

THÈSE

METHODE XFEM POUR LA MODELISATION DE GRANDES PROPAGATIONS DE FISSURE EN DECHIRURE DUCTILE

TRANSITION D'UN MILIEU CONTINU VERS UNE FISSURE
VIA UN MODELE DE ZONE COHESIVE POUR LE MODELE DE ROUSSELIER

Présentée devant
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le Grade de Docteur

Ecole doctorale :
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :
Mécanique

par
Anita SIMATOS
Ingénieur

Thèse soutenue le 13 Septembre 2010 devant la Commission d'examen

Jury

BOMPARD Philippe	Professeur (Centrale Paris)	Examineur
CHAPULIOT Stéphane	HDR (AREVA)	Rapporteur
COMBESCURE Alain	Professeur (INSA Lyon)	Directeur de thèse
FEYEL Frédéric	HDR (ONERA)	Rapporteur
GRAVOUIL Anthony	Professeur (INSA Lyon)	Examineur
HALM Damien	Professeur (ENSMA Poitiers)	Examineur
MARIE Stéphane	HDR (CEA)	Examineur
SEIDENFUSS Michael	Docteur (IMWF-MPA Stuttgart)	Examineur

THÈSE

METHODE XFEM POUR LA MODELISATION DE GRANDES PROPAGATIONS DE FISSURE EN DECHIRURE DUCTILE

—
TRANSITION D'UN MILIEU CONTINU VERS UNE FISSURE
VIA UN MODELE DE ZONE COHESIVE POUR LE MODELE DE ROUSSELIER

Présentée devant
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le Grade de Docteur

Ecole doctorale :
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :
Mécanique

par
Anita SIMATOS
Ingénieur

Thèse soutenue le 13 Septembre 2010 devant la Commission d'examen

Jury

BOMPARD Philippe	Professeur (Centrale Paris)	Examineur
CHAPULIOT Stéphane	HDR (AREVA)	Rapporteur
COMBESURE Alain	Professeur (INSA Lyon)	Directeur de thèse
FEYEL Frédéric	HDR (ONERA)	Rapporteur
GRAVOUIL Anthony	Professeur (INSA Lyon)	Examineur
HALM Damien	Professeur (ENSMA Poitiers)	Examineur
MARIE Stéphane	HDR (CEA)	Examineur
SEIDENFUSS Michael	Docteur (IMWF-MPA Stuttgart)	Examineur

INSA Direction de la Recherche
Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

Ce mémoire est le résultat de trois ans de travaux au cours desquels j'ai eu la chance de faire de nombreuses rencontres très enrichissantes.

En particulier celle de mes encadrants qui, malgré leur charge de travail, ont toujours pris le temps de répondre à mes questions et de m'encourager. J'ai beaucoup aimé travailler avec Alain Combescure avec lequel les réunions d'avancement ont toujours été l'occasion de discussions scientifiques très intéressantes et agréables et dont les qualités humaines sont remarquables. Merci également à Stéphane Marie qui a toujours pris soin de me remettre les pieds sur terre quant au lien entre modélisation numérique, résultats expérimentaux et cas industriels et qui a toujours su amener des suceries lorsque mon taux de confiance était en chute libre.

De plus, je remercie vivement Fabien Cazes qui au début de cette thèse m'a transmis son savoir et sa confiance en matière de thermodynamique et de méthodes numériques (ou comment programmer son code éléments finis soi-même dans Matlab !).

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à mes rapporteurs dont les remarques ont permis de mieux mettre en valeur les travaux de ce mémoire. A Frédéric Feyel tout d'abord pour l'attention avec laquelle il a lu mon mémoire et le temps qu'il a pris pour me rencontrer. A Stéphane Chapuliot pour m'avoir fait part de ses remarques en relation avec son expérience de la modélisation et des méthodes de caractérisation de la déchirure ductile.

Merci aussi à Philippe Bompard, Anthony Gravouil, Damien Halm et Michael Seidenfuß qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury. En particulier merci au professeur Bompard pour l'attention dont il a fait preuve au cours des préparatifs de la soutenance.

Si maintenant je reprends la chronologie qui m'a menée à l'écriture de ce mémoire, je dois commencer par remercier mes parents et ma grande sœur (merci aussi à Toinou pour ses encouragements et à Ian pour son adorable bouille) pour l'amour et le soutien qu'ils m'ont apportés depuis ma naissance. Merci aux hommes de la famille qui ont toujours su nous intéresser à la technique, et aux femmes pour leur soutien.

Merci à certains enseignants exceptionnels : M. Gauche, Mme Ytier, Mme Guichard, Mme Martiel, M. Lonjou, M. Long, Mme Sallé.

Cependant, les véritables fautifs qui m'ont conduits à cette thèse sont les joyeux fêtards de la nuit, du jour, des calculs, des essais, de la philosophie... : Michel, Fabrice et Anthony qui m'ont encouragée depuis mes premières années à l'INSA et qui par leur approche de la science aux multiples facettes m'ont embrigadée dans les joies de la mécanique de la rupture. Anthony encore merci d'avoir pris le temps de lire mon travail et d'avoir fait partie de mon jury. Michel merci d'être resté vigilant et d'avoir toujours été prêt à proposer un petit rhum arrangé pour les fins de semaine difficiles. Fabrice, merci pour tes merveilleuses lasagnes végétariennes et ton engagement dans le développement durable !

Merci aux membres du LaMCoS qui m'ont accueillie et accompagnée au cours de ma première année de thèse : Alain, Fabien, François (les meilleurs blagues), Daniel (le meilleur motard, bonjour à Stéphanie et félicitations !), Benjamin (le meilleur ranger !), Thibaut, Clémentine (toujours une petite vanne discrète mais bien placée), les Emilien-s, Aline, Johann, David, Nicolas, Michaël, Mushtaq, Asad, Tong, Vincent...

Le Laboratoire d'Intégrité des Structures et de Normalisation m'a ensuite supportée pour les deux années restantes. Pour l'accueil et l'au revoir auquel j'ai eu droit : merci.

Naturellement, la fin de thèse approchant, le LISN est devenu ma deuxième maison, et c'est toujours avec plaisir que j'ai dégusté les bonnes vieilles vanes de Stéphane et d'Olivier que j'ai appris à soudoyer à grands renforts de m&m's, arlequin et autres apports de calories.

Je remercie également sans fin Pauline, qui a supporté toutes mes manies pendant ces deux années, sans râler, et même en m'encourageant ! Merci Pauline pour ton soutien de tous les moments : les mots gentils, les gâteaux, les astuces, les bons plans, la force MAIOT, les relations plus ou moins haut placées, ton aide à chaque fois que j'ai organisé quelque chose (en particulier pour la soutenance), ton courage, ta force, ta détermination et ta liberté (bon aller, je m'arrête sinon on va croire que j'en fais trop).

Au cours de mon séjour au LISN, j'ai également eu l'occasion de casser des éprouvettes avec des méthodes d'acquisition plus ou moins standard (mais toujours de qualité) auprès de Yann (merci également pour le ravitaillement en saucisson et pour ton soutien divers et varié), Olivier, Grégory (toujours super tes gâteaux !) et Thierry LG.

Je dois aussi avouer que rien n'aurait été possible sans Catherine : toujours là et toujours super efficace pour les missions, l'organisation de la soutenance, les publications etc.... Et surtout désolée de m'y être souvent prise un peu tard.

Au cours des développements dans Cast3M, j'ai eu l'occasion de côtoyer des personnes compétentes et agréables : Merci à Benoit pour m'avoir toujours accueillie dans son bureau et m'avoir guidée et formée à l'aide de son pragmatisme, ses questions et ses réponses. Et aussi pour avoir toujours accepté un truc à grignoter... Merci à Thierry C. et à Olivier F. d'avoir pris le temps de m'aider et de répondre à mes questions. Merci aussi à Pierre Verpaud et à Serge Pascal. Merci à Tamara pour ses développements XFEM en 3D et sa bonne humeur.

N'oublions pas Bernard qui a sauvé le titre de ce mémoire de l'abstraction totale, et avec lequel j'ai aimé partager des impressions sur les séries documentaires d'Arte et sur l'Allemagne en général.

Et puis merci également à Arnaud, Antoine, Michel, Gérard, Cédric, Thierry Le., Philippe, Anaëlle, Amaury, Clémentine, Fabien [Corpatché], Farah, Stéphane C. et Myriam (j'espère que le stock de sucreries a tenu le coup, ;)) pour les moments sympathiques que vous m'avez offerts.

J'ai également eu la chance de passer deux mois dans la branche universitaire du MPA de Stuttgart, à l'IMWF où le Docteur Michael Seidenfuss et le Professeur Roos m'ont accueillie. Das war eine sehr nette und erfahrungsreiche Zeit. Dank diesem Forschungsaufenthalt habe ich so wohl technische Erfahrungen als auch menschliche gemacht. Ich möchte mich insbesondere bei Dr Seidenfuss, Stefan, Mathias und Frau Bisinger für ihre Hilfe und Freundlichkeit bedanken. Einen Gruss richte auch an den Rest des Teams: Cedric, Thomas, Tina, Alexander, Leonard ...

Et puis merci aussi à Bernhard pour ses 90% de soutien.

Donc encore une dernière fois (je sais, je me répète): merci.

Résumé

Afin de prévoir la tenue des structures industrielles sous chargement accidentel (au cours de séismes par exemple), des analyses de défaut peuvent être menées durant l'étape de dimensionnement. Par exemple, dans le cadre d'une analyse de fuite avant rupture, on peut être amené à évaluer la stabilité d'un défaut dans une tuyauterie nucléaire dont le mode de dégradation peut être une rupture par déchirure ductile.

Le mécanisme de la déchirure ductile est lié à la nucléation, la croissance et la coalescence de cavités au sein des aciers. C'est pourquoi la modélisation de ce type de rupture doit, en général, être menée à l'aide de critères basés sur des grandeurs locales qui permettent de bien prendre en compte l'histoire de la triaxialité des contraintes et du chargement sur le processus de rupture. Pour ces calculs, le choix de l'approche locale de la mécanique de la rupture semble donc être naturel. Cependant, si ce type de modèle est très bien validé d'un point de vue 'physique', il se heurte à des difficultés de mise en œuvre numérique (présence d'éléments distordus ou de rigidité nulle) difficilement contournables qui limitent souvent la modélisation de la propagation de fissure en déchirure ductile à quelques mm. Pour pouvoir appliquer ces modèles sur des cas industriels, il est donc nécessaire d'étendre leur domaine de stabilité numérique, notamment pour les composants de tuyauterie nucléaire qui sont de grandes dimensions et peuvent tolérer de grandes propagations en déchirure ductile (plusieurs dizaines de mm) avant d'atteindre le chargement à l'instabilité.

L'objectif de cette thèse est donc de développer un outil permettant d'étendre le domaine d'application numérique des modèles d'approche locale pour la rupture ductile aux grandes propagations de fissure en déchirure ductile. L'outil développé est un modèle de zone cohésive (modèle de fissure dont les lèvres sont reliées par une loi de comportement) dont la loi de comportement est identifiée de manière à être cohérente avec le modèle d'approche locale choisi. La cohérence du modèle de zone cohésive avec le modèle d'approche locale est obtenue par une construction incrémentale de la loi cohésive qui permet d'assurer l'équivalence du travail plastique et de la réponse mécanique des deux modèles dans le cas d'une traction uniaxiale, qui est assez proche de la sollicitation observée en déchirure ductile.

L'extension du domaine d'application du modèle d'approche locale est permise par son utilisation couplée avec le modèle de zone cohésive cohérent dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue (XFEM). L'utilisation de cette méthode Eléments Finis est un point clé de l'approche proposée dans ce mémoire. Elle permet en effet l'introduction d'une discontinuité mobile, dans notre cas le modèle de zone cohésive, au cours du calcul et ce de manière indépendante du maillage de la structure étudiée. Pour son application à la déchirure ductile, une extension aux problèmes non linéaires géométriques et matériaux a été mise en œuvre. Les problèmes traités dans ce mémoire supposent la préexistence d'une fissure. Ainsi, la zone cohésive est insérée puis étendue suivant la vérification d'un critère local défini en termes de fraction volumique de cavités testé en avant de la pointe de la fissure puis de celle du modèle de zone cohésive. Le niveau du critère est choisi de telle sorte que ce soit le modèle d'approche locale qui modélise la part principale du processus d'endommagement afin de permettre une prise en compte optimale des effets de la triaxialité des contraintes.

La méthode proposée a été appliquée au modèle de Rousselier pour la rupture ductile dans le cadre XFEM de Cast3M le programme Eléments Finis pour la mécanique du CEA.

Mots clés : Mécanique non linéaire de la rupture ; Approche locale ; Zone cohésive ; Déchirure ductile ; Propagation de Fissure ; XFEM ; Grandes déformations ; Grands déplacements.

Keywords : Non linear fracture mechanics, local approach, Cohesive zone, ductile tearing, crack growth, XFEM, large strain, large displacement.

Table des matières

Remerciements.....	i
Résumé.....	iii
Table des matières	v
Table des figures.....	vii
Principales Notations.....	xi
Introduction générale	1
Chapitre I. Rappels et Cadre de la Recherche.....	3
1. Introduction.....	4
2. Rappel : Thermodynamique des processus irréversibles	5
3. Modèles pour la déchirure ductile.....	10
4. Passage d'un modèle local à un modèle à fissure explicite	43
5. Conclusion	46
Chapitre II. Méthode d'Identification d'une Loi Cohésive Cohérente avec un Modèle d'Approche Locale en Présence de Non-Linéarités Géométriques	49
1. Introduction.....	50
2. Formulation modifiée du modèle de Rousselier pour la rupture ductile.....	50
3. Définition thermodynamique du modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle de Rousselier.....	52
4. Construction d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle local : Cadre HPP...57	
5. Construction d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle local : Cadre des grandes transformations	71
6. Conclusion	82
Chapitre III. Méthode des Eléments Finis Etendue pour la Modélisation de Grandes propagations de Fissure en Déchirure Ductile	83
1. Introduction.....	84
2. Implémentation de la Méthode des Eléments finis étendue pour la déchirure ductile dans Cast3M.....	85
3. Modélisation de Zones Cohésives dans le Cadre XFEM.....	98

4. Implémentation dans Cast3M, algorithme de résolution	106
5. Conclusion	119
Chapitre IV. Application de la Méthode de Transition au calcul de propagation de Fissure en Déchirure Ductile	121
1. Introduction.....	122
2. Identification des paramètres de la loi cohésive pour le TU52B	123
3. Etude de paramètres	139
4. Application au calcul de propagation en 3D	145
5. Conclusion	150
Conclusions et Perspectives	151
Annexe A. Détail de la résolution du calcul d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle de comportement local par une méthode à multiplicateurs de Lagrange.....	155
Annexe B. Jeu de données gibiane pour le calcul d'une loi cohésive cohérente par la méthode simplifiée dans Cast3M	163
Annexe C. Modélisation d'une plaque préfissurée en traction.....	171
Références bibliographiques	175

Table des figures

Figure I-1 – Faciès de rupture dans le cas d’une éprouvette CT en acier [Marie1999].....	10
Figure I-2 - Repère de pointe de fissure.....	11
Figure I-3 – Contour Γ dans la définition de l'intégrale J.....	12
Figure I-4 - Description de l'amorçage.....	13
Figure I-5 - Détermination de $J_{0.2}$	14
Figure I-6 – a. : Définition du CTOD selon Rice ; b. : Une autre définition.....	14
Figure I-7 - Méthode du relâchement de noeuds.....	17
Figure I-8 - Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonctions de niveau.....	18
Figure I-9 - Description de la stratégie d'enrichissement.....	19
Figure I-10 - Définition de la contrainte effective.....	22
Figure I-11 - Initiation, croissance et coalescence des cavités dans un matériau initialement sain.....	24
Figure I-12 - Propagation ductile d'une fissure sollicitée en mode I.....	24
Figure I-13 - Effet de la taille de maille dans le cadre de l'approche locale de la rupture ductile [Besson2003].....	28
Figure I-14 - Fonction de pondération de la variable non locale.....	30
Figure I-15 - A : Réponse à la flexion d'une éprouvette SE pour plusieurs tailles de maille, B et C : Profils d'endommagement, [Samal2008].....	33
Figure I-16 - Description de la zone cohésive.....	35
Figure I-17 - Formes usuelles des lois de traction-séparation [Schwalbe2009] : a) [Needleman1987], b) [Needleman1990], c) [Hillerborg1976], d) [Bazant2002], e) [Scheider2003], f) [Tvergaard1992].....	37
Figure I-18 - Définition des paramètres pour la construction d'une loi cohésive [Cornec2003].....	38
Figure I-19 - Influence du choix de la surface de référence pour le calcul des composantes de saut : Calcul de l'ouverture normale en fonction du temps au niveau de $ip1$ [Bosch2008].....	41
Figure I-20 - La zone cohésive vue comme une solution d'un modèle non-local intégral [Planas1993].....	45
Figure I-21 - Equivalence énergétique entre la modélisation purement continue et modélisation couplée [Comi2007].....	46
Figure II-1 - Solide fissuré, Description de la zone cohésive.....	53
Figure II-2 - Répartition entre énergie dissipée et énergie stockée suivant le choix de σ_1	55
Figure II-3 - Calcul de la dissipation d'une zone cohésive plastique.....	56
Figure II-4 – Modélisation axisymétrique du cylindre en traction.....	60
Figure II-5 - Comparaison des modélisations pour les HPP.....	61
Figure II-6 - Discrétisation du problème de barre en traction pour la méthode avec multiplicateurs de Lagrange.....	65
Figure II-7 - Méthode simplifiée : Algorithme pour un incrément de charge.....	68
Figure II-8 – Réponse mécanique des deux modélisations Méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau.....	68
Figure II-9 – Erreur sur les énergies Méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau.....	69
Figure II-10 - Réponse mécanique des deux modélisations pour la méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau.....	69
Figure II-11 - Erreur sur les énergies en fonction du saut de déplacement pour la méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau.....	70
Figure II-12 – Loi cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique non linéaire (HPP).....	71
Figure II-13 - Comparaison des géométries pour les deux modélisations.....	72
Figure II-14 - Méthode simplifiée en formulation lagrangienne réactualisée.....	75

Figure II-15 – Réponse mécanique des deux modélisations en grands déplacements pour la méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau.....	76
Figure II-16 – Erreur sur les énergies pour la méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau	76
Figure II-17 - Méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau : Réponse mécanique des deux modélisations	77
Figure II-18 - Méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau : Erreur sur les énergies.....	78
Figure II-19 - Loi cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique linéaire par morceau (Grandes déformations).....	79
Figure II-20 - Courbe de traction pour l'acier ferritique TU52B	79
Figure II-21 - Réponse mécanique des deux modélisations pour la méthode simplifiée appliquée au modèle de Rousselier	80
Figure II-22 - Méthode simplifiée appliquée au modèle de Rousselier : Erreur sur les énergies	80
Figure II-23 - Loi cohésive cohérente avec le modèle de Rousselier pour le TU52B	81
Figure II-24 - Evolution du déplacement et du saut de déplacement en fonction de la porosité dans le modèle de référence	81
Figure III-1 - Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonctions de niveau	86
Figure III-2 – Méthode de la grille auxiliaire pour le calcul des levels sets [Prabel2007] a) Maillage de la structure b) Grille auxiliaire	86
Figure III-3 - Description de la stratégie d'enrichissement	87
Figure III-4 - Intégration conforme par sous-triangularisation des éléments XFEM	88
Figure III-5 - a) Sélection des éléments à surintégrer suivant le rayon plastique b) Les éléments verts sont surintégrés [Prabel2007].....	89
Figure III-6 - Maillage de la fissure selon la dimension du problème	89
Figure III-7 - Déformation d'un élément barre sain soumis à un déplacement axial	90
Figure III-8 - Déformation d'un élément barre fissuré soumis à un déplacement axial	92
Figure III-9 - Position d'un nœud traversé par la fissure dans la configuration finale.....	93
Figure III-10 - Stratégie d'enrichissement pour l'approximation H-enrichie	94
Figure III-11 - Schéma d'intégration des éléments XFEM	95
Figure III-12 – Déformées calculées à partir de la position des nœuds et à partir de la définition corrigée de la position des points. a : Etat initial, fissure fermée ; b : Etat initial, fissure ouverte ; c : Etat final.....	95
Figure III-13 - Eléments parents - 1: quadrangle en 2D ; 2 : cube en 3D.....	97
Figure III-14 - Solide fissuré soumis à des déplacements imposés sur Γ_u et des efforts surfaciques sur Γ_F	98
Figure III-15 - Solide fissuré avec zone cohésive, chargé en déplacements imposés et efforts surfaciques	99
Figure III-16 - Poutre élastique en traction symétrique	103
Figure III-17 - Discrétisation du problème de poutre en traction symétrique.....	103
Figure III-18 - Application d'un offset sur la loi cohésive identifiée.....	107
Figure III-19 - Lieu des points de Gauss suivant le schéma d'intégration pour les éléments quadrangles linéaires et quadratiques.....	109
Figure III-20 - Zone de calcul du critère de propagation et d'orientation. a) Pour les critères à moyenne pondérée ; b) Pour les critères locaux	110
Figure III-21 - Discrétisation XFEM du modèle de zone cohésive	112
Figure III-22 - Algorithme de propagation de la zone cohésive en 2D.....	114
Figure III-23 - Algorithme de résolution d'un problème de fissuration avec zone cohésive	118
Figure IV-1 - Courbe de traction pour l'acier ferritique TU52B.....	123
Figure IV-2 - Maillage et conditions aux limites pour le calcul standard d'un essai de traction sur éprouvette CT	124
Figure IV-3 - Pré-endommagement autour de la pointe de fissure pour imposer la propagation dans le plan de symétrie dans le cas d'un maillage d'éléments quadratiques sous-intégrés	124

Figure IV-4 - Comparaison de la courbe Force-CMOD obtenue par le calcul (éléments quadratiques sous-intégrés) avec celle de l'essai	125
Figure IV-5 - Comparaison de la courbe de propagation obtenue par le calcul (éléments quadratiques sous-intégrés) avec celle de l'essai	125
Figure IV-6 - Comparaison des réponses Force-CMOD entre la formulation lagrangienne réactualisée (FLR) et l'hypothèse des petites perturbations (HPP)	126
Figure IV-7 - Comparaison des prédictions de propagation de fissure entre la formulation lagrangienne réactualisée et l'hypothèse des petites perturbations.....	127
Figure IV-8 - Pré-endommagement pour les quadrangles linéaires standard.....	127
Figure IV-9 - Courbes Force-CMOD pour trois types d'éléments en HPP. Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés ; QUA4 : Eléments linéaires standard.....	128
Figure IV-10 - Courbes de propagation pour trois types d'éléments en HPP. Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés ; QUA4 : Eléments linéaires standard	128
Figure IV-11 - Courbes Force-CMOD pour des éléments linéaires de différentes tailles : Q4RI : $\lambda=75\mu\text{m}$, 1point de Gauss, $fc=0.03$; QUA4 : $\lambda=75\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $fc=0.03$; QUA4_150_1 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $fc=0.03$; QUA4_150_2 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $fc=0.05$	129
Figure IV-12 - Courbes de propagation pour des éléments linéaires de différentes tailles : Q4RI : $\lambda=75\mu\text{m}$, 1point de Gauss, $fc=0.03$; QUA4 : $\lambda=75\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $fc=0.03$; QUA4_150_1 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $fc=0.03$; QUA4_150_2 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $fc=0.05$	129
Figure IV-13 - Comparaison des résultats d'identification de la loi cohésive pour différents $f_{switch}=2.05\%$ (Hill) et $f_{switch}=3\%$: a) Lois cohésives de traction ; b) Evolution du saut de déplacement en fonction de la porosité atteinte pour la modélisation de référence ; c) Zoom sur la portion commune aux deux lois cohésives identifiées.....	131
Figure IV-14 – Méthodes d'adaption de la loi cohésive pour une porosité d'activation différente de celle de la porosité d'identification.....	132
Figure IV-15 - Maillage des goupilles (en bleu) et de l'éprouvette CT (en noir) avec la zone d'éléments XFEM pour la propagation en violet et avec un zoom sur la zone de propagation, le trait rouge représente la fissure initiale	133
Figure IV-16 - Courbes Force-CMOD pour différentes valeurs de f_{test}	134
Figure IV-17 - Courbes de propagation pour différentes valeurs de f_{test}	134
Figure IV-18 - Longueur de la zone cohésive active en fonction de la longueur de la fissure pour $f_{test}=3\%$	135
Figure IV-19 - Courbes de propagation sur une grande propagation. Comparaison des résultats du Test, des modélisations avec éléments quadratiques et linéaires sous-intégrés et de la modélisation avec zone cohésive XFEM.	136
Figure IV-20 - Courbes Force-CMOD sur une grande propagation. Comparaison des résultats du Test, des modélisations avec éléments quadratiques et linéaires sous-intégrés et de la modélisation avec zone cohésive XFEM.	136
Figure IV-21 - Déformation plastique équivalente pour un calcul standard avec éléments quadratiques sous-intégrés (en haut) et pour un calcul avec zone cohésive XFEM (en bas) pour une avancée de fissure $d_a=1.75\text{mm}$	137
Figure IV-22 – Porosité pour un calcul standard avec éléments quadratiques sous-intégrés (en haut) et pour un calcul avec zone cohésive XFEM (en bas) pour une avancée de fissure $d_a=1.75\text{mm}$	138
Figure IV-23 - Champ de porosité à la fin du calcul de propagation XFEM	138
Figure IV-24 - Courbes Force-CMOD pour les deux méthodes d'adaptation de la loi cohésive.....	140
Figure IV-25 - Courbes de propagation pour les deux méthodes d'adaptation de la loi cohésive.....	140
Figure IV-26 - Comparaison des courbes Force-CMOD pour trois tailles d'élément donnant la même densité de points de Gauss	141

Figure IV-27 - Comparaison des courbes CMOD-Avancée de la pointe de zone cohésive pour trois tailles d'élément donnant la même densité de points de Gauss	142
Figure IV-28 - Porosité aux points de Gauss à proximité de la pointe de fissure au moment de l'insertion du premier segment de zone cohésive pour $\lambda=37,5\mu\text{m}$	142
Figure IV-29 - Porosité aux points de Gauss à proximité de la pointe de fissure au moment de l'insertion du premier segment de zone cohésive pour $\lambda=150\mu\text{m}$ à gauche (élément à 64 points de Gauss) et $\lambda=75\mu\text{m}$ à droite (élément à 16 points de Gauss)	143
Figure IV-30 - Courbes Force-CMOD pour des densités de points de Gauss différentes. Nbpg16 :distance interpoints de Gauss moyenne= $18.8\mu\text{m}$; nbpg64 :distance interpoints de Gauss moyenne= $9.4\mu\text{m}$	144
Figure IV-31 - Courbes de propagation pour des densités de points de Gauss différentes. Nbpg16 :distance interpoints de Gauss moyenne= $18.8\mu\text{m}$; nbpg64 :distance interpoints de Gauss moyenne= $9.4\mu\text{m}$	144
Figure IV-32 - Zone calcul du critère d'insertion d'une zone cohésive en 3D dans le cas d'une épaisseur élémentaire	146
Figure IV-33 - Courbes de propagation. Calculs 2D en déformations planes, modélisation standard : Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés, HPP. Calculs 2D en déformations planes XFEM : XFEM2D. Calculs 3D en déformations planes imposées : XFEM3D DP : calcul XFEM ; C8RI DP : calcul standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés.	146
Figure IV-34 – Courbes Force-CMOD. Calculs 2D en déformations planes, modélisation standard : Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI HPP : Eléments linéaires sous-intégrés. Calculs 2D en déformations planes XFEM : XFEM2D. Calculs 3D en déformations planes imposées : XFEM3D DP : calcul XFEM ; C8RI HPP DP : calcul standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés.	147
Figure IV-35 - Courbes de propagation. Calculs 2D en déformations planes : Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés, modélisation standard ; Calculs standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés. : C8RI DP : Avec conditions aux limites imposant des déformations planes ; C8RI libre : Avec les faces latérales libres	148
Figure IV-36 - Courbes Force-CMOD Calculs 2D en déformations planes : Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés, modélisation standard ; Calculs standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés. : C8RI DP : Avec conditions aux limites imposant des déformations planes ; C8RI libre : Avec les faces latérales libres	148
Figure IV-37 - Courbes de propagation pour une CT modélisée avec les faces latérales libres. C8RI libre : Calcul standard en HPP, éléments linéaires sous-intégrés ; XFEM3D libre : Calcul XFEM 3D	149
Figure IV-38 - Courbes Force-CMOD pour une CT modélisée avec les faces latérales libres. C8RI libre : Calcul standard en HPP, éléments linéaires sous-intégrés ; XFEM3D libre : Calcul XFEM 3D	149
Figure A-1 - Géométrie du cylindre avant (a) et après déformation (b)	156
Figure A-2 - Discrétisation du problème de barre en traction pour la méthode avec multiplicateurs de Lagrange	157
Figure C-1 - Géométrie du cylindre avant (a) et après déformation (b)	172
Figure C-2 - Comparaison des courbes Force-CMOD	173
Figure C-3 - Comparaison des courbes d'avancée de fissure (CMOD-Avancée de la fissure)	174

Principales Notations

\dot{a}	Dérivée temporelle de a
$\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}$	Produit de Hadamard de $\underline{\underline{a}}$ et $\underline{\underline{b}}$ (produit composante par composante)
$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}}$	Produit doublement contracté
$\underline{\underline{a}}_d$	Déviateur d'un tenseur d'ordre 2
div	Opérateur divergence
a^*	Champ virtuel de a
$a_{,x}$	Dérivée première de a selon x
a^+	Grandeur a associée à la lèvres supérieure de la fissure ou de la zone cohésive
a^-	Grandeur a associée à la lèvres inférieure de la fissure ou de la zone cohésive
$\underline{\underline{a}}^T$	Transposé de $\underline{\underline{a}}$
a	Longueur de fissure
B	Epaisseur
b_i	Degré de liberté d'enrichissement saut au nœud i
c_k^1	Degré de liberté d'enrichissement associé à la l -ième fonction de pointe de fissure au nœud k
d_l	Dissipation intrinsèque locale
D	Endommagement ; Constante du modèle de Rousselier
$D_m^p = \frac{\text{Tr}(\underline{\underline{D}}^p)}{3}$	Déformation plastique moyenne
ϵ	Energie totale
e_{zc}	Densité surfacique d'énergie interne de la zone cohésive
E	Module de Young
f	Fraction Volumique de Cavités, Porosité
f_0, f_c	Porosité initiale, critique
F	Fonction de charge, potentiel de dissipation
F	Force thermodynamique associée à la porosité
f_{test}	Fraction Volumique de Cavités, Porosité test pour l'extension de la zone cohésive
f_{switch}	Fraction Volumique de Cavités, Porosité pour l'activation du modèle de zone cohésive lors de l'identification de la loi cohésive
F_l	Fonctions de pointe de fissure pour l'approximation XFEM
F_{ext}	Efforts extérieurs
F_{int}	Efforts intérieurs
F_z	Effort Appliqué sur le cylindre
H	Fonction de Heaviside
J	Jacobien d'une transformation
L	Longueur du cylindre
l_c	Longueur caractéristique
M	Multiplicateur de Lagrange associé à la zone cohésive (chapitre II)
N_i	Fonction de forme au nœud i

p	Déformation plastique cumulée ou équivalente
P	Force thermodynamique associée à l'écroutissage
P_{ext}	Puissance des actions extérieures
P_{int}	Puissance des actions intérieures
r	Rayon dans le repère de pointe de fissure
R	Rayon du cylindre
$R(p)$	Loi d'écroutissage du matériau sain
R_0 et R_m	Rayon moyen initial et courant
s_{zc}	Densité surfacique d'entropie de la zone cohésive
$(s_i)_{zc}$	Densité surfacique d'énergie interne de la zone cohésive
S, S_0	Surface courante et surface initiale
S_{switch}	Section du cylindre au moment du switch
t	Temps
T	Température
T_0	Traction maximale
u_{dl}	Norme du déplacement imposé en bout de cylindre
u^h	Déplacement interpolé
u_i	Degré de liberté standard au nœud i
V, V_0	Volume (courant) et volume initial
W	Travail des efforts
ω	Fonction de pondération
ω_G	Poids associé au point de gauss G
ω_R	Erreur autorisée, Tolérance
W_{ext}	Travail des efforts extérieurs
X, x	Abscisse d'un point dans la configuration initiale, courante
X_a, x_a	Abscisse de la fissure dans la configuration initiale, courante
γ	Coefficient de chargement
Γ_0	Energie de rupture d'une zone cohésive
Γ_f	Surface de la fissure
Γ_F	Surface où l'effort est imposé
Γ_u	Surface de déplacement imposé
Γ_{zc}	Surface de référence de la zone cohésive
δ_c	Saut de déplacement critique de la zone cohésive
ζ	Troisième direction dans le repère de l'élément de référence (élément parent)
η	Deuxième direction dans le repère de l'élément de référence (élément parent)
θ	Angle d'un point dans le repère de pointe de fissure
λ	1 ^{er} coefficient de Lamé
$\dot{\lambda}_p$	Multiplicateur plastique
Λ_R	Multiplicateur de Lagrange associé au déplacement de traction
μ	2 ^{ème} coefficient de Lamé
ν	Coefficient de Poisson
ρ, ρ_0	Masse volumique actuelle et initiale
σ_0	Limite d'élasticité
σ_1	Paramètre du modèle de Rousselier
σ_m	Contrainte moyenne : $Tr(\underline{\underline{\sigma}})/3$

$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\sigma}}^d}$	Contrainte équivalente de von Mises
$\tau = \frac{\sigma_m}{\sigma_{vM}}$	Taux de triaxialité des contraintes
v^k	Variables internes propres à la zone cohésive
Ψ	Energie libre d'un système en équilibre
ψ	Fonction de niveau dont l'isozéro donne le front de fissure
ψ	Energie libre
ψ_p, ψ_f	Energie libre associée à l'écroutissage, à la porosité
ψ_{zc}	Energie libre de la zone cohésive
ξ	1 ^{ère} direction dans le repère de l'élément de référence (élément parent)
Ω_i	Domaine contenant les nœuds de l'ensemble I
Φ	Dissipation globale
ϕ	Fonction de niveau dont l'isozéro donne le plan de fissure
ϕ_V, ϕ_V^p	Dissipation infinitésimale totale et plastique dans le solide
ϕ_{zc}, ϕ_{zc}^p	Dissipation infinitésimale totale et plastique de la zone cohésive
Φ_V, Φ_{zc}	Dissipation globale dans le solide et dans la zone cohésive
\underline{D}	Vecteur vitesse de déformation
\underline{D}_G	Vecteur vitesse de déformation en un point de Gauss
\underline{F}	Vecteur effort
\underline{n}	Vecteur normal
\underline{q}	Chaleur surfacique, Flux de chaleur
$[\underline{q}]$	Saut de flux de chaleur
\underline{t}	Vecteur contrainte cohésive
\underline{t}_1	Premier Vecteur tangentiel de la zone cohésive (direction des ψ positifs)
\underline{t}_2	Deuxième Vecteur tangentiel de la zone cohésive
\underline{t}_{zc}	Vecteur des contraintes cohésives
\underline{t}_d	Efforts surfaciques imposés
\underline{t}^e	Contrainte cohésive conservative d'un point de vue mécanique
\underline{t}^{ir}	Contrainte cohésive irréversible.
\underline{u}	Vecteur déplacement
\underline{u}_d	Déplacement imposé
\underline{u}^r	Vecteur déplacement résiduel
$[\underline{u}]$	Vecteur saut de déplacement
$[\underline{u}]_h^{loc}$	Vecteur saut de déplacement interpolé dans le repère local de la zone cohésive
\underline{V}	Champ de saut de déplacement tiré de l'équivalence des dissipations entre modèle couplé et modèle de référence
\underline{x}	Vecteur coordonnées (configuration de référence)
\underline{x}_G	Vecteur coordonnées du point de Gauss G (configuration de référence)
$\underline{\kappa}$	Vecteur des forces thermodynamiques associées à $\underline{\mu}$
$\underline{\lambda}$	Champ de multiplicateurs de Lagrange
$\underline{\mu}$	Vecteur de variables internes, Champ de multiplicateurs de lagrange associé à la présence d'une zone cohésive.
$\underline{\sigma}$	Vecteur contrainte

$\underline{\underline{D}}$	Vitesse de déformation totale
$\underline{\underline{D}}_{loc}$	Vitesse de déformation totale dans la zone de localisation
$\underline{\underline{D}}^e, \underline{\underline{D}}^p$	Vitesse de déformation élastique et plastique
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur des déformations totales
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e; \underline{\underline{\varepsilon}}^p$	Déformation élastique, plastique
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{\sigma}}^{eff}$	Contrainte effective
$\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}_{loc}$	Dérivée objective de la contrainte
$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$	Tenseur d'élasticité de Hooke
$\underline{\underline{L}}$	Opérateur élastique
$\{F\}$	Vecteur des Efforts nodaux
$\{F_{ext}\}, \{F_{int}\}$	Vecteur des Efforts nodaux appliqués, intérieurs
$\{F_{zc}\}$	Vecteur des Efforts nodaux associés à la zone cohésive
$\{M\}$	Vecteur nodal des multiplicateurs de Lagrange associés à la zone cohésive
$\{N\}$	Vecteur des fonctions de forme standard
$\{t_d\}$	Vecteur des efforts surfaciques imposés discrétisés
$\{U\}$	Vecteur des déplacements nodaux
$\{V\}$	Vecteur nodale du saut de déplacement tiré de l'équivalence des dissipations entre modèle couplé et modèle de référence
$\{\Lambda\}$	Vecteurs des multiplicateurs de Lagrange nodaux
$\{\sigma\}$	Vecteur des contraintes discrétisées
$[A]$	Matrice d'application des multiplicateurs de Lagrange
$[B], [B_G]$	Matrice de calcul des déformations, au point de Gauss G
$[B_U]$	Partie de $[B]$ associée aux degrés de liberté standard
$[B_{enr}]$	Matrice de calcul de la déformation à partir d'un champ de déplacement enrichi
$[B_b]$	Partie de $[B]$ associée aux degrés de liberté d'enrichissement saut
$[B_{zc}]$	Matrice de calcul du saut de déplacement au point de Gauss de la zone cohésive
$[B_{zc}; b]; [B_{zc}; u]$	Composante liée au ddl d'enrichissement et Composante liée aux ddl standard de la matrice de calcul du saut de déplacement au point de Gauss de la zone cohésive
$[J_G]$	Matrice jacobienne de la transformation au point de Gauss G
$[J_{zc}]$	Matrice jacobienne de la transformation d'un élément cohésif
$[K]$	Matrice de rigidité
$[R]$	Matrice de changement de repère
$[T]$	Matrice d'application des multiplicateurs de Lagrange associ au calcul du saut de déplacement de la zone cohésive

AE	Eprouvette axisymétrique entaillée
CM	Modélisation couplée
CT	Compact Tension Specimen
CMOD	Crack Mouth Opening Displacement (ouverture des lèvres de la fissure)
CTOD	Crack Tip Opening Displacement (déplacement d'ouverture en pointe de fissure)
ddl	Degré de liberté
LEFM	Linear Elastic Fracture Mechanics (Mécanique linéaire de la rupture)
RM	Modélisation de référence
XFEM	eXtended Finite Element Method (Méthode des éléments finis étendue)

Introduction générale

Dans les problématiques industrielles, les défauts peuvent apparaître dès la phase de fabrication des composants, en particulier au niveau des soudures, ou en cours d'exploitation suite à des conditions de fonctionnement sévères ou mal appréhendées lors de la conception (solicitations thermo-mécaniques cycliques, phénomènes de corrosion,...). Les contrôles en service permettent de détecter la présence de ces défauts dont la stabilité doit être analysée. Selon les circonstances, ces analyses de nocivité de défaut peuvent conduire à laisser le composant en l'état ou à une réparation ou au remplacement du composant fissuré voire à un arrêt de l'installation si celui-ci n'est pas remplaçable.

Dans certains cas, l'analyse de nocivité de défaut peut être réalisée en amont, sur un défaut hypothétique, afin d'évaluer la tolérance d'un composant à un défaut dans différentes situations de fonctionnement (nominales et accidentelles). Par exemple, dans le cadre d'une analyse de fuite avant rupture, on peut être amené à évaluer la stabilité d'un défaut dans une tuyauterie nucléaire soumise à un séisme. Dans ce cas, le mode de dégradation du composant peut être une rupture par déchirure ductile.

Les approches globales de la mécanique de la rupture sont des outils efficaces et pragmatiques mais dans le cas de la déchirure ductile, elles peuvent s'avérer pénalisantes du fait d'un problème de transférabilité des grandeurs critiques (ténacité et courbe de résistance à la déchirure ductile) entre éprouvettes de laboratoire et structure. Les modèles d'approche locale offrent une solution alternative, du moins pour des études nécessitant des outils précis. Malheureusement, si ces modèles sont bien validés d'un point de vue 'physique', leur mise en œuvre numérique est complexe et délicate, et peut conduire à des difficultés difficilement contournables. Notamment, les composants de tuyauterie nucléaire sont de grandes dimensions et peuvent tolérer de grandes propagations en déchirure ductile (plusieurs dizaines de mm) avant d'atteindre le chargement à l'instabilité. En général la modélisation de ce type de problématique par l'approche locale ne permet pas de représenter d'aussi grandes déchirures et se limite bien souvent à quelques mm suite à des problèmes d'ordre numérique.

L'objectif de cette thèse est donc de développer un outil permettant d'étendre le domaine de validité numérique des modèles d'approche locale pour la rupture ductile aux grandes propagations de fissure en déchirure ductile. En effet, les modèles mécaniques continus pour la rupture ductile permettent de représenter la physique de l'endommagement ductile et de modéliser la propagation de fissure indépendamment de la géométrie du ou des défauts et des structures étudiées. Cependant des problèmes numériques liés à la présence d'éléments distordus dans le maillage rendent la prédiction de grandes propagations assez délicate.

Pour supprimer les problèmes numériques liés à l'approche locale, on choisit de coupler cette dernière à une modélisation discontinue, correspondant à l'introduction d'une fissure réelle (au sens d'un défaut dont les lèvres sont libres de contrainte) plus adaptée à la représentation de grandes propagations en déchirure ductile. Il est intéressant de noter que cette méthodologie peut être transposée à d'autres types de modèle d'approche locale et ainsi à un processus d'endommagement non ductile. En effet, un des enjeux actuels de la mécanique de la rupture consiste à être capable de faire la transition entre un modèle continu et un modèle discontinu pour la prédiction de l'apparition d'un défaut aussi bien que pour celle de la propagation de la fissure.

Ce mémoire est organisé en quatre parties :

Dans une première partie, les différentes approches utilisées en mécanique de la rupture sont étudiées dans l'optique de mettre en évidence leurs points faibles ainsi que leurs avantages. Un des axes forts de la recherche actuelle est le couplage de modèle. Elle correspond à l'utilisation combinée d'une échelle fine et d'une échelle plus grossière qui permet d'exploiter au mieux les atouts de différentes approches. Les stratégies utilisées dans le cadre de la mécanique de la rupture sont répertoriées afin de justifier le choix du passage d'un modèle local vers un modèle de zone cohésive.

Le chapitre II décrit une méthode d'identification de lois cohésives d'ouverture à partir du modèle de Rousselier pour la déchirure ductile. Ce modèle a été choisi car il permet de modéliser les trois étapes de la rupture ductile qui sont l'initiation, la croissance et la coalescence des cavités et qu'il est fondé sur des bases thermodynamiques claires. En définissant un modèle de zone cohésive dans un cadre similaire, une loi cohésive d'ouverture mécaniquement équivalente au modèle de Rousselier est construite pour le traitement de la déchirure ductile. La méthode de construction repose sur l'égalité du travail plastique développé dans une modélisation de référence mettant en œuvre le modèle local de Rousselier uniquement et dans une modélisation couplant ce modèle avec le modèle de zone cohésive à construire.

Dans le troisième chapitre, l'implémentation d'un modèle de zone cohésive cohérent combiné au modèle local de Rousselier est détaillée. Elle est faite dans le cadre la méthode des éléments finis étendue (XFEM) dans Cast3M, le logiciel éléments finis du CEA. Cette méthode éléments finis permet d'insérer une discontinuité mobile au cours d'un calcul élément fini de manière indépendante du maillage initial. Cette approche attrayante dans le cadre de la mécanique de la rupture, peut également servir de support pour l'introduction d'un modèle de zone cohésive. On montre comment développer la XFEM pour traiter les grandes déformations plastiques étendues qui sont caractéristiques de la déchirure ductile.

La quatrième partie présente l'application 2D et 3D de la méthode sur des essais de déchirure sur éprouvette Compact Tension. Les apports de l'approche combinant modèle de Rousselier et de zone cohésive sont étudiés, en particulier en ce qui concerne la capacité de la méthode combinée à modéliser de grandes propagations en déchirure ductile et l'influence de la taille de maille. L'application au calcul de propagation en 3D est mise en œuvre dans un contexte simplifiée.

Enfin, on discute l'intérêt de la méthode en mettant en avant ses points forts ainsi que ses faiblesses puis on explore les perspectives qu'ouvre le travail proposé dans ce mémoire.

Les références bibliographiques sont listées à la fin du mémoire. L'annexe A détaille les bases d'un programme éléments finis élaborés avec F. Cazes qui permet d'identifier une loi cohésive de traction pour des modèles simples sous l'hypothèse des petites perturbations ainsi que sous l'hypothèse non linéaire géométrique. L'annexe B détaille un programme simplifié permettant d'identifier la loi cohésive pour des lois élastoplastiques en non linéaire géométrique dans Cast3M.

Chapitre I.

Rappels et Cadre de la Recherche

1. Introduction	4
2. Rappel : Thermodynamique des processus irréversibles	5
2.1 Définitions	5
2.2 Principes de la thermodynamique	6
2.3 Cadre des matériaux standard généralisés	7
2.4 Thermodynamique et lois de comportement mécanique	7
3. Modèles pour la déchirure ductile	10
3.1 Approches globales.....	11
3.2 Modèles continus isotropes	21
3.3 Modèles de zones cohésives.....	35
4. Passage d'un modèle local à un modèle à fissure explicite.....	43
4.1 Construction de l'équivalence mécanique.....	43
4.2 Construction de l'équivalence énergétique	44
4.3 Conclusion.....	45
5. Conclusion.....	46

1. Introduction

La déchirure ductile correspond à la propagation stable de fissure sous chargement monotone croissant dans un matériau ductile. Sa modélisation a généralement pour objectif de prévoir la tenue des structures industrielles soumises à des chargements accidentels et repose sur la connaissance du comportement des défauts ainsi sollicités. De nombreux efforts ont été faits pour modéliser de grandes propagations de fissure dans le domaine ductile. Cependant, les approches proposées sont soit inadaptées pour modéliser de grandes propagations (modèles continus régularisés ou non), soit approximatives ou trop complexes quant à la prise en compte de l'état de triaxialité des contraintes en pointe de fissure ou pour la prise en compte de l'effet d'histoire du chargement (approches globales, zones cohésives).

Un autre axe important de la recherche actuelle est la modélisation du problème de rupture de l'initiation d'une fissure à partir d'un état sain jusqu'à sa propagation étendue. De nombreux travaux traitent de cette problématique, en particulier dans le cadre de la rupture fragile ou quasi-fragile. Ils proposent soit d'utiliser des modèles de zone cohésive, soit de passer d'un modèle continu (endommagement, plasticité, élastoplasticité endommageable) à un modèle discontinu (modèles de zone cohésive, approches globales) représentant la fissure. Cette seconde solution semble prometteuse, elle permet en effet d'utiliser le modèle le plus performant à chaque étape du processus de rupture, cependant elle n'a pas été mise en œuvre dans le cadre de la déchirure ductile.

Cette bibliographie a pour but de mettre en évidence les points forts et les manques des différentes approches développées jusqu'à présent pour modéliser la déchirure ductile, afin de choisir le modèle le plus approprié pour simuler chaque étape du processus de rupture. Dans un premier temps nous rappellerons les bases de la thermodynamique des processus irréversibles qui donne un cadre pour la définition de lois de comportement robustes. Il est donc intéressant de s'y conformer pour développer notre outil. Ensuite nous étudierons les différentes approches utilisées pour la modélisation de la rupture ductile : les approches globales, les modèles continus et enfin les modèles de zones cohésives.

2. Rappel : Thermodynamique des processus irréversibles

Cette section présente les bases fondamentales de la thermodynamique et leur utilisation dans le cadre de la construction ou de la validation de lois de comportement pour les phénomènes dissipatifs. On se concentre ici sur les principes généraux, c'est pourquoi on se limite au cas des milieux continus et au cadre des petites perturbations dans cette section. Pour une approche plus détaillée de la thermodynamique appliquée à la mécanique des milieux continus on peut se référer à [Germain1983].

2.1 Définitions

Variables d'état

Les variables d'état se divisent en deux catégories, les variables observables ($\underline{\underline{\varepsilon}}, T$) qui, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, correspondent à la déformation et à la température et les variables internes ($\underline{\underline{\alpha}}$) qui ne sont pas directement observables. Dans l'écriture des modèles pour les milieux continus, on préfère souvent la déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ à la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Forces thermodynamiques associées ($\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{A}}$)

Ce sont les forces disponibles pour faire avancer les processus irréversibles. Elles sont associées aux variables d'état par différentiation de l'énergie libre.

Energie libre ψ

C'est l'énergie stockée dans le solide, elle est consommée en partie ou totalement par les phénomènes irréversibles. Une part peut aussi être stockée dans la microstructure par écrouissage par exemple.

Dissipation intrinsèque D_1

C'est toute l'énergie dissipée par le système à laquelle on retranche la dissipation thermique.

Lois d'état

Elles dérivent de l'énergie libre du matériau et permettent de décrire l'état du système en définissant l'entropie s , la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et les autres forces thermodynamiques $\underline{\underline{A}}$:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad \underline{\underline{A}} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad (\text{I-1})$$

Lois complémentaires

Ces lois décrivent l'avancement des phénomènes irréversibles à partir des forces thermodynamiques correspondantes. Elles dérivent du potentiel de dissipation $\Phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}})$ ou du potentiel dual $\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{A}})$.

2.2 Principes de la thermodynamique

2.2.1 Premier Principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie. Dans le cadre d'une étude quasi-statique, l'énergie cinétique est nulle. Ainsi à chaque instant, la variation de l'énergie totale E d'un système est égale à la variation du travail des efforts exercés sur le système et de la quantité de chaleur reçue Q . Ce Principe s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = P_{\text{ext}} + \dot{Q} \quad (\text{I-2})$$

Où P_{ext} est la puissance des actions extérieures. Pour un milieu continu, on peut déduire la relation suivante du principe des puissances virtuelles : $P_{\text{ext}} = -P_{\text{int}} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dV$

On introduit de plus l'énergie interne spécifique e : $\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} \rho \dot{e} dV$.

La chaleur reçue se divise en une contribution volumique r et une contribution surfacique, le courant de chaleur \underline{q} :

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} (r - \text{div} \underline{q}) dV \quad (\text{I-3})$$

L'écriture locale du Premier Principe est la suivante :

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + r - \text{div} \underline{q} \quad (\text{I-4})$$

2.2.2 Second Principe de la thermodynamique

Le second principe de la Thermodynamique permet la prise en compte des variations de température et introduit la distinction entre transformations réversibles et irréversibles. Pour un milieu continu fermé, il s'écrit :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \left(\frac{r}{T} - \text{div} \frac{\underline{q}}{T} \right) dV \quad (\text{I-5})$$

Où S est l'entropie du système.

La formulation locale peut donc aussi s'écrire :

$$\rho \dot{s} - \frac{r}{T} + \text{div} \frac{\underline{q}}{T} \geq 0 \quad (\text{I-6})$$

En introduisant l'énergie libre spécifique ψ définie par

$$e = \psi + Ts, \quad (\text{I-7})$$

on obtient l'inégalité de Clausius Duhem :

$$D_0 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \rho (\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{T}) \geq 0 \quad (\text{I-8})$$

Cette relation implique que la dissipation D_0 est toujours positive. De plus, la dissipation se décompose en deux contributions : la dissipation intrinsèque, notée D_1 , et la dissipation thermique D_2 :

$$D_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \rho (\dot{\psi} + s\dot{T}), \quad D_2 = -\frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{T}). \quad (\text{I-9})$$

Ces deux contributions étant d'une part de nature mécanique dans le cas de D_1 et thermique dans le cas de D_2 , pour assurer la positivité de D_0 on peut imposer à D_1 et D_2 d'être séparément positives.

2.2.3 Positivité de la dissipation intrinsèque

La relation suivante donne la positivité de la dissipation intrinsèque :

$$D_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \chi}(T, \chi) \dot{\chi} - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T}(T, \chi) + s \right) \dot{T} \geq 0. \quad (\text{I-10})$$

Avec $\chi = (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})$.

On remarque que si l'on effectue des variations de température réversibles autour d'un état (T, χ) à χ constant, les deux premiers termes de D_1 s'annulent. Dans ce cas, la dissipation est nulle :

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T}(T, \chi) + s \right) \dot{T} = 0. \quad (\text{I-11})$$

Ainsi pour que cette relation soit vérifiée quelque soit \dot{T} , il faut :

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T}(T, \chi) \quad (\text{I-12})$$

Ceci entraîne que le dernier terme de D_1 est toujours nul, d'où l'écriture simplifiée de la dissipation intrinsèque :

$$D_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \chi}(T, \chi) \dot{\chi} \geq 0. \quad (\text{I-13})$$

2.3 Cadre des matériaux standard généralisés

Les matériaux standard généralisés ont été introduits par Halphen et Nguyen [Halphen1975]. Ils sont définis par l'existence d'un potentiel de dissipation $\Omega(\underline{Y})$ ou de son dual $\Omega^*(\underline{\dot{X}})$ dont dérive les relations entre forces \underline{Y} et vitesses généralisées $\underline{\dot{X}}$. En détaillant l'expression des forces et des vitesses dans notre cas, on traduit l'hypothèse d'existence d'un potentiel de dissipation Ω ou de son dual Ω^* :

$$\underline{\dot{X}} = \frac{\partial \Omega(\underline{Y})}{\partial \underline{Y}} \quad ; \quad \underline{Y} = \frac{\partial \Omega^*(\underline{\dot{X}})}{\partial \underline{\dot{X}}} \quad (\text{I-14})$$

Pour résumer, un matériau est dit standard généralisé s'il existe un potentiel de dissipation Ω (resp. son dual Ω^*) fonction convexe de chacune de ses variables et si le minimum de ce potentiel est obtenu pour l'origine $\underline{\dot{X}} = \underline{0}$ (resp. $\underline{Y} = \underline{0}$).

Sous ces hypothèses, l'appartenance d'une loi de comportement au cadre des matériaux standard généralisés induit automatiquement la positivité de la dissipation intrinsèque D_1 .

2.4 Thermodynamique et lois de comportement mécanique

L'application de la thermodynamique à la construction de loi de comportement a tout d'abord été basée sur le postulat selon lequel tout point matériel, ou tout volume élémentaire représentatif, peut être considéré comme un sous-système en équilibre. De plus l'hypothèse de découplage des dissipations thermiques et mécaniques permet de traiter ces deux types de comportement séparément. Les lois de comportement thermiques donnent une relation entre le flux de chaleur et le gradient de température. Les lois de comportement mécaniques

donnent quant à elle les relations d'évolution entre les variables d'état et les forces thermodynamiques associées.

2.4.1 Comportement mécanique réversible

Dans le cas d'un comportement mécanique réversible, la dissipation intrinsèque est nulle. On considère ici le cas où aucune variable interne ne fait partie des variables d'état. Ainsi on obtient une relation entre la variation de l'énergie libre et la contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(T, \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (\text{I-15})$$

2.4.2 Comportement mécanique irréversible

En se plaçant sous l'hypothèse des petites perturbations, on peut écrire la déformation comme la somme d'une composante réversible dite élastique et d'une composante irréversible dite plastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (\text{I-16})$$

En plus de la déformation plastique, les comportements non-linéaires les plus courants sont l'écroutissage et l'endommagement. Ici nous nous intéresserons uniquement à l'écroutissage et à l'endommagement isotrope, pour lesquels les variables caractéristiques sont respectivement la déformation plastique cumulée p ($\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_d^p : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_d^p)$) et le dommage D . Pour rendre compte du rôle de chacun de ces processus, on écrit le système des variables d'état suivant : $\chi = (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, p, D)$.

Dans le cas où le dommage et la plasticité sont découplés, on suppose en général l'écriture suivante de l'énergie libre :

$$\rho \psi(T, \chi) = (1-D) \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_p \quad (\text{I-17})$$

Où $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ est le tenseur de Hooke du matériau sain, reliant les déformations élastiques aux contraintes.

A l'aide de ce système de variables d'état, la dissipation intrinsèque prend la forme suivante :

$$D_1 = \left(\underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(T, \chi) \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p}(T, \chi) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p - \dot{\psi}_p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}(T, \chi) : \dot{D} \quad (\text{I-18})$$

Soit :

$$D_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p + Y\dot{D} - P\dot{p} \quad (\text{I-19})$$

Où $Y = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e$ et P sont respectivement les forces thermodynamiques associées à l'endommagement et à l'écroutissage.

2.4.3 Ecriture d'une loi de comportement dans le cadre des matériaux standard généralisés

Dans le cadre des matériaux standard généralisés, on voit que l'écriture d'une loi de comportement correspond à la définition de deux potentiels thermodynamiques : l'énergie

libre ψ et le potentiel de dissipation Ω (ou son dual Ω^*). Les variables primales et les forces thermodynamiques associées sont données par :

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{\epsilon}}^p \\ \underline{\dot{D}} \\ \underline{\dot{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\Omega(\underline{\sigma}, Y, P) / \partial\underline{\sigma} \\ \partial\Omega(\underline{\sigma}, Y, P) / \partial Y \\ \partial\Omega(\underline{\sigma}, Y, P) / \partial P \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \underline{\sigma} \\ Y \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\Omega^*(\underline{\dot{\epsilon}}^p, \underline{\dot{D}}, \underline{\dot{p}}) / \partial\underline{\dot{\epsilon}}^p \\ \partial\Omega^*(\underline{\dot{\epsilon}}^p, \underline{\dot{D}}, \underline{\dot{p}}) / \partial\underline{\dot{D}} \\ \partial\Omega^*(\underline{\dot{\epsilon}}^p, \underline{\dot{D}}, \underline{\dot{p}}) / \partial\underline{\dot{p}} \end{pmatrix} \quad (\text{I-20})$$

S'il existe un potentiel de dissipation Ω (resp. son dual Ω^*) fonction convexe de chacune de ses variables et si le minimum de ce potentiel est obtenu pour l'origine (dans notre cas : $(\underline{\dot{\epsilon}}^p, \underline{\dot{D}}, \underline{\dot{p}}) = \underline{0}$ (resp. $(\underline{\sigma}, Y, P) = \underline{0}$)), alors le modèle matériau est dit standard généralisé.

Sous ces hypothèses, l'appartenance d'une loi de comportement au cadre des matériaux standard généralisés induit automatiquement la positivité de la dissipation intrinsèque D_I .

3. Modèles pour la déchirure ductile

On peut définir la ductilité d'un matériau par sa capacité à se déformer au-delà de son domaine de linéarité. Ainsi, un matériau qui rompt dès la perte de linéarité est considéré élastique fragile, alors qu'un matériau pour lequel la déformation non linéaire est importante est dit ductile.

Avec la ductilité, la tolérance aux défauts des structures et matériaux augmente et permet de limiter la probabilité de rupture brutale aux conséquences catastrophiques. Afin de garantir la sécurité en service des structures métalliques dans les centrales nucléaires, il est nécessaire de connaître leur comportement en cas de sollicitation accidentelle, en particulier lorsqu'une fissure préexiste. Il faut donc vérifier qu'en présence d'un défaut, la propagation reste limitée et se fait dans le domaine de la déchirure ductile, c'est-à-dire de manière quasi statique.

Dans les métaux, la déchirure ductile est principalement due à la croissance et à la coalescence de cavités induites par les grandes déformations plastiques existant à proximité des inclusions. Ce sont ces cavités qui sont à l'origine du faciès en cupules caractéristique de ce type de rupture (Figure I-1). La plasticité joue également un rôle important sur l'amorçage en impliquant l'émoussement de la pointe de fissure avant la propagation en déchirure ductile. Cependant la phase d'émoussement contribue ainsi à retarder l'amorçage ce qui a pour effet de pré-endommager le solide en avant de la pointe de fissure et de favoriser une accélération de la propagation.

Dans cette partie, nous allons présenter les différents modèles permettant de calculer la réponse d'une structure (fissurée ou non) dont le matériau a ce type de comportement. On peut les classer selon trois approches, qui correspondent aussi à trois échelles d'études :

1. Les approches globales qui se situent au niveau de la fissure macroscopique ;
2. Les modèles continus qui se placent à l'échelle du volume élémentaire ;
3. Les modèles cohésifs qui permettent de modéliser les phénomènes à une échelle intermédiaire.

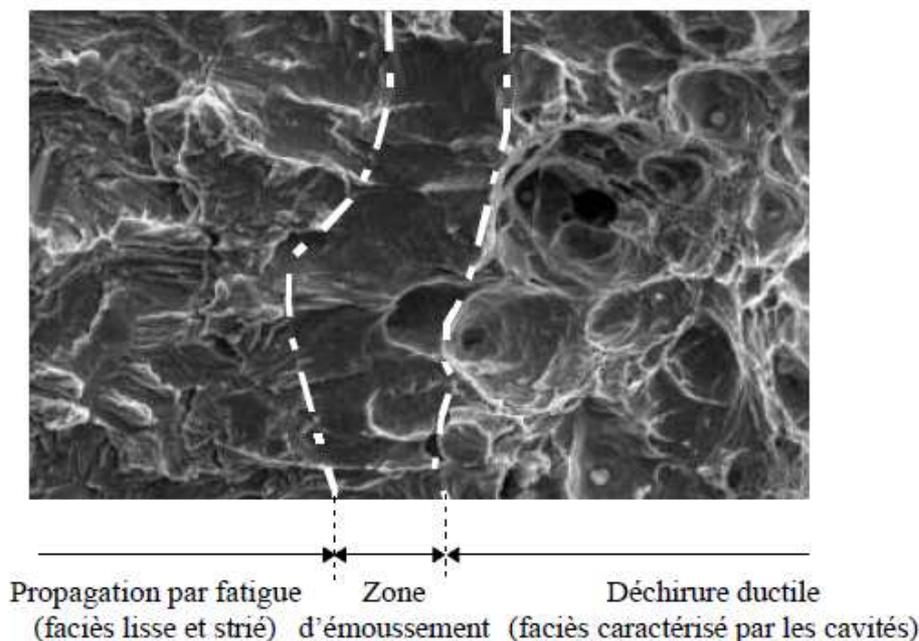


Figure I-1 – Faciès de rupture dans le cas d'une éprouvette CT en acier [Marie1999]

3.1 Approches globales

Les approches globales sont basées sur le calcul d'intégrales de contour et sont utilisées pour modéliser l'amorçage puis la propagation d'une fissure. Pour les matériaux ductiles, la plasticité en pointe de fissure n'est plus confinée et l'application de ces approches n'est possible que dans un cadre restreint.

3.1.1 Rappel : Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture est basée sur l'hypothèse d'élasticité de la totalité de la structure fissurée dont on étudie le comportement. Dans ce cadre, Irwin [Irwin1957] a montré la relation de proportionnalité entre le facteur d'intensité de contraintes K_I et le premier terme du développement limité des champs de contraintes en pointe de fissure. Le champ de contraintes en un point M du voisinage de la pointe de fissure O est donné par :

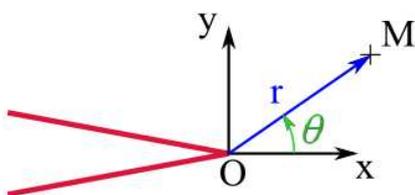


Figure I-2 - Repère de pointe de fissure

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin 3\frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos 3\frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\quad (\text{I-21})$$

Où r et θ sont respectivement le rayon et l'angle donnant la position du point M dans le repère de pointe de fissure défini sur la figure I-2.

Griffith [Griffith1920] fut le premier à donner une interprétation énergétique de la rupture fragile. Il introduisit le taux de restitution d'énergie G qui correspond à l'énergie élastique surfacique libérée pour une avancée infinitésimale de fissure da dans un solide élastique linéaire.

Une autre manière de calculer la valeur non signée de l'énergie élastique libérée par l'avancée de fissure est de calculer le travail ΔW nécessaire pour refermer la fissure sur la longueur da . Soit pour une structure plane d'épaisseur B :

$$\Delta W = B \int_0^{da} \sigma_{yy} \cdot u_y \, dx = G B da \quad (\text{I-22})$$

Cette expression permet de plus de relier G et K_I :

$$G = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) \text{ en déformations planes ; } G = \frac{K_I^2}{E} \text{ en contraintes planes} \quad (\text{I-23})$$

3.1.2 Bases de la mécanique de la rupture non-linéaire : l'intégrale J

Le calcul de l'intégrale de contour J a été proposé par Rice [Rice1968], son résultat donne le travail d'ouverture des lèvres lors d'une extension de fissure dans un matériau élastique linéaire ou non. Elle se calcule sur un contour fermé Γ entourant la pointe de fissure, d'où son écriture dans le cas d'une structure plane :

$$J = \int_{\Gamma} \left(w \, dy - \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \cdot ds \right) \quad (\text{I-24})$$

où \underline{u} est le vecteur déplacement, \underline{T} est le vecteur contrainte ($T_i = \sigma_{ij}n_j$) et s l'abscisse curviligne, w est l'énergie de déformation :

$$w = \int_0^{\underline{\varepsilon}} \underline{\sigma} : d\underline{\varepsilon} \quad (\text{I-25})$$

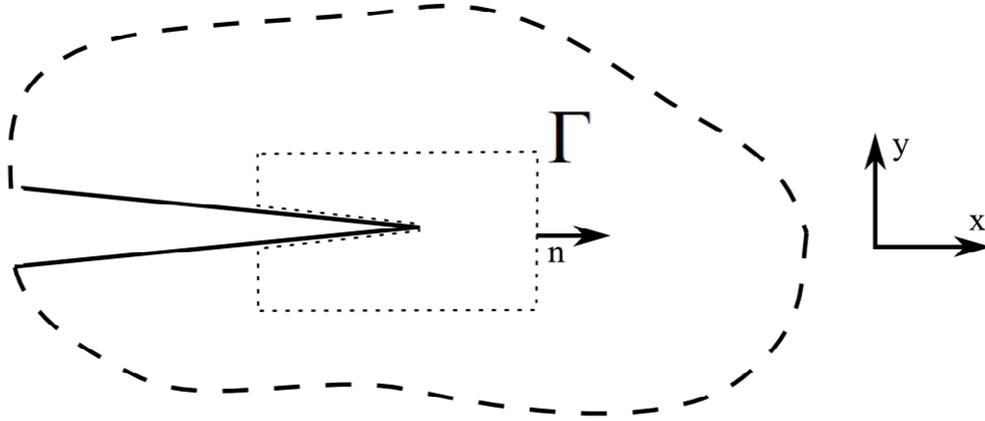


Figure I-3 – Contour Γ dans la définition de l'intégrale J

L'intérêt de cette grandeur est l'indépendance du résultat par rapport au contour d'intégration dans le cas de l'élasticité linéaire et non linéaire. De plus, l'intégrale de Rice, peut être reliée à de nombreuses caractéristiques du matériau fissuré :

1. La variation d'énergie potentielle Π dans le solide lors de l'extension infinitésimale de fissure da est égale à J :

$$J = -\frac{d\Pi}{da} \quad (\text{I-26})$$

Dans le cas d'un matériau élastique, J correspond donc au taux de restitution d'énergie G [Griffith1920].

2. Les champs de contrainte et de déformation en pointe de fissure ont été reliés à J par Hutchinson [Hutchinson1968] et Rice et Rosengren [Rice1968a] en définissant les champs HRR caractérisant l'intensité des contraintes et déformations à pour une loi de Ramberg-Osgood.

3. Dans le cas d'un chargement monotone croissant (dit chargement proportionnel), J permet l'extension de la théorie de Griffith aux matériaux élasto-plastiques. Pour ce type de chargement, l'état de contrainte de chaque point de la structure est donné directement par la courbe de traction (car il n'y a pas de décharge). Ceci permet d'assimiler le matériau à un matériau élastique non-linéaire. Cette hypothèse très utile pour les applications pratiques reste cependant parfois discutée.

4. Pour les géométries simples et les éprouvettes normalisées, la réponse mécanique de la structure permet aussi de retrouver J . En effet, l'aire sous la courbe force-déplacement correspond à l'énergie reçue par l'éprouvette, ainsi la variation de cette énergie suite à une extension de fissure correspond à J et s'obtient par la relation suivante :

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{\eta U}{Bb} \text{ avec } E^* = \begin{cases} E & \text{en contraintes planes} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (\text{I-27})$$

où U est la composante plastique de l'aire sous la courbe force-ouverture des lèvres de la fissure, b est la longueur du ligament, B l'épaisseur et η est une fonction dépendant de la

géométrie et de la longueur du défaut. J est en général déterminée soit à l'aide de calculs aux éléments finis, soit à l'aide de méthodes analytiques tabulées [ASTM2008, ISO2002, RCC-MR2007].

3.1.3 Critères d'amorçage

Dans le cas de la rupture ductile, l'amorçage se produit suite à une déformation plastique importante de la pointe de fissure. Comme on le voit sur la figure I-4, le fond de la fissure s'arrondit sans que la déchirure proprement dite ne soit amorcée, on dit qu'il y a émoussement. Au cours de l'émoussement (Figure I-4, zone [2]), J dépend linéairement de l'avancée de la pointe de fissure l .

$$J = \alpha \cdot \Delta l \quad (\text{I-28})$$

Où α est une constante dépendant des caractéristiques de traction du matériau. Abusivement, on assimile cette avancée à une avancée de fissure et on la fait apparaître sur la courbe $J-\Delta a$ (Figure I-5).

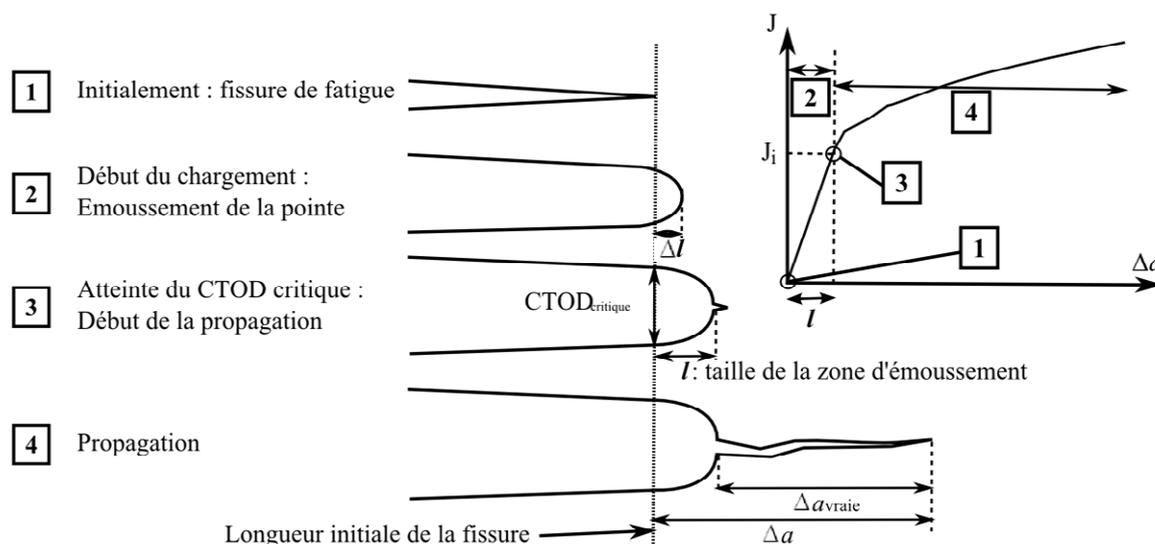


Figure I-4 - Description de l'amorçage

D'un point de vue expérimental, la valeur de J au moment exact de l'amorçage est difficile à déterminer, c'est pourquoi les normes [ISO2002] et [ASTM2008] préconisent l'utilisation de la valeur $J_{0.2}$ qui est la valeur de J pour une propagation de 0.2mm. La ténacité ainsi définie est donnée par l'intersection de la droite d'émoussement translatée de l'abscisse 0 à l'abscisse 0.2mm (Figure I-5). Il est important de noter que $J_{0.2}$ n'est pas un paramètre intrinsèque au matériau et n'a pas de réelle signification physique.

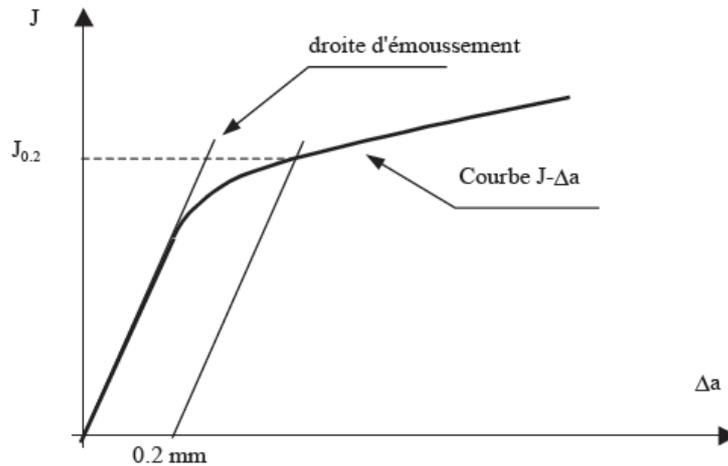


Figure I-5 - Détermination de $J_{0,2}$

A partir de la valeur critique du CTOD à l'amorçage (Figure I-4) introduit dans [Kolednik1985], Eisele *et al* [Eisele1991] définissent la valeur de J_i à l'initiation en reportant la profondeur d'érousement sur la courbe $J-\Delta a$. Le caractère intrinsèque de cette grandeur a été confirmé par Chapuliot et Marie [Chapuliot1998] en montrant sa transférabilité d'éprouvette à structure.

Lors d'une étude sur la ténacité d'aciers très ductiles, Wells [Wells1961] a mis en évidence que la déformation en pointe de fissure est d'autant plus importante que le matériau est tenace. Ces résultats l'ont conduit à proposer le CTOD (déplacement d'ouverture en pointe de fissure) comme mesure de la ténacité à l'amorçage. De plus, lorsque Rice introduit l'intégrale J , il redéfinit le CTOD (Figure I-6.a) et le relie à J dans le cas d'un matériau plastique parfait :

$$J = \sigma_0 \cdot \text{CTOD} \quad (\text{I-29})$$

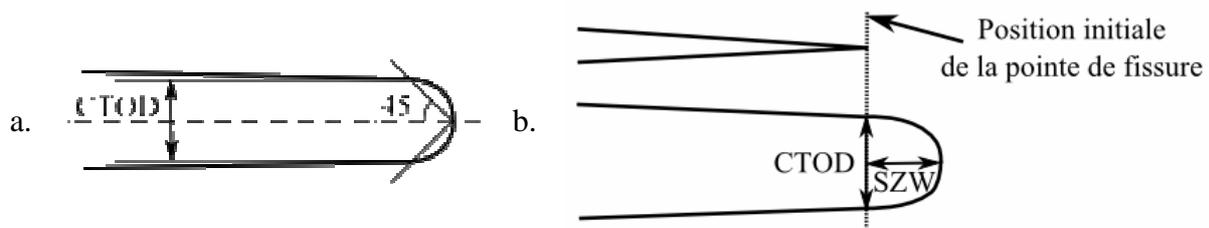


Figure I-6 – a. : Définition du CTOD selon Rice ; b. : Une autre définition

Plusieurs travaux expérimentaux [Robinson1974, Lautridou1981, Broek1974] utilisant une définition du CTOD différente de celle de Rice (Figure I-6.b) ont confirmé qu'il existe bien une relation linéaire entre J et le CTOD. Des études ont ensuite montré que le CTOD à l'amorçage est un paramètre matériau en retrouvant des valeurs comparables pour différents types d'éprouvettes et de sollicitations.

Conclusion

Afin de faciliter la détermination des critères d'amorçage, les normes proposent d'utiliser la valeur de $J_{0,2}$. Cependant cette grandeur n'étant pas intrinsèque au matériau, elle ne donne pas de prédiction fiable. J_i a été validée comme étant un critère matériau et son utilisation dans un

calcul est simple à mettre en œuvre. Cependant l'identification de cette grandeur est complexe et coûteuse. Les critères sur le CTOD sont assez simples à identifier, en revanche leur mise en œuvre dans le cadre d'un calcul éléments finis n'est pas directe. Finalement, des critères fiables permettent de caractériser l'amorçage de la propagation ductile, néanmoins ils sont soit difficiles à déterminer, soit difficiles à appliquer dans le cadre des méthodes numériques de modélisation.

3.1.4 Calcul de la propagation

La courbe $J-\Delta a$ est déterminée à partir d'essais de déchirure sur des éprouvettes fissurées. Cependant les courbes ainsi obtenues dépendent du mode de sollicitation, de la taille et de la géométrie des éprouvettes utilisées ainsi que de la taille relative et de la forme de la fissure. Plusieurs approches ont été proposées afin de limiter ces effets.

3.1.4.1 Approches à deux paramètres

Afin de compléter l'information fournie par l'intégrale J dans le cas où la plasticité n'est pas confinée, des approches à plusieurs paramètres ont été introduites. Une partie de ces approches définissent un deuxième paramètre qui caractérise le confinement de la plasticité en pointe de fissure (approche $J-T$ [Williams1957, Shih1993]), d'autres comme l'approche $J-Q$ [Sharma1991, O'Dowd1991] ou l'approche $J-h$ [Henry1997, Faleskog1993] permettent de prendre en compte la triaxialité des contraintes. Ces méthodes, basées sur la réalisation exhaustives d'abaques, sont très coûteuses et ne permettent pas réellement de s'affranchir des effets de taille et de géométrie pour la prédiction de la déchirure ductile. En effet, Kolednik et al. [Kolednik1997] montrent que l'approche $J-Q$ ne permet pas d'expliquer à elle seule l'influence de la profondeur du défaut sur la propagation obtenue sur éprouvettes CT en déchirure ductile. De plus les abaques réalisés sont régulièrement pris en défaut en dehors du cadre de la rupture fragile. Il faut ajouter que ces méthodes ne sont pas applicables aux grandes propagations de fissure. Or pour des structures de grandes dimensions, les analyses de stabilité des défauts et de fuite avant rupture peuvent nécessiter la connaissance des lois d'évolution pour des propagations de plusieurs centimètres.

