

THÈSE

STRATEGIE MULTIGRILLE ET RAFFINEMENT AUTOMATIQUE A PRECISION CONTROLEE POUR LA DYNAMIQUE TRANSITOIRE NON-LINEAIRE

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Ewen BIOTTEAU

Agrégé de mécanique

Thèse soutenue le 29 septembre 2010 devant la Commission d'examen

Jury

LEBON FRÉDÉRIC	Professeur	Président
PONTHOT JEAN-PHILIPPE	Professeur	Rapporteur
VILLON PIERRE	Professeur	Rapporteur
BOUCARD PIERRE-ALAIN	Professeur	Examineur
CARTRAUD PATRICE	Professeur	Examineur
TIE BING	Chargé de Recherche	Examineur
LUBRECHT TON	Professeur	Directeur de thèse
GRAVOUIL ANTHONY	Professeur	Directeur de thèse

Invités

COMBESCURE ALAIN	Professeur	Directeur de thèse
------------------	------------	--------------------

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	<u>CHIMIE DE LYON</u> Responsable : M. Denis SINOU	M. Denis SINOU Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2 ^{ème} étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 sinou@univ-lyon1.fr
E2MC	<u>ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS</u> Responsable : M. Alain BONNAFOUS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH M. Alain BONNAFOUS Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Alain.bonnafous@ish-lyon.cnrs.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 Daniel.Barbier@insa-lyon.fr
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u> http://www.insa-lyon.fr/ediis M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 ediis@insa-lyon.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> http://www.ibcp.fr/ediss M. Alain Jean COZZONE	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 cozzone@ibcp.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> http://www.ec-lyon.fr/sites/edml M. Jacques JOSEPH	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 Jacques.Joseph@ec-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u> http://www.ens-lyon.fr/MathIS M. Franck WAGNER	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHÉMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1 ^{er} étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 wagner@desargues.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html M. François SIDOROFF	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systèmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr

Remerciements

A l'heure du bilan de trois années passées au sein du LaMCoS, je dédirais cette première page à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation et à l'achèvement de cette thèse.

Je commencerais par exprimer toute ma gratitude à mon jury de thèse pour avoir accepté de juger mon travail. Je remercie plus particulièrement Jean Philippe P. et Pierre V. pour avoir rapporté mes travaux ainsi que Frédéric L. pour avoir accepté de présider ce jury.

Merci également à mes directeurs de thèse, les 3A, pour la confiance qu'ils m'ont accordé et les échanges enrichissants, tant scientifiques que philosophiques, que nous avons pu partager. Je les remercie pour la motivation et l'ouverture d'esprit qu'ils m'ont permis d'acquérir en travaillant à leurs cotés.

D'un point de vue personnel, je tiens à remercier mes collègues de bureau : Lamyaa et Pierre, pour les 3 années que nous avons partagé au LaMCoS, mais aussi Guiseppe, Hugo, Mathieu, Nans et Thomas pour les moments un peu plus courts où ils ont dû me supporter. Au sein du laboratoire, je ne pourrais oublier Phiphi, Alain, Vincent, Vince et Benji pour les nombreuses parties de coïncidences endiablées partagées à midi.

Je n'oublierais pas les autres intervenants du LaMCoS qui, à plus ou moins grande échelle, ont contribué à l'ambiance de bien-être que j'ai éprouvé au sein du laboratoire. Aux personnes qui ont su partager un café ou un journal de manière conviviale, merci.

D'un point de vue plus professionnel, je remercie Marie-Christine B. pour m'avoir accordé une place sur son cluster de calcul, ainsi que David D. pour m'avoir aidé à implanter les opérateurs de transfert sur les machines 64bits. De nombreux exemples numériques n'auraient pu être simulés sans leur soutien et leur intervention.

Du reste, un grand merci à toutes les personnes qui m'ont supporté dans la vie quotidienne en dehors du laboratoire. La liste serait trop longue à établir, aussi me contenterais-je de les assurer que sans eux, ces travaux et moi-même n'aurions sûrement pas connu le même aboutissement.

Enfin, je dédie ce dernier paragraphe à mes parents pour leur soutien au long de toutes ces années, pour avoir toujours cru en moi et m'avoir poussé à faire de même malgré les obstacles que l'orientation entendait mettre en travers de mon cursus.

Mes dernières pensées iront à Katia, ma femme, pour son soutien de tous les instants.

*“J’adore parler de rien
c’est le seul domaine où
j’ai de vagues connaissances.”*

Oscar Wilde

Résumé

Le recours aux simulations numériques prend une part de plus en plus importante dans le développement de produits industriels. De nouveaux modèles faisant intervenir des comportements de plus en plus sophistiqués ont été développés au cours de ces dernières années afin de calculer le plus fidèlement possible la réponse des structures en dynamique non-linéaire.

D'un point de vue numérique, l'utilisation de ces modèles fait intervenir de nouvelles variables et nécessite l'emploi de solveurs non-linéaires itératifs. Afin d'assurer la précision du calcul réalisé, la solution est couramment construite sur des maillages faisant intervenir de nombreux degrés de liberté tant en espace qu'en temps. De telles simulations conduisent alors rapidement à des temps de calcul prohibitifs.

La méthode présentée dans ce mémoire est développée afin de permettre l'aboutissement de telles simulations en des temps de calcul acceptables. Au moyen d'indicateurs d'erreur, les zones où la discrétisation spatiale est insuffisante sont déterminées. En raffinant localement le maillage, la solution est calculée de manière plus précise jusqu'à atteindre la précision requise par l'utilisateur. La résolution du problème s'appuie sur une stratégie multigrille non-linéaire localisée et fait intervenir des maillages hiérarchiques de raffinement différents.

La stratégie ainsi construite est indépendante de l'utilisateur. Celui-ci n'intervient que pour définir le modèle de calcul et la précision requise. Le maillage spatial est construit à chaque instant de manière automatique et permet de concentrer l'effort de calcul dans les zones les plus sollicitées.

MOTS CLÉS: dynamique non-linéaire, plasticité, méthode des éléments finis, méthodes multigrilles, adaptation de maillage, raffinement de maillage

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
0.1 Motivations	1
0.2 Problématiques	4
0.3 Objectifs	5
0.4 Aperçu de la thèse	6
1 Positionnement de la recherche	7
1.1 Problème de référence continu	8
1.1.1 Cinématique du mouvement	9
1.1.2 Relation d'équilibre	10
1.1.3 Relation de comportement	12
1.1.4 Conditions limites et conditions initiales	13
1.1.5 Bilan	13
1.2 Modélisation des phénomènes non linéaires	14
1.2.1 Non linéarités géométriques	15
1.2.2 Non linéarités de comportement	16
1.2.3 Non linéarités d'interface	18
1.3 Discrétisation du problème	19
1.3.1 Discrétisation en espace - Méthode des éléments finis	20
1.3.2 Discrétisation en temps - Schéma d'intégration numérique	22
1.3.3 Système d'équations discrétisé final	25
1.4 Synthèse	26
2 Calcul numérique en dynamique non-linéaire des structures	29
2.1 Estimation de l'erreur	30
2.1.1 Origine des erreurs	30
2.1.2 Erreur de discrétisation en espace	31
2.1.3 Erreur de discrétisation en temps	35

2.2	Maîtrise de la précision	37
2.2.1	Maîtrise de la précision en espace	37
2.2.2	Maîtrise de la précision en temps	40
2.2.3	Maîtrise de la précision espace-temps	41
2.3	Opérateurs de changement d'échelle	44
2.3.1	Transfert des quantités interpolantes	45
2.3.2	Transfert des quantités non interpolées	47
2.4	Stratégies itératives de résolution non-linéaire	49
2.4.1	Solveur de Newton	49
2.4.2	Gradient conjugué non-linéaire	52
2.5	Stratégies multigrilles	53
2.5.1	Principe	54
2.5.2	Schémas multigrilles en non-linéaire	57
2.6	Synthèse	61
3	Stratégie de raffinement automatique	63
3.1	Principe	64
3.1.1	Mesure de l'erreur	64
3.1.2	Sous découpage spatial	68
3.1.3	Gestion des conditions limites	70
3.1.4	Principe de raffinement de maillage	70
3.2	Mise en oeuvre	75
3.2.1	Stratégie Full MultiGrid	75
3.2.2	Stratégie multigrilles non-linéaire localisée	77
3.2.3	Gestion des phénomènes irréversibles	79
3.2.4	Alternatives multigrilles	82
3.2.5	Influence des phases d'interpolation	85
3.2.6	Transfert entre piquets de temps	87
3.3	Implémentation numérique	90
3.3.1	Structure de données	90
3.3.2	Algorithme de résolution	94
3.4	Synthèse	94
4	Illustrations numériques	97
4.1	Cas test	98
4.1.1	Analyse uni-dimensionnelle	98
4.1.2	Analyses bi-dimensionnelles	99
4.1.3	Analyses tri-dimensionnelles	100
4.2	Comportement des indicateurs d'erreur	101
4.2.1	Ordre de convergence	101
4.2.2	Indicateurs dédiés à la dynamique transitoire non-linéaire	105
4.2.3	Influence du pas de temps	105
4.3	Comportement de la stratégie de raffinement	108

4.3.1	Adaptation du maillage	108
4.3.2	Influence des paramètres d'entrée du modèle	110
4.3.3	Bilan énergétique	116
4.4	Efficacité de la méthode	117
4.4.1	Vitesse de convergence	118
4.4.2	Gain d'éléments	119
4.4.3	Temps de calcul	121
4.4.4	Evolution temporelle du raffinement de maillage	122
4.5	Synthèse	130
	Conclusions et perspectives	131
	Annexe A	135
	Annexe B	139
	Bibliographie	151

Table des figures

1	Maillage élément fini d'un avion (source : Dassault Aviation)	2
2	Evolution de la puissance de calcul	3
3	Gestion espace-temps des données	4
1.1	Problème de référence continu	8
1.2	Description de la configuration du système à l'instant t	9
1.3	Exemple de non-linéarité géométrique	15
1.4	Exemple de non-linéarité de comportement	16
1.5	Définition du domaine d'élasticité en fonction des deux variables internes	18
1.6	Exemple de non-linéarité d'interface	19
1.7	Discrétisation d'une structure	20
1.8	Discrétisation du temps	22
2.1	Synthèse des sources d'erreur introduites dans la modélisation	30
2.2	Illustration des méthodes de décomposition de domaine	38
2.3	Adaptation de maillage, cas bi-dimensionnel	39
2.4	Construction d'un maillage espace-temps	42
2.5	Element espace-temps	43
2.6	Conditions limites espace-temps	43
2.7	Opérateurs de changement d'échelle	44
2.8	Exemple de transfert de champs - Perte d'informations haute fréquence .	46
2.9	Transfert des quantités aux points de Gauss	48
2.10	Algorithme de Newton	51
2.11	Algorithme du gradient conjugué	54
2.12	Exemple de grilles éléments finis hiérarchiques	55
2.13	Illustration des propriétés de lissage	56
2.14	Représentation graphique d'un V-cycle à quatre niveaux	57
2.15	Représentation graphique d'un W-cycle	59
3.1	Raffinement hiérarchique uni-dimensionnel	68
3.2	Raffinement hiérarchique bi-dimensionnel	69
3.3	Raffinement hiérarchique tri-dimensionnel	69
3.4	Calcul des solutions sur les maillages de niveau 1 et 2	71
3.5	Principe de construction des maillages \mathcal{M}_+^2 et \mathcal{M}_*^2	72

3.6	Construction du niveau 3	72
3.7	Schéma de principe de la stratégie multigrilles	74
3.8	Construction du maillage final à chaque instant	75
3.9	Diagramme de fonctionnement d'une stratégie FMG	76
3.10	Diagramme de fonctionnement de la stratégie NL-L-FMG	81
3.11	Première alternative à notre stratégie	83
3.12	Seconde alternative à notre stratégie	83
3.13	Modèles d'homogénéisation élémentaire de 4 cellules	84
3.14	Solution sur le niveau 1	86
3.15	Illustration de la phase de transfert entre pas de temps	88
3.16	Héritage des propriétés entre les bords des éléments	93
3.17	Structure générale de l'algorithme de raffinement automatique	95
4.1	Modèles utilisés pour le calcul	98
4.2	Modèle unidimensionnel	99
4.3	Premier modèle bi-dimensionnel	99
4.4	Second modèle bi-dimensionnel	100
4.5	Premier modèle tri-idimensionnel	100
4.6	Second modèle tri-idimensionnel	101
4.7	Evolution du maximum de l'erreur - Cas régulier	102
4.8	Evolution du maximum de l'erreur - Cas singulier	104
4.9	Diagrammes espace temps de la cartographie de l'erreur	106
4.10	Influence du temps sur le raffinement 1D	107
4.11	Diagrammes espace temps - raffinement unidimensionnel	109
4.12	Raffinement de maillage selon l'indicateur d'erreur considéré	110
4.13	Raffinement utilisant conjointement deux indicateurs d'erreur	111
4.14	Maillages initiaux de la plaque trouée	112
4.15	Maillages finaux de la plaque trouée - indicateur en énergie	113
4.16	Maillages finaux en fonction de la précision	115
4.17	Quantités utilisées dans le bilan énergétique du schéma de Newmark	117
4.18	Bilan énergétique du schéma de Newmark	118
4.19	Norme du résidu selon la stratégie itérative utilisée	119
4.20	Temps de calcul adimensionné	122
4.21	Nombre d'éléments et niveau maximum atteint à chaque itération	123
4.22	Maillages tridimensionnels successifs (1/5)	124
4.23	Maillages tridimensionnels successifs (2/5)	125
4.24	Maillages tridimensionnels successifs (3/5)	126
4.25	Maillages tridimensionnels successifs (4/5)	127
4.26	Maillages tridimensionnels successifs (5/5)	128
4.27	Présentation des différents maillage \mathcal{M}_*^k à l'itération 36	129
4.1	Interprétation graphique du retour radial	137

Liste des tableaux

1.1	Formulation du problème de référence continu	14
1.2	Récapitulatif des schémas de Newmark	24
3.1	Différents type d'indicateurs d'erreur	67
3.2	Algorithme Full MultiGrid	76
3.3	Structure des données	91
3.4	Creation du maillage de niveau 0	92
3.5	Correction des bords de niveau k	93
4.1	Précision requise en fonction de l'indicateur d'erreur - Cas régulier	102
4.2	Précision requise en fonction de l'indicateur d'erreur - Cas régulier	104
4.3	Erreur obtenue selon le maillage initial	114
4.4	Corrélation entre la précision requise et l'erreur maximum	116
4.5	Gain d'éléments pour l'exemple unidimensionnel	120
4.6	Gain d'éléments pour l'exemple bidimensionnel	120
4.7	Gain d'éléments pour l'exemple tridimensionnel	121

Introduction

0.1 Motivations

De nos jours, le développement de produits industriels nécessite des campagnes d'essais complexes permettant d'assurer la fiabilité et la robustesse des structures conçues. Toutefois, leur coût peut parfois être très important, comme par exemple pour l'étude des problèmes de crash qui conduisent à la ruine du prototype. De plus il est parfois difficile de mettre en oeuvre des moyens permettant la mesure d'informations locales précises.

Aussi, la *modélisation des structures* dans le processus de conception prend-elle une part grandissante afin de compléter ces campagnes d'essais et permettre la prédiction du comportement des structures sous sollicitations extrêmes. Ces modélisations permettent d'optimiser les prototypes en amont des phases d'essais mais également de quantifier, a posteriori des essais, les phénomènes difficilement observables expérimentalement.

Néanmoins, cette confiance grandissante à l'égard de la modélisation n'est possible que grâce à la construction de modèles de plus en plus sophistiqués. Afin d'augmenter la *fiabilité des résultats* obtenus par de tels modèles, l'exigence à leur égard a considérablement augmenté.

La *première conséquence* est que ces modèles se sont fortement complexifiés. La modélisation des phénomènes non-linéaires et la prise en compte des phénomènes transitoires sont devenues essentielles afin de déterminer de manière réaliste la réponse des structures à des sollicitations données.

La *seconde conséquence* est qu'il est devenu nécessaire d'assurer la qualité du résultat calculé. Etant donné qu'un modèle n'est bien sûr qu'une représentation limitée de la réalité, il est nécessaire de maîtriser toutes les sources d'erreur et de vérifier la précision de la solution au cours du calcul.

La modélisation est en général effectuée dans la théorie des milieux continus et aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles. En dynamique non-linéaire, il n'est malheureusement pas possible, en général, d'obtenir la solution analytique du problème de référence continu. Aussi, afin d'obtenir une estimation de cette solution exacte, on recourt couramment à des simulations numériques s'appuyant sur une discrétisation spatiale et temporelle du problème de référence.

Depuis les années 1970, la *méthode des éléments finis* (cf. figure 1) a été largement utilisée en mécanique non-linéaire des structures pour discrétiser l'espace. Sa robustesse

et ses facilités d'implémentation en font un outil indispensable pour traiter une grande variété de problèmes. La discrétisation temporelle, dédiée à la modélisation des phénomènes de dynamique rapide, se traduit par une approche incrémentale pour intégrer sur le temps les équations différentielles relatives au système discrétisé par éléments finis. Bien que des schémas plus performants aient été développés ces dernières années, le *schéma de Newmark* [NEW 59] reste très utilisé.

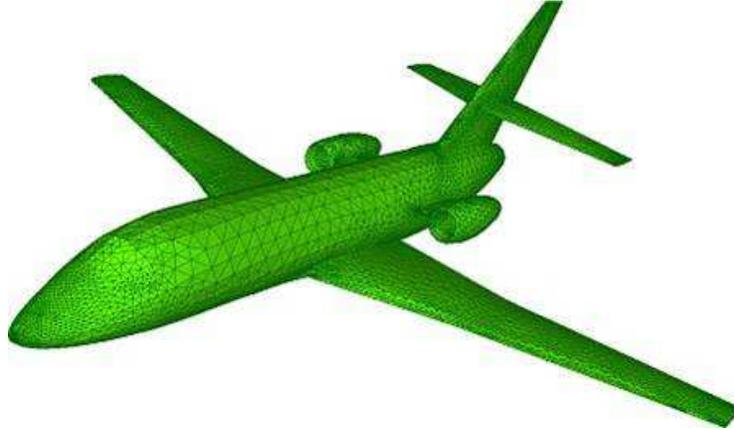


FIG. 1: Maillage élément fini d'un avion (source : Dassault Aviation)

Aux *erreurs de modélisation* viennent donc s'ajouter des *erreurs de discrétisation*. Or il est difficile de déterminer, a priori, les discrétisations spatiale et temporelle adéquates permettant d'assurer la précision de la solution de ces problèmes discrétisés. Bien sûr, l'utilisation d'un maillage fin en espace et en temps permet de s'approcher de la solution du problème continu. Néanmoins, la finesse de la discrétisation est limitée par les capacités informatiques et l'utilisation de maillages trop fins se fait au détriment du temps CPU et de l'allocation mémoire. D'autre part, des calculs sur des maillages trop grossiers, inadaptés, peuvent mener au développement de structures inappropriées tant la solution est perturbée par l'erreur de discrétisation.

Qui plus est il est indispensable de s'assurer de la répétabilité des résultats en fonction d'une variation des paramètres d'entrée du modèle. En effet, en non-linéaire, ces paramètres sont parfois méconnus et une faible perturbation de ceux-ci peut avoir d'importantes conséquences sur la solution obtenue en fin de simulation. Il est donc parfois nécessaire d'effectuer un nombre important de calculs ce qui interdit l'utilisation de modèles trop coûteux en terme de temps CPU.

Aussi, malgré la croissance exponentielle des moyens de calculs (cf. figure 2), qui double tous les deux ans suivant les conjectures réévaluées de Moore [MOO 98], les capacités informatiques restent aujourd'hui insuffisantes pour supporter la charge croissante due à de telles modélisations. Le développement de nouvelles stratégies de calcul est donc un axe de recherche important en dynamique non-linéaire des structures, tant au niveau de l'adaptation de maillage que dans le développement de nouveaux solveurs performants.

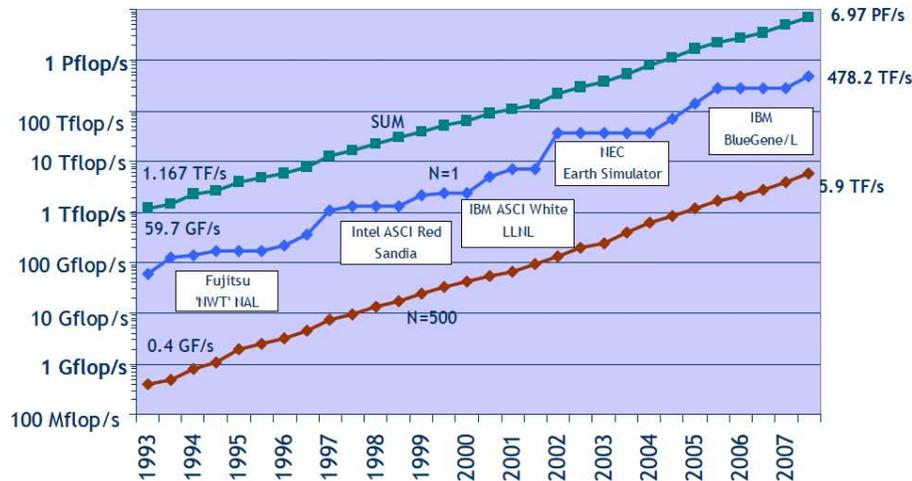


FIG. 2: Evolution de la puissance de calcul [MEU 08]. En rouge : performance au rang 500, en bleu : performance au rang 1, en vert : performance cumulée des 500 premiers calculateurs

En dynamique non-linéaire, il est possible d'adapter l'échelle significative de discrétisation en espace et en temps, inconnue a priori, en fonction des phénomènes physiques localisés observés. Si on s'intéresse, par exemple, au crash d'un avion, les phénomènes observés à l'avant et à l'arrière de celui-ci ne doivent pas être calculés avec la même échelle. En effet, l'échelle de temps représentative de l'impact sur le nez (hautes fréquences) est très inférieure à celle des vibrations qui en résultent en queue (basses fréquences). De même, si le nez subit des déformations spatiales importantes, la queue de l'avion est très peu sollicitée.

Aussi, le développement de stratégies adaptées au caractère multi-échelle de ces simulations a connu un essor important ces dernières années. Les chercheurs se sont intéressés à des outils de calcul permettant de prendre en compte les spécificités d'échelle, en espace et en temps, de manière à coupler des discrétisations précises (pour les détails géométriques, les singularités, ...) à des discrétisations grossières (zones peu sollicitées dynamiquement, ...).

L'idée la plus naturelle est d'utiliser des méthodes dites d'adaptation de maillage. Les premières approches proposées dans ce domaine ont été développées afin de traiter l'adaptativité en espace [BAB 78] [LAD 01] [ZIE 87]. L'erreur de discrétisation spatiale est évaluée sur un premier calcul grossier et le résultat est exploité afin de déterminer les paramètres de discrétisation spatiale (degré des fonctions de forme, nombre de degrés de liberté) qui permettraient de minimiser cette erreur. Ces méthodes sont à la base de nombreux travaux mais ne traitent pas en général l'adaptativité en temps. D'autres démarches ont été proposées pour l'évaluation de l'erreur temporelle [NOE 02] [LAD 03].

Une autre idée consiste à utiliser des méthodes dites de décomposition de domaine. Celles-ci permettent d'adopter des discrétisations tant spatiales que temporelles différentes suivant le sous-domaine considéré [FAR 91] [PRA 04] [MAH 09]. Elles sont efficaces et naturellement parallélisables, mais obligent l'utilisateur à définir les différents

domaines en entrée du calcul.

Enfin, une autre série de travaux propose de développer des méthodes locales tant en espace qu'en temps. L'adaptation locale des discrétisations spatiales et temporelles est présentée dans [CAS 09], [THI 09] en utilisant une formulation de Galerkin discontinue. Les travaux de Cavin [CAV 05b] permettent de mettre en place l'adaptabilité en espace et en temps tout en conservant une formulation classique du problème. Pour finir, une stratégie multiéchelle d'homogénéisation en espace et en temps est présentée dans [LAD 09]. L'ensemble de ces méthodes permet de réduire de manière significative le temps de calcul nécessaire à la modélisation des phénomènes dynamiques.

0.2 Problématiques

Nous sommes donc confrontés à la problématique suivante : les champs calculés seront précis si la discrétisation est fine et présente un nombre de degrés de liberté en espace et en temps important, mais la simulation sera trop coûteuse en terme de temps CPU et d'occupation mémoire. Comment définir le maillage spatio-temporel idéal permettant d'assurer une précision donnée de la solution ? Comment définir de manière automatique les zones où le maillage spatio-temporel doit être fin et celles où il doit être grossier ?

Dans sa thèse, Pauline Cavin [CAV 06] donne des premiers éléments de réponse dans le cas de la dynamique transitoire linéaire. L'originalité de l'approche qui sert de base à ses travaux consiste à utiliser des méthodes éprouvées en espace et en temps (méthode des éléments finis, schéma de Newmark) disponibles dans la majorité des codes de calcul EF. Le point clé de la stratégie repose sur une gestion des données espace-temps (cf. figure 3) : les dimensions spatiales et temporelles sont traitées conjointement et les raffinements de maillage en espace et en temps ont lieu simultanément sur le domaine espace-temps complet de simulation. L'erreur de discrétisation en espace et en temps est évaluée en utilisant des indicateurs d'erreur éventuellement espace-temps. En adoptant des conditions limites adéquates, Cavin montre que la stratégie présentée dans son mémoire est stable et ne dissipe pas d'énergie aux interfaces espace-temps des zones raffinées [CAV 05b].

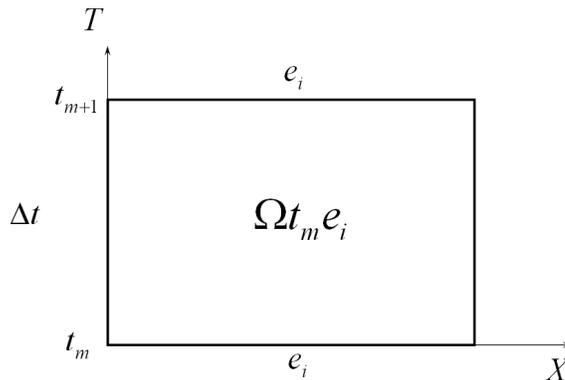


FIG. 3: Gestion espace-temps : Représentation de l'élément espace temps $\Omega t_m e_i$ relatif à l'élément fini e_i et au temps t_m

L'objectif, ici, est d'adapter la méthode de raffinement automatique multi-échelle espace-temps à la modélisation des structures en dynamique transitoire non-linéaire. D'un point de vue numérique, ce problème peut être traité en trois phases. La première concerne le développement d'indicateurs d'erreur non-linéaires permettant d'assurer la précision de la solution calculée. La seconde consiste à construire le maillage en espace en adaptant localement ses dimensions caractéristiques selon les gradients des champs physiques dans la structure (déformations, énergies, ...). Enfin, la dernière phase consiste à lier le raffinement de maillage en temps au raffinement de maillage en espace. Cette dernière étape n'est pas abordée dans ce mémoire.

En dynamique non-linéaire, un certain nombre de problématiques apparaissent. La solution localisée sur un maillage fin peut influencer la solution sur les maillages grossiers à l'échelle de la structure. L'opération de remaillage peut également introduire des problèmes liés à la conservation de l'énergie. Les conditions d'interfaces en espace et en temps doivent minimiser les phénomènes de dissipation numérique... Ces problématiques constituent les lignes directrices du travail présenté. En parallèle de cette adaptation de maillage, il est nécessaire de définir un solveur performant afin de réduire le temps utilisé pour calculer la solution non-linéaire et rester dans des grandeurs acceptables pour une utilisation à l'échelle industrielle.

0.3 Objectifs

Ce mémoire présente la méthode de raffinement de maillage et de résolution éléments finis développée en dynamique transitoire pour des non-linéarités matérielles. Il s'agit de développer une stratégie éléments finis permettant d'optimiser la discrétisation spatiale de manière à assurer la précision du vecteur d'état. Cela se traduit par :

1. Le développement d'indicateur d'erreurs dédiés et peu coûteux numériquement afin d'évaluer la précision de la solution au cours du calcul. On utilisera les propriétés de convergence des méthodes numériques utilisées pour quantifier cette erreur.
2. La mise au point d'une stratégie de raffinement de maillage permettant d'affiner la discrétisation dans les zones où la précision requise est insuffisante. Une méthode de sous-découpage hiérarchique sera utilisée.
3. La construction d'un solveur éléments finis permettant la reprise du calcul de manière quasi-optimale au cours du raffinement. Les stratégies multigrilles répondent à cette attente par leur caractère multi-échelle.
4. La formulation d'opérateurs de changement d'échelle permettant le transfert d'information entre les maillages. On s'appuiera ici sur les fonctions de forme éléments finis qui permettent d'obtenir des opérateurs performants à moindre coût.

L'objectif, à terme, est d'obtenir une stratégie de résolution multi-échelle permettant de prendre en compte les spécificités d'échelle en espace de manière locale sur la structure et sur l'intervalle de temps. Cette stratégie s'inspire des méthodes multi-grilles et des méthodes de décomposition de domaine.

0.4 Aperçu de la thèse

Le plan de ce mémoire va découler de ces objectifs et présentera, après une description du problème et un bref état de l'art, les développements numériques apportés. Ce mémoire de thèse est divisé en 4 chapitres et organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous allons exposer le cadre de la recherche. On commencera par introduire les différentes notations afin d'exprimer le système d'équations régissant le comportement non-linéaire des structures dans le cadre de la théorie des milieux continus. Par la suite, on introduira les méthodes de discrétisation en espace et en temps afin de présenter la formulation semi-discrète en espace ainsi que la formulation discrétisée pour l'utilisation de schémas d'intégration de Newmark. On donnera dans la dernière section du chapitre le système d'équations discrétisé final qui fait l'objet de cette étude.

Le chapitre 2 présentera une synthèse des travaux dédiés à la résolution de ce problème. On exposera dans un premier temps une étude bibliographique sur l'estimation de l'erreur, en espace et en temps, qui est la clé de voûte des méthodes adaptatives. Un certain nombre de stratégies d'adaptation de maillage en espace, en temps et espace-temps seront brièvement recensées. En parallèle de la présentation de ces méthodes adaptatives, on rappellera les travaux qui ont été proposés dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine. Suivra un aperçu des méthodes d'interpolation entre maillages, très utiles tant pour les méthodes adaptatives que pour les stratégies multigrilles. Enfin, le dernier paragraphe de ce chapitre présentera les deux stratégies multigrilles dédiées à la résolution non-linéaire, à savoir le "Full Approximation Scheme" et le "Newton-Multigrid".

Nous expliquerons dans le chapitre 3 la construction de notre méthode de raffinement automatique. La première section introduira le principe général de fonctionnement de la stratégie en s'appuyant sur la présentation des outils numériques utilisés. La mise en équation du solveur multigrille non-linéaire localisé, dédié à la modélisation des comportements élasto-plastiques, sera présentée dans une seconde partie. On donnera également dans cette section des précisions sur la mise en oeuvre de la stratégie de raffinement automatique. Enfin, la dernière partie de ce chapitre sera dédiée à la présentation de l'algorithme de résolution et à l'implantation numérique de la méthode sous Castem 2000.

Le quatrième chapitre illustrera les performances des développements proposés. On commencera par présenter le comportement des indicateurs d'erreurs développés en terme d'ordre de convergence et de précision requise. On montrera par la suite que le raffinement automatique de maillage a lieu dans les zones en adéquation avec les phénomènes physiques subis par la structure. L'influence de l'utilisateur sur notre stratégie sera étudiée en observant le comportement de celle-ci en fonction du maillage initial, de l'indicateur d'erreur et de la précision requise. Enfin, on montrera que la stratégie développée permet d'obtenir la précision requise par l'utilisateur à chaque pas de temps à moindre coût.

Enfin la dernière partie de ce document présentera un bilan des développements numériques apportés ainsi que les conclusions et perspectives numériques de nos travaux.

Chapitre 1

Positionnement de la recherche

Ce premier chapitre présente le problème traité dans la suite de ce mémoire. Nous introduisons la formulation générale du problème de référence non-linéaire. Puis, nous décrivons les méthodes de discrétisation permettant le traitement numérique du problème.

Sommaire

1.1	Problème de référence continu	8
1.1.1	Cinématique du mouvement	9
1.1.2	Relation d'équilibre	10
1.1.3	Relation de comportement	12
1.1.4	Conditions limites et conditions initiales	13
1.1.5	Bilan	13
1.2	Modélisation des phénomènes non linéaires	14
1.2.1	Non linéarités géométriques	15
1.2.2	Non linéarités de comportement	16
1.2.3	Non linéarités d'interface	18
1.3	Discrétisation du problème	19
1.3.1	Discrétisation en espace - Méthode des éléments finis	20
1.3.2	Discrétisation en temps - Schéma d'intégration numérique	22
1.3.3	Système d'équations discrétisé final	25
1.4	Synthèse	26

1.1 Problème de référence continu

La formulation numérique du problème de dynamique s'appuie sur un système d'équations aux dérivées partielles issu de la théorie des milieux continus. Ce système d'équations fait apparaître la cinématique de la structure, son équilibre sous chargement et la relation de comportement liant les quantités primales aux quantités duales. Les ouvrages [GER 97b], [BAŞ 00], [BES 01] présentent en détail la formulation complète du problème, brièvement rappelée ici.

On s'intéresse à l'évolution d'une structure occupant le domaine $\Omega(t)$, de frontière Γ sur l'intervalle de temps $I = [T_0, T_f]$. Cette structure est soumise à une force de volume $\mathbf{b}(t)$, à une densité surfacique d'effort $\mathbf{F}_d(t)$ sur la partie $\Gamma_F(t)$ de sa frontière, et à un déplacement imposé $\mathbf{u}_d(t)$ sur la partie $\Gamma_U(t)$ de la frontière (cf. figure 1.1).

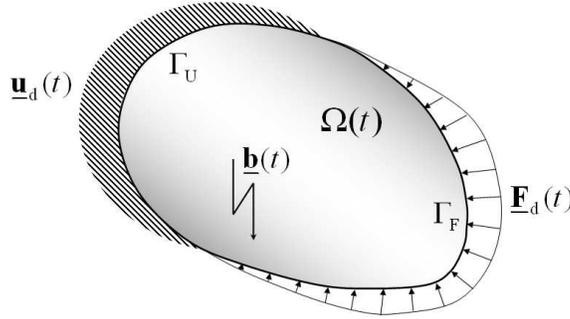


FIG. 1.1: Problème de référence continu

En dynamique non-linéaire, le principe de l'état local [LEM 88] postule que l'état thermodynamique en un point ne dépend pas du voisinage et est uniquement calculé en utilisant des variables internes définies en ce même point et au même instant. Cette hypothèse permet l'écriture de modèles de comportement simplifiés où l'état de la structure est décrit par un ensemble de variables qui dépendent des coordonnées matérielles $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ et du temps $t \in I$.

Les quantités cinématiques que sont le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ et le champ d'accélération $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ régissent le mouvement de la structure. L'état du matériau est décrit par le champ de contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$ et un ensemble de variables internes $v^i(\mathbf{x}, t)$ permettant la description des phénomènes non-linéaires.

On note \mathcal{U} l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles, c'est-à-dire vérifiant les conditions limites et suffisamment continus pour être dérivable. Le champ de contrainte est recherché dans un espace \mathcal{D} de champs tensoriels C^1 .

Le vecteur d'état complet en dynamique non-linéaire est noté $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t), v^i(\mathbf{x}, t)) \quad (1.1)$$

1.1.1 Cinématique du mouvement

La configuration d'origine (souvent non-déformée) à l'instant $t = T_0$, notée Ω_0 , est supposée connue. On note $\Omega(t)$ la configuration matérielle courante. On adopte les conventions classiques où les lettres majuscules décrivent les champs en coordonnées Lagrangiennes (non déformées), et les lettres minuscules les champs en coordonnées Eulériennes (courantes).

On note $\underline{\mathbf{X}}$ le vecteur position sur Ω_0 et $\underline{\mathbf{x}}(t)$ le vecteur position sur $\Omega(t)$. Le mouvement de tout point du domaine est décrit par l'intermédiaire d'une fonction $\underline{\Phi}(\underline{\mathbf{X}}, t)$ permettant de passer de la configuration d'origine Ω_0 à la configuration déformée $\Omega(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}(\underline{\mathbf{X}}, t) : \Omega_0 &\rightarrow \Omega \\ \underline{\mathbf{X}} &\rightarrow \underline{\mathbf{x}} = \underline{\Phi}(\underline{\mathbf{X}}, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

On note $\underline{\Phi}^{-1}$ la fonction inverse, telle que $\underline{\mathbf{X}} = \underline{\Phi}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, t)$. Le déplacement d'un point dans la configuration courante est donnée par la différence entre sa position déformée et sa position d'origine :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}} = \underline{\Phi}(\underline{\mathbf{X}}, t) - \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\Phi}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (1.3)$$

La figure 1.2 illustre les différentes notations utilisées.

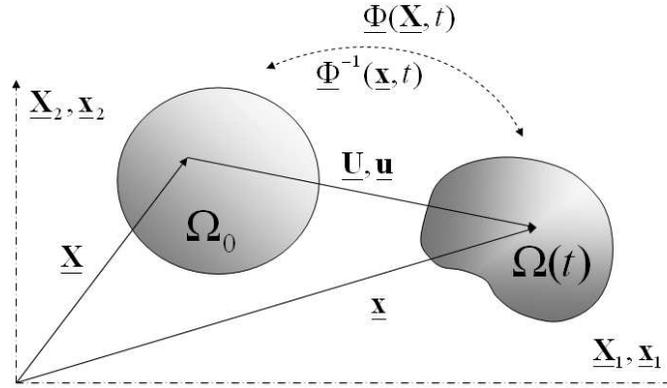


FIG. 1.2: Description de la configuration du système à l'instant t

Dans le cadre de la dynamique des milieux continus, les vitesses et les accélérations sont définies de manière classique comme les dérivées premières et secondes du déplacement par rapport au temps.

$$\underline{\dot{\mathbf{U}}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \underline{\ddot{\mathbf{U}}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \underline{\dot{\mathbf{U}}}(\underline{\mathbf{X}}, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{D \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{Dt} \quad \text{et} \quad \underline{\ddot{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{D \underline{\dot{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{Dt} \quad (1.5)$$

Où D désigne la dérivée particulaire définie comme :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{x}}}) \quad (1.6)$$

Afin de décrire le comportement du matériau, il est nécessaire de caractériser la déformation du milieu. On introduit l'opérateur gradient $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ qui permet de transformer un vecteur dans la configuration d'origine en son équivalent dans la configuration déformée :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \quad (1.7)$$

La dépendance explicite des champs et opérateurs à l'espace et au temps ne sera plus exprimée par la suite afin d'alléger les notations.

En utilisant l'opérateur gradient, différentes mesures de déformation sont alors possibles. Pour plus d'informations on pourra se référer à [BAŞ 00]. En mécanique des structures, pour une description Lagrangienne de la cinématique, on utilise souvent l'opérateur de déformation de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}_d \right) \quad (1.8)$$

Si le champ de déplacement et les déformations restent faibles vis-à-vis des dimensions de la structure (hypothèse des petites perturbations) il est possible de confondre la configuration initiale Ω_0 et la configuration déformée $\Omega(t)$. Le tenseur de Green-Lagrange linéarisé au premier ordre, noté $\underline{\underline{\epsilon}}$ est suffisant pour caractériser les déformations :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{U}}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \right) + \left(\frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{U}}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \right)^T \right] \quad (1.9)$$

Ce nouveau tenseur est la partie symétrique du gradient de déplacements. Sous cette hypothèse, le tenseur de déformation de Green-Lagrange est dit linéarisé et est défini par :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (\nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}})_{sym} \quad (1.10)$$

1.1.2 Relation d'équilibre

On considère une structure constituée d'un matériau homogène, isotrope, de densité volumique ρ . Le milieu matériel est dit en équilibre lorsque les forces cinétiques équilibrent les forces internes et les forces externes pour toute région $\Omega_e(t)$ de frontière $\Gamma_e(t)$ du solide à un instant donné.

Les forces d'inertie sont exprimées classiquement sous la forme $\rho \dot{\underline{\mathbf{u}}}$. Sur une surface de normale $\underline{\mathbf{n}}$, les forces internes $\underline{\mathbf{t}}_n$ sont calculées en utilisant le champ tensoriel des contraintes et sont données par la formule de Cauchy :

$$\underline{\mathbf{t}}_n = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\mathbf{n}} \quad (1.11)$$

L'équilibre est alors formulé de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma_e(t)} \underline{\mathbf{t}}_n dS = \int_{\Omega_e(t)} \rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} - \underline{\mathbf{b}} d\Omega \quad (1.12)$$

En utilisant l'équation (1.11) et le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\int_{\Gamma_e(t)} (-\rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\text{div}}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}})) d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

Cette équation d'équilibre devant être vérifiée quel que soit le sous-domaine considéré, l'équilibre peut être écrit localement en tout point du domaine $\Omega(t)$ sous la forme :

$$-\rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{b}} + \underline{\text{div}}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega(t) \quad (1.14)$$

Il est difficile de trouver de manière systématique la solution de cette équation. Pour permettre la recherche de solutions approchées par des stratégies de résolution numériques, l'équation d'équilibre (1.14) est écrite sous forme faible. On considère un champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}^*$, appelé déplacement virtuel, cinématiquement admissible et vérifiant des conditions aux limites nulles sur la frontière $\Gamma_U(t)$. Le champ $\underline{\mathbf{u}}^*$ est tel que :

$$\underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{U}^0 = \{\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{U} \mid \underline{\mathbf{u}} = 0 \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_U(t)\} \quad (1.15)$$

La formulation faible est obtenue en pré-multipliant l'équation (1.14) par cette fonction test puis en intégrant sur le domaine dans la configuration courante en intégrant par ailleurs les conditions limites de Neumann :

$$\int_{\Omega(t)} \underline{\mathbf{u}}^* (-\rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\text{div}}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) + \underline{\mathbf{b}}) d\Omega + \int_{\Gamma_F(t)} \underline{\mathbf{u}}^* (\underline{\mathbf{t}}_n - \underline{\mathbf{F}}_d) dS = 0 \quad (1.16)$$

En utilisant la formule d'intégration par partie, le théorème de la divergence et la symétrie du tenseur des contraintes, il vient :

$$\int_{\Omega(t)} \underline{\mathbf{u}}^* \rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : (\nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}}^*)_{\text{sym}} d\Omega - \int_{\Omega(t)} \underline{\mathbf{u}}^* \underline{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_F} \underline{\mathbf{u}}^* \underline{\mathbf{F}}_d dS = 0 \quad (1.17)$$

Cette formulation est appelée principe des travaux virtuels et traduit l'équilibre de la structure ainsi que les conditions limites en effort.

Remarque : D'autres expressions du tenseur des contraintes peuvent être envisagées suivant la description cinématique utilisée. En formulation Lagrangienne par exemple, on utilise couramment le second tenseur de Piola-Kirshoff $\underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}}$. L'équilibre est alors écrit dans la configuration d'origine Ω_0 suivant l'équation (1.18) :

$$-\rho_0 \underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{B}} + \underline{\text{div}}_{\underline{\mathbf{x}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}}) = 0 \quad (1.18)$$

Avec $\rho_0 = \rho \det(\underline{\mathbf{F}})$ la densité initiale et $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{b}} \det(\underline{\mathbf{F}})$ la force volumique équivalente dans la configuration d'origine Ω_0 . Le développement complet des formulations faibles associées aux équations d'équilibre en description Lagrangienne, Eulérienne ou Lagrangienne actualisée peuvent être trouvées dans [BEL 00].

1.1.3 Relation de comportement

Les équations présentées dans les sections 1.1.1 et 1.1.2 traduisent l'admissibilité cinématique et l'admissibilité statique du vecteur d'état. Leur construction est basée sur des considérations géométriques et mécaniques qui rendent ces relations exactes.

Néanmoins, ces équations ne suffisent pas à la résolution du problème et une relation, dite de comportement, est nécessaire afin de lier les quantités primales et les quantités duales entre elles. Ces relations mathématiques traduisent les observations expérimentales et constituent une approximation du comportement réel du matériau. Elles tentent de rendre compte de la physique des phénomènes observés et sont en général construites dans le cadre de la méthode de l'état local [LEM 88].

En mécanique des milieux continus et en absence de phénomène dissipatifs, l'état matériel est défini par la déformation totale $\underline{\underline{\epsilon}}$ et la température T (variables dites observables). Les relations de comportement sont alors exprimées en postulant l'existence d'un potentiel thermodynamique ψ_e permettant de décrire l'état du milieu.

$$\psi_e = \psi_e(\underline{\underline{\epsilon}}, T) \quad (1.19)$$

Les relations de comportement qui traduisent le lien entre contraintes et déformations et le lien entre entropie et température sont alors exprimées comme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \quad \text{et} \quad s = -\frac{\partial \psi_e}{\partial T} \quad (1.20)$$

Pour les phénomènes dissipatifs, l'histoire du matériau à l'instant t est traduite par l'utilisation de modèles à variables internes. C'est le nombre de variables utilisées et leur pertinence qui définit la finesse du modèle de comportement. Celles-ci peuvent indifféremment être scalaires ou tensorielles et permettent de modéliser la phénoménologie du comportement dissipatif.

Une manière d'astreindre ces modèles dissipatifs à respecter le second principe de la thermodynamique est de postuler l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation ψ_p [RIC 71] qui vient s'ajouter au potentiel ψ_e :

$$\Psi = \psi_e + \psi_p \quad (1.21)$$

La formulation des lois de comportement est alors obtenue par dérivation du pseudo-potentiel de dissipation. Si on associe les forces thermodynamiques α_i aux variables internes v_i , le comportement est donné par :

$$\alpha_i = \frac{\partial \psi_p}{\partial v_i} \quad (1.22)$$

La section 1.2.2 présente un exemple de relation de comportement dissipative (matériau élastoplastique à écrouissage isotrope et cinématique).

1.1.4 Conditions limites et conditions initiales

Etant donné que le système d'équations aux dérivées partielles est du second ordre en temps, deux conditions initiales sont prescrites sur l'ensemble de la structure. Elles sont en général exprimées en terme de déplacements et de vitesses à l'instant initial :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, 0) = \underline{\mathbf{u}}_0(\underline{\mathbf{x}}) \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \quad (1.23)$$

$$\left. \frac{D\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{Dt} \right|_{t=0} = \underline{\mathbf{v}}_0(\underline{\mathbf{x}}) \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \quad (1.24)$$

Le système d'équations est complété par la définition des conditions limites de Neumann et de Dirichlet. Des efforts $\underline{\mathbf{F}}_d(t)$ et des déplacements $\underline{\mathbf{u}}_d(t)$ sont respectivement imposés sur les frontières $\Gamma_F(t)$ et $\Gamma_U(t)$ de la structure (cf figure 1.1).

Ces frontières sont telles que :

$$\Gamma_u(t) \cup \Gamma_f(t) = \Gamma \quad (1.25)$$

$$\Gamma_u(t) \cap \Gamma_f(t) = \phi \quad (1.26)$$

Les conditions aux limites sont données par :

$$\underline{\mathbf{t}}_n = \underline{\mathbf{F}}_d \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_F(t) \quad (1.27)$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_d \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_U(t) \quad (1.28)$$

1.1.5 Bilan

Sous l'hypothèse d'une transformation isotherme, la résolution d'un problème de dynamique non-linéaire consiste donc à chercher le vecteur d'état $S(\underline{\mathbf{x}}, t)$, défini par l'équation (1.1), en tout point du domaine $\Omega(t)$ et à tout instant de l'intervalle temporel I .

Le système d'équations continues que doit vérifier ce vecteur d'état est présenté table 1.1. L'admissibilité cinématique du vecteur d'état est donnée par les conditions limites et la régularité du champ de déplacement. L'admissibilité dynamique est induite par le respect de la relation d'équilibre et des conditions limites. Enfin, la relation de comportement traduit l'admissibilité matérielle.

Remarque : Cette formulation est présentée dans le cas général et permet de modéliser de nombreuses non-linéarités. Dans le cas des non-linéarités géométriques, où les déformations sont trop importantes pour écrire le problème dans la configuration initiale, le système d'équations doit être ré-écrit dans la configuration courante.

TAB. 1.1: Formulation du problème de référence continu

- Conditions limites.

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\mathbf{u}}_d \quad \forall (\underline{\mathbf{x}}, t) \in \Gamma_u(t) \times I \quad (1.29)$$

$$\underline{\mathbf{t}}_n(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\mathbf{F}}_d \quad \forall (\underline{\mathbf{x}}, t) \in \Gamma_f(t) \times I \quad (1.30)$$

- Conditions initiales

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, 0) = \underline{\mathbf{u}}_0(\underline{\mathbf{x}}) \quad \text{et} \quad \left. \frac{D\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{Dt} \right|_{t=0} = \underline{\mathbf{v}}_0(\underline{\mathbf{x}}) \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega_0 \quad (1.31)$$

- Equation d'équilibre

$$\forall (\underline{\mathbf{x}}, t) \in \Omega(t) \times I$$

$$\int_{\Omega(t)} \underline{\mathbf{u}}^* \rho \underline{\ddot{\mathbf{u}}} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}}^*)_{,sym} d\Omega - \int_{\Omega(t)} \underline{\mathbf{u}}^* \underline{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_f(t)} \underline{\mathbf{u}}^* \underline{\mathbf{F}}_d dS = \mathbb{0} \quad (1.32)$$

- Relation de comportement

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \left(\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t), v_i(\underline{\mathbf{x}}, t), \frac{D\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t)}{Dt}, \dots \right) \quad (1.33)$$

1.2 Modélisation des phénomènes non linéaires

Les non-linéarités sont généralement classées en trois catégories en absence de phénomènes thermiques (rayonnement, changement de phases, ...).

Une non-linéarité est dite *matérielle* lorsque la relation liant la contrainte à la déformation est non-linéaire. La contrainte dépend alors des variables internes traduisant l'histoire du point matériel. C'est le cas des comportements plastiques et visco-élastiques.

Elle est dite *géométrique* si la relation liant les déformations aux déplacements est non-linéaire et fait intervenir les termes d'ordre 2. Les champs tensoriels sont alors décrits sous l'hypothèse des grandes transformations (grands déplacements et/ou grandes rotations).

Enfin, les non linéarités *d'interfaces* sont traduites par les conditions limites et sont généralement très localisées. Elles apparaissent en raison des modifications des zones d'application des conditions limites comme par exemple dans le cas de chocs, de contacts unilatéraux ou de contacts frottants.

On présente ici le cadre d'étude général associé à chacune de ces non-linéarités, mais seul le premier type de non-linéarités sera traité dans la suite de nos travaux.

1.2.1 Non linéarités géométriques

Dans cette section on s'intéresse aux problèmes où la mise en charge fait subir à la structure des déformations et/ou des déplacements non négligeables au cours du temps. L'utilisation du tenseur des déformations linéarisé, qui suppose que les déformations restent infinitésimales et que les rotations restent de faible amplitude, n'est plus utilisable car les termes du second ordre ne sont plus négligeables. Ces non-linéarités apparaissent par exemple lors de la modélisation de mise en forme de matériaux (cf. figure 1.3).

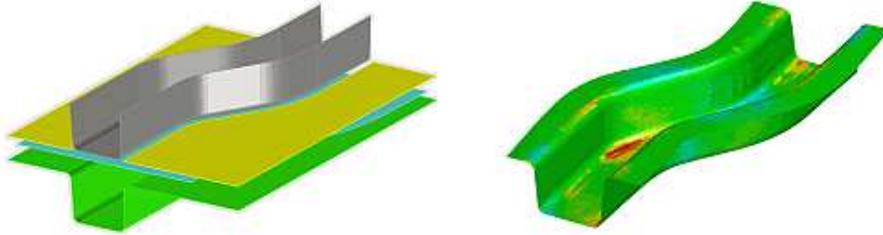


FIG. 1.3: Exemple de non-linéarité géométrique : profilage métallique (source : Engineering Research AB)

Pour plus d'information sur la modélisation et le calcul des structures en grandes transformations, on pourra se reporter à [BEL 00]. La théorie présentée ici s'appuie sur les lois de comportement en taux [LAD 96].

Le système d'équations décrit table 1.1 doit alors être écrit sur la configuration courante $\Omega(t)$ plutôt que sur la configuration d'origine Ω_0 . On parle de variable objective lorsque la valeur de la variable (qu'elle soit scalaire, vectorielle ou tensorielle) ne dépend pas du référentiel d'observation. Alors que la contrainte de Cauchy et les variables internes sont objectives, le tenseur de Green-Lagrange ne l'est pas.

La théorie en taux propose de s'appuyer sur des déformations et des contraintes objectives. Elle cherche à utiliser, sans modification, les modèles mathématiques utilisés pour la formulation proposée table 1.1. La configuration courante $\Omega(t)$ étant une inconnue du problème, on reporte le système d'équations dans la configuration initiale Ω_0 . Les équations sont réécrites en utilisant le taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$ et une contrainte $\underline{\underline{C}}$ telle que la puissance virtuelle des forces internes soit donnée par :

$$Pi^* = - \int_{\Omega_0} \text{Tr} \left(\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}^* \right) d\Omega \quad (1.34)$$

On introduit l'opérateur de rotation $\underline{\underline{R}}$ tel que $\underline{\underline{\dot{R}}} \underline{\underline{R}}^T = (\underline{\underline{\dot{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1})_{\bar{s}}$ et $\underline{\underline{R}}|_{t=0} = \underline{\underline{I}}_d$. Le taux de déformation et la contrainte conjuguée sont définis en utilisant la contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, la partie symétrique du taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ et le jacobien de la transformation $J = \det \underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{R}} \quad (1.35)$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}} \underline{\underline{J}} \quad (1.36)$$

L'équation d'équilibre peut être exprimée dans la configuration initiale Ω_0 sous la forme du principe des puissances virtuelles présenté équation 1.37. Les forces externes sont alors rapportées dans la configuration initiale et notées $\underline{\mathbf{F}}_{0,d}$ et $\underline{\mathbf{b}}_0$. Le vecteur d'état en description Lagrangienne $\bar{\mathcal{S}}$ est cherché comme la solution de :

$$\forall(\underline{\mathbf{X}}, t) \in \Omega_0 \times I \quad \forall \underline{\mathbf{U}} \in \bar{\mathcal{U}}_0$$

$$\int_{\Omega_0} \underline{\dot{\mathbf{U}}}^* \rho \underline{\dot{\mathbf{U}}} d\Omega + \int_{\Omega_0} (\underline{\mathbf{C}} : \underline{\dot{\Sigma}}^*) d\Omega - \int_{\Omega_0} \underline{\dot{\mathbf{U}}}^* \underline{\mathbf{b}}_0 d\Omega - \int_{d\Omega_0 F} \underline{\dot{\mathbf{U}}}^* \underline{\mathbf{F}}_{0,d} dS = 0 \quad (1.37)$$

Où $\bar{\mathcal{U}}_0$ représente l'ensemble des champs cinématiquement admissibles à 0 en configuration Lagrangienne.

La difficulté de l'approche en grandes déformations vient du fait que la position courante est inconnue, ce qui oblige à se référer à la configuration initiale non-déformée (formulation Lagrangienne totale). En dynamique, la position aux instants précédents est connue. Il est donc possible de se référer à ces positions comme état initial.

1.2.2 Non linéarités de comportement

Dans cette section, on s'intéresse aux non-linéarités introduites par la relation de comportement. Elles apparaissent lorsque l'équation liant la contrainte à la déformation n'est plus linéaire, comme par exemple lors de la modélisation des déformations irréversibles liées à un comportement plastique du matériau (cf. figure 1.4).

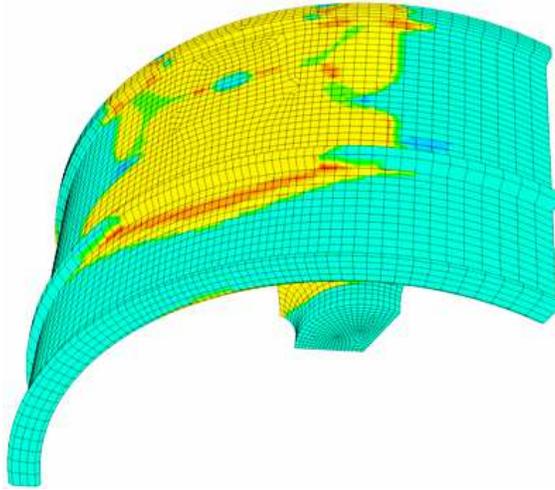


FIG. 1.4: Exemple de non-linéarité de comportement : déformation plastique d'une jante de voiture (source : CAELinux)

Pour une vision plus complète des modèles de comportement non-linéaires, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages [LAD 96] et [LEM 88]. On présente ici un modèle élastoplastique écrouissable sous l'hypothèse des petites perturbations.

Les contributions élastiques et plastiques sont en général découplées dans le tenseur des déformations. On partitionne alors la déformation totale $\underline{\underline{\epsilon}}$ en une déformation élastique $\underline{\underline{\epsilon}}_e$ et une déformation plastique $\underline{\underline{\epsilon}}_p$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_e + \underline{\underline{\epsilon}}_p \quad (1.38)$$

L'état thermodynamique du matériau est défini par la déformation plastique ainsi que par deux variables supplémentaires qui traduisent la déformation du convexe d'élasticité :

- La variable tensorielle $\underline{\underline{\alpha}}$ traduit l'écoulement cinématique du matériau. Elle décrit la position du centre du convexe d'élasticité.
- La variable scalaire p traduit l'écoulement isotrope du matériau. Elle correspond à la déformation plastique cumulée et décrit le rayon du convexe d'élasticité.

Le potentiel thermodynamique est alors défini par :

$$\rho\psi(\underline{\underline{\epsilon}}^e, p, \underline{\underline{\alpha}}) = \underbrace{\frac{1}{2}\text{Tr}\left[\underline{\underline{\epsilon}}^e \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\epsilon}}^e\right]}_{\text{Potentiel élastique } \psi_e} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot d_p \text{Tr}[\underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{\alpha}}]}_{\text{Potentiel plastique } \psi_p} + l(p) \quad (1.39)$$

A ces deux variables internes $\underline{\underline{\alpha}}$ et p , on associe respectivement deux variables forces thermodynamiques $\underline{\underline{Y}}$ et Z telles que :

$$Z = \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{Y}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \quad (1.40)$$

Etant donné l'hypothèse de partition du tenseur des déformations (1.38), les contraintes sont données par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}_e} \quad (1.41)$$

On définit une fonction seuil f qui décrit le domaine élastique. Celle-ci est exprimée à l'aide du tenseur déviateur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}_D$ et de la contrainte de retour $\underline{\underline{Y}}$:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p, \underline{\underline{Y}}) = f_y(\underline{\underline{\sigma}}_D - \underline{\underline{Y}}) - f_p(p) \quad (1.42)$$

Le comportement matériau dépend de la position du vecteur contrainte dans l'espace des contraintes. Le domaine élastique y est représenté par un volume, appelé convexe d'élasticité (cf. figure 1.5) dont la frontière a pour équation $f = 0$. σ_0 et σ_Y représentent respectivement la limite d'élasticité initiale et courante du matériau.

