

**Thèse**

**MODELISATION ELECTRO-MECANIQUE DE  
TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES -  
APPLICATIONS A LA DETECTION ET AU SUIVI  
DES AVARIES**

Présentée devant  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de docteur

**École doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)**  
**Formation doctorale : mécanique**

Par

**Nabih FEKI**

(Ingénieur électromécanique de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie)

Soutenue le 30 mai 2012 devant la Commission d'examen

**Jury MM.**

---

D. REMOND	Professeur (INSA de Lyon)	Président
F. GUILLET	Professeur (IUT de Roanne)	Rapporteur
F. MEIBODY-TABAR	Professeur (ENSEM, INPL – Nancy)	Rapporteur
H. HENAO	Professeur (Université de Picardie "Jules Verne")	Examineur
Ph. VELEX	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur de thèse
G. CLERC	Professeur (UCB Lyon1)	Directeur de thèse
M. HADDAR	Professeur (ENI Sfax – Tunisie)	Invité

LaMCoS – UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon  
20, Avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (France)

# Avant Propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS), UMR CNRS 5259, de l'INSA de Lyon, et au Laboratoire Ampère, UMR CNRS 5005, de l'UCB Lyon 1.

Je tiens en premier lieu à remercier M. Philippe VELEX, Professeur à l'INSA de Lyon, qui m'a accueilli au sein de l'équipe SMC du LaMCoS, m'a accordé sa confiance pour mener à bien ce travail de recherche et qui m'a guidé avec ses précieux conseils.

Je tiens aussi à remercier vivement M. Guy CLERC, Professeur à l'UCB Lyon1, pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour la patience dont il a fait preuve à mon égard.

Je souhaite également remercier M. Didier REMOND, Professeur à l'INSA de Lyon, pour l'importance qu'il accorde à mon travail en acceptant d'être président du jury.

J'adresse mes expressions de reconnaissance aux professeurs François GUILLET de L'IUT de Roanne et Farid MEIBODY-TABAR de l'ENSEM de Nancy pour l'honneur qu'il m'ont fait d'avoir accepté d'évaluer ce travail de recherche.

Je remercie également M. Humberto HENAO, Professeur à l'Université de Picardie "Jules Verne", et M. Mohamed HADDAR, Professeur à l'ENI de Sfax, d'avoir accepté d'être membre du jury.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toutes les personnes, qui de manière directe ou indirecte, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Parmi eux, un remerciement particulier à l'ensemble des membres des laboratoires LaMCoS pour leur sympathie, leur aide et leur soutien.

# Résumé

La détection et le diagnostic des défauts d'engrenages ont été traditionnellement basés sur l'analyse des signaux vibratoires et acoustiques. Mais, ces méthodes peuvent être coûteuses suite aux difficultés techniques de mise en œuvre de capteurs sur des pièces en rotation. Dans ces travaux de thèse, une méthode originale de détection de défauts locaux dans des engrenages entraînés par des moteurs électriques est proposée en se basant sur le suivi des courants statoriques. Le système électromécanique est simulé numériquement en combinant un modèle électrique dynamique de moteurs asynchrones (modèle de Kron et modèle des réseaux de perméances) et un modèle mécanique dynamique d'engrenages droits et hélicoïdaux incluant les arbres et les paliers. Certains défauts classiques du moteur (excentricité du rotor) et des défauts d'engrenages (écaillages sur les flancs actifs de dentures) sont considérés et une technique itérative de résolution est présentée qui permet de résoudre le problème électromécanique couplé. De nombreux résultats sont présentés qui illustrent la possibilité et la sensibilité de détection de défauts d'engrenages par mesure de courants électriques sur le moteur. Sur la base de ces simulations, il est conclu que l'analyse de la signature des courants du moteur apparaît comme une méthode suffisamment précise pour détecter et surveiller les défauts locaux d'engrenage comme les écaillages.

## **Mots clés :**

Défaut d'engrenage, écaillage, diagnostique, surveillance, moteur électrique, analyse des courants, modélisation, simulation.

# Abstract

The fault diagnosis in geared transmissions has been traditionally based on vibration monitoring but the implementation of sensors can be expensive and, in some applications, present technical difficulties. In this thesis, an original way of detecting faulty gears driven by electrical motors is proposed based on the monitoring of the motor currents. The corresponding electromechanical coupled system is numerically simulated by combining i) an electrical dynamic model of asynchronous motors (Kron's model and permeance network model) and ii) a mechanical dynamic model of spur and helical gears (3D lumped parameter model) including the shafts and bearings. Some classic motor defects (rotor eccentricity) and gear faults (tooth spalls) are considered and an iterative solution technique is presented which makes it possible to solve the coupled electromechanical problem. A number of results are presented, which illustrate the possibility of tooth fault detection by stator current measurements with regard to the position and dimensions of the defect. Based on these simulations, it is concluded that motor current signature analysis can be a viable tool for the detection of localized gear faults such as tooth pitting.

## **Keywords**

Gear fault diagnosis, pitting, monitoring, electric motor, motor current signature analysis, modeling, simulation.

# Table des Matières

Avant Propos .....	2
Résumé .....	3
Abstract .....	4
Table des Matières .....	5
Principales notations .....	9
Introduction générale.....	14
Chapitre I : Etude bibliographique .....	18
I.1. Introduction .....	19
I.2. Défaillances des systèmes électromécaniques .....	19
I.2.1. Défaillances électriques du moteur asynchrone à cage d'écureuil.....	19
I.2.1.1. Défauts au stator .....	20
I.2.1.2. Défauts au rotor .....	23
I.2.2. Défaillances mécaniques .....	25
I.2.2.1. Défauts de roulements .....	26
I.2.2.2. Défauts d'engrenages .....	27
I.3. Techniques de détection des défauts d'engrenage .....	30
I.3.1. Analyse des signaux vibratoires .....	30
I.3.1.1. Analyse spectrale des signaux vibratoires.....	31
I.3.1.2. Analyse cepstrale synchrone .....	35
I.3.1.3. Décomposition en ondelettes (wavelet) .....	36
I.3.1.4. Représentations temps-fréquence.....	39
I.3.2. Analyse des lubrifiants .....	42
I.3.3. Analyse des signaux acoustiques .....	43
I.3.4. Analyse des signaux des courants statoriques .....	44
I.3.4.1. Projection dans le repère dq .....	45
I.3.4.2. Analyse spectrale des courants statoriques .....	46
I.3.4.3. Décomposition en ondelettes (wavelet transform),.....	47
I.4. Méthodes de modélisation des systèmes électromagnétiques (machines asynchrones à cage d'écureuil) .....	48
I.4.1. Méthodes analytiques .....	48
I.4.1.1. Schéma équivalent monophasé .....	48
I.4.1.2. Modèles par transformation dq (triphase/diphase).....	51
I.4.2. Méthodes semi-analytiques .....	52
I.4.2.1. Méthodes aux inductances couplées .....	53
I.4.2.2. Modèles de réseaux de perméances .....	55
I.4.3. Méthodes numériques par éléments finis .....	58
I.4.4. Avantages et inconvénient de chaque méthode (Synthèse) .....	59
I.5. Présentation des différents types des modèles des boîtes à engrenages.....	60
I.5.1. Modélisation statique .....	60
I.5.2. Modélisation dynamique .....	61
I.5.2.1. Modèles linéaires à raideur d'engrènement constante .....	61
I.5.2.2. Modèles linéaires à raideur d'engrènement variable (périodique).....	62
I.5.2.3. Modèles non linéaires à raideur d'engrènement variable.....	63
I.6. Modélisation masses ressorts d'un engrenage .....	65

I.6.1.	Etat de référence .....	65
I.6.1.1.	Géométrie des engrenages rigides .....	66
I.6.1.2.	Cinématique des corps rigides .....	71
I.6.1.3.	Dynamique des corps rigides .....	72
I.6.2.	Modélisation des corps déformables .....	73
I.6.2.1.	Modèle d'engrenage .....	73
I.6.2.2.	Déflexion au point de contact .....	74
I.6.2.3.	Formulation des conditions de contact .....	76
I.6.2.4.	Raideur d'engrènement globale .....	76
I.7.	Conclusion .....	77
Chapitre II : Modélisation électromécanique des transmissions par engrenages entraînées par un moteur asynchrone .....		78
II.1.	Introduction .....	79
II.2.	Modèle électrique de Kron .....	79
II.2.1.	Description .....	79
II.2.2.	Hypothèses .....	80
II.2.3.	Equations électriques .....	81
II.2.4.	Equations magnétiques .....	82
II.2.5.	Choix de la transformation de Kron .....	82
II.2.6.	Equations électriques et magnétiques après transformation de Kron .....	83
II.2.7.	Ecriture des équations d'état .....	84
II.2.8.	Calcul du couple électromagnétique .....	85
II.3.	Mise en équation du modèle mécanique .....	85
II.3.1.	Hypothèses .....	86
II.3.2.	Description du modèle .....	86
II.3.3.	Caractérisation de la raideur de contact .....	88
II.3.3.1.	Formules de Weber et Banascheck .....	89
II.3.3.2.	Formule de Lundberg .....	93
II.3.4.	Modèle dynamique : Equations de mouvement .....	94
II.3.4.1.	Elément d'engrenage .....	94
II.3.4.2.	Elément arbre .....	97
II.3.4.3.	Paliers (raideurs additionnelles) .....	100
II.3.4.4.	Moteur, charge (Travail virtuel des forces extérieures) .....	100
II.3.4.5.	Assemblage des sous-systèmes .....	101
II.3.4.6.	Introduction de l'amortissement .....	101
II.3.4.7.	Equations de mouvement .....	103
II.4.	Couplage électromécanique global .....	104
II.4.1.	Principe .....	104
II.4.2.	Mise en équation .....	104
II.4.3.	Résolution .....	106
II.5.	Mise en équation du modèle magnétique/électrique par réseau de perméances d'une machine asynchrone à cage .....	108
II.5.1.	Principe .....	108
II.5.2.	Equations magnétiques .....	109
II.5.2.1.	Construction du réseau de perméances .....	109
II.5.2.2.	Modèle de l'entrefer .....	112
II.5.2.3.	Influence de l'inclinaison des barres .....	115
II.5.2.4.	Modèle de l'excentricité du rotor .....	118
II.5.2.5.	Mise en équations .....	118
II.5.3.	Equations électriques .....	124

II.5.3.1.	Equations statoriques.....	124
II.5.3.2.	Equations rotoriques.....	126
II.5.3.3.	Assemblage des équations électriques statoriques et rotoriques .....	130
II.5.4.	Couplage électromagnétique .....	130
II.5.5.	Calcul du couple électromagnétique .....	132
II.6.	Couplage électromécanique .....	132
II.6.1.	Présentation globale des deux sous-systèmes .....	132
II.6.2.	Mise en équation du couplage.....	133
II.6.3.	Résolution électromagnétique .....	134
II.6.4.	Résolution mécanique .....	135
II.7.	Conclusion.....	137
Chapitre III	: Résultats et Discussions .....	138
III.1.	Introduction .....	139
III.2.	Validation expérimentale .....	139
III.2.1.	Description de la machine FZG .....	139
III.2.2.	Forme de l'écaille.....	142
III.2.3.	Erreur de transmission (ET) .....	144
III.2.3.1.	Définition de l'ET .....	144
III.2.3.2.	Dispositif et principe de la mesure de l'ET.....	144
III.2.3.3.	Comparaison des spectres .....	146
III.2.3.4.	Influence de la présence de l'écailage.....	148
III.2.3.5.	Influence de la charge .....	149
III.2.3.6.	Influence de la vitesse de rotation .....	151
III.3.	Couplage du modèle de Kron avec le modèle d'engrenages.....	152
III.3.1.	Présentation du défaut d'écailage.....	153
III.3.2.	Influence des défauts locaux sur les caractéristiques mécanique d'engrenage 154	
III.3.2.1.	Effet du défaut d'écailage sur la raideur d'engrènement globale.....	154
III.3.2.2.	Effet du défaut d'écailage sur la distribution des charges instantanées sur la denture 156	
III.3.3.	Influence de défauts d'écailage sur les signaux des courants statoriques .....	158
III.3.3.1.	Influence de défauts sur les grandeurs triphasées .....	158
III.3.3.2.	Influence sur les transformées dq dans un référentiel de Kron .....	158
III.3.4.	Sensibilité de détection.....	160
III.3.5.	Détection des défauts basée sur l'analyse des courants statoriques triphasés	162
III.3.5.1.	Analyse spectrale.....	162
III.3.5.2.	Transformée en ondelettes .....	164
III.4.	Résultats du couplage du modèle de Perméances avec le modèle 3D d'engrenage 166	
III.4.1.	Détection des défauts d'engrenage et du moteur .....	166
III.4.1.1.	Projection dans le repère dq .....	167
III.4.1.2.	Analyse spectrale.....	169
III.5.	Conclusion.....	173
Conclusion générale .....		175
Références Bibliographiques.....		177
Annexe A : Matrices de rigidité et de masse de l'élément arbre.....		184
A.1.	Matrice de rigidité .....	185
A.2.	Matrice de masse .....	187
Annexe B : Matrice de passage entre les flux captés par les phases et les dents statoriques.		190
B.1.	Matrice de passage des flux dans les dents aux flux dans les spires .....	191

B.2. Matrice de passage des flux dans les spires aux flux dans les phases .....	193
Annexe C : Mémento .....	194
C.1. Moteur asynchrone triphasé - mémento à l'usage des mécaniciens .....	194
C.2. Engrenages cylindriques à axes parallèles - mémento à l'usage des électriciens...	198

# Principales notations

## Modèle de Kron

$T_{dq0/abc}$	: Transformation orthonormée de Kron.
$\omega_r$	: Vitesse « électrique » de rotation du rotor.
$\omega_e$	: Vitesse électrique du champs tournant (pulsation des courants statoriques).
$\omega_m$	: Vitesse mécanique du rotor.
$\omega_{sl}$	: Vitesse du repère dq par rapport au rotor.
$\omega_s$	: Vitesse du repère dq par rapport au stator.
$R_s, R_r$	: Résistance d'une phase statorique et rotorique.
$L_{as}, L_{ar}$	: Inductance propre d'une phase du stator et du rotor.
$M_{as}, M_{ar}$	: Inductance mutuelle entre deux phases du stator et du rotor.
$M_{rs}$	: Maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator du rotor.
$L_s, L_r$	: Inductance propre cyclique du stator et du rotor.
$L_m$	: Inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor.
$v_k$	: Tension aux bornes de l'enroulement $k$ .
$i_k$	: Courants parcourant l'enroulement $k$ .
$\Psi_k$	: Flux traversant l'enroulement $k$ .
$g$	: Glissement.
$p$	: Nombre de paires de pôles.
$X(t)$	: Vecteur d'état du modèle de Kron.
$C_{em}(t)$	: Couple électromagnétique instantané.

## Modèle de réseau de perméances

$\mu_0$	: Perméabilité de l'air.
$\mu_r$	: Perméabilité relative du matériau.
$n_{ds}, n_{dr}$	: Nombre de dents du stator et du rotor.
$n_n$	: Nombre de nœuds total du réseau.
$n_{bent}$	: Nombre total de branches dans l'entrefer.
$n_b$	: Nombre de branches total du réseau.
$P_{cs,i}, P_{cr,j}$	: Perméance d'un élément du culasse entre les dents statoriques et rotoriques.
$P_{fs,i}, P_{fr,j}$	: Perméance de fuite reliant les pieds de dents statoriques et rotoriques.

---

$F_{ds,i}$	: Source de force magnétomotrice correspondante à la $i$ ème dent du stator.
$F_{dr,j}$	: Source de force magnétomotrice correspondante à la $j$ ème dent du rotor.
$n_c$	: Nombre de conducteurs par encoche.
$I_{es,i}$	: Courant parcourant l'encoche $i$ .
$L_m$	: Longueur active de la machine suivant son axe.
$e$	: Épaisseur de l'entrefer.
$P_{i,j}$	: Perméance entre un couple de dent $i$ et $j$ .
$P_{\max}$	: Perméance maximale d'entrefer.
$L_{ds}, L_{dr}$	: Largeur d'une dent stator et rotor.
$o_{ss}, o_{rr}$	: Ouverture d'une encoche statorique et rotorique.
$D_{si}$	: Diamètre intérieur du stator.
$D_{re}$	: Diamètre extérieur du rotor.
$D_{ag}$	: Diamètre moyen d'entrefer.
$\beta$	: Angle d'inclinaison des barres rotoriques.
$R_s$	: Résistance d'une phase statorique.
$R_b$	: Résistance d'une barre rotorique.
$R_a$	: Résistance d'une portion d'anneau rotorique.
$L_{fs}$	: Inductance de fuite d'une phase statorique.
$L_{fb}$	: Inductance de fuite d'une barre rotorique.
$L_{fa}$	: Inductance de fuite d'une portion d'anneau rotorique.
$\{V_s\}$	: Vecteur des tensions d'alimentation triphasé du stator.
$\phi_{ds,i}$	: Flux capté par la dent $i$ du stator.
$\phi_{sp,i}$	: Flux capté par la spire $i$ .
$y$	: Pas de bobinage.
$n_{sp}$	: Nombre de spires par phase.
$I_{br,k}, J_{ar,k}$	: Courant parcourant la barre rotorique $k$ et la portion d'anneau $k$
$\{I_{br}\}$	: Courants parcourant les barres rotoriques.
$\{J_{ar}\}$	: Courants parcourant les portions d'anneaux de court-circuit rotoriques.
$[L_T]$	: Matrice des inductances de fuites statoriques et rotoriques.
$[R_T]$	: Matrice des résistances statoriques et rotoriques.
$\{I_{sr}\}$	: Courants parcourant les phases statoriques et rotoriques.
$\{\phi_{sr}\}$	: Flux captés par les phases statoriques et rotoriques.

---

$\{V_T\}$	: Tensions d'alimentation.
$[A]$	: Matrice d'incidence réduite.
$[Y]$	: Matrice d'admittance.
$[Y_{bus}]$	: Matrice de transfert.
$\{E_{bus}\}$	: Vecteur des tensions nodales.
$\{I_{bus}\}$	: Vecteur des courants injectés aux nœuds du réseau.
$\{\phi_{bus}\}$	: Vecteur des flux magnétiques injectés aux nœuds du réseau.
$P_{ds}, P_{dr}$	: Perméance d'une dent statorique et rotorique.
$\{F_{ds}\}, \{F_{dr}\}$	: Vecteur des forces magnétomotrices des dents statoriques et rotoriques.
$\{I_{es}\}$	: Courants traversant les encoches statoriques.
$\{I_s\}$	: Courants traversant les phases statoriques.
$[S_{abc}]$	: Matrice reliant les courants de phases aux courants d'encoches.
$n_{ph}$	: Nombre de phases statoriques.
$\{\phi_s\}$	: Flux captés par les phases statoriques.
$\{I_{br}\}$	: Courants parcourant les barres rotoriques.
$\{\phi_{br}\}$	: Flux magnétiques dans toutes les branches du réseau de perméances.
$\{\phi_{cs}\}, \{\phi_{cr}\}$	: Flux magnétiques dans les branches du culasse statorique et rotorique.
$\{\phi_{ds}\}, \{\phi_{dr}\}$	: Flux magnétiques dans les dents statoriques et rotoriques.
$\{\phi_{fs}\}, \{\phi_{fr}\}$	: Flux magnétiques de fuite dans les branches statoriques et rotoriques.
$\{\phi_{ent}\}$	: Flux magnétiques dans les branches d'entrefer.
$e_r(\theta)$	: Excentricité statique du rotor.

### **Modèle masses/ressorts de l'engrenage (36 ddls)**

$Z_1$	: Nombre de dents du pignon.
$Z_2$	: Nombre de dents de la roue.
$R_{b1}$	: Rayon de base du pignon.
$R_{b2}$	: Rayon de base de la roue.
$I_{p2}$	: Moment d'inertie polaire de l'ensemble de sortie (arbre + roue).
$\beta_b$	: Angle d'hélice de base.
$\alpha_p$	: Angle de pression.
$b$	: Largeur de la dent.

---

$\Omega_2(t)$	: Vitesse de rotation de la roue.
$\Omega_1$	: Vitesse de rotation du pignon.
$e(M^*)$	: Maximum des écarts normaux.
$e(M_{ij})$	: Écart normal total d'un point $M_{ij}$ .
$C_r(t)$	: Couple résistant.
$M_{ij}$	: Centre de la cellule $ij$ (ligne de contact $i$ et segment $j$ ).
$k(M_{ij})$	: Raideur élémentaire au point $M_{ij}$ .
$\delta(M_{ij})$	: Rapprochement au point $M_{ij}$ .
$\delta e(M_{ij})$	: Écart normal relatif au point $M_{ij}$ .
$\Delta(M_{ij})$	: Écrasement normal au point $M_{ij}$ .
$V(M_{ij})$	: Vecteur de structure représentant la géométrie de l'engrenage.
$k_{\theta_s}$	: Rigidité en torsion.
$\theta_k$	: Degré de liberté de torsion du nœud $k$ .
$u_k$	: Degré de liberté de traction compression du nœud $k$ .
$v_k, w_k, \phi_k, \psi_k$	: Degrés de liberté de flexion du nœud $k$ .
$\delta_b$	: Déplacements dus à la flexion de la dent d'engrenage.
$\delta_{fw}$	: Déflexion due aux corps d'engrenage.
$\delta_c^{WB}$	: Déflexion normale due contact (Weber Banaschek).
$\delta_L^c$	: Déflexion due au contact (Lundberg).
$E, \nu$	: Module de Young et coefficient de Poisson.
$[M_E]$	: Matrice masse de l'élément engrenage.
$\{Y_E\}$	: Degrés de liberté (DDLs) de l'élément engrenage.
$\{F_{2/E}\}$	: Excitations causées par une cinématique perturbée par les défauts.
$[K_E]$	: Matrice de rigidité de l'élément engrenage.
$\{F_{1/E}\}$	: Vecteur des efforts dus aux écarts.
$\{Y_A\}$	: Vecteur des coordonnées généralisées des nœuds liés à l'élément arbre.
$[M_A]$	: Matrice masse de l'élément arbre.
$[K_A]$	: Matrice de rigidité de l'élément arbre.
$\{F_{2/A}\}$	: Excitations causées par une cinématique perturbée par les défauts.
$I_F$	: Inertie polaire du frein.

---

---

$[K_p]$	: Matrice des raideurs additionnelles représentatives des paliers.
$\{Y\}$	: Vecteur des degrés de liberté du système mécanique.
$[M]$	: Matrice masse totale.
$[C]$	: Matrice amortissement visqueux équivalent.
$[K(t, \{Y\})]$	: Matrice raideur totale.
$\{F_0(t)\}$	: Vecteur des forces extérieures.
$\{F_{e1}(t, \{Y\})\}$	: Excitations introduisant l'effet des écarts.
$\{F_{e2}(t)\}$	: Excitations introduisant la cinématique perturbée par les écarts.
$[C_\phi]$	: Matrice d'amortissement dans la base modale.
$[M_\phi]$	: Matrice masse modale.
$[K_\phi]$	: Matrice de rigidité modale.
$t_m$	: Période d'engrènement.

### **Fréquences**

$f_s$	: Fréquence d'alimentation électrique.
$f_{mesh}$	: Fréquence d'engrènement.
$f_{sh}$	: Fréquence principale de passages des encoches rotoriques.
$f_{Gmesh}$	: Fréquences liées à la fréquence d'engrènement.
$f_r$	: Fréquence de rotation du pignon.
$f_{ecc}$	: Fréquence liée au défaut d'excentricité.
$f_{Gr}$	: Fréquences liées à la fréquence de rotation du pignon.

# Introduction générale

Les systèmes électromécaniques tels que les transmissions mécaniques par engrenages entraînés par des moteurs à induction sont fréquemment intégrés dans les équipements disponibles dans le commerce et couramment utilisés dans un certain nombre d'applications industrielles. Ces systèmes offrent plusieurs avantages en raison de leur robustesse, leur ratio puissance fournie / poids (compacité), leur coût réduit et leur degré élevé de fiabilité. Toutefois, en raison du rôle critique de la transmission mécanique, les défaillances d'engrenages peuvent réduire l'efficacité de ces systèmes et même conduire à des arrêts de production dans certaines applications. Par conséquent, le diagnostic et la détection précoce des défauts d'engrenages semblent cruciaux afin d'optimiser la maintenance préventive et réduire l'impact financier de ces défauts en particulier dans le cas des applications de fortes puissances.

Dans ce contexte, un certain nombre de techniques et d'outils tels que l'analyse des signaux vibratoires [1], [2] et sonores [3] – [5] ont été traditionnellement utilisés pour surveiller et diagnostiquer les défauts d'engrenages. Cependant, plusieurs inconvénients sont associés à ces techniques tels que : a) le bruit de fond constaté dans les signaux générés par des excitations externes, b) les mesures invasives susceptibles d'influer sur le comportement du système et sa réponse, c) la sensibilité de la mesure à la position des capteurs, d) le coût élevé des capteurs de haute précision et e) dans certaines applications, les difficultés techniques de mise en œuvre des capteurs sur des pièces en rotation et / ou dans des environnements hostiles (températures élevées, espace d'accès limité, etc...).

Bien que la surveillance des engrenages par analyse de signaux vibratoires soit encore largement utilisée, des travaux de recherche récents se sont orientés vers la détection de défauts mécaniques (sur roulements, engrenages) par des techniques non intrusives telles que l'analyse des signaux des courants du moteur électrique (MCSA : motor current signal analysis). Elle apparaît comme une alternative de détection intéressante et simple pour la surveillance des systèmes électro-mécaniques [6] – [15]. Cette méthode assure des performances techniques intéressantes et entraîne une réduction des coûts d'instrumentation.

Plusieurs techniques basées sur l'analyse des signaux électriques du moteur semblent être prometteuses. L'analyse des courants statoriques est maintenant largement utilisée pour la détection des défauts des roulements (défauts locaux et excentricité de l'axe de rotation). Dans ce cas, la méthode est basée sur le calcul des paramètres caractéristiques et sensibles aux

défauts qui sont extraits à partir des courants statoriques dans les domaines temporel ou fréquentiel [7] – [9]. D'autres contributions récentes ont démontré, d'un point de vue analytique et expérimental, l'influence des défauts d'engrenages sur la signature des courants statoriques dans les machines à induction [10] – [14]. Les auteurs ont prouvé que l'analyse de la signature du courant statorique est suffisamment précise pour fournir des informations pertinentes sur les défauts d'engrenages. La même méthode a été appliquée avec succès pour la détection des défauts sur des transmissions d'engrenages (roue et vis sans fin) entraînées par un moteur DC à aimant permanent sans balais (BLDC) [15].

Dans la continuité de cette approche, les auteurs ont proposé dans [16] une version simplifiée de modèle électro-mécanique, basée sur un modèle dq pour le moteur asynchrone et un modèle dynamique torsionnel d'un système d'engrenages droits ou hélicoïdaux. Cependant, le modèle dq n'est pas assez précis pour tenir compte des effets d'encoches statoriques et rotoriques, des variations de l'épaisseur de l'entrefer, de l'excentricité du rotor, des variations des inductances statoriques et rotoriques avec la saturation du circuit magnétique, etc., ce qui peuvent perturber l'ensemble de la simulation et la détection des défauts d'engrenages. Par ailleurs, le modèle torsionnel d'engrenage employé est restrictif et ne permet pas de simuler les effets de flexion qui peuvent être influents sur le couplage entre les parties mécanique et électrique.

Dans [17], les auteurs ont proposé une nouvelle formulation analytique plus détaillée pour simuler un système électro-mécanique composé d'un moteur asynchrone et d'un train simple étage à engrenages droits ou hélicoïdaux, des arbres et des paliers. Dans cette étude, le système mécanique est caractérisé par un modèle tridimensionnel permettant de considérer les degrés de liberté de torsion, flexion et traction/compression. Il est démontré que le modèle électro-mécanique dynamique global peut être décrit par un unique système différentiel non linéaire dans lequel le vecteur d'état contient à la fois les inconnues électriques (courants et flux magnétiques) et mécaniques (déplacements et vitesses). Une analyse paramétrique a été présentée pour illustrer la faisabilité et l'intérêt de la détection précoce des défauts locaux sur les dents d'engrenages basée sur l'analyse des signaux électriques.

En ce qui concerne le sous-système électrique, plusieurs modèles sophistiqués de machines à induction peuvent être trouvés dans la littérature tels que le modèle des inductances couplées [18] et le modèle de réseaux de perméances [19]. Toutefois, la simulation de la saturation du circuit magnétique n'est pas aisée en utilisant l'approche des inductances couplées et la détermination des paramètres de ce modèle est plus délicate. Dans la perspective d'analyser les couplages entre les défauts réels d'engrenages à un stade précoce de développement (petites fissures et écailles) et les défauts électriques dans la machine à induction, une modélisation plus fine et réaliste de ce type de machines semble être nécessaire. Dans [20], les auteurs ont proposé un modèle électromécanique 3D très sophistiqué et détaillé afin de considérer l'ensemble de ces phénomènes. Le moteur asynchrone est caractérisé par un réseau de perméances qui consiste à discrétiser la machine à

induction en tubes magnétiques homogènes avec des sections constantes. Chaque tube de flux est une enveloppe imaginaire, fermée et parallèle à la direction des lignes d'induction dont la section est assez petite pour que la variation du champ magnétique ( $B$ ) dans le tube puisse être négligée. Chaque tube est caractérisé par sa perméabilité et sa force magnétomotrice. Contrairement au modèle d'inductances couplées, les réseaux de perméances permettent de considérer tous les défauts qui peuvent exister dans une machine à induction en incluant la saturation du circuit magnétique et offre une représentation plus détaillée de l'état magnétique de la machine. Cette approche est aussi plus souple parce que la présence de défauts tels que l'excentricité statique et/ou dynamique, les variations d'entrefer, etc. peut être simulée facilement. Il est démontré que les modèles magnétiques, électriques et mécaniques couplés peuvent être décrit par des systèmes différentiels non linéaires. Un certain nombre de résultats numériques sont présentés dans [20] illustrant les interactions entre les sous-systèmes électromagnétiques et mécaniques et prouvant la possibilité de détection de défauts électriques et mécaniques par l'analyse des signatures des courants électriques en déterminant les fréquences caractéristiques de chaque type de défaut.

L'organisation en trois chapitres retenue pour la présentation de ce manuscrit traduit la démarche suivie pendant les travaux de cette thèse. Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique portant sur la présentation des défaillances qui peuvent se produire dans un système électromécanique. Les différentes techniques de détection des défauts d'engrenages et des différents modèles dynamiques de machines électriques et de transmissions par engrenages sont ensuite introduites. Les modèles retenus pour le moteur asynchrone sont le modèle dq de Kron et le modèle des réseaux de perméances. D'autre part, pour l'engrenage, le modèle choisi est à paramètres concentrés avec des raideurs de liaison distribuées.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation dynamique de systèmes électromécaniques composés d'un moteur asynchrone à cage et d'un train simple étage de transmission par engrenages. Dans un premier temps, ce système est caractérisé par un modèle analytique tridimensionnel en couplant le modèle dq de Kron pour le moteur asynchrone et un modèle masses ressorts pour l'engrenage. Le modèle électrique est élaboré en transformant la machine à induction triphasée en une machine biphasée équivalente avec des enroulements fictifs. Le modèle mécanique, quant à lui, est basé sur la théorie des petits déplacements superposés aux mouvements des corps rigides. Le comportement dynamique de ce système électromécanique est décrit par un système différentiel non linéaire unique résolu en couplant un schéma d'intégration pas à pas dans le temps de Newmark et un algorithme de contact unilatéral qui contrôle le chargement sur les flancs de dentures. La connaissance des interactions des composantes électriques et mécaniques nécessite la modélisation de comportements physiques qui ne sont pas pris en compte par le modèle précédent. Dans cet objectif, la machine à induction a été ensuite caractérisée par un modèle de réseaux de perméances consistant à décrire la machine par un ensemble de circuits magnétiques en se basant sur la discrétisation du domaine étudié en tubes de flux. Ce modèle permet de

considérer la géométrie de la machine, l'encochage, la variation des inductances propres et mutuelles avec la saturation, etc. Les équations décrivant le comportement électromagnétique de la machine sont développées en couplant les équations de chaque sous élément. La machine à induction est ainsi caractérisée par un système différentiel non linéaire du premier ordre qui est résolu par un schéma d'intégration pas à pas dans le temps de Newmark. Les couplages entre les modèles électriques et mécaniques sont assurés en respectant les entrées/sorties de chaque sous-système.

Le troisième chapitre présente une étude expérimentale réalisée sur un banc d'essais d'engrenages en boucle mécanique fermée (FZG) afin de provoquer un écaillage réel sur des engrenages neufs. Des mesures d'erreurs de transmission sous charge ont été réalisées à l'aide de codeurs optiques à haute résolution avant et après l'apparition de l'écaillage pour plusieurs chargements et vitesses de rotation et ont été confrontées aux résultats de simulations numériques. Ensuite, ce chapitre présente la simulation de défauts d'écaillage sur une dent du pignon et les différents résultats numériques montrant l'influence de ce défaut sur la signature des courants statoriques du moteur électrique et sur le comportement dynamique de l'engrenage. Une étude paramétrique a été conduite afin de déterminer les zones de sensibilité maximale de détection sur les flancs actifs de dentures. Une étude spectrale des courants statoriques a permis de différencier les fréquences caractéristiques de chaque type de défaut et son origine (défaut du moteur (excentricité du rotor) ou défaut de l'engrenage (écaillage)).

# **Chapitre I : Etude bibliographique**

## I.1. Introduction

Les transmissions mécaniques par engrenages entraînées par les moteurs à induction sont couramment utilisées dans plusieurs applications industrielles. Ces systèmes électromécaniques offrent plusieurs avantages en raison de leur robustesse, leur compacité, leur coût réduit et leur haut degré de fiabilité. Cependant, dans certains cas, quelques défaillances peuvent être rencontrées entraînant une réduction de l'efficacité de ces systèmes électromécaniques.

Dans ce chapitre, une étude bibliographique sera présentée portant sur l'énumération des défaillances dans les convertisseurs électromécaniques, la présentation des différentes techniques de détection des défauts d'engrenages et la synthèse des différents modèles dynamiques de machines électriques et de transmissions par engrenages. Les modèles retenus pour le moteur asynchrone (modèle dq de Kron et le modèle des réseaux de perméances) et pour l'engrenage (modèle à paramètres concentrés avec des raideurs de liaison distribuées) seront détaillés. Les bases théoriques permettant d'étudier leur comportement dynamique couplé et les phénomènes qui le conditionnent tels que la présence des défauts d'écaillage, seront établis.

## I.2. Défaillances des systèmes électromécaniques

### I.2.1. Défaillances électriques du moteur asynchrone à cage d'écureuil

Les défaillances électriques dans les machines à induction peuvent être liées à plusieurs causes qui sont classées en trois classes [21] :

- les générateurs de pannes ou initiateurs de défauts : survoltage d'alimentation, surchauffe du moteur, défaut électrique (court-circuit), problème d'isolation électrique, moteur bloqué, défauts mécaniques, etc.
- les amplificateurs de défauts : surcharge fréquente, température ambiante élevée, environnement humide, tension et fréquence d'alimentation anormales, vibrations mécaniques, mauvais lubrification et graissage, échauffement permanent (mauvaise ventilation), vieillissement, etc.
- les défauts de fabrication et les erreurs humaines : mauvais dimensionnement de la machine, composants défectueux, protections inadaptées, etc.

En se basant sur l'étude statistique effectuée par une compagnie d'assurance allemande de systèmes industriels en 1988 [22] sur les différentes défaillances possibles des machines asynchrones de moyenne puissance (de 50 kW à 200kW), deux principaux emplacements des défauts ont été dégagés qui sont le stator (60 %) et le rotor (22 %). Cette étude a montré

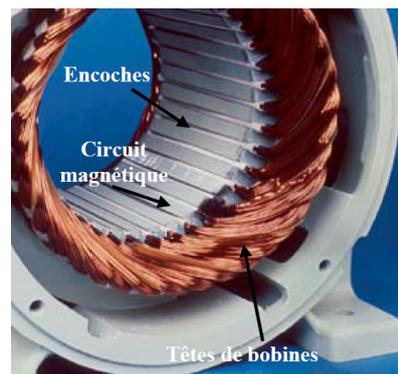
également que le pourcentage des défauts au stator a diminué de 78 % à 60 % entre 1973 et 1988, alors que le pourcentage des défauts au rotor a augmenté de 12 % à 22 % dans la même période. Ceci montre que les défauts électriques représentent toujours les principales défaillances dans ce type de machines.

Dans le cas des machines à grandes puissances et à tensions d'alimentation élevées, l'étude présentée dans [21] montre que les défauts les plus fréquents se situent au niveau des roulements (41 %) et que les défauts au stator et au rotor ne représentent que 12 % et 8 % respectivement. Ceci est dû aux contraintes mécaniques élevées appliquées aux éléments de la machine (arbres, roulements) par l'intermédiaire du couple électromagnétique important généré par cette catégorie de machines.

Ces statistiques donnent certainement des informations sur les différents défauts possibles avec leurs proportions d'existence dans les machines asynchrones. Mais, la proportion des défauts peut changer en fonction du type des machines, du type d'alimentations, et/ou de l'environnement de fonctionnement.

#### *1.2.1.1. Défauts au stator*

Le stator représente la partie fixe d'une machine à induction. Il est constitué d'un enroulement de conducteurs isolés, bobinés et répartis dans toutes les encoches (Figure I-1). Ce bobinage peut être décomposé en deux parties selon leurs rôles : i) les conducteurs dans les encoches permettent de créer le champ magnétique tournant dans l'entrefer et contribuent à la conversion électromagnétique et ii) les têtes de bobines permettent l'organisation de la circulation des courants entre les différents conducteurs mais ne participent pas à la conversion électromagnétique.



**Figure I-1 : Stator d'une machine asynchrone**

##### *a) La cause : dégradation de l'isolation d'enroulements*

L'apparition d'un défaut au niveau du stator d'une machine asynchrone est principalement due à un problème :

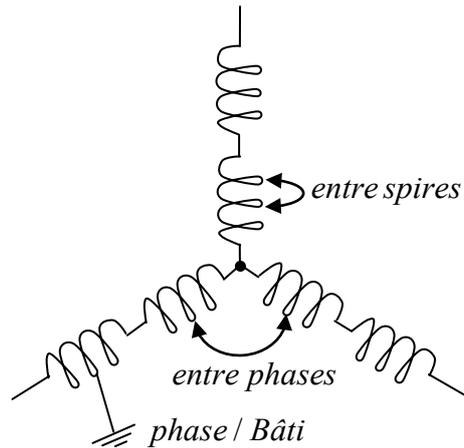
- thermique : l'étude [23] montre que la durée de vie de l'isolant diminue considérablement lorsque la température de l'enroulement dépasse la température de fonctionnement nominale. Cette élévation de la température peut être due à une surcharge (ce qui induit une élévation des courants statoriques et rotoriques) ou à une mauvaise ventilation, les différentes pertes dans la machine (Joule, fer, mécanique,...), etc.
- électrique : cette cause représente la dégradation du matériau diélectrique assurant l'isolation des enroulements par une tension supérieure à la valeur nominale ou des variations (augmentation excessive) brutales et instantanées de cette tension.
- mécanique : les vibrations de la structure peut entraîner la détérioration des isolants par érosion et abrasion.
- environnemental : la détérioration de la qualité de l'isolation peut être réalisée par la présence d'humidité ou de produits chimiques dans l'air ambiant. En effet, le fonctionnement du matériau d'isolation dans un environnement sévère de travail représente la cause la plus courante de vieillissement de l'isolant.

Cependant, d'autres phénomènes peuvent se manifester comme causes de la dégradation des isolants tels que la détérioration dès la fabrication (méthode de mise œuvre inadaptée, défaut de fabrication, ...) et le vieillissement naturel.

Dans ce cas, l'isolant n'assure plus sa fonction et un court-circuit apparaît dans les enroulements concernés.

### ***b) Les conséquences***

Les défauts statoriques les plus récurrents sont le court-circuit entre spires, le court-circuit entre phases, le court-circuit phase/bâti (Figure I-2) [24]. A un état précoce, ces défauts n'affectent souvent pas le fonctionnement normal de la machine. Toutefois, ils évoluent au cours du temps et peuvent donc se transformer en défaillance sévère et grave. La détection des courts-circuits pendant le fonctionnement du moteur permettrait de réduire la propagation des défaillances et de minimiser les coûts de réparation et de temps d'arrêt du moteur. Ce type de défauts peut être détecté par analyse spectrale des courants statoriques absorbés par la machine.



**Figure I-2 : Représentation schématique des différents courts-circuits au stator**

### ***b1) Court-circuit entre spires***

Un court-circuit entre spires de la même phase est un défaut très fréquent dans le stator. Il est dû essentiellement à la dégradation de l'isolation dans un ou plusieurs endroits de l'enroulement concerné. Les études [6] et [24] montrent qu'en présence d'un court-circuit entre spires de la même phase, le moteur peut continuer à fonctionner. Cependant, ce défaut provoque :

- une augmentation des courants statoriques de la phase affectée.
- une légère variation de l'amplitude sur les autres phases.
- une modification du facteur de puissance.
- une amplification des courants dans le circuit rotorique.
- une augmentation de la température dans l'enroulement, ce qui peut provoquer la dégradation accélérée des isolants et l'apparition d'un 2ème court-circuit.
- une augmentation des oscillations du couple électromagnétique en gardant une valeur moyenne sensiblement identique à celle sans défaut.

### ***b2) Court-circuit entre phases***

Un court-circuit entre phases représente le défaut statorique le plus nuisible en provoquant l'arrêt instantané du moteur. Ce type de défaut peut être constaté en tout point du bobinage, mais il possède des conséquences variables selon sa localisation. En effet, la présence d'un court-circuit entre phases proche de l'alimentation du moteur entraîne l'élévation des courants statoriques qui conduit à la fusion des conducteurs d'alimentation et/ou à la disjonction par les protections. D'autre part, un court-circuit proche du neutre entre deux phases engendre l'arrêt instantané du moteur sans provoquer la fusion des conducteurs.

### ***b3) Court-circuit entre phase/bâti***

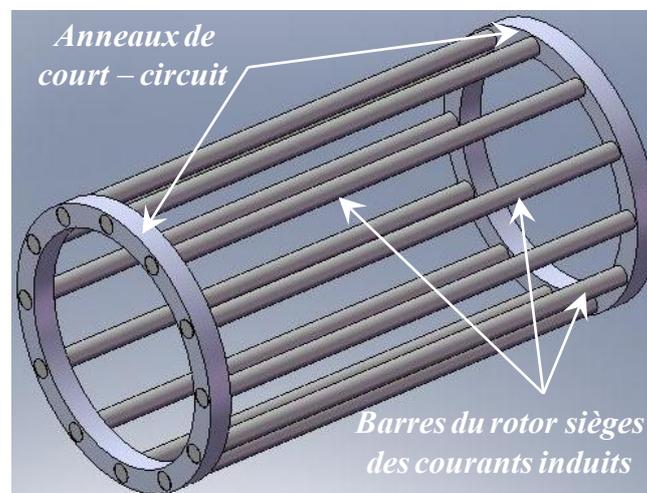
Les courts-circuits au stator peuvent aussi apparaître entre une phase et la carcasse métallique de la machine (bâti). Ce défaut n'a pas de conséquences du point de vue matériel parce que le potentiel pris par le bâti dans le cas d'un court-circuit avec l'enroulement est généralement un potentiel flottant et d'autre part, le bâti est souvent relié à la masse pour des raisons de liaisons mécaniques.

Cependant, ce type de défaut peut être très dangereux pour la sécurité des utilisateurs de la machine. Ceci impose aux installateurs de mettre en place des dispositifs de protection (disjoncteurs différentiels).

En présence de cette défaillance, la résistance et l'inductance de la phase concernée diminuent. Ce qui induit l'augmentation du courant circulant dans cette phase et l'élévation de la température pouvant engendrer des nouveaux problèmes d'isolation dans l'enroulement. D'autre part, ce défaut génère une composante homopolaire qui déséquilibre le système triphasé de la machine et entraîne l'apparition d'un couple pulsatoire (sources de vibrations mécaniques). Ce type de défaillance pourrait être détecté par une simple mesure du courant de fuite.

### *1.2.1.2. Défaux au rotor*

Dans une machine asynchrone à cage d'écureuil, le rotor est composé d'un circuit électrique et d'un autre magnétique. Le circuit électrique représente physiquement la cage du rotor qui est constituée d'un ensemble de barres régulièrement réparties et liées par deux anneaux de court-circuit. Ces anneaux permettent la circulation des courants entre les différentes barres rotoriques. Cependant, le circuit magnétique est constitué de disques en tôles encochées empilés sur l'arbre de la machine. Les barres de la cage sont réalisées généralement en cuivre et frettées sur les tôles du rotor pour les machines de forte puissance. Elles peuvent être réalisées en aluminium coulé dans les encoches du rotor pour les machines de faible et de moyenne puissance.



**Figure I-3 :** Représentation de la cage du rotor d'une machine asynchrone

Les moteurs à cage d'écureuil constituent le plus grand nombre des moteurs asynchrones utilisés actuellement à cause de leur robustesse élevée et leur prix réduit. Mais, après un certain temps de fonctionnement ou un accident, les rotors à cage peuvent présenter des défaillances dues en particulier aux problèmes suivants :

- Défaut de déverminage (bulles lors de l'injection de l'aluminium dans les encoches
- thermique (surcharge,...)
- électromagnétique (force en  $B^2(t)$ ,...)
- résiduel (déformation,...)
- dynamique (arbre de transmission,...)
- mécanique (roulement,...)
- environnemental (agression par des produits chimiques, humidité, ...)

Les défauts rotoriques les plus fréquents et provoqués par une des causes présentées précédemment peuvent être définis comme suit :

**a) Rupture de barres**

La rupture ou la casse de barres rotoriques représente le défaut le plus courant au rotor. Ce défaut peut se manifester au niveau de l'encoche ou au niveau de la liaison avec les anneaux de court-circuit. La détérioration de barres rotoriques diminue la valeur moyenne du couple électromagnétique et augmente l'amplitude des oscillations. Ce qui provoque des oscillations de la vitesse de rotation et donc, des vibrations mécaniques [25]. Ce fonctionnement anormal de la machine peut engendrer d'autres défauts soit dans le rotor soit dans le stator. L'effet de la casse croît considérablement avec l'augmentation du nombre des barres cassées [26].

**b) Rupture d'une portion d'anneau de court-circuit**

Les portions d'anneaux de court-circuit peuvent être cassées suite une détérioration des conditions de fonctionnement (température, humidité, ...) ou une surcharge de couple (courant d'anneaux plus élevé). De plus, la rupture de portion d'anneau peut être due aux dilatations différentielles entre les barres et les anneaux ou à des défauts de fabrication ou le mauvais dimensionnement des anneaux.

La présence d'un défaut de rupture ou de casse d'une portion d'anneau de court-circuit crée un déséquilibre dans la répartition des courants dans les barres rotoriques [25]. Ceci implique une modulation d'amplitude sur les courants statoriques similaire à celui provoqué par la casse de barres. Il est par conséquent difficile de distinguer la rupture d'une portion d'anneau de celle des barres rotoriques [27].

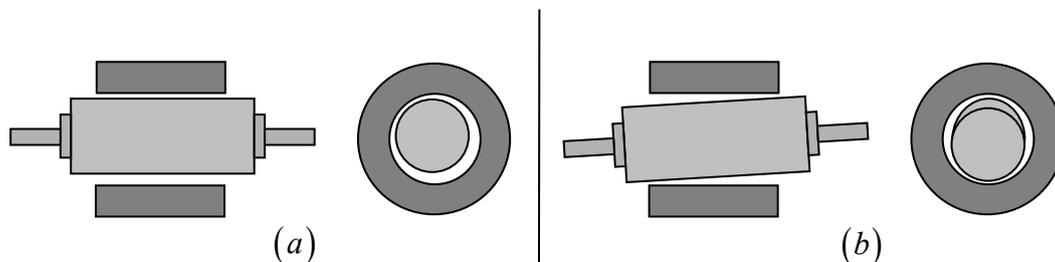
### c) *Excentricité statique et dynamique*

Dans une machine électrique à induction, l'axe du rotor n'est jamais parfaitement aligné à celui du stator. Ce décalage entre les deux axes est appelé excentricité. Il peut être dû à un défaut de montage (positionnement incorrect des paliers), à un défaut de roulement (usure), à un défaut de charge, ou à un défaut de fabrication (usinage).

Cette excentricité représente une source de forces radiales, de vibrations et du bruit dans la machine. En effet, l'augmentation de l'excentricité dans l'entrefer donne naissance à des forces d'attraction magnétique provoquant des frottements entre le stator et le rotor et un déséquilibre de la machine. D'autre part, ce défaut d'excentricité, par l'intermédiaire des forces électromagnétiques, agit sur le circuit magnétique statorique et ses enroulements, ce qui peut engendrer une dégradation de son isolation en dépassant certaines limites. En conclusion, ce défaut modifie considérablement le comportement magnétique et mécanique de la machine [28], [29].

Trois cas d'excentricité sont généralement distingués :

- l'excentricité statique (Figure I-4.a): le rotor est déplacé du centre de l'alésage stator mais tourne toujours autour de son axe.
- l'excentricité dynamique (Figure I-4.b): le rotor est positionné au centre de l'alésage mais ne tourne plus autour de son axe.
- l'excentricité mixte : associant les deux cas précédemment cités.



**Figure I-4 :** *Modélisation schématique de l'excentricité a) statique et b) dynamique*

### I.2.2. Défaillances mécaniques

Les principaux défauts mécaniques qui peuvent exister dans un système électromécanique sont les défauts de roulements et d'engrenages. Plusieurs causes peuvent être l'origine de la présence des avaries et des défaillances plus ou moins graves par rapport au fonctionnement sain du système mécanique. Parmi ces causes, on peut citer les défauts de fabrication, de montage et de fatigue. Dans cette étude, on va s'intéresser aux défauts de roulements et d'engrenages qui apparaissent par fatigue au cours du fonctionnement du système.

### *1.2.2.1. Défauts de roulements*

Dans un système électromécanique, plusieurs roulements sont installés dans la partie motrice (moteur à induction) et dans la partie de transmission de puissance mécanique. Ils servent à maintenir l'arbre du rotor de la machine et l'arbre de transmission afin de les guider en rotation.

Les principales causes de la détérioration prématurée d'un roulement sont :

- La mauvaise lubrification (quantité et/ou lubrifiant inadapté, etc...) pouvant être l'origine de certains défauts tels que le grippage, la rupture des bagues par contraintes thermiques, la détérioration des cages et l'écaillage ...
- L'environnement (pollution par l'entrée de liquide ou de particules solides, passage de courant électrique ...) qui peut être la cause de l'usure, de la corrosion, des cratères, des empreintes et des cannelures dues au passage d'un courant électrique...
- Le montage incorrect (montage brutal, mauvais ajustement et jeux, défauts de réglage, serrage excessif, etc...). Ceci peut engendrer des empreintes sur les corps roulants par déformation plastique, certaines détériorations de cages et de la corrosion liée au contact ...
- L'utilisation du roulement dans des conditions de fonctionnement mal adaptées (charges, vitesse) peut provoquer l'écaillage, le grippage et la détérioration des cages.
- La fatigue de contact qui produit des défauts de fissures et d'écaillage.

Les principales avaries provoquées par ces causes sont détaillées ci-dessous [30] :

- Usure abrasive : elle est définie comme étant l'usure par enlèvement progressif de la matière en surface. Elle est généralement liée à des roulements mal lubrifiés.
- Usure adhésive : cette avarie est produite lors du grippage entre deux surfaces frottantes, ce qui entraîne des rayures et des arrachements dans l'une des surfaces et donc un transfert de matière entre les surfaces frottantes. Des soudures localisées entre des aspérités de surfaces peuvent aussi exister.
- Empreintes : c'est un défaut de surface qui est dû à une déformation plastique sous l'effet de la charge appliquée au contact.
- Déséquilibre thermique : il peut être lié au dégagement excessif de la chaleur des surfaces en contact lorsque la chaleur n'est pas dissipée en continu ou le lubrifiant est inadapté. Ce qui entraîne la réduction de la dureté des matériaux en contact.

- Ecaillages : cette avarie est liée aux contraintes élevées de compression et de cisaillement entre les matériaux en contact et elle se manifeste par l'apparition de fissures qui croissent lentement jusqu'à l'arrachement d'une écaille.

Dans le cas des roulements convenablement entretenus, toutes les causes de détérioration des roulements disparaissent sauf l'usure par fatigue qui conduit à l'écaillage. Ce défaut apparaît même dans les conditions de fonctionnement idéales et il limite la durée de vie des roulements. En effet, le principe de construction des roulements conduit à une transmission de très fortes charges entre les deux bagues au niveau des contacts avec les éléments roulants. Ceci induit des contraintes de compression maximales en surface et des contraintes de cisaillement maximales en sous couche. Ces contraintes sont élevées et présentent un caractère cyclique dû à la rotation relative entre les bagues et les éléments roulants des roulements. La combinaison de ces facteurs entraîne, après un certain temps plus ou moins long de fonctionnement du roulement, des fissurations par fatigue du métal qui se propagent en surface et provoquent ensuite l'écaillage.

#### *1.2.2.2. Défauts d'engrenages*

Les défauts d'engrenages les plus rencontrés peuvent être classés en deux groupes d'avaries selon leur caractère réparti ou localisé sur la surface de la denture.

##### *a) Défauts répartis*

- Usure abrasive : cette usure est liée à la présence des particules abrasives dans le lubrifiant et elle est due à l'enlèvement de matière lors d'un glissement important entre les deux surfaces frottantes. Ce phénomène peut être accentué lorsque le lubrifiant contient des substances corrosives. Cependant, le durcissement superficiel de la denture d'engrenage ralenti l'apparition et la progression de cette usure.
- Piqûres (ou pitting) : c'est une avarie répartie sur toute la surface de la denture (Figure I-5), elle s'agit d'un ensemble de trous qui ne dépassent pas 0,3 à 0,5 mm de profondeur. Cette avarie se trouve sur toutes les dents et en particulier au niveau du cercle primitif parce que ce phénomène ne se produit que si le mouvement de roulement est plus important que le mouvement de glissement. Les piqûres apparaissent donc à l'endroit où la charge est maximale et elles peuvent être suite à un défaut d'alignement ou aux déformations anormales des pièces. La présence de quelques piqûres ne présente pas un risque immédiat et souvent le phénomène peut être ralenti par le changement d'un lubrifiant plus adapté (de viscosité plus importante).



**Figure I-5 :** *Pittings évolutifs sur une roue chevron [31]*

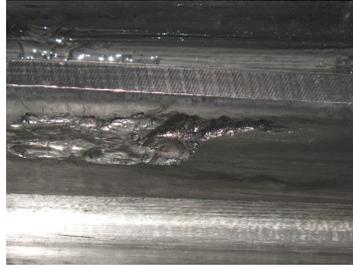
- Grippage généralisé : Le grippage est une avarie liée au contact entre les surfaces métalliques des dents lors de l'engrènement en entraînant un arrachement de matière. Le grippage apparaît lorsque le film lubrifiant entre les dents est inadéquat. Ce défaut produit des modifications de l'état de surface de toutes les dents tels que le changement de coloration, les fines rayures et les ondulations de surface pour un engrenage durci et la destruction de toutes les surfaces pour un engrenage non traité ou insuffisamment traité. Après l'apparition de cette avarie, le couple d'engrenage génère plus de vibrations et le facteur de frottement augmente et devient irrégulier.



**Figure I-6 :** *Grippage couvrant l'ensemble des dentures [31]*

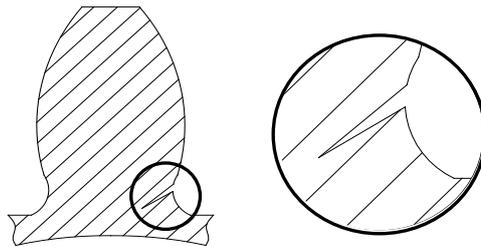
#### **b) Défauts localisés**

- Ecaillage : c'est une avarie qui commence toujours par une fissure à l'intérieur du métal à cause de la contrainte de cisaillement maximale appliquée en sous couche. Ensuite, la fissure se propage jusqu'à atteindre la surface de la denture en libérant des fragments de métal en plaques plus ou moins irréguliers aux dépens de l'état de la surface de la dent. Les zones écaillées représentent des surfaces irrégulières et des profondeurs variables qui suivent une pente plus ou moins douce de la périphérie vers l'intérieur de l'écaillage. Cette avarie est beaucoup plus courante sur des dentures traitées superficiellement (couche superficielle durcie par cémentation ou trempe) que sur celles qui sont traitées à cœur. L'écaillage est un défaut dangereux parce qu'il peut provoquer rapidement la rupture de la dent défectueuse à cause de la propagation de la fissure dans toutes les directions à l'intérieur de la dent en même temps que sa migration vers la surface (diminution de la résistance de la dent aux efforts de flexion).



**Figure I-7 :** *Ecaillage par fatigue [31]*

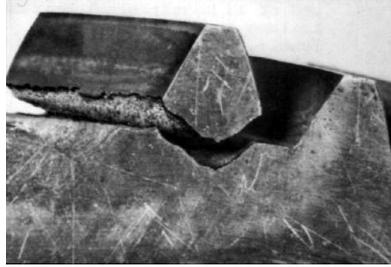
- **Fissures** : ce défaut se forme souvent au pied de dent. C'est-à-dire à l'endroit de la concentration maximale de contrainte due à la sollicitation en flexion. La présence de ce type de fissures fragilise la dent défectueuse et diminue sa résistance à la rupture. Ce phénomène peut être accentué par la présence d'une écaille à cet endroit critique de la dent. En plus de la fatigue due à la sollicitation en flexion, d'autres causes de fissures peuvent se manifester tels que les défauts de fabrication (état des surfaces, criques de rectification) et les criques d'origine thermique.



**Figure I-8 :** *Fissure en pied de dent*

- **Dents cassées** : dans un système de transmission par engrenage, le défaut de rupture des dents est lié à deux phénomènes classiques qui sont : i) les chocs dus aux surcharges et ii) la fatigue due aux charges cycliques de flexion (Figure I-9). En effet, les chocs de surcharges peuvent résulter de certains chocs de torsion dans le système d'entraînement qui sont souvent associés à la défaillance de la charge entraînée par la boîte de transmission. Dans ce cas, les surfaces fracturées montrent une seule zone de rupture avec aucun signe de fatigue. Généralement une ou deux dents sont touchées et les autres sont en bon état et ne présentant aucun signe de fissures. Des effets similaires peuvent également survenir si un corps étranger pénètre dans l'engrènement. D'autre part, la rupture des dents peut également provenir de défaillances par fatigue sous les charges cycliques de flexion appliquées aux dents, ce qui représente un des critères principaux utilisés dans la conception des engrenages. Ce défaut commence par une fissure qui est généralement au pied de la dent et évolue à travers la base de la dent jusqu'à la rupture complète de la dent

du corps d'engrenage. Dans ce cas, les dents adjacentes à celle cassée montrent souvent des fissures à un stade précoce de développement.



**Figure I-9 :** *Dent cassée due à aux fissures en pied de dent résultant de la fatigue liée aux charges cycliques de flexion*

- **Grippage localisé** : ce défaut correspond à des arrachements de matière dans une partie de la zone de contact entre les surfaces frottantes. Il peut être dû à la formation d'une micro-soudure immédiatement cisailée suite à une surcharge locale et brutale, à un défaut d'alignement des dentures et/ou à un défaut de lubrification (rupture du film d'huile). Ce type de défaut peut être ralenti ou même stoppé par l'utilisation d'une graisse de rodage appropriée.



**Figure I-10 :** *Grippage localisé sur les têtes de dent [31]*

### I.3. Techniques de détection des défauts d'engrenage

L'apparition des défauts d'engrenage dans un système mécanique est un phénomène inévitable. Cependant, plusieurs études ont été faites afin de réduire la présence de ces défauts, d'augmenter le temps de fonctionnement de l'engrenage en état sain et d'améliorer les performances des trains d'engrenage. Ces études nécessitent la connaissance des caractéristiques des défauts qui peuvent être collectées par plusieurs techniques de détection.

#### I.3.1. Analyse des signaux vibratoires

L'analyse des signaux vibratoires des réducteurs représente la technique la plus répandue de détection de défauts et d'avaries de contact des engrenages. Elle est réalisée par

l'analyse des signaux recueillis sur le système en fonctionnement à l'aide des capteurs facilement positionnables (accéléromètres, codeurs optiques). Le traitement des signaux mesurés diffère d'un cas à l'autre en fonction des résultats d'analyses souhaités. En effet, certains problèmes de détection de défauts nécessitent simplement l'analyse par la transformée de Fourier. Cependant, d'autres cas demandent une analyse plus fine à l'aide des outils de traitement de signal très sophistiqués qui aident à identifier les éléments défectueux par recherche des fréquences caractéristiques des défauts (apparition des nouveaux pics ou augmentation de l'amplitude à des fréquences déjà existantes) [32].

### *1.3.1.1. Analyse spectrale des signaux vibratoires*

L'analyse spectrale est l'outil majeur pour l'étude et l'analyse des signaux vibratoires. Ces signaux mesurés sont très riches en harmoniques et très bruités. La transformée de Fourier classique ne permet pas d'exploiter facilement les signaux mesurés. Il est nécessaire d'avoir des méthodes plus précises d'analyses spectrales dites de haute résolution. On peut citer par exemple la méthode de Capon, la méthode de Lagunas et la méthode du maximum d'entropie (spectre autorégressif) [1], [32]. Ces méthodes donnent une bonne approximation des spectres estimés même avec un nombre d'échantillons relativement réduit. Ce sont des méthodes d'analyse par banc de filtres. Elles sont précises au niveau de la résolution fréquentielle et de l'estimation de l'amplitude, donc, elles peuvent mettre en évidence des détails qui échappent aux méthodes classiques d'analyse de Fourier.

#### *a) Transformée de Fourier*

La transformée de Fourier est une opération mathématique qui décompose un signal temporel en ses fréquences constituantes. La transformée de Fourier d'un signal temporel  $x(t)$  est définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (I.1)$$

En supposant que ce signal est à énergie finie, il possède une transformée de Fourier discrète définie par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-2\pi i k f} \quad (I.2)$$

La transformée de Fourier représente l'outil de base pour l'analyse spectrale. Ses propriétés sont parfaitement connues. Elle est appliquée en premier temps au cas de signaux déterministes continus. Ensuite, la théorie a été étendue à des processus aléatoires stationnaires, échantillonnés. Enfin, des algorithmes rapides du calcul de la transformée de

Fourier ont été élaborés rendant cette méthode particulièrement intéressante et utilisée dans plusieurs applications. Ses avantages tiennent à sa robustesse et à sa résistance au bruit.

Cependant, la méthode de la transformée de Fourier possède quelques inconvénients liés à la résolution en  $1/N$  (donc faible lorsque peu de points sont disponibles,  $N$  est le nombre de points) et le fait que les estimateurs de la DSP sont non consistants (par contre l'estimation de la position des raies est consistante). Des méthodes plus sophistiquées et plus efficaces semblent nécessaires dans certaines applications.