3.1.4.2 Intégrale J_M modifiée de Ernst

Dans le cas d'un matériau plastique parfait Rice *et al.* [Rice1980] ont montré que la variation de l'ouverture en pointe de fissure au cours du temps est indépendante de la vitesse de propagation. Pour que J conserve cette propriété quand la fissure propage, Ernst [Ernst1983] en proposa une nouvelle écriture :

$$J_M = J - \int_{a_0}^a \left(\frac{\partial J_{pl}}{\partial a} \Big|_{\Delta p} \right) da \quad (\text{I-30})$$

avec J_{pl} la composante plastique de J et Δp l'ouverture plastique. D'après l'auteur, cette expression permet de s'affranchir d'une grande partie des effets de taille et de géométrie sur la courbe de résistance à la déchirure ductile $J_M-\Delta a$. Ce paramètre reste cependant difficile d'usage en tant qu'outil de prédiction car il est difficilement calculable sur structure réelle sur laquelle la fonction η de l'équation (I-27) n'est pas connue.

3.1.4.3 Approches énergétiques basées sur G_{fr}

D'autres auteurs ont privilégié des approches énergétiques. Ainsi Kanninen [Kanninen1979] montre l'existence d'un taux de restitution d'énergie critique R caractéristique du processus de rupture et indépendant de la géométrie.

Turner [Turner1990] montre que R se décompose en un terme rendant compte de la plasticité dans l'ensemble de la structure et un terme, noté G_{fr} , représentatif de l'énergie nécessaire au processus de rupture défini sur les lèvres de la fissure :

$$R = \frac{dU_{diss}}{dA} = \frac{d(U_{tot} - U_{el})}{dA} = \frac{dU_{pl}}{dA} + G_{fr} \quad (I-31)$$

Avec U_{tot} , U_{el} , U_{pl} respectivement les énergies totale, élastique et plastique de la structure, U_{diss} l'énergie dissipée lors de la propagation et A l'aire de fissure. Cependant, dans la pratique, il ne parvient pas à les séparer.

Une méthode permettant d'isoler le terme représentant l'énergie dissipée participant au processus de rupture a été développée par S. Marie [Marie1999]. Dans son travail, il montre que ce terme est relié à une grandeur caractéristique du matériau notée G_{fr} équivalente au G_{fr} de Turner. Par analyse numérique, il met en évidence une relation de proportionnalité entre l'énergie de rupture δU_{rupt} et la longueur d'avancée de fissure λ :

$$G_{fr} = \frac{\delta U_{rupt}(\lambda)}{\lambda} \quad (I-32)$$

Dans le cas où l'on peut négliger l'effet de l'histoire du chargement sur les champs mécaniques en pointe de fissure, il donne une méthode permettant de prédire la déchirure ductile à partir de la variation de la composante plastique de J . De plus, un développement analytique montre que G_{fr} peut être identifié expérimentalement grâce à la pente de la courbe $J_{Mpl}-\Delta a$, où J_{Mpl} est la composante plastique de l'intégrale J modifiée de Ernst. Cette approche, couplée à l'utilisation du critère d'amorçage J_i a été validée sur différentes tailles et géométrie d'éprouvettes.

En revanche, cette méthode de mise en œuvre basée sur le calcul de paramètre J n'est correcte que si la déformée du composant pendant la propagation ne dépend pas de l'histoire du chargement comme c'est le cas en général des structures épaisses.

3.1.5 Modélisation numérique de la propagation de fissure

De nombreuses méthodes ont été développées pour la gestion de la propagation de fissure pour les éléments finis, cependant la plupart ne sont applicables qu'en élasticité (Moving Element Method [Nishioka1980], déplacement arbitraire local du maillage [Rashid1998]). Les méthodes les plus souvent utilisées pour la plasticité sont basées sur le relâchement de nœuds, le remaillage et la partition de l'unité.

3.1.5.1 Relâchement des nœuds

Les approches globales de la rupture supposent qu'un défaut préexiste dans la structure étudiée. Lorsque celui-ci se situe au niveau d'un plan de symétrie de cette dernière, et si le chargement est lui aussi symétrique par rapport à ce plan, on connaît par avance le trajet de fissure et la méthode de propagation la plus intuitive consiste à relâcher progressivement les nœuds du ligament (Figure I-7) lorsque le critère de rupture est satisfait. Dans le cadre de la

déchirure ductile, on se situe dans l'hypothèse quasi-statique pour laquelle cette méthode est très efficace, en particulier dans le cas de grandes fissures.

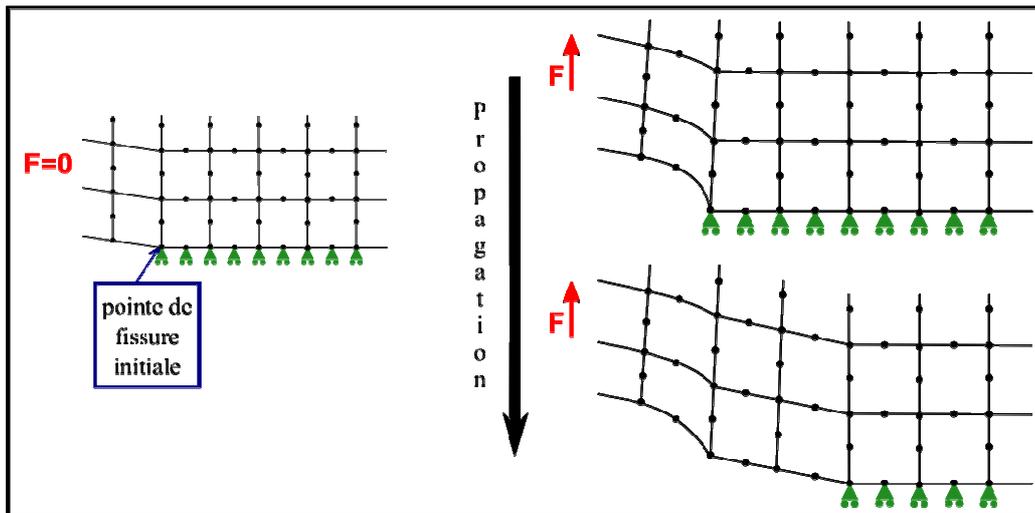


Figure I-7 - Méthode du relâchement de noeuds

3.1.5.2 Méthodes de remaillage

Les méthodes de remaillage sont très utilisées pour la gestion de l'avancée de fissure en élasticité, et permettent d'avoir une bonne idée des champs à proximité du front de fissure. Cependant, les algorithmes sur lesquels elles reposent sont en général complexes et délicats à mettre en œuvre.

Dans le cas de la déchirure ductile, la principale difficulté consiste à conserver l'énergie suite à la projection des champs du pas de temps précédent sur le nouveau maillage. En effet, les solutions discrétisées sur différents maillages ne sont pas les mêmes et une simple projection ne conduit pas à l'équilibre des champs. Pour limiter ces problèmes une étape de ré-équilibre sur le nouveau maillage (dans lequel le nouveau segment de fissure est maintenu fermé) est souvent introduite. Cependant, cette étape de ré-équilibre ne garantit jamais la conservation de l'énergie mécanique du système, en particulier lorsque la plasticité est significative en pointe de fissure et/ou dans la structure. L'introduction d'une viscosité peut cependant permettre de limiter les instabilités liées aux erreurs de projection ou de réassignation [Feld2010].

Si l'on connaît le trajet de la fissure, une solution consiste à mailler les fronts de fissure successifs. En reprenant le calcul pour chaque nouvelle avancée de fissure, l'énergie est conservée. Mais en plus d'être laborieuse, elle multiplie le temps de calcul.

3.1.5.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

Le principe de la partition de l'unité :

En mathématiques, une partition de l'unité de l'espace Ω est un ensemble de fonctions $\{N_i\}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\sum_i N_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{I-33})$$

Dans le but d'améliorer la qualité des résultats de calculs éléments finis sans raffiner le maillage, Babuska et Melenk [Babuska1997] proposent d'injecter de nouvelles fonctions,

proches de la solution attendue, dans la base de fonctions de l'approximation. Afin de ne pas détériorer l'approximation par l'ajout de ces fonctions, ils travaillent dans le cadre mathématique donné par le concept de partition de l'unité défini précédemment.

Ainsi, si la base de fonctions $\{\Phi_{i,p}\}$ permet de donner une bonne approximation locale, on peut l'ajouter à l'approximation éléments finis standard en la multipliant par les fonctions de formes initiales : $\{N_i\Phi_{i,p}\}$. Pour éviter un mauvais conditionnement, il est nécessaire de vérifier que la nouvelle base d'approximation contient un ensemble de fonctions indépendantes. Sous ces hypothèses l'approximation du déplacement est donnée par la relation suivante :

$$u(\underline{x}) = \sum_i N_i(\underline{x}) u_i + \sum_i N_i(\underline{x}) \Phi_{i,p}(\underline{x}) d_{i,p} \quad (\text{I-34})$$

Où u_i et $d_{i,p}$ sont respectivement les degrés de libertés standard et supplémentaires associés au nœud i . Afin de limiter le nombre de degrés de liberté supplémentaires liés à l'ajout de fonctions dans la base d'approximation classique, cet enrichissement est limité aux sous-domaines $\Omega_i, i \in I$ où il est nécessaire.

Cependant ce choix a l'inconvénient de créer une couche d'éléments de transition dont seulement une partie des nœuds est enrichie, donc pour lesquels la partition de l'unité n'est pas vérifiée et qui dégrade la convergence (selon les fonctions d'enrichissement choisies) [Chessa2003]. Chessa *et al.* proposent de masquer l'influence des fonctions d'enrichissement en éliminant les termes indésirables introduits par les fonctions d'enrichissement dans cette couche d'éléments de transition. Farhat [Farhat2001] propose également un moyen de s'affranchir de cette zone de transition. L'auteur sépare l'espace enrichi du reste du domaine et impose la continuité des champs aux frontières entre ces deux sous-domaines avec des multiplicateurs de Lagrange.

La méthode des éléments finis étendue (X-FEM)

La méthode des éléments finis étendue repose sur le concept de partition de l'unité combinée à l'utilisation d'une fonction discontinue (mais continue par morceau) et à une définition du domaine à enrichir basée sur des fonctions de niveau. Cette méthode fut proposée par Belytschko et Black [Belytschko1999] dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. Ils introduisent dans l'approximation du déplacement une base de fonctions F_l permettant de retrouver l'expression des champs asymptotiques par combinaison linéaire.

L'introduction d'une fonction discontinue (I-35), de type saut, fut proposée par Moës *et al.* [Moes1999] et permit de s'affranchir totalement des opérations de remaillage liées à la propagation de la fissure.

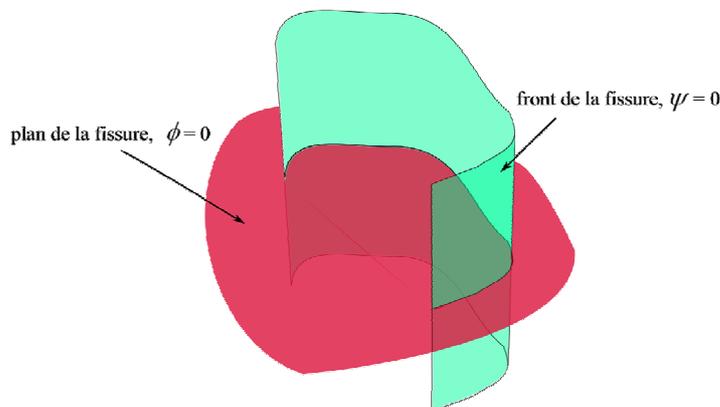


Figure I-8 - Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonctions de niveau

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0 \\ -1 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad (\text{I-35})$$

Où ϕ représente la seconde coordonnée du repère local en pointe de fissure. Afin de définir la totalité de la fissure à l'aide de fonctions définies sur toute la structure, Stolarska *et al.* [Stolarska2001] proposent l'utilisation de (ϕ, ψ) couple de fonctions de niveau (level set) (Figure I-8). La généralisation au cas 3D pour des fissures non planes est donnée par Gravouil *et al.* [Gravouil2002].

La stratégie d'enrichissement la plus répandue est décrite sur la figure I-9. Elle consiste à enrichir le champ de déplacement dans les éléments contenant la fissure. La valeur des fonctions d'enrichissement dépend alors de la position des noeuds de l'élément par rapport au plan et au front de fissure. Lorsque l'élément est traversé par la fissure de part en part, les fonctions d'enrichissement appliquées aux noeuds (qui définissent l'ensemble J) sont les fonctions H , sauf si le noeud appartient à un élément contenant la pointe de la fissure. Au quel cas, l'enrichissement est introduit à travers la base de fonctions $F_{l=1,4}$:

$$F_l(\underline{x}) = \sqrt{r} \begin{cases} \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \sin(\theta) \\ \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{I-36})$$

où r et θ sont les coordonnées polaires dans le repère de la pointe de fissure (Figure I-2). Les noeuds enrichis de ces fonctions définissent l'ensemble K . On remarque que F_1 est la seule composante discontinue par rapport au plan de fissure, c'est elle qui permet d'obtenir l'ouverture en pointe de fissure.

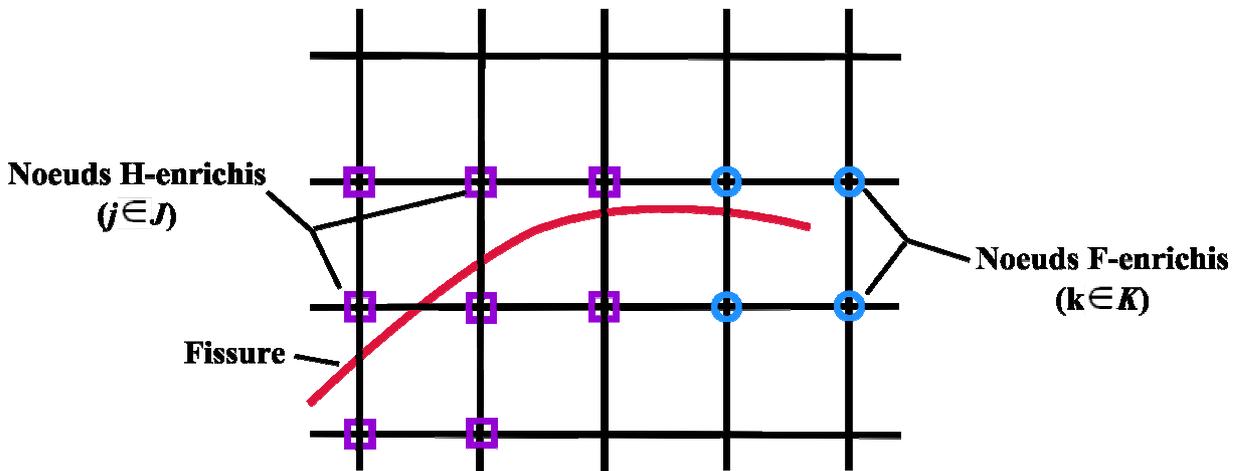


Figure I-9 - Description de la stratégie d'enrichissement

L'approximation enrichie du déplacement pour le traitement de la rupture fragile la plus répandue s'écrit finalement :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i + \sum_{j \in J} N_j(\underline{x}) H(\underline{x}) b_j + \sum_{k \in K} N_k(\underline{x}) \left(\sum_{l=1,4} F_l(\underline{x}) c_k^l \right) \quad (\text{I-37})$$

Où l'ensemble I correspond à tous les noeuds du maillage.

Les applications à la déchirure ductile restent en revanche restreintes car le traitement de la plasticité est difficile pour cette méthode. Cette difficulté est due à la nécessité d'utiliser une stratégie d'intégration spécifique afin de discrétiser correctement les champs

d'enrichissement. En général, celle-ci consiste à sous-découper les éléments lorsque la fissure les traverse, or ceci impose de projeter les champs. Dans le cas où il y a de la plasticité en pointe de fissure, cette étape de projection ne permet pas d'assurer la conservation de l'énergie associée aux variables dépendant de l'histoire du chargement et est rendue approximative en présence d'importants gradients de déformation. Une autre méthode, proposée par Benoit Prabel [Prabel2007] et Elguedj [Elguedj2006a], consiste à utiliser des éléments surintégrés introduits avant l'apparition de la plasticité et de la fissure. Cette stratégie entraîne de légères erreurs d'intégration mais a prouvé son efficacité. Dans le cas de la 3D, elle évite de plus de mettre en place des algorithmes de sous-découpage complexes et coûteux. Cependant dans les domaines de grandes déformations plastiques, pour un comportement incompressible, la surintégration peut conduire au verrouillage des éléments XFEM.

Un autre aspect important du traitement de la déchirure ductile est la présence de grandes déformations. Récemment de nombreux travaux ont porté sur l'extension de cette méthode aux grandes déformations élastiques [Legrain2004, Areias2005] et au contact avec grands glissements dans le plan [Nistor2009]. Mais aucun travail n'a étendu cette méthode à l'approche globale pour la rupture ductile.

3.1.6 Conclusion

Dans le cadre de la rupture fragile et lorsqu'un défaut préexiste, l'approche globale de la mécanique de la rupture est performante. En présence de plasticité étendue, son application nécessite la définition d'un cadre précis.

Ainsi, malgré ses propriétés attractives, l'intégrale J doit être utilisée avec prudence pour définir des critères d'amorçage et de propagation. En effet, ces derniers sont sensibles aux effets d'échelle et de géométrie. En toute rigueur, c'est seulement lorsque la plasticité est confinée que J est une mesure directe de l'intensité des champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure au cours de la propagation.

Pour palier à ce problème, l'amorçage est défini à partir de la taille de la zone d'émoussement. Ceci permet d'obtenir des valeurs de ténacité critique intrinsèques au matériau. A partir de cette définition, le critère d'amorçage J_i a été validé comme étant un critère matériau. Néanmoins sa détermination précise est complexe et coûteuse.

Pour caractériser la propagation, J a été modifiée par Ernst, afin de réduire les effets de taille et de géométrie à l'aide d'une intégrale prenant en compte l'ouverture plastique. Des approches à deux paramètres permettant de prendre en compte la triaxialité des contraintes sont couramment utilisées pour la rupture fragile, mais sont inadaptées au traitement de la déchirure ductile au regard des problèmes de transférabilité et d'extrapolation de la courbe J - Δa pour les grandes propagations de fissure. L'approche G_{fr} permet de modéliser la déchirure ductile correctement, tant que la réponse de la structure ne dépend pas de l'histoire du chargement (structures minces).

La modélisation de la propagation de fissure ne pose pas de problème majeur lorsque le trajet de fissure est connu à l'avance (méthode de relâchement des nœuds). Dans les autres cas, il est nécessaire de mettre en place des procédures complexes afin de limiter les erreurs dues au remaillage conforme à la fissure. La méthode des éléments finis étendue combinée à la stratégie d'intégration proposée dans [Prabel2007] semble avoir de bonnes propriétés pour

traiter ce type de problème. Cependant le traitement de grandes déformations plastiques n'a été étudié que dans le cas d'éléments d'interface et nécessite des développements complémentaires, de plus il faut être vigilant quant au verrouillage des éléments surintégrés qui peut fausser les résultats de la modélisation.

3.2 Modèles continus isotropes

Bien que le dommage soit anisotrope par nature, en particulier dans le cas de grandes déformations plastiques [Bruenig2003, Hausild2003], nous nous intéressons ici uniquement aux modèles continus isotropes. En effet, lorsque le dommage est défini à l'aide d'un tenseur comme dans [Chaboche1984, Abu2003], l'identification des paramètres associés à cette définition est complexe et le cadre thermodynamique difficile à adapter pour ce type de modèle. Ainsi, la dissipation engendrée peut parfois devenir négative contre les principes de la physique. Si ce dernier point est amélioré par une approche proposée dans [Bargellini2007], l'intérêt de ce type de modèle reste limité pour le calcul de la déchirure ductile par opposition à celle du formage.

3.2.1 Modèles basés sur la théorie de l'état local

La théorie de l'état local repose sur le postulat suivant : chaque point matériau peut être considéré comme un sous-système thermodynamique en équilibre. Ce sous-système étant caractérisé par des variables observables et des variables internes. La plupart des modèles suivants sont présentés dans le cadre des petites déformations. Cependant pour nos travaux, il est nécessaire d'utiliser une formulation adaptée pour les grandes transformations qui sera présentée dans le chapitre suivant.

3.2.1.1 Modèles élastoplastiques endommageables

Dans le cadre du fluage, Kachanov [Kachanov1958] introduisit le premier modèle isotrope reliant une variable d'endommagement scalaire à celle de plasticité. Ce modèle a été utilisé puis étendu par Lemaitre [Lemaitre2005] grâce aux concepts de contrainte effective et d'équivalence en déformation. La contrainte effective correspond à la contrainte vue par la part saine du matériau.

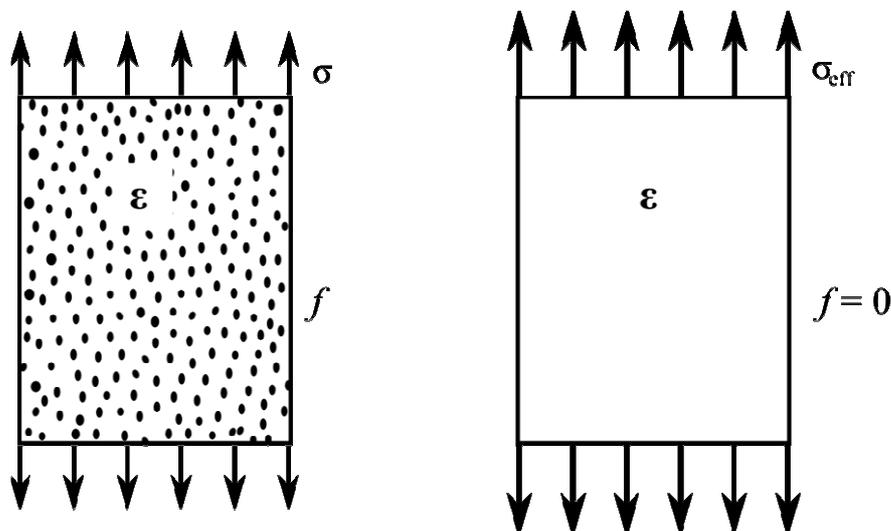


Figure I-10 - Définition de la contrainte effective

Si l'on considère un volume élémentaire en traction dont l'endommagement est isotrope, la contrainte effective $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{eff}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{eff}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1-D} \quad (\text{I-38})$$

Le principe d'équivalence en déformation a été proposé par Lemaitre. Selon lui, les potentiels de déformation d'un matériau endommagé peuvent être dérivés du même formalisme que pour un matériau non-endommagé, si l'on remplace la contrainte par la contrainte effective. C'est donc cette dernière qui pilote la plasticité.

Les modèles élastoplastiques endommageables sont basés sur le système des variables d'état $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^e, D, p)$ avec $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ les tenseurs de déformation totale et élastique, D la variable d'endommagement isotrope et p la variable d'écroutissage isotrope aussi appelée déformation plastique cumulée. Dans le cas où on se limite à ce système de variables d'état, le potentiel énergie libre massique est supposé s'écrire

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_p(p), \quad (\text{I-39})$$

avec $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ le tenseur de Hooke du matériau sain. ψ_p correspond à l'énergie stockée dans la microstructure par écroutissage qui n'est pas récupérable mécaniquement.

Le couplage entre plasticité et endommagement peut être introduit au niveau des lois d'états ou de la dissipation. Dans le cas du couplage d'état, on distingue principalement deux théories. Tout d'abord Cordebois et Sidoroff [Cordebois1979] ont introduit une variable d'état scalaire correspondant au cumul de dommage, notée β . Cette variable d'état joue pour l'endommagement D le même rôle que p pour la déformation plastique, ainsi l'expression de l'énergie libre massique devient :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_p(p) + \psi_\beta(\beta), \quad (\text{I-40})$$

Une autre approche consistant à coupler endommagement et écroutissage a été introduite par Saanouni [Saanouni1988] et par Ju [Ju1989].

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + (1-D)\psi_p(p), \quad (\text{I-41})$$

Dans ce cas, la force thermodynamique associée à l'endommagement contient deux termes et la contrainte s'annule naturellement pour $D=1$.

Deux méthodes permettent de coupler les dissipations de plasticité et d'endommagement. La première a été proposée par Lemaitre [Lemaitre1985], elle consiste à considérer la plasticité comme étant le seul moteur de la dissipation. Ainsi, l'écriture d'un seul potentiel de dissipation suffit, la règle de normalité ne fait intervenir qu'un unique multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_p + \dot{\Omega}_d, \quad \dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega_p(\underline{\underline{\sigma}}, Y, P)}{\partial P}, \quad \dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega_d(\underline{\underline{\sigma}}, Y, P)}{\partial Y} \quad (\text{I-42})$$

Où Ω_p est la fonction de charge, elle correspond au potentiel plastique ; Ω_d correspond au potentiel d'endommagement ; $\dot{\lambda}$ est obtenu à partir de la condition de cohérence :

$$\Omega_p = 0, \quad \dot{\Omega}_p = 0. \quad (\text{I-43})$$

On peut relier le multiplicateur plastique à la déformation plastique équivalente par l'intermédiaire de la condition de normalité :

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \quad (\text{I-44})$$

Le domaine d'élasticité est donné par la relation suivante :

$$\Omega_p(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{eff}}, p) \leq 0, \quad (\text{I-45})$$

Pour illustrer cette approche, on prend le cas où Ω_p est le potentiel plastique défini par von Mises et où le potentiel de dissipation lié à l'endommagement est défini par :

$$\Omega_d = \frac{S_0}{(g+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{b+1}, \quad \text{avec } g \text{ et } S_0 \text{ constantes matériau,} \quad (\text{I-46})$$

le tenseur de la vitesse de déformation plastique vaut :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^d}{\sigma_{\text{vM}}} \quad (\text{I-47})$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^d$ est le déviateur des contraintes et $\sigma_{\text{vM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\sigma}}^d}$ est la contrainte équivalente de von Mises. Et la vitesse d'endommagement s'écrit quant à elle :

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(\frac{Y}{S_0} \right)^b \quad (\text{I-48})$$

D'autres formes de potentiel peuvent être introduites, ainsi on peut par exemple tenir compte de l'influence de la triaxialité sur l'évolution de l'endommagement.

L'autre méthode de couplage des dissipations correspond à l'écriture d'un potentiel plastique et d'un potentiel d'endommagement auxquels sont appliqués les critères de manière indépendante. Ceci induit l'existence de deux multiplicateurs $\dot{\lambda}_p$ et $\dot{\lambda}_d$:

$$\Omega_p \leq 0, \quad \Omega_d \leq 0 \quad (\text{I-49})$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial \Omega_p(\underline{\underline{\sigma}}, Y, P)}{\partial P}, \quad \dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial \Omega_d(\underline{\underline{\sigma}}, Y, P)}{\partial Y} \quad (\text{I-50})$$

Chaboche [Chaboche1978] fut un des premiers à utiliser cette méthode qui a l'avantage de permettre l'écriture de lois indépendantes pour la plasticité et l'endommagement tout en conservant le couplage entre endommagement et plasticité à travers la contrainte effective.

3.2.1.2 Modèles de plasticité des matériaux poreux

Dans le cas d'un matériau ductile, les mécanismes de rupture entrant en jeu peuvent être décomposés en trois étapes (Figure I-11, Figure I-12) :

1. L'amorçage de cavités à partir de la décohéssion ou à partir de la rupture d'inclusions ou de particules de seconde phase ;
2. La croissance des cavités, contrôlée par la déformation plastique et la contrainte hydrostatique ;
3. La coalescence des cavités.

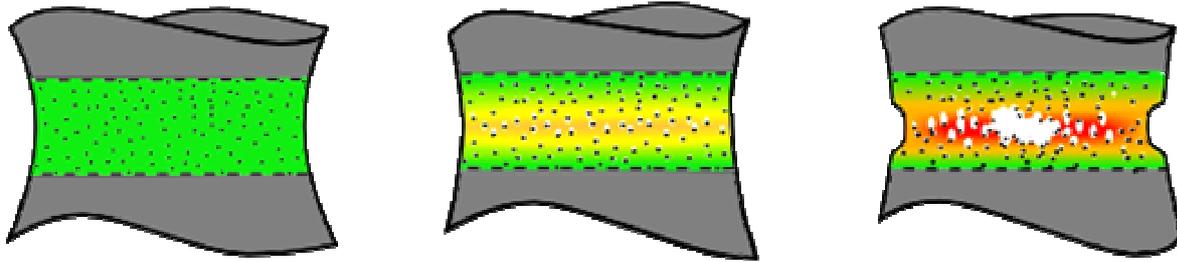


Figure I-11 - Initiation, croissance et coalescence des cavités dans un matériau initialement sain

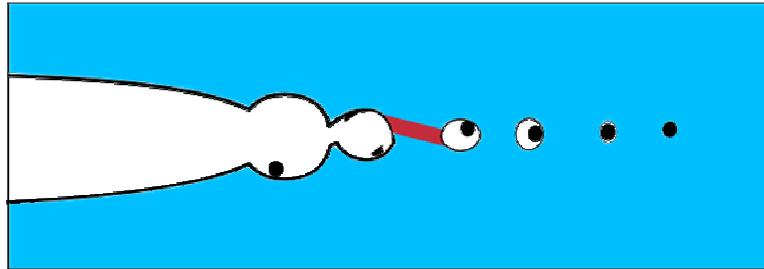


Figure I-12 - Propagation ductile d'une fissure sollicitée en mode I

Les modèles présentés dans le paragraphe précédent sont robustes, mais ne permettent pas de bien représenter la physique de l'endommagement ductile, c'est-à-dire l'initiation, la croissance et la coalescence des cavités, en prenant en compte les effets de la triaxialité des contraintes τ sur l'évolution de la plasticité:

$$\tau = \frac{\sigma_m}{\sigma_{vM}}, \quad (\text{I-51})$$

Cette dernière joue un rôle primordial sur la déformation atteinte à rupture, comme l'ont montré Hancock et Mackenzie [Hancock1976].

Dans un premier temps, des critères de rupture basés sur une valeur critique de la combinaison de la contrainte de von Mises et hydrostatique ont été mis en place par Argon *et al.* [Argon1976, Argon1975] dans le cadre de calculs élasto-plastiques. Ces modèles ont par exemple été utilisés par Beremin [Beremin1981] pour l'étude de la formation des cavités dans les aciers faiblement alliés.

D'autres approches ont ensuite été développées, considérant le problème de la rupture ductile comme un problème de plasticité des matériaux poreux. Ces derniers sont caractérisés par la présence de cavités qui en fonction du chargement appliqué peuvent croître. Le taux relatif de vide dans l'état relâché des contraintes définit la porosité :

$$f = \frac{V_{\text{total}} - V_{\text{matrice}}}{V_{\text{total}}} \Bigg|_{\substack{\text{contraintes nulles} \\ T_{\text{ref}}}}, \quad (\text{I-52})$$

V est un volume et T_{ref} la température de référence. La matrice est la matière saine entourant les cavités. Sous cette définition, on note qu'une déformation élastique volumique ne joue pas sur la valeur de la porosité.

De nombreux modèles mathématiques ont été proposés afin de décrire la croissance des cavités. La plupart sont basés sur le modèle de Rice et Tracey [Rice1969] considérant le cas d'une cavité sphérique dans un milieu infini constitué d'un matériau rigide plastique. Les

champs de contraintes et de déformations correspondant à une expansion isotrope de la cavité sont :

$$\ln \frac{R_m}{R_0} = \alpha \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) d\epsilon_{eq}^p, \quad (\text{I-53})$$

où R_0 et R_m sont respectivement le rayon moyen initial et courant. α est un paramètre dépendant du matériau. Cette relation a été modifiée par Mudry [Mudry1982] pour tenir compte de l'écrouissage en remplaçant σ_0 par σ_{eq} . Pour ces modèles, le début de la coalescence est défini à partir d'une valeur critique du rapport R_m / R_0 .

Par la suite, des modèles prenant en compte la fraction volumique de cavités f dans le potentiel plastique ont été proposés. Cette approche permet en effet de prendre en compte l'influence de la triaxialité sur la fonction de charge. On peut diviser ces modèles selon deux catégories suivant que la direction d'écoulement plastique est associée ou non à la surface charge.

La première loi associée a été développée par Gurson [Gurson1977] pour le cas de cavités sphériques dans un matériau parfaitement plastique. Il écrit le potentiel plastique de la manière suivante :

$$\Phi = \frac{\sigma_{vm}^2}{\sigma_{Rp}^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_{Rp}}\right) - (1 + f^2) = 0, \quad (\text{I-54})$$

où σ_{Rp} est la contrainte d'écoulement de la matrice. On remarque que l'on retrouve le potentiel de von Mises lorsque f est nulle.

Afin de prendre en compte la coalescence des cavités, Tvergaard et Needleman [Tvergaard1984] ont proposé l'ajout de plusieurs paramètres et l'utilisation d'une porosité modifiée représentant l'accélération de l'endommagement :

$$\Phi = \frac{\sigma_{vm}^2}{\sigma_{Rp}^2} + 2f^* q_1 \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_{Rp}} q_2\right) - (1 + q_1 f^{*2}) = 0, \quad (\text{I-55})$$

Où q_1 et q_2 sont des constantes dont les valeurs habituelles respectives sont 1,5 et 1.

Connu sous le nom de G-T-N, c'est le modèle local le plus répandu pour la modélisation de la rupture ductile, cependant le nombre important de paramètres rend laborieuse l'identification de ce modèle.

Le modèle de Gurson a aussi été étendu par Leblond *et al.* [Leblond1994a] et Gologanu [Gologanu1997] afin de prendre en compte un facteur de forme des cavités dans le potentiel de dissipation ainsi que les effets de chargements cycliques à triaxialité constante. Une version modifiée permettant de prendre en compte l'anisotropie dans la modélisation du formage a également été appliqué par Brunet et Morestin [Brunet2001] au calcul des courbes limites de formage.

Un autre modèle basé sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles [Prigogine1968] et respectant le cadre des matériaux standard généralisés a été proposé par Rousselier [Rousselier1987, Rousselier2001] :

$$\Phi = \frac{\sigma_{vm}}{\rho} - \frac{R(p)}{\rho_0} + \frac{Df\sigma_1}{\rho_0} \exp\left(\frac{\rho_0}{\sigma_y} \frac{\sigma_m}{\rho}\right) = 0, \quad (\text{I-56})$$

où ρ et ρ_0 sont respectivement la masse volumique actuelle et initiale, $R(p)$ est la loi d'écrouissage du matériau sain et σ_1 représente la résistance de la matrice à la coalescence,

cette valeur est généralement fixée à $(R_e + R_m)/3$. D est un paramètre dépendant du matériau, il vaut habituellement entre 1,5 et 2.

En supposant la matrice incompressible et en appliquant le principe de conservation de la masse, Rousselier obtient une relation entre le rapport des masses volumiques initiale et finale et la valeur de la porosité :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1-f}{1-f_0}. \quad (\text{I-57})$$

L'utilisation de cette relation permet de résoudre la relation d'écoulement pour la porosité :

$$\dot{f} = 3(1-f)\dot{\epsilon}_m^p \quad (\text{I-58})$$

Où $\dot{\epsilon}_m^p = Tr(\underline{\dot{\epsilon}}^p)/3$ est la vitesse de déformation plastique moyenne.

Dans ses travaux de thèse, Lorentz [Lorentz1999] a appliqué au modèle de Rousselier la formulation d'origine thermodynamique de Simo et Miehe [Simo1992] pour les grandes déformations, lui donnant ainsi une loi de comportement hyperélastique. Plus tard, en collaboration avec Besson et Cano, il a montré que le potentiel de dissipation de ce modèle n'est en réalité pas convexe par rapport aux variables liées à la porosité [Lorentz2008] comme l'impose la définition d'une loi respectant le cadre des matériaux standard généralisés. En définissant de manière explicite la porosité en fonction de la déformation volumique :

$$\text{Déformation volumique totale} = \frac{(1-f_0)}{(1-f)}, \quad (\text{I-59})$$

il réduit le nombre des variables internes indépendantes et les restreint à la déformation plastique et à la déformation plastique cumulée. Ainsi, sans changer la définition du potentiel de dissipation, le modèle vérifie les propriétés attractives des matériaux standard généralisés.

Chu et Needleman [Chu1980] ont proposé de redéfinir la relation d'évolution de la porosité afin de modéliser la nucléation des cavités contrôlée par la déformation plastique cumulée :

$$\dot{f} = 3(1-f)\dot{\epsilon}_m^p + A_n \dot{p} \quad (\text{I-60})$$

Mise en œuvre

Les deux classes de modèles continus présentés précédemment sont principalement utilisées dans des codes de calculs utilisant la méthode des éléments finis.

En revanche, si la méthode des éléments finis est très efficace pour modéliser le comportement durcissant et donc continu d'une structure en petites transformations, de nombreux problèmes numériques apparaissent pour la modélisation de la déchirure ductile basée sur la théorie de l'état local, dont les plus importants sont :

- Le verrouillage de certains modes de déformation des éléments,
- La présence d'éléments de rigidité nulle dans la structure,
- La dépendance au maillage de la réponse mécanique.

Ces problèmes étant principalement liés au maillage, des auteurs ont développé des méthodes sans maillage (EFGM (Element Free Galerkin Method [Belytschko1994, Lu1994], RKPM (Reproducing Kernel Particle Method [Liu1996])). La RKPM a été utilisée par Simonsen et Li [Simonsen2004] avec le modèle de Gurson en grandes déformations, mais des problèmes liés au comportement local adoucissant persistent.

Le verrouillage des éléments est lié à la condition d'incompressibilité plastique du comportement. En effet, dans les lois de comportement élasto-plastiques (endommageables ou non) les lois d'écoulement imposent que la déformation plastique volumique soit nulle afin de respecter la condition d'incompressibilité plastique. Pour de grandes déformations, cette condition devient difficile à respecter et l'élément est souvent incapable de représenter la réponse en déplacement attendue. Dans le cas de modèles pour lesquelles la déformation plastique volumique imposée est non nulle, le verrouillage est moins fréquent. Lorentz *et al.* [Lorentz2008] proposent malgré tout l'utilisation d'éléments mixtes (ajout de la déformation volumique aux inconnues sur laquelle la condition d'incompressibilité est directement appliquée par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange) permettant de supprimer le risque de verrouillage numérique. Néanmoins, l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange et de fonctions de forme de divers ordres rend l'implantation de cette formulation complexe et alourdit le calcul. Une autre approche, dite B-barre [Hughes1980], consiste à utiliser des schémas d'intégration sélectifs pour les composantes déviatoriques et sphériques de la déformation et permet également de réduire les problèmes de verrouillage.

La gestion des éléments cassés est une autre question majeure. La présence d'éléments à rigidité nulle dans un maillage éléments finis pose des problèmes numériques. En effet, ces éléments subissent des modes de déformations à énergie nulle qui gênent la convergence des calculs. Pour limiter ces problèmes, certains auteurs imposent un module élastique non nul aux points de Gauss rompus [Liu1994]. Néanmoins, le choix de la rigidité est difficile car celle-ci doit être suffisamment importante pour être efficace et malgré tout négligeable devant la rigidité des éléments sains environnants afin de ne pas fausser la solution du problème. Une autre méthode consiste à supprimer les éléments rompus, mais ceci entraîne une perte d'énergie qui entraîne des instabilités si la suppression a lieu lorsque l'élément n'est pas libre de contrainte.

La dépendance au maillage quant à elle se retrouve tant dans le choix du type d'éléments que dans celui de leur taille. Pour les modèles de type Rousselier ou GTN, l'utilisation d'éléments quadrangles à intégration réduite est conseillée. Ce choix est lié au calcul de la rigidité de l'élément. En effet, au cours du processus de déformation d'un élément, les points de Gauss cèdent les uns après les autres, entraînant une perte de rigidité. Cependant tant que tous les points de Gauss de l'élément ne sont pas rompus, l'élément ne l'est pas non plus. En conséquence, il est important de limiter le nombre de points de Gauss dans les éléments afin de ne pas les rigidifier de manière fictive. Il est également important de noter que les éléments à intégration réduite sont sujets à des instabilités telles les modes de Hourglass qu'il est parfois nécessaire de limiter. De plus, les éléments quadratiques à intégration réduite sont privilégiés car ils permettent de mieux prendre en compte les effets de grands déplacements en pointe de fissure, en particulier pour la modélisation de l'amorçage.

Un autre aspect de la dépendance au maillage est du à la théorie de l'état local. En effet, dans une structure, l'apparition d'une zone où le comportement s'adoucit permet l'existence de discontinuités dans le champ de déformation. Dans ce cas, si aucune longueur caractéristique du phénomène d'adoucissement [Stoelken1998, Geers1999] n'est introduite dans les équations du problème, les déformations ou l'endommagement tendent à localiser dans une bande d'épaisseur nulle et il y a perte d'ellipticité du problème. D'un point de vue numérique, ceci est lié à une dépendance au maillage de la taille de la bande de localisation plastique ou de la propagation de la fissure [Besson2003, Liu1994].

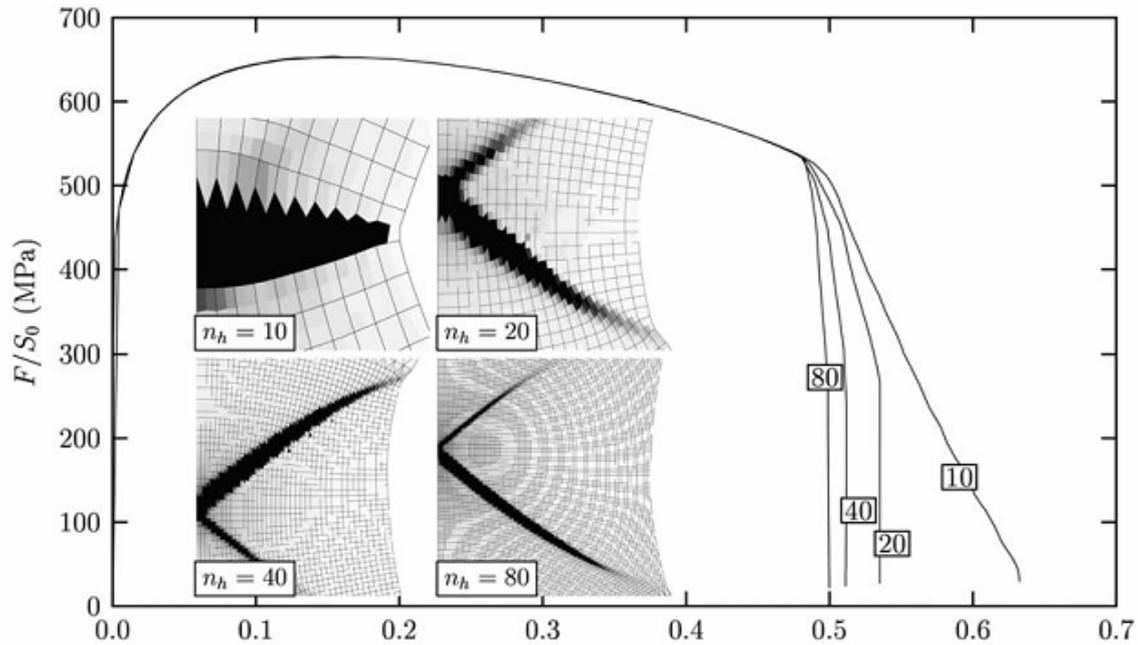


Figure I-13 - Effet de la taille de maille dans le cadre de l'approche locale de la rupture ductile [Besson2003]

Afin d'utiliser les modèles présentés précédemment dans le cadre de la méthode des éléments finis, il est donc nécessaire d'introduire une longueur caractéristique du processus d'adoucissement dans le problème. La manière la plus simple de le faire est de choisir ce paramètre comme taille de maille lors de la discrétisation de la structure étudiée. Un exemple montrant l'influence du choix de la taille de maille (Figure I-13) sur des essais de fissuration en déformations planes a été donné par Besson *et al.* [Besson2003]. Ils ont comparé les résultats donnés par les modèles de Rousselier et diverses formulations du modèle de Gurson permettant de modéliser la nucléation des cavités. Pour les deux modèles, ils trouvent des résultats similaires, en accord avec l'expérience. Cependant, si la taille de maille choisie n'est pas assez fine, la bifurcation de l'extension de fissure n'est pas captée, et plus elle est fine, plus la rupture est rapide car l'énergie à dissiper tend vers 0.

Conclusion

Les modèles basés sur l'état local permettent de s'affranchir des problèmes de transférabilité d'une géométrie à une autre et de calculer finement l'état en pointe de fissure. En revanche, ces lois de comportement entraînent la non convergence des calculs éléments finis liés à la présence d'éléments rompus dans le maillage. Des méthodes de remaillage ou d'élimination de nœuds ont été proposées pour supprimer ces éléments, mais ces dernières entraînent des pertes d'énergie qui faussent la solution. Un autre point faible de ces approches est lié à la dépendance au maillage. C'est pourquoi des méthodes d'homogénéisation permettant de s'affranchir d'une part importante de la dépendance au maillage ont été développées.

3.2.2 Modèles non-locaux

Les modèles régularisés ont été développés afin de supprimer la dépendance au maillage des modèles de plasticité et d'endommagement basés sur l'état local. Bien que des méthodes reposant sur la minimisation de l'énergie [Petryk2002] existent pour permettre de rendre la

réponse d'une structure indépendante du maillage, ces dernières ne résolvent pas les erreurs de modélisation de l'épaisseur de la bande de cisaillement en plasticité.

La régularisation d'un modèle est liée à l'introduction d'une ou plusieurs (si plusieurs processus jouent sur l'adoucissement du matériau) longueurs caractéristiques dans leur formulation. Elle repose sur le postulat selon lequel l'état en un point du matériau dépend de l'état d'une zone entourant ce point dont la taille est reliée à la longueur caractéristique du matériau. D'un point de vue physique, ceci est justifié par l'existence d'interactions entre les défauts à l'échelle de la microstructure dans le cas d'un matériau initialement sain. Dans le cas général la régularisation peut être vue comme l'introduction d'un volume élémentaire représentatif implicite translaté dans la structure.

On distingue principalement deux types de méthode de délocalisation : les méthodes intégrales dites non-locales et les méthodes différentielles dites à gradient.

3.2.2.1 Méthodes intégrales

Le principe des modèles non-locaux à intégrale repose sur la prise en compte d'un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel. Les premiers modèles à intégrale consistaient à écrire la contrainte comme une fonction de la moyenne des déformations sur le volume représentatif élémentaire du matériau [Bazant1985]. Une des formulations modernes des méthodes intégrales a été introduite par Bazant et Pijaudier-Cabot [Pijaudier-Cabot1987] et permet de limiter le caractère non-local de la formulation à la partie adoucissante du comportement. Par exemple, pour un modèle d'endommagement défini par une déformation équivalente ϵ_{eq} , on calcule la déformation équivalente non-locale de la manière suivante :

$$\epsilon_{eq}^{nl} = \frac{1}{V_r(x)} \int_V \omega(x-s) \epsilon_{eq}(s) dV \quad \text{avec : } V_r(x) = \int_V \omega(x-s) dV, \quad (\text{I-61})$$

où V est le volume de la structure et $\omega(x-s)$ (Figure I-14) est une fonction de pondération que l'on peut considérer comme un paramètre du modèle et qui permet d'introduire la longueur caractéristique l_c du matériau.

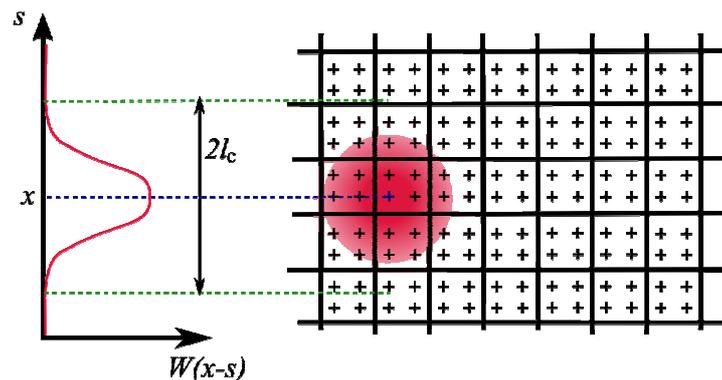


Figure I-14 - Fonction de pondération de la variable non locale

Bien qu'une approche simplifiée consistant à n'utiliser pour variable non-locale que celle qui pilote l'adoucissement [Bazant1988] ait été proposée, l'intégration numérique locale reste difficile car elle nécessite la connaissance de la grandeur à délocaliser en plusieurs points de Gauss plus ou moins proches de l'élément et du point de Gauss considéré.

Nilsson a par la suite proposé une définition thermodynamique pour les modèles de plasticité non-locaux dans le cadre des grandes déformations [Nilsson1998]. Pour les modèles de plasticité des métaux poreux, la variable non-locale est habituellement la fraction volumique de cavités (ou son taux, selon les formulations), comme par exemple dans les versions non-locales du modèle de Gurson proposées par Tvergaard et Needleman [Tvergaard1995] ou Leblond *et al.* [Leblond1994] pour une formulation élastoviscoplastique.

Illustrons la méthode non-locale sur le modèle défini par les équations (I-42) à (I-48). La variable non-locale choisie est l'endommagement D^{nl} qui vaut entre 0 et 1. Le tenseur des contraintes effectives s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1 - D^{nl}}; \quad \underline{\underline{\sigma}} = (1 - D^{nl}) \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e; \quad D^{nl} = \frac{1}{V_r(x)} \int_V \omega(x-s) D(s) dV, \quad (\text{I-62})$$

D'où l'écriture de la fonction de charge de von Mises

$$\phi_{vM} = \frac{\sigma_{vM}}{1 - D^{nl}} - R(p) \leq 0, \quad (\text{I-63})$$

dont on dérive les lois d'évolution des variables internes locales :

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D^{nl}}; \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D^{nl}} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^d}{\sigma_{vM}}, \quad (\text{I-64})$$

Comme le laissent supposer ces relations, l'implémentation de la régularisation intégrale consiste en l'ajout d'une étape de moyennation de la variable non locale avant la prédiction élastique et l'écoulement. Si la démarche est assez simple et donne une bonne convergence des équations d'équilibre, elle double le temps de calcul du comportement local. De plus, afin d'avoir une description suffisamment fine de l'état local pour obtenir une bonne valeur de la variable non-locale, la taille caractéristique du maillage éléments finis est divisée au moins par trois par rapport à celle d'un modèle local. Pour limiter les temps de calcul, certains auteurs [Jirasek2007, Rodriguez2000, Patzak2004] proposent l'utilisation de procédures de raffinement adaptatif du maillage, mais celles-ci sont déconseillées pour la rupture ductile. Mediavilla *et al.* [Mediavilla2006b] ont développé une méthode de remaillage pour la rupture ductile dans le cadre du formage, mais celle-ci reste limitée aux cas où la zone active en pointe de fissure est petite. De plus, cette méthode suppose de nombreuses étapes coûteuses et complexes afin de conserver la stabilité et la justesse du calcul.

Une autre difficulté de la méthode est la définition du volume de moyennation à proximité des discontinuités (bords du domaine non-local, fissure). S'il est possible d'adapter la formulation pour prendre en compte les bords du domaine, le traitement de la propagation de fissure montre que les modèles non-locaux à formulation intégrale ne sont pas assez locaux et entraîne la diffusion de l'endommagement en arrière de la pointe de fissure. Pour résoudre ce problème, Geers *et al.* [Geers1998] proposent une formulation à gradient dont l'effet régularisant est modulé suivant la valeur de déformation dans l'élément. De leur côté Simone *et al.* [Simone2003] introduisent une vraie fissure là où le dommage a dépassé une valeur critique à l'aide de la méthode des éléments finis enrichis.

3.2.2.2 Modèles à Gradient

On peut classer les modèles à gradient selon deux types de formulation, le premier est dit explicite, le second implicite. Les approches explicites sont basées sur l'utilisation directe des

termes d'ordres supérieurs dans les lois constitutives. Les approches implicites considèrent quant à elles une approximation différentielle de la variable non-locale. Quelle soit implicite ou explicite, ce type de régularisation est plus naturel à implémenter dans les calculs éléments finis que l'approche intégrale.

◇ **Formulations explicites**

Cette formulation [Aifantis1984] suppose que l'évolution d'une variable interne dans une structure dépend de sa valeur ainsi que de celle de son premier, second jusqu'à n-ième gradient. C'est pourquoi, les modèles qui s'appuient sur cette hypothèse sont aussi appelés modèles continus d'ordre supérieur.

La variable non-locale est approximée par un développement de Taylor :

$$g^{nl}(x) = g(x) + c_1 \nabla g(x) + c_2 \nabla^2 g(x) + \dots, \quad (\text{I-65})$$

où les c_i ont la dimension d'une aire et sont fonction de la longueur caractéristique. Dans le cas d'une variable non-locale isotrope, seuls les termes pairs apparaissent. La variante la plus utilisée de cette méthode est dite à second gradient pour laquelle seule c_2 est non nul :

$$g^{nl}(x) = g(x) + c_2 \nabla^2 g(x) \quad (\text{I-66})$$

Mühlhaus et Aifantis [Muhlhaus1991] et de Borst et Mühlhaus [Borst1992] utilisèrent le Laplacien de la déformation plastique cumulée dans la fonction de charge :

$$\sigma_{\text{seuil}}(p) = \sigma_0 - \sigma_{\text{vM}}(p + l_c^2 \Delta p), \quad (\text{I-67})$$

avec σ_0 la limite élastique et Δ l'opérateur Laplacien.

La régularisation à travers la condition de cohérence écrite à l'aide du gradient de déformation plastique cumulée n'est active par définition que dans les zones de plasticité. Or la définition de ces zones dépend de la solution de l'écoulement et varie au cours de la résolution, entraînant des difficultés dans la résolution numérique du problème. Afin de résoudre ces problèmes dans le cadre de la plasticité, Pamin [Pamin1994] et Meftah *et al.* [Meftah1998] ont défini la variable non-locale comme une équation aux dérivées partielles supplémentaires définie sur toute la structure. Pamin [Pamin1994] conseille l'utilisation d'éléments finis mixtes (interpolation quadratique du champ de déplacement, interpolation hermitienne (introduction de termes correctifs) du champ de multiplicateurs plastiques) pour implémenter ces formulations.

Si ces approches permettent de résoudre le problème de dépendance au maillage de la solution, la mise en place dans une méthode éléments finis est complexe et l'ajout des équations sur la condition de cohérence dans le système de résolution rend la matrice de rigidité non-symétrique et détériore l'efficacité des algorithmes de résolution.

◇ **Formulations implicites**

Les formulations implicites [Peerlings1996] définissent la variable non-locale comme la solution implicite de l'équation suivante :

$$g^{nl}(x) - c_1 \nabla g^{nl}(x) - c_2 \nabla^2 g^{nl}(x) + \dots = g(x) \quad (\text{I-68})$$

On note que ces modèles à gradient peuvent être retrouvés à partir des théories non-locales en introduisant un développement de Taylor dans les intégrales. On obtient alors une équation

aux dérivées partielles de type Helmholtz dont la résolution, couplée à celle de l'équilibre, donne la variable non-locale.

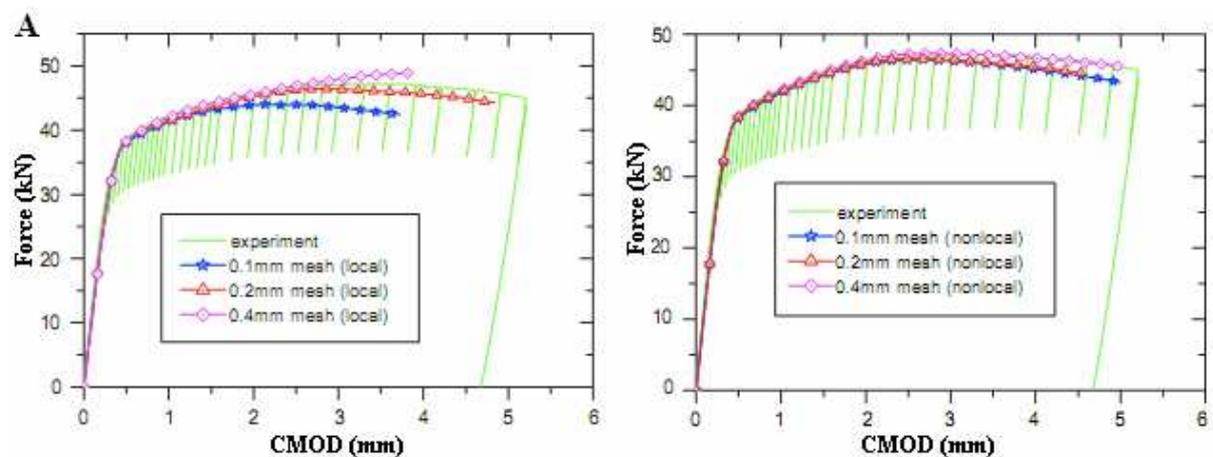
Pour le cas élastoplastique [Engelen2003], cette approche a l'avantage d'utiliser une vraie variable non-locale et ainsi de permettre les interactions entre zones plastiques et élastiques de la structure étudiée.

Plusieurs auteurs ont utilisé des formulations basées sur des considérations thermodynamiques, en particulier Liebe *et al.* pour le cas élastoplastique en petites perturbations [Liebe2001], puis en grandes déformations [Liebe2003]. Reusch *et al.* [Reusch2003] ont replacé le modèle de Gurson dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles en lui appliquant une formulation non-locale hyperélastique.

Une version régularisée du modèle de Gologanu pour laquelle le taux de déformation plastique cumulée et le taux de porosité sont les variables non-locales a été proposée par Brunet *et al* [Brunet2005].

Samal *et al.* ont appliqué une formulation de second gradient implicite au modèle de Rousselier [Samal2008] puis au modèle de Gurson [Samal2009]. Dans les deux cas la variable non-locale est la porosité f . La comparaison entre les résultats de la version non-locale proposée de Rousselier avec un essai de flexion sur éprouvette SE (Single Edge) et la version locale, montre que l'indépendance au maillage est acquise si ce dernier est suffisamment fin (Figure I-15).

Lorentz *et al.* ont donné une formulation à second gradient implicite du modèle de Rousselier corrigé [Lorentz2008] permettant de conserver la symétrie de la matrice de raideur en dualisant les équations du problème par rapport à la variable non-locale avant discrétisation. Ils l'ont appliqué à une éprouvette AE4 à l'aide d'éléments mixtes à trois inconnues (déplacement, pression, gonflement), l'introduction de la pression et du gonflement permet d'assurer la non-apparition de verrouillage des éléments. Par la suite Bargellini *et al.* [Bargellini2009] ont explicité une généralisation de ce traitement pour tout type de modèle d'endommagement ductile.



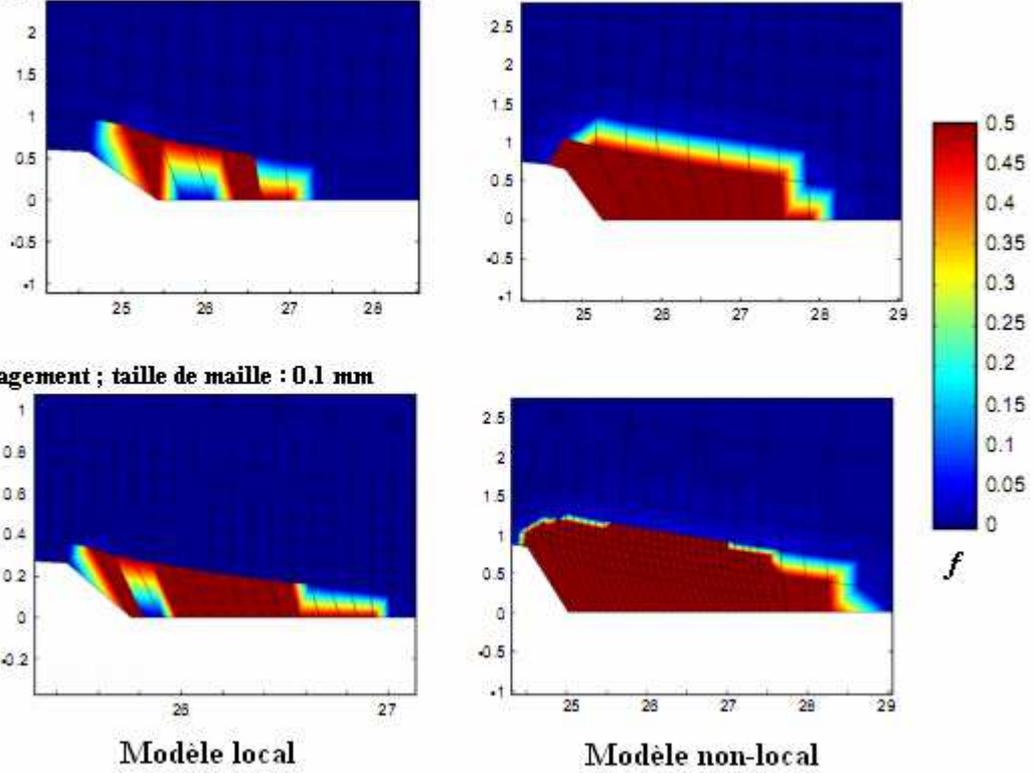
B : Endommagement ; taille de maille : 0.2 mm


Figure I-15 - A : Réponse à la flexion d'une éprouvette SE pour plusieurs tailles de maille, B et C : Profils d'endommagement, [Samal2008]

Afin d'expliciter l'implémentation de la méthode à second gradient implicite, dans le cadre d'un calcul éléments finis, on l'applique au modèle illustrant la méthode non-locale. Les équations constitutives sont conservées, mais cette fois, la variable régularisée est définie par :

$$\begin{aligned} D^{nl}(x) - c_2 \nabla^2 D^{nl}(x) &= D(x) \text{ dans le domaine ;} \\ \nabla D^{nl}(x) \cdot \underline{n} &= 0 \text{ à la frontière du domaine.} \end{aligned} \quad (\text{I-69})$$

Où \underline{n} est la normale unitaire à la frontière. La variable non-locale solution de l'équation précédente est calculée aux nœuds puis interpolée aux points de Gauss à l'aide des fonctions de forme classiques. Le système global donnant la prédiction élastique et le calcul de la variable non-local s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uD} \\ \mathbf{K}_{Du} & \mathbf{K}_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{D}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_D \end{Bmatrix} \quad (\text{I-70})$$

Où \mathbf{K}_{ij} sont les matrices de raideurs liées à la résolution des problèmes linéarisés, et \mathbf{R}_i sont les résidus associés. La matrice de raideur globale ainsi définie étant non-symétrique, certains auteurs préfèrent découpler le problème en imposant $\mathbf{K}_{uD} = \mathbf{K}_{Du} = \mathbf{0}$ (couplage faible).

Les approches à gradient implicite sont actuellement les plus populaires car elles permettent la résolution simultanée du problème global et du problème non-locale. Cependant, dans la plupart des cas, elles nécessitent l'ajout de degrés de liberté supplémentaires pour le calcul de la variable non-locale dans un maillage dont la finesse est déjà coûteuse. Afin de limiter le coût du calcul du à la finesse nécessaire de la maille pour résoudre correctement le problème non-locale Feld-Payet *et al* [Feld2010] proposent d'utiliser une technique de remaillage adaptatif basée sur une estimation locale de l'erreur et résolvent les problèmes d'instabilité en ajoutant une viscosité dans la loi de comportement.

3.2.2.3 Autres types de régularisation

Des méthodes simples de régularisation comme la théorie de la bande de fissuration (crack band model) consistent à ajuster la partie adoucissante du comportement en fonction de la taille des éléments de façon à assurer l'objectivité de la solution par rapport au maillage choisi. Que ce soient dans les travaux de Pietruszczak et Mróz [Pietruszczak1981] ou ceux de Bazant et Oh [Bazant1983], une longueur caractéristique est introduite dans les éléments afin de régulariser les équations du modèle continu.

D'autres types de régularisation sont basés sur l'introduction d'une viscosité ou d'un effet retard [Ladeveze1992, Suffis2003] dans la loi de comportement. Ceci est justifié par les propriétés dynamiques du phénomène de localisation. Si ces modèles semblent résoudre le problème de dépendance au maillage pour les modèles élasto-plastiques [Needleman1988] et élastiques endommageables [Dube1996], cette méthode de régularisation n'a pas été appliquée à la rupture ductile. De plus, le choix du paramètre de viscosité est difficile et ne semble pas être un paramètre matériau. Un autre facteur limitant de ce type d'approche est la définition d'un pas de temps caractéristique qui impose de limiter l'amplitude des pas de calcul.

3.2.2.4 Conclusion

Les différentes méthodes de régularisation présentées dans ce chapitre permettent de conserver un problème bien posé tout au long du processus de rupture. Malheureusement, elles supposent des temps de calculs très longs qui sont dus :

- à la nécessité d'utiliser un maillage très fin (pour pouvoir moyenniser le comportement dans la zone définie par la longueur caractéristique) dans le cas des formulations intégrales ;
- à la résolution d'une étape supplémentaire par rapport aux modèles continus standard et à l'introduction d'inconnues supplémentaires pour résoudre l'équation de diffusion donnant la variable non-locale dans le cas des formulations à gradient implicite.

Dans le cas des modèles à gradient, la non-symétrie des matrices à inverser est une autre difficulté. De plus, en comparaison avec un calcul local, où des problèmes de convergence apparaissent à cause de la présence d'éléments rompus dans le maillage (ou à son traitement), la vitesse de convergence du calcul est encore dégradée par la multiplication des degrés de liberté.

Les moyens de calcul actuels autorisent l'implémentation de modèles non-locaux dans les codes éléments finis pour le calcul de structures de taille réduite. En revanche, le coût numérique qu'ils supposent, combiné aux problèmes de convergence les rendent difficilement applicables aux calculs de problèmes industriels.

3.3 Modèles de zones cohésives

Les modèles de zone cohésive permettent une représentation simplifiée de la zone active en pointe de fissure adaptée à la déchirure ductile. A l'aide de cet outil on peut modéliser le comportement d'une interface aussi bien en traction pure, qu'en cisaillement ou en mode mixte en insérant des lois de couplage entre les directions de sollicitations. Pour la

modélisation de la déchirure ductile, le processus de croissance des cavités étant principalement piloté par les contraintes principales, la modélisation du comportement en traction est suffisante, c'est pourquoi nous centrerons notre étude sur ce type de modèle.

3.3.1 Définition

On définit une zone cohésive sur la surface Γ_{zc} , au fond d'une surface de discontinuité Γ_c traversant un domaine Ω . Γ_{zc} est orientée selon sa normale \underline{n} définie sur la médiane des lèvres de la discontinuité. La lèvre supérieure de la zone cohésive est notée Γ_{zc}^+ et la lèvre inférieure Γ_{zc}^- .

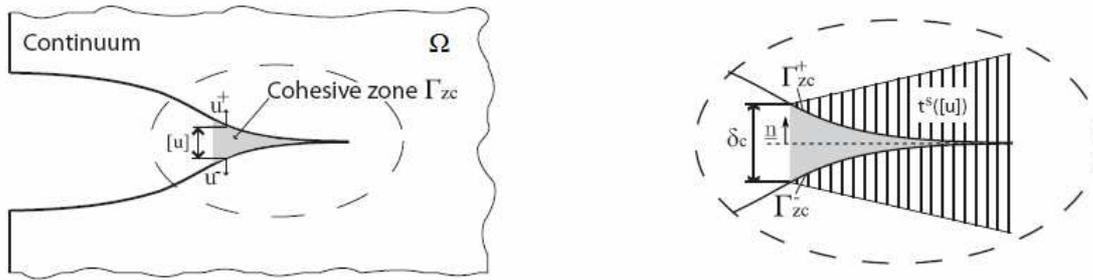


Figure I-16 - Description de la zone cohésive

Le comportement est défini par la relation entre saut de déplacement et contrainte. Le saut de déplacement correspond à l'ouverture entre les lèvres, il est défini à partir de \underline{u}^+ et \underline{u}^- les champs de déplacement sur la lèvre supérieure et inférieure :

$$[\underline{u}](\underline{x}) = \underline{u}^+ - \underline{u}^-, \quad \text{sur } \Gamma_{zc} \quad (\text{I-71})$$

On définit le vecteur contrainte \underline{t} sur Γ_{zc} , tel qu'il vérifie l'équilibre entre la discontinuité et le solide :

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}}^+ \underline{n}^+ = -\underline{\underline{\sigma}}^- \underline{n}^-, \quad \text{sur } \Gamma_{zc} \quad (\text{I-72})$$

La rupture est atteinte en un point de la zone cohésive lorsqu'en ce point, l'ouverture est supérieure ou égale à la valeur critique δ_c . Cette valeur critique peut être rapprochée de la valeur du CTOD pendant la propagation.

A partir de ces définitions, on peut écrire l'expression de l'énergie de rupture G_{FR} (au sens de Turner) ou Γ_0 pour un modèle cohésif :

$$\Gamma_0 = \int_0^{\delta_c} \underline{t}([\underline{u}]).d[\underline{u}] \quad (\text{I-73})$$

Cette énergie peut être identifiée au G_{FR} de Turner (équation I-31, I.3.1.4, p.16 [Turner1990, Dhar2008]). Dans ses travaux de master, Fabien Cazes [Cazes2007] décrit la mécanique linéaire de la rupture (LEFM) comme un cas limite de modèle cohésif. Il remarque que si on fait tendre l'ouverture critique δ_c vers 0 en gardant constante la valeur de l'énergie cohésive $\Gamma_0 \equiv G_c$. La valeur de la contrainte d'initiation de la zone cohésive tend alors vers l'infini (singularité prédite par la LEFM [Irwin1957]) et on obtient une courbe de traction-séparation ayant la forme d'un Dirac. Ainsi, la taille de la zone active tend vers 0 et en 3D, c'est une ligne qui correspond au front de fissure. Dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile ou quasi-fragile, quand la taille de la fracture process zone est négligeable devant la taille de la

fissure, le paramètre $\Gamma_0 \equiv G_c$ est donc prépondérant pour caractériser la propagation. En revanche, si la taille de la zone active n'est pas négligeable devant les dimensions de la fissure, c'est la valeur de la traction maximale T_0 (Figure I-17) ainsi que l'adoucissement qui s'ensuit, qui joue un rôle prépondérant dans le processus de rupture [Elices2002]. Dans ce cas, la LEFM n'est plus adaptée.

A partir de ces considérations et en combinant l'approche de Turner avec les modèles cohésifs, N. Tardif [Tardif2009, Tardif2010] montre que dans le cadre de la rupture ductile, l'influence de la contrainte cohésive maximale reste importante pendant toute la propagation.

3.3.2 Historique

Les modèles cohésifs ont d'abord été utilisés pour étendre la compréhension des processus de rupture. Ainsi ils ont été introduits par Dugdale (description de la plasticité à proximité de la pointe de fissure (plasticité parfaite)) [Dugdale1960] et par Barenblatt (loi Traction vs. Ouverture pour la décohésion des réseaux atomiques) [Barenblatt1962] afin de caractériser les champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure dans les solides élastiques linéaires. Hillerborg [Hillerborg1976] fut le premier à proposer plusieurs formes de loi cohésive et à en étudier l'influence sur les résultats de calcul éléments finis.

Si on sort du cadre de la modélisation à l'échelle atomique pour se placer dans celui de la localisation des déformations et de l'endommagement menant à l'initiation de fissure, plusieurs auteurs ont montré que les lois précédentes ne sont pas adaptées. En effet le processus menant à rupture est lié à des phénomènes dissipatifs et donc irréversibles, or les modèles présentés considèrent que le chemin de décharge suit le chemin de charge.

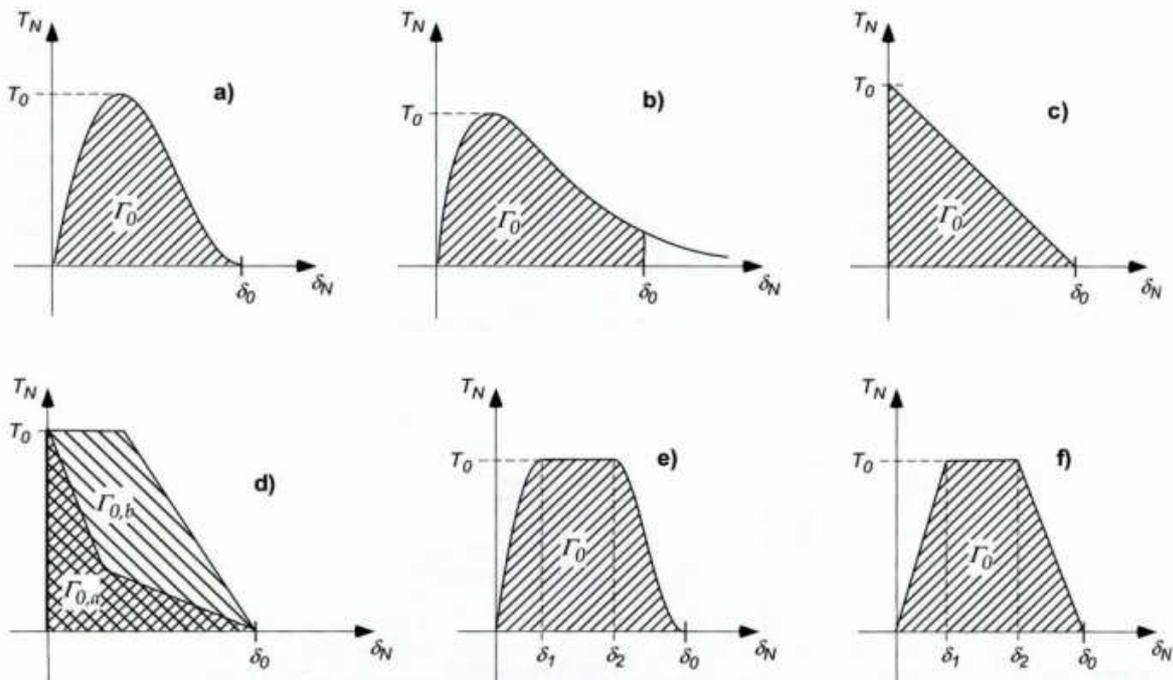


Figure I-17 - Formes usuelles des lois de traction-séparation [Schwalbe2009] :
 a) [Needleman1987], b) [Needleman1990], c) [Hillerborg1976],
 d) [Bazant2002], e) [Scheider2003], f) [Tvergaard1992]

Un deuxième problème se pose quant à la propriété durcissante de la pente initiale de ces lois. D'un point de vue théorique [Elices2002], cela correspondrait à l'apparition de micro zones

cohésives en tous points du solide où la contrainte dépasse la contrainte pour laquelle la zone cohésive est sensée s'ouvrir. D'un point de vue numérique, dans le cas d'un calcul élément fini standard, ce défaut n'est pas réellement un problème car les zones cohésives sont introduites par l'intermédiaire d'éléments auxquels on ne peut affecter une rigidité infinie. Les formes de lois les plus fréquemment utilisées sont présentées sur la figure suivante. Les lois a), b), e) et f) ont été utilisées dans des calculs de rupture ductile, les lois c) et d) sont adaptées à la modélisation de la rupture fragile et quasi-fragile.

Dans le cadre de la rupture ductile, Needleman [Needleman1987] se sert d'un modèle cohésif afin d'étudier le processus de nucléation des cavités par détachement des inclusions. Ces modèles ont aussi été appliqués à l'étude de la ténacité des matériaux par de nombreux auteurs : Ortiz [Ortiz1988], Budiansky [Budiansky1988] et Tvergaard et Hutchinson [Tvergaard1992]. Ces derniers ont exploré en particulier le cas où la rupture est due à la croissance et à la coalescence des cavités et ont étudié le rôle de la plasticité sur la raideur de l'interface. Ils ont utilisé ce type de modèle pour étudier l'effet de la contrainte de cisaillement sur la rupture ductile en mode I [Tvergaard1994]. Rapidement les modèles de zones cohésives ont été appliqués à l'étude des interfaces [Needleman1988].

D'un point de vue numérique, l'avantage premier qui a poussé à l'utilisation des modèles de zone cohésive est que leur utilisation permet d'éliminer la dépendance à la taille de maille observée avec les modèles mécaniques continus. En effet, l'aire sous la courbe de la loi de traction-séparation correspond au travail de séparation des lèvres de la fissure par unité d'aire. De plus la prédiction de la propagation de fissure modélisée à l'aide de zones cohésives ne demande pas de calcul de critère au cours du calcul, elle découle uniquement de la réponse de la zone cohésive au chargement et donc de la loi de comportement qu'on lui a attribuée.

La loi de comportement d'une zone cohésive est considérée comme une propriété matériau. Ses trois principales caractéristiques sont la résistance à la traction T_0 , le saut de déplacement critique δ_c pour lequel il y a rupture et l'énergie de rupture Γ_0 qui correspond à l'énergie nécessaire pour créer et rompre une unité de surface de zone cohésive et qui est égale à l'aire sous la courbe de la loi cohésive.

En écrivant une relation entre ces paramètres et le module de Young du solide étudié, on peut caractériser la ductilité du matériau sous la forme d'une longueur caractéristique [Hillerborg1976] :

$$l_c = \frac{E \Gamma_0}{T_0^2} \quad (\text{I-74})$$

Plus l_c est grande plus le matériau est ductile.

