathbf{u}_n^a \quad \mathbf{u}_n^i \quad \mathbf{u}_n^b \right\}^T \quad (1.13)$$

Il est évident que les ddl aux frontières inter-secteurs a et b sont redondants et l'assemblage ne peut se faire qu'en éliminant de la formulation les uns en fonction des autres à l'aide d'une matrice de passage $\mathbf{P}$ qui regroupe les conditions aux limites de l'équation (1.12) pour l'ensemble des secteurs :

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\underline{\mathbf{u}}, \quad \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (1.14)$$

où $\underline{\mathbf{u}} = \left\{ \underline{\mathbf{u}}_1 \quad \underline{\mathbf{u}}_2 \quad \dots \quad \underline{\mathbf{u}}_n \quad \dots \quad \underline{\mathbf{u}}_N \right\}^T$ est le vecteur des déplacements assemblés dont la frontière b a été éliminée de la formulation. Le vecteur du n ème secteur a alors la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}_n = \left\{ \underline{\mathbf{u}}_n^a \quad \underline{\mathbf{u}}_n^i \right\}^T, \quad \underline{\mathbf{u}}_n \in \mathbb{R}^m \quad (1.15)$$

Le secteur de base typique d'une structure disque-aubes est montré dans la FIG.1.2 pour illustrer les partitions dans les cas des secteurs non couplés et couplés.

Les matrices structurales du problème avec les secteurs couplés en coordonnées phy-

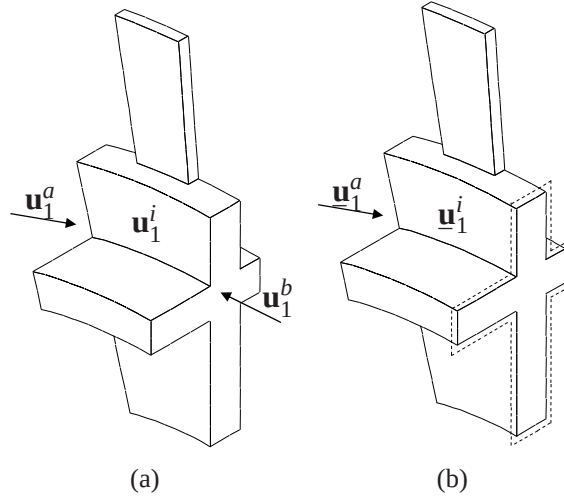


FIG. 1.2: Secteur de base d'une structure à symétrie cyclique, (a) secteur non couplé, (b) secteur couplé avec des conditions aux limites inter-secteur

siques $\underline{\mathbf{Z}}$ s'obtiennent à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}$ de l'équation (1.14) :

$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1) \mathbf{P}, \quad \underline{\mathbf{Z}} \in \mathbb{R}^{N \times m, N \times m} \quad (1.16)$$

La périodicité des équations de continuité inter-secteurs regroupées dans $\mathbf{P}$, permet de montrer que $\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1) \mathbf{P}$ a une structure particulière dite circulante par blocs :

$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}^T (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_1) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Z0}} & \underline{\mathbf{Z1}} & 0 & \cdots & 0 & \underline{\mathbf{Z1}}^T \\ \underline{\mathbf{Z1}}^T & \underline{\mathbf{Z0}} & \underline{\mathbf{Z1}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \underline{\mathbf{Z1}}^T & \underline{\mathbf{Z0}} & \underline{\mathbf{Z1}} \\ \underline{\mathbf{Z1}} & 0 & \cdots & 0 & \underline{\mathbf{Z1}}^T & \underline{\mathbf{Z0}} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

où les blocs $\underline{\mathbf{Z0}}, \underline{\mathbf{Z1}} \in \mathbb{R}^{m,m}$ représentent respectivement la partie intérieur de chaque secteur et l'interaction avec les secteurs adjacents. Ainsi, l'application des conditions aux limites inter-secteur conduit à des matrices formées par des sous-blocs couplés entre eux.

L'intérêt du passage en coordonnées cycliques est qu'il permet, compte tenu de la structure particulière de $\underline{\mathbf{Z}}$ et des relations d'orthogonalité des fonctions exponentielles, d'ob-

tenir des matrices formées par des sous-blocs découplés :

$$\tilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{E}_N^* \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{Z} (\mathbf{E}_N \otimes \mathbf{I}_m) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \tilde{\mathbf{Z}}_k & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{\mathbf{Z}}_{N-1} \end{bmatrix} = \text{blocdiag}_{k=\{0,\dots,N-1\}} (\tilde{\mathbf{Z}}_k) \quad (1.18)$$

où le sous-bloc $\mathbf{Z}_k$ est associé à l'ordre de Fourier k donc au type d'onde se propageant dans la structure. Les relations d'orthogonalité des fonctions exponentielles et les développements permettant d'arriver au résultat de l'équation (1.18) sont développés dans l'Annexe C.

Les équations (1.17) et (1.18) montrent que l'application d'une contrainte périodique, comme celle définie par les conditions aux limites inter-secteur, ne couple pas les ordres de Fourier. Néanmoins, l'application d'une contrainte plus générale non-périodique donne lieu à des couplages entre les ordres de Fourier. Ce résultat a des implications importantes pour l'extension des développements en symétrie cyclique à plusieurs étages.

L'équation de mouvement de la structure à symétrie cyclique, en base physique et avec la continuité inter-secteur prise en compte, a la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_k(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_k(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.19)$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont les matrices de masse, amortissement et raideur respectivement, et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{u}$ sont les vecteurs d'excitation et de déplacement.

Les développements précédents montrent que l'équation (1.19) peut être exprimée dans une base cyclique complexe à l'aide de la transformation (1.7). Les matrices dans cette base cyclique étant formées par des sous-blocs découplés, chaque ordre de Fourier k peut être analysé de manière indépendante :

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k(t) + \tilde{\mathbf{C}}_k \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k(t) + \tilde{\mathbf{K}}_k \tilde{\mathbf{u}}_k(t) = \tilde{\mathbf{f}}_k(t) \quad (1.20)$$

où le vecteur de forces $\tilde{\mathbf{f}}_k$ s'obtient aussi par application de la transformation (1.7).

1.1.2.2 Analyse modale

L'analyse modale du système non-amorti implique la solution du problème aux valeurs propres vecteurs propres suivant :

$$(\underline{\mathbf{K}} - \omega^2 \underline{\mathbf{M}}) \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (1.21)$$

Soit dans la base cyclique pour chaque ordre de Fourier k :

$$(\tilde{\underline{\mathbf{K}}}_k - \omega^2 \tilde{\underline{\mathbf{M}}}_k) \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

Les matrices $\tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_k = \{\tilde{\underline{\mathbf{M}}}_k, \tilde{\underline{\mathbf{K}}}_k\}$ sont complexes hermitiennes ($\tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_k = \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_k^*$) pour tous les ordres de Fourier sauf $k = 0$ et $k = \frac{N}{2}$ (qui n'existe que pour N pair) pour lesquels les matrices $\tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_k$ sont réelles. Par une propriété fondamentale des matrices hermitiennes, l'équation (1.22) donne exclusivement des valeurs propres réelles, avec des vecteurs propres en général complexes. Les matrices $\tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_k$ apparaissent en paires transposées conjuguées ($\tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_k = \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{N-k}^*$) donnant lieu à des problèmes qui partagent les mêmes valeurs propres et des vecteurs propres complexes conjugués. De ce fait, pour obtenir les résultats de l'analyse modale sur la structure complète il suffit de considérer les ordres de Fourier $k = 0, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, avec :

$$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ est pair ,} \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair .} \end{cases} \quad (1.23)$$

Les valeurs propres obtenues pour chaque ordre de Fourier k correspondent à des valeurs propres de la structure complète en base physique. En revanche, les quantités en coordonnées cycliques $\tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k$ doivent être transformées en quantités en coordonnées physiques de la structure complète à l'aide de l'équation (1.5).

Les solutions pour $k = 0$ et $k = \frac{N}{2}$ correspondent respectivement aux modes où tous les secteurs se déforment en phase et modes où les secteurs adjacents se déforment en opposition de phase. Pour les autres ordres de Fourier les solutions sont doubles et associées à des paires de vecteurs propres complexes conjugués. Les combinaisons linéaires de ces paires de vecteurs sont aussi des vecteurs propres associés à la même fréquence car ces modes ont une indétermination en amplitude mais également en phase. En termes de propagation d'onde, les paires des vecteurs complexes représentent deux ondes se propageant en sens inverse et les modes stationnaires s'obtiennent par la superposition de ses ondes. Ainsi, on peut obtenir une paire de modes réels orthogonaux à partir des paires

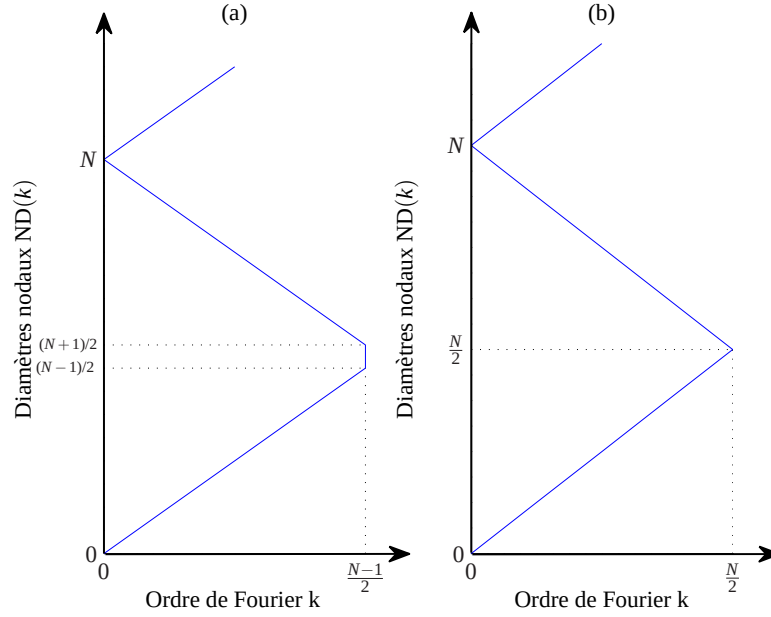


FIG. 1.3: Diagramme en zig-zag qui montre les diamètres nodaux potentiellement associés à un ordre de Fourier k . (a) Cas où N est impair, (b) cas où N est pair

complexes en prenant séparément les parties réelles et imaginaires comme montré dans l'Annexe D. Les paires de modes orthogonaux peuvent se combiner pour former un mode avec n'importe quel positionnement circonférentiel sur la structure.

Les déformées modales sur la structure complète sont généralement constituées de modes à diamètres nodaux directement associés à l'ordre de Fourier k utilisé pour les obtenir. Même si les ordres de Fourier à considérer sont $k = 0, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, la théorie rend compte de tous les diamètres nodaux physiquement possibles. Chaque ordre de Fourier k permet d'obtenir l'ensemble des diamètres nodaux suivant $ND(k) = [k, N \pm k, 2N \pm k, \dots]$ correspondant au repliement du spectre de la série de Fourier discrète comme illustré dans la FIG.1.3. En pratique les modes à plus de N diamètres nodaux arrivent seulement à haute fréquence.

1.1.2.3 Réponse forcée

Avec l'hypothèse de mouvement harmonique $\underline{\mathbf{u}}(t) = \underline{\mathbf{U}}e^{j\omega t}$, la partie spatiale peut être étudiée de manière indépendante de la partie temporelle. Le problème dynamique de l'équation (1.19) s'écrit alors pour chaque pulsation fondamentale de l'excitation ω :

$$(-\omega^2 \underline{\mathbf{M}} + \omega j \underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{K}}) \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (1.24)$$

Dans ce travail on considère seulement l'amortissement structural défini comme suit :

$$\underline{\mathbf{C}} = \frac{\eta}{\omega} \underline{\mathbf{K}} \quad (1.25)$$

dont η est le facteur d'amortissement.

Comme pour les développements précédents, le problème peut être exprimé en composantes cycliques et donne lieu à des sous-problèmes découplés pour chaque ordre de Fourier k :

$$(-\omega^2 \tilde{\underline{\mathbf{M}}}_k + (j\eta + 1) \tilde{\underline{\mathbf{K}}}_k) \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k = \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_k \quad (1.26)$$

Les principales sources d'excitations harmoniques sont liées au champ de pression non uniforme généré par le flux amont. La rotation de la structure dans ce champ de pression provoque des forces alternatives à des fréquences multiples de la vitesse de rotation. En général ces forces sont appliquées seulement sur les aubes et non sur les disques ou autres parties du rotor.

Un champ de pression d'une complexité arbitraire peut générer des forces excitant plusieurs harmoniques spatiaux à la fois. Pour les structures à symétrie cyclique, ces forces arbitraires sont décomposées dans la base cyclique à l'aide de l'équation (1.8). Les matrices structurelles étant découplées, le problème dynamique peut être résolu de manière indépendante pour chaque ordre de Fourier et la solution s'obtient par superposition.

Excitations de type ordre moteur

Un type d'excitation appelé ordre moteur consiste à utiliser une harmonique simple pour décrire les variations d'amplitude entre les vecteurs de forces d'excitation des différents secteurs. Ainsi, le vecteur associé à une force d'ordre moteur H s'écrit pour le n ème secteur de position angulaire $\theta_n = \frac{2\pi(n-1)}{N}$:

$$\underline{\mathbf{f}}_n = |\underline{\mathbf{f}}_1| e^{jH\theta_n} = |\underline{\mathbf{f}}_1| e^{jH \frac{2\pi(n-1)}{N}} \quad (1.27)$$

où $|\underline{\mathbf{f}}_1|$ est le vecteur d'amplitude des forces sur le secteur de référence. Tenant compte la rotation de la structure :

$$\underline{\mathbf{f}}_n(t) = |\underline{\mathbf{f}}_1| e^{jH \frac{2\pi(n-1)}{N}} e^{j\omega t} \quad (1.28)$$

où $\omega = H \cdot \Omega$ est la pulsation de l'excitation et Ω la vitesse de rotation.

Le vecteur des forces d'excitation sur la structure complète est alors donné par :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{f}}(t) &= \left\{ \underline{\mathbf{f}}_1(t) \quad \underline{\mathbf{f}}_2(t) \quad \dots \quad \underline{\mathbf{f}}_N(t) \right\}^T \\ &= |\underline{\mathbf{f}}_1| e^{j\omega t} \left\{ 1 \quad e^{jH\frac{2\pi}{N}} \quad \dots \quad e^{jH\frac{2\pi}{N}(N-1)} \right\}^T\end{aligned}\quad (1.29)$$

Pour l'analyse en symétrie cyclique le vecteur des forces d'excitation est projeté dans la base cyclique $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(t) = (\mathbf{E}_N^* \otimes \mathbf{I}_m) \underline{\mathbf{f}}(t)$ donnant lieu à une représentation en termes des ordres de Fourier :

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(t) = \left\{ \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_0(t) \quad \dots \quad \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_k(t) \quad \dots \quad \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_{N-1}(t) \right\}^T \quad (1.30)$$

Compte tenu des relations d'orthogonalité des fonctions exponentielles discrètes, une excitation d'ordre moteur H exprimée en base cyclique donne lieu à des excitations nulles pour les ordres de Fourier $k \neq H$:

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq H, \\ \frac{N}{\sqrt{N}} |\underline{\mathbf{f}}| e^{j\omega t} & \text{pour } k = H. \end{cases} \quad (1.31)$$

En conséquence, une excitation d'ordre moteur H projetée dans la base cyclique sera non nulle seulement pour l'ordre de Fourier $k = H$ et ne pourra exciter que les modes de type H diamètres nodaux. Dans ce cas, les ordres de Fourier étant découplés, la solution du sous-problème associé à l'ordre $k = H$ suffit pour obtenir la réponse sur la structure complète.

D'autre part, une excitation d'ordre moteur $N - H$ est la conjuguée de l'excitation d'ordre H , i.e. équivalente à l'excitation d'ordre H quand la rotation de la structure se fait dans le sens inverse.

Excitations de forme arbitrairement complexe

Si un champ de pression d'une complexité arbitraire doit être considéré, ceci entraînera des forces avec un contenu harmonique spatial plus riche. Dans ce cas la décomposition du vecteur de forces dans la base cyclique $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}(t) = (\mathbf{E}_N^* \otimes \mathbf{I}_m) \underline{\mathbf{f}}(t)$ donnera comme résultat des excitations non nulles pour plusieurs harmoniques spatiaux, voir tous. Les sous-problèmes sont résolus pour chaque ordre de Fourier séparément et la solution finale est obtenue par superposition à l'aide de l'équation (1.5).

1.2 Phénoménologie vibratoire dans les systèmes multi-étages

Dans le but de mettre en évidence les phénomènes vibratoires propres aux systèmes multi-étages, on utilise un modèle élément finis complet (360°) de deux disques aubés liés. Les phénomènes observés permettent de justifier l'intérêt des calculs multi-étages qui donnent des résultats sensiblement différents de ceux fournis par l'étude des étages isolés.

Le modèle utilisé est une structure académique à géométrie simple mais dont les caractéristiques sont proches de celles des ensembles disque-aubes réels. Il offre la possibilité de mettre en évidence des familles de modes dominés par le disque et de familles de modes dominés par les aubes.

La structure est discrétisée avec des éléments finis solides à huit nœuds et trois degrés de liberté (ddl) par nœud. Le TAB.1.1 résume les principales caractéristiques géométriques du modèle et la FIG.1.4 montre la forme de la structure et le maillage éléments finis retenus.

Les maillages à l'interface entre les deux étages ne sont pas coïncidents. En conséquence, des équations de liaison cinématique sont utilisées pour assurer la continuité. Ces équations expriment des relations linéaires entre les degrés de liberté à l'interface utilisant les fonctions d'interpolation liées aux éléments et peuvent être générées automatiquement par les codes éléments finis commerciaux.

Caractéristiques	Étage 1	Étage 2
Nombre de secteurs	15	23
Longueur des aubes [mm]	66	60
Épaisseur du disque [mm]	15	15
Diamètre du disque [mm]	150/250	150/250
Diamètre de l'anneau inter étage [mm]	200/215	—
Séparation inter étage [mm]	30	—
Longueur total de l'arbre [mm]	220	—
Module d'Young [GPa]	210	—
Masse volumique [Kg/m ³]	7820	—

TAB. 1.1: Principales caractéristiques du modèle complet (360°).

Les étages sont tout d'abord considérés séparément. La symétrie cyclique de chaque étage est exploitée et les fréquences obtenues sont présentées en fonction de l'ordre de

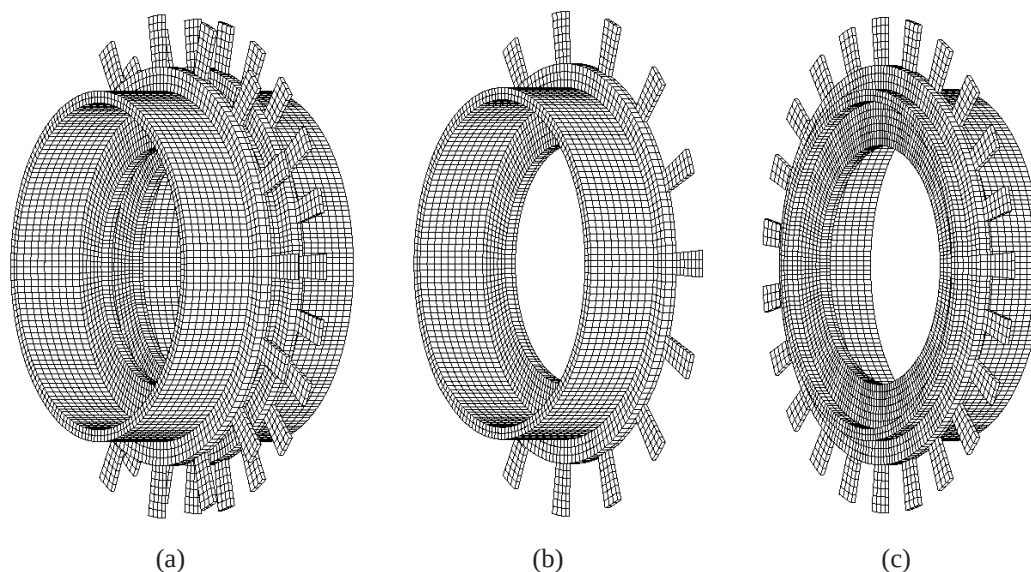


FIG. 1.4: Maillages éléments finis : (a) modèle complet composé de deux étages à symétrie cyclique ; (b) étage 1, composé de 15 secteurs ; (c) étage 2, composé de 23 secteurs ;

Fourier. Des conditions aux limites d'encastrement sont imposées à l'interface inter-étages, commun aux deux étages. Les familles de modes sont identifiées en calculant pour chaque mode la répartition d'énergie associée aux différents composants : aubes, disque et bout d'arbre.

La FIG.1.5 montre les résultats correspondant à l'étage 1. Dans de nombreux travaux, les fréquences associées aux différents diamètres sont reliées par ordre d'apparition, comme montré dans la FIG.1.5(a). L'identification des modes permet de faire des associations plus pertinentes en reliant les fréquences des modes appartenant à une même famille, comme montré FIG.1.5(b). Cette représentation permet de mettre en évidence des croisements entre familles et des fréquences proches appartenant à des familles différentes. Les résultats pour l'étage 2 sont présentés FIG.1.6.

Typiquement, on observe des zones d'accumulation (lignes horizontales) correspondant à des modes avec participation prédominante des aubes. Ce sont des familles de modes d'aubes dont les fréquences augmentent très faiblement avec le nombre de diamètres nodaux et convergent vers la fréquence de l'aube encastree à la base. On observe différents groupes de fréquences associées aux modes de déformation d'aube : Flexion (1F, 2F), Torsion (1T), Flexion dans le plan inertiel secondaire (1S), et des combinaisons (1T1S).

On observe aussi des modes qui présentent une participation importante du disque. On peut définir des familles de modes de disque reliant les modes selon le nombre de cercle nodaux $D(0C)$, $D(1C)$. Les modes du disque augmentent significativement en fréquence avec le nombre de diamètres nodaux et forment des lignes montantes. L'accroissement rapide en fréquence pour les modes de disque est du au raidissement du disque conséquence de l'augmentation du nombre de diamètres nodaux qui le traversent.

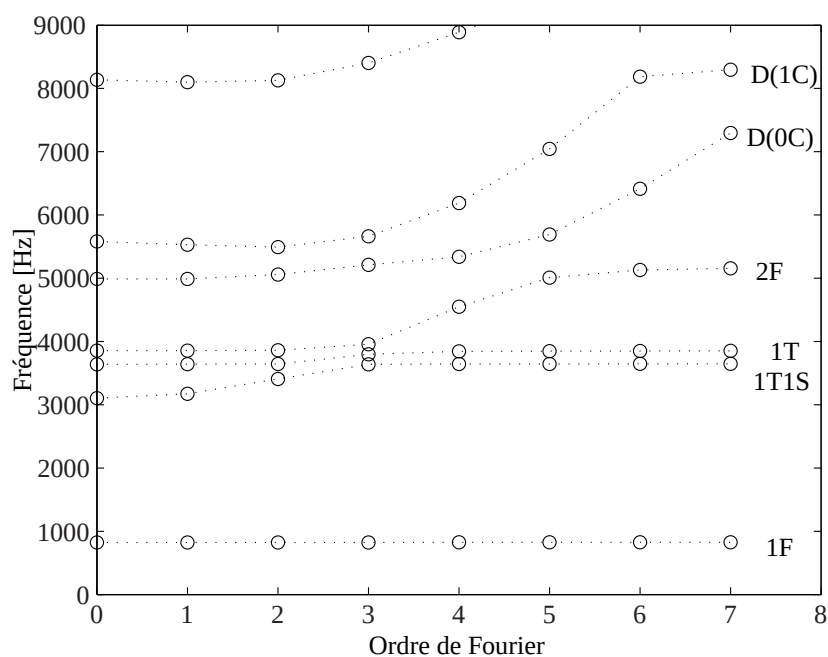
Les lignes montantes des familles de disque peuvent croiser les lignes quasi horizontales des familles d'aubes. Les croisements des familles peuvent donner lieu à des modes présentant un couplage entre le disque et les aubes. On observe aussi des *veerings*, mot anglais utilisé pour désigner l'évolution d'une famille de modes vers une autre famille différente. Les modes couplés ou ceux des zones de *veering* sont particulièrement sensibles aux désaccordages (peuvent devenir très localisés et avoir une amplification importante de la réponse par rapport au cas accordé). On montrera que l'identification des modes couplés disque-aube s'avère importante pour comprendre la dynamique multi-étages car ces modes peuvent donner lieu à un couplage inertiel entre les disques et les aubes de différents étages.

L'analyse modale de la structure composée par les deux étages, assemblés à l'aide des contraintes cinématiques, est considérée ensuite. La structure résultante n'a plus la propriété de symétrie cyclique car les deux étages qui la composent ne partagent pas le même nombre de secteurs. La méthode classique de symétrie cyclique ne peut plus être utilisée et une analyse modale de la structure complète s'impose.

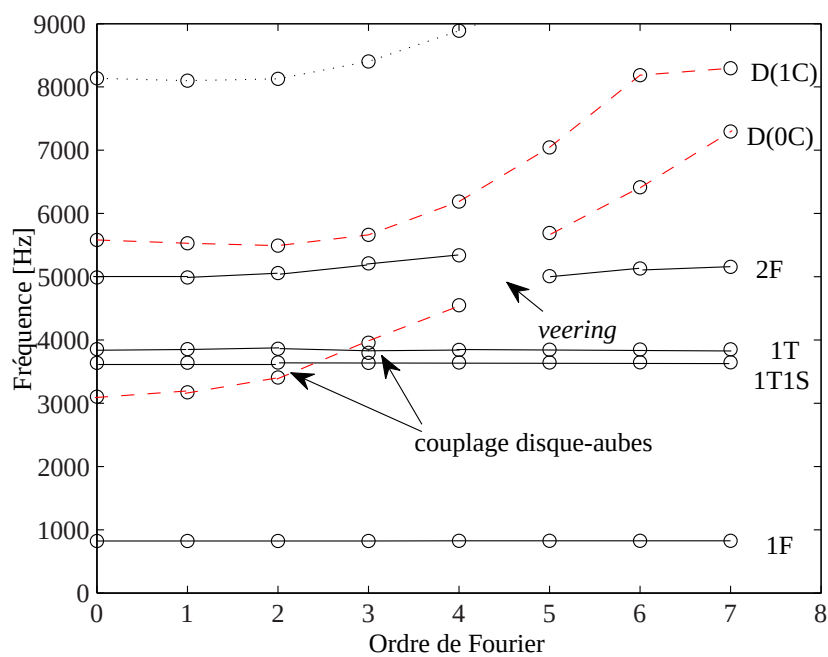
Les fréquences issues du calcul complet pour la structure multi-étages sont présentées en ordre croissant FIG.1.7. Les lignes horizontales indiquent les fréquences des zones d'accumulation correspondant aux étages isolés pour les familles de modes d'aubes. Les modes proches de ces fréquences sont des modes dont la déformation est confinée aux aubes d'un seul étage.

1.2.1 Dédoublage des fréquences propres inhérent aux systèmes multi-étages

Les calculs en symétrie cyclique, pour chaque étage, donnent comme résultats des paires de fréquences doubles pour tous les ordres de Fourier sauf les ordres 0 et $\frac{N}{2}$ (si N est pair). Dans le cas multi-étages, le couplage de plusieurs étages composés de différents nombres de secteurs implique que la structure globale n'est plus symétrique. Cette dissymétrie peut être vue comme une forme de désaccordage du disque contrastant avec

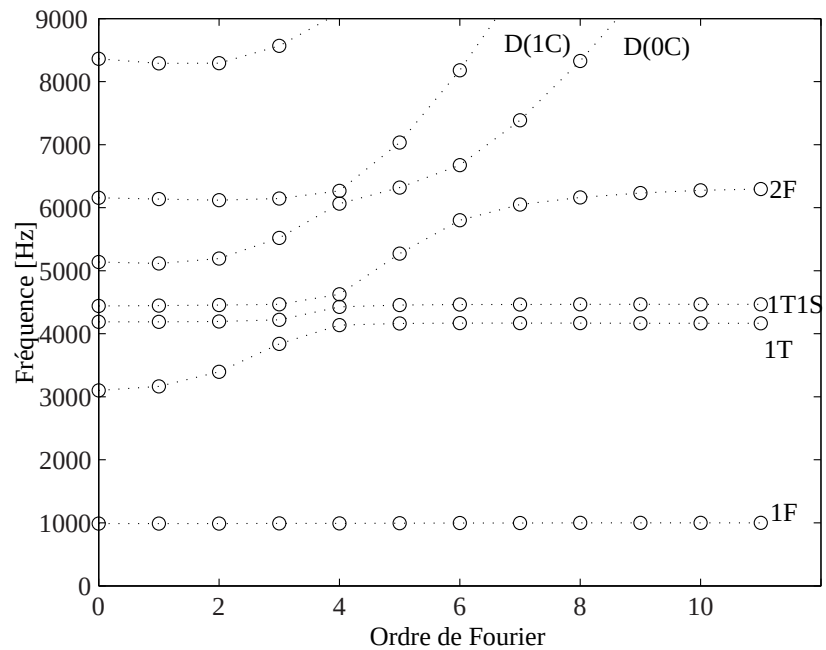


(a)

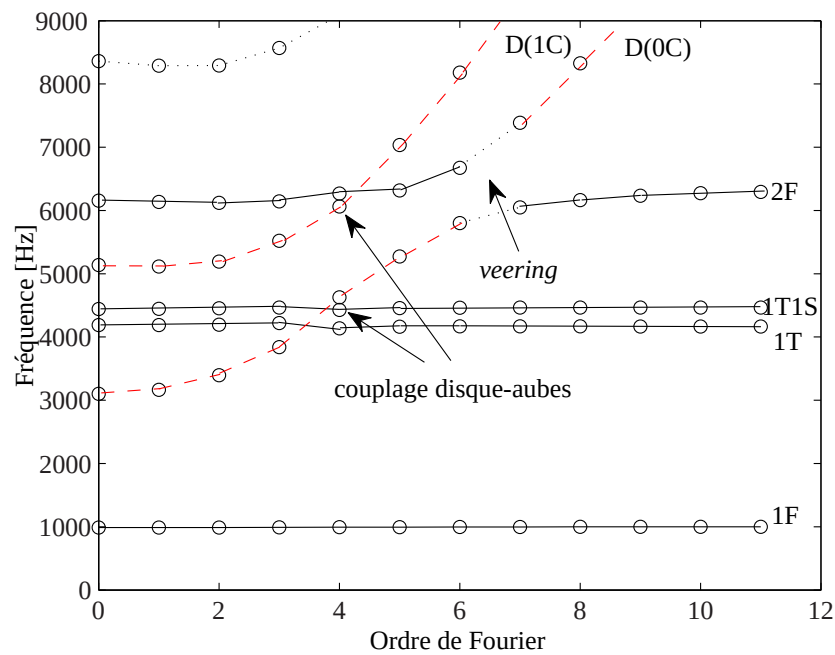


(b)

FIG. 1.5: Fréquences pour l'étage 1, composé de 15 secteurs, (a) représentation typique montrant les fréquences à différents diamètres nodaux reliées par ordre d'apparition ; (b) représentation reliant les fréquences des modes appartenant à une même famille



(a)



(b)

FIG. 1.6: Fréquences pour l'étage 2, composé de 23 secteurs, (a) représentation typique montrant les fréquences à différents diamètres nodaux reliées par ordre d'apparition ; (b) représentation reliant les fréquences des modes appartenant à une même famille

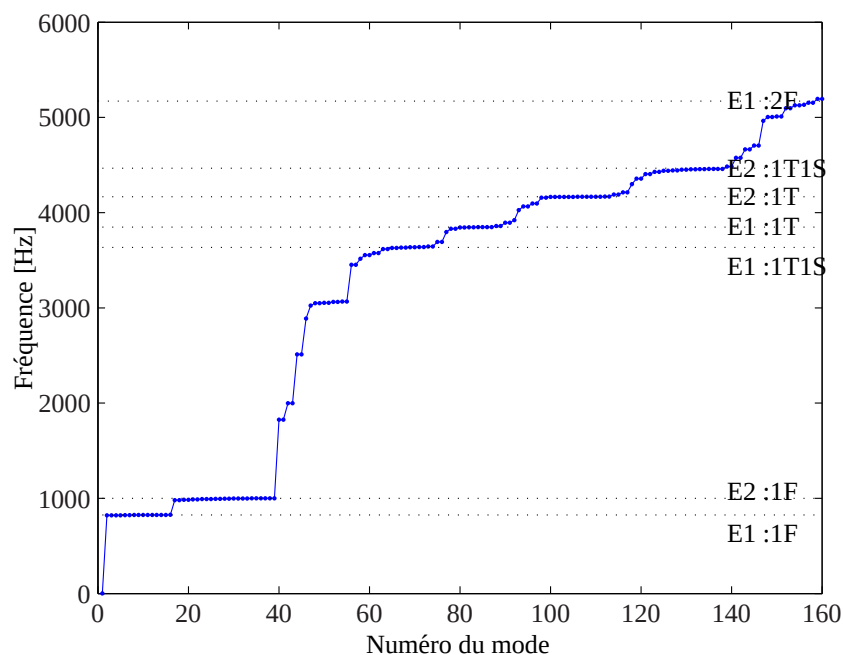


FIG. 1.7: Fréquences propres de la structure multi-étages issues du calcul complet (360°)

le désaccordage des aubes, plus couramment considéré. Ainsi, le calcul complet multi-étages donne lieu à des pseudo-paires de fréquences conséquence du dédoublement des paires de fréquences propres.

Pour le modèle multi-étages étudié, le dédoublement des paires de fréquences est observable mais reste très faible, en dessous de 0.0015% en fréquence. Une étude de convergence du maillage est conduite en faisant varier le nombre d'éléments à l'interface inter-étages. Les résultats sont présentés FIG.1.8 pour deux fréquences qui correspondent respectivement à un mode de disque multi-étages et un mode d'aubes confiné à l'étage 1. Pour les deux modes, la fréquence et le dédoublement respectifs convergent quand le nombre d'éléments finis à l'interface est augmenté. Néanmoins, le pourcentage caractéristique du dédoublement associé au mode du disque multi-étages (FIG.1.8(a)) est un ordre plus grand que celui associé au mode confiné à un étage. Le dédoublement pour ce mode est du à l'asymétrie du système global et non au maillage éléments finis. En général on constate que le dédoublement des paires de fréquences reste très faible pour les modes confinés à un seul étage.

