

THÈSE

Analyse et simulation du phénomène de perte de pales généralisée sur un turbomoteur d'hélicoptère

sera présentée et soutenue publiquement devant
l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir
le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par
Mathieu Herran
Ingénieur de l'INSA de Toulouse

Soutenance prévue pour le 16 février 2010 devant la Commission d'examen provisoire

Jury

PIERRE-ALAIN BOUCARD	Professeur	Rapporteur
PATRICE CARTRAUD	Professeur	Examineur
HERVÉ CHALONS	Ingénieur	Examineur
ALAIN COMBESCURE	Professeur	Examineur
DANIEL NÉLIAS	Professeur	Directeur de thèse
ROLAND ORTIZ	Ingénieur	Examineur
ALEXIS RUSINEK	Professeur	Rapporteur
ARNAUD SUFFIS	Ingénieur	Examineur

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://ww2.ibcp.fr/ediss M. Didier REVEL Secrétariat : Safia Boudjema Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : C. DAYEYAN	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://edml.ec-lyon.fr M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.ec-lyon.fr M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Résumé

Dans les turbomoteurs, le déclenchement de la protection mécanique contre les survitesses d'un rotor par "Blade Shedding" conduit à des chargements mécaniques intenses sur la structure. En effet, cette protection est basée sur le départ de l'ensemble des pales de ce rotor. Grâce à l'amélioration des moyens de simulation, la prédiction du comportement de la structure devient accessible autant dans ses déformations irréversibles que dans sa réponse vibratoire. Néanmoins, les méthodes de modélisation doivent évoluer pour atteindre ce but. Dans ce contexte, à la frontière des cadres universitaires et industriels, l'objectif de ce travail de recherche est de proposer une méthodologie et des outils capables de simuler le départ généralisé de pales au sein du moteur. Au cours de cette thèse, des essais de cette protection sont tout d'abord analysés et fournissent des données quantitatives et qualitatives aussi bien sur le scénario que sur la sollicitation exercée sur le moteur. Ces informations permettent ainsi d'orienter la modélisation des rotors soit vers des approches de dynamique rotor de ligne d'arbre en transitoire, soit vers des approches volumiques pour simuler le départ des pales. De façon complémentaire, on utilise la réduction par synthèse modale pour représenter les carters, et on propose une approche originale de réduction dans le domaine des moyennes fréquences. Par ailleurs, le caractère extrêmement bref et non linéaire ainsi que la nécessité de prendre en compte de nombreux contacts orientent les travaux vers la méthode des éléments finis résolue par un schéma d'intégration explicite. Dans un premier temps, les résultats obtenus permettent d'appréhender la séquence de départ des pales qui n'a, à ce jour, pas pu être observé expérimentalement. Dans un second temps, les modèles fournissent des estimations du chargement au niveau de la liaison moteur-hélicoptère. Enfin, on ébauche les axes de développements pour une modélisation satisfaisante du "Blade Shedding".

MOTS CLÉS: Overspeed protection, Blade Out, Rotordynamics, System impedance, Model reduction, Component mode synthesis, Newmark algorithm, Central difference scheme, Johnson-Cook elasto-visco-plastic law, Plastic strain criteria, Triaxiality, Perforation

Abstract

On Turbomeca's free turbine helicopter engines, the "Blade Shedding" mechanical overspeed protection leads to intense mechanical loads on the structure. Indeed, this protection is based on the rupture of the free turbine rotor blades. With the improvement of simulation capabilities, predicting the behaviour of the whole structure of the engine becomes accessible both in its irreversible deformation and in the vibratory response. Nevertheless, the modeling methods must evolve to meet this goal. In this context, at the border of industrial and academic areas, the objective of this research is to propose a methodology and the tools able to simulate the start of the released blades within the engine. During this thesis, this protection tests are first analyzed and provide quantitative and qualitative datas on both the scenario and the transient loads on the engine. This information can thus guide the modeling of the mechanical system to light models or heavier 3D models. Additionally, the reduction by modal synthesis is proposed to represent the elastic parts of the system and a novel approach is defined to reduce the system in a defined frequency range. Moreover, the extremely brief and non linear character of the phenomenon and the need to take into account many contacts guide the work towards the finite element method resolved by the central difference scheme. Initially, the results allow understanding the sequence of released of the blades which has so far not been observed experimentally on an engine. In a second step, the models provide estimates of the load at the engine-helicopter airframe interface. Finally, we outline the main developments that would be required for a satisfactory modeling of the "Blade Shedding" protection.

KEYWORDS: Overspeed protection, Blade Out, Rotordynamics, System impedance, Model reduction, Component mode synthesis, Newmark algorithm, Central difference scheme, Johnson-Cook elasto-visco-plastic law, Plastic strain criteria, Triaxiality, Perforation

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction générale	1
1 Méthodes numériques de modélisation des systèmes linéaires	9
1.1 Introduction	11
1.2 Théorie de la dynamique rotor des lignes d'arbres	12
1.2.1 Calcul des énergies	12
1.2.2 La méthode des éléments finis	18
1.2.3 Équations de la dynamique	19
1.3 Résolution de l'équation de la dynamique	22
1.3.1 L'analyse modale ou résolution du problème libre	23
1.3.2 Les schémas d'intégration de Newmark	24
1.3.3 Schéma des différences centrées	31
1.3.4 Méthode des sous domaines	32
1.4 Définition des Super-Éléments	34
1.4.1 Définition d'un sous domaine	36
1.4.2 Définition de l'impédance d'un système	36
1.4.3 Concept de la réduction modale	37
1.4.4 Analyse du processus de Faucher	39
1.4.5 Super-Élément dans la gamme des moyennes fréquences	42
1.4.6 Intégration des super-éléments dans la méthode des sous domaines	45
1.5 Intégration d'un élément rotor dans le schéma des différences centrées	47
1.5.1 Définition de la matrice de masse	47
1.5.2 Effet gyroscopique	49
1.5.3 Stabilité du schéma d'intégration	49
1.5.4 Prédiction de l'accélération au pas de temps futur	50
1.5.5 Convergence de la méthode de Jacobi	50
1.6 Applications	52

1.6.1	Exemples de Super-Éléments	52
1.6.2	Traversée d'une vitesse critique	57
1.6.3	Départ d'une pale	58
1.7	Conclusion	60
2	Du phénomène d'impact à la perforation	63
2.1	Introduction	65
2.2	Impact d'une pale sur un blindage	66
2.2.1	Introduction	66
2.2.2	Modélisations employées	67
2.2.3	Résultats des simulations	70
2.2.4	Comportements des pales	78
2.2.5	Synthèse	80
2.3	Impact d'une bille sur une plaque mince en acier	80
2.3.1	Etat de l'art sur la perforation	80
2.3.2	Description des moyens d'essai	86
2.3.3	Description de la modélisation éléments finis	87
2.3.4	Comparaison entre les éléments ShB8 et ShB8PS	90
2.3.5	Effet du taux de triaxialité sur la rupture	91
2.3.6	Résultats des simulations pour différents maillages	92
2.3.7	Synthèse	92
2.4	Impact d'un projectile conique sur une plaque mince	93
2.4.1	Lois matériaux	94
2.4.2	Simulation de l'essai de traction sur le matériau à base Nickel	95
2.4.3	Moyen d'essais et modélisation du système	97
2.4.4	Résultats de la simulation de la perforation	97
2.4.5	Comparaisons des plaques après simulation et après essai	98
2.4.6	Synthèse	100
2.5	Conclusion	100
3	Analyse des essais de Blade Shedding	103
3.1	Introduction	104
3.2	Conclusion	104
4	Simulation du Blade Shedding sur un moteur	105
4.1	Introduction	107
4.2	Calcul de Blade Shedding sur le module de Turbine libre	108
4.2.1	Maillages des corps en mouvement	109
4.2.2	Maillage des parties statiques	111
4.2.3	Résumé du maillage 3D des turbines libres	112
4.2.4	Mise en place du calcul	112
4.2.5	Lois matériaux utilisées sur les différents corps	114
4.3	Résultats qualitatifs et temporels de la simulation	115

4.3.1	Etat d'équilibre après la précharge centrifuge	115
4.3.2	Séquence des contacts de la première pale libérée	116
4.3.3	Contacts rotor-stator	119
4.3.4	Départ du reste des pales	122
4.3.5	Évolution de la déformation de l'anneau	123
4.3.6	Déformation du blindage	124
4.4	Résultats quantitatifs	124
4.4.1	Aspects énergétiques	125
4.4.2	Efforts sur la couronne de fixation du blindage	126
4.4.3	Comparaison des modèles avec des jeux différents pour l'anneau .	128
4.5	Calcul de Blade Shedding sur le moteur	129
4.5.1	Définition des sous-domaines et de leurs modélisations associées .	130
4.5.2	Définition du super-élément des carters	132
4.5.3	Définition des forces d'excitation	134
4.5.4	Résultats obtenus	136
4.6	Conclusion	137
Conclusions et perspectives		139
A Le turbomoteur : de la turbine liée à la turbine libre		143
B Le problème aux valeurs propres quadratiques		149
C Définition des disques dans une approche dynamique rotor de ligne d'arbre		153
D Flexion d'une poutre élasto-plastique		159
E Effet gyroscopique sur les maillages volumiques		163
F Définition des modes dynamiques par rapport aux modes statiques		167
Bibliographie		171

Table des figures

1	Vue globale du moteur Makila I à turbine libre	1
2	Vue de l'intérieur du moteur Makila 2A après un essai de Blade Shedding	2
3	Vue d'un rotor pendant la perte des pales	7
1.1	Repères de référence pour le calcul des énergies cinétiques	13
1.2	Définition de la position d'une pale	15
1.3	Définition de l'élément de type poutre	19
1.4	Configuration du rotor	24
1.5	Diagramme de Campbell du cas académique	26
1.6	Stabilité de l'algorithme de Newmark dans le cas non amorti	27
1.7	Excentrations du système en fonction de Δt et ω	31
1.8	Définition d'un sous domaine	36
1.9	Positionnement des différentes fréquences nommées	43
1.10	Cas test d'un domaine constitué par une plaque	53
1.11	Impédance du sous domaine de la plaque	54
1.12	Impédance de la poutre pour le système global et réduits $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$	55
1.13	Impédance de la poutre pour le système global et réduits $n^{\circ}3$ et $n^{\circ}4$	55
1.14	Impédances du système exact et des systèmes réduits	56
1.15	Excentricité du disque, accélération de $450Tr/Min/s$	57
1.16	Excentricité du disque, accélération de $1125Tr/Min/s$	58
1.17	Excentricité du disque, accélération de $4500Tr/Min/s$	59
1.18	Banc expérimental de perte de pale, extrait de Hibner et Buono [57]	60
1.19	Déplacements expérimentaux au niveau du disque central	60
1.20	Résultats numériques du déplacement du disque central	61
2.1	Vue d'une pale de turbine libre	68
2.2	Maillage des pales en brique à formulation coque et blindage en coque	68
2.3	Maillage des pales en brique raffinée et blindage en brique	69
2.4	Trajectoires du profil et de la tablette lors de l'impact	71
2.5	Trajectoires du centre de gravité de la pale "TL2" entre 0 et 1 ms	71
2.6	Déformations plastiques sur les modèles des pales en briques	72
2.7	Déformations plastiques sur le modèle $n^{\circ}2$	73
2.8	Evolution de l'énergie cinétique de la pale "TL2"	74
2.9	Évolution de l'énergie interne de la pale "TL2"	75

2.10	Évolution de l'énergie interne du blindage	76
2.11	Evolution de l'énergie cinétique du blindage	77
2.12	Évolution des énergies du blindage non fixé	78
2.13	Impacts des pales à 0.2 ms sur le modèle CUB8 fin sans frottement	78
2.14	Projectiles APDS en action	81
2.15	Impact d'une bille d'aluminium sur une plaque épaisse d'aluminium	82
2.16	Pétalisation sur différents corps	83
2.17	Vitesses résiduelles expérimentales en fonction de la forme de l'impacteur	84
2.18	Vue générale de l'installation d'essai du canon à gaz DGA	86
2.19	Critères de rupture des éléments en fonction du taux de triaxialité	88
2.20	Maillage creux de la bille	89
2.21	Maillages pour le calcul Element Fini	90
2.22	Déformations plastiques de la plaque ShB8 pour un impact à 400m/s	91
2.23	Déformations plastiques de la plaque en ShB8PS pour un impact à 400m/s	92
2.24	Vue globale du système, à $t = 0.075ms$ après le contact	93
2.25	Vitesses résiduelles de la bille après impact	94
2.26	Éprouvette de traction soumise à un déplacement imposé de 20 mm	95
2.27	Comparaison essai/calcul d'un essai de traction	96
2.28	Canon à gaz d'étude	97
2.29	Maillage du système plaque impactée, projectile et support de plaque	98
2.30	Vitesses résiduelles en fonction de la vitesse incidente	98
2.31	Résultats expérimentaux sur les plaques non perforées	99
2.32	Résultats numériques sur les plaques non perforées	100
2.33	Résultats expérimentaux et numériques : Plaques perforées	101
4.1	Découpage volumique et maillage grossier des pales de turbine libre	110
4.2	Découpage volumique et maillage de la partie centrale du rotor	111
4.3	Modèle élément fini du rotor avec les pales	111
4.4	Vue générale de l'anneau introduit dans le blindage	112
4.5	Résultats de la précharge centrifuge sur le rotor	115
4.6	$T_0 + 0.05ms$ Contacts en pied de pales contre la pale libérée	116
4.7	$T_0 + 0.15ms$ Contacts rotor-stator de la pale précédente	117
4.8	$T_0 + 0.225ms$ Perforation de l'anneau par la pale libérée	117
4.9	$T_0 + 0.3ms$ Contacts de la pale libérée contre la pale suiveuse	118
4.10	$T_0 + 0.35ms$ Repliement de la pale libérée	118
4.11	Contacts rotor-stator associés au flambement de l'anneau	119
4.12	Mise en évidence du flambement de l'anneau	120
4.13	Orbites des disques de la turbine libre excitée par un départ de 4 pales	120
4.14	Orbites des disques obtenues par le modèle 3D durant le Blade Shedding	121
4.15	$T_0 + 0.4ms$ Définition des contacts rotor-stator dus au balourd	121
4.16	Initiation du départ du reste des pales	122
4.17	Fin de la libération des pales	123
4.18	Déformations plastiques de l'anneau au cours de l'impact des pales	123

4.19	Déformations plastiques du blindage	124
4.20	Evolution des énergies des principales parties de la turbine libre	125
4.21	Efforts résultants de la condition de blocage du blindage	127
4.22	Schéma du positionnement des quatre fixations étudiées	127
4.23	Forces externes sur quatre fixations du blindage	128
4.24	Vue du maillage des parties statiques du moteur Makila	130
4.25	Schéma de la structuration des domaines du moteur	131
4.26	Définition des interfaces entre le rotor et le super-élément	132
4.27	Déplacements modaux de la structure	135
4.28	Amplitude des efforts de balourd lors de la perte de 6 pales	136
4.29	Forces normées sur le joint de Cardan	136
4.30	Moment sur le joint de Cardan	137
4.31	Forces normées dans les biellettes	137
A.1	Schéma d'une turbine à gaz simple	143
A.2	Vue générale du moteur Astazou IIA à turbine liée	144
A.3	Schéma d'un turbomoteur à turbine libre	145
A.4	Coupe du moteur Makila I à turbine libre	145
A.5	Hélicoptère EC 725 Cougar [Source EADS]	146
A.6	Schéma des fixations du moteur Makila sur l'hélicoptère	147
C.1	Géométrie du rotor étudié	154
C.2	Fréquences réelles du mode de flexion	155
C.3	Fréquences approchées par l'hypothèse des poutres	155
C.4	Évolution des fréquences normées pour les différents ratios	156
D.1	Géométrie et chargement de la poutre	159
D.2	Loi de comportement bilinéaire de la poutre	160
D.3	Profil de contraintes avec une loi matériau sans écrouissage	161
D.4	Profil de contraintes avec une loi matériau avec écrouissage isotrope	161
E.1	Représentation graphique du maillage	164
E.2	Déplacement du disque lorsque le rotor ne tourne pas	165
E.3	Déplacement du disque lorsque le rotor tourne à $3000tr.min^{-1}$	166
F.1	Définition améliorée d'un sous domaine	168

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques mécaniques du rotor	25
1.2	Fréquences de résonance pour différentes matrices de masse	48
2.1	Pas des temps des modèles calculés par Europlexus	69
2.2	Paramètres identifiés de la loi matériau de l'acier 316	87
4.1	Caractéristiques du modèle élément fini 3D du module de turbine libre . .	113
4.2	Jeux présents dans les trois modèles	128
C.1	Paramètres numériques évalués	154

Introduction générale

Contexte de la recherche

De nos jours, la propulsion des hélicoptères est majoritairement réalisée par des turbomoteurs à turbine libre. Ces moteurs présentent la particularité de détendre la pression des gaz sur deux corps en rotation. Le premier corps récupère un travail mécanique correspondant au travail mécanique nécessaire pour entraîner le compresseur et un second corps, dit de turbine libre, récupère un travail mécanique qui est fourni au rotor de l'hélicoptère (cf. figure 1 et annexe A pour un bref historique de la turbine à gaz sur hélicoptère).

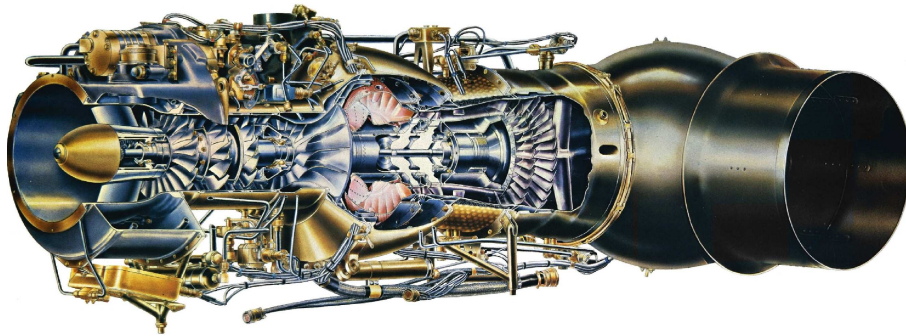


FIG. 1: Vue globale du moteur Makila I à turbine libre

Cette architecture présente donc la spécificité que, pour un point de fonctionnement donné, le turbomoteur est régulé en permanence afin que le rotor de turbine libre tourne à une vitesse donnée. De ce fait, en cas de rupture accidentelle de la liaison qui délivre le couple au rotor de l'hélicoptère, la turbine libre accélère brutalement et entre en survitesse. Par ailleurs, puisque ce rotor subit les forces centrifuges, il ne doit pas accélérer indéfiniment sous peine de perdre son intégrité. Un système de protection contre les survitesses est donc présent sur les turbomoteurs d'hélicoptères. La plupart des protections sont électroniques : un calculateur surveille la vitesse de rotation des rotors et coupe l'arrivée du carburant en cas de survitesse brutale. Néanmoins, le motoriste Turbomeca a choisi de baser la protection contre la survitesse des turbines libres sur un système mécanique passif pour ses turbomoteurs de nouvelle génération. Ce système présente une grande fiabilité car il est basé sur un concept mécanique simple et ne nécessite aucun en-

tretien en service. En effet, à une certaine vitesse, le chargement centrifuge sur les pales est tel que la contrainte au niveau de la section de raccordement des pales avec le disque est égale à la contrainte à la rupture du matériau. De ce fait, la liaison se rompt et les pales se détachent. Un blindage spécifique assure alors la rétention de ces débris (Figure 2). Si le rotor ne présente plus de pales, sa vitesse n'augmente plus et tout risque de perte d'intégrité du rotor est écarté. Le concept correspondant à une perte de pales généralisée est dénommé "Blade-Shedding". Par ailleurs, les systèmes électroniques et le blade-shedding étant compatibles, ces deux types de protection sont présents sur de nombreux moteurs Turbomeca.

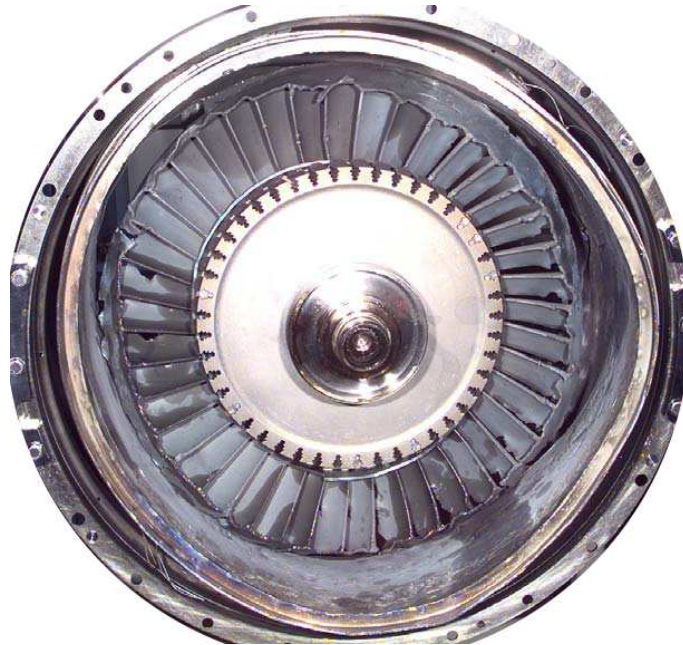


FIG. 2: Vue de l'intérieur du moteur Makila 2A après un essai de Blade Shedding

Jusqu'à aujourd'hui, la conception de la protection mécanique est réalisée à l'aide de critères analytiques permettant de déterminer la vitesse de départ des pales et de s'assurer de la capacité de rétention du blindage. Plusieurs essais partiels permettent de valider la conception mais ce n'est qu'à la fin du développement qu'un essai moteur complet est mis en place et permet de certifier la protection par le respect des règlements de navigabilité aéronautique. Cet essai présente donc :

- des risques considérables, puisque la protection n'est alors validée par un essai qu'en fin de développement du moteur,
- un coût non négligeable, puisque l'essai moteur complet conduit à la destruction de celui-ci,
- finalise la conception de l'interface moteur-hélicoptère en spécifiant l'enveloppe des efforts appliqués sur celle-ci.

Par ailleurs, les critères analytiques sont basés sur des aspects très généraux de la

conception du module de turbine libre (masse, section, centre de gravité, propriétés matériaux) ce qui ne permet pas d'optimiser finement la conception et de prédire les efforts transitoires au niveau des fixations du moteur lors du phénomène.

Dans la présente recherche, nous nous intéressons donc à la dynamique transitoire d'un tel phénomène en se focalisant sur les efforts appliqués sur le système et les efforts transitant sur tout le moteur et en particulier au niveau des attaches du moteur sur la cellule. Dans ce contexte, nous nous attachons à mettre en place et développer des méthodes capables de résoudre les problèmes mécaniques rencontrés qui prédiront le comportement transitoire du moteur lors de la perte généralisée des pales de la turbine libre suite à la rupture de l'arbre de transmission.

Positionnement de la recherche

Le mécanisme du départ généralisé des pales est un point clé du problème car il détermine le chargement temporel appliqué sur la structure. Cependant il est peu connu car l'observation au cours du temps est impossible puisque le phénomène a lieu dans l'enceinte du moteur. Par ailleurs, à ma connaissance, aucun autre motoriste n'a publié d'information sur cette technologie et même si plusieurs développements moteur Turbo-meca (environ dix) ont été réalisés avec ce concept, seul des modèles analytiques ont été mis en place. De ce fait, la compréhension du phénomène transitoire et notamment du scénario de rupture des pales est faible. Le seul point, largement analysé, est la capacité de rétention du blindage qui détermine globalement la réussite des essais.

Si l'on s'intéresse aux efforts appliqués au système, trois types d'efforts sont présents : les efforts de balourds, les efforts d'impacts et les efforts aérodynamiques. Ces derniers ne seront pas étudiés finement dans ce travail. Si le rotor perd une pale, celui-ci devient déséquilibré, se met à orbiter avec des amplitudes conséquentes qui conduisent à des contacts rotor-stator. En parallèle les pales libérées impactent les parties statiques en les déformant. De ce fait, le problème mécanique se retrouve à la frontière de deux domaines de la mécanique traités en général séparément : la dynamique rotor qui consiste à étudier les mouvements et la stabilité des rotors et la dynamique rapide correspondant au calcul des grandes déformations subies par un système qu'il soit impacté ou impacteur.

Dans la dynamique rotor, on s'intéresse généralement à la dynamique de ligne d'arbre c'est à dire comment évoluent la forme, la fréquence et la stabilité des modes vibratoires élastiques. En effet, de par les effets gyroscopiques et les spécificités des paliers, les modes évoluent en fonction de la vitesse de rotation. Ce premier point est exposé notamment par Lalanne et Ferraris [68], Childs [26] ou Muszynska [83]. On s'intéresse par la suite à la réponse forcée sous chargement de ces systèmes dont le plus connu est le balourd. Par ailleurs, cette discipline s'est intéressée à des problématiques plus spécifiques comme le contact rotor stator qui survient lors d'une résonance vibratoire excitée en général par un balourd. On citera ici les travaux de Black [14] sur la définition d'un modèle permettant de définir la zone potentielle d'un contact frottant instable et les travaux expérimentaux de Bartha [9] et Wilkins [113]. De façon complémentaire, l'influence

d'un contact en tête de pale a été analysée par Lesaffre et *al.* [73][74]. Cependant dans ces approches, la définition de la stabilité du rotor est plus recherchée que le comportement transitoire lors du contact. Sur ce point, Roques [96] a développé une approche de dynamique de ligne d'arbre intégrant le contact transitoire lors d'une décélération d'un turbo-alternateur soumis au balourd d'une pale. De la même façon, Legrand et *al.* [70] [71] propose des solutions numériques pour simuler le contact rotor-stator intervenant sur la roue aubagée seule.

Au contraire dans la dynamique rapide, on s'intéresse aux déformations des pièces lorsque elles sont impactées par des corps. Dans le domaine aéronautique, on citera les travaux de Letellier [75] ou Cosme [30] sur la modélisation des aubes fan d'un turbofan soumis à des impacts respectivement d'oiseaux ou à une pale perdue, les travaux de Ortiz et *al.* [90] sur la modélisation de l'amerrissage d'un avion ou les travaux plus généraux de Fasanella [39] sur la chute d'aéronef. Dans cette discipline, les méthodes de résolution de l'équation de la dynamique sont basées sur le schéma des différences centrées de Newmark et le travail est limité en général à l'étude des grandes déformations irréversibles dans laquelle l'amortissement du système est principalement constitué par celles-ci.

A ma connaissance, aucune démarche dans la littérature n'a été mise en place pour simuler à la fois les contacts rotor-stator, les endommagements des pales lorsqu'elles frottent contre un carter et l'influence que les pales libérées peuvent avoir sur le contact rotor-stator.

Objectif de la recherche

Les objectifs de la recherche ont été définis par la société Turbomeca du groupe SAFRAN qui développe des turbomoteurs pour hélicoptères intégrant une protection par Blade Shedding. Comme cela a été exposé, dans la phase de conception, il n'existe pas de méthodes pour prédire le comportement global du moteur lorsque l'ensemble des pales va se détacher en survitesse. Le motoriste est donc intéressé par une méthode de modélisation du phénomène qui lui permettrait de réduire les risques présents lors des essais moteur, voire de les supprimer.

Pour satisfaire ce besoin, l'objectif de la recherche consiste à définir une modélisation capable de représenter la majorité des phénomènes présents et les méthodes de résolution adaptées aux modélisations choisies. En parallèle, une meilleure analyse des essais antérieurs est requise afin de détailler au mieux la séquence de départ des pales et les chargements ou mouvements des différentes corps du moteur. Pour finir, il a été demandé que la recherche soit menée sur une modélisation du moteur complet afin de donner une vue globale du problème mécanique à résoudre tout en identifiant les aspects dans lesquels des travaux complémentaires devraient être menés.

Stratégie de la recherche

La compréhension d'un phénomène transitoire passe en général par la possibilité de définir les différents événements qui interviennent au cours du temps. Lors des essais de Blade Shedding, la chronologie temporelle et les échelles de temps mises en jeu seront identifiées à partir d'une exploitation des différentes mesures réalisées et notamment de la vitesse de rotation du mobile en survitesse.

D'un point de vue modélisation et simulation, les problèmes transitoires de type impact présentant des grandes déformations sont couramment résolus par le schéma des différences centrées. Cette méthode sera retenue pour cette étude. Cependant d'un point de vue de modélisation, le moteur présente à la fois des corps statiques et des corps en rotation qui présentent des effets gyroscopiques impactant fortement le système mécanique. Pour représenter les rotors, deux modélisations seront utilisées. Pour les rotors présentant des faibles déformations, une approche de dynamique de ligne d'arbre, déjà utilisée par Roques [96], sera choisie par le fait qu'elle est nettement plus légère en terme de degrés de liberté que la seconde. Cette approche sera retravaillée pour être incluse aisément dans le schéma des différences centrées (Lumping de la matrice de masse et formulation de la matrice gyroscopique associée). Pour les rotors soumis aux balourds transitoires, une modélisation volumique sera retenue mais nécessitera donc de calculer en pré requis l'équilibre élasto-plastique associé aux forces centrifuges. En parallèle, une synthèse modale sera mise en place sur le modèle des parties statiques pour accélérer les temps de calcul.

Au sujet de l'impact des pales contre les parties statiques, dans un premier temps, nous nous attacherons à modéliser l'impact d'une pale contre un blindage. Cette situation totalement arbitraire permettra d'appréhender la problématique de l'impact. Dans un second temps, le sujet de la perforation sera abordée. Dans la littérature plusieurs auteurs se sont attachés à développer des méthodes de modélisation fines du phénomène. Leurs modélisations sont souvent constituées de plus de $10^5 DDL$ pour représenter une seule perforation. Dans notre étude, une modélisation beaucoup plus légère sera recherchée en se focalisant sur l'utilisation de l'élément fini brique à formulation coque (élément ShB8 dans Europlexus). Ce travail se conclura par des comparaisons calcul-essai dans deux configurations simples de type impact d'un projectile sphérique et cylindro-conique sur une plaque mince.

Ayant bâti ou développé à la fois une formulation adaptée pour la modélisation des rotors et une méthodologie pour simuler la perforation, le problème mécanique correspondant au Blade Shedding sera traité. Les résultats permettront de décrire plus en détails les différents événements et trajectoires des débris.

Organisation du mémoire

Le manuscrit est organisé autour de quatre chapitres dont le troisième est classé *Confidentiel Industrie* ainsi que quelques remarques notées en italique présentes dans le qua-

trième chapitre. Dans la version Confidentiel Industrie, le troisième chapitre est complet tandis que, dans la version libre, il est réduit à son introduction et sa conclusion. En parallèle, cinq annexes fournissent des généralités sur la turbine à gaz, des rappels mathématiques, des résolutions de problèmes mécaniques simples et quelques aspects de modélisation.

Dans un premier chapitre, les éléments théoriques nécessaires à la construction de modèles numériques sont développés. On retrouvera tout d'abord des généralités sur la dynamique de ligne d'arbre et les chargements de balourd associés à la perte d'aube. Dans un second temps, le schéma des différences centrées sera évoqué et l'on s'attachera à s'assurer que celui-ci est stable lorsque le système mécanique présente des effets gyroscopiques. Ensuite pour accélérer les temps de calcul la formulation multi-domaines, multi-pas de temps intégrée dans le code Europlexus par Faucher et Combescure [40] sera présentée. Ces derniers avaient par ailleurs spécifié une modification dans la définition des synthèses modale de type Craig-Bampton. On s'attache donc à regarder l'impact de cette modification sur la modélisation du système et cela nous conduira à spécifier un nouveau type de synthèse modale adaptée pour le domaine des moyennes fréquences. Enfin la définition de l'élément de dynamique de ligne d'arbre adaptée au schéma des différences centrées sera développée. La prise en compte des effets gyroscopiques sera par ailleurs évoquée. Plusieurs exemples concluront ce chapitre en illustrant les différents concepts et en précisant le comportement d'un rotor soumis à un départ de pale.

Dans un second chapitre, la thématique de l'impact et de la perforation sera traitée à travers trois cas simples. Le premier cas concerne l'impact d'une pale éjectée d'un rotor en rotation contre un blindage ce qui correspond à un impact isolé d'une pale dans la situation de Blade Shedding. Dans ce premier cas, des modélisations des impacteurs et impactés seront proposées afin d'identifier le minimum requis pour représenter correctement les plastifications et repliements de la pale. Dans le second cas, l'impact d'une bille sur une plaque sera analysé tout d'abord d'un point de vue bibliographique et ensuite d'un point de vue numérique. Pour représenter la fracture du matériau, la suppression des éléments dépassant un critère sera utilisée. On s'attachera à évaluer deux critères, un premier basé sur une déformation plastique comparé à un second dépendant du taux de triaxialité moyen du chargement. Enfin, cette même modélisation sera ré-utilisée dans un troisième cas d'étude correspondant à l'impact d'un projectile cylindro-conique sur une plaque dont le matériau correspond à celui classiquement utilisé pour le blindage de Blade Shedding. Ce troisième cas d'étude permettra ainsi d'aborder les caractérisations matériaux et de comparer les capacités de rétention prédites numériquement à des capacités de rétention obtenues expérimentalement.

Dans un troisième chapitre, la conception de la protection en survitesse par Blade Shedding et les résultats d'essais, sur le moteur Makila, seront évoqués à travers quatre points. Tout d'abord, une méthode pour spécifier la vitesse de départ de pales sera mise en place et comparée à des résultats expérimentaux. Dans un second temps, les mesures transitoires de la vitesse de rotation de la turbine libre seront dépouillées ce qui permettra d'identifier la durée de départ de pales lors du phénomène. Dans un troisième temps, une exploitation de ces mesures à travers une modélisation à 1DDL permettra d'estimer les

couples d'entraînement et de décélération mis en jeu au cours du temps. Enfin dans une quatrième partie, l'état des pièces après essai sera présenté.

Le quatrième chapitre sera dédié à la prédiction du comportement du moteur lors du Blade Shedding. Tout d'abord, on s'attachera à présenter une simulation volumique de l'ensemble du module turbine libre perdant les pales de son rotor (cf. figure 3). Dans un second temps, une synthèse modale des parties statiques sera présentée : on s'attachera à mettre en évidence la possibilité de réduire le super-élément à un nombre de degrés de liberté minimum en satisfaisant des conditions sur le critère de masse effective et inertie effective de la base modale. Les résultats qualitatifs permettront ensuite de mieux discerner l'ensemble des événements intervenant lors du contact puis de la perte des pales. Une attention particulière sera portée aux efforts au niveau des attaches du moteur sur la cellule.

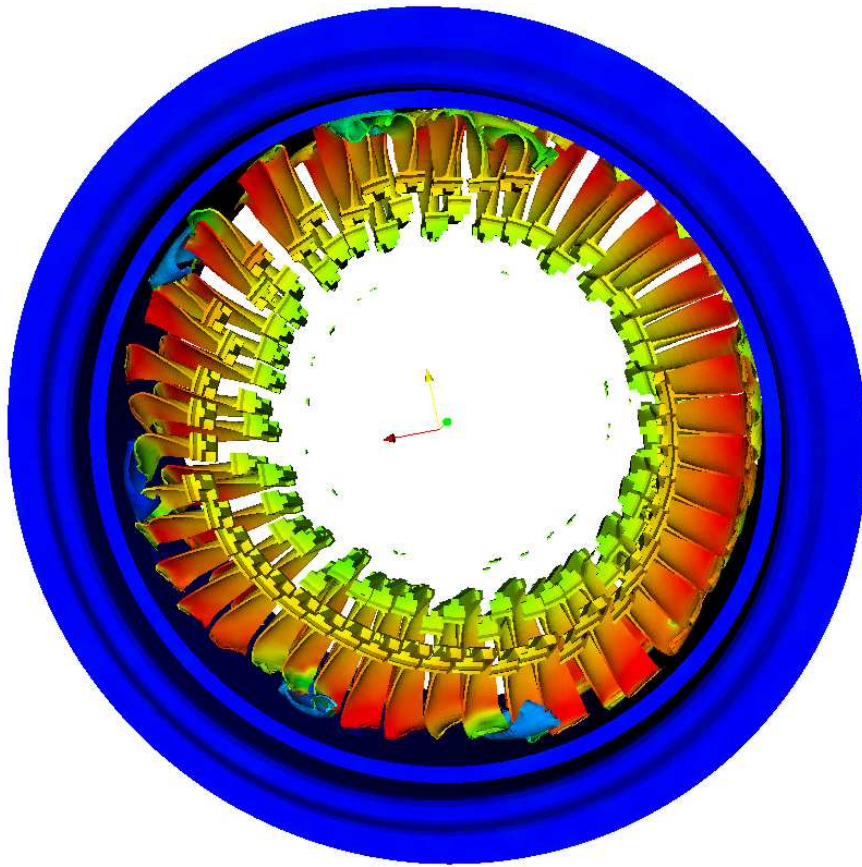


FIG. 3: Vue d'un rotor pendant la perte des pales

Chapitre 1

Méthodes numériques de modélisation des systèmes linéaires

Dans ce premier chapitre, nous nous attachons à développer les méthodes numériques de modélisation des systèmes linéaires et de résolution de l'équation de la dynamique. Le travail s'est focalisé sur la vérification de la convergence des algorithmes utilisés (différences centrées pour les systèmes gyroscopiques, méthode itérative de Jacobi pour la prédiction des accélérations) et sur de nouvelles définitions de synthèse modale à interfaces fixes. On s'attachera par ailleurs à développer un formalisme de dynamique d'arbre adapté à la résolution transitoire par le schéma des différences centrées.

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	Théorie de la dynamique rotor des lignes d'arbres	12
1.2.1	Calcul des énergies	12
1.2.2	La méthode des éléments finis	18
1.2.3	Équations de la dynamique	19
1.3	Résolution de l'équation de la dynamique	22
1.3.1	L'analyse modale ou résolution du problème libre	23

1.3.2	Les schémas d'intégration de Newmark	24
1.3.3	Schéma des différences centrées	31
1.3.4	Méthode des sous domaines	32
1.4	Définition des Super-Éléments	34
1.4.1	Définition d'un sous domaine	36
1.4.2	Définition de l'impédance d'un système	36
1.4.3	Concept de la réduction modale	37
1.4.4	Analyse du processus de Faucher	39
1.4.5	Super-Élément dans la gamme des moyennes fréquences	42
1.4.6	Intégration des super-éléments dans la méthode des sous domaines .	45
1.5	Intégration d'un élément rotor dans le schéma des différences centrées	47
1.5.1	Définition de la matrice de masse	47
1.5.2	Effet gyroscopique	49
1.5.3	Stabilité du schéma d'intégration	49
1.5.4	Prédiction de l'accélération au pas de temps futur	50
1.5.5	Convergence de la méthode de Jacobi	50
1.6	Applications	52
1.6.1	Exemples de Super-Éléments	52
1.6.2	Traversée d'une vitesse critique	57
1.6.3	Départ d'une pale	58
1.7	Conclusion	60

1.1 Introduction

Le présent chapitre détaille les méthodes numériques utilisées et développées pour modéliser et résoudre le système mécanique sujet au phénomène de perte de pales à savoir le turbomoteur lors d'une survitesse.

Un turbomoteur à turbine libre est une des variantes des turbines à gaz permettant de délivrer sur un arbre à vitesse de rotation constante un couple d'entraînement variable grâce à la récupération de l'énergie aérodynamique par des aubages¹.

Sur ces machines, des excitations multiples sont présentes et associées aux solutions technologiques (aubages, engrenages, roulements, pompes, injecteurs de carburant) ou à des tolérances de fabrication dont la plus connue est le balourd résiduel après équilibrage de la ligne d'arbre. Pour permettre le bon fonctionnement des machines, les systèmes mécaniques doivent supporter ces excitations. Au niveau conception, l'ingénieur développe et spécifie le produit pour que le niveau vibratoire rencontré lors d'une résonance entraîne des contraintes mécaniques raisonnables dans les zones sollicitées.

Lors d'une perte de pales, les forces mécaniques appliquées à la structure excitent respectivement le rotor et les parties statiques qui viennent elles-mêmes interagir avec le rotor (voir les travaux de Cosme [30]). De ce fait, la prédiction de la réponse de la turbomachine à de tels efforts nécessite de prendre en compte l'ensemble constitué à la fois du rotor et du stator. Pour le stator, le problème mécanique correspond à un problème de "masse - amortissement - ressorté". Dans le cas d'un rotor, le problème intègre des effets gyroscopiques qui modifient le comportement vibratoire de la machine.

Pour aborder et comprendre les systèmes mécaniques sujets aux effets gyroscopiques, les équations de la dynamique de ligne d'arbre seront développées dans une première partie en s'attachant notamment à l'écriture exacte de l'énergie associée à la présence d'une pale sur un rotor. Ces équations seront résolues par la méthode des éléments finis. Une discussion sur le type d'équations obtenues pour des systèmes non-axisymétriques en rotation clôturera cette première partie.

Dans un second temps, les méthodes de résolution de l'équation de la dynamique seront présentées en se focalisant plus particulièrement sur la méthode de résolution temporelle de Newmark. La stabilité d'intégration de ces schémas sera notamment évoquée lorsque les systèmes étudiés présentent des effets gyroscopiques. Cette démonstration constitue une extension de la stabilité démontrée par Hughes [60]. On se focalisera ensuite sur le schéma des différences centrées, unique méthode d'intégration temporelle utilisée dans ces travaux, et le formalisme multi-domaines multi-pas de temps développé spécialement pour ce schéma.

Dans une troisième partie, on s'intéressera à la formulation des réductions de système par synthèse modale à interfaces fixes. On démontrera tout d'abord que les opérations proposées par Faucher et Combescure [40] ne modifient pas la qualité de la réduction de Craig-Bampton. Dans un second temps, on présentera une nouvelle formulation constituant une réduction optimale dans un domaine de fréquence que l'on souhaite étudier. Cette

¹Un descriptif plus approfondi intégrant notamment un historique de la turbine à gaz, la description du cycle thermodynamique et l'avantage d'un turbomoteur à turbine libre est présenté en annexe A

partie se conclura par l'intégration des super-éléments dans l'algorithme multi-domaines et multi-pas de temps.

Dans une quatrième partie, on s'intéressera à la dynamique de ligne d'arbre intégré dans le schéma des différences centrées. On présentera tout d'abord la formulation des matrices de masse lumpée et gyroscopique associée. Ensuite le calcul de l'accélération au pas de temps futur sera présenté : un algorithme de Jacobi sera choisi et on s'assurera de la convergence de la méthode.

Enfin ce chapitre sera clôturé par des exemples numériques de super-éléments et des applications concernant une montée en vitesse d'un rotor et le départ de pales. Pour cette dernière application, une confrontation à un essai présent dans la littérature sera réalisée et permettra de rappeler le comportement d'une structure soumis à un chargement de type heavyside.

1.2 Théorie de la dynamique rotor des lignes d'arbres

Concept Dans la dynamique rotor des lignes d'arbres, le rotor de forme générale axi-symétrique est considéré comme une poutre de section variable présentant des masses additionnelles au niveau des forts changements de section. Différentes formulations ont été proposées notamment dans Muszynska [83] pour représenter les rotors avec des formulations uniquement en translation ou uniquement en rotation. Ces concepts permettent d'obtenir une formulation analytique et d'illustrer les phénomènes généraux intervenant dans le comportement du rotor.

Actuellement, la formulation reliant à la fois l'aspect translation et l'aspect rotation est la formulation de Lalanne et Ferraris [68] basée sur la description des poutres de Timoshenko. En effet, la formulation des poutres de Timoshenko définit les mouvements sur les degrés de liberté de translation et les degrés de liberté en rotation ce qui permet de représenter correctement les poutres de tout diamètre (Sheu [101], Bigret [13]) et de définir des effets gyroscopiques lorsque la poutre est en mouvement. L'application de cette formulation à un rotor conduit ainsi à la définition de modes de vibration du système avec des dépendances à la vitesse de rotation par les effets gyroscopiques.

Dans cette formulation, le rotor est donc composé principalement de deux types d'éléments : les éléments poutres de Timoshenko et les éléments masses additionnelles. Ces deux éléments vont être développés par la suite en s'intéressant par ailleurs aux cas des pales positionnées sur la périphérie d'un disque.

1.2.1 Calcul des énergies

Le repère $R_O OXYZ$ utilisé pour le calcul des énergies est présenté sur la figure 1.1. L'axe Z correspond à l'axe de rotation du système. Ce repère est un repère fixe.

Dans ce repère et avec l'hypothèse des petites rotations dans la direction X et Y , le vecteur de vitesse angulaire qui relie le repère $R_O OXYZ$ au repère $R_{O_2} OX_2Y_2Z_2$ s'écrit

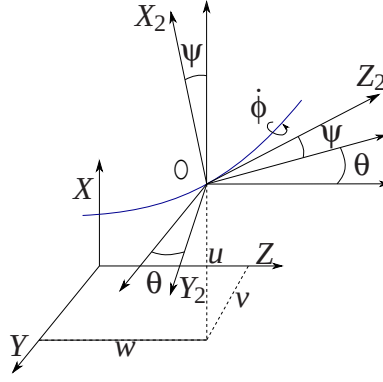


FIG. 1.1: Repères de référence pour le calcul des énergies cinétiques

selon l'équation (1.1).

$$\omega_{R_{02}/R_O}^{R_{02}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \\ -\dot{\psi} \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \theta \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1.2.1.1 Énergie cinétique d'un disque

Un disque se caractérise par un corps rigide dont les propriétés inertielles et l'énergie cinétique sont calculées en son centre de gravité. Un disque est caractérisé par un diamètre intérieur R_{iD} , un diamètre extérieur R_{eD} , une longueur h_D et une masse volumique ρ_D . La masse du disque M_D vaut $\pi(R_{eD}^2 - R_{iD}^2)h_D\rho_D$. Par les propriétés de symétrie du disque, sa matrice d'inertie s'écrit simplement selon l'équation (1.2).

$$I_{D/O} = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Le terme I_{Dz} est en général dénommé inertie polaire et vaut $\frac{M_D}{2}(R_{eD}^2 + R_{iD}^2)$. Le terme I_{Dx} est en général dénommé inertie diamétrale puisqu'il est obtenu par intégration selon une direction radiale. Il vaut $\frac{M_D}{12}(3R_{eD}^2 + 3R_{iD}^2 + h_D^2)$.

Le calcul de l'énergie cinétique T_D dans le repère fixe 1.1 conduit à l'expression (1.3).

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{1}{2}M_D(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2}(I_{Dx}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + I_{Dz}\omega_z^2) \\ &= \frac{1}{2}M_D(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2}I_{Dx}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{Dz}\dot{\phi}^2 + I_{Dz}\dot{\phi}\dot{\psi}\theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les deux premiers groupes de termes de l'équation (1.3) caractérisent l'énergie des vibrations de flexion, respectivement l'énergie de translation et l'inertie "d'oscillation" comme cela est défini par Bigret[13]. Le troisième terme correspond à l'énergie de rotation du disque et conduit à une équation de torsion. Le dernier terme caractérise les effets gyroscopiques (Coriolis).

1.2.1.2 Énergie cinétique d'un arbre

L'énergie cinétique T_S d'un arbre, ayant des propriétés ρ , S et L , est déduite par extension de l'expression de l'énergie d'un disque.

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \dot{\psi}^2 + 2\rho I \dot{\phi} \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (1.4)$$

1.2.1.3 Énergie de déformation d'un arbre

Selon la démonstration présente dans Lalande et Ferraris [68], l'énergie de déformation U_S d'un arbre symétrique sans précontrainte vaut :

$$U_S = \frac{EI}{2} \int_0^L [(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2] dy \quad (1.5)$$

1.2.1.4 Roulements et Paliers

Dans des approches de dynamique rotor, les paliers du rotor définissent la souplesse des parties statiques et apportent de l'amortissement au système mécanique. Sur les turbomoteurs d'hélicoptère, le composant majoritairement utilisé est le roulement mécanique qui peut être monté dans une cage souple supportée par un film d'huile (concept du squeeze film damper, voir travaux de Defaye [35]). Les parties statiques sont alors représentées par des rigidités transversales et croisées qui peuvent être associées à des amortissements locaux selon l'équation (1.6).

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.2.1.5 Énergie cinétique d'une pale

La pale constitue la partie fonctionnelle d'un rotor de turbine à gaz. Dans l'événement de Blade Shedding, les pales se détachent du disque et il est intéressant de caractériser le rotor en tenant compte de la présence ou non des pales. En effet, dans la littérature, la perte d'une pale est seulement définie par une force d'excitation non constante dans le temps réalisée par exemple dans l'ouvrage de Genta [42]. Cependant cet effet n'est pas le seul puisque le rotor devient dissymétrique. Afin de définir l'effet complet d'une perte de pale, l'énergie cinétique d'une pale est calculée pour aboutir à l'équation de la dynamique associée.

Dans le repère fixe $R_O(0XYZ)$ défini sur la figure 1.2, la distance au centre de gravité de la pale s'écrit selon l'équation (1.7). Comme la position axiale de la pale n'évolue pas

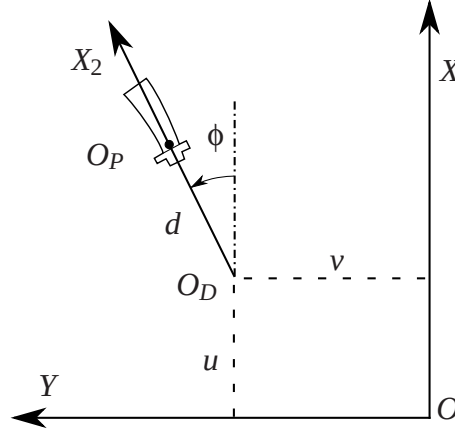


FIG. 1.2: Définition de la position d'une pale

avec le temps, par dérivation, la vitesse s'écrit selon l'équation (1.8).

$$\vec{O}\vec{O}_P = (u + d \cos \phi) \vec{x} + (v + d \sin \phi) \vec{y} + w \vec{z} \quad (1.7)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{O}\vec{O}_P}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} - d\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{v} + d\dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

La matrice d'inertie d'une pale classique de masse m_p calculée au point O_D dans le repère tournant $R_2(O_D, X_2, Y_2, Z)$ présente trois termes majoritaires selon la formulation présentée équation (1.9). Les valeurs numériques associées à des pales de turbines libres sont présentées par exemple dans les travaux [55].

$$I_{P/O_2} = \begin{bmatrix} I_{P_{xx}} & 0 & 0 \\ & I_{P_{yy}} & 0 \\ sym & & I_{P_{zz}} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

En général, les termes $I_{P_{yy}}$ et $I_{P_{zz}}$ sont très proches à cause du déport de la masse (voir théorème de Huygens : $I_{P_{yy}} = I_{P_{yy}/O_2} + m_p d^2$ avec d la distance du centre de gravité de la pale à l'axe de révolution du rotor). Ces deux termes sont prépondérants sur les autres termes, cependant le terme $I_{P_{xx}}$ doit être conservé si l'on souhaite définir un disque équivalent (cf. eq. (1.15)).