Pour la modélisation de la rupture ductile, Siegmund et Brocks [Siegmund1999] montrent que les paramètres du modèle cohésif dépendent fortement de l'état de triaxialité dans le solide environnant. Dans [Siegmund2000], ils proposent donc de faire varier la résistance à la traction et l'énergie de séparation des éléments cohésifs en fonction de la valeur du taux de triaxialité aux points d'intégration du bulk les plus proches, ils obtiennent ainsi des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle continu G-T-N. Une approche semblable a été proposée par Tvergaard [Tvergaard2001] où l'état de triaxialité dans la bande de localisation est obtenu par l'intermédiaire d'un élément d'interface combinant la réponse du solide à celle de l'interface.

Cornec *et al.* [Cornec2003] ont étudié l'application des modèles cohésifs pour la rupture ductile dans le cadre des éléments finis. Ils donnent une écriture analytique de la loi de comportement de la zone cohésive en fonction des paramètres définis sur la figure ci-dessous.

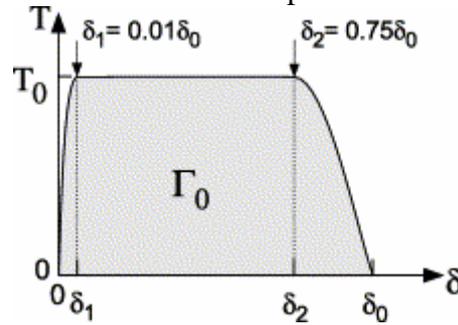


Figure I-18 - Définition des paramètres pour la construction d'une loi cohésive [Cornec2003]

Dans un premier temps il a été considéré que le comportement d'une zone cohésive était entièrement défini par son taux de restitution d'énergie ainsi que sa contrainte maximale. Sous-entendant que la forme n'a pas d'influence sur les propriétés de rupture de la zone cohésive. Cette hypothèse a été remise en cause par les travaux de Nicolas Tardif [Tardif2009] qui ont montré l'influence de la forme de la loi de traction-séparation sur la réponse de la structure étudiée.

3.3.3 Cadre thermodynamique

Nous avons vu dans la première partie de cette bibliographie qu'il est intéressant de placer les modèles de comportement dans le cadre des principes de la thermodynamique. Ainsi, à partir de la définition de la pointe de fissure comme un système thermodynamique de dimension finie, Gurtin [Gurtin1979] donne un cadre thermodynamique rigoureux dans lequel on peut étudier les modèles de zone cohésive. Il en déduit les expressions locales des Principes de la Thermodynamique pour ces modèles :

$$\frac{de_{zc}}{dt} = t \frac{d[u]}{dt} + [q]n \quad (\text{I-75})$$

$$\frac{ds_{zc}}{dt} = \frac{[q]n}{T} + \frac{d(s_i)_{zc}}{dt} \quad (\text{I-76})$$

Où t et T sont respectivement le temps et la température ; e_{zc} est la densité surfacique d'énergie interne, s_{zc} et $(s_i)_{zc}$ sont respectivement les densités surfaciques d'entropie et d'entropie interne de la zone cohésive et $[q]$ est le saut de flux de chaleur :

$$[q] = (q^+ - q^-)n, \quad \text{sur } \Gamma_{zc} \quad (\text{I-77})$$

A partir de ces expressions, on peut écrire la répartition entre énergie libre et énergie dissipée de la zone cohésive. Ainsi la dissipation de la zone cohésive est :

$$d\phi_{zc} = T d(s_i)_{zc} \quad (\text{I-78})$$

L'énergie libre est définie de la manière suivante :

$$\psi_{zc} = e_{zc} - Ts_{zc} \quad (\text{I-79})$$

Finalement, en utilisant cette définition de l'énergie libre et en combinant les expressions des Premier (I-75) et Second (I-76) Principes de la Thermodynamique, on obtient la relation suivante entre les variations infinitésimales d'énergie libre et de dissipation de la zone cohésive :

$$d\varphi_{zc} = \underline{t} d[\underline{u}] - d\psi_{zc} - s_{zc} dT \quad (\text{I-80})$$

A partir de cette description thermodynamique du comportement de la zone cohésive, Costanzo et Allen [Costanzo1995] proposent un cadre général pour la construction des équations constitutives d'une zone cohésive.

Ce cadre permet au modèle cohésif construit de répondre à deux exigences imposées par les auteurs :

1. La définition d'un intervalle de contrainte associé à une valeur de saut de déplacement nulle :

$$[\underline{u}] = 0 \Rightarrow t \in [0, t_0] ; \quad (\text{I-81})$$

2. La possibilité de bifurcation correspondant à la rupture de la zone cohésive et reliée à un comportement irréversible, c'est-à-dire avec dépendance à l'histoire du chargement.

Dans leur approche, Costanzo et Allen adoptent la décomposition des contraintes suivante :

$$\underline{t} = \underline{t}^{\text{ir}} + \underline{t}^e ; \quad (\text{I-82})$$

Où \underline{t}^e est la contrainte cohésive conservative d'un point de vue mécanique et $\underline{t}^{\text{ir}}$ sa part irréversible. De plus, ils introduisent le vecteur de variables internes $\underline{\mu}$ permettant de décrire l'état de la microstructure dans la zone cohésive. Ainsi, l'énergie libre dans la zone cohésive s'écrit :

$$\psi_{zc}([\underline{u}], T, \underline{\mu}) = \psi_0(T, \underline{\mu}) + \int_0^1 [\underline{u}] \cdot \underline{t}^e(\alpha[\underline{u}]; T, \underline{\mu}) d\alpha \quad (\text{I-83})$$

Avec $\psi_0(T, \underline{\mu})$ nul, pour simplifier l'approche.

Les relations d'état sont obtenues à partir des hypothèses des matériaux standard généralisés :

$$\underline{t}^e = \frac{\partial \psi_{zc}}{\partial [\underline{u}]} ; s_{zc} = -\frac{\partial \psi_{zc}}{\partial T} ; \underline{\kappa} = \frac{\partial \psi_{zc}}{\partial \underline{\mu}} \quad (\text{I-84})$$

Où $\underline{\kappa}$ est le vecteur des forces thermodynamiques associées à $\underline{\mu}$.

L'énergie dissipée intrinsèque s'écrit quant à elle :

$$D_{zc} = \underline{t}^{\text{ir}} \cdot [\dot{\underline{u}}] + \underline{\kappa} \cdot \dot{\underline{\mu}} \quad (\text{I-85})$$

A partir de ces définitions et en appliquant une analyse thermodynamique globale [Germain1983] du solide contenant la zone cohésive, les auteurs montrent que $\underline{t}^{\text{ir}}$ et $[\underline{u}]$ sont conjugués par rapport à l'énergie libre globale. De plus dans le cadre des matériaux standard généralisés, ils supposent l'existence d'un potentiel de dissipation globale duquel peuvent être dérivés les équations d'évolution de la zone cohésive.

3.3.4 Mise en œuvre dans un calcul éléments finis

3.3.4.1 Méthode des éléments cohésifs

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les modèles de zone cohésive sont généralement introduits sous la forme d'éléments d'interface comparables aux éléments de contact. Ils sont de dimension $i-1$ par rapport à la dimension i de la structure étudiée [Roy2001, Scheider2006].

Pour éviter les opérations de projection de champs, ces éléments doivent être introduits dès le début du calcul. Ceci nécessite, soit :

1. la connaissance du trajet de la fissure avant résolution du problème,
2. l'introduction d'éléments cohésifs entre tous les éléments du maillage [Scheider2003].

Dans le premier cas, cette approche est très efficace. Mais le type de problème traité est limité et il n'est pas possible de modéliser l'initiation d'une fissure. Le deuxième cas permet de traiter ce type de problème, mais l'introduction d'éléments cohésifs à travers tout le maillage entraîne une perte de rigidité fictive. En effet, la résolution par éléments finis interdit l'utilisation de rigidité infinie dans les éléments cohésifs. Ainsi, afin d'exploiter au mieux le potentiel de ce type d'éléments pour la modélisation de la fissuration, il est nécessaire d'utiliser des lois à seuil. En effet ce type de loi de comportement purement dissipative permet d'assurer la cohésion parfaite par l'intermédiaire de multiplicateur de Lagrange par exemple jusqu'à vérification du seuil.

Dans tous les cas, l'utilisation d'éléments cohésifs rend la direction de la propagation dépendante du maillage. Afin de limiter ces effets, les auteurs conseillent de modéliser la structure à l'aide d'éléments triangles ou tétraédriques selon la dimension du problème. Une autre solution, qui est cependant assez coûteuse consiste à utiliser une procédure de maillage adaptatif [Bittencourt1992].

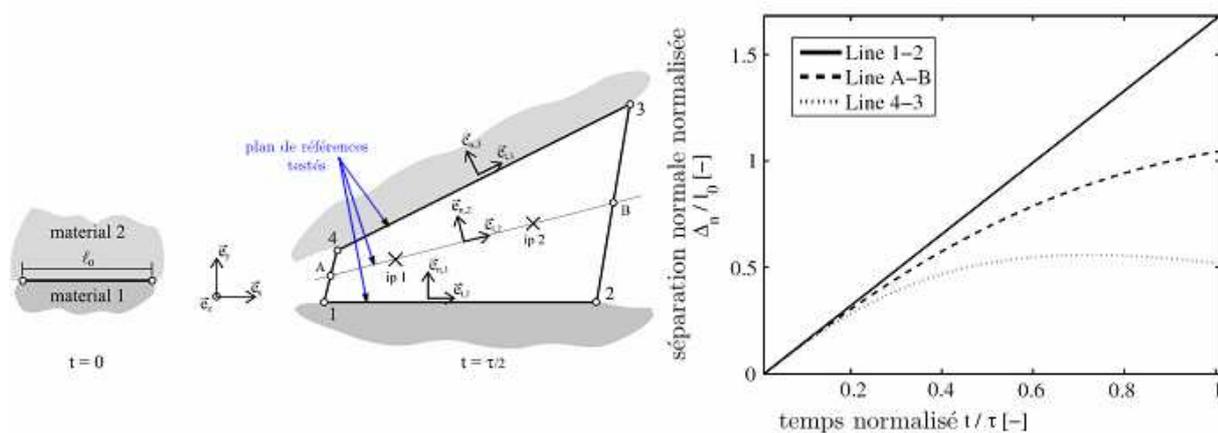


Figure I-19 - Influence du choix de la surface de référence pour le calcul des composantes de saut : Calcul de l'ouverture normale en fonction du temps au niveau de ip1 [Bosch2008]

Dans le cadre de la rupture ductile, les déformations en pointe de fissure sont importantes, Chen *et al.* [Chen2005], Roychowdhury *et al.* [Roychowdhury2002] et Ortiz et Pandolfi [Ortiz1999] montrent qu'il est nécessaire de prendre en compte les effets de grands déplacements pour obtenir une propagation de fissure réaliste. Dans ce cas, afin de calculer le comportement dans l'élément cohésif de manière adéquate, il faut être vigilant quant à la définition de la surface d'intégration du comportement [Bosch2008] (Figure I-19).

Dans leur guide sur les zones cohésives, Schwalbe *et al.* [Schwalbe2009] notent que si le modèle de zone cohésive montre peu de dépendance à la taille de discrétisation, la taille des éléments dans le sens de propagation doit être suffisamment petite pour bien rendre compte d'un éventuel gradient de contrainte et permettre de représenter l'effet tunnel en 3D.

3.3.4.2 Méthode XFEM

La XFEM offre un cadre naturel pour les modèles de zone cohésive. Les premières applications ont été proposées simultanément par Moës *et al.* [Moes2002] et Wells *et*

al.[Wells2001] pour la rupture quasi-fragile. En comparant la définition du modèle de fissuration de Griffith avec le modèle de zone cohésive, on voit que dans le cadre de la rupture fragile, la singularité importante en pointe de fissure est liée à une zone cohésive de dimension nulle. C'est la raison pour laquelle l'approximation enrichie proposée pour la rupture fragile (p.16, équations (I-35) à (I-37)) est modifiée pour traiter le problème de zone cohésive. Wells *et al.* suppriment simplement les fonctions de pointe de fissure, au détriment de l'indépendance de la propagation de fissure au maillage (la propagation a lieu sur un nombre entier d'éléments). Moës *et al.* quant à eux préfèrent utiliser une seule fonction d'enrichissement de pointe de fissure non singulière :

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i + \sum_{j \in J} N_j(\underline{x}) H(\underline{x}) b_j + \sum_{k \in K} (N_k(\underline{x}) c_k r^\alpha \sin(\theta/2)) \quad (\text{I-86})$$

Où (r, θ) sont les coordonnées polaires du repère local en pointe de fissure (voir Figure I-2). Ils proposent trois valeurs pour α : 1 ; 1,5 ou 2, ainsi la singularité est supprimée sans réduire l'indépendance de la solution par rapport au maillage.

Dans le cadre de cette méthode, il est en effet possible d'introduire les zones cohésives au cours du calcul. Ceci implique la définition d'un critère d'insertion des zones cohésives ainsi qu'un critère d'orientation car celle-ci n'est plus un résultat direct du calcul. Différentes options de calcul des critères sont étudiées par Unger *et al.* [Unger2007] dans le cadre de la rupture quasi-fragile. Ceux qui ont été proposés jusqu'à présent pour l'initiation de la zone cohésive s'écrivent souvent en terme de contrainte critique. Pour la propagation, les critères sont basés sur des grandeurs internes à la zone cohésive, cependant, aucune étude n'a été menée pour la déchirure ductile.

Afin de calculer le comportement de la zone cohésive, des points de Gauss sont répartis sur la surface de la fissure. Les contraintes cohésives obtenues sont ensuite interpolées pour obtenir la contribution de la zone cohésive aux efforts nodaux.

Les applications à la déchirure ductile restent rares. En effet, quelques travaux traitent de la rupture ductile, principalement pour le béton, mais se limitent au cas où la plasticité peut être réduite sur une surface [Wells2001, Borst2006].

Une extension de cette méthode à la plasticité diffuse a été proposée par Brancherie [Brancherie2003], mais l'étude se limite au cisaillement et ne traite ni la nucléation, ni la croissance des cavités, et ne représente pas bien la physique de la déchirure. Le traitement des grandes déformations dans le cadre de zones cohésives plastiques a été étudié par Khoei *et al.* [Khoei2008].

3.3.4.3 Méthode de la discontinuité forte

La méthode de la discontinuité forte est assez proche de la XFEM lorsque l'on n'utilise pas les enrichissements de pointe de fissure [Wells2001]. Elle a été développée par Simo *et al.* [Simo1993] et Oliver *et al.* [Oliver1996] et consiste à définir l'approximation du déplacement comme la combinaison des déplacements continus nodaux et de sauts de déplacement qui sont cette fois-ci des inconnues internes à l'élément. Ainsi au niveau global, contrairement au cas de la XFEM, les inconnues du problème se limitent aux u_i :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i + \sum_{j \in J} M_j(\underline{x}) d_j \quad (\text{I-87})$$

Où $M_j(\underline{x})$ sont des fonctions d'interpolation des inconnues de saut de déplacement d_j qui s'annulent aux nœuds de l'élément.

Cette méthode a été appliquée au traitement des zones cohésives dans le cadre de la rupture fragile dans [Wells2001a]. En revanche il faut noter que le saut de déplacement est constant dans un élément et que la continuité inter-éléments de la surface de la discontinuité n'est pas assurée. Un autre point faible de cette méthode est la nécessité d'introduire un traitement spécial complexe de la discontinuité pour le calcul de la déformation dans le solide.

Conclusion

Les modèles cohésifs sont attrayants par leur simplicité et la possibilité qu'ils offrent de modéliser tout le processus de rupture, de l'initiation d'un défaut à la propagation d'une fissure. En s'appuyant sur une forme de loi cohésive prédéterminée, des auteurs ont pu adapter le modèle cohésif pour prendre en compte l'état de triaxialité des contraintes. En reliant les concepts développés pour les modèles de fissuration à ceux des modèles cohésifs, il a été montré que l'énergie dissipée par la zone cohésive correspond bien à l'énergie de rupture définie par Turner. De plus la formulation thermodynamique proposée par Costanzo ouvre l'horizon sur l'écriture de lois constitutives dérivées d'un potentiel de dissipation, ainsi il semble possible d'introduire les effets de la triaxialité de façon cohérente dans le modèle cohésif.

En revanche, si les zones cohésives modélisées à l'aide d'éléments spécifiques permettent la modélisation d'une propagation de fissure continue, les inconvénients de cette approche sont nombreux. En particulier, la dépendance au maillage et la nécessité de connaître le trajet de fissuration à l'avance. La définition de lois à seuil apporte une première solution à ces défauts, de plus l'utilisation de la XFEM permet également d'insérer les zones cohésives indépendamment du maillage au cours du calcul. Restent à définir les critères d'avancée de la zone cohésive pour le contexte de la déchirure ductile.

4. Passage d'un modèle local à un modèle à fissure explicite

De nombreux modèles ont été développés pour décrire la rupture ductile des composants, cependant aucun ne semble adapté à la prédiction de la propagation étendue d'une fissure issue d'un petit défaut. La méthode qui couvre la plus grande plage de propagation est l'approche globale J_I - G_{fr} , mais celle-ci n'est pas applicable aux cas où la propagation de la fissure n'est pas indépendante de l'histoire du chargement de la structure. Les modèles continus permettent de modéliser l'apparition d'un défaut, puis de tenir compte des effets d'histoire, cependant nous avons vu que les problèmes numériques auxquels ils sont sujets, même lorsque l'on utilise une formulation régularisée, empêchent la modélisation de propagations importantes. Les modèles cohésifs sont quant à eux incomplets et leur comportement nécessite d'être relié à l'état du volume environnant pour donner de bons résultats.

Puisque l'utilisation d'une modélisation unique est incapable de résoudre l'ensemble du problème de fissuration, un axe important de la recherche actuelle en mécanique de la rupture est dédié au développement de méthodes utilisant les différentes approches là où elles sont les plus efficaces. Dans ce but, de nombreux auteurs essaient de relier les différents modèles, de manière à être cohérent lors du passage d'un modèle à un autre au cours d'un unique calcul.

L'approche la plus répandue consiste à relier modèles locaux et modèles de zones cohésives dans une approche séquentielle. Dans le calcul de fissuration, cette approche consiste à relayer le modèle continu à l'aide d'un modèle de zone cohésive dont la loi est identifiée en amont une fois pour toute de manière à être cohérente avec le modèle continu.

Dans son travail Cazes [Cazes2009] montre qu'il est possible de construire un modèle de zone cohésive à partir d'un modèle continu régularisé. En effet, si l'on considère un modèle continu régularisé, on remarque que son domaine de validité numérique recouvre celui des modèles de zones cohésives, qui, nous l'avons vu précédemment, permettent de modéliser l'initiation d'un défaut dans la structure. Cette propriété a été exploitée principalement selon une approche mécanique, mais aussi énergétique.

4.1 Construction de l'équivalence mécanique

L'équivalence mécanique a été écrite par Planas *et al.* [Planas1993] à partir de la méthode de la discontinuité forte [Simo1993] régularisée proposée par Oliver [Oliver1996]. La zone cohésive est modélisée à l'aide de la méthode de la discontinuité forte régularisée. Ainsi, le champ de déformation donné par cette modélisation est continu et peut être comparé au champ de déformation obtenu par une modélisation non-locale. A partir des définitions de la régularisation des modèles continu et discontinu, Planas *et al.* [Planas1993] cherchent de manière analytique le champ de déformation local discontinu (donnant l'ouverture du modèle cohésif) permettant de reproduire le champ régularisé dans une barre en traction uniaxiale. Le modèle cohésif obtenu est décrit sur la figure suivante : a) représente la barre avec la zone de localisation modélisée sous la forme d'une zone cohésive, b) représente la zone de localisation obtenue après régularisation de la solution obtenue en a), c) donnent les réponses en traction observées aux points A_0 , A_1 et A_2 .

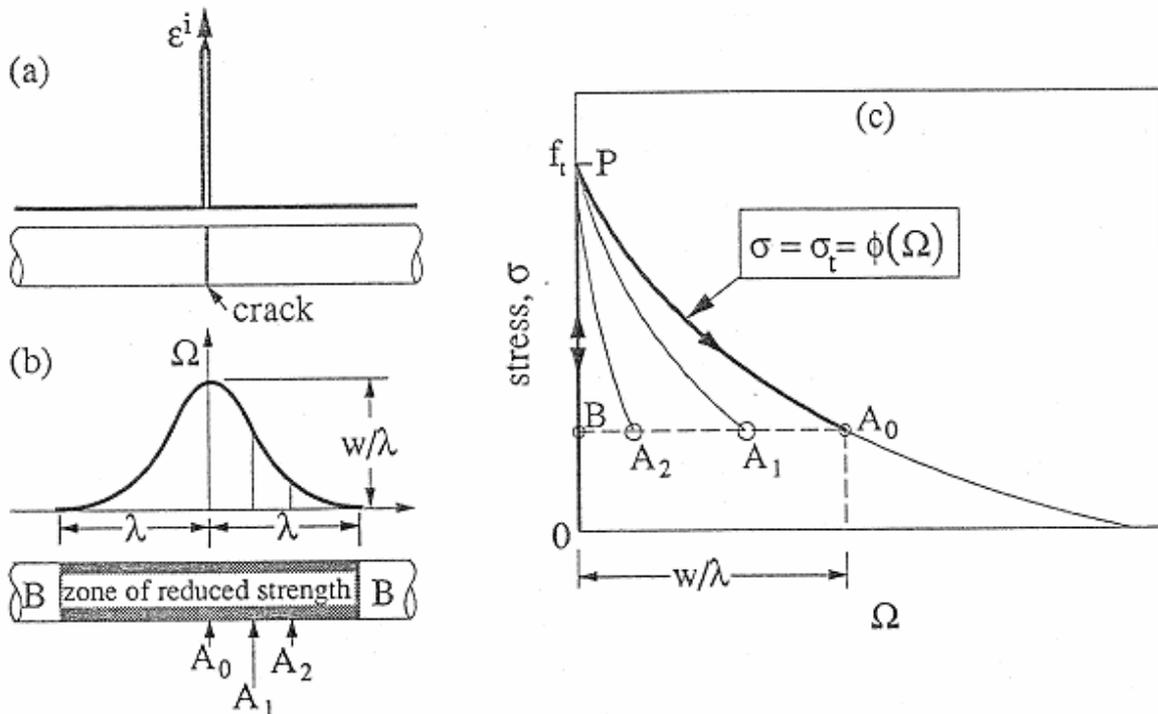


Figure I-20 - La zone cohésive vue comme une solution d'un modèle non-local intégral [Planas1993]

Legrain *et al.* [Legrain2007] en 2D et Dufour *et al.* [Dufour2008] en 1D utilisèrent une démarche similaire basée sur une approche numérique et relierent une ouverture de fissure à une valeur de l'endommagement non-local.

4.2 Construction de l'équivalence énergétique

Dans sa thèse, Mazars [Mazars1984] montre que pour la rupture fragile, on peut écrire l'équivalence des dissipations entre un modèle d'endommagement et un modèle de fissuration de Griffith. Il écrit donc l'équivalence entre G_c et l'énergie dissipée par la zone cohésive définie selon [Hillerborg1976] :

$$\Gamma_0 = \int_0^\infty \underline{t} \cdot d[\underline{u}] \quad (\text{I-88})$$

Nous avons aussi vu que l'on peut identifier l'énergie dissipée par une zone cohésive à l'énergie de rupture G_{fr} de Turner. A partir de ces hypothèses, de nombreux auteurs ont construit des modèles cohésifs en présumant de la forme de la loi cohésive [Cornec2003, Tardif2009].

Bazant et Oh [Bazant1983] relient le modèle de bande de fissuration au modèle de zone cohésive en imposant l'égalité entre les énergies dissipées dans chaque modèle, dans ce cas c'est le modèle continu qui est obtenu à partir du modèle discontinu.

Comi *et al.* [Comi2002, Comi2007] introduisent une zone cohésive lorsque le maillage n'est plus assez fin pour décrire correctement le dommage non-local dans la process zone. L'introduction des zones cohésives au cours du calcul est permise par le cadre XFEM du calcul. La loi de la zone cohésive introduite est alors adaptée en fonction de l'énergie non dissipée par le modèle continu (Figure I-21) de manière à préserver l'équivalence des dissipations entre la modélisation purement continue (C) et la modélisation couplée (C-D).

Areias et Belytschko [Areias2005] appliquent une méthode proche dans le cas de grandes déformations élastiques. En revanche, ils proposent d'introduire la discontinuité lorsque la stabilité est perdue pour le modèle continu.

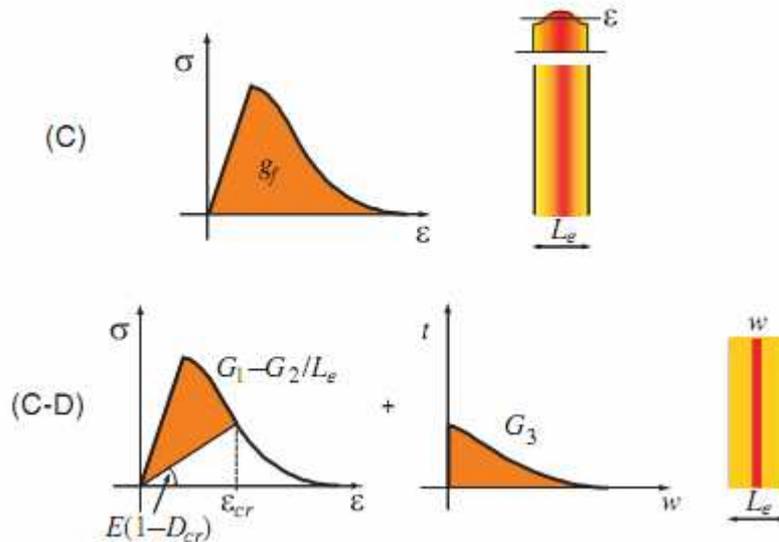


Figure I-21 - Equivalence énergétique entre la modélisation purement continue et modélisation couplée [Comi2007]

Enfin, une approche incrémentale a été proposée par Cazes *et al.* [Cazes2009] afin de construire la loi cohésive à partir de l'équivalence entre les incréments d'énergie dissipée par un modèle d'endommagement à second-gradient et par un modèle cohésif équivalent.

4.3 Conclusion

A part la mise en relation de l'énergie de rupture de Turner avec l'énergie dissipée par un modèle cohésif pour la rupture ductile, on note qu'il existe très peu de méthodes reliant des modèles de déchirure ductile macroscopiques à des modèles d'endommagement ductile ou de plasticité des matériaux poreux. Ce cas est en effet difficile à traiter, car les phénomènes dissipatifs ne peuvent pas être réduits sur la discontinuité, et il est nécessaire de séparer la part volumique de la contribution surfacique et ce en grandes déformations.

Cependant les pistes données par les travaux de Fabien Cazes *et al.* et Comi *et al.* sont très prometteuses. En combinant l'approche locale à un modèle de zone cohésive équivalent en terme énergétique dans un calcul de fissuration sur structure, il semble possible de modéliser la totalité du processus de manière précise et efficace.

5. Conclusion

Cette étude bibliographique donne un aperçu des nombreux efforts qui ont été faits pour modéliser de grandes propagations de fissure dans le domaine ductile. Cependant, les approches proposées sont soit inadaptées pour modéliser de grandes propagations (modèles continus régularisés ou non), soit approximatives ou trop complexes quant à la prise en compte de l'état de triaxialité des contraintes en pointe de fissure ou des effets de taille ou d'histoire du chargement (approches globales, zones cohésives).

Ainsi, il semble nécessaire de combiner au moins deux de ces approches pour décrire correctement et efficacement le comportement d'un défaut dans une structure subissant un chargement accidentel. Il semble possible de coupler modèle de zone cohésive et approche globale basée sur G_{fr} , cependant les modèles de zones cohésives en mode I ne donnent pas une description précise de l'état de triaxialité des contraintes en pointe de fissure. Afin de d'utiliser des modèles capables de tenir compte des effets d'histoire et de taille, le couplage entre modèle continu pour la rupture ductile et modèle cohésif est donc plus adapté.

De nombreux travaux traitent de cette problématique, en particulier dans le cadre de la rupture fragile ou quasi-fragile. Ils proposent soit d'utiliser des modèles de zone cohésive, soit de passer d'un modèle continu (endommagement, plasticité, élastoplasticité endommageable) à un modèle discontinu (modèles de zone cohésive, approches globales) représentant la fissure. Cette seconde solution semble prometteuse car elle permet d'insérer une discontinuité dans le solide sans détériorer la description des phénomènes dissipatifs. En effet, des auteurs [Comi2002, Cazes2009] ont montré que l'on peut construire la loi cohésive à partir du modèle continu en imposant l'équivalence des dissipations.

Le modèle cohésif ainsi construit peut alors être utilisé afin de relayer le modèle continu dans un calcul de propagation de fissure. En clair, on utilise le modèle continu de la même manière que dans un calcul par l'approche locale uniquement, mais localement, lorsque l'état d'endommagement d'un élément se rapproche de l'état critique pour lequel des problèmes numériques peuvent apparaître, une zone cohésive est insérée. Dans le cas de la modélisation de l'initiation d'un défaut depuis un état sain, l'orientation et la position de la zone cohésive sont calculées à partir des grandeurs volumiques locales. Dans le cas de la modélisation de la propagation d'une fissure ou d'une zone cohésive, celle-ci est ajoutée à la pointe de la fissure (cohésive ou non) existante.

Cette méthodologie permet de laisser le modèle continu pour la rupture ductile travailler suffisamment longtemps pour rendre compte des effets de l'histoire de la triaxialité sur l'évolution de la plasticité et donc de l'endommagement (la porosité). Il faut noter que le choix d'utiliser un modèle de zone cohésive pour faire la transition vers une fissure réelle repose sur la nécessité de faire la transition avant rupture totale de l'élément pour éviter les problèmes numériques. La zone cohésive permet alors de dissiper l'énergie qui ne l'a pas été dans le volume.

Un des axes importants de cette thèse est donc la construction d'une loi cohésive cohérente avec un modèle continu pour la déchirure ductile. Celle-ci contiendra donc de la plasticité et devra tenir compte de grandes déformations. Nous avons vu que le développement de lois constitutives dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et en particulier dans le cadre des matériaux standard généralisés permet d'en assurer le sens physique et la

robustesse. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler avec le modèle de Rousselier. L'approche thermodynamique pour la construction d'un modèle de zone cohésive proposée par Cazes et al. [Cazes2009] est attrayante, cependant, il est nécessaire de l'étendre au cas de la plasticité et des grandes déformations.

S'il est possible d'introduire des efforts de cohésion sur la fissure par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange, l'implémentation dans le cadre de la XFEM semble plus naturelle pour traiter le passage du milieu continu à la zone cohésive. Celle-ci sera traitée dans le code de calcul éléments finis Cast3M, dans laquelle une méthode XFEM en 2D permettant de traiter la plasticité efficacement a été introduite par Benoit Prabel. Au cours de ce travail, il faut étendre cette méthode au traitement des zones cohésives, aux grandes déformations plastiques et à la 3D. Le traitement des zones cohésives est simple et a donné de bons résultats. En revanche les travaux sur le traitement des grandes déformations, en particulier plastiques, sont restreints.

Finalement, les principaux axes à développer dans le cadre de cette thèse sont :

1. L'équivalence énergétique entre un modèle cohésif et le modèle de Rousselier ;
2. L'insertion d'un modèle cohésif dans le cadre XFEM du code éléments finis CAST3M ;
3. L'extension de la XFEM à la modélisation non-linéaire géométrique et 3D.

Chapitre II.

Méthode d'Identification d'une loi cohésive cohérente avec un modèle d'approche locale en présence de non-linéarités géométriques

1. Introduction	50
2. Formulation modifiée du modèle de Rousselier pour la rupture ductile	50
3. Définition thermodynamique du modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle de Rousselier	52
3.1 Définition des grandeurs thermodynamiques pour un modèle de zone cohésive	52
3.2 Modèle de zone cohésive équivalent pour un modèle élastoplastique isotrope standard.....	54
3.3 Modèle de zone cohésive équivalent pour le modèle de Rousselier.....	56
4. Construction d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle local : Cadre HPP.....	57
4.1 Equivalence énergétique des modélisations	57
4.2 Construction numérique de la loi cohésive cohérente.....	60
4.3 Méthode de construction d'une loi cohésive cohérente.....	64
5. Construction d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle local : Cadre des grandes transformations.....	71
5.1 Equivalence énergétique des modélisations	71
5.2 Construction numérique de la loi cohésive cohérente.....	72
5.3 Application à un modèle élastoplastique linéaire par morceau	76
5.4 Application de la méthode simplifiée au modèle de Rousselier.....	79
6. Conclusion.....	82

1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'identification d'une loi cohésive de traction cohérente en dissipation avec le modèle de Rousselier dans le cadre de la déchirure ductile. La méthode est basée sur la notion de fissure équivalente de Mazars [Mazars1984, Mazars1996] qui peut être utilisée pour calculer une loi cohésive équivalente à un modèle d'endommagement par une approche numérique comme dans les travaux de Cazes *et al* [Cazes2009]. Un travail commun, dont la partie théorique a été principalement démontrée par ce dernier, a permis d'étendre la méthode à la plasticité.

La base de la méthode d'identification consiste à construire une loi cohésive d'ouverture à partir d'un problème de cylindre élémentaire (de dimensions liées à celles du volume élémentaire de référence) en traction. La loi cohésive est alors calculée comme la solution de ce problème, selon l'hypothèse que la zone cohésive dissipe autant d'énergie que le modèle volumique de référence.

On a fait ici le choix d'identifier une loi unique correspondant à un état uniaxial. Ceci peut poser la question de son utilisation pour diverses histoires de la triaxialité. Il sera donc nécessaire d'étudier l'impact de ce choix sur les résultats obtenus avec la modélisation couplée continue-discontinue.

Dans la première partie, une formulation modifiée du modèle de Rousselier est présentée. S'appuyant sur les travaux de Lorentz *et al.* [Lorentz2008], elle permet de replacer le modèle dans le cadre des matériaux standard généralisés. Cette formulation permet également de clarifier le statut de ce modèle, en le définissant comme un modèle élastoplastique pour les métaux poreux, sans dissipation ni énergie libre directement liée à la croissance des cavités. La deuxième partie est consacrée à la présentation de la méthode d'identification d'une loi cohésive de comportement équivalent à un modèle élastoplastique isotrope dans le cadre des petites perturbations. Enfin, cette méthodologie est étendue aux grandes déformations.

2. Formulation modifiée du modèle de Rousselier pour la rupture ductile

G. Rousselier [Rousselier1987, Rousselier2001] a introduit un modèle local isotrope pour la rupture ductile permettant de prendre en compte l'effet de la triaxialité des contraintes sur l'érouissage des métaux dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

Le système des variables d'état est la combinaison des déformations totales $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et plastiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$, de la déformation plastique cumulée p , caractérisant l'érouissage, et de la porosité f qui donne le niveau d'endommagement. La loi constitutive est une loi hypoélastique donnée par l'écriture de deux potentiels :

- L'énergie libre qui est supposée avoir une forme additive :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \frac{\underline{\underline{E}}}{\rho} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_p(p) + \psi_f(f) \quad (\text{II-1})$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ est la déformation élastique, $\underline{\underline{E}}$ est le tenseur d'élasticité de Hooke, ρ est la masse volumique courante et ψ_p et ψ_f sont respectivement les énergies libres associées à l'érouissage et à la croissance de la fraction volumique de cavités ;

- Le potentiel de dissipation F :

$$F = \frac{\sigma_{vM}}{\rho} - \frac{R(p)}{\rho_0} + \frac{Df\sigma_1}{\rho_0} \exp\left(\frac{\rho_0}{\sigma_1} \frac{\sigma_m}{\rho}\right) \quad (\text{II-2})$$

avec σ_{vM} la contrainte équivalente de von Mises, σ_m la contrainte moyenne hydrostatique, $R(p)$ la loi d'érouissage du matériau sain, ρ_0 la masse volumique initiale du matériau et $\sigma_1 = (R_e + R_m)/3$ la résistance de la matrice à la coalescence. D est un paramètre dépendant du matériau qui est habituellement compris entre 1,5 et 2. La loi d'érouissage $R(p)$ est ici définie à l'aide de la limite élastique σ_0 et de la force thermodynamique associée à la déformation plastique cumulée, P :

$$R(p) = \rho_0 P(p) + \sigma_0 \quad (\text{II-3})$$

La contrainte et les autres forces thermodynamiques associées aux variables d'états dérivent de l'énergie libre :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e ; \underline{\underline{P}} = \frac{\partial \psi}{\partial p} ; \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \psi}{\partial f} \quad (\text{II-4})$$

Où $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{F}}$ sont les forces thermodynamiques associées respectivement à p et à f . Les équations d'évolution sont dérivées de la fonction de charge selon la règle de normalité :

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial (\underline{\underline{\sigma}}/\rho)} ; \dot{p} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial P} ; \dot{f} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial F}, \quad (\text{II-5})$$

Où $\underline{\underline{D}}^p$ est la vitesse de déformation plastique et $\dot{\lambda}_p = \dot{p}$ est le multiplicateur plastique qui est obtenu par la condition de cohérence :

$$F\left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho}, P, F\right) \leq 0 ; \dot{\lambda}_p \geq 0 ; \dot{\lambda}_p F\left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho}, P, F\right) = 0. \quad (\text{II-6})$$

Cependant, Lorentz *et al* [Lorentz2008] ont noté que les variables internes proposées ainsi ne sont pas indépendantes et rendent le potentiel de dissipation non convexe par rapport aux couples des variables d'état et des forces thermodynamiques associées. Afin de corriger ce défaut et de replacer le modèle de Rousselier dans le cadre des matériaux standard généralisés, ils proposent de supprimer la porosité des variables internes et de la définir en fonction de la déformation volumique totale plutôt que de la déformation plastique moyenne. Dans la même logique, nous supprimons ici la porosité des variables internes, en revanche, nous gardons sa définition initiale qui permet de garantir le caractère irréversible de cette grandeur.

Cette modification n'entraîne cependant pas de changement sur l'écriture du potentiel de dissipation, néanmoins les lois d'évolution se réduisent à :

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial (\underline{\underline{\sigma}}/\rho)} ; \dot{p} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial P}. \quad (\text{II-7})$$

La relation de conservation de la masse est utilisée pour relier \dot{f} à la vitesse de déformation plastique volumique D_m^p :

$$\dot{f} = 3(1-f)D_m^p \quad (\text{II-8})$$

La condition de cohérence s'écrit maintenant sur $F\left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho}, P\right)$. Finalement le modèle de

Rousselier modifié correspond au modèle de plasticité isotrope de von Mises pour lequel il existe une déformation plastique volumique liée à la croissance des cavités. Cette écriture met en évidence le fait que pour le modèle de Rousselier, la perte de rigidité n'est pas liée

explicitement à une dissipation. La croissance de la porosité est en effet uniquement la conséquence de la déformation plastique de la matrice autour des cavités. L'énergie libre et la dissipation intrinsèque spécifique d_1 ont donc des écritures similaires à celles d'un modèle de plasticité isotrope standard :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \frac{\underline{\underline{E}}}{\underline{\underline{\rho}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_p(p) \quad (\text{II-9})$$

$$\varphi_v = \rho d_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^p - \rho P \dot{p} \quad (\text{II-10})$$

Conséquence de la reformulation sur l'interprétation énergétique du modèle :

La formulation initiale proposée par Rousselier en 2001, considère un terme d'énergie libre associée à la porosité. Ce terme agit au niveau de la microstructure de manière opposée à l'érouissage. En effet, Rousselier suppose que f diminue de manière explicite l'énergie libre emmagasinée par l'intermédiaire d'une contribution ψ_f négative.

En retirant la porosité des variables internes, on suppose que celle-ci ne joue pas explicitement sur l'énergie stockée par érouissage. L'influence de la porosité est due uniquement au terme hydrostatique du potentiel de dissipation plastique.

Remarques sur l'utilisation du modèle :

Pour son application au calcul de déchirure ductile, le modèle de Rousselier nécessite la définition de trois paramètres matériau supplémentaires (σ_1, f_0, D) par rapport à un modèle de plasticité de von Mises. Bien que Rousselier montre dans [Rousselier2001] que le modèle permet d'assurer une rupture assez rapide grâce à l'adoucissement et à la localisation naturelle donnés par le modèle, ceux-ci ne suffisent pas à modéliser la brutalité de la rupture. C'est pourquoi il est courant d'ajouter une fraction volumique de cavités critique f_c qui est en général de l'ordre de 5%.

3. Définition thermodynamique du modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle de Rousselier

Le cadre thermodynamique pour l'étude des modèles de zone cohésive a été introduit par Gurtin [Gurtin1979]. A partir des définitions du Premier et Second Principe qu'il a proposé, on peut définir un cadre thermodynamique commun pour les modèles mécaniques continus et de zone cohésive qui est la base de la méthode d'identification d'une loi cohésive de traction à partir d'un modèle volumique de référence. Cette approche a été introduite pour un matériau élastique endommageable dans [Cazes2009] et appliquée ici à la construction d'un modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle de rupture ductile de Rousselier.

3.1 Définition des grandeurs thermodynamiques pour un modèle de zone cohésive

Considérons le solide fissuré de volume V représenté sur la figure II-1. Γ_f représente la fissure dont une partie notée Γ_{zc} correspond à la zone cohésive. On définit l'orientation de la fissure par l'intermédiaire de la normale à sa médiane notée $\underline{\underline{n}}$, de plus les vecteurs $\underline{\underline{n}}^+$ et $\underline{\underline{n}}^-$ définissent la direction correspondante appliquée au point projeté respectivement sur la lèvres supérieure ou inférieure de la zone cohésive et orientée vers l'extérieur du solide. Le choix de la surface de référence, a un impact important sur la contrainte de Cauchy. En effet, dans le cas de la

délamination, on ne peut écrire l'équilibre local à l'interface à l'aide de ces contraintes, car les surfaces de part et d'autre de l'interface se déforment différemment. Ici, on étudie des cas symétriques de déchirure en mode I, le choix de la surface de référence comme étant la surface médiane des lèvres de la zone cohésive est donc bien adapté.

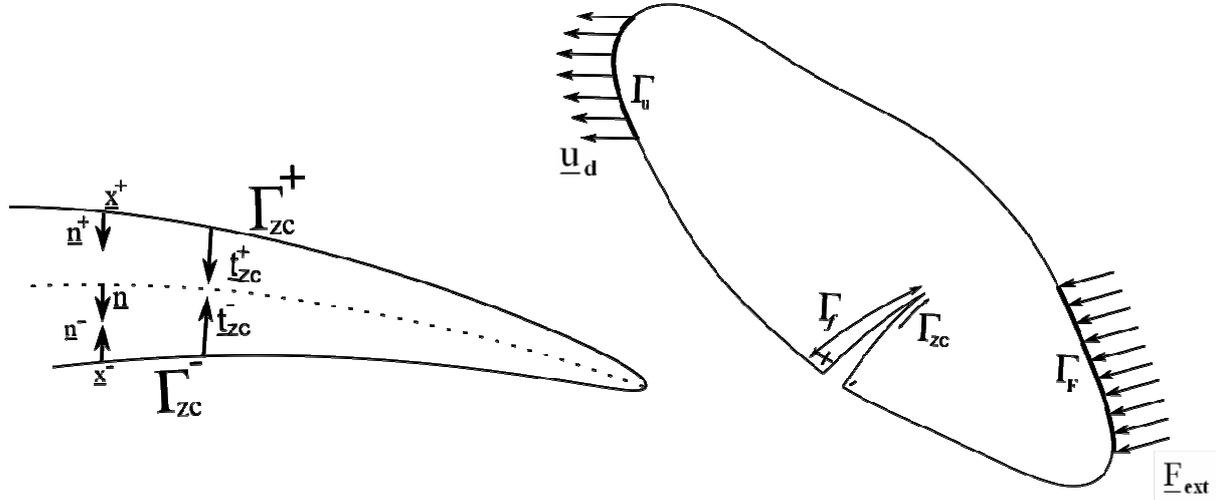


Figure II-1 - Solide fissuré, Description de la zone cohésive

Le saut de déplacement en \underline{x} est donc égal à la différence du déplacement en \underline{x}^+ et en \underline{x}^- :

$$[\underline{u}](\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}^+) - \underline{u}(\underline{x}^-) \quad (\text{II-11})$$

En ce point, on définit également le vecteur de contraintes cohésives \underline{t}_{zc} , qui d'après les conditions d'équilibre à l'interface solide-zone cohésive dans le cas où l'ouverture de la fissure est symétrique, doit vérifier la relation suivante :

$$\underline{t}_{zc}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}^+) \cdot \underline{n}(\underline{x}^+) = -\underline{\sigma}(\underline{x}^-) \cdot \underline{n}(\underline{x}^-) \quad (\text{II-12})$$

On définit également le saut de flux de chaleur à travers la zone cohésive

$$[\underline{q}](\underline{x}) = \underline{q}(\underline{x}^+) - \underline{q}(\underline{x}^-) \quad (\text{II-13})$$

ainsi que l'ouverture critique δ_c pour laquelle la rupture est atteinte.

Dans le cadre de la description thermodynamique de la zone cohésive donné par Gurtin [Gurtin1979], le premier et le second principe de la thermodynamique s'écrivent :

$$\frac{de_{zc}}{dt} = \underline{t}_{zc} \frac{[\underline{u}]}{dt} - [\underline{q}] \underline{n}; \quad \frac{ds_{zc}}{dt} = \frac{-[\underline{q}] \underline{n}}{T} + \frac{d(s_i)_{zc}}{dt} \quad (\text{II-14})$$

Où e_{zc} , s_{zc} et $(s_i)_{zc}$ sont respectivement les densités surfaciques d'énergie interne, d'entropie et d'entropie interne, t est le temps et T la température.

La dissipation $d\varphi_{zc}$ et l'énergie libre ψ_{zc} de la zone cohésive sont définies par :

$$d\varphi_{zc} = Td(s_i)_{zc}; \quad \psi_{zc} = e_{zc} - Ts_{zc} \quad (\text{II-15})$$

A partir de la définition des énergies cohésives, on obtient une autre écriture de la dissipation infinitésimale :

$$d\varphi_{zc} = \underline{t}_{zc} \cdot d[\underline{u}] - d\psi_{zc} - s_{zc} dT \quad (\text{II-16})$$

Dans [Cazes2009], la décomposition du saut en une composante élastique et une composante plastique est adoptée :

$$[\underline{u}] = [\underline{u}]^e + [\underline{u}]^p \quad (\text{II-17})$$

Dans le cadre de cette définition, Cazes *et al* supposent que l'énergie libre de la zone cohésive est fonction du saut de déplacement élastique, de la température et d'un jeu de variables internes propres à la zone cohésive v^k :

$$\psi_{zc} = \psi_{zc}([\underline{u}]^e, T, v^k) = \psi_{zc}([\underline{u}] - [\underline{u}]^p, T, v^k) \quad (\text{II-18})$$

dont la dérivation permet l'obtention de la contrainte et de l'entropie cohésive :

$$\underline{t}_{zc} = \frac{\partial \psi_{zc}}{\partial [\underline{u}]^e}; \quad s_{zc} = -\frac{\partial \psi_{zc}}{\partial T}. \quad (\text{II-19})$$

3.2 Modèle de zone cohésive équivalent pour un modèle élastoplastique isotrope standard

Le modèle continu élastoplastique isotrope pour lequel on identifie la loi cohésive est défini par l'énergie libre ψ

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_p(p) \quad (\text{II-20})$$

et par la fonction de charge F de type von Mises donnant une déformation plastique volumique nulle :

$$F = \sigma_{vM} - R(p). \quad (\text{II-21})$$

A partir de ces deux potentiels, le comportement est entièrement défini :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e; \quad \underline{\underline{P}} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \quad (\text{II-22})$$

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial (\underline{\underline{\sigma}})}; \quad \dot{p} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F}{\partial p}. \quad (\text{II-23})$$

Le but de la méthode est de construire une loi cohésive, qui combinée au modèle étudié, permet de développer le même travail mécanique et de conserver la même énergie élastique que pour une modélisation utilisant le modèle continu uniquement. Dans ce cadre, il n'est pas nécessaire de tenir compte de la répartition entre énergie bloquée dans l'écroutissage et énergie dissipée qui sont toutes deux des énergies non récupérables mécaniquement. Ainsi on peut faire l'hypothèse que la contribution de l'écroutissage à l'énergie libre est nulle :

$$\psi_p(p) = 0 \quad (\text{II-24})$$

Cette hypothèse est possible car la répartition entre énergie bloquée par écroutissage et énergie dissipée ne joue pas sur le comportement mécanique du matériau. Si dans la définition de $R(p)$ (donnée par l'équation (II-3)) on choisit une contrainte σ_1 différente de la limite élastique,

$$R^*(p) = \rho_0 P^*(p) + \sigma_1 \quad (\text{II-25})$$

on modifie uniquement la répartition en énergie stockée et énergie dissipée (voir Figure II-2) :

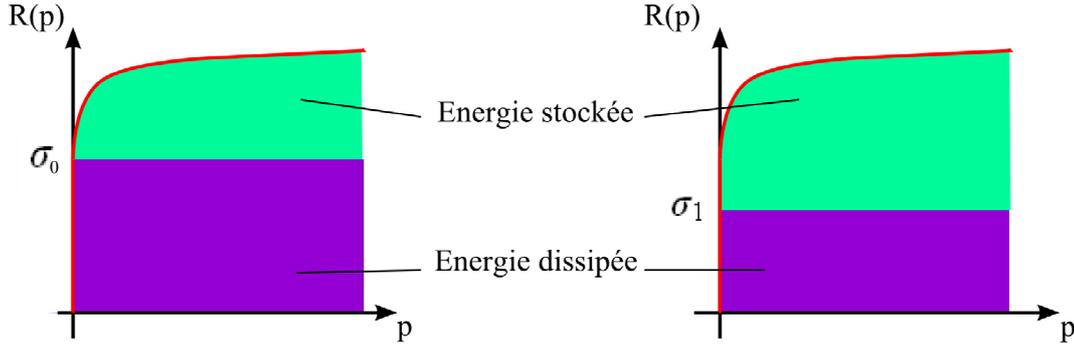


Figure II-2 - Répartition entre énergie dissipée et énergie stockée suivant le choix de σ_1

Ceci est lié au fait que l'énergie bloquée par écrouissage n'est pas récupérable mécaniquement. En revanche, il faut noter que la réponse en température est très sensible à cette répartition.

Pour reproduire le travail mécanique, la modélisation de l'énergie bloquée est suffisante. Ainsi, l'expression de l'énergie libre et de la dissipation φ_V du modèle continu est :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\frac{E}{\rho}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (\text{II-26})$$

$$\varphi_V = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^p \quad (\text{II-27})$$

Les incréments de dissipation et d'énergie libre sur un domaine de volume V donné s'écrivent:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_V &= \Delta\Phi_V^p = \int_V \int_{\Delta t} \rho d_1 dt dV = \int_V \int_{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^p dt dV \\ \Delta\Psi &= \frac{1}{2} \int_V \int_{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^e dt dV \end{aligned} \quad (\text{II-28})$$

On cherche à construire une loi cohésive purement dissipative, permettant de développer la même dissipation qu'un modèle élastoplastique adoucissant lorsque la condition d'unicité de la solution est perdue. Ainsi, contrairement au cas des lois de comportement élastiques endommageables ou élastoplastiques endommageables, aucun terme de la dissipation ne s'écrit en fonction de la déformation élastique. C'est pourquoi, en redéfinissant la dissipation comme la totalité de l'énergie bloquée celle-ci devient simplement égale au travail plastique. Ainsi, la dissipation infinitésimale du modèle cohésif s'écrit :

$$d\varphi_{zc} = d\varphi_{zc}^p = \underline{t}_{zc} \cdot d[\underline{u}]^p \quad (\text{II-29})$$

La dissipation du modèle cohésif étant purement plastique, l'énergie élastique du modèle est nulle. De plus, pour être en accord avec le modèle élastoplastique, la zone cohésive ne peut stocker aucune énergie d'écrouissage. Ceci entraîne la nullité de l'énergie libre de la zone cohésive (contrairement au cas des modèles élastoplastiques endommageables [Cazes2010a]) :

$$\psi_{zc} = 0 \quad (\text{II-30})$$

En conséquence, le modèle cohésif possède un saut de déplacement purement plastique, c'est pourquoi la composante élastique du saut $[\underline{u}]^e$ doit être nulle.

Ainsi, la contrainte cohésive ne peut être déduite de son énergie libre : le saut est entièrement plastique et la rigidité élastique est infinie. En réalité, à l'aide d'une analyse

thermodynamique globale [Germain1983] du solide contenant la zone cohésive, Costanzo *et al.* [Costanzo1995] ont montré que la contrainte cohésive irréversible est conjuguée au saut de déplacement par rapport à l'énergie libre globale. De plus dans le cadre des matériaux standard généralisés, ils supposent l'existence d'un potentiel de dissipation global duquel peuvent être dérivées les équations d'évolution de la zone cohésive. Ces hypothèses sont cohérentes avec l'approche proposée ici. Cependant, la bijection existant entre contrainte cohésive et saut de déplacement obtenue dans le cas élastoplastique endommageable n'est pas conservée dans le cas d'une loi cohésive élastoplastique. Etant donné qu'il est nécessaire d'appliquer un chargement croissant afin d'observer une déchirure croissante dans le domaine ductile, les chargements des problèmes modélisés sont en général monotones croissants. Ainsi, une valeur de contrainte est associée à une valeur de saut. D'un point de vue numérique, si l'on souhaite traiter d'autres types de problèmes, il est toujours possible d'approcher l'hypothèse de rigidité infinie par une rigidité très grande. Cette méthode est fréquemment utilisée pour les modèles de zone cohésive afin de simuler une zone cohésive initialement fermée.

Finalement, l'incrément de dissipation associé à la zone cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique pour lequel aucune énergie n'est stockée dans la microstructure vaut :

$$\Delta\Phi_{zc} = \Delta\Phi_{zc}^p = \int_{\Gamma_{zc}} \int_{\Delta t} \underline{t}_{zc} \cdot [\underline{\dot{u}}]^p dt dS \quad (\text{II-31})$$

Le calcul de l'incrément de dissipation de la zone cohésive pour le cas élastoplastique est représenté sur la figure suivante, le saut de déplacement étant purement plastique $[\underline{u}] = [\underline{u}]^p$.

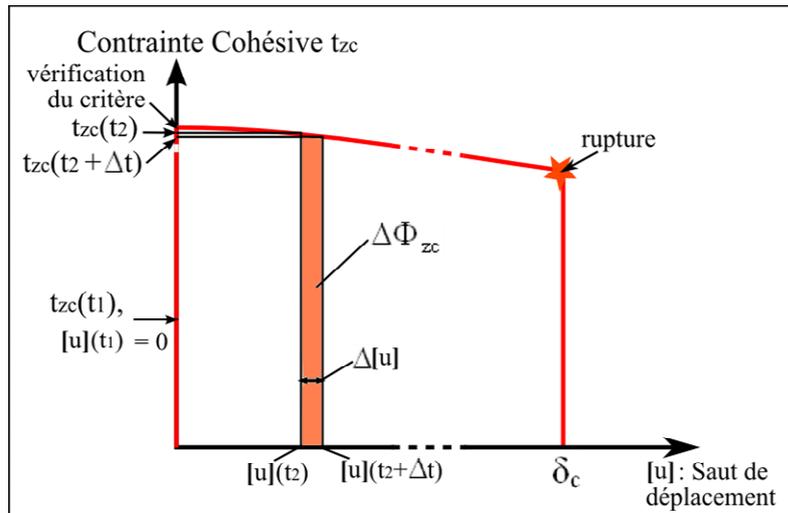


Figure II-3 - Calcul de la dissipation d'une zone cohésive plastique

3.3 Modèle de zone cohésive équivalent pour le modèle de Rousselier

Nous avons vu que l'écriture proposée du modèle de Rousselier le rend équivalent à un modèle de plasticité isotrope car la perte de rigidité vue par le matériau est causée uniquement par la plasticité. On peut donc suivre la démarche présentée pour une loi élastoplastique isotrope.

On fait l'hypothèse que l'énergie stockée dans la structure par écrouissage est nulle :

$$\psi_p(p) = 0 \quad (\text{II-32})$$

L'expression de l'énergie libre et de la dissipation φ_V du modèle de Rousselier devient donc :

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \frac{\underline{\underline{E}}}{\underline{\underline{\rho}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (\text{II-33})$$

$$\varphi_V = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^p \quad (\text{II-34})$$

L'incrément de dissipation sur un domaine de volume V donné se réduit donc à une composante plastique :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_V^p &= \int_V \int_{\Delta t} \varphi_V \, dt dV = \int_V \int_{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^p \, dt dV \\ \Delta\Psi &= \frac{1}{2} \int_V \int_{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^e \, dt dV \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

Un modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle de Rousselier aura donc les mêmes propriétés qu'un modèle de zone cohésive cohérent avec un modèle élastoplastique isotrope standard :

- Le saut de déplacement est entièrement plastique, on a :

$$[\underline{\underline{u}}]^p = [\underline{\underline{u}}] \quad (\text{II-36})$$

- L'énergie libre de la zone cohésive est nulle :

$$\psi_{zc} = 0 \quad (\text{II-37})$$

- L'incrément de dissipation associé à la zone cohésive vaut :

$$\Delta\Phi_{zc}^p = \int_{\Gamma_{zc}} \int_{\Delta t} \underline{\underline{t}}_{zc} \cdot [\underline{\underline{u}}]^p \, dt dS \quad (\text{II-38})$$

4. Construction d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle local : Cadre HPP

4.1 Equivalence énergétique des modélisations

C'est lorsque l'unicité de la solution est perdue que le modèle nécessite une régularisation pour préserver un problème bien posé. C'est donc ce critère, calculé sur le problème de référence dont les grandeurs sont repérées par l'indice RM, qui est retenu pour l'activation de la zone cohésive afin de prendre la relève du modèle continu non régularisé :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{loc}^\circ : \underline{\underline{D}}_{loc} < 0 \quad (\text{II-39})$$

Où $\underline{\underline{\sigma}}^\circ$ est une dérivée objective de la contrainte de Cauchy et $\underline{\underline{\sigma}}_{loc}$ et $\underline{\underline{D}}_{loc}$ sont respectivement la contrainte et la vitesse de déformation dans la zone de localisation du modèle de référence.

Lorsque le critère de non-unicité est vérifié, la déformation plastique localise alors que le solide environnant décharge, ce qui vaut aussi lorsque la zone cohésive s'active. Pour la modélisation de référence, toute la dissipation du barreau en traction se situe dans la zone de localisation ; pour la modélisation couplée (dont les grandeurs sont repérées par l'indice CM), elle est dans la zone cohésive. Ceci est traduit par la relation suivante :

$$\text{si } \underline{\underline{\sigma}}_{loc}^\circ : \underline{\underline{D}}_{loc} < 0 : \Delta\Phi_{CM}^p = \Delta\Phi_{RM}^p \quad (\text{II-40})$$

La construction de la loi cohésive cohérente est basée sur l'équivalence de l'énergie dissipée par les modèles définis. Afin de garantir l'équivalence de l'énergie totale \mathcal{E} entre une modélisation purement continue régularisée (Modélisation de Référence, RM) et une modélisation semi-continue (Modélisation Couplée, CM), c'est-à-dire, utilisant le même modèle continu non régularisé et un modèle de zone cohésive équivalent, il est nécessaire de conserver tous les termes de l'énergie (l'énergie libre Ψ , le travail des efforts extérieurs W_{ext} et la dissipation Φ) :

$$\mathcal{E} = \Psi - W_{\text{ext}} + \Phi \quad (\text{II-41})$$

Cette conservation de tous les termes de l'énergie à travers le changement de modélisation a été démontrée pour des modèles de comportement élastique endommageable, sans plasticité [Cazes2009] et avec plasticité [Cazes2010a]. Contrairement au cas élastoplastique pur, la présence d'un taux de restitution d'énergie élastique dans les modèles élastiques (-plastiques) endommageables permet d'obtenir la contrainte par dérivation de l'énergie élastique et de la relier au saut de déplacement élastique par l'intermédiaire d'une raideur cohésive. Dans ce cas, la démonstration repose le calcul de l'énergie libre et de la dissipation globale pour les deux approches. Celui-ci est basé sur les hypothèses suivantes:

- + Les déplacements et les rotations restent petits ;
- + Les actions extérieures sont des efforts imposés sur le bord Γ_F de la structure étudiée ;
- + Le chargement est proportionnel ;
- + Le matériau ne plastifie pas au cours d'une décharge.

Dans le cas d'un matériau élastoplastique sans endommagement, on peut poser des hypothèses similaires. Pour cela, on définit les expressions de l'énergie libre et de la dissipation globale. \underline{u}^r est le champ de déplacement résiduel sur la structure déchargée, ainsi, l'énergie libre de cette dernière (pour laquelle on a supposée qu'aucune énergie n'est stockée dans la microstructure) est :

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \underline{F}(\underline{u} - \underline{u}^r) dS \quad (\text{II-42})$$

Quant à l'incrément de dissipation globale, il vaut :

$$\Delta\Phi^p = \int_{\Gamma_F} \underline{F} \cdot \Delta\underline{u}^r dS \quad (\text{II-43})$$

En partant d'un état au temps t pour lequel l'équivalence énergétique est vérifiée et en imposant l'égalité de l'incrément de chargement et de dissipation

$$(\Psi_{\text{RM}}^t, W_{\text{ext,RM}}^t) = (\Psi_{\text{CM}}^t, W_{\text{ext,CM}}^t) \quad (\text{II-44})$$

$$\Delta\underline{F}_{\text{ext,RM}} = \Delta\underline{F}_{\text{ext,CM}} \quad (\text{II-45})$$

$$\Delta\Phi_{\text{RM}} = \Delta\Phi_{\text{CM}} \quad (\text{II-46})$$

on montre l'équivalence de l'énergie libre et du travail des forces extérieures à $t+\Delta t$:

$$(\Psi_{\text{RM}}^{t+\Delta t}, W_{\text{ext,RM}}^{t+\Delta t}) = (\Psi_{\text{CM}}^{t+\Delta t}, W_{\text{ext,CM}}^{t+\Delta t}) \quad (\text{II-47})$$

Sous l'hypothèse de chargement proportionnel, on peut écrire l'effort appliqué $\underline{F}_{\text{ext}}$ à l'aide d'un effort de référence constant \underline{F}_0 et d'un coefficient de chargement γ :

$$\underline{F}_{\text{ext,RM}} = \underline{F}_{\text{ext,CM}} = \underline{F}_{\text{ext}} = \gamma(t) \underline{F}_0 = \gamma \underline{F}_0 \quad (\text{II-48})$$

Ainsi, l'incrément des efforts extérieurs entre t et $t+\Delta t$ vaut

$$\Delta\underline{F}_{\text{ext,RM}} = \Delta\underline{F}_{\text{ext,CM}} = \Delta\underline{F}_{\text{ext}} = \Delta\gamma \underline{F}_0 \quad (\text{II-49})$$

Les efforts intérieurs peuvent quant à eux être mis sous la forme :

$$\underline{F}_{\text{int}} = \mathbf{K}(\underline{u} - \underline{u}^r); \quad \Delta \underline{F}_{\text{int}} = \mathbf{K}(\Delta \underline{u} - \Delta \underline{u}^r) \quad (\text{II-50})$$

Où \mathbf{K} est une rigidité élastique dépendant du module de Young et de la géométrie. Dans le cadre HPP, \mathbf{K} reste constante au cours du calcul. L'état initial étant le même pour les deux modélisations, on a :

$$\mathbf{K}_{\text{CM}} = \mathbf{K}_{\text{RM}} \quad (\text{II-51})$$

A l'équilibre on a naturellement :

$$\underline{F}_{\text{int}} = -\underline{F}_{\text{ext}} \quad (\text{II-52})$$

Lorsque le critère de non-unicité de la solution du problème est vérifié, on impose l'égalité des incréments de dissipation. Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\Delta \Phi_{\text{CM}}^p = \Delta \Phi_{\text{RM}}^p \quad (\text{II-53})$$

$$\int_{\Gamma_F} \underline{F}_{\text{CM}} \cdot \Delta \underline{u}_{\text{CM}}^r \, dS = \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{\text{RM}} \cdot \Delta \underline{u}_{\text{RM}}^r \, dS \quad (\text{II-54})$$

Soit en utilisant la relation (II-49) :

$$\int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} \gamma \Delta \underline{u}_{\text{CM}}^r \, dS = \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} \gamma \Delta \underline{u}_{\text{RM}}^r \, dS \quad (\text{II-55})$$

On peut également écrire l'énergie libre sous cette forme :

$$\Psi = \gamma \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} (\underline{u} - \underline{u}^r) \, dS \quad (\text{II-56})$$

D'où l'écriture de l'énergie libre au temps t :

$$\Psi_{\text{RM}}^t = \Psi_{\text{CM}}^t \quad (\text{II-57})$$

$$\gamma \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} (\underline{u}_{\text{RM}} - \underline{u}_{\text{RM}}^r) \, dS = \gamma \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} (\underline{u}_{\text{CM}} - \underline{u}_{\text{CM}}^r) \, dS \quad (\text{II-58})$$

De plus l'égalité des incréments de chargement se traduit par l'égalité des incréments d'effort intérieur :

$$\Delta \underline{F}_{\text{int,CM}} = \Delta \underline{F}_{\text{int,RM}} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{\text{CM}} (\Delta \underline{u}_{\text{CM}} - \Delta \underline{u}_{\text{CM}}^r) = \mathbf{K}_{\text{RM}} (\Delta \underline{u}_{\text{RM}} - \Delta \underline{u}_{\text{RM}}^r) \quad (\text{II-59})$$

Ainsi, l'imposition des incréments de chargement et de dissipation permet d'obtenir la même réponse en déplacement et donc la même réponse énergétique pour les deux modélisations :

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} (\underline{u}_{\text{RM}} - \underline{u}_{\text{RM}}^r + \Delta \underline{u}_{\text{RM}} - \Delta \underline{u}_{\text{RM}}^r) \, dS \\ &= \gamma \frac{1}{2} \int_{\Gamma_F} \underline{F}_{0\cdot} (\underline{u}_{\text{CM}} - \underline{u}_{\text{CM}}^r + \Delta \underline{u}_{\text{CM}} - \Delta \underline{u}_{\text{CM}}^r) \, dS \quad (\text{II-60}) \\ &\Rightarrow \Psi_{\text{RM}}^{t+\Delta t} = \Psi_{\text{CM}}^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

L'égalité de l'énergie libre et de la dissipation étant assurée, on a donc l'égalité du travail des efforts extérieurs :

$$W_{\text{ext,RM}}^{t+\Delta t} = W_{\text{ext,CM}}^{t+\Delta t} \quad (\text{II-61})$$

Dans le cadre de l'HPP, l'équivalence énergétique est donc bien assurée par la condition d'égalité des dissipations entre les deux modélisations.

Remarque sur l'application au modèle de Rousselier :

Dans la version HPP du modèle de Rousselier, la variation de la masse volumique est négligée, l'influence de la porosité ne joue que sur la fonction de charge. Dans ce cas, la

rigidité reste constante au cours du calcul, la démonstration est équivalente au cas élastoplastique isotrope standard.

4.2 Construction numérique de la loi cohésive cohérente

La construction de la loi cohésive est basée sur l'application du principe d'équivalence énergétique au calcul d'un cylindre en traction uniaxiale. Le principe est le même que dans [Cazes2010a], cependant, pour obtenir une loi cohérente avec le modèle continu de Rousselier, il n'y a qu'une unique composante de dissipation à identifier, celle-ci se réduisant à de la plasticité.

Deux méthodes éléments finis d'identification pour un calcul élastoplastique sont présentées dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. La première stratégie permet d'obtenir la loi cohésive comme un résultat du calcul à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. La deuxième méthode est une approche simplifiée basée sur les résultats de la démonstration et ceux obtenus avec la première méthode.

4.2.1 Problème de référence

4.2.1.1 Définition

L'étude porte sur un unique élément axisymétrique (Figure II-4) ayant pour longueur axiale la longueur caractéristique du matériau. Le choix de la longueur axiale est important, car elle correspond au choix de la taille du volume élémentaire représentatif des modèles basés sur la théorie de l'état local et joue ainsi un rôle direct sur la dissipation développée par la zone cohésive. Le volume et la section initiaux correspondant sont respectivement notés V_0 et S_0 , le volume et la section dans la configuration de référence sont quant à eux notés V et S . Sous l'hypothèse des petites perturbations, $V=V_0$ et $S=S_0$.

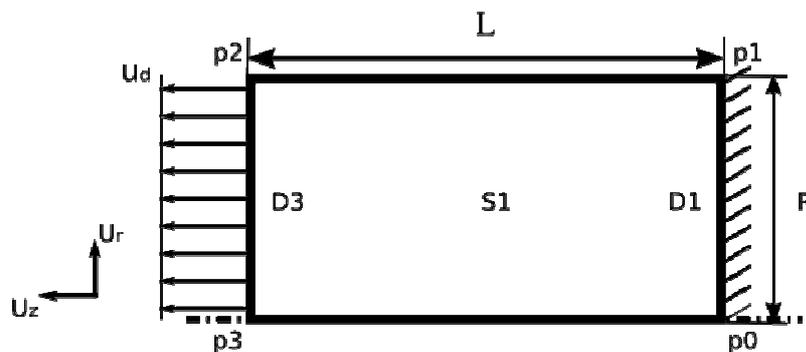


Figure II-4 – Modélisation axisymétrique du cylindre en traction

Le calcul est axisymétrique avec un appui bloquant le déplacement selon U_z sur la ligne D1. L'élément est un quadrangle à interpolation linéaire. Le chargement est imposé en déplacement selon U_z sur la ligne D3. Etant donné que le chargement subi par l'élément peut être assimilé à un chargement symétrique, les champs de déformation et de contrainte sont homogènes dans l'élément et son rayon R ne joue pas sur la loi cohésive obtenue.

Le calcul sur un élément unique permet de supprimer les problèmes de localisation et d'appliquer directement le principe d'équivalence des énergies mécaniques. En revanche, il met en évidence la non équivalence des problèmes, car si pour la modélisation de référence, il n'existe pas de décharge dans l'élément, pour la modélisation couplée, le volume décharge

lorsque la zone cohésive s'ouvre et dissipe de l'énergie (voir Figure II-5, temps t, cas d'un élément unique). En réalité il n'est pas possible d'avoir des modélisations parfaitement équivalentes, lorsque l'on modélise la zone de localisation avec une zone cohésive, on réduit le comportement d'un volume sur une surface. Il faut donc choisir entre garder ou supprimer la zone où la déformation aurait localisé si la zone cohésive n'était pas présente. Lorsqu'on étudie un barreau de longueur infinie, le choix fait n'a aucune incidence sur le résultat obtenu. Dans le cas d'une structure finie, afin de conserver l'énergie élastique présente dans le volume entourant la zone cohésive, il est plus judicieux de conserver la masse (le volume) initiale.

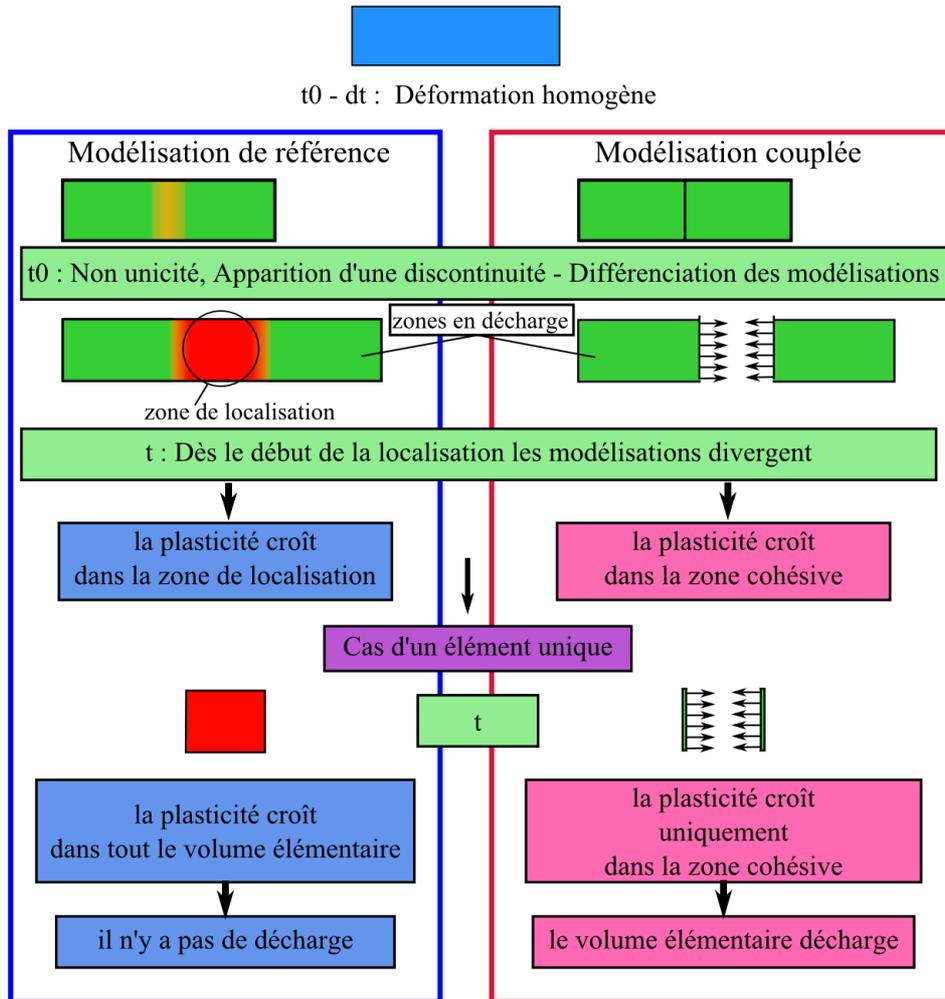


Figure II-5 - Comparaison des modélisations pour les HPP

4.2.1.2 Mise en équations

En supposant que les actions volumiques sont nulles, les équations du problème sont les suivantes :

$$\text{Equation d'équilibre : } \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{0}} \quad (\text{II-62})$$

$$\text{Conditions aux limites : } \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{u}}_d \text{ avec } \begin{cases} \underline{\underline{u}}_d = \underline{\underline{0}} & \text{sur } D1 \\ \underline{\underline{u}}_d = u_{d1} \underline{\underline{U}}_z & \text{sur } D3 \end{cases} \quad (\text{II-63})$$

$$\text{Comportement : } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e = \underline{\underline{L}}^{-1} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} ; \left\{ \begin{array}{l} \text{cas élastoplastique : } \underline{\underline{D}}^p = \underline{\underline{0}} \text{ si } F < 0 \\ \underline{\underline{D}}^p = \dot{p} \frac{\partial F}{\partial(\underline{\underline{\sigma}})} \text{ si } F = 0 \\ \text{cas Rousselier : } \underline{\underline{D}}^p = \underline{\underline{0}} \text{ si } F < 0 \\ \underline{\underline{D}}^p = \dot{p} \frac{\partial F}{\partial(\underline{\underline{\sigma}}/\rho)} \text{ si } F = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-64})$$

Où $\underline{\underline{L}}$ est l'opérateur élastique reliant la contrainte à la déformation élastique, dans le cas élastoplastique, on a $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{E}}$.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la formulation faible de l'équilibre est mieux adaptée à la résolution.

On note $\underline{\underline{u}}^*$, un champ de déplacement virtuel appartenant à l'ensemble U des champs de déplacements cinématiquement admissibles défini par :

$$\underline{\underline{u}} \in U = \{ \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_d \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (\text{II-65})$$

Où Γ_u est l'ensemble des points où le déplacement est imposé.

La traction axiale peut être imposée soit en déplacement, soit en effort. Dans le cas d'un effort imposé, $\underline{\underline{u}}_d$ est un vecteur nul correspondant à l'encastrement du cylindre. La forme incrémentale des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\underline{u}}}^*) dV = \int_{\Gamma_F} \delta \underline{\underline{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{u}}}^* dS \quad (\text{II-66})$$

Pour un solide soumis à des déplacements imposés, on remplace la condition d'admissibilité cinématique par un champ de multiplicateurs de Lagrange qui permet de relier la cinématique imposée aux efforts résultants. La forme incrémentale du principe des puissances virtuelles s'écrit alors :

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\dot{\underline{\underline{u}}}^*) dV = \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\underline{\lambda}} \cdot \dot{\underline{\underline{u}}}^* dS + \int_{\Gamma_u} \dot{\underline{\underline{\lambda}}}^* \cdot (\delta \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{\delta u}}_d) dS \quad (\text{II-67})$$

Où $\underline{\underline{\lambda}}$ est le champ des multiplicateurs de Lagrange associé au champ de déplacement imposé, correspondant à l'opposé du champ de résultante aux points d'application et $\dot{\underline{\underline{\lambda}}}^*$ le champ virtuel.

4.2.1.3 Discrétisation des équations

On peut supposer un comportement incrémental linéaire. Dans le cas où la traction est imposée en déplacement, l'expression discrétisée de la forme faible de l'équilibre est :

$$[\mathbf{K}]\{\delta \mathbf{U}\} - [\mathbf{A}]^T \{\delta \Lambda\} = \{0\} \quad (\text{II-68})$$

$$[\mathbf{A}]\{\delta \mathbf{U}\} = \{\delta \mathbf{U}_d\} \quad (\text{II-69})$$

Où $\{\mathbf{U}\}$, $\{\mathbf{U}_d\}$ et $\{\Lambda\}$ sont respectivement les vecteurs nodaux du déplacement, du déplacement imposé et des multiplicateurs de Lagrange, $[\mathbf{K}]$ est la rigidité calculée à partir du tenseur

élastique, $[A]$ est l'opérateur sélectionnant les degrés de liberté sur lesquels les conditions de liaison sont appliquées. L'équation (II-68) correspond à l'équilibre mécanique entre efforts internes et efforts de liaison. L'équation (II-69) correspond aux déplacements imposés par le champ de multiplicateurs de Lagrange. Finalement, le système à résoudre pour le problème de référence s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ -\delta \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} \quad (\text{II-70})$$

Pour une traction imposée en effort, le système à résoudre se réduit à :

$$[\mathbf{K}]\{\delta \mathbf{U}\} = \{\delta \mathbf{F}\} \quad (\text{II-71})$$

Bien que le système à résoudre soit légèrement plus simple que dans le cas d'un déplacement imposé, appliquer un effort dans un problème avec adoucissement nécessite de mettre un pilotage de l'effort selon la déformation.