La description de la plasticité impose que l'état de contrainte ne peut sortir de ce convexe d'élasticité. De plus, aucun écoulement plastique ne peut se produire pendant la décharge du matériau. On en déduit les conditions suivantes :

$$f < 0 \quad : \quad \text{comportement élastique} \quad (1.43)$$

$$f = 0 \quad \text{et} \quad df = 0 \quad : \quad \text{comportement plastique} \quad (1.44)$$

$$f = 0 \quad \text{et} \quad df < 0 \quad : \quad \text{décharge élastique} \quad (1.45)$$

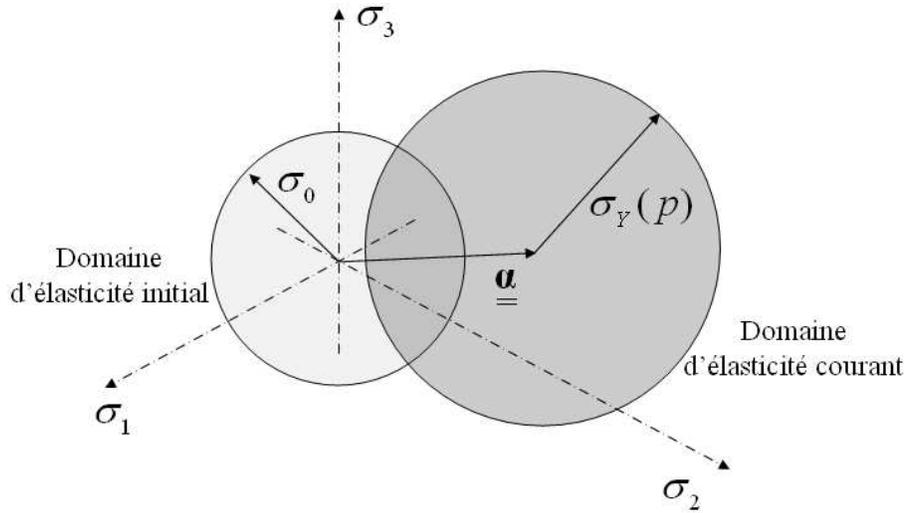


FIG. 1.5: Définition du domaine d'élasticité en fonction des deux variables internes

On définit alors un paramètre d'évolution plastique $\hat{\lambda}$ vérifiant une condition de Kuhn-Tucker et tel que :

$$\begin{cases} f < 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = 0 \\ \hat{\lambda} > 0 \Rightarrow f = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \hat{\lambda} f = 0 \quad (1.46)$$

Finalement, les lois d'écoulement sont données par :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \hat{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (1.47)$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = -\hat{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{Y}} \quad (1.48)$$

$$\dot{p} = -\hat{\lambda} \frac{\partial f}{\partial Z} \quad (1.49)$$

La description de la phénoménologie du comportement par des variables internes présente un cadre général d'étude permettant de décrire de nombreuses relations de comportement. Ainsi, même si dans la suite de cette étude un comportement élastoplastique écrouissable est adopté, le formalisme de la présentation reste théoriquement inchangé pour des comportements plus complexes.

1.2.3 Non linéarités d'interface

Dans le cas de la modélisation d'assemblages mécaniques, des non linéarités d'interface peuvent apparaître. Ces phénomènes non-linéaires sont induits par exemple par des phénomènes de frottements et/ou de décollement entre deux solides (cf. figure 1.6). Les non-linéarités sont alors traduites en raison de l'évolution des conditions aux limites avec le chargement et de l'évolution de la zone de contact entre les structures.

Les formulations continues et éléments finis du problème de contact, ainsi que les algorithmes utilisés pour les résoudre, sont présentées en détail dans [LAU 03] et [WRI 06]. Une relation de comportement peut être utilisée à l'interface afin de relier les quantités duales entre elles (comme par exemple pour les lois de frottement de Coulomb).

Ce type de non-linéarités est très localisé si le problème est linéaire par ailleurs. Le système d'équations présenté précédemment reste inchangé dans son formalisme d'écriture et les conditions limites sont alors potentiellement appliquées, à défaut d'être permanentes, sur une géométrie potentiellement variable au cours du calcul.

Le problème est résolu, par exemple, en rendant stationnaire une formulation variationnelle associée à la fonctionnelle d'équilibre (1.17) sous contrainte afin de vérifier ces conditions d'interface comme dans le cas de liaisons permanentes sur la structure. On utilise dans ce cas des méthodes classiques de minimisation sous contraintes telles que la méthode de pénalité ou la méthode des multiplicateurs de Lagrange [BEL 00].

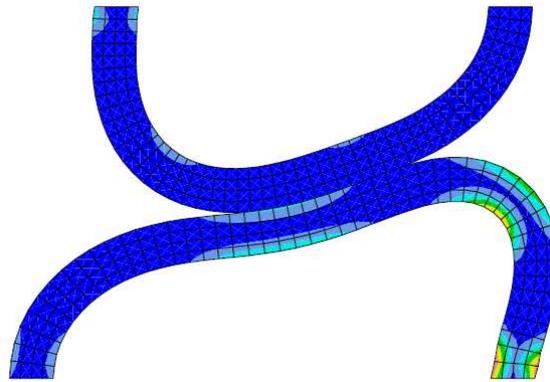


FIG. 1.6: Exemple de non-linéarité d'interface : Contact frottant entre deux corps (source : Duke University)

Les conditions limites sont régies par une condition d'impénétrabilité à l'interface. Les forces de contact sont alors calculées en utilisant la méthode de pénalité ou des approches de type Lagrangien augmenté [SIM 92]. Néanmoins, ces approches sont complexes d'utilisation car il est difficile d'identifier la valeur des coefficients de pénalité. Plus récemment, une amélioration appelée méthode du Lagrangien augmenté adapté a été proposée [BUS 09], [BUS 10]. Par cette approche, le coefficient de pénalité utilisé évolue au cours du calcul en fonction des pénétrations détectées, ce qui permet d'améliorer la vitesse de convergence du calcul.

1.3 Discrétisation du problème

Le principe des puissances virtuelles (1.17) est exprimé en utilisant des champs continus en espace et en temps. Les espaces \mathcal{U} et \mathcal{D} sont des espaces de dimensions infinies et il est en général impossible de déterminer la solution exacte du modèle. Le problème de référence continu est donc approché par un problème discrétisé en espace et en temps

dans des espaces de dimensions finies \mathcal{U}^n et \mathcal{D}^n . On adopte pour ce faire une formulation éléments finis en espace et une prise en compte de la dimension temporelle par un schéma d'intégration numérique.

1.3.1 Discrétisation en espace - Méthode des éléments finis

En mécanique des structures, la méthode des éléments finis [SZA 91] [BAT 92] [ZIE 05] est la méthode de discrétisation spatiale la plus utilisée. Le domaine continu $\Omega(t)$ est approché par un ensemble d'éléments, appelés éléments finis, afin de former un maillage $\mathcal{M}(t)$ (cf. figure 1.7) de frontière $\partial\mathcal{M}$. Cette frontière est décomposée en $\partial\mathcal{M}_U$ et $\partial\mathcal{M}_F$ selon la condition limite imposée sur le bord du domaine.

Le modèle discrétisé en espace ainsi formé contient m éléments et n noeuds.

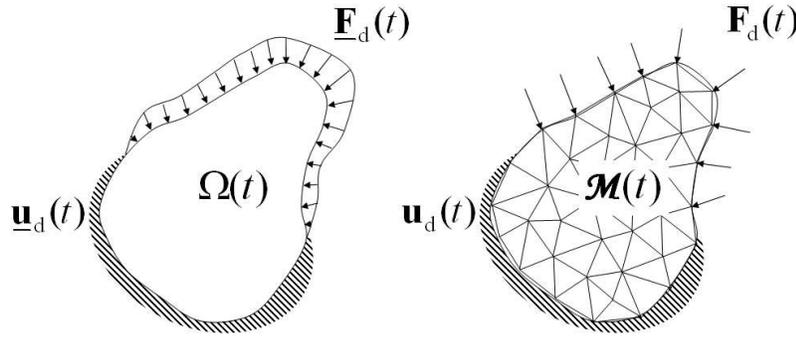


FIG. 1.7: Discrétisation d'une structure

On notera sur la figure 1.7 qu'un champ continu $\underline{\mathbf{a}}$ est noté \mathbf{a} sous forme discrétisée. Par analogie, un tenseur $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ sera quant à lui noté \mathbf{a} sous forme discrétisée.

Des fonctions d'interpolation géométriques et des fonctions d'interpolation des variables sont associées à chacun des noeuds de la géométrie. On se limitera ici à l'utilisation d'éléments isoparamétriques où les fonctions utilisées pour l'interpolation de la géométrie et des champs sont identiques. Un champ continu $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$ est alors recherché comme une combinaison linéaire de fonctions de forme $\underline{\phi}_i(\underline{\mathbf{X}})$ (généralement polynomiales) associées aux degrés de libertés $\mathbf{U}_i(t)$ par l'équation suivante :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i(t) \cdot \underline{\phi}_i(\underline{\mathbf{X}}) \quad (1.50)$$

Les fonctions de forme sont interpolantes. La fonction $\underline{\phi}_i(\underline{\mathbf{X}})$ associée au degré de liberté $\mathbf{U}_i(t)$ prend la valeur 1 au noeud i et 0 pour tous les autres noeuds.

Les intégrales sur le domaine dans la formulation faible (1.17) sont approximées par des sommes d'intégrales sur les éléments. On note \mathbf{U} le vecteur des déplacements généralisés et $\ddot{\mathbf{U}}$ le vecteur des accélérations généralisées (la dépendance au temps n'est pas indiquée). En introduisant la formule de discrétisation (1.50) dans le principe des travaux virtuels (1.17), le problème de référence sous l'hypothèse des petites perturbations peut être reformulé sous la forme discrétisée suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{U}_{0n}, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{U}_n, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{D}_n$$

$$\mathbf{U}^{*\text{T}} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{U}^{*\text{T}} \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{U}^{*\text{T}} \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.51)$$

Avec la matrice de masse \mathbf{M} , le vecteur des efforts intérieurs généralisés \mathbf{F}_{int} et le vecteur des efforts extérieurs généralisés \mathbf{F}_{ext} définis par assemblage sur les éléments finis et approximés par les équations (1.52), (1.53) et (1.54) :

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \rho \underline{\phi}_i(\mathbf{X}) \underline{\phi}_j(\mathbf{X}) d\Omega \quad (1.52)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}j} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \text{Tr} \left(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\epsilon} \left(\underline{\phi}_j(\mathbf{X}) \right) \right) d\Omega \quad (1.53)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}j} = \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{f}_d \underline{\phi}_j(\mathbf{X}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{F}_d \underline{\phi}_j(\mathbf{X}) dS \right) \quad (1.54)$$

Le calcul des forces internes est généralement réalisé en utilisant une méthode de quadrature de Gauss :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (1.55)$$

Où \mathbf{B} désigne la matrice de gradients calculée aux points de Gauss. Le calcul de l'intégrale est approximé par une somme pondérée sur les points de Gauss. Ceux-ci sont placés sur l'élément de manière à optimiser la précision du calcul et leur nombre dépend des fonctions à intégrer et de la richesse de l'élément fini considéré.

En dynamique non-linéaire, l'équation (1.51) est souvent exprimée en terme de résidu d'équilibre et le principe des puissances virtuelles discrétisé est donné par :

$$\mathbf{U}^{*\text{T}} (\mathbf{R}(\ddot{\mathbf{U}})) = 0 \quad (1.56)$$

$$\text{avec : } \mathbf{R}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.57)$$

Finalement, le principe des puissances virtuelles discrétisé revient à résoudre l'équilibre discrétisé (1.58) éventuellement exprimé sous la forme résiduelle (1.59) :

$$\forall (t, \mathbf{U}, \boldsymbol{\sigma}) \in [0, T] \times \mathcal{U}_n \times \mathcal{D}_n$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{R}(\ddot{\mathbf{U}}) = 0 \quad (1.59)$$

A cette équation sont adjointes les conditions initiales et les conditions aux limites sous forme discrétisée. On définit une matrice \mathbf{C} telle que les conditions limites en déplacement soient vérifiées en tout point de la frontière ∂M_U :

$$\dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{U}}_0 \quad (1.60)$$

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0 \quad (1.61)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad (1.62)$$

Lorsque le matériau a un comportement non-linéaire, l'intégration de la relation de comportement est réalisée en chaque point de Gauss en utilisant un algorithme de type retour radial sur le seuil [SIM 00] présenté annexe A.

1.3.2 Discrétisation en temps - Schéma d'intégration numérique

La formulation (1.59) est dite semi-discrète : elle est discrétisée en espace, mais continue en temps. Afin de résoudre cette équation sur l'intervalle d'étude I , le temps est divisé en $r+1$ piquets de temps t_n et r pas de temps (cf. figure 1.8). Une relation de récurrence est utilisée pour calculer le vecteur d'état à l'instant t_{n+1} en fonction des instants précédents.

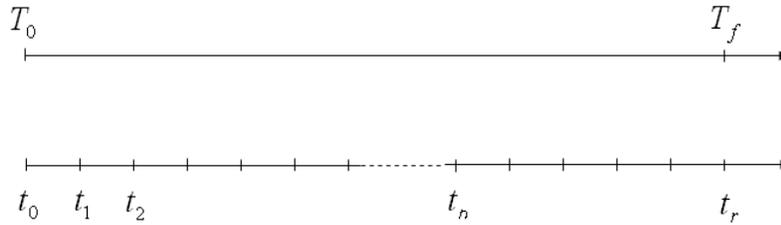


FIG. 1.8: Discrétisation du temps

On utilise en général un pas de temps constant afin que les matrices utilisées lors de la résolution numérique restent invariantes sur l'ensemble de l'intervalle d'étude. On note Δt le pas de temps séparant deux piquets de temps successifs. Les quantités nodales $\mathbf{U}(t)$, $\dot{\mathbf{U}}(t)$, $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ qui décrivent les champs de déplacements, de vitesses et d'accélération sont alors approximés par des suites numériques \mathbf{U}_n , $\dot{\mathbf{U}}_n$, $\ddot{\mathbf{U}}_n$ qui représentent les approximations des champs à l'instant t_n .

De nombreux schémas d'intégration numérique sont disponibles dans la littérature [NEW 59], [HIL 77], [SIM 91], [KRE 07]. Les schémas d'intégration temporelle de Newmark sont les plus couramment utilisés en mécanique des structures. [HUL 04] propose un comparatif des différents schémas d'intégration temporelle.

Le schéma de Newmark est un schéma d'intégration temporelle à un pas (en dynamique des structures, l'instant t_n est généralement suffisant pour actualiser l'état de la structure à l'instant t_{n+1}). On suppose que l'ordre des fonctions cinématiques est suffisamment élevé pour les décrire par un développement limité de Taylor. Deux paramètres β et γ sont utilisés pour approximer le reste de ce développement.

Etant donné que les fonctions de forme utilisées pour interpoler chacune des quantités cinématiques sont les mêmes, ce développement de Taylor peut directement être exprimé en fonction des degrés de liberté du maillage éléments finis :

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[2\gamma \frac{\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{U}}_n}{\Delta t} \right] \quad (1.63)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^3}{6} \left[6\beta \frac{\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{U}}_n}{\Delta t} \right] \quad (1.64)$$

Le schéma de Newmark exprimé en accélération s'écrit alors :

$$\mathbf{U}_{n+1} = {}^P \mathbf{U}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.65)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = {}^P \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.66)$$

Où les termes ${}^P \mathbf{U}_n$ et ${}^P \dot{\mathbf{U}}_n$, appelés prédicteurs du schéma, regroupent les termes du pas de temps précédent :

$${}^P \mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + (0.5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (1.67)$$

$${}^P \dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (1.68)$$

Des études sur la stabilité du schéma de Newmark, sa précision et son amortissement numérique sont présentées dans [HUG 77] ou [KRE 06]. Les paramètres β et γ conditionnent la stabilité du schéma de Newmark. La stabilité et la convergence sont démontrées pour des modèles linéaires. Si aucune démonstration générale n'existe dans le cas non-linéaire, il est possible de contrôler la stabilité en travaillant par linéarisation du système. La stabilité doit alors être vérifiée pour chaque incrément.

Le paramètre β détermine le type de schéma. Si $\beta \neq 0$, le schéma est dit implicite et est généralement inconditionnellement stable (cf. table 1.3.2). Le schéma est dit explicite, et ne dépend que des quantités à l'instant t_n si $\beta = 0$. Il est dans ce cas soumis à une condition de stabilité Courant-Friedrich-Levy (CFL) sur le pas de temps qui doit être inférieur à une valeur critique donnée par :

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (1.69)$$

Où ω_{max} représente la plus haute fréquence propre du système. La valeur du pas de temps critique peut également être déterminée en considérant le temps mis par une onde de vitesse c pour parcourir la dimension caractéristique la plus faible l_{min} du maillage :

$$\Delta t_c = l_{min}/c \quad , \text{ avec : } c = \sqrt{E_{ep}/\rho} \quad (1.70)$$

Où ρ désigne la masse volumique et E_{ep} la raideur apparente.

Cette famille de schémas, qui suppose qu'un certain nombre de variables restent constantes sur l'intervalle d'étude I , est très utilisée en dynamique non-linéaire où les pas de temps sont très petits. De manière générale, l'utilisation d'un schéma explicite

conduit à un grand nombre de calculs peu coûteux, tandis que l'utilisation d'un schéma implicite conduit à peu de calculs très coûteux

Le paramètre γ conditionne quant à lui l'amortissement numérique et permet de forcer la stabilité du schéma de Newmark. Pour $\gamma = 0.5$, aucune dissipation numérique n'est introduite. Le schéma de Newmark est inconditionnellement stable si [BEL 00] :

$$0.5 \leq \gamma \leq 2\beta \quad (1.71)$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \leq 0.5 \\ 2\beta < \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t \leq \Delta t_c \quad (1.72)$$

Le tableau 1.3.2 présente les valeurs de ces deux paramètres pour quatre schémas de Newmark ainsi que leur ordre de convergence et pas de temps critique.

TAB. 1.2: Récapitulatif des schémas de Newmark

algorithme	β	γ	Δt_c	Ordre
explicite	0	0	0	1
différence centrée	0	0.5	$2 / \omega_{max}$	2
accélération linéaire	1/6	0.5	$2\sqrt{3}$	2
accélération moyenne	0.5	0.25	∞	2

Le schéma d'intégration temporelle utilisé dans la suite de cette contribution est le schéma de l'accélération moyenne qui présente l'avantage d'être inconditionnellement stable et d'ordre 2. De plus il s'agit du schéma implicite de précision maximale en terme d'erreur d'amplitude et d'erreur de périodicité [GÉR 97a].

Remarque : Il est possible de vérifier la cohérence du calcul éléments finis en réalisant un bilan énergétique. L'intégration temporelle est validée numériquement en vérifiant l'absence de dissipation d'énergie entre deux pas de temps.

L'énergie totale au temps t_n est définie comme :

$$E_{tot} = T(\dot{\mathbf{U}}_n) + V(\boldsymbol{\sigma}_n) \quad (1.73)$$

Où T et V désignent respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la structure. On utilise les notations introduites dans [HUG 95] :

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{2}(\bullet_{n+1} + \bullet_n) \quad \text{et} \quad [\bullet] = (\bullet_{n+1} - \bullet_n) \quad (1.74)$$

Les sauts de déplacement et de vitesse entre deux pas de temps sont donnés par :

$$[\mathbf{U}] = \Delta t \langle \dot{\mathbf{U}} \rangle + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta - \gamma) [\ddot{\mathbf{U}}] \quad (1.75)$$

$$[\dot{\mathbf{U}}] = \Delta t \langle \ddot{\mathbf{U}} \rangle + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2}) [\ddot{\mathbf{U}}] \quad (1.76)$$

En appliquant les équations (1.74) à l'équation d'équilibre discrétisée (1.58), on obtient les combinaisons des équations d'équilibre suivantes :

$$\langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} \rangle + \langle \mathbf{F}_{\text{int}} \rangle = \langle \mathbf{F}_{\text{ext}} \rangle \quad (1.77)$$

$$[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}] + [\mathbf{F}_{\text{int}}] = [\mathbf{F}_{\text{ext}}] \quad (1.78)$$

Enfin, en utilisant la propriété :

$$[\bullet]^T \langle \bullet \rangle = \frac{1}{2} [\bullet^2] \quad (1.79)$$

La variation d'énergie cinétique est donnée par :

$$[T(\dot{\mathbf{U}})] = [\dot{\mathbf{U}}]^T \mathbf{M} \langle \dot{\mathbf{U}} \rangle \quad (1.80)$$

En combinant les équations (1.75) à (1.80), le bilan énergétique est donné par :

$$\begin{aligned} [T(\dot{\mathbf{U}})] + \Delta t^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) [T(\ddot{\mathbf{U}})] &= -\Delta t^2 (\gamma - 0.5) (2\beta - \gamma) T([\ddot{\mathbf{U}}]) \\ &+ (\langle \mathbf{F}_{\text{int}} \rangle^T + (\gamma - 0.5) [\mathbf{F}_{\text{int}}]^T) [\mathbf{U}] \\ &+ (\langle \mathbf{F}_{\text{ext}} \rangle^T + (\gamma - 0.5) [\mathbf{F}_{\text{ext}}]^T) [\mathbf{U}] \end{aligned} \quad (1.81)$$

L'équation (1.81) est utilisée section 4.3.3 afin d'évaluer la dissipation d'énergie due aux transferts de champs entre deux pas de temps.

1.3.3 Système d'équations discrétisé final

Le système d'équations présenté table 1.1 est repris sous forme discrétisée ci-dessous et doit être résolu à chaque piquet de temps du maillage temporel. On note \mathbf{x} les coordonnées d'un noeud du maillage \mathcal{M} .

Les conditions limites sont prises en compte aux noeuds de la frontière $\partial\mathcal{M}$ à chaque instant discrétisé t_n . On note respectivement $\partial\mathcal{M}_U$ et $\partial\mathcal{M}_F$ les frontières du maillage sur lesquelles sont appliquées des conditions limites en déplacement et en effort :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{M}_U \quad (1.82)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{M}_F \quad (1.83)$$

Les conditions initiales sont transposées de manière directe sous forme discrétisée.

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, 0) \quad (1.84)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}, 0) \quad (1.85)$$

En utilisant les forces introduites par les équations (1.53) et (1.54), et en notant \mathbf{F}_{acc} les forces induites par le produit de la matrice de masse et du vecteur des accélérations généralisées, l'équation d'équilibre discrétisée est écrite sous la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{acc}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (1.86)$$

Les conditions aux limites en déplacements sur la frontière $\partial\mathcal{M}_U$ sont intégrées à la formulation de l'équilibre du problème en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Un terme additionnel dit de liaison est adjoint aux forces externes :

$$\mathbf{F}_{\text{lia}} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (1.87)$$

On montre que les multiplicateurs de Lagrange correspondent aux actions dans les liaisons servant à imposer les conditions limites en déplacement sur les inconnues nodales. \mathbf{C} est la matrice, dite de contraintes, telle que :

$$\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad (1.88)$$

L'équilibre est alors écrit sous la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{acc}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{lia}} = 0 \quad (1.89)$$

Les différentes quantités cinématiques intervenant dans la relation d'équilibre sont liées entre elles par le schéma d'intégration numérique de Newmark. En utilisant les prédicteurs du schéma définis par les équations (1.67) et (1.68), on rappelle que :

$$\mathbf{U}_{n+1} =^P \mathbf{U}_n + \beta\Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.90)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} =^P \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (1.91)$$

Enfin, en chaque point de Gauss, les déformations sont calculées en utilisant la matrice des gradients et la relation de comportement est intégrée par un algorithme de type retour radial sur le seuil présenté annexe A.

1.4 Synthèse

Ce chapitre présente le système d'équations étudié dans ce mémoire. Les équations du problème continu sont brièvement rappelées section 1.1. Le formalisme de présentation retenu permet la prise en compte de différents type de non-linéarités rencontrées en mécanique des structures.

La formulation de ces différentes non-linéarités est rappelée section 1.2. On ne s'intéressera dans la suite de ce mémoire qu'au non-linéarités de comportement. Les possibilités d'extension de nos travaux aux autres types de non-linéarités sont envisagées en conclusion de ce mémoire.

La section 1.3 s'intéresse aux méthodes de discrétisation en espace et en temps permettant d'obtenir les formulations semi-discrétisées et discrétisées. Les équations de la

méthode des éléments finis et le schéma d'intégration en temps de Newmark sont rappelés afin de présenter le système d'équation discrétisé final.

Par la suite, l'équation d'équilibre non-linéaire (1.89) sera synthétisée par l'équation (1.92). L'opérateur \mathcal{L} est un opérateur non-linéaire dépendant du vecteur d'état discrétisé \mathcal{S} auquel sont adjoints les multiplicateurs de Lagrange utilisés pour d'imposer les conditions limites en déplacement :

$$\mathcal{L} \langle \mathcal{S} \rangle = \mathbf{F} \quad (1.92)$$

En pratique, l'équilibre est résolu en considérant une unique quantité cinématique et les autres équations du système discrétisé (équations du schéma de Newmark, retour radial sur le seuil, ...) sont utilisées afin de mettre à jour l'ensemble du vecteur d'état.

Chapitre 2

Calcul numérique en dynamique non-linéaire des structures

Dans ce second chapitre, on présente un état de l'art des méthodes dédiées à la résolution de problèmes non linéaires de grande taille. L'estimation de l'erreur, l'adaptabilité et les solveurs sont présentés succinctement.

Sommaire

2.1	Estimation de l'erreur	30
2.1.1	Origine des erreurs	30
2.1.2	Erreur de discrétisation en espace	31
2.1.3	Erreur de discrétisation en temps	35
2.2	Maîtrise de la précision	37
2.2.1	Maîtrise de la précision en espace	37
2.2.2	Maîtrise de la précision en temps	40
2.2.3	Maîtrise de la précision espace-temps	41
2.3	Opérateurs de changement d'échelle	44
2.3.1	Transfert des quantités interpolantes	45
2.3.2	Transfert des quantités non interpolées	47
2.4	Stratégies itératives de résolution non-linéaire	49
2.4.1	Solveur de Newton	49
2.4.2	Gradient conjugué non-linéaire	52
2.5	Stratégies multigrilles	53
2.5.1	Principe	54
2.5.2	Schémas multigrilles en non-linéaire	57
2.6	Synthèse	61

2.1 Estimation de l'erreur

Depuis les débuts de la modélisation numérique en mécanique des structures, une attention particulière a toujours été portée à la quantification des erreurs. En dynamique, cette erreur peut être découpée en une erreur en espace et une erreur en temps.

2.1.1 Origine des erreurs

Suivant les hypothèses simplificatrices utilisées afin de calculer la solution approchée du problème de référence, on peut distinguer plusieurs sources d'erreur introduites vis-à-vis du comportement exact de la structure réelle. La figure 2.1 synthétise ces erreurs.

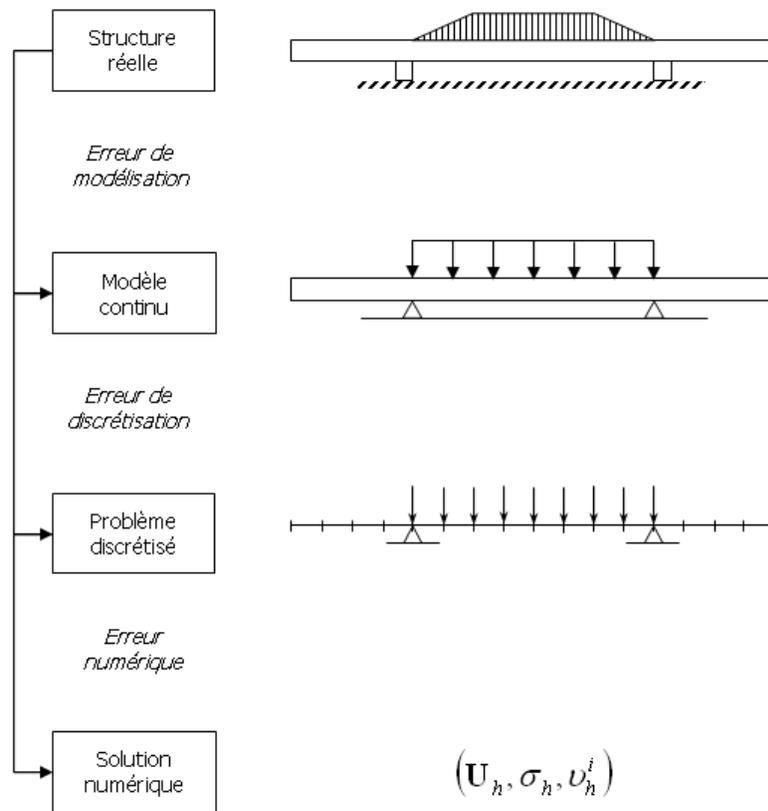


FIG. 2.1: Synthèse des sources d'erreur introduites dans la modélisation

La modélisation mathématique du problème physique (isotropie du matériau, relation de comportement, conditions limites) peut négliger certains phénomènes mécaniques particuliers et introduire une *erreur de modélisation*.

La présence d'une *erreur de discrétisation* est intrinsèque aux méthodes numériques, où un modèle continu est discrétisé. Les degrés de liberté en espace et en temps ne sont pas à même de décrire toutes les informations issues d'équations aux dérivées partielles continues.

Enfin, la résolution numérique du problème en non-linéaire est rarement réalisée jusqu'à convergence et une *erreur numérique* liée à la tolérance sur le solveur itératif est introduite. Celle-ci est par ailleurs limitée par la précision machine de l'ordinateur utilisé.

On ne s'intéresse ici qu'à l'erreur de discrétisation. La question de la représentativité de la solution vis-à-vis de la réalité n'est pas abordée dans cette recherche. Les erreurs numériques et de modélisation sont respectivement liées aux tolérances sur le solveur non-linéaire utilisé et à l'(in)expérience de la personne modélisant le problème.

Cette erreur peut être mesurée à l'aide d'indicateurs d'erreur ou d'estimateurs d'erreur. Les premiers sont utilisés afin de comparer la solution sur deux maillages de raffinement différents et ainsi estimer la qualité de la solution éléments finis obtenue. Les seconds ont pour but d'estimer directement l'erreur de discrétisation entre la solution éléments finis et la solution exacte du problème. Ils sont généralement plus coûteux à construire, mais fournissent une estimation plus précise de l'erreur de discrétisation.

2.1.2 Erreur de discrétisation en espace

Cette section est dédiée à l'étude de l'erreur de discrétisation spatiale ε_h induite par la discrétisation éléments finis à un instant donné t_n . Pour simplifier le formalisme d'écriture, l'indice n sera omis dans la suite de cette section.

Cette erreur est écrite comme la norme de la différence entre la solution exacte du problème, notée \bullet_{ex} et la solution éléments finis associée, notée \bullet_h . Le choix de la norme dépend de la grandeur x que l'on souhaite contrôler : scalaire, vectorielle, ou tensorielle.

$$\varepsilon_h = \|x_{ex} - x_h\| \quad (2.1)$$

Comme la solution exacte du problème est inconnue au moment où le calcul est réalisé, on s'intéresse à des méthodes d'encadrement ou d'évaluation de l'erreur de discrétisation une fois le calcul réalisé, c'est à dire *a posteriori*. Les estimateurs d'erreur *a posteriori* peuvent être divisés en trois grandes familles : les estimateurs résiduels, les estimateurs en relation de comportement et les estimateurs basé sur un lissage des contraintes. Ceux-ci fournissent respectivement une approximation notée ε_σ , ε_{rdc} et ε_{Z^2} de l'erreur de discrétisation ε_h .

Pour simplifier leur présentation, nous présentons dans cette section les trois approches dans le cadre d'un problème d'élasticité. L'état de l'art de leur extension pour les problèmes non-linéaires, qui est le cadre principal de notre travail, est développé à la fin de chacune de ces sections. La bibliographie présentée ici, loin d'être exhaustive, peut être complétée en consultant [AIN 97], [LAD 98] ou [LAD 01].

2.1.2.1 Estimateur résiduel

Le premier estimateur d'erreur a été proposé par Babuška et al. [BAB 78]. Le champ de contraintes éléments finis ne vérifie pas les équations d'équilibre :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{b} \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} \neq \mathbf{F}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{M}_F \quad (2.3)$$

La qualité de la solution peut donc être estimée localement en utilisant les résidus des équations d'équilibre associées à chaque élément E du maillage. L'estimateur d'erreur fait donc intervenir les résidus élémentaires des équations d'équilibre et le saut des contraintes aux interfaces des éléments.

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) + \mathbf{b} = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_{ex}) \quad \forall \mathbf{x} \in E \quad (2.4)$$

$$\mathbf{t}_h = \boldsymbol{\sigma}_h|_E \cdot \mathbf{n}_E - \phi_{\Gamma_E} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_E \quad (2.5)$$

Γ_E représente la frontière de l'élément E de normale \mathbf{n}_E . La fonction ϕ_{Γ_E} est définie en tout point de la frontière de l'élément où ne sont pas appliquées de conditions limites de Dirichlet. Elle représente les forces agissant sur la frontière de l'élément et est exprimée en fonction des forces externes ou de la contrainte sur un élément E' adjacent à E :

$$\phi_{\Gamma_E} = \mathbf{F}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_E \cup \partial\mathcal{M}_F \quad (2.6)$$

$$\phi_{\Gamma_E} = -\boldsymbol{\sigma}_h|_{E'} \cdot \mathbf{n}_E \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_E \cap \partial\mathcal{M}_F \quad (2.7)$$

L'erreur sur la contrainte s'écrit alors sous forme intégrale et est solution de :

$$\int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega = \sum_E \left(\int_{\Omega_e} -\mathbf{r}_h^T \mathbf{u}^* d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{t}_h^T \mathbf{u}^* dS \right) \right) \quad (2.8)$$

L'erreur en contrainte est donc solution d'un problème mécanique où les données en effort sont les résidus des équations d'équilibre. Une approximation de l'erreur ε_h peut alors être donnée sous la forme :

$$\varepsilon_\sigma = \left[\sum_E |\Omega_e| \|\mathbf{r}_h\| + \sum_{\Gamma_e} |\Gamma_e| \|\mathbf{t}_h\| \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

Où $|\bullet|$ désigne la mesure de la surface ou du volume.

Des études numériques ont permis de tester l'efficacité de cette estimateur et montrent que son comportement dépend fortement de la topologie du maillage [BAB 92], [BAB 94]. Cet estimateur sous-estime l'erreur exacte. Un développement de l'estimateur résiduel, dit résiduel équilibré, est proposé dans [AIN 97]. L'extension au cadre non-linéaire est proposé pour la première fois dans [BAB 82] et la méthode est généralisée dans [HUE 00].

2.1.2.2 Estimateur en relation de comportement

Le concept d'erreur en relation de comportement a été introduit dans [LAD 75] et a été étendu à la dynamique transitoire non-linéaire dans [LAD 86]. Cet estimateur repose sur la séparation du système d'équations en deux groupes :

- Les équations dites d'admissibilité (équations de liaison et d'équilibre)
- La relation de comportement

On considère un vecteur d'état cinématiquement admissible (dérivable, vérifiant les conditions initiales et les conditions limites en déplacement) et statiquement admissible (vérifiant l'équilibre et les conditions limites en effort) noté \mathcal{S}_{ad} . Si ce vecteur d'état vérifie également la relation de comportement, alors il est la solution exacte du problème de référence. Sinon, on estime la qualité de la solution \mathcal{S}_{ad} en utilisant la norme du résidu en relation de comportement. Dans le cas d'un matériau élastique :

$$r_{rdc} = \|\sigma_{SA} - \mathbf{K}\epsilon_{CA}\| \quad (2.10)$$

Où σ_{SA} représente une contrainte admissible et ϵ_{CA} une déformation admissible. L'estimateur d'erreur est construit pour chaque élément E comme :

$$\epsilon_{rdc} = \frac{\|\sigma_{SA} - \mathbf{K}\epsilon_{CA}\|_E}{\frac{1}{2} \left(\|\sigma_{SA}\|_E^2 + \|\mathbf{K}\epsilon_{CA}\|_E^2 \right)} \quad (2.11)$$

Avec $\|\bullet\|$ la norme énergétique.

Toute la méthode repose sur la construction de ce vecteur d'état \mathcal{S}_{ad} à partir de la solution discrétisée \mathcal{S}_h . Les déformations cinématiques admissibles sont en général prises égales aux déformations issues du calcul éléments finis puisqu'elles sont issues d'une formulation éléments finis en déplacement et donc, a priori, exactes. Le point clé de la méthode réside dans la construction du champ de contrainte statiquement admissible σ_{SA} .

La construction de ce champ est réalisée en utilisant une condition dite de prolongement admissible [LAD 01]. Elle consiste à construire un problème équivalent permettant d'assurer la continuité du vecteur contrainte et son admissibilité statique. Éléments par élément, on détermine la densité d'effort \mathbf{F}_E sur les frontières Γ_E permettant d'assurer la continuité du vecteur contrainte à l'interface ainsi que l'équilibre avec les forces volumiques \mathbf{b} . Pour ce faire on définit sur chaque interface de l'élément E une fonction α_E valant ± 1 et telle qu'à l'interface entre les éléments E et E' on ait : $\alpha_E + \alpha_{E'} = 0$. La densité d'effort \mathbf{F}_E est alors solution de :

$$\int_E \mathbf{b}\mathbf{u}_s dE + \int_{\Gamma_E} \alpha_E \mathbf{F}_E \mathbf{u}_s dS = 0 \quad (2.12)$$

Où \mathbf{u}_s désigne un champ de déplacement de corps rigide. Le champ de contrainte admissible permettant d'équilibrer ces densités d'effort d'interface est calculé élément par élément par les équations (2.13) et (2.14) :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_{SA}^E) + \mathbf{b} = 0 \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{SA}^E \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_E} = \alpha_E \mathbf{F}_E \quad (2.14)$$

Cet estimateur fournit une surestimation de l'erreur exacte ε_h , notamment dans le cas linéaire [LAD 01]. Son utilisation est directement généralisable à tout type de comportement, ce qui le rend très attractif pour des comportements non-linéaires complexes. Cet estimateur a, par exemple, été utilisé avec succès dans des cas élastoplastiques [LAD 86] ou viscoplastiques [LAD 99].

2.1.2.3 Estimateur basé sur le lissage des contraintes

La dernière famille d'estimateur a été proposée par Zienkiewicz et Zhu [ZIE 87]. Tout comme dans pour l'estimateur proposé dans [BAB 78], le déséquilibre des contraintes à l'interface entre deux éléments finis est considéré. L'idée principale de cette méthode consiste à remplacer la contrainte exacte dans le calcul de l'erreur par une solution régularisée $\boldsymbol{\sigma}^*$. L'erreur est alors calculée en chaque point de Gauss par :

$$\varepsilon_{Z^2} = \|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h\| \quad (2.15)$$

Il s'agit donc de définir une méthode de calcul du champ lissé de manière à ce que l'erreur ainsi approximée approche au mieux l'erreur exacte ε_h du problème. La première méthode proposée par Zienkiewicz et Zhu consiste à interpoler les contraintes aux noeuds des éléments finis et à utiliser les fonctions de formes des éléments pour construire le champ de contrainte lissé sur l'ensemble de la structure.

La valeur des contraintes aux noeuds est calculée en utilisant, par exemple, une méthode de minimisation des moindres carrés :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \min \left(\int_{\Omega} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^* - \underline{\boldsymbol{\sigma}}_h)^2 d\Omega \right) \quad (2.16)$$

Où $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_h$ désigne la solution interpolée depuis les points de Gauss et $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*$ désigne la contrainte lissée calculée par l'équation suivante :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^*(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^*(t) \cdot \phi_i(\mathbf{X}) \quad (2.17)$$

Dans [ZIE 92a],[ZIE 92b] une nouvelle stratégie de calcul du champ lissé $\boldsymbol{\sigma}^*$, appelée technique de recouvrement SPR (Super Patch Recovery), est proposée. La construction du champ lissé y est réalisée par patch d'éléments, limitant ainsi le caractère global du problème. Les fonctions de forme éléments finis utilisées pour lisser les contraintes sont remplacées par des fonctions polynomiales propres à chaque patch d'éléments. Elles sont construites sur des points d'échantillonnage qui peuvent éventuellement ne pas coïncider avec les noeuds du maillage. La contrainte lissée est calculée en minimisant l'écart avec la contrainte éléments finis par une méthode des moindres carrés par patch d'éléments.

Depuis sa création, l'estimateur Z^2 a fait l'objet de nombreux développements dont il est difficile de dresser un inventaire. Dans le cadre non-linéaire, on pourra par exemple citer [BOR 99] qui présente une stratégie adaptative dans le cadre de l'élastoplasticité ou [WRI 98] qui utilise cet estimateur d'erreur dans le cadre des problèmes de contact.

2.1.3 Erreur de discrétisation en temps

Si l'estimation d'erreur en espace a bénéficié d'un large développement dans la littérature, l'estimation de l'erreur en temps est moins courante. Or en dynamique, d'un point de vue numérique, une erreur de discrétisation temporelle est également induite par l'utilisation du schéma d'intégration en temps. Cette erreur peut dominer l'erreur de discrétisation en espace lors de l'utilisation de schéma implicites à grands pas de temps.

Les estimateurs présentés précédemment pour évaluer l'erreur de discrétisation en espace ont été étendus à la modélisation des structures en dynamique transitoire. Leur présentation détaillée peut être trouvée dans [ZIE 91], [WIB 93], [LAD 01]. Néanmoins, seul l'estimateur d'erreur en relation de comportement permet de découpler les contributions des discrétisations spatiale et temporelle dans l'erreur totale [LAD 03].

D'autres estimateurs ont donc été introduits pour quantifier l'influence de la discrétisation temporelle sur l'erreur en dynamique. Cette erreur en temps est composée d'une erreur dite locale, qui correspond à l'erreur induite par le schéma d'intégration sur le pas de temps considéré, et d'une erreur dite globale, vue comme l'accumulation de l'erreur en temps sur les pas de temps précédents [NEU 01].

2.1.3.1 Estimateur résiduel au point milieu

Hibbit et al. [HIB 79] proposent d'évaluer la qualité de la discrétisation temporelle, pour les schémas de Newmark, en calculant la norme du résidu en équilibre au point milieu de l'intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$ en fonction des solutions calculées à chaque extrémité de ce pas. En effet, si l'équation d'équilibre est vérifiée aux piquets de temps discrétisés, rien n'assure la qualité de l'équilibre obtenu aux instants intermédiaires.

Cet estimateur est basée sur l'hypothèse que les accélérations varient de façon linéaire sur l'intervalle de temps, de sorte que l'accélération en tout instant de l'intervalle $[t; t + \Delta t]$ peut être évalué par :

$$\ddot{\mathbf{U}}(t + \tau\Delta t) = (1 - \tau)\ddot{\mathbf{U}}(t) + \tau\ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) \quad (2.18)$$

En combinant cette équation aux équations du schéma de Newmark (1.65) et (1.66), il est possible d'évaluer les déplacements et vitesses en tout instant de l'intervalle $[t; t + \Delta t]$ et donc d'évaluer le résidu en équilibre au point milieu. L'estimateur d'erreur est alors normé en utilisant la valeur \mathbf{F}_{int} des forces internes induites dans le mécanisme.

$$\varepsilon_{T_1} = \frac{\|\mathbf{R}(t + 0.5\Delta t)\|}{\|\mathbf{F}_{\text{int}}(t + 0.5\Delta t)\|} \quad (2.19)$$

Cette méthode a été utilisée de manière à automatiser le choix du pas de temps pour les schémas implicites de Newmark dans [ABA 04]. Lorsque la valeur du résidu au point milieu dépasse une tolérance fixée par l'utilisateur, le pas de temps est sous-découpé et un nouveau calcul est réalisé. Néanmoins, le calcul du résidu au point milieu est une opération qui peut s'avérer coûteuse en non-linéaire.

2.1.3.2 Estimateurs basés sur l'erreur de troncature du développement de Taylor

L'erreur de troncature dans les développements de Taylor (1.63) et (1.64) a conduit au développement de deux estimateurs : les premiers utilisent un développement limité d'ordre 1 des accélérations pour évaluer l'erreur de troncature tandis que les seconds utilisent directement un développement limité d'ordre supérieur pour les quantités cinématiques [NOE 02].

La première approche, qui permet d'évaluer l'erreur locale en temps pour le schéma de Newmark, est utilisable indifféremment pour les problèmes linéaires et non-linéaires. Etant donné que les développements de Taylor utilisés pour les quantités cinématiques ne prennent pas en compte les termes du troisième ordre, l'erreur est d'ordre $(\frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{U}^{(3)})$. En utilisant un développement limité d'ordre un des accélérations, il vient :

$$\varepsilon_{T_2} = \frac{\Delta t^2}{6} \|\Delta \ddot{\mathbf{U}}\| \quad (2.20)$$

Des expressions comparables, faisant intervenir les accélérations et les paramètres du schéma de Newmark, sont proposées dans [WIB 93] et [HUL 95]. La différence entre ces estimateurs réside principalement dans le choix du paramètre d'adimensionnalisation.

La seconde méthode propose de calculer la différence entre la valeur calculée au pas de temps courant et la valeur obtenue en utilisant un développement de Taylor d'ordre supérieur [NEU 01].

$$\mathbf{U}_{n+1} = \sum_{i=0}^4 \frac{\Delta t^i}{i!} \mathbf{U}_n^{(i)} + o(\Delta t^5) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \sum_{i=0}^3 \frac{\Delta t^i}{i!} \dot{\mathbf{U}}_n^{(i)} + o(\Delta t^4) \quad (2.21)$$

En utilisant la formule des différences centrées pour approximer les termes d'ordre supérieurs à 2, le schéma fait intervenir plusieurs pas de temps afin de construire l'approximation courante. L'erreur au pas de temps $(n+1)$ peut alors être formulée en déplacements ou en vitesses par les équations :

$$\varepsilon_{T_2}^{\mathbf{U}^{n+1}} = \frac{\Delta t^2}{24} (\ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + (2 - 24\beta) \ddot{\mathbf{U}}_n + (24\beta - 3) \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}) + o(\Delta t^5) \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{T_2}^{\dot{\mathbf{U}}^{n+1}} = \frac{\Delta t}{12} (\dot{\mathbf{U}}_{n-1} + (4 - 12\gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + (12\gamma - 5) \dot{\mathbf{U}}_{n+1}) + o(\Delta t^4) \quad (2.23)$$

Cet estimateur d'erreur donne de meilleurs résultats que les estimateurs basés sur l'erreur de troncature mais nécessite de conserver les données sur deux pas de temps ce qui le rend plus coûteux en terme d'occupation mémoire.

2.2 Maîtrise de la précision

La capacité à estimer les erreurs en espace et/ou en temps a permis aux chercheurs de s'intéresser à des stratégies adaptatives ou multiéchelles permettant, connaissant l'erreur de discrétisation, d'optimiser le maillage en espace et/ou en temps de manière à atteindre une précision donnée.

2.2.1 Maîtrise de la précision en espace

Afin de traiter des problèmes de dimensions importantes, un certain nombre de stratégies a été proposé pour traiter les problèmes ou différentes échelles sont nécessaires pour discrétiser l'espace. On distingue deux grandes familles de stratégies de résolution :

- Les *méthodes de décomposition de domaine* proposent de diviser la structure en un ensemble de sous-structures et de découpler la résolution sur chacune d'entre elles en proposant des conditions de raccord aux interfaces. Elles nécessitent de bien connaître la nature des phénomènes physiques modélisés de manière à optimiser les dimensions des maillages en espace en amont du calcul.
- Les *méthodes adaptatives* utilisent un pré-calcul de manière à établir une carte d'erreur sur la structure à l'aide des estimateurs d'erreur définis section 2.1.2. Puis, elles proposent d'enrichir le maillage localement en terme de nombre d'éléments et/ou de degré des fonctions de forme afin de réduire cette erreur. Leur principal défaut réside dans ce pré-calcul nécessaire à l'initialisation de la méthode.

2.2.1.1 Méthodes de décomposition de domaine

Ces méthodes sont de plus en plus courantes depuis l'avènement des calculateurs à architectures parallèles. Elles permettent de découpler le calcul sur la structure en un ensemble de calculs sur des sous-domaines reliés par des interfaces.

Deux grandes familles de méthodes existent : les méthodes avec recouvrement de domaine et les méthodes sans recouvrement de domaine (cf. figure 2.2). Les premières sont très utilisées pour les simulations faisant intervenir des couplages multi-physiques. L'interface Γ_{12} entre les sous-domaines a alors la même dimension que les sous-structures. Pour les secondes, la dimension de l'interface est réduite à $(d - 1)$ (où d représente la dimension du problème). Elles sont plus courantes lorsque le comportement de chaque sous-structure est modélisé dans le même cadre mathématique. Pour chacune de ces méthodes, le choix des quantités utilisées pour le raccord d'interface conditionne le comportement de la méthode de décomposition de domaine.

Elles sont dites *primales* si le raccord est effectué en utilisant les inconnues cinématiques, *duales* pour un raccord en effort et *mixtes* lorsque l'interface fait intervenir les deux quantités sous la forme d'un comportement d'interface.

Les méthodes primales [ROU 90], [DER 92] sont basées sur une condensation du problème à l'interface. Après renumérotation des inconnues du problème, le système est écrit en ne faisant intervenir que les quantités cinématiques à l'interface ou la continuité des

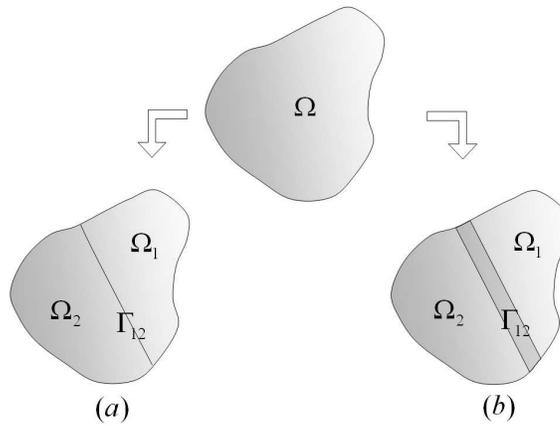


FIG. 2.2: Illustration des méthodes de décomposition de domaine. (a) méthodes sans recouvrement, (b) méthodes avec recouvrement

déplacements est imposée entre les sous-domaines. Les déplacements sur chaque sous-structure sont obtenus en post-traitement en résolvant un problème équivalent faisant intervenir les quantités d'interface dans le second membre.

Les méthodes duales [FAR 91] consistent à ne plus travailler sur les champs cinématiques aux interfaces et de leur préférer les champs d'efforts. La contrainte de continuité cinématique peut être dualisée en utilisant des multiplicateurs de Lagrange. C'est donc l'équilibre en effort qui est vérifié à l'interface. C'est à cette famille de méthodes qu'appartient la méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) [FAR 98] qui permet de recoller des maillages spatiaux et temporels de raffinement différents.

La dernière approche, dite mixte, utilise des formulations de type Lagrangien augmenté [GLO 90]. L'approche proposée dans [LAD 85] consiste à ne vérifier de manière forte ni la continuité des déplacements, ni celle des efforts. Les interfaces sont alors des entités physiques possédant leurs propres relations de comportement et leurs propres inconnues. Ces méthodes sont très utiles dans le cas d'assemblages mécaniques où les interfaces possèdent des comportements plus complexes que des liaisons parfaites, telles que des interfaces frottantes, et font intervenir les quantités primales et duales dans le modèle de comportement.

2.2.1.2 Méthodes adaptatives

Le fonctionnement de ces méthodes est le suivant : à partir d'un premier calcul sur un maillage éléments finis (généralement assez grossier), les estimateurs d'erreur présentés section 2.1.2 sont utilisés afin de déterminer une cartographie de l'erreur sur la structure. En fonction de la précision requise par l'utilisateur, le maillage est adapté afin d'enrichir les éléments finis dans les zones où l'erreur n'est pas atteinte localement.

La stratégie est éventuellement appliquée de manière récursive si la précision demandée n'est pas atteinte sur l'ensemble de la structure à la fin de la première étape de remaillage. Les méthodes adaptatives sont décomposées en quatre familles : les méthodes

h-adaptatives, p-adaptatives, r-adaptatives et s-adaptatives (cf. figure 2.3). Une combinaison entre ces différentes méthodes peut être utilisée. On parle alors par exemple de méthodes hp-adaptatives ou hr-adaptatives.

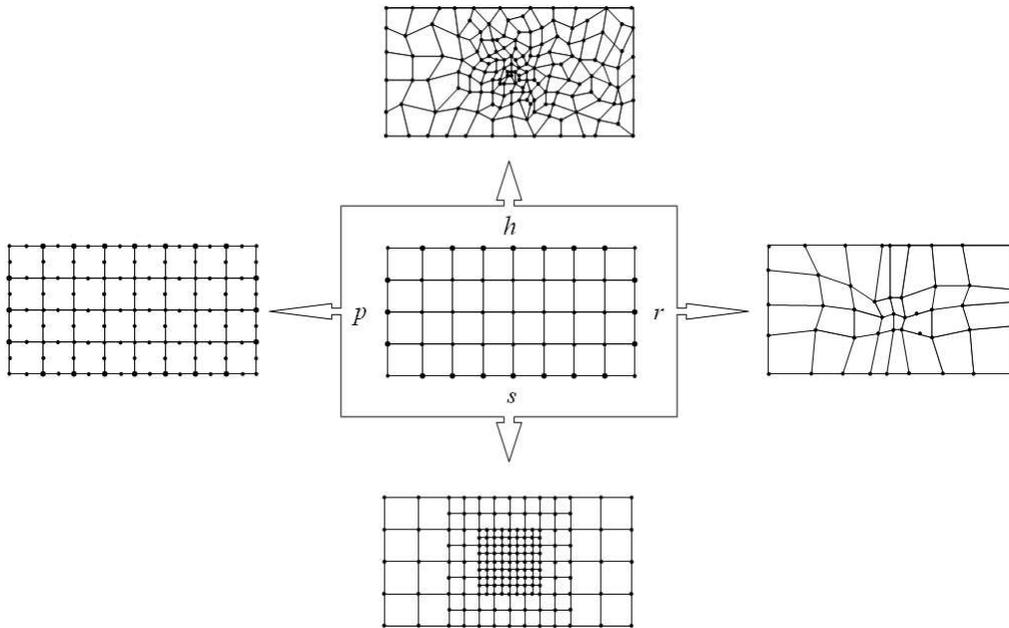


FIG. 2.3: Adaptation de maillage, cas bi-dimensionnel

Les r-méthodes améliorent la qualité de la solution en optimisant la position des noeuds sur le maillage. La connectivité du maillage reste inchangée mais les noeuds du maillage éléments finis sont déplacés dans les zones où l'erreur est trop importante. L'amélioration de la précision est limitée par le nombre de degrés de liberté initial du maillage et par la distorsion des éléments.

Les méthodes p-adaptatives [BAB 81] [BAS 83] augmentent le degré d'interpolation des fonctions de forme éléments finis de manière à améliorer la précision du calcul. Elles conservent la topologie du maillage. Son implantation est souvent difficile dans la plupart des codes de calcul éléments finis car les fonctions de forme sont souvent associées aux éléments finis utilisés.

Les h-méthodes [CRA 89] [LEE 94] adaptent le maillage en augmentant le nombre de degrés de liberté. La création du nouveau maillage se fait alors soit en remaillant l'intégralité de la structure, auquel cas la topologie du maillage n'est pas conservée, soit en subdivisant les éléments du maillage initial, auquel cas des noeuds sont ajoutés récursivement dans les zones où l'estimateur d'erreur juge la solution insuffisamment précise.

La dernière famille, appelée s-adaptation, a été introduite dans [FIS 92]. Elle consiste à superposer des maillages additionnels de dimension caractéristique plus réduite dans les zones où le calcul n'est pas suffisamment précis pour effectuer la résolution. Elle s'apparente aux méthodes multigrilles localisées (cf. section 3.2.2).

Pour les méthodes mixtes, on pourra citer par exemple les méthodes hp-adaptatives

[ZIE 89], [BAB 90] qui sont largement répandues. Elles consistent à répartir dans un premier temps les noeuds des éléments par la méthode h afin d'uniformiser l'erreur sur la structure. Puis la méthode p est utilisée afin d'augmenter la précision de l'interpolation sur les éléments finis et réduire cette erreur. Cette méthode est plus performante que la méthode h -adaptative dans le sens où elle nécessite un nombre moins important de degrés de liberté pour atteindre la précision requise.

Certains travaux [BAB 90], [HUE 99], [KUO 06] comparent le comportement numérique de ces méthodes. Il apparaît que si la méthode r -adaptative est limitée en terme de précision, dans le sens où aucun noeud n'est ajouté, elle présente l'avantage d'être rapidement et facilement implantée. La méthode hp permet d'obtenir de bien meilleurs résultats mais induit des temps de calcul plus importants pour la phase d'adaptation.

2.2.2 Maîtrise de la précision en temps

L'adaptabilité temporelle a fait l'objet de moins d'études que l'adaptabilité spatiale mais reste un facteur important pour l'aboutissement des calculs dans le cadre de simulations en dynamique transitoire non-linéaire.

Les méthodes où le pas de temps est adapté de manière globale sur l'ensemble de la structure ont été les premières à être développées. Les méthodes de décomposition de domaine introduites section 2.2.1.1 ont été étendues au couplage de domaines de discrétisation temporelles différentes. Plus récemment, des méthodes permettant d'adapter de manière locale le pas de temps ont été proposées.

2.2.2.1 Méthodes de décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine ont été étendues à la modélisation multi-échelle en temps. Lors du couplage d'interfaces incompatibles en temps, la conservation de l'énergie doit être vérifiée à l'interface entre les sous-domaines pour éviter l'apparition d'instabilités ou de dissipations numériques éventuelles.

Dans [BEL 78], une méthode d'intégration temporelle a été développée de manière à permettre le couplage de schémas d'intégrations utilisant des pas de temps différents. Ces méthodes, dites de sous-cyclage, sont limitées en terme de ratio entre les échelles de temps des différents sous-domaines. La principale difficulté réside dans le couplage temporel de l'ensemble des inconnues cinématiques à l'interface. D'autres méthodes, dites mixtes, ont permis le couplage de schémas hétérogènes avec des pas de temps différents [LIU 82].

Des méthodes de décompositions de domaine basées sur la méthode FETI permettent le couplage de sous-domaines avec leur propres échelles de temps. La GC method [COM 02] a été développée afin de permettre le couplage de différents schémas d'intégration temporels de Newmark en imposant la continuité des vitesses à l'interface. Son fonctionnement a été testé en non-linéaire [GRA 01] et la stabilité de la méthode a été démontrée par la méthode énergétique [HUG 78] dans le cas de maillages temporels compatibles et incompatibles. Néanmoins, pour des échelles de temps différentes, il a été démontré que la méthode dissipe de l'énergie aux interface.