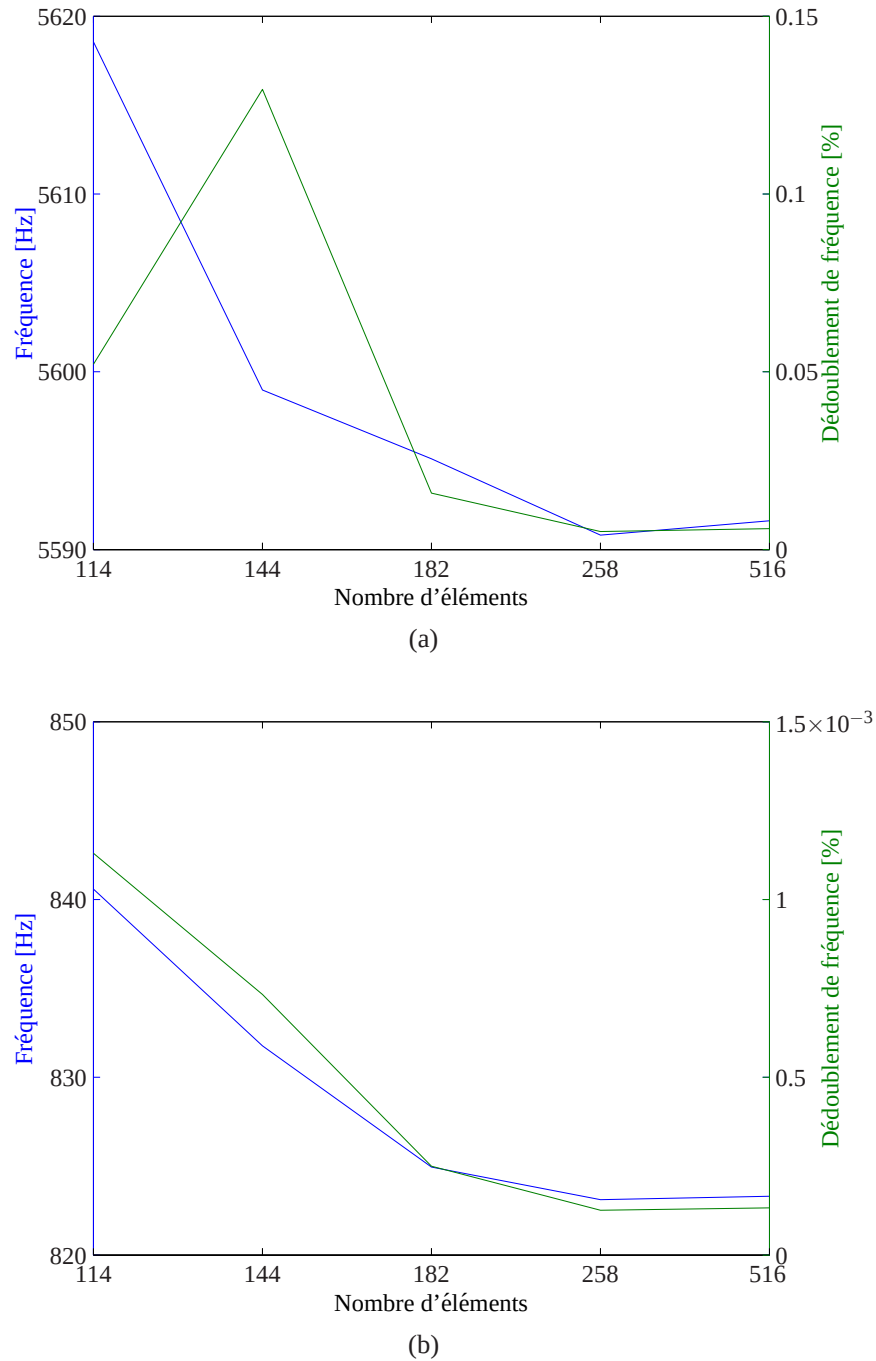


FIG. 1.8: Fréquence et dédoublement en fonction du nombre d'éléments à l'interface inter-étages, (a) mode de disque multi-étages ; (b) mode d'aube confiné à l'étage 1

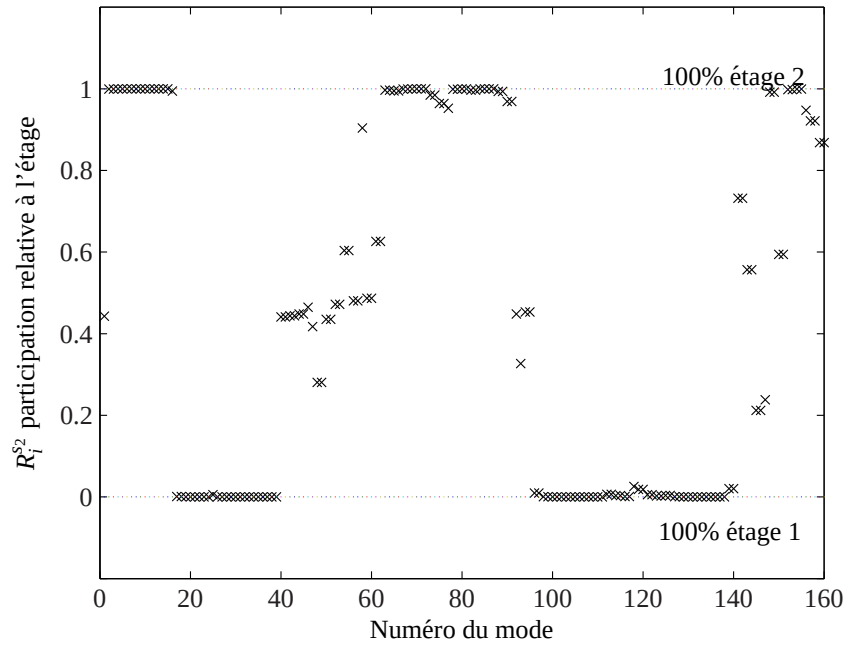


FIG. 1.9: Participation au mouvement relatif à chaque étage pour les 160 premiers modes

1.2.2 Déformées modales multi-étages

Pour chaque mode on détermine la participation relative au mouvement de chaque étage. Soit $\mathbf{U}_i$ le i -ème mode en coordonnées physiques issu du calcul sur la structure complète. Ce vecteur peut être partitionné pour obtenir explicitement les composantes correspondant à chaque étage :

$$\mathbf{U}_i = \left\{ \mathbf{U}_i^{s1} \quad \mathbf{U}_i^{s2} \right\}^T \quad (1.32)$$

La norme du déplacement est ensuite utilisée pour déterminer la participation relative au mouvement de chaque étage R_i^{s1} et R_i^{s2} :

$$R_i^{s1} = \frac{\|\mathbf{U}_i^{s1}\|}{\|\mathbf{U}_i\|}, \quad R_i^{s2} = \frac{\|\mathbf{U}_i^{s2}\|}{\|\mathbf{U}_i\|} \quad (1.33)$$

Les participations sont montrées FIG.1.9 pour les 160 premiers modes. On observe que beaucoup de modes sont confinés à un seul étage, néanmoins pour certains modes le déplacement est reparti sur les deux étages. Les modes d'aube restent particulièrement confinés sur un des deux étages.

Le dédoublement des paires de fréquences multi-étages constaté n'entraîne pas de lo-

calisation. L'énergie pour les modes multi-étages reste bien répartie circonférentiellement sur la structure. De ce fait, la représentation par nombre de diamètres nodaux apparaît adaptée au cas multi-étages.

Une analyse prenant en compte la répartition de la déformation relative sur chaque étage et le nombre de changements de signe en circonférentiel peut permettre de déterminer le diamètre nodal dominant des modes. Cependant, une telle analyse reste difficile à appliquer et sera peu exploitable pour les modes dont l'énergie de déformation est répartie sur plusieurs étages.

Une alternative pour déterminer le nombre de diamètres nodaux des modes issus d'un calcul complet consiste à déterminer la composante cyclique prédominante. Dans ce but, les déplacements de chaque étage $\mathbf{U}_i^{s_1}$ et $\mathbf{U}_i^{s_2}$ sont partitionnés d'avantage pour obtenir explicitement les déplacements des secteurs composant les étages :

$$\mathbf{U}_i^{s_j} = \left\{ \mathbf{U}_{1,i}^{s_j} \quad \mathbf{U}_{2,i}^{s_j} \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{n_j,i}^{s_j} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N_j,i}^{s_j} \right\}^T \quad (1.34)$$

avec $j = 1, 2$.

L'inverse de la transformé de Fourier discrète, équation (1.3), permet d'obtenir les composantes cycliques $\tilde{\mathbf{U}}_{k_j,i}^{s_j}$ associées aux ordres $k_j = 0, \dots, \lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor$.

Le nombre de diamètres nodaux assigné à chaque mode i correspond à l'ordre de Fourier de la composante cyclique prédominante quand ils sont normalisés tels que :

$$\max_{s_j=1,2} \left(\max_{k_j=0,\dots,\lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor} \left\| \tilde{\mathbf{U}}_{k_j,i}^{s_j} \right\| \right) = 1 \quad (1.35)$$

La FIG.1.10 montre les fréquences multi-étages superposées aux résultats correspondants aux étages isolés. Les fréquences multi-étages sont présentées en fonction de l'ordre de Fourier prédominant. La proximité en fréquence avec certaines familles de modes mono-étages apparaît et suggère l'existence des familles de modes d'aubes peu sensibles aux couplages multi-étages. On constate également que les fréquences associées aux familles de disques multi-étages sont légèrement plus faibles que les fréquences de disque mono-étages. Ceci est du aux conditions aux limites choisies pour les calculs mono-étages (encastrement à l'interface inter-étages). On constate encore que les fréquences multi-étages proches des lignes montantes, qui correspondent aux familles de disque, sont légèrement plus faibles que les fréquences de disque mono-étages. Les modes de disque sont plus sensibles aux effets multi-étages et l'anneau inter-étages rajoute de la flexibilité

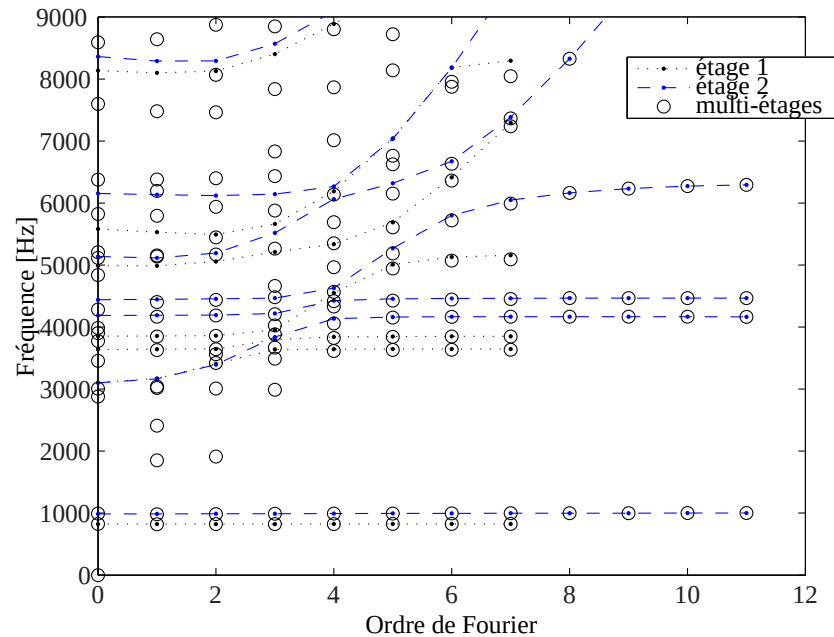


FIG. 1.10: Superposition des fréquences multi-étages et fréquences correspondant aux étages isolés.

au système par rapport aux étages isolés.

L'information concernant le pourcentage de participation relatif à chaque étage est donnée FIG.1.11. Comme attendu les modes confinés à l'étage 1 (15 secteurs) vont jusqu'à 7 diamètres nodaux, tandis que les modes confinés à l'étage 2 (23 secteurs) vont jusqu'au 11. Les seuls modes à haut diamètres nodaux sont des modes d'aube appartenant aux accumulations de fréquences qui restent confinées sur un seul étage. Des modes dont la déformée est répartie sur les deux étages sont observés pour les bas diamètres.

La FIG.1.12 montre les fréquences multi-étages pour les 5 premiers diamètres nodaux dans la plage de fréquences [2800,5000] Hz. Par inspection des déformées modales et à l'aide de l'indicateur de participation relatif au mouvement, des familles de modes multi-étages sont identifiées. Pour les modes dont le mouvement est très confiné à un seul étage, des familles de modes d'aubes en première torsion (1T) ou en combinaison de torsion et flexion dans le plan secondaire (1T1S) sont identifiés. Pour les autres modes, on observe que l'interaction inertielle entre les disques des deux étages est à l'origine de deux familles distinctes dominées par les disques : une famille dont les deux disques se déforment en phase et l'autre dont les disques se déforment en opposition de phase. Finalement, certains modes multi-étages ne sont assimilés ni aux familles de disque ni aux familles d'aube. Il s'agit de modes de déformation globale de l'arbre pour lesquels la déformation reste

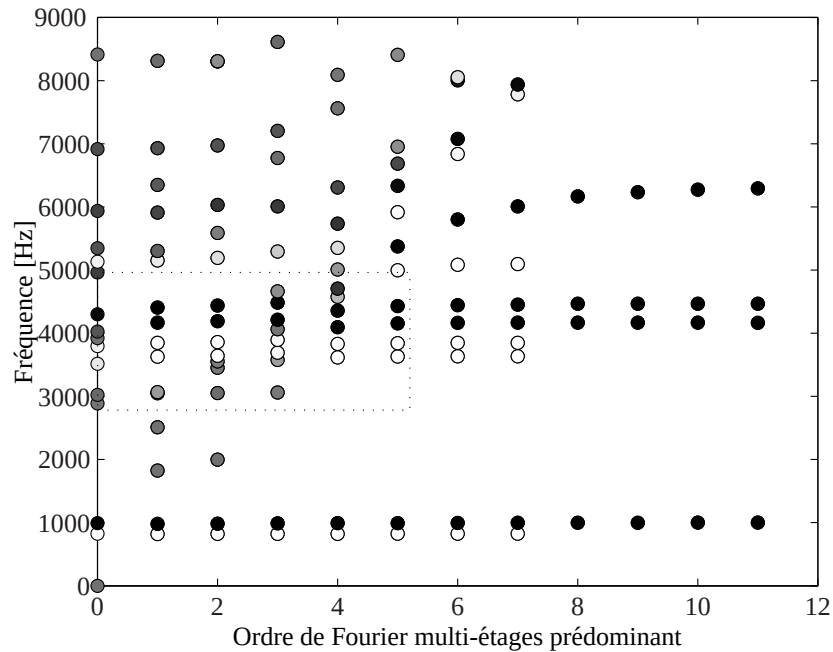


FIG. 1.11: Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)

répartie sur les deux étages.

1.2.3 Réponse forcée multi-étages

Concernant la réponse forcée, les excitations considérées sont de type ordre moteur (EO). Un facteur d'amortissement structural de 0.5% est utilisé et la force est appliquée au bout des aubes dans les directions tangentielle et axiale, par rapport au disque. La quantité choisie pour représenter les résultats est l'amplitude du déplacement, calculée comme la norme euclidienne des déplacements pour un noeud au bout des aubes, pour chaque fréquence.

En général, les modèles mono-étages sont peu fidèles pour reproduire les caractéristiques de la réponse multi-étages, comme le montrent les FIG.1.13 et FIG.1.14.

La FIG.1.13 compare la réponse à une excitation d'ordre $H = 3$ appliquée sur l'étage 1 du modèle multi-étages et la réponse du modèle mono-étage. On trouve des différences importantes entre les deux. Dans le modèle mono-étage, seul le mode d'aube (1T1S) qui correspond à 3 diamètres répond de manière significative. En effet, le fort couplage entre le mode de torsion (1T) et le mode de disque limite la réponse du mode (1T) (voir diamètre 3, FIG.1.5(b)). Ce couplage est modifié par la flexibilité ajoutée par la prise en

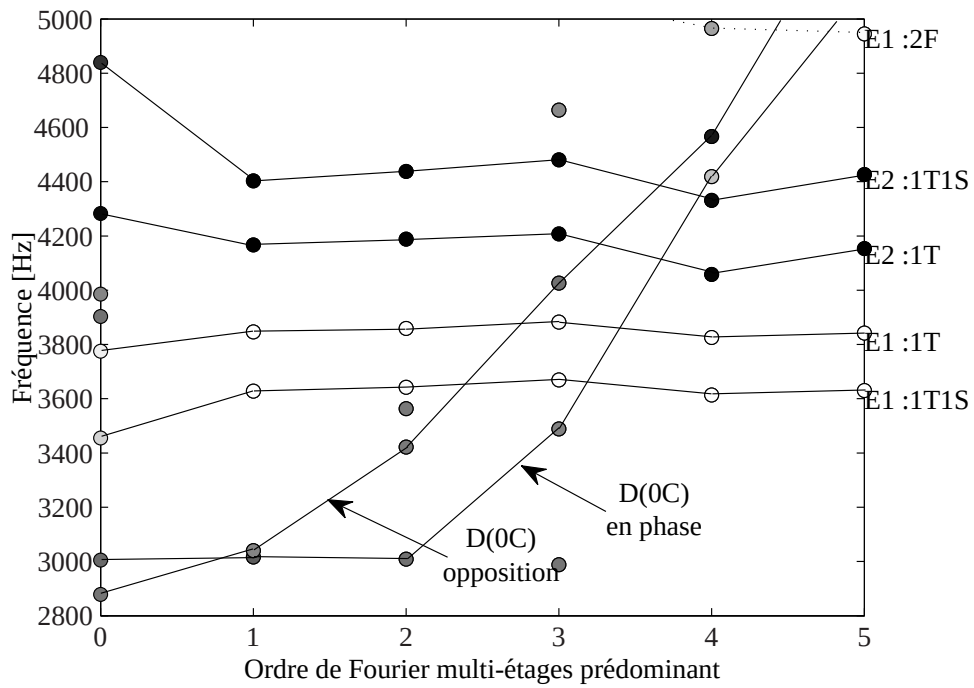


FIG. 1.12: Familles de modes multi-étages identifiées dans la plage de fréquence 2800-5000 Hz.

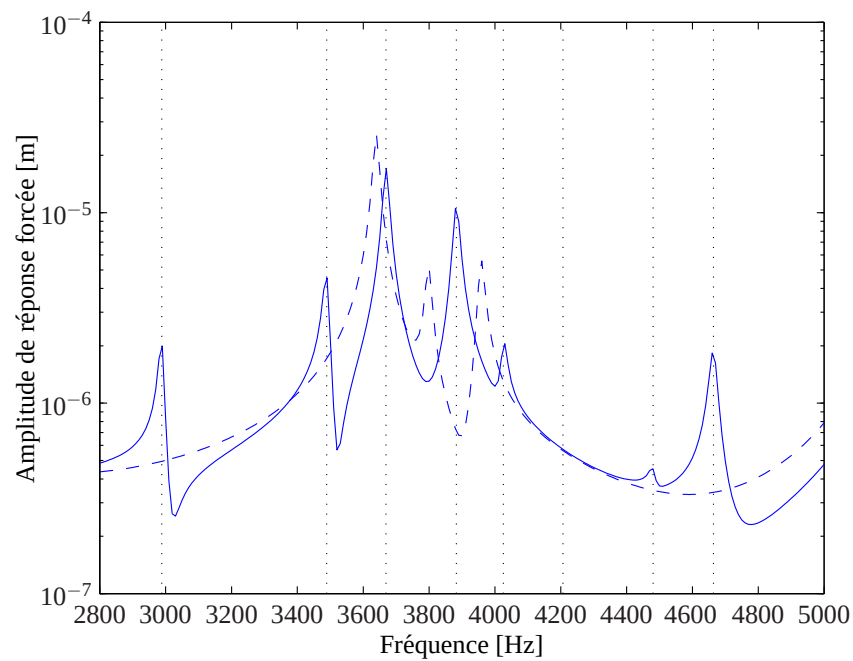


FIG. 1.13: Réponse à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 1 : (—) calcul multi-étages ; (- -) calcul étage 1 seul.

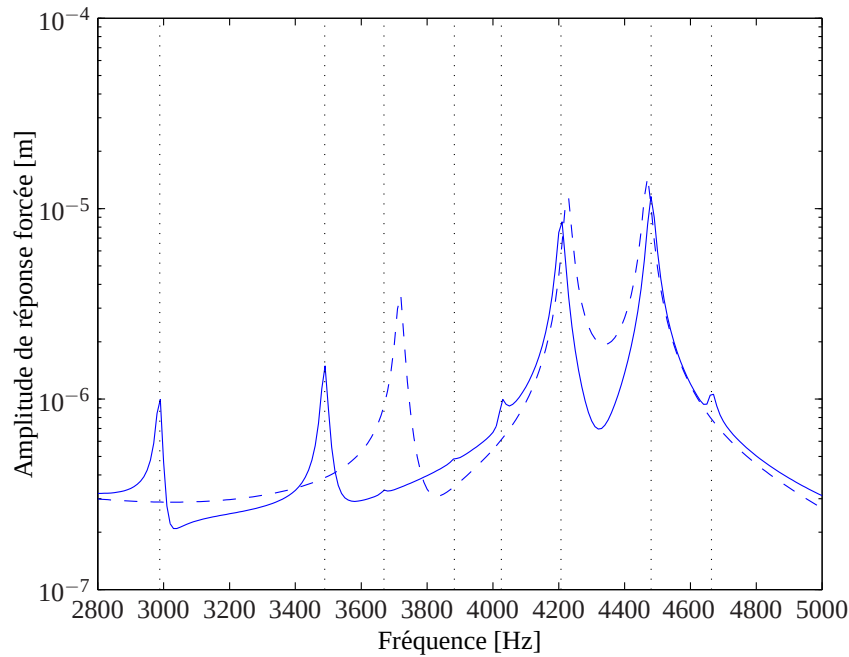


FIG. 1.14: Réponse à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 2 : (—) calcul multi-étages ; (- - -) calcul étage 2 seul.

compte de l'étage adjacent dans le modèle multi-étage. En particulier, le couplage entre le mode (E1 :1T) et le mode (D(0C) opposition), est moins fort du fait que ces deux modes sont plus éloignés en fréquence (voir FIG.1.12). Par conséquent le mode (E1 :1T) a une réponse d'amplitude plus importante dans le modèle multi-étages. On observe que les fréquences des modes concernés varient significativement entre le cas mono-étage et le cas multi-étages.

La FIG.1.14 compare la réponse à une excitation d'ordre $H = 3$ appliquée sur l'étage 2 : calcul mono-étage et calcul multi-étages. Les écarts entre les deux calculs sont moins importants que dans le cas précédent où l'excitation est appliquée sur l'étage 1. Le mode de disque du calcul mono-étage donne lieu à deux modes (D(0C) opposition) et (D(0C) en phase) en multi-étages. L'amplitude de la réponse pour ces deux modes de disque est inférieure à la réponse du mode de disque mono-étage. Par contre, la fréquence des modes (1T) et (1T1S) change très peu entre le cas mono-étage et le cas multi-étages. La réponse de ces modes est aussi très proche dans les deux cas, l'amplitude de la réponse étant légèrement inférieure dans le cas multi-étages probablement à cause de la flexibilité rajoutée par l'anneau inter-étages. Les modes (1T) et (1T1S) sont peu sensibles aux variations induites par la prise en compte de l'étage adjacent car il ne sont pas couplés disque-aube comme le montrent les FIG.1.6(b) et FIG.1.12.

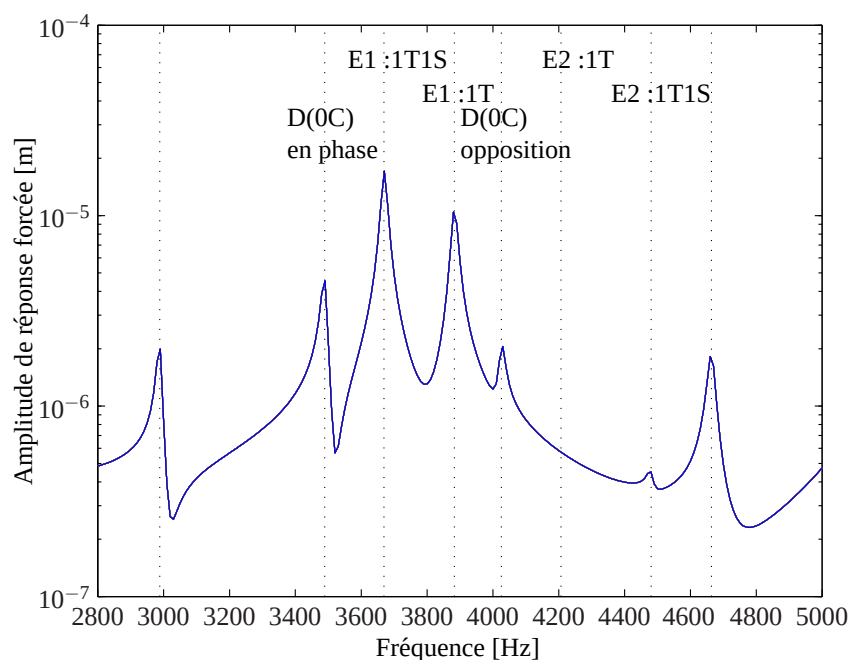


FIG. 1.15: Réponse de tous les secteurs de l'étage 1 à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliqué sur l'étage 1

Pour les calculs mono-étages, la symétrie cyclique de la structure implique que l'amplitude de la réponse est la même pour tous les secteurs avec un déphasage qui dépend de l'ordre moteur de la réponse. Dans le cas multi-étages, la structure complète n'est plus symétrique et en théorie les réponses des différents secteurs d'un étage, à une excitation ordre moteur, ne sont pas identiques. En pratique, on constate dans la FIG.1.15 que la réponse est bien identique en amplitude sur les différents secteurs de l'étage 1. L'excitation utilisée est d'ordre $H = 3$ appliquée sur l'étage 1. En revanche, la FIG.1.16 montre la réponse des différents secteurs de l'étage 2 à l'excitation d'ordre $H = 3$ appliquée sur l'étage 1. Un très léger écart est observable entre l'amplitude des secteurs, même si logiquement l'amplitude de la réponse est ici d'un ordre de magnitude inférieure.

Une force d'excitation plus réaliste se doit d'agir simultanément sur les deux étages : excitation d'un ordre moteur différent sur chaque étage, l'ordre étant déterminé par le champ de pression généré par le flux en amont de chaque étage. La FIG.1.17 montre la réponse des différents secteurs de l'étage 1 à une force excitant simultanément les deux étages. L'excitation est d'ordre moteur $H = 3$ sur l'étage 1 et $H = 4$ sur l'étage 2. Le contenu fréquentiel de la réponse est plus riche et des lignes verticales noires et bleues sont utilisées pour indiquer les fréquences des modes à 3 et 4 diamètres respectivement. Comme attendu, les pics d'amplitude plus importantes correspondent aux modes d'aube

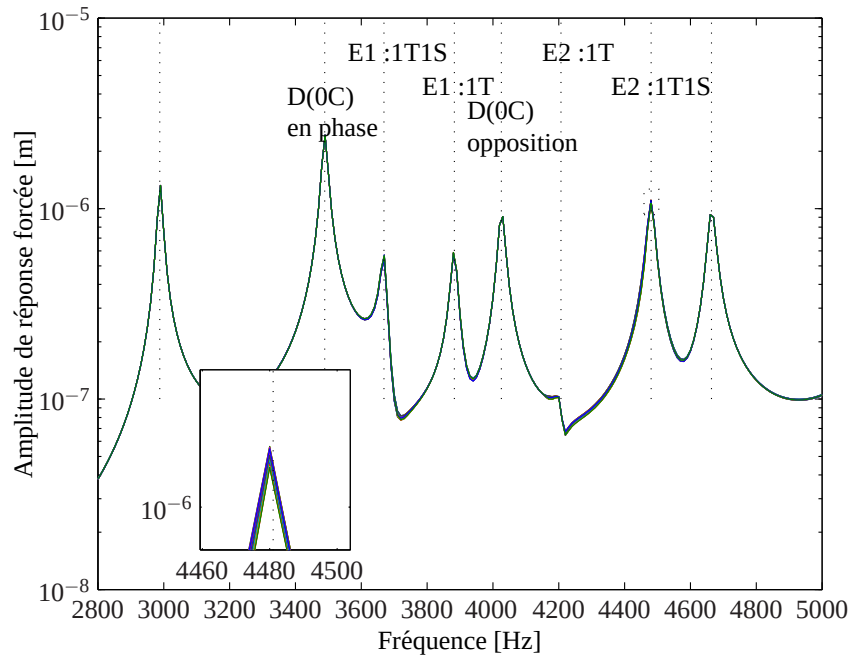


FIG. 1.16: Réponse de tous les secteurs de l'étage 2 à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliqué sur l'étage 1

(E1 :1T1S) et (E1 :1T) à 3 diamètres. L'amplitude de la réponse n'est pas identique sur les différents secteurs d'un étage car elle peut être vue comme la superposition de la réponse à deux excitations d'ordre moteur différent, même si elle est calculée de manière directe. Des écarts d'amplitude sont observés entre les différents secteurs, cependant ces écarts restent faibles et confinés aux anti-résonances.

1.3 Méthode de symétrie cyclique multi-étages

Un ensemble composé de plusieurs étages comportant un nombre différent de secteurs n'est plus cyclique. Dans ce cas la projection de chaque étage dans sa propre base cyclique ne permet pas d'obtenir des problèmes découplés car chaque ordre de Fourier d'un étage peut théoriquement se coupler à n'importe quel ordre de Fourier des autres étages.

La méthodologie de symétrie cyclique multi-étages retenue consiste à modéliser chaque étage dans sa propre base cyclique et à utiliser une hypothèse sur le couplage des ordres de Fourier des différents étages permettant d'obtenir des problèmes découplés en fonction des ordres de Fourier même si l'ensemble n'est pas cyclique.

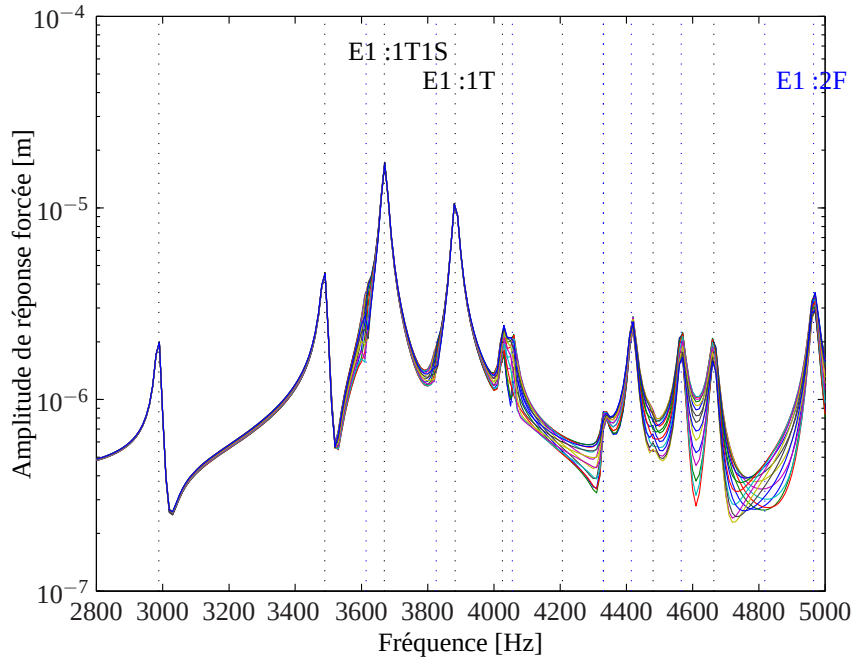


FIG. 1.17: Réponse des secteurs de l'étage 1 à une excitation d'ordre moteur $H = 3$ sur l'étage 1 et $H = 4$ sur l'étage 2

1.3.1 Couplage des ordres de Fourier dans les calculs multi-étages

Dans ce paragraphe, on montre que les ordres de Fourier des différents étages sont couplés entre eux du fait du couplage inter-étages.

Les deux étages sont tout d'abord considérés comme n'étant pas couplés, i.e. chaque étage comporte l'ensemble des ddl à la frontière inter-étages. Cette frontière inter-étages est définie sur un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie. Les deux étages adjacents partagent la frontière inter-étages car dans un étage elle correspond à la frontière en aval et dans l'autre à la frontière en amont de la machine. Ainsi, les matrices des deux étages adjacents $\underline{\mathbf{Z}}^S = \{\underline{\mathbf{M}}^S, \underline{\mathbf{K}}^S, \underline{\mathbf{C}}^S\}$ et le vecteur des déplacements associé $\underline{\mathbf{u}}^S$ ont la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{Z}}^S = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Z}}^{s_1} & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{Z}}^{s_2} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}}^S = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{s_1} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_2} \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

où les indices s_1 et s_2 indiquent que les quantités appartiennent aux étages 1 et 2 respectivement.