### **b) Méthode de Capon**

La méthode de Capon consiste à estimer la densité spectrale de puissance d'un signal à chaque fréquence. Pour présenter la méthode, le signal  $x(n)$  est filtré pour obtenir un signal  $y(n)$  :

$$y(n) = -\sum_{k=0}^p a_k \cdot x(n-k) \quad (I.3)$$

Etant défini dans [32], les coefficients  $a_k$  du filtre d'ordre  $p$  sont optimisés afin de recueillir sans distorsion la contribution du signal à la fréquence voulue  $f_i$  et de minimiser la contribution des autres fréquences. Donc, si le signal contient une composante à la fréquence  $f_i$ , elle sera réhaussée par rapport au reste des fréquences.

Les coefficients  $a_k$  doivent vérifier donc la contrainte linéaire suivante :

$$\sum_{k=0}^p a_k e^{-j2\pi k f_i} = 1 \quad (I.4)$$

Soient,

- $\underline{H}_i^T = [a_0^i, \dots, a_p^i]$
- $\underline{E}_i = [1, e^{-j2\pi f_i}, \dots, e^{-j2\pi p f_i}]$

En respectant la contrainte (I.4), les coefficients  $a_k$  doivent minimiser l'énergie en sortie du filtre qui s'écrit  $\underline{H}_i^T \mathbf{R} \underline{H}_i$  avec  $\mathbf{R}$ , la matrice d'autocorrélation du signal, définie positive et hermitienne où  $R_{ij} = E[x_n x_{n+i-j}]$ .

Donc, la densité spectrale de puissance en sortie du filtre est prise comme "estimateur spectral" :

$$P(f_i) \approx \frac{1}{\underline{E}_i^H \mathbf{R}^{-1} \underline{E}_i} \quad (I.5)$$

Cette méthode d'estimation spectrale approxime donc la densité spectrale à la fréquence étudiée par l'énergie en sortie d'un filtre qui contient sa contribution à cette fréquence (l'énergie est constante lorsqu'il s'agit d'une sinusoïde pure à cette fréquence). Mais, cette sortie contient aussi une erreur résiduelle due à la contribution des autres fréquences. Cette erreur est d'autant plus faible que l'ordre du filtre est élevé.

### *c) Méthode de Lagunas*

D'après [32], la méthode de Lagunas consiste à réaliser l'analyse spectrale d'un signal avec le même banc de filtres que celui de la méthode de Capon. Soit :

$$H_i = \frac{\mathbf{R}^{-1} \underline{\mathbf{E}}_i}{\underline{\mathbf{E}}_i^H \mathbf{R}^{-1} \underline{\mathbf{E}}_i} \quad (\text{I.6})$$

Toutefois, la différence est que la densité spectrale du signal à la fréquence étudiée n'est plus approximée. Elle introduit une hypothèse supplémentaire (par rapport à la méthode de Capon) qui consiste à considérer que la densité spectrale est plate (varie peu) autour de la fréquence étudiée.

Donc, d'après [32], l'expression de la densité spectrale de puissance du signal est donnée par :

$$P(f_i) = \frac{\underline{\mathbf{E}}_i^H \mathbf{R}^{-1} \underline{\mathbf{E}}_i}{\underline{\mathbf{E}}_i^H \mathbf{R}^{-2} \underline{\mathbf{E}}_i} \quad (\text{I.7})$$

Contrairement à la méthode de Capon qui consiste à mesurer l'énergie, la méthode de Lagunas est une mesure de puissance du signal à chaque fréquence. En vérifiant les hypothèses admises pour cette méthode, elle offre une excellente résolution en fréquence et en amplitude. Comme la méthode précédente, la résolution est d'autant meilleure que l'ordre du filtre est élevé. En outre, il est à signaler que, dans cette méthode, le filtre estimé est adapté au signal fréquence par fréquence, contrairement à l'analyse de Fourier classique où le filtre est indépendant du signal.

### *d) Spectre autorégressif*

Depuis le début des années 1980, plusieurs modèles ont été introduits dans la surveillance des machines, principalement dans le diagnostic des dysfonctionnements des équipements des processus de fabrication et de transformation. Un certain nombre de méthodes paramétriques sont disponibles pour la détection des défaillances des systèmes mécaniques. D'après [1] et [32], la méthode de modélisation autorégressive est une méthode efficace de détection et de diagnostic des défauts d'engrenage.

La modélisation autorégressive réalise une estimation spectrale de haute résolution (meilleure résolution fréquentielle). Cette méthode consiste en une modélisation paramétrique avec une fonction de transfert rationnelle pour l'estimation spectrale de puissance des signaux

temporels. La modélisation autorégressive est adaptée pour représenter des spectres avec des pics pointus, ce qui est le cas des signaux vibratoires issus du fonctionnement des engrenages. Elle est aussi particulièrement utile pour la modélisation des données sinusoïdales. En outre, l'estimation des paramètres du modèle autorégressif est souvent liée à la résolution d'équations linéaires qui sont relativement faciles à résoudre.

La modélisation autorégressive consiste à associer à la séquence de signal  $x_n$ ,  $n = 0 \dots N$ , un jeu de paramètres  $a_k$  (I.8). Ce modèle est exprimé par une régression linéaire (d'où le nom "autorégression") et un terme d'erreur.

$$x_n = -\sum_{k=1}^p a_k \cdot x_{n-k} + e_n \quad (\text{I.8})$$

avec  $p$  est l'ordre du modèle,  $a_k$  sont les coefficients autorégressifs et  $e_n$  est une série de bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Il peut être démontré que la variance  $\sigma^2$  du bruit représente la puissance de l'erreur d'approximation.

Si on considère l'équation (I.8) comme un système linéaire où  $e_n$  est l'entrée et  $x_n$  est la sortie, la fonction de transfert rationnelle du système sera [1] :

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-k}} \quad (\text{I.9})$$

Cela constitue un modèle autorégressif (AR) ou un modèle à plusieurs pôles d'ordre  $p$ . Le modèle est généralement noté comme un AR( $p$ ). La résolution de l'estimateur de densité spectrale autorégressive est meilleure lorsque l'ordre  $p$  du modèle choisi est élevé.

La densité spectrale de puissance (DSP) du signal temporel  $x_n$  est exprimée par [1] :

$$P_{x,AR}(f) = \frac{\sigma^2}{|A(f)|^2} \quad (\text{I.10})$$

avec  $\sigma^2$  est la variance du bruit et  $|A(f)|^2$  représente la DSP des coefficients autorégressifs  $a_k$ . Ces coefficients sont estimés à partir des équations de Yule-Walker, par l'algorithme de Levinson-Durbin [33] (il y a une correspondance directe entre ces coefficients et la fonction de covariance (et donc d'autocorrélation)).

La résolution en fréquence de cet estimateur dépend essentiellement du rapport signal/bruit. Cependant, cet estimateur est très performant dans le cas d'enregistrements courts, avec un rapport signal/bruit satisfaisant ( $> 5$  dB) [32]. Cette méthode est efficace dans le cas des signaux riches en harmoniques. Par contre l'estimation de l'amplitude est affectée d'un biais qui représente le principal inconvénient de la densité spectrale autorégressive.

### 1.3.1.2. Analyse cepstrale synchrone

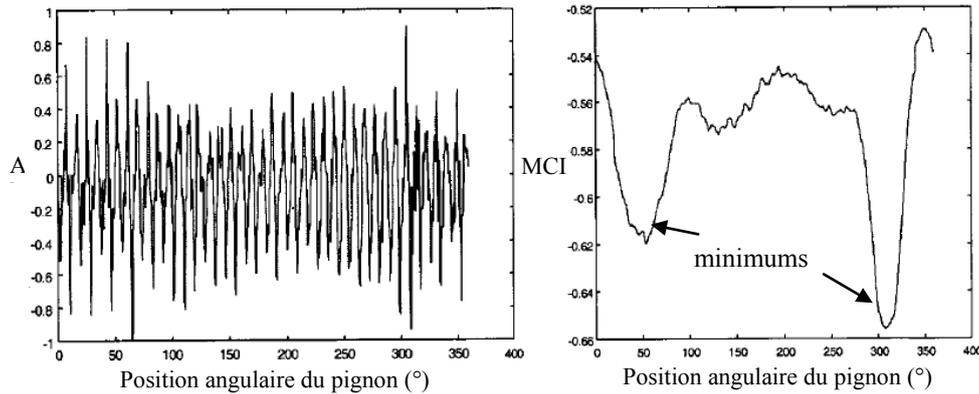
Le cepstre est un opérateur non-linéaire d'analyse des signaux vibratoires. Il est initialement utilisé dans la détection des échos et introduit plus tard dans la surveillance vibratoire des machines tournantes. Sa définition mathématique est [34] :

$$\tilde{s} = TF^{-1} \left[ Ln|S(v)| \right] \quad (I.11)$$

avec  $S(v)$  est la Transformée de Fourier du signal  $s(t)$ .

Le cepstre d'énergie d'un signal est très sensible aux motifs répétitifs tels que ceux générés par des avaries de contact locales de denture. Cet opérateur transforme le produit de convolution en addition. Seule sa composante d'ordre zéro (premier échantillon) dépend de l'amplitude du signal d'origine. Il est démontré dans [35] que le cepstre d'énergie des signaux d'accélération mesurés au cours de fonctionnement d'un couple d'engrenage peut être une technique de diagnostic et de surveillance efficace et simple à interpréter. En effet, la détection du défaut d'engrenage est effectuée en comparant le cepstre des signaux obtenus sous échantillonnage angulaire de l'accélération d'un train à engrenage sans et avec défaut. Les propriétés établies dans [35] suggèrent que les défauts locaux de dentures pourraient être efficacement détectés par l'analyse des évolutions des deux premiers pics cepstraux liés à chaque partie tournante (pignon/roue).

L'étude expérimentale et théorique réalisée dans [34] montre que l'analyse cepstrale est un outil efficace de détection des défauts locaux d'engrenage à partir des signatures vibratoires. La Figure I-11 montre l'apparition de deux minimums dans la courbe de la M.C.I (moving spectrum integral : Le principe est basé sur l'évaluation du cepstre intégral de puissance en utilisant une fenêtre rectangulaire normalisée décalée dans le temps le long de la totalité du signal d'accélération) des accélérations mesurées après 11 jours de fonctionnement qui sont dus à la présence de deux défauts sur deux dents différentes de l'engrenage, alors que la détection sur les mesures d'accélération semble incertaine. Cette observation a été validée par l'inspection visuelle du pignon et qui a révélé un grand écaillage sur la dent 16 du pignon et un défaut moins marqué sur la dent 2. Ce qui justifie la différence des amplitudes des minimums observés.



**Figure I-11 :** *Signal temporel et son MCI (moving cepstrum integral) des accélérations mesurées après 11 jours de fonctionnement d'un couple d'engrenages à denture droite [34].*

### 1.3.1.3. Décomposition en ondelettes (wavelet)

La transformée en ondelettes est utilisée pour diviser une fonction temporelle en ondelettes. On distingue deux types de transformées en ondelettes : continue (CWT) et discrète (DWT). La transformée en ondelettes continue (CWT) considère les facteurs de dilatation et de translation et elle est donnée par l'équation (I.12). Contrairement à la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes continues possède la capacité de construire une représentation temps-fréquence d'un signal en offrant la localisation facile en temps et en fréquence.

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (I.12)$$

avec  $a$  est le facteur de dilatation ou l'indice d'échelle donné par  $2^j$  (il est inversement proportionnel à la fréquence) et  $b$  est le facteur de translation de données donné par  $2^j k$ .  $\psi(t)$  est une fonction continue en temps et en fréquence (ondelette mère) et  $\psi^*(t)$  désigne le complexe conjugué de  $\psi(t)$ . Les coefficients de CWT sont de nature complexes définis avec un module et une phase. Par conséquent, le carré du module de ces coefficients est nécessaire afin de représenter le niveau d'énergie possédé par un signal. Une telle représentation est connue sous le nom de scalogramme.

Dans le cas d'un ensemble discret d'ondelettes (DWT), le signal est décomposé en deux bandes de fréquences. La bande basse fréquence est connue comme étant le niveau approximatif (A) et la bande haute fréquence est connue comme le niveau de détail (D). Pour une DWT multi-résolution, une arborescence peut être formée, où le signal est décomposé en un certain nombre de niveaux de détails avec un seul niveau approximatif. La Figure I-12 est un exemple d'une telle décomposition et l'équation (I.13) la réalise :

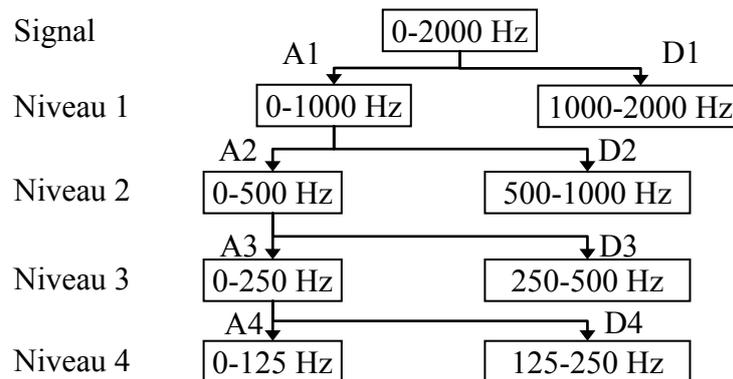
$$f_j(t) = \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_k \gamma_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_k \lambda_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(t) \quad (\text{I.13})$$

avec  $f_j(t)$  désigne le signal, la première et deuxième parties de l'équation indiquent respectivement les niveaux de détails et approximatifs,  $j$  et  $k$  signifient respectivement l'échelle et la translation (position) de données ;  $\psi(t)$  et  $\phi(t)$  sont respectivement les fonctions d'ondelettes et d'échelle;  $\gamma$  et  $\lambda$  sont les coefficients respectifs de ces fonctions. Le nombre maximum des niveaux de décomposition dépend essentiellement du nombre de points de données prises.

Les fonctions  $\psi(t)$  et  $\phi(t)$  sont données par :

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) \quad (\text{I.14})$$

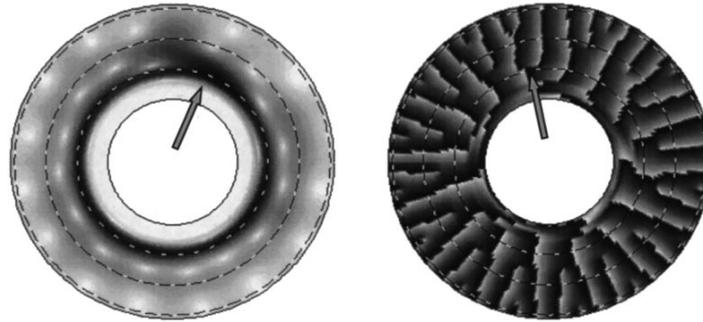
$$\phi_{j,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{I.15})$$



**Figure I-12 :** Arborescence de décomposition en ondelettes (DWT) de signaux stables entre 0 et 2 kHz

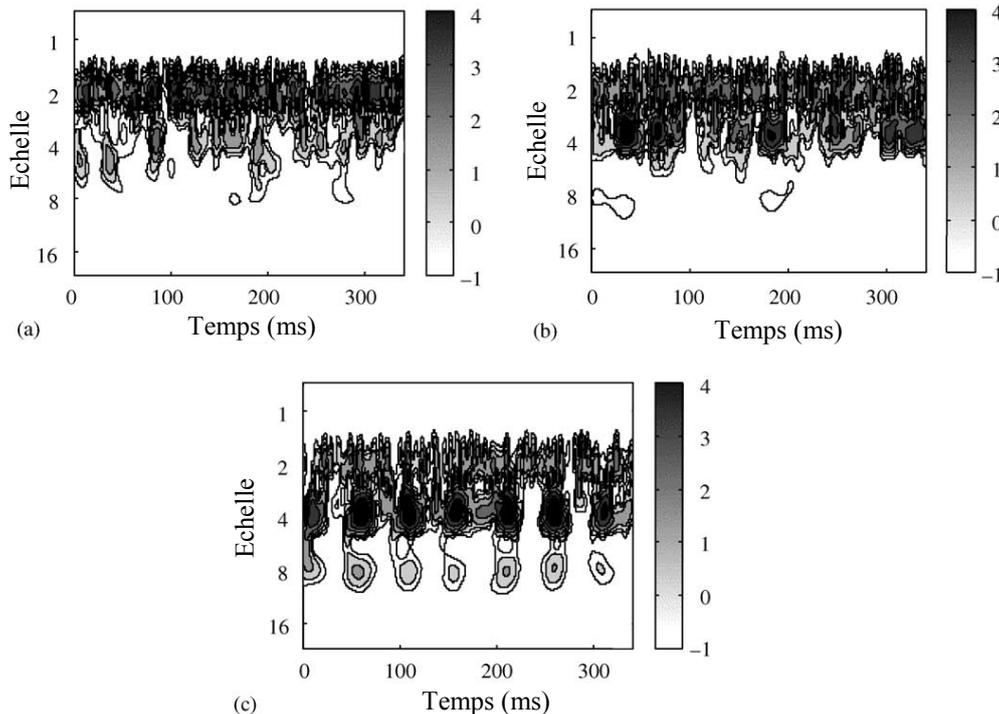
La décomposition en ondelettes des signaux a été utilisée dans plusieurs travaux de recherche [36], [37] pour analyser les signaux vibratoires issus des transmissions à engrenages en présence de défauts. Ces études montrent la capacité de détection et de suivi des défauts d'engrenage tels que la fissure en pied de dent et les avaries de contact à l'aide de la décomposition en ondelettes des signaux vibratoires. En effet, dans [36], les auteurs ont montré que la technique basée sur la transformée en ondelettes continue semble très efficace dans la détection des fissures en cours de développement qui sont dues à la fatigue de contact entre les dents d'engrenage. L'analyse simultanée des cartes de l'amplitude et de la phase des ondelettes offre des informations très détaillées sur les conditions d'engrènement du couple

d'engrenage. En particulier, la carte de la phase de l'ondelette montre également des caractéristiques liées à la présence des dents endommagées. Les auteurs ont également introduit des représentations polaires qui sont plus intuitives par rapport aux projections rectangulaires et peuvent être utilisées pour aider à localiser l'emplacement exact d'un des défauts locaux dans l'engrenage (Figure I-13).



**Figure I-13 :** Représentation polaire de l'amplitude (à gauche) et de la phase (à droite) de la transformée en ondelettes de la moyenne temporelle synchrone du signal vibratoire d'un engrenage avec une dent fissurée [36].

D'autre part, dans [37], les auteurs ont montré que les fréquences caractéristiques et les échelles associées à l'engrènement et aux défauts d'engrenage sont différents et peuvent être facilement identifiées en utilisant le spectre de la transformée en ondelettes continue. En comparant les différents tracés de contours (les isolignes joignant les points de valeurs égales sur une carte) du spectre de la transformée en ondelettes des différents cas de signaux vibratoires de l'engrenage, la présence d'un défaut montre une périodicité évidente (Figure I-14 (c)), ce qui n'est pas le cas pour les signaux vibratoires d'engrènement (sans défaut ou faible avancement du défaut).



**Figure I-14 :** Tracés de contours du spectre de la transformée en ondelettes : (a) sans défaut d'engrenage (b) 50% d'avancement du défaut ; (c) 100% d'avancement du défaut [37].

#### 1.3.1.4. Représentations temps-fréquence

Dans le traitement du signal, l'analyse temps-fréquence comprend des techniques qui étudient simultanément un signal dans les domaines temporels et fréquentiels en utilisant les différentes représentations temps-fréquence. La motivation pratique l'étude temps-fréquence est que l'analyse par la transformée de Fourier classique suppose que les signaux sont infinis dans le temps ou périodiques, tandis que la majorité des signaux en pratique sont de courte durée et changent considérablement au cours de cette durée.

Cet outil offre la possibilité d'analyse 2D d'un signal à travers une de plusieurs transformations connues tels que la transformée de Fourier à court terme (TFCT) [38], la transformée en ondelettes et la transformée de Wigner Ville (TWV) [3], [38].

##### a) *Transformée de Fourier à court terme (TFCT)*

La transformée de Fourier à court terme (TFCT), connue également par la transformée de Fourier à fenêtre glissante (en anglais, Short-Time Fourier Transform (STFT)), est un développement qui étend la technique de Transformée de Fourier standard pour gérer des données non-stationnaires [38]. Les transformées de Fourier sont appliqués à des fenêtres courtes de données représentées dans le domaine temporel. Ces fenêtres sont déplacées le long du jeu de données et peuvent se chevaucher.

Ceci transforme les données 1D en des données 2D : une dimension pour les fréquences et une seconde dimension pour l'emplacement des fenêtres dans les données. La TFCT fournit des informations pour une bande de fréquence fixe et une résolution temporelle qui dépend de la fenêtre. Un événement impulsif apparaît dans une TFCT lors d'une augmentation des niveaux à toutes les fréquences au moment de l'impulsion. Une des limitations de cette méthode est due au fait que les composantes du signal ayant une faible correspondance avec la résolution fréquentielle et temporelle seront masquées.

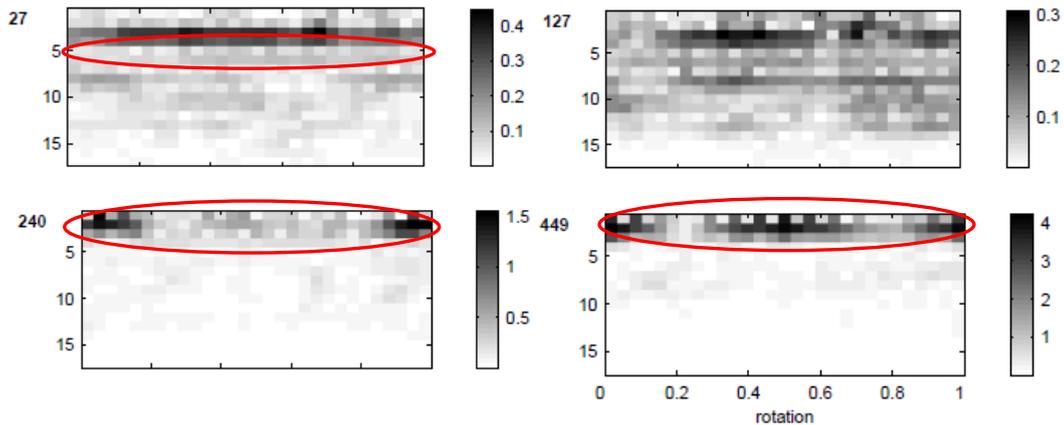
Étant donné un intervalle de temps  $T > 0$ , soit  $g(u)$  une fonction (fenêtre) qui s'annule en dehors de l'intervalle  $-T \leq u \leq 0$ . La transformée de Fourier à court terme (TFCT) d'une fonction  $f(u)$  est définie par [38]:

$$F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u-t) f(u) e^{-2\pi i \omega u} du \quad (\text{I.16})$$

avec  $\bar{g}(u)$  est le complexe conjugué de la fonction  $g(u)$  (appelée fenêtre) et  $t$  est le paramètre de localisation temporelle de la fenêtre  $g$ .

La série des spectres ainsi constituée représente une forme de transformée temps fréquence du signal appelé spectrogramme.

Selon [38], la Figure I-15 montre l'amplitude de la TFCT pour 4 enregistrements de données sélectionnées. Le décalage temporel dans la TFCT varie le long de l'axe horizontal au cours d'un tour du pignon. L'axe vertical couvre une plage de fréquences en considérant que les basses fréquences sont en haut de l'axe et les hautes fréquences sont en bas de l'axe. Au début du test (enregistrement 27), le spectrogramme montre une bande noire aux indices 3 et 4 (ces indices correspondent à la fréquence d'engrènement qui est définie par le produit du nombre de dents et la fréquence de rotation du pignon). Puis, pour l'enregistrement 127, l'amplitude de l'harmonique liée à l'engrènement devient plus variable et la composante de la fréquence d'engrènement ne contient plus la plus grande amplitude. Pour le reste des enregistrements (240 et 449), les niveaux d'amplitudes les plus élevés se produisent dans le domaine des basses fréquences.



**Figure I-15 :** Transformée de Fourier à court terme de la moyenne synchrone en temps pour une rotation du pignon ; les numéros d'enregistrement des données : 27, 127, 240, 449 [38].

### b) Transformée de Wigner Ville (TWV)

La transformée de Wigner Ville (TWV) est une transformation non linéaire qui associe des données 1D en 2D : une dimension pour les fréquences et une seconde dimension pour le temps. Cette méthode fournit une décomposition temps fréquence sans aucune restriction sur les résolutions temporelles et fréquentielles. Elle est adaptée à l'analyse des signaux non stationnaires puisque qu'elle ne nécessite pas d'hypothèses sur le signal d'origine. La transformée de Wigner Ville possède des unités de puissance de signal et non pas d'amplitude. Les informations sur la phase ne sont plus disponibles.

Etant donné une fonction  $f(u)$ , la transformée de Wigner Ville est définie par [38]:

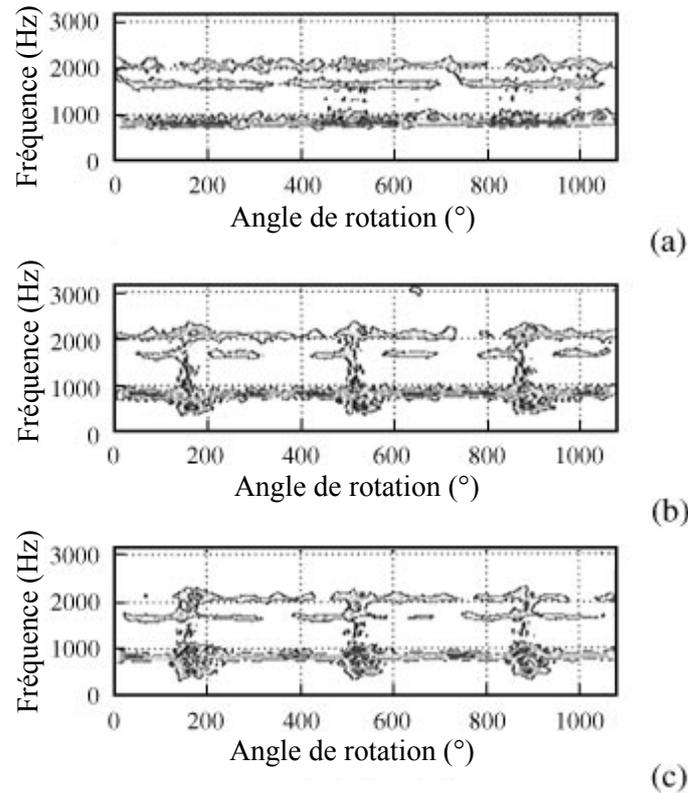
$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}\left(t - \frac{u}{2}\right) f\left(t + \frac{u}{2}\right) e^{-i\omega u} du \quad (\text{I.17})$$

avec  $\bar{f}(u)$  est le complexe conjugué de  $f(u)$ .

Cette transformation peut être interprétée comme la densité spectrale de puissance instantanée du signal. Cependant les phénomènes d'interférence et chevauchement entre temps et fréquence tendent à réduire la lisibilité de cette représentation. Ce qui implique que l'interprétation devient dans ce cas presque impossible. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Parmi lesquelles, on peut citer l'utilisation d'un noyau de lissage (fonction à deux variables) afin d'adoucir localement la rigueur de la résolution.

Selon [3], la Figure I-16 montre les transformées de Wigner Ville lissées du signal vibratoire enregistré sur plus de 3 tours du pignon d'un train à engrenage. Les effets des défauts sont nettement reconnaissables. La présence des tâches d'énergie en dehors de la fréquence fondamentale d'engrènement montre l'existence d'un défaut. Si ces tâches sont plus larges et plus intense, le défaut est donc plus sévère. L'enregistrement du signal vibratoire sur 3 tours du pignon permet de détecter un événement périodique lié à la rotation

du pignon. Cet impact se répète toujours à la même position angulaire du pignon. Cela est dû à l'impulsion créée par la dent défectueuse à chaque fois qu'elle entre en contact.



**Figure I-16 :** Transformée de Wigner Ville lissée du signal vibratoire pour plus de 3 tour du pignon : (a) état normal (sans défaut); (b) un défaut à 60%; (c) enlèvement d'une dent [3].

### I.3.2. Analyse des lubrifiants

Le lubrifiant représente l'élément primordial qui intervient dans le fonctionnement des organes (moteurs, boîtes de transmission, roulements) et des équipements industriels. Le choix et la mise en œuvre du lubrifiant définissent sa fiabilité, sa tenue mécanique et sa longévité.

L'état du lubrifiant reflète l'état du système dans lequel il circule et offre une meilleure connaissance de la machine. En effet, l'analyse du lubrifiant renseigne sur a) l'état du fluide (adaptation au système, adaptation de l'espacement de vidange, niveau de performance), b) l'état de la pollution et de contamination du fluide par des liquides, des solides et/ou des produits de décomposition) et l'état d'usure (normale, dangereuse ou accidentelle).

L'analyse de lubrifiant constitue donc un moyen efficace de surveillance des réducteurs à engrenages basé sur le suivi régulier des différentes caractéristiques du fluide telles que la viscosité, l'acidité, la présence de particules métalliques, la taille des particules, etc... assuré par analyses physico-chimique et le contrôle du taux de contamination (chromatographie, photométrie, spectrométrie...). Toutefois, la détection de défauts d'engrenages par analyse de

lubrifiant ne peut pas être efficace dans le cas des avaries à évolution rapide et vient fréquemment en complément des analyses vibratoires pour confirmer des hypothèses.

### I.3.3. Analyse des signaux acoustiques

L'analyse des signaux vibratoires a été largement utilisée dans le diagnostic des transmissions à engrenages. Ceci peut être dû à une meilleure compréhension des mécanismes de vibrations des engrenages. En outre, tout changement dans le signal de vibration peut être facilement attribué aux caractéristiques dynamiques de l'engrenage et de son défaut.

Les transmissions mécaniques à engrenages génèrent des vibrations et du bruit lors du fonctionnement normal. La présence des défauts et des écarts de forme dans l'engrenage peut être une source d'excitation de ces phénomènes. Il est démontré dans [3] et [4] que les défauts locaux d'engrenage ont un impact direct sur les signaux sonores. Les impulsions dues au défaut sont observées dans les signaux acoustiques à chaque tour du pignon. En présence de plus en plus de défauts locaux, les signaux acoustiques de l'engrenage ont des caractéristiques non-stationnaires.

Dans l'analyse en ondelettes d'un signal acoustique [4], la phase et l'amplitude de l'ondelette du fonctionnement normal montrent clairement la fréquence fondamentale d'engrènement. En outre, l'amplitude de l'ondelette révèle que l'énergie du signal est presque également répartie sur les fréquences fondamentales d'engrènement. D'autre part, en présence de défaut, la phase et l'amplitude indiquent clairement deux signes de défauts sur les signaux : a) le premier est l'apparition des activités à basse fréquence en dehors de la région de fréquence fondamentale d'engrènement et b) le deuxième signe est la concentration de l'énergie du signal sur la seconde moitié de la distribution des amplitudes des ondelettes. Ces signes de présence de défaut sont d'autant plus identifiables que les défauts sont plus graves et plus accentués.

L'étude expérimentale présentée dans [5] montre que, pendant toute la durée des tests, il y a deux principaux processus affectant la génération des émissions acoustiques. Premièrement, le processus d'usure qui provoque un lissage de la rugosité de surface des dents d'engrenage entraîne une diminution conséquente du niveau des émissions acoustiques. Deuxièmement, après un certain temps de fonctionnement, l'apparition puis la progression et le développement des avaries de contact augmente la rugosité de surface et donc les niveaux des émissions acoustiques. La même étude [5] montre qu'au début des tests expérimentaux, les émissions acoustiques sont également influencées par la température du film d'huile et les caractéristiques dynamiques du banc d'essai. L'augmentation de la température d'huile entraîne une réduction de l'épaisseur du film d'huile, ce qui favorise les contacts métal à métal en augmentant les niveaux sonores. En outre, les auteurs postulent que les facteurs qui déterminent le niveau de déclenchement des émissions acoustiques sont la rugosité de surface des dents d'engrenage, l'assemblage des engrenages et des paliers, et la température d'huile.

### I.3.4. Analyse des signaux des courants statoriques

L'analyse de la signature des courants statoriques a été traditionnellement utilisée pour surveiller les moteurs à induction et ses roulements. Cette méthode a été utilisée comme une technique d'essai et d'analyse afin d'améliorer l'évaluation de l'usure des paliers durant le fonctionnement des moteurs installés dans des endroits inaccessibles. Plusieurs études ont montré que l'analyse des signaux des courants statoriques peut être capable de détecter, de différencier, et suivre l'état d'avancement des anomalies tels que les défauts des dents d'engrenage dans le cas d'une transmission roue et vis sans fin [15].

Cette méthode représente un moyen très sensible, sélectif et rentable pour la surveillance à distance d'une grande variété de machines industrielles lourdes. En effet, l'analyse des signaux des courants statoriques :

- fournit la capacité de surveillance non intrusive sur un site distant à l'équipement de mesure.
- fournit des informations de diagnostic comparable à l'instrumentation déjà présente pour le contrôle.
- offre une grande sensibilité à une variété d'anomalies mécaniques affectant les installations opérationnelles.
- propose des moyens pour séparer une forme d'anomalie d'une autre.
- peut être réalisée rapidement par un personnel relativement peu qualifié en utilisant des équipements peu coûteux.
- est également applicable à des machines (AC et DC) de grande puissance.

L'analyse de la signature des courants statoriques (notée MCSA) est basée sur la détection des petites variations temporelles de la charge du moteur électrique générées au sein du système mécanique et impactant les signaux de courant électriques qui circulent le long du câble d'alimentation du moteur. Ces signaux, bien qu'ils soient petits par rapport au courant moyen absorbé par le moteur, peuvent être extraits de manière fiable et non intrusive et traités afin de fournir des indicateurs des signatures du moteur. La tendance de ces signatures peut être déterminée au cours du temps pour donner des informations concernant le moteur et la charge entraînée. Les signaux de courant peuvent être analysés dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

L'analyse des courants statoriques est maintenant largement utilisée pour détecter les défauts des roulements [7]-[9]. En outre, l'analyse spectrale de la signature des courants statoriques en présence des défauts dans le moteur à induction (tels que la rupture des barres rotoriques ou l'excentricité entre le rotor et le stator) montre des bandes de fréquences très proches de la fréquence d'alimentation du moteur [26]-[29].

Dans d'autres contributions récentes, l'influence des défauts d'engrenage sur la signature des courants statoriques dans les machines à induction a été étudiée analytiquement et expérimentalement [10]-[13]. La méthode MCSA a été appliquée avec succès à la détection des défauts d'engrenage sur un système de transmission roue et vis sans fin entraîné par un moteur à aimant permanent (BLDC). Il a donc été prouvé que la MCSA est suffisamment précise pour fournir des informations pertinentes sur les défauts d'engrenage.

L'analyse de la signature des courants statoriques peut être donc réalisée à l'aide de plusieurs techniques telles que la représentation dans le repère dq, l'analyse spectrale et la décomposition en ondelettes.

#### *1.3.4.1. Projection dans le repère dq*

Une représentation bidimensionnelle peut être utilisée pour décrire les phénomènes engendrés par la présence de défauts électriques et mécaniques dans un moteur triphasé à induction. Cette méthode est basée sur une « démodulation » du courant statorique conduisant à une exploitation des résultats plus aisée.

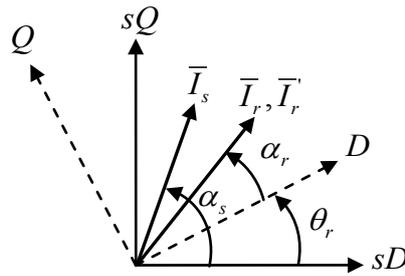
Dans un moteur triphasé à induction, le courant statorique comporte trois composantes (a, b, c). En appliquant la transformation (I.18) sur les composantes principales du courant ( $I_a, I_b, I_c$ ), on obtient les composantes  $I_{sD}$  et  $I_{sQ}$  du courant définies dans le repère (sD,sQ) immobile par rapport au stator [39].

$$\begin{cases} I_{sD} = \sqrt{\frac{2}{3}}I_a - \frac{1}{\sqrt{6}}I_b - \frac{1}{\sqrt{6}}I_c \\ I_{sQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_b - \frac{1}{\sqrt{2}}I_c \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

En appliquant la transformation de Park au système (sD,sQ) et en considérant les axes D et Q immobiles par rapport au rotor, les composantes  $I_D$  et  $I_Q$  sont obtenues par [39]:

$$\begin{bmatrix} I_D \\ I_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{sD} \\ I_{sQ} \end{bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

avec  $\theta_r$  représente l'angle instantané de rotation du rotor par rapport au stator (Figure I-17). Cette figure résume les transformations déjà mentionnées où  $I_s$  est le vecteur du courant statorique qui tourne à la fréquence angulaire  $\Omega_s$ .



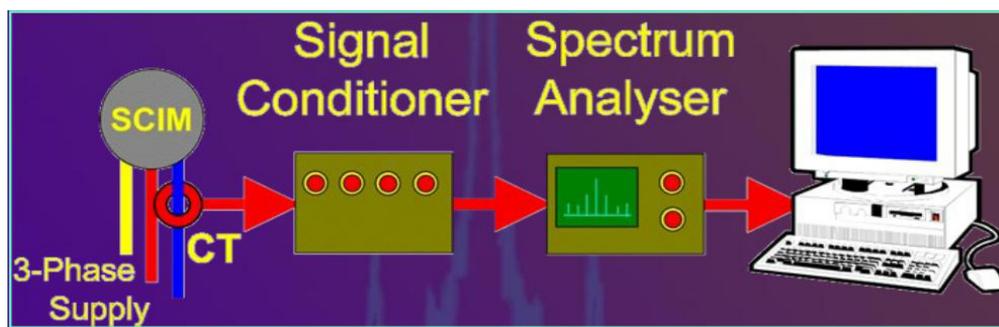
**Figure I-17 :** Représentation des axes  $(sD, sQ)$  et  $(D, Q)$

Cette méthode a été utilisée avec succès dans plusieurs travaux de recherche ([39], [40]) afin de surveiller et détecter les défauts de roulement dans les moteurs à induction. Cette approche est basée sur l'analyse des composantes de Park des courants statoriques par le plan de phase. Les auteurs ont montré que cet outil peut détecter la présence d'un défaut dans la machine mais il ne donne pas des informations précises sur l'état ou la sévérité de la défaillance détectée.

Dans la continuité de cette approche, l'analyse des composantes de Park des courants statoriques peut être utilisée pour la surveillance des défauts d'engrenages dans les transmissions entraînées par des moteurs électriques.

#### 1.3.4.2. Analyse spectrale des courants statoriques

Les signaux de courant moteur peuvent être obtenus à partir des sorties des capteurs de courant qui sont placées d'une manière non intrusive sur l'un des fils d'alimentation. Ces signaux sont ensuite analysés afin de présenter les indicateurs de défauts à détecter. Le processus de la MCSA par analyse spectrale est décrit dans la Figure I-18.



**Figure I-18 :** Processus de la MCSA par analyse spectrale

Les signaux des courants statoriques peuvent être étudiés à l'aide des différentes analyses spectrales définies dans le paragraphe I.3.1.1. Plusieurs études récentes ont utilisé cette méthode afin de surveiller et détecter des défauts d'engrenage. Dans [10] et [11], les auteurs ont proposé une approche de modélisation d'un système électromécanique composé d'un moteur à induction et d'une transmission à engrenage simple étage. Le moteur a été

caractérisé par un modèle classique d'une machine à induction triphasée à rotor bobiné. Le moteur est représenté par un modèle de transformateur tournant avec des inductances statoriques, rotoriques, et mutuelles. D'autre part, le réducteur est représenté par un modèle dynamique simple à deux degrés de liberté de torsion. Cette approche de modélisation permet de caractériser la zone de contact entre le pignon et la roue. Les liaisons du réducteur avec le moteur et la charge sont considérées rigides. Ce modèle électromécanique global a été proposé dans [11] pour découvrir l'effet des fréquences liées au couple d'engrenage et induites dans le spectre du courant statorique. Les résultats numériques et expérimentaux obtenus avec cette approche montrent que l'analyse des signaux des courants statoriques (MCSA) semble suffisante pour être utilisée comme méthode de détermination des informations fréquentielles concernant l'engrenage. D'après les auteurs, cette approche peut être utilisée pour la conception des systèmes de suivi permanent des machines à induction qui entraînent des chaînes industrielles de fabrication dans lesquelles les transmissions par engrenage représentent les éléments mécaniques les plus critiques. Les travaux [10] et [11] se sont toutefois limités à observer expérimentalement les fréquences de rotation et d'engrènement dans le spectre du courant statorique sans présenter aucun développement théorique.

Dans la continuité de cette approche, les auteurs ont développé dans [12] une étude théorique sur un train d'engrenage entraîné par une machine à induction en se basant sur l'observation du spectre du couple électromagnétique transmis par le moteur et des signaux de vibrations. Il est démontré que des fréquences liées aux fréquences de rotation et d'engrènement s'ajoutent dans la signature de couple à cause de la vibration de torsion induite par l'erreur de transmission aux niveaux du pignon et de la roue et de la variation de raideur d'engrènement lors de l'évolution du contact entre les dents [12]. Cette formulation théorique du couple conduit à une modulation multi-composante de la phase du courant du stator, qui dépend des caractéristiques de l'engrenage entraîné et du type d'alimentation du moteur (réseau électrique ou onduleur).

#### *1.3.4.3. Décomposition en ondelettes (wavelet transform),*

Les éléments théoriques à la base des transformées en ondelettes d'un signal ont été présentés dans le paragraphe I.3.1.3. La méthode proposée a été utilisée dans plusieurs travaux de recherche afin d'analyser les signaux des courants statoriques pour surveiller et détecter les défauts qui peuvent se produire dans un système électromécanique. Cette méthode a été utilisée dans les deux cas de défauts (défauts électriques [41] et défauts mécaniques [42]).

## I.4. Méthodes de modélisation des systèmes électromagnétiques (machines asynchrones à cage d'écureuil)

La modélisation des systèmes électromagnétiques représente une étape cruciale dans la mise en œuvre des méthodes de diagnostic des machines électriques à induction. Il s'agit de définir des modèles permettant d'analyser les interactions mécaniques/électriques, de déterminer les indicateurs de défauts mécaniques construits à partir des grandeurs électriques. Ces modèles peuvent être analytiques ou numériques. En effet, les méthodes analytiques sont basées sur l'établissement des équations analytiques permettant de décrire le comportement électrique statique ou dynamique d'une machine en régime permanent ou transitoire. D'autre part, les méthodes numériques sont basées sur des équations non linéaires à dérivées partielles et à coefficients variables au cours du temps. La mise en œuvre de ces méthodes est complexe mais elles sont très précises car elles permettent de considérer de nombreux phénomènes physiques dans la machine. Chacune de ces méthodes (analytiques ou numériques) présente des avantages et des inconvénients et le choix dépend de la précision des résultats souhaités.

### I.4.1. Méthodes analytiques

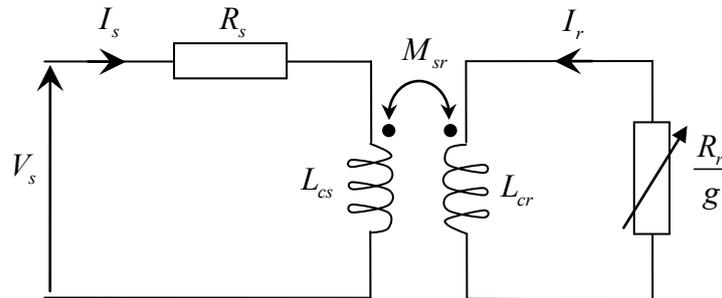
Les méthodes analytiques de modélisation des systèmes électromagnétiques sont développées à partir des équations symboliques décrivant le phénomène physique du fonctionnement macroscopique du système. Ces équations sont mises en œuvre en se basant sur des hypothèses simplificatrices sur certaines propriétés physiques et géométriques de la machine parmi lesquelles [43]:

- La saturation est négligée, il en résulte que les inductances propres et mutuelles sont indépendantes des courants qui circulent dans les différents enroulements.
- L'hystérésis et les courants de Foucault dans les parties magnétiques sont négligés parce que le circuit magnétique est supposé parfaitement feuilleté.
- Les forces magnétomotrices sont réparties sinusoïdalement dans l'entrefer de la machine. La distribution discrète des enroulements est négligée et les encoches sont supposées inexistantes.
- Les effets thermiques dans la machine sont négligés.

#### I.4.1.1. Schéma équivalent monophasé

Une machine asynchrone peut être modélisée par un schéma équivalent monophasé afin d'étudier son comportement en régime permanent. Les trois phases de la machine sont considérées parfaitement équilibrées et leur système d'alimentation (en tension ou en courant) est purement sinusoïdal équilibré de sorte que le schéma équivalent monophasé soit

identique pour chaque phase. La Figure I-19 montre le schéma équivalent général d'une machine asynchrone.



**Figure I-19 : Schéma équivalent général**

avec :

- $R_s$  : Résistance d'une phase statorique.
- $R_r$  : Résistance d'une phase rotorique.
- $L_{cs}$  : Inductance cyclique statorique.
- $L_{cr}$  : Inductance cyclique rotorique.
- $M_{sr}$  : Mutuelle cyclique entre stator et rotor.
- $g$  : Glissement.
- $\sigma$  : Coefficient de dispersion.
- $I_s$  : Courant d'une phase statorique.
- $I_r$  : Courant d'une phase rotorique.

Les grandeurs rotoriques d'une machine asynchrone évoluent à une fréquence différente de celle des grandeurs statoriques. La fréquence statorique est donnée par le champ magnétique statorique imposé par la tension d'alimentation. Le glissement, défini par l'écart entre la vitesse de rotation et la vitesse du synchronisme, caractérise la relation entre ces deux fréquences. La Figure I-20 montre le schéma équivalent usuel ramené au stator d'une machine asynchrone alimentée en tension. On notera par  $I_r'$  le courant rotorique ramené au stator.

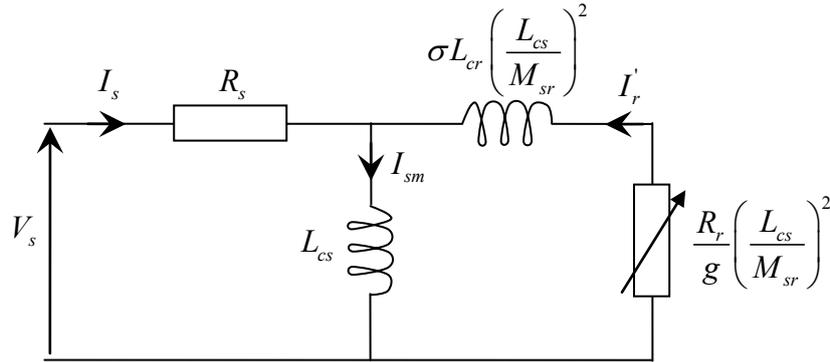


Figure I-20 : Schéma équivalent usuel ramené au stator

L'identification des différents paramètres du schéma équivalent d'une machine asynchrone quelconque se fait en réalisant trois essais : a) un essai en continu sur une phase de la machine pour mesurer la résistance statorique  $R_s$ , b) un essai à vide (c'est-à-dire à la vitesse du synchronisme ( $g = 0$ )) pour déterminer l'inductance  $L_{cs}$  lorsque la machine est alimentée sous tension nominale et, enfin, c) un essai à rotor bloqué afin de déterminer la résistance rotorique  $R_r$  et les inductances de fuites statoriques et rotoriques ramenées au stator. Suite au développement des lois de commande de la machine asynchrone et selon la nature du système de régulation, d'autres schémas équivalents peuvent être utilisés pour modéliser la machine asynchrone afin de réguler le flux d'entrefer (Figure I-21) ou le flux rotorique (Figure I-22).

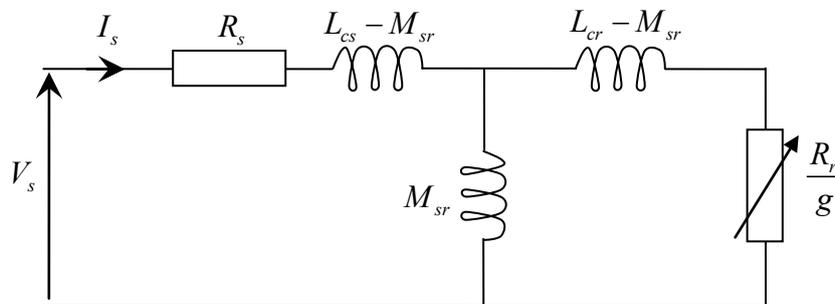


Figure I-21 : Schéma équivalent utilisé pour réguler le flux d'entrefer

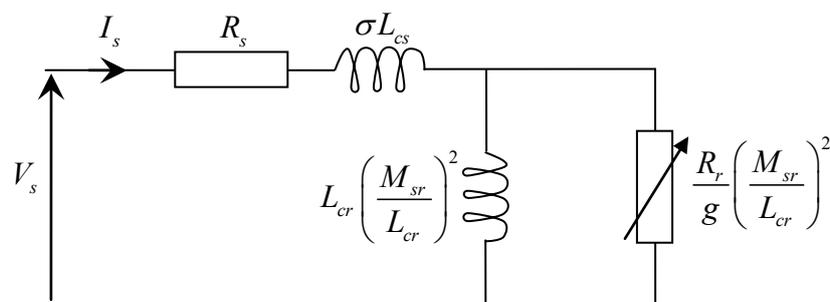
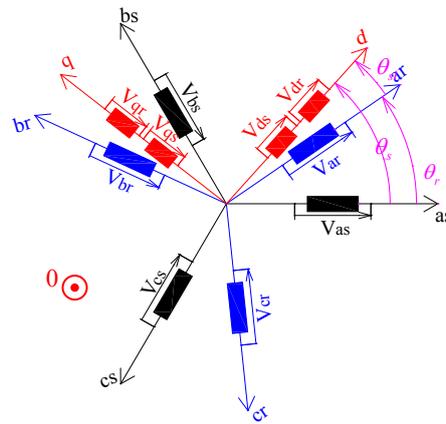


Figure I-22 : Schéma équivalent utilisé pour réguler le flux rotorique

### 1.4.1.2. Modèles par transformation dq (triphasé/diphase)

Le but de la théorie générale de la modélisation des machines électriques est de donner un modèle mathématique des machines électriques conventionnelles permettant de les étudier dans leur ensemble en régime permanent ou transitoire. Une machine asynchrone triphasée bipolaire est constituée d'un inducteur fixe appelé stator et d'un induit tournant appelé rotor munis chacun d'un enroulement triphasé (l'enroulement rotorique fictif représente la cage d'écureuil constituée par des barres conductrices court-circuitées par deux anneaux aux extrémités).



**Figure I-23 :** Représentation schématique des axes magnétiques de la machine asynchrone

La Figure I-23 montre une représentation schématique d'une machine asynchrone [43]. Les trois enroulements de phase statorique  $a_s$ ,  $b_s$  et  $c_s$  sont représentés schématiquement par leurs axes magnétiques respectifs, ainsi que les trois enroulements du rotor  $a_r$ ,  $b_r$  et  $c_r$ . Deux axes perpendiculaires  $d$  (direct) et  $q$  (en quadrature) sont également représentés définissant un nouveau repère orthonormé dans lequel les équations électriques et magnétiques de la machine asynchrone vont être exprimées plus simplement grâce à une transformation en fonction des angles entre les différents axes de la machine. Ce changement de variables peut être interprété comme la substitution des enroulements réels par des enroulements fictifs ( $d_s$ ,  $q_s$ ,  $0_s$ ,  $d_r$ ,  $q_r$  et  $0_r$ ) dont les axes magnétiques sont liés aux axes  $d$ ,  $q$  et  $0$ , mais dont les conducteurs restent liés aux armatures qui les supportent [43], [44]. Les composantes d'indice 0, dites homopolaires, n'interviennent pas à condition que l'alimentation du stator soit symétrique et que le rotor ne subisse pas d'effet de dissymétrie. La matrice qui assure cette transformation est donnée par l'équation (I.20) :

$$T_{dq0/abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (I.20)$$

avec  $\theta$ , la position angulaire relative du rotor par rapport au stator, donc la vitesse « électrique » de rotation du rotor est :

$$\omega_r = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_s}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} \quad (I.21)$$

Le repère  $dq0$  est défini par le choix de sa vitesse de rotation du repère. Selon la nature du problème à étudier [43], le repère  $dq0$  peut être a) un référentiel fixe lié au stator (modèle de Clark) afin d'étudier des variations importantes de la vitesse de rotation, associée ou non à des variations de fréquence d'alimentation électrique, b) un référentiel tournant à la vitesse de rotation du rotor (modèle de Park) permettant d'analyser les régimes transitoires de la machine asynchrone dans le cas où la vitesse de rotation est considérée constante, citons par exemple, l'étude des contraintes induites d'un court-circuit et, enfin, c) un référentiel synchrone (modèle de Kron : le repère  $dq0$  est en rotation synchrone avec le champ magnétique tournant) pour étudier la réponse du moteur à induction à des faibles perturbations autour d'un régime donné ou pour réaliser le contrôle vectoriel des machines à courant alternatif. Ce dernier est particulièrement avantageux [16] et il va être choisi en raison de sa capacité à éliminer la porteuse sinusoïdale des signaux des courants, tensions et flux, lorsque la fréquence d'alimentation électrique est constante. Ceci simplifie considérablement la résolution des équations magnétiques et électriques.

#### I.4.2. Méthodes semi-analytiques

Les méthodes précédentes ne permettent pas de prendre en compte de nombreux phénomènes tels que la saturation, les harmoniques d'encoches... Pour étudier les défauts des machines, il est nécessaire de construire des modèles plus précis sans être trop lourds numériquement. Nous les qualifierons de méthodes semi-analytiques.

Il existe plusieurs méthodes semi-analytiques de modélisation des machines électriques avec des niveaux de complexités différents : i) le modèle aux inductances couplées qui modélisent les différents couplages électromagnétiques par des inductances et mutuelles éventuellement non linéaires et ii) le modèle par réseaux de perméances (ou encore appelé schéma magnétique équivalent) qui permet d'étudier les machines électriques en régime dynamique et non linéaire en tenant compte simultanément du mouvement du rotor, du phénomène de la saturation et des défauts géométriques et électriques.

### 1.4.2.1. Méthodes aux inductances couplées

La modélisation de la machine asynchrone par la méthode des inductances couplées est basée sur une formulation semi-analytique de son comportement électromagnétique. La machine est représentée à partir de résistances, inductances propres et mutuelles. Les inductances sont déterminées à partir des fonctions de bobinages ([18], [25] et [45]). Elles varient en fonction de la position angulaire du rotor. En outre, ce modèle peut considérer les différents types de bobinages et de connections (imbriqués, concentriques) avec une ou plusieurs couches. Cette méthode permet donc une représentation satisfaisante de la répartition géométrique des différents bobinages de la machine tout au long de l'entrefer et offre une grande souplesse de modélisation.

L'écriture du modèle de la machine asynchrone par cette approche (inductances magnétiquement couplées) est basée sur les hypothèses principales suivantes, [25] :

- le fer (les tôles) est de perméabilité infinie (Cette hypothèse peut cependant être partiellement contournée par l'introduction d'un coefficient de saturation dans l'expression de l'induction d'entrefer permettant la prise en compte de la chute de tension magnétique (f.m.m.) dans le fer).
- l'entrefer est considéré uniforme.
- les  $m$  enroulements statoriques sont identiques.
- les  $n$  barres du rotor sont uniformément réparties.
- les courants de Foucault, le frottement et les pertes par ventilation sont négligés.
- les barres de rotor sont isolées (les courants inter-barres sont négligeables).

En générale, en considérant une machine asynchrone à cage d'écureuil avec  $m - n$  enroulements ( $m$  au stator et  $n$  au rotor), le système d'équations décrivant son comportement électromagnétique est donné par, ([18], [25] et [45]) :

$$\{V_s\} = [R_s]\{I_s\} + \frac{d}{dt}\{\Psi_s\} \quad (\text{I.22})$$

$$\{V_r\} = [R_r]\{I_r\} + \frac{d}{dt}\{\Psi_r\} \quad (\text{I.23})$$

$$\{\Psi_s\} = [L_{ss}]\{I_s\} + [L_{sr}]\{I_r\} \quad (\text{I.24})$$

$$\{\Psi_r\} = [L_{sr}]^T\{I_s\} + [L_{rr}]\{I_r\} \quad (\text{I.25})$$

avec :

- les indices  $s$  et  $r$  désignent respectivement le stator et le rotor.
- $\{I_s\} = \{i_{s1} \quad i_{s2} \quad \dots \quad i_{sm}\}^T$  : vecteur des courants parcourant les phases statoriques.

- $\{I_r\} = \{i_{r1} \quad i_{r2} \quad \dots \quad i_{rn}\}^T$  : vecteur des courants parcourant les phases rotoriques.
- $\{\Psi_s\}$  : vecteur des flux captés par les phases du stator.
- $\{\Psi_r\}$  : vecteur des flux captés par les phases du rotor.
- $\{V_s\} = \{v_{s1} \quad v_{s2} \quad \dots \quad v_{sm}\}^T$  : vecteur de l'alimentation des phases statoriques.
- $\{V_r\} = \{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0_n\}^T$  dans le cas d'une machine asynchrone à cage.

Avec cette formulation, les courants parcourant les  $m$  phases statoriques et les  $n$  phases rotoriques sont considérés indépendants.

Le couple électromagnétique  $T_{em}$  fourni par la machine asynchrone est donné par :

$$T_{em} = \{I_s\}^T \cdot \frac{d[L_{sr}]}{d\theta} \cdot \{I_r\} \quad (I.26)$$

avec  $p$  est le nombre de paire de pôle et  $\theta$  est l'angle mécanique du rotor.

Le calcul de toutes les inductances propres et mutuelles de la machine (éléments des matrices d'inductances dans (I.24) et (I.25)) peut être réalisé à partir des fonctions de bobinages. En supposant que l'entrefer est constant et le fer est infiniment perméable (empêchant donc la prise en compte de la saturation), l'expression générale de l'inductance mutuelle entre deux circuits  $i$  et  $j$  est donnée par l'équation suivante, [45] :

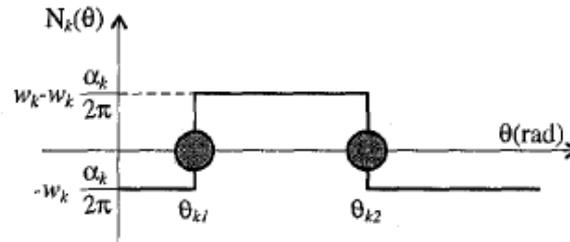
$$L_{ij}(\theta) = \frac{\mu_0 r l}{g} \int_0^{2\pi} N_i(\varphi, \theta) N_j(\varphi, \theta) d\varphi \quad (I.27)$$

avec  $\theta$  est la position angulaire du rotor par rapport au stator,  $\varphi$  est la position angulaire particulière le long de la surface intérieure du stator,  $l$  est la longueur de l'empilement,  $r$  est le rayon moyen de l'entrefer et  $g$  est la longueur effective de l'entrefer.  $N_i(\varphi, \theta)$  et  $N_j(\varphi, \theta)$  sont respectivement les fonctions de bobinages des circuits  $i$  et  $j$ . Lorsque  $i = j$ , l'équation (I.27) donne l'inductance propre du circuit  $i$ .

La fonction de bobinage d'une phase stator est la somme des fonctions de bobinage de tous les enroulements qui constituent la phase. La fonction de bobinage d'un enroulement  $k$  est donnée par, [45] :

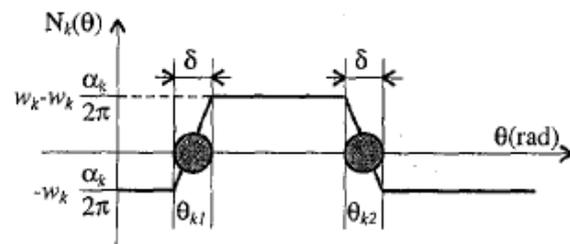
$$N_k(\theta) = \begin{cases} w_k - w_k(\alpha_k / 2\pi) & \text{si } \theta_{k1} \leq \theta \leq \theta_{k2} \\ -w_k(\alpha_k / 2\pi) & \text{si } \theta < \theta_{k1} \text{ ou } \theta > \theta_{k2} \end{cases} \quad (I.28)$$

avec  $\alpha_k$  est le pas du bobinage,  $\alpha_k = \theta_{k2} - \theta_{k1}$ , et  $w_k$  est le nombre de spires de l'enroulement  $k$ . La Figure I-24 présente la fonction décrite par (I.28) et ses différents paramètres.



**Figure I-24 :** Fonction de bobinage de l'enroulement  $k$

D'après [45], lorsque l'effet de l'augmentation linéaire de la force magnétomotrice (FMM) à travers l'encoche est pris en compte, la fonction bobinage de l'enroulement  $k$  est représentée dans la Figure I-25.



**Figure I-25 :** Fonction de bobinage de l'enroulement  $k$  en incluant l'effet de l'augmentation linéaire de la FMM à travers l'encoche

A partir de la Figure I-25, l'expression de la fonction de bobinage est donnée par :

$$N_k(\theta) = \begin{cases} \frac{w_k}{2\pi\delta} [2\pi(\theta - \theta_{k1}) + \delta(\pi - \alpha_k)] & \text{si } \theta_{k1} - \frac{\delta}{2} \leq \theta \leq \theta_{k1} + \frac{\delta}{2} \\ w_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{2\pi}\right) & \text{si } \theta_{k1} + \frac{\delta}{2} \leq \theta \leq \theta_{k2} - \frac{\delta}{2} \\ w_k \left[ \left(1 - \frac{\alpha_k}{2\pi}\right) + \frac{\theta_{k2} - \theta}{\delta} - \frac{1}{2} \right] & \text{si } \theta_{k2} - \frac{\delta}{2} \leq \theta \leq \theta_{k2} + \frac{\delta}{2} \\ -w_k \frac{\alpha_k}{2\pi} & \text{si } \theta < \theta_{k1} - \frac{\delta}{2} \text{ ou } \theta > \theta_{k2} + \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

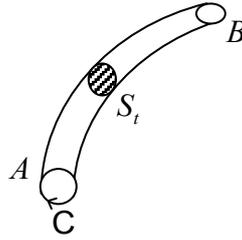
avec  $\delta$  est la largeur de l'ouverture de l'encoche.

D'autres formulations ont été proposées dans [45] pour considérer l'inclinaison des barres rotoriques.

#### 1.4.2.2. Modèles de réseaux de perméances

La représentation des systèmes électromagnétiques par réseau de perméance est basée sur une discrétisation du domaine étudié en tubes de flux. Chaque tube est défini par l'ensemble des lignes d'induction s'appuyant sur un contour fermé  $C$  (Figure I-26) et

caractérisé par sa perméance  $\mathcal{P}$  qui dépend principalement de sa géométrie et des caractéristiques magnétiques de son matériau [19], [46].