4.2.2 Problème avec zone cohésive

4.2.2.1 Définition

La zone cohésive peut être modélisée comme une action extérieure appliquée sur les bords de la discontinuité. Le cylindre étudié étant homogène, il est nécessaire de choisir le lieu d'insertion de la zone cohésive. Afin de conserver un problème symétrique, on choisit de placer la zone cohésive au centre du cylindre coupé en deux morceaux similaires.

Les équations définissant le problème de référence sont conservées mais doivent être complétées afin de prendre en compte la présence de la zone cohésive.

4.2.2.2 Mise en équations

A l'équilibre, efforts surfaciques de la zone cohésive et du cylindre aux frontières de la zone cohésive sont égaux, d'où l'équation supplémentaire définissant l'état à la frontière de la zone cohésive :

$$\underline{t}_{zc} = \underline{\underline{\sigma}}_{CM}^- \cdot \underline{n}^- = -\underline{\underline{\sigma}}_{CM}^+ \cdot \underline{n}^+ \text{ sur } \Gamma_{zc} \quad (\text{II-72})$$

Finalement, le problème avec zone cohésive donne l'expression suivante du Principe des Puissances virtuelles dans le cas d'une traction imposée en déplacement :

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{\dot{u}}^*) dV = \int_{\Gamma_{zc}} \delta \underline{t}_{zc} \cdot [\underline{\dot{u}}](\underline{\dot{u}}^*) dS + \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\lambda} \cdot \underline{\dot{u}}^* dS + \int_{\Gamma_u} \underline{\dot{\lambda}}^* \cdot (\delta \underline{u} - \delta \underline{u}_d) dS \quad (\text{II-73})$$

Dans le cas d'un barreau en traction axiale traversé perpendiculairement par une zone cohésive, on peut sortir $[\underline{\dot{u}}]^p$ de l'intégrale sur la surface dans l'expression (II-38) donnant la dissipation développée par la zone cohésive. En effet, le problème étant symétrique et les grandeurs homogènes dans la section transversale, le saut de déplacement est constant sur toute la surface. Ainsi, si on écrit l'égalité des incréments de dissipation, on obtient l'expression de l'incrément de saut de déplacement plastique :

$$\text{si } \underline{\underline{\sigma}}_{RM}^\circ : \underline{\underline{D}}_{RM} < 0 : \Delta[\underline{u}]^p = \frac{\Delta \Phi_{RM}^p}{F_{zc}} \underline{n} \quad (\text{II-74})$$

Où $\Delta\Phi_{RM}^p$ est calculé de manière dite explicite, c'est-à-dire à l'aide de l'effort/la contrainte au début du pas de chargement :

$$\Delta\Phi_{RM}^p = \int_V \underline{\sigma}_{RM}(t) : \left(\int_{\Delta t} \underline{D}_{RM}^p dt \right) dV \quad (\text{II-75})$$

On utilise cette approche qui consiste à calculer l'incrément de dissipation à l'aide de l'effort au début du pas car c'est le seul instant où l'effort cohésif (et donc la contrainte cohésive) sont connues de manière certaine. Afin de calculer l'incrément de saut de déplacement correctement lorsque l'unicité de la solution est perdue, il est nécessaire de calculer la dissipation de la même manière pour les deux modélisations, ainsi

$$F_{zc} = \int_{\Gamma_{zc}} \underline{t}_{zc}(t) dS = F_{CM}(t) \quad (\text{II-76})$$

L'incrément de dissipation pour la modélisation couplée est la somme de la dissipation du solide et de celle de la zone cohésive :

$$\Delta\Phi_{CM}^p = \int_V \underline{\sigma}_{CM}(t) : \left(\int_{\Delta t} \underline{D}_{CM}^p dt \right) dV + \int_{\Gamma_{zc}} \underline{t}_{zc}(t) \cdot \left(\int_{\Delta t} [\underline{\dot{u}}]^p dt \right) dS \quad (\text{II-77})$$

Il faut noter que lorsque la zone cohésive s'ouvre et dissipe de l'énergie, le solide décharge ; ainsi à chaque incrément de chargement seul un des deux termes de la somme est non nul dans le calcul de la modélisation couplée.

4.3 Méthode de construction d'une loi cohésive cohérente

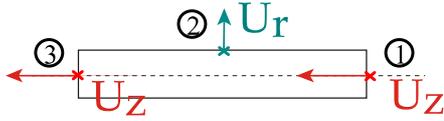
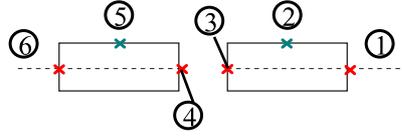
On présente la méthode pour un matériau élastoplastique incompressible pour lequel deux algorithmes d'identification ont été appliqués, correspondant à deux modélisations de la zone cohésive dans le problème équivalent. Le premier algorithme permet de déterminer la loi cohésive comme la solution du problème grâce à l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Le second utilise une méthode simplifiée pour laquelle l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange est abandonnée. Une comparaison des résultats des deux approches est ensuite menée afin de valider l'utilisation de la méthode simplifiée pour le calcul d'une loi cohésive cohérente avec le modèle de Rousselier.

4.3.1 Méthode utilisant des multiplicateurs de Lagrange

La méthode utilisant les multiplicateurs a été développée sous Matlab en collaboration avec Fabien Cazes dans un code éléments finis en 1D et 2D (axisymétrie) spécialement dédié permettant de calculer une loi cohésive d'ouverture à partir du calcul d'un cylindre en traction. Le code permet de plus d'effectuer des calculs non-locaux [Cazes2010b] qui ne seront pas présentés ici, car ils n'ont pas été appliqués au modèle de Rousselier.

Le code éléments finis implanté dans Matlab est détaillé en Annexe A. L'identification de la loi cohésive pour un modèle élastoplastique a été faite sur un cylindre à un élément pour le problème de référence et deux éléments pour le problème équivalent avec zone cohésive. Les éléments sont des éléments axisymétriques linéaires à 3 nœuds. Les nœuds 1 ;3 ;4 et 6 ont un degré de liberté selon U_z , les nœuds 2 et 5 un degré de liberté selon U_r .

Problème de référence


 Problème équivalent
avec zone cohésive


\times : Noeud avec degré de liberté selon U_z \ast : Noeud avec degré de liberté selon U_r

Figure II-6 - Discrétisation du problème de barre en traction pour la méthode avec multiplicateurs de Lagrange

Ici, la zone cohésive est appliquée comme une ouverture imposée entre les lèvres de la discontinuité (nœuds 3 et 4) à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. De plus la traction est imposée en effort. Le problème correspondant se traduit par les équations suivantes :

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{u}}^*) dV = \int_{\Gamma_F} \delta \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\dot{u}}}^* dS + \int_{\Gamma_{zc}} \delta \underline{\underline{\mu}} \cdot [\underline{\underline{\dot{u}}}] (\underline{\underline{u}}^*) dS + \int_{\Gamma_{zc}} \underline{\underline{\dot{\mu}}}^* \cdot (\delta [\underline{\underline{u}}] (\underline{\underline{u}}) - \delta \underline{\underline{v}}) dS \quad (\text{II-78})$$

Où $\underline{\underline{\mu}}$ est le champ des multiplicateurs de Lagrange associé à la zone cohésive et $\underline{\underline{v}}$ correspond à l'incrément de saut de déplacement tiré de l'incrément de dissipation du modèle de référence. La résolution de l'équilibre permet de définir $\underline{\underline{\mu}}$ comme le champ des efforts surfaciques résultant au niveau de la discontinuité :

$$\delta \underline{\underline{\mu}} = \delta \underline{\underline{t}}_{zc} \quad (\text{II-79})$$

Sous sa forme discrétisée, la formulation faible de l'équilibre devient :

$$[\mathbf{K}]\{\delta \mathbf{U}\} - [\mathbf{T}]^T \{\delta \mathbf{M}\} = \{\delta \mathbf{F}\} \quad (\text{II-80})$$

$$[\mathbf{T}]\{\delta \mathbf{U}\} = \{\delta \mathbf{V}\} \quad (\text{II-81})$$

Où $\{\mathbf{M}\}$ est le vecteur nodal des multiplicateurs de Lagrange associés à la zone cohésive, $\{\mathbf{V}\}$ est le correspondant nodal de $\underline{\underline{v}}$ et $[\mathbf{T}]$ est l'opérateur matriciel permettant de calculer le saut de déplacement entre les nœuds 3 et 4 à partir du déplacement discret $\{\mathbf{U}\}$:

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}\} \quad (\text{II-82})$$

La zone cohésive est définie entre les nœuds 3 et 4 du modèle couplé, de plus, seule la composante axiale du saut et de l'effort est non nulle. Le saut de déplacement et l'effort cohésif associé sont donc des scalaires. Il en va de même pour V qui est défini par :

$$\delta V = \begin{cases} \frac{\delta \Phi_V^p}{M} & \text{si } \underline{\underline{\sigma}}_{RM} : \underline{\underline{D}}_{RM} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II-83})$$

Le calcul de δV au cours des itérations est fait de manière explicite, c'est-à-dire que la valeur de M utilisée est la valeur d'effort au début du pas.

Finalement, dans ce cas, le système discret à résoudre se résume à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ -\delta \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{F} \\ \delta \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-84})$$

Dans le système à résoudre on voit que l'incrément d'effort cohésif est inséré parmi les inconnues du problème en tant que multiplicateur de Lagrange, afin d'assurer l'équilibre. La validité du calcul de la loi cohésive est assurée lorsque l'équilibre est atteint. En effet, lorsque l'équilibre est atteint, l'égalité des incréments de dissipation est automatiquement assurée :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{zc}^p &= M\delta[U] \\ &= \delta\Phi_V^p \quad \text{si } \sigma_{loc}^o : \underline{D}_{loc} < 0 \end{aligned} \quad (\text{II-85})$$

Pour obtenir la contrainte cohésive de traction, il suffit de diviser l'effort cohésif par la section du cylindre :

$$t_{zc} = \frac{M}{S} \quad (\text{II-86})$$

4.3.2 Méthode simplifiée utilisant Cast3M

La méthode utilisant les multiplicateurs de Lagrange permet de déterminer la loi cohésive entièrement à partir du chargement du problème de référence et de l'incrément de dissipation. On a montré auparavant, dans la démonstration puis dans la méthode d'identification complète que si l'on applique l'incrément de saut de déplacement calculé à partir de l'incrément de dissipation tiré du problème de référence, on obtient la même réponse mécanique pour le problème couplé que pour le problème de référence ainsi que le même incrément de dissipation.

La méthode simplifiée tire partie de ce principe, en appliquant la traction en déplacement plutôt qu'en effort. Le déplacement imposé sur la modélisation couplée est calculé à l'aide de celui de la modélisation de référence et du saut de déplacement calculé à partir de l'incrément de dissipation du modèle de référence. Cependant, dans ce cas, la validité de la loi n'est plus assurée par la résolution de l'équilibre. Il est donc nécessaire d'ajouter un critère de validité sur l'effort et la dissipation pour assurer l'équivalence énergétique.

On donne donc en entrée du calcul par modélisation couplée, l'incrément de saut de déplacement calculé à partir de l'incrément de dissipation de la modélisation de référence selon la relation (II-74) (si (II-39) est vrai). On vérifie ensuite qu'on obtient bien la même dissipation, la même énergie libre et le même effort pour les deux modélisations, ces chargements et conditions de validité sont résumés par les relations suivantes :

$$\text{Chargement axial : } u_{dl}^{RM}(t + \Delta t) = u_{dl}^{RM}(t) + \Delta u_{dl}^{RM}; \quad u_{dl}^{CM}(t + \Delta t) = u_{dl}^{CM}(t) + \Delta u_{dl}^{RM} - \Delta[u]^p \quad (\text{II-87})$$

$$\text{On rappelle que : } \underline{u}_d = u_{dl} \underline{U}_z \quad (\text{II-88})$$

$$\text{Conditions de validité : } \max(\text{err}(\Psi^{t+\Delta t}); \text{err}(F^{t+\Delta t}); \text{err}(\Phi^{t+\Delta t})) < \omega_R \quad (\text{II-89})$$

Où $\text{err}(G) = \left| \frac{G_{MR} - G_{MC}}{\max(G_{MR})} \right|$ et $\omega_R = 5.e-3$ est la tolérance admise pour valider le calcul.

Ici, les effets de la zone cohésive sont donc appliqués de manière implicite à travers la modification du déplacement axial imposé. Si l'équivalence énergétique est obtenue, la section du solide de la modélisation permet d'obtenir la même contrainte cohésive qu'avec la méthode utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Le problème correspondant se traduit par les équations suivantes :

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{u}^*) dV = \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\underline{\lambda}} \cdot \underline{\dot{u}}^* dS + \int_{\Gamma_u} \underline{\dot{\lambda}}^* \cdot (\delta \underline{u} - \delta \underline{u}_d^{CM}) dS \quad (\text{II-90})$$

Sous sa forme discrétisée, la formulation faible de l'équilibre devient :

$$[\mathbf{K}] \{ \delta \mathbf{U} \} - \{ \delta \Lambda \} = \{ 0 \} \quad (\text{II-91})$$

$$[\mathbf{A}] \{ \delta \mathbf{U} \} = \{ \delta \mathbf{U}_d^{CM} \} \quad (\text{II-92})$$

Finalement, dans ce cas, le système discret à résoudre se résume à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ -\delta \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \mathbf{U}_d^{CM} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-93})$$

Pour obtenir la contrainte cohésive de traction, il suffit de diviser la réaction Λ_R (multiplicateur de Lagrange au point où la traction est imposée) par la section du cylindre :

$$t_{zc} = \frac{\Lambda_R}{S} \quad (\text{II-94})$$

L'algorithme de cette procédure d'identification est présenté sur le schéma (Figure II-7) page suivante.

4.3.3 Application à un modèle élastoplastique linéaire par morceau

Afin de valider l'approche simplifiée utilisée pour le modèle de Rousselier, les résultats des deux méthodes sont ici comparés en HPP sur une loi de comportement élastoplastique linéaire par morceau possédant une phase plastique durcissante suivie d'une phase plastique adoucissante.

Les caractéristiques du matériau ainsi que sa courbe de traction sont présentées respectivement dans les tableaux II-1 et II-2.

Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Limite élastique (MPa)	Longueur caractéristique (mm)
200	0,3	320	0,02

Tableau II-1 - Caractéristiques matériaux pour la loi élastoplastique linéaire par morceau

Déformation (%)	0	0,160	1,609	2,489	30
Contrainte (MPa)	0	320	400	438	10

Tableau II-2 – Courbe de traction pour la loi élastoplastique linéaire par morceau

4.3.3.1 Méthode à Multiplicateurs de Lagrange

Pour ce calcul l'erreur tolérée sur les différents résidus est 1.e-6. La taille des incréments de chargement est gérée automatiquement et a mené à un nombre de pas de calcul de 2195. L'écoulement est calculé sans sous-incrémentation.

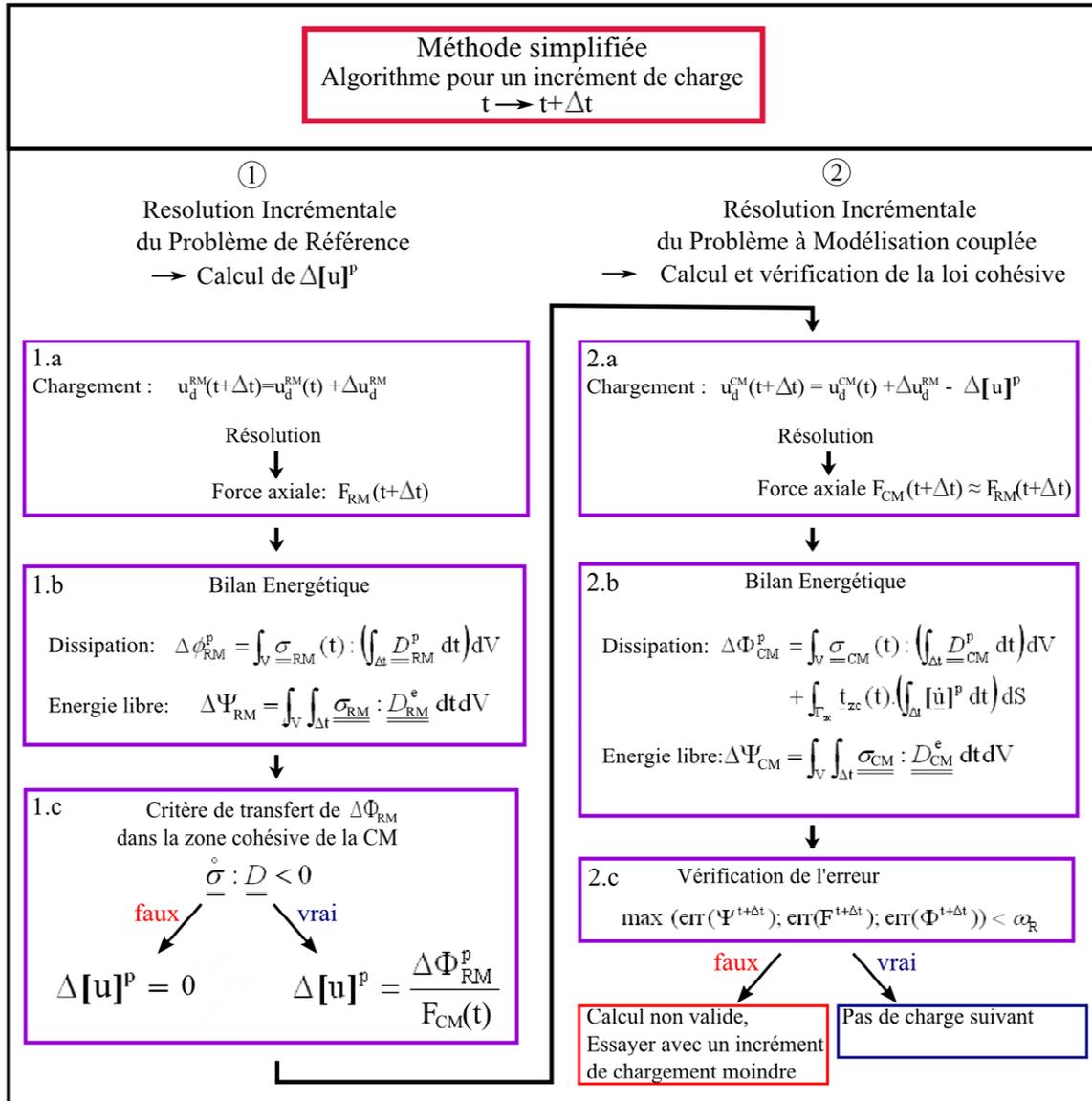


Figure II-7 - Méthode simplifiée : Algorithme pour un incrément de charge

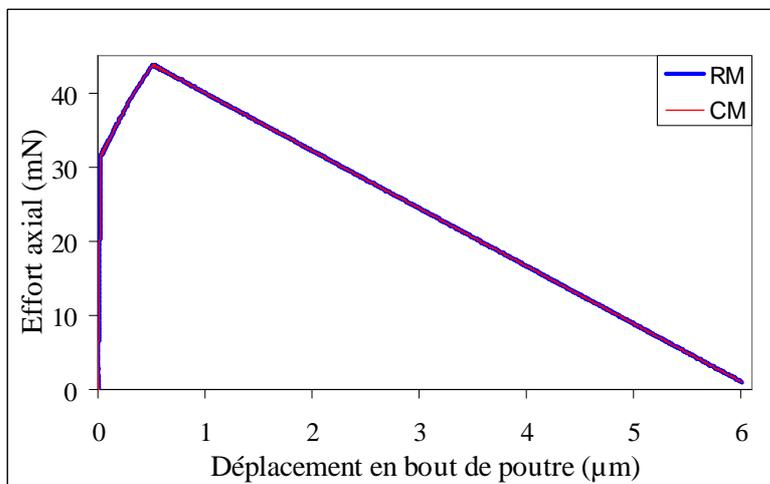


Figure II-8 – Réponse mécanique des deux modélisations
Méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau

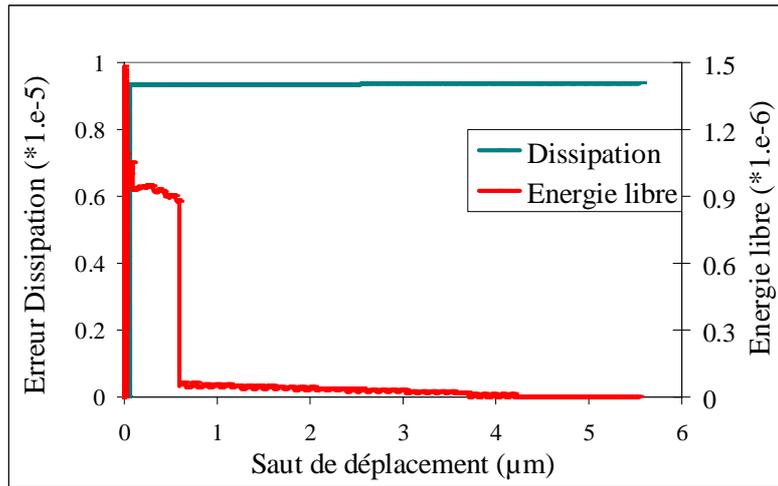


Figure II-9 – Erreur sur les énergies

Méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau

La méthode permet bien de retrouver la même réponse mécanique et énergétique pour les deux modélisations (Figure II-8). En réalité, l'erreur sur l'incrément de dissipation est pilotée par le critère de convergence de l'algorithme d'équilibre et reste ainsi inférieure à $1e-5$, comme on peut le voir sur la figure II-9. Ceci permet d'assurer une erreur maximum de $1,5.10^{-6}$ sur l'énergie libre et ainsi sur l'effort.

4.3.3.2 Méthode simplifiée

Le calcul a été fait avec une erreur autorisée sur le calcul de l'équilibre de $1.e-6$. La liste de pas de temps est donnée au début du calcul et comporte 990 incréments.

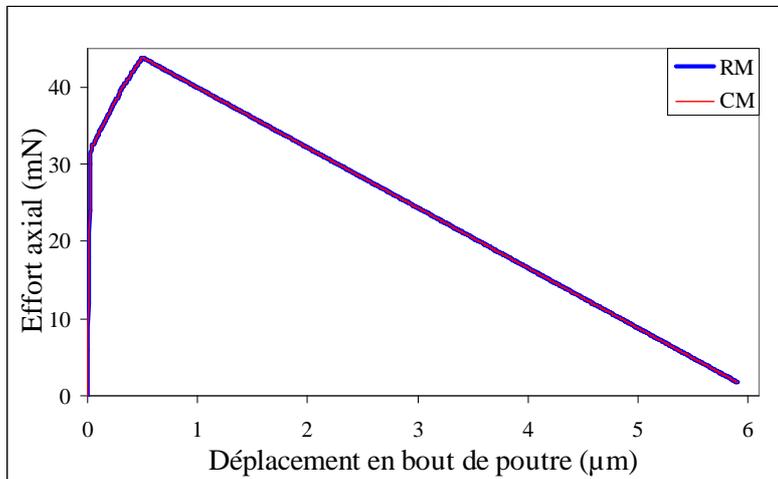


Figure II-10 - Réponse mécanique des deux modélisations pour la méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau

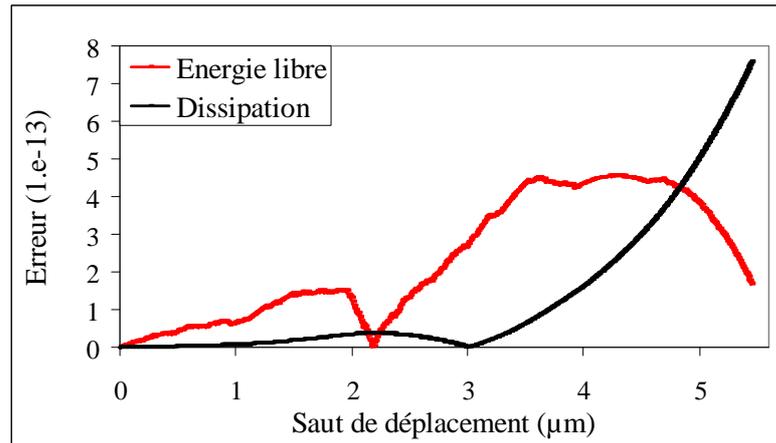


Figure II-11 - Erreur sur les énergies en fonction du saut de déplacement pour la méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau

De même que pour la première méthode, la méthode simplifiée permet de construire une modélisation couplée cohérente avec la modélisation de référence, leur réponse mécanique se superpose (Figure II-10). L'erreur sur les énergies est négligeable comme le montre la courbe sur la figure II-11. La méthode semble donc valide pour construire une loi cohésive d'ouverture.

4.3.3.3 Comparaison des résultats, Loi cohésive obtenue

Les deux méthodes permettent de résoudre le problème de référence avec des résultats proches. Du point de vue de l'erreur obtenue entre la modélisation couplée et le problème de référence, deux points sont marquants :

- + la résolution des problèmes avec la méthode à Multiplicateurs de Lagrange permet d'obtenir une erreur quasi constante au cours du calcul ;
- + l'erreur sur les énergies obtenue par la méthode simplifiée est beaucoup plus faible que pour la méthode à Lagrangien.

Comme cela a déjà été énoncé précédemment, la constance de l'erreur dans le cas de la méthode à Multiplicateurs de Lagrange est assurée par la tolérance choisie pour la résolution de l'équilibre. Bien que cette erreur soit faible elle est beaucoup plus élevée que pour la méthode simplifiée. Ceci est dû au choix de ne pas sous-incrémenter pour procéder à l'écoulement. Dans Cast3M, l'écoulement est sous-incrémenté de manière automatique jusqu'à obtention de la tolérance souhaitée.

Finalement, dans le cadre de petites perturbations, les deux méthodes permettent d'obtenir une loi cohésive cohérente avec le modèle volumique de référence, comme on le voit ici pour la loi de comportement élastoplastique linéaire par morceau étudiée ici.

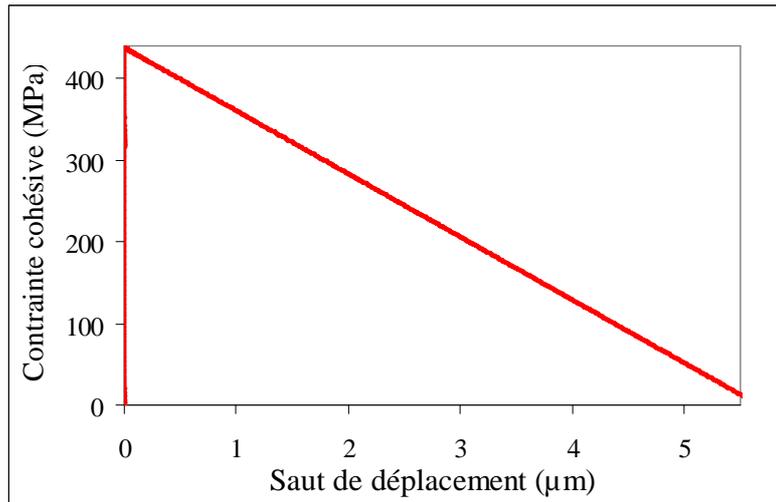


Figure II-12 – Loi cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique non linéaire (HPP)

Comme attendu, le saut de déplacement reste nul (la zone cohésive est fermée) jusqu'à vérification du critère de non unicité de la solution du problème de référence. Ensuite la loi cohésive est purement adoucissante.

5. Construction d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle local : Cadre des grandes transformations

5.1 Equivalence énergétique des modélisations

Dans le cas de grands déplacements, les sections varient au cours du temps, on écrit donc l'incrément de dissipation globale comme une intégrale sur Δt :

$$\Delta\Phi^p = \int_{\Delta t} \int_{\Gamma_F(t)} \underline{F} \cdot \Delta \underline{u}^r dS dt \quad (\text{II-95})$$

De plus la rigidité, fonction de la géométrie, n'est plus constante au cours du calcul. Ainsi les deux problèmes ont des rigidités différentes dès que le critère d'activation de la zone cohésive est vérifié puisque, dans la modélisation couplée, le volume fin dans lequel a lieu la localisation de la déformation est modélisée par une zone cohésive qui est un modèle surfacique (figure II-13). La présence d'une variable supplémentaire nécessite alors l'ajout d'une condition supplémentaire lors du transfert de l'énergie de la modélisation de référence à la modélisation couplée.

On a vu dans le cadre de l'HPP qu'on conserve l'équivalence énergétique des modélisations lorsque l'on impose l'égalité du chargement et des incréments de dissipation. Ceci est possible car la rigidité est la même pour les deux solides. Afin de préserver l'équivalence énergétique dans le cas d'une formulation Lagrangienne réactualisée, pour laquelle la configuration géométrique de référence est prise au début du pas de calcul, on doit donc imposer en plus l'égalité de la rigidité pour les deux problèmes. La contrainte dans le solide de référence et dans le solide support de la zone cohésive sont donc différentes.

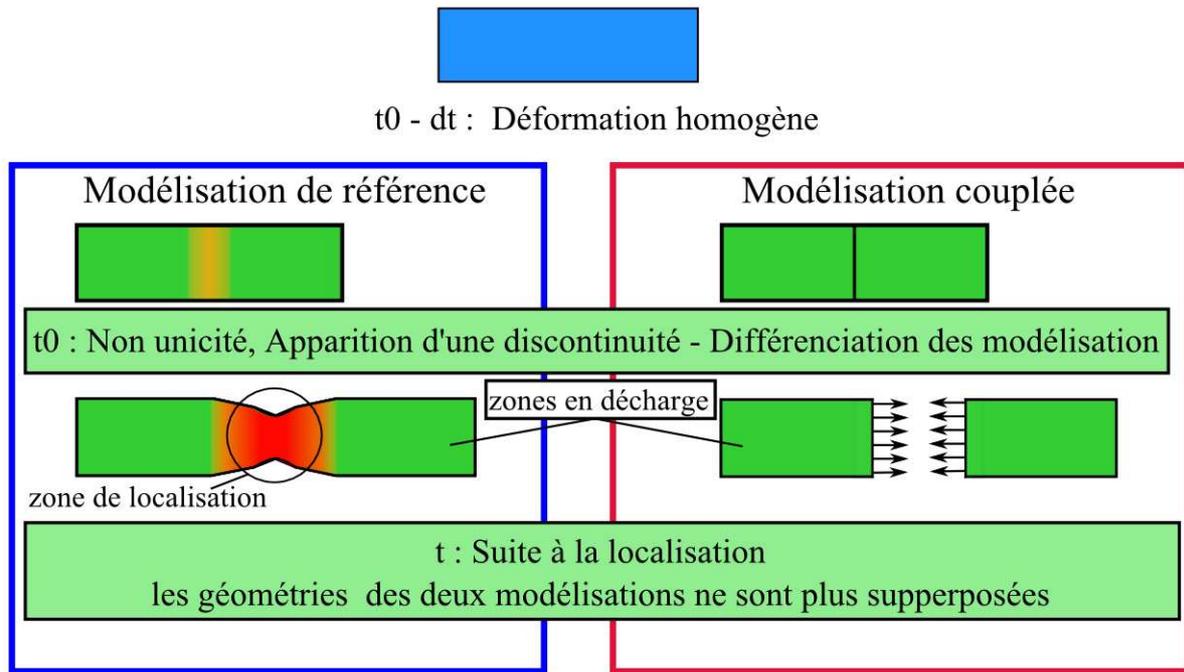


Figure II-13 - Comparaison des géométries pour les deux modélisations

En résumé, l'équivalence énergétique pour un modèle de référence élastoplastique est assurée sous les conditions suivantes :

$$(\Psi_{RM}^t, W_{ext, RM}^t) = (\Psi_{CM}^t, W_{ext, CM}^t) \quad (II-96)$$

$$\Delta F_{ext, RM} = \Delta F_{ext, CM} \quad (II-97)$$

$$\Delta \Phi_{RM} = \Delta \Phi_{CM} \quad (II-98)$$

$$\mathbf{K}_{CM} = \mathbf{K}_{RM} \quad (II-99)$$

Pour le modèle de Rousselier, on remarque que la différence entre la géométrie du modèle de référence et celle du modèle couplé est aussi due à la croissance des cavités. Pour le modèle de référence, la porosité continue de croître, alors que dans le solide de la modélisation couplée, la porosité est gelée par la décharge. La condition d'égalité des rigidités permet également de palier cette différence de comportement.

5.2 Construction numérique de la loi cohésive cohérente

L'adaptation de la méthode pour la rupture ductile nécessite de faire des calculs permettant de prendre en compte de grandes transformations. Pour un modèle élastoplastique isotrope standard, la difficulté réside dans la prise en compte de géométries variables au cours du calcul d'identification. Pour le modèle de Rousselier, la perte de rigidité due à la croissance de la porosité joue aussi un rôle important.

La prise en compte des grandes transformations est obtenue à l'aide d'une formulation Lagrangienne réactualisée. Afin de conserver un formalisme similaire au cas des petites perturbations, cette formulation est combinée à une hypothèse de petits incréments de déformation.

5.2.1 Problème de référence

5.2.1.1 Définition

Le problème de référence est le même que dans la section précédente (voir Figure II-4), cependant, la géométrie évolue au cours du temps, ainsi $V \neq V_0$ et $S \neq S_0$.

5.2.1.2 Mise en équations

Les équations restent les mêmes que dans le cadre HPP, cependant la configuration de référence est celle au début de l'incrément.

5.2.1.3 Discrétisation des équations

En prenant la configuration au début du pas pour configuration de référence et pour des incréments de chargement vérifiant l'hypothèse des petites perturbations, la discrétisation proposée précédemment est valide dans le cas des HPP comme dans le cas de la formulation lagrangienne réactualisée.

5.2.2 Problème avec zone cohésive

Afin d'assurer l'équivalence énergétique entre les modélisations, il faut ajouter la condition d'égalité de la rigidité aux équations du problème avec zone cohésive dans le cas HPP. Finalement, la mise en équation se réduit à :

$$\int_V \delta \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{u}^*) dV = \int_{\Gamma_{zc}} \delta \underline{t}_{zc} \cdot [\underline{\dot{u}}](\underline{u}^*) dS + \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\lambda} \cdot \underline{\dot{u}}^* dS + \int_{\Gamma_u} \underline{\dot{\lambda}}^* \cdot (\delta \underline{u} - \underline{\delta u}_d) dS \quad (\text{II-100})$$

$$\text{si } \underline{\underline{\sigma}}_{\text{RM}} : \underline{\underline{D}}_{\text{RM}} < 0 : \Delta[\underline{u}]^p = \frac{\Delta \Phi_{\text{RM}}^p}{F_{zc}} \underline{n} \quad (\text{II-101})$$

$$\mathbf{K}_{\text{CM}} = \mathbf{K}_{\text{RM}} \quad (\text{II-102})$$

Pour imposer la condition (II-102) en conservant la réponse du solide support de la zone cohésive, les modules élastiques dans ce volume sont recalculés. Ainsi, la surface support de la zone cohésive est cohérente avec celle sur laquelle va être définie la zone cohésive dans le calcul sur structure réelle.

5.2.3 Méthode utilisant des multiplicateurs de Lagrange

Pour cette méthode, l'égalité des rigidités est assurée en modifiant directement les différents termes du tenseur de Hooke. Le problème de traction uniaxiale n'entraîne que des déformations longitudinales. Le problème axisymétrique équivalent impose que les composantes radiales ε_{rr} et tangentielles $\varepsilon_{\theta\theta}$ soient égales. Ainsi le tenseur axisymétrique a une forme particulière de 2*2 permettant d'obtenir les contraintes directement à partir de la déformation élastique axiale et radiale :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz}^e \\ 2\varepsilon_{rr}^e \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{E}_{\text{num}} \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{num}}^e \end{aligned} \quad (\text{II-103})$$

La rigidité élémentaire élastique initiale associée, dont le calcul est détaillé en annexe A, a la forme suivante :

$$[\mathbf{K}_{el}] = \pi \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} & -2\lambda R & -(\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} \\ -2\lambda R & 4(\lambda + \mu)L & 2\lambda R \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} & 2\lambda R & (\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{II-104})$$

Où R et L sont respectivement le rayon et la longueur de l'élément.

Dans le cas d'un matériau élastique isotrope standard, l'opérateur permettant d'ajuster le tenseur de Hooke est :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{S_{RM} * L_{CM}}{L_{RM}} & \frac{R_{RM}}{L_{RM}} \\ S_{CM} & L_{RM} & R_{CM} \\ \frac{R_{RM}}{L_{RM}} & L_{RM} & R_{CM} \\ R_{CM} & L_{CM} & L_{CM} \end{bmatrix} \quad (\text{II-105})$$

$$\mathbf{E}_{num,cor} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{num} \quad (\text{II-106})$$

Où \cdot est le produit de Hadamard, ou produit composante par composante. Le tenseur de Hooke corrigé n'est donc plus isotrope. Pour ce problème, ce choix n'a pas d'impact sur le résultat car la pression radiale est nulle.

5.2.4 Méthode simplifiée utilisant Cast3M

Dans ce cas on modifie directement les modules d'élasticité, de cette manière le comportement reste isotrope. L'égalité des rigidités est ici imposée à travers la condition d'égalité des incréments d'effort. Cette approche incrémentale a été choisie afin d'être cohérent avec l'algorithme de résolution de Cast3M qui procède par incrémentation de la contrainte de Cauchy au cours du calcul.

Dans le cas d'un matériau élastoplastique incompressible, les relations donnant les coefficients de Lamé sont :

$$\begin{cases} \Delta F_{CM} = \Delta F_{RM} \\ F_{r RM} = \Delta F_{r RM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \frac{\Delta F_{z RM}}{S_{CM}} (\Delta \varepsilon_{z CM}^e - \Delta \varepsilon_{r CM}^e) \\ \lambda = -2\mu \frac{\Delta \varepsilon_{r CM}^e}{\Delta \varepsilon_{z CM}^e + 2\Delta \varepsilon_{r CM}^e} \end{cases} \quad (\text{II-107})$$

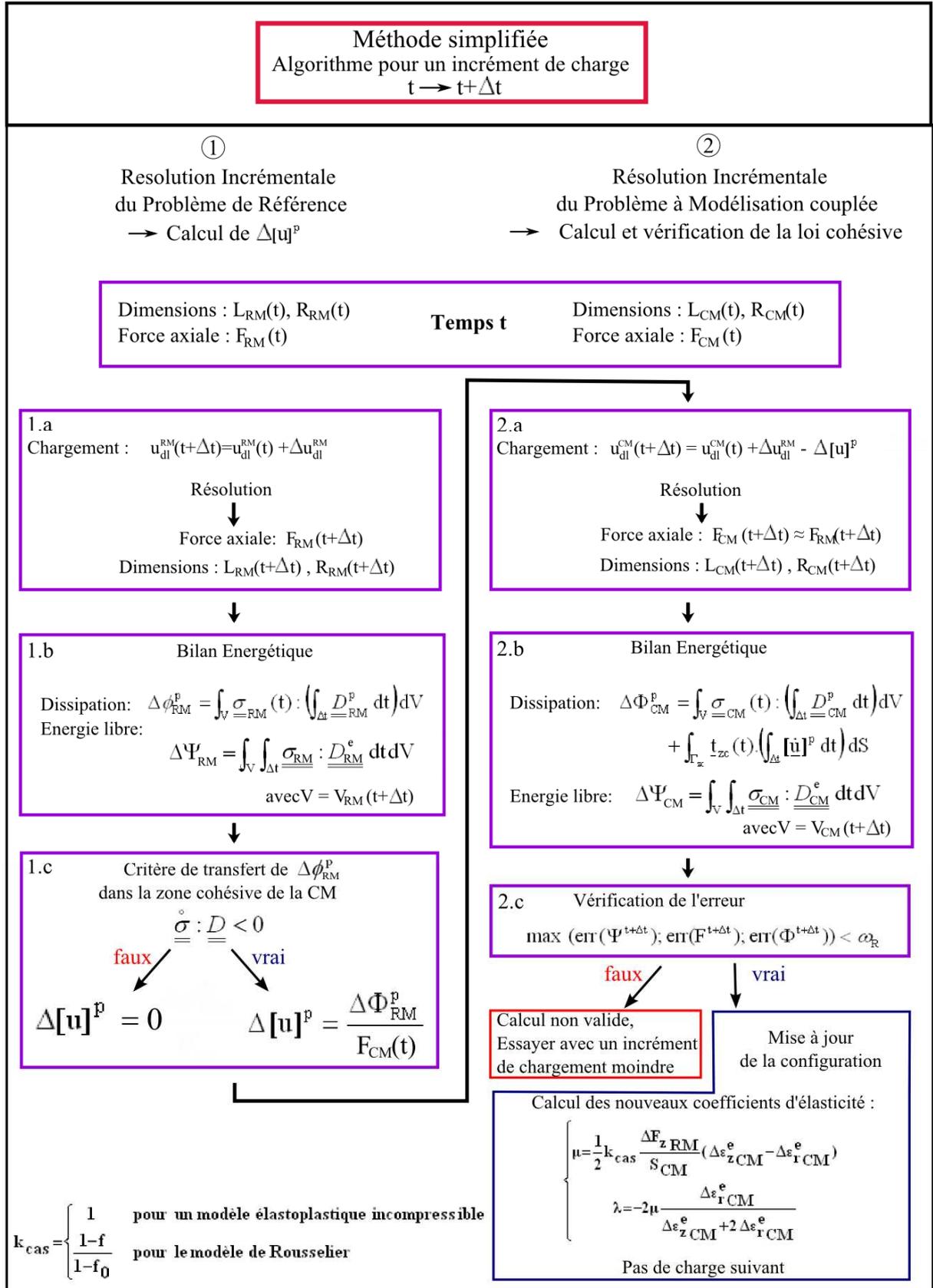


Figure II-14 - Méthode simplifiée en formulation lagrangienne réactualisée

Dans le cas du modèle de Rousselier, on doit tenir compte de plus de la porosité :

$$\underline{\underline{\Delta \sigma}} = \frac{1-f}{1-f_0} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}^e \quad \text{(II-108)}$$

$$\begin{cases} \Delta \underline{F}_{CM} = \Delta \underline{F}_{RM} \\ F_{r, RM} = \Delta F_{r, RM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{1-f_0}{2} \frac{1-f}{1-f} \frac{\Delta F_{z, RM}}{S_{CM}} (\Delta \varepsilon_{z, CM}^e - \Delta \varepsilon_{r, CM}^e) \\ \lambda = -2\mu \frac{\Delta \varepsilon_{r, CM}^e}{\Delta \varepsilon_{z, CM}^e + 2\Delta \varepsilon_{r, CM}^e} \end{cases} \quad (II-109)$$

5.3 Application à un modèle élastoplastique linéaire par morceau

5.3.1 Méthode à Multiplicateurs de Lagrange

On reprend le même matériau que dans le cas HPP, sans modifier la courbe de traction. Les options du calcul sont les mêmes mais le pilotage automatique des incréments de chargement mène cette fois-ci à 10350 pas de calcul. L'écoulement est également mené sans sous-incrémentation. La différence du calcul réside dans la réactualisation de la configuration de référence au cours du calcul et à l'adaptation de la rigidité du solide de la modélisation couplée.

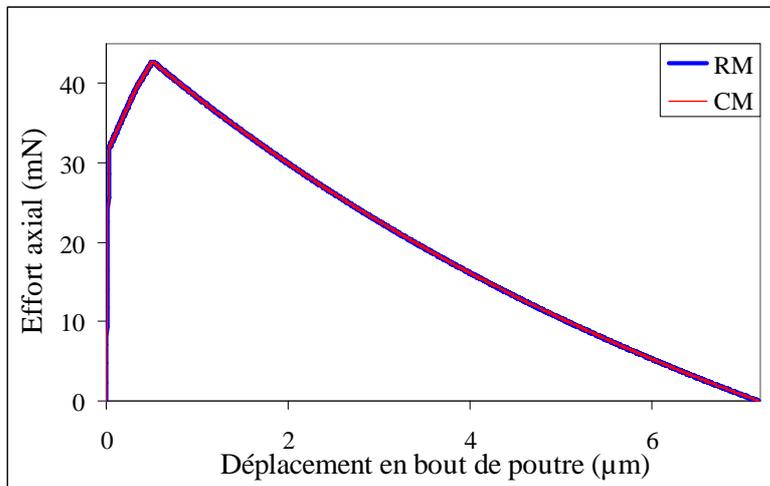


Figure II-15 – Réponse mécanique des deux modélisations en grands déplacements pour la méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau

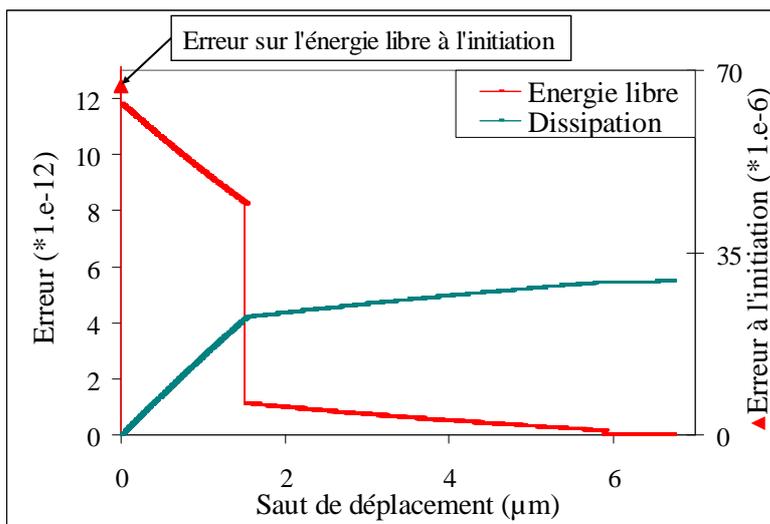


Figure II-16 – Erreur sur les énergies pour la méthode à Multiplicateurs appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau
Le triangle rouge indiquant l'erreur à l'initiation est assigné à l'axe secondaire

De la même manière que sous l'hypothèse de petites perturbations, la méthode utilisant les multiplicateurs de Lagrange permet de retrouver la réponse mécanique et énergétique du problème de référence avec la modélisation couplée (Figure II-15 et II-16).

On remarque cependant qu'un saut de l'erreur sur l'énergie libre (triangle rouge sur la figure II-16, pour lequel l'axe de droite est à considérer) est présent lors de l'initiation. Ceci est dû à la stratégie « explicite » choisie pour l'adaptation de la rigidité. On utilise les données entre le temps $t-\Delta t$ et t pour calculer la rigidité à utiliser entre les pas t et $t+\Delta t$, on a donc un retard qui donne un résultat contraire au résultat nécessaire lors du premier incrément pour lequel la zone cohésive est active. Pour supprimer ce saut, on peut choisir de démarrer l'identification avec un pas de retard par rapport à l'instant pour lequel le critère de non-unicité de la solution du modèle de référence est vérifié.

A l'instar du saut sur l'erreur de l'énergie libre, on note que celle-ci est beaucoup plus faible que dans le premier cas. Ceci est dû au nombre de pas beaucoup plus important dans ce calcul que dans le calcul en petites perturbations.

5.3.2 Méthode simplifiée

Le calcul a été fait avec une erreur admise sur le calcul de l'équilibre de $1.e-6$. La liste de pas de temps est donnée au début du calcul et comporte 3990 incréments.

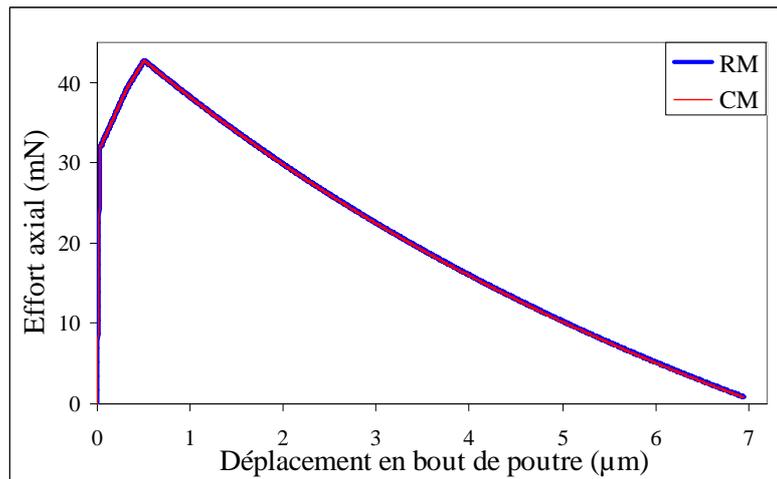


Figure II-17 - Méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau : Réponse mécanique des deux modélisations

De même que pour le cas des petites perturbations, la méthode simplifiée permet d'obtenir des réponses mécaniques et énergétiques cohérentes entre les modélisations comme le montrent les figures II-17 et II-18.

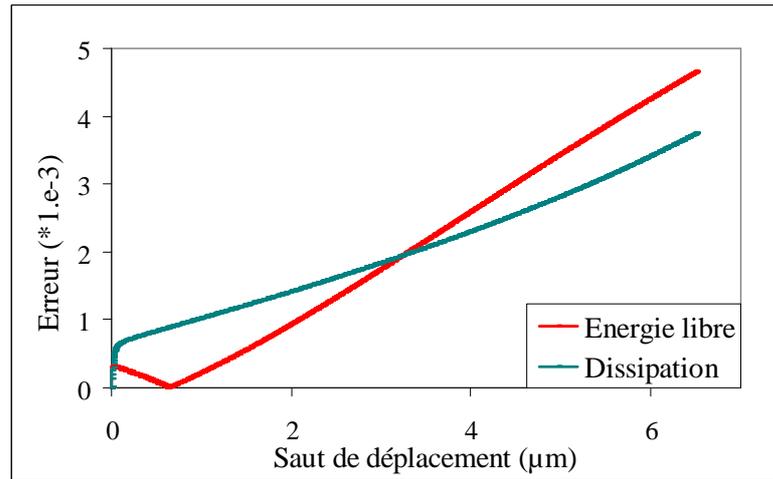


Figure II-18 - Méthode simplifiée appliquée à un matériau élastoplastique linéaire par morceau : Erreur sur les énergies

Le nombre de pas réduit utilisé explique en partie le niveau d'erreur sur les énergies plus important pour cette méthode que pour celle utilisant des multiplicateurs de Lagrange. En revanche l'allure des courbes d'erreur montre qu'il faut être vigilant lorsque cette méthode est utilisée pour obtenir une loi cohésive consistante.

La méthode simplifiée permet donc de construire une loi cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique dans le cadre de grandes transformations à la condition de vérifier le niveau d'erreur obtenu sur les énergies. En réduisant la taille des incréments on réduit l'erreur finale car cela permet de mieux ajuster la rigidité au cours du calcul.

5.3.3 Comparaison des résultats, Loi cohésive obtenue

En prenant en compte de grandes déformations, les deux méthodes permettent de résoudre le problème de référence avec des résultats proches comme dans le cas des petites perturbations.

Dans le cas de la méthode simplifiée cependant, il est nécessaire d'être vigilant car l'erreur part d'un niveau non négligeable de l'ordre de 5×10^{-4} puis suit une pente quasi linéaire croissante. En restant sous la barre d'une erreur maximale de 5×10^{-3} on obtient néanmoins une loi cohésive correcte.

De la même manière qu'en petites perturbations, le saut reste nul jusqu'à vérification du critère. En revanche, la prise en compte des grandes déformations donne une pente non linéaire due à l'influence du changement de section sur l'effort dans le problème de référence. En effet, l'effort et la contrainte cohésive sont directement liés car le modèle étudié est hypoélastique. Ainsi, dès l'ouverture de la zone cohésive, le solide du problème couplé décharge en contrainte, or la déformation élastique étant négligeable, la section est alors quasi figée.

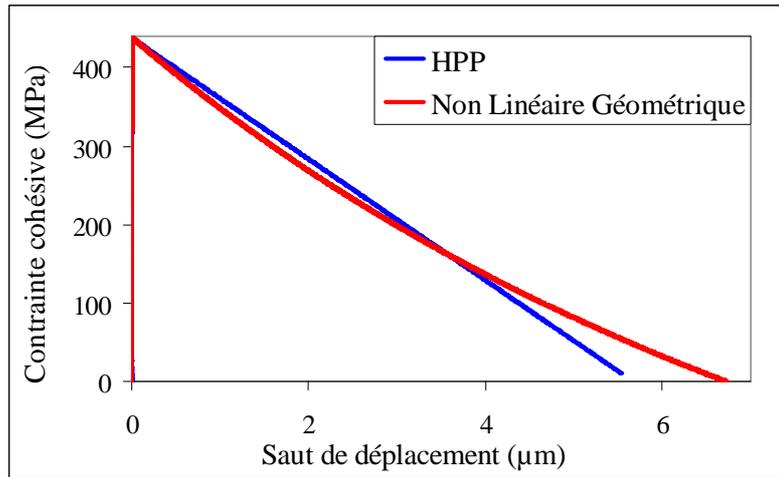


Figure II-19 - Loi cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique linéaire par morceau (Grandes déformations)

5.4 Application de la méthode simplifiée au modèle de Rousselier

5.4.1 Paramètres Matériau

On applique donc la méthode simplifiée au modèle de Rousselier pour un acier ferritique de tube, le TU52B. Pour ce matériau les paramètres du modèle de Rousselier, identifiés sur des éprouvettes AE, sont indiqués dans le tableau suivant :

Young Modulus (GPa)	Poisson ratio	ρ_0 (kg/m ³)	λ_c (mm)	f_0	f_c	D	σ_1 (MPa)
200.	0.3	7000	0.15	1.4e-3	0.05	2	450

Tableau II-3 - Caractéristiques matériaux et paramètres du modèle de Rousselier pour le TU52B

On remarque en particulier la valeur de la longueur caractéristique $\lambda_c=2l_c$ qui nous permet de dimensionner l'élément de l'étude. l_c peut être obtenue de deux manières : par la formule de Franklin [Franklin1969] qui détermine l'espacement moyen entre les inclusions ou par essais de déchirure sur éprouvettes de traction CT.

La courbe de traction à l'état sain de ce matériau est donnée par la courbe de traction suivante :

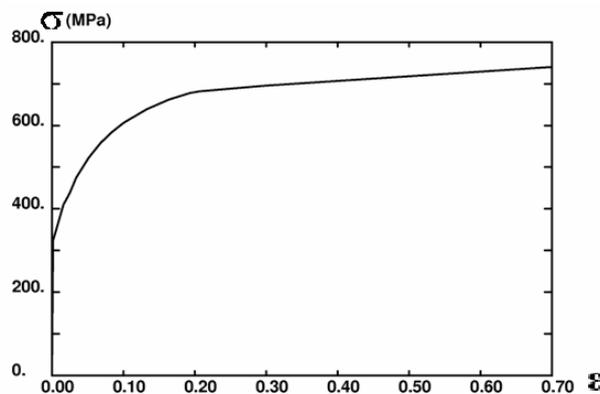


Figure II-20 - Courbe de traction pour l'acier ferritique TU52B

5.4.2 Identification de la loi cohésive à l'aide de la méthode simplifiée

Le calcul a été fait avec une erreur autorisée sur le calcul de l'équilibre de $1.e-6$. La liste de pas de charge est donnée au début du calcul et comporte 5957 incréments.

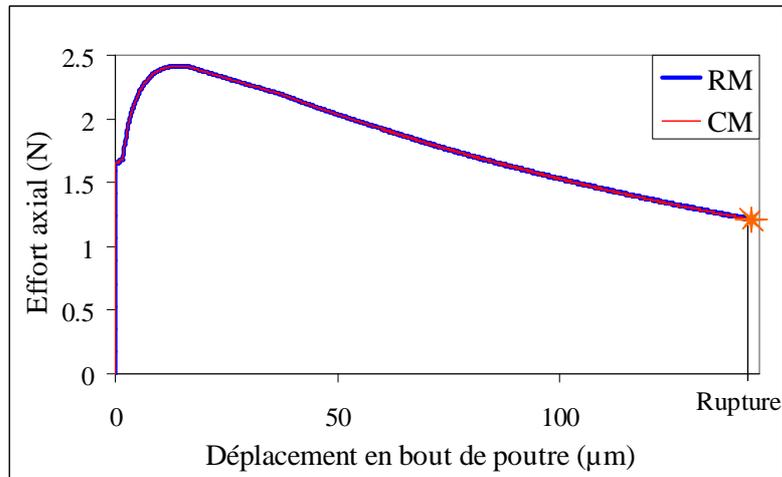


Figure II-21 - Réponse mécanique des deux modélisations pour la méthode simplifiée appliquée au modèle de Rousselier

De même que pour le cas élastoplastique, on retrouve bien la même réponse mécanique pour les deux modélisations. Pour le modèle de Rousselier, la rupture est atteinte pour un niveau d'effort non nul et non négligeable. La rupture est obtenue lorsque la porosité critique est atteinte, à ce moment, la contrainte est mise à zéro. L'étude portant sur un élément unique, ceci correspond à une pente négative infinie que l'on ne peut obtenir numériquement. Le calcul est donc arrêté à cet instant.

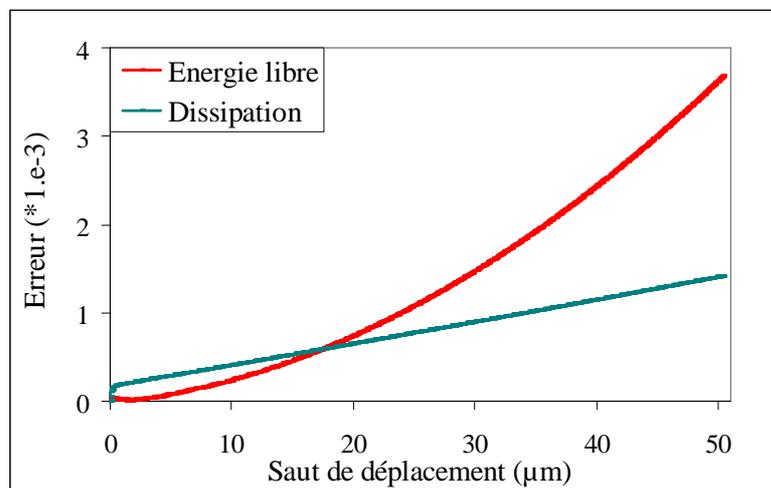


Figure II-22 - Méthode simplifiée appliquée au modèle de Rousselier : Erreur sur les énergies

Les erreurs ont des allures similaires au cas élastoplastique. Malgré la complexité du modèle de Rousselier le niveau d'erreur reste acceptable.

Finalement, on obtient la loi cohésive suivante :

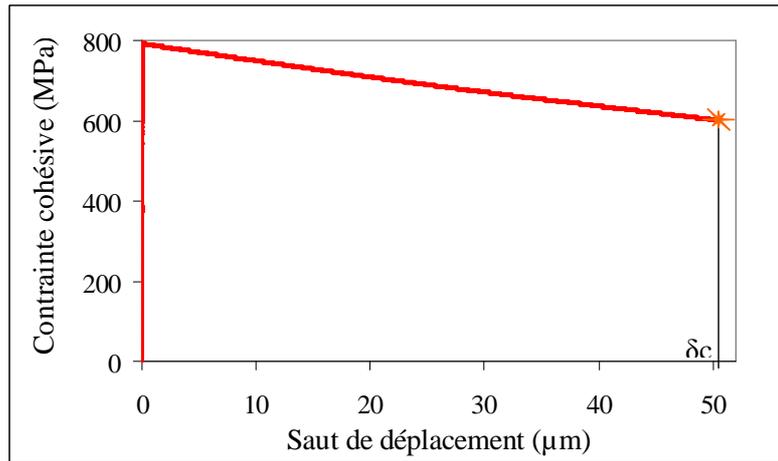


Figure II-23 - Loi cohésive cohérente avec le modèle de Rousselier pour le TU52B

Afin d'obtenir des informations sur le niveau d'endommagement atteint lors de l'activation de la zone cohésive, puis son évolution, on trace le déplacement et le saut de déplacement obtenus dans le calcul couplé en fonction de la porosité vue par le problème de référence (Figure II-24).

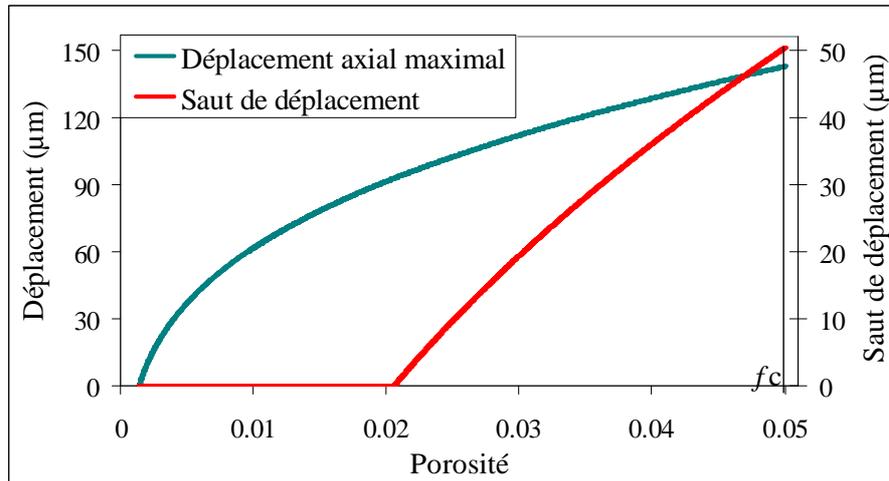


Figure II-24 - Evolution du déplacement et du saut de déplacement en fonction de la porosité dans le modèle de référence

La porosité initiale étant non nulle, les courbes ne passent pas par le 0. De plus, on voit que la plasticité est tout d'abord diffuse et engendre la croissance de la porosité jusqu'à 2,05% avant ouverture de la zone cohésive. Ensuite la porosité croît plus rapidement que dans la partie diffuse du comportement jusqu'à atteindre la porosité critique.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, les bases théoriques d'une méthode permettant d'obtenir une loi cohésive à partir d'un modèle élastoplastique isotrope ont été présentées. La méthode proposée repose sur les travaux de Fabien Cazes pour des modèles élastiques endommageables et des travaux communs sur les modèles élastoplastiques endommageables. La méthode développée est ici appliquée à des modèles purement plastiques, n'ayant aucune variable explicite de dommage. Comme cela a été montré en début de chapitre, le modèle de Rousselier, une fois replacé dans le cadre des matériaux standards généralisés n'a plus de variable interne liée à l'endommagement, c'est un modèle élastoplastique de métal poreux. La croissance de la porosité découle directement de la déformation plastique des cavités.

Dans ce cadre, la démonstration des bases de la méthode est étendue au cas purement plastique puis précisée pour être applicable aux grandes transformations. Deux implémentations de la méthode ont été proposées. La première est basée sur l'utilisation d'un programme éléments finis spécialement développé pour le calcul de lois cohésives cohérentes. Il permet d'obtenir la loi cohésive comme une solution directe grâce à l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange pour appliquer la zone cohésive. Cette approche est robuste et donne de bons résultats, cependant, elle n'est applicable qu'aux modèles implémentés dans le programme.

Afin d'obtenir la loi cohésive à partir du programme éléments finis dans lequel elle sera plus tard mise en œuvre, une méthode simplifiée est proposée. Elle consiste à construire la zone cohésive à partir d'un cylindre élémentaire en imposant le déplacement sur la modélisation comme la différence du déplacement imposé sur le problème de référence et du saut de déplacement calculée à partir de la dissipation du modèle de référence. Cette approche permet de mettre en œuvre simplement la construction d'une loi cohésive cohérente dans tout code éléments finis. La construction de la loi cohésive est ici restreinte à un état uniaxial. Il est néanmoins possible d'étendre la méthode à différentes histoires de la triaxialité en imposant une pression radiale sur le cylindre. Ici, on se limite cependant au cas uniaxial, sous l'hypothèse que la zone cohésive est introduite suffisamment tardivement pour qu'il y ait peu d'influence de la triaxialité sur sa loi dans le domaine sur lequel le modèle cohésif est utilisé.

Pour le modèle de Rousselier dont l'écoulement est assez complexe à mettre en œuvre, l'approche simplifiée permet d'assurer la cohérence de la loi cohésive, en utilisant le même solveur pour le calcul de la loi cohésive que pour son application dans un calcul de structure réelle.

Chapitre III.

Méthode des Eléments Finis Etendus pour la Modélisation de Grandes Propagations de Fissure en Déchirure Ductile

1. Introduction	84
2. Implémentation de la Méthode des Eléments finis étendue pour la déchirure ductile dans Cast3M	85
2.1 Méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissure.....	85
2.2 Méthode des éléments finis étendue initialement implémentée dans Cast3M	89
2.3 Extension de la méthode pour le traitement de problèmes non linéaires géométriques	90
2.4 Conclusion.....	98
3. Modélisation de Zones Cohésives dans le Cadre XFEM.....	98
3.1 Equilibre d'un solide fissuré.....	98
3.2 Equilibre d'un solide fissuré en présence d'une zone cohésive	99
3.3 Discrétisation du problème de zone cohésive dans le cadre XFEM.....	100
3.4 Conclusion.....	106
4. Implémentation dans Cast3M, algorithme de résolution.....	106
4.1 Gestion de la propagation de la zone cohésive	106
4.2 Algorithme de Résolution de l'équilibre.....	114
4.3 Conclusion.....	118
5. Conclusion.....	119

1. Introduction

La modélisation de la déchirure ductile basée sur l'approche locale ne permet pas de prédire de longues propagations de fissure. En effet, dans le cadre de la méthode des éléments finis, les calculs de prédiction de la rupture à l'aide de modèles locaux, même régularisés, sont sujets à des problèmes de convergence. Ces problèmes sont principalement dus à la distorsion des éléments induite d'une part par la striction dans le plan de la fissure et d'autre part par la perte rigidité des éléments rompus.

Afin de limiter ces phénomènes, une solution naturelle consiste à introduire une vraie discontinuité au niveau des éléments rompus. Cependant, les méthodes de relâchement de nœuds, d'élimination d'éléments ou de remaillage ne sont pas adaptées, car appliquées près du front de fissure, elles n'assurent pas la conservation de l'énergie ce qui a pour effet de perturber fortement la propagation de la fissure. Le cadre de la méthode des éléments finis étendus (XFEM) permet en revanche d'introduire une discontinuité mobile de façon indépendante du maillage tout en garantissant la conservation de l'énergie. Son application à la déchirure ductile avec plasticité étendue autour de la pointe de fissure, nécessite cependant d'être faite avec précaution afin de traiter plasticité étendue et grandes déformations correctement.

La transition vers une discontinuité doit être enclenchée avant l'apparition de problèmes numériques, même lorsque ceux-ci surviennent avant rupture. Ceci est possible si la process zone a une taille non négligeable devant la fissure. Dans ce cas, la transition peut se faire depuis le modèle local vers un modèle de zone cohésive dont la rupture assure le passage à une vraie fissure (au sens d'une fissure dont les bords sont libres de contrainte). Là aussi, la XFEM est la méthode la plus adaptée afin d'introduire une discontinuité cohésive au cours du calcul. Ainsi la zone cohésive introduite permet de passer d'un état endommagé à un état rompu en prenant en charge la dissipation restante jusqu'à rupture.

La description de l'implémentation de la méthode couplant modèle local pour la rupture ductile et zone cohésive est découpée en trois parties :

1. Présentation de la XFEM implémentée dans Cast3M par B. Prabel [Prabel2007] et de son extension pour être applicable au cas des grandes transformations. La méthode initiale permet de traiter des déformations plastiques non confinées en pointe de fissure ;
2. Traitement des zones cohésives dans le cadre XFEM ;
3. Présentation de l'algorithme de résolution du problème de propagation de fissure avec zone cohésive.

Les deux premières parties seront illustrées à l'aide d'exemples en 2D, mais les définitions proposées sont également applicables aux problèmes 3D. La distinction entre problème 2D et 3D sera principalement détaillée dans la description du traitement de la propagation.

2. Implémentation de la Méthode des Eléments finis étendue pour la déchirure ductile dans Cast3M

La XFEM permet d'introduire une fissure indépendamment du maillage de la structure étudiée. Pour le calcul de la déchirure ductile, un des atouts de la XFEM implantée dans Cast3M est le traitement cohérent de déformations plastiques non confinées en pointe de fissure. La stratégie implantée permet effectivement de supprimer l'étape de projection liée au sous découpage des éléments (qui correspond à une modification du schéma d'intégration pour le rendre conforme à la fissure) suite à l'avancée de la fissure.

Récemment la méthode des éléments finis étendue a été appliquée à des problèmes en grandes déformations [Legrain2004, Areias2005, Khoei2008, Wells2002]. La plupart de ces applications reposent sur une formulation lagrangienne totale pour laquelle la configuration de référence est la configuration initiale et ne nécessitent pas de traitement particulier. Peu d'entre elles permettent de traiter des problèmes de plasticité. On montrera ici comment étendre la méthode au traitement de problèmes non linéaires géométriques.

Cette partie se décompose donc selon trois axes :

- Présentation de la méthode des éléments finis étendue pour la propagation de fissure ;
- Présentation de la méthode telle qu'initialement implantée dans Cast3M
- Extension de la méthode aux problèmes non linéaires géométriques avec changement de configuration de référence au cours du calcul.

2.1 Méthode des éléments finis étendus pour la propagation de fissure

Les deux caractéristiques principales de la XFEM sont la définition de la fissure de manière indépendante par rapport au maillage du solide étudié et l'enrichissement du déplacement permettant de prendre en compte la discontinuité sans la mailler explicitement. Afin d'exploiter ces deux spécificités, la méthode nécessite de plus la mise en œuvre d'une stratégie d'intégration particulière.

2.1.1 Description de la position de la fissure dans l'espace et dans le temps

La position de la fissure est décrite à l'aide d'un couple de fonctions de niveau (ϕ, ψ) proposées par Stolarska *et al.* [Stolarska2001] en 2D et étendues à la 3D par Gravouil *et al.* [Gravouil2002]. Ces fonctions orthogonales sont appelées level set et sont définies sur toute la structure. Elles définissent la fissure selon les relations suivantes :

$$\underline{x} \in \text{fissure} \Rightarrow \begin{cases} \phi(\underline{x}) = 0 \\ \psi(\underline{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

L'isozéro de la fonction ϕ donne donc le plan de la fissure et son intersection avec l'isozéro de ψ donne donc le front de la fissure comme indiqué sur la figure III-1. L'orthogonalité des levels sets permet de plus de décrire un repère local de la fissure.

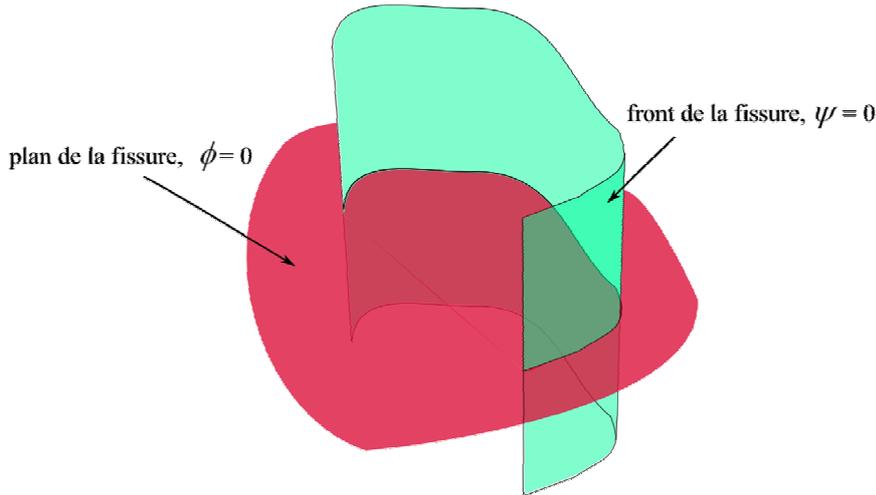


Figure III-1 - Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonctions de niveau

Bien que cette description de la fissure soit très pratique, elle demande la mise en place d'algorithmes complexes pour la gestion de la propagation de la fissure. Une étude de Duflot [Duflot2007] compare plusieurs de ces algorithmes d'actualisation des fonctions de niveau. Elle montre que l'utilisation de formules géométriques [Stolarska2001] conduit à des fonctions discontinues et que les fonctions de niveau vectorielles sont difficiles à définir en 3D. Dans ses travaux de thèse, B. Prabel [Prabel2007] montre que l'application de l'algorithme de propagation proposé par Gravouil [Gravouil2002] et reposant sur des équations du type Hamilton-Jacobi permet de reproduire l'avancée de la fissure efficacement lorsque l'on définit les fonctions sur une grille intermédiaire plus fine non reliée au maillage de la structure.

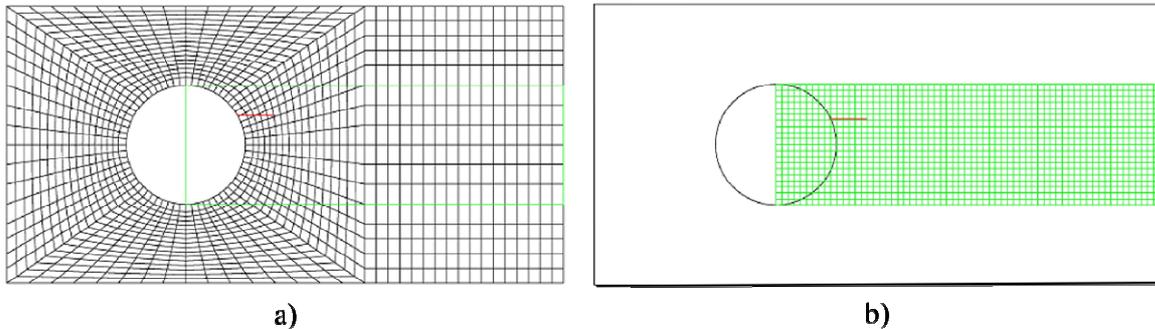


Figure III-2 – Méthode de la grille auxiliaire pour le calcul des levels sets [Prabel2007]
 a) Maillage de la structure b) Grille auxiliaire

2.1.2 Approximation du déplacement

La méthode des éléments finis étendue appliquée à la mécanique linéaire de la rupture repose sur l'approximation suivante du déplacement :

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i + \sum_{j \in J} N_j(\underline{x}) H(\underline{x}) b_j + \sum_{k \in K} N_k(\underline{x}) \left(\sum_{l=1,4} F_l(\underline{x}) c_k^l \right) \quad \text{(III-2)}$$

Les degrés de liberté u_i correspondent aux degrés de liberté standard du massif. Ils sont définis sur l'ensemble I qui contient tous les nœuds du maillage. Les autres degrés de liberté, b_j et c_k sont dits enrichissements. Les premiers sont définis sur les nœuds de l'ensemble J

(voir Figure III-3), ils introduisent des sauts de déplacement par l'intermédiaire de la fonction H :

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0 \\ -1 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

Ils correspondent à une ouverture bilinéaire de la fissure. Les degrés de liberté c_k sont introduits sur les nœuds de l'ensemble K (voir Figure III-3) et permettent d'introduire les champs singuliers en pointe de fissure grâce à la présence de l'ensemble des fonctions F_1 :

$$F_1(\underline{x}) = \sqrt{r} \begin{cases} \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\sin(\theta) \\ \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

où r et θ sont les coordonnées polaires dans le repère de la pointe de fissure. On remarque que $F_1 = \sin(\theta/2)$ est la seule composante discontinue par rapport au plan de fissure, c'est elle qui permet d'obtenir l'ouverture en pointe de fissure.

Les ensembles J et K dépendent de la stratégie d'enrichissement, la plus répandue, l'enrichissement topologique, est décrite sur la figure suivante :

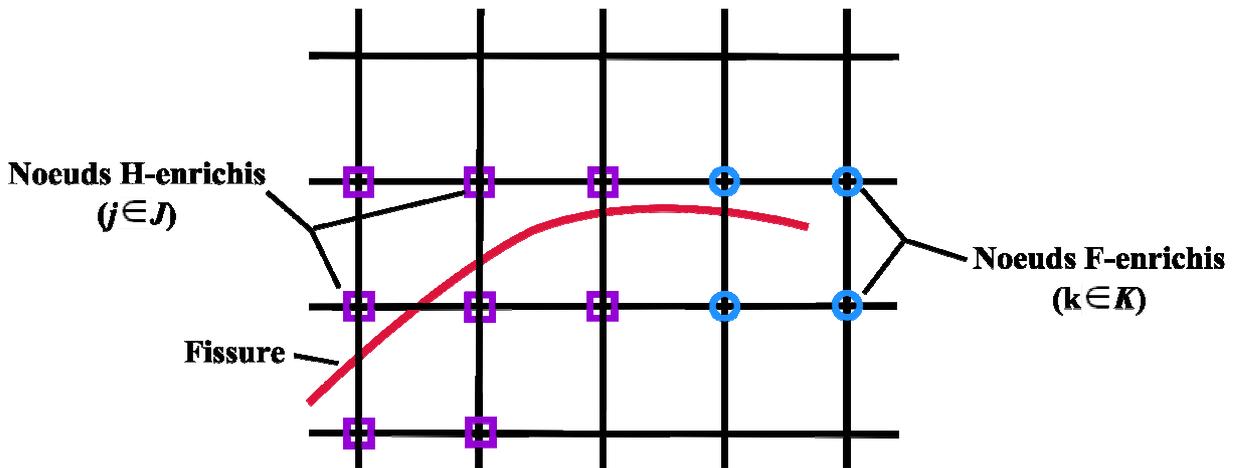


Figure III-3 - Description de la stratégie d'enrichissement

Elle consiste à enrichir le champ de déplacement dans les éléments contenant la fissure. La valeur des fonctions d'enrichissement dépend alors de la position des nœuds de l'élément par rapport au plan et au front de fissure. Lorsque l'élément est traversé par la fissure de part en part, les fonctions d'enrichissement appliquées aux nœuds (qui définissent l'ensemble J) sont les fonctions H , sauf si le nœud appartient à un élément contenant la pointe de la fissure.