La transformation qui définit le changement entre la base physique et la base cyclique

complexe pour l'ensemble s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}^S = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{s_1} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{s_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{N_1} \otimes \mathbf{I}_{m_1}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{E}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{s_1} \\ \mathbf{u}^{s_2} \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

et la projection des matrices structurales de l'ensemble dans cette base cyclique donne simplement :

$$\tilde{\mathbf{Z}}^S = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{N_1}^* \otimes \mathbf{I}_{m_1}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{E}_{N_2}^* \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{s_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}^{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{N_1} \otimes \mathbf{I}_{m_1}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{E}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Comme le montre l'équation (1.18), les ordres de Fourier de chaque étage ne sont pas couplés par le changement en base cyclique et l'équation (1.38) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{Z}}^S = \begin{bmatrix} \text{blocdiag}_{k_1=\{0,\dots,N_1-1\}}(\tilde{\mathbf{Z}}_{k_1}^{s_1}) & 0 \\ 0 & \text{blocdiag}_{k_2=\{0,\dots,N_2-1\}}(\tilde{\mathbf{Z}}_{k_2}^{s_2}) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Les matrices des deux étages restent encore découplées mais il est évident que des conditions aux limites inter-étages doivent être rajoutées pour obtenir les matrices assemblées multi-étages. Il convient de rajouter ces conditions avant le changement en base cyclique complexe. Dans ce but, on revient sur les matrices en base physique de l'équation (1.36) pour introduire les partitions suivantes sur les vecteurs de déplacements :

$$\mathbf{u}^{s_1} = \left\{ \mathbf{u}^{s_1,c} \quad \mathbf{u}^{s_1,ii} \quad \mathbf{u}^{s_1,d} \right\}^T, \quad \mathbf{u}^{s_2} = \left\{ \mathbf{u}^{s_2,c} \quad \mathbf{u}^{s_2,ii} \quad \mathbf{u}^{s_2,d} \right\}^T \quad (1.40)$$

où les indices c et d indiquent les restrictions aux frontières inter-étages en amont et en aval, illustrées pour un secteur de chaque étage sur la FIG.1.18.

Les conditions recherchées expriment la continuité des déplacements à la frontière partagée par les deux étages :

$$\mathbf{u}^{s_2,c} = [\mathbf{D}] \mathbf{u}^{s_1,d}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_2 \times c_2, N_1 \times d_1} \quad (1.41)$$

où la matrice $\mathbf{D}$ permet d'assurer la compatibilité des discrétisations à l'interface. Dans le cas où les maillages sont coïncidents $N_1 \times d_1 = N_2 \times c_2$ et $\mathbf{D}$ est une matrice booléenne qui permet d'associer directement la discrétisation à l'interface entre les deux étages. Autrement, $\mathbf{D}$ est dérivée des équations de compatibilité cinématique (multi point constraints)

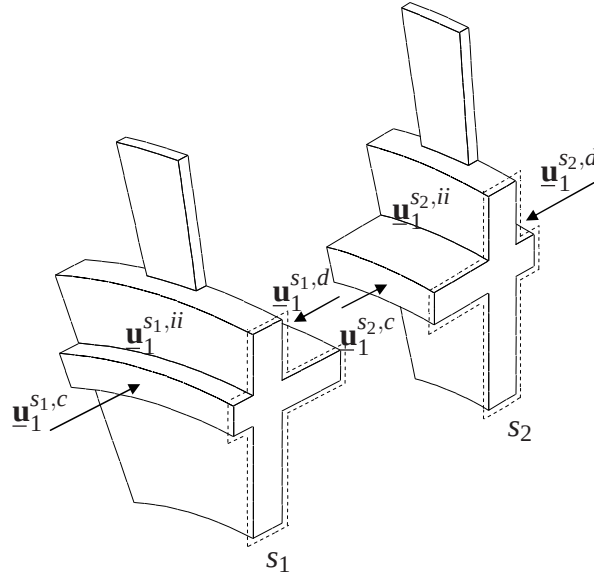


FIG. 1.18: Paire d'étages adjacents $[s_1, s_2]$, représentés par leur secteur de référence

appliquées sur l'interface inter-étages.

L'assemblage consiste à éliminer de la formulation les ddl redondants à l'aide d'une matrice de passage $\mathbf{P}_{(\mathbf{D})}$:

$$\underline{\mathbf{u}}^S = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{s_1,c} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_1,ii} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_1,d} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_2,c} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_2,ii} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_2,d} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & \\ & \mathbf{I} & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \mathbf{D} & & \\ & & & & \mathbf{I} & \\ & & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^{s_1,c} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_1,ii} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_1,d} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_2,ii} \\ \underline{\mathbf{u}}^{s_2,d} \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}_{(\mathbf{D})}] \underline{\mathbf{u}}^S \quad (1.42)$$

où on choisi d'écrire la frontière $\underline{\mathbf{u}}^{s_2,c}$ en fonction de $\underline{\mathbf{u}}^{s_1,d}$.

Les matrices assemblées multi-étages $\underline{\mathbf{Z}}^S$ en base physique s'obtiennent à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}_{(\mathbf{D})}$:

$$\underline{\mathbf{Z}}^S = [\mathbf{P}_{(\mathbf{D})}]^T \underline{\mathbf{Z}}^S [\mathbf{P}_{(\mathbf{D})}] = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Z}}^{s_1} & \underline{\mathbf{Z}}^{s_{12}} \\ \underline{\mathbf{Z}}^{s_{21}} & \underline{\mathbf{Z}}^{s_2} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

dont les sous-blocs extra-diagonaux comportent les termes associés aux couplages entre les deux étages.

Puisque les étages ne partagent pas le même nombre de secteurs, les équations

de continuité inter-étages qui permettent l'assemblage ne sont pas périodiques. Par conséquence, la projection des matrices $\underline{\underline{Z}}^S$ dans la base cyclique de l'ensemble entraîne le couplage entre les ordres de Fourier de l'étage 1 et les ordres de Fourier de l'étage 2 :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\underline{Z}}}^S &= \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{N_1}^* \otimes \mathbf{I}_{m_1}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{E}_{N_2}^* \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Z}}^{S_1} & \underline{\underline{Z}}^{S_{12}} \\ \underline{\underline{Z}}^{S_{21}} & \underline{\underline{Z}}^{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{N_1} \otimes \mathbf{I}_{m_1}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{E}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{blocdiag}_{k_1=\{0,\dots,N_1-1\}}(\tilde{\underline{\underline{Z}}}^{S_1}) & (\mathbf{E}_{N_1}^* \otimes \mathbf{I}_{m_1}) \underline{\underline{Z}}^{S_{12}} (\mathbf{E}_{N_2} \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \\ (\mathbf{E}_{N_2}^* \otimes \mathbf{I}_{m_2}) \underline{\underline{Z}}^{S_{21}} (\mathbf{E}_{N_1} \otimes \mathbf{I}_{m_1}) & \text{blocdiag}_{k_2=\{0,\dots,N_2-1\}}(\tilde{\underline{\underline{Z}}}^{S_2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.44)$$

où les sous-blocs extra-diagonaux sont non nuls.

1.3.2 Hypothèse sur le découplage des ordres de Fourier

Dans le cas de deux étages adjacents composés de $N_1 < N_2$ secteurs respectivement, il suffit de considérer les ordres de Fourier $k_1 = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$ et $k_2 = 0, \dots, \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor$ et l'équation (1.44) montre qu'un ordre de Fourier k_1 peut être couplé à n'importe quelle ordre de Fourier k_2 donnant lieu à des problèmes couplés qui n'induisent pas de réduction. Dans le but d'obtenir des sous-problèmes découplés, la méthode choisie propose de retenir seulement les couplages entre les ordres de Fourier des différents étages qui sont supposés directement compatibles faisant l'hypothèse que les autres couplages ont un effet négligeable.

Les ordres de Fourier des différents étages qui correspondent au même ordre sont naturellement supposés compatibles. Pour les ordres de Fourier qui n'ont pas de correspondant direct on utilise une règle qui consiste à les replier selon le repliement de l'étage avec le plus petit nombre de secteurs. Les ordres de Fourier repliés pour un étage particulier sont regroupés pour être considérés dans le même sous-problème que les ordres directement compatibles des autres étages.

Prenant par exemple le cas de deux étages composés de $N_1 < N_2$ secteurs respectivement. Pour les ordres de Fourier jusqu'à $\lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$ le choix naturel est de supposer que $k_1 = k_2$ sont compatibles, comme le montre la FIG.1.19(a). Chaque ordre de Fourier $k_2 > \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$, n'ayant pas un correspondant direct dans l'ensemble des k_1 possibles, doit être couplé à un k_1 de rang inférieur. Ceci est accompli en supposant un repliement dans l'ensemble des k_2 qui est similaire au repliement de la série de Fourier de l'étage 1, comme montré sur les FIG.1.19(b) et 1.19(c). Les ordres de Fourier k_2 compatibles avec l'ordre de Fourier

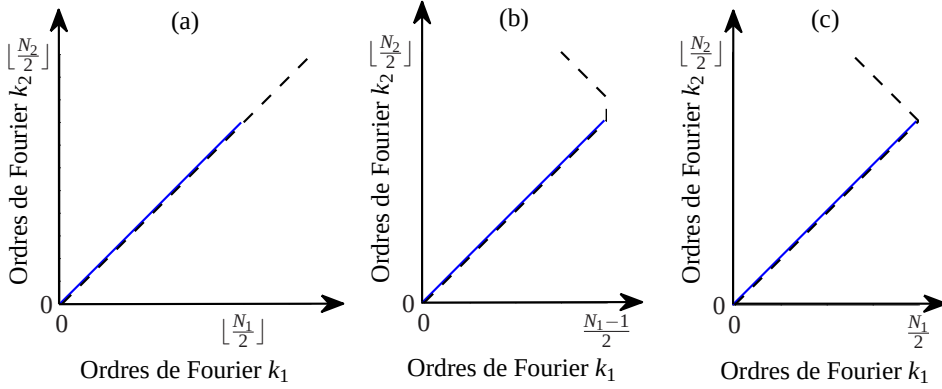


FIG. 1.19: Diagramme des ordres de Fourier k_1 (—) vs. ordres de Fourier k_2 (- - -). (a) Pour $k_2 > \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor$ il n'y a pas de correspondant direct dans l'ensemble des k_1 possibles, (b) ordres de Fourier supposés compatibles pour N_1 impair, (c) ordres de Fourier supposés compatibles pour N_1 pair.

$k_1 = p$ sont donc :

$$k_2(p) = \begin{cases} \{p, N_1 - p\} & \text{si } N_1 - p \leq \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor, \\ p & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.45)$$

Les ordres de Fourier de l'étage avec le plus petit nombre de secteurs déterminent le nombre de sous-problèmes à résoudre et pour cela sont appelés ordres de Fourier multi-étages fondamentaux $k_f = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$, pour $N_1 < N_2$.

1.3.3 Formulation relative aux ordres de Fourier de chaque étage

Pour chaque ordre fondamental k_f , ici $k_f = p$, on retient les sous-blocs de $\tilde{\mathbf{Z}}^S$ qui correspondent aux ordres supposés compatibles pour chaque étage :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{k_f=p}^S = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{k_1=p}^{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Z}}_{k_2=p}^{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{Z}}_{k_2=N_1-p}^{s_2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_{k_f=p}^S = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{k_1=p}^{s_1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{k_2=p}^{s_2} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{k_2=N_1-p}^{s_2} \end{Bmatrix} \quad (1.46)$$

où le sous-bloc et le terme associés à l'ordre $N_1 - p$ n'existent que si $N_1 - p \leq \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor$, i.e. dans le cas où deux ordres de Fourier de l'étage 2 sont considérés simultanément du fait du repliement.

Les conditions de continuité inter-étages sont reformulées en fonction des ordres de

Fourier de chaque étage à l'aide de l'équation (1.5) :

$$\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \mathbf{e}_{k_2}^{N_2} \otimes \tilde{\mathbf{u}}_{k_2}^{s_2,c} = [\mathbf{D}] \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \mathbf{e}_{k_1}^{N_1} \otimes \tilde{\mathbf{u}}_{k_1}^{s_1,d} \quad (1.47)$$

et tenant en compte l'hypothèse de ordres de Fourier découplés, pour l'ordre de Fourier fondamental $k_f = p$:

$$\sum_{k_2=\{p, N_1-p\}} (\mathbf{e}_{k_2}^{N_2} \otimes \mathbf{I}_{c_2}) \tilde{\mathbf{u}}_{k_2}^{s_2,c} = [\mathbf{D}] (\mathbf{e}_{k_1=p}^{N_1} \otimes \mathbf{I}_{d_1}) \tilde{\mathbf{u}}_{k_1=p}^{s_1,d} \quad (1.48)$$

L'assemblage se fait à l'aide d'une matrice de passage pour chaque ordre de Fourier fondamental k_f , ici $k_f = p$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{k_f=p}^S = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_1,c} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_1,ii} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_1,d} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_2,c} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_2,ii} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_2,d} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{N_1-p}^{s_2,c} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{N_1-p}^{s_2,ii} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{N_1-p}^{s_2,d} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & & & & \\ & \mathbf{I} & & & & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & & & & \\ & & \mathcal{D}_{p,p}^{2,1} & & & & & & \\ & & & \mathbf{I} & & & & & \\ & & & & \mathbf{I} & & & & \\ & & \mathcal{D}_{N_1-p,p}^{2,1} & & & & & & \\ & & & & & \mathbf{I} & & & \\ & & & & & & \mathbf{I} & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_1,c} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_1,ii} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_1,d} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_2,c} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_2,ii} \\ \tilde{\mathbf{u}}_p^{s_2,d} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{N_1-p}^{s_2,c} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{N_1-p}^{s_2,ii} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{N_1-p}^{s_2,d} \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}_{k_f(\mathbf{D})}] \tilde{\mathbf{u}}_{k_f=p}^S \quad (1.49)$$

avec

$$\mathcal{D}_{k_2,k_1}^{2,1} = (\mathbf{e}_{k_2}^{N_2} \otimes \mathbf{I}_{c_2})^* [\mathbf{D}] (\mathbf{e}_{k_1}^{N_1} \otimes \mathbf{I}_{d_1}) \quad (1.50)$$

et les sous-blocs et les termes associés à l'ordre $N_1 - p$ n'existent que si $N_1 - p \leq \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor$.

Les matrices assemblées s'obtiennent à l'aide de la matrice de passage $\mathbf{P}_{k_f(\mathbf{D})}$:

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k_f=p}^S = [\mathbf{P}_{k_f(\mathbf{D})}]^* [\tilde{\mathbf{z}}_{k_f=p}^S] [\mathbf{P}_{k_f(\mathbf{D})}] \quad (1.51)$$

Si tous les ordres de Fourier à considérer dans un sous-problème utilisent des transformations réelles ($k_1 = 0$ ou $k_1 = \frac{N_1}{2}$ en même temps que $k_2 = 0$ ou $k_2 = \frac{N_2}{2}$) on obtient des matrices réelles qui donnent lieu à des fréquences simples. Inversement, si tous les ordres de Fourier à considérer dans un sous-problème utilisent des transformations complexes on obtient des matrices complexes et des fréquences doubles. Dans le cas où on doit considérer dans le même sous-problème des transformations réelles et des transformations complexes, il convient de séparer les parties réelles et imaginaires avant de faire le couplage inter-étages. Ceci permet d'obtenir directement des fréquences simples et des fréquences doubles et garantit que le nombre total de fréquences en symétrie cyclique multi-étages correspond au nombre de fréquences du calcul complet.

1.3.3.1 Analyse modale

L'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages permet d'obtenir la réponse modale du système non-amorti à partir de la solution des problèmes découplés pour chaque ordre de Fourier fondamental $k_f = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$

$$(\underline{\tilde{\mathbf{K}}}_{k_f}^S - \omega^2 \underline{\tilde{\mathbf{M}}}_{k_f}^S) \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_{k_f}^S = 0 \quad (1.52)$$

Les quantités en coordonnées cycliques $\underline{\tilde{\mathbf{U}}}_{k_f}$ sont transformés en coordonnées physiques de la structure complète à l'aide la transformée inverse de Fourier. Prenant l'ordre fondamental $k_f = p$ avec $N_1 - p \leq \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$, la transformation qui permet d'obtenir les quantités sur la structure complète à la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{U}}^S = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_p^{N_1} \otimes \mathbf{I}) & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{e}_p^{N_2} \otimes \mathbf{I}) & (\mathbf{e}_{N_1-p}^{N_2} \otimes \mathbf{I}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_p^{s_1} \\ \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_p^{s_2} \\ \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_{N_1-p}^{s_2} \end{Bmatrix} = \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_{k_f=p}^S \quad (1.53)$$

où les ordres de Fourier du même étage couplés du fait du repliement (ici $k_2 = \{p, N_1 - p\}$) sont superposés.

Comme dans le cas de symétrie cyclique classique, les matrices complexes donnent lieu à des fréquences doubles associées à des paires de vecteurs propres complexes conjugués. On peut obtenir une paire de modes réels à partir des paires de modes com-

plexes en prenant séparément les parties réelles et imaginaires après la transformation sur la structure complète.

Le diamètre nodal associé à chaque mode correspond à l'ordre de Fourier de la composante généralisée prédominante dans le mouvement, déterminée par la norme euclidienne des déplacements.

1.3.3.2 Réponse forcée

Avec la supposition de mouvement harmonique et un amortissement structural, l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages permet de décomposer le problème sur la structure complète :

$$(\omega^2 \underline{\mathbf{M}} + (j\eta + 1) \underline{\mathbf{K}}) \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (1.54)$$

en des problèmes découplés pour les ordres de Fourier fondamentaux $k_f = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$:

$$(\omega^2 \tilde{\underline{\mathbf{M}}}_{k_f} + (j\eta + 1) \tilde{\underline{\mathbf{K}}}_{k_f}) \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_{k_f} = \tilde{\underline{\mathbf{f}}}_{k_f} \quad (1.55)$$

où ω est la pulsation de l'excitation et η le facteur d'amortissement.

Le vecteur des forces extérieures est transformé dans la base cyclique de l'ensemble multi-étages à l'aide de l'équation (1.37). Pour chaque ordre de Fourier fondamental $k_f = p$, le vecteur d'excitation $\tilde{\underline{\mathbf{f}}}_{k_f}$ s'obtient par assemblage des ordres de Fourier supposés compatibles à l'aide de l'équation (1.49).

Comme dans le cas de symétrie cyclique simple, une excitation d'ordre moteur ne pourra exciter que les modes à diamètres nodaux qui correspondent à l'ordre de l'excitation. Dans le cas multi-étages une excitation d'ordre moteur différent peut être appliquée sur chaque étage. Les sous-problèmes associés aux ordres fondamentaux k_f qui comprennent les ordres des excitations sont résolus séparément. La réponse pour chaque ordre k_f est transformée en coordonnées physiques de la structure multi-étages complète à l'aide de l'équation (1.53). La solution finale s'obtient par superposition de la réponse en coordonnées physiques pour les différents ordres fondamentaux k_f .

Les hypothèses utilisées par la méthode de calcul présentée sont a priori fortes et la littérature ne donne que peu d'éléments de validation. En conséquence, afin de conforter sont utilisation, le chapitre suivant s'attache à tester de manière approfondie sa robustesse.

Chapitre 2

Robustesse de la symétrie cyclique multi-étages

Sommaire

2.1	Analyse détaillée de la nature des modes des systèmes multi-étages.	49
2.1.1	Repliement lié au nombre de secteurs par étage	51
2.1.2	Contenu harmonique des modes. Modes multi-harmoniques	54
2.1.3	Modes multi-étages	58
2.2	Outils utilisés pour l'analyse de performance de la symétrie cyclique multi-étages	60
2.2.1	Écarts en fréquences propres	60
2.2.2	Comparaison des déformées modales	62
2.2.3	Écarts sur la réponse forcée	64
2.3	Analyse de différentes configurations	64
2.3.1	Modèles de type A	68
2.3.2	Modèles de type B	71
2.3.3	Modèle de type C	73

2. Robustesse de la symétrie cyclique multi-étages

La technique de symétrie cyclique multi-étages apparaît performante, alors même que des hypothèses importantes sont faites au niveau des ordres de Fourier des différents étages qui peuvent être couplés. En particulier, l'hypothèse retenue implique que la plupart des ordres de Fourier restent découplés et que seuls les composantes de Fourier associées aux ordres supposés compatibles restent couplés. Les ordres compatibles sont issus du repliement à partir de l'ordre de Fourier maximal de l'étage avec le plus petit nombre de secteurs.

Dans les travaux de Laxalde et al. [40, 41] un seul cas test est présenté pour valider la méthode, aussi bien dans les publications que dans le mémoire de thèse [90] (une application industrielle est aussi présentée mais elle n'est pas validée à partir des résultats d'un calcul complet). Le cas test considéré comporte deux étages de 24 et 45 secteurs. Il présente une symétrie cyclique d'ensemble puisqu'il peut être considéré comme étant formé par 3 secteurs regroupant 8 aubes d'un étage et 15 de l'autre. En ce sens, il peut présenter une particularité à priori favorable pour la méthode développée alors qu'un cas plus défavorable serait constitué de deux étages avec un nombre de secteurs premiers entre eux. Autre élément à considérer, les validations présentées portent sur les fréquences propres et l'amplitude de la réponse forcée mais ne s'occupent pas de valider les déformées modales pourtant importantes dans les mécanismes de réponse.

L'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages est utilisée par Sternchüss et al [42, 43] pour construire une base modale permettant l'obtention par synthèse modale d'un modèle réduit du système multi-étages. Pour la construction de cette base modale seuls les ordres de Fourier inférieurs pour lesquelles il n'y a pas de repliement sont utilisés. L'étude ne présente pas de validation des calculs en symétrie cyclique multi-étages par rapport au calcul complet, et se concentre plutôt sur la performance du modèle réduit.

Une méthodologie de réduction du modèle qui utilise les calculs en symétrie cyclique multi-étages est proposée par Laxalde et Pierre [46]. Il s'agit d'une réduction multi-niveaux qui implique la projection des différents sous-problèmes associés aux ordres de Fourier multi-étages dans leurs bases modales propres. Les problèmes réduits en coordonnées modales sont rassemblés dans le but de pouvoir introduire du désaccordage. Ils présentent une validation du modèle réduit désaccordé par rapport au modèle complet. Néanmoins, deux points sont à relever sur cette validation. Le premier est que l'exemple utilisé est composé de deux étages à 36 et 60 secteurs qui présente ici aussi une symétrie cyclique d'ensemble (12 secteurs regroupant 3 aubes d'un étage et 5 aubes de l'autre). Le deuxième constat est que la bande fréquentielle choisie pour la validation comporte seulement une famille de modes d'aubes confinés sur un étage. Donc, cette validation n'a

pas pour vocation de montrer la capacité de la méthode à reproduire des modes dont le mouvement serait reparti sur plusieurs étages, ni des modes présentant un couplage fort entre le disque et les aubes.

Le travail présenté ici propose de tester la robustesse de la méthode de symétrie cyclique multi-étages par évaluation de sa performance sur des systèmes dont la configuration paraît à priori défavorable pour l'hypothèse retenue. Les configurations étudiées se basent sur un modèle éléments finis paramétré de 2 roues aubagées. Des changements sur les paramètres géométriques permettent de trouver des configurations présentant un nombre de secteurs premiers entre eux et des modes globaux du système. Un modèle de deux roues aubagées avec nageoires inter-aubes aussi qu'un modèle composé de deux disques de type *impeller* sont également étudiés.

2.1 Analyse détaillée de la nature des modes des systèmes multi-étagés.

Il s'agit ici de préciser certains concepts concernant les modes des systèmes multi-étagés afin de pouvoir mieux cerner les caractéristiques qui peuvent potentiellement influencer la performance de la méthode. Seront considérés, la manière de définir les modes multi-étages, leurs contenus harmoniques et le phénomène spécifique de repliement (*aliasing*).

Le modèle multi-étages introduit dans le chapitre précédent (FIG.1.4) est repris ici. On rappelle que cette structure consiste en deux étages montés sur une portion d'arbre cylindrique creux, chaque étage étant constitué d'une roue aubée. La structure complète n'est pas symétrique car le premier étage comporte 15 aubes et le deuxième 23, néanmoins, la méthode de symétrie cyclique multi-étages est potentiellement applicable puisque chaque étage considéré séparément est une structure à symétrie cyclique. La FIG.2.1 montre la discrétisation éléments finis des secteurs de référence des deux étages. Chaque secteur de référence est composé d'une aube et des portions correspondantes du disque et de l'arbre.

Les conditions aux limites retenues imposent un déplacement nul dans les directions radiale et tangentielle associées au système de coordonnées cylindriques. Elles sont appliquées au système assemblé multi-étages sur les noeuds appartenant aux frontières en extrémités amont et aval.

Les fréquences propres sont données en fonction de l'ordre de Fourier sur la FIG.1.12 du chapitre 1 et reportées ici de nouveau sur la FIG.2.2. Les résultats sont présentés sur

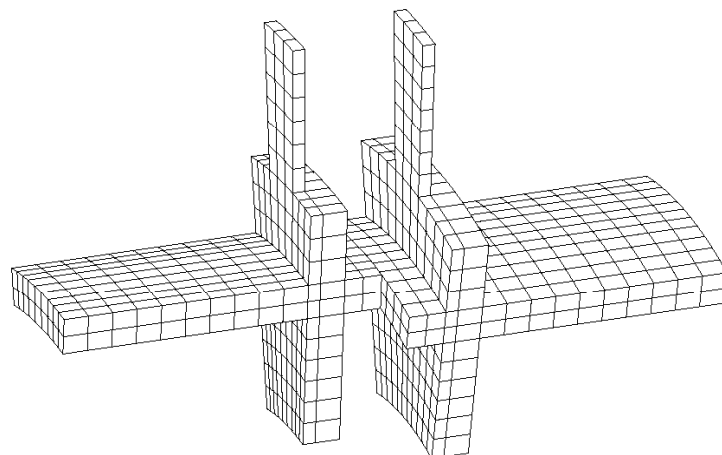


FIG. 2.1: Discretisation éléments finis des secteurs de référence des deux étages.

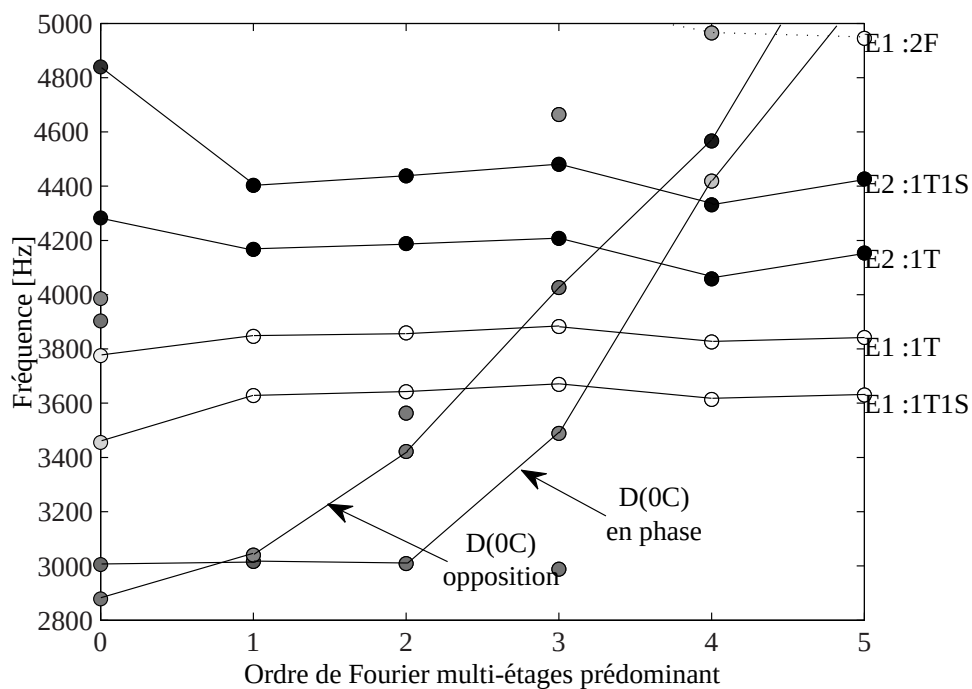


FIG. 2.2: Familles de modes multi-étages identifiés dans la plage de fréquence 2800-5000 Hz.

la plage de fréquence [2800,5000] Hz pour des diamètres nodaux allant de 0 à 5, ce qui correspond à une zone de haute densité modale. Les déformées modales ont été classées, à l'aide de la répartition de l'énergie de déformation, en familles de modes prédominants disque et modes prédominants aubes. Des modes correspondant aux déformations globales de l'arbre sont aussi observés. Les familles sont identifiées en fonction du composant prédominant selon :

- 1ère torsion des aubes de l'étage 1 (E1 :1T);
- torsion-flexion des aubes dans le plan secondaire de l'étage 1 (E1 :1T1S);
- 1ère torsion des aubes de l'étage 2 (E2 :1T);
- torsion-flexion des aubes dans le plan secondaire de l'étage 2 (E2 :1T1S);
- disques en opposition de phase, 0 cercle nodaux (D(0C));
- disques en phase, 0 cercle nodaux (D(0C) :Phase)

2.1.1 Repliement lié au nombre de secteurs par étage

L'évaluation de l'influence du nombre de secteurs des étages sur la performance de l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages se base sur des modèles avec des caractéristiques communes (longueur des aubes, épaisseur d'anneau inter-étages, distance entre les étages) mais avec un nombre de secteurs variables.

On rappelle ici l'équation (1.50) qui définit un facteur de couplage [90] entre les ordres de Fourier k_1 et k_2 de deux étages :

$$\mathcal{D}_{k_2, k_1}^{2,1} = (\mathbf{e}_{k_2}^{N_2} \otimes \mathbf{I}_{C_2})^* [\mathbf{D}] (\mathbf{e}_{k_1}^{N_1} \otimes \mathbf{I}_{d_1}) \quad (2.1)$$

Ce facteur de couplage peut être illustré numériquement à l'aide de la représentation matricielle suivante :

$$\mathcal{D}(k_2, k_1) = \left\| (\mathbf{e}_{k_2}^{N_2} \otimes \mathbf{I}_{C_2})^* [\mathbf{D}] (\mathbf{e}_{k_1}^{N_1} \otimes \mathbf{I}_{d_1}) \right\|, \quad k_1 = 0, \dots, N_1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2 \quad (2.2)$$

où $\|\bullet\|$ indique la norme matricielle et $\mathbf{D}$ la matrice identité.

Trois configurations sont étudiées :

- $N_1 = 16$ et $N_2 = 24$: Dans ce cas il existe une symétrie cyclique d'ensemble avec 8 secteurs qui regroupent 2 aubes de l'étage 1 et 3 aubes de l'étage 2 (PGCD 8 et PPCM 48).
- $N_1 = 15$ et $N_2 = 24$: Ici aussi il existe une symétrie cyclique d'ensemble avec 3 secteurs qui regroupent 5 aubes de l'étage 1 et 8 aubes de l'étage 2 (PGCD 3 et

2. Robustesse de la symétrie cyclique multi-étages

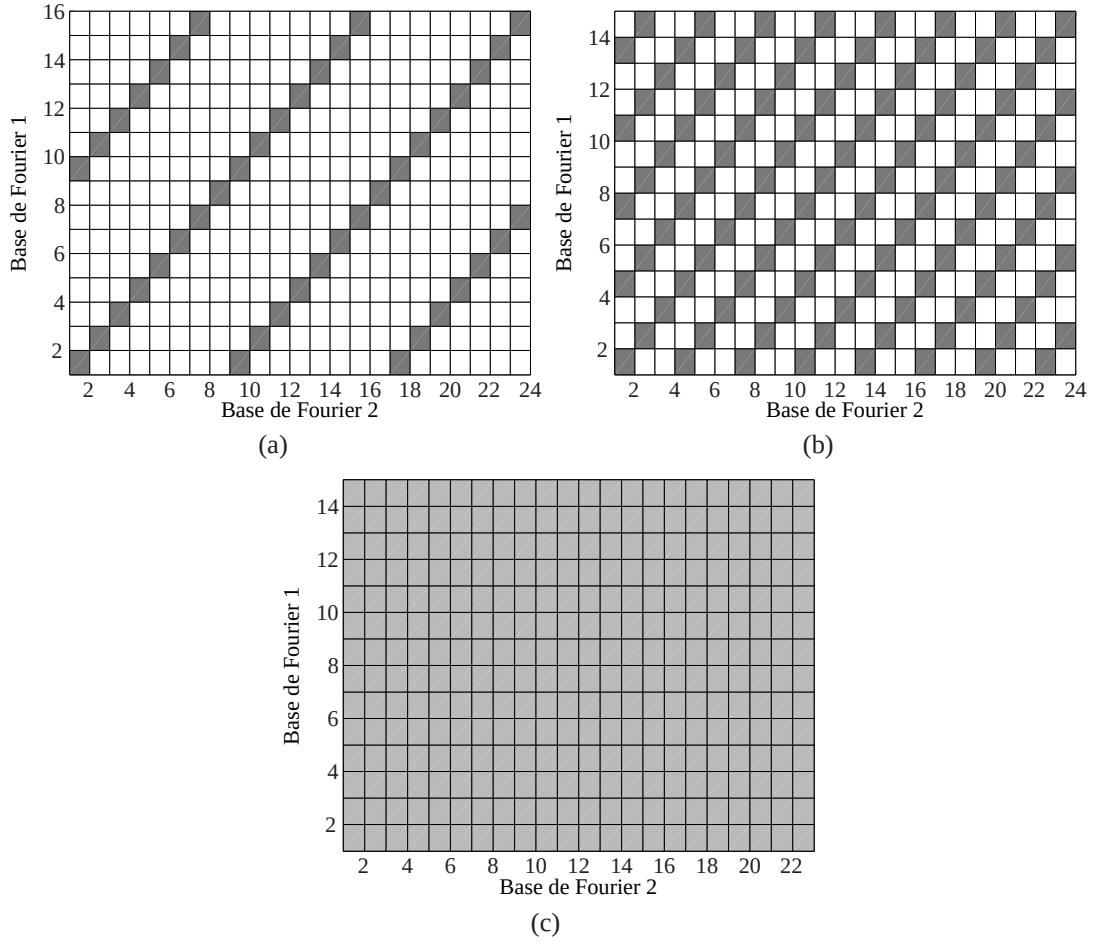


FIG. 2.3: Représentation matricielle du facteur de couplage $\mathcal{D}(k_2, k_1)$ entre les ordres de Fourier des deux bases cycliques. (a) $N_1 = 16$ et $N_2 = 24$, (b) $N_1 = 15$ et $N_2 = 24$ et (c) $N_1 = 15$ et $N_2 = 23$.

PPCM 120).

- $N_1 = 15$ et $N_2 = 23$: Dans ce cas il n'existe pas de symétrie cyclique d'ensemble, les nombres sont premiers entre eux (PGCD 1 et PPCM 345).

Les facteurs de couplage $\mathcal{D}(k_2, k_1)$ calculés selon l'équation (2.2) pour ces trois cas sont donnés FIG.2.3. Dans le cas où il existe un PGCD plus grand que l'unité entre le nombre de secteurs des deux étages, seulement certains termes de $\mathcal{D}(k_2, k_1)$ sont non nuls. Dans le cas où les nombres de secteurs sont premiers entre eux, la matrice est pleine.