**Figure I-26 :** Tube de flux

En définissant la réluctance  $\mathcal{R}$  du tube de flux comme étant l'inverse de sa perméance  $\mathcal{P}$ , on obtient l'équation (I.30) :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{P}} = \int_A^B \frac{dl}{\mu S_t} = \frac{\varepsilon_{AB}}{\phi} \quad (\text{I.30})$$

avec :

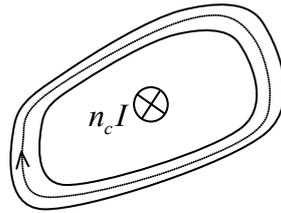
- $\mu = \mu_0 \mu_r$  la perméabilité absolue du tube de flux considérée uniforme dans son domaine.
- $S_t$  : la section du tube de flux.
- $\phi$  : le flux traversant le tube.
- $\varepsilon_{AB}$  : la différence de potentielle magnétique aux bornes A et B du tube de flux.

En notant  $L_t$  la longueur du tube de flux, la perméance caractérisant le tube de flux est donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 \mu_r S_t}{L_t} \quad (\text{I.31})$$

La Figure I-27 montre un nombre  $n_c$  de conducteurs parcourus par un courant  $I$  et entourés par un tube de flux. D'après les lois de l'électromagnétisme, ces courants créent une force magnétomotrice dans le tube considéré. En se basant sur le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique  $H$  le long d'un contour fermé (tube de flux dans ce cas) est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur ce contour. Ainsi, on obtient :

$$\oint H dl = n_c I \quad (\text{I.32})$$



**Figure I-27 :** Tube de flux entourant un conducteur

La machine à induction peut être modélisée à l'aide des réseaux de perméances (schéma magnétique équivalent) en se basant sur certaines hypothèses. Elles consistent à négliger le phénomène des courants de Foucault et les effets d'extrémités des machines tels que les têtes de bobines.

Par analogie aux circuits électriques, les éléments du circuit magnétique équivalent d'une machine à induction peuvent être classés en deux groupes :

- les éléments actifs (sources : forces magnétomotrices).
- les éléments passifs (perméances). Dans un circuit magnétique d'une machine à induction, trois types de perméances peuvent exister : a) les perméances constantes qui sont caractérisées par une géométrie et une perméabilité constantes pendant le fonctionnement du système électromagnétique (par exemple, les perméances de fuites des pieds d'encoches et les perméances des dents lorsqu'elles sont insaturées), b) les perméances saturables (non linéaire intrinsèque) modélisant les éléments ferromagnétiques de la machine dans le cas où le champ d'induction magnétique  $B$  n'est plus proportionnel au champ magnétique  $H$ , et c) les perméances variables (non linéaire paramétrique) modélisant les perméances des tubes de flux dont la géométrie est variable (par exemple, les dimensions des tubes de flux caractérisant les liaisons entre les différents dents d'une part et d'autre de l'entrefer dépendent de la position angulaire instantanée relative entre le rotor et le stator au cours de la rotation de la machine).

La modélisation des machines électriques par réseaux de perméances a été utilisée avec succès pour étudier leur fonctionnement en régime transitoire et permanent ([19], [46]–[50]. En effet, V. Ostovic [19] a présenté des travaux sur les machines à induction en tenant compte du phénomène de la saturation des armatures et du mouvement du rotor. Dans [49], C. Delforge a présenté la modélisation d'une machine asynchrone par réseaux de perméances et de sa commande vectorielle afin de contrôler et réguler le flux magnétique rotorique. Puis, cette méthode de modélisation a été utilisée dans [50] pour étudier l'effet des défauts statoriques et rotoriques des machines asynchrones à cage d'écureuil.

### I.4.3. Méthodes numériques par éléments finis

Les méthodes numériques de modélisation des systèmes électromagnétiques ont été développées grâce au développement des outils informatiques. Elles permettent d'étudier leurs fonctionnements macroscopiques en donnant des résultats globaux (tensions et courants) et locaux (flux et potentiels à l'intérieur de la machine) très précis. Ce qui permet d'agir sur la conception, de valider le dimensionnement et d'améliorer les performances des machines électriques. D'autre part, les méthodes numériques sont basées sur des équations non linéaires à dérivées partielles et à coefficients variables au cours du temps.

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser spatialement la machine électrique à étudier. Selon la complexité du modèle et la précision des résultats souhaités, cette discrétisation peut être en 2D ou en 3D. Cette méthode permet d'étudier la répartition du flux magnétique à l'intérieur de la machine en tenant compte des phénomènes de saturation du matériau. Cette méthode est basée sur les équations de Maxwell associées aux relations entre le champ d'induction et le champ magnétique (I.36) et entre les courants de conduction et le champ électrique (I.37).

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.33})$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.34})$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.35})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (\text{I.36})$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{I.37})$$

avec :

- $\vec{H}$  : Champ magnétique.
- $\vec{E}$  : Champ électrique.
- $\vec{B}$  : Champ d'induction magnétique.
- $\vec{D}$  : Champ d'induction électrique.
- $\vec{J}$  : Courants de conduction.
- $\mu_0$  : Perméabilité de l'air.
- $\mu_r$  : Perméabilité relative du matériau, elle dépend de la nature et de la saturation du matériau.

-  $\sigma$  : Conductivité électrique du matériau.

Dans les cas des machines électriques à champ magnétique tournant, l'approximation des états quasi-stationnaires peut être utilisée en négligeant les courants de déplacement  $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$  par rapport aux courants de conduction  $(\vec{J})$ . D'où, l'équation (I.35) devient :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{I.38})$$

Le comportement électromagnétique des machines électriques peut être étudié en résolvant l'équation bidimensionnelle (I.39), en négligeant les effets de bord.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma \text{grad}(V) \quad (\text{I.39})$$

avec  $A$  est la composante normale au plan d'étude de  $\vec{A}$  qui représente le potentiel vecteur tel que  $\vec{B} = \overline{\text{rot}}(\vec{A})$  et  $\text{div}(\vec{A}) = 0$ , et  $V$  est un potentiel scalaire électrique.

L'équation (I.39) est ensuite discrétisée sur chaque élément du maillage en construisant les différentes matrices élémentaires. Après assemblage de ces matrices, le système matriciel obtenu est un système non linéaire d'équations différentielles résolu par une procédure itérative (Newton-Raphson) [51] combinée avec un algorithme de résolution temporelle tel que l'algorithme implicite d'Euler. On obtient ainsi la valeur du potentiel vecteur en tout point du maillage.

Dans cette méthode, le mouvement du rotor est intégré dans les équations magnétiques lors de la modélisation de l'entrefer. Le stator et le rotor sont liés par des modèles tels que la bande de roulement [52] et le macro-élément [53].

Malgré la simplification de l'étude en bidimensionnel, la méthode des éléments finis demande des délais de résolution excessifs surtout dans les cas où les fréquences des phénomènes induits au rotor sont assez basses, donc, il faut atteindre des temps de simulation très importants pour arriver au régime permanent de la machine.

#### I.4.4. Avantages et inconvénient de chaque méthode (Synthèse)

Le Tableau I-1 résume les avantages et les inconvénients des modèles définis précédemment. Il en ressort principalement que les différents modèles sont complémentaires pour le dimensionnement et la compréhension des dispositifs électromagnétiques. Certains modèles (modèle d-q) à résolution extrêmement rapide sont utilisés pour les premières étapes de pré-dimensionnement et d'exploitation en ligne alors que les autres modèles (modèle aux inductances couplées, modèle par réseau de perméances, modèle par éléments finis) permettent de mieux prendre en compte les phénomènes mis en jeux.

Ces trois derniers modèles sont basés sur la connaissance de la géométrie exacte de la machine à étudier et permettent de donner des résultats locaux et globaux très satisfaisantes. Cependant la modélisation des machines électriques par réseau de perméances offre un gain énorme en termes de temps de calcul par rapport à la modélisation par éléments finis.

Méthode	Avantages	Inconvénients
Schéma équivalent monophasé	<ul style="list-style-type: none"> <li>- modèle très simple</li> <li>- résolution extrêmement rapide</li> <li>- identification facile des paramètres</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- régime permanent uniquement</li> </ul>
Modèle d-q	<ul style="list-style-type: none"> <li>- simple</li> <li>- résolution extrêmement rapide</li> <li>- modèle simplifié prenant en compte la saturation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- néglige les harmoniques d'espace</li> <li>- hypothèses très restrictives</li> </ul>
Modèle inductances couplées	<ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul précis</li> <li>- résolution rapide</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Détermination des paramètres assez complexe</li> <li>- Prise en compte de la saturation assez complexe</li> </ul>
Réseaux de perméances	<ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul précis</li> <li>- résolution rapide</li> <li>- prise en compte possible de la saturation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- nécessité de connaître la géométrie</li> </ul>
Eléments finis	<ul style="list-style-type: none"> <li>- calcul très précis</li> <li>- prise en compte possible de la saturation</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- nécessité de connaître la géométrie</li> <li>- résolution lente</li> <li>- calcul complexe des inductances et des mutuelles</li> </ul>

**Tableau I-1 :** *Comparaison des modèles des machines à induction*

## **I.5. Présentation des différents types des modèles des boîtes à engrenages**

Le but de ce paragraphe est de montrer les différents modèles des systèmes à engrenages rencontrés dans la littérature.

### **I.5.1. Modélisation statique**

L'étude du comportement mécanique des engrenages est très ancienne [54]. En 1955, Weber et Banaschek [55] ont utilisé la théorie de l'élasticité afin d'exprimer la déflexion sous charge des dents en fonction de la géométrie de l'engrenage en décomposant cette déformation totale en trois principales contributions : a) la déformation due à la flexion de la

dent, b) la déformation due à la contribution du corps d'engrenage et c) la déformation de contact entre le couple de dents. En se basant sur la comparaison des résultats expérimentaux et analytiques pour différents angles de pression, rapports de réduction, nombres de dents, et différentes positions de la charge, une formulation pour l'évaluation des déflexions et contraintes pour des engrenages à dentures droites est présentée dans [56]. D'autres travaux de recherche ont été consacrés à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'ensemble de l'engrenage, y compris la zone de contact entre les dents, afin de calculer la rigidité des dents [57]. Des formules approchées comme celles présentées dans la norme ISO-6336 [58] ou DIN-3990 [59] permettent d'estimer rapidement la raideur d'engrènement. Elles reposent sur des formules de régression établies sur la base des résultats analytiques de Weber et Banaschek [55]. Des formulations similaires ont été également proposées dans le cadre de la norme américaine AGMA [60].

## I.5.2. Modélisation dynamique

Le comportement dynamique des engrenages a été abondamment étudié au cours des 30 dernières années. Les modèles torsionnels initiaux à un seul degré de liberté ont progressivement évolués vers des représentations tridimensionnelles intégrant les couplages entre les différents degrés de liberté du système (torsion, flexion, traction et compression). La classification traditionnelle de ces modèles dynamiques est basée essentiellement sur la nature du comportement dynamique de l'engrenage (linéaire ou non-linéaire) et sur la description des conditions de contact lors de l'engrènement.

### *I.5.2.1. Modèles linéaires à raideur d'engrènement constante*

Les modèles dynamiques d'engrenages sont considérés linéaires lorsque la contribution de la non linéarité hertzienne due aux conditions de contact ainsi que les éventuelles pertes de contact en cours de mouvement sont négligées. Certains modèles linéaires supposent en outre que la raideur d'engrènement est indépendante de la vitesse de rotation et que ses variations temporelles sont négligeables. Dans ces conditions, les équations du mouvement sont des équations différentielles à coefficients constants classiques et permettent d'accéder à des fréquences naturelles et modes propres de la transmission. Ce type d'approche est particulièrement adapté aux engrenages possédant un rapport de conduite élevé dont les variations de longueur de contact avec le temps sont très faibles.

Sener et Özgüven [61] utilisent le modèle linéaire présenté sur la Figure I-28 pour étudier le comportement dynamique d'un système d'engrenages en tenant compte de son environnement (les arbres portant les engrenages et deux inerties représentant le moteur et la charge). Dans ce modèle, les excitations naturelles dues à l'engrènement sont introduites via la notion d'erreur de transmission tout en supposant que la raideur d'engrènement est constante. Dans ces conditions, le système différentiel est à coefficients constants et sa

résolution est relativement aisée. Il est conclu que le calcul des facteurs dynamiques, en utilisant ce modèle linéaire afin d'inclure les effets des arbres, est une très bonne alternative aux modèles plus sophistiqués beaucoup plus coûteux à utiliser.

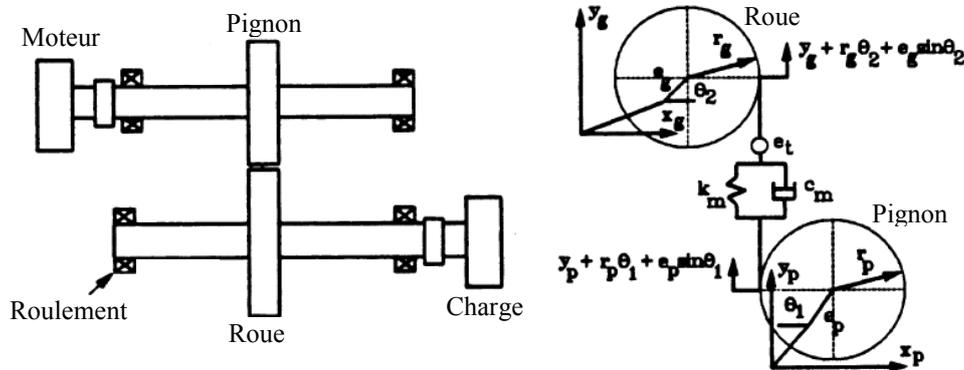


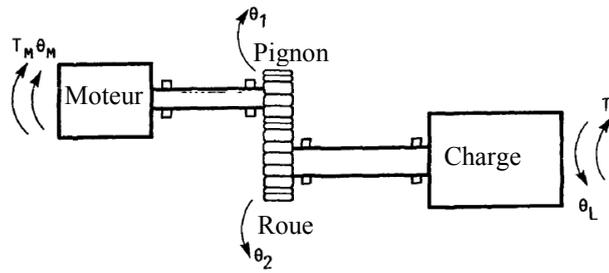
Figure I-28 : Modèle linéaire de Sener et Özgüven [61]

#### 1.5.2.2. Modèles linéaires à raideur d'engrènement variable (périodique)

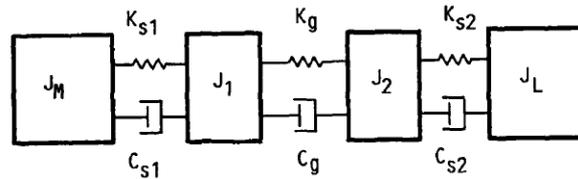
Dans cette catégorie, les hypothèses précédentes conduisant à un modèle linéaire sont maintenues, mais la raideur d'engrènement est considérée variable. Le système d'engrenages est alors caractérisé par des équations différentielles à coefficients périodiques dont la période  $t_m$  est la période d'engrènement définie en fonction de la fréquence de rotation  $f_r$  et du nombre de dents du pignon  $Z_1$  par :

$$t_m = \frac{1}{Z_1 f_r} \quad (\text{I.40})$$

Ce type de modèle a été utilisé dans [62] pour étudier l'effet de corrections de profil de denture sur l'erreur de transmission statique et le chargement dynamique sur les flancs des dents d'un engrenage droit. Le modèle dynamique d'engrenages droits, représenté Figure I-29, est un modèle torsionnel à quatre degrés de liberté. Les raideurs et les moments d'inerties des différentes composantes du système sont obtenus à partir des principes fondamentaux de la mécanique des matériaux. Les équations de mouvement contiennent des termes d'excitations dues aux variations périodiques de la raideur d'engrènement et à la présence d'erreurs de profils. Ces équations sont linéarisées en décomposant la période d'engrènement en petits intervalles. Des corrections de profil linéaires ou paraboliques ont été introduites dans le modèle afin de comparer et discuter l'influence individuelle de chaque correction sur le chargement dynamique sur l'engrenage.



(a) : système simple de transmission par engrenage



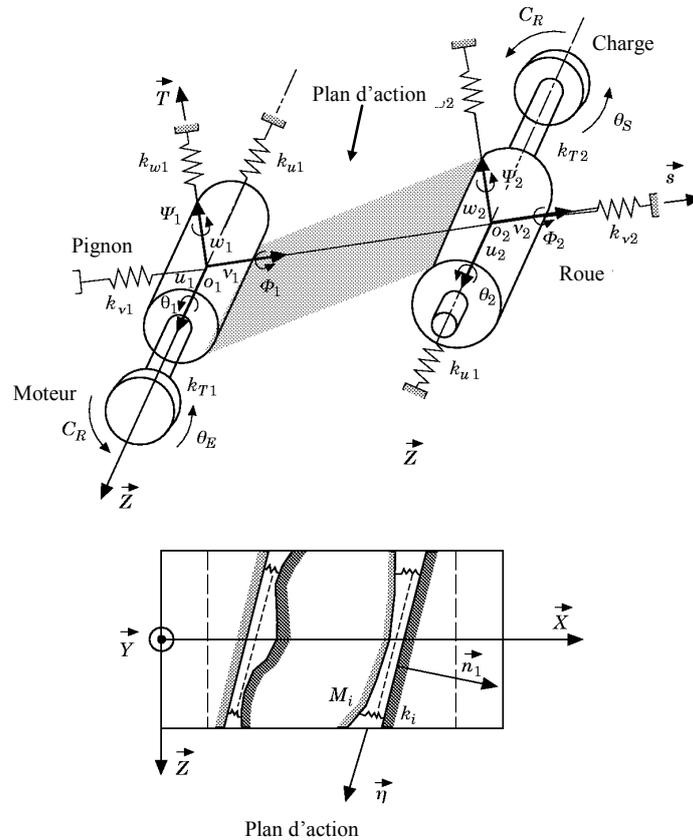
(b) : modèle symbolique

**Figure I-29** : *Modèle linéaire à excitations internes périodique [62]*

### 1.5.2.3. Modèles non linéaires à raideur d'engrènement variable

Les modèles dynamiques non linéaires à raideur d'engrènement variable représentent les modèles d'engrenages les plus sophistiqués, pouvant tenir compte de plusieurs phénomènes qui peuvent se produire lors du fonctionnement, notamment à l'approche des fréquences critiques et à la présence des défauts de géométrie ou de montage, etc... comme les pertes de contact entre dents et des déplacements dépendant de la rigidité d'engrènement. Küçükay [63] a proposé une introduction claire à la modélisation dynamique des systèmes à engrenages et a montré l'importance de définir clairement le but du modèle, la gamme de fréquences d'intérêt et surtout les sources d'excitations considérées. Les équations du mouvement ont été obtenues d'une façon générale en utilisant des vecteurs de structure qui contiennent des informations sur le couplage géométrique entre les nœuds. En outre, l'auteur donne une brève introduction qualitative pour l'interprétation de la réponse dynamique d'un système non-linéaire et l'analyse de sa stabilité. Vex et Maatar [64] ont proposé un modèle dynamique non linéaire d'engrenages cylindriques à denture droite ou hélicoïdale. Le pignon et la roue sont assimilés à des cylindres rigides reliés à des arbres flexibles. Le contact entre les dents est supposé linéaire et se fait exclusivement dans le plan d'action. Les lignes de contact sont discrétisées en plusieurs segments (Figure I-30) de sorte que l'élasticité des dents est simulée par une distribution de raideurs élémentaires indépendantes représentatives des segments en contact. A chaque pas de temps, la somme de ces raideurs élémentaires donne la raideur d'engrènement totale instantanée et cette discrétisation permet d'introduire d'une manière simple les défauts et les écarts de forme dans la variation temporelle de la raideur d'engrènement globale. Les équations du mouvement ont été mises en place en utilisant les

équations de Lagrange et en écrivant les énergies cinétiques et potentielles de chaque élément du système mécanique global (couple d'engrenage, arbres, paliers ...) [65].



**Figure I-30 :** *Modèle masses-ressorts d'un engrenage [64]*

Dans [66] et [67], Ajmi et Vexel ont étendu ce modèle afin d'étudier les engrenages cylindriques à denture larges [68] et considérer les distorsions des corps d'engrenages en ajoutant des éléments finis d'arbre pour les corps et des fondations élastiques pour les rigidités de dentures (Figure I-31).

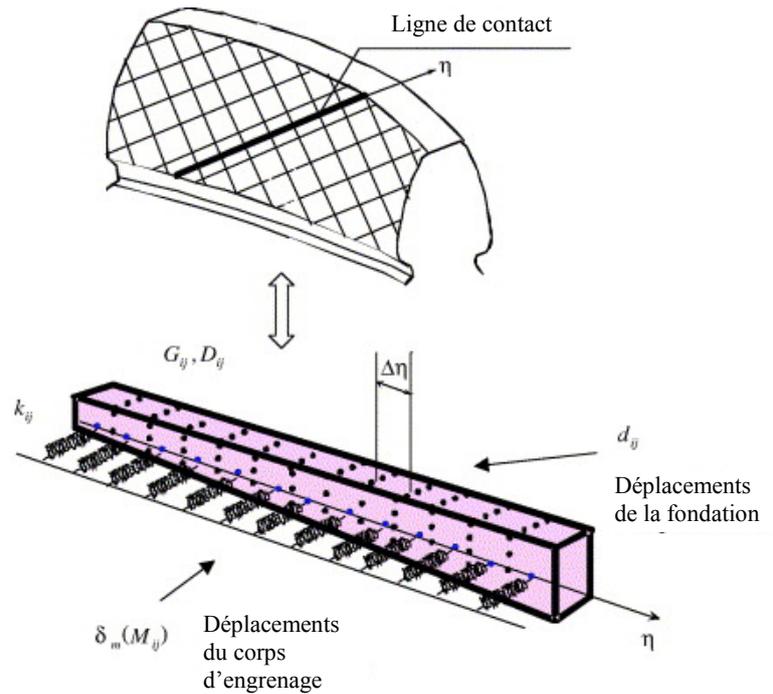


Figure I-31 : Modèle de la structure élastique de la dent [68]

## I.6. Modélisation masses ressorts d'un engrenage

La modélisation du comportement dynamique d'un engrenage cylindrique à dentures droites ou hélicoïdales en présence de défauts de forme et/ou de montage nécessite de définir un état de référence à partir duquel sont définis les degrés de liberté du système. Dans ce qui suit, l'état de référence d'un système d'engrenages sera défini par les mouvements de corps rigides dont il convient au préalable de caractériser la cinématique et la dynamique de fonctionnement. Dans un deuxième temps, les degrés de liberté seront introduits comme les déplacements élastiques généralisés se superposant aux déplacements de corps rigides.

### I.6.1. Etat de référence

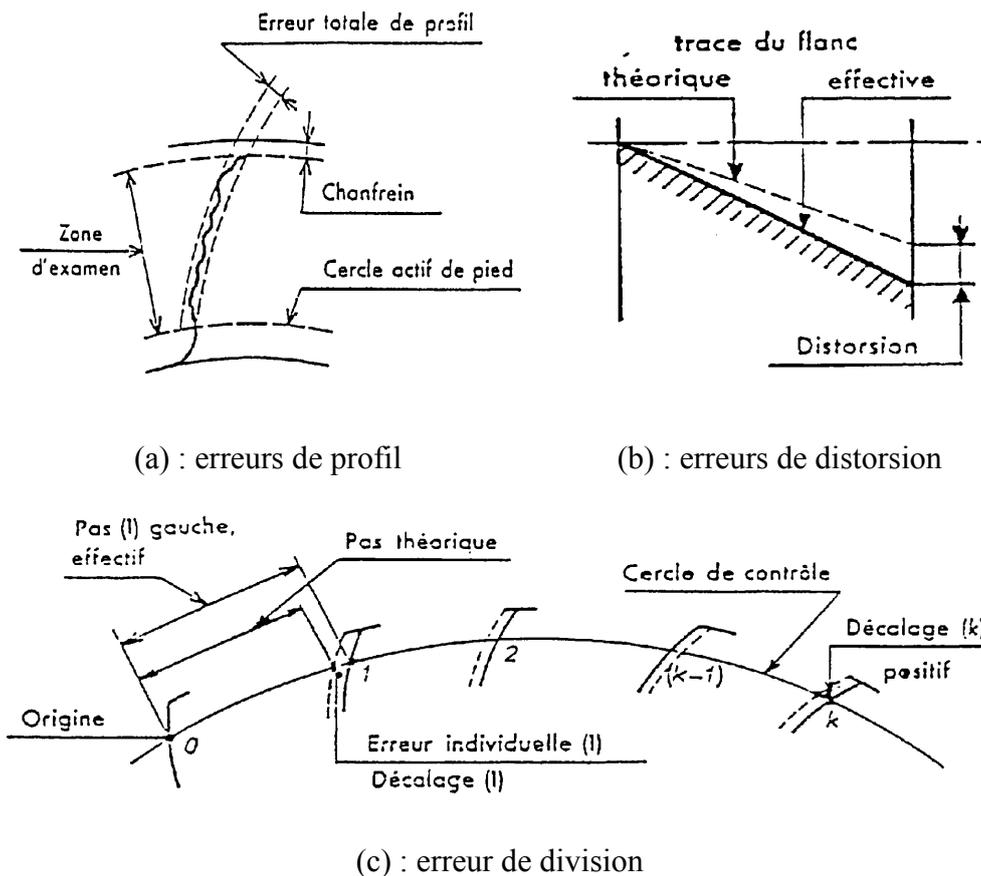
En se basant sur les travaux réalisés dans [64], [68] et [69], l'état de référence est défini à partir des mouvements des corps rigides tout en tenant compte de la présence des défauts géométriques. Les mouvements de corps rigides contribuent aux équations du mouvement par des efforts d'inertie causés par une cinématique de corps rigides perturbée par les défauts géométriques, alors que les déplacements élastiques contribuent par des efforts qui dérivent d'une énergie potentielle de déformation.

### 1.6.1.1. Géométrie des engrenages rigides

#### a) *Ecart de forme*

Les écarts de forme sont des écarts qui proviennent essentiellement du processus de fabrication (taillage, traitement thermique et/ou rectification). On distingue généralement trois types d'erreurs [70] :

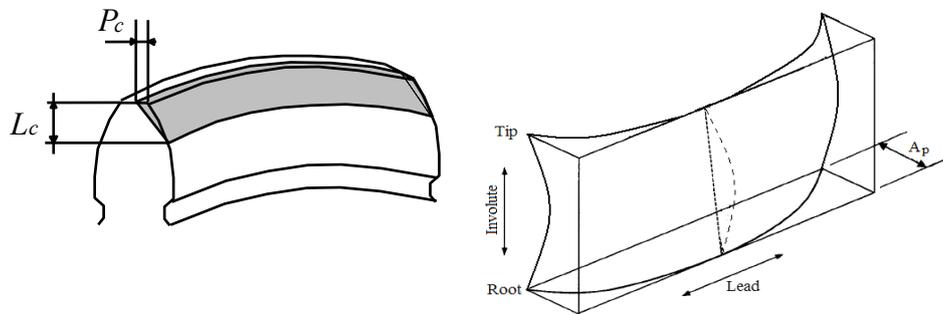
- Les erreurs de profil : écarts entre le profil réel et le profil idéal (Figure I-32.a).
- Les erreurs de distorsion : écarts entre la trace du flanc réel et la trace du flanc théorique selon la largeur de la denture (sens de l'hélice pour un engrenage hélicoïdale) (Figure I-32.b).
- Les erreurs de division : l'erreur de pas cumulée est la différence algébrique entre la longueur mesurée et la longueur théorique de l'arc de cercle de contrôle compris entre deux profils homologues (Figure I-32.c).



**Figure I-32 : Erreurs géométriques [70]**

Les écarts de forme peuvent également provenir de modifications volontaires sur la géométrie des dents. Ces modifications, appelées corrections de forme, ont pour but d'améliorer la distribution de la charge sur les flancs de denture et éventuellement le

comportement vibratoire de la transmission [65], [71]. Les corrections de forme se décomposent en : a) les corrections de profil (enlèvement de la matière au sommet et/ou au pied de la dent) et b) les corrections longitudinales (bombé ou modification linéaire selon la largeur de la dent (sens de l'hélice pour un engrenage hélicoïdale)), (Figure I-33).



(a) : correction de profil [64]      (b) : correction longitudinale (bombé)

**Figure I-33** : Corrections de forme

Afin de simuler les écarts de forme sur les dentures (erreurs et/ou corrections de forme), les flancs actifs sont discrétisés en surfaces élémentaires appelées cellules. Le centre de chacune des cellules correspond à un point  $M_{ij}$  auquel est associé un écart de forme normal au flanc de denture (Figure I-34). Cet écart est défini par la mesure algébrique de la distance, suivant la normale extérieure au profil (pignon ou roue), entre le point réel et le point théorique d'une denture parfaite. Par hypothèse, les écarts de forme sont suffisamment faibles devant les dimensions caractéristiques de l'engrenage, pour ne pas affecter les directions des normales extérieures aux profils.

Pour chaque point  $M_{ij}$  commun aux deux profils conjugués (pignon et roue), l'écart normal total est la somme algébrique des écarts associés à la dent du pignon (noté par :  $e_1(M_{ij})$ ) et à celle de la roue (noté par :  $e_2(M_{ij})$ ). Donc, on a :

$$e(M_{ij}) = e_1(M_{ij}) + e_2(M_{ij}) \quad (\text{I.41})$$

La Figure I-34 montre une cellule de discrétisation du flanc actif d'une dent :

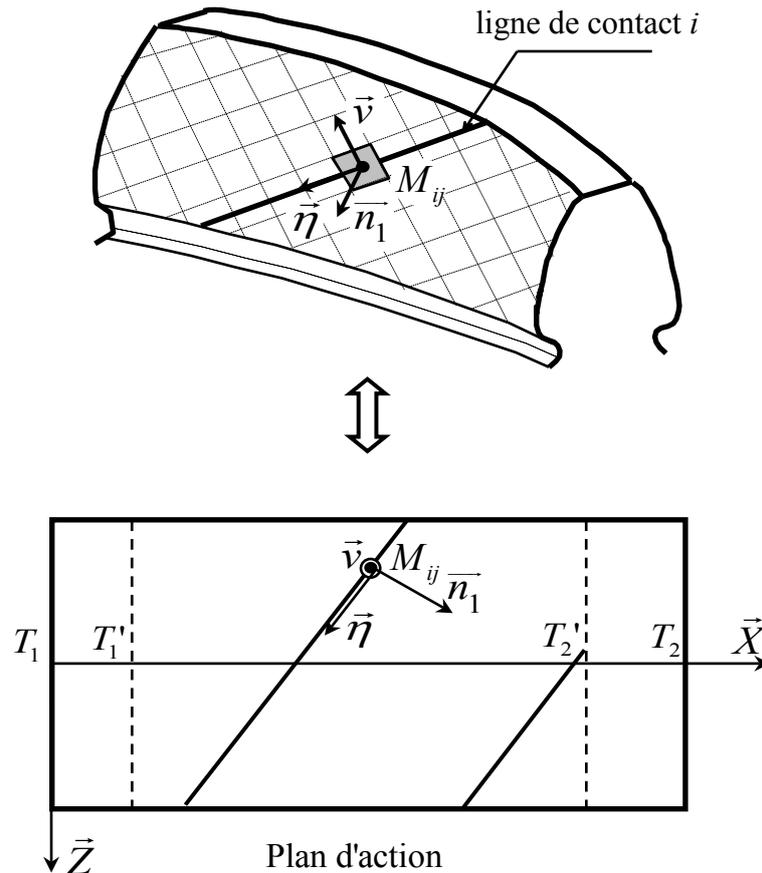


Figure I-34 : Discretisation du flanc actif d'une dent

**b) Ecart de montage :**

Les contacts entre dentures sont très sensibles aux erreurs de montage. Le moindre changement peut conduire à des comportements cinématiques et dynamiques complètement différents. Les principaux défauts de montage sont : i) les désalignements des axes de rotation et ii) les défauts d'excentricité du pignon et de la roue. Les paramètres de ces défauts sont donnés dans la Figure I-35.

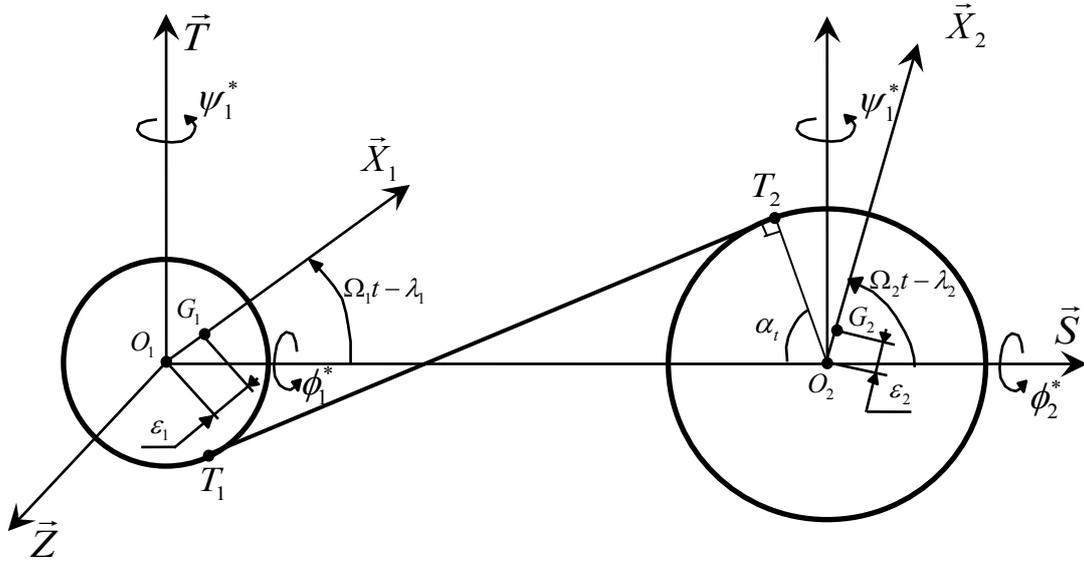


Figure I-35 : Paramètres d'excentricité et de désalignement

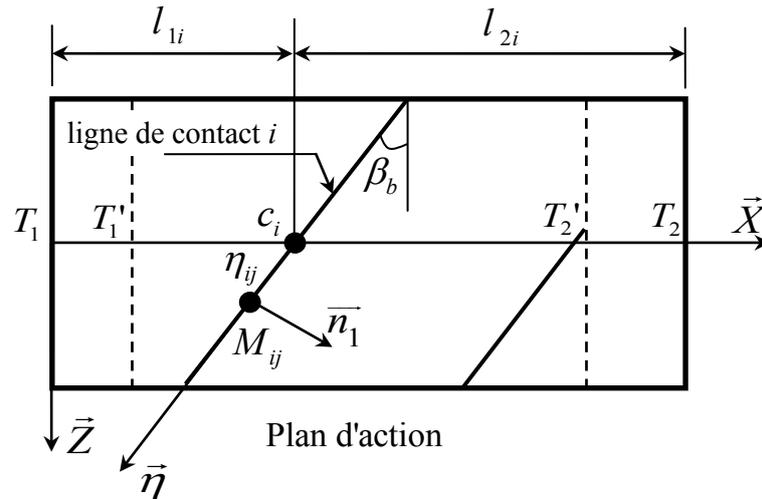
• Défauts d'alignement

L'imprécision de l'alignement des engrenages lors du montage dans les boîtes de transmission est inévitable. D'après [64] et [65], l'écart de montage dû à un défaut d'alignement peut s'exprimer sous la forme de l'équation (I.42) en modélisant les désalignements par des déplacements infinitésimaux  $\phi^*$  et  $\psi^*$  autour des axes  $\vec{S}$  et  $\vec{T}$  (Figure I-35).

$$e_d(M_{ij}) = \begin{Bmatrix} -\sin(\beta_b)[R_{b1} \sin(\alpha_t) - l_{1i} \cos(\alpha_t)] - \eta_{ij} \cos(\alpha_t) \\ -\sin(\beta_b)[R_{b1} \cos(\alpha_t) + l_{1i} \sin(\alpha_t)] + \eta_{ij} \sin(\alpha_t) \\ -\sin(\beta_b)[R_{b2} \sin(\alpha_t) - l_{2i} \cos(\alpha_t)] + \eta_{ij} \cos(\alpha_t) \\ -\sin(\beta_b)[R_{b2} \cos(\alpha_t) + l_{2i} \sin(\alpha_t)] - \eta_{ij} \sin(\alpha_t) \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1^* \\ \psi_1^* \\ \phi_2^* \\ \psi_2^* \end{Bmatrix} \quad (I.42)$$

avec :

- $\alpha_t$  : angle de pression apparent (Figure I-35).
- $\beta_b$  : angle d'hélice de base (Figure I-36).
- $R_{b1}$  : rayon de base du pignon.
- $R_{b2}$  : rayon de base de la roue.
- $i$  : indice lié à la ligne de contact.
- $\eta_{ij}$  : abscisse du point  $M_{ij}$  sur l'axe  $(c_i, \vec{\eta})$  (Figure I-36).
- $l_{1i}$  et  $l_{2i}$  : distances définies dans la Figure I-36.



**Figure I-36 :** Paramètres géométriques dans le plan d'action

- Défauts d'excentricité

Lors du montage et/ou suite à un défaut de fabrication, les mobiles peuvent présenter des défauts d'excentricité qui représentent le décalage entre l'axe de rotation et l'axe d'inertie polaire de l'engrenage. D'après [64] et [65], l'écart normal résultant dû à un défaut d'excentricité s'écrit indépendamment de la position du point  $M_{ij}$  sur le plan d'action sous la forme :

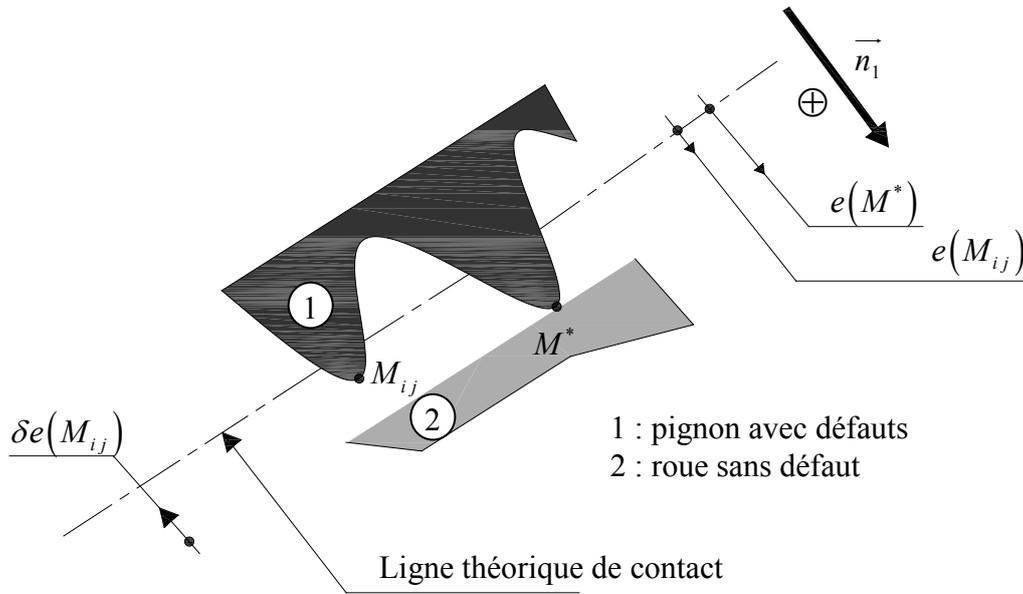
$$e_x(M_{ij}) = \cos(\beta_b) [\varepsilon_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_t - \lambda_1) - \varepsilon_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_t - \lambda_2)] \quad (\text{I.43})$$

avec :

- $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , les distances entre le centre d'inertie et le centre de rotation du pignon et de la roue respectivement (Figure I-35).
- $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , les phases initiales (à  $t = 0$ ) sur le pignon et la roue respectivement (Figure I-35).

**c) Ecarts relatifs**

Dans les conditions de corps rigides, le(s) point(s) de contact  $M^*$  correspond (ent) au(x) point(s) avec l'écart normal  $e(M^*)$  maximum, (Figure I-37). L'écart normal total d'un point  $M_{ij}$  est noté  $e(M_{ij})$  et il est défini par l'addition de tous les écarts de forme et de montage mentionnés dans les paragraphes précédents, (Figure I-37).



**Figure I-37 :** Point de contact dans les conditions des corps rigides

L'écart normal relatif  $\delta e$  associé à un point  $M_{ij}$  est défini, à chaque instant, comme la différence entre l'écart normal en ce point et l'écart normal maximum au point  $M^*$  (point de contact). Il vient :

$$\delta e(M_{ij}) = e(M_{ij}) - e(M^*) \quad (\text{I.44})$$

### 1.6.1.2. Cinématique des corps rigides

En se basant sur les propriétés de la cinématique des engrenages et en particulier sur la condition de non interpénétration entre deux solides en contact au point  $M^*$ , les vitesses de rotation des deux roues dentées sont liées par la relation :

$$\vec{V}_1^2(M^*) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{I.45})$$

avec :

- $\vec{V}_1^2(M^*)$  : vitesse du corps 2 (roue) par rapport au corps 1 (pignon) au point  $M^*$  (Figure I-37).
- $\vec{n}_1$  : la normale au profil de la dent du pignon (Figure I-37).

Qui, d'après [65] et [66], conduit à la condition cinématique suivante :

$$\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}}\Omega_1 - \frac{\dot{e}(M^*)}{R_{b2} \cos \beta_b} \quad (I.46)$$

avec :

- $R_{b1}$  : rayon de base du pignon.
- $R_{b2}$  : rayon de base de la roue.
- $\Omega_1$  : vitesse de rotation du pignon.
- $\beta_b$  : angle d'hélice de base.
- $\dot{e}(M^*)$  : la dérivée par rapport au temps de  $e(M^*)$ .

En supposant que la vitesse de rotation du pignon est imposée constante par le moteur, le second terme de l'équation (I.46) montre l'effet des écarts géométriques sur la cinématique des engrenages rigides et représente l'erreur cinématique du système (erreur de transmission sans charge).

### 1.6.1.3. Dynamique des corps rigides

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

$$\frac{d(T_{syst}^{R_0})}{dt} = P_{ext}^{R_0} + P_{int}^{R_0} \quad (I.47)$$

avec :

- $T_{syst}^{R_0}$  : énergie cinétique galiléenne totale du système.
- $P_{ext}^{R_0}$  : puissance des efforts extérieurs appliqués au système.
- $P_{int}^{R_0}$  : puissance des efforts intérieurs (de liaisons) du système.
- $R_0$  : repère galiléen fixe.

et conduit au couple résistant d'un système d'engrenage avec écarts géométriques suivant en supposant que la vitesse et le couple d'entrée sont constants ([65] et [66]) :

$$C_r(t) = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2(t)}C_m + I_{p2} \cdot \dot{\Omega}_2(t) \quad (I.48)$$

avec :

- $C_m$  : couple moteur.

- $C_r(t)$  : couple résistant.
- $I_{p2}$  : moment d'inertie polaire de l'ensemble de sortie (arbre + roue).
- $\dot{\Omega}_2(t)$  : la dérivée par rapport au temps de  $\Omega_2(t)$ .

En substituant l'équation (I.46) dans l'équation(I.48), on obtient le couple résistant en fonction des écarts géométriques :

$$C_r(t) = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2(t)} C_m - I_{p2} \frac{\ddot{e}(M^*)}{R_{b2} \cos \beta_b} \quad (\text{I.49})$$

## I.6.2. Modélisation des corps déformables

### I.6.2.1. Modèle d'engrenage

La Figure I-38 montre la modélisation masses-ressorts d'un engrenage cylindrique à denture droite ou hélicoïdale. C'est un modèle à paramètres concentrés dans lequel les engrenages sont assimilés à des cylindres rigides et la liaison élastique entre le couple d'engrenage est modélisée par une série de raideurs. Ce modèle permet de décrire d'une façon globale le comportement dynamique de l'engrenage et de tenir en compte des écarts de forme et de montage et des variations de la raideur d'engrènement en fonction du temps et du chargement.

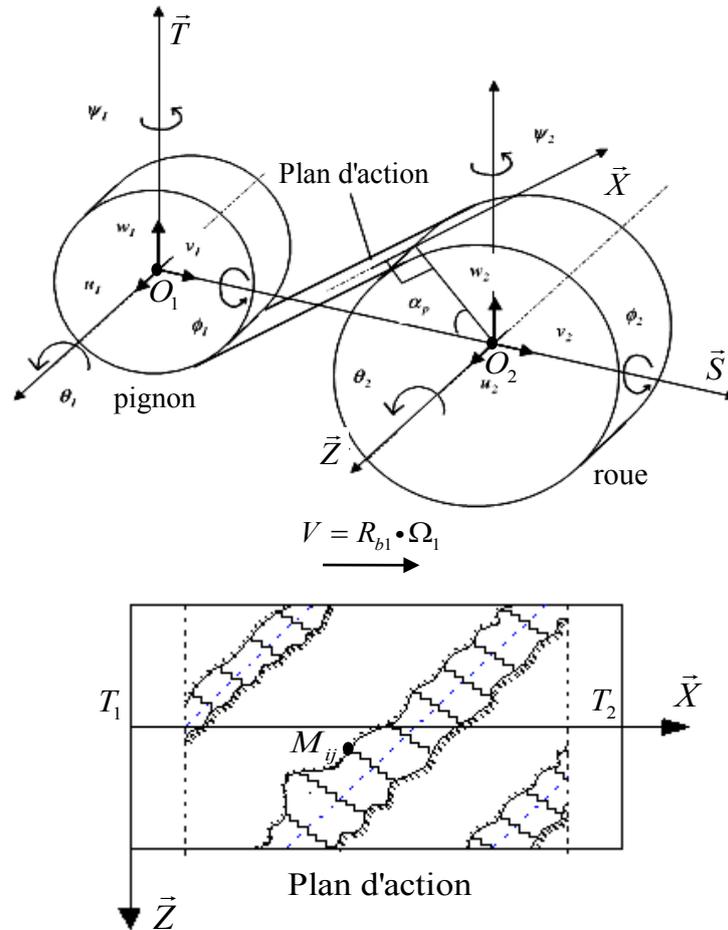


Figure I-38 : Modèle d'un engrenage

### 1.6.2.2. Déflexion au point de contact

Comme illustré sur la Figure I-38, six degrés de liberté de torsion, de flexion et de traction-compression sont attribués à chaque roue de l'engrenage. Ces degrés de liberté infinitésimaux (3 translations et 3 rotations) sont superposés à l'état de référence du système d'engrenage et peuvent être caractérisés par des torseurs dont les coordonnées sont exprimées dans un repère fixe  $R(\vec{S}, \vec{T}, \vec{Z})$  lié au couple d'engrenage. Il vient alors:

$$(\tau_k) \begin{cases} \vec{U}_k^R(O_k) = v_k \vec{S} + w_k \vec{T} + u_k \vec{Z} \\ \vec{\omega}_k^R = \phi_k \vec{S} + \psi_k \vec{T} + \theta_k \vec{Z} \end{cases} \quad (I.50)$$

avec :

- $k = 1$  pour le pignon.
- $k = 2$  pour la roue.
- $v_k$ ,  $w_k$  et  $u_k$  sont les 3 translations.

-  $\phi_k$ ,  $\psi_k$  et  $\theta_k$  sont les 3 rotations.

En tenant compte des écarts initiaux (due par exemple aux modifications des dents et/ou aux erreurs), l'écrasement normal au point ( $M_{ij}$ ) appartenant à la zone de contact potentiel des deux engrenages est donné par :

$$\Delta(M_{ij}) = \bar{U}_1^R(M_{ij}) \bar{n}_1 + \bar{U}_2^R(M_{ij}) \bar{n}_2 + \delta e(M_{ij}) \quad (I.51)$$

En utilisant la formule du transport du moment d'un torseur, on obtient :

$$\Delta(M_{ij}) = \bar{U}_1^R(O_1) \bar{n}_1 + (\bar{\omega}_1^R \wedge \overline{O_1 M_{ij}}) \bar{n}_1 + \bar{U}_2^R(O_2) \bar{n}_2 + (\bar{\omega}_2^R \wedge \overline{O_2 M_{ij}}) \bar{n}_2 + \delta e(M_{ij}) \quad (I.52)$$

Sachant que  $\bar{n}_2 = -\bar{n}_1$ , il vient finalement :

$$\Delta(M_{ij}) = \begin{Bmatrix} \bar{n}_1 \\ \overline{O_1 M_{ij}} \wedge \bar{n}_1 \\ -\bar{n}_1 \\ -\overline{O_2 M_{ij}} \wedge \bar{n}_1 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{U}_1^R(O_1) \\ \bar{\omega}_1^R \\ \bar{U}_2^R(O_2) \\ \bar{\omega}_2^R \end{Bmatrix} + \delta e(M_{ij}) \quad (I.53)$$

où,

$$\Delta(M_{ij}) = \{V(M_{ij})\}^T \cdot \{q\} + \delta e(M_{ij}) \quad (I.54)$$

avec  $\{V(M_{ij})\}$ , le vecteur de structure qui représente la géométrie de l'engrenage et  $\{q\}$ , le vecteur des degrés de liberté du couple pignon-roue.

Soit,

$$V(M_{ij}) = \begin{Bmatrix} \cos \beta_b \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta_b \cdot \cos \alpha \\ \sin \beta_b \\ -R_{b1} \cdot \sin \beta_b \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot (x_{M_{ij}} \sin \beta_b - z_{M_{ij}} \cos \beta_b) \\ -R_{b1} \cdot \sin \beta_b \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot (x_{M_{ij}} \sin \beta_b - z_{M_{ij}} \cos \beta_b) \\ R_{b1} \cdot \cos \beta_b \\ -\cos \beta_b \cdot \sin \alpha \\ -\cos \beta_b \cdot \cos \alpha \\ -\sin \beta_b \\ -R_{b2} \cdot \sin \beta_b \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot ((T_1 T_2 - x_{M_{ij}}) \sin \beta_b - z_{M_{ij}} \cos \beta_b) \\ -R_{b2} \cdot \sin \beta_b \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot ((T_1 T_2 - x_{M_{ij}}) \sin \beta_b - z_{M_{ij}} \cos \beta_b) \\ R_{b2} \cdot \cos \beta_b \end{Bmatrix} \text{ et } \{q\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ u_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (I.55)$$

Finalement, l'écrasement normal au point  $M_{ij}$  est :

$$\Delta(M_{ij}) = \delta(M_{ij}) + \delta e(M_{ij}) \quad (I.56)$$

avec  $\delta(M_{ij})$  et  $\delta e(M_{ij})$  sont respectivement le rapprochement et l'écart normal relatif au point  $M_{ij}$ , où  $\delta(M_{ij}) = \{V(M_{ij})\}^T \cdot \{q\}$ .

### I.6.2.3. Formulation des conditions de contact

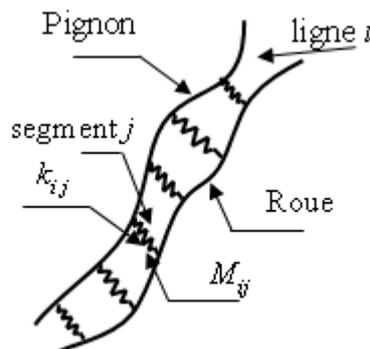
Pour tout point à l'intérieur de la fenêtre d'engrènement, la condition de contact est déduite de (I.56), sous la forme:

- $\Delta(M_{ij}) > 0 \quad \longrightarrow$  contact au point  $M_{ij}$ .
- $\Delta(M_{ij}) \leq 0 \quad \longrightarrow$  perte de contact au point  $M_{ij}$ .

Dans l'élaboration du code de calcul, la zone de contact est discrétisée en plusieurs segments élémentaires (Figure I-34). D'où, la nécessité de développer un algorithme de contact unilatéral [65], [66] traitant ces conditions pour tous points de discrétisation.

### I.6.2.4. Raideur d'engrènement globale

Lors de l'engrènement, plusieurs couples de dents peuvent être en contact (c'est-à-dire plusieurs lignes de contact dans le plan d'action en fonction du rapport de conduite total). La Figure I-39 montre une ligne de contact  $i$  discrétisée en plusieurs segments. Le point  $M_{ij}$  représente le centre de la cellule  $ij$  (ligne  $i$  et segment  $j$ ) à laquelle est associée une raideur élémentaire  $k_{ij}$ .



**Figure I-39 : Discrétisation d'une ligne de contact**

La liaison entre les lignes de contact du couple pignon-roue est donc modélisée par l'association en parallèle des raideurs élémentaires ([65], [66] et [72]). La raideur d'engrènement globale instantanée est donc la somme, à chaque instant, de toutes les raideurs élémentaires présentes dans la fenêtre d'engrènement et s'exprime :

$$k(t) = \sum_i \sum_j k_{ij} \quad (\text{I.57})$$

avec :

- $i$  : indice d'une ligne de contact.
- $j$  : indice du segment de discrétisation de la ligne de contact.
- $k_{ij}$  : raideur élémentaire. (la méthode de calcul de cette raideur est expliquée dans le chapitre suivant)

La raideur d'engrènement globale est variable en fonction du temps, elle dépend également du chargement et des écarts géométriques et constitue une source d'excitation importante pour le système [72].

## I.7. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à établir les bases théoriques permettant de modéliser un système électromécanique composé d'un train à engrenages entraîné par un moteur asynchrone. Les différents types de modélisation de chaque sous-système ont été présentés afin de choisir les modèles les plus adaptés à l'application qui consiste à analyser, détecter et surveiller des défauts d'engrenages par mesure des courants statoriques. En outre, les défaillances des systèmes électromécaniques, les différentes techniques ainsi que les outils de détection et de surveillance ont été présentés.

Dans la suite de ce mémoire et en se basant sur l'étude bibliographique, les modèles retenus pour le moteur asynchrone seront le modèle dq de Kron et le modèle de réseaux de perméances. En ce qui concerne la transmission mécanique, une modélisation tridimensionnelle caractérisant l'engrenage (modèle à paramètres concentrés) avec déviations de forme et avaries de surface, les arbres et les paliers sera utilisée.

# **Chapitre II : Modélisation électromécanique des transmissions par engrenages entraînés par un moteur asynchrone**

## II.1. Introduction

Ce chapitre sera consacré à la modélisation du comportement électrique et dynamique d'un système électromécanique. Il sera composé de deux grandes parties selon le modèle électrique choisi et le type de couplage entre les deux sous-systèmes.

Dans un premier temps, le moteur asynchrone sera caractérisé par le modèle dq de Kron qui consiste à ramener une machine triphasée en une machine biphasée équivalente. En ce qui concerne le modèle mécanique, les engrenages seront assimilés à deux cylindres rigides liés par une série de raideurs non linéaires et variables dans le temps, les arbres seront modélisés par des éléments poutres de Timoshenko et les paliers seront introduits par des raideurs localisées. On montrera que le modèle électromécanique global peut être caractérisé par un système d'équations non linéaires unique couplant les équations électriques et mécaniques. Ces équations seront résolues par une méthode combinant un schéma d'intégration pas à pas dans le temps et un algorithme de contact normal permettant de déterminer les distributions de charges instantanées sur les flancs de dentures. Dans un deuxième temps, un modèle plus sophistiqué et plus fin de moteur asynchrone sera établi afin de tenir compte de plusieurs phénomènes en présence de défauts tels que la variation de l'épaisseur de l'entrefer et la variation des inductances propres et mutuelles. La machine à induction sera caractérisée par le modèle des réseaux de perméances permettant de décrire son comportement électromagnétique. La mise en équations de ce modèle sera développée à partir du couplage des équations magnétiques et électriques. Le couplage entre les différents modèles électriques et mécaniques sera assuré en respectant les entrées/sorties de chaque sous-système.

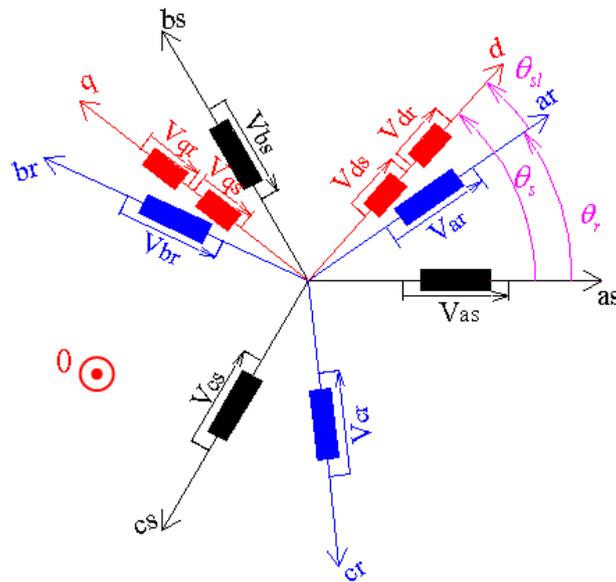
Les modèles électromécaniques seront développés dans le but de construire des indicateurs de surveillance en ligne (modèle de Kron + modèle 3D d'engrenage) et d'étudier les interactions électrique/mécanique (modèle de réseaux de perméances + modèle 3D d'engrenage).

## II.2. Modèle électrique de Kron

### II.2.1. Description

La modélisation des machines électriques conventionnelles est basée sur la mise en équations mathématiques de leurs comportements électromagnétiques permettant de les étudier en régime permanent ou transitoire. En particulier, une machine asynchrone à cage peut être caractérisée par le modèle de Kron en ramenant une machine triphasée en une machine biphasée équivalente. Ce modèle sert en outre à simuler son comportement dynamique.

La machine asynchrone triphasée bipolaire représentée dans la Figure II-1 est constituée d'un inducteur fixe appelé stator et d'un induit tournant appelé rotor munis chacun d'un enroulement triphasé. Les enroulements rotoriques sont fictifs et représentent la cage d'écurueil constituée par des barres conductrices court-circuitées par deux anneaux aux extrémités.



**Figure II-1 :** Différents axes magnétiques de la machine asynchrone

Les trois enroulements de phase du stator  $a_s$ ,  $b_s$  et  $c_s$  sont représentés schématiquement sur leurs axes magnétiques respectifs, ainsi que les trois enroulements fictifs du rotor  $a_r$ ,  $b_r$  et  $c_r$ . On représente également deux axes perpendiculaires  $d$  (direct) et  $q$  (en quadrature) qui définissent un nouveau repère orthonormé dans lequel les équations électriques et magnétiques de la machine asynchrone vont être exprimées plus simplement grâce à un changement de variables appelé transformation de Kron.

## II.2.2. Hypothèses

Pour simplifier les développements théoriques des équations décrivant le comportement électromagnétique d'une machine asynchrone à cage, il est nécessaire de faire les hypothèses suivantes :

- La saturation est négligée, il en résulte que les inductances propres et mutuelles sont indépendantes des courants qui circulent dans les différents enroulements.
- On ne tient pas compte de l'hystérésis et des courants de Foucault dans les parties magnétiques parce qu'on suppose que le circuit magnétique est parfaitement feuilleté.

- Les encoches sont supposées infiniment minces.
- Les forces magnétomotrices sont réparties sinusoïdalement dans l'entrefer (supposé uniforme) de la machine, il y a symétrie par rapport à l'axe magnétique des enroulements. Les inductances propres du stator et du rotor peuvent être considérées comme constantes et les inductances mutuelles entre les enroulements (stator-stator, stator-rotor et rotor-rotor) peuvent être décrites par des fonctions sinusoïdales en se basant sur les angles électriques (angle électrique = nombre de paires de pôles x angle mécanique) entre les différents axes magnétiques.

### II.2.3. Equations électriques

En se basant sur ces hypothèses, les six enroulements représentés dans la Figure II-1 obéissent aux équations électriques (II.1) et (II.2) écrites dans le repère  $abc$ . Ces équations décrivent le comportement électrique d'une machine à induction triphasée et permettent de l'étudier en régime transitoire et permanent.

$$\begin{cases} v_{as} = R_s i_{as} + \frac{d\Psi_{as}}{dt} \\ v_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d\Psi_{bs}}{dt} \\ v_{cs} = R_s i_{cs} + \frac{d\Psi_{cs}}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{cases} v_{ar} = R_r i_{ar} + \frac{d\Psi_{ar}}{dt} \\ v_{br} = R_r i_{br} + \frac{d\Psi_{br}}{dt} \\ v_{cr} = R_r i_{cr} + \frac{d\Psi_{cr}}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

avec :

- $v_k$  : Tension aux bornes de l'enroulement  $k$ .
- $i_{as}$  : Courants parcourant l'enroulement  $k$ .
- $\Psi_k$  : Flux traversant l'enroulement  $k$ .
- $R_s$  : Résistance d'une phase du stator.
- $R_r$  : Résistance d'une phase du rotor.

Dans le cas d'une machine asynchrone, le rotor est en court-circuit. On a donc :

$$v_{ar} = v_{br} = v_{cr} = 0 \quad (\text{II.3})$$

## II.2.4. Equations magnétiques

Compte tenu des hypothèses définies précédemment (paragraphe II.2.2), les équations reliant les flux magnétiques et les courants parcourant les différents enroulements s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{as} \\ \Psi_{bs} \\ \Psi_{cs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{as} & M_{as} & M_{as} & M_{rs} \cos \theta & M_{rs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{as} & L_{as} & M_{as} & M_{rs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos \theta & M_{rs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{as} & M_{as} & L_{as} & M_{rs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{ar} \\ \Psi_{br} \\ \Psi_{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{rs} \cos \theta & M_{rs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ar} & M_{ar} & M_{ar} \\ M_{rs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos \theta & M_{rs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ar} & L_{ar} & M_{ar} \\ M_{rs} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{rs} \cos \theta & M_{ar} & M_{ar} & L_{ar} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

avec :

- $L_{as}$  : Inductance propre d'une phase du stator.
- $M_{as}$  : Inductance mutuelle entre deux phases du stator.
- $L_{ar}$  : Inductance propre d'une phase du rotor.
- $M_{ar}$  : Inductance mutuelle entre deux phases du rotor.
- $M_{rs}$  : Maximum de l'inductance mutuelle entre une phase du stator et une phase du rotor (atteint lorsque leurs axes magnétiques sont alignés).

## II.2.5. Choix de la transformation de Kron

Le choix du repère  $dq0$  dépend essentiellement de la nature du problème à étudier. Comme explicité au paragraphe I.4.1.2, ce repère peut être lié au stator, au rotor ou au champ tournant. Ce dernier choix (repère  $dq0$  lié au champ tournant appelé également repère synchrone) est particulièrement avantageux parce qu'aucune des grandeurs d'axes (courants, tensions, flux) ne comporte désormais de porteuse sinusoïdale, ce qui simplifie considérablement la conduite des calculs [16], [17]. En outre, ce repère peut être utile pour

étudier la réponse du moteur asynchrone à de petites perturbations autour d'un régime donné, ce qui est le cas de notre étude.

Par ailleurs, afin de minimiser le nombre d'équations à traiter, la machine à étudier est représentée par une machine biphasée équivalente. Ce passage est assuré par la transformation de Kron qui consiste à appliquer aux courants, tensions et flux, un changement de variables faisant intervenir l'angle entre les axes des enroulements  $a$ ,  $b$  et  $c$  et les axes  $d$ ,  $q$  et  $0$ . Ce changement de variables peut être interprété comme la substitution des enroulements réels par des enroulements fictifs ( $ds$ ,  $qs$ ,  $0s$ ,  $dr$ ,  $qr$  et  $0r$ ) dont les axes magnétiques sont liés aux axes  $d$ ,  $q$  et  $0$ , mais dont les conducteurs restent liés aux armatures qui les supportent.