C'est pourquoi Prakash propose une amélioration de la méthode et développe la PH méthode [PRA 04] en imposant également la continuité des accélérations. Cette méthode de couplage de sous-domaines avec des pas de temps différents ce fait alors sans dissipation d'énergie aux interfaces lors de l'utilisation de schémas de Newmark.

Dans [MAH 09], une extension de la méthode au couplage de schémas numériques hétérogènes est proposée. Une réécriture des différents schémas d'intégration temporelle sous un formalisme général unique est présentée. En utilisant une formulation de Schur duale, une stratégie de couplage de sous-domaines pour la dynamique transitoire est développée. Celle-ci permet l'utilisation de grands ratios entre les échelles de temps.

2.2.2.2 Méthodes adaptatives

Des premiers travaux sur l'adaptabilité temporelle sont présentés dans [ZIE 91] et étendus par exemple dans [DUT 02]. L'erreur de discrétisation temporelle est traitée de manière globale sur l'ensemble de la structure. L'intervalle de temps T est découpé en sous-domaines temporels afin d'y adapter le pas de temps. Pour se faire les auteurs utilisent un estimateur d'erreur basé sur l'erreur de troncature du schéma de Taylor (cf. section 2.1.3.2). La stratégie adoptée, couplée à une méthode adaptative en espace, permet de contrôler la précision du vecteur d'état à chaque itération temporelle. On pourra également citer les travaux de Yue et al. [YUE 05] qui développent une stratégie s-adaptative en espace et adaptative en temps. Leur méthode s'apparente à la stratégie multigrilles présentée dans ce manuscrit dans le cadre de l'élastodynamique. La structure des données adoptée permet de limiter les erreurs d'interpolation entre pas de temps en dynamique.

Un schéma de Galerkin discontinu en temps est utilisé dans [LI 96]. Les quantités cinématiques sont alors discontinues entre chaque pas de temps. L'erreur en temps est estimée en considérant le saut des déplacements et des vitesses à chaque piquet de temps et en définissant un estimateur d'erreur énergétique. En fonction de cet estimateur, le pas de temps est ajusté en considérant l'ordre du schéma numérique utilisé.

Les travaux récents de Casadei et al. [CAS 09] présentent une méthode à pas de temps variable en espace pour la dynamique explicite. Un pas de temps local est utilisé pour chacun des éléments finis. En dynamique explicite, le pas de temps est soumis à une condition de stabilité CFL qui impose un pas de temps proportionnel à la dimension caractéristique du maillage spatial. Les auteurs proposent d'intégrer le comportement de chaque degré de liberté sur sa propre échelle de temps selon la dimension des éléments coïncidents à chaque noeud. Afin de faciliter l'implémentation de l'algorithme, le pas de temps est hiérarchique sur la structure.

2.2.3 Maîtrise de la précision espace-temps

On s'intéresse désormais aux stratégies où le raffinement de maillage en espace et en temps est local sur le domaine espace temps étudié. C'est à dire que la taille de maille spatiale et le pas temporel est variable sur l'ensemble du domaine espace temps.

2.2.3.1 Elements finis espace-temps

Les méthodes éléments finis de type Galerkin discontinu ont été étendues à la simulation de problème dynamiques et de propagation d'ondes [ERI 05]. Des éléments espace-temps sont alors définis de manière à décrire l'évolution spatiale et temporelle de la structure. L'avantage de ces méthodes est qu'un pas de temps local peut naturellement être pris en compte par l'algorithme étant donné que ces éléments espace-temps ne sont pas organisés par piquet de temps.

Les champs sont définis sur une discrétisation élément finis espace-temps dans un espace de dimensions $d + 1$ ou d est la dimension spatiale du problème. Les équations du problèmes sont également ré-écrites sur le domaine espace-temps complet $\Omega \times T$. Les méthodes adaptatives couplent alors automatiquement les discrétisations spatiales et temporelles. Néanmoins, la solution est approximée sur chaque élément fini espace-temps en utilisant des fonctions de forme discontinues et rien n'assure la continuité des quantités aux interfaces entre les éléments espace-temps.

La génération du maillage initial est réalisée par patch d'éléments (cf. figure 2.4). Depuis un maillage spatial d'instant 0 (plan d'un point de vue temporel), le front temporel est avancé de manière non-uniforme en utilisant des éléments espace-temps tétraédriques. Le temps sommet d'un tétraèdre est tiré à un instant ultérieur et la solution est calculée au degré de liberté espace-temps du maillage. Des problèmes de verrouillage peuvent apparaître si la génération récursive du maillage espace-temps est mal réalisée.

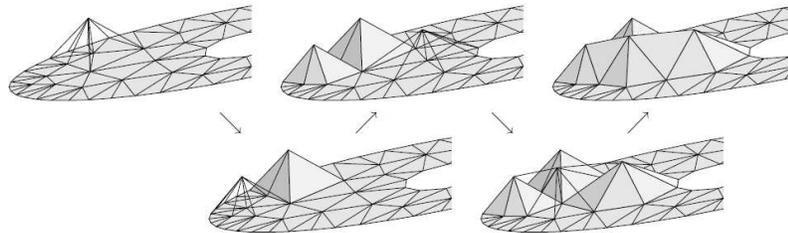


FIG. 2.4: Illustration de la construction du maillage espace-temps [ERI 05], les directions horizontales représentent l'espace et la direction verticale est la direction temporelle

Les méthodes de Galerkin discontinues ont été étendues dans le cadre des méthodes adaptatives par Abedi et al. [ABE 04], [ABE 06]. Une méthode h-adaptative basée sur l'estimation de la dissipation par élément est présentée. L'avantage est que l'adaptation peut être réalisée automatiquement en espace et en temps sur chaque élément espace-temps étant donné que la méthode de Galerkin discontinue supporte naturellement les incompatibilités de maillage. L'adaptation de maillage est réalisée directement au moment où le front temporel est construit. Si l'avancée du front provoque des erreurs trop importantes, l'élément espace-temps est rejeté et un sous-découpage est réalisé. Ces travaux ont été étendus à la modélisation non-linéaire des matériaux dans [THI 09].

2.2.3.2 Gestion des données espace-temps

Des travaux proposent de conserver des formulations et algorithmes de résolution standards utilisés en dynamique transitoire linéaire. La stratégie proposée dans [CAV 05b] repose sur une gestion des données espace-temps.

Les discrétisations spatiales et temporelles sont liées par l'intermédiaire d'éléments espace-temps (cf. figure 2.5). A partir d'un pré-calcul espace-temps grossier, un indicateur d'erreur est utilisé afin de raffiner hiérarchiquement l'espace et le temps dans les zones où la précision souhaitée n'est pas atteinte.

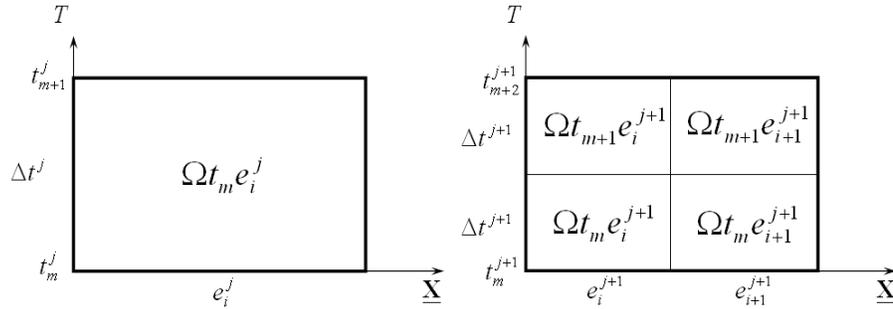


FIG. 2.5: Élément espace temps de niveau j relatif à l'élément fini i à l'instant t_m et éléments espace-temps hiérarchiques de niveau $j + 1$

Lorsque le raffinement devient local, la stabilité de la méthode est conditionnée par le choix des conditions aux limites sur le domaine espace-temps. Cavin et al. [CAV 05a] déterminent les conditions aux limites assurant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie aux interfaces espace temps par la méthode énergétique [HUG 78]. Les conditions limites à appliquer sur le domaine espace-temps sont synthétisées figure 2.6.

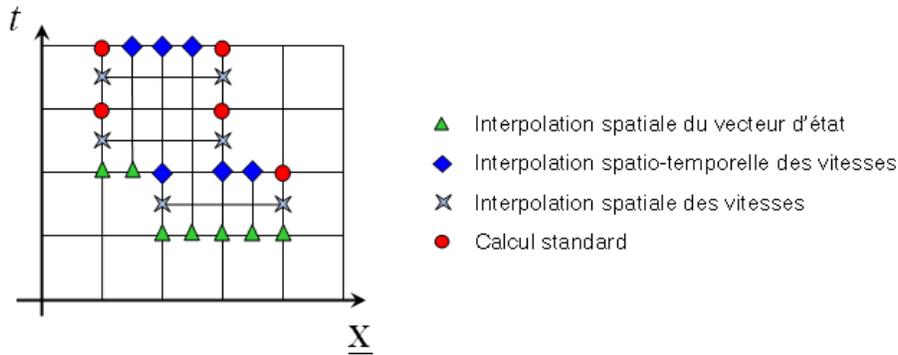


FIG. 2.6: Conditions limites espace-temps sur la frontière d'un niveau espace-temps localisé

L'espace et le temps sont raffinés hiérarchiquement de manière récursive et jusqu'à ce que la précision requise par l'utilisateur soit vérifiée sur l'ensemble de la structure. Cette méthode présente l'avantage d'être indépendante de l'utilisateur. Elle assure la précision

du vecteur d'état pour une tolérance donnée sans dissipation d'énergie aux interfaces espace-temps. Les auteurs montrent sur un exemple 1D que le couplage du raffinement en espace et en temps permet de suivre la propagation de l'onde dans le milieu.

2.3 Opérateurs de changement d'échelle

La mise en oeuvre des méthodes décrites précédemment en espace et/ou en temps nécessite le développement d'opérateurs de changement d'échelle. Ces étapes d'interpolation peuvent intervenir entre deux maillages au même pas de temps, comme c'est le cas par exemple lors de l'utilisation de stratégies multigrilles (cf. section 2.5), ou entre pas de temps, lorsque les maillages ne sont pas coïncidents entre deux instants successifs.

On utilise les dénominations introduites pour les stratégies multigrilles section 2.5. La présentation des opérateurs d'interpolation se fait en supposant l'existence de deux maillages de raffinement différents \mathcal{M}^k et \mathcal{M}^{k+1} , respectivement supposés "grossier" et "fin". La phase d'interpolation permettant de passer d'un maillage grossier à un maillage fin est nommée prolongation. L'opération d'interpolation adjointe du maillage fin vers le maillage grossier est nommée restriction. Le diagramme 2.7 synthétise le rôle de ces deux opérations dans le cadre des méthodes multiéchelles. *ILC* désigne l'intégration de la relation de comportement sur un maillage.

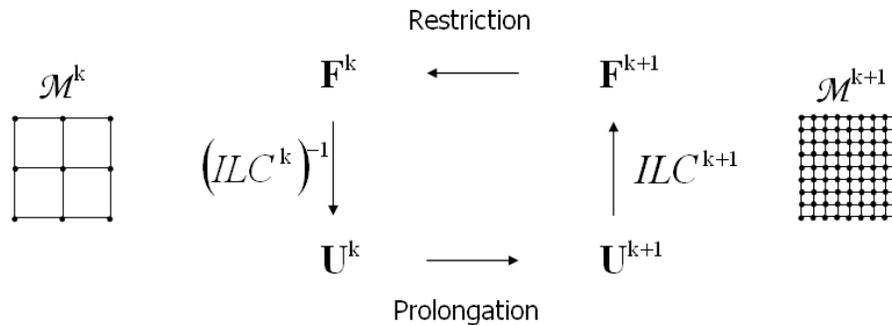


FIG. 2.7: Opérateurs de changement d'échelle

Les opérateurs utilisés dans ces phases d'interpolation sont souvent définis conjointement de telle sorte que le travail calculé sur les deux échelles soit invariant. En homogénéisation, on parle du critère de Hill-Mandel. Cette propriété se retrouve également lors de l'utilisation de méthodes multigrilles (cf. section 2.5) où les opérateurs de changement d'échelle sont associés à des conditions de conservation du crochet de dualité. Les opérateurs de transfert peuvent aussi être définis tels que les champs continuent à vérifier l'ensemble des équations (relation de comportement, équilibre, conditions limites) [PER 96].

2.3.1 Transfert des quantités interpolantes

On traite ici l'interpolation des variables discrétisées aux noeuds (déplacements, vitesses, accélérations, forces internes...). On note \mathbb{I}_k^{k+1} l'opérateur de projection des quantités nodales depuis le maillage de niveau k sur le maillage de niveau $(k+1)$ et \mathbb{I}_{k+1}^k l'opérateur de restriction.

2.3.1.1 Méthode de collocation

La méthode la plus simple pour transférer les quantités d'un maillage \mathcal{M}^k vers un maillage \mathcal{M}^{k+1} consiste à utiliser directement les fonctions de forme du maillage de niveau k pour construire les inconnues nodales du niveau $(k+1)$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'opération de prolongation. On considère de manière générique le transfert d'un champ $\underline{\mathbf{v}}$. Comme l'espace d'approximation élément fini associé au maillage grossier est inclus dans l'espace d'approximation du maillage fin, il est possible de préserver un champ continu $\underline{\mathbf{v}}^k$ défini sur le maillage grossier \mathcal{M}^k lors de son transfert vers le maillage de niveau $(k+1)$:

$$\underline{\mathbf{v}}^k(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{v}}^{k+1}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (2.24)$$

Le champ continu $\underline{\mathbf{v}}^k$ sur le maillage \mathcal{M}^k est discrétisé par la méthode des éléments finis par l'équation (1.50). On note \mathbf{V}^k le vecteur des inconnues nodales et $\underline{\phi}^k$ le vecteur des fonctions de formes associées. L'interpolation éléments finis permet de construire la valeur au noeud i du maillage \mathcal{M}^{k+1} , de coordonnées \mathbf{X}_i^{k+1} , du champ continu $\underline{\mathbf{v}}^k$:

$$\underline{\mathbf{v}}^k(\mathbf{X}_i^{k+1}) = \mathbf{V}^k \underline{\phi}^k(\mathbf{X}_i^{k+1}) \quad (2.25)$$

La méthode des éléments finis étant interpolante, la valeur de l'inconnue nodale \mathbf{V}_i^{k+1} au noeud i est égale à la valeur du champ continu $\underline{\mathbf{v}}^{k+1}$ en ce même point et on écrit :

$$\mathbf{V}_i^{k+1} = \underline{\mathbf{v}}^{k+1}(\mathbf{X}_i^{k+1}) = \underline{\mathbf{v}}^k(\mathbf{X}_i^{k+1}) = \mathbf{V}^k \underline{\phi}^k(\mathbf{X}_i^{k+1}) \quad (2.26)$$

Cette équation est appliquée à chaque noeud du maillage \mathcal{M}^{k+1} pour définir l'opérateur de prolongation \mathbb{I}_k^{k+1} . Le transfert réciproque dual consiste à construire l'opérateur de restriction. Celui-ci doit laisser invariant le travail des forces internes :

$$\langle \dot{\mathbf{U}}^k, \mathbf{F}_{int}^k \rangle = \langle \dot{\mathbf{U}}^{k+1}, \mathbf{F}_{int}^{k+1} \rangle \quad \text{où} \quad \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathbf{A}\mathbf{B}^T \quad (2.27)$$

En utilisant le fait que $\mathbf{F}_{int}^k = \mathbb{I}_{k+1}^k \mathbf{F}_{int}^{k+1}$ et $\mathbf{U}^{k+1} = \mathbb{I}_k^{k+1} \mathbf{U}^k$, l'opérateur de restriction des forces nodales est défini de la manière suivante :

$$\mathbb{I}_{k+1}^k = \left(\mathbb{I}_k^{k+1} \right)^T \quad (2.28)$$

Le problème principal de la définition de l'opérateur de restriction sous cette forme est qu'une perte des informations haute fréquence peut apparaître lors du passage du maillage fin vers le maillage grossier (cf figure 2.8).

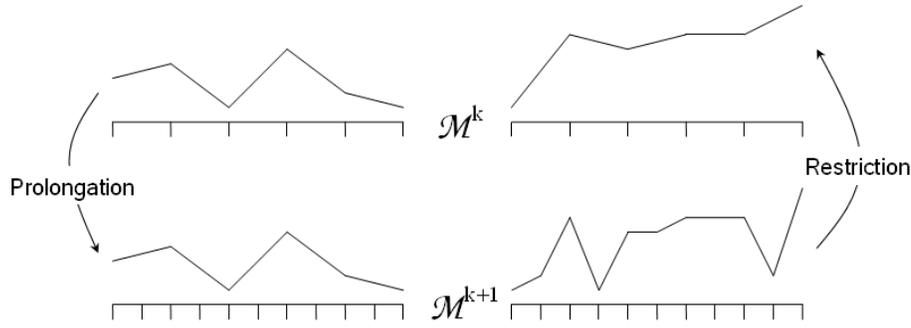


FIG. 2.8: Exemple de transfert de champs - Perte d'informations haute fréquence

Une technique de moyenne généralisée au sens de l'énergie [DUR 06] permet de définir l'opérateur de restriction de manière plus précise. Celui-ci est alors défini par :

$$\mathbb{I}_{k+1}^k = \mathbf{M}_k^{-1} \mathbb{I}_k^{k+1T} \mathbf{M}_{k+1} \quad (2.29)$$

Où les matrices \mathbf{M}_k et \mathbf{M}_{k+1} sont définies par l'intégration du produit des fonctions de formes sur le maillage (cf section 2.3.1.2). Cette méthode de construction permet de palier aux pertes d'informations hautes fréquence présentées ci-dessus mais est plus coûteuse dans le sens où elle nécessite l'inversion d'une matrice sur le niveau grossier.

Pour les quantités cinématiques, l'opération de restriction est réalisée par un opérateur d'injection aux noeuds coïncidents.

2.3.1.2 Opérateur de projection "mortar"

Les opérateurs de transfert peuvent être définis par une formulation en moyenne du transfert de champ. Afin de construire ces opérateurs, on écrit l'égalité des moyennes généralisées au sens des fonctions de forme du maillage de niveau $(k+1)$:

$$\int_{\mathcal{M}^{k+1}} \underline{\phi}^{k+1T} \underline{\mathbf{v}}^{k+1} d\Omega = \int_{\mathcal{M}^k} \underline{\phi}^{k+1T} \underline{\mathbf{v}}^k d\Omega \quad (2.30)$$

$$\int_{\mathcal{M}^{k+1}} \underline{\phi}^{k+1T} \underline{\phi}^{k+1} d\Omega \mathbf{V}^{k+1} = \int_{\mathcal{M}^k} \underline{\phi}^{k+1T} \underline{\phi}^k d\Omega \mathbf{V}^k \quad (2.31)$$

En définissant les matrices suivantes :

$$\mathbf{M}_{k+1} = \int_{\mathcal{M}^{k+1}} \underline{\phi}^{k+1T} \underline{\phi}^{k+1} d\Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{k,k+1} = \int_{\mathcal{M}^k} \underline{\phi}^{k+1T} \underline{\phi}^k d\Omega \quad (2.32)$$

et d'après la symétrie de la formulation, il vient :

$$\mathbb{I}_k^{k+1} = \mathbf{M}_{k+1}^{-1} \mathbf{M}_{k,k+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{I}_{k+1}^k = \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{M}_{k+1,k} \quad (2.33)$$

La construction de ces opérateurs nécessite donc des opérations d'inversion de matrices et est plus coûteuse que la méthode de collocation. Dans le cas de maillages imbri-

qués, l'opérateur de projection est identique à celui obtenu en utilisant les fonctions de formes.

2.3.2 Transfert des quantités non interpolées

Le transfert des quantités non interpolées (déformations, contraintes et, dans le cas de modèles élastoplastiques, variables internes) est réalisé par un opérateur noté \mathcal{J} . Les opérations de prolongation et de restriction seront notées respectivement \mathcal{J}_k^{k+1} et \mathcal{J}_{k+1}^k .

2.3.2.1 Transfert de champ par passage aux noeuds

La stratégie la plus courante consiste à effectuer la projection des champs définis aux points de Gauss élément par élément en utilisant les fonctions de forme [DUR 06]. On se place dans le cas d'une phase de prolongation d'un champ \mathbf{v}_G^k . L'indice k dénote l'appartenance du champ au maillage \mathcal{M}^k et l'indice G est utilisé pour décrire le fait que ce champ discrétisé est défini aux points de Gauss du maillage.

Ce champ est interpolé aux noeuds de l'élément pour former un champ \mathbf{v}_N^k . L'indice N précise la définition du champ aux noeuds du maillage. Cette interpolation est réalisée élément par élément de telle sorte qu'en chaque noeud soient définies autant de valeurs \mathbf{v}_N^k que d'éléments connectés à ce noeud. On note \mathcal{E}^k l'opérateur permettant de passer de l'ensemble des points d'intégration Ω_G^k à l'ensemble des noeuds Ω_N^k du maillage \mathcal{M}^k :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^k : \quad \Omega_G^k &\rightarrow \Omega_N^k \\ \mathbf{v}_G^k &\rightarrow \mathbf{v}_N^k = \mathcal{E}^k \mathbf{v}_G^k \end{aligned} \quad (2.34)$$

Cette opération de transfert peut par exemple être réalisée par une méthode des moindres carrés. Les procédures de transfert nodal présentées dans la section précédente sont ensuite utilisées. Le champ \mathbf{v}_N^k est transféré sur le niveau $(k+1)$ pour former le champ \mathbf{v}_N^{k+1} en utilisant l'opérateur \mathbb{I}_k^{k+1} :

$$\mathbf{v}_N^{k+1} = \mathbb{I}_k^{k+1} \mathbf{v}_N^k \quad (2.35)$$

Une fois le champ \mathbf{v}_N^{k+1} connu, celui-ci est interpolé aux points de Gauss du maillage de niveau $(k+1)$ en utilisant la fonction de transfert inverse de \mathcal{E}^{k+1} des points de Gauss aux noeuds. Cette opération peut être réalisée en utilisant les fonctions de forme de l'élément de destination :

$$\mathbf{v}_G^{k+1} = (\mathcal{E}^{k+1})^{-1} \mathbf{v}_N^{k+1} \quad (2.36)$$

Finalement on peut écrire :

$$\mathbf{v}_G^{k+1} = \left((\mathcal{E}^{k+1})^{-1} \mathbb{I}_k^{k+1} \mathcal{E}^k \right) \mathbf{v}_G^k \quad (2.37)$$

L'opération de transfert des points de Gauss du maillage de niveau k aux points de Gauss de niveau $(k + 1)$ est décrite figure 2.9. L'opérateur de restriction est construit de manière réciproque depuis l'ensemble des points d'intégration Ω_G^{k+1} à l'ensemble des points Ω_G^k .

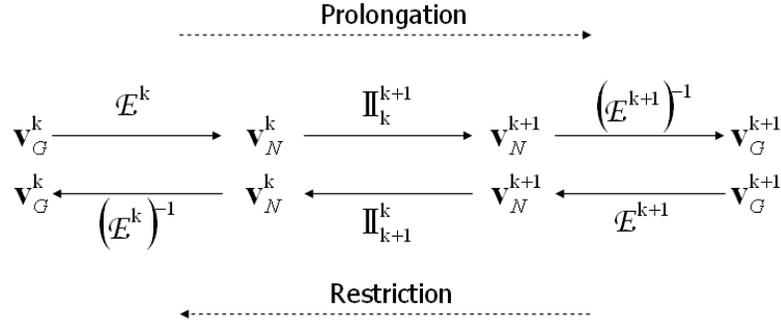


FIG. 2.9: Illustration des phases de transfert entre les points de Gauss de deux maillages

2.3.2.2 Transfert de champ par approximation diffuse

La technique d'approximation diffuse [VIL 02] consiste à définir localement les champs inconnus par des fonctions polynomiales. Elle est utilisée dans [BRA 08] où une méthode d'interpolation permettant de vérifier les conditions d'équilibre local ainsi que le critère de plasticité est proposée.

L'opération de transfert est plus complexe et ne définit pas de manière explicite d'opérateur d'interpolation. On se place dans le cadre d'une opération de transfert d'un champ discrétisé \mathbf{v}^k depuis un maillage \mathcal{M}^k vers un maillage \mathcal{M}^{k+1} . L'approximation diffuse ne fait pas d'hypothèse quant au raffinement du maillage source et du maillage de destination.

Le champ \mathbf{v}^k sur le maillage source est connu de manière discrète sur l'ensemble des points de Gauss. On cherche ici à reconstruire le champ discrétisé \mathbf{v}^{k+1} sur le maillage de niveau $(k + 1)$. Le champ continu $\underline{\mathbf{v}}^{k+1}$ est recherché sur la nouvelle discrétisation sous forme polynomiale :

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{p}}^T(\underline{\mathbf{x}})\mathbf{a} \quad (2.38)$$

On définit alors un voisinage \mathcal{V} du point où est recherchée l'approximation. Ce voisinage inclus un certain nombre de points de Gauss du maillage source de telle sorte que le problème de minimisation admette une solution unique. La composante inconnue \mathbf{a} est calculée sous forme de minimisation de la fonctionnelle :

$$J_x(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \left\| \underline{\mathbf{v}}^{k+1}(\mathbf{x}_i) - \underline{\mathbf{v}}_i^k(\mathbf{x}_i) \right\|^2 \quad (2.39)$$

La fonction $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ est une fonction de pondération permettant d'assurer la continuité. Elle vaut 1 au coordonnées \mathbf{x} du point où est recherchée la valeur du champ et 0

hors du voisinage . La fonction de pondération doit être non-nulle sur les points de Gauss du maillage \mathcal{M}^k , de coordonnées \mathbf{x}_i censés contribuer à l'approximation du champ.

Le champ discret sur la nouvelle discrétisation est alors calculé par l'équation (2.38) en utilisant les coordonnées du point de Gauss. Afin de limiter la diffusion numérique, les valeurs transférées sont considérées nulles lorsqu'elles sont inférieures à un certain seuil.

2.4 Stratégies itératives de résolution non-linéaire

Afin de déterminer la solution d'un problème non-linéaire, il est nécessaire d'introduire des solveurs permettant de converger de manière itérative vers la solution du problème. Les stratégies dédiés à la résolution de ces problèmes non-linéaires sont nombreuses. On s'intéresse ici à deux méthodes robustes souvent utilisées en dynamique des structures : les méthodes de Newton et les méthodes du gradient.

2.4.1 Solveur de Newton

L'équilibre écrit sous forme résiduelle (1.59) est non-linéaire dans la relation de comportement ou dans la relation liant les déplacements aux déformations. Pour permettre la résolution du problème, on linéarise cette équation. On suppose qu'une solution $\mathcal{S}^{(k)}$ est connue à l'itération (k) du solveur non-linéaire et on recherche une meilleure approximation $\mathcal{S}^{(k+1)}$ du vecteur d'état.

En utilisant les équations de Newmark (1.65), (1.66) et l'intégration de la relation de comportement, le résidu en équilibre est ré-écrit pour ne faire apparaître qu'une quantité cinématique. On choisit d'exprimer la méthode de Newton en utilisant les accélérations. Le développement limité d'ordre 1 du résidu autour de l'itération courante est donné par :

$$\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}^{(k)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\ddot{\mathbf{U}})}{\partial \ddot{\mathbf{U}}} \right|_{\ddot{\mathbf{U}}^{(k)}} (\dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} - \dot{\mathbf{U}}^{(k)}) = 0 \quad (2.40)$$

On introduit alors $\mathbf{G}^{(k)}$, l'inverse de la matrice jacobienne, par l'équation (2.41) :

$$\mathbf{G}^{(k)} = - \left(\left. \frac{\partial \mathbf{R}(\ddot{\mathbf{U}})}{\partial \ddot{\mathbf{U}}} \right|_{\ddot{\mathbf{U}}^{(k)}} \right)^{-1} \quad (2.41)$$

Cette matrice doit théoriquement être recalculée à chaque itération. Pour un modèle de comportement élastoplastique écrouissable sous l'hypothèse des petites perturbations, celle-ci est donnée par l'équation (2.42) :

$$\mathbf{G}^{(k)} = \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_T^{(k)} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{K}_T^{(k)} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}^{(k)}} \quad (2.42)$$

Des variantes de la méthode de Newton proposent de considérer $\mathbf{G}^{(k)}$ constante au cours des itérations. On parle alors de la méthode de Newton modifiée. Pour des mo-

dèles élastoplastiques sous l'hypothèse des petites perturbations, celle-ci est obtenue en remplaçant la matrice de raideur tangente $\mathbf{K}_T^{(k)}$ par la matrice de raideur élastique \mathbf{K} .

Les méthodes de quasi-Newton consistent à approcher l'inverse de la matrice jacobienne en utilisant les informations de l'itérée précédente. Le problème principal est alors la mise à jour de cette matrice au cours des itérations. Parmi ces méthodes, on pourra par exemple citer les méthodes DFP (Davidon, Fletcher, Powell) ou BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno).

Connaissant $\mathbf{G}^{(k)}$, la correction en accélération $\Delta\ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)}$ sur l'itération de Newton courante peut donc être calculée par :

$$\Delta\ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = \mathbf{G}^{(k)} \mathbf{R} \left(\ddot{\mathbf{U}}^{(k)} \right) \quad (2.43)$$

L'accélération à l'itération suivante est alors donnée par :

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = \ddot{\mathbf{U}}^{(k)} + \Delta\ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} \quad (2.44)$$

Le schéma de Newmark est ensuite utilisé pour mettre à jour les champs de déplacement et de vitesse sur l'ensemble de la structure :

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = {}^P \mathbf{U}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} \quad (2.45)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = {}^P \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{(k+1)} \quad (2.46)$$

Dans le cas de comportements non-linéaires plastiques, la relation de comportement doit être intégrée aux points de Gauss de manière à définir l'état élastoplastique du matériau. Un algorithme d'écoulement plastique de type retour radial sur le seuil (noté *RRM*, cf. annexe A) est généralement utilisé depuis le dernier état dynamiquement et matériellement admissible connu à l'instant t_n :

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}, \mathbf{v}_i^{(k+1)} \right) = RRM \left(\left(\mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}_n \right), \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{v}_{in} \right) \quad (2.47)$$

D'autres variantes afin d'intégrer la relation de comportement sont possible [SIM 00]. On choisit ici de se référer au dernier état matériellement admissible calculé par le solveur de Newton :

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}, \mathbf{v}_i^{(k+1)} \right) = ILC \left(\Delta\mathbf{U}^{(k+1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}, \mathbf{v}_i^{(k)} \right) \quad (2.48)$$

L'intégration de la relation de comportement est alors beaucoup moins coûteuse. Les déformations plastiques étant ici relativement faibles et ces erreurs diminuant par ailleurs avec une diminution du pas de temps, l'erreur numérique introduite reste négligeable vis-à-vis de la tolérance considérée. La fonction *ILC* représente la fonction d'intégration de la loi de comportement et $\Delta\mathbf{U}^{(k)}$ la correction en déplacement sur l'itération non-linéaire courante. Ce type d'intégration sera adopté dans la suite de ce manuscrit.

Le vecteur d'état complet est donc connu à l'itération $(k+1)$ du solveur non-linéaire et il est possible de d'évaluer le nouveau résidu $\mathbf{R}^{(k+1)}$. Le processus est répété jusqu'à

ce que la norme relative de ce résidu soit inférieure à une tolérance donnée ε_R et que la norme relative de la correction en déplacement soit inférieure à un seuil ε_u :

$$\left\| \mathbf{R}^{(k+1)} \right\| < \varepsilon_R \cdot \max \left(\left\| \mathbf{F}_{\text{int}} \right\|, \left\| \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\|, \left\| \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} \right\| \right) \quad (2.49)$$

$$\left\| \mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)} \right\| < \varepsilon_u \left\| \mathbf{U}^{(k+1)} \right\| \quad (2.50)$$

La figure 2.10 représente l'algorithme de résolution non-linéaire.

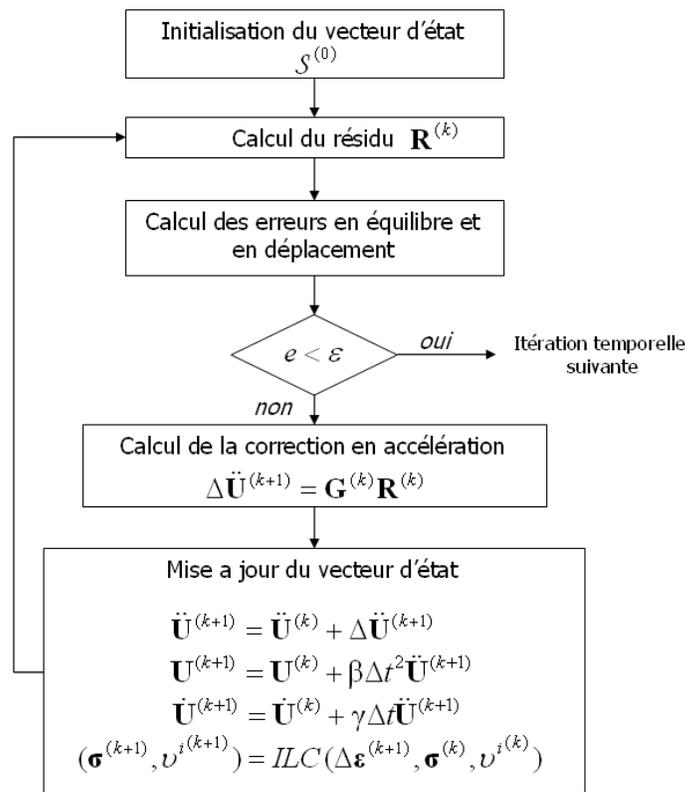


FIG. 2.10: Algorithme de Newton

Remarque 1 : Notons qu'il est également possible de rechercher la solution par le schéma de Newmark exprimé en vitesses ou en déplacements. L'équilibre écrit sous forme résiduelle est alors écrit de manière à ne faire apparaître que les déplacements ou les vitesses en utilisant les équations (1.59), (1.65) et (1.66). Selon la quantité considérée, la matrice Jacobienne est modifiée comme suit :

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}^{(k)} = - \left(\frac{\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_T^{(k)}}{\beta \Delta t^2} \right)^{-1} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{G}^{(k)} = - \left(\frac{\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_T^{(k)}}{\gamma \Delta t} \right)^{-1} \quad (2.52)$$

Les méthodes de Newton modifiées correspondantes sont de nouveau obtenues en remplaçant la matrice de raideur tangente par la matrice de raideur élastique \mathbf{K} .

Remarque 2 : En dynamique, plus le pas de temps est petit moins il est intéressant de construire une évaluation précise de la matrice tangente. En effet, la contribution due à la matrice de masse peut rapidement dominer celle due à la matrice de raideur.

2.4.2 Gradient conjugué non-linéaire

En mécanique des structures, un solveur de type gradient conjugué préconditionné est souvent utilisé dans le cadre de problèmes linéaires de grande taille. Pour des problèmes non-linéaires, ce solveur reste utilisable mais un certain nombre de précautions doivent être prises concernant le choix des différents paramètres de la méthode.

L'algorithme en non-linéaire est associé à la linéarisation du résidu :

$$\mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{X}^{(k)}} \left(\mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)} \right) = 0 \quad (2.53)$$

Comme précédemment, on cherche alors à résoudre :

$$\mathbf{G}^{(k)} \Delta \mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} \quad (2.54)$$

La correction en déplacement est calculée en utilisant la direction de recherche de l'algorithme, notée \mathbf{P}^k , calculée au pas précédent et est recherchée sous la forme :

$$\Delta \mathbf{U}^{(k+1)} = \alpha_k \mathbf{P}^{(k)} \quad (2.55)$$

La recherche du paramètre optimal α_k est la phase la plus complexe de l'algorithme du gradient conjugué non-linéaire. En linéaire, cette étape est réalisée par minimisation d'une forme quadratique dont dérive le problème linéaire. En non-linéaire, le potentiel associé n'est pas quadratique et il est nécessaire d'adopter une autre stratégie. Une alternative consiste à rechercher α_k comme la solution d'un problème de minimisation [PAP 86]. Une autre méthode consiste à adopter des directions de recherche inexactes utilisant un paramètre α_k non-optimal [GRA 03].

En dynamique, la recherche de ce paramètre est simplifiée par le fait que la matrice Jacobienne est dominée par les forces d'inertie si le pas de temps est suffisamment faible.

Le calcul du paramètre α_k dérive alors d'un potentiel quasi-quadratique et un paramètre α_k quasi-optimal peut être défini par :

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{P}^{kT} \mathbf{R}^k}{\mathbf{P}^{kT} \left(\frac{\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}}{\beta \Delta t^2} \right) \mathbf{P}^k} \quad (2.56)$$

Une fois la solution à l'itération (k) corrigée, on utilise les équations (1.65) et (1.66) afin d'actualiser les autres quantités cinématique. Les contraintes sont actualisées par un algorithme de retour radial sur le seuil :

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}, \mathbf{v}_i^{(k+1)} \right) = ILC \left(\Delta \mathbf{U}^{(k+1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k)}, \mathbf{v}_i^{(k)} \right) \quad (2.57)$$

Un nouveau résidu $\mathbf{R}^{(k+1)}$ peut être associé à cette solution à l'itération ($k+1$) et on actualise la direction de recherche pour l'itération suivante :

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k+1)} + \beta_{(k+1)} \mathbf{P}^{(k)} \quad (2.58)$$

Le paramètre d'orthogonalisation β_{k+1} est l'autre paramètre influant de la méthode. Il est choisi de telle sorte que les directions de recherche soient conjuguées. En non-linéaire, deux choix sont possibles en utilisant respectivement la formule de Fletcher-Reeves et la formule de Polak-Ribière. Elles sont respectivement utilisées dans [PAP 86] et [SHA 78].

La première définition permet d'assurer l'orthogonalité entre $\mathbf{P}^{(k+1)}$ et $(\mathbf{R}^{k+1} - \mathbf{R}^k)$

$$\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{R}^{k+1T} (\mathbf{R}^{k+1} - \mathbf{R}^k)}{\mathbf{P}^{k+1T} (\mathbf{R}^{k+1} - \mathbf{R}^k)} \quad (2.59)$$

La seconde permet de rendre l'algorithme moins sensible au cumul d'erreur et est donc plus stable. La vitesse de convergence est néanmoins plus faible.

$$\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{R}^{k+1T} (\mathbf{R}^{k+1} - \mathbf{R}^k)}{\mathbf{R}^{kT} \mathbf{R}^k} \quad (2.60)$$

La stratégie est appliquée jusqu'à ce que la norme du résidu soit inférieure à la tolérance numérique définie par l'utilisateur. La figure 2.11 synthétise l'algorithme de résolution du gradient conjugué.

2.5 Stratégies multigrilles

La dimension des maillages utilisés en mécanique des structures ne cesse de croître avec l'augmentation de la mémoire disponible. On rencontre maintenant couramment des problèmes possédant plusieurs millions de degrés de liberté en milieu industriel. Cette augmentation de la dimension des systèmes modélisés oblige donc à développer des méthodes dont la complexité est minimale.

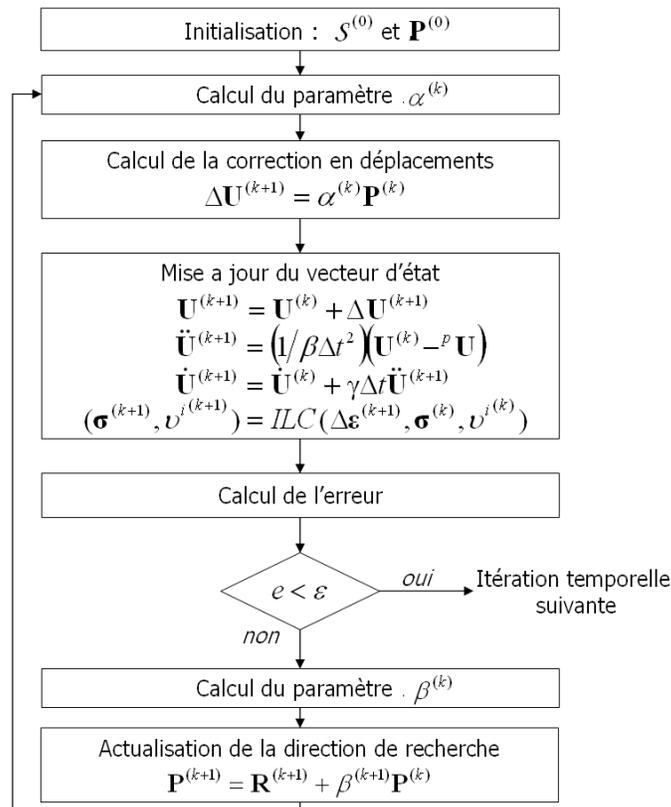


FIG. 2.11: Algorithme du gradient conjugué

Les méthodes multigrilles ont été développées par Brandt à la fin des années 70 et appliquées à la résolution de problèmes en mécanique des fluides pour des discrétisations par différences finies [BRA 77]. Pour de nombreux problèmes simples, ces méthodes présentent une complexité proportionnelle au nombre d'inconnues du problème. Dans les cas plus complexes, la complexité demeure d'ordre inférieur aux solveurs itératifs non-linéaires standards. Leur adaptation à la mécanique des solides a été proposée pour la première fois dans [PAR 90a][PAR 90b].

Ces stratégies profitent des propriétés de lissage des solveurs itératifs. Le problème est résolu sur des maillages, appelés grilles ou niveaux, de raffinement différents (cf. figure 2.12). Des étapes d'interpolation entre ces différentes grilles permettent de découpler l'effort de résolution sur chacune d'entre elles.

2.5.1 Principe

Les stratégies multigrilles ont été appliquées à des problèmes linéaires et non-linéaires. La manière de les concevoir reste similaire en terme de formalisme de présentation quelque soit le problème traité.

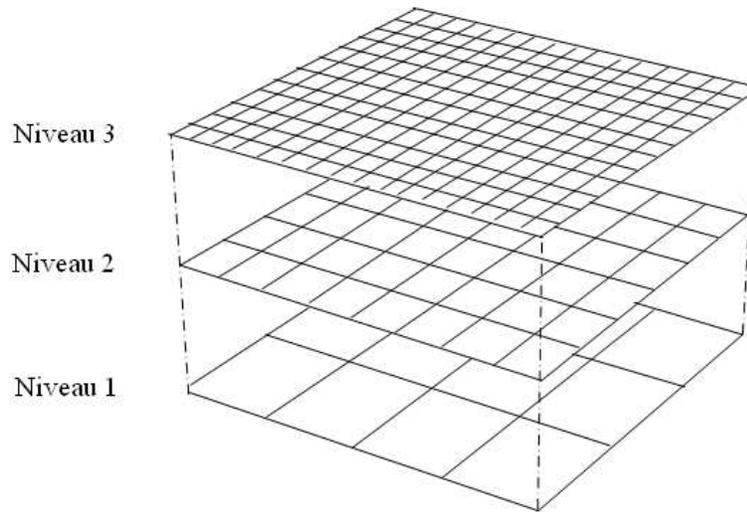


FIG. 2.12: Exemple de grilles éléments finis hiérarchiques

2.5.1.1 Généralités

On distingue deux familles de stratégies multigrilles : les multigrilles géométriques et les multigrilles algébriques [RUG 87], [BRI 00]. On présente succinctement ici le principe des méthodes multigrilles géométriques qui sont utilisées dans la suite de nos travaux. Pour plus de détails sur leur fonctionnement, on pourra se référer aux ouvrages de référence [SHA 95], [VEN 00], [BRI 00], [TRO 01] ou [HAC 04]. L'application des méthodes algébriques au calcul des structures non-linéaire a été par exemple traité dans [ADA 00b], [ADA 00a], [ADA 02] ou [REY 08].

Les solveurs itératifs de type Gauss-Seidel ou gradient conjugué possèdent une propriété dite "de lissage" des erreurs. Ils sont en effet très efficaces pour capturer les composantes dans le résidu dont la longueur d'onde a le même ordre de grandeur que la dimension caractéristique du maillage élément fini. Pour les phénomènes de plus basse fréquence et dont la longueur d'onde est bien supérieure à cette dimension caractéristique, la résolution est ensuite très lente. Une illustration de cette propriété de lissage a été présentée dans [PAR 90b] :

On considère un bloc soumis à une charge ponctuelle (cf. figure 2.13). Le problème est résolu en utilisant un algorithme du gradient conjugué. Sur cette figure est tracée la déformée due à l'erreur en déplacement à l'itération 0, à l'itération 5 et à l'itération 20. On voit que la correction haute fréquence est apportée dès les premières itérations, mais que la composante basse fréquence n'a toujours pas été réduite à l'itération 20.

En utilisant des maillages de raffinement différents, l'effort de résolution est découplé. Les différentes composantes fréquentielles dans le résidu vont être réduites sur des maillages adaptés en terme de dimensions caractéristiques. Les phénomènes hautes fréquences vont être calculés sur la grille la plus fine, tandis que les phénomènes basses fréquences vont être calculés sur la grille la plus grossière.

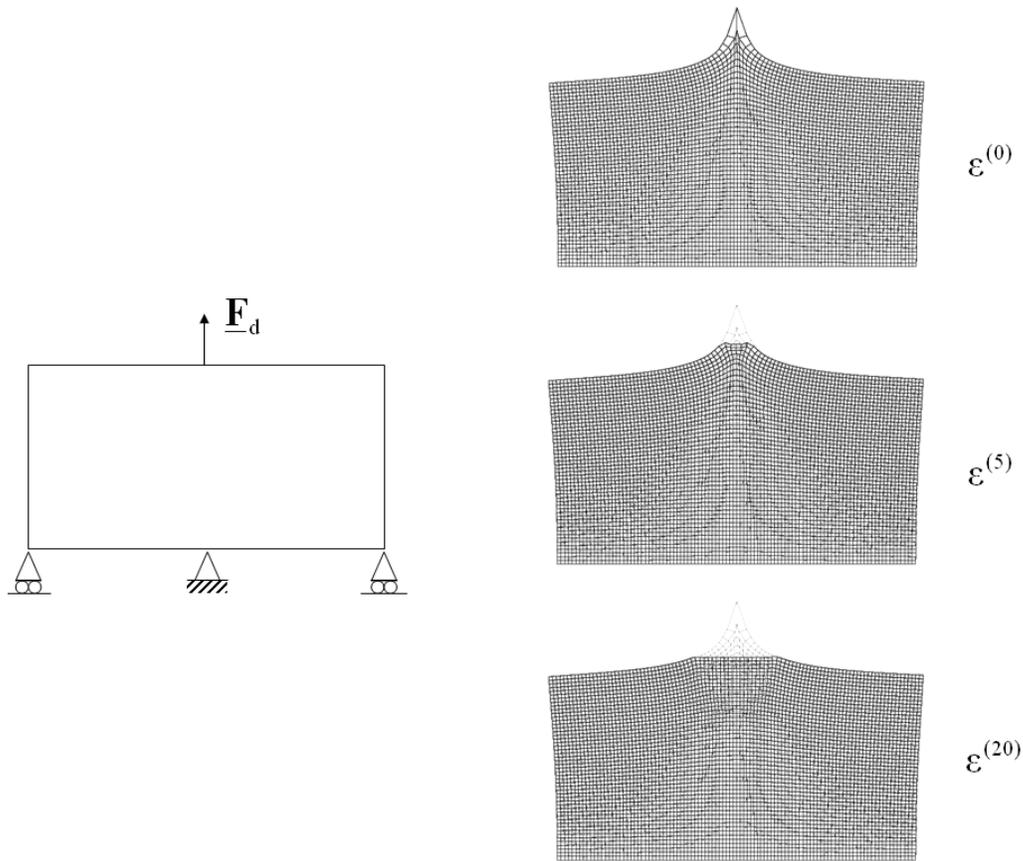


FIG. 2.13: Illustration des propriétés de lissage

2.5.1.2 Fonctionnement

On expose dans cette section le fonctionnement général des stratégies multigrilles. La section 2.5.2 présente la mise en équation détaillée de ces stratégies dans le cas non-linéaire. La stratégie multigrilles adaptée à nos travaux est présentée section 3.2.2. Le maillage le plus fin est celui où le vecteur d'état est recherché. Pour une stratégie à deux niveaux de grilles, celui-ci est noté \mathcal{M}^2 tandis que le niveau le plus grossier est noté \mathcal{M}^1 .

Un faible nombre d'itérations du solveur non-linéaire, noté v_1 , est réalisé sur le maillage \mathcal{M}^2 durant la phase de *pré-relaxation*. Le problème n'étant pas résolu à convergence, un vecteur d'état non-convergé associé à un résidu en équilibre est obtenu. Ce résidu basse fréquence, si le solveur itératif utilisé possède de bonnes propriétés de lissage, est réduit sur le maillage grossier \mathcal{M}^1 où un problème auxiliaire est construit.

Sur ce maillage, le problème est calculé jusqu'à convergence par v_0 itérations du solveur non-linéaire. Cette étape multigrilles est appelé *résolution grille grossière*. Une fois la solution calculée sur ce niveau, on en déduit la correction basse fréquence à apporter à la solution non-convergée de niveau 2.

Cette correction est prolongée sur le maillage de niveau 2 et une fois le vecteur d'état corrigé sur le niveau fin, un faible nombre d'itérations du solveur itératif, noté v_2 , est réa-

lisé. Cette phase est appelée étape de *post-relaxation* et permet de réduire les perturbations haute fréquence introduites durant la phase de prolongation.

La résolution du maillage grossier \mathcal{M}^1 peut éventuellement être coûteuse. En effet, les dimensions de ce maillage sont directement liées aux dimensions du problème de niveau 2 à résoudre. Aussi, si le maillage de niveau 1 présente un nombre important de degrés de liberté, il peut lui-même être résolu par l'intermédiaire d'une stratégie multigrilles. La résolution du maillage fin, désormais noté \mathcal{M}^k , est alors réalisée par appel récursif de cycles multigrilles sur les maillage \mathcal{M}^{k-1} , \mathcal{M}^{k-2} , ..., \mathcal{M}^2 , \mathcal{M}^1 .

Selon la stratégie multigrilles, il est possible de modifier l'agencement des différentes phases présentées ci-dessus. Une manière élégante de représenter graphiquement ces stratégies et de mieux visualiser leur fonctionnement est proposée dans [VEN 00] et est reprise dans la suite de nos travaux. Un cercle simple représente un niveau multigrilles où une phase de relaxation est réalisée. Les phases de restriction et de prolongation sont indiquées par des flèches entières. La figure 2.14 présente une schématisation d'une stratégie multigrilles à 4 niveaux appelée V-cycle en raison de cette représentation.

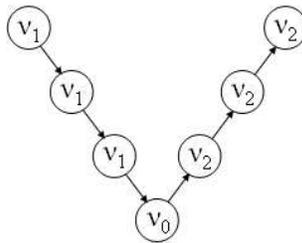


FIG. 2.14: Représentation graphique d'un V-cycle à quatre niveaux

D'autres stratégies utilisant cette représentation seront présentées dans la suite de ce mémoire (cf. figures 2.15, 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12).

2.5.2 Schémas multigrilles en non-linéaire

Les méthodes multigrilles ont été utilisées pour résoudre de nombreux problèmes non-linéaires de grande taille. Deux stratégies peuvent être adoptées. La première consiste à utiliser un solveur multigrilles linéaire sur le problème linéarisé par une méthode, par exemple, de Newton. La seconde approche propose d'utiliser directement un solveur non-linéaire dans les phases de relaxation multigrilles. La différence entre ces deux méthodes réside dans la permutation des itérations non-linéaires et des itérations multigrilles.

2.5.2.1 Newton-Multigrilles

La première méthode a été introduite par Kacou en mécanique des structures [KAC 93] pour traiter des problèmes de non-linéarités matérielles. Un solveur multigrilles linéaire de type "Correction Scheme" (CS) est utilisé pour résoudre l'équation linéarisée (2.43). Cette méthode est reprise dans [HAC 04] où une stratégie permettant d'améliorer

le lissage pendant la phase de relaxation est proposée. Le principal désavantage de cette méthode, dite "Newton-multigrid" (NMG), est l'introduction d'une boucle supplémentaire sur les niveaux de grilles au sein des itérations de Newton-Raphson. La performance de ce schéma décroît avec l'augmentation de la déformation plastique.

On présente le Correction Scheme dans le cas général où l'équation sur le niveau le plus fin est synthétisée sous la forme :

$$\mathbf{L}^k \mathbf{U}^k = \mathbf{F}^k \quad (2.61)$$

L'indice k fait référence à l'appartenance des quantités au maillage courant \mathcal{M}^k . Le formalisme de présentation de la stratégie multigrilles est indépendant du solveur linéaire utilisé pour les phases de relaxation (gradient conjugué, Jacobi, Gauss-Seidel, ...).

Un faible nombre d'itérations v_1 du solveur itératif linéaire conduit à une première approximation $\tilde{\mathbf{U}}^k$ de la solution pendant la phase de pré-relaxation. Cette solution contient les composantes dont la longueur d'onde correspond aux dimensions caractéristiques du maillage \mathcal{M}^k . Le résidu basse fréquence (au sens du maillage \mathcal{M}^k) $\tilde{\mathbf{R}}^k$ est défini par :

$$\tilde{\mathbf{R}}^k = \mathbf{F}^k - \mathbf{L}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \quad (2.62)$$

La solution du problème discrétisé \mathbf{U}_{ex}^k vérifie l'équation (2.61). On peut donc écrire :

$$\tilde{\mathbf{R}}^k = \mathbf{L}^k \mathbf{U}_{ex}^k - \mathbf{L}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \quad (2.63)$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur \mathbf{L} et en introduisant l'erreur \mathbf{v}^k on obtient :

$$\tilde{\mathbf{R}}^k = \mathbf{L}^k (\mathbf{U}_{ex}^k - \tilde{\mathbf{U}}^k) \quad (2.64)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}^k = \mathbf{L}^k \mathbf{v}^k \quad (2.65)$$

L'idée des méthodes multigrilles est de rechercher une approximation de cette erreur basse fréquence \mathbf{v}^k sur une grille plus grossière indicée $(k-1)$. Pour ce faire, l'équation (2.65) est ré-écrite sur le maillage grossier \mathcal{M}^{k-1} en utilisant les opérateurs de transfert définis section 2.3. On cherche à résoudre sur le niveau $(k-1)$ l'équation :

$$\mathbf{L}^{k-1} \mathbf{v}^{k-1} = \mathbf{R}^{k-1} \quad (2.66)$$

$$\text{avec : } \mathbf{R}^{k-1} = \mathbb{I}_k^{k-1} \tilde{\mathbf{R}}^k$$

Cette équation peut être résolue soit en utilisant γ cycles multigrilles sur les niveaux sous-jacents, soit en utilisant v_0 itérations du solveur linéaire. γ fixe le comportement général de la stratégie multigrilles. La figure 2.12 présente la stratégie multigrilles dans le cas où $\gamma = 1$. L'utilisation de $\gamma = 2$ conduit à des W-cycles (cf. figure 2.15).

Quelque soit la stratégie de résolution retenue pour résoudre le problème sur le niveau $(k-1)$, une approximation \mathbf{v}^{k-1} de l'erreur sur le niveau fin est donc calculée sur le niveau grossier. Cette correction est apportée à la solution initiale $\tilde{\mathbf{U}}^k$ en utilisant l'opérateur de prolongation \mathbb{I}_{k-1}^k afin de former une solution corrigée $\tilde{\mathbf{U}}^k$:

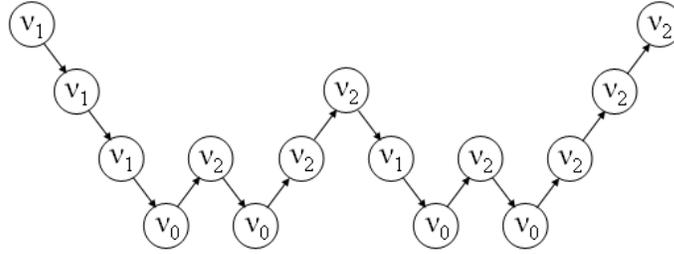


FIG. 2.15: Représentation graphique d'un W-cycle

$$\bar{\mathbf{U}}^k = \tilde{\mathbf{U}}^k + \mathbb{I}_{k-1}^k \mathbf{v}^{k-1} \quad (2.67)$$

Ce terme correctif inclut les composantes basses fréquences de la solution qui ont été calculées sur les niveaux sous-jacents et que la grille fine n'avait pas réduit. L'opération de prolongation pouvant faire apparaître des erreurs de prolongation haute fréquence, on réalise v_2 itérations du solveur itératif de manière à réduire cette erreur d'interpolation.

Un seul cycle multigrilles est généralement insuffisant pour calculer la solution. La convergence est testée à la fin de chaque cycle en utilisant la norme infinie du résidu en équilibre linéarisé. Le plus gros de l'effort de calcul est réalisé sur les grilles sous-jacentes et le nombre de V-cycles nécessaire afin de réduire le résidu est théoriquement constant quelque soit la discrétisation du maillage le plus fin.

Dans le cas de l'utilisation du Correction Scheme avec un solveur itératif de type gradient conjugué pré-conditionné, v_1 et v_2 sont généralement choisis entre 2 et 5. Le travail total du cycle multigrilles, en termes d'opérations élémentaires, peut être exprimé en fonction du travail d'une itération sur la grille la plus fine [VEN 00].

2.5.2.2 Full Approximation Scheme

La seconde méthode a été étendue en mécanique des structures par Fish dans [FIS 95] et constitue une alternative intéressante à la méthode présentée ci-dessus. Un schéma multigrilles non-linéaire, appelé "Full Approximation Scheme" (FAS), est directement utilisé pour résoudre le problème. Le solveur itératif utilisé est un solveur non-linéaire de quasi-Newton de type BFGS. Dans le cadre de problèmes élastoplastiques de grande taille largement plastifiés, les performances du FAS sont supérieures à celles du solveur NMG.