L'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages implique que seulement certains couplages entre ordres de Fourier des différents étages sont retenus. Les ordres de Fourier à coupler sont définis à l'aide de l'équation (1.45). De manière générale les ordres de Fourier $k_1 = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$ et $k_2 = 0, \dots, \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor$ doivent être retenus. Les ordres de Fourier à

considérer simultanément sont donnés dans le Tableau 2.1 pour les trois cas. On constate que certains ordres de Fourier de l'étage 2 sont considérés simultanément du fait du repliement.

(a)		(b)		(c)	
k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	{3,12}	3	3
4	{4,12}	4	{4,11}	4	{4,11}
5	{5,11}	5	{5,10}	5	{5,10}
6	{6,10}	6	{6,9}	6	{6,9}
7	{7,9}	7	{7,8}	7	{7,8}
8	8				

TAB. 2.1: Ordres de Fourier couplés entre les étages selon l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages. (a) $N_1 = 16$ et $N_2 = 24$, (b) $N_1 = 15$ et $N_2 = 24$ et (c) $N_1 = 15$ et $N_2 = 23$.

La FIG.2.3 montre que plus le PPCM entre le nombre de secteurs est important, plus le nombre de couplages est grand. Cela suppose qu'un nombre de couplages plus important est négligé avec des nombres de secteurs premiers entre eux.

En comparant les erreurs en fréquence entre les calculs en symétrie cyclique multi-étages et les calculs complets, on ne constate pas de différences significatives entre les configurations. Il n'apparaît donc pas de relation évidente entre le nombre de secteurs dans les étages et la performance de la méthode pour les cas étudiés. La configuration composée de 15 et 23 secteurs sera retenue pour la suite.

L'hypothèse de symétrie cyclique suppose le calcul simultané des ordres fondamentaux et des ordres repliés. Les fréquences calculées en considérant seulement les ordres de Fourier qui ont un correspondant direct entre les deux bases sont utilisées pour évaluer l'influence des ordres repliés. Le TAB.2.2 compare les fréquences calculées pour l'ordre de Fourier fondamental multi-étages $k_f = 4$, avec et sans l'ordre replié, avec les fréquences issues du calcul complet. Il est clair que dans le cas où l'ordre de Fourier replié n'est pas pris en compte certaines fréquences ne sont pas obtenues, mais il apparaît également les modes peuvent aussi être affectés par l'oubli de la contribution de cet ordre. Les cas étudiés ne présentent pas de modes multi-harmoniques et les modes observées ont soit une contribution prédominante de l'ordre inférieur, soit une contribution

num	calcul complet [Hz]	symétrie cyclique multi-étages [Hz]	
		$(k_1 = 4, k_2 = 4)$	$(k_1 = 4, k_2 = \{4, 11\})$
1	823,948	823,87	823,87
2	823,948	823,87	823,87
3	991,049	991,05	991,05
4	991,05	991,05	991,05
5	1000,27	–	1000,46
6	1000,27	–	1000,46
7	3615,05	3613,92	3613,92
8	3615,06	3613,92	3613,92
9	3825,74	3825,53	3825,53
10	3825,74	3825,53	3825,53
11	4058,51	4058,56	4058,56
12	4058,51	4058,56	4058,56
13	4165,24	–	4165,72
14	4165,24	–	4165,72
15	4331,39	4331,41	4331,41
16	4331,39	4331,41	4331,41

TAB. 2.2: Fréquences issues des calculs complets et en symétrie cyclique multi-étages (ordre de Fourier $k_1 = p$ seul ou ordres $k_2 = p$ où $k_2 = \{p, N_1 - p\}$ considérés simultanément.

prédominante de l'ordre replié. Dans le cas où c'est l'ordre inférieur domine, la déformée modale peut être répartie sur les deux étages ou confinée sur l'étage 1. En revanche, les modes dont la contribution prédominante est celle de l'ordre replié, sont confinés à l'étage 2. Cette analyse sera détaillée dans la section 2.1.2.

2.1.2 Contenu harmonique des modes. Modes multi-harmoniques

Les méthodes de décomposition des modes en harmoniques spatiales permettent de quantifier la participation relative de chaque harmonique. Dans la littérature, ces méthodes sont utilisées pour déterminer la composante harmonique prédominante des modes issus de modèles réduits (Song et al. [38] où Sternchüss et al. [43]). On propose de les utiliser ici pour explorer les contenus harmoniques des modes multi-étages issus des calculs complets, information importante pour continuer de vérifier la pertinence de l'hypothèse de base de la méthode.

Chaque mode sera classé selon la répartition d'énergie de déformation totale associée à chaque étage. Pour le i ème mode, défini par le vecteur des déplacements sur la structure

complète $\mathbf{U}_i$, les contributions à l'énergie de déformation pour chaque étage $R_{e,i}^{s_1}$ et $R_{e,i}^{s_2}$ ont les formes suivantes :

$$R_{e,i}^{s_j} = \frac{\mathcal{E}_i^{s_j}}{\mathcal{E}_i}, \quad R_{e,i}^{s_2} = \frac{\mathcal{E}_i^{s_2}}{\mathcal{E}_i} \quad (2.3)$$

où $\mathcal{E}_i^{s_j}$ est la partie de l'énergie de déformation correspondant à l'étage j et $\mathcal{E}_i$ l'énergie de déformation totale :

$$\mathcal{E}_i^{s_j} = \mathbf{U}_i^{s_j T} [\mathbf{K}^{s_1}] \mathbf{U}_i^{s_1}, \quad \mathcal{E}_i = \mathbf{U}_i^T [\mathbf{K}] \mathbf{U}_i \quad (2.4)$$

où $\mathbf{U}_i^{s_1}$ et $\mathbf{U}_i^{s_2}$ sont les parties du vecteur de déplacement de la structure complète $\mathbf{U}_i$ qui correspondent à chaque étage.

Les manipulations des matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ associées à la structure complète sont difficiles du fait de leur tailles importantes. Il est donc proposé d'approximer la matrice de raideur $\mathbf{K}$ de la structure complète par $\mathbf{K} \approx \text{blocdiag}(\mathbf{K}^{s_1}, \mathbf{K}^{s_2})$ en faisant l'hypothèse que les termes liés aux éléments inter-étages ont une influence négligeable pour le calcul des énergies de déformation. Cette hypothèse se justifie par le fait que pour la plupart des modes, le déplacement est concentré sur les aubes et le disque et non pas sur l'interface inter-étages.

En profitant de la symétrie cyclique de chaque étage isolé, les matrices $\mathbf{K}^{s_j}$ peuvent être exprimées en coordonnées cycliques comme le montre l'équation (1.18). A partir des vecteurs $\mathbf{U}_i^{s_j}$ on peut déterminer les composantes cycliques $\tilde{\mathbf{U}}_{k_j,i}^{s_j}$ associées aux ordres $k_j = 0, \dots, \lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor$. L'énergie de déformation de chaque étage peut alors s'écrire :

$$\mathcal{E}_i^{s_j} = \sum_{k_j=0}^{\lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor} \tilde{\mathbf{U}}_{k_j,i}^{s_j T} [\tilde{\mathbf{K}}_{k_j}^{s_j}] \tilde{\mathbf{U}}_{k_j,i}^{s_j} = \sum_{k_j=0}^{\lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor} \mathcal{E}_{k_j,i}^{s_j} \quad (2.5)$$

où $\mathcal{E}_{k_j,i}^{s_j}$ est la fraction d'énergie du i ème mode qui correspond à l'ordre de Fourier k_j de l'étage s_j . Les matrices $\tilde{\mathbf{K}}_{k_j}^{s_j}$ s'obtiennent à partir de la matrice de raideur d'un secteur de base en coordonnées physiques.

Les fractions d'énergie $\mathcal{E}_{k_j,i}^{s_j}$ sont utilisées pour déterminer l'ordre de Fourier prédominant, après normalisation selon :

$$\max_{k_j=0, \dots, \lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor} \left(\mathcal{E}_{k_j,i}^{s_j} \right) = 1, \quad j = 1, 2 \quad (2.6)$$

Pour obtenir l'ordre de Fourier prédominant sur le mode complet, les énergies sont

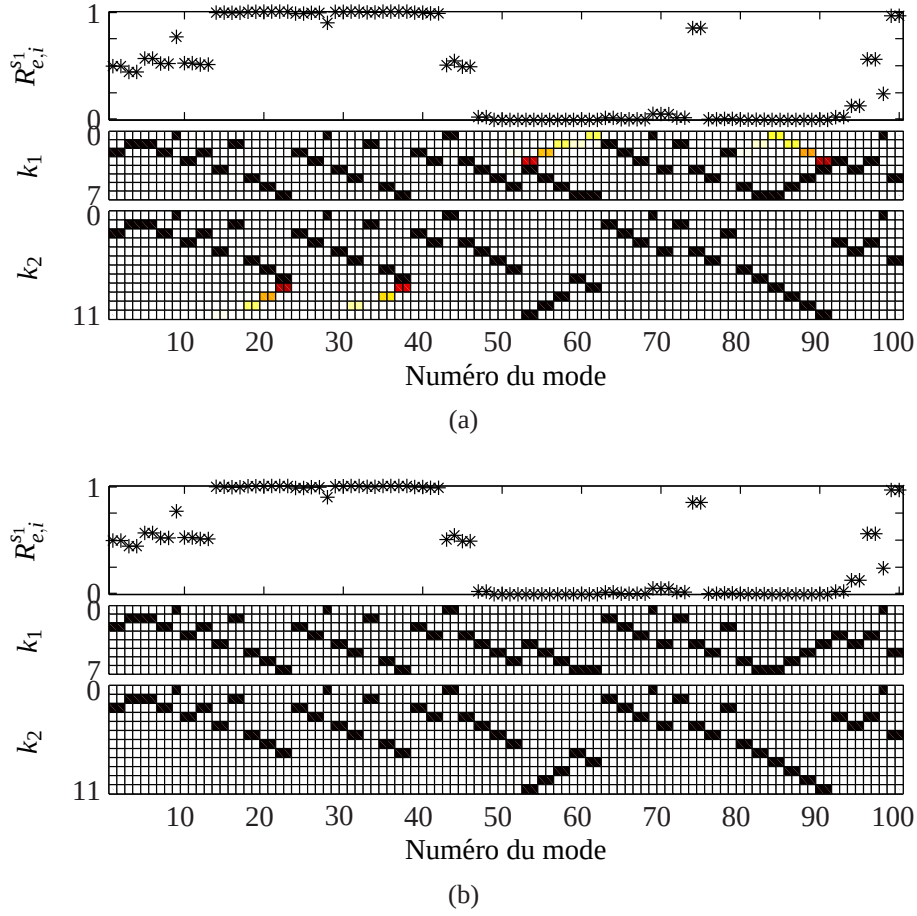


FIG. 2.4: Contenu harmonique des modes de la plage de fréquence [2800-5000] Hz. Répartition d'énergie relative à chaque étage et ordres de Fourier normalisés relatifs à chaque étage, (a) modes issus du calcul complet ; (b) modes issus du calcul en symétrie cyclique multi-étages

normalisées de la manière suivante :

$$\max_{j=1,2} \left(\max_{k_j=0,\dots,\lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor} \left(\mathcal{E}_{k_j,i}^{s_j} \right) \right) = 1 \quad (2.7)$$

La FIG.2.4 montre le contenu harmonique des modes de la plage de fréquence [2800-5000] Hz. La FIG.2.4(a) présente les résultats pour les modes issues du calcul complet tandis que la FIG.2.4(b) présente les résultats pour les modes calculés avec la méthode de symétrie cyclique multi-étages. Pour chaque étage $j = 1, 2$, les fractions d'énergie correspondant aux ordres de Fourier $k_j = 0, \dots, \lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor$ ont été normalisées relativement aux maximums d'énergie propre à chaque étage.

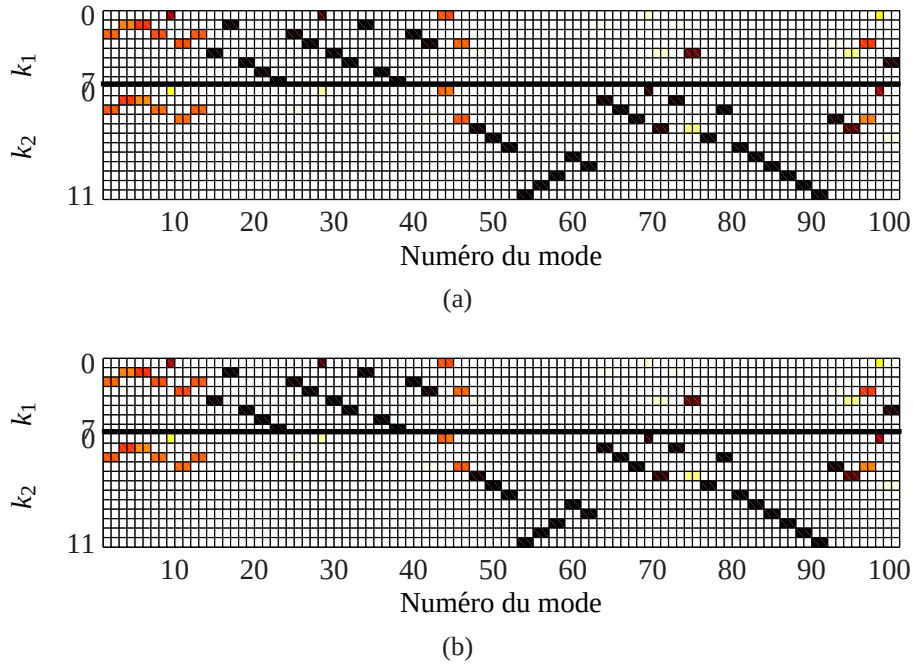


FIG. 2.5: Contenu harmonique des modes de la plage de fréquence [2800-5000] Hz. Ordres de Fourier normalisés relatifs à la structure complète, (a) modes issus du calcul complet ; (b) modes issues du calcul en symétrie cyclique multi-étages

La normalisation associée à chaque étage implique que certains modes présentent une participation de plusieurs ordres de Fourier pour un étage alors que cet étage ne participe que très faiblement à l'énergie totale. Pour cela, l'indicateur $R_{e,i}^{s1}$ est donné en parallèle afin de pouvoir juger de la participation de chaque étage à l'énergie totale. Ce type de normalisation est jugé néanmoins intéressant car elle permet de bien mettre en évidence la différence entre les deux modélisations. Conformément à l'hypothèse, les modes calculés en symétrie cyclique multi-étages présentent seulement une participation des ordres de Fourier qui correspondent à l'ordre fondamental avec lequel ils ont été obtenus. Pour certains modes, des écarts entre les deux calculs existent dans le contenu harmonique de l'étage qui contribue très faiblement à l'énergie totale et l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages apparaît alors pertinente au regard des résultats issus du calcul complet.

On vérifie que les modes viennent en général par paires sauf les modes qui correspondent à l'ordre zéro. Les modes qui partagent l'énergie entre les deux étages sont des modes de disque et des modes du cylindre inter-étages qui correspondent aux ordres de Fourier (diamètres nodaux) entre zéro et quatre. Cependant, la plupart des modes restent confinées à un seul étage et correspondent aux familles de modes d'aube.

Dans la FIG.2.5, le contenu harmonique des modes est donné par les fractions d'énergie correspondant aux ordres de Fourier $k_j = 0, \dots, \lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor$ qui ont été normalisées relativement à la structure complète selon l'équation (2.7). Cette normalisation permet d'avoir un indicateur qui inclut la prise en compte de la participation de l'étage à l'énergie totale. La comparaison entre les deux résultats montre une très bonne correspondance entre les résultats en symétrie cyclique multi-étages et les résultats du calcul complet. Tous les modes dont l'énergie est répartie sur les deux étages partagent le même ordre de Fourier d'un étage à l'autre. D'après le résultat des calculs sur la structure complète FIG.2.5(a), il n'apparaît pas de modes multi-harmoniques faisant intervenir plusieurs ordres de Fourier dans la plage de fréquence d'intérêt. Ceci confirme encore la pertinence de l'hypothèse à la base de la méthode de symétrie cyclique multi-étages.

2.1.3 Modes multi-étages

Dans le cadre de cette étude, on définit un mode couplé comme un mode qui présente une interaction énergétique entre étages adjacents. L'énergie de déformation répartie sur l'ensemble de la structure est une condition nécessaire mais pas suffisante, car il existe des modes de déformation globaux de l'arbre. Pour ces modes l'énergie de déformation est bien répartie mais ne concerne pas les disques ou les aubes, et par conséquent ne rentre pas dans la définition retenue.

Dans la FIG.2.6 on identifie les modes d'arbre selon la classification présentée dans [91]. Ceux sont des modes de déformation du cylindre associés à l'arbre et à l'anneau inter-étages.

Pour définir les modes du système, D'Souza et Epureanu [47] proposent de déterminer dans quelle mesure une déformée modale est modifiée par la prise en compte du couplage inter-étages, en comparant les modes de la structure complète avec les modes issus des calculs sur les étages isolés. Avec l'information sur la répartition par étages de l'énergie de déformation, ils classent les modes en modes mono-étages (confinés à un seul étage) et modes multi-étages (dont l'énergie est répartie sur deux étages). Cette méthodologie permet d'identifier les modes qui s'éloignent des modes mono-étages mais ne donne pas d'information certaine sur l'interaction énergétique entre les étages.

Afin de conduire des analyses les plus fines possibles, il est ainsi proposé d'utiliser la répartition de l'énergie de déformation par étage et par composant dans les étages pour définir les familles de modes. Les composants considérés sont : les aubes, le disque, l'arbre (où cylindre) et la partie de l'arbre entre les étages. Pour le i ème mode défini sur

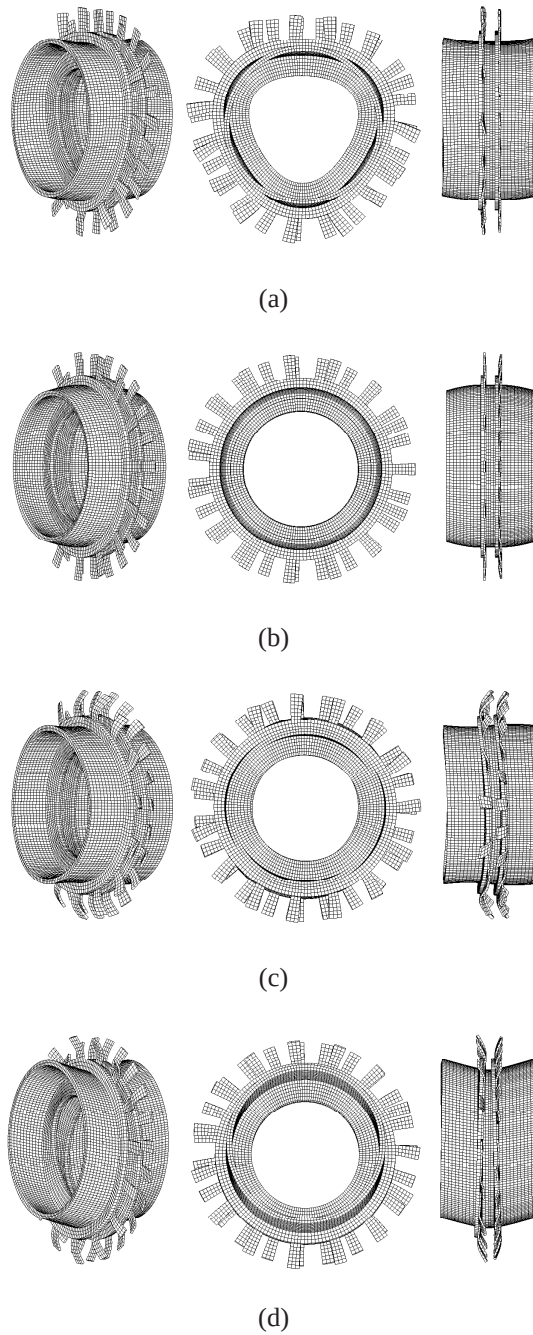


FIG. 2.6: Modes de cylindre avec déformation globale de la structure multi-étages

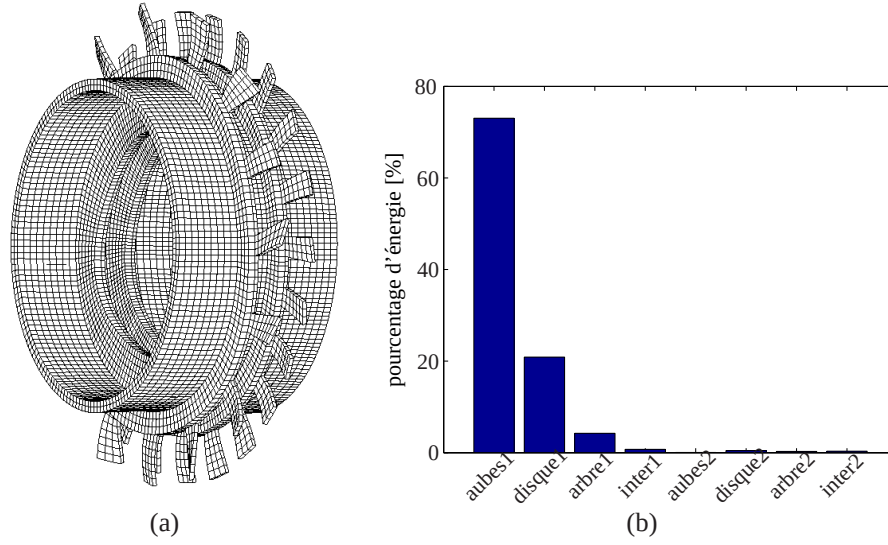


FIG. 2.7: Mode à 3 diamètres dans la famille d'aube étage 1 E1 :1T1S : (a) déformée modale ; (b) pourcentage d'énergie par composant.

l'étage j , le vecteur de déplacement $\mathbf{U}_i^{s_j}$ est exprimé en composantes cycliques $\tilde{\mathbf{U}}_{k_j,i}^{s_j}$ associées aux ordres $k_j = 0, \dots, \lfloor \frac{N_j}{2} \rfloor$. L'énergie associée à chaque composante est calculée à l'aide de l'équation (2.5) en ne conservant que les déplacements des ddl associés aux noeuds appartenant au composant. Les Figures 2.7 et 2.8 montrent la répartition d'énergie par composant pour deux modes qui correspondent à un mode d'aubes et un mode de disques en opposition de phase.

2.2 Outils utilisés pour l'analyse de performance de la symétrie cyclique multi-étages

Différentes analyses sont conduites pour comparer les résultats sur la structure complète aux résultats issus de la symétrie cyclique multi-étages. Les outils utilisés pour ces analyses sont les suivants.

2.2.1 Écarts en fréquences propres

Les erreurs en fréquences sont calculées selon :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{cyc} - \omega_{ref}}{\omega_{ref}} \times 100 \quad (2.8)$$

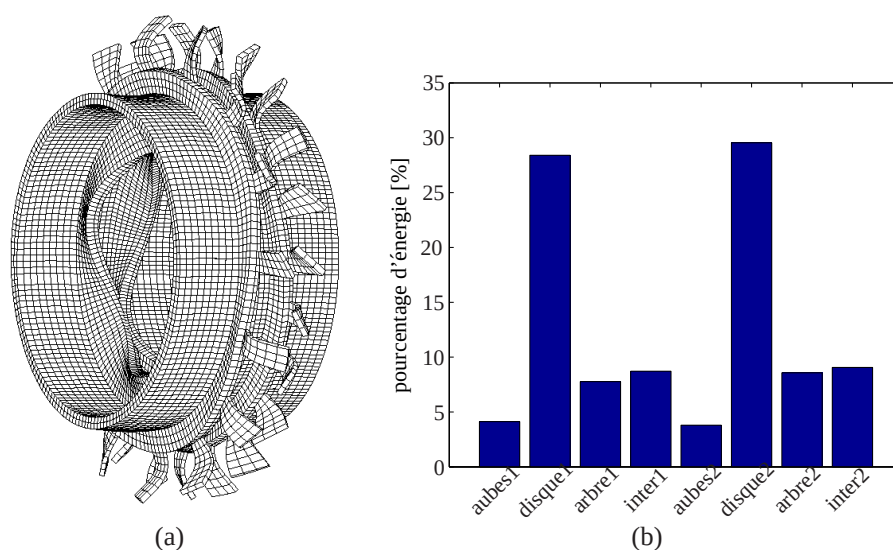


FIG. 2.8: Mode à 3 diamètres disques en opposition de phase D(0C) : (a) déformée modale ; (b) pourcentage d'énergie par composant.

où ω_{cyc} est une fréquence issue du calcul en symétrie cyclique multi-étages et ω_{ref} la fréquence correspondante issue du calcul complet.

La comparaison des fréquences propres obtenues par un calcul complet et par la méthode de symétrie cyclique multi-étages est présentée FIG.2.9. Les écarts observés sont inférieurs à 0.6% pour les 250 premières fréquences, qui vont jusqu'à 9000 Hz pour l'exemple traité.

Les fréquences associées aux familles de modes d'aubes varient peu en fonction des ordres de Fourier. Par conséquent elles forment des lignes horizontales dans les diagrammes en fonction de l'ordre de Fourier. De ce fait, elles constituent des zones de grande densité modale où plusieurs modes à différents ordres de Fourier sont très proches en fréquence.

Si on veut comparer les fréquences issues du calcul complet avec celles issues du calcul en symétrie cyclique multi-étages, on doit d'abord rassembler et ordonner les fréquences calculées pour les différents ordres de Fourier multi-étages. Dans la mesure où il peut exister de légères erreurs en fréquence et du fait de l'importante densité modale autour des fréquences d'aube, la proximité en fréquence entre les deux calculs ne suffit pas car on doit s'assurer qu'il s'agit des mêmes modes qui sont comparés. Ainsi, les comparaisons en fréquence doivent être complétées avec les comparaisons en déformées modales.

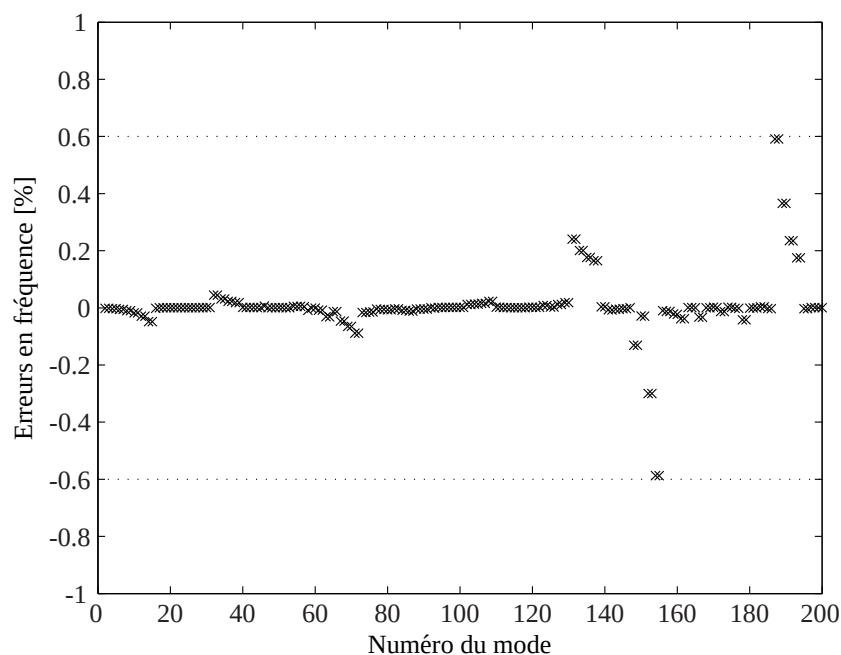


FIG. 2.9: Écart des fréquences propres entre le calcul complet et la méthode de symétrie cyclique multi-étages.

2.2.2 Comparaison des déformées modales

Les modes du calcul en symétrie cyclique multi-étages sont recombinaés pour obtenir des modes réels sur la structure complète comme décrit dans l'annexe D. Ces modes sont comparés aux modes de référence donnés par le calcul sur la structure complète. Les comparaisons font appel au critère de cohérence modal de MAC.

Pour les structures à symétrie cyclique la plupart des modes existent en paires orthogonales associées aux fréquences doubles. Ces paires de modes doubles ont deux indéterminations : l'amplitude et la phase qui fixe la position circonférentielle du mode sur la structure. Ils doivent donc être normalisés en phase de la même façon dans les deux calculs pour pouvoir les comparer. Si une paire de modes doubles n'est pas normalisée en phase avec la paire correspondante, les comparaisons par un critère de MAC ne seront pas satisfaisantes car elles diagnostiqueront de grandes différences sur des modes en réalité identiques.

La FIG.2.10(a) montre la matrice MAC obtenue en comparant directement les modes issus du calcul en symétrie cyclique multi-étages avec les modes du calcul de référence. Les paires de modes doubles qui ne sont pas normalisés en phase entre les deux calculs donnent quatre valeurs autour de la diagonale.

Les paires de modes orthogonaux associés à une fréquence double définissent un espace infini de solutions permettant d'obtenir une déformée réelle avec n'importe quel positionnement circonférentiel sur la structure. De ce fait la position circonférentielle des modes doubles est indéterminée. Pour pouvoir comparer les modes en symétrie cyclique avec les modes provenant du calcul de référence, chaque mode en symétrie cyclique doit être aligné en position circonférentiel avec le mode de référence correspondant. En pratique on détermine l'angle qui correspond à l'écart relatif entre les positions circonférentielles des deux modes à comparer. Cet angle est utilisé pour définir une combinaison linéaire qui permet de changer la position circonférentielle des paires de modes en symétrie cyclique pour la faire coïncider avec la position circonférentielle de la paire de référence

Soit $[\underline{\mathbf{U}}_{1,cyc}, \underline{\mathbf{U}}_{2,cyc}]$ une paire de modes doubles et $[\underline{\mathbf{U}}_{1,ref}, \underline{\mathbf{U}}_{2,ref}]$ la paire correspondante dans le calcul de référence. L'information pour déterminer la combinaison linéaire qui doit être appliquée peut être obtenue à partir des valeurs du critère MAC qui est constitué d'un produit scalaire entre deux vecteurs :

$$MAC_{i,j} = \frac{|\langle \underline{\mathbf{U}}_{i,cyc}, \underline{\mathbf{U}}_{j,ref} \rangle|^2}{\langle \underline{\mathbf{U}}_{i,cyc}, \underline{\mathbf{U}}_{i,cyc} \rangle \langle \underline{\mathbf{U}}_{j,ref}, \underline{\mathbf{U}}_{j,ref} \rangle} \quad (2.9)$$

où $\underline{\mathbf{U}}_{i,cyc}$ est le i -ème mode du calcul en symétrie cyclique et $\underline{\mathbf{U}}_{j,ref}$ le j -ème mode du calcul de référence.

À l'aide de la définition du produit scalaire $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha)$ on peut récrire le MAC comme :

$$MAC_{i,j} = \frac{\|\underline{\mathbf{U}}_{i,cyc}\|^2 \|\underline{\mathbf{U}}_{j,ref}\|^2 \cos^2(\alpha_{i,j})}{\|\underline{\mathbf{U}}_{i,cyc}\|^2 \|\underline{\mathbf{U}}_{j,ref}\|^2} \quad (2.10)$$

permettant de montrer que celui ci est fonction uniquement de l'angle $\alpha_{i,j}$ entre les vecteurs comparés $MAC_{i,j} = \cos^2(\alpha_{i,j})$. Dans le cas où $\underline{\mathbf{U}}_{i,cyc}$ et $\underline{\mathbf{U}}_{j,ref}$ correspondent au même mode double, $\alpha_{i,j}$ est dans le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie et représente la différence en position circonférentielle sur la structure entre les deux modes.

L'angle $\alpha_{1,1} = \cos^{-1} \pm \sqrt{MAC_{1,1}}$ trouvé après le calcul du $MAC_{1,1}$ est utilisé pour construire la combinaison linéaire suivante :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{U}}'_{1,cyc} \\ \underline{\mathbf{U}}'_{2,cyc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1,1} \mathbf{I} & -\sin \alpha_{1,1} \mathbf{I} \\ \sin \alpha_{1,1} \mathbf{I} & \cos \alpha_{1,1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_{1,cyc} \\ \underline{\mathbf{U}}_{2,cyc} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité de la taille de $\underline{\mathbf{U}}_{1,cyc}$. Les modes $[\underline{\mathbf{U}}'_{1,cyc}, \underline{\mathbf{U}}'_{2,cyc}]$ sont à la même

position circonférentielle sur la structure que la paire de référence $[\underline{\mathbf{U}}_{1,ref}, \underline{\mathbf{U}}_{2,ref}]$. Il faut tenir compte du fait que $\alpha_{1,1}$ représente deux angles différents à cause de la racine carrée. Pour une rotation comme celle définie dans l'équation (2.11), le premier angle permet d'aligner les deux paires de modes tandis que le deuxième correspond à une rotation dans le sens contraire.

Le processus de normalisation est appliqué à chaque paire de modes. La matrice MAC calculée à nouveau après cette normalisation est montrée FIG.2.10(b).

Les valeurs sur la diagonale de la matrice de MAC après normalisation des paires de modes sont présentées FIG.2.11. Ces valeurs permettent de quantifier la cohérence entre les déformées modales des deux calculs et l'influence de l'approximation introduite avec l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages.

2.2.3 Écarts sur la réponse forcée

Les réponses obtenues par le calcul complet et par la méthode de symétrie cyclique multi-étages sont également comparées. La FIG.2.12 montre la réponse à une excitation d'ordre moteur 3 ($H = 3$) appliquée sur l'étage 1 et la FIG.2.13 la réponse à une excitation $H = 3$ sur l'étage 1 et $H = 4$ sur l'étage 2. Dans les deux cas, on observe une très bonne corrélation entre les réponses obtenues, l'erreur en amplitude étant inférieure à 0.5% au niveau des pics des résonances.

