

Thèse

# Modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère

Présentée devant  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Pour obtenir  
**Le grade de docteur**

Formation doctorale : Génie Mécanique

École doctorale : Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique (MEGA)

Par  
**Eric LETZELTER**

Soutenue le 10 février 2011 devant la Commission d'examen

**Jury MM.**

---

	R. BIGOT	Professeur, ENSAM Metz
	A. CHATEAUMINOIS	Directeur de recherche, ESPCI Paris
	L. CHAZEAU	Chargé de recherche, INSA Lyon
	C. GAUTHIER	Professeur, INSA Lyon
	M. GUINGAND	Maître de conférences HDR, INSA Lyon
Rapporteur	M. SARTOR	Professeur, INSA Toulouse
Rapporteur	Y. REMOND	Professeur, Université de Strasbourg
	J-P. de VAUJANY	Maître de conférences, INSA Lyon

**Cette thèse a été préparée au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des  
Structures (LaMCoS)**

UMR 5259 CNRS-INSA de Lyon



## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<u>CHIMIE DE LYON</u> <a href="http://sakura.cpe.fr/ED206">http://sakura.cpe.fr/ED206</a>  M. Jean Marc LANCELIN  Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
<b>E.E.A.</b>	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> <a href="http://www.insa-lyon.fr/eea">http://www.insa-lyon.fr/eea</a> M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
<b>E2M2</b>	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a>  M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
<b>EDISS</b>	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u>  Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier_revel@creatis.uni-lyon1.fr
<b>INFOMATHS</b>	<u>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</u> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a> M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a> - <a href="mailto:alain.mille@liris.cnrs.fr">alain.mille@liris.cnrs.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<u>MATERIAUX DE LYON</u>  M. Jean Marc PELLETIER  Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr">Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u>  M. Jean Louis GUYADER  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:mega@lva.insa-lyon.fr">mega@lva.insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<u>ScSo*</u>  M. OBADIA Lionel  Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



---

## Remerciements

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de mécanique des contacts et des structures de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, sous la direction de Monsieur le Professeur Alain COMBESCURE, que je tiens à remercier pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et fait confiance pour mener à bien ces travaux de recherche.

Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Michèle GUINGAND et Jean-Pierre de VAUJANY, Maîtres de conférences à l'INSA de Lyon, qui m'ont encadré, guidé et soutenu tout au long de ce travail. Je tiens également à remercier Catherine GAUTHIER, Professeur à l'INSA de Lyon et Laurent CHAZEAU, Chargé de recherche au laboratoire MATEIS de l'INSA de Lyon de m'avoir aidé et conseillé lors de cette thèse.

Je suis honoré de l'attention que Messieurs les Professeurs Y. REMOND, de l'Université de Strasbourg, ainsi que Monsieur M. SARTOR, de l'INSA de Toulouse, ont portée à mon travail en tant que rapporteurs et membres du jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur R. BIGOT, de l'ENSAM à Metz et Monsieur le directeur de recherche A. CHATEAUMINOIS, de l'ESPCI à Paris, d'avoir accepté d'être membres du jury.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes, qui de manière directe ou indirecte, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Parmi eux, les membres du LaMCoS et de l'équipe PVMH du MATEIS, pour leur sympathie, leur aide, leur soutien et leur amitié.



---

## Modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère

---

### Résumé

---

Les engrenages en matériau polymère sont de plus en plus utilisés dans des domaines variés, notamment dans des applications automobiles, où il est courant de trouver des engrenements polymère / métal ou polymère / polymère.

Pour bon nombre d'applications, les polymères choisis pour réaliser des engrenages moulés ou taillés sont des semi-cristallins de type polyamides (nylon). Néanmoins, leur caractère viscoélastique introduit une difficulté supplémentaire dans la modélisation. En effet, le comportement viscoélastique des polymères dépend de la température et de la vitesse de rotation. Pour les Polyamides, il dépend également de l'humidité. Par conséquent, la viscoélasticité peut influencer la répartition des charges, l'erreur de transmission sous charge, la raideur d'engrènement...

Dans cette thèse, une méthode numérique originale modélisant le comportement mécanique des engrenages en Polyamide 6,6 est proposée. L'approche développée utilise le modèle rhéologique linéaire de Kelvin généralisé pour simuler le comportement viscoélastique du matériau et prendre en compte la température, la vitesse de rotation et l'humidité. Ensuite ce modèle rhéologique est intégré dans le modèle quasi-statique du partage des charges développé par le LaMCoS. Ce processus de calcul permet d'obtenir les résultats essentiels pour les engrenages (répartition des charges, pressions de contact, erreur de transmission sous charge, raideur d'engrènement) avec un temps de calcul assez court.

Enfin, un banc expérimental avec des engrenages en Polyamide 6,6 est développé et fabriqué dans le cadre de cette thèse. Il permet d'obtenir deux résultats : la température de l'engrenage pendant son fonctionnement et l'erreur de transmission sous charge. Cette dernière permet de valider le modèle quasi-statique du partage des charges.

**Mots-Clés:** engrenages, Polyamide 6,6, viscoélasticité, partage des charges

---

## Mechanical behaviour model in the case of polymer cylindrical gears

### Abstract

---

Polymer gears are increasingly used, especially in automotive applications, where it is common to find meshing polymer / metal or polymer / polymer.

For many applications, the polymer selected to produce gears by cutting or by injection moulding is polyamide (nylon) which has semi-crystalline structure. However, the viscoelastic character of Polyamide material introduces an additional difficulty in modeling. Indeed, the viscoelastic behavior of polymers is temperature and rotation speed dependent. In addition for polyamides, it is also humidity dependent. Therefore, viscoelasticity influences the load sharing, the load transmission error, the meshing stiffness...

In this thesis, an original numerical method modeling the mechanical behavior of polyamide 6.6 gears is proposed. This approach uses the linear rheological model of generalized Kelvin to simulate the viscoelastic behavior of the material and take into account the temperature, speed and humidity. The rheological model is integrated into the quasi-static load sharing model developed by the LaMCoS. This process provides the essential results for gears (load sharing, contact pressure, load transmission error, meshing stiffness) with short computation time.

Finally, an experimental test bench with Polyamide 6.6 gears is developed. It provides two experimental results: the temperature of the gear during operation and the load transmission error which validates the quasi-static load sharing model.

**Key words:** gears, Polyamide 6.6, viscoelasticity, load sharing

---

# Table des matières

<b>Introduction générale .....</b>	<b>14</b>
<b>Chapitre 1 : Etude bibliographique sur l'étude du comportement mécanique des engrenages en polymère .....</b>	<b>17</b>
Introduction.....	17
1.2 Le Polyamide 6,6.....	17
1.2.1 Présentation et définition de la micro-structure du Polyamide 6,6.....	18
1.2.1.1 Organisation cristalline.....	18
1.2.1.2 Transition vitreuse et dépendance en temps-température.....	19
1.2.2 Propriétés viscoélastiques .....	19
1.2.3 Comportement mécanique linéaire du Polyamide 6,6.....	20
1.2.4 L'équivalence temps-température.....	20
1.2.5 Dépendance de l'humidité .....	22
1.2.6 Modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6 .....	22
1.2.6.1 Les éléments de base des modèles rhéologiques .....	22
1.2.6.2 Les modèles élémentaires.....	23
1.2.6.3 Les modèles généralisés .....	24
1.2.7 Conclusion .....	25
1.3 Les engrenages en Polyamide 6,6.....	25
1.3.1 Présentation des engrenages en polymère et premiers travaux de recherche .....	25
1.3.2 Problèmes thermiques .....	26
1.3.2.1 Sources d'échauffement .....	27
1.3.2.1.1 Echauffement dû au piégeage de l'air entre les dents .....	27
1.3.2.1.2 Echauffement dû au frottement.....	28
1.3.2.1.3 Echauffement viscoélastique interne.....	31
1.3.2.2 Mesure de la température des engrenages en Polyamide 6,6.....	32
1.3.2.3 Conclusion.....	36
1.3.3 Mesure du coefficient de frottement .....	36
1.3.4 Mesure des variations de la géométrie en fonction de l'humidité.....	41
1.3.5 Mesure de l'erreur de transmission .....	42
1.3.6 Conclusion .....	43
1.4 Modélisation du comportement mécanique des engrenages.....	44
1.4.1 Méthode déterminant le déplacement d'une dent d'un engrenage en Polyamide 6,6	45
1.4.2 Méthode basée sur des normes (VDI 2545).....	46
1.4.2.1 Rupture en pied de dent.....	46
1.4.2.2 Sécurité des flancs (pression superficielle).....	47
1.4.2.3 Prise en compte de la déformation par la méthode VDI 2545.....	48
1.4.2.4 Conclusion.....	49
1.4.3 Méthode éléments finis globale « MARC ».....	49
1.4.4 Méthode de modélisation du partage des charges.....	52
1.4.4.1 Equations de compatibilité des déplacements .....	53
1.4.4.2 Coefficients d'influence de surface .....	54
1.4.4.3 Coefficients d'influence de flexion .....	56
1.4.4.4 Résolution.....	57
1.4.4.5 Conclusion.....	58
1.5 Conclusion .....	59
<b>Chapitre 2 : Choix de la loi de comportement et identification des paramètres du Polyamide 6,6 .....</b>	<b>60</b>

Introduction.....	60
2.2 Modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6 .....	61
2.2.1 Choix du modèle rhéologique .....	61
2.2.2 Calcul du déplacement viscoélastique du modèle de Kelvin généralisé .....	61
2.3 Essais de caractérisation .....	64
2.3.1 Mesure temporelle : Fluage.....	64
2.3.1.1 Dispositif de mesure de l'essai de fluage .....	64
2.3.1.2 Essais .....	65
2.3.1.3 Résultats et analyse.....	66
2.3.1.3.1 Domaine de linéarité à sec et à température ambiante .....	66
2.3.1.3.2 Domaine de linéarité à sec et à 80°C.....	67
2.3.2 Mesure fréquentielle : DMA (Dynamic mechanical analysis).....	67
2.3.2.1 Dispositif de mesure de l'essai de DMA .....	67
2.3.2.2 Essais .....	70
2.3.2.3 Résultats .....	70
2.3.2.3.1 Influence de la température .....	70
2.3.2.3.2 Influence de l'humidité .....	73
2.4 Modélisation viscoélastique.....	74
2.5 Estimation du déplacement et de la relaxation d'une dent d'un engrenage en Polyamide 6,6 .....	79
2.6 Conclusion .....	83
<b>Chapitre 3 : Modélisation du comportement mécanique des engrenages en Polyamide 6,6..</b>	<b>85</b>
Introduction.....	85
3.2 Simulation et résolution du partage des charges .....	85
3.2.1 Présentation.....	85
3.2.2 Définition du maillage et résolution de la répartition des charges .....	87
3.2.3 Les équations de compatibilité des déplacements.....	90
3.2.4 La méthode des coefficients d'influence.....	92
3.2.4.1 Coefficients d'influence de contact .....	93
3.2.4.2 Coefficients d'influence de volume.....	94
3.2.4.3 Conclusion.....	96
3.2.5 Déplacement viscoélastique d'un nœud du maillage .....	97
3.2.6 Résolution du partage des charges .....	98
3.2.6.1 Mise en équations .....	98
3.2.6.2 Algorithme de résolution .....	99
3.2.6.3 Hypothèse sur la taille de contact .....	101
3.2.7 Erreur de transmission sous charge et raideur d'engrènement.....	103
3.2.8 Prise en compte de l'échauffement dans le modèle de partage des charges et influence sur le comportement mécanique .....	103
3.2.9 Simulation des contraintes en pied de dent .....	106
3.3 Conclusion .....	107
<b>Chapitre 4 : Simulations, essais et validations expérimentales .....</b>	<b>109</b>
Introduction.....	109
4.2 Présentation du logiciel « PRINCE POLYMERE » .....	109
4.2.1 Profil de l'engrenage .....	111
4.2.2 Résultats à vide .....	113
4.2.3 Résultats sous charge pour un engrenage en Polyamide 6,6.....	115
4.2.4 Calcul des contraintes en pied de dent .....	118
4.3 Comparaison du modèle de partage des charges avec la méthode VDI 2545.....	120
4.3.1 Aspect matériau .....	121
4.3.2 Pression sur les flancs .....	121
4.3.3 Contrainte en pied de dent .....	124

4.3.4	Déplacement en tête de denture .....	125
4.3.4	Conclusion .....	126
4.4	Mesures expérimentales.....	127
4.4.1	Mesure du coefficient de frottement .....	127
4.4.1.1	Présentation .....	127
4.4.1.2	Principe de la mesure.....	128
4.4.1.3	Géométrie des échantillons et équivalence avec la géométrie des engrenages 129	
4.4.1.4	Résultats .....	129
4.4.2	Mesure expérimentale avec le banc engrenages en Polyamide 6,6.....	130
4.4.2.1	Présentation du banc.....	130
4.4.2.2	Mesure du comportement thermique des engrenages en Polyamide 6,6 .....	133
4.4.2.2.1	Dispositif expérimental de mesure .....	134
4.4.2.2.2	Programme des essais .....	136
4.4.2.2.3	Mesure de l'émissivité du Polyamide 6,6 à température ambiante .....	136
4.4.2.2.4	Résultats des mesures thermiques sur un engrenage en Polyamide 6,6 ..	137
4.4.2.3	Mesure de l'erreur de transmission .....	144
4.4.2.3.1	Présentation.....	144
4.4.2.3.2	Dispositif de mesure.....	145
4.4.2.3.3	Traitement numérique du signal mesuré .....	147
4.4.2.3.4	Programme des essais .....	149
4.4.2.3.5	Simulation du partage des charges et de l'erreur de transmission.....	150
4.4.2.3.6	Recalage et validation du modèle de partage des charges.....	156
4.5	Conclusion .....	159
<b>Conclusion générale.....</b>		<b>161</b>
<b>ANNEXES .....</b>		<b>165</b>
Annexe 1 : Calcul de la complaisance de conservation à partir du modèle biparabolique.....		166
Annexes 2 : Détermination des paramètres du modèle biparabolique .....		168

---

# Modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère

# Introduction générale

Actuellement, les engrenages en polymère s'imposent comme des solutions optimales pour remplacer les engrenages en acier dans différents domaines, de part leurs nombreux avantages mécaniques, physico-chimiques et pratiques :

- Utilisation sans lubrifiant.
- Fonctionnement silencieux.
- Temps de fabrication réduit.
- Poids réduit.
- Résistance à la corrosion.

Un des matériaux utilisés pour fabriquer des engrenages en polymère moulés ou taillés est le Polyamide 6,6. Il est employé dans de nombreux domaines :

- Automobile.
- Electroménager.
- Electrotechnique.
- Mécanique.

La réduction des coûts de développement, conception et fabrication est l'un des principaux objectifs des industriels. Grâce à l'amélioration de la performance des moyens de calculs, les modèles numériques sont rapides, robustes et ils peuvent produire des résultats précis. Depuis de nombreuses années, le laboratoire LaMCoS s'est investi dans le développement de modèles numériques pour les engrenages. Ces modèles quasi-statiques, basés sur le même processus, permettent de prédire des résultats essentiels pour la conception d'engrenages :

- Partage des charges.
- Pressions de contact.
- Contraintes en pied de dent.
- Raideur d'engrènement.
- Erreur de transmission sous charge.

Le Laboratoire MATEIS s'impose depuis de nombreuses années dans son expertise sur les polymères.

Ce travail de thèse s'inscrit donc au carrefour de deux compétences : les engrenages et les matériaux polymères, avec des collaborations entre le Laboratoire LaMCoS et MATEIS.

L'étude des engrenages en polymère présente une difficulté supplémentaire par rapport à un métal, car le matériau présente un comportement viscoélastique, qui dépend des temps de chargement, de l'historique du déplacement et de la

température. De plus, dans le cas particulier des polyamides, l'humidité est également un facteur important.

Pour modéliser le comportement mécanique des engrenages en polymère, des modèles basés sur des normes sont utilisés, comme la méthode VDI 2545, qui est une adaptation de la norme ISO 6336, ou d'autres qui utilisent des calculs par éléments finis. Mais en dépit de leur qualité, la viscoélasticité n'est pas correctement prise en compte dans ces modèles.

De plus, ces modèles ne permettent pas le calcul simultané du partage des charges, des pressions de contact, de l'erreur de transmission, de la raideur d'engrènement ou encore des contraintes en pied de dent, résultats pourtant de plus en plus nécessaires dans la conception des engrenages..

L'objectif principal de cette thèse est donc de mettre au point une simulation quasi-statique de partage des charges pour un engrenage en Polyamide 6,6, pour fournir l'ensemble des résultats cités précédemment

Ce modèle est une adaptation du processus de calcul développé au cours de ces dernières années par le laboratoire LaMCoS. L'approche consiste à résoudre les équations de compatibilité des déplacements avec la méthode des coefficients d'influence qui permet de prendre en compte, de manière séparée, les effets de volume et de surface. Le processus de calcul est divisé en trois étapes :

- Calcul de la géométrie initiale issue des conditions de fabrication. A partir de cette définition, un modèle CAO reproduit automatiquement la géométrie de l'engrenage.
- Etude de la cinématique à vide qui correspond au fonctionnement de l'engrenage sans aucune charge appliquée. Elle permet de définir les écarts à vide et les zones potentielles de contact.
- Etude du comportement sous charge qui correspond au calcul du partage des charges entre les différentes dents simultanément en contact.

Cette démarche a l'avantage d'être efficace et rapide en temps de calcul. Elle a été validée pour plusieurs types d'engrenages en acier : cylindriques hélicoïdaux extérieurs et intérieurs, pignon-crémaillères, faces et spiro-coniques. Récemment, elle a été adaptée pour un engrenage roue en Polyamide 6,6 et vis en acier.

Dans cette thèse, les deux premières étapes de ce processus ne sont pas détaillées, car la nature du matériau ne nécessite pas de modification de la méthode.

Par contre, pour intégrer le caractère viscoélastique du matériau, la troisième étape est modifiée. Pour cela, un modèle rhéologique linéaire est utilisé pour simuler le comportement mécanique du Polyamide 6,6. Le modèle choisi est celui de Kelvin généralisé qui a l'avantage de faciliter la prise en compte du large spectre de temps de relaxation et de la dépendance du temps, de la température et de l'humidité.

Le mémoire de thèse est divisé en quatre chapitres :

- Le chapitre 1 présente le comportement mécanique du Polyamide 6,6 et les méthodes proposées dans la littérature pour simuler l'engrènement sous charge des engrenages.
- Le chapitre 2 détaille le choix de la loi de comportement nécessaire au calcul du partage des charge et l'identification des paramètres de la loi dans le cas du Polyamide 6,6. Une caractérisation expérimentale est ensuite réalisée avec des essais de fluage et de spectrométrie mécanique effectués au Laboratoire MATEIS afin d'en identifier les paramètres : complaisance élastique et spectre de temps de relaxation en fonction de la température, de la fréquence de sollicitation et du taux d'humidité.
- Le chapitre 3 présente la modification de la troisième étape du processus de calcul développé par le LaMCoS: intégration de la loi de comportement viscoélastique, adaptation du maillage de résolution du partage des charges, utilisation des coefficients d'influence géométriques, modification de l'algorithme de résolution et prise en compte de la température d'échauffement. En dernier, le calcul des contraintes en pied de dent est présenté.
- Le chapitre 4 permet dans un premier temps de présenter l'exploitation scientifique du modèle quasi-statique de partage des charges avec le logiciel associé « PRINCE POLYMER ». Dans un deuxième temps, le modèle est comparé à une autre méthode de dimensionnement des engrenages en polymère : la VDI 2545. Cette comparaison permet d'évaluer l'apport scientifique du modèle quasi-statique de partage des charges. Une dernière partie décrit les expériences réalisées sur un banc d'essai, qui a été développé dans le cadre de cette thèse au Laboratoire LAMCOS. Deux grandeurs ont été mesurées : la température lors du fonctionnement de l'engrenage et l'erreur de transmission sous charge. Cette dernière mesure est utilisée pour valider le modèle de partage des charges dans son ensemble. En effet, l'erreur de transmission sous charge englobe les différentes déformations (flexion, contact) de l'engrenage ainsi que plusieurs défauts du à la fabrication et aux erreurs de montage.

# Chapitre 1 : Etude bibliographique sur l'étude du comportement mécanique des engrenages en polymère

---

## Introduction

L'objectif de cette synthèse bibliographique est de faire un état de l'art des travaux sur les engrenages en polymère.

Dans une première partie, le matériau polymère utilisé dans cette étude est présenté, en particulier du point de vue de son comportement mécanique.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons aux engrenages en polymère. Plusieurs aspects les concernant seront abordés : les problèmes thermiques (modélisation et mesures expérimentales), le coefficient de frottement du Polyamide 6,6, les variations de la géométrie de l'engrenage en fonction de l'humidité et l'erreur de transmission.

Enfin dans une troisième partie, les différentes méthodes proposées pour modéliser le comportement sous charge des engrenages en polymère sont abordées. La méthode de calcul développée par le LaMCoS pour modéliser de façon quasi-statique le comportement mécanique sous charge des engrenages est partiellement détaillée.

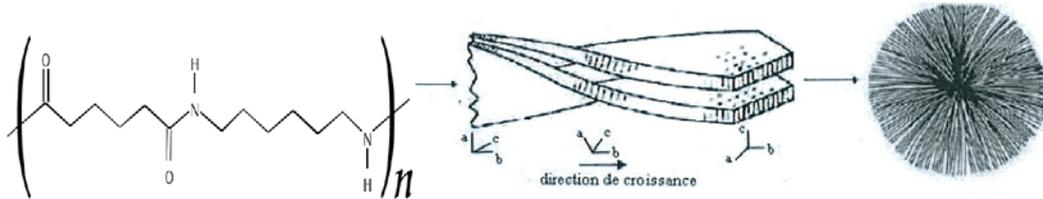
---

## 1.2 Le Polyamide 6,6

Dans cette thèse, le matériau utilisé est le Polyamide 6,6. C'est l'un des polymères les plus utilisés pour produire des engrenages moulés ou taillés. En effet, il présente un bon compromis entre caractéristiques mécaniques et chimiques, en particulier une bonne résistance à la fatigue dynamique et à l'usure, alliée à une bonne résistance aux produits chimiques.

## 1.2.1 Présentation et définition de la micro-structure du Polyamide 6,6

Le polyamide 6,6 est obtenu par polycondensation de l'acide adipique et de l'hexaméthylène diamine, et sa formule est la suivante (cf. figure 1.1) [1].



**Figure 1.1** : Formulation chimique et différentes échelles d'organisation du Polyamide 6,6 : de la conformation des chaînes macromoléculaires, aux lamelles cristallines, à la superstructure sphérolitique [1]

L'unité de répétition du Polyamide 6,6 présente des groupements  $-\text{CH}_2-$  flexibles et des groupements polaires capables de former des liaisons hydrogènes, de plus l'arrangement spatial des monomères est régulier. Le Polyamide 6,6 est donc un excellent candidat pour la cristallisation. A température ambiante, le Polyamide 6,6 se trouve sous sa forme semi-cristalline, la température de fusion des cristallites étant de  $255^\circ\text{C}$ .

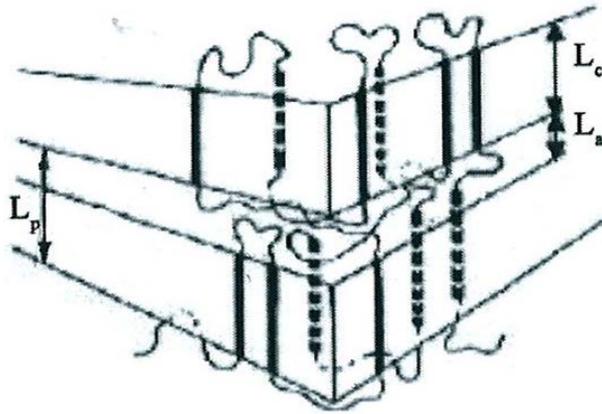
### 1.2.1.1 Organisation cristalline

Lors du phénomène de cristallisation, les chaînes se replient pour former des lamelles cristallines. Entre ces lamelles nous trouvons des chaînes de polymère qui n'ont pas trouvé leur place dans l'organisation cristalline : il en résulte une alternance entre phase amorphe et phase cristalline.

La longueur des chaînes des polymères est très grande devant l'épaisseur des lamelles, une même macromolécule peut appartenir à la phase amorphe et à des lamelles cristallines différentes. De telles molécules sont nommées « molécules lien » (tie molecules en anglais). En outre, les chaînes qui constituent la phase amorphe sont enchevêtrées. Les molécules liens et les enchevêtrements participent à la cohésion du matériau.

A une échelle supérieure, les lamelles s'organisent dans toutes les directions, sous forme de structures isotropes appelées sphérolites (cf. figure 1.1).

Pour caractériser la morphologie d'un matériau semi-cristallin, nous devons connaître le taux de cristallinité  $\chi_c$ , la taille des lamelles (longue période  $L_p$ , épaisseur des lamelles cristallines  $L_c$  et amorphes  $L_a$  (cf. figure 1.2)), le diamètre des sphérolites...



**Figure 1.2 :** Modèle d'arrangement à chaînes repliées [1]

### 1.2.1.2 Transition vitreuse et dépendance en temps-température

La transition vitreuse est un phénomène caractéristique des polymères amorphes (ou de la phase amorphe d'un polymère semi-cristallin). La température influence la mobilité des chaînes. Aux faibles températures, la mobilité est restreinte à des courts segments de macromolécules, et le matériau est rigide : c'est l'état vitreux. Aux températures élevées, les chaînes sont très mobiles et peuvent glisser les unes par rapport aux autres. Le matériau se comporte alors comme un fluide visqueux. Lorsque les chaînes sont suffisamment longues, la présence d'enchevêtrement gêne l'écoulement des chaînes, nous sommes alors à l'état caoutchoutique. La température qui sépare ces deux états est appelée température de transition vitreuse (notée  $T_g$ ). Elle est d'environ  $60^\circ\text{C}$  pour un Polyamide 6,6.

## 1.2.2 Propriétés viscoélastiques

Le comportement viscoélastique est intermédiaire entre le comportement du solide élastique défini par la loi de Hooke et le fluide newtonien défini par la viscosité. Pour les polymères, le module élastique  $G(t)$  ou la complaisance élastique  $J(t)$  (laquelle représente l'inverse du module élastique) deviennent fonction du temps. Tant que nous restons dans le domaine linéaire, le module élastique ou la complaisance ne dépendent pas du niveau de contrainte appliqué mais uniquement du temps d'application de la contrainte (1.1) [2].

$$\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) = J(t) \cdot \sigma_1(t) + J(t) \cdot \sigma_2(t) \quad (1.1)$$

### 1.2.3 Comportement mécanique linéaire du Polyamide 6,6

---

L'étude des polymères aux faibles contraintes peut être réalisée par deux types d'essais, les essais dynamiques qui permettent la mesure du module ou de la complaisance complexe  $J(i\omega)$ , et les essais « statiques », tel le fluage pendant lequel la contrainte est constante  $J(t)$ . Le fluage et la spectrométrie mécanique conduisent à des informations en principe équivalentes, puisque la complaisance complexe  $J(i\omega)$  mesurée en contrainte périodique est la transformée de Fourier de la complaisance  $J(t)$ , réponse du matériau au stimulus échelon de contrainte [3].

Grâce à ces essais, nous pouvons mettre en évidence plusieurs processus relaxationnels. La figure 1.3 montre le comportement typique d'un Polyamide 6,6 étudié en torsion dynamique, en fonction de la température  $T$ , à une fréquence constante. Trois zones sont observées. Dans la première zone A, le polymère est à l'état vitreux, hors équilibre ; il a un module élevé. Dans cette zone peuvent avoir lieu une ou plusieurs relaxations secondaires ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,...). Dans la zone B, nous observons la relaxation principale ou relaxation  $\alpha$ . Le module chute d'une décade et la dissipation d'énergie (mesurée par  $\tan\phi$ ) atteint un maximum. La relaxation  $\alpha$  est associée à la transition vitreuse. La zone C correspond au plateau caoutchoutique caractérisé par un module sensiblement constant. Aux températures plus élevées, le polymère s'écoule.

### 1.2.4 L'équivalence temps-température

---

Il est en pratique difficile de caractériser complètement les relaxations des matériaux en condition isotherme. En régime dynamique, par exemple, cela nécessiterait souvent des mesures à des fréquences extrêmement faibles et donc à des temps d'expériences beaucoup trop longs. Pour remédier à ces difficultés, il est souvent fait appel au principe d'équivalence temps-température. En effet, les processus relaxationnels sont thermiquement activés ; l'augmentation de la température permet leur observation à des temps plus courts lors d'essais statiques, ou à des fréquences plus élevées lors d'essais dynamiques. La méthode consiste donc à faire glisser des segments de courbes obtenues à plusieurs températures le long de l'axe des fréquences ou de l'axe des temps (cf. figures 1.4 (a) et 1.4 (b)). Le tracé des facteurs de décalage, proportionnels aux temps de relaxation, en fonction de l'inverse de la température, offre alors un outil très efficace de caractérisation des relaxations (cf figure 1.4 (c)). L'utilisation du principe d'équivalence temps température suppose toutefois que le matériau en condition isotherme n'évolue pas au cours du temps [3].

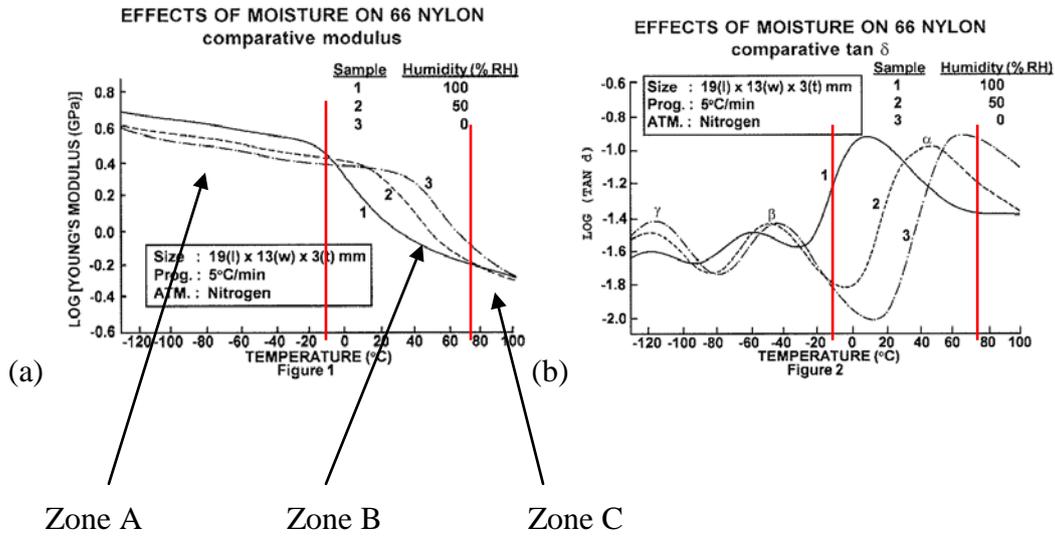


Figure 1.3 : Mesure DMA du module d'Young (a) et du facteur de perte (b) d'un Polyamide 6,6 en fonction de la température à différents niveaux d'humidité [4]

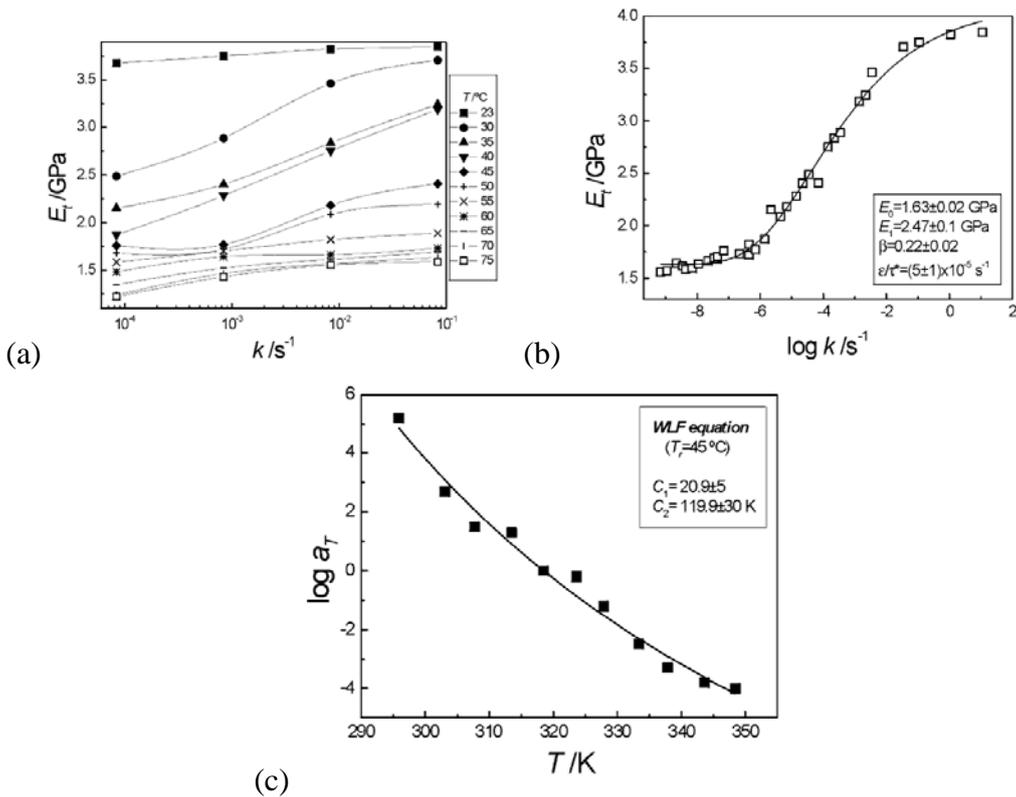


Figure 1.4 : Principe de construction des courbes maîtresses (a) Courbes isothermes expérimentales de  $E'$  (module de conservation), (b) Courbe maîtresse par décalage des courbes isothermes expérimentales, (c) Evolution des coefficients de translation en fonction de la température [5]

## 1.2.5 Dépendance de l'humidité

---

Certains polymères sont également sensibles à la variation de l'humidité, c'est le cas des polyamides du fait de la présence de groupements polaires dans leur formulation chimique. D'après [4], [6], [7], et [8], l'humidité joue un rôle de plastifiant dans la phase amorphe du matériau qui entraîne une baisse de la température de transition vitreuse. En outre, elle peut éventuellement conduire à une augmentation de la cristallinité et donc à une modification de la microstructure semi-cristalline. L'influence du taux d'humidité dans le cas du Polyamide 6,6 est présentée sur la figure 1.3. Nous constatons que le phénomène de plastification est tel que la relaxation principale peut se décaler jusqu'à la température ambiante.

## 1.2.6 Modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6

---

Pour rendre compte du comportement mécanique linéaire du Polyamide 6,6, un modèle rhéologique est utilisé dans cette étude. Il définit une loi de comportement qui relie déplacement et contrainte. Dans un premier temps les éléments de base des modèles rhéologiques sont présentés. Dans un second temps, les modèles obtenus en combinant ces éléments sont décrits.

### 1.2.6.1 Les éléments de base des modèles rhéologiques

Le ressort : la déformation est dans un état fini sous l'action d'une force donnée et disparaît lorsque la force est supprimée (cf. figure 1.5). Ce comportement est modélisé par la loi de Hooke (1.2).

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.2)$$

$$\tau = G\varepsilon \quad (1.3)$$

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (1.4)$$

$E$  représente le module d'élasticité ou d'Young,  $G$  le module de cisaillement et  $\nu$  le coefficient de Poisson.



**Figure 1.5** : Ressort caractérisant l'élasticité

Le patin : la déformation reste permanente lorsque la force est supprimée (cf. figure 1.6). Le corps plastique est un corps qui se déforme lorsque la contrainte

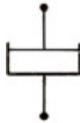
dépasse un seuil. Le patin ne glisse pas tant que la contrainte appliquée est inférieure au seuil de plasticité  $\sigma_p$ .



**Figure 1.6** : Patin représentant le seuil de plasticité

L'amortisseur : la déformation augmente à une vitesse constante (proportionnelle à la contrainte) (cf. figure 1.7). Ce comportement est décrit par la loi du fluide newtonien (1.5).

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (1.5)$$

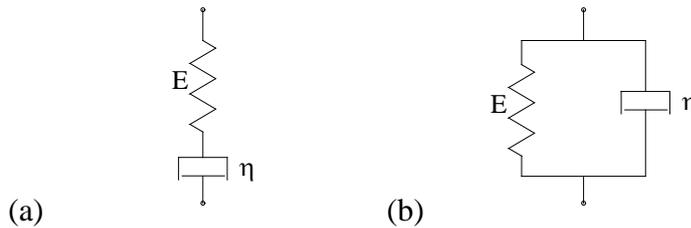


**Figure 1.7** : Amortisseur caractérisant le comportement visqueux

### 1.2.6.2 Les modèles élémentaires

Pour modéliser un comportement viscoélastique, les éléments élastiques et visqueux sont utilisés.

Deux modèles élémentaires particulièrement utilisés pour la modélisation viscoélastique sont ceux de Maxwell (association en série, adapté pour décrire les essais de relaxation de contrainte) et celui de Kelvin-Voigt (association en parallèle, plus adapté au fluage). Ils sont présentés sur la figure 1.8.



**Figure 1.8** : (a) Le modèle de Maxwell et (b) le modèle de Kelvin-Voigt [9]

Le modèle de Kelvin-Voigt conduit à une équation de la complaisance élastique de la forme suivante (1.6). Cette relation fait intervenir le temps de relaxation  $\tau$ , lequel correspond au temps de réponse du matériau [9].

$$J(t) = J_r \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (1.6)$$

$J_r$  représente la complaisance relaxée.

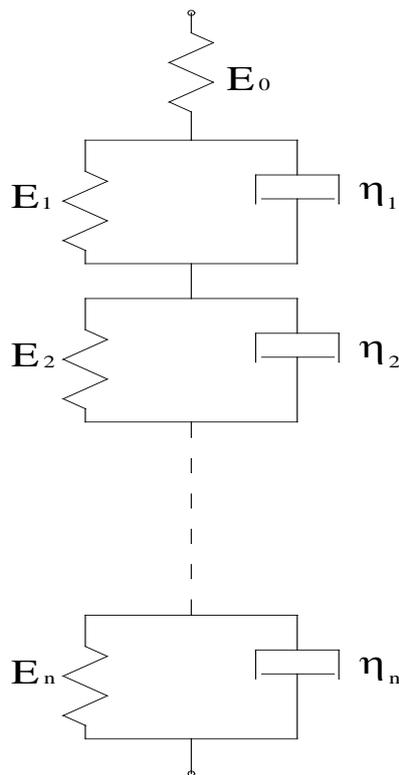
### 1.2.6.3 Les modèles généralisés

Lorsque le comportement du matériau ne peut pas être modélisé avec un unique temps de relaxation, il est nécessaire d'utiliser des modèles rhéologiques dont l'association des ressorts et amortisseurs est généralisée. L'association des modèles de Maxwell ou de Kelvin-Voigt en série ou en parallèle revient à sommer les fonctions du module élastique (relaxation) ou de la complaisance (fluage). Le modèle de Kelvin généralisé correspond à l'association en série de plusieurs éléments de Kelvin Voigt et un ressort (cf. figure 1.9). Un groupe d'éléments de Kelvin-Voigt en série représente un spectre discret de temps de relaxation, chaque temps  $\tau_i$  étant associé à une rigidité spectrale  $E_i$ . Les équations (1.7) et (1.8) sont associées à ce modèle.

$$\sigma = \sum_{i=0}^n \left( E_i \left( \varepsilon_i + \tau_i \dot{\varepsilon}_i \right) \right) \quad (1.7)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (1.8)$$

Le modèle de Kelvin généralisé est plus adapté que celui de Kelvin-Voigt pour décrire le comportement du Polyamide 6,6. En effet, la figure 1.3 (b) montre que la relaxation de ce dernier se produit sur plusieurs décades de temps [5].



*Figure 1.9 : Modèle de Kelvin généralisé [9]*

### 1.2.7 Conclusion

Le précédent paragraphe a présenté de façon synthétique le Polyamide 6,6 et son comportement mécanique. Il s'agit d'un polymère semi cristallin ayant un comportement mécanique de type viscoélastique aux petites déformations.

La solution retenue pour modéliser son comportement est d'utiliser le modèle rhéologique de Kelvin généralisé. Il a l'avantage de prendre en compte le large spectre de relaxation du Polyamide 6,6 dans une formulation analytique qui sera facilement introduite dans le modèle quasi-statique de partage des charges.

## 1.3 Les engrenages en Polyamide 6,6

### 1.3.1 Présentation des engrenages en polymère et premiers travaux de recherche

Les engrenages, qui sont une des plus anciennes inventions mécaniques de l'homme, ont énormément évolué durant plus de vingt siècles pour atteindre leur

forme actuelle [10], [11] et [12]. Au cours de cette évolution, il y a eu plusieurs changements importants dans les matériaux utilisés. L'acier pour les engrenages s'imposa progressivement à la fin du 19ème siècle avec l'apparition des machines à tailler par génération.

L'un des plus récents changements dans les matériaux utilisés est l'introduction des matières en polymère pour la réalisation d'engrenages. Comparés aux métaux, les thermodurcissables employés au début, puis maintenant les thermoplastiques, présentent, du fait de leurs propriétés mécaniques et physiques différentes, des inconvénients mais aussi des avantages. L'emploi de ces matériaux doit être envisagé lorsque :

- Se posent des problèmes de lubrification ou nécessité d'un fonctionnement sans lubrification.
- Il est nécessaire d'amortir les chocs et les vibrations et réduire le niveau sonore de la transmission.
- Se présentent des problèmes de corrosion ou de résistance à des agents chimiques.
- Apparaissent des problèmes de poids ou d'inertie.
- Une isolation électrique est indispensable.

Grâce à leurs nombreux avantages, les matières plastiques ont rapidement remplacé les métaux dans les applications modestement chargées, par exemple dans les carters de petits mécanismes ou d'équipements électroménagers.

Mais l'engrenage en polymère présente aussi des inconvénients :

- Une faible résistance mécanique.
- Une mauvaise résistance thermique.
- Une importante dilatation.
- Un comportement qui dépend parfois de l'humidité.

Les premiers grands travaux de recherche sur les engrenages en polymère furent accomplis par Tsukamoto dans les années 1980 à 1990. Il a effectué des études numériques et expérimentales en essayant de couvrir plusieurs points concernant les engrenages en polymère : modélisation du déplacement de la dent par le modèle rhéologique de Kelvin-Voigt [13], [14] et [15], influence des modifications de la géométrie de la dent lors du fonctionnement [16], [17] et [18], niveau sonore [19] et [20].

### 1.3.2 Problèmes thermiques

---

En général, dans le cas des engrenages en acier, la chaleur générée est dissipée par le lubrifiant. Dans le cas d'engrenages en polymère, qui fonctionnent sans

lubrifiant et ont une mauvaise conduction de la chaleur, celle-ci se dissipe moins facilement et provoque une élévation non négligeable de la température de service. La conséquence directe est une augmentation plus rapide de l'usure de la dent et de l'engrenage jusqu'à rupture sous plus hautes sollicitations.

Le transfert de chaleur au sein d'un pignon ou d'une roue, et du pignon vers l'arbre le supportant, se fait par conduction. Le transfert de chaleur avec l'air environnant se fait par convection.

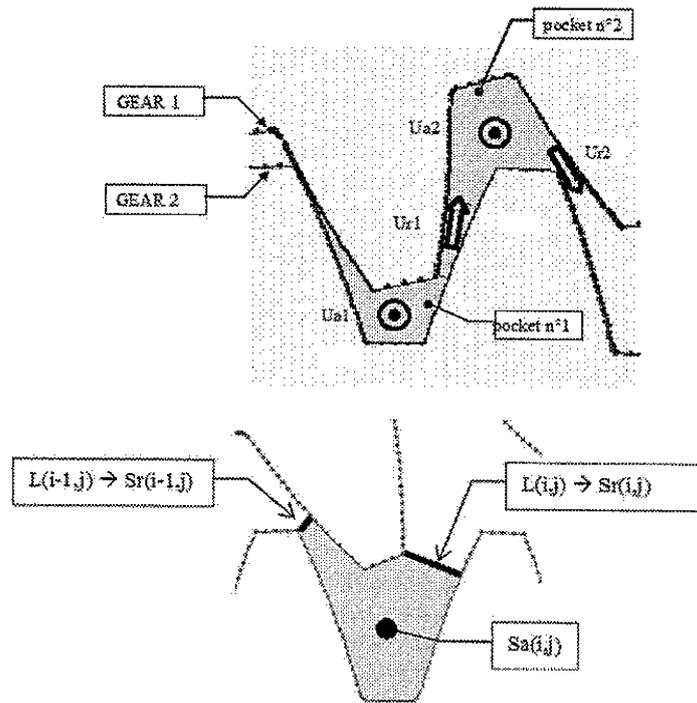
Plusieurs auteurs ont étudié le comportement thermique des engrenages en polymère et leurs performances [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31] et [32]. La plupart des études montrent que les pertes de puissance et les échauffements dans les engrenages en matériau polymère, sont essentiellement dus à trois phénomènes : Le piégeage de l'air entre les dents, le frottement et l'échauffement viscoélastique interne. Ces trois aspects vont être détaillés dans le paragraphe suivant.

### *1.3.2.1 Sources d'échauffement*

---

#### 1.3.2.1.1 Echauffement dû au piégeage de l'air entre les dents

L'échauffement dû au piégeage entre les dents est étudié par Diab et al. [33] et [34] pour les engrenages en acier. Lors de l'engrènement, entre le moment où une dent du pignon intercepte le cylindre de la tête de la roue et celui où elle remplit presque complètement l'espace inter dents, une fraction de l'air se trouve expulsé hors de l'engrènement. Dans une seconde phase, la dent du pignon libère progressivement le volume entre les deux dents de la roue, entraînant ainsi un effet d'aspiration du fluide environnant. L'air peut quitter la zone d'engrènement suivant la direction axiale ou la direction radiale de la dent. La perte totale associée à ce phénomène correspond à l'énergie échangée avec le milieu ambiant pour les phases de compression et d'aspiration. Elle dépend des caractéristiques de l'air, de la géométrie, du milieu ambiant et des vitesses de rotation. La figure 1.10 présente un schéma de principe du phénomène du piégeage de l'air entre les dents.



**Figure 1.10** : Schéma de principe du phénomène de piégeage [34]

### 1.3.2.1.2 Echauffement dû au frottement

Dans les engrenages, le frottement à la denture conduit à une source majeure de chaleur. Plusieurs paramètres peuvent l'influencer : les pressions de contact, la géométrie qui influence le partage des charges et le frottement.

Plusieurs modèles thermiques ont été développés pour ce type d'échauffement.

En premier, le modèle de Koffi et al. [28] qui estime l'énergie créée par frottement (1.9).

$$E_{gf} = \mu \cdot W_0 \cdot \frac{W_i}{W_n} \cdot \frac{1}{\cos \theta_f} \cdot V_s \cdot \Delta_s \quad (1.9)$$

$\cos \theta_f$  est l'angle de pression,  $V_s$  la vitesse de glissement,  $\Delta_s$  le déplacement du point de contact mesuré le long de la ligne d'action,  $\mu$  le coefficient de frottement,  $W_0$  le chargement transmis par unité de surface et  $\frac{W_i}{W_n}$  le facteur du partage des charges.

En 1937, Block [35] étudie le comportement thermique de deux solides en contact. En 1963, il établit un modèle simple qui estime la température flash d'une dent d'un engrenage soumise à une pression de contact de type Hertzienne (1.10) [36]. La température flash provient de la dissipation de chaleur au niveau

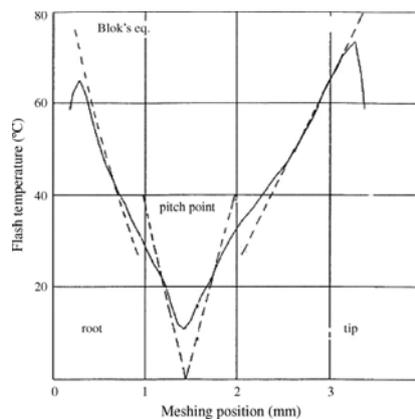
du contact qui résulte de la combinaison du frottement et du glissement des dents pendant la rotation de la roue.

$$T_f = 1,11 \cdot \mu \cdot F \cdot \frac{(V_1^{1/2} - V_2^{1/2})}{b \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot \rho \cdot c \cdot a}} \quad (1.10)$$

$\mu$  est le coefficient de frottement,  $F$  la force normale appliquée sur la dent,  $b$  la largeur de denture,  $V_1$  la vitesse de glissement du pignon,  $V_2$  la vitesse de glissement de la roue,  $k$  la conductivité thermique du matériau,  $c$  la chaleur spécifique du matériau,  $\rho$  la densité du matériau et  $a$  la moitié de la largeur de contact.

Tobe et Kato [37] affinent le modèle développé par Blok pour les engrenages. Dans les modifications, la largeur de contact est une fraction significative de la trajectoire du contact, le chargement et la vitesse sont fonction du temps.

Plus récemment, Mao a développé dans ses travaux [32] une méthode qui permet d'analyser la température flash des engrenages polymères et composites ainsi que la répartition de la chaleur générée entre les dents. Le problème thermique est traité dans un état instable, en tenant compte des changements de vitesse et des intensités d'échauffement pendant l'engrènement. Pour effectuer cette modélisation, il a développé un modèle numérique qui utilise la méthode des différences finies. Celui-ci néglige l'échauffement viscoélastique interne « hystérésis » et suppose que les propriétés mécaniques sont constantes. Le travail de Blok fournit une estimation de la température flash, mais ce modèle est limité car il donne une mauvaise approximation au début et à la fin de l'engrènement. Par contre, le modèle de Mao permet d'avoir une estimation correcte sur l'ensemble de l'engrènement. Les résultats de la figure 1.11 montrent l'évolution de la température flash par rapport à la position de l'engrènement avec les modèles de Blok et de Mao.

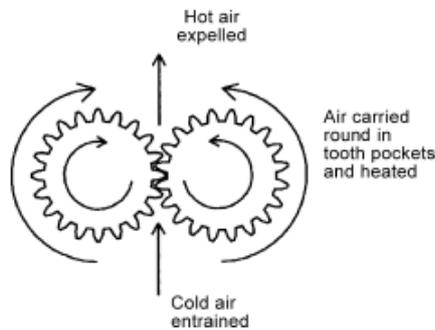


**Figure 1.11** : Estimation de la température flash avec les modèles de Blok et de Mao [32]

Un autre modèle un peu différent de ceux présentés précédemment est celui de Hooke et al. [29] et [30]. Ils proposent un modèle qui détermine la température du volume pendant le fonctionnement de l'engrenage. Pour cela, ils s'intéressent au flux d'air qui est piégé dans l'espace entre les dents de l'engrenage.

Un modèle raisonnable pour le transfert de chaleur peut supposer que, dans un premier temps, un volume d'air froid est entraîné dans les poches de l'engrenage. Le volume d'air est ensuite chauffé par la puissance moyenne perdue par frottement. Puis il est expulsé des poches de l'engrenage.

Hooke et al. proposent une modélisation sur le même principe qu'une pompe (cycle d'air chaud-froid), car la puissance perdue par frottement de la dent ainsi que le volume d'air pompé lors de l'engrènement sont connus. La température du volume peut donc être estimée par la quantité d'air chaud déplacée. La figure 1.12 présente le principe utilisé par Hooke pour établir son modèle.



**Figure 1.12** : Modèle de transfert de chaleur de l'engrenage [29] et [30]

La relation (1.11) correspond au volume du fluide pompé pour chaque tour, la relation (1.12) décrit le modèle de génération de chaleur dans un engrenage et la relation (1.13) présente la puissance moyenne perdue par frottement pour une seule dent en contact.

$$V = 2.\pi.b.(r^2 - r_1^2) \quad (1.11)$$

$$\Delta H = \omega.V.T_v.c.\rho \quad (1.12)$$

$$\Delta H = \mu.F.V_s \text{ avec } V_s = \frac{\pi.\omega.r_b}{Z} = \frac{\pi.\omega.C}{Z.F} \quad (1.13)$$

$b$  est la largeur de denture,  $r$  le rayon de tête,  $r_1$  le rayon de référence,  $\omega$  la vitesse de rotation,  $V$  le volume de fluide pompé,  $T_v$  la température du volume,  $\rho$  la densité de l'air et  $c$  la chaleur spécifique de l'air.  $\mu$  est le coefficient de frottement,  $F$  la charge appliquée,  $V_s$  la vitesse de glissement moyenne,  $r_b$  le

rayon de base de la roue,  $Z$  le nombre de dent de la roue et  $C$  le couple appliqué.

A partir des trois dernières relations, Hooke a pu établir un modèle (1.14) pour estimer la température du volume  $T_v$  d'un engrenage en polymère.

$$T_v = \frac{0,625 \cdot \mu \cdot C}{c \cdot \rho \cdot z \cdot b \cdot (r^2 - r_1^2)} \quad (1.14)$$

Ce modèle suppose que la température de volume est proportionnelle au couple. Cependant, l'auteur informe que ce modèle simple pour les transferts de chaleur nécessite encore quelques développements, mais il fournit déjà une bonne base pour la prédiction de la température de volume des engrenages en polymère.

---

### 1.3.2.1.3 Echauffement viscoélastique interne

Ce type d'échauffement est lié à l'énergie dissipée pendant la déformation d'un solide viscoélastique.

La mesure caractéristique de l'amortissement ou du facteur de perte  $\tan \phi$  est le ratio entre l'énergie dissipée par cycle et le maximum d'énergie conservée pendant le cycle. La quantité de chaleur interne développée par un polymère quand il est déformé (déformations qui ont une amplitude constante) peut être estimée par la relation (1.15) [38].

$$Q \approx \pi E'' \varepsilon_0^2 \quad (1.15)$$

$E''$  est le module de perte,  $\varepsilon_0$  est l'amplitude maximale de déformation pendant le cycle de déformation.

Un modèle a été développé par Koffi et al. [28] pour l'échauffement viscoélastique interne (1.16). Il intègre plusieurs propriétés des matériaux polymères comme le facteur de perte  $\tan \phi$  et le module de conservation  $E'$ .

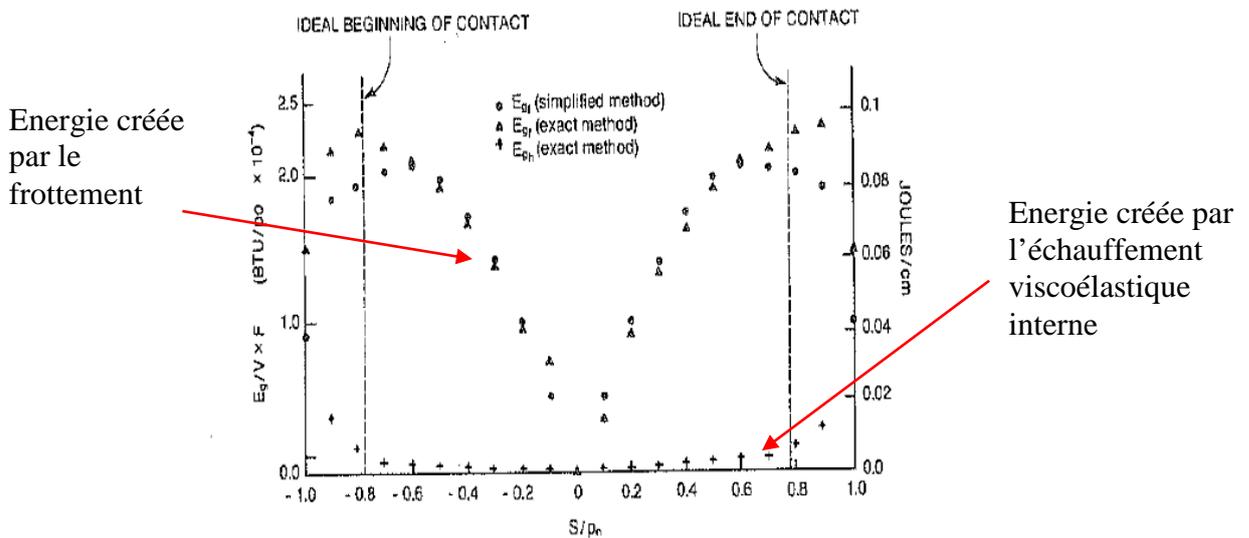
$$E_{gh} = \frac{\tan \phi}{\tan \phi^2 + 1} \cdot \frac{\sigma_0^2}{4} \cdot \frac{t \cdot \pi}{E' \cdot \cos \theta_f} \cdot V_s \cdot \Delta_s \quad (1.16)$$

$\cos \theta_f$  est l'angle de pression,  $t$  l'épaisseur de la dent au rayon de base,  $\sigma_0$  la contrainte appliquée au rayon de base,  $V_s$  la vitesse de glissement et  $\Delta_s$  le déplacement du point de contact mesuré le long de la ligne d'action.

Koffi et al. [28] proposent de comparer ses modèles (1.9) et (1.16) pour un engrenage en polymère ayant 20 dents pour la roue et le pignon. Le module élastique du matériau est de 2 GPa, le facteur de perte de 0,05, le coefficient de frottement de 0,1 et le couple appliquée de 53 N.mm (cf. figure 1.13).

Les résultats montrent que dans le cas d'un contact roulant entre deux matériaux polymères, l'énergie créée par frottement est beaucoup plus grande que l'énergie interne du polymère. Kukureka et al. [39], Mao [27] et [32] confirment également cette hypothèse dans leurs travaux.

L'échauffement viscoélastique est donc généralement négligé par rapport à l'échauffement par frottement.

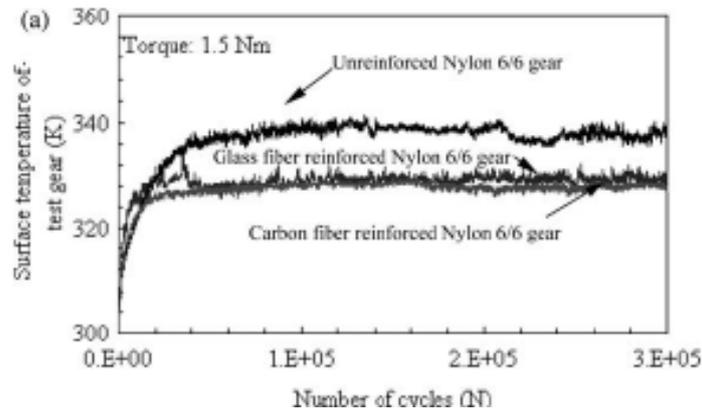


**Figure 1.13 :** Modélisation de l'énergie générée par frottement et hystérésis en fonction de la position angulaire [28]

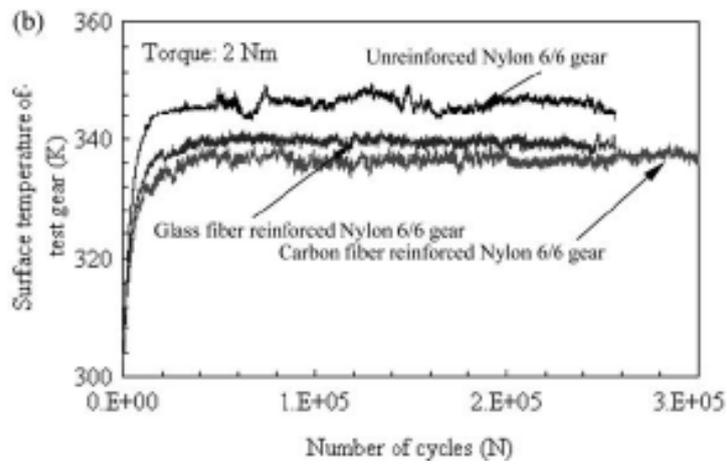
### 1.3.2.2 Mesure de la température des engrenages en Polyamide 6,6

Plusieurs auteurs comme Senthilvelan et Gnanamoorthy [21], [22] et [23], Imrek [24], Düzcükoglu [25] et [26] et Mao [27] ont étudié le comportement thermique des engrenages en polymère. Les résultats montrent qu'une augmentation constante de la puissance à transmettre par l'engrenage et des vitesses de rotation va entraîner une élévation des puissances dissipées. Elles auront pour impact d'augmenter la température de service de l'engrenage.