2.1.3 Technique d'intégration

La présence de fonctions discontinues et/ou singulières dans un élément rend nécessaire une stratégie d'intégration spécifique afin de décrire les champs associés correctement. Dans le cas des fonctions discontinues, il s'agit de positionner précisément la discontinuité ; dans le cas des fonctions singulières, il s'agit de décrire les champs non-linéaires avec justesse. La stratégie d'intégration la plus répandue a été proposée par Moës *et al* [Moes1999]. Elle consiste à découper les éléments enrichis en sous-triangles puis à appliquer à ces triangles un schéma d'intégration standard.

Comme l'illustre la figure III-4, cette technique d'intégration introduit une modification du support d'intégration pour l'élément contenant la fissure. Suivant cette méthode, Khoei [Khoei2008] a appliqué la XFEM à de grandes déformations plastiques, cependant il se place dans le cas d'une discontinuité figée pour laquelle le sous-découpage peut être fait au début du calcul. Samaniego et *al* [Samaniego2005] utilisent cette méthode dans le cas d'un matériau au comportement non linéaire pour la modélisation de bandes de cisaillement. Le comportement adoucissant permettant uniquement de repérer l'apparition des bandes qui sont ensuite modélisées par un modèle cohésif. Dans un calcul non linéaire matériau, l'étape de projection des champs de variables (contraintes, variables internes, déformations plastiques...) n'assure pas la conservation de l'énergie aux abords de la pointe de fissure. Elle altère de plus le principal avantage de la XFEM qui provient du fait qu'elle permet d'éviter les opérations de remaillage et de projection.

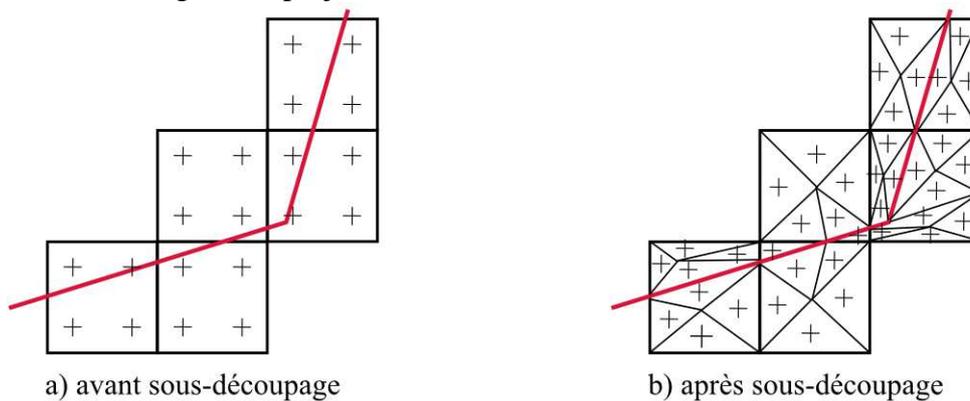


Figure III-4 - Intégration conforme par sous-triangularisation des éléments XFEM

Afin de conserver cet avantage quelques auteurs ont proposé d'autres approches. Ventura [Ventura2006] montre qu'une intégration exacte de la matrice de rigidité des éléments enrichis avec les fonctions "saut" H est possible sans sous-découpage explicite des éléments enrichis. Cependant, cette approche ne permet ni de traiter les fonctions singulières ni les problèmes matériau non linéaire pour lesquels le champ de contrainte doit être intégré pour obtenir les efforts (l'intégration exacte de la matrice de rigidité ne suffit pas à la résolution du problème).

L'approche proposée par Benoit Prabel [Prabel2007] et T. ELguedj [Elguedj2006a] dans leurs travaux de thèse a été préférée. Elle consiste à utiliser uniquement deux types de quadrature au cours du calcul. La quadrature standard est conservée pour les éléments suffisamment loin de la pointe de fissure, les éléments se situant à une distance égale au rayon plastique r_p sont quant à eux sous découpés en 16 sous-quadrangles réguliers. Ainsi la projection des champs se fait dans le domaine élastique et permet une très bonne conservation de l'énergie autour du front de la fissure même en présence de plasticité. Il faut cependant noter que cette stratégie entraîne de petites imprécisions d'intégration, qui ne semblent cependant pas nuire aux résultats de calcul. En revanche, l'utilisation d'éléments sur-intégrés avec des lois de comportement elasto-plastiques isotropes, qui sont généralement quasi incompressibles lorsque le niveau déformation plastique est important, peut conduire au verrouillage des éléments XFEM. Pour limiter ce type de problème, M. Seabra [Seabra2010] propose d'utiliser l'approche B barre appliquée aux sous triangles d'intégration.

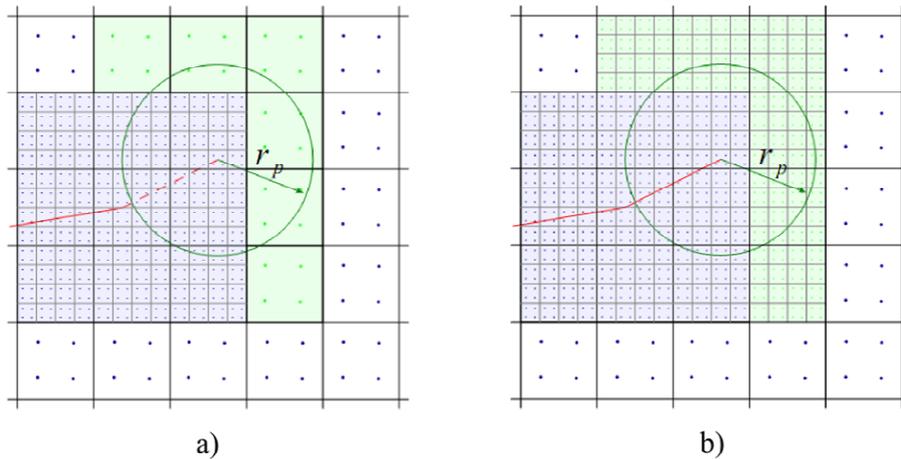


Figure III-5 - a) Sélection des éléments à surintégrer suivant le rayon plastique
b) Les éléments verts sont surintégrés [Prabel2007]

2.2 Méthode des éléments finis étendue initialement implémentée dans Cast3M

La méthode des éléments finis étendue a été implantée dans Cast3M à partir des travaux de thèse de B. Prabel [Prabel2007]. Toutefois, dans la version officielle du programme, la stratégie de définition des levels sets ainsi que la stratégie d'intégration ont été modifiées et sont décrites dans cette section.

2.2.1 Description de la position de la fissure dans l'espace et dans le temps

Afin de faciliter l'utilisation de la XFEM dans Cast3M, le choix a été fait de calculer les levels sets à partir du maillage de la fissure. Cette stratégie est plus naturelle dans le cadre éléments finis et permet d'insérer la fissure de manière explicite. Il est à noter que le maillage de la fissure est un maillage spécifique indépendant du maillage de la structure étudiée. Il s'agit d'un segment en 2D et d'un plan de triangles ou de quadrangles (propagation plane, front droit) en 3D (Figure III-6).

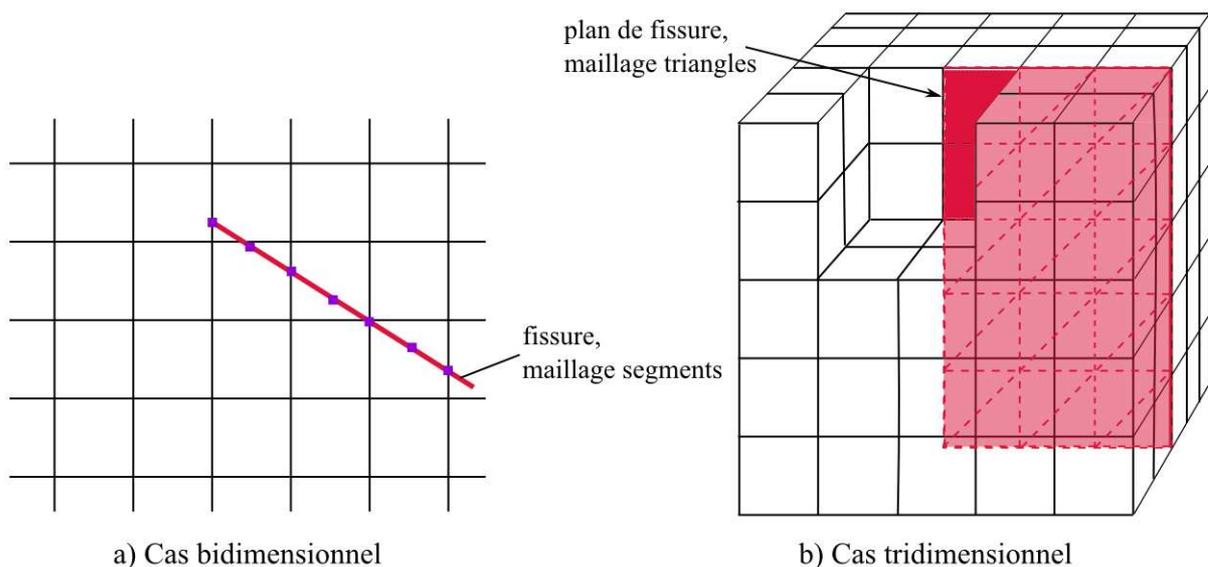


Figure III-6 - Maillage de la fissure selon la dimension du problème

Les levels sets sont obtenues par le calcul des distances normales au plan et au(x) front(s) de la fissure. Dans le cas où la fissure n'est pas débouchante, la fonction ψ est nulle au niveau du ou des fronts de la fissure et négative à l'intérieur de l'espace délimité par ce ou ces fronts.

La propagation est gérée de manière simple en étendant le maillage de la fissure suivant les résultats du calcul. Ainsi l'utilisation de la grille intermédiaire pour le calcul de la propagation des levels sets proposée dans [Prabel2007] n'est plus nécessaire et l'orthogonalité des fonctions est directement conservée.

2.2.2 Stratégie d'intégration

La stratégie d'intégration retenue est une version simplifiée de celle proposée dans les travaux de B. Prabel [Prabel2007] qui relevait d'une quadrature à 64 points de Gauss. Ce jeu de points est ici introduit dès le début du calcul, et nécessite de définir précisément la zone probable de propagation afin de limiter les temps de calculs. Si ce choix est très coûteux en temps pour des analyses élastiques ou à plasticité confinée, il est bien adapté au traitement de la déchirure ductile pour laquelle la plasticité est étendue.

2.3 Extension de la méthode pour le traitement de problèmes non linéaires géométriques

L'application de la XFEM à des problèmes présentant de grandes déformations a été principalement faite sur des problèmes élastiques [Legrain2004, Areias2005] dans le cadre de la formulation lagrangienne totale où la configuration de référence est la configuration initiale. Suivant le même type d'approche Khoei [Khoei2008] a appliqué la XFEM à de grandes déformations plastiques pour une discontinuité fixe. Wells et al [Wells2002] ont proposé quant à eux une formulation eulérienne pour traiter les problèmes de délamination. Ils tiennent ainsi compte de la présence de deux normales distinctes définissant l'interface de délamination.

Les grandes déformations XFEM sont en général traitées à l'aide d'une formulation lagrangienne totale, mais cette approche n'est pas naturelle pour CAST3M. On va donc voir comment gérer le changement de configuration de référence dans le cadre de la formulation lagrangienne réactualisée pour la XFEM.

2.3.1 Etude du cas 1D : Grands déplacements sur une barre fissurée

2.3.1.1 Cas d'une barre en traction sans fissure

On étudie une barre élémentaire encastree d'un côté et soumise à un déplacement axiale u_d de l'autre :

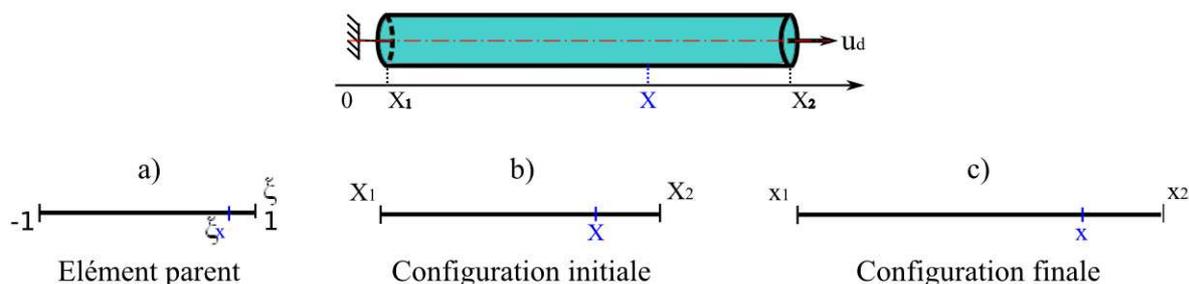


Figure III-7 - Déformation d'un élément barre sain soumis à un déplacement axial

On cherche à calculer la matrice jacobienne donnant la transformation du solide au point d'abscisse X (Figure III-7.b) permettant de passer de l'élément parent (Figure III-7.a) à la configuration finale (Figure III-7.c).

L'élément considéré donne une approximation linéaire du déplacement :

$$u^h(x) = \sum_{i=1,2} N_i(x) u_i \quad (\text{III-5})$$

$$\text{Avec } \{N\} = \frac{1}{2} \{1 - \xi \quad 1 + \xi\}^T \quad (\text{III-6})$$

Il est de plus isoparamétrique, ainsi l'abscisse du point d'abscisse X dans la configuration initiale peut être obtenue à partir de la position des nœuds de l'élément :

$$X = \sum_{i=1,2} N_i(X) X_i \quad (\text{III-7})$$

La position des points dans la configuration finale est obtenue en appliquant le déplacement à la barre :

$$x_i = X_i + u_i \quad (\text{III-8})$$

$$\begin{aligned} x &= X + u(X) \\ &= \sum_{i=1,2} N_i(X) (X_i + u_i) \\ &= \sum_{i=1,2} N_i(X) x_i \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

On voit que l'élément reste isoparamétrique dans la configuration finale et que le paramétrage est le même que dans la configuration initiale. Ainsi la position d'un point peut être déduite par interpolation directe de la position des nœuds de l'élément.

La transformation depuis l'élément parent vers l'élément réel dans la configuration finale s'écrit donc de la même manière que la transformation depuis l'élément parent vers l'élément réel dans la configuration initiale. Ainsi la matrice jacobienne de la transformation correspondante, qui ici a une unique composante et se réduit donc au Jacobien, s'écrit :

$$x_{,\xi} = \sum_{i=1,2} N_{i,\xi} X_i \quad (\text{III-10})$$

2.3.1.2 Cas d'une barre en traction fissurée

On reprend maintenant la même démarche avec le même élément barre en ajoutant maintenant une fissure au point d'abscisse X_a (Figure III-8) à l'aide de l'approximation XFEM. L'espace étant unidimensionnel, la position de la fissure est entièrement définie par son abscisse, et seuls deux états sont possibles : la barre est saine ou la barre est entièrement rompue. Ainsi aucun champ singulier ne peut être modélisé et l'approximation du déplacement contient pour seule fonction d'enrichissement, la fonction saut.

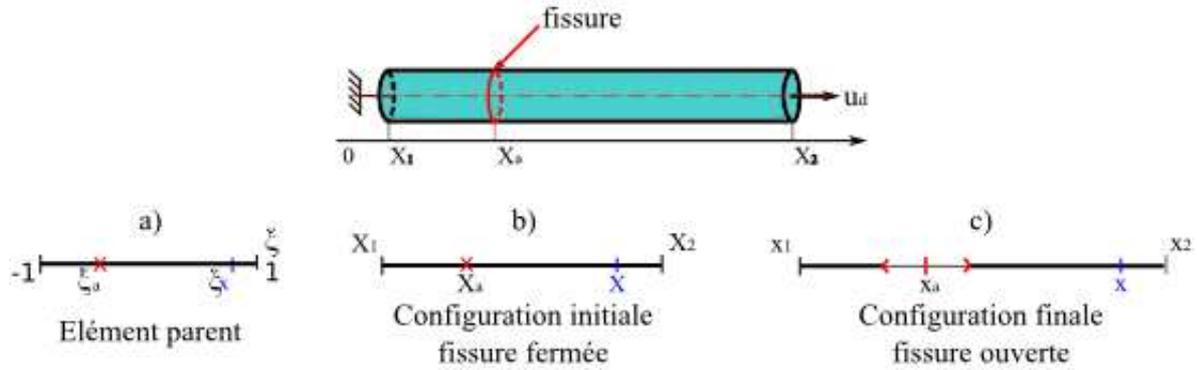


Figure III-8 - Déformation d'un élément barre fissuré soumis à un déplacement axial

L'élément considéré donne une approximation linéaire du déplacement, auquel est ajoutée la présence d'un saut de déplacement au niveau du point X_a :

$$u^h(x) = \sum_{i=1,2} N_i(x) (u_i + H(x)b_i) \quad (\text{III-11})$$

$$\text{Avec } H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0 \\ -1 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \text{ où } \phi = X - X_a \quad (\text{III-12})$$

L'abscisse d'un point dans la configuration initiale, pour laquelle la fissure est fermée, peut malgré tout être obtenue de la même manière que dans le cas sans fissure :

$$X = \sum_{i=1,2} N_i(X) X_i \quad (\text{III-13})$$

On voit que l'interpolation du déplacement ne coïncide plus avec l'interpolation géométrique, l'élément n'est donc plus isoparamétrique dans la base de paramétrage de la configuration initiale.

Le calcul de la position des points dans la configuration finale nécessite la connaissance de la valeur de la fonction H aux points considérés. Ce calcul repose sur la propriété matérielle des points. Lorsqu'un point est d'un côté de la fissure, il reste de ce côté quelque soit la configuration. Ainsi la valeur de la fonction saut est obtenue à partir de l'interpolation du champ ϕ calculé au moment de l'insertion de la fissure, c'est-à-dire lorsqu'elle était fermée :

$$\phi(x) = \sum_{i=1,2} N_i(X) \phi_i \quad (\text{III-14})$$

La position des points dans la configuration finale est obtenue en appliquant le déplacement à la barre :

$$x_i = X_i + u_i + H(X_i)b_i \quad (\text{III-15})$$

$$\begin{aligned} x &= X + u(X) \\ &= \sum_{i=1,2} N_i(X) (X_i + u_i + H(X)b_i) \\ &\neq \sum_{i=1,2} N_i(X) x_i \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

Dans le cas où la fissure est ouverte, c'est-à-dire lorsque les degrés de liberté b_i sont non-nuls, on voit que l'abscisse du point a dans la configuration finale ne peut plus être obtenue uniquement par interpolation de la position des nœuds de l'élément. Son calcul nécessite la connaissance de la valeur des degrés de liberté b_i ainsi que celle de H au point considéré.

La transformation de l'élément parent vers l'élément réel dans la configuration finale s'écrit donc à partir de cette définition de l'abscisse dans la configuration finale. Ici le Jacobien, s'écrit donc :

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1,2} N_{i,\xi} [x_i + (H(x) - H(x_i))b_i] \quad (III-17)$$

2.3.1.3 Position de la fissure dans la configuration finale

Le jacobien intervient dans le calcul de la rigidité, des déformations et des efforts internes. C'est l'opérateur qui permet de dériver et d'intégrer dans la bonne configuration. Dans le cas de la méthode des éléments finis étendue, nous venons de voir que le Jacobien en un point de Gauss dépend de la valeur de la fonction $H(x)$ en ce point ainsi qu'aux nœuds, il est donc important de bien définir sa valeur en tous les points.

Or, dans l'approximation du déplacement ((III-11) ; (III-12)), aucune valeur n'a été attribuée lorsqu'on se situe exactement à l'abscisse de la fissure. En effet, lorsque l'on reste dans la configuration initiale, la fonction saut est calculée uniquement aux points de Gauss, or un point de Gauss se situant dans la matière, il peut n'être strictement qu'au-dessus ou en dessous de la fissure.

Ceci est un peu différent lorsque la fissure est située au niveau d'un nœud. Pour illustrer la question, on considère un cas symétrique, avec deux éléments et la fissure située au centre du maillage (Figure III-9).

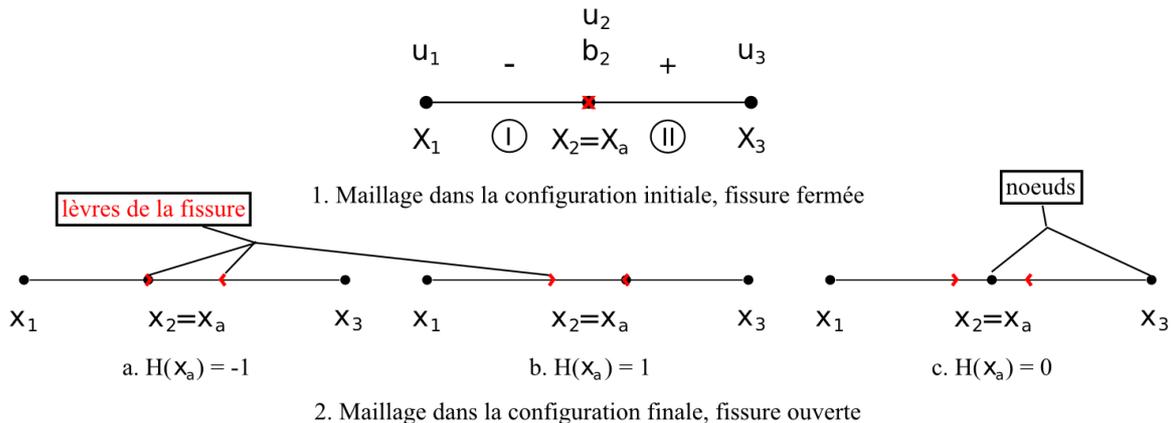


Figure III-9 - Position d'un nœud traversé par la fissure dans la configuration finale

On voit sur la figure III-9 comment le nœud traversé par la fissure est déplacé suivant le choix fait pour la valeur de H sur la fissure. En réalité, le choix n'influe pas sur le résultat du calcul du Jacobien qui est toujours correctement calculé par la définition proposée précédemment, cependant il change la déformée obtenue. Afin d'obtenir une déformée cohérente avec la symétrie du problème, il faut donc choisir $H(x_a)=0$.

2.3.2 Généralisation de la formulation en grands déplacements aux dimensions supérieures

2.3.2.1 Choix de l'approximation du déplacement

Pour les dimensions supérieures, nous avons vu que l'interpolation XFEM standard enrichit l'approximation du déplacement à l'aide de fonctions de pointe de fissure dépendant de la

position des points par rapport au centre de repère local de la pointe de la fissure. En petits déplacements, la position des points reste constante et ne pose pas de problème. Dans le cas de grands déplacements, dès l'ouverture de la fissure, ces fonctions ne correspondent plus à la configuration réelle. On peut sans doute appliquer la même méthode que pour les fonctions sauts, cependant, on ne sait justifier l'utilisation de ces fonctions singulières que pour le premier pas de calcul après enrichissement. De plus, nous souhaitons par la suite introduire un modèle cohésif sur les lèvres de la fissure. En présence de tels modèles, la singularité en pointe de fissure est grandement atténuée et l'utilisation de ces fonctions n'est plus justifiée. C'est pourquoi nous choisissons ici de retenir une approximation du déplacement n'introduisant que des enrichissements en saut :

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) u_i + \sum_{j \in J} N_j(\underline{x}) H(\underline{x}) b_j \quad \text{(III-18)}$$

En revanche la paupérisation de l'approximation impose de situer le front de la zone cohésive sur le bord des éléments XFEM. En 2D, ceci impose une légère dépendance au maillage structure, mais c'est surtout en 3D que ce choix est pénalisant. En effet, sans fonction de pointe de fissure F_1 , seule la présence de la fonction H permet de situer la discontinuité. En enrichissant uniquement les nœuds supports du bord traversé par la fissure, la fonction H , multipliée par la fonction de forme standard des nœuds entrants, s'annule progressivement jusqu'au bord opposé. Dans le cas de la 3D avec des éléments cube, ceci suppose que le front de la zone cohésive possède des angles droits et la propagation du défaut se rapproche d'un problème de relâchement de nœud. La forme de ce front numérique induit alors des artefacts sur les champs en front de zone cohésive. Cette stratégie d'intégration est illustrée sur la figure III-10 pour les calculs plan.

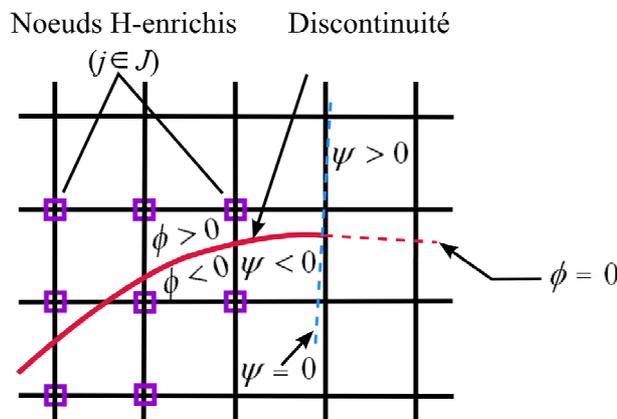


Figure III-10 - Stratégie d'enrichissement pour l'approximation H-enrichie

L'approximation du déplacement retenue étant bilinéaire par morceau, on choisit de réduire le schéma d'intégration en 2D à 16 points de Gauss répartis selon la même stratégie que précédemment, en 3D ceci équivaut à des éléments de 64 points de Gauss. Ce choix permet de réduire les coûts de calculs (en particulier en 3D) sans compromettre la prise en compte de la fissure dans le calcul des champs.

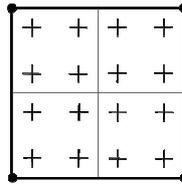


Figure III-11 - Schéma d'intégration des éléments XFEM

2.3.2.2 Extensions aux espaces multidimensionnels

Pour les dimensions supérieures, le calcul non-linéaire géométrique repose toujours sur la même problématique : le calcul correct des grandeurs dépendant de la matrice Jacobienne de la transformation dans les éléments traversés par une fissure ouverte. Celle-ci est illustrée figure III-12 pour les éléments quadrangles dans 3 configurations possibles :

1. la fissure découpe l'élément en 2 sous-quadrangles ;
2. la fissure découpe l'élément en 1 triangle et un pentangle ;
3. la fissure longe le bord de deux éléments.

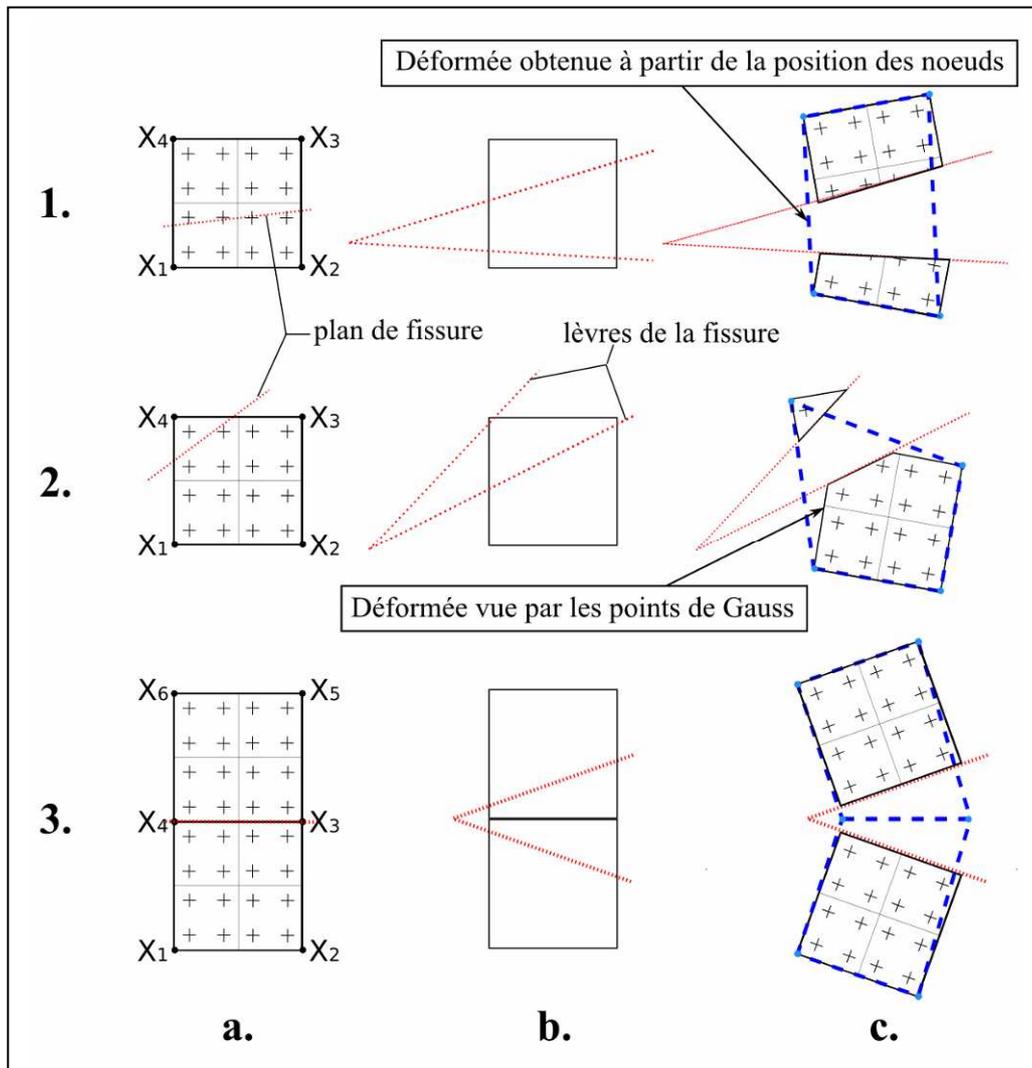


Figure III-12 – Déformées calculées à partir de la position des nœuds et à partir de la définition corrigée de la position des points. a : Etat initial, fissure fermée ; b : Etat initial, fissure ouverte ; c : Etat final.

On utilise la matrice jacobienne pour passer de l'élément parent à l'élément réel dans la configuration voulue. Ce passage permet de traiter simplement les opérations de dérivation et d'intégration selon la méthode d'intégration discrète de Gauss.

L'extension de la formulation XFEM au cas des grands déplacements multidimensionnels est présentée sur deux exemples : le calcul des vitesses de déformation et le calcul des efforts internes.

Afin de faciliter le traitement numérique, contraintes et déformations sont traités sous forme de vecteur dans la méthode des éléments finis. On a :

	Vecteur vitesse de déformation	Vecteur contrainte	
En Déformations planes	$\underline{D} = \begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}$ avec $\dot{\gamma}_{xy} = 2D_{xy}$	$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$; $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$	(III-19)
En 3D :	$\underline{D} = \begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{zz} \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}$ avec $\dot{\gamma}_{ij} = 2D_{ij}$	$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}$	(III-20)

Le vecteur vitesse de déformation \underline{D}_G en un point de Gauss est calculé à l'aide de la matrice $[\mathbf{B}]$ et du vecteur des vitesses nodales :

$$\underline{D}_G = [\mathbf{B}_G] \{\dot{U}\}_{el} \quad \text{(III-21)}$$

Avec, dans le cas d'un cube linéaire enrichi à l'aide de la fonction saut, $\{\dot{U}\}_{el} = \left\{ \{\dot{U}_x\}_{el}^T \quad \{\dot{U}_y\}_{el}^T \quad \{\dot{U}_z\}_{el}^T \quad \{\dot{b}_x\}_{el}^T \quad \{\dot{b}_y\}_{el}^T \quad \{\dot{b}_z\}_{el}^T \right\}^T$ où $\{\dot{U}_x\}_{el}^T = \{\dot{U}_x^1 \quad \dot{U}_x^2 \quad \dots \quad \dot{U}_x^8\}$ et $[\mathbf{B}_G]$ la matrice $[\mathbf{B}]$ calculée au point de Gauss G :

$$[\mathbf{B}_G] = [\mathbf{B}_U \quad \mathbf{B}_b] \quad \text{(III-22)}$$

$$\text{Avec : } [\mathbf{B}_U] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{8,x} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,y} & \dots & N_{8,y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & N_{1,z} & \dots & N_{8,z} \\ N_{1,y} & \dots & N_{8,y} & N_{1,x} & \dots & N_{8,x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,z} & \dots & N_{8,z} & N_{1,y} & \dots & N_{8,y} \\ N_{1,z} & \dots & N_{8,z} & 0 & \dots & 0 & N_{1,x} & \dots & N_{8,x} \end{bmatrix} \quad \text{(III-23)}$$

$$\text{et } [\mathbf{B}_b] = \mathbf{H}(\underline{x}_G) [\mathbf{B}_U] \quad \text{(III-24)}$$

$$\text{Où } \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{Bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}_G]} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-25})$$

Où ξ , η et ζ sont les coordonnées réduites de l'élément parent. Celles-ci sont définies dans le cas 2D et 3D sur la figure III-13.

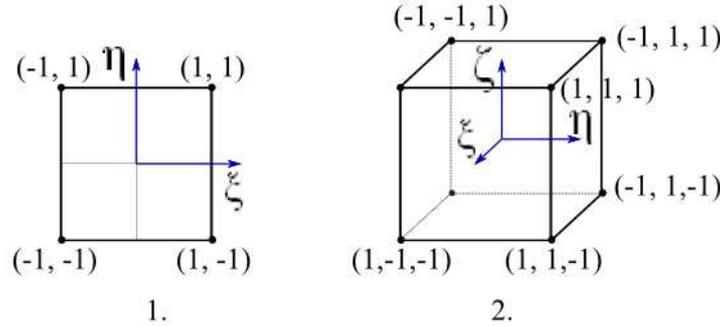


Figure III-13 - Eléments parents - 1: quadrangle en 2D ; 2 : cube en 3D

La matrice jacobienne apparaît donc dans le calcul des dérivées des fonctions de forme par rapport au repère global de la configuration courante. Afin d'obtenir les déformations dans les éléments traversés par la fissure, les termes de cette matrice doivent être calculés de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} x_{,\xi} \\ x_{,\eta} \\ x_{,\zeta} \\ \vdots \\ z_{,\xi} \\ z_{,\eta} \\ z_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i N_{i,\xi} [x_i + (H(\underline{x}) - H(\underline{x}_i))b_i^x] \\ \sum_i N_{i,\eta} [x_i + (H(\underline{x}) - H(\underline{x}_i))b_i^x] \\ \sum_i N_{i,\zeta} [x_i + (H(\underline{x}) - H(\underline{x}_i))b_i^x] \\ \vdots \\ \sum_i N_{i,\xi} [z_i + (H(\underline{x}) - H(\underline{x}_i))b_i^z] \\ \sum_i N_{i,\eta} [z_i + (H(\underline{x}) - H(\underline{x}_i))b_i^z] \\ \sum_i N_{i,\zeta} [z_i + (H(\underline{x}) - H(\underline{x}_i))b_i^z] \end{Bmatrix} \quad (\text{III-26})$$

Où $\underline{x}=(x,y,z)$.

Une fois la matrice jacobienne correctement définie, il suffit de l'utiliser dans tous les opérateurs de dérivation et d'intégration.

Prenons le cas du calcul des efforts internes élémentaires :

$$\begin{aligned} \{F^{int}\}_{el} &= \int_{\Omega_{el}} [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} dV \\ &= \int_{\Omega_{el}^0} [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} \det([\mathbf{J}]) dV \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

Soit par la méthode d'intégration de Gauss :

$$\{F^{int}\} = \sum_{G=1, nbg} \omega_G \det([\mathbf{J}_G]) [\mathbf{B}_G]^T \{\sigma_G\} \quad (\text{III-28})$$

Où n_{bg} est le nombre de points de Gauss dans l'élément et ω_G est le poids associé au point de Gauss G .

2.4 Conclusion

La méthode des éléments finis étendue implantée dans Cast3M à partir des travaux de thèse de B. Prabel est directement extensible au traitement de problèmes 3D et permet de tenir compte correctement des non linéarités de comportement. Le choix d'introduire les éléments surintégrés, dits éléments XFEM, dès le début du calcul est particulièrement adapté au problème de la déchirure ductile pour lequel la plasticité ne reste pas confinée en pointe de fissure.

Le traitement de problèmes en grandes déformations suivant une formulation lagrangienne réactualisée est moins directe. Cette approche modifie le calcul de la matrice jacobienne de la transformation de l'élément parent vers l'élément réel traversé par une fissure ouverte dans la configuration courante. Bien que cette approche nécessite de connaître le champ de déplacement reliant la configuration initiale où la fissure est fermée et la configuration courante, la matrice jacobienne redéfinie est ensuite utilisable dans tous les opérateurs nécessaires, au prix d'un coup de calcul additionnel a priori limité.

3. Modélisation de Zones Cohésives dans le Cadre XFEM

Afin de garantir que le passage d'un modèle volumique à un modèle de fissure discrète se fasse avec le minimum de perte d'énergie et en réduisant le risque d'apparition de problèmes numériques, il a été choisi d'y procéder par l'intermédiaire d'un modèle de zone cohésive. L'introduction d'un tel modèle dans le cadre de la XFEM est assez simple, car les grandeurs caractéristiques d'un modèle de zone cohésive peuvent être mises directement en relation avec les degrés de liberté d'enrichissement et leurs composantes duales. Dans une première partie, nous rappellerons les équations d'équilibre pour un solide fissuré. Ces équations seront ensuite étendues au cas où une zone cohésive est présente, enfin dans une dernière partie, la problématique de la non linéarité géométrique sera abordée.

3.1 Equilibre d'un solide fissuré

Considérons le solide fissuré de volume Ω représenté sur la figure III-14. Il est soumis à des efforts surfaciques \underline{t}_d et des déplacements imposés \underline{u}_d . Γ_f représente la fissure dont la lèvres supérieure est indiquée par le signe + et la lèvres inférieure par le signe -.

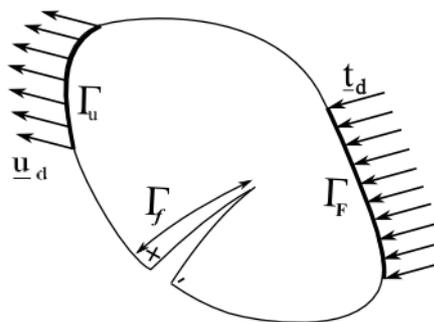


Figure III-14 - Solide fissuré soumis à des déplacements imposés sur Γ_u et des efforts surfaciques sur Γ_F

On note \underline{u}^* , un champ de déplacement virtuel appartenant à l'ensemble U des champs de déplacements cinématiquement admissibles défini par :

$$\underline{u} \in U = \{ \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (\text{III-29})$$

Où Γ_u est l'ensemble des points où le déplacement est imposé.

Le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_V \underline{\sigma} : \underline{D}(\underline{\dot{u}}^*) dV = \int_{\Gamma_f} \underline{t}_d \cdot \underline{\dot{u}}^* dS \quad (\text{III-30})$$

La discrétisation de cette équation donne la relation suivante :

$$\int_V [\mathbf{B}]^T \{ \sigma(u^h) \} [\mathbf{B}] dV \{ \dot{u}^* \} = \int_{\Gamma_f} [\mathbf{N}]^T \{ t_d \} dS \{ \dot{u}^* \} \quad (\text{III-31})$$

Où $\{ \sigma(u^h) \}$ est le vecteur des contraintes de Cauchy obtenues à partir d'une étape d'écoulement du comportement local.

3.2 Equilibre d'un solide fissuré en présence d'une zone cohésive

On considère à présent un solide fissuré semblable pour lequel existe en pointe de fissure sur Γ_{zc} , une zone cohésive. Le chargement est le même que précédemment.

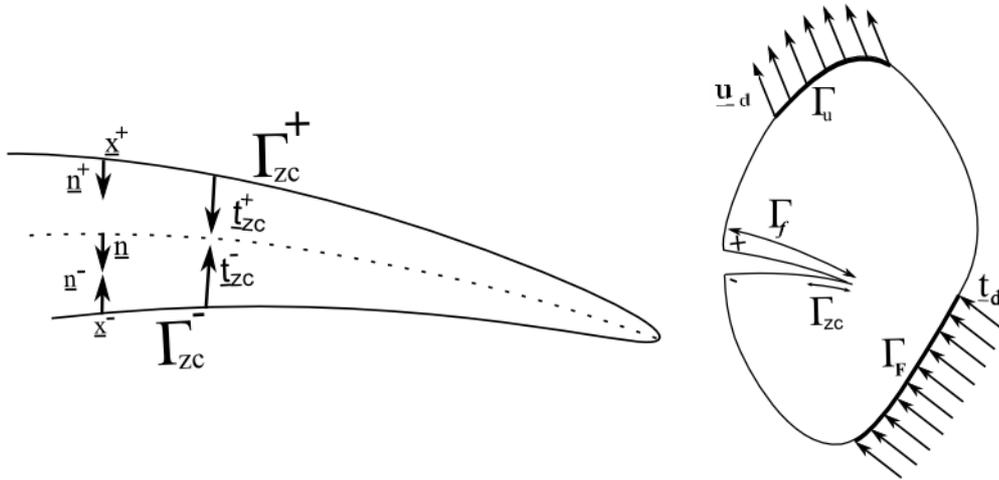


Figure III-15 - Solide fissuré avec zone cohésive, chargé en déplacements imposés et efforts surfaciques

On note ici que Γ_f ne représente plus dans son ensemble la fissure réelle, mais la fissure numérique. En effet, en présence d'une zone cohésive, on est confronté à la présence de deux fronts dont les significations sont différentes. La fissure à bords libres de contrainte se situe dans la zone où seule Γ_f est définie. On appellera « front de la zone cohésive » le lieu où sont confondus les fronts de la fissure numérique et de la zone cohésive.

Le comportement d'un modèle de zone cohésive est défini par une loi reliant le saut de déplacement $[\underline{u}]$, qui correspond à l'ouverture des lèvres de la zone,

$$[\underline{u}](\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}^+) - \underline{u}(\underline{x}^-) \quad (\text{III-32})$$

et les contraintes cohésives \underline{t}_{zc} , qui d'après les conditions d'équilibre à l'interface solide-zone cohésive doivent vérifier la relation suivante :

$$\underline{t}_{zc}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}^+) \cdot \underline{n}^+ = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}^-) \cdot \underline{n}^- . \quad (\text{III-33})$$

Dans notre cas, la zone cohésive introduite ne transmet que des efforts normaux calculés à partir de l'ouverture normale. Les composantes tangentiels de la contrainte sont négligées et on a donc :

$$\underline{t}_{zc}(\underline{x}) = t_{zc}^+ \cdot \underline{n} = -t_{zc}^- \cdot \underline{n} . \quad (\text{III-34})$$

Où $\underline{n} = \underline{n}^+ = -\underline{n}^-$.

Sous ces définitions, la forme faible de l'équilibre s'écrit :

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{\dot{u}}^*) dV = \int_{\Gamma_F} \underline{t}_d \cdot \underline{\dot{u}}^* dS + \int_{\Gamma_{zc}^+} t_{zc}^+ \underline{n} \cdot \underline{\dot{u}}^* dS + \int_{\Gamma_{zc}^-} t_{zc}^- \underline{n} \cdot \underline{\dot{u}}^* dS \quad \forall \underline{u}^* \in U \quad (\text{III-35})$$

En reprenant les définitions du saut de déplacement (eq. 32) et de la contrainte cohésive (eq. 34), on peut écrire en un point quelconque de Γ_{zc} :

$$\begin{aligned} t_{zc}^+ \underline{n} \cdot \underline{\dot{u}}^+ + t_{zc}^- \underline{n} \cdot \underline{\dot{u}}^- &= t_{zc} \underline{n} \cdot (\underline{\dot{u}}^+ - \underline{\dot{u}}^-) \\ &= t_{zc} \underline{n} \cdot [\underline{\dot{u}}] \end{aligned} \quad (\text{III-36})$$

Cette définition suppose néanmoins de définir une surface de référence sur laquelle on peut écrire les grandeurs associées aux lèvres supérieures et inférieures de la zone cohésive. Dans le cas de la déchirure ductile, c'est-à-dire d'un mode de rupture en ouverture principalement et d'une déformation quasi symétrique des lèvres, l'utilisation de la médiane de la fissure semble la plus adaptée.

Finalement, à partir de la relation (III-36), on simplifie l'écriture de la forme faible de l'équilibre :

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{\dot{u}}^*) dV = \int_{\Gamma_F} \underline{t}_d \cdot \underline{\dot{u}}^* dS + \int_{\Gamma_{zc}} t_{zc} \underline{n} \cdot [\underline{\dot{u}}^*] dS \quad \forall \underline{u}^* \in U \quad (\text{III-37})$$

Afin de compléter l'équation d'équilibre discrétisée (III-31), il reste maintenant à définir la discrétisation du terme lié à la présence de la zone cohésive dans l'équation (III-37). C'est l'objet de la prochaine partie.

3.3 Discrétisation du problème de zone cohésive dans le cadre XFEM

La discrétisation du problème de zone cohésive dans le cadre XFEM correspond au calcul du saut de déplacement et des efforts cohésifs à partir des degrés de liberté des éléments traversés par la fissure. Le saut de déplacement correspond à l'ouverture de la fissure et sa définition peut être discrétisée directement. Le lien entre efforts cohésifs et composantes duales des degrés de liberté (d.d.l.) d'enrichissement sera expliqué dans une deuxième partie. Dans une troisième partie la méthode d'intégration discrète de ces efforts sera détaillée.

3.3.1 Saut de déplacement discrétisé

Bien que physiquement, une zone cohésive se situe en avant de la pointe de fissure, dans le solide et correspond simplement à une zone de localisation de la plasticité où les cavités croissent et coalescent, le modèle numérique correspondant est celui d'une fissure dont les bords ne sont pas libres. On peut donc modéliser une zone cohésive à partir du concept fissure de la méthode des éléments finis étendue.

La méthode des éléments finis étendue permet en effet d'introduire une fissure de façon indépendante du maillage de la structure étudiée, sans mailler la discontinuité explicitement, la fissure étant définie simplement à l'aide de deux fonctions de niveau (level set). Afin de calculer le comportement d'une zone cohésive, la définition de points d'intégration le long de la fissure devient nécessaire.

La stratégie de définition de la fissure dans Cast3M est bien adaptée au travail avec zone cohésive car les fonctions de niveau sont calculées à partir du maillage de la fissure. Malgré l'introduction d'un modèle cohésif reliant les lèvres de la fissure, aucun degré de liberté supplémentaire n'est ajouté aux nœuds des éléments de la fissure. Les degrés de liberté associés à ces points de Gauss sont ceux de l'élément XFEM qui contient les points de Gauss supports du modèle cohésif.

Ainsi à partir de la définition du saut de déplacement (III-32), on écrit :

$$\begin{aligned} [\underline{u}]^h(\underline{x}) &= \underline{u}^h(\underline{x}^+) - \underline{u}^h(\underline{x}^-) \\ &= \sum_{i=1,2} N_i(\underline{x}^+) (\underline{u}_i + H(\underline{x}^+) \mathbf{b}_i) - \sum_{i=1,2} N_i(\underline{x}^-) (\underline{u}_i + H(\underline{x}^-) \mathbf{b}_i) \end{aligned} \quad \text{(III-38)}$$

Naturellement $N_i(\underline{x}^+) = N_i(\underline{x}^-) = N_i(\underline{x})$ et $H(\underline{x}^+) = -H(\underline{x}^-) = 1$, d'où l'écriture simplifiée :

$$[\underline{u}]^h(\underline{x}) = 2 \sum_{i=1, \text{no}} N_i(\underline{x}) \mathbf{b}_i \quad \text{(III-39)}$$

Où no est le nombre de nœuds de l'élément XFEM dans lequel se trouve le point de Gauss de la zone cohésive considéré.

Afin de se rapprocher de la forme utilisée pour le calcul des déformations, on peut définir une matrice $[\mathbf{B}_{zc}]$, telle que :

$$[\underline{u}]^h(\underline{x}) = [\mathbf{B}_{zc}] \{\underline{u}\} \quad \text{(III-40)}$$

De la même manière que pour le calcul des déformations, on peut décomposer la matrice $[\mathbf{B}_{zc}]$ en un terme associé aux degrés de liberté standards et un autre terme associé aux degrés de liberté d'enrichissement :

$$[\mathbf{B}_{zc}] = [\mathbf{B}_{zc;u} \quad \mathbf{B}_{zc;b}] \quad \text{(III-41)}$$

$$[\mathbf{B}_{zc;u}] = [0]$$

$$[\mathbf{B}_{zc;b}] = 2 \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_{\text{no}} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_{\text{no}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_{\text{no}} \end{bmatrix} \quad \text{(III-42)}$$

En réalité, les lois cohésives sont définies dans le repère local en termes de composante normale et de composante(s) tangentielle(s) par rapport à la surface de référence, il faut donc appliquer un changement de repère par rotation au saut obtenu par l'équation précédente.

Afin d'être cohérent avec la définition de la fissure donnée par les levels sets, il est important que \underline{n} , la composante normale du repère local pointe dans le sens des ϕ positifs. Pour garantir cette propriété, la normale au plan de la zone cohésive est calculée à partir du gradient de ϕ normé :

$$\begin{aligned} \underline{n}(\underline{x}) &= \overrightarrow{\text{grad}} \phi(\underline{x}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1, \text{no}} N_{i,x}(\underline{x}) \phi_i \\ \sum_{i=1, \text{no}} N_{i,y}(\underline{x}) \phi_i \\ \sum_{i=1, \text{no}} N_{i,z}(\underline{x}) \phi_i \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \text{(III-43)}$$

Afin que le vecteur tangentiel \underline{t}_1 (un des deux en 3D) soit dirigé vers la pointe de la fissure numérique, il doit être calculé à partir du gradient de ψ :

$$\begin{aligned} \underline{t}_1(\underline{x}) &= \overrightarrow{\text{grad}} \psi(\underline{x}) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1, \text{no}} N_{i,x}(\underline{x}) \psi_i \\ \sum_{i=1, \text{no}} N_{i,y}(\underline{x}) \psi_i \\ \sum_{i=1, \text{no}} N_{i,z}(\underline{x}) \psi_i \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \text{(III-44)}$$

En 3D, le second vecteur tangentiel, noté \underline{t}_2 , est obtenu simplement par le produit vectoriel des deux autres vecteurs :

$$\underline{t}_2(\underline{x}) = \underline{t}_1(\underline{x}) \wedge \underline{n}(\underline{x}) \quad \text{(III-45)}$$

On note $[\mathbf{R}]$ la matrice de changement de repère en un point :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{n}^T \\ \underline{t}_2^T \end{bmatrix} \quad \text{(III-46)}$$

Finalement le saut de déplacement de la zone cohésive dans son repère local est donné par l'expression suivante :

$$[\underline{u}]_h^{\text{loc}}(\underline{x}) = [\mathbf{R}][\mathbf{B}_{zc}] \{u\} \quad \text{(III-47)}$$

Remarque :

En formulation lagrangienne réactualisée, si on veut calculer correctement l'orientation du saut, il faut utiliser les champs ϕ et ψ actuels, en particulier dans le cas de grandes rotations.

3.3.2 Lien entre efforts cohésifs et composantes duales des d.d.l. d'enrichissement

Afin de relier les composantes duales des ddl d'enrichissement aux efforts cohésifs, on étudie de nouveau le cas d'une poutre en traction composée de deux éléments linéaires (Figure III-17). Le chargement est symétrique et imposé en effort (Figure III-17).

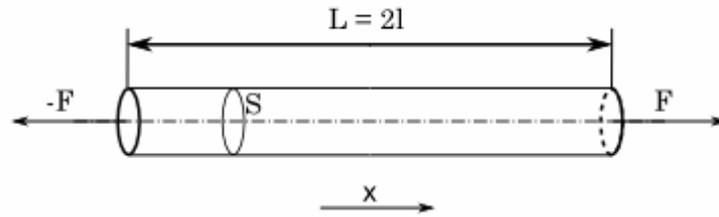


Figure III-16 - Poutre élastique en traction symétrique

Pour modéliser l'avancée de fissure dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue, on ajoute des degrés de liberté aux nœuds support de la discontinuité. L'ajout de ces degrés de liberté se fait sur la structure en équilibre. Ici, en raison de la symétrie, la fissure apparaît à la jonction des éléments, c'est-à-dire au niveau du nœud 2. Un degré de liberté d'enrichissement b_2 est alors ajouté sur ce nœud.

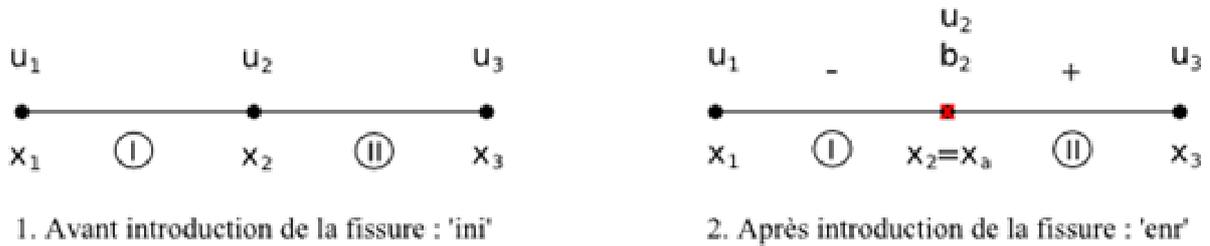


Figure III-17 - Discrétisation du problème de poutre en traction symétrique

L'état équilibré de départ est appelé 'ini' (Figure III-17.1). Pour cet état le critère d'amorçage de la fissure est vérifié. Avant d'insérer la fissure, le champ de déplacement discrétisé \underline{u}_{ini} s'écrit :

$$\underline{u}_{ini} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-48})$$

Dans les éléments I et II, l'approximation du champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{u}_h^{ini}(x) = \sum_{i=1,2} N_i(x) u_i \quad (\text{III-49})$$

$$\text{Avec } \{N\} = \frac{1}{2} \{1 - \xi \quad 1 + \xi\}^T \quad (\text{III-50})$$

Tant qu'il n'y a pas de discontinuité, le schéma d'intégration standard à un point de Gauss par élément est conservé, ce dernier se situe à l'abscisse nulle de l'élément parent. Sous l'hypothèse de petites déformations, la déformation en chaque point de Gauss s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= [B_{ini}] \{u_{ini}^I\} & \varepsilon_{II} &= [B_{ini}] \{u_{ini}^{II}\} \\ &= \frac{1}{1} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} & &= \frac{1}{1} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III-51})$$

Les contraintes élastiques correspondantes sont égales du fait de la symétrie : $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma$. Leur intégration sur chaque élément donne finalement les efforts intérieurs nodaux :

$$\begin{aligned} \{F_{int,ini}^I\} &= \int_{\Omega_I} [B_{ini}]^T \{\sigma_I\} dV & \{F_{int,ini}^{II}\} &= \int_{\Omega_{II}} [B_{ini}]^T \{\sigma_{II}\} dV \\ &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} S \sigma & &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} S \sigma \end{aligned} \quad (III-52)$$

$$\{F_{int,ini}\} = \begin{Bmatrix} F_{int,ini}^I \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{int,ini}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} S \sigma$$

Après assemblage des vecteurs d'efforts internes, on peut écrire l'équilibre :

$$\{F_{int,ini}\} = \{F_{ext,ini}\} \quad (III-53)$$

Pour modéliser l'apparition de la fissure, on ajoute de nouveaux degrés de liberté à la base d'approximation. Afin de conserver l'équilibre, ces nouveaux degrés de liberté sont initialisés à 0 (fissure fermée), finalement les vecteurs déplacements associés à l'état 'ini', à l'état enrichi qualifié par 'enr' (Figure III-17.2) s'écrivent :

$$\underline{u}_{ini} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \underline{u}_{enr} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ b_2 = 0 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (III-54)$$

Dans les éléments I et II, l'approximation du champ de déplacement s'écrit à présent :

$$u_h^{enr}(x) = \sum_{i=1,2} N_i(x) (u_i + H(x)b_i) = \sum_{i=1,2} N_i(x) (u_i) \quad (III-55)$$

$$\text{Avec } H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } \phi > 0 \\ -1 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad \text{où } \phi = x - x_a = x - x_2 \quad (III-56)$$

La fonction $H(x)$ vaut -1 dans l'élément I et 1 dans l'élément II, car la discontinuité se situe au niveau du noeud 2. Cette particularité permet aussi de garder le schéma d'intégration standard (pas de sous-découpage).

La déformation en chaque point de Gauss s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= [B_{enr}] \{u_{enr}^I\} & \varepsilon_{II} &= [B_{enr}] \{u_{enr}^{II}\} \\ &= \frac{1}{1} [-1 \quad 1 \quad -1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} & &= \frac{1}{1} [-1 \quad -1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_2 \\ b_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (III-57)$$

b_2 étant initialisé à 0, les déformations et les contraintes élastiques associées ne varient pas. Leur intégration sur chaque élément donne finalement les efforts intérieurs nodaux :

$$\begin{aligned} \{F_{int,enr}^I\} &= \int_{\Omega_I} [B_{enr}]^T \{\sigma_I\} dV & \{F_{int,enr}^{II}\} &= \int_{\Omega_{II}} [B_{enr}]^T \{\sigma_{II}\} dV \\ &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} S \sigma & &= \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} S \sigma \end{aligned} \quad (III-58)$$

$$\{F_{int, enr}\} = \begin{Bmatrix} F_{int, enr}^I \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{int, enr}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} S\sigma \quad (\text{III-59})$$

Après assemblage des vecteurs d'efforts internes, on remarque que le système n'est plus équilibré :

$$\{F_{int, enr}\} - \{F_{ext, enr}\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} S\sigma - \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} S\sigma \neq \{0\} \quad (\text{III-60})$$

Le déséquilibre apparaît sur la composante duale du degré de liberté d'enrichissement. C'est cet effort qui entraîne l'ouverture des lèvres dans le cas d'une fissure libre. Afin de maintenir la fissure fermée, on peut appliquer des efforts de cohésion, noté F_{coh} , sur les lèvres de la fissure équilibrant les efforts intérieurs duaux aux degrés de liberté d'enrichissement :

$$\begin{aligned} \{F_{int, enr}\} + \{F_{coh}\} &= \{F_{ext, enr}\} \\ \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} S\sigma + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} S\sigma &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} S\sigma \end{aligned} \quad (\text{III-61})$$

Le lien avec un modèle cohésif est alors direct. Dans le cas d'une fissure cohésive, les efforts cohésifs n'équilibrent pas exactement les efforts d'ouverture, mais sont calculés à partir de la loi cohésive correspondante.

3.3.3 Calcul des efforts cohésifs nodaux

Les contraintes cohésives sont déterminées en chaque point de Gauss du maillage de la zone cohésive. A l'équilibre, les contraintes cohésives doivent équilibrer les contraintes existant sur les lèvres de la fissure, leur intégration se fait le long de la surface de référence de la zone cohésive :

$$\{F_{zc}\} = \int_{\Gamma_{zc}} [B_{zc}]^T [R]^T \{t_{zc}\} dS \quad (\text{III-62})$$

Il est important de remarquer que l'intégrale est calculée le long de l'élément cohésif. Pour un élément cohésif, la contribution aux efforts nodaux de l'élément XFEM est donc :

$$\{F_{zc, elzc}\} = \int_{\Gamma_{elzc}} [B_{zc}]^T [R]^T \{t_{zc}\} \det([J_{zc}]) dS \quad (\text{III-63})$$

où $[J_{zc}]$ est la matrice jacobienne de la transformation de l'élément cohésif parent à l'élément cohésif réel calculé à partir des fonctions de forme des éléments supports du modèle cohésif.

3.4 Conclusion

La méthode des éléments finis étendue est un cadre naturel pour l'utilisation de modèles cohésifs. En effet, les enrichissements introduits pour simuler la présence d'une fissure sont directement liés à l'ouverture de la fissure sur laquelle repose la définition des lois cohésives.

De plus, une étude unidimensionnelle du problème d'introduction d'une fissure dans un modèle XFEM, permet de montrer le lien entre les composantes duales des degrés de liberté d'enrichissement et les efforts cohésifs.

4. Implémentation dans Cast3M, algorithme de résolution

Dans le cadre de la méthode des éléments finis standard, les modèles de zone cohésive sont introduits au début du calcul par l'intermédiaire d'éléments d'épaisseur nulle. Ainsi l'instant où leur ouverture n'est plus négligeable, ainsi que celui de leur casse est un résultat direct du calcul. Bien que ce soit une propriété attrayante, le défaut de cette modélisation est que la présence d'éléments de zone cohésive entre les éléments du solide modifie la rigidité globale de la structure étudiée et ne correspond pas à un problème de fissuration.

L'utilisation de lois à seuil, ou l'introduction du modèle cohésif via la XFEM est donc plus adaptée. En effet, la XFEM permet d'introduire les éléments de zone cohésive juste à l'instant où ils doivent s'activer, c'est-à-dire lorsqu'un critère d'initiation ou de propagation de la zone cohésive est vérifié. On note toutefois que la propagation de la fissure réelle, c'est-à-dire de la fissure à bords libres de contrainte, reste un résultat direct du calcul.

La résolution d'un problème avec zone cohésive repose donc essentiellement sur la gestion de l'initiation et de la propagation de ces zones. Celle-ci se décompose en deux parties : la définition d'un critère d'insertion d'éléments supports du modèle cohésif et la gestion de la propagation à proprement parler. Le troisième point essentiel est la prise en compte de la zone cohésive dans le calcul de l'équilibre.

4.1 Gestion de la propagation de la zone cohésive

Le but de ces travaux est de proposer une méthode permettant d'utiliser un modèle mécanique continu adoucissant tant que celui-ci est le meilleur modèle pour prendre en compte l'évolution de la microstructure. Dans le cas du modèle de Rousselier, l'évolution du comportement dépend principalement de la triaxialité. Des auteurs [Marie2003, Bron2004] ont montré que la formulation locale de cette loi constitutive permet de prédire correctement la déchirure ductile lorsque l'on utilise la bonne taille de maille dans la zone de propagation. C'est seulement lorsque les éléments cassés subissent trop de distorsion que des problèmes de convergence des itérations d'équilibre apparaissent. Ainsi les approches non-locales ou à second-gradient, qui sont par ailleurs des approches intéressantes puisqu'elles permettent de supprimer dans une certaine mesure la dépendance à la taille de maille, n'apporte pas d'amélioration à ce problème.

L'utilisation d'un modèle de zone cohésive permet de passer d'une modélisation précise de la croissance des cavités à la modélisation de la propagation de fissure en limitant les pertes d'énergie et les problèmes numériques. Dans ce but, et afin de réduire l'influence du modèle de zone cohésive sur la réponse de la structure à la triaxialité, les supports du modèle cohésif doivent être introduits peu avant d'atteindre le critère de rupture du modèle local.

4.1.1 Paramètre d'identification de la loi cohésive

Pour le modèle de Rousselier, le critère de rupture du volume élémentaire de référence (VER) est écrit en termes de porosité, car celle-ci dépend de l'histoire de la triaxialité dans le VER considéré et donne le niveau de dommage en fonction de la trace du tenseur des déformations plastiques. Théoriquement, la valeur de la porosité pour laquelle la discontinuité est introduite est notée f_{switch} . Cette valeur doit être choisie de telle sorte que le modèle de Rousselier puisse engendrer suffisamment de dommage pour prendre correctement en compte l'influence de l'histoire de la triaxialité des contraintes sur le processus de rupture. En effet, l'utilisation d'une loi cohésive unique, indépendante de la triaxialité, ne permet pas le changement de modélisation plus tôt.

D'après les travaux de Siegmund et Brocks [Siegmund2000], il serait sans doute possible d'améliorer ce point en identifiant plusieurs lois cohésives correspondant à différents taux de triaxialité autour de la zone cohésive au moment du switch. Cependant, dans le cadre de la modélisation de la déchirure ductile en mode I, l'approche à loi cohésive unique avec exploitation maximum du modèle de Rousselier semble, a priori, suffisante pour modéliser la dernière étape de la rupture.

Le critère pour lequel on souhaite propager la zone cohésive est donc différent du critère choisi pour l'identification de la loi dans le chapitre II. Pour correspondre avec l'état du solide environnant au moment de l'insertion, la loi cohésive doit avoir un saut nul pour la porosité f_{switch} . Dans le cas des HPP, un offset est appliqué à la loi grâce à la courbe « saut de déplacement-porosité », comme la figure suivante le montre :

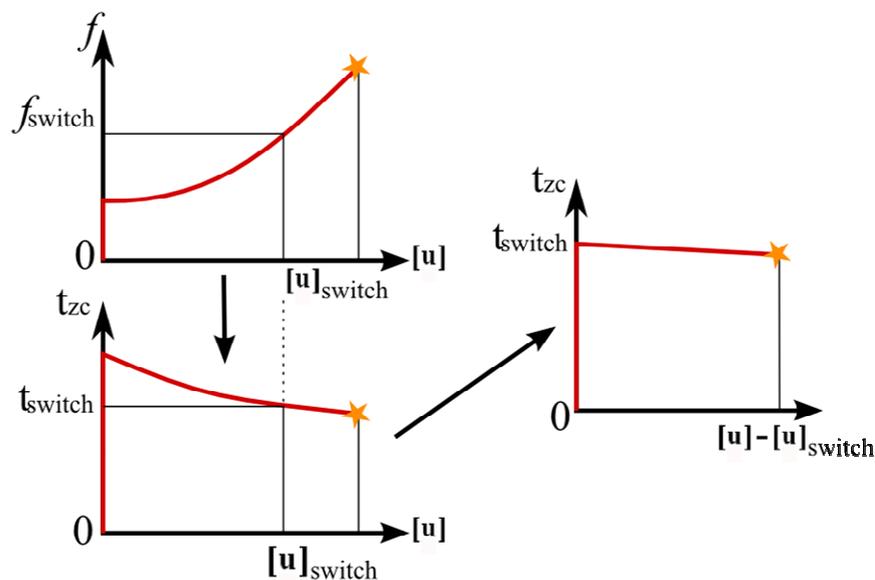


Figure III-18 - Application d'un offset sur la loi cohésive identifiée

Dans le cas où l'on travaille en formulation lagrangienne réactualisée, la loi doit être réidentifiée à partir du critère correspondant. En effet, dans le chapitre précédent on a montré que l'élément contenant la zone cohésive se décharge dès que celle-ci s'ouvre. Si on choisit d'activer la zone cohésive plus tard, les éléments contenant la zone cohésive vont continuer de plastifier jusqu'à activation de la zone cohésive, la surface support de la zone cohésive, sera donc a priori réduite par rapport à celle d'une zone cohésive active à un stade plus précoce du processus de rupture. On voit donc que le critère d'activation de la zone cohésive joue un rôle

sensible sur les dimensions de la surface support de la zone cohésive et ainsi sur la contrainte cohésive de Cauchy correspondante.

Si les deux critères diffèrent peu, on peut de la même manière que sous les HPP, appliquer simplement un offset. Si les deux critères diffèrent de manière plus accentuée, dans le cas d'une loi constitutive hypoélastique, on peut calculer une approximation de la loi cohésive tenant compte des grandes déformations. L'hypothèse d'hypoélasticité permet de négliger le changement de dimension de la section support de la zone cohésive au cours de la relaxation des contraintes. Ainsi la contrainte cohésive normale peut être recalculée directement à partir de la force axiale :

$$t_{zc} = F_z / S_{switch} \quad \text{(III-64)}$$

où F_z est la force axiale appliquée au cylindre et S_{switch} la section du cylindre dans la modélisation de référence pour $f=f_{switch}$. Le saut de déplacement associé à la contrainte calculée est obtenu par simple offset, de la même manière que sous les HPP.

4.1.2 Critère d'extension d'une zone cohésive

Pour un modèle local de rupture ductile, la propagation de la fissure se produit discrètement, point de Gauss par point de Gauss. C'est pourquoi les éléments à intégration réduite sont privilégiés malgré leur propension à introduire des modes de Hourglass, qui sont des modes de déformation à énergie nulle. En effet, les éléments à intégration réduite permettent d'assigner un point de Gauss « maître » pour chaque zone élémentaire de rigidité (en vert sur la figure III-19). C'est-à-dire que la perte de rigidité d'une zone est influencée de façon très prépondérante par la rupture du point de Gauss se situant dans celle-ci. Lorsque plusieurs points de Gauss sont présents dans une sous-zone de rigidité, il devient plus difficile d'associer la propagation de la fissure avec la rupture d'un point de Gauss. De plus une étude plus précise du chemin de rupture des points de Gauss [Tourel1999] montre que dans un quadrangle à 8 nœuds et 9 points de Gauss, la rupture d'une ligne de points de Gauss ne conduit pas à la nullité des efforts nodaux.

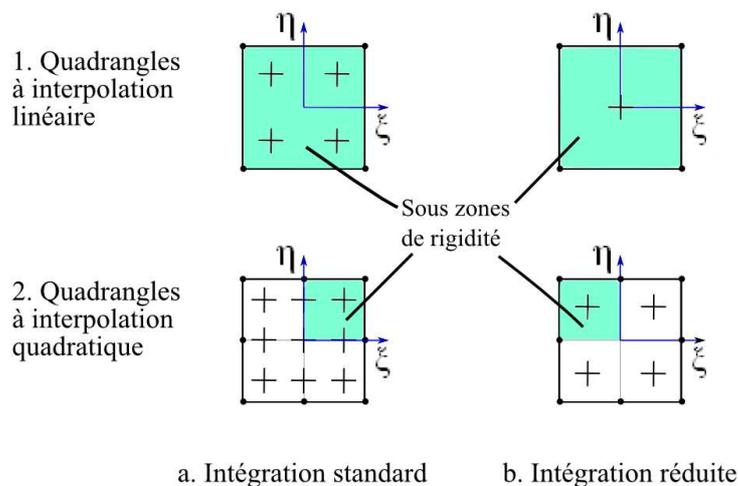


Figure III-19 - Lieu des points de Gauss suivant le schéma d'intégration pour les éléments quadrangles linéaires et quadratiques

Dans notre cas, on utilise des éléments linéaires surintégrés, on est donc dans une configuration très défavorable au traitement de l'avancée de fissure par endommagement. La zone de rigidité la plus petite est un élément auquel sont associés, en calcul bidimensionnel, entre 16 et 64 points de Gauss selon l'approximation choisie. Néanmoins, dans ce travail, le passage d'un état endommagé à une fissure réelle est piloté par la rupture des points de Gauss de la zone cohésive. Ainsi l'influence de la densité des points de Gauss de l'élément XFEM joue un rôle secondaire sur la propagation.

On voit cependant qu'il est nécessaire de choisir la zone et la méthode de calcul du critère d'insertion avec précaution afin de rester cohérent avec le calcul standard utilisant le modèle de Rousselier uniquement.

Plusieurs travaux mettent en œuvre des zones cohésives dans le cadre XFEM, la plupart sont des applications dans le cadre de la rupture fragile avec plasticité confinée. Ainsi Moës *et al.* [Moes2002] ont proposé de calculer la croissance de la zone cohésive en annulant le facteur de concentration de contrainte en mode I à une distance donnée de la pointe initiale. Wells *et al.* [Wells2001] introduisent une zone cohésive lorsque la traction maximale du solide est atteinte en avant de la pointe de fissure. D'autres auteurs [Mariani2003, Comi2007a, Unger2007] introduisent des modèles cohésifs avec une partie durcissante de rigidité très grande devant celle de la structure et proposent de propager la zone cohésive lorsque la traction maximale est atteinte. Comi *et al.* [Comi2007b] combinent quant à eux un modèle d'endommagement non-local et définissent une valeur de dommage critique pour laquelle le modèle de zone cohésive doit prendre la relève du modèle non local. Si ces approches donnent de très bons résultats dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture ou de modèles non-locaux, elles ne sont pas adaptées au traitement de la déchirure ductile étudiée ici.

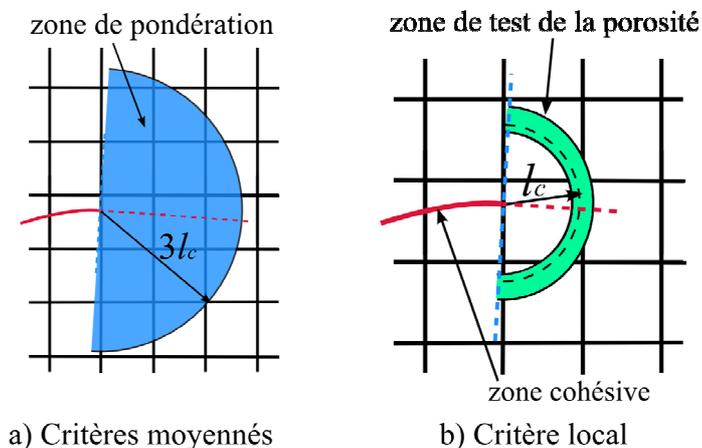


Figure III-20 - Zone de calcul du critère de propagation et d'orientation.
a) Pour les critères à moyenne pondérée ; b) Pour les critères locaux

Cependant, bien que les phénoménologies soient différentes, elles ont toutes pour base commune le comportement local du solide. Il est effectivement intéressant de propager la zone cohésive sur un critère local puisque celle-ci modélise le comportement de la zone active en pointe de fissure. De plus, cette approche permet de tester l'avancée de la zone cohésive sur une grandeur caractéristique du type de rupture étudiée. Pour la rupture fragile, la contrainte maximale est bien adaptée ; dans le cadre d'un calcul de propagation ductile, c'est la porosité qui donne le niveau d'endommagement du matériau en prenant en compte les effets d'histoire de la triaxialité. Le critère local appliqué à la porosité est donc bien adaptée pour définir le critère de croissance de la zone cohésive. Deux approches sont envisagées :

- La porosité est moyennée sur une zone centrée sur la pointe de la fissure cohésive ;
- La porosité est testée aux points de Gauss situés dans un anneau dont le rayon central est proche de la longueur caractéristique.

Ces critères sont adaptés depuis les critères en contrainte utilisés pour la rupture fragile. Le premier (Figure III-20.a) a été utilisé par Wells *et al* [Wells2001] et Remmers *et al* [Remmers2006] qui moyennent le tenseur des contraintes sur un disque dont le centre est la pointe de fissure et le rayon est égal à trois fois la taille d'un élément via une fonction de pondération Gaussienne ω définie par l'équation (II-65) :

$$\bar{v}_{\text{moy}} = \frac{\int_{V_{\text{test}}} \omega v \, dV}{\int_{V_{\text{test}}} \omega \, dV} \quad \text{with } \omega = \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad \text{(III-65)}$$

Où r est la longueur entre le centre du disque et un point donné ; l est la longueur caractéristique de la pondération. Dans une application à la propagation dynamique de fissure [Prabel2007], on montre que le choix de l n'a que peu d'influence sur les résultats si elle est de l'ordre de la taille de la zone active et que la valeur critique correspondant à la méthode de calcul est réidentifiée. Dans notre cas, de la même manière, l'utilisation de ce type de critère nécessite le calage de la valeur critique de la porosité pour une taille de maille et une longueur l donnée.

Cette méthode permet en effet de s'affranchir de possibles erreurs numériques locales en intégrant les contraintes sur un petit volume. Dans ses travaux de thèse, Benoit Prabel, propose d'utiliser un demi-disque et d'en fixer le rayon. C'est par l'intermédiaire de cette distance que nous faisons apparaître la longueur caractéristique du matériau. La distance doit être suffisamment faible pour caractériser l'état en pointe de zone cohésive, mais également assez élevée pour définir une zone de dimension raisonnable par rapport à la taille d'un élément, on la choisit donc égale à 3 fois la longueur caractéristique du matériau. L'utilisation d'un demi-disque permet de concentrer la moyenne sur la zone où la fissure peut propager (la fissure ne peut avancer en arrière du front). De même que B. Prabel, on ne prend pas en compte les points pour lesquels $\omega < 0.1$ et la porosité est normée par l'intégrale de la fonction poids seule.

La deuxième méthode (Figure III-20.b) est proche d'un critère RKR [Ritchie1973] pour lequel la contrainte est testée à une distance et une direction donnée. Elle évite cependant de projeter les champs dans une zone où les gradients et la plasticité sont importants. Un autre atout de cette approche est d'introduire directement la longueur caractéristique et de limiter ainsi la dépendance à la taille de maille. Toutefois, le résultat du calcul de ce critère reste dépendant du nombre de points Gauss et de la taille des éléments.

Pour les cas traités dans ce mémoire, la direction de propagation est connue et longe le plan de symétrie des éprouvettes. Cependant, pour la déchirure ductile, on peut calculer l'orientation de la zone cohésive à insérer de façon similaire à ce qui a été proposé par Wells *et al* [Wells2001] et adapté par B. Prabel [Prabel2007]. La direction de propagation de la fissure est alors calculée comme la normale à la contrainte principale maximale moyennée sur le demi-disque défini pour la première méthode. Ce critère est probablement discutable en général pour la propagation en rupture ductile mais permet de donner une bonne approximation de l'orientation dans le cas de la déchirure. Néanmoins, un autre critère fondé

sur les vecteurs propres calculés à la perte de stabilité matérielle pourrait lui être préféré afin de modéliser tous les cas de la rupture ductile.

L'avancée de zone cohésive minimale est d'un élément. Ceci implique que la porosité dans l'élément sera nécessairement plus grande que celle vérifiée par le critère. Ainsi la valeur de la porosité à comparer est notée f_{test} et ne sera pas forcément égale à f_{switch} . f_{test} devra être identifiée sur un essai de propagation de fissure, de telle sorte que la valeur choisie permette la cohérence entre l'état dans l'élément et la loi cohésive calculée pour f_{switch} . Lorsque la valeur adéquate est obtenue, la convergence doit alors être optimale et les résultats du calcul cohérents avec ceux donnés par la formulation standard du modèle de Rousselier.

4.1.3 Traitement de l'avancée de zone cohésive

Les problèmes traités dans cette thèse le sont sous l'approximation du déplacement ne contenant que l'enrichissement discontinu linéaire par morceau. C'est pourquoi l'étude de la propagation sera limitée ici au traitement de ce cas.

Le choix de restreindre l'enrichissement de l'approximation du déplacement à la fonction saut entraîne des restrictions dans le positionnement de la pointe de fissure. En effet celle-ci, n'est plus localisée directement par les fonctions de formes et il convient d'être prudent lors de l'enrichissement. La pointe de fissure doit toujours se situer sur un bord d'élément afin de minimiser la discontinuité des champs à travers le front de fissure.