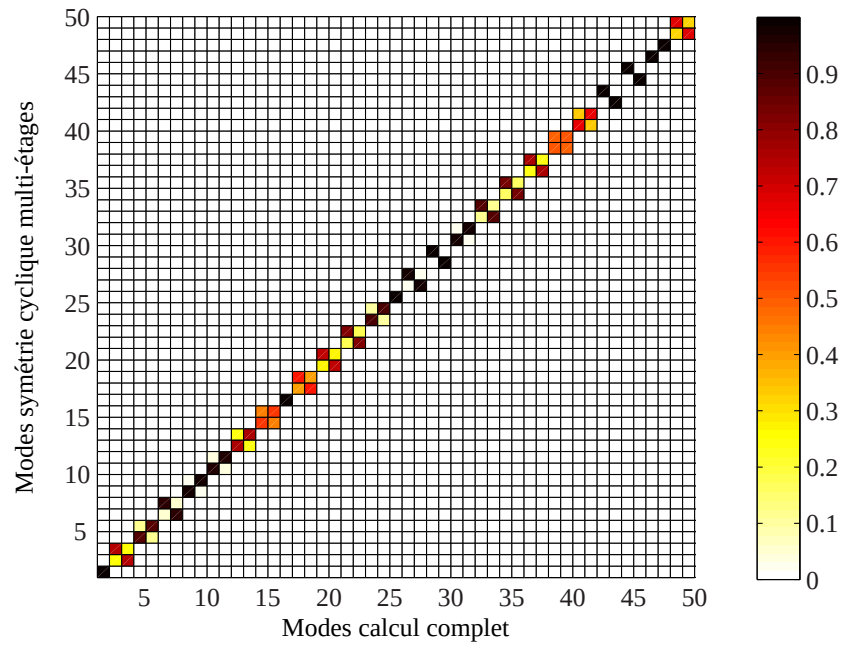
2.3 Analyse de différentes configurations

Des modèles représentatifs de différents types de configurations sont introduits et les analyses décrites dans la section 2.2 sont appliquées.

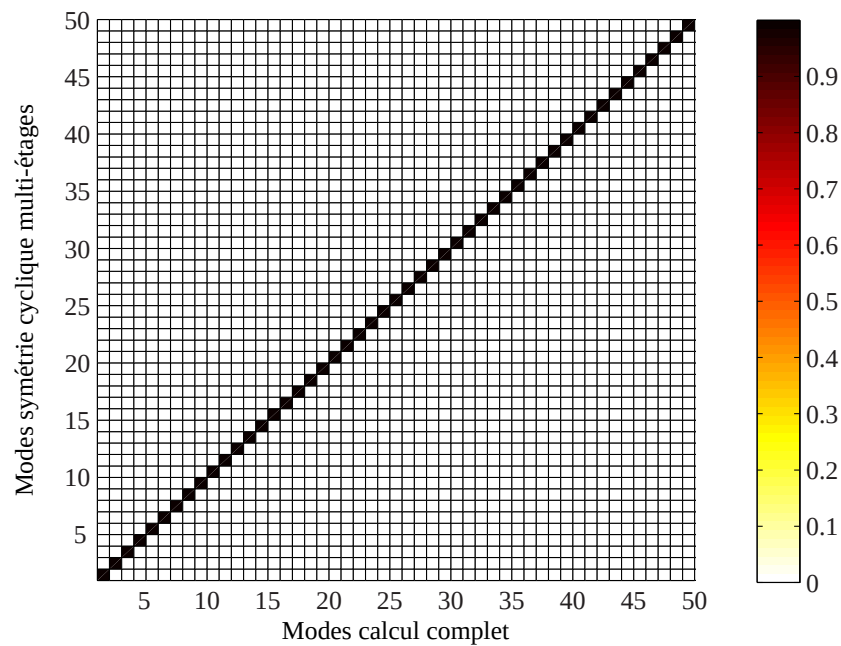
Les critères utilisés pour définir les différents types d'aubages sont les suivants :

- Étudier l'influence de la raideur relative des aubes par rapport au disque sur la précision des modèles en symétrie cyclique multi-étages.
- Étudier l'influence de la raideur de la liaison par nageoires entre les aubes sur la précision des modèles en symétrie cyclique multi-étages.

Ces deux critères visent à évaluer la capacité de la symétrie cyclique multi-étages à représenter correctement le comportement de roues de différents types. En général les turbines pour la production d'électricité présentent une flexibilité relative des aubes par rapport au disque qui est très importante du fait d'aubes élancées tandis que dans les turbines aéronautiques la flexibilité des aubes peut être comparable à celle du disque. De



(a)



(b)

FIG. 2.10: Matrice de MAC entre les modes obtenus par un calcul complet et par la méthode de symétrie cyclique multi-étages : (a) sans normalisation en phase ; (b) avec normalisation en phase.

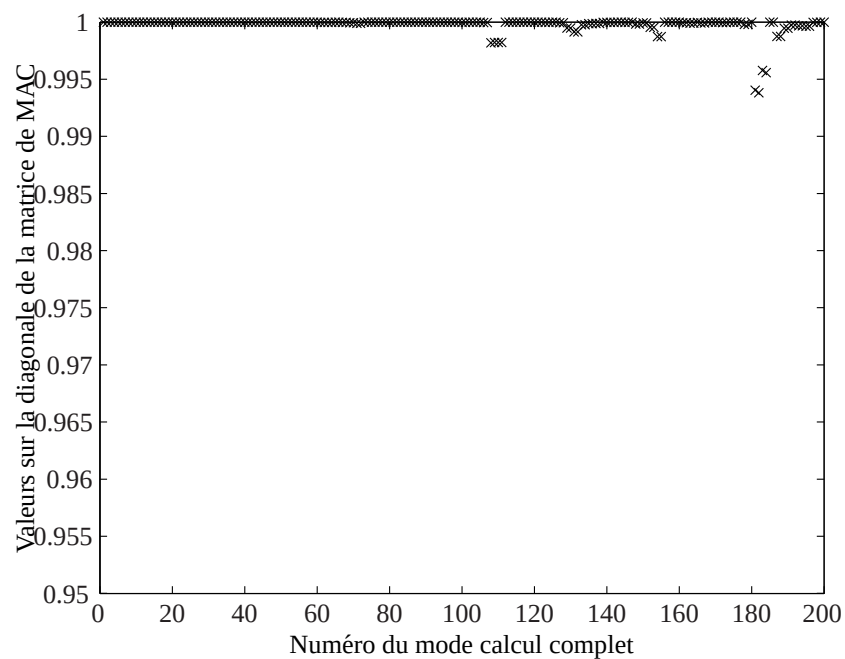


FIG. 2.11: Valeurs sur la diagonale de la matrice de MAC après normalisation en phase.

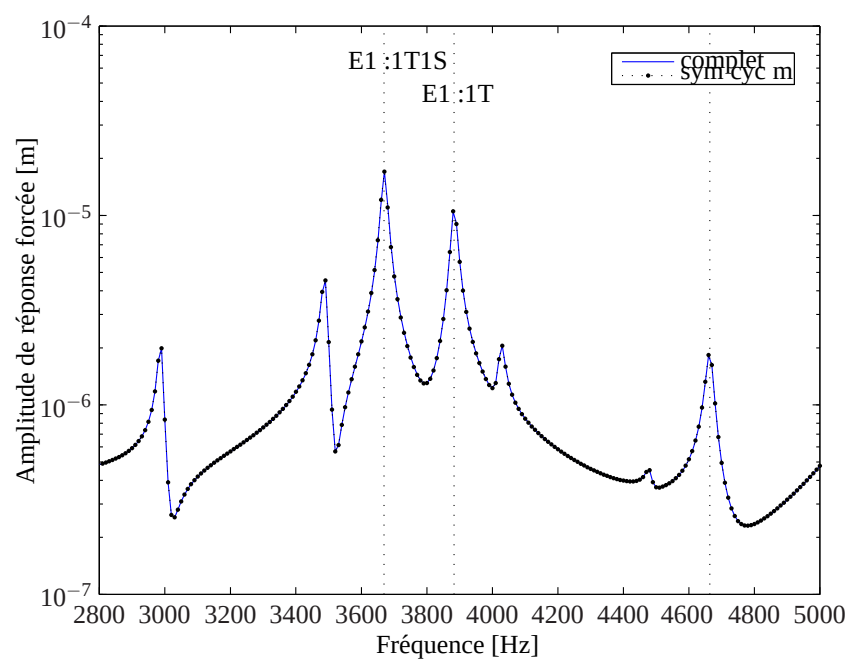


FIG. 2.12: Corrélation en réponse, excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 1. Amplitude du secteur 1 de l'étage 1.

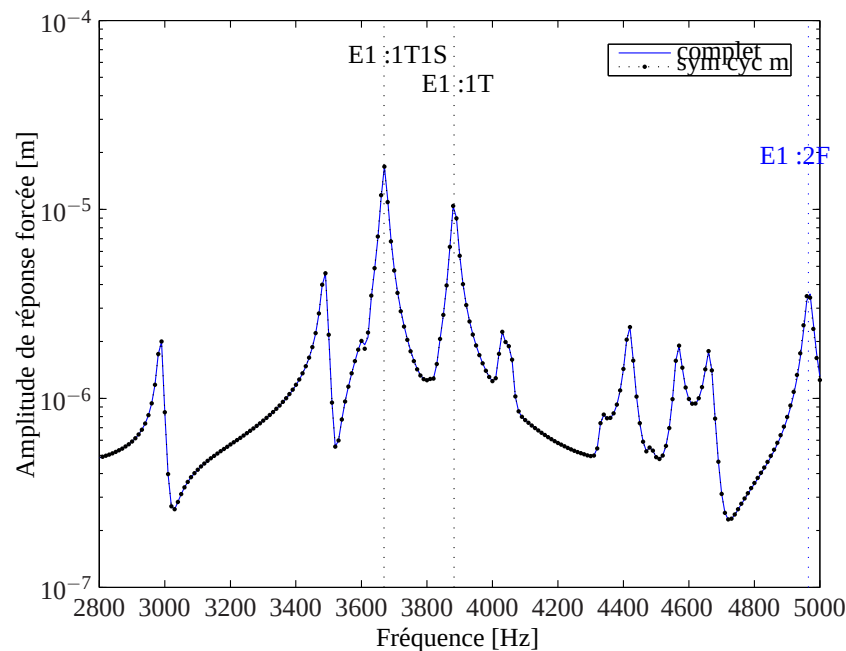


FIG. 2.13: Corrélation en réponse, excitation d'ordre moteur $H = 3$ sur l'étage 1 et $H = 4$ sur l'étage 2. Amplitude du secteur 13 de l'étage 1.

même, dans tout compresseur ou turbine axiale la flexibilité relative des aubes par rapport au disque est plus élevée pour les étages basse pression et diminue pour les étages haute pression. Dans certaines configurations, les aubes sont liées entre elles autrement que par le disque, au moyen de mécanismes raidisseurs/amortisseurs spécifiquement développés qui ont une influence importante sur le comportement dynamique. Finalement, dans les compresseurs centrifuges par exemple, les aubes font partie intégrante du disque et de ce fait les deux éléments sont très fortement liés.

L'aspect général des six modèles retenus est montré FIG.2.14. Sur les six, trois modèles sont assimilés à des turbines pour la production d'électricité pour lesquels les aubes sont très élancées. Parmi eux, un premier présente des liaisons fortes aux niveaux des nageoires (modèle A-F), un deuxième des liaisons faibles (modèle A-M) et un troisième ne présente pas de nageoires (modèle A-N). La seule différence entre le modèle avec des liaisons fortes et faibles est la raideur des nageoires : le matériau utilisé pour les nageoires dans le cas de liaison forte est le même que le matériau des aubes, tandis que le matériau des nageoires dans le cas de liaison faible est dix fois plus flexible.

Les deux modèles suivants visent à représenter des turbines aéronautiques. Un premier présente une forte liaison au niveau des nageoires (modèle B-F) tandis que le deuxième ne présente pas de nageoires (modèle B-N).

Le dernier modèle choisi est représentatif des compresseurs centrifuges, en particulier de deux roues centrifuges arrangées dos à dos (modèle C).

Les modèles utilisés sont des modèles académiques avec des géométries très simplifiées et éloignées des géométries réelles. Ils permettent néanmoins d'obtenir des caractéristiques vibratoires proches de celles de structures réelles. Les maillages éléments finis n'ont pas été raffinés, ce qui n'invalide pas les résultats car les comparaisons se font entre le modèle en symétrie cyclique multi-étages et le modèle complet qui est à l'origine des secteurs de base utilisés pour la symétrie cyclique.

2.3.1 Modèles de type A

Dans le cas du modèle qui ne possède pas de nageoires (modèle A-N), on obtient dans la plage de fréquences 0-4500 Hz des familles de modes d'aubes qui vont jusqu'au troisième mode de flexion 3F, au deuxième de torsion 2T et au deuxième mode de flexion dans le plan secondaire 2S (FIG.2.15).

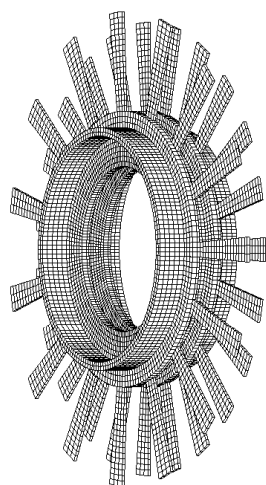
Les fréquences des modes qui appartiennent à une même famille d'aubes augmentent légèrement avec le nombre de diamètres nodaux du fait que les aubes sont liées seulement par le disque. Sur le diagramme fréquences vs. diamètres nodaux, les modes d'une même famille à différents diamètres nodaux se présentent par lignes horizontales qui convergent vers la fréquence du mode de l'aube en condition encastree en pied d'aube. Sont également identifiées :

- Deux familles de modes de disque, les deux disques se déformant en phase ou en opposition de phase
- Des modes de déformation globales du cylindre
- Des modes particuliers présentant une déformation à la fois des aubes de l'étage 1 et du disque de l'étage 2.

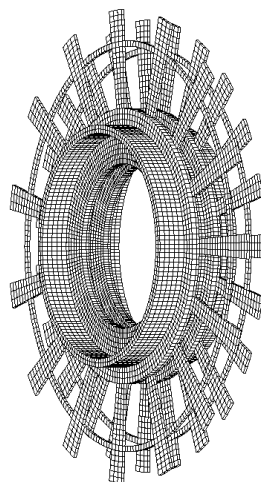
En revanche, peu d'interaction est observée entre les familles de modes d'aubes et les modes de disques. La flexibilité relative des aubes par rapport aux disques permet des croisements de familles de modes de disque avec des modes d'aubes seulement pour les modes d'aubes en 3F, 2S, 2T. L'échange d'énergie entre ces derniers modes d'aube et les disques est moins évident que pour les modes d'aube en 1F, 2F et 1T dont la déformation est plus compatible à celle des disques à 0 cercle nodal.

Les résultats des validations obtenus montrent que :

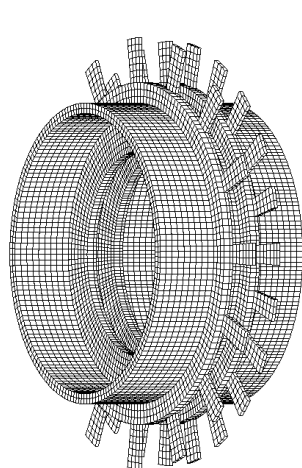
- Les écarts en fréquences sont très faibles. Ils sont inférieurs à 0.1% pour les 250 premières fréquences de la plage 0-4500 Hz.



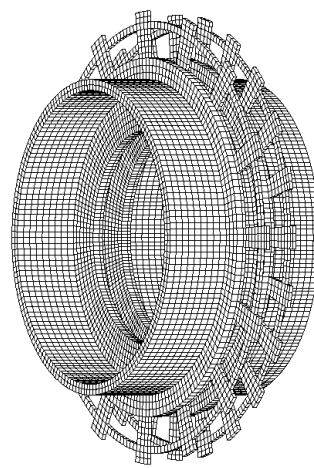
(a) modèle A-N



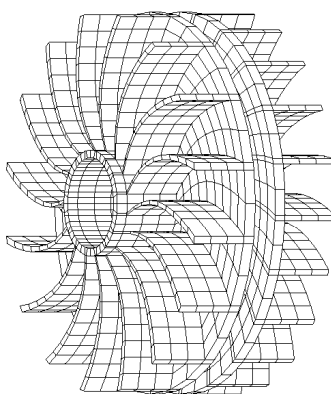
(b) modèles A-F et A-M



(c) modèle B-N



(d) modèle B-F



(e) modèle C

FIG. 2.14: Modèles utilisés pour tester la méthode de symétrie cyclique multi-étages. (a) modèle A-N, (b) modèles A-F et A-M, (c) modèle B-N, (d) modèle B-F et (e) modèle C

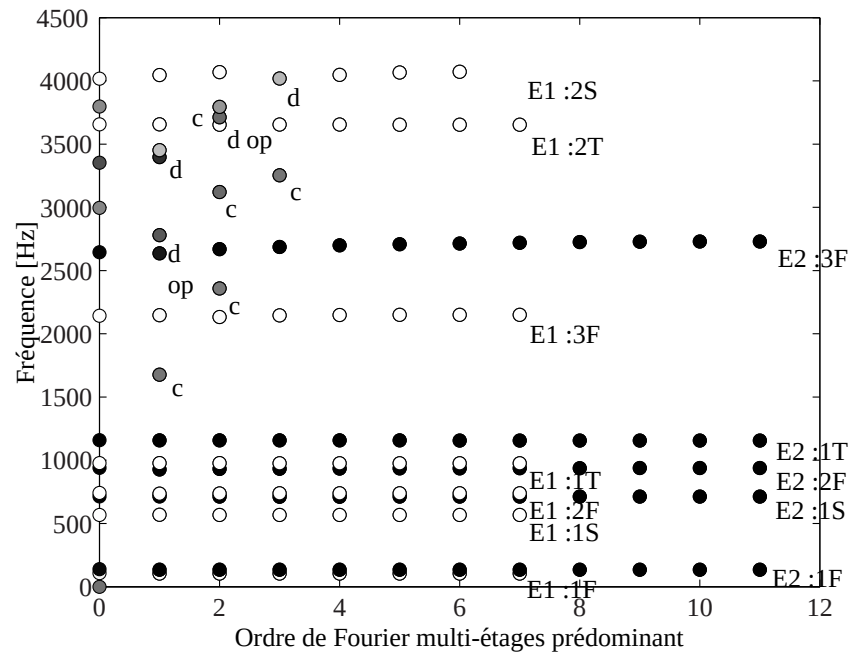


FIG. 2.15: Modèle A-N. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)

- Les comparaisons des déformées modales montrent une très bonne correspondance des valeurs de MAC qui sont supérieures à 0.998 sur la plage 0-4500 Hz.
- Les modes ont une contribution d'une seule harmonique spatiale. Il n'existe donc pas de modes dont la contribution de plusieurs harmoniques soit significative.
- La comparaison de la réponse avec les résultats des calculs complets montre une très bonne correspondance.

Pour les deux modèles qui comportent des nageoires (A-F et A-M), la dynamique est très différente. Les modes de flexion dans le plan sont associés à la déformation circconférentielle des nageoires. Du fait que les nageoires forment une bande circconférentielle d'apparence continue, les fréquences des modes des aubes en 1S augmentent très rapidement avec le nombre de diamètres nodaux comme le montre la FIG.2.16. De même, les modes d'aubes en flexion sont associés à la déformation axiale (dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation) des nageoires. Également, l'augmentation du nombre de diamètres nodaux qui traversent les nageoires impose un couplage entre les modes de flexion et de torsion d'aubes.

En particulier, des modes d'aubes de type 2F (avec déformation axiale des nageoires) à diamètres nodaux supérieurs à $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ sont observés dans chaque étage. Ceux-ci se replient selon le repliement du spectre de la série de Fourier discrète associée à chaque étage. La

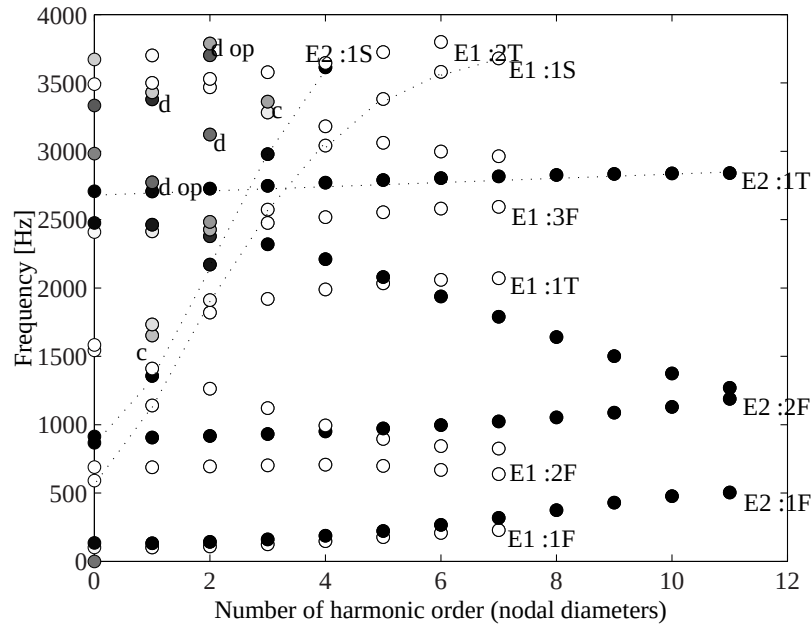


FIG. 2.16: Modèle A-M. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)

méthode se montre capable de rendre compte à la fois des modes de disque et des modes d'aube 2F à haut diamètre nodal obtenues avec un petit ordre de Fourier.

Les résultats des validations obtenus sont similaires aux précédents

- Les écarts en fréquence sont très faibles. Ils sont inférieurs à 0.1% pour les 250 premières fréquences (0-4000 Hz).
- Les déformées modales sont en très bonne correspondance (MAC supérieur à 0.999).
- N'est détectée que la contribution d'une seule harmonique spatiale.
- Les résultats en réponse montrent une très bonne correspondance avec les calculs complets.

Le diagramme des fréquences pour le modèle A-F n'est pas présenté car il est similaire en forme générale au diagramme pour le modèle A-M (FIG.2.16).

2.3.2 Modèles de type B

La dynamique globale des modèles avec des aubes plus courtes est différente de celle donnée par les modèles avec des aubes élancées. Notamment, des interactions entre les familles de modes d'aubes plus énergétiques (premières torsion et flexion dans le plan secondaire 1T et 1S) et des modes de disque apparaissent.

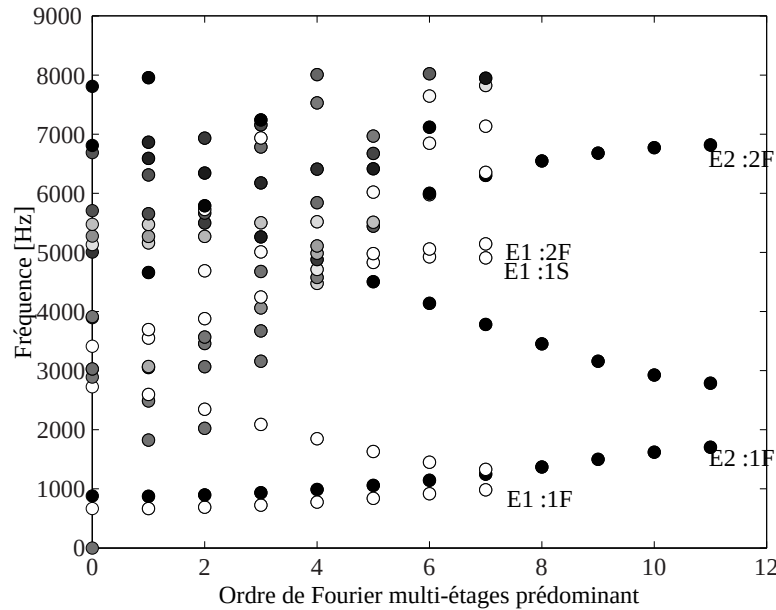


FIG. 2.17: Modèle B-F. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)

Les résultats du modèles B-N (sans nageoires) ont été présentés dans le chapitre précédent pour introduire la méthode de symétrie cyclique multi-étages.

La dynamique du modèle qui présente des nageoires (B-F) est encore différente. Comme pour le modèle A-F, les fréquences des modes de flexion des aubes augmentent avec le nombre de diamètres nodaux et des modes à diamètres nodaux supérieurs à $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ apparaissent pour chaque étage. Des modes de disque et des modes d'aube 1F, à haut diamètre nodal mais obtenues avec un petit ordre de Fourier (FIG.2.17), sont obtenus sans difficulté par la méthode.

Ici encore les résultats des validations sont similaires avec des écarts très faibles.

- 0.7% pour les fréquences.
- MAC toujours supérieur à 0.96.
- Pas de modes dont la contribution de plusieurs harmoniques soit significative.
- Très bonne corrélation également pour la réponse à une excitation ordre moteur $H = 3$ qui permet d'exciter des modes spécifiques dans la plage de fréquences 2800-5000 Hz (FIG.2.18).

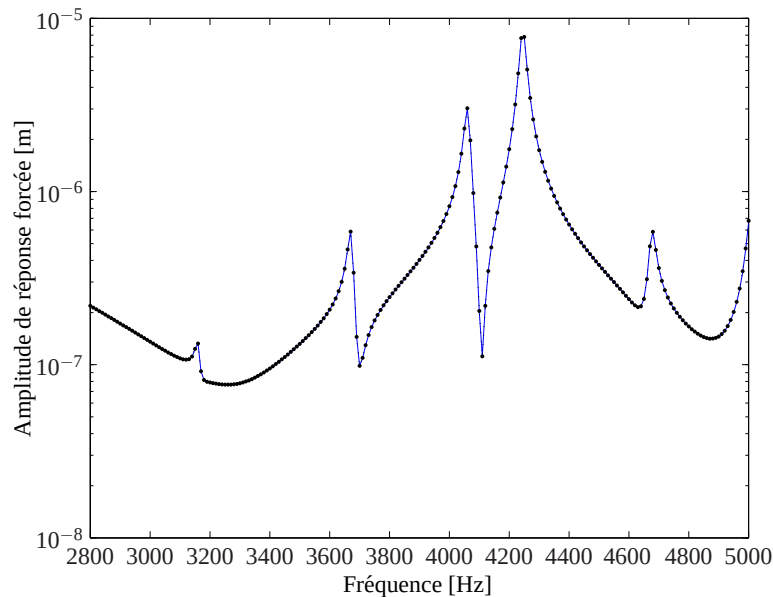


FIG. 2.18: Modèle B-F. Corrélation en réponse, excitation d'ordre moteur $H = 3$ appliquée sur l'étage 1. Amplitude du secteur 1 de l'étage 1.

2.3.3 Modèle de type C

Pour le modèle de type C, représentatif de roues de compresseurs centrifuges par exemple, les aubes sont fortement liées entre elles du fait qu'elles font partie intégrante du disque. Ainsi, les fréquences d'aubes augmentent avec le nombre de diamètres nodaux (FIG.2.19). D'autre part, la géométrie des aubes permet principalement la déformation en flexion vers le bord extérieur. Les modes observés dans la plage 0-4000 Hz sont des modes de flexion 1F jusqu'à 4F. Comme pour les modèles de roues aubées, les modes dont la déformation est répartie sur les deux étages sont confinés sur les premiers diamètres nodaux.

Les résultats montrent encore une très bonne correspondance entre les calculs complets et la symétrie cyclique multi-étages

- Ecart en fréquences inférieurs à 0.05%.
- MAC supérieurs à 0.9996.
- Pas de modes avec une contribution de plusieurs harmoniques significative.

Aucune des configurations étudiées ne met en évidence des faiblesses de la technique de calcul en symétrie cyclique multi-étages. Elle constitue donc la méthode de référence utilisée dans le chapitre suivant pour l'analyse de l'influence des incertitudes.

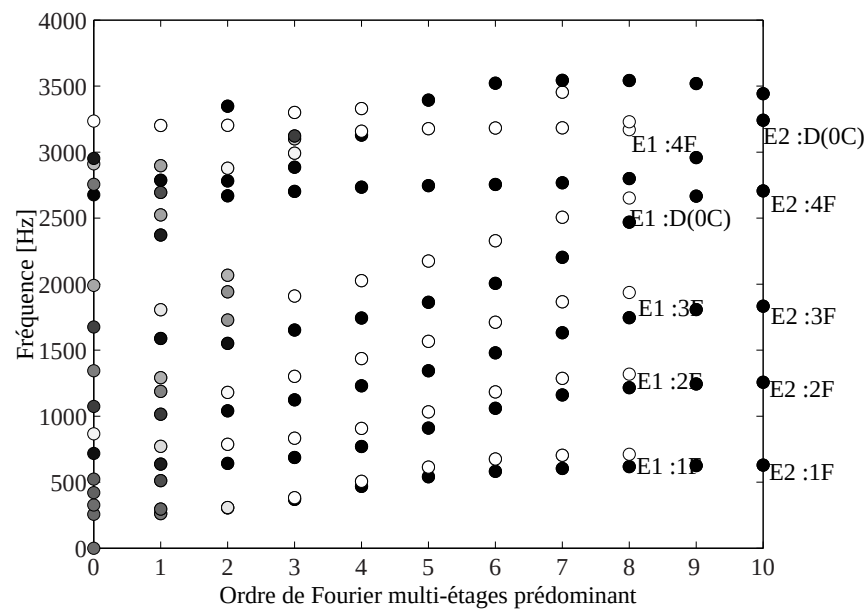


FIG. 2.19: Modèle C. Fréquences multi-étages avec participation relative de chaque étage (blanc : étage 1, noir : étage 2)

Chapitre 3

Prise en compte de l'effet des incertitudes sur les vibrations du système

Sommaire

3.1	Modèle aléatoire en dynamique des structures	76
3.1.1	Modèle général	76
3.1.2	Choix de la loi de probabilité	76
3.1.3	Développement en chaos polynomial (PCE)	77
3.2	Modèle incertain du système multi-étages	78
3.2.1	Quantités incertaines du problème	78
3.2.2	Analyse modale aléatoire du système	79
3.2.3	Réponse forcée aléatoire du système	84
3.2.4	Grandeurs caractéristiques aléatoires	85
3.3	Application numérique	87
3.3.1	Description du système multi-étages	87
3.3.2	Calcul des fréquences propres aléatoires	90
3.3.3	Calcul des déformées modales aléatoires	93
3.3.4	Calcul de la réponse forcée aléatoire	93

Dans ce chapitre on cherche à prendre en compte les effets des incertitudes sur la dynamique globale des systèmes multi-étages, et on s'intéresse en particulier au système à deux roues aubagées des chapitres précédents. De nombreuses incertitudes touchent la connaissance des caractéristiques des aubes. Cette étude ne concerne pas le phénomène de désaccordage, toutes les variables aléatoires sont donc identiques : même loi, même échantillon.

Pour respecter la propriété de positivité des matrices aléatoires, due au caractère physique des propriétés des matériaux sur lesquelles portera l'incertitude, les variables aléatoires suivent une loi gamma. Le développement du Chaos Polynomial est adapté aux calculs en symétrie cyclique multi-étages [92, 93], la base polynomiale du chaos, orthogonale à la loi de probabilité, est donc construite avec des polynômes de Laguerre.

Les résultats sont validés par des calculs issus de simulations de Monte-Carlo.

3.1 Modèle aléatoire en dynamique des structures

3.1.1 Modèle général

On cherche à résoudre un problème dynamique dont certains paramètres d'entrée sont incertains. Classiquement, cela peut être le cas pour la masse, la raideur et l'amortissement, les forces excitatrices. Le problème dynamique discrétisé en éléments finis peut alors s'écrire :

$$(-\omega^2 \hat{\mathbf{M}}(\tau) + j\omega \hat{\mathbf{C}}(\tau) + \hat{\mathbf{K}}(\tau)) \hat{\mathbf{u}}(\tau) = \hat{\mathbf{F}}(\tau) \quad (3.1)$$

où les matrices de masse $\hat{\mathbf{M}}(\tau)$, raideur $\hat{\mathbf{K}}(\tau)$ et amortissement $\hat{\mathbf{C}}(\tau)$, le vecteur des forces excitatrices $\hat{\mathbf{F}}(\tau)$ sont aléatoires. Le vecteur champ des déplacements $\hat{\mathbf{u}}(\tau)$ est donc lui aussi aléatoire. L'argument τ et le symbole $\hat{\bullet}$ dénotent le caractère aléatoire des quantités.

3.1.2 Choix de la loi de probabilité

Dans ce travail, seules sont considérées les incertitudes sur les propriétés matériaux des aubes, les variations aléatoires concernent donc le module d'Young des aubes qui est supposé aléatoire. Pour construire la loi de probabilité associée, à partir du maximum d'entropie, il faut tenir compte des informations accessibles [89] qui sont :

- un support positif,
- moyenne et écart type donnés,

- la quantité aléatoire et son inverse représentées par des variables aléatoires du second ordre.

3.1.3 Développement en chaos polynomial (PCE)

La variation aléatoire sur le module d'Young de l'aube s'écrit :

$$\hat{E}(\tau) = n_\xi \xi(\tau) \langle \hat{E}(\tau) \rangle \quad (3.2)$$

où la notation $\langle \bullet \rangle$ dénote l'espérance mathématique. La variable aléatoire $\xi(\tau)$ suit une loi gamma de paramètre α et de support positif ; n_ξ est une constante de normalisation (Annexe E). En fixant de façon adéquate le paramètre α , la distribution gamma tend vers une loi symétrique par rapport à la moyenne, ce qui est représentatif de la variation réelle du module d'Young.

Le module d'Young intervient dans les termes associés aux aubes dans la matrice de raideur $\hat{\mathbf{K}}(\tau)$:

$$\hat{\mathbf{K}}(\tau) = n_\xi \xi(\tau) \langle \hat{\mathbf{K}}(\tau) \rangle \quad (3.3)$$

où K représente la moyenne de $\hat{\mathbf{K}}(\tau)$. L'équation dynamique (3.1), avec comme seuls termes aléatoires ceux de rigidité de la structure, devient :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \hat{\mathbf{K}}(\tau)) \hat{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{F} \quad (3.4)$$

La réponse au problème dynamique est aléatoire et doit donc être modélisée en tant que telle. Dans ce cas une possibilité de représentation repose sur l'utilisation du développement du chaos polynomial [68–70]. On décompose alors le champ des déplacements $\hat{\mathbf{u}}(\tau)$ sur une base de polynômes connus de variables aléatoires et orthogonaux à la densité de probabilité de ces variables, tel que :

$$\hat{\mathbf{u}}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(\tau) \mathbf{u}^{(i)} \quad (3.5)$$

où $\mathbf{u}^{(i)}$ sont les vecteurs coefficients déterministes à déterminer pour reconstruire la réponse aléatoire $\hat{\mathbf{u}}(\tau)$ via sa moyenne, sa variance et sa fonction de densité de probabilité. Les polynômes $\psi_i(\tau)$ sont orthogonaux à la loi gamma et sont donc les polynômes de Laguerre d'ordre i [89] explicités en Annexe(F).