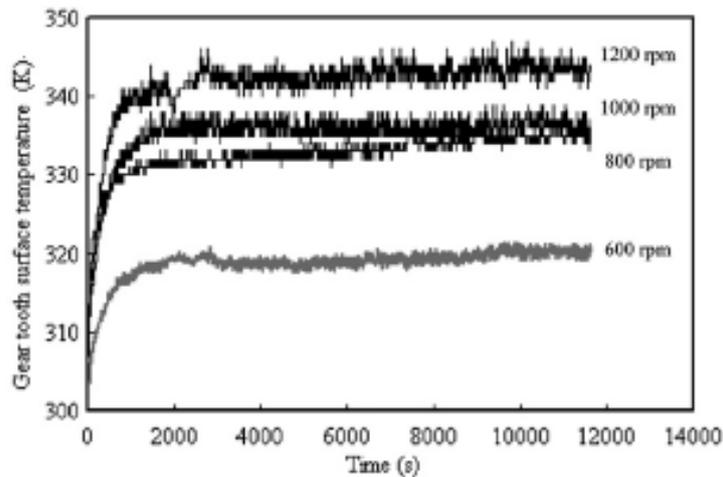
Senthilvelan et Gnanamoorthy [21], [22] et [23] comparent également le comportement thermique entre des engrenages renforcés avec des fibres de carbone et de verre et d'autres non renforcés. Les résultats montrent que la variation de la température est assez élevée pour modifier les propriétés mécaniques et tribologiques du matériau. De plus, nous pouvons noter que l'échauffement est moins important lorsque l'engrenage est renforcé en fibres de verre ou de carbone (cf. figures 1.14, 1.15 et 1.16).



**Figure 1.14 :** Température de surface d'un engrenage renforcé et non renforcé à 1.5 N.m [23]



**Figure 1.15 :** Température de surface d'un engrenage renforcé et non renforcé à 2 N.m [23]



**Figure 1.16 :** Température de surface de la dent d'un engrenage en Nylon 6,6 non renforcé à différentes vitesses de rotation avec un couple de 0,8 N.m [22]

Imrek [24] et Düzcükoglu [25] et [26] ont étudié le comportement thermique d'engrenage ayant une largeur de denture modifiée (cf. figure 1.17). La chaleur accumulée pendant le fonctionnement de l'engrenage non-modifié n'est pas complètement chassée. D'après Senthilvelan [23], une baisse de 5°C de la température de surface permet une augmentation non négligeable de la durée de vie. La modification de la largeur de denture proposée permet de baisser la température de surface et, par conséquent, d'augmenter la durée de vie (cf. figure 1.18).



Figure 1.17 : Engrenages utilisés [26]

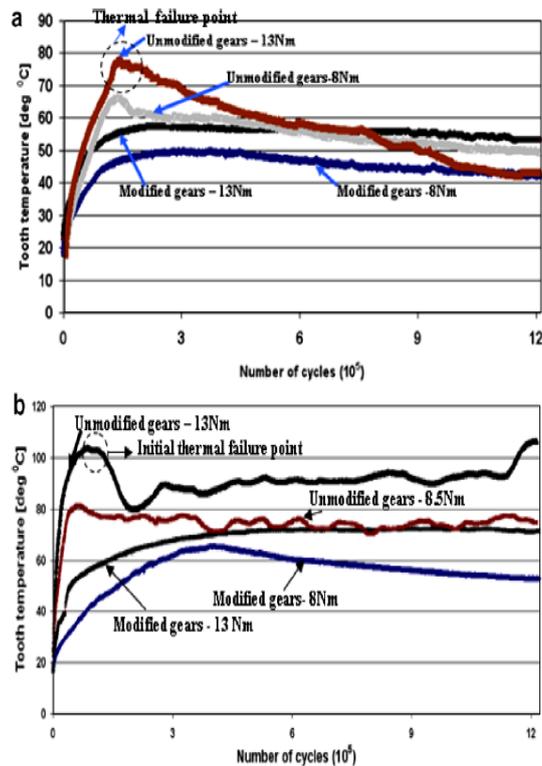
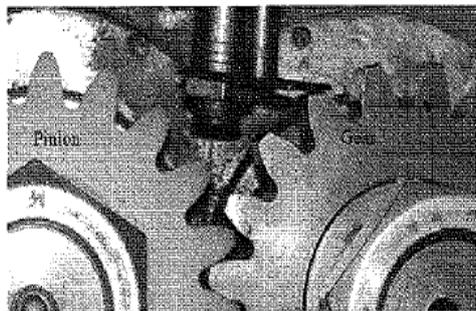


Figure 1.18 : Température en fonction du nombre de cycles pour deux vitesses de rotation : (a) 1000 tours/min et (b) 1500 tours/min [26]

Les moyens de mesures utilisés par Senthilvelan et Gnanamoorthy [21], [22] et [23], Imrek [24] et Düzcükoglu [25] et [26] sont des capteurs infrarouges placés à 5 mm au dessus de l'engrènement (cf. figure 1.19). L'inconvénient majeur de cette méthode de mesure est l'emplacement du capteur infrarouge. En effet, il ne permet pas de mesurer la température du contact et sa mesure peut être perturbée par le flux d'air provenant de l'engrènement.

Mao [27] décide d'utiliser une caméra infrarouge (cf. figure 1.20). Cette idée est intéressante. Cependant, l'emplacement de la caméra est discutable car elle est trop éloignée du banc expérimental pour mesurer correctement la température au contact et celle de l'air piégé entre les dents.



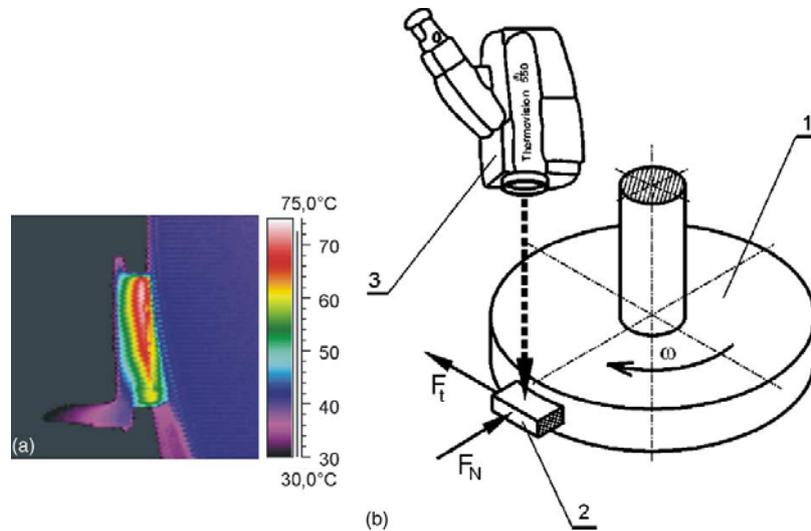
*Figure 1.19 : Emplacement du capteur de mesure de la température [21], [22] et [23]*



*Figure 1.20 : Mesure de la température de surface [27]*

D'autres études sur la mesure du contact thermique entre deux solides ont retenu notre attention. En effet, Wieleba [40] propose un dispositif expérimental qui permet de mesurer la température de friction et la température interne entre deux matériaux. Pour cela, il propose d'utiliser une caméra rapide infrarouge dont l'axe de l'objectif est orienté suivant le profil du contact (cf. figure 1.21).

Par rapport aux résultats précédents, ceux présentés sur la figure 1.21 montrent que le dispositif utilisé par Wieleba [40] mesure correctement la température de contact et la température interne du matériau.



**Figure 1.21** : Méthode de mesure thermique par caméra infrarouge sur (a) la surface latérale d'un polymère composite en contact glissant avec un acier et (b) schéma de principe de la mesure [40]

### 1.3.2.3 Conclusion

Dans les engrenages en polymère, trois sources de chaleur ont pour conséquences d'augmenter la température de l'engrenage pendant le fonctionnement. De plus, les essais thermiques montrent que cet échauffement est suffisamment important pour que le comportement mécanique du Polyamide 6,6 soit modifié.

Il est donc indispensable de prendre en compte cet échauffement de l'engrenage dans le modèle de partage des charges. Malheureusement, il existe peu de modèles thermiques précis pour les engrenages en polymère. Dans notre étude, les modèles de Hooke (1.14) et de Block (1.10) nous semblent plus satisfaisant que ceux de Koffi et al. (1.9) et (1.16).

Pour les vérifier, une mesure précise et locale de la température de l'engrenage peut être réalisée. Dans les différentes méthodes de mesure, celle proposée par Wieleba [40] est la plus intéressante.

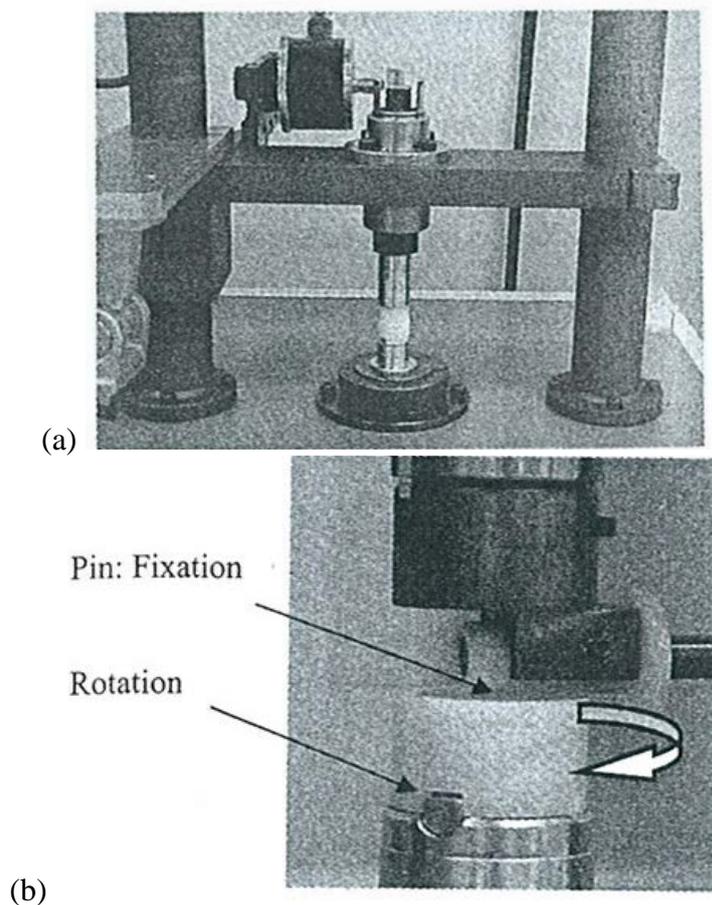
### 1.3.3 Mesure du coefficient de frottement

L'utilisation des modèles thermiques de Block (1.10) et de Hooke (1.14) nécessite de connaître la valeur du coefficient de frottement. En général, la

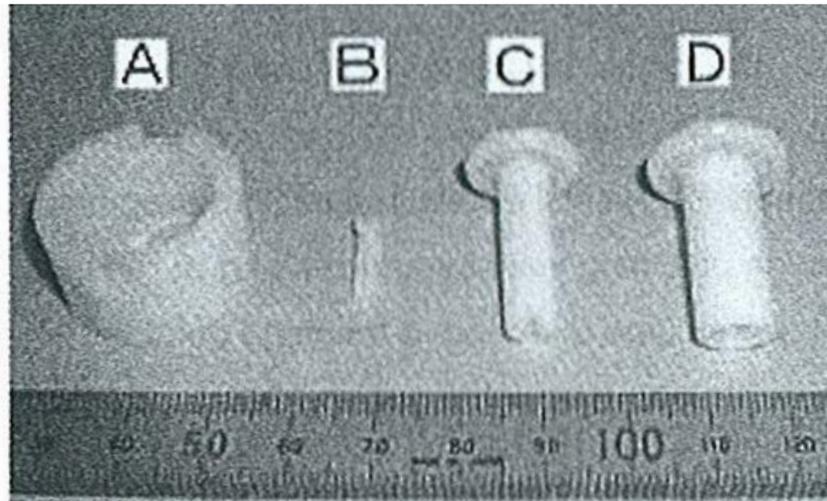
plupart des études utilisent un coefficient de frottement moyen provenant de la littérature et obtenu dans des conditions parfois différentes de celles de l'application considérée. Dans le cadre de cette étude, il est préférable d'utiliser le coefficient de frottement dynamique mesuré dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6.

Ueda et al. [41] a réalisé des mesures du coefficient de frottement dynamique avec une machine expérimentale qui reproduit les conditions de contact d'un engrenage. Le matériau étudié est le Polyoxyméthylène (POM) (cf. figures 1.22 (a) et (b)). Les pièces utilisées sont détaillées sur la figure 1.23. L'échantillon A est la pièce centrale mise en rotation. Les échantillons B, C et D ont la même géométrie mais avec un diamètre différent pour chaque pièce.

Les tests de frottement sont réalisés dans des conditions de glissement sec, à température ambiante et avec une unique charge de 19,6 N pour les trois essais. Cinq vitesses de glissement sont testées : 2 cm/s, 5 cm/s, 10 cm/s, 15 cm/s et 20 cm/s.

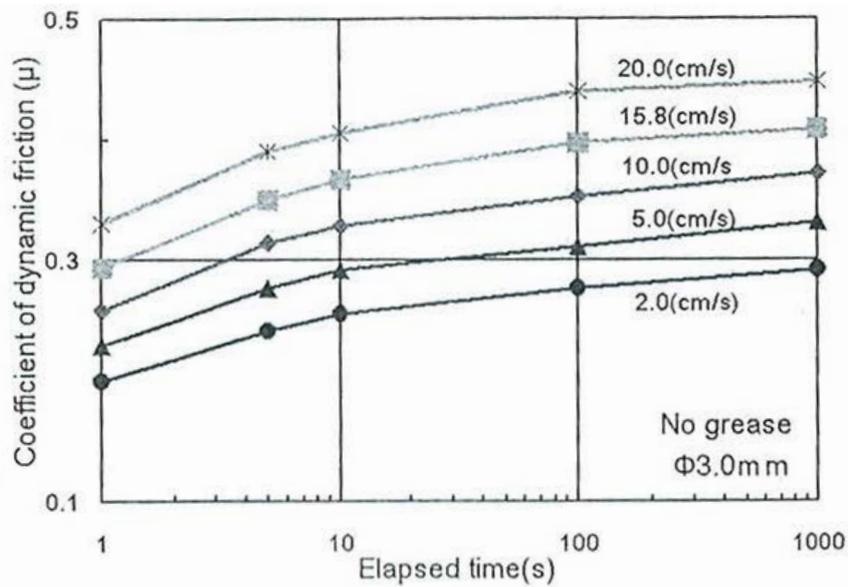


**Figure 1.22 :** (a) Machine de mesure du coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyoxyméthylène et (b) contact entre les échantillons [41]

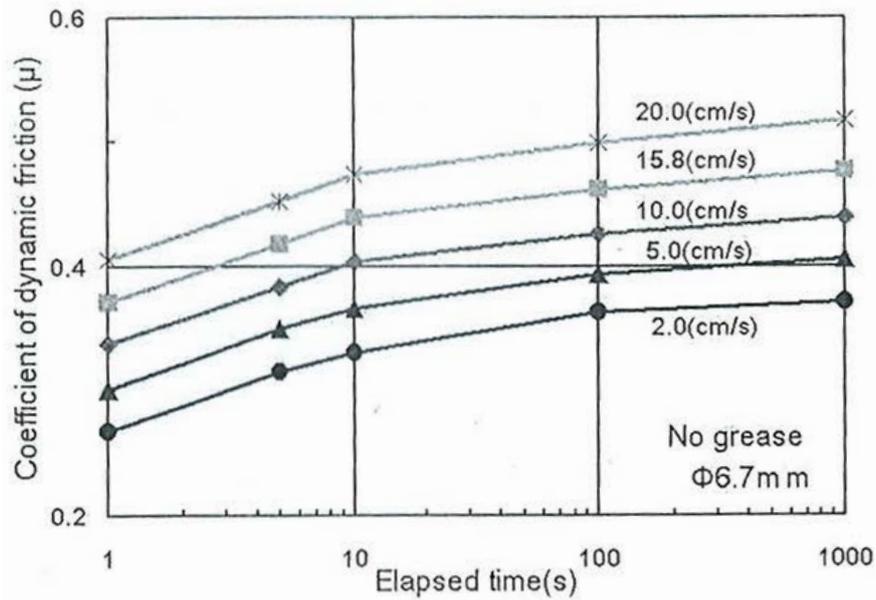


**Figure 1.23 : Echantillons [41]**

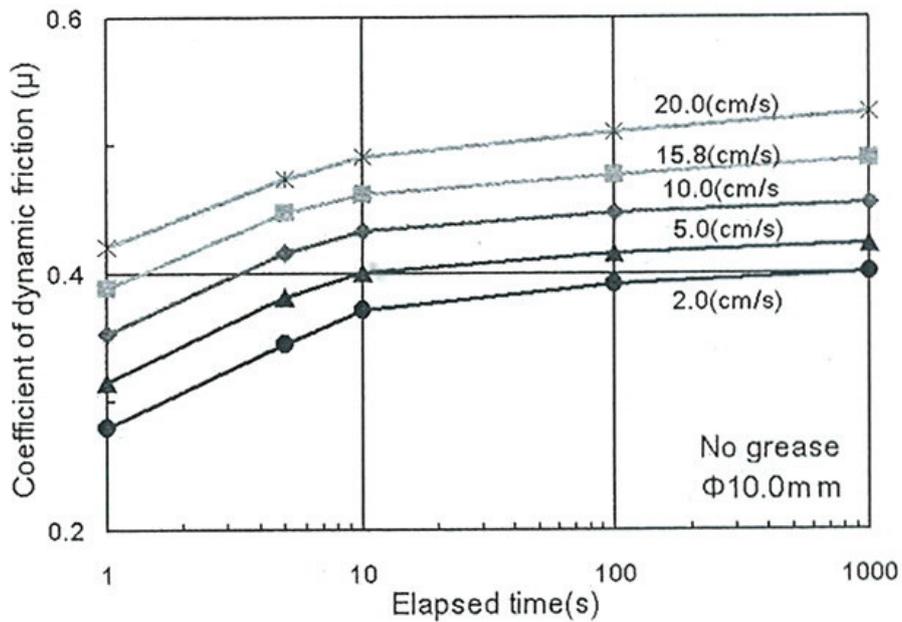
Les figures 1.24 à 1.26 présentent les résultats des essais expérimentaux. Ils montrent que dans tous les cas le coefficient de frottement dynamique augmente en fonction de trois paramètres : la durée de l'essai, la vitesse de glissement et le diamètre de l'échantillon.



**Figure 1.24 : Coefficient de frottement dynamique, échantillon A (diamètre de 3 mm) [41]**



**Figure 1.25 :** Coefficient de frottement dynamique, échantillon B (diamètre de 6,7 mm) [41]



**Figure 1.26 :** Coefficient de frottement dynamique, échantillon C (diamètre de 10 mm) [41]

L'étude effectuée par Ueda et al. [41] permet d'avoir un aperçu d'une méthode expérimentale pour mesurer le coefficient de frottement dynamique dans les mêmes conditions qu'un engrenage. Mais, elle est réalisée pour des pièces en Polyoxyméthylène. Nous pouvons donc conclure, que à notre connaissance, il

n'y a pas de mesures du coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage de type Polyamide 6,6/Polyamide 6,6.

Par contre, il existe quelques études sur un frottement sec avec un disque tournant en acier et un échantillon statique en Polyamide 6,6.

Unal et al. [42] et [43] présentent une étude sur l'influence de la vitesse de glissement et du chargement sur le frottement et l'usure de plusieurs matériaux polymères couramment utilisés dans l'industrie : le Polyamide 6,6, le Polyoxyméthylène et le Polyéthylène dit ultra haute masses. Les tests de frottement et d'usure sur ces matériaux sont réalisés sous des conditions de glissement sec, à température ambiante, à différentes pressions (0,35 MPa – 1,05 MPa) et à différentes vitesses de glissement (0,5 m/s – 2 m/s). La figure 1.27 présente le schéma de principe de la machine d'essai et la figure 1.28 présente les résultats obtenus.

Les résultats montrent que, pour tous les polymères utilisés dans cette étude, le coefficient de frottement est dépendant de la vitesse de glissement et de la charge. Dans le cas d'un polyamide 6,6, le coefficient de frottement décroît avec l'augmentation de la pression et augmente avec la vitesse de glissement.

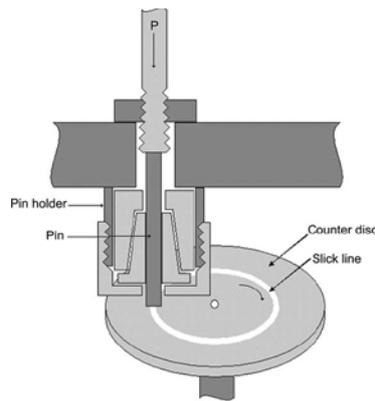
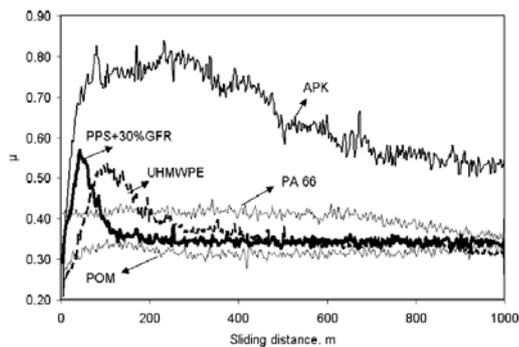
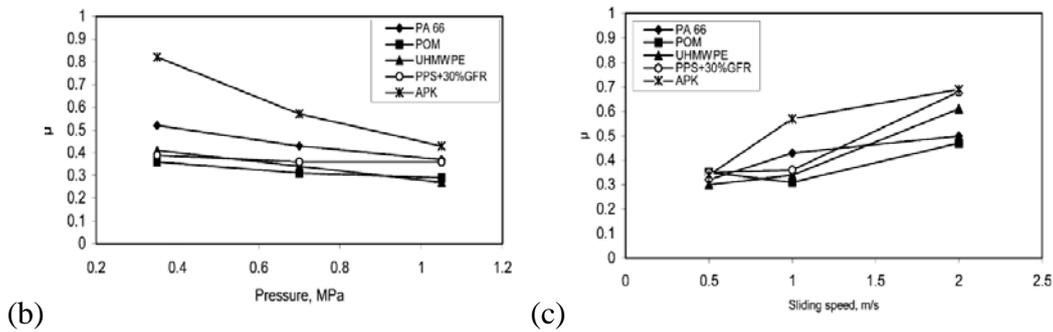


Figure 1.27 : Schéma de principe de la machine d'essai [43]



(a)



**Figure 1.28 :** (a) Coefficient de frottement en fonction de la distance de glissement, (b) coefficient de frottement en fonction de la pression et (c) coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement [43]

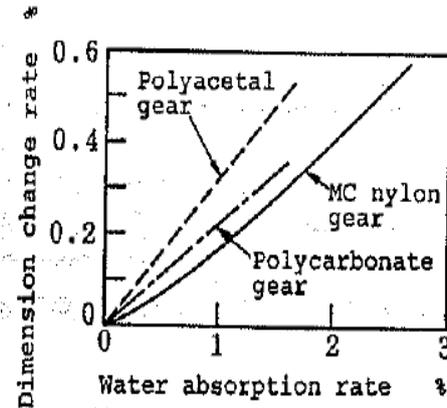
### 1.3.4 Mesure des variations de la géométrie en fonction de l'humidité

L'unique étude présentant une analyse de l'influence de l'humidité sur la géométrie des engrenages en polymère a été réalisée par Tsukamoto et al. [44]. Trois types de matériaux ont été utilisés : le Polyamide, le Polyacétal et le Polycarbonate.

Dans un premier temps, les engrenages ont été placés dans une étuve à 24% puis 50% d'humidité relative et dans un second temps, dans une étuve sous vide. Lorsque l'air est enlevé de l'étuve, la masse de l'engrenage décroît légèrement à cause de la déshydratation. Pour observer l'influence de l'humidité, les variations des dimensions suivantes ont été étudiées : la largeur de denture, l'épaisseur de la dent et la masse. La figure 1.29 présente la variation de la masse de l'engrenage en fonction du volume.

Les résultats prouvent que la géométrie des engrenages en polymère évolue en fonction du taux d'humidité. Pour un taux d'absorption d'eau de 3%, les dimensions de l'engrenage en Polyamide sont modifiées de 0,6%. Ce changement du volume de l'engrenage est assez important pour modifier quelques résultats comme l'erreur de transmission ou la température de l'air piégé entre les dents.

Pour contrer ce problème, il est conseillé d'ajouter un jeu à l'entraxe théorique de l'engrenage.



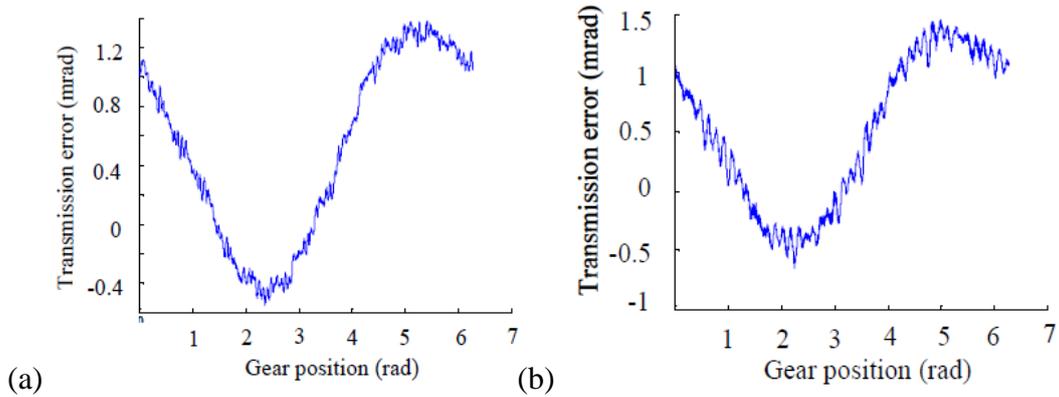
**Figure 1.29** : Vitesse du changement de dimension de l'engrenage en fonction de la vitesse d'absorption de l'eau [44]

### 1.3.5 Mesure de l'erreur de transmission

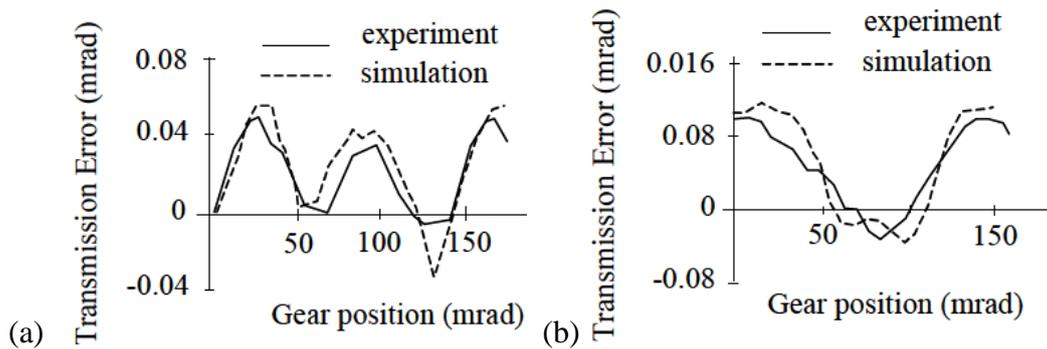
L'erreur de transmission correspond à une variation de la position angulaire de la roue par rapport à sa position théorique. Elle est due à des déformations des dentures, à des défauts ou à des corrections de géométrie, à des défauts d'assemblage, à des effets dynamiques... L'erreur de transmission intègre donc un ensemble de phénomènes. Si la comparaison de l'erreur de transmission avec un modèle numérique sur les engrenages est correcte, l'ensemble du modèle sera validé.

Pour mesurer l'erreur de transmission, Houser [45] a développé une méthode qui utilise des accéléromètres de torsion et de translation et des codeurs optiques. Matson [46] propose de monter les accéléromètres aux extrémités des arbres du pignon et de la roue. Cependant, cette méthode peut être influencée par les résonances causées par effets dynamiques. Rémond [47] et [48] a développé un principe original pour mesurer l'erreur de transmission. Il utilise deux codeurs optiques placés sur l'arbre de rotation du pignon et de la roue. Le principe de la mesure est basé sur le comptage des impulsions délivrées par une horloge à haute fréquence (environ 80 MHz) entre deux fronts montants du codeur optique. Cette méthode de comptage est synchronisée à la même référence de temps et elle permet de connaître la position exacte du pignon et de la roue en fonction du temps. Il est ainsi possible de déterminer l'erreur de transmission à des vitesses importantes tout en utilisant des codeurs ayant une faible résolution. Récemment, Guingand et al. [49] ont utilisé la méthode développée par Rémond pour valider un modèle quasi-statique de partage des charges pour un engrenage roue et vis (roue en Polyamide 6,6 et vis en acier). La figure 1.30 présente l'erreur de transmission mesurée pour un tour complet de la roue. L'oscillation principale est due au décentrage de la roue par rapport à son axe [49]. L'oscillation principale ayant une amplitude de 10 mrad et une période

correspondant à un tour de la roue est principalement due au décentrage de la roue par rapport à son axe (cf. figure 4.36). La figure 1.31 présente la comparaison de l'erreur de transmission simulée avec celle mesurée. Les résultats montrent que la méthode développée par Rémond [47] et [48] permet de valider un modèle quasi-statique de partage des charges.



**Figure 1.30 :** Erreur de transmission mesurée pour un engrenage roue et vis sans fin, (a) 1,4 N.m et 400 tours/min et (b) 1,9 N.m et 800 tours/min [49]



**Figure 1.31 :** Erreur de transmission simulée et mesurée pour un engrenage roue et vis sans fin, (a) 1,4 N.m et 400 tours/min et (b) 1,9 N.m et 800 tours/min [49]

### 1.3.6 Conclusion

L'utilisation des modèles thermiques de Block et de Hooke nécessite de connaître le coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6. Pour ce type de contact, le coefficient de frottement pour un engrenage en Polyoxyméthylène varie en fonction de la géométrie et de la vitesse. Mais à notre connaissance, il n'existe pas d'étude où le coefficient de frottement, dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6, est mesuré. De plus, ces résultats montrent qu'il n'est pas

approprié d'utiliser le coefficient de frottement moyen pour une étude sur les engrenages. Il serait donc intéressant de le déterminer expérimentalement.

En fonction du taux d'humidité, la géométrie de l'engrenage en polymère peut évoluer. Pour éviter tout problème lors du fonctionnement, il est nécessaire d'ajouter un jeu à l'entraxe théorique.

Enfin pour valider le modèle quasi-statique de partage des charges, l'erreur de transmission peut être mesurée sur un banc engrenages en Polyamide 6,6. La méthode développée par Rémond [47] et [48], nous paraît être la plus intéressante et la plus pertinente.

---

## 1.4 Modélisation du comportement mécanique des engrenages

Historiquement, le comportement sous charge des engrenages a été étudié de manière expérimentale, avant d'être modélisé. Mais la bibliographie sur la modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère est assez pauvre. Les méthodes développées proposent un ou plusieurs résultats pour le dimensionnement des engrenages en polymère.

Certains auteurs comme Jabbour et Asmar [50], Senthilvelan et Gnanamoorthy [21], Tsai et Tsai [51] et Walton et al. [52] et [53] ont développé des méthodes pour les engrenages en Polyamide 6,6. Néanmoins, ces méthodes proposent des calculs élastiques sans prendre en compte le comportement viscoélastique du Polyamide 6,6.

En première partie, nous nous intéressons uniquement aux méthodes qui prennent en compte un aspect complémentaire de la modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère : la viscoélasticité. Trois méthodes sont décrites :

- Une méthode qui modélise la flexion de la dent développée par Tsukamoto [15] et Moriwaki [54]. Ils proposent d'utiliser la loi de comportement du modèle rhéologique linéaire de Kelvin-Voigt.
- La méthode normalisée VDI 2545 [55] et [56] est adaptée de la norme ISO 6336 [57]. Elle permet de dimensionner rapidement un engrenage en Polyamide 6,6.
- La méthode éléments finis « MARC » utilisée par Lin et Kuang [58].

Dans une seconde partie, la méthode développée par le LaMCoS pour modéliser le comportement sous charge des engrenages en acier est détaillée. Elle permet d'obtenir plusieurs résultats (partage des charges, pressions de contact, l'erreur de transmission, les contraintes en pied de dent...). Ce processus a été mis au point pour plusieurs géométries [59] : cylindriques [60], [61], [62] et [63], faces

[64] et [65], spiro-coniques [66] et pignon-crémaillère [67]. Récemment, il a été adapté pour les engrenages roue en polymère et vis en acier [68].

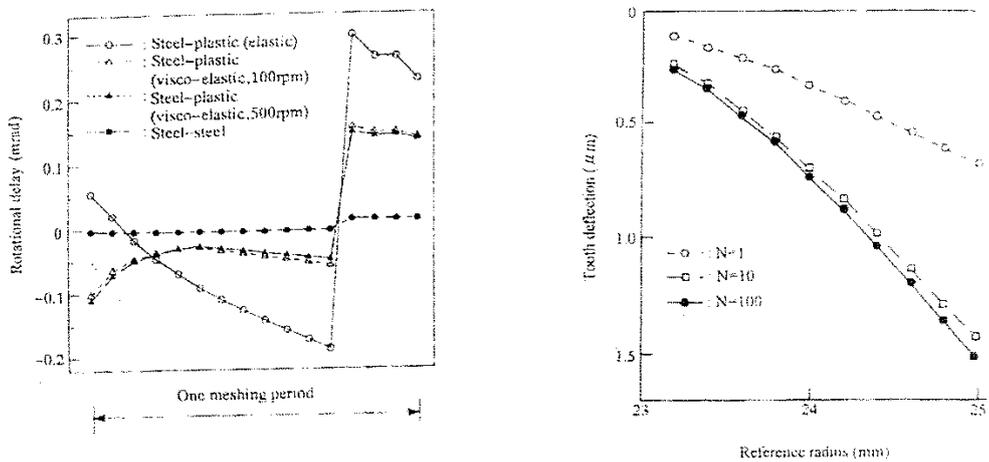
### 1.4.1 Méthode déterminant le déplacement d'une dent d'un engrenage en Polyamide 6,6

Tsukamoto [15] a été l'un des premiers à présenter le comportement viscoélastique d'une dent d'un engrenage en Polyamide.

Pour modéliser les déformations d'une dent en Polyamide, Moriwaki [54] utilise la loi de comportement du modèle rhéologique linéaire de Kelvin-Voigt (1.17).

$$\sigma(t) = E.\varepsilon(t) + \tau.\dot{\varepsilon}(t) \tag{1.17}$$

Lors d'un calcul de déplacement par la méthode des éléments finis, il est nécessaire de reconsidérer la matrice de rigidité en fonction du module de viscosité et de l'évolution du chargement. Moriwaki et al. [54] proposent donc d'effectuer deux calculs de déplacements, un au temps  $t$  et un au temps  $t + \Delta t$ . Il est alors possible de calculer la déformation d'une dent à partir du modèle de Kelvin-Voigt. La figure 1.32 (a) montre le déplacement de la dent simulé. Le résultat de la figure 1.32 (b) montre que dans certain cas la dent n'a pas le temps revenir à son état initial avant le chargement du cycle suivant. La flexion de la dent dépend alors du nombre de cycles de chargement.



**Figure 1.32 :** (a) Comparaison de déformation élastique et viscoélastique et (b) Flexion d'une dent en fonction du rayon à différents nombres de cycles [54]

Dans cette démarche, Moriwaki et al. [54] et Tuskamoto [15] proposent d'utiliser des modèles rhéologiques pour simuler le comportement mécanique

des engrenages en polymère. Moriwaki et al. [54] proposent d'utiliser le modèle de Kelvin-Voigt. Dans le cas d'un Polyamide qui présente un large spectre de temps de relaxation, il serait pourtant plus judicieux d'utiliser le modèle de Kelvin généralisé (cf. paragraphe 2.6.3 du chapitre 1).

## 1.4.2 Méthode basée sur des normes (VDI 2545)

Par rapport à la méthode précédente qui est basée sur le calcul du déplacement viscoélastique de la dent d'un engrenage, les méthodes normalisées permettent d'obtenir rapidement des résultats pour dimensionner des engrenages.

La méthode VDI 2545 [55] et [56] est une méthode allemande de dimensionnement connue et largement utilisée. Elle est basée sur la norme ISO 6336 [57].

Dans les engrenages, il existe deux principaux risques de ruine : par rupture en pied de dent ou par pression trop forte sur le flanc. Le dimensionnement d'un engrenage passe donc par deux calculs distincts qui vont être présentés.

### 1.4.2.1 Rupture en pied de dent

Le but du calcul de la contrainte en pied de dent est de comparer une contrainte maximale (subie par l'engrenage en fonctionnement) à une contrainte limite d'endurance du matériau. Le calcul porte à la fois sur l'établissement de la contrainte maximale  $\sigma_f$  (appelée contrainte limite de base) et de la limite d'endurance  $\sigma_{FP}$ . L'objectif du dimensionnement est de vérifier l'inéquation suivante (1.18).

$$\sigma_f \leq \frac{\sigma_{FP}}{S_{\min}} \quad (1.18)$$

$S_{\min}$  représente le coefficient de sécurité.

La norme ISO 6336 pour le dimensionnement des engrenages en acier commence par établir la contrainte limite de base  $\sigma_f$  (qui tient compte de l'environnement et du fonctionnement de l'engrenage grâce à des facteurs généraux  $K_i$ ). L'effort tangent au primitif (1.19)  $F_t$  est corrigé par des facteurs  $Y_i$  qui introduisent la prise en compte de la géométrie de l'engrenage. Les différents facteurs qui vont être utilisés dans les prochaines relations sont détaillés dans la norme [55].

$$\sigma_f = \frac{F_t}{b.m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{\varepsilon} \cdot Y_{\beta} \cdot K_A \quad (1.19)$$

$Y_{Fa}$  représente le facteur de forme,  $Y_{\varepsilon}$  le facteur de conduite,  $Y_{\beta}$  le facteur d'inclinaison et  $K_A$  le facteur d'application.

Nous trouvons dans la méthode VDI 2545 [55], des abaques délivrant la valeur de la contrainte en flexion  $\sigma_{FP}$  d'engrenages en Polyamide 6,6 en fonction de la température dans le volume de la dent et du nombre de cycles.

Pour estimer la bonne contrainte en flexion  $\sigma_{FP}$ , il est nécessaire d'estimer la température dans le volume de la dent. Pour cela, le modèle de Hachmann et Strickle [69] est utilisé (1.20). Le calcul repose sur un équilibre entre la production et la dissipation de chaleur.

$$T_i = T_a + 136.P.\mu.\frac{u+1}{z_2+5} \left( \frac{171100.k_2}{b.z_i.(v.m)^k} + 6,3\frac{k_3}{A} \right) \quad (1.20)$$

$T_i$  (°C) représente la température du volume ou de la surface de la roue  $i$ ,  $T_a$  (°C) la température ambiante,  $P$  (kW) la puissance transmise,  $\mu$  le coefficient prenant en compte la friction (différent du coefficient de friction);  $k_2$  est un facteur prenant en compte les matériaux des roues et diffère selon que l'on veuille calculer la température dans le volume ou en surface,  $k$  dépend du matériau de la roue étudiée,  $k_3$  prend en compte l'influence de la cartérisation (si l'engrenage est ouvert, partiellement ou entièrement fermé);  $A$  (m<sup>2</sup>) représente la surface des carters,  $u$  est le rapport de transmission;  $Z_2$  est le nombre de dents de la roue,  $Z_i$  le nombre de dents de la roue  $i$ ,  $b$  (mm) la largeur de denture,  $m$  (mm) le module normal de l'engrenage,  $v$  (m/s) la vitesse circonférentielle.

Par rapport aux modèles thermiques présentés au paragraphe 3.2.1 de ce chapitre, celui de Hachmann et Strickle [69] peut être utilisé pour estimer les températures de volume et de surface de la dent.

#### 1.4.2.2 Sécurité des flancs (pression superficielle)

Pour obtenir l'effet de la pression sur le flanc de la dent, il est nécessaire de calculer la contrainte limite de base  $\sigma_H$  (1.21) qui est intégrée dans l'inéquation de la condition de tenue d'un engrenage.

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_t}{b.d_1} \cdot \frac{u+1}{u} \cdot K_A \cdot Z_H \cdot Z_{\varepsilon} \cdot Z_M} \leq \frac{\sigma_{HP}}{S_{H\min}} \quad (1.21)$$

$S_{H\min}$  représente le coefficient de sécurité,  $Z_H$  le facteur géométrique,  $Z_{\varepsilon}$  le facteur de conduite et  $Z_M$  le facteur matériau. Ce dernier facteur permet de prendre en compte le comportement viscoélastique du Polyamide 6,6. Pour cela, des essais de spectrométrie ont été réalisés sur différents matériaux, dont le

Polyamide 6,6, pour obtenir la courbe maîtresse du module élastique en fonction de la température. Ensuite, le module estimé est intégré dans les relations (1.22) et (1.23). La fréquence de référence de cette courbe maîtresse n'est pas précisée dans la norme, mais nous supposons qu'elle est proche de celle des engrenages (cf. figure 1.33). Le taux d'humidité de l'essai de spectrométrie n'est également pas précisé. Sur la courbe, la chute du module élastique qui correspond au passage de la transition vitreuse débute à environ 60°C.

$$Z_M = \sqrt{0,36E} \quad (1.22)$$

Avec

$$E = \frac{2E_1.E_2}{E_1 + E_2} \quad (1.23)$$

$E_1$  est le module élastique du pignon et  $E_2$  celui de la roue.

Comme pour la contrainte en flexion  $\sigma_{FP}$ , la contrainte limite de base  $\sigma_H$  peut être déterminée par un abaque qui est fonction de la température de la dent à la surface et du nombre de cycles. Pour calculer cette température, le modèle de Hachmann et Strickle [69] est utilisé (1.20).

#### 1.4.2.3 Prise en compte de la déformation par la méthode VDI 2545

Un troisième point est à vérifier pour valider la tenue de l'engrenage : la flexion de la dent. En effet, les matériaux polymères ont un module élastique bas et peuvent être amenés à trop fléchir sans pour autant risquer une rupture en pied de dent. La déformation en tête de denture est modélisée par la relation (1.24).

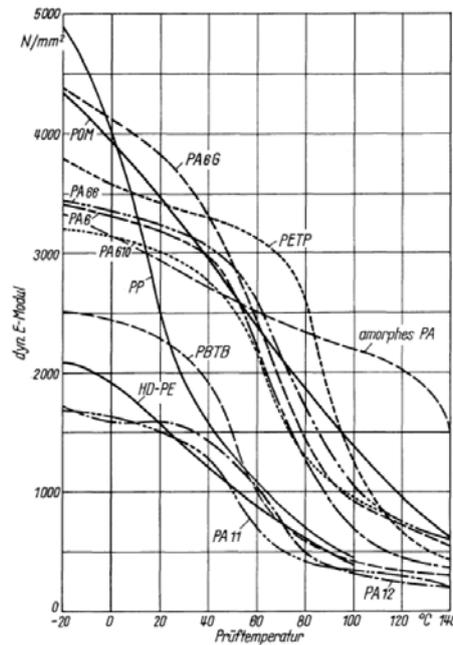
$$\lambda = \frac{3F_t}{2.b.\cos\alpha_t} \varphi \left( \frac{\psi_1}{E_1} + \frac{\psi_2}{E_2} \right) \quad (1.24)$$

$\varphi$  et  $\psi_i$  représentent des paramètres dont les valeurs peuvent être déterminées par des abaques fournis dans la norme. Comme dans le cas de la sécurité des flancs avec le facteur matériau  $Z_M$  (1.22), les modules élastiques sont obtenus en fonction de la température de la dent (cf. figure 1.33).

La tenue de l'engrenage est respectée si la condition suivante (1.25) est vérifiée.

$$\lambda < \frac{m_n}{10} \quad (1.25)$$

$m_n$  (mm) représente le module normal de l'engrenage.



**Figure 1.33** : Evolution du module élastique en fonction de la température, la fréquence de référence et le taux d'humidité ne sont pas précisés [55]

#### 1.4.2.4 Conclusion

Comme la plupart des normes, la VDI 2545 propose une méthode pour dimensionner rapidement un engrenage en polymère. Elle intègre la plupart des contraintes liées au matériau polymère : la dépendance du module élastique en fonction de la température à une fréquence de sollicitation que nous supposons être proche de celle des engrenages et l'échauffement de la température de volume et de surface de la dent avec un modèle analytique.

Cependant, la VDI 2545 a des limites. L'humidité relative du matériau n'est pas prise en compte. La courbe maîtresse est réalisée pour une seule fréquence de référence. Elle ne propose pas d'autres résultats comme l'erreur de transmission, la portée... Enfin, elle ne prend pas en compte les erreurs de montage et les corrections de profil.

La méthode globale « MARC » est maintenant décrite. Par rapport à la norme VDI 2545, la méthode global élément fini prend en compte une géométrie précise de l'engrenage et donne des résultats plus précis.

#### 1.4.3 Méthode éléments finis globale « MARC »

« MARC » est un code de calcul de type éléments finis qui peut être employé pour résoudre des problèmes de structure des engrenages (analyse de raideur d'engrènement, problème de contact entre les dents,...). En outre, l'aire de

contact entre les dents peut être simulée en utilisant les éléments de contact. Cependant, l'inconvénient majeur de ce type de méthode est le temps de calcul qui peut être très long pour une utilisation dans un milieu industriel.

Lin et Kuang [58] ont intégré dans leur modèle dynamique des éléments de « MARC ». Le modèle dynamique de Lin et Kuang [58] permet de simuler le contact entre les dents et l'usure d'un engrenage en Polyamide 6,6

Dans cette étude, le modèle éléments finis « MARC » est utilisé pour analyser la raideur d'engrènement et simuler l'aire de contact de la dent. La figure 1.34 présente le modèle éléments finis de l'engrenage et le maillage de la zone de contact. Dans le modèle dynamique de Lin et Kuang [58], la raideur de la dent est approximée par la relation linéaire suivante (1.26).

$$\bar{K}_{Nylon}(T) = \bar{K}_{Nylon}^* \cdot \frac{E_{Nylon}(T)}{E_{Nylon}^*} \quad (1.26)$$

$E_{Nylon}^*$  est le module d'Young du Polyamide 6,6 à 20°C,  $E_{Nylon}$  le module d'Young du Polyamide 6,6 fonction de la température  $T$ ,  $\bar{K}_{Nylon}^*$  la raideur flexible par unité de largeur à 20°C et  $\bar{K}_{Nylon}$  la raideur flexible par unité de face. Pour tenir compte de la viscoélasticité dans le modèle dynamique, le module du Polyamide 6,6 à la température  $T$  (1.26) est corrélée avec la relation (1.27). Cette relation a été déterminée en recalant des résultats expérimentaux présentés dans les travaux de Tsukamoto [70]. La nature de l'essai n'est pas précisée. Nous ne pouvons donc pas savoir s'il s'agit d'un essai dynamique ou monotone (traction-compression).

$$E_{Nylon}(T) = E_{Nylon}^* \cdot [-1.929 \cdot \ln(T) + 11.949] \quad (1.27)$$

La figure 1.35 montre l'évolution du module élastique en fonction de la température d'un matériau en Polyamide 6,6 estimée par la relation (1.27) ( $E_{Nylon}^* = 3,2GPa$ ). En comparant les résultats à ceux de la figure 1.33, nous constatons que le module chute d'un facteur trois. Par contre dans le cas de la figure 1.35, la chute du module élastique à la température de transition vitreuse est mal décrite.

Lin et Kuang intègre la vitesse uniquement dans le modèle d'usure utilisé [58] (1.28) et (1.29).

$$\text{Pour le pignon } h_{1A,n} = h_{1A,n-1} + \lambda \cdot \bar{p}_{A,n} \cdot 2a_0 \cdot \left(1 - \frac{u_{1A}}{u_{2A}}\right) \quad (1.28)$$

$$\text{Pour la roue } h_{2A,n} = h_{2A,n-1} + \lambda \cdot \bar{p}_{A,n} \cdot 2a_0 \cdot \left(\frac{u_{1A}}{u_{2A}} - 1\right) \quad (1.29)$$

$h_{1A,n}$  et  $h_{2A,n}$  sont les usures cumulées au point de contact A,  $\bar{p}_{A,n}$  la pression de contact moyenne au point A,  $\lambda$  le coefficient d'usure,  $a_0$  la demi-largeur du contact estimée avec la théorie de Hertz et  $u_{1A}$  et  $u_{2A}$  respectivement les vitesses linéaires du pignon et de la roue au point de contact 1.

La figure 1.36 décrit la simulation de l'usure sur le profil de l'engrenage le long de la ligne de contact pour un engrenage de type Polyamide 6,6/Polyamide 6,6. Les résultats montrent que l'usure est élevée en tête et en pied de denture. Elle est pratiquement nulle au point de roulement sans glissement.

Les méthodes globales éléments finis permettent de proposer des résultats supplémentaires par rapport aux méthodes présentées aux paragraphes 4.1 et 4.2 (ex : usure, partage des charges, prise en compte de la géométrie exacte de l'engrenage...). Néanmoins, elles présentent deux inconvénients majeurs : les temps de calcul sont en général longs et le comportement viscoélastique est pris en compte de manière simple sans l'humidité relative.

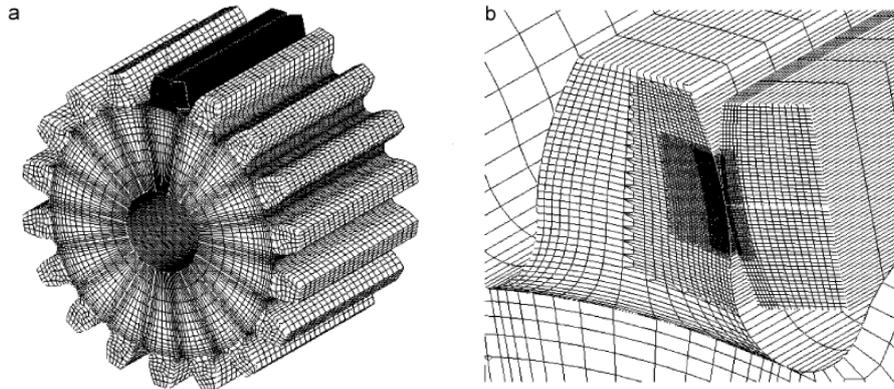


Figure 1.34 : (a) Modèle éléments finis de l'engrenage et (b) Détail du maillage de la zone de contact [58]

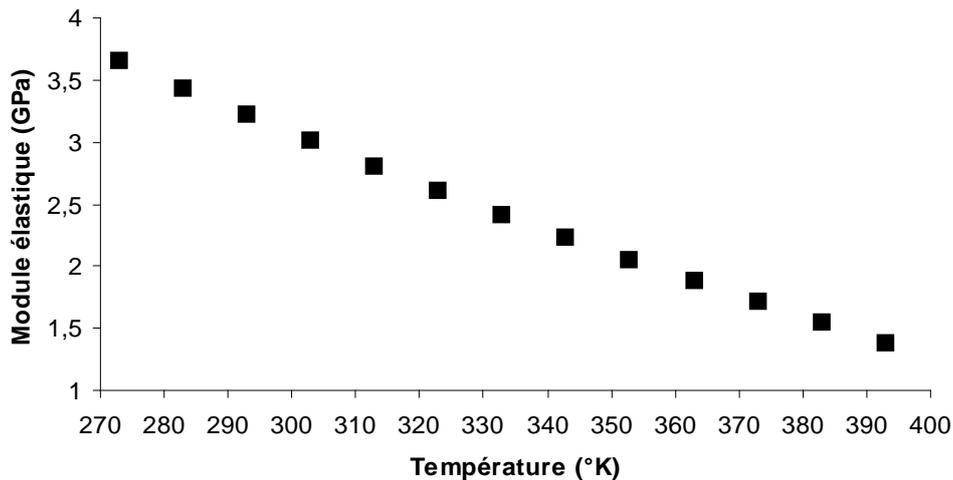
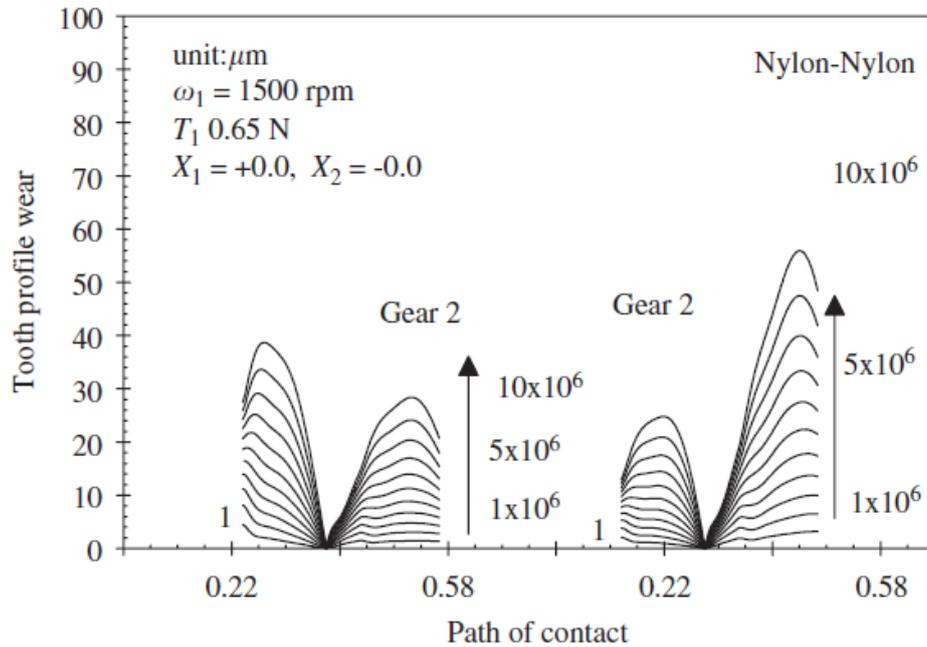


Figure 1.35 : Evolution du module élastique  $E_{Nylon}$  en fonction de la température



**Figure 1.36** : Usure simulée sur le profil d'un engrenage Polyamide 6,6/Polyamide 6,6 en fonction de la position de la ligne de contact à différentes vitesses [58]

#### 1.4.4 Méthode de modélisation du partage des charges

Par rapport aux méthodes précédentes, la modélisation complète du partage des charges permet d'obtenir rapidement plusieurs résultats essentiels pour dimensionner le comportement sous charge des engrenages : le partage des charges, les pressions de contact, l'erreur de transmission, la raideur d'engrènement, le rapprochement des corps, les contraintes en pied de dent et les déplacements de la dent. La modélisation du partage de charge prend également en compte la géométrie exacte de l'engrenage et les défauts d'assemblage.

Dans la plupart des problèmes de contact, la résolution consiste à déterminer une solution qui vérifie :

- Les équations de compatibilité.
- Les conditions d'équilibre.
- Le critère de contact.
- Les équations de l'élasticité.

### 1.4.4.1 Equations de compatibilité des déplacements

Vijayakar [71] et Vijayakar et Houser [72] utilisent les équations de compatibilité des déplacements pour résoudre le problème du partage des charges. Les méthodes développées au laboratoire LaMCoS utilisent également ces équations avec De Vaujany [62], Hiltcher [68], Jacquin [64], Icard [66] et Guingand [50]. Le problème peut être posé sous la forme suivante.

La figure 1.37 présente sur un schéma de principe le contact de type « bille-bille » entre deux corps.

Soit  $M_2(x, y)$  un point sur la surface du corps 2 et  $M_1(x, y)$  la projection de  $M_2$ , selon l'axe  $z$ , sur la surface du corps 1. Soit  $\delta(x, y)$  la distance, avant le chargement, entre les points  $M_1$  et  $M_2$ , mesurée selon l'axe  $z$ . Soit  $u_z(x, y)$  le déplacement des deux points sous l'effet du chargement par une force  $F$ . La distance après chargement,  $d(x, y)$ , entre les points  $M_1$  et  $M_2$  est vérifiée par la relation (1.30).  $\alpha$  est le rapprochement des corps.

$$d(x, y) = \delta(x, y) + u_z(x, y) - \alpha \quad \forall x, y \quad (1.30)$$

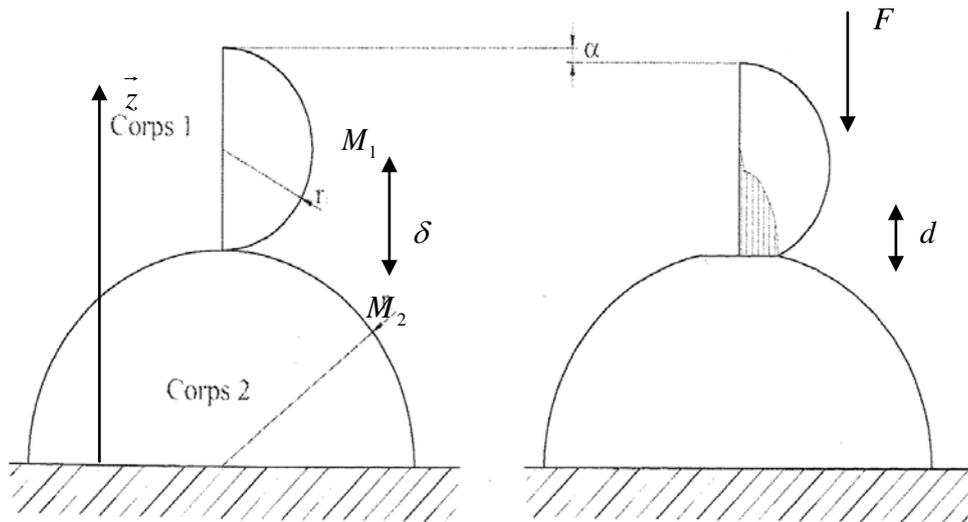


Figure 1.37 : Présentation du contact

Sur une zone de contact potentiel, la répartition des charges est recherchée, telle qu'elle satisfasse les équations de compatibilité des déplacements (condition de non pénétration des corps) en tout point des deux corps solides.

Soit  $p(x, y)$  la pression au point  $M_2$ . Les conditions de contact permettent d'écrire les relations suivantes (1.31) et (1.32).

Si  $M_2$  est en contact :

$$d(x, y) = 0 \text{ et } p(x, y) \geq 0 \quad (1.31)$$

Si  $M_2$  n'est pas en contact :

$$d(x, y) \geq 0 \text{ et } p(x, y) = 0 \quad (1.32)$$

Les inéquations (1.31) et (1.32) définissent la condition de contact (1.33).

$$d(x, y) \cdot p(x, y) = 0 \quad (1.33)$$

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire que l'ensemble des pressions s'équilibre avec le couple moteur (1.34).

$$C_m = \iint p \cdot (\vec{M} \wedge \vec{n}) dx dy \quad (1.34)$$

$\vec{n}$  est la normale au profil de la roue, direction de la pression,  $\vec{M}$  est le vecteur définissant le point  $M$  dans le repère de la roue.

Le problème de contact peut alors se résumer à rechercher le champ de pression qui vérifie les relations suivantes (1.35) et (1.36).

$$\forall x, y \begin{cases} \delta(x, y) + u_z(x, y) - \alpha = d(x, y) \\ d(x, y) \cdot p(x, y) = 0 \\ \iint p \cdot (\vec{M} \wedge \vec{n}) dx dy = C_m \end{cases} \quad (1.35)$$

Ou plus simplement :

$$\forall x, y \begin{cases} [\delta(x, y) + u_z(x, y) - \alpha] \cdot p(x, y) = 0 \\ \iint p \cdot (\vec{M} \wedge \vec{n}) dx dy = C_m \end{cases} \quad (1.36)$$

Pour résoudre le problème de contact (1.36), il est nécessaire de déterminer le champ de déplacement,  $u_z(x, y)$  en fonction du champ de pression  $p(x, y)$ .

Dans le cas des engrenages, le problème consistera à déterminer l'écart sous charge entre le pignon et la roue en fonction de la pression créée par le couple moteur en utilisant la problématique du contact, décrite ci-dessus, et en intégrant des termes liés aux déformations de flexion des deux corps et des termes liés aux déformations de surface au niveau de la zone de contact. Ceux-ci peuvent être exprimés sous la forme de coefficients, dits « coefficients d'influence ».