La matrice qui assure cette transformation orthonormée est donnée par l'équation (II.6) :

$$T_{dq0/abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

En outre, cette transformation se traduit par les relations suivantes :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_e \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{d\theta_{sl}}{dt} = \omega_{sl} = \omega_e - \omega_m = g\omega_e \quad (\text{II.8})$$

avec :

- $\omega_e$  : Vitesse électrique du champs tournant (pulsation des courants statoriques).
- $\omega_m$  : Vitesse mécanique du rotor.
- $\omega_{sl}$  : Vitesse du repère dq par rapport au rotor
- $\omega_s$  : Vitesse du repère dq par rapport au stator
- $g$  : Glissement tel que  $g = \frac{\omega_e - p\omega_m}{\omega_e}$ .
- $p$  : Nombre de paires de pôles.

## II.2.6. Equations électriques et magnétiques après transformation de Kron

On applique le changement de variables défini par l'équation (II.6) aux grandeurs du stator (indice  $s$ ) et du rotor (indice  $r$ ). Les composantes d'indice  $0$ , dites homopolaires,

n'interviennent pas à condition que l'alimentation du stator soit équilibrée ou que le point neutre ne soit pas sorti ( $i_a + i_b + i_c = 0$ ) et que le rotor ne subisse pas d'effet de dissymétrie, ce qui est le cas dans cette étude. On obtient ainsi les équations (II.9) et (II.10) écrites dans le repère  $dq$  choisi lié au champ tournant.

$$\begin{Bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{qs} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e \\ \omega_e & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{qs} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{avec : } \begin{Bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{dr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{ds} \\ i_{dr} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{dr} \\ v_{qr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{dr} \\ i_{qr} \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{sl} \\ \omega_{sl} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

$$\text{avec : } \begin{Bmatrix} \Psi_{qs} \\ \Psi_{qr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{qs} \\ i_{qr} \end{Bmatrix}$$

En posant :

- $L_s = L_{as} - M_{as}$  : Inductance propre cyclique du stator.
- $L_r = L_{ar} - M_{ar}$  : Inductance propre cyclique du rotor.
- $L_m = \frac{3}{2} M_{rs}$  : Inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor.

### II.2.7. Ecriture des équations d'état

A partir des équations (II.9) et (II.10) écrites dans le repère  $dq$ , le comportement électromagnétique de la machine asynchrone peut être décrit dans une représentation matricielle d'état unique en choisissant un vecteur d'état  $X(t)$  composé des courants parcourant les enroulements fictifs du stator et des flux magnétiques traversant les enroulements fictifs du rotor.

$$X(t) = \{i_{ds} \quad i_{qs} \quad \Psi_{dr} \quad \Psi_{qr}\}^T \quad (\text{II.11})$$

Le modèle électrique de la machine asynchrone est donné par l'équation matricielle différentielle (II.12) :

$$\frac{d}{dt} \{X(t)\} = [A] \{X(t)\} + [B] \{U(t)\} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{avec : } [A] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{T_s\sigma} + \frac{1}{T_r} \frac{1-\sigma}{\sigma}\right) & \omega_e & \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m T_r} & \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m} \omega_m \\ -\omega_e & -\left(\frac{1}{T_s\sigma} + \frac{1}{T_r} \frac{1-\sigma}{\sigma}\right) & -\frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m} \omega_m & \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m T_r} \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & \omega_{sl} \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & -\omega_{sl} & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U(t) = \begin{Bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{Bmatrix}, \sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}, T_s = \frac{L_s}{R_s} \text{ et } T_r = \frac{L_r}{R_r}.$$

### II.2.8. Calcul du couple électromagnétique

La machine asynchrone est alimentée au stator par une source de tensions triphasée et les enroulements du rotor sont court-circuités. D'après les équations (II.4) et (II.5), la création du couple électromagnétique est due essentiellement aux inductances mutuelles entre les enroulements de l'inducteur (stator) et de l'induit (rotor). En écrivant le bilan des puissances (variation par unité de temps de l'énergie magnétique emmagasinée, puissance mécanique et pertes Joules), on déduit, en fonction des différents paramètres électriques et magnétiques, l'expression du couple électromagnétique  $C_{em}$  d'une machine asynchrone multipolaire [17], [43].

$$C_{em} = \frac{pL_m}{L_r} (\Psi_{dr} i_{qs} - \Psi_{qr} i_{ds}) \quad (\text{II.13})$$

avec  $p$  est le nombre de paires de pôles de la machine.

La résolution du système d'état (II.12) permet de déterminer les courants et les flux magnétiques et par suite déduire le couple électromagnétique instantané transmis par le moteur à la boîte de transmission par engrenage.

## II.3. Mise en équation du modèle mécanique

L'objectif de cette partie est d'élaborer des outils numériques permettant de modéliser le comportement dynamique d'une transmission à engrenages droits ou hélicoïdaux. Dans la

littérature, les modèles dynamiques d'engrenages les plus rencontrés sont à paramètres concentrés [65], [72]. Les corps du couple d'engrenages sont caractérisés par des cylindres rigides et la liaison entre les dents en contact est modélisée par des raideurs distribuées. Les équations de mouvement du modèle sont par la suite obtenues à partir des équations de Lagrange en s'appuyant sur le formalisme des torseurs de déplacements infinitésimaux définis à partir des mouvements des corps rigides. Ce modèle permet donc d'analyser l'état perturbé de l'engrenage par rapport à un état de référence déjà connue.

### II.3.1. Hypothèses

Dans cette étude, les hypothèses suivantes sont retenues :

- les contacts entre profils adjacents se font exclusivement dans le plan d'action théorique.
- le contact entre chaque couple de dents est supposé linéique.
- le plan d'action et les normales aux profils, sont supposés non affectés par les écarts géométriques et par les déformations du réducteur.
- les déplacements généralisés sont supposés faibles (hypothèse de petites translations et rotations).
- l'amortissement est supposé visqueux.

### II.3.2. Description du modèle

Le modèle masses ressorts d'un engrenage cylindrique à denture droite ou hélicoïdale est représenté dans la Figure II-2. Il est composé de cinq éléments de base :

- 1<sup>er</sup> élément : les arbres d'entrée (côté moteur) et de sortie (côté charge) sont simulés par éléments finis de poutres classiques à deux nœuds (poutre de Timoshenko) [65]. Chaque arbre comporte deux sous éléments d'une part et d'autre de l'engrenage. Quatre éléments de type poutre ont été obtenus répartis entre les différents nœuds du système mécanique global.
- 2<sup>ème</sup> élément : le couple d'engrenage (pignon et roue) est caractérisé par un élément spécifique (modèle à paramètres concentrés) [65]. Cet élément est représenté par des masses et des ressorts entre les nœuds 2 et 5.
- 3<sup>ème</sup> élément : les paliers (roulements) sont représentés par des raideurs additionnelles placées au niveau des nœuds 1, 3, 4 et 6.
- 4<sup>ème</sup> élément : le moteur est modélisé par son inertie et impose un couple électromagnétique, décrit dans (II.13), à un nœud de l'arbre d'entrée (arbre du pignon).

- 5<sup>ème</sup> élément : la charge est assimilée, pour des raisons de simplicité, à un élément de rigidité en torsion  $k_{\theta_s}$  placé à un nœud de l'arbre de sortie (arbre de la roue).

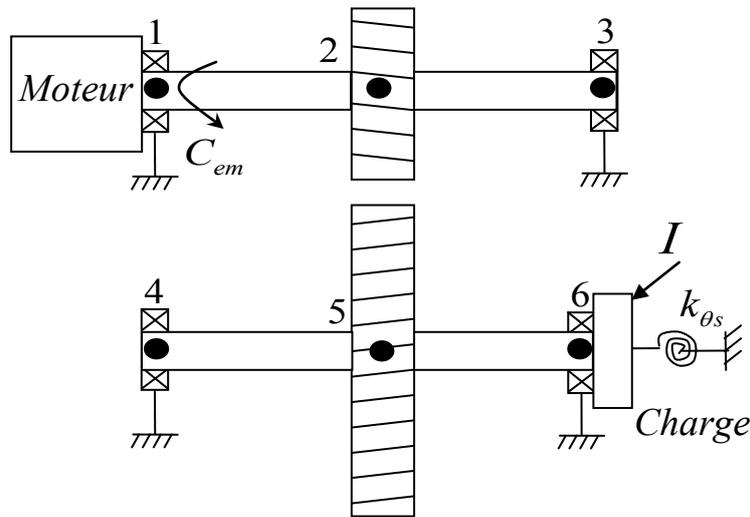


Figure II-2 : Modèle global : Modèle dynamique global 3D d'un système à engrenage

Le modèle du système d'engrenage comporte six nœuds et à chaque nœud est associé six degrés de liberté de torsion ( $\theta_k$ ), de flexion ( $v_k, w_k, \phi_k, \psi_k$ ) et de traction compression ( $u_k$ ) avec  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (Figure II-2). Le comportement dynamique de ce système est donc représenté par 36 degrés de liberté (DDL) qui correspondent aux déplacements élastiques infinitésimaux superposés aux mouvements des corps rigides. Les degrés de liberté du couple d'engrenage (pignon/roue) sont représentés dans la Figure II-3.

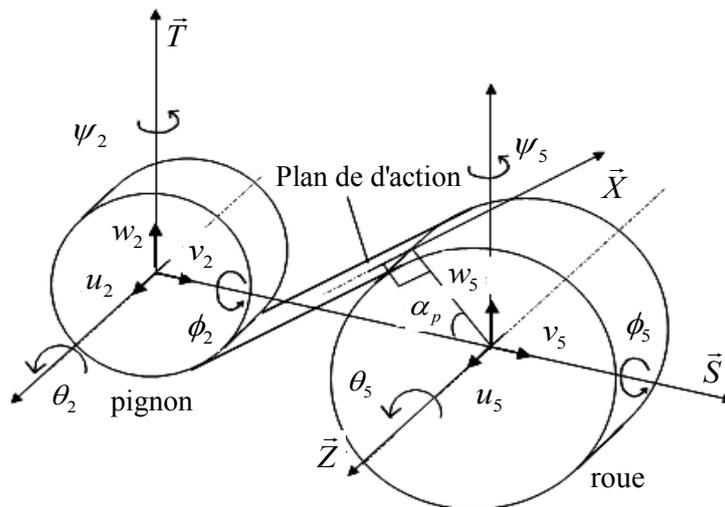


Figure II-3 : Degrés de liberté de l'élément engrenage (pignon et roue)

Selon [64] et [65], le pignon et la roue sont assimilés à des cylindres rigides reliés aux arbres flexibles. L'élasticité des dents est simulée par une distribution de raideurs élémentaires indépendantes le long des lignes théoriques de contact dans le plan d'action (fondation élastique de Wrinckler) comme illustré dans la Figure II-4. Au cours de la rotation du couple d'engrenage, les lignes de contact se déplacent sur le plan d'action avec la vitesse  $V = R_{b1} \cdot \Omega_1$  avec  $R_{b1}$  est le rayon de base du pignon et  $\Omega_1$  est la vitesse de rotation du pignon en rad/s (qui est supposé être l'organe menant). Chacune de ces lignes correspond à un couple de dents en contact. Elle est discrétisée en plusieurs segments (le nombre de segments est défini par la finesse de calcul voulu et par la dimension de la largeur de l'engrenage) et à chaque segment est associé une raideur élémentaire par unité de longueur  $k(M_{ij})$  (ligne  $i$ , segment  $j$ ).

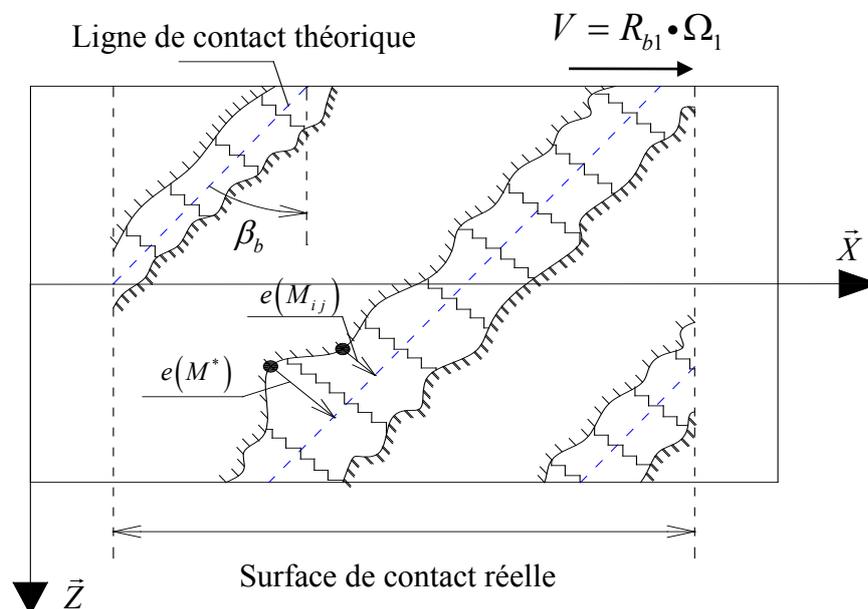


Figure II-4 : Modélisation de la raideur d'engrènement dans le plan d'action

### II.3.3. Caractérisation de la raideur de contact

La déformée totale d'un couple de dents résulte de la contribution de plusieurs déplacements qui sont superposés [72] à savoir :

- La déformée de fondation  $\delta_{fw}$
- la déformée de flexion de dent  $\delta_b$
- et enfin, la déformée de contact ou hertzienne  $\delta_c$

Ces trois grandeurs sont définies dans les alinéas suivants.

On en déduit la raideur équivalente qui est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{\partial(\delta_{fw} + \delta_b + \delta_c)}{\partial F} \quad (\text{II.14})$$

avec  $F$  est l'effort appliqué.

Chaque raideur élémentaire dépend du temps et de la position relative à l'engrènement des dents pendant la rotation de l'engrenage. Pour calculer cette raideur, les résultats de Weber et Banaschek [55] pour la flexion des dents et les déplacements de la base ont été employées tandis que les déflexions au contact ont été introduites par la formule Lundberg pour des demi-espaces élastiques [73].

### II.3.3.1. Formules de Weber et Banaschek

#### a) *Déplacement dû à la flexion d'une dent*

Les déformations dues à la flexion des dents ont été calculées en considérant la dent d'engrenage comme étant une poutre de section variable encastree au niveau du corps d'engrenage et libre de l'autre côté. En écrivant l'égalité entre le travail de l'effort extérieur et l'énergie de déformation de la dent en flexion, Weber et Banaschek [55] ont obtenu:

$$\delta_b = \frac{F}{b} \frac{1}{E} \cos^2(\alpha_p) \left[ 10.92 \int_0^{u_w} \frac{(u_w - y)^2}{d(y)^3} dy + 3.1(1 + 0.294 \text{tg}^2(\alpha_p)) \int_0^{u_w} \frac{1}{d(y)} dy \right] \quad (\text{II.15})$$

avec :

- $F$  : Force appliquée sur la dent.
- $b$  : largeur de la dent.
- $E$  : module de Young.
- $\alpha_p$  : angle de pression.

Les autres paramètres sont définis dans la Figure II-5.

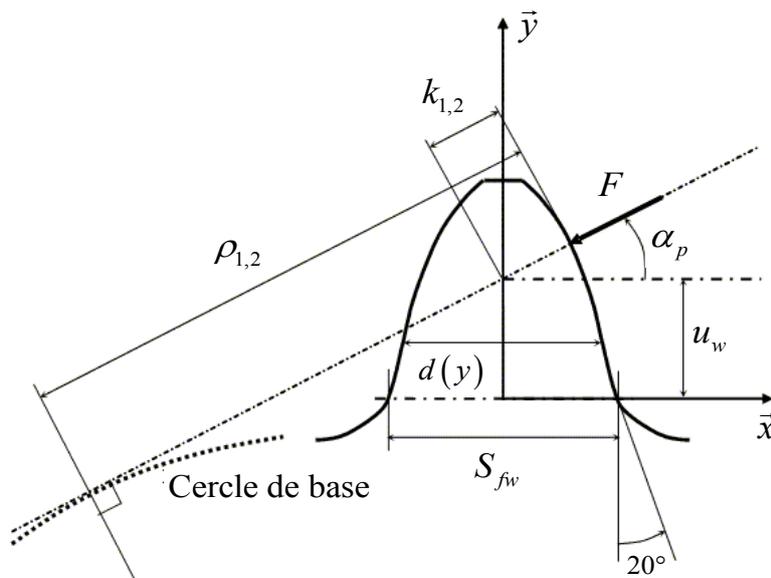


Figure II-5 : Paramètres pour la formule de Weber Banaschek [55]

Les fonctions à intégrer dans l'équation (II.15) ne possédant pas de solutions analytiques, les formules de quadratures suivantes ont été proposées par [56] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{u_j} \frac{(u_j - y)^2}{d_j(y)^3} dy = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left( u_j^2 - u_j h_k + \frac{1}{3} h_k^2 \right) \left( \frac{1}{d_k^3} + \frac{1}{d_{k+1}^3} \right) h_k \\ \int_0^{u_j} \frac{1}{d_j(y)} dy = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) h_k \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

avec  $N$ , le nombre de segments de discrétisation entre l'encastrement et l'intersection entre la ligne moyenne d'une dent et la ligne d'application de la force  $F$ . Les autres paramètres sont définis dans la Figure II-6.

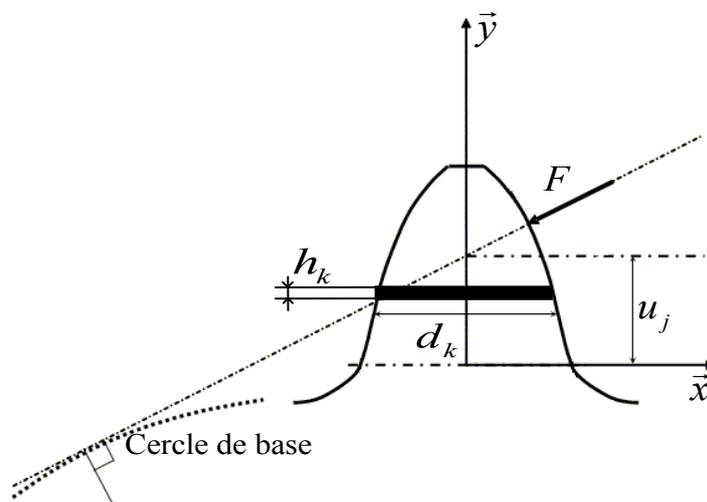
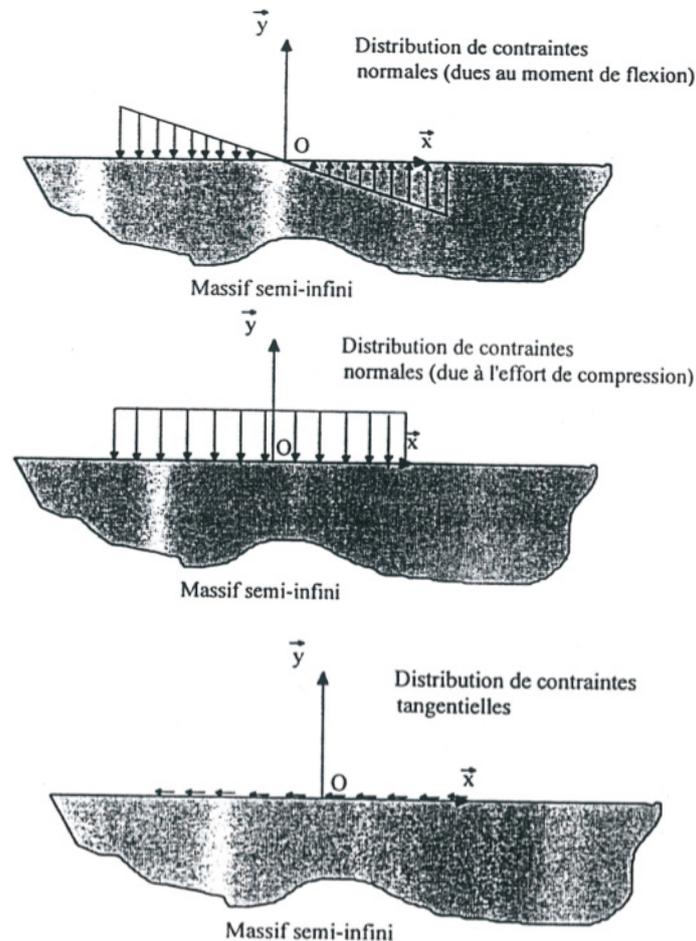


Figure II-6 : Paramètres pour l'intégration numérique [56]

**b) Déplacement dû à la contribution du corps d'engrenage (liaison dent/jante)**

Pour la contribution du corps d'engrenage, la dent est supposée rigide et le corps de roue est modélisé par un demi-plan élastique sur lequel sont appliquées des distributions de contraintes normales (dues aux moments de flexion et à l'effort de compression) et tangentielles (cisaillement).



**Figure II-7 :** Distributions de contraintes sur le corps d'engrenage

En supposant que la distribution des contraintes normales est linéaire et que les contraintes de cisaillement au pied de dent sont constantes, une estimation du déplacement dans la direction de la charge appliquée sur la dent est donnée dans l'équation (II.17) en superposant les trois phénomènes décrit dans la Figure II-7 et en utilisant les formules classiques de l'élasticité bidimensionnelle.

$$\delta_{fw} = \frac{F}{b} \frac{1}{E} \cos^2(\alpha_p) \left[ L \left( \frac{u_w}{S_{fw}} \right)^2 + M \left( \frac{u_w}{S_{fw}} \right) + P \left( 1 + Q \cdot \text{tg}^2(\alpha_p) \right) \right] \quad (\text{II.17})$$

avec :

- $S_{fw}$  : épaisseur de la dents au niveau de la section critique selon Weber [55] (Figure II-5).
- $L$ ,  $M$ ,  $P$  et  $Q$  : constantes qui diffèrent légèrement selon les auteurs, comme l'indique le tableau suivant.

	$L$	$M$	$P$	$Q$
Weber [55] – Attia [74]	5,2	1	1,4	0,294 — 0,32
Cornell* [56]	5,306	1,4 (contrainte plane) 1,14 (déformation plane)	1,534	0,32

**Tableau II-1** : constantes de l'équation (II.17) pour  $\nu = 0,3$

\*  $E$  pour contrainte plane et  $E/(1-\nu^2)$  déformation plane

### c) Déplacement dû au contact entre les dents

D'après Weber et Banaschek [55], le contact entre deux dents du pignon et de la roue peut être assimilé à deux massifs élastiques semi-infinis soumis chacun une distribution hertzienne de pressions normales (Figure II-8). En utilisant la théorie de Hertz 2D pour deux cylindres en contact et en prenant la ligne centrale de la dent comme étant une référence pour les déplacements, la déflexion normale entre les parties en contact est donnée par l'équation (II.18) :

$$\delta_c^{WB} = 4 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{a_H} - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right) \quad (\text{II.18})$$

avec :

- $F$  : Force appliquée sur la dent.
- $b$  : largeur de la dent.
- $E$  : module de Young.
- $\nu$  : coefficient de Poisson.
- $k_1, k_2$  : les distances entre le point de contact et la ligne médiane de la dent (l'indice 1 pour le pignon et l'indice 2 pour la roue), (Figure II-5).
- $a_H = \sqrt{8 \frac{W}{b} \rho_{eq} \frac{1-\nu^2}{\pi E}}$  : demi largeur de contact hertzien (Figure II-8).
- $\rho_{eq} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$  : rayon de courbure équivalent au point de contact considéré.
- $\rho_1, \rho_2$  : rayons de courbure (Figure II-5).

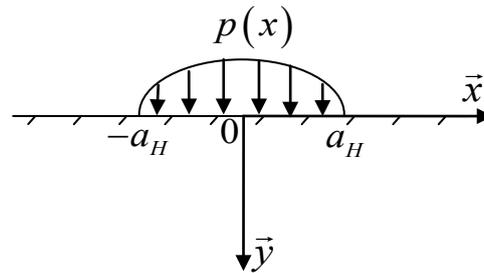


Figure II-8 : Distribution de pression hertzienne

D'autres formules sont largement utilisées pour le calcul de la déflexion de contact entre les dents d'engrenage tels que la formule analytique tridimensionnelle de Lundberg [73] et la formule semi empirique développée par Palmgren pour les rouleaux cylindriques [56].

### II.3.3.2. Formule de Lundberg

Lundberg [73] suppose que la pression de contact est uniforme sur la largeur de contact  $b$  et semi elliptique selon la direction transverse (Figure II-9). Ce chargement est appliqué en supposant que la dent est un demi-espace élastique semi-infini. D'après [66] et [73], l'expression de la déflexion de contact  $\delta_L^c$  au centre de la zone chargée est donnée par l'équation (II.19) en conservant les notations de l'équation (II.18).

$$\delta_L^c = 4 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left( \frac{1}{2} + \ln 2 + \ln \frac{b}{a_H} \right) \quad (\text{II.19})$$

La formulation de Lundberg est donc tridimensionnelle parce qu'elle fait intervenir la largeur de contact  $b$  indépendamment du rapport  $F/b$  contrairement à l'équation (II.18) de Weber Banaschek.

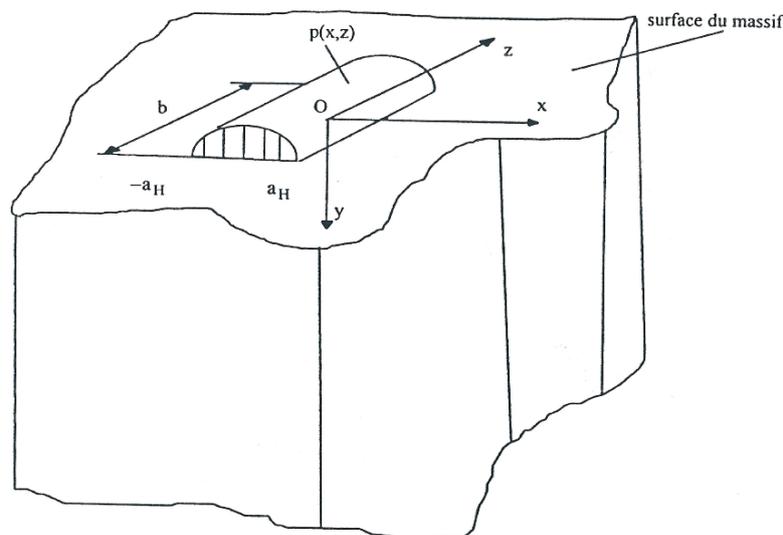


Figure II-9 : Demi-espace élastique et chargement pour la formule de Lundberg

### II.3.4. Modèle dynamique : Equations de mouvement

Les équations de mouvement sont développées à partir des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} = \frac{\partial W}{\partial y_i} \quad (\text{II.20})$$

avec :

- $T$  : énergie cinétique du système.
- $U$  : énergie potentielle de déformation du système.
- $D$  : fonction de dissipation. (exemple : forces de frottement visqueux)
- $W$  : travail virtuel des forces extérieures généralisées.
- $y_i$  : coordonnées généralisées du système  $i = 1, 2, \dots, 36$ . Soit,  $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_{36}\}^T$ .

Le système global est obtenu par l'assemblage des systèmes élémentaires. En effet, chaque énergie du système total représente la somme des énergies de ces éléments. Dans la suite, on étudiera chaque sous système isolé puis on effectuera l'assemblage afin d'obtenir les équations de mouvement du système mécanique global.

#### II.3.4.1. Elément d'engrenage

On admet que l'indice  $E$  représente l'élément d'engrenage et  $k$  représente le nœud de l'engrenage ( $k = 2$  pour le nœud lié au pignon et  $k = 5$  pour le nœud lié à la roue) (Figure II-3).

##### a) *Energie cinétique*

En négligeant les effets centrifuges et gyroscopiques, l'énergie cinétique de l'élément d'engrenage s'écrit sous la forme suivante :

$$T_E = \sum_k \left( \frac{1}{2} M_k \left( \vec{V}_k^{R_0} (G_k) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \vec{\Omega}_k^{R_0} \right)^T \underline{I}_k \vec{\Omega}_k^{R_0} \right); \quad k = 2, 5 \quad (\text{II.21})$$

avec :

- $R_0(O_2, \vec{S}, \vec{T}, \vec{Z})$  : repère fixe lié au pignon.
- $G_k$  : centre d'inertie de l'engrenage  $k$ .
- $M_k$  : masse de l'engrenage  $k$ .
- $\Omega_k$  : vitesse de rotation de l'engrenage  $k$ .

- $\underline{I}_k$  : tenseur d'inertie de l'engrenage  $k$ .

Sachant qu'on a :

$$\begin{cases} \vec{V}_k^{R_0}(G_k) = (\dot{v}_k + C_{Sk})\vec{S} + (\dot{w}_k + C_{Tk})\vec{T} + \dot{u}_k\vec{Z} \\ \vec{\Omega}_k^{R_0} = \dot{\phi}_k\vec{S} + \dot{\psi}_k\vec{T} + (\dot{\theta}_k + \Omega_k)\vec{Z} \end{cases} ; k = 2 \text{ ou } 5 \quad (\text{II.22})$$

avec :

$$\begin{cases} C_{S2} = -\varepsilon_2\Omega_2 \sin(\Omega_2 t - \lambda_2) \\ C_{T2} = \varepsilon_2\Omega_2 \cos(\Omega_2 t - \lambda_2) \\ C_{S5} = -\varepsilon_5\Omega_5 \sin\left(\int_0^t \Omega_5 dt - \lambda_5\right) \\ C_{T5} = \varepsilon_5\Omega_5 \cos\left(\int_0^t \Omega_5 dt - \lambda_5\right) \end{cases} : \text{expressions de l'excentricité plane des engrenages en}$$

négligeant les effets centrifuges et gyroscopiques (voir Figure I-35) [65].

Et le tenseur d'inertie d'un cylindre :

$$\underline{I}_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 \\ 0 & 0 & I_{pk} \end{pmatrix} ; k = 2, 5 \quad (\text{II.23})$$

avec :

- $I_{pk}$  : inertie polaire de l'engrenage  $k$  par rapport à l'axe de rotation  $\vec{Z}$ .
- $I_k$  : inertie de masse de l'engrenage  $k$  par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe de rotation ( $\vec{S}$  et  $\vec{T}$ ).

Donc, on obtient pour  $k = 2$  et  $5$  :

$$T_E = \sum_{k=2,5} \left( \frac{1}{2} M_k \left( (\dot{v}_k + C_{Sk})^2 + (\dot{w}_k + C_{Tk})^2 + \dot{u}_k^2 \right) + \frac{1}{2} \left( I_k (\dot{\phi}_k^2 + \dot{\psi}_k^2) + I_{pk} (\dot{\theta}_k + \Omega_k)^2 \right) \right) \quad (\text{II.24})$$

En appliquant les équations de Lagrange et en supposant que la vitesse de rotation  $\Omega_1$  est constante, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_E}{\partial \dot{y}_{Ei}} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial y_{Ei}} = [M_E] \{ \ddot{Y}_{Ei} \} + \{ F_{2/E} \} \quad (\text{II.25})$$

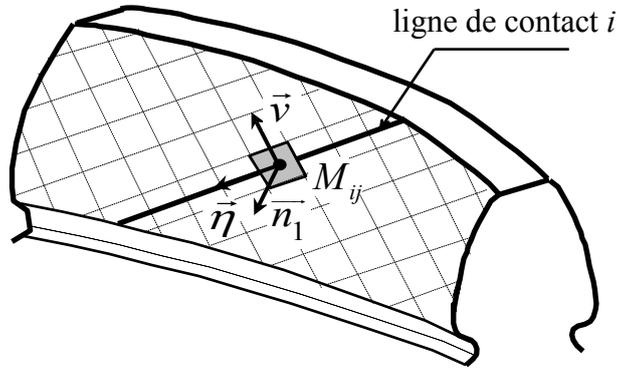
avec :

- $[M_E]_{12 \times 12} = \left[ \text{diag} \left( M_2, M_2, M_2, I_2, I_2, I_{p2}, M_5, M_5, M_5, I_5, I_5, I_{p5} \right) \right]$  : matrice masse de l'élément d'engrenage.

- $\{Y_E\}_{12 \times 1} = \{y_{Ei}\} = \{v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2, v_5, w_5, u_5, \phi_5, \psi_5, \theta_5\}^T$  : degrés de liberté (DDLs) de l'élément d'engrenage.
- $\{F_{2/E}\}_{12 \times 1} = \{M_2 \dot{C}_{S2}, M_2 \dot{C}_{T2}, 0, 0, 0, 0, M_5 \dot{C}_{S5}, M_5 \dot{C}_{T5}, 0, 0, 0, 0, I_{p2} \dot{\Omega}_5\}^T$  : vecteurs des excitations causées par une cinématique perturbée par l'excentricité de l'élément d'engrenage.

**b) Energie de déformation**

Pour calculer l'énergie de déformation associée à un couple d'engrenage, les lignes de contact ont été discrétisées en plusieurs segments. On appelle  $M_{ij}$  le point de contact correspondant au centre du  $j^{\text{ème}}$  segment de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de contact et  $\vec{n}_{ij}$  est la normale sortante par rapport au flanc actif du pignon en ce point.



**Figure II-10 : Discrétisation du flanc actif d'une dent**

En se basant sur ce qui était développé dans le paragraphe I.6.2.2, on rappelle que, pour chaque élément de discrétisation, le vecteur structure en tout point  $M_{ij}$  est donné par :

$$V(M_{ij}) = \begin{bmatrix} \vec{n}_{ij} \\ \overrightarrow{O_1 M_{ij}} \wedge \vec{n}_{ij} \\ -\vec{n}_{ij} \\ -\overrightarrow{O_2 M_{ij}} \wedge \vec{n}_{ij} \end{bmatrix} \quad (II.26)$$

D'après [64], l'énergie de déformation associée à l'élément  $ij$  s'écrit sous la forme :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} \Delta_{ij}^2 = \frac{1}{2} k_{ij} (\delta_{ij} + \delta e_{ij})^2 \quad (II.27)$$

avec :

- $k_{ij}$  est la raideur en cet l'élément  $ij$  .

- $\Delta_{ij}$  est l'écrasement à cet élément :  $\Delta_{ij} = \delta_{ij} + \delta e_{ij}$ .
- $\delta_{ij}$  est le rapprochement au point  $M_{ij}$ .
- $\delta e_{ij}$  écart normal au point  $M_{ij}$ .

En se basant sur les équations (I.54) et (II.27), on obtient :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} \{Y_E\}^T \{V(M_{ij})\}^T \{V(M_{ij})\} \{Y_E\} + k_{ij} \delta e_{ij} \{V(M_{ij})\}^T \{Y_E\} + \frac{1}{2} k_{ij} \delta e_{ij}^2 \quad (\text{II.28})$$

L'énergie de déformation totale pour l'élément engrenage est donnée par :

$$U_E = \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_s} u_{ij} \quad (\text{II.29})$$

avec  $N_l$  et  $N_s$  sont respectivement les nombres instantanés de lignes et de segments dans la fenêtre d'engrènement.

Donc,

$$U_E = \frac{1}{2} \{Y_E\}^T \left[ \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_s} \left( k_{ij} \{V(M_{ij})\} \{V(M_{ij})\}^T \right) \right] \{Y_E\} + \left\{ \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_s} \left( k_{ij} \delta e_{ij} \{V(M_{ij})\} \right) \right\}^T \{Y_E\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_s} \left( k_{ij} \delta e_{ij}^2 \right) \quad (\text{II.30})$$

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient :

$$\frac{\partial U_E}{\partial y_{Ei}} = \left[ K_E(t, \{Y_E\}) \right] \{Y_E\} + \{F_{1/E}(t, \{Y_E\})\} \quad (\text{II.31})$$

avec :

- $\left[ K_E(t, \{Y_E\}) \right]_{12 \times 12} = \left[ \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_s} \left( k_{ij} \{V(M_{ij})\} \{V(M_{ij})\}^T \right) \right]$  représente la matrice de rigidité de l'élément engrenage qui dépend du temps et du vecteur structure (I.55).
- $\{F_{1/E}(t, \{Y_E\})\}_{12 \times 1} = \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{j=1}^{N_s} \left( k_{ij} \delta e_{ij} \{V(M_{ij})\} \right)$  représente le vecteur des efforts dus aux écarts.

### II.3.4.2. Élément arbre

Le système d'engrenage étudié comporte deux arbres d'entrée et de sortie (Figure II-2). Dans ce paragraphe, ces arbres sont modélisés par des éléments finis classiques de type poutre

de Timoshenko à deux nœuds. La répartition des différents nœuds du système impose la décomposition des arbres en quatre éléments à deux nœuds chacun et à six degrés de liberté par nœud.

La Figure II-11 montre le modèle élément fini entre deux nœuds quelconques (1 et 2) d'un arbre de section circulaire  $S$  et de longueur  $L$ . Les différents degrés de liberté de chaque nœud sont aussi représentés dans un repère fixe lié à l'arbre.



**Figure II-11 : Modèle élément fini de l'arbre**

Le modèle du système global comporte quatre éléments d'arbre. Donc, on calcule l'énergie cinétique et celle de déformation pour un élément d'arbre dans le cas général. Et ceci sera applicable pour les quatre éléments en modifiant les indices des nœuds et les dimensions caractéristiques de chaque élément d'arbre.

On note que le calcul des énergies et des matrices de masse et de rigidité est détaillé dans l'annexe A.

#### a) *Energie cinétique*

En négligeant les effets centrifuges et gyroscopiques, l'expression de l'énergie cinétique de l'élément arbre s'écrit :

$$T_A = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{u}^2) dz + \frac{1}{2} I_0 \int_0^L (\dot{\theta} + \Omega)^2 dz + \frac{1}{2} I_x \int_0^L (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) dz \quad (\text{II.32})$$

avec :

- $\rho$  : masse volumique.
- $S$  : section de l'arbre.
- $L$  : longueur de l'arbre.
- $I_x$  : inertie de masse de l'arbre, par unité de longueur, par rapport à l'un des axes  $\vec{X}$  ou  $\vec{Y}$ .

- $I_0$  : inertie polaire de l'arbre par rapport à l'axe de rotation  $\vec{Z}$ .

En appliquant les équations de Lagrange, on trouve :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_A}{\partial \dot{y}_{Ai}} \right) - \frac{\partial T_A}{\partial y_{Ai}} = [M_A] \{\ddot{Y}_A\} + \{F_{2/A}\} \quad (\text{II.33})$$

avec :

- $[M_A]_{12 \times 12}$  représente la matrice masse de l'élément arbre (voir annexe A).
- $\{Y_A\}_{12 \times 1} = \{v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2\}^T$  représente le vecteur des coordonnées généralisées des nœuds liés à l'élément arbre.

$$\begin{cases} \{F_{2/A}\}_{12 \times 1} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} & \text{si } A \text{ est un arbre d'entrée} \\ \{F_{2/A}\}_{12 \times 1} = \dot{\Omega}_2 \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{I_{0h} L_h}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, I_F + \frac{I_{0h} L_h}{2} \right\} & \text{si } A \text{ est un arbre de sortie} \end{cases}$$

où :  $h$  représente l'indice de l'arbre de sortie.

$L_h$  est la longueur de l'arbre correspondante.

$I_{0h}$  est l'inertie polaire de l'arbre correspondante.

$I_F$  est l'inertie polaire du frein.

### b) Energie de déformation

L'énergie de déformation de l'élément arbre s'écrit sous la forme suivante :

$$U_A = \frac{1}{2} \int_0^L E.S. \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L G.J. \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L E.I_A. \left( \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right) dz \quad (\text{II.34})$$

avec :

- $E$  : module de Young.
- $G$  : module de cisaillement.
- $I_A$  : moment d'inertie de l'arbre par rapport à l'un des axes  $\vec{X}$  ou  $\vec{Y}$ .
- $J$  : moment d'inertie polaire de l'arbre.

En appliquant les équations de Lagrange, on trouve :

$$\frac{\partial U_A}{\partial q_{Ai}} = [K_A] \{q_A\} \quad (\text{II.35})$$

avec  $[K_A]$  représente la matrice de rigidité de l'élément arbre (voir annexe A).

### II.3.4.3. Paliers (raideurs additionnelles)

Pour représenter les paliers, des raideurs additionnelles ont été ajoutées aux différents nœuds des paliers. L'énergie de déformation associée aux raideurs placées à un nœud quelconque  $k$  s'écrit comme suit :

$$U_p = \frac{1}{2} \{Y_k\}^T [K_p] \{Y_k\} \quad (\text{II.36})$$

avec :

- $[K_p] = \left[ \text{diag} \left( k_{v_k}, k_{w_k}, k_{u_k}, k_{\phi_k}, k_{\psi_k}, 0 \right) \right]$
- $\{Y_k\} = \{v_k, w_k, u_k, \phi_k, \psi_k, \theta_k\}^T$

### II.3.4.4. Moteur, charge (Travail virtuel des forces extérieures)

Dans cette étude, les charges extérieures se réduisent à l'application d'un couple moteur au niveau du nœud 1 ou 3 de l'arbre d'entrée et d'un couple résistant au niveau du nœud 4 ou 6 de l'arbre de sortie. Le travail virtuel des forces extérieures est donné par :

$$\delta W = C_{em}(t) \delta \theta_e + C_r(t) \delta \theta_s \quad (\text{II.37})$$

avec :

- $C_{em}(t)$  est donné par l'équation (II.13).
- $C_r(t)$  est donné par l'équation (I.49).

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = \{F_0(t)\} \quad (\text{II.38})$$

Lorsque le moteur et le frein sont respectivement aux niveaux des nœuds 1 et 6, on a :

- $\{F_0(t)\} = \{0, 0, \dots, 0, C_{em}(t), 0, 0, \dots, 0, C_r(t)\}^T$  avec  $F_{0,i} = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, 36$  sauf 18 et 36 représentant les degrés de liberté de torsion des nœuds 1 et 6 ;  $F_{0,18} = C_{em}(t)$  ;  $F_{0,36} = C_r(t)$ .

### II.3.4.5. Assemblage des sous-systèmes

En assemblant les vecteurs des degrés de liberté de chaque élément, on obtient un vecteur à 36 composantes représentant les déplacements infinitésimaux du système global. Soit :

$$\{Y\}_{36 \times 1} = \{v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2, v_3, w_3, u_3, \phi_3, \psi_3, \theta_3, v_4, w_4, u_4, \phi_4, \psi_4, \theta_4, v_5, w_5, u_5, \phi_5, \psi_5, \theta_5, v_6, w_6, u_6, \phi_6, \psi_6, \theta_6\}^T \quad (\text{II.39})$$

L'assemblage des matrices raideurs élémentaires conduit à une matrice raideur globale (36x36) non linéaire et dépendante du temps et des coordonnées généralisées du système.

$$[K(t, \{Y\})]_{36 \times 36} = \text{Assemblage} \left[ [K_E(t, \{Y_E\})]; [K_{A,h}]; [K_{p,k}] \right] \quad (\text{II.40})$$

avec :

- $h$  : indice des différents éléments d'arbres  $h = 1, 2, 3, 4$ .
- $k$  : indice des différents nœuds des paliers  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

L'assemblage des matrices masses élémentaires conduit à une matrice masse totale :

$$[M]_{36 \times 36} = \text{Assemblage} \left[ [M_E]; [M_{A,h}] \right] \quad (\text{II.41})$$

L'assemblage des vecteurs des excitations causées par une cinématique perturbée par les erreurs géométriques conduit à :

$$\{F_{e2}(t)\}_{36 \times 1} = \text{Assemblage} \left\{ \{F_{2/E}\}; \{F_{2/A}\} \right\} \quad (\text{II.42})$$

L'extension du vecteur des excitations supplémentaires créé par les écarts géométriques à la dimension totale du système conduit à :

$$\{F_{e1}(t, \{Y\})\}_{36 \times 1} = \{F_{1/E}\} \quad (\text{II.43})$$

### II.3.4.6. Introduction de l'amortissement

Afin d'obtenir des réponses bornées et réalistes des déplacements, vitesses et accélérations, il est nécessaire de tenir compte des termes dissipatifs intervenant dans le mouvement des systèmes à engrenages. Cependant, il n'existe pas des moyens directs pour définir les répartitions d'énergie dissipée par frottement entre les dents, dans les accouplements et les paliers, et par écrasement du film d'huile (engrenage lubrifié). En outre, les propriétés dissipatives des matériaux ne sont pas suffisamment définies pour donner une estimation exacte de l'énergie dissipée.

En conséquence, l'amortissement d'un système d'engrenage est généralement introduit d'une manière globale et approximative dans les équations de mouvement. Il existe plusieurs

méthodes permettant d'obtenir la matrice d'amortissement globale [72]. L'approche la plus privilégiée est l'approche modale ou pseudo modale (prise en compte d'un certain nombre de fréquence propre), qui conduit à une représentation d'état du système. Elle repose sur l'hypothèse que le système est peu dissipatif, ce qui est généralement vrai pour la plupart des matériaux utilisés en construction mécanique (métaux divers, composites carbonés, etc...). Cette méthode consiste à définir l'amortissement dans une base modale en tenant compte des raideurs et masses modales et à projeter le système d'équations de cette base dans la base physique. Par analogie avec un système à un seul degré de liberté, l'amortissement visqueux équivalent est introduit dans la base modale ou pseudo-modale sous la forme :

$$[C_\phi] = [diag(2\varepsilon_{\phi_i} \sqrt{k_{\phi_i} m_{\phi_i}})] \quad (\text{II.44})$$

avec :

- $\varepsilon_{\phi_i}$  : le facteur d'amortissement modal relatif au  $i^{\text{ème}}$  mode.
- $k_{\phi_i}$  : la composante correspondante au  $i^{\text{ème}}$  mode de la matrice raideur modale construite à partir de la matrice raideur d'engrènement moyenne ( $[K_{moy}]$ ) dans le temps et dans l'espace de  $[K(t, \{Y\})]$ . Soit,  $[K_\phi] = [diag(k_{\phi_i})] = \{\Phi_i\}^T [K_{moy}] \{\Phi_i\}$  avec  $\{\Phi_i\}$  est le vecteur propre du  $i^{\text{ème}}$  mode.
- $m_{\phi_i}$  : la composante correspondante au  $i^{\text{ème}}$  mode de la matrice masse totale  $[M]$ . Soit,  $[M_\phi] = [diag(m_{\phi_i})] = \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\}$ .

En construisant la matrice  $[\Phi]$  à partir des vecteurs propres  $\{\Phi_i\}$ , la matrice d'amortissement modale peut être écrite dans la base modale comme suit :

$$[C_\phi] = [\Phi]^T [C][\Phi] \quad (\text{II.45})$$

Dans la base physique, on a :

$$[C] = [\Phi]^{-T} [C_\phi][\Phi]^{-1} \quad (\text{II.46})$$

Et, on a :

$$[\Phi]^{-1} = [M_\phi]^{-1} [\Phi]^T [M] \quad (\text{II.47})$$

$$[\Phi]^{-T} = [M][\Phi][M_\phi]^{-1} \quad (\text{II.48})$$

En reportant les équations (II.47) et (II.48) dans l'équation (II.46), on obtient la matrice amortissement visqueux équivalent dans la base physique :

$$[C] = \left( [M][\Phi][M_\phi]^{-1} \right) [C_\phi] \left( [M_\phi]^{-1} [\Phi]^T [M] \right) \quad (\text{II.49})$$

représentative de la dissipation d'énergie sur un nombre quelconque de modes propres. Le choix de ces modes dépend en particulier de la largeur de la bande de fréquences à étudier.

La puissance de dissipation du système est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{1}{2} \{\dot{Y}\}^T [C] \{\dot{Y}\} \quad (\text{II.50})$$

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient :

$$\left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_i} \right\} = [C] \{\dot{Y}\} \quad (\text{II.51})$$

### II.3.4.7. Equations de mouvement

Les équations de mouvement du système global s'écrivent :

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [C] \{\dot{Y}\} + [K(t, \{Y\})] \{Y\} = \{F_0(t)\} + \{F_{e1}(t, \{Y\})\} + \{F_{e2}(t)\} \quad (\text{II.52})$$

avec :

- $\{Y\} = \{v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2, v_3, w_3, u_3, \phi_3, \psi_3, \theta_3, v_4, w_4, u_4, \phi_4, \psi_4, \theta_4, v_5, w_5, u_5, \phi_5, \psi_5, \theta_5, v_6, w_6, u_6, \phi_6, \psi_6, \theta_6\}^T$  : vecteur des degrés de liberté.
- $[M]$  : matrice masse totale (II.41).
- $[C]$  : matrice amortissement visqueux équivalente (II.49).
- $[K(t, \{Y\})]$  : matrice raideur totale non linéaire et dépendante du temps et des coordonnées généralisées du système (II.40).
- $\{F_0(t)\}$  : vecteur des forces extérieures (II.38).
- $\{F_{e1}(t, \{Y\})\}$  : vecteur d'excitation supplémentaire introduisant l'effet des écarts (II.43).
- $\{F_{e2}(t)\}$  : vecteur d'excitation supplémentaire introduisant l'effet de la cinématique perturbée par les écarts (II.42).

## II.4. Couplage électromécanique global

### II.4.1. Principe

Il s'agit de coupler le modèle électrique des machines asynchrones avec le modèle mécanique d'un engrenage droit ou hélicoïdal afin d'obtenir un modèle électromécanique dynamique global. L'objectif principal du couplage électromécanique est de montrer la capacité de détection et de surveillance des défauts d'engrenages tels que les avaries de contact par l'analyse des courants captés à partir du moteur électrique.

Dans cette étude, le moteur est considéré directement lié à l'engrenage afin de décrire le système électromécanique couplé avec un système unique d'équations différentielles en combinant les équations électriques et mécaniques. La résolution de ce système combiné permet de prendre en compte de la variation instantanée de toutes les variables d'états sans utiliser un algorithme de convergence ou de prédiction/correction.

Pour réaliser ce couplage, il s'agit de grouper, dans un même vecteur d'état, les grandeurs électriques (courants et flux magnétiques) et les grandeurs mécaniques (déplacements, vitesses et accélérations). Le moteur asynchrone est décrit par un système différentiel du premier ordre (II.11) alors que le comportement dynamique de l'engrenage est caractérisé par un système différentiel du second ordre (II.52). L'augmentation de la taille du système différentielle décrivant la partie mécanique permet d'obtenir un système de premier ordre permettant ainsi l'assemblage des deux systèmes d'équations. On introduit alors le vecteur d'état étendu :

$$\{Z(t)\} = \{X(t) \quad Y(t) \quad \dot{Y}(t)\}^T \quad (\text{II.53})$$

avec

- $X(t)$  : vecteur des variables d'états électriques définies dans (II.11).
- $Y(t)$  : vecteur des degrés de liberté du système mécanique (déplacements infinitésimaux) défini dans (II.52).
- $\dot{Y}(t)$  : la dérivée par rapport au temps de  $Y(t)$ .

### II.4.2. Mise en équation

Le couplage entre les systèmes électrique et mécanique est assuré par la prise en considération des variations de la vitesse instantanée de rotation du pignon qui sont introduites dans l'équation (II.12). D'autre part, en tenant compte de la relation (II.13) entre le couple électromagnétique et les variables d'états électriques (courants et flux magnétiques), le

vecteur  $\{F_0(t)\}$  de l'équation (II.52) est réécrit sous une forme matricielle et ensuite introduit dans la matrice globale qui regroupe toutes les matrices des systèmes électrique et mécanique.

Le modèle numérique électromécanique global développé s'écrit donc sous une forme condensée :

$$\{\dot{Z}(t)\} = [A(t, Z)]\{Z(t)\} + \{B(t)\} \quad (\text{II.54})$$

En détaillant l'équation (II.54), on obtient l'équation (II.55) :

$$\begin{Bmatrix} \dot{i}_{ds} \\ \dot{i}_{qs} \\ \dot{\Psi}_{dr} \\ \dot{\Psi}_{qr} \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_6 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\omega_s & a_{13} & a_{14}(\omega_m + \dot{\theta}_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21}\omega_s & a_{22} & a_{23}(\omega_m + \dot{\theta}_1) & a_{24} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\omega_{sl} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\omega_{sl} & a_{44} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \\ v_1 \\ \vdots \\ \theta_6 \\ \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} V_{ds} \\ \frac{1}{\sigma L_s} V_{qs} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ M^{-1}\{F_{e1} + F_{e2}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

avec :

$$\{v_1 \cdots \cdots \theta_6\}^T = \{v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2, v_3, w_3, u_3, \phi_3, \psi_3, \theta_3, v_4, w_4, u_4, \phi_4, \psi_4, \theta_4, v_5, w_5, u_5, \phi_5, \psi_5, \theta_5, v_6, w_6, u_6, \phi_6, \psi_6, \theta_6\}^T$$

$$- a_{11} = a_{22} = -\left(\frac{1}{T_s \sigma} + \frac{1}{T_r} \frac{1-\sigma}{\sigma}\right)$$

$$- a_{12} = a_{34} = 1 ; a_{21} = a_{43} = -1$$

$$- a_{13} = a_{24} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m T_r}$$

$$- a_{14} = -a_{23} = \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{L_m}$$

$$- a_{31} = a_{42} = \frac{L_m}{T_r}$$

$$- a_{32} = a_{41} = 0$$

$$- a_{33} = a_{44} = - \frac{1}{T_r}$$

### II.4.3. Résolution

Le système d'équations différentielles a été résolu de façon itérative en combinant le schéma implicite de Newmark avec un algorithme de contact normal unilatéral [65], [66] (Figure II-12) afin de simuler l'interdépendance entre les équations électriques, les équations de mouvement et les conditions de contact entre les dents.

Le couplage entre les systèmes électrique et mécanique est assuré par le retour instantané des variables d'états électrique et mécanique. La forme analytique et explicite de la dépendance entre les raideurs de contact entre les dents, les variables d'état et les écarts géométriques (y compris les défauts) est inconnue et la propagation de l'effet du défaut vers les variables d'état électriques est donc inconnue analytiquement. Il est donc nécessaire d'introduire les conditions de contact normal dans le processus d'intégration pas à pas dans le temps [65] afin de tenir compte des écarts géométriques. Ceci est assuré par un algorithme vérifiant, à chaque instant, qu'il y a effectivement écrasement pour chaque segment de la ligne de contact et qu'il n'y a pas interpénétration à l'extérieur de la longueur de contact potentielle (Figure II-12).

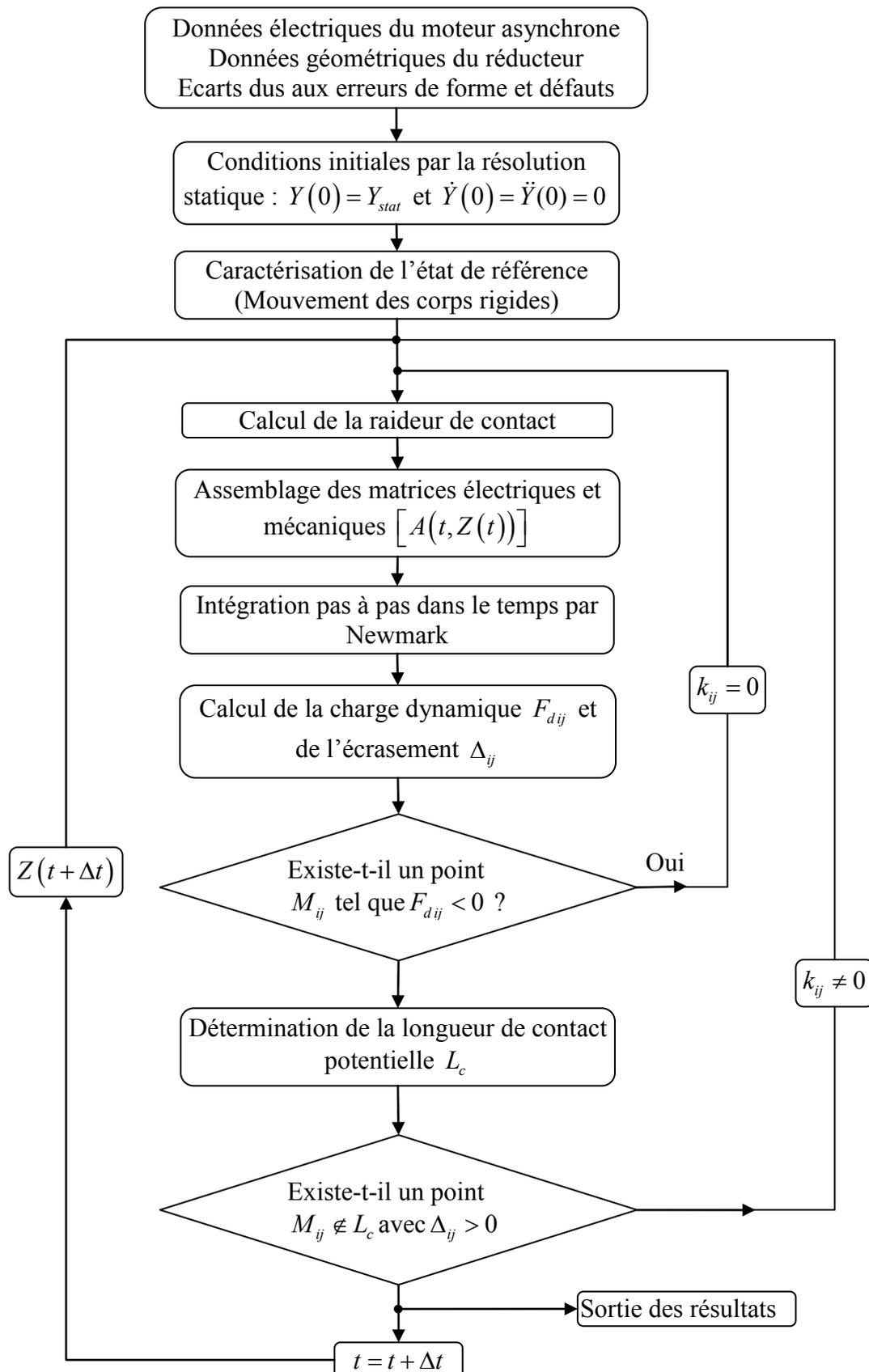


Figure II-12 : Algorithme de résolution globale

## II.5. Mise en équation du modèle magnétique/électrique par réseau de perméances d'une machine asynchrone à cage

Une machine à induction peut être modélisée par le modèle à inductances couplées reposant sur la détermination analytique des inductances propres statoriques et rotoriques ainsi que sur les inductances mutuelles entre les mailles stator-stator, stator-rotor et rotor-rotor. Ce modèle semble suffisant pour étudier l'effet de la présence des défauts rotoriques sur le comportement de la machine mais il ne peut pas tenir compte de façon simple du phénomène de saturation des circuits magnétiques et la détermination de ses paramètres peut s'avérer assez complexe.

Le modèle par réseaux de perméances est une alternative permettant de modéliser tous les défauts qui peuvent exister dans la machine en incluant la saturation des circuits magnétiques. Un tel modèle est également susceptible d'évoluer relativement aisément afin d'intégrer d'autres effets ou paramètres comme la saturation, les excentricités dynamiques, une représentation plus fine de l'état magnétique de la machine, d'autres défauts etc...

### II.5.1. Principe

L'ensemble de la machine est discrétisé en tubes magnétiques homogènes supposés de section droite constante. Un tube de flux est un tube imaginaire parallèle à la direction des lignes d'induction et défini par l'ensemble des lignes traversant un contour fermé  $C$  (voir Figure II-13). La section du tube de flux est choisie suffisamment petite pour que les variations du champ magnétique ( $B$ ) passant à travers ce tube puissent être négligées. Chaque tube est donc caractérisé par sa perméance  $\mathcal{P}$  et sa force magnétomotrice (dans le cas d'un élément actif).

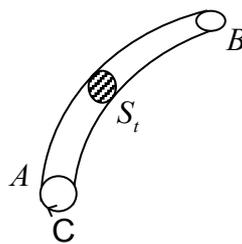


Figure II-13 : Tube de flux

En se basant sur :

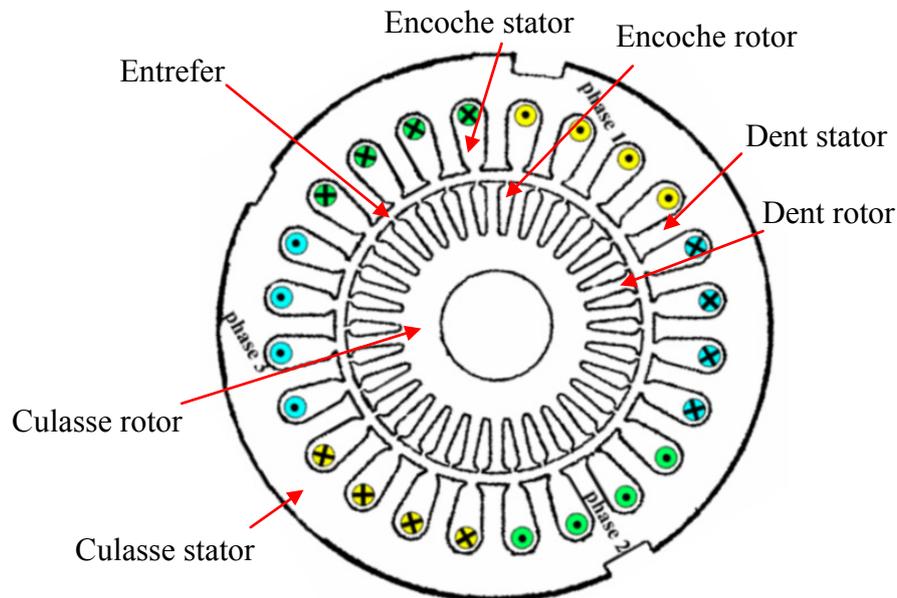
$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 \mu_r S_t}{L_t} \quad (\text{II.56})$$

avec  $\mu_0$  est la perméabilité absolue de l'air,  $\mu_r$  est la perméabilité relative du fer,  $S_f$  est la section du tube de flux et  $L_f$  est la longueur du tube de flux.

## II.5.2. Equations magnétiques

### II.5.2.1. Construction du réseau de perméances

La Figure II-14 montre une vue axiale de la machine asynchrone à cage d'écurie à étudier. C'est une machine triphasée bipolaire composée de 24 encoches statoriques et 30 encoches rotoriques. Les conducteurs entrants et sortants sont régulièrement alternés par paquets (par 4 sur la Figure II-14). Les trois phases indépendantes sont ainsi construites avec des conducteurs pouvant être considérés comme étant bobinés diamétralement. La répartition instantanée du courant de chaque phase évolue sinusoïdalement.