En appliquant une rotation d'un angle β selon l'axe Z , équation (1.10), la matrice d'inertie d'une pale décalée d'un angle β est trouvée, eq. (1.11).

$$\Phi_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$I_{P\beta/O} = \Phi_\beta^{-1} I_{P/O} \Phi_\beta = \begin{bmatrix} I_{P_{xx}} \cos^2 \beta + I_{P_{yy}} \sin^2 \beta & (I_{P_{xx}} - I_{P_{yy}}) \cos \beta \sin \beta & 0 \\ & I_{P_{xx}} \sin^2 \beta + I_{P_{yy}} \cos^2 \beta & 0 \\ sym & & I_{P_{zz}} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Un groupe de pales réparties sur un disque présente donc une matrice d'inertie définie selon l'équation (1.12).

$$I_{Ps/O} = \begin{bmatrix} I_{Psxx} & I_{Psxy} & 0 \\ & I_{Psyx} & 0 \\ \text{sym} & & I_{Pszz} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Lorsqu'un ensemble de Z pales est uniformément réparti sur un disque, la symétrie de révolution est de nouveau vérifiée (1.13).

$$I_{ZPs/O} = \begin{bmatrix} \frac{Z}{2}(I_{Pxx} + I_{Pyy}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Z}{2}(I_{Pxx} + I_{Pyy}) & 0 \\ 0 & 0 & ZI_{Pzz} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

La démonstration de cette matrice diagonale passe par la formule de Moivre qui permet d'écrire les équations (1.14). De plus, cette matrice est valable si les termes extra-diagonaux $I_{Pxy}, I_{Pxz}, I_{Pyz}$ sont non nuls.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^Z \cos^2\left(\frac{i2\pi}{Z}\right) &= \frac{Z}{2} & \sum_{i=1}^Z \sin^2\left(\frac{i2\pi}{Z}\right) &= \frac{Z}{2} & \sum_{i=1}^Z \sin\left(\frac{i2\pi}{Z}\right) \cos\left(\frac{i2\pi}{Z}\right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^Z \cos\left(\frac{i2\pi}{Z}\right) &= 0 & \sum_{i=1}^Z \sin\left(\frac{i2\pi}{Z}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

On remarquera par ailleurs qu'un ensemble de pales réparties uniformément autour d'une géométrie peut être remplacé par un disque de densité ρ fixée et dont l'épaisseur, les rayons intérieur et extérieur sont définis selon les équations (1.15).

$$\left. \begin{aligned} h_{eq} &= \sqrt{\frac{12I_{Psxx} - 6I_{Pszz}}{M_{Ps}}} \\ R_{inteq} &= \sqrt{\frac{I_{Pszz}}{M_{Ps}} - \frac{M_{Ps}}{2\rho\pi h_{eq}}} \\ R_{exteq} &= \sqrt{2\frac{I_{Pszz}}{M_{Ps}} - R_{inteq}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Lorsqu'un groupe de pales présente une symétrie autour d'une direction β_2 , la matrice d'inertie correspondant au groupe de pales possède des propriétés de symétrie avec $I_{Psxz} = 0$ et $I_{Psxx} \neq I_{Psyx} \neq I_{Pszz}$.

Concernant l'énergie cinétique T_P d'une pale, le calcul de l'énergie d'une pale conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{m_P}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\phi}^2 d^2 + 2\dot{\phi}d \cos(\phi + \beta)\dot{u} - 2\dot{\phi}d \sin(\phi + \beta)\dot{v}) + \\ &\quad I_{Pzz}(\dot{\phi} + \dot{\psi}\dot{\theta})^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}I_{Pyy}(\dot{\theta}\cos(\phi + \beta) - \dot{\psi}\sin(\phi + \beta))^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Pour un groupe de Z pales sans propriétés particulières de symétrie, le calcul de l'énergie T_{Ps} est mené à partir du tenseur d'inertie $I_{Ps/O}$ et conduit à l'expression (1.17).

$$\begin{aligned}
 T_{Ps} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z m_i (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + Bal_{bps} \dot{\phi} \cos(\phi + \beta_{bps}) \dot{u} - 2 \dot{\phi} d \sin(\phi + \beta_{bps}) \dot{v} + \\
 & I_{Pszz} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \theta)^2 + \\
 & \frac{1}{2} (I_{Psxx} (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi)^2 + I_{Psys} (\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \phi)^2 \\
 & + I_{Psxy} (\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \phi) (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi))
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Concernant la notation, le balourd équivalent à la présence des pales est noté Bal_{bps} avec sa direction associée dans le repère tournant β_{bps} . Ces deux paramètres sont issus de la résolution des équations (1.18)(1.19).

$$Bal_{bps} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^Z m_i d_i \cos \beta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^Z m_i d_i \sin \beta_i \right)^2} \tag{1.18}$$

$$\beta_{bps} = \text{atan} \left(\frac{\sum_{i=1}^Z m_i d_i \sin \beta_i}{\sum_{i=1}^Z m_i d_i \cos \beta_i} \right) \tag{1.19}$$

Dans les expressions (1.16) et (1.17), en général, seules les premières lignes sont prises en compte car elles conduisent à l'écriture des forces centrifuges sur le système.

Les secondes lignes définissent à la fois une équation de la dynamique en torsion et le couplage gyroscopique que l'on reconnaît par le terme $\dot{\psi} \theta$

Les troisièmes parties des équations (qui suivent respectivement I_{Psys} et I_{Psxx}) conduisent à une équation différentielle à coefficients périodiques. En effet, le repère utilisé est un repère fixe qui permet de tenir compte des dissymétries des paliers tout en conservant une équation à coefficients constants, voir les exemples mis en place dans Lallane et Ferraris [68], mais ne permet pas d'avoir une équation à coefficients constants pour le cas d'une dissymétrie du rotor. Comme le démontre Afolabi [2] ou Nelson [85], le problème mécanique peut être posé dans le repère fixe ou dans le repère tournant puisque un changement de repère relie les deux systèmes de coordonnées. Cependant, si les dissymétries étudiées sont soit sur le stator soit sur le rotor, la dérivation de l'équation de la dynamique est préférée respectivement dans le repère fixe ou dans le repère tournant dans le but d'obtenir une équation à coefficients constants.

Ayant défini une équation différentielle à coefficients constants, le problème aux valeurs propres quadratiques peut être posé et résolu. Une solution largement connue est la linéarisation sous une forme compagnon et une résolution par un algorithme Q.R. (Golub et Loan [48]), comme le définit Childs [26]. Cependant cette procédure présente l'inconvénient de travailler sur des matrices hamiltonienne - anti-hamiltonienne ou anti-hamiltonienne - hamiltonienne qui conduit à une perte de précision dans le calcul des valeurs propres quadratiques. Tisseur et Meerbergen [108]) mettent en évidence cet aspect en confrontant l'algorithme `polyeig` de MATLAB 6, qui utilise un algorithme QZ

sur une forme linéarisée compagnon, à l'algorithme *Square-Reduced* de Van Loan [76] qui conserve la structure hamiltonienne : sur un cas simple, les solutions obtenues par le premier algorithme présente des parties réelles non nulles faibles mais supérieures à zéro traduisant un comportement instable alors que le second donne des solutions purement imaginaires et donc stables.

Pour le cas d'un système présentant seulement une dissymétrie sur le rotor, il est judicieux de réaliser la dérivation des équations dans le repère tournant. Cette manipulation permet d'obtenir une équation différentielle à coefficients constants comme le réalise Muszynska [83]. Ces travaux montrent qu'un système présentant seulement des effets gyroscopiques n'est pas instable² mais que s'il y a instabilité, cela provient des dissymétries des paliers ou des rotors (Voir le cas exposé par Lalanne et Ferraris [68]).

Dans le cas où le système comporte à la fois des dissymétries sur le rotor et sur le stator, aucun repère ne permet alors d'obtenir une équation à coefficients constants. Pour étudier la stabilité du système, Guilhen [50] propose de vérifier que le rayon spectral de la matrice d'amplification du système au cours d'une période reste inférieur à 1. Pour réaliser cette opération, les équations sont discrétisées en temps par un schéma d'intégration de type Runge-Kutta ou de Newmark implicite.

1.2.2 La méthode des éléments finis

Basée sur les principes de la formulation variationnelle ou formulation faible, la méthode des éléments finis permet de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles par discrétisation d'un domaine avec conditions aux bords. Sauf cas particuliers, la discrétisation passe par une redéfinition et une approximation de la géométrie, on considère donc le problème posé sur la géométrie approchée par un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux. Le maillage du domaine permet de définir un découpage linéique, surfacique ou volumique selon le type du domaine (1D, 2D, 3D) dont les segments, pavés ou briques sont les éléments finis. Chaque élément fini supporte des fonctions de forme de déplacement, ce qui permet par leur association d'approximer le champ de déplacement de la structure.

La méthode des éléments finis appliquée au domaine de la dynamique rotor est largement documentée notamment dans Lalanne et Ferraris [68] et implémentée dans de nombreux codes d'origines universitaires (ROTORINSA) ou commerciaux (ANSYS V11). Dans ces deux précédents codes, la définition de la géométrie du rotor est réalisée à l'aide des deux types d'éléments énoncés dans la partie précédente : les disques et les poutres définis au sens de Timoshenko.

Dans cette formulation, la poutre est définie par deux noeuds présentant chacun quatre degrés de liberté : deux degrés de translation et deux degrés de rotation, figure 1.3. Cet aspect permet de tenir compte directement des effets gyroscopiques du système. Le vecteur des déplacements nodaux d'un élément poutre est synthétisé dans les expressions

²Mathématiquement, cet aspect est démontré par Tisseur et Meerbergen [108].

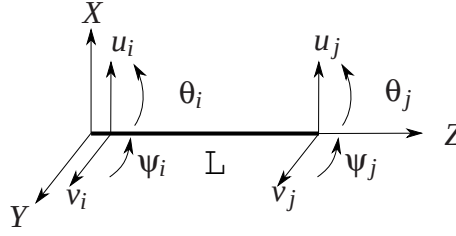


FIG. 1.3: Définition de l'élément de type poutre

(1.20)(1.21)(1.22).

$$q^t = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad \psi_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j \quad \psi_j] \quad (1.20)$$

$$q_u^t = [u_i \quad \theta_i \quad u_j \quad \theta_j] \quad (1.21)$$

$$q_v^t = [v_i \quad \psi_i \quad v_j \quad \psi_j] \quad (1.22)$$

Les fonctions de formes associées respectivement au déplacement selon l'axe X ($u = N_1(z)q_u$) et selon l'axe Y ($v = N_2(z)q_v$) sont exprimées dans les équations (1.23)(1.24).

$$N_1(z) = [1 - \frac{-3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3}; z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2}; \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}] \quad (1.23)$$

$$N_2(z) = [1 - \frac{-3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3}; -z + \frac{2z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2}; \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}] \quad (1.24)$$

Grâce à la définition des fonctions de formes, les termes u et v de l'énergie cinétique (1.4) et déformation (1.5) de la poutre sont connus en fonction des paramètres nodaux q . Les termes θ et ψ sont obtenus par les définitions $\theta = \frac{\partial u}{\partial z}$ et $\psi = -\frac{\partial v}{\partial z}$.

Dans cette définition qui est littéralement extraite de Lalanne et Ferraris [68], il est supposé qu'une section de la poutre reste droite par rapport à la ligne déformée. Cet aspect est mis en défaut lors d'un changement de section et donc en particulier pour un disque. L'analyse réalisée dans l'annexe C permet d'éclairer cette définition et ainsi de mieux représenter un rotor réel avec les deux seuls types d'éléments proposés.

1.2.3 Équations de la dynamique

Ayant une définition de l'énergie totale d'un système, l'application de l'équation de Lagrange (1.25) sur les énergies conduit à l'écriture matricielle de l'équation de la dynamique (1.26). Le terme $\ddot{\psi}G$ est en général négligé car il est bien inférieur à K .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Fq \quad (1.25)$$

$$M\ddot{q} + (C + \dot{\phi}G)\dot{q} + (K + \ddot{\phi}G)q = F(t) \quad (1.26)$$

En ne considérant pas l'énergie d'une pale, l'équation de la dynamique est une équation différentielle ordinaire à coefficients constants, ce qui correspond à la définition d'un

problème aux valeurs propres quadratiques (cf. annexe B). Sa résolution est par ailleurs bien documentée notamment par Tisseur et Meerbergen [108]. L'équation (1.26) peut être écrite sur le système assemblé ou dé-assemblé. Le processus d'assemblage correspond à l'opération durant laquelle les noeuds présentant la même position sont considérés comme identiques si la matière est continue en ce point ou différents si la matière est disjointe. Cette opération peut être réalisée sur l'équation de l'énergie mais aussi sur le système après application de l'équation de Lagrange, ce qui permet d'écrire les matrices élémentaires d'un disque, d'une poutre et des pales.

1.2.3.1 Matrices élémentaires d'un disque

Un disque est représenté par un noeud unique présentant 3 translations et 3 rotations. L'application de l'équation de Lagrange sur l'énergie d'un disque, équation (1.3), permet d'obtenir les deux matrices suivantes.

$$M = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & M_D & 0 & 0 & 0 \\ & & & I_{Dx} & 0 & 0 \\ sym & & & & I_{Dx} & 0 \\ & & & & & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad G_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & I_{Dz} & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ antisym & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

1.2.3.2 Matrices élémentaires d'une poutre

La poutre est représentée par deux noeuds présentant chacun 2 translations et 2 rotations, $q^t = [u_i \ v_i \ \theta_i \ \psi_j \ u_j \ v_j \ \theta_j \ \psi_j]$. L'application de l'équation de Lagrange

sur l'énergie totale du système permet d'obtenir les quatre matrices suivantes.

$$M_e = M_{Te} + M_{Ie} \quad (1.28)$$

$$M_{Te} = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ \text{Sym} & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$M_{Ie} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ \text{Sym} & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

$$G_e = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ \text{Antisym} & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ \text{Sym} & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

La première matrice M_{Te} correspond à la masse issue de l'énergie de translation du système tandis que la seconde matrice M_{Ie} correspond à l'inertie de rotation issue de l'énergie de rotation. La troisième matrice G_e définit les effets gyroscopiques sur le système, elle est associée à l'énergie de rotation (cf. Nelson [85]). La quatrième matrice correspond à la matrice classique d'une poutre en flexion.

1.2.3.3 Matrices élémentaires de pales

Les pales sont positionnées classiquement sur un disque. Les matrices qui sont écrites ci-dessous correspondent uniquement à l'application des équations de Lagrange (1.33) sur le troisième terme de l'énergie cinétique (1.17). Le vecteur q_i^T est donc réduit à $[\theta_i \ \psi_i]$. Les matrices inertielles à coefficients périodiques sont présentées éqs. (1.34)(1.35).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = M_{Pls} \ddot{q}_i + \dot{\phi} G_{Pls} \dot{q}_i \quad (1.33)$$

$$M_{Pls} = \begin{bmatrix} I_{Psxx} \cos^2 \phi + I_{Psyy} \sin^2 \phi - I_{Psxy} \sin(2\phi) & (I_{Psxx} - I_{Psyy}) \cos \phi \sin \phi + I_{Psxy} \cos(2\phi) \\ \text{sym} & I_{Psxx} \sin^2 \phi + I_{Psyy} \cos^2 \phi + I_{Psxy} \sin(2\phi) \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$G_{Pls} = \begin{bmatrix} (I_{Psyy} - I_{Psxx}) \cos \phi \sin \phi - 2I_{Psxy} \cos 2\phi & (I_{Psyy} - I_{Psxx}) \cos 2\phi - 2I_{Psxy} \sin 2\phi \\ \text{sym} & (I_{Psxx} - I_{Psyy}) \cos \phi \sin \phi - 2I_{Psxy} \cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Dans la suite du travail, les matrices à coefficients périodiques n'ont pas été utilisées car le problème mécanique est résolu dans un premier temps sur des maillages volumiques 3D intégrant la définition temporelle du rotor, des pales et du stator. Cependant cet aspect aurait du être pris en compte lors des simulations du moteur modélisé par des approches de dynamique de ligne d'arbre excité par la perte de pale.

1.3 Résolution de l'équation de la dynamique

Pour résoudre les équations de la dynamique des structures, deux approches sont possibles : la superposition modale et l'intégration temporelle directe. Ces deux méthodes sont formellement différentes et adaptées à la résolution de problèmes différents.

La superposition modale est adaptée pour la recherche de l'état d'équilibre du système soumis à une excitation non variante dans le temps et ne présentant pas de variations de son comportement en fonction de son chargement (Domaine élastique). En général, l'état d'équilibre est recherché pour différentes excitations évoluant en fonction de leur fréquence. Ce processus porte le nom de réponse forcée du système. En général, la réponse forcée du système est précédée du calcul de la réponse libre du système qui permet d'évaluer l'évolution des fréquences de résonances et de la stabilité du système en fonction de la vitesse de rotation. Le calcul de la réponse libre du système qui consiste finalement à résoudre un problème aux valeurs propres quadratiques porte le nom d'analyse modale et est traité dans la sous partie 1.3.1. Le calcul de la réponse forcée par superposition modale ne sera pas traité dans la thèse car il n'a pas été utilisé dans les travaux présentés.

Au contraire, dans la résolution par intégration temporelle directe, l'objectif est de connaître l'évolution spatiale et temporelle du système tout en prenant en compte les variations de chargements et de comportements. Le schéma d'intégration qui a été retenue

est le schéma des différences centrées qui appartient à la famille des schémas de Newmark. Nous nous intéressons tout d'abord à démontrer la stabilité d'un tel schéma sur un système présentant des effets gyroscopiques, ce travail constitue une extension de la démonstration de Hughes [60]. Ensuite l'intégration du schéma des différences centrées dans la méthode éléments finis sera évoquée. Enfin la méthode d'accélération de calcul par décomposition en sous domaines et multi pas de temps sera présentée.

1.3.1 L'analyse modale ou résolution du problème libre

L'équation de la dynamique à coefficients constants (1.26) sans second terme est résolue en général sur une base modale réduite. Cette base modale est obtenue par la résolution du problème aux valeurs propres généralisées $M - K$.

En effet, dans la méthode des éléments finis, le champ de solution est approximé par morceaux ce qui entraîne que la plage de fréquences du système est toujours plus grande que la plage de fréquences d'excitation. Pour éviter de résoudre le problème aux valeurs propres quadratiques sur l'ensemble du champ des solutions, le problème est résolu en deux temps. Tout d'abord, le problème aux valeurs propres généralisées défini uniquement par les parties symétriques définies positives de M et K est résolu. Ensuite, le système mécanique est projeté sur la base des premiers modes de structure obtenus. Le problème aux valeurs propres quadratiques est redéfini, linéarisé puis résolu généralement dans des applications de dynamique rotor par un algorithme Q.R. (Childs [26]) pour une gamme de vitesse. La réduction du nombre d'inconnues dans le problème quadratique permet ainsi de réduire les temps de calculs et les espaces mémoires.

Application Pour illustrer le principe d'une analyse modale, un rotor qui est extrait de la bibliographie (Lalanne et Ferraris [68]) est étudié. Ce système simple intègre l'ensemble des phénomènes de dynamique rotor et est représenté sur la figure 1.4. Le rotor est composé d'un arbre symétrique de longueur $L = 0.4$, supporté par des paliers relativement rigides à ses extrémités, avec un disque à une longueur $l_1 = \frac{2}{3}L$ et un palier situé à une longueur $l_2 = \frac{1}{3}L$.

Les autres données numériques sont précisées dans le tableau 1.1.

Pour ce cas d'étude, le disque sera considéré rigide alors que l'arbre sera considéré élastique et de section constante sur toute la longueur. Pour le modèle éléments finis, l'arbre est divisé en 6 éléments équidistants, ce qui permet de positionner le disque sur un noeud de la discrétisation.

Le résultat des analyses modales est présenté sur le diagramme de Campbell (Figure 1.5). Pour rappel, le diagramme de Campbell donne l'évolution des fréquences de vibration des modes en fonction de la vitesse de rotation du rotor. De ce fait seule la partie imaginaire des solutions du problème aux valeurs quadratiques est donc présentée.

Le couplage gyroscopique est mis en avant sur le diagramme avec une évolution de la fréquence de vibration en fonction de la vitesse de rotation. En effet, la partie imaginaire de la solution qui caractérise la fréquence de vibration du mode évolue en fonction de la vitesse de rotation. Les modes qui sont proches à vitesse de rotation nulle (quasi-symétrie

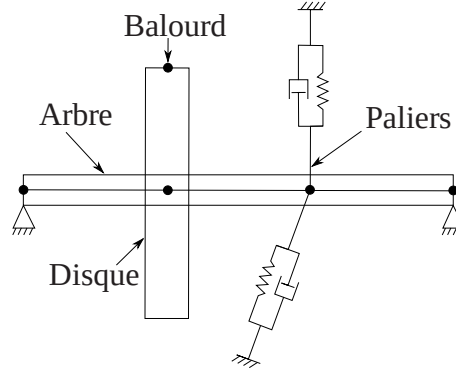


FIG. 1.4: Configuration du rotor

du système en X et Z) se dédoublent en deux modes. Le mouvement associé à ces deux modes correspond à une rotation dans des sens différents. Le mode à la plus basse fréquence tourne dans le sens opposé à la rotation du rotor "Backward whirl" alors que le mode à la fréquence plus haute tourne dans le même sens que le rotor "Forward whirl".

Par ailleurs, dans le cas d'excitations synchrones et pour des systèmes axisymétriques, seul le mode dans le sens direct "Forward mode" répond à l'excitation. Les courbes de déplacement sous réponse forcée mettent clairement en évidence ce principe.

1.3.2 Les schémas d'intégration de Newmark

Le schéma d'intégration de Newmark [87] est une méthode à un pas. L'état du système en vitesse et déplacement à l'instant donné $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ est calculé en fonction de l'état connu à l'instant t_n par la formule de Taylor. Les approximations de l'accélération dans l'intervalle $[t_{n+1} - t_n]$ sont réalisées par des interpolations linéaires en fonction des termes $\ddot{q}_n$ et $\ddot{q}_{n+1}$ et de deux paramètres γ et β pour l'obtention respectivement de la vitesse au pas suivant (1.36) et du déplacement au pas suivant (1.37). Une définition plus complète est présente dans l'ouvrage de Géraudin et Rixen [44].

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \ddot{q}_{n+1} \quad (1.36)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \quad (1.37)$$

L'accélération à l'instant t_{n+1} est associée aux vitesses et déplacements à l'instant t_{n+1} selon l'équation de la dynamique (1.26), ce qui permet de pouvoir écrire le schéma temporel sous la forme (1.38).

$$y_{n+1} = \mathbf{A} y_n + L_n \quad (1.38)$$

$y_{n+1} = [\dot{q}_n \quad q_n]^t$ sont les quantités au pas de temps $n + 1$, y_n les quantités au pas de temps n et L_n les efforts appliqués sur le système. $\mathbf{A}$ correspond à la matrice d'amplification du système, elle n'est pas écrite explicitement ici.

(a) Disque					
R_i^d	0.01 m	R_e^d	0.15 m		
Épaisseur	0.03 m	Densité	7800 kg/m ³		
(b) Arbre					
Rayon	0.01 m	Longueur totale	0.4 m		
Densité	7800 kg/m ³	E	200 GPa	μ	0.3
(c) Balourd					
Masse	10^{-4} kg	Phase initiale	0 rad		
	Distance à la fibre neutre		0.15 m		
(d) Palier central					
Raideur	k_{xx}^p	$2 \cdot 10^5$ N/m	k_{xy}^p	0 N/m	
	k_{yx}^p	0 N/m	k_{yy}^p	$5 \cdot 10^5$ N/m	
Amortissement	c_{xx}^p	100 N s/m	c_{xy}^p	0 N s/m	
	c_{yx}^p	0 N s/m	c_{yy}^p	40 N s/m	
(e) Paliers rigides					
Rigidité	k_{xx}^p	$5 \cdot 10^8$ N/m	k_{xy}^p	0 N/m	
	k_{yx}^p	0 N/m	k_{yy}^p	$5 \cdot 10^8$ N/m	

TAB. 1.1: Caractéristiques mécaniques du rotor

1.3.2.1 Définition de la stabilité d'un schéma d'intégration

Un schéma d'intégration est dit stable s'il existe un pas d'intégration $\Delta t_0 > 0$ tel que pour tout $\Delta t \in [0, \Delta t_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état y_{n+j} calculé à un instant ultérieur t_{n+j} . Source Géraudin et Rixen [44]

La forme (1.38) correspond à la forme approximée de la fonction exacte qui peut s'exprimer $y(t_{n+1}) = \mathbf{A}y(t_n) + L_n + \tau(t_n)$. L'erreur e à l'instant t_{n+1} peut être ainsi calculée selon l'expression (1.39).

$$e_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \mathbf{A}(y(t_n) - y_n) + \tau(t_n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}^i \tau(t_{n-i}) \quad (1.39)$$

On remarque que l'erreur de l'intégration est associée à la matrice d'amplification $\mathbf{A}$. De ce fait, l'erreur e sera bornée si les paramètres d'intégration conduisent à un rayon spectral de $\mathbf{A}$ inférieur à 1.

1.3.2.2 Analyse de la stabilité du schéma d'intégration de Newmark

La stabilité du schéma de Newmark [87] a été grandement clarifiée par Hughes [60]. Hughes étudie une équation de la dynamique classique : $M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F$ réduite dans

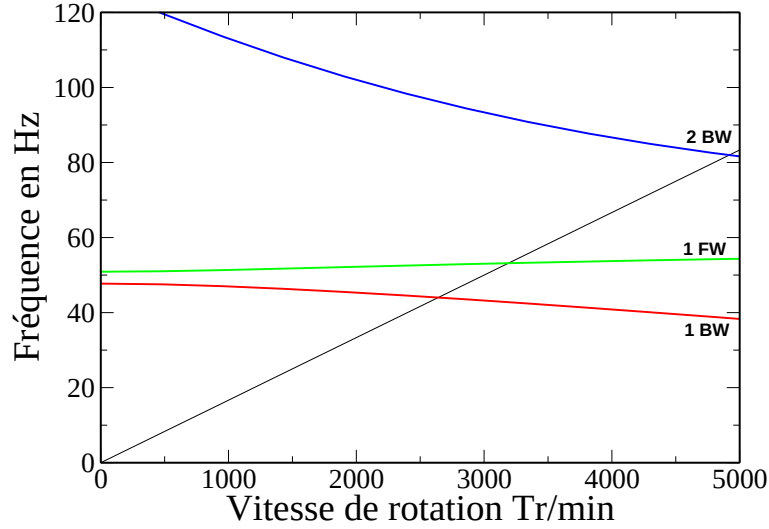


FIG. 1.5: Évolutions des parties imaginaires du problème aux valeurs propres quadratiques des trois premières solutions en fonction de la vitesse de rotation (Diagramme de Campbell)

la base modale du problème aux valeurs propres généralisées $M - K$ et avec une matrice C proportionnelle à M ou K (amortissement proportionnel de Rayleigh [95]).

Les principaux résultats de son étude montrent que :

- le schéma d'intégration est inconditionnellement stable si

$$2\beta \geq \gamma > \frac{1}{2} \quad (1.40)$$

- le schéma d'intégration est conditionnellement stable si

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (1.41)$$

$$\beta < \frac{1}{2}\gamma \quad (1.42)$$

La condition de stabilité est alors matérialisée par la condition (1.43) avec $\Omega = \omega\Delta t$, ω la plus grande fréquence de résonance du système étudié et Δt le pas de temps d'intégration.

$$\Omega \leq \Omega_{crit} \quad (1.43)$$

$$\Omega_{crit} = \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}\gamma - \beta + \xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2}\gamma - \beta)} \quad (1.44)$$

Le domaine de stabilité de l'algorithme de Newmark pour un système non amorti est représenté sur la figure 1.6. L'étude de Hughes [60] se poursuit sur la précision de l'algorithme. En effet, même si la matrice d'amplification $\mathbf{A}$ doit être inférieure à 1, elle doit

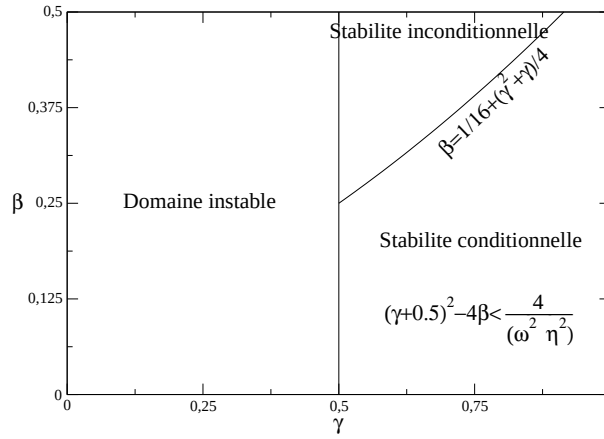


FIG. 1.6: Stabilité de l'algorithme de Newmark dans le cas non amorti, source G radin et Rixen [44]

rester le plus proche de 1 pour ne pas introduire de l'amortissement numérique dans le système. Ceci se caractérise par une erreur relative d'amplitude qui est définie par G radin et Rixen [44]. Ceux-ci démontrent que le paramètre γ doit être égal à $\frac{1}{2}$ pour ne pas introduire un amortissement numérique (voir les travaux de Bonello et Hai [17] sur l'évolution des résultats en fonction du paramètre γ).

1.3.2.3 Analyse de la stabilité du schéma d'intégration de Newmark pour un système en rotation

Dans le cas d'un système en rotation, le système mécanique est modifié par les effets gyroscopiques qui viennent coupler les mouvements dans un plan du système avec ceux du plan transverse. Ces considérations se démontrent aisément sur des systèmes en 1D de type poutre (Lalanne et Ferraris [68]) mais sont aussi présents dans des systèmes en 3 dimensions (Combescure et Lazarus [29], Genta [42]).

L'étude qui va suivre consiste à étudier une équation de la dynamique présentant un couplage entre ces deux plans. L'équation de la dynamique correspondante s'écrit

$$M\ddot{q} + (C + \omega G)\dot{q} + Kq = F \quad (1.45)$$

avec C une matrice proportionnelle aux matrices $M - K$, G une matrice antisymétrique et ω la vitesse de rotation³. M correspond à la matrice de masse du système qui est la somme de la matrice de translation M_T et la matrice d'inertie de rotation M_I associée à l'énergie de rotation du syst me⁴.

Afin de simplifier la démonstration qui suit, la matrice M_I est considérée proportionnelle à la matrice de masse M . Par cette hypothèse, sur la base des vecteurs propres du

³On notera à partir d'ici, ω la vitesse de rotation du système ou la fréquence d'excitation du système et $\tilde{\omega}$ la ou les fréquences de résonance du système.

⁴L'écriture matricielle utilisée par Nelson [85] met clairement en évidence ce point.

problèmes aux valeurs propres généralisées $M - K$ normalisée selon la matrice de masse ($I = \Phi^T M \Phi$, $\tilde{\Omega}^2 = \Phi^T K \Phi$), la matrice $G_p = \Phi^T G \Phi$ est strictement inférieure à 1 et présente un couplage uniquement présent entre les modes orthogonaux $X - Y$ du système. Le système se réécrit alors sous une forme scalaire entre les deux équations (1.46)(1.47).

$$\ddot{u} + 2\xi\tilde{\omega}\dot{u} + \eta\omega\dot{v} + \tilde{\omega}^2 u = F_u(\omega) \quad (1.46)$$

$$\ddot{v} + 2\xi\tilde{\omega}\dot{v} - \eta\omega\dot{u} + \tilde{\omega}^2 v = F_v(\omega) \quad (1.47)$$

Le couplage est caractérisé par un terme η et la vitesse de rotation ω du système mécanique.

Intéressons nous à la matrice d'amplification d'un tel système résolu par le schéma d'intégration de Newmark. Comme le souligne Belytschko et *al.* [10], les valeurs propres de la matrice d'amplification $\mathbf{A}$ correspondent aux valeurs propres généralisées de la matrice d'amplification généralisée $\mathbf{A}_1$ - $\mathbf{A}_2$. L'analyse des valeurs propres du système à quatre degrés de liberté $q_n^T = [u_n \ \dot{u}_n \ v_n \ \dot{v}_n]$ est donc réalisée sur le problème généralisé pour conserver la structure du problème.

$$\mathbf{A}_1 y_{n+1} = \mathbf{A}_2 y_n + L_n \quad (1.48)$$

$$\mathbf{A}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \Delta t^2 \beta \tilde{\omega}^2 & 2\Delta t^2 \beta \xi \tilde{\omega} & 0 & \Delta t^2 \beta \eta \omega \\ \Delta t \gamma \tilde{\omega}^2 & 1 + 2\Delta t \gamma \xi \tilde{\omega} & 0 & \Delta t \gamma \eta \omega \\ 0 & -\Delta t^2 \beta \eta \omega & 1 + \Delta t^2 \beta \tilde{\omega}^2 & 2\Delta t^2 \beta \xi \tilde{\omega} \\ 0 & -\Delta t \gamma \eta \omega & \Delta t \gamma \tilde{\omega}^2 & 1 + 2\Delta t \gamma \xi \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\tilde{\omega}^2 & \Delta t(1 - \Delta t(1 - 2\beta)\xi\tilde{\omega}) & 0 & -\frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\eta\omega \\ -\Delta t(1 - \gamma)\tilde{\omega}^2 & 1 - 2\Delta t(1 - \gamma)\xi\tilde{\omega} & 0 & -\Delta t(1 - \gamma)\eta\omega \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\eta\omega & 1 - \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\tilde{\omega}^2 & \Delta t(1 - \Delta t(1 - 2\beta)\xi\tilde{\omega}) \\ 0 & \Delta t(1 - \gamma)\eta\omega & -\Delta t(1 - \gamma)\tilde{\omega}^2 & 1 - 2\Delta t(1 - \gamma)\xi\tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{A}_1$ - $\mathbf{A}_2$ présentent une anti-symétrie par bloc qui est conservée pour la recherche du déterminant $\det(\mathbf{A}_2 - \lambda\mathbf{A}_1)$, eq. (1.49), et qui rend le déterminant calculable, eq.(1.50).

$$\mathbf{A}_2 - \lambda\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB) \quad (1.50)$$

En écrivant les matrices $A + iB$ et $A - iB$, il est aisément démontrable que le terme $i\omega\eta$ est positionné à coté du terme d'amortissement classique ξ . En conclusion, pour un système en rotation, la stabilité d'un schéma d'intégration doit être étudiée avec un terme ξ' équivalent complexe (1.51) alors qu'il est supposé réel dans un système non tournant.

$$\xi' = \xi \pm \frac{i\omega\eta}{2\tilde{\omega}} \quad (1.51)$$

1.3.2.4 Analyse de la stabilité d'un schéma d'intégration avec un terme d'amortissement complexe

La matrice d'amplification $\mathbf{A}$ se réécrit donc de la même manière que celle proposée initialement par Hughes [60] en gardant en considération le fait que le terme d'amortissement ξ est complexe.

$$\mathbf{A}'_1 y_{n+1} = \mathbf{A}'_2 y_n + L_n \quad (1.52)$$

$$\mathbf{A}'_1 = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t^2 \beta \tilde{\omega}^2 & 2\Delta t^2 \beta \xi' \tilde{\omega} \\ \Delta t \gamma \tilde{\omega}^2 & 1 + 2\Delta t \gamma \xi' \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}'_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \tilde{\omega}^2 & \Delta t (1 - \Delta t (1 - 2\beta) \xi' \tilde{\omega}) \\ -\Delta t (1 - \gamma) \tilde{\omega}^2 & 1 - 2\Delta t (1 - \gamma) \xi' \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de ce système est de nouveau réalisé sur le système généralisé $\mathbf{A}'_2 - \lambda \mathbf{A}'_1$. L'équation caractéristique de cette matrice se met sous la forme (1.53).

$$\lambda^2 - 2A'_1 \lambda + A'_2 = 0 \quad (1.53)$$

$$A'_1 = 1 - \left[\xi' \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2 (\gamma + \frac{1}{2}) / 2 \right] / D'$$

$$A'_2 = 1 - \left[2\xi' \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2 (\gamma - \frac{1}{2}) \right] / D'$$

$$D' = 1 + 2\gamma \xi' \tilde{\omega} + \beta \tilde{\omega}^2$$

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \Delta t$$

La suite de la démonstration proposée par Hughes ne peut plus être utilisée car l'équation caractéristique est complexe. Par ailleurs la solution proposée par Betschko et *al.* [10], qui recherche le domaine A'_1, A'_2 par le critère de Routh, ne fonctionne pas non plus. En effet, le critère de Routh est associé à un polynôme à coefficients réels ce qui n'est pas le cas-ici. Si la stabilité devait être testée sur un grand nombre de degrés de liberté, l'extension du critère de Routh aux polynômes à coefficients complexes, proposée par Benidir [11], pourrait être une solution envisageable. Dans le contexte de cette démonstration, l'équation (1.53) est seulement du second degré et peut être réécrite sous la forme (1.54).

$$(1 + i\gamma E) \lambda^2 - 2(A_1 + i(\gamma - \frac{1}{2})E) \lambda + A_2 + i(\gamma - 1)E = 0 \quad (1.54)$$

$$A_1 = 1 - \left[\xi \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2 (\gamma + \frac{1}{2}) / 2 \right] / D$$

$$A_2 = 1 - \left[2\xi \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2 (\gamma - \frac{1}{2}) \right] / D$$

$$E = \frac{\Omega \eta \Delta t}{D}$$

$$D = 1 + 2\gamma \xi \tilde{\Omega} + \beta \tilde{\Omega}^2$$

Suivant la méthode par Hilber [58], le domaine A_1 - A_2 et ici E dans lequel la norme de la solution est inférieure à 1 est recherché en analysant tout d'abord la limite de stabilité $|\lambda| = 1$ avec $\lambda = e^{i\alpha}$.

- Si $\alpha = 0$, l'écriture de la partie réelle de (1.54) conduit à l'équation $1 - 2A_1 + A_2 = 0$ tandis que la partie imaginaire s'annule.

- Si $\alpha = \pi$, la partie réelle de (1.54) conduit à l'équation $1 + 2A_1 + A_2 = 0$ tandis que la partie imaginaire impose $\gamma = \frac{1}{2}$.

- Si $0 < \alpha < \pi$ ou $-\pi < \alpha < 0$, en proposant les conditions $\gamma = \frac{1}{2}$, $A_2 = 1$ et $|A_1| = 1 + \zeta$ ($\zeta \in [-1; 1]$), il peut être démontré que la norme de λ est égale à 1 sous la condition que $E^2 - 8\zeta + 4\zeta^2 > 0$.

Ainsi le domaine associé aux conditions de Hughes [60] sur $A_1 - A_2$ est inclus dans ce nouveau domaine ce qui démontre que les conditions de stabilité du schéma d'intégration de Newmark présentées selon les équations (1.40)-(1.43) restent valables pour un système présentant des effets gyroscopiques. Pour le schéma des différences centrées, les effets gyroscopiques conduisent à augmenter le domaine de stabilité de la méthode.

La condition de stabilité du schéma de Newmark ayant été démontrée, on s'intéresse maintenant à la résolution d'un problème par le schéma des différences centrées dont les paramètres d'intégration sont $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$. Il s'agit donc d'un schéma conditionnellement stable.

Application Pour illustrer la stabilité de ce schéma d'intégration, définissons l'équation de la dynamique (1.55) correspondant à la modélisation Rayleigh-Ritz par un mode d'un système proche de celui présenté dans la sous partie 1.3.1 ($H(t)$ correspond à la fonction Heavyside) avec une condition initiale $q(t = 0) = 0$.

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \omega \dot{q} + \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} 10^6 q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} H(t) \quad (1.55)$$

Dans Lalanne et Ferraris [68], les fréquences des deux modes sont données explicitement en fonction de la vitesse de rotation ω . On notera qu'à l'arrêt, ces deux fréquences sont égales et lorsque le système se met à tourner, ces deux fréquences se séparent : une fréquence baisse tandis que la seconde monte. De ce fait, la fréquence de résonance maximum du système est plus grande que la valeur à l'arrêt.

D'après la condition de Hughes, le pas de temps d'intégration de ce système doit rester inférieur à $\Delta t_s = 6.8 \cdot 10^{-3} s$. La résolution de l'équation (1.55) est menée dans quatre situations :

- un pas d'intégration de $\Delta t = 6.8 \cdot 10^{-3} s$ sans effet gyroscopique ($\omega = 0$),
 - un pas d'intégration de $\Delta t = 6.9 \cdot 10^{-3} s$ sans effet gyroscopique ($\omega = 0$),
 - un pas d'intégration de $\Delta t = 6.9 \cdot 10^{-3} s$ avec une vitesse de rotation $\omega = 500 \text{ Rad/s}$
- et
- un pas d'intégration de $\Delta t = 7.0 \cdot 10^{-3} s$ avec une vitesse de rotation $\omega = 500 \text{ Rad/s}$.

Les résultats en terme d'excentration $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ sont présentés sur la figure 1.7.

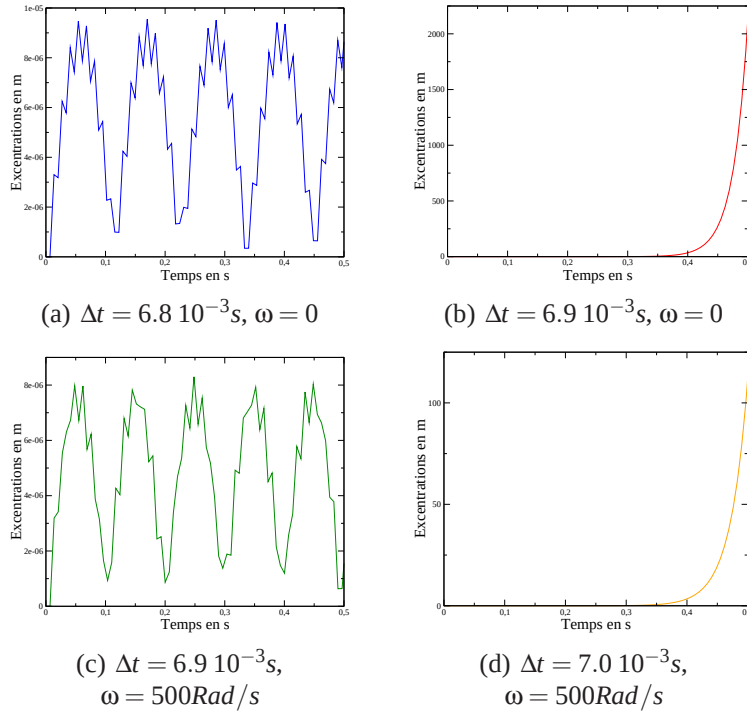


FIG. 1.7: Excentrations du système en fonction du pas de temps d'intégration Δt et de la vitesse de rotation ω

Dans le cas où la vitesse de rotation est nulle, on remarque que la condition de stabilité $\Delta t < \Delta t_s$ définit bien la stabilité du schéma d'intégration, ce qui n'est pas le cas pour le système en rotation à $\omega = 500 \text{ Rad/s}$. En effet, même si la fréquence de résonance maximum augmente, le pas de temps Δt peut être légèrement supérieur à Δt_s sans pour autant rendre l'algorithme d'intégration instable. De ce fait, il n'est pas nécessaire de calculer la fréquence de résonance maximum du système avec effet gyroscopique pour s'assurer que le schéma d'intégration sera stable.

1.3.3 Schéma des différences centrées

L'équation de la dynamique, obtenue par exemple par la méthode des éléments finis, est rappelée équation (1.56) :

$$M\ddot{q} + (C + \dot{\psi}G)\dot{q} + (K)q = \dot{\psi}^2 F_1(t) + \ddot{\psi} F_2(t) \quad (1.56)$$

En utilisant le schéma des différences centrées (1.57) (Schéma de Newmark avec $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{1}{2}$), l'équation matricielle peut être résolue.

$$\begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_{n+1} + \ddot{q}_n) \\ q_{n+1} = q_n + \Delta t \left(\dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_n \right) \end{cases} \quad (1.57)$$

$$\Delta t \leq \frac{2}{\tilde{\omega}_{max}} \quad (1.58)$$

Dans les équations (1.57), q définit les degrés de liberté du système, $\dot{q}$ les vitesses nodales, et $\ddot{q}$ les accélérations. L'indice n définit une quantité au temps $n\Delta t$ alors que l'indice $n+1$ définit une quantité au temps $(n+1)\Delta t$. Δt est le pas de temps satisfaisant la condition (1.58).

Dans un solveur éléments finis explicite (LsDyna, Europlexus), l'algorithme d'intégration temporel (1.57) appliqué à une équation ne présentant pas de termes sur la vitesse est implémentée comme suit.

- Les quantités sont connues au pas de temps n et la vitesse intermédiaire $\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}$ peut être trouvée par l'équation (1.59) :

$$\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_n \quad (1.59)$$

- q^{n+1} est ensuite calculé par la seconde équation des différences centrées, éq. (1.57).

- Connaissant le déplacement de la structure, les forces internes peuvent être définies au temps $n+1$. Si une non linéarité est présente dans la structure, le calcul des forces est directement réalisé par intégration des contraintes dans l'élément, éq. (1.60) avec B_e la matrice élémentaire reliant les déformations aux déplacements nodaux et $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$ la contrainte dans le volume V .

$$F_{Int}(t_{n+1}) = \int_V B_e^T \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) dV \quad (1.60)$$

- $\ddot{q}_{n+1}$ est trouvé directement par la première équation des différences centrées, éq. (1.61), et $\dot{q}_{n+1}$ est finalement donné par (1.62).

$$M\ddot{q}_{n+1} = F_{Ext}(t_{n+1}) - F_{Int}(t_{n+1}) \quad (1.61)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{n+1} \quad (1.62)$$

La résolution d'un problème par l'algorithme présenté ci dessus est intéressant si les non-linéarités ou les variations de chargements sur la structure sont importants. Cependant ce n'est pas toujours le cas et il est courant que le système présente des domaines dans lesquels les pas de temps d'intégration soient plus faibles que dans d'autres domaines présentant à la fois un nombre d'éléments plus élevé et un pas d'intégration plus grand. Dans ce contexte, la méthode des sous domaines multi-pas de temps a été développée.

1.3.4 Méthode des sous domaines

Dans la méthode des sous-domaines, le domaine principal est divisé en plusieurs parties, les sous domaines, qui sont reliés par des frontières dénommées interfaces. Dans chaque sous domaine, l'application de l'algorithme des différences centrées sur l'équation de la dynamique obtenue par l'équation de Lagrange sur le système discrétisé par la

méthode des éléments finis conduit à l'équilibre dynamique à chaque pas de temps, éq. (1.63).

$$M\ddot{q}_{n+1} = F_{Ext}(t_{n+1}) - F_{Int}(t_{n+1}) = F_{n+1} \quad (1.63)$$

Pour assurer la résolution du problème global, chaque sous domaine doit satisfaire à deux types de conditions :

- une condition de continuité cinématique,
- un équilibre sur les forces présentes sur les interfaces.

La première condition impose que le mouvement d'une frontière sur un domaine doit être égal à celui de la frontière correspondante sur l'autre domaine tandis que la seconde se traduit par le fait que la somme des forces appliquées sur chaque domaine au niveau d'une interface doit être nulle.

Selon la méthode duale proposée par Gravouil et Combescure [49], l'équilibre des forces d'interfaces est réalisé implicitement tandis que pour la continuité cinématique, le champ des vitesses est choisi (Faucher et Combescure [40]). Les conditions sur les vitesses sont alors imposées à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

Pour une liaison entre deux sous domaines, la minimisation de la fonctionnelle de l'énergie et l'introduction du schéma des différences centrées conduit au problème à résoudre (1.64) (Faucher et Combescure [40]).

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} M^1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} C^{1T} \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} M^2 & -\frac{\Delta t}{2} C^{2T} \\ -\frac{\Delta t}{2} C^1 & \frac{\Delta t}{2} C^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n+1}^1 \\ \ddot{q}_{n+1}^2 \\ \Lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} F_{n+1}^1 \\ \frac{\Delta t}{2} F_{n+1}^2 \\ C^1 \dot{q}_{n+1/2}^1 + C^2 \dot{q}_{n+1/2}^2 \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Dans l'équation (1.64), l'exposant i est associé au domaine 1 et 2, M^i correspond à la matrice de masse d'un domaine, $\ddot{q}_{n+1}^i$ l'accélération au pas de temps t_{n+1} , $F_{n+1}^i = F_{Ext}(t_{n+1})^i - F_{Int}(t_{n+1})^i$ les forces appliquées au pas de temps t_{n+1} , $\dot{q}_{n+1/2}^i$ les vitesses au demi pas d'intégration et C^i des matrices de projection des noeuds des interfaces des domaines. Ces dernières matrices sont booléennes si les maillages sont coïncidents et lorsque les domaines sont exprimées sur leurs degrés de liberté physiques.

Ce problème couplé est scindé en deux problèmes en écrivant que les accélérations inconnues s'écrivent selon l'équation (1.65).

$$\ddot{q}_{n+1}^i = \ddot{q}_{libre_{n+1}}^i + \ddot{q}_{liee_{n+1}}^i \quad (1.65)$$

- Le premier problème correspond à la résolution des domaines sans prise en compte des interfaces.

$$\begin{bmatrix} M^1 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{libre_{n+1}}^1 \\ \ddot{q}_{libre_{n+1}}^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1}^1 \\ F_{n+1}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

- Dans le second problème, l'objectif est de déterminer les accélérations associées au

couplage des domaines

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} M^1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} C^{1T} \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} M^2 & -\frac{\Delta t}{2} C^{2T} \\ -\frac{\Delta t}{2} C^1 & \frac{\Delta t}{2} C^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{liee_{n+1}}^1 \\ \ddot{q}_{liee_{n+1}}^2 \\ \Lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C^1 \dot{q}_{libre_{n+1}}^1 + C^2 \dot{q}_{libre_{n+1}}^2 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Dans ce second problème, on remarque que le prédicteur de vitesse est devenu la vitesse calculée de façon libre sur les domaines $\dot{q}_{libre_{n+1}}^i = \dot{q}_{n+1/2}^i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{libre_{n+1}}^i$.

Ce second problème peut être résolu par condensation statique et conduit à la connaissance des multiplicateurs de Lagrange Λ^n ce qui donne les accélérations liées $\ddot{q}_{liee_{n+1}}^i$.

$$\Lambda^n = -\left(\frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^2 C^i M^{i-1} C^{iT}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 C^i \dot{q}_{libre_{n+1}}^i\right) \quad (1.68)$$

Dans un cadre de sous domaines avec des pas de temps différents, les équations (1.66)(1.67) peuvent être réécrites en considérant que la vitesse calculée de façon libre sur le domaine présentant le plus grand pas de temps $\dot{q}_{libre_{n+1}}^1$ sera alors interpolée entre sa valeur au pas suivant et sa valeur initiale (voir Gravouil et Combescure [49] ou Faucher et Combescure [40]). La méthode est alors qualifiée de multi-domaines et multi pas de temps.