#### 1.4.4.2 Coefficients d'influence de surface

Pour intégrer les effets du contact, il existe plusieurs méthodes : Hertz, Kalker, Boussinesq...

Le modèle de Hertz peut être utilisé pour estimer la zone de contact entre les dents d'un engrenage [73]. Cependant, ce modèle n'est pas assez précis pour résoudre les problèmes de contact dans le cas de surface complexe.

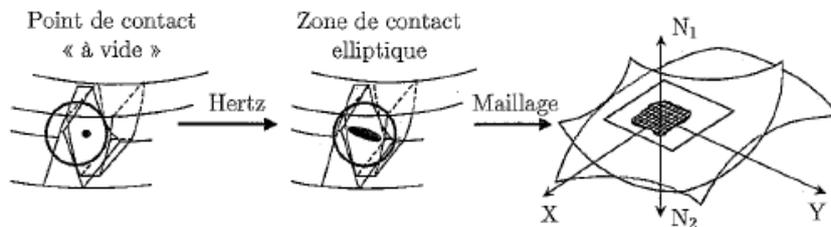
Les travaux de Kalker [74 – 76] sont une référence en ce qui concerne la résolution des problèmes de contact tridimensionnel, élastique, plastique, roulant et glissant. Kalker a développé de nombreux algorithmes qui permettent de calculer le contact élastique et plastique entre deux solides soumis à un chargement quelconque aussi bien en statique qu'en dynamique. Les principaux avantages des algorithmes de contact de Kalker sont la très grande rapidité de convergence, et une intégration possible avec d'autres méthodes comme des modèles de comportement élastique. Mais l'inconvénient majeur provient de la nécessité de connaître les champs de contraintes à chaque itération du calcul. Dans le cas d'un couplage avec une méthode par éléments finis par exemple pour le calcul des contraintes, les temps de calcul deviennent très importants.

La théorie de Boussinesq détermine le champ de déplacement dans un espace semi-infini, lorsque cet espace est soumis à un effort normal ponctuel  $p$  [77].

Le laboratoire LaMCoS a choisi d'utiliser la théorie de Boussinesq pour calculer les coefficients d'influence de surface. La figure 1.38 présente le maillage de la zone potentielle de contact dans le plan tangent pour un engrenage spiro-coniques. Dans le cas d'engrenages cylindriques à développantes de cercle, le contact est linéaire.

A partir de la simulation de la cinématique à vide, les différentes lignes de contact sont déterminées. La taille de la zone de contact est estimée en utilisant la théorie de Hertz, puis elle est maillée dans le plan tangent entre les deux dents en contact. Les coefficients d'influence de surface  $C_{kj}^S$  représentent le déplacement au point  $j$  pour une charge appliquée au point  $k$  et sont connus analytiquement. Ils sont obtenus en intégrant les relations de Boussinesq [66] sur des mailles rectangulaires (1.37).

$$C_{kj}^S = W_j(x, y) = \frac{1 - \nu_j^2}{\pi \cdot E_j} \cdot \int_{Sc} \frac{P(x', y') \cdot dx' \cdot dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (1.37)$$



**Figure 1.38 :** Maillage de la zone potentielle de contact dans le plan tangent [66]

### 1.4.4.3 Coefficients d'influence de flexion

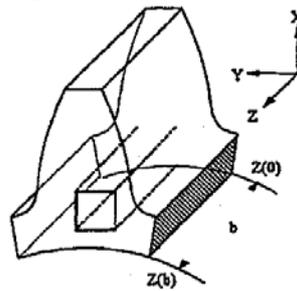
Pour déterminer les coefficients d'influence de flexion, le laboratoire LaMCoS utilise un calcul éléments finis à partir d'un chargement unitaire en chaque point du maillage. Le calcul par éléments finis est réalisé une seule fois afin de calculer les coefficients de flexion pour toutes les positions cinématiques [78]. Les résultats sont en accord avec l'expérience [64].

La méthode des éléments finis à l'avantage de prendre en compte les différentes géométries mais avec des longs temps de calcul. Afin de les réduire, certains auteurs ont mis au point différentes méthodes.

Olakoré [61], De Vaujany [62], Guingand [59] et Kim [63] utilisent la méthode des Prismes finis pour étudier le comportement élastique d'engrenages cylindriques en involute droits et hélicoïdaux (cf. figure 1.39).

La fonction de déplacement est obtenue à partir de deux fonctions polynomiales dans deux directions et de fonctions série dans la troisième direction (largeur de denture), où il n'y a pas de variation géométrique ni de matériau.

Cette méthode permet de diminuer les temps de calcul, et la mémoire requise (respectivement 80 fois plus rapide et 6 fois moins de mémoire nécessaire).

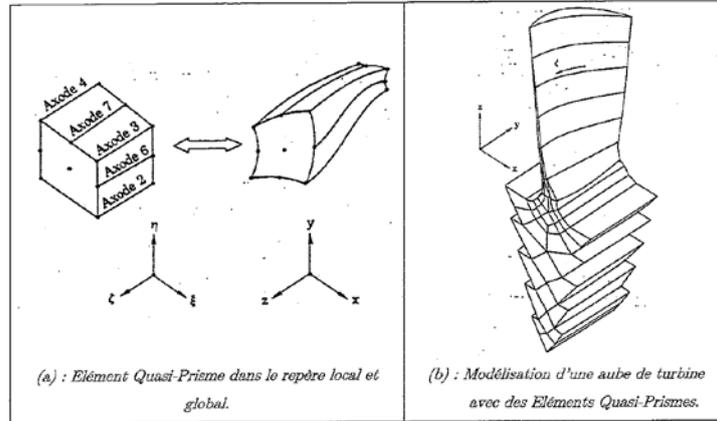


**Figure 1.39** : Méthode des Prismes finis [62]

D'autres auteurs comme Vijayakar et al. [79] utilisent la méthode des éléments quasi-Prismes pour étudier le comportement élastique de structures dont la section reste constante ou quasi-constante selon une direction. Ce type de modélisation est applicable pour des structures comme les dents d'engrenages, les aubes de turbines, les arbres de transmission... La figure 1.40 présente un élément quasi-prisme dans le repère local et global ainsi que l'utilisation de ce type d'éléments pour modéliser le comportement élastique d'une aube de turbine.

Cette méthode peut être intéressante car, suivant la direction où la structure a une section quasi-constante, elle permet de diminuer le nombre total d'éléments nécessaires pour obtenir une bonne précision. Cela se traduit donc par une diminution du temps de calcul par rapport à une modélisation classique par éléments finis.

Par contre, cette méthode est limitée à des géométries quasi-prismatiques et la précision finale du résultat dépend du degré d'interpolation des fonctions de formes (polynômes de Chebyshev) suivant la direction de la section quasi-constante.



**Figure 1.40 : Méthode des éléments quasi-Prismes [79]**

Certains auteurs comme Simon [80] et [81] et Guingand et al. [82] ont développé des fonctions de déplacements de volume. Toutefois ces fonctions restent applicables aux cas particuliers pour lesquels elles ont été développées : Simon [80] et [81] pour les engrenages roue et vis et Guingand et al. [82] pour les hélicoïdaux.

Récemment Teixeira et al. [78] proposent d'associer les fonctions de déplacements de volume et les calculs éléments finis. La précision de cette méthode est comparable à celle d'un calcul éléments finis avec l'avantage d'être plus rapide en temps de calcul (environ 1 heure au lieu de 10 heures de calcul). Cette méthode a été intégrée dans les modèles quasi-statiques de partage des charges pour les engrenages spiro-coniques [78].

#### 1.4.4.4 Résolution

Une fois les coefficients de surface et de flexion calculés, il faut résoudre l'équation de compatibilité des déplacements (1.38) et l'équation d'équilibre (1.39) sur le maillage tangent au contact, afin d'obtenir la répartition des charges (cf. figure 1.41).

$$\sum_{j=1}^N (C_{kj}^f + C_{kj}^s) \cdot P_j + \varepsilon_k = \alpha \quad (1.38)$$

$$\sum_{k=1}^N P_k \cdot (\overline{M}_k \wedge \overline{n}_k) S_k = C_m \quad (1.39)$$

L'équation de compatibilité des déplacements peut être résolue par la méthode du point fixe qui ne pose aucun problème de convergence. D'autres méthodes ont été développées et utilisées pour résoudre le problème de contact élastique avec friction entre les dents d'engrenages comme par exemple la méthode du SIMPLEX... [61]. La plupart de ces méthodes présentent un inconvénient majeur qui est le problème de convergence de certains algorithmes.

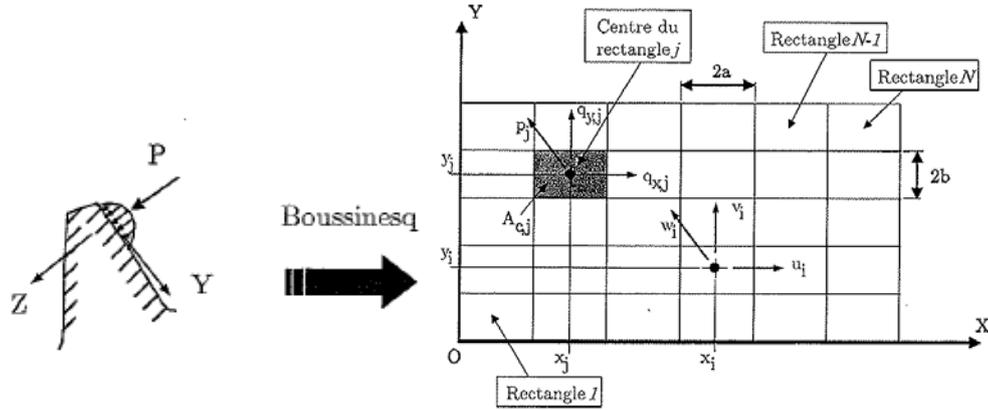


Figure 1.41 : Calcul des coefficients de surface de Boussinesq [66]

#### 1.4.4.5 Conclusion

En résumé, le modèle développé par le LaMCoS est basé sur la résolution des équations de compatibilité des déplacements et l'utilisation des coefficients d'influence. Par rapport aux modèles présentés aux paragraphes 4.1, 4.2 et 4.3, cette méthode a l'avantage de proposer la plupart des résultats pour le dimensionnement des engrenages (erreur de transmission, pression de contact, partage des charges...) en tenant compte de la géométrie de l'engrenage et avec un temps de calcul assez court.

Les coefficients d'influence de contact permettent d'intégrer les effets du contact, ils sont calculés avec les équations de Boussinesq. Les coefficients d'influence de flexion sont calculés avec un calcul éléments finis et une base de fonction. Ainsi, il est possible de prendre en compte les déformations de volume quelque soit la géométrie de l'engrenage.

La méthode de la modélisation du partage des charges développée par le LaMCoS a été validé pour plusieurs géométries d'engrenages (spiro-coniques, faces, roue et vis et cylindriques). Par ces nombreux avantages, nous utilisons cette méthode pour développer le modèle de partage des charges pour les engrenages en Polyamide 6,6.

---

## 1.5 Conclusion

Au cours de cette revue bibliographique, la plupart des aspects liés au problème de la modélisation du comportement mécanique des engrenages en ont été passés en revue. Ce vaste sujet se situe à la frontière de la science des matériaux et de la mécanique des engrenages.

Le comportement mécanique du Polyamide 6,6, matériau semi-cristallin, dépend du temps, de la charge, de la température, de l'historique de la déformation et de l'humidité.

Dans le domaine linéaire, il existe plusieurs modèles rhéologiques pour modéliser le comportement mécanique du matériau. Celui de Kelvin généralisé a été choisi, car il semble le plus adapté pour les matériaux ayant un large spectre de temps relaxation comme le Polyamide 6,6. Cependant, ce modèle nécessite de déterminer les complaisances élastiques et les temps de relaxation pour chaque élément de Kelvin-Voigt.

Pour modéliser le comportement sous charge des engrenages en Polyamide 6,6, plusieurs méthodes ont été explorées, afin de répondre aux contraintes de rapidité, précision et nombre de résultats proposés. Dans les méthodes analysées, il ressort que la prise en compte de la viscoélasticité n'est pas satisfaisante. Une adaptation de la méthode développée par le LaMCoS pour des engrenages en métal s'avère intéressante. En effet, elle intègre les équations de compatibilité des déplacements, la théorie de Boussinesq et des calculs éléments finis standards pour avoir un bon compromis entre temps de calcul et précision des résultats.

La loi de déplacement et le maillage ne seront pas identiques à la méthode du LaMCoS. La loi de déplacement est viscoélastique et peut provenir du modèle linéaire de Kelvin généralisé. Le maillage doit pouvoir enregistrer le déplacement des nœuds pour chaque position cinématique, de manière à prendre en compte l'historique du déplacement.

Les Polyamides sont très sensibles à la variation de la température. Par conséquent, il est impossible de ne pas tenir compte de l'échauffement de l'engrenage dans le modèle de partage des charges développé. Pour cela, les modèles thermiques de Block et de Hooke pourront être utilisés. Cependant, ces modèles nécessitent de connaître le coefficient de frottement dynamique dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6. Des essais seront réalisés pour le déterminer.

Enfin, pour valider le modèle quasi-statique de partage des charges, une comparaison des valeurs simulées de l'erreur de transmission sous charge avec celles mesurées peut être envisagée.

# Chapitre 2 : Choix de la loi de comportement et identification des paramètres du Polyamide 6,6

---

## Introduction

Nous avons vu, dans la revue bibliographique, qu'il est nécessaire d'obtenir le déplacement sous charge de la dent pour résoudre les équations de compatibilité des déplacements. Dans le cas de l'acier, l'obtention du déplacement est assez simple du fait de sa loi de comportement élasto plastique. Mais dans le cas d'un engrenage en polymère, son obtention est moins aisée du fait du comportement mécanique viscoélasto plastique.

Pour déterminer le déplacement d'un matériau en Polyamide 6,6, le modèle rhéologique choisi pour décrire le comportement mécanique de ce polymère est présenté.

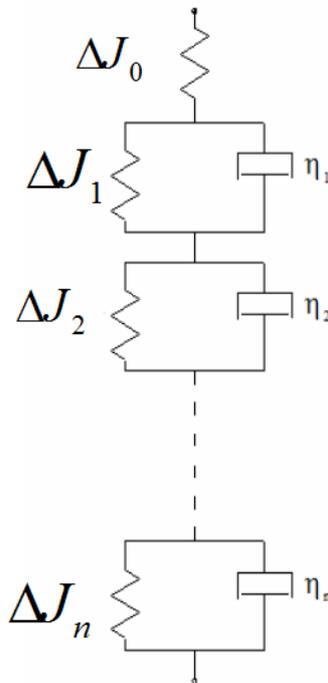
Pour utiliser ce modèle, il est nécessaire de déterminer les propriétés viscoélastiques du matériau. La littérature fournit des données expérimentales sur les propriétés viscoélastiques des polymères mais pas dans le cas de notre matériau. Il est donc plus précis de les déterminer expérimentalement. Deux types d'essai sont effectués. Les essais statiques de fluage sont réalisés afin de déterminer la limite de linéarité à différentes températures. Cette donnée est essentielle car le modèle rhéologique utilisé est linéaire. Les essais dynamiques de spectrométrie permettent de connaître l'évolution du module élastique et de la complaisance complexes, en fonction de la fréquence ou de la température, par le biais de courbes maîtresses. Ensuite, les propriétés viscoélastiques dans une large gamme de température et de fréquence sont déduites via une modélisation phénoménologique des résultats expérimentaux de spectrométrie. Enfin avec la méthode développée, il est possible de déterminer le déplacement de la dent d'un engrenage à partir du modèle rhéologique et des propriétés viscoélastiques du Polyamide 6,6.

La dernière étape de ce chapitre est d'analyser si la dent d'un engrenage peut être considéré comme complètement relaxée lorsqu'elle entre à nouveau dans l'engrènement.

## 2.2 Modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6

### 2.2.1 Choix du modèle rhéologique

Nous avons présenté dans la revue bibliographique que le modèle rhéologique qui nous semble le plus adapté pour décrire le comportement mécanique du Polyamide 6,6 est celui de Kelvin généralisé rappelé en figure 2.1. Il est construit à partir d'un ressort et de plusieurs éléments de Kelvin-Voigt en série. Nous rappelons que ce modèle est utilisé dans l'hypothèse des petites déformations et contraintes, c'est-à-dire que nous considérons que la réponse mécanique du matériau reste dans le domaine linéaire.



*Figure 2.1 : Modèle de Kelvin généralisé*

### 2.2.2 Calcul du déplacement viscoélastique du modèle de Kelvin généralisé

Pour un bloc de Kelvin-Voigt, nous donnons la fonction fluage (2.1) et l'équation différentielle associée (2.2).

$$\varepsilon_i(t) = \sigma(t) \cdot \Delta J_i \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right) \quad (2.1)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{\Delta J_i} \varepsilon_i(t) + \frac{\tau}{\Delta J_i} \dot{\varepsilon}_i(t) \quad (2.2)$$

$\Delta J_i = (J_r - J_0)W_i = J_{i+1} - J_i$  est la complaisance d'un bloc de Kelvin-Voigt dans le modèle de Kelvin généralisé,  $i$  l'indice du bloc de Kelvin-Voigt,  $\tau_i$  le temps de relaxation et  $W_i$  son poids statistique.

La relation (2.1) est généralisée pour l'ensemble du modèle de Kelvin généralisé (2.3).

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(t) = J_0 \sigma(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \quad (2.3)$$

$J_0$  représente la complaisance du ressort 0.

Dans une base temporelle, la complaisance peut être mise sous la forme de la relation (2.4).

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \Delta J_i \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right) + J_0 \quad (2.4)$$

La complaisance dans une base complexe est donnée par la relation (2.5) avec la complaisance de conservation (2.6) et la complaisance de perte (2.7).

$$J^*(i\omega, T_{ref}) = J_0 + (J_r - J_0) \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{1 + i\omega\tau_i} \quad (2.5)$$

$$J'(\omega, T_{ref}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta J_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2} + J_0 \quad (2.6)$$

$$J''(\omega, T_{ref}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta J_i \omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2} \quad (2.7)$$

Nous rappelons que pour un matériau polymère, les propriétés mécaniques peuvent être décrites dans une base temporelle ou dans une base fréquentielle. Le lien entre ces deux bases est effectué par les transformés de Laplace-Carson [3].

A partir de l'équation différentielle (2.2), qui est valable pour un bloc de Kelvin-Voigt, et par un schéma incrémental, il est possible de déterminer une loi qui régit le déplacement du modèle de Kelvin généralisé (2.9).

$\varepsilon_i(t)$  peut être remplacée par la relation (2.8) en utilisant la méthode des différences finies.

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \frac{\varepsilon_i(t) - \varepsilon_i(t-dt)}{dt} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \sum_{i=0}^n \Delta J_i \left( \frac{dt}{dt + \tau_i} \right) + \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(t-dt) \left( \frac{\tau_i}{dt + \tau_i} \right) \text{ avec } \tau_0 = 0 \quad (2.9)$$

Le déplacement viscoélastique (2.10) est alors déduit de (2.9).

$$\frac{u(t)}{l} = \sigma(t) \sum_{i=0}^n \Delta J_i \left( \frac{dt}{dt + \tau_i} \right) + \sum_{i=0}^n u_i(t-dt) \left( \frac{\tau_i}{dt + \tau_i} \right) \quad (2.10)$$

$l$  est la longueur de l'échantillon de Polyamide 6,6.

A partir de la relation (2.10), nous pouvons déterminer le déplacement global du modèle de Kelvin généralisé à un instant  $t$ , soumis à une contrainte  $\sigma(t)$  avec le déplacement à  $t-dt$ . Cette relation contient les propriétés mécaniques du Polyamide 6,6 avec la complaisance élastique  $\Delta J_i$  et les temps de relaxation  $\tau_i$ . Ces propriétés seront déduites des essais de caractérisation qui seront détaillés dans le paragraphe suivant.

Par rapport à une approche incrémentale décrite précédemment, il est également possible de calculer de manière analytique la déformation  $\varepsilon(t)$  (2.11).

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma}{dt'}(t') dt' \quad (2.11)$$

Le déplacement viscoélastique (2.12) est alors déduit de (2.11).

$$\frac{u(t)}{l} = \int_0^t J(t-t') \frac{d\sigma}{dt'}(t') dt' \quad (2.12)$$

Les relations (2.10) et (2.12) donnent les mêmes résultats. Cependant, nous emploierons, dans la modélisation du partage des charges, la relation (2.10) qui est plus simple d'utilisation contrairement à la relation (2.12) car elle ne nécessite pas de connaître à priori la contrainte en fonction du temps.

---

## 2.3 Essais de caractérisation

### 2.3.1 Mesure temporelle : Fluage

---

Le modèle de Kelvin généralisé utilisé dans cette étude est linéaire. Il est donc nécessaire d'estimer la limite de linéarité du matériau pour l'utiliser. En cas de comportement non-linéaire, d'autres lois de comportement doivent être utilisées.

#### 2.3.1.1 Dispositif de mesure de l'essai de fluage

Les essais de fluage ont été réalisés, au laboratoire MATEIS de l'INSA de Lyon, sur une machine conventionnelle de traction-compression MTS avec une cellule de force de 100 N. La figure 2.2 présente une photo de la machine de traction MTS.



*Figure 2.2 : Machine MTS de traction-compression*

Le serrage des échantillons est effectué par des mors pneumatiques. Un système de protection des câbles de pression pneumatique a été utilisé pour éviter des ruptures lors des essais à chaud. Les mors pneumatiques permettent un serrage

maximal en pression. Pour les essais en température, l'échantillon est enfermé dans une étuve régulée en température.

Les tests de fluage ont été réalisés sous contrainte constante. L'appareil fournit la force de traction  $F$  exercée sur l'échantillon, en fonction du déplacement  $\Delta L$  de la traverse. La contrainte vraie  $\sigma$  et la déformation vraie  $\varepsilon$  sont calculées, en considérant que le volume de l'échantillon reste constant au cours de l'essai, par les relations (2.13) et (2.14).

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \left( 1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon = \ln \left( 1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right) \quad (2.14)$$

$L_0$  est la longueur initiale et  $S_0$  la section initiale de l'échantillon.

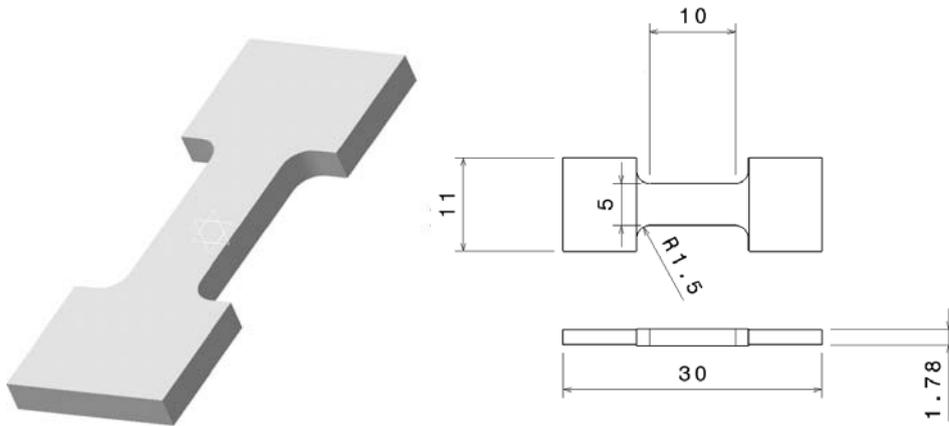
La déformation est enregistrée selon une périodicité donnée et une courbe de fluage en fonction du temps  $\varepsilon = f(t)$  est tracée. La pente en un point de la courbe détermine la vitesse de fluage en ce point.

### 2.3.1.2 Essais

Pour le fluage, deux tests ont été mis en oeuvre : à température ambiante et à 80°C.

Les essais à température ambiante ont été réalisés sur une durée de 500 minutes à différents niveaux de contrainte : 5 MPa, 10 MPa, 12,5 MPa et 15 MPa. Ceux à 80°C ont été effectués sur une durée de 300 minutes à deux niveaux de contrainte : 4 MPa et 8 MPa. A 80°C, il n'a pas été nécessaire de réaliser des essais jusqu'à 500 minutes, car à 300 minutes les résultats montrent que la complaisance à 4 MPa ne variait plus.

Les échantillons ont été séchés pendant trois jours dans une étuve à sec à 50°C. Ils ont été taillés directement sur des engrenages achetés dans le commerce et possèdent une forme d'haltère. La figure 2.3 présente leur géométrie avec les dimensions.

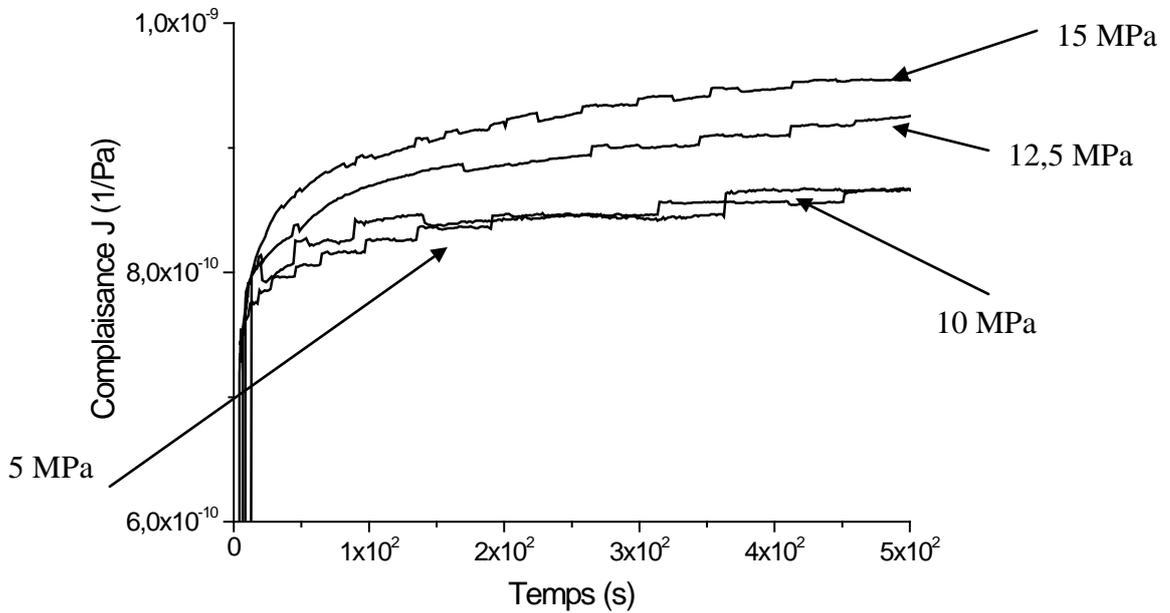


**Figure 2.3 :** Géométrie et dimensions de l'éprouvette de fluage

### 2.3.1.3 Résultats et analyse

#### 2.3.1.3.1 Domaine de linéarité à sec et à température ambiante

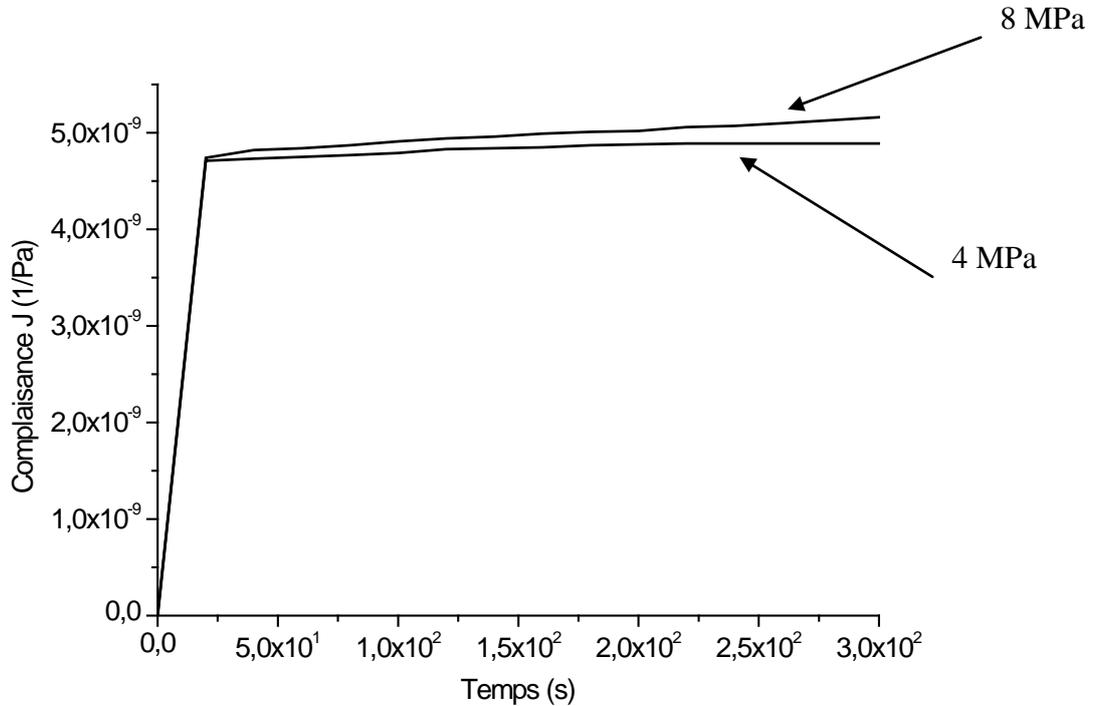
La figure 2.4 montre la complaisance en fonction du temps à 5 MPa, 10 MPa, 12,5 MPa et 15 MPa. Nous pouvons noter qu'à 5 MPa et 10 MPa les courbes se superposent, par contre ce n'est pas le cas à 12,5 MPa et 15 MPa où la complaisance élastique dépend du taux de contrainte appliqué. Nous pouvons donc conclure que la limite de linéarité se situe entre 10 MPa et 12,5 MPa.



**Figure 2.4 :** Complaisance de traction en fonction du temps à température ambiante

### 2.3.1.3.2 Domaine de linéarité à sec et à 80°C

La figure 2.5 montre la complaisance en fonction du temps à 4 MPa et 8 MPa. Nous pouvons noter que les courbes se superposent. Nous pouvons donc conclure que la limite de linéarité est supérieure à 8 MPa.



*Figure 2.5 : Complaisance de traction en fonction du temps à 80°C avec des échantillons séchés*

## 2.3.2 Mesure fréquentielle : DMA (Dynamic mechanical analysis)

### 2.3.2.1 Dispositif de mesure de l'essai de DMA

La spectrométrie mécanique permet l'étude des propriétés viscoélastiques d'un matériau par la mesure de son module dynamique en fonction de la température (mesures isochrones) ou de la fréquence (mesures isothermes). Lors de ce type d'essai, l'échantillon est soumis à une contrainte sinusoïdale (2.15) de faible amplitude pour rester dans le domaine linéaire du matériau.

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (2.15)$$

La déformation résultante (2.16) est également sinusoïdale, mais retardée d'un angle  $\phi$  par rapport à la contrainte.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (2.16)$$

Le module  $G^*$  symbolise le module de rigidité complexe (ou module élastique complexe), il est le lien entre la contrainte et la déformation dynamique.  $J^*$  représente la complaisance élastique complexe. Elle lie la déformation dynamique et la contrainte (2.17).

$$\begin{cases} G^*(i\omega) = G' + iG'' \\ J^*(i\omega) = J' + iJ'' \\ J^*(i\omega) = \frac{1}{G^*(i\omega)} \end{cases} \quad (2.17)$$

$G'$ , le module de conservation, est la partie réelle du nombre complexe  $G^*(i\omega)$  et il représente la partie élastique du matériau.  $G''$ , module de perte, est la partie imaginaire et il représente la partie visqueuse du matériau.  $J'$  est la complaisance de conservation et  $J''$  la complaisance de perte. L'angle de déphasage  $\phi$  est relié à la capacité d'amortissement du matériau. Le facteur de perte  $\tan \phi = G''/G'$  caractérise le frottement intérieur.

Pour caractériser complètement le comportement viscoélastique linéaire du matériau, il suffit de connaître l'une des fonctions complexes  $G^*$  ou  $J^*$ . Pour une fréquence donnée, chaque mesure fournit deux paramètres caractéristiques du matériau étudié  $G'$  et  $G''$  ou  $J'$  et  $J''$ .

Les essais expérimentaux ont été réalisés au laboratoire MATEIS avec un pendule de torsion inversé travaillant en oscillations forcées et à basse fréquence. Il se compose d'une partie mécanique permettant la sollicitation en torsion de l'échantillon et d'une partie électronique qui assure le pilotage en fréquence de l'expérience ainsi que le traitement des mesures. La photo du spectromètre est représentée sur la figure 2.6 et le schéma de principe sur la figure 2.7.

L'échantillon de forme parallélépipédique est fixé par son extrémité inférieure à un mors fixe. Le mors supérieur est fixé à une tige rigide sur laquelle s'applique un couple de torsion, créé par l'interaction entre un aimant et des bobines parcourues par un courant sinusoïdal. La déformation angulaire de l'échantillon est obtenue par un dispositif laser. L'élimination de tout effort axial est assurée à l'aide d'un fil de suspension compensant le poids de l'échantillon et du mors supérieur.

L'échantillon est entouré d'un four cylindrique, lui-même contenu dans une enceinte étanche. Il est possible d'immerger l'enceinte dans de l'azote liquide et de faire le vide ou d'y injecter de l'hélium qui permet un meilleur échange thermique.



Figure 2.6 : Spectromètre

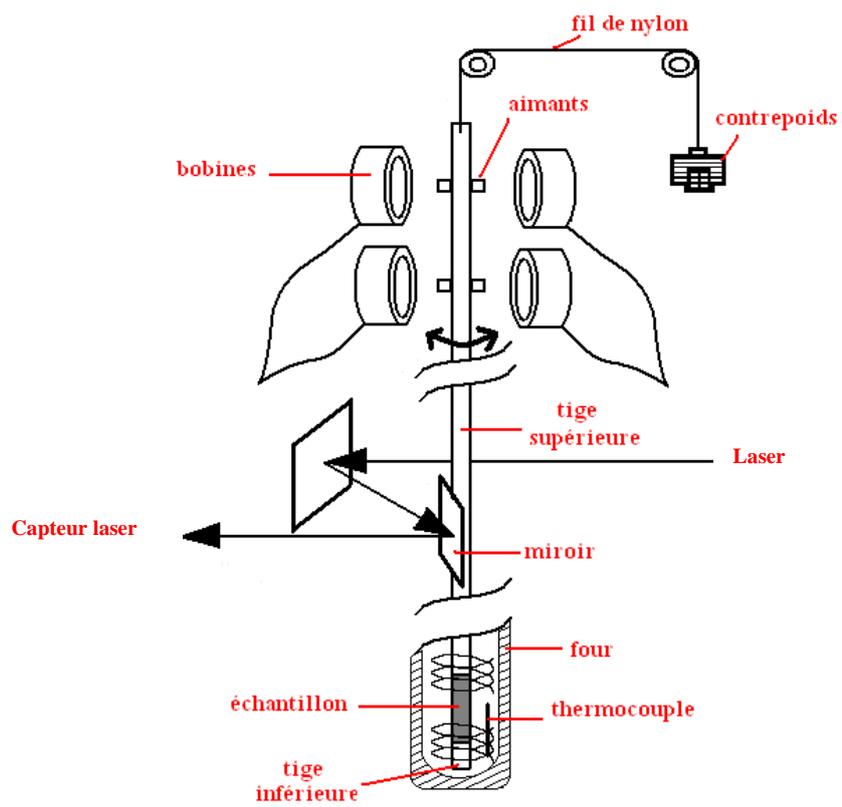


Figure 2.7 : Schéma détaillé du spectromètre

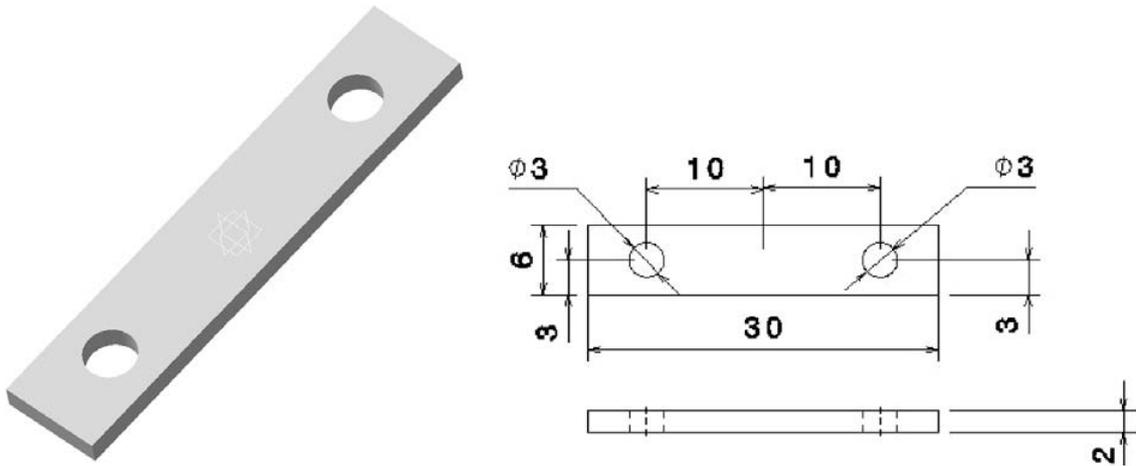
### 2.3.2.2 Essais

Pour identifier les propriétés mécaniques du Polyamide 6,6 sous une atmosphère sèche ou humide, nous avons fait plusieurs essais sur une plage de fréquence de 1 mHz à 1 Hz à une température allant de 0°C à 130°C, par pas de 5°C. Nous avons travaillé sous atmosphère d'hélium, à une pression de 600 mB.

Comme pour les essais de fluage, les échantillons ont été taillés directement sur des engrenages en Polyamide 6,6. Ils ont une forme parallélépipédique, la figure 2.8 présente la géométrie de l'échantillon avec ses dimensions.

Pour les tests de spectrométrie à sec, les échantillons ont été séchés pendant trois jours à 50°C dans une étuve. Pour ceux en milieu humide, ils ont été dans un premier temps entièrement séchés puis dans un second temps, conditionnés pendant une semaine dans une étuve à humidité contrôlée. Les différents taux d'humidité sont 30%, 40% et 60%.

A température ambiante pour obtenir une bonne humidité dans le matériau, les échantillons sont d'abord placés dans l'étuve à humidité contrôlée à une température proche de la Tg pour augmenter la mobilité des chaînes du polymère et faciliter la prise d'humidité et la température est abaissée par palier de 10°C toutes les 12 heures.



**Figure 2.8** : Géométrie et dimensions des échantillons de spectrométrie

### 2.3.2.3 Résultats

#### 2.3.2.3.1 Influence de la température

La figure 2.9 présente les résultats des essais de spectrométrie. A partir de ces résultats et en utilisant l'équivalence temps-température, nous avons construit une courbe maîtresse. Cela consiste à translater chaque courbe obtenue d'un

facteur appelé coefficient de translation thermique. Ce coefficient est égal à 1 à la courbe de la température de référence choisie. La courbe maîtresse permet ainsi d'obtenir l'évolution de la complaisance complexe sur une large plage de fréquences ou de températures. Elle permet également d'estimer les propriétés mécaniques à des fréquences ou des températures non accessibles expérimentalement.

La courbe maîtresse obtenue est présentée en figure 2.10 à une température de référence de 0°C. L'allure de cette courbe suggère que l'équivalence temps-température peut être appliquée en première approximation et valide donc notre démarche.

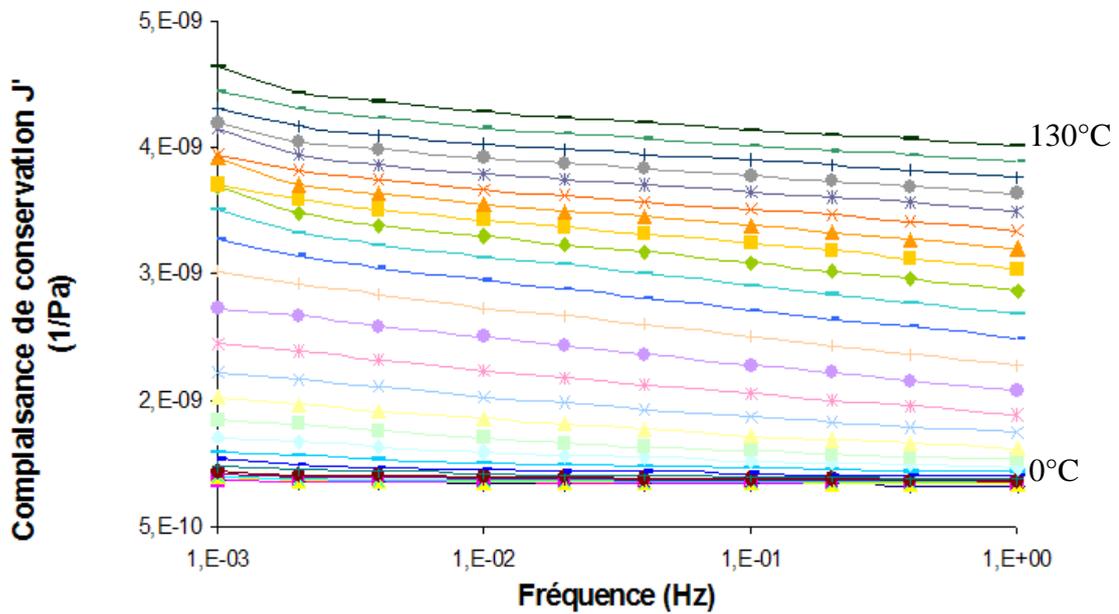
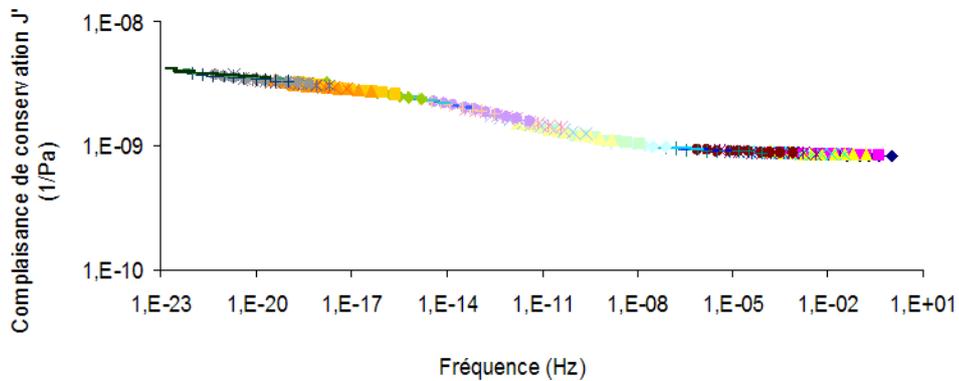
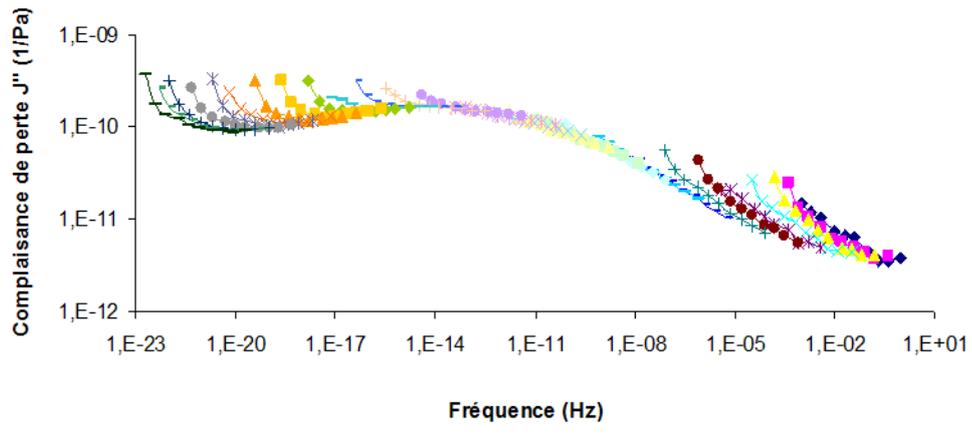


Figure 2.9 : Evolution de la complaisance de conservation sur une plage de fréquence fixe à différentes températures allant de (♦) 0°C à (-) 130°C

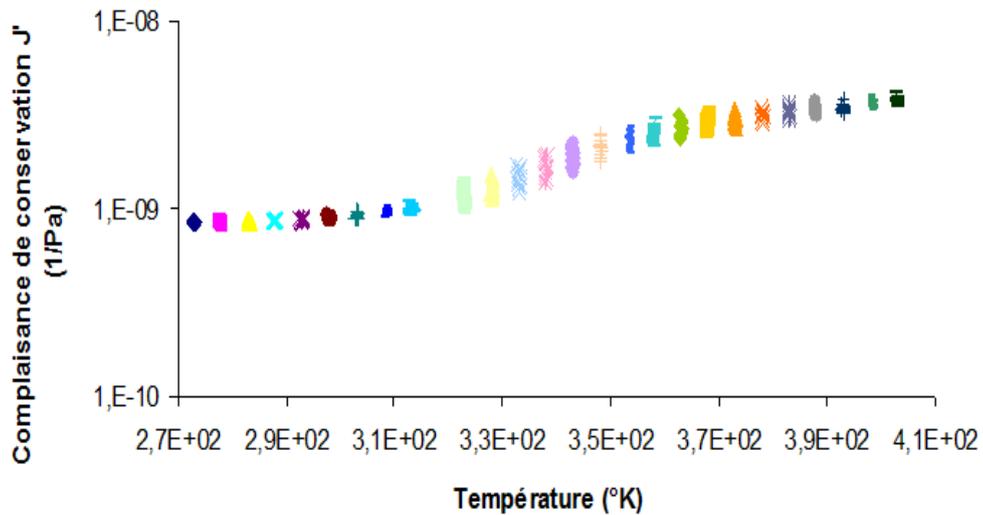


(a)



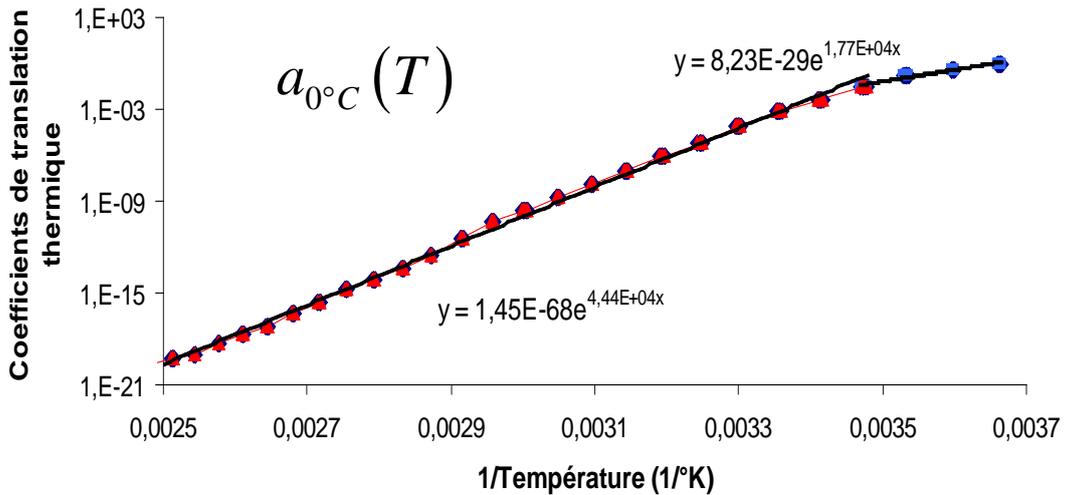
**Figure 2.10 :** Courbe maîtresse déduite des mesures isothermes de spectrométrie mécanique à une température de référence de 0°C et à sec, (a) complaisance de conservation et (b) complaisance de perte

La figure 2.11 présente la courbe maîtresse en fonction de la température pour plusieurs fréquences de référence allant de  $10^{-3}$  Hz à 1 Hz.



**Figure 2.11 :** Courbes maîtresse en fonction de la température pour plusieurs fréquences de référence allant de  $10^{-3}$  Hz à 1 Hz

Les coefficients de translation thermique nécessaires pour construire la courbe maîtresse à une température de référence de 0°C et à sec sont montrés sur la figure 2.12.



*Figure 2.12 : Distribution des coefficients de translation thermique à une température de référence de 0°C (à sec)*

A l'analyse des résultats des figures 2.10 et 2.11, ces courbes qui caractérisent le comportement mécanique du polyamide 6,6 peuvent être divisées en trois parties :

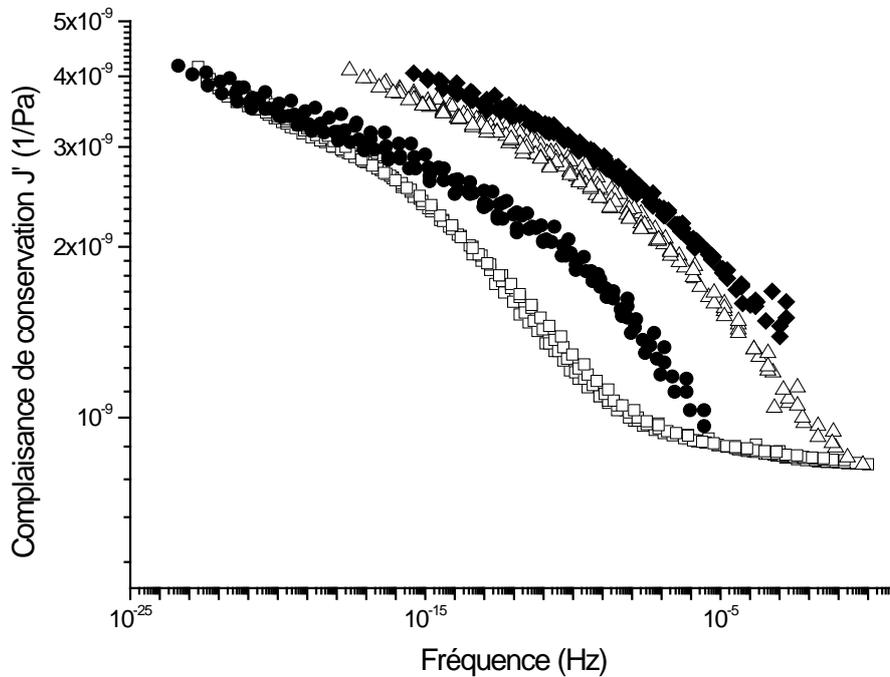
- Aux basses fréquences correspondant aux hautes températures, la complaisance élastique est plus élevée, ce qui signifie que le matériau est moins rigide et sa déformation est élevée. A cette température, les temps de relaxation sont très courts.
- A température intermédiaire ou fréquence intermédiaire, il y a une chute sur la figure 2.10 (a) ou une augmentation sur la figure 2.11. Les temps de relaxation sont intermédiaires. Cette transition s'accompagne d'un pic de dissipation visible sur la figure 2.10 (b).
- Aux hautes fréquences correspondant aux basses températures, la complaisance élastique est faible, ce qui signifie que le matériau est plus rigide et sa déformation est faible. A cette température, les temps de relaxation sont très longs.

### 2.3.2.3.2 Influence de l'humidité

La figure 2.13 présente quatre courbes maîtresses en fonction de la fréquence obtenues à sec et à différents taux d'humidité (30%, 40% et 60%) à une température de référence de 0°C.

Dans l'analyse bibliographique, nous avons pu observer qu'une variation d'humidité a le même effet qu'une variation de température, c'est-à-dire un décalage de la courbe maîtresse et une baisse de la température de transition

vitreuse. Ici les résultats de la figure 2.13 confirment cet effet : en faisant varier l'humidité, les différentes courbes sont décalées les unes par rapport aux autres. Les temps de relaxation sont donc modifiés, mais pas les complaisances relaxées et non relaxées.



**Figure 2.13** : Courbes maîtresse déduites des mesures isothermes de spectrométrie mécanique à une température de référence de  $0^{\circ}\text{C}$  : ( $\square$ ) 0% d'humidité, ( $\bullet$ ) 30% d'humidité, ( $\triangle$ ) 40% d'humidité et ( $\blacklozenge$ ) 60% d'humidité

## 2.4 Modélisation viscoélastique

Le paragraphe précédent nous a permis de caractériser les propriétés mécaniques avec l'essai statique de fluage et l'essai dynamique de spectrométrie. Le traitement et l'analyse de ces essais vont nous permettre d'obtenir la distribution des temps de relaxation  $\tau_i$  et les complaisances élastiques associées à chaque bloc de Kelvin-Voigt  $\Delta J_i$  du modèle de Kelvin généralisé (2.10).

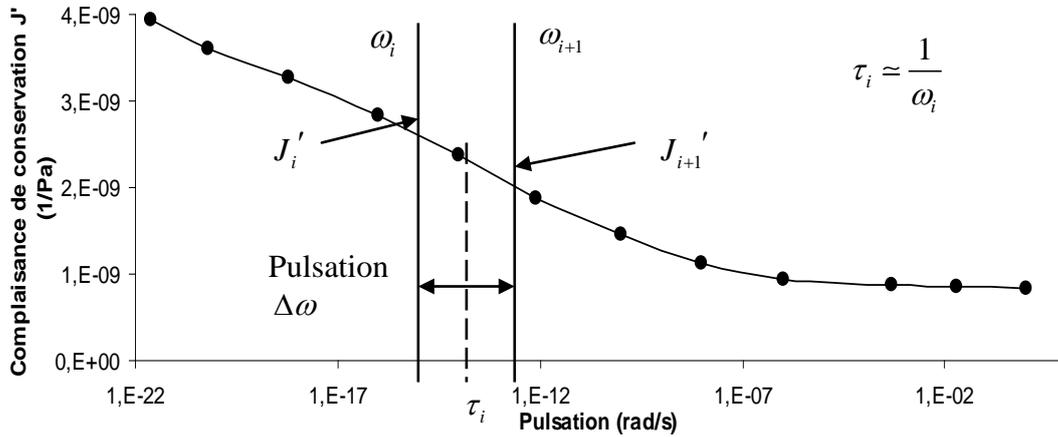
Pour atteindre cet objectif, il est pratique d'obtenir la courbe maîtresse de façon analytique. Pour cela, le modèle bi-parabolique (2.18) développé par Decroix et al. [83] et Diaz-Calleja et al. [84] est utilisé.

$$J^*(i\omega, T_{ref}) = \frac{1 + \lambda (i\omega\tau')^{-\chi} + (i\omega\tau')^{-\chi}}{\frac{1}{J_u} - \frac{1}{J_r}} + \frac{1}{J_r} \quad (2.18)$$

$\tau'$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  et  $\chi'$  sont des paramètres du modèle bi-parabolique.  $J_u$  représente la complaisance non relaxée et  $J_r$  la complaisance relaxée.

Le calcul permettant d'identifier la partie réelle et imaginaire du modèle biparabolique est détaillée dans l'annexe 1. L'avantage de ce modèle est qu'il permet d'ajuster avec une grande précision les valeurs expérimentales de la courbe maîtresse. L'obtention des valeurs numériques des paramètres du modèle bi-parabolique est présentée dans l'annexe 2.

Lorsque la courbe maîtresse est obtenue sous forme numérique, elle est discrétisée en plusieurs éléments. Un élément représente un bloc de Kelvin-Voigt dans le modèle de Kelvin généralisé. La figure 2.14 présente la discrétisation de la courbe maîtresse expérimentale.



**Figure 2.14 :** Discretisation de la courbe maîtresse expérimentale

Afin d'obtenir un compromis entre temps de calcul et précision, nous avons choisi 19 blocs de Kelvin-Voigt dans le modèle de Kelvin généralisé, pour prendre en compte le large spectre de relaxation du Polyamide 6,6.

Une complaisance élastique  $\Delta J'_i$  est associée à chaque élément de Kelvin-Voigt. Cette complaisance est calculée avec la relation (2.19).

$$\Delta J'_i = (J_r - J_0) \cdot W_i = J'_{i+1} - J'_i \quad (2.19)$$

Dans le cas d'une description de la fonction fluage avec un seul temps de relaxation  $\tau$ , ce temps est déduit de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la complaisance de perte  $J''$  est maximale, c'est-à-dire lorsqu'on est au milieu de la

décroissance de la complaisance de conservation  $J'$ . Nous avons alors la relation (2.20).

$$\omega \cdot \tau = 1 \quad (2.20)$$

Dans notre cas, la courbe maîtresse est discrétisée en plusieurs éléments. Le temps de relaxation est donc distribué pour chaque pulsation  $\omega_i$  donnée autour du temps de relaxation moyen (2.21) (cf. figure 2.14).

$$\omega_i \cdot \tau_i = 1 \quad (2.21)$$

Nous faisons l'hypothèse qu'un changement de température ne modifie pas la distribution de ces temps. Ainsi, les coefficients de translation thermique  $a_{T_{ref}}(T)$  déduits à une température de référence  $T_{ref}$  permettent d'obtenir la distribution des temps de relaxation à une température  $T$  (2.22).

$$\tau_i(T) = \tau_i(T_{ref}) \cdot a_{T_{ref}}(T) \quad (2.22)$$

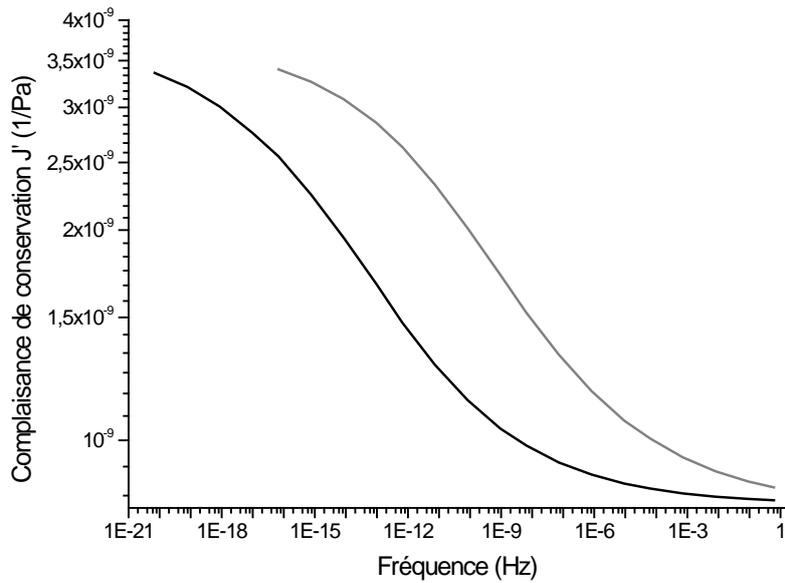
Dans notre cas (cf. figure 2.12), nous pouvons décrire en première approximation l'évolution de ces coefficients de translation à partir des relations (2.23) et (2.24) obtenues en effectuant une régression exponentielle de la courbe.  $T_1$  peut être assimilée à la température de transition vitreuse.

$$T < T_1 : a_{0^\circ\text{C}}(T) = 8.23 \times 10^{-29} \exp\left(1.77^4 \left(\frac{1}{T}\right)\right) \quad (2.23)$$

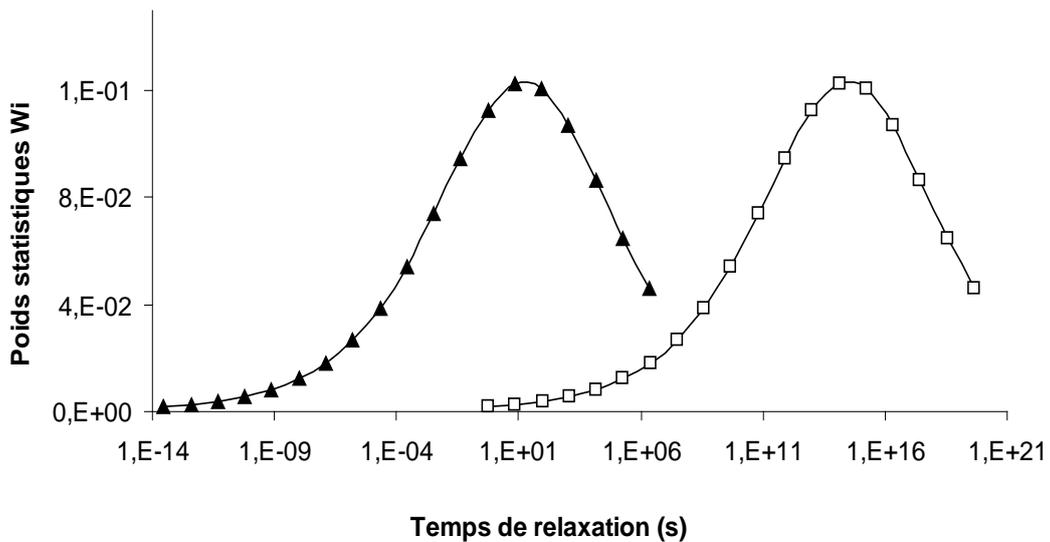
$$T \geq T_1 : a_{0^\circ\text{C}}(T) = 1.45 \times 10^{-68} \exp\left(4.44^4 \left(\frac{1}{T}\right)\right) \quad (2.24)$$

La figure 2.15 présente les courbes maîtresses simulées à une température de référence de 0°C et 30°C.