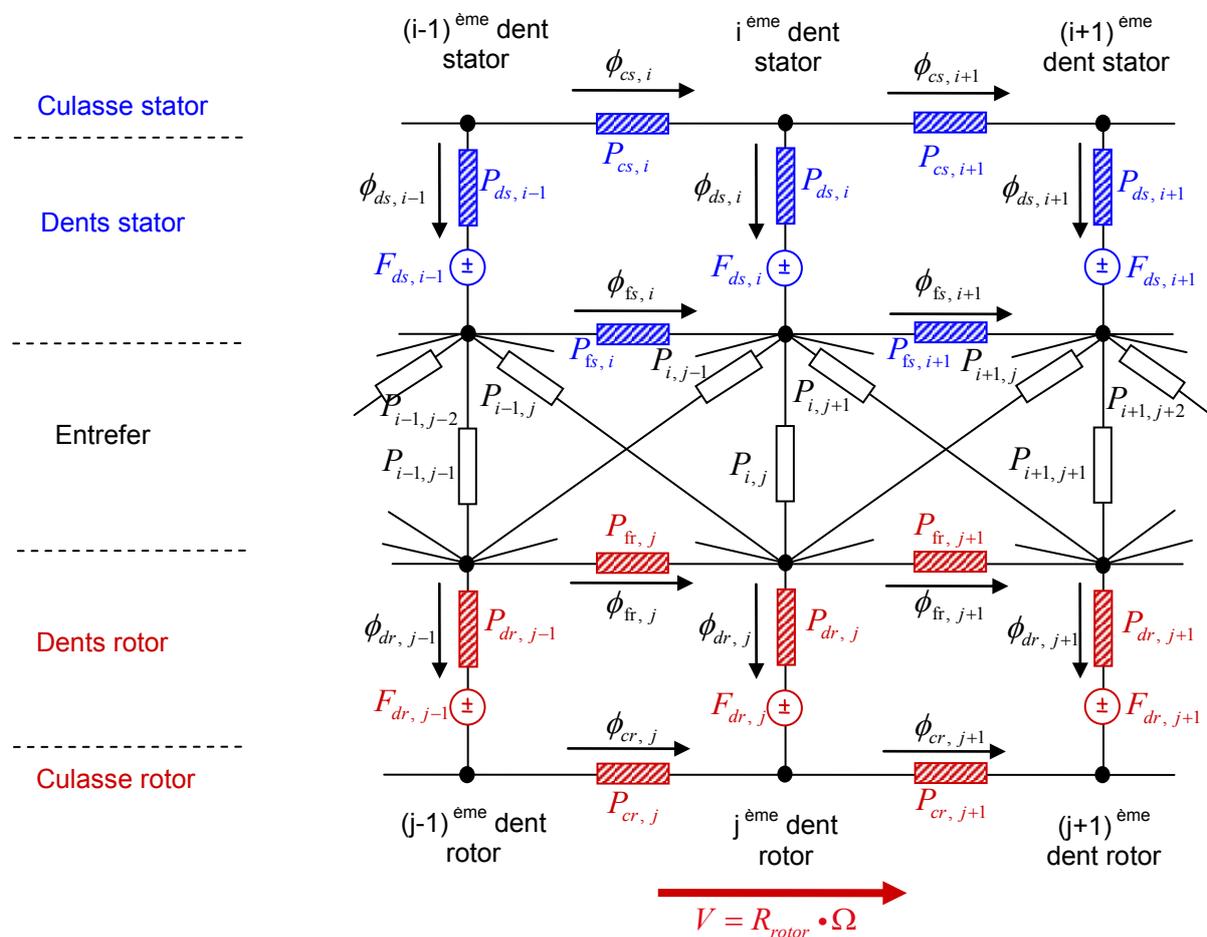


**Figure II-14 :** *Vue axiale d'une machine asynchrone*

La Figure II-15 montre une partie du circuit magnétique équivalent d'une machine à induction. Seules trois dents statoriques et rotoriques sont représentées dans ce schéma par des branches verticales. Pour modéliser les autres éléments de la machine, la culasse est discrétisée en tubes de flux entre deux dents adjacentes du stator ou du rotor. Chaque tube de flux élémentaire de la culasse est caractérisé par sa perméance ( $P_{cs,i}$  pour un élément entre les dents statoriques  $i-1$  et  $i$  ; et  $P_{cr,j}$  pour un élément entre les dents rotoriques  $j-1$  et  $j$ ) et représenté dans le réseau par une branche horizontale (Figure II-15). En outre, pour caractériser convenablement la machine à induction, il faudra tenir compte de la présence des trajets secondaires des lignes d'induction dans l'air entre les dents adjacentes. On considère

ainsi des tubes de flux à l'ouverture des encoches dans le modèle pour canaliser les lignes d'induction secondaires et on introduit les perméances de fuites correspondantes dans le réseau magnétique par des branches horizontales liant les nœuds des pieds des dents adjacentes au stator ou au rotor (soient  $P_{fs,i}$  la perméance du tube de flux de fuite reliant les pieds de dents statoriques  $i-1$  et  $i$  ; et  $P_{fr,j}$  la perméance du tube de flux de fuite reliant les pieds de dents rotoriques  $j-1$  et  $j$ ).

Les indices  $i$  et  $j$  représentés dans la Figure II-15 varient respectivement de 1 jusqu'à  $n_{ds}$  et de 1 jusqu'à  $n_{dr}$  dans le cas d'une machine à une paire de poles, avec  $n_{ds}$ , le nombre de dents statoriques et  $n_{dr}$ , le nombre de dents rotoriques.



**Figure II-15 :** Une partie du circuit magnétique équivalent d'une machine à induction

Le réseau de perméance complet de la machine asynchrone étudiée est donc composé de  $n_n$  nœuds répartis sur quatre niveaux. On a  $n_{ds}$  nœuds au niveau de la culasse statorique,  $n_{ds}$  nœuds au niveau des têtes des dents statoriques,  $n_{dr}$  nœuds au niveau des têtes des dents rotoriques et  $n_{dr}$  nœuds au niveau de la culasse rotorique. Le nombre total des nœuds dans le réseau est :

$$n_n = 2n_{ds} + 2n_{dr} \quad (\text{II.57})$$

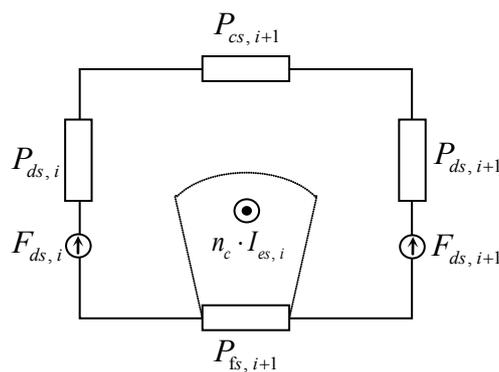
A chacun de ces nœuds est associé un potentiel magnétique. Par analogie avec les circuits électriques, il faut définir un nœud de référence auquel le potentiel magnétique est nul. Dans le cas de cette étude, le nœud de référence choisi est le dernier nœud au niveau de la culasse rotorique. Puisque les nœuds du réseau sont numérotés de gauche à droite dans un même niveau puis du haut en bas pour passer d'un niveau à un autre, le numéro du nœud de référence est donc  $2n_{ds} + 2n_{dr}$ .

Les nœuds du réseau sont liés par des branches actives ou passives. Les branches verticales représentant les dents statoriques et rotoriques sont des branches actives. Chacune d'elles est représentée par une perméance caractérisant le tube de flux qui canalise les lignes d'induction passant à travers la dent correspondante au stator ou au rotor. Cette perméance est en série avec une source de force magnétomotrice induite du courant qui parcourt les conducteurs passant dans les encoches. On notera par la suite  $F_{ds,i}$  la source de force magnétomotrice correspondante à la  $i^{\text{ème}}$  dent du stator et  $F_{dr,j}$  la source de force magnétomotrice correspondante à la  $j^{\text{ème}}$  dent du rotor.

En considérant la cellule élémentaire statorique du réseau de perméances (Figure II-16) et en se basant sur les lois magnétiques et électriques classiques, la relation liant les sources de forces magnétomotrices induites dans les dents  $i$  et  $i+1$  du stator au courant passant à travers l'encoche  $i$  est:

$$F_{ds,i} - F_{ds,i+1} = -n_c I_{es,i} \quad (\text{II.58})$$

avec  $n_c$ , le nombre de conducteurs par encoche et  $I_{es,i}$ , le courant parcourant l'encoche  $i$ .



**Figure II-16 :** Cellule élémentaire statorique du réseau perméance

Toutes les autres branches du réseau sont passives et sont modélisées par des perméances caractérisant les tubes de flux correspondant dans le fer ou dans l'air. Toutes les perméances du réseau sont calculées en se basant sur l'équation (II.56).

L'entrefer représente la partie la plus importante dans un moteur asynchrone parce qu'il est le siège de la génération du couple électromagnétique. Les lignes de champ traversant l'entrefer sont canalisées dans des tubes de flux reliant les dents du stator à celles du rotor. Chacun de ces tubes est caractérisé par une perméance unique. Par exemple,  $P_{i,j}$  représente la perméance du tube de flux qui relie la  $i^{\text{ème}}$  dent du stator à la  $j^{\text{ème}}$  dent du rotor (voir Figure II-15).

Sachant qu'on a  $n_{ds}$  et  $n_{dr}$  dents au stator et au rotor, on peut donc avoir  $n_{ds} \cdot n_{dr}$  perméances caractérisant les tubes de flux dans l'entrefer. Toutefois, la majorité de ces perméances sont nulles parce qu'à chaque position angulaire donnée du rotor, une dent du stator peut être en vis-à-vis qu'avec un nombre très limité de dents rotoriques et vice versa. On définit ainsi le nombre total de branches dans l'entrefer, noté  $n_{bent}$ , représentant seulement les branches qui caractérisent les tubes de flux entre les dents réellement en vis-à-vis. Ce nombre est variable et il sera réactualisé à chaque position du rotor. Cette hypothèse diminue considérablement le nombre de branches dans l'entrefer, et par suite, réduit la taille des matrices qui décrivent la topologie du réseau, le sens des flux et les perméances des tubes de flux ainsi que les vecteurs représentant les flux passants par les branches de réseau et les différences de potentiels magnétiques entre les nœuds adjacents.

Dans la continuité de cette approche, le nombre de branches total du réseau de perméance varie d'une position angulaire du rotor à une autre. Cette variation est due au changement de la position des dents du rotor par rapport à celles du stator au niveau de l'entrefer. On définit ainsi le nombre de branches total  $n_b$  dans le réseau :

$$n_b = 3n_{ds} + 3n_{dr} + n_{bent} \quad (\text{II.59})$$

avec  $n_{bent}$  est le nombre de branches total dans l'entrefer (variable). Dans notre cas d'étude, le nombre de branches total dans l'entrefer varie entre 96 et 102 pour un angle d'inclinaison des barres rotoriques de 10 degrés.

### II.5.2.2. Modèle de l'entrefer

On considère un couple de dents quelconque (la  $i^{\text{ème}}$  dent du stator et la  $j^{\text{ème}}$  dent du rotor) et on désigne par  $P_{i,j}$  la perméance qui caractérise le tube de flux entre ces deux dents. La Figure II-17 montre l'évolution du tube de flux pour différentes positions angulaires du rotor. Au cours du mouvement du rotor, la section du tube de flux varie d'une valeur maximale (position 1) à une valeur nulle (position 5).

Du côté de l'entrefer, les largeurs des dents statoriques et rotoriques ne sont jamais égales. La section du tube de flux reste donc constante sur un intervalle de positions angulaires du rotor et la perméance  $P_{i,j}$  est constante et maximale quelque soit la position

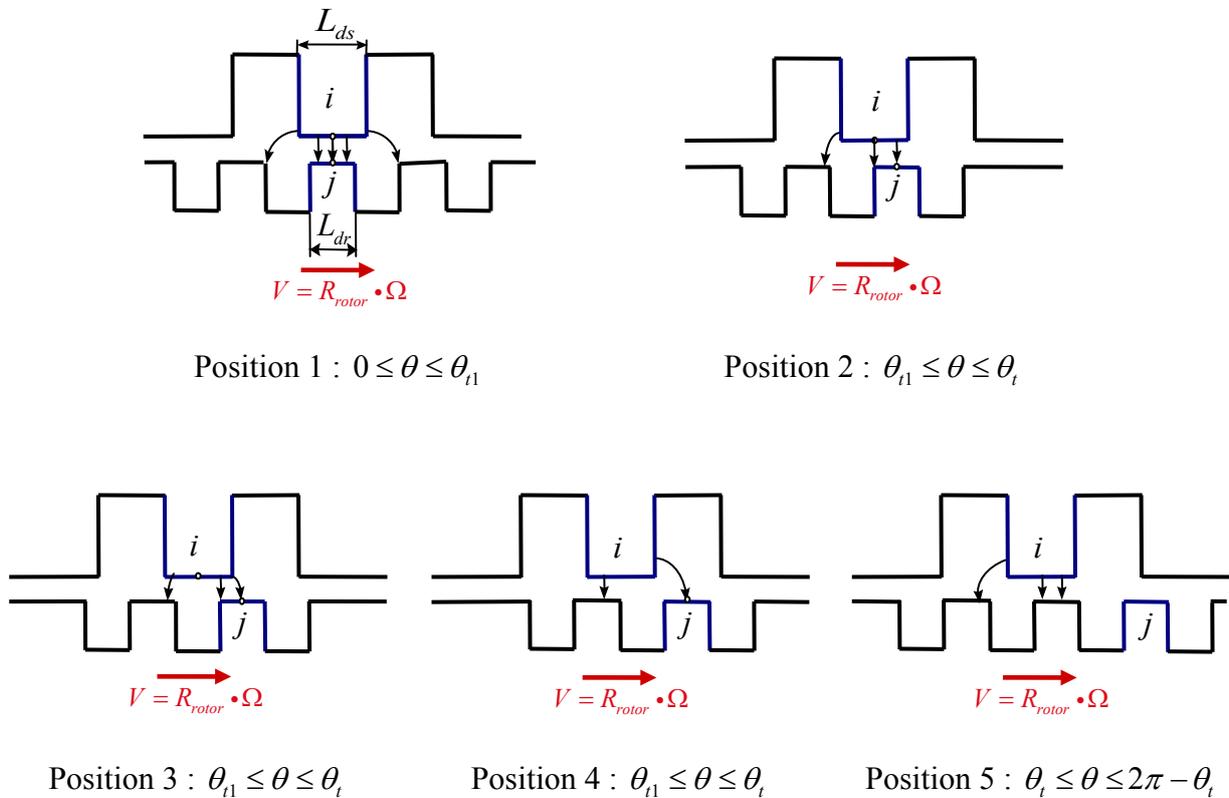
relative entre les deux dents  $i$  et  $j$  dans cet intervalle. La première position représentée dans la Figure II-17 correspond à une perméance maximale  $P_{\max}$  dont l'expression est donnée par l'équation (II.60) :

$$P_{\max} = \frac{\mu_0 L_m L_{d\min}}{e} \quad (\text{II.60})$$

avec  $\mu_0$ , la perméabilité absolue de l'air,  $L_m$ , la longueur active de la machine suivant son axe,  $L_{d\min} = \min(L_{ds}, L_{dr})$ ,  $L_{ds}$  largeur d'une dent stator,  $L_{dr}$  largeur d'une dent rotor et  $e$  est l'épaisseur de l'entrefer.

L'équation (II.60) n'est valable que dans le cas où les dents statoriques et rotoriques ne sont pas inclinées et l'épaisseur de l'entrefer  $e$  est constante (c'est-à-dire en l'absence d'excentricité sur le rotor). Pour les autres cas, la perméance maximale  $P_{\max}$  sera recalculée comme explicité plus loin dans les paragraphes II.5.2.3 et II.5.2.4.

Au cours de la rotation du rotor dans le sens de la vitesse représenté dans la Figure II-17, la section du tube de flux diminue progressivement de la position 2 à la position 4 pour devenir nulle à la position 5. Dans ce cas, les deux dents ne sont plus en vis-à-vis, le tube de flux disparaît et la perméance  $P_{i,j}$  devient nulle.



**Figure II-17 :** Evolution du tube de flux en fonction de la position angulaire du rotor

Pour suivre l'évolution du tube de flux dans l'entrefer, un tour du rotor est divisé en plusieurs intervalles angulaires en fonction de la variation de la perméance dans ces intervalles. La perméance  $P_{i,j}$  entre un couple de dent  $i$  et  $j$  quelconque est donc définie par l'équation (II.61) sur 4 intervalles angulaires répartis sur un tour du rotor :

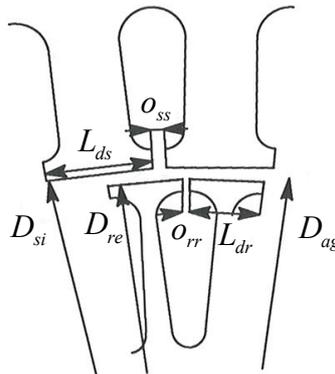
$$P_{i,j}(\theta) = \begin{cases} P_{\max} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \theta_{t1} \text{ et } 2\pi - \theta_{t1} \leq \theta \leq 2\pi \\ P_{\max} \frac{1 + \cos \pi \frac{\theta - \theta_{t1}}{\theta_t - \theta_{t1}}}{2} & \text{si } \theta_{t1} \leq \theta \leq \theta_t \\ P_{\max} \frac{1 + \cos \pi \frac{\theta - 2\pi + \theta_{t1}}{\theta_t - \theta_{t1}}}{2} & \text{si } 2\pi - \theta_t \leq \theta \leq 2\pi - \theta_{t1} \\ 0 & \text{si } \theta_t \leq \theta \leq 2\pi - \theta_t \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

avec  $\theta_t = \frac{L_{ds} + L_{dr} + o_{ss} + o_{rr}}{D_{ag}}$ ,  $\theta_{t1} = \frac{|L_{ds} - L_{dr}|}{D_{ag}}$  et  $D_{ag} = \frac{D_{si} + D_{re}}{2}$

Cette fonction est de période  $2\pi$  de sorte que:

$$P_{i,j}(\theta + 2\pi) = P_{i,j}(\theta) \quad (\text{II.62})$$

La Figure II-18 montre les différentes dimensions des encoches, des dents statoriques et rotoriques nécessaires pour dimensionner les tubes de flux entre les dents dans l'entrefer et par la suite calculer les perméances correspondantes.



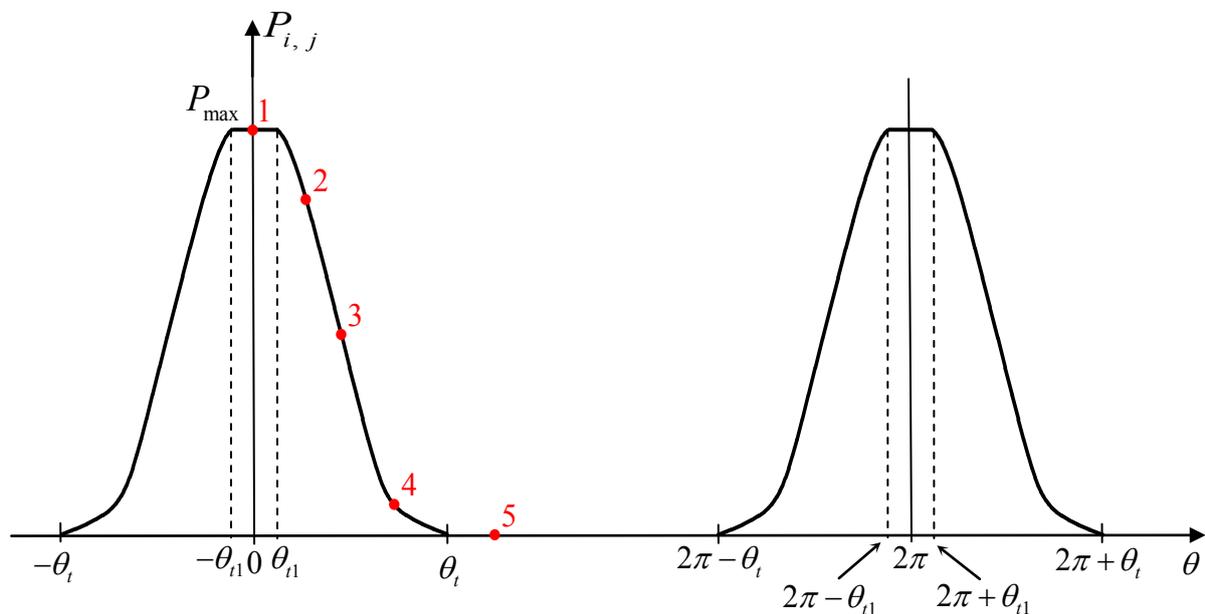
**Figure II-18 :** Dimensions des encoches et des dents du côté de l'entrefer

D'après la Figure II-18, on définit les paramètres suivants :

- $L_{ds}$  : Largeur d'une dent statorique du côté de l'entrefer.
- $L_{dr}$  : Largeur d'une dent rotorique du côté de l'entrefer.
- $o_{ss}$  : Ouverture d'une encoche statorique.

- $o_{rr}$  : Ouverture d'une encoche rotorique.
- $D_{si}$  : Diamètre intérieur du stator.
- $D_{re}$  : Diamètre extérieur du rotor.
- $D_{ag}$  : Diamètre moyen d'entrefer.

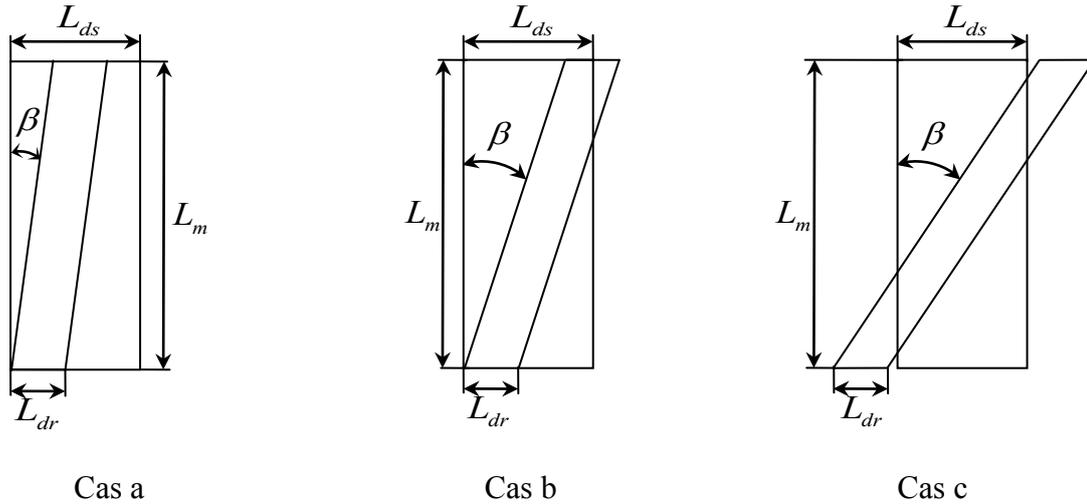
La fonction  $P_{i,j}(\theta)$ , définie dans l'équation (II.61), est tracée dans la Figure II-19 en précisant les différentes positions angulaires présentées dans la Figure II-17 (positions 1 à 5). L'axe des abscisses (positions angulaires du rotor par rapport au stator) montre les différents intervalles angulaires pris en compte pour définir la fonction  $P_{i,j}(\theta)$ . La Figure II-19 illustre la périodicité de l'évolution de la perméance d'entrefer d'un couple de dents du stator et du rotor.



**Figure II-19** : Perméance d'entrefer entre deux dents quelconque du stator et du rotor

### II.5.2.3. Influence de l'inclinaison des barres

Lorsque les barres rotoriques sont inclinées, les tubes de flux dans l'entrefer ne sont plus rectangulaires et les perméances caractérisant ces tubes sont modifiées. Les différents paramètres  $P_{max}$ ,  $\theta_t$  et  $\theta_{t1}$  de la fonction des perméances d'entrefer (II.61) sont recalculés en respectant l'angle d'inclinaison des barres rotoriques  $\beta$ . Trois différentes combinaisons des dents statoriques et rotoriques sont possibles selon l'angle  $\beta$  comme représenté sur la Figure II-20 ci-dessous.



**Figure II-20 :** Différents cas d'inclinaison des barres rotoriques

Le paramètre  $\theta_i$  reste constant pour toutes les combinaisons indépendamment de l'angle  $\beta$  et s'exprime:

$$\theta_i = \frac{L_{ds} + L_{dr} + o_{ss} + o_{rr} + L_m \tan \beta}{D_{ag}} \quad (\text{II.63})$$

Les paramètres  $P_{\max}$  et  $\theta_{i1}$  sont modifiés et, selon les cas détaillés dans la Figure II-20, on obtient :

Cas a :

Dans ce cas, l'inclinaison est suffisamment petite pour que la totalité de la dent rotorique se situe en vis-à-vis de la dent statorique, il vient alors selon [19]:

$$0 \leq \tan \beta \leq \frac{L_{ds} - L_{dr}}{L_m} \quad (\text{II.64})$$

$$\theta_{i1} = \frac{L_{ds} - L_{dr} - L_m \tan(\beta)}{D_{ag}} \quad (\text{II.65})$$

$$P_{\max} = \frac{\mu_0 L_m L_{dr}}{e} \quad (\text{II.66})$$

Cas b :

La dent rotorique ne peut pas se trouver totalement en vis-à-vis de la dent statorique et des développements supplémentaires sont nécessaires en raison de la dépendance plus complexe entre la surface commune des deux dents et l'angle d'inclinaison  $\beta$ . Il en résulte selon [19] :

$$\frac{L_{ds} - L_{dr}}{L_m} \leq \tan \beta \leq \frac{L_{ds} + L_{dr}}{L_m} \quad (\text{II.67})$$

$$\theta_{r1} = 0 \quad (\text{II.68})$$

$$P_{\max} = \frac{\mu_0}{e} \left( L_m \frac{L_{ds} + L_{dr}}{2} - \frac{L_m^2 \tan \beta}{4} - \frac{(L_{ds} - L_{dr})^2}{4 \tan \beta} \right) \quad (\text{II.69})$$

Cas c :

Dans ce cas, la dent rotorique n'est pas totalement en vis-à-vis de la dent statorique. La surface commune entre les deux dents est plus petite par rapport aux deux cas précédents (a et b). D'après [19], on a :

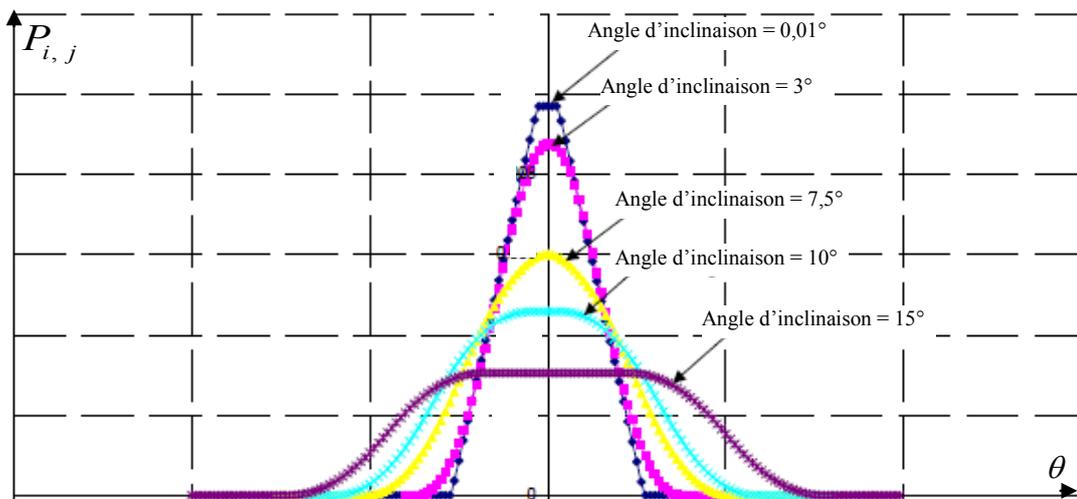
$$\tan \beta \geq \frac{L_{ds} + L_{dr}}{L_m} \quad (\text{II.70})$$

$$\theta_{r1} = \frac{L_m \tan \beta - L_{ds} - L_{dr}}{D_{ag}} \quad (\text{II.71})$$

$$P_{\max} = \frac{\mu_0}{e} \frac{L_{ds} L_{dr}}{\tan \beta} \quad (\text{II.72})$$

Les trois cas précédents s'appliquent également lorsque la largeur des dents statoriques est inférieure à celle des dents rotoriques. Dans ce cas, il convient d'utiliser les équations développées précédemment (de (II.67) à (II.72)) en permutant les indices des largeurs des dents entre le rotor et le stator.

La Figure II-21 montre l'effet de l'angle d'inclinaison des barres rotoriques sur la fonction de perméance d'entrefer.



**Figure II-21 :** Variation de la fonction de perméance d'entrefer en fonction de l'angle d'inclinaison des barres rotoriques

Dans la Figure II-21, les courbes représentant les fonctions de perméance d'entrefer ont tendance à être plates et larges avec des valeurs maximales faibles pour les grands angles d'inclinaison. En effet, l'augmentation de l'angle d'inclinaison entraîne un intervalle de recouvrement plus grand et une diminution de la valeur maximale de la fonction de perméance d'entrefer. L'inclinaison entraîne donc une diminution des harmoniques d'encoches et par conséquent, de couple électromagnétique généré par la machine.

#### *II.5.2.4. Modèle de l'excentricité du rotor*

Dans une machine électrique à induction, l'axe du rotor n'est jamais parfaitement aligné à celui du stator. Cette excentricité représente une source de forces radiales, de vibrations et du bruit dans la machine. Les variations de l'épaisseur d'entrefer conduit à une distorsion des tubes de flux d'entrefer, à des fluctuations de la densité du flux traversant l'entrefer et à une modification des spectres des courants statoriques.

Selon [19], l'épaisseur de l'entrefer dépend de la position angulaire relative du rotor et peut être approximée par :

$$e_r(\theta) = e - \varepsilon \cos(\theta - \varphi) \quad (\text{II.73})$$

avec  $\varepsilon$  et  $\varphi$  représentent respectivement l'amplitude et la phase de l'excentricité statique. Ces paramètres seront définis ultérieurement en tenant compte du couplage électromécanique avec la présence des défauts d'engrenages.

Dans ce mémoire, seule l'excentricité statique a été prise en compte dans la modélisation des défauts du moteur. Elle est introduite par rapport au comportement dynamique du train d'engrenage mené par le moteur dans le cas d'engrenages sains et défectueux. Des extensions du modèle sont possibles afin de considérer et d'étudier l'excentricité dynamique en découpant la machine à induction en plusieurs éléments le long de son axe.

#### *II.5.2.5. Mise en équations*

Par analogie avec les circuits électriques, le circuit magnétique équivalent de la machine asynchrone est mis en équations pour pouvoir résoudre son comportement magnétique. Le réseau peut être décrit par un modèle mathématique tenant compte des caractéristiques de ses composants et des relations d'interconnexion entre ces différents constituants. Le réseau de perméances est donc représenté de manière systématique par un ensemble de matrices qui facilitent la résolution mathématique et informatique du modèle. Les trois matrices qui décrivent le réseau de perméances sont la matrice d'incidence, la matrice d'admittance et la matrice de transfert.

**a) Matrice d'incidence**

C'est la matrice qui décrit les interconnexions entre les différents composants du réseau de perméances. Les termes de cette matrice sont 1, 0 et -1. Ils représentent le lien entre les branches et les nœuds du réseau en précisant l'orientation des flux. Soit  $[A'] = [a_{ij}]$ , la matrice d'incidence du réseau dont la dimension est égale à  $n_n \times n_b$  où  $n_n$  et  $n_b$  sont respectivement le nombre de nœuds et le nombre de branche du réseau, cette matrice est définie comme suit [75]:

$$[A']_{n_n \times n_b} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_n,1} & \dots & a_{n_n,n_b} \end{pmatrix} \quad (\text{II.74})$$

avec :

- $a_{ij} = 1$  si la  $j^{\text{ème}}$  arête est incidente au sommet  $i$  et s'éloignant du sommet.
- $a_{ij} = -1$  si la  $j^{\text{ème}}$  arête est incidente au sommet  $i$  et orienté vers le sommet.
- $a_{ij} = 0$  si la  $j^{\text{ème}}$  arête n'est pas incidente au sommet  $i$ .

Lors de la construction de cette matrice, la propriété suivante doit être satisfaite.

$$\sum_{j=1}^{n_b} a_{ij} = 0 \quad (\text{II.75})$$

Dans le cas cette étude, le nœud, numéro  $2n_{ds} + 2n_{dr}$  (dernier nœud au niveau de la culasse rotorique), a été choisi comme étant nœud de référence. Il s'agit donc de définir une matrice d'incidence réduite  $[A]$  en éliminant la dernière ligne la matrice d'incidence  $[A']$ . La dimension de cette matrice réduite est  $(n_n - 1) \times n_b$ .

**b) Matrice d'admittance**

La matrice d'admittance, notée  $[Y]$ , est une matrice diagonale de dimension  $n_b \times n_b$ . Elle se compose de toutes les perméances des branches du réseau et s'écrit:

$$[Y]_{n_b \times n_b} = \begin{pmatrix} P_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & P_{n_b} \end{pmatrix} \quad (\text{II.76})$$

avec  $P_k$  est la perméance de la branche  $k$  où  $k$  varie de 1 jusqu'à  $n_b$ . Les perméances sont directement calculées à partir des caractéristiques magnétiques et géométriques.

**c) Matrice de transfert**

Pour décrire le comportement électromagnétique, on introduit :

- la matrice de transfert, notée  $[Y_{bus}]$ , qui relie le vecteur  $\{E_{bus}\}$  formé par l'ensemble des tensions nodales et le vecteur  $\{I_{bus}\}$  formé par l'ensemble des courants injectés aux nœuds du réseau,
- le vecteur  $\{\phi_{bus}\}$ , analogue au vecteur  $\{I_{bus}\}$ , représentant l'ensemble des flux magnétiques injectés aux nœuds du réseau de perméances.

On a donc la relation :

$$\{\phi_{bus}\} = [Y_{bus}]\{E_{bus}\} \quad (II.77)$$

La matrice de transfert  $[Y_{bus}]$ , encore appelée matrice d'admittance nodale, est une matrice carrée de dimension  $(n_n - 1) \times (n_n - 1)$  et elle est définie comme suit :

$$[Y_{bus}]_{(n_n-1) \times (n_n-1)} = [A][Y][A]^T \quad (II.78)$$

**d) Calcul des forces magnétomotrices**

La modélisation électromagnétique des machines à induction nécessite la prise en considération, dans le schéma magnétique équivalent, des courants circulant dans les encoches statoriques ainsi que ceux induits dans les barres rotoriques. La distribution des densités de courant est considérée uniforme.

En se basant sur l'équation (II.58) développée précédemment, la relation matricielle reliant les forces magnétomotrices aux courants de phase traversant les encoches est donnée par :

$$[E_{as}]_{n_{ds} \times n_{ds}} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} = n_c \{I_{es}\}_{n_{ds} \times 1} \quad (II.79)$$

où  $\{I_{es}\}$  est le vecteur formé par les courants parcourant les encoches statoriques,  $\{F_{ds}\}$  est le vecteur formé par les forces magnétomotrices induites dans les dents statoriques et

$$[E_{as}]_{n_{ds} \times n_{ds}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour la résolution, et compte tenu que nous alimentons la machine par un régime de tensions équilibrées triphasées sinusoïdales, nous avons imposé que la somme des forces magnétomotrices est nulle.

$$\sum_{i=1}^{n_{ds}} F_{ds,i} = 0 \quad (\text{II.80})$$

Dans ce cas, la somme des courants parcourant les encoches statoriques est nulle.

L'apparition de sources de forces magnétomotrices dans le circuit magnétique rotorique est due essentiellement aux courants parcourant les barres et les anneaux de la cage. La relation (II.81) décrit les équations de passage entre les courants dans les barres et les forces magnétomotrices induites dans les dents. Ce modèle de calcul des forces magnétomotrices est similaire à celui du stator (II.79).

$$[E_{ar}]_{n_{dr} \times n_{dr}} \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} = \{I_{br}\}_{n_{dr} \times 1} \quad (\text{II.81})$$

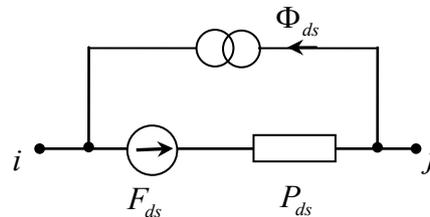
avec

- $\{I_{br}\}$ , le vecteur formé par les courants parcourant les barres rotoriques,
- $\{F_{dr}\}$ , le vecteur formé par les forces magnétomotrices induites dans les dents rotoriques
- $[E_{ar}]$  est une matrice, de dimension  $n_{dr} \times n_{dr}$ , formée de la même façon que  $[E_{as}]$ .

**e) Construction directe du vecteur  $\{\phi_{bus}\}$**

En parcourant toutes les branches du réseau, on construit  $\{\phi_{bus}\}$  en ajoutant les contributions de chaque ligne lorsqu'un générateur est rencontré. Dans le cas de la Figure II-22, le vecteur  $\{\phi_{bus}\}$  peut être écrit sous la forme suivante [76] :

$$\{\phi_{bus}\} = \begin{cases} \Phi_{ds} - P_{ds} \cdot F_{ds} & \text{ligne } i \\ -\Phi_{ds} + P_{ds} \cdot F_{ds} & \text{ligne } j \end{cases} \quad (\text{II.82})$$



**Figure II-22 :** Exemple de branche d'un réseau entre les nœuds  $i$  et  $j$  dans le cas d'une branche active

On construit ainsi le vecteur des flux magnétiques injectés aux nœuds du réseau de perméance de la machine étudiée. On obtient ainsi le vecteur suivant des flux nodaux composé de  $(n_n - 1)$  éléments (le nombre d'éléments est  $(n_n - 1)$  parce que nous travaillons avec la matrice incidence réduite) :

$$\{\phi_{bus}\}_{(n_n-1) \times 1} = \left\{ \begin{array}{l} P_{ds} \cdot \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ -P_{ds} \cdot \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ P_{dr} \cdot \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \\ -P_{dr} \cdot \{F_{dr}\}_{(n_{dr}-1) \times 1} \end{array} \right\} \quad (\text{II.83})$$

où  $P_{ds}$  et  $P_{dr}$  sont respectivement les perméances d'une dent statorique et rotorique, elles sont identiques pour toutes les dents du stator ou du rotor ;  $\{F_{ds}\}$  et  $\{F_{dr}\}$  sont respectivement les vecteurs formés par l'ensemble des forces magnétomotrices des dents statoriques et rotoriques.

#### f) Calcul des flux traversant toutes les branches du réseau

Le vecteur  $\{\phi_{br}\}$  est formé des flux magnétiques parcourant toutes les branches du réseau de perméances. Il est composé de  $n_b$  éléments et il est défini par :

$$\{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} = \left\{ \begin{array}{l} \{\phi_{cs}\}_{n_{cs} \times 1} \\ \{\phi_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{\phi_{fs}\}_{n_{fs} \times 1} \\ \{\phi_{ent}\}_{n_{bent} \times 1} \\ \{\phi_{fr}\}_{n_{dr} \times 1} \\ \{\phi_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \\ \{\phi_{cr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{array} \right\}_{n_b \times 1} \quad (\text{II.84})$$

où  $\{\phi_{cs}\}$  et  $\{\phi_{cr}\}$  sont respectivement les vecteurs des flux magnétiques traversant les branches du culasse statorique et rotorique ;  $\{\phi_{ds}\}$  et  $\{\phi_{dr}\}$ , les vecteurs des flux magnétiques traversant les dents statoriques et rotoriques ;  $\{\phi_{fs}\}$  et  $\{\phi_{fr}\}$ , les vecteurs des flux magnétiques traversant les branches de fuite statoriques et rotoriques et, enfin,  $\{\phi_{ent}\}$ , le vecteur des flux magnétiques traversant les branches d'entrefer.

En appliquant les lois classiques des circuits électriques sur le réseau magnétique, on obtient la relation suivante :

$$\{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} = [Y]_{n_b \times n_b} \{V_{mag}\}_{n_b \times 1} - \left\{ \begin{array}{l} \{0\}_{n_{ds} \times 1} \\ P_{ds} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{0\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{0\}_{n_{bent} \times 1} \\ \{0\}_{n_{dr} \times 1} \\ P_{dr} \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \\ \{0\}_{n_{dr} \times 1} \end{array} \right\}_{n_b \times 1} \quad (\text{II.85})$$

où  $\{V_{mag}\}$  est le vecteur des différences de potentiels magnétiques dans toutes les branches du réseau de perméances et il est composé de  $n_b$  éléments. Ce vecteur s'écrit en fonction du vecteur des potentiels magnétiques nodaux sous la forme matricielle suivante :

$$\{V_{mag}\}_{n_b \times 1} = [A]_{n_b \times (n_n - 1)}^T \{E_{bus}\}_{(n_n - 1) \times 1} \quad (\text{II.86})$$

avec  $[A]_{n_b \times (n_n - 1)}^T$ , la matrice transposée de la matrice d'incidence réduite.

Il vient alors :

$$\{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} = [Y]_{n_b \times n_b} [A]_{n_b \times (n_n - 1)}^T \{E_{bus}\}_{(n_n - 1) \times 1} - [D]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} \left\{ \begin{array}{l} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{array} \right\} \quad (\text{II.87})$$

$$\text{avec : } [D]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} = \begin{bmatrix} [0]_{n_{ds} \times n_{ds}} & [0]_{n_{ds} \times n_{dr}} \\ [P_{ds}]_{n_{ds} \times n_{ds}} & [0]_{n_{ds} \times n_{dr}} \\ [0]_{n_{ds} \times n_{ds}} & [0]_{n_{ds} \times n_{dr}} \\ [0]_{n_{bent} \times n_{ds}} & [0]_{n_{bent} \times n_{dr}} \\ [0]_{n_{dr} \times n_{ds}} & [0]_{n_{dr} \times n_{dr}} \\ [0]_{n_{dr} \times n_{ds}} & [P_{dr}]_{n_{dr} \times n_{dr}} \\ [0]_{n_{dr} \times n_{ds}} & [0]_{n_{dr} \times n_{dr}} \end{bmatrix}$$

avec  $[P_{ds}]$  et  $[P_{dr}]$ , des matrices diagonales composées par les perméances des dents statoriques et rotoriques.

Sachant que :

$$\{E_{bus}\}_{(n_n - 1) \times 1} = [Y_{bus}]^{-1} \{\phi_{bus}\}_{(n_n - 1) \times 1} \quad (\text{II.88})$$

on obtient :

$$\{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} = [Y]_{n_b \times n_b} [A]_{n_b \times (n_n-1)}^T [Y_{bus}]_{(n_n-1) \times (n_n-1)}^{-1} \{\phi_{bus}\}_{(n_n-1) \times 1} - [D]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} \begin{Bmatrix} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.89})$$

$$\{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} = [Y]_{n_b \times n_b} [A]_{n_b \times (n_n-1)}^T [Y_{bus}]_{(n_n-1) \times (n_n-1)}^{-1} [H]_{(n_n-1) \times (n_{ds} + n_{dr})} \begin{Bmatrix} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{Bmatrix} - [D]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} \begin{Bmatrix} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.90})$$

$$\text{avec : } [H]_{(n_n-1) \times (n_{ds} + n_{dr})} = \begin{bmatrix} [P_{ds}]_{n_{ds} \times n_{ds}} & [0]_{n_{ds} \times n_{dr}} \\ -[P_{ds}]_{n_{ds} \times n_{ds}} & [0]_{n_{ds} \times n_{dr}} \\ [0]_{n_{dr} \times n_{ds}} & [P_{dr}]_{n_{dr} \times n_{dr}} \\ [0]_{(n_{dr}-1) \times n_{ds}} & -[P_{dr}]_{(n_{dr}-1) \times n_{dr}} \end{bmatrix}$$

Finalement, la relation entre le vecteur des flux magnétiques parcourant toutes les branches du réseau de perméances et le vecteur des forces magnétomotrices est donnée par :

$$\{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} = [XX]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} \begin{Bmatrix} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.91})$$

$$\text{avec } [XX]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} = \left[ [Y]_{n_b \times n_b} [A]_{n_b \times (n_n-1)}^T [Y_{bus}]_{(n_n-1) \times (n_n-1)}^{-1} [H]_{(n_n-1) \times (n_{ds} + n_{dr})} - [D]_{n_b \times (n_{ds} + n_{dr})} \right]$$

### II.5.3. Equations électriques

#### II.5.3.1. Equations statoriques

La relation entre les courants dans les encoches et les courants de phase est donnée par l'équation suivante :

$$\{I_{es}\}_{n_{ds} \times 1} = [S_{abc}]_{n_{ds} \times n_{ph}} \{I_s\}_{n_{ph} \times 1} \quad (\text{II.92})$$

où  $\{I_{es}\}_{n_{ds} \times 1}$  est le vecteur des courants traversant les encoches statoriques,  $\{I_s\}_{n_{ph} \times 1}$  est le vecteur des courants traversant les phases statoriques,  $[S_{abc}]$  est une matrice de dimension  $n_{ds} \times n_{ph}$  qui relie les courants de phases aux courants d'encoches et  $n_{ph} = 3$  est le nombre de phases statoriques.

Nous rappelons que le moteur asynchrone est connecté à une source triphasé ( $n_{ph} = 3$ ) de tensions sinusoïdales équilibrées (on suppose que les tensions appliquées aux phases de la machine sont à somme nulle), l'équation décrivant son comportement électrique s'écrit sous la forme matricielle de l'équation (II.93) :

$$[L_{fs}]_{n_{ph} \times n_{ph}} \frac{d}{dt} \{I_s\}_{n_{ph} \times 1} + [R_s]_{n_{ph} \times n_{ph}} \{I_s\}_{n_{ph} \times 1} = \{V_s\}_{n_{ph} \times 1} - \frac{d}{dt} \{\phi_s\}_{n_{ph} \times 1} \quad (II.93)$$

avec :

$$- [L_{fs}]_{n_{ph} \times n_{ph}} = \begin{bmatrix} L_{fs} & 0 & 0 \\ 0 & L_{fs} & 0 \\ 0 & 0 & L_{fs} \end{bmatrix} \text{ avec } L_{fs}, \text{ l'inductance de fuite d'une phase statorique.}$$

$$- [R_s]_{n_{ph} \times n_{ph}} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \text{ avec } R_s, \text{ la résistance d'une phase statorique.}$$

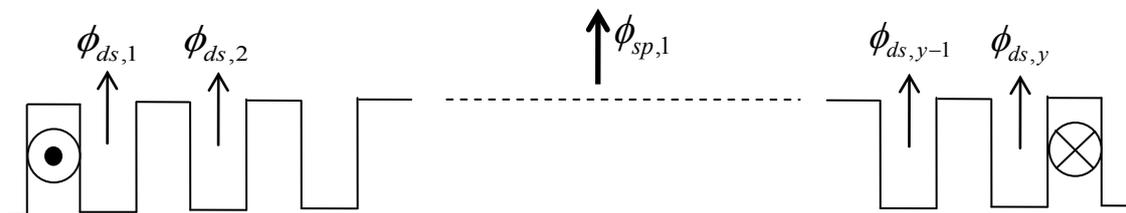
-  $\{V_s\}_{n_{ph} \times 1}$  : vecteur des tensions d'alimentation triphasée du stator.

-  $\{\phi_s\}_{n_{ph} \times 1}$  : vecteur des flux embrassés par les phases statoriques.

-  $\frac{d}{dt} \{\phi_s\}$  : vecteur des forces électromotrices induites dans les phases du stator.

Dans le cas où le moteur asynchrone serait connecté à un onduleur de tension connecté à une source continue, la somme des tensions appliquées aux phases de la machine n'est pas nulle. Nous devrions ajouter d'autres étapes après l'équation (II.93) : a) écrire les équations de tension en d-q (ou en alpha-beta) en appliquant les transformation de Park (ou de Concordia) et de forcer la composante homopolaire (ih) à zéro, b) résoudre ces équations de tension dans le nouveau repère d-q (ou alpha-beta) pour obtenir  $i_d$  et  $i_q$  (ou  $i_{\alpha}$  et  $i_{\beta}$ ), c) et enfin, déterminer les courants des phases avec la transformation adéquate en connaissant  $i_h=0$ .

Les forces électromotrices induites aux bornes des enroulements statoriques sont calculées à partir des flux magnétiques passant à travers les dents statoriques situées à l'intérieur d'une surface s'appuyant sur cet enroulement. La Figure II-23 montre les différents types de flux rencontrés dans le stator.



**Figure II-23** : Flux dans les dents et dans la première spire

En se basant sur l'exemple présenté dans la Figure II-23, le flux traversant la première spire peut être exprimé en fonction des flux dans les dents en utilisant l'équation suivante :

$$\phi_{sp,1} = \sum_{i=1}^y \phi_{ds,i} \quad (\text{II.94})$$

où  $\phi_{sp,1}$  est le flux capté par la première spire,  $\phi_{ds,i}$  est le flux capté par la dent  $i$  du stator et  $y$  est le pas de bobinage.

La force électromotrice induite d'une phase statorique est donnée par :

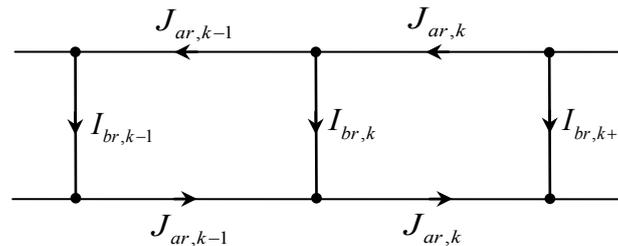
$$E_{s,1} = n_c \sum_{i=1}^{n_{sp}} \frac{d\phi_{sp,i}}{dt} \quad (\text{II.95})$$

avec  $E_{s,1}$ , la force électromotrice induite de la première phase statorique,  $\phi_{sp,i}$ , le flux capté par la spire  $i$  et  $n_{sp}$ , le nombre de spires par phase.

### II.5.3.2. Equations rotoriques

Dans une machine asynchrone à cage d'écureuil, le circuit électrique représente physiquement la cage du rotor qui est composée d'un ensemble de barres régulièrement réparties et liées par deux anneaux de court-circuit (Figure I-3). Lors du fonctionnement de la machine, les barres rotoriques sont le siège de forces électromotrices induites obéissant à la loi Lenz et les anneaux de court-circuit permettent la circulation des courants entre les différentes barres rotoriques. Dans cette partie, le modèle électromagnétique de la machine asynchrone va prendre en compte les phénomènes décrits précédemment.

Les mailles rotoriques sont définies en considérant les deux barres rotoriques adjacentes et les portions d'anneaux de court-circuits correspondantes (Figure II-24).



**Figure II-24 : Définition des mailles rotoriques [49]**

En se basant sur le schéma de la Figure II-24 et en appliquant la loi des nœuds classique aux phases rotoriques, on obtient l'équation (II.96) pour un nœud quelconque :

$$I_{br,k} = J_{ar,k} - J_{ar,k-1} \quad (\text{II.96})$$

où  $I_{br,k}$  et  $J_{ar,k}$  sont respectivement les courants parcourant la barre rotorique  $k$  et la portion d'anneau  $k$ .

D'autre part, pour chaque anneau de court-circuit, la condition (II.97) ci-dessous doit être respectée lors de la résolution du système d'équations qui décrit la machine asynchrone, soit :

$$\sum_{k=1}^{n_{dr}} J_{ar,k} = 0 \quad (\text{II.97})$$

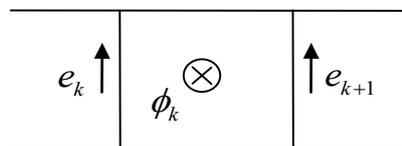
L'équation (II.96) peut être généralisée et écrite sous la forme matricielle (II.98) liant le vecteur des courants parcourant les barres rotoriques  $\{I_{br}\}$  au vecteur des courants parcourant les portions d'anneaux de court-circuit rotoriques  $\{J_{ar}\}$ . Chacun de ces deux vecteurs est composé de  $n_{dr}$  éléments.

$$\{I_{br}\}_{n_{dr} \times 1} = [E_{br}]_{n_{dr} \times n_{dr}} \{J_{ar}\}_{n_{dr} \times 1} \quad (\text{II.98})$$

$$\text{avec : } [E_{br}]_{n_{dr} \times n_{dr}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lors du fonctionnement de la machine asynchrone, le passage des flux magnétiques entre les différents dents du stator et du rotor donne naissance à des forces électromotrices induites dans les barres rotoriques. En appliquant la loi de Lenz pour un flux capté par la phase  $k$  (Figure II-25), on obtient la relation entre le flux capté par une phase rotorique ( $\phi_k$ ) et les forces électromotrices induites dans les barres rotoriques ( $e_k$  et  $e_{k+1}$ ).

$$e_k - e_{k+1} = \frac{d\phi_k}{dt} \quad (\text{II.99})$$



**Figure II-25 :** Forces électromotrices induites dans les barres rotoriques [49]

On généralise l'équation (II.99) dans toutes les mailles du rotor conduisant au système matriciel :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n_{dr}} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{n_{dr}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

À partir du système (II.100), on obtient  $(n_{dr} - 1)$  équations indépendantes et pour pouvoir calculer les forces électromotrices induites, on introduit l'hypothèse suivante :

$$\sum_{k=1}^{n_{dr}} e_k = 0 \quad (\text{II.101})$$

La Figure II-26 montre la modélisation de la cage rotorique d'une machine asynchrone. Dans ce modèle, on a introduit l'aspect résistif du rotor (résistances des barres et celles des portions d'anneaux) qui est ajouté aux sources de forces électromotrices induites dans les barres. La cage rotorique est donc modélisée par un système polyphasé comprenant les différentes résistances déjà décrites et des inductances de fuite des barres et des portions d'anneaux de court-circuit.

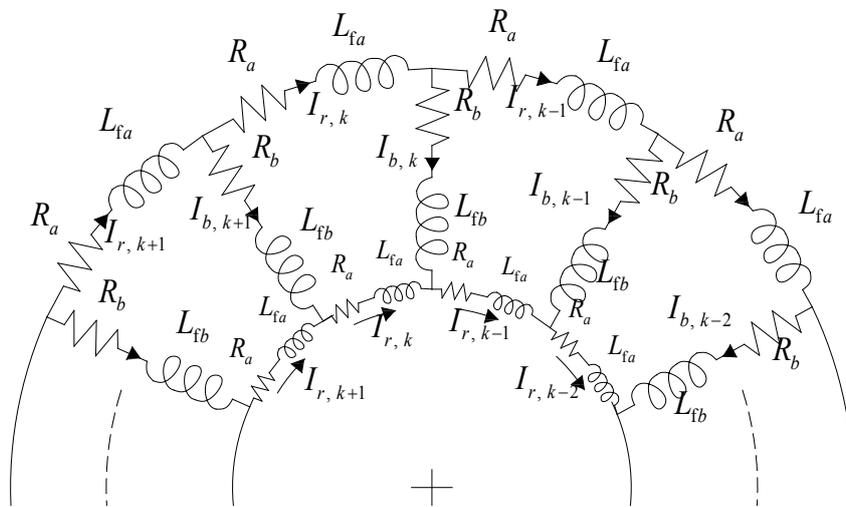


Figure II-26 : Circuits électriques du rotor à cage d'écureuil

Soient,

- $L_{fb}$  : Inductance de fuite d'une barre rotorique.
- $L_{fa}$  : Inductance de fuite d'une portion d'anneau rotorique.
- $R_b$  : Résistance d'une barre rotorique.
- $R_a$  : Résistance d'une portion d'anneau rotorique.

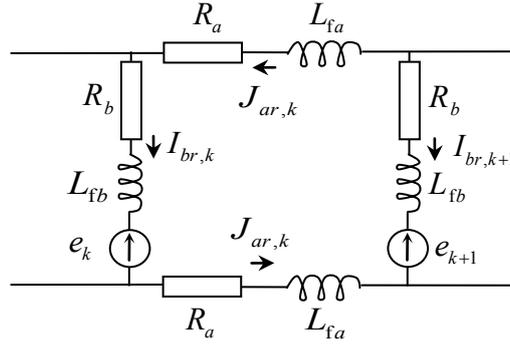


Figure II-27 : Maille  $k$  du rotor

En appliquant la loi des mailles classique sur la maille  $k$  (Figure II-27), on obtient :

$$0 = L_{fa} \frac{dJ_{ar,k}}{dt} + R_a J_{ar,k} + L_{fb} \frac{dI_{br,k}}{dt} + R_b I_{br,k} + e_k + L_{fa} \frac{dJ_{ar,k+1}}{dt} + R_a J_{ar,k+1} - e_{k+1} - L_{fb} \frac{dI_{br,k+1}}{dt} - R_b I_{br,k+1} \quad (\text{II.102})$$

$$0 = 2L_{fa} \frac{dJ_{ar,k}}{dt} + 2R_a J_{ar,k} + (e_k - e_{k+1}) - L_{fb} \left( \frac{dI_{br,k+1}}{dt} - \frac{dI_{br,k}}{dt} \right) - R_b (I_{br,k+1} - I_{br,k}) \quad (\text{II.103})$$

En substituant les équations (II.96) et (II.99) dans l'équation (II.103), on obtient :

$$0 = 2L_{fa} \frac{dJ_{ar,k}}{dt} + 2R_a J_{ar,k} + \frac{d\phi_k}{dt} - L_{fb} \frac{d}{dt} (J_{ar,k+1} - J_{ar,k-1}) - R_b (J_{ar,k+1} - J_{ar,k-1}) \quad (\text{II.104})$$

En généralisant la relation (II.104) sur toutes les mailles du rotor, il vient:

$$\left[ L_{Cage} \right]_{n_{dr} \times n_{dr}} \frac{d}{dt} \{ J_{ar} \}_{n_{dr} \times 1} + \left[ R_{Cage} \right]_{n_{dr} \times n_{dr}} \{ J_{ar} \}_{n_{dr} \times 1} = - \frac{d}{dt} \{ \phi_{dr} \}_{n_{dr} \times 1} \quad (\text{II.105})$$

avec  $\{ \phi_{dr} \}$ , le vecteur composé par  $n_{dr}$  éléments et formé par les flux magnétiques traversant les dents du rotor ;

$$\left[ L_{Cage} \right]_{n_{dr} \times n_{dr}} = \begin{bmatrix} 2L_{fa} + 2L_{fb} & -L_{fb} & 0 & \dots & 0 & -L_{fb} \\ -L_{fb} & 2L_{fa} + 2L_{fb} & -L_{fb} & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & -L_{fb} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & -L_{fb} \\ -L_{fb} & 0 & \dots & 0 & -L_{fb} & 2L_{fa} + 2L_{fb} \end{bmatrix}$$

et

$$[R_{Cage}]_{n_{dr} \times n_{dr}} = \begin{bmatrix} 2R_a + 2R_b & -R_b & 0 & \dots & 0 & -R_b \\ -R_b & 2R_a + 2R_b & -R_b & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -R_b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -R_b \\ -R_b & 0 & \dots & 0 & -R_b & 2R_a + 2R_b \end{bmatrix}$$

### II.5.3.3. Assemblage des équations électriques statoriques et rotoriques

A partir des équations électriques statoriques (II.93) et rotoriques (II.105), on construit, par assemblage de matrices, une équation matricielle globale décrivant le comportement électrique d'une machine asynchrone à cage sous la forme:

$$\begin{bmatrix} [L_{fs}] & [0] \\ [0] & [L_{Cage}] \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} I_s \\ J_{ar} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_s] & [0] \\ [0] & [R_{Cage}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_s \\ J_{ar} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_s \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \phi_s \\ \phi_{dr} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.106})$$

soit, sous forme condensée:

$$[L_T] \frac{d}{dt} \{I_{sr}\} + [R_T] \{I_{sr}\} + \frac{d}{dt} \{\phi_{sr}\} = \{V_T\} \quad (\text{II.107})$$

avec :

- $[L_T]$  et  $[R_T]$ , respectivement, les matrices des inductances de fuites et des résistances statoriques et rotoriques de dimension  $(n_{ph} + n_{dr}) \times (n_{ph} + n_{dr})$ .
- $\{I_{sr}\}$ , le vecteur de dimension  $(n_{ph} + n_{dr}) \times 1$  formé par les courants parcourant les phases statoriques et rotoriques.
- $\{\phi_{sr}\}$ , le vecteur de dimension  $(n_{ph} + n_{dr}) \times 1$  formé par les flux captés par les phases statoriques et rotoriques.
- $\{V_T\}$ , le vecteur de dimension  $(n_{ph} + n_{dr}) \times 1$  formé par les tensions d'alimentation des phases statoriques (il est nul ailleurs).

### II.5.4. Couplage électromagnétique

Suivant [19], la relation entre les flux captés par les phases statoriques  $\{\phi_s\}_{n_{ph} \times 1}$  et ceux captés par les dents  $\{\phi_{st}\}_{n_{ds} \times 1}$  dépendent de plusieurs paramètres tels que : a) le nombre d'encoches, b) le type d'enroulement, c) le nombre de spires par enroulements, d) la méthode

de connexion des enroulements, e) le nombre de couche d'enroulements, etc. Pour des enroulements distribué à une seule couche, il vient [19]:

$$\{\phi_s\}_{n_{ph} \times 1} = [ww]_{n_{ph} \times n_{ds}} \{\phi_{st}\}_{n_{ds} \times 1} \quad (\text{II.108})$$

En assemblant les relations entre les flux captés par les phases et les dents statoriques et rotoriques, on obtient :

$$\{\phi_{sr}\}_{(n_{ph}+n_{dr}) \times 1} = [G]_{(n_{ph}+n_{dr}) \times n_b} \{\phi_{br}\}_{n_b \times 1} \quad (\text{II.109})$$

$$\text{avec : } [G]_{(n_{ph}+n_{dr}) \times n_b} = \begin{bmatrix} [0]_{n_{ph} \times n_{ds}} & [ww]_{n_{ph} \times n_{ds}} & [0]_{n_{ph} \times (n_b - 2 * n_{ds})} \\ [0]_{n_{dr} \times (n_b - 2 * n_{dr})} & [I]_{n_{dr} \times n_{dr}} & [0]_{n_{dr} \times n_{dr}} \end{bmatrix}_{(n_{ph}+n_{dr}) \times n_b}$$

où  $[I]_{n_{dr} \times n_{dr}}$  est la matrice identité de dimension  $n_{dr} \times n_{dr}$ .