La méthode multi-domaines permet d'accélérer les temps de calculs mais elle ne réduit pas la dimension du problème à résoudre. Dans la partie suivante, la synthèse modale sera donc évoquée. On s'attachera tout d'abord à rappeler certaines définitions connues des super-éléments et leur lien avec l'impédance du système. Ensuite, la construction particulière des super-éléments de Faucher sera traitée. Enfin une nouvelle méthode présentant une fiabilité optimale dans le domaine des moyennes fréquences sera évoquée.

1.4 Définition des Super-Éléments

Dans les travaux de Faucher et Combescure [40], la méthode des sous domaines a été étendue pour tenir compte d'un domaine écrit dans une base modale quelconque. De plus, une base modale spéciale basée sur la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton a été spécialement développée pour son intégration dans la méthode des sous domaines.

La méthode de synthèse modale consiste à remplacer un domaine d'un problème qui est seulement lié ou excité sur une partie du domaine par un domaine présentant un nombre de degrés de liberté réduit. Cette configuration est en fait majoritairement rencontrée sur une structure puisque le champ de solution du problème initial est défini par la méthode des éléments finis. Dans la méthode des éléments finis, le champ de solutions est défini par morceaux selon la forme géométrique du domaine. De ce fait, en accord avec la complexité du domaine, le nombre d'éléments et de degrés de liberté peut être important (dans plusieurs cas, 10^5 à 10^7 degrés de liberté).

En général, seules les solutions de basses fréquences sont étudiées et il est avantageux de réduire le problème en une taille plus petite en gardant seulement par exemple

les solutions de basses fréquences du problème. Dans la méthode de synthèse modale, la réduction de l'espace est associée à une base de projection qui transfère les informations connues sur un espace réduit sur le domaine complet et *vice versa*. La définition des types de modes qui définissent la projection n'est pas unique et plusieurs auteurs ont proposé des solutions associées à la définition des conditions aux limites dans un problème aux valeurs propres généralisées du domaine. Les conditions proposées actuellement sont les interfaces fixes (Craig et Bampton [32]), les interfaces libres ou mixtes (Craig et Chang [33]). Dans la condition d'interfaces fixes, une première base correspond aux vecteurs propres de premiers modes de la structure avec des conditions encastrees sur les frontières. Cette base est augmentée par des modes statiques correspondant à des déplacements unitaires sur les degrés de liberté des interfaces avec les autres degrés encastrees. Ces modes statiques portent le nom de condensation statique de Guyan-Irons [52][62].

Dans les codes explicites, l'équation de la dynamique est résolue par le schéma des différences centrées de Newmark [87]. La méthode de synthèse modale à interfaces fixes conduit classiquement à la définition d'une matrice de masse pleine qui est incompatible avec une résolution explicite. Conceptuellement, dans les codes explicites, la matrice de masse diagonale est obtenue en définissant une distribution de la masse d'un élément de façon ponctuelle à ses extrémités ce qui est en désaccord avec la fonction de forme des éléments (Hinton et *al.* [59]). Dans une méthode de synthèse modale à interfaces fixes, la matrice de masse ne peut être diagonale puisque elle est obtenue par le processus de réduction du modèle et que les termes non diagonaux assurent le couplage entre les degrés de liberté frontières et les degrés de liberté internes. Si ces termes sont considérés nuls, le système réduit sera équivalent à un système réduit de Guyan dont la précision est faible dans la représentation dynamique du système.

Pour éviter l'inversion de la matrice de masse et rendre le calcul explicite, Faucher et Combescure [40] proposent de modifier la définition de la matrice de transfert en réalisant les opérations suivantes sur la matrice de transfert de Craig-Bampton :

- une orthogonalisation dans la métrique de la matrice de masse (ou au "sens de la masse" comme le dénomment Morand et Ohayon [82]) des modes statiques par rapport aux modes dynamiques,
- suivie d'une orthogonalisation dans la métrique de la matrice de masse des modes statiques entre eux.

La matrice réduite de rigidité perd sa structure diagonale par bloc et devient complètement pleine au bénéfice de la matrice réduite de masse qui devient purement diagonale.

Ce processus modifie fortement la définition des modes statiques et une analyse est réalisée dans la suite de cette partie pour démontrer que l'impédance du nouveau système réduit est équivalente à celle du système réduit initial. Par ailleurs, un raisonnement plus approfondi est réalisé sur la définition des super-éléments à interfaces fixes par rapport à la fréquence d'excitation du système et permet de donner une nouvelle formulation de super-élément dans la gamme des moyennes fréquences. Cette formulation permet de réduire la base modale à un nombre de modes minimum ce qui permet de réduire les temps de calculs et de mieux comprendre le système.

1.4.1 Définition d'un sous domaine

Un sous domaine S est caractérisé par les degrés de liberté présents sur une interface ou chargés par une action extérieure (q_M : degré maître) et les degrés esclaves ou intérieurs du domaine (q_S) (figure 1.8).

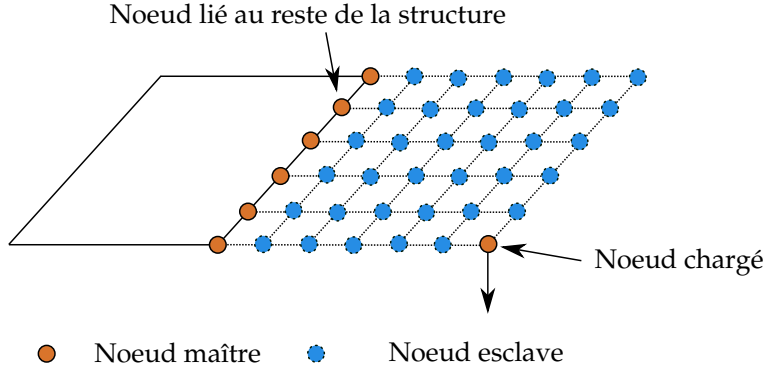


FIG. 1.8: Définition d'un sous domaine

En accord avec cette définition, le système mécanique caractérisé par ses matrices de masse M et de rigidité K s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_{MM} & M_{MS} \\ M_{SM} & M_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{MM} & K_{MS} \\ K_{SM} & K_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

g_S est nul par définition puisque les degrés de liberté libres sont non liés avec le reste de la structure et non chargés par un chargement extérieur. Par définition, la dimension de l'espace des degrés "maîtres" vaut n_m tandis que celle de l'espace de degrés internes vaut n_s .

1.4.2 Définition de l'impédance d'un système

L'impédance d'un système correspond à la matrice dépendante de la fréquence qui relie les amplitudes des forces appliquées g_M aux déplacements q_M . Pour le système global, l'impédance du système est écrite selon l'équation (1.70)

$$\begin{bmatrix} Z_{MM}(\omega^2) & Z_{MS}(\omega^2) \\ Z_{SM}(\omega^2) & Z_{SS}(\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Le terme $Z_{XX}(\omega^2)$ est égal à $K_{XX} - \omega^2 M_{XX}$.

En remarquant que $Z_{SS}^{-1} = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)}$ (Annexe B)⁵, l'impédance du système peut

⁵L'inverse de l'impédance est aussi appelé la "résolvante" ou matrice des coefficients d'influence dynamique du système.

être réécrite sous la forme (1.71).

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{MM} = & K_{MM} - K_{MS} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} K_{SM} \\ & + \omega^2 (-M_{MM} + K_{MS} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} M_{SM} + M_{MS} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} K_{SM}) \\ & - \omega^4 M_{MS} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} M_{SM}\end{aligned}\quad (1.71)$$

ϕ_i et $\tilde{\omega}_i$ sont les formes et fréquences des modes provenant de la résolution du problème aux valeurs propres généralisées K_{SS} - M_{SS} , n_s est le nombre de degrés de liberté ou de modes du système libre.

Dans le but de définir un développement en fonction du paramètre ω^2 , Gérardin et Rixen [44] ont décomposé la fonction rationnelle $\frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)}$ selon ω^2 en éléments simples, éq. (1.72).

$$\sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^2} + \omega^2 \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^4} + \omega^4 \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^4 (\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} \quad (1.72)$$

Par cette expression, l'impédance du système (1.71) est réarrangée sous la forme (1.73).

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{MM} = & K_{MM} - K_{MS} K_{SS}^{-1} K_{SM} \\ & - \omega^2 \left[M_{MM} - M_{MS} K_{SS}^{-1} K_{SM} - K_{MS} K_{SS}^{-1} M_{SM} + K_{MS} K_{SS}^{-1} M_{SS} K_{SS}^{-1} K_{SM} \right] \\ & + \omega^4 \sum_{i=1}^{n_s} \frac{1}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} \\ & \left\{ -M_{MS} \phi_i \phi_i^T M_{SM} + \frac{M_{MS} \phi_i \phi_i^T K_{SM}}{\tilde{\omega}_i^2} + \frac{K_{MS} \phi_i \phi_i^T M_{SM}}{\tilde{\omega}_i^2} - \frac{K_{MS} \phi_i \phi_i^T K_{SM}}{\tilde{\omega}_i^4} \right\}\end{aligned}\quad (1.73)$$

L'expression (1.73) est divisée en trois groupes d'ordre 0, 1 et 2 en ω^2 .

- Le premier groupe représente la rigidité statiquement condensée sur l'interface.
- Le second groupe la matrice de masse condensée selon un processus de condensation statique par la matrice de rigidité.
- Le troisième terme complète les deux premiers groupes en apportant la contribution des modes internes.

1.4.3 Concept de la réduction modale

Le concept général de la réduction modale est de définir un sous espace de dimension restreinte par rapport à l'espace initial $T \in \mathfrak{R}_{(n_m+m) \times (n_m+m)}$ dans le but d'approximer le vecteur d'état q par un vecteur de dimension réduite $q = T\alpha + \varepsilon$. En projetant l'équation

de la dynamique sur un espace de dimension réduite, une équation différentielle ordinaire du second ordre et de dimension réduite est obtenue. Les matrices réduites prennent les formes $\bar{M} = T^T M T$, $\bar{K} = T^T K T$ avec $\bar{b} = T^T B$ le vecteur de chargement réduit. L'efficacité et la validité de la réduction dépendent de la dimension de ε . Selon le choix de T , plusieurs techniques ont été développées.

Tout d'abord, Guyan [52] et Irons [62] ont proposé une condensation déduite du fait que la rigidité d'un domaine peut être condensée sur ses interfaces.

$$\begin{bmatrix} K_{MM} & K_{MS} \\ K_{SM} & K_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_M \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (K_{MM} - K_{MS} K_{SS}^{-1} K_{SM}) q_M = g_M \quad (1.74)$$

La matrice de transfert T_{Guyan} associée à cette méthode s'écrit selon l'équation (1.75).

$$T_{Guyan} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{SS}^{-1} K_{SM} \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

Dans le cas d'une sollicitation statique, cette condensation donne un résultat exact puisque aucune approximation n'est réalisée. Dans le domaine dynamique, l'impédance du système écrite selon l'équation (1.76) est tronquée puisque le terme en ordre 2 en ω^2 n'est pas présent. La méthode sera alors valable uniquement si l'excitation présente une fréquence ω inférieure à la première fréquence des modes internes $\tilde{\omega}_1$. Cette définition permet de comprendre les manipulations effectuées sur le système mécanique pour introduire des degrés maîtres dans le système interne afin d'augmenter $\tilde{\omega}_1$ et représenter correctement le système mécanique dans une plage fréquentielle plus grande.

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{MM_{Guyan}} &= K_{MM} - K_{MS} K_{SS}^{-1} K_{SM} \\ &\quad - \omega^2 \left[M_{MM} - M_{MS} K_{SS}^{-1} K_{SM} - K_{MS} K_{SS}^{-1} K_{SM} + K_{MS} K_{SS}^{-1} M_{SS} K_{SS}^{-1} K_{SM} \right] \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dans le but de combler cet aspect, Craig et Bampton [32] ont proposé d'augmenter la base de projection de système réduit par m degrés de liberté additionnels provenant de la résolution du problème aux valeurs propres généralisées sur le partie libre. Cette méthode porte le nom de synthèse modale à interfaces fixes. La matrice de réduction $T_{Craig-Bampton}$ s'écrit comme suit :

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_{SS}^{-1} K_{SM} & \Phi_m \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

Φ_m correspond à la matrice des vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisées sur le système ayant les interfaces fixes. La base est normalisée selon la matrice de masse M . Par définition, le nombre de modes pris en compte m est inférieur voire très inférieur au nombre de degrés de liberté internes n_s . Une conséquence majeure est que les inverses des matrices de masse, de rigidité ou d'impédance du système interne ne peuvent être obtenues par cette base tronquée.

Les matrices réduites de masse et de rigidité du système sont écrites selon l'équation (1.78).

$$\bar{M}_{CB} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{MM_{CB}} & \bar{M}_{MS_{CB}} \\ \bar{M}_{SM_{CB}} & I \end{bmatrix} \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{MM_{CB}} & 0 \\ 0 & \tilde{\Omega}_m^2 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

avec les sous matrices

$$\begin{aligned}\bar{M}_{MM_{CB}} &= M_{MM} - M_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM} - K_{MS}K_{SS}^{-1}M_{SM} + K_{MS}K_{SS}^{-1}M_{SS}K_{SS}^{-1}K_{SM} \\ \bar{M}_{SM_{CB}} &= \Phi_m^T(M_{SM} - M_{SS}K_{SS}^{-1}K_{SM}) = \bar{M}_{MS_{CB}}^T \\ \bar{K}_{MM_{CB}} &= K_{MM} - K_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM}\end{aligned}$$

L'impédance de système réduit de Craig Bampton est écrite dans l'équation (1.79).

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{MM_{CB}} &= K_{MM} - K_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM} \\ &\quad - \omega^2(M_{MM} - M_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM} - K_{MS}K_{SS}^{-1}K_{SM} + K_{MS}K_{SS}^{-1}M_{SS}K_{SS}^{-1}K_{SM}) \\ &\quad + \omega^4(M_{MS} - K_{MS}K_{SS}^{-1}M_{SS})\Phi_m \frac{1}{(\tilde{\Omega}_m^2 - \Omega^2)} \Phi_m^T(M_{SM} - M_{SS}K_{SS}^{-1}K_{SM})\end{aligned}\quad (1.79)$$

Les deux premiers termes de l'expression (1.79) correspondent à l'impédance de la condensation statique donnée dans l'équation (1.76). Le troisième terme correspond à une approximation du troisième terme de l'équation (1.73). Le système réduit approxime donc :

- le terme en ordre 2 en ω^2 de la partie $K_{MS}...K_{SM}$,
- les termes en ordre 1 et 2 en ω^2 des parties $M_{MS}...K_{SM}$ et $K_{MS}...M_{SM}$,
- les termes en ordre 0, 1 et 2 en ω^2 de la partie $M_{MS}...M_{SM}$.

L'approximation est due à la troncature modale du système. Si le nombre de modes dynamiques m est égal à la dimension des matrices M_{SS} et K_{SS} alors l'impédance du système de Craig-Bampton correspond exactement à l'impédance du système réelle (1.73).

1.4.4 Analyse du processus de Faucher

Sur les codes explicites, pour éviter l'inversion de la matrice de masse et rendre le calcul explicite, Faucher et Combescure [40] proposent de modifier la définition de la matrice de transfert en réalisant les opérations suivantes sur la matrice de transfert de Craig-Bampton :

- une orthogonalisation dans la métrique de la matrice de masse des modes statiques par rapport aux modes dynamiques,
- suivie d'une orthogonalisation dans la métrique de la matrice de masse des modes statiques entre eux.

La matrice réduite de rigidité perd sa structure diagonale par bloc et devient complètement pleine au bénéfice de la matrice réduite de masse qui devient purement diagonale.

La résolution du problème aux valeurs propres généralisées sur les matrices de dimension n_s , M_{SS} et K_{SS} , définit une base orthogonale de dimensions n_s . Le système réduit de Craig-Bampton conserve seulement m vecteurs de cette base. Par ailleurs, les n_m modes statiques de Craig-Bampton sont orthogonaux aux modes dynamiques dans la métrique de K puisque la matrice réduite est diagonale par bloc. De plus, l'addition de n_m degrés de liberté à la base de m modes dynamiques augmente l'application d'un espace de

dimension m à un espace de dimension $m + n_m$. Selon le processus de Faucher, l'orthogonalisation des modes statiques par les modes dynamiques dans la métrique de M ne réduit pas cet espace de dimension $m + n_m$ tandis que la seconde orthogonalisation conduit à un réarrangement de l'espace de dimension n_m sans le réduire.

Afin d'identifier le type de matrice de transfert obtenue, définissons une matrice de $T_{Faucher}$, eq. (1.80).

$$T_{Faucher} = \begin{bmatrix} \Phi_M & 0 \\ \Phi_{mM} & \Phi_m \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

La matrice Φ_m contient les m modes dynamiques obtenus sur le problème aux valeurs propres généralisées M_{SS} - K_{SS} tandis que les matrices Φ_M et Φ_{mM} sont les inconnues du problème.

L'application de la projection $T_{Faucher}$ sur une matrice X (M ou K) du système complet conduit à la matrice réduite $\bar{X}_{Faucher}$, eq. (1.81).

$$\bar{X}_{Faucher} = T_{Faucher}^T X T_{Faucher} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{MM_{Faucher}} & \bar{X}_{MS_{Faucher}} \\ \bar{X}_{SM_{Faucher}} & \bar{X}_{SS_{Faucher}} \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

avec les sous matrices

$$\begin{aligned} \bar{X}_{MM_{Faucher}} &= \Phi_M^T X_{MM} \Phi_M + \Phi_M^T X_{MS} \Phi_{mM} + \Phi_{mM} X_{SM} \Phi_M + \Phi_{mM} X_{SS} \Phi_{mM} \\ \bar{X}_{MS_{Faucher}} &= (\Phi_M^T X_{MS} + \Phi_{mM} X_{SS}) \Phi_m = \bar{X}_{SM}^T \\ \bar{X}_{SS_{Faucher}} &= \Phi_m^T X_{SS} \Phi_m \end{aligned}$$

$\Phi_m^T X_{SS} \Phi_m$ est une matrice diagonale par la définition des modes Φ_m et la valeur de la diagonale dépend de la normalisation choisie. Pour la suite des développements, la normalisation est réalisée selon la matrice de masse et de ce fait $\Phi_m^T M_{SS} \Phi_m = I$ et $\Phi_m^T K_{SS} \Phi_m = \tilde{\Omega}^2$.

Dans le but d'annuler la partie anti-diagonale de la matrice $\bar{X}_{Faucher}$, il est requis que :

$$(\Phi_M^T X_{MS} + \Phi_{mM} X_{SS}) \Phi_m = 0 \quad (1.82)$$

Deux solutions apparaissent :

- la première est de définir

$$\Phi_{mM} = -X_{SS}^{-1} X_{SM} \Phi_M \quad (1.83)$$

La condensation de Guyan et de Craig-Bampton utilise cette condition avec $X_{Faucher} = K$ et $\Phi_M = I$ et donc

$$\Phi_{mM} = -K_{SS}^{-1} K_{SM} \quad (1.84)$$

Si $X_{Faucher} = M$, ce choix conduit à un système réduit qui a un sens particulier puisque les modes statiques deviennent définis par rapport à une matrice de masse, éq. (1.85). En fait, c'est un cas limite de la seconde possibilité.

$$\Phi_{mM} = -M_{SS}^{-1} M_{SM} \Phi_M \quad (1.85)$$

- la seconde est de rechercher Φ_{mM} sans réduire l'équation (1.82) par la projection Φ_m

$$\Phi_m^T X_{SS} \Phi_{mM} = -\Phi_m^T X_{SM} \Phi_M \quad (1.86)$$

En effet l'application Φ_m réduit l'espace de dimension n_s en un espace de dimension m . Ne pas prendre en compte cette réduction conduit à écrire la condition (1.85) pour $X = M$. De ce fait, la base de projection Φ_{mM} est proposée comme une mitigation entre les deux solutions (1.84)(1.85) proposées précédemment, eq. (1.87).

$$\begin{aligned} \Phi_{mM} &= -\left(\sum_{i=1}^m \phi_i \phi_i^T M_{SM} + \sum_{j=m+1}^{n_s} \frac{\phi_j \phi_j^T}{\tilde{\omega}_j^2} K_{SM}\right) \Phi_M \\ &= -(\Phi_m \Phi_m M_{SM} + \frac{\Phi_{mn} \Phi_{mn}}{\tilde{\Omega}_{mn}^2} K_{SM}) \Phi_M \end{aligned} \quad (1.87)$$

Le terme $\Phi_m \Phi_m^T$ correspond à la matrice inverse partielle de la matrice de masse M . Par l'orthogonalité des vecteurs propres, la base proposée (1.87) satisfait la condition (1.82) sur la matrice X égale à M et correspond à la base obtenue après la première orthogonalisation du processus de Faucher. En effet, la base des modes statiques de Faucher est obtenue par une résolution sur la matrice de rigidité puis orthogonalisée seulement sur les m premiers modes de la matrice de masse M .

La seconde orthogonalisation conduit à $\bar{M}_{MM} = I$. La définition des Φ_M doit donc satisfaire à l'équation (1.88).

$$\begin{aligned} \bar{M}_{MM} &= \Phi_{MM}^T (M_{MM} - M_{MS} \Phi_m \Phi_m^T M_{SM} - M_{MS} - \Phi_{mn} \frac{1}{\tilde{\Omega}_m^2} \Phi_{mn} K_{SM} - \\ &K_{MS} \Phi_{mn}^T \frac{1}{\tilde{\Omega}_m^2} \Phi_{mn}^T M_{SM} + K_{MS} \Phi_{mn}^T \frac{1}{\tilde{\Omega}_m^4} \Phi_{mn} K_{SM}) \Phi_{MM} = I \end{aligned} \quad (1.88)$$

Cette équation correspond à la définition des vecteurs propres dénommées Φ_M de la matrice $M_{MM} - M_{MS} \Phi_m \Phi_m^T M_{SM} - M_{MS} - \Phi_{mn} \frac{1}{\tilde{\Omega}_m^2} \Phi_{mn} K_{SM} - K_{MS} \Phi_{mn}^T \frac{1}{\tilde{\Omega}_m^2} \Phi_{mn}^T M_{SM} + K_{MS} \Phi_{mn}^T \frac{1}{\tilde{\Omega}_m^4} \Phi_{mn} K_{SM}$.

Grâce à la définition de la matrice de projection $T_{Faucher}$, les matrices du système réduit peuvent être écrites :

$$\bar{M}_{Faucher} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \bar{K}_{Faucher} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{MMFaucher} & \bar{K}_{MSFaucher} \\ \bar{K}_{SMFaucher} & \tilde{\Omega}_m^2 \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

avec les sous matrices

$$\begin{aligned} \bar{K}_{MMFaucher} &= \Phi_M^T (K_{MM} - K_{MS} \frac{\Phi_{mn} \Phi_{mn}^T}{\tilde{\Omega}_{mn}^2} K_{SM} - K_{MS} \Phi_m \Phi_m^T M_{SM} - \\ &M_{MS} \Phi_m \Phi_m^T K_{SM} + M_{MS} \Phi_m \tilde{\Omega}_m^2 \Phi_m^T M_{SM}) \Phi_M \\ \bar{K}_{MSFaucher} &= \Phi_M^T (K_{MS} - M_{MS} \tilde{\Omega}_m^2) \Phi_m = \bar{K}_{SMFaucher}^T \end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul de l'impédance du système réduit de Faucher, la définition de l'espace des degrés maîtres est conservée (pas de réarrangement de l'espace par des vecteurs propres). La matrice de transfert s'écrit donc selon l'équation (1.90).

$$T'_{Faucher} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_{mM} & \Phi_m \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

Le système réduit s'écrit alors simplement :

$$\bar{M}'_{Faucher} = \begin{bmatrix} \bar{M}'_{MM_{Faucher}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \bar{K}'_{Faucher} = \begin{bmatrix} \bar{K}'_{MM_{Faucher}} & \bar{K}'_{MS_{Faucher}} \\ \bar{K}'_{SM_{Faucher}} & \tilde{\Omega}_m^2 \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

avec les sous matrices

$$\begin{aligned} \bar{M}'_{MM_{Faucher}} &= M_{MM} - M_{MS} \Phi_m \Phi_m^T M_{SM} - M_{MS} \frac{\Phi_{mn} \Phi_{mn}^T}{\tilde{\Omega}_{mn}^2} K_{SM} - \\ &\quad K_{MS} \frac{\Phi_{mn} \Phi_{mn}^T}{\tilde{\Omega}_{mn}^2} M_{SM} + K_{MS} \frac{\Phi_{mn} \Phi_{mn}^T}{\tilde{\Omega}_{mn}^4} K_{SM} \\ \bar{K}'_{MM_{Faucher}} &= K_{MM} - K_{MS} \frac{\Phi_{mn} \Phi_{mn}^T}{\tilde{\Omega}_{mn}^2} K_{SM} - K_{MS} \Phi_m \Phi_m^T M_{SM} - \\ &\quad M_{MS} \Phi_m \Phi_m^T K_{SM} + M_{MS} \Phi_m \tilde{\Omega}_m^2 \Phi_m^T M_{SM} \\ \bar{K}'_{MS_{Faucher}} &= (K_{MS} - M_{MS} \tilde{\Omega}_m^2) \Phi_m = K_{SM_{Faucher}}^T \end{aligned}$$

L'impédance de la méthode de Faucher est synthétisée dans l'équation (1.92).

$$\begin{aligned} \bar{Z}'_{MM_{Faucher}} &= \bar{K}'_{MM_{Faucher}} - \bar{K}'_{MS_{Faucher}} \frac{1}{(\tilde{\Omega}_m^2 - \Omega^2)} \bar{K}'_{SM_{Faucher}} \\ &\quad - \omega^2 \bar{M}'_{MM_{Faucher}} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Le développement de cette équation montre que l'impédance $\bar{Z}'_{MM_{Faucher}}$ est exactement la même que celle de Craig-Bampton définie selon l'équation (1.79). Plusieurs exemples présentés dans la partie 1.6.1 permettent d'illustrer ces résultats.

1.4.5 Super-Élément dans la gamme des moyennes fréquences

Dans cette partie, une formulation unifiée va être présentée pour créer un super-élément lorsque le système est excité dans la gamme des moyennes fréquences, c'est à dire au milieu des fréquences des modes dynamiques. En effet, outre l'essai de Shyu et *al.* [102], sur la formulation d'une compensation modale quasi-statique, actuellement aucune formulation n'a été encore développée pour définir un super-élément optimum dans la gamme des moyennes fréquences. Le problème consiste à définir quels sont les modes dynamiques et la formulation des modes statiques à prendre en compte pour créer un super-élément optimum.

La première étape est de définir l'impédance du système dans la gamme des moyennes fréquences. L'impédance exacte du système est écrite dans l'équation (1.71). Le développement de Gèradin ne va pas être utilisé car il a un sens seulement si la fréquence d'excitation ω est inférieure à la première fréquence $\tilde{\omega}_1$ du système interne.

Ayant au préalable résolu le problème aux valeurs propres généralisées sur le système interne, considérons maintenant une fréquence d'excitation ω qui évolue entre deux fréquences ω_{min} et ω_{max} du problème interne, fig. (1.9).

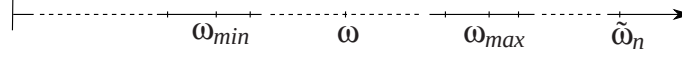


FIG. 1.9: Positionnement de la fréquence d'excitation dans le contenu fréquentiel du système interne. Par définition, ω_{min} sera associée à la p^{ime} fréquence du système interne et ω_{max} à la $p + r^{ime}$ fréquence.

Grâce à cette définition, il est possible de définir une simplification de l'inverse de l'impédance du système interne $\frac{\Phi\Phi^T}{\Omega^2 - \Omega}$. En effet, l'expression peut être divisée en trois groupes distincts.

- Le premier groupe est constitué des fréquences entre 0 et ω_p . La fréquence d'excitation ω est plus grande que les fréquences de résonance du système interne, ce qui conduit à pouvoir réaliser la simplification (1.93).

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \approx - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\omega^2} \approx \frac{\Phi_p \Phi_p^T}{\omega^2} \quad (1.93)$$

- Dans le second domaine entre ω_p et ω_{p+r} , aucune simplification n'est possible et les termes résultants sont seulement réarrangés selon le développement de Gèradin réduit au nombre de modes présents dans cette base (1.94).

$$\sum_{i=p}^{p+r} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} = \sum_{i=p}^{p+r} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^2} + \omega^2 \sum_{i=p}^{p+r} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^4} + \omega^4 \sum_{i=p}^{p+r} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^4 (\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} \quad (1.94)$$

- Dans le troisième domaine entre ω_{p+r} et ω_{n_s} , la fréquence d'excitation ω est plus petite que toutes les fréquences de résonance du système, ce qui permet de réaliser la simplification (1.95).

$$\sum_{i=p+r+1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \approx \sum_{i=p+r+1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^2} \approx \frac{\Phi_{pn} \Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}} \quad (1.95)$$

La simplification de la matrice des amplifications dans le domaine des hautes fréquences (1.95) correspond à la méthode des accélérations modales définie par Lord Rayleigh [95] sur la matrice des coefficients d'influence dynamique. Ce constat démontre que la méthode des super-éléments permet d'obtenir la qualité de résultats obtenue par une méthode de troncature modale associée à la méthode des accélérations modales. De plus,

la simplification dans le domaine des basses fréquences (1.93) correspond à une extension de la définition de la méthode des accélérations modales dans le domaine des basses fréquences.

Grâce aux simplifications énoncées ci-dessus, l'impédance du système approchée dans la gamme des moyennes fréquences peut être écrite, éq (1.96).

$$\begin{aligned}
\bar{Z}_{MM_{Moy-F}} \sim & K_{MM} - K_{MS}\Phi_p\Phi_p^T M_{SM} - M_{MS}\Phi_p\Phi_p^T K_{SM} \\
& - K_{MS}\frac{\Phi_{pn}\Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} K_{SM} + M_{MS}\Phi_p\tilde{\Omega}_p^2\Phi_p^T M_{SM} \\
& - \omega^2(M_{MM} - M_{MS}\Phi_p\Phi_p^T M_{SM} - M_{MS}\frac{\Phi_{pn}\Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} K_{SM} \\
& - K_{MS}\frac{\Phi_{pn}\Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} M_{SM} - K_{MS}\frac{\Phi_{pn}\Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^4} K_{SM}) \\
& - \omega^4(M_{MS}\frac{\Phi_{pr}\Phi_{pr}^T}{\tilde{\Omega}_{pr}^2 - \Omega^2} M_{SM} - M_{MS}\frac{\Phi_{pr}\Phi_{pr}^T}{\tilde{\Omega}_{pr}^2(\tilde{\Omega}_{pr}^2 - \Omega^2)} K_{SM} \\
& - K_{MS}\frac{\Phi_{pr}\Phi_{pr}^T}{\tilde{\Omega}_{pr}^2(\tilde{\Omega}_{pr}^2 - \Omega^2)} M_{SM} + K_{MS}\frac{\Phi_{pr}\Phi_{pr}^T}{\tilde{\Omega}_{pr}^4(\tilde{\Omega}_{pr}^2 - \Omega^2)} K_{SM})
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Dans l'expression (1.96), des termes mineurs ont été négligés.

Un aspect particulier de cette expression est qu'une grande partie des termes correspondent :

- soit à l'inverse partielle de la matrice K_{SS} du domaine des hautes fréquences,
- soit à l'inverse partielle de la matrice M_{SS} dans le domaine des basses fréquences.

Pour obtenir l'impédance (1.96), un super-élément doit être construit selon la matrice de transfert présentée dans l'équation (1.97).

$$\begin{aligned}
T_{Moy-F} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \phi_i^T M_{SM} - \sum_{i=p}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\omega}_i^2} K_{SM} & \Phi_{pr} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Phi_p \Phi_p^T M_{SM} - \frac{\Phi_{pn} \Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} K_{SM} & \Phi_{pr} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.97}$$

On notera que cette formulation est différente de la compensation des modes quasi-statiques formulée par Shyu et *al.* [102] pour analyser des problèmes de moyennes fréquences. En effet, dans cette dernière, les modes statiques (définis au sens de la matrice de rigidité $K_{SS}^{-1} K_{SM}$ selon la méthode Guyan-Irons) sont remplacés par une inversion de l'impédance $Z_{SS}(\omega_c)^{-1} Z_{SM}(\omega_c)$, fonction d'un paramètre fréquentiel ω_c .

Ayant défini la matrice de transfert T_{Moy-F} , le système réduit $\bar{M}_{Moy-F} - \bar{K}_{Moy-F}$ est déterminé avec les structures des matrices développées dans les équations (1.98).

$$\bar{M}_{Moy-F} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{MM_{Moy-F}} & \bar{M}_{MS_{Moy-F}} \\ \bar{M}_{SM_{Moy-F}} & I \end{bmatrix} \quad \bar{K}_{Moy-F} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{MM_{Moy-F}} & 0 \\ 0 & \tilde{\Omega}_{pr}^2 \end{bmatrix} \tag{1.98}$$

avec les sous matrices

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{MM_{Moy-F}} &= M_{MM} - M_{MS} \Phi_p \Phi_p^T M_{SM} - M_{MS} \frac{\Phi_{pn} \Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} K_{SM} \\
&\quad - K_{MS} \frac{\Phi_{pn} \Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} M_{SM} + K_{MS} \frac{\Phi_{pn} \Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^4} K_{SM} \\
\bar{M}_{MS_{Moy-F}} &= M_{MS} \Phi_{pr} - K_{MS} \frac{\Phi_{pr}}{\tilde{\Omega}_{pr}^2} = \bar{M}_{MS_{Moy-F}}^T \\
\bar{K}_{MM_{Moy-F}} &= K_{MM} - K_{MS} \Phi_p \Phi_p^T M_{SM} - M_{MS} \Phi_p \Phi_p^T K_{SM} \\
&\quad - K_{MS} \frac{\Phi_{pn} \Phi_{pn}^T}{\tilde{\Omega}_{pn}^2} K_{SM} + M_{MS} \Phi_p \tilde{\Omega}_p^2 \Phi_p^T M_{SM}
\end{aligned}$$

Dans cette dernière formulation, le couplage entre les n_m modes statiques et les m modes dynamiques est définie sur la matrice de masse réduite. Il est intéressant de noter que ce couplage pourrait être écrit sur la matrice de rigidité réduite ou les deux à la fois. En effet, pour obtenir un couplage par la matrice de masse réduite, l'inversion partielle de M_{SS} et K_{SS} est réalisée sur q modes avec $q = p - 1$. Pour obtenir un couplage par la matrice de masse réduite, l'inversion partielle de M_{SS} et K_{SS} devrait être réalisée sur q modes avec $q = p + r$. Et, pour obtenir un couplage écrit sur la matrice de masse et de rigidité réduites, l'inversion partielle de M_{SS} et K_{SS} devrait être réalisée sur q modes avec q compris entre $p - 1$ et $p + r$.

Pour finir, la définition d'un super-élément dans la gamme des moyennes fréquences est une définition plus générale des super-éléments puisqu'elle permet de retrouver :

- la définition de synthèse modale de Guyan si la fréquence de l'excitation est inférieure à la première fréquence du système interne,
- la définition de synthèse modale de Craig-Bampton si la fréquence basse de l'excitation est nulle et si la fréquence haute de l'excitation est comprise dans la gamme de fréquences retenues dans les modes dynamiques. On démontre ainsi que la synthèse modale de Craig-Bampton représente correctement le système mécanique dans le domaine des fréquences associées aux fréquences des modes dynamiques retenues pour la synthèse.

1.4.6 Intégration des super-éléments dans la méthode des sous domaines

Dans un super-élément, le champ de déplacement s'écrit

$$q = \sum_{i=1}^{n_m+m} \phi_i \alpha_i = \Phi \alpha \quad (1.99)$$

avec $n_m + m$ le nombre de modes considérés inférieur à la dimension du domaine initial des déplacements, q le vecteur de déplacement dans le domaine, Φ la matrice de projection et α le vecteur des participations modales.

Selon la formulation proposée par Faucher et Combescure [40], sur un système composé de deux sous domaines avec un premier sous domaine modal, l'application de la méthode duale conduit au nouveau système matriciel (1.100).

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{M}^1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \hat{C}^{1T} \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} M^2 & -\frac{\Delta t}{2} C^{2T} \\ -\frac{\Delta t}{2} \hat{C}^1 & \frac{\Delta t}{2} C^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{n+1}^1 \\ \ddot{q}_{n+1}^2 \\ \Lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{F}_{n+1}^1 \\ \frac{\Delta t}{2} F_{n+1}^2 \\ \hat{C}^1 \dot{\alpha}_{n+1/2}^1 + C^2 \dot{q}_{n+1/2}^2 \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

avec les sous matrices

$$\hat{M}^1 = T^T M^1 T \quad \hat{K}^1 = T^T K^1 T \quad (1.101)$$

$$\hat{F}_1 = T^T (F_{Ext}^1 - \hat{K}_1 \alpha_{n+1}^1) \quad \hat{C}^1 = C^1 T \quad (1.102)$$

Ce système peut être de nouveau réécrit en deux problèmes dissociés. La formulation des super-éléments présentée dans la partie précédente est basée sur une méthode de synthèse modale à interfaces fixes qui prend la forme caractéristique $T_{Faucher}$, équation (1.103).

$$T_{Faucher} = \begin{bmatrix} \Phi_M & 0 \\ \Phi_{mM} & \Phi_m \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

Par définition, l'interface de la méthode de Craig-Bampton correspond à l'interface de la méthode des sous domaines. De ce fait, les deux problèmes dissociés peuvent être réécrits selon les formes d'un problème libre, eq. 1.104 et d'un second lié, eq. 1.105.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{M}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} M^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{libre_{n+1}}^1 \\ \ddot{q}_{libre_{n+1}}^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{F}_{n+1}^1 \\ \frac{\Delta t}{2} F_{n+1}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \hat{M}^1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \hat{C}^{1T} \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} M^2 & -\frac{\Delta t}{2} C^{2T} \\ -\frac{\Delta t}{2} \hat{C}^1 & \frac{\Delta t}{2} C^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{liee_{n+1}}^1 \\ \ddot{q}_{liee_{n+1}}^2 \\ \Lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{C}^1 \dot{\alpha}_{libre_{n+1}}^1 + C^2 \dot{q}_{libre_{n+1}}^2 \end{bmatrix} \quad (1.105)$$

L'avantage majeur de l'écriture de ce système découplé est que la matrice de projection des noeuds vers les modes présente une dimension restreinte, équation (1.106). En effet, la dimension du domaine initial n'apparaît plus dans les équations de résolution du domaine couplé.

$$\hat{C}^1 = C^1 T_{Faucher} = C^{1Red} \Phi_M \quad (1.106)$$

Ayant développé et présenté l'ensemble des méthodes de résolution ou de réduction des domaines, intéressons nous à la définition de l'élément poutre en rotation adaptée au formalisme des différences centrées.

1.5 Intégration d'un élément rotor dans le schéma des différences centrées

L'objectif de cette partie est de définir une formulation améliorée de dynamique rotor de ligne d'arbre dérivée de la formulation classique présentée dans la partie 1.2.3.2. En effet, la formulation présentée précédemment ne conduit pas à un algorithme explicite puisque cela requiert que les matrices de masse M et gyroscopique G soient diagonales. Conceptuellement la matrice de masse M peut être diagonale tandis que la matrice gyroscopique G ne peut en être. Cet aspect est développé dans les sous parties suivantes.

1.5.1 Définition de la matrice de masse

Pour la définition du lumping de la matrice de masse, plusieurs auteurs ont proposé des formulations recueillies notamment par Hughes [61] ou Felipa [41] qui s'avèrent être toutes des approximations. En effet, la matrice définie par l'énergie potentielle est une matrice de masse consistante. Une des méthodes bien connue est le lumping HRZ (Hinton, Rock et Zienkiewicz [59]). Ce lumping consiste à distribuer la masse de l'élément sur les noeuds de translation tout en conservant le ratio entre les termes diagonaux de la matrice consistante.

Dans la formulation de la poutre de Timoshenko, deux types de masses sont présentes : une masse de translation M_T et une seconde de rotation M_I . Le lumping HRZ associé à la masse de translation permet de diagonaliser uniquement le premier type de masse correspondant à la poutre plane de Euler-Bernoulli. La matrice diagonale de masse obtenue sur un des deux noeuds avec les degrés de liberté $q_i^T = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_i \ \psi_i \ \phi_i]$ est donnée dans l'équation (1.107) ci-dessous. Pour l'axe Z, le lumping est proposé simplement en partageant sur les deux DDL la masse de la poutre pour la translation et l'inertie polaire pour la rotation.

$$M_{T_i} = \rho SL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{L^2}{78} & & \\ & & & & \frac{L^2}{78} & \\ & & & & & \frac{I_p}{28} \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

Les travaux de Bigret [13] et Sheu [101] montrent clairement que, pour un important ratio du diamètre sur la longueur de la poutre $\frac{R_m}{L}$ ⁶, le premier terme de l'équation (1.4) est plus petit que le second. En effet, ce second terme qui caractérise l'inertie "d'oscillations" au sens de Bigret ou l'énergie de vibrations en rotation doit être pris en compte pour représenter le système. Cependant ce second terme ne peut être diagonalisé par la méthode HRZ puisqu'il n'est pas lié à la masse de l'élément poutre. Par ailleurs, dans la dynamique rotor, la prise en compte de l'énergie de rotation conduit à la dérivation de termes

⁶ R_m est le rayon moyen d'une poutre creuse.

gyroscopiques dans les équations. De ce fait, cette matrice doit être impérativement prise en compte dans la formulation.

Pour modéliser ce comportement avec une matrice de masse diagonale, seuls les termes sur la diagonale et sur les noeuds de rotation sont donc conservés dans la matrice de rotation (1.2.3.2). La diagonale conservée est présentée dans l'équation (1.108).

$$M_{I_l} = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 4L^2 & \\ & & & & 4L^2 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

La masse nulle sur les degrés de translation et de rotation Z ne pose pas de problème de résolution car la matrice diagonale de masse de la poutre M_l correspond à la somme de deux matrices M_{T_l} et M_{I_l} .

Afin de tester ces hypothèses simplificatrices du problème, un calcul de valeurs propres généralisées sur une poutre libre modélisée par un seul élément est réalisé (table 1.2). Le cas test correspond au calcul de la valeur propre du problème aux valeurs généralisées $M_e - K_e$ d'une poutre pleine de rayon extérieur R_m composée d'un seul élément pour différents ratios de poutres. Cinq types de matrice de masse sont évalués :

- une matrice de masse consistante qui est la référence,
- une seconde matrice constituée uniquement de la matrice M_T ,
- une troisième matrice constituée uniquement de la matrice M_{T_l} ,
- une matrice de masse diagonale issue du lumping HRZ pour la somme de l'énergie de translation et l'inertie "d'oscillation",
- une matrice de masse diagonale constituée par la somme d'une matrice lumpée HRZ pour l'énergie de translation M_{T_l} et de la diagonale de la matrice de masse d'inertie "d'oscillation" M_{I_l} .

TAB. 1.2: Fréquences de résonance pour différentes matrices de masse et différentes formes d'éléments $\frac{R_m}{L}$. Les propriétés de la poutre pleine sont $L = 10mm$, $\rho = 0.007 \frac{gr}{mm^3}$, $E = 200GPa$. Les fréquences sont données en kHz

Forme de la poutre $\frac{R_m}{L} =$	1	10	100
Matrice consistante M_e	$730 - 1.6 \cdot 10^3$	$740 - 1.6 \cdot 10^3$	$740 - 1.6 \cdot 10^3$
Matrice M_T	$4.0 \cdot 10^3 - 1.4 \cdot 10^4$	$4.0 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^5$	$4.0 \cdot 10^5 - 1.4 \cdot 10^6$
Matrice M_{T_l}	$1.9 \cdot 10^3 - 3.4 \cdot 10^3$	$1.9 \cdot 10^4 - 3.4 \cdot 10^4$	$1.9 \cdot 10^5 - 3.4 \cdot 10^5$
Méthode HRZ sur M_e	$1.1 \cdot 10^3 - 2.2 \cdot 10^3$	$9.1 \cdot 10^3 - 1.9 \cdot 10^4$	$9.0 \cdot 10^4 - 1.9 \cdot 10^5$
Matrice $M_{T_l} + M_{I_l}$	$760 - 1.7 \cdot 10^3$	$830 - 1.0 \cdot 10^4$	$830 - 1.0 \cdot 10^5$

La méthode proposée donne une bonne cohérence avec la matrice de masse consistante pour la première fréquence correspondant au mode de flexion tout en n'ajoutant pas

de la masse à l'élément. Dans le cas de formes de poutre $\frac{R_m}{L}$ inférieur à l'unité et quelque soit la méthode, la matrice lumpée donne de mauvais résultats car la distribution de la masse par des approches de matrice de masse lumpée le long de la poutre n'est pas réaliste. Seul le découpage de la poutre en plusieurs éléments de masse lumpée ou avec un élément ayant une matrice de masse consistante donne alors la fréquence de la poutre.

1.5.2 Effet gyroscopique

A cause du lumping de la matrice de masse, la matrice gyroscopique G_e qui est obtenue par les fonctions de forme des éléments ne peut plus être utilisée. En effet, cette matrice prend en compte le couplage gyroscopique entre degrés de liberté en translation et en rotation qui n'est plus représenté dans la matrice de masse lumpée M_{I_l} . De ce fait, seul le couplage gyroscopique des degrés de liberté en rotation est pris en compte dans la matrice gyroscopique (1.109). La définition de G_l dans l'équation (1.109) est restreinte aux deux degrés de rotation des deux noeuds avec le vecteur de déplacement $q^T = [\theta_i \ \psi_i \ \theta_j \ \psi_j]$.

$$G_l = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & 4L^2 & 0 & 0 \\ -4L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 0 & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

1.5.3 Stabilité du schéma d'intégration

Comme il a été démontré dans la partie 1.3.2.3, le schéma d'intégration des différences centrées est stable à condition que le pas de temps d'intégration du système soit définie en fonction de la plus grande fréquence de résonance. Pour les éléments poutres, le pas d'intégration est définie à partir de la formule analytique issue de Blevins [16], éq (1.110).

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI_{max}}{m_e L^3}} \quad (1.110)$$

Cette expression donne les fréquences de résonance d'une poutre libre-libre en fonction de la masse de la poutre m_e , sa longueur L , son moment d'inertie maximum I_{max} , le module d'Young E et le numéro du mode de flexion. La valeur λ_i prend ainsi différentes valeurs selon le numéro du mode $\lambda_1 = 4.73$, $\lambda_2 = 7.85$...

Dans la modélisation élément fini de la poutre de Timoshenko, le nombre de degré de liberté de translation dans une direction est de deux, ce qui correspond à un mode de corps rigide suivie d'un mode de flexion. Ainsi seul le premier mode de flexion peut-être modélisé par l'approche élément fini et la fréquence de résonance maximum est donnée par λ_1 . La condition sur le pas d'intégration Δt sera alors $\Delta t < \Delta t_s < \frac{2}{\omega_{1Max}}$.

On notera que la formule (1.110) est associée à une masse sur la poutre issue de l'énergie de translation. De ce fait, si l'on s'intéresse aux différentes valeurs de la fréquence $f_1 = \omega_1/(2\pi)$ en fonction des différents formes de la poutre $\frac{R_m}{L} = 1, 10, 100$, les

valeurs sont $f_1 = 1.35 \cdot 10^3$, $1.35 \cdot 10^4$, $1.35 \cdot 10^5 \text{kHz}$. Ces valeurs sont bien supérieures aux premières fréquences de résonance correspondant au mode de flexion données dans le tableau 1.2.

1.5.4 Prédiction de l'accélération au pas de temps futur

Dans le cas où le système présente de l'amortissement et des effets gyroscopiques, la prédiction de l'accélération au pas de temps est obtenue par la résolution de l'équation (1.111).

$$\left(M + \frac{(C + G\omega)\Delta t}{2}\right) \ddot{q}_{n+1} = F_{Ext}(t_{n+1}) - F_{Int}(t_{n+1}) - \frac{(C + G\omega)\Delta t}{2} \dot{q}_n \quad (1.111)$$

Une inversion matricielle est donc nécessaire pour résoudre le système. Lorsque seuls les effets gyroscopiques sont pris en compte ($C = 0$), l'équation (1.111) est résolue par une méthode itérative de Jacobi qui présente un sens physique puisque la partie diagonale correspond à la matrice de masse et la partie extra-diagonale correspond à une matrice proportionnelle à G .

Définissons $\ddot{q}_{n+1}$ comme la somme de $\ddot{q}_{n+1}^M$ et $\ddot{q}_{n+1}^B$. Par définition $\ddot{q}_{n+1}^M$ vaut (1.112).

$$\ddot{q}_{n+1}^M = M^{-1}(F_{Ext}(t_{n+1}) - F_{Int}(t_{n+1}) - \frac{(C + G\omega)\Delta t}{2} \dot{q}_n) \quad (1.112)$$

$\ddot{q}_{n+1}^B$ doit donc satisfaire à l'équation (1.113).

$$M\ddot{q}_{n+1}^B = -\frac{G\omega\Delta t}{2}(\ddot{q}_{n+1}^B + \ddot{q}_{n+1}^M) \quad (1.113)$$

Cette seconde équation est alors résolue par itérations, éqs. (1.114-1.115).

$$\ddot{q}_{n+1}^{B_1} = -M^{-1}\frac{G\omega\Delta t}{2}\ddot{q}_{n+1}^M \quad (1.114)$$

$$\ddot{q}_{n+1}^{B_{i+1}} = -M^{-1}\frac{G\omega\Delta t}{2}(\ddot{q}_{n+1}^{B_i} + \ddot{q}_{n+1}^M) \quad (1.115)$$

Cette procédure converge vers la solution $\ddot{q}_{n+1}^B$ à condition que le rayon spectral de $B = M^{-1}\frac{G\omega\Delta t}{2}$ soit inférieur à 1 puisque $\ddot{q}_{n+1}^B = \sum_{i=1}^r B^i \ddot{q}_{n+1}^M$ correspond à une suite.

Dans le cas où le système inclut à la fois des effets gyroscopiques et des amortissements sur les paliers, la solution est obtenue similairement en remplaçant l'inverse de la matrice M par l'inverse de la matrice $M + C\frac{\Delta t}{2}$. En effet $(M + C\frac{\Delta t}{2})^{-1}$ est obtenue analytiquement car s'il n'existe pas de couplage d'amortissement entre les deux plans Oxz et Oyz , C est une matrice par bloc de dimension 2×2 .