En 2D, le cas où l'élément est découpé en un triangle et un quincaèdre est le plus difficile à traiter. Deux approches sont possibles :

- + On modifie la stratégie d'enrichissement en n'enrichissant pas le nœud le plus proche de la pointe de fissure.
- + Aux points de Gauss, on utilise les fonctions de forme de manière discontinue soit par rapport à la ligne de front de fissure, soit par rapport à la frontière de l'élément.

Les problèmes traités dans cette thèse sont symétriques et ne font pas apparaître ce type de configuration. Cependant, pour la généralisation de la méthode, il s'agit ici d'une question importante, à laquelle la meilleure réponse semblerait être l'utilisation d'une fonction de pointe de fissure linéaire s'annulant sur la ligne de front et constamment nulle en avant de ce front. Pour que cette fonction soit également valide en grandes déformations, elle devra être normée afin de situer la pointe par rapport à l'élément plutôt qu'en terme de distance vraie, comme c'est le cas en général pour les fonctions de pointe de fissure XFEM.

Que la pointe de fissure soit toujours sur le bord d'un élément simplifie grandement la procédure de propagation automatique en 2D. Pour le traitement de la propagation en 3D en revanche, cette approche est complexe à mettre en œuvre car le mécanisme est assez proche d'une méthode de relâchement de nœuds. L'algorithme de propagation donné ici est donc uniquement valable dans le cas bidimensionnel, la stratégie simplifiée utilisée pour le traitement de problèmes 3D sera explicitée dans le prochain chapitre.

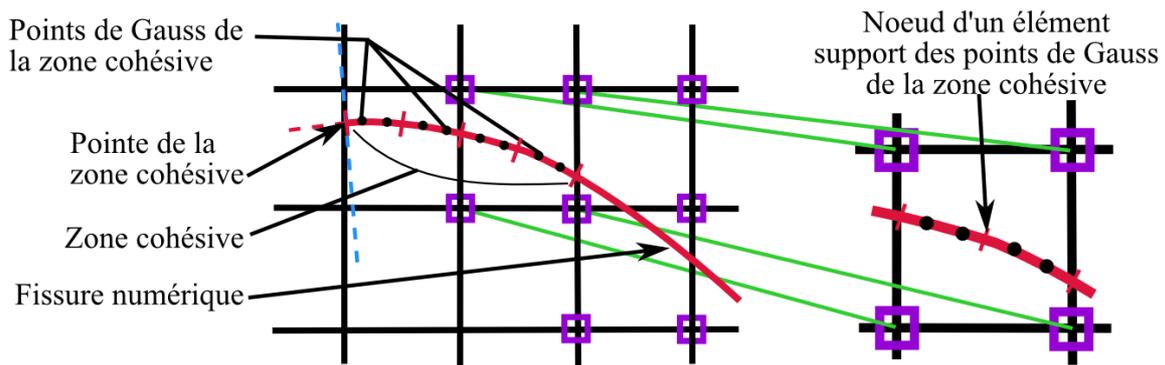


Figure III-21 - Discrétisation XFEM du modèle de zone cohésive

L'intégration des contraintes cohésives joue aussi sur l'algorithme de propagation. En effet, afin de pouvoir intégrer correctement les contraintes cohésives en efforts nodaux, chaque élément cohésif doit être associé à un unique élément XFEM si la fissure cohésive découpe ce dernier, à deux éléments XFEM si la discontinuité longe un bord. Ainsi, le découpage du maillage de la fissure doit être conforme à celui du maillage XFEM comme sur la figure III-6.

On choisit de plus de discrétiser la zone cohésive de telle sorte que la densité de points de Gauss sur son maillage soit similaire à celle du maillage XFEM (Figure III-21). Pour des éléments XFEM 2D à 16 points de Gauss, cela correspond en moyenne à l'utilisation de 2 segments à 2 points de Gauss par élément traversé. En 3D, dans le cas général, des éléments triangles sont privilégiés afin de traiter toutes les configurations de propagation possibles. Dans le cas d'une propagation plane avec un front droit, on peut utiliser des éléments quadrangles surintégrés, qui permettent d'obtenir une densité de points de Gauss cohésifs identique à celle des éléments XFEM volumiques.

L'avancée de zone cohésive est une donnée du problème de propagation, on la note Δa_{zc} . En effet, seule l'avancée de la fissure à bords libres de contrainte est un résultat du calcul. Celle-ci correspond alors la rupture des points de Gauss de la zone cohésive. Afin d'assurer l'ouverture progressive de la zone cohésive sur plusieurs pas de calcul avant rupture (c'est-à-dire avant que l'ouverture ne soit égale à la valeur du saut de déplacement critique), le chargement appliqué sur la structure est adapté automatiquement. La procédure correspondante sera détaillée dans la section 4.2.

Il est clair qu'ici, le problème de propagation est surcontraint : l'avancée de zone cohésive est fixée et sa pointe doit se situer sur le bord d'un élément. On se rend bien compte que c'est la première condition qui doit être flexible afin de garantir la bonne description de la fissure et la convergence du calcul. L'avancée de fissure est donc calculée de façon à être le plus proche de Δa_{zc} tout en positionnant la nouvelle pointe sur le bord d'un élément XFEM.

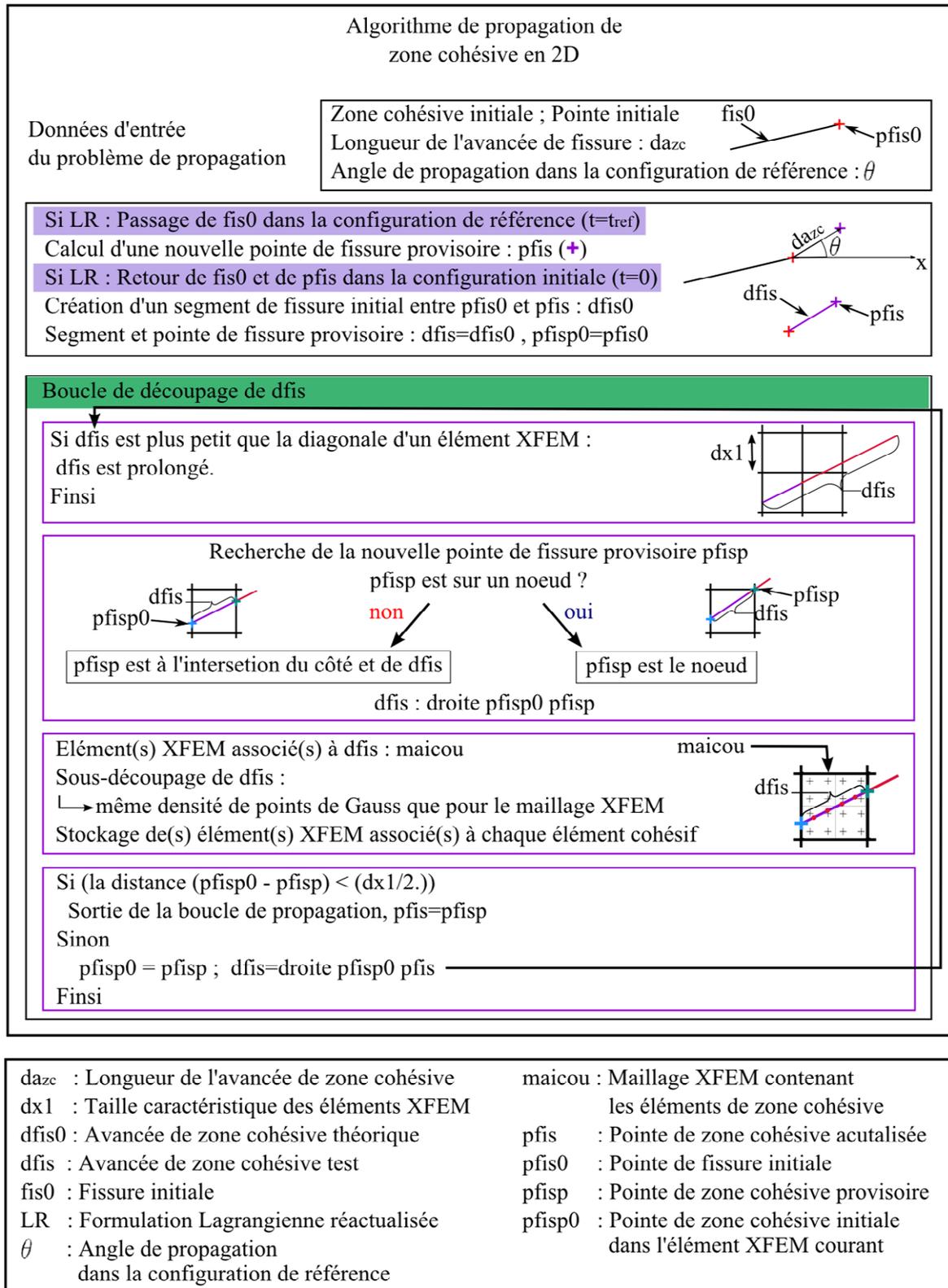


Figure III-22 - Algorithme de propagation de la zone cohésive en 2D

Pour les problèmes traités dans cette thèse, une fissure préexiste toujours. Ainsi le segment de zone cohésive est toujours ajouté à un segment de fissure ou de zone cohésive existant. L'angle de propagation est aussi une entrée du problème de propagation. Il est soit imposé, soit calculé dans une étape préliminaire à l'extension de la zone cohésive. Dans le cas où l'angle est imposé égal à zéro (pour les problèmes symétriques, ceci correspond à une

propagation dans le plan de fissure initial), il suffit d'ajouter un élément cohésif de la taille d'un élément XFEM à la fissure existante. En effet, pour une propagation d'angle nul dans le plan de symétrie, le lieu relatif du nouveau segment de fissure par rapport à la structure est identique dans la configuration initiale et dans la configuration de référence courante.

Dans le cas où l'angle de propagation est libre, l'algorithme de propagation prenant en compte tous ces points est résumé dans le schéma figure III-22.

4.1.4 Considérations liées au changement de configuration de référence

Dans le cas de la formulation lagrangienne réactualisée, le calcul du critère de propagation ainsi que celui de la nouvelle pointe de fissure provisoire doit être fait dans la configuration courante. En effet, cela permet d'être cohérent avec le calcul de la direction de propagation qui est basé sur le tenseur des contraintes de Cauchy.

Une fois la nouvelle pointe de fissure calculée dans la configuration actuelle, celle-ci est ramenée dans la configuration initiale du calcul. C'est dans cette configuration que l'étape de découpage du nouveau segment est menée.

La position des points de Gauss de la zone cohésive dans l'élément XFEM parent (nécessaire à la projection du déplacement et des efforts) est obtenue par une procédure itérative très efficace lorsque la configuration de référence est la configuration initiale. Pour la formulation lagrangienne réactualisée, la configuration de référence change à chaque pas de temps, et le résultat de la procédure itérative peut varier quelque peu. Afin d'éviter les erreurs induites par cette approche, les coordonnées réduites des points de Gauss dans l'élément XFEM sont calculées sur la configuration initiale, au moment de l'ajout du segment de zone cohésive, puis stockées pour être utilisées au cours des incréments de chargement.

4.2 Algorithme de Résolution de l'équilibre

Dans cette partie sont présentées les modifications appliquées à la procédure de résolution de Cast3M afin de traiter le problème de zone cohésive XFEM pour de grandes déformations. D'un point de vue utilisateur, la procédure de résolution de problèmes solides mécaniques non linéaires de Cast3M repose sur l'écriture d'une table, dans laquelle sont définies toutes les données et options du calcul. Afin de procéder à un calcul XFEM, il faut modifier les procédures de résolution de telles sortes qu'elles puissent lire les données supplémentaires liées à la présence d'une fissure implicite ainsi qu'en gérer la propagation. Les modifications liées à la prise en compte d'une fissure XFEM seront d'abord détaillées, puis celles liées à la prise en compte du modèle de zone cohésive seront décrites. Enfin, les adaptations liées au calcul en formulation lagrangienne réactualisée seront explicitées.

4.2.1 Insertion et Propagation d'une fissure XFEM au cours du calcul non linéaire

L'insertion et la propagation d'une fissure XFEM dans un calcul non linéaire est assez simple. En effet les opérateurs XFEM de calcul des level sets, d'enrichissement du modèle et de calcul des grandeurs physiques (déformations, contraintes, rigidité, etc...) ont été insérés dans le code suite aux travaux de thèse de Benoit Prabel [Prabel2007]. Il suffit donc d'implanter la

lecture des nouvelles données d'entrée ainsi que les étapes de mise à jour des level sets et d'enrichissement du modèle dans l'algorithme de résolution.

Les entrées supplémentaires nécessaires au calcul XFEM sont :

1. la fissure initiale (il est également possible de commencer un calcul sans fissure, mais ce cas ne sera pas traité dans ce mémoire) ;
2. le type du critère local de propagation ;
3. la valeur du critère de propagation, lorsqu'on utilise un critère local comme c'est le cas ici.

Avant de démarrer le calcul, il est nécessaire de prévoir une sous-zone d'éléments XFEM suffisamment grande pour contenir la propagation au cours du calcul. Le maillage de la fissure est composé d'éléments segments en 2D et triangles ou quadrangles en 3D.

Le critère local de propagation peut être défini soit en terme de contrainte, soit en terme de déformation plastique cumulée (ou déformation plastique équivalente), soit en terme de porosité comme c'est le cas ici. Si la direction de propagation n'est pas imposée, elle est obtenue par le calcul de la normale à la contrainte principale maximale. Pour ces trois options, on peut choisir entre un test local et un test à moyenne pondérée, comme indiqué dans le paragraphe 4.1.2. La variable correspondante sera notée 'crit_pro', la valeur test associée sera notée quant à elle 'vcrit_pro'.

0. Au départ du calcul, la level set associée à la fissure initiale est calculée et le modèle enrichi à l'aide de cette donnée. La rigidité associée est ainsi calculée à l'aide du modèle enrichi et la fissure prise en compte.
1. A chaque pas de calcul, à l'équilibre, le critère de propagation est testé. S'il est vérifié, la procédure de propagation est lancée.
2. A partir du maillage de la fissure propagée, les fonctions de niveau sont recalculées.
3. L'enrichissement du modèle est mis à jour. A partir du modèle mis à jour, la rigidité est recalculée.

Ces quatre étapes résument les modifications apportées aux procédures de résolution de cast3M (pasapas.procedur et unpas.procedur) pour gérer la propagation d'une fissure à bords libres automatiquement.

4.2.2 Application du modèle cohésif, prise en compte dans la résolution de l'équilibre

Dans ce travail, les actions de la zone cohésive sont appliquées comme des actions extérieures au solide. Ainsi, celles-ci travaillent comme des forces suiveuses et ne sont pas associées à une modification de la rigidité de la structure. Cette approche peut réduire la vitesse de convergence du problème, mais elle a l'avantage de simplifier l'implémentation. De plus la rigidité élastique associée à notre modèle cohésif étant théoriquement infinie, sa prise en compte poserait des problèmes numériques ou nécessiterait l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.

A partir de cette hypothèse et des modifications présentées dans la partie précédente, l'insertion d'un modèle de zone cohésive sur la fissure numérique nécessite la définition des données d'entrée supplémentaires suivantes :

1. la définition du type de modèle utilisé pour la zone cohésive ;
2. la loi cohésive, pour l'instant seules les lois en traction simple sont possibles ;
3. le critère d'adaptation automatique du pas de chargement.

Dans l'implémentation du problème de zone cohésive proposée ici, le modèle de la zone cohésive est un modèle mécanique plastique. La loi cohésive comporte deux courbes :

- la courbe traction-ouverture ;
- la courbe porosité-ouverture (ou déformation plastique cumulée ou contrainte principale maximale).

La courbe traction-ouverture décrit le comportement de la zone cohésive. Aucune raideur élastique n'est entrée pour caractériser le modèle cohésif, car celle-ci est infinie. Ainsi, ce modèle ne peut travailler qu'en chargement radial, aucune décharge ne peut être tolérée. Dans ce contexte, cette hypothèse est vérifiée au cours du calcul de la réponse cohésive. Lorsqu'une refermeture est donnée en entrée du comportement la contrainte cohésive est mise à zéro afin d'aider le calcul à reprendre la bonne direction. Lorsque l'équilibre est convergé, la charge est de nouveau testée, si elle n'est pas vérifiée, le calcul est arrêté.

La contrainte cohésive est obtenue par bijection depuis le saut de déplacement normal calculé sur la surface de référence de la zone cohésive.

La courbe porosité-ouverture permet d'assouplir le critère de propagation de la zone cohésive. A partir de cette courbe on peut appliquer un offset à la courbe traction-ouverture (Figure III-18) lorsque le critère n'est pas exactement vérifié. La plage de valeur sur laquelle on autorise la propagation est donnée par l'intervalle I_{ins} :

$$I_{ins} = [0.99; 1.15] * f_{switch} \quad \text{(III-66)}$$

Le comportement de la zone cohésive est initialisé à l'aide de la traction maximale correspondant à la valeur de f_{switch} pour laquelle elle a été insérée.

Si l'on souhaite que le passage de l'état endommagé à une fissure réelle se fasse de manière continue et cohérente, il est nécessaire de limiter le pas de charge. En effet, ceci permet de limiter l'étendue de l'avancée du dommage incrémentale, et ainsi de laisser le modèle cohésif piloter la transition du modèle de déchirure ductile vers la fissure à bords libres.

L'adaptation automatique du pas de temps est pilotée par deux conditions :

- Lorsque le test de propagation de la zone cohésive est proche d'être atteint ou vient d'être dépassé, le pas de temps est modifié en conséquence (voir Figure III-23);
- Dans l'élément de la zone cohésive contenant sa pointe courante, l'incrément d'ouverture ne doit pas dépasser un certain pourcentage de l'ouverture critique.

Le critère sur l'incrément d'ouverture dans l'élément contenant la pointe de la zone cohésive est noté v_{cripil} et vaut un sixième de l'ouverture critique de la zone cohésive.

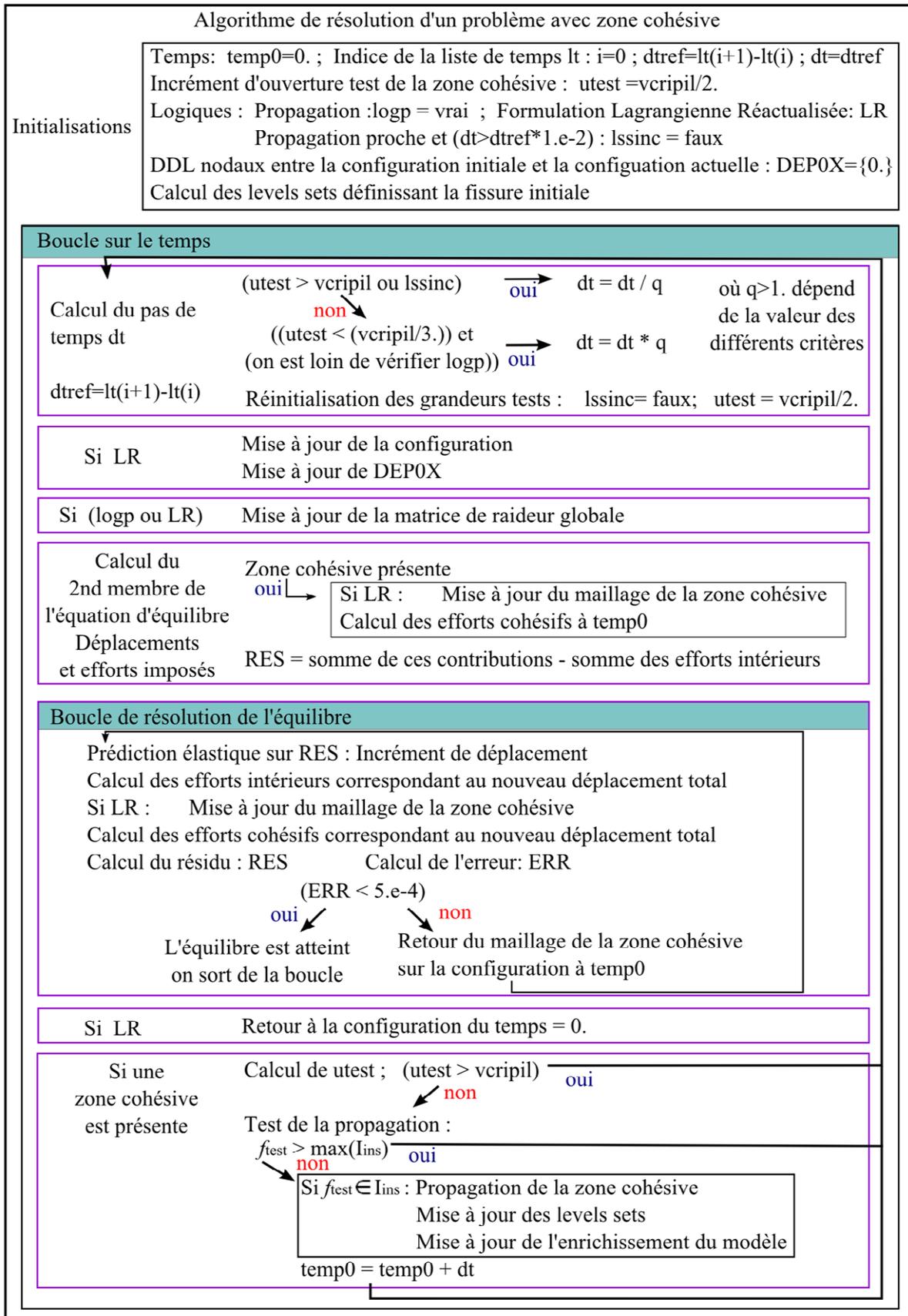


Figure III-23 - Algorithme de résolution d'un problème de fissuration avec zone cohésive

4.2.3 Spécificités liées à la formulation lagrangienne réactualisée

La formulation lagrangienne réactualisée est basée sur le changement de la configuration de référence au cours du calcul. Afin de calculer les efforts cohésifs correctement, il convient donc de mettre également à jour le maillage de la zone cohésive afin de prendre en compte non seulement les rotations correspondant aux déplacements de corps rigide du solide mais aussi la déformation de la surface de référence de la zone cohésive.

Ceci est mis en œuvre simplement, en calculant le déplacement aux noeuds des éléments cohésifs et en l'appliquant à ces noeuds d'une manière similaire à celle utilisée pour le maillage XFEM du volume. Ainsi dans les différentes étapes du calcul des grandeurs de la zone cohésive, le changement de configuration est naturellement pris en compte.

4.2.4 Résumé

Afin de synthétiser les différentes étapes de la résolution d'un problème de propagation de fissure avec zone cohésive, on a donné l'algorithme correspondant (Figure III-23). Cet algorithme est valide pour :

- Un calcul non linéaire d'un point de vue tant matériau que géométrique ;
- Les modèles volumiques correspondant sont le modèle de plasticité isotrope de von Mises ou celui de Rousselier ;
- Le modèle de zone cohésive est un modèle plastique de rigidité infinie ;
- L'approximation du déplacement est enrichie par les fonctions sauts uniquement ;
- Une fissure est initialement présente.

4.3 Conclusion

Dans le cadre de la XFEM, la résolution d'un problème de fissuration avec zone cohésive diffère peu de celle d'un problème de propagation de fissure à bords libres. Essentiellement trois points marquent la différence :

- Le maillage de la zone cohésive doit être conforme au maillage XFEM afin de permettre l'intégration correcte des efforts ;
- Le pas de chargement doit être adapté automatiquement ou piloté selon l'ouverture de la zone cohésive afin que la propagation soit enclenchée lorsque la valeur test se trouve dans l'intervalle I_{ins} donné et que l'ouverture de la zone cohésive soit progressive ;
- Le comportement de la zone cohésive doit être calculé et les efforts correspondants ajoutés au second membre, puisque le choix a été fait de considérer les efforts cohésifs comme des actions extérieures.

En dehors de l'algorithme de pilotage, l'implémentation pour la résolution de l'équilibre en présence d'un modèle de zone cohésive XFEM est peu intrusif. Cependant, le cadre de la formulation lagrangienne réactualisée nécessite d'être consciencieux quant au choix de la configuration pour chacune de ces étapes.

Ainsi, dans le cas où l'orientation est un résultat du calcul, le calcul du critère d'orientation basé sur la moyenne du tenseur des contraintes est fait sur la configuration actuelle. L'angle de propagation calculé est valable dans cette configuration et c'est là que la nouvelle pointe de fissure est calculée puis ramenée dans la configuration initiale. Les étapes de calcul de la contribution cohésive sont quant à elles toujours faites dans la configuration courante.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu comment a été adaptée la méthode des éléments finis étendue implémentée dans Cast3M de manière à modéliser de grandes propagations de fissure en déchirure ductile à l'aide d'un modèle mécanique continu pour la déchirure ductile. La stratégie utilisée repose sur la combinaison du modèle de Rousselier avec un modèle de zone cohésive.

La méthode implantée dans Cast3M découle des travaux de thèse de Benoit Prabel. Elle est une bonne base pour le traitement de la déchirure ductile car la stratégie d'intégration basée sur le sous-découpage non conforme des éléments évite les projections de champs dans une zone où les gradients et la plasticité sont importants. Le calcul des levels sets à partir du maillage de la fissure est également bien adapté au traitement des modèles cohésifs qui nécessite la discrétisation de la fissure.

Finalement l'extension de la XFEM de Cast3M au calcul de déchirure ductile utilisant un modèle cohésif pour traiter la transition entre endommagement diffus et fissure se découpe en trois axes principaux de développement :

- L'implantation d'un modèle cohésif XFEM ;
- Le traitement de la propagation de la zone cohésive ;
- L'extension à la formulation lagrangienne réactualisée qui nécessite de réactualiser la configuration de référence.

Le premier point repose simplement sur la création de nouveaux opérateurs permettant de calculer saut de déplacement, réponse locale et efforts cohésifs nodaux. De plus, le choix a été fait d'imposer les actions de la zone cohésive comme extérieures au solide, ce qui limite et localise les modifications à apporter à l'algorithme de résolution du problème. Les efforts cohésifs sont simplement insérés dans le résidu.

Afin de conformer l'approximation du déplacement avec la présence d'une zone cohésive en pointe de fissure, et afin également de permettre le traitement de grands déplacements, le choix a été fait de limiter l'enrichissement aux fonctions sauts. Ce choix nécessite cependant d'imposer que le front de la zone cohésive suive les bords des éléments XFEM ce qui complexifie la procédure de sous-découpage pour la propagation de la zone cohésive en 3D. De plus, afin d'assurer la justesse de l'intégration des efforts cohésifs aux nœuds des éléments XFEM, le découpage du maillage de la zone cohésive est fait de manière conforme au maillage XFEM.

Le traitement des grandes déformations et des grands déplacements dans Cast3M est fait à l'aide d'une formulation lagrangienne réactualisée. La configuration de référence changeant au cours du calcul, la matrice jacobienne de la transformation est calculée à l'aide de la position réelle des points de Gauss afin de ne pas surévaluer les déformations et de tenir compte des rotations de corps rigides dans les éléments coupés.

La méthode des éléments finis étendue de Cast3M a donc été adaptée pour le calcul de la propagation de fissure en déchirure ductile autant pour les cas bidimensionnels que tridimensionnels.

Chapitre IV.

Applications de la méthode de transition au calcul de propagation en 2D et en 3D

1. Introduction	122
2. Identification des paramètres de la loi cohésive pour le TU52B	123
2.1 Paramètres matériau du modèle de Rousselier	123
2.2 Choix de la fraction volumique de cavités pour le switch.....	130
2.3 Calcul de la loi cohésive pour les paramètres choisis.....	130
2.4 Identification du paramètre contrôlant l'insertion de la zone cohésive	132
2.5 Etude des résultats.....	136
2.6 Conclusion.....	139
3. Etude de paramètres	139
3.1 Influence de la méthode d'adaptation de la loi cohésive au cours du calcul.....	139
3.2 Influence de la taille de maille	140
3.3 Conclusion.....	145
4. Application au calcul de propagation en 3D	145
4.1 Introduction	145
4.2 CT 3D en déformations planes imposées.....	145
4.3 CT 3D avec les faces latérales libres	147
4.4 Conclusion.....	150
5. Conclusion.....	150

1. Introduction

Dans les précédents chapitres, les bases théoriques d'une méthode permettant le calcul de longues propagations de fissure en déchirure ductile ont été présentées. Elles se décomposent en deux axes, correspondant aux deux chapitres précédents. Le premier axe consiste au calcul d'une loi cohésive cohérente avec le modèle de Rousselier, le second correspond à son insertion dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue de Cast3M pour une formulation non linéaire géométrique.

Dans cette partie nous allons appliquer la méthode proposée au calcul de propagation sur éprouvette CT. Les résultats seront comparés à ceux obtenus dans le cadre de la détermination des paramètres du modèle de Rousselier pour le projet européen Vocalist [Marie2003, Marie2002a]. Les paramètres du modèle de Rousselier ont été identifiés sur de nombreux essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées et de déchirure sur éprouvettes CT. Le matériau auquel nous nous intéressons est un acier ferritique de tube dont le nom sous l'ancienne norme est TU52B, nous utiliserons ici cette notation. Dans la nouvelle norme, le nom de cette nuance est P295GH.

Avant d'appliquer cette méthode à la résolution d'un problème de propagation de fissure en déchirure ductile, il est nécessaire d'une part de choisir un critère pour amorcer la transition du modèle local à une fissure réelle en activant le modèle de zone cohésive et d'autre part de déterminer la taille de maille à utiliser pour les éléments XFEM. Une fois le critère de transition choisi, la loi cohésive doit ensuite être réidentifiée à partir de ce critère afin de limiter l'erreur sur la contrainte de Cauchy correspondante. La taille des éléments XFEM est quant à elle déterminée suite à une étude des résultats donnés par la modélisation d'un essai de déchirure sur CT avec différents types d'éléments (quadratiques et linéaires, à schéma d'intégration standard ou sous-intégré) et sous différentes hypothèses de calcul.

Les paramètres pour la propagation de la zone cohésive sont alors identifiés sur le calcul de déchirure sur CT en 2D utilisé pour l'identification des paramètres du modèle local de Rousselier. Cette étape est basée sur le choix de la fraction volumique critique de cavités à partir de laquelle la zone cohésive est identifiée. Toutes ces étapes d'identification correspondent à la première partie de ce chapitre.

Dans une seconde partie, on étudie l'influence de chacun des paramètres de propagation, afin de déterminer si ceux choisis dans la première partie sont bien les plus adaptés. De plus cette étude doit permettre d'obtenir une meilleure idée de la robustesse de la méthode, ainsi qu'une meilleure compréhension du rôle de la distance interpoints de Gauss lorsque la transition d'un état endommagé vers une fissure réelle est gérée à l'aide d'un modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle local étudié.

Enfin à partir des paramètres obtenus, on procède au calcul de déchirure ductile sur une CT en 3 dimensions. Dans ce cas, la gestion de la propagation est simplifiée en imposant la croissance de la zone cohésive dans le plan de la fissure initiale.

2. Identification des paramètres de la loi cohésive pour le TU52B

2.1 Paramètres matériau du modèle de Rousselier

2.1.1 Paramètres du modèle de Rousselier et Calcul de référence

Les paramètres du modèle de Rousselier pour l'acier ferritique TU52B ont été identifiés dans le cadre du projet VOCALIST [Marie2002a]. L'identification est faite en imposant initialement 3 des paramètres à l'aide de considérations théoriques et/ou d'expérience. Le paramètre restant (hors taille de maille) est ensuite déterminé par le calcul d'essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées de différents rayons d'encoche (ici les rayons sont de 2, 4 et 8mm) correspondant à différents états de triaxialité dans le barreau.

Dans le cadre de ce projet, la longueur caractéristique l_c est quant à elle déterminée en reproduisant l'avancée de fissure obtenue pour des essais de déchirure sur éprouvettes CT de 20mm d'épaisseur rainurées latéralement au niveau de l'entaille afin de favoriser un état de déformations planes dans le plan de fissure et ainsi une avancée de fissure quasi-constante le long du front. L'épaisseur dite nette de l'éprouvette au niveau de l'entaille est de 16mm. $l_c = \lambda_c / 2$ correspond à la distance moyenne séparant les points de Gauss d'éléments quadratiques sous-intégrés de côté λ_c . Lors de cette étape, la porosité critique f_c est elle aussi parfois adaptée. C'est le cas ici pour les éléments quadratiques sous-intégrés, pour lesquels f_c est abaissée de 5% à 3%.

L'identification a permis d'obtenir plusieurs jeux de paramètres donnant une bonne approximation de l'amorçage et de la vitesse de propagation de la fissure. Cependant ils donnent des convergences numériques variables. Parmi les jeux de paramètres du modèle de Rousselier obtenus, c'est celui donné dans le tableau suivant qui a été utilisé pour l'identification de la loi cohésive dans le chapitre II :

Young Modulus (GPa)	Poisson ratio	λ_c (mm)	f_0	f_c	D	σ_1 (MPa)
200.	0.3	0.15	1.4e-3	0.05	2	450

Tableau IV-1 - Caractéristiques matériaux et paramètres du modèle de Rousselier pour le TU52B

Le comportement en traction à l'état sain de ce matériau est donnée par la courbe de traction suivante :

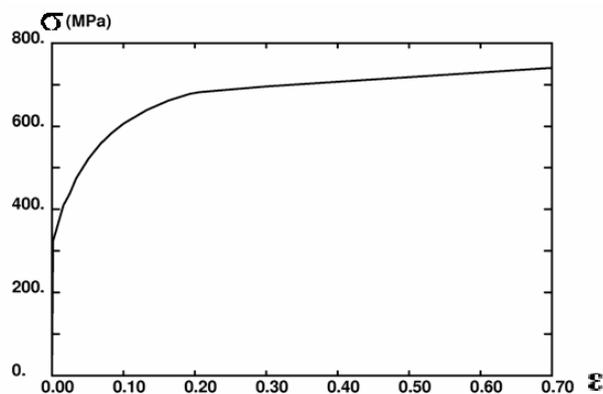


Figure IV-1 - Courbe de traction pour l'acier ferritique TU52B

On présente ici les résultats du calcul sur une CT20 (Compact Tension specimen de 20mm d'épaisseur) obtenus avec le jeu de paramètres donné dans le tableau IV-1. C'est ce calcul qui va servir de référence aux calculs effectués avec le modèle de zone cohésive XFEM. La longueur de la fissure après préfissuration est de 22.7mm. Ces calculs sont menés en déformations planes, dans une formulation lagrangienne réactualisée qui permet de tenir compte correctement des effets de grandes déformations et de grands déplacements. Le chargement est imposé en déplacement selon z au niveau du centre de la goupille dont le déplacement est également bloqué dans la direction x . Le maillage utilisé est celui défini sur la figure IV-2, il est composé d'éléments sous-intégrés à interpolation quadratique (8 nœuds, 4 points de Gauss) dont la taille dans la zone de propagation est de 150 μ m. L'effort réel est calculé en multipliant l'effort obtenu sous l'hypothèse des déformations planes par l'épaisseur nette.

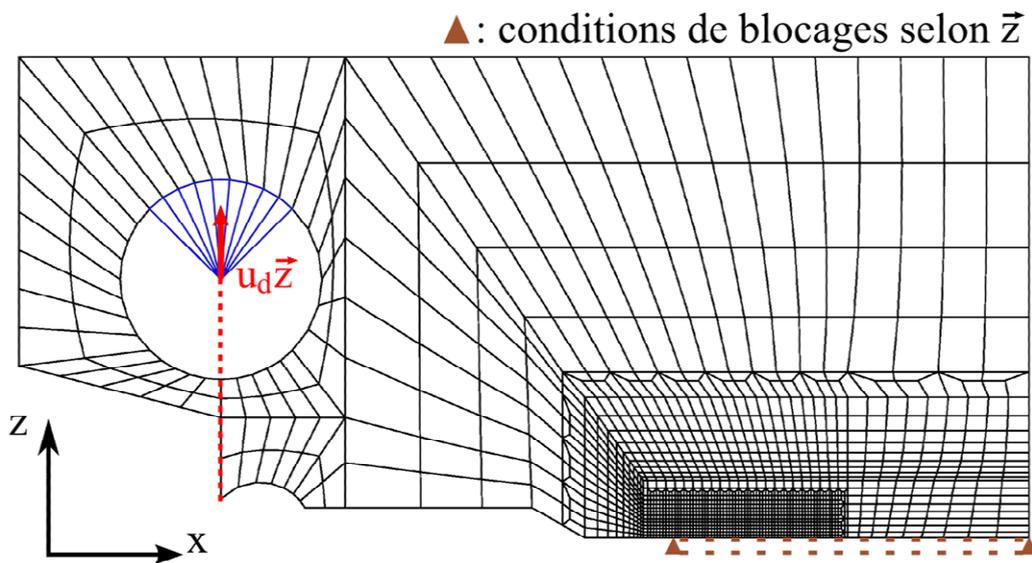


Figure IV-2 - Maillage et conditions aux limites pour le calcul standard d'un essai de traction sur éprouvette CT

Dans ce type de configuration, la fissure tend à amorcer hors du plan de symétrie de l'éprouvette ce qui équivaut à l'initiation d'une double fissure qui ne correspond pas à la réalité. Afin d'assurer que la propagation ait lieu dans le plan de fissure, les points de Gauss entourant la pointe initiale de la fissure sont pré-endommagés (Figure IV-3) selon la méthode proposée par M. Seidenfuss [Seidenfuss1992]. Ce pré-endommagement des points de Gauss autour de la pointe de fissure peut être interprété comme un endommagement créé par la phase de préfissuration par fatigue.

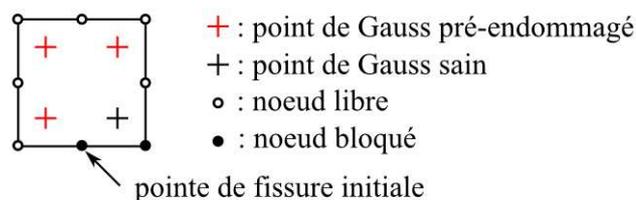


Figure IV-3 - Pré-endommagement autour de la pointe de fissure pour imposer la propagation dans le plan de symétrie dans le cas d'un maillage d'éléments quadratiques sous-intégrés

Les deux évolutions obtenues sont la courbe donnant l'effort en fonction de l'ouverture des lèvres de la fissure au niveau de la ligne de charge (CMOD : Crack Mouth Opening Displacement) (Figure IV-4) et le CMOD en fonction de l'avancée de fissure (Figure IV-5).

On voit sur la figure IV-4 que la réponse en effort est assez mal reproduite. Ceci est lié à l'hypothèse de déformations planes du calcul qui suppose un front droit et un amorçage uniforme de la fissure de fatigue le long de l'épaisseur. En réalité, malgré la présence des rainures latérales dans le plan de la fissure initiale, le front de la fissure de fatigue est légèrement concave, de plus cette forme est accentuée lors de l'amorçage de la propagation qui est plus rapide au cœur de l'éprouvette où le front est sollicitée en déformations planes qu'au bord où il voit est un état proche des contraintes planes. Cependant, la plupart des paramètres du modèle étant identifiés sur les essais de traction sur éprouvettes axisymétriques, seule la courbe de propagation est considérée afin d'obtenir la taille de maille.

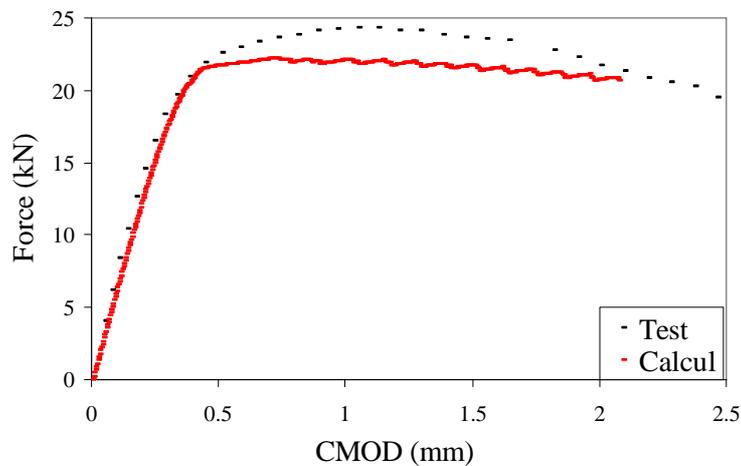


Figure IV-4 - Comparaison de la courbe Force-CMOD obtenue par le calcul (éléments quadratiques sous-intégrés) avec celle de l'essai

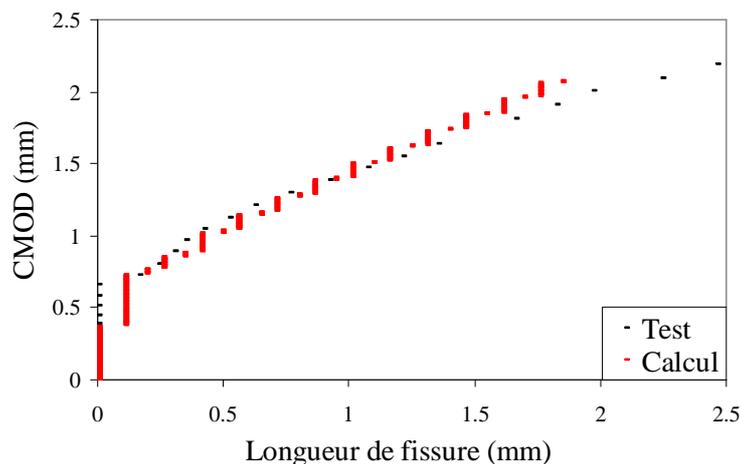


Figure IV-5 - Comparaison de la courbe de propagation obtenue par le calcul (éléments quadratiques sous-intégrés) avec celle de l'essai

Sur la figure IV-5, on voit que l'amorçage correspondant à la rupture du premier point de Gauss en avant de la pointe de fissure est anticipé par le calcul. Ceci est dû au pré-endommagement de l'élément contenant la pointe de fissure (Figure IV-3) qui entraîne une rupture précoce du premier point de Gauss, le processus de rupture suit ensuite son cours. Ainsi, la courbe de propagation montre que les paramètres du modèle de Rousselier présentés

dans le tableau IV-1 permettent bien de retrouver l'avancée de la fissure mesurée au cours du test.

2.1.2 Calcul avec des éléments quadrangles

Dans Cast3M, la méthode XFEM est introduite par l'utilisation d'éléments quadrangles sur-intégrés à interpolation bilinéaire nommés XQ4R. Afin de vérifier que le choix d'une taille de maille égale à la longueur caractéristique est adaptée, on étudie l'influence de la densité des points d'intégration et de la taille de maille pour des éléments quadrangles linéaires sous-intégrés et des éléments classiques. Si ces éléments ne correspondent pas exactement aux éléments XFEM qui possèdent 16 points de Gauss, l'étude de quelques cas permet de comprendre les mécanismes d'influence des paramètres de taille de maille (tant au niveau des éléments que des points d'intégration).

Pour une taille de maille égale à la longueur caractéristique du matériau, on souhaite tout d'abord comparer les résultats obtenus pour des quadrangles linéaires sous-intégrés et standard avec les paramètres utilisés dans le paragraphe précédent pour les éléments quadratiques sous-intégrés. Cependant, les calculs en grands déplacements ne sont pas possibles avec les éléments linéaires, pour lesquels l'avancée de fissure correspond à la rupture de tous les points de Gauss, et qui conduit à leur distorsion jusqu'à négativité du Jacobien.

Pour mener ces études, il est donc nécessaire de travailler sous l'hypothèse des petites perturbations. Pour valider cette approche, on compare les résultats obtenus avec des éléments quadratiques sous-intégrés dans le cas d'une formulation lagrangienne réactualisée (FLR) avec ceux obtenus sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP).

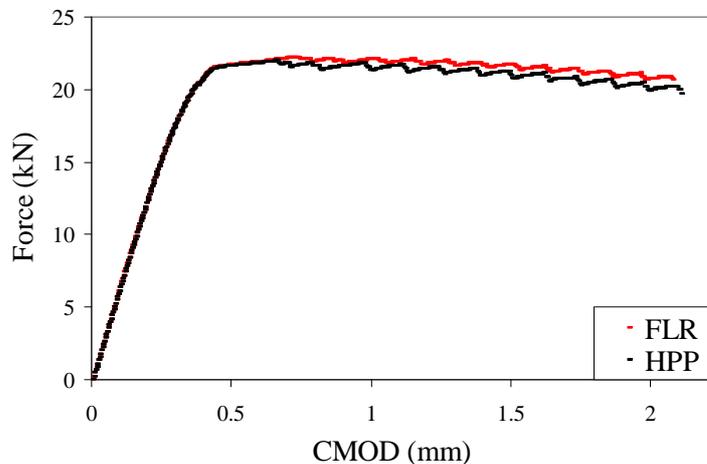


Figure IV-6 - Comparaison des réponses Force-CMOD entre la formulation lagrangienne réactualisée (FLR) et l'hypothèse des petites perturbations (HPP)

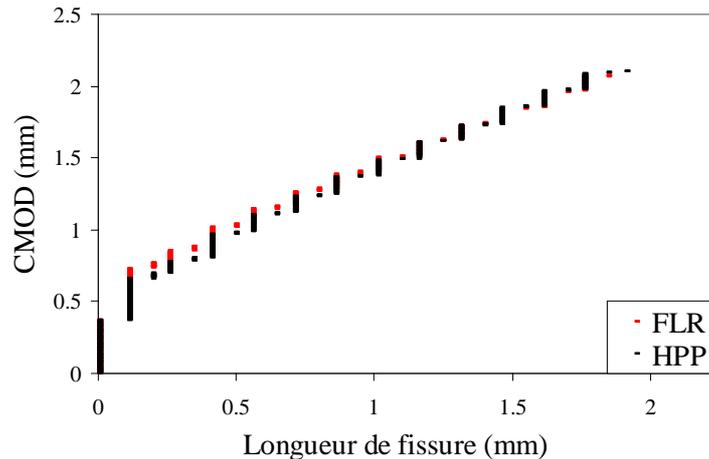


Figure IV-7 - Comparaison des prédictions de propagation de fissure entre la formulation lagrangienne réactualisée (FLR) et l'hypothèse des petites perturbations (HPP)

On considère que les variations dues à l'hypothèse des petites perturbations sur la réponse en effort (Figure IV-6) est suffisamment faible pour mener l'étude dans ce cadre. En particulier, la courbe de propagation de fissure obtenue dans le cadre HPP recouvre bien la courbe de référence (Figure IV-7).

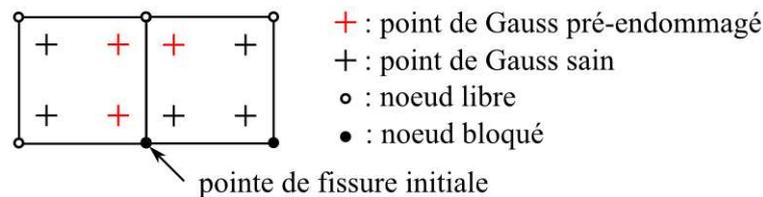


Figure IV-8 - Pré-endommagement pour les quadrangles linéaires standard

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on compare donc les réponses obtenues pour des quadrangles à 4 nœuds sous-intégrés (Q4RI) et standard (QUA4) de $75\mu\text{m}$ à ceux observés dans le paragraphe précédent pour les éléments quadratiques à 8 nœuds sous-intégrés (Q8RI) de $150\mu\text{m}$. Dans le cas des éléments standard, plusieurs points de Gauss sont associés à une sous-zone de rigidité (voir définition chapitre III, section 4.1.2.), la pointe de la fissure est donc prise au nœud de l'élément rompu (c'est-à-dire dont tous les points de Gauss sont rompus) le plus éloigné de la ligne de charge. Les éléments Q4RI ne possédant qu'un unique point de Gauss, le pré-endommagement autour de la pointe de fissure n'est pas possible. Pour les éléments linéaires standard, on choisit de pré-endommager trois points de Gauss dans les éléments contenant la pointe de fissure comme indiqué sur la figure IV-8.

Les résultats obtenus pour les éléments sous-intégrés sont très proches pour les deux graphiques (Figure IV-9 et Figure IV-10). La principale différence se situe au niveau de l'amorçage. Pour les éléments linéaires, l'effort maximal est plus élevé que pour les éléments quadratiques car il n'y a pas eu pré-endommagement autour de la pointe de fissure. De plus les éléments linéaires ne représentent pas aussi bien l'émoussement en pointe de fissure que les éléments quadratiques, ainsi ils donnent une réponse plus rigide qui retarde légèrement l'amorçage. Ce retard est sans doute aussi la cause d'une vitesse de propagation légèrement plus élevée pour les éléments Q4RI que pour les éléments Q8RI.

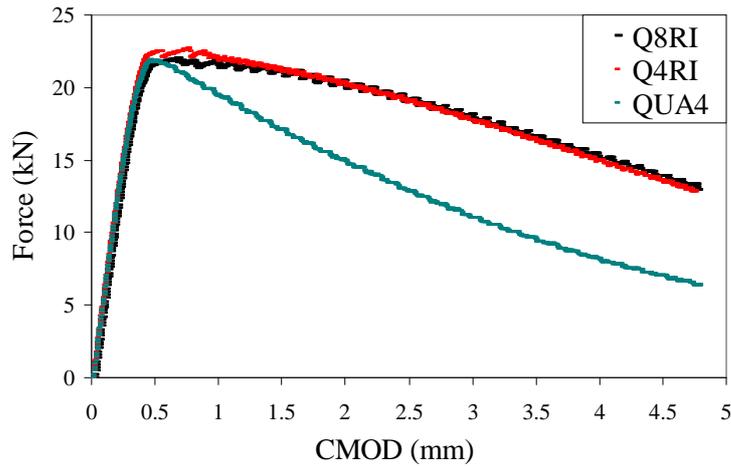


Figure IV-9 - Courbes Force-CMOD pour trois types d'éléments en HPP. Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés ; QUA4 : Eléments linéaires standard.

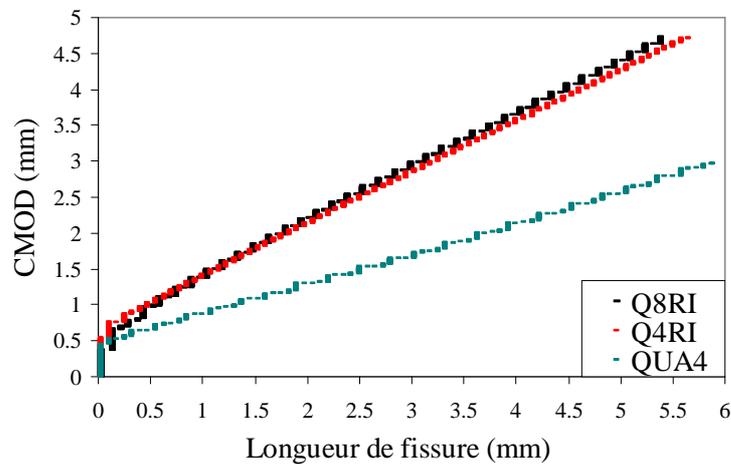


Figure IV-10 - Courbes de propagation pour trois types d'éléments en HPP. Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés ; QUA4 : Eléments linéaires standard.

En revanche, la propagation est beaucoup trop rapide pour les quadrangles standards. Deux causes sont envisagées :

- La distance inter-points de Gauss est deux fois plus petite que la longueur caractéristique et entraîne l'extension plus rapide du dommage ;
- Dès que trois points de Gauss sont rompus, l'élément se comporte comme un élément cassé et l'énergie utilisée pour casser le dernier point de Gauss n'entre pas en jeu pour la propagation puisqu'elle se produit loin de la pointe de fissure vue par la structure.

Afin d'identifier laquelle de ces deux causes prévaut, on choisit de comparer les résultats des éléments linéaires sous-intégrés (Q4RI) et standards (QUA4) avec les résultats obtenus pour des quadrangles standards de $150\mu\text{m}$ avec $f_c=0.03$ et $f_c=0.05$. L'augmentation de la taille de maille à $150\mu\text{m}$ permet de retrouver la distance inter-points de Gauss moyenne des éléments Q4RI et Q8RI. La porosité critique de rupture $f_c = 0.05$ correspond à la valeur identifiée sur les éprouvettes AE.

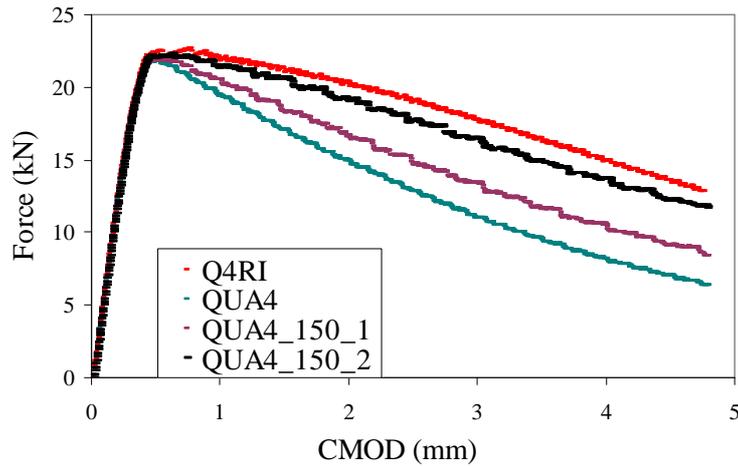


Figure IV-11 - Courbes Force-CMOD pour des éléments linéaires de différentes tailles :
Q4RI : $\lambda=75\mu\text{m}$, 1point de Gauss, $f_c=0.03$; QUA4 : $\lambda=75\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $f_c=0.03$;
QUA4_150_1 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $f_c=0.03$; QUA4_150_2 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $f_c=0.05$

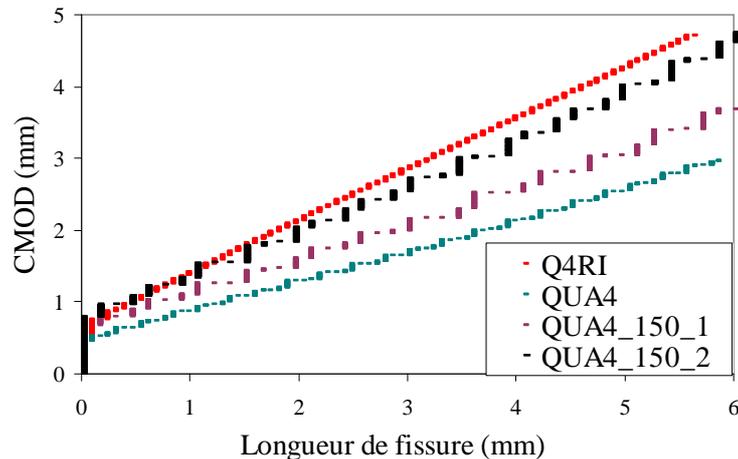


Figure IV-12 - Courbes de propagation pour des éléments linéaires de différentes tailles :
Q4RI : $\lambda=75\mu\text{m}$, 1point de Gauss, $f_c=0.03$; QUA4 : $\lambda=75\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $f_c=0.03$;
QUA4_150_1 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $f_c=0.03$; QUA4_150_2 : $\lambda=150\mu\text{m}$, 4points de Gauss, $f_c=0.05$

Sur les figures IV-11 et IV-12, les courbes Q4RI et QUA4 sont les mêmes que sur les figures IV-9 et IV-10. On voit que l'utilisation d'une taille de maille deux fois plus grande (QUA4_150_1), permet de se rapprocher de la courbe de référence, que ce soit pour l'effort ou pour la propagation. Cependant, en conservant $f_c=0.03$, la propagation est toujours beaucoup trop rapide, l'espacement des points de Gauss ne permet donc pas d'expliquer à lui seul, l'accroissement de la vitesse de propagation. De plus la rigidification due à l'augmentation de la taille des éléments peut aussi en être une cause. L'augmentation de la porosité critique à $f_c=0.05$ permet de mieux reproduire l'amorçage, mais la vitesse de propagation reste trop élevée.

Ces calculs mettent en évidence le problème lié à la présence de plusieurs points de Gauss dans une sous-zone de rigidité (chapitre III section 4.1.2.). En effet, dans le cas des quadrangles standards, on voit que la vitesse de propagation de la fissure est surestimée quelle que soit l'espacement inter-points de Gauss et la taille de maille. Ceci est lié au caractère brutal de la rupture prévue par le modèle de Rousselier. En effet, la rupture a lieu pour un niveau de contrainte élevé, ainsi, lorsque 3 points de Gauss sur 4 sont rompus dans l'élément, la rigidité de ce dernier devient négligeable, accélérant l'endommagement des éléments en

avant de la pointe de fissure. Dans le cas d'un élément quadrangle standard dont la taille est égale à la taille de la longueur caractéristique, ceci correspond à oublier environ $\frac{1}{4}$ de l'énergie de rupture élémentaire qui provoque une vitesse près de deux fois plus rapide qu'avec des quadrangles à un point de Gauss de même taille.

2.1.3 Conclusion

D'après les calculs sur les éléments quadrangles, si un espacement des points de Gauss plus faible semble tendre à accélérer la propagation d'une fissure, c'est la multiplication des points de Gauss par sous-zone élémentaire qui est la plus problématique dans notre cas où la rupture est brutale. En conséquence, pour un élément quadrangle linéaire à 4 points de Gauss, environ un quart de l'énergie est oublié au cours du processus de rupture élémentaire, ce qui entraîne une vitesse de propagation près de deux fois plus rapide.

En gérant la rupture à l'aide du modèle de zone cohésive identifié au cours du chapitre II, on devrait donc supprimer ce problème. Il est cependant nécessaire de mailler suffisamment fin afin de calculer correctement la réponse de la zone cohésive et de l'insérer de manière à prendre la relève du modèle volumique sur un volume élémentaire de référence équivalent à celui utilisé pour l'identification de la loi de traction du modèle cohésif. On choisit donc d'utiliser une taille d'élément égale à la longueur caractéristique $l_c=75\mu\text{m}$ du matériau. De plus, afin de compenser la différence de rigidité entre modèle volumique et modèle cohésif, on choisit d'identifier la loi cohésive jusqu'à la porosité critique $f_c=5\%$.

2.2 Choix de la fraction volumique de cavités pour le switch

On choisit de fixer initialement la valeur de la porosité pour laquelle on souhaite identifier la loi du modèle cohésif. On choisit $f_{\text{switch}}=3\%$ la valeur de la porosité à partir de laquelle la loi cohésive est identifiée. Pour cette valeur, nous avons vu dans le chapitre II (Figure II-24) qu'environ $\frac{4}{5}$ du déplacement à rupture ont été atteints. A ce niveau de chargement, on suppose que le modèle de Rousselier a suffisamment travaillé pour prendre correctement en compte l'histoire de la triaxialité des contraintes, puisqu'on est dans la pente la plus rapide de la croissance de la porosité.

2.3 Calcul de la loi cohésive pour les paramètres choisis

Afin de reproduire les essais de déchirure ductile sur éprouvettes CT, les calculs suivants sont menés dans le cadre de la formulation Lagrangienne réactualisée. Puisque le principe de ce type de formulation repose sur le changement de configuration de référence au cours du calcul, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est nécessaire de réidentifier la loi cohésive si la valeur de la porosité pour laquelle on souhaite faire avancer le front est différente de la valeur pour laquelle on a identifié la loi.

Dans le chapitre II, le critère d'activation de la zone cohésive était l'adoucissement matérialisé par la perte de vérification de la condition d'unicité de Hill. Ce critère était vérifié pour la valeur de la porosité $f_{\text{switch}}=2.05\%$. Pour un f_{switch} de 3% , la surface de référence de la zone cohésive est trop différente de celle d'une zone cohésive activée pour le f_{switch} correspondant au critère d'adoucissement. On se doit donc ici de réidentifier la loi cohésive à partir de $f_{\text{switch}}=3\%$. Dans le processus d'identification, seule cette valeur change.

Le graphique suivant compare les lois cohésives obtenues pour $f_{\text{switch}}=2.05\%$ (Hill) et $f_{\text{switch}}=3\%$.

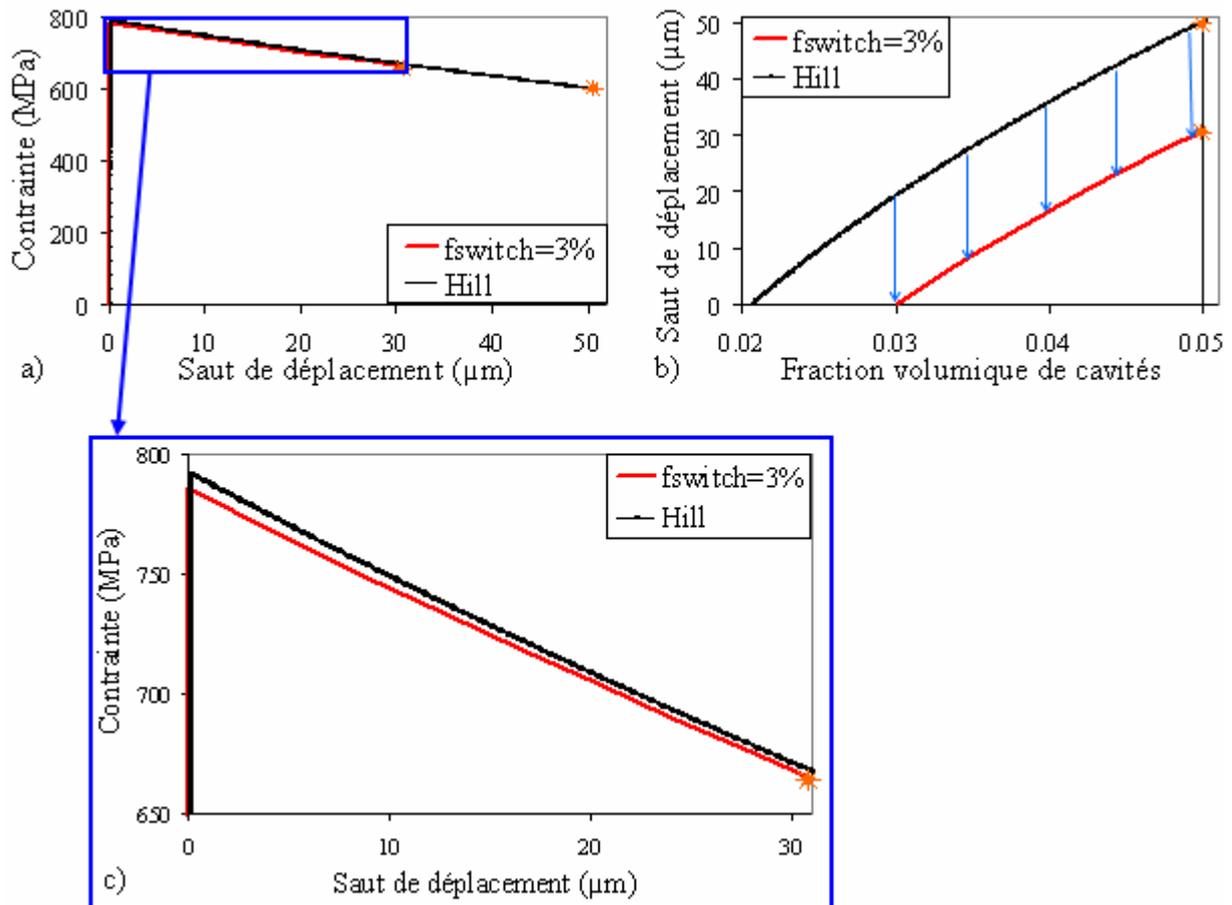


Figure IV-13 - Comparaison des résultats d'identification de la loi cohésive pour différents $f_{\text{switch}}=2.05\%$ (Hill) et $f_{\text{switch}}=3\%$: a) Lois cohésives de traction ; b) Evolution du saut de déplacement en fonction de la porosité atteinte pour la modélisation de référence ; c) Zoom sur la portion commune aux deux lois cohésives identifiées.

On voit sur les figures IV-13.a) et IV-13.c) que les lois identifiées diffèrent assez peu. Cependant, la traction maximale est plus faible lorsque le modèle de zone cohésive est activé pour une porosité valant 3%, puisque dans ce cas l'adoucissement est apparu avant l'activation du modèle de zone cohésive. Or d'après de nombreux auteurs [Tvergaard1994, Cornec2003], la traction maximale est un des trois paramètres primordiaux d'un modèle de zone cohésive.

De plus, en regardant la courbe IV-13.b), donnant l'évolution du saut de déplacement en fonction de la porosité atteinte pour un chargement équivalent dans la modélisation de référence, la différence entre les résultats d'identification est bien mise en évidence. En augmentant le critère d'activation, on translate la courbe *saut de déplacement-porosité* (Figure IV-14) qui décolle naturellement pour une porosité plus grande. La porosité critique n'étant pas modifiée, le saut de déplacement à rupture est plus faible.

La loi cohésive ainsi identifiée est ensuite utilisée telle quelle dans le calcul sur structure. On considère que la plage de tolérance sur laquelle on vérifie le critère d'extension de la zone

cohésive est suffisamment petite pour ne pas nécessiter une correction de la loi à partir de la section de référence (voir chapitre III section 4.1.1.).

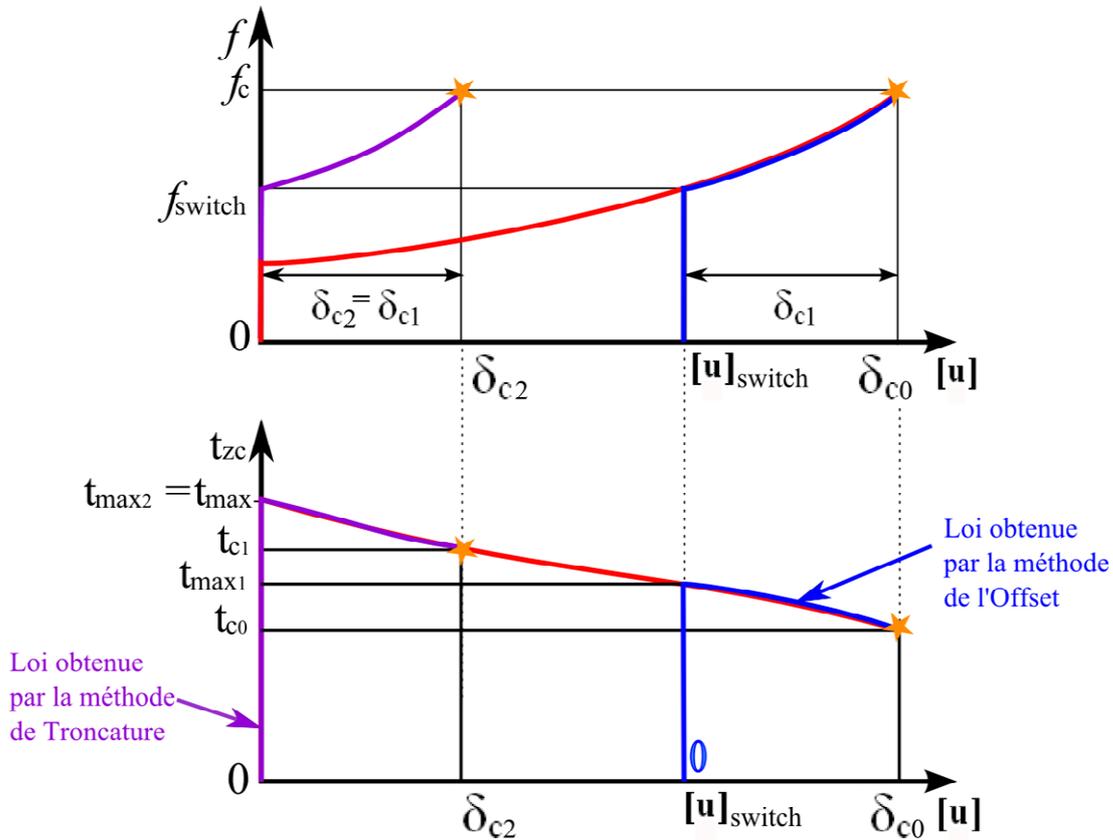


Figure IV-14 – Méthodes d'adaptation de la loi cohésive pour une porosité d'activation différente de celle de la porosité d'identification

Lorsque le critère d'extension de la zone cohésive n'est pas vérifié exactement mais appartient à l'intervalle de tolérance I_{ins} , on a vu que la loi cohésive est modifiée en appliquant un offset sur le saut de déplacement (Chapitre 3, section 4.1.1.). La comparaison des lois cohésives obtenues pour porosité $f_{switch}=2.05\%$ et pour $f_{switch}=3\%$ permet de proposer une autre approche pour gérer la propagation sur la plage de tolérance. En effet, pour de petites variations du critère d'insertion, c'est-à-dire pour de petites variations de la contrainte maximale identifiée, il semble qu'on approche mieux la loi qui serait obtenue en utilisant la méthode d'identification en conservant le début de la loi cohésive initiale plutôt qu'en ne gardant que la fin. Cela ne correspond alors plus à appliquer un offset sur la loi cohésive mais à l'écourter en calculant un nouveau déplacement critique $\delta_{c2}=\delta_{c1}$, comme indiqué sur la figure IV-14.

2.4 Identification du paramètre contrôlant l'insertion de la zone cohésive

2.4.1 Méthode

Afin d'identifier la valeur f_{test} de la porosité pour laquelle une zone cohésive doit être introduite (durant le calcul de propagation de fissure), on procède de manière similaire à l'identification de la taille de maille pour le modèle de Rousselier. On impose que la propagation ait lieu dans le plan de symétrie afin de se placer sous les mêmes hypothèses que pour la modélisation de référence. La porosité critique du modèle de Rousselier est prise à 8%

afin d'éviter la rupture précoce des éléments qui viendrait perturber la réponse de la zone cohésive ainsi que les problèmes d'écoulements qui surviennent pour les grands niveaux de porosité. On modélise ici la totalité de l'éprouvette, car l'intégration du comportement des zones cohésives XFEM ainsi que les calculs de critère implémentés ne sont pas prévus pour un calcul symétrique avec le plan de symétrie situé au niveau de la surface de référence du modèle cohésif. Pour une taille de maille de $\lambda=75\mu\text{m}$, le maillage résultant est donné sur la figure IV-15.

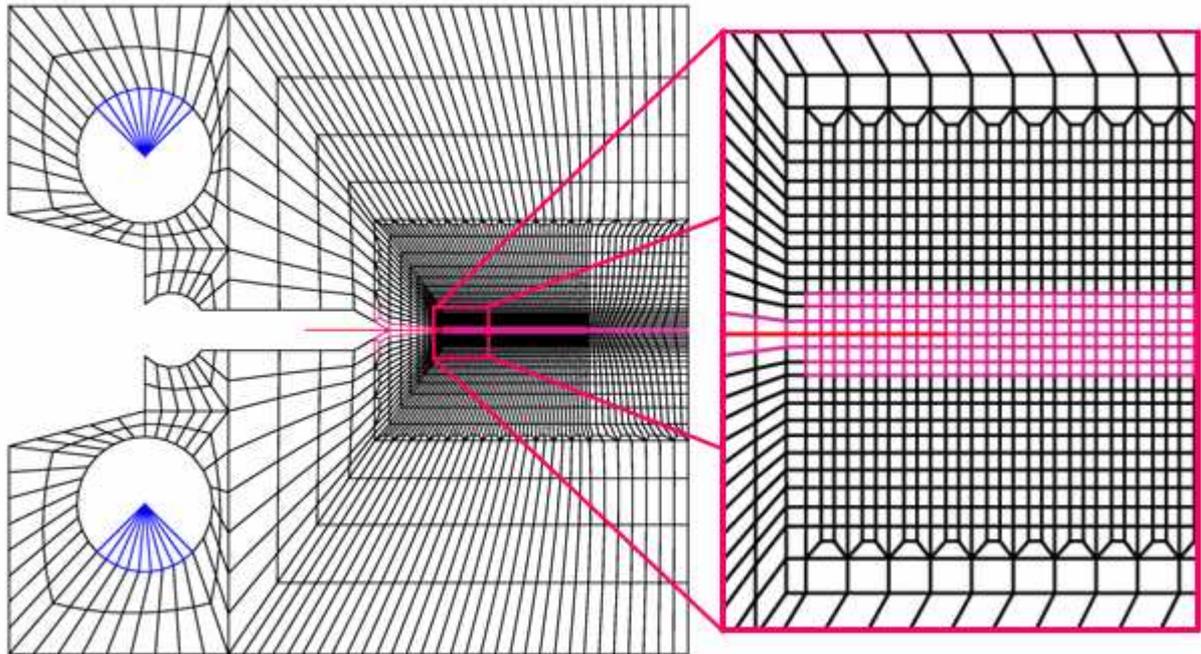


Figure IV-15 - Maillage des gouilles (en bleu) et de l'éprouvette CT (en noir) avec la zone d'éléments XFEM pour la propagation en violet et avec un zoom sur la zone de propagation, le trait rouge représente la fissure initiale

Cette approche correspond à chercher la valeur de f_{test} pour laquelle on retrouve les résultats numériques d'un calcul de propagation de fissure sur CT. Afin d'obtenir des résultats cohérents avec l'expérience, il est nécessaire que les paramètres du modèle local aient été correctement identifiés. Il est clair que la méthode proposée dans ce mémoire ne permet d'améliorer le modèle de Rousselier qu'en le rendant plus robuste et en permettant ainsi de modéliser de grandes propagations de fissure lors d'un calcul en formulation lagrangienne réactualisée en présence de plasticité étendue.

La loi cohésive introduite est celle identifiée pour $f_{\text{switch}}=3\%$ (Figure IV-13), les paramètres du modèle de Rousselier sont ceux donnés dans le tableau IV-1. Le critère d'extension de la zone cohésive est le critère local pour lequel la porosité est testée sur un demi-anneau de rayon intérieur égal à $0.875 \cdot l_c$ et de rayon extérieur égal à l_c . Le critère utilisant une moyenne pondérée a été abandonné car la moyenne pondérée de la porosité calculée sur un demi-disque de rayon égale à $3 \cdot l_c$ varie trop peu au cours du calcul pour identifier correctement une valeur critique.

Sur l'intervalle de tolérance de vérification du critère d'avancée de la zone cohésive, on adapte la loi cohésive en lui appliquant un offset. C'est en effet, la première approche qui a été mise en œuvre dans les applications de ce mémoire. Nous verrons plus tard quelle influence ce choix peut avoir sur les résultats du calcul de propagation.

2.4.2 Résultats

Les résultats obtenus pour les différents paramètres sont comparés aux résultats obtenus avec les éléments quadratiques Q8RI en formulation lagrangienne réactualisée et avec les éléments linéaires sous-intégrés Q4RI en HPP. Aucun de ces deux résultats de référence ne peut être exactement équivalent au calcul avec zone cohésive XFEM en formulation lagrangienne réactualisée, mais ils donnent les frontières de validité de la méthode.

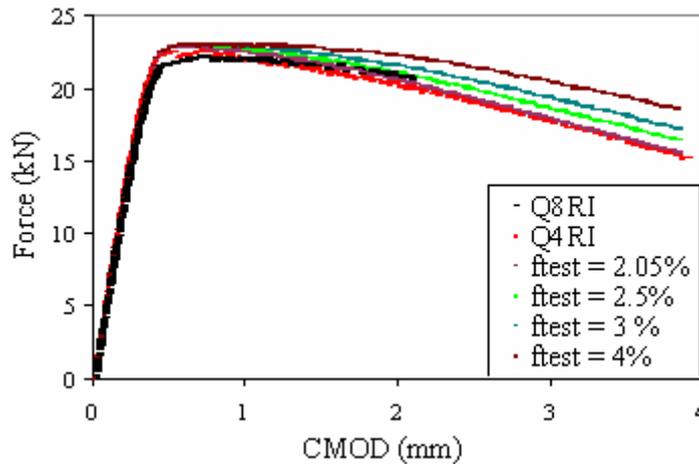


Figure IV-16 - Courbes Force-CMOD pour différentes valeurs de f_{test}

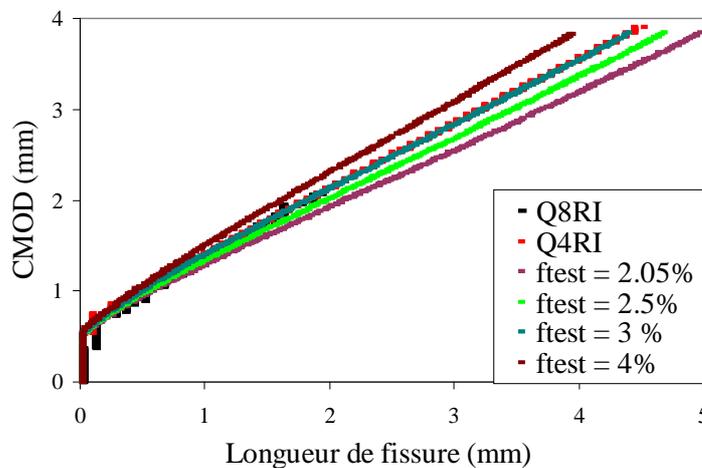


Figure IV-17 - Courbes de propagation pour différentes valeurs de f_{test}

Comme indiqué dans la section précédente sur l'identification de la taille des éléments pour la formulation standard du modèle de Rousselier, les courbes en effort sont difficiles à comparer. On note cependant que, quelque soit la valeur de f_{test} choisie pour l'introduction d'un segment cohésif, à l'amorçage, l'effort est toujours supérieur avec la méthode XFEM qu'avec la formulation standard. Cet écart est faible pour les éléments linéaires et plus marqué avec les éléments quadratiques.

Pour les deux types de courbe, la tendance observée est celle attendue : pour une loi cohésive donnée, c'est-à-dire pour une valeur de f_{switch} donnée et une quantité d'énergie donnée, plus tôt on insère la zone cohésive, plus rapide est la propagation. Lorsque la zone cohésive est

insérée trop tôt, l'énergie dissipée est sous-estimée ($f_{\text{test}} = 2.05\%$ et $f_{\text{test}} = 2.5\%$), lorsque la zone cohésive est insérée trop tard, l'énergie dissipée est surestimée ($f_{\text{test}} = 4\%$), puisqu'une part de l'énergie dissipée dans le volume est dissipée dans la zone cohésive une deuxième fois. La valeur de f_{test} permettant de retrouver les résultats de propagation observés pour les éléments sous-intégrés (Q8RI en formulation lagrangienne réactualisée et Q4RI en HPP) est de 3%, soit directement la valeur de f_{switch} à partir de laquelle la loi cohésive a été identifiée.