En pratique, le nombre de polynômes dans les développements en PCE de l'équation

(3.5) sont tronqués tel que :

$$\hat{\mathbf{u}}(\tau) = \sum_{i=0}^p \psi_i(\tau) \mathbf{u}^{(i)} \quad (3.6)$$

où p est l'ordre de développement du chaos [68].

3.2 Modèle incertain du système multi-étages

D'après les résultats des chapitres précédents, l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages peut être utilisée pour décomposer le problème déterministe multi-étages défini sur la structure complète en plusieurs problèmes découplés pour chaque ordre de Fourier fondamental. Ainsi, la réponse modale du système non-amorti s'obtient à partir de la solution des problèmes découplés pour chaque ordre de Fourier fondamental $k_f = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{k_f} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{k_f}) \tilde{\mathbf{U}}_{k_f} = 0 \quad (3.7)$$

où $\tilde{\mathbf{U}}_{k_f}$ est le vecteur des déplacements en coordonnées cycliques et N_1 le nombre de secteurs de l'étage avec le plus petit nombre de secteurs.

La réponse forcée du système multi-étages s'obtient par la résolution des problèmes découplés pour les ordres de Fourier fondamentaux $k_f = 0, \dots, \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor$:

$$\left[-\Omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{k_f} + j\Omega \tilde{\mathbf{C}}_{k_f} + \tilde{\mathbf{K}}_{k_f} \right] \tilde{\mathbf{U}}_{k_f} = \tilde{\mathbf{F}}_{k_f} \quad (3.8)$$

où Ω est la pulsation de l'excitation.

3.2.1 Quantités incertaines du problème

Les incertitudes sur les matériaux des aubes sont modélisées comme variations du module d'Young associé aux matrices de raideur $\tilde{\mathbf{K}}_{k_f}$. Ces matrices restent proportionnelles au module d'Young E , car seulement des opérations linéaires interviennent pour les obtenir à partir de la matrice de raideur de la structure complète. Il est proposé ici d'utiliser une variable aléatoire identique pour chaque aube qui suit une loi gamma adaptée à la variation réelle du module d'Young (symétrique) (voir Annexe E). Intégrant l'expression aléatoire du module d'Young donnée par l'équation (3.3), la matrice de raideur aléatoire $\hat{\tilde{\mathbf{K}}}_{k_f}$ s'écrit :

$$\hat{\tilde{\mathbf{K}}}_{k_f}(\tau) = \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_{k_f}(\hat{E}(\tau)) = n_\xi \xi(\tau) \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_{k_f}(\langle \hat{E} \rangle) = n_\xi \xi(\tau) \langle \hat{\tilde{\mathbf{K}}}_{k_f}(\hat{E}) \rangle \quad (3.9)$$

Pour considérer des incertitudes seulement sur les aubes, la matrice de raideur déterministe est réécrite comme la somme des deux matrices suivantes :

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f} = \hat{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f}^{aube} + \tilde{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f}^{reste} \quad (3.10)$$

où seule celle correspondant aux aubes est considérée aléatoire et définie par :

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f}^{aube} = n_\xi \xi \langle \hat{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f}^{aube} \rangle \quad (3.11)$$

3.2.2 Analyse modale aléatoire du système

3.2.2.1 Définition du problème

La structure est faiblement amortie. L'analyse modale est alors effectuée à partir des modes propres réels du système non amorti. D'après l'équation (3.7), le sous-problème déterministe associé à chaque harmonique multi-étages fondamentale k_f pour le l ème couple mode–fréquence propres $(\omega_l, \underline{\underline{\mathbf{U}}}_l)$ a la forme suivante :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f} \underline{\underline{\mathbf{U}}}_l = \omega_l^2 \tilde{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}_{k_f} \underline{\underline{\mathbf{U}}}_l \quad (3.12)$$

avec la condition de normalisation :

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}}_l^T \tilde{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}_{k_f} \underline{\underline{\mathbf{U}}}_l = 1 \quad (3.13)$$

Le problème aux valeurs propres aléatoires s'écrit [68] :

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}_{k_f}(\tau) \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l(\tau) = \hat{\omega}_l^2 \tilde{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}_{k_f} \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l(\tau) \quad \text{avec} \quad \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l^T(\tau) \tilde{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}_{k_f} \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l(\tau) = 1 \quad (3.14)$$

où $(\hat{\omega}_l, \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l)$ est le l ème couple fréquence–mode aléatoire et la matrice de masse est déterministe. Les solutions $\hat{\omega}_l$ et $\hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l$ du problème sont décomposées en polynômes de Laguerre, fonctions de variables aléatoires de loi gamma :

$$\hat{\omega}_l = \bar{\omega}_l \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_l^{(i)}, \quad \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \tilde{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_l^{(i)} \quad (3.15)$$

3. Prise en compte de l'effet des incertitudes sur les vibrations du système

avec les coefficients déterministes associés à chaque ordre i du développement en chaos polynomial, à déterminer sous forme scalaire $a_l^{(i)}$ et vectorielle $\underline{\tilde{U}}_l^{(i)}$:

$$a_l^{(i)} \in \mathbb{R}, \quad \underline{\tilde{U}}_l^{(i)} \in \mathbb{R}^s \quad (3.16)$$

s dénote la taille du problème multi-étages associé à l'harmonique fondamental k_f . Les coefficients $a_l^{(i)}$ correspondent à la normalisation par rapport à la valeur déterministe $\overline{\omega}_l$ et permettent une convergence numérique plus robuste dans les calculs. En pratique, la base orthogonale des polynômes de Laguerre est tronqué à $p + 1$ termes :

$$\hat{\omega}_l = \overline{\omega}_l \sum_{i=0}^p \psi_i a_l^{(i)}, \quad \hat{\underline{U}}_l = \sum_{i=0}^p \psi_i \underline{\tilde{U}}_l^{(i)} \quad (3.17)$$

En remplaçant les expressions pour $\hat{\omega}_l$ et $\hat{\underline{U}}_l$ (équation (3.17)), ainsi que l'expression de la matrice de raideur aléatoire $\hat{\underline{K}}_{k_f}(\xi)$ (équation (3.9)) dans le problème aux valeurs propres aléatoire (équation (3.14)) il vient :

$$\sum_{i=0}^p n_\xi \xi \tilde{\underline{K}}_{k_f} \psi_i \underline{\tilde{U}}_l^{(i)} = \overline{\omega}^2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^p \psi_i \psi_j \psi_k a_l^{(k)} a_l^{(j)} \tilde{\underline{M}}_{k_f} \underline{\tilde{U}}_l^{(i)} + \mathbf{r} \quad (3.18)$$

et :

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \psi_i \psi_j \underline{\tilde{U}}_l^{(i)T} \tilde{\underline{M}}_{k_f} \underline{\tilde{U}}_l^{(j)} = 1 + w \quad (3.19)$$

où le vecteur résiduel $\mathbf{r}$ et le résiduel w proviennent de l'approximation d'ordre fini sur les modes et fréquences propres [78]. La solution du problème modal aléatoire pour le l ème couple mode-fréquence propre consiste en la détermination des coefficients :

$$\left\{ a_l^{(0)}, \dots, a_l^{(p)}, \underline{\tilde{U}}_l^{(0)}, \dots, \underline{\tilde{U}}_l^{(p)} \right\} \quad (3.20)$$

qui sont des quantités déterministes et qui décrivent complètement le comportement stochastique de $\hat{\omega}_l(\xi)$ et $\hat{\underline{U}}_l(\xi)$. Le résiduel dans l'équation (3.18) est minimisé en projetant l'équation sur l'espace des polynômes de Laguerre ψ_m [78] :

$$\sum_{i=0}^p \langle \psi_m \xi \psi_i \rangle n_\xi \tilde{\underline{K}}_{k_f} \underline{\tilde{U}}_l^{(i)} = \overline{\omega}^2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \psi_k \rangle a_l^{(k)} a_l^{(j)} \tilde{\underline{M}}_{k_f} \underline{\tilde{U}}_l^{(i)} \quad (3.21)$$

pour $m = 0, \dots, p$. De manière équivalente, le résiduel w est minimisé en projetant cette

fois-ci l'équation (3.19)

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \rangle \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(i)T} \tilde{\underline{\mathbf{M}}}_{kf} \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(j)} = \delta_{m0}, \quad m = 0, \dots, p \quad (3.22)$$

où :

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \neq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Les espérances de produits de polynômes $\langle \psi_m \psi_i \psi_j \rangle$ et $\langle \psi_m \psi_i \psi_j \psi_k \rangle$, ainsi que des produits de polynômes et variables aléatoires $\langle \psi_m \xi \psi_i \rangle$, sont explicités dans l'Annexe F.

3.2.2.2 Résolution du problème par une méthode itérative

Les équations (3.21) et (3.22), pour $m = 0, \dots, p$, forment un système de $(s+1)(p+1)$ équations non linéaires déterministes permettant de calculer les $(s+1)(p+1)$ coefficients $a_l^{(0)}, \dots, a_l^{(p)}, \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(0)}, \dots, \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(p)}$. Ce système d'équations non linéaires est résolu par une méthode itérative : la méthode de Newton-Raphson. Pour utiliser la méthode de Newton-Raphson, à partir des équations (3.21) et (3.22), on définit deux quantités :

$$\mathbf{E}_m = \sum_{i=0}^p \langle \psi_m \xi \psi_i \rangle n_\xi \tilde{\underline{\mathbf{K}}}_{kf} \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(i)} - \bar{\omega}^2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \psi_k \rangle a_l^{(k)} a_l^{(j)} \tilde{\underline{\mathbf{M}}}_{kf} \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(i)} \quad (3.24)$$

et :

$$G_m = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \rangle \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(i)T} \tilde{\underline{\mathbf{M}}}_{kf} \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_l^{(j)} - \delta_{m0} \quad (3.25)$$

Ces quantités peuvent être regroupées sous la forme d'une seule. L'ensemble de ses équations, pour $m = 0, \dots, p$, peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{F}_0 \quad \dots \quad \mathbf{F}_m \quad \dots \quad \mathbf{F}_p \right\}^T \quad (3.26)$$

où :

$$\mathbf{F}_m = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_m \\ G_m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E}_m \in \mathbb{R}^s, \quad G_m \in \mathbb{R} \quad (3.27)$$

Le système d'équations à résoudre de manière itérative s'écrit finalement :

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

3. Prise en compte de l'effet des incertitudes sur les vibrations du système

où $\mathbf{v}$ est le vecteur qui contient les coefficients à déterminer :

$$\mathbf{v} = \left\{ a_l^{(0)}, \dots, a_l^{(p)}, \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_l^{(0)T}, \dots, \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_l^{(p)T} \right\} \quad (3.29)$$

La méthode de Newton-Raphson consiste à utiliser le développement de $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ en série de Taylor au premier ordre

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{v}_0) \quad (3.30)$$

où $\mathbf{v}_0$ est le jeu initial et $\mathbf{J}(\mathbf{v})$ la matrice jacobienne définie ci-après. Ce développement permet d'obtenir une estimation finale de la solution via la relation incrémentale :

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n - [\mathbf{J}(\mathbf{v}_n)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{v}_n) \quad (3.31)$$

En pratique, l'inverse de $\mathbf{J}(\mathbf{v})$ n'est pas calculé. Pour chaque itération le système linéaire suivant est résolu :

$$[\mathbf{J}(\mathbf{v}_n)] \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{F}(\mathbf{v}_n) \quad (3.32)$$

où :

$$\Delta \mathbf{v} = (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) \quad (3.33)$$

La matrice jacobienne s'exprime par :

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} \right], \quad (3.34)$$

en posant la notation suivante de la dérivée partielle d'un vecteur $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$ par rapport à un autre vecteur $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1} & & \frac{\partial z_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Explicitement, les termes de la matrice jacobienne sont :

• Pour $\mathbf{E}_m$:

$$\frac{\partial E_m}{\partial a_l^{(k)}} = \bar{\omega}^2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \psi_k \rangle a_l^{(j)} \underline{\tilde{\mathbf{M}}}_{kf} \underline{\tilde{\mathbf{U}}}_l^{(i)} \quad m, k = 0, \dots, p \quad (3.36)$$

et :

$$\frac{\partial E_m}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_l^{(i)}} = \sum_{i=0}^p \langle \psi_m \xi \psi_i \rangle n_{\xi} \tilde{\mathbf{K}}_{k_f} - \bar{\omega}^2 \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \psi_k \rangle a_l^{(k)} a_l^{(j)} \tilde{\mathbf{M}}_{k_f} m, i = 0, \dots, p \quad (3.37)$$

• Pour G_m :

$$\frac{\partial G_m}{\partial a_l^{(k)}} = 0, \quad m, k = 0, \dots, p \quad (3.38)$$

et :

$$\frac{\partial G_m}{\partial \tilde{\mathbf{U}}_l^{(i)}} = 2 \sum_{j=0}^p \langle \psi_m \psi_i \psi_j \rangle \tilde{\mathbf{M}}_{k_f} \tilde{\mathbf{U}}_l^{(j)} \quad m, i = 0, \dots, p \quad (3.39)$$

À chaque itération de Newton-Raphson, $F(\mathbf{v}_n)$ et $\mathbf{J}(\mathbf{v}_n)$ sont évalués numériquement et le système linéaire de l'équation (3.32) est résolu. Le processus est répété jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. Ici, deux critères d'arrêt sont utilisés : $\|F(\mathbf{v})\| \leq \varepsilon_1$ et $|\Delta \mathbf{v}| \leq \varepsilon_2$.

3.2.2.3 Choix du jeu initial des données

Le jeu initial des données pour le vecteur $\mathbf{v}$ est estimé par une méthode non intrusive de simulation. Dans cette méthode, les développements en PCE de l'équation (3.17) sont projetés sur l'espace de polynômes ψ_j tel que :

$$\langle \hat{\omega}_l \psi_j \rangle = \bar{\omega}_l \sum_{i=0}^p \langle \psi_i \psi_j \rangle a_l^{(i)}, \quad \langle \hat{\mathbf{U}}_l \psi_j \rangle = \sum_{i=0}^p \langle \psi_i \psi_j \rangle \tilde{\mathbf{U}}_l^{(i)} \quad (3.40)$$

et compte tenu de l'orthogonalité des polynômes, il vient :

$$a_l^{(i)} = \frac{\langle \hat{\omega}_l \psi_j \rangle}{\bar{\omega}_l \langle \psi_j^2 \rangle}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_l^{(i)} = \frac{\langle \hat{\mathbf{U}}_l \psi_j \rangle}{\langle \psi_j^2 \rangle} \quad (3.41)$$

Les espérances $\langle \psi_j^2 \rangle$ sont évaluées de manière exacte car des expressions analytiques peuvent être obtenues pour chaque ordre $j = 0, \dots, p$. Le numérateur des expressions de l'équation (3.41) en revanche, doit être estimé par des simulations de Monte-Carlo. Le processus consiste en la génération d'échantillons indépendants des variables aléatoires suivant la distribution correspondante. Pour chaque échantillon le problème de l'équation (3.14) est complètement déterminé et peut être résolu de la manière usuelle pour un nombre important d'échantillons. Finalement, $\langle \hat{\omega}_l \psi_j \rangle$ et $\langle \hat{\mathbf{U}}_l \psi_j \rangle$ sont estimés par la

moyenne arithmétique de l'ensemble des échantillons considérés ce qui permet d'estimer $a_l^{(i)}$ et $\underline{\underline{\tilde{U}}}_l^{(i)}$.

Cette méthode demande un nombre important de réalisations pour converger. Ainsi, elle est utilisée avec un nombre limite de réalisations dans le seul but de trouver un jeu des valeurs initiales pour la méthode de Newton-Raphson.

3.2.3 Réponse forcée aléatoire du système

Le calcul de la réponse forcée du système multi-étages est très important pour visualiser l'impact des incertitudes sur les niveaux vibratoires. Ici, on présente le calcul de la réponse aléatoire induite par la variation du module d'Young décrite au paragraphe 3.2.1.

L'équation (3.8) du problème en réponse forcée déterministe est aussi valable pour des grandeurs aléatoires. Pour chaque fréquence d'excitation Ω , on a :

$$\left[-\Omega^2 \underline{\underline{\tilde{M}}}_{k_f} + j\Omega \underline{\underline{\tilde{C}}}_{k_f} + \underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f} \right] \underline{\underline{\hat{x}}}_{k_f} = \underline{\underline{\tilde{F}}}_{k_f} \quad (3.42)$$

où $\underline{\underline{\hat{x}}}_f$ est le vecteur des déplacements aléatoires. La force appliquée, la matrice de masse et d'amortissement sont considérées déterministes. L'amortissement structural est défini à partir de la moyenne de la matrice de rigidité $\underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f}(\tau)$ par :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}_{k_f} = \frac{\eta}{\Omega} \langle \underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f} \rangle \quad (3.43)$$

où η est le facteur d'amortissement. L'équation (3.42) s'écrit alors :

$$\left[-\Omega^2 \underline{\underline{\tilde{M}}}_{k_f} + j\eta \langle \underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f} \rangle + \underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f} \right] \underline{\underline{\hat{x}}}_{k_f} = \underline{\underline{\tilde{F}}}_{k_f} \quad (3.44)$$

La réponse $\underline{\underline{\hat{x}}}_f$ est développée via le Chaos Polynomial et tronquée à l'ordre p :

$$\underline{\underline{\hat{x}}}_f = \sum_{i=0}^p \psi_i \underline{\underline{\tilde{x}}}_{k_f}^{(i)} \quad (3.45)$$

En utilisant les expressions de $\underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f}$ et $\underline{\underline{\hat{x}}}_f$ des équations (3.9) et (3.45), le problème aléatoire donné par l'équation (3.44) devient :

$$\left[-\Omega^2 \underline{\underline{\tilde{M}}}_{k_f} + j\eta \langle \underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f} \rangle + n_\xi \xi \langle \underline{\underline{\hat{K}}}_{k_f} \rangle \right] \sum_{i=0}^p \psi_i \underline{\underline{\tilde{x}}}_f^{(i)} = \underline{\underline{\tilde{F}}}_{k_f} \quad (3.46)$$

Pour déterminer les vecteurs de coefficients du chaos $\tilde{\mathbf{x}}_f^{(i)}$, l'équation (3.46) est projetée dans l'espace de polynômes orthogonaux ψ_j :

$$\left[-\Omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{k_f} + j\eta \langle \hat{\mathbf{K}}_{k_f} \rangle \right] \sum_{i=0}^p \langle \psi_j^2 \rangle \delta_{ij} \tilde{\mathbf{x}}_f^{(i)} + n_\xi \langle \hat{\mathbf{K}}_{k_f} \rangle \sum_{i=0}^p \langle \psi_j \xi \psi_i \rangle \tilde{\mathbf{x}}_f^{(i)} = \langle \psi_j \tilde{\mathbf{F}}_{k_f} \rangle \quad (3.47)$$

pour $j = 0, \dots, p$. Ceci amène à résoudre un système de $(p+1) \times s$ équations linéaires, et ce pour chaque fréquence d'excitation.

3.2.4 Grandeurs caractéristiques aléatoires

Les solutions du problème vibratoire (fréquences propres, déformées modales et réponses forcées) sont caractérisées par leur moyenne, leur variance et leur densité de probabilité (PDF).

Les moments statistiques associés à la l ème fréquence propre sont calculés à partir des coefficients du chaos et les PDF sont obtenues à partir des tirages statistiques faits sur ces coefficients. L'effet aléatoire sur les déformées modales est lui quantifié en les décomposant sur la base des modes déterministes [78].

3.2.4.1 Moments statistiques des fréquences propres et de la réponse forcée

Les moments statistiques associés à la l ème fréquence propre sont calculés à partir des coefficients du chaos $(a_l^{(0)}, \dots, a_l^{(p)})$. La moyenne de la pulsation propre aléatoire $\langle \hat{\omega}_l \rangle$ est donnée par :

$$\langle \hat{\omega}_l \rangle = \overline{\omega}_l a_l^{(0)}, \quad (3.48)$$

Sa variance $\sigma^2[\hat{\omega}_l]$ est calculée par :

$$\sigma^2[\hat{\omega}_l] = \overline{\omega}_l^2 \sum_{i=1}^p (a_l^{(i)})^2 \langle \psi_i^2 \rangle \quad (3.49)$$

De même, pour chaque fréquence d'excitation Ω , les moments statistiques de la réponse forcée sont calculés à partir des coefficients $(\tilde{\mathbf{x}}_f^0(\Omega), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_f^p(\Omega))$ du développement du chaos polynomial de l'équation (3.5) : D'une part, la moyenne :

$$\langle \hat{\mathbf{x}}_f(\Omega) \rangle = \tilde{\mathbf{x}}_f^0(\Omega) \quad (3.50)$$

D'autre part, la variance :

$$\sigma^2[\hat{\underline{\mathbf{x}}}_f(\Omega)] = \sum_{i=1}^p (\hat{\underline{\mathbf{x}}}_f^i(\Omega))^2 \langle \psi_i^2 \rangle \quad (3.51)$$

Le détail des calculs pour obtenir les équations (3.48) et (3.49) sont explicités dans l'Annexe G.

3.2.4.2 Quantification des variations aléatoires sur les déformées modales

On cherche à caractériser l'effet des incertitudes du module d'Young sur les déformées modales. Un moyen est de décomposer ces modes aléatoires sur la base des modes déterministes [76, 78] : chaque l ème déformée modale aléatoire $\hat{\underline{\mathbf{U}}}_l$ est exprimée comme une combinaison linéaire des modes déterministes $\underline{\mathbf{U}}_i$:

$$\hat{\underline{\mathbf{U}}}_l(\tau) = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^l(\tau) \underline{\mathbf{U}}_i \quad (3.52)$$

où $\hat{e}_i^l(\tau)$ est un coefficient aléatoire, représentatif de l'effet aléatoire sur chaque déformée l . Une base modale déterministe tronquée peut être utilisée en supposant que les déformées modales aléatoires ne sont pas très différentes des déformées déterministes, ce qui dépend du problème étudié. Ici on choisit de retenir cette hypothèse. Soit la décomposition en chaos de $\hat{\underline{\mathbf{U}}}_l(\tau)$ donnée par l'équation (3.17) :

$$\hat{\underline{\mathbf{U}}}_l(\tau) = \sum_{k=0}^p \psi_k(\tau) \underline{\mathbf{U}}_l^{(k)} \quad (3.53)$$

Un développement similaire à celui de l'équation (3.52) permet de décomposer chaque coefficient déterministe associé à l'ordre k du développement du chaos polynomial pour la déformée modale, $\underline{\mathbf{U}}_l^{(k)}$ de l'équation (3.53), dans la base de modes déterministes $\underline{\mathbf{U}}_i$:

$$\underline{\mathbf{U}}_l^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i^{l,k} \underline{\mathbf{U}}_i \quad (3.54)$$

où $c_i^{l,k}$ sont des coefficients déterministes à trouver. Ainsi, pour chaque ordre du chaos k de chaque déformée modale l , le système d'équations suivant permet de trouver les coefficients $c_i^{l,k}$, composantes du vecteur $\mathbf{c}^{l,k}$:

$$\Phi \mathbf{c}^{l,k} = \underline{\mathbf{U}}_l^{(k)} \quad (3.55)$$

où Φ est la base modale déterministe formée des modes déterministes $\tilde{\underline{\mathbf{U}}}_i$. À partir des équations (3.53) et (3.54) on obtient :

$$\hat{\underline{\mathbf{U}}}_l(\tau) = \sum_{k=0}^p \sum_{i=1}^n \psi_k(\tau) c_i^{l,k} \tilde{\underline{\mathbf{U}}}_i \quad (3.56)$$

Finalement, en comparant les équations (3.56) et (3.52) il vient :

$$\hat{e}_i^l(\tau) = \sum_{k=0}^p \psi_k(\tau) c_i^{l,k} \quad (3.57)$$

Les contributions aléatoires des déformées modales aléatoires peuvent alors être quantifiées en fonction des quantités déterministes par :

- la moyenne de $\hat{e}_i^l$:

$$\langle \hat{e}_i^l(\tau) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^p \psi_k(\tau) c_i^{l,k} \right\rangle = \sum_{k=0}^p \langle \psi_k \rangle c_i^{l,k} = c_i^{l,0} \quad (3.58)$$

qui correspond à la contribution du i ème mode déterministe au l ème mode aléatoire associé à l'ordre 0 du développement du chaos polynomial.

- la variance de $\hat{e}_i^l$, qui est utilisée pour quantifier l'interaction, au sens statistique, entre les modes aléatoires et les modes déterministes :

$$\sigma^2[\hat{e}_i^l] = \left\langle \left(\hat{e}_i^l - \langle \hat{e}_i^l \rangle \right)^2 \right\rangle = \sum_{k=1}^p \langle \psi_k^2 \rangle (c_i^{l,k})^2 \quad (3.59)$$

3.3 Application numérique

Dans cette section, la méthodologie décrite précédemment est appliquée à un système multi-étages consistant en deux roues aubagées. Les effets des incertitudes sur le module d'Young des aubes sont analysés et la méthodologie est validée en comparant les résultats de l'analyse modale et de la réponse forcée avec des résultats obtenus par simulations de Monte-Carlo.

3.3.1 Description du système multi-étages

Le modèle multi-étages introduit dans le chapitre 1 est utilisé ici. La FIG.3.1 rappelle le maillage éléments finis de la structure complète. La méthode de symétrie cyclique

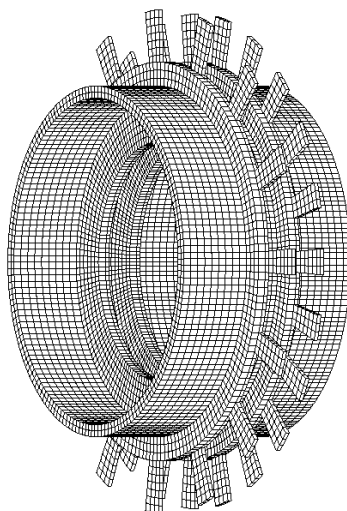


FIG. 3.1: Maillage éléments finis du modèle multi-étages composé de deux étages à 15 et 23 secteurs

multi-étages est utilisée pour calculer les fréquences propres déterministes. Celles-ci sont montrées en fonction de l'ordre de Fourier dans la FIG.2.2 du chapitre 2, présentée ici de nouveau FIG.3.2. Les résultats concernent la plage de fréquence [2800,5000] Hz pour des diamètres nodaux allant de 0 à 5, ce qui correspond à une zone de haute densité modale. Les déformées modales ont été classées, à l'aide de la répartition de l'énergie de déformation, en familles de modes prédominant disque et modes prédominant aubes. Des modes correspondant aux déformations globales de l'arbre sont aussi observés.

La FIG.3.2 particularise les six modes à trois diamètres qui seront analysés. À titre d'illustration, la FIG.3.3 montre deux déformées de familles différentes de modes de disque se déformant en phase ou en opposition de phase.

La réponse déterministe à une force extérieure de type ordre moteur 3 est montrée dans la FIG.3.4. A contrario du chapitre 2, le facteur d'amortissement structural est pris à 2% pour arriver à une convergence plus rapide du développement du chaos polynomial [94] (voir Annexe H).

La force d'excitation est appliquée sur l'étage 1 sur les noeuds en bout d'aubes dans les directions tangentielle et axiale par rapport au disque.

Puisque l'hypothèse de symétrie cyclique multi-étages implique que l'amplitude de la réponse est la même pour tous les secteurs d'un étage, les déplacements du secteur de référence seront utilisés. Comme prévu, les deux pics d'amplitude les plus importants apparaissent aux fréquences appartenant aux familles de modes prédominant aubes de

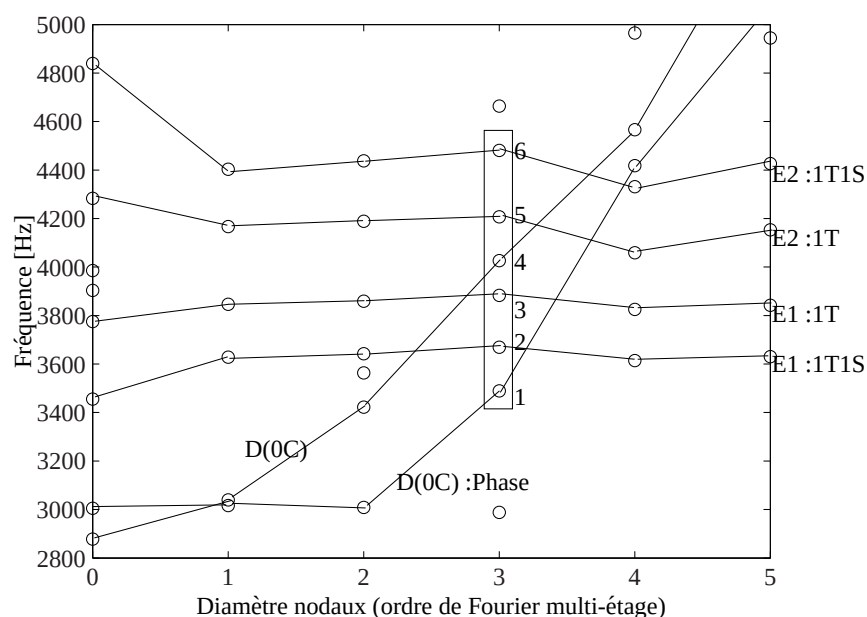


FIG. 3.2: Fréquences propres vs. diamètres nœuds. Familles de modes : 1/ E2 :1T1S : torsion–flexion aubes dans le plan secondaire, étage 2 ; 2/ E2 :1T 1ère torsion aubes, étage 2 ; 3/ E1 :1T : 1ère torsion aubes, étage 1 ; 4/ E1 :1T1S : torsion–flexion aubes dans le plan secondaire, étage 1 ; 5/ D(0C) : disque en opposition de phase, 0 cercle nœuds ; D(0C) :Phase : disque en phase, 0 cercle nœuds

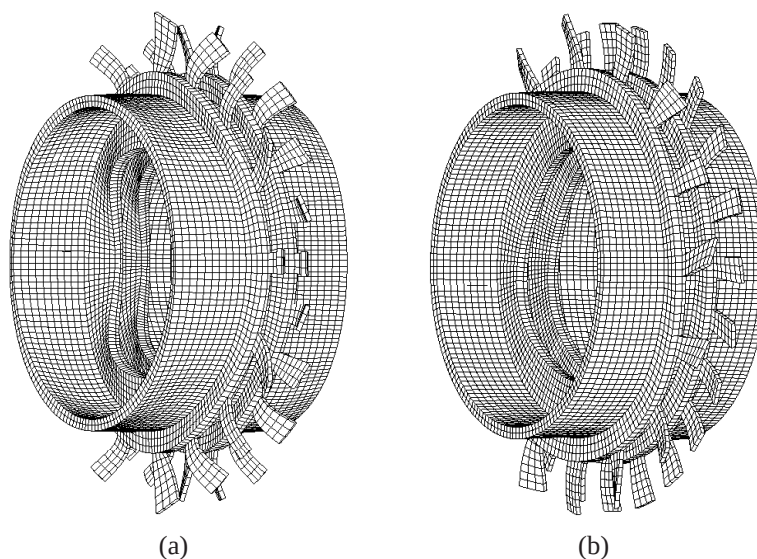


FIG. 3.3: Déformées modales (a) mode 1, D(0C)Phase à 3488.4 [Hz] prédominant disque se déformant en phase ; (b) mode 2, E1 :1T1S à 3670 [Hz] torsion–flexion aubes de l'étage 1 dans le plan secondaire.

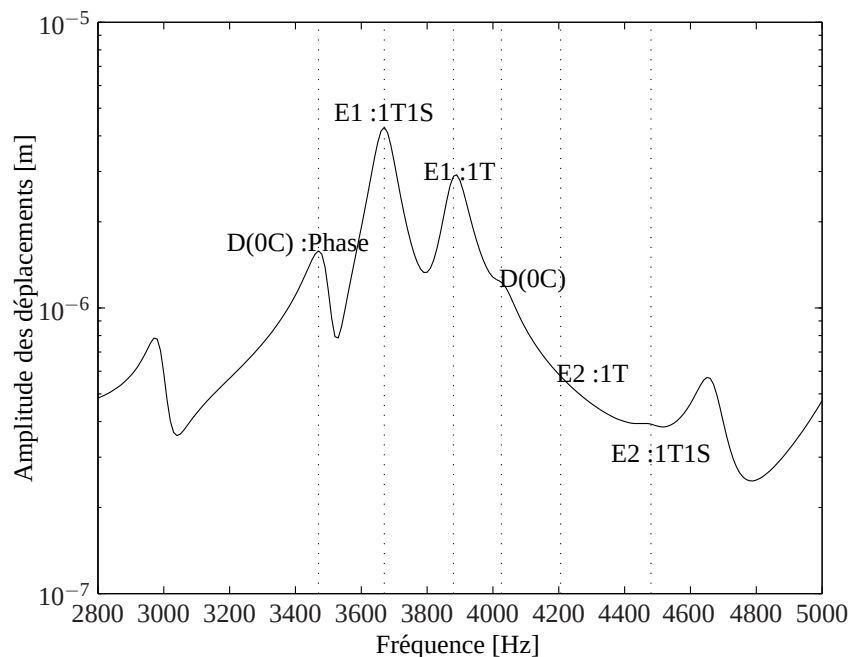


FIG. 3.4: Réponse déterministe à une force extérieure $H = 3$ pour un amortissement structural égale à 2%. Norme de déplacement pour un noeud en bout d'aube de l'étage 1.

l'étage 1.

3.3.2 Calcul des fréquences propres aléatoires

On rappelle que la même variation c'est-à-dire la même variable aléatoire suivant une loi gamma est prise pour chaque aube de chaque étage. Un coefficient de variation de 2.5% est utilisé pour décrire les variations du module d'Young $\hat{E}$ ((3.2)) des aubes. La Fonction de Densité de Probabilité (PDF) du module Young aléatoire $\hat{E}$ qui en résulte est montrée FIG. 3.5.