1.5.5 Convergence de la méthode de Jacobi

Pour assurer la convergence des méthodes itératives stationnaires (Jacobi ou Gauss-Seidel⁷), le rayon spectral de B doit être inférieur à 1, qu'il soit réel ou imaginaire, éq.

⁷L'algorithme de Gauss-Seidel est basé sur l'algorithme de Jacobi mais avec une correction des scalaires du vecteur $\ddot{q}_{n+1}^{B_i}$ dès leur connaissance dans le vecteur $\ddot{q}_{n+1}^{B_{i+1}}$.

(1.116).

$$\rho(|B|) < 1 \quad (1.116)$$

La démonstration de la convergence est réalisée lorsque la matrice C est nulle. Comme cela a été mentionné, B est le résultat du produit M^{-1} par G et les valeurs propres de B qui définissent son rayon spectral correspondent aux valeurs propres généralisées de $M - G$. De plus M et G sont les matrices assemblées par l'opération booléenne P du système discrétisé ou élémentaire (1.117).

$$G = P^T G^e P \quad M = P^T M^e P \quad (1.117)$$

Pour démontrer que la valeur propre du système discrétisé est plus grande que celle du système assemblé, utilisons le quotient de Rayleigh (1.118) qui permet d'obtenir l'inégalité (1.119) et l'égalité (1.120).

$$R(q) = \frac{q^T G q}{q^T M_D q} \quad R^e(q^e) = \frac{q^{eT} G_e q_e}{q_e^T M_e q_e} \quad (1.118)$$

$$\forall q \quad R(q) \leq \lambda_{Max} \quad \forall q_e \quad R_e(q_e) \leq \lambda_{Max}^e \quad (1.119)$$

$$R(q_{Max}) = \lambda_{Max} \quad R(q_{Max}^e) = \lambda_{Max}^e \quad (1.120)$$

Sur le système assemblé, choisissons le vecteur q_{Max} correspondant au vecteur produisant la valeur propre généralisée maximum. Ce vecteur peut être associé à un vecteur désassemblé q^e par le processus de désassemblage, suivant l'équation (1.121).

$$q_{Max} = P q^e \quad (1.121)$$

Conformément à la définition de q_{Max} et de q^e , l'inégalité (1.122) peut être déduite.

$$\lambda_{Max} = \frac{q_{Max}^T G q_{Max}}{q_{Max}^T M q_{Max}} = \frac{q_{Max}^T P^T G^e P q_{Max}}{q_{Max}^T P^T M^e P q_{Max}} = \frac{q^{eT} G_e q_e}{q_e^T M_e q_e} \leq \lambda_{Max}^e \quad (1.122)$$

Ce qui implique :

$$\rho(M^{e-1} G^e) < 1 \Rightarrow \rho(M^{-1} G) < 1 \quad (1.123)$$

Cette inégalité définit que le rayon spectral du système discrétisé est plus grand que celui du système assemblé. De ce fait si le rayon spectral du système discrétisé est inférieur à l'unité alors le système assemblé le sera aussi. La nouvelle condition, eq. (1.123), doit être satisfaite pour le disque ainsi que pour la poutre.

Convergence de la prédiction pour le disque Pour le disque, les effets gyroscopiques sont présents uniquement entre les rotations autour des axes X et Z . L'équation (1.123) est satisfaite si :

$$\lambda_{Disque1-2} = \pm \frac{\Delta t \omega I_{Dz}}{I_{Dx}} < 2 \Delta t \omega \quad (1.124)$$

Convergence de la prédiction pour la poutre Grâce à la formulation des matrices de masse diagonale (1.107)(1.108) et gyroscopique avec seulement un couplage entre les degrés de liberté en rotation (1.109), le calcul du rayon spectral du système élémentaire ne présente aucune difficulté. En effet, le calcul des valeurs propres est réduit au calcul d'un déterminant d'une matrice 2-2.

$$\lambda_{Poutre1-2} = \pm 2\Delta t \omega \quad (1.125)$$

Dans les travaux réalisés, les conditions (1.124)(1.125) sont toujours satisfaites car la vitesse de rotation maximale est de $3.5 \frac{Rad}{ms}$ tandis que le pas de temps d'intégration Δt est souvent proche de $10^{-5}s$.

1.6 Applications

1.6.1 Exemples de Super-Éléments

Pour illustrer les développements analytiques sur la définition des super-éléments, quatre exemples numériques sont réalisés.

Le premier exemple montre que la matrice de transfert produite par la première orthogonalisation de Faucher sur l'ensemble des modes correspond à la définition d'une matrice de transfert définie seulement par la matrice de masse, éq. (1.85).

Le système se compose d'une poutre discrétisée par la méthode des éléments finis en trois éléments de type poutre de Timoshenko avec degrés de liberté en translation et rotation selon la définition présente dans Lalande et Ferraris [68]. Chaque poutre a les propriétés $\rho = 0.007 gr.mm^{-3}$, $R = 100mm$, $L = 1$ et $E = 200GPa$. La longueur totale du système est donc de $300mm$ et aucune masse additionnelle n'est apportée au système. Le nombre total de degrés de liberté est de 8 avec 4 degrés de liberté en translation et 4 degrés de liberté en rotation. L'interface du système est composé d'un noeud à une extrémité de la poutre. Par définition la matrice de transfert des modes statiques de Craig-Bampton s'écrit

$$T_{Guyan} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{SS}^{-1}K_{SM} \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

Dans ce système, la matrice prend les valeurs numériques suivantes

$$T_{Guyan} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1.0000 & -100.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & -200.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & -300.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

Dans cet exemple, la procédure d'orthogonalisation est réalisée sur la base complète des modes dynamiques, c'est le cas limite où $m = n_s$. La matrice des modes statiques prend les nouvelles valeurs numériques suivantes

$$T'_{Faucher} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.1390 & 3.4086 \\ -0.0193 & 0.4438 \\ -0.0386 & 0.8613 \\ -0.0066 & 0.1462 \\ 0.0465 & -1.0309 \\ -0.0062 & 0.1383 \end{bmatrix} \quad (1.128)$$

Cette matrice correspond littéralement à la matrice des modes statiques définie au sens de la matrice de masse, suivant l'équation (1.129).

$$T_{Masse} = \begin{bmatrix} I \\ -M_{SS}^{-1}M_{SM} \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

Dans le second exemple, un système mécanique composé d'une plaque maillée en éléments finis, visible sur la figure 1.10, est condensé en super-élément selon les méthodes de Craig-Bampton et Faucher. Les impédances des systèmes réduits sont alors comparées à celle du système complet. Le volume de la plaque est maillé par des éléments solides à huit noeuds, chacun présentant seulement trois degrés de liberté. Le maillage est constitué de 504 noeuds et 300 éléments. Trois éléments sont positionnés dans l'épaisseur pour tenir compte des effets des mouvements de flexion de la plaque. L'assemblage des matrices est réalisé dans un code commercial éléments finis et les autres étapes de la résolution sont réalisées dans l'outil mathématique MATLAB.

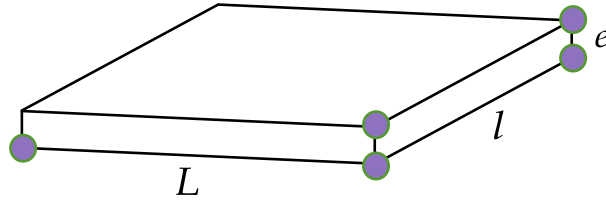


FIG. 1.10: Cas test d'un domaine constitué par une plaque ayant les propriétés : épaisseur $e = 20mm$, largeur $l = 200mm$, longueur $L = 1000m$, densité $d = 7.95$, module de Young $180GPa$ et coefficient de Poisson 0.3

La sous structure est définie comme suit. L'interface est constitué par les quatre extrémités d'un côté de la plaque et d'une extrémité unique de l'autre côté. De ce fait, cinq noeuds à trois degrés de liberté définissent l'interface du problème et les modes dynamiques n'incluent pas de modes rigides. Seuls les dix premiers modes sont conservés sur le système réduit. Le spectre de fréquences associé à ce modèle réduit s'échelonne entre $0.13Rad.ms^{-1}$ et $7.15Rad.ms^{-1}$.

L'impédance de la sous structure est comparée dans le cas où le degré de liberté dans la direction de l'épaisseur du noeud seul à l'extrémité de la plaque est libre et tous les autres degrés de liberté maîtres sont bloqués. La comparaison est réalisée entre la sous structure de Craig-Bampton, de Faucher et la structure complète. Les résultats de l'impédance sont visibles sur la figure 1.11. Comme il a été démontré précédemment, l'impédance du sous

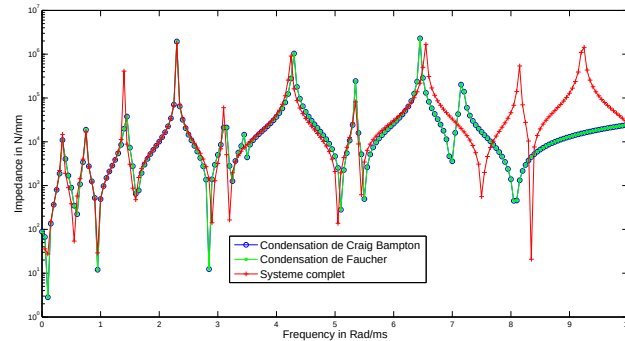


FIG. 1.11: Impédance de la plaque à une extrémité avec les autres extrémités encastrées

système de Faucher est exactement la même que celle de Craig-Bampton. Les deux systèmes réduits représentent correctement le système complet seulement dans le domaine de fréquences inférieures à la fréquence maximale prise en compte dans les modes dynamiques.

Le troisième test consiste à montrer les avantages d'une définition des modes statiques par rapport à la matrice de masse. Le système est composé par une poutre ayant les propriétés de section du premier test et une longueur de 400mm . La poutre est maillée par quatre poutres de Timoshenko. L'interface du domaine est composée des deux noeuds d'extrémités. Selon la méthode des éléments finis, la sous-structure est donc composée de quatre degrés de liberté maîtres et de six degrés de liberté internes.

L'impédance du système est ensuite calculée dans le cas où, à une extrémité, le degré de rotation est libre et le degré de translation est excité et, à l'autre extrémité les deux degrés de liberté sont bloqués. Quatre systèmes réduits sont définis selon les définitions précisées ci dessous.

- Le système réduit $n^{\circ}1$ est défini avec une matrice des modes statiques définis par la matrice de rigidité, éq. (1.84), et les deux premiers modes de basses fréquences.
- Le système réduit $n^{\circ}2$ est défini avec une matrice des modes statiques définis par la matrice de masse, éq. (1.85), et les deux premiers modes de basses fréquences.
- Le système réduit $n^{\circ}3$ est défini avec une matrice des modes statiques définis par la matrice de rigidité, éq. (1.85), et les deux derniers modes de hautes fréquences.
- Le système réduit $n^{\circ}4$ est défini avec une matrice des modes statiques définis par la matrice de masse, éq. (1.85), et les deux derniers modes de hautes fréquences.

La comparaison des quatre impédances des systèmes réduits est réalisée sur le déplacement du noeud excité et présentée sur les graphiques 1.12 et 1.13. En accord avec les

résultats démontrés, le système est bien représenté dans le domaine des basses fréquences par le système réduit $n^{\circ}1$ qui est en fait le système réduit de Craig-Bampton.

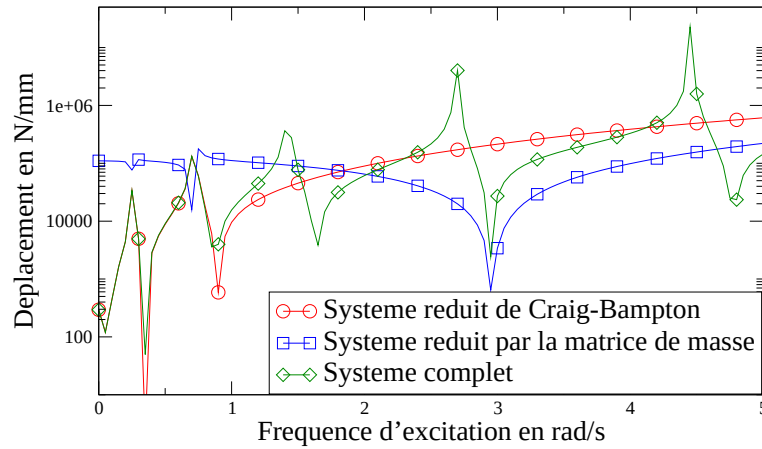


FIG. 1.12: Impédance de la poutre pour le système global et réduits $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}2$

Dans le graphique 1.13, les systèmes réduits $n^{\circ}3$ et $n^{\circ}4$ sont comparés. A l'opposé du résultat présenté dans le graphique 1.12, le système réduit au sens de la matrice de masse représente correctement l'impédance du système réduit dans le domaine des hautes fréquences. Cependant, actuellement le domaine des hautes fréquences est dépendant de la finesse de maillage du domaine, ce qui rend peu utilisable cette définition.

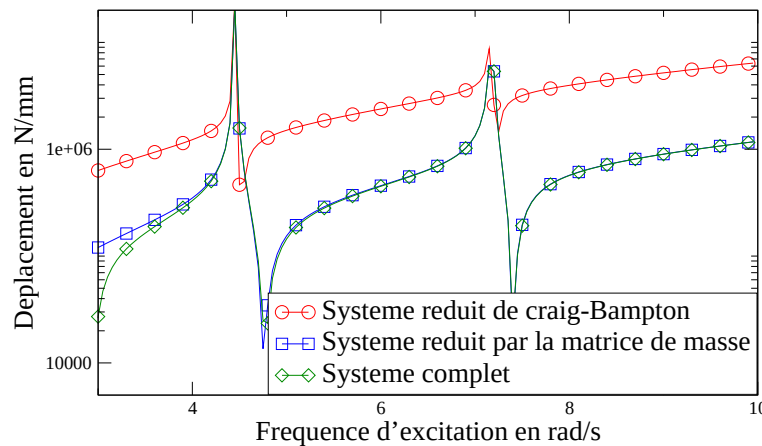


FIG. 1.13: Impédance de la poutre pour le système global et réduits $n^{\circ}3$ et $n^{\circ}4$

Dans le dernier exemple, la définition des super-éléments dans la gamme des moyennes fréquences est illustrée par un modèle composé d'une poutre. Le système est défini par un modèle éléments finis d'une poutre maillée par 5 éléments de type poutre

de Timoshenko avec degrés de liberté en translation et rotation. Chaque poutre a les propriétés suivantes : $\rho = 0.007 \text{ gr.mm}^{-3}$, $R = 100 \text{ mm}$, $L = 1000 \text{ mm}$ et $E = 210,000 \text{ MPa}$. La longueur totale du système est donc de 5000 mm et aucune masse additionnelle n'est ajoutée au système. Le nombre total de degrés de liberté est de 10 avec 6 degrés de liberté en rotation et 4 degrés de liberté en translation. Pour ce système, l'interface est composée des noeuds des extrémités et seul le noeud de translation d'une extrémité est excité par une sollicitation dont la fréquence est proche de 2 Rad/s . La résolution du problème aux valeurs propres généralisées $M_{SS} - K_{SS}$ montre que les fréquences de résonance du système interne sont présentes entre 0 et 13 Rad/s . Trois modes dynamiques dont les fréquences de résonance sont 1.27 Rad/s , 2.12 Rad/s et 3.56 Rad/s sont conservés dans la définition des modes dynamiques.

Deux types de synthèses modales sont construites : celle de Craig-Bampton et celle définie dans la gamme des moyennes fréquences. Leurs impédances sont comparées à l'impédance exacte du système, fig 1.14. Comme il a été démontré précédemment, la méthode de synthèse modale de Craig Bampton donne une impédance qui n'est pas comparable à celle du système tandis que la méthode de synthèse modale dans le domaine des moyennes fréquences approxime fidèlement le système dans la gamme des fréquences étudiées (de 1.27 Rad/s à 3.56 Rad/s).

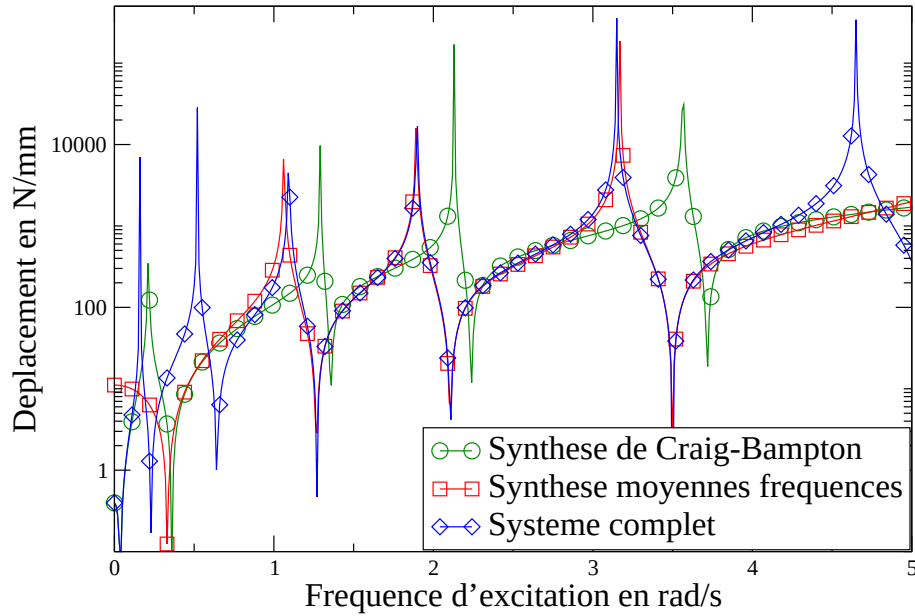


FIG. 1.14: Comparaison des impédances du système exact et des systèmes réduits dans la gamme des moyennes fréquences

1.6.2 Traversée d'une vitesse critique

Le rotor simple présenté dans la partie 1.3.1 est un cas idéal pour évaluer les méthodes de résolution transitoire de l'équation de la dynamique associée aux formulations de matrices de masse diagonale et gyroscopique associée. Sur le diagramme 1.5, la plage de vitesses entre 0 et $4500\text{Tr}/\text{Min}$ correspond à la traversée d'une seule vitesse critique. La traversée de cette vitesse critique est réalisée en imposant, dans un premier temps, une évolution linéaire de la vitesse de rotation entre 0 à $4500\text{Tr}/\text{Min}$ suivie d'un plateau à la vitesse maximale de $4500\text{Tr}/\text{Min}$. Trois accélérations angulaires sont testées : 450, 1125, et $4500\text{Tr}/\text{Min}/\text{s}$. Le rotor est excité par un balourd constant spécifié dans le tableau 1.1.

Les excentricités obtenues en fonction du temps pour chaque accélération sont visibles sur les courbes (1.17), (1.16) et (1.15). Le résultat de la modélisation éléments finis est comparé à une modélisation de Rayleigh-Ritz définie par une série de sinus permettant de représenter correctement le premier mode (Formulation décrite dans les travaux [56]).

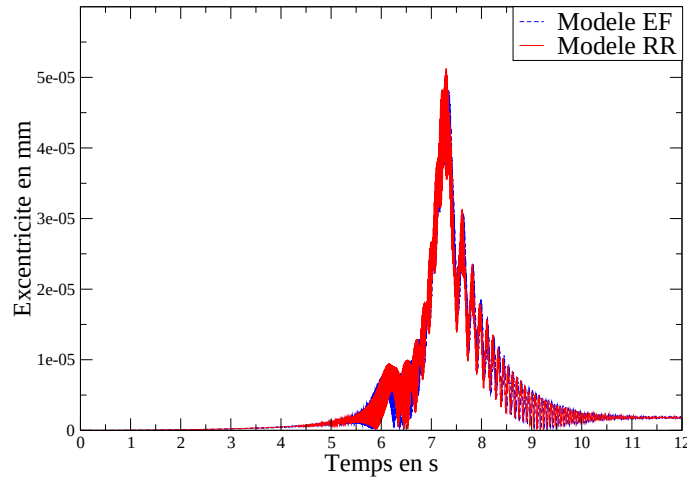


FIG. 1.15: Excentricité du disque, accélération de $450\text{Tr}/\text{Min}/\text{s}$

Les résultats montrent le bon accord entre les deux méthodes :

- La vitesse critique est détectée à la même vitesse de rotation et donc au même instant ;
- Lorsque l'accélération est plus importante, le pic de résonance est plus faible, ce qui est normal puisque l'appropriation du mode se fait plus faiblement.

Il est à noter que le premier mode en "backward" est excité à cause de la dissymétrie des paliers alors qu'en réponse forcée et avec un système symétrique, seul le premier mode en "forward" est excité (Lalanne et Ferraris [68]).

Pour s'assurer que la formulation de l'élément poutre est correcte, un calcul est réalisé avec uniquement des éléments poutres pour représenter le rotor. Le résultat en terme de déplacement au niveau du disque est présenté sur la figure 1.17. Le déplacement est du même ordre de grandeur que celui obtenu pour les deux autres modélisations. La différence entre les deux courbes s'expliquent par la différence de rigidité du mode de flexion

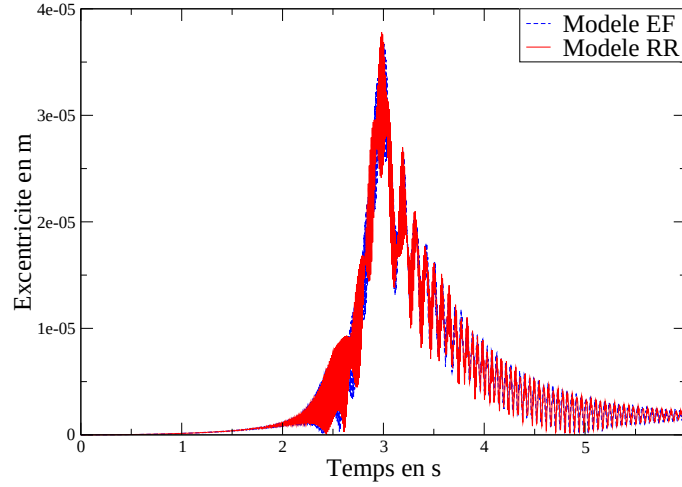


FIG. 1.16: Excentricité du disque, accélération de 1125Tr/Min/s

puisque, dans cette modélisation, la longueur de la poutre au niveau du disque est considérée comme une poutre ayant le diamètre du disque et donc nettement plus rigide que la poutre supportant le disque. Cette façon de modéliser les rotors pénalise les temps de calculs puisque le pas de temps d'intégration devient plus petit car associé à l'élément le plus rigide.

1.6.3 Départ d'une pale

Le phénomène de Blade Shedding correspond à un départ de toutes les pales sur le rotor. Le phénomène conduit à la mise en place de deux types d'efforts :

- des efforts de balourd sur le rotor et
- des efforts de contact dus à l'impact des pales sur les parties statiques.

Lors du phénomène, ces deux types d'efforts interagissent puisqu'à cause des efforts de balourd, le rotor orbite de façon plus importante et de par la présence d'un anneau au dessus des pales, le rotor touche en tête de pale ce qui conduit au départ d'autres pales. Ces aspects seront développés dans la partie 4.2.

Dans le contexte de ce chapitre, l'objectif est de s'intéresser uniquement au comportement vibratoire du rotor et donc de prédire le comportement d'un rotor lors de la mise en place d'un balourd.

Genta [42] a simplifié le problème en s'intéressant uniquement au cas d'un rotor de Jeffcot non amorti dans lequel un balourd serait appliqué à un instant 0 dans la direction X . Un tel système est modélisé par les équations (1.130) avec $H(t)$ la fonction *Heavyside*.

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + ku(t) = mdH(t)\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{v}(t) + kv(t) = mdH(t)\omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (1.130)$$

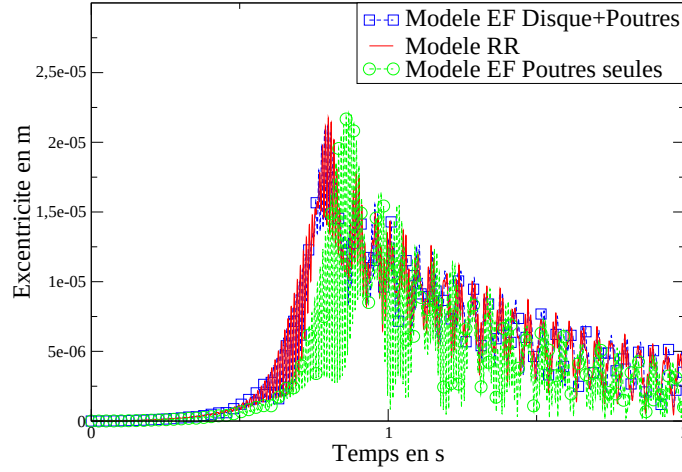


FIG. 1.17: Excentricité du disque, accélération de 4500Tr/Min/s

La résolution de cette équation conduit à l'expression des déplacements dans les directions X et Y (1.131) avec $\tilde{\omega} = \sqrt{k/m}$ et $U_O = \frac{d\omega^2}{\tilde{\omega}^2 + \omega^2}$.

$$\begin{cases} u(t) = U_O(\cos(\omega t) + \cos(\tilde{\omega} t)) \\ v(t) = U_O(\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \sin(\tilde{\omega} t)) \end{cases} \quad (1.131)$$

Le déplacement suite à la mise en place du balourd dépendra de la différence entre la fréquence d'excitation Ω et la fréquence de résonance du système $\tilde{\omega}$.

Expérimentalement, un essai a été réalisé par Hibner et Buono [57] pour évaluer le comportement d'un rotor flexible⁸ lors de la mise en place d'un balourd dans une gamme fréquentielle au dessus de la vitesse de résonance de flexion de l'arbre. Le rotor expérimental est visible sur le plan 1.18. Le rotor est composé de deux disques apportant des effets gyroscopiques tandis qu'un rotor au milieu de la ligne d'arbre présente la possibilité de perdre de la masse pour apporter du balourd au système. Deux paliers aux extrémités supportent le rotor et 10 capteurs mesurent la position dans deux plans orthogonaux. Les résultats expérimentaux en terme d'excentricité du disque central sont visibles sur la figure 1.19.

Durant la première seconde après la mise en place du balourd, les courbes de déplacement expérimentales correspondent à la somme de deux sinus dont les fréquences sont proches. Le caractère amortissant du système conduit par la suite à la stabilisation du comportement vers un mouvement purement circulaire correspondant au mouvement établi du système.

⁸Un rotor flexible est caractérisé par une vitesse de fonctionnement au dessus du premier mode de flexion d'arbre. Ce concept permet de réduire la taille des turbomachines en évitant la mise en place de paliers cependant l'énergie de déformation dans l'arbre devient plus conséquente ce qui rend les rotors plus sensibles à des vibrations de fortes amplitudes, des problèmes de jeux ou des instabilités dynamiques (Bently [12]).

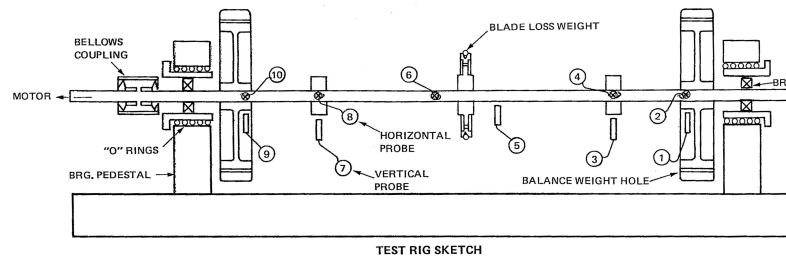


FIG. 1.18: Banc expérimental de perte de pale, extrait de Hibner et Buono [57]

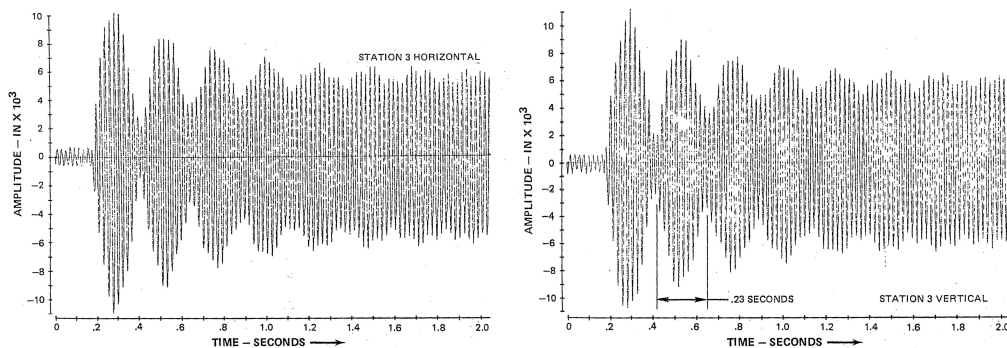


FIG. 1.19: Déplacements expérimentaux horizontaux et verticaux au niveau du disque central, extrait de Hibner et Buono [57]

Ce système mécanique est modélisé par ailleurs par la méthode des éléments finis et simulé transitoirement par l'algorithme des différences centrées. Les différentes données relatives au modèle sont présentes dans le rapport de Hibner et Buono [57] et le résultat en terme de déplacement est présenté sur les figures 1.20.

Le comportement général correspond à celui de l'expérience avec un amortissement de la ligne au cours du temps. La différence majeure correspond à la différence de fréquences entre la fréquence d'excitation et la fréquence de résonance. En effet, dans la simulation et lors de l'essai, la même vitesse de rotation est imposée mais le modèle élément fini approxime la forme et la fréquence du mode de résonance. De ce fait, le faible décalage de fréquence conduit à une fort changement de la forme du déplacement.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, le travail réalisé donne une vue générale des méthodes de modélisation, de réduction et de résolution des systèmes mécaniques linéaires et non linéaires.

Dans un premier axe de recherche, on s'est attaché à identifier le type d'équations de la dynamique obtenues lorsqu'un rotor de révolution présente des pales de façon non

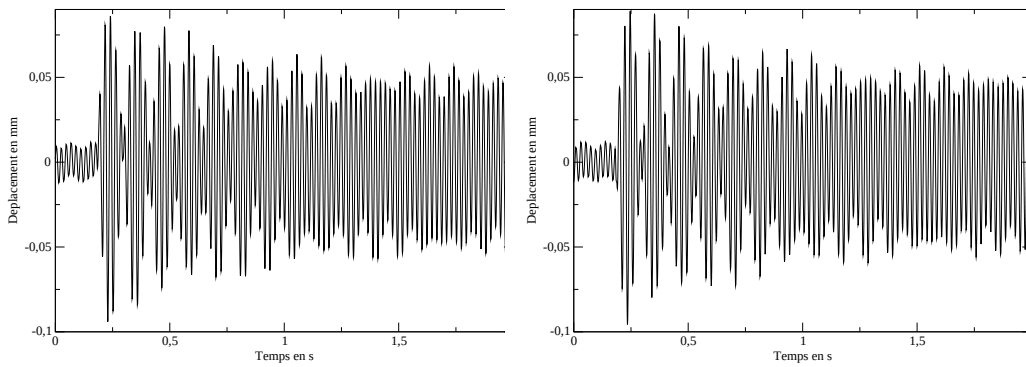


FIG. 1.20: Déplacements simulés numériquement horizontaux et verticaux au niveau du disque central

symétrique sur sa périphérie. L'équation correspond à une équation différentielle à coefficients périodiques mais qui n'a cependant pas dû être utilisée car le système est modélisé de façon volumique.

Dans un second temps, la stabilité des algorithmes temporels de la famille de Newmark a été analysée en détail notamment pour les systèmes présentant des effets gyroscopiques. La démonstration réalisée permet d'assurer que le système sera stable sous les conditions largement diffusées de Hughes [60].

Par la suite, les accélérations des temps de calcul par décomposition du problème en domaine et en temps ont été évoquées. Ces méthodes présentées notamment par Faucher et Combescure [40] ont été analysées en détail notamment sur le concept de réduction par synthèse modale. En effet, l'analyse d'un processus initialement proposée par ces derniers a permis de définir le formalisme mathématique associé à ces opérations et de démontrer analytiquement l'équivalence entre les systèmes réduits de Faucher et Craig-Bampton. Par ailleurs, complémentirement, une nouvelle synthèse modale adaptée pour le domaine des moyennes fréquences a été définie.

Enfin, un formalisme optimal de dynamique rotor de ligne d'arbre a été mis au point pour être introduit dans le schéma des différences centrées. L'ensemble de ces démonstrations ou définitions est illustré par une série d'exemples concluant le chapitre.

Chapitre 2

Du phénomène d'impact à la perforation

Dans ce second chapitre, les phénomènes d'impact et de perforation des parties statiques entourant les pales libérées sont évoqués à travers trois cas d'étude simplifiés. Ces cas d'étude permettent ainsi de mettre au point une modélisation efficace de phénomènes de déformations plastiques et de rupture intervenant dans le Blade Shedding.

Sommaire

2.1	Introduction	65
2.2	Impact d'une pale sur un blindage	66
2.2.1	Introduction	66
2.2.2	Modélisations employées	67
2.2.3	Résultats des simulations	70
2.2.4	Comportements des pales	78
2.2.5	Synthèse	80
2.3	Impact d'une bille sur une plaque mince en acier	80
2.3.1	Etat de l'art sur la perforation	80
2.3.2	Description des moyens d'essai	86
2.3.3	Description de la modélisation éléments finis	87

2.3.4	Comparaison entre les éléments ShB8 et ShB8PS	90
2.3.5	Effet du taux de triaxialité sur la rupture	91
2.3.6	Résultats des simulations pour différents maillages	92
2.3.7	Synthèse	92
2.4	Impact d'un projectile conique sur une plaque mince	93
2.4.1	Lois matériaux	94
2.4.2	Simulation de l'essai de traction sur le matériau à base Nickel . . .	95
2.4.3	Moyen d'essais et modélisation du système	97
2.4.4	Résultats de la simulation de la perforation	97
2.4.5	Comparaisons des plaques après simulation et après essai	98
2.4.6	Synthèse	100
2.5	Conclusion	100

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, les phénomènes intervenant sur les parties statiques du moteur lors d'un Blade Shedding sont modélisés. En effet, la direction d'éjection de la pale libérée est tangentielle et les pales libérées impactent deux pièces positionnées sur leurs trajectoires, à savoir l'anneau puis le blindage de turbine libre. Ces parties statiques qui sont des pièces de révolution assurent respectivement la définition de la veine d'air et la rétention des pales lors du phénomène de Blade Shedding.

En effet, actuellement le matériau du blindage, d'une épaisseur de l'ordre d'une dizaine de millimètres, choisi pour ses propriétés de rétention (niveau d'énergie emmagasinée avant rupture $\int_V \sigma \epsilon dV$ élevé), ne supporte pas les niveaux de température rencontrés dans la veine d'air (Phénomènes de fluage, oxydation et baisse des propriétés mécaniques du matériau). De ce fait, la définition de la veine d'air est réalisée à l'aide d'une seconde pièce de faible épaisseur (de l'ordre d'un millimètre) présentant un matériau possédant des propriétés moins bonnes vis-à-vis de la capacité de rétention mais meilleures vis-à-vis de la tenue en température. Ce découpage permet ainsi de positionner le blindage dans une zone moins exposée aux flux thermiques et pouvant être refroidie si nécessaire.

De par ce ratio dans les épaisseurs des parties statiques, les phénomènes lors de l'impact des pales vont être de natures différentes.

- Sur le blindage, des grandes déformations avec de la plasticité vont être rencontrées. Ces déformations irréversibles conduisent à un stockage d'une partie de l'énergie cinétique des pales. Par ailleurs, de par la forme de révolution du blindage, celui-ci a tendance à seulement dévier les pales lors de l'impact et de fait une forte érosion est présente le long de sa peau interne. Ce frottement conduit à l'évacuation d'une partie de l'énergie cinétique.

- La faible épaisseur de l'anneau entraîne sa perforation lors de l'impact des pales et contribue, dans une mesure plus faible, à la réduction de l'énergie cinétique des pales. Cependant, dès la perforation de l'anneau, la pale impacte le blindage et prolonge sa trajectoire de façon hélicoïdale le long de la peau du blindage en déchirant tangentiellement l'anneau. Malgré sa rupture dans une zone locale, la définition de cette pièce reste primordiale puisque l'anneau est positionné très proche des têtes des pales restantes et l'excitation du rotor par les efforts de balourd appliqués conduit à la définition de contacts rotor-pales-stator entraînant la rupture des autres pales.

Devant la complexité des phénomènes intervenant durant le Blade Shedding, la recherche réalisée s'est portée sur des cas plus simples dans lesquels la confiance que l'on a dans les modèles numériques et les essais nous permettrait de bâtir une méthode de modélisation des impacts et des perforations présents lors du Blade Shedding dans la turbine libre.

- Tout d'abord dans une première partie, le cas d'une pale d'une turbine libre venant impacter un blindage est étudié. En effet, même si la configuration semble proche des cas industriels déjà traités de pertes de pales (Kraus et Frischbier [67], Cosme [30]), la vitesse d'éjection des pales, associée à la rigidité du blindage mis en place, conduit à des fortes déformations de l'impactant et des sensibilités importantes aux maillages. Cet

aspect conduit à étudier la convergence des modèles en fonction de la finesse du maillage. Les résultats convergés permettent alors de préciser la répartition énergétique dans les corps après impact d'une pale.

- Dans une seconde partie, la recherche se focalise sur la perforation des tôles minces par des corps massifs, et en particulier la perforation d'une tôle mince par une bille. Un état de l'art est tout d'abord réalisé pour situer le problème général dans le monde scientifique que ce soit d'un point de vue expérimental ou numérique. Même si actuellement les méthodes éléments finis de modélisations de la perforation existent, les temps de calculs importants et la nécessité d'avoir une modélisation légère pour être introduite dans un modèle complet de moteur nous ont conduit à étudier les capacités et les performances d'un élément fini brique à formulation coque. Cet élément permet ainsi de représenter à l'aide d'un seul élément l'épaisseur de la plaque, ce qui permet de réduire les temps de calculs par la réduction du nombre d'équations à résoudre et l'augmentation du pas de temps. Cette partie se conclut sur la définition d'un critère de suppression des éléments pour représenter la rupture de la matière. Cet aspect qui est traité largement dans la bibliographie existante nous a conduit à tenir compte de la contrainte hydrostatique du chargement dans les critères de rupture matériau formulés en déformation plastique.

- Dans une troisième partie, la méthode de modélisation de la perforation est appliquée à un second type d'impact à savoir l'impact d'un projectile cylindro-conique sur une plaque mince constitué d'un alliage base nickel correspondant au matériau du blindage. La pertinence de la loi matériau identifiée dans une étude précédente réalisée au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz (LPMM) a ainsi pu être évaluée et les résultats confrontés à l'expérience.

2.2 Impact d'une pale sur un blindage

2.2.1 Introduction

Dans la littérature, la modélisation de l'impact d'une pale sur une partie statique a pour but la prédiction de la capacité de rétention afin de dimensionner au mieux les carter (Kelvin [65]) et d'éviter l'éjection de débris de haute énergie (Mathis [77]). Depuis une quinzaine d'années, l'augmentation des moyens de calcul rend possible la résolution des problèmes mécaniques par éléments finis à l'aide du schéma d'intégration des différences centrées, couramment appelé solveur éléments finis explicite ou code de dynamique rapide. Dans cette catégorie, Kraus et Frishbier [67] ont montré les possibilités de simulation de la perte d'une pale de turbine basse pression pour l'analyse de différents carter de rétention. Les modélisations intégraient des lois matériaux dépendant du taux de déformation et un modèle de rupture pour les carter dépendant uniquement de la déformation plastique. Ce critère permettait de représenter la pénétration dans le carter et de choisir le carter pouvant assurer la rétention de la pale.

Toujours dans le domaine de l'aéronautique, Winter et *al.* [114] puis Stamper et Hale [103] ont simulé la rétention des débris d'un rotor suite à son éclatement. Dans ce phé-

nomène, le comportement de l'impacteur est rigide et très peu d'énergie plastique est absorbée par les débris. De ce fait, l'essentiel de l'énergie cinétique est récupéré par les déformations plastiques des parties statiques. Les axes d'amélioration proposés par ces auteurs s'articulaient autour d'un modèle de rupture des matériaux des parties statiques dépendant du taux de déformation plastique. Pour finir, Cosme [30] a étudié le phénomène de perte d'aube de fan en cherchant à modéliser le comportement global du moteur et les interactions entre les parties en rotation et le stator. La démarche était focalisée sur la possibilité de calculer le comportement du moteur complet (Whole Engine Model) et les efforts récupérés aux attaches du moteur.

Ces différentes simulations traitent de phénomènes de dynamique rapide dans leur entière complexité ou en se restreignant à une interaction particulière. Néanmoins elles diffèrent de la problématique de perte de pale lors du Blade Shedding puisque lors de ce phénomène :

- la rétention de l'ensemble des pales requiert un blindage plus rigide que pour la rétention d'une pale,
- la vitesse de rotation significativement plus élevée entraîne une énergie cinétique plus grande dans les pales et des déformations plastiques plus importantes notamment côté impacteur.

De par ces différences, l'expérience actuelle ne nous permet pas de définir *a priori* la modélisation optimale qui conviendrait pour représenter le type d'impact traité. En effet, dans le phénomène global de perte d'aubes qui est un objectif de la thèse, le problème à résoudre intégrera la perte de l'ensemble des pales et donc le problème sera d'une taille nettement plus grande. Dans cette section, une modélisation optimale est donc recherchée à travers une étude de sensibilité sur la finesse du maillage. Ce travail est réalisé dans le code de dynamique rapide Europlexus.

2.2.2 Modélisations employées

La méthode des éléments finis converge vers la solution lorsque le maillage est suffisamment fin à condition que la formulation des éléments soit adaptée au problème traité. Ces deux considérations conduisent à développer plusieurs modèles et à les comparer afin de déterminer le modèle convergé. Par ailleurs, pour étudier la sensibilité à la forme des impactants, le modèle contient deux types de pales : une pale d'un premier étage de turbine libre (fig 2.1) et une pale d'un second étage de turbine libre. Le blindage associé à ces pales est pris en compte comme l'impacté du problème.

En terme de temps de calcul, le modèle le plus performant est constitué d'un blindage en coque et des pales modélisées par des briques pour la plateforme de la pale et en brique à formulation coque pour le profil. La pale est représentée sans son pied qui reste lié au disque de turbine. Elle est maillée à l'aide d'éléments volumiques de type brique pour la partie basse (échasse et plate-forme, élément linéaire CUB8) et de type brique à formulation coque à 8 noeuds pour le profil (élément ShB8). Pour le blindage, une modélisation en coque est choisie selon la formulation de Batoz avec 4 points d'intégration dans l'épaisseur (Élément Q4GS et figure 2.2). Par ailleurs, les éléments utilisés sont plei-

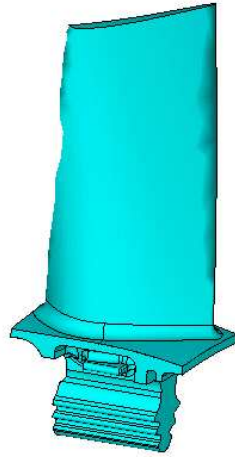


FIG. 2.1: Vue d'une pale de turbine libre

nement intégrés pour éviter les modes de déformation à énergie nulle (modes 'sablier' ou de Hourglass) et le contact sur coque est imposé entre la surface interne du blindage et les éléments solides de la pale. Par le choix de la formulation coque épaisse de Batoz, les déformations normales au plan de la coque sont négligées.

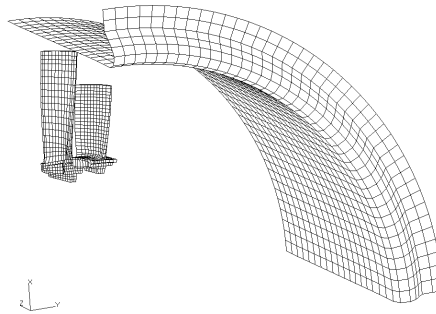


FIG. 2.2: Maillage des pales en brique à formulation coque et blindage en coque

Pour combler cette lacune, un modèle volumique pour le blindage est proposé et associé à une modélisation des pales en brique (CUB8) et brique à formulation coque présentée sur la figure 2.3. Pour étudier les effets de flexion dans le blindage, 4 éléments sont présents au minimum dans l'épaisseur, cf. figure 2.3.

La modélisation des profils des pales en brique à formulation coque conduit à l'hypothèse d'absence de déformation dans l'épaisseur de la matière et à l'impossibilité de raffinement du profil. En effet, les conditions de définition des coques ne sont plus assurées sur des maillages trop fins. Sur ce type de maillage, les simulations sont instables. De ce fait deux modèles en éléments brique pour les pales sont proposés et permettent de tester la sensibilité à la finesse du maillage. Le maillage le plus fin pour les pales est

visible sur la figure 2.3.

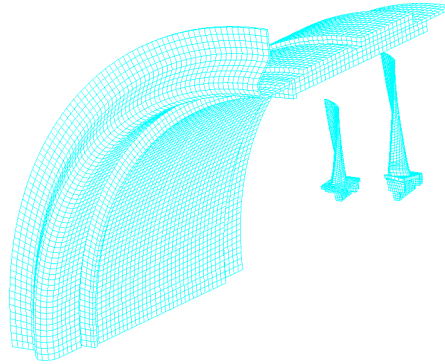


FIG. 2.3: Maillage des pales en brique raffinée et blindage en brique

Par la méthode de calcul employée, l'intégration numérique est conditionnellement stable au sens de la condition de Courant-Friedrichs-Levy [31] (CFL) sur le pas de temps. Les pas de temps calculés par Europlexus sur les différents modèles sont synthétisés dans la tableau 2.2.2.

Modèle	n°1 Pale en brique à formulation coque Blindage en coque	n°2 Pale en brique à formulation coque Blindage en brique
Nombre d'éléments	5200	54000
Pas de temps en ms	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
Temps CPU / 1ms	4000	13000

Modèle	n°3 Pale en brique grossier Blindage en brique	n°4 Pale en brique raffinée Blindage en brique
Nombre d'éléments	55000	58000
Pas de temps en ms	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
c Temps CPU / 1ms	32000	42000

TAB. 2.1: Pas des temps des modèles calculés par Europlexus

Par ailleurs, le contact est pris en compte entre les différentes pièces. La détection du contact est réalisée par la technique des surfaces maîtres sur noeuds esclaves et le calcul de la force de contact est réalisé par la méthode des pénalités. De plus, le modèle intègre une loi de frottement de Coulomb entre les impacteurs et le blindage. Le coefficient de frottement peut alors permettre de perturber légèrement le modèle afin d'identifier si celui-

ci se comporte de manière progressive et physiquement cohérente. La force de frottement est définie dans l'équation (2.1).

$$\vec{F} = \mu N \vec{T} \quad (2.1)$$

où $\vec{F}$ est la force de frottement, μ le coefficient de frottement prenant quatre valeurs arbitraires (0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3), N la force de contact suivant la normale et $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent de glissement.

De même que le frottement, les conditions aux limites sont mal connues puisque le blindage est fixé au moteur donc sur une structure souple. De ce fait une comparaison est faite entre deux conditions aux limites extrêmes : un encastrement au niveau de la pièce support du blindage et une liaison libre. Cette comparaison permet d'estimer l'influence de la condition limite du blindage sur notamment sa déformation plastique.

Les lois matériaux des alliages base Nickel composant les pales et le blindage présentent une dépendance marquée à la vitesse de déformation, mise en évidence dans une campagne d'essais réalisés au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz (LPMM) (Rusinek et *al.* [97]). Cette campagne d'essais a permis d'identifier un comportement matériau modélisé par des lois de Johnson Cook.

2.2.3 Résultats des simulations

2.2.3.1 Scénario du phénomène

Le scénario du phénomène est décrit en 3 étapes séparées par 4 événements :

- L'évènement qui déclenche le phénomène est la rupture de la pale dans une section fragile par effet centrifuge. On considère donc que la pale est animée d'un mouvement de translation et de rotation avec une vitesse tangentielle égale à $R_{CDG}\omega$ et une rotation ω dans la direction de l'axe de rotation moteur imposée au centre de gravité (Ceci est équivalent au champ de vitesse en rotation de la turbine au niveau de la pale). La pale réalise donc un vol libre.

- L'évènement suivant est le contact de la pale avec le blindage. Animée par son propre mouvement, la pale se déforme plastiquement contre le blindage. La composante radiale de son mouvement baisse progressivement. Le rapport important de masse entre le profil et la tablette de la pale entraîne de fortes déformations du profil. La figure 2.4 montre la faible modification de la direction initiale de la partie basse de la pale lors de la plastification du profil.

- Toujours animée d'un mouvement de translation, la tablette de la pale impacte la paroi interne du blindage, une importante déformation plastique est constatée côté impacteur et côté blindage : la composante radiale du mouvement s'annule rapidement. A la suite de cet évènement, la pale suit la paroi interne du blindage. Selon la vitesse de la pale après l'impact de la tablette, la force centrifuge exercée par la pale sur le blindage peut plastifier celui-ci. Néanmoins les frottements dissipent l'énergie cinétique de la pale et celle-ci ralentit.

- L'évènement final est l'arrêt de la pale.

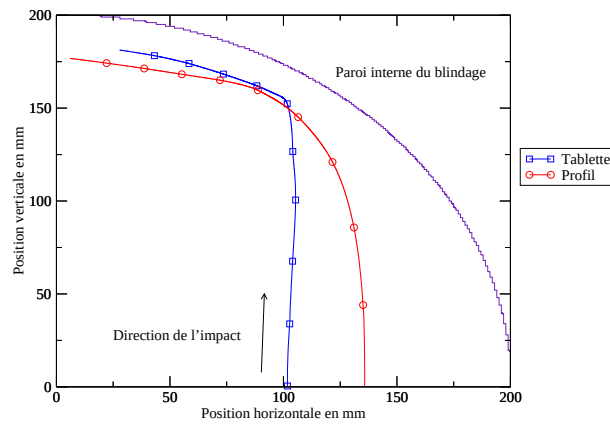


FIG. 2.4: Trajectoires des centres de gravité du profil et de la tablette de la pale "TL2" (Modèle de la pale en brique raffinée sans frottement)

Dans les simulations, l'intérêt se porte sur la séquence d'impacts. Cette séquence se termine lorsque la pale est en rotation dans le blindage et que le blindage ne plastifie plus par effet centrifuge. Cette séquence dure environ 0.5 ms et sera étendue à 1 ms pour toutes les simulations.