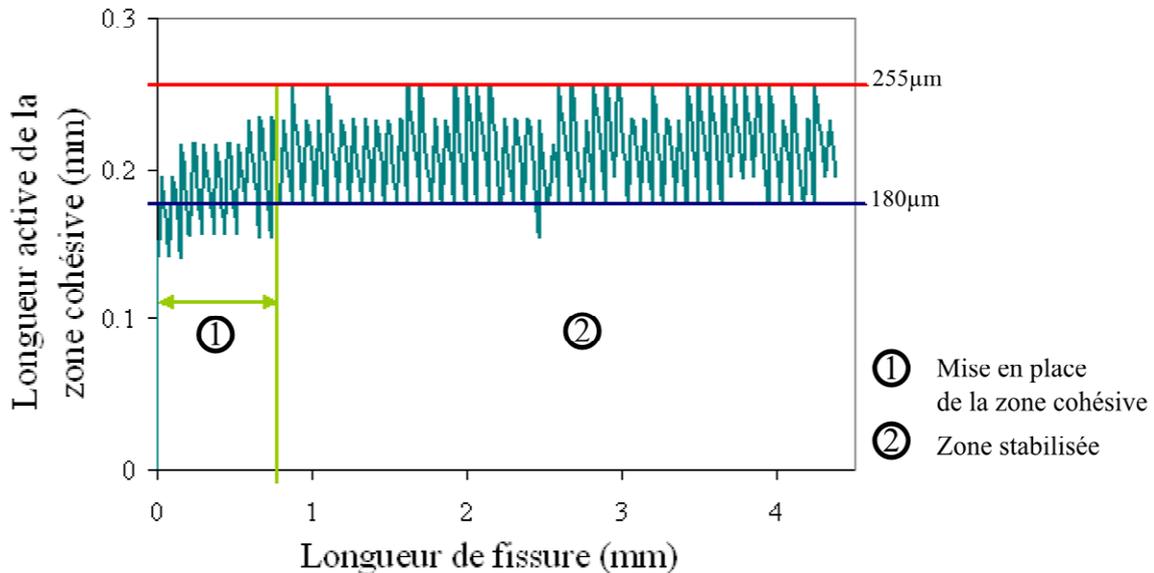


Figure IV-18 - Longueur de la zone cohésive active en fonction de la longueur de la fissure pour $f_{\text{test}} = 3\%$

Sur la figure IV-18, on voit l'évolution de la longueur de zone cohésive active en fonction de la longueur de fissure pour $f_{\text{test}} = 3\%$ qui est représentative de ce qui se passe pour tous les paramètres. Les oscillations sont dues au caractère discret de la propagation de la zone cohésive. On observe qu'avant rupture du premier point de Gauss de la zone cohésive, celle-ci a atteint $150\mu\text{m}$. A partir de ce point, la zone cohésive continue tout d'abord de s'étendre progressivement dans la zone ① jusqu'à atteindre une zone stable ② caractérisée par une valeur minimale (ligne bleue) et maximale (ligne rouge) des oscillations. Lors de l'insertion d'un nouveau segment, la longueur de la zone cohésive augmente brutalement, puis décroît progressivement jusqu'à insertion d'un nouveau segment, c'est pourquoi les oscillations se situent dans une bande égale à la taille d'un élément ($75\mu\text{m}$) qui est également la taille de l'avancée de zone cohésive.

Si on regarde la valeur moyenne de la longueur de zone cohésive suivant la valeur de f_{test} on note une progression inverse. Pour $f_{\text{test}} = 2.05\%$ on a $230\mu\text{m}$ de longueur de zone cohésive active dans la zone stabilisée, pour $f_{\text{test}} = 2.5\%$, elle vaut $220\mu\text{m}$ en moyenne et pour $f_{\text{test}} = 3\%$ elle vaut $210\mu\text{m}$.

2.4.3 Conclusion

L'identification du critère d'insertion d'un segment de zone cohésive f_{test} montre que la valeur à utiliser est simplement f_{switch} (la valeur de la porosité à partir de laquelle la loi cohésive est identifiée) lorsque celui-ci est testé localement sur un demi-anneau de rayon paramétré en fonction de la longueur caractéristique du matériau.

2.5 Etude des résultats

On regarde à présent les résultats obtenus pour une propagation plus importante et on les met en relation avec les données de l'essai de déchirure et des calculs standards avec éléments sous-intégrés. On laisse le calcul XFEM tourner jusqu'à une propagation de 8mm qui a été obtenue lors de l'essai de traction (7.7mm de propagation en fin d'essai), sans modifier aucun autre des paramètres.

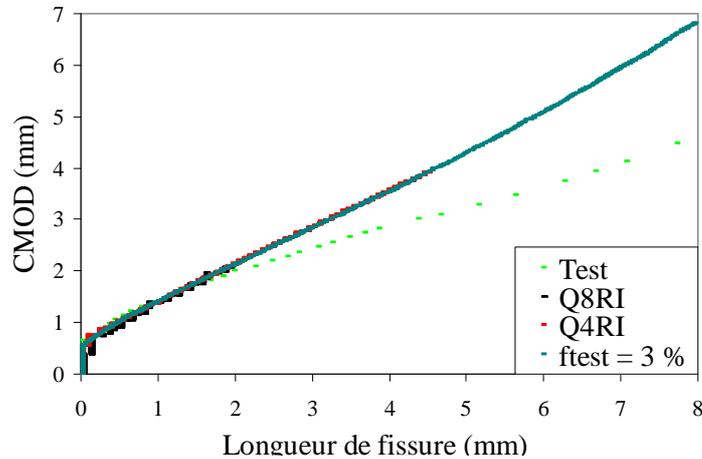


Figure IV-19 - Courbes de propagation sur une grande propagation.
Comparaison des résultats du Test, des modélisations avec éléments quadratiques et linéaires sous-intégrés et de la modélisation avec zone cohésive XFEM.

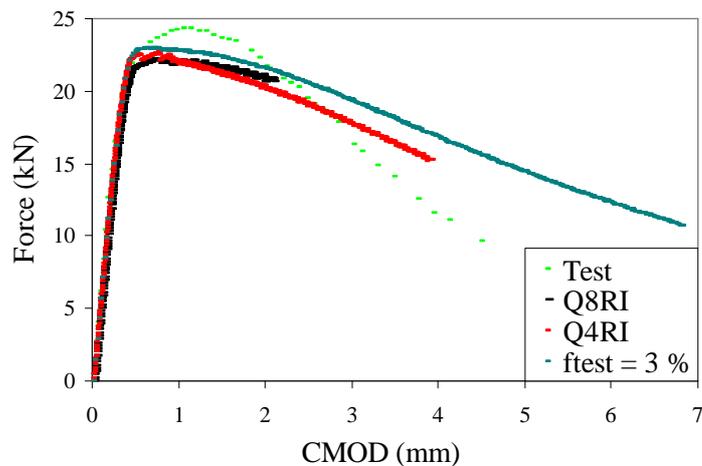


Figure IV-20 - Courbes Force-CMOD sur une grande propagation.
Comparaison des résultats du Test, des modélisations avec éléments quadratiques et linéaires sous-intégrés et de la modélisation avec zone cohésive XFEM.

La comparaison des résultats numériques donnent les mêmes conclusions observées précédemment, le calcul étant le même. Par rapport à ce qui a été vu sur le calcul de propagation par la méthode standard, la comparaison sur une propagation plus importante donne de nouvelles indications. En effet, le graphique IV-19 met en évidence l'inaptitude du modèle identifié par la méthode standard à reproduire les résultats expérimentaux. Ceci est montré par le calcul en petites déformations Q4RI et par le calcul XFEM dont les vitesses d'avancée de fissure ne correspondent plus aux résultats expérimentaux à partir de deux millimètres de propagation.

La figure IV-20 donne des indications équivalentes mais, comme évoqué précédemment, pour ce type d'essai le graphique en effort permet difficilement de tirer des conclusions puisque

l'hypothèse de déformations planes ne permet pas de reproduire parfaitement les résultats expérimentaux de ce point de vue.

Afin d'améliorer les résultats du modèle sur de grandes propagations, on peut envisager d'utiliser la méthode couplée proposée dans ces travaux puisqu'elle nécessite l'ajout d'un seul paramètre supplémentaire, qui est la porosité d'activation du modèle cohésif.

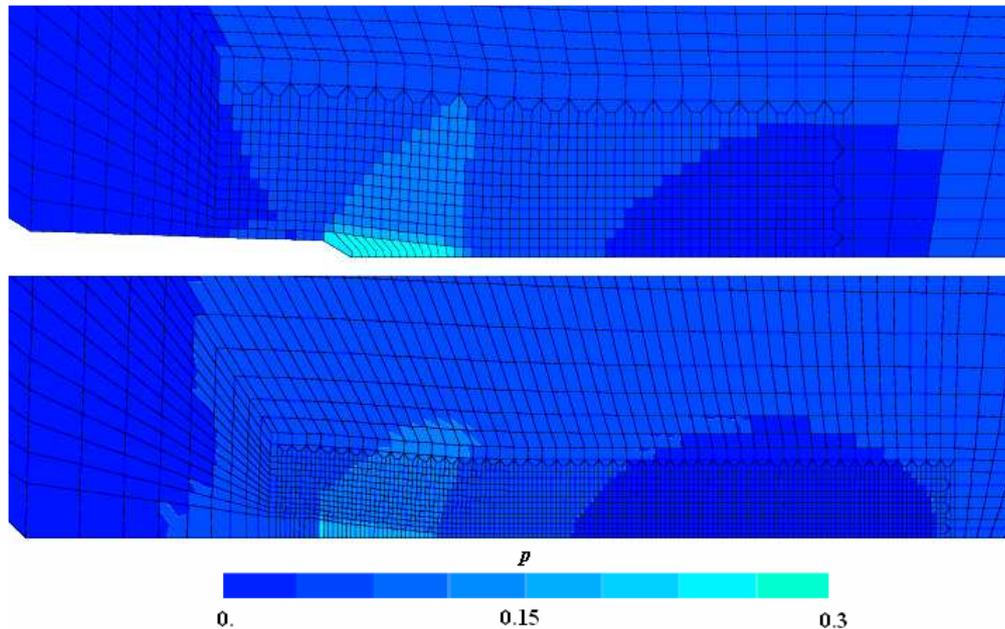


Figure IV-21 - Déformation plastique équivalente pour un calcul standard avec éléments quadratiques sous-intégrés (en haut) et pour un calcul avec zone cohésive XFEM (en bas) pour une avancée de fissure $a=1.75\text{mm}$

Au-delà de ces remarques, on compare à présent l'état de plasticité (Figure IV-21) et de porosité (Figure IV-22) pour les calculs avec éléments quadratiques sous-intégrés et par la méthode XFEM avec zone cohésive. On remarque tout d'abord l'absence d'un profil en damier dans les éléments XFEM qui correspondrait au verrouillage (locking) de ces éléments surintégrés. Les profils de plasticité et de porosité sont équivalents autour des éléments fissurés. Pour la porosité, on note que le maillage XFEM plus fin (du point de vue de la taille des éléments et de la distance inter-points de Gauss) tend cependant à développer la porosité en dehors de la bande d'éléments fissurés. Dans cette zone, la porosité reste néanmoins inférieure à 2% qui est la valeur pour laquelle on vérifie le critère de non-unicité dans le cas de la traction pure. Il s'agit donc d'une diffusion du dommage dans le domaine durcissant du comportement, que l'on retrouve aussi de manière plus localisée dans la modélisation standard. On peut sans doute expliquer l'amplitude de la diffusion de la porosité avec la méthode XFEM par la finesse du maillage.

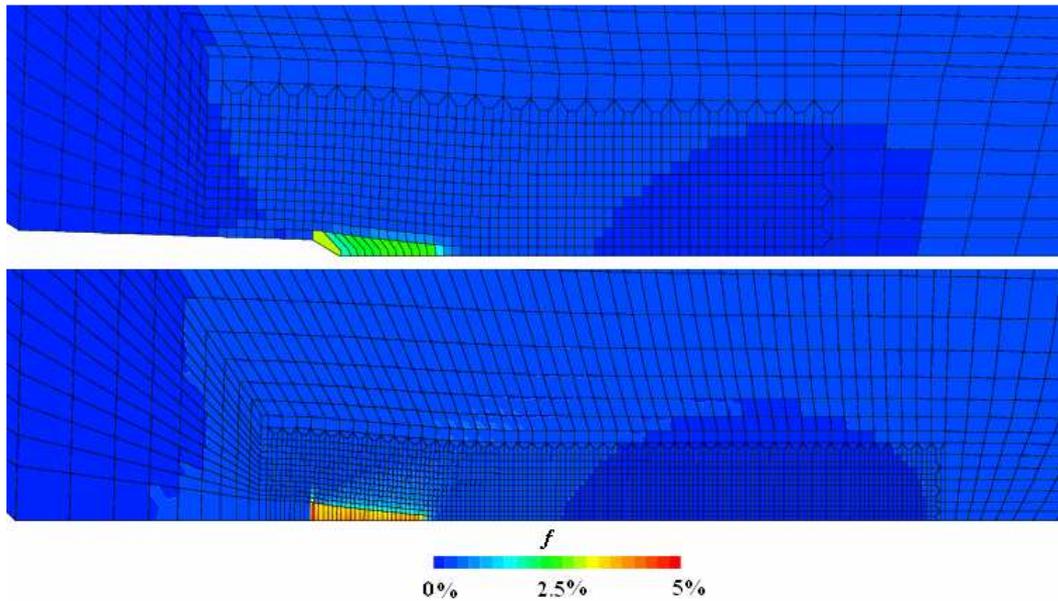


Figure IV-22 – Porosité pour un calcul standard avec éléments quadratiques sous-intégrés (en haut) et pour un calcul avec zone cohésive XFEM (en bas) pour une avancée de fissure $d_a=1.75\text{mm}$

Pour la bande d'éléments fissurés, les niveaux de porosité sont différents puisque dans le cas standard la porosité critique est de 3%, ainsi cette valeur ne peut être dépassée. Dans le cas XFEM, la variation des niveaux de porosité dans la bande d'éléments fissurés correspond à différentes valeurs du critère d'insertion d'une zone cohésive au cours du calcul. De plus, puisque le critère est vérifié à une distance donnée de la pointe de la zone cohésive, le niveau de porosité atteint dans l'élément est plus grand que la valeur du critère d'insertion f_{test} .

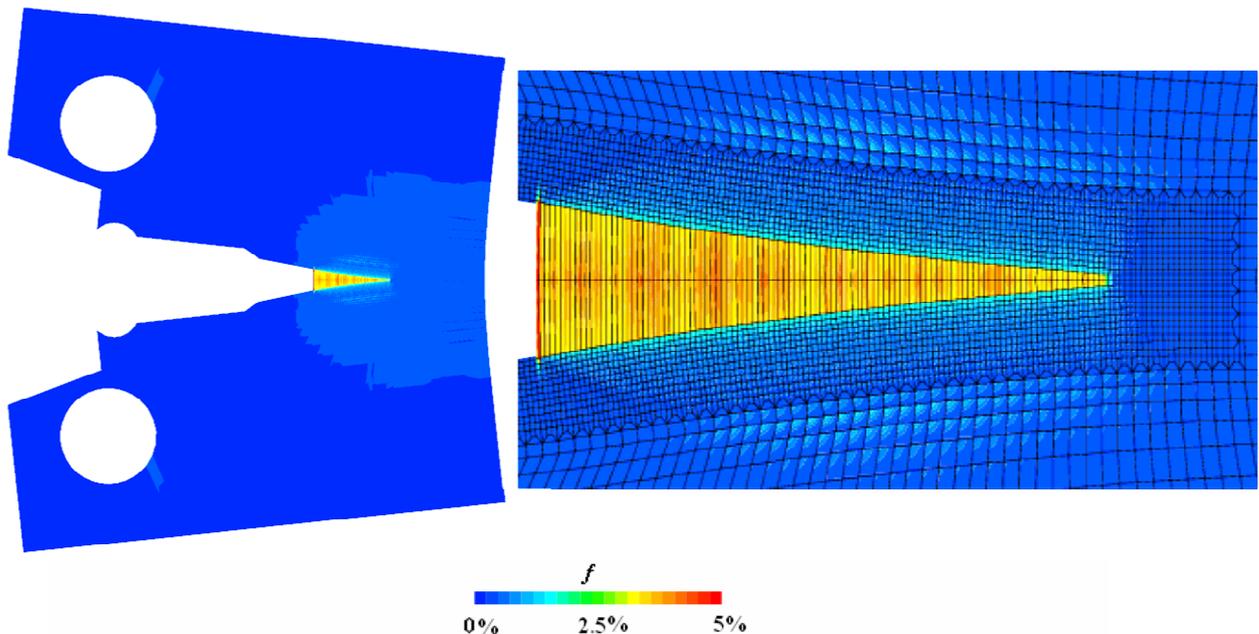


Figure IV-23 - Champ de porosité à la fin du calcul de propagation XFEM

La figure IV-23 donne le champ de porosité à la fin du calcul XFEM pour une propagation de 7.94mm. On voit que pour une propagation conséquente la modélisation est toujours aussi robuste et représente bien la fissuration ainsi que l'extension de l'endommagement dans la

structure. Ces résultats valident le choix d'introduire les éléments XFEM surintégrés dès le début du calcul puisqu'on voit sur la figure IV-23 que la porosité et donc la plasticité est très étendue dans l'éprouvette CT.

2.6 Conclusion

La modélisation de la déchirure ductile à l'aide d'un modèle local suppose d'être vigilant lorsque la régularisation consistant à introduire une longueur caractéristique est faite via la taille de maille. En effet, l'étude des résultats de calculs de propagation en déchirure ductile sur éprouvette CT en traction obtenus en utilisant des éléments linéaires et quadratiques montre qu'il est primordial d'utiliser des éléments pour lesquels chaque sous-zone de rigidité est associée à un unique point de Gauss en raison du caractère brutale de la rupture.

Cependant, la méthode proposée permet de passer outre cette précaution en introduisant un modèle de zone cohésive pour gérer la transition de l'état de cohésion vers la rupture. Cette propriété est démontrée sur les résultats d'identification de la valeur de la porosité f_{test} pour laquelle la zone cohésive, dont la loi a été identifiée à partir de f_{switch} , est introduite. En effet, à l'aide de la méthode proposée combinant éléments sur-intégrés et modèle de zone cohésive, on retrouve des résultats similaires à ceux obtenus avec la mise en oeuvre standard du modèle de Rousselier.

De plus, en mettant en relation les lois cohésives obtenues pour différentes valeurs de f_{switch} , on a mis en évidence une nouvelle méthode pour l'adaptation de la loi cohésive sur l'intervalle de tolérance I_{ins} défini dans le chapitre précédent. Cette méthode simple consiste à tronquer la loi cohésive initialement calculée plutôt qu'à lui appliquer un offset.

3. Etude de paramètres

Dans cette étude, deux points sont abordés. D'une part, l'influence de la méthode d'adaptation de la loi cohésive sur l'intervalle I_{ins} . D'autre part, l'influence de la taille de maille qui est le point faible des modèles locaux. Afin d'étudier cette question, deux approches sont mises en oeuvre. D'un côté, on étudie l'influence de la taille de maille pour une même distance inter-points de Gauss mais différentes tailles d'élément. De l'autre, on adopte la démarche inverse, pour la taille d'élément choisie précédemment, on étudie l'influence de la distance inter-points de Gauss sur les résultats de propagation.

3.1 Influence de la méthode d'adaptation de la loi cohésive au cours du calcul

Afin de traiter le problème de zone cohésive correctement au cours du calcul de propagation, le pas de temps est adapté de manière à permettre l'ouverture progressive de la zone cohésive et ainsi de la laisser travailler pleinement. Il est également adapté afin d'insérer la zone cohésive pour une valeur test de la porosité se trouvant dans l'intervalle I_{ins} :

$$I_{\text{ins}} = [0.99; 1.15] * f_{\text{test}} \quad (\text{IV-1})$$

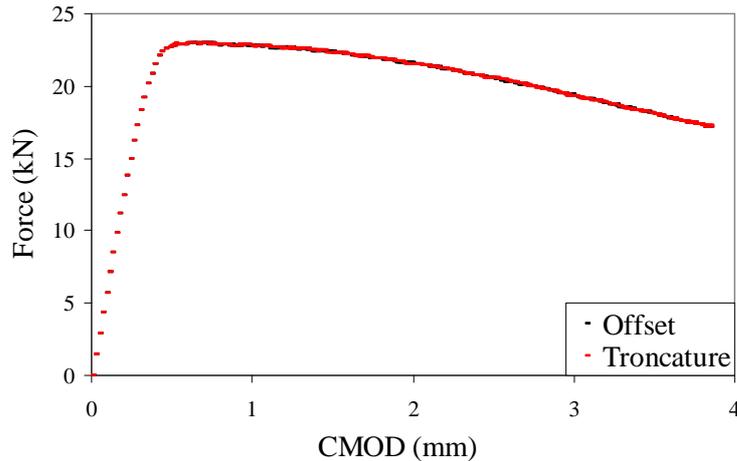


Figure IV-24 - Courbes Force-CMOD pour les deux méthodes d'adaptation de la loi cohésive

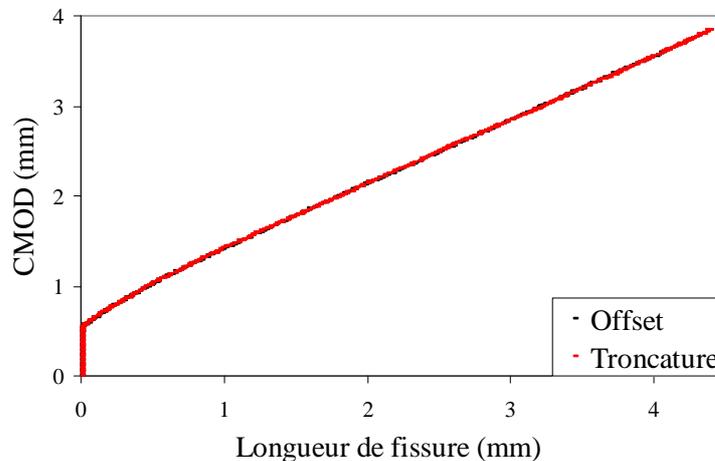


Figure IV-25 - Courbes de propagation pour les deux méthodes d'adaptation de la loi cohésive

L'intervalle I_{ins} étant assez grand, la loi cohésive doit alors être adaptée pour ne pas surestimer l'énergie dissipée. On a proposé deux approches dans la partie 2.3 (p.132) de ce chapitre, la plus simple, consistant à tronquer la loi cohésive (Troncature), semble, dans notre cas, mieux approcher l'énergie dissipée que la méthode consistant à appliquer un offset à la loi cohésive (Offset). Il est donc nécessaire d'étudier l'influence du choix de la méthode sur les résultats du calcul.

Les figures IV-24 et IV-25, montrent que le choix de la méthode a peu d'importance. L'intervalle de tolérance choisie permet en effet d'obtenir une bonne approximation de la loi cohésive quelle que soit la méthode choisie.

3.2 Influence de la taille de maille

Le point faible des modèles d'approche locale est leur dépendance à la taille de maille par l'intermédiaire de laquelle une longueur caractéristique est introduite et joue sur la réponse du modèle. Il semble donc intéressant d'étudier cette question pour la méthode couplée.

Au premier abord, il semble qu'une méthode insérant un modèle de zone cohésive permette d'amoinrir la dépendance de la réponse mécanique à la taille de maille. Cependant, on a

insisté ici sur le fait que la zone cohésive est insérée après le début de l'adoucissement, c'est-à-dire après que l'ellipticité de la solution est perdue.

Afin d'étudier cette question, deux approches sont abordées. D'un côté, on étudie l'influence de la taille de maille pour une même distance inter-points de Gauss mais différentes tailles d'éléments. D'un autre côté, on adopte la démarche inverse, pour la taille d'élément choisie précédemment, on étudie l'influence de la distance et du nombre de points de Gauss sur les résultats de propagation.

3.2.1 Influence de la taille des éléments pour une même densité de points de Gauss (éléments XFEM)

En utilisant des éléments XFEM de 4, 16 et 64 points de Gauss, on peut étudier l'influence de la taille des éléments XFEM sur les résultats de calcul sans modifier la distance inter-points de Gauss. Ceci est possible car le cas d'étude est un problème symétrique pour lequel la fissure initiale (et la propagation de cette fissure) est située à l'interface de deux éléments. Ainsi la position de la fissure est bien détectée quelque soit le nombre de points de Gauss dans l'élément. Le nombre de points de Gauss de la zone cohésive quant à lui, s'il est au moins de 4 par élément, n'influe que de façon négligeable sur les résultats.

Le cas de référence est celui de la section 2.1.1. p.125 de ce chapitre, il correspond à une taille d'élément $\lambda_{ref}=75\mu\text{m}$. La taille de maille correspondant à chaque type d'élément est résumé dans le tableau IV-2 :

Nombre de points de Gauss	4	16	64
Taille caractéristique de l'élément XFEM λ (μm)	37,5	75	150

Tableau IV-2 – Nombre de points de Gauss selon la taille de maille pour l'étude de l'influence de la taille des éléments sur les résultats de propagation sur une éprouvette CT en traction

Nous avons vu précédemment que l'avancée de fissure minimale doit être de la taille d'un élément, c'est le choix qui a été fait dans les calculs suivants. Dans un premier temps cependant, on étudie exclusivement l'amorçage de la propagation de la zone cohésive. Pour tous les types d'élément, le critère de propagation est calculé sur un demi anneau défini par la distance caractéristique $l_c=75\mu\text{m}$. Les figures IV-26 et IV-27 comparent les résultats obtenus pour ces trois tailles d'éléments en termes d'effort et de propagation, la partie correspondant à l'amorçage de la propagation est zoomée pour chacun des graphiques.

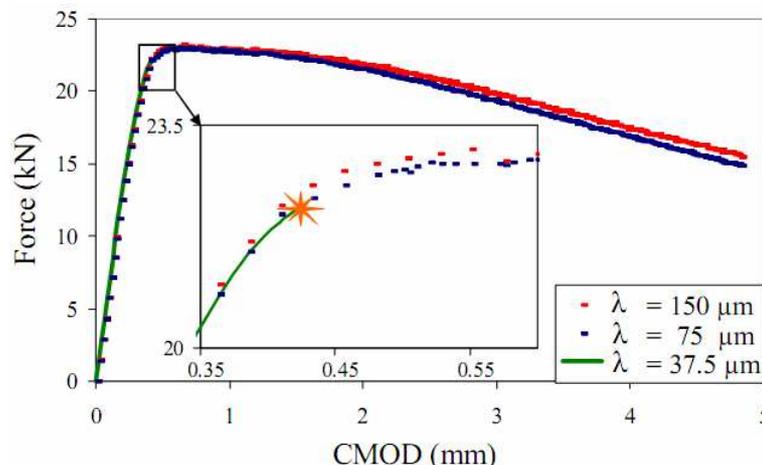


Figure IV-26 - Comparaison des courbes Force-CMOD pour trois tailles d'élément donnant la même densité de points de Gauss

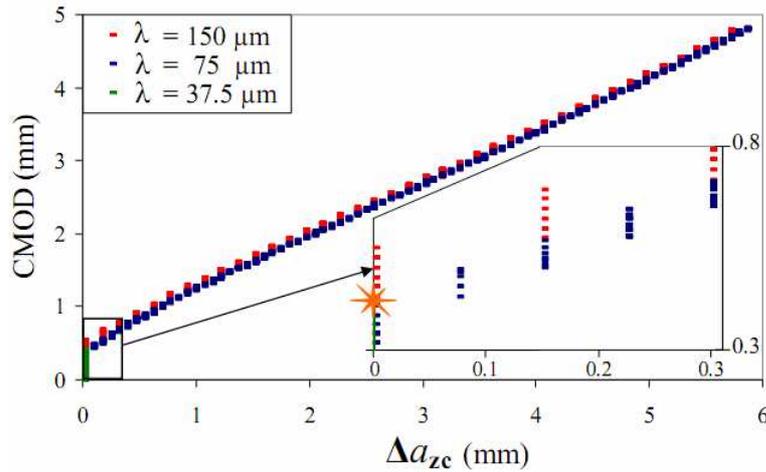


Figure IV-27 - Comparaison des courbes CMOD-Avancée de la pointe de zone cohésive pour trois tailles d'élément donnant la même densité de points de Gauss

Pour chaque taille d'élément, la valeur du CMOD pour laquelle la première zone cohésive (ZC) est insérée est résumée dans le tableau IV-3 :

Taille caractéristique de l'élément XFEM λ (μm)	37.5	75	150
CMOD à l'insertion de la 1 ^{ère} zone cohésive (μm)	421	409	550
CMOD à rupture du 1 ^{er} point de Gauss ZC (mm)	X	537	671

Tableau IV-3 - Valeurs du CMOD à l'insertion du premier segment de zone cohésive et à rupture du premier point de Gauss de ce segment

Premier point remarquable : le calcul correspondant à $\lambda=37,5\mu\text{m}$ n'a pu converger dès l'insertion de la première zone cohésive (étoile orange sur les courbes vertes). L'observation de l'état des points de Gauss en pointe de fissure au moment de l'amorçage permet d'en expliquer la raison.

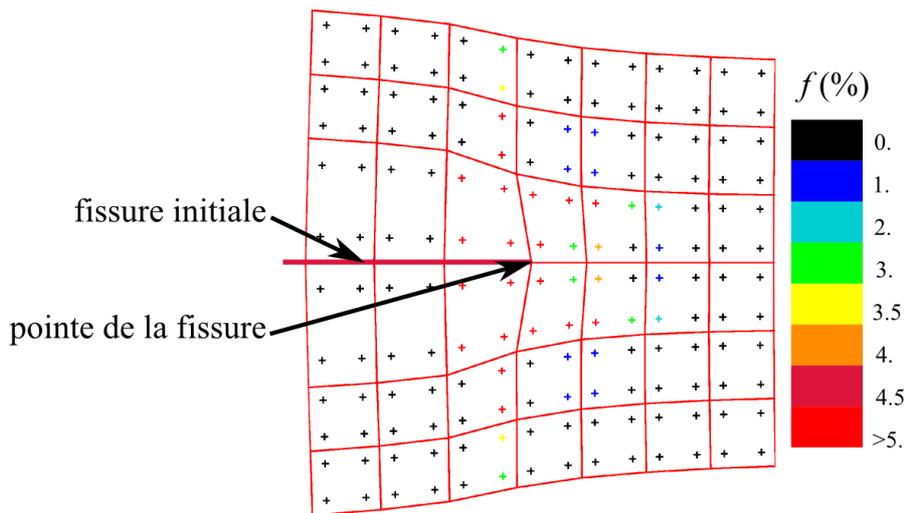


Figure IV-28 - Porosité aux points de Gauss à proximité de la pointe de fissure au moment de l'insertion du premier segment de zone cohésive pour $\lambda=37,5\mu\text{m}$

On voit en effet sur la figure IV-28 que les éléments entourant directement la pointe de fissure sont dans un état de dommage très avancé. Du côté fissuré, certains points de Gauss sont déjà rompus, de l'autre côté, où la zone cohésive doit être insérée, les points de Gauss connaissent un état d'endommagement très supérieur, et donc une rigidité inférieure, à ceux qui sont

prévus pour l'introduction de la zone cohésive. Ceci explique les difficultés de convergence du calcul. Cette hypothèse est confirmée par l'observation de l'état des points de Gauss pour les deux autres cas étudiés pour lesquels le niveau de porosité vaut autour de 3%.

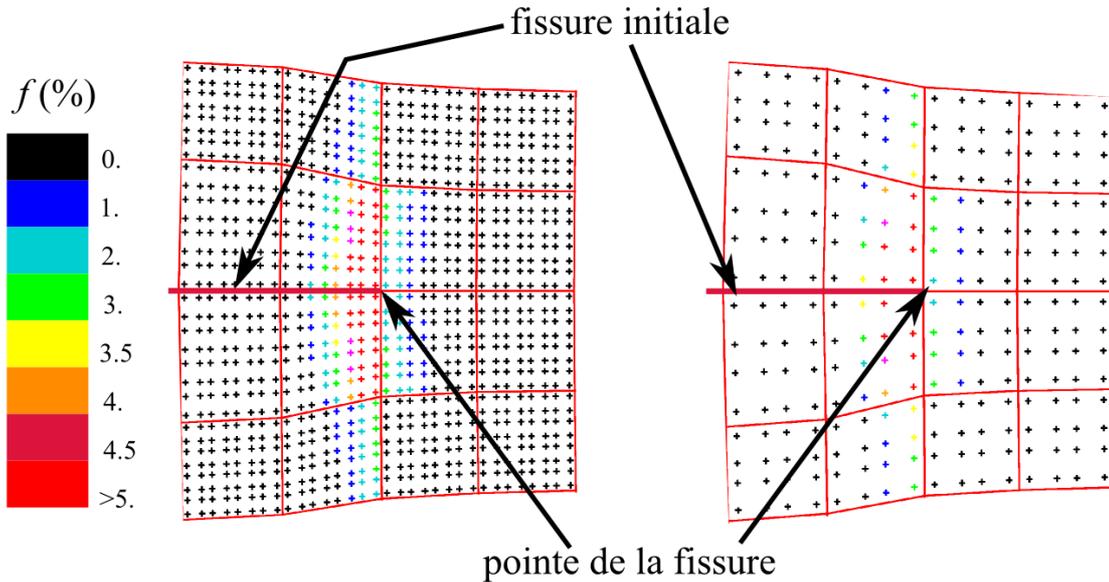


Figure IV-29 - Porosité aux points de Gauss à proximité de la pointe de fissure au moment de l'insertion du premier segment de zone cohésive pour $\lambda=150\mu\text{m}$ à gauche (élément à 64 points de Gauss) et $\lambda=75\mu\text{m}$ à droite (élément à 16 points de Gauss)

En ce qui concerne les résultats obtenus pour les plus grosses mailles, on remarque que la propagation survient pour une valeur plus grande de l'ouverture de la fissure pour l'élément le plus gros ($\lambda=150\mu\text{m}$). En revanche, de ce point de vue on retrouve des réponses cohérentes entre les deux autres tailles de maille. Ce résultat met en évidence l'influence de la taille de maille sur la capacité de modélisation de l'extension du dommage. En effet, sur la figure IV-29, on voit qu'à l'amorçage, l'état de dommage est similaire pour les deux tailles d'éléments les plus grandes. Or, avec l'augmentation de sa taille un élément se rigidifie. Ainsi, afin d'atteindre le même état d'endommagement à une distance donnée, l'énergie nécessaire augmente avec la taille de l'élément, même pour une distance inter-points de Gauss donnée. Ceci explique également l'état d'endommagement obtenu pour le maillage le plus faible, puisque le critère d'amorçage pour ces trois calculs a été testé sur une zone de même taille.

Avant l'introduction du premier segment de zone cohésive, la taille de maille joue donc un rôle important sur l'état d'endommagement en pointe de fissure. Cependant l'effet reste acceptable puisque la zone cohésive est insérée avant le début d'une localisation prononcée.

En revanche, en ce qui concerne la propagation, le rôle de la taille des éléments est moins important. Pour les deux tailles de maille, on retrouve la même vitesse de propagation : le décalage des courbes est simplement dû au décalage à l'amorçage. La courbe Force-CMOD obtenue avec une taille de maillage de $150\mu\text{m}$ reste néanmoins au-dessus de la courbe calculée pour une taille d'élément de $75\mu\text{m}$.

Ceci montre que l'insertion du modèle de zone cohésive permet théoriquement de réduire l'influence de la taille de maille par rapport à la modélisation purement locale du comportement. Néanmoins, étant donné que la longueur de zone cohésive active (Figure IV-18) est d'environ $220\mu\text{m}$, on ne peut utiliser un maillage d'éléments linéaires trop grossier.

Avec des éléments de $150\mu\text{m}$, on atteint la limite de la taille de maille qui permet de représenter correctement l'ouverture de la zone cohésive. Une solution qui pourrait être envisagée pour améliorer cette propriété est l'extension de la méthode aux éléments à approximation quadratique.

3.2.2 Influence de la distance inter-points de Gauss

Des calculs similaires ont été menés pour $\lambda=75\mu\text{m}$ avec différents nombres de points de Gauss, afin d'étudier la dépendance à la distance inter-points de Gauss sur le calcul de la propagation en déchirure ductile. On analyse les résultats obtenus pour 4, 16 et 64 points de Gauss avec les mêmes paramètres de propagation.

De même que précédemment, le calcul avec 4 points de Gauss ne converge pas dès l'insertion de la première zone cohésive. En effet, avec 4 points de Gauss, le critère d'insertion d'un segment de zone cohésive est vérifié trop tard et on se retrouve dans une configuration similaire à la section 3.2.1 p.143.

Les graphiques figures IV-30 et IV-31 montrent que la propagation est légèrement plus rapide pour les éléments à 64 points d'intégration, mais les courbes restent cependant très proches de celles obtenues avec 16 points de Gauss. Ainsi la distance inter-points de Gauss joue un rôle moindre sur les résultats de propagation si elle est suffisamment petite pour détecter correctement la vérification du critère de propagation.

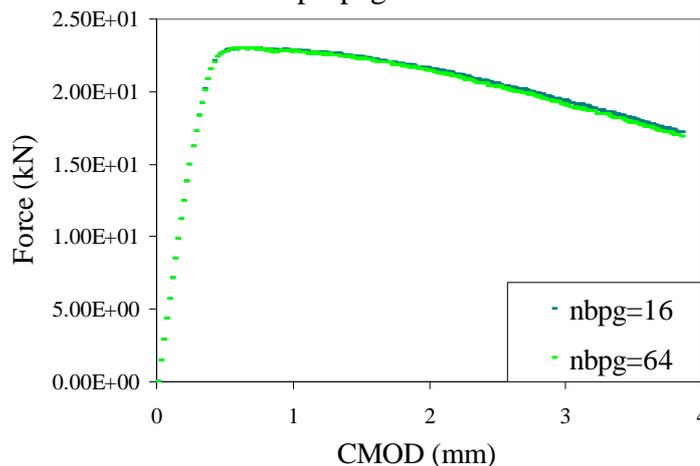


Figure IV-30 - Courbes Force-CMOD pour des densités de points de Gauss différentes. Nbp16 :distance interpoints de Gauss moyenne= $18.8\mu\text{m}$; nbpg64 :distance interpoints de Gauss moyenne= $9.4\mu\text{m}$.

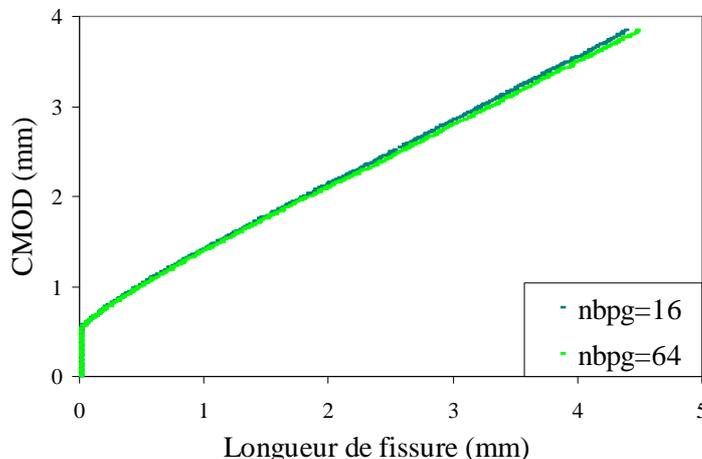


Figure IV-31 - Courbes de propagation pour des densités de points de Gauss différentes. Nbp16 :distance interpoints de Gauss moyenne= $18.8\mu\text{m}$; nbpg64 :distance interpoints de Gauss moyenne= $9.4\mu\text{m}$.

3.3 Conclusion

L'étude de l'influence de la taille de maille montre que la méthode proposée qui consiste à insérer une zone cohésive afin de représenter la transition depuis le modèle local de Rousselier vers une fissure réelle est assez robuste.

Ce gain est fortement favorisé par la méthode d'identification de la loi cohésive qui permet d'introduire la quantité d'énergie nécessaire pour le critère en porosité choisi. De plus la donnée de l'évolution de la porosité dans le solide avant introduction de la zone cohésive en fonction du saut de déplacement permet d'adapter simplement et efficacement la loi cohésive au cours du calcul de propagation.

Il est nécessaire de corrélérer la taille de la surface dans laquelle le critère d'insertion est testé avec la taille des éléments et la distance inter-points de Gauss, de manière à ce que le critère d'insertion de la zone cohésive soit atteint avant apparition de problèmes d'instabilités numériques associés à la localisation avec le modèle de Rousselier. Dans notre cas, le choix d'un anneau de rayon interne légèrement inférieur à la taille de maille et de l'ordre de la longueur caractéristique permet une bonne détection du critère d'insertion de la zone cohésive ainsi qu'une bonne description du comportement à l'amorçage et en propagation.

4. Application au calcul de propagation en 3D

4.1 Introduction

Les essais sur lesquels repose cette thèse sont tirés du projet européen VOCALIST [Marie2002a, Marie2002]. Les essais et calculs sur éprouvettes CT et AE évoqués précédemment sont le support de la caractérisation des paramètres de rupture, dont on a présenté ici les résultats associés au modèle de Rousselier. Ce projet compte également plusieurs essais de flexion quatre points sur tube fissuré qui ont été mis en œuvre et modélisés au Laboratoire d'Intégrité des Structures et de Normalisation du CEA de Saclay. L'application proposée ici est une base pour la modélisation de ce type d'essai par l'approche locale de la rupture ductile.

On modélise l'essai sur CT présenté dans la section précédente à l'aide d'un maillage élémentaire dans l'épaisseur qui permet la transposition directe de la méthode appliquée en 2D à la 3D.

4.2 CT 3D en déformations planes imposées

Afin de montrer l'applicabilité de la méthode en 3D sans prendre en compte les problèmes liés à la complexité de la propagation, on modélise cette fois l'essai de traction sur CT avec un seul élément dans l'épaisseur. L'intérêt de ce calcul est qu'il permet de valider la mécanique de la méthode en 3D de manière simple. De plus, on s'attend a priori à obtenir un résultat proche de ce qui a été vu en 2D, puisqu'en utilisant un unique élément dans l'épaisseur et en bloquant le déplacement transversal sur les faces latérales de l'éprouvette (selon la direction y , Figure IV-32), on impose un état de déformations planes dans l'éprouvette.

A l'instar du blocage du déplacement selon la direction y , les conditions de chargement et de blocage sont les mêmes que précédemment, mais sont imposées sur toute l'épaisseur de l'éprouvette.

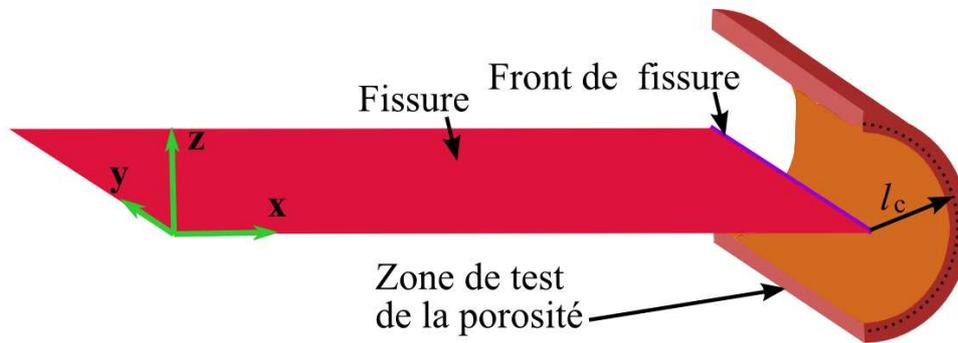


Figure IV-32 - Zone calcul du critère d'insertion d'une zone cohésive en 3D dans le cas d'une épaisseur élémentaire

La propagation est imposée dans le plan de la fissure et le critère d'activation du modèle cohésif est calculé sur une couronne cylindrique définie sur la figure IV-32. Les éléments cohésifs sont discrétisés avec des éléments quadrangles à 4 points de Gauss afin d'avoir la même densité de points de Gauss pour le solide et la zone cohésive (4 éléments cohésifs par avancée élémentaire XFEM). Ce choix a également l'avantage de situer les points de Gauss du modèle de zone cohésive sur le lieu de projection sur le plan $z=0$ des points de Gauss des éléments XFEM 3D la contenant. On compare les résultats avec ceux obtenus en 2D pour la méthode couplée et ceux obtenus avec la méthode standard avec des éléments linéaires sous-intégrés sous l'hypothèse des petites perturbations en 2D et en 3D. Le maillage 3D standard est composé d'éléments cubiques à 8 nœuds et un point de Gauss.

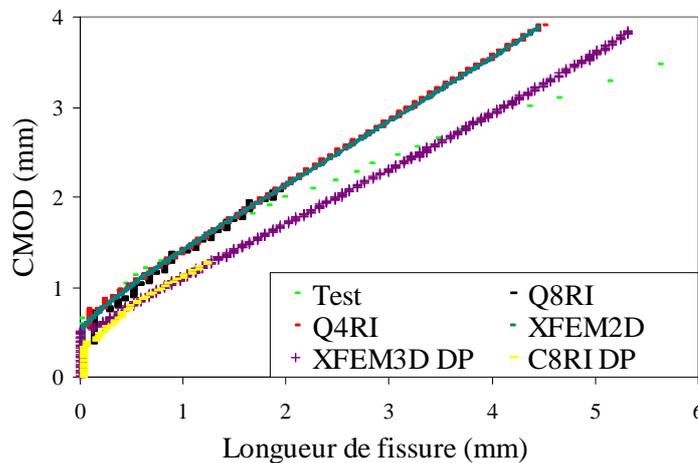


Figure IV-33 - Courbes de propagation.

Calculs 2D en déformations planes, modélisation standard : Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés, HPP. Calculs 2D en déformations planes XFEM : XFEM2D. Calculs 3D en déformations planes imposées : XFEM3D DP : calcul XFEM ; C8RI DP : calcul standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés.

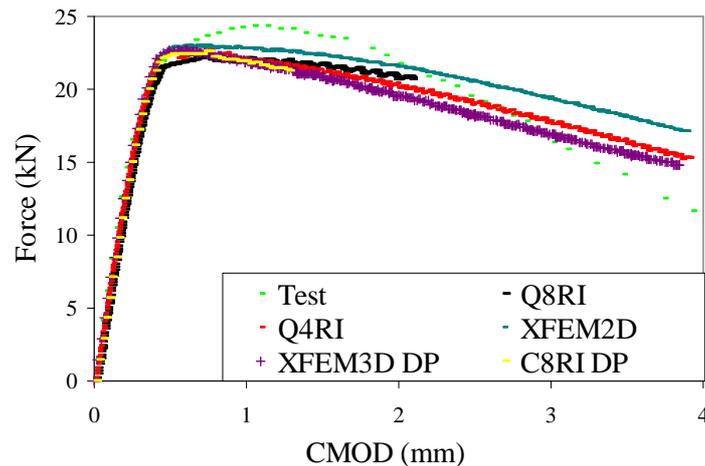


Figure IV-34 – Courbes Force-CMOD.

Calculs 2D en déformations planes, modélisation standard : Q8RI : Eléments quadratiques sous-intégrés ; Q4RI HPP : Eléments linéaires sous-intégrés. Calculs 2D en déformations planes XFEM : XFEM2D. Calculs 3D en déformations planes imposées : XFEM3D DP : calcul XFEM ; C8RI HPP DP : calcul standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés.

On voit sur les figures IV-33 et IV-34 que les calculs 3D XFEM (XFEM3D DP) et standard (C8RI DP) donnent des réponses proches. La méthode couplée semble donc être cohérente avec le calcul standard. On note que le calcul XFEM permet de plus de modéliser une propagation plus importante malgré la formulation lagrangienne réactualisée. Le calcul 3D sous l'hypothèse HPP stoppe suite à la singularisation de la matrice de rigidité qui empêche de calculer une prédiction élastique et de poursuivre le calcul.

Les graphiques, en particulier celui donnant l'ouverture des lèvres de la fissure en fonction de sa propagation (Figure IV-33), montrent aussi que les calculs 3D prévoient un amorçage précoce ainsi qu'une vitesse d'avancée de fissure légèrement plus rapide que dans le cas de la modélisation 2D en déformations planes. Ces deux tendances induisent l'éloignement des réponses obtenues pour la modélisation 2D et 3D de l'essai de déchirure. Afin d'expliquer ces résultats inattendus et valider la méthode XFEM couplée, il est nécessaire d'étudier ce point de plus près. On procède donc à une nouvelle modélisation du test.

4.3 CT 3D avec les faces latérales libres

Pour essayer de mieux comprendre pourquoi la propagation est accélérée pour le calcul 3D avec un unique élément dans l'épaisseur et des déformations planes imposées, on modélise maintenant l'essai de déchirure sans bloquer le déplacement selon y de part et d'autre de l'éprouvette. Le déplacement transversal selon la direction y est bloqué uniquement en un point au niveau du centre de la goupille supérieure. L'épaisseur des éléments est prise égale à l'épaisseur nette. Ce choix a été fait bien que la forme résultante des éléments ne soit pas optimale car l'utilisation de l'épaisseur nette permet de ne pas surestimer l'effet de la striction dans le plan de la fissure.

4.3.1 Calcul standard

On compare dans un premier temps uniquement les calculs standard (Figure IV-35 ; Figure IV-36). Pour retrouver l'effort obtenu en 2D, on a recalculé la force obtenue à partir de l'épaisseur nette. L'effort est obtenu en divisant la résultante calculée sur l'éprouvette par l'épaisseur nette et en la remultipliant par la racine de l'épaisseur initiale (20mm) fois l'épaisseur nette (16mm).

En ne bloquant pas le déplacement selon y sur les faces latérales de l'éprouvette, l'amorçage est retardé et la vitesse de l'avancée de fissure diminue grandement. La courbe de propagation obtenue par la modélisation 3D faces libres passe au-dessus des autres. On se rapproche de la courbe de propagation obtenue en 2D sous l'hypothèse des déformations planes, mais la vitesse de propagation est maintenant fortement sous-estimée.

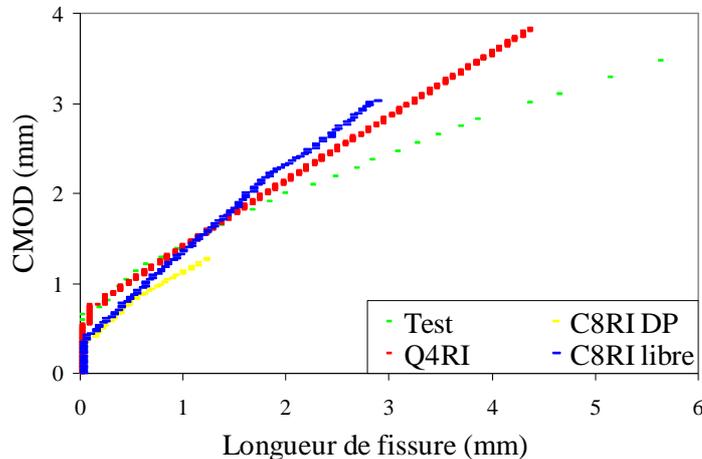


Figure IV-35 - Courbes de propagation.

Calculs 2D en déformations planes : Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés, modélisation standard ; Calculs standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés. : C8RI DP : Avec conditions aux limites imposant des déformations planes ; C8RI libre : Avec les faces latérales libres.

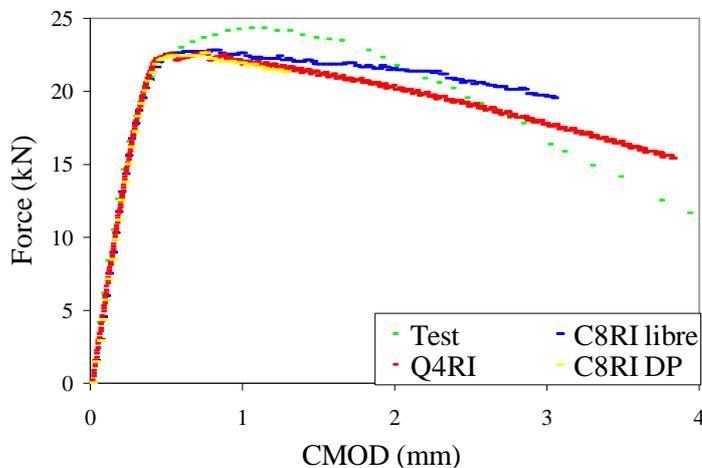


Figure IV-36 - Courbes Force-CMOD

Calculs 2D en déformations planes : Q4RI : Eléments linéaires sous-intégrés, modélisation standard ; Calculs standard en HPP éléments linéaires sous-intégrés. : C8RI DP : Avec conditions aux limites imposant des déformations planes ; C8RI libre : Avec les faces latérales libres.

D'après ces données, on peut supposer que la différence entre les résultats du calcul en 2D déformations planes et en 3D déformations planes imposées, est liée à la formulation du modèle dans Cast3M. Il s'agit sans doute du calcul de la prédiction élastique qui dépend de la rigidité calculée. En effet, en 2D déformations planes, le blocage des degrés de liberté transversaux est implicite et aucune rigidité n'y est associée explicitement. En 3D la rigidité transversale est calculée, et le blocage de ces ddl est un résultat du calcul, qui tend sans doute à faire augmenter la contrainte moyenne et à accélérer la vitesse de propagation en 3D par rapport au cas 2D déformations planes. De plus, l'existence explicite de cette rigidité en 3D

introduit également une perte de raideur au cours de la phase d'endommagement qui n'existe pas dans le cas 2D.

4.3.2 Calcul XFEM

Si on compare les réponses obtenues par la formulation classique avec celle obtenue avec la méthode XFEM (Figure IV-37 ; Figure IV-38), on voit que les courbes de propagation se recouvrent de nouveau pour la modélisation standard (C8RI libre) et la modélisation couplée (XFEM3D libre).

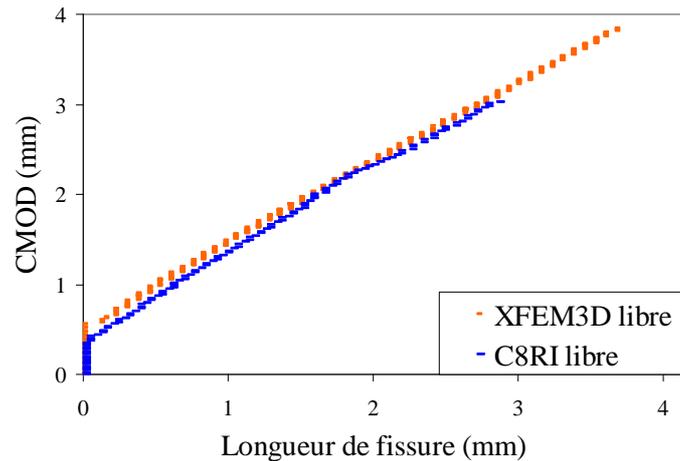


Figure IV-37 - Courbes de propagation pour une CT modélisée avec les faces latérales libres.
C8RI libre : Calcul standard en HPP, éléments linéaires sous-intégrés ;
XFEM3D libre : Calcul XFEM 3D.

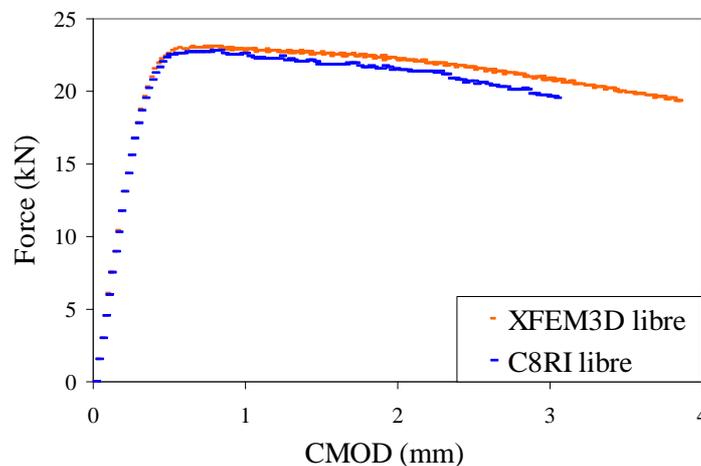


Figure IV-38 - Courbes Force-CMOD pour une CT modélisée avec les faces latérales libres.
C8RI libre : Calcul standard en HPP, éléments linéaires sous-intégrés ;
XFEM3D libre : Calcul XFEM 3D.

On observe donc les mêmes tendances pour les deux types de modélisation. Le schéma d'intégration, l'introduction d'un modèle de zone cohésive identifié pour un état de triaxialité donné pour traiter la transition vers une fissure à bords libres de contrainte, n'introduisent pas de disparités avec les résultats donnés par la modélisation standard.

4.4 Conclusion

Le calcul d'une CT avec un seul élément dans l'épaisseur valide la transférabilité de la méthode à la 3D. En effet, les résultats de propagation obtenus avec la modélisation couplée sont cohérents avec ceux calculés dans le cadre de l'approche purement locale. Le calcul 3D ne permet pas de retrouver les résultats obtenus en 2D sous l'hypothèse des déformations planes, toutefois, on note que la mécanique de la méthode fonctionne bien et permet de modéliser une propagation beaucoup plus grande que dans le cas 3D standard, et ce malgré l'hypothèse HPP de ce dernier calcul.

5. Conclusion

Ce chapitre a permis de montrer l'efficacité d'une méthode combinant modèle local pour la rupture ductile, ici le modèle de Rousselier, et modèle de zone cohésive dans le cadre de la XFEM afin de résoudre les problèmes de convergence liés aux éléments rompus en pointe de fissure.

Afin de bien poser la problématique une étude a été menée sur la modélisation standard. Elle compare les résultats des calculs de propagation sur éprouvette CT obtenus pour différents types d'éléments. Elle a permis de confirmer qu'il est nécessaire d'utiliser des éléments sous-intégrés afin de ne pas sous-estimer l'énergie dissipée dans le processus de rupture brutale que représente la déchirure ductile.

Malgré cette conclusion, on a pu montrer que les éléments XFEM surintégrés (16 points de Gauss en 2D et 64 en 3D) permettent d'obtenir des résultats de propagation en accord avec les calculs de référence modélisés avec des éléments quadratiques en grandes déformations et linéaires sous l'hypothèse HPP. La capacité de ces éléments à modéliser correctement la rupture brutale est liée à l'introduction d'un modèle de zone cohésive dont la loi de traction a été identifiée à partir de la réponse mécanique du modèle de Rousselier selon la méthode présentée au chapitre III avant l'apparition de problèmes numériques. L'hypothèse selon laquelle l'introduction d'une discontinuité réelle dans la structure permet de supprimer les problèmes numériques liés à la distorsion est donc bien vérifiée.

L'analyse de l'influence de la taille de maille XFEM, tant au sens de la distance inter-points de Gauss qu'au sens de la taille des éléments, a mis en évidence le gain apporté par l'introduction d'un modèle de zone cohésive pour gérer la rupture. En effet, sa présence permet de réduire la dépendance de la propagation à la taille de maille, puisqu'un facteur deux sur ces tailles n'engendre qu'une variation faible de la réponse. En revanche, un point plus essentiel est la définition de la zone du critère en relation avec la taille des éléments et la distance inter-points de Gauss. Si une différence trop importante existe entre la taille des éléments et le rayon de définition de la zone de test, ou si la densité de points de Gauss n'est pas suffisamment importante, la zone cohésive est introduite trop tard et le calcul ne converge pas.

L'application sur une éprouvette CT en 3D montre que l'extension à cette dimension est possible et que l'introduction d'un modèle cohésif cohérent permet d'étendre le domaine de validité numérique de la modélisation par approche locale. Ainsi on peut envisager le calcul sur structure réelle en 3D, tels les tubes fissurés en flexion du projet VOCALIST.

Conclusions et Perspectives

On a montré dans ce travail que le couplage d'une formulation locale pour la rupture ductile avec un modèle de zone cohésive dans le cadre de la XFEM, permet de simuler avec succès de longues propagations de fissure en déchirure ductile. Cette approche a été mise en œuvre pour le modèle de Rousselier pour la rupture ductile.

La formulation du modèle de Rousselier a été légèrement redéfinie afin de le replacer dans le cadre des matériaux standard généralisés. Sans remettre en cause la forme du potentiel de dissipation, ceci a permis d'identifier clairement ce modèle comme purement plastique et de montrer qu'aucune dissipation élastique n'est liée à la croissance des cavités.

Un cadre thermodynamique a été établi pour la définition d'un modèle de zone cohésive cohérent avec le modèle de Rousselier reformulé. Ainsi, une loi cohésive d'ouverture permettant d'obtenir un comportement mécanique équivalent à celui du modèle de Rousselier a pu être construite. Le saut de déplacement et la contrainte cohésive associée sont obtenus en comparant les réponses mécaniques et énergétiques d'un problème de traction uniaxiale modélisé d'une part, à l'aide du modèle de local uniquement et d'autre part, à l'aide du modèle local et du modèle de zone cohésive.

Deux programmes ont été développés pour ce calcul. Un programme Matlab a été développé en collaboration avec F. Cazes. Il permet de construire une loi cohésive cohérente avec un modèle élastoplastique isotrope dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations ainsi que dans le cadre d'une formulation non linéaire géométrique en définissant la loi cohésive comme une inconnue du calcul dans la modélisation couplée. Un programme Cast3M codé en gubiane (le langage de mise en données de Cast3M) permet d'identifier des lois cohésives à partir de différentes lois élastoplastiques isotropes dans un cadre simplifié.

Afin d'exploiter au mieux les points forts du modèle local de Rousselier et du modèle cohésif associé, le couplage des deux modèles a été mis en œuvre dans le cadre XFEM du logiciel éléments finis Cast3M. Par couplage, on entend l'utilisation simultanée du modèle de Rousselier et du modèle de zone cohésive associé dans le calcul de propagation de fissure. La transition d'un modèle à l'autre est localisée en pointe de fissure et est déclenchée par la vérification locale d'un test défini en terme de niveau de porosité dans un demi-anneau dont le rayon moyen est proche de la longueur caractéristique du matériau. Afin d'améliorer le coût de calcul lié à l'insertion du modèle de zone cohésive, un intervalle de tolérance est défini pour la vérification du critère d'extension. Sur cet intervalle, la loi cohésive est alors adaptée de manière à ce que l'énergie dissipée au cours du processus de rupture par le modèle d'approche locale combiné au modèle de zone cohésive soit toujours cohérente.

La zone cohésive est quant à elle modélisée comme une action extérieure appliquée sur les lèvres de la fissure numérique. Ce choix permet une implémentation simple du modèle et une convergence suffisamment rapide de l'équilibre. L'ouverture de la zone cohésive est directement calculée à partir des degrés de liberté d'enrichissement associés à la discontinuité. Les efforts cohésifs sont quant à eux intégrés sur les éléments cohésifs à l'aide des fonctions de forme des éléments XFEM.

Pour calculer la rigidité, les efforts et le comportement correctement dans le cadre de la formulation non-linéaire géométrique des grandes déformations de Cast3M, le calcul du Jacobien est modifié en utilisant la définition de la position à bords libres de contrainte des points d'intégration des éléments fissurés dans la configuration courante. Cette méthode permet de prendre en compte les effets de grandes déformations tant au niveau du solide que de la zone cohésive.

Les résultats d'application de la méthode au calcul de propagation en déchirure ductile sur éprouvette CT montrent que l'introduction d'un modèle cohésif pour prendre la relève du modèle de Rousselier au cours de la transition vers une fissure réelle permet de supprimer les problèmes liés à la présence d'éléments de rigidité nulle dans le maillage. En résolvant ce problème, il est alors possible de modéliser des propagations de fissure sur de grandes longueurs. La méthode permet également de réduire la dépendance à la taille de maille dans une certaine mesure.

Afin de montrer le potentiel de la méthode, un calcul 3D sur une CT a été effectué. En imposant des conditions aux limites de déformations planes sur l'éprouvette, la validité de la méthode en 3D a pu être montrée en retrouvant les résultats observés avec la modélisation standard sous les mêmes hypothèses. Cependant les courbes obtenues en 2D sous l'hypothèse de déformations planes n'ont pu être reproduites par aucune des modélisations.

Les travaux de ce mémoire posent les bases d'une méthode combinée permettant de modéliser de longues propagations de fissure en 2D et en 3D sur des cas simples. Les limites de l'approche sont liées au traitement des champs d'enrichissement dans le cadre des grands déplacements. Afin d'éviter des erreurs de résolution et d'interprétation dues au traitement des fonctions de pointe de fissure au cours du changement de configuration de référence, le choix a été fait d'utiliser une approximation du déplacement enrichie à l'aide de fonctions saut uniquement. Ce choix limite le traitement automatique de la propagation des fissures puisque le front est toujours situé aux bords des éléments. En 3D, dans un maillage non conforme au front, il est difficile de définir un algorithme de propagation non constante le long du front de la zone cohésive. De plus, les levels sets sont difficiles à calculer lorsque le front présente des angles droits. Afin de résoudre ces problèmes, il serait intéressant d'utiliser des fonctions de pointe de fissure définies en terme de position normée et non en terme de distance réelle et n'introduisant pas de singularités. L'amorçage pourrait également être mieux représenté en étendant la méthode proposée aux éléments à interpolation quadratique.

En 3D, en testant la propagation dans chaque élément directement en avant du front et en imposant la propagation dans le plan de fissure initial et de manière normal au front, il semble toutefois possible de modéliser la propagation d'un tube fissuré soumis à un chargement en flexion 4 points avec l'enrichissement du déplacement utilisé dans ce mémoire.

D'autre part l'identification de la loi cohésive est ici limitée à un seul état de triaxialité, constant au cours de l'identification. Il serait intéressant d'étudier l'influence de la triaxialité sur des lois construites pour différents taux de triaxialité. Dans le cas où l'influence est importante, la méthode pourrait être améliorée en utilisant la loi correspondant au niveau de triaxialité vue par la pointe de la zone cohésive au moment où celle-ci doit être étendue. Les résultats obtenus dans ce mémoire montrent toutefois que l'utilisation d'une loi cohésive identifiée sur une loi de traction donne de bons résultats si elle est utilisée uniquement lors de la dernière phase de la rupture.

La méthode développée dans ce mémoire peut également permettre la modélisation de l'initiation de fissure à partir d'un état totalement homogène. L'extension de la méthode au traitement de ce problème repose principalement sur le traitement cohérent de l'insertion du premier segment de fissure ainsi que la définition d'un critère d'orientation adapté.

L'implémentation d'un modèle de zone cohésive dans le cadre XFEM de Cast3M pose également les bases pour le traitement du contact et du frottement au cours de calculs de mécanique des solides et de la rupture.

Annexe A.

Détail de la résolution du calcul d'une loi cohésive d'ouverture à partir d'un modèle de comportement local par une méthode à multiplicateurs de Lagrange

1. Introduction

La construction d'une loi cohésive cohérente avec un modèle d'approche locale régularisé est mise en œuvre par le calcul d'un cylindre encasté soumis à un déplacement ou à un effort axial :

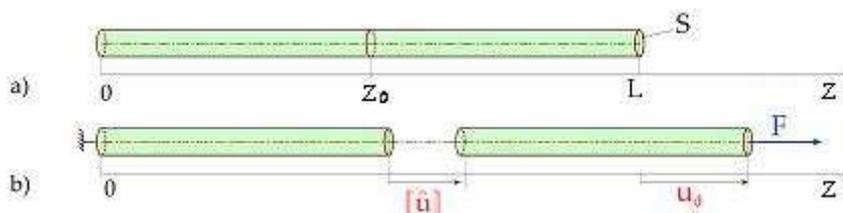


Figure A-1 -Géométrie du cylindre avant (a) et après déformation (b)

Le problème est d'abord résolu à une échelle mésoscopique avec un modèle local, puis à l'aide d'un modèle couplé à une échelle dite macroscopique. Le modèle méso comporte une méthode de régularisation permettant de traiter le problème après la perte de la stabilité matérielle.

Le calcul macro utilise le même modèle de comportement que pour le calcul méso sans implantation d'une méthode de régularisation des déformations. C'est alors un modèle de type zone cohésive qui joue le rôle de limiteur de localisation. La loi de comportement du modèle cohésif n'est pas connue par avance, elle est calculée incrémentalement à partir de la donnée des incréments d'énergie dissipée par le modèle mésoscopique. On fait l'hypothèse que le modèle cohésif ne capte que l'énergie dissipée par le modèle mésoscopique aux endroits où l'unicité de la solution est perdue.

2. Possibilités du programme dédié à la construction de lois cohésives cohérentes en traction

Dans le programme Matlab dédié à la construction de lois cohésives cohérentes, les trois types de régularisation implantées sont les suivantes :

- La régularisation "homogène" : la déformation est homogène dans une poutre de longueur égale à la longueur caractéristique ;
- La régularisation "localisée" : on laisse les déformations localiser dans un élément (l'élément central) dont la longueur est égale à la longueur caractéristique du matériau ;
- La régularisation "non-locale" : on utilise un modèle non-local.

On ne présentera ici que la méthode homogène, qui est celle utilisée dans ce mémoire. On peut se reporter au mémoire de thèse de F. Cazes [Cazes2010b] pour le détail des autres méthodes.

Plusieurs modèles sont implémentés : endommagement et plasticité linéaires, modèle élastoplastique endommageable, modèle de plasticité non-linéaire.

Pour pouvoir comparer les solutions des deux problèmes, on choisit en général des approches similaires pour le calcul mésoscopique et le calcul macroscopique. Cependant, il est aussi possible de mettre en œuvre la construction de la loi cohésive en petites perturbations à partir

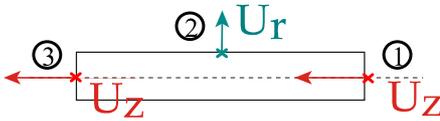
de la solution analytique du problème. Dans tous les cas, le premier pas de temps doit être élastique.

3. Formulation du problème *Eléments Finis*

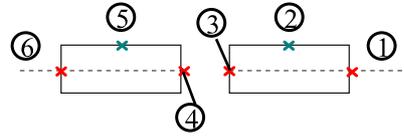
L'élément fini utilisé pour traiter le problème est un élément à section circulaire pouvant être soumis à une sollicitation longitudinale de traction. La formulation retenue pour le calcul est une formulation lagrangienne réactualisée. De plus, le calcul repose sur une hypothèse de petits incréments de déformations. L'équilibre peut donc être calculé sur la configuration au début du pas.

3.1. Cinématique de l'élément

Problème de référence



Problème équivalent avec zone cohésive



✗ : Noeud avec degré de liberté selon U_z ✕ : Noeud avec degré de liberté selon U_r

Figure A-2 - Discrétisation du problème de barre en traction pour la méthode avec multiplicateurs de Lagrange

L'élément a 3 degrés de liberté : Aux nœuds ① et ③ sont associés respectivement les déplacements U_1 et U_3 dans la direction U_z au nœud ② le degré de liberté associé est noté U_2 est correspond à un déplacement radial.

Les actions peuvent être appliquées en effort ou en déplacement sur les sections limites du cylindre. On détaillera ici uniquement le cas d'un déplacement imposé, noté u_d .

Le vecteur des déplacements nodaux est organisé comme suit :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

L'approximation du déplacement correspondante est donc :

$$u(z) = N_1(z)U_1 + N_2(r)U_2 + N_3(z)U_3 \quad (\text{A-2})$$

Où les fonctions de formes N_i valent :

$$\begin{aligned} N_1(z) &= -\frac{z}{L} \\ N_2(r) &= \frac{r}{R} \\ N_3(z) &= \frac{z}{L} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

A partir de l'expression (A-2) du champ de déplacement, on calcule la déformation, qui est homogène dans l'élément, et s'écrit dans la base (U_z, U_r, U_θ) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_z = \frac{U_3 - U_1}{L} \\ \varepsilon_r = \frac{U_2}{R} \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

La définition du vecteur déformation et de sa vitesse au point de Gauss suivante sera utilisée :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_z \\ 2\dot{\varepsilon}_r \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

La matrice B de calcul des déformations définie par

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \mathbf{B} \underline{\underline{\dot{U}}} \quad (\text{A-6})$$

S'écrit donc :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{2}{R} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-7})$$

3.2. Description du comportement mécanique de l'élément

Le matériau est supposé élastoplastique isotrope. Le comportement en vitesse en décharge est donc décrit par une relation du type (dans notre cas où seules les déformations longitudinales sont non nulles) :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e \quad (\text{A-8})$$

Qui appliquée aux vecteurs contraintes et déformations introduits précédemment devient :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{zz} \\ \dot{\sigma}_{rr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{zz}^e \\ 2\dot{\varepsilon}_{rr}^e \end{Bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

$$= \mathbf{E}_{\text{num}} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e$$

3.3. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

La matrice de rigidité élémentaire se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$[\mathbf{K}_{\text{el}}] = \int_{\Omega_{\text{el}}} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{\text{num}} \mathbf{B} dV = V_{\text{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{\text{num}} \mathbf{B} \quad (\text{A-10})$$

Dans le cas où \mathbf{E}_{num} est l'opérateur élastique, la matrice de rigidité s'écrit :

$$[\mathbf{K}_{\text{el}}] = \pi \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} & -2\lambda R & -(\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} \\ -2\lambda R & 4(\lambda + \mu)L & 2\lambda R \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} & 2\lambda R & (\lambda + 2\mu) \frac{R^2}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A-11})$$

3.4. Résolution de l'équilibre du problème de référence

3.4.1. Définition du problème de référence

On détaille ici le cas de la régularisation homogène. Ceci correspond à une régularisation introduite par la taille de maille et qui permet de dissiper la bonne quantité d'énergie au cours du processus de rupture. Le cylindre est alors composé d'un unique élément dans le problème de référence.

3.4.2. Vecteur des actions extérieures

Le vecteur des actions extérieures est non nul en chaque nœud extrémité du cylindre. Le vecteur des actions extérieures peut être composé d'efforts ainsi que de déplacements imposés. On l'écrit :

$$\mathbf{R}_{\text{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} \quad (\text{A-12})$$

3.4.3. Résolution

On peut supposer un comportement incrémental linéaire. Avec les hypothèses énoncées précédemment, le système à résoudre pour le problème de référence s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ -\delta \Lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{\text{ext}} \quad (\text{A-13})$$

Où \mathbf{U} et Λ sont respectivement les vecteurs nodaux du déplacement et des multiplicateurs de Lagrange, \mathbf{A} est l'opérateur sélectionnant les degrés de liberté sur lesquels les conditions de liaison sont appliquées.

Nous nous trouvons ici dans un problème fortement non-linéaire. L'écriture du système (A-13) correspond à la prédiction élastique qui permet d'obtenir une approximation de l'incrément de déplacement dans la structure du aux actions extérieures. A partir du champ de déplacement obtenu, les efforts intérieurs \mathbf{F}_{int} sont calculés par écoulement et intégration du comportement. On peut alors écrire le résidu suivant :

$$\mathbf{R}_n = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{A}^T \Lambda \\ \mathbf{U}_d - \mathbf{U} \end{Bmatrix} \quad (\text{A-14})$$

Qui peut alors être réinjecté dans le système à résoudre pour obtenir un nouvel incrément de déplacement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{(n)} \mathbf{U} \\ -\delta^{(n)} \Lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_n \quad (\text{A-15})$$

A partir de la deuxième itération, le comportement est calculé à partir de l'incrément de déplacement $\delta \mathbf{U}^{\text{comp}}$ égal à la somme des incréments obtenus lors de chaque itération d'équilibre :

$$\delta \mathbf{U}^{\text{comp}} = \delta \mathbf{U} + \sum \delta^{(n)} \mathbf{U} \quad (\text{A-16})$$

Lorsque le maximum normé des résidus devient inférieur à la tolérance posée, on a atteint l'équilibre. La configuration de référence est alors mise à jour. Dans le cas d'un déplacement imposé, une itération suffit.

3.5. Résolution de l'équilibre du problème avec zone cohésive

3.5.1. Définition du problème avec zone cohésive

Le problème avec zone cohésive est modélisé à l'aide de deux éléments qui mis bout à bout sont équivalents au problème de référence jusqu'à vérification du critère de non-unicité de la solution. La zone cohésive est introduite par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange qui maintiennent une cohésion totale entre les éléments jusqu'à ce point. Le saut de déplacement du modèle cohésif est ensuite non nul, et le problème est résolu de telle sorte que l'équilibre des efforts et l'égalité des dissipations dans le problème de référence et dans le problème couplé soient assurés.

3.5.2. Ajout du calcul du saut de déplacement

Pour permettre le calcul du saut de déplacement au cours du calcul de l'équilibre de la modélisation couplée, il est nécessaire de définir le résidu qui y est associé. Seule la composante axiale du saut et de l'effort est non nulle. Le saut de déplacement et l'effort cohésif associé sont donc des scalaires. Ainsi, le saut de déplacement est obtenu à partir de l'hypothèse de l'égalité des dissipations, selon la relation suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } \overset{\circ}{\sigma}_{\underline{\underline{RM}}} : \underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{RM}}} < 0 : \quad \delta[\mathbf{u}]^p &= \frac{\delta\phi_{\underline{\underline{RM}}}^p}{F_{zc}} \\ \text{sinon :} \quad \delta[\mathbf{u}]^p &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

Au cours du calcul, on dit qu'on a convergé lorsque l'équilibre est vérifié et que l'énergie dissipée dans la zone cohésive au cours de l'incrément $\delta\phi_{zc}^p$ est égale à celle dissipée par le modèle de référence $\delta\phi_{\underline{\underline{RM}}}^p$ au cours du même incrément lorsque le critère de non unicité est vérifié. Le résidu associé au calcul du saut de déplacement de la zone cohésive s'écrit donc en terme de dissipation, lors de la prédiction élastique, il vaut :

$$R_{zc} = \delta\phi_{\underline{\underline{RM}}}^p \quad (\text{A-18})$$

3.5.3. Résolution de l'équilibre couplé au calcul du saut de déplacement

Le saut de déplacement au niveau de la zone cohésive est calculé à l'aide de l'opérateur matriciel $[\mathbf{T}]$ à partir de la différence des déplacements aux nœuds 3 et 4 (Figure A-2) :

$$\{[\mathbf{U}]\} = [\mathbf{T}] \{[\mathbf{U}]\} \quad (\text{A-19})$$

Etant donné que le saut de déplacement est une inconnue du problème, on introduit le résidu sur la dissipation R_{zc} dans le résidu global par l'intermédiaire de δV :

$$\delta V = \begin{cases} \frac{R_{zc}}{F_{zc}} & \text{si } \overset{\circ}{\sigma}_{\underline{\underline{RM}}} : \underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{RM}}} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A-20})$$

Où δV correspond à l'incrément de saut de déplacement de la zone cohésive au cours du pas de chargement courant.