À partir des équations (II.79), (II.81) et (II.92), on a :

$$\begin{Bmatrix} \{F_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \\ \{F_{dr}\}_{n_{dr} \times 1} \end{Bmatrix} = [ZZ]_{(n_{ds}+n_{dr}) \times (n_{ph}+n_{dr})} \{I_{sr}\}_{(n_{ph}+n_{dr}) \times 1} \quad (\text{II.110})$$

$$\text{avec : } [ZZ]_{(n_{ds}+n_{dr}) \times (n_{ph}+n_{dr})} = \begin{bmatrix} n_c [E_{as}]_{n_{ds} \times n_{ds}}^{-1} [S_{abc}]_{n_{ds} \times n_{ph}} & [0] \\ [0] & [E_{ar}]_{n_{dr} \times n_{dr}}^{-1} [E_{br}]_{n_{dr} \times n_{dr}} \end{bmatrix}_{(n_{ds}+n_{dr}) \times (n_{ph}+n_{dr})}$$

En combinant les équations (II.91), (II.109) et (II.110), la relation entre les flux captés par les phases et les courants parcourant les phases est obtenue par :

$$\{\phi_{sr}\}_{(n_{ph}+n_{dr}) \times 1} = [GXZ(t)]_{(n_{ph}+n_{dr}) \times (n_{ph}+n_{dr})} \{I_{sr}\}_{(n_{ph}+n_{dr}) \times 1} \quad (\text{II.111})$$

$$\text{avec } [GXZ(t)]_{(n_{ph}+n_{dr}) \times (n_{ph}+n_{dr})} = \begin{bmatrix} [G]_{(n_{ph}+n_{dr}) \times n_b} & [XX]_{n_b \times (n_{ds}+n_{dr})} & [ZZ]_{(n_{ds}+n_{dr}) \times (n_{ph}+n_{dr})} \end{bmatrix}$$

Il peut être noté que la matrice de transformation dépend de la position angulaire relative du rotor par rapport au stator et par conséquent du temps.

$$\begin{cases} \{\phi_{sr}\} = [GXZ(t)] \{I_{sr}\} \\ [L_T] \frac{d}{dt} \{I_{sr}\} + [R_T] \{I_{sr}\} + \frac{d}{dt} \{\phi_{sr}\} = \{V_T\} \end{cases} \quad (\text{II.112})$$

Enfin, la machine asynchrone est modélisée par une équation différentielle matricielle unique combinant à la fois les équations magnétiques et électriques sous la forme :

$$\left[ [L_T] + [GXZ(t)] \right] \frac{d}{dt} \{I_{sr}\} + \left[ [R_T] + \frac{d}{dt} [GXZ(t)] \right] \{I_{sr}\} = \{V_T\} \quad (\text{II.113})$$

### II.5.5. Calcul du couple électromagnétique

Afin de pouvoir coupler les équations électriques, magnétiques aux équations mécaniques, il faut exprimer le couple électromagnétique en fonction des paramètres magnétiques de la machine. Le couple électromagnétique est calculé en se basant sur la formulation de Maxwell qui consiste à dériver l'énergie magnétique par rapport au déplacement de la partie mobile. Spécifiquement pour les machines électriques, le couple est calculée en évaluant la variation nette dans l'énergie stockée et fournie due à la rotation progressive du rotor si les flux restent constants au cours de cette variation.

Le couple électromagnétique  $C_{em}$  s'écrit donc en fonction de l'énergie magnétique sous la forme suivante :

$$C_{em} = - \left. \frac{\partial W_{mag}}{\partial \theta} \right|_{i=cte} \quad (\text{II.114})$$

où  $W_{mag}$  est l'énergie magnétique

En supposant que les perméance d'entrefer ne dépend que de la position angulaire relative entre le rotor et le stator  $\theta$ , le couple électromagnétique s'écrit :

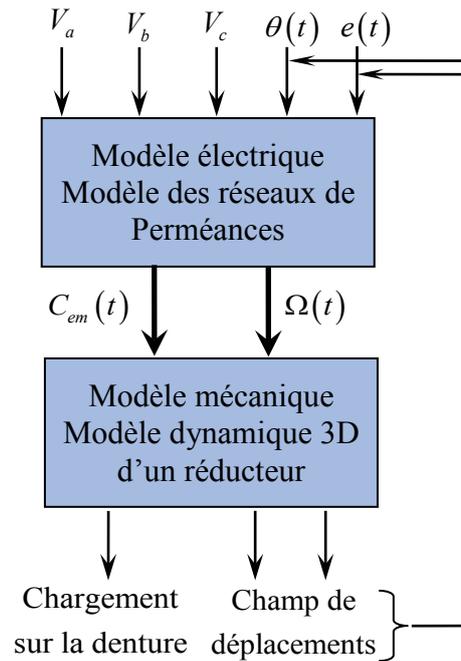
$$C_{em} = \frac{1}{2} \sum_i^{n_{ds}} \sum_j^{n_{dr}} \frac{dP_{ij}}{d\theta} \varepsilon_{ij}^2 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{P_{ij}} \quad (\text{II.115})$$

où  $\varepsilon_{ij}$  est la différence de potentiel magnétique dans la branche de l'entrefer entre les nœuds  $i$  et  $j$ .

## II.6. Couplage électromécanique

### II.6.1. Présentation globale des deux sous-systèmes

Le couplage électromécanique consiste à résoudre itérativement les équations magnétiques, électriques et mécaniques tout en respectant les entrées et les sorties de chaque sous-système. Ceci est un couplage faible contrairement au modèle précédent. La Figure II-28 représente la démarche suivie pour le couplage des modèles électromagnétique du moteur asynchrone et mécanique de la transmission par engrenages. Les différentes entrées/sorties de chaque sous-système sont détaillées dans ce schéma (Figure II-28).



**Figure II-28** : Schéma de couplage électromécanique global

avec :

- $V_{a,b,c}$  : Tension d'alimentation triphasée.
- $\theta(t)$  : Position angulaire relative entre le rotor et le stator.
- $e(t)$  : Excentricité statique du rotor.
- $C_{em}(t)$  : Couple électromagnétique instantané.
- $\Omega(t)$  : Vitesse de rotation instantanée.

## II.6.2. Mise en équation du couplage

Afin de prendre en compte l'effet des défauts du moteur et d'engrenage, la position angulaire relative du rotor, le couple électromagnétique, l'amplitude  $\varepsilon$  et la phase  $\varphi$  de l'excentricité statique du rotor définies dans (II.73) sont mis à jour, à chaque pas de temps, en respectant les variations temporelles du champ de déplacements de l'engrenage (les degrés de libertés du nœud lié au moteur donnés par le modèle mécanique 3D), à savoir :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta + \theta_1(t) \\ \varepsilon(t) = \sqrt{v_1^2(t) + w_1^2(t)} \\ \varphi(t) = \tan^{-1}(w_1(t)/v_1(t)) \end{cases} \quad (\text{II.116})$$

avec  $\theta_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$ , les degrés de libertés de torsion et de flexion au nœud 1 (Figure II-2).

En retour, les matrices du système global sont également mises à jour en introduisant, à chaque pas de temps, les petites variations de la position angulaire relative du rotor et de l'épaisseur de l'entrefer (Figure II-28).

### II.6.3. Résolution électromagnétique

La Figure II-29 détaille l'algorithme de résolution de la partie électromagnétique qui caractérise le comportement électrique et magnétique d'un moteur asynchrone à cage. Il s'agit d'assembler les équations magnétiques et électriques de la machine et de résoudre simultanément les deux phénomènes afin d'aboutir au couple électromagnétique transmis par le moteur au système d'engrenage.

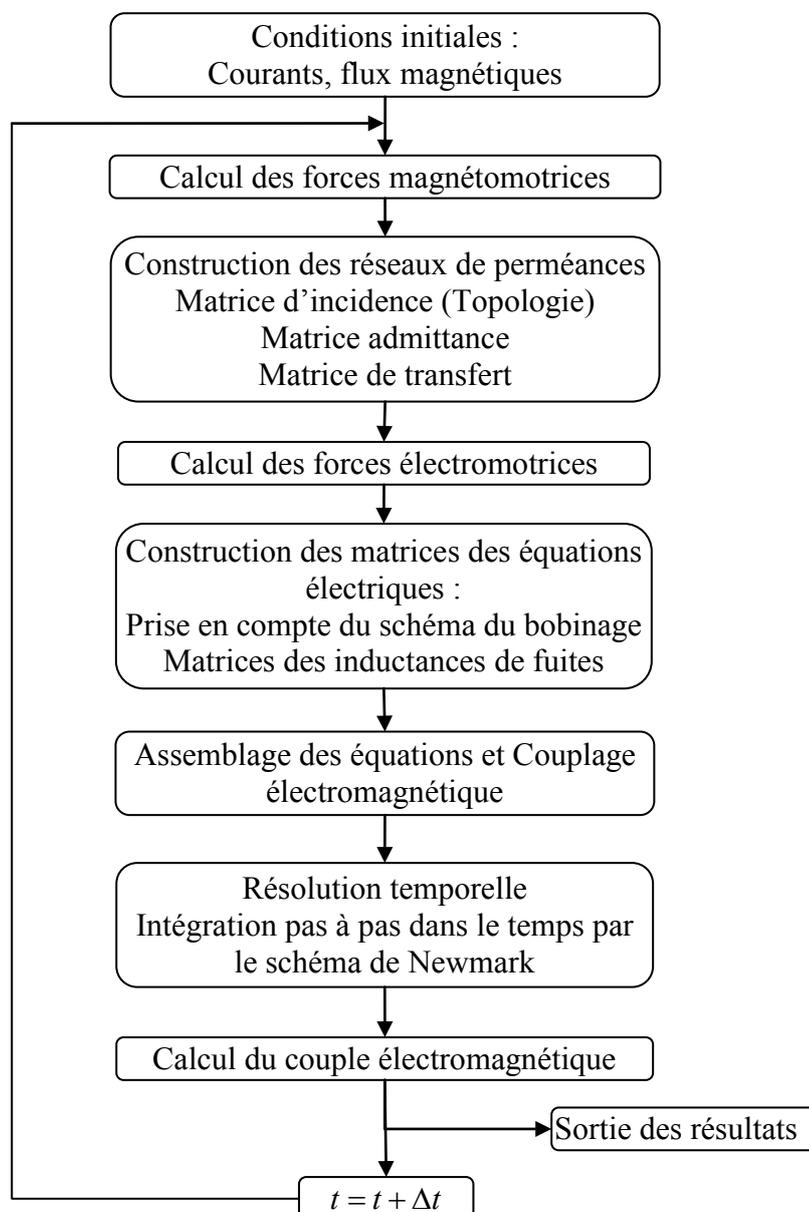


Figure II-29 : Algorithme de résolution de la partie électromagnétique

#### II.6.4. Résolution mécanique

La Figure II-30 explicite l'algorithme de résolution de la partie mécanique. Dans cette étape, la condition de contact et l'équilibre dynamique du système ont été résolus simultanément en couplant l'algorithme de contact unilatéral avec le schéma d'intégration pas à pas dans le temps de Newmark.

La charge dynamique  $F_{dij}$  est calculée par la formule suivante :

$$F_{dij} = k_{ij} \Delta_{ij} \quad (\text{II.117})$$

avec  $k_{ij}$  et  $\Delta_{ij}$  sont respectivement la raideur et l'écrasement d'un segment  $ij$ .

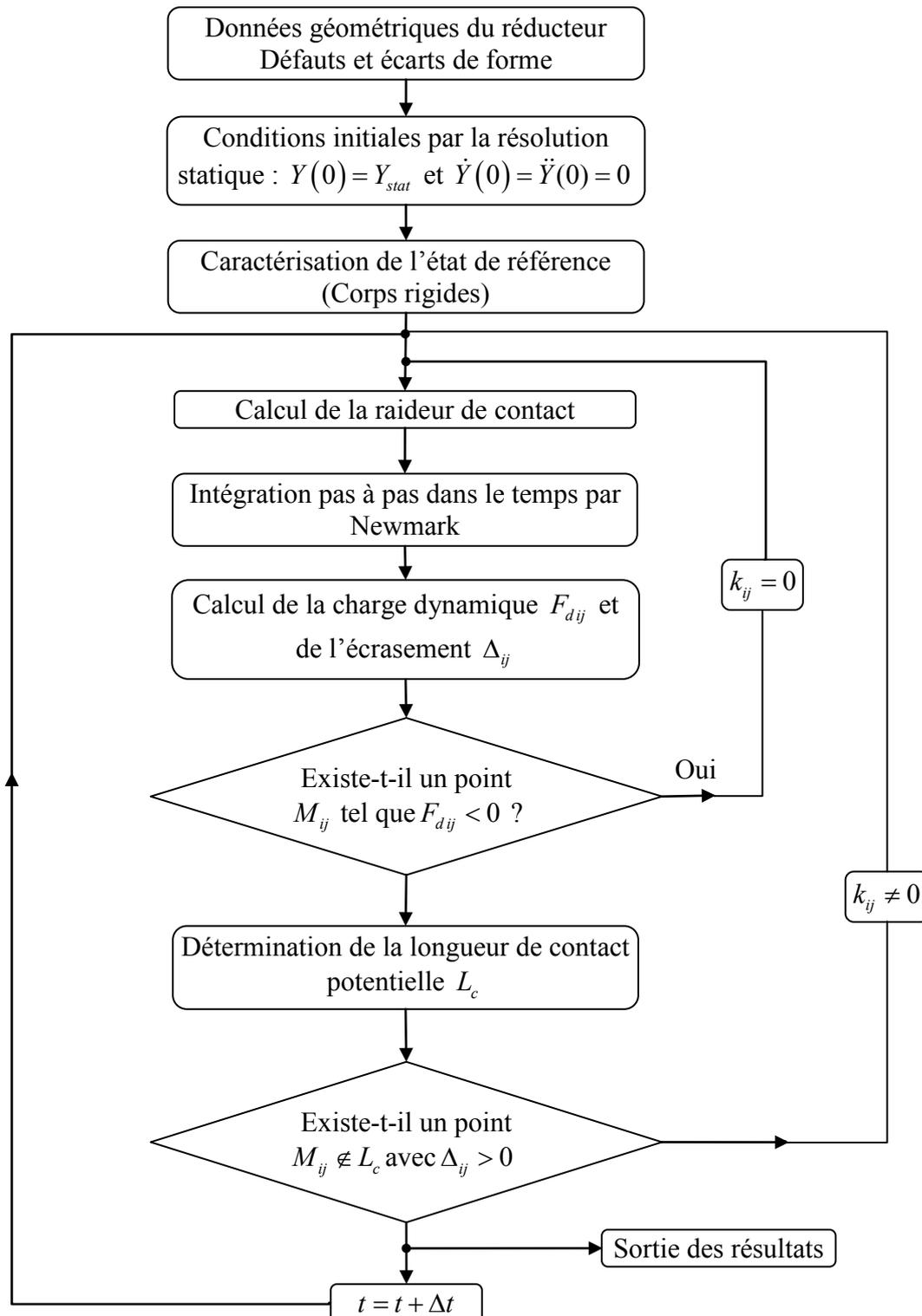


Figure II-30 : Algorithme de résolution de la partie mécanique

Comme indiqué précédemment, l'ensemble du système couplé est résolu par un schéma implicite de Newmark d'intégration pas à pas dans le temps qui, en utilisant un PC standard

(processeur 3GHz et RAM 1Go), conduit à un temps de calcul d'environ cinq heures pour simuler une seconde de fonctionnement d'un groupe moteur / réducteur à engrenages.

## II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, deux modèles électromécaniques d'une transmission par engrenages entraînée par un moteur asynchrone ont été développés. Ces modèles permettent de simuler l'interdépendance entre les sous-systèmes électrique et mécanique. La méthodologie du premier modèle repose sur une approche intégrée conduisant à une formulation analytique tridimensionnelle décrivant le comportement dynamique, vibratoire et électrique du système électromécanique. Cette formulation est basée sur un ensemble unique d'équations non linéaires. La résolution de ces équations est réalisée en couplant le schéma d'intégration pas à pas dans le temps de Newmark et un algorithme de contact unilatéral (simulation des conditions de contact sur les dents d'engrenage). Le second modèle a été développé en couplant un modèle électromagnétique basé sur la théorie des réseaux de perméances et le modèle mécanique de l'engrenage et en respectant les entrées/sorties de chaque sous-système. Ce dernier modèle électromagnétique et mécanique permet de considérer plusieurs phénomènes négligés dans le premier modèle tels que la variation de l'épaisseur de l'entrefer et la variation des inductances propres et mutuelles au cours du fonctionnement du moteur asynchrone. La méthodologie dans ce cas est de résoudre les équations de chaque sous-système et itérer entre les deux algorithmes de résolution.

## **Chapitre III : Résultats et Discussions**

### III.1. Introduction

Dans ce chapitre, une étude expérimentale sera réalisée sur un banc d'engrenages en boucle mécanique fermée (FZG) en testant un engrenage neuf jusqu'à l'apparition d'un défaut d'écaillage. Une étude spectrale des signaux de l'erreur de transmission mesurée et simulée servira de base de validation pour le modèle mécanique. Enfin, l'influence d'écaillages sur les signaux de l'erreur de transmission pour différents niveaux de chargement et vitesses de rotation, sera étudiée.

Les résultats de simulations issus des modèles développés dans le chapitre précédent seront présentés. Il s'agit, en particulier, de montrer l'influence d'un défaut d'écaillage sur une dent du pignon sur la signature des courants statoriques du moteur électrique et sur le comportement dynamique de l'engrenage (raideur d'engrènement, distribution des charges instantanées sur les dents,...). Une étude paramétrique sera réalisée en changeant les dimensions du défaut et sa localisation sur le flanc actif de la dent afin de déterminer d'éventuelles zones de sensibilité maximale de détection.

Finalement, à partir du modèle de réseaux de perméances couplé avec le modèle dynamique 3D d'engrenage, une étude spectrale des courants statoriques sera réalisée pour visualiser l'effet des défauts électriques (excentricité du moteur) et/ou mécaniques (écaillage) sur ces courants. On montrera qu'il est possible de distinguer l'influence de ces deux types de défauts d'origines différentes.

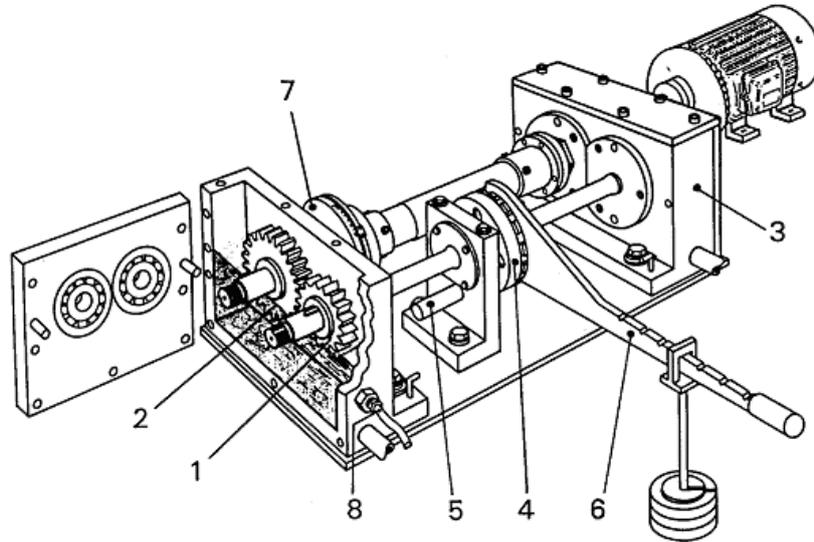
### III.2. Validation expérimentale

#### III.2.1. Description de la machine FZG

Ce banc d'essai d'engrenages en boucle mécanique fermée a été développé à l'institut technique de l'étude des engrenages et des mécanismes d'entraînement (FZG : Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau) de l'Université technique de Munich. Il s'agit d'un ensemble électromécanique composé d'un moteur asynchrone avec un variateur de vitesse et de plusieurs engrenages formant une boucle mécanique fermée (Figure III-1 et Figure III-2). Le moteur électrique applique un couple électromagnétique sur l'arbre principal et impose les vitesses de rotation des différents composants du mécanisme. Un dispositif assimilable à un accouplement en rotation est monté sur l'arbre secondaire permettant d'appliquer un couple résistant par l'intermédiaire d'un levier et de masses. Ce dispositif entraîne la torsion de l'arbre secondaire et maintient le couple résistant constant pendant le fonctionnement du banc à l'aide d'une goupille de verrouillage.

Cette machine est destinée à tester les transmissions de puissances par engrenages. Avec la boucle fermée, le système mécanique peut atteindre des charges importantes permettant

d'étudier l'endommagement des dents d'engrenage et l'apparition des défauts tels que les écailles tout en ne nécessitant que de faibles puissances électriques au niveau du moteur.



- |                         |                              |
|-------------------------|------------------------------|
| 1 : Pignon d'essai      | 5 : Goupille de verrouillage |
| 2 : Roue d'essai        | 6 : Levier de la charge      |
| 3 : Engrenage esclave   | 7 : Couplémètre              |
| 4 : Embrayage de charge | 8 : Capteur de température   |

Figure III-1 : Schéma de la machine FZG [77]

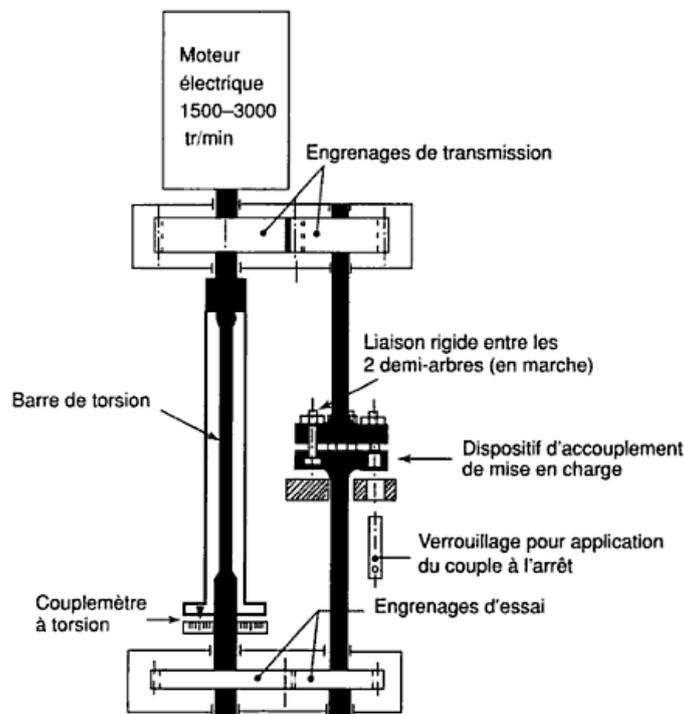


Figure III-2 : Projection plane de la machine FZG

Le Tableau III-1 montre les différentes caractéristiques géométriques de l'engrenage d'essai dans le cas d'une denture de type C [77].

Caractéristiques		Symbole	unité	Valeur
Entraxe		$a$	mm	91.5
Largeur des dents		$b$	mm	14
Module		$m_n$	mm	4.5
Nombre de dents	Pignon	$Z_1$	-	16
	Roue	$Z_2$	-	24
Diamètre primitif	Pignon	$D_{w1}$	mm	73.2
	Roue	$D_{w2}$	mm	109.8
Diamètre de base	Pignon	$D_{b1}$	mm	67.66
	Roue	$D_{b2}$	mm	101.49
Coefficient de déport	Pignon	$x_1$	-	0.1817
	Roue	$x_2$	-	0.1715
Angle de pression		$\alpha$	°	20
Angle d'hélice		$\beta_b$	°	0

**Tableau III-1 :** Principales caractéristiques géométriques de l'engrenage d'essai [77]

Le Tableau III-2 illustre les différents niveaux de chargement en plaçant les masses à une longueur de 0,5m à l'extrémité du levier n°6 (Figure III-1).

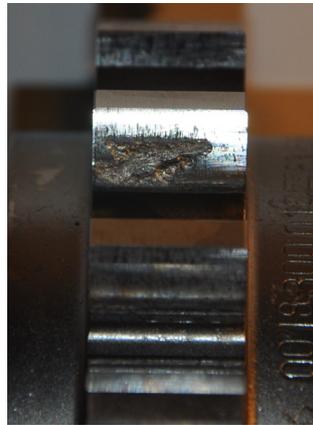
Niveau de chargement (Ch)	Couple résistant (N.m) (l=0.5m)	Couple moteur (N.m)
4	60,75	91,125
5	94,10	141,15
6	135,30	202,95
7	183,35	275,02
8	239,25	358,87
9	302,00	453,00
10	372,70	559,05

**Tableau III-2 :** Niveaux de chargement

### III.2.2. Forme de l'écaille

Afin d'étudier le comportement vibratoire d'un engrenage cylindrique en présence d'écailage, un engrenage a été sollicité en fatigue afin de produire un défaut d'écailage 'naturel'. Les conditions d'essai sont similaires à celles de [78] et ont pour objectif de conduire à un écailage pour un essai rapide (short duration pitting test). Il s'agit d'appliquer sur la machine FZG des niveaux de chargement très importants (charge 9 et 10 (Tableau III-2)) à une vitesse de rotation constante en contrôlant la température d'huile dans la boîte à engrenage (température constante égale à  $90 \pm 3$  °C [78]). Le couple appliqué sur l'arbre secondaire entraîne une distribution d'efforts sur la surface de contact des dents lors de l'engrènement se traduisant par une pression locale de Hertz sur les dents de l'engrenage (exemple : la charge 9 correspond à une contrainte locale de Hertz maximale de  $2069 \text{ N/mm}^2$  [78]). Ce type d'essai est essentiellement utilisé pour déterminer l'influence des lubrifiants sur la résistance aux écailages et les classer selon leur capacité de supporter les charges en respectant leur résistance à l'écailage.

Dans ces conditions, l'essai a été mené en refroidissant la boîte d'engrenages testés afin de permettre une utilisation quasi-continue de la machine FZG. Une écaille localisée sur une seule dent du pignon est apparue après 13 millions de cycles. La Figure III-3 montre la forme de l'écaille obtenue sur la denture FZG de type C.



**Figure III-3** : *Forme de l'écaille obtenue sur la denture FZG de type C*

Les dimensions de l'écaille réelle obtenue sont mesurées et tracées en 3D sur la Figure III-4 ( $t/T_m$  correspond à la direction du profil de dent, Largeur : largeur de la dent et Profondeur : profondeur de l'écaille dans le sens de l'enlèvement de matière). La forme du défaut est triangulaire sur la surface du flanc de la dent. Sa profondeur évolue d'une façon quasi-continue en suivant une forme spline avec des pentes différentes dans les sens de profil et de la largeur de la dent. La profondeur maximale de défaut est d'environ  $380 \mu\text{m}$ .

Afin de comparer les résultats numériques et expérimentaux, l'écaille (Figure III-5) est simulée en se basant sur la forme et des dimensions obtenues expérimentalement.

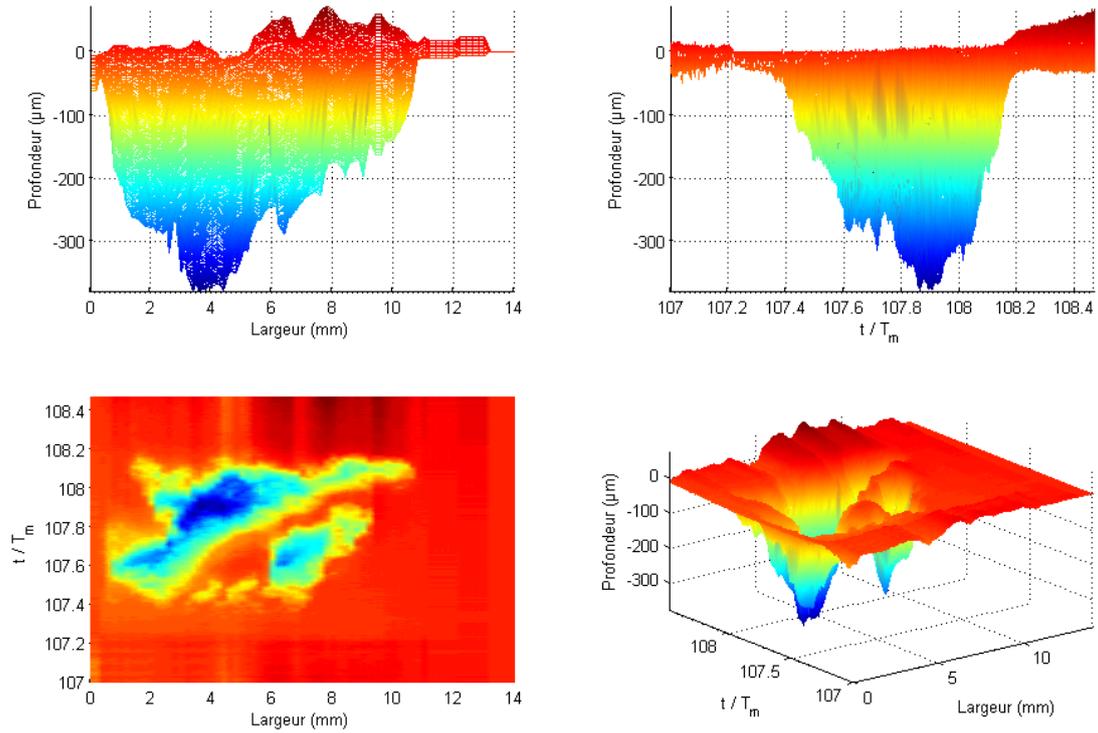


Figure III-4 : Défaut d'écaillage réel obtenu sur la denture FZG de type C

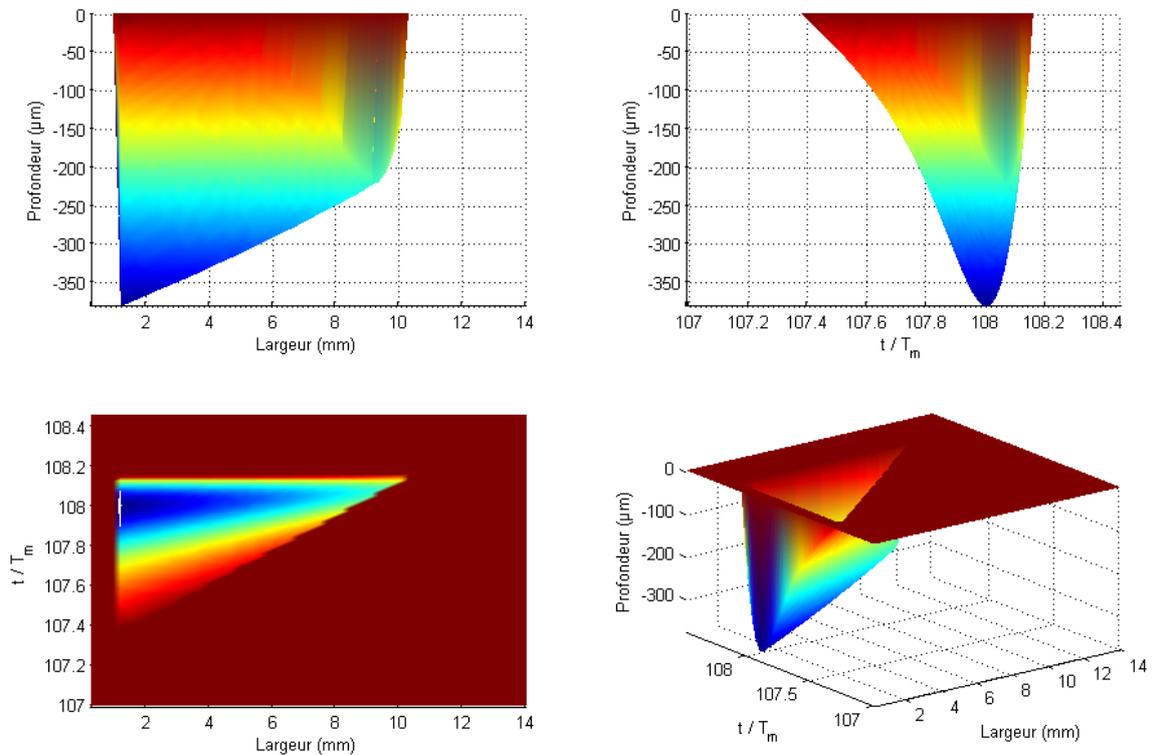


Figure III-5 : Défaut d'écaillage simulé sur la denture FZG de type C

### III.2.3. Erreur de transmission (ET)

#### III.2.3.1. Définition de l'ET

L'erreur de transmission (ET) représente une image du comportement dynamique vibratoire et acoustique d'un réducteur. Elle est définie comme l'écart entre la position de la roue menée et celle donnée par le pignon par rapport à la position qu'elle devrait occuper si les engrenages étaient rigides et géométriquement parfaits. Elle représente donc la différence de positions angulaires des engrenages réels et parfaits, c'est-à-dire l'écart entre la position réelle et la position théorique (engrenages parfaits : engrenages indéformables avec géométries idéales).

En se basant sur le mouvement des corps rigides comme état de référence [64], la dérivée par rapport au temps de l'erreur de transmission sans charge (ETSC) projetée comme une distance dans le plan d'action est donnée par [79]:

$$\frac{d}{dt}(ETSC) = R_{b1}\Omega_1 + R_{b2}\Omega_2 \quad (\text{II.118})$$

où  $R_{b1}$  et  $R_{b2}$  représentent respectivement les rayons de base du pignon et de la roue ;  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  les vitesses angulaires des mouvements des corps rigides du pignon et de la roue.

Lorsque la charge transmise est nulle, les déformations sont négligeables. L'erreur de transmission sans charge correspond donc aux déviations de position causées uniquement par les écarts géométriques ou de montage tels que les excentricités ou les erreurs de pas cumulées.

D'autre part, pour l'état déformé, l'erreur de transmission (ET) sous charge projetée dans le plan d'action théorique est donnée par [79]:

$$ET = R_{b1} \left[ \int_0^t \Omega_1 d\zeta + \theta_1 \right] + R_{b2} \left[ \int_0^t \Omega_2 d\zeta + \theta_2 \right] \quad (\text{II.119})$$

avec  $\zeta$  est la variable d'intégration temporelle,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont respectivement les degrés de libertés de torsion définies par rapport aux rotations des corps rigides.

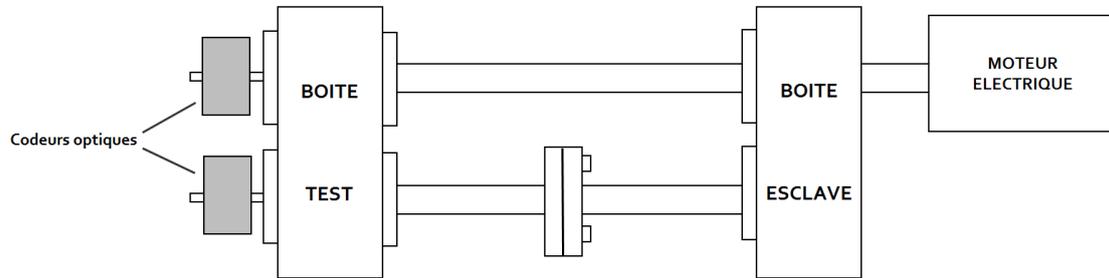
On obtient finalement :

$$ET = R_{b1}\theta_1 + R_{b2}\theta_2 + ETSC \quad (\text{II.120})$$

#### III.2.3.2. Dispositif et principe de la mesure de l'ET

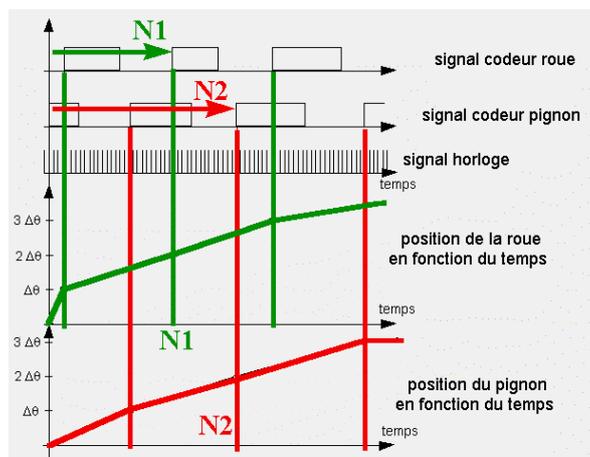
D'un point de vue expérimental, l'ET peut être déterminée par des systèmes à base d'accéléromètres ou par des codeurs optiques à haute résolution. Dans notre cas, L'erreur de transmission est calculée en traitant les données enregistrées par un système de codeurs

optiques qui mesure la différence de rotation instantanée entre deux codeurs montés sur chacun des deux arbres du système d'engrenage. La Figure III-6 montre les positions des codeurs optiques utilisés pour cette application.



**Figure III-6 :** *Dispositif de mesure de l'ET avec les codeurs optiques sur la machine FZG*

Les codeurs optiques sont fabriqués et montés de façon à être très proches de l'engrenage, ce qui rend la mesure de l'erreur de transmission plus représentative du comportement des roues dentées. Le principe de cette mesure repose sur le comptage du nombre d'impulsions délivrées par une horloge à très haute fréquence (80 MHz dans notre cas) entre deux fronts montants du signal donné par le codeur optique. En ayant une référence commune (même horloge et même compteur), le comptage s'effectue en simultané sur les deux voies (codeurs pignon et roue), ce qui permet de mesurer l'écart simultané entre les deux voies à partir d'une référence temporelle très stable. La Figure III-7 montre la reconstruction de la loi d'évolution des positions de la roue et du pignon en fonction du temps à une cadence imposée par le nombre de raies sur chaque codeur (pour notre cas, les codeurs sont dotés de 2500 raies par tours).



**Figure III-7 :** *Evolutions des positions de la roue et du pignon en fonction du temps*

### III.2.3.3. Comparaison des spectres

Les Figure III-8 -- Figure III-11 montrent les spectres des signaux expérimentaux et théoriques (simulés) de l'erreur de transmission d'un train d'engrenage avec et sans écaillage. Les signaux d'erreur de transmission sont obtenus pour une vitesse de rotation de 30 Hz sur l'arbre d'entrée et sous le niveau de chargement n°7 (défini au Tableau III-2). Les valeurs des amplitudes des spectres sont adimensionnées par rapport aux valeurs maximales de l'erreur de transmission dans chaque cas. Tous les spectres présentés ont été calculés en utilisant une fenêtre de Blackman afin d'obtenir des pics étroits et distinctifs.

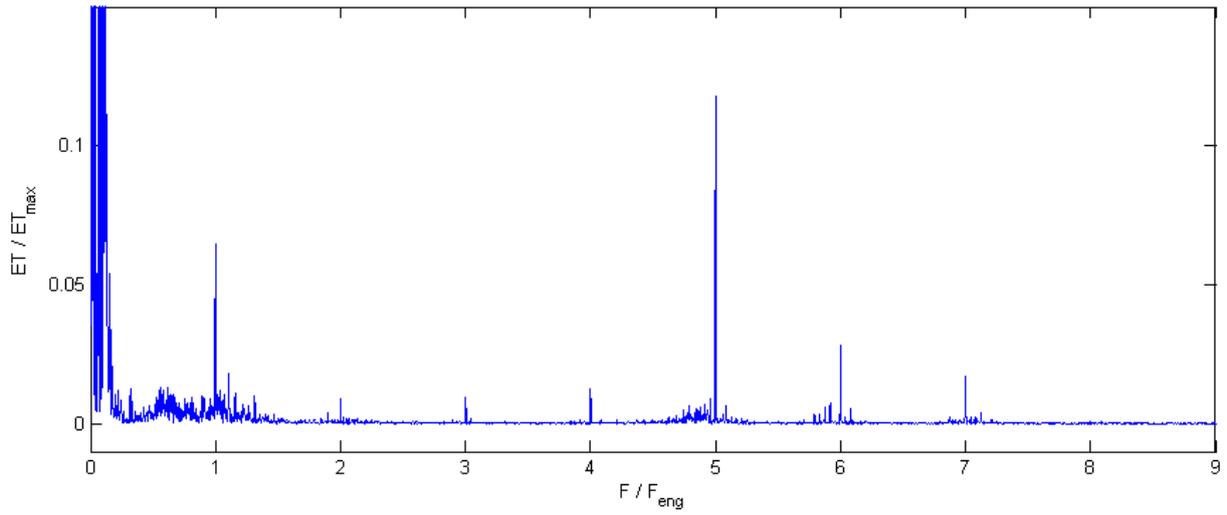
En comparant les spectres des signaux expérimentaux et théoriques, on note une analogie certaine entre les spectres de signaux obtenus, avec ou sans écaillage, pour les mêmes conditions de fonctionnement. Dans tous les cas, on remarque la présence de pics avec des amplitudes différentes jusqu'à la septième harmonique de la fréquence d'engrènement avec un maximum d'amplitude pour l'harmonique 5 pour l'ensemble des spectres. Selon les résultats de simulation, cette fréquence critique correspond à une coïncidence avec une fréquence propre du système ayant une contribution énergétique très importante sur l'élément engrenage (84,19 %).

D'après [80], la surveillance des défauts par indicateurs spectraux s'effectue par une comparaison de l'image spectrale d'un signal par rapport à un gabarit défini à partir de la même image spectrale élaborée lors de la mise en service de l'équipement. L'image spectrale est une représentation spectrale du signal sur une bande de fréquence.

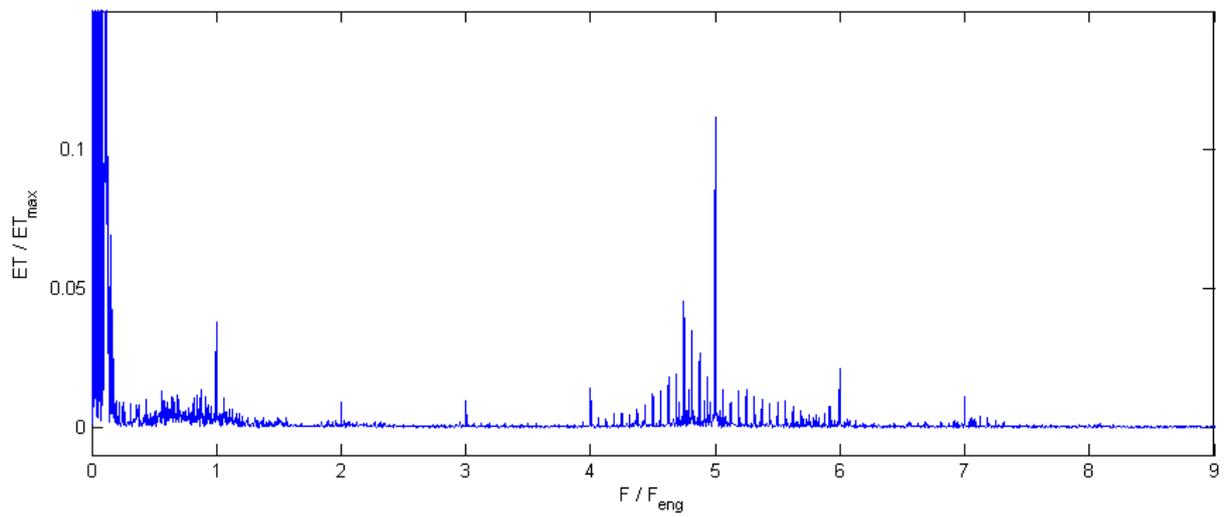
En présence d'écaillage, les images spectrales des signaux simulés et expérimentaux présentent des bandes latérales entre les différentes harmoniques liées à la fréquence d'engrènement et principalement au voisinage de la cinquième harmonique. Ces bandes disparaissent dans les cas des spectres obtenus pour des engrenages sans écaillage qui sont constitués, uniquement, des harmoniques correspondant à la fréquence d'engrènement et ses multiples.

Par exemple, entre les harmoniques 4 et 5 ou 5 et 6, 16 pics se manifestent dans les spectres de l'ET des engrenages avec écaillage (Figure III-9 et Figure III-11). Ces pics sont espacés par la fréquence de rotation du pignon et leur nombre correspond au nombre de dents du pignon. Ceci explique qu'en présence de défaut, les fréquences de modulation du signal de l'erreur de transmission d'un train à engrenages correspondent à la fréquence de rotation de la roue défectueuse (pignon dans notre cas). Dans ces conditions, le spectre du signal vibratoire s'enrichit donc de bandes latérales autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement.

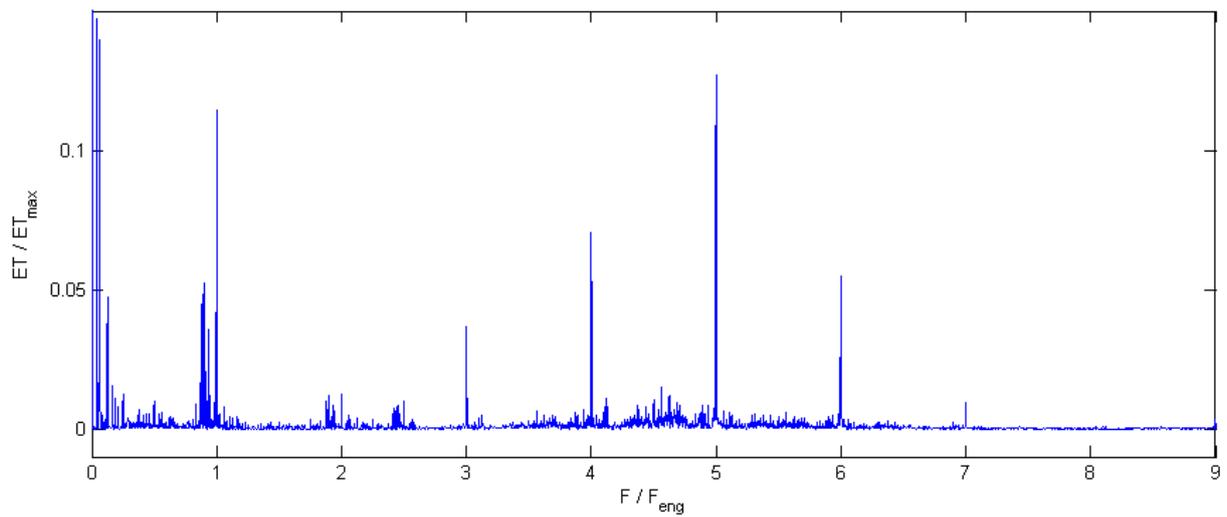
La dissymétrie de la distribution des bandes latérales indique une modulation, à la fois, en amplitude et en fréquence. Les principales raisons de cette dissymétrie sont : a) les effets dynamiques dûs au voisinage des bandes latérales de ce système à la zone de résonance (fréquence propre) [81], [82] et b) l'effet de la fréquence porteuse de rotation du pignon sur la modulation des bandes latérales [81].



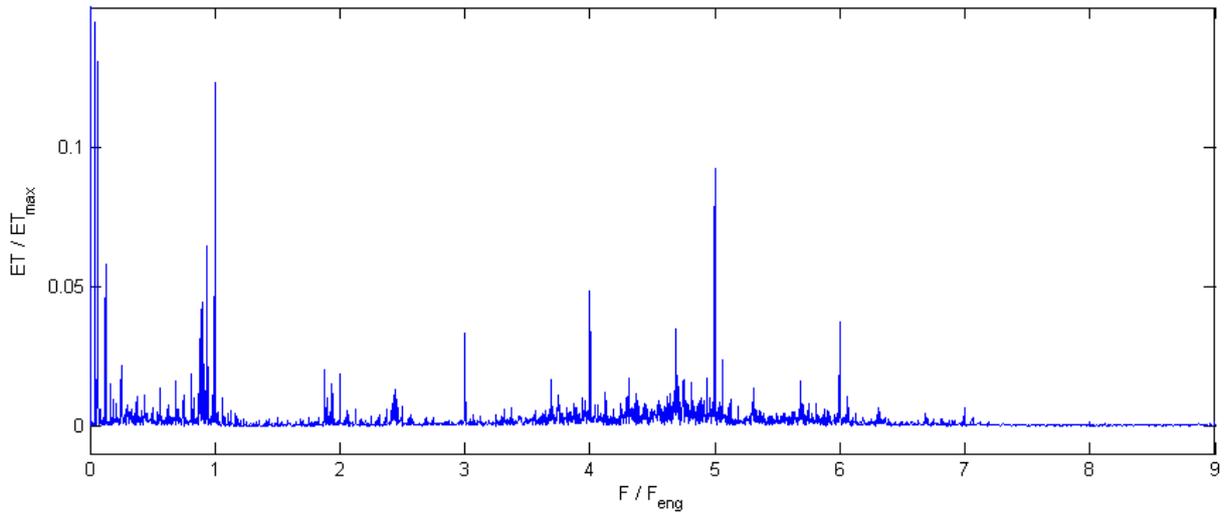
**Figure III-8 :** *Spectre de l'ET expérimentale sans écaillage*



**Figure III-9 :** *Spectre de l'ET expérimentale avec écaillage*



**Figure III-10 :** *Spectre de l'ET simulée sans écaillage*

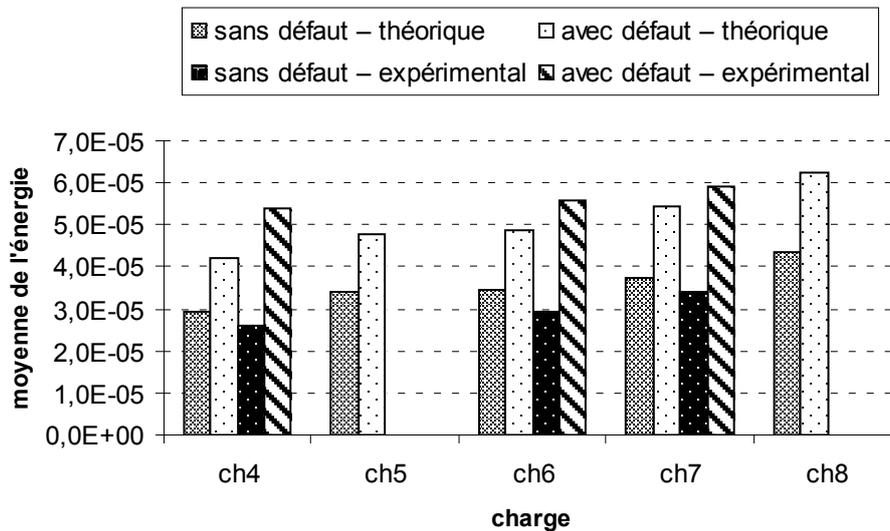


**Figure III-11 :** *Spectre de l'ET simulée avec écaillage*

**III.2.3.4. Influence de la présence de l'écaillage**

D'après [83], l'évaluation de l'énergie dans les bandes latérales autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement est très sensible aux effets de transmission. Cet indicateur est appelé modulation harmonique [83].

La Figure III-12 montre la moyenne de l'énergie sur la bande de fréquence  $[4F_{eng}, 6F_{eng}]$  des spectres des signaux théoriques et expérimentaux, avec et sans écaillage pour différents niveaux de chargement.



**Figure III-12 :** *Moyenne de l'énergie sur la bande de fréquence  $[4F_{eng}, 6F_{eng}]$  des spectres des signaux théoriques et expérimentaux avec et sans écaillage*

La moyenne de l'énergie dans la bande de fréquence considérée en présence d'écaillage est supérieure à celle sans défaut pour tous les niveaux de chargement. Ceci est constaté dans

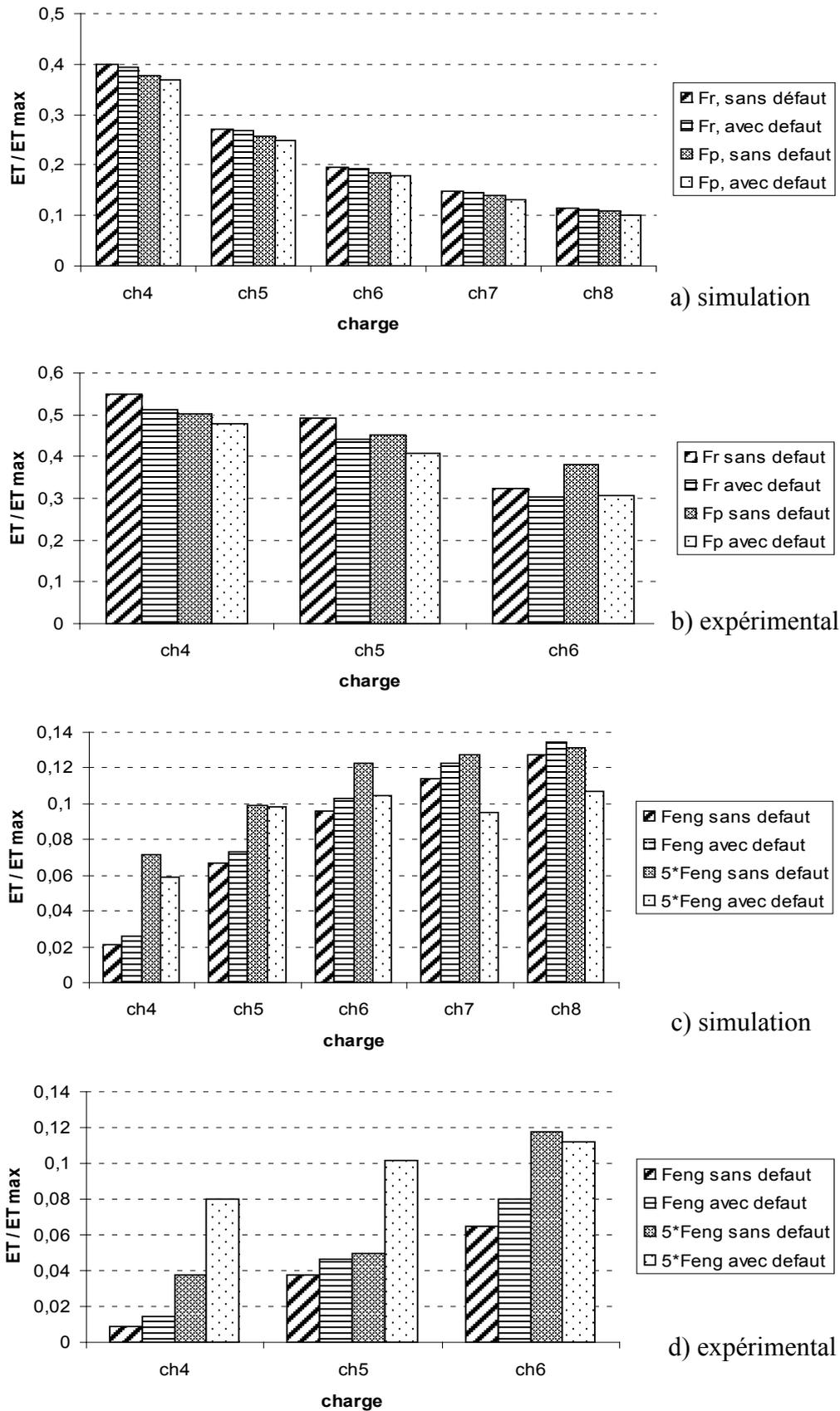
les cas des signaux théoriques et expérimentaux. La présence de défaut entraîne donc une augmentation des amplitudes des pics liés à la fréquence de rotation du pignon qui correspond à la fréquence de passage de la dent défectueuse en contact. La moyenne de l'énergie sur une bande de fréquence peut donc être un indicateur spectral fiable pour la détection des avaries de contact dans les engrenages. D'autre part, la moyenne de l'énergie croît sensiblement lorsque le niveau de chargement augmente pour tous les cas de spectres (sans et avec défaut, théorique et expérimental).

### *III.2.3.5. Influence de la charge*

En surveillance, les mesures et le processus de détection de défauts doivent être effectués dans les mêmes conditions de fonctionnement (vitesse et charge constantes). Dans la plupart des applications industrielles, la vitesse de fonctionnement est généralement constante, mais les conditions de chargement peuvent fréquemment varier. D'après [84], la variation des conditions dynamiques de fonctionnement modifie les caractéristiques d'engrènement (raideur d'engrènement, déflexions des dents, ...) et par conséquent l'erreur de transmission qui reflète les erreurs géométriques de l'engrenage mais également les déformations au niveau de l'engrènement.

La Figure III-13 montre les amplitudes des pics des spectres des signaux théoriques et expérimentaux avec et sans écaillage aux fréquences de rotation de la roue ( $F_r$ ) et du pignon ( $F_p$ ) (Figure III-13.a et b) et aux fréquences d'engrènement ( $F_{eng}$ ) et son multiple de 5 ( $5 * F_{eng}$ ) (Figure III-13.c et d).

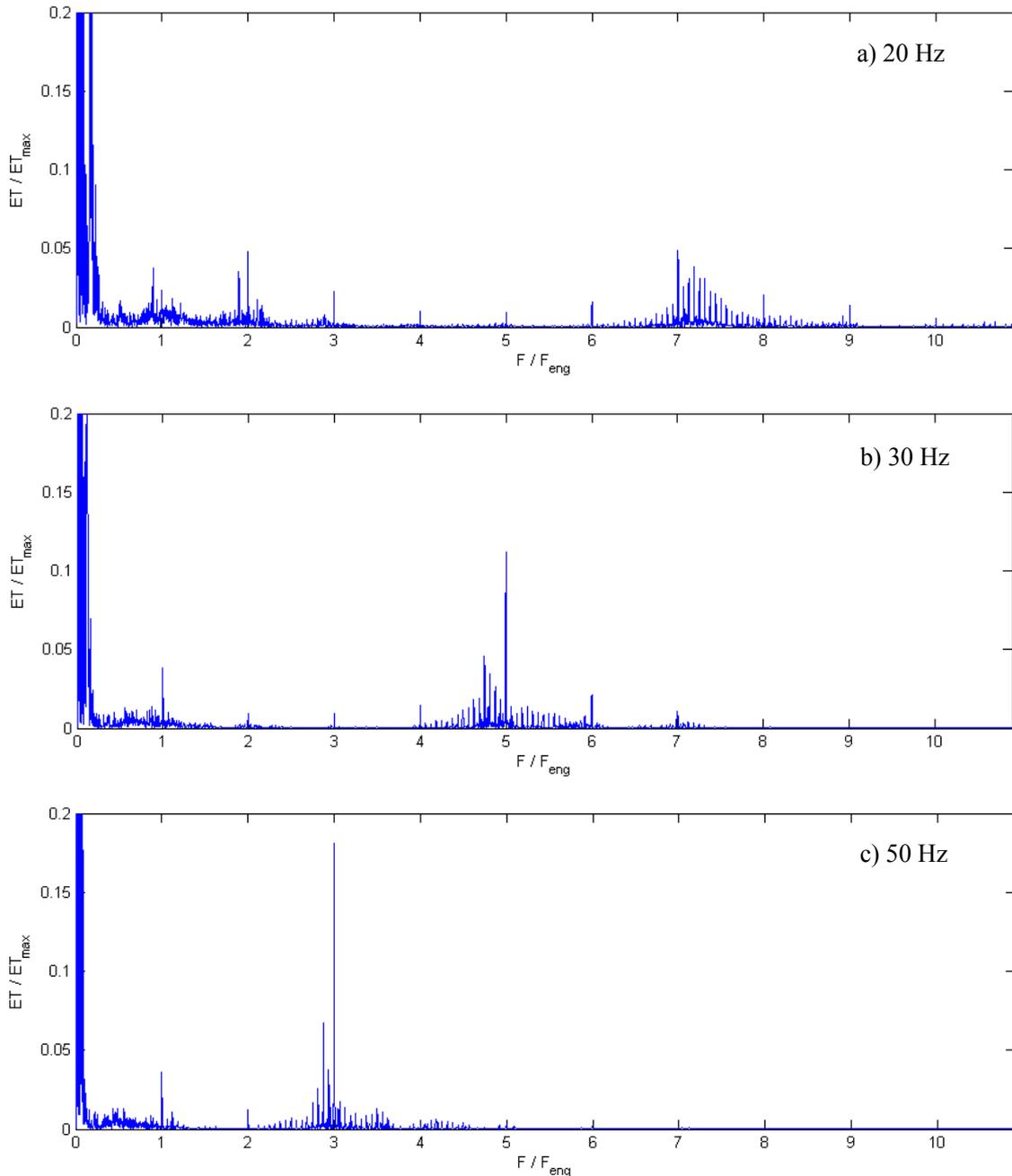
Les amplitudes des spectres obtenus à partir des signaux de l'erreur de transmission sont modifiées en fonction du niveau de chargement. Pour un chargement croissant, les amplitudes des pics liées aux fréquences de rotation du pignon et de la roue diminuent (Figure III-13.a et b) alors que les amplitudes des pics liées aux fréquences d'engrènement et de son multiple de 5 augmentent (Figure III-13.c et d). Cette constatation est valable pour les signaux sans et avec écaillage. Cette observation illustre le fait que, lorsque le niveau de chargement augmente, le pourcentage d'énergie de déformation stocké dans les dentures augmente ce qui se traduit par des pics associés à l'engrènement présentant des amplitudes plus élevées.



**Figure III-13 :** Amplitudes des pics des spectres des signaux théoriques et expérimentaux avec et sans écaillage aux fréquences de rotation de la roue ( $Fr$ ) et du pignon ( $Fp$ ) (a et b) et aux fréquences d'engrènement ( $Feng$ ) et son multiple de 5 ( $5*Feng$ ) (c et d)

### III.2.3.6. Influence de la vitesse de rotation

La Figure III-14 montre les spectres des signaux expérimentaux de l'erreur de transmission d'un train d'engrenage en présence d'une écaille au pignon pour différentes vitesses de rotation de l'arbre d'entrée. Les signaux de l'erreur de transmission sont obtenus en tournant l'engrenage sous le niveau de chargement n°7 (Tableau III-2).



**Figure III-14 :** Spectres des signaux expérimentaux de l'erreur de transmission en présence d'écailage pour différentes vitesses de rotation a) 20 Hz, b) 30 Hz et c) 50 Hz

Dans tous les cas, on remarque la présence de pics avec des amplitudes différentes à la fréquence d'engrènement et ses multiples. Cependant, le nombre d'harmoniques diminue lorsque la vitesse de rotation augmente et, à une vitesse faible, l'effet de l'engrènement est partagé sur plusieurs harmoniques tandis qu'à 50 Hz, il est principalement concentré au niveau de la fréquence critique (3<sup>ème</sup> harmonique).

En conclusion sur ces comparaisons entre résultats expérimentaux et numériques, on note un bon accord qualitatif au niveau des spectres de réponses pour une large gamme de charges et de vitesses de rotation. Ce constat valide largement le modèle d'écaillage mis en œuvre et permet d'étendre les simulations aux systèmes électromécaniques couplés avec confiance.

### III.3. Couplage du modèle de Kron avec le modèle d'engrenages

Tous les résultats présentés dans cette partie concernent un système électromécanique comprenant un moteur asynchrone triphasé (15 kW, 60 Hz, 460V, connecté en étoile, 4 pôles et 1775 tr/min) et un engrenage dont les caractéristiques sont détaillées dans les Tableau III-3 et Tableau III-4.

$R_s$ ( $\Omega$ )	0,2761
$L_s$ (H)	0,002191
$R_r$ ( $\Omega$ )	0,1645
$L_r$ (H)	0,002191
$L_m$ (H)	0.07614

**Tableau III-3 :** *Caractéristiques électrique du moteur asynchrone*

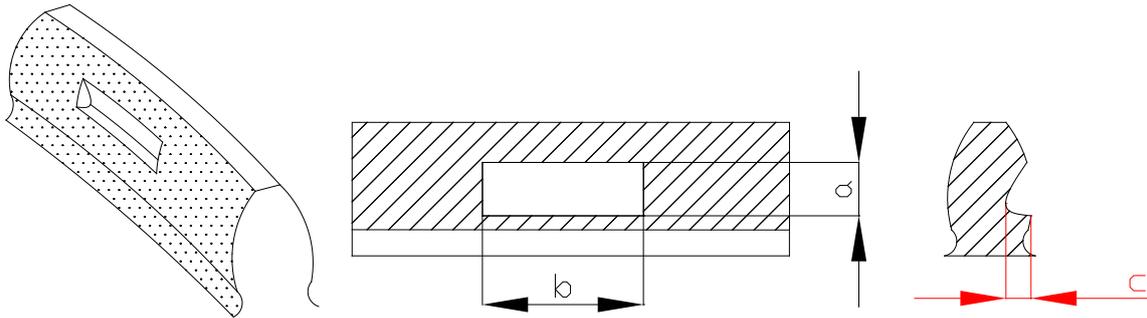
	Pignon	Roue
Module (mm)	4	
Nombre de dents Z	21	31
Angle de pression $\alpha$ (deg)	20	
Angle d'hélice $\beta$ (deg)	20	
Largeur (mm)	10	

**Tableau III-4 :** *Caractéristiques géométriques de l'engrenage*

Tous les constituants du réducteur sont en acier de module d'Young  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa , de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et de masse volumique  $\rho = 7800$  kg / m<sup>3</sup> .