L'équation résolue par le solveur multigrilles est directement l'équilibre non-linéaire (1.59). La stratégie est similaire à l'approche présentée dans la section précédente dans le sens où on cherche à approximer l'erreur en solution du niveau fin sur des niveaux plus grossiers. Le FAS est présenté dans le cas général où l'équation sur le niveau le plus fin ne dépend que d'une variable et est synthétisée sous la forme :

$$\mathcal{L}^k \langle \mathbf{U}^k \rangle = \mathbf{F}^k \quad (2.68)$$

La notation $\langle \bullet \rangle$ marque la dépendance de l'opérateur \mathcal{L} au vecteur d'état. Dans ce cas, le passage de l'équation (2.63) à l'équation (2.65), qui utilise la linéarité de l'opérateur de comportement, n'est plus possible. La phase de correction doit donc être modifiée. Le résidu est défini de manière similaire à l'équation (2.62) par l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{R}}^k = \mathbf{F}^k - \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathbf{U}}^k \rangle \quad (2.69)$$

Il est possible de faire de nouveau apparaître l'erreur \mathbf{v}^k en notant que :

$$\tilde{\mathbf{U}}^k = \mathbf{U}_{ex}^k - \mathbf{v}^k \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^k = \mathcal{L}^k \langle \mathbf{U}_{ex}^k \rangle \quad (2.70)$$

L'équation (2.69) est alors exprimée comme :

$$\tilde{\mathbf{R}}^k = \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathbf{U}}^k + \mathbf{v}^k \rangle - \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathbf{U}}^k \rangle \quad (2.71)$$

Les quantités primales et duales sont alors réduites sur le niveau $(k-1)$ de manière à construire un problème équivalent permettant de rechercher une approximation basse fréquence de l'erreur \mathbf{v}^k sur le niveau sous-jacent et on note :

$$\mathbf{R}^{k-1} = \mathbb{I}_k^{k-1} \tilde{\mathbf{R}}^k \quad (2.72)$$

$$\mathbf{U}^{k-1} = \mathbb{I}_k^{k-1} \tilde{\mathbf{U}}^k \quad (2.73)$$

L'approximation \mathbf{v}^{k-1} de l'erreur sur le niveau k est alors recherchée sous la forme :

$$\mathcal{L}^{k-1} \langle \mathbf{U}^{k-1} + \mathbf{v}^{k-1} \rangle = \mathbf{R}^{k-1} + \mathcal{L}^{k-1} \langle \mathbf{U}^{k-1} \rangle \quad (2.74)$$

On définit $\bar{\mathbf{U}}^{k-1}$ la solution de l'équation (2.74). Comme précédemment, celle-ci peut être déterminée indifféremment en utilisant une stratégie de résolution mono-grille ou multigrilles sur le niveau $(k-1)$ selon les dimensions caractéristiques du maillage \mathcal{M}^{k-1} . L'approximation de l'erreur sur le niveau $(k-1)$ est alors donnée par :

$$\mathbf{v}^{k-1} = \bar{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbf{U}^{k-1} \quad (2.75)$$

$$= \bar{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbb{I}_k^{k-1} \tilde{\mathbf{U}}^k \quad (2.76)$$

Cette correction est interpolée sur le niveau le plus fin de manière à corriger la solution $\tilde{\mathbf{U}}^k$ précalculée au début du cycle multigrilles :

$$\mathbf{U}^k = \tilde{\mathbf{U}}^k + \mathbb{I}_{k-1}^k \mathbf{v}^{k-1} \quad (2.77)$$

$$= \tilde{\mathbf{U}}^k + \mathbb{I}_{k-1}^k \left(\bar{\mathbf{U}}^{k-1} - \mathbb{I}_k^{k-1} \tilde{\mathbf{U}}^k \right) \quad (2.78)$$

Le FAS fonctionne aussi bien pour les problèmes linéaires que non-linéaires et est utilisé dans la suite de nos travaux. Il nécessite la réduction des quantités primales et duales ce qui rend les phases d'interpolation plus coûteuses que pour le solveur NMG.

2.5.2.3 Etude comparative des deux méthodes

Un comparatif de ces deux stratégies dans le cas de général est présenté dans [HEN 03]. La discrétisation spatiale est assurée par une méthode de différences finies et les phases de relaxation du FAS sont réalisées par un solveur de Gauss-Seidel non-linéaire. Les auteurs concluent que l'utilisation de l'une ou l'autre de ces deux stratégies ne doit pas être systématique et dépend de la définition du problème sur les grilles grossières et du coût d'inversion de la matrice Jacobienne.

La comparaison de l'efficacité de différentes stratégies multigrilles dans le cadre de non-linéarités matérielles est réalisée dans [FIS 95]. Les auteurs présentent les performances comparées de trois algorithmes multigrilles : un Newton-Mulgrille (NMG), ainsi que deux stratégies FAS utilisant respectivement un solveur de type gradient conjugué (FAS-GC) ou Newton BFGS (FAS-BFGS). Ces algorithmes sont testés sur des problèmes éléments finis bi-dimensionnels et tri-dimensionnels utilisant un modèle de comportement élastoplastique bi-linéaire à écrouissage isotrope.

Le FAS-GC ne converge pas systématiquement lorsque la déformation plastique devient trop importante. Les auteurs montrent que plus le nombre d'éléments plastifiés est important, plus la stratégie FAS-BFGS converge rapidement comparativement à la méthode NMG. Pour cette dernière, le temps nécessaire à la résolution du système linéaire devient rapidement prohibitif. L'occupation mémoire de ces trois stratégies est également comparée et les auteurs montrent que les deux stratégies de type FAS nécessitent approximativement deux fois moins de mémoire pour effectuer le calcul que la stratégie NMG.

Il est possible de restreindre la définition des grilles les plus fines dans les zones où la structure subit les phénomènes haute fréquence de manière à optimiser l'occupation mémoire et réduire le coût numérique des phases de relaxations. On parle alors de multigrilles localisées (cf. section 3.2.2).

2.6 Synthèse

La première partie de ce chapitre, section 2.1, est dédiée à la mesure de l'erreur de discrétisation en espace et en temps. Une liste non exhaustive de différents estimateurs est présentée dans le cas linéaire et étendue à la mesure de l'erreur pour des comportements non-linéaires.

Les différentes méthodes permettant d'adapter le maillage pour atteindre une précision requise, à savoir les méthodes de décomposition de domaine et les méthodes adaptatives, sont présentées par la suite (cf. section 2.2). Les premières permettent de gérer le pas de temps et le pas de discrétisation de manière indépendante sur la structure. Elles sont naturellement parallélisables et permettent de réduire significativement le temps de calcul. Néanmoins, elles nécessitent de bien connaître les phénomènes dans la structure en amont du calcul afin de prédéfinir ces zones et leur efficacité dépend donc fortement de l'expérience du numéricien. Les secondes méthodes sont indépendantes de l'expérience de l'utilisateur et permettent l'adaptation automatique du maillage selon les caractéristiques

de la méthode de raffinement utilisée. Néanmoins, la construction de la carte d'erreur peut parfois être coûteuse et un certain nombre d'étapes de remaillage peuvent être nécessaires afin de converger vers le maillage optimal. Par ailleurs, l'implantation numérique de certaines de ces stratégies est parfois difficile dans les codes de calcul conventionnels.

Les opérateurs de changement d'échelle sont introduits section 2.3. Ils permettent de transférer les quantités nodales ou les quantités aux points de Gauss d'un maillage à un autre. En utilisant les dénominations multigrilles, les opérateurs de transfert d'un niveau fin vers un niveau grossier sont appelés opérateurs de restriction. Les opérateurs inverses sont appelés opérateurs de prolongation.

Les deux dernières parties de ce chapitre sont dédiées aux solveurs non-linéaires. Les solveurs itératifs les plus couramment utilisés en mécanique, les solveurs de Newton et les gradients conjugués, sont présentés section 2.4. Ceux-ci peuvent être intégrés à des stratégies multigrilles (cf. section 2.5) afin d'augmenter leur vitesse de convergence. Différents maillages sont alors utilisés et l'effort de résolution est découplé de manière à réduire sur chacun des maillages les composantes du résidu dont la longueur d'onde correspond aux dimensions caractéristiques du maillage. L'adaptation de ces stratégies multigrilles à la modélisation des structures élastoplastiques en dynamique transitoire est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Stratégie de raffinement automatique

On présente le fonctionnement général de la stratégie de raffinement automatique utilisée à chaque pas de temps dans une première partie. Les outils numériques et la méthode de transfert entre pas de temps sont ensuite détaillés. La dernière section présente la structure de données et l'algorithme.

Sommaire

3.1	Principe	64
3.1.1	Mesure de l'erreur	64
3.1.2	Sous découpage spatial	68
3.1.3	Gestion des conditions limites	70
3.1.4	Principe de raffinement de maillage	70
3.2	Mise en oeuvre	75
3.2.1	Stratégie Full MultiGrid	75
3.2.2	Stratégie multigrilles non-linéaire localisée	77
3.2.3	Gestion des phénomènes irréversibles	79
3.2.4	Alternatives multigrilles	82
3.2.5	Influence des phases d'interpolation	85
3.2.6	Transfert entre piquets de temps	87
3.3	Implémentation numérique	90
3.3.1	Structure de données	90
3.3.2	Algorithme de résolution	94
3.4	Synthèse	94

3.1 Principe

On présente dans ce chapitre une nouvelle méthode permettant de maîtriser la précision des calculs éléments finis en dynamique non-linéaire. Cette stratégie s'appuie sur un raffinement récursif des éléments finis en fonction de l'estimation de l'erreur de discrétisation sur la structure. Nous allons utiliser un indicateur d'erreur pour évaluer les zones où la précision est insuffisante et raffiner le maillage si cette précision ne vérifie pas le seuil prescrit par l'utilisateur. Notre stratégie s'apparente à une méthode s-adaptative [FIS 92] à chaque pas de temps. Afin de traiter le transfert d'informations non-linéaires entre les différents niveaux de maillage, une stratégie multigrilles est utilisée pour la résolution.

Les dénominations multigrilles sont utilisées afin de présenter la méthode : le maillage initial, dit grossier, est appelé maillage (ou grille) de niveau 1. A chaque pas de temps, des maillages locaux de plus en plus fins sont créés. Le maillage le plus fin au cours du raffinement est alors celui d'indice le plus élevé. L'opération d'interpolation spatiale d'un maillage grossier vers un maillage fin est appelée prolongation. L'opération inverse d'une grille fine vers une grille grossière est appelée restriction. Les opérateurs de transfert associés sont respectivement appelés opérateurs de prolongement et de restriction. Leur construction est détaillée section 2.3.

La construction d'un maillage de niveau k est réalisée par sous découpage hiérarchique (éventuellement partiel) des éléments du maillage de niveau $(k - 1)$. Afin d'expliquer au mieux les phases de transfert entre niveaux, on introduit la notion de filiation lors de ce sous découpage. Les éléments e_i^k de niveau k obtenus par sous découpage hiérarchique d'un élément e_j^{k-1} de niveau $(k - 1)$ sont dits enfants de l'élément e_j^{k-1} . Inversement, l'élément e_j^{k-1} est l'élément parent des éléments e_i^k de niveau k . Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 synthétisent cette notion.

La stratégie présentée dans ce mémoire permet de remettre en cause le maillage à chaque pas de temps. Aucune stratégie de déraffinement de maillage (souvent coûteuses en terme CPU) n'est donc nécessaire. De plus, l'adaptation de maillage est ici réalisée directement par le solveur. Les calculs effectués afin de déterminer la cartographie de l'erreur sont directement utilisés par les maillages les plus fins au sein d'une stratégie multigrilles afin de réduire au maximum le temps nécessaire à la convergence du calcul sur chaque niveau.

Cette première section s'intéresse à la méthode de raffinement automatique en espace appliquée à chaque pas de temps. La prise en compte de la discrétisation temporelle est présentée section 3.2.6. L'indice relatif au pas de temps est donc omis dans un premier temps afin de simplifier les notations.

3.1.1 Mesure de l'erreur

La bibliographie sur les estimateurs d'erreur présentée section 2.1 témoigne des nombreux travaux menés sur le sujet. Ici, afin d'estimer la qualité de la solution éléments finis, l'erreur de discrétisation est mesurée à l'aide d'un indicateur d'erreur adapté à notre stratégie et permettant d'obtenir une approximation de l'erreur à moindre coût.

Les indicateurs d'erreur utilisés dans nos travaux sont construits en considérant les propriétés de convergence de la méthode des éléments finis. Lorsque le problème est régulier, plus le maillage est fin plus la solution discrétisée est proche de la solution exacte :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{S}_{ex} - \mathcal{S}_h\| = 0 \quad (3.1)$$

Où \mathcal{S}_{ex} désigne la solution exacte du modèle, inconnue a priori, et \mathcal{S}_h la solution éléments finis sur un maillage de dimension caractéristique h . Il est par ailleurs possible d'évaluer l'erreur de discrétisation en déplacement par :

$$\|\underline{\mathbf{u}}_h - \underline{\mathbf{u}}_{ex}\| \leq Ch^\alpha \quad (3.2)$$

Où α est l'ordre de convergence du modèle discrétisé. C est une constante indépendante des caractéristiques du maillage et uniquement définie en fonction des données du problème lorsque les maillages sont suffisamment fins.

3.1.1.1 Principe de construction de l'indicateur d'erreur

Dans le cas de notre stratégie, le calcul est réalisé indépendamment sur deux maillages hiérarchiques. Si le problème est régulier, il est donc possible d'estimer la qualité du vecteur d'état sur un niveau k en comparant les solutions de niveaux k et $(k - 1)$. De manière à définir une erreur locale, cet estimateur est une norme permettant de comparer la valeur du champ considéré sur un élément fini de niveau $(k - 1)$ et sur ses 2^d enfants de niveau k (avec d la dimension du problème).

Afin de réaliser la comparaison, des opérateurs de changement d'échelle sont nécessaires pour travailler sur des quantités définies sur les mêmes supports. Les opérateurs de transfert utilisés sont des opérateurs de restriction permettant d'établir la comparaison sur le maillage grossier.

Enfin, de manière à obtenir un indicateur d'erreur relatif sur le domaine espace-temps, la norme de cette comparaison est divisée par le maximum de la quantité considérée sur l'ensemble de la structure et de l'intervalle de temps. Cette valeur est donnée par un précalcul peu coûteux sur le niveau grossier.

On note \mathcal{M}^{k-1} le maillage de niveau $(k - 1)$ de dimension caractéristique h et \mathcal{M}^k le maillage de niveau k de dimension caractéristique $h/2$. On suppose que les vecteurs d'état \mathcal{S}^{k-1} et \mathcal{S}^k sont connus sur ces deux maillages.

3.1.1.2 Indicateur d'erreur nodaux

Lorsque l'on souhaite construire un indicateur basé sur un champ nodal, la construction de l'indicateur d'erreur est immédiate par comparaison du champ aux noeuds coïncidents des deux maillages. L'opérateur de restriction est alors un opérateur d'injection qui permet de transférer le champ des noeuds du maillage \mathcal{M}^k sur ceux du maillage \mathcal{M}^{k-1} .

La construction de cet opérateur de restriction, noté \mathbb{I}_k^{k-1} , est présentée section 2.3.1. On rappelle que le niveau en indice est le niveau d'origine du champ, et que le niveau en exposant est le niveau sur lequel le champ est projeté.

Un exemple d'un tel indicateur d'erreur est l'indicateur d'erreur en déplacement :

$$\epsilon_{\mathbf{U}}|_{e_j^{k-1}} = \frac{\left\| \left(\mathbf{U}^{k-1} - \mathbb{I}_k^{k-1} \mathbf{U}^k \right) \Big|_{e_j^{k-1}} \right\|}{\max_{[0;T]} \|\mathbf{U}^1(t)\|} \quad (3.3)$$

La norme utilisée est : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. Cet indicateur est calculé indépendamment pour chaque élément e_j^{k-1} de niveau $(k-1)$.

3.1.1.3 Indicateur d'erreur aux points de Gauss

Pour les indicateurs d'erreur concernant des quantités définies aux points de Gauss, la construction est similaire. On note g_k^{k-1} , l'opérateur de restriction depuis les points de Gauss du maillage \mathcal{M}^k sur les points de Gauss du maillage \mathcal{M}^{k-1} (cf. section 2.3.2).

Si VM désigne l'opérateur de Von Mises appliqué à la contrainte éléments finis, il est par exemple possible de définir un indicateur d'erreur en contraintes sous la forme :

$$\epsilon_{\sigma}|_{e_j^{k-1}} = \frac{\left\| \left(VM(\sigma^{k-1}) - VM(g_k^{k-1} \sigma^k) \right) \Big|_{e_j^{k-1}} \right\|}{\max_{[0;T]} VM(\sigma^1)(t)} \quad (3.4)$$

Où la norme considérée est la norme infinie aux points de Gauss de l'élément e_j^{k-1} . Même si le formalisme d'écriture est globalement le même, le transfert des quantités aux points de Gauss est plus lourd que l'injection des quantités nodales. De tels indicateurs sont donc plus coûteux en terme CPU.

3.1.1.4 Indicateur d'erreur sur les éléments

Ce dernier type d'indicateur d'erreur est utilisé lorsqu'une variable scalaire, généralement calculée par intégration, est associée à chaque élément fini, comme par exemple pour l'énergie (cf. section 3.1.1.5). Dans ce cas, l'indicateur d'erreur est calculé de manière directe en comparant, par exemple, la valeur de l'énergie sur un élément de niveau $(k-1)$ avec la somme des énergies sur chacun de ses éléments enfants.

On note $a|_{e_j^{k-1}}$ la valeur de la quantité a de niveau k sur l'élément e_j^{k-1} et $a|_{\Sigma e_i^k}$ la somme des valeurs de la quantité a définie sur le niveau $(k-1)$ sur les éléments enfants e_i^k de l'élément parent e_j^{k-1} .

L'indicateur d'erreur en énergie est alors directement donné par :

$$\epsilon_{\mathcal{E}}|_{e_j^{k-1}} = \frac{\sqrt{\left| \left(\mathcal{E}^{k-1}|_{e_j^{k-1}} - \mathcal{E}^k|_{\Sigma e_i^k} \right) \right|}}{\max_{[0;T]} \sqrt{\mathcal{E}^1(t)}} \quad (3.5)$$

La racine carrée est utilisée afin de construire une norme.

3.1.1.5 Récapitulatif des indicateurs présentés dans ce mémoire

La table 3.1 présente les six indicateurs d'erreur utilisés dans la suite de ces travaux.

TAB. 3.1: Différents type d'indicateurs d'erreur

Quantité contrôlée	Indicateur d'erreur
Déplacement	$\epsilon_{\mathbf{U}} _{e_j^{k-1}} = \frac{\left\ \left(\mathbf{U}^{k-1} - \mathbb{I}_k^{k-1} \mathbf{U}^k \right) \Big _{e_j^{k-1}} \right\ }{\max_{[0;T]} \ \mathbf{U}^1(t)\ }$
Contrainte	$\epsilon_{\sigma} _{e_j^{k-1}} = \frac{\left\ \left(VM(\sigma^{k-1}) - VM(j_k^{k-1} \sigma^k) \right) \Big _{e_j^{k-1}} \right\ }{\max_{[0;T]} VM(\sigma^1)(t)}$
Travail plastique	$\epsilon_{\mathcal{W}_p} _{e_j^{k-1}} = \frac{\sqrt{\left \mathcal{W}_p^{k-1} \Big _{e_j^{k-1}} - \mathcal{W}_p^k \Big _{\Sigma e_i^k} \right }}{\max_{[0;T]} \sqrt{\mathcal{W}_p^1(t)}}$
Densité d'énergie	$\epsilon_{de} _{e_j^{k-1}} = \frac{\sqrt{\left\ \left(de^{k-1} - j_k^{k-1} de^k \right) \Big _{e_j^{k-1}} \right\ }}{\max_{[0;T]} \sqrt{de^1(t)}}$
Incrément d'énergie	$\epsilon_{\delta \mathcal{E}} _{e_j^{k-1}} = \frac{\sqrt{\left \left(\delta \mathcal{E}^{k-1} \Big _{e_j^{k-1}} - \delta \mathcal{E}^k \Big _{\Sigma e_i^k} \right) \right }}{\max_{[0;T]} \sqrt{\mathcal{E}^1(t)}}$
Energie totale	$\epsilon_{\mathcal{E}} _{e_j^{k-1}} = \frac{\sqrt{\left \left(\mathcal{E}^{k-1} \Big _{e_j^{k-1}} - \mathcal{E}^k \Big _{\Sigma e_i^k} \right) \right }}{\max_{[0;T]} \sqrt{\mathcal{E}^1(t)}}$

Dans cette table, VM désigne l'opérateur de Von Mises appliqué à la contrainte éléments finis ; de , \mathcal{E} , \mathcal{W}_p et $\delta \mathcal{E}$ désignent respectivement la densité d'énergie, l'énergie totale de la structure, le travail plastique et l'incrément d'énergie entre deux pas de temps. Pour un modèle élasto-plastique écrouissable, ils sont définis par :

$$\mathcal{W}_p^k(t_n) \Big|_{e_j^k} = \mathcal{W}_p^k(t_{n-1}) \Big|_{e_j^k} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{e_j^k} \text{Tr}(\sigma \dot{\epsilon}_p) d\Omega dt \quad (3.6)$$

$$\mathcal{E}^k(t_n) = \mathcal{W}_{int}^k(t_n) + \mathcal{W}_{kin}^k(t_n) \quad (3.7)$$

$$\mathcal{W}_{kin}^k(t_n) \Big|_{e_j^k} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^k(t_n) \Big|_{e_j^k}^T \mathbf{M}^k \dot{\mathbf{U}}^k(t_n) \Big|_{e_j^k} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{W}_{int}^k(t_n) \Big|_{e_j^k} = \mathcal{W}_{int}^k(t_{n-1}) \Big|_{e_j^k} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{U}} \Big|_{e_j^k} dt \quad (3.9)$$

$$\delta \mathcal{E}^k(t_n) = \mathcal{E}^k(t_n) - \mathcal{E}^k(t_{n-1}) \quad (3.10)$$

3.1.2 Sous découpage spatial

Les indicateurs d'erreur présentés précédemment servent à déterminer les éléments finis de niveau k où la précision est insuffisante. Ces éléments sont alors sous-découpés en utilisant une stratégie de raffinement locale. On utilise ici un sous-découpage hiérarchique s'appuyant sur les milieux des arêtes de l'élément à raffiner. Les éléments enfants créés ont alors un facteur d'échelle de 2 vis-à-vis de l'élément parent.

Il est bien sûr possible de choisir un facteur d'échelle entre les dimensions caractéristiques des maillages supérieur à deux. Néanmoins, on montre d'un point de vue multigrilles que le facteur 2 est optimal dans le sens où il réalise un bon compromis entre la réduction de l'erreur par niveau multigrilles et le nombre de grilles. En effet, si un facteur d'échelle plus important est choisi, le nombre de grille sera plus faible mais chaque grille devra capturer un spectre de fréquence dans la solution plus large, rendant le nombre de relaxations non-linéaires plus important sur chaque niveau.

Des opérations topologiques plus complexes peuvent être utilisées afin d'assurer la qualité des éléments finis obtenus lors d'une phase de raffinement ou de déraffinement de maillage [GEO 04], [FOU 08], [RAS 09]. Néanmoins, si les éléments du maillage initial sont de suffisamment bonne qualité en termes de critère de forme, les éléments enfants obtenus par cette stratégie hériteront de propriétés géométriques acceptables.

Pour une discrétisation unidimensionnelle, un noeud est créé au milieu de l'élément fini à raffiner. L'élément fini parent est alors sous-découpé en deux éléments enfants de même longueur (cf. figure 3.1).

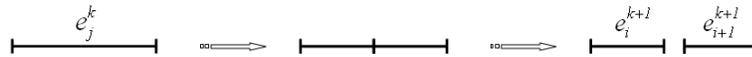


FIG. 3.1: Raffinement hiérarchique uni-dimensionnel

Lorsqu'une modélisation bidimensionnelle est utilisée, les arrêtes de l'élément parent à raffiner sont subdivisées en deux arrêtes de même longueur et quatre éléments finis enfants sont créés par subdivision (cf. figure 3.2). Dans le cas de quadrangles, il est nécessaire de définir un point supplémentaire à l'intersection des médianes. Pour les éléments triangulaires, les éléments finis enfants ont les mêmes critères de forme que l'élément parent (construction homothétique).

Enfin, pour des modèles tri-dimensionnels, chacune des faces est sous découpée en utilisant la procédure de sous découpage bi-dimensionnelle. Pour l'élément tétraédrique,

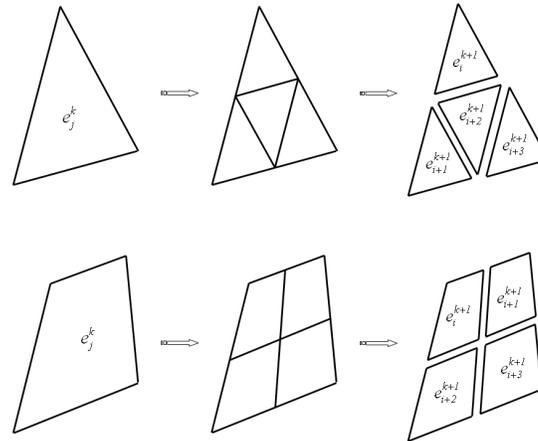


FIG. 3.2: Raffinement hiérarchique bi-dimensionnel

la formation des éléments enfants est immédiate en utilisant les arêtes et les points construits. Pour l'élément hexaédrique, le centre de gravité est utilisé comme dernier point afin de former l'ensemble des arêtes nécessaires au sous-découpage (cf. figure 3.3).

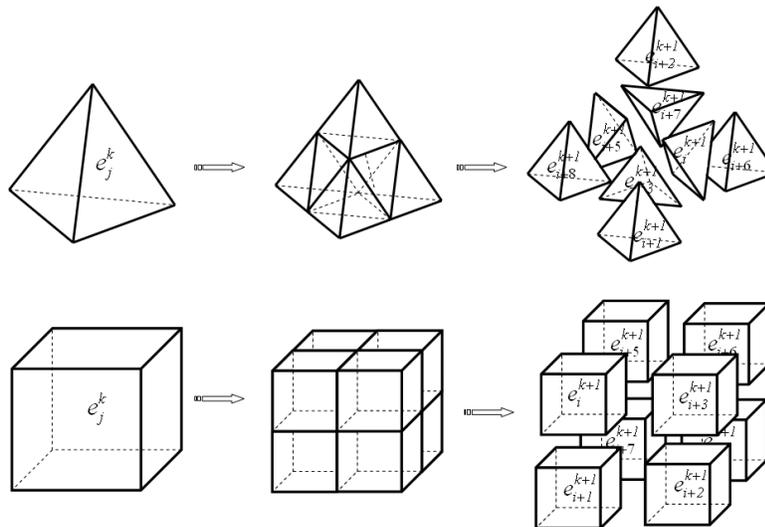


FIG. 3.3: Raffinement hiérarchique tri-dimensionnel

La notation $\sum e_i^k$ utilisée section 3.1.1 synthétise donc la notation :

$$\sum e_i^k = \sum_{i=1}^{2^d} e_i^k, \quad \text{avec } d, \text{ la dimension du problème} \quad (3.11)$$

3.1.3 Gestion des conditions limites

Afin d'assurer l'unicité de la solution sur chaque maillage de niveau k , des conditions limites doivent être imposées sur l'ensemble de la frontière $\partial\mathcal{M}^k$. Pour des problèmes globaux en espace, couvrant l'intégralité de la structure, ces conditions limites sont généralement définies de manière naturelle par la modélisation du problème.

Sur les frontières $\partial\mathcal{M}_F^k$ et $\partial\mathcal{M}_U^k$ du maillage de niveau k , qui désignent respectivement les frontières du maillage jouxtant les bords $\partial\Omega_F$ et $\partial\Omega_U$ de la structure (cf. figure 1.1), sont imposées des conditions aux limites en effort et en déplacement. Ces deux frontières, dans le cas de maillages couvrant l'intégralité de la surface, sont telles que :

$$\partial\mathcal{M}_F^k \cup \partial\mathcal{M}_U^k = \partial\mathcal{M}^k \quad (3.12)$$

$$\partial\mathcal{M}_F^k \cap \partial\mathcal{M}_U^k = \phi \quad (3.13)$$

Lorsqu'un maillage est localisé en espace, des conditions aux limites supplémentaires sont nécessaires car l'équation (3.12) n'est plus vérifiée. On définit alors $\partial\mathcal{M}_L^k$ comme la partie complémentaire de la frontière du maillage :

$$\partial\mathcal{M}_L^k = \partial\mathcal{M}^k \setminus (\partial\mathcal{M}_F^k \cup \partial\mathcal{M}_U^k) \quad (3.14)$$

Sur cette frontière, des inconnues primales, duales ou mixtes (cf. section 2.2.1.1) peuvent être imposées afin d'assurer la cohésion matérielle de la structure sur la frontière entre le maillage localisé et le maillage sous-jacent. Ici, des conditions primales de type déplacement sont imposées sur la frontière $\partial\mathcal{M}_L^k$.

Ces déplacements imposés sont issus du prolongement du déplacement depuis le niveau sous-jacent \mathcal{M}^{k-1} . Cette interpolation est réalisée en utilisant les fonctions de forme des éléments finis (cf. section 2.3.1). Pour un niveau localisé, une nouvelle équation est donc adjointe au problème discret à résoudre, et le vecteur d'état doit également vérifier :

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}_l^k \quad \forall \mathbf{X} \in \partial\mathcal{M}_L \quad (3.15)$$

$$\text{avec : } \mathbf{U}_l^k = \mathbb{I}_{k-1}^k \mathbf{U}^{k-1} \Big|_{\partial\mathcal{M}_L}$$

Ces nouvelles conditions limites sont appliquées en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange et sont traitées de la même façon que les conditions limites en déplacement sur la frontière $\partial\mathcal{M}_U$. Néanmoins, ces conditions limites peuvent varier au cours du calcul élément fini suivant l'état de la grille sous-jacente et doivent donc être traitées avec précaution (cf. section 3.2.5.2).

3.1.4 Principe de raffinement de maillage

Cette section présente le fonctionnement général de la méthode à chaque pas de temps. La mise en équation détaillée est présentée section 3.2.2. Les figures 3.4 à 3.7 illustrent son comportement dans le cas bidimensionnel. La dimension temporelle du problème est traitée dans la section 3.2.6.

3.1.4.1 Initialisation

A chaque pas de temps, la stratégie est initialisée en calculant la solution non-linéaire sur un maillage de niveau 1 noté \mathcal{M}^1 défini par l'utilisateur. Ce maillage doit être suffisamment fin afin de permettre au raffinement automatique de s'initialiser correctement. En effet, si ce premier maillage est trop grossier, l'erreur calculée ne dépend plus uniquement des dimensions du maillage et l'indicateur d'erreur ainsi que le raffinement de maillage peuvent en être perturbés.

Ce maillage est de dimension caractéristique h_1 et possède n_1 éléments. Le problème de niveau 1 est défini de manière standard et des conditions limites en effort et en déplacement sont imposées sur les frontières $\partial\mathcal{M}_F^1$ et $\partial\mathcal{M}_U^1$. Sur ce maillage, le calcul éléments finis est réalisé de manière classique via un algorithme de résolution non-linéaire.

Le formalisme de l'indicateur d'erreur présenté section 3.1.1 nécessite la connaissance de la solution sur deux maillages successifs. Aussi un second maillage \mathcal{M}^2 global en espace est nécessaire à l'initialisation de la procédure.

Ce maillage est construit par sous-découpage hiérarchique des éléments du maillage de niveau 1 suivant les procédures de découpage décrites section 3.1.2 (cf. figure 3.4). Ce nouveau maillage est de dimension caractéristique $h_2 = 0.5 * h_1$ et possède $n_2 = 2^d \cdot n_1$ éléments (où d la dimension du problème).

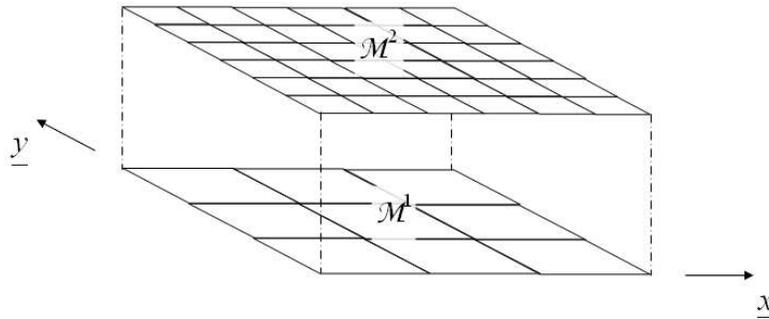


FIG. 3.4: Calcul des solutions sur les maillages de niveau 1 et 2

La solution convergée \mathcal{S}^1 du niveau 1 est interpolée sur ce nouveau maillage comme approximation initiale du vecteur d'état \mathcal{S}^2 . Cette approximation initiale contient l'ensemble des composantes basse-fréquences calculés sur le niveau sous-jacent.

Le maillage de niveau 2 étant global en espace, la solution est de nouveau recherchée en imposant des conditions limites naturelles sur les frontières $\partial\mathcal{M}_F^2$ et $\partial\mathcal{M}_U^2$ du maillage. L'utilisation d'un solveur multigrilles global de type FAS (cf. section 2.5.2.2) permet d'améliorer la vitesse de convergence sur ce niveau.

3.1.4.2 Carte d'erreur et séparation des maillages

Afin d'obtenir une estimation de la précision de la solution, un des indicateurs d'erreur défini section 3.1.1 est utilisé et vient comparer les vecteurs d'état obtenus sur ces deux maillages. Une carte d'erreur associée au maillage de niveau 1 est alors créée.

La précision atteinte localement sur chacun des éléments est comparée à la précision demandée par l'utilisateur au moment du lancement du calcul. Les éléments de niveau 2 où la précision du calcul est suffisante sont regroupés pour former le maillage \mathcal{M}_*^2 . Les autres éléments sont assemblés afin de former le maillage complémentaire \mathcal{M}_+^2 .

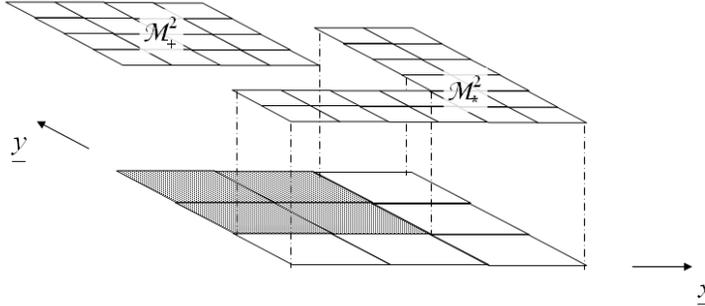


FIG. 3.5: Principe de construction des maillages \mathcal{M}_+^2 et \mathcal{M}_*^2

La figure 3.5 illustre cette phase de séparation du maillage \mathcal{M}^2 . L'indicateur d'erreur issu de la comparaison des vecteurs solutions \mathcal{S}^1 et \mathcal{S}^2 est associé aux éléments du maillage de niveau 1. Les éléments du maillage de niveau 2 sont donc associés aux maillages \mathcal{M}_+^2 et \mathcal{M}_*^2 en fonction de leur filiation aux éléments du maillage de niveau 1 et de la carte d'erreur sur ce niveau. Les éléments grisés représentent les éléments où la précision requise n'est pas atteinte.

3.1.4.3 Création et résolution du niveau 3

Le maillage de niveau trois \mathcal{M}^3 est créé en sous-découpant de manière hiérarchique le maillage \mathcal{M}_+^2 (cf. figure 3.6). Sur les frontières de ce maillage qui coïncident avec les bords $\partial\Omega_U$ et $\partial\Omega_F$ de la structure sont imposées des conditions limites naturelles.

Sur l'interface incompatible entre les maillages \mathcal{M}_*^2 et \mathcal{M}^3 sont appliquées des conditions limites en déplacements permettant d'assurer la compatibilité cinématique à l'interface. Ces conditions limites sont décrites section 3.1.3.

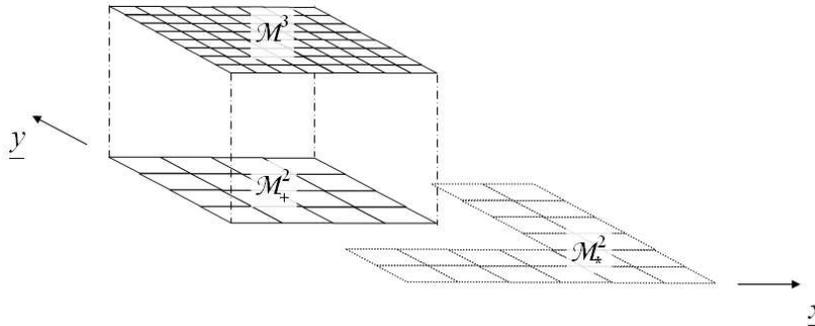


FIG. 3.6: Construction du niveau 3

Sur ce maillage, un solveur multigrilles localisé, décrit en aval, est utilisé pour calculer le vecteur d'état \mathcal{S}^3 . La stratégie multigrilles va transférer les informations non-linéaires de niveau 3 sur les niveaux sous-jacents et donc influencer la solution sur le niveau 2. Il est important de faire la distinction entre cette solution de niveau 2, prenant en compte les informations calculées sur le niveau 3, et la solution calculée lors de l'initialisation.

En effet, la solution obtenue lors de cette étape de calcul décrit de manière la plus précise possible, sur le niveau 2, les phénomènes observés sur le niveau 3. Si l'indicateur d'erreur présenté section 3.1.1 est utilisé afin de comparer la solution de niveau 3 et cette solution de niveau 2, l'erreur obtenue sera nulle. C'est donc la solution de niveau 2 calculée lors de l'étape d'initialisation qui servira ultérieurement pour le calcul de l'erreur. Il est donc nécessaire, une fois le calcul réalisé sur un niveau donné, de sauvegarder le vecteur d'état avant de réaliser le calcul sur un niveau plus fin.

3.1.4.4 Appel récursif de la stratégie

L'explication de la stratégie de raffinement automatique est généralisée en supposant connus deux maillages de niveau $(k-1)$ et k . La figure 3.7 illustre le fonctionnement de cette phase de notre stratégie. Les axes représentant l'espace ne sont pas représentés afin d'alléger le diagramme de fonctionnement.

Sur chacun de ces deux maillages, on suppose que les vecteurs d'état solutions \mathcal{S}^{k-1} et \mathcal{S}^k sont connus et sauvegardés. Le même indicateur d'erreur que celui utilisé lors de l'étape 2 est utilisé afin de comparer les solutions sur les maillages \mathcal{M}_+^{k-1} et \mathcal{M}^k .

Une cartographie de l'erreur sur le maillage \mathcal{M}_+^{k-1} est alors obtenue. Selon la précision requise par l'utilisateur, on détermine les éléments du maillage \mathcal{M}_+^{k-1} où la précision est insuffisante. On définit alors le maillage \mathcal{M}_+^k comme l'ensemble des éléments de niveau k couvrant les éléments du maillage recouvert de niveau $(k-1)$ où la précision requise n'est pas atteinte. La partie complémentaire du maillage de niveau k est notée \mathcal{M}_*^k .

Le maillage \mathcal{M}^{k+1} est construit par sous-découpage hiérarchique du maillage \mathcal{M}_+^k . Sur la frontière de ce maillage sont définies des conditions limites naturelles si celui-ci est situé près des bords $\partial\Omega_U$ et $\partial\Omega_F$ de la structure. Sur la partie complémentaire de la frontière $\partial\mathcal{M}^k$ du maillage sont appliquées des conditions limites adéquates permettant la résolution ultérieure du niveau (cf. section 3.3.1.2).

Une fois le modèle complet de niveau $(k+1)$ défini, le vecteur d'état solution sur ce maillage peut être calculé par l'intermédiaire du solveur multigrilles non-linéaire localisé. Cette stratégie de raffinement est appelée récursivement jusqu'à ce que le maillage le plus fin vérifie la précision requise par l'utilisateur sur l'ensemble de ses éléments.

3.1.4.5 Assemblage du maillage final à l'instant t_n

Une fois la précision requise atteinte sur le niveau le plus fin, il convient d'assembler le maillage à l'instant t_n pour permettre un post-traitement classique de la solution. On note \mathcal{M}^f le maillage le plus fin atteint au pas de temps considéré.

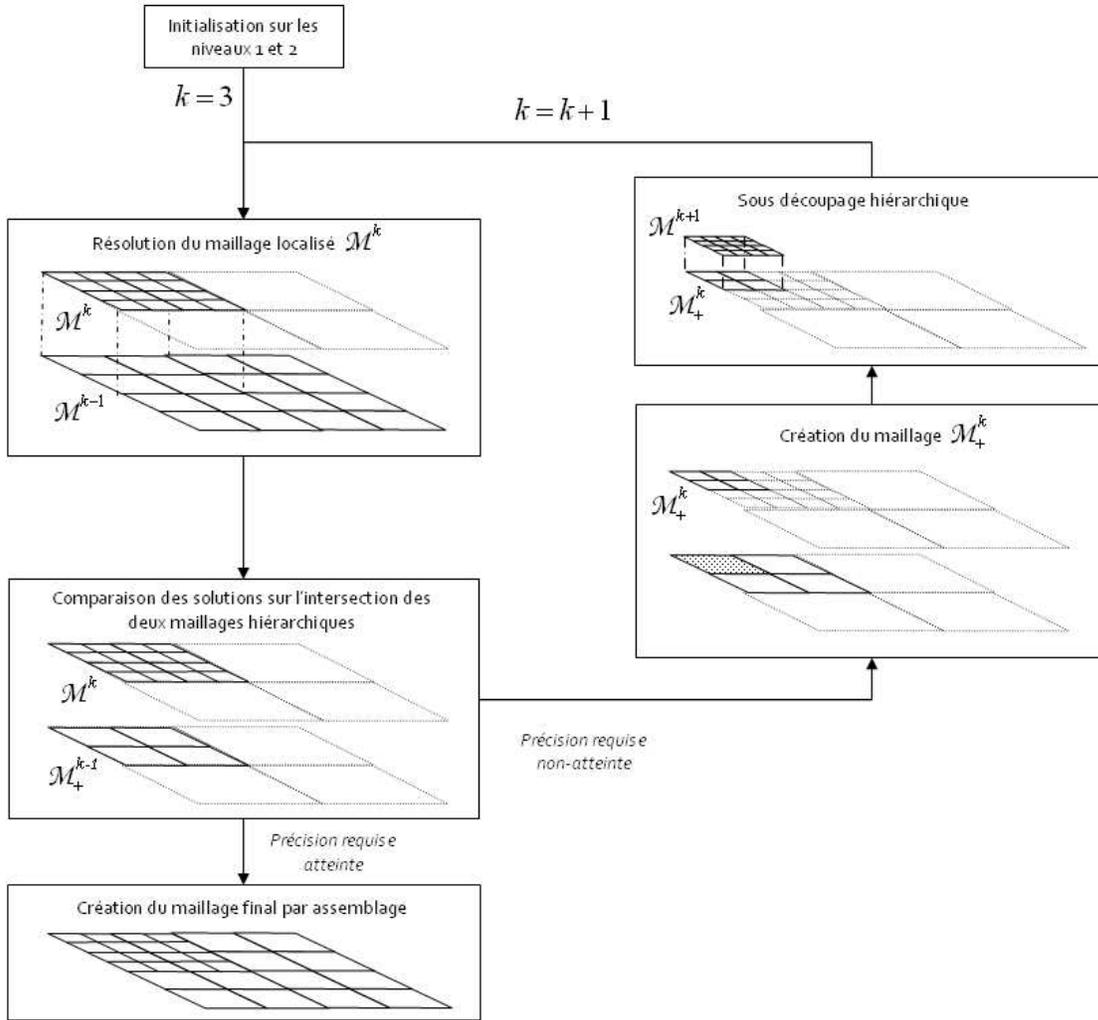


FIG. 3.7: Schéma de principe de la stratégie multigrilles

Le maillage final à l'instant t_n (multiniveaux) est construit par assemblage. Ce maillage, noté \mathcal{M}^c , est la combinaison des parties non-recouvertes des maillages de chaque niveau et du niveau le plus fin atteint (cf. figure 3.8) :

$$\mathcal{M}^c = \mathcal{M}_*^2 \cup \mathcal{M}_*^3 \cup \dots \cup \mathcal{M}_*^{f-1} \cup \mathcal{M}^f \quad (3.16)$$

Le vecteur d'état solution sur le maillage final est construit en utilisant la restriction sur les maillages non-recouverts des vecteurs d'état sur chaque niveau. On note \mathcal{S}_*^k la restriction sur le maillage \mathcal{M}_*^k du vecteur d'état \mathcal{S}^k . Le vecteur d'état \mathcal{S}^c , associé au maillage \mathcal{M}^c est alors donné par :

$$\mathcal{S}^c = \mathcal{S}_*^2 \cup \mathcal{S}_*^3 \cup \dots \cup \mathcal{S}_*^{f-1} \cup \mathcal{S}_*^f \quad (3.17)$$

La phase d'assemblage fait intervenir des interfaces incompatibles. Sur les frontières

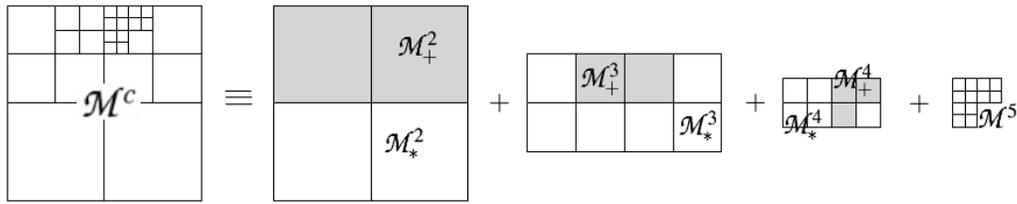


FIG. 3.8: Construction du maillage final à chaque instant

communes à deux niveaux, la continuité des vitesses et des accélérations n'est pas imposée et les quantités nodales sont différentes. On utilise la solution la plus fine localement pour définir les quantités d'interface.

3.2 Mise en oeuvre

Cette section propose d'étudier, plus en détails, le fonctionnement et les finalités des outils numériques utilisés afin de développer la stratégie de raffinement automatique présentée ci-dessus.

3.2.1 Stratégie Full MultiGrid

Les stratégies multigrilles non-linéaires présentées section 2.5 ne sont pas optimales en terme d'initialisation. En effet, le premier calcul est réalisé sur le maillage le plus fin. L'approximation initiale sur ce niveau peut alors être très pauvre et nécessiter un nombre important de cycles multigrilles et donc de phases de relaxation pour calculer la solution à convergence. Le temps de calcul s'en trouve alors pénalisé.

C'est pourquoi il est souvent intéressant de réaliser un pré-calcul sur un niveau plus grossier afin d'obtenir une meilleure approximation de la solution initiale sur le maillage de niveau fin. A la suite de cette initialisation, les méthodes multigrilles classiques sont utilisées pour calculer le problème à convergence.

En appliquant cette initialisation de manière récursive jusqu'au maillage de niveau 1, on obtient un schéma ascendant où le calcul démarre sur la grille la plus grossière et termine sur la grille la plus fine. Un tel schéma est connu dans la littérature sous le nom de "Full Multigrid" (FMG).

La figure 3.9 présente un exemple de cycle FMG à 4 grilles où 2 V-cycles sont utilisés pour initialiser la solution sur chacun des niveaux. Les conventions de représentation utilisées section 2.5 sont reprises ici. Les cercles simples représentent les niveaux où une phase de relaxation est effectuée. Les doubles cercles représentent les niveaux où le vecteur solution à convergence est obtenu. Les nombres v_0 , v_1 , v_2 et $v_3 = v_1 + v_2$ représentent le nombre d'itérations réalisées à chaque phase de relaxation.

On note \mathbb{J} l'opérateur d'interpolation du vecteur d'état complet. Les phases d'interpolation intégrées aux V-cycle restent inchangées vis-à-vis de celles présentées section 2.5 et sont indicés *FAS* sur cette figure. La première interpolation sur un niveau (indicée

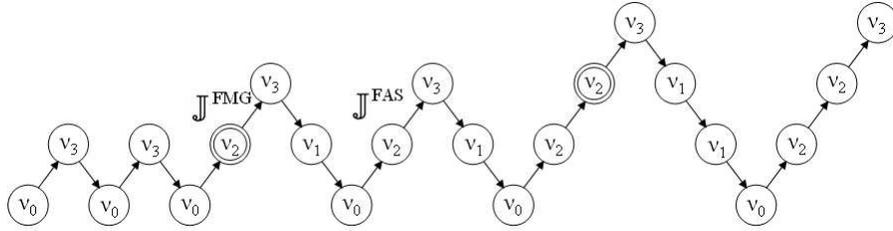


FIG. 3.9: Diagramme de fonctionnement d'une stratégie FMG - 2 V-cycles par niveau

FMG) est utilisée afin d'initialiser la solution sur le niveau fin et est généralement réalisée avec des opérateurs de prolongement d'ordre supérieur [VEN 00]. Dans notre cas, ces deux opérations sont traitées d'une manière différente afin d'assurer la stabilité de notre solveur multigrilles (cf. section 3.2.3).

Lorsque les niveaux multigrilles sont globaux en espace, et dans le cas où un algorithme multigrilles de type FAS est utilisé pour la résolution multiniveaux, la stratégie FMG peut être décrite suivant la table 3.2 [VEN 00]. Le cycle FMG peut être vu comme une simple modification de l'agencement des V-cycles dans la stratégie multigrilles non-linéaire.

TAB. 3.2: Algorithme Full MultiGrid

Full Multigrid Niveau n
<p>Si $n > 1$:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Full Multigrid Niveau $(n - 1)$ - Interpolation FMG de la solution sur le niveau $(n - 1)$ comme approximation initiale sur le niveau n $\mathcal{S}^n = \mathbb{J}_{n-1}^n \mathcal{S}^{n-1}$ <ul style="list-style-type: none"> - Calcul de la solution sur le niveau n jusqu'à convergence en utilisant l'algorithme FAS
<p>Si $n = 1$:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Calcul de la solution sur le niveau n jusqu'à convergence en utilisant v_0 itérations du solveur non-linéaire

Notre stratégie de raffinement automatique ressemble à cette stratégie multigrilles dans le sens où le premier calcul à convergence est réalisé sur la grille la plus grossière. Par la suite, des niveaux de plus en plus fins sont créés afin d'atteindre la précision requise par l'utilisateur. La stratégie de résolution présentée par la suite s'apparente donc à une stratégie FMG non-linéaire localisée.

3.2.2 Stratégie multigrilles non-linéaire localisée

Lorsque les différentes grilles sont localisées les unes par rapport aux autres, les méthodes multigrilles classiques présentées section 2.5 et 3.2.1 doivent être modifiées. On propose ici un algorithme multigrilles dédié à la résolution d'équations non-linéaires et permettant de tenir compte de l'utilisation de maillages de frontières différentes.

Des approches similaires ont déjà été envisagées et décrites dans la littérature [VEN 00, GRA 03]. Une utilisation dans le cadre de stratégies adaptatives pour des comportements élasto-plastiques est par ailleurs présentée dans [EKE 04] pour des simulations quasi-statiques.

L'algorithme multigrilles localisé présenté dans cette section s'appuie sur la stratégie multigrilles non-linéaire "Full Approximation Scheme". L'équation résolue ici est donc directement l'équation d'équilibre discrétisée non linéaire (1.59). Une fois encore, cette équation est synthétisée sur le niveau k sous la forme :

$$\mathcal{L}^k \langle \mathcal{S}^k \rangle = \mathbf{F}^k \quad (3.18)$$

On ne traite ici que la description du V-cycle en lui-même et on s'affranchit de l'initialisation FMG. En effet, seule la phase d'interpolation FMG pour initialiser le V-cycle diffère de la description du FAS localisé.

Le traitement des mécanismes de plasticité requiert néanmoins une attention particulière. La gestion des phénomènes irréversibles est présentée section 3.2.3.

3.2.2.1 Pré-relaxation

On se place dans le cadre général où la solution est recherchée sur un maillage \mathcal{M}^k . Une première approximation du vecteur d'état \mathcal{S}^k est éventuellement connue grâce à la phase d'initialisation FMG. Cette première approximation de la solution contient dans ce cas toutes les fréquences calculées sur les maillages de niveaux plus faibles.

Cette première approximation peut également avoir été calculée par l'intermédiaire des V-cycles précédents. Le cas échéant, cette première approximation est construite en fonction des prédicteurs du schéma d'intégration numérique en temps.

A l'instar du FAS présenté section 2.5.2.2, un faible nombre d'itérations du solveur non-linéaire est réalisé sur le niveau k . Une solution $\tilde{\mathcal{S}}^k$ associée à un résidu $\tilde{\mathbf{R}}^k$ est alors obtenue. Il est de nouveau possible de faire apparaître l'erreur v^k entre la solution exacte du problème discrétisé \mathcal{S}^k et la solution courante $\tilde{\mathcal{S}}^k$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}^k(\tilde{\mathcal{S}}^k) &= \mathbf{F}^k - \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathcal{S}}^k \rangle \\ &= \mathcal{L}^k \langle \mathcal{S}^k \rangle - \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathcal{S}}^k \rangle \\ \tilde{\mathbf{R}}^k(\tilde{\mathcal{S}}^k) &= \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathcal{S}}^k + v^k \rangle - \mathcal{L}^k \langle \tilde{\mathcal{S}}^k \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2.2.2 Etape de restriction

Pendant la phase de restriction, la solution initiale sur le niveau grossier est construite par assemblage de la restriction spatiale du vecteur solution \mathcal{S}^{k-1} sur la partie non recouverte \mathcal{M}_*^{k-1} du maillage \mathcal{M}^{k-1} et de la restriction spatiale sur la partie recouverte \mathcal{M}_+^{k-1} de la restriction du vecteur solution $\tilde{\mathcal{S}}^k$ existant sur le maillage \mathcal{M}^k .

Si on note Π_*^{k-1} et Π_+^{k-1} les opérateurs de restriction spatiale d'un vecteur d'état de niveau $(k-1)$ sur les parties recouvertes \mathcal{M}_+^{k-1} et non-recouvertes \mathcal{M}_*^{k-1} du maillage de niveau $(k-1)$, l'approximation initiale $\hat{\mathcal{S}}^{k-1}$ du vecteur d'état sur ce niveau après restriction est donnée par :

$$\hat{\mathcal{S}}^{k-1} = \Pi_*^{k-1} \mathcal{S}^{k-1} \cup \Pi_+^{k-1} \mathbb{J}_k^{k-1} \tilde{\mathcal{S}}^k \quad (3.20)$$

L'opérateur \mathbb{J}_k^{k-1} traduit ici l'opérateur de restriction permettant le passage complet du vecteur d'état depuis le niveau k sur le niveau $(k-1)$. Il est introduit de manière à synthétiser la phase de restriction. En pratique, l'opérateur \mathbb{J}_k^{k-1} est utilisé pour chacune des quantités nodales et l'opérateur \mathcal{J}_k^{k-1} pour chacune des quantités définies aux points de Gauss.

La restriction du vecteur d'état $\tilde{\mathcal{S}}^k$ sur la partie \mathcal{M}_+^{k-1} du maillage \mathcal{M}^{k-1} permet d'améliorer la qualité de la solution sur le niveau $(k-1)$ complet. En effet, ce maillage peut éventuellement être trop grossier pour détecter les non-linéarités calculées sur le maillage le plus fin et l'influence de la non-linéarité sur le niveau k , transmise sur le maillage \mathcal{M}_+^{k-1} influence la solution sur le maillage non-recouvert \mathcal{M}_*^{k-1} .

3.2.2.3 Problème de référence sur le niveau $(k-1)$

Le problème équivalent sur le niveau $(k-1)$ est construit de manière à rechercher une approximation sur le niveau grossier de l'erreur v^k présente sur le niveau k . Etant donné que les grilles sont désormais localisées, l'équation (2.74) n'est plus utilisable directement et la définition du second membre sur le niveau grossier est désormais réalisée en utilisant l'approximation initiale sur le niveau $(k-1)$ donnée par l'équation (3.20) et la restriction du résidu de niveau k :

$$\mathbf{F}^{k-1} = \mathcal{L}^{k-1} \langle \hat{\mathcal{S}}^{k-1} \rangle + \hat{\mathbf{R}}^{k-1} \quad (3.21)$$

$$\text{avec : } \hat{\mathbf{R}}^{k-1} = \mathbb{I}_k^{k-1} \tilde{\mathbf{R}}^k (\tilde{\mathcal{S}}^k)$$

Cette construction du problème grossier ne prend pas en compte le résidu associé au vecteur d'état \mathcal{S}^{k-1} . Le calcul ayant précédemment été réalisé à convergence, on suppose ce résidu négligeable devant la restriction du résidu associé à l'erreur v^k .

En utilisant des V-cycles successifs ou un solveur non-linéaire classique, la résolution sur la grille grossière de ce problème équivalent permet d'obtenir une solution corrigée $\tilde{\mathcal{S}}^{k-1}$. L'approximation v^{k-1} de l'erreur v^k sur le niveau $(k-1)$ est alors donnée par :

$$v^{k-1} = \tilde{\mathcal{S}}^{k-1} - \hat{\mathcal{S}}^{k-1} \quad (3.22)$$

3.2.2.4 Phase de prolongation de la correction

Durant la phase de prolongation, seule la composante de l'erreur sur le maillage \mathcal{M}_+^{k-1} est prolongée sur le niveau k pour améliorer la qualité de la solution. Sur la partie complémentaire \mathcal{M}_*^{k-1} cette erreur correspond à une correction permettant de prendre en compte l'influence du maillage fin sur la partie non recouverte de niveau $(k-1)$.

Pour synthétiser cette phase de prolongation, on note \mathbb{J}_{k-1+}^k l'opérateur de prolongation d'un vecteur d'état depuis le maillage \mathcal{M}_+^{k-1} sur le maillage \mathcal{M}^k . L'approximation de l'erreur sur le niveau k est alors donnée par :

$$v^k = \mathbb{J}_{k-1+}^k \Pi_+^{k-1} (\tilde{\mathcal{S}}^{k-1} - \hat{\mathcal{S}}^{k-1}) \quad (3.23)$$

Cette prolongation permet de corriger la solution $\tilde{\mathcal{S}}^k$ et de lui apporter des informations basses fréquences difficilement calculables sur le maillage fin lui-même. Cette phase peut être synthétisée sous la forme :

$$\mathcal{S}^k = \tilde{\mathcal{S}}^k + v^k \quad (3.24)$$

Lorsque des mécanismes irréversibles sont modélisés, cette phase de prolongement de la correction est traitée différemment de manière à assurer l'admissibilité matérielle du vecteur d'état corrigé (cf. section 3.2.3.1).

3.2.3 Gestion des phénomènes irréversibles

En pratique, la phase de prolongation depuis un niveau grossier sur un niveau fin ne peut être traitée de manière directe par les équations multigrilles présentées jusqu'ici lorsque des déformations plastiques apparaissent. En effet, les opérateurs d'interpolation sont connus pour introduire des erreurs numériques haute-fréquence dans la solution.

Aussi, lorsque la correction projetée depuis le niveau sous-jacent contient une composante irréversible, comme c'est le cas pour les déformations plastiques, l'utilisation directe de l'opérateur risque d'introduire une erreur haute-fréquence que le solveur ne pourra corriger par la suite.

Il est donc nécessaire de définir un opération de prolongation adéquate permettant d'obtenir un vecteur d'état admissible. Cette étape n'est pas réalisée strictement parlant par un opérateur et utilise l'ensemble du système d'équations.