Finalement le vecteur des actions extérieures s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\text{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta \mathbf{U}_d \\ \delta \mathbf{V} \end{Bmatrix} \quad (\text{A-21})$$

La zone cohésive est imposée en déplacement, un multiplicateur de Lagrange \mathbf{M} , représentant l'effort cohésif F_{zc} lui est donc associé et l'équilibre mécanique s'écrit :

$$[\mathbf{K}]\{\delta \mathbf{U}\} - [\mathbf{A}]^T \{\delta \Lambda\} - [\mathbf{T}]^T \{\delta \mathbf{M}\} = \{0\} \quad (\text{A-22})$$

Avec les hypothèses énoncées précédemment, le système à résoudre lors de la prédiction élastique pour le problème avec zone cohésive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T & \mathbf{T}^T \\ \mathbf{A} & 0 & 0 \\ \mathbf{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ -\delta \Lambda \\ -\delta \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{\text{ext}} \quad (\text{A-23})$$

A partir de l'itération suivante, on peut écrire le résidu suivant :

$$\mathbf{R}_n = \begin{Bmatrix} -F_{\text{int}} - \mathbf{A}^T \Lambda - \mathbf{T}^T \mathbf{M} \\ \mathbf{U}_d - \mathbf{U} \\ \frac{\delta \phi_{\text{RM}}^p - \delta \phi_{zc}^p}{F_{zc}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A-24})$$

Qui peut alors être réinjecté dans le système à résoudre pour obtenir un nouvel incrément de déplacement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T & \mathbf{T}^T \\ \mathbf{A} & 0 & 0 \\ \mathbf{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{(n)} \mathbf{U} \\ -\delta^{(n)} \Lambda \\ -\delta^{(n)} \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_n \quad (\text{A-25})$$

A partir de la deuxième itération, le comportement est calculé à partir de l'incrément de déplacement $\delta \mathbf{U}^{\text{comp}}$ égal à la somme des incréments obtenus lors de chaque prédiction selon la relation (A-16).

Lorsque le résidu devient inférieur à la tolérance posée, on a atteint l'équilibre. La configuration de référence est alors mise à jour.

La dissipation dans la zone cohésive est quant à elle donnée par la relation suivante :

$$\delta \phi_{zc}^p = F_{zc} \{\delta [\mathbf{U}]\} \quad (\text{A-26})$$

3.5.4. Construction de la loi cohésive

La loi cohésive est construite pas à pas. A chaque itération de chargement, lorsque le calcul a convergé, l'incrément de saut de déplacement est ajouté au saut de déplacement au début du pas. La contrainte cohésive de Cauchy qui y est associée est obtenue en divisant l'effort cohésif au début du pas par la section au début du pas :

$$\mathbf{t}_{zc} = \frac{F_{zc}}{S} \quad (\text{A-27})$$

Le point ainsi calculé est alors ajouté à ceux assemblés précédemment et l'opération est répétée jusqu'à rupture.

Annexe B.

Jeu de données gibiane pour le calcul d'une loi cohésive cohérente par la méthode simplifiée dans Cast3M

On donne ici à titre d'exemple, le jeu de données utilisé pour l'identification de la loi cohésive cohérente avec le modèle de Rousselier pour l'acier ferritique TU52B à partir d'une porosité de 3%. Ce jeu de données permet la prise en compte des non-linéarités géométriques au cours de la résolution du problème de cylindre en traction.

Annexe B. Jeu de données de la méthode simplifiée

```
* Dimension 2 ; mode axisymétrique ; Quadrangle à 4 noeuds
OPTION DIME 2 MODE AXIS ELEM QUA4;
*+++++
* Géométrie et Maillage
*+++++
*-----> longueur caractéristique :
l_car = 0.075 ;
*----- > Rayon, Longueur
R0 = l_car / 2 ; L0 = l_car ;
*----- > points
p0 = 0. 0. ; P1 = R0 0. ; p2 = R0 L0 ; p3 = 0. L0 ;
*----- > Lignes
d1 = DROI 1 p0 p1 ; d3 = DROI 1 p3 p2 ;
*----- > Surfaces
s1 = regl d1 d3 n2;
*****
*-----
* Condiions aux limites
*-----
CL1 = BLOQUE UZ D1 ; CL3 = BLOQUE UZ D3 ;
CLL = (CL1 ET CL3) ;
*-----
* Matériau ET modele
*-----
* Unités : mm, kg, Newton, MPa
EY020 = 1.88e-3 ; EYO = 200.E3 ; nu0 = 0.3; rho0 = 7.e-6 ;
PR_EPS1 = (PROG 0. 2.221 2.64 3.53 4.81 6.08 7.32
8.56 10.90 13.3 15.7 20.1 40.37 60.4 80.42 100.44 120.45
140.46 160.47 200.49 250.51 300.53 400.55)/100. ;
PR_EPS1 = PR_EPS1 INSE 2 EY020 ;
PR_SIG1 = PROG 0. (EY020*YO020) 389.3 411.9 448.2
485.9 516.4 540.9 562.0 595.0 618.5 638.9 666.9 748.8 801.7 841.5
873.7 900.9 924.6 945.6 981.8 1019.4 1051.1 1103.4;
* Courbe de traction
CTRAC = EVOL MANU 'EPS' PR_EPS1 'SIGY' PR_SIG1 ;
* Paramètres matériau du modèle de Rousselier
sig_1 = 450.; D_mat = 2. ; f0 = 0.0014 ; fc = 0.055;
MO_P = MODE s1 'MECANIQUE' 'ELASTIQUE' 'ISOTROPE' 'PLASTIQUE_ENDOM'
'ROUSSELIER' ;
MA_P = MATE MO_P 'YOUN' EYO 'NU' nu0 'TRAC' CTRAC 'RHO' rho0
'SIG1' sig_1 'D' D_mat 'F' f0 'FC' fc ;
* Création d'une table matériau pour le post-traitement :
t_mat = tabl;
T_mat.'l_car' = PROG l_car; t_mat.'rho0' = PROG rho0;
T_mat.'young' = PROG YO020 ; T_mat.'nu' = PROG nu020 ;
T_mat.'eps_0' = PROG EY020 ; T_mat.'sig_0' = PROG (EY020*YO020) ;
t_mat.'sig1' = PROG sig_1; t_mat.'D' = PROG D_mat ;
t_mat.'f0' = PROG f0 ; t_mat.'fc' = PROG fc;
* liste de temps pour l'évolution du chargement
DT0 = 0.0001; DT1 = 0.001 ; DT2 = 0.0001;
LL = (PROG 0. PAS DT0 (0.005*T))
et (PROG ((0.005*T) + DT1) PAS DT1 (0.4*T))
et (PROG ((0.4*T) + DT2) PAS DT2 T);
*-----
* Options grandes def, grands deps : Formulation Lagrangienne réactualisée
*-----
greps = faux; grd = vrai ;
```

```

#####*
* MESO Début du traitement du PB MESO *
#####*
*-----*
* SoLLicitatation mecanique
*-----*
EVO = EVOL MANU (PROG 0. T.) (PROG 0. 1.) ;
* Déplacement max :
Umax = .15;
DEP1 = DEPI CL3 Umax ;
* Evolution du chargement :
CHAR1 = CHAR 'DIMP' DEP1 EVO ;
**-----**
* Resolution iterative du probleme de reference MESO
*-----*
* Définition de la table d'entrée pour la résolution du problème de
référence :
TAB1 = TABL; TAB1.MES_SAUVEGARDES =tabl;
TAB1.'MODELE' = MO_P ;
TAB1.'CARACTERISTIQUES' = MA_P ;
TAB1.'CHARGEMENT' = CHAR1;
TAB1.'BLOCAGES_MECANIQUES' = CLL ;
TAB1.'TEMPS0' = 0. ;
TAB1.'TEMPS_CALCULES' = LL ;
TAB1.'TEMPS_SAUVES' = LL ;
TAB1.'GRANDES_DEFORMATIONS' = greps;
TAB1.'GRANDS_DEPLACEMENTS' = grd;
TAB1.'MES_SAUVEGARDES'. 'DEFIN' = vrai;
TAB1.'MES_SAUVEGARDES'. 'DEFTO' = vrai;
TAB1.'PRECISION' = 1E-06;
TAB1.'PRECISINTER' = 1E-06;
**
*Résolution à proprement parlé
*
PASAPAS TAB1;
* Fin de la résolution du problème de référence de traction jusqu'à rupture
*****
*****
* #####
* Post traitement du calcul de référence ### MESO ###
* #####
*****
*****
* Section transversale et Volume initiaux :
Sz0 = pi * R0 * R0 ; V0 = L0 * Sz0 ;
* Rayon, Longueur, Section transversale et Volume initiaux :
Rt = R0; Lt = L0 ; Szt = Sz0; Vt = V0;
*
* rapport critique d'activation de la zone cohésive, fc=3%
rhoc = (1. - 0.03)/(1. - f0);
* Initialisation des listes pour le stockage des résultats MESO :
tFint = tabl ; lUmes = prog 0.; lWp = PROG 0.;
lFint = PROG 0. ; lu_p = PROG 0.; lPsi = PROG 0.;
llmes = prog l0 ; ldu_p = prog 0.; lWp1st = PROG 0.;
linst = PROG 0. ; ldUez = PROG 0.; ldWp1st = PROG 0.;
lRmes = prog R0 ; ldUer = prog 0.; luemes = prog 0.;
lsig00 = prog 0. ; lrho = prog 1.;
* Initialisation des grandeurs incrémentales
**
Déplacement en bout de poutre meso ; saut de déplacement calculé
Umesf = 0. ; u_p = 0.;

```

```

* Effort interne méso :
tFint. 0 = tab. reactions. 0;
* Déformation totale à la fin du pas ; Déformation totale au début du pas
epsf = tab.deformations. 0; epsf0 = epsf;
* Contrainte à la fin du pas ; Contrainte au début du pas
sigf = tab.contraintes. 0 ;
* Déformation élastique au début du pas ; déformation élastique à la fin du
pas :
epsef0 = epsf; epsef = capi epsf;
* Déformations plastique la fin du pas ;
epsfp = tab.deformations_inelastiques. 0;
* Rapport des densités initiales et courante ;
rhof = 1.;
* Variables_internes à la fin du pas :
varf = tab.variables_internes. 0 ;
* Energie libre meso ; Travail plastique meso ;
Psi = 0. ; Wp = 0.;
* Travail plastique meso apres apparition de l'instabilité
Wp1st = 0.;
* stockage de la configuration initiale dans conf0 ;
conf0 = form;
* Initialisations de la boucle de post-traitement :
nbloc1 = (dime tab1.deplacements) - 1;
j = 0; sor1 = 0 ; a = 0; c = 0;
* Début boucle de post traitement méso :
* ++++++
'REPE' bloc1 nbloc1;
* incrementation du nombre itération :
j=j+1;
* Déplacements, Géométrie MESO:
dep = tab.DEPLACEMENTS. j; Umesd = Umesf; Umesf = extr dep 'UZ' p2;
L = Lt; Sz = Szt; V = Vt; R = Rt;
Lt = L0 + Umesf ; Rt = R0 + (extr dep 'UR' p2);
Szt = pi * Rt * Rt ; Vt = Lt * Szt ;
* Contraintes, déformations totales et plastiques MESO:
sigd = sigf ; epsd = epsf ; epspd = epsfp;
sigf = tab.contraintes.j; epsf = tab.deformations.j;
* Variables_internes :
vard = varf; varf = tab.variables_internes.j;
rhod = rhof; rhof = extr varf VHOT 1 1 1;
* Passage dans la configuration au début du pas :
conf1 = form tab.deplacements.(j-1);
sigfp = (capi (sigf/rhof) mod1 (dep - tab.deplacements. (j- 1)));
* Passage dans la configuration initiale :
form conf0;
* Incrément de contrainte et de déformation totale MESO:
d_sig = sigfp - (sigd/rhod) ; d_eps = (epsf - epsd) ;
* Incrément de déformation élastique (configuration au début du pas) MESO:
d_epse = elas (d_sig) mod1 m_car;
* Incrément de déformation élastique dans la configuration initiale :
d_epse0 = elas (CAPI d_sig mod1 tab1.deplacements.(j-1)) mod1 m_car;
* Incrément de déformation plastique dans la configuration courante :
d_esp = d_eps - d_epse;
* Intégration de la déformation dans le cylindre :
dUez = L * (extr d_epse 'EPZZ' 1 1 1); dU = Umesf - Umesd;
dUp = L * (extr d_esp 'EPZZ' 1 1 1); dUom = dUez + dUp ;
dUer = R * (extr d_epse 'EPRR' 1 1 1);
* Mise à jour de la déformation élastique dans la configuration initiale :
epsef0 = epsef0 + d_epse0;
* Valeur absolue de la Contrainte de traction au début du pas et à la fin
du pas :

```

```

sigdz = EXTR sigd 'SMZZ' 1 1 1; sigfz = EXTR (sigf) 'SMZZ' 1 1 1;
* Grandeurs intégrées :
* *****
tFint.j = tabl.reactions.j ;
dfint = ((extr tFint.(j) p2 FZ )+ (extr tFint.(j) p3 FZ ))
-((extr tFint.(j-1) p2 FZ )+ (extr tFint.(j-1) p3 FZ ));
* Test du critère pour l'activation du modèle cohésif :
tinst = ((extr tabl.variables_interne.j 'VHOT' 1 1 1) <EG rhoc) ;
* Incrément de travail plastique total :
dWp = EXTR ((ENER mod1 sigd d_esp) * V ) SCAL 1 1 1;
* Incrément de travail plastique dans la direction de traction :
dWpz = sigdz * (EXTR d_esp 'EPZZ' 1 1 1) * V ;
* Vérification énergie de déformation :
dPsi = EXTR (0.5 *(ENER mod1 sigf d_epse)* V) SCAL 1 1 1;
Psi = Psi + dPsi;
Wp = Wp + dWp ;
si tinst;
  c = c + 1 ;
  si (c > 0);
    dWplst = dWpz; inst = 1.;
    si (a ega 0); b = j ; a = 1; finsi;
  sinon;
    dWplst = 0.; inst = 0.;
  finsi;
sinon;
  dWplst = 0.; inst = 0. ;
finsi;
Wplst = Wplst + dWplst ;
si (sigdz neg 0);
  du_p = dWplst / (sigdz * Sz) ;
sinon;
  du_p = 0.;
finsi;
u_p = u_p + du_p;
* Mise à jour des listes de stockages
* *****
linst = linst et (PROG inst);      lUmes = lUmes et (prog Umesf);
lPsi = lPsi et (PROG Psi) ;      lWp = lWp et (PROG Wp) ;
lWplst = lWplst et (PROG Wplst);  ldWplst = ldWplst et (PROG dWplst);
lFint = lFint et (PROG fl);
ldu_p = ldu_p et (prog du_p);     lu_p = lu_p et (prog u_p);
llmes = llmes et (prog lt);       lRmes = lRmes et (prog Rt);
ldUez = ldUez et (PROG dUez) ;   ldUer = ldUer et (prog dUer);
luemes = luemes et (prog resu lduez));
lsig00 = lsig00 et (prog sigfz);
lrho = lrho et (prog rhof);
*****
'FIN' bloc1;
*#####*
* MESO Fin du traitement du PB MESO *
*#####*
*#####*
* MACRO Début du traitement du PB MACRO *
*#####*
* Coefficients élastique de Lamé
mu0 = Ey0 / (2 * (1 + nu0)); lambda0 = 2 * mu0 * nu0 / (1 - (2 * nu0));
Etest = 2 * mu0 * (1 + (lambda0 / (2 * (lambda0 + mu0 ))));
* Initialisation des listes pour le stockage des résultats MESO :
lFmac = PROG 0.;   lRmac = prog R0;   ldWpmac = prog 0.;
lWp2 = prog 0.;   lWpmac = prog 0.;   lWptot = prog 0.;
lUmac = prog 0.;   llmac = prog l0;   lPsimac = PROG 0.;

```

```

lR_Wpi = PROG 0.;    lR_dWpi = PROG 0.;    luemac = prog 0.;
lrrhomac = prog 1.;    lsigzc = prog 0.;
* Créations de la table de données ttl pour la résolution du problème MACRO
dans PASAPAS
:
* Table globale ; table à l'itération 0, par de la table qui reste
constante au cours du
calcul
ttl = tabl;          ttl.0 = TABL;          ttl.consta =tabl;
*
ttl. 0 .'DEPLACEMENTS'          = tabl;    ttl. 0 .'CONSTRAINTES' = tabl ;
ttl. 0 .'VARIABLES_INTERNES' = TABL;
ttl. consta .'MES_SAUVEGARDES' = tabl;
ttl. consta .'MODELE' = mod1 ;
ttl. 0 .'CARACTERISTIQUES' = MATE mod1 'YOUN' Ey0 'NU' nu0
'TRAC' CTRAC 'SIG1' sig_1 'D' D_mat 'F' f0 'FC' fc ;
ttl. 0 .'DEPLACEMENTS' . 1      = TABL.'DEPLACEMENTS' . 0 ;
ttl. 0 .'CONSTRAINTES' . 1      = TABL.'CONSTRAINTES' . 0 ;
ttl. 0 .'VARIABLES_INTERNES'. 1 = TABL.'VARIABLES_INTERNES'. 0;
ttl. consta .'GRANDES_DEFORMATIONS' = grepsi;
ttl. consta .'GRANDS_DEPLACEMENTS' = grdi;
ttl. consta .'MES_SAUVEGARDES'.defin = vrai;
ttl. consta .'MES_SAUVEGARDES'.'DEFTO' = vrai;
ttl. consta .'PRECISION' = 1E-06;
ttl. consta .'PRECISINTER' = 1E-06;
ttl. consta .'ECONOMIQUE' = vrai;
ttl. consta .TEMPS0 = 0. ;
* Chargement calculé à partir de la réponse méso :
* *****
* On enlève au déplacement imposé à l'échelle MESO
* le saut de déplacement calculé à l'aide du travail plastique MESO
* développé à partir de la vérification du critère de non unicité de la
* solution :
lUimp = lUmes - lu_p;          Evoimp = EVOL MANU ll lUimp;
dep2 = DEPI CL3 1. ;          char2 = char 'DIMP' DEP2 EVOimp ;
ttl. consta .'BLOCAGES_MECANIQUES' = CLL;
ttl. consta .'CHARGEMENT'          = CHAR2;
* Réinitialisation des variables de géométrie :
Szt = Sz0;    Lt = L0 ;          Vt = V0;
* Initialisation des grandeurs incrémentales :
Wp2 = 0.;          dWpmac = 0.;          Psimac = 0.;          u_e = 0.;
R_Wpi = 0.;          R_dWpi = 0.;
epsf2 = tab .'DEFORMATIONS'. 0; sigf2 = ttl. 0 .contraintes. 1 ;
epsef20 = tab .'DEFORMATIONS'. 0;
rhof2 = 1.;
varf2 = copi tab.variables_internes. 0 ;
* Propriétés élastiques du solide dans le problème macro :
Ey1 = Ey0;          nul = nu0;          ctracl = ctracl;
m_car2 = m_car;    m_car1 = m_car2;
* Initialisations de la boucle de post-traitement :
i=0;          nbou2 = &bloc1 - 1;
* Début boucle de Résolution et de post traitement macro :
* ++++++
'REPE' bloc2 nbou2;
    i=i+1; lti2 = lect (i+1);
* Initialisations :
    ttl.i = tabl;    ttl.i          = copi ttl.consta ;
    ttl.i.'TEMPS_SAUVES' = extr tab.'TEMPS_SAUVES' lti2;
    ttl.i.'TEMPS_CALCULES' = ttl.i.'TEMPS_SAUVES' ;
    ttl.i.'TEMPS_SAUVEGARDES' = ttl.i.'TEMPS_SAUVES' ;
* On réassigne la table des caractéristiques et on met le model a jour :

```

```

repe bindi nlni;
  MO= 'MOT' lni . &bindi;
  tt1.i. mo = tabl; tt1.i.mo . 0 = tt1. (i - 1) . mo . 1;
fin bindi;
tt1. i .'CARACTERISTIQUES' = MATE mod1 'YOUN' Eyl 'NU' nul
'TRAC' CTRAC1 'SIG1' sig_1 'D' D_mat 'F' f0 'FC' fc ;
m_car1 = m_car2 ; m_car2 = tt1.i.'CARACTERISTIQUES';

* Résolution à proprement parlé
* *****
PASAPAS (tt1.i);

  tab2 = tt1.i;
* ~~~~~
* Post-traitement MACRO :
* *****
* Déplacements, Géométrie MACRO:
dep2 = tab2.DEPLACEMENTS. 1; Ufmac = extr dep2 'UZ' p2;
L = Lt; Sz = Szt; V = Vt; R = Rt;
Lt = L0 + Ufmac ; Rt = R0 + (extr dep2 'UR' p2);
Szt = pi * Rt * Rt ; Vt = Lt * Szt ;
u_p = extr lu_p (i + 1) ; du_p = extr ldu_p (i + 1);
* Contraintes MACRO au début et à la fin du pas :
sigd2 = sigf2 ; sigf2 = tab2.contraintes. 1 ;
* Variables internes MACRO:
vard2 = varf2; varf2 = tab2.variables_interne.1;
rhod2 = rhof2; rhof2 = extr varf2 VHOT 1 1 1;
* Contrainte finale MACRO (configuration au début du pas):
sigfp = (capi (sigf2/rhof2) mod1 (dep2 - tab2.deplacements. 0));
* Incréments MACRO :
d_sig2 = (sigfp) - (sigd2/rhod2);
d_eps2 = epsi mod1 (dep2 - tab2.deplacements. 0) ;
d_epse2 = (elas (d_sig2) mod1 tab2.caracteristiques);
* Déformation élastique (Configuration initiale) :
conf1=form; form conf0;
d_epse20 = elas (CAPI d_sig2 mod1 tab2.deplacements. 0)
mod1 tab2.caracteristiques;
form conf1;
d_esp2 = d_eps2 - d_epse2;
epsef20 = epsef20 + d_epse20 ; epsef2 = epsef20*10/lt;
sigd2z = EXTR sigd2 'SMZZ' 1 1 1; sigf2z = EXTR sigf2 'SMZZ' 1 1 1;
* Grandeurs intégrées:
* *****
u_e = u_e + (1*(extr d_epse2 epzz 1 1 1));
Fmac = tab2.reactions. 1;
dWp2 = EXTR ((ENER mod1 sigd2 d_esp2) * V ) SCAL 1 1 1;
dWpz2 = sigd2z *(EXTR d_esp2 'EPZZ' 1 1 1) * V ;
Wp2 = Wp2 + dWp2 ;
si (du_p neg 0.);
  dWp2 = (sigd2z * Sz * du_p);
  R_dWp2 = ((extr ldWp2 (i+1)) - dWp2) /(extr ldWp2 (i+1));
  R_Wp2 = ((extr lWp2 (i+1)) - ((resu ldWp2) + dWp2))
          /(extr lWp2 (i+1)) ;
finsi;
fmac2 = sigf2z * Szt;
dPsimac = EXTR (0.5*((ENER mod1 sigf2 d_epse2))* V) SCAL 1 1 1;
Psimac = Psimac + dPsimac;
* Calcul des nouveaux modules élastiques :
* *****
* (i >EG (b+1)) teste l'activation du modèle de zone cohésive
si (i >EG (b+1));

```

```

    si ((extr lFint (i+1)) EGA 0.); quit bloc2; finsi;
    dFzmes = (((extr lFint (i+1))) - ((extr lFint (i))))/rhod2;
    depse20z = extr d_epse2 epzz 1 1 1;
    depse20r = extr d_epse2 epr 1 1 1;
    mul = 0.5*(dFzmes/Sz) / (depse20z - depse20r);
    lambda1 = -2 * mul *depse20r / (depse20z + (2*depse20r));
    nul = lambda1 / (2 * (lambda1 + mul)); Ey1 = 2* mul *(1 + nul);
finsi;
    leps1 = extr ctrac 'ABSC'; lsig0 = extr ctrac 'ORDO';
* petite astuce numérique pour éviter de ne pas passer un test sur la
* courbe de traction alors qu'on est élastique dans le volume
* (après activation du modèle de zone cohésive)
si (((dime leps1) > 3) et (i >EG (b+1)));
    nleps1 = 2;
    si (Ey1 < 13000.); nleps1 = 4; finsi;
    si (Ey1 < 9000.); nleps1 = 12; finsi;
    repe bleps1 nleps1;
        leps1 = enle leps1 3;
        lsig0 = enle lsig0 3;
    fin bleps1;
    list leps1; list lsig0;
finsi;
* Mise à jour de la courbe de traction
*(lorsqu'on est la, on est élastique dans le volume,
* mais cela évite un problème du a un test sur la pente initiale de la
* courbe de traction):
eps12 = (extr lsig0 2) / Ey1; remp leps1 2 eps12;
ctrac1 = EVOL MANU 'EPS' leps1 'SIGY' lsig0 ;
* Mise à jour des listes de stockages
* *****
lPsimac = lPsimac et (PROG Psimac); lR_dWpi = lR_dWpi et (PROG R_dWpi);
lUmac = lUmac et (prog Ufmac); lFmac = lFmac et (PROG Fmac2) ;
llmac = llmac et (prog lt); lRmac = lRmac et (prog Rt);
ldWpmac = ldWpmac et (prog dWpmac); lR_Wpi = lR_Wpi et (PROG R_Wpi);
luemac = luemac et (prog u_e); lWp2 = lWp2 et (prog Wp2) ;
lWpmac = lWpmac et (prog (resu ldWpmac));
lWptot = lWptot et (prog ((resu ldWpmac) + Wp2));
lsigzc = lsigzc et (prog sigf2z);
lrhomac = lrhomac et (prog rhof2);
confi = form (ttl.i.deplacements. 1 - ttl.i.deplacements . 0);
'FIN' bloc2;
** On teste l'erreur max sur les grandeurs :
*Liste de l'énergie de déformation élastique MESO et MACRO au cours du tps:
lPsi1 = extr lPsi lti; lPsi2 = extr lPsimac lti;
mPsi0 = maxi (abs (lPsi1 et lPsi2)) ;
lRpsi = abs ((lPsi1 - lPsi2)/mPsi0) ;
*Liste d'erreur sur le travail plastique MESO et MACRO au cours du tps:
lRWpi = extr lR_Wpi lti;

*Test de l'erreur, si mauvais, on arrête le calcul :
si ((maxi (lRWpi et lRpsi)) > 5.e-3) ;
    mess 'erreur : on n a pas respecté le critère de conservation de' ;
    mess 'l energie au cours du calcul : loi cohésive non valide' ;
    ERRE 5 ;
finsi ;

** La loi cohésive est obtenue par l'évolution suivante :
evosig1 = evol jaun manu 'u_p' lup1 'sigzc' (extr lsigzc lti);

fin ;

```

Annexe C.

Modélisation de la déchirure ductile sur une plaque préfissurée en traction

Dans cette annexe, une nouvelle application de la méthode couplée modèle de Rousselier-XFEM est présentée. Il s'agit du calcul de déchirure sur une plaque préfissurée à laquelle un chargement de traction est imposé.

1. Introduction

Afin d'appliquer la méthode XFEM à un nouveau cas test, on a choisi de modéliser la déchirure ductile sur une éprouvette plate préfissurée. Nous présentons ici uniquement les résultats numériques de ce cas test, puisque la méthode proposée dans ce mémoire a pour but d'étendre le domaine d'application du domaine de Rousselier. En effet, cette approche doit alors permettre de retrouver les résultats obtenus par l'approche purement volumique de la modélisation de la déchirure ductile, tout en permettant d'étendre son domaine d'applicabilité.

2. Définition du problème, Conditions aux limites

2.1. Introduction

Le problème étudié est celui d'une plaque entaillée en TU52B (pour lequel les caractéristiques et les paramètres sont données dans le chapitre IV) puis préfissurée soumise à un chargement de traction pure. Les dimensions de la plaque sont données sur le maillage utilisé pour le calcul la modélisation standard représenté sur la figure C-1 sur laquelle on trouve également le maillage utilisé pour le calcul par la modélisation couplée. Le calcul est bidimensionnel et repose sur l'hypothèse des déformations planes.

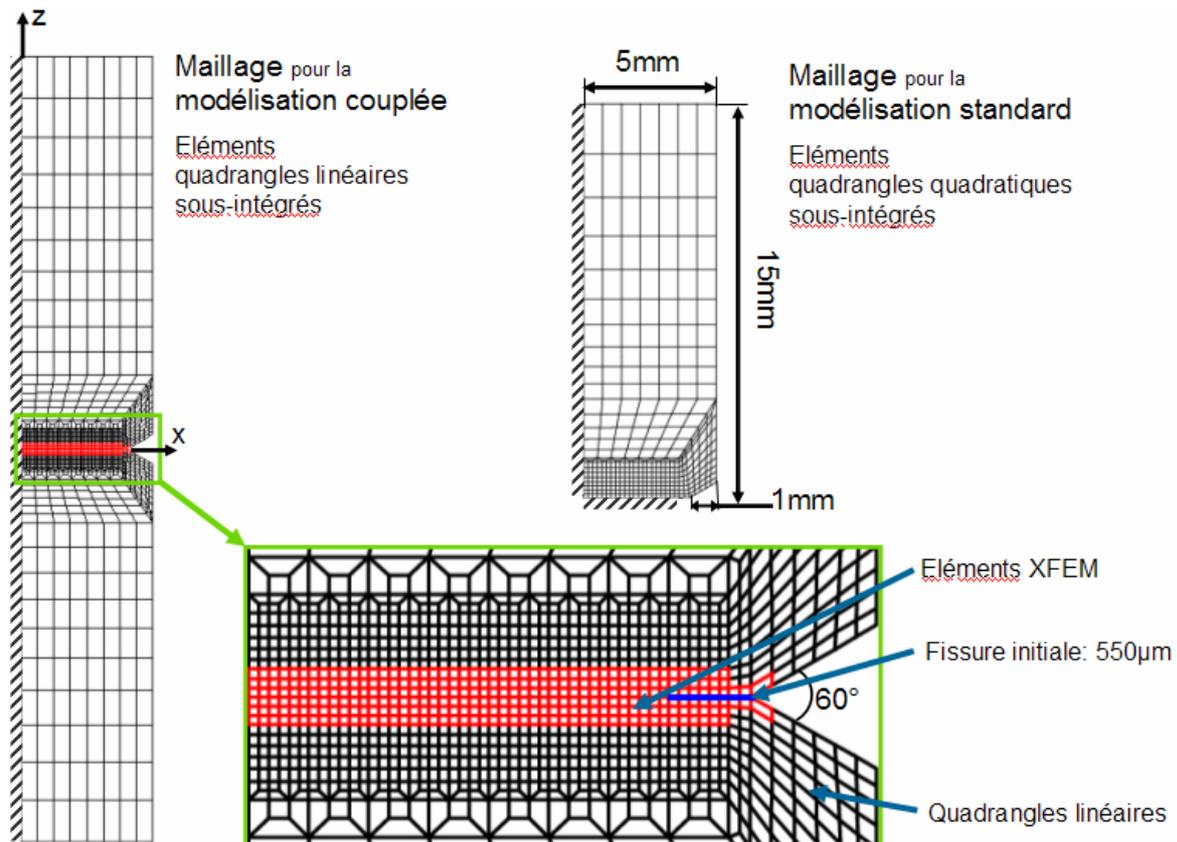


Figure C-1 – Maillage et dimensions de la plaque préfissurée pour le calcul couplé et le calcul standard

2.2. Conditions aux limites pour le calcul standard

Pour le calcul standard, seul un quart de l'éprouvette est représenté. Des conditions de symétrie sont alors imposées le long de l'axe x et le long de l'axe z qui sont définis sur le

maillage pour la modélisation couplée (voir figure C-1). La traction est imposée en déplacement sur la tranche horizontale supérieure de l'éprouvette. Et la fissure initiale est modélisée par un bord libre en avant de l'entaille.

2.3. Conditions aux limites pour le calcul couplé

Pour le calcul par l'approche XFEM, une demi-éprouvette est modélisée. Ainsi il existe une seule condition qui est la condition de symétrie de long de l'axe z. La fissure initiale est modélisée par enrichissement des nœuds de la fissure représentée en bleu roi sur le zoom de la figure C-1. La traction est imposée en déplacement sur les tranches horizontales supérieures et inférieures de la plaque.

2.4. Remarques sur le choix du type d'éléments pour le calcul couplé

Il a été nécessaire d'utiliser des éléments linéaires sous-intégrés (à un point de Gauss) en dehors de la zone de propagation (zone où les éléments XFEM sont introduits dès le début du calcul) dans le cas du calcul couplé et uniquement en dehors de cette zone. En effet, en dehors de la zone de propagation où les déformations plastiques volumiques sont non nulles, l'état de déformation est quasi-incompressible et l'utilisation d'éléments de quadrature standard conduit à l'apparition de verrouillage numérique dans une proportion non-négligeable de l'éprouvette. On note que dans le cas de l'éprouvette CT étudiée dans le chapitre IV de ces travaux, ce phénomène était également présent mais de manière très localisée et négligeable.

3. Résultats

Les résultats de la modélisation de la déchirure sur la plaque entaillée préfissurée sont proches de ceux obtenus pour l'éprouvette CT. La charge limite est atteinte pour une ouverture des lèvres de la fissure (CMOD) importante. L'avancée de la fissure est régulière.

La comparaison des résultats obtenus par les deux approches est de nouveau positive. En effet, l'approche introduisant une vraie fissure permet bien de conserver les résultats obtenus par l'approche standard, que ce soit pour la réponse mécanique (Force-CMOD) ou pour l'avancée de la fissure en fonction de l'ouverture des lèvres de la fissure. Cette approche permet de plus d'étendre la plage de déchirure calculée par le modèle de Rousselier au-delà des 2mm de propagation.

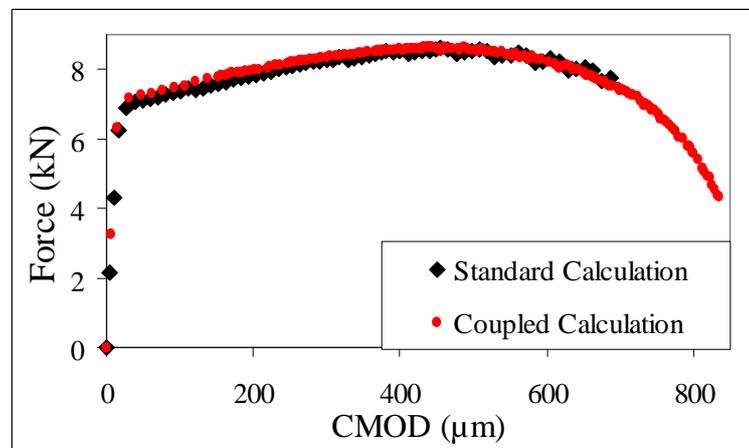


Figure C-2 - Comparaison des courbes Force-CMOD

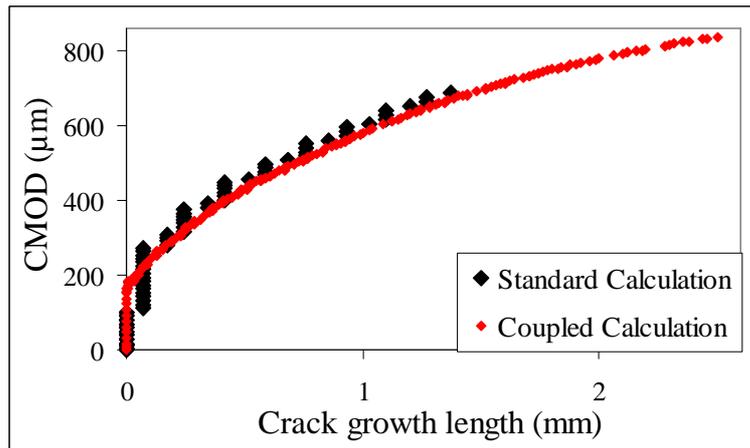


Figure C-3 - Comparaison des courbes d'avancée de fissure (CMOD-Avancée de la fissure)

4. Conclusion

L'application de l'approche couplée *modèle volumique-fissure discrétisée* permet d'étendre la plage d'application du modèle de Rousselier en terme de propagation de fissure en déchirure ductile. Cette exemple a cependant permis de mettre en évidence la nécessité d'utiliser une zone de propagation (c'est-à-dire la zone dans laquelle on introduit des éléments XFEM surintégrés) réduite afin d'éviter l'apparition de verrouillage numérique introduisant une rigidité fictive dans le maillage. Si on utilise cette approche avec précaution, on peut donc étendre efficacement l'étendue de la prédiction de la déchirure ductile.

Références bibliographiques

- [Abu2003] Abu Al-Rub, R.K. & Voyiadjis, G.Z. *On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials*. International Journal of Solids and Structures, 2003, Vol. 40(11), pp. 2611-2643.
- [Aifantis1984] Aifantis, E. C. *On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models*. J. Eng. Mater. Technol., 1984, 106(4), 326--330.
- [Aliabadi2002] Aliabadi, M. *The boundary Element Method: Applications in Solids and Structures*. Wiley (ed.) Chichester, 2002.
- [Anderson1993] Anderson, T., Vanaparthi, N. & Dodds, R. *Predictions of specimen size dependence on fracture toughness for cleavage and ductile tearing*. Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, American Society for Testing and Materials, Philadelphia.1993, pp. 473-491.
- [Areias2005] Areias, P.M.A. & Belytschko, T. *Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, Vol. 63(5), pp. 760-788.
- [Argon1975] Argon, A.S., Im, J. & Safoglu, R. *Cavity Formation From Inclusions In Ductile Fracture*. Metallurgical Transactions, Metallurgical Soc Amer Inst, 1975, Vol. A 6(4), pp. 825-837.
- [Argon1976] Argon, A.S. *Formation Of Cavities From Non-Deformable 2nd-Phase Particles In Low-Temperature Ductile Fracture*. Journal Of Engineering Materials And Technology-Transactions Of The Asme, Asme-Amer Soc Mechanical Eng, 1976, Vol. 98(1), pp. 60-68.
- [Askes2000] Askes, H., Pamin, J. & de Borst, R. *Dispersion analysis and element-free Galerkin solutions of second- and fourth-order gradient-enhanced damage models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, Vol. 49(6), pp. 811-832.
- [ASTM2008] Norme ASTM E1820-08, *Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness*. 2008.
- [Babuska1997] Babuska, I. & Melenk, J.M. *The partition of unity method*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 1997, Vol. 40(4), pp. 727-758.
- [Barenblatt1962] Barenblatt, G.I. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Advances in Applied Mechanics, 1962, Vol. 7, pp. 56-125.
- [Bargellini2007] Bargellini, R.,; Halm, D. & Dragon, A. Discrete approach for modelling quasi-brittle damage: conditions on the set of directions. *Comptes Rendus Mecanique*, 2007, 335(12), 781—786.
- [Bargellini2009] Bargellini, R., Besson, J., Lorentz, E. & Michel-Ponnelle, S. *A non-local finite element based on volumetric strain gradient: Application to ductile fracture*. Proceedings of the 17th International Workshop on Computational Mechanics of Materials - IWCMM-17. Computational Materials Science, 2009, Vol. 45(3), pp. 762-767.
- [Bazant1983] Bazant, Z.P. & Oh, B. *Crack band theory for fracture of concrete*. Materials and Structures, 1983, Vol. 16(3), pp. 155-177.

- [Bazant1985] Bazant, Z.P. *Mechanics of Distributed Cracking*. Applied Mechanics Reviews, 1985, Vol. Vol. 39, pp. 675-705.
- [Bazant1988] Bazant, Z.P. & Pijaudier-Cabot, G. *Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability And Convergence*. Journal Of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme, 1988, Vol. 55(2), pp. 287-293.
- [Bazant2002] Bazant, Z.P. *Concrete fracture models: testing and practice*. Engineering Fracture Mechanics, 2002, Vol. 69(2), pp. 165-205.
- [Begley1972] Begley, J. & Landes, J. *The J integral as a fracture criterion* ASTM STP 514, American Society for Testing and Materials, Philadelphia 1972, pp. 1-20.
- [Belytschko1999] Belytschko, T. & Black, T. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 1999, Vol. 45(5), pp. 601-620
- [Belytschko1994] Belytschko, T., Lu, Y.Y. & Gu, L. *Element-Free Galerkin Methods*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 1994, Vol.37(2), pp. 229-256.
- [Belytschko1995] Belytschko, T., Organ, D. & Krongauz, Y. *A coupled finite element - Element-free Galerkin method*. Computational Mechanics, 1995, Vol. 17(3), pp. 186-195.
- [Beremin1981] Beremin, F. *Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel*. Metallurgical and Materials Transactions A, 1981, Vol. 12(5), pp. 723-731.
- [Besson2003] Besson, J., Steglich, D. & Brocks, W. *Modeling of plane strain ductile rupture*. International Journal of Plasticity, 2003, Vol. 19(10), pp. 1517-1541.
- [Bittencourt1992] Bittencourt, T., Ingraffea, A. & Llorca, J. *Simulation of arbitrary cohesive crack propagation*. Fracture mechanics of concrete Structure, 1992, Vol. 1, pp. 339-350.
- [Borst1992] de Borst, R. & Mühlhaus, H.-B. *Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, Vol. 35(3), pp. 521-539.
- [Borst2002] de Borst, R. & Abellan, M.-A. *A numerical framework for continuum damage: discontinuum transition*. Archives of Mechanics, 2002, Vol. 54, pp. 377-387.
- [Borst2006] de Borst, R., Remmers, J.J. & Needleman, A. *Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models*. Advanced Fracture Mechanics for Life Safety Assessments, Engineering Fracture Mechanics, 2006, Vol. 73(2), pp. 160-177.
- [Bosch2008] van den Bosch, M., Schreurs, P. & Geers, M. *On the development of a 3D cohesive zone element in the presence of large deformations*. Comput Mech, 2008, Vol. unknown(42), pp. 171-180.
- [Brancherie2003] Brancherie, D. *Modèles continus et "discrets" pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2003.

- [Broek1974] Broek, D. *Correlation between stretched zone size and fracture toughness*. Engineering Fracture Mechanics, 1974, Vol. 6(1), pp. 173-174, IN19-IN22, 175-181
- [Bron2004] Bron, F. *Déchirure ductile des tôles minces en alliage d'aluminium 2024 pour application aéronautique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris – ENSMP, 2004.
- [Brunet2001] Brunet, M., Morestin, F. *Experimental and analytical necking studies of anisotropic sheet metals*. Journal of Materials Processing Technology, 2001, Vol. 112(2-3), pp. 214-226
- [Brunet2005] Brunet, M., Morestin, F. & Walter-Leberre, H. *Failure analysis of anisotropic sheet-metals using a non-local plastic damage model*. Journal of Materials Processing Technology, 2005, Vol. 170(1-2), pp. 457-470
- [Bruenig2003] Brüning, M. *An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics* International Journal of Plasticity, 2003, Vol. 19(10), pp. 1679-1713
- [Budiansky1988] Budiansky, B., Amazigo, J.C. & Evans, A.G. *Small-scale Crack Bridging and the Fracture-toughness of Particulate-reinforced Ceramics*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Pergamon-elsevier Science Ltd, 1988, Vol. 36(2), pp. 167-187.
- [Budyn2004] Budyn, E., Zi, G., Moes, N. & Belytschko, T. *A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2004, Vol. 61(10), pp. 1741-1770
- [Cazes2007] Cazes, F. *Rapport de Master*. INSA de Lyon, 2007.
- [Cazes2009] Cazes, F.; Coret, M.; Combescure, A. & Gravouil, A. *A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model*. International Journal of Solids and Structures, 2009, Vol. 46(6), pp. 1476-1490.
- [Cazes2010a] Cazes, F.; Simatos, A.; Coret, M. & Combescure, A. *A cohesive zone model which is energetically equivalent to a gradient-enhanced coupled damage-plasticity model*. European Journal of Mechanics / A Solids (2009), doi: 10.1016/j.euromechsol.2009.11.003.
- [Cazes2010b] Cazes, F. *Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques* INSA de Lyon, Thèse. 2010.
- [Chaboche1978] Chaboche, J.-L. *Description phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, Paris, 1978.
- [Chaboche1984] Chaboche, J. *Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics*, Nuclear Engineering and Design, 1984, **79**(3), 309--319.
- [Chapuliot1998] Chapuliot, S. & Marie, S. *Determination of ductile crack tearing initiation in a cracked branch pipe with a criteria determined on CT specimen*. Mecanique Industrielle Et Materiaux, 1998, Vol. 51(3), pp. 145-149.
- [Chen2005] Chen, C., Kolednik, O., Heerens, J. & Fischer, F. *Three-dimensional modeling of ductile crack growth: Cohesive zone parameters and crack tip*

- triaxiality*. Engineering Fracture Mechanics, 2005, Vol. 72(13), pp. 2072-2094
- [Chessa2003] Chessa, J., Wang, H.W. & Belytschko, T. *On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2003, Vol. 57(7), pp. 1015-1038.
- [Chu1980] Chu, C. & Needleman, A. *Void nucleation effects in biaxially stretched sheets*. Journal of Engineering Materials And Technology, 1980, Vol. 102, pp. 249-256.
- [Comi2002] Comi, C., Mariani, S. & Perego, U. *On the transition from continuum nonlocal damage to quasi-brittle discrete crack models*. GIMC_2002 Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering. 2002.
- [Comi2007a] Comi, C., Mariani, S. & Perego, U. *An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, Vol. 31(2), pp. 213–238.
- [Comi2007b] Comi, C. & Mariani, S. *Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, Vol. 196(41-44), 4013 - 4026.
- [Cordebois1979] Cordebois, J.-P. & Sidoroff, F. *Anisotropie élastique induite par endommagement*. Colloque EUROMECH 115, Grenoble. 1979
- [Cornec2003] Cornec, A., Scheider, I. & Schwalbe, K.-H. *On the practical application of the cohesive model*. Cohesive Models, Engineering Fracture Mechanics, 2003, Vol. 70(14), pp. 1963-1987.
- [Costanzo1995] Costanzo, F. & Allen, D.H. *A continuum thermodynamic analysis of cohesive zone models*. The Edelen Symposium, International Journal of Engineering Science, 1995, Vol. 33(15), pp. 2197-2219.
- [Dhar2008] Dhar, S.; Marie, S. & Chapuliot, S. *Determination of critical fracture energy, G_{fr} , from crack tip stretch*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2008, Vol. 85, 313-321.
- [Dube1996] Dubé, J.-F., Pijaudier-Cabot, G. & La Borderie, C. *Rate Dependent Damage Model for Concrete in Dynamics*. J. Engrg. Mech., ASCE, 1996, Vol. 122(10), pp. 939-947.
- [Dufplot2007] Dufplot, M. *A study of the representation of cracks with level sets*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 70(11), 1261-1302.
- [Dufour2008] Dufour, F., Pijaudier-Cabot, G., Choinska, M. & Huerta, A. *Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models*. Computers And Concrete, 2008, Vol. 5(4), pp. 375-388.
- [Dugdale1960] Dugdale, D.S. *Yielding of steel sheets containing slits*. J. Mech. Phys. Solids, 1960, Vol. 8, pp. 100-104.

- [Eisele1991] Eisele, U. & Roos, E. *Evaluation of different fracture-mechanical J-integral initiation values with regard to their usability in the safety assessment of components*. Nuclear Engineering and Design, 1991, Vol. 130(3), pp. 237-247.
- [Elguedj2006] Elguedj, T., Gravouil, A. & Combescure, A. *Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, Vol. 195(7-8), pp. 501-515.
- [Elguedj2006a] Elguedj, T. *Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : Prise en compte de la plasticité et du contact-frottement*. INSA de Lyon, 2006.
- [Elices2002] Elices, M.; Guinea, G. V.; Gómez, J. & Planas, J. *The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges*. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69(2), 137--163.
- [Engelen2003] Engelen, R.A.B., Geers, M.G.D. & Baaijens, F.P.T. *Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour*. International Journal of Plasticity, 2003, Vol. 19(4), pp. 403-433.
- [Ernst1983] Ernst, H. *Material resistance and instability beyond J-controlled crack growth*. Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 803, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. 1983, Vol. Vol. 1, pp. 181-213.
- [Faleskog1993] Faleskog, J. *An experimental and numerical investigation of ductile crack growth characteristics in surface cracked specimens under combined loading*. International Journal of Fracture, 1993, Vol. 68(2), pp. 99-126.
- [Feld2010] Feld-Payet S., Besson J. & Feyel F. *A continuous-discontinuous description of ductile fracture using adaptative remeshing strategies*. ECCM2010, IV European conference on computational Mechanics, Paris. 2010.
- [Farhat2001] Farhat, C., Harari, I. & Franca, L.P. *The discontinuous enrichment method* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, Vol. 190(48), pp. 6455-6479.
- [Franklin1969] Franklin, A. *Comparison between a quantitative microscope and chemical methods for assessment of non-metallic inclusions*. Journal of the Iron and Steel Institute, 1969, 181-186.
- [Geers1998] Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M. & Peerlings, R.H.J. *Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, Vol. 160(1-2), pp. 133-153.
- [Geers1999] Geers, M.G.D., Borst, R. d., Brekelmans, W.A.M. & Peerlings, R.H.J. *Validation and internal length scale determination for a gradient damage model: application to short glass-fibre-reinforced polypropylene*. International Journal of Solids and Structures, 1999, Vol. 36(17), pp. 2557-2583.
- [Germain1983] Germain, P., Nguyen, Q.S. & Suquet, P. *Continuum Thermodynamics*. Journal Of Applied Mechanics-Transactions Of The Asme, 1983, Vol. 50(4B), pp. 1010-1020.

- [Gologanu1997] Gologanu, M. *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. Université de Paris 06, Paris, FRANCE, 1997.
- [Gravouil2002] Gravouil, A., Moes, N. & Belytschko, T. *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2002, Vol. 53(11), pp. 2569-2586
- [Griffith1920] Griffith, A. *The phenomena of rupture and flow in solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 1920, Vol. CCXXI (A), pp. 163-198.
- [Gurson1977] Gurson, A.L. *Continuum Theory Of Ductile Rupture By Void Nucleation And Growth .1. Yield Criteria And Flow Rules For Porous Ductile Media*. Journal Of Engineering Materials And Technology-Transactions Of The Asme, 1977, Vol. 99(1), pp. 2-15.
- [Gurtin1979] Gurtin, M. *Thermodynamics and the cohesive zone in fracture*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 1979, Vol. 30(6), pp. 991-1003.
- [Halphen1975] Halphen, B. & NGuyen, Q.S. *Generalized Standard Materials*. Journal De Mecanique, Gauthier-Villars, 1975, Vol. 14(1), pp. 39-63.
- [Hancock1976] Hancock, J. & Mackenzie, A. *On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1976, Vol. 24, pp. 147-160.
- [Hausild2003] Hausild P., Berdin C., Bompard P., and Prioul C. *Influence des inclusions sur la rupture d'un acier faiblement allié*. J. Phys. IV France, 2003, Vol. 106, pp. 173-182.
- [Henry1997] Henry, B.S. & Luxmoore, A.R. *The stress triaxiality constraint and the Q-value as a ductile fracture parameter*. Engineering Fracture Mechanics, 1997, Vol. 57(4), pp. 375-390.
- [Hillerborg1976] Hillerborg, A.; Modéer, M. & Petersson, P.-E. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, 1976, 6(6), 773--781.
- [Hughes1980] Hughes, T. *Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non-linear media*. Int. J. Num. Meth. Engng., 1980, 15, pp. 1413-1418.
- [Hutchinson1968] Hutchinson, J.W. *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, Vol. 16(1), pp. 13-31.
- [Irwin1957] Irwin, G. *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Journal of Applied Mechanics, 1957, Vol. 24, pp. 361-364.
- [ISO2002] Norme ISO12135, *Metallic materials - Unified method of test for the determination of quasistatic fracture toughness*, 2002.
- [Jirasek2007] Jirásek, M. *Nonlocal damage mechanics*. Revue Européenne de Génie Civil, 2007, Vol. 11, pp. 993-1021.

- [Ju1989] Ju, J. *On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects*. Int. J. Solids Structures, 1989, Vol. 25(7), pp. 803-833.
- [Kachanov1958] Kachanov, L.M. *Rupture time under creep conditions*. Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskich nauk (translated, 1958, Vol. 8, pp. 26–31).
- [Kanninen1979] Kanninen, M., Rybicki, E., Stonesifer, R., Broek, D., Rosenfield, A., Marshall, C. & Hahn, G. *Elastic Plastic Fracture Mechanics for Two-Dimensional Stable Crack Growth and Instability Problems*. Elastic-Plastic Fracture, ASTM STP 668, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. 1979, pp. 121-150.
- [Khoei2008] Khoei, A., Biabanaki, S. & Anahid, M. *Extended finite element method for three-dimensional large plasticity deformations on arbitrary interfaces*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(9-12), 1100—1114
- [Kolednik1997] Kolednik, O., Shan, G. & Fischer, F. *Geometry and size effect in ductile fracture-FEM studies and theoretical considerations*. Willis, J. (ed.) IUTAM Symposium on Nonlinear Analysis of Fracture. 1997, pp. 43-52.
- [Kolednik1985] Kolednik, O. & Stüwe, H. *The stereophotogrammetric determination of the critical crack tip opening displacement*. Engineering Fracture Mechanics, 1985, Vol. 21(1), pp. 145-155.
- [Ladeveze1992] Ladevèze, P. *A damage computational method for composite structures*. Computers & Structures, 1992, 44(1-2), 79--87.
- [Lautridou1981] Lautridou, J. & Pineau, A. *Crack initiation and stable crack growth resistance in A508 steels in relation to inclusion distribution*. Engineering Fracture Mechanics, 1981, Vol. 15(1-2), pp. 55-71.
- [Leblond1994] Leblond, J., Perrin, G. & Devaux, J. *Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalization*. Journal of Applied Mechanics, 1994, Vol. 61, pp. 236–242.
- [Leblond1994a] Leblond, J.B., Perrin, G. & Suquet, P. *Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids*. International Journal of Plasticity, 1994, Vol. 10(3), pp. 213-235.
- [Legrain2007] Legrain, G., Dufour, F., Huerta, A. & Pijaudier-Cabot, G. *Extraction of crack opening from a nonlocal damage field*. COMPLAS, IX International Conference on Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona. 2007, Vol. 1, pp. 462-465.
- [Legrain2004] Legrain, G., Moës, N. & Verron, E. *Fracture with large deformation using X-FEM*. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004. 2004.
- [Lemaitre1985] Lemaitre, J. *A Continuous Damage Mechanics Model For Ductile Fracture*. Journal Of Engineering Materials And Technology-Transactions Of The Asme, Asme-Amer Soc Mechanical Eng, 1985, Vol. 107(1), pp. 83-89
- [Lemaitre2005] Lemaitre, J. & Desmorat, R. *Engineering Damage Mechanics*. springer (ed.) Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

- [Liebe2001] Liebe, T. & Steinmann, P. *Theory and numerics of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient plasticity*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2001, Vol. 51(12), pp. 1437-1467.
- [Liebe2003] Liebe, T., Menzel, A. & Steinmann, P. *Theory and numerics of geometrically non-linear gradient plasticity*. Damage and failure analysis of materials, International Journal of Engineering Science, 2003, Vol. 41(13-14), pp. 1603-1629.
- [Liu1994] Liu, Y., Murakami, S. & Kanagawa, Y. *Mesh-Dependence And Stress Singularity In Finite-Element Analysis Of Creep Crack-Growth By Continuum Damage Mechanics Approach*. European Journal Of Mechanics A-Solids, 1994, Vol. 13(3), pp. 395-417.
- [Liu1996] Liu, W.K., Chen, Y., Uras, R.A. & Chang, C.T. *Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, Vol. 139, pp. 91-157.
- [Lorentz1999] Lorentz, E. *Lois de comportement à gradients de variables internes : construction, formulation variationnelle et mise en oeuvre numérique*. ENS Cachan, Paris 6, 1999
- [Lorentz2008] Lorentz, E., Besson, J. & Cano, V. *Numerical simulation of ductile fracture with the Rousselier constitutive law*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, Vol. 197(21-24), pp. 1965-1982
- [Lu1994] Lu, Y., Belytschko, T. & Gu, L. *A new implementation of the element free Galerkin method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, Vol. 113(3-4), pp. 397-414
- [Lu1995] Lu, Y.Y., Belytschko, T. & Tabbara, M. *Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, Vol. 126(1-2), pp. 131-153.
- [Mariani2003] Mariani, S. & Perego, U. *Extended finite element method for quasi-brittle fracture*. International Journal For Numerical Methods In Engineering. 2003 , Vol. **58**(1), 103—126.
- [Marie1999] Marie, S. *Approche énergétique de la déchirure ductile*. PhD thesis, Université de Poitiers, ENSMA. 1999.
- [Marie2002] Marie, S. & Chapuliot, S. *2D crack growth simulation with an energetic approach*. Nuclear Engineering and Design, 2002, **212**(1-3), 31--40.
- [Marie2002a] Marie, S. *Determination of the Rousselier model parameters of the TU52B Ferritic Steel*. Technical report, CEA Saclay, 2002.
- [Marie2003] Marie, S. & Kayser, Y. *VOCALIST Project : Numerical analysis of the 4-points bending test on TU52B ferritic steel pipes*. Technical report, CEA Saclay, 2003.
- [Mazars1984] Mazars, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure*. ENSET, 1984

- [Mazars1996] Mazars, J. & Pijaudier-Cabot, G. *From damage to fracture mechanics and conversely: A combined approach*. International Journal of Solids and Structures, 1996, Vol. 33(20-22), pp. 3327-3342.
- [Mediavilla2006] Mediavilla, J., Peerlings, R. & Geers, M. *An integrated continuous-discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes*. Engineering Fracture Mechanics, 2006, Vol. 73(7), pp. 895-916.
- [Mediavilla2006b] Mediavilla, J., Peerlings, R. & Geers, M. *A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations*. Computers & Structures, 2006, Vol. 84(8-9), pp. 604-623.
- [Meftah1998] Meftah, F., Pijaudier-Cabot, G. & Reynouard, J. *A C0 finite element in gradient plasticity for localized failure modes analysis*. Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Barcelona.1998.
- [Moes1999] Moës, N., Dolbow, J. & Belytschko, T. *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 1999, Vol. 46(1), pp. 131-150.
- [Moes2002] Moës, N. & Belytschko, T. *Extended finite element method for cohesive crack growth*. Engineering Fracture Mechanics, 2002, Vol. 69(7), pp. 813-833.
- [Mudry1982] Mudry, F. *Etude de la rupture ductile et de la rupture par clivage d'aciers faiblement alliés*. Université de technologie de Compiègne, 1982.
- [Muhlhaus1991] Mühlhaus, H.-B. & Aifantis, E. *A variational principle for gradient plasticity*. Int. J. Solids Struct., 1991, Vol. 28, pp. 845-858.
- [Needleman1987] Needleman, A. *A Continuum Model For Void Nucleation By Inclusion Debonding*. Journal Of Applied Mechanics -Transactions Of The Asme, 1987, Vol. 54(3), pp. 525-531.
- [Needleman1988] Needleman, A. *Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, Vol. 63, pp. 69-85.
- [Needleman1990] Needleman, A. *An analysis of tensile decohesion along an interface*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, Vol. 38(3), 289--324.
- [Nilsson1998] Nilsson, C. *On nonlocal rate-independent plasticity*. International Journal of Plasticity, 1998, Vol. 14(6), pp. 551-575.
- [Nishioka1980] Nishioka, T. & Atluri, S. *Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies by moving singular elements, Part I: Formulation*. Journal of Applied Mechanics, 1980, Vol. 47, pp. 570-582.
- [Nistor2009] Nistor, I.; Guiton, M. L. E.; Massin, P.; Moës, N. & Géniaut, S. *An X-FEM approach for large sliding contact along discontinuities*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2009, Vol. 78(12), pp. 1407--1435.

- [O'Dowd1991] O'Dowd, N. & Shih, C. *Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter--I. Structure of fields*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1991, Vol. 39(8), pp. 989-1015.
- [Oliver1996] Oliver, J. *Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations .1. Fundamentals*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 1996, Vol. 39(21), pp. 3575-3600.
- [Oliver2002] Oliver, J., Huespe, A.E., Pulido, M.D.G. & Chaves, E. *From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach*. Engineering Fracture Mechanics, Pergamon-Elsevier Science Ltd, 2002, Vol. 69(2), pp. 113-136.
- [Ortiz1988] Ortiz, M. *Microcrack coalescence and macroscopic crack growth initiation in brittle solids*. International Journal of Solids and Structures, 1988, Vol. 24(3), pp. 231-250.
- [Ortiz1999] Ortiz, M. & Pandolfi, A. *Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 1999, Vol. 44(9), pp. 1267-1282.
- [Pamin1994] Pamin, J. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. Delft University of Technology, The Netherlands., 1994.
- [Pamin2003] Pamin, J., Askes, H. & de Borst, R. *Two gradient plasticity theories discretized with the element-free Galerkin method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Vol. 192(20-21), pp. 2377-2403.
- [Pandolfi2002] Pandolfi, A. & Ortiz, M. *An efficient adaptive procedure for three-dimensional fragmentation simulations*. Engineering with Computers, 2002, Vol. 18, pp. 148-159.
- [Paris1997] Paris, F. & Canas, J. *Boundary Element Method : fundamentals and applications*. University, O. (ed.) Oxford, 1997, pp. 392
- [Paris1979] Paris, P., Tada, H., Zahoor, A. & Ernst, H. *The theory of instability of the tearing mode of elastic-plastic crack growth*. ASTM STP 668, American Society for Testing and Materials, Philadelphia.1979, pp. 5-36.
- [Patzak2004] Patzak, B. & Jirasek, M. *Adaptive resolution of localized damage in quasi-brittle materials*. Journal Of Engineering Mechanics-Asce, 2004, Vol. 130(6), pp. 720-732.
- [Peerlings1996] Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M. & de Vree, J.H.P. *Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, Vol. 39(19), pp. 3391-3403.
- [Petryk2002] Petryk, H. & Thermann, K. *Post-critical plastic deformation in incrementally nonlinear materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, Vol. 50(5), pp. 925-954.

- [Pietruszczak1981] Pietruszczak, S. & Mroz, Z. *Finite element analysis of deformation of strain-softening materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, Vol. 17, pp. 327-334.
- [Pijaudier-Cabot1987] Pijaudier-Cabot, G. & Bazant, Z.P. *Nonlocal Damage Theory*. J. Engrg. Mech., ASCE, 1987, Vol. 113(10), pp. 1512-1533.
- [Planas1993] Planas, J., Elices, M. & Guinea, G.V. *Cohesive Cracks Versus Nonlocal Models - Closing The Gap*. International Journal Of Fracture, 1993, Vol. 63(2), pp. 173-187.
- [Portela1992] Portela, A., Aliabadi, M. & Rooke, D. *The dual boundary element method - Effective implementation for crack problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, Vol. 33, pp. 1269-1287.
- [Prabel2007] Prabel, B. *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. INSA de Lyon, 2007.
- [Prirogine1968] Prirogine, I. *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles*. Dunod (ed.)Paris, 1968.
- [Rashid1998] Rashid, M.M. *The arbitrary local mesh replacement method: An alternative to remeshing for crack propagation analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, Vol. 154(1-2), pp. 133-150.
- [RCC-MR2007] Association Française pour les Règles de Conception et de Construction des chaudières Electro-Nucléaires. *RCC-MR 2007, Design and Construction Rules for Mechanical Components of Nuclear Installations*. AFCEN Code, 2007.
- [Remmers2006] Remmers, J.; de Borst, R. & Needleman, A. *The cohesive segment method for the simulation of dynamic fracture*. IUTAM Symposium on Discretization for evolving discontinuities, Lyon, France, 2006.
- [Rethore2005] Réthoré, J. *Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : Application à la propagation dynamique des fissures*. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [Reusch2003] Reusch, F., Svendsen, B. & Klingbeil, D. *Local and non-local Gurson-based ductile damage and failure modelling at large deformation*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2003, Vol. 22(6), pp. 779-792
- [Rice1968] Rice, J. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks*. Journal of Applied Mechanics, 1968, Vol. 35, pp. 379-386.
- [Rice1968a] Rice, J. & Rosengren, G. *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, Vol. 16, pp. 1-12.
- [Rice1969] Rice, J.R. & Tracey, D.M. *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1969, Vol. 17(3), pp. 201-217.

- [Rice1980] Rice, J., Drugan, W. & Sham, T.-L. *Elastic-plastic analysis of growing cracks*. Fracture Mechanics, ASTM STP 700, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. 1980, pp. pp.189-221.
- [Ritchie1973] Ritchie, R.O., Knott, J.F. & Rice, J. *On the relationship between critical tensile stress and fracture stress in mild steels*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1973, Vol. 21, pp. 395-410.
- [Robinson1974] Robinson, J. & Tetelman, A. *Measurement of K_{Ic} on small specimens using critical crack tip opening displacement*. ASTM STP 559, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. 1974, pp.139-158.
- [Rodriguez2000] Rodríguez-Ferran, A. & Huerta, A. *Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models*. International Journal of Solids and Structures, 2000, Vol. 37(48-50), pp. 7501-7528.
- [Rousselier1987] Rousselier, G. *Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture*. Nuclear Engineering and Design, 1987, Vol. 105, pp. 97-111.
- [Rousselier2001] Rousselier, G. *Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, Vol. 49(8), pp. 1727--1746.
- [Roy2001] Roy, Y.A. & Dodds, R.H. *Simulation of ductile crack growth in thin aluminum panels using 3-D surface cohesive elements*. International Journal Of Fracture, Kluwer Academic Publ, 2001, Vol. 110(1), pp. 21-45
- [Roychowdhury2002] Roychowdhury, S., Arun Roy, Y.D. & Dodds, R.H. *Ductile tearing in thin aluminum panels: experiments and analyses using large-displacement, 3-D surface cohesive elements*. Engineering Fracture Mechanics, 2002, Vol. 69(8), pp. 983-1002.
- [Saanouni1988] Saanouni, K. *Sur l'analyse de la fissuration des milieux élastoviscoplastiques par la théorie de l'endommagement continu* Université de technologie de Compiègne, 1988.
- [Samal2008] Samal, M., Seidenfuss, M., Roos, E., Dutta, B. & Kushwaha, H. *Finite element formulation of a new nonlocal damage model* Finite Elements in Analysis and Design, 2008, Vol. 44(6-7), pp. 358-371
- [Samal2009] Samal, M.K., Seidenfuss, M., Roos, E., Dutta, B.K. & Kushwaha, H.S. *A mesh-independent Gurson-Tvergaard-Needleman damage model and its application in simulating ductile fracture behaviour*. Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part C- Journal Of Mechanical Engineering Science, 2009, Vol. 223(2), pp. 283-292.
- [Samaniego2005] Samaniego, E. & Belytschko, T. *Continuum-discontinuum modelling of shear bands*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, Vol. 62(13), 1857—1872.
- [Scheider2003] Scheider, I. & Brocks, W. *Simulation of cup-cone fracture using the cohesive model*. Cohesive Models. Engineering Fracture Mechanics, 2003, Vol. 70(14), pp. 1943-1961.

- [Scheider2006] Scheider, I. & Brocks, W. *Cohesive elements for thin-walled structures*. Computational Materials Science, 2006, Vol. 37(1-2), pp. 101-109.
- [Schwalbe2009] Schwalbe, K.-H., Scheider, I. & Cornec, A. *SIAM CM 09 - The SIAM method for applying cohesive models to damage behaviour of engineering materials and structures*. GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH, 2009.
- [Seabra2010] Seabra, M., César de Sá, J., Andrade, F. & Pires F. *Continuous-discontinuous formulation for ductile fracture*. Int. J. Material Forming, 2010, doi :10.1007/s12289-010-0991-x.
- [Seidenfuss1992] Seidenfuss, M. *Untersuchungen zur Beschreibung des Versagensverhaltens mit Hilfe von Schädigungsmodellen am Beispiel des Werkstoffes 20 MnMoNi 5 5*. PhD thesis, MPA Stuttgart, Germany, 1992.
- [Sethian1999] Sethian, J. *Level sets methods and fast marching methods*. Press, C. U. (ed.) Cambridge UK, 1999.
- [Sharma1991] Sharma, S. & Aravas, N. *Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1991, Vol. 39(8), pp. 1043-1072.
- [Shih1993] Shih, C. & O'Dowd, N.P. andt Kirk, M. *A framework for quantifying crack tip constraint*. Constraint Effects in Fracture, ASTM STP 1171, American Society for Testing and Materials, Philadelphia. 1993.
- [Siegmond1999] Siegmond, T. & Brocks, W. *Prediction of the Work of Separation and Implications to Modeling*. International Journal of Fracture, 1999, Vol. 99(1), pp. 97-116.
- [Siegmond2000] Siegmond, T. & Brocks, W. *A numerical study on the correlation between the work of separation and the dissipation rate in ductile fracture*. Engineering Fracture Mechanics, 2000, Vol. 67(2), pp. 139-154
- [Simo1992] Simo, J.C. & Miehe, C. *Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, Vol. 98, pp. 41-104
- [Simo1993] Simo, J., Oliver, J. & Armero, F. *An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids*. Computational Mechanics, 1993, Vol. 12(5), pp. 277-296
- [Simone2003] Simone, A., Wells, G.N. & Sluys, L.J. *From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Vol. 192(41-42), pp. 4581-4607.
- [Simonsen2004] Simonsen, B.C. & Li, S. *Mesh-free simulation of ductile fracture*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, Vol. 60(8), pp. 1425-1450
- [Stolarska2001] Stolarska, M., Chopp, D.L., Moës, N. & Belytschko, T. *Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, Vol. 51(8), pp. 943-960.

-
- [Stoelken1998] Stölken, J.S. & Evans, A.G. *A microbend test method for measuring the plasticity length scale*. Acta Materialia, 1998, Vol. 46(14), pp. 5109-5115
- [Suffis2003] Suffis, A., Lubrecht, T.A.A. & Combescure, A. *Damage model with delay effect: Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length*. International Journal of Solids and Structures, 2003, Vol. 40(13-14), pp. 3463-3476.
- [Sukumar1997] Sukumar, N., Moran, B., Black, T. & Belytschko, T. *An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics*. Computational Mechanics, 1997, Vol. 20(1), pp. 170-175.
- [Tardif2009] Tardif, N. *Étude du comportement à haute température d'une fissuration instable dans l'acier 16MND5 et application au calcul de la rupture d'un fond de cuve en cas d'accident grave*. Thèse : INSA de Lyon, 2009.
- [Tardif2010] Tardif, N. ; Combescure, A.; Coret, M. & Matheron, P. *Stable crack propagation in steel at 1173 K: Experimental investigation and simulation using 3D cohesive elements in large-displacements*. Engineering Fracture Mechanics 77(5), 776--792, 2010
- [Tourel1999] De Tourel, N. & Charras, T. *Etude du modèle d'endommagement de Rousselier*. Note technique, SEMT/LM2S/RT/99-010, Cea Saclay, 1999.
- [Turner1990] Turner, C. *A Re-Assessment of Ductile Tearing Resistance. Part I: The Geometry Dependence of J-R Curves in Fully Plastic bending. Part II: Energy dissipation rate and associated R-curves on normalised axes*. Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures, ECF 8. ECF, 1990, pp. 933–968.
- [Tvergaard1984] Tvergaard, V. & Needleman, A. *Analysis Of The Cup-Cone Fracture In A Round Tensile Bar*. Acta Metallurgica, 1984, Vol. 32(1), pp. 157-169.
- [Tvergaard1992] Tvergaard, V. & Hutchinson, J.W. *The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, Vol. 40(6), pp. 1377-1397.
- [Tvergaard1994] Tvergaard, V. & Hutchinson, J. *Effect of T-STRESS on mode I crack growth resistance in a ductile solid*. International Journal of Solids and Structures, 1994, Vol. 31(6), pp. 823-833.
- [Tvergaard1995] Tvergaard, V. & Needleman, A. *Effects of nonlocal damage in porous plastic solids*. International Journal of Solids and Structures, 1995, Vol. 32(8-9), pp. 1063-1077.
- [Tvergaard2001] Tvergaard, V. *Crack growth predictions by cohesive zone model for ductile fracture*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, Vol. 49(9), pp. 2191-2207.
- [Unger2007] Unger, J.F., Eckardt, S. & Könke, C. *Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, Vol. 196(41-44), pp. 4087-4100.
- [Ventura2006] Ventura, G. *On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(5), 761--795.
-

- [Wells1961] Wells, A. *Unstable crack propagation in metals : cleavage and fast fracture*. Proceedings of the crack propagation symposium.1961, Vol. Vol. 1(papier N°84).
- [Wells2001] Wells, G.N. & Sluys, L.J. *A new method for modelling cohesive cracks using finite elements*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 2001, Vol. 50(12), pp. 2667-2682.
- [Wells2001a] Wells, G.N. & Sluys, L.J. *Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol. 38(5), pp. 897-913.
- [Wells2002] Wells, G. N., de Borst, R. & Sluys, L. J. *A consistent geometrically non-linear approach for delamination*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54(9), 1333--1355.
- [Williams1957] Williams, M. *On the stress distribution at the base of a stationary crack*. Journal of Applied Mechanics, 1957, Vol. 21, pp. 109-114.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : SIMATOS

DATE de SOUTENANCE : 13/09/2010

(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

Prénoms : Anita, Estelle, Carole

TITRE : Méthode XFEM pour la Modélisation de grandes propagations de fissure en déchirure ductile - Transition d'un Milieu Continu vers une Fissure via un modèle de zone cohésive pour le modèle de Rousselier

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : ISAL 64

Ecole doctorale : MEGA, Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 /

et

bis

CLASSE :

RESUME : Le mécanisme de la déchirure ductile est lié à la nucléation, la croissance et la coalescence de cavités au sein des aciers. C'est pourquoi la modélisation de ce type de rupture doit, en général, être menée à l'aide de critères basés sur des grandeurs locales qui permettent de bien prendre en compte l'histoire de la triaxialité des contraintes et du chargement sur le processus de rupture. Pour ces calculs, le choix de l'approche locale de la mécanique de la rupture semble donc être naturel. Cependant, si ce type de modèle est très bien validé d'un point de vue 'physique', il se heurte à des difficultés de mise en œuvre numérique (présence d'éléments distordus ou de rigidité nulle) difficilement contournables qui limitent souvent la modélisation de la propagation de fissure en déchirure ductile à quelques mm. Pour pouvoir appliquer ces modèles sur des cas industriels, il est donc nécessaire d'étendre leur domaine de stabilité numérique, notamment pour les composants de tuyauterie nucléaire qui sont de grandes dimensions et peuvent tolérer de grandes propagations en déchirure ductile (plusieurs dizaines de mm) avant d'atteindre le chargement à l'instabilité.

L'objectif de cette thèse est donc de développer un outil permettant d'étendre le domaine d'application numérique des modèles d'approche locale pour la rupture ductile aux grandes propagations de fissure en déchirure ductile. L'outil développé est un modèle de zone cohésive (modèle de fissure dont les lèvres sont reliées par une loi de comportement) dont la loi de comportement est identifiée de manière à être cohérente avec le modèle d'approche locale choisi. La cohérence du modèle de zone cohésive avec le modèle d'approche locale est obtenue par une construction incrémentale de la loi cohésive qui permet d'assurer l'équivalence du travail plastique et de la réponse mécanique des deux modèles dans le cas d'une traction uniaxiale, qui est assez proche de la sollicitation observée en déchirure ductile. L'extension du domaine d'application du modèle d'approche locale est permise par son utilisation couplée avec le modèle de zone cohésive cohérent dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue (XFEM). L'utilisation de cette méthode Eléments Finis est un point clé de l'approche proposée dans ce mémoire. Elle permet en effet l'introduction d'une discontinuité mobile, dans notre cas le modèle de zone cohésive, au cours du calcul et ce de manière indépendante du maillage de la structure étudiée. Pour son application à la déchirure ductile, une extension aux problèmes non linéaires géométriques et matériaux a été mise en œuvre. Les problèmes traités dans ce mémoire supposent la préexistence d'une fissure. Ainsi, la zone cohésive est insérée puis étendue suivant la vérification d'un critère local défini en termes de fraction volumique de cavités testé en avant de la pointe de la fissure puis de celle du modèle de zone cohésive. Le niveau du critère est choisi de telle sorte que ce soit le modèle d'approche locale qui modélise la part principale du processus d'endommagement afin de permettre une prise en compte optimale des effets de la triaxialité des contraintes. La méthode proposée a été appliquée au modèle de Rousselier pour la rupture ductile dans le cadre XFEM de Cast3M le programme Eléments Finis pour la mécanique du CEA.

MOTS-CLES : Mécanique non linéaire de la rupture ; Approche locale ; Zone cohésive ; Déchirure ductile ; Propagation de Fissure ; XFEM ; Grandes déformations ; Grands déplacements.

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

Directeur de thèse: Alain Combescure

Président de jury :

Composition du jury :	BOMPARD Philippe	Professeur (Centrale Paris)	Examineur
	CHAPULIOT Stéphane	HDR (AREVA)	Rapporteur
	COMBESCURE Alain	Professeur (INSA Lyon)	Directeur de thèse
	FEYEL Frédéric	HDR (ONERA)	Rapporteur
	GRAVOUIL Anthony	Professeur (INSA Lyon)	Examineur
	HALM Damien	Professeur (ENSMA Poitiers)	Examineur
	MARIE Stéphane	HDR (CEA)	Examineur
	SEIDENFUSS Michael	Docteur (IMWF-MPA Stuttgart)	Examineur