La figure 2.16 présente la distribution des temps de relaxation à une température de référence de 0°C et à une température de 80°C.



**Figure 2.15 :** *Complaisances de conservation obtenues par modélisation : (—) température de référence de 0°C et (—) température de 30°C*



**Figure 2.16 :** *Distribution des temps de relaxation : (□) à sec et à une température de référence de 0°C et (▲) à sec et à une température de 80°C*

Dans le cas du polyamide 6,6, l'humidité est un paramètre qui peut influencer l'évolution des propriétés mécaniques du matériau. Dans cette étude, nous supposons que l'évolution de la microstructure, c'est-à-dire une modification de la structure semi cristalline, est négligeable dans la plage de température et de fréquence étudiée. Cela revient à considérer qu'une variation de l'humidité

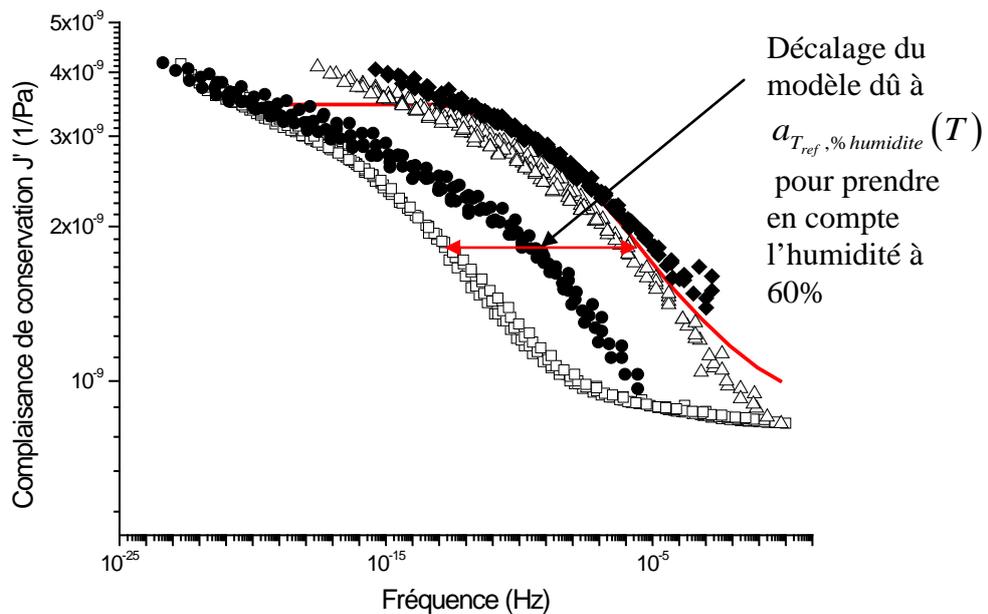
produit le même effet qu'une variation de la température sur le spectre des temps de relaxation.

La relation (2.22) est donc modifiée en intégrant un coefficient de translation  $b_{T_{ref}}$  pour prendre en compte l'humidité (2.25).

$$\tau_i(T, \% \text{ humidité}) = \tau_i(T_{ref}, \text{sec}) \cdot a_{T_{ref}, \text{sec}}(T) \cdot a_{T_{ref}, \% \text{ humidité}}(T) \quad (2.25)$$

Les coefficients de translation  $a_{T_{ref}, \% \text{ humidité}}(T)$  sont déduits de la construction de la courbe maîtresse à sec à une température de référence de 0°C. A présent, ils sont recalés à la courbe maîtresse obtenue pour un certain taux d'humidité relative et une température de référence de 0°C (cf. figure 2.12).

La figure 2.17 présente les courbes maîtresses obtenues expérimentalement à différents taux d'humidité (sec, 30%, 40% et 60%) et présente également en exemple le recalage de la courbe maîtresse à 60% d'humidité à partir de la relation (2.25). Pour effectuer ce recalage, le coefficient  $a_{T_{ref}, \% \text{ humidité}}(T)$  utilisé correspond à un décalage en température de 50°C. Pour recaler la courbe maîtresse à 30% d'humidité, le coefficient  $a_{T_{ref}, \% \text{ humidité}}(T)$  utilisé correspond à un décalage en température de 25°C.



**Figure 2.17** : Courbes maîtresses déduites des mesures isothermes de spectrométrie mécanique à une température de référence de 0°C : (□) 0% d'humidité, (●) 30% d'humidité, (△) 40% d'humidité, (◆) 60% d'humidité et (-) modélisation à une température de référence de 0°C et à 60% d'humidité relative

## 2.5 Estimation du déplacement et de la relaxation d'une dent d'un engrenage en Polyamide 6,6

Lorsqu'un matériau polymère est soumis à une contrainte  $\sigma$  allant de  $t_0 \leq t \leq t_{load}$ , il se déforme suivant la relation (2.26).

$$\varepsilon(t_{load}) = \sigma \cdot J \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_{load}}{\tau}\right) \right) \quad (2.26)$$

$\tau$  est le temps de relaxation moyen.

Par contre quand la charge est enlevé, le matériau se relaxe de  $t_{load} \leq t \leq t_{final}$  puis la charge est à nouveau appliquée à  $t_{final}$ . Après la relaxation, à  $t_{final}$ , il ne retrouve pas la position initiale  $\varepsilon(t_0)$  (2.27).

$$\varepsilon(t_{final}) = \sigma \cdot J \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_{final}}{\tau}\right) \right) - \sigma \cdot J \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_{final} - t_{load}}{\tau}\right) \right) \quad (2.27)$$

Suivant le temps de relaxation, cette déformation restante à  $t_{final}$  peut être négligée ou pas lors d'un cycle de charge/décharge. Par contre une répétition du cycle de charge - décharge conduit à une augmentation de la déformation avant le chargement suivant qui pourrait ne plus être négligeable au bout de  $m$  cycles. Elle est donnée sous la forme des termes d'une suite géométriques (2.28) à partir de la relation (2.27).

$$\varepsilon(m \cdot t_{final}) = \varepsilon(t_{final}) \cdot \frac{\left( 1 - \exp\left(-\frac{m \cdot t_{final}}{\tau}\right) \right)}{\left( 1 - \exp\left(-\frac{t_{final}}{\tau}\right) \right)} \quad (2.28)$$

Pour vérifier si la déformation de la dent au bout de  $m$  tours pourrait être négligée, la déformation d'un échantillon de Polyamide 6,6 ayant la forme d'une dent d'un engrenage cylindrique droit est simulée. Pour faciliter les calculs, nous supposons que la dent à une forme parallélépipédique. Les dimensions sont présentées sur le tableau 2.1.

La force  $F$  a été calculée avec la relation (2.29), elle est supposée constante durant toute la charge.

$$F = \frac{C}{r_b} \quad (2.29)$$

$C$  est le couple et  $r_b$  le rayon de base de la roue. Dans notre étude, il est de 45,105 mm. Pour un couple de 10 N.m, La force  $F$  est de 221 N.

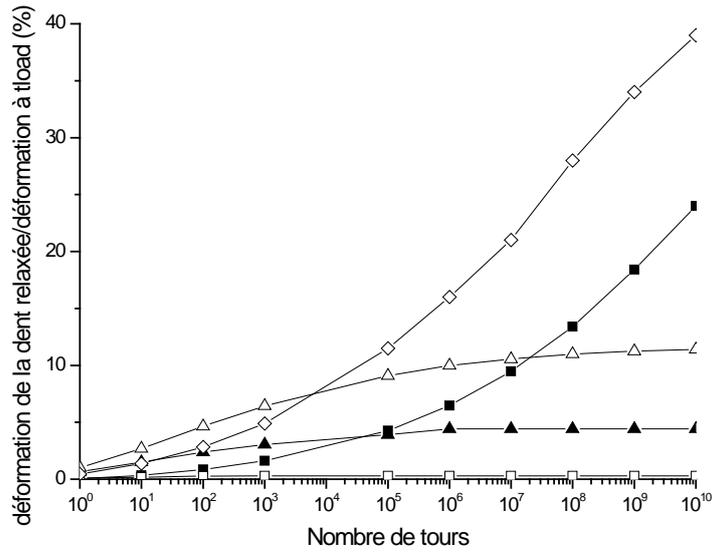
	Pignon	Roue
Module (mm)	3	3
Angle de pression (°)	20	20
Largeur de denture (mm)	20	20
Nombre de dents	32	41
Hauteur de denture (mm)	6,75	6,75
Section au primitif (mm <sup>2</sup> )	94,24	94,24

**Tableau 2.1 : Dimensions de l'engrenage**

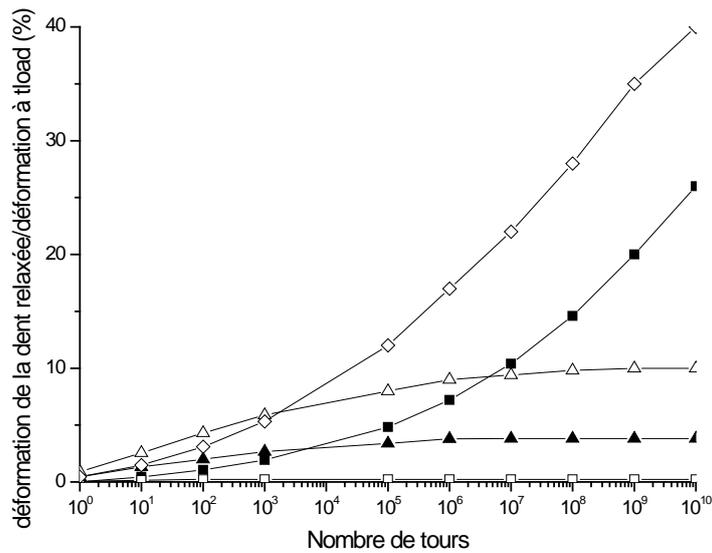
Pour réaliser cette analyse, les paramètres suivants, issus de la relation (2.30), vont être testés :

- Les temps de relaxation distribués  $\tau_i$  à cinq températures différentes pour un échantillon sec : 0°C, 25°C, 65°C, 80°C et 120°C. Notons ici que la distribution des temps de relaxation  $\tau_i$  est utilisée à la place du temps de relaxation moyen  $\tau$ .
- Deux temps de chargement  $t_{load}$  :  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$  et  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$ . En effet, d'après Vuoristo et Kuokkala [85], un matériau polymère viscoélastique est considéré relaxé si le temps de déchargement  $t_{final}$  est égal à dix fois le temps de chargement  $t_{load}$  en condition linéaire.
- Deux vitesses de rotation : 400 tours/min et 800 tours/min avec respectivement  $t_{final} \approx 0,15\text{sec}$  et  $t_{final} \approx 0,075\text{sec}$ .

Les figures 2.18 et 2.19 présentent le ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent au premier tour à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$  (800 tours/min et 400 tours/min).

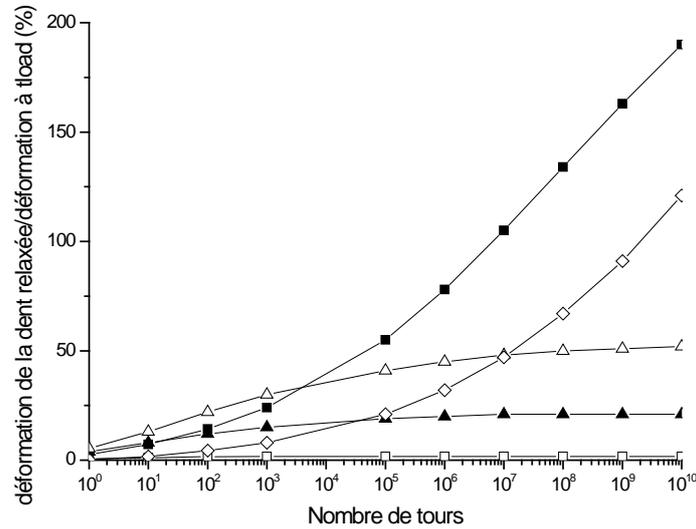


**Figure 2.18** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$  et à 800 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec

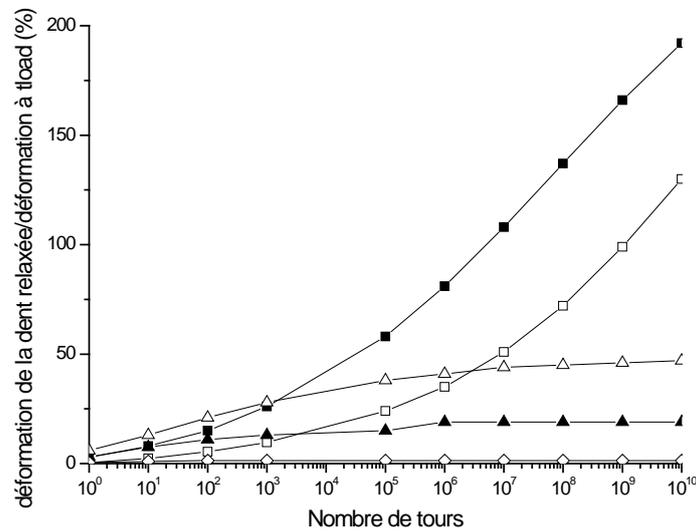


**Figure 2.19** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$  et à 400 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec

Les figures 2.20 et 2.21 présentent le ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent au premier tour à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$  (800 tours/min et 400 tours/min).



**Figure 2.20** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$  et à 800 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec



**Figure 2.21** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$  et à 400 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec

Pour le cas à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$ , nous pouvons observer qu'à 0°C et 25°C le ratio est négligeable au début du fonctionnement et il augmente rapidement jusqu'à stabilisation. A ces températures, le matériau se déforme peu et il se relaxe très lentement car les temps de relaxation sont longs. L'effet de l'accumulation de la déformation à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue est donc plus important pour ces températures.

A 65°C, c'est le passage de la transition vitreuse. Le ratio est plus bas car le module élastique chute. Il augmente légèrement avec le nombre de tours car les temps de relaxation ont une valeur intermédiaire.

Au dessus de 65°C, nous pouvons voir que le ratio est plus faible et il augmente très peu pendant le fonctionnement. Les matériaux se déforment plus mais il se relaxe très rapidement car les temps de relaxation sont très courts.

Pour le cas à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$ , nous pouvons faire les mêmes conclusions.

Cependant, l'effet de l'accumulation de la déformation est nettement plus marqué. En effet, le matériau a beaucoup moins le temps de se relaxer.

Par contre, notons que les deux vitesses testées conduisent à des résultats peu différents, ceci s'explique par le fait que la variation entre les deux vitesses est faible (facteur 2).

Le temps de chargement de la dent telle que géométriquement décrite par les données du tableau 2.1, vérifie  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$ . De plus, la période de fonctionnement des engrenages en polymère dépasse rarement  $10^6$  tours.

Dans ces conditions, nous pouvons donc faire l'hypothèse que la dent peut être considérée comme complètement relaxée pour chaque tour de la roue. Quelque soit la vitesse de rotation, le ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent au premier tour à  $t_{load}$  ne dépasse pas 20%.

---

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle rhéologique choisi pour décrire le comportement mécanique du Polyamide 6,6 dans le domaine linéaire est présenté. Il s'agit du modèle de Kelvin généralisé qui est utilisé pour notre étude dans le cas de déformations et de contraintes faibles.

Ce modèle a l'avantage d'obtenir une loi de déplacement viscoélastique du matériau qui peut être intégrée facilement dans le modèle quasi-statique de partage des charges. Ce modèle rhéologique nécessite la détermination pour

chaque bloc de Kelvin-Voigt des paramètres définis par les complaisances  $\Delta J_i$  et les temps de relaxation  $\tau_i$ .

Dans un premier temps, une campagne expérimentale a permis de déterminer la limite de linéarité du polyamide 6,6 à température ambiante et à 80°C. Dans un second temps, les essais de spectrométrie ont fourni l'évolution du module ou de la complaisance complexes en fonction de la fréquence ou de la température à différents taux d'humidité. Avec ces résultats et l'équivalence temps-température, il est possible de construire des courbes maîtresses à différentes températures de référence et pour plusieurs taux d'humidité. Par la suite, une modélisation phénoménologique de ces courbes maîtresses est réalisée pour obtenir les propriétés mécaniques du modèle de Kelvin généralisé.

Enfin, le déplacement d'une dent soumise à un effort de traction  $F$  a été déterminé. Dans les conditions d'utilisation des engrenages en Polyamide 6,6 et du modèle quasi-statique les simulant, les résultats montrent que la dent peut être considérée comme entièrement relaxée pour chaque tour de la roue quelle que soit la température de l'engrenage. Par contre, l'historique du chargement subi par les dents juste avant qu'elles ne rentrent dans le contact sera pris en compte.

La loi de déplacement viscoélastique linéaire maintenant paramétrée, le modèle de partage des charges est présenté dans la suite du mémoire.

# Chapitre 3 : Modélisation du comportement mécanique des engrenages en Polyamide 6,6

---

## Introduction

L'étude quasi-statique consiste à déterminer comment se répartit le couple moteur sur les dents instantanément en contact. Elle est réalisée en effectuant un calcul du partage des charges. Pour cela, le processus développé par le laboratoire LaMCoS est utilisé [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67] et [68]. Il permet d'obtenir rapidement des résultats comme les pressions instantanées de contact, la répartition des efforts sur les dents de l'engrenage, l'erreur de transmission, la raideur d'engrènement, les contraintes en pied de dent...

Dans ce chapitre, la simulation et la résolution du partage des charges pour un engrenage en Polyamide 6,6 sont présentées. Elles sont calculées avec les équations de compatibilité des déplacements. La méthode des coefficients d'influence permet de prendre en compte séparément les déformations globales de flexion et les déformations locales de contact. L'aspect viscoélastique est intégré en utilisant la fonction de déplacement du modèle de Kelvin généralisé. Enfin, l'échauffement de l'engrenage pendant le fonctionnement est pris en compte de façon simple en utilisant les modèles thermiques de Hooke et de Mao. A la fin de ce chapitre, la modélisation des contraintes en pied de dent est présentée. En effet, le processus développé au LaMCoS permet d'obtenir automatiquement une géométrie CAO 3D dans le logiciel CATIA et par la suite d'effectuer un calcul des contraintes en pied de dent.

---

## 3.2 Simulation et résolution du partage des charges

### 3.2.1 Présentation

---

Pour réaliser le calcul du partage des charges instantanées, le laboratoire LaMCoS a développé une méthode qui est basée sur le processus décrit sur la figure 3.1. Celui-ci a déjà été validé sur diverses géométries d'engrenages comme les engrenages cylindriques avec les travaux de Kim [63], De Vaujany

[60] et [62], Olakorédé [61], les engrenages faces avec Jacquin [64], les engrenages spiro-coniques avec Icard [66], les engrenages roue et vis avec Hiltcher et al. [68] et les engrenages pignon-crémaillère avec De Vaujany et Guingand [67].

Ce processus est divisé en trois étapes.

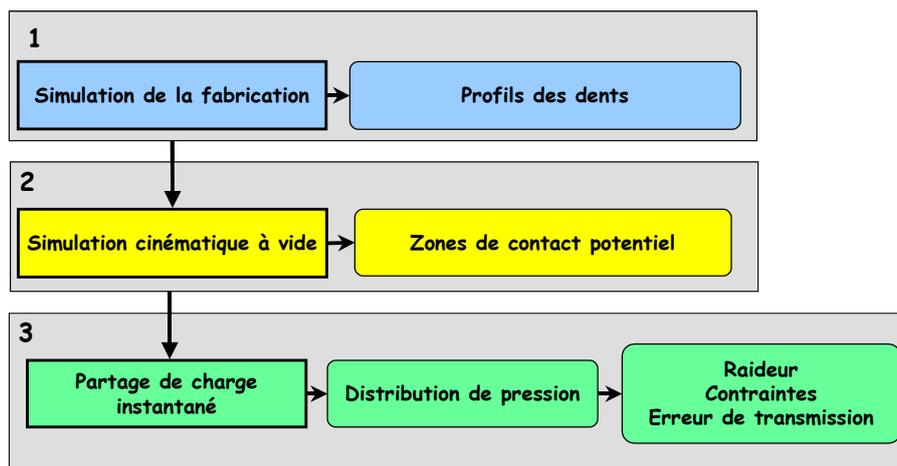
Dans la première étape, la géométrie précise des dents est obtenue en simulant au mieux la réalité de la fabrication des engrenages.

La deuxième étape du processus est la simulation de la cinématique à vide. Celle-ci donne les zones de contact potentiel sur les flancs de denture du pignon et de la roue.

La nature du matériau utilisé n'a aucune incidence sur les résultats de ces deux premières étapes. Ces résultats peuvent être utilisés pour étudier l'influence des différents paramètres de taillage, de rectification et d'assemblage. Notons que la modélisation des deux premières étapes du processus n'est pas détaillée dans cette étude, mais leurs résultats sont présentés dans le chapitre 4 lors de la présentation du logiciel « PRINCE POLYMER ».

La dernière étape du processus est le calcul de la répartition des charges instantanées. L'objectif est de prévoir, lorsqu'un couple est appliqué à l'organe moteur et pour chaque position cinéματο-statique, les pressions de contact instantanées le long des flancs de toutes les dents en contact simultanément. C'est ici que la loi de comportement viscoélastique linéaire du modèle de Kelvin généralisé (2.10) (cf. paragraphe 2.2 du chapitre 2) est intégré.

Le calcul du partage des charges est effectué pour plusieurs positions cinéματο-statiques, qui sont déterminées par l'utilisateur avec un angle d'étude de départ, un angle de fin d'engrènement et un nombre de pas de calcul. La simulation de l'engrènement est réalisée sur 3 ou 5 couples de dents en fonction de la géométrie de l'engrenage (rapport de conduite).



*Figure 3.1 : Processus de calcul de la répartition des charges*

### 3.2.2 Définition du maillage et résolution de la répartition des charges

---

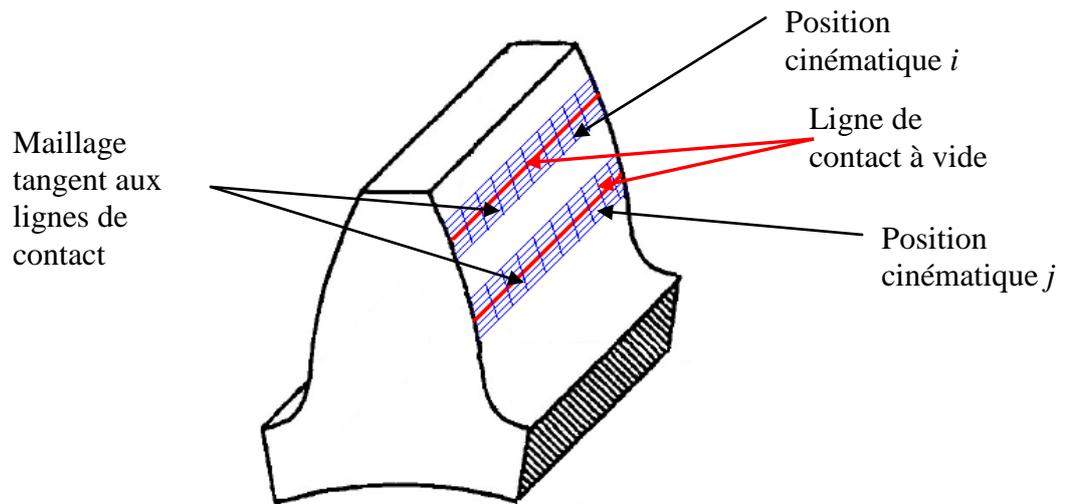
Même selon une direction privilégiée, il est impossible de résoudre le problème de multi-contact de manière analytique. Il est alors nécessaire de discrétiser la surface de denture par un maillage de la zone potentielle de contact. Ce maillage rectangulaire est défini sur le plan tangent au contact, déterminé précisément suivant la ligne de contact potentiel donnée par la cinématique à vide. Dans le cas des engrenages cylindriques à développantes de cercle, le contact est linéaire, la zone de contact déformée est considérée comme plane et les plans de contact sont parallèles sur chaque dent en contact.

La figure 3.2 présente deux lignes de contact provenant de deux positions cinématiques différentes dans le cas des engrenages en acier. Elles sont encadrées par un maillage. Dans la figure 3.2, notons que bien évidemment le placement du maillage change sur le flanc de la dent avec la position cinématique.

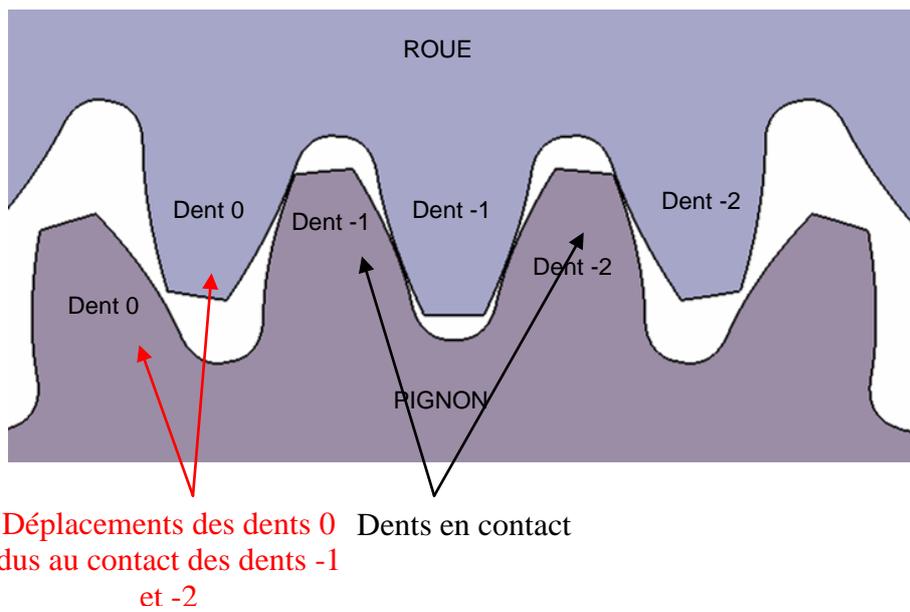
Du point de vue des engrenages en Polyamide 6,6, pour effectuer un calcul de répartition des charges à un instant  $t$ , il faut déterminer la répartition des charges depuis l'entrée en contact du premier couple de dent jusqu'à la position désirée. Il n'est donc pas possible de calculer la répartition des charges directement pour une position cinématique donnée.

En effet, les dents qui sont en contact peuvent influencer le comportement mécanique des dents voisines. En exemple sur la figure 3.3 les dents -2 et -1 sont en contact, elles peuvent donc créer, par des effets de volume, des déplacements sur les dents 0.

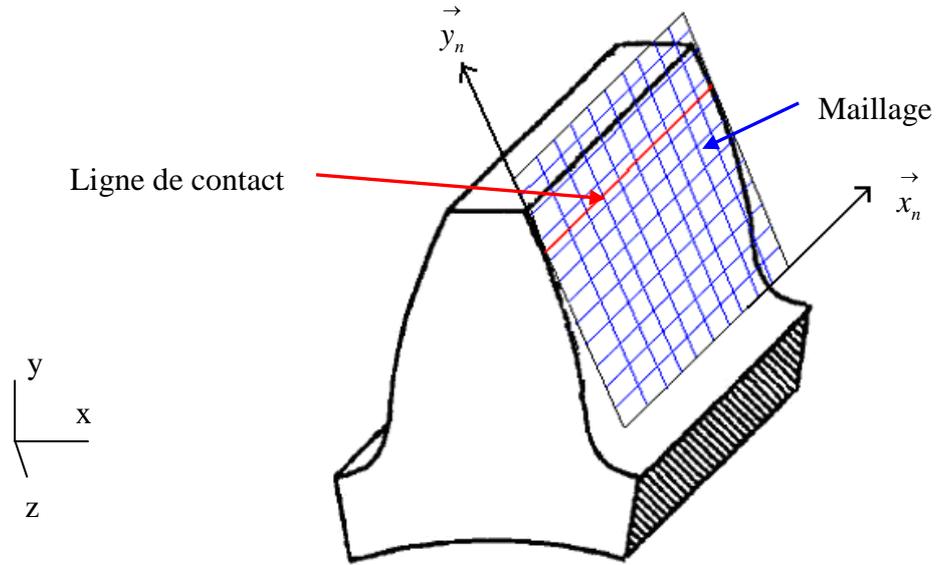
Pour tenir compte des déplacements de toutes les dents aux instants précédents, un maillage large est créé. Il encadre toute la surface de denture active et il est placé sur toutes les dents potentiellement en contact. La figure 3.4 propose un schéma du maillage étendu sur une dent en polyamide 6,6. Notons que les vecteurs  $\underline{x}_n$  et  $\underline{y}_n$  sont les coordonnées du plan tangent aux deux profils dans le repère du pignon.



**Figure 3.2** : Maillage et lignes de contact sur une dent d'un engrenage cylindrique droit en acier

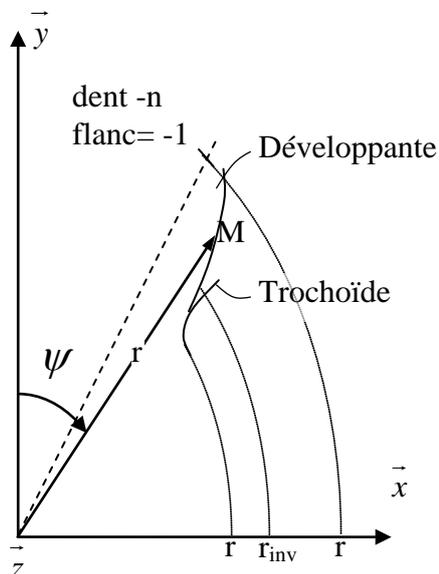


**Figure 3.3** : Schéma de représentation de l'engrènement



**Figure 3.4** : Schéma du maillage étendu sur une dent en polyamide 6,6

La cinématique à vide donne la position de la ligne de contact pour chaque position cinématique donnée ( $\theta$  : position angulaire de la roue). Cette ligne de contact est placée à l'aide d'un rayon  $r$ , un angle  $\psi$  et une profondeur  $z$  suivant la largeur de denture dans le repère cylindrique associé à la dent. La figure 3.5 décrit la méthode utilisée pour placer la ligne de contact avec le point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  qui représente le point de contact où le maillage sera tangent.



**Figure 3.5** : Définition de la méthode utilisée pour placer la ligne de contact

La projection d'un point de la dent sur le maillage est construite de la manière suivante : avec la relation (3.1), nous passons d'abord d'un repère cylindrique associé à la dent à un repère cartésien 3D qui est celui du contact (cf. figure 3.5). Ensuite, à partir du repère 3D, le maillage est construit avec les vecteurs  $\vec{x}_n$  et  $\vec{y}_n$  (3.2) qui sont les coordonnées du maillage étendu. Le signe  $\pm$  dans la relation (3.2) dépend du sens de rotation de l'engrenage.

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \psi \\ y = r \cdot \cos \psi \\ z = z \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\vec{x}_n = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha'_i \\ \cos \alpha'_i \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{y}_n = \begin{bmatrix} -\cos \alpha'_i \cdot \sin \beta_b \\ \pm \sin \alpha'_i \cdot \sin \beta_b \\ -\cos \beta_b \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$\alpha'_i$  est l'angle de pression de fonctionnement et  $\beta_b$  l'angle d'inclinaison de l'hélice de base.

### 3.2.3 Les équations de compatibilité des déplacements

Le calcul de la répartition des charges revient à résoudre le système d'équations (cf. paragraphe 4.4.1 du chapitre 1) composé des équations de compatibilité des déplacements et du couple moteur sur le maillage présenté dans le paragraphe précédent. La répartition des charges sera résolue sur chaque nœud  $k$  du maillage et sur toutes les dents potentiellement en contact. La figure 3.6 présente une schématisation du partage des charges entre trois couples de dents.

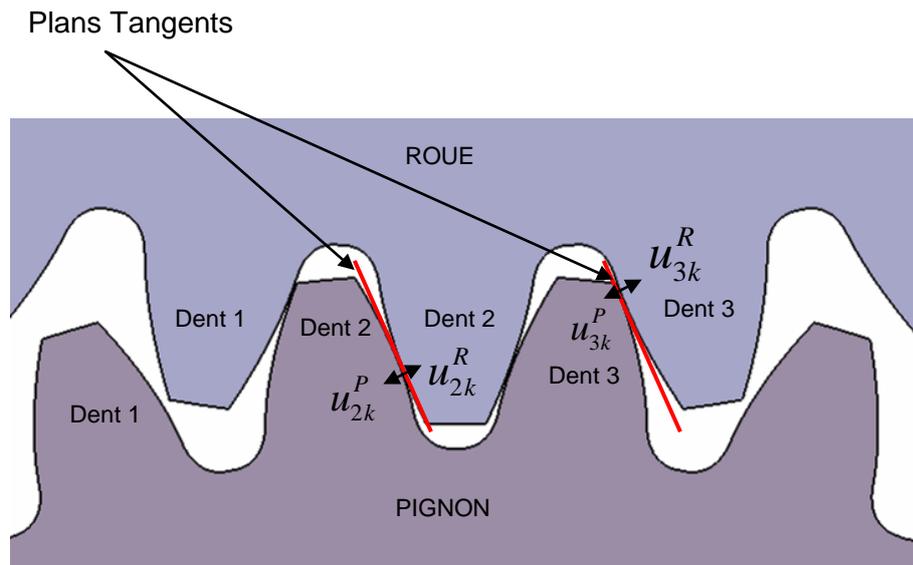


Figure 3.6 : Schéma de représentation du partage des charges

Dans la zone de contact, les conditions de contact peuvent s'écrire de la manière suivante (3.3).

$$\begin{cases} u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k - \alpha = 0 \\ P_k \geq 0 \\ e_k = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Hors de la zone de contact, les conditions de contact peuvent s'écrire avec les relations (3.4).

$$\begin{cases} u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k - \alpha \geq 0 \\ P_k = 0 \\ e_k \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

En combinant (3.3) et (3.4), il est possible d'écrire l'équation de compatibilité des déplacements (3.5).

$$(u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k - \alpha).P_k = 0 \quad (3.5)$$

$k$  sont les nœuds des maillages,  $e_k$  l'écart sous charge au nœud  $k$ ,  $u_{1k}$  et  $u_{2k}$  les déplacements normaux du pignon et de la roue au nœud  $k$  du maillage,  $\varepsilon_k$  l'écart initial au nœud  $k$ ,  $\alpha$  le rapprochement des corps et  $P_k$  la pression au nœud  $k$ . La relation (3.5) va être vérifiée sur toute la surface de denture. En effet, si le nœud  $k$  du maillage est hors de la zone de contact, la pression  $P_k$  au nœud  $k$  est nulle.

En supposant la pression constante sur une petite surface rectangulaire  $S_k$  autour du nœud  $k$ , la relation du couple moteur peut être écrite sous la forme suivante (3.6).

$$C_m = \sum_{k=1}^N P_k (\overline{M}_k \wedge \overline{n}_k) \cdot s_k \quad (3.6)$$

$N$  est le nombre de nœuds dans les maillages,  $k$  l'indice du nœud où le déplacement est étudié,  $\overline{M}_k$  le vecteur définissant le point  $M_k$  dans le repère de la roue et  $\overline{n}_k$  la direction de la pression.

### 3.2.4 La méthode des coefficients d'influence

---

Pour résoudre le partage des charges, il est nécessaire de déterminer le déplacement  $u_k$  en fonction de la pression  $p_k$ . Pour cela, nous utilisons la méthode des coefficients d'influence, déjà utilisée dans les précédentes études du LaMCoS [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67] et [68].

Dans le cas de matériau élastique, le coefficient d'influence  $C_{kj}$  correspond au déplacement du point  $k$  du maillage dû à une pression unitaire autour du point  $j$  du maillage [64] (3.7). Le déplacement  $u_k(t)$  intègre celui du pignon et de la roue.

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N C_{kj} p_j(t) \quad (3.7)$$

$N$  est le nombre de nœuds dans les maillages,  $k$  l'indice du nœud où le déplacement  $u(t)$  est étudié et  $j$  l'indice du nœud où la pression  $p(t)$  est appliquée.

Dans le cas de matériau viscoélastique, les coefficients d'influence géométriques  $C_{kj}^*$  sont utilisés. Ils sont calculés avec la même méthode que les coefficients d'influence, mais ils ne tiennent pas compte des propriétés viscoélastiques du matériau (3.8).

$$C_{kj} = J_{mat} C_{kj}^* \quad (3.8)$$

$J_{mat}$  représente la complaisance du matériau.

Ces coefficients pourraient être calculés numériquement (par une modélisation par éléments finis par exemple), mais le déplacement au point de chargement ne relaterait que médiocrement l'effet de surface si le maillage n'était pas d'une très grande finesse. C'est pourquoi il est préférable de séparer l'effet de flexion de l'effet de surface [72] (3.9).

$$C_{kj} = C_{kj}^{1f} + C_{kj}^{2f} + C_{kj}^s \quad (3.9)$$

$C_{kj}^{1f}$  et  $C_{kj}^{2f}$  correspondent respectivement à la flexion du pignon et de la roue et  $C_{kj}^s$  correspond à la déformation de surface lorsque le pignon et la roue sont en contact.

### 3.2.4.1 Coefficients d'influence de contact

Le déplacement normal (3.10) du corps  $i$  au point  $k$  de coordonnées  $(x_k, y_k)$  dans le plan tangent dû à une pression constante  $P$  au point  $j$  est calculé en utilisant la théorie de Boussinesq [77].

$$u_{ik} = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \sum_{j=1}^N \left[ P_j \iint_{S_j} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}} \right] \quad (3.10)$$

$S_j$  est la surface de la maille autour du point  $j$ ,  $E_i$  le module d'Young du corps  $i$  et  $\nu_i$  le coefficient de Poisson du corps  $i$ .

Pour résoudre le problème de contact, le maillage est décomposé en  $N$  mailles rectangulaires de côté  $2a$  selon  $\bar{x}$  et  $2b$  selon  $\bar{y}$  (3.11).

$$\left( [x_j - a; x_j + a], [y_j - b; y_j + b] \right) \quad (3.11)$$

En effectuant le changement de base suivant (3.12).

$$\begin{cases} X = x - x_j \\ Y = y - y_j \end{cases} \quad (3.12)$$

Le déplacement normal devient (3.13).

$$u_{ik} = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \sum_{j=1}^N p_j \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \frac{dXdY}{\sqrt{(X+x_j-x_k)^2 + (Y+y_j-y_k)^2}} \quad (3.13)$$

$$\text{Avec } a_{kj} = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \frac{dXdY}{\sqrt{(X+x_j-x_k)^2 + (Y+y_j-y_k)^2}} \quad (3.14)$$

Le déplacement normal peut finalement être exprimé par la relation suivante (3.15).

$$u_{ik} = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \sum_{j=1}^N a_{kj} p_j \quad (3.15)$$

Le déplacement  $u_k^s$  du point  $k$  dû aux effets de surface, correspond en fait au déplacement des deux corps 1 et 2 (3.16) et (3.17).

$$u_k^s = u_{1k} + u_{2k} \quad (3.16)$$

$$u_k^s = \left( \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) \sum_{j=1}^N a_{kj} p_j \quad (3.17)$$

L'intégrale de la fonction de déplacement ne dépend alors que du maillage et de la géométrie. Le déplacement du point  $k$  s'écrit avec la relation suivante (3.18).  $C_{kj}^s$  représente les coefficients d'influence de surface.

$$u_k^s = \sum_{j=1}^N C_{kj}^s p_j \quad (3.18)$$

Les coefficients d'influence de surface peuvent s'exprimer par la relation (3.19).

$$C_{kj}^s = \left( \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) a_{kj} \quad (3.19)$$

Pour une surface rectangulaire de dimension  $2a \times 2b$ , la valeur de  $a_{kj}$  a été déterminée par Love [73] (3.20).

$$\begin{aligned} a_{kj} = & (x-a) \ln \frac{(y-b) + \sqrt{(y-b)^2 + (x-a)^2}}{(y+b) + \sqrt{(y+b)^2 + (x-a)^2}} \\ & + (x+a) \ln \frac{(y+b) + \sqrt{(y+b)^2 + (x+a)^2}}{(y-b) + \sqrt{(y-b)^2 + (x+a)^2}} \\ & + (y-b) \ln \frac{(x-a) + \sqrt{(y-b)^2 + (x-a)^2}}{(x+a) + \sqrt{(y-b)^2 + (x+a)^2}} \\ & + (y+b) \ln \frac{(x+a) + \sqrt{(y+b)^2 + (x+a)^2}}{(x-a) + \sqrt{(y+b)^2 + (x-a)^2}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} x = x_k - x_j \\ y = y_k - y_j \end{cases} \quad (3.21)$$

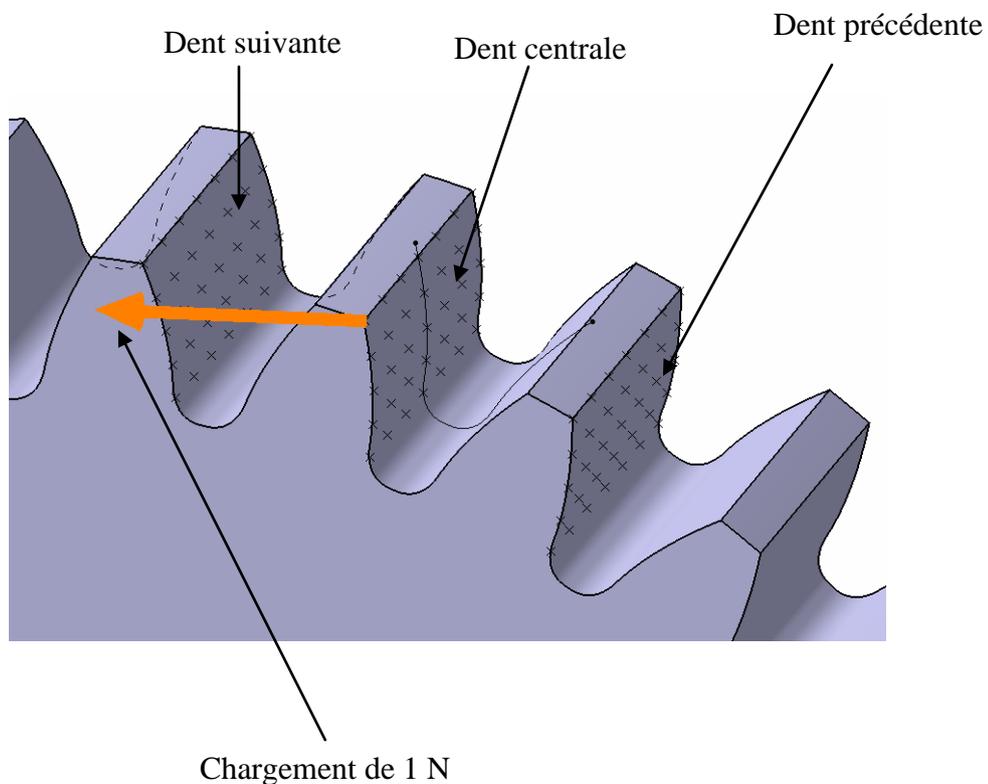
### 3.2.4.2 Coefficients d'influence de volume

Les coefficients d'influence de flexion sont calculés grâce à une modélisation par éléments finis car il est impossible d'avoir une expression mathématique précise pour une géométrie d'engrenage quelconque.

Dans cette étude, notons que le calcul des coefficients d'influence de flexion est brièvement détaillé. La méthode complète est présentée dans les travaux de Teixeira et al. [78].

Le calcul des coefficients d'influence de flexion est déterminé en deux parties. La première est le calcul éléments finis global. Les points placés sur les flancs de denture des trois dents (la dent centrale, la dent précédente et la dent suivante) (cf. figure 3.7) sont successivement chargés avec un effort unitaire (1 N). Lorsqu'un point est chargé, les déplacements de tous les autres points sont calculés (cf. figure 3.7). Pour ce calcul éléments finis, nous utilisons les hypothèses de la mécanique des petites déformations et de l'élasticité linéaire. Ce calcul est réalisé une seule fois pour l'ensemble des points [78].

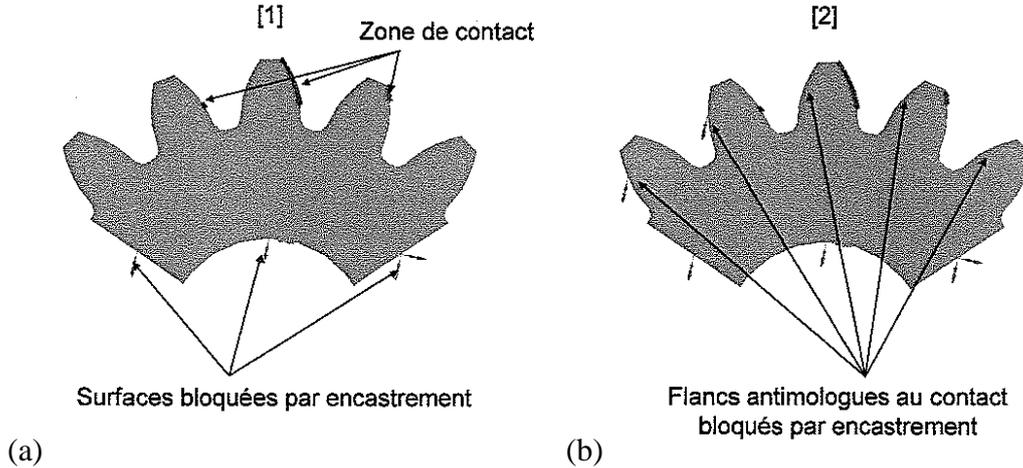
Dans la seconde partie, les déplacements calculés sont décrits dans une base de fonctions définie pour une géométrie d'engrenage [78].



**Figure 3.7 :** *Chargement de 1 N appliqué et déplacements des nœuds*

Afin d'obtenir uniquement les effets de flexion, Sainsot [86] propose d'effectuer le calcul en deux étapes successives avec des conditions aux limites différentes. La figure 3.8 présente les différents cas de conditions aux limites.

- Calcul avec flanc anti-homologue au contact libre. Il détermine un déplacement intégral, de volume, de contact et parasites autour du point d'application de la charge.
- Calcul avec flanc anti-homologue au contact bloqué : Il détermine un déplacement cumulant effet de contact et erreurs, les déplacements de volume étant annulés par l'encastrement du flanc anti-homologue.



**Figure 3.8 :** (a) Calcul E.F libre et (b) Calcul E.F bloqué [66]

Pour chaque cas  $p$  de conditions aux limites, le déplacement obtenu au point  $j$  du maillage éléments finis pour une charge unitaire au point  $k$  de ce maillage peut s'écrire sous la forme suivante (3.22) pour le corps  $i$ .

$$C_{kj}^{if[p]} = u_j \quad (3.22)$$

Les coefficients d'influence de flexion sont alors obtenus grâce à la différence des deux calculs (3.23).

$$C_{kj}^{if} = C_{kj}^{if[1]} - C_{kj}^{if[2]} \quad (3.23)$$

Finalement les coefficients d'influence de flexion pour les deux corps, roue et pignon, sont donnés par la relation (3.24).

$$C_{kj}^f = C_{kj}^{1f} + C_{kj}^{2f} \quad (3.24)$$

### 3.2.4.3 Conclusion

En résumé, les coefficients d'influence géométriques utilisés pour les engrenages en Polyamide 6,6 peuvent s'écrire de la manière suivante (3.25).

$$C_{kj}^* = C_{kj}^{*1f} + C_{kj}^{*2f} + C_{kj}^{*S} \text{ avec } C_{kj}^* = \frac{C_{kj}}{J_{mat}} \quad (3.25)$$

$C_{kj}^{*1f}$  sont les coefficients d'influence géométriques de flexion du pignon,  $C_{kj}^{*2f}$  les coefficients d'influence géométrique de flexion de la roue,  $C_{kj}^{*S}$  les coefficients d'influence géométrique de surface et  $J_{mat}$  la complaisance du matériau.

### 3.2.5 Déplacement viscoélastique d'un nœud du maillage

Pour déterminer le déplacement d'un nœud du maillage  $u_k(t)$  (cf. figure 3.4) pour une dent en Polyamide 6,6, la relation de déplacement du modèle de Kelvin généralisé (3.261) (cf. paragraphe 2.2 du chapitre 2) est combinée avec la méthode des coefficients d'influence (3.262).

Nous obtenons donc le déplacement viscoélastique  $u_k(t)$  (3.27) qui intègre les coefficients d'influence géométriques, la pression, l'historique du déplacement et les paramètres viscoélastiques du matériau. Cependant dans le cas de la résolution du partage des charges, la pression de contact  $p_j(t)$  est utilisée. Par conséquent, la contrainte  $\sigma(t)$  dans la relation (3.261) est remplacée par la pression de contact  $p_j(t)$  dans la relation (3.27).

$$\frac{u(t)}{l} = \sigma(t) \sum_{i=0}^n \Delta J_i \left( \frac{dt}{dt + \tau_i} \right) + \sum_{i=0}^n u_i(t-dt) \left( \frac{\tau_i}{dt + \tau_i} \right) \quad (3.261)$$

$$\text{et } u_k(t) = \sum_{j=1}^N C_{kj}^* \cdot J_{mat} \cdot p_j(t) \quad (3.262)$$

$$u_k(t) = \sum_{i=0}^n u_k^i(t) \text{ avec } u_k^i(t) = \sum_{j=1}^N C_{kj}^* p_j(t) \Delta J_i \left( \frac{dt}{\tau_i + dt} \right) + u_k^i(t-dt) \left( \frac{\tau_i}{\tau_i + dt} \right) \quad (3.27)$$

Dans la relation (3.261),  $n$  est le nombre d'éléments de Kelvin-Voigt dans le modèle de Kelvin généralisé,  $i$  l'indice d'un élément de Kelvin-Voigt  $i$ ,  $\Delta J_i$  la complaisance élastique d'un élément de Kelvin-voigt  $i$  et  $\tau_i$  le temps de relaxation de d'un élément de Kelvin-voigt  $i$ .

Dans la relation (3.262),  $C_{kj}^*$  sont les coefficients d'influence géométriques,  $N$  le nombre de nœuds dans les maillages,  $k$  l'indice du nœud où le déplacement  $u(t)$  est étudié,  $j$  l'indice du nœud où la pression  $p(t)$  est appliquée et  $J_{mat}$  la complaisance du matériau.

Le paramètre  $l$  qui représente la longueur utile d'un échantillon en Polyamide 6,6 dans la relation (3.261) est intégré dans les coefficients d'influence de flexion dans la relation (3.27).

### 3.2.6 Résolution du partage des charges

---

#### 3.2.6.1 Mise en équations

La résolution du problème de la répartition des charges nécessite de déterminer les variables inconnues à un instant  $t$ . Dans ce problème, nous avons  $(n+1).N+1$  équations : une équation de l'équilibre avec le couple moteur,  $N$  conditions de compatibilité des déplacements et  $n+1$  éléments de Kelvin-Voigt dans la relation de déplacement général du modèle de Kelvin généralisé. En contrepartie, il y a  $(n+2).N+1$  inconnues :  $N$  pressions  $p_k$ ,  $(n+1).N$  déplacements  $u_k^i$  et le rapprochement des corps  $\alpha$ . Les conditions de contact ( $P_k \geq 0, e_k = 0$ ) ou de non contact ( $P_k = 0, e_k \geq 0$ ) apportent  $N$  équations supplémentaires.

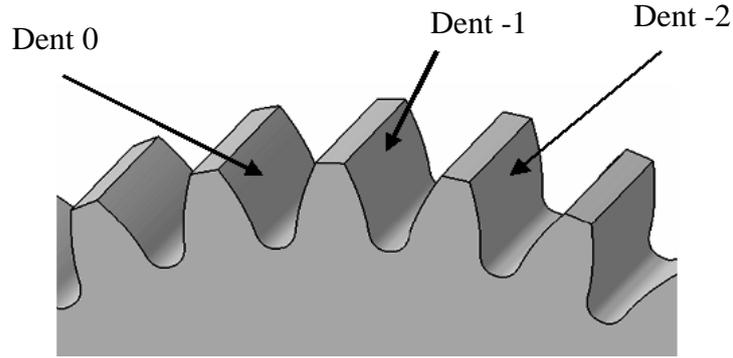
En résumé, le système d'équations qui inclut les relations (3.5), (3.6) et (3.27) permet de calculer le problème de partage des charges car il y a autant d'équations que d'inconnues.

Mais lors d'un calcul du partage des charges, il est nécessaire d'initialiser les déplacements pour le premier couple de dent en contact.

Pour cela, un historique est créé. C'est-à-dire que deux calculs du partage des charges sont réalisés sur les dents -2 et -1 (cf. figure 3.9). Ensuite un troisième et dernier calcul du partage des charges est réalisé sur la dent 0 en utilisant comme historique, le déplacement calculé par la dent -1 (cf. figure 3.9). Notons que l'historique du déplacement récupéré par la dent -2 sont des valeurs initiales.

Les résultats proposés (erreur de transmission, pression de contact...) proviennent donc du calcul du partage des charges réalisé sur la dent 0.

Il n'était pas nécessaire de créer l'historique du déplacement sur plus de deux dents. En effet, nous avons réalisé des calculs du partage des charges avec un historique des déplacements calculé sur une, deux, trois et quatre dents avant l'entrée en contact de la dent 0 (cf. figure 3.9). Les résultats ont montré que le rapport précision des résultats et temps de calcul était bon uniquement quand l'historique des déplacements était créé sur deux dents.



**Figure 3.9** : Numérotation des dents pour la création de l'historique du déplacement

### 3.2.6.2 Algorithme de résolution

Pour résoudre le problème du partage des charges, nous utilisons la méthode du point fixe qui nous assure une convergence quasi-systématique [87].

Nous devons trouver dans un premier temps le rapprochement des corps à partir des relations (3.5) et (3.6).

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N p_k \cdot (\overline{M}_k \wedge \overline{n}_k) \cdot s_k = C_m \\ p_k (u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k) = \alpha \cdot p_k \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N p_k \cdot (\overline{M}_k \wedge \overline{n}_k) \cdot s_k = C_m \\ p_k = \frac{\alpha \cdot p_k}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k} \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot \sum_{k=1}^N S_k \frac{p_k \cdot (\overline{M}_k \wedge \overline{n}_k)}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k} = C_m \\ p_k = \frac{\alpha \cdot p_k}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k} \end{cases} \quad (3.30)$$

Le rapprochement des corps (3.31) est obtenu à partir des relations (3.28) à (3.30).

$$\alpha = \frac{C_m}{\sum_{k=1}^N S_k \frac{p_k \cdot (\overline{M}_k \wedge \overline{n}_k)}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k}} \quad (3.31)$$

Par la suite, nous rapportons la relation (3.31) dans la deuxième égalité de (3.30). Ainsi nous pouvons calculer les inconnues  $p_k$  (3.32).

$$p_k = \alpha \frac{P_k}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k} = \frac{C_m}{\sum_{k=1}^N S_k \frac{P_k \cdot (\vec{M}_k \wedge \vec{n}_k)}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k}} \frac{P_k}{u_{1k} + u_{2k} + \varepsilon_k} \quad (3.32)$$

Pour compléter la compréhension de l'algorithme, quelques rappels sont utiles. Le déplacement total du pignon et de la roue peut s'écrire avec la relation (3.33). Il peut se calculer avec la loi de déplacement total du modèle de Kelvin généralisé (3.34) qui dépend de la pression, des temps de relaxation et du temps (3.35).

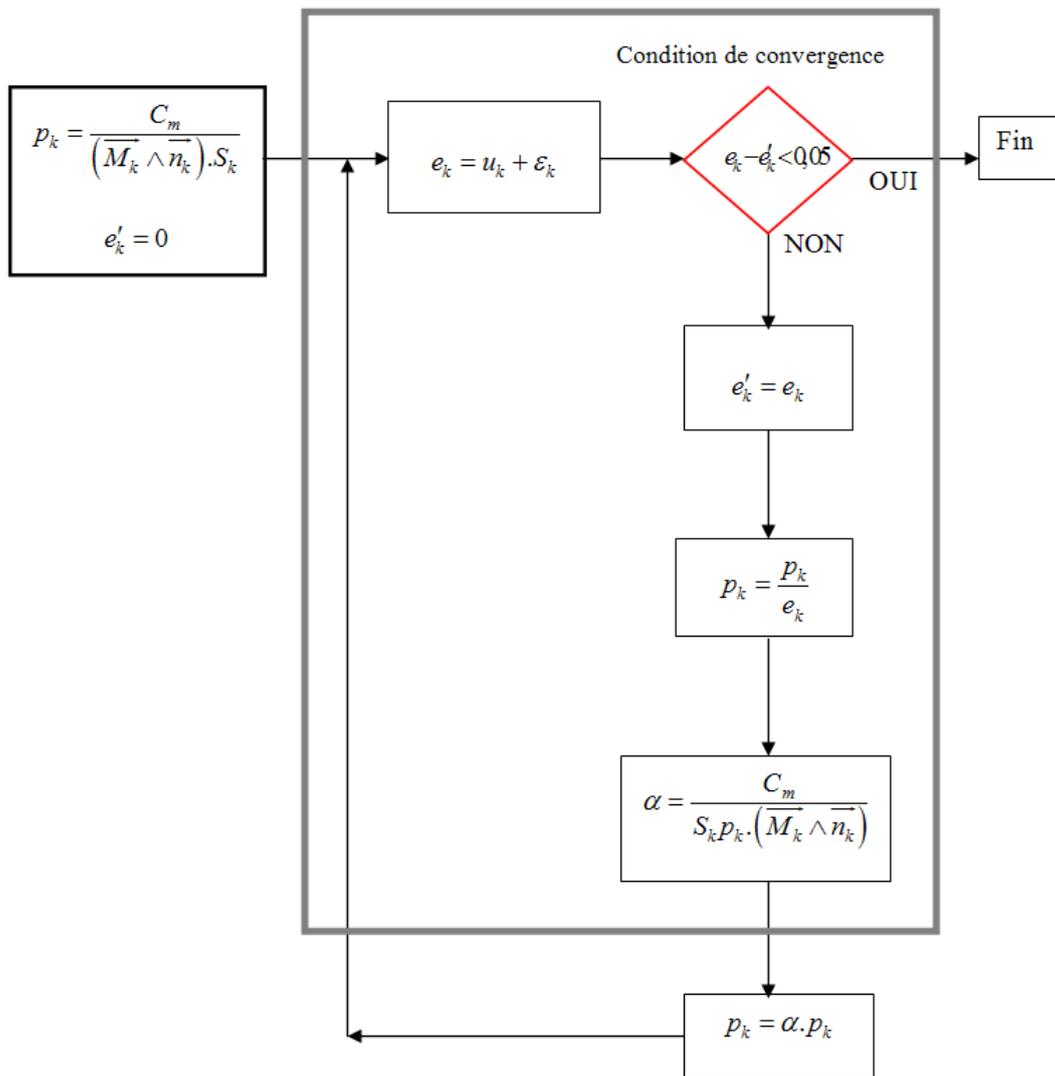
$$u_k = u_{1k} + u_{2k} \quad (3.33)$$

$$u_k = \sum_{i=0}^n u_k^i \quad (3.34)$$

$n$  est le nombre de blocs de Kelvin-Voigt.

$$u_k^i = f(p_k, \tau, t) \quad (3.35)$$

L'algorithme peut alors s'écrire selon un organigramme qui est présenté sur la figure 3.10.