2.2.3.2 Analyse cinématique de l'impact

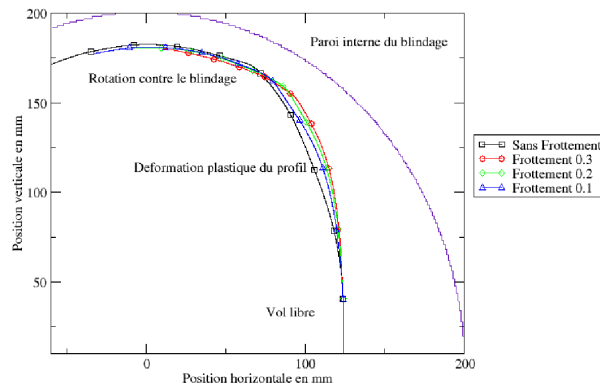


FIG. 2.5: Trajectoires du centre de gravité de la pale "TL2" entre 0 et 1 ms (Modèle de la pale en brique grossier)

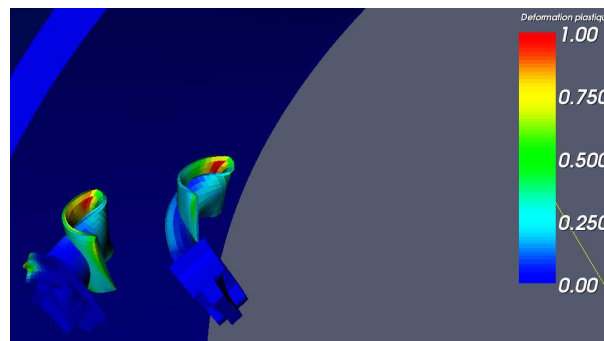
Les principales étapes présentées précédemment sont illustrées par la figure 2.5 qui représente la trajectoire de la pale dans un plan normal à l'axe de rotation de la turbine. Les différentes trajectoires des pales selon le coefficient de frottement sont mises en évidence. Les trois grandes phases sont présentes :

- la trajectoire rectiligne de la pale au départ correspondant au vol libre,

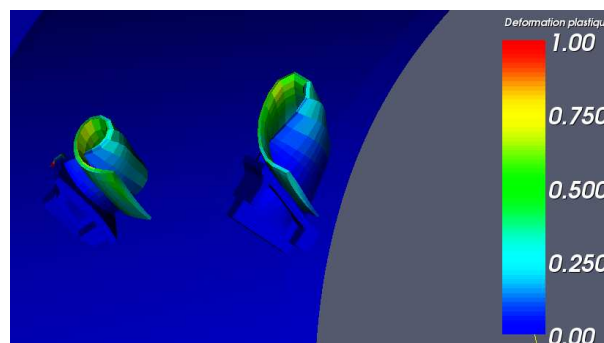
- des comportements différents lors de la plastification du profil de la pale,
- une phase finale de rotation de la pale où le frottement de la pale contre le blindage entraîne une distance parcourue plus courte.

2.2.3.3 Comparaisons des déformées des pales après simulation en fonction de la qualité du maillage dans le profil

Les déformées des pales (Fig. 2.6(a) et 2.6(b)) montrent une plastification importante avec un fort dépassement de la limite à la rupture en déformation du matériau (les déformations plastiques sont proches de 100 %). Les profils sont repliés sur eux-mêmes et un auto-contact aurait dû se produire. Dans les simulations, l'auto-contact des profils n'a pas été imposé et aucun modèle à la rupture de la matière n'est appliqué. Ces considérations entraînent une surestimation des capacités de déformation plastique des pales. Sur les figures 2.6(a) et 2.6(b), les états de déformées à 0.4 ms présentent dans les deux cas un flambement du profil et un repliement de celui-ci. Ce repliement concentre les déformations dans une zone localisée où la rupture se produit et est constatée expérimentalement. La différence de finesse de maillage modifie alors la déformée à un instant donné même si la déformée finale reste la même.



(a) Modèle en brique raffiné



(b) Modèle en brique grossier

FIG. 2.6: Déformations plastiques à 0.4 ms sur les modèles des pales en brique et blindage en brique

Les résultats obtenus avec les éléments coques épaisses (fig. 2.7) montrent un comportement plus rigide de la pale avec des déformées soit moindres soit plus prononcées selon les pales : la pale " TL1 " est repliée entièrement sur elle-même alors que la pale " TL2 " est vrillée avec une poche dans le profil. Ces remarques sont mises en évidence par ailleurs par les bilans énergétiques des modèles.

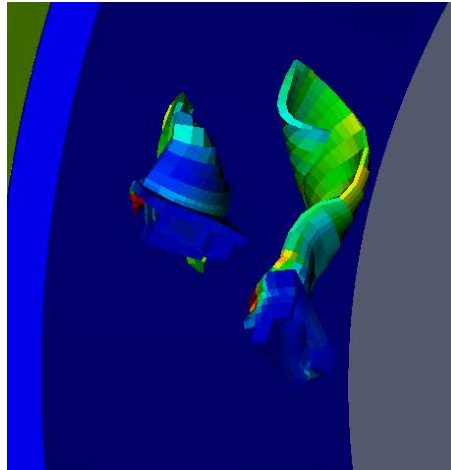


FIG. 2.7: Déformation plastique à 0.4 ms sur le modèle des pales en brique à formulation coque et blindage en brique

2.2.3.4 Énergie cinétique des pales

L'énergie cinétique de la pale se réduit progressivement par transformation de son énergie cinétique en énergie interne par déformation plastique du profil (fig. 2.8). La plus forte baisse d'énergie cinétique se passe au moment de l'impact de la tablette contre le blindage. Après l'impact de la pale, l'énergie cinétique se réduit très progressivement par frottement/déformation du blindage. Les simulations montrent que l'énergie cinétique de la pale n'est pas nulle après impact et que les pales continuent à tourner dans le blindage. Selon le coefficient de frottement mis en place, l'énergie résiduelle est de 15% à 50%. On notera que la valeur de 50% est associée à un coefficient de frottement nul qui est certainement non représentatif de la valeur réelle de celui-ci. Selon les valeurs numériques données par Barrett [8], les coefficients de frottement à sec à l'arrêt et glissant pour un contact entre deux matériaux en nickel sont respectivement de 1.1 et 0.53, ce qui montre bien que l'énergie résiduelle de la pale après impact sera bien inférieure à 50%.

2.2.3.5 Énergie interne des pales

Le comportement de flambage des pales est mis en évidence par la forte augmentation de l'énergie interne des pales lors du contact contre le blindage (phase d'impact, cf. fig. 2.9). L'augmentation finale de l'énergie interne est caractéristique de la déformation

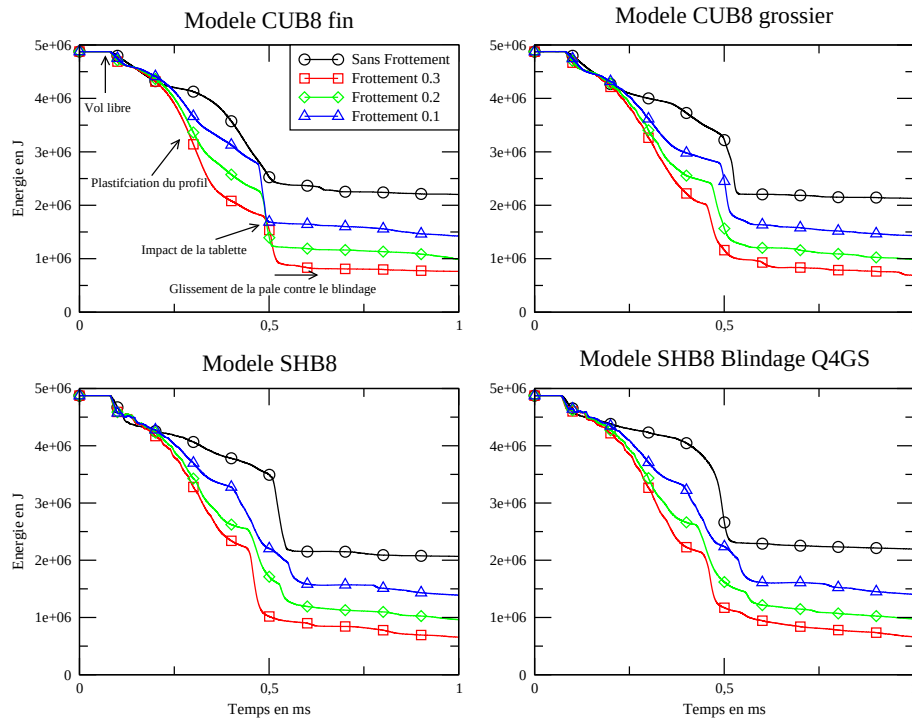


FIG. 2.8: Evolution de l'énergie cinétique de la pale "TL2"

plastique de la tablette lors de son impact contre le blindage. Après le dernier impact, l'énergie interne reste constante. La pale n'a plus la possibilité de se déformer après sa mise en rotation dans le blindage.

2.2.3.6 Energie interne du blindage

L'énergie interne du blindage croît différemment selon les types de sollicitations qu'il reçoit de la part des pales. Les 4 simulations présentées sollicitent différemment le blindage. Tout d'abord les modèles en brique à formulation coque des pales sont plus rigides et conduisent à des déformations plastiques du blindage importantes dès l'impact du profil (fig. 2.10). Lors de l'impact des profils, un comportement très rigide est constaté avec des sauts d'énergie non observés dans les autres simulations. Le niveau important de l'énergie interne du blindage en brique après impact par les pales en brique à formulation coque met en évidence que les contraintes de cisaillement et de compression dans le sens radial dans le blindage sont des quantités non négligeables du modèle.

Concernant les simulations avec plusieurs éléments brique dans le profil, les résultats sont cohérents entre eux. Un réseau de courbes est mis en évidence avec la caractéristique suivante : plus le coefficient de frottement est important plus l'énergie dans le blindage est faible. Pour le modèle en brique et maillage fin, le réseau de courbes semble différer pour le modèle sans frottement. L'analyse du comportement de ce modèle sera présentée

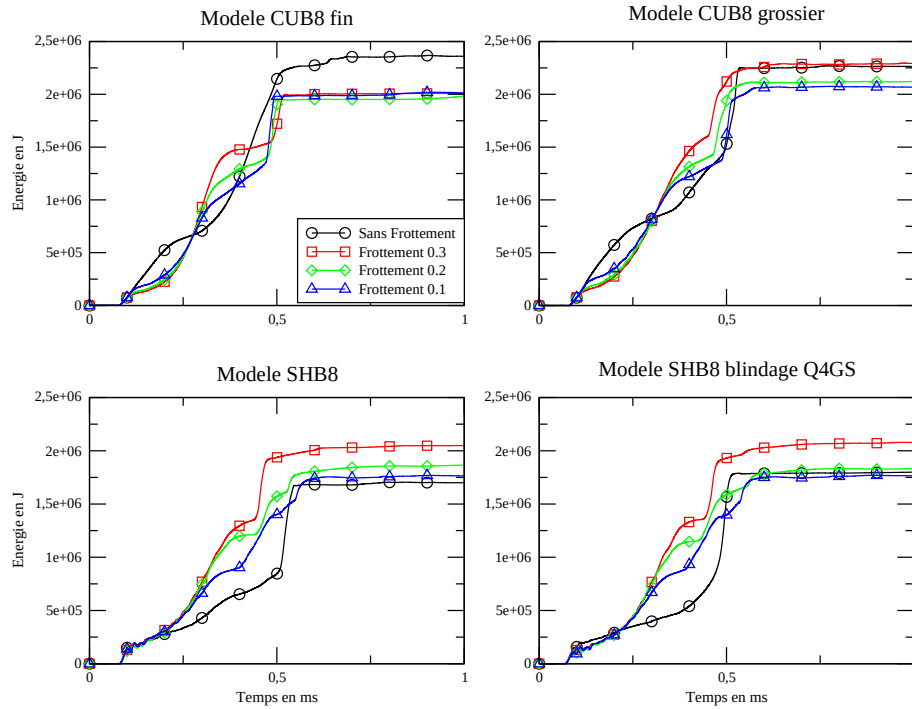


FIG. 2.9: Évolution de l'énergie interne de la pale "TL2"

dans le paragraphe 2.2.4.1.

2.2.3.7 Énergie cinétique du blindage

L'énergie cinétique du blindage est faible dans toutes les simulations (1 à 2 % de l'énergie cinétique initiale des pales, cf. fig. 2.11). Quelques points sont néanmoins à souligner.

Lors de forts impacts, le blindage est mis en mouvement (typiquement lors de l'impact des tablettes).

Paradoxalement l'énergie cinétique du blindage est d'autant plus faible que le coefficient de frottement est fort. Les efforts de frottement dissipant une partie de l'énergie cinétique des pales, le blindage est moins mis en mouvement. Le comportement de la pale modélisée en brique, raffinée et sans frottement diffère des autres modèles (pas de pic d'énergie cinétique, fig. 2.11).

Le comportement rigide des pales en brique à formulation coque est de nouveau mis en évidence avec des pics de déplacement non physiques : l'impact des profils serait équivalent à l'impact des tablettes.

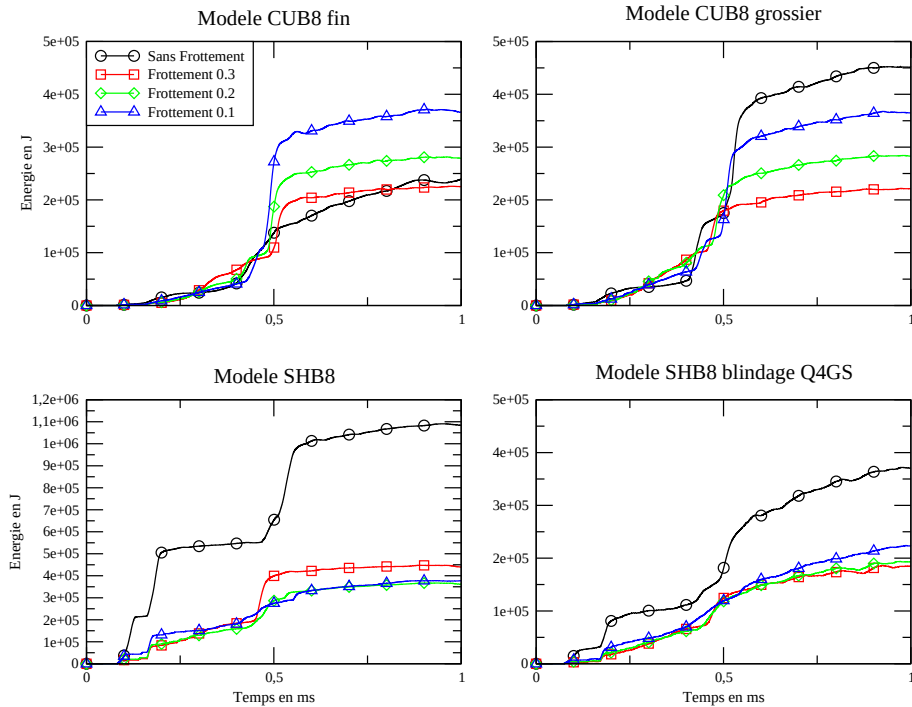


FIG. 2.10: Évolution de l'énergie interne du blindage

2.2.3.8 Bilan énergétique

Le modèle sans frottement (non représentatif de la réalité) permet de définir un bilan énergétique général de l'impact :

- 1 ms après le départ de la pale, alors que la pale est en rotation contre le blindage, 50 % de l'énergie cinétique initiale de la pale est conservée.
- 45 % de l'énergie initiale est perdue par déformation plastique de la pale.
- Le blindage récupère seulement 5 % de l'énergie initiale par déformation plastique.
- L'énergie cinétique du blindage est faible (environ 1 à 2 %).

Avec frottement, après 1 ms, l'énergie cinétique des pales est nettement plus faible et peut atteindre seulement 15 %. Cependant l'énergie interne des pales reste identique aux alentours de 45 %, ce qui souligne le fait que les pales se déforment jusqu'à une déformation limite. Côté blindage, l'énergie interne du blindage est diminuée fortement (seulement 3 % avec un coefficient de frottement de 0.3). Ce constat souligne que le travail de frottement devient une quantité importante dans le bilan énergétique. Avec un coefficient de frottement égal à 0.3, 30 % de l'énergie cinétique des pales est dissipée par frottement.

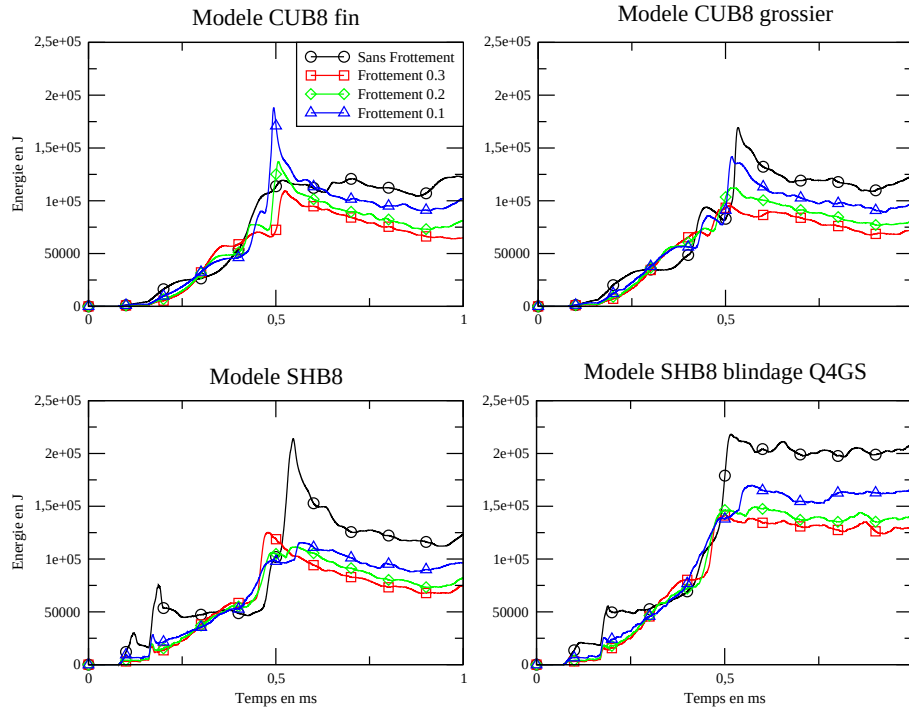


FIG. 2.11: Evolution de l'énergie cinétique du blindage

2.2.3.9 Prise en compte du frottement

Par la modification du coefficient de frottement, des perturbations du comportement sont remarquées mais ne doivent pas conduire à des comportements fondamentalement différents. Cette considération logique permet d'identifier des résultats qui sont physiquement incorrects comme, par exemple, le modèle en brique raffiné sans frottement.

Par ailleurs, le frottement entraîne des baisses d'énergies cinétiques importantes et le travail de frottement se dissipe essentiellement sous forme de chaleur. Dans la réalité, l'augmentation de la température du blindage, notamment au niveau de la paroi interne, entraîne une modification des propriétés des matériaux ce qui pourrait conduire à différents comportements lors de la phase de rotation des pales dans le blindage.

Les contacts érosifs, la dissipation de la chaleur, le coefficient de frottement et sa dépendance à la vitesse de glissement restent des quantités mal connues et non prises en compte à ce jour dans la simulation en dynamique rapide.

2.2.3.10 Calcul avec un blindage libre

Dans le cas d'un blindage libre, la plus grande part de l'énergie cinétique des pales est transformée en énergie cinétique du blindage : l'énergie cinétique du blindage est augmentée jusqu'à environ 1.5% de l'énergie libérée soit environ 30 % de plus qu'un

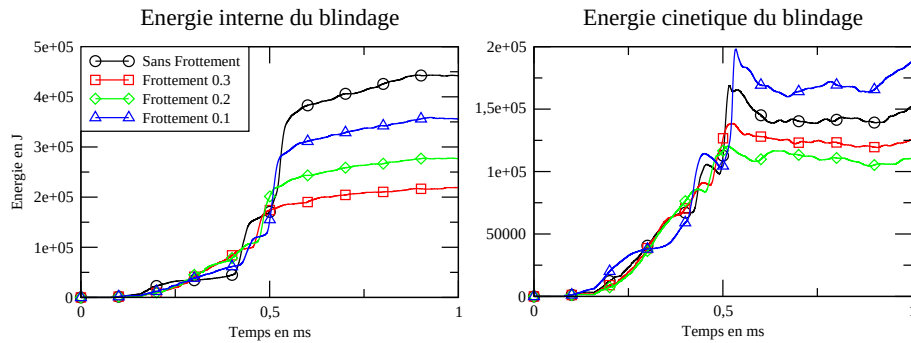


FIG. 2.12: Évolution de l'énergie cinétique et interne du blindage non fixé, Modèle de la pale en brique

modèle encastré (cf. fig. 2.12). Par ailleurs la liberté du blindage conduit à une diminution des déformations plastiques du blindage et donc de l'énergie interne du blindage (5 à 10 % relativement par rapport à une condition d'encastrement). Ces différences sont très légères du fait que la fixation du blindage modélisée dans le calcul est souple. Dans le cas de ce montage moteur, l'encastrement de la bride du blindage est une condition acceptable d'un point de vue énergétique.

2.2.4 Comportements des pales

2.2.4.1 Mode de flambement en flexion couplée à la torsion

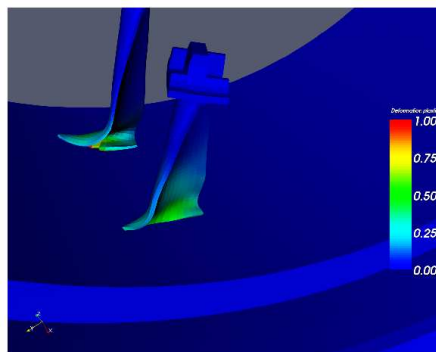


FIG. 2.13: Impacts des pales à 0.2 ms sur le modèle CUB8 fin sans frottement

Dans le cas du modèle le plus fin, le comportement de la pale sans frottement diffère du comportement du modèle plus grossier. Sur la figure 2.13, les pales sont en train de flamber contre le blindage mais dans un mode couplé de torsion et flexion. De ce fait la

pale ne s'écrase plus contre le blindage mais vient glisser contre celui-ci. Ce mode de torsion est mis en place suite au contact qui définit des normales vers l'avant et vers l'arrière de la pale. Ce comportement n'est plus présent dès qu'un frottement vient imposer la direction des résultantes des contacts pour l'ensemble du profil vers l'arrière du profil. Le fait de tester un modèle en faisant varier légèrement le coefficient de frottement permet ainsi de déceler un comportement non présent dans la réalité.

2.2.4.2 Phénomène de repliement et fragmentation de la pale

Le comportement de la pale pose des questions particulières. En effet, le flambage provoque la localisation des déformations dans le profil. Ces déformations sont largement au dessus des déformations admissibles du matériau et la rupture du matériau devrait survenir. Dans les expériences de Blade Shedding, les pales sont récupérées à l'état de débris traduisant ainsi la fragmentation importante des profils. La fragmentation des pales devrait donc être prise en compte dans les simulations afin d'obtenir des bilans énergétiques plus représentatifs de la réalité

Dans les méthodes éléments finis actuelles, la fragmentation est difficilement modélisable puisque actuellement les deux seules méthodes de représentation de la rupture sont :

- la suppression d'un élément si un critère matériau est dépassé,
- un enrichissement des fonctions de forme de l'élément par des partitions de l'unité (eXtended Finite Element Method, XFEM, Moes et *al.* [81]).

Dans la première solution, le problème rencontré est la suppression d'une part de la matière du système qui conduit à une perte énergétique du système. Cette méthode a été testée sur le problème étudié et a conduit à la suppression totale de la pale ce qui est non représentatif des débris générés par la pale. La seconde méthode qui résout le problème de perte de masse du système est actuellement seulement dédiée à la propagation de fissures de fatigue et encore en cours de développement pour tenir compte des aspects élastiques, élasto-plastiques (Elguedj [38]), transitoires (Menouillard [79]) et 3D (travaux actuels de E. Pierres).

De façon parallèle, des développements récents ont été apportés dans les méthodes particulières pour représenter des corps solides. Ces travaux se sont portés sur la mise en place d'une formulation coque pour la méthode Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) dans les travaux de Maurel [78] et le couplage entre éléments finis et éléments particuliers (Chuzel [28]). Cependant des difficultés apparaissent encore pour la mise en place d'une formulation unique en formulation particulière pour des structures mécaniques.

On peut donc proposer de modéliser la fragmentation à l'aide d'une bascule entre la formule éléments finis et SPH. Lorsque les corps sont non fragmentés, ceux-ci sont modélisés à l'aide d'une formulation éléments finis classique, tandis que lorsque des éléments sont supprimés pour cause d'un dépassement d'un critère de rupture matériau, les éléments sont remplacés par une formulation SPH. Ce concept permettrait de profiter en même temps des avantages des deux formulations tout en évitant les inconvénients de celles-ci. En effet, la perte d'énergie du système dû à la méthode des éléments finis serait

évitée et la méthode SPH ne serait pas utilisée pour représenter des corps volumiques. Ce travail n'a cependant pas été réalisé.

2.2.5 Synthèse

En conclusion, les comportements des différents modèles convergent vers un comportement de flambage en flexion puis fragmentation du profil suivi d'un impact sévère de la tablette contre le blindage. La meilleure représentation de ce comportement est réalisée par le modèle le plus fin en élément volumique pour les pales et le blindage. Malgré les différences de déformées de pales et de cinématiques d'impacts, les bilans énergétiques des modèles sont cohérents entre eux. Dans le cadre d'une intégration de ce modèle dans des modèles plus complets où les contacts entre pales seront modélisés et détermineront les instants de départs de celles-ci, le modèle en élément brique non raffiné semble être un des meilleurs compromis. Par ailleurs, la meilleure compréhension du comportement de l'ensemble impacté-impacteur demande de simuler la fragmentation du profil et la rupture du matériau des pales. Cet aspect pourrait être traité à travers une association entre méthodes éléments finies et méthodes particulières SPH.

2.3 Impact d'une bille sur une plaque mince en acier

Dans cette partie, le travail de recherche s'est focalisé sur la modélisation des plaques minces soumises à un impact par un corps rigide.

Dans un premier temps, un état de l'art général du domaine de recherche est réalisé. Cet état de l'art aborde à la fois les aspects expérimentaux et les modélisations de la perforation des plaques minces ou épaisses.

Dans un second temps, nous nous concentrons plus particulièrement sur la modélisation de l'impact d'une bille sur une plaque mince. Des essais associés à des caractérisations matériaux extraits de la bibliographie (CEA/JRC [25], Penazzi [93]) permettent de proposer une modélisation du phénomène à partir de la méthode des éléments finis. Certains aspects importants sont alors soulignés comme la stabilisation des éléments dans une formulation éléments finis sous-intégrée et le critère de rupture dépendant du taux de triaxialité.

2.3.1 Etat de l'art sur la perforation

L'impact et la perforation sont des sujets de recherche importants notamment pour leur application au dimensionnement des blindages de véhicules de transport permettant de fournir une protection aux équipages lors des missions sous le feu ennemi.

La notion de blindage est très ancienne puisque, dès l'antiquité, les fantassins se sont équipés de cuirasse, casque ou cote afin de combattre en mouvement tout en étant à couvert. Cependant la mise en place de blindages a également conduit au développement des

impacteurs afin de les rendre plus perforants. Nous pouvons citer par exemple le projectile APDS (Armour-piercing discarding sabot, photo 2.14(a)) développé durant la seconde guerre mondiale qui perd une partie du corps projeté afin d'augmenter sa pénétrabilité. La perforation d'un blindage dédié par ce projectile est visible sur la photo 2.14(b).

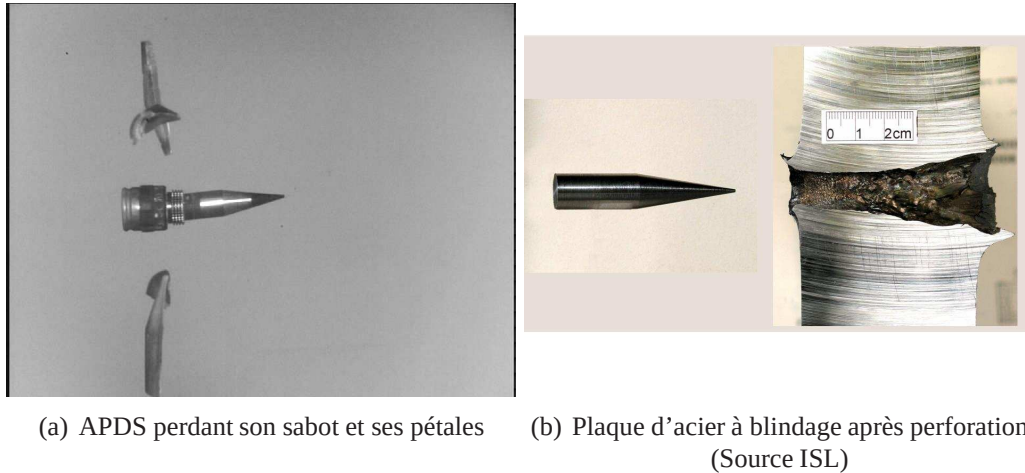


FIG. 2.14: Projectiles APDS en action

Plaque mince / Plaque épaisse Au cours des recherches sur l'impact, les chercheurs se sont concentrés sur l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la capacité de rétention de celle-ci. L'épaisseur de la plaque permet en effet d'augmenter la capacité de rétention. Cependant, si le blindage est surdimensionné, la masse de celui-ci pénalise les systèmes qui se déplacent ou les rend onéreux. De ce fait le dimensionnement du blindage doit être réalisé au plus proche de la configuration minimale. Sur ce thème de l'épaisseur e du blindage, les recherches réalisées par Penazzi [93] et Neme [86] ont montré respectivement que les modes de rupture d'une plaque mince ($e < h_{projectile}$) sont différents de ceux d'une plaque épaisse ($e > h_{projectile}$), même si le scénario de l'impact reste découpé en trois phases majeures.

Dans la première phase, le contact du projectile sur la plaque provoque une onde dans l'épaisseur de la plaque. Alors que, pour une plaque épaisse, les ondes peuvent conduire à un écaillage caractéristique sur la face opposée à celle de l'impact (visible sur la photo 2.15 ou dans les essais d'impact plaque-plaque de Suffis [105]), pour une plaque mince, cette première phase est quasiment inexistante puisque la plaque se met rapidement en mouvement et la phase suivante commence. En effet, cette première phase se termine lorsque la vitesse moyenne de la plaque, définie dans la zone en contact, coïncide avec celle de l'impacteur.

Dans la deuxième phase, la plaque se déforme irréversiblement de façon plastique. Pour une plaque mince, les déformations apparaissent largement autour de la zone d'impact alors que, pour une plaque épaisse, les déformations sont majoritairement localisées



FIG. 2.15: Résultat de l'impact d'une bille d'aluminium sur une plaque épaisse d'aluminium de 18 cm à la vitesse de 6.8 km/s (Source ESA)

au droit de l'impact. Cette phase se termine par une étape majeure de cisaillement de la plaque et la création, selon les formes d'impacteurs, d'un bouchon.

La troisième phase est alors le siège de deux phénomènes antagonistes :

- l'élargissement du diamètre de formation du bouchon dans la plaque par plastification du trou ;
- la pétalisation du trou par la création de fissures radiales (cf. figure 2.16(b)).

L'apparition de l'un ou l'autre de ces phénomènes dépend des propriétés du matériau. Penazzi [93] propose ainsi de calculer l'énergie nécessaire à l'élargissement d'un trou pour permettre la traversée d'un projectile (approche axisymétrique proposée par Thomson [107]) et de la comparer à une énergie de fissuration de pétales (mécanique de la rupture de Griffith). Par la comparaison de ces énergies, le mode de ruine de la plaque peut être prédit.

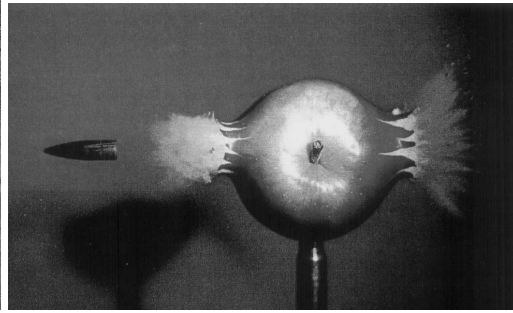
Par ailleurs, ces approches peuvent être altérées par le type de contact entre l'impacteur et la plaque. En effet, Rusinek et *al.* [98] démontre expérimentalement que, pour un impact sur plaque très mince ($e \ll h_{projectile}$), un contact glissant conduit à une pétalisation de la plaque alors qu'un contact frottant assure la création d'un bouchon.

Pour le cas d'une plaque épaisse, l'extraction du bouchon est accompagnée de l'apparition d'un bourrelet sur la face arrière de l'impact (Figure 2.14(b)). Pour une plaque mince, le bouchon extrait de la plaque s'accompagne d'un cisaillement tangentiel autour du bouchon et les formes des impacteurs ont une grande importance sur l'état des plaques après perforation. Par exemple, dans le cas de l'essai visible sur la photo 2.16(a), la forme en ogive du projectile supprime la création du bouchon mais amplifie la séquence de création des fissures autour du projectile. La forte chute d'énergie due à la création des fissures en pétales conduit alors au blocage du projectile dans la plaque.

Formes des impacteurs Les expériences notamment de Borvik et *al.* [19] [20] montrent que la forme des impacteurs est déterminante dans la capacité de rétention d'une plaque et que finalement la capacité de rétention est donc associée à un couple impacteur-impacté



(a) Impact incliné d'un projectile sur une plaque d'acier (Source US Navy [84])



(b) Pétales multiples sur la peau d'une pomme obtenues par la combinaison du projectile perforant et de la pression hydrodynamique (Source Wierzbicki [111])

FIG. 2.16: Pétalisation sur différents corps

(Figure 2.17). La fissuration localisée suite à la plasticité globale est en général une condition nécessaire à la traversée de la cible.

Sur des impacteurs cylindriques, l'impact met en duel la déformation de l'impacteur (similaire à un essai de type Taylor) et le poinçonnage de la plaque. Lorsque la fissure liée au poinçonnage apparaît, l'ensemble bouchon-impacteur traverse la plaque en limitant la perte d'énergie au seul frottement entre les corps en mouvement et le corps fixe.

Sur des impacteurs pointus ou coniques, la zone initiale de déformation est restreinte à cause de la surface de contact avec l'impacteur. Cependant dès la rupture de cette première zone, des fissures complémentaires apparaissent car le projectile ne peut traverser la plaque. Ce type d'impacteur est donc à privilégier si l'on souhaite une pétalisation de la plaque. Sur des problèmes d'explosion, la pétalisation est aussi privilégiée car elle permet d'atteindre l'état d'équilibre plus rapidement (Wierzbicki [111]).

Vitesse d'impact La vitesse d'impact est également un paramètre déterminant du mode de rupture. En effet sur des impacts à basse vitesse, une déformation importante de la plaque apparaît, permettant ainsi de dissiper une partie de l'énergie (Penazzi [93]). Ensuite pour des vitesses d'impact supérieures à la limite balistique, la rupture apparaît localisée s'apparentant à un poinçonnement de la plaque. Lorsque la vitesse d'impact devient très élevée (domaine de l'hyper-vélocité), les ondes de choc qui se propagent dans l'épaisseur entraînent des micro fissurations (Eftis et *al.* [37]) et un repoussement excessif de la matière (Photo 2.15).

Modélisation La prédiction des capacités de rétention est un point essentiel au développement des blindages. Plusieurs modèles existent dans la littérature, dont celui récemment proposé de Chocron et *al.* [27] qui utilise à la fois les grands principes des modèles de Walker et Anderson [110] et les modes de rupture de Ravid et Bodner [94]. Cette modélisation permet ainsi d'obtenir des courbes typiques de vitesse résiduelle du projectile

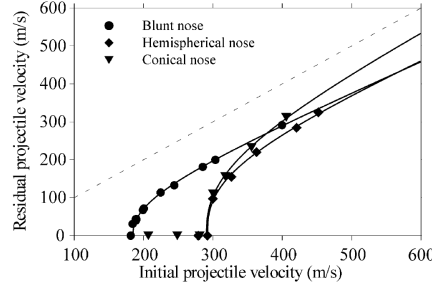


FIG. 2.17: Vitesses résiduelles expérimentales en fonction de la forme de l'impacteur (Borvik et *al.* [19])

après perforation en fonction de sa vitesse incidente. Sur la figure 2.17, la non linéarité de la vitesse résiduelle est bien visible. Cependant ce changement de vitesse correspond à une chute d'énergie relativement constante en fonction de la vitesse incidente comme le constate Gupta et *al.* [51].

L'une des méthodes les plus simples pour estimer la capacité de rétention d'une plaque mince est la méthode de Zukas et Nicholas [115] qui propose l'estimation suivante, éq. (2.2)

$$V_r = p_1(V_i - V_{50})^{1/p_2} \quad (2.2)$$

où V_i , V_r et V_{50} correspondent respectivement à la vitesse incidente, vitesse résiduelle et vitesse limite balistique du projectile. Dans le cas de projectile indéformable, p_2 est égal à 2 et p_1 est égal à $(M + M'/3)/M$. M est la masse du projectile et M' est la masse de la partie de la plaque au droit du projectile avant impact.

Si les cas expérimentaux sont relativement bien connus, la perforation dans le monde industriel apparaît dans des configurations nettement moins académiques, ce qui nécessite de transposer les informations acquises sur un cas d'étude à une géométrie industrielle. Grâce à l'augmentation de la capacité de calcul, la méthode EF est une candidate très intéressante car elle est basée sur une description partitionnée du problème intégrant les caractéristiques de matériaux dans le domaine étudié. Les lois matériaux nécessitent une prise en compte des caractères élastiques, visqueux, plastiques et endommageables rencontrés lors de ce type de sollicitation. Un des modèles bien connus pour le caractère élastique, visqueux et plastique est le modèle de Johnson Cook [63], utilisé avec succès par Borvik et *al.* [18] pour la modélisation de la perforation. Sur ces aspects, à hautes vitesses de déformation, les lois identifiées actuellement peuvent être mises en défaut par de nouvelles non-linéarités (Rusinel et *al.* [97] [98]), ce qui limite le domaine d'utilisation des lois au domaine identifié.

Idéalement, le caractère endommageable de la matière permet d'identifier la rupture de la matière via une quantification du taux de porosité du massif associé à l'apparition, la croissance et la coalescence de cavités. L'endommagement de la matière peut être alors couplé à la loi élasto-visco-plastique par la définition d'un potentiel thermodynamique (Lemaitre et Chaboche [72]) ou simplement découplé ce qui ne définit alors que le mo-

ment de rupture de la matière. Dans un modèle découplé, la variable d'endommagement est calculée indirectement puisqu'il existe une bijectivité entre la plasticité et l'endommagement, par exemple, par un modèle de rupture de Johnson-Cook [64] ou l'un des modèles utilisés par Wierzbicki et *al.* [112], Teng et Wierzbicki [106] ou Rusinel et *al.* [98].

Dans les modèles couplés, l'endommagement est calculé puis corrige la loi élasto-plastique (Borvik et *al.* [18], Carney et *al.* [23]). Cependant, cette variable perturbe le système mécanique car l'endommagement adoucit la loi matériau et conduit à une localisation des phénomènes de striction dans un seul élément (Blazy[15], Suffis [105], perte d'ellipticité de la solution comme le souligne De Borst [34]). Ceci doit être résolu afin d'éviter la dépendance au maillage inhérente aux méthodes éléments finis par des méthodes limitant la localisation : méthodes de régulation par limitation du taux de croissance de l'endommagement (Suffis [105]), méthodes de calcul de l'endommagement non local (par exemple utilisé dans Cazes et *al.* [24]).

En parallèle des méthodes EF, d'autres méthodes sont apparues pour s'affranchir notamment du maillage. Ces méthodes dites particulières modélisent de façon plus aisée les phénomènes de fracturation de l'impacteur ou de l'impacté, et les contacts multiples entre l'impacteur et les fragments résiduels (Hayhurst et Clegg [53], Michel et *al.* [80]). De plus, les travaux récents de Maurel [78] donnent la possibilité de représenter les plaques à l'aide d'un seul élément dans l'épaisseur (Développement d'une formulation SPH de type brique à formulation coque). Cette méthode est encore en développement et ne sera pas explorée dans ce travail.

Les résultats EF satisfaisants obtenus par Borvik et *al.* [18], Balden et Nurick [5] ou Rusinek et *al.* [98] sont limités par la taille du modèle à mettre en place. En effet, pour créer les fissures de perforation, les structures sont modélisées à l'aide d'éléments solides. Plusieurs éléments sont donc présents dans l'épaisseur (plus de 10 éléments en général). Cette considération souligne que ces méthodes de modélisation sont inutilisables sur des structures entières où l'on ne connaît pas *a priori* la position de la zone perforée.

Présentation du travail réalisé Dans ce contexte général, le travail mené dans cette partie est consacré à la modélisation de l'impact d'une bille élastique sur une plaque mince par une méthode élément fini lagrangienne de type élément solide à formulation coque pour représenter la plaque et une loi élasto-plastique dépendant de la vitesse de déformation avec un critère en déformation plastique.

En effet, dans la thèse de Penazzi [93], des tests ont été réalisés pour différents couples de matériaux, dont l'acier 316, dans la configuration de l'impact sur plaque mince. Cette configuration est proche de celle rencontrée lors de l'impact des pales sur l'anneau lors d'un Blade Shedding. En effet, les analyses des essais de BS ont montré clairement l'influence de l'anneau dans le phénomène et nécessite d'être pris en compte cependant en ayant une modélisation des plus légères pour pouvoir simuler le phénomène dans son ensemble. Une représentation de la plaque par des éléments briques à formulation coque (ShB8 dans Europlexus) semble être une des meilleures solutions. En effet, ces éléments à 8 noeuds sont sous intégrés et permettent de modéliser des coques en flexion. De plus,

cet élément a été récemment amélioré par Abed-Meraim et Combescure [1] pour la stabilisation des modes liés à la sous intégration.

2.3.2 Description des moyens d'essai

La partie expérimentale est issue des travaux de Penazzi. Les essais sont réalisés à l'aide d'un canon à gaz qui assure une bonne stabilité du tir et une bonne répétitivité des vitesses. Les moyens de mesure sont des micro-bases optiques positionnées à l'avant et à l'arrière de la plaque et une caméra rapide positionnée au niveau de la plaque et orientée selon une direction normale à la direction de tir (Photo 2.18).



FIG. 2.18: Vue générale de l'installation d'essai du canon à gaz du CREA/CM (DGA)
(Source Penazzi [93])

Concernant le projectile, les essais sont réalisés à l'aide de billes (de roulement) de diamètre 11mm . En effet, ces corps présentent une forme tolérancée vis à vis de la sphéricité (tolérance de fabrication g8) et un matériau standard à haute teneur en carbone (100Cr6) qui leur assure une faible déformabilité. La dureté Rockwell du 100Cr6 est de 63 HRC, ce qui correspond à une limite à la rupture de 2300 MPa, soit 4 à 5 fois celle du matériau de la plaque.

Concernant la plaque, les dimensions ont été recherchées afin de s'affranchir au mieux des perturbations liées aux conditions aux limites. En effet dans la seconde phase d'impact durant laquelle la plaque est mise en mouvement, la propagation des ondes dans la plaque conduit à un retour des ondes dans la zone d'impact. Pour éviter ce phénomène, les dimensions de la plaque sont prises de telle sorte que la durée de propagation de l'onde soit supérieure au temps de perforation de la plaque. Il faut remarquer que lorsque la vitesse incidente est proche de la limite de perforation, la plaque se déforme durant un temps conséquent. On comprend donc que la limite de perforation est un résultat sensible aux conditions aux frontières de la plaque. La plaque étudiée a une dimension de $150 \times 300\text{mm}$ et une épaisseur de 1mm en acier inoxydable 316, elle est encastrée à ses frontières.

Au cours des essais, plusieurs vitesses incidentes du projectile sont testées afin de connaître l'évolution de la vitesse résiduelle du projectile en fonction de sa vitesse incidente et d'identifier la vitesse limite de perforation.

2.3.3 Description de la modélisation éléments finis

Cette partie est divisée en trois sous parties. Tout d'abord, les lois matériaux et les critères permettant la perforation sont évoqués. Dans une seconde partie, deux maillages sont étudiés en analysant les résultats obtenus. Pour finir, la dépendance au maillage est mise en évidence.

2.3.3.1 Lois matériaux des corps

Matériau de la bille La bille est en acier 100Cr6. Afin d'étudier uniquement le comportement de la plaque à l'impact, la bille est supposée élastique. Sa masse volumique est de $7,84 \frac{kg}{dm^3}$ et son module d'Young est de $210GPa$.

Matériau de la plaque L'alliage 316 est un acier inoxydable austénitique d'usage général avec une structure cubique à faces centrées. Son module d'Young mesuré par jauge est de $155GPa$ (Source Penazzi [93]).

La courbe élastoplastique quasi statique obtenue par une vitesse de déformation de $3.3 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ est obtenue sur une éprouvette EPC120 (Source Penazzi [93]). Le comportement de ce matériau est modélisé par une loi de type Ludwick, éq. (2.3), dont les paramètres sont précisés dans le tableau 2.2.

$$\sigma = \sigma_{y0} + K\varepsilon^n \quad (2.3)$$

La dépendance à la vitesse de déformation est prise en compte par le modèle proposé par Ipsra-Cadarache identifié pour l'acier 316 (CEA-JRC [25]). Ce modèle prend en compte une dépendance à la vitesse de déformation en fonction du taux de déformation. L'équation du modèle complet est rappelée dans l'équation (2.4) et les constantes associées dans le tableau 2.2.

$$\sigma = (\sigma_{y0} + K\varepsilon^n) \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{L}\right)^m\right) \quad (2.4)$$

$$L = e^{\frac{a+b\varepsilon}{1+c\varepsilon}} \quad m = \frac{d+e\varepsilon}{1+f\varepsilon}$$

Dans le but de simuler la rupture de la matière, l'endommagement ductile est pris en

Paramètres de la loi de Ludwick		
$\sigma_{y0} = 260Mpa$	$K = 1077Mpa$	$n = 0.56$
Paramètres de la loi Ipsra-Cadarache		
$a = 6.388$	$b = 86.215$	$c = 6.457$
$d = 0.233$	$e = 0$	$f = 0$

TAB. 2.2: Paramètres identifiés de la loi matériau de l'acier 316

compte par un modèle découplé entre endommagement et plasticité. Dans ce type de

modèle, l'endommagement sera calculé en fonction du chargement imposé sur le volume mais n'interviendra pas dans le calcul de la plasticité. Dans les définitions de Lemaitre et Chaboche [72], pour se rapprocher au mieux des comportements matériaux, le mécanisme d'endommagement est associé à l'énergie de cisaillement et à l'énergie de déformation volumique, ce qui conduit à définir la contrainte équivalente d'endommagement comme fonction de la contrainte équivalente de plasticité et du taux de triaxialité des contraintes. De façon expérimentale, les travaux de Teng et Wierzbicki [106] et Wierzbicki et *al.* [112] montrent la dépendance de la déformation plastique maximum au taux de triaxialité $\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$.

Dans cette partie, deux critères présentés sur la figure 2.19 seront donc évalués pour représenter la rupture.

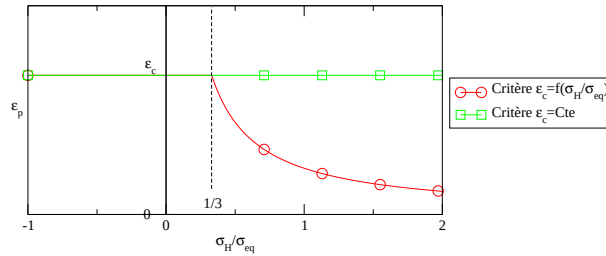


FIG. 2.19: Critères de rupture des éléments en fonction du taux de triaxialité

- Le premier correspond à une déformation plastique uniforme et est indépendant du taux de triaxialité ce qui conduit à dire que l'endommagement croît de façon linéaire avec la plasticité. Ce critère, écrit dans l'équation (2.5), a été utilisé dans de nombreuses études (Sarkar et Atluri [100], Carney et *al.* [23]).

$$\epsilon \leq \epsilon_c \quad (2.5)$$

- Le second dépend du taux de triaxialité à travers les équations (2.6).

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \leq \frac{1}{3} & : \epsilon \leq \epsilon_c \\ \text{Si } \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} > \frac{1}{3} & : \epsilon \leq \epsilon_c \frac{\sigma_{eq}}{3\sigma_H} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le taux de triaxialité des expressions (2.6) correspond à l'état de triaxialité des contraintes moyenné dans le temps, ce qui permet de se rapprocher de la définition donnée par Bao et Wierzbicki [6].

Les deux critères (2.5) et (2.6) présentent une seule variable correspondant à la déformation plastique équivalente dans le cas d'un taux de triaxialité compris entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$. La valeur identifiée lors d'un essai de traction sur éprouvette lisse (Penazzi [93]) est retenue et vaut 50% pour le cas de l'acier 316. Cette valeur arbitraire non corrigée par rapport à la taille de la maille sera retenue pour les simulations réalisées. Dans l'algorithme utilisé, le critère de déformation plastique est imposé sur le point de Gauss $n^{\circ 3}$ correspondant à la fibre moyenne de la plaque. Dès que le critère est satisfait sur ce point, l'ensemble de l'élément est supprimé.

2.3.3.2 Maillage de la plaque et de la bille

Maillage de la bille Afin de faciliter le maillage et d'obtenir des performances de calcul satisfaisantes, la bille est représentée par une sphère creuse (épaisseur 1mm pour un rayon extérieur de 5,5 mm), visible sur la figure 2.20. Deux éléments de type brique (CUB8) sont disposés dans l'épaisseur. Afin de compenser le volume manquant, la masse volumique de la bille est corrigée.

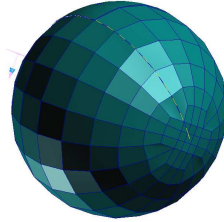


FIG. 2.20: Maillage creux de la bille

Maillage de la plaque La plaque est modélisée à l'aide d'éléments de type solide à formulation coque avec huit noeuds et cinq points d'intégration dans l'épaisseur. La stabilisation classique des modes de Hourglass est réalisée par une viscosité artificielle. L'élément ainsi formulé porte le nom classique ShB8. Cette méthode sera comparée à la nouvelle méthode proposée par Abed-Meraim et Combescure [1] qui suppose un champ de déformation postulé pour les modes à énergie nulle associés à la sous intégration. Cet élément porte le nom ShB8PS.

Deux types de maillages sont présentés dans ce rapport.

- Le premier est un maillage réglé dans les directions radiale et tangentielle au niveau de la zone qui va se déformer fortement (Fig. 2.21.a). Ce maillage assure ainsi que le champ de solution proposé est axi-symétrique mais présente l'inconvénient d'imposer la zone dans laquelle la bille doit impacter.

- De ce fait, le second est un maillage réglé finement dans la zone d'impact dans deux directions normales l'une à l'autre (Fig. 2.21.b). Deux maillages (mailles de 1mm et 0.6mm) sont testés dans la suite de l'étude. Les briques présentent donc un ratio longueur/hauteur inférieur à l'unité¹.