3.2.3.1 Prolongation FAS

On cherche ici à définir l'opération de prolongation au sein de la stratégie FAS. Celle-ci est vouée à remplacer l'opérateur \mathbb{J}^{FAS} représenté sur la figure 3.9. Pendant cette phase de prolongation, la solution $\tilde{\mathcal{S}}^k$ calculée lors de la précédente étape sur le niveau k doit être corrigée en fonction des vecteurs d'état $\tilde{\mathcal{S}}^{k-1}$ et $\hat{\mathcal{S}}^{k-1}$ calculés sur le niveau $(k-1)$.

Afin d'éviter l'apparition d'erreurs irréversibles, seul le déplacement est interpolé depuis la grille grossière sur la grille fine en utilisant l'opérateur \mathbb{I}_{k-1+}^k depuis la partie

recouverte du maillage de niveau $(k-1)$ sur le maillage de niveau k . On note Π_+^{k-1} l'opérateur de restriction spatiale du maillage \mathcal{M}^{k-1} sur le maillage \mathcal{M}_+^{k-1} :

$$\mathbf{U}^k = \tilde{\mathbf{U}}^k + \mathbb{I}_{k-1}^k + \Pi_+^{k-1} \left(\tilde{\mathbf{U}}^{k-1} - \hat{\mathbf{U}}^{k-1} \right) \quad (3.25)$$

La correction cinématique du reste du vecteur d'état \mathcal{S}^k est réalisée en utilisant les prédicteurs du schéma de Newmark, connus sur ce niveau :

$$\ddot{\mathbf{U}}^k = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left(\mathbf{U}^k - {}^p \mathbf{U}^k \right) \quad (3.26)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^k = {}^p \dot{\mathbf{U}}^k + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^k \quad (3.27)$$

Le prolongement des champs non-linéaires (contraintes et variables internes) est réalisé en utilisant l'algorithme d'intégration de la loi de comportement depuis le dernier état matériellement admissible connu sur le maillage de niveau k . Au sein du V-cycle, il existe systématiquement des informations non-linéaires matériellement admissibles calculées lors des phases de pré-relaxation. Soient $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k$ et $\tilde{\mathbf{v}}_i^k$ les contraintes et les variables internes extraites du vecteur d'état $\tilde{\mathcal{S}}^k$ calculé lors de la phase de prérelaxation. La mise à jour des quantités non-linéaires est alors donné par :

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^k, \mathbf{v}_i^k \right) = ILC \left(\left(\mathbf{U}^k - \tilde{\mathbf{U}}^k \right), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k, \tilde{\mathbf{v}}_i^k \right) \quad (3.28)$$

Où ILC représente l'algorithme d'intégration de la relation de comportement.

3.2.3.2 Prolongation FMG

L'indice n , relatif au temps et omis précédemment, est réintroduit dans cette section pour permettre la description de cette phase de prolongation. On se place ici à l'instant t_{n+1} , l'instant t_n étant connu.

On s'intéresse à la prolongation du vecteur d'état depuis le maillage recouvert de niveau $(k-1)$ sur le niveau k servant à initialiser la solution sur le maillage \mathcal{M}^k à l'instant t_{n+1} . Cette opération remplace l'opérateur \mathbb{J}^{FMG} présenté sur la figure 3.9.

Lors de cette initialisation, aucune information n'est disponible sur le niveau k à l'instant t_{n+1} . L'état thermodynamique de la structure est donc actualisé en fonction des données de l'instant précédent. Le fonctionnement de cette opération de prolongement est très similaire à celle présentée section 3.2.3.1. Dans un premier temps, seul le déplacement est prolongé depuis la partie recouverte du maillage sous jacent \mathcal{M}_+^{k-1} :

$$\mathbf{U}^k = \mathbb{I}_{k-1}^k + \Pi_+^{k-1} \mathbf{U}^{k-1} \quad (3.29)$$

Les prédicteurs sont supposés connus sur ce niveau. Pour plus de détails quant à leur construction, on pourra se reporter à la section 3.2.6. Le calcul des vitesses et des accélérations est réalisé en utilisant les équations (3.26) et (3.27) du schéma de Newmark.

Les variables internes et les contraintes sont actualisées par un algorithme de retour radial sur le seuil en utilisant la projection de l'état thermodynamique de l'instant t_n sur le maillage courant comme état initial. On note \mathbf{U}_n^k , $\boldsymbol{\sigma}_n^k$ et \mathbf{v}_{in}^k , les déplacements, les contraintes et les variables internes prolongées depuis le maillage \mathcal{M}^c de l'instant t_n .

Si $\mathbb{I}_{\mathcal{M}^c(t_n)}^k$ représente l'opérateur de transfert en espace et en temps des quantités nodales depuis le maillage $\mathcal{M}^c(t_n)$ sur le maillage $\mathcal{M}^k(t_{n+1})$, et si $\mathcal{J}_{\mathcal{M}^c(t_n)}^k$ décrit l'opérateur de transfert des quantités aux points de Gauss, ceux-ci sont donnés par les équations :

$$\mathbf{U}_n^k = \mathbb{I}_{\mathcal{M}^c(t_n)}^k \mathbf{U}^c(t_n) \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n^k = \mathcal{J}_{\mathcal{M}^c(t_n)}^k \boldsymbol{\sigma}^c(t_n) \quad (3.31)$$

$$\mathbf{v}_{in}^k = \mathcal{J}_{\mathcal{M}^c(t_n)}^k \mathbf{v}_i^c(t_n) \quad (3.32)$$

Où les quantités $\mathbf{U}^c(t_n)$, $\boldsymbol{\sigma}^c(t_n)$, $\mathbf{v}_i^c(t_n)$ sont celles existantes sur le maillage convergé \mathcal{M}^c à l'instant t_n . Les champs non-linéaires initiaux à l'instant t_{n+1} sont alors donnés par :

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k, \mathbf{v}_{in+1}^k \right) = ILC \left(\left(\mathbf{U}_{n+1}^k - \mathbf{U}_n^k \right), \boldsymbol{\sigma}_n^k, \mathbf{v}_{in}^k \right) \quad (3.33)$$

3.2.3.3 Illustration de la stratégie

La figure 3.10 illustre le fonctionnement de notre stratégie. Le diagramme de fonctionnement s'apparente au diagramme de fonctionnement du FMG présenté figure 3.9.

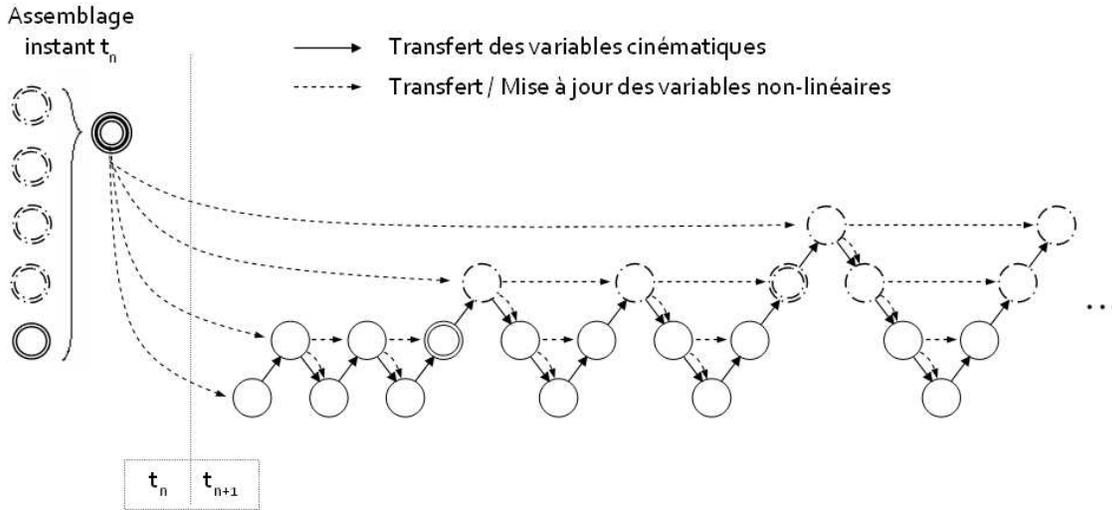


FIG. 3.10: Diagramme de fonctionnement de la stratégie multigrilles localisée non-linéaire

A l'instant t_n , les maillages non-recouverts sont assemblés afin de former le maillage final \mathcal{M}^c représenté par le cercle à trois traits. Si le niveau maximum atteint correspond à une grille de niveau 6, ce maillage est construit en utilisant les 5 niveaux les plus fins.

Un niveau global en espace est représenté par un cercle continu. A contrario, un niveau local est représenté par un cercle discontinu. Un double cercle, continu ou discontinu, représente un niveau où le calcul est convergé (on suppose sur ce diagramme que deux V-cycles sont nécessaires au calcul de la solution sur les différents niveaux). Le nombre d'itérations réalisées sur chaque niveau n'est pas représenté pour alléger le diagramme. On pourra se référer à la figure 3.9 pour plus de détails.

Les phases de transfert sont illustrées sur la figure par des flèches. Les flèches pleines représentent le transfert de quantités cinématiques (transfert du déplacement lors des phases de prolongation et transfert supplémentaire des vitesses et accélérations lors des phases de restriction). Les flèches en pointillés représentent une phase de transfert (lors des restrictions) ou d'actualisation des variables élastoplastiques (dans les autres cas).

Dans la suite de ce mémoire, on notera NL-L-FMG notre stratégie pour "Non-Linear Localized Full MultiGrid".

3.2.4 Alternatives multigrilles

La stratégie multigrilles présentée s'appuie sur des phases de transfert particulières et des grilles élastoplastiques de raffinement différents. On présente dans cette section quelques alternatives envisagées pour construire la méthode de raffinement automatique.

3.2.4.1 Alternative aux phases de transfert multigrilles

Durant les phases de restriction et de prolongation, le choix des opérations de transferts entre grilles et leur agencement influence la stabilité et la vitesse de convergence de notre solveur multigrilles ainsi que la qualité de la solution calculée à chaque pas de temps. Durant nos travaux, deux alternatives ont principalement été envisagées.

Une première méthode consiste à utiliser le "Full Approximation Scheme" de manière directe et à transférer le vecteur d'état complet lors des phases de prolongement et de restriction. Cela revient à utiliser directement l'algorithme présenté section 3.2.2. En adoptant les conventions de représentation utilisées section 3.2.3.3, la stratégie peut être illustrée suivant la figure 3.11.

Dans ce cas, la vitesse de convergence du solveur est maximale mais des problèmes liés au caractère irréversible des déformations peuvent apparaître. En effet, si le prolongement de la correction en variables internes induit une plasticité trop importante sur l'échelle fine, l'algorithme multigrilles développé ne pourra rétablir l'équilibre de la structure et le solveur ne convergera pas plus avant. Inadaptée à notre problème de part les phénomènes élasto-plastiques, cette stratégie peut néanmoins être envisagée dans le cas de comportement non-linéaires réversibles telles que l'élasticité non-linéaire.

La seconde alternative consiste à laisser les variables internes et les contraintes indépendantes sur chaque niveau (cf. figure 3.12). Dans ce cas, seules les variables cinématiques sont réduites lors de la phase de restriction. Les contraintes et les variables internes sont mises à jour en utilisant l'algorithme de retour radial sur le seuil en considérant la

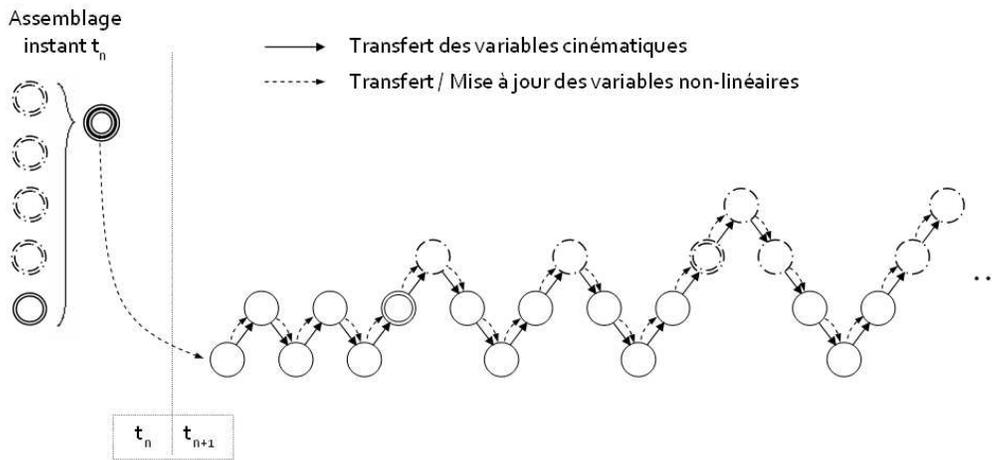


FIG. 3.11: Première alternative à notre stratégie

correction en déplacement comme incrément de déplacement. La vitesse de convergence est alors plus faible (cf. section 4.4.1).

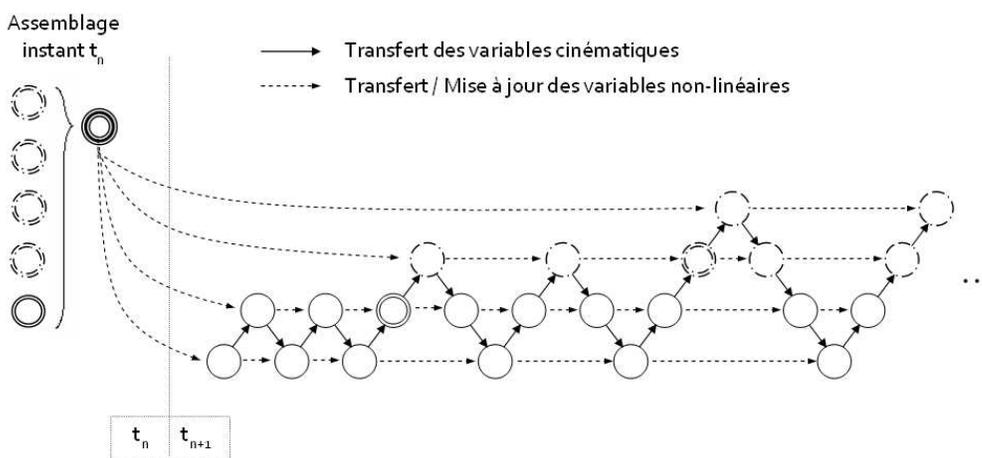


FIG. 3.12: Seconde alternative à notre stratégie

En effet, lorsque les informations non-linéaires ne sont pas transmises l'état élastoplastique sur chaque grille peut être différent de l'état élastoplastique décrit sur la grille la plus fine (cf. section 3.2.5.1). Dans ce cas, la correction apportée est faible et peut même, dans des cas extrêmes, limiter la vitesse de convergence du solveur itératif. De plus, lorsque des grilles localisées sont utilisées, une telle stratégie ne permet pas de mettre à jour l'état thermodynamique des niveaux grossiers non-recouverts et l'état élastoplastique multiniveaux ne correspond donc plus à la solution calculée en utilisant un maillage uniforme de niveau fin.

3.2.4.2 Alternative aux modèles associés aux grilles grossières recouvertes

Lorsqu'un maillage multigrilles est recouvert, le modèle numérique utilisé est dédié à l'amélioration de la convergence sur le niveau le plus fin. Ces modèles ne doivent donc pas nécessairement permettre de décrire le comportement réel du matériau ou de la structure et ces niveaux ne sont aucunement utilisés lors du post-traitement des résultats.

Aussi, la question de la représentativité des modèles sur les grilles recouvertes est pertinente. On montre que pour des écoulements plastiques localisés, le fait d'adopter un comportement élastique sur les niveaux sous-jacents permet d'obtenir une vitesse de convergence équivalente à celle obtenue avec des modèles élasto-plastiques [RAN 08]. Or le fait de décrire le comportement sur les niveaux sous-jacents en utilisant des modèles à variables internes augmente l'occupation mémoire et le coût des phases de transfert multigrilles. A contrario, si la structure est plus largement plastifiée, l'utilisation d'un comportement élastique sur les niveaux grossiers ne permet pas de décrire la phénoménologie du comportement plastique et le gain de vitesse de convergence devient négligeable.

Il peut alors être utile, en fonction du comportement d'un groupe élémentaire d'éléments enfants (ie, ne dépendant que d'un seul parent), de chercher à construire le modèle le plus pertinent sur le niveau grossier. Il est possible, par exemple, d'utiliser les modèles rhéologiques (cf. figure 3.13(a)) ou les méthodes d'homogénéisation de Hill-Mandel (cf. figure 3.13(b)) afin de décrire un comportement équivalent sur la grille grossière.

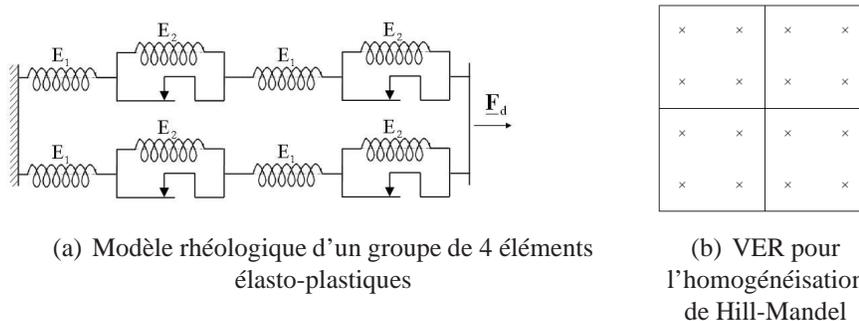


FIG. 3.13: Modèles d'homogénéisation élémentaire de 4 cellules

Pour les méthodes d'homogénéisation, on suppose en général que les champs fluctuent faiblement et que les échelles macroscopique et microscopique sont découplées. La condition de macrohomogénéité de Hill-Mandel, qui traduit l'égalité des travaux microscopiques et macroscopiques, permet alors de définir des modèles de matériau équivalents. Dans le cas de notre étude, les dimensions des phénomènes plastiques sont du même ordre de grandeur que les dimensions du "Volume Elementaire Représentatif" (VER) utilisé pour définir ce comportement équivalent. Aussi, l'hypothèse de séparabilité des échelles n'est plus vérifiée et cette technique ne permet pas de définir un modèle de comportement permettant d'améliorer de manière significative la vitesse de convergence comparative-ment au schéma multigrilles élastoplastique. De plus, la construction du modèle sur la grille grossière est alors une opération relativement sophistiquée dont le temps de calcul intervient fortement dans le temps de calcul global de notre stratégie.

L'utilisation des modèles rhéologique s'avère quant à elle trop simpliste pour définir un comportement équivalent sur les grilles grossières. Il est entre autre difficile, par ce biais, de calculer la raideur en cisaillement de notre modèle. Même si ces méthodes permettent de définir des modèles équivalents à moindre coût sur les grilles grossières, ils sont donc peu adaptés à notre problématique et restent d'un intérêt limité comparativement au modèle purement élastique.

Par ailleurs, dans le cas de multigrilles localisées, il convient de prendre en compte le fait que les maillages non-recouverts doivent porter l'information précise de l'état élastoplastique. Les modèles sur les grilles recouvertes, qui sont destinés à améliorer la convergence sur les grilles les plus fines, doivent dans ce cas également permettre de rendre compte précisément des informations calculés sur le niveau le plus fin. Or, si les méthodes d'homogénéisation permettent de décrire convenablement l'état énergétique du niveau fin, elles ne permettent pas de décrire correctement la déformation de la structure. L'utilisation de ces modèles surcontraint donc le maillage non-recouvert et tend à écarter la solution multi-niveaux de la solution de référence.

Aussi, même si elles sont plus coûteuses, les méthodes multigrilles construites en utilisant des modèles élastoplastiques sur les maillages recouverts restent plus performantes. En effet, elles offrent le meilleur compromis entre la qualité de la solution éléments finis et le temps de calcul. Sur les niveaux recouverts, elles décrivent de manière optimale le processus de capture des composantes basses fréquences et constituent dans la partie non-recouverte le support de la solution sur les zones non-raffinées.

3.2.5 Influence des phases d'interpolation

Cette section propose de découvrir, plus en détail, le comportement de la stratégie multigrilles. On y présente le couplage entre les différentes échelles de calcul et les finalités du transfert de la solution du niveau fin sur les grilles grossières.

3.2.5.1 Influence du comportement du niveau fin sur les niveaux grossiers

Afin d'illustrer numériquement l'influence des phases de restriction multigrilles sur la qualité de la solution sur les niveaux grossiers, on s'intéresse à l'exemple d'une plaque trouée (présenté en détail figure 4.3) discrétisée en utilisant des quadrangles. Le niveau le plus fin sur lequel la solution est recherchée possède 1024 éléments. On adopte la stratégie multigrilles présentée ci-dessus en imposant des maillages globaux en espace. La stratégie multigrilles est construite sur 4 niveaux. Le maillage le plus grossier possède 16 éléments.

La figure 3.14 présente la déformation plastique sur le maillage le plus grossier lorsque le front d'onde arrive dans la partie inférieure du quart de plaque. Sur la figure de gauche est tracée la déformation plastique calculée de manière classique pour le maillage de niveau 1. Elle correspond donc à la phase de calcul réalisée en entrée du cycle NL-L-FMG. La seconde figure représente la déformation plastique une fois le calcul de niveau 4 réalisé (niveau 1 recouvert par les trois niveaux de raffinement supérieur).

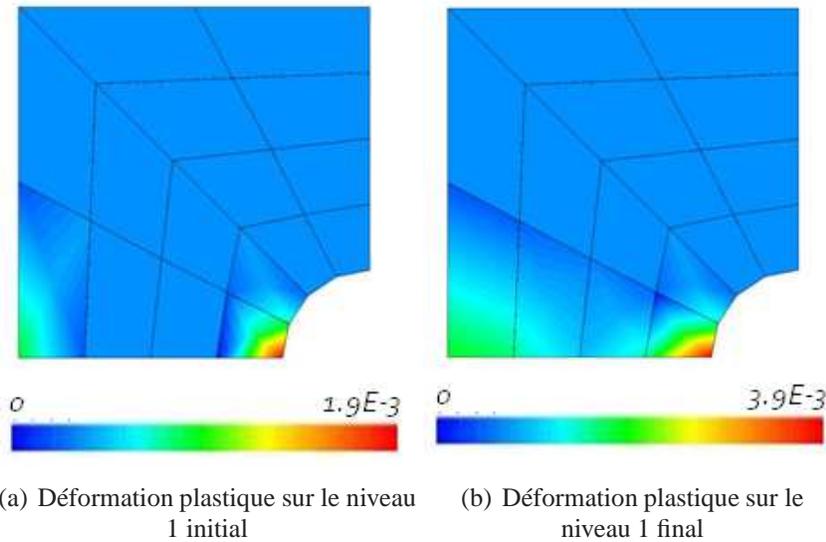


FIG. 3.14: Comparaison des solutions sur le niveau 1 en fonction de l'étape mutigrille considérée

Initialement seul 3 éléments subissent une déformation plastique. Or, sur le niveau le plus fin, la plasticité est diffusée sur l'ensemble de la section inférieure du quart de plaque. C'est ce que traduit la déformation plastique sur le niveau 1 une fois le calcul sur le niveau le plus fin réalisé : deux éléments supplémentaires voient une déformation plastique.

Qui plus est, l'échelle de déformation est fondamentalement différente, avec une variation de la déformation plastique maximum de l'ordre de 100. Cette phase de transfert contribue donc à la prise en compte sur l'échelle grossière de l'état thermodynamique calculé sur le niveau le plus fin et va permettre à la grille grossière de contribuer au mieux à la convergence de la solution sur les niveau de raffinement supérieur.

Lorsque des grilles localisées sont utilisées, on distingue sur le niveau 1 la partie recouverte du maillage, notée \mathcal{M}_+^1 et la partie non-recouverte, notée \mathcal{M}_*^1 . Le fait d'améliorer la description de la solution sur le maillage \mathcal{M}_+^1 va permettre de rendre compte des phénomènes calculés sur l'échelle fine et va donc améliorer également la description de la solution sur le maillage \mathcal{M}_*^1 .

3.2.5.2 Actualisation des conditions limites

Lorsqu'un maillage de niveau k est localisé, le calcul sur ce niveau est effectué en considérant sur la frontière $\partial\mathcal{M}_L^k$ des conditions limites faisant intervenir l'interpolation des déplacements calculés sur le niveau $(k-1)$ suivant l'équation (3.15).

Or la solution sur le niveau $(k-1)$ perçoit des informations non-linéaires différentes suivant l'itération multigrilles considéré. Le fait de réaliser le calcul sur le niveau k va en effet modifier l'état élastoplastique sur le niveau $(k-1)$. Les conditions aux limites sur le niveau k sont donc intimement liées au vecteur d'état calculé sur ce même niveau et sont modifiées une fois le calcul de niveau k réalisé. Cette dépendance réciproque des condi-

tions limites et de l'état thermodynamique sur le maillage \mathcal{M}^k nécessite de mettre à jour les conditions limites sur les niveaux localisés au sein même de la stratégie multigrilles.

De fait, la stratégie multigrilles développée permet de prendre naturellement en compte le couplage entre le calcul de la solution et la mise à jour des conditions limites. A chaque phase de restriction, l'état sur le niveau $(k - 1)$ est actualisé afin de rendre compte des non-linéarités calculées sur l'échelle fine. Durant la phase de prolongement, les conditions limites sont systématiquement réactualisées sur les bords de liaison $\partial\mathcal{M}_L^k$ du maillage au moment de la phase de correction de la solution.

Cette actualisation permet de préserver la compatibilité des déplacements à l'interface et de calculer la solution sur le niveau le plus fin le plus précisément possible.

3.2.5.3 Modification de la carte d'erreur

Lorsque l'état élastoplastique de la structure est mis à jour sur un niveau recouvert, l'état de la structure complète est modifié. Cette phase de restriction n'est donc pas sans influence sur la cartographie de l'erreur calculée précédemment sur le niveau considéré.

Théoriquement, afin d'assurer que le maillage de niveau k non recouvert continue de vérifier la précision requise par l'utilisateur, il faudrait donc contrôler que cette modification de la carte d'erreur n'altère pas la définition des maillages \mathcal{M}_+^k et \mathcal{M}_*^k et, si besoin est, redéfinir ces maillages à chaque fois qu'un calcul de niveau supérieur est réalisé.

Dans notre stratégie, la localisation n'est pas remise en question au cours de la création des niveaux fins de manière à minimiser l'effort de calcul. En effet, le fait de recalculer l'erreur à chaque création de maillage pourrait rendre le temps de calcul de l'erreur coûteux comparativement au temps passé dans le solveur et les opérations multigrilles.

Qui plus est, le solveur de Newton est un solveur global en espace et l'introduction d'un nouvel élément où le résidu n'est pas convergé nécessiterait de réaliser le calcul sur l'intégralité du maillage. L'utilisation d'un solveur local, possédant de bonnes propriétés de lissage, pourrait permettre d'améliorer les capacités adaptatives de l'algorithme. Quoiqu'il en soit, il faut aussi prendre garde à obtenir un bon compromis entre temps de calcul et réduction de l'erreur. En effet, l'adaptation continue du maillage pourrait induire dans tous les cas une augmentation non négligeable du coût de la stratégie de raffinement automatique comparativement au temps nécessaire pour calculer la solution.

En pratique, sur les exemples numériques présentés section 4, on note que cette remise en question du maillage n'est pas nécessaire lorsque le maillage le plus grossier est suffisamment fin et que la précision requise est importante. Dans ce cas, la cartographie de l'erreur reste globalement du même ordre de grandeur au cours du raffinement de maillage et l'erreur atteinte s'écarte peu de la précision requise par l'utilisateur.

3.2.6 Transfert entre piquets de temps

Lors du passage d'un piquet de temps t_n au piquet de temps t_{n+1} , il est nécessaire de construire les prédicteurs du schéma de Newmark associés au maillage \mathcal{M}^k sur le piquet de temps courant t_{n+1} en fonction des quantités sur le maillage convergé \mathcal{M}^c de

l'instant précédent t_n . De plus, afin d'initialiser l'état thermodynamique sur le niveau k , les contraintes et les variables internes sur le maillage convergé de l'instant t_n doivent être transférées sur le maillage courant à l'instant t_{n+1} (cf. section 3.2.3.2).

La projection de l'ensemble du vecteur d'état \mathcal{S}^c à l'instant t_n est donc nécessaire au calcul de la solution \mathcal{S}^k sur le maillage de niveau k à l'instant t_{n+1} . Cette opération requiert la définition d'un opérateur de projection éventuellement encombrant dans le cas où la solution à l'instant t_n est construite en utilisant un grand nombre de degrés de liberté.

La figure 3.15 illustre la problématique de transfert entre deux piquets de temps. L'instant t_n possède 5 niveaux et l'instant t_{n+1} possède 6 niveaux. Le maillage de niveau 1, totalement recouvert par le maillage de niveau 2 n'est pas représenté sur cette figure.

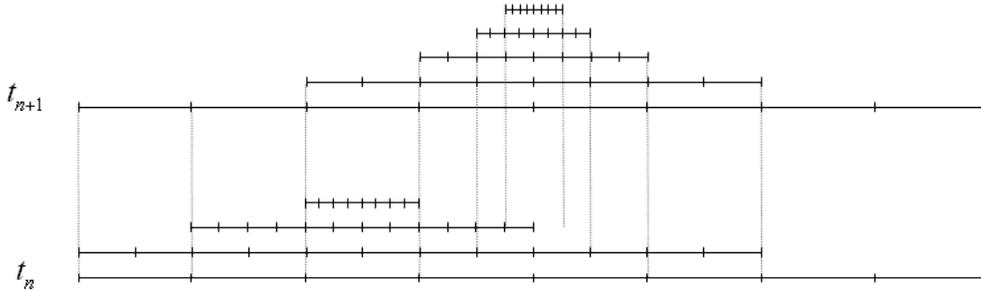


FIG. 3.15: Illustration de la phase de transfert entre pas de temps

Afin de minimiser le coût des phases de transfert entre les maillages de deux piquets de temps successifs, l'opération d'interpolation entre les instants t_n et t_{n+1} est construite de telle sorte qu'aucune opération de restriction ne soit effectuée. On note ${}^i_j\Pi_{t_n}^{t_{n+1}}$ l'opérateur de restriction spatiale du maillage de niveau j à l'instant t_n sur la partie coïncidente du maillage de niveau i à l'instant t_{n+1} . Cet opérateur est utilisé à la fois pour les quantités nodales et pour les quantités définies aux points de Gauss.

Maillages de niveau 1 et 2

La construction des prédicteurs sur les maillages de niveau 1 et 2 à l'instant t_{n+1} utilise les quantités cinématiques calculées sur les maillages de niveau 1 et 2 à l'instant t_n . Etant donné que ces deux niveaux sont globaux en espace, cette phase de prolongement temporel est réalisée de manière directe sans nécessiter d'opérateur de projection spatiale. Les équations (1.67) et (1.68) sont donc directement appliquées en considérant les quantités de niveau 1 et 2 indépendamment. Les champs non-linéaires à l'instant t_{n+1} sur les niveaux 1 et 2 sont quant à eux initialisés avec la valeur des champs non-linéaires à l'instant t_n . Il est important de noter que ces deux maillages sont porteurs des informations calculées sur le niveau le plus fin grâce à la stratégie multigrilles utilisée à l'instant t_n .

Le maillage à l'instant t_{n+1} est recouvert par le maillage à l'instant t_n

Le maillage de niveau 3 à l'instant t_{n+1} étant intégralement couvert par le maillage de niveau 3 à l'instant t_n , la construction des prédicteurs sur le niveau est triviale et est donnée par :

$${}^p\mathbf{U}_n^3 = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{U}_n^3 + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n^3 + (0.5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n^3) \quad (3.34)$$

$${}^p\mathbf{V}_n^3 = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{\mathbf{U}}_n^3 + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n^3) \quad (3.35)$$

Les champs non linéaires sont quant à eux donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^3 = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\sigma}_n^3 \quad (3.36)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{i_{n+1}}^3 = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\nu}_{i_n}^3 \quad (3.37)$$

Le maillage à l'instant t_{n+1} est partiellement recouvert par le maillage à l'instant t_n

Pour le maillage de niveau 4, la situation est légèrement plus complexe. Etant donné que tous les éléments du maillage $\mathcal{M}^4(t_{n+1})$ n'existent pas à l'instant t_n , le prédicteur est construit par assemblage en utilisant les informations des niveau sous-jacents. Soient ${}^p\mathbf{U}_n^3$, ${}^p\mathbf{V}_n^3$, ${}^p\mathbf{U}_n^4$ et ${}^p\mathbf{V}_n^4$ les prédicteurs du schéma de Newmark à l'instant t_{n+1} définis sur les maillages $\mathcal{M}^3(t_n)$ et $\mathcal{M}^4(t_n)$. La définition des prédicteurs du schéma sur le maillage $\mathcal{M}^3(t_{n+1})$ est donné par :

$${}^p\mathbf{U}_n^4 \Big|_{\mathcal{M}^4(t_{n+1})} = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{I}_3^4 {}^p\mathbf{U}_n^3 + {}_4\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} {}^p\mathbf{U}_n^4 \quad (3.38)$$

$${}^p\mathbf{V}_n^4 \Big|_{\mathcal{M}^4(t_{n+1})} = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{I}_3^4 {}^p\mathbf{V}_n^3 + {}_4\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} {}^p\mathbf{V}_n^4 \quad (3.39)$$

Où \mathbb{I}_3^4 représente ici l'opérateur de prolongement du maillage \mathcal{M}^3 à l'instant t_n sur la partie coïncidente du maillage \mathcal{M}^4 à l'instant t_{n+1} . Les variables non-linéaires initiales sur le niveau 4 à l'instant t_{n+1} sont quant à elles construites de manière similaire en assemblant les contributions des maillages de niveau 3 et 4 à l'instant t_n .

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^4 = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{J}_3^4 \boldsymbol{\sigma}_n^3 + {}_4\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\sigma}_n^4 \quad (3.40)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{i_{n+1}}^4 = {}_3\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{J}_3^4 \boldsymbol{\nu}_{i_n}^3 + {}_4\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\nu}_{i_n}^4 \quad (3.41)$$

Où \mathcal{J}_3^4 représente l'opérateur de prolongement des points de Gauss du maillage $\mathcal{M}^3(t_n)$ sur les points de Gauss de la partie coïncidente du maillage $\mathcal{M}^4(t_{n+1})$.

Cas où le maillage à l'instant t_{n+1} n'existe pas à l'instant t_n

Enfin, pour les niveaux 5 et 6, les maillages à l'instant t_{n+1} n'ont aucune antécédent géométrique de même niveau à l'instant t_n . L'information la plus fine localement à l'instant t_n est donc utilisée. Pour ces maillages, l'état élastoplastique et les prédicteurs du schéma d'intégration en temps sont donc construits en fonction des quantités sur les niveaux sous-jacents. En considérant par exemple le calcul des prédicteurs sur le niveau 5, cette phase de transfert peut être formalisée sous la forme :

$${}^p\mathbf{U}_n^5 \Big|_{\mathcal{M}^4(t_{n+1})} = \sum_{i=1}^5 {}_{5-i}\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{I}_{5-i}^5 {}^p\mathbf{U}_n^{5-i} \quad (3.42)$$

$${}^p\mathbf{V}_n^5 \Big|_{\mathcal{M}^4(t_{n+1})} = \sum_{i=1}^5 {}_{5-i}\Pi_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{I}_{5-i}^5 {}^p\mathbf{V}_n^{5-i} \quad (3.43)$$

La sommation s'arrête lorsque les prédicteurs sont définis en chaque noeud du maillage $\mathcal{M}^4(t_{n+1})$. De manière similaire, on a :

$$\sigma_{n+1}^5 = \sum_{i=1}^5 \frac{5}{5-i} \Pi_{t_n}^{t_{n+1}} g_{5-i}^5 \sigma_n^{5-i} \quad (3.44)$$

$$\nu_{i_{n+1}}^5 = \sum_{i=1}^5 \frac{5}{5-i} \Pi_{t_n}^{t_{n+1}} g_{5-i}^5 \nu_{i_n}^{5-i} \quad (3.45)$$

Cette stratégie permet de minimiser les phases de transfert sans perte d'informations. En effet, lorsqu'un niveau à l'instant t_n est recouvert par un maillage plus fin, il décrit de manière équivalente les non-linéarités perçues par les maillages les plus fins sur leurs parties coïncidentes.

3.3 Implémentation numérique

Le fonctionnement général de la stratégie de raffinement automatique a été présentée dans la section 3.2. On s'intéresse ici aux détails de son implémentation numérique. La stratégie est codée en utilisant une version développement de Castem 2000 [VER 88] [MIL 92] où sont intégrés les opérateurs de collocation pour le transfert des champs nodaux [DUR 06]. Par ailleurs, des développements récents [VER 03] permettent sous Castem de conserver l'énergie en présence de non-linéarités lors de l'utilisation de schémas d'intégration numérique en temps de Newmark.

Un extrait du jeu de données est présenté annexe B.

3.3.1 Structure de données

Le raffinement automatique présenté dans ce mémoire nécessite une gestion des données permettant l'automatisation du raffinement. Elle s'appuie sur l'utilisation de pointeurs contenant les informations de géométrie et de filiation.

3.3.1.1 Définition des éléments

Avec la structure des données proposées par Castem, il est possible de regrouper l'ensemble de ces pointeurs sous forme d'un objet dit "table" présentant une structure en arborescence. Chaque objet de la table peut être de type quelconque et est caractérisé par un indice numéraire ou littéraire. La dimension de cet objet n'est pas figée et la table adapte dynamiquement ses dimensions au fur et à mesure du calcul et de nouvelles entrées.

La table 3.3 synthétise la structure des données. L'élément "fil0" de type table regroupe l'ensemble des informations géométriques et de filiation permettant l'automatisation de la stratégie. Le "." désigne une nouvelle arborescence au sein de la structure de données, où l'élément de gauche est associé à celui de droite.

La structure des données, qui regroupe l'ensemble des informations nécessaires au raffinement du maillage, est sous-découpée en niveaux. Au sein du pointeur "niveau"

TAB. 3.3: Structure des données

fil0	.	niveau	.	élément	.	erreur
						. enfants
						. bord i . géometrie
						. condition limite
						. forme
						. centre
						. rayon

sont regroupés les données concernant chacun des éléments finis. La numérotation des éléments au sein de l'objet table est telle qu'il y ai une correspondance directe avec la numérotation des éléments au sein du maillage. Les informations concernant le j -ième élément du maillage de niveau k sont donc contenues dans $fil0 . k . j$.

Pour chacun de ces éléments, les informations suivantes sont définies. Si un calcul a été réalisé sur le maillage de niveau k à l'instant considéré, le pointeur "erreur" fournit la valeur de l'erreur sur chacun des éléments finis du niveau.

Si cette erreur est supérieure à la précision requise, des éléments enfants peuvent être créés par sous-découpage hiérarchique au moment de la création du maillage de niveau $(k + 1)$ (cf. section 3.1.2). Le pointeur "enfant" fournit alors le numéro du premier élément enfant créé. Les éléments d'un maillage sont ordonnés de telle sorte que, selon la dimension du problème, l'ensemble des éléments enfants puisse être déterminé de manière directe en incrémentant ce nombre.

Enfin, pour chaque élément, les bords sont paramétrés indépendamment. Le nombre de bords dépend de l'élément fini considéré. Pour chacun d'eux, la table enregistre la géométrie du bord considéré (coordonnées d'un point en 1D, d'une arête en 2D et d'une surface en 3D) ainsi que la condition limite qui lui est appliquée (éventuellement aucune si l'arête est incluse dans la maillage). Enfin, le pointeur "forme" désigne la forme du contour de la géométrie (forme droite, courbe, ...). En fonction de la valeur de ce dernier pointeur, des informations supplémentaires peuvent être nécessaires au sous-découpage de l'arête et sont alors contenues dans d'autres pointeurs comme par exemple la valeur du rayon et son centre pour une arête circulaire.

Ex. 1 : $fil0.2.58.3.forme$ contient la forme du 3^{ème} bord du 58^{ème} élément de niveau 2.

Ex. 2 : $fil0.5.[table.4.7.(enfant+1)].1.geometrie$ contient la géométrie du premier bord de l'élément de niveau 5, deuxième enfant du septième élément de niveau 4.

3.3.1.2 Filiation de la structure de données

La structure de données de la table de niveau 1 doit être construite de manière automatique lors de la définition du modèle de calcul. Par la suite, les différents éléments de

la table (géométrie, conditions limites) sont hérités de manière automatique par filiation.

L'utilisateur définit le maillage initial ainsi que les conditions aux limites à appliquer à chaque bord de la structure. Il doit définir en plus de ce maillage initial les caractéristiques des frontières de la structure (arrêtes droites, circulaires, ...). On se limite ici à une description des bords courbes sous forme d'arc de cercle.

La construction de la table caractéristique de niveau 1 est résumé table 3.4.

TAB. 3.4: Creation du maillage de niveau 0

Boucle sur les éléments : Extraction de l'élément i

Boucle sur les bords de l'élément : Extraction du bord j

Géométrie Γ_j du bord : $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{geometrie} = \Gamma_j$

Creation de la condition limite

Si $\Gamma_j \cap \partial\Omega_F \neq 0$: $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{condition limite} = \text{force}$

Si $\Gamma_j \cap \partial\Omega_U \neq 0$: $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{condition limite} = \text{déplacement}$

Creation de la forme

Si $\Gamma_j \cap \Sigma\Gamma_C = 0$: $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{forme} = \text{droit}$

Si $\Gamma_j \cap \Sigma\Gamma_C \neq 0$: $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{forme} = \text{courbe}$

Si $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{forme} = \text{courbe}$:

Calcul du rayon R : $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{rayon} = R$

Calcul du centre C : $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{centre} = C$

Si $\text{fil0} . 1 . i . j . \text{condition limite} = \text{non-attribué}$

$\text{fil0} . 1 . i . j . \text{condition limite} = \text{intérieur}$

La filiation des données gère automatiquement le transfert des informations entre éléments. Une erreur locale est associée à chacun des éléments finis une fois le vecteur d'état calculé. En fonction de cette erreur, des éléments enfants sont éventuellement créés. C'est lors de cette phase de création des éléments que les informations sont transmises. La figure 3.16 illustre un exemple de cet héritage pour des éléments quadrangulaires.

- Les bords 1 du 1^{er} et du 2^{eme} élément fini enfant héritent du bord 1
- Les bords 2 du 2^{eme} et du 3^{eme} élément fini enfant héritent du bord 2
- Les bords 3 du 3^{eme} et du 4^{eme} élément fini enfant héritent du bord 3
- Les bords 4 du 1^{er} et du 4^{eme} élément fini enfant héritent du bord 4
- Les autres bords sont de type droit et la condition limite est dite "interne"

Cette notion d'héritage concerne aussi bien les conditions limites que la forme des bords et de leurs caractéristiques. Cette filiation des propriétés des bords n'est possible que si les bords de niveau 1 sont ordonnés de manière adéquate.

Une fois les éléments de niveau $(k + 1)$ créés et la table de filiation construite, il est néanmoins nécessaire de corriger les informations transmises dans le cas où le maillage

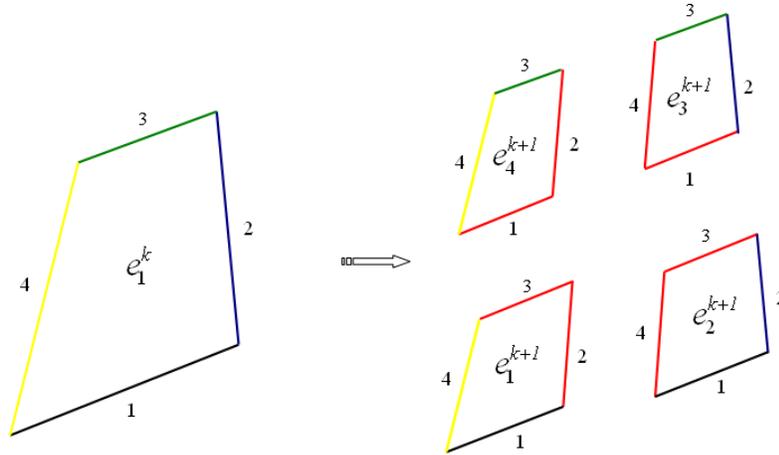


FIG. 3.16: Héritage des propriétés entre les bords des éléments

est localisé de manière à définir le bord $\partial\mathcal{M}_L^{k+1}$. Pour se faire, on construit l'intégralité de la frontière du maillage de niveau k notée $\partial\mathcal{M}^{k+1}$. Cette frontière peut éventuellement comporter des composantes non-connexes.

Les frontières au sein de la l'objet "fil0" sont corrigées suivant la table 3.5.

TAB. 3.5: Correction des bords de niveau k

Boucle sur les éléments : Extraction de l'élément i

Boucle sur les bords de l'élément : Extraction du bord j

Si $\text{fil0} . k . i . j . \text{condition limite} = \text{intérieur}$

Si $\Gamma_j \cap \partial\mathcal{M}_L^k \neq \emptyset$: $\text{fil0} . k . i . j . \text{condition limite} = \text{liaison}$

3.3.1.3 Construction des modèles de calcul

Lorsque les caractéristiques de chaque élément fini et de ses bords sont connues, le modèle de calcul sur le niveau k est construit. Le maillage est directement construit en assemblant les éléments finis de niveau k . Les conditions limites sont construites en parcourant l'objet "fil0". Pour chaque élément i et pour chaque bord j de ce niveau, la valeur "fil0 . k . i . j . condition limite" est considérée. Selon sa valeur, le bord est alors associé aux ensembles géométriques $\partial\mathcal{M}_L^k$, $\partial\mathcal{M}_F^k$ et $\partial\mathcal{M}_U^k$.

Connaissant les conditions limites et le maillage, la résolution par notre stratégie multigrilles non-linéaire peut débuter.

3.3.2 Algorithme de résolution

La figure 3.17 schématise la structure de notre algorithme de résolution. Les détails des différents blocs de ce diagramme peuvent être trouvés en amont de cette section.

L'initialisation de la stratégie est assumée par l'utilisateur. Celui-ci définit le modèle de calcul (paramètres du matériau, conditions limites sur la structure, ...), les paramètres de discrétisation (maillage initial en espace et en temps, frontières de la structure, ...) et les paramètres du raffinement automatique (indicateur d'erreur et précision requise). L'entrée de ces données permet à l'algorithme de créer le problème discrétisé initial de niveau 1 et de calculer le paramètre d'adimensionnement.

A chaque pas de temps, la stratégie est alors initialisée par le calcul de la solution sur les niveaux 1 et 2. L'indicateur d'erreur permet de déterminer les zones où un raffinement de maillage est nécessaire. Dans cette zone, de nouveaux éléments sont créés de manière récursive jusqu'à ce que la précision souhaitée par l'utilisateur soit atteinte.

Le modèle de calcul sur chaque niveau est déterminé par les informations contenues dans les tables de filiation, construites par héritage au cours du raffinement. Le solveur multigrilles utilisé permet d'une part d'augmenter la vitesse de convergence sur le niveau courant et d'autre part de transférer les données entre niveaux.

Lorsque le calcul sur le niveau le plus fin vérifie la précision requise par l'utilisateur, l'assemblage des différents maillages au pas de temps considéré est réalisé afin de construire la solution utilisée en post-traitement.

Remarque : Une quatrième boucle, non représentée dans ce diagramme, concerne l'algorithme de retour radial sur le seuil utilisé à chaque itération non-linéaire au sein de la stratégie multigrilles. L'algorithme utilisé est présenté en annexe A.

3.4 Synthèse

Ce chapitre présente une méthode adaptative inédite pour la dynamique transitoire non-linéaire. Elle est dédiée plus particulièrement à la modélisation de non-linéarités matérielles irréversibles, telles que la plasticité, et s'apparente à une stratégie s-adaptative.

Etant donné qu'une non-linéarité, même localisée, influence le comportement de l'intégralité de la structure, il est nécessaire de mettre en place une stratégie permettant aux différents maillages de communiquer entre eux. Cette phase de transfert entre les différents niveaux est assumée par une stratégie multigrilles permettant d'autre part d'améliorer la vitesse de convergence du solveur itératif non-linéaire.

La stratégie adaptative présentée dans ce chapitre s'appuie sur l'utilisation d'indicateurs d'erreur spécifiques présentés section 3.1.1. Leur utilisation dans le cadre de problèmes académiques est présentée dans le prochain chapitre. La cartographie de l'erreur déterminée par ce biais permet de mettre en oeuvre le raffinement de maillage.

La méthode de résolution développée s'apparente à une stratégie Full MultiGrid utilisant des cycles multigrilles de type Full Approximation Scheme. Cette stratégie de résolution, appelée ici NL-L-FMG (Non Linear Localized Full MultiGrid), est présentée

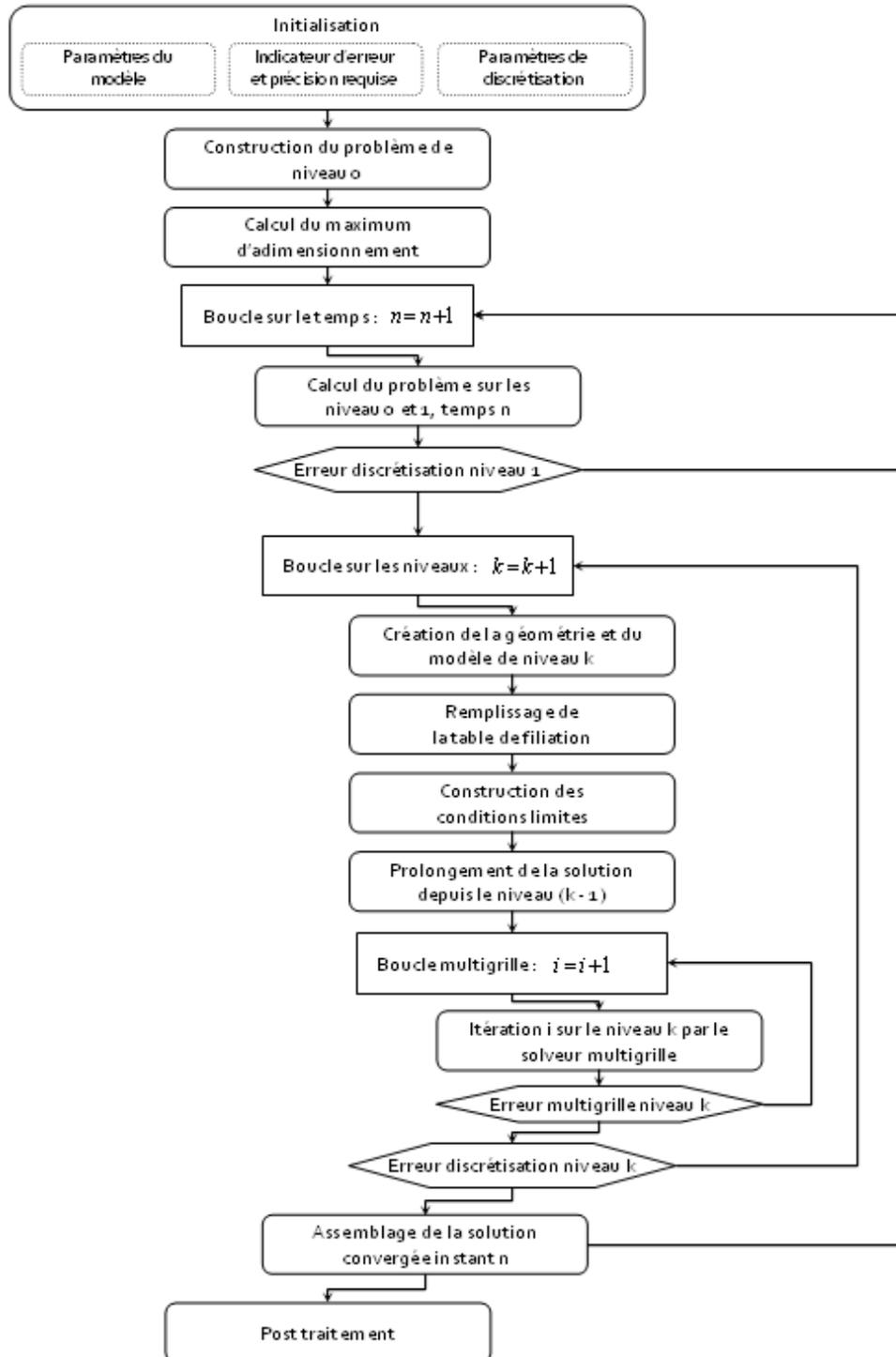


FIG. 3.17: Structure générale de l'algorithme de raffinement automatique

section 3.2.1. La résolution du problème sur un maillage localisé nécessite d'imposer des conditions limites de liaison sur les frontières communes aux deux maillages de raffinements différents (cf. section 3.1.3). Des conditions limites en déplacement, imposées par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange, sont utilisées dans ces travaux.

La dernière partie de ce chapitre est dédiée à la présentation de l'implémentation numérique de la stratégie sous Castem. Elle présente la structure des données et les méthodes utilisées pour construire les modèles de calcul par filiation sur les niveaux localisés en fonction des données fournies par l'utilisateur sur le niveau le plus grossier. Plus de détails concernant la programmation sous Castem peuvent être trouvées annexe B.

Chapitre 4

Illustrations numériques

Ce dernier chapitre présente des applications numériques permettant de valider le fonctionnement de notre stratégie. On y expose le comportement des indicateurs d'erreur, du solveur multigrilles et de la stratégie de raffinement automatique.

Sommaire

4.1	Cas test	98
4.1.1	Analyse uni-dimensionnelle	98
4.1.2	Analyses bi-dimensionnelles	99
4.1.3	Analyses tri-dimensionnelles	100
4.2	Comportement des indicateurs d'erreur	101
4.2.1	Ordre de convergence	101
4.2.2	Indicateurs dédiés à la dynamique transitoire non-linéaire	105
4.2.3	Influence du pas de temps	105
4.3	Comportement de la stratégie de raffinement	108
4.3.1	Adaptation du maillage	108
4.3.2	Influence des paramètres d'entrée du modèle	110
4.3.3	Bilan énergétique	116
4.4	Efficacité de la méthode	117
4.4.1	Vitesse de convergence	118
4.4.2	Gain d'éléments	119
4.4.3	Temps de calcul	121
4.4.4	Evolution temporelle du raffinement de maillage	122
4.5	Synthèse	130

4.1 Cas test

On se limite, dans ce chapitre, à la modélisation et au calcul de cas académiques. Ceux-ci permettent de valider le comportement de notre stratégie en utilisant des seuils d'erreur importants qu'il serait difficile, avec des moyens de calcul conventionnels, d'atteindre sur des cas plus complexes.

Le matériau est modélisé par un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope dont la loi bi-linéaire est représentée figure 4.1(a). Les caractéristiques matériaux sont celles d'un acier : module de Young $E = 210 \text{ GPa}$, coefficient de poisson $\nu = 0.3$, masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ et limite élastique $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$. Sauf précision contraire, la raideur élastoplastique H est de 21 GPa .

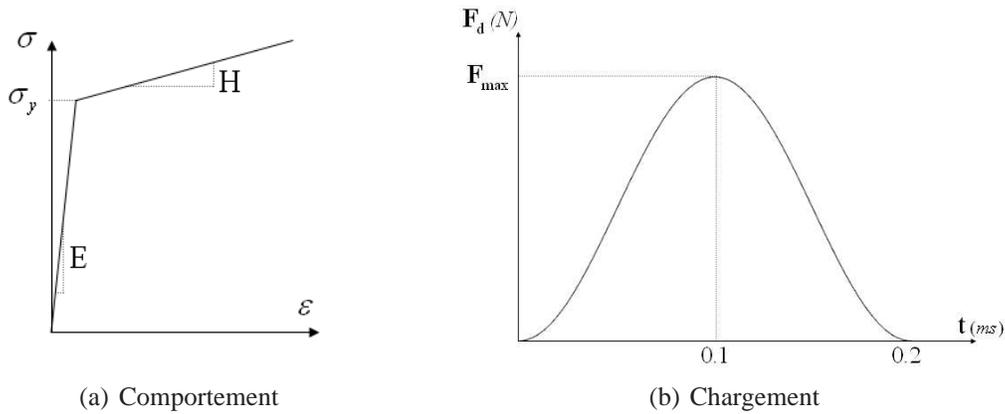


FIG. 4.1: Modèles utilisés pour le calcul

L'intégration temporelle est réalisée par le schéma de Newmark implicite inconditionnellement stable de l'accélération moyenne ($\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$). Le pas de temps dépend du cas test considéré et est adapté en fonction du chargement et du contenu fréquentiel de la solution (cf. section 4.2.3). L'évolution des forces externes est donnée par la figure 4.1(b). La valeur de l'effort F_{max} est déterminée, selon le cas test étudié, en fonction de l'écoulement plastique maximum souhaité.

Les différentes simulations s'appuient sur les modèles présentés sections 4.1.1 à 4.1.3. La section 4.2 est dédiée à l'étude du comportement des indicateurs d'erreur. Dans la section 4.3, on étudie le comportement de la stratégie de raffinement automatique en fonction des paramètres d'entrée du modèle. Enfin, l'efficacité de la méthode en terme de gain d'éléments, de vitesse de convergence et de temps de calcul est étudiée section 4.4.

4.1.1 Analyse uni-dimensionnelle

On considère une poutre encastée-libre, représentée figure 4.2, de section $S = 5.10^{-3} \text{ m}^2$ et de longueur $L = 2 \text{ m}$, modélisée par des éléments isoparamétriques uni-dimensionnels (type SEG2 sous Castem). On note S la section de la poutre, supposée constante sur la longueur.

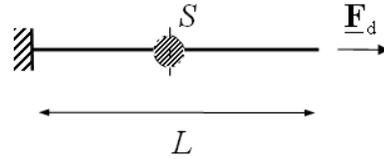


FIG. 4.2: Modèle unidimensionnel

Ce cas test est utilisé pour illustrer le comportement sur l'intervalle de temps de notre stratégie de raffinement automatique (section 4.3.1). Il permet d'analyser l'influence de la discrétisation temporelle sur le comportement de l'indicateur d'erreur (section 4.2.3) et d'étudier la vitesse de convergence de notre solveur multigrilles (section 4.4.1).

4.1.2 Analyses bi-dimensionnelles

Le premier exemple bi-dimensionnel est une plaque carrée de largeur $c = 2\text{ m}$ percée en son centre par un trou de rayon $r = 0.25\text{ m}$ (cf. figure 4.3). Le rayon du trou est tel que $c/r = 8$. L'analyse numérique est réalisée sous l'hypothèse des contraintes planes.