### III.3.1. Présentation du défaut d'écaillage

Afin d'analyser la contribution des défauts locaux des dentures d'engrenage sur les signaux électriques, un seul écaillage a été simulé sur la dent n°12 du pignon dont les dimensions sont données dans la Figure III-15. La valeur de la profondeur de défaut est définie dans le sens de l'enlèvement de la matière de la dent. Elle caractérise l'écart normal relatif équivalent de chaque segment  $ij$  des lignes de contact passant par la zone défectueuse de la dent (Figure II-10) et joue un rôle très important dans les conditions de contact.



**Figure III-15 :** *Forme et dimensions du défaut*

Dans ce manuscrit, les formes des défauts sont assimilées à des trous de largeurs constantes (sens de la largeur de la dent ( $b$ ) et sens du profil ( $a$ )) alors que leurs profondeurs sont approchées à l'aide de fonctions de Bézier (pour éviter les discontinuités au passage du défaut de la dent). La forme de défaut dans la direction du profil (fonction de Bézier,  $B_e(t)$ ) a été déduite des travaux réalisés dans [85] et [86].

Selon [34], [64], les défauts locaux tels que les écailles sont modélisés par une distribution d'écart normal dans les deux directions du plan d'action (largeur et profil de la dent). La fonction résultante de l'écaillage dépend essentiellement de la coordonnée axiale (largeur) et de la variable temps dans le but de simuler la profondeur du défaut dans la direction du profil (Figure III-16). Lors de la simulation du contact entre les dents, la distribution des écarts normaux est mise à jour à chaque pas de temps. La fonction  $\Pi_{ij}$  définit la position du défaut sur le plan d'action, elle est égale à 1 lorsque la ligne de contact passe par sur l'écaillage et 0 sur tout le reste du plan d'action.

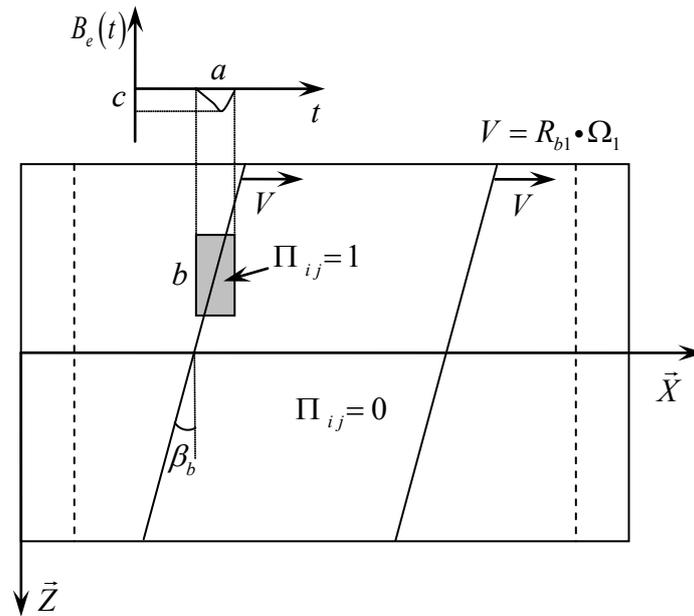


Figure III-16 : Simulation de passage du défaut lors de l'engrènement

### III.3.2. Influence des défauts locaux sur les caractéristiques mécanique d'engrenage

#### III.3.2.1. Effet du défaut d'écaillage sur la raideur d'engrènement globale

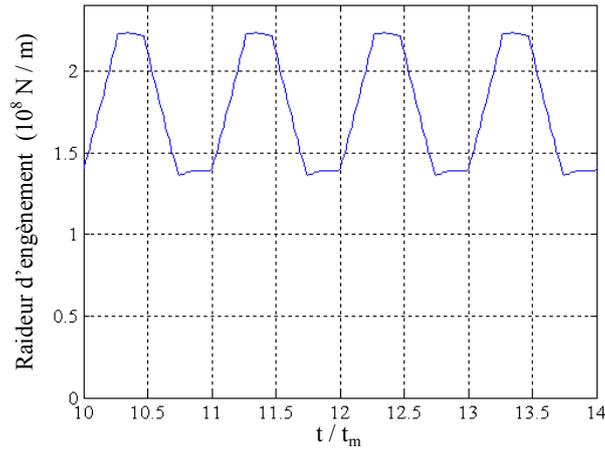
La Figure III-17 illustre les variations de la raideur d'engrènement global en fonction du temps pour différents cas de profondeur de défaut (les autres dimensions du défaut sont maintenues constantes). Cette raideur résultante est obtenue en additionnant, à chaque pas de temps, toutes les raideurs élémentaires  $k(M_{ij})$  actives le long des lignes de contact déduites après la résolution simultanée des équations du mouvement et des conditions de contact normales. En effet, au cours de la résolution des équations de mouvement et en présence des défauts d'engrenage, un algorithme de contact unilatéral a été mis en place pour vérifier à chaque instant les conditions de contact entre les dents [64]. Il s'agit de calculer le rapprochement  $\delta(M_{ij})$  à chaque segment et à chaque instant en fonction des paramètres géométriques et ceux de fonctionnement de l'engrenage (vitesse de rotation, chargement, ...) et de le comparer par rapport à l'écart normal relatif  $\delta e(M_{ij})$  défini à partir de l'ensemble des défauts présents sur le couple de dents (voir paragraphe I.6.2.3).

Dans le cas du fonctionnement sain (sans présence de défaut (Figure III-17.a)), la raideur d'engrènement globale évolue normalement pour un engrenage hélicoïdal entre une valeur maximale qui correspond au nombre maximum de segments en contact (2 paires de dents en contact) et une valeur minimale qui correspond au nombre minimum de segments en contact (1 paire de dents en contact). La descente dans la courbe définit la sortie progressive

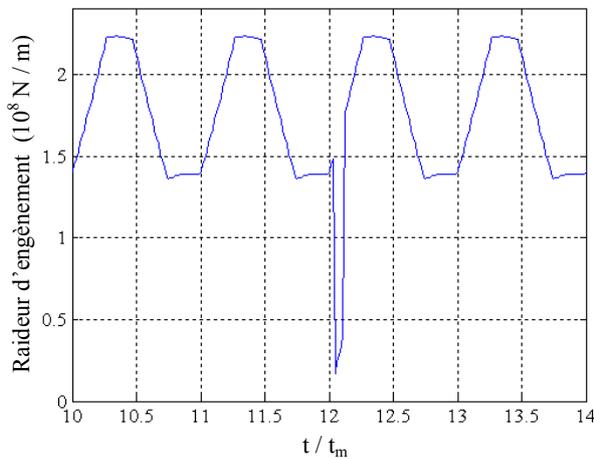
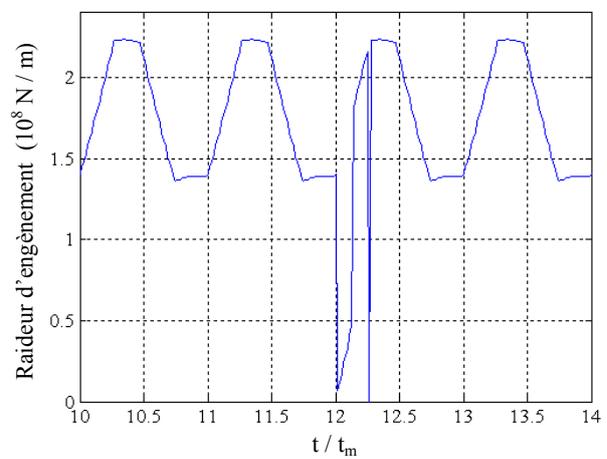
d'un couple de dent de la fenêtre d'engrènement et la montée correspond à l'entrée progressive d'un nouveau couple de dent en contact.

En présence de défaut (Figure III-17.b et Figure III-17.c), des perturbations apparaissent sur l'évolution temporelle de la raideur d'engrènement globale aux moments du passage de la dent défectueuse (dent n°12) dans la zone de contact. En particulier, il peut être observé dans la Figure III-17.b que, lorsque le défaut entre dans l'engrènement, le contact entre les dents peut être partiellement perdu conduisant à une réduction locale de la raideur d'engrènement. Pour l'écaillage le plus profond (50  $\mu\text{m}$ , Figure III-17.c), la raideur d'engrènement chute instantanément à zéro indiquant une perte de contact totale et instantanée.

On peut donc déduire que, selon la profondeur de défaut, deux types différents de réponses dynamiques sont attendus allant des perturbations très limitées pour des écailles superficielles à des pertes totales de contact et des chocs entre les dents lorsqu'une partie importante de la dent est endommagée.



(a) : sans défaut

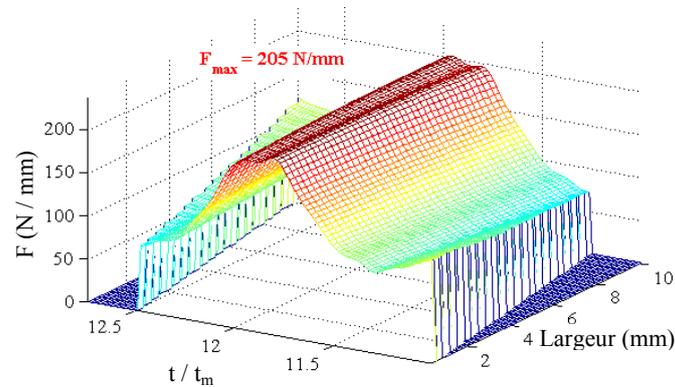
(b) : défaut de profondeur 20 $\mu\text{m}$ (c) : défaut de profondeur 50 $\mu\text{m}$ 

**Figure III-17 :** *Effet de la profondeur du défaut sur la raideur d'engrènement global (Raideur d'engrènement en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement)*

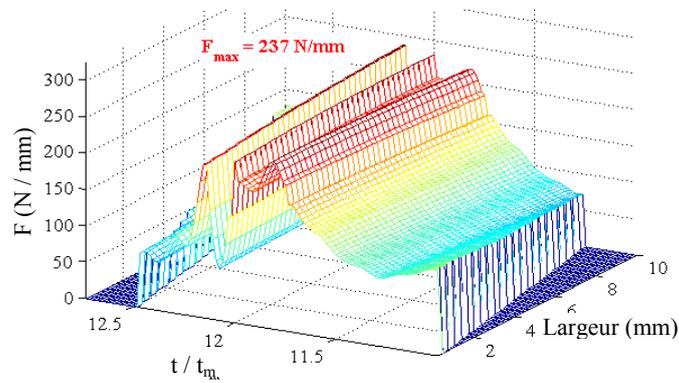
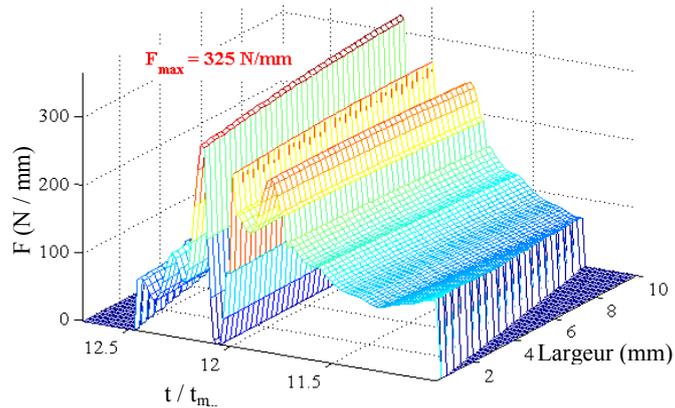
### III.3.2.2. Effet du défaut d'écaillage sur la distribution des charges instantanées sur la denture

La Figure III-18 montre les distributions de charges instantanées sur la denture défectueuse pour différents cas de profondeur de défaut (les autres dimensions du défaut sont maintenues constantes). Pour l'engrenage sain (Figure III-18.a), une variation lisse typique, correspondant au fonctionnement des engrenages hélicoïdaux, a été trouvée avec une force maximale par unité de longueur de contact de 205 N/mm lorsqu'une seule paire de dents est en contact. L'introduction d'un défaut d'écaillage avec des profondeurs différentes (Figure III-18.b et Figure III-18.c) entraîne des fluctuations de chargement dans le sens du profil de la denture. L'amplitude de la force maximale par unité de longueur de contact devient plus élevée et localisée avec des pics très aigus.

Les amplifications localisées du chargement apportées par ce genre de défauts superficiels peuvent étendre la présente écaille ou générer d'autres défauts tels que les fissures ou même des ruptures de dents lorsque les limites de résistance du matériau sont dépassées.



(a) : sans défaut

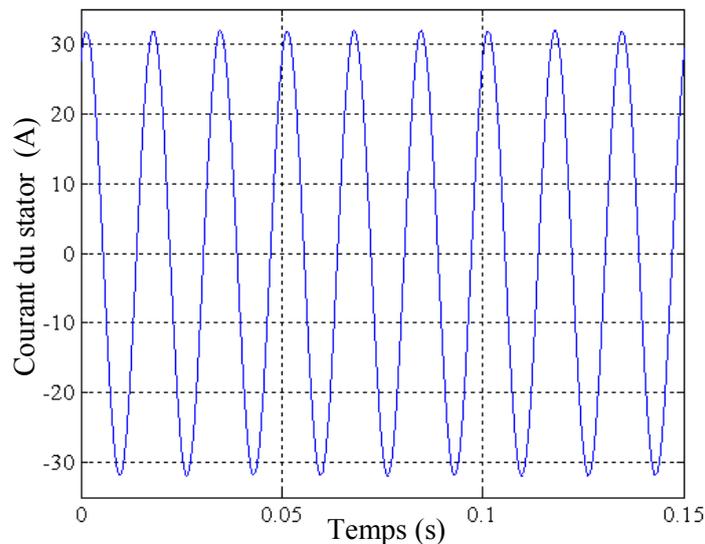
(b) : défaut de profondeur 10 $\mu$ m(c) : défaut de profondeur 20 $\mu$ m

**Figure III-18** : Effet de la profondeur du défaut sur la distribution des charges instantanées sur la denture

### III.3.3. Influence de défauts d'écaillage sur les signaux des courants statoriques

#### *III.3.3.1. Influence de défauts sur les grandeurs triphasées*

La Figure III-19 montre le signal de la phase 1 du courant du stator. L'impact du défaut sur les courants n'apparaît pas de manière manifeste sur le courant de phase. Cette observation souligne l'intérêt de l'utilisation des méthodes plus efficaces de traitement de signal afin de dégager l'effet du défaut d'engrenage sur la signature des courants du moteur asynchrone.

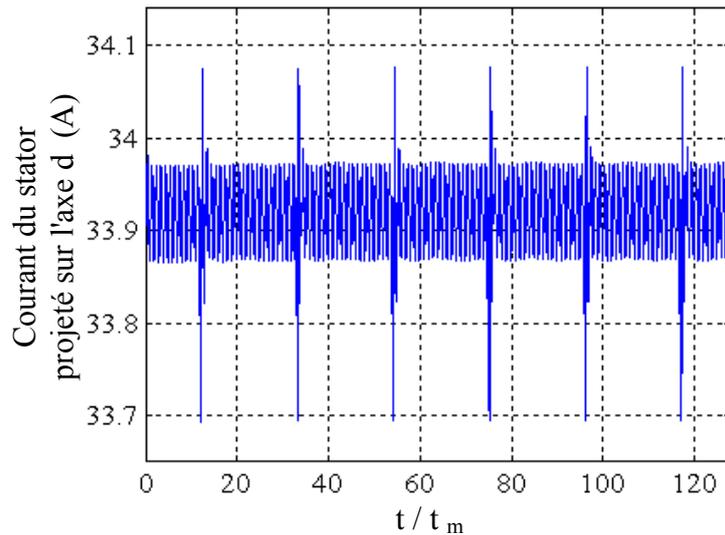


**Figure III-19 :** Signal de la phase 1 des courants triphasés statoriques

#### *III.3.3.2. Influence sur les transformées dq dans un référentiel de Kron*

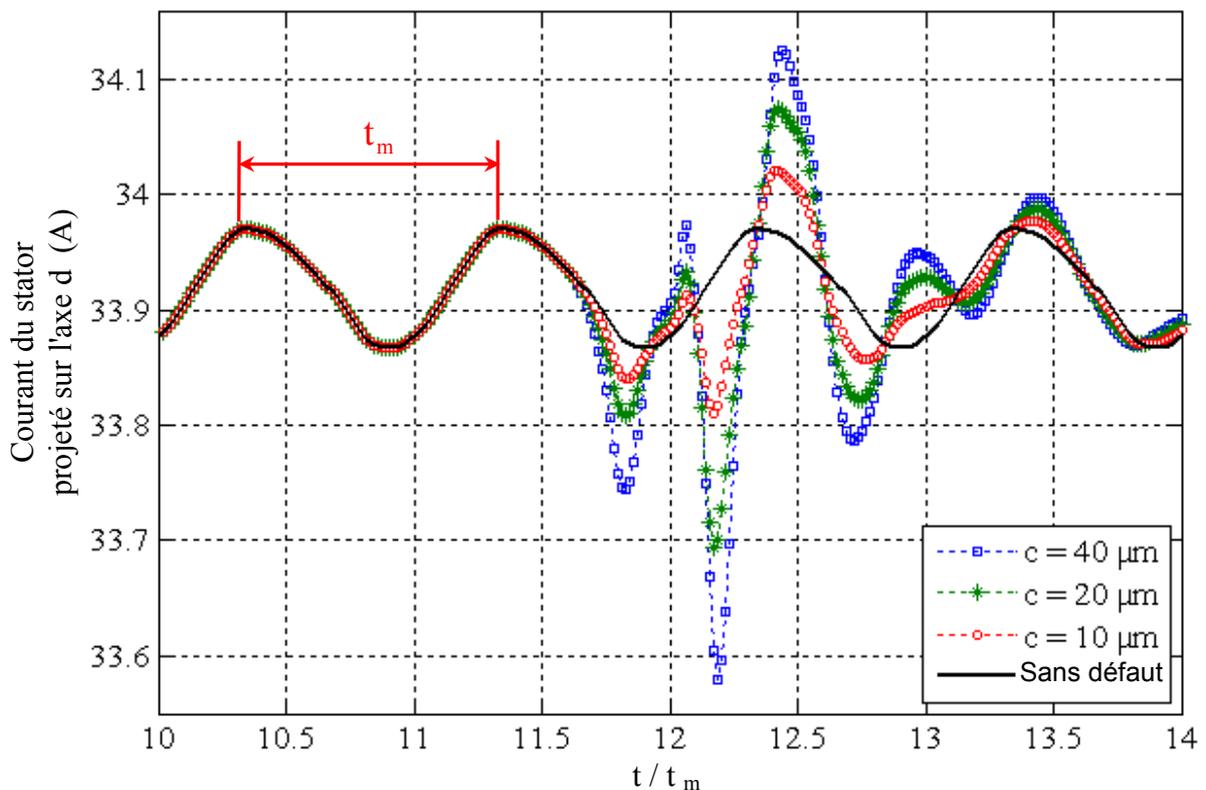
La Figure III-20 montre l'évolution du courant statorique présenté sur l'axe d du référentiel synchrone de Kron en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement et en présence d'une écaillage de 20  $\mu\text{m}$  de profondeur appliquée sur une dent du pignon. Contrairement aux courants triphasés, l'impact du défaut apparaît clairement. Cela est dû à l'élimination de la composante fondamentale (fréquence d'alimentation du moteur).

Dans ce signal, on peut observer que l'écaillage de la dent produit un pic à chaque tour du pignon. La récurrence périodique des pics dus au défaut, est clairement visible et de période  $Z_1 \cdot t_m$ , sachant que  $Z_1$  est le nombre de dents du pignon et  $t_m$  est la période d'engrènement.



**Figure III-20 :** Signal du courant statorique présenté sur l'axe d du référentiel de Kron

Les vues agrandies dans la Figure III-21 montrent l'évolution du courant statorique présenté sur l'axe d du référentiel synchrone de Kron en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement Kron pour différentes profondeurs maximales de défauts. Elles indiquent qu'un défaut plus profond amplifie les amplitudes des pics mais ne modifie pas la périodicité ni le contenu fréquentiel.



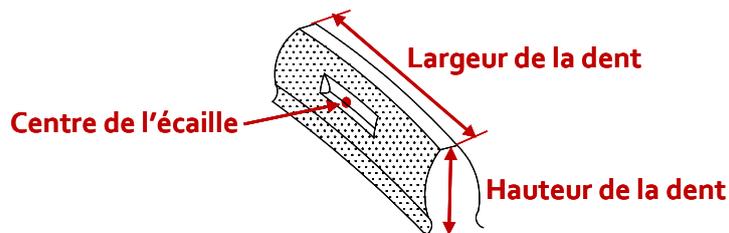
**Figure III-21 :** Zoom sur le signal du courant statorique présenté sur l'axe d du référentiel synchrone de Kron pour différentes profondeurs maximales de défauts

### III.3.4. Sensibilité de détection

Afin d'évaluer la sensibilité de détection du défaut d'écaillage, les simulations ont été étendues à des défauts de plusieurs dimensions à différentes positions sur le flanc actif de la dent. Un indicateur de détection (ID) est défini par la mesure de la distance crête à crête normalisée entre les amplitudes maximales et minimales des pics engendrés par le défaut sur les signaux des courants statoriques dans le système de Kron. La première série de résultats concerne un défaut de dimensions constantes localisé à différentes positions sur le flanc actif de la dent du pignon (Figure III-22). Les dimensions de l'écaille considérées dans cette étude sont :

- $a$  / hauteur de la dent = 15 %
- $b$  / largeur de la dent = 25 %
- $c = 20 \mu\text{m}$

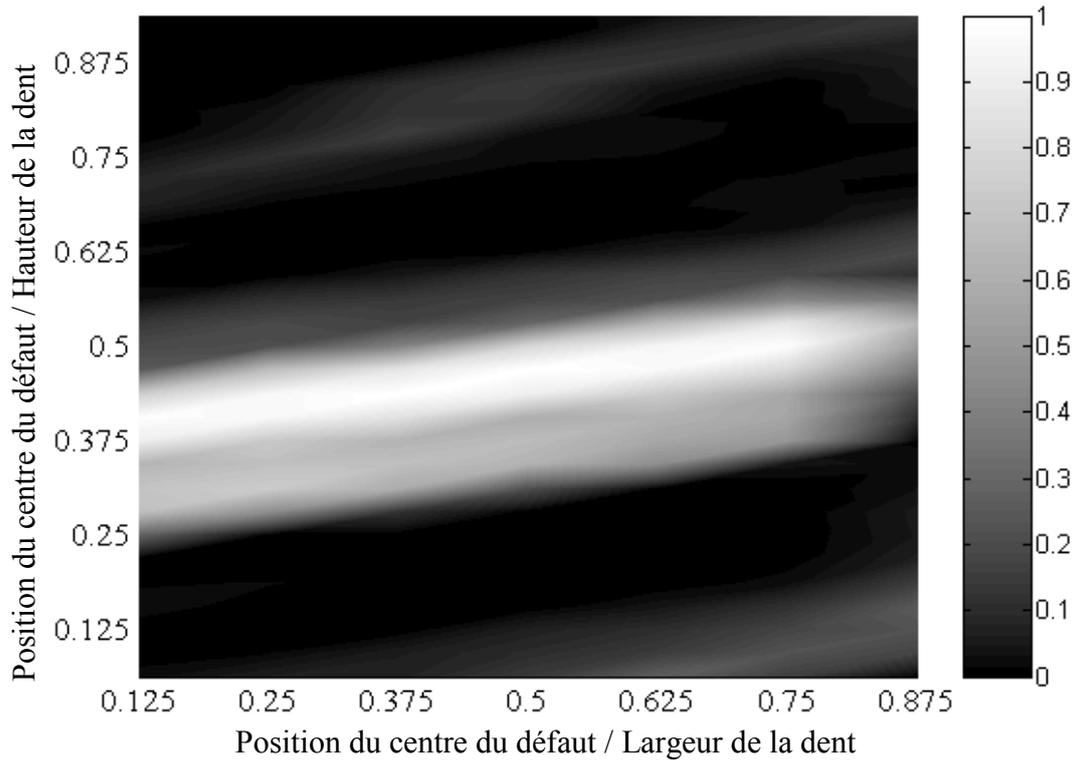
Les grandeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définies dans Figure III-15.



**Figure III-22** : Flanc actif d'une dent

La Figure III-23 montre les niveaux de l'ID par rapport à la position du centre du défaut sur la largeur et la hauteur de la surface active de la dent. Les dimensions du défaut sont supposées constantes. Il peut être observé que la sensibilité de détection est maximale quand l'écaille est située sur une partie de la surface de la dent (la bande blanche sur la Figure III-23) qui correspond à la zone où le contact s'effectue entre une seule paire de dents. La détection semble beaucoup plus difficile lorsque la surface endommagée se trouve dans la zone où le contact est assuré par deux paires de dents, ce qui suggère que son influence sur la dynamique du système est en partie masquée par le contact des autres dents non défectueuses.

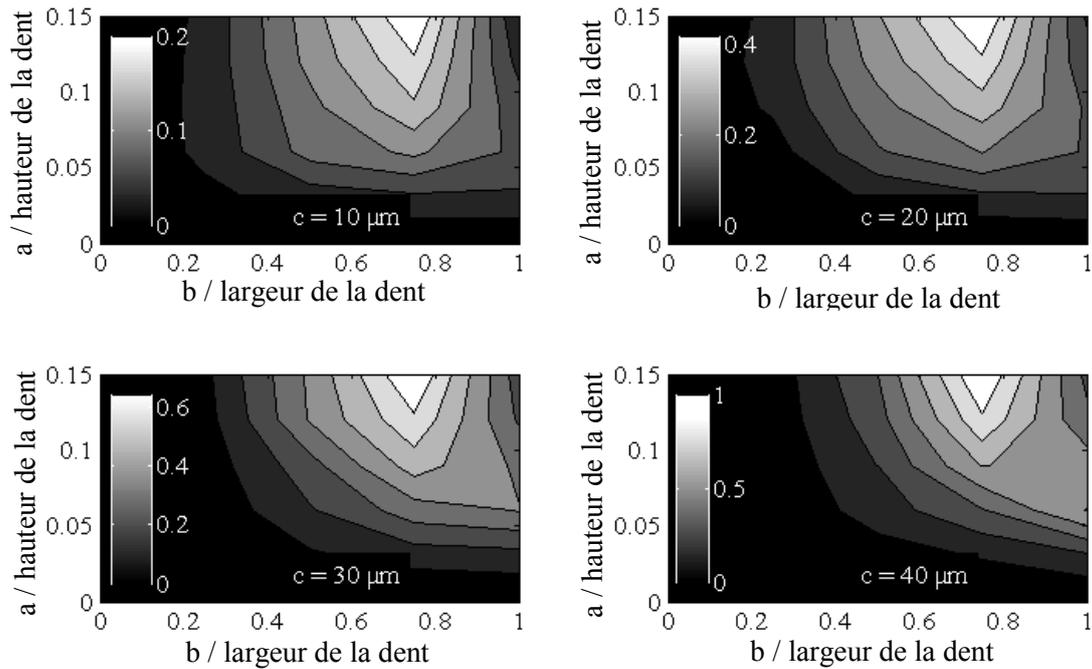
Du point de vue pratique, cette zone de détection privilégiée correspond également à la partie du flanc actif des dents où le chargement est maximal et les défauts de surface tels que les écailles sont susceptibles d'apparaître.



**Figure III-23** : Carte de la sensibilité de détection des défauts sur la denture

Dans une deuxième phase, on se propose d'étudier l'effet de la variation des dimensions du défaut sur la sensibilité de détection ( $a$ ,  $b$  et  $c$  représentent respectivement la longueur dans le sens du profil de la dent, la largeur et la profondeur maximale du défaut (Figure III-15)). La position du centre du défaut est maintenue constante dans la zone où le niveau de l'indicateur de détection est maximal tel que défini dans la Figure III-23 (coordonnées: 0,5 ; 0,42).

Les résultats sont synthétisés dans les tracés de contours de la Figure III-24 (un tracé de contours par profondeur maximale de défaut). D'une manière générale, il peut être observé que la sensibilité de détection augmente pour un défaut plus grand et/ou plus profond. Cependant, il est à remarquer qu'un défaut couvrant toute la largeur de la dent ne correspond pas à une sensibilité de détection maximale même si un défaut de plus de 80% de la largeur totale apparaît comme plus visible indépendamment de la profondeur du défaut.



**Figure III-24 :** Influence de la taille de défaut sur la sensibilité de détection

### III.3.5. Détection des défauts basée sur l'analyse des courants statoriques triphasés

#### III.3.5.1. Analyse spectrale

Bien qu'aucune modification évidente dans le signal temporel du courant de phase ne puisse être constatée Figure III-19, le contenu spectral est modifié dans les domaines des hautes et basses fréquences, comme illustré sur la Figure III-25. Cette figure représente les spectres des signaux des courants de phase statorique obtenus dans le cas d'un engrenage sain (en vert) et d'un engrenage avec une écaille de 20  $\mu\text{m}$  de profondeur maximale appliquée sur le flanc actif d'une seule dent du pignon (en bleu).

Les spectres des signaux des courants statoriques de la Figure III-25 sont obtenus en utilisant une fenêtre de Blackman et en transformant ses amplitudes dans une échelle logarithmique afin de visualiser les contributions des perturbations de faibles amplitudes telles que celles attendues suite à la présence de l'écaillage (défauts très petits et localisés).

Dans le cas d'un engrenage sans défaut, le spectre du signal du courant de phase statorique présente des pics à la fréquence fondamentale de la tension d'alimentation ( $f_s = 60 \text{ Hz}$ ) et à la fréquence d'engrènement ( $f_{mesh} = 621.66 \text{ Hz}$ ) et ses harmoniques modulées par la fréquence  $f_s$  (par exemple : 561.66 Hz, 681.66 Hz, 1183.3 Hz et 1303.3 Hz) (voir Figure III-25). En général, ces fréquences liées à la fréquence d'engrènement correspondent à :

$$f_{Gmesh} = |f_s \pm n f_{mesh}| \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.1})$$

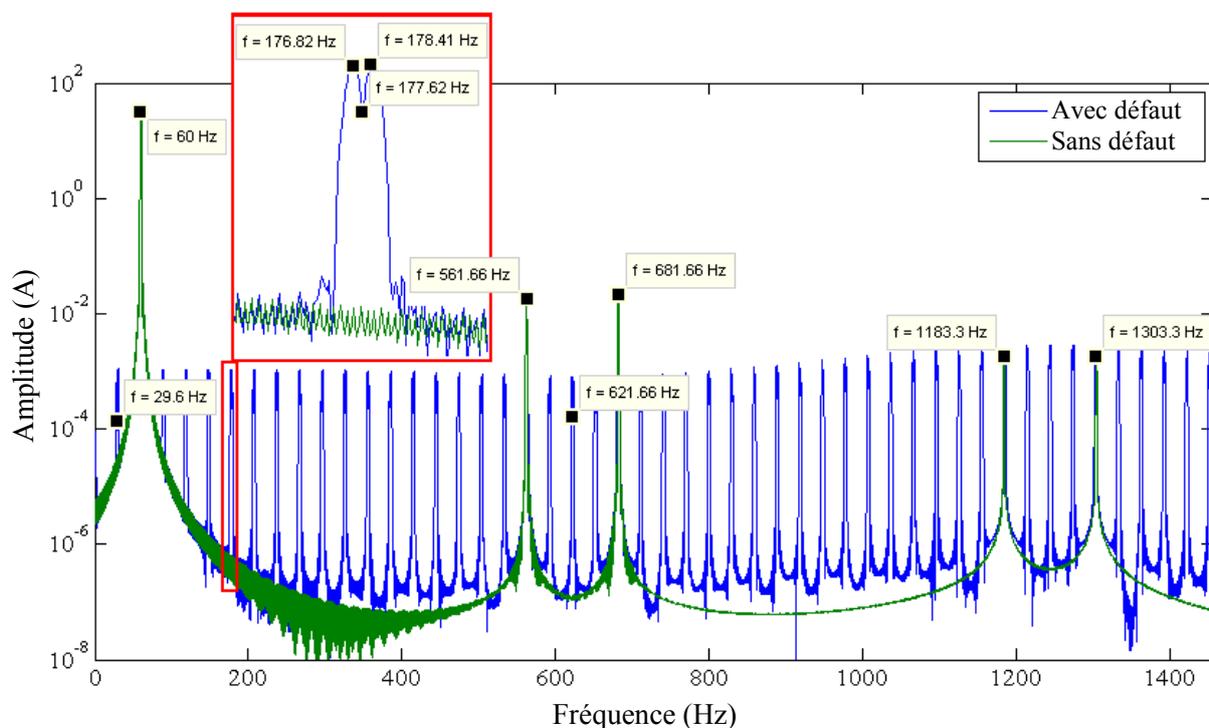
D'autre part, le spectre du signal du courant en présence de défaut d'engrenage conserve le même contenu fréquentiel mentionné ci-dessus et présente d'autres pics additionnels correspondant à la fréquence de rotation du pignon ( $f_r = 29.603 \text{ Hz}$ ) et ses multiples modulés par la fréquence de la tension d'alimentation  $f_s$ . Par exemple, la vue agrandie de la partie cadrée de la Figure III-25 révèle deux pics à  $176.82 \text{ Hz}$  ( $|f_s - 8f_r|$ ) et à  $178.41 \text{ Hz}$  ( $|f_s + 4f_r|$ ) autour de la fréquence  $177.62 \text{ Hz}$  qui correspond à un multiple de 6 de la fréquence de rotation  $f_r$ . De manière plus générale, ces fréquences liées à la fréquence de rotation du pignon correspondent à :

$$f_{Gr} = |f_s \pm m f_r| \text{ avec } m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.2})$$

D'autres fréquences peuvent co-exister sur le spectre des courants de phase statorique. Elles sont liées aux fréquences de rotation et d'engrènement et sont identifiées par :

$$f_{Gmesh} = |f_s \pm m f_r \pm n f_{mesh}| \text{ avec } m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.3})$$

Toutes les fréquences mentionnées précédemment et extraites à partir de la Figure III-25 correspondent aux combinaisons de fréquences obtenues analytiquement dans [12] par la décomposition du signal du courant réel en plusieurs signaux modulés avec une seule composante de phase chacun.



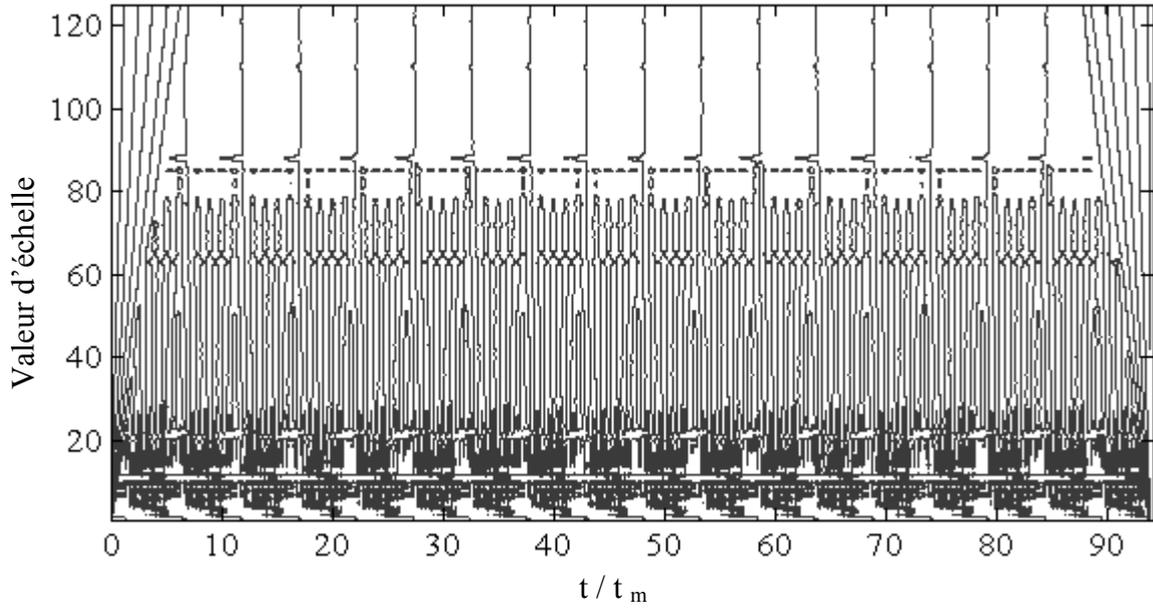
**Figure III-25 :** Spectres des signaux des courants de la phase 1 statorique (avec et sans défaut d'engrenage)

### *III.3.5.2. Transformée en ondelettes*

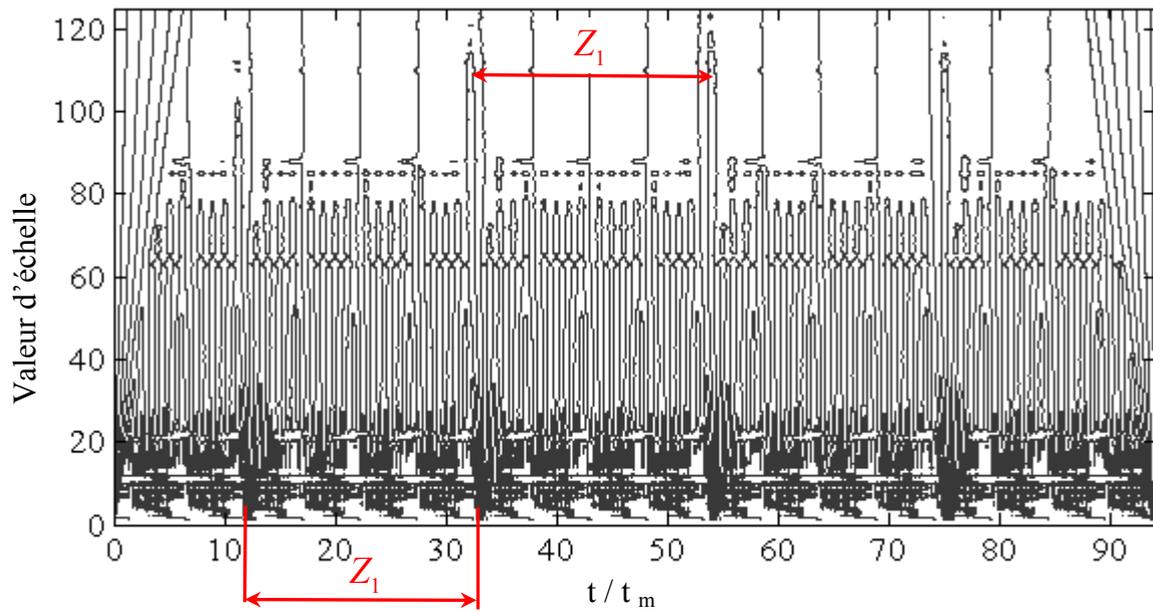
La Figure III-26 montre la transformée continue en ondelettes du signal du courant de la phase 1 statorique en utilisant l'ondelette de Morlet dans laquelle les valeurs d'échelles représentent la mesure à laquelle l'ondelette mère est comprimée ou étirée. En effet, les valeurs d'échelle faibles compriment les ondelettes et offrent une meilleure corrélation avec les hautes fréquences tandis que les valeurs d'échelle élevées étirent les ondelettes et offrent une meilleure corrélation avec le contenu en basses fréquences du signal.

En comparant les cartes de la transformée en ondelettes pour un engrenage sans défaut (Figure III-26.a) et un autre avec une écaille de 10  $\mu\text{m}$  de profondeur maximale localisée sur une dent de pignon (Figure III-26.b), la présence du défaut est clairement identifiée dans les domaines de basses et hautes fréquences (valeurs d'échelle élevées et faibles respectivement). Plusieurs pics et tâches apparaissent lorsque la dent défectueuse entre en contact et il est vérifié que l'intervalle de temps entre deux pics ou deux tâches correspond à la période de rotation du pignon (roue portant le défaut).

La transformée en ondelettes de Morlet se présente donc comme une méthode de détection plus sensible que la transformée de Fourier.



(a) : sans défaut



(b) : défaut de profondeur 10  $\mu\text{m}$

**Figure III-26 :** Transformée en ondelette de Morlet du courant de phase statorique

### III.4. Résultats du couplage du modèle de Perméances avec le modèle 3D d'engrenage

Tous les résultats présentés dans cette partie concernent un système électromécanique comprenant un moteur asynchrone triphasé (50 kW, 50 Hz, 400V, connecté en étoile, 2 pôles et 2900 tr/min) et un engrenage dont les caractéristiques sont détaillées dans les Tableau III-5 et Tableau III-6.

Paramètres	Stator	Rotor
Nombre d'encoches	24	30
Résistance du stator ( $\Omega$ )	0.051	
Inductance de fuite statorique (mH)	3.023	
Résistance d'une portion d'anneau ( $\mu\Omega$ )		2.011
Résistance d'une barre du rotor ( $\mu\Omega$ )		2.213
Inductance de fuite d'une portion d'anneau ( $\mu\text{H}$ )		0.0201
Inductance de fuite d'une barre du rotor ( $\mu\text{H}$ )		0.6213
Perméance d'une dent (H)	$2.984 \cdot 10^{-4}$	$3.174 \cdot 10^{-4}$
Perméance d'une portion de la culasse (H)	$6.617 \cdot 10^{-4}$	$2.035 \cdot 10^{-3}$
Perméance maximale de l'entrefer $P_{\max}$ (H)	$5.4 \cdot 10^{-6}$	

**Tableau III-5 :** Données du moteur asynchrone

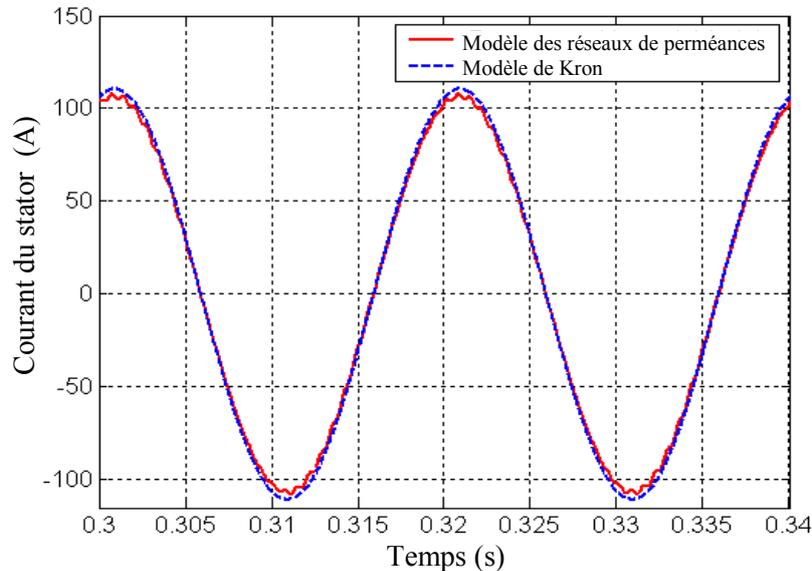
	Pignon	Roue
Module (mm)	4	
Nombre de dents $Z$	21	31
Angle de pression $\alpha$ (deg)	20	
Angle d'hélice $\beta$ (deg)	20	
Largeur (mm)	20	

**Tableau III-6 :** Caractéristiques géométriques de l'engrenage

#### III.4.1. Détection des défauts d'engrenage et du moteur

La Figure III-27 illustre les variations temporelles des signaux des courants statoriques obtenus par le modèle de réseau de perméances et le modèle de Kron qui sont tout les deux couplés au modèle dynamique d'engrenage cylindrique. Des petites perturbations dues à l'effet de passage des encoches statoriques et rotoriques peuvent être remarquées, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle de Kron. Cependant, la présence du défaut d'engrenage n'est pas visible sur les signaux temporels des courants statoriques. Des analyses plus

sophistiquées sont donc nécessaires pour détecter et analyser les conséquences possibles des défauts des engrenages et des moteurs asynchrones sur les courants statoriques.



**Figure III-27 :** Signaux des courants de la phase 1 statorique avec la présence d'un défaut d'engrenage

#### III.4.1.1. Projection dans le repère dq

Les courants triphasés du stator d'une machine asynchrone peuvent être exprimés dans le repère dq qui est choisi, dans cette étude, en synchronisme avec le champ magnétique tournant afin d'éliminer la porteuse sinusoïdale des signaux des courants pour une fréquence d'alimentation constante. On obtient:

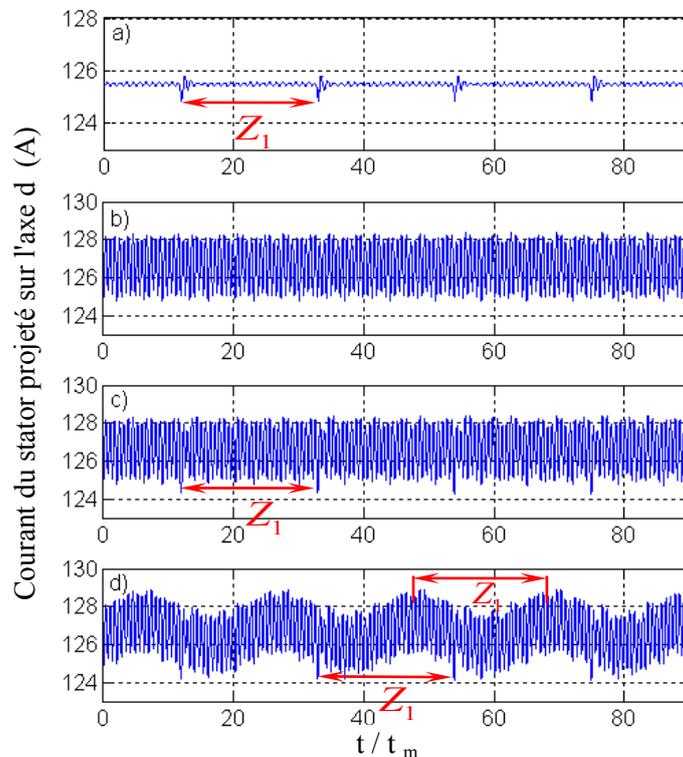
$$\begin{Bmatrix} i_d \\ i_q \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

avec  $\theta = 2\pi f_s \cdot t$ ,  $f_s$  est la fréquence des tensions d'alimentation du moteur et  $t$  est l'incrément de temps de la simulation.

La Figure III-28 montre le courant du stator projeté sur l'axe magnétique d du repère synchrone de Kron en fonction du temps adimensionné par rapport à la période d'engrènement dans les conditions suivantes : a) la présence d'une écaille sur le flanc d'une seule dent et la solution est calculée par le modèle dq présenté dans [17], b) le moteur et l'engrenage sont sains, c) un écaillage 90  $\mu\text{m}$  de profondeur maximale sur une seule dent du pignon, et d) la combinaison de deux défauts de natures différentes : l'excentricité du rotor au niveau du moteur et une écaille sur une seule dent de l'engrenage (les cas b, c et d sont calculées par le modèle de réseau perméances).

Contrairement à ce qui est montré sur les courants de phase dans la Figure III-27, un pic apparaît clairement à chaque rotation du pignon à cause de la présence d'une écaille sur le flanc d'une dent (Figure III-28.a et Figure III-28.b). Ces pics sont régulièrement répétés lorsque la dent défectueuse (n° 12) entre en contact (la période est  $Z_1 \cdot t_m$  avec  $Z_1$  est le nombre de dents du pignon et  $t_m$  est la période d'engrènement).

D'autre part, on peut observer que le courant statorique  $i_d$  projeté sur l'axe d, déduit de la modélisation du réseau de perméances (Figure III-28.b—d), est perturbé par le passage des encoches de la machine, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle de Kron (Figure III-28.a). L'excentricité du rotor du moteur se manifeste dans la Figure III-28.d par l'ajout d'une ondulation de la totalité du signal présenté dans la Figure III-28.c. Cette ondulation est de période identique à celle de la rotation du pignon et du rotor ( $Z_1 \cdot t_m$ ).



**Figure III-28 :** Signal du courant du stator (sur l'axe d du repère synchrone) a) présence d'une écaille sur une dent du pignon (modèle de Kron), b) moteur et engrenage sains, c) présence d'une écaille sur une dent du pignon, et d) combinaison de deux défauts : excentricité du rotor au niveau du moteur et une écaille sur une dent de l'engrenage (cas b,c et d : modèle par réseau de perméances)

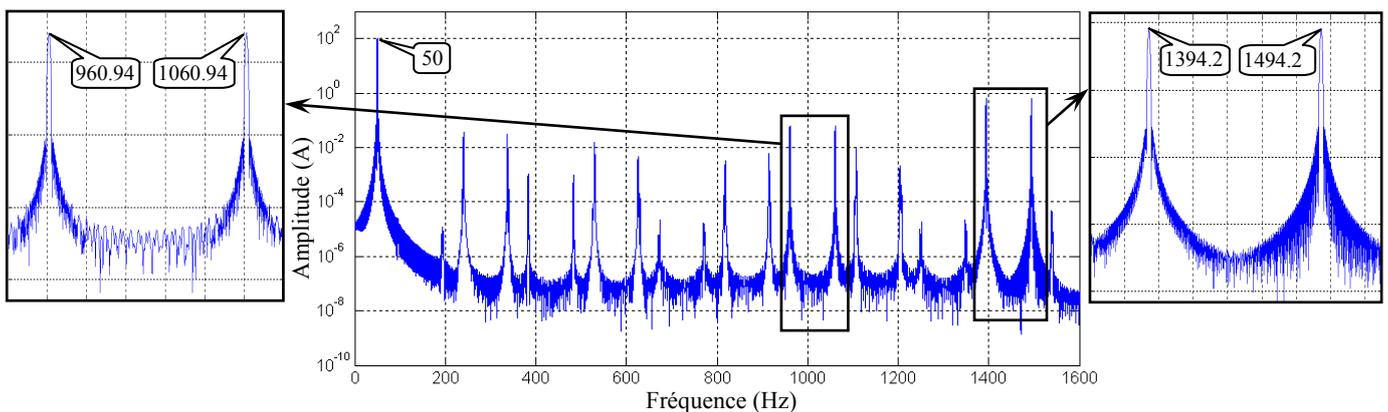
Bien que cette méthode semble adaptée à la détection des défauts locaux des dents d'engrenage, sa sensibilité peut être réduite pour des petits défauts à cause des ondulations

provoquées par le passage des encoches statoriques et rotoriques de la machine asynchrone même en éliminant la fréquence d'alimentation électrique du signal. Par conséquent, une analyse spectrale plus sophistiquée des signaux des courants statoriques est nécessaire afin de surveiller et de détecter les défauts d'engrenage à petite échelle.

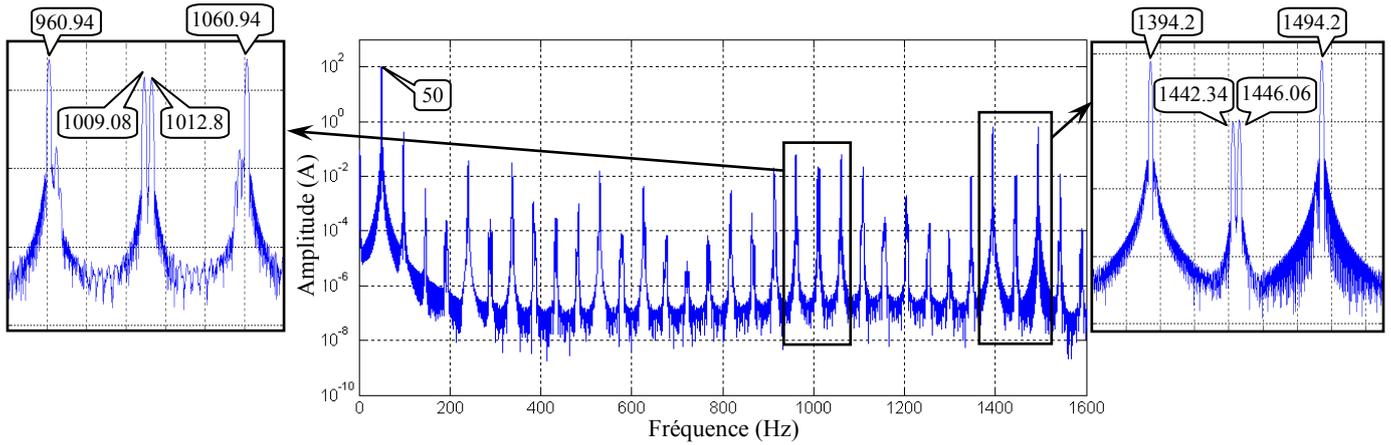
### III.4.1.2. *Analyse spectrale*

L'objectif de cette section est d'étudier l'influence des défauts d'engrenage et du moteur électrique sur les signaux des courants statoriques en utilisant l'analyse spectrale. Physiquement, les défaillances du système d'engrenage conduit d'une part à la variation de la vitesse angulaire instantanée du rotor et d'autre part à la modification de l'épaisseur de l'entrefer du moteur (c'est-à-dire la variation de l'excentricité du rotor). Il est donc crucial d'étudier la possibilité de détecter et de séparer ces deux contributions différentes.

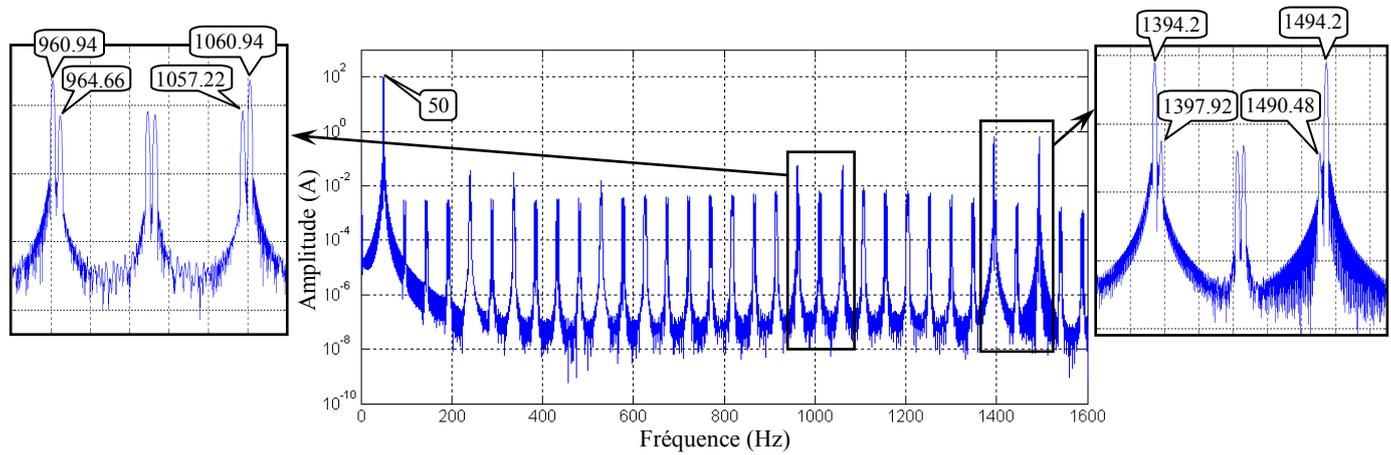
Les Figure III-29 -- Figure III-32 montrent les spectres des signaux des courants statoriques déterminés à partir du modèle du réseau de perméances couplé avec le modèle dynamique 3D des engrenages cylindriques dans le cas de : i) un moteur et un engrenage sains, ii) un moteur avec une excentricité du rotor, iii) un engrenage avec une écaille de 50  $\mu\text{m}$  de profondeur maximale localisée sur le flanc de la dent et, iv) une combinaison des deux défauts (excentricité du rotor au niveau du moteur et une écaille au niveau d'une dent d'engrenage). Tous les spectres présentés ont été calculés en utilisant la fenêtre de Blackman afin de réduire les ondulations des lobes secondaires et d'obtenir des pics étroits et distinctifs. Les amplitudes du spectre ont été représentées sur une échelle logarithmique pour mettre en évidence les contributions des perturbations de faibles amplitudes dues aux défauts du moteur et/ou de l'engrenage.



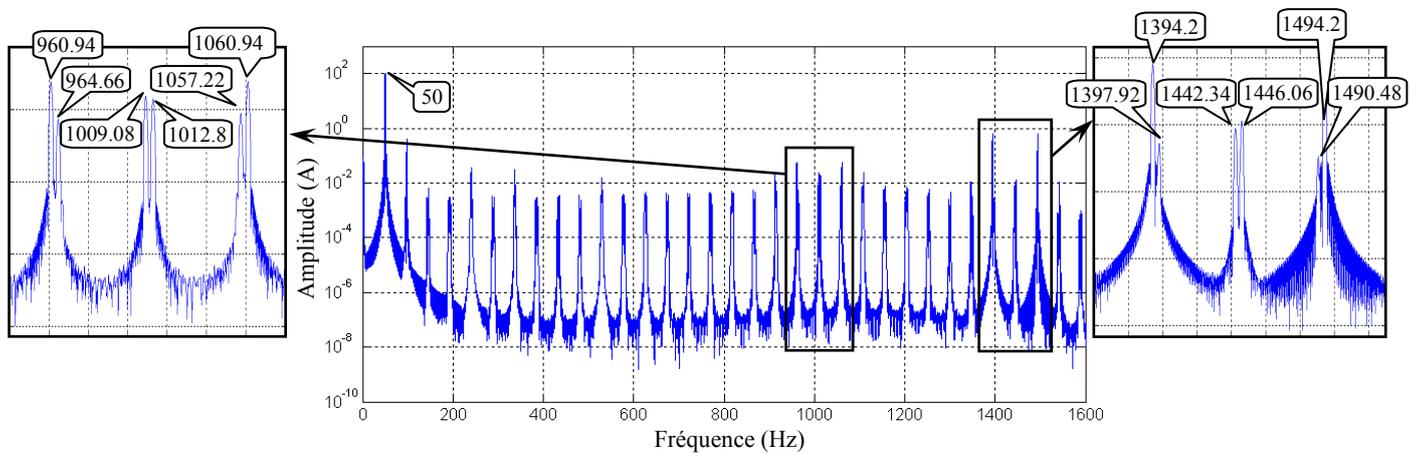
**Figure III-29 :** *Spectre du signal du courant statorique pour un moteur et un engrenage sains*



**Figure III-30 :** *Spectre du signal du courant statorique pour un moteur avec excentricité du rotor seulement*



**Figure III-31 :** *Spectre du signal du courant statorique pour un engrenage avec une écaille sur une seule dent du pignon (50 µm de profondeur maximale)*



**Figure III-32 :** *Spectre du signal du courant statorique pour un moteur déféctueux (excentricité du rotor) et un engrenage avec une écaille (50 µm de profondeur maximale)*

Dans tous les cas, les spectres des signaux des courants du stator présentent des pics à la fréquence d'alimentation électrique ( $f_s = 50 \text{ Hz}$ ), à la fréquence d'engrènement ( $f_{mesh} = 1010.94 \text{ Hz}$ ) modulée par  $f_s$  (c'est-à-dire :  $960.94 \text{ Hz}$  et  $1060.94 \text{ Hz}$ ), et à la fréquence principale de passages des encoches rotoriques  $f_{sh}$  (c'est-à-dire :  $1394.2 \text{ Hz}$  et  $1494.2 \text{ Hz}$ ). (Voir Tableau III-7).

Les fréquences identifiées précédemment peuvent être exprimées sous formes générales similaires aux expressions proposées dans [12] pour l'équation (III.5) et dans [87] pour l'équation (III.6). On a donc :

$$f_{Gmesh} = |f_s \pm n f_{mesh}| \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.5})$$

où  $f_{mesh} = Z_1 \cdot f_r$ ,  $Z_1$  et  $f_r$  sont respectivement le nombre de dents et la fréquence de rotation du pignon.

$$f_{sh} = f_s \left( 1 \pm \frac{k \cdot n_r \cdot (1 - g)}{p} \right) \text{ avec } k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.6})$$

où  $n_r$  est le nombre des encoches rotoriques,  $g$  est le glissement et  $p$  est le nombre de paire de pôle (dans cette étude, on a :  $g = 0.037$  et  $p = 1$ ).

Fréquences (Hz)	Sans défaut	Excentricité du rotor	Ecaillage d'engrenage	Combinaison des deux défauts
960,94 ( n =1; éq. (III.5))	0,0613	0,0615	0,0573	0,0570
1060,94 ( n =1; éq. (III.5))	0,0609	0,0611	0,0570	0,0565
1394,2 ( k =1; éq. (III.6))	0,6189	0,6189	0,6208	0,6205
1494,2 ( k =1; éq. (III.6))	0,6424	0,6424	0,6442	0,6438

**Tableau III-7 : Identification des fréquences et amplitudes**

Dans le cas de systèmes (moteur et/ou engrenage) défectueux, en comparant les spectres des courants en présence de défauts (Figure III-30 -- Figure III-32) par rapport au spectre du courant statorique d'un système électromécanique sain (Figure III-29), des pics supplémentaires liés à la fréquence de rotation du pignon  $f_r$  modulée par la fréquence d'alimentation du stator  $f_s$  peuvent être repérés.

Les vues zoomées de ces figures révèlent des pics à des fréquences et des amplitudes différentes et distinctives montrant ainsi que les fréquences spécifiques à chaque type de défaut peuvent être identifiées (Figure III-30 et Figure III-31). Par exemple, les fréquences données dans le Tableau III-8 correspondent à ceux associés à l'excentricité statique du moteur :

$$f_{ecc} = h f_r \pm g f_s \text{ avec } h = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.7})$$

Et les fréquences du Tableau III-9, caractéristiques d'un défaut d'écaillage dans l'engrenage, peuvent être exprimées sous forme générale similaire à ce qui était développée dans [12] :

$$f_{Gr} = |f_s \pm m f_r| \text{ avec } m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.8})$$

Pour certaines combinaisons de  $m$  et  $h$ , les fréquences caractéristiques de chaque type de défaut peuvent coïncider, mais leurs amplitudes correspondantes sont différentes. En conséquence, les harmoniques du spectre peuvent encore être distinguées afin de détecter les défauts réels des systèmes électromécaniques. Du point de vue physique, ces pics supplémentaires liés à la fréquence de rotation du pignon modulée par la fréquence d'alimentation du stator sont causés par l'excentricité d'entrefer (variation instantanée de l'épaisseur de l'entrefer) et l'asymétrie dans les enroulements résultante de l'apparition d'un défaut mécanique.