Autour de la zone d'impact, les maillages sont dé-raffinés afin de limiter le temps de calcul.

2.3.3.3 Conditions initiales et aux limites

Une condition d'encastrement est imposée sur les quatre côtés de la plaque pour assurer son maintien. Pour la bille, la vitesse initiale est imposée sur l'ensemble des noeuds du

¹La hauteur de l'élément correspond à l'épaisseur de la plaque.

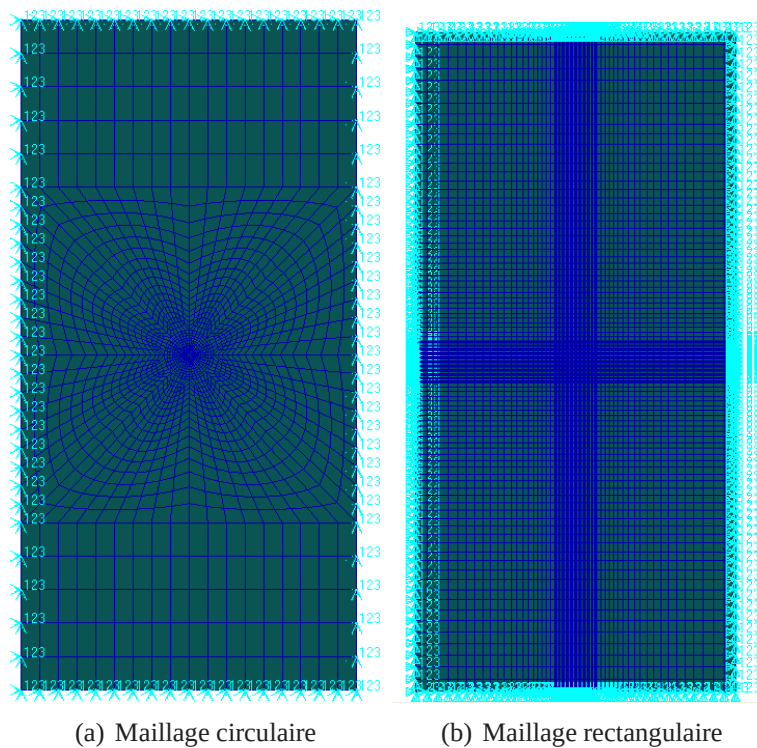


FIG. 2.21: Maillages pour le calcul Element Fini

volume. Cette condition initiale ne nécessite pas un pré-chargement de la structure. Entre la bille et la plaque, un contact par multiplicateur de Lagrange est imposé. Ce contact est défini frottant et constant quelque soit la vitesse de glissement ($\mu = 0.3$)

2.3.4 Comparaison entre les éléments ShB8 et ShB8PS

Dans Europlexus, l'élément ShB8 est un élément brique à formulation coque sous intégré (5 points de Gauss dans l'épaisseur). Il est stabilisé par une viscosité artificielle. L'élément ShB8PS présente la même formulation élément fini mais il est stabilisé par une technique de projection pouvant se mettre sous le formalisme de la "Méthode de la Déformation Postulée" ce qui permet d'éviter les phénomènes de Hourglass en rendant le processus plus physique. Pour tester la différence entre ces deux éléments, un test d'impact de la bille sur la plaque sans suppression d'éléments est réalisé. Le calcul est mené pour une vitesse d'impact de 400m/s sur le maillage axisymétrique et sur le maillage rectangulaire.

Le résultat du calcul pour les deux maillages est visible sur les figures 2.22(a) et 2.22(b), 0.25ms après le contact de la bille. Les deux modèles présentent des résultats bien différents.

La valeur et la localisation de la déformation plastique maximum diffèrent entre les deux modèles. Cette différence de niveau de déformation plastique est associée à la taille

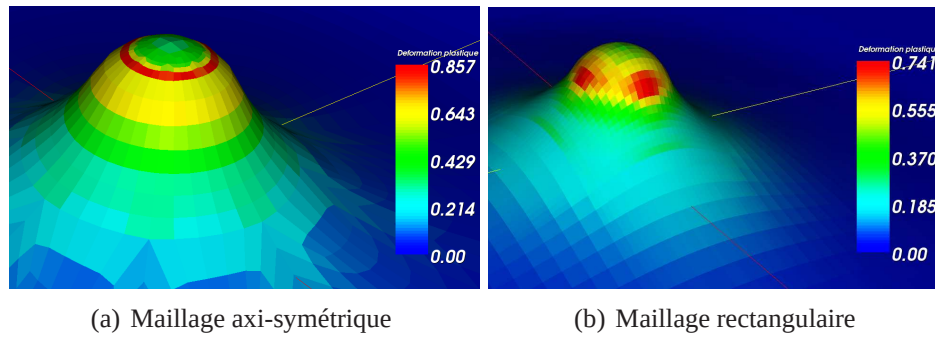


FIG. 2.22: Déformations plastiques de la plaque en ShB8 pour une vitesse d'impact de 400m/s et sans rupture des éléments

des éléments (Figures 2.22(a) et 2.22(b)).

Par ailleurs, les déformées sont axisymétriques par rapport à la normale à l'impact ce qui doit conduire à un champ de déformation axisymétrique. Dans le cas du maillage circulaire, le champ de déformation plastique est axisymétrique conformément à la forme déformée. Dans le cas du maillage rectangulaire, ce champ est localisé dans la direction du maillage ce qui est non physique.

L'analyse du processus de calcul des forces internes révèle que seule la stabilisation des modes de Hourglass par viscosité artificielle peut être la source de ce comportement. En effet, en supprimant la stabilisation, et de ce fait en prenant le risque d'avoir un calcul divergeant, le calcul ne présente plus cette caractéristique. De plus, en utilisant les développements de stabilisation de l'élément (ShB8PS) menés par Abed-Meraim et Combescure [1], la déformation plastique dans la plaque maillée de façon rectangulaire devient relativement axisymétrique comme le présente les figures 2.23(a) et 2.23(b). Pour le reste de l'étude, la modélisation sera uniquement réalisée à l'aide de l'élément ShB8PS².

2.3.5 Effet du taux de triaxialité sur la rupture

La calcul est mené ici pour une vitesse initiale de 350m/s sur le maillage axisymétrique en testant les critères de rupture (2.5) et (2.6). Les déformées de la plaque sont visibles sur les figures 2.24(a) et 2.24(b). Le trou de la plaque présente des éléments déformés sur son contour ainsi que quatre pétales principales montrant la création d'une fissure de pétalisation. Le bouchon est de forme circulaire, ce qui correspond à l'expérience. La vitesse résiduelle de la bille est de 327m/s pour le critère indépendant du taux de triaxialité et 329m/s pour le critère dépendant du taux de triaxialité. Ces valeurs sont à comparer à une valeur expérimentale de 314m/s , ce qui présente donc un écart de 4% en vitesse.

²Le calcul de la stabilisation par la déformation postulée requiert un temps de calcul légèrement supérieur à celui de la stabilisation par viscosité artificielle.

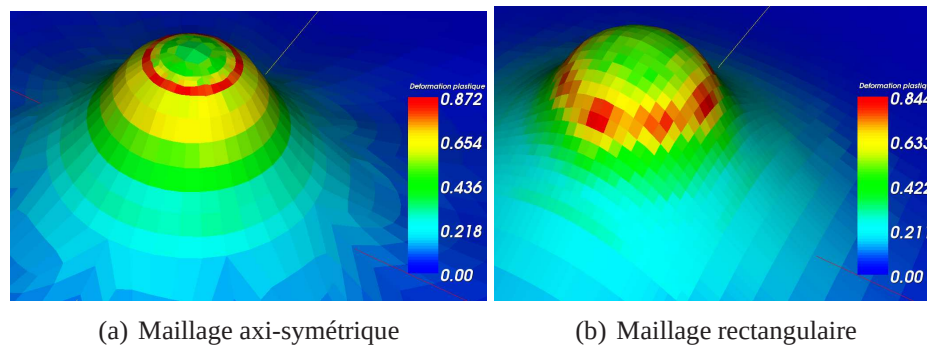


FIG. 2.23: Déformations plastiques de la plaque en ShB8PS pour une vitesse d'impact de 400m/s et sans rupture des éléments

2.3.6 Résultats des simulations pour différents maillages

Les différents maillages sont testés avec les deux critères de rupture et pour une gamme de vitesse comprise entre 200m/s et 600m/s qui correspond à la plage étudiée expérimentalement par Penazzi [93]. Le paramètre qui est le plus représentatif des résultats est la vitesse résiduelle de la bille après perforation. Lorsque la bille ne perce pas, sa vitesse résiduelle est considérée nulle. Les résultats et la comparaison à l'expérience sont présentés sur la figure 2.25. Le graphique 2.25(a) présente la vitesse résiduelle de la bille selon les différents maillages avec une loi matériau qui prend en compte un critère de rupture en déformation plastique équivalente constante. Sur le graphique 2.25b, les résultats des différents maillages sont présentés avec le critère de rupture dépendant du taux de triaxialité. Les résultats montrent que la modélisation intégrant le critère dépendant du taux de triaxialité permet de mieux représenter le système et de se rapprocher des résultats expérimentaux, fig. 2.25 (b). De plus, ce critère permet d'être moins sensible à la taille de maille que le critère à déformation plastique constante (Comparaison entre les graphique a et b de la figure 2.25). Ces remarques soulignent donc qu'un critère en déformation plastique constant ne permet pas de modéliser correctement la perforation du fait que le taux de triaxialité dans la zone de rupture évolue fortement avec la vitesse d'impact et que le critère doit tenir compte de cette évolution.

2.3.7 Synthèse

Le travail réalisé s'est focalisé sur la modélisation de l'impact d'une bille sur une plaque rectangulaire mince. L'objectif du travail est de définir une méthode de modélisation de l'impact sur plaque mince par des éléments finis tout en assurant l'application de la méthode développée à des structures industrielles. De par cette contrainte, le choix de la modélisation s'est porté sur des éléments de type brique à formulation coque et une approche matériau élasto-plastique dépendante de la vitesse de déformation. Concernant la rupture, une approche découplée entre endommagement et plasticité a été retenue

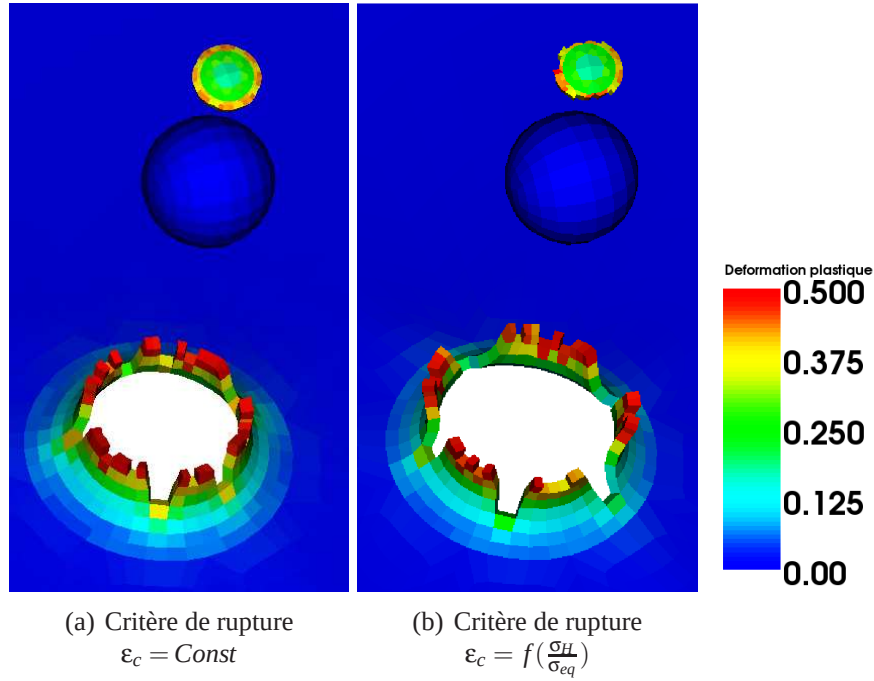


FIG. 2.24: Vue globale du système, à $t = 0.075ms$ après le contact

afin d'éviter les dépendances inhérentes aux maillages du phénomène d'adoucissement matériau.

Grâce au grand nombre de modèles réalisés puis testés, la méthode proposée préconise l'utilisation d'un maillage dans la zone d'impact présentant un ratio de 1 entre la longueur de l'élément et son épaisseur. Pour l'approche de la rupture, le critère en déformation plastique dépendant du taux de triaxialité permet de nettement mieux représenter le phénomène de perforation de plaque. Ce critère qui a été défini arbitrairement dans cette étude correspond aux résultats des expériences menées par Wierzbicki et *al.* [112]. Il n'a cependant pas été possible de suivre les constations de Bao et Wierzbicki [7] sur le fait que lorsque le taux de triaxialité est inférieur à $1/3$, la matière ne peut rompre. En effet, les éléments se retrouvant dans cette configuration se déformaient infiniment en modifiant grandement le résultat global.

2.4 Impact d'un projectile conique sur une plaque mince

Dans cette partie, la méthode proposée ci-dessus est réutilisée pour étudier le comportement d'une plaque en alliage à base Nickel correspondant à celui du blindage soumise à l'impact d'un corps cylindro-conique. Pour la modélisation, plusieurs lois matériaux sont évaluées dont notamment la loi identifiée en cisaillement quasi-statique (à température ambiante et à hautes températures) et en grande vitesse par le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz (LPMM). Les résultats numériques sont alors confron-

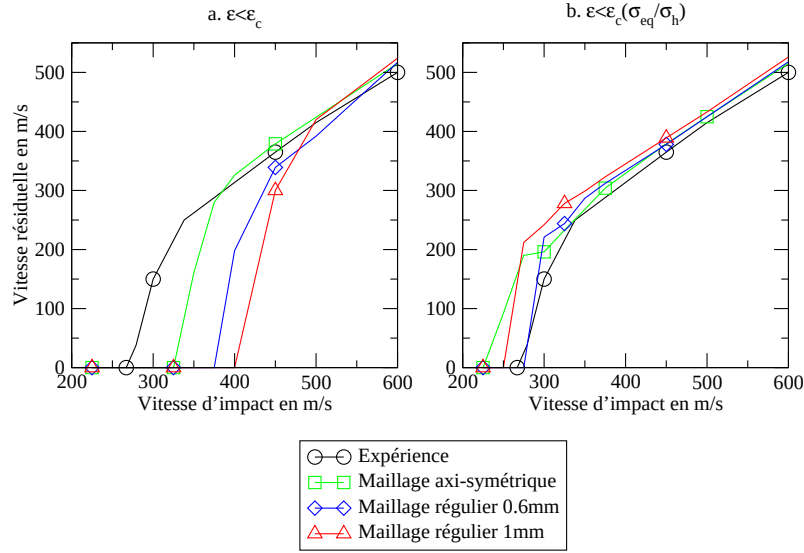


FIG. 2.25: Vitesses résiduelles de la bille après impact

tés à des expériences.

Dans le cadre de la simulation du Blade Shedding, les matériaux des pales, anneau et blindage de la turbine libre du moteur étudié ont été caractérisés dans une plage de températures allant de 0°C à 700°C et dans une plage de vitesses allant du quasi-statique à une vitesse de déformation maximale de 10^2s^{-1} par un essai de double cisaillement (Rusinek et al. [97]). Les différents essais ont permis de définir les différentes constantes du modèle de Johnson-Cook [63] en cisaillement.

En parallèle de cette étude, la caractérisation du matériau du blindage à base de nickel a été complétée par deux types d'essais :

- des essais de traction sur éprouvette de traction en quasi-statique (Note Turbomeca [36]),
- des tirs sur plaque, réalisés par canon à gaz, dans la gamme proche de la vitesse limite de perforation de la plaque.

Cette sous partie est donc dédiée à la modélisation de ce nouvel impact avec pour objectif principal de confronter la méthode développée sur le cas d'étude de Penazzi aux résultats des essais de tirs sur des plaques dans un matériau de base Nickel.

2.4.1 Lois matériaux

La caractérisation de l'alliage à base Nickel (Rusinek et al. [97]) a été réalisée sur un essai de cisaillement ce qui conduit à une loi écrite en cisaillement-glissement, éq. (2.7),

$$\tau(\gamma, \dot{\gamma}, T) = (A + B\gamma^n)(1 + C \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0})(1 - (\frac{T - T_{room}}{T_{melting} - T_{room}})^m) \quad (2.7)$$

où A et B sont des constantes du matériau, n le coefficient d'écrouissage, C la sensibilité à la vitesse de déformation et m la sensibilité à la température.

Par ailleurs, l'angle γ , caractérisant le glissement, est l'angle qui transforme un rectangle en un parallélogramme. (formalisme de Gieck [45]). Cet angle doit être divisé par 2 afin d'être introduit dans un tenseur de contrainte. De plus, dans le code éléments finis Europlexus, la loi matériau isotrope élasto-plastique dépendant de la vitesse de déformation est écrite en contrainte équivalente et déformation équivalente au sens de von Mises, ce qui nécessite de réécrire la loi (2.7) au sens de von Mises. Les relations d'équivalence entre ces deux formulations sont écrites selon les équations (2.8).

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{3}\tau \quad (2.8)$$

2.4.2 Simulation de l'essai de traction sur le matériau à base Nickel

La loi identifiée par un essai de cisaillement peut être testée sur un essai de traction. En effet, les deux états de contrainte diffèrent et il est intéressant de comparer la différence des plasticités associées aux deux écoulements. L'essai de traction est modélisé par élément fini à l'aide d'un maillage hexaédrique et à déplacement imposé pour pouvoir simuler les effets de striction associés à la contraction de la section de l'éprouvette (Figure 2.26). Le système est résolu par le schéma d'intégration des différences centrées du code Europlexus.

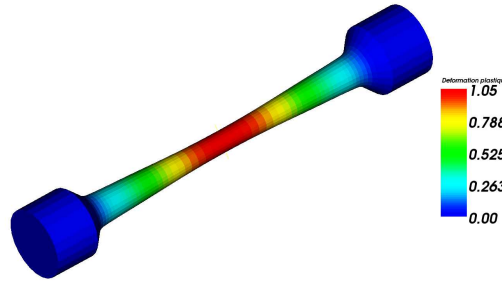


FIG. 2.26: Déformations plastiques équivalentes dans une éprouvette de traction soumise à un déplacement imposé de 20 mm, loi matériau de Johnson-Cook identifiée en cisaillement sans dépendance à la vitesse de déformation

Le résultat en terme de force associée au déplacement est visible sur la figure (2.27). La première courbe correspond au résultat expérimental. La seconde courbe est obtenue avec un déplacement continu imposé de 20mm en 1ms et la loi identifiée en cisaillement réécrite en von Mises sans la dépendance à la vitesse de déformation. La troisième courbe correspond à un déplacement continu imposé de 20mm en 2ms et la même loi que précédemment. La quatrième courbe correspond à la loi matériau identifiée sur cet essai et réécrite en contrainte vraie et déformation vraie.

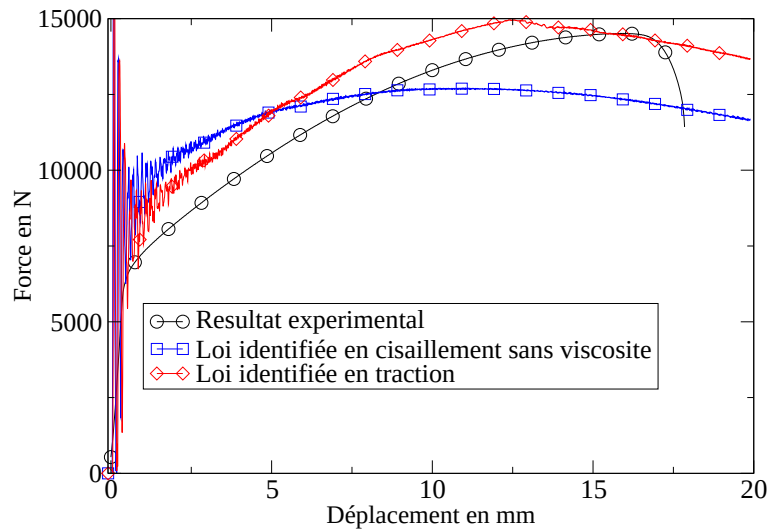


FIG. 2.27: Comparaison essai/calcul de la force appliquée sur une éprouvette de traction en matériau base Nickel

Les oscillations présentes au début des courbes correspondent à des vibrations élastiques associées à la rapidité du chargement. Ces oscillations disparaissent avec l'amortissement associé à la plasticité ou en diminuant la rapidité du chargement. En effet, dans les simulations dynamiques résolues par solveur explicite, la taille des mailles conditionne le pas de temps de stabilité du schéma d'intégration temporel et, de ce fait, le temps de calcul d'une simulation est proportionnel au temps simulé (1h de TCPU pour la simulation de 2ms).

Concernant les lois identifiées en traction ou en cisaillement, la plasticité ne suit pas formellement le critère de Von Mises et de ce fait l'équivalence entre les deux caractérisations n'est pas exacte et reste seulement approchée. De plus, il serait souhaitable de simuler ce même essai à l'aide d'une approche quasi-statique en grande déformation pour séparer les effets d'inertie de l'éprouvette et ceux de la plasticité.

Pour la simulation de la perforation, trois lois élasto-plastiques seront étudiées :

- une première loi associée à la caractérisation en cisaillement, réécrite en contrainte et déformation équivalente de Von Mises avec dépendance à la vitesse de déformation,
- une seconde loi associée à la caractérisation en cisaillement, réécrite en contrainte et déformation équivalente de Von Mises sans dépendance à la vitesse de déformation,
- une troisième loi issue de cet essai de traction sans dépendance à la vitesse de déformation.

Pour la rupture, le modèle dépendant du taux de triaxialité présenté dans la section 2.3.3.1 est choisi. Ce modèle nécessite la définition de la déformation plastique vraie maximum. Sur les courbes issues de la note Turbomeca [36], la déformation plastique maximum ϵ_c est retenue et est relié à la déformation vraie maximum par la relation (2.9)

puisqu'il s'agit d'un essai de traction.

$$\epsilon_{vc} = \ln(1 + \epsilon_c) \quad (2.9)$$

2.4.3 Moyen d'essais et modélisation du système

Les impacts de billes sur plaque sont réalisés à l'aide d'un canon à gaz, d'un capteur permettant de mesurer la vitesse d'impact du projectile et d'un montage permettant le maintien de la plaque testée. L'ensemble de ce montage est visible sur la figure 2.28. De par le montage réalisé, la plaque impactée n'est pas encastrée aux extrémités ce qui



FIG. 2.28: Canon à gaz d'étude

nécessite de modéliser la plaque épaisse de support afin de définir un contact unilatéral entre ces deux plaques. Au niveau de la zone d'impact, de la même manière que pour les simulations réalisées dans les paragraphes précédents, la modélisation de la plaque est réalisée avec des éléments ShB8PS qui présentent une stabilisation à déformation postulée et l'hypothèse des contraintes planes. Par ailleurs, le maillage est réalisé de telle manière que le ratio entre l'épaisseur de la plaque et la taille de maille soit proche de l'unité. Le maillage ainsi proposé est visible sur la figure 2.29. La plaque testée dans cette partie est dans le matériau à base Nickel et présente une épaisseur d'environ $1mm$ ($1.8mm$). Le projectile de diamètre $7.7mm$ à tête conique est en acier 25CD4. Ce corps est modélisé par des éléments cubiques et une loi matériau élasto-plastique parfaite ($\rho = 7980Kg.m^{-3}$, $E = 170GPa$ et $Re_{0.2} = 500MPa$). Concernant les conditions aux limites, un encastrement est imposé sur la plaque support aux niveaux de ses frontières externes et un contact frottant ($\mu = 0.3$) est imposé entre les trois corps.

2.4.4 Résultats de la simulation de la perforation

Le résultat en terme de vitesses résiduelles par rapport aux vitesses incidentes est visible sur la figure 2.30. Expérimentalement, seule la limite balistique a pu être identifiée puisque le banc d'essai ne présente pas de capteurs de vitesse résiduelle du projectile. Pour cette association impacteur-impacté, cette limite vaut environ $360m/s$ pour des plaques

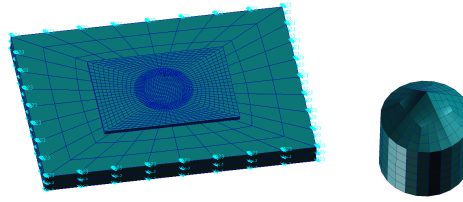


FIG. 2.29: Maillage du système plaque impactée, projectile et support de plaque

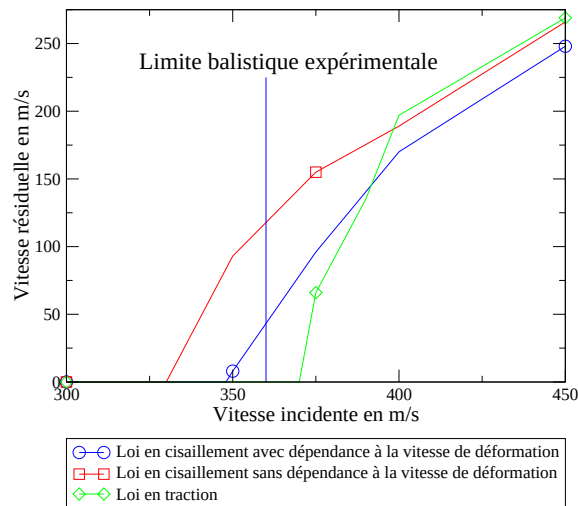


FIG. 2.30: Vitesses résiduelles en fonction de la vitesse incidente et des différentes lois matériaux utilisées

ayant une épaisseur de 1.85 – 1.88mm. Numériquement, les trois lois matériaux associées au critère de rupture énoncées ci-dessus permettent de donner une limite balistique ainsi que la vitesse résiduelle de l'impacteur après perforation. Les trois limites balistiques obtenues numériquement sont proches de la limite expérimentale ($\pm 30\text{m/s} \sim \pm 9\%$). De façon logique, la loi matériau identifiée en traction assure une plus grande capacité de rétention que la loi en cisaillement car le niveau de contrainte équivalente est plus important à déformation équivalente. De même, la sensibilité positive à la vitesse de déformation assure une augmentation de la capacité de rétention.

2.4.5 Comparaisons des plaques après simulation et après essai

Les résultats présents dans ce paragraphe sont obtenus à l'aide de la loi élasto-plastique identifiée en cisaillement et dépendant de la vitesse de déformation. Il s'agit de la loi qui donne les meilleurs résultats puisque la limite balistique associée à cette loi se rapproche le plus de la limite balistique expérimentale.

Quatre essais d'impacts ont été simulés par élément fini, figures 2.31-2.33. Ces diffé-

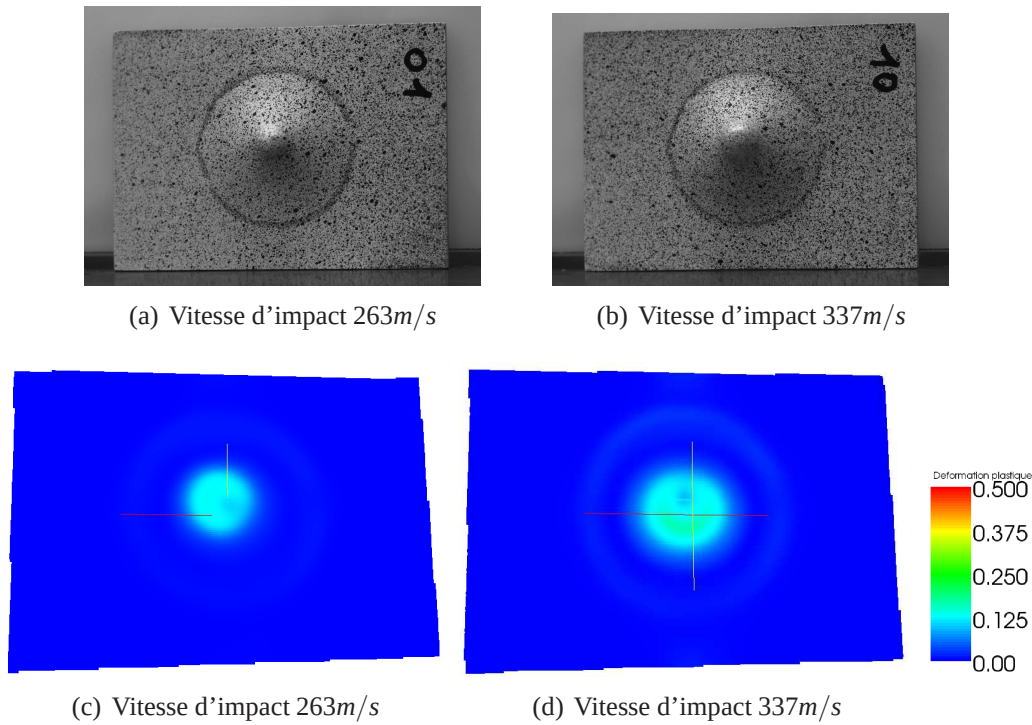


FIG. 2.31: Plaques déformées et déformations plastiques de von Mises mesurées par technique de stéréo-corrélation sur les plaques non perforées

rents impacts sont situés dans la zone proche de la limite balistique de la plaque qui est d'environ 350m/s. Sur ces essais, une technique de stéréo corrélation analysant la déformation 3D de la peinture mouchetis de l'éprouvette a été mise en place et permet d'obtenir les champs de déformation de la peau inférieure et supérieure des plaques. Sur la peau inférieure qui est impactée par le projectile, la peinture a été arrachée par le contact frottant avec le projectile ce qui n'a pas permis de capter les déformations dans cette zone. Globalement, autour de la zone d'impact, la comparaison essai calcul est satisfaisante et dans la zone où la rupture de la plaque va apparaître, les calculs prédisent des déformations plus importantes que celles mesurées (environ un ratio de 2 sur la déformation plastique équivalente de von Mises). D'un point de vue de simulation, même si la limite balistique est correctement prédite, les états des plaques après impact diffèrent :

- pour une vitesse d'impact de 411m/s, la simulation numérique prédit la création d'un bouchon libre alors que dans l'expérience apparaît un bouchon qui reste lié à la plaque.
- De la même façon, pour une vitesse d'impact de 361m/s, une fissuration qui suit les directions du maillage est prédite alors qu'expérimentalement de nouveau un bouchon apparaît.

Ces différences de comportement peuvent être expliquées tout d'abord par le formalisme de la méthode éléments finis mais aussi par le caractère plastique de l'impacteur qui se déforme largement en compression et sa forme n'est plus de révolution au moment où

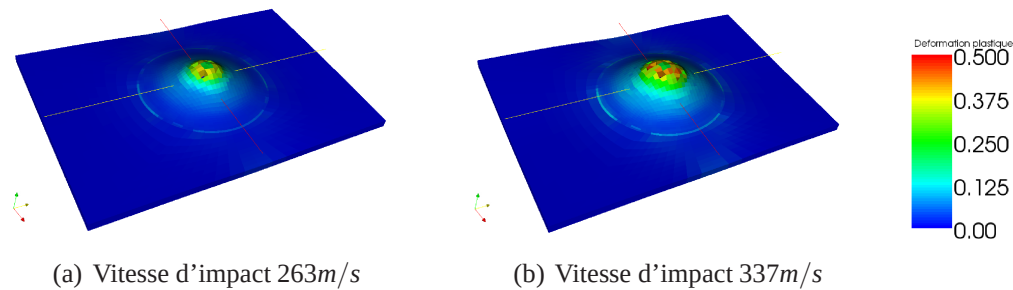


FIG. 2.32: Déformations plastiques finales de von Mises obtenues par simulation sur des plaques non-perforées

la plaque est sur le point de se déchirer. Un impacteur moins sensible à la plasticité (tête hémisphérique ou seulement chanfreiné avec un matériau nettement plus dur que le matériau de la plaque avec une plaque plus mince) aurait permis d'obtenir des déformées de plaques plus axi-symétriques. Ces considérations ne remettent pas en cause les capacités de rétention de la plaque car l'état des pièces après essai est plus lié à la trajectoire du projectile post-perforation qu'au mode de rupture de la plaque.

2.4.6 Synthèse

Sur ce cas d'étude, la méthode de modélisation de la perforation mise au point dans la section 2.3 donne des résultats numériques qui se rapprochent fortement des résultats expérimentaux trouvés. Plusieurs lois matériaux ont été utilisées dans les simulations numériques. Ces lois matériaux présentent des différences marquées notamment à cause du mode de sollicitation : traction ou double cisaillement. En effet les lois obtenues qui nécessitent d'être retranscrite dans un formalisme unique, ici l'écrouissage isotrope de von Mises, sont différentes montrant que ce formalisme n'est pas vérifié pour ce matériau. Concernant la modélisation de l'impact, l'essai présente une difficulté au niveau de l'impacteur conique qui se déforme lors de l'impact. En effet, une partie de l'énergie cinétique de l'impacteur se retrouve après essai dans l'énergie interne de déformation de celui-ci. Ainsi l'essai caractérise un couple impacteur-impacté alors qu'il serait souhaitable de caractériser uniquement les déformations irréversibles de l'impacté. Un impacteur sphérique dans un matériau plus dur pourrait être préféré.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la simulation d'un impacteur sur un impacté a été évoquée à travers deux types de configuration.

Dans la première configuration, l'impacté correspondait au blindage d'une turbine libre tandis que l'impacteur correspondait à une pale de turbine libre libérée à la vitesse

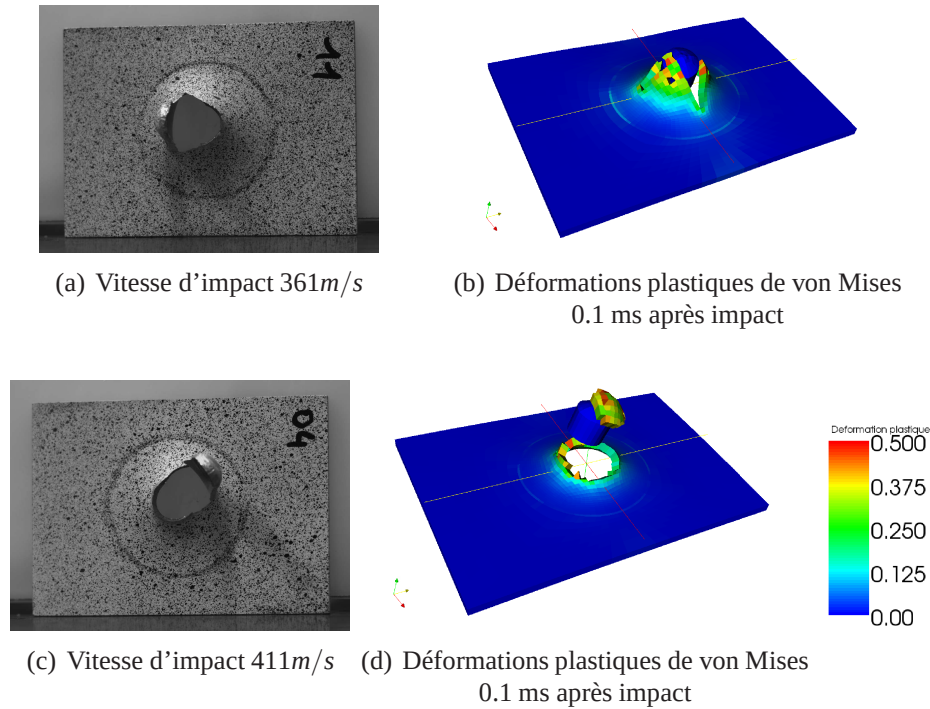


FIG. 2.33: Résultats expérimentaux et numériques : Plaques perforées

de Blade Shedding. Dans cet type d'impact, l'impacteur se déforme largement et l'énergie cinétique initiale est transformée à la fois en énergie interne de l'impacteur et de l'impacté sans pour autant que l'impacté se perforé.

Dans seconde configuration, développée dans les parties 2.3 et 2.4, le projectile de nature fortement plus rigide impact une plaque mince en la perforant. L'énergie cinétique est alors retrouvée en énergie interne de la plaque et énergie résiduelle du projectile.

Les travaux ont permis d'obtenir une modélisation adaptée pour la représentation des pales lors de l'impact contre un blindage et une représentation de la plaque mince durant sa perforation. Ces modélisations sont bâties sur la méthode des éléments finis avec une formulation brique. Pour les pales, un travail d'optimisation du maillage a été réalisé pour identifier la finesse du maillage minimale pour un comportement purement élasto-visco-plastique de la plaque. En effet, la fragmentation de la pale, représentée en éléments finis par une suppression de l'élément dépassant un critère matériau, conduisait à la suppression totale de la pale, ce qui était inadmissible d'un point de vue énergétique. De ce fait, un travail supplémentaire devrait être envisagée pour représenter ce comportement à travers une bascule Eléments Finis - méthode SPH et obtenir un bilan final énergétique représentatif de ce type d'impact. Des questions restent cependant posées sur la dépendance au maillage d'une telle solution.

Pour le cas des plaques minces, une modélisation bâtie sur l'élément brique à formulation coque a été utilisée. Cette méthode permet de résoudre le problème d'impact

rapidement au détriment de la finesse de modélisation des zones de fracture de la matière. Le problème mécanique a ainsi été résolu par une approche élasto-visco-plastique avec un critère sur la déformation plastique des éléments. Malgré la grossièreté des maillages, les différentes simulations ont permis de montrer la nécessité de définir ce critère en fonction du taux de triaxialité du chargement pour se rapprocher au mieux des courbes de vitesses résiduelles en fonction de vitesses incidentes et ainsi estimer au mieux la vitesse limite de perforation. Par ailleurs, pour le cas de l'alliage à base Nickel, les lois matériaux identifiées sur des essais de cisaillement ont montré des différences importantes lorsqu'elles étaient utilisées à travers la plasticité de von Mises pour simuler des essais de traction. Ce constat souligne donc qu'un effort supplémentaire serait nécessaire pour représenter correctement la plasticité sous chargement multi-axial.

Chapitre 3

Analyse des essais de Blade Shedding

Dans ce troisième chapitre "Confidentiel Industrie", une analyse détaillée des résultats d'essai lors d'un Blade Shedding est réalisée à travers les mesures obtenues lors d'un développement moteur. Cette analyse permet de décrire le départ des pales dans le temps et d'estimer la durée totale du phénomène. Les informations recueillies sont aussi de nature qualitative (état des pièces du moteur après essai, déformations temporelles sur le moteur).

Sommaire

3.1	Introduction	104
3.2	Conclusion	104

3.1 Introduction

La mise en place d'une protection par Blade Shedding sur moteur nécessite de démontrer la performance et la sécurité dans laquelle elle s'opère. Pour ce faire, plusieurs essais spécifiques dont un essai moteur complet sont mis en oeuvre lors de la phase de conception-développement du moteur. L'essai moteur, qui est lié à la certification du moteur, a démontré la rétention des débris générés et des efforts admissibles sur la structure notamment au niveau des attaches.

Dans ce chapitre, on s'attachera à analyser en détail les informations qui permettent de reconstituer une chronologie des événements intervenants lors du phénomène. En effet, puisque le départ des pales de turbine libre s'opère à l'intérieur du moteur, il n'existe pas à ce jour un moyen d'observation des pales et une définition de la chronologie des événements comme cela l'est possible pour l'ingestion d'oiseau sur fan (Letellier [75]) ou perte d'aube de fan (Cosme [30])¹.

De ce fait, l'état de l'art actuel ne permet pas de donner des ordres de grandeurs sur la durée de départs de pales, l'évolution transitoire de la vitesse de rotation ou les efforts appliqués sur le système. Ce chapitre a donc pour objectif de répondre à ces questions en se basant sur les informations recueillies lors de l'essai.

3.2 Conclusion

Ce chapitre donne des éléments majeurs dans la compréhension du phénomène. Cependant les informations obtenues sur l'essai ne sont pas quantitatives sur les efforts appliqués sur le rotor et le stator. En effet, pour pouvoir prédire le comportement d'un système, deux aspects sont capitaux : dans un premier temps, spécifier le chargement appliqué sur le système et dans un second temps, modéliser correctement le système. Actuellement les informations obtenues sont générales, permettent de comprendre le phénomène mais pas de le prédire. Les méthodes permettant d'aboutir à une prédiction seront donc développées dans le chapitre suivant.

¹Un moyen d'observer le départ des pales serait de mettre en place un banc spécifique composé uniquement du module de turbine libre sous vide entraînée par un moteur externe et dont les parois selon l'axe de rotation seraient translucides. Cependant, de par l'échelle de temps mis en jeu, l'observation nécessiterait un enregistrement par caméra rapide.

Chapitre 4

Simulation du Blade Shedding sur un moteur

Dans ce quatrième chapitre, nous présentons les modélisations du départ de pales généralisé sur un cas d'étude industriel Turbomeca. Leurs simulations associées aux développements présentés notamment dans le premier chapitre permettent de donner le chargement dynamique obtenu sur l'ensemble du moteur et notamment au niveau de la liaison hélicoptère moteur.

Sommaire

4.1	Introduction	107
4.2	Calcul de Blade Shedding sur le module de Turbine libre	108
4.2.1	Maillages des corps en mouvement	109
4.2.2	Maillage des parties statiques	111
4.2.3	Résumé du maillage 3D des turbines libres	112
4.2.4	Mise en place du calcul	112
4.2.5	Lois matériaux utilisées sur les différents corps	114
4.3	Résultats qualitatifs et temporels de la simulation	115
4.3.1	Etat d'équilibre après la précharge centrifuge	115
4.3.2	Séquence des contacts de la première pale libérée	116
4.3.3	Contacts rotor-stator	119

4.3.4	Départ du reste des pales	122
4.3.5	Évolution de la déformation de l'anneau	123
4.3.6	Déformation du blindage	124
4.4	Résultats quantitatifs	124
4.4.1	Aspects énergétiques	125
4.4.2	Efforts sur la couronne de fixation du blindage	126
4.4.3	Comparaison des modèles avec des jeux différents pour l'anneau . .	128
4.5	Calcul de Blade Shedding sur le moteur	129
4.5.1	Définition des sous-domaines et de leurs modélisations associées . .	130
4.5.2	Définition du super-élément des carters	132
4.5.3	Définition des forces d'excitation	134
4.5.4	Résultats obtenus	136
4.6	Conclusion	137

4.1 Introduction

Les différentes analyses effectuées sur la vitesse de rotation, sur les efforts mesurés aux attaches du moteur ou sur l'état des pièces, montrent clairement que l'ensemble du moteur subit le phénomène de Blade Shedding. Cette considération impose le recours à des modèles moteur complet élément fini (WEM) pour la simulation.

Une question se pose : Quelle est la modélisation à effectuer sur les différentes pièces moteur (formulation d'éléments, lois matériaux,...) et quel est le schéma d'intégration numérique à utiliser ?

Pour la partie impact du problème, les solutions de dynamique rapide intégrées dans les codes du commerce (Europlexus, LsDyna) sont des plus pertinentes. Ces codes sont bâtis sur un schéma d'intégration numérique des différences centrées (schéma de Newmark avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$) qui permet d'avoir une résolution explicite de l'équation de la dynamique. Cette méthode explicite résout l'équation de la dynamique par des pas de temps relativement faibles (à cause de la condition de stabilité) mais qui sont requis par ailleurs pour le calcul des déformations plastiques des solides.

Cependant, pour la modélisation des pièces non plastifiées en transitoire, la modélisation par éléments volumiques n'est pas nécessaire et plusieurs solutions existent :

- des représentations fréquentielles ou réduites sont en général utilisées pour des réponses forcées incluant des contacts (cf. travaux sur le contact rotor-stator de Giraudon-Guilloteau [47], Arnoult [4] puis Legrand et *al.* [69] [70] [71]),
- la dynamique rotor est largement traitée actuellement en régime continu ou transitoire à l'aide d'éléments poutres rotors (Genta et Delprete [43]),
- les transitoires longs simulés sur WEM (perte d'aube de fan ou ingestion d'oiseau) ont recours à des intégrations explicites ou implicites, et à une formulation volumique pour les parties en rotation (Cosme [30], Noels [88]).

Pour le phénomène de Blade Shedding, la modélisation nécessite à la fois une simulation du comportement de dynamique rotor, la prise en compte des contacts qui engendrent le départ des pales et les possibles perforations et fragmentations des corps éjectés et impactés. De plus le scénario de rupture de pale est incertain sur de nombreux points : vitesse de Blade Shedding, position de départ de la première pale, critères de rupture du matériau et de nombreux comportements ne sont pas pris en compte dans la modélisation. De ce fait, la modélisation la plus légère doit être recherchée.

Pour répondre à ce besoin, la modélisation idéale du moteur intégrant les attaches du moteur devrait être composée :

- d'un rotor du générateur de gaz modélisé par une approche de dynamique de ligne d'arbre,
- des parties statiques élastiques condensées en super-élément,
- du module de turbine libre modélisé en éléments volumiques pour représenter au mieux l'ensemble des contacts et déformations présents.
- et le tout supporté par des poutres traduisant la rigidité des attaches.

Ce type de modèle présente la caractéristique particulière d'avoir une différence de pas de temps importante entre le domaine en dynamique de ligne d'arbre et les autres do-

maines. La résolution multi-domaines proposée par Faucher et Combescure [40] présente alors tout son intérêt pour résoudre ce problème. Cependant même après l'usage de cette méthode, le problème matriciel reste d'une dimension considérable et doit être résolu par plusieurs machines de calcul. Le code Europlexus a été développé au cours de cette thèse pour la modélisation des éléments rotors présentée dans le chapitre 1.5. Par ailleurs, le code Europlexus intègre donc tous les développements associés à ces modélisations et à la méthode de résolution multi-domaines multi-pas de temps. Cependant ce code n'est pas parallélisé ce qui limite son utilisation sur ce problème. Sur mono-processeur, 1 mois serait nécessaire pour résoudre environ 6ms du phénomène. D'un autre côté, le code de dynamique rapide Ls-Dyna est parallélisé mais n'intègre pas ces développements.

De ce fait, la méthodologie proposée dans cette thèse se bâtit sur deux simulations.

Dans un premier calcul, le départ de pales est simulé avec une partie statique bloquée sur un nombre de degrés de liberté limité. Ce premier calcul permet d'obtenir le chargement appliqué au rotor lors d'un Blade Shedding. La mise en place d'un tel calcul est présentée dans la partie 4.2 tandis que les résultats en terme d'explications temporelles et qualitatives sont présentés dans la partie 4.3. Finalement les résultats quantitatifs sont présentés dans la partie 4.4.

Ensuite pour réaliser le calcul sur le moteur, les efforts récupérés dans le premier calcul sont appliqués sur un modèle moteur complet. Dans ce modèle, les stators sont modélisés à l'aide d'un super-élément dont la construction sera largement présentée. Pour les parties en rotation, des modélisations de dynamique de ligne d'arbre seront choisies car elles permettent d'intégrer les effets gyroscopiques. Enfin le système sera supporté par 3 poutres correspondant à la fixation isostatique du moteur sur le banc d'essai.

On notera que cette méthode de modélisation présente un couplage "faible" entre le premier modèle et le second puisque dans le premier calcul une couronne de noeuds ne se déplace pas alors que dans la seconde, ces mêmes noeuds se déplacent. Cependant cette démarche permet de démontrer la capacité de la méthode à résoudre le problème mécanique.

4.2 Calcul de Blade Shedding sur le module de Turbine libre

Dans ce premier calcul, l'objectif est de simuler le départ des pales du rotor de turbine libre dans le but de connaître à la fois la séquence de départ des pales et les efforts agissant sur les fixations du blindage. La simulation permet par ailleurs de mieux comprendre le phénomène de Blade Shedding puisque la simulation reste le seul moyen d'avoir une description temporelle des événements présents dans la turbine libre après le départ de la première pale.

Le modèle de l'étage de turbine libre est composé de quatre parties principales :

- Les pales qui se détachent du disque ;
- Le rotor composé des disques, arbres, roulements et éléments de jonction de l'ensemble ;

- L'anneau définissant la veine d'air ;
- Le blindage assurant la fonction de rétention des pales. (La pièce support du blindage est également prise en compte dans le modèle.)

La construction des maillages de ces différents corps est présentée dans les sous parties suivantes.

4.2.1 Maillages des corps en mouvement

4.2.1.1 Pales de turbine libre

Technologiquement les pales de turbine libre sont :

- rapportées sur le disque par un brochage de type pied de sapin,
- arrêtées axialement par une plaquette placée sur la face arrière,
- amorties en vibration par un amortisseur.

Ces solutions technologiques font que l'amortisseur et la plaquette chargent par effet centrifuge la section frangible de la pale. Par ailleurs, ce seront des débris libérés qui impacteront le blindage lors de la perte des pales.

Pour représenter cette pièce qui est à la fois impacteur lorsqu'elle est libérée du disque et impactée lorsqu'elle est encore liée au disque, la construction du maillage élément fini présente certaines difficultés. En effet, dans les premières simulations transitoires de Blade Shedding (Herran [55]), le modèle élément fini grossier des pales conduisait à la mise en place d'un moment important sur la section frangible. Cet aspect entraînait l'impossibilité de représenter correctement la rupture des pales. En effet, dans le modèle élément fini, la définition des éléments au dessus de la section frangible doit assurer que le centre de gravité de l'ensemble de ces éléments projeté sur la section frangible selon la direction radiale soit positionné au même endroit que dans le cas de la structure réelle.

Dans les calculs [55], cette condition n'était pas vérifiée et les pieds de pales présentaient une plasticité importante localisée à l'avant de la pale. Pour pallier cela, la modélisation des pales est définie sur un modèle qui intègre les propriétés inertielles de la tablette et de l'amortisseur. Le modèle élément fini est alors recalé par rapport à la géométrie réelle de la pale, de l'amortisseur et de la tablette. Ce recalage est réalisé par optimisation de la masse et du centre de gravité du modèle élément fini par rapport à la géométrie réelle¹.

Le modèle élément fini est bâti sur un découpage arbitraire de la géométrie d'une pale. Le maillage du profil est bâti sur cinq coupes radiales qui sont épurées de leur bord d'attaque et de leur bord de fuite tandis que le pied de pale est décomposé en des formes hexaédriques visibles sur la figure 4.1. Les maillages obtenus pour les pales du premier et second étage de la turbine libre du moteur étudié sont présentés sur la figure 4.1. Le maillage est exclusivement composé d'éléments hexaédriques. La discrétisation des maillages a été discutée dans la partie 2.2 qui a permis de définir qu'une modélisation

¹Le recalage de la géométrie approchée est réalisé en définissant des paramètres dans la génération du maillage élément fini. Ces paramètres sont définis comme des épaisseurs et des positions radiales de la géométrie de la tablette. Le recalage qui est en fait une optimisation par rapport aux données de référence a été réalisé dans l'environnement OPTIMUS par l'algorithme "Built in target".