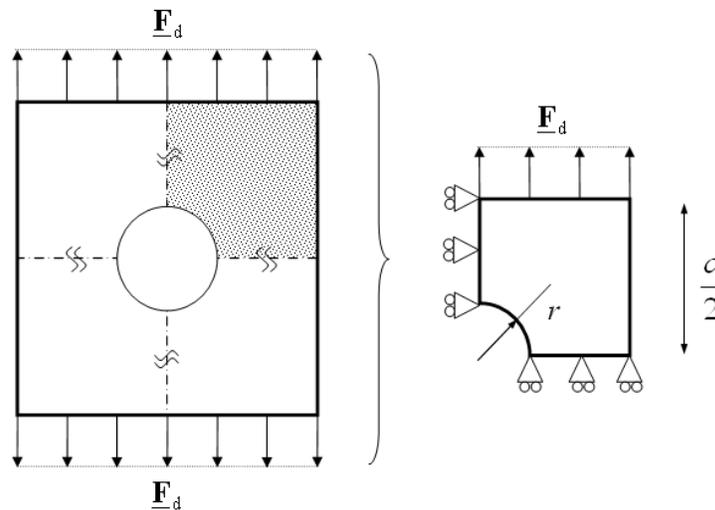


FIG. 4.3: Premier modèle bi-dimensionnel

Pour des raisons évidentes de symétrie, seul un quart de la plaque trouée est modélisé en imposant des conditions limites adéquates. Les éléments finis utilisés sont isoparamétriques linéaires. On utilisera indifféremment des quadrangles et des triangles (type QUA4 et TRI3 sous Castem) pour discrétiser ce problème.

Cet exemple numérique nous permettra de valider le comportement de nos indicateurs d'erreur dans le cas quasi-statique (section 4.2.1). Il est également utilisé afin d'étudier l'influence des paramètres d'entrée de la stratégie sur le comportement du raffinement automatique (sections 4.3.2.1 à 4.3.2.3). Enfin, l'efficacité de la stratégie en terme de gain d'élément et de temps de calcul est étudiée section 4.4.2 et 4.4.3.

Le second exemple numérique est une plaque fissurée de longueur $c = 2 \text{ m}$ et de largeur $a = 4/3 \cdot c$. La fissure est de longueur $2 \cdot l = c/3$. Une nouvelle fois, l'hypothèse des contraintes planes et les propriétés de symétrie du problème sont utilisées afin de ne modéliser qu'un quart plan de la plaque fissurée (cf. figure 4.4).

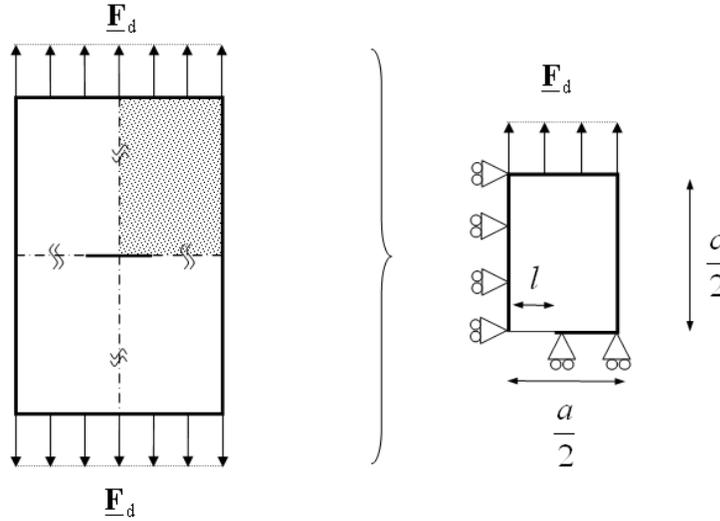


FIG. 4.4: Second modèle bi-dimensionnel

Des éléments quadrangulaires sont utilisés afin de générer le maillage. Ce second exemple est permet d'étudier l'influence d'une singularité sur l'ordre de convergence de nos indicateurs d'erreur section 4.2.1.

4.1.3 Analyses tri-dimensionnelles

Le premier exemple tri-dimensionnel est une poutre encastree-libre modélisée par des éléments isoparamétriques cubiques à 8 noeuds (CUB8 sous Castem).

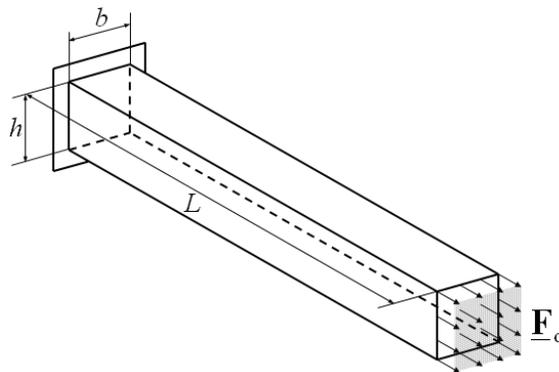


FIG. 4.5: Premier modèle tri-dimensionnel

La poutre a une longueur $L = 1 \text{ m}$. La section est carrée ($b = h$) d'aire $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Cet exemple est utilisé afin d'illustrer le gain d'élément section 4.4.2.

Enfin, le dernier exemple étudié est une poutre en I de longueur $L = 0.25 \text{ m}$ sollicitée en flexion. La hauteur h et la largeur b de la section sont choisies égales à 0.1 m . h_i et b_i mesurent $1/4 \cdot h$. Le maillage utilise des éléments cubiques.

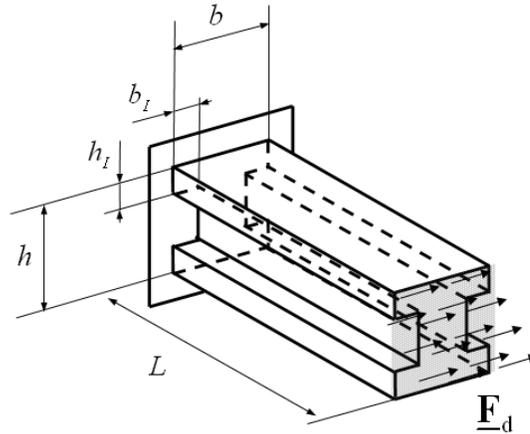


FIG. 4.6: Second modèle tri-idimensionnel

Cet exemple permet d'illustrer le comportement en temps de notre méthode de raffinement (section 4.4.4) dans le cas tri-dimensionnel.

4.2 Comportement des indicateurs d'erreur

Avant de s'intéresser à la stratégie de raffinement automatique, on étudie dans un premier temps le comportement des indicateurs d'erreur en étudiant leur ordre de convergence pour des maillages en espace globaux et localisés. Puis, l'influence de la discrétisation temporelle et du pas de temps sur le comportement de ces indicateurs est étudiée afin de justifier les choix d'indicateurs retenus dans la suite de ce mémoire.

4.2.1 Ordre de convergence

L'ordre de convergence des indicateurs d'erreur est analysé pour les cas bi-dimensionnels présentés section 4.1.2. Les structures sont maillées avec des éléments quadrangulaires. Le maillage initial possède 24 éléments pour la plaque trouée et 48 éléments pour la plaque fissurée. On se place dans le cadre quasi-statique.

4.2.1.1 Convergence des indicateurs d'erreurs pour un problème régulier

Pour le premier exemple, une pression linéique de 600 MPa est appliquée sur la partie supérieure du quart de plaque. La structure est alors intégralement plastifiée avec une

concentration de contrainte au voisinage du trou. La déformation plastique maximum est de l'ordre de 3%. La figure 4.7 présente le maximum de l'erreur en fonction de l'indicateur d'erreur utilisé.

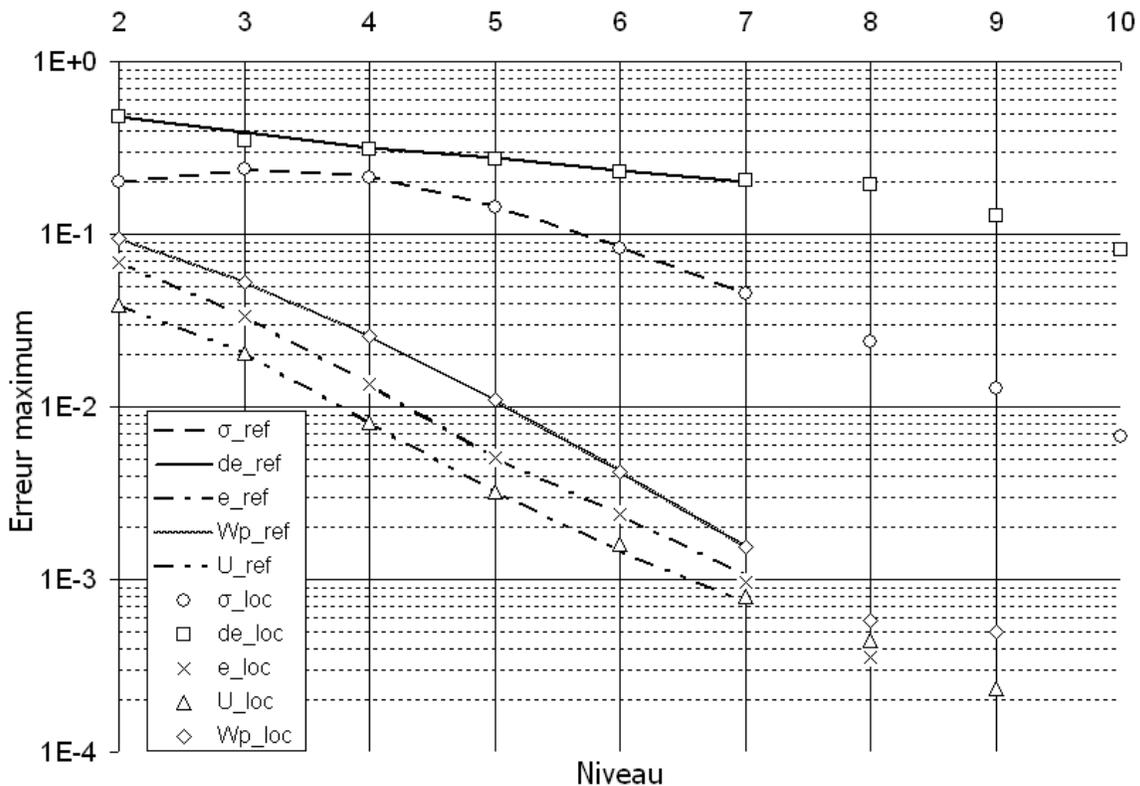


FIG. 4.7: Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau - Cas régulier

Les indicateurs d'erreur présentés section 3.1.1 sont dans un premier temps testés pour des maillages globaux en espace, construits par sous-découpage hiérarchique du maillage de niveau 1. L'erreur sur le niveau 2 est évaluée en comparant les solutions sur les niveaux 1 et 2. Le maillage de niveau 7 possède alors 98304 éléments. Le modèle de niveau 8 raffiné de manière uniforme conduit à un temps de calcul prohibitif.

La solution est ensuite calculée en utilisant la stratégie de raffinement automatique. Cinq calculs sont alors réalisés, chacun contrôlant la quantité de référence utilisée dans ce graphique. La précision requise en fonction de l'indicateur d'erreur est donnée table 4.1.

TAB. 4.1: Précision requise en fonction de l'indicateur d'erreur - Cas régulier

Indicateur	ϵ_{σ}	ϵ_{de}	$\epsilon_{\mathcal{E}}$	ϵ_U	ϵ_{W_p}
Critère	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$

La valeur du maximum de l'erreur pour le calcul de référence, global en espace, est

représentée en traits continus sur la figure 4.7. Les puces représentent le maximum de l'erreur lorsque des maillages localisés sont utilisés.

L'étude de ce graphique pour les niveaux 2 à 7 montre que l'erreur maximum sur un niveau est la même pour des niveaux globaux en espace et pour notre stratégie localisée. En effet, l'indicateur d'erreur inclut de manière systématique la zone où l'erreur est maximum dans les maillages à raffiner. L'ordre de convergence de l'indicateur est donc conservé malgré la localisation de maillage.

Selon l'indicateur d'erreur utilisé, jusqu'à 10 niveaux peuvent être nécessaires pour atteindre la précision requise par l'utilisateur. L'utilisation d'un maillage de dimensions caractéristiques uniformes sur l'ensemble de la structure conduirait alors à un problème discrétisé possédant plus de 6 millions d'éléments.

Tous les indicateurs d'erreur ne convergent pas à la même vitesse. Pour les indicateurs d'erreur en déplacement, en énergie et en travail plastique un ordre de convergence proche de 1.5 est obtenu. Les indicateurs d'erreur en contraintes et en densité d'énergie ont respectivement un ordre de convergence proche de 1 et de 0.5.

Remarque : La rupture de pente sur le niveau 9 pour l'indicateur d'erreur en travail plastique (calculé sur des maillages localisés) est due à la précision requise par l'utilisateur ($5 \cdot 10^{-4}$). Le raffinement de maillage est alors construit de telle sorte que l'erreur maximum sur la structure ne descende pas en deçà de ce seuil et le niveau 10 n'est pas créé. Pour les indicateurs d'erreur en énergie et en déplacement, le calcul localisé s'arrête sur le niveau 9 faute d'espace mémoire.

4.2.1.2 Convergence des indicateurs d'erreurs en présence de singularités

Afin d'étudier l'influence d'une singularité sur l'ordre de convergence de nos indicateurs, le cas de la plaque fissurée est considéré. Cette étude, déjà menée dans le cas élastique dans [CAV 06], est reproduite ici pour des comportements élastoplastiques.

La figure 4.8 présente l'erreur maximum pour les différents indicateurs d'erreur en fonction du niveau de maillage considéré. Les conventions de représentation utilisées pour la figure 4.7 sont reprises ici. En utilisant des maillages globaux en espace (calcul de référence de niveau 2 à 6), on montre que tous les indicateurs ne convergent pas lorsque le maillage est raffiné.

En effet, en théorie mécanique linéaire de la rupture [LEB 03] on démontre qu'en utilisant l'approche donnée par la fonction d'Airy de Williams, les contraintes divergent en pointe de fissure en $(1/\sqrt{r})$ où r représente la distance à la pointe de fissure. Même si la plasticité en pointe de fissure empêche en réalité la divergence numérique des contraintes [ELG 06], l'indicateur d'erreur en contraintes traduit cet ordre de convergence en dehors de la zone de plasticité confinée.

Les déformations, divergent donc également en $(1/\sqrt{r})$ et impliquent une convergence des déplacements en \sqrt{r} . La densité d'énergie, l'énergie et le travail plastique ont alors respectivement un ordre de convergence proportionnel à r^{-1} , r et r . Les racines carrées utilisées dans la définition de ces indicateurs d'erreur induisent donc une convergence

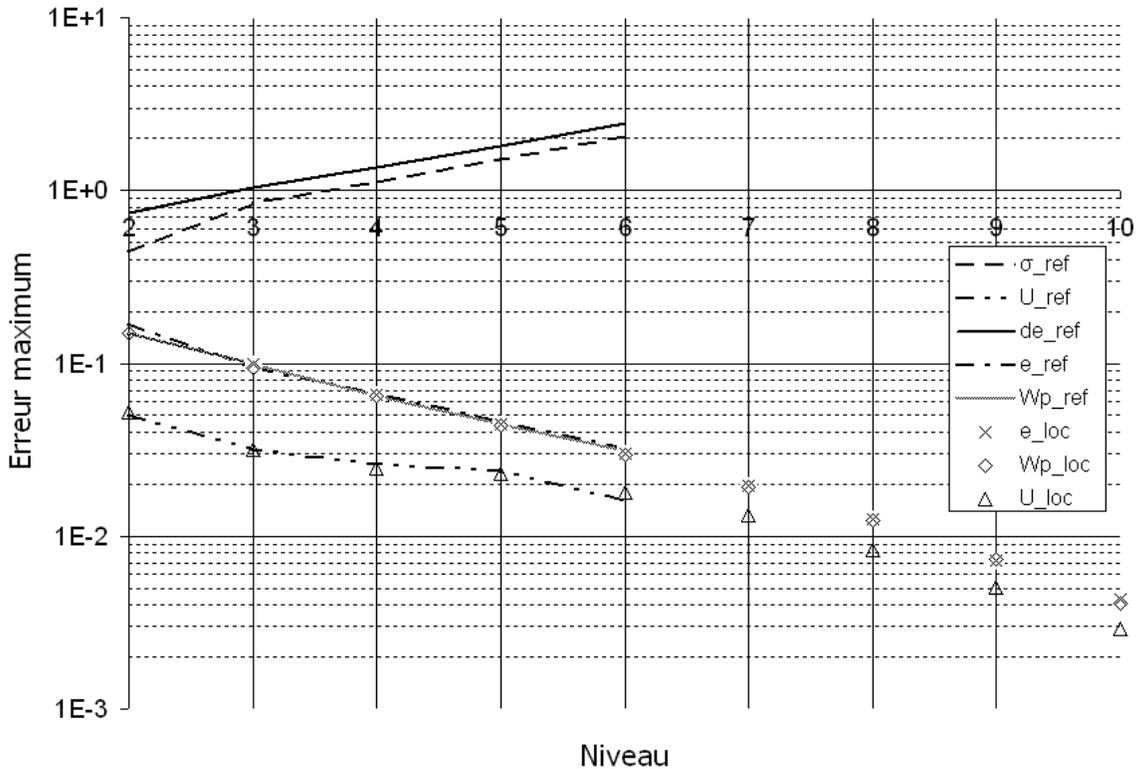


FIG. 4.8: Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau - Cas singulier

d'ordre $(1/\sqrt{r})$ pour l'indicateur en densité d'énergie et en \sqrt{r} pour les deux suivants.

Le maillage uniforme le plus fin calculé dans cet exemple est de niveau 6. Pour le maillage global de niveau 7 (196608 éléments), la singularité est telle que les bornes du domaine de définition de la relation de comportement tracée figure 4.1(a) sont dépassées.

Les indicateurs en déplacement et les indicateurs énergétiques sont donc les seuls adaptés à la description de ce problème singulier dans le cas quasi-statique. La stratégie de raffinement automatique n'est donc pas utilisée ici pour les indicateurs d'erreur en contraintes et en densité d'énergie. La table 4.2 synthétise la précision requise pour chacun des indicateurs d'erreur utilisés afin de construire la méthode de raffinement automatique.

TAB. 4.2: Précision requise en fonction de l'indicateur d'erreur - Cas régulier

Indicateur	$\epsilon_{\mathcal{E}}$	ϵ_U	$\epsilon_{\mathcal{W}_p}$
Critère	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

On notera sur la figure 4.8 que le comportement de ces trois indicateurs d'erreur reste très similaire pour des maillages localisés et pour des maillages globaux en espace. La localisation de maillage ne perturbe pas l'ordre de convergence des indicateurs d'erreur pour les maillages de niveau 2 à 6. Pour les niveaux localisés de raffinement supérieurs,

l'ordre de convergence semble être conservé.

Remarque : Pour ces deux exemples numériques, l'erreur maximum est très similaire dans le cas où des maillages locaux et globaux sont utilisés. Néanmoins, on peut montrer que la moyenne de l'erreur n'est pas conservée entre le cas local et le cas global. En effet, sur les niveaux grossiers non-recouverts, la précision est fixée par l'utilisateur. Dans le cas de maillages globaux en espace, les maillages fins couvrant ces mêmes zones conduisent donc à des erreurs inutilement faibles.

4.2.2 Indicateurs dédiés à la dynamique transitoire non-linéaire

En pratique, tous les indicateurs d'erreur présentés dans le cadre quasi-statique ne sont pas utilisables en dynamique non-linéaire pour notre stratégie de raffinement. En effet, lorsque les maillages sont locaux, l'initialisation de l'état élastoplastique et le calcul des prédicteurs du schéma de Newmark sur les maillages à l'instant t_{n+1} sont réalisés en utilisant les informations multi-niveaux à l'instant t_n (cf. section 3.2.6).

Dans ce cas, deux maillages grossiers à l'instant t_{n+1} peuvent contenir des informations très riches issues de calculs sur les échelles fines à l'instant t_n . Si l'état de la structure ne peut être actualisé précisément par ces échelles grossières, comme par exemple lorsque l'écoulement plastique est trop local pour être décrit par les éléments finis du niveau considéré, l'état projeté depuis l'instant t_n va très peu évoluer.

L'utilisation d'indicateurs d'erreur nodaux conduit alors à des erreurs faibles tant que l'état sur ces deux échelles grossières reste similaire. La précision requise est alors atteinte sans que l'erreur vis-à-vis du maillage de référence ne soit réduite. Ce problème est d'autant plus présent dans le cas où l'état élastoplastique sur les grilles grossières à l'instant t_{n+1} n'évolue pas de part l'enrichissement des niveaux fin à l'instant t_n .

De manière à s'affranchir de ce problème, seuls des indicateurs d'erreur intégrés sur l'élément sont utilisés. En effet, l'interpolation sur l'élément des quantités nodales est différente suivant le niveau considéré et l'intégration du champ assure que les quantités comparées soient différentes si le maillage n'est pas suffisamment fin localement.

L'indicateur d'erreur en travail plastique permet de contrôler la précision des déformations non-linéaires. L'indicateur d'erreur en énergie totale permet de contrôler les déplacements, les contraintes et les vitesses sur l'élément. Enfin, l'indicateur d'erreur en incrément d'énergie est utilisé afin de vérifier la description des zones sollicitées par de forts gradients de déformations et de contraintes.

4.2.3 Influence du pas de temps

Notre stratégie de raffinement de maillage spatial fonctionne en utilisant une discrétisation temporelle uniforme sur l'intervalle d'étude. On montre ici que l'erreur mesurée par nos indicateurs varie selon la finesse du pas de temps. L'exemple uni-dimensionnel présenté section 4.1.1 est utilisé afin d'illustrer cette propriété. L'indicateur d'erreur en incrément d'énergie est particulièrement adapté à la description de cette problématique.

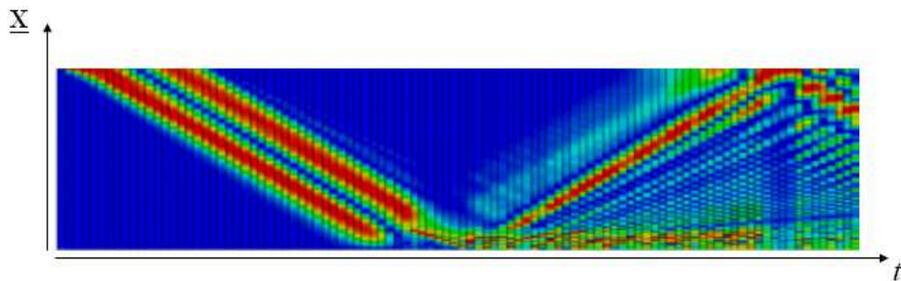
On considère deux maillages hiérarchiques, notés \mathcal{M}^1 et \mathcal{M}^2 , globaux en espace, possédant 128 et 256 éléments. Aucune localisation de maillage n'est ici autorisée afin d'établir la cartographie de l'erreur indépendamment des phénomènes localisés. On définit un pas de temps de référence dt_c correspondant au pas de temps nécessaire à la propagation d'une onde au sein d'un élément du maillage grossier dans le domaine élastique :

$$dt_c = h/c \quad \text{avec :} \quad c = \sqrt{E/\rho} \quad (4.1)$$

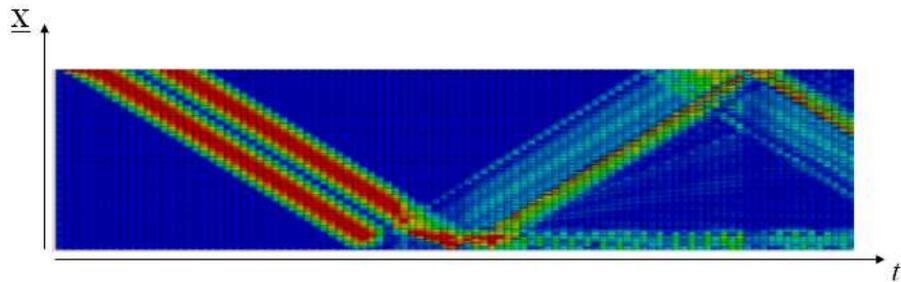
Où h représente la dimension caractéristique des éléments sur le maillage le plus grossier, E le module de Young et ρ la masse volumique. c désigne donc la célérité de l'onde dans le milieu élastique. L'influence de la discrétisation temporelle est étudiée en utilisant deux pas de temps différents définis comme :

$$dt_1 = 5.9 dt_c \quad \text{et} \quad dt_2 = 0.74 dt_c \quad (4.2)$$

Sur la figure 4.9 sont tracés deux diagrammes espace temps permettant de visualiser la cartographie de l'erreur. L'axe des abscisses représente le temps tandis que l'espace est représenté en ordonnée. Pour le diagramme relatif au pas de temps dt_1 , l'erreur sur le maillage est tracée tous les 8 pas de temps.



(a) Indicateur d'erreur en incrément d'énergie : dt_1



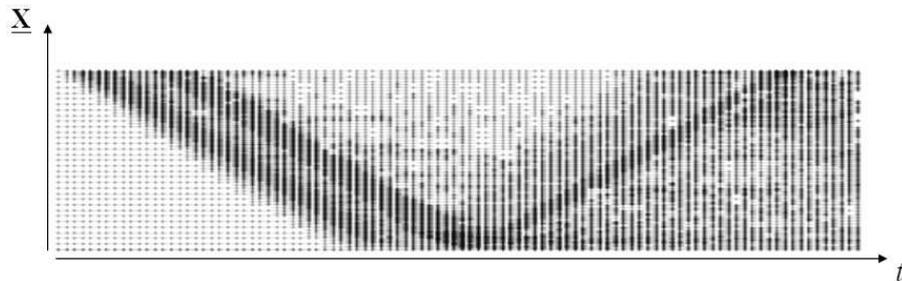
(b) Indicateur d'erreur en incrément d'énergie : dt_2

FIG. 4.9: Diagrammes espace temps de la cartographie de l'erreur

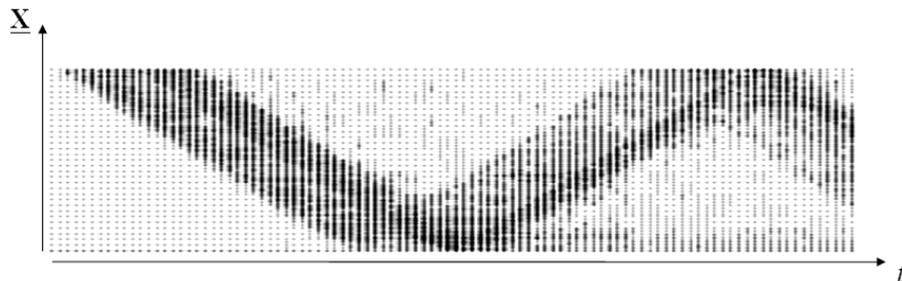
Lors de la phase de propagation initiale de l'onde, l'indicateur d'erreur prend les mêmes valeurs quelque soit le pas de temps choisi. On identifie sur cette carte d'erreur les deux zones à fort gradient du front d'onde (de chargement et de déchargement). Lorsque cette onde impacte la partie encastree de la poutre, un écoulement plastique a lieu.

La figure 4.9(a) montre que si le pas de temps est trop important, l'onde réfléchie sera différente sur les maillages \mathcal{M}^1 et \mathcal{M}^2 générant une erreur sur l'ensemble du domaine espace-temps. Ce phénomène est lié au schéma d'intégration en temps qui influence la qualité de la solution. Comme pour les méthodes éléments finis standard, le pas de temps doit être choisi de manière appropriée de manière à permettre la description du chargement et du contenu fréquentiel de la solution.

Les maillages obtenus sur cet exemple avec notre stratégie de raffinement sont tracés figure 4.10. Pour plus de clarté, seuls les noeuds du maillage sont représentés à chaque instant coïncident au maillage temporel relatif à dt_2 . Ces diagrammes montrent que si la méthode de raffinement de maillage est utilisée avec l'indicateur d'erreur en incrément d'énergie et le pas de temps (inapproprié) dt_1 , le raffinement obtenu tient compte de l'erreur induite par la discrétisation en temps. Il convient donc de prendre garde au pas de temps utilisé. Deux pré-calculs relativement grossiers utilisant des pas de temps différents, permettent de choisir la discrétisation temporelle adéquate pour réaliser la simulation.



(a) Indicateur d'erreur en incrément d'énergie : $dt_1 = 5.9 dt_c$



(b) Indicateur d'erreur en incrément d'énergie : $dt_2 = 0.74 dt_c$

FIG. 4.10: Diagrammes espace temps présentant le raffinement unidimensionnel de la poutre pour les deux pas de temps considérés

Par ailleurs, le fait de définir un pas de temps cohérent vis-à-vis du contenu fréquentiel de la solution permet d'obtenir une efficacité maximale pour la stratégie de raffinement automatique. Moins de niveaux et d'éléments sont créés et la méthode de raffinement est plus efficace. Cette réduction du pas de temps n'est pas nécessairement associée à une augmentation du temps de calcul. En effet, en dynamique implicite, un pas de temps plus faible permet de réduire le nombre d'itération de Newton nécessaires pour obtenir la solution éléments finis à chaque pas de temps.

Une alternative pourrait être d'utiliser des indicateurs d'erreur espace temps afin de prendre en compte l'influence de la discrétisation temporelle [CAV 05b]. Par ailleurs, les schémas utilisés sont convergents et le fait d'adopter un pas de temps plus faible ne pénalise pas nécessairement le temps de calcul de la solution.

4.3 Comportement de la stratégie de raffinement

La première partie de cette section reprend l'exemple uni-dimensionnel présenté ci-dessus. La présentation de diagrammes espace-temps est utilisée afin de décrire le lien entre le raffinement de maillage obtenu à chaque pas de temps et la phénoménologie de la propagation de l'onde dans la poutre.

La seconde partie présente des applications numériques bi-dimensionnelles permettant de montrer que la stratégie est quasiment indépendante de l'utilisateur. Celui-ci n'intervient, dans la stratégie de raffinement de maillage, que lors de l'initialisation où il définit l'indicateur d'erreur, la précision requise et le maillage initial en espace et en temps.

Enfin, dans la dernière section, le bilan énergétique du schéma de Newmark est étudié afin d'évaluer la dissipation numérique au cours du temps.

4.3.1 Adaptation du maillage

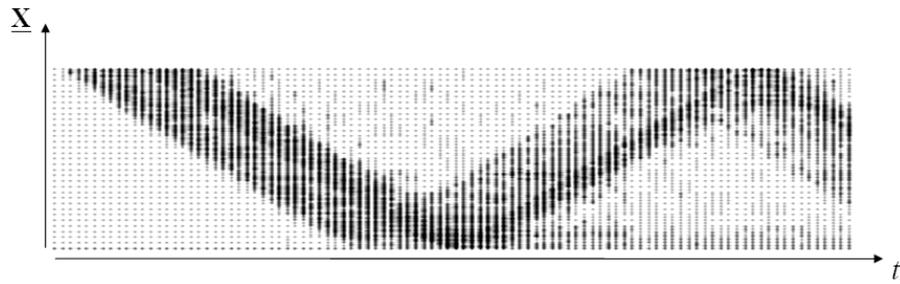
L'exemple uni-dimensionnel présenté section 4.1.1 est utilisé afin d'illustrer le comportement de la stratégie de raffinement automatique. Le maillage le plus grossier possède 16 éléments. Le pas de temps utilisé est le pas de temps dt_2 présenté section 4.2.3.

Les figures 4.11(a) et 4.11(b) présentent les diagrammes espace-temps des maillages finaux obtenus en utilisant les indicateurs d'erreur en énergie et en incrément d'énergie avec une précision requise de $2 \cdot 10^{-2}$. Le maillage est tracé tout les 8 pas de temps. L'impact a lieu sur l'extrémité supérieure de la poutre. La plasticité se développe dans la partie inférieure (encastrée) de la poutre.

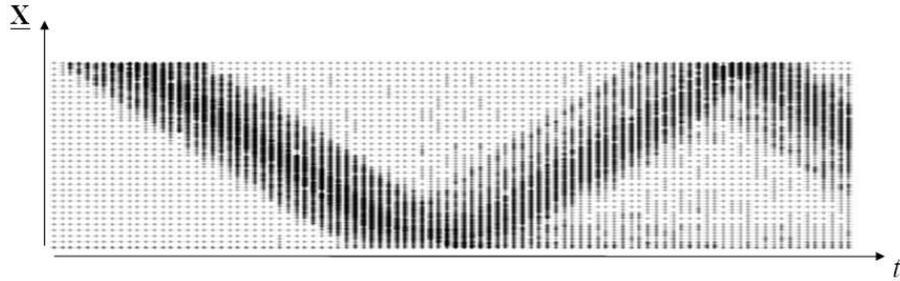
Ces deux diagrammes montrent que le raffinement du maillage suit les phénomènes physiques et l'onde se propageant dans la poutre. Le maillage est remis en cause à chaque pas de temps sans qu'une stratégie particulière de remaillage ne soit utilisée. De nouveaux éléments sont automatiquement créés par sous-découpage hiérarchique dans les zones où la précision requise est insuffisante.

Pour un même pas de temps, le maillage obtenu sur chacun de ces deux diagrammes est différent. En effet, le raffinement de maillage est gouverné par la quantité contrôlée par l'indicateur d'erreur (cf. section 4.3.2.1). Aussi, on peut voir que l'indicateur d'erreur en énergie construit des niveaux de plus en plus fins dans les zones où l'énergie est maximum, correspondant au centre de la zone de raffinement. Pour l'indicateur d'erreur en incrément d'énergie, le raffinement se concentre dans les zones à fort gradient, correspondant aux fronts de chargement et de déchargement de l'onde.

Il est possible de relier la forme du raffinement de maillage à la phénoménologie du comportement de l'onde dans la structure. Pour l'indicateur d'erreur en incrément d'éner-



(a) Indicateur d'erreur en incrément d'énergie



(b) Indicateur d'erreur en énergie

FIG. 4.11: Diagrammes espace-temps présentant le raffinement unidimensionnel de maillage

gie, durant la première phase de propagation, les fronts de chargement et de déchargement de l'onde sont raffinés à un niveau équivalent. Lorsque le premier front d'onde impacte la partie encastree de la poutre, un écoulement plastique a lieu et dissipe de l'énergie. Le deuxième front ne contribue donc pas à l'augmentation de la plasticité. Aussi, l'onde réfléchie conduit-elle à un raffinement de maillage où le front de chargement est moins raffiné et où le front de déchargement conserve la même intensité de raffinement de maillage que pendant la partie descendante.

Pour l'indicateur d'erreur en énergie, la forme du raffinement de maillage reste quasi uniforme au cours de la propagation initiale dans la poutre. Néanmoins, lorsque l'onde provoque un écoulement plastique au niveau de l'encastrement, de l'énergie est dissipée. Aussi, l'onde réfléchie après le développement de déformations plastiques a un niveau énergétique inférieur à l'onde incidente. La stratégie crée donc un nombre de niveaux inférieur pour l'onde réfléchie.

Par ailleurs, on remarque que la zone raffinée couvre une surface de plus en plus grande à mesure que le temps progresse. Ce phénomène est lié à l'apparition de phénomènes plastiques dans la partie encastree de la poutre qui ralentit la propagation de l'onde incidente. Enfin, dans les zones ayant subi des déformations plastiques, un maillage plus fin subsiste afin de décrire les déformations plastiques dans la poutre.

4.3.2 Influence des paramètres d'entrée du modèle

Dans cette section, l'exemple décrit figure 4.3 est utilisé. On présente ici l'influence de l'indicateur d'erreur, du maillage initial et de la précision requise sur le comportement de notre stratégie de raffinement automatique.

4.3.2.1 Influence de l'indicateur

Le choix de l'indicateur d'erreur influe sur le maillage obtenu à chaque pas de temps. La figure 4.12 illustre les maillages obtenus à l'instant $t = 33ms$, lorsque le front d'onde impacte la partie inférieure du quart de plaque, générant l'apparition de déformations plastiques. Les indicateurs d'erreur utilisés sont les indicateurs d'erreur en énergie et en travail plastique. Les précisions requises sont respectivement de $2 \cdot 10^{-3}$, $1 \cdot 10^{-4}$.

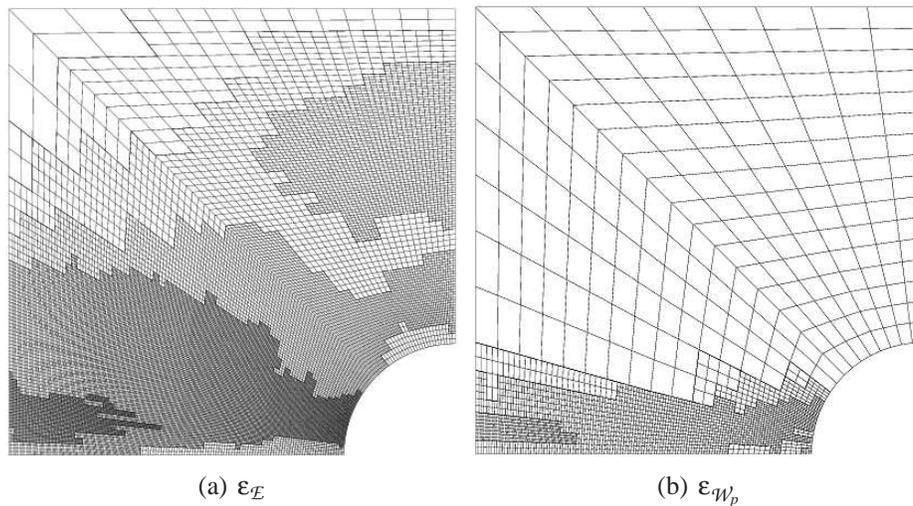


FIG. 4.12: Raffinement de maillage à l'instant $t = 0.33 \text{ ms}$ selon l'indicateur d'erreur considéré - Energie $2 \cdot 10^{-3}$, Travail plastique $1 \cdot 10^{-4}$

L'indicateur d'erreur en travail plastique est un indicateur particulier dans le sens où il ne peut produire d'éléments dans la zone élastique de la structure où aucun phénomène plastique n'apparaît. Aussi, le raffinement de maillage se concentre dans la partie plastique de la structure. Cet indicateur permet de raffiner le maillage dans les zones où la plasticité est maximum. L'utilisation de l'indicateur d'erreur en énergie permet quant à elle de raffiner le maillage dans les zones les plus sollicitées. La zone de plasticité maximale n'est alors pas nécessairement incluse dans le maillage de niveau fin lorsque les phénomènes élastiques sont prépondérants vis-à-vis des phénomènes plastiques.

La stratégie de raffinement automatique permet d'atteindre la précision requise par l'utilisateur sur la quantité contrôlée par l'indicateur. Selon les quantités post-traitées par le programme, il convient donc de choisir soigneusement l'indicateur d'erreur utilisé afin d'assurer la qualité des résultats obtenus. L'indicateur d'erreur en énergie semble le plus

adapté car il permet de focaliser le raffinement de maillage dans les zones les plus sollicitées de la structure et inclut les zones plastiques ayant une densité d'énergie suffisante. Par la suite l'indicateur d'erreur en énergie est donc principalement utilisé. Les autres indicateurs énergétiques sont conservés afin de faciliter l'interprétation des résultats obtenus.

Si plusieurs quantités doivent être post-traitées, il peut être utile de contrôler chacune d'entre elles au cours du raffinement automatique de maillage. Il suffit alors de déterminer pour chacun des indicateurs le maillage \mathcal{M}_+^k à raffiner. Le maillage de niveau $(k + 1)$ est dans ce cas construit par sous-découpage de l'union de ces différents maillages.

Cette stratégie a été appliquée afin de construire le maillage de la plaque trouée vérifiant une précision de $(1 \cdot 10^{-2})$ en énergie et $(1 \cdot 10^{-4})$ en travail plastique (cf. figure 4.13). Ce maillage est à comparer avec les maillages obtenus par chacun des indicateurs utilisés indépendamment présentés respectivement figures 4.16(b) et 4.12(b).

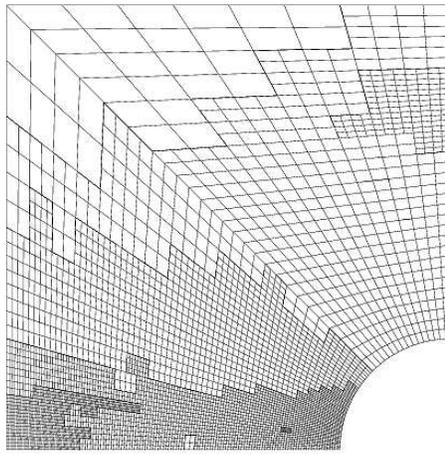


FIG. 4.13: Raffinement de maillage à l'instant $t = 0.33 \text{ ms}$ utilisant conjointement deux indicateurs d'erreur - Energie $(1 \cdot 10^{-2})$ et travail plastique $(1 \cdot 10^{-4})$

Ce maillage n'est pas exactement l'intersection des deux maillages finaux obtenus lors de l'utilisation des indicateurs d'erreur seuls étant donné l'influence du raffinement de maillage des pas de temps précédents. Néanmoins, la forme générale induite par l'indicateur d'erreur en énergie est préservée (cf. figure 4.16(b)). Dans la section inférieure du quart de plaque, le raffinement de maillage possède un niveau supplémentaire vis-à-vis du maillage construit par l'indicateur d'erreur en énergie seul. Cette composante du maillage est créée par l'indicateur d'erreur en travail plastique (cf. figure 4.12(b)).

4.3.2.2 Influence du maillage initial

L'influence du maillage initial est analysée en utilisant les maillages grossiers présentés figure 4.14. Ces maillages utilisent des éléments quadrangulaires et triangulaires linéaires. Les figures 4.14(a) et 4.14(c) présentent des exemples de maillages réguliers. Les figures 4.14(b) et 4.14(d) présentent des maillages où certains éléments ont une forte distorsion géométrique.

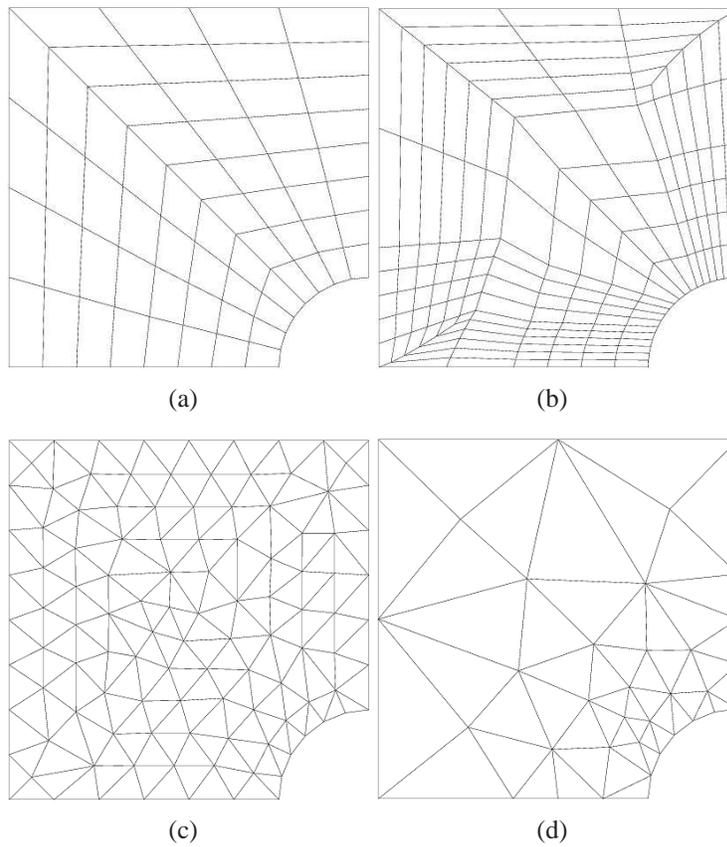


FIG. 4.14: Maillages initiaux de la plaque trouée pour des éléments triangulaires et quadrangulaires.

Afin d'illustrer le comportement de notre stratégie en fonction du maillage initial retenu, l'indicateur d'erreur en énergie, avec une précision requise de $2 \cdot 10^{-3}$ est utilisé. Les maillages finaux à l'instant $t = 33 \text{ ms}$, construits par notre méthode de raffinement automatique, sont représentés figure 4.15.

Le maillage présenté figure 4.15(a) permet de bien comprendre les phénomènes présents dans la structure. A cet instant, on distingue 3 zones de raffinement principales. La première zone correspond au voisinage du trou, où la contrainte est maximum. Dans cette zone, de nouveaux éléments sont requis afin de permettre une description correcte de la contribution énergétique du gradient de contraintes. La seconde zone correspond au maillage de niveau 7 créé dans la partie inférieure gauche du quart de plaque (cf. figure 4.15(a)). Elle correspond à la zone où l'énergie est maximum. Enfin, la dernière zone est la partie supérieure droite du maillage, qui doit traduire la réflexion du front d'onde sur le bord libre circulaire du trou.

Le raffinement du second maillage, présenté figure 4.15(b), a une forme similaire au maillage précédent et décrit les mêmes phénomènes. La direction principale de sollicitation sur la structure est la direction verticale. Or, dans la partie inférieure du quart de plaque, les éléments du maillage grossier (cf. figure 4.14(b)) sont plus fins dans cette di-

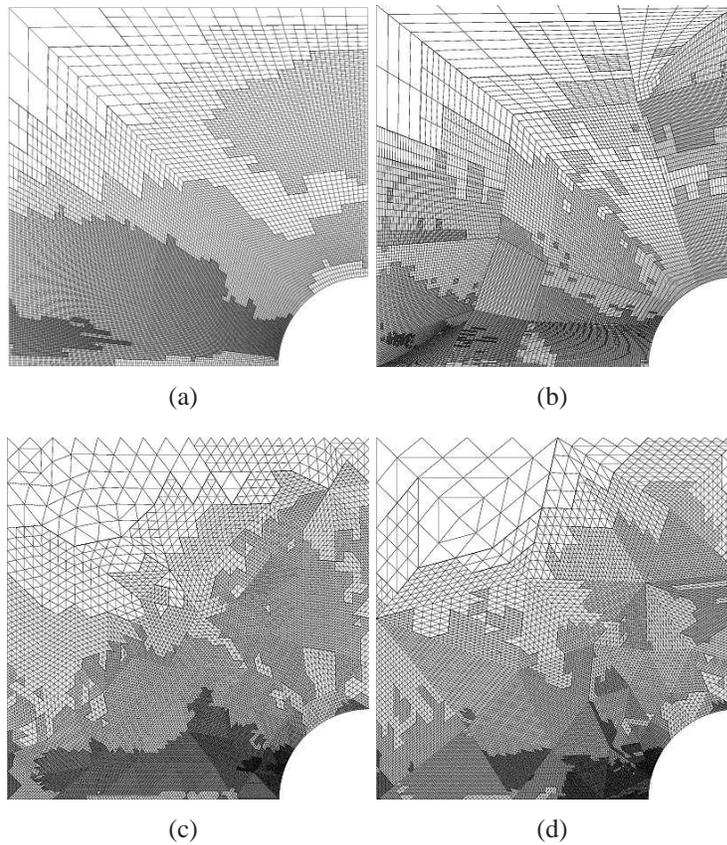


FIG. 4.15: Maillages finaux obtenus avec un indicateur en énergie et une précision de $\varepsilon_l = 2 \cdot 10^{-3}$)

rection. Moins de niveaux sont donc nécessaires pour décrire les gradient des champs de contraintes et de déformations utilisés dans le calcul de l'énergie. Sur le côté gauche du quart de plaque, où les éléments de niveau 1 dans la partie supérieure ont une dimension verticale 4 fois plus importante que les éléments situés dans la partie inférieure (cf. figure 4.14(b)), on peut voir sur le maillage final que 2 niveaux supplémentaires sont nécessaires au milieu du quart de plaque pour les éléments de la partie supérieure. Ce saut de niveau est localisé sur la figure 4.15(b) dans la zone où apparaît une discontinuité linéaire entre les maillages de niveau 4 et 6.

Les deux maillages utilisant des triangles sont plus perturbés que ceux utilisant des quadrangles. En effet, la contrainte est constante et définie en un seul et unique point de Gauss pour ces éléments. Aussi, selon l'orientation de l'élément vis-à-vis de la direction de sollicitation, le niveau nécessaire pour obtenir la précision requise par l'utilisateur peut fortement varier. Les zones de raffinement évoquées précédemment peuvent néanmoins être retrouvées. Par ailleurs, même si les maillages initiaux 4.14(c) et 4.14(d) sont fondamentalement différents, l'allure et les dimensions caractéristiques des maillages finaux 4.15(c) et 4.15(d) restent très semblables.

Pour les éléments triangulaires, une procédure de lissage du maillage peut éventuel-

lement être nécessaire afin d'améliorer la qualité du raffinement automatique. Le sous-découpage d'un élément est alors réalisé en fonction de la tolérance définie par l'utilisateur pondérée en fonction de la valeur de l'erreur sur les éléments adjacents.

Enfin, il est important de contrôler que l'erreur maximum obtenue sur ces maillages respecte la précision requise par l'utilisateur. La table 4.3 synthétise les résultats obtenus au pas de temps représenté. Le niveau maximum atteint ainsi que le nombre d'éléments du maillage final sont donnés pour information. Le calcul de référence servant à l'évaluation de cette erreur est un calcul réalisé sur un maillage possédant 262144 éléments quadrangulaires (cf. section 4.3.2.3).

TAB. 4.3: Erreur maximum en fonction du maillage initial (cf. figure 4.14). Indicateur d'erreur en énergie pour une précision requise de $2 \cdot 10^{-3}$

Maillage	Erreur max.	Niveau max.	Nombre moyen d'éléments
(a)	$2.09 \cdot 10^{-3}$	7	14 679
(b)	$1.93 \cdot 10^{-3}$	6	15 694
(c)	$2.47 \cdot 10^{-3}$	7	19 286
(d)	$2.19 \cdot 10^{-3}$	8	17 624

On notera que la précision requise n'est pas une borne absolue étant donné que la localisation n'est pas remise en cause (cf. section 3.2.5.3). Néanmoins, l'erreur obtenue sur le maillage final reste du même ordre de grandeur que la précision requise par l'utilisateur.

Le nombre d'éléments nécessaires à l'obtention de la précision requise est relativement constant par type d'élément fini considéré. Les maillages associés à des éléments triangulaires sont plus denses car la description des champs par éléments est réalisée de manière grossière sur un unique point de Gauss. Le niveau maximum atteint dépend à la fois de l'élément fini considéré et du maillage initial. En effet, le maillage présenté figure 4.14(d) est relativement grossier et plus de niveaux sont nécessaires afin d'obtenir des éléments aussi fins et une description de la solution aussi précise que celle obtenue en utilisant le maillage initial présenté figure 4.14(c)

4.3.2.3 Influence du critère d'arrêt

Le dernier point étudié ici est l'influence de la précision requise par l'utilisateur sur la qualité de la solution obtenue à chaque pas de temps. Pour illustrer le comportement de notre stratégie de raffinement automatique en fonction de cette précision, le maillage initial représenté figure 4.14(a) est utilisé.

L'influence du critère d'arrêt sur le maillage final à chaque pas de temps est illustré en utilisant les indicateurs d'erreur en énergie. La figure 4.16 présente les maillages finaux obtenus en fonction de la précision requise au temps $t = 33ms$.

Le raffinement de maillage se produit systématiquement dans les mêmes zones, décrites section 4.3.2.2 pour le maillage 4.15(a). Quelque soit la précision requise, seul le

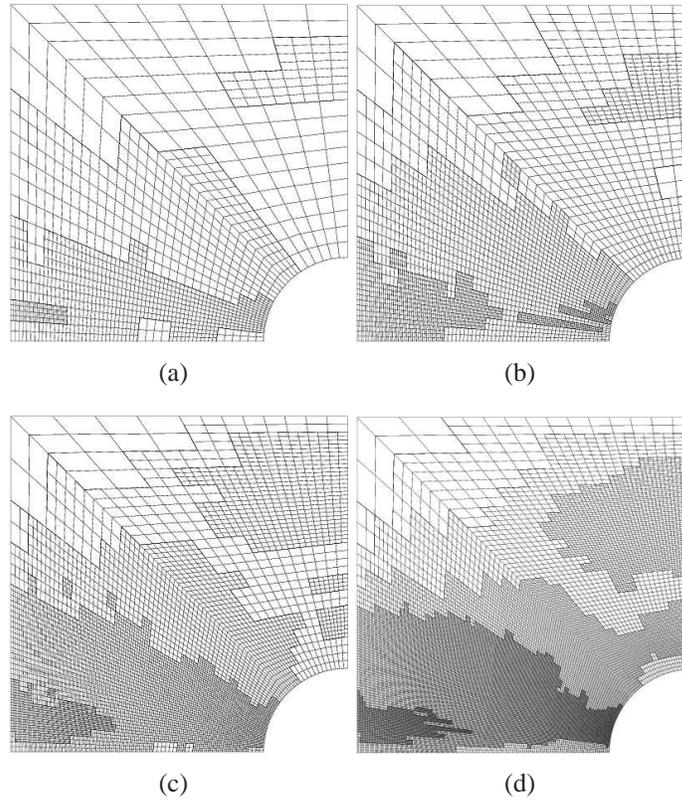


FIG. 4.16: Maillages fins obtenus avec l'indicateur d'erreur en énergie pour une précision requise de (gauche à droite) : $2 \cdot 10^{-2}$, $1 \cdot 10^{-2}$, $5 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$

nombre de niveaux et d'éléments est adapté. Lorsque celle-ci augmente, de nouveaux niveaux sont nécessaires afin de permettre un calcul suffisamment précis.

La table 4.4 présente brièvement le maximum de l'erreur sur la structure en fonction de l'indicateur d'erreur considéré et du critère d'arrêt à l'instant $t = 0.33ms$. Le niveau maximum atteint lors du raffinement de maillage est donné pour information.

Le calcul de référence utilisé pour évaluer cette erreur sur la structure est un calcul réalisé sur un maillage élément fini \mathcal{M}^r possédant 262144 éléments. Ce maillage correspond à un maillage de dimensions caractéristiques uniformes de niveau 7.

Afin de réaliser cette comparaison, le vecteur d'état \mathcal{S}^r sur le maillage de référence \mathcal{M}^r est projeté sur le maillage final \mathcal{M}^c créé par notre stratégie à l'instant t_n en utilisant l'opérateur de projection \mathbb{J}_r^c du maillage \mathcal{M}^r sur le maillage \mathcal{M}^c .

L'énergie et le travail plastique associés à ce vecteur d'état projeté sont calculés pour chaque élément du maillage \mathcal{M}^c . Si on indice \bullet^r une quantité calculée en utilisant la restriction du calcul de référence et \bullet^c la quantité originellement calculée sur le maillage \mathcal{M}^c , l'erreur maximum sur le maillage est définie par les équations (4.3) et (4.4) pour chaque élément e_j^c du maillage \mathcal{M}^c .

TAB. 4.4: Corrélation entre la précision requise et l'erreur maximum sur la structure à l'instant $t = 0.33 \text{ ms}$

Error indicator	Requested accuracy	Maximum level reached	Error max
Energy	$5 \cdot 10^{-2}$	4	$1.07 \cdot 10^{-2}$
Energy	$2 \cdot 10^{-2}$	5	$7.81 \cdot 10^{-3}$
Energy	$1 \cdot 10^{-2}$	5	$5.69 \cdot 10^{-3}$
Energy	$5 \cdot 10^{-3}$	6	$3.93 \cdot 10^{-3}$
Energy	$2 \cdot 10^{-3}$	7	$2.09 \cdot 10^{-3}$
Plastic work	$5 \cdot 10^{-4}$	5	$1.53 \cdot 10^{-4}$
Plastic work	$1 \cdot 10^{-4}$	6	$7.72 \cdot 10^{-5}$

$$\epsilon_{\mathcal{W}_p}|_{e_j^c} = \frac{\sqrt{|\delta \mathcal{W}_p^r|_{e_j^c} - \delta \mathcal{W}_p^c|_{e_j^c}|}}{\max_{[0;T]} \sqrt{\mathcal{W}_p^c(t)}} \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{\delta \mathcal{E}}|_{e_j^c} = \frac{\sqrt{|\delta \mathcal{E}^r|_{e_j^c} - \delta \mathcal{E}^c|_{e_j^c}|}}{\max_{[0;T]} \sqrt{\mathcal{E}^c(t)}} \quad (4.4)$$

Pour évaluer ces deux erreurs, on utilise l'incrément entre deux pas de temps en l'énergie δE et en travail plastique $\delta \mathcal{W}_p$ afin de s'affranchir de l'erreur cumulative en temps. Cette table montre que la précision atteinte par notre stratégie de raffinement est en adéquation avec la précision requise par l'utilisateur. On rappelle que celle-ci n'est pas une borne stricte (cf. section 3.2.5.3).

4.3.3 Bilan énergétique

Le bilan énergétique du schéma de Newmark, présenté en détail section 1.3.2, est utilisé ici afin d'évaluer la dissipation numérique lors du changement de pas de temps. Son expression est rappelée par l'équation (4.5) :

$$\begin{aligned} [T(\dot{\mathbf{U}})] + \Delta t^2 \left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right) [T(\ddot{\mathbf{U}})] &= -\Delta t^2 (\gamma - 0.5) (2\beta - \gamma) T([\ddot{\mathbf{U}}]) \\ &+ (\langle \mathbf{F}_{\text{int}} \rangle^T + (\gamma - 0.5) [\mathbf{F}_{\text{int}}]^T) [\mathbf{U}] \\ &+ (\langle \mathbf{F}_{\text{ext}} \rangle^T + (\gamma - 0.5) [\mathbf{F}_{\text{ext}}]^T) [\mathbf{U}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Etant donné que les maillages sont incompatibles entre deux pas de temps successifs, le calcul du bilan doit être réalisé en utilisant un opérateur de projection du maillage final à l'instant t_n sur le maillage final à l'instant t_{n+1} . Le bilan énergétique est alors calculé sur le maillage à l'instant t_{n+1} .

La figure 4.17 présente le bilan énergétique de la stratégie de raffinement automatique pour une durée de simulation de 0.8 ms sur l'exemple uni-dimensionnel. Sur ce graphique sont tracés le travail des forces extérieures et les incréments en énergie cinétique et en énergie de déformation. Le bilan énergétique, invisible sur cette figure, est tracé sur une échelle plus fine figure 4.18.