Les effets des incertitudes matériau sur les fréquences et déformées modales sont étudiés en réalisant les calculs avec un développement du chaos polynomial d'ordre 2. Le jeu de solutions $\mathbf{v}$ initial (équation (3.29)) est estimé par l'approche décrite précédemment dans le paragraphe 3.2.2.3 avec 100 réalisations.

Les résultats du PCE sont validés par comparaison avec des simulations de Monte-Carlo avec 5000 réalisations pour les six modes indiqués sur la FIG. 3.2. Le TAB.3.1 montre une très bonne correspondance en fréquence, pour la moyenne $\langle \hat{\omega} \rangle$, l'écart type σ_{ω} et le coefficient de variation δ_{ω} , ce qui valide l'approche par le développement du chaos polynomial. Les modes étudiés, qui correspondent aux familles d'aubes, présentent

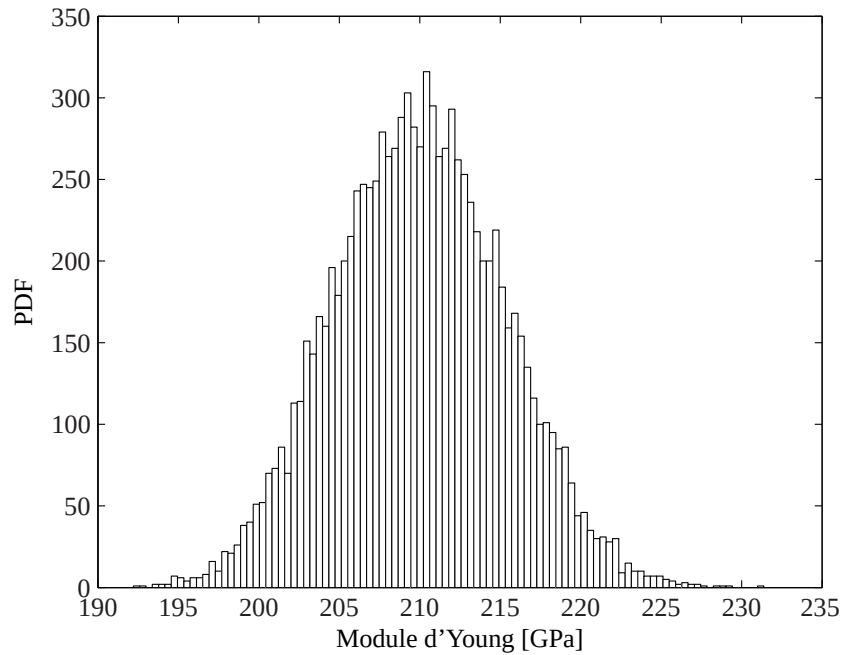


FIG. 3.5: Fonction de Densité de Probabilité du module d'Young aléatoire $\hat{E}$.

des écarts types importants, ce qui est logique puisque les incertitudes sont introduites sur les aubes. Parallèlement, les écart-types correspondant aux familles de modes de disque, les modes 1 et 4, sont faibles. ce qui suggère un faible couplage entre les vibrations des aubes et des disques.

On remarque que les fonctions de densités de probabilité, pour les fréquences propres étudiées et montrées FIG.3.6, ont une forme similaire à celle du Module d'Young, ce qui montre la nature linéaire du problème.

TAB. 3.1: Moments statistiques des fréquences propres aléatoires : moyenne, écart-type et coefficient de variation. Comparaison avec des simulations de Monte-Carlo.

Mode	PCE			Monte-Carlo		
	$\langle \hat{\omega} \rangle$ [Hz]	σ_{ω} [Hz]	δ_{ω} [%]	$\langle \hat{\omega} \rangle$ [Hz]	σ_{ω} [Hz]	δ_{ω} [%]
1	3488.36	5.66	0.16	3488.36	5.63	0.16
2	3669.02	33.61	0.92	3668.99	33.41	0.91
3	3882.75	40.91	1.05	3882.72	40.67	1.05
4	4025.99	4.14	0.10	4025.99	4.10	0.10
5	4206.87	43.26	1.03	4206.83	43.01	1.02
6	4480.33	44.77	1.00	4480.30	44.51	0.99

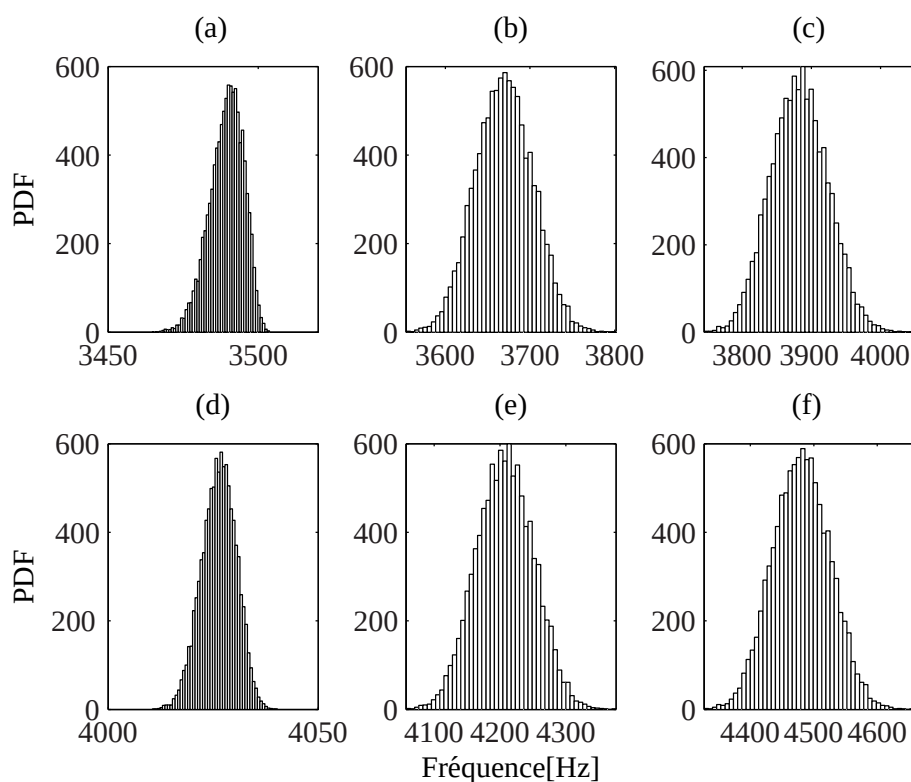


FIG. 3.6: PDF des fréquences propres aléatoires. (a) Mode 1. D(0C)Phase, (b) Mode 2. E1 :1T1S, (c) Mode 3. E1 :1T, (d) Mode 4. D(0C), (e) Mode 5. E2 :1T and (f) Mode 6. E2 :1T1S.

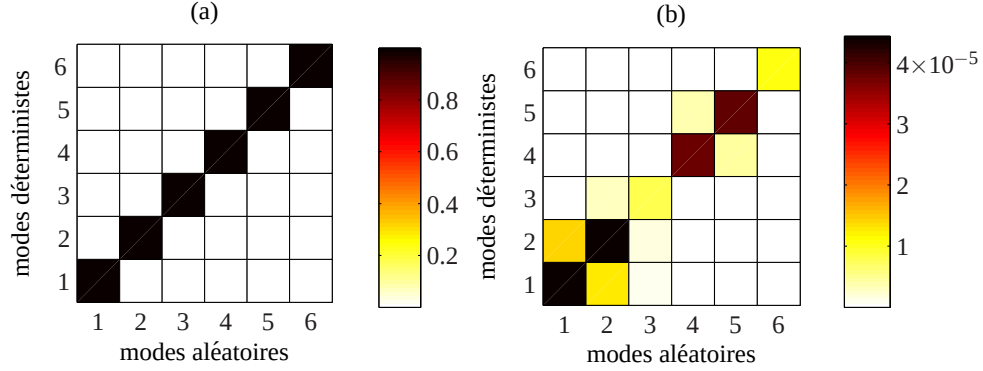


FIG. 3.7: Contributions, au sens statistique, des modes aléatoires aux modes déterministes. (a) Moyenne, (b) Moyenne $\times$ variance . Les modes déterministes sont : Mode 1. D(0C)Phase, Mode 2. E1 :1T1S, Mode 3. E1 :1T, Mode 4. D(0C), Mode 5. E2 :1T et Mode 6. E2 :1T1S.

3.3.3 Calcul des déformées modales aléatoires

La FIG.3.7 illustre les contributions, au sens statistique, des modes aléatoires aux modes déterministes. D'après cette représentation, on voit qu'en moyenne les modes aléatoires correspondent aux modes déterministes. Néanmoins, les incertitudes introduites sur les aubes font apparaître des modes aléatoires intégrant des contributions de plusieurs modes déterministes. Par exemple, la FIG.3.7(a) montre que le mode aléatoire 1 est en moyenne le mode déterministe 1 alors que la FIG.3.7(b) indique qu'il peut également avoir une contribution du mode 2. Ceci est conforté par la FIG.3.8 qui présente la distribution des énergies de déformation des différents composants du modèle multi-étages pour le mode 1. La FIG.3.8(a) caractérise la distribution des énergies du mode 1 déterministe. On voit clairement qu'il s'agit d'un mode prédominant disque. La FIG.3.8(b) donne la distribution d'énergie d'un échantillon dû à une variation du module d'Young des aubes de $\hat{E} = 0.925 \times \langle \hat{E} \rangle$. Ici, on voit que le mode change de nature et évolue vers un mode disque aube, notamment sur l'étage 1. Ceci s'explique par la forme prédominant aube du mode 2 déterministe montrée FIG.3.8(c). Ce changement est associé à une faible variation en fréquence (c.f. TAB.3.1, $\delta_\omega = 0.16\%$). Il apparaît donc indispensable de bien considérer les changement de modes en même temps que la variation en fréquence.

3.3.4 Calcul de la réponse forcée aléatoire

La réponse forcée du système aléatoire à une excitation déterministe de type $H = 3$ est présentée pour un développement du chaos polynomial d'ordre 2. La quantité utilisée

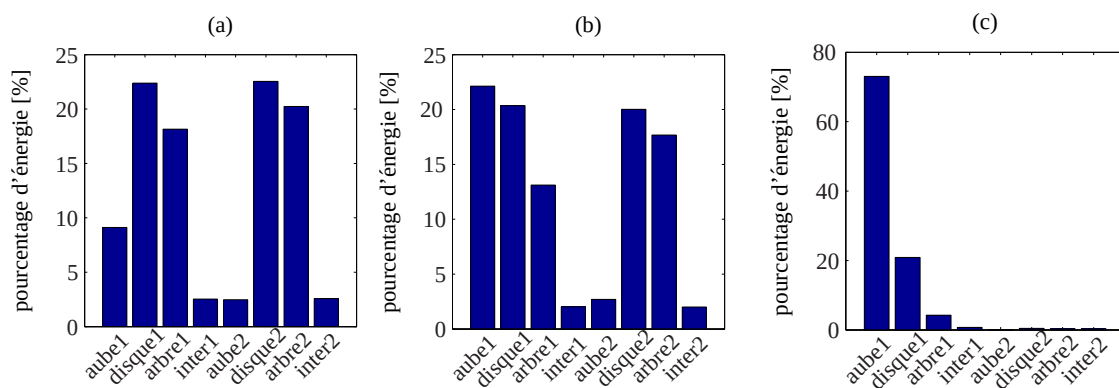


FIG. 3.8: Distribution de l'énergie de déformation à travers les différents composants. Comparaison entre (a) mode 1 déterministe et (b) mode 1 aléatoire pour $\hat{E} = 0.925 \times \langle \hat{E} \rangle$; (c) mode 2 déterministe. Les composants sont : les aubes, disques, arbre et anneau inter-étage ; pour l'étage 1 ou 2.

pour représenter la réponse reste la norme des déplacements d'un noeud en bout d'aube dans l'étage 1.

Les FIG.3.9 et 3.10 montrent les résultats issus du développement du chaos polynomial pour la moyenne et l'écart type respectivement, validés avec des résultats des simulations de Monte-Carlo réalisées avec 5000 tirages. Les résultats du PCE et des simulations de Monte-Carlo sont identiques, quelques faibles écarts sont cependant observés autour des résonances. De même, la FIG.3.11 montre une très bonne correspondance entre les enveloppes de réponse obtenue par PCE et des simulations le Monte-Carlo. Ces enveloppes correspondent aux maxima et minima d'amplitude pour toutes les réalisations de Monte-Carlo à chaque fréquence. Pour déterminer l'enveloppe avec le PCE, on reconstruit la réponse à partir des coefficients du chaos pour 10000 tirages, les évaluations des polynômes de Laguerre étant très peu coûteuses.

Les résultats en réponse sont cohérents avec les résultats en modes propres. Par exemple, sur les FIG.3.9 et 3.10 on observe que le pic correspondant au mode 1 autour de 3488 Hz a une variabilité faible en fréquence mais importante en amplitude. Le mode 1 est un mode de disque dans la configuration déterministe mais peut évoluer vers un mélange disque-aube pour certaines configurations aléatoires. Ce changement de la nature du mode est à l'origine de la variabilité de l'amplitude et doit être prise en compte si des incertitudes sont introduites.

Finalement, la méthode du chaos polynomial appliquée ici et validée par la méthode de référence de Monte-Carlo sur un système multi-étagé modélise parfaitement les variations des modes du système en fréquence et en déformée ainsi que la réponse forcée. De plus, cette méthode met en évidence la présence de variations dans la nature du comportement

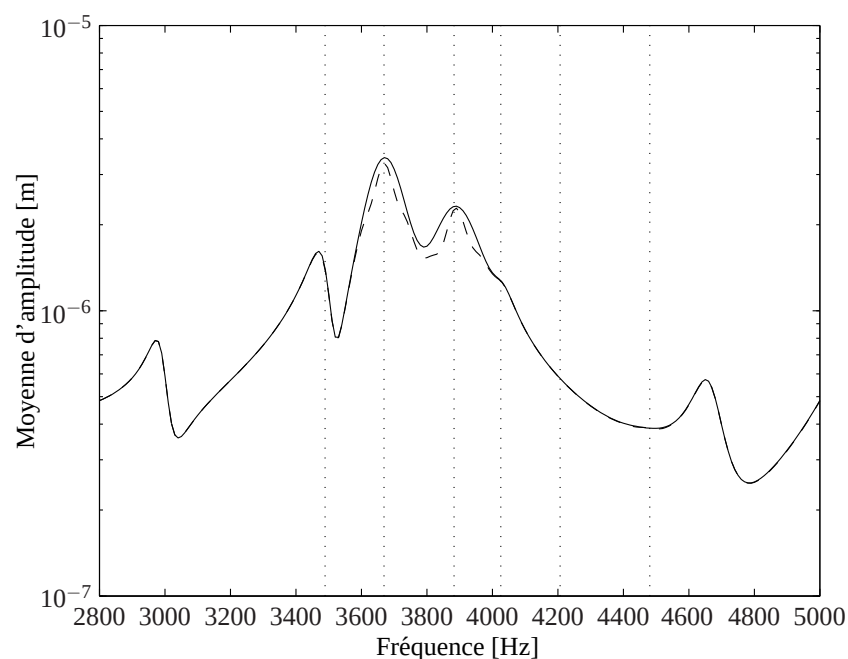


FIG. 3.9: Moyenne de l'amplitude de réponse de l'étage 1. Comparaison entre les simulations Monte-Carlo (—) et le PCE d'ordre 2 (- - -).

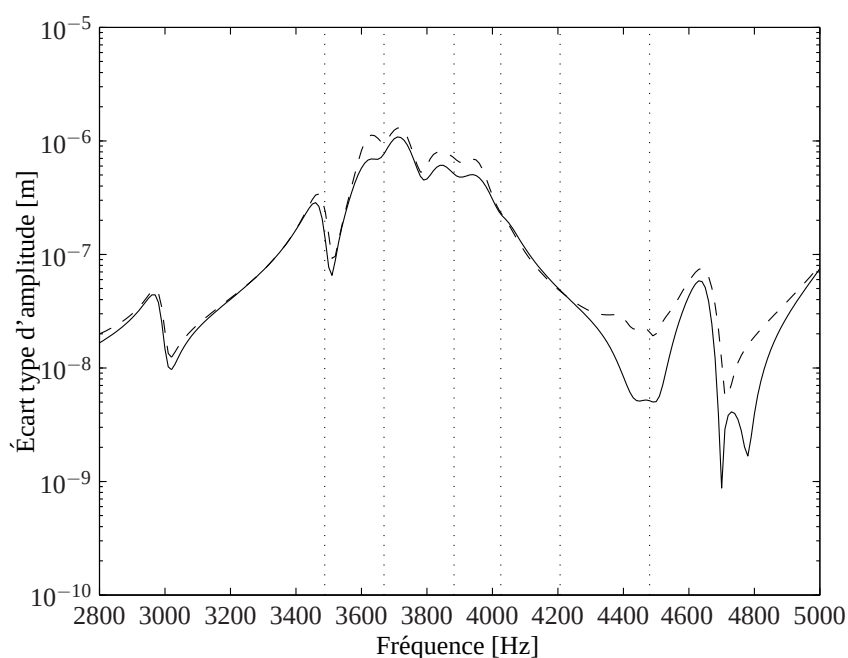


FIG. 3.10: Écart type de l'amplitude de réponse de l'étage 1. Comparaison entre les simulations Monte-Carlo (—) et le PCE d'ordre 2 (- - -).

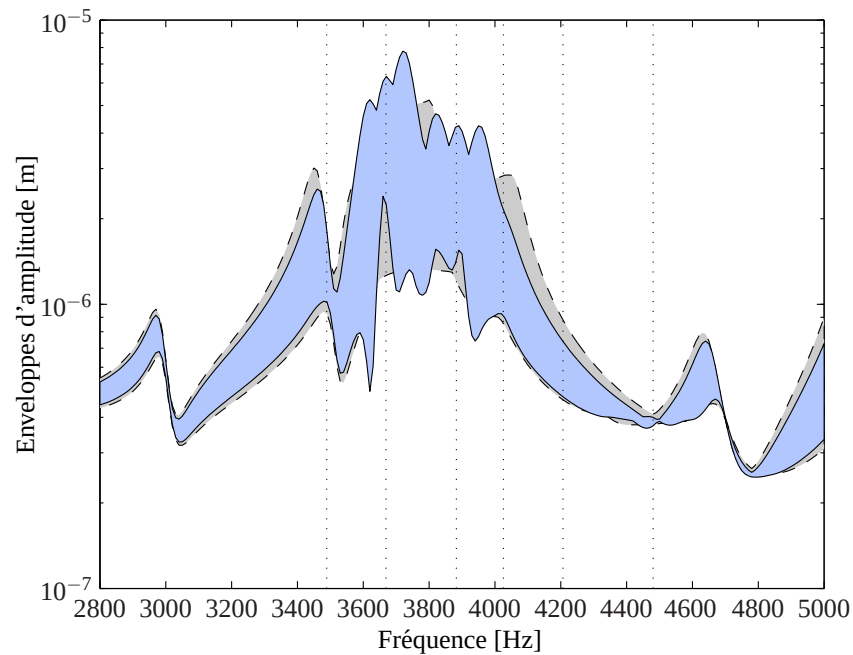


FIG. 3.11: Enveloppes d'amplitude de réponse de l'étage 1. Comparaison entre les simulations Monte-Carlo (—) et le PCE d'ordre 2 (- - -).

vibratoire du système pour de petites variations des paramètres matériaux en entrée et non visibles en conduisant une étude modale simplement fréquentielle.

Conclusion

Dans le chapitre 1, la modélisation des structures à symétrie cyclique à l'aide d'une décomposition en série de Fourier du déplacement circonférentiel est tout d'abord rappelée. La transformée de Fourier complexe en notation matricielle des champs discrets est choisie et le résultat classique de découplage des ordres de Fourier associés aux quantités cycliques est retrouvé. Ensuite, les déformées modales et les mécanismes de réponse des systèmes multi-étages sont étudiés à l'aide de calculs complets sans réduction sur une structure composée de deux étages avec un nombre différent de secteurs. La dissymétrie propre de la structure multi-étages introduit un faible désaccordage qui est à l'origine de très légers dédoublements de fréquences observés pour certaines fréquences doubles. Ce désaccordage est également responsable de petits écarts d'amplitude sur la réponse entre les différents secteurs d'un étage. Il est observé également que beaucoup de modes multi-étages ressemblent aux modes calculés pour les étages seuls ou sont une évolution de ceux-ci. Les modes multi-étages peuvent être classés en familles de modes d'aube et de modes de disque comme dans le cas des étages isolés. Les disques de deux étages peuvent se déformer en phase ou en opposition de phase donnant lieu à deux familles de modes distincts. Concernant la réponse de l'ensemble multi-étages, elle peut être sensiblement différente de la réponse calculée sur les étages seuls pour certains ordre d'excitation par ordre moteur. Pour les systèmes multi-étages, les ordres de Fourier associés aux bases cycliques des différents étages sont normalement couplés entre eux. L'hypothèse de découplage des ordres de Fourier est utilisée en insistant sur le regroupement des ordres de Fourier repliés.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la robustesse de la méthode de symétrie cyclique multi-étages. On montre que pour les configurations étudiées, le nombre de secteurs entre deux étages adjacents a un effet négligeable sur la performance de la méthode. Le contenu harmonique spatial des modes provenant d'un calcul multi-étages montre qu'il n'existe pas de modes multi-harmoniques pour les configurations étudiées. Une très bonne correspondance est obtenue entre le contenu harmonique des modes calculés en symétrie

cyclique multi-étages et les modes de référence issus du calcul complet. Une normalisation en position circonférentielle est proposée pour les paires de modes doubles. Ceci permet d'utiliser un critère de cohérence modal pour quantifier les écarts entre modes. Les écarts en fréquence, la cohérence des déformées modales et les écarts d'amplitude de la réponse sont utilisés pour évaluer la performance de la méthode en symétrie cyclique multi-étages appliquée à des modèles académiques représentatifs de roues de différents types. Les résultats obtenus confirment que la symétrie cyclique multi-étages permet d'obtenir des résultats très proches des résultats issues des calculs sans réduction aussi bien pour l'analyse modale que pour la réponse forcée.

Une méthodologie pour la prise en compte des incertitudes sur les paramètres structuraux dans les systèmes multi-étages est présentée dans le chapitre 3. Le problème déterministe est transformé en plusieurs sous-problèmes à l'aide de la méthode de symétrie cyclique multi-étages. La méthode de Chaos Polynomial est ensuite utilisée pour représenter les quantités généralisées associées aux différents ordres de Fourier multi-étages. Des variables aléatoires suivant une loi de support positif ont été utilisées pour modéliser les incertitudes sur le Module d'Young des aubes. Les résultats obtenus pour la variabilité des fréquences propres et des amplitudes de la réponse ont été validés par rapport à des simulations de Monte-Carlo. Il est montré qu'une représentation avec des polynômes allant jusqu'à l'ordre 2 donne des résultats avec une très bonne précision. La variabilité des déformées modales est étudiée par décomposition à la fois dans la base du chaos polynomial et dans la base des modes déterministes. Une zone où plusieurs familles de modes sont proches en fréquences a été considérée. Les résultats montrent que même pour de faibles incertitudes, entraînant seulement une faible variation en fréquence, certaines déformées modales peuvent présenter une variabilité importante. De plus, la variabilité des déformées modales peut être associée à des variations importantes d'amplitude de la réponse. Des changements dans la nature d'un mode, caractérisés par une évolution vers une famille autre que celle du mode déterministe, expliquent les variations en réponse et doivent être considérés dans le cadre de conceptions robustes.

Les développements présentés doivent être étendus pour permettre l'étude de l'effet d'incertitudes plus générales que celles uniformément et identiquement réparties sur les aubes du système.

Annexe A

Transformée de Fourier en notation réelle

Une transformation réelle équivalente permettant de décrire les composantes physiques en fonction des composantes cycliques réelles peut s'écrire à l'aide des séries trigonométriques :

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^K [\tilde{\mathbf{u}}_{k,c} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-1)\right) + \tilde{\mathbf{u}}_{k,s} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k(n-1)\right)] + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{N}} \tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}} \quad (\text{A.1})$$

où

$$K = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ est pair ,} \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair .} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Le vecteur des coordonnées cycliques réelles a la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}_0 \quad \tilde{\mathbf{u}}_{1,c} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{1,s} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{2,c} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}} \right\}^T \quad (\text{A.3})$$

Les composantes harmoniques réelles sont définies par la transformation inverse qui

donne lieu aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \\
 \tilde{\mathbf{u}}_{k,c} &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(n-1)\right) \\
 \tilde{\mathbf{u}}_{k,s} &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \sin\left(\frac{2\pi}{N} k(n-1)\right) \\
 \tilde{\mathbf{u}}_{\frac{N}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (-1)^{n-1} \mathbf{u}_n
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Les derniers termes dans l'équations (A.1), (A.3) et (A.4) existent seulement si N est pair.

Il est aussi possible de définir une matrice de Fourier réelle $\mathbf{F}_N$ dite quasi-équivalente à la matrice $\mathbf{E}_N$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_N &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_{1,c} & \mathbf{f}_{1,s} & \cdots & \mathbf{f}_{k,c} & \mathbf{f}_{k,s} & \cdots & \mathbf{f}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = \dots \\
 \dots &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right) & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k2\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k2\right) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k(N-1)\right) & \cdots & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k(N-1)\right) & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{N}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

La transformation réelle décrite dans l'équation (1.7) peut s'écrire également pour l'ensemble des secteurs et pour toutes les harmoniques en utilisant la matrice de Fourier réelle $\mathbf{F}_N$:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{F}_N \otimes \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{u}} \tag{A.6}$$

La matrice $\mathbf{F}_N$ étant orthogonale ($\mathbf{F}_N^{-1} = \mathbf{F}_N^T$), la transformation inverse de l'équation est :

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{F}_N^T \otimes \mathbf{I}) \mathbf{u} \tag{A.7}$$

Annexe B

Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker entre deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est défini comme :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1N}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N1}\mathbf{B} & a_{N2}\mathbf{B} & \cdots & a_{NN}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La propriété suivante mélange des aspects liés au produit matriciel usuel et au produit de Kronecker :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD} \quad (\text{B.2})$$

La matrice $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ est inversible si et seulement si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont inversibles, auquel cas :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{B.3})$$

Finalement, l'opération de transposition est distributive sur le produit de Kronecker :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \quad (\text{B.4})$$

Annexe C

Ordres de Fourier découplés en symétrie cyclique

Les matrices assemblées d'une structure à symétrie cyclique, formée par N secteurs identiques de taille $\underline{m}$, ont la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Z0}} & \underline{\mathbf{Z1}} & 0 & \cdots & 0 & \underline{\mathbf{Z1}}^T \\ \underline{\mathbf{Z1}}^T & \underline{\mathbf{Z0}} & \underline{\mathbf{Z1}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \underline{\mathbf{Z1}}^T & \underline{\mathbf{Z0}} & \underline{\mathbf{Z1}} \\ \underline{\mathbf{Z1}} & 0 & \cdots & 0 & \underline{\mathbf{Z1}}^T & \underline{\mathbf{Z0}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

où les blocs $\underline{\mathbf{Z0}}, \underline{\mathbf{Z1}}$ représentent la partie intérieure de chaque secteur et l'interaction avec les secteurs adjacents respectivement.

La passage de ces matrices en base cyclique complexe s'écrit :

$$\tilde{\underline{\mathbf{Z}}} = (\underline{\mathbf{E}}_N^* \otimes \underline{\mathbf{I}}_{\underline{m}}) \underline{\mathbf{Z}} (\underline{\mathbf{E}}_N \otimes \underline{\mathbf{I}}_{\underline{m}}) \quad (\text{C.2})$$

En faisant les multiplications matricielles correspondantes on obtient :

$$\tilde{\underline{\mathbf{Z}}} = (\underline{\mathbf{E}}_N^* \otimes \underline{\mathbf{I}}_{\underline{m}}) \underline{\mathbf{Z}} (\underline{\mathbf{E}}_N \otimes \underline{\mathbf{I}}_{\underline{m}}) = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{0,0} & \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{0,1} & \cdots & \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{0,N-1} \\ & \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{1,1} & \cdots & \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{1,N-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym} & & & \tilde{\underline{\mathbf{Z}}}_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

où les blocs ont la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{l,m} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \mathbf{Z0} e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} e^{j\frac{2\pi}{N}nm} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \mathbf{Z1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} e^{j\frac{2\pi}{N}(n+1)m} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \mathbf{Z1}^T e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-1)m} \quad (\text{C.4})$$

Compte tenu de la relation d'orthogonalité des fonctions exponentielles discrètes :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq l, \\ N & \text{si } m = l. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

les blocs de $\tilde{\mathbf{Z}}$ sont nuls à l'exception des blocs sur la diagonale qui ont la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{k,k} = \mathbf{Z0} + \mathbf{Z1} e^{j\frac{2\pi}{N}k} + \mathbf{Z1}^T e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \quad (\text{C.6})$$

Annexe D

Modes doubles en symétrie cyclique

Du fait que $e^{j\frac{2\pi}{N}k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)}$, les vecteurs de Fourier existent en paires complexes conjuguées $\mathbf{e}_N^k = \overline{\mathbf{e}_N^{N-k}}$ pour tous les ordres sauf $k = 0$ et $k = \frac{N}{2}$. Pour un calcul en symétrie cyclique qui utilise ces transformées de Fourier on obtient des matrices complexes. Ces matrices existent aussi en paires complexes conjuguées $\tilde{\mathbf{Z}}_k = \tilde{\mathbf{Z}}_{N-k}^*$ qui donnent lieu à des problèmes de valeurs propres aux fréquences identiques et modes complexes conjugués $\tilde{\mathbf{U}}_k = \tilde{\mathbf{U}}_{N-k}$. Une paire de modes en quantités physiques sur la structure complète $\underline{\mathbf{U}}, \bar{\underline{\mathbf{U}}}$ s'obtient comme suit :

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_N^k \otimes \tilde{\mathbf{U}}_k, \quad \bar{\underline{\mathbf{U}}} = \mathbf{e}_N^{N-k} \otimes \tilde{\mathbf{U}}_{N-k} = \overline{\mathbf{e}_N^k} \otimes \tilde{\mathbf{U}}_k \quad (\text{D.1})$$

En séparant les parties réelles et imaginaires dans les expressions précédentes on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}} &= [\text{Re}(\mathbf{e}_N^k) + j \text{Im}(\mathbf{e}_N^k)] \otimes [\text{Re}(\tilde{\mathbf{U}}_k) + j \text{Im}(\tilde{\mathbf{U}}_k)], \\ \bar{\underline{\mathbf{U}}} &= [\text{Re}(\mathbf{e}_N^k) - j \text{Im}(\mathbf{e}_N^k)] \otimes [\text{Re}(\tilde{\mathbf{U}}_k) - j \text{Im}(\tilde{\mathbf{U}}_k)] \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

et en développant les produits :

$$\underline{\mathbf{U}}, \bar{\underline{\mathbf{U}}} = [\text{Re}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Re}(\tilde{\mathbf{U}}_k) - \text{Im}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Im}(\tilde{\mathbf{U}}_k)] \pm j [\text{Im}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Re}(\tilde{\mathbf{U}}_k) + \text{Re}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Im}(\tilde{\mathbf{U}}_k)] \quad (\text{D.3})$$

Toute combinaison linéaire la paire $\underline{\mathbf{U}}, \bar{\underline{\mathbf{U}}}$ représente aussi un mode pour la même fréquence et on peut obtenir une paire de modes réels $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ en prenant séparément les

parties réelles et imaginaires de $\underline{\mathbf{U}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{V}}_1 &= [\text{Re}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Re}(\tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k) - \text{Im}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Im}(\tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k)], \\ \underline{\mathbf{V}}_2 &= [\text{Im}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Re}(\tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k) + \text{Re}(\mathbf{e}_N^k) \otimes \text{Im}(\tilde{\underline{\mathbf{U}}}_k)]\end{aligned}\tag{D.4}$$

Annexe E

Loi de Probabilité Gamma

L'équation qui définit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire gamma (ξ) est :

$$f(\xi, \alpha) = \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (\text{E.1})$$

où $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt$ est la fonction gamma et α est un paramètre de forme. Le TAB.E.1 présente les principales caractéristiques de la loi Gamma de paramètre de forme α .