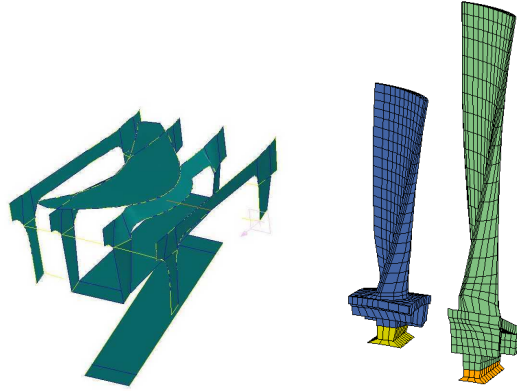


FIG. 4.1: Découpage volumique et maillage grossier des pales de turbine libre

acceptable pour la simulation de l'impact devrait être composée d'éléments volumiques dans tout le volume et en particulier de trois éléments dans l'épaisseur du profil.

4.2.1.2 Partie centrale du rotor de turbine libre

La partie centrale du rotor est un ensemble de pièces assurant la liaison des pales aux roulements et transmettant le couple moteur à l'arbre de transmission. Dans le cas du moteur étudié, les pièces sont maintenues en position par un assemblage boulonné axial et la technologie des curvic-couplings. La partie centrale du rotor est composée de deux disques et deux demi-arbres qui sont serrés par un tirant traversant l'ensemble.

Pour représenter les non linéarités associées à l'ouverture des curvic-coupling, un contact devrait être déclaré au niveau des surfaces d'interfaces. Cependant comme les calculs présentés sont les premiers calculs de simulation de Blade Shedding, le rotor est considéré comme un rotor monobloc ayant cependant des propriétés matériaux différentes selon les corps représentés ².

Pour assurer la continuité entre les différents maillages, le volume de la partie centrale du rotor est divisé en plusieurs volumes élémentaires hexaédriques qui permettent un maillage par des processus d'extrusion. Le découpage du volume et le maillage obtenu sont visualisables sur la figure 4.2.

Chaque disque est maillé selon un secteur de symétrie cyclique extrudé par répétition circulaire pour obtenir la géométrie globale. Ce processus permet d'obtenir des interfaces identiques pour chaque liaison des pales avec le disque. Les pales sont alors disposées le long de la périphérie du disque et les noeuds fusionnés pour avoir un maillage continu. Le modèle complet du rotor est visible sur la figure 4.3.

²Une procédure pour la précharge axiale avec des maillages continus et un algorithme explicite a cependant été mise au point et présentée dans le rapport [54] et dans Ortiz et al. [91]

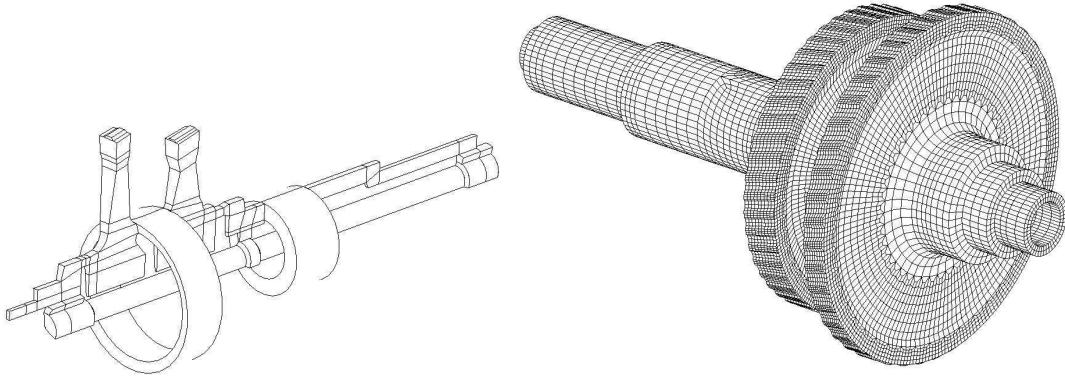


FIG. 4.2: Découpage volumique et maillage de la partie centrale du rotor

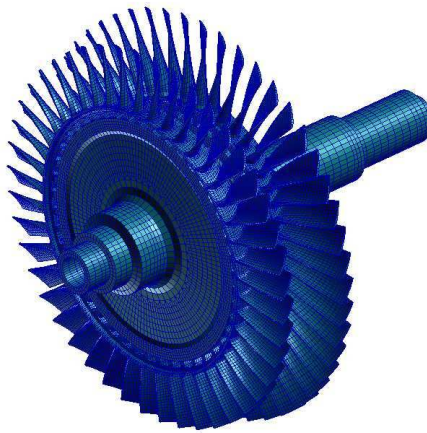


FIG. 4.3: Modèle élément fini du rotor avec les pales

4.2.2 Maillage des parties statiques

4.2.2.1 Anneau de turbine

Le blindage et l'anneau de turbine sont visibles sur la figure 4.4.

L'anneau de turbine est une pièce de révolution présentant une faible épaisseur au niveau des étages de turbine libre et supportant le distributeur du deuxième étage de détente de la turbine libre. Même si, de par la faible épaisseur de l'anneau, la fonction de rétention est faible, cette pièce est cependant essentielle dans la modélisation car elle conduit à la définition de contact rotor-pales-stator entraînant la rupture des pales. Dans le modèle élément fini, cette pièce est représentée par un tube avec des diamètres évoluant selon le diamètre réel de l'anneau de turbine et maillée par des éléments volumiques avec seulement un élément dans l'épaisseur. Dans ce calcul, l'anneau est supposé libre pour ne pas

interférer dans la reprise des efforts par le blindage. Le distributeur du deuxième étage n'est pas représenté dans le modèle pour le simplifier. La diamètre intérieur de l'anneau



FIG. 4.4: Vue générale de l'anneau (en marron) introduit dans le blindage (en vert), la partie torique de la pièce marron correspond à la tôle de fixation

conduit à la définition d'un jeu entre le rotor et les parties statiques. D'après des études réalisées dans le rapport [55] et d'après la définition du moteur, un jeu devrait être présent entre l'anneau et le blindage à la vitesse de $136\%N_{TL}$. Cependant la définition exacte de la géométrie de l'anneau dans sa configuration chaude et du rotor soumis au chargement centrifuge plastifiant les sections fragibles n'est pas connue avec précision. Trois anneaux présentant un jeu faible $0.05mm$, moyen $0.3mm$ et important $0.65mm$ ont donc été testés dans les simulations.

4.2.2.2 Blindage de turbine

Le blindage est une pièce de révolution assurant la rétention des pales.

Le blindage est modélisé à l'aide d'éléments volumiques avec 8 éléments dans l'épaisseur car il subira de fortes déformations lors de l'impacts des pales. Ce modèle est utilisé dans les calculs d'impacts de pales (Section 2.2) visible sur la figure 2.3.

4.2.3 Résumé du maillage 3D des turbines libres

Les caractéristiques du modèle élément fini sont synthétisées dans le tableau 4.1.

4.2.4 Mise en place du calcul

Pour la mise en place du calcul de départ de l'ensemble des pales, le maillage du rotor doit pouvoir tourner. Pour ce faire, le modèle élément fini est défini de la façon suivante dans le code de dynamique rapide Ls-Dyna.

Nom du domaine	Nombre d'éléments
Partie centrale du rotor	58000
Pales	79 000
Anneau	5 000
Blindage	52 000

TAB. 4.1: Caractéristiques du modèle élément fini 3D du module de turbine libre

4.2.4.1 Définition du rotor

Pour relier le rotor à une partie statique et ainsi éviter les mouvements de corps rigides, la partie centrale du rotor est divisée en trois parties : deux parties au niveau des roulements du rotor et une partie pour le reste du rotor. Les deux parties associées aux roulements sont définies comme des corps rigides. Des noeuds centraux sur ces deux corps sont alors reliés par des rigidités k_p^i à des noeuds encastrés. Les rigidités de valeurs k_p^i correspondent aux rigidités définies aux extrémités du rotor dans les calculs de dynamique de ligne d'arbre.

Au niveau des pales, deux parties distinctes sont définies : une première partie au niveau de l'échasse et une seconde au niveau du profil et de la tablette. En effet, la rupture et la fragmentation des aubes est un phénomène intervenant dans l'ensemble des pales que ce soit au niveau du profil ou au niveau des échasses. Cependant actuellement dans les codes éléments finis explicites, la modélisation de la rupture est réalisée par la suppression d'un élément ce qui permet de représenter un découpage mais conduit dans le cadre de simulation d'un impacteur souple sur un impacté rigide à la suppression de l'ensemble du corps impactant. Des méthodes nouvelles basées non plus sur une formulation éléments finis mais sur une description particulière (Maurel [78]) ou mixte comme évoquée dans la partie 2.2 permettraient de résoudre de façon plus juste l'ensemble du problème.

De ce fait, dans le calcul réalisé dans la partie correspondant à l'échasse, un critère de rupture du matériau formulé en déformation plastique et/ou temporel est imposé tandis que la rupture n'est pas modélisée dans le reste de la pale.

La modélisation d'un anneau permet de définir des contacts rotor-pales-stator qui conduisent à la rupture des pales. Cependant la faible épaisseur de l'anneau conduit par ailleurs à sa perforation lors des impacts des pales. Pour tenir compte de sa présence et de sa possible fragmentation, la loi matériau inclut un critère de rupture en déformation plastique³.

Au niveau des parties statiques, seul le blindage est bloqué par le blocage d'une couronne de 25 noeuds sur la partie support.

³Dans les travaux présentés dans la section 2.3, il est mis en évidence que ce critère ne représente pas correctement la rupture des matériaux car il ne tient pas compte de la contrainte hydrostatique. Cependant, pour des raisons de temps de calcul, la simulation 3D de l'étage de Turbine Libre réalisée dans le code de dynamique Ls-Dyna prend uniquement en compte un critère de rupture des éléments selon un niveau de déformation plastique seuil sur la déformation plastique distribuée selon les contraintes principales.

4.2.4.2 Différentes étapes

Le calcul se déroule en deux étapes :

- Tout d'abord, l'état d'équilibre associé aux forces centrifuges s'exerçant sur le rotor est trouvé à l'aide d'une méthode de relaxation dynamique. Cette option permet de conserver la définition du modèle élément fini de façon explicite et est adaptée à la résolution de calculs élasto-plastiques. En effet, par la vitesse de rotation imposée, le calcul intègre des déformations plastiques notamment au niveau des échasses puisque expérimentalement une première pale rompt. Cet état d'équilibre est donné comme condition initiale de champ de déplacement, de déformation et de contrainte pour le second calcul.

- Dans le second calcul, le champ de vitesse de rotation est imposé au rotor. Comme par ailleurs l'état d'équilibre associé aux forces centrifuges a été imposé, le rotor tourne sans aucune vibration (dans le rotor). Pour initier le phénomène de Blade Shedding, une première échasse sur l'étage TL1 est supprimée du calcul : une première pale se détache du rotor. Par la suite, cette pale libérée impacte la pale suiveuse ce qui conduit à la flexion de celle-ci. Cependant le jeu entre la pale suiveuse $n^{\circ}1$ et la pale suiveuse $n^{\circ}2$ est faible et un mécanisme de reprise des efforts de compression par la pale suiveuse $n^{\circ}2$ se met en place lors de la flexion de la pale suiveuse $n^{\circ}1$. Ce mécanisme conduit à une élévation importante de la contrainte moyenne de traction dans la pale suiveuse $n^{\circ}1$.

Idéalement le calcul des contraintes et déformations dans les échasses devrait permettre de pouvoir détecter la rupture du matériau et déclencher alors le départ de pales suiveuses. Cependant actuellement la modélisation des échasses est de basse qualité avec seulement trois éléments dans l'épaisseur de l'échasse ce qui ne permet pas de détecter correctement les concentrations de contraintes dues à la flexion lors d'impact de faible amplitude. De ce fait, la rupture de l'échasse des huit pales suiveuses de l'étage 1 est pilotée temporellement : $0.3ms$ après le départ de la pale précédente, la pale suiveuse est libérée. Dans les simulations de Blade Shedding, ce pilotage temporel suffit à déclencher la rupture de toutes les autres pales.

4.2.5 Lois matériaux utilisées sur les différents corps

Pour le blindage, l'anneau et les pales, les lois matériaux identifiées pour Turbomeca par le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz (LPMM) (Rusinek et al. [97]) sont utilisées. La caractérisation de ces matériaux est réalisée dans le domaine quasi-statique jusqu'à grandes vitesses de déformation à température ambiante et à haute température sur des éprouvettes de double cisaillement (Klepaczko [66]). Un des avantages de l'essai de double cisaillement est de pouvoir obtenir une caractérisation continue dans la plage de déformation caractérisée.

Les moyens d'essai mis en place sont :

- une machine de traction pour le domaine du quasi-statique jusqu'au domaine des vitesses de déformation moyennes (10^2s^{-1}),
- les barres d'Hopkinson pour le domaine des grandes vitesses de déformation (10^4s^{-1}).

Par ailleurs, la turbine libre est chauffée par les gaz chauds, ce qui conduit à des températures de l'ordre de 500°C . Pour évaluer les lois matériaux à cette température, la méthode mise en place dans la caractérisation de Rusinek [97] est d'équiper la machine de traction d'un système de chauffage pour obtenir la sensibilité des lois matériaux à la température dans la gamme de vitesses allant du quasi-statique aux vitesses de déformation moyennes. Pour le domaine des grandes vitesses de déformation, la technique des barres d'Hopkinson présente une difficulté par le fait que le module d'Young d'un matériau dépend de la température ce qui entraîne la non-transmission des ondes si l'éprouvette de traction est simplement chauffée. Ce type de comportement est mis en évidence dans les travaux de Brun [21]. En conséquence, le comportement à hautes vitesses de déformation et à haute température 500°C n'a pas été caractérisé mais seulement extrapolé de la caractérisation réalisée à température ambiante.

Le comportement de ces trois matériaux est alors modélisé par une loi de Johnson-Cook [63] dépendant de la température.

4.3 Résultats qualitatifs et temporels de la simulation

L'ensemble des résultats présentés dans les sous parties qui suivent est obtenu par le modèle présentant un anneau avec un jeu de 0.65mm .

4.3.1 Etat d'équilibre après la précharge centrifuge

Le calcul de précharge centrifuge est réalisé par le code Ls-Dyna à l'aide d'une méthode de relaxation dynamique dont les différentes particularités sont présentées dans le rapport Turbomeca [54]. Le résultat en terme de déformations plastiques et contrainte de von Mises est visible sur les figures 4.5(a) et 4.5(b).

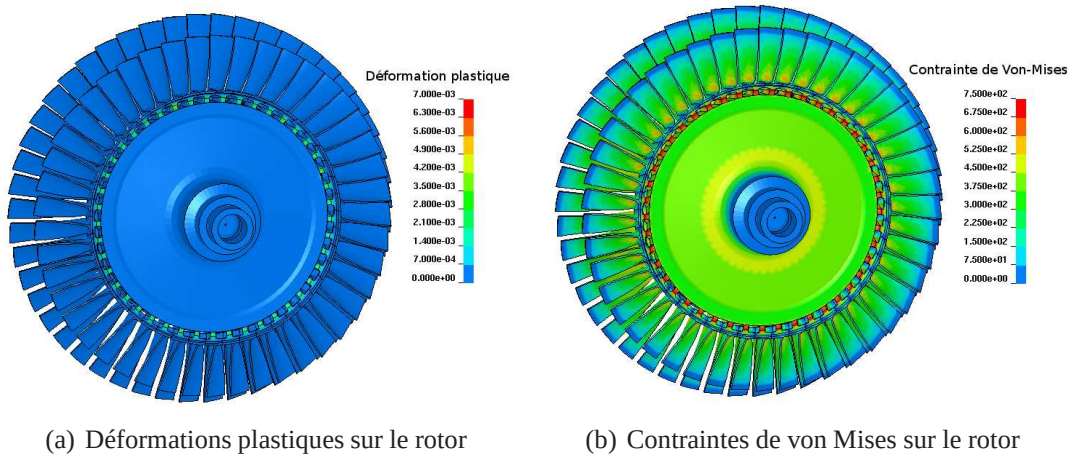


FIG. 4.5: Résultats de la précharge centrifuge sur le rotor

La précharge centrifuge est réalisée pour une vitesse de rotation de 136%*N_TL*. Cette vitesse correspond à la vitesse mesurée de départ des pales. Conformément à la conception des pales, le chargement dans la section des pales conduit à des déformations plastiques au niveau des échasses. Ces déformations plastiques sont inférieures à la déformation à la rupture nominale du matériau par le fait qu'une loi typique est imposée pour l'ensemble des pales tandis que la vitesse de rupture des pales est déterminée par un aspect probabiliste.

Pour définir la marge de contraintes avant rupture des pales lors des contacts rotor-stator, le critère en déformation plastique imposé sur les éléments de la section frangible est défini de façon déterministe dans le but de retrouver la valeur moyenne de la contrainte complémentaire pour la rupture du matériau ce qui équivaut à écrire l'équation (4.1).

$$\epsilon_p = \frac{\tilde{R}_m - \tilde{\sigma}_T}{E_T} \quad (4.1)$$

Dans l'équation (4.1), $\tilde{\sigma}_T$ correspond à la contrainte moyenne de traction sur la section frangible, $\tilde{R}_m$ correspond à la limite ultime moyenne du matériau tandis que E_T correspond au module tangent moyen du matériau.

4.3.2 Séquence des contacts de la première pale libérée

Le départ de la première pale conduit à la mise en place de contacts entre la pale libérée et le reste du système. La séquence de ces contacts est détaillée temporellement ci-dessous. Les images 4.6-4.11 représentent les déformations plastiques de von Mises sur la structure avec l'échelle associée dans la figure 4.6.

- $T_0 = 1ms$, la pale est libérée du rotor et n'est soumise à aucun effort. Les conditions initiales en son centre d'inertie sont une vitesse tangentielle égale à $V_\theta = R_g \omega_{BS}$ et une vitesse angulaire ω_{BS} .

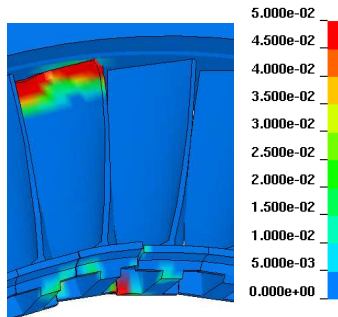


FIG. 4.6: $T_0 + 0.05ms$ Contacts en pied de pales lors de la libération de la première pale (Déformations plastiques sur le contour)

- $T_0 + 0.05ms$ (Figure 4.6), la tête de la pale libérée rentre en contact avec l'anneau ce qui produit un basculement de la pale. Par ailleurs, le faible jeu présent entre chaque pale

conduit à la mise en place de contacts avec les tablettes de la pale précédente et celle de la pale suiveuse.

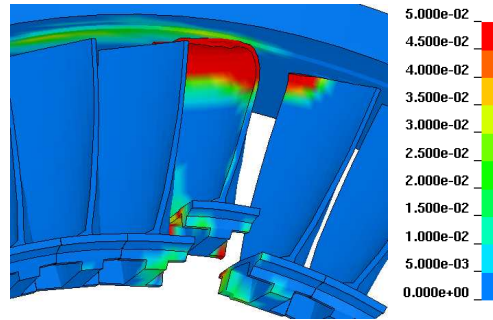


FIG. 4.7: $T_0 + 0.15ms$ Contact rotor-stator de la pale précédente (Déformations plastiques sur le contour)

- $T_0 + 0.15ms$ (Figure 4.7), la tête du profil de la pale libérée se plastifie sous les forces inertielles de la pale. Le centre de gravité de la pale libérée s'élève ce qui conduit à la fin du contact inter-tablette. La pale précédente soulevée par la pale libérée entre en contact avec l'anneau.

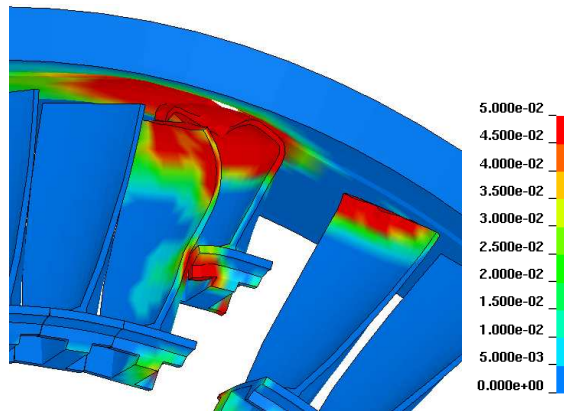


FIG. 4.8: $T_0 + 0.225ms$ Perforation de l'anneau par la pale libérée (Déformations plastiques sur le contour)

- $T_0 + 0.225ms$ (Figure 4.8), le profil plastifié de la pale libérée se retrouve positionné au dessus de la pale suiveuse. Les fortes déformations associées à la configuration du contact conduisent à la perforation de l'anneau.

- $T_0 + 0.3ms$ (Figure 4.9), la pale libérée est fortement en contact avec la pale suiveuse ce qui conduit à un effort de flexion sur la section frangible de la première pale suiveuse. Cette pale fléchit et entre en contact avec la seconde pale suiveuse. La première pale suiveuse est alors libérée par un critère temporel conformément au mécanisme présenté

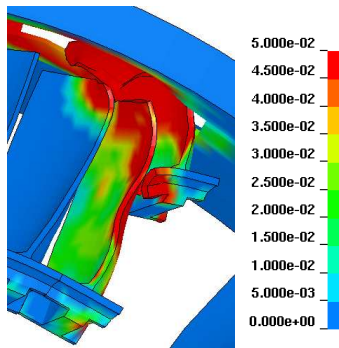


FIG. 4.9: $T_0 + 0.3ms$ Contacts de la pale libérée contre la pale suiveuse au niveau du profil (Déformations plastiques sur le contour)

dans la partie 4.2.4.2. En effet, pour détecter la rupture du matériau, des maillages plus fins seraient nécessaires mais n'ont pas été mis en place. Par ailleurs le profil de la pale libérée entre en contact avec la seconde pale suiveuse.

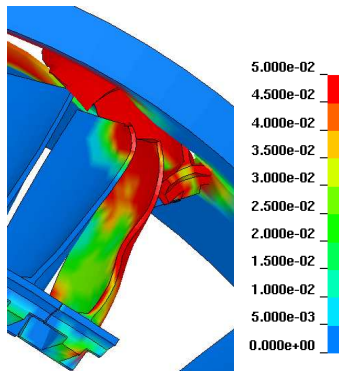


FIG. 4.10: $T_0 + 0.35ms$ Repliement complet de la pale au dessus de la zone de rotation des pales (Déformations plastiques sur le contour)

- $T_0 + 0.35ms$ (Figure 4.10), de par l'espace présent entre l'anneau et le blindage, la première pale libérée traverse l'anneau et se retrouve positionnée au dessus de la zone de rotation des pales. La seconde pale libérée a tendance par ailleurs à pousser la première pale libérée dans cet espace.

L'analyse effectuée sur les contacts présents lors du départ d'une première pale pourrait être réalisée pour la seconde pale ou pour une troisième pale. Cependant cette analyse présente peu d'intérêt car les contacts obéissent à des règles de cinématiques de trajectoires des pales libérées et donc les contacts sont similaires. Seul le contact de la pale libérée avec la seconde pale suiveuse est amplifié par le fait que le rayon de courbure de la pale libérée est plus propice à toucher cette pale.

Ces analyses sont cependant réalisées sur un modèle tenant compte uniquement du

caractère élasto-visco-plastique du matériau sans pour autant représenter la fragmentation du profil. En réalité, les pales et en particulier les profils se fragmentent fortement lors des contacts énoncés et il devient difficile de pouvoir prédire sur quelles pièces précises des contacts avec des débris vont apparaître.

4.3.3 Contacts rotor-stator

Les contacts entre les pales perdues et le reste du système constituent des impacts violents sur les parties statiques. Cependant en parallèle de ces impacts, des phénomènes complémentaires apparaissent et conduisent à la mise en place de contacts à la périphérie du rotor. Ces contacts sont essentiels car ils conduisent à une augmentation des contraintes dans les échasses d'un grand nombre de pales.

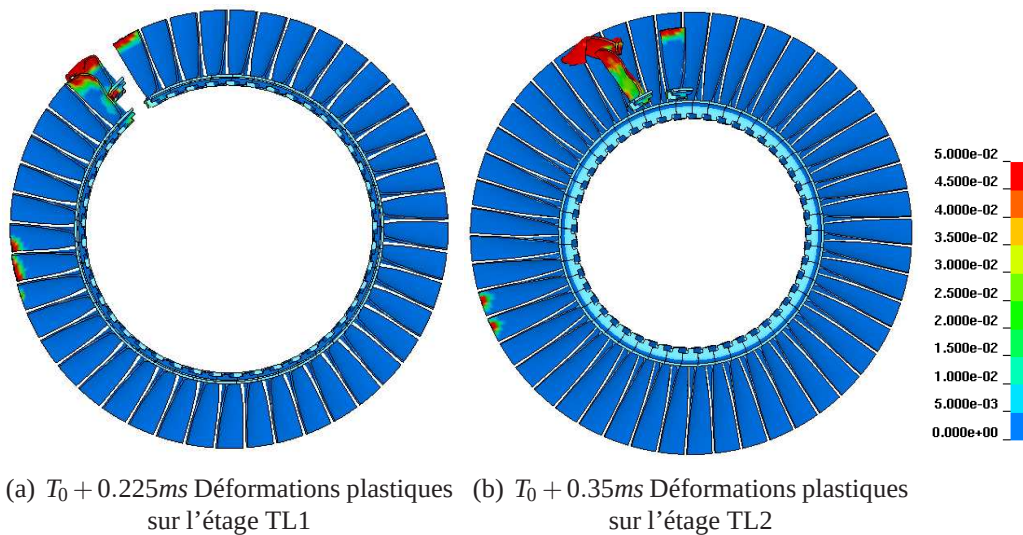


FIG. 4.11: Contacts rotor-stator associés au flambement de l'anneau

En effet, à $T_0 + 0.225ms$ (Figure 4.11(a)), des contacts apparaissent sur les pales suivantes $n^\circ 7 - 8 - 9$. Ces contacts sont associés à un flambement de l'anneau qui vient se replier vers l'intérieur à cause des fortes déformations dues à sa perforation par la première pale libérée. En effet, sur la figure 4.12(a), la zone en rouge qui est perforée à $T_0 + 0.225ms$ entraîne en même temps un déplacement de la zone en vert par un phénomène de flambage puisque le déplacement radial, visible au cours du temps sur la figure 4.12(b), est dirigé vers l'intérieur du rotor. Ce phénomène apparaît uniquement d'un seul côté car l'impact est tangentiel et non normal. Ce phénomène se propage ensuite sur l'ensemble de l'anneau et à $T_0 + 0.35ms$ (Figure 4.11(b)), un contact est initié sur l'étage 2 de la turbine. Ce contact avec l'étage TL2 est associé à la modélisation de l'anneau puisque en réalité les deux anneaux sont reliés par le distributeur TL2 qui apporte une masse et une rigidité complémentaire à la pièce de révolution modélisée.

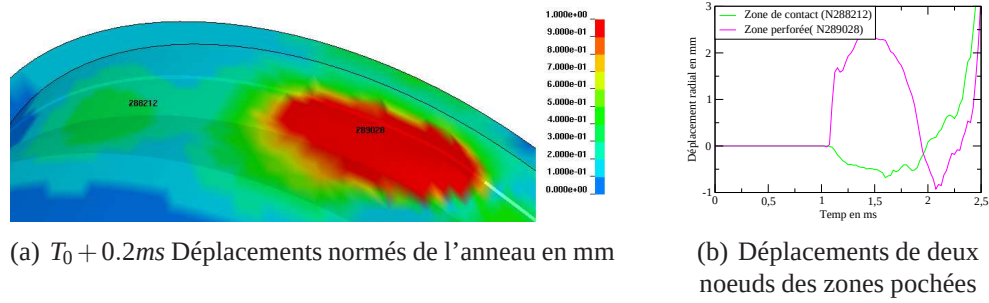


FIG. 4.12: Mise en évidence du flambement de l'anneau

En parallèle de ce comportement, la pale perdue conduit à la mise en place d'un balourd 100 fois supérieur à celui accepté dans la fabrication du rotor. De ce fait, le rotor est déséquilibré et s'excentre. Son mouvement est essentiellement guidé par la réponse au balourd des modes sollicités par cette excitation. En effet, un modèle de dynamique de ligne d'arbre mis en place en parallèle permet de montrer qu'un temps de $0.5ms$ est nécessaire pour que le rotor s'excentre de $0.3mm$ (Excentration visible sur la figure 4.13⁴). Ce résultat est obtenu par un modèle de dynamique de ligne d'arbre. La réponse calculée correspond à la réponse transitoire du rotor lorsque celui-ci est soumis à un balourd correspondant à la perte de quatre pales par effet domino avec un écart entre chaque départ de pale de $0.3ms$. Le balourd est donc uniquement appliqué durant $1.2ms$. Cependant les excentrations augmentent jusqu'à $T_0 + 2.9ms$ ce qui correspond à la réponse dynamique du système.

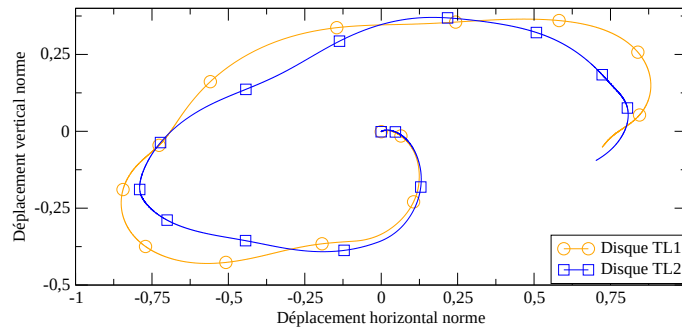


FIG. 4.13: Orbites des disques de la turbine libre excitée par un départ de 4 pales en domino sur un modèle de dynamique de ligne d'arbre

Le résultat de cette simulation peut être comparé aux orbites des disques sur le modèle de l'étage de turbine libre (Figure 4.14). Le phénomène est similaire avec une réponse dynamique. Une durée de $0.5ms$ est nécessaire pour que le rotor s'excentre de $1mm$. L'ex-

⁴Dans les figures 4.13 et 4.14, le déplacement temporel du rotor est signalé par les marqueurs qui sont positionnés toutes les $0.5ms$.

centration n'est pas identique sur les deux rotors. En effet même si la force de balourd est appliquée sur l'étage TL1, l'excentration est plus grande sur le disque TL2, ce qui souligne que les excentrations sont bien pilotées par une réponse globale du rotor.

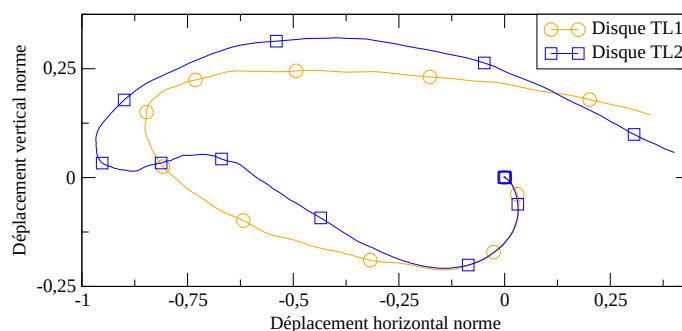


FIG. 4.14: Orbites des disques obtenues par le modèle 3D durant le Blade Shedding

Cette excentration conduit à la mise en place de contacts sur les deux étages de la turbine libre visibles sur la figure 4.15.

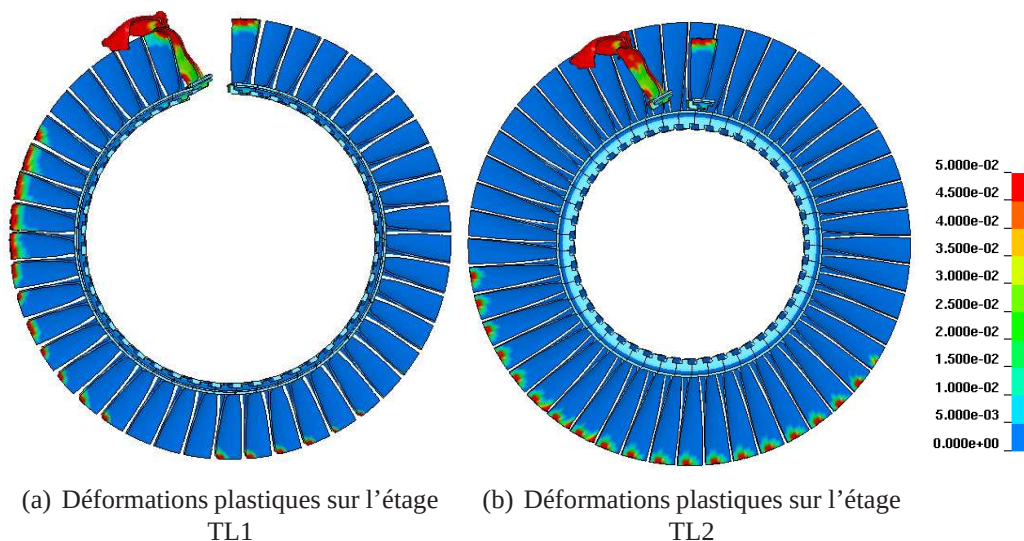


FIG. 4.15: $T_0 + 0.4ms$ Définition des contacts rotor-stator dus au balourd

Le contour des déformations plastiques (figs. 4.15-4.17) est utilisé pour détecter les contacts, ce qui n'est pas exactement représentatif de la zone en contact à un instant donné. En effet, sur la partie gauche de la figure 4.15(a), les têtes de pales sont plastifiées au moment du flambage de l'anneau alors que le contact dû aux efforts de balourd est présent sur les pales de la partie basse de la figure.

Du fait que le rotor tourne sur lui-même en augmentant son excentricité, les autres pales du rotor s'endommagent avec les contacts rotor-stator opérant sur l'ensemble de la

périphérie du disque. A $T_0 + 0.85ms$, la majorité des pales des deux étages présente des plastifications à leur sommet et seules quelques pales se situant dans la direction opposée à celle du balourd restent intactes. Sur l'étage TL2, ces pales rentreront en contact à $T_0 + 1.325ms$

4.3.4 Départ du reste des pales

La phénomène de perte de pales en domino est encore présent sur le rotor et par inertie, celui-ci continue à se désaxer ce qui augmente les efforts de contact rotor-stator et donc les efforts au niveau de la section frangible des pales. Sur cette section, un critère en déformation plastique a été spécifié (Partie 4.3.1) et à $T_0 + 1.3ms$, plusieurs sections frangibles de l'étage TL1 se retrouvent supprimées ce qui conduit au départ des pales associées (Figure 4.16(a)). De la même façon, sur l'étage TL2, à $T_0 + 1.325ms$, plusieurs pales sont libérées (Figure 4.16(b)).

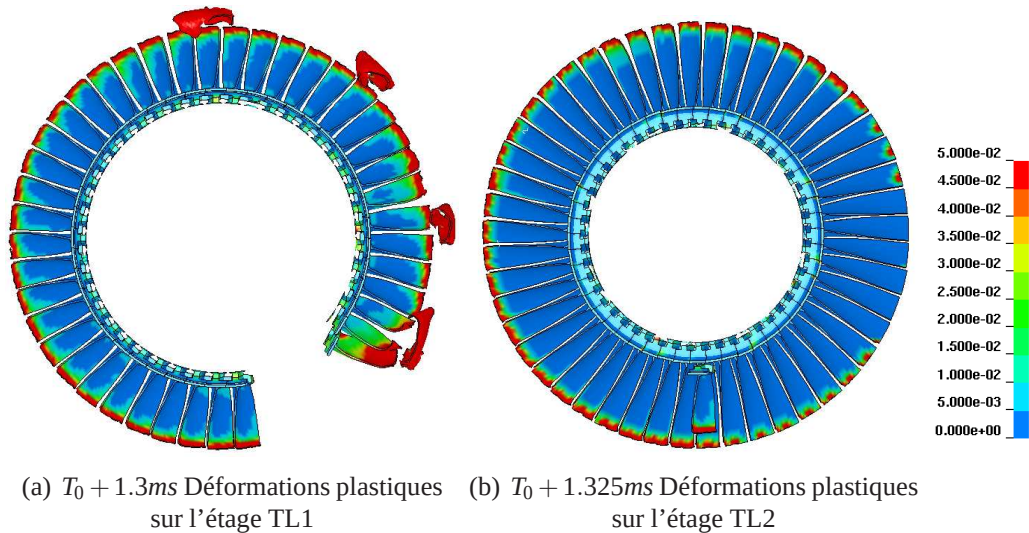


FIG. 4.16: Initiation du départ du reste des pales

La configuration dans laquelle se retrouvent toutes ces pales avec un chargement centrifuge associé à des efforts de flexion conduit à ce que le simple contact inter-tablette rompe les sections frangibles. A $T_0 + 1.425ms$ puis à $T_0 + 1.45ms$, plus aucune pale de l'étage TL2 puis TL1 n'est liée au disque. Par les effets inertiels, le disque prolonge alors sa trajectoire selon les courbes présentées dans la figure 4.14. Au final, le rotor a été excité par le départ de 6 pales avec un écart temporel de $0.3ms$ et au cours de l'impact de la septième pale l'ensemble des autres pales présentes sur l'étage TL1 et TL2 se sont détachées du disque en $0.15ms$. Le chargement associé à ce balourd n'a pas été mesuré dans la simulation.

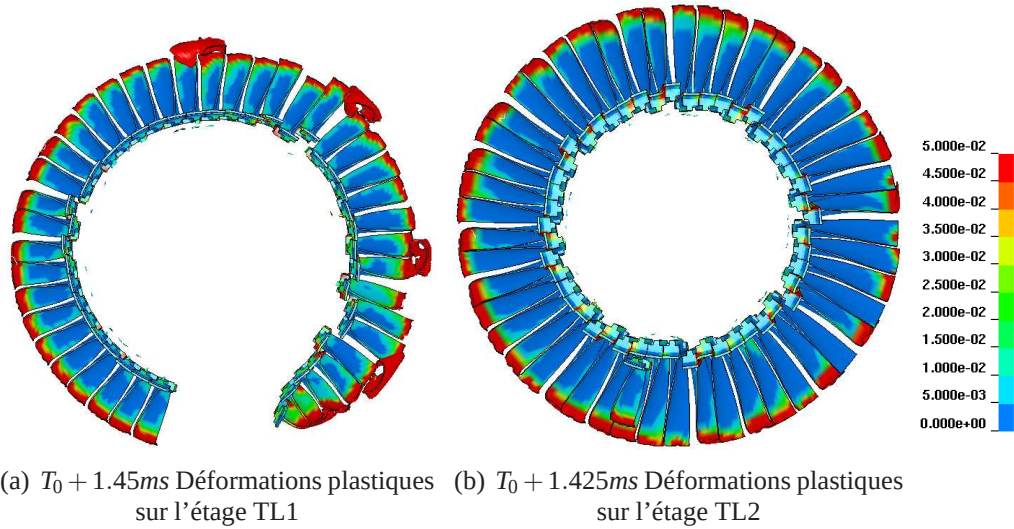


FIG. 4.17: Fin de la libération des pales

4.3.5 Évolution de la déformation de l'anneau

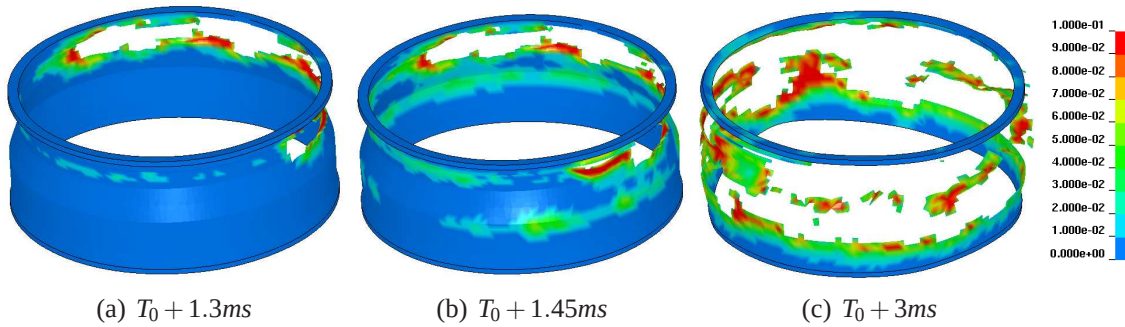


FIG. 4.18: Déformations plastiques de l'anneau au cours de l'impact des pales

Le départ en domino des pales TL1 conduit à la perforation de l'anneau le long de sa périphérie. A $T_0 + 1.3ms$, juste avant le départ de la majorité des pales, quatre zones sont perforées. Cependant les pales éjectées poursuivent leur trajectoire de façon hélicoïdale contre la peau du blindage ce qui découpe tangentielllement l'anneau (Figure 4.18(a)). Par ailleurs, les légères déformations (inférieures à 0.01%) correspondent à des contacts rotor-stator.

Après le départ de toutes les pales ($T_0 + 1.45ms$), l'ensemble des pales impactent l'anneau. Les déformations sont largement visibles sur la figure 4.18(b). De par les impacts et les contacts frottants, l'anneau se déchire totalement. A $T_0 + 3ms$ (Figure 4.18(c)), l'anneau est découpé en trois parties. On notera que comme l'anneau n'est pas encastré, celui-ci se met à tourner et les éléments assurant la liaison entre les trois parties ne sont

pas surchargés et ne rompent pas.

4.3.6 Déformation du blindage

Lors de l'impact en domino des pales (de T_0 à $T_0 + 1.3ms$), l'anneau protège en partie le blindage et celui-ci se déforme au droit de l'impact des tablettes des pales (Figure 4.19(a), cf. évolution de l'énergie interne sur la figure 4.20). Au contraire pour le lâcher de toutes les pales, l'anneau est rapidement perforé et le blindage assure sa fonction de rétention en se déformant sur toute sa périphérie (Figure 4.19(b)).

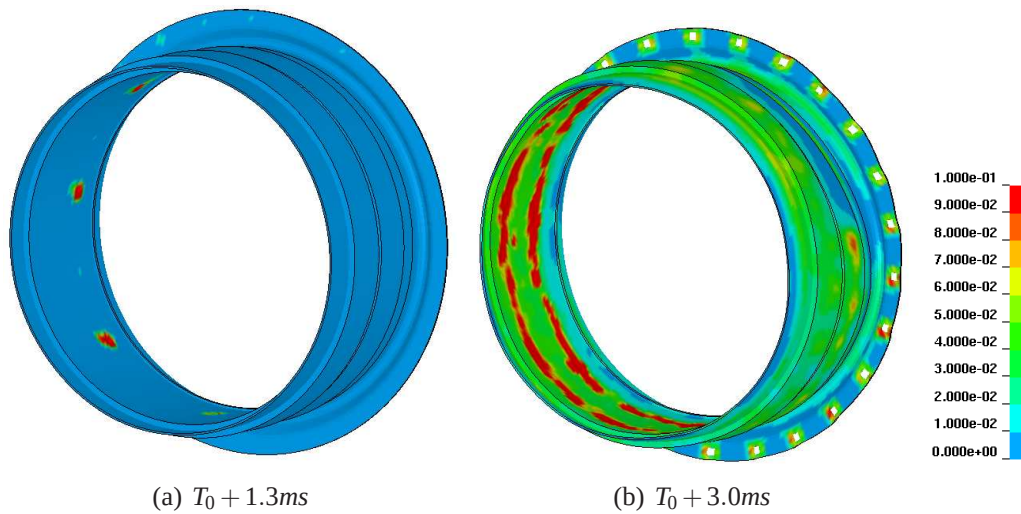


FIG. 4.19: Déformations plastiques du blindage

Les déformations à $T_0 + 6.5ms$ sont variables dans l'épaisseur du blindage avec une moyenne de 3.7%. Cependant, dans les zones de contact correspondants aux impacts de pales, ces déformations peuvent atteindre 50% et un phénomène d'abrasion aurait pu apparaître.

Dans la simulation, la fixation du blindage est réalisée par 25 noeuds encastrés concentrant ainsi les efforts dans les quatre éléments avoisinant. De plus, la loi matériau du blindage présentait un critère de rupture à 50%. Lors de l'impact de toutes les pales contre le blindage ($T_0 + 1.525ms$ - $T_0 + 2.29ms$), un fort couple est transmis vers cette liaison et les éléments finissent par rompre, libérant ainsi le blindage.

4.4 Résultats quantitatifs

Les résultats quantitatifs sont obtenus sur la simulation avec un jeu en tête de pales de $0.65mm$.

4.4.1 Aspects énergétiques

Avant rupture des pales, l'énergie cinétique présente dans les pales constitue l'énergie impactant les parties statiques.

Les évolutions des énergies cinétiques et interne du blindage, de l'anneau et moyennes des pales $TL1 - TL2$ sont visibles sur la figure 4.20. Pour les pales $TL1$, la moyenne

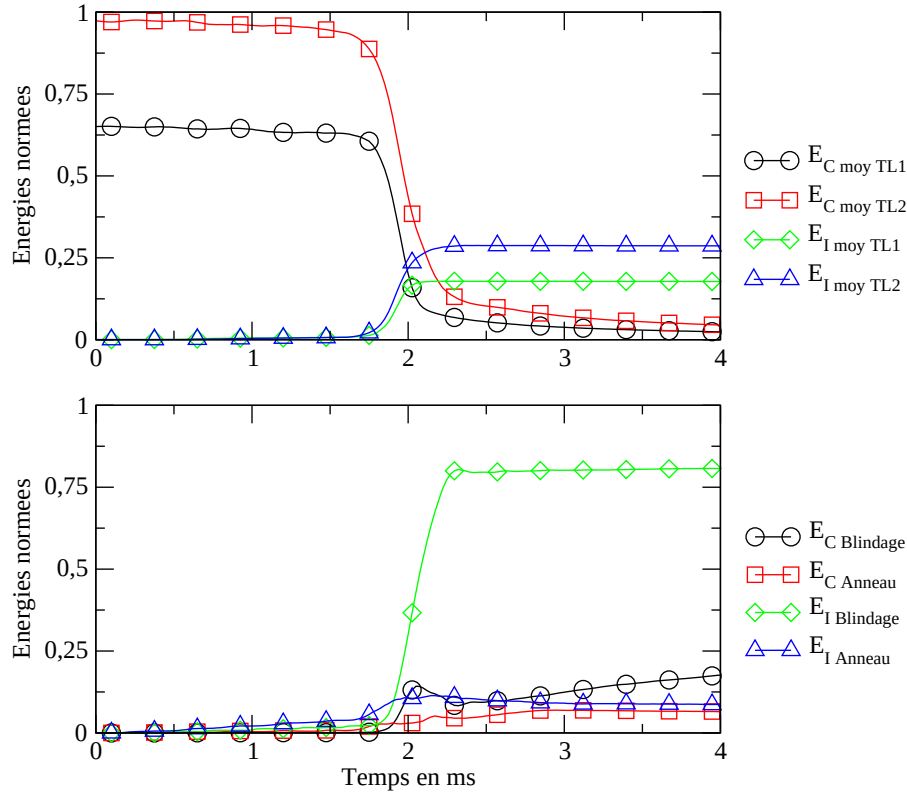


FIG. 4.20: Evolution des énergies des principales parties de la turbine libre

est réalisée sur les 40 pales qui se détachent entre $T_0 + 1.3ms$ et $T_0 + 1.45ms$. Avant le départ de toutes les pales, l'anneau se déforme plus que le blindage et en conséquence son énergie interne est plus importante. Au moment du départ de toutes les pales, comme l'anneau est positionné plus proche des pales, celui-ci se déforme encore. Les oscillations présentes entre $T_0 + 1.5ms$ et $T_0 + 2ms$ correspondent à la suppression des éléments. En effet, les éléments se déforment fortement avant d'être supprimés. De ce fait, l'énergie interne augmente fortement puis se stabilise.

Dès lors que l'anneau est perforé, le blindage est impacté par les débris et son énergie interne augmente jusqu'à un plateau. Il est intéressant de remarquer que le début du plateau apparaît avant la libération du blindage à $T_0 + 2.5ms$. A cet instant, l'énergie cinétique des pales n'est pas encore nulle mais continue à diminuer par frottement contre la peau du blindage et est transférée au blindage en énergie cinétique. En effet, l'énergie

cinétique du blindage, dès lors que celui-ci est libéré, augmente continuellement avec une courbe exponentielle décroissante ($E_{cin}(t) = Ee^{-t/\tau}$). A $T_0 + 6.5ms$ correspondant à la fin de la simulation, cette énergie augmente encore. La connaissance de l'inertie polaire de cette pièce permettrait par ailleurs de connaître à la fois l'évolution de la vitesse de rotation du blindage et le couple appliqué.

Pour les pales, selon les temps auxquels elles sont libérées, leurs énergies internes augmentent fortement après impact contre les parties statiques pour venir se stabiliser autour d'une valeur moyenne. En parallèle, leur énergie cinétique baisse au moment de l'impact mais ne devient pas nulle puisque l'impact est oblique à la normale de la zone d'impact et de ce fait elles sont seulement déviées. Après impact, les pales continuent à frotter et leurs énergies cinétiques baissent par frottement et par mise en mouvement du blindage.

L'énergie interne des pales est considérable. Cet aspect pose un problème puisqu'en réalité la pale se fragmente et le comportement d'un débris lors de l'impact sera différent de celui d'un objet considéré uniquement par une approche élasto-plastique. En effet, la fragmentation s'opère en général au niveau du profil par flexion et donc par rupture en traction alors que l'impact contre la pièce statique conduit à des contraintes de compression. Il est certain que le débris sera de nouveau endommagé mais la quantification de ce comportement nécessiterait d'avoir des lois matériaux identifiées sur ce type de grandes déformations.

Pour le disque, l'évolution de son énergie cinétique permet d'évaluer la chute de la vitesse de rotation. Cette baisse de la vitesse de rotation est plus faible que celle mesurée lors de l'essai moteur. En effet, dans le scénario de rupture de pales identifié dans la simulation, la majorité de pales se détache du disque en une durée de $0.15ms$. Par ailleurs, les contacts entre le rotor et le stator sont sous estimés dans les zones de départs de pales car la représentation de la perforation de l'anneau conduit à une suppression d'une partie de l'anneau rendant ainsi le contact moins sévère. En parallèle, le départ de la majorité des pales en $0.15ms$ est identifié par le dépassement d'un critère matériau déterministe alors qu'en réalité des dispersions sont présentes sur la rupture. Cet aspect conduit à une réduction du travail moyen appliqué limitant ainsi la chute de la vitesse de rotation.

4.4.2 Efforts sur la couronne de fixation du blindage

Au niveau des fixations du blindage, le torseur des efforts est construit au centre de la couronne. Les forces et les couples résultants sont présentés sur la figure 4.21

Sur ces courbes, les plages temporelles associées à la séquence de départs de pale en domino et le départ de toutes les pales sont nettement visibles. Dans la première plage, les efforts récupérés sont principalement constitués d'une réponse vibratoire du système tandis que, pour la seconde plage, les efforts sont constitués majoritairement d'un couple selon l'axe de rotation. Cependant la rupture des éléments entourant les liaisons conduit à l'arrêt de l'augmentation du couple.