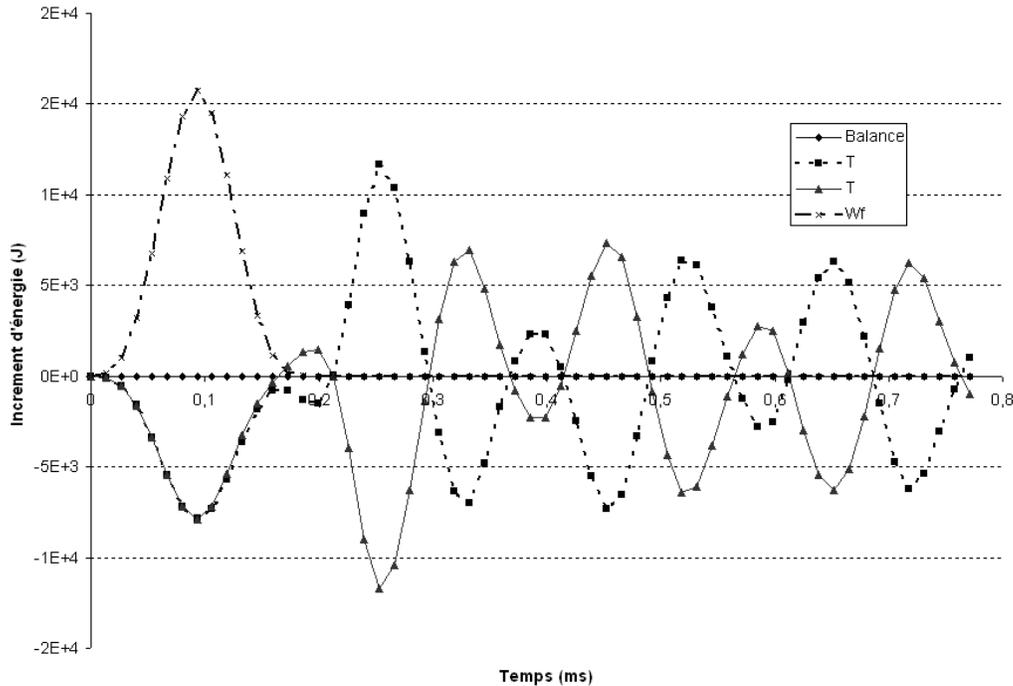


FIG. 4.17: Quantités utilisées dans le bilan énergétique du schéma de Newmark

Le maximum relatif de ce bilan d'énergie est de l'ordre de $4 \cdot 10^{-3}$ avec une moyenne absolue à $7 \cdot 10^{-4}$. Pour cet exemple, le calcul non-linéaire par le solveur de Newton dans les phases de relaxation multigrilles est réalisé avec une précision de 10^{-9} . De l'énergie est donc dissipée au cours des itérations temporelles.

Cette dissipation numérique est inhérente à l'utilisation d'une méthode adaptative générant des maillages incompatibles à chaque pas de temps et n'est a priori pas induite par l'utilisation de notre solveur multigrilles. Un opérateur de transfert plus complexe entre les pas de temps, permettant de conserver l'énergie [BRA 08], pourrait être utilisé afin de réduire ce bilan numérique.

4.4 Efficacité de la méthode

Cette section propose d'étudier l'efficacité du solveur multigrilles développé en terme de vitesse de convergence et de quantifier le gain d'éléments finis comparativement à l'utilisation de maillages de dimensions caractéristiques uniformes. L'efficacité globale

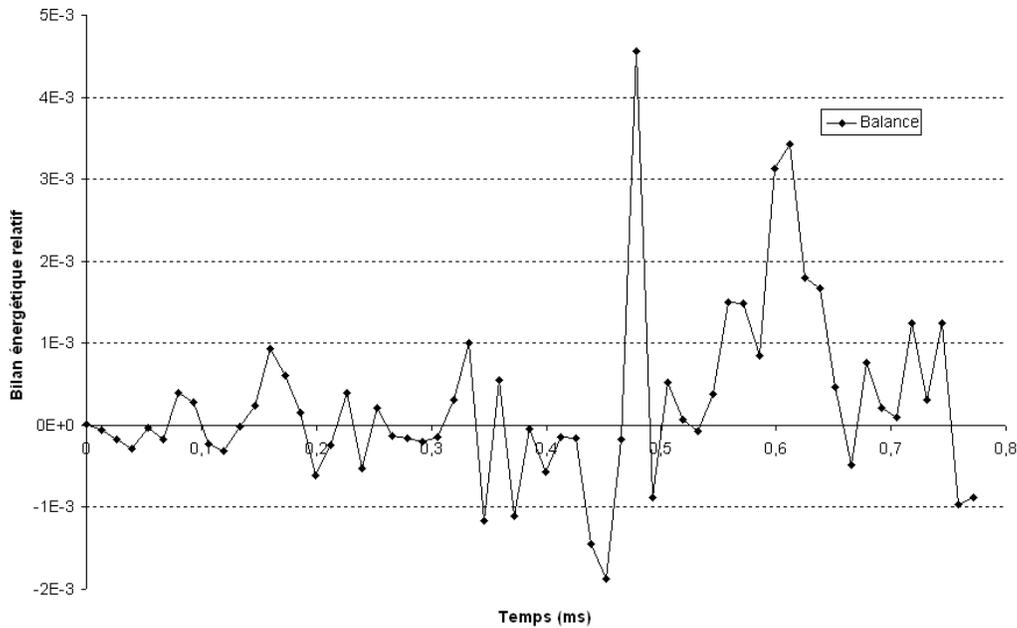


FIG. 4.18: Bilan énergétique du schéma de Newmark

de notre stratégie, couplant les gains de ces deux approches, est décrite en termes de temps CPU section 4.4.3.

Les dernières pages de ce chapitre sont dédiées à une étude tridimensionnelle réalisée sur l'exemple présenté figure 4.6. L'évolution temporelle du raffinement de maillage est étudiée de manière à quantifier l'efficacité de notre méthode.

4.4.1 Vitesse de convergence

Pour illustrer les propriétés de notre solveur multigrilles, on s'intéresse à l'exemple uni-dimensionnel présenté section 4.1.1. Dans cette section, aucune localisation de maillage n'est autorisée. Le maillage grossier possède 128 éléments. Le maillage le plus fin, construit par raffinement hiérarchique récursif, en possède quant à lui 1024.

La stratégie multigrilles utilisée est un cycle FMG à 4 niveaux. La figure 4.19 présente la norme absolue du résidu en équilibre sur le maillage le plus fin en fonction du nombre relatif d'itérations du solveur non-linéaire. Les stratégies multigrilles permettent d'améliorer la vitesse de convergence du solveur de Newton, noté *Mono* sur ce graphique.

Les deux stratégies notées *FMG* et *FMG2* correspondent respectivement au solveur multigrilles non-linéaire développé dans ce mémoire et à la stratégie multigrilles alternative présentée figure 3.11. La troisième stratégie, illustrée figure 3.12, n'est pas présentée en raison des phénomènes non-linéaires irréversibles.

La complexité du solveur noté *FMG* est inférieure à la complexité de la stratégie *FMG2*. Les quantités restreintes au cours du cycle multigrilles influent donc sur la vitesse de convergence du solveur. Cette amélioration est induite par le transfert complet du vec-

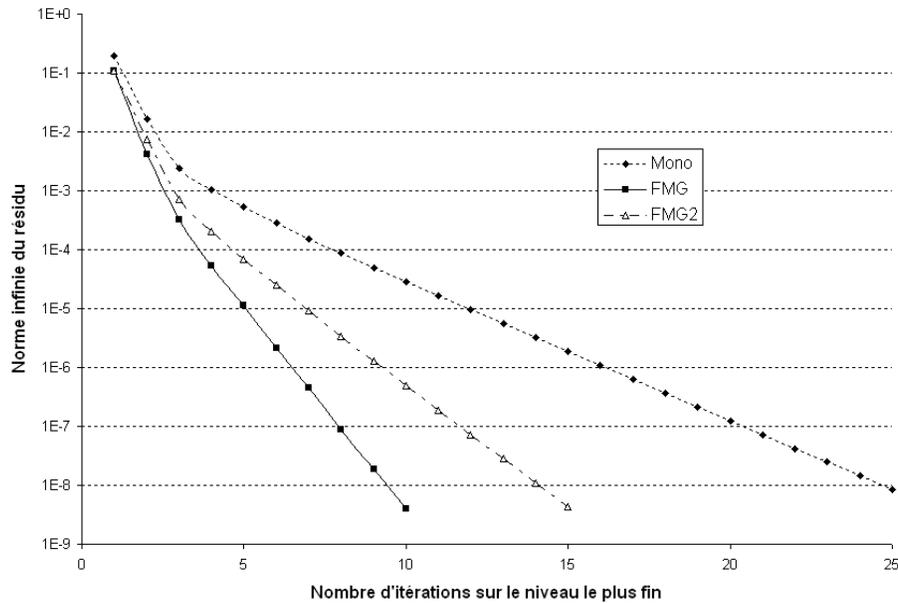


FIG. 4.19: Norme relative du résidu en fonction du nombre d'itérations sur la grille fine au 25^{eme} pas de temps. Caractéristiques des cycles multigrilles : $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu_0 = 100$

teur d'état qui permet d'améliorer la description de l'état élastoplastique sur les niveaux grossiers (cf. section 3.2.5.1). Ceux-ci décrivent alors plus précisément l'état du niveau le plus fin et augmentent significativement la vitesse de convergence sur ce niveau.

4.4.2 Gain d'éléments

Le gain d'éléments fins induit par l'utilisation de notre stratégie de raffinement automatique est quantifié en utilisant l'exemple unidimensionnel de la poutre en traction (figure 4.2), l'exemple bi-dimensionnel de la plaque trouée (figure 4.3) et l'exemple tri-dimensionnel de la poutre en traction (figure 4.5).

Les tables 4.5, 4.6 et 4.7 présentent respectivement la moyenne du nombre d'éléments fins des maillages finaux à chaque pas de temps pour l'exemple uni-dimensionnel, l'exemple bi-dimensionnel et tri-dimensionnel. La simulation est réalisée sur 120 pas de temps pour l'exemple uni-dimensionnel, 30 pas de temps pour l'exemple bi-dimensionnel et 60 pas de temps pour l'exemple tri-dimensionnel.

Le niveau maximum atteint pour chaque cas test est présenté dans ces tables. Afin d'estimer les capacités de notre algorithme à générer des maillages optimaux, le nombre d'éléments utilisés par notre stratégie est comparé au nombre d'éléments construits pour un maillage de dimensions caractéristiques uniformes correspondant au niveau maximum atteint.

Le niveau atteint par la stratégie de raffinement automatique est un entier ne variant pas toujours avec la précision requise. Or, le nombre d'éléments du maillage final croît de manière quasi-systématique avec celle-ci. Le gain en terme de nombre d'éléments

TAB. 4.5: Gain d'éléments pour l'exemple unidimensionnel

Indicateur d'erreur	Précision requise	Nombre él. NL-LMG	Niveau max.	Nombre él. référence	Nombre relatif d'éléments (%)
Energie	$5 \cdot 10^{-2}$	84	6	512	16.3
Energie	$2 \cdot 10^{-2}$	146	7	1024	14.3
Energie	$1 \cdot 10^{-2}$	272	8	2048	12.3

n'est donc pas linéaire avec la précision requise. L'exemple bi-dimensionnel illustre cette propriété table 4.6. Pour l'indicateur d'erreur en énergie, le niveau maximum atteint est le même pour une précision requise de $2 \cdot 10^{-2}$ ou de $1 \cdot 10^{-2}$. Le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre cette seconde précision étant plus important, le gain relatif d'éléments vis-à-vis du maillage uniforme de niveau 5 croit également.

TAB. 4.6: Gain d'éléments pour l'exemple bidimensionnel

Indicateur d'erreur	Précision requise	Nombre él. NL-LMG	Niveau max.	Nombre él. référence	Nombre relatif d'éléments (%)
Energie	$5 \cdot 10^{-2}$	303	4	4096	7.4
Energie	$2 \cdot 10^{-2}$	774	5	16384	4.7
Energie	$1 \cdot 10^{-2}$	1882	5	16384	11.4
Energie	$5 \cdot 10^{-3}$	4499	6	65536	6.8
Energie	$2 \cdot 10^{-3}$	14679	7	262144	5.6
Travail plastique	$5 \cdot 10^{-4}$	1031	5	16384	6.3
Travail plastique	$1 \cdot 10^{-4}$	3244	6	65536	4.9

Etant donné que l'indicateur d'erreur en travail plastique néglige la propagation élastique dans la structure, le nombre d'éléments n'est comparé que lorsque l'onde a développé des déformations plastiques. Pour l'exemple bi-dimensionnel, celles-ci apparaissent à la 6^{ème} itération. A la fin du calcul, environ 15 % des éléments ont vu se développer des déformations plastiques.

Pour le dernier exemple tri-dimensionnel, la plasticité apparaît au 7^{ème} pas de temps. En fin de simulation, approximativement 55% de la poutre a vu se développer des déformations plastiques. Le gain est ici encore plus important avec moins d'1 % d'éléments de niveau fin requis vis-à-vis du nombre d'éléments de référence.

Pour l'exemple uni-dimensionnel, une moyenne de 14.3 % est trouvée pour le nombre relatif d'éléments. Pour l'exemple bi-dimensionnel et pour les deux indicateurs d'erreur considérés, cette moyenne passe à 6.7 %. L'exemple tri-dimensionnel est le plus significatif en terme de gain avec environ 0.37 % d'élément utilisés en moyenne afin d'obtenir la précision requise.

TAB. 4.7: Gain d'éléments pour l'exemple tridimensionnel

Indicateur d'erreur	Précision requise	Nombre él. NL-LMG	Niveau max.	Nombre él. référence	Nombre relatif d'éléments (%)
Travail plastique	$5 \cdot 10^{-5}$	2 469	4	65 536	0.38
Travail plastique	$2 \cdot 10^{-5}$	5 677	4	65 536	0.86
Energie	$2 \cdot 10^{-2}$	1 808	4	65 536	0.28
Energie	$1 \cdot 10^{-2}$	4 529	5	524 288	0.09
Energie	$5 \cdot 10^{-3}$	10 402	6	4 194 304	0.25

Pour les exemples unidimensionnels et bidimensionnels, la corrélation entre l'erreur maximum et la précision requise a été réalisée section 4.3.2.2. Dans le cas de tridimensionnel, un calcul de référence de niveau 6 est impossible sur la station de travail utilisée (plus de 4 millions d'éléments).

4.4.3 Temps de calcul

Etant donné que le solveur multigrilles développé permet d'améliorer la vitesse de convergence sur le niveau le plus fin (cf. section 4.3.2.1) et que la stratégie de raffinement automatique permet d'économiser un nombre important d'éléments finis (cf. section 4.3.2.2), le gain en terme de temps de calcul est important. Afin d'illustrer cette propriété, on s'intéresse à un problème d'impact sur le quart de plaque présenté section 4.3. La pression linéique maximale appliquée sur la partie supérieure de la structure est de 300 MPa. La structure rentre alors dans le domaine plastique dès le 5^{ème} pas de temps.

Le maillage initial possède 64 éléments quadrangulaires et est représenté figure 4.14(a). Pour des raisons de temps de calcul, la simulation est interrompue au 30^{ème} pas de temps à l'arrivée du front d'onde au voisinage du trou dans la plaque. A cet instant, la structure est fortement plastifiée avec plus de 90 % de points de Gauss plastiques et une déformation plastique moyenne de 1.4%.

La figure 4.20 présente les temps de calcul adimensionnés pour un calcul de référence et pour notre stratégie multigrilles de raffinement automatique. Le calcul de référence est réalisé en utilisant un maillage de dimensions caractéristiques uniformes correspondant à celles du maillage le plus fin obtenu par notre stratégie de raffinement. La résolution sur ce maillage est réalisée en utilisant un solveur monogrille de Newton identique à celui utilisé dans les phases de relaxation multigrilles.

Pour le calcul de niveau 2, le niveau utilisé par notre stratégie de raffinement est global en espace. Dans ce cas, le temps de calcul par notre stratégie multigrilles est plus important que celui de la référence monogrille. Cela est dû au manque de propriétés de lissage de notre solveur itératif et à la pauvreté du cycle multigrilles utilisé dans ce cas (cycle multigrilles ne possédant que deux niveaux et s'appuyant sur un maillage grossier possédant un faible nombre d'élément).

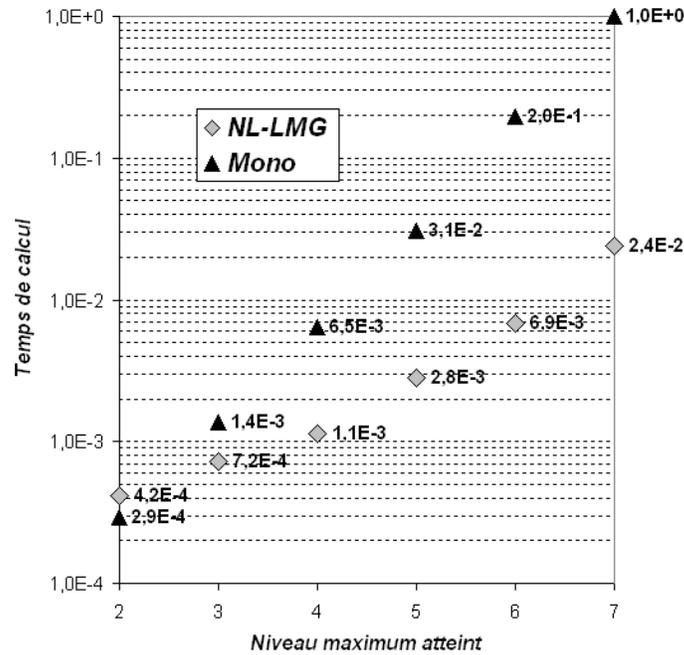


FIG. 4.20: Temps de calcul adimensionné en fonction du niveau maximum atteint par la stratégie de raffinement automatique

On remarque que le gain en terme de temps de calcul est de plus en plus important au fur et à mesure que des maillages de plus en plus fins sont considérés. Pour l'exemple de niveau 7, le maillage de référence possède 262144 éléments et le temps de calcul est environ 40 fois plus faible. Étant donné que la complexité de notre stratégie est bien inférieure à celle de la stratégie monogrille, le gain en temps de calcul serait théoriquement plus important pour des maillages de dimensions plus importantes.

Par ailleurs, étant donné le gain d'éléments présenté pour les exemples tridimensionnels, les gains en terme de temps de calcul seraient encore plus importants pour des modèles 3D. Il est néanmoins difficile d'établir un graphique équivalent pour ces modèles étant donné les difficultés à réaliser le calcul monogrille de référence.

4.4.4 Evolution temporelle du raffinement de maillage

Cette dernière section s'appuie sur l'exemple tri-dimensionnel de la poutre en I représenté figure 4.6 afin de présenter le raffinement automatique de maillage au cours du temps. La simulation est réalisée sur une durée totale de 0.8 ms. Des déformations plastiques apparaissent durant la phase de chargement dès la 7^{ème} itération. A la fin de la simulation, plus de 63 % des éléments ont subi des déformations plastiques.

La figure 4.21 présente le nombre d'éléments et de niveaux utilisés afin d'atteindre une précision requise de $5 \cdot 10^{-3}$ sur l'énergie de la structure. Les différentes phases de la simulation sont indiquées pour information. Le nombre moyen d'éléments est de 27318.

Un maillage uniforme de niveau 6 posséderait 4194304 et son calcul serait impossible sur la station de travail utilisée (nombreuses itération de Newton lors des pas de temps plastiques). Le nombre relatif d'élément est ici de l'ordre de 0.6%

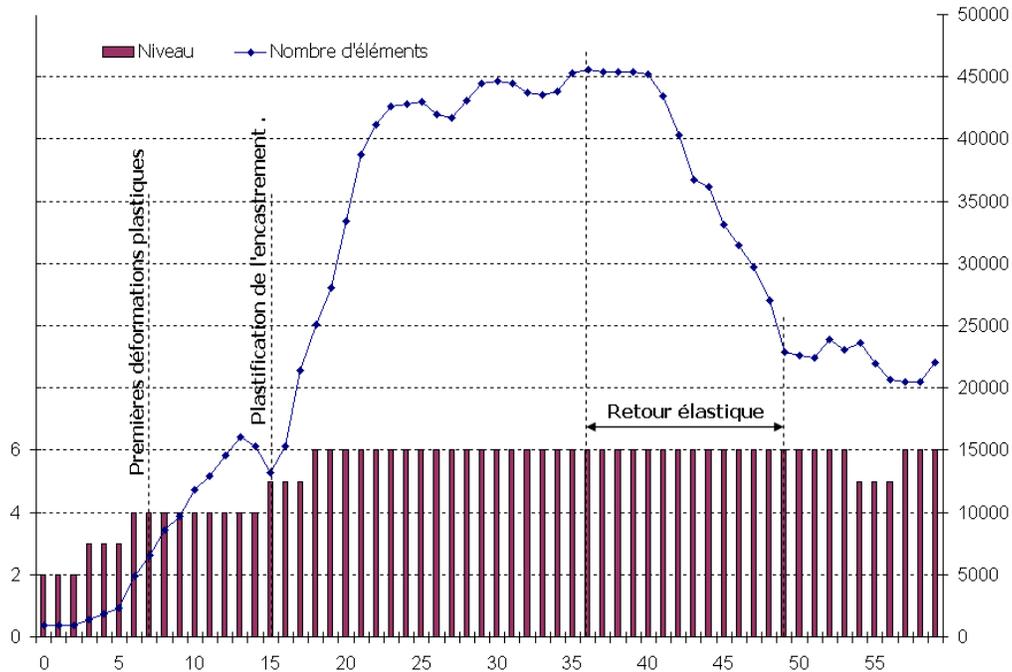


FIG. 4.21: Nombre d'éléments et niveau maximum atteint à chaque itération

Ce graphique montre que l'apparition de la plasticité est associée à une augmentation importante du nombre d'éléments requis. En effet, les grilles grossières décrivent difficilement les phénomènes plastiques et des éléments fins sont nécessaires afin d'assurer une description correcte des déformations inélastiques. La décroissance du nombre d'éléments pendant la phase de retour élastique est due au fait que la liaison encastrement dans la poutre est moins sollicitée une fois la structure relâchée.

Les figures 4.22 à 4.26 présentent les différents maillages obtenus au cours de la simulation ainsi que la déformation plastique aux instants considérés. La colonne de gauche présente les maillages finaux obtenus et la colonne de droite les isovaleurs de la déformation plastique cumulée sur la configuration déformée pour un coefficient graphique d'amplification de 40. Le maillage représenté figure 4.22(a) permet de visualiser la densité du maillage utilisé en absence de raffinement. Il correspond au maillage de niveau 2, global en espace, couvrant le maillage le plus grossier de niveau 1. Le maillage représenté figure 4.22(e) illustre le fait que le raffinement de maillage a lieu dans les zones à forts gradients.

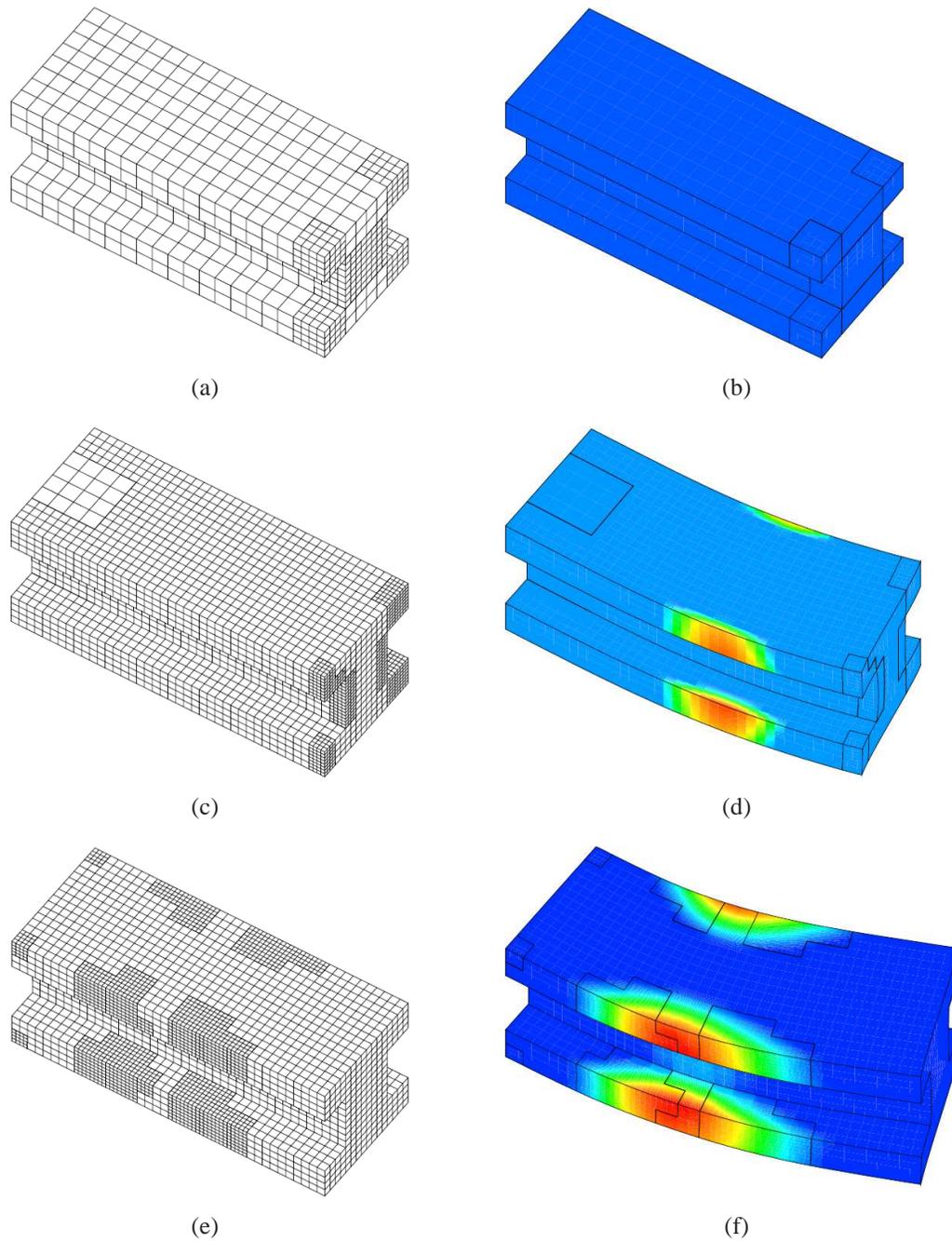


FIG. 4.22: Maillages tridimensionnels successifs (1/5) : La lecture en ligne présente le maillage éléments finis utilisé et le tracé des isovaleurs de déformations plastiques cumulées correspondantes toutes les $55\mu s$. La lecture en colonne présente l'évolution du maillage du côté gauche et l'évolution du champ de déformations plastiques cumulées du côté droit (échelle de représentation des isovaleurs variable en fonction du temps)

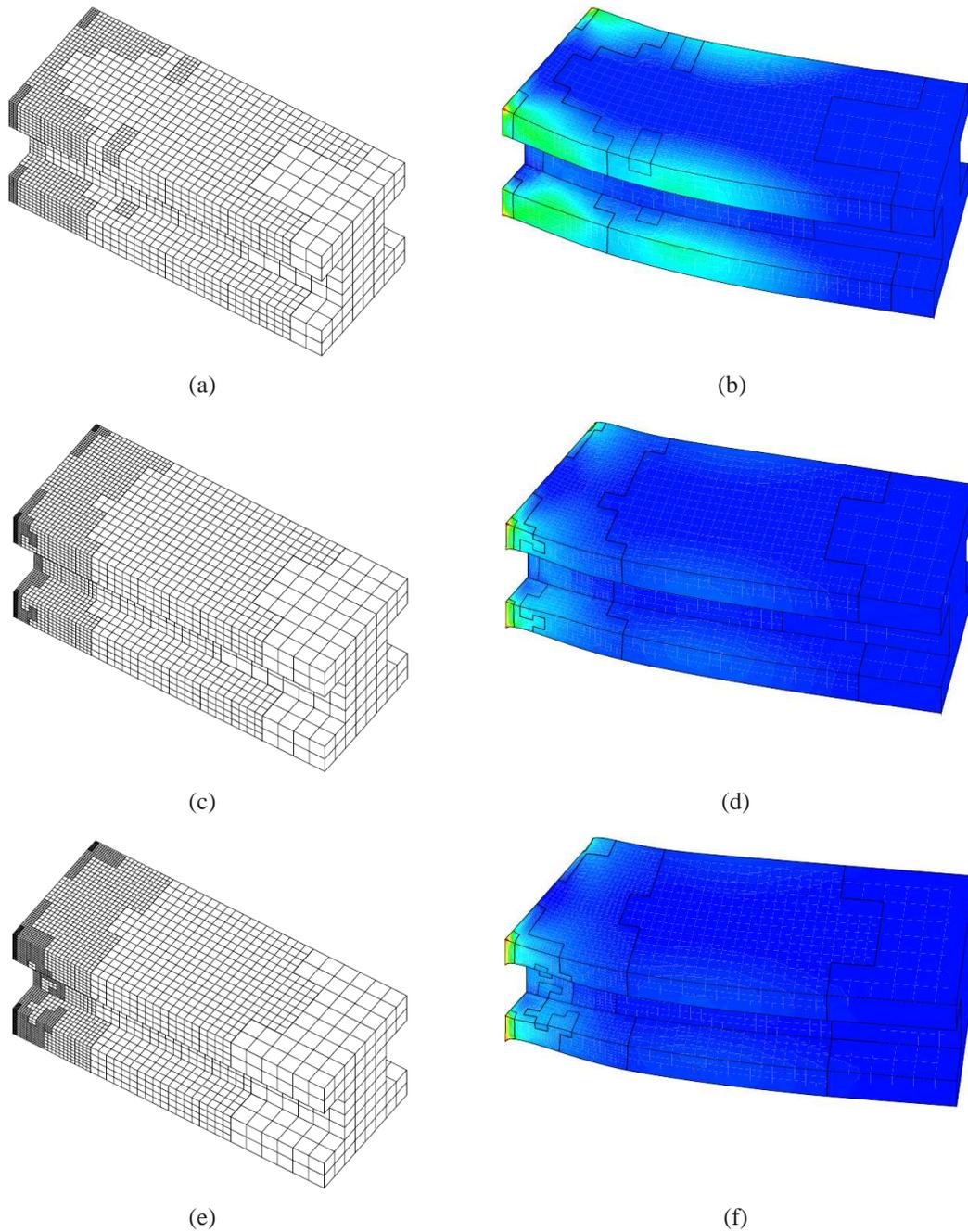


FIG. 4.23: Maillages tridimensionnels successifs (2/5) : La lecture en ligne présente le maillage éléments finis utilisé et le tracé des isovaleurs de déformations plastiques cumulées correspondantes toutes les $55\mu s$. La lecture en colonne présente l'évolution du maillage du côté gauche et l'évolution du champ de déformations plastiques cumulées du côté droit (échelle de représentation des isovaleurs variable en fonction du temps)

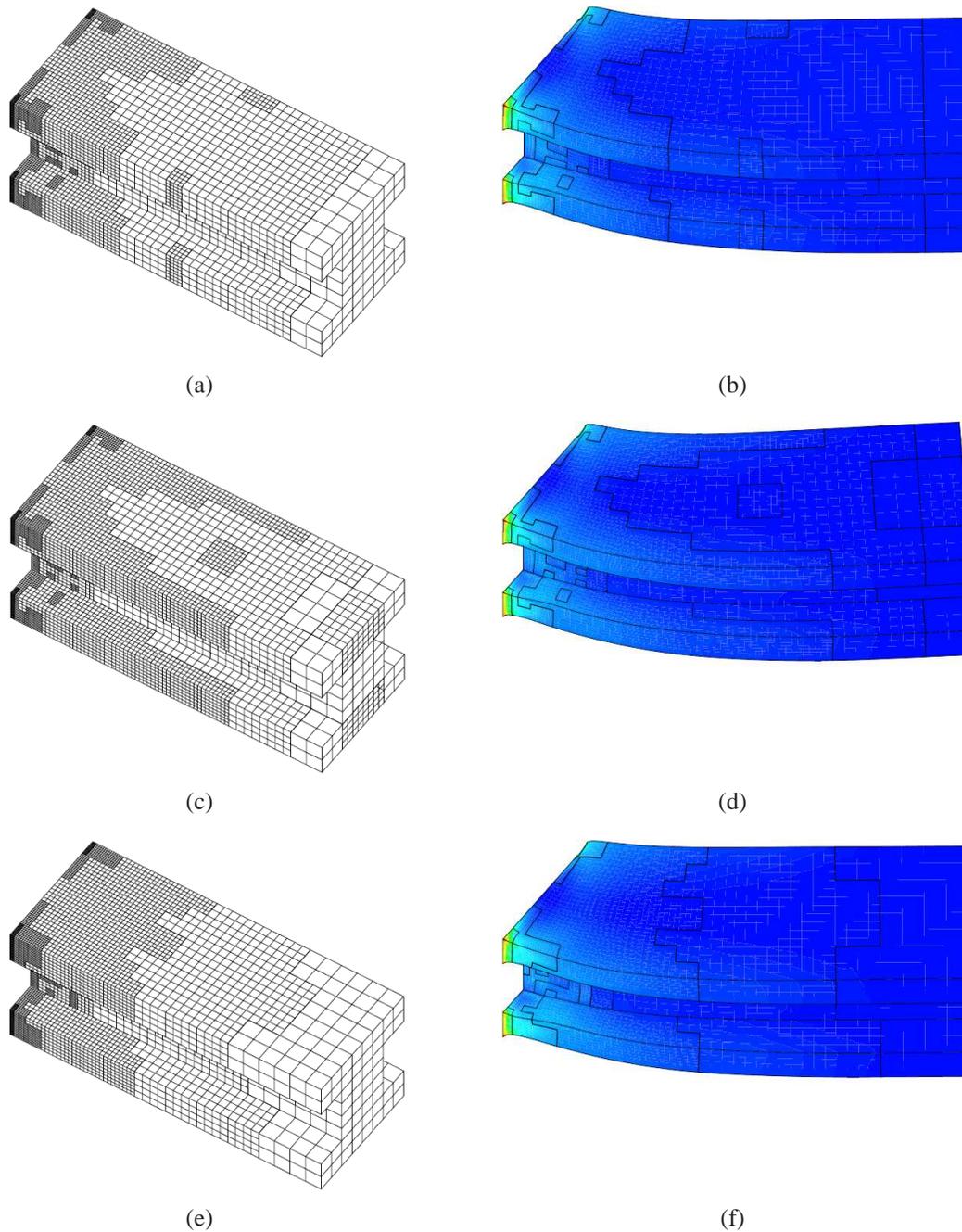


FIG. 4.24: Maillages tridimensionnels successifs (3/5) : La lecture en ligne présente le maillage éléments finis utilisé et le tracé des isovaleurs de déformations plastiques cumulées correspondantes toutes les $55\mu s$. La lecture en colonne présente l'évolution du maillage du côté gauche et l'évolution du champ de déformations plastiques cumulées du côté droit (échelle de représentation des isovaleurs variable en fonction du temps)

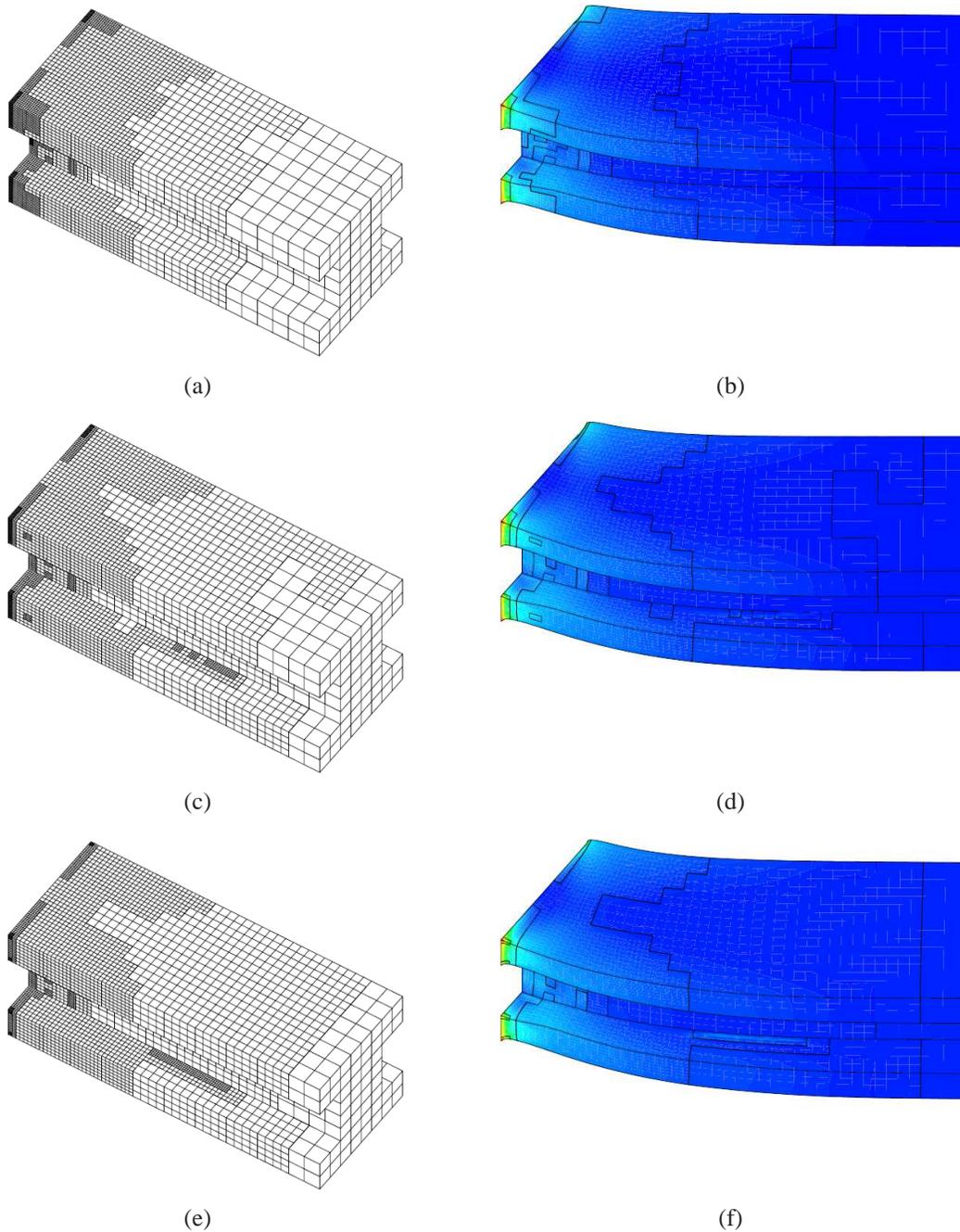


FIG. 4.25: Maillages tridimensionnels successifs (4/5) : La lecture en ligne présente le maillage éléments finis utilisé et le tracé des isovaleurs de déformations plastiques cumulées correspondantes toutes les $55\mu s$. La lecture en colonne présente l'évolution du maillage du côté gauche et l'évolution du champ de déformations plastiques cumulées du côté droit (échelle de représentation des isovaleurs variable en fonction du temps)

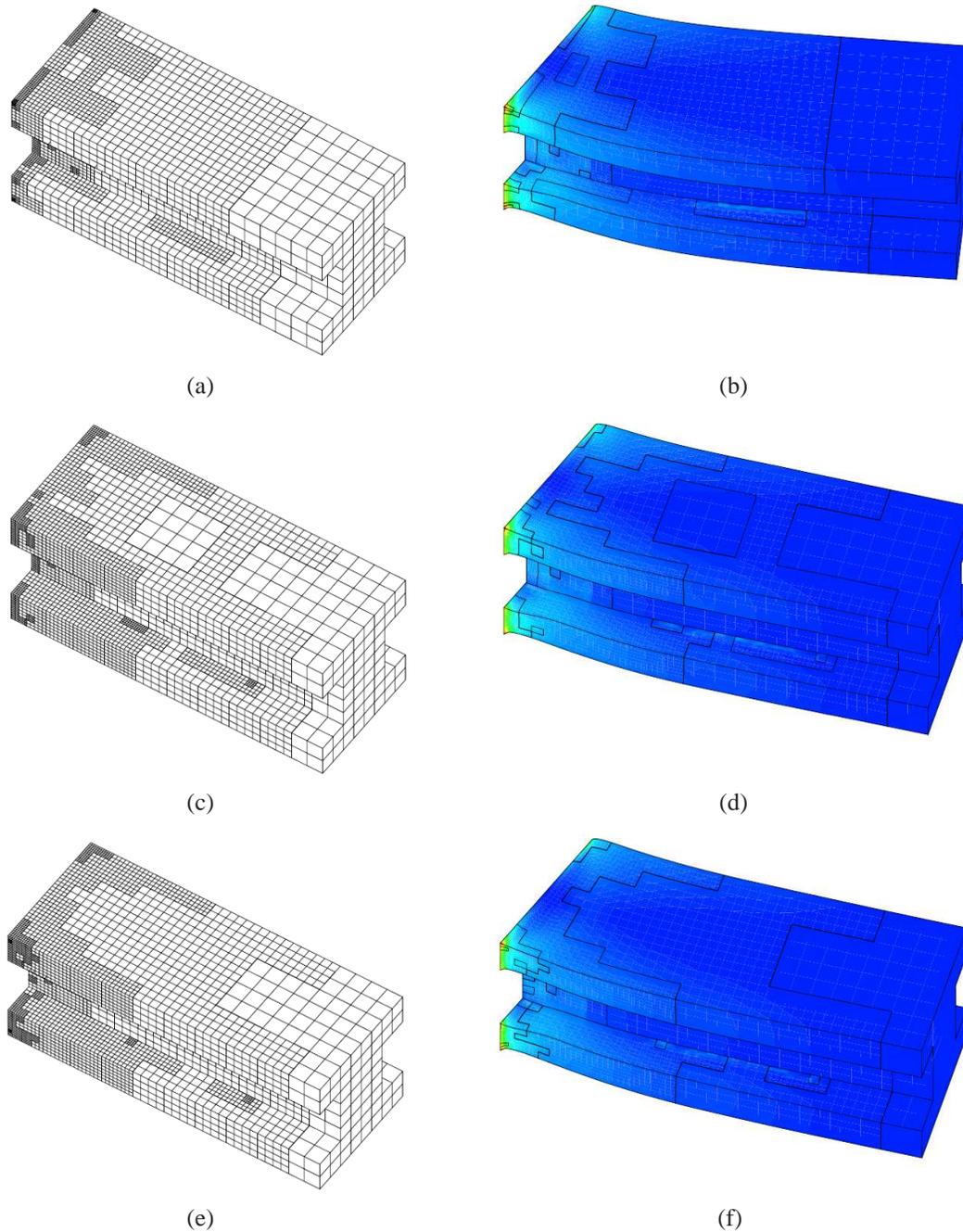


FIG. 4.26: Maillages tridimensionnels successifs (5/5) : La lecture en ligne présente le maillage éléments finis utilisé et le tracé des isovaleurs de déformations plastiques cumulées correspondantes toutes les $55\mu s$. La lecture en colonne présente l'évolution du maillage du côté gauche et l'évolution du champ de déformations plastiques cumulées du côté droit (échelle de représentation des isovaleurs variable en fonction du temps)

Les figures précédentes ne permettent de représenter que les éléments finis construits sur la frontière de la structure. Afin de visualiser le raffinement de maillage au coeur de la poutre, on présente figure 4.27(a) le maillage final obtenu à l'itération 36. Les zones les plus foncées correspondent à celles où la densité d'éléments est maximale. Les figures 4.27(b) à 4.27(f) présentent les maillages \mathcal{M}_*^i qui contribuent au maillage final. On rappelle que la solution à chaque pas de temps est construite par assemblage des contributions sur chacun de ces maillages.

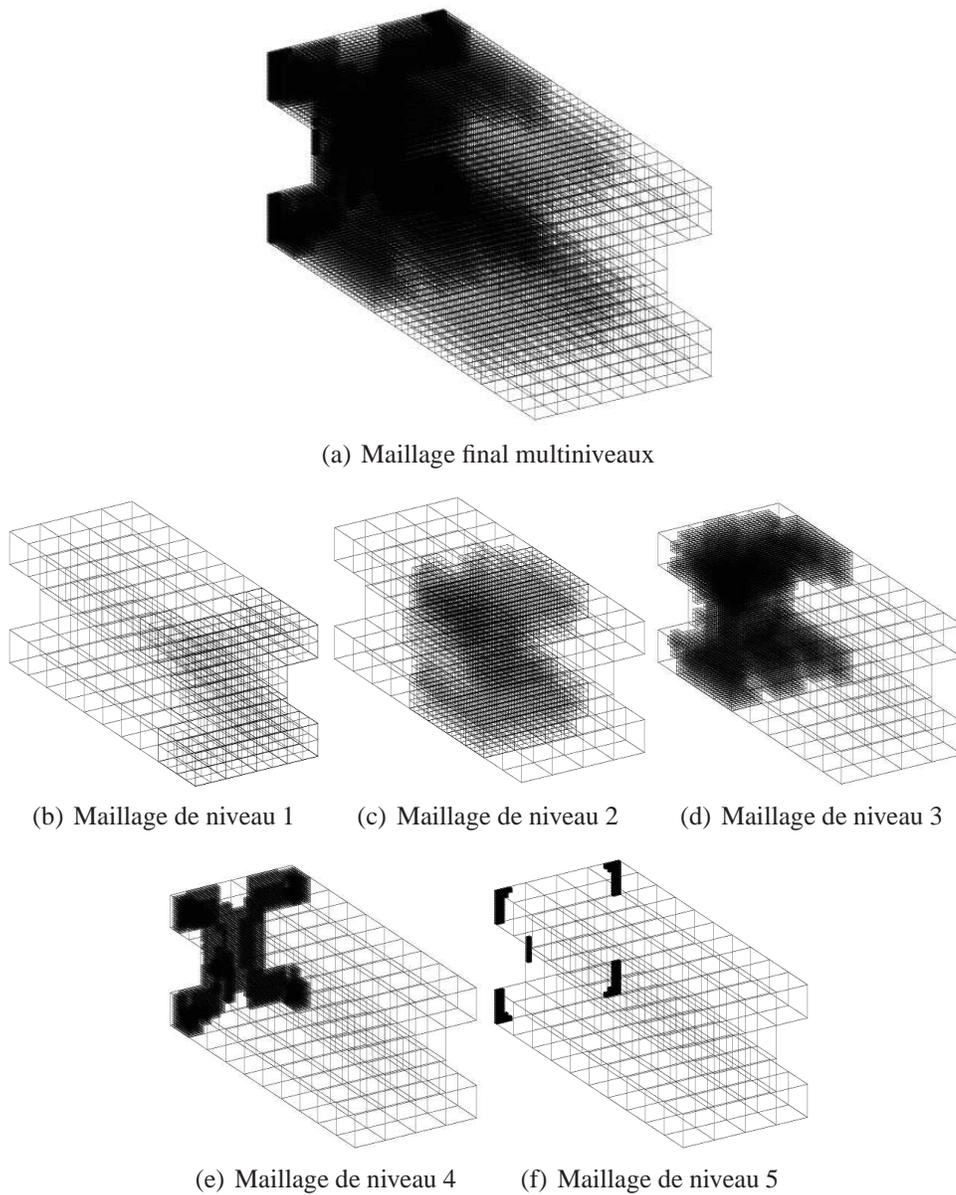


FIG. 4.27: Présentation des différents maillage \mathcal{M}_*^k à l'itération 36

4.5 Synthèse

Cette section permet de valider le comportement de notre stratégie de raffinement automatique au moyen d'exemples numériques uni-dimensionnels, bi-dimensionnels et tri-dimensionnels. Bien que d'autres modèles de comportements puissent être envisagés, les cas test étudiés s'appuient sur un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope.

On étudie dans un premier temps les propriétés de convergence de nos indicateurs d'erreur. On montre que les ordres de convergence pour les calculs localisés correspondent à ceux obtenus en utilisant la méthode des éléments finis standard. Leur cohérence vis-à-vis de la théorie est par ailleurs analysée. Dans le cas singulier, tous les indicateurs d'erreur ne sont pas adaptés. D'autre part, la stratégie de raffinement automatique développée limite le choix des quantités contrôlées. C'est pourquoi par la suite, seuls les indicateurs d'erreur en énergie, en incrément d'énergie et en travail plastique sont considérés.

En utilisant ces indicateurs d'erreur, on montre que le raffinement automatique de maillage suit la phénoménologie des sollicitations dans la structure. L'exemple bi-dimensionnel est employé afin de quantifier l'influence du maillage initial, de l'indicateur d'erreur et de la précision requise par l'utilisateur sur la qualité de la solution. On montre que la finesse du maillage à la fin de la stratégie de raffinement automatique ainsi que la précision de la solution obtenue est quasiment indépendante du maillage initial. Le maillage est remis en cause à chaque pas de temps et la précision requise par l'utilisateur est atteinte sans qu'une stratégie complexe d'adaptation de maillage ne soit utilisée.

Les performances de notre stratégie adaptative sont étudiées dans une dernière partie. La vitesse de convergence du solveur de Newton est améliorée par l'utilisation de la stratégie multigrille. Le gain de degrés de liberté est quantifié en comparant le nombre d'éléments utilisé par notre stratégie au nombre d'éléments correspondant à un maillage de dimensions caractéristiques uniformes de niveau équivalent au niveau maximum atteint. Le gain en termes d'occupation mémoire et de temps de calcul est donc non-négligeable. La stratégie de raffinement automatique développée permet d'obtenir de manière automatique une solution précise à moindre coût. Dans le cas de simulations tri-dimensionnelles, une telle précision est souvent inaccessible en utilisant des méthodes de calcul classiques.

Conclusions et perspectives

La méthode des éléments finis et les schémas numériques d'intégration en temps sont couramment utilisés dans le domaine industriel en dynamique non-linéaire. Ils permettent de prédire numériquement le comportement des structures à des sollicitations extrêmes et sont utilisés afin de compléter les campagnes d'essais.

Le système d'équations discrétisé associé à ces méthodes est généralement résolu par des stratégies itératives non-linéaires simples où la résolution s'appuie sur des maillages dont les dimensions caractéristiques sont invariantes en espace et en temps. Néanmoins, la complexification des maquettes numériques et des modèles utilisés, ainsi que l'exigence de la précision à leur égard, rend aujourd'hui ces problèmes très coûteux en termes d'espace mémoire et de temps CPU.

C'est pourquoi, afin de permettre l'aboutissement de tels calculs, la prise en compte de la nature multiéchelle de telles simulations est essentielle. Un état de l'art des différentes stratégies dédiées à ce type de modélisation nous a permis d'évaluer les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles. Ces stratégies visent à assurer localement l'utilisation de l'échelle la plus pertinente tant en espace qu'en temps sur chaque zone de la structure et sur l'ensemble de l'intervalle de temps. Une fois les maillages optimaux déterminés, il convient d'utiliser des solveurs non-linéaires de complexité minimale afin de diminuer l'effort numérique nécessaire à l'aboutissement de ces calculs.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au développement d'une stratégie de raffinement automatique en espace performante pour la dynamique non-linéaire des structures. L'originalité de l'approche proposée provient de la gestion du raffinement automatique qui s'appuie sur des stratégies de calcul éprouvées telles que les solveurs de Newton et les schémas d'intégration en temps de Newmark. Notre stratégie est plus particulièrement dédiée à la modélisation des non-linéarités de comportement irréversibles.

On s'intéresse donc ici à l'optimisation du maillage spatial permettant d'assurer la qualité de la solution à chaque instant discrétisé à moindre coût. La méthode développée s'apparente aux stratégies s-adaptatives. La difficulté majeure liée au développement de cette méthode est qu'une non-linéarité localisée influence le comportement global de la structure. La prise en compte de la plasticité impose donc d'abandonner le schéma purement ascendant de raffinement de maillage développé dans [CAV 05c] et de développer un cadre numérique où les différentes échelles de raffinement communiquent entre elles.

La première partie de ce travail a consisté à développer un solveur multigrille efficace dédié à la dynamique transitoire non-linéaire pour des comportements élastoplastiques. La stratégie développée est indépendante, dans son formalisme d'écriture, du solveur non-linéaire utilisé dans les phases de relaxation. Un solveur itératif de Newton a été adopté dans nos travaux pour sa robustesse, et ce malgré son absence de propriété de lissage. Cette stratégie multigrille a été introduite pour la première fois dans [BIO 09] et sa mise en équation détaillée a été présentée dans [BIO 10a]. Une attention particulière a été portée aux phases de transfert qui conditionnent la convergence du solveur multigrille.

La seconde étape concerne la maîtrise de l'erreur et le contrôle de la précision. Les estimateurs d'erreurs usuellement utilisés pour des simulations éléments finis semblent coûteux comparativement à des indicateurs d'erreur dédiés. C'est pourquoi, nous avons choisi ici d'utiliser les propriétés de convergence et de consistance de la méthode des éléments finis. L'évaluation de l'erreur de discrétisation est basée sur la comparaison de la solution sur deux maillages de dimensions caractéristiques différentes. Celle-ci permet d'obtenir une évaluation de l'erreur vis-à-vis de la solution exacte du problème discrétisé à moindre coût. Le développement précis des indicateurs d'erreur utilisés dans ce mémoire a été présenté dans [BIO 10b].

Enfin, la dernière étape de ce travail a consisté à définir la stratégie de raffinement proprement dite. En fonction de la valeur de l'erreur fournie par l'indicateur, des éléments de plus en plus fin sont construits par sous-découpage hiérarchique. La question des conditions limites à appliquer sur les nouveaux maillages ainsi construit s'est alors posée. Le recollement entre interfaces incompatibles a été réalisé en imposant la continuité des déplacements sur le bord des maillages localisés par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Afin de calculer la solution sur ces nouveaux éléments, le solveur multigrille développé dans le cadre global a été adapté afin de permettre la prise en compte de la localisation des maillages. Dès lors le solveur multigrille est utilisé à deux fins : il permet d'améliorer la vitesse de convergence mais aussi d'assurer le transfert d'informations entre les différents niveaux de maillage sur la structure.

La méthode a été validée dans un premier temps pour un cas unidimensionnel simple dans [BIO 10a]. Cet exemple a permis de contrôler que le raffinement de maillage avait lieu dans la zone où l'onde se propageait et que l'erreur atteinte à chaque pas de temps était en adéquation avec la précision requise par l'utilisateur.

Des cas plus complexes ont été traités dans [BIO 10b] où l'intervention de la discrétisation temporelle et la dépendance du comportement de notre stratégie de raffinement automatique aux paramètres initiaux a été détaillée. Ces exemples numériques ont été repris et développés dans ce mémoire. On montre que le temps de calcul dépend étroitement de la tolérance accordée sur l'erreur et de la dimension du problème étudié. Quelque soit la précision requise, celle-ci est obtenue à moindre coût en utilisant notre stratégie de raffinement, et ce indépendamment de l'expérience de l'utilisateur.

Pour des exemples tri-dimensionnels, la stratégie développée permet d'obtenir de manière précise la solution à de problèmes inaccessibles aux méthodes traditionnelles grâce aux indicateurs d'erreurs et au raffinement automatique.

Perspectives

Amélioration du solveur NL-L-FMG

Les performances du solveur présenté dans ce rapport pourraient être améliorées en modifiant les outils numériques utilisés pour chacune des phases multigrilles tout en conservant le formalisme de présentation.

Le solveur de Newton au sein de la stratégie multigrille pourrait avantageusement être remplacé par un solveur possédant de meilleures propriétés de lissage. En mécanique des structures, les méthodes de type gradient conjugué préconditionné non-linéaire [PAP 86], [PAP 89] avec une définition éventuellement inexacte des directions de recherche [GRA 00] ont déjà prouvé leur efficacité. L'utilisation d'un solveur de type BFGS, déjà utilisé avec succès dans le cadre multigrille dans [FIS 95], pourrait également améliorer la vitesse de convergence multigrilles. On peut également imaginer l'utilisation de méthodes de Krylov [SAA 03] qui ont déjà montré des résultats prometteurs dans le cas de non-linéaires [RIS 00].

Concernant les phases d'interpolation, les opérateurs de collocations utilisés pour le transfert des informations nodales sont optimaux pour les phases de prolongation mais souffrent d'une perte d'information haute fréquence pour les phases de restriction. La définition de ces opérateurs au sens des moyennes généralisées [DUR 06] permettrait sans doute d'améliorer la vitesse de convergence.

Par ailleurs, la définition d'opérateurs de transfert plus complexes pour les restrictions des champs par éléments sur les niveaux sous-jacents permettrait d'améliorer le comportement thermodynamique de notre stratégie. Concernant le transfert entre pas de temps, l'utilisation d'opérateurs permettant d'assurer l'admissibilité du vecteur d'état, éventuellement basés sur des techniques d'approximation diffuse [BRA 08], permettrait de réduire la dissipation numérique dans le schéma d'intégration temporelle.

Stratégie de raffinement en espace et en temps

Le raffinement de maillage présenté dans ce mémoire est influencé par la discrétisation temporelle (cf. section 4.2.3). La définition d'une méthode de raffinement en espace et en temps pourrait permettre de s'affranchir de ce problème et d'améliorer la qualité de la méthode de raffinement automatique en utilisant un pas de temps hétérogène sur l'ensemble de la structure.

L'idée directrice de cette méthode serait de coupler le raffinement de maillage en temps au raffinement de maillage en espace comme cela a été réalisé dans [CAV 05b]. Le raffinement parallèle du temps conduirait dans ce cas à l'obtention un pas de temps local sur la structure en fonction de la dimension des éléments finis et du niveau de grille.

Enfin, l'utilisation de schémas d'intégration en temps plus performants en terme d'ordre de convergence, comme le schéma de Krenk [KRE 07] ou le schéma de Galerkin discontinu en temps [LI 96], permettraient probablement d'obtenir un meilleur comportement du raffinement de maillage. Les méthodes de Galerkin discontinu en temps ont par

ailleurs déjà montré leur potentiel dans le cadre des méthodes adaptatives [TIE 06].

Extension à d'autres types de non-linéarité

L'extension de notre stratégie à d'autres types de non-linéarités peut être envisagée. Nous n'avons considéré ici que des comportements élastoplastiques à écrouissage isotrope. L'utilisation d'autres relations de comportement, basées elles aussi sur des modèles à variables internes, ne devrait poser aucune difficulté si ce n'est l'alourdissement des phases de transfert.

Le développement d'une stratégie de raffinement automatique pour le traitement des non-linéarités géométriques impliquerait de modifier la définition des indicateurs d'erreur. En effet, ceux-ci devraient alors être définis dans la configuration de référence non déformée. De plus il faudrait prendre garde à conserver la conformité géométrique des éléments et la stratégie de sous-découpage hiérarchique devrait probablement être remplacée par une méthode de raffinement plus complexe.

Extension à la mécanique de la rupture

Enfin, une dernière extension pourrait concerner le développement d'une approche couplée à une méthode XFEM de manière à permettre la modélisation de la fissuration dynamique. Les travaux récents de Rannou, présentés dans [RAN 08], proposent de prendre en compte les phénomènes d'échelles rencontrés en mécanique de la rupture par l'intermédiaire de stratégies multigrilles.

L'introduction de cette stratégie à notre méthode de raffinement automatique permettrait d'adapter automatiquement les dimensions des maillages utilisés en pointe de fissure au cours de sa propagation en utilisant des indicateurs d'erreur adéquats. La rupture du matériau pourrait également être considérée en fonction des non-linéarités calculées.

Annexe A

Algorithme d'écoulement plastique

Cette annexe présente brièvement l'algorithme de retour radial sur le seuil qui permet de calculer l'état matériellement admissible de la structure (caractérisé par un champ de contraintes, des champs de variables internes et un champ de déformations inélastiques). Cet algorithme est différent de la méthode d'intégration de Castem, réalisée par l'opérateur *ECOUC*, qui utilise une solution analytique afin d'intégrer plus précisément le comportement.