**Figure 3.10** : Algorithme de résolution de la répartition des charges

### 3.2.6.3 Hypothèse sur la taille de contact

Le calcul de la répartition des charges contient de nombreuses étapes de calculs qui nécessitent un algorithme assez long avec des calculs itératifs. De plus par rapport à un engrenage de type Acier/Acier, la prise en compte de la viscoélasticité augmente le temps de calcul pour chaque position cinématique. Dans le cas d'un nœud du maillage compris dans la zone de contact, la pression est non nulle. Un calcul complet du partage des charges en utilisant l'algorithme du point fixe est donc nécessaire. Sinon, pour un nœud du maillage compris hors

de la zone de contact, la pression est nulle. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de faire un calcul complet.

Les équations de Hertz sont utilisées pour estimer la taille de l'aire de contact (3.36).

$$a = 2 \sqrt{\frac{PR_{eq}}{\pi E_{eq}}} \quad (3.36)$$

Il faut donc connaître la pression de contact  $P$ , le rayon de courbure équivalent  $R_{eq}$  et le module équivalent  $E_{eq}$ .

Le module équivalent est calculé avec la relation (3.37). Dans cette relation, les modules d'Young des corps 1 et 2, qui sont définis respectivement par  $E_1$  et  $E_2$ , sont approximatifs. Nous avons utilisé le module relaxé à température élevée et à sec (0,8 GPa). Par rapport au matériau, nous obtenons donc la zone de contact estimée maximale.

$$E = \frac{1}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \quad (3.37)$$

Pour simplifier le calcul dans (3.37), la pression de contact  $P$  et le rayon de courbure équivalent  $R_{eq}$  sont calculés pour un contact au point primitif de fonctionnement. La pression de contact est calculée à partir de la force globale non répartie donnée par le couple moteur et le rayon de courbure à partir des relations (3.38) et (3.39). Il est nécessaire de rappeler qu'en fonction des positions cinématiques, la ligne de contact n'est pas forcément placée au point primitif de fonctionnement. Afin de compenser notre hypothèse, la zone de contact estimée est volontairement augmentée de 25% pour avoir la certitude qu'elle intègre la ligne de contact quelle que soit la position cinématique.

$$\begin{cases} R_1 = \sin \alpha'_i \cdot r'_1 \\ R_2 = \sin \alpha'_i \cdot r'_2 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.39)$$

$\alpha'_i$  est l'angle pression apparent de fonctionnement,  $r'_1$  le rayon primitif de fonctionnement du pignon et  $r'_2$  le rayon primitif de fonctionnement de la roue.

Il n'y a pas de conséquences directes sur les résultats si la taille de contact est surestimée. L'algorithme de résolution de la répartition des charges permet par la suite d'affecter une pression nulle aux points qui sont placés en dehors du contact. Néanmoins, l'utilisation de la théorie de Hertz pour estimer la zone de contact divise le temps de calcul final de la répartition des charges par trois.

### 3.2.7 Erreur de transmission sous charge et raideur d'engrènement

---

L'erreur de transmission sous charge est liée au rapprochement des corps. Ce dernier est intégré dans les équations de compatibilité des déplacements et calculé dans l'algorithme de résolution. Mais pour déterminer l'erreur de transmission sous charge dans (3.40), nous ajoutons également l'erreur de transmission à vide.

Pour faciliter les comparaisons entre les différents résultats, nous évaluons l'erreur de transmission de façon angulaire. Le rapprochement des corps étant défini linéairement et normal au profil, nous divisons l'erreur de transmission sous charge par  $r_b \cdot \cos \beta_b$  pour la définir angulairement.

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha}{r_b \cdot \cos \beta_b} + \Delta \phi'_2 \quad (3.40)$$

Où  $\Delta \phi'_2$  est l'erreur de transmission à vide.

La raideur d'engrènement est également liée au rapprochement des corps, elle est déterminée approximativement par la relation (3.41).

$$K = \frac{F}{\alpha} \quad (3.41)$$

où  $F$  est la charge totale appliquée.

### 3.2.8 Prise en compte de l'échauffement dans le modèle de partage des charges et influence sur le comportement mécanique

---

Le comportement mécanique du Polyamide 6,6 est dépendant de la température (cf. paragraphe 2.4 du chapitre 1). Or pendant le fonctionnement d'un engrenage en Polyamide 6,6, la température de l'engrenage augmente jusqu'à la stabilisation thermique (cf. paragraphe 3.3.3 du chapitre 1). Il est donc important d'en tenir compte dans le modèle quasi-statique du partage des charges.

Les modèles thermiques utilisés pour estimer les élévations de température pendant le fonctionnement sont ceux de Hooke (3.42) pour l'écart de température dans le volume de l'engrenage et de Block (3.43) pour la température de surface. Ces modèles thermiques simples sont les seuls à proposer rapidement une estimation de ces élévations de température (cf. paragraphe 3.2.1 du chapitre 1).

$$T_v = \frac{0,625 \cdot \mu \cdot C}{c \cdot \rho \cdot z \cdot b \cdot (r^2 - r_1^2)} \quad (3.42)$$

$C$  est le couple appliqué,  $\mu$  le coefficient de frottement,  $z$  le nombre de dents de la roue,  $\rho$  la densité de l'air,  $c$  la chaleur spécifique de l'air,  $b$  la largeur de denture,  $r$  le rayon de tête et  $r_1$  le rayon de référence.

$$T_f = 1,11 \cdot \mu \cdot F \cdot \frac{(V_1^{1/2} - V_2^{1/2})}{b \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot \rho \cdot c \cdot a}} \quad (3.43)$$

$\mu$  est le coefficient de frottement,  $F$  la force normale affectée sur la dent,  $b$  la largeur de denture,  $V_1$  la vitesse de glissement du pignon,  $V_2$  la vitesse de glissement de la roue,  $k$  la conductivité thermique,  $c$  la chaleur spécifique,  $\rho$  la densité et  $a$  la moitié de la largeur de contact.

Notons que l'utilisation de ces modèles thermiques nécessite d'obtenir le coefficient de frottement dynamique dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6. Des essais de mesure du coefficient de frottement sont détaillés dans le chapitre 4.

Pour ajuster le comportement mécanique de l'engrenage aux élévations de température estimées pendant le fonctionnement (3.42) et (3.43), la distribution des temps de relaxation  $\tau_i$  est modifiée.

Comme dans le cas des coefficients d'influence (cf. paragraphe 2.4.3 du chapitre 3), la distribution des temps de relaxation  $\tau_i$  est séparée (3.44) : volume et contact.

- Dans la partie dépendant des coefficients d'influence de flexion, la distribution des temps de relaxation  $\tau_i^V$  est ajustée à la température du volume. Notons ici que la température de volume est composé des termes suivants : température ambiante  $T_a$  et élévation de température estimée avec le modèle de Hooke  $T_v$  (3.42) [26].
- Dans la partie liée au contact avec les coefficients d'influence géométriques de contact  $C_{kj}^{*S}$ , la distribution des temps de relaxation  $\tau_i^S$  est ajustée à la température du contact. Cette dernière est composé des termes suivants : température ambiante  $T_a$  et des élévations de température estimées par les modèles de Hooke  $T_v$  (3.42) et de Block  $T_f$  (3.43) [26].

Distribution des temps de relaxation  $\tau_i^S$   
ajustée à la température maximale au  
contact [26]

Distribution des temps de relaxation  
 $\tau_i^V$  ajustée à la température  
maximale hors du contact [26]

$$\begin{cases}
 u_k^i(t) = \sum_{j=1}^N C_{kj}^{*S} p_j(t) \Delta J_i \left( \frac{dt}{\tau_i^S + dt} \right) + u_k^{iS}(t-dt) \left( \frac{\tau_i^S}{\tau_i^S + dt} \right) + \sum_{j=1}^N C_{kj}^{*V} p_j(t) \Delta J_i \left( \frac{dt}{\tau_i^V + dt} \right) + u_k^{iV}(t-dt) \left( \frac{\tau_i^V}{\tau_i^V + dt} \right) \\
 u_k = \sum_{i=0}^n u_k^i(t)
 \end{cases} \quad (3.44)$$

Par conséquent, l'algorithme de résolution du partage des charges est également modifié. En effet, il est nécessaire de recalculer la température flash pour chaque pression  $p_k$  proposée dans l'algorithme du point fixe car le modèle de Block (3.43) nécessite de connaître la pression de contact  $p_k$ . Ce n'est pas le cas du modèle de Hooke (3.42). Cet algorithme modifié est présenté sur la figure 3.11.

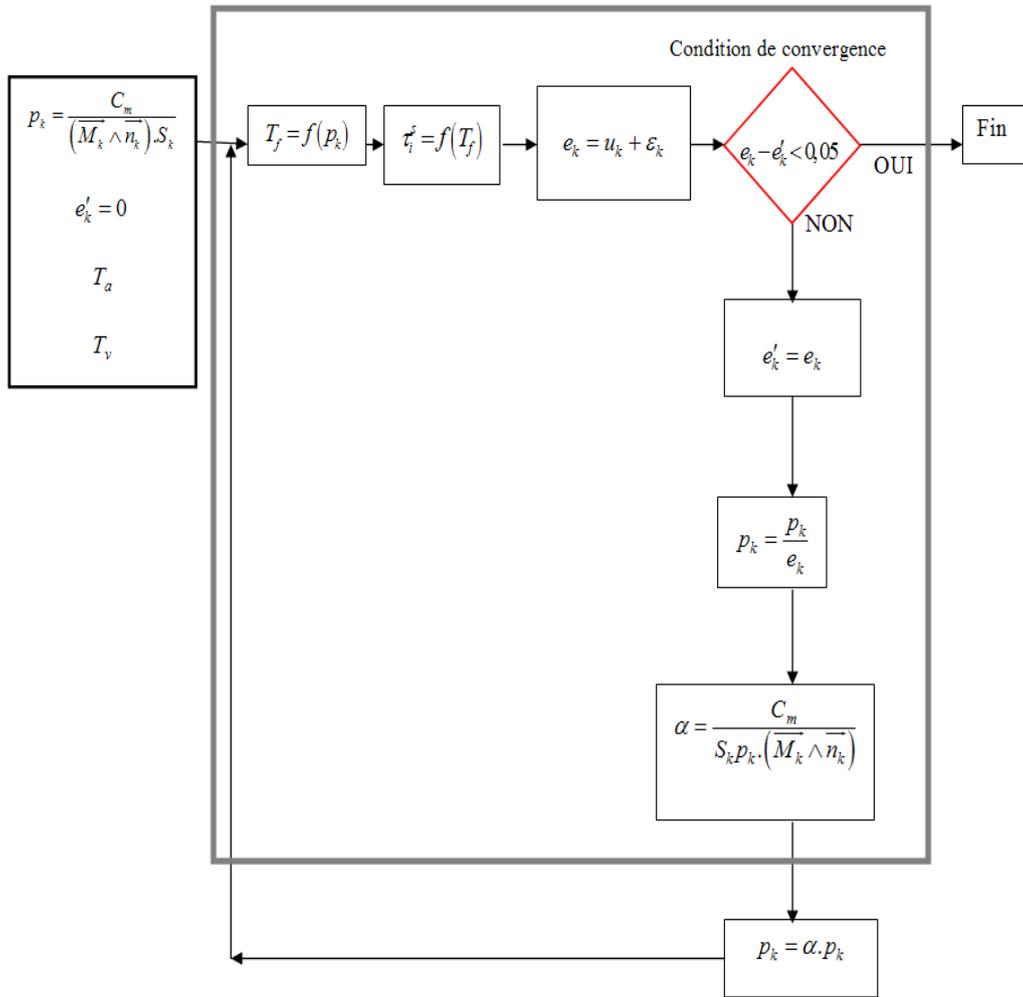


Figure 3.11 : Algorithme de résolution du partage des charges modifié

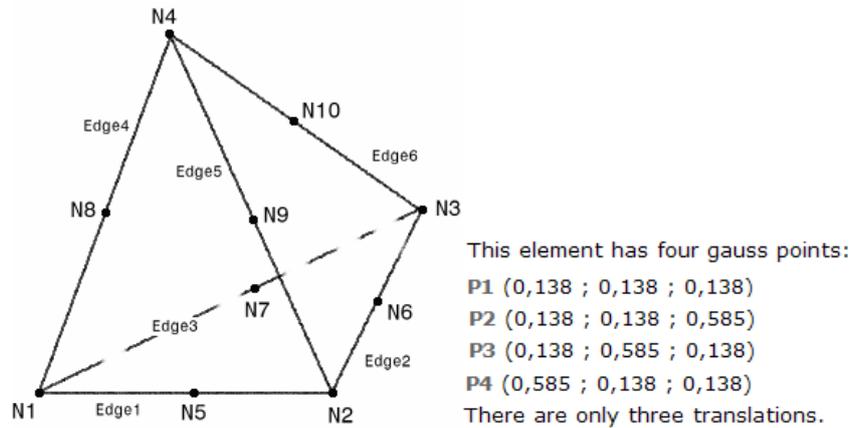
### 3.2.9 Simulation des contraintes en pied de dent

A partir des pressions de contact calculées avec le modèle de partage des charges, nous pouvons calculer les contraintes en pied de dent avec l'atelier éléments finis du logiciel CATIA.

Bien que le calcul éléments finis dans le logiciel CATIA soit élastique, la viscoélasticité est prise en compte de façon approximative par le module élastique que nous évaluons, à partir des courbes de spectrométrie mécanique, à la température et la fréquence de rotation de l'engrenage.

Pour réaliser ces calculs, un maillage de type parabolique avec des éléments de type tétraédrique à dix nœuds est défini. Ils sont présentés sur la figure 3.12. Cet élément a trois degrés de liberté (translation) par nœud et possède quatre points de Gauss.

Les conditions limites sont des encastremets aux extrémités de l'engrenage et un chargement imposé sur les flancs de denture pour chaque position cinématique. Ce chargement est issu de la résolution du partage des charges.



*Figure 3.12 : Elément « tétraèdre » à 10 nœuds*

Tous les résultats issus de la modélisation du partage des charges et des contraintes en pied de dent sont présentés avec l'étude d'un cas complet au chapitre 4.

### 3.3 Conclusion

La méthode de calcul développée par le LaMCoS pour simuler le comportement mécanique des engrenages en acier a été validée auparavant pour différentes géométries de dentures. A présent, elle est adaptée au cas des engrenages cylindriques de type Polyamide 6.6.

Les deux premières étapes du processus n'ont pas été modifiées. La troisième partie du calcul concernant le partage des charges entre les couples de dents en contact a été adaptée dans le cadre de cette thèse. Le calcul est basé sur la résolution des équations de compatibilité des déplacements. La méthode des coefficients d'influence est utilisée afin de prendre en compte séparément les déformations globales de flexion et les déformations locales de contact. C'est dans cette partie que la loi de déplacement viscoélastique du modèle de Kelvin généralisé est intégrée. Le couplage entre la loi viscoélastique et la méthode des coefficients d'influence permet de tenir compte des propriétés viscoélastiques et des effets de volume et de contact. L'algorithme de résolution du partage des charges a été développé afin d'intégrer l'estimation des températures dans la zone de contact.

La modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6 nécessite de connaître l'historique du déplacement du matériau. A un instant  $t$  de l'engrènement, afin de garder en mémoire les déformations précédentes, le maillage de résolution des équations de compatibilité a été adapté sur l'ensemble de la surface active des dents potentiellement en contact.

A la fin de ce chapitre, le calcul des contraintes en pied de dent par l'atelier éléments finis de CATIA est présenté. La viscoélasticité du matériau est prise en compte en adaptant le module élastique. Les résultats du modèle numérique sont présentés et comparés à des méthodes standard ainsi qu'à des mesures expérimentales dans le chapitre suivant.

# Chapitre 4 : Simulations, essais et validations expérimentales

---

## Introduction

L'objectif de ce quatrième chapitre est de présenter les différentes comparaisons, expériences et validations du modèle de partage des charges détaillé dans le chapitre précédent.

La première partie est consacrée à la présentation du logiciel « PRINCE POLYMERE », qui intègre ce modèle. L'interface utilisateur permettant d'accéder aux différents résultats (profil de l'engrenage, erreur cinématique à vide, position des lignes de contact, partage des charges, erreur de transmission sous charge, pressions de contact et raideur d'engrènement) est détaillée.

Pour estimer l'apport du modèle de partage des charges, un deuxième paragraphe le compare à une autre méthode de dimensionnement standard des engrenages en Polyamide 6,6 : la méthode VDI 2545 (cf. paragraphe 4.2 du chapitre 1).

En troisième partie, le coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6 est mesuré. En effet, ce résultat est nécessaire pour utiliser les modèles thermiques de Block et de Hooke.

Enfin, différentes expériences sont présentées. Elles sont réalisées à partir d'un banc engrenages en Polyamide 6,6 que nous avons développé dans le cadre de cette thèse. Ce banc permet de réaliser deux mesures pendant le fonctionnement de l'engrenage : la température et l'erreur de transmission. Les résultats thermiques permettent d'identifier les différentes sources de chaleur et d'obtenir la température de l'engrenage en fonction du temps. Les mesures de l'erreur de transmission sous charge sont ensuite comparées aux résultats du modèle de partage des charges pour les engrenages en Polyamide 6,6.

---

## 4.2 Présentation du logiciel « PRINCE POLYMERE »

Le logiciel « PRINCE POLYMERE » est l'adaptation de différents logiciels développés au LaMCoS. Il est composé de plusieurs ateliers :

- Géométrie du pignon et de la roue.
- Cinématique à vide.
- Définition des maillages utilisés pour le calcul des coefficients de flexion.
- Calcul des coefficients d'influence de flexion.
- Calcul du partage des charges.
- Analyse des résultats du partage des charges.
- Calcul des contraintes en pied de dent.

Les coefficients de flexion et le calcul des contraintes en pied de dent sont calculés à partir de l'atelier éléments finis du logiciel CATIA. Des macro-commandes entre PRINCE POLYMERE et CATIA ont été développés pour créer une géométrie de l'engrenage et effectuer les calculs de flexion automatiquement.

Une interface, montrée sur la figure 4.1, a été créée pour permettre d'établir un dialogue entre l'utilisateur et le code source. La figure 4.2 présente un fichier Excel qui permet d'optimiser les paramètres et de remplir l'interface utilisateur.

The screenshot shows the 'Prince\_Polymère\_PA6,6\_Version1' software window. It features a menu bar with 'Fichier', 'Pré-processeur', 'Calcul', 'Post-processeur', and 'Configuration'. Below the menu is a tabbed interface with three tabs: 'Engrenage' (selected), 'Pignon', and 'Roue'. The main area contains several colored panels for data entry:

- Géométrie (Yellow panel):**
  - Module réel (mm) [input field]
  - Angle de pression réel (°) [input field]
  - Angle d'hélice (°) [input field]
- Assemblage (Green panel):**
  - Entraxe (mm) [input field]
  - Décalage (mm) [input field]
  - Déviatoin (°) [input field]
  - Inclinaison (°) [input field]
- Puissance (Light Green panel):**
  - Couple (N.m) [input field]
  - Vitesse de rotation (rad/s) [input field]
- Etude (Blue panel):**
  - Nombre de pas : [input field]
  - Limites automatiques**
  - Position angulaire de début (°) [input field]
  - Position angulaire de fin (°) [input field]
- Condition de fonctionnement (Light Blue panel):**
  - Température fonctionnement (°) [input field]
  - Humidite fonctionnement (%) [input field]

On the right side, there are two sections for 'Etude réalisée':

- Sens horaire :**
  - Flexion du pignon
  - Flexion de la roue
  - Cas de chargement
- Sens trigonométrique :**
  - Flexion du pignon
  - Flexion de la roue
  - Cas de chargement

At the bottom right, there are radio buttons for 'Sens horaire' (selected) and 'Sens trigo'. At the bottom left, there is a label 'Nom du fichier'.

**Figure 4.1** : Interface utilisateur du logiciel PRINCE POLYMERE

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Prince Polymère v1</b>							
2	<b>Données géométrie</b>		Pignon	Roue	<b>Données Assemblage</b>			
3	Module de l'outil (mm)	3,000	3,000	Entraxe de fonctionnement (mm)	109,500	Angle de pression apparent (°)		20,000
4	Angle de pression de l'outil (°)	20,000	20,000	Décalage (mm)	0,00	Angle de pression apparent de fonctionnement (°)		20,000
5	Angle d'hélice (°)	0,000	0,000	Déviaton (°)	0,00	Entraxe théorique (mm)		109,500
6	Nombre de dents	32	41	Inclinaison (°)	0,00	Entraxe avec jeu (mm)		109,690
7	Rayon de tête (mm)	51,000	64,500	<b>Puissance</b>				
8	Rayon de pied (mm)	44,250	57,750	Couple (N.m)	15,00			
9	Largeur de denture (mm)	20,000	20,000	Vitesse de rotation (rad/s)	30,00			
10	Coefficient de déport	0,000	0,000	<b>Etude</b>				
11	Rayon de pointe d'outil (mm)	1,140	1,140	Automatique	0	<= ( 0 = non, 1 = oui)		
12	<b>Métrologie</b>			Position angulaire de début(°)	-6,50			
13	Rayon de base (mm)	45,105	57,791	Position angulaire de fin(°)	2,50			
14	Mesure de profil Lf (mm)	3,404	4,330	Nombre de position	22			
15	Mesure de profil La (mm)	64,680	82,273	<b>Progression de l'étude</b>		sens horaire	sens trigo	
16	Rayon de référence (mm)	48,000	61,500	Flexion du pignon	1	0	<= ( 0 = non, 1 = oui)	
17	Angle d'hélice (°)	0,000	0,000	Flexion de la roue	1	0	<= ( 0 = non, 1 = oui)	
18	Mesure d'hélice L1 (mm)	-9,500	-9,500	Calcul de chargement	1	0	<= ( 0 = non, 1 = oui)	
19	Mesure d'hélice L2 (mm)	9,500	9,500					
20	<b>Matériau</b>			<b>Données complémentaires</b>		Pignon	Roue	
21	Module d'Young (Gpa)	3,24	3,24	Rayon primitif de fonctionnement (mm)	48,000	61,500		
22	Coef. De Poisson	0,39	0,39	Epaisseur réelle au primitif de taillage Sn (mm)	4,712	4,712		
23	<b>Dimension maillage EF</b>			Epaisseur apparente de tête Sat (mm)	6,527	6,865		
24	selon le profil	5	5	Coefficient de creux de l'outil hfo	1	1		
25	selon la largeur	7	7	Coefficient de saillie de l'outil hao	1,25	1,25		
26				Coefficient de troncature K	0	0		
27	<b>Résultats Prince</b>							
28	<b>Engrenage</b>	A vide	Sous Charge	<b>Correction de denture</b>		Pignon	Roue	
29	$\epsilon_{\alpha}$	1,631		Longueur de correction en tête (mm)	0	0		
30	$\epsilon_{\beta}$	0,000		Profondeur de correction en tête (mm)	0	0		
31	$\epsilon_{\gamma}$ horaire		2,478	Longueur de correction en pied (mm)	0	0		
32	$\epsilon_{\gamma}$ trigo			Profondeur de correction en pied (mm)	0	0		
33	<b>Géométrie</b>	Pignon	Roue	Type de correction sur la droite d'action	0	0	<= ( 1 = droite, 2 = parabole)	
34	Rayon prim. de taillage(mm)	48,000	61,500					
35	Rayon prim. de fonct. (mm)	48,083	61,607	<b>Condition de fonctionnement</b>				
36	Rayon de base (mm)	45,105	57,791	Température de fonctionnement (°C)	25			
37	Rayon d'involute (mm)	45,105	59,096	Humidité de fonctionnement (%)	50			
38	<b>Interférences</b>							
39	Vide en fond de dent (mm)	0,940	0,940					
40	De fonctionnement	0,000	0,000					
41	De taillage	0,000	0,000					
42	De profil	0,000	0,000					

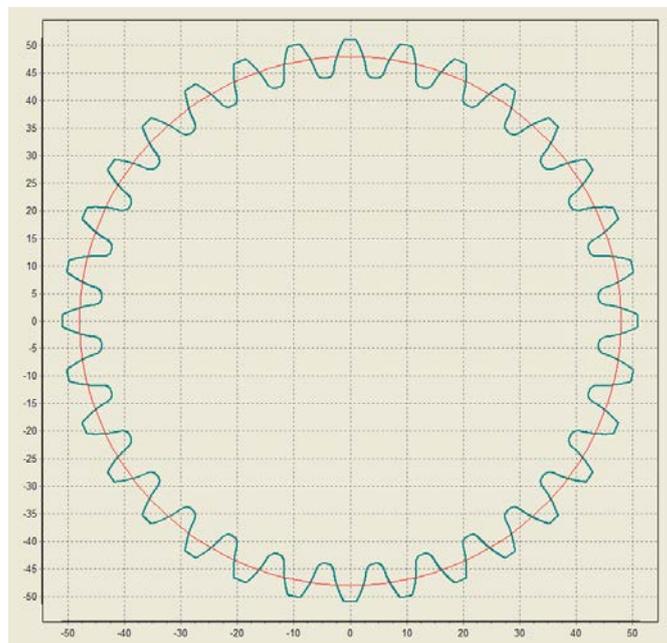
Figure 4.2 : Fichier Excel utilisé pour paramétrer le logiciel PRINCE POLYMERE

#### 4.2.1 Profil de l'engrenage

La simulation du taillage permet d'obtenir la géométrie exacte des roues. La figure 4.3 présente la simulation du profil du pignon avec le rayon primitif en trait rouge. Les données géométriques de l'engrenage étudié sont données dans le tableau 4.1.

	Pignon	Roue
Module de l'outil (mm)	3	3
Angle de pression de l'outil (°)	20	20
Largeur de denture (mm)	20	20
Nombre de dent	32	41
Coefficient de déport	0	0
Coefficient de creux de l'outil	1	1
Coefficient de saillie de l'outil	1,25	1,25
Entraxe théorique (mm)	109,5	
Entraxe de montage (mm)	109,7	

**Tableau 4.1 : Données de l'engrenage**



**Figure 4.3 : Simulation du profil du pignon**

## 4.2.2 Résultats à vide

La simulation de la cinématique à vide permet d'obtenir les zones de contact potentiel et les écarts à vide entre les dents en regard. Les figures 4.4 et 4.5 montrent les erreurs cinématiques à vide et les positions du contact dans deux cas distincts : sans et avec défaut de montage.

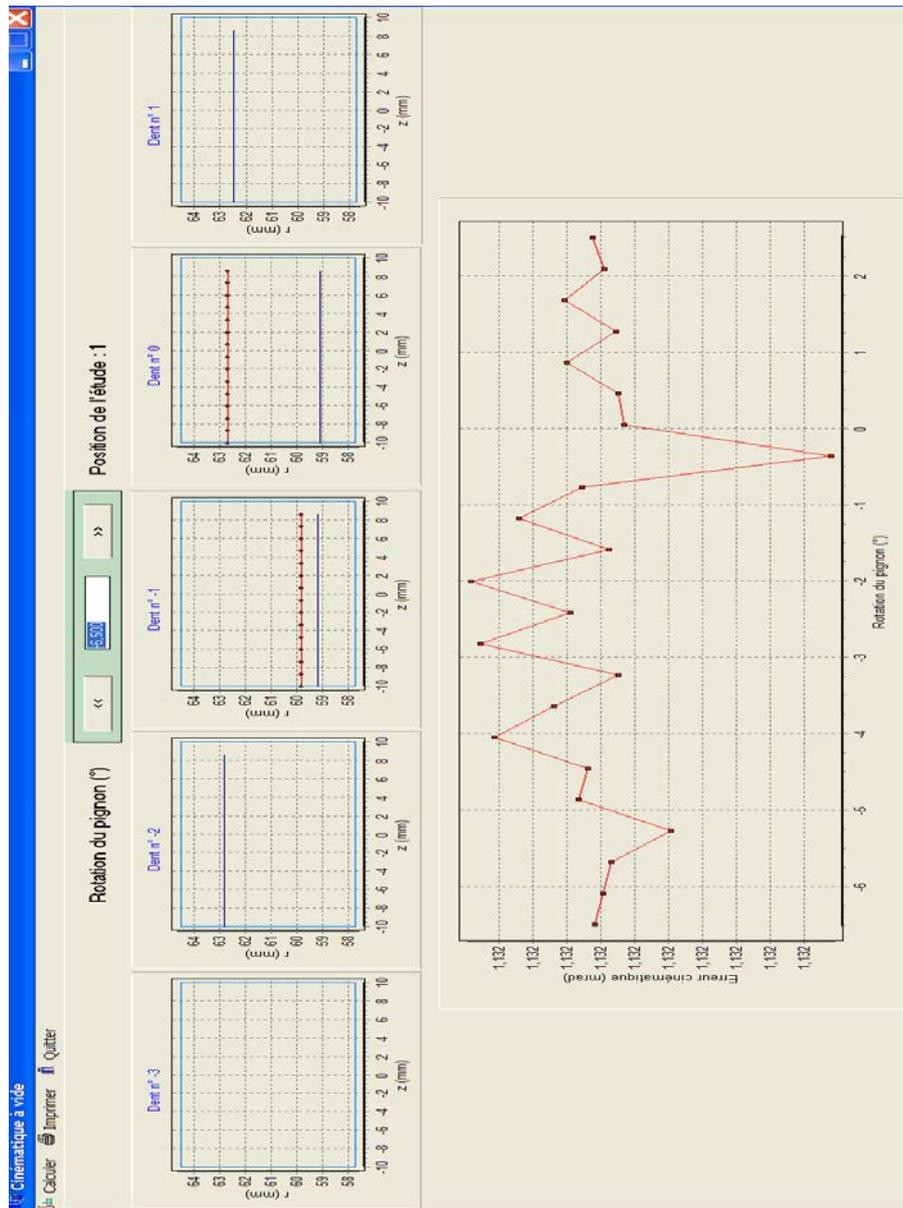
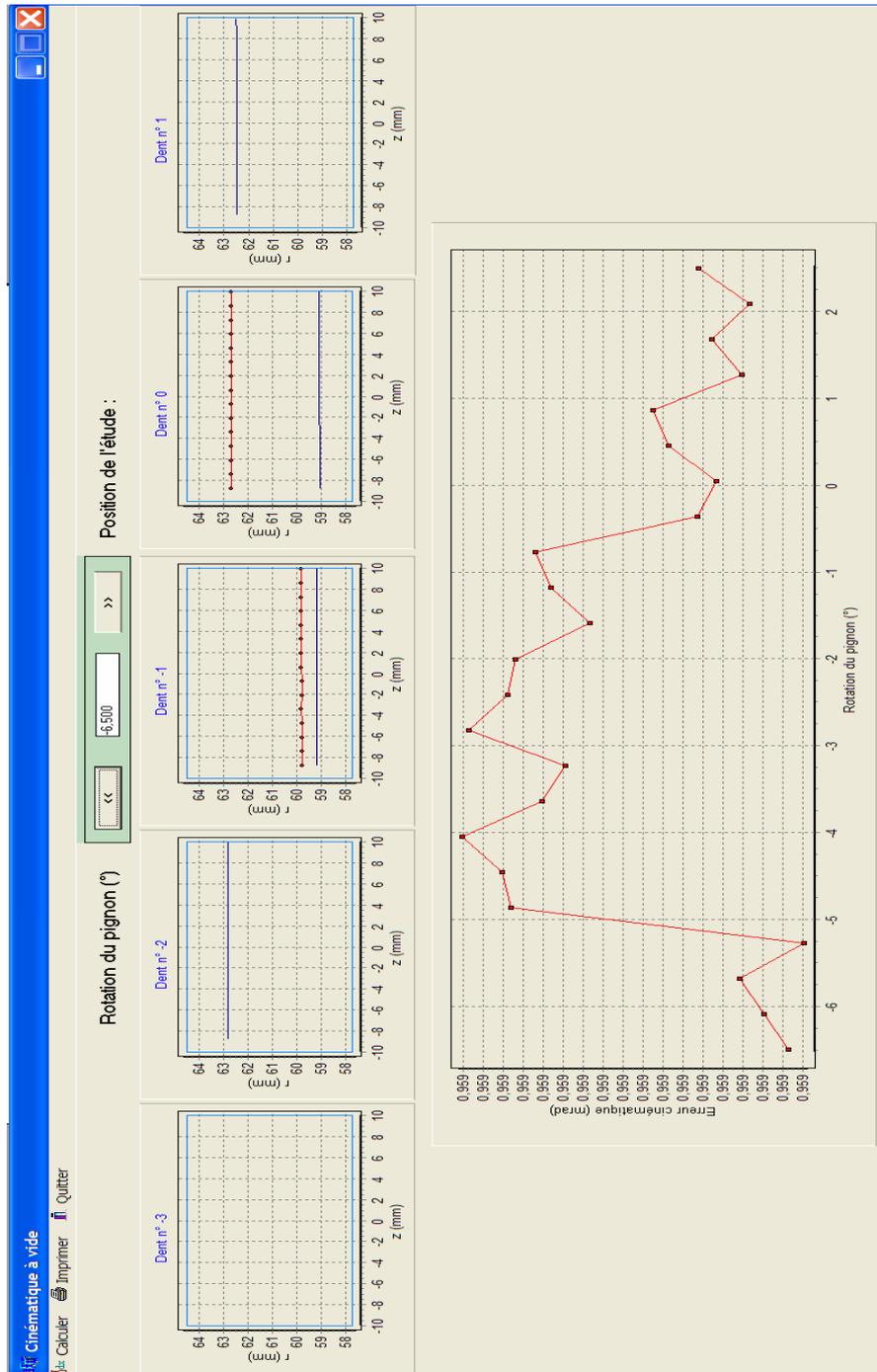


Figure 4.4 : Erreur cinématique à vide avec aucune déviation et aucune inclinaison



*Figure 4.5 : Erreur cinématique à vide avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$*

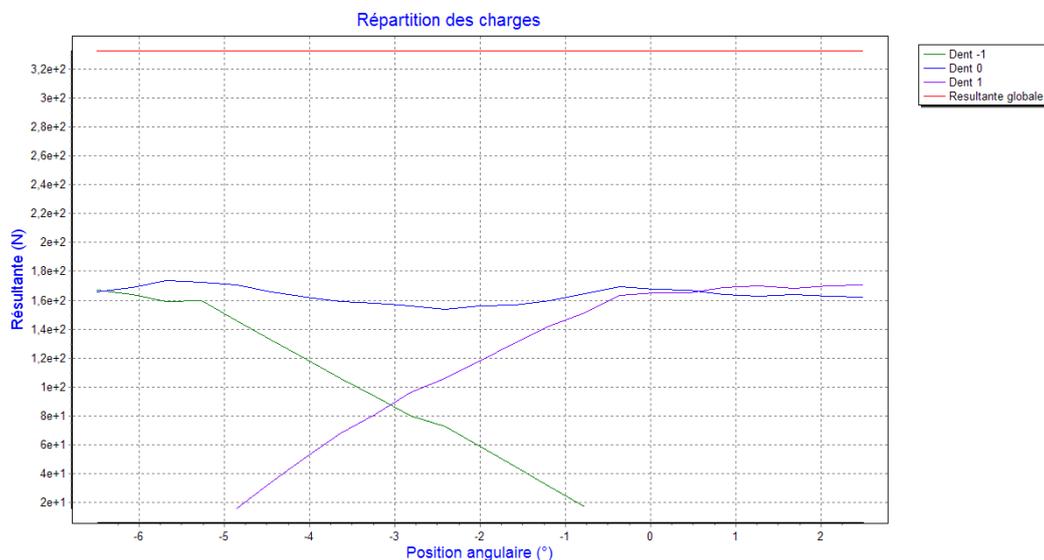
Ces deux cas conduisent à des valeurs et une allure de l'erreur cinématique à vide différentes. L'erreur cinématique à vide est globalement plus importante sans erreur de montage. Nous constatons que dans les deux cas, l'erreur cinématique à vide reste relativement faible et la roue est plus en avance lorsqu'il n'y a pas d'erreur de montage. Par contre, la position des lignes de contact n'est pas influencée par les conditions de montage dans ce cas particulier donné à titre d'exemple.

### 4.2.3 Résultats sous charge pour un engrenage en Polyamide 6,6

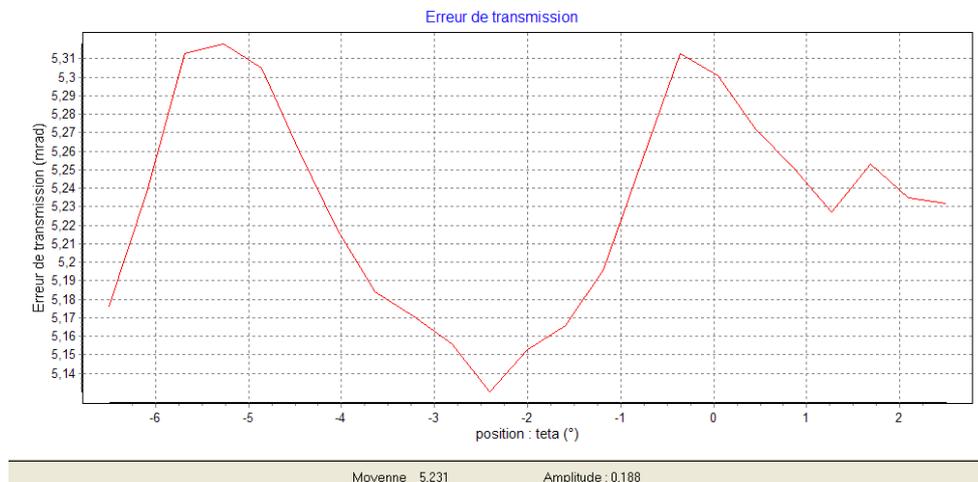
Après avoir calculé la cinématique à vide et les coefficients d'influence de flexion, différents résultats sont donnés par le logiciel :

- Répartition des charges au cours de l'engrènement.
- Répartition des pressions de contact instantanées.
- Erreur de transmission sous charge.
- Raideur d'engrènement.
- Répartition des contraintes principales en pied de dent (avec l'atelier éléments finis de CATIA).

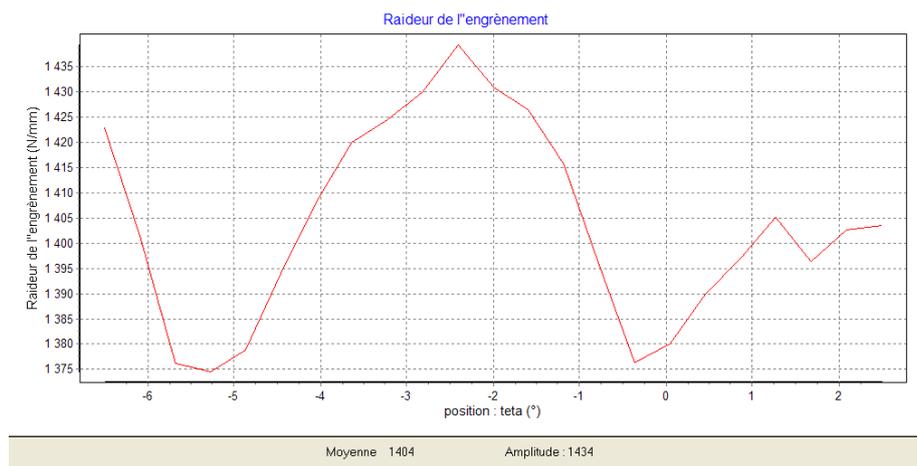
Les prochaines figures présentent l'ensemble des résultats fournis par le calcul du partage des charges. Le cas utilisé est présenté sur le tableau 4.1 à 300 tours/min, 10 N.m, aucune déviation, ni inclinaison, et pour une température de 25°C et une humidité relative de 50%.



**Figure 4.6 : Simulation du partage des charges**



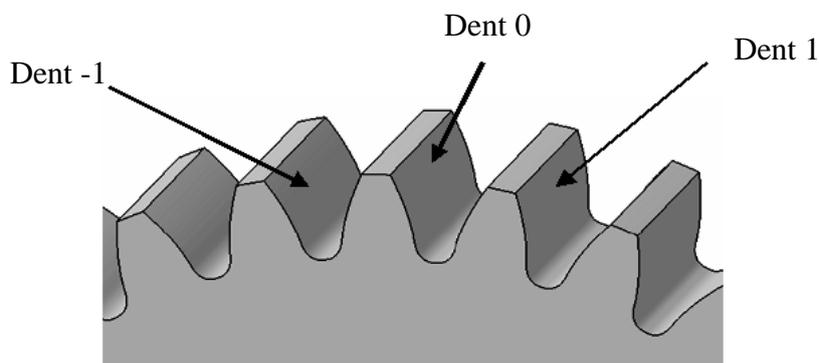
**Figure 4.7 : Simulation de l'erreur de transmission**



**Figure 4.8 : Simulation de la raideur d'engrènement**

L'erreur de transmission sous charge et le partage des charges sont détaillés dans le paragraphe 4.3.5 de ce chapitre.

La figure 4.10 montre l'évolution des pressions sur la largeur de denture au début, au milieu et à la fin de l'engrènement. Notons que les cadres en haut de la figure présentent les positions de la ligne de contact par rapport à la hauteur et la largeur de denture. Les pressions instantanées de contact  $y$  sont représentées avec en couleur rouge la dent -1, bleue la dent 0 et verte la dent 1 (cf. figure 4.9). Dans un cas cylindrique droit, le contact couvre toute la largeur de denture avec une pression qui est répartie sur l'ensemble du contact. Les pressions élevées aux extrémités de la largeur de denture sont dues aux effets de bord. Les points représentés sur les lignes de contact sont les nœuds du maillage large (cf. figure 3.4 du chapitre 3).



**Figure 4.9 : Numérotation des dents**

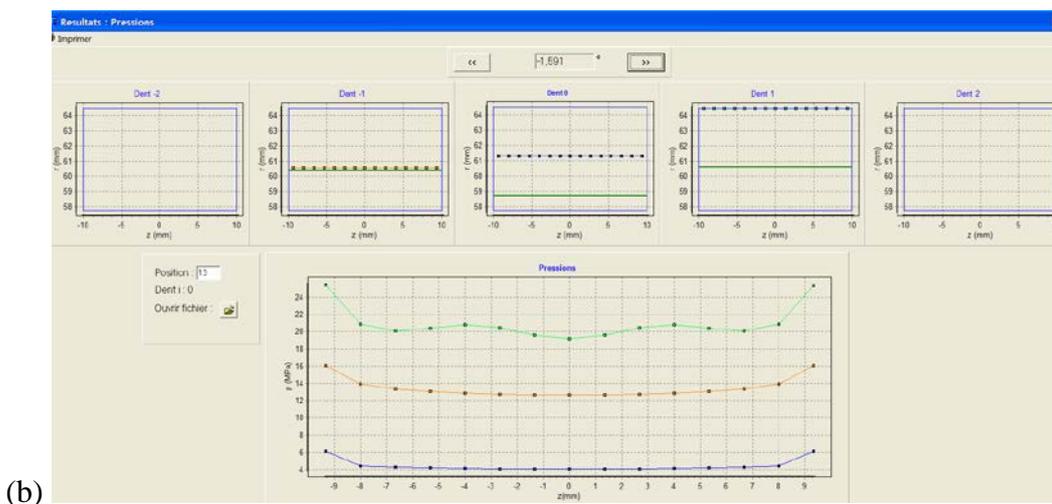
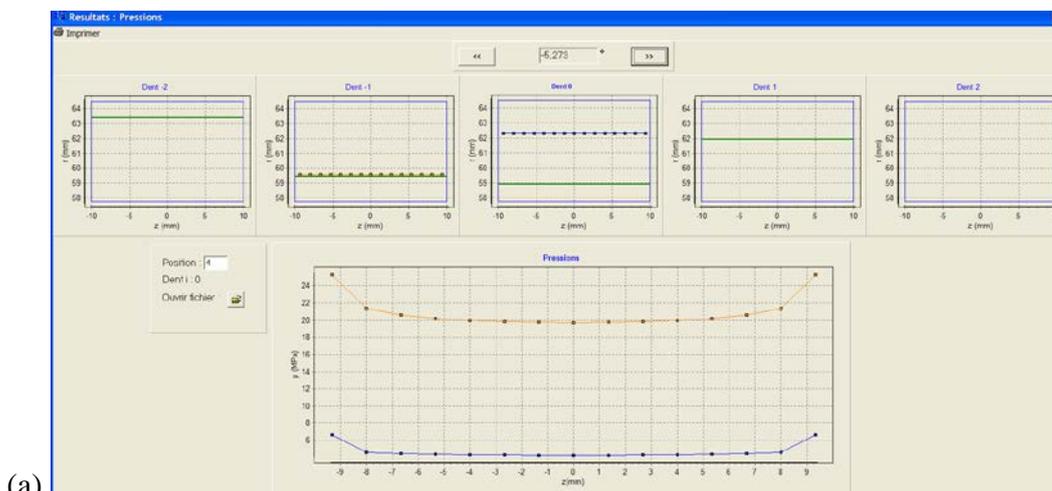
Le calcul a été effectué pour 22 positions cinématiques. Les trois positions cinématiques représentées sur les figures 4.10 (4, 13 et 22) sont donc caractéristiques du début, du milieu et de la fin de l'engrènement.

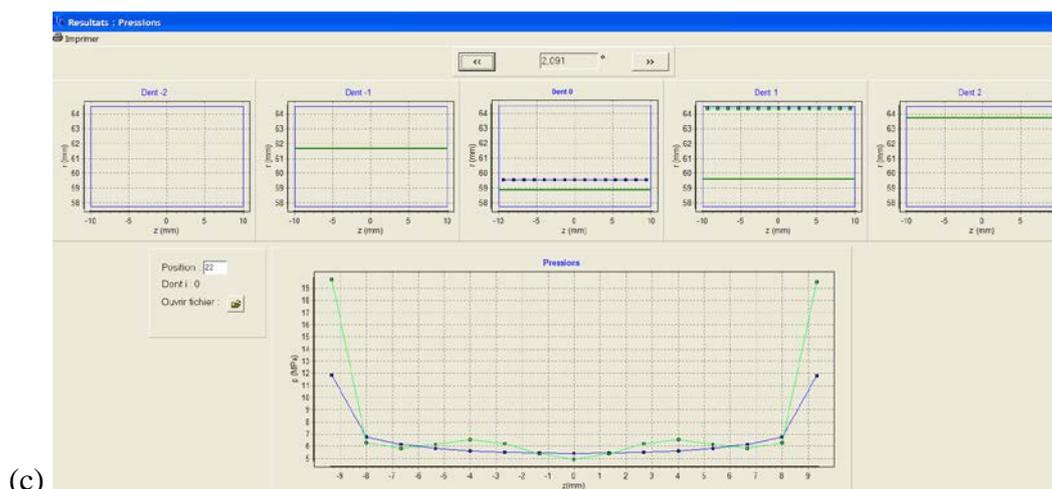
Au début de l'engrènement (cf. figure 4.10 (a)), il y a contact sur la dent -1 et 0. Notons que sur la dent -1, la ligne de contact se trouve en tête de denture donc les contraintes de pression sont assez élevées (20 MPa en moyenne). Sur la dent 0, la ligne de contact se trouve au milieu de la hauteur de la dent avec une pression de contact réduite (5 MPa).

Au milieu de l'engrènement (cf. figure 4.10 (b)), les trois dents sont en contact. A cette position cinématique, la pression maximale est déterminée sur la dent 1 (21 MPa). Dans ce

cas, notons que la contrainte de pression exercée sur la dent 1 dépasse la limite de linéarité du matériau. Rappelons que cette dernière est de 12,5 MPa à température ambiante et de 8 MPa à 80°C dans des conditions sèches. Cependant, les contraintes de pression sont très localisées et dépendent de la taille de la maille où elles sont calculées. Donc pour ce type de contrainte, nous ne tenons pas compte de la limite de linéarité.

A la fin de l'engrènement (cf. figure 4.10 (c)), seules les dents 0 et 1 sont en contact avec des pressions basses (environ 5 MPa).



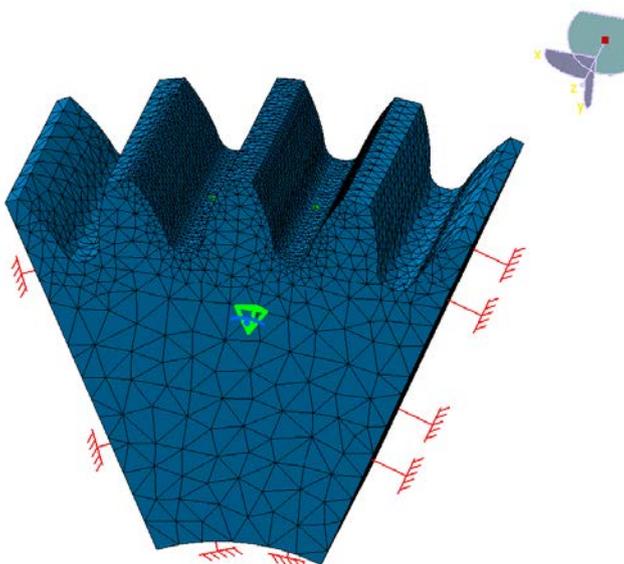


**Figure 4.10** : Position des lignes de contact et distribution des pressions de surface, (a) début d’engrènement, (b) milieu d’engrènement et (c) fin d’engrènement

#### 4.2.4 Calcul des contraintes en pied de dent

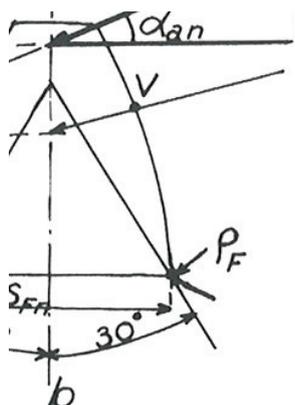
Nous rappelons que la méthode du calcul des contraintes en pied de dent est décrite au paragraphe 2.9 du chapitre 3.

Le maillage utilisé pour réaliser le calcul éléments finis est créé automatiquement par des macros commandes dans le logiciel CATIA. La taille globale des éléments est de 2,5 mm et un affinement local du maillage est réalisé sur les flancs qui encadrent la dent centrale. La figure 4.11 présente la géométrie maillée avec les conditions limites.



**Figure 4.11** : Géométrie maillée et conditions limites

D’après la norme ISO 6336 [57], la zone la plus contrainte lorsque la dent est chargée correspond à la zone de tangence entre le flanc de dent et une droite faisant un angle de  $30^\circ$  avec l’axe de symétrie de la dent (cf. figure 4.12). Pour vérifier cette hypothèse, des nœuds sont imposés le long de cette zone de tangence.



**Figure 4.12 :** Hypothèse de simplification ISO [88]

D'un point de vue du matériau, quatre états sont testés : à deux températures (ambiante et 80°C) et à sec ce qui correspond à un cas élastique et à deux températures (ambiante et 80°C) et à 50% d'humidité relative qui correspond à un cas proche de la température de transition vitreuse du matériau (cf. paragraphe 3.2.3 du chapitre 2). Le tableau suivant résume les simulations réalisées.

Simulation	Température (°C)	Humidité (%)	Couple (N.m)	Vitesse (tours/min)
1	25	0	10	300
2	25	50	10	300
3	25	0	20	300
4	25	50	20	300
5	80	0	10	300
6	80	50	10	300
7	80	0	20	300
8	80	50	20	300

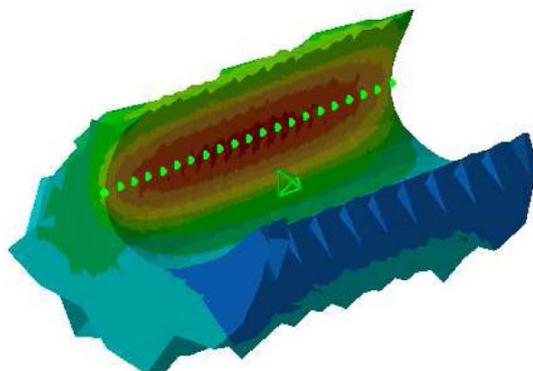
**Tableau 4.2 :** Simulations des contraintes en pied de dent

La figure 4.13 montre que les contraintes maximales calculées sont placées au cœur de la ligne des points imposés.

Pour les simulations 1, 2, 4 et 5 la contrainte principale maximale calculée est de 4,3 MPa et pour les simulations 3, 4, 7 et 8 elle est de 8,5 MPa. Nous pouvons donc conclure que quelque soit la température et l'humidité, la contrainte principale est la même. Le calcul des contraintes en pied de dent est élastique linéaire, donc un changement du module élastique

du matériau dû à la température ou à l'humidité modifie le déplacement mais pas la contrainte principale.

Les résultats montrent que l'engrenage n'est plus dans le domaine linéaire du matériau à 80°C pour un couple de 20 N.m. A 25°C, rappelons que la limite de linéarité du matériau à sec est de 12,5 MPa et de 8 MPa à 80°C. Notons, que le fabricant qui a taillé les engrenages montés sur le banc engrenages préconise un couple maximal d'utilisation de 20 N.m.



*Figure 4.13 : dent d'engrenage chargée*

---

### 4.3 Comparaison du modèle de partage des charges avec la méthode VDI 2545

A notre connaissance, la méthode allemande VDI 2545 (basée sur des normes) [55] et [56] est la plus utilisée pour le dimensionnement des engrenages en polymère (cf. paragraphe 4.2 du chapitre 1). Elle permet de dimensionner des engrenages avec trois matériaux polymères différents : le Polyamide 6,6, le Polyamide 12 et le Polyoxyméthylène. La VDI 2545 est une adaptation de la norme ISO 6336 [57].

Elle dimensionne les deux principaux risques de ruine d'un engrenage : la rupture en pied de dent et la pression trop importante sur le flanc. La méthode VDI 2545 propose dans les deux cas une inéquation à résoudre qui est composée de plusieurs facteurs.

D'un point de vue du matériau polymère, la méthode VDI 2545 prend en compte la viscoélasticité. Elle propose un abaque qui donne l'évolution du module élastique du matériau en fonction de la température à une fréquence de référence et un taux d'humidité non connus (cf. paragraphe 4.2 du chapitre 1). Mais nous supposons que la fréquence des essais de spectrométrie est proche de la fréquence de sollicitation des engrenages. Par contre, l'humidité relative dans le matériau n'est pas intégrée dans la VDI 2545.

Concernant la géométrie de l'engrenage, le facteur de concentration de contrainte de la norme ISO 6336 n'est pas présent dans la VDI 2545. Ce paramètre est important au regard de la forme des dents. Pour contrer ce problème, une nouvelle méthode qui intègre ce facteur est proposée. Elle est appelée « méthode VDI 2545 modifiée » [56].

Nous avons comparés le module élastique en fonction de la température et de l'humidité et nos résultats à ceux obtenus par la méthode VDI 2545 à savoir : les contraintes de surface, les contraintes en pied de dent et enfin les déplacements en tête de denture.

### 4.3.1 Aspect matériau

Les modules élastiques du Polyamide 6,6 utilisés par la méthode VDI 2545 et ceux du modèle de partage des charges sont comparés. Dans les deux méthodes, le matériau est considéré homogène. Le tableau 4.3 résume les résultats obtenus.

Pour proposer ces valeurs, la méthode VDI 2545 utilise des valeurs provenant d'un essai de spectrométrie effectué dans des conditions d'humidité non précisé (cf. paragraphe 4.2 du chapitre 1). Cependant, ce procédé a l'avantage de prendre en compte la température à une fréquence donnée.

En tenant compte d'une incertitude de 10% sur les valeurs proposées, les modules élastiques à sec sont en bon accord avec ceux de la norme VDI.

Par contre, la méthode VDI 2545 ne peut donc pas effectuer des calculs de dimensionnement corrects des engrenages en Polyamide 6,6 sous un environnement humide, ce qui peut être problématique dans le cas des Polyamides qui y sont très sensibles (cf. paragraphe 2.5 du chapitre 1).

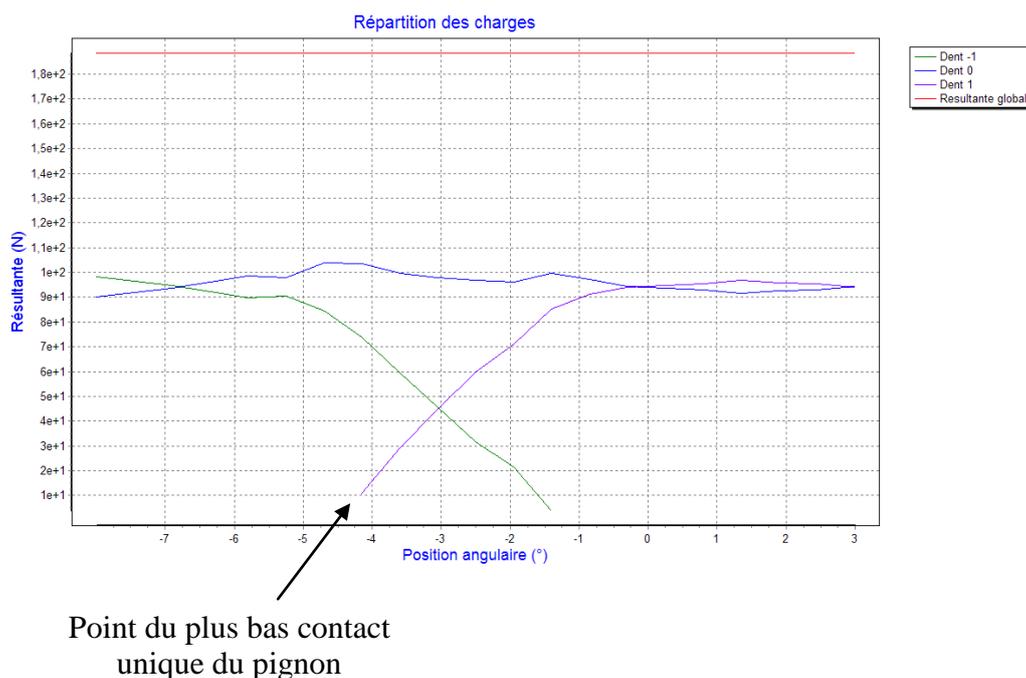
Température ambiante (°C)	25	60	80
Module élastique (GPa) utilisé par la méthode VDI 2545	3,11	2,22	1,4
Module élastique (GPa) utilisé par le modèle de partage des charges à sec à une fréquence de 1 Hertz (cf. figure 2.11)	3,09	1,75	1,17
Module élastique (GPa) utilisé par le modèle de partage des charges à 40% d'humidité relative à une fréquence de référence de 1 Hertz (cf. figure 2.11)	1,26	0,85	0,79

**Tableau 4.3** : Modules élastiques utilisés par la méthode VDI 2545 et dans le modèle de partage des charges

### 4.3.2 Pression sur les flancs

Dans la méthode VDI 2545, le calcul est réalisé au rayon primitif. Nous préférons comparer les résultats des contraintes de pression maximales au point le plus bas du contact unique du pignon (cf. figure 4.14). Pour cela, nous modifions les contraintes de pression estimées par la méthode VDI 2545 en intégrant dans son calcul le facteur  $Z_B$  estimé par la méthode ISO 6336 [57].

Ce facteur qui dépend uniquement de la géométrie permet de ramener le calcul au point le plus bas du contact unique (cf. figure 4.14). A ce point de l'engrènement, le nombre de dents en contact est minimal, les conditions de contact sont les plus défavorables et les contraintes de pression sont maximales.



**Figure 4.14** : Simulation du partage des charges

Les tableaux 4.4 à 4.6 présentent les contraintes de pression maximales calculées par le modèle de partage des charges et par la méthode VDI 2545 intégrant le facteur  $Z_B$ . Le couple est de 8,5 N.m.

En premier lieu, nous pouvons voir que pour un matériau sec, les résultats des deux méthodes de dimensionnement sont assez proches quelque soit la vitesse de rotation. A 60°C, qui correspond à la température de transition vitreuse, l'erreur relative maximale entre les deux méthodes n'excède pas 20%. La différence entre les résultats à sec provient essentiellement de celles entre les modules élastiques (cf. tableau 4.3).

Par contre pour un matériau humide, nous observons une grande différence car l'erreur relative maximale entre les résultats est de 36%. Celle-ci est due à la non prise en compte du taux d'humidité par la méthode VDI 2545.