Ici, le module d'Young aléatoire est décrit à l'aide de sa moyenne $\langle \hat{E} \rangle$, de sa variance $\sigma^2[E]$ et de la variable aléatoire ξ suivant une loi gamma. Le coefficient de variation du module d'Young, dont la valeur est donnée par les incertitudes physiques de la structure, s'écrit :

$$\delta_E = \frac{\sigma[E]}{\langle E \rangle} \quad (\text{E.2})$$

où $\sigma[E] = \sqrt{\sigma^2[E]}$ est l'écart-type. D'après l'équation (3.2), la variance du module

TAB. E.1: Caractéristiques de loi Gamma α

Paramètre de forme	$\alpha > -1$
Support	$[0, +\infty[$
Moyenne	$\alpha + 1$
Variance	$\alpha + 1$

d'Young peut s'écrire :

$$\sigma^2[E] = \sigma^2[n_\xi \xi \langle E \rangle] = n_\xi^2 \langle E \rangle^2 \sigma^2[\xi] \quad (\text{E.3})$$

En prenant la moyenne de l'équation (3.2) on obtient :

$$n_\xi \langle \xi \rangle = 1 \quad (\text{E.4})$$

et en utilisant l'expression $\langle \xi \rangle = (\alpha + 1)$ du TAB.E.1 :

$$n_\xi = \frac{1}{(\alpha + 1)} \quad (\text{E.5})$$

L'équation (E.5) et l'expression $\sigma^2[\xi] = (\alpha + 1)$ du TAB.E.1 sont introduites dans l'équation (E.3) pour obtenir :

$$\frac{\sigma^2[E]}{\langle E \rangle^2} = \frac{1}{(\alpha + 1)} \quad (\text{E.6})$$

Finalement, le paramètre de forme α de la distribution gamma est donné par le coefficient de variation du module d'Young :

$$\alpha = \frac{1}{\delta_E^2} - 1 \quad (\text{E.7})$$

Annexe F

Polynômes de Laguerre

Forme des polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre généralisés sont une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la distribution gamma de paramètre de forme α . Les 3 premiers polynômes de Laguerre généralisés sont

$$\psi_0(\xi) = 1, \quad \psi_1(\xi) = -\xi + \alpha + 1, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - (\alpha + 2)\xi + \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)}{2} \quad (\text{F.1})$$

et la relation de récurrence suivant permet de trouver les polynômes pour $i \geq 2$

$$\psi_i = \frac{1}{i}(2i - 1 + \alpha - \xi)\psi_{i-1} - \frac{1}{i}(i - 1 + \alpha)\psi_{i-2} \quad (\text{F.2})$$

Espérance des produits des polynômes de Laguerre

Pour la résolution du problème aléatoire on utilise de manière récurrent les valeurs de l'espérance des produits de deux et trois polynômes de Laguerre. Des expressions analytiques pour ces produits sont développées à l'aide de la définition de l'espérance mathématique d'une fonction arbitraire $g(x)$, de variable aléatoire x , par rapport à la fonction de densité de probabilité $pdf(x)$ de support $x \in \Omega$

$$\langle g(x) \rangle = \int_{\Omega} g(x) pdf(x) dx \quad (\text{F.3})$$

Considérant les 2 premiers ordres du chaos polynomial ($p = 0$ to 2), on utilise les

espérances suivantes :

– d'un polynôme

$$\begin{aligned}\langle \psi_0 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_0(\xi) d\xi = 1, & \langle \psi_1 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1(\xi) d\xi = 0, \\ \langle \psi_2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_2(\xi) d\xi = 0 \quad ;\end{aligned}\tag{F.4}$$

– du produit de 2 polynômes

$$\begin{aligned}\langle \psi_1^2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1^2(\xi) d\xi = \alpha + 1, \\ \langle \psi_1 \psi_2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1(\xi) \psi_2(\xi) d\xi = 0, \\ \langle \psi_2^2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_2^2(\xi) d\xi = 1 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \quad ;\end{aligned}\tag{F.5}$$

– du produit de 3 polynômes

$$\begin{aligned}\langle \psi_1^3 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1^3(\xi) d\xi = -2 - 2\alpha, \\ \langle \psi_1^2 \psi_2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1^2(\xi) \psi_2(\xi) d\xi = 2 + 3\alpha + \alpha^2, \\ \langle \psi_1 \psi_2^2 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1(\xi) \psi_2^2(\xi) d\xi = -4 - 6\alpha - 2\alpha^2, \\ \langle \psi_2^3 \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_2^3(\xi) d\xi = 10 + 17\alpha + 8\alpha^2 + \alpha^3 \quad ;\end{aligned}\tag{F.6}$$

– du produit de 2 polynômes et de la variable aléatoire ξ

$$\begin{aligned}\langle \psi_0^2 \xi \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_0^2 \xi d\xi = \alpha + 1, \\ \langle \psi_0 \psi_1 \xi \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_0 \psi_1 \xi d\xi = -\alpha - 1, \\ \langle \psi_0 \psi_2 \xi \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_0 \psi_2 \xi d\xi = 0, \\ \langle \psi_1^2 \xi \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1^2 \xi d\xi = \alpha^2 + 4\alpha + 3,\end{aligned}\tag{F.7}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 \psi_2 \xi \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_1 \psi_2 \xi d\xi = -\alpha^2 - 3\alpha - 2, \\ \langle \psi_2^2 \xi \rangle &= \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)} \psi_2^2 \xi d\xi = \frac{\alpha^3}{2} + 4\alpha^2 + \frac{17}{2}\alpha + 5 \quad .\end{aligned}$$

Annexe G

Moments statistiques en PCE

Les expressions pour les moments statistiques d'ordre 1 et 2 des fréquences sont développés sur le chaos polynomial :

– Moment d'ordre 1 ou moyenne

$$\langle \hat{\omega}_l \rangle = \left\langle \omega_l \sum_{i=0}^p \psi_i a_l^{(i)} \right\rangle = \omega_l \sum_{i=0}^p a_l^{(i)} \langle \psi_i \rangle = \omega_l a_l^{(0)} \quad (\text{G.1})$$

– Moment d'ordre 2 ou variance

$$\begin{aligned} \sigma^2[\hat{\omega}_l] &= \langle (\hat{\omega}_l - \langle \hat{\omega}_l \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\hat{\omega}_l - \omega_l a_l^{(0)} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{\omega}_l^2 - 2\hat{\omega}_l \omega_l a_l^{(0)} + \omega_l^2 a_l^{(0)2} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\omega_l \sum_{i=0}^p \psi_i a_l^{(i)} \right)^2 \right\rangle - 2 \langle \hat{\omega}_l \rangle \omega_l a_l^{(0)} + \omega_l^2 a_l^{(0)2} \\ &= \omega_l^2 \sum_{i=0}^p a_l^{(i)2} \langle \psi_i^2 \rangle - \omega_l^2 a_l^{(0)2} = \omega_l^2 \sum_{i=1}^p a_l^{(i)2} \langle \psi_i^2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Annexe H

Réponse aléatoire pour un amortissement de 0,5%

On présente ici les résultats de la réponse aléatoire pour des amortissements de 0.5% et 2%, calculées avec des développements d'ordre 2 et 3. On note que le développement du chaos polynomial doit être important en ordre pour intégrer les pics de résonance. Pour le cas très faiblement amorti (amortissement égal à 0.5%) il est clair qu'il faudrait encore rajouter des termes dans le développement pour obtenir un résultat totalement satisfaisant de la moyenne de la réponse. En revanche, les résultats pour les variances et les enveloppes sont très proches des références de Monte-Carlo.

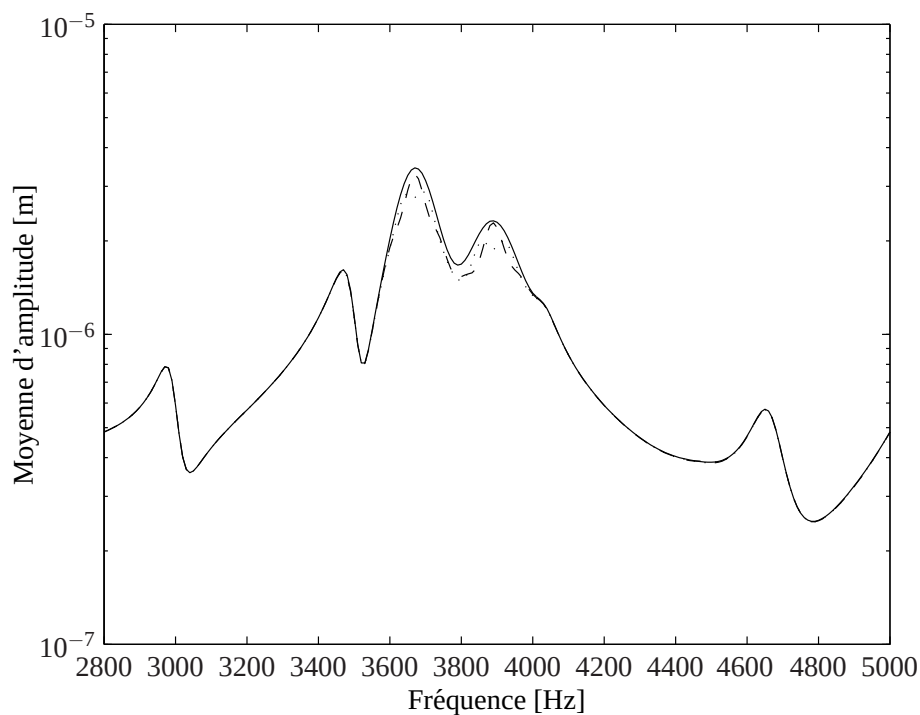


FIG. H.1: Moyenne ordres 2 et 3. Amortissement 2%

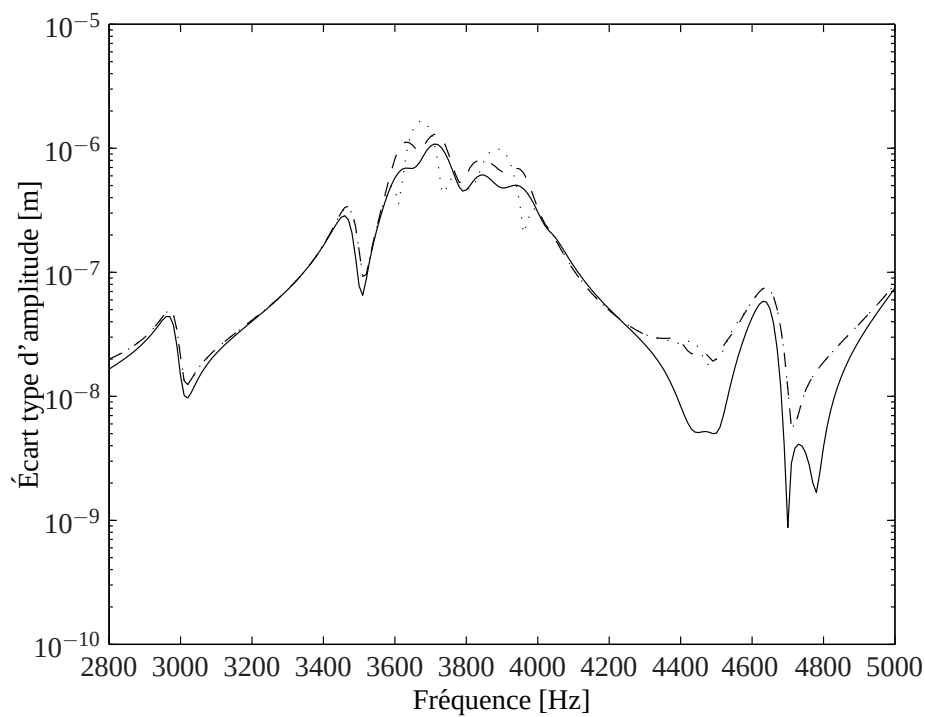


FIG. H.2: Écart type ordres 2 et 3. Amortissement 2%

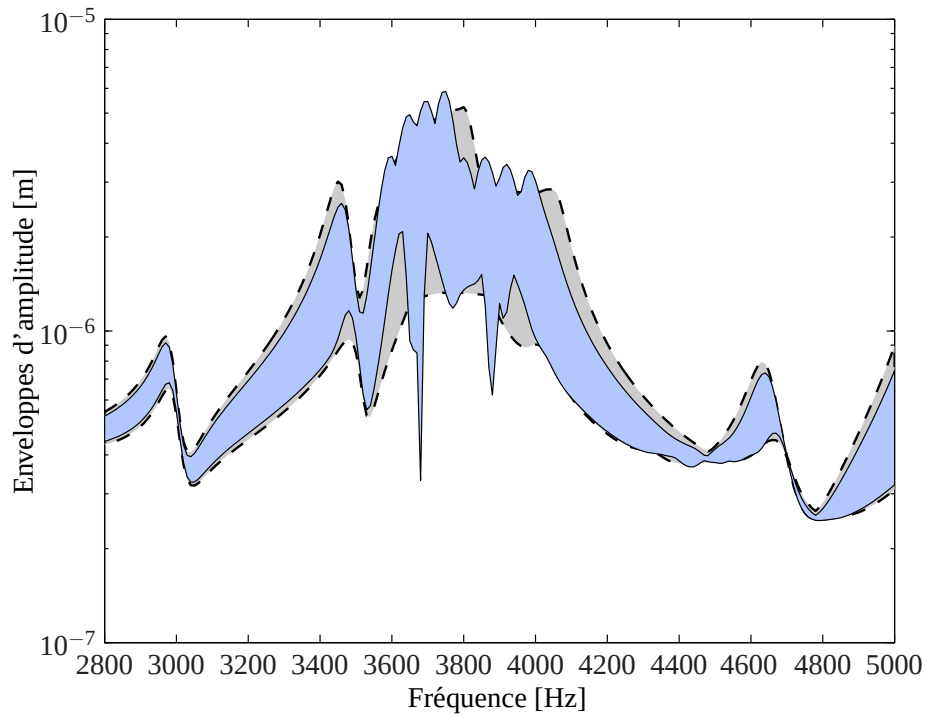


FIG. H.3: Envelopes ordre 3. Amortissement 2%

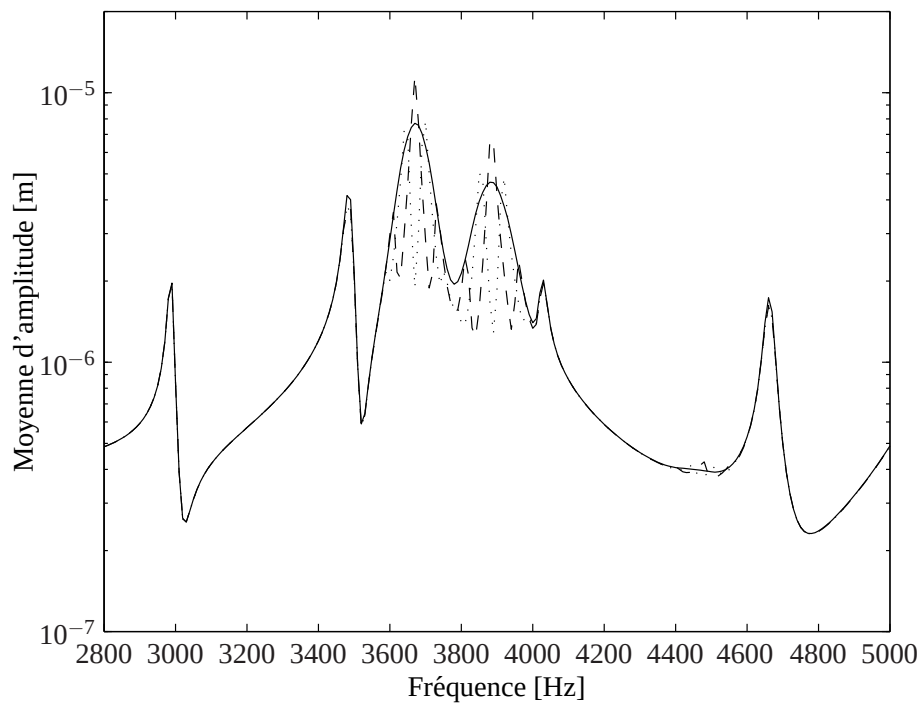


FIG. H.4: Moyenne ordres 2 et 3. Amortissement 0,5%

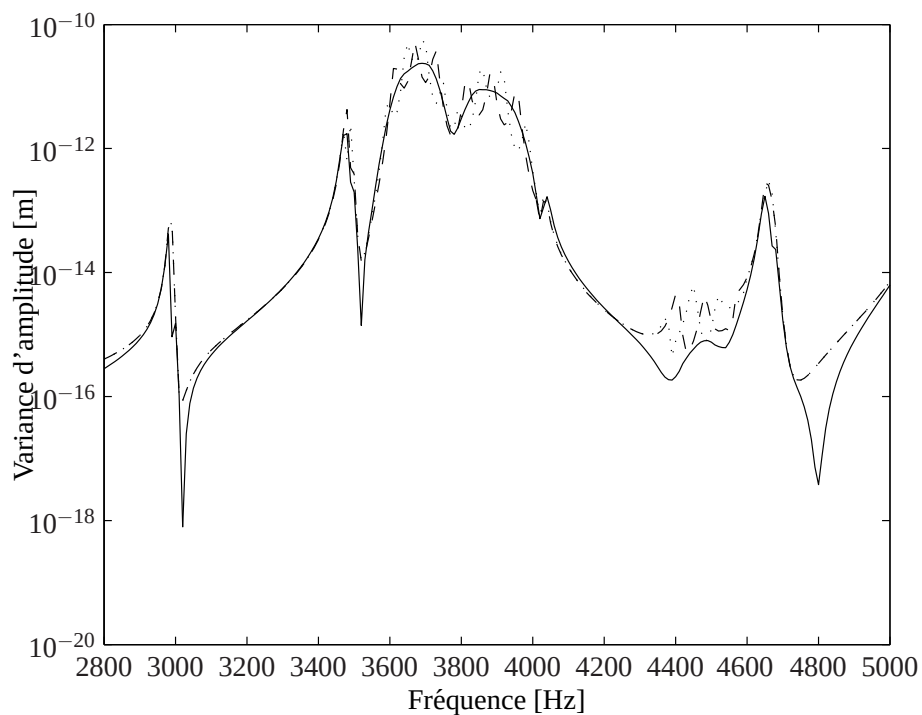


FIG. H.5: Variance ordres 2 et 3. Amortissement 0,5%

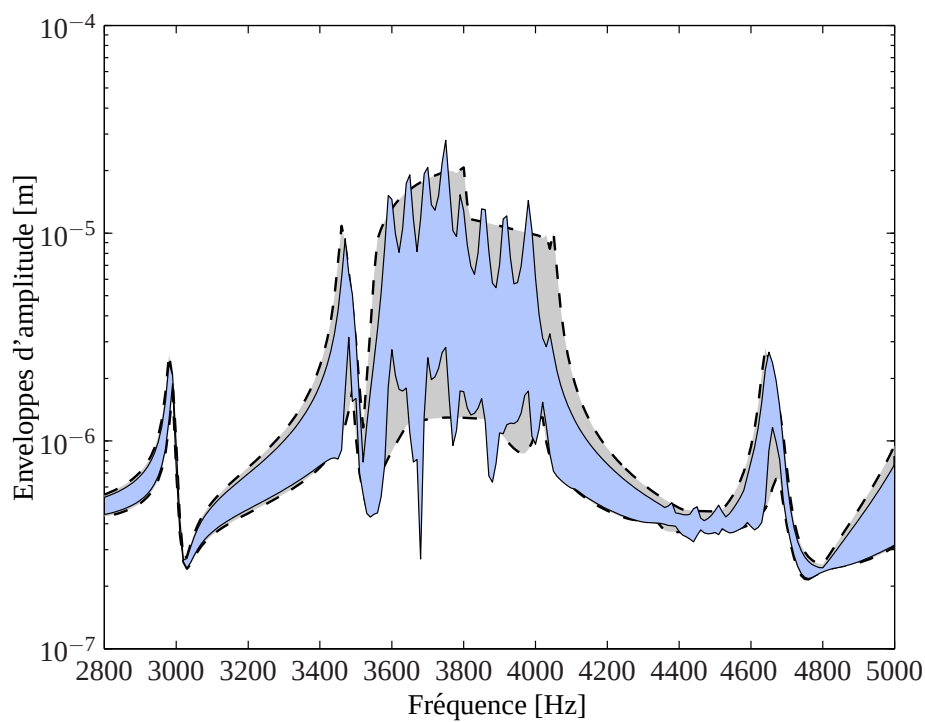


FIG. H.6: Enveloppes ordre 3. Amortissement 0,5%

Bibliographie

- [1] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotor dynamics prediction in engineering*. John Wiley & Sons, 1998.
- [2] M. Geradin and N. Kill. A new approach to finite element modelling of flexible rotors. *Engineering Computations*, 1(1) :52–64, 1984.
- [3] A. Srinivasan. Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(4) :742–775, 1997.
- [4] J. Slater, G. Minkiewicz, and A. Blair. Forced response of bladed disk assemblies : A survey. *The Shock and vibration digest*, 31(1) :17–24, 1999.
- [5] D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1) :81–102, 1979.
- [6] R. Henry. Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique Appliquée*, 4 :61–82, 1980.
- [7] M. P. Castanier and C. Pierre. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : Current status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power*, 22(2) :384–396, 2006.
- [8] R. Craig and C.-J. Chang. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11) :1633–1635, 1976.
- [9] H. Irrerier. Spectral analysis of mistuned bladed disk assemblies by component mode synthesis. *Vibrations of bladed disk assemblies*, pages 115–125, 1983.
- [10] Z.-C. Zheng and F.-R. Wang. Dynamic analysis of blade groups using component mode synthesis. *Vibrations of blades and bladed disk assemblies*, pages 97–103, 1985.

- [11] G. Óttarsson. *Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks*. PhD thesis, University of Michigan, 1994.
- [12] M. P. Castanier, G. Ottarsson, and C. Pierre. A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3) :439–447, 1997.
- [13] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Reduced order modeling and vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds. *Journal of engineering for Gas Turbines and Power*, 121(3) :512–522, 1999.
- [14] M.-T. Yang and J. Griffin. A reduced order approach for the vibration of mistuned bladed disk assemblies. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 119(1) :161–167, 1997.
- [15] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks. part i : Theoretical models. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1) :89–99, 2001.
- [16] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks. part ii : Application. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1) :100–108, 2001.
- [17] R. Craig and M. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [18] D.-M. Tran. Component mode synthesis methods using interface modes. application to structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 79(2) :209–222, 2001.
- [19] F. Moyroud, T. Fransson, and G. Jacquet-Richardet. A comparison of two finite element reduction techniques for mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(4) :942–952, 2002.
- [20] M.-T. Yang and J. Griffin. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(4) :893–900, 2001.
- [21] D. M. Feiner and J. Griffin. A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of Turbomachinery*, 124(4) :597–605, 2002.

- [22] E. Petrov, K. Sanliturk, and D. Ewins. A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(3) :586–597, 2002.
- [23] S. Lim, R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. A compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration. In *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, volume 2, pages 1359–1380, 2003.
- [24] N. Khader and S. Massaoud. Vibration of mistuned bladed disks supported by flexible continuous shaft. *Journal of Sound and Vibration*, 149(3) :471–488, 1991.
- [25] S.-B. Chun and C.-W. Lee. Vibration analysis of shaft-bladed disk system by using substructure synthesis and assumed modes method. *Journal of Sound and Vibration*, 189(5) :587–608, 1996.
- [26] S. C. Huang and K. B. Ho. Coupled shaft-torsion and blade-bending vibrations of a rotating shaft-disk-blade unit. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 118 :100–106, 1996.
- [27] B. O. Al-Bedoor. Reduced-order nonlinear dynamic model of coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in rotors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123 :82–88, 2001.
- [28] Ö. Turhan and G. Bulut. Linearly coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in multi-stage rotor-blade systems. *Journal of sound and vibration*, 296(1) :292–318, 2006.
- [29] G. Jacquet-Richardet, G. Ferraris, and P. Rieutord. Frequencies and modes of rotating flexible bladed disk-shaft assemblies : A global cyclic symmetry approach. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5) :901–915, 1996.
- [30] E. Chatelet, F. D’Ambrosio, and G. Jacquet-Richardet. Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines. *Journal of Sound and Vibration*, 282 :163–178, 2005.
- [31] B. Irwanto, R. Schmidt, D. Pawandenat, and H.-J. Hardtke. Finite element model updating in the vibration of bladed disk : shaft assemblies. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004*, Paper No. GT2004-53041, pages 217–225, 2004.

- [32] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Effects of multistage coupling and disk flexibility on mistuned bladed disk dynamics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125(1) :121–130, 2003.
- [33] R. Rzadkowski and J. Sokolowski. Coupling effects between the shaft and two bladed-discs. *Advances in Vibration Engineering*, 4(3) :249–266, 2005.
- [34] B. Seguí and E. Casanova. Application of a reduced order modeling technique for mistuned bladed disk-shaft assemblies. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007*, Paper No. GT2007-27594, pages 473–483, 2007.
- [35] L. A. Boulton and E. Casanova. Reduced order model for a two stage gas turbine including mistuned bladed disks and shaft interaction. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009*, Paper No. GT2009-59335, pages 281–290, 2009.
- [36] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Reduced order modeling techniques for dynamic analysis of mistuned multi-stage turbomachinery rotors. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2001*, Paper No. GT2001-0276, 2001.
- [37] S. H. Song, M. P. Castanier, and C. Pierre. Multi-stage modeling of turbine engine rotor vibration. In *Proceedings of ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume DETC2005-85740, pages 1533–1543, 2005.
- [38] S. H. Song, M. P. Castanier, and C. Pierre. System identification of multistage turbine engine rotors. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007*, volume Paper No. GT2007-28307. ASME, 2007.
- [39] S. H. Song. *Vibration analysis and system identification of mistuned multistage turbine engine rotors*. PhD thesis, University of Michigan, 2007.
- [40] D. Laxalde, J.-P. Lombard, and F. Thouverez. Dynamics of multistage bladed disks systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 129(4) :1058–1064, 2007.
- [41] D. Laxalde, F. Thouverez, and J.-P. Lombard. Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures. *Mechanics Research Communications*, 34(4) :379–384, 2007.

- [42] A. Sternchüss and E. Balmes. Reduction of multistage rotor models through cyclic modeshapes. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007*, Paper No. GT2007-27974, 2007.
- [43] A. Sternchüss, E. Balmes, P. Jean, and J.-P. Lombard. Reduction of multi-stage disk models : Application to an industrial rotor. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 131(1), 2009.
- [44] A. Sinha. Reduced-order model of a mistuned multi-stage bladed rotor. *International Journal of Turbo and Jet Engines*, 25(3) :145–153, 2008.
- [45] Y. Bhartiya and A. Sinha. Reduced order model of a multistage bladed rotor with geometric mistuning via modal analyses of finite element sectors. *Journal of turbomachinery*, 134(4), 2012.
- [46] D. Laxalde and C. Pierre. Modelling and Analysis of Multi-Stage Systems of Mistuned Bladed Disks. *Computers & Structures*, 89(3-4) :316–324, 2010.
- [47] K. D’Souza and B. I. Epureanu. A statistical characterization of the effects of mistuning in multi-stage bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 134 :1137–1147, 2012.
- [48] A. Sinha. Reduced-order model of a bladed rotor with geometric mistuning. *Journal of Turbomachinery*, 131(3) :031007, 2009.
- [49] A. Maurin, R. Rzadkowski, and M. Drewczynski. Multistage coupling of eight mistuned bladed discs on a solid shaft with 1% mistuning. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 15(3) :309–317, 2011.
- [50] E. Balmes and I. Bucher. Accounting for rotation in a multi-stage cyclo-symmetric model-a case study. In *Proceedings of ISMA*, Leuven, Belgique, 2010.
- [51] D. Laxalde and F. Thouverez. Non-linear vibrations of multi-stage bladed disks systems with friction ring dampers. *ASME Conference Proceedings*, 2007(4806X) :3–10, 2007.
- [52] K. D’Souza, A. Saito, and B. I. Epureanu. Reduced-order modeling for nonlinear analysis of cracked mistuned multistage bladed-disk systems. *AIAA journal*, 50(2) :304–312, 2012.

- [53] V. Ganine, D. Laxalde, H. Michalska, and C. Pierre. Parameterized reduced order modeling of misaligned stacked disks rotor assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 330(3) :445–460, 2011.
- [54] C. P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*. Springer texts in statistics. Springer-Verlag New York, 2004.
- [55] R. Y. Rubinstein and D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*. Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons, 2008.
- [56] F. Yamazaki, M. Shinozuka, and G. Dasgupta. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8) :1335–1354, 1988.
- [57] H. Contreras. The stochastic finite-element method. *Computers & Structures*, 12(3) :341–348, 1980.
- [58] M. Kleiber and D. H. Tran. *The stochastic finite element method : basic perturbation technique and computer implementation*. John Wiley & Sons, 1993.
- [59] B. R. Mace, K. Worden, and G. Manson. Uncertainty in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3) :423–429, 2005.
- [60] M. Kamiński. Generalized perturbation-based stochastic finite element method in elastostatics. *Computers & structures*, 85(10) :586–594, 2007.
- [61] A. Sinha and S. Chen. A higher order technique to compute the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 130(2) :207–221, 1989.
- [62] B. Lalanne. Perturbations methods in structural dynamics and applications to cyclic symmetric domains. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 127(3) :654–662, 2005.
- [63] M. P. Mignolet, C.-C. Lin, and B. H. LaBorde. A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 123(2) :388–394, 2001.
- [64] A. J. Rivas-Guerra and M. P. Mignolet. Maximum amplification of blade response due to mistuning : localization and mode shape aspects of the worst disks. *Journal of turbomachinery*, 125(3) :442–454, 2003.

- [65] Y. Han, B. Xiao, and M. P. Mignolet. Expedient estimation of the maximum amplification factor in damped mistuned bladed disks. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007*, Paper No. GT2007-27353, pages 351–365, 2007.
- [66] J. Avalos and M. P. Mignolet. Maximum amplification of blade response in mistuned multi stage assemblies. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2010*, Paper No. GT2010-23062, pages 981–994, 2010.
- [67] M. Loève. *Probability Theory, volume I*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, fourth edition edition, 1977.
- [68] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [69] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897–936, 1938.
- [70] R. G. Ghanem and R. M. Kruger. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(3) :289–303, 1996.
- [71] M. F. Pellissetti and R. G. Ghanem. Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Advances in Engineering Software*, 31(8) :607–616, 2000.
- [72] J. Red-Horse and R. Ghanem. Polynomial chaos representation of the random eigenvalue problem. In *Proceedings of the 40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 1999.
- [73] A. Sinha. Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128 :449–457, 2006.
- [74] O. Dessombz, A. Diniz, F. Thouverez, and L. Jezequel. Analysis of stochastic structures : Perturbation method and projection on homogeneous chaos. In *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference IMAC-SEM*, 1999.
- [75] O. Dessombz. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. PhD thesis, 2000.

- [76] R. Ghanem and D. Ghosh. Modal interaction of random dynamical systems. In *Proceedings of the 2004 IMAC-XXII : Conference & Exposition on Structural Dynamics*, 2004.
- [77] D. Ghosh, R. G. Ghanem, and J. Red-Horse. Analysis of eigenvalues and modal interaction of stochastic systems. *AIAA journal*, 43(10) :2196–2201, 2005.
- [78] R. Ghanem and D. Ghosh. Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(4) :486–504, 2007.
- [79] D. Xiu and G. E. Karniadakis. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 187(1) :137–167, 2003.
- [80] O. Le Maître, H. Najm, R. Ghanem, and O. Knio. Multi-resolution analysis of wiener-type uncertainty propagation schemes. *Journal of Computational Physics*, 197(2) :502–531, 2004.
- [81] O. P. Le Maître and O. M. Knio. *Spectral methods for uncertainty quantification : with applications to computational fluid dynamics*. Springer, 2010.
- [82] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) :277–294, 2000.
- [83] C. Soize. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109 :1979, 2001.
- [84] C. Soize. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263(4) :893–916, 2003.
- [85] C. Soize. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3) :623–652, 2005.
- [86] E. Capiez-Lernout and C. Soize. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, 126(3) :610–618, 2004.

- [87] E. Capiez-Lernout, C. Soize, J.-P. Lombard, C. Dupont, and E. Seinturier. Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the ASME*, 127(3), 2005.
- [88] J. Avalos, M. P. Mignolet, and C. Soize. Response of bladed disks with mistuned blade-disk interfaces. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009*, Paper No. GT2009-59580, pages 323–332, 2009.
- [89] C. Soize and R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2) :395–410, 2004.
- [90] D. Laxalde. *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007.
- [91] H. Wang and K. Williams. Vibrational modes of thick cylinders of finite length. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5) :955–971, 1996.
- [92] B. Seguí, B. Faverjon, and G. Jacquet-Richardet. Effects of random stiffness variations in multistage rotors using the polynomial chaos expansion. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.03.005>.
- [93] B. Seguí, B. Faverjon, and G. Jacquet-Richardet. Uncertainties in multi-stage rotors modeled by the polynomial chaos expansion. In *Proceedings of COMPDYN 2013, 4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, 2013.
- [94] J.-J. Sinou and B. Faverjon. The vibration signature of chordal cracks in a rotor system including uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) :138–154, 2012.

NOM : SEGUI VASQUEZ

DATE de SOUTENANCE :

Prénoms : Bartolomé

TITRE : Modélisation dynamique des systèmes disque aubes multi-étages. Effets des incertitudes

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2013-ISAL-XXX

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Les conceptions récentes de turbomachines ont tendance à évoluer vers des liaisons entre étages de plus en plus souples et des niveaux d'amortissement faibles, donnant lieu à des configurations où les modes sont susceptibles de présenter des niveaux de couplages inter-étages forts. En général, les ensembles disques aubes multi-étagés n'ont aucune propriété de symétrie cyclique d'ensemble et l'analyse doit porter sur un modèle de la structure complète donnant lieu à des calculs très coûteux. Pour palier ce problème, une méthode récente appelée symétrie cyclique multi-étages peut être utilisée pour réduire le coût des calculs des rotors composés de plusieurs étages, même lorsque les étages ont un nombre différent de secteurs. Cette approche profite de la symétrie cyclique inhérente à chaque étage et utilise une hypothèse spécifique qui aboutit à des sous-problèmes découplés pour chaque ordre de Fourier spatial. La méthodologie proposée vise à étudier l'effet des incertitudes sur le comportement dynamique des rotors en utilisant l'approche de symétrie cyclique multi-étages et l'expansion en Chaos Polynomial. Les incertitudes peuvent découler de l'usure des aubes, des changements de température ou des tolérances de fabrication. En première approche, seules les incertitudes provenant de l'usure uniforme de l'ensemble des aubes sont étudiées. Celles-ci peuvent être modélisées en considérant une variation globale des propriétés du matériau de l'ensemble des aubes d'un étage particulier. L'approche de symétrie cyclique multi-étages peut alors être utilisée car l'hypothèse de secteurs identiques est respectée. La positivité des matrices aléatoires concernées est assurée par l'utilisation d'une loi gamma très adaptée à la physique du problème impliquant le choix des polynômes de Laguerre comme base pour le chaos polynomial. Dans un premier temps des exemples numériques représentatifs de différents types de turbomachines sont introduits dans le but d'évaluer la robustesse de la méthode de symétrie cyclique multi-étages. Ensuite, les résultats de l'analyse modale aléatoire et de la réponse aléatoire obtenus par le chaos polynomial sont validés par comparaison avec des simulations de Monte-Carlo. En plus des résultats classiquement rencontrés pour les fréquences et réponses forcées, les incertitudes considérées mettent en évidence des variations sur les déformées modales qui évoluent entre différentes familles de modes dans les zones de forte densité modale. Ces variations entraînent des modifications sensibles sur la dynamique globale de la structure analysée et doivent être considérées dans le cadre des conceptions robustes.

MOTS-CLÉS : dynamique disque aubes, symétrie cyclique multi-étages, analyse modal aléatoire, expansion en chaos polynomial

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures
UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon
18-20 rue des Sciences
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Georges JACQUET-RICHARDET

Président du jury :

Composition du jury : Pascal SWIDER
Béatrice FAVERJON

Claude BLANZÉ
Georges JACQUET-RICHARDET