On considère le système d'équations associé à un modèle de matériau plastique à écrouissage isotrope sous l'hypothèse des petites perturbations. Les algorithmes d'écoulement plastique sont utilisés afin de déterminer l'état matériellement admissible de la structure en fonction d'un état admissible déterminé précédemment (par exemple à l'instant précédent) et d'un incrément de déformations. La formulation précise de ce type d'algorithme est donné dans [SIM 00] ou [BEL 00].

Prédiction élastique

L'admissibilité matérielle est associée aux équations complémentaires de Kuhn-Tucker qui relient le paramètre d'évolution plastique $\dot{\lambda}$ à la fonction seuil f .

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &\geq 0 & f(\underline{\underline{\sigma}}, p) &\leq 0 \\ \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}, p) &= 0\end{aligned}$$

L'algorithme de type retour radial [SIM 86] correspond au cas particulier où la fonction seuil est décrite en utilisant les contraintes équivalentes de Von-Mises $\underline{\underline{\sigma}}_{eq}$. On note $\sigma_Y(p)$ la limite d'élasticité écrouie. La fonction seuil est alors donnée par :

$$\begin{aligned}f(\underline{\underline{\sigma}}, p) &= \|\underline{\underline{\sigma}}_{eq}\| - \sigma_Y(p) \\ \text{avec : } \underline{\underline{\sigma}}_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\sigma}}) \mathbb{I} \right)\end{aligned}$$

L'algorithme est basé sur la notion de prédiction élastique du vecteur d'état. Les corrections plastiques sont éventuellement apportées par la suite en considérant les équations

constitutives non-linéaires permettant le calcul du paramètre d'évolution plastique. Cette correction est appliquée suivant la normale \mathbf{n}_f au domaine de plasticité.

On suppose dans un premier temps que l'incrément de déplacement à l'instant t_{n+1} est purement élastique. Cet incrément est calculé en fonction du résidu en équilibre. Si le schéma de Newmark est exprimé en déplacement, il est donné par :

$$\Delta \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{G} \mathbf{R}$$

Où \mathbf{G} représente l'inverse de la matrice jacobienne. L'incrément de déformation est obtenu en utilisant la matrice des gradients \mathbf{B} :

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}_{n+1}$$

Et la prédiction élastique est définie à l'instant t_{n+1} comme suit :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$$

$$\epsilon_{pn+1}^{trial} = \epsilon_{pn}$$

$$p_{n+1}^{trial} = p_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\epsilon}$$

La valeur de la fonction seuil f est alors calculée en considérant ces prédicteurs élastiques. Si $f(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial}, p_{n+1}^{trial}) < 0$, alors l'état de contrainte est situé à l'intérieur de la surface d'écoulement et la prédiction élastique est correcte. Dans ce cas le paramètre d'évolution plastique $\hat{\lambda}$ est nul. Dans le cas contraire, si $f(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial}, p_{n+1}^{trial}) > 0$, les champs considérés ne sont pas plastiquement admissibles et la prédiction élastique est fautive. On procède alors à une correction du vecteur d'état.

Correction plastique

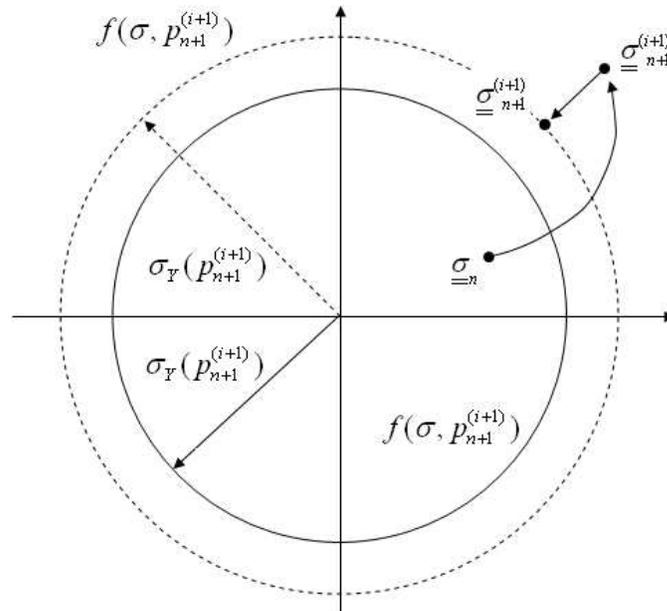
La prédiction élastique n'étant pas plastiquement admissible, il faut supposer une évolution des déformations plastiques de manière à obtenir une fonction seuil nulle. Le vecteur d'état est alors corrigé de manière itérative jusqu'à obtenir un état matériellement admissible à une tolérance numérique près. La stratégie est initialisée en considérant les prédictions élastiques comme les approximations à l'itération 0.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{trial}$$

$$\epsilon_{pn+1}^{(0)} = \epsilon_{pn+1}^{trial}$$

$$p_{n+1}^{(0)} = p_{n+1}^{trial}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$$



A-1: Interprétation graphique du retour radial sur le seuil dans l'espace des contraintes

La figure suivante représente une interprétation géométrique d'une itération de l'algorithme de retour radial sur le seuil dans l'espace des contraintes. On note $a_{n+1}^{(i)}$ la valeur de a au piquet de temps $n+1$ et à l'itération de correction plastique i .

Dans un premier temps, l'incrément en multiplicateur plastique doit être calculé de manière à vérifier une valeur nulle de la fonction seuil. Il est alors solution de :

$$\|\sigma_{n+1}^{(k)}\| - 3\mu\Delta p_n - \sigma_Y(p_n + \Delta p_n) = 0 \quad (4.6)$$

Cette équation non-linéaire en fonction du scalaire Δp_n est en général résolue par l'intermédiaire d'une méthode de Newton. Une fois le multiplicateur plastique calculé, les quantités non-linéaires sont actualisées en utilisant les équations suivantes :

$$\Delta\epsilon_{p_{n+1}}^{(i+1)} = -\Delta\dot{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{n} \quad (4.7)$$

$$\epsilon_{p_{n+1}}^{(i+1)} = \epsilon_{p_{n+1}}^{(i)} + \Delta\epsilon_{p_{n+1}}^{(i+1)}$$

$$\sigma_{n+1}^{(i+1)} = \sigma_{n+1}^{(i)} - 2\mu\Delta\epsilon_{p_{n+1}}^{(i+1)}$$

$$p_{n+1}^{(i+1)} = p_{n+1}^{(i)} + \Delta\dot{\lambda}_{n+1}^{(i+1)}$$

$$\dot{\lambda}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{\lambda}_{n+1}^{(i)} + \Delta\dot{\lambda}_{n+1}^{(i+1)}$$

Ces nouvelles variables sont utilisées afin de déterminer la valeur de la fonction seuil à l'itération $(i + 1)$. Le calcul est répété jusqu'à ce que la fonction seuil vérifie une certaine tolérance fixée par l'utilisateur.

Annexe B

Extraits de programmation sous Castem 2000

La programmation de la méthode est réalisée en utilisant Castem 2000. Elle est largement basée sur des objets, appelés procédures, contenant une suite d'opérations élémentaires. L'utilisation de ces objets permet d'organiser et de synthétiser la programmation. Les objets créés à l'intérieur d'une procédure ne sont plus accessibles une fois sortis de celle-ci. Par ailleurs, les objets de type procédure ne peuvent modifier que les objets de type table. La syntaxe générale de définition de ces objets est la suivante :

```
DEBPROC NOM_FONCTION ARGUMENT_1*TYPE ARGUMENT_2*TYPE ;  
  Commande 1 ;  
  Commande 2 ;  
  ...  
FINPROC SORTIE_1 SORTIE_2 ;
```

Le type des sorties est implicite. Chaque argument doit être donné de manière explicite en entrée de la procédure. Afin de minimiser le nombre d'arguments en entrée, une table contenant l'ensemble des paramètres du calcul, nommée *par1*, est créée au moment de l'initialisation du calcul. L'appel de ses procédures par le programme est alors réalisée par :

```
SORTIE_1 SORTIE_2 = NOM_FONCTION ARGUMENT_1 ARGUMENT_2 ;
```

Présentation globale

Les procédures présentées par la suite (extraites du code bi-dimensionnel) utilisent des procédures annexes qui ne sont pas toutes détaillées ici. Parmi elles, certaines procédures "élémentaires" ne nécessitent pas de description avancée. On notera que :

- @MA permet d'obtenir le maximum du champ.
- @NO2 calcule la norme 2 du champ considéré.
- @NOI calcule la norme infinie du champ considéré.
- @INMI construit le point milieu d'un segment en fonction de sa géométrie.
- @KRTMAN réalise le découpage d'un élément parent en ses éléments enfants.
- @DECOUP découpe l'ensemble d'un maillage et transmet la filiation des données.
- @SAUNI sauvegarde les informations une fois un niveau calculé.
- @MENAGE libère l'occupation mémoire et réinitialise les objets de type table.

Les procédures *@RE_C*, *@RE_U*, *@RE_F*, *@PR_C* et *@PR_U* désignent les procédures de transfert de champ. *RE* désigne une procédure de restriction et *PR* une procédure de prolongation. Les indices *U*, *F* et *C* précisent si l'opérateur travaille sur les quantités cinématiques, en effort ou sur les quantités définies aux points de Gauss (respectivement). On ne détaillera par la suite que la syntaxe des procédures *@PR_U* et *@PR_C* qui définissent les opérateurs de prolongation construits sous castem.

```
PUM = @PR_U dpct*CHPOINT mai0*MAILLAGE mail*MAILLAGE ;
PUM = @RE_U dep1*CHPOINT mai0*MAILLAGE mail*MAILLAGE ;
FM1 = @RE_F res1*CHPOINT mai0*MAILLAGE mail*MAILLAGE ;
chp0 = @PR_C chp0*MCHAML NOM1*MOT mod0*MMODEL mod1*MMODEL ;
chp0 = @RE_C chp0*MCHAML NOM1*MOT mod0*MMODEL mod1*MMODEL ;
```

Les procédures *@CONS0* et *@COFILO* sont utilisées afin de construire le problème de niveau 1. La première procédure construit le maillage et le modèle de comportement utilisé. Ceux-ci n'apparaissent pas en sortie car ils sont définis dans des objets de type table. La seconde procédure construit les maillages $\partial\mathcal{M}_F^0$ et $\partial\mathcal{M}_U^0$ sur lesquels sont appliquées des conditions limites. *Iron0* désigne les lignes dont la géométrie est particulière (ici, circulaire).

```
Iron0 = DEBPROC @CONS0 a0*FLOTTANT r0*FLOTTANT Niv0*ENTIER TYP0*MOT ;
@COFILO BC0*MAILLAGE a0*FLOTTANT ;
```

La procédure *@RENL* désigne le solveur de Newton. La procédure multigrille est nommée *FAS* et utilise la procédure *CONSOL* permettant la création du problème sur le niveau grossier. Ces procédures sont détaillées par la suite.

```
err0 res0 = DEBPROC FAS Niv0*ENTIER Nmx0*ENTIER ;
@CONSOL Niv1*ENTIER i*ENTIER res0*CHPOINT ;
```

La procédure de calcul de l'erreur *@ELONIV* est décrite brièvement par la suite. On ne présentera que la définition de l'indicateur d'erreur en énergie pour synthétiser cette annexe. Le maximum d'adimensionnement *max0* est calculé par une procédure *@ERR_0* appelée lors de la résolution sur le niveau 1.

```
conver0 = DEBPROC @ELONIV Niv0*ENTIER MOT1*MOT ;
```

Les procédures *@RESOL* et *@RESNIV* désignent respectivement les procédures utilisées pour la résolution du niveau 1 sur le domaine espace-temps complet et la procédure permettant la résolution d'un niveau localisé à un instant *t*.

```
@RESOL Niv0*ENTIER ;
@RESNIV Niv0*ENTIER clt1*RIGIDITE Fex0*CHPOINT ;
```

La procédure *@PR_T* permet de réaliser le prolongement en temps de l'état thermodynamique et des prédicteurs sur le nouveau maillage. La procédure *@INTNIV* est utilisée afin d'initialiser le vecteur d'état sur un niveau en prolongeant le vecteur d'état calculé sur le niveau sous-jacent.

```
@PR_T Niv0*ENTIER i*ENTIER ;
@INTNIV Niv0*ENTIER ;
```

La procédures permettant de construire les maillages $\partial\mathcal{M}_F^k$, $\partial\mathcal{M}_U^k$ et $\partial\mathcal{M}_L^k$ sur un niveau localisé et celle permettant de construire les conditions limites associées sont respectivement décrites par les procédures suivantes :

```
mux muy mfd mli min mra = @CONSLIM Niv0 ;
clt1 Fex0 = @CLNIV mux muy mfd mra Niv0 ;
```

Enfin, la création d'un niveau par sous découpage hiérarchique est réalisé par la procédure :

```
@CRNIV Niv0*ENTIER ;
```

La procédure `@ASSEMBL` réalise l'assemblage des différents maillages \mathcal{M}_*^k et des vecteurs d'état associés à l'instant i une fois le calcul multigrille terminé.

```
@ASSEMBL i*ENTIER ;
```

Extrait des procédures de calcul

Les opérations de prolongation, le solveur multigrille, le calcul de l'erreur et la procédure de résolution sont décrites ci-dessous.

Procédures de prolongement

Les deux procédures de prolongement sont détaillée ici. La procédure `@PR_U` désigne le prolongement des quantités cinématiques. Celles-ci sont décrites sous Castem par un objet de type CHPOINT (champ par point). La procédure `@PR_C` fait référence à l'opérateur de transfert des quantités aux points de Gauss, décrites par un objet de type MCHAML (champ par élément).

Procédure `@PR_C` : Les paramètres d'entrée sont le champ à transférer, le type de champ (contraintes, variables internes, ...) et les objets de type modèle, associés aux maillage, permettant la description des nuages de point de Gauss sources et de destination. Les modèles `mod0` et `mod1` sont respectivement associés aux maillages fin et grossier.

```
DEBPROC @PR_C chp0*MCHAML NOM1*MOT mod0*MMODEL mod1*MMODEL ;
*
  chp0 = CHAN 'NOEUD' chp0 mod1 ;
  chp0 = PROI mod0 chp0 'STRESSES' mod1 ;
  chp0 = CHAN 'STRESSES' mod0 chp0 ;
  chp0 = CHAN 'TYPE' chp0 NOM1 ;
*
FINPROC chp0 ;
```

Le MCHAML, défini aux points de Gauss, est transféré aux noeuds du maillage grossier par l'opérateur CHAN(GER). La prolongation spatiale est réalisée par l'opérateur PROI. Enfin le champ est transféré aux points de Gauss du maillage de destination par l'opérateur CHAN.

Procédure @PR_U : Les opérations de prolongation s'appuient sur une fonction *TRUC* développée en langage esope sous Castem. Cette fonction permet de coder le projecteur *pr1* utilisé afin de transférer le champ *UM*. Le codage de ce projecteur étant relativement coûteux en terme CPU, celui-ci est construit puis stocké dans la table des projecteurs *par1* . '*pro1*' lorsqu'il est appelé plusieurs fois au sein de la procédure multigrille.

L'opération de prolongation s'appuie sur les objets *ds1*, *dp1* contenant les informations relatives aux maillages source *mai1* et sur l'objet *dp0*, relatif au maillage de destination *mai0*. L'appel de la fonction *TRUC* avec l'option '*proj*' permet de coder le projecteur sur le niveau *Niv0*.

Lorsque l'opération de transfert est utilisée pour le prolongement entre maillages incompatibles en temps, le paramètre *Niv0* indiquant le niveau est négatif et l'opérateur de transfert est systématiquement codé (appel unique).

L'opération de transfert proprement dite est réalisée par l'appel de l'opérateur *TRUC* avec l'option '*PUG*'. L'opérateur *TRUC* avec l'option '*matr*' permet de coder (entrée 0) ou de décoder (indice 1) le projecteur.

```
DEBPROC @PR_U Niv0*ENTIER UM*CHPOINT mai0*MAILLAGE mail*MAILLAGE ;
*
  dp1 = mail CHAN POI1 ;
  ds1 = TRUC 'chan' dp1 'SUPE' ;
  dp0 = mai0 CHAN POI1 ;
*
  SI (Niv0 < 0) ;
    pr1 ll ii = TRUC 'proj' Dp0 mail 1;
  SINON ;
    SI (EXIS (par1 . 'pro1') Niv0) ;
      pr1 = par1 . 'pro1' . Niv0 ;
    SINON ;
      pr1 ll ii = TRUC 'proj' Dp0 mail 1;
      par1 . 'pro1' . Niv0 = pr1 ;
    FINSI ;
  FINSI ;
*
  PUM = MANU CHPO dp0 3 UX 0. UY 0. UZ 0. 'NATURE' 'DIFFUS' ;
  UM = TRUC 'chpo' 'rang' dp1 (ENLE dpct LX) ;
*
  TRUC 'matr' 'comM' pr1 dp0 ds1 0 ;
  TRUC 'PUG' pr1 UM PUM ;
  TRUC 'matr' 'comM' pr1 dp0 ds1 1 ;
*
FINPROC PUM ;
```

NL-L-FMG

Le calcul multigrille non-linéaire localisé est réalisé par la procédure *FAS*. On ne s'intéresse pas ici à la description FMG du cycle multigrille qui est prise en compte de manière naturelle par notre algorithme au cours du processus de raffinement.

La table *TAN1* contient les informations issues du calcul au pas de temps précédent (prédicteurs et variables non-linéaires). Les tables *dep0*, *vit0*, *acc0*, *sig0* et *var0* correspondent aux déplacements, aux vitesses, aux accélérations, aux contraintes et aux variables internes sur le niveau (respectivement). Les paramètres *v0*, *v1* et *v2* conditionnent le nombre d'itérations non-linéaire au cours de chaque phase de relaxation. Le paramètre '*PREMITE*' de la table *par1* permet de paramétrer les quantités initiales considérées par le solveur de Newton durant la phase de pré-relaxation en fonction de l'itérée multigrilles (cf. section 3.2.3).

Le cycle multigrille est utilisé lorsque les non-linéarités évoluent sur le niveau le plus fin. Dans le cas où l'état de la grille fine reste inchangé, la solution convergée est obtenue en une itération du solveur de Newton. Le problème grossier est construit par la procédure *@CONSOL* décrite par la suite. La procédure *FAS* est appelée de manière récursive jusqu'au niveau 1. Les objets *sau.* permettent d'enregistrer le vecteur d'état pour l'utiliser comme état initial au cours de la post-relaxation.

```

DEBPROC FAS Niv0*ENTIER Nmx0*ENTIER ;
*
v0  = par1 . 'GRORELA'   ;
v1  = par1 . 'PRERELA'   ;
v2  = par1 . 'POSRELA'   ;
*
SI (NEG Niv0 0) ;
*
* PRERELAXATION
*
* Sur niveau maximum, la première relaxation est différente
*
SI (EGA Niv0 Nmx0) ;
SI (EGA (par1 . 'PREMITE') 1) ;
err0 res0 = RENL (fext . Niv0) v1 Niv0 Nmx0 (TAN1.Niv0.'SIGN')
              (TAN1.Niv0.'DFPN') (TAN1.Niv0.'VARN') (TAN1.Niv0.'DEPN');
par1 . 'PREMITE' = 0 ;
SINON ;
err0 res0 = RENL (fext . Niv0) v1 Niv0 Nmx0 (sig0 . Niv0)
              (dfp0 . Niv0) (var0 . Niv0) (dep0 . Niv0) ;
FINSI ;
SINON ;
*
* Sur les autres niveaux
*
err0 res0 = RENL (fext . Niv0) v1 Niv0 Nmx0 (sig0 . Niv0)
              (dfp0 . Niv0) (var0 . Niv0) (dep0 . Niv0) ;

```

```
      FINSI ;
*
* RESTRICTION ET RESOLUTION GROSSIERE SI L'ETAT EP N'A PAS EVOLUE
*
      SI (NEG (MAXI ((var0 . Nmx0) - (TAN1 . Nmx0 . 'VARN')))) 0.) ;
*
      Niv1 = Niv0 - 1 ;
      @CONSOL Niv1 i res0 ;
      err0 res0 = FAS Niv1 Nmx0 ;
*
      sau1 = COPI (sig0 . Niv0) ;
      sau3 = COPI (dfp0 . Niv0) ;
      sau2 = COPI (var0 . Niv0) ;
      sau4 = ENLE (COPI (dep0 . Niv0)) LX ;
*
* PROLONGEMENT DE LA CORRECTION
*
      dept = ENLE ((dep0 . Niv1) - (UG . Niv1)) LX ;
      PUM   = @PR_U dept (dall . Niv0) (dall . Niv1) ;
      dep0 . Niv0 = (ENLE (dep0 . Niv0) LX) + PUM ;
*
      err0 res0 = RENL (fext . Niv0) v2 Niv0 Nmx0 sau1 sau3 sau2 sau4 ;
      FINSI ;
*
* RESOLUTION SUR LE NIVEAU GROSSIER
*
      SINON ;
      err0 res0 = RENL (fext . Niv0) v0 Niv0 Nmx0 (sig0 . Niv0)
                    (dfp0 . Niv0) (var0 . Niv0) (dep0 . Niv0) ;
      FINSI ;
*
FINPROC err0 res0 ;
```

Sur un niveau multigrille, le problème auxiliaire est construit en fonction de la restriction du vecteur d'état de niveau supérieur (d'indice $Niv0$) sur le maillage $\partial\mathcal{M}_+^k$ (noté $mai1$ ci-dessous) et de la restriction du vecteur d'état sur le niveau courant sur le maillage $\partial\mathcal{M}_*^k$ (noté $mai0$ ci-dessous). Cette étape est réalisée par la procédure *@CONSOL*.

La table de filiation est utilisée afin de déterminer les éléments qui ont été sous-découpés. Si le maillage $\partial\mathcal{M}_+^k$ coïncide avec le maillage $\partial\mathcal{M}^k$, le vecteur d'état est obtenu par restriction directe. Le cas échéant il est construit par assemblage.

Les champs obtenus sont enregistrés dans les tables *UG*, *SG*, *DG* et *VG* qui permettent de calculer la correction dans la phase ascendante. Les forces externes du problème auxiliaire sur le niveau grossier sont construites en fonction du vecteur d'état ainsi construit et du résidu *res0* restreint depuis le niveau fin.

```

DEBPROC @CONSOL Niv1*ENTIER res0*CHPOINT;
*
NOM1 = par1 . 'ELEMENT'      ;
dt   = par1 . 'PASTPS'      ;
bet0 = par1 . 'BETA'        ;
chal = par1 . 'CHARGT'      ;
NOM2 = MOT ISOTROPE         ;
Niv0 = Niv1 + 1 ;
*
* _ _ _ _ _ Construction des maillage (non-)recouverts
*
j = 1 ; ii = 0 ; kk = 0 ;
REPE bcl1 (NBEL (dall . Niv1)) ;
  SI (EGA (fil0 . Niv1 . j . 'FILS') 0) ;
    SI (EGA ii 0) ; mail = (dall . Niv1) ELEM j ; ii = 1 ;
    SINON ; mail = mail ET ((dall . Niv1) ELEM j) ; FINSI ;
  SINON ;
    SI (EGA kk 0) ; mai0 = (dall . Niv1) ELEM j ; kk = 1 ;
    SINON ; mai0 = mai0 ET ((dall . Niv1) ELEM j) ; FINSI ;
  FINSI ;
  j = j + 1 ;
FIN bcl1 ;
*
* _ _ _ _ _ Si le niveau n est pas complètement recouvert
*
SI (NEG ii 0) ;
  mo00 = MODL mai0 MECANIQUE ELASTIQUE NOM2 PLASTIQUE NOM2 NOM1 ;
  mo01 = MODL mail MECANIQUE ELASTIQUE NOM2 PLASTIQUE NOM2 NOM1 ;
  mo0t = mo00 ET mo01 ;
*
de0m = REDU (dep0 . Niv0) mai0 ;
delm = REDU (dep0 . Niv1) mail ;
UG . Niv1 = REDU (de0m ET delm) (dall . Niv1) ;
*
si0m = @RE_C (sig0 . Niv0) 'CONTRAINTES' (modt . Niv0) mo00 ;
silm = REDU mail (sig0 . Niv1) ;
sitm = si0m ET silm ;
SG . Niv1 = @RE_C sitm 'CONTRAINTES' mo0t (modt . Niv1) ;
*
va0m = @RE_C (var0 . Niv0) 'VARIABLES INTERNES' (modt . Niv0) mo00 ;
valm = REDU mail (var0 . Niv1) ;
vatm = va0m ET valm ;
VG . Niv1 = @RE_C vatm 'VARIABLES INTERNES' mo0t (modt . Niv1) ;
*
df0m = @RE_C (dfp0 . Niv0) 'VARIABLES INTERNES' (modt . Niv0) mo00 ;
dflm = REDU mail (dfp0 . Niv1) ;

```

```

dftm = df0m ET dflm ;
DG . Niv1 = @RE_C dftm 'DEFORMATIONS INELASTIQUES'
                                modt (modt . Niv1) ;
*
SINON ;
*
UG . Niv1 = @RE_U (dep0 . Niv0) (dall . Niv0) (dall . Niv1) ;
VG . Niv1 = @RE_C (var0 . Niv0) 'VARIABLES INTERNES'
                                (modt . Niv0) (modt . Niv1) ;
SG . Niv1 = @RE_C (sig0 . Niv0) 'CONTRAINTES'
                                (modt . Niv0) (modt . Niv1) ;
DG . Niv1 = @RE_C (dfp0 . Niv0) 'DEFORMATIONS INELASTIQUES'
                                (modt . Niv0) (modt . Niv1) ;
*
FINSI ;
*
FM1 = @RE_F res0 (dall . Niv0) (dalr . Niv1) ;
Fext . Niv1 = FM1 + ((mas1 . Niv1) * ((1. / (bet0 * (dt ** 2))) * ((
    UG . Niv1) - (TAN1 . Niv1 . 'UP')))) + (BSIG (modt . Niv1) (SG .
    Niv1) (matt . Niv1)) ;
*
dep0 . Niv1 = UG . Niv1 ;
sig0 . Niv1 = SG . Niv1 ;
dfp0 . Niv1 = DG . Niv1 ;
var0 . Niv1 = VG . Niv1 ;
*
FINPROC ;

```

Calcul de l'erreur

Le calcul de l'erreur est réalisé sur le niveau *Niv0* en fonction des quantités sur ce même niveau et sur le niveau sous-jacent. Le paramètre *MOT1* permet de choisir l'indicateur d'erreur utilisé. On ne détaille ici que le calcul de l'erreur en énergie afin de synthétiser la présentation.

La table *par1* est une nouvelle fois utilisée afin d'obtenir les paramètres du modèle utilisé (type d'éléments, caractéristiques matériaux, ...). Les tables *vit1*, *dep1* et *sig1* contiennent les champs calculés sur le niveau grossier avant d'avoir corrigé l'état sur le niveau en fonction des quantités calculées sur le niveau fin.

L'opérateur *PSCA* réalise le produit scalaire. L'opérateur *ENER* calcule le produit tensoriel contracté d'un champ de contraintes avec un champ de déformations. On utilise ici l'incrément de déformations afin de tenir compte de l'histoire du chargement de la structure (plasticité).

La table *Sau0* comprend l'ensemble des données assemblées à chaque pas de temps. La table *Sau0.i* permet d'accéder aux vecteur d'état et au maillage à l'instant *i*. *Sau0.i.'WIN'* désigne l'énergie interne de la structure à l'instant t_i .

```

DEBPROC @ELONIV Niv0*ENTIER MOT1*MOT ;
*
max0 = par1 . 'MAX_CRIT'      ;
You0 = par1 . 'YOUNG'        ;
Cpo0 = par1 . 'POISSON'      ;
Mvo0 = par1 . 'MASSVOL'      ;
erdc = par1 . 'COURBE'       ;
NOM1 = par1 . 'ELEMENT'      ;
Niv1 = Niv0 - 1 ;
NOM2 = ISOTROPE ;
LM0 = MOTS UX UY ;
LM1 = MOTS FX FY ;
max8 = 0. ;
par1 . 'TES2' = 0. ;
SS = Sau0 . (i - 1) ;
Conver0 = 'VRAI' ;
*
SI (EGA MOT1 'T_ENE') ;
*
f0p0 = (mas1 . Niv0) * (vit1 . Niv0) ;
V0   = 0.5 * (PSCA a0p0 f0p0 (MOTS UX UY) (MOTS FX FY)) ;
V0   = CHAN CHAM V0 (modt . Niv0) 'STRESSES' ;
V0   = @RE_C V0 (modt . Niv0) (modt . Niv1) 'SCALAIRE' ;
f0p1 = (mas1 . Niv1) * (vit1 . Niv1) ;
V1   = 0.5 * (PSCA a0p1 f0p1 (MOTS UX UY) (MOTS FX FY)) ;
V1   = CHAN CHAM V1 (modt . Niv1) 'STRESSES' ;
*
eps0 = EPSI (modt . Niv0) (dep0 . Niv0) (matt . Niv0) ;
eps1 = EPSI (modt . Niv1) (dep0 . Niv1) (matt . Niv1) ;
T0   = EPSI (SS . 'MOD') (SS . 'DEP') (SS . 'MAT') ;
e0pc = @RE_C T0 (SS . 'MOD') (modt . Niv0) 'DEFORMATIONS' ;
e1pc = @RE_C T0 (SS . 'MOD') (modt . Niv1) 'DEFORMATIONS' ;
e0p0 = eps0 - e0pc ;
e0p1 = eps1 - e1pc ;
*
T0 = 0.5 * (ENER (modt . Niv0) e0p0 (sig0 . Niv0)) ;
inc0 = @RE_C (SS . 'WIN') (SS . 'MOD') (modt . Niv0) 'SCAL' ;
T0 = T0 + inc0 ;
T0 = @RE_C T0 (modt . Niv0) (modt . Niv1) 'SCALAIRE' ;
T1 = 0.5 * (ENER (modt . Niv1) e0p1 (sig0 . Niv1)) ;
incl = @RE_C (SS . 'WIN') (SS . 'MOD') (modt . Niv1) 'SCAL' ;
T1 = incl + T1 ;
*
j = 1 ;
REPE bcl3 (NBEL (dall . Niv1)) ;
ff = fil0 . Niv1 . j ;

```

```
SI (NEG (ff . 'FILS') 0) ;
  geol = (dall . Niv1) ELEM j ;
  modl = MODL geol MECANIQUE ELASTIQUE NOM2 PLASTIQUE NOM2 NOM1 ;
  matl = MATE modl YOUN You0 NU Cpo0 RHO Mvo0 TRAC erdc ;
*
  e0 = INTG modl (REDU T0 geol) ;
  e1 = INTG modl (REDU T1 geol) ;
  ec1 = INTG modl (REDU V1 geol) ;
  ec0 = INTG modl (REDU V0 geol) ;
  et0 = (e0 + ec0) ;
  et1 = (e1 + ec1) ;
  err1 = (MAXI (PROG (ABS (et0 - et1)) (ABS (et0 - et1))
                (ABS (et0 - et1)))) / max0 ;
  err1 = err1 ** 0.5 ;
*
  e0 = ABS (REDU ((T0 + V0) - (T1 + V1)) geol) ;
  err1 = (INTG modl e0) ** 0.5 ;
  err1 = err1 / max0 ;
*
  SI (err1 > parl . 'ERRCONS') ; ff . 'ERREUR' = 1 ;
    Conver0 = 'FAUX' ;
  SINON ; ff . 'ERREUR' = 0 ; FINSI ;
SINON ;
  ff . 'ERREUR' = 2 ;
FINSI ;
*
  j = j + 1 ;
  FIN bcl3 ;
FINSI ;
*
FINPROC conver0 ;
```

L'erreur est calculée pour chaque élément de niveau ($Niv0 - 1$) possédant des éléments enfants. Si une erreur trop importante est détectée, la table de filiation enregistre que l'élément j va posséder des petits enfants ($fil0.(Niv0 - 1).j.ERREUR = 1$), le cas échéant les éléments enfants de l'éléments j sont suffisamment fin ($fil0.(Niv0 - 1).j.ERREUR = 0$), enfin, si l'élément ne possède pas d'enfants, l'erreur n'est pas calculée ($fil0.(Niv0 - 1).j.ERREUR = 2$).

La sortie *conver0* signale si aucune erreur n'a été détectée. Dans ce cas, le processus de raffinement de maillage est terminé à l'instant considéré.

Processus de calcul

Cette dernière section présente le processus de calcul. Pour mieux comprendre son principe de fonctionnement, on pourra se référer à l'algorithme présenté figure 3.17. On rappelle que la stratégie est initialisée par le calcul sur deux niveaux globaux en espace.

```

* Construction du niveau 0
*
  lro0 = @CONS0 a0 r0 0 TYP0 ;
  @COFIL0 lro0 a0 ;
*
* construction du niveau 1
*
  @DECOUP 0 ;
*
* Calcul sur le niveau espace temps 0
*
  @RESOL 0 ;
*
*-----
*           BOUCLE SUR LES PAS DE TEMPS ETT RAFFINEMENT AUTOMATIQUE
*-----
*
i = 0 ; t = 0. ;
*
REPE bcl0 26 ;
*
  par1 . 'PIKETPS' = i ;
*
* Problème de niveau 0
*-----
*
  @PR_T 0 i ;
  @INTNIV 0 ;
*
  mux0 muy0 mfd0 mli0 min0 mra0 = @CONSLIM 0 ;
  clt0 Fex0 = @CLNIV mux0 muy0 mfd0 mra0 0;
  Meq0 . 0 = (((mas1 . 0) ET (bet1 * (rig1 . 0))) / bet1) ET clt0 ;
*
  par1 . 'CPTEITE' = 0 ;
  err0 res0 = RENL Fex0 (par1 . 'MAXITE') 0 0 (TAN1 . 0 . 'SIGN')
            (TAN1 . 0 . 'DFPN') (TAN1 . 0 . 'VARN') (TAN1 . 0 . 'DEPN') ;
*
  @SAUNI 0 ;
*
* Probleme de niveau 1
*-----
*
  @PR_T 1 i ;
  @INTNIV 1 ;
*
  mux0 muy0 mfd0 mli0 min0 mra0 = @CONSLIM 1 ;

```

```
clt0 Fex0 = @CLNIV mux0 muy0 mfd0 mra0 1 ;
Meq0 . 1 = (((mas1 . 1) ET (bet1 * (rig1 . 1))) / bet1) ET clt0 ;
*
par1 . 'CPTEITE' = 0 ;
err0 res0 = FAS 1 1 ;
*
@SAUNI 1 ;
*
* Calcul de l erreur et raffinement
*-----
*
conver0 = @ELONIV 1 MOTT ;
Niv0 = 2 ;
SI (NEG conver0 'VRAI') ;
  REPE bcl1 (par1 . 'NMX') ;
*
  @CRNIV Niv0 i ;
*
  @PR_T Niv0 i ;
  @INTNIV Niv0 ;
*
  lux luy lfd lli lint lra = @CONSLIM Niv0 ;
  clt1 Fex0 = @CLNIV lux luy lfd lra Niv0 ;
*
  par1 . 'CPTEITE' = 0 ;
  @RESNIV Niv0 clt1 Fex0 ;
*
  con0 = @ELONIV Niv0 MOTT ;
  SI (EGA con0 'VRAI') ;    QUIT bcl1 ;    FINSI ;
  Niv0 = Niv0 + 1 ;
  FIN bcl1 ;
  MESS '_____CV niveau' Niv0 ;
FINSI ;
*
@ASSEMBL i ;
@MENAGE ;
*
i = i + 1 ;
t = t + dt ;
FIN bcl0 ;
*
OPTI DONN 'Post.dgibi' ;
*
```

Bibliographie

- [ABA 04] ABAQUS
. « Time integration accuracy in transient problems, Section 8.3.4 of the ABAQUS Analysis User's Manual 6.5.1 ». <http://129.25.16.135:2080/v6.5/books/usb/default.htm>, 2004.
- [ABE 04] ABEDI R., CHUNG S., ERICKSON J., FAN Y., GARLAND M., GUOY D., HABER R., SULLIVAN J., THITE S., ZHOU Y.
Spacetime meshing with adaptive refinement and coarsening. *Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry* ACM New York, NY, USA, 2004, p. 300–309.
- [ABE 06] ABEDI R., HABER R., THITE S., ERICKSON J.
An h-adaptive spacetime-discontinuous galerkin method for linearized elastodynamics. *Revue européenne des éléments finis*, vol. 15, n° 6, 2006, p. 619–642, Lavoisier.
- [ADA 00a] ADAMS M., TAYLOR R.
Parallel multigrid solvers for 3D-unstructured large deformation elasticity and plasticity finite element problems. *Finite Elements in Analysis & Design*, vol. 36, n° 3-4, 2000, p. 197–214, Elsevier.
- [ADA 00b] ADAMS M.
Parallel multigrid solvers for 3D unstructured finite element problems in large deformation elasticity and plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, n° 8, 2000, p. 1241–1262, Wiley.
- [ADA 02] ADAMS M.
Evaluation of three unstructured multigrid methods on 3D finite element problems in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 55, n° 5, 2002, p. 519–534, Wiley.
- [AIN 97] AINSWORTH M., ODEN J.
A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 142, n° 1-2, 1997, p. 1–88, Elsevier.
- [BAB 78] BABUSKA I., RHEINBOLDT W.
A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, n° 10, 1978, p. 1597–1615, Wiley.

- [BAB 81] BABUSKA I., SZABO B., KATZ I.
The p-version of the finite element method. *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 18, n° 3, 1981, p. 515–545, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [BAB 82] BABUSKA I., RHEINBOLDT W.
Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 34, n° 1-3, 1982, p. 895–937, Elsevier.
- [BAB 90] BABUŠKA I., SURI M.
The p-and hp versions of the finite element method. An overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 80, n° 1-3, 1990, p. 5–26, Elsevier.
- [BAB 92] BABUSKA I., PLANK L., RODRIGUEZ R.
Quality assessment of the a-posteriori error estimation in finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 11, n° 4, 1992, p. 285–306, Elsevier.
- [BAB 94] BABUSKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C., GANGARAJ S., COPPS K.
Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n° 7, 1994, p. 1073–1124, Wiley.
- [BAS 83] BASU P., PEANO A.
Adaptivity in p-version finite element analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 109, n° 10, 1983, p. 2310–2324, ASCE.
- [BAŞ 00] BAŞAR Y., WEICHERT D.
Nonlinear continuum mechanics of solids : fundamental mathematical and physical concepts. Springer Verlag, 2000.
- [BAT 92] BATOZ J., DHATT G.
Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques. Presses Université Laval, 1992.
- [BEL 78] BELYTSCHKO T., MULLEN R.
Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, n° 10, 1978, p. 1575–1586, Wiley.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W., MORAN B.
Nonlinear finite elements for continua and structures. Wiley, 2000.
- [BES 01] BESSON J., CAILLETAUD G., CHABOCHE J., FOREST S.
Mécanique non linéaire des matériaux. Hermès, 2001.
- [BIO 09] BIOTTEAU E., GRAVOUIL A., LUBRECHT A., COMBESCURE A.
Méthode multigrille dédiée à la dynamique transitoire non-linéaire. *Proceedings of 9^eme Colloque National en Calcul des Structures*, vol. 1, 2009, p. 683–688.
- [BIO 10a] BIOTTEAU E., GRAVOUIL A., LUBRECHT A., COMBESCURE A.
Automatic refinement and efficient solver for non linear dynamic structural problems. *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 1–3, 2010, p. 141–152, Lavoisier.

-
- [BIO 10b] BIOTTEAU E., GRAVOUIL A., LUBRECHT A., COMBESURE A.
Multigrid solver with automatic mesh refinement for transient elastoplastic dynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2010, Wiley. (disponible en ligne).
- [BOR 99] BORROOMAND B., ZIENKIEWICZ O.
Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II : Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 176, n° 1-4, 1999, p. 127–146, Elsevier.
- [BRA 77] BRANDT A.
Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, vol. 31, 1977, p. 333–390, American Mathematical Society.
- [BRA 08] BRANCHERIE D., VILLON P., IBRAHIMBEGOVIC A.
On a consistent field transfer in non linear inelastic analysis and ultimate load computation. *Computational Mechanics*, vol. 42, n° 2, 2008, p. 213–226, Springer.
- [BRI 00] BRIGGS W., MCCORMICK S.
A multigrid tutorial. Society for Industrial Mathematics, 2000.
- [BUS 09] BUSSETTA P., MARCEAU D., PONTHOT J.
Résolution du problème de contact mécanique frottant : méthode du lagrangien augmenté adapté. *Proceedings of 9^e Colloque National en Calcul des Structures*, vol. 2, 2009, p. 653–658.
- [BUS 10] BUSSETTA P., MARCEAU D., PONTHOT J.
A new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem : the Adapted Augmented Lagrangian Method. *Computational Mechanics*, , 2010. (accepted for publication).
- [CAS 09] CASADEI F., HALLEUX J.
Binary spatial partitioning of the central-difference time integration scheme for explicit fast transient dynamics. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, n° 12, 2009, page 1436–1473.
- [CAV 05a] CAVIN P., GRAVOUIL A., LUBRECHT A., COMBESURE A.
7^{ème} colloque national en calcul des structures. *Etude de la stabilité d'une méthode à raffinement espace-temps automatique (STARmethod)*, 2005.
- [CAV 05b] CAVIN P., GRAVOUIL A., LUBRECHT A., COMBESURE A.
Automatic energy conserving space-time refinement for linear dynamic structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n° 3, 2005, p. 304–321, Wiley.
- [CAV 05c] CAVIN P., GRAVOUIL A., LUBRECHT A., COMBESURE A.
Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis & Design*, vol. 41, n° 11-12, 2005, p. 1043–1055, Elsevier.
-

- [CAV 06] CAVIN P.
Méthode éléments finis avec raffinement spatial et temporel adaptatif et automatique. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [COM 02] COMBESURE A., GRAVOUIL A.
A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, n° 11, 2002, p. 1129–1157, Elsevier.
- [CRA 89] CRAIG A., AINSWORTH M., ZHU J., ZIENKIEWICZ O.
h andh-p version error estimation and adaptive procedures from theory to practice. *Engineering with Computers*, vol. 5, n° 3, 1989, p. 221–234, Springer.
- [DER 92] DE ROECK Y., LE TALLEC P., VIDRASCU M.
A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 99, n° 2-3, 1992, p. 187–207, Elsevier.
- [DUR 06] DUREISSEIX D., BAVESTRELLO H.
Information transfer between incompatible finite element meshes : application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 44-47, 2006, p. 6523–6541, Elsevier.
- [DUT 02] DUTTA A.
Adaptive finite element analysis of structures subjected to transient dynamic loads using time marching scheme. *Computers and Structures*, vol. 80, n° 27-30, 2002, p. 2313–2319, Elsevier.
- [EKE 04] EKEVID T., KETIL P., N.E. W.
Adaptive multigrid for finite element computations in plasticity. *Computers and Structures*, vol. 82, n° 28, 2004, p. 2413–2424, Elsevier.
- [ELG 06] ELGUEDJ T.
Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par la méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact-frottement. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- [ERI 05] ERICKSON J., GUOY D., SULLIVAN J., UNGOR A.
Building spacetime meshes over arbitrary spatial domains. *Engineering with Computers*, vol. 20, n° 4, 2005, p. 342–353, Springer.
- [FAR 91] FARHAT C., ROUX F.
A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 6, 1991, p. 1205–1227, Wiley.
- [FAR 98] FARHAT C., MANDEL J.
The two-level FETI method for static and dynamic plate problems Part I : An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 155, n° 1-2, 1998, p. 129–151, Elsevier.

- [FIS 92] FISH J.
The s-version of the finite element method. *Computers and Structures*, vol. 43, n° 3, 1992, p. 539–547, Elsevier.
- [FIS 95] FISH J., PANDHEERADI M., BELSKY V.
An efficient multilevel solution scheme for large scale non-linear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, n° 10, 1995, p. 1597–1610, Chichester, New York, Wiley.
- [FOU 08] FOUCAULT G., CUILLIÈRE J.-C., FRANÇOIS V., LÉON J.-C., MARANZANA R.
Adaptation of CAD model topology for finite element analysis. *Computer-Aided Design*, vol. 40, n° 2, 2008, p. 176 - 196, Elsevier.
- [GEO 04] GEORGE P., BOROUCHAKI H., FREY P. J., LAUG P., E. S.
Mesh Generation and Mesh Adaptivity. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 1, 2004, p. 497–524, E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes (Eds).
- [GÉR 97a] GÉRADIN M., RIXEN D.
Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures. Masson, 1997.
- [GER 97b] GERMAIN P.
Introduction à la mécanique des milieux continus, 2nd édition. Masson, 1997.
- [GLO 90] GLOWINSKI R., LE TALLEC P.
Augmented Lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method. *3rd international symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* SIAM, 1990, p. 224–231.
- [GRA 00] GRAVOUIL A.
Methode multi-echelle en temps et en espace avec decomposition de domaines pour la dynamique non-lineaire des structures. rapport de these. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2000.
- [GRA 01] GRAVOUIL A., COMBESURE A.
Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n° 1, 2001, p. 199–225, Wiley.
- [GRA 03] GRAVOUIL A., COMBESURE A.
Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, n° 10, 2003, p. 1545–1569, Wiley.
- [HAC 04] HACKBUSCH W.
Multigrid methods for FEM and BEM applications. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 1, 2004, p. 577–596, E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes (Eds).
- [HEN 03] HENSON V.
Multigrid methods nonlinear problems : an overview. *Proceedings of SPIE*, vol. 5016, 2003, p. 36–48, C. A. Bouman and R. L. Stevenson, eds.

- [HIB 79] HIBBITT H., KARLSSON B.
Analysis of pipe whip. *Pressure Vessel and Piping Conference, San Francisco* ASME, 1979, p. 25–29.
- [HIL 77] HILBER H., HUGHES T., TAYLOR R.
Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 5, n° 3, 1977, p. 283–292, Wiley.
- [HUE 99] HUERTA A., RODRÍGUEZ-FERRAN A., DIEZ P., SARRATE J.
Adaptive finite element strategies based on error assessment. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 46, n° 10, 1999, p. 1803–1818, Wiley.
- [HUE 00] HUERTA A., DIEZ P.
Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181, n° 1-3, 2000, p. 21–41, Elsevier.
- [HUG 77] HUGHES T.
A note on the stability of Newmark’s algorithm in nonlinear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, n° 2, 1977, p. 383–386, Wiley.
- [HUG 78] HUGHES T., LIU W.
Implicit-explicit finite elements in transient analysis. I- Stability theory. II- Implementation and numerical examples. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, 1978, p. 371–378, ASME.
- [HUG 95] HUGHES T., BELYTSCHKO T.
Nonlinear finite element analysis. ICE Division, Zace Services Ltd, 1995.
- [HUL 95] HULBERT G., JANG I.
Automatic time step control algorithms for structural dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 126, n° 1-2, 1995, p. 155–178, Elsevier.
- [HUL 04] HULBERT M.
Computational Structural Dynamics. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 2, 2004, p. 169–193, E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes (Eds).
- [KAC 93] KACOU S., PARSONS I.
A parallel multigrid method for history-dependent elastoplasticity computations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 108, n° 1-2, 1993, p. 1–21, Elsevier.
- [KRE 06] KRENK S.
Energy conservation in Newmark based time integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n° 44-47, 2006, p. 6110–6124, Elsevier.
- [KRE 07] KRENK S.
Energy conservation and high-frequency damping in numerical time integration. *Com-*

-
- putational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, , 2007, page 12.
- [KUO 06] KUO Y., CLEGHORN W., BEHDINAN K., FENTON R.
The h-p-r-refinement finite element analysis of a planar high-speed four-bar mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, n° 5, 2006, p. 505–524, Elsevier.
- [LAD 75] LADEVEZE P.
Comparaison de modeles de milieux continus. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1975.
- [LAD 85] LADEVÈZE J.
Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaine. *Actes du Colloque Tendances Actuelles en Calcul des Structures*, 1985, p. 6–8.
- [LAD 86] LADEVEZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.
. « Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis ». In : I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago and E.R. Oliveira, Editors, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, 1986.
- [LAD 96] LADEVÈZE P.
Mécanique non-linéaire des structures - Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales. Hermes, 1996.
- [LAD 98] LADEVÈZE P., ODEN J.
Advances in adaptive computational methods in mechanics. Elsevier, 1998.
- [LAD 99] LADEVÈZE P., MOES N., DOUCHIN B.
Constitutive relation error estimators for (visco) plastic finite element analysis with softening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, n° 1-4, 1999, p. 247–264, Elsevier.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., PELLE J.
La maîtrise du calcul en mécanique lineaire et non lineaire. Hermes, 2001.
- [LAD 03] LADEVÈZE P., PELLE J.
Estimation of discretization errors in dynamics. *Computers and Structures*, vol. 81, n° 12, 2003, p. 1133–1148, Elsevier.
- [LAD 09] LADEVÈZE P., NÉRON D., PASSIEUX J.-C.
On multiscale computational mechanics with time-space homogenization. Oxford University Press, 2009.
- [LAU 03] LAURSEN T.
Computational contact and impact mechanics. Springer, 2003.
- [LEB 03] LEBLOND J.
Mécanique de la rupture fragile et ductile. Hermes, 2003.
- [LEE 94] LEE N., BATHE K.
Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 16, n° 2, 1994, p. 99–139, Elsevier.
-

- [LEM 88] LEMAITRE J., CHABOCHE J.
Mécanique des Matériaux Solides (2nd éd.). Dunod, 1988.
- [LI 96] LI X., WIBERG N.
Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, n° 12, 1996, p. 2131–2152, Wiley.
- [LIU 82] LIU W., BELYTSCHKO T.
Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis. *Computers & Structures*, vol. 15, n° 4, 1982, p. 445–450, Elsevier.
- [MAH 09] MAHJOUBI N., GRAVOUIL A., COMBESURE A.
Coupling subdomains with heterogeneous time integrators and incompatible time steps. *Computational Mechanics*, vol. 44, n° 6, 2009, p. 825–843, Springer.
- [MEU 08] MEUER H.
The TOP500 project : Looking back over 15 years of supercomputing experience. *Informatik-Spektrum*, vol. 31, n° 3, 2008, p. 203–222, Springer.
- [MIL 92] MILLARD A.
. « Castem 2000, Guide de développement ». Rapport DEMA, 1992.
- [MOO 98] MOORE G. et al.
Cramming more components onto integrated circuits. *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, n° 1, 1998, p. 82–85, Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- [NEU 01] NEUMANN J., SCHWEIZERHOF K.
Analysis of shell structures under transient loading using adaptivity in time and space. *Computers and Structures*, vol. 79, n° 22-25, 2001, p. 2117–2131, Elsevier.
- [NEW 59] NEWMARK N.
A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, n° 67-94, 1959, page 100, ASCE.
- [NOE 02] NOELS L., STAINIER L., PONTHOT J., BONINI J.
Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of non-linear dynamics. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, n° 7-10, 2002, p. 589–603, Elsevier.
- [PAP 86] PAPADRAKAKIS M., GHIONIS P.
Conjugate gradient algorithms in nonlinear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, n° 1, 1986, p. 11–28, Elsevier.
- [PAP 89] PAPADRAKAKIS M., GANTES C.
Preconditioned conjugate-and secant-Newton methods for non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, n° 6, 1989, p. 1299–1316, Wiley.
- [PAR 90a] PARSONS I., HALL J.
The multigrid method in solid mechanics : part I-algorithm description and behaviour.

-
- International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, n° 4, 1990, p. 719–737, Wiley.
- [PAR 90b] PARSONS I., HALL J.
The multigrid method in solid mechanics : Part II-Practical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, n° 4, 1990, p. 739–753, Wiley.
- [PER 96] PERIC D., HOCHARD C., DUTKO M., OWEN D.
Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 137, n° 3, 1996, p. 331–344, Elsevier.
- [PRA 04] PRAKASH A., HJELMSTAD K.
A FETI-based multi-time-step coupling method for Newmark schemes in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n° 13, 2004, p. 2183–2204, Wiley.
- [RAN 08] RANNOU J.
Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2008.
- [RAS 09] RASSINEUX A., BREITKOPF P., VILLON P.
Maillage et adaptation par décomposition en domaines quasi-développables. *Proceedings of 9^{eme} Colloque National en Calcul des Structures*, vol. 1, 2009, p. 369–374.
- [REY 08] REY B., MOCELLIN K., FOURMENT L.
A node-nested Galerkin multigrid method for metal forging simulation. *Computing and Visualization in Science*, vol. 11, n° 1, 2008, p. 17–25, Springer.
- [RIC 71] RICE J.
Inelastic Constitutive Relations for Solids : An Internal Variable Theory and Its Application to Metal Plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 19, n° 6, 1971, p. 433–455, Elsevier.
- [RIS 00] RISLER F., REY C.
Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, vol. 23, n° 1, 2000, p. 1–30, Springer.
- [ROU 90] ROUX F.
Méthodes de résolution par sous-domaines en statique. *La recherche Aérospatiale*, vol. 1, 1990, p. 37–48, Office national d'études et de recherches aérospatiales.
- [RUG 87] RUGE J., STUBEN K.
Algebraic multigrid. *Multigrid methods*, , 1987, SIAM, Philadelphia, PA.
- [SAA 03] SAAD Y.
Iterative methods for sparse linear systems. Society for Industrial Mathematics, 2003.
- [SHA 78] SHANNO D.
Conjugate gradient methods with inexact searches. *Mathematics of Operations Research*, vol. 3, n° 3, 1978, p. 244–256, Informs.
-

- [SHA 95] SHAIUROV V., XU J.
Multigrid methods for finite elements. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [SIM 86] SIMO J., TAYLOR R.
A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, n° 3, 1986, p. 649–670, Wiley.
- [SIM 91] SIMO J., WONG K.
Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, n° 1, 1991, p. 19–52, Wiley.
- [SIM 92] SIMO J., LAURSEN T.
An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, vol. 42, n° 1, 1992, p. 97–116, Elsevier.
- [SIM 00] SIMO J., HUGHES T.
Computational inelasticity. Springer, 2000.
- [SZA 91] SZABÓ B., BABUŠKA I.
Finite element analysis. Wiley, 1991.
- [THI 09] THITE S.
Adaptive spacetime meshing for discontinuous Galerkin methods. *Computational Geometry : Theory and Applications*, vol. 42, n° 1, 2009, p. 20–44, Elsevier.
- [TIE 06] TIE B., AUBRY D.
Adaptive time discontinuous Galerkin method for numerical modelling of wave propagation in shell and 3D structures. *Revue européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, n° 06, 2006, p. 729–757, Hermes.
- [TRO 01] TROTTENBERT U., OOSTERLEE C., SCHULLER A.
Multigrid. Academic press, 2001.
- [VEN 00] VENNER C., LUBRECHT A.
Multilevel methods in lubrication. Elsevier, 2000.
- [VER 88] VERPEAUX P., CHARRAS T., MILLARD A.
. « CASTEM 2000 : une approche moderne du calcul des structures ». Calcul des structures et intelligence artificielle, 1988.
- [VER 03] VERPEAUX P., CHARRAS T.
6ème colloque national en calcul des structures. *Dynamique du solide : modification du schéma de Newmark aux cas non-linéaires*, 2003.
- [VIL 02] VILLON P., BOROUCHEKI H., SAANOUNI K.
Transfert de champs plastiquement admissibles. *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 330, n° 5, 2002, p. 313–318, Elsevier.
- [WIB 93] WIBERG N., LI X.
A post-processing technique and an a posteriori error estimate for the Newmark method in dynamic analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 22, 1993, p. 465–465, Wiley.

- [WRI 98] WRIGGERS P., SCHERF O.
Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems. *Mathematical and computer modelling*, vol. 28, n° 4-8, 1998, p. 437–447, Elsevier.
- [WRI 06] WRIGGERS P.
Computational contact mechanics. Springer, 2006.
- [YUE 05] YUE Z., ROBBINS D.
Adaptive superposition of finite element meshes in elastodynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, n° 11, 2005, p. 1604–1635, Wiley.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O., ZHU J.
A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, n° 2, 1987, p. 337–357, Wiley.
- [ZIE 89] ZIENKIEWICZ O., ZHU J., GONG N.
Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, n° 3, 1989, p. 879–891, Wiley.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O., XIE Y.
A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 20, 1991, p. 871–887.
- [ZIE 92a] ZIENKIEWICZ O., ZHU J.
The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n° 7, 1992, p. 1331–1364, Wiley.
- [ZIE 92b] ZIENKIEWICZ O., ZHU J.
The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n° 7, 1992, p. 1365–1382, Wiley.
- [ZIE 05] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R.
The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-Heinemann, 2005.

NOM : Biotteau

DATE de SOUTENANCE : 29 septembre 2010

Prénoms : Ewen, Bastien, Clément

TITRE : Méthode multigrille de raffinement automatique en espace à précision contrôlée pour la dynamique transitoire non linéaire

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2010 ISAL 0079

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Cette thèse propose une stratégie de calcul éléments finis permettant de réduire la durée des simulations éléments finis non-linéaires faisant intervenir des maillages de dimensions importantes. Outre la stratégie multigrille non-linéaire développée dans ce mémoire pour améliorer la vitesse de convergence du solveur itératif non-linéaire, on propose d'adapter le maillage de manière automatique afin de satisfaire une précision requise par l'utilisateur.

Plus précisément, l'erreur de discrétisation est évaluée au moyen d'un indicateur d'erreur dédié à notre stratégie multigrille de calcul. Une stratégie de raffinement automatique est alors mise en place de manière à raffiner hiérarchiquement le maillage éléments finis dans les zones où le calcul est trop imprécis. Un solveur multigrille localisé, dédié à la gestion des non-linéarités, est alors utilisé afin de déterminer la solution sur ce nouveau maillage. En appliquant cette stratégie de manière récursive, le maillage éléments finis quasi-optimal est construit de manière automatique à moindre coût. Qui plus est, le maillage étant remis en cause à chaque pas de temps, aucune stratégie de déraffinement n'est nécessaire ce qui permet de simplifier le transfert des informations entre les pas de temps.

Cette stratégie permet de contrôler et de maîtriser la précision du calcul élément fini tout en réduisant de manière importante les temps de calcul. L'effort de calcul est concentré dans les zones les plus sollicitées de la structure à chaque instant. Des exemples académiques permettant de valider le comportement de notre stratégie sont disponibles dans la dernière partie de ce manuscrit.

MOTS-CLÉS : Éléments finis, plasticité, dynamique, multigrille, adaptation de maillage, indicateurs d'erreur

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides
UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Monsieur le Professeur Ton Lubrecht

Président du jury : LEBON Frédéric

Composition du jury : PONTHOT Jean-Philippe
BOUCARD Pierre-Alain
LEBON Frédéric
LUBRECHT Ton

VILLON Pierre
CARTRAUD Patrice
TIE Bing
GRAVOUIL Anthony