Fréquences (Hz)	h ( <i>éq. (III.7)</i> )	Sans défaut	Excentricité du rotor	Ecaillage d'engrenage	Combinaison des deux défauts
1009,08	21	Pas de pic	0,0211	0,0067	0,0228
1012,8	21	Pas de pic	0,0204	0,0056	0,0198
1442,34	30	Pas de pic	0,0100	0,0016	0,0078
1446,06	30	Pas de pic	0,0111	0,0024	0,0131

**Tableau III-8 :** *Identification des fréquences et amplitudes*

Fréquences (Hz)	m ( <i>éq. (III.8)</i> )	Sans défaut	Excentricité du rotor	Ecaillage d'engrenage	Combinaison des deux défauts
964,66	19	Pas de pic	0,000357	0,0051	0,0053
1057,22	23	Pas de pic	0,000301	0,0068	0,0075
1397,92	28	Pas de pic	Pas de pic	0,0031	0,0027
1490,48	32	Pas de pic	Pas de pic	0,0015	0,0012

**Tableau III-9 :** *Identification des fréquences et amplitudes*

Le Tableau III-10 illustre le niveau de l'impact des défauts sur les différentes fréquences caractéristiques du système électromécanique utilisées pour la détection des défaillances. Le niveau est estimé à partir de la comparaison entre les différentes amplitudes des fréquences correspondantes extraites des spectres des courants de phase statorique. Selon ce tableau, les

fréquences qui sont liés aux défauts d'engrenage ou du moteur peuvent être distinguées et clairement identifiées.

	$f_{sh}$	$f_{Gmesh}$	$f_{ecc}$	$f_{Gr}$
Sans défaut	--	--	--	--
Excentricité du rotor	--	--	++	+-
Ecaillage d'engrenage	--	--	+-	++
Combinaison des deux défauts	--	--	++	++

**Tableau III-10 : Impact du défaut sur la fréquence de détection**

- ++ : impact du défaut élevé sur la détection
- +- : impact du défaut faible sur la détection
- : pas d'impact sur la détection

### III.5. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la validation expérimentale du modèle mécanique de la transmission par engrenages et à la présentation des différents résultats obtenus à partir des simulations des deux modèles électromécaniques globaux développés dans le chapitre II.

En se basant sur les mesures expérimentales et les simulations numériques de l'erreur de transmission, on montre un bon accord entre les images spectrales des signaux expérimentaux et théoriques ce qui valide le modèle mécanique de dentures écaillées. La présence d'un défaut au niveau du pignon a été remarquée par une modification spectrale autour des harmoniques principales en comparant les spectres de l'erreur de transmission avec ou sans écaillage. De plus, l'effet de l'engrènement s'intensifie pour des niveaux de chargement plus élevés.

Sur la base des résultats des simulations numériques des modèles électromécaniques, on peut conclure que :

- les sous-systèmes mécaniques et électriques sont dynamiquement reliés.
- l'effet de la présence d'un défaut local d'écaillage sur la signature des courants statoriques du moteur est difficilement lisible sur un enregistrement temporel des courants de phase.
- l'analyse spectrale ou la transformée en ondelettes de la signature des courants permettent la surveillance et la détection à distance de ce type de défaut. La détection par mesures non intrusives des courants semble donc être réalisable.

- l'écaillage sur les dents d'engrenage est plus facilement détecté lorsqu'il est situé dans la zone de contact d'une seule paire de dents.
- le deuxième modèle proposé peut tenir compte simultanément des défauts du moteur électrique et du réducteur à engrenage.
- l'analyse de la signature des courants du moteur (MCSA) apparaît comme une méthode suffisamment précise pour distinguer entre les fréquences liées aux défauts électriques et celles liées aux défauts d'engrenage.

## Conclusion générale

Dans ce manuscrit, deux modèles électromécaniques originaux d'un train à engrenage entraîné par un moteur asynchrone ont été présentés. Ils permettent de simuler les interactions dynamiques entre les vibrations mécaniques générées par les engrenages avec ou sans défauts et les courants électriques sur les machines motrices.

Le premier modèle consiste à caractériser le système électromécanique par un modèle analytique tridimensionnel effectuant un couplage fort entre le modèle dq de Kron pour le moteur asynchrone et un modèle de type masses-ressorts pour l'engrenage (modèle à paramètres concentrés avec des raideurs de liaison distribuées). La méthodologie repose sur une approche intégrée qui conduit à un ensemble unique d'équations d'état non linéaires représentatives des interactions électromécaniques. Ces équations sont résolues par une méthode couplant le schéma d'intégration pas à pas dans le temps de Newmark et un algorithme de contact unilatéral qui vérifie les conditions de contact normal entre les dentures. Sur la base des résultats de simulation, il a été démontré que la présence de défauts localisés sur les dents (écaillage, ...) a une influence limitée sur la variation temporelle des courants statoriques du moteur. Cependant, la détection à distance de ces défauts par surveillance des courants statoriques semble envisageable à l'aide d'analyses plus sophistiquées des signaux des courants telles que l'analyse spectrale ou la transformée en ondelettes. Cette méthode offre l'avantage d'une mise en œuvre plus facile que les mesures de vibration in-situ (en particulier lorsque les capteurs sont fixés à des parties tournantes ou dans des environnements hostiles). Le modèle proposé peut aussi être utile pour des analyses de sensibilité approfondies et pour tester une variété de techniques de surveillance. Enfin, il a été montré que l'écaillage sur les dents d'engrenage est plus facilement détecté lorsqu'il est situé dans la zone de contact d'une seule paire de dents, qui, par ailleurs, correspond à la zone où l'écaillage a plus de chance de se produire.

D'autre part, afin d'obtenir un modèle plus représentatif du fonctionnement réel de la machine, le moteur asynchrone a été caractérisé par un modèle de réseaux de perméances permettant de considérer de manière fine la géométrie de la machine, l'encochage, la variation de l'épaisseur de l'entrefer, l'excentricité, la variation des inductances propres et mutuelles avec la saturation, etc. ... Le comportement électromagnétique de la machine est décrit par un système d'équations différentielles non linéaires et le couplage entre les modèles électriques (moteur asynchrone) et mécaniques (engrenages, arbres et paliers) est assuré en respectant les entrées/sorties de chaque sous-système. Ce modèle électromécanique étendu est mis en place pour permettre la mise au point de méthodes de détection et de surveillance des défauts d'engrenage par mesures électriques à distance, dans un environnement plus réaliste.

Contrairement aux approches classiques de la littérature, le modèle proposé peut simultanément tenir compte des défauts du moteur électrique et du réducteur à engrenage avec l'influence de l'encoche de la machine. En se basant sur de nombreuses simulations numériques, les résultats obtenus en termes de courants statoriques montrent que les sous-systèmes mécaniques et électriques sont dynamiquement reliés. Ce modèle a permis d'étudier l'interdépendance entre les deux sous-systèmes et d'avoir une analyse fine sur la présence des défauts. Il a également été montré que la détection des défauts locaux d'engrenage par des mesures non intrusives des courants semble être réalisable. En outre, l'analyse de la signature des courants du moteur (MCSA) apparaît comme une méthode suffisamment précise pour différencier entre les défauts d'excentricité du moteur électrique et les défauts locaux d'engrenage (écaillage sur une dent).

Finalement, une étude expérimentale a été réalisée sur la machine FZG afin de provoquer un écaillage sur un train à engrenage sain. En se basant sur les mesures de l'erreur de transmission et les simulations du modèle mécanique (engrenages, arbres et paliers), un bon accord est noté entre les spectres des signaux expérimentaux et théoriques obtenus dans les mêmes conditions de fonctionnement (avec ou sans écaillage). En comparant les représentations spectrales des signaux avec et sans défaut, une modification spectrale a été constatée, montrant la présence d'un défaut au niveau du pignon. En outre, les amplitudes des spectres obtenus à partir des signaux de l'erreur de transmission sont modifiées pour des niveaux de chargement différents. La répartition des amplitudes des pics est donc différente d'une fréquence à une autre et d'un chargement à un autre selon le pourcentage énergétique d'un phénomène par rapport à l'énergie total du système.

En termes de perspectives, il est important d'effectuer des études expérimentales montrant la faisabilité de détection et de surveillance des avaries de contact (écaillage) au niveau de l'engrenage par mesure et analyse de la signature des courants du moteur. Un banc moteur est en cours de réalisation à cet effet. Pour ce qui relève de la simulation, le modèle de réseaux de perméances pourra être modifié pour permettre de considérer le bobinage multicouche et la prise en compte de la saturation en rendant les perméances saturables. Enfin, à partir des modèles électromécaniques déjà développés, l'effet des défauts électriques sur l'oscillation du couple électromagnétique transmis et, par suite, sur la transmission mécanique par engrenages pourra être étudié.

## Références Bibliographiques

- [1] **Wang, W., Wong, A. K.** “Autoregressive Model-based gear fault diagnosis,” *J. Vib. Acoustics*, Vol. 124, pp. 172–179, Apr. 2002.
- [2] **Jing, L., Ming, J. Z.** “Extraction of periodic components for gearbox diagnosis combining wavelet filtering and cyclostationary analysis,” *J. Vib. Acoustics*, Vol. 126, pp. 449–451, Jul. 2004.
- [3] **Baydar, N., Ball, A.,** “A comparative study of acoustic and vibration signals in detection of gear failures using Wigner-Ville distribution”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 15, no. 6, pp. 1091–1107, 2001.
- [4] **Baydar, N., Ball, A.,** “Detection of gear failures via vibration and acoustic signals using wavelet transform”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17, no. 4, pp. 787–804, 2003.
- [5] **Tan, C. K., Irving, Ph., Mba, D.,** “A comparative experimental study on the diagnostic and prognostic capabilities of acoustics emission, vibration and spectrometric oil analysis for spur gears”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 1, pp. 208–233, 2007.
- [6] **Bellini, A., Filippetti, F., Tassoni, C., Capolino, G.-A.** “Advances in Diagnostic Techniques for Induction Machines”, *IEEE Trans. Ind. Electronics*, Vol. 55, no. 12, pp. 4109 – 4126, 2008.
- [7] **Blödt, M., Granjon, P., Raison, B., Rostaing, G.** “Models for Bearing Damage Detection in Induction Motors Using Stator Current Monitoring,” *IEEE Trans. Ind. Electronics*, Vol. 55, no. 4, pp. 1813–1822, Apr. 2008.
- [8] **Immovilli, F., Bellini, A., Rubini, R., Tassoni, C.** “Diagnosis of Bearing Faults in Induction Machines by Vibration or Current Signals: A Critical Comparison,” *IEEE Trans. Industry Applications*, Vol. 46, no. 4, pp. 1350–1359, Jul./Aug. 2010.
- [9] **Benbouzid, M. E. H.,** “A review of induction motors signature analysis as a medium for faults detection,” *IEEE Trans. Ind. Electronics*, Vol. 47, no. 5, pp. 984–993, Oct. 2000.
- [10] **Kia, S. H., Henao, H., Capolino, G.-A.,** “A Modeling Approach for Gearbox Monitoring Using Stator Current Signature in Induction Machines,” *IEEE Industry applications society annual meeting*, 2008, pp. 1–6.

- [11] **Kia, S. H., Henao, H., Capolino, G.-A.**, “Torsional vibration effects on induction machine current and torque signatures in gearbox-based electromechanical system,” *IEEE Trans. Ind. Electronics*, vol. 56, no. 11, pp. 4689–4699, Nov. 2009.
- [12] **Kia, S. H., Henao, H., Capolino, G.-A.** “Analytical and experimental study of gearbox mechanical effect on the induction machine stator current signature,” *IEEE Trans. Industry Applications*, Vol. 45, no. 4, pp. 1405–1415, Jul./Aug. 2009.
- [13] **Henao, H., Kia, S. H., Capolino, G.-A.** “Torsional-Vibration Assessment and Gear-Fault Diagnosis in Railway Traction System,” *IEEE Trans. Ind. Electronics*, vol. 58, no. 5, pp. 1707–1717, 2011.
- [14] **Wolf, C. M., Lorenz, R. D.** “Using the Motor Drive as a Sensor to Extract Spatially Dependent Information for Motion Control Applications,” *IEEE Trans. Industry Applications*, Vol. 47, no. 3, pp. 1344–1351, May/June 2011.
- [15] **Rajagopalan, S. T., Habetler, G., Harley, R.G., Sebastian, T., Lesquesne, B.** “Current/voltage-based detection of faults in gears coupled to electric motors,” *IEEE Trans. Industry Applications*, Vol. 42, no. 6, pp. 1412–1420, Nov/Dec 2006.
- [16] **Feki, N., Vexex, P., Clerc, G.** “Modeling of gear-Motor dynamic interactions – Applications to the detection of tooth faults by electric measurements,” in *Proc Int. Conf. On Gears*, Munich 2010, VDI-Berichte 2108-2, pp. 941–954.
- [17] **Feki, N., Vexex, P., Clerc, G.** “An integrated electro-mechanical model of motor-gear units - Applications to tooth fault detection by electric measurements”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Available online 29 October 2011.
- [18] **Luo, X., Liao, Y., Toliyat, H.A., El-Antably, A., Lipo, T.A.** “Multiple coupled circuit modeling of induction machines,” *IEEE Trans. Industry Applications*, Vol. 31, no. 2, pp.311–318, Mar/Apr 1995.
- [19] **Ostovic, V.** *Dynamics of saturated electric machines*. New York, Springer-Verlag, 1989.
- [20] **Feki, N., Vexex, P., Clerc, G.** “Gear and motor fault modeling and detection based on motor current analysis”, *Soumis dans Electric Power Systems Research*.
- [21] **Thorsen, O.V., Dalva, M.** "A survey of fault on induction motors in offshore oil industry, petrochemical industry, gas terminals, and oil refineries" *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.31, no.5, pp. 1186–1196, Sept. 1995.
- [22] **Allianz**, "Présentation des avaries. Machines électriques tournantes" *cahier des préventions*. CP2, Allianz, 1988.

- [23] **Bonnett, A.H., Soukup, G.C.**, “Cause and analysis of stator and rotor failures in three-phase squirrel-cage induction motors”, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol.28, no.4, pp.921-937, Jul/Aug 1992.
- [24] **Abhisek Ukil, Shuo Chen, Andrea Andenna**, “Detection of stator short circuit faults in three-phase induction motors using motor current zero crossing instants”, *Electric Power Systems Research*, Vol. 81, no. 4, pp.1036–1044, Apr. 2011.
- [25] **Toliyat, H.A., Lipo, T.A.**, "Transient analysis of cage induction machines under stator, rotor bar and end ring faults", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 10, no. 2, pp. 241–247, Jun. 1995.
- [26] **Didier, G., Ternisien, E., Caspary, O., Razik, H.**, “A new approach to detect broken rotor bars in induction machines by current spectrum analysis”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 21, no. 2, pp. 1127–1142, Feb. 2007.
- [27] **Yahoui, H., Grellet, G.**, “Detection of an End-Ring Fault in Asynchronous Machines by Spectrum Analysis of the Observed Electromagnetic Torque”, *J. Phys. III*, Vol.6, no.4, pp.443–448, 1996.
- [28] **Sahraoui, M., Ghoggal, A., Zouzou, S.E., Benbouzid, M.E.**, “Dynamic eccentricity in squirrel cage induction motors - Simulation and analytical study of its spectral signatures on stator currents”, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol.16, no.9, pp.1503–1513, Oct.2008.
- [29] **Ghoggal, A., Zouzou, S.E., Razik, H., Sahraoui, M., Khezzar, A.**, “An improved model of induction motors for diagnosis purposes - Slot skewing effect and air-gap eccentricity faults”, *Energy Conversion and Management*, Vol. 50, no. 5, pp. 1336–1347, May 2009.
- [30] **Breneur, C.** Eléments de maintenance préventive de machines tournantes dans le cas de défauts combinés d'engrenages et de roulements. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 2002. N°02 ISAL 0096. 123 p.
- [31] <http://www.novexa.com/engrenage-defauts.php>
- [32] **Drouiche, K., Sidhamed, M., Grenier, Y.** “Détection de défauts d'engrenages par analyse vibratoire”, *Traitement du signal*, vol. 8, no. 5, pp. 331–343, 1992.
- [33] **Kay, S.M.** *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentice Hall, 1988.
- [34] **El Badaoui, M., Cahouet, V., Guillet, F., Danière, J., Vexlex, P.** “Modeling and detection of localized tooth defects in geared systems,” *ASME, J. Mech. Des.*, vol. 123, no. 3, pp. 422–430, 2001.
- [35] **El Badaoui, M., Guillet, F., Danière, J.**, “Surveillance des systèmes complexes à engrenages par l'analyse cepstrale synchrone”, *Traitement Signal*, vol. 16, no. 5, pp. 371–381, 1999.

- [36] **Boulahbal, D., Golnaraghi, M. F., Ismail, F.**, “Amplitude and phase wavelet maps for the detection of cracks in geared systems”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 13, no. 3, pp. 423–436, 1999.
- [37] **Zheng, H., Li, Z., Chen, X.**, “Gear fault diagnosis based on continuous wavelet transform”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 16, no. 2-3, pp. 447–457, 2002.
- [38] **Mosher, M., Pryor, A.H., Lewicki, D.G.**, “Detailed Vibration Analysis of Pinion Gear with Time-Frequency Methods”, NASA TM 2003-212269, NASA Ames Research Center, Moffet Field, CA., 47 p., 2003.
- [39] **Onel, I. Y., Benbouzid, M. E. H.**, “Induction Motor Bearing Failure Detection and Diagnosis: Park and Concordia Transform Approaches Comparative Study”, *IEEE/ASME transactions on Mechatronics*, vol. 13, no. 2, pp. 257–262, 2008.
- [40] **Zarei, J., Poshtan, J.**, “An advanced Park’s vectors approach for bearing fault detection”, *Is*, vol. 42, no. 2, pp. 213–219, 2009.
- [41] **Neelam Mehala, Ratna Dahiya** “Condition monitoring methods, failure identification and analysis for Induction machines” *International Journal of circuits, Systems and signal processing*, Vol. 3, no. 1, 2009.
- [42] **Kar, C., Mohanty, A.R.** “Monitoring gear vibrations through motor current signature analysis and wavelet transform”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, no. 1, pp. 158-187, Jan. 2006.
- [43] **Barret, P.** Régimes transitoires des machines tournantes électriques. Paris: Eyrolles, 1982, 209 p.
- [44] **Hugues, J.-G.** Contribution à l’étude dynamique, lors du démarrage, de chaînes cinématiques à engrenages, entraînées par moteur électrique. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, 1993. N°93 ISAL 0108. 184 p.
- [45] **Gojko, J.M., Momir, D.D., Aleksandar, O.B.** “Skew and linear rise of MMF across slot modelling-winding function approach”, *IEEE Trans. On Energy Conversion*, Vol. 14, no. 3, pp. 315–320, Sep. 1999.
- [46] **Delforge, C., LeMaire-Semail, B.** “Modélisation d’une machine asynchrone par réseaux de perméances en vue de sa commande,” *J. de physique III*, no. 12, pp. 1785–1809, Dec 1996.
- [47] **Ostovic, V.** “A simplified approach to magnetic equivalent-circuit modeling of induction machines,” *IEEE Trans. Industry Applications*, Vol. 24, no. 2, pp. 308–316, Mar./Apr. 1988.
- [48] **Delforge, C., LeMaire-Semail, B.** “Induction Machine Modeling using finite element and permeance network methods,” *IEEE Trans. Magn.* vol. 31, no. 3, pp. 2092–2095, May 1995.

- [49] **Delforge, C.** “Modélisation d’un actionneur asynchrone et de sa commande vectorielle par réseaux de perméances” Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, 1995. 143 p.
- [50] **Sizov, G. Y., Chia-Chou Yeh, Demerdash, N.A.O.** “Magnetic equivalent circuit modeling of induction machines under stator and rotor fault conditions,” in *IEEE International Electric Machines and Drives Conference, IEMDC '09.* , Miami, 2009, pp. 119–124.
- [51] **Saitz, J.** "Newton-Raphson method and fixed-point technique in finite element computation of magnetic field problems in media with hysteresis," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, pp.1398–1401, 1999.
- [52] **Davat, B., Ren, Z., Lajoie-Mazenc, M.** "The movement in field modeling," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, pp. 2296–2298, 1985.
- [53] **Abdel-Razek, A. Coulomb, J., Feliachi, M., Sabonnadiere, J.** “Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol.18, pp. 655–659, 1982.
- [54] **Walker, H.,** “Gear tooth deflection and profile modification”. *The Engineer*, 166 (4319), pp. 434–436, 1938.
- [55] **Weber, C., Banaschek, K.** *Formänderung und Profiltrücknahme bei Gerad- und Schrägverzahnten Antriebstechnik.* Heft 11, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1953.
- [56] **Cornell, R. W.** “Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth”, *ASME, J. Mech. Des.*, vol. 103, pp. 447–459, 1981.
- [57] **Arafa, M. H., Megahed, M. M.,** “Evaluation of spur gear mesh compliance using the finite element method”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers -C- J. of Mechanical Engin Science*, 213 (6), pp. 569–580, 1999.
- [58] International Organization for Standardization, 1996. ISO 6336, Calculation of load capacity of spur and helical gears, part 1-5. Genève, Switzerland.
- [59] Deutsches Institut für Normung e. V. DIN 3990, Tragfähigkeits-berechnung von Stirnrädern, Teil 1-5. Germany.
- [60] American Gear Manufacturers Association. AGMA 2001, Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth. USA.
- [61] **Şener, Ö. S., Özgüven, H. N.** “Dynamic Analysis of Geared Shaft Systems By Using a Continuous System Model”, *J. of Sound and Vib.*, Vol. 166, no. 3, pp. 539–556, 1993.

- [62] **Lin, H. H., Oswald, F. B., Townsend, D. P.**, “Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, no. 8, pp. 1115–1129, 1994.
- [63] **Küçükay, F.**, *Dynamik der Zahnradgetriebe*. Springer-Verlag, 1987.
- [64] **Velex, P., Maatar, M.** “A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behavior formulae,” *J. Sound Vib.* Vol. 191, pp. 629–660, 1996.
- [65] **Maatar, M.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts déformé et des défauts de montage*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1995. N°95 ISAL 0028. 192 p.
- [66] **Ajmi, M.** *Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2000. N°2000 ISAL 0013, 151 p.
- [67] **Velex, P., Ajmi, M.** “Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears – Approximate dynamic factor formulae”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 42, 2007; pp. 1512–1526.
- [68] **Ajmi, M. Velex, P.**, “A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 40, no. 2, pp. 173–190, 2005.
- [69] **Velex, P., Maatar, M., Raclot, J.-P.** “Some numerical methods for the simulation of geared transmission dynamic behavior formulation and assessment,” *ASME, J. Mech. Des.*, vol. 119, no. 3, pp. 292–298, 1997.
- [70] **Henriot G.** *Traité théorique et pratique des engrenages. Théorie et Technologie*. 6ème édition, Paris : Dunod, 1983, 662 p.
- [71] **Bettaieb, M.N.** *Modélisation du comportement mécanique d'engrenages. Couplages entre engrènement et éléments de structures flexibles*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006. N°2006 ISAL 0030, 170 p.
- [72] **Velex, P.** *Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1988. N°88 ISAL 0032, 188 p.
- [73] **Lundberg, G.** *Elastische Berührung zweier Halbräume*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Vol.10, n° 5, pp. 201–211, 1939.
- [74] **Attia, A. Y.** “Deflection of Spur Gear Teeth Cut in Thin Rims”, *ASME, J. Eng. Ind.*, vol. 86, pp. 333–342, 1964.

- [75] **Sabonnadière, J. C., Hadjsaid, N.** *Lignes et réseaux électriques 2 : méthodes d'analyse des réseaux électriques*. LAVOISIER, 2007.
- [76] **Joubert, P.** *Circuits électriques et systèmes : Méthodes modernes de calcul*. Technique et documentation – LAVOISIER, 1986.
- [77] **Hoehn, B.-R. Oster, P. Tobie, T. Michaelis, K.** “Test methods for gear lubricants”, *Goriva i Maziva*, Vol. 47, no. 2, pp. 129–152, 2008.
- [78] **DGMK Information Sheet**: Short Test Procedure to investigate the Lubricant Influence on the Pitting Carrying Capacity of Gears, 2006.
- [79] **Velex, P., Ajmi, M.** “On the modeling of excitations in geared systems by transmission errors,” *J. Sound Vib.* vol. 290, no. 3–5, pp. 882–909, Mar. 2006.
- [80] **Boulenger, A., Pachaud, C.** *Analyse vibratoire en maintenance : Surveillance et diagnostic vibratoire*. Technique et Ingénierie, Dunod /L'Usine Nouvelle, 2007.
- [81] **Inalpolat, M., Kahraman, A.** “A theoretical and experimental investigation of modulation sidebands of planetary gear sets”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 323, no. 3–5, pp. 677–696, June 2009.
- [82] **McFadden, P.D., Smith, J.D.** “An explanation for the asymmetry of the modulation sidebands about the tooth meshing frequency in epicyclic gear vibration”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 199 C1 pp. 65–70, 1985.
- [83] **Fontanive, C., Prieur, P.** "Surveillance et diagnostic des engrenages", *EDF, Collection de notes internes de la DER*, 93NB00094.
- [84] **Baydar, N., Ball, A.** “Detection of gear deterioration under varying load conditions by using the instantaneous power spectrum, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 14, no. 6, pp. 907-921, November 2000.
- [85] **Olver, A.V.** “the mechanism of rolling contact fatigue: an update,” *Journal Engineering Tribology*, vol. 219, pp. 313–330, 2005.
- [86] **Aslantas, K., Tasgetiren, S.** “A study of spur gear pitting formation and life prediction,” *Elsevier, Wear*, vol. 257, pp. 1167–1175, 2004.
- [87] **Kaika, M.Y., Babaa, F., Khezzar, A., Boucherma, M.** “Analytical analysis of rotor slot harmonics in the line current of squirrel cage induction motors”, *J. Electr. Eng.*, Vol. 57, 12–19, 2006.

## Annexe A : Matrices de rigidité et de masse de l'élément arbre

La figure A.1 présente l'élément d'arbre standard (type poutre) à deux noeuds et six degrés de liberté par noeud utilisé pour discrétiser les arbres de transmission de l'engrenage étudié.



**Figure A.1 :** *Eléments finis d'arbre. Description des degrés de liberté.*

Les fonctions d'approximation qui permettent de définir les déplacements en tout point sont données par [65], [66]:

$$u(z) = N(z) \{u_1, u_2\}^T \quad (\text{A.1})$$

$$\theta(z) = N(z) \{\theta_1, \theta_2\}^T \quad (\text{A.2})$$

$$v(z) = M(z) \{v_1, \psi_1, v_2, \psi_2\}^T \quad (\text{A.3})$$

$$w(z) = R(z) \{w_1, \phi_1, w_2, \phi_2\}^T \quad (\text{A.4})$$

$$\phi(z) = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

$$\psi(z) = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$- N(z) = \left\{ 1 - \frac{z}{L}, \frac{z}{L} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 - R(z) &= \left\{ 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3}, -z + \frac{2z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2}, \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3}, \frac{z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} \right\} \\
 - M(z) &= \left\{ 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3}, z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2}, \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3}, -\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right\}
 \end{aligned}$$

### A.1. Matrice de rigidité

L'énergie de déformation d'un élément de poutre en flexion, traction-compression et torsion est donnée par :

$$U = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L E S \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz}_{\text{énergie due à la traction-compression}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L G J \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz}_{\text{énergie due à la torsion}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L E I_A \left( \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 \right) dz}_{\text{énergie due à la flexion}} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$\begin{aligned}
 - I_A &= \pi \frac{D_{\text{ext}}^4 - D_{\text{int}}^4}{64} \\
 - J &= 2 \cdot I_A
 \end{aligned}$$

L'introduction des fonctions d'interpolation permet de calculer  $U$  en fonction des déplacements aux noeuds et d'en déduire la matrice de rigidité  $[K]$  qui s'exprime, dans le repère  $R(S, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , par :

$$[K_A] = \begin{bmatrix} \frac{12 E I A}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & -\frac{12 E I A}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 E I A}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12 E I A}{L^3} & 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12 E I A}{L^3} & 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E S}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E S}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & \frac{4 E I A}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & \frac{2 E I A}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4 E I A}{L} & 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 E I A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G J}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G J}{L} \\ -\frac{12 E I A}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & \frac{12 E I A}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12 E I A}{L^3} & 0 & \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12 E I A}{L^3} & 0 & \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E S}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E S}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & \frac{2 E I A}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & \frac{4 E I A}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 E I A}{L} & 0 & -\frac{6 E I A}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4 E I A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G J}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G J}{L} \end{bmatrix}$$

avec :  $\{q\} = \{v_1, w_1, u_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, v_2, w_2, u_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2\}^T$ .

Cette matrice est valable que lorsqu'on a la longueur de la poutre est grande par rapport aux deux autres dimensions. Donc, pour tenir compte des effets du cisaillement sur la déformée de flexion, on introduit un paramètre, noté par  $Ap$ , dans la formulation de l'énergie de déformation. Et par la suite on obtient la nouvelle matrice de rigidité  $[K]$  qui s'exprime, dans le repère  $R(S, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , par :

$$[K_A] = \begin{bmatrix} \frac{12a}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a}{L^2} & 0 & -\frac{12a}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a}{L^2} & 0 \\ & \frac{12a}{L^3} & 0 & -\frac{6a}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12a}{L^3} & 0 & -\frac{6a}{L^2} & 0 & 0 \\ & & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{b \cdot a}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a}{L^3} & 0 & \frac{c \cdot a}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{b \cdot a}{L} & 0 & -\frac{6a}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{c \cdot a}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \\ & & & & & & \frac{12a}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6a}{L^2} & 0 \\ & & & & & & & \frac{12a}{L^3} & 0 & \frac{6a}{L^2} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{b \cdot a}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{b \cdot a}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}$$

*sym*

$$\text{avec : } a = \frac{EI_A}{1 + Ap}, \quad b = 4 + Ap, \quad c = 2 - Ap \quad \text{et} \quad Ap = \frac{12EI_A}{GSL^2}$$

## A.2. Matrice de masse

L'énergie cinétique d'un élément de poutre en flexion, traction-compression et torsion est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{u}^2) dz + \frac{1}{2} I_0 \int_0^L \dot{\theta}^2 dz + \frac{1}{2} I_x \int_0^L (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) dz \quad (\text{A.8})$$

avec :

- $I_x = \rho \cdot L \cdot I_A$
- $I_0 = \rho \cdot L \cdot J$

L'introduction des fonctions d'interpolation permet de calculer  $T$  en fonction des déplacements aux noeuds et d'en déduire la matrice de rigidité  $[M]$  qui s'exprime, dans le repère  $R(S, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ , par :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_{2,2} & 0 & 0 & M_{2,5} & 0 & 0 & M_{2,8} & 0 & 0 & M_{2,11} & 0 \\ & & M_{3,3} & M_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{3,9} & M_{3,10} & 0 & 0 \\ & & & M_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{4,9} & M_{4,10} & 0 & 0 \\ & & & & M_{5,5} & 0 & 0 & M_{5,8} & 0 & 0 & M_{5,11} & 0 \\ & & & & & M_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{6,12} \\ & & & & & & M_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & M_{8,8} & 0 & 0 & M_{8,11} & 0 \\ & & & & & & & & M_{9,9} & M_{9,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & M_{10,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & M_{11,11} & 0 \\ & & & & & & & & & & & M_{12,12} \end{bmatrix}$$

*sym*

avec :

$$- \{\ddot{q}\} = \{\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{w}_1, \ddot{\phi}_1, \ddot{\psi}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{u}_2, \ddot{v}_2, \ddot{w}_2, \ddot{\phi}_2, \ddot{\psi}_2, \ddot{\theta}_2\}^T$$

$$- M_{1,1} = M_{1,7} = M_{7,7} = \frac{\rho SL}{3}$$

$$- M_{2,2} = \frac{156}{420} \rho SL + \frac{36}{30} \frac{Ix}{L}$$

$$- M_{2,5} = \frac{22}{420} \rho SL^2 + \frac{3}{30} Ix$$

$$- M_{2,8} = \frac{54}{420} \rho SL - \frac{36}{30} \frac{Ix}{L}$$

$$- M_{2,11} = -\frac{13}{420} \rho SL^2 + \frac{3}{30} Ix$$

$$- M_{5,5} = \frac{4}{420} \rho SL^3 + \frac{4}{30} Ix L$$

$$- M_{5,8} = \frac{13}{420} \rho SL^2 - \frac{3}{30} Ix$$

$$- M_{5,11} = -\frac{3}{420} \rho SL^3 - \frac{1}{30} Ix L$$

$$\begin{aligned}
- M_{8,8} &= \frac{156}{420} \rho SL + \frac{36}{30} \frac{Ix}{L} \\
- M_{8,11} &= -\frac{22}{420} \rho SL^2 - \frac{3}{30} Ix \\
- M_{11,11} &= \frac{4}{420} \rho SL^3 + \frac{4}{30} Ix L \\
- M_{3,3} &= \frac{156}{420} \rho SL + \frac{36}{30} \frac{Ix}{L} \\
- M_{3,4} &= -\frac{22}{420} \rho SL^2 - \frac{3}{30} Ix \\
- M_{3,9} &= \frac{54}{420} \rho SL - \frac{36}{30} \frac{Ix}{L} \\
- M_{3,10} &= \frac{13}{420} \rho SL^2 - \frac{3}{30} Ix \\
- M_{4,4} &= \frac{4}{420} \rho SL^3 + \frac{4}{30} Ix L \\
- M_{4,9} &= -\frac{13}{420} \rho SL^2 + \frac{3}{30} Ix \\
- M_{4,10} &= -\frac{3}{420} \rho SL^3 - \frac{1}{30} Ix L \\
- M_{9,9} &= \frac{156}{420} \rho SL + \frac{36}{30} \frac{Ix}{L} \\
- M_{9,10} &= \frac{22}{420} \rho SL^2 + \frac{3}{30} Ix \\
- M_{10,10} &= \frac{4}{420} \rho SL^3 + \frac{4}{30} Ix L \\
- M_{6,6} &= M_{6,12} = M_{12,12} = \frac{I_0 L}{3}
\end{aligned}$$

## Annexe B : Matrice de passage entre les flux captés par les phases et les dents statoriques

La figure B.1 montre le schéma de bobinage étudié. C'est un schéma en sections à pas de bobinage diamétrale.

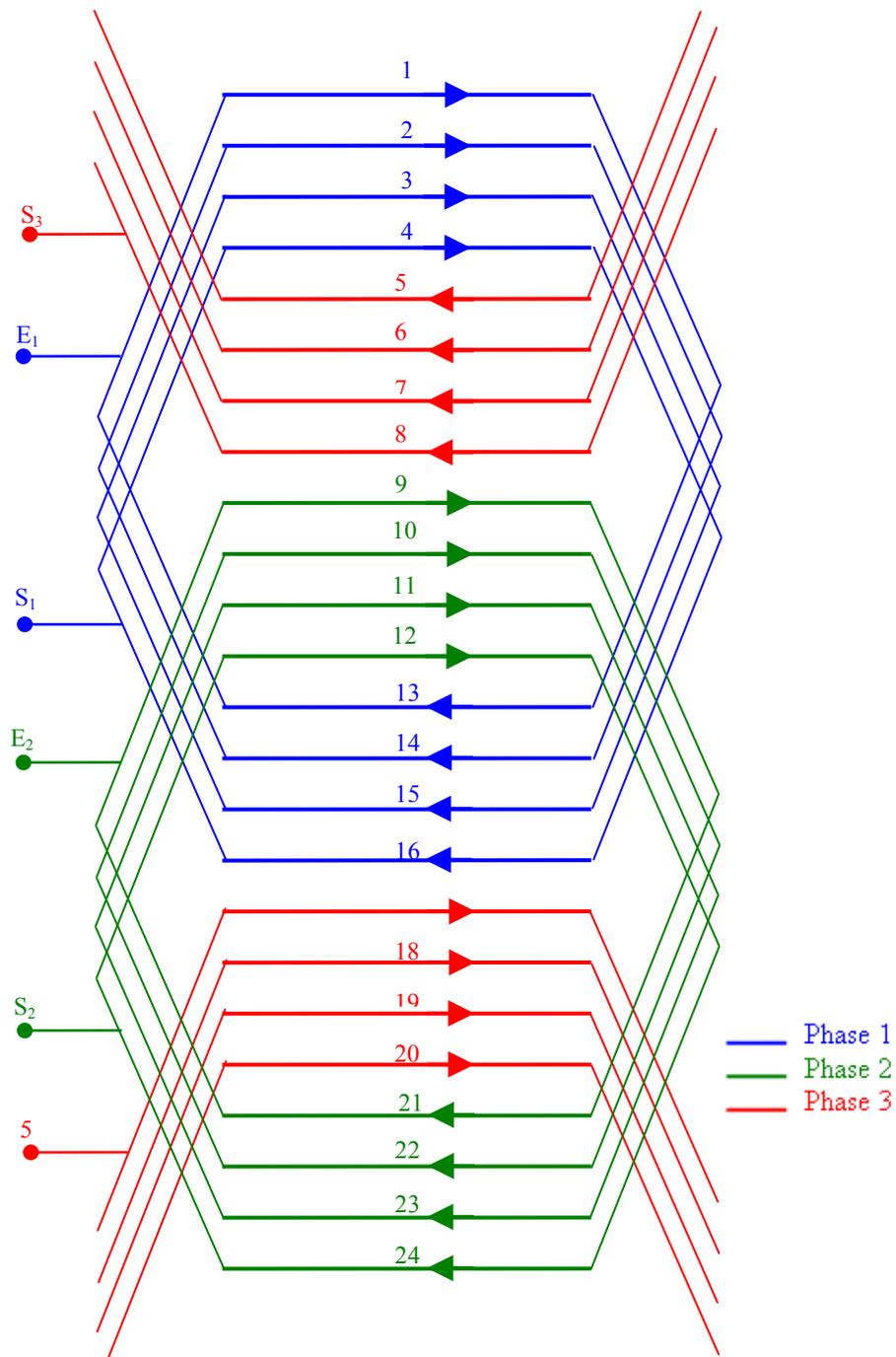


Figure B.1 : Schéma de bobinage diamétral en sections

Suivant [19], la relation entre les flux captés par les phases statoriques  $\{\phi_s\}$  et ceux captés par les dents  $\{\phi_{ds}\}$  est donnée par :

$$\{\phi_s\}_{n_{ph} \times 1} = [w w]_{n_{ph} \times n_{ds}} \{\phi_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \quad (\text{B.1})$$

$$\{\phi_s\}_{n_{ph} \times 1} = [M_{pf}]_{n_{ph} \times \frac{n_{es} n}{2}} [M_{cf}]_{\frac{n_{es} n}{2} \times n_{es} n} \{\phi_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \quad (\text{B.2})$$

avec :

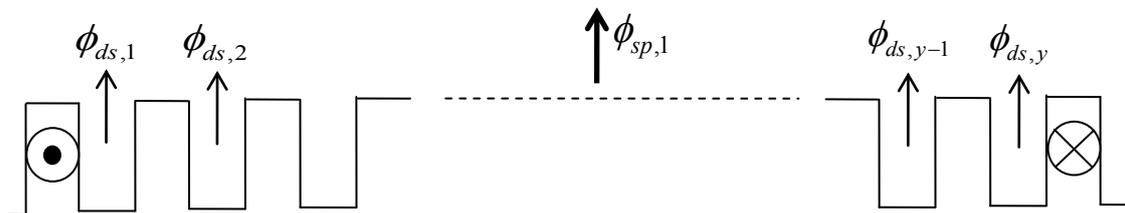
- $n_{ph}$  : nombre de phases du stator.
- $n_{ds}$  : nombre de dents du stator.
- $n_{es} = 24$  : nombre d'encoches du stator.
- $n = 1$  : nombre de couches.
- $[M_{cf}]$  : matrice de passage des flux dans les dents aux flux dans les spires.
- $[M_{pf}]$  : matrice de passage des flux dans les spires aux flux dans les phases.

### B.1. Matrice de passage des flux dans les dents aux flux dans les spires

La relation entre les flux dans les spires  $\{\phi_{sp}\}$  et les flux dans les dents  $\{\phi_{ds}\}$  est donnée par :

$$\{\phi_{sp}\}_{\frac{n_{es} n}{2}} = [M_{cf}]_{\frac{n_{es} n}{2} \times n_{es} n} \{\phi_{ds}\}_{n_{ds} \times 1} \quad (\text{B.3})$$

La figure B.2 montre les différents types de flux rencontrés dans le stator.



**Figure B.2 :** Flux dans les dents et dans la première spire

Pour une machine simple couche avec un bobinage en sections, la matrice  $[M_{cf}]$  est construit de la manière suivante :

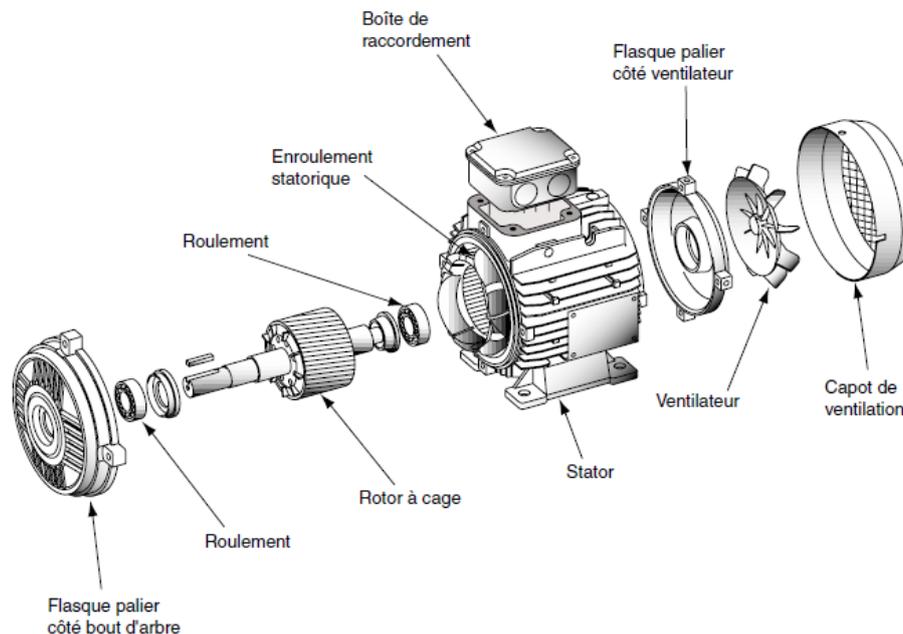




## Annexe C : Mémento

### C.1. Moteur asynchrone triphasé - mémento à l'usage des mécaniciens

La figure C.1 montre une vue éclatée d'un moteur asynchrone à rotor à cage.



**Figure C.1 :** Vue éclatée d'un moteur asynchrone à rotor à cage

#### C.1.1. Définitions

- **Stator** : il représente la partie fixe du moteur asynchrone. Il est constitué d'un circuit magnétique, d'un enroulement de conducteurs isolés, bobinés et répartis dans toutes les encoches du circuit magnétique. Ce bobinage est composé : i) des conducteurs situés dans les encoches, qui, réparties dans trois bobines déphasées spatialement de  $2\pi/3$  et alimentés par trois courants déphasés temporellement de  $2\pi/3$  permettent de créer le champ magnétique tournant dans l'entrefer et contribuent à la conversion électromagnétique et ii) des têtes de bobines, qui permettent l'organisation de la circulation des courants entre les différents conducteurs mais ne participent pas à la conversion électromagnétique.
- **Rotor** : il est composé de conducteurs et d'un circuit magnétique. Le circuit électrique est en général une cage constituée d'un ensemble de barres régulièrement réparties et liées par deux anneaux de court-circuit. Ces anneaux permettent la

circulation des courants entre les différentes barres rotoriques. Le circuit magnétique est constitué de disques en tôles encochées empilés sur l'arbre de la machine.

- **Entrefer** : c'est l'espace entre le stator et le rotor.
- **Champ tournant** : les courants alternatifs dans le stator créent un champ magnétique tournant à la vitesse de synchronisme :

$$n_s = \frac{f}{p} \quad (\text{C.1})$$

avec :

- $n_s$  : vitesse synchrone de rotation du champ tournant.
- $f$  : fréquence des courants alternatifs.
- $p$  : nombre de paires de pôles (vitesse mécanique en angle électrique =  $p$  \* vitesse mécanique en angle mécanique).
- **Glissement** : il représente la différence entre les vitesses du champ tournant et du rotor. Il tourne à la vitesse électrique  $n$  plus petite que la vitesse de synchronisme  $n_s$ . Le glissement  $g$  dépend essentiellement de la charge et il est donnée par :

$$g = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (\text{C.2})$$

### C.1.2. Caractéristiques

La figure C.2 montre la caractéristique mécanique du moteur asynchrone. Elle représente la variation du couple utile en fonction de la vitesse de rotation du rotor. L'axe des vitesses (en  $n$ ) et l'axe des glissements (en  $g$ ) sont inversés.

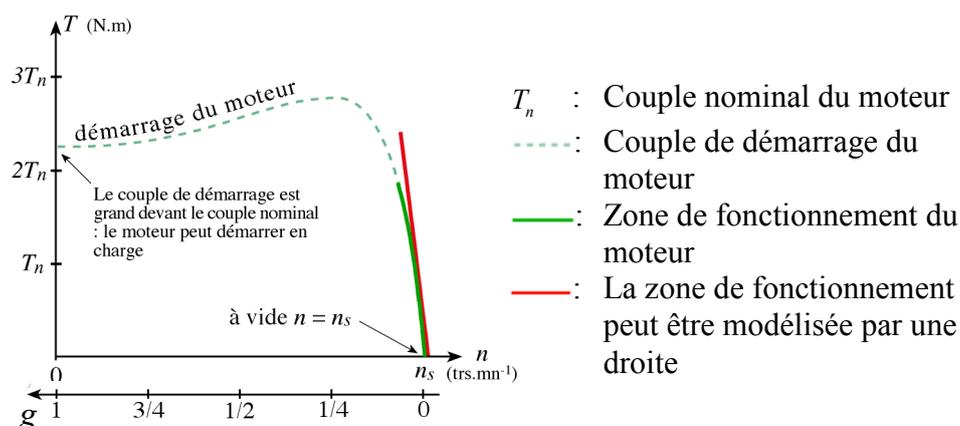


Figure C.2 : Caractéristique mécanique  $T_u = f(n)$

A partir de la figure C.2, on constate :

- un fort couple de démarrage. Le moteur peut donc démarrer en charge mais avec un courant important.
- une zone presque linéaire correspondante à la zone de fonctionnement du moteur. Cette partie de la courbe est très verticale et quelle que soit la charge, la vitesse de rotation varie très peu ( $n \approx n_s$ ).
- qu'au voisinage du point de fonctionnement nominal, le couple utile est proportionnel au glissement.
- à vide  $g = 0$  et  $n = n_s$ .

### C.1.3. Bilan des puissances

La figure C.3 montre les différentes puissances dans un moteur asynchrone.

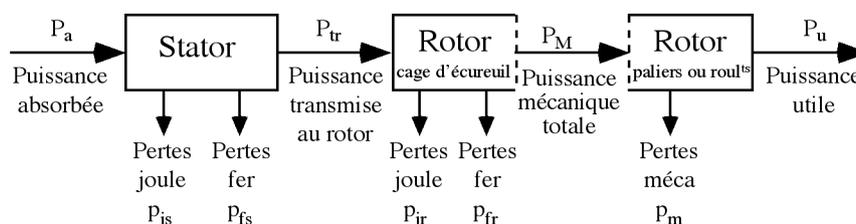


Figure C.3 : Bilan des puissances

Avec :

- $P_a$  : Puissance électrique absorbée.
- $P_{tr}$  : Puissance transmise : c'est la puissance que reçoit le rotor.
- $P_M$  : Puissance mécanique totale.
- $P_u$  : Puissance utile.
- $p_{js}$  et  $p_{jr}$  : Pertes par effet joule au stator et au rotor.
- $p_{fs}$  et  $p_{fr}$  : Pertes fer au stator et au rotor.
- $p_m$  : Pertes mécaniques au rotor.

Le champ magnétique tourne à la vitesse  $\Omega_s$  (en rd/s), alors que le rotor ne tourne qu'à la vitesse électrique  $\Omega$ . Le couple électromagnétique résultant de moment  $T_{em}$  est donné par :

$$T_{em} = \frac{P_{tr}}{\Omega_s} \quad (\text{C.3})$$

Le couple électromagnétique de moment  $T_{em}$  entraîne le rotor à la vitesse électrique  $\Omega$ . Il lui communique donc la puissance mécanique totale  $P_M$ .

$$P_M = T_{em} \Omega \quad (\text{C.4})$$

$$P_M = T_{em} \Omega = P_{tr} \frac{\Omega}{\Omega_s} = P_{tr} (1 - g) \quad (\text{C.5})$$

Cette puissance comprend la puissance utile et les pertes mécaniques.

#### C.1.4. Point de fonctionnement du moteur en charge

Le point de fonctionnement est le point d'intersection des caractéristiques  $T = f(n)$  du moteur et de la charge (Figure C.4). La courbe du couple résistant dépend de la charge.

Soient,

- $T_n$  : couple nominal du moteur.
- $T_u$  : couple utile du moteur.
- $T_r$  : couple résistant de la charge.

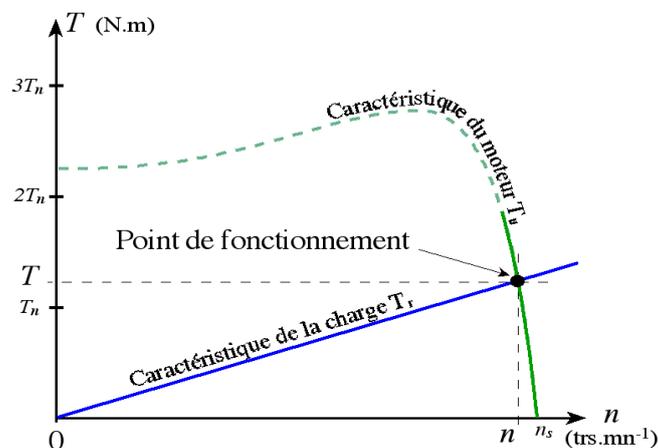


Figure C.4 : Caractéristiques du moteur et de la charge

## C.2. Engrenages cylindriques à axes parallèles - memento à l'usage des électriciens

La figure C.5 montre un couple d'engrenage cylindrique à denture droite.

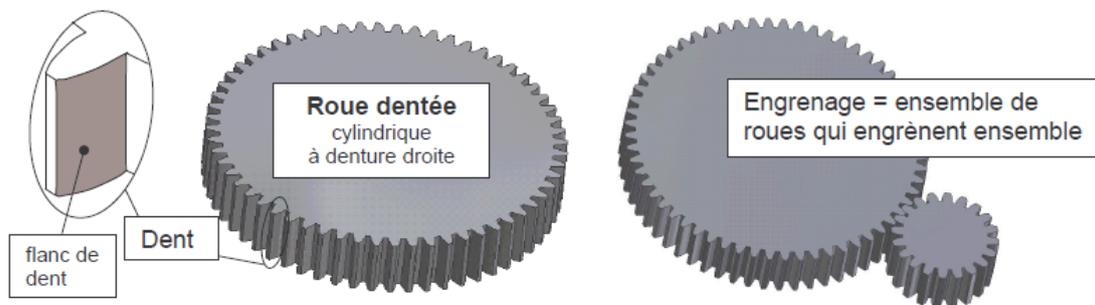


Figure C.5 : Couple d'engrenages

### C.2.1. Définitions des paramètres géométriques

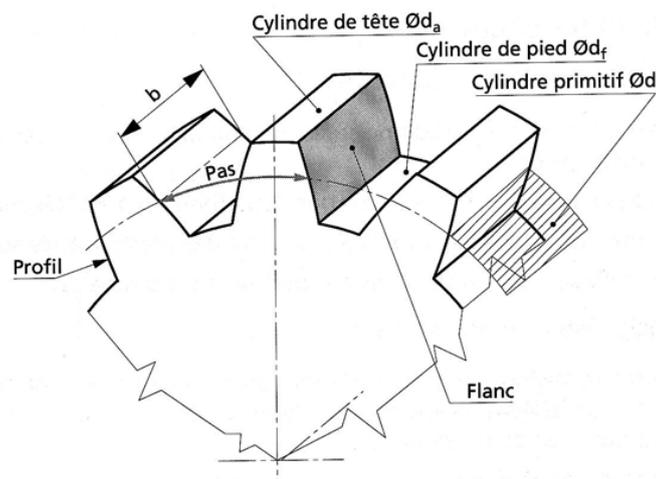


Figure C.6 : Roue d'engrenage

- **Cylindre primitif de fonctionnement** : cylindre décrit par l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de la roue conjuguée par rapport à la roue considérée. La section droite du cylindre primitif donne le cercle primitif de diamètre  $d$ .
- **Cylindre de tête** : cylindre enveloppe du sommet des dents. La section droite du cylindre de tête donne le cercle de tête de diamètre  $d_a$ .
- **Cylindre de pied** : cylindre enveloppe du fond des dents. La section droite du cylindre de pied donne le cercle de pied de diamètre  $d_f$ .
- **Flanc** : portion de surface d'une dent comprise entre le cylindre de tête et le cylindre de pied.

- **Profil** : il s'agit de la forme, dans une section droite, du flanc d'une dent.
- **Développante du cercle** : c'est une courbe plane développante, c'est-à-dire que ses normales sont les tangentes du cercle de base (Cb) (Figure C.6). Cette courbe est définie par l'ensemble des points M, tels que :  $\overline{TM} = \text{arc}(TP)$ , (Figure C.6). Les dents des engrenages droits ont un profil en segment de développantes de cercle, ce qui assure un rapport de vitesse constant et une transmission d'énergie optimum entre les engrenages.

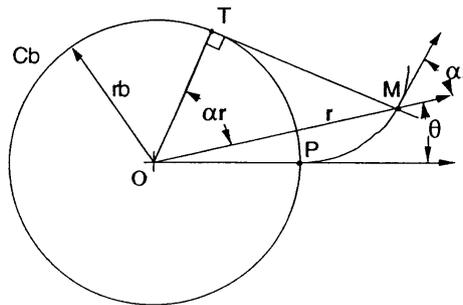


Figure C.6 : Profil en développante de cercle

- **Largeur de denture  $b$**  : largeur de la partie dentée d'une roue mesurée suivant une génératrice du cylindre primitif.
- **Pas** : longueur d'un arc de cercle primitif compris entre deux profils consécutifs.
- **Module** : c'est un paramètre dimensionnel générateur relatif à la périodicité des dents donc à leur taille. La relation la plus importante pour une roue dentée est la suivante :

$$D = m \cdot Z \quad (\text{C.6})$$

avec :

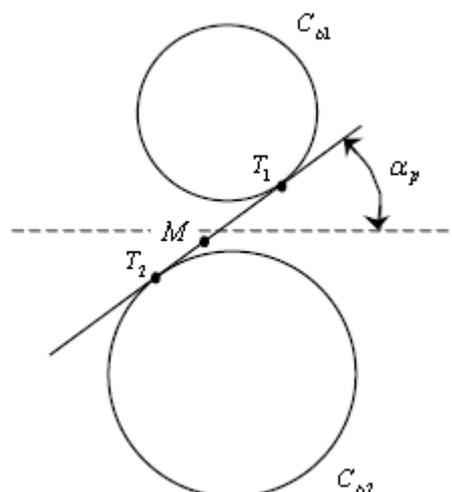
- $D$  : diamètre primitif de la roue.
- $m$  : module.
- $Z$  : nombre de dents.

### C.2.2. Définition des paramètres de fonctionnement

La figure C.7 montre la ligne d'action d'un engrenage cylindrique à denture droite ou hélicoïdale. Les notations de la figure C.7 sont définies comme suit :

- $C_{b1}$  : Cercle de base du pignon.
- $C_{b2}$  : Cercle de base de la roue.
- $T_1$  : Point d'intersection entre la ligne d'action et le cercle de base du pignon.
- $T_2$  : Point d'intersection entre la ligne d'action et le cercle de base de la roue.

-  $M$  : Point de contact.



**Figure C.7 : Ligne d'action**

- **Ligne d'action** : c'est la tangente commune aux deux cercles de base du pignon et de la roue (Figure C.7). En outre, elle est la normale commune aux deux profils de dents conjuguées, en leur point de contact. Cette ligne est fixe pour les engrenages à développante de cercle.
- **Angle de pression** : angle de la ligne d'action avec la tangente aux cercles primitifs ( $\alpha_p = 20^\circ$  pour une denture normalisée).
- **Plan d'action** : c'est le plan tangent commun aux deux cylindres de base du pignon et de la roue (Figure C.8.a). Le contact entre les dents s'effectue exclusivement dans le plan d'action et décrit une droite inclinée d'un angle  $\beta_b$  correspondante à l'angle d'hélice de base. Les lignes de contact sont équidistantes avec une distance égale au pas de base ( $P_{ba}$ ). Pendant l'engrènement, la progression des lignes de contact se fait à la vitesse  $V$  dans le sens de  $\vec{X}$  (Figure C.8.b). La limitation de la partie active de la dent entraîne une diminution de la longueur de la ligne d'action  $T_1T_2$ . Ce segment utile est dénommé longueur de conduite apparente. Il est représenté par  $T'_1T'_2$  (Figure C.8.b) avec  $T'_1$  et  $T'_2$  sont respectivement les points sur la ligne d'action du début et de la fin d'engrènement.

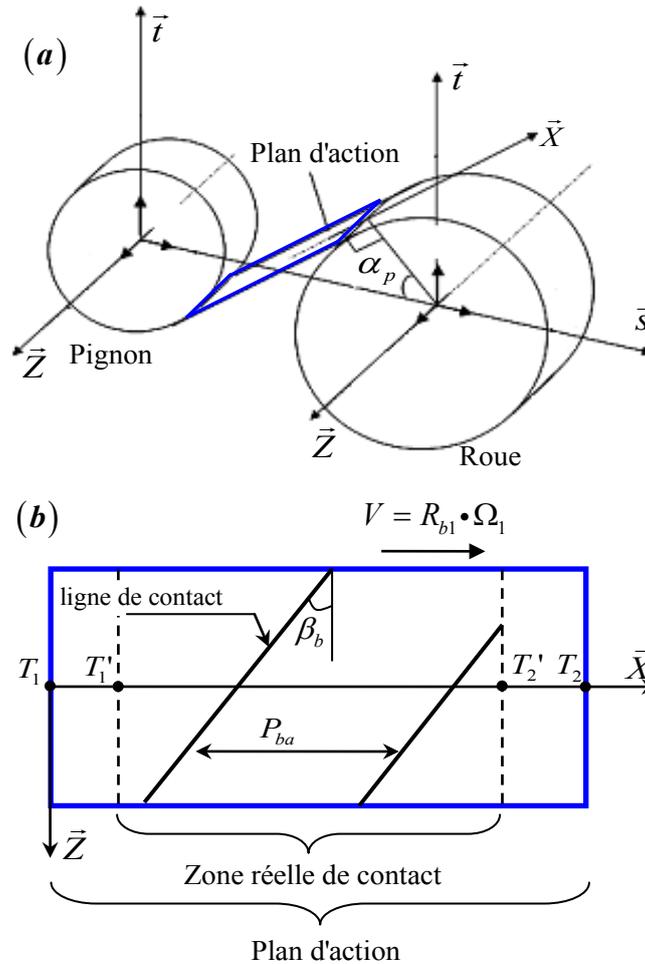


Figure C.8 : Plan d'action d'un engrenage à denture hélicoïdale

- **Rapport de conduite** : il est défini comme le rapport entre la longueur de  $T_1'T_2'$  et le pas de base apparent  $P_{ba}$ . Le rapport de conduite  $\varepsilon_\alpha$  est donné par :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{T_1'T_2'}}{P_{ba}} \quad (\text{C.7})$$

- **Période d'engrènement**  $T_{eng}$  : elle est définie par :

$$T_{eng} = \frac{P_{ba}}{R_{b1} \Omega_1} \quad (\text{C.8})$$

avec  $R_{b1}$  et  $\Omega_1$  sont respectivement le rayon de base et la vitesse de rotation du pignon.

- **Fréquence d'engrènement**  $f_{eng}$  : elle est définie par :

$$f_{eng} = Z_1 f_{r1} = Z_2 f_{r2} \quad (\text{C.8})$$

avec  $Z_1$  et  $f_{r1}$  sont respectivement le nombre de dents et la fréquence de rotation du pignon (de même pour la roue ( $Z_2$  et  $f_{r2}$ )).

FOLIO ADMINISTRATIFTHESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : FEKI  
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

DATE de SOUTENANCE : 30 mai 2012

Prénoms : Nabih

TITRE : MODELISATION ELECTRO-MECANIQUE DE TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES - APPLICATIONS À LA DETECTION ET AU SUIVI DES AVARIES

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2012 ISAL 0041

Ecole doctorale : MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (MEGA)

Spécialité : Mécanique

RESUME :

La détection et le diagnostic des défauts d'engrenages ont été traditionnellement basés sur l'analyse des signaux vibratoires et acoustiques. Mais, ces méthodes peuvent être coûteuses suite aux difficultés techniques de mise en œuvre de capteurs sur des pièces en rotation. Dans ces travaux de thèse, une méthode originale de détection de défauts locaux dans des engrenages entraînés par des moteurs électriques est proposée en se basant sur le suivi des courants statoriques. Le système électromécanique est simulé numériquement en combinant un modèle électrique dynamique de moteurs asynchrones (modèle de Kron et modèle des réseaux de perméances) et un modèle mécanique dynamique d'engrenages droits et hélicoïdaux incluant les arbres et les paliers. Certains défauts classiques du moteur (excentricité du rotor) et des défauts d'engrenages (écaillages sur les flancs actifs de dentures) sont considérés et une technique itérative de résolution est présentée qui permet de résoudre le problème électromécanique couplé. De nombreux résultats sont présentés qui illustrent la possibilité et la sensibilité de détection de défauts d'engrenages par mesure de courants électriques sur le moteur. Sur la base de ces simulations, il est conclu que l'analyse de la signature des courants du moteur apparaît comme une méthode suffisamment précise pour détecter et surveiller les défauts locaux d'engrenage comme les écaillages.

MOTS-CLES :

Défaut d'engrenage, écaillage, diagnostique, surveillance, moteur électrique, analyse des courants, modélisation, simulation.

Laboratoire (s) de recherche :

Laboratoire de Mécanique de Contact et de structure (LaMCoS)

Laboratoire Ampère (UCB Lyon 1)

Directeur de thèse:

Pr. Philippe VELEX

Pr. Guy CLERC

Président de jury :

REMOND Didier

Professeur (INSA de Lyon, France)

Composition du jury :

REMOND Didier

Professeur (INSA de Lyon, France)

HENAO Humberto

Professeur (Université de Picardie "Jules Verne", France)

GUILLET François

Professeur des Universités (IUT de Roanne, France)

MEIBODY-TABAR Farid

Professeur (ENSEM, INPL – Nancy, France)

HADDAR Mohamed

Professeur (ENI Sfax, Tunisie)

CLERC Guy

Professeur des Universités (UCB Lyon 1, France)

VELEX Philippe

Professeur des Universités (INSA de Lyon, France)