Rappelons que la méthode VDI 2545 utilise le rapport de conduite à vide alors que le modèle de partage des charges utilise celui sous charge. Par conséquent, la VDI 2545 considère qu'il y a au maximum deux dents en contact avec cette géométrie (cf. tableau 4.1). Or dans certains cas, le modèle de partage des charges considère qu'il y a trois dents en contact. En effet sous des températures élevées, l'écrasement de la dent centrale est beaucoup plus important et les dents qui entourent la dent centrale ont donc plus de chance d'être en contact qu'à température ambiante.

Notons également que la contrainte maximale de surface baisse en fonction de la température. En effet, les propriétés mécaniques du Polyamide 6,6 diminuent en fonction de la température.

La méthode VDI 2545 apparaît relativement efficace pour déterminer de manière rapide la pression de contact. Les résultats qu'elle fournit sont proches de ceux du modèle de partage des charges dans certaines conditions de vitesse. L'avantage du modèle de partage des charges est qu'il peut prendre en compte de manière précise l'influence de la vitesse de rotation, de la température, de l'humidité et du nombre de dents en contact.

	Engrenage à 25°C	Engrenage à 60°C	Engrenage à 80°C
$\sigma_{VDI2545\_MAX}$ (MPa) intégrant le facteur $Z_B$	19,1	15,7	13

**Tableau 4.4** : Résultats obtenus par la méthode VDI 2545 pour une vitesse de rotation quelconque

	Engrenage à 25°C et à sec	Engrenage à 60°C et à sec	Engrenage à 80°C et à sec
$\sigma_{PRINCE\_MAX}$ (MPa) à 300 tours/min	19	19	14
Nombre de dents en contact à la position la plus chargée à 300 tours/min	2	2	2
$\sigma_{PRINCE\_MAX}$ (MPa) à 5 tours/min	19	17	12
Nombre de dents en contact à la position la plus chargée à 5 tours/min	2	2	3

**Tableau 4.5** : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à sec

	Engrenage à 25°C et à 50% HR	Engrenage à 60°C et à 50% HR	Engrenage à 80°C et à 50%HR
$\sigma_{PRINCE\_MAX}$ (MPa) à 300 tours/min	14	10,5	10,3
Nombre de dents en contact à la position la plus chargée à 300 tours/min	2	3	3
$\sigma_{PRINCE\_MAX}$ (MPa) à 5 tours/min	12	10	10
Nombre de dents en contact à la position la plus chargée à 5 tours/min	3	3	3

**Tableau 4.6** : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à 40% d'humidité relative

### 4.3.3 Contrainte en pied de dent

Pour le calcul des contraintes en pied de dent, deux cas de chargement sont discutés. Dans ce paragraphe, nous étudions uniquement les contraintes en pied de dent calculées sur le pignon.

Le premier est celui où le chargement est créé à partir des résultats de la modélisation du partage des charges (cf. paragraphe 2.9 du chapitre 3) et (cf. paragraphe 2.4 du chapitre 4). Ainsi, le nombre exact de dents en contact est pris en compte.

Dans le deuxième cas, la géométrie 3D créée automatiquement par le modèle de partage des charges est chargée manuellement. Ainsi, nous pouvons appliquer la charge (4.1) en tête de denture tel que le suppose la VDI 2545.

$$F_{bn} = \frac{C_m}{r_b} \quad (4.1)$$

Pour réaliser ces calculs, l'atelier éléments finis du logiciel CATIA (cf. paragraphe 2.9 du chapitre 3) est utilisé.

Dans CATIA, le maillage est généré automatiquement. Les éléments sont de type parabolique avec une taille globale de 4 mm et un affinement local sur les flancs des trois dents centrales.

Comme il s'agit d'un calcul élastique (cf. paragraphe 2.4 du chapitre 4) le seul cas à 8,5 N.m, 300 tours/min, 25°C et 50% d'humidité relative est discuté.

Dans le premier cas, la contrainte principale maximale est la suivante :

$$\sigma_{f\_max\_PRINCE\_POLYMERE} = 6,8 \text{ MPa}$$

Elle a lieu lorsque le pignon est au plus bas contact unique (cf. figure 4.14).

Dans le deuxième cas, la contrainte principale maximale calculée par l'atelier éléments finis de CATIA est la suivante :

$$\sigma_{f\_max\_PRINCE\_POLYMERE} = 12,9 \text{ MPa}$$

La contrainte en pied de dent déterminée par la méthode VDI 2545 est :

$$\sigma_{f\_max\_VDI\ 2545} = 7,36 \text{ MPa}$$

Rappelons que la méthode VDI 2545 ne prend pas en compte les concentrations de contrainte. Pour contrer ce problème, un calcul est réalisé avec la méthode VDI 2545 dite modifiée. Cette méthode intègre le facteur de concentration de contrainte  $Y_{sa}$ . Il est déterminé en utilisant la norme ISO 6336 sur un engrenage en acier ayant la même géométrie que l'engrenage d'étude (cf. tableau 4.1). Sa valeur est la suivante :

$$Y_{sa} = 1,97$$

La contrainte maximale calculée avec la méthode VDI 2545 dite modifiée est la suivante.

$$\sigma_{f\_max\_VDI2545\_modifiée} = 7,36 \times 1,97 = 14,5 \text{ MPa}$$

Remarquons que la méthode VDI 2545 peut sous-dimensionner l'engrenage si elle ne prend pas en compte le facteur de concentration de contrainte  $Y_{sa}$  provenant de la norme ISO 6336.

Il y a une erreur de 50% entre le modèle de partage des charges et la méthode VDI 2545. Cette erreur importante entre les deux méthodes est essentiellement due à la non prise en compte exacte du nombre de dent en contact par la VDI 2545.

#### 4.3.4 Déplacement en tête de denture

A présent, les déplacements en tête de denture obtenus par les deux méthodes sont comparés.

La relation de la VDI 2545 (paragraphe 1.4.2.3 du chapitre 1) donne directement le déplacement en tête de denture.

Nous comparons ce déplacement avec celui du modèle de partage des charges. Pour cela, nous trouvons la position cinématique où la ligne de contact est proche de la tête de denture du pignon et ensuite nous relevons son déplacement maximal.

Les tableaux 4.7 à 4.9 résument les résultats. La position cinématique où la ligne de contact se trouve en tête de denture est celle du plus bas contact unique (cf. figure 4.14). Le couple est de 8,5 N.m.

A part le cas à 25°C et à sec (300 tours/min et 5 tours/min), les résultats entre la méthode VDI 2545 et le modèle de partage des charges sont assez éloignés. L'erreur relative entre les résultats de la VDI 2545 et ceux du modèle de partage des charges peut atteindre 36%. Plusieurs points peuvent expliquer cette différence.

Il y a une différence entre les modules élastiques mesurés par la VDI 2545 et ceux du modèle de partage des charges.

La VDI 2545 prend en compte le rapport de conduite à vide alors que le modèle de partage des charges utilise celui sous charge. Par conséquent, le bon nombre de dents en contact est pris en compte.

Enfin, l'humidité n'est pas intégrée dans la VDI 2545.

	Engrenage à 25°C	Engrenage à 60°C	Engrenage à 80°C
Déplacement de la dent ( $\mu\text{m}$ ) déterminée par la méthode VDI 2545	59	146	175

**Tableau 4.7** : Déplacements obtenus par la méthode VDI 2545 à différentes températures

	Engrenage à 25°C et à sec	Engrenage à 60°C et à sec	Engrenage à 80°C et à sec
Déplacement de la dent ( $\mu\text{m}$ ) à 300 tours/min	52	176	180
Déplacement de la dent ( $\mu\text{m}$ ) à 5 tours/min	52	185	196

**Tableau 4.8** : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à sec

	Engrenage à 25°C et à 40% HR	Engrenage à 60°C et à 40% HR	Engrenage à 80°C et à 40% HR
Déplacement de la dent ( $\mu\text{m}$ ) à 300 tours/min	180	160	160
Déplacement de la dent ( $\mu\text{m}$ ) à 5 tours/min	196	160	160

**Tableau 4.9** : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à 40% d'humidité relative

#### 4.3.4 Conclusion

En conclusion, nous avons comparé le modèle de partage des charges développé et la méthode de dimensionnement VDI 2545 sur quatre critères.

- Evolution du module élastique en fonction de la température et de l'humidité.
- Contrainte de surface.
- Contrainte en pied de dent.
- Déplacement en tête de denture.

La VDI 2545 prend en compte la viscoélasticité par un abaque qui donne l'évolution du module élastique en fonction de la température à une fréquence de référence. Cette fréquence est supposée être proche de la fréquence de rotation des engrenages. Ce procédé permet de proposer des résultats approximatifs intéressants dans un environnement sec, notamment pour les contraintes de pression. Mais la méthode montre ses limites pour l'estimation du déplacement de la dent et les tests en milieu humide. Or la plupart des systèmes possédant des engrenages en Polyamide 6,6 sont intégrés dans des milieux humides.

Nous remarquons également que la VDI 2545 ne prend pas en compte le bon nombre de dents en contact. En effet, elle utilise le rapport de conduite à vide.

Les conséquences de la non prise en compte de l'humidité et du rapport de conduite sous charge ne sont pas négligeables. Les pressions de contact et les déformations en tête de denture sont directement influencées par ces paramètres. Les contraintes en pied de dent

sont uniquement influencées par le rapport de conduite. Un calcul précis de la répartition des charges est donc nécessaire.

Dans le cas des contraintes en pied de dent, la non prise en compte des concentrations de contrainte peut amener à sous-dimensionner l'engrenage. Ce défaut est facilement corrigé par la VDI 2545 dite « modifiée » car elle intègre le facteur de concentration de contrainte  $Y_{sa}$ , issu de la norme ISO 6336.

En résumé par rapport à la VDI 2545, l'amélioration principale proposée par le modèle de partage des charges est une plus grande plage d'utilisation. En effet, le modèle de partage des charges propose le bon module élastique du matériau pour n'importe quelle fréquence, température et humidité. Il prend en compte le bon nombre de dents en contact et il propose également des résultats supplémentaires : l'erreur de transmission, raideur d'engrènement...

---

## 4.4 Mesures expérimentales

Les mesures expérimentales réalisées sur des engrenages en Polyamide 6,6 sont présentées dans ce paragraphe.

Dans une première partie, le coefficient de frottement sous des conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6 est étudié. En effet, il est nécessaire d'obtenir cette valeur pour utiliser les modèles thermiques de Hooke et de Block dans le modèle de partage des charges (cf. paragraphe 3.2.1 du chapitre 1) et (cf. paragraphe 2.8 du chapitre 3). Or, à notre connaissance, nous n'avons pas trouvé dans la bibliographie de mesure du coefficient de frottement dans des conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6.

Dans une seconde partie, le banc expérimental développé et fabriqué au cours de cette thèse par le LaMCoS est présenté. Ce banc permet de mesurer dans un premier temps la température de l'engrenage en fonction du temps et dans un second temps, l'erreur de transmission sous charge. Cette dernière mesure est utilisée pour valider le modèle de partage des charges développé pour les engrenages en Polyamide 6,6.

### 4.4.1 Mesure du coefficient de frottement

---

#### 4.4.1.1 Présentation

D'après la revue bibliographique, le coefficient de frottement dans le cas de solides en polymère peut évoluer en fonction de la température, de la vitesse de glissement et du chargement (cf. paragraphe 3.4 du chapitre 1). Dans des conditions de contact classique d'un engrenage, il y a une première phase de glissement, un point de roulement pur puis une deuxième phase de glissement.

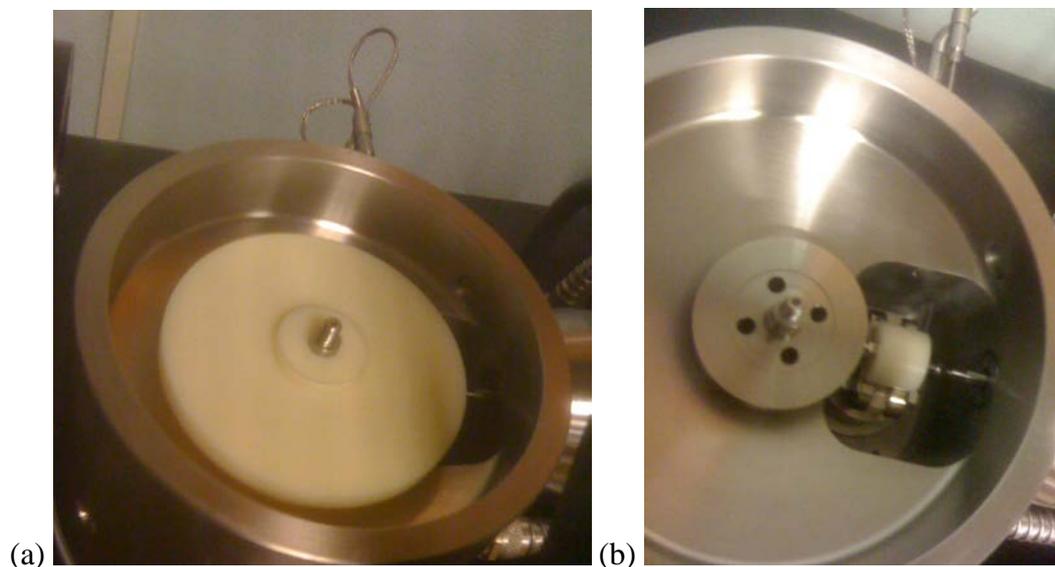
Depuis plusieurs années, le laboratoire LaMCoS réalise des essais de mesure du coefficient de frottement avec une machine à galets. Cette machine reproduit les conditions de contact d'un engrenage. Cependant, nous n'avons pas pu l'utiliser à cause du faible module élastique du Polyamide 6,6 et par conséquent des faibles pressions qu'il fallait imposer. Nous nous sommes reportés vers une machine de type EHD (élasto hydro dynamique) plus adaptée pour des mesures de hauteur de film d'huile (cf. figure 4.17). Néanmoins le principe de mesure reste le même.



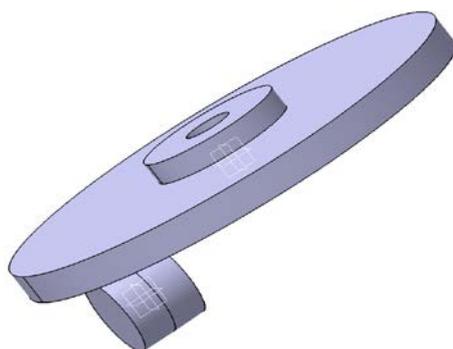
**Figure 4.17 : Machine EHD**

#### 4.4.1.2 Principe de la mesure

Pour mesurer le coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage, deux solides sont mis en rotation : un disque plan et un « tonneau » (cf. figure 4.18). La figure 4.19 présente les deux solides lorsqu'ils sont en contact. La machine est reliée à un ordinateur qui paramètre le réglage et l'acquisition des données. Il est possible de rentrer les paramètres suivants : vitesse linéaire, force normale appliquée au tonneau, température du lubrifiant et taux de glissement.



**Figure 4.18 : (a) disque et (b) tonneau**



**Figure 4.19** : Contact entre le disque et le tonneau

#### 4.4.1.3 Géométrie des échantillons et équivalence avec la géométrie des engrenages

Cet essai requiert une géométrie des échantillons qui doit reproduire au mieux le contact entre le pignon et la roue de l'engrenage en Polyamide 6,6 (cf. tableau 4.1).

Un logiciel, développé au LaMCoS, permet de déterminer les dimensions des échantillons de la machine EHD. Pour cela, il est nécessaire de rentrer les données géométriques de l'engrenage, les propriétés mécaniques du matériau (module élastique relaxé pour avoir la zone de contact la plus large), les propriétés du lubrifiant et la charge. La dimension des échantillons est donc déterminée pour obtenir approximativement la pression de contact maximale équivalente à celle simulée par le modèle de partage des charges (charge de 15 N.m).

Il était impossible de fabriquer le disque à partir des engrenages en Polyamide 6,6 en notre possession, car les alésages sur la roue et le pignon sont déjà usinés lors de leur réception. Nous avons donc réalisé les échantillons dans un bloc de Polyamide 6,6 issu du commerce ayant les mêmes caractéristiques que nos engrenages en Polyamide 6,6.

Les essais sont effectués à une vitesse linéaire de 4,5 m/s et pour une charge de 5 N. Les échantillons sont préparés dans une étuve, trois taux d'humidité sont étudiés : sec, ambiant et 50%.

#### 4.4.1.4 Résultats

La figure 4.20 présente les résultats des mesures du coefficient de frottement en fonction du taux de glissement par la relation (4.2).

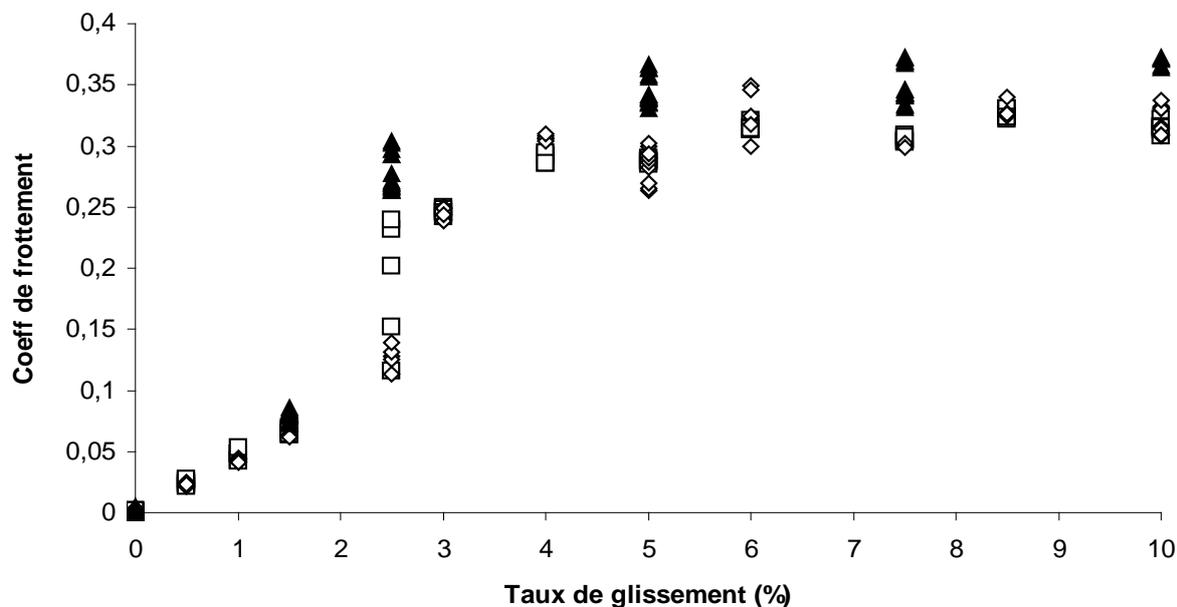
$$S = \frac{|V_2 - V_1|}{V_2 + V_1} \quad (4.2)$$

$V_1$  est la vitesse de glissement du solide 1 et  $V_2$  la vitesse de glissement du solide 2.

Les résultats montrent que de 0% à 2,5% de glissement, l'évolution du coefficient de frottement est linéaire allant de 0 à 0,1. A partir de 2,5% de glissement, il y a un saut et il passe à 0,3. Notons également qu'il y a une légère augmentation du coefficient de frottement avec le taux d'humidité contenu dans le matériau.

A partir de la géométrie des engrenages utilisée dans cette étude (cf. tableau 4.1) et avec le modèle de partage des charges, nous avons calculé les vitesses de glissement du pignon et de la roue au point de contact. En utilisant la relation (4.2), nous estimons donc que le taux de glissement maximal pendant l'engrènement est de 8%.

Par conséquent, le coefficient de frottement maximal que nous pouvons utiliser dans les modèles thermiques de Block et de Hooke pour le modèle de partage des charges est de 0,3 (cf. paragraphe 2.8 du chapitre 3).

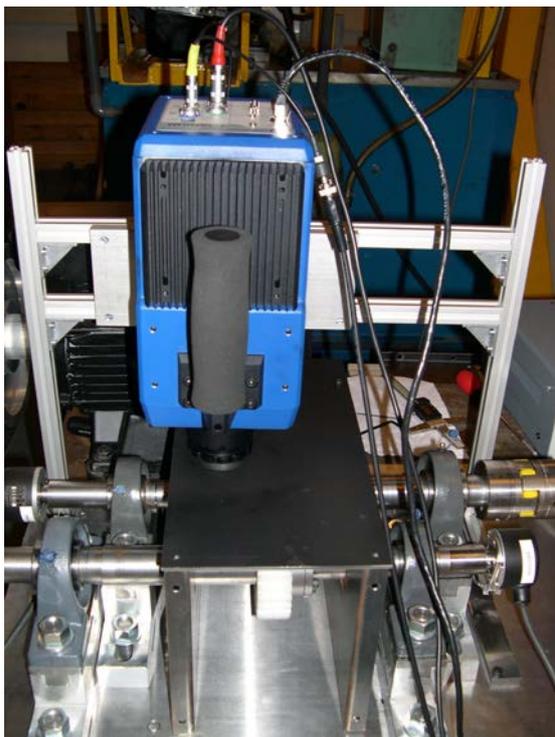


**Figure 4.20** : Mesure du coefficient de frottement : (□) sec, (◇) humidité ambiante et (▲) 50% d'humidité

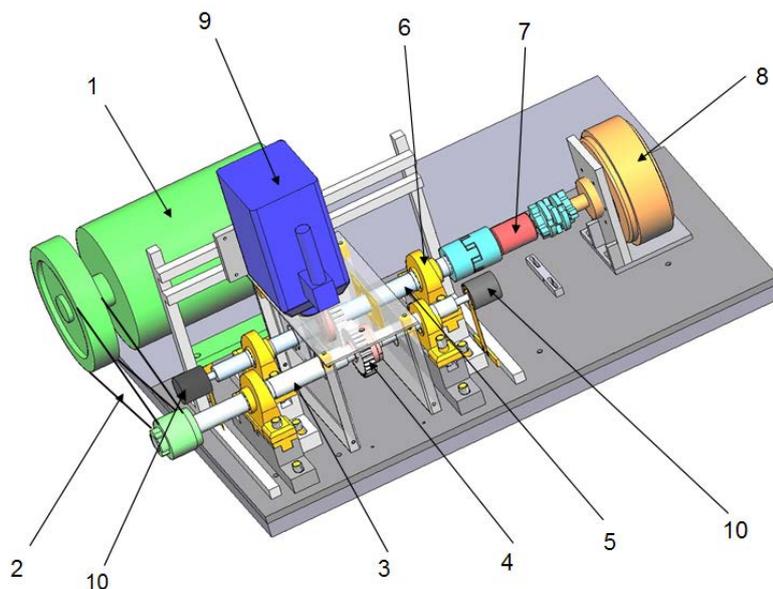
#### 4.4.2 Mesure expérimentale avec le banc engrenages en Polyamide 6,6

##### 4.4.2.1 Présentation du banc

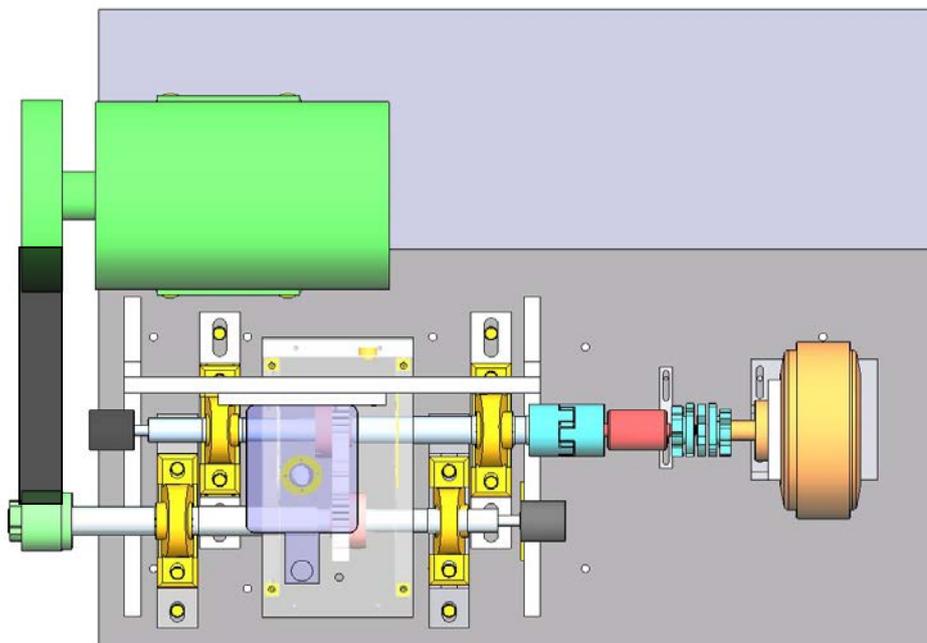
Au cours de cette thèse, nous avons développé et fabriqué un banc expérimental au sein du LaMCoS. Il a la particularité de permettre la mesure de la température de fonctionnement de l'engrenage et de l'erreur de transmission sous charge. La figure 4.21 présente plusieurs photos du banc et les figures 4.22 et 4.23 détaillent respectivement un schéma en perspective et la vue de dessus.



*Figure 4.21 : Banc expérimental pour engrenages en Polyamide 6,6 développé par le LaMCoS*



**Figure 4.22** : Schéma en perspective du banc expérimental pour engrenages polymères. 1 : Moteur, 2 : Courroie, 3 : Arbre de rotation du pignon, 4 : Engrenages d'essai, 5 : Arbre de rotation de la roue, 6 : Paliers, 7 : Couplemètre, 8 : Frein à poudre, 9 : Caméra infrarouge, 10 : Codeurs optiques



**Figure 4.23** : Vue de dessus du banc expérimental engrenages polymères

Le moteur de type asynchrone (1) est alimenté par un variateur de vitesse à fréquence variable. La puissance mécanique créée par le moteur est transmise par une courroie (2) à l'arbre de rotation du pignon (3). Le pignon en Polyamide 6,6 (4) est fixé par un moyeu expansible à son arbre de rotation (3) ainsi que la roue en Polyamide 6,6 (4) et son arbre (5). Les deux arbres sont supportés par quatre paliers (6) qui permettent un maintien et un

guidage en rotation stable pour limiter les effets dynamiques. Un couplemètre (7) et un frein à poudre (8) sont fixés, par un accouplement, sur l'axe de l'arbre de rotation de la roue (5). La caméra infrarouge (9) est solidaire d'un bras support pour qu'elle soit proche des engrenages et deux codeurs optiques (10) sont placés, sur chaque arbre de rotation.

Le banc a été conçu pour éviter les problèmes liés aux vibrations et aux effets dynamiques : le dispositif est monté sur une lourde table en fonte, le moteur est posé sur des plots en caoutchouc, les supports de palier ainsi que le frein à poudre sont fixés sur une plaque en acier rectifiée qui est solidaire de la table en fonte. Le bras support de la caméra infrarouge est posé sur des plots en caoutchouc.

Les engrenages en Polyamide 6,6 utilisés dans cette étude ont une géométrie standard (cf. tableau 4.1). Ils sont obtenus par taillage.

L'entraxe de montage a été légèrement augmenté par rapport à la valeur théorique. En effet, un échauffement trop important pendant le fonctionnement de l'engrenage pourrait avoir comme conséquence de le dilater et, dans un cas extrême, de bloquer le système. Boyer [89] a proposé le jeu à ajouter sur l'entraxe théorique en fonction du module de l'outil pour deux engrenages en Polyamide 6,6 provenant de deux fabricants. Dans le cas d'un engrenage ayant un module de 3 mm, le jeu moyen à ajouter est de 0,2 mm.

#### *4.4.2.2 Mesure du comportement thermique des engrenages en Polyamide 6,6*

Le Polyamide 6,6 présente une faible conductivité de la chaleur et une importante dilatation thermique. Le tableau 4.10 récapitule les propriétés thermiques du Polyamide 6,6 [26] et [58].

Sous chargement élevé et vitesse élevée, l'engrenage en Polyamide 6,6 peut conduire à un échauffement local qui pourrait causer une baisse des performances et à long terme un endommagement de la dent. Il est donc intéressant de vérifier, avec une mesure thermique locale et précise de l'engrènement, si cet échauffement est suffisamment important pour modifier les propriétés mécaniques du Polyamide 6,6 et s'il est homogène ou hétérogène dans l'ensemble de l'engrenage. Cette mesure locale permet également d'identifier et d'analyser plus précisément les différentes sources d'échauffement de l'engrenage et la température de contact et de volume.

Malgré le nombre important d'articles sur les études thermiques cités dans la bibliographie [21 – 32], à notre connaissance, il n'y a pas de référence qui étudie expérimentalement le comportement thermique local des engrenages de type Polyamide 6,6/Polyamide 6,6. La plupart des méthodes présentées étudient le comportement thermique des engrenages en polymère de manière globale avec des capteurs thermiques infrarouges. Ceux-ci ne permettent pas d'obtenir de manière précise la répartition de la température sur le profil de l'engrenage, la température de contact et l'identification des différentes sources d'échauffement.

Pour mesurer la température des engrenages en Polyamide 6,6, le banc est doté d'une caméra infrarouge haute performance qui permet d'obtenir les résultats suivants : la répartition de la température en fonction du temps sur l'épaisseur de la dent, la température de l'air piégé entre les dents et le temps de la stabilité thermique.

Chaleur spécifique $\left(\frac{\text{J}}{\text{Kg.K}}\right)$	1926
Coefficient d'expansion thermique $(\text{K}^{-1})$	$8.10^{-5}$
Conductivité thermique $(\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1})$	0,23
Densité $(\text{g.cm}^{-3})$	1,15 - 1,17
Coefficient de dilatation thermique linéaire $(\text{K}^{-1})$	$60.10^{-6}$
Température de transition vitreuse $(^{\circ}\text{C})$	60

**Tableau 4.10** : Propriétés thermiques du Polyamide 6,6 [26], et [58]

#### 4.4.2.2.1 Dispositif expérimental de mesure

Les caractéristiques de la caméra sont les suivantes : l'optique utilisée a un champ de vision allant de  $42^{\circ} \times 34^{\circ}$  (12 mm) à  $2,7^{\circ} \times 2^{\circ}$  (200 mm), la résolution utilisée est de  $160 \times 128$  mm/px et la caméra peut être déclenchée à une fréquence maximale de 380 Hz.

Dans le cadre de ces essais, le codeur optique placé sur l'arbre de rotation du pignon est utilisé pour déclencher la caméra (cf. figure 4.18). Pour cela, il a été relié au boîtier codeur. Celui-ci est doté d'une sortie externe BNC qui permet d'obtenir le top tour du codeur.

La caméra a été paramétrée pour qu'elle se déclenche uniquement lorsque le même couple de dent est en contact. Avec la géométrie des engrenages utilisés dans cette étude, le déclenchement a lieu au bout de 41 tours du pignon.

Nous avons choisi de réaliser les mesures thermiques sur le profil de la denture. Des mesures au-dessus de l'engrènement peuvent conduire à des perturbations et des erreurs : les turbulences dues au flux d'air généré par l'engrènement, l'impossibilité de mesurer la température de conduction suivant l'épaisseur de l'engrenage et aussi d'observer le point de contact. De plus, l'angle d'observation du capteur ou de la caméra doit être inférieur à  $45^{\circ}$  pour éviter une baisse de l'émissivité du matériau [90].

Pour les mesures du profil de denture, un dispositif original présenté sur les figures 4.24 et 4.25 a été mis en place. Il s'agit d'un cylindre creux comprenant un miroir poli ayant reçu un traitement en aluminium protégé, ce qui lui permet de transmettre les rayonnements thermiques pour l'infrarouge. L'inclinaison du miroir à  $45^{\circ}$  permet de réaliser des mesures thermiques correctes [90]. La zone d'engrènement filmée par la caméra infrarouge est précisée sur la figure 4.26.

La précision de la mesure est donnée par la caméra infrarouge :  $\pm 1^{\circ}\text{C}$ .

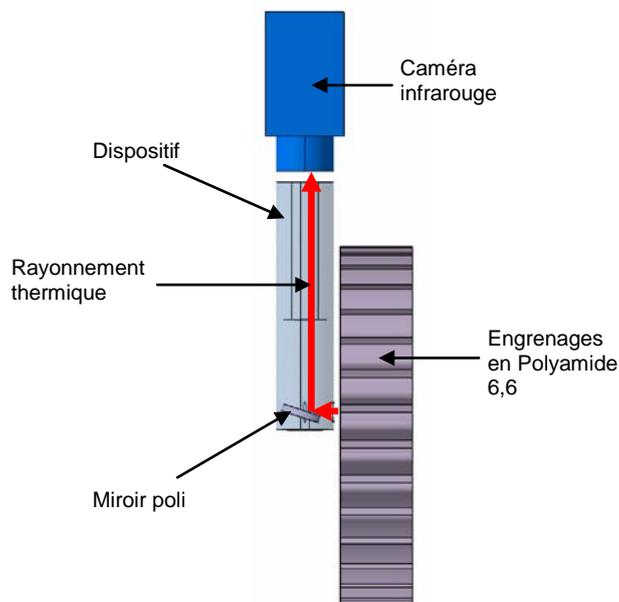


Figure 4.24 : Schéma du dispositif de transmission du rayonnement thermique

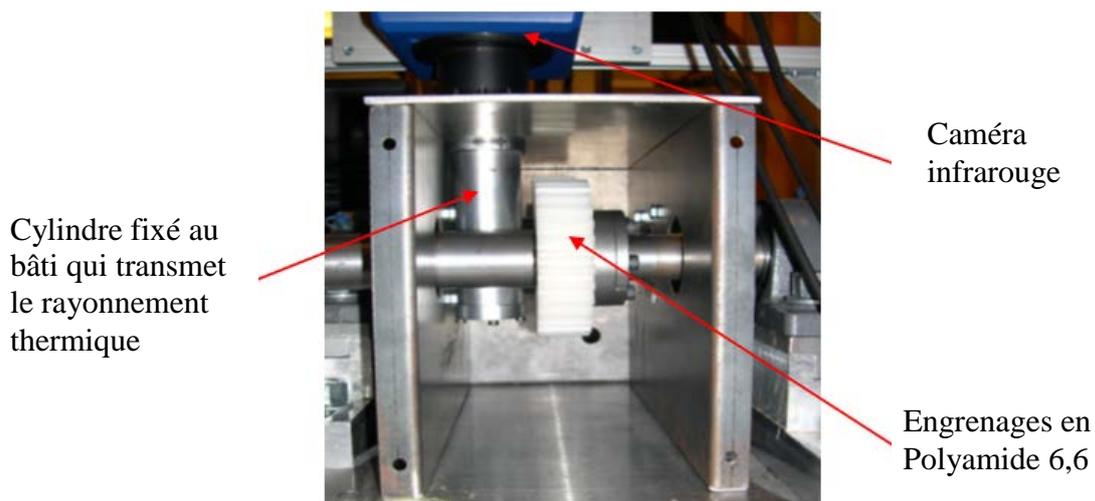


Figure 4.25 : Photo du dispositif de transmission du rayonnement thermique

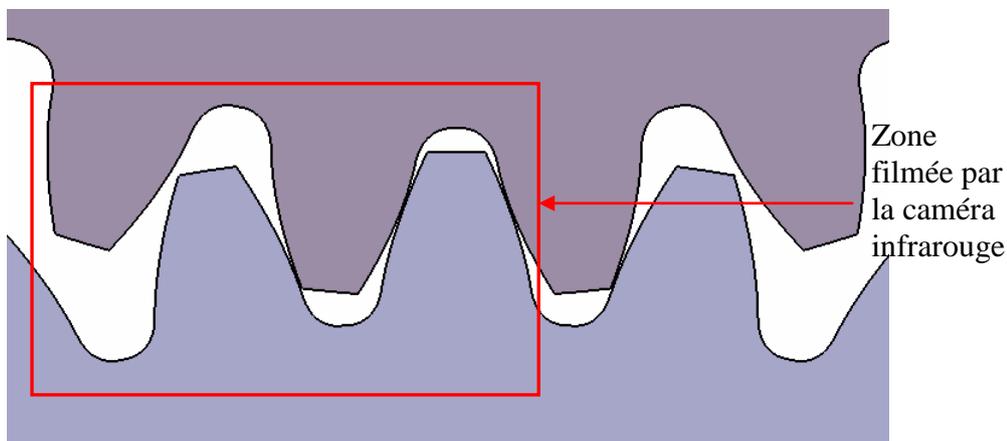


Figure 4.26 : Détail de la zone filmée par la caméra infrarouge

#### 4.4.2.2 Programme des essais

Des essais sont effectués à 300 tours/min avec trois couples différents 0 N.m, 5 N.m et 10 N.m. Pour observer l'effet du doublement de la vitesse de rotation, d'autres essais sont réalisés à 600 tours/min avec trois couples différents 0 N.m, 5 N.m et 10 N.m. Par contre, aucun essai n'est réalisé à 15 N.m pour éviter des échauffements trop importants, qui auraient pu détériorer le matériel (cf. tableau 4.11).

La campagne expérimentale a été réalisée à 25°C et à 50% d'humidité relative, sur une durée totale de 10 heures pour attendre une stabilisation de la température.

Numéro essai	Vitesse de rotation du moteur (tours/min)	Couple affiché sur le couplemètre (N.m)	Puissance calculée (W)
1	300	0	0
2	300	5	157
3	300	10	314
4	600	0	0
5	600	5	209
6	600	10	419

**Tableau 4.11** : Liste des essais thermiques

#### 4.4.2.2.3 Mesure de l'émissivité du Polyamide 6,6 à température ambiante

La mesure d'un rayonnement thermique dépend de la température, de la longueur d'onde et d'un facteur compris entre 0 et 1 qui est l'émissivité.

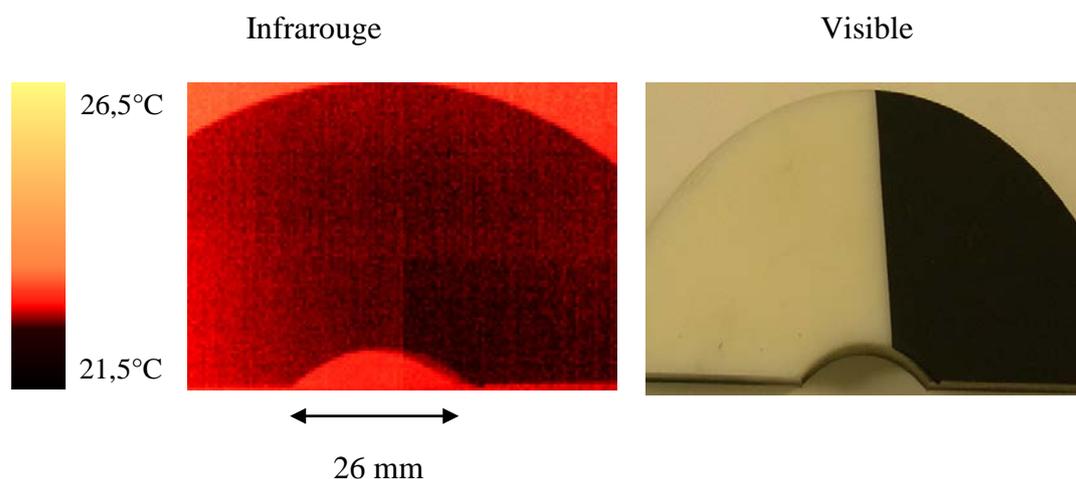
La relation (4.3) permet de calculer l'émissivité du Polyamide 6,6 à température ambiante [91].

$$\varepsilon = \frac{DL}{DL_0} \quad (4.3)$$

$DL$  représente la température mesurée sur le matériau par la caméra infrarouge et  $DL_0$  la température mesurée sur matériau là où il est peint en noir mat, c'est-à-dire qu'il a une émissivité proche de 1 (le corps noir) [91] (cf. figure 4.27).

Nous avons donc appliqué sur la demie surface d'un morceau de Polyamide 6,6, provenant d'un engrenage, de la peinture noire mate. Ensuite, la caméra infrarouge a mesuré la température des deux demies surfaces. Les résultats sont présentés sur le tableau 4.12.

Les résultats montrent que la différence de température entre les parties peintes et non peintes est de 0,1°C. En utilisant la relation (4.3), l'émissivité du matériau est de 0,99. Par conséquent, elle est suffisante pour effectuer des mesures thermiques correctes, sans avoir à peindre le profil de l'engrenage.



**Figure 4.27** : Photo d'un morceau de Polyamide 6,6 dont la demi-surface a été peinte en noir mat

Température pièce (°C)	Température côté sans peinture (°C)	Température côté avec peinture (°C)
21	22,8	22,9

**Tableau 4.12** : Résultats obtenus par la mesure thermique

#### 4.4.2.2.4 Résultats des mesures thermiques sur un engrenage en Polyamide 6,6

La figure 4.28 présente les images thermiques réalisées par caméra infrarouge au bout de 10 heures d'essai. Les figures 4.29 et 4.30 montrent l'évolution de la température, en fonction du temps, de plusieurs points de mesure qui ont été répartis sur le profil de la denture. Leurs emplacements, qui sont décrits sur la figure 4.31, sont choisis pour étudier l'évolution de la température sur des points intéressants par rapport aux sources d'échauffement analysées dans la bibliographie (cf. tableau 4.13). Les points 1 et 2 sont placés près des arbres de rotation du pignon pour le point 1 et de la roue pour le point 2. Le point 3 est au contact des dents de l'engrenage pour mesurer l'échauffement dû au frottement. Les points 4 et 5 mesurent l'échauffement sur l'épaisseur de la dent du pignon pour le point 4 et de la roue pour le point 5. Les points 6 et 7 sont placés dans le volume d'air entre les dents pour mesurer l'échauffement dû au phénomène de piégeage. Ces points de mesure permettent également d'observer si la répartition de la température est homogène ou hétérogène sur l'ensemble de l'engrenage.

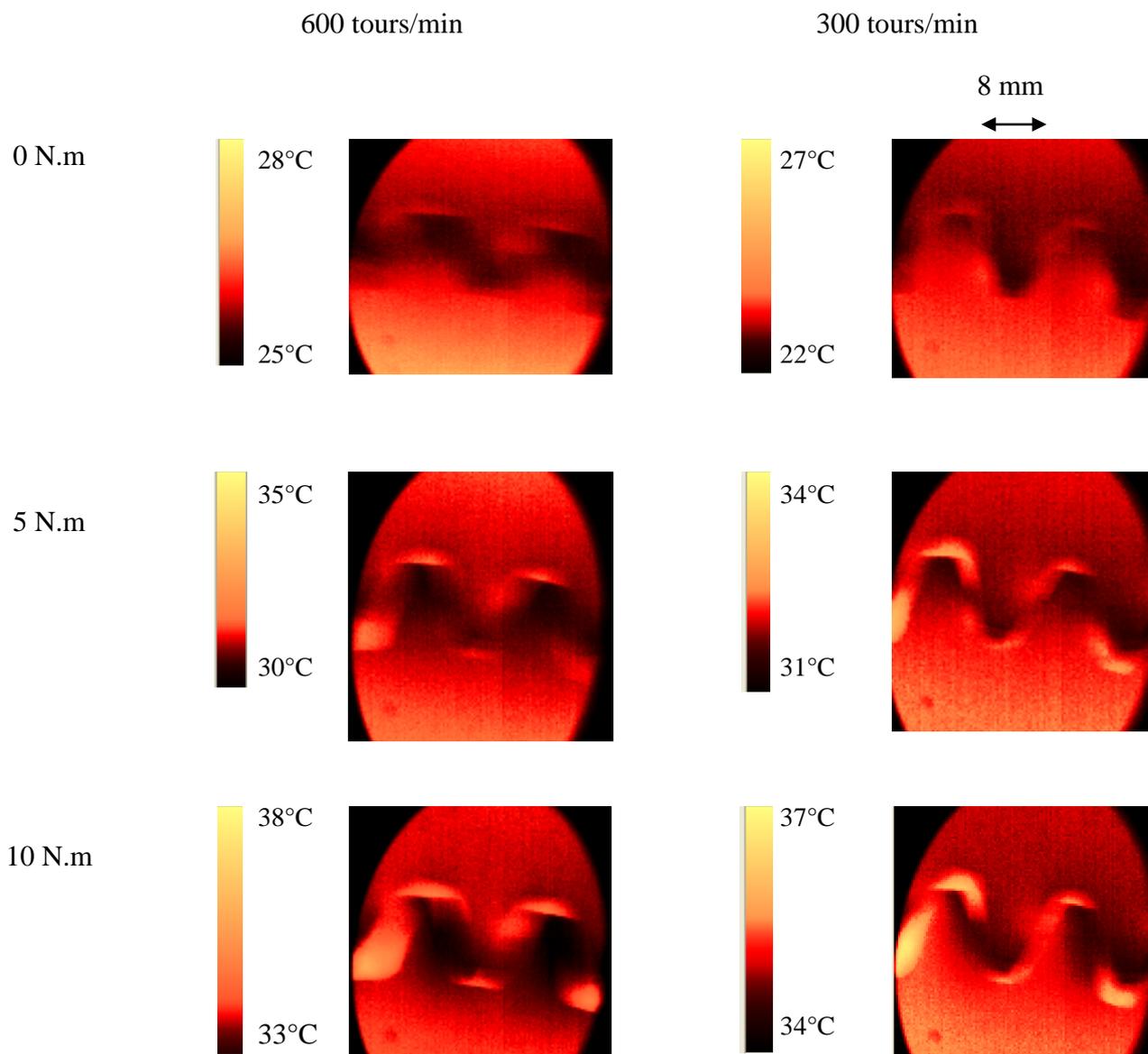
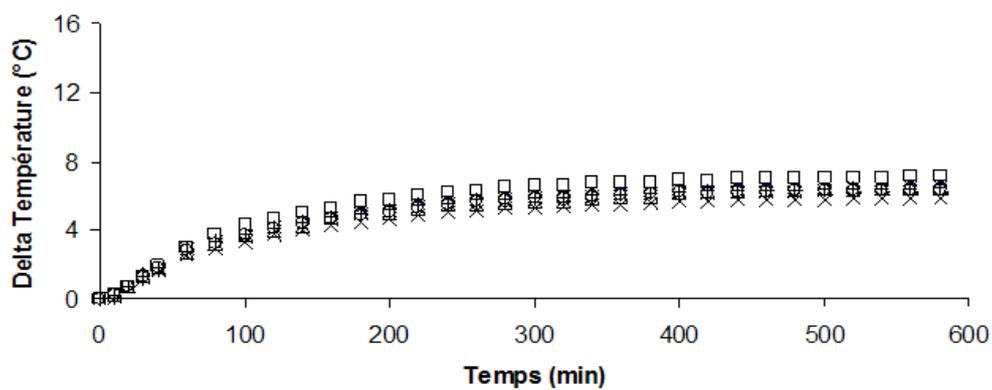
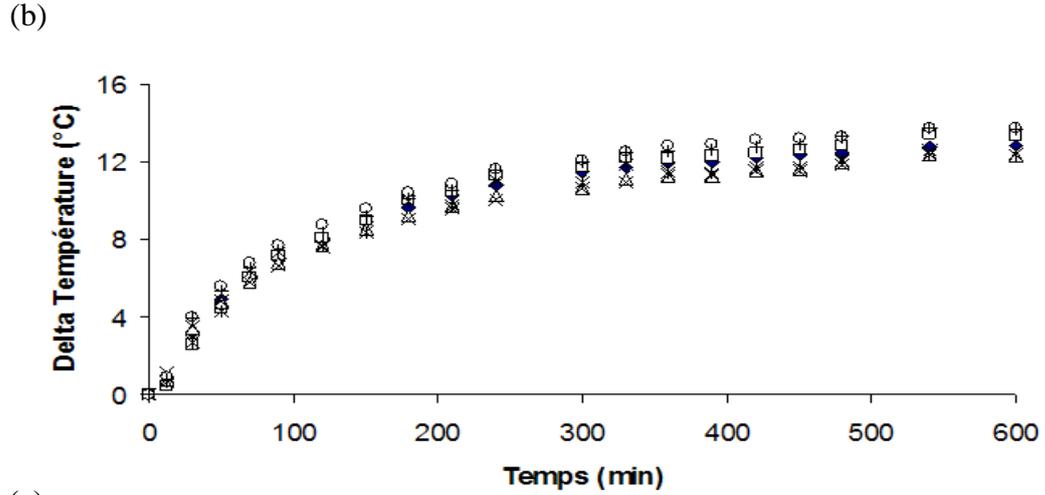
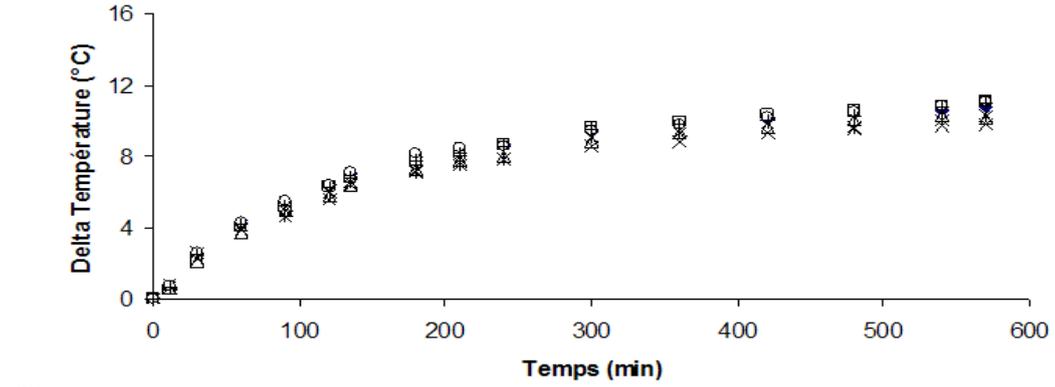


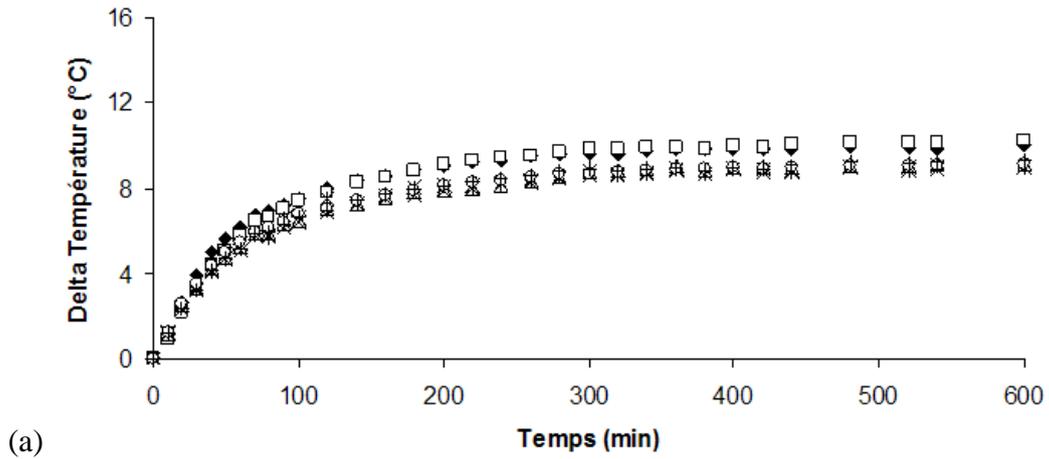
Figure 4.28 : Mesures thermiques prises au bout de 10 heures d'essai à 300 tours/min et 600 tours/min et à différents chargements : 0 N.m, 5 N.m et 10 N.m

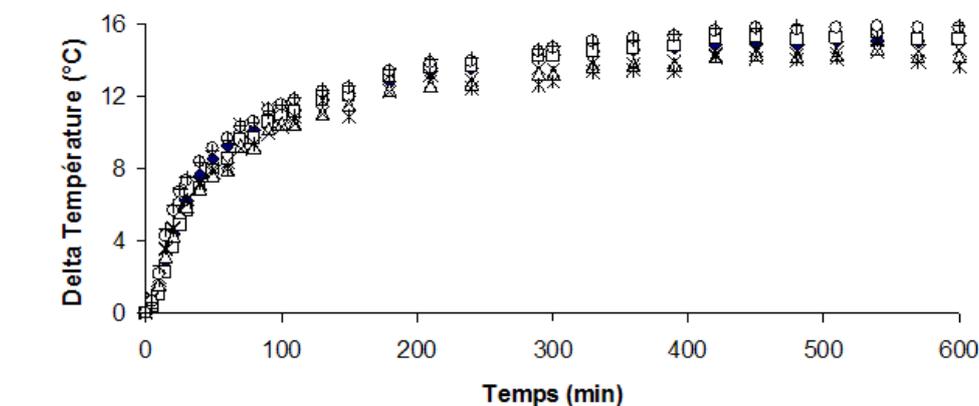
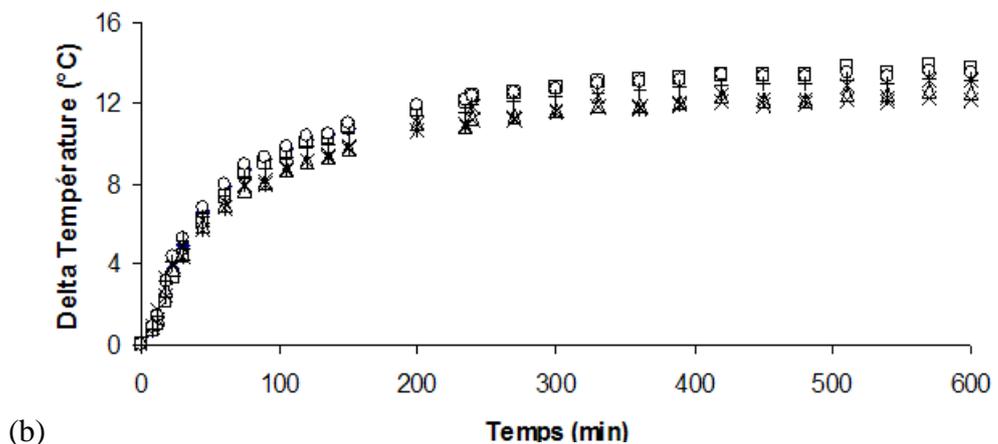


(a)



**Figure 4.29** : Evolution de la température des points mesurés à 300 tours/min sous trois chargements (a) 0 N.m, (b) 5 N.m et (c) 10 N.m. Avec (♦) point 1, (□) point 2, (△) point 3, (×) point 4, (\*) point 5, (○) point 6 et (+) point 7

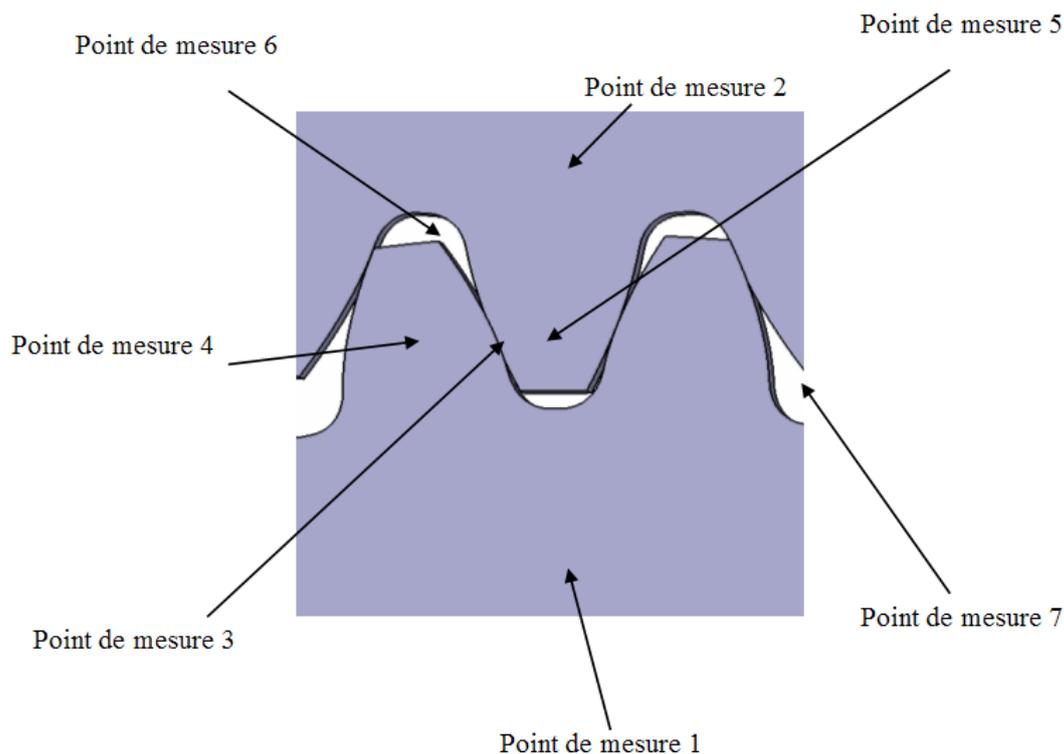




**Figure 4.30 :** Evolution de la température des points mesurés à 600 tours/min sous trois chargements (a) 0 N.m, (b) 5 N.m et (c) 10 N.m. Avec (♦) point 1, (□) point 2, (△) point 3, (×) point 4, (\*) point 5, (○) point 6 et (+) point 7

numéro du point de mesure	Position	Intérêts
1	Volume de l'engrenage proche de l'arbre de rotation du pignon	Echauffement de l'arbre de rotation du pignon
2	Volume de l'engrenage proche de l'arbre de rotation de la roue	Echauffement de l'arbre de rotation de la roue
3	Contact entre les dents	Echauffement dû au frottement
4	Volume de la dent du pignon	Echauffement à l'intérieur du pignon
5	Volume de la dent de la roue	Echauffement à l'intérieur de la roue
6	Volume entre les dents	Effets du piégeage
7	Volume entre les dents	Effets du piégeage

**Tableau 4.13 :** Emplacements des points de mesure



**Figure 4.31** : Schéma du placement des points de mesure sur le profil du pignon et de la roue

Dans un fonctionnement à vide, les résultats montrent que la principale zone d'échauffement est localisée près de l'arbre de rotation. L'échauffement de l'arbre de rotation est dû aux paliers. Cet arbre, qui est usiné dans de l'acier, a une très bonne conductivité de la chaleur et il permet de bien répartir l'échauffement des paliers sur l'ensemble de l'arbre. L'échauffement dû au piégeage, qui n'est pas lié à la charge mais en partie à la vitesse de rotation, est moins important que celui de l'arbre. Les effets du frottement sont négligeables car l'engrenage n'est pas chargé.

Dans un fonctionnement sous charge, les résultats montrent que les trois principales zones d'échauffement sont localisées près des arbres de rotation, du contact avec le frottement entre les dents et du volume d'air piégé entre les dents.

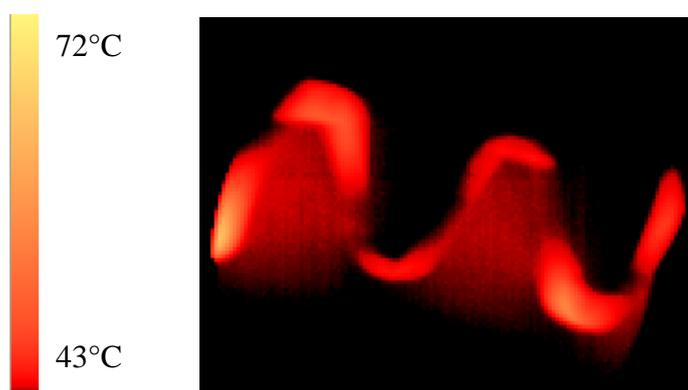
Le tableau 4.14 résume l'ensemble des résultats.

Vitesse (tours/min)	Couple (N.m)	$\Delta T$ (°C)
300	0	9,2
	5	10,8
	10	12,8
600	0	10,2
	5	13,7
	10	15,3

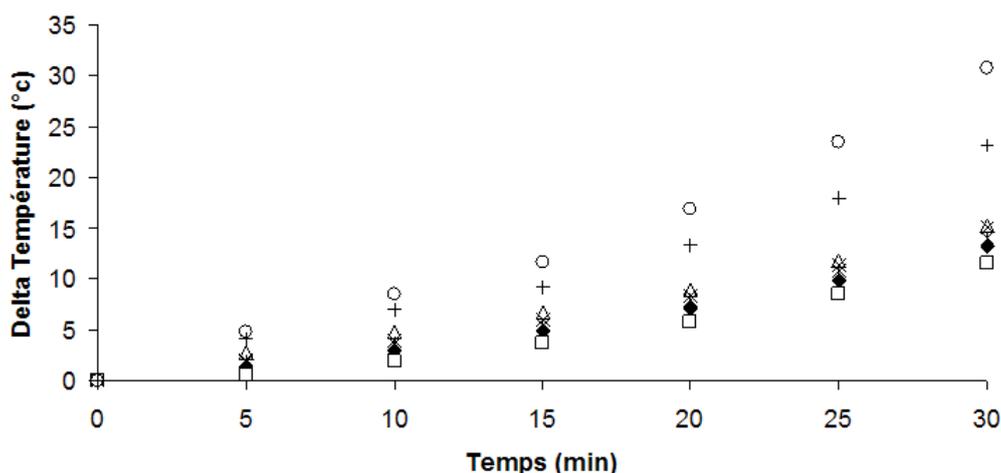
**Tableau 4.14** : Résultats obtenus

Pour les essais présentés sur les figures 4.28 à 4.30, le jeu ajouté à l'entraxe théorique est de 0,2 mm. Cependant, l'un des essais préliminaires de fonctionnement et de déverminage du banc a retenu notre attention. Il s'agit d'un essai à 600 tours/min et 10 N.m avec aucun jeu ajouté à l'entraxe théorique. Pour des raisons de sécurité, il a été arrêté après 40 minutes de fonctionnement. Les résultats sont présentés sur les figures 4.32 et 4.33. Les points de mesures de la figure 4.33 correspondent à ceux du tableau 4.13.

Les résultats montrent que sans jeu, le volume entre les dents est très réduit et l'effet du piégeage est plus important. Il entraîne donc une augmentation rapide de la température de l'air piégé entre les dents et de l'engrenage. En comparaison avec les résultats de la figure 4.30 (c), la température de volume atteinte lors d'un fonctionnement sur 5 heures avec un jeu de 0,2 mm (15,3°C), est atteinte en 30 minutes lors d'un fonctionnement sans jeu. Les résultats de la figure 4.33 laissent prévoir une température stabilisée très importante qui pourrait détériorer l'engrenage.



**Figure 4.32** : Mesures thermiques prises au bout de 40 minutes d'essai à 600 tours/min, 10 N.m et sans jeu



**Figure 4.33** : Evolution de la température des points mesurés à 600 tours/min à 10 N.m et sans jeu : (◆) point 1, (□) point 2, (△) point 3, (×) point 4, (\*) point 5, (○) point 6 et (+) point 7

Les résultats des figures 4.29 et 4.30 montrent que la répartition de la température est homogène dans le système de l'engrenage malgré une mauvaise conductivité du Polyamide 6,6. En effet, la différence maximale de température mesurée entre les différents points de mesures est de 2,4°C. Le module élastique est homogène dans l'ensemble de l'engrenage (cf. paragraphe 3.2.3 du chapitre 2).

Par contre la différence de température mesurée entre le début et la fin des essais (cf. figures 4.29 et 4.30) n'est pas négligeable. Nous pouvons donc conclure que les propriétés mécaniques du matériau peuvent évoluer pendant le fonctionnement de l'engrenage surtout lorsque la température de celui-ci est proche de la transition vitreuse.

Enfin, lors du paragraphe 2.8 du chapitre 3, nous avons présenté l'intégration dans le modèle de partage des charges de deux modèles thermiques simples qui permettent de prendre en compte l'échauffement de l'engrenage : le modèle de Block permet d'estimer la température de surface et celui de Hooke, la température du volume.

Pour vérifier leurs pertinences, ils sont comparés aux résultats expérimentaux (cf. tableau 4.15). Rappelons que pour utiliser ces modèles, le coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6 a dû être déterminé expérimentalement. Ainsi pour un taux de glissement maximal de 10%, la valeur du coefficient de frottement est de 0,3 (cf. figure 4.20).

La température mesurée au contact est composée des termes suivants : la température ambiante  $T_a$  et les écarts de température du frottement  $T_f$  et du volume  $T_v$ .

Nous précisons que dans ce tableau, les mesures expérimentales correspondent à la différence de température entre le début et la fin des essais (cf. tableau 4.14).

Vitesse (tours/min)	Couple (N.m)	Modèle Block (°C)	Modèle Hooke (°C)	Somme des modèles de Block et de Hooke (°C)	Mesures expérimentales (°C)
300	5	4,7	1,5	6,2	10,8
	10	9,4	3	12,4	12,8
600	5	6,6	1,5	8,1	13,7
	10	13,3	3	16,3	15,3

**Tableau 4.15** : Température au contact mesurée et estimée

A 5 N.m, les résultats montrent que la différence entre les résultats est assez importante. Par contre à 10 N.m, les estimations sont correctes.

Ces modèles supposent que le système contenant les engrenages est parfait et qu'il n'y a pas d'autres pertes. Dans notre cas, l'échauffement de l'arbre de rotation par les paliers n'est pas pris en compte par ces modèles. Pour le modèle de Hooke, l'auteur précise qu'il s'agit d'un modèle approximatif. Néanmoins, ces modèles simples sont les seuls à proposer une estimation rapide de la température de contact et de volume.

#### 4.4.2.3 Mesure de l'erreur de transmission

##### 4.4.2.3.1 Présentation

L'erreur de transmission est définie comme étant le déphasage de la roue menée par rapport à sa position théorique, donnée par le rapport de transmission. Elle est due à plusieurs paramètres : la déformation de l'engrenage, les erreurs de taillage et de montage, les effets dynamiques... Elle intègre toutes les erreurs tangentielles possibles. Pour cette raison, nous avons choisi d'utiliser ce résultat pour valider le modèle de partage des charges développé (f. paragraphe 2.7 du chapitre 3).

Dans un cas parfait, la relation (4.4) relie les vitesses de rotation du pignon et de la roue.

$$\theta_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \theta_1 \quad (4.4)$$

$\theta_1$  est la position angulaire du pignon,  $\theta_2$  la position angulaire de la roue,  $Z_1$  le nombre de dent du pignon et  $Z_2$  le nombre de dent de la roue.

Dans la réalité, la roue est en avance ou en retard par rapport à sa position théorique. Ce décalage angulaire est l'erreur de transmission  $\varepsilon(\theta_1)$  définie par la relation (4.5).

$$\theta_2 = \frac{Z_1}{Z_2} \theta_1 + \varepsilon(\theta_1) \quad (4.5)$$

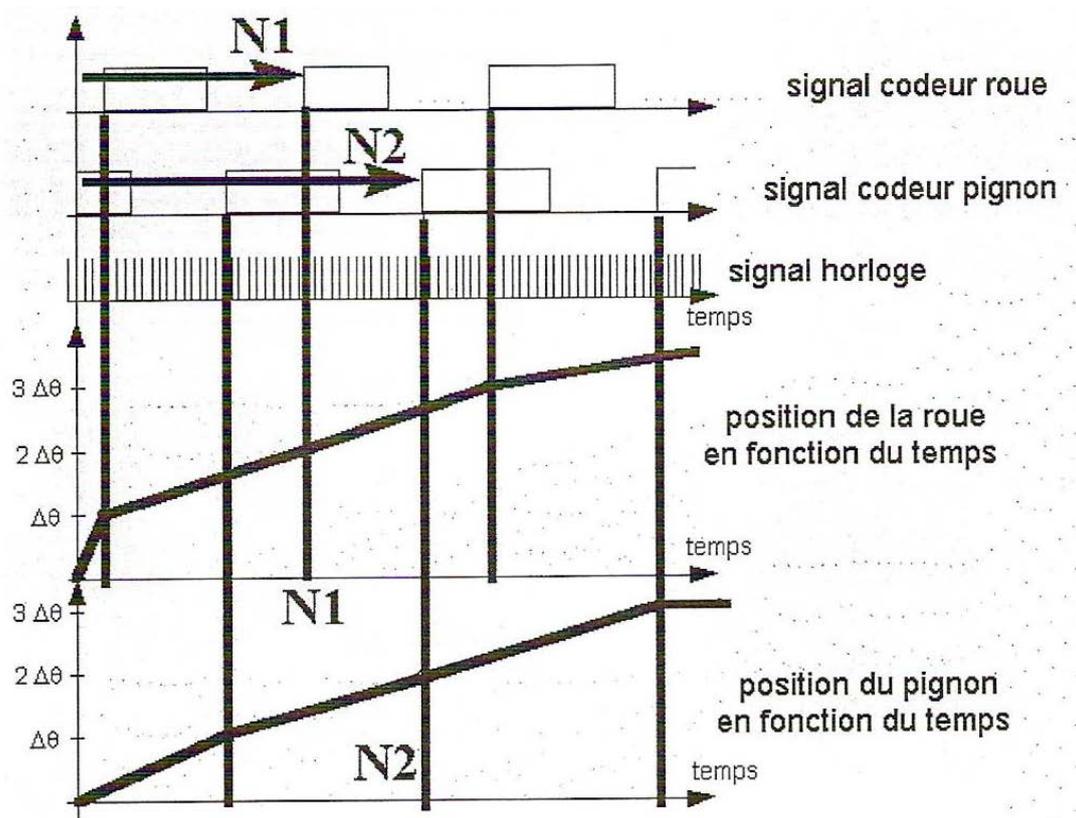
## 4.4.2.3.2 Dispositif de mesure

Pour connaître l'erreur de transmission sous charge, il est indispensable d'obtenir la position exacte à un instant  $t$  du pignon et de la roue. Il est possible de mesurer l'erreur de transmission à l'aide de codeurs optiques ayant une faible résolution, c'est-à-dire un faible nombre de traits par tour. Le principe de mesure de l'erreur de transmission a été développé par Remond [47] et [48] (cf. paragraphe 3.6 du chapitre 1). La figure 4.34 présente la loi d'évolution des positions de la roue et du pignon en fonction du temps.

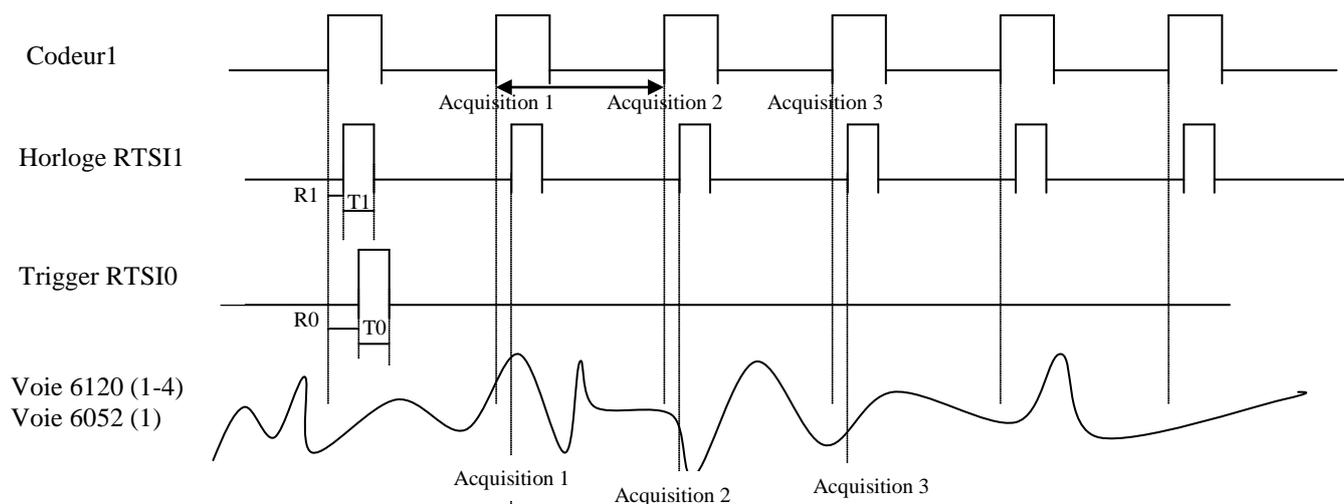
Le matériel d'acquisition se compose d'un châssis PXI contenant une carte compteur, une carte d'acquisition synchrone et une carte d'acquisition multiplexée. Les codeurs optiques se connectent à la carte compteur par l'intermédiaire d'un boîtier codeur développé et fabriqué au LaMCoS.

La reconstruction du signal de l'erreur de transmission peut se faire de deux façons différentes : une angulaire et une temporelle.

La méthode angulaire permet de synchroniser l'acquisition des voies codeurs et des voies analogiques sur les fronts montants du premier codeur 1 (voie A) (cf. figure 4.35). Ce mode ne peut donc pas fonctionner sans voie codeur. L'horloge de cadencement de l'acquisition est générée à partir du codeur 1 avec un retard  $R1 = 50$  ns par rapport au front montant. La durée de l'impulsion est  $T1 = 100$  ns.



**Figure 4.34** : Loi d'évolution des positions de la roue et du pignon en fonction du temps [66]



**Figure 4.35 : Acquisition angulaire**

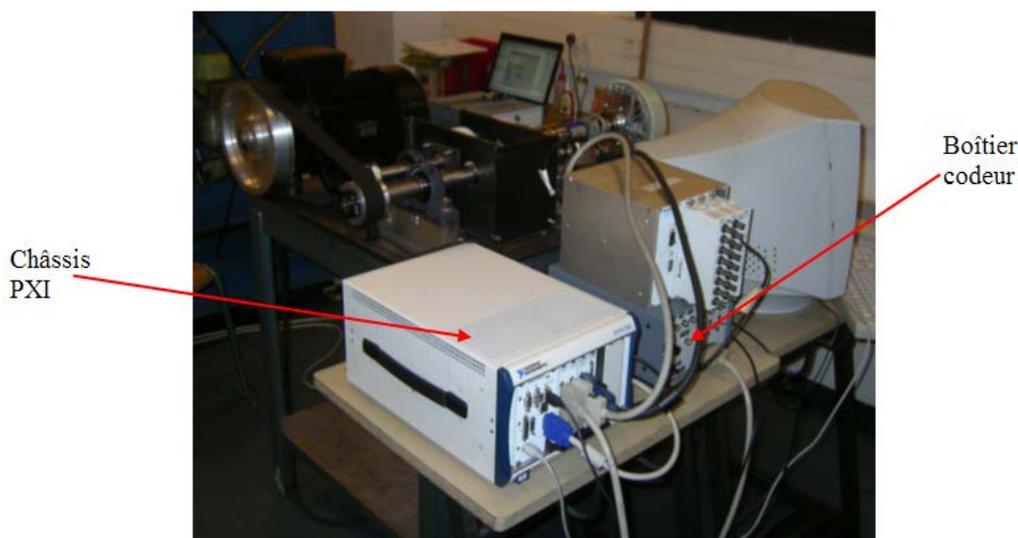
La méthode temporelle permet de faire l'acquisition des signaux analogiques à partir de l'horloge interne des cartes d'acquisition.

La fréquence d'échantillonnage maximum des signaux de la carte d'acquisition synchrone est de 800 KHz, celle des signaux de la carte d'acquisition multiplexée dépend du nombre de voies (333KHz pour une voie, 41 KHz pour 8 voies). Il existe trois modes de déclenchement :

- Aucun, l'acquisition des voies codeurs démarre sur l'impulsion ordonnée par l'utilisateur.
- Une impulsion est générée à partir du codeur 1. La première valeur acquise pour le codeur 1 est le nombre d'impulsions d'horloge générées pendant le temps  $T - R0$  (cf. figure 4.35).
- Externe, l'acquisition est démarrée par un trigger externe.

Dans le cadre de cette étude, l'acquisition angulaire avec un déclenchement par le codeur 1 (pignon) est utilisée.

La figure 4.36 présente une photo du matériel d'acquisition.



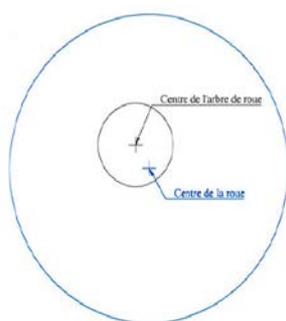
**Figure 4.36** : Photo du matériel d'acquisition

#### 4.4.2.3.3 Traitement numérique du signal mesuré

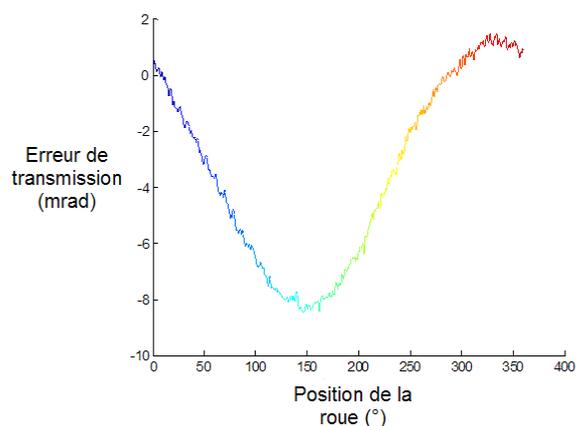
A partir du modèle de partage des charges développé, il est possible d'obtenir l'erreur de transmission sur un passage de dent de la roue. Par contre, les décentrages et les faux ronds ne sont pas pris en compte. C'est pour cela qu'il est nécessaire de filtrer les résultats expérimentaux de l'erreur de transmission sous charge par un échantillonnage et un moyennage.

Le fichier délivré par le logiciel d'acquisition est composé de deux colonnes. Une colonne par voie codeur, qui donne le nombre d'impulsions entre chaque front montant des codeurs. Ensuite, ce fichier est traité par un programme écrit en langage MATLAB que nous allons maintenant détailler.

Dans un premier temps, l'erreur de transmission sur un tour complet de la roue est reconstruite. Dans le cas des engrenages utilisés sur le banc (cf. tableau 4.1), la roue possède 41 dents, donc sur un tour nous mesurons 41 erreurs de transmission différentes. La figure 4.38 présente l'erreur de transmission mesurée sur un tour complet de la roue. L'oscillation principale ayant une amplitude de 10 mrad et une période correspondant à un tour de la roue est principalement due au décentrage de la roue par rapport à son axe (cf. figure 4.37).

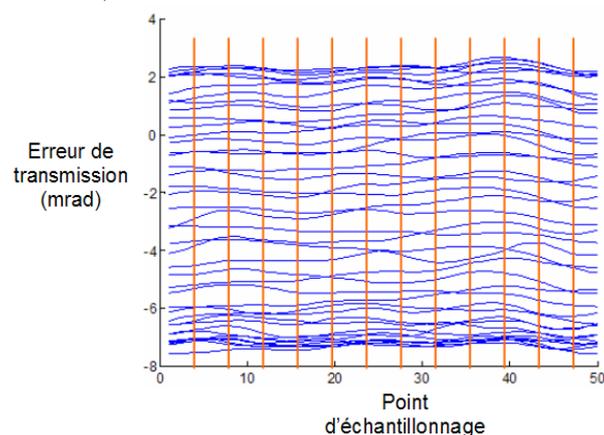


**Figure 4.37** : Décentrage de la roue



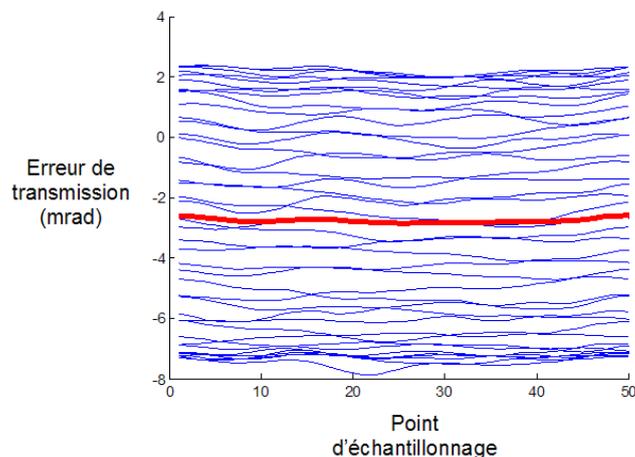
**Figure 4.38** : Reconstruction de l'erreur de transmission sur un tour complet de la roue

Dans un deuxième temps, il faut isoler les 41 erreurs de transmission en les échantillonnant. Pour cela, l'erreur de transmission sur un tour complet de la roue (cf. figure 4.38) est segmentée en 41 parties qui représentent les 41 dents, ensuite ces 41 parties sont échantillonnées (cf. figure 4.39).



**Figure 4.39** : Echantillonnage des 41 erreurs de transmission

Dans un troisième et dernier temps, une moyenne des 41 parties échantillonnées est calculée. Celle-ci est représentée sur la figure 4.40 par un trait rouge gras.



**Figure 4.40** : Erreur de transmission moyennée

#### 4.4.2.3.4 Programme des essais

Au cours de la mise au point du banc, nous avons réalisé des essais à faible vitesse de rotation (100 tours/min et 200 tours/min) dont le traitement numérique a montré des perturbations importantes. Elles sont principalement dues au moteur électrique asynchrone car il fonctionne sur une plage de vitesse très faible par rapport à son fonctionnement nominal. Finalement, les essais préliminaires montrent des résultats corrects à partir de 300 tours/min.

Le modèle de partage des charges développé dans cette thèse étant de type quasi-statique, les vitesses de rotation mises en jeu ne peuvent pas être très élevées. Nous limitons les essais à une vitesse de 400 tours/min et un couple de 15 N.m.

numéro essai	Vitesse de rotation du moteur (tr/min)	Couple affiché sur le couplemètre (N.m)	Puissance calculée (W)
1	300	10	314
2	300	15	471
3	400	10	418
4	400	15	628

**Tableau 4.16** : Liste des essais d'erreur de transmission sous charge

Quel que soit le matériau, le comportement mécanique des engrenages est très sensible aux paramètres de montage comme l'inclinaison, la déviation, l'entraxe et le décalage sur la largeur de denture. Les figures 4.41 et 4.42 présentent respectivement l'inclinaison et la déviation correspondant à une erreur de positionnement d'une roue autour de l'axe  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ . Le tableau 4.17 présente les déviations et les inclinaisons mesurées sur le banc engrenages. Pour l'ensemble des essais effectués, la température de la salle d'essai est d'environ 25°C et l'humidité relative dans l'air est de l'ordre de 50%.

	Maximale	Minimale	Moyenne
Dévation (°)	0,05	0,015	0,0325
Inclinaison (°)	0,03	0,005	0,0175

**Tableau 4.17** : Déviation et inclinaison mesurées

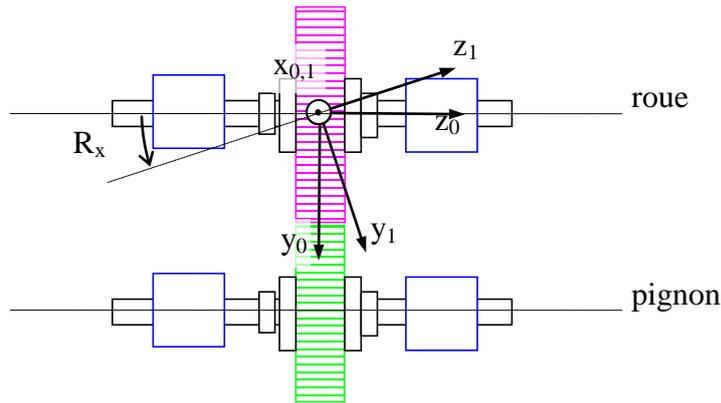


Figure 4.41 : Définition de l'inclinaison ( $R_x$ )

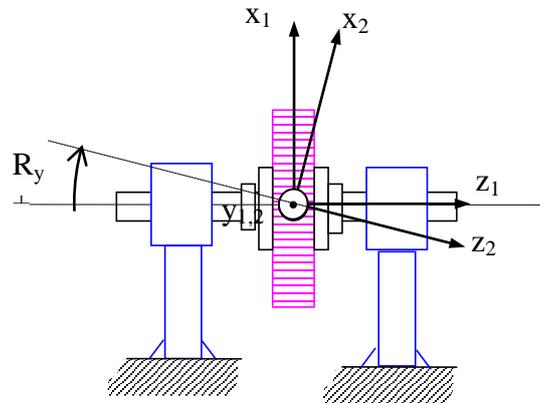


Figure 4.42 : Définition de la déviation ( $R_y$ )

#### 4.4.2.3.5 Simulation du partage des charges et de l'erreur de transmission

Les figures 4.44 à 4.47 présentent les partages des charges simulés et les figures 4.48 à 4.51 les erreurs de transmission. Pour chaque cas simulé, deux calculs sont effectués : une simulation avec les valeurs minimales de la déviation et de l'inclinaison et une autre avec les valeurs maximales. Celles-ci sont précisées sur le tableau 4.17. Une exception est faite sur la figure 4.48, où l'erreur de transmission simulée sans aucune déviation et inclinaison est présentée.

La numérotation des dents de la roue est présentée sur la figure 4.43. Pour le partage des charges, les symboles suivants sont utilisés : (◆) dent -1, (■) dent 0 et (▲) dent 1 pour une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$ , (◇) dent -1, (□) dent 0 et (△) dent 1 pour une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$ .

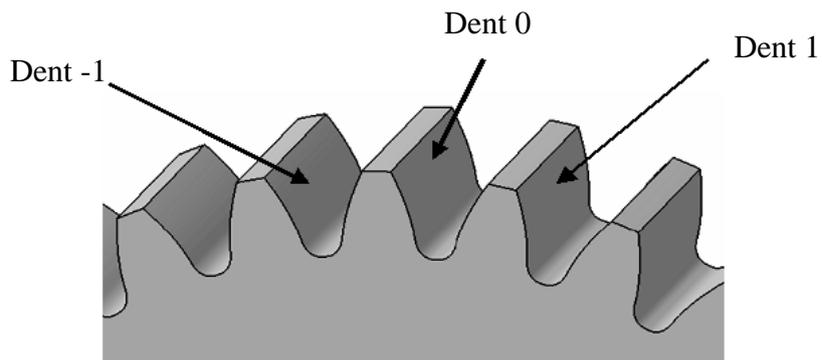


Figure 4.43 : Numérotation des dents

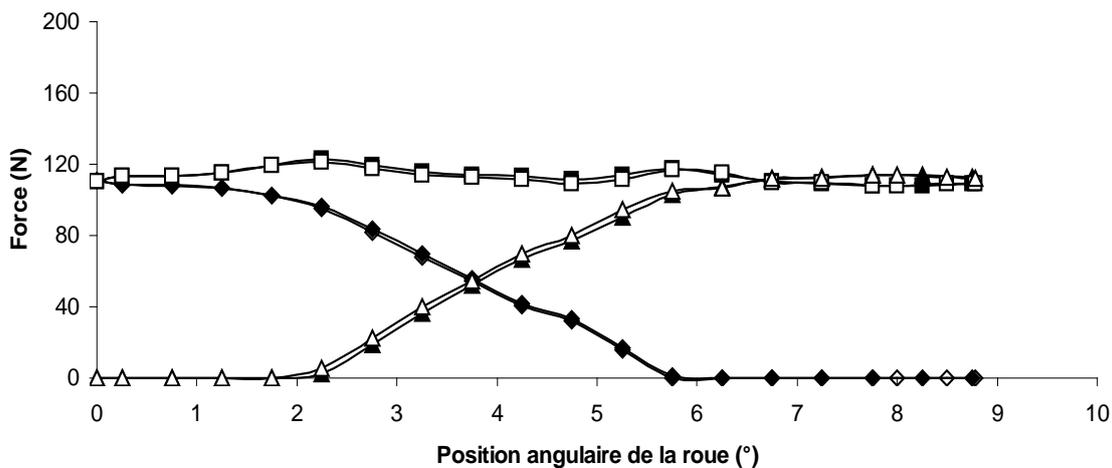


Figure 4.44 : Partages des charges simulés, 300 tours/min et 10 N.m

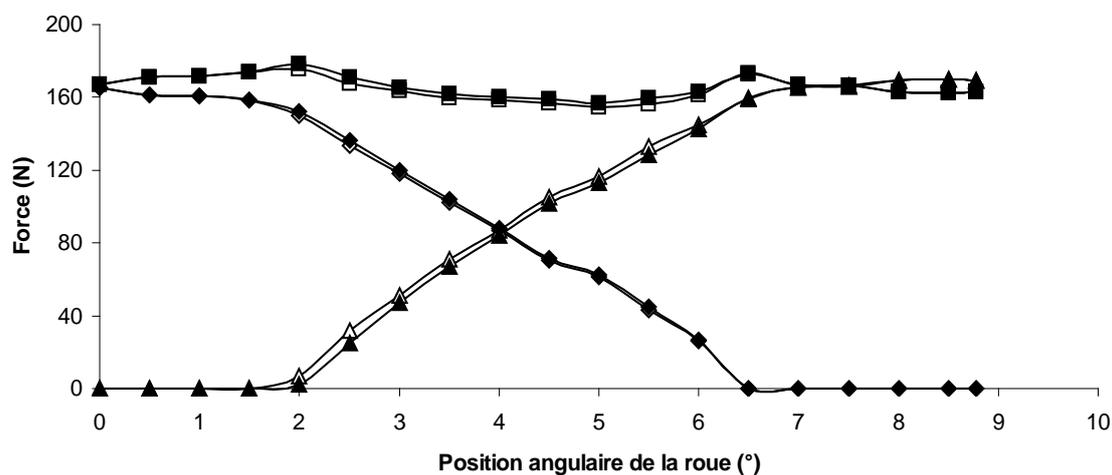


Figure 4.45 : Partages des charges simulés, 300 tours/min et 15 N.m

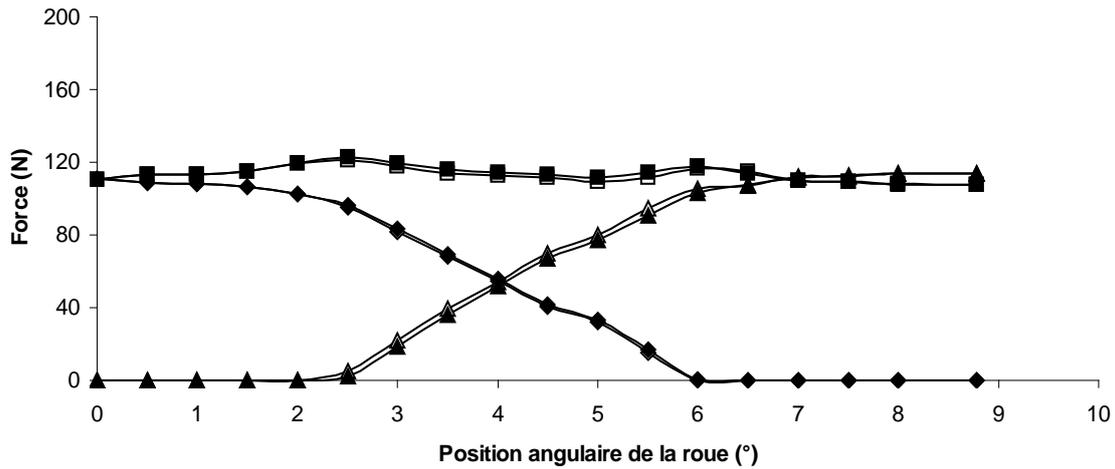


Figure 4.46 : Partages des charges simulés, 400 tours/min et 10 N.m

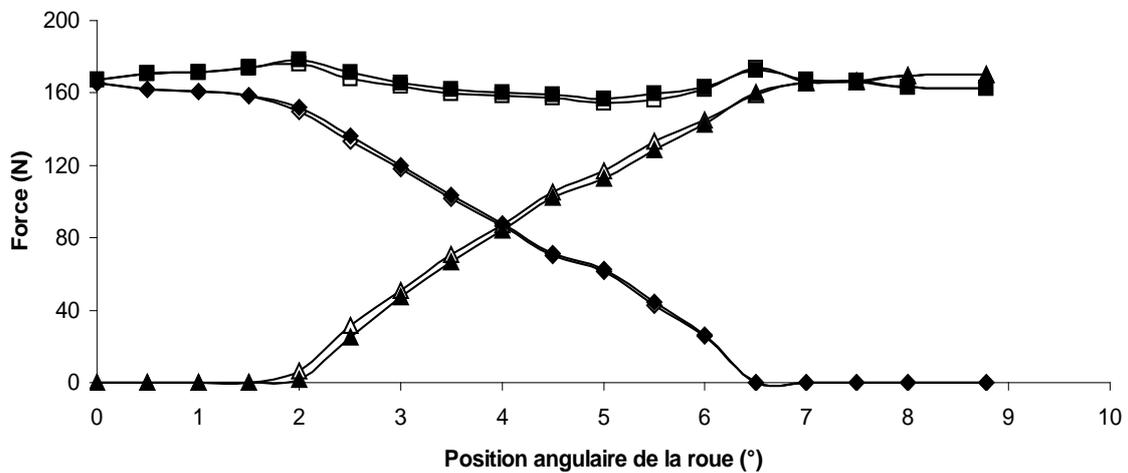


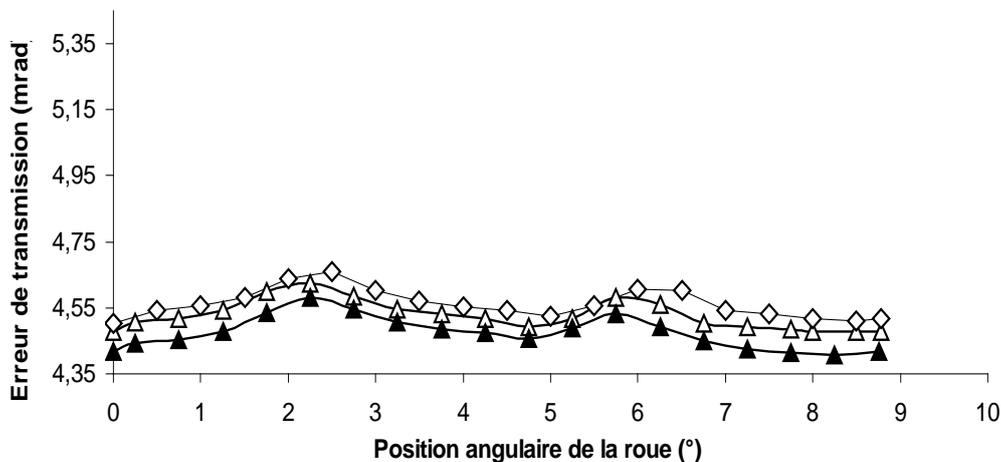
Figure 4.47 : Partages des charges simulés, 400 tours/min et 15 N.m

Sur les courbes du partage des charges, notons qu'il y a toujours au moins deux dents en contact. La dent centrale 0 est toujours chargée, la dent -1 se décharge progressivement alors que la dent 1 se charge en fonction de la position angulaire de la roue. Ce comportement est principalement dû au matériau polymère, qui a un module élastique faible. Sur un engrenage en acier ayant la même géométrie, le rapport de conduite sous charge serait inférieur à deux

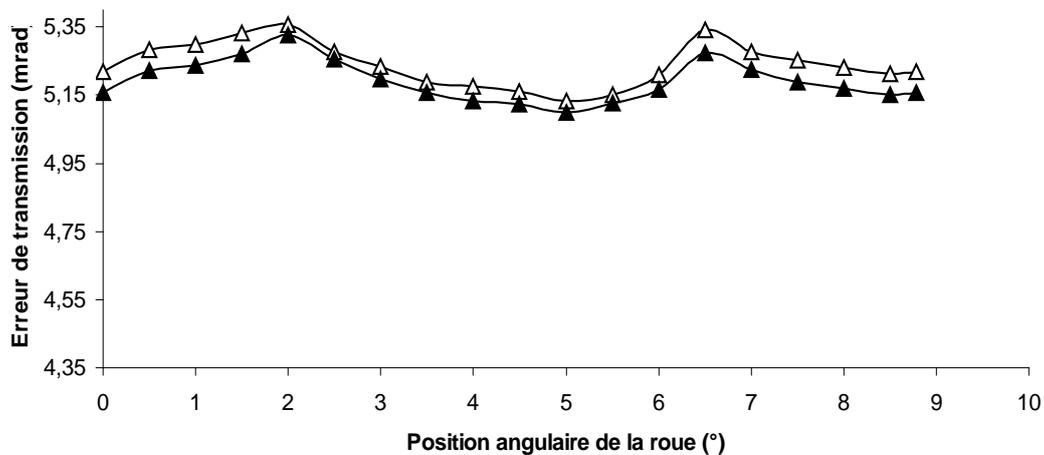
Par ailleurs, notons que la dent centrale supporte la moitié de la charge totale de l'engrenage sur toute la position angulaire.

Par contre, nous remarquons que le départ du chargement de la dent 1 et la fin du chargement de la dent -1 ne sont pas les mêmes en fonction de la vitesse de rotation et du couple. Cela est dû au comportement viscoélastique du polymère qui dépend de la fréquence de rotation, la charge et la température du contact qui est fonction de la pression de contact. Par contre pour les simulations présentées, l'humidité et la température ambiante sont constantes.

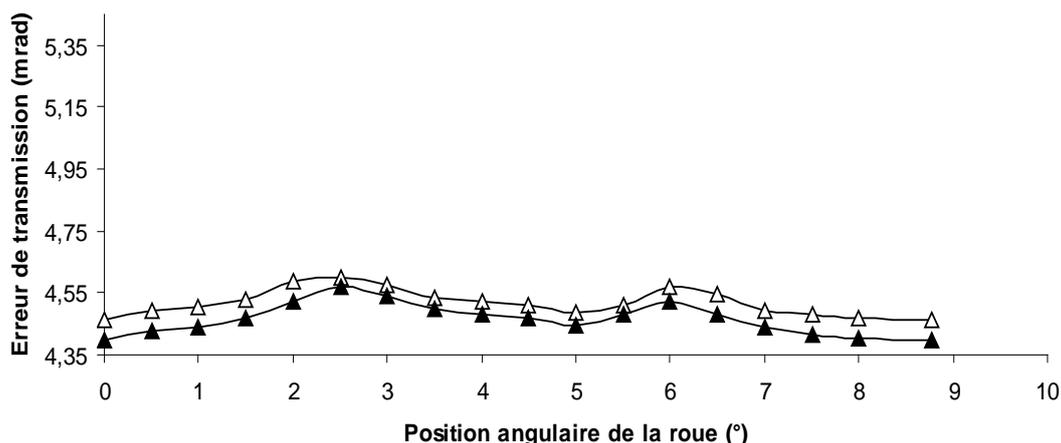
Le départ du chargement de la dent 1 est plus rapide et la fin du chargement de la dent -1 est plus longue lorsque le couple est plus élevée (15 N.m).  
 Enfin, la déviation et l'inclinaison n'ont pas d'influence sur les résultats du partage des charges.



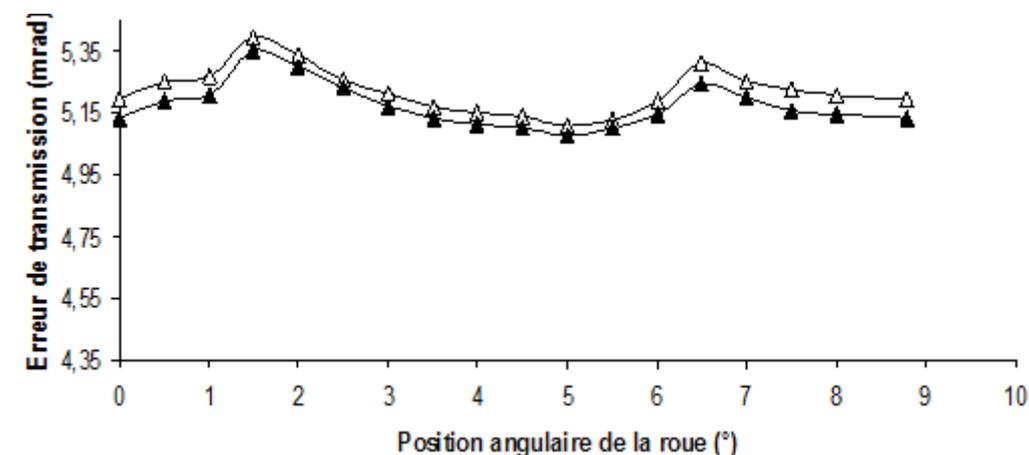
**Figure 4.48** : Erreurs de transmission simulées, 300 tour/min et 10 N.m, (◇) sans déviation et sans inclinaison, (▲) avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° et (▽) avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005°



**Figure 4.49** : Erreurs de transmission simulées, 300 tour/min et 15 N.m, (▲) avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° et (▽) avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005°



**Figure 4.50 :** Erreurs de transmission simulées, 400 tour/min et 10 N.m, ( $\blacktriangle$ ) avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$  et ( $\triangle$ ) avec une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$



**Figure 4.51 :** Erreurs de transmission simulées, 400 tour/min et 15 N.m, ( $\blacktriangle$ ) avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$  et ( $\triangle$ ) avec une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$

Pour l'ensemble des erreurs de transmission simulées, nous remarquons que la moyenne et l'amplitude sont assez élevées comparées aux engrenages en acier. En effet dans le cas d'engrenage en polymère, les déformations des dents sont beaucoup plus élevées. Nous pouvons séparer l'erreur de transmission sous charge en trois parties :

- Un premier sommet sur une position angulaire allant de  $0^\circ$  à  $3^\circ$ . Il y a uniquement deux dents en contact avec la dent 0 légèrement plus chargée que la dent -1. C'est le moment où la dent centrale est la plus chargée et la plus déformée.
- Une baisse sur une position angulaire allant de  $3^\circ$  à  $6^\circ$ . Il y a trois dents en contact, qui se partagent la charge totale. La dent centrale est moins chargée et moins déformée.
- Un deuxième sommet sur une position angulaire allant de  $6^\circ$  à  $8,57^\circ$ . A nouveau, il y a uniquement deux dents en contact. Les dents 0 et 1 se partagent équitablement la

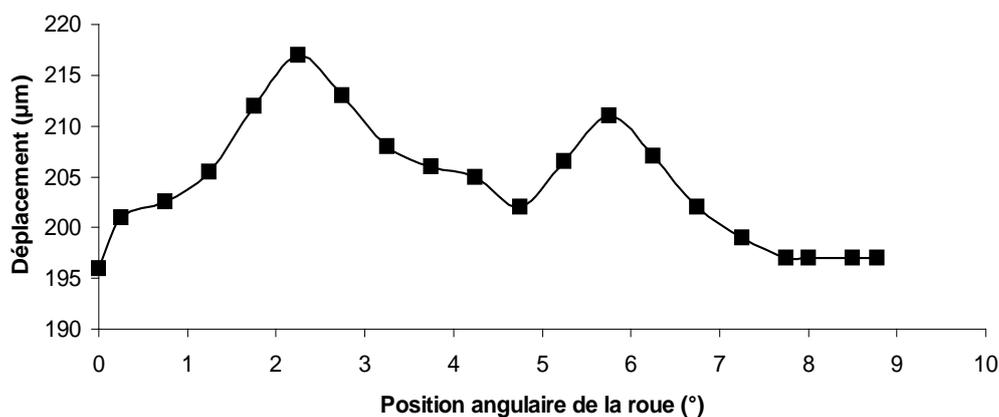
charge et par conséquent la déformation de la dent centrale augmente à nouveau mais elle est plus faible que dans le cas du premier sommet.

Pour compléter les analyses précédentes, la figure 4.52 présente l'évolution du déplacement de la dent centrale 0 en fonction de la position angulaire. Nous présentons une seule simulation car les autres sont similaires.

La moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission augmentent avec la charge car les dents se déforment plus. Par contre, pour une déviation et une inclinaison plus importantes, la moyenne de l'erreur de transmission diminue et, à faible couple, l'amplitude augmente (cf. tableau 4.18). Ce constat est logique, car un accroissement de la déviation et de l'inclinaison augmente le déplacement de la dent.

Vitesse (tours/min)	Couple (N.m)	Déviaton (°)	Inclinaison (°)	Moyenne (mrad)	Amplitude (mrad)
300	10	0	0	4,56	0,16
		0,015	0,005	4,53	0,14
		0,05	0,03	4,47	0,17
	15	0,015	0,005	5,24	0,23
		0,05	0,03	5,19	0,23
		0,015	0,005	4,51	0,13
400	10	0,05	0,03	4,46	0,16
		0,015	0,005	5,22	0,26
	15	0,05	0,03	5,17	0,25
		0,015	0,005	5,17	0,25

**Tableau 4.18** : Moyennes et amplitudes des erreurs de transmission simulées

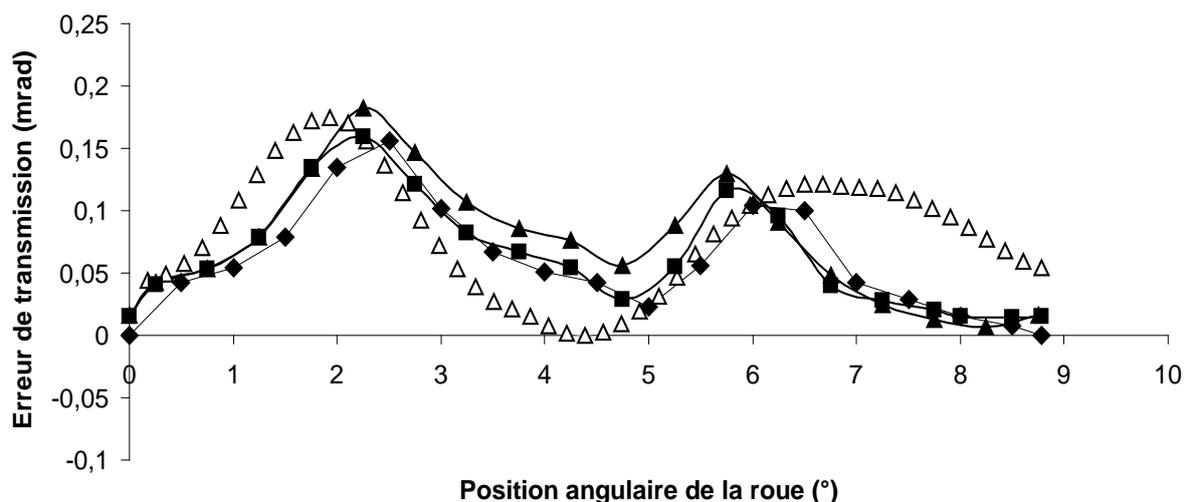


**Figure 4.52** : Déplacement de la dent centrale à 300 tours/min et 10 N.m, avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03°

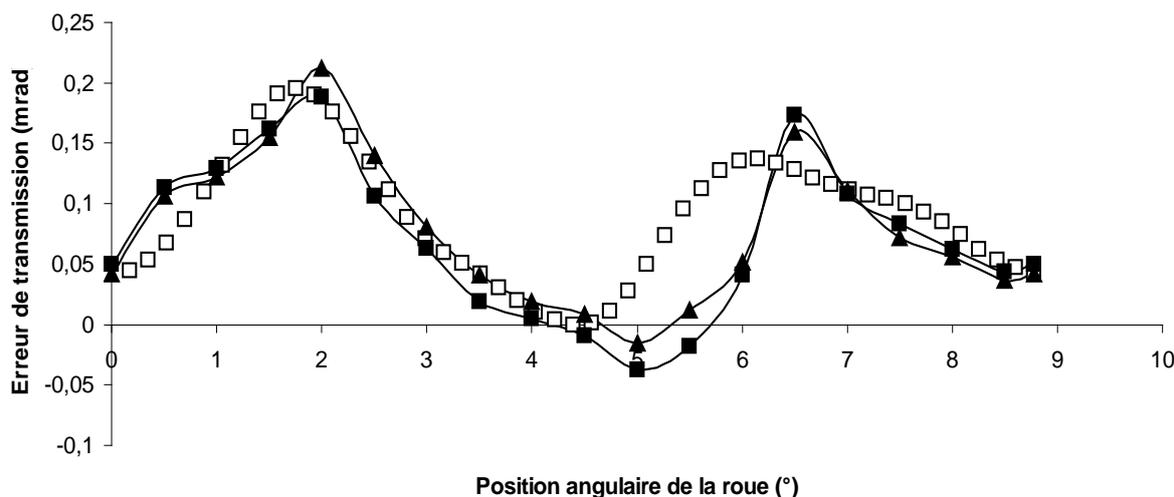
Notons également qu'une variation de la vitesse de rotation modifie très légèrement l'erreur de transmission. Ce constat est logique car d'un point de vue matériau, nous sommes dans le même ordre de grandeur de la vitesse de rotation (fréquence de rotation proche de 1 Hz). Pour avoir une variation significative de l'erreur de transmission en fonction de la fréquence de rotation, il faut comparer des vitesses de rotation ayant au moins trois décades de différence (exemple : 1 tour/min et 1000 tours/min).

## 4.4.2.3.6 Recalage et validation du modèle de partage des charges

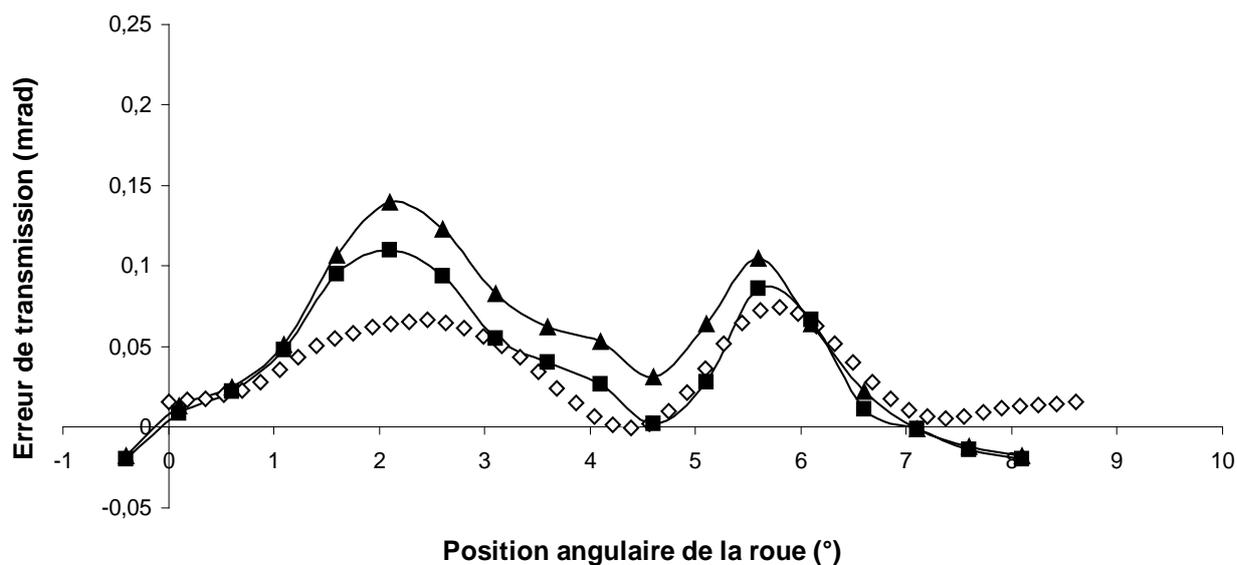
Les figures 4.53 à 4.56 présentent les erreurs de transmission sous charge mesurées et simulées. Pour faciliter l'analyse et la comparaison des résultats, les erreurs de transmission mesurées et simulées ont été recalées pour que leurs valeurs minimales soient égales à 0. Sur la figure 4.53, l'erreur de transmission simulée sans aucune déviation ni inclinaison est également présentée. Les simulations présentées concernent les valeurs maximales et minimales des désalignements décrits dans le paragraphe précédent.



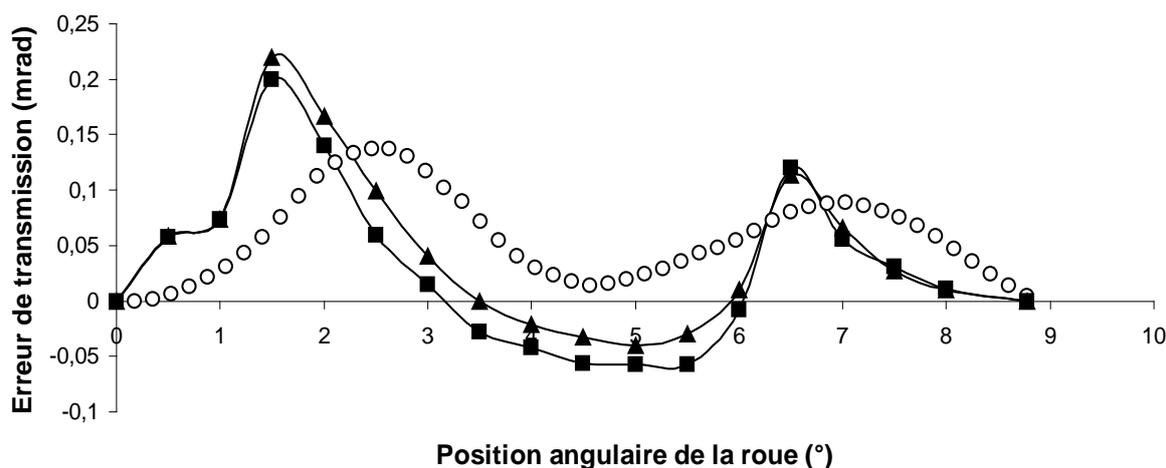
**Figure 4.53** : Erreur de transmission mesurée ( $\triangle$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$  ( $\blacktriangle$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$  ( $\blacksquare$ ) et erreur de transmission simulée sans déviation et sans inclinaison ( $\blacklozenge$ ) à 300 tours/min et 10 N.m



**Figure 4.54** : Erreur de transmission mesurée ( $\square$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$  ( $\blacktriangle$ ) et erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$  ( $\blacksquare$ ) à 300 tours/min et 15 N.m



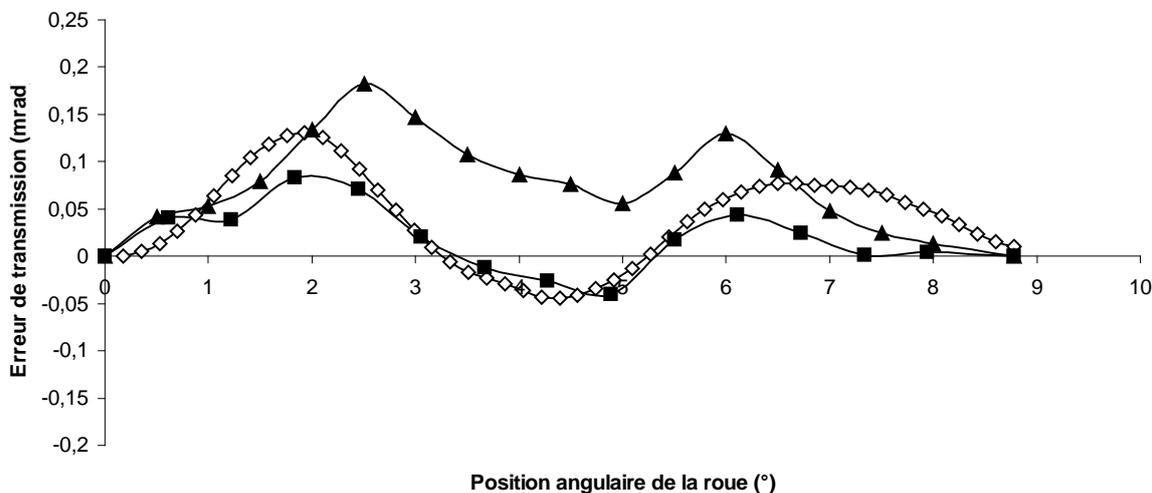
**Figure 4.55** : Erreur de transmission mesurée ( $\diamond$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$  ( $\blacktriangle$ ) et erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$  ( $\blacksquare$ ) à 400 tours/min et 10 N.m



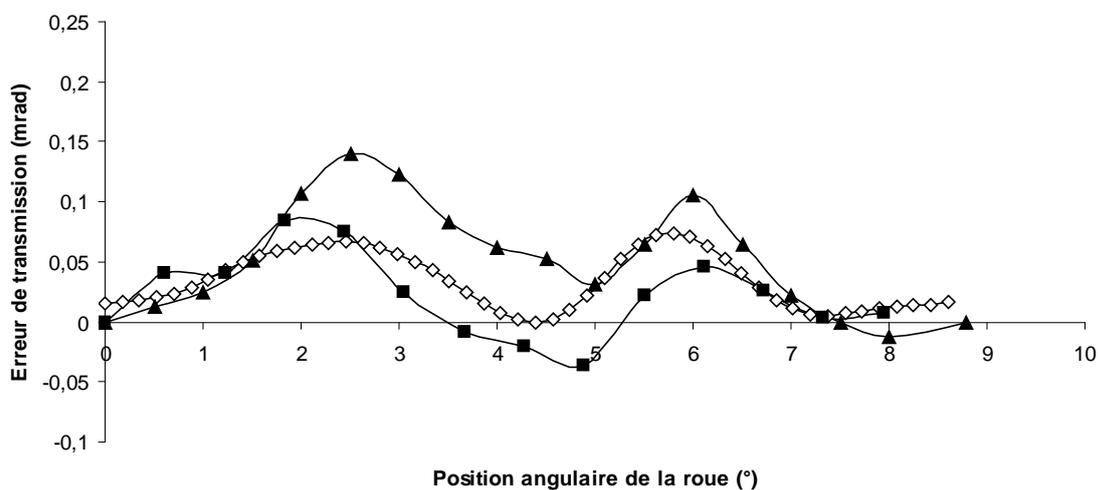
**Figure 4.56** : Erreur de transmission mesurée ( $\circ$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$  et une inclinaison de  $0,03^\circ$  ( $\blacktriangle$ ) et erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,015^\circ$  et une inclinaison de  $0,005^\circ$  ( $\blacksquare$ ) à 400 tours/min et 15 N.m

A 300 tours/min (cf. figures 4.53 et 4.54), le modèle de partage des charges reproduit correctement l'évolution de l'erreur de transmission mesurée. Les résultats des simulations, avec les valeurs minimales et maximales de la déviation et de l'inclinaison, sont très proches des mesures. A 400 tours/min (cf. figures 4.55 et 4.56), les résultats expérimentaux sont plus éloignés des courbes simulées, bien que l'allure des courbes soit respectée. Cette différence peut être expliquée par une erreur d'entraxe entre les arbres du pignon et de la roue. En effet, sur des vitesses plus importantes, il a été constaté une légère variation de l'entraxe lors du fonctionnement due à des déplacements du positionnement des paliers. N'ayant pas pu mesurer cette variation lors de l'engrènement sous charge, des calculs

numériques complémentaires ont été réalisés en modifiant l'entraxe. Deux exemples de conditions de calculs sont présentés sur les figures 4.57 et 4.58, pour les valeurs maximales de désalignements, un couple de 10 N.m et les deux vitesses de rotation. Les simulations sont réalisées pour des entraxes de 109,5 mm et 109,7 mm.



**Figure 4.57 :** Erreur de transmission mesurée ( $\diamond$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$ , une inclinaison de  $0,03^\circ$ , entraxe 109,7 mm ( $\blacktriangle$ ) et erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$ , une inclinaison de  $0,03^\circ$ , entraxe 109,5 mm ( $\blacksquare$ ) à 300 tours/min et 10 N.m



**Figure 4.58 :** Erreur de transmission mesurée ( $\diamond$ ), erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$ , une inclinaison de  $0,03^\circ$ , entraxe 109,7 mm ( $\blacktriangle$ ) et erreur de transmission simulée avec une déviation de  $0,05^\circ$ , une inclinaison de  $0,03^\circ$ , entraxe 109,5 mm ( $\blacksquare$ ) à 400 tours/min et 10 N.m

Les simulations avec une variation de l'entraxe montrent que ce paramètre est très influent sur l'erreur de transmission. A 400 tours/min (cf. figure 4.58), les deux courbes numériques encadrent la courbe des mesures, ce qui montre qu'avec une mesure précise de l'entraxe lors de l'engrènement, il serait possible d'améliorer la corrélation entre les résultats expérimentaux et numériques. D'ailleurs, afin de recalibrer plus précisément le modèle pour des vitesses élevées, il est prévu dans de prochains travaux de recherche de modifier la conception de montage des paliers afin de minimiser les variations d'entraxe. Pour cette étude, la corrélation entre les résultats simulés et mesurés vérifie que la prise en compte du comportement viscoélastique du matériau dans le modèle de partage des charges est valide dans son domaine linéaire.

---

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter le logiciel associé au modèle de partage des charges : PRINCE POLYMER. Nous avons montré l'interface et les simulations réalisées par ce logiciel et le modèle de partage des charges.

Ensuite, nous avons comparé le modèle de partage des charges développé dans cette thèse avec une autre méthode de dimensionnement des engrenages en Polyamide 6,6 : la VDI 2545. Quatre points de comparaison ont été vus : module élastique en fonction de la température, contraintes de surface, contraintes en pied de dent et déplacements en tête de denture. Les résultats montrent que la méthode VDI 2545 donne des estimations intéressantes pour obtenir un résultat rapide et approximatif. Par le modèle de partage des charges donne des résultats plus fins sur une plage d'utilisation plus large par rapport que la méthode VDI 2545. En effet, la viscoélasticité du Polyamide 6,6 est prise en compte de façon précise, c'est-à-dire la température, la fréquence de sollicitation et l'humidité. Le nombre de dents en contact sous charge est également plus réaliste.

Ensuite, la mesure du coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyamide 6,6 a été présentée. Pour cela, nous avons utilisé une machine EHD disponible au LaMCoS. Les échantillons ont été dimensionnés et fabriqués pour reproduire le contact des engrenages étudiés dans cette thèse. Ainsi, il a été possible de déterminer une valeur approximative du coefficient de frottement en fonction du taux de glissement. Elle est utilisée pour les modèles thermiques de Hooke et de Block.

Enfin, le banc engrenages en Polyamide 6,6 que nous avons développé au cours de cette thèse est présenté. Il permet d'effectuer deux types de mesures : la température et l'erreur de transmission sous charge.

Pour mesurer la température lors du fonctionnement, une caméra rapide infrarouge a été utilisée. Dans cette campagne, six essais ont été réalisés. Le but était multiple : identifier les sources d'échauffement, mesurer les élévations de température sur le profil de l'engrenage, analyser si cet échauffement sur le profil de l'engrenage est homogène ou hétérogène et comparer les élévations de température avec les propriétés mécaniques du matériau. En analysant les mesures, nous avons déterminé qu'il y a trois sources d'échauffement : le frottement, le piégeage de l'air entre les dents et l'échauffement de l'arbre. Nous avons constaté que l'échauffement de l'engrenage est homogène car la différence de température entre les points de mesure répartis sur le profil de l'engrenage est trop petite pour observer

une variation des propriétés mécaniques. Par contre, la différence de température entre le début et la fin de l'essai est assez importante pour éventuellement modifier les propriétés mécaniques du matériau pendant le fonctionnement de l'engrenage. Cependant dans notre cas, l'humidité et la température de la salle d'essai font que le matériau se trouve dans le plateau vitreux. Par conséquent, le module n'évolue pas énormément mais pour des essais à plus basses vitesses ou des températures proche de la température de transition vitreuse, le module élastique du matériau peut évoluer.

Pour mesurer l'erreur de transmission, des codeurs optiques ont été utilisés avec un processus d'acquisition développé au laboratoire. Quatre essais ont été réalisés pour cette campagne avec deux vitesses de rotation (300 tours/min et 400 tours/min) et deux couples d'entrée (10 N.m et 15 N.m). Ces essais permettent de comparer les valeurs expérimentales et simulées de l'erreur de transmission. Les résultats montrent que les cas à 300 tours/min avec les deux charges donnent de bons résultats car l'allure et l'amplitude des courbes est bien respectée. Les cas à 400 tours/min fournissent une bonne allure des courbes, mais les amplitudes ne sont pas respectées. Cette différence semble être due à une variation d'entraxe observée lors du fonctionnement sous charge à plus grande vitesse. Des simulations numériques intégrant cette variation d'entraxe ont montré que les résultats corrélaient avec l'intervalle des mesures de l'erreur de transmission. Ainsi, l'ensemble de ces résultats montrent que le comportement viscoélastique du matériau dans le modèle de partage des charges est bien intégré dans le domaine linéaire du matériau et qu'en fonction de la fréquence de rotation de l'engrenage ou de la température (proche de la chute du module élastique), la non prise en compte de la viscoélasticité pourrait devenir critique.

# Conclusion générale

Le comportement mécanique des engrenages en Polyamide 6,6 est étudié dans ce travail de thèse. Présentant de nombreux avantages par rapport aux aciers, les engrenages en polymères sont de plus en plus utilisés dans des systèmes à faible puissance. Dans la revue bibliographique, la plupart des modèles simulant le comportement sous charge des engrenages en Polyamide 6,6 ne tient pas compte de façon précise du comportement viscoélastique. Un des principaux apports de ce travail de recherche est d'avoir intégré le comportement viscoélastique du Polyamide 6,6 dans un modèle quasi-statique du partage des charges d'un engrenage. En sachant que ce comportement dépend de la vitesse de déformation, de l'historique du déplacement, de la charge, de la température, et dans le cas du Polyamide, il dépend également de l'humidité.

Le modèle de partage des charges provient à l'origine du logiciel « PRINCE », développé par le LaMCoS pour les engrenages en acier. Celui-ci utilise des modèles qui ne peuvent pas être appliqués directement dans le cas des engrenages en polymère : il est nécessaire de prendre en compte le comportement viscoélastique.

L'objectif général de ce travail est donc de proposer un outil numérique de dimensionnement précis, fiable et rapide pour les engrenages en Polyamide 6,6. Ce modèle doit proposer plusieurs résultats comme le partage des charges, les pressions de contact, l'erreur de transmission sous charge, les contraintes en pied de dent,... Notons également que le rapport : précision des résultats / temps de calcul, doit être réduit pour être utilisé dans le milieu industriel.

Pour réaliser cet objectif, ce travail a été séparé en trois étapes bien distinctes :

- Modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6.
- Modélisation du partage des charges en intégrant le déplacement viscoélastique du Polyamide 6,6.
- Comparaison numérique avec d'autres méthodes et validation expérimentale du modèle développé.

Le chapitre 1 présente une revue bibliographique de la modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère. Il commence par un rappel sur la composition physico-chimique du Polyamide 6,6. Ensuite, le comportement mécanique des polymères est analysé, en décrivant le comportement viscoélastique. Cette première partie est un bilan informatif pour appréhender la modélisation sous charge des engrenages en Polyamide 6,6. Celle-ci est décrite à travers diverses méthodes. Certaines, qui ne sont pas décrites dans le chapitre, ne tiennent pas du tout compte du comportement viscoélastique. En revanche, d'autres études détaillent la prise en compte de ce comportement. Mais dans ces articles, la modélisation viscoélastique n'est souvent pas assez précise.

Le chapitre 2 décrit la modélisation du comportement mécanique du Polyamide 6,6. Tout d'abord, le modèle rhéologique modélisant le mieux le déplacement viscoélastique de ce matériau est déterminé. Le modèle de Kelvin généralisé a été choisi car il permet de déterminer le déplacement d'un polymère ayant un spectre de relaxation assez large comme

le Polyamide 6,6. Il permet également d'intégrer dans la modélisation les paramètres suivants : temps de chargement, vitesse, historique du déplacement, température et humidité. En revanche, il est nécessaire de déterminer pour chaque bloc de Kelvin-Voigt les propriétés mécaniques définies par les complaisances  $\Delta J_i$  et les temps de relaxation  $\tau_i$ . Ensuite, une campagne expérimentale comprenant des essais de fluage et de spectrométrie mécanique est entreprise pour évaluer la complaisance et la limite de linéarité du modèle à différents taux d'humidité et températures. La spectrométrie mécanique est un essai très intéressant, car il permet d'obtenir précisément la complaisance complexe du matériau en fonction de la température et de la fréquence. A partir de ces résultats et d'une modélisation phénoménologique, nous pouvons obtenir les propriétés sous forme numérique et par conséquent le déplacement du Polyamide 6,6. Enfin, il a été vérifié qu'une dent était complètement relaxée après un tour complet de la roue. Cette information était indispensable pour la modélisation du partage des charges. Par contre, il est nécessaire de prendre en compte l'historique du chargement que subit la dent juste avant qu'elle ne rentre dans le contact, du à l'engrènement des dents qui la précèdent.

Le chapitre 3 présente la modélisation du comportement sous charge des engrenages en Polyamide 6,6, qui est le point le plus important de notre démarche. D'un point de vue scientifique, l'étape du processus de calcul du partage des charges développé au LaMCoS pour les engrenages en acier est considérablement modifiée pour intégrer le comportement viscoélastique du Polyamide 6,6. Pour cela, la loi de déplacement viscoélastique issue du modèle de Kelvin généralisé y est intégrée et elle est combinée avec la méthode des coefficients d'influence, afin de tenir compte également des déformations globales de flexion et locales de contact. Le problème de partage des charges est résolu par un système comprenant les équations de compatibilité des déplacements, qui intègrent le déplacement viscoélastique avec les coefficients d'influence, et l'équilibre du couple moteur. Par rapport aux engrenages en acier, le maillage de résolution est également modifié. Il encadre toute la surface de denture active pour tenir compte de l'historique des déplacements. Enfin, deux modèles thermiques simples, ceux de Block pour la température du contact et de Hooke pour la température du volume, sont utilisés pour tenir compte, dans le modèle développé, de l'échauffement de l'engrenage pendant le fonctionnement. En résumé, la modélisation du comportement sous charge en quasi-statique développée permet de prendre en compte tout le comportement viscoélastique des engrenages cylindriques en Polyamide 6,6.

Dans la première partie du chapitre 4, le logiciel « PRINCE POLYMER » , développé dans le cadre de cette thèse, est détaillé. Ensuite, la comparaison avec la méthode VDI 2545 a permis d'estimer l'apport scientifique du modèle de partage des charges. La méthode VDI 2545 prend en compte la viscoélasticité de manière simple. Les résultats montrent que le modèle de partage des charges permet une plus grande plage d'utilisation par rapport à la VDI 2545. En effet, le modèle de partage des charges prend en compte le nombre exact de dents en contact, la vitesse de rotation, la température et l'humidité. Il donne également un plus grand nombre de résultats. Néanmoins, nous pouvons souligner que la méthode standard permet d'obtenir très rapidement des résultats approximatifs. Dans une deuxième partie, les essais et validations expérimentales avec un banc d'essais développé dans le cadre de cette thèse sont détaillés. Il permet de réaliser deux mesures : la température de l'engrenage pendant le fonctionnement et l'erreur de transmission sous charge. Les essais thermiques ont permis de présenter une méthode originale de mesure avec une caméra infrarouge. Ces essais ont détaillé les sources d'échauffement. Les résultats ont également

montré que l'échauffement de l'engrenage est homogène et que les élévations de température sont assez importantes pour modifier les propriétés mécaniques du matériau, surtout quand elles sont proches de la transition vitreuse. Une dernière mesure expérimentale est réalisée : le coefficient de frottement entre deux matériaux en Polyamide 6,6. La connaissance de ce paramètre est en effet indispensable pour évaluer la température de fonctionnement de l'engrenage. Les résultats ont montré que le coefficient de frottement dans le cas du polyamide 6,6 est élevé comparé à un acier et qu'une variation de l'humidité relative le modifie légèrement. Après la présentation des dispositifs d'acquisition, les résultats de l'erreur de transmission sous charge sont analysés. Ils ont montré une bonne correspondance au niveau de l'allure et des amplitudes mesurées avec les simulations à 300 tours/min. En revanche, la comparaison à 400 tours/min est moins précise. L'allure des courbes est respectée mais pas les amplitudes. Il a été constaté que cette différence des résultats serait due à une variation d'entraxe et à des désalignements de l'engrenage lors du fonctionnement.

En conclusion, l'objectif fixé de proposer un logiciel simulant le comportement mécanique sous charge des engrenages en Polyamide 6,6, en tenant compte de façon précise du comportement mécanique des polymères, est atteint. Les comparaisons des résultats numériques et expérimentaux ont confirmé la validité des simulations construites sur les modèles scientifiques choisis et développés. De plus, les essais thermiques et ceux du coefficient de frottement ont apporté des résultats supplémentaires à notre démarche scientifique.

Cette thèse permet de proposer des solutions pour modéliser le comportement mécanique des engrenages en Polyamide 6,6. Cependant, le champ d'investigations dans ce domaine est encore assez vaste. Il existe très peu de modèles et d'études sur ce sujet. Néanmoins, le logiciel et la méthode développés au cours de cette thèse peuvent servir de base et d'ouverture à différents problèmes qui nécessitent une réflexion et un développement plus précis.

Sur la partie polymère, le modèle développé est pauvre en nombre de matériaux caractérisés. En effet, seul le Polyamide 6,6 est étudié, et pour proposer un logiciel plus industriel il est nécessaire d'intégrer un plus grand nombre de matériaux. L'analyse bibliographique montre également que d'autres matériaux polymères sont utilisés dans différentes études expérimentales et numériques : le Polyamide 12, le Polyacetal, le Polycarbonate... Cependant, si l'hypothèse d'avoir le même matériau pour le pignon et la roue est respectée, le code du calcul du partage des charges n'est pas modifié. Par contre, les campagnes expérimentales sont à refaire.

Lors de l'étude des différents articles, un point a retenu notre attention. La plupart des études thermiques portent sur les engrenages en composite. Grâce à leurs propriétés mécaniques exceptionnelles, les matériaux composites sont de plus en plus utilisés, fabriqués et étudiés. Le développement d'un code de calcul qui simule le comportement mécanique des engrenages en composite pourrait être d'un intérêt majeur pour l'industrie. La méthode développée au cours de cette thèse est tout à fait adaptée pour une évolution vers ce type d'engrenages. Cependant, la loi de comportement du matériau est différente suivant les hypothèses retenues. Une étude faisant suite à cette thèse débute actuellement au laboratoire LAMCOS.

Cette thèse ouvre également une porte sur les modèles thermiques des engrenages en polymère. L'analyse bibliographique montre qu'il existe très peu de modèles simples. La

mesure du comportement thermique avec la caméra infrarouge permet d'observer les échauffements lors du fonctionnement et leurs différentes sources. Les résultats expérimentaux montrent que les modèles de Block et Hooke présentent des prédictions approximatives. Il serait donc intéressant d'établir un nouveau modèle thermique plus précis à partir des essais expérimentaux.

Les résultats des mesures du coefficient de frottement montrent qu'une étude plus poussée est nécessaire pour une analyse pertinente. Un protocole avec mesure de l'évolution de l'usure et de la rugosité apporterait une information supplémentaire.

Enfin, le modèle de partage des charges développé est validé uniquement avec une seule géométrie à denture droite. D'autres validations sont nécessaires pour confirmer les résultats obtenus, notamment avec d'autres géométries, à denture droite et hélicoïdale.

# ANNEXES

## Annexe 1 : Calcul de la complaisance de conservation à partir du modèle biparabolique

Pour décrire l'évolution des modules en dynamique, nous pouvons utiliser le modèle biparabolique [83]. D'après Diaz-Calleja et Sanchis [84], le modèle biparabolique peut s'ajuster aux valeurs expérimentales. Nous notons qu'il s'agit uniquement d'un modèle mathématique ou phénoménologique, il n'a aucune signification physico-chimique. Nous l'utilisons uniquement pour obtenir la courbe maîtresse de façon numérique et ainsi obtenir la distribution spectrale des complaisances et des temps de relaxation. Pour obtenir le module complexe, nous pouvons utiliser la relation (1) et pour obtenir la complaisance complexe, nous pouvons utiliser la relation (2)

$$G^*(i\omega, T_{ref}) = \frac{G_u - G_r}{1 + \lambda (i\omega\tau')^{-\lambda} + (i\omega\tau')^{-\lambda}} + G_r \quad (1)$$

$$J^*(i\omega, T_{ref}) = \frac{1 + \lambda (i\omega\tau')^{-\lambda} + (i\omega\tau')^{-\lambda}}{\frac{1}{J_u} - \frac{1}{J_r}} + \frac{1}{J_r} \quad (2)$$

Pour obtenir les propriétés viscoélastiques, nous avons besoin d'obtenir la modélisation numérique de la courbe de complaisance de conservation  $J'(i\omega, T_{ref})$ , autrement dit, la partie réelle du nombre complexe (2). La démonstration suivante montre son obtention.

Nous avons changé le nom de certaines variables dans la relation (2) pour la souplesse de la rédaction et du traitement de cette équation (3).

$$J^*(i\omega, T_{ref}) = \frac{1}{J_r} + \frac{1 + Q(i\omega\tau)^{-Xhi} + (i\omega\tau)^{-Xhi'}}{\frac{1}{J_u} - \frac{1}{J_r}} \quad (3)$$

Avec les démonstrations suivantes, nous pourrons par la suite effectuer quelques changements dans la relation (3). Soit les relations suivantes (4), (5) et (6).

$$i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

$$i^{-Xhi} = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}Xhi\right) \quad (5)$$

$$Q(i\omega\tau)^{-Xhi} = Q \exp\left(-i\frac{\pi}{2}Xhi\right) (\omega\tau)^{-Xhi} \quad (6)$$

Nous posons les deux relations suivantes (7) et (8).

$$a = Q(\omega\tau)^{-Xhi} \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot Xhi \quad (8)$$

La relation (9) est l'intégration de (7) et (8) dans la relation (6).

$$Q(i\omega\tau)^{-Xhi} = a \exp(-i\alpha) \quad (9)$$

Le principe est exactement le même pour la relation suivante (10).

$$(i\omega\tau)^{-Xhi'} = b \exp(-i\beta) \quad (10)$$

Mais dans la relation (10), nous utilisons les relations suivantes (11) et (12).

$$b = (\omega\tau)^{-Xhi'} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} \cdot Xhi' \quad (12)$$

La relation (3) est une formule complexe. Nous posons la relation suivante (13) avec l'utilisation des relations (9) et (10).

$$H^* = \frac{1}{1 + a \cdot \exp(-i\alpha) + b \cdot \exp(-i\beta)} \quad (13)$$

Nous pouvons voir que cette dernière relation est issue de la relation (3).

$$J^* = \frac{1}{J_r} + H^* \left( \frac{1}{J_u} - \frac{1}{J_r} \right) \quad (14)$$

Nous obtenons en multipliant la relation (13) par l'inverse du conjugué complexe, une partie réelle avec la relation (15) et une partie imaginaire avec la relation (16).

$$\Re(H^*) = H' = \frac{1 + a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta)}{(1 + a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta))^2 + (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta))^2} \quad (15)$$

$$\Im(H^*) = H'' = \frac{a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta)}{(1 + a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta))^2 + (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta))^2} \quad (16)$$

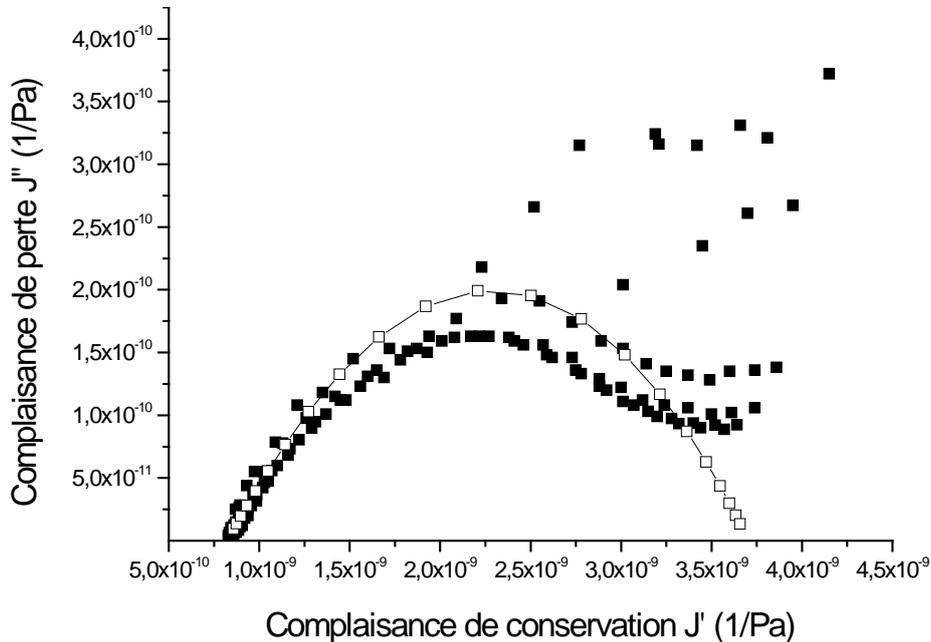
En utilisant la relation (15) dans (14), nous trouvons le résultat suivant (17). Ce résultat est la partie réelle du nombre complexe (2). Ainsi, il nous permet de modéliser la courbe maîtresse de la complaisance de conservation.

$$R(J^*(i\omega, T_{ref})) = J'(i\omega, T_{ref}) = \frac{1}{J_r} + \left( \frac{1}{J_u} - \frac{1}{J_r} \right) \frac{1 + a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta)}{(1 + a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \cos(\beta))^2 + (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \sin(\beta))^2} \quad (17)$$

## Annexes 2 : Détermination des paramètres du modèle biparabolique

Dans le modèle bi-parabolique, les paramètres  $J_u$  et  $J_r$ , qui sont respectivement les complaisances non-relaxée et relaxée, sont obtenues directement depuis la courbe maîtresse expérimentale de la complaisance de conservation  $J'(i\omega, T_{ref})$ . Mais pour réaliser un bon recalage du modèle bi-parabolique sur la courbe expérimentale, nous pouvons nous aider de la courbe Cole-Cole [92] qui représente la fonction  $J'' = f(J')$ . Un alignement correct de la courbe Cole-Cole numérique sur la courbe Cole-Cole expérimentale nous donne une indication sur la qualité du recalage. Une trop grande différence entre les deux courbes nous indiquerait que nous avons effectué un mauvais recalage. Pour ajuster la courbe Cole-Cole numérique sur la courbe expérimentale, nous pouvons faire varier les paramètres suivants  $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $Q$  et  $\tau$ .

Cependant, il faut noter qu'avec le modèle bi-parabolique nous pouvons approcher correctement les résultats de  $J'(i\omega, T_{ref})$  ou de  $J''(i\omega, T_{ref})$ , mais nous ne pouvons pas approcher les résultats de  $J'(i\omega, T_{ref})$  et de  $J''(i\omega, T_{ref})$ . Nous pouvons voir sur la figure 1, la courbe Cole-Cole obtenue par spectrométrie et par modélisation.



**Figure A2.1** : Courbe Cole-Cole  $J'' = f(J')$  obtenue par ( $\square$ ) modélisation et par ( $\blacksquare$ ) expérience

---

# Bibliographie

- [1] VU H.N., *Etude des relations microstructure-propriétés de polymères semi-cristallins par la méthode « Essential Work of Fracture »*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2009.
- [2] CHABERT E., *Propriétés mécaniques de nanocomposites à matrice polymère : Approche expérimentale et modélisation*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002.
- [3] FERRY J.D., *Viscoelastic properties of polymers*, 2nd edition J. Wiley and sons.
- [4] TA INSTRUMENT., *Thermal analysis application Brief: Measurement of moisture effects on the mechanical properties of 66 Nylon*, TA-133.
- [5] J.F. MANO, J.C. VIANA., Effects of the strain rate and temperature in stress – strain tests: Study of the glass transition of a polyamide 6, *Polymer testing*, 2001, vol. 20, p. 937-43.
- [6] MENS Y., RIEGER J., Temperature dependent wide angle X-ray diffraction studies on the crystalline transition in water saturated and dry polyamide 6/66 copolymer, *European Polymer Journal*, 2004, vol. 40, p. 2629-35.
- [7] MIRI V., PERSYN O., LEFEBVRE J.M., SEGUELA R., Effect of water absorption on the plastic deformation behaviour of nylon 6, *European Polymer Journal*, 2009, vol. 45, p. 757-62.
- [8] SCAFFARO R., TZANKOVA DINTCHEVA N., La MANTIA F.P., A new equipment to measure the combined effects of humidity, temperature, mechanical stress and UV exposure on the creep behaviour of polymers, *Polymer testing*, 2008, vol. 27, p. 49-54.
- [9] CHABOCHE J.L., LEMAITRE J., *Mécanique des matériaux solides*. Paris : Dunod.

- [10] LEROY B., *Etude d'un engrenage cylindrique à denture droite ou hélicoïdale, le profil générateur de la crémaillère de référence étant un arc de développante de cercle*. Thèse, Université Paul Sabatier, 1981.
- [11] WOODBURY R.S., *History of the gear cutting machine*. The technology Press Massachussetts, 1958.
- [12] DUDLEY D.W., *The evolution of the gear art*. American Gear Manufacturers Association Washington, 1969.
- [13] TSUKAMOTO N., Investigation about the strength of plastic gears, *Bulletin of JSME*, 1983, vol. 26, p. 1661-9.
- [14] TSUKAMOTO N., Investigation about load capacity of nylon gears when tooth surface finishing of mating steel gears is different, *Bulletin of JSME*, 1984, vol. 27, p. 1529-36.
- [15] TSUKAMOTO N., Argument on plastic gears for power transmission, *JSME International Journal Série C*, 1995, vol. 38, p. 1-7.
- [16] TSUKAMOTO N., Water lubrication characteristics of polyacetal gears filled with carbon fibers, *JSME International Journal Serial*, 1991, vol. 34, p. 121-6.
- [17] TSUKAMOTO N., Basic characteristics of plastic gears lubricated with water, *JSME International Journal Serial*, 1993, vol. 36, p. 241-50.
- [18] TSUKAMOTO N., Water lubrication characteristics of polyacetal gears filled with carbon fibers, *JSME International Journal Serial C*, 1993, vol. 36, p. 499-506.
- [19] TSUKAMOTO N., A study on development of low noise gears, *JSME International Journal Serial*, 1991, vol. 34, p. 114-20.
- [20] TSUKAMOTO N., Development of low noise gears, *JSME International Journal Serial*, 1991, vol. 34, p. 245-51.
- [21] SENTHILVELAN S., GNANAMOORTHY R., Effect of gear tooth fillet radius on the performance of injection molded Nylon 6/6 gears, *Materials and design*, 2006, vol. 27, p. 632-39.
- [22] SENTHILVELAN S., GNANAMOORTHY R., Effect of rotational speed on the performance of unreinforced and glass fiber reinforced Nylon 6 spur gears, *Materials and Design*, 2007, vol. 28, p. 765-772.

- [23] SENTHILVELAN S., GNANAMOORTHY R., Damping characteristics of unreinforced, glass and carbon fiber reinforced nylon 6/6 spur gears, *Polymer testing*, 2006, vol. 25, p. 56-62.
- [24] IMREK H., Performance improvement method for Nylon 6 spur gears, *Tribology international*, 2009, vol. 42, p. 503-10.
- [25] DUZCUKOGLU H., Study on development of Polyamide gears for improvement of load-carrying capacity, *Tribology International*, 2009, vol. 42, p. 1146-53.
- [26] DUZCUKOGLU H., PA 66 spur gear durability improvement with tooth width modification, *Materials and Design*, 2009, vol. 30, p. 1060-67.
- [27] MAO K., A new approach for polymer composite gear design, *Wear*, 2007, vol. 262, p. 423-41.
- [28] KOFFI D., GAUVIN R., YELLE H., Heat generation in thermoplastic spur gears, *Journal of Mechanics, Transmissions, and Automation in Design*, 1985, vol. 107, p. 31-37.
- [29] HOOKE C.J., MAO K., WALTON D., BREEDS A.R., KUKUREKA S.N., Measurement and prediction of the surface temperature in polymer gears and its relationship to gear wear, *Journal of Tribology*, 1993, vol. 115, p. 119-24.
- [30] MAO K., LI W., HOOKE C.J., WALTON D., Friction and wear behaviour of acetal and nylon gears, *Wear*, 2009, vol. 267, p. 639-45.
- [31] UEDA A., TAKAHASHI H., NAKAMURA M., MORIWAKI I., Computer simulation on the heat generation in meshing of plastic spur gears (effect of module and gear speed on heat radiation), *Proceedings of MPT2009, JSME International Conference on Motion and Power Transmissions*, Sendai, Japan, May 13-15, 2009.
- [32] MAO K., A numerical method for polymer composite gear flash temperature prediction, *Wear*, 2007, vol. 262, p. 1321-29.
- [33] DIAB Y., VILLE F., HOUJOH H., SAINSOT P., VELEX P., Experimental and numerical investigations on the air-pumping phenomenon in high-speed spur and helical gears, *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 219, p. 785-99.

- [34] DIAB Y., *Analyse des pertes de puissance dans les transmissions par engrenages à grande vitesse. Applications aux réducteurs industriels et aux machines textiles*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [35] BLOCK H., Theoretical study of temperature rise at surface of actual contact under oiliness lubricating conditions, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1937, vol. 2, p. 222-35.
- [36] BLOCK H., The flash temperature concept, *Wear*, 1963, vol. 6, p. 483-93.
- [37] TOBE T., KATO M., A study on flash temperature on the spur gear teeth, *Journal of Engineering for Industry*, 1974, vol. 96, p. 78-84.
- [38] VAN KREVELEN D.W., *Properties of Polymers*, 3rd edition Elsevier.
- [39] KUKUREKA S.N., HOOKE C.J., RAO P., LIA P., CHEN Y.K., The effect of fibre reinforcement on the friction and wear of Polyamide 66 under dry rolling-sliding contact, *Tribology International*, 1999, vol. 32, p. 107-16.
- [40] WIELEBA W., The role of internal friction in the process of energy dissipation during PTFE composite sliding against steel, *Wear*, 2005, vol. 258, p. 870-76.
- [41] UEDA A., KATSUYOSHI S., ICHIRO M., The frictional coefficient and the simulation of plastic gears using basic experimental data, *Proceedings of VDI 2005, International Conference on Gears*, Munich, October, 2005.
- [42] UNAL H., SEN U., MIMAROGLU A., Dry sliding wear characteristics of some industrial polymers against steel counterface, *Tribology international*, 2004, vol. 37, p. 727-32.
- [43] UNAL H., MIMAROGLU A., Friction and wear behaviour of unfilled engineering thermoplastics, *Materials and Design*, 2003, vol. 24, p. 183-87.
- [44] TSUKAMOTO N., MARUYAMA H., KOYAMA M., CHIBA K., Dimensional change in plastic gears in vacuum and some experimental results, *JSME International Journal Série C*, 1993, vol. 36, p. 485-93.

- [45] HOUSER D.R., Blankenship G.W. *Methods for measuring Gear transmission error under load and operating speeds*. Technical Paper, SAE International Office Highway Meeting, Milwaukee.
- [46] MATSON G.A., *A dynamic study of a Back-to-Back gear Test Stand*. Thèse, Université de l'état de Ohio.
- [47] REMOND D., Practical performances of high-speed measurement of gear transmission error or torsional vibrations with optical encoders, *Journal of measurement science and technology*, 1998, vol. 9, p. 347-53.
- [48] REMOND D., MAHFOUDH J., From transmission error measurements to angular sampling in rotating machines with discrete geometry, *Shock and Vibration*, 2005, vol. 12, p. 149-61.
- [49] GUNTING M., De VAUJANY J.P., REMOND D., Numerical and experimental study of the loaded transmission error of a worm gear with a plastic wheel, *Proceedings of DETC'07, ASME 2007 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Las Vegas, Nevada USA, September 4-7, 2007.
- [50] JABBOUR T., GHAZI A., Stress calculation for plastic helical gears under a real transverse contact ratio, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, 2009, p. 2236-47.
- [51] TSAI M.H., TSAI Y.C., A method for calculating static transmission errors of plastic spur gears using FEM evaluation, *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997, vol. 27, p. 345-57.
- [52] WALTON D., CROPPER A.B., WEALE D.J., KLEIN MEULEMAN P., The efficiency and friction of plastic cylindrical gears Part 1: Influence of materials, *Journal Engineering Tribology Part J*, vol. 216, p. 75-92.
- [53] WALTON D., CROPPER A.B., WEALE D.J., KLEIN MEULEMAN P., The efficiency and friction of plastic cylindrical gears Part 2: Influence of tooth geometry, *Journal Engineering Tribology Part J*, vol. 216, p. 92-03.
- [54] MORIWAKI I., TADA K., TOKUDA K., HUI G.D., SAITO K., Viscoelastic behaviour of plastic gears for power transmission –

- Fundamental investigation. *7th International power transmission and gearing conference*, ASME, San Diego, 1996, 88, p. 125-31.
- [55] VDI 2545., *Zahnrad aus thermoplastischen Kunststoffen*, Beuth Verlag GmbH, 1981, 31p.
- [56] BEERMANN S., *Estimation of lifetime for plastic gears*, Hombrechtikon: KISSOFT, 2007, 17 p.
- [57] ISO 6336., *Calcul de la capacité de charge des engrenages cylindriques à denture droite et hélicoïdale*, ISO, 2006.
- [58] LIN A., KUANG J., Dynamic interaction between contact loads and tooth wear of engaged plastic gear pairs, *International Journal of Mechanical Science*, 2007, vol. 50, p. 205-13.
- [59] GUINGAND M., *Prévision et optimisation du comportement quasi-statique sous charge des engrenages*. Habilitation à diriger des recherches, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006.
- [60] De VAUJANY J.P., *Comportement d'engrenage cylindrique intérieur. Effets de jante et de voile*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996.
- [61] OLAKOREDE A.A., *Répartition des charges et résistance en conception d'engrenages cylindriques, application de la méthode des prismes finis en CAO*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1990.
- [62] De VAUJANY J.P., KIM H.C., GUINGAND M., Effects of rim and web on stresses of internal cylindrical gears, *Proceedings of the 7th international power transmission and gearing conference ASME*, New York, USA, 1996.
- [63] KIM H.C., *Etude des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la méthode des Prismes finis*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996.
- [64] JACQUIN C.Y., *Modélisation et optimisation du comportement sous charge des engrenages faces*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2001.

- [65] GUINGAND M., De VAUJANY J.P., ICARD Y., Analysis and optimization of the loaded meshing of face gears. *Journal of Mechanical Design*, 2005, vol. 127, p. 135-43.
- [66] ICARD Y., *Engrenage spiro-conique : Modélisation sous charge appliqué au domaine aéronautique*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [67] De VAUJANY J.P., GUINGAND M., Geometry, kinematics and load sharing of pinion rack gear with variable ratio. *Proceedings of MPT2009, JSME International Conference on Motion and Power Transmissions*, Sendai, Japan, May 13-15, 2009.
- [68] HILTCHER Y., GUINGAND M., De VAUJANY J.P., Load sharing of a worm gear with a plastic wheel, *Journal of Mechanical Design*, 2007, vol. 129, p. 23-30.
- [69] HACHMANN H., STRICKLE E., Polyamide als Zahnwerkstoffe, *Konstruktion*, 1966, p. 18.
- [70] TSUKAMOTO N., A study on strength design methods for plastic gears, *JSME International Journal Serial 3*, 1991, vol. 34, p. 121-26.
- [71] VIJAYAKAR S.M., Edge effects in gear tooth contact. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference*, San Diego, October 6-9 1996, p. 205-12.
- [72] VIJAYAKAR S.M., HOUSER S.M., Contact analysis of gears using a combined finite element and surface integral method. *Gear Technology*, 1993, vol. 10, n°4, p. 26-33.
- [73] JOHNSON K.L., *Contact mechanics*. New York: Cambridge University Press, 1985, 452 p.
- [74] KALKER J.J., Contact mechanical algorithms. *Communications in Applied Numerical methods*, 1988, 4 (1), 25 – 32.
- [75] KALKER J.J., Numerical calculation of the elastic field in a half-space. *Communication in Applied Numerical Methods*, 1986, 2 (4), 401 – 10.
- [76] KALKER J.J., Mathematical models of friction for contact problems in elasticity. *Wear*, 1986, 113 (1), 61 – 77.

- [77] BOUSSINESQ J., *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris : Albert BLANCHARD, 1969, 564 p.
- [78] TEIXEIRA ALVES J., GUINGAND M., De VAUJANY J.P., Set of functions for the calculation of bending displacements for spiral bevel gear teeth, *Mechanism and machine Theory*, 2010, vol. 45, p. 349-63.
- [79] VIJAYAKAR S.M., BUSBY H.R., HOUSER D.R., Finite element analysis of quasi-prismatic bodies using Chebychev polynomials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, vol. 24, p. 1461-77.
- [80] SIMON V., Displacements in worm gears with ground concave worm profile, *Mechanism and Machine Theory*, 1996, vol. 31, p. 1131-40.
- [81] SIMON V., Load distribution in cylindrical worm gears, Transaction of the ASME, *Journal of Mechanical Design*, 2003, vol. 125, p. 356-64.
- [82] GUINGAND M., De VAUJANY J.P., ICARD Y., Fast three-dimensional quasi-static analysis of helical gears using the finite prism method, *Journal of Mechanical Design*, 2004, vol. 126, p. 1082-88.
- [83] DECROIX J.Y., PILOZ A., DOUILLARD A., MAY J.F., VALET G., Mathematical model for viscoelastic behaviour of poly- $\alpha$ -olefins. Application to polyolefin blends and to hexane-1-propene copolymers, *European Polymer Journal*, 1975, vol. 11, p. 625-30.
- [84] DIAZ-CALLEJA R., SANCHIS M.J., MOSTOS J., Biparabolic model to represent dielectric relaxation data, *Polymer*, 1996, vol. 37, p. 4003.
- [85] VUORISTO T., KUOKKALA V.-T., Creep, recovery and high strain rate response of soft roll cover materials, *Mechanics of Materials*, 2002, vol. 34, p. 494-04.
- [86] SAINSOT P., *Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteur*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989.
- [87] BERGOUGNIOUX M., *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires. Cours et exercices avec solutions*. Paris : DUNOD, 2001, 260 p.

- [88] HENRIOT G., *Engrenages : conception, fabrication, mise en œuvre*. 7ème édition, Paris : DUNOD, 1999, 875 p.
- [89] BOYER A., Transmission de puissance et engrenages en matière plastique, *Journée engrenages et transmissions ECAM, IET, CETIM*, 1990.
- [90] VUILLERMOZ P.L., VUILLERMOZ A., PAJANI D., Infrared thermography in materials fabrication – Optimization and quality control. *Mémoires et études scientifiques de la revue de métallurgie*, 1989, vol. 86, p. 297-307.
- [91] SCHLOSSER P., *Influence of thermal and mechanical aspects on deformation behaviour of NiTi alloys*, Thèse, Université de Grenoble, 2008.
- [92] COLE K.S., COLE R.H., Dispersion and absorption in dielectrics. Alternating current characteristic, *Journal Chemical Physics*, 1941, vol. 9, p. 341-51.

---

# Liste des publications

## Articles

Eric LETZELTER, Jean-Pierre de VAUJANY, Laurent CHAZEAU, Michèle GUINGAND. Quasi-static load sharing model in the case of Nylon 6/6 cylindrical gears, *Materials and Design*, 30, 2009, 4360-68.

Eric LETZELTER, Michèle GUINGAND, Jean-Pierre de VAUJANY, Pauline SCHLOSSER. A new experimental approach for measuring thermal behaviour in the case of Nylon 6/6 cylindrical gears, *Polymer Testing*, 29, 2010, 1041-51.

## Congrès

Eric LETZELTER, Jean-Pierre de VAUJANY, Laurent CHAZEAU, Michèle GUINGAND. Partage de charge quasi-statique pour les engrenages cylindriques en polymère, AIP-PRIMECA 11ème colloque sur la conception mécanique intégrée, La Plagne, 2009.

Eric LETZELTER, Jean-Pierre de VAUJANY, Michèle GUINGAND. Load sharing model for polymer cylindrical gears, International conference on gears, Technical University of Munich, Octobre 2010.

Eric LETZELTER, Jean-Pierre de VAUJANY, Michèle GUINGAND, Pauline SCHLOSSER. Load sharing model and thermal study for polymer gears, IDMME – Virtual concept, Bordeaux, Octobre 2010.

---

# Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Formulation chimique et différentes échelles d'organisation du Polyamide 6,6 : de la conformation des chaînes macromoléculaires, aux lamelles cristallines, à la superstructure sphérolitique [1]	18
<b>Figure 1.2</b> : Modèle d'arrangement à chaînes repliées [1]	19
<b>Figure 1.3</b> : Mesure DMA du module d'Young (a) et du facteur de perte (b) d'un Polyamide 6,6 en fonction de la température à différents niveaux d'humidité [4]	21
<b>Figure 1.4</b> : Principe de construction des courbes maîtresses (a) Courbes isothermes expérimentales de $E'$ (module de conservation), (b) Courbe maîtresse par décalage des courbes isothermes expérimentales, (c) Evolution des coefficients de translation en fonction de la température [5]	21
<b>Figure 1.5</b> : Ressort caractérisant l'élasticité	22
<b>Figure 1.6</b> : Patin représentant le seuil de plasticité	23
<b>Figure 1.7</b> : Amortisseur caractérisant le comportement visqueux	23
<b>Figure 1.8</b> : (a) Le modèle de Maxwell et (b) le modèle de Kelvin-Voigt [9]	23
<b>Figure 1.9</b> : Modèle de Kelvin généralisé [9]	25
<b>Figure 1.10</b> : Schéma de principe du phénomène de piégeage [34]	28
<b>Figure 1.11</b> : Estimation de la température flash avec les modèles de Block et de Mao [32]	29
<b>Figure 1.12</b> : Modèle de transfert de chaleur de l'engrenage [29] et [30]	30
<b>Figure 1.13</b> : Modélisation de l'énergie générée par frottement et hystérésis en fonction de la position angulaire [28]	32
<b>Figure 1.14</b> : Température de surface d'un engrenage renforcé et non renforcé à 1.5 N.m [23]	33
<b>Figure 1.15</b> : Température de surface d'un engrenage renforcé et non renforcé à 2 N.m [23]	33
<b>Figure 1.16</b> : Température de surface de la dent d'un engrenage en Nylon 6,6 non renforcé à différentes vitesses de rotation avec un couple de 0,8 N.m [22]	33

<b>Figure 1.17</b> : Engrenages utilisés [26]	34
<b>Figure 1.18</b> : Température en fonction du nombre de cycles pour deux vitesses de rotation : (a) 1000 tours/min et (b) 1500 tours/min [26]	34
<b>Figure 1.19</b> : Emplacement du capteur de mesure de la température [21], [22] et [23]	35
<b>Figure 1.20</b> : Mesure de la température de surface [27]	35
<b>Figure 1.21</b> : Méthode de mesure thermique par caméra infrarouge sur (a) la surface latérale d'un polymère composite en contact glissant avec un acier et (b) schéma de principe de la mesure [40]	36
<b>Figure 1.22</b> : (a) Machine de mesure du coefficient de frottement dans les conditions de contact d'un engrenage en Polyoxyméthylène et (b) contact entre les échantillons [41]	37
<b>Figure 1.23</b> : Echantillons [41]	38
<b>Figure 1.24</b> : Coefficient de frottement dynamique, échantillon A (diamètre de 3 mm) [41]	38
<b>Figure 1.25</b> : Coefficient de frottement dynamique, échantillon B (diamètre de 6,7 mm) [41]	39
<b>Figure 1.26</b> : Coefficient de frottement dynamique, échantillon C (diamètre de 10 mm) [41]	39
<b>Figure 1.27</b> : Schéma de principe de la machine d'essai [43]	40
<b>Figure 1.28</b> : (a) Coefficient de frottement en fonction de la distance de glissement, (b) coefficient de frottement en fonction de la pression et (c) coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement [43]	41
<b>Figure 1.29</b> : Vitesse du changement de dimension de l'engrenage en fonction de la vitesse d'absorption de l'eau [44]	42
<b>Figure 1.30</b> : Erreur de transmission mesurée pour un engrenage roue et vis sans fin, (a) 1,4 N.m et 400 tours/min et (b) 1,9 N.m et 800 tours/min [49]	43
<b>Figure 1.31</b> : Erreur de transmission simulée et mesurée pour un engrenage roue et vis sans fin, (a) 1,4 N.m et 400 tours/min et (b) 1,9 N.m et 800 tours/min [49]	43
<b>Figure 1.32</b> : (a) Comparaison de déformation élastique et viscoélastique et (b) Flexion d'une dent en fonction du rayon à différents nombres de cycles [54]	45
<b>Figure 1.33</b> : Evolution du module élastique en fonction de la température, la fréquence de référence et le taux d'humidité ne sont pas précisés [55]	49

<b>Figure 1.34</b> : (a) Modèle éléments finis de l'engrenage et (b) Détail du maillage de la zone de contact [58]	51
<b>Figure 1.35</b> : Evolution du module élastique $E_{\text{Nylon}}$ en fonction de la température	51
<b>Figure 1.36</b> : Usure simulée sur le profil d'un engrenage Polyamide 6,6/Polyamide 6,6 en fonction de la position de la ligne de contact à différentes vitesses [58]	52
<b>Figure 1.37</b> : Présentation du contact	53
<b>Figure 1.38</b> : Maillage de la zone potentielle de contact dans le plan tangent [66]	55
<b>Figure 1.39</b> : Méthode des Prismes finis [62]	56
<b>Figure 1.40</b> : Méthode des éléments quasi-Prismes [79]	57
<b>Figure 1.41</b> : Calcul des coefficients de surface de Boussinesq [66]	58
<b>Figure 2.1</b> : Modèle de Kelvin généralisé	61
<b>Figure 2.2</b> : Machine MTS de traction-compression	64
<b>Figure 2.3</b> : Géométrie et dimensions de l'éprouvette de fluage	66
<b>Figure 2.4</b> : Complaisance de traction en fonction du temps à température ambiante	66
<b>Figure 2.5</b> : Complaisance de traction en fonction du temps à 80°C avec des échantillons séchés	67
<b>Figure 2.6</b> : Spectromètre	69
<b>Figure 2.7</b> : Schéma détaillé du spectromètre	69
<b>Figure 2.8</b> : Géométrie et dimensions des échantillons de spectrométrie	70
<b>Figure 2.9</b> : Evolution de la complaisance de conservation sur une plage de fréquence fixe à différentes températures allant de (♦) 0°C à (-) 130°C	71
<b>Figure 2.10</b> : Courbe maîtresse déduite des mesures isothermes de spectrométrie mécanique à une température de référence de 0°C et à sec, (a) complaisance de conservation et (b) complaisance de perte	72
<b>Figure 2.11</b> : Courbes maîtresse en fonction de la température pour plusieurs fréquences de référence allant de $10^{-3}$ Hz à 1 Hz	72

**Figure 2.12** : Distribution des coefficients de translation thermique à une température de référence de 0°C (à sec) 73

**Figure 2.13** : Courbes maîtresse déduites des mesures isothermes de spectrométrie mécanique à une température de référence de 0°C : (□) 0% d'humidité, (●) 30% d'humidité, (△) 40% d'humidité et (◆) 60% d'humidité 74

**Figure 2.14** : Discrétisation de la courbe maîtresse expérimentale 75

**Figure 2.15** : Complaisances de conservation obtenues par modélisation : (±) température de référence de 0°C et (≠) température de 30°C 77

**Figure 2.16** : Distribution des temps de relaxation : (□) à sec et à une température de référence de 0°C et (▲) à sec et à une température de 80°C 77

**Figure 2.17** : Courbes maîtresses déduites des mesures isothermes de spectrométrie mécanique à une température de référence de 0°C : (□) 0% d'humidité, (●) 30% d'humidité, (△) 40% d'humidité, (◆) 60% d'humidité et (-) modélisation à une température de référence de 0°C et à 60% d'humidité relative 78

**Figure 2.18** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$  et à 800 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec 81

**Figure 2.19** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{10}$  et à 400 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec 81

**Figure 2.20** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$  et à 800 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec 82

**Figure 2.21** : Ratio de la déformation de la dent à  $t_{final}$  pour chaque tour de la roue par la déformation de la dent à  $t_{load} = \frac{t_{final}}{2}$  et à 400 tours/min, 0°C (■), 25°C (◇), 65°C (△), 80°C (▲) et 120°C (□) à sec 82

**Figure 3.1** : Processus de calcul de la répartition des charges 86

**Figure 3.2** : Maillage et lignes de contact sur une dent d'un engrenage cylindrique droit en acier 88

**Figure 3.3** : Schéma de représentation de l'engrènement 88

<b>Figure 3.4</b> : Schéma du maillage étendu sur une dent en polyamide 6,6	89
<b>Figure 3.5</b> : Définition de la méthode utilisée pour placer la ligne de contact	89
<b>Figure 3.6</b> : Schéma de représentation du partage des charges	90
<b>Figure 3.7</b> : Chargement de 1 N appliqué et déplacements des nœuds	95
<b>Figure 3.8</b> : (a) Calcul E.F libre et (b) Calcul E.F bloqué [66]	96
<b>Figure 3.9</b> : Numérotation des dents pour la création de l'historique du déplacement	99
<b>Figure 3.10</b> : Algorithme de résolution de la répartition des charges	101
<b>Figure 3.11</b> : Algorithme de résolution du partage des charges modifié	106
<b>Figure 3.12</b> : Élément « tétraèdre » à 10 nœuds	107
<b>Figure 4.1</b> : Interface utilisateur du logiciel PRINCE POLYMERE	110
<b>Figure 4.2</b> : Fichier Excel utilisé pour paramétrer le logiciel PRINCE POLYMERE	111
<b>Figure 4.3</b> : Simulation du profil du pignon	112
<b>Figure 4.4</b> : Erreur cinématique à vide avec aucune déviation et aucune inclinaison	113
<b>Figure 4.5</b> : Erreur cinématique à vide avec une déviation de $0,05^\circ$ et une inclinaison de $0,03^\circ$	114
<b>Figure 4.6</b> : Simulation du partage des charges	115
<b>Figure 4.7</b> : Simulation de l'erreur de transmission	115
<b>Figure 4.8</b> : Simulation de la raideur d'engrènement	116
<b>Figure 4.9</b> : Numérotation des dents	116
<b>Figure 4.10</b> : Position des lignes de contact et distribution des pressions de surface, (a) début d'engrènement, (b) milieu d'engrènement et (c) fin d'engrènement	118
<b>Figure 4.11</b> : Géométrie maillée et conditions limites	118
<b>Figure 4.12</b> : Hypothèse de simplification ISO [88]	119
<b>Figure 4.13</b> : dent d'engrenage chargée	120

<b>Figure 4.14</b> : Simulation du partage des charges	122
<b>Figure 4.17</b> : Machine EHD	128
<b>Figure 4.18</b> : (a) disque et (b) tonneau	128
<b>Figure 4.19</b> : Contact entre le disque et le tonneau	129
<b>Figure 4.20</b> : Mesure du coefficient de frottement : (□) sec, (◇) humidité ambiante et (▲) 50% d'humidité	130
<b>Figure 4.21</b> : Banc expérimental pour engrenages en Polyamide 6,6 développé par le LaMCoS	131
<b>Figure 4.22</b> : Schéma en perspective du banc expérimental pour engrenages polymères. 1 : Moteur, 2 : Courroie, 3 : Arbre de rotation du pignon, 4 : Engrenages d'essai, 5 : Arbre de rotation de la roue, 6 : Paliers, 7 : Couplemètre, 8 : Frein à poudre, 9 : Caméra infrarouge, 10 : Codeurs optiques	132
<b>Figure 4.23</b> : Vue de dessus du banc expérimental engrenages polymères	132
<b>Figure 4.24</b> : Schéma du dispositif de transmission du rayonnement thermique	135
<b>Figure 4.25</b> : Photo du dispositif de transmission du rayonnement thermique	135
<b>Figure 4.26</b> : Détail de la zone filmée par la caméra infrarouge	135
<b>Figure 4.27</b> : Photo d'un morceau de Polyamide 6,6 dont la demi-surface a été peinte en noir mat	137
<b>Figure 4.28</b> : Mesures thermiques prises au bout de 10 heures d'essai à 300 tours/min et 600 tours/min et à différents chargements : 0 N.m, 5 N.m et 10 N.m	138
<b>Figure 4.29</b> : Evolution de la température des points mesurés à 300 tours/min sous trois chargements (a) 0 N.m, (b) 5 N.m et (c) 10 N.m. Avec (◆) point 1, (□) point 2, (△) point 3, (×) point 4, (*) point 5, (○) point 6 et (+) point 7	139
<b>Figure 4.30</b> : Evolution de la température des points mesurés à 600 tours/min sous trois chargements (a) 0 N.m, (b) 5 N.m et (c) 10 N.m. Avec (◆) point 1, (□) point 2, (△) point 3, (×) point 4, (*) point 5, (○) point 6 et (+) point 7	140
<b>Figure 4.31</b> : Schéma du placement des points de mesure sur le profil du pignon et de la roue	141

<b>Figure 4.32</b> : Mesures thermiques prises au bout de 40 minutes d'essai à 600 tour/min, 10 N.m et sans jeu	142
<b>Figure 4.33</b> : Evolution de la température des points mesurés à 600 tours/min à 10 N.m et sans jeu : (◆) point 1, (□) point 2, (△) point 3, (×) point 4, (*) point 5, (○) point 6 et (+) point 7	143
<b>Figure 4.34</b> : Loi d'évolution des positions de la roue et du pignon en fonction du temps [66]	145
<b>Figure 4.35</b> : Acquisition angulaire	146
<b>Figure 4.36</b> : Photo du matériel d'acquisition	147
<b>Figure 4.37</b> : Décentrage de la roue	147
<b>Figure 4.38</b> : Reconstruction de l'erreur de transmission sur un tour complet de la roue	148
<b>Figure 4.39</b> : Echantillonnage des 41 erreurs de transmission	148
<b>Figure 4.40</b> : Erreur de transmission moyennée	148
<b>Figure 4.41</b> : Définition de l'inclinaison ( $R_x$ )	150
<b>Figure 4.42</b> : Définition de la déviation ( $R_y$ )	150
<b>Figure 4.43</b> : Numérotation des dents	151
<b>Figure 4.44</b> : Partages des charges simulés, 300 tours/min et 10 N.m	151
<b>Figure 4.45</b> : Partages des charges simulés, 300 tours/min et 15 N.m	151
<b>Figure 4.46</b> : Partages des charges simulés, 400 tours/min et 10 N.m	152
<b>Figure 4.47</b> : Partages des charges simulés, 400 tours/min et 15 N.m	152
<b>Figure 4.48</b> : Erreurs de transmission simulées, 300 tour/min et 10 N.m, (◇) sans déviation et sans inclinaison, (▲) avec une déviation de $0,05^\circ$ et une inclinaison de $0,03^\circ$ et (△) avec une déviation de $0,015^\circ$ et une inclinaison de $0,005^\circ$	153
<b>Figure 4.49</b> : Erreurs de transmission simulées, 300 tour/min et 15 N.m, (▲) avec une déviation de $0,05^\circ$ et une inclinaison de $0,03^\circ$ et (△) avec une déviation de $0,015^\circ$ et une inclinaison de $0,005^\circ$	153

**Figure 4.50** : Erreurs de transmission simulées, 400 tour/min et 10 N.m, (▲) avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° et (△) avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005° 154

**Figure 4.51** : Erreurs de transmission simulées, 400 tour/min et 15 N.m, (▲) avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° et (△) avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005° 154

**Figure 4.52** : Déplacement de la dent centrale à 300 tours/min et 10 N.m, avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° 155

**Figure 4.53** : Erreur de transmission mesurée (△), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° (▲), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005° (■) et erreur de transmission simulée sans déviation et sans inclinaison (◆) à 300 tours/min et 10 N.m 156

**Figure 4.54** : Erreur de transmission mesurée (□), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° (▲) et erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005° (■) à 300 tours/min et 15 N.m 156

**Figure 4.55** : Erreur de transmission mesurée (◇), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° (▲) et erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005° (■) à 400 tours/min et 10 N.m 157

**Figure 4.56** : Erreur de transmission mesurée (○), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05° et une inclinaison de 0,03° (▲) et erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,015° et une inclinaison de 0,005° (■) à 400 tours/min et 15 N.m 157

**Figure 4.57** : Erreur de transmission mesurée (◇), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05°, une inclinaison de 0,03°, entraxe 109,7 (▲) et erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05°, une inclinaison de 0,03°, entraxe 109,5 (■) à 300 tours/min et 10 N.m 158

**Figure 4.58** : Erreur de transmission mesurée (◇), erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05°, une inclinaison de 0,03°, entraxe 109,7 (▲) et erreur de transmission simulée avec une déviation de 0,05°, une inclinaison de 0,03°, entraxe 109,5 (■) à 400 tours/min et 10 N.m 158

**Figure A2.1** : Courbe Cole-Cole  $J'' = f(J')$  obtenue par (□) modélisation et par (■) expérience 169

---

# Liste des tableaux

<i>Tableau 2.1 : Dimensions de l'engrenage</i>	80
<i>Tableau 4.1 : Données de l'engrenage</i>	112
<i>Tableau 4.2 : Simulations des contraintes en pied de dent</i>	119
<i>Tableau 4.3 : Modules élastiques utilisés par la méthode VDI 2545 et dans le modèle de partage des charges</i>	121
<i>Tableau 4.4 : Résultats obtenus par la méthode VDI 2545 pour une vitesse de rotation quelconque</i>	123
<i>Tableau 4.5 : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à sec</i>	123
<i>Tableau 4.6 : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à 40% d'humidité relative</i>	123
<i>Tableau 4.7 : Déplacements obtenus par la méthode VDI 2545 à différentes températures</i>	125
<i>Tableau 4.8 : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à sec</i>	126
<i>Tableau 4.9 : Résultats obtenus par le modèle de partage des charges à 40% d'humidité relative</i>	126
<i>Tableau 4.10 : Propriétés thermiques du Polyamide 6,6 [26], et [58]</i>	134
<i>Tableau 4.11 : Liste des essais thermiques</i>	136
<i>Tableau 4.12 : Résultats obtenus par la mesure thermique</i>	137
<i>Tableau 4.13 : Emplacements des points de mesure</i>	140
<i>Tableau 4.14 : Résultats obtenus</i>	142
<i>Tableau 4.15 : Température au contact mesurée et estimée</i>	144
<i>Tableau 4.16 : Liste des essais d'erreur de transmission sous charge</i>	149
<i>Tableau 4.17 : Déviation et inclinaison mesurées</i>	149

*Tableau 4.18 : Moyennes et amplitudes des erreurs de transmission simulées*

155

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES  
DE LYON

NOM : LETZELTER Eric	DATE de SOUTENANCE : 10 février 2011
Prénoms : Eric	
TITRE : Modélisation du comportement mécanique des engrenages en polymère	
NATURE : Doctorat Ecole doctorale : MEGA (mécanique, énergétique, génie civil et acoustique)	Numéro d'ordre :
Spécialité : Mécanique	
Code B.I.U. – Lyon : // / et bis	CLASSE :
RESUME : Les engrenages en matériau polymère sont de plus en plus utilisés dans des domaines variés, notamment dans des applications automobiles, où il est courant de trouver des engrènements polymère / métal ou polymère / polymère. Pour bon nombre d'applications, les polymères choisis pour réaliser des engrenages moulés ou taillés sont des semi-cristallins de type polyamides (nylon). Néanmoins, leur caractère viscoélastique introduit une difficulté supplémentaire dans la modélisation. En effet, le comportement viscoélastique des polymères dépend de la température et de la vitesse de rotation. Pour les Polyamides, il dépend également de l'humidité. Par conséquent, la viscoélasticité peut influencer la répartition des charges, l'erreur de transmission sous charge, la raideur d'engrènement... Dans cette thèse, une méthode numérique originale modélisant le comportement mécanique des engrenages en Polyamide 6,6 est proposée. L'approche développée utilise le modèle rhéologique linéaire de Kelvin généralisé pour simuler le comportement viscoélastique du matériau et prendre en compte la température, la vitesse de rotation et l'humidité. Ensuite ce modèle rhéologique est intégré dans le modèle quasi-statique du partage des charges développé par le LaMCoS. Ce processus de calcul permet d'obtenir les résultats essentiels pour les engrenages (répartition des charges, pressions de contact, erreur de transmission sous charge, raideur d'engrènement) avec un temps de calcul assez court. Enfin, un banc expérimental avec des engrenages en Polyamide 6,6 est développé et fabriqué dans le cadre de cette thèse. Il permet d'obtenir deux résultats : la température de l'engrenage pendant son fonctionnement et l'erreur de transmission sous charge. Cette dernière permet de valider le modèle quasi-statique du partage des charges.	
MOTS CLES : <u>Engrenages, Polyamide 6,6, viscoélasticité, partage des charges</u>	
Laboratoire(s) de recherches : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) UMR CNRS-INSA n°5259	
Directeur de thèse : Maître de conférences HDR Michèle GUINGAND et Maître de conférences Jean-Pierre de VAUJANY	
Président du jury : Composition du jury : BIGOT Régis, CHATEAUMINOIS Antoine, CHAZEAU Laurent, GAUTHIER Catherine, GUINGAND Michèle, REMOND Yves, SARTOR Marc, de VAUJANY Jean-Pierre	