Le chargement n'est pas homogène le long de la périphérie du blindage. Les forces externes appliquées sur quatre noeuds encastrés positionnés à 90° selon la figure 4.22 sont

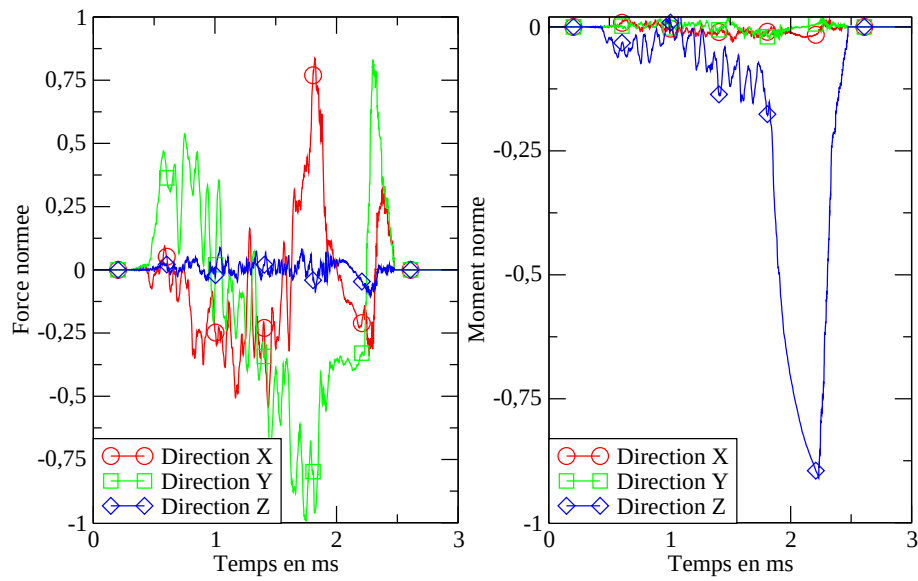


FIG. 4.21: Efforts résultants de la condition de blocage du blindage

présentées sur la figure 4.23 dans des repères cylindriques.

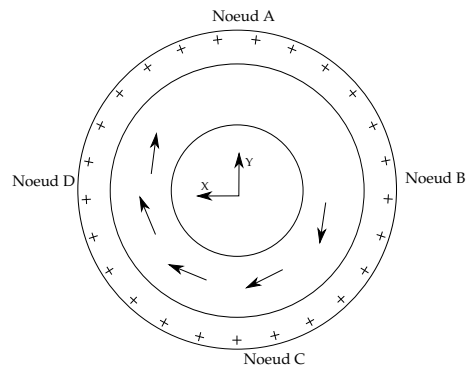


FIG. 4.22: Schéma du positionnement des quatre fixations étudiées (Les flèches correspondent aux directions des cinq premiers impacts)

Les courbes se distinguent selon la position par rapport aux impacts des premières pales en domino. En effet, les liaisons positionnées au plus proche de ces impacts sont sollicitées dès le début du chargement dans les directions radiale et tangentielle. Au contraire, le départ de toutes les pales conduit à l'application d'un effort tangentiel important sur toutes les liaisons.

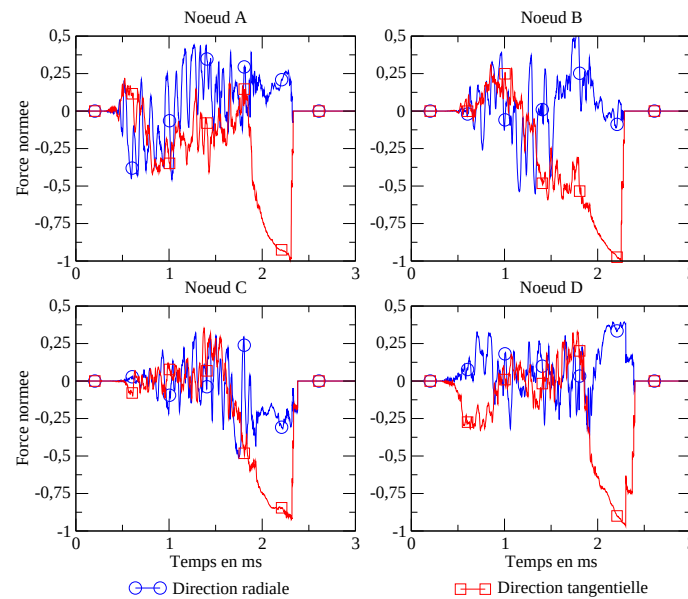


FIG. 4.23: Forces externes sur quatre fixations du blindage dans les directions radiale et tangentielle

4.4.3 Comparaison des modèles avec des jeux différents pour l'anneau

La séquence de départ de pales présentée ci-dessus est acceptable d'un point de vue mécanique. Cependant, plusieurs hypothèses ont été réalisées : scénario domino pour le départ des premières pales par impossibilité de détecter une rupture par flexion des pales, critère de rupture déterministe en pied de pales, anneau de révolution et présentant un jeu en tête de pales constant le long de la périphérie. Toutes ces hypothèses ne correspondent pas forcément à la réalité de l'essai.

Afin de réaliser une première étude de l'influence de la robustesse du scénario identifié, trois types d'anneaux sont testés dans trois simulations distinctes. Ces anneaux présentent des jeux différents à chaud (après précharge centrifuge) qui sont présentés dans le tableau 4.2.

	Jeu sur la TL1 en mm	Jeu sur la TL2 en mm
Anneau 0.65	0.78	0.71
Anneau 0.3	0.40	0.35
Anneau 0.05	0.14	0.11

TAB. 4.2: Jeux présents dans les trois modèles

La simulation du premier modèle (anneau 0.65) conduit aux résultats présentés précédemment. Les différences avec les deux autres modèles sont présentées ci-dessous.

Tout d'abord, dans le modèle présentant le jeu le plus faible (anneau 0.05), des contacts rotor-stator sont présents avant même qu'une pale soit lâchée. En effet, même si le système est axisymétrique, les légères variations de déformations lors de la pré-charge centrifuge conduisent à la définition d'un balourd. Ainsi le rotor vibre selon ses modes propres et le jeu en tête de pale est consommé. Par la suite, la séquence domino de départ des premières pales est imposée ce qui conduit aux impacts des pales libérées sur l'anneau. Le phénomène de flambage de l'anneau est aussi présent avec des contacts rotor-stator sur des pales suiveuses. Cependant des difficultés apparaissent pour identifier les contacts car toutes les têtes de pales sont déjà endommagées par le contact initial.

Si l'on observe les résultats des trois simulations, la seconde différence réside dans l'instant de départ des pales. En effet, selon le jeu en tête de pale, l'instant de départ des pales évolue entre $T_0 + 1.3ms$ et $T_0 + 2.0ms$. Cette différence avec la valeur trouvée pour le modèle avec l'anneau 0.65 ($T_0 + 1.3ms - T_0 + 145ms$) peut s'expliquer par la définition d'un contact frottant plus ou moins violent selon le jeu présent. Cependant la dynamique du contact reste encore mal comprise puisque dans le cas d'un jeu faible, il y a établissement d'une excitation en tête de pale avant même qu'une pale impacte l'anneau. De ce fait, l'anneau est excité par ce contact et se met en mouvement. Par ailleurs, le matériau de la pale est modélisé par une approche élasto-visco-plastique qui ne tient pas compte de l'érosion en tête de pale. De ce fait, la tête de la pale se déforme largement ce qui diminue la sévérité des contacts rotor-stator lors de la perte des pales. De plus, aucune étude d'influence de la finesse des maillages sur la définition du contact n'a été réalisée et la définition de la rupture est réalisée à partir d'un critère sur la déformation plastique principale. En conclusion, cette première étude d'influence montre que l'effet de ces différents phénomènes reste encore mal compris et qu'un travail complémentaire serait nécessaire.

4.5 Calcul de Blade Shedding sur le moteur

Dans ce calcul, l'objectif est d'obtenir les efforts au niveau des attaches moteur en connaissant les efforts appliqués sur la turbine libre lors du Blade Shedding. De par les observations réalisées sur le moteur, le système est relativement peu déformé sur l'ensemble des parties autour de la turbine et la réponse du moteur au niveau des attaches moteur est essentiellement élastique et inertielle.

Dans Ortiz et *al.* [91], un modèle élément fini 3D des parties extérieures du moteur étudié a été développé. Ce modèle, visible sur la figure 4.24, est résolu par le schéma des différences centrées mais conduit à des temps de calcul importants pour obtenir la réponse d'une structure en grande partie élastique.

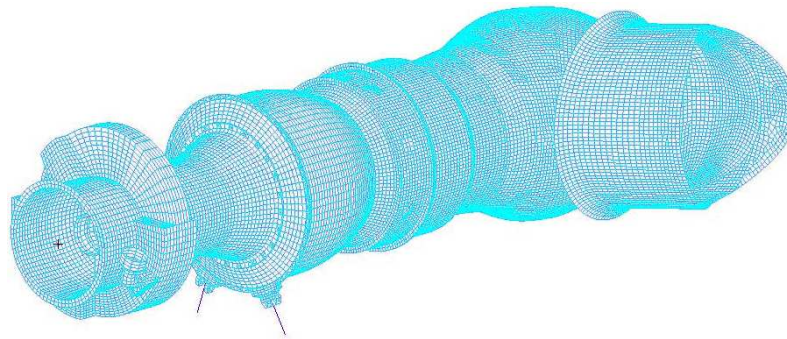


FIG. 4.24: Vue du maillage des parties statiques du moteur Makila

4.5.1 Définition des sous-domaines et de leurs modélisations associées

Pour améliorer cette situation, le modèle est divisé par domaines. Tout d'abord, les deux rotors sont considérés comme des rotors élastiques. En effet, cette modélisation permet de réduire considérablement les temps de calcul et convient parfaitement au générateur de gaz qui n'est pas endommagé. Pour la turbine libre, les chocs importants conduisent à des ouvertures des curvic-coupling et à de légères plastifications de leurs dents. Ces aspects ne seront pas considérés dans l'approche de dynamique de ligne d'arbre mais pourraient être intégrés à travers des développements spécifiques. Les travaux de El-Arem [3], de Papadopoulos [92] ou de Stoisser et Audebert [104] donnent des perspectives sur la mise en place d'une modélisation adaptée.

Pour la définition des parties statiques, une synthèse modale basée sur la formulation de Craig-Bampton est retenue. En effet, les parties statiques ne présentent pas d'effets gyroscopiques et une synthèse modale permet de retranscrire aisément la réponse basse fréquence. Pour résoudre le système mécanique ainsi créé, l'algorithme des différences finies multi-niveaux proposé par Faucher et Combescure [40] est retenu. En effet, même si le nombre d'éléments pour la modélisation des rotors est très faible (inférieur à 100 éléments), la rigidité de quelques éléments conduit à des pas de temps de stabilité faibles, ce qui ne pose pas de problème lorsque le système est petit mais conduit à des temps de calculs très importants lorsque ce domaine est associé à des descriptions volumiques ou surfaciques présentant un grand nombre d'éléments avec des pas de temps élevés.

Grâce à la méthode multi-niveaux, le problème est découpé en quatre domaines visibles sur la figure 4.25.

- Dans un premier domaine, le générateur de gaz est modélisé par l'approche de dynamique de ligne d'arbre.
- Dans un second domaine, la turbine libre est modélisée de la même façon.
- Dans un troisième domaine, les parties statiques sont condensées en super-élément.
- Dans un quatrième domaine, les poutres supportant le super-élément sont modélisées par éléments finis et sont conservées dans leur description spatiale.

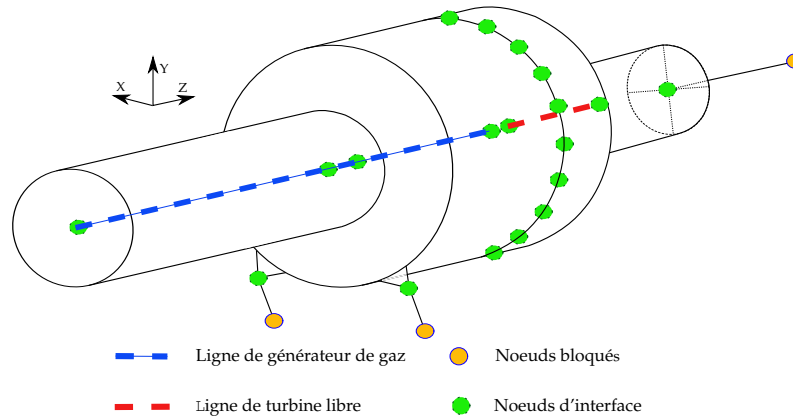


FIG. 4.25: Schéma de la structuration des domaines du moteur

En effet, la réduction d'un système mécanique par une méthode de synthèse modale de type Craig-Bampton nécessite que le système soit continu dans sa description pour pouvoir réaliser le calcul des valeurs propres généralisées sans mouvement de corps rigides. De ce fait, le super-élément des parties statiques ne peut pas être composé à la fois des carters extérieurs et des bielles et du demi-tube de liaison liés au banc d'essai. Pour éviter ce problème, le quatrième domaine est donc composé des deux bielles et du tube de liaison à l'arrière.

La définition des interfaces entre le rotor et les carters présente une difficulté. En effet, mécaniquement, le générateur de gaz et la turbine libre sont reliés aux parties statiques par respectivement quatre roulements et deux roulements dont certains sont supportés par des squeeze-films⁵. Pour représenter le comportement du roulement associé à un squeeze-film qui correspond à une rigidité de translation radiale associée à un amortissement local, le domaine éléments finis des rotors est étendu au delà de ces éléments par l'assemblage présenté schématiquement sur la figure 4.26. En effet, la formulation des multi-domaines permet actuellement de résoudre une équation de dynamique non-amortie sans terme sur la vitesse. De ce fait, l'élément qui doit être relié au noeud interface peut être uniquement formulé en rigidité et un autre élément positionné en dessous est alors lui-même composé en rigidité et amortissement. Pour l'interface avec le générateur, quatre noeuds à trois degrés de liberté définissent l'interface tandis que pour la turbine libre deux noeuds à trois degrés de liberté assurent la liaison.

Du côté des parties statiques, le blindage est sollicité par l'impact des pales. Par ailleurs, un comportement similaire est observé au niveau de l'anneau puisque sa perforation est accompagnée d'un mouvement. Cependant l'anneau n'a pas été encastré dans le premier calcul et donc aucun effort n'a été mesuré. De ce fait, les efforts de liaison de l'anneau vers les parties statiques seront donc négligés. Dans la simulation précédente comportant la définition volumique de tous ces corps, des efforts au niveau du blocage du

⁵Les squeeze-films correspondent à des cavités remplies d'un fluide sous pression qui exercent un amortissement lors des déformations de la cavité, voir les travaux de Defaye [35]

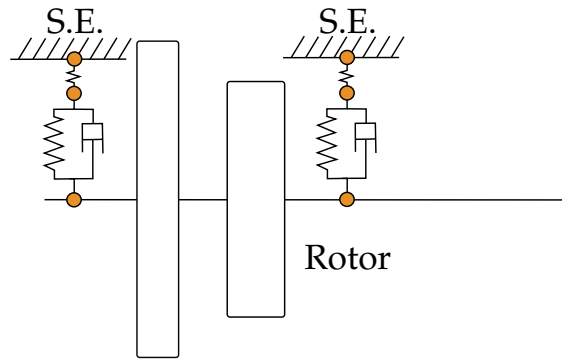


FIG. 4.26: Définition des interfaces entre le rotor et le super-élément

blindage sont mesurés. Dans la réalité, ces efforts auraient dû être transmis vers les parties statiques en réalisant un calcul couplé définissant l'ensemble des domaines. Ici, les efforts obtenus seront seulement appliqués sur leurs positions respectives dans le moteur. 25 noeuds sur la périphérie arrière du moteur sont donc conservés.

Pour les attaches moteur, trois noeuds sont conservés au niveau des centres des rotules des biellettes et du cardan. La définition des noeuds est réalisée par la définition de poutres avec des rigidités élevées vers le maillage 3D. Cet aspect ne pose pas de problème de temps de calculs car le domaine condensé en super-élément conserve uniquement une base restreinte des modes dynamiques de la structure dans le domaine des basses fréquences.

L'interface du super-élément des carters est donc composée par 33 noeuds présentant trois degrés de liberté et 1 noeud présentant 4 degrés de liberté (103 degrés de liberté). Cette formulation est donc réduite au maximum. En effet, l'excitation appliquée sur la couronne de fixation du blindage est uniquement réalisée sur les degrés de liberté en translation. Pour les biellettes, la liaison rotule est réalisée par l'association d'une poutre à six degrés de liberté et de la définition du super-élément avec seulement trois degrés de liberté spécifiés à son interface. Pour la définition du cardan, de la même façon, une poutre à six degrés de liberté et reliée au noeud du super-élément présentant uniquement une liaison sur quatre degrés de liberté.

4.5.2 Définition du super-élément des carters

Le super-élément des carters est réalisé selon la synthèse modale à interfaces fixes couramment dénommée méthode de Craig-Bampton [32] et réorganisée selon la formulation de Faucher et Combescure [40](voir la section 1.4 pour plus de détails).

Dans le processus de construction d'un super-élément, une analyse aux valeurs propres généralisées est réalisée sur le domaine interne du super-élément. De par la définition surfacique fine du moteur, un grand nombre de modes est présent dans le domaine fréquentiel basse fréquence et les modes de vibration des carters se retrouvent notamment mélangés à ceux locaux de la tuyère par exemple.

Pour éviter de retenir ce type de modes dynamiques dans la définition du super-élément et ainsi gagner du temps dans les temps de calculs, plusieurs techniques sont possibles :

- Une sélection visuelle de la forme permet de qualifier les modes mais ce processus est lourd à mettre en place et sensible aux décisions arbitraires de jugement.
- Une convergence sur la dimension de la base réduite pour obtenir la fréquence et la forme de certains modes peut permettre de trouver les modes importants (Legrand [69]). Cette approche nécessite cependant de résoudre le système réduit, de réaliser une étude de convergence et de connaître *a priori* les modes importants.
- Un critère de *MAC* peut permettre d'identifier les modes appartenant au domaine d'intérêt mais nécessite la création d'une base modale de référence. Cette technique plus robuste que la première présente cependant le désavantage de devoir définir la zone d'intérêt des modes.
- Une dernière technique consiste à évaluer la masse modale effective dont le concept est présenté par Géradin et Rixen [44]⁶. En effet, la masse totale du système est associée à la matrice de masse du système selon l'équation (4.2) dans laquelle les vecteurs q_x , q_y et q_z correspondent à des vecteurs unitaires de déplacement dans les directions x , y et z .

$$m_T = q_x^T M_{SS} q_x = q_y^T M_{SS} q_y = q_z^T M_{SS} q_z \quad (4.2)$$

L'expression d'un vecteur q_{xyz} correspondant à un déplacement unitaire dans les trois directions permet ainsi de retrouver la masse totale du système $m_T = 1/3 q_{xyz}^T M_{SS} q_{xyz}$. Par ailleurs, si les vecteurs propres généralisés Φ de la matrice de masse M_{SS} n'intègre pas des modes de corps rigides, ce vecteur peut être décomposé selon ces vecteurs propres. Leurs normalisations par rapport à la matrice de masse permet ainsi d'écrire les égalités (4.3) avec n_s la dimension de la matrice M_{SS}

$$q_{xyz} = \Phi \alpha^e \quad m_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_i^{e2} \quad (4.3)$$

Les α_i^{e2} représentent ainsi la masse effective des modes. Pour déterminer les α_i^{e2} , revenons à leur définition par rapport à q_{xyz} dans l'équation (4.3). La matrice inverse des Φ permettrait de trouver les α_i^e mais cela nécessiterait de connaître l'ensemble des vecteurs propres pour obtenir une matrice carrée ce qui est impossible. Cependant Φ^{-1} est indirectement définie par la matrice de masse M_{SS} (voir éq. (4.4)), cette définition sera préférée.

$$q_{xyz} = \Phi \alpha^e \Leftrightarrow \alpha^e = \Phi^T M_{SS} q_{xyz} \Leftrightarrow \alpha^e = q_{xyz}^T M_{SS} \Phi \quad (4.4)$$

Conceptuellement, tout mode dont la masse effective représente une partie importante de la masse totale du système représente un mode important de la déformation de la structure globale. Par ailleurs on notera que ce concept est associé à un mouvement dans

⁶On notera qu'une formulation sensiblement différente et particulièrement appropriée pour les systèmes réduits (Craig-Bampton - MacNeal-Rubin) est proposée par Verlinden [109] tandis qu'un nouveau critère pour les synthèse modales à interfaces fixes est présenté en annexe F

une direction de l'espace, ici un mouvement de translation dans les trois directions. Le concept peut être étendu au mouvement de rotation en analysant ainsi les inerties polaires et on parlera alors d'inerties polaires effectives. Pour la sollicitation sur le moteur, le fort moment appliqué selon l'axe moteur conduit à des vibrations de torsion. De ce fait, il est intéressant de calculer les inerties polaires effectives des modes selon l'axe moteur.

En partant du postulat que l'inertie polaire est principalement constituée par le déport de masse (voir théorème de Huguens), l'inertie polaire d'un système est calculée selon l'équation (4.5).

$$I_p = q_{Rz}^T M_{SS} q_{Rz} \quad (4.5)$$

Le mouvement de rotation unitaire q_{Rz_i} , d'un noeud i de coordonnées x_i , y_i et z_i , s'écrit selon l'équation 4.6 :

$$q_{Rz_i} = \begin{bmatrix} -y_i \\ x_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Afin de réduire la base modale des modes dynamiques, le critère en masse et inertie effectives est appliqué au modèle des carters du moteur étudié. Dans un premier temps, une base composée des 1000 premiers modes classés par ordre d'apparition fréquentielle est extraite du système mécanique. La plage fréquentielle prise en compte correspond à 0 – 2050Hz. Dans cette base, la plupart des modes correspondent à des vibrations localisées de la tuyère ou des équipements du moteur.

Par ailleurs, cette base présente une masse effective selon le critère énoncé précédemment de 97% de la masse du système et une inertie polaire effective de 89% de l'inertie polaire totale. Les quatre modes présentant les masses effectives les plus importantes sont présentés sur la figure 4.27. L'association de ces quatre modes permet ainsi d'obtenir 52.5% de la masse du modèle des carters.

Ces quatre modes correspondent à des mouvements de flexion de la partie avant du moteur (Modes à 164Hz, à 251Hz et à 362Hz) et à un mode de basculement interne de la chambre de combustion et du distributeur (Mode à 317Hz).

Pour le calcul transitoire, deux bases modales composées des modes présentant une masse effective supérieure à 1% et 0.1% sont mises en place. Ces bases présentent respectivement 84 et 252 modes dynamiques avec une masse effective associée 88.3% et 94.0%. Par ailleurs, l'inertie polaire effective associée à ces deux bases est respectivement de 60.0% et 83.1%.

4.5.3 Définition des forces d'excitation

Pour la simulation des efforts aux attaches moteur lors du Blade Shedding, les deux rotors sont mis en mouvement à leur vitesse de rotation mesurée lors des essais (100% du régime nominal du générateur de gaz N_{GG} , $136.5\%N_{TL}$ pour la turbine libre). En parallèle, le système est excité par les forces agissant sur le rotor : les forces de balourd associées à la perte de pales et sur le stator et les forces sur le blindage qui ont été obtenues dans la simulation du module de turbine libre.

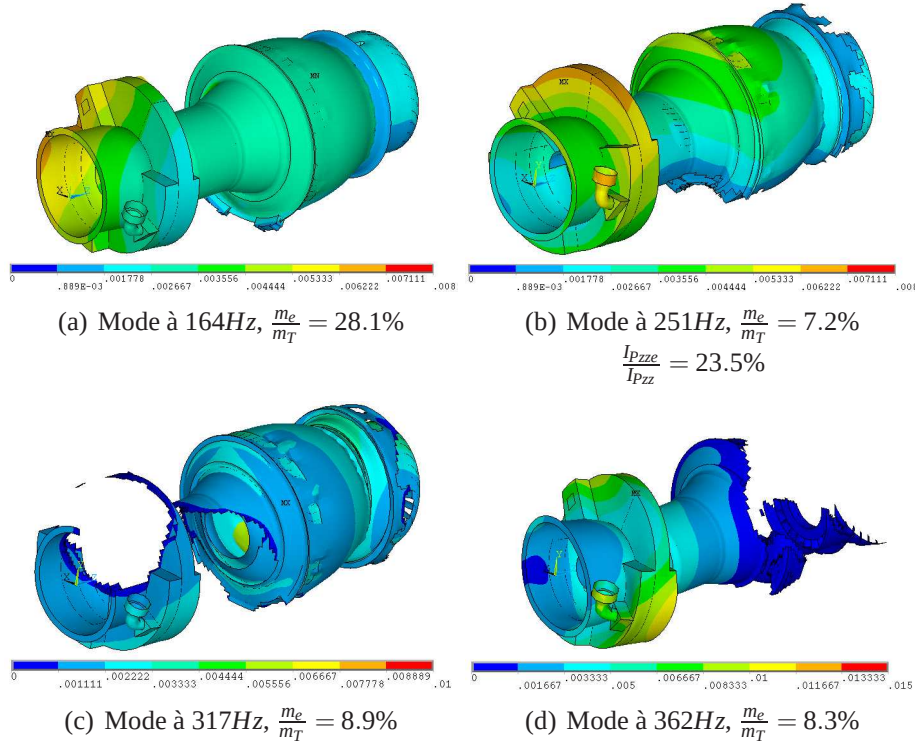


FIG. 4.27: Déplacements modaux de la structure, modes normalisés par la matrice de masse (Seuls les noeuds et éléments associés se déplaçant de plus de $1 \cdot 10^{-3}mm$ sont présentés)

Pour les forces de balourd, seule la séquence domino est prise en considération. Pour la simulation avec un anneau présentant un jeu de $0.65mm$, 6 pales se détachent du disque pendant $1.8ms$ avant que toutes les autres se détachent à leur tour. L'amplitude de l'effort de balourd au cours du temps pour le régime de départ des pales est visible sur la figure 4.28.

Cet effort est ainsi appliqué sur le noeud du modèle de la turbine libre correspondant au disque *TL1*.

Pour les forces appliquées sur le stator, les 25 noeuds conservés dans le domaine des parties correspondant aux fixations du blindage sont excités par les forces obtenues par la simulation du module de turbine libre. Il est à noter que ces deux excitations sont liées temporellement et spatialement.

Par ailleurs, si, dans le premier calcul, la direction de lâcher de la première pale n'avait pas d'importance car le système était axisymétrique, à l'opposée, dans celui-ci non-axisymétrique (de part la fixation des bielles), la direction de lâcher de la première pale a une influence qui demanderait une étude particulière pour donner une enveloppe des efforts sur les attaches moteur. Ici pour simplifier la démarche, une seule direction sera évaluée. Cette direction correspond à la direction présentée dans la figure 4.22 avec

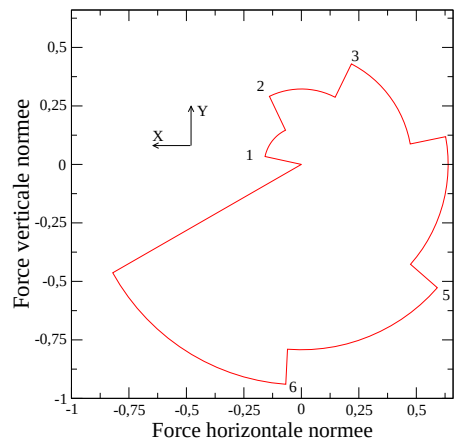


FIG. 4.28: Amplitude des efforts de balourd lors de la perte de 6 pales

le repère du moteur donné dans la figure 4.25.

4.5.4 Résultats obtenus

Les résultats en terme de forces et moment sur les attaches moteur sont présentés sur les figures 4.29, 4.30 et 4.31. Ces résultats sont obtenus avec le super-élément à 252 modes. Les résultats avec le super-élément à 84 modes ne sont pas présentés ici. Les résultats sont cependant très similaires pour le moment sur le cardan et les efforts sur les biellettes même si les forces sur le cardan sont notablement différentes. Cet aspect est certainement dû à une mauvaise représentation du système en torsion comme cela pouvait être prédit par la faible inertie polaire effective du système réduit.

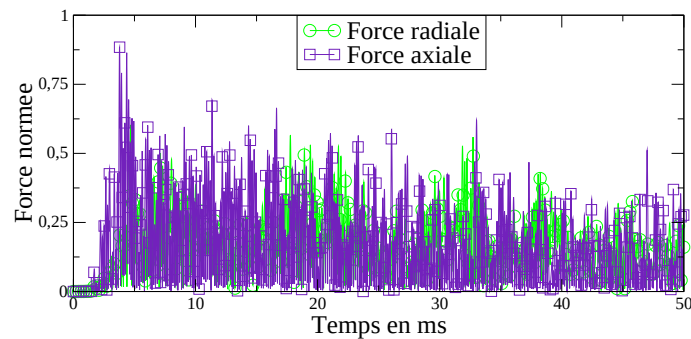


FIG. 4.29: Forces normées sur le joint de Cardan

De façon quantitative en terme d'amplitude maximum, les efforts calculés sont de l'ordre de grandeur de ceux mesurés pour les forces sur le cardan (+30% par rapport à la mesure) tandis que le calcul prédit mal le reste des efforts. En effet, pour les forces dans les biellettes, le calcul prédit des efforts nettement supérieurs aux efforts mesurés.

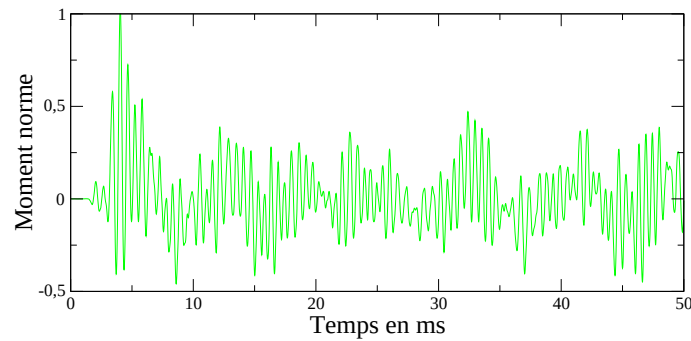


FIG. 4.30: Moment sur le joint de Cardan

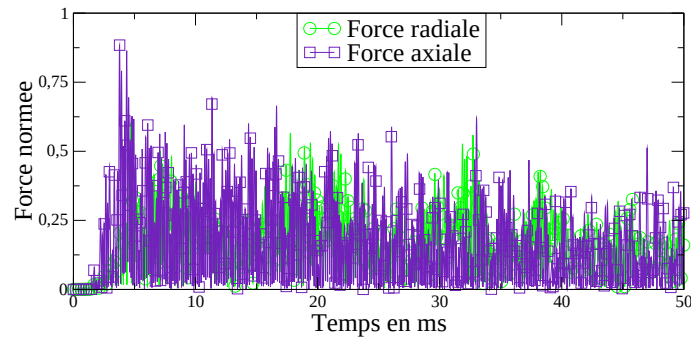


FIG. 4.31: Forces normées dans les biellettes

Cette dernière remarque conclut le chapitre. En effet, même si la modélisation actuelle a permis de faire une avancée importante dans la modélisation du phénomène. De forts aspects technologiques limitent la comparaison calcul-essai. Ces aspects n'entachent cependant pas la qualité de la simulation réalisée.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une simulation détaillée de l'évènement de Blade Shedding a été présentée. Cette simulation a permis de préciser un scénario probable de rupture des pales et les chargements induits sur l'ensemble du moteur. Le scénario le plus probable est composé d'un départ domino de quelques pales durant $1.5 - 2\text{ms}$ suite au départ d'une première pale plus faible que les autres. Pendant ce temps, le rotor s'excentre selon un mouvement qui est associé à la forme et à la fréquence des modes de dynamique de ligne d'arbre. Ce mouvement conduit à des contacts rotor-stator qui induisent des forces en têtes de pales conséquentes. Ce chargement conduit finalement au départ de toutes les pales en une durée très courte $\sim 0.2\text{ms}$. Le départ des pales conduit à des impacts importants sur la partie statique. Les simulations démontrent que l'anneau est largement perforé et

découpé par les impacts tangentiels des pales tandis que le blindage contient les pales. Une faible part de l'énergie cinétique des pales est récupérée par déformation plastique du blindage. Ces déformations quoique relativement faibles si on regarde leur moyenne sur le volume du blindage sont localisées sur la peau interne du blindage suite au glissement des pales et dans des zones lobées qui correspondent à la flexion du blindage. La forme du blindage ressemble par ailleurs fortement à celle observée expérimentalement. Au niveau du moteur, le chargement appliqué est donc composé d'un chargement de balourd sur le rotor avec un maximum transitoire tandis que sur les parties statiques la fixation du blindage induit une reprise d'un couple maximum.

Sur le simulation du moteur complet, les efforts récupérés au niveau des fixations moteur sont de l'ordre de ceux mesurés lors de l'essai.

Conclusions et perspectives

Les apports scientifiques

Dans un premier temps, le travail s'est focalisé sur les méthodes de résolution et de réduction des systèmes linéaires. Le travail s'est tout d'abord concentré sur la dynamique rotor modélisée par une approche élément fini de type poutre et sa résolution par le schéma des différences centrées. Les développements réalisés ont ensuite été testés dans l'étude d'un rotor pendant un transitoire très rapide. La stabilité du schéma aux différences finies centrées pour des systèmes présentant des effets gyroscopiques a également été analysée. La méthode de synthèse modale à interfaces fixes a été étudiée en s'attachant plus particulièrement à un processus proposée par Faucher. En effet, ce processus permet de rendre la matrice de masse réduite de Craig-Bampton diagonale sans pour autant supprimer le couplage entre les modes statiques et dynamiques. Il a été démontré que le nouveau système réduit offre des résultats avec une précision comparable à la synthèse modale de Craig-Bampton. Finalement, une nouvelle méthode de synthèse modale a été proposée lorsque la bande fréquentielle est connue *a priori*. Son formalisme est issu de la méthode des accélérations modales pour la réduction des modes des hautes fréquences et d'une nouvelle méthode dans la gamme des basses fréquences. Par ailleurs, la méthode des masses et inerties effectives a été mise en oeuvre pour identifier les principaux modes à même de décrire le mouvement d'une structure de taille importante.

La modélisation de l'impact a fait l'objet d'une seconde série de développements. La déformée d'une pale après impact a tout d'abord été étudiée. Il a été observé que la forme finale de la pale, notamment son repliement sur elle-même, est grandement liée à la finesse du maillage et au type d'éléments utilisé. La perforation d'une plaque a ensuite été analysée. Pour être applicable à des structures de très grande taille pour lesquelles le point d'impact n'est pas connu *a priori* le choix s'est porté sur des éléments brique à formulation coque, également connus sous le terme ShB8. Des résultats très satisfaisants avec une seule couche d'éléments dans l'épaisseur ont été obtenus pour un type d'éléments comprenant une stabilisation des modes de Hourglass réalisée par une déformation supposée, dénommé ShB8PS. Dans cette modélisation la suppression des éléments impactés, indispensable pour simuler la perforation et la déchirure, est liée à une déformation plastique seuil. Il a été montré que la prise en compte du taux de triaxialité dans cette valeur de déformation limite améliore grandement la qualité des résultats comparé à l'expérience. Les phénomènes de localisation ont été évités par une approche découplée entre plasticité

et endommagement, avec des lois de comportement de type visco-élasto-plastique.

Finalement, une simulation avec un modèle EF d'une turbine libre à deux étages a permis de trouver numériquement un scénario de départ des pales cohérent avec les observations sur moteur réel. Les temps caractéristiques sont notamment identifiés ; quelques milli-secondes suffisent au départ de toutes les pales suivant le départ de la première qui est la pale la plus faible. La rupture généralisée des pales n'est toutefois pas instantanée, ce qui constitue un cas de chargement dynamique des plus critiques en terme de balourd. Par ailleurs, il a pu être observé que le phénomène s'initiait par un changement de phase et d'amplitude de l'excitation synchrone correspondant au balourd.

Pour pallier à l'absence de parallélisation du code de dynamique rapide Europlexus, qui conduirait à des temps de calcul prohibitifs pour une structure complexe telle un turbomoteur, le choix s'est porté sur une modélisation en deux temps. Un premier modèle qui décrit finement l'ensemble turbine libre lors de la séquence de perte de pales a d'abord été élaboré. La réponse du moteur complet, notamment pour la résultante au niveau des attaches moteur, a été obtenue via un modèle simplifié avec des éléments poutre où les effets centrifuges sont inclus. Le couplage des 2 modèles a été rendu possible, *a priori* sans dégrader la qualité de la solution, par l'utilisation d'un algorithme multi-domaines multi-pas de temps. La simulation dans son ensemble a ainsi permis de retrouver le comportement global du moteur lors d'un événement de type Blade-Shedding et d'expliquer un certain nombre de phénomènes encore mal compris.

Les développements logiciels

Les principaux développements qui ont été implémentés dans le code de dynamique rapide Europlexus sont au nombre de trois :

- Un élément poutre de type rotor a été développé. Il considère les effets gyroscopiques qui jouent un rôle prépondérant lorsque le rotor décrit des orbites de grande amplitude. Le formalisme a été introduit au niveau du calcul de la matrice de masse avec une accélération jusqu'au pas de temps suivant.

- La méthode multi-domaines multi-pas de temps a été introduite dans la résolution de la dynamique de ligne d'arbre. Cette procédure permet d'accélérer très significativement les temps de calcul de par l'utilisation d'éléments poutre qui, de par leur taille caractéristique, ont des pas de temps critiques bien supérieurs aux éléments 3D habituellement employés.

- Le critère de suppression des éléments endommagés prend désormais en compte le taux de triaxialité du chargement.

Les perspectives

La première perspective serait l'intégration des 2 modèles EF développés dans un seul et même outil. Ceci permettrait de s'affranchir de la définition des conditions limites pour

le modèle moteur complet, qui aujourd'hui conduit à un certain nombre d'hypothèses et d'approximations.

La fragmentation des profils de pale n'a pour l'instant pas été considérée. Aussi dans la simulation actuelle, elles se déforment sans jamais se fracturer, ce qui conduit à des niveaux de déformations plastiques irréalistes. Une alternative intéressante serait la modélisation de ces aubages par la méthode SPH. Toujours concernant la modélisation de la rupture des pales mais cette fois-ci dans la zone frangible il serait judicieux d'introduire l'effet de la triaxialité dans la déformation plastique seuil. En effet il a été montré que la rupture de nombre de pales fait suite au toucher de l'extrémité de celle-ci avec la tôle de la veine d'air, ce qui ajoute un couple de flexion au chargement centrifuge qui lui est principalement uniaxial.

Enfin il conviendrait d'améliorer les modèles numériques afin de traiter des problèmes avec plus de degrés de liberté tout en contenant les temps CPU. Une piste consisterait à travailler sur la formulation du super-élément dans la gamme des moyennes fréquences. La prise en compte d'un nombre restreint de modes devrait permettre de mieux comprendre l'influence de chaque mode sur la réponse forcée du moteur. Par ailleurs, on notera que la simplification de la réponse du système dans la gamme des basses fréquences pourrait être utilisée de façon plus générale dans d'autres domaines d'études.

Annexe A

Le turbomoteur : de la turbine liée à la turbine libre

Le turbomoteur est une des variantes des turbines à gaz développées pour le monde aéronautique durant la seconde guerre mondiale en Allemagne par von Ohain puis en Angleterre par Whittle. Relativement peu performantes à cette époque, les turbines ont été largement améliorées pour être aujourd'hui le moyen de propulsion majoritairement utilisé dans l'aviation. En effet, les différentes variantes du cycle thermodynamique des turbines, tels turbojet, turbofan ou turbomoteur, permettent de s'adapter aux besoins des aéronefs tels que respectivement les avions de combat, les avions de ligne et les hélicoptères.

Pour une revue plus complète et détaillée de l'historique de la turbine à gaz, on pourra se référer à Saravanamuttoo et al [99]

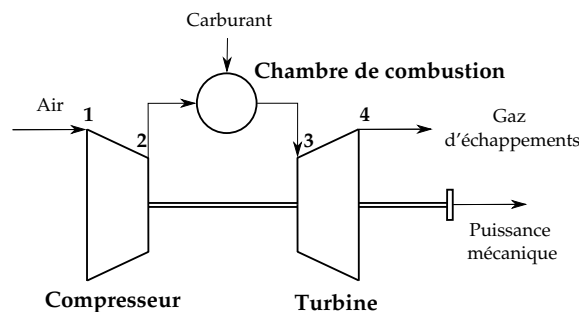


FIG. A.1: Schéma d'une turbine à gaz simple

La turbine à gaz fonctionne selon un cycle thermodynamique de Brayton composé d'une compression, d'une combustion et d'une détente, représenté sur la figure A.1. D'un point de vue thermodynamique, l'air froid à pression ambiante $P_a = P_1$ subit une compression isentropique, le conduisant à la pression P_2 . La combustion du carburant avec l'air comprimé chauffe le gaz de façon isobare à la température T_3 qui est la température la plus élevée du cycle. Les gaz chauds se détendent alors isentropiquement dans la tur-

bine qui récupère un travail mécanique. Ce travail mécanique est en partie utilisé comme énergie d'apport pour la compression. Le rendement positif de ce cycle est lié à la différence positive entre l'énergie associée à la détente du gaz chaud et l'énergie associée à la compression de l'air froid. Ce rendement varie en fonction du delta de pression $P_1 - P_2$ et du niveau de température maximum T_3 . Sur un turbomoteur, il est de l'ordre de 25% à 30%.

Selon le type d'application, la pression des gaz de sortie de la turbine est :

- soit largement au dessus de la pression ambiante, c'est le cas du turbojet dans lequel les gaz chauds sont éjectés à grande vitesse de par la conception de la tuyère (supersonique en général).

- soit proche de la pression ambiante, c'est le cas du turbofan dans lequel la majeure partie des gaz comprimés froids est éjectée pour propulser le système.

- soit égale à la pression ambiante, c'est le cas du turbomoteur. L'énergie résultante du système est alors de nature mécanique et est transmise par l'intermédiaire d'un arbre à un autre système : alternateur, hélice ou rotor d'hélicoptère.

Dans une turbine à gaz, les fonctions compression et détente sont réalisées à l'aide de rotors. Chaque rotor est composé des aubages et d'un disque, ce dernier étant dimensionné pour supporter les chargements centrifuges exercés par les aubages périphériques. Sur les turbomoteurs actuels, le composant est de type monobloc pour les compresseurs et assemblé pour les turbines, la conception assemblée permettant d'utiliser deux matériaux différents supportant les chargements de chaque partie : chargement centrifuge modéré et température élevée pour les pales, chargement centrifuge intense pour les disques.

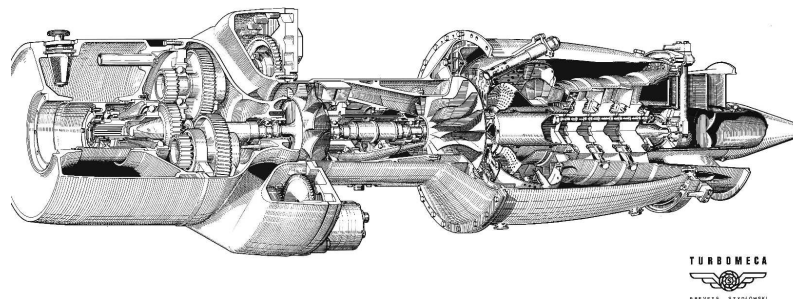


FIG. A.2: Vue générale du moteur Astazou IIA à turbine liée

En mars 1955, le premier hélicoptère à entraînement mécanique du rotor par turbine à gaz décolle. C'est l'hélicoptère SA318 Alouette II de Sud Aviation propulsé par une turbine Artouste II de Turbomeca de conception turbine liée. Dans le concept de turbine liée, l'ensemble des rotors forme un mobile unique qui entraîne le rotor de l'hélicoptère, ce qui nécessite de positionner un embrayage à la sortie du turbomoteur à turbine liée pour démarrer le rotor principal. Cette configuration correspond exactement à la turbine à gaz simple de la figure A.1 et est utilisée par exemple sur le moteur Astazou visible sur la coupe moteur A.2. Dans ce système, la puissance récupérable évolue en fonction de la

vitesse de rotation du mobile qui définit le débit de la machine et de la température de sortie de chambre de combustion.

Dans la conception classique d'un hélicoptère, la vitesse de rotation du rotor principal varie peu autour d'une vitesse nominale. De ce fait, pour répondre à la demande de puissance variable pour les différentes phases d'un vol (décollage, vol stationnaire, régime d'urgence, atterrissage), la seule action possible sur le turbomoteur à turbine liée est alors d'augmenter la température de sortie de chambre de combustion. Cependant cette augmentation du débit carburant est limitée par les températures admissibles des matériaux (Giraud et Silet [46]).

Pour améliorer cette situation, le module de turbine est découplé mécaniquement. Une

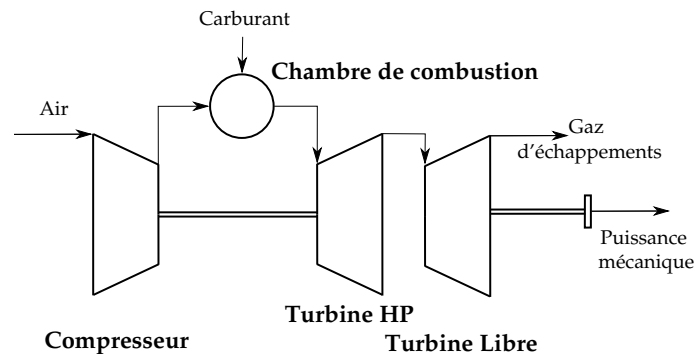


FIG. A.3: Schéma d'un turbomoteur à turbine libre

première turbine ou turbine haute pression (HP) permet d'entraîner le compresseur. Une seconde turbine dite turbine de puissance ou turbine libre récupère l'énergie mécanique du cycle. Le système composé par le compresseur, la chambre de combustion et la turbine haute pression prend alors le nom de générateur de gaz. Ce cycle est visible sur la figure A.3 et utilisé dans le moteur Makila, figure A.4. Les avantages de cette architecture sont de pouvoir définir une vitesse arbitraire de rotation du générateur de gaz qui peut évoluer transitoirement pour des régimes d'urgence, par exemple.

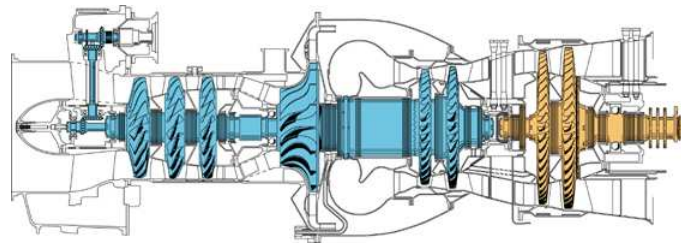


FIG. A.4: Coupe du moteur Makila I à turbine libre

Le moteur Makila est composé d'une turbine libre à deux étages montée entre deux roulements avec une sortie de puissance moteur à l'arrière du moteur (architecture moteur

non-traversante). L'assemblage des différentes parties du rotor est obtenu par la technologie des curvic-coupling qui assure la transmission des couples et un tirant central unique qui vient serrer l'ensemble des corps.

Ce moteur motorise l'hélicoptère EC 725 / EC 225 d'Eurocopter. Sur cet hélicoptère, deux moteurs, placés parallèlement au dessus de la cellule, entraînent la boîte de transmission de principale (BTP). Sur la photo A.5, les deux entrées d'air au dessus de la verrière



FIG. A.5: Hélicoptère EC 725 Cougar [Source EADS]

et la tuyère d'échappement des gaz au dessus du palan se distinguent clairement. Les moteurs, qu'ils soient placés à droite ou à gauche de l'hélicoptère, fonctionnent de la même façon (même sens de rotation, montage identique). Seule la tuyère est positionnée de telle façon que les gaz s'échappent des capots moteurs.

Afin de permettre les dilatations thermiques du moteur, celui-ci est fixé isostatiquement sur l'hélicoptère. A l'arrière du moteur, un joint de Cardan assure la liaison avec la BTP (schéma A.6). Le joint est réalisé à l'aide de deux tubes reliés entre eux par une couronne extérieure à quatre manetons. A l'avant du moteur, deux biellettes bi-rotulées relient le plancher haut de l'hélicoptère au couvercle du compresseur centrifuge (schéma A.6). Ces deux liaisons créent une liaison "pivot-glissant" selon l'axe moteur assurant ainsi un montage isostatique du moteur.

Ce montage caractérise la fixation des parties statiques du moteur avec l'hélicoptère. Elle ne doit pas être confondue avec la liaison des parties mobiles. En effet, le rotor de turbine libre est relié au pignon de la boîte de transmission de puissance par un arbre souple homocinétique dénommé bendix présentant deux joints homocinétiques à ses extrémités.

Si la conception à turbine libre présente un avantage en terme de réponse au besoin de puissance mécanique de l'hélicoptère, elle présente aussi l'inconvénient de nécessiter une protection de survitesse lors d'une rupture de la transmission mécanique vers l'hélicoptère. En effet dans ce cas, la turbine libre accélère immédiatement et les pompes à carburant entraînées par le générateur de gaz doivent être alors désactivées rapidement pour réduire le flux aérodynamique arrivant sur la turbine libre.

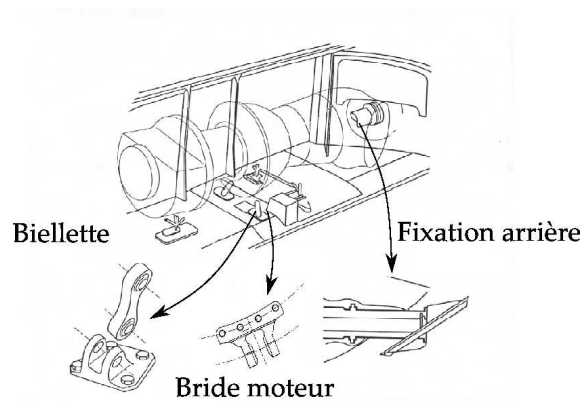


FIG. A.6: Schéma des fixations du moteur Makila sur l'hélicoptère

Annexe B

Le problème aux valeurs propres quadratiques

Cette annexe est une revue des problèmes aux valeurs propres abordés dans le mémoire.

L'équation de la dynamique d'un système quelconque s'écrit selon l'équation (B.1)

$$M(t)\ddot{u} + C(t)\dot{u} + K(t)u = F(t) \quad (\text{B.1})$$

La matrice $M(t)$ correspond à la matrice de masse du système. La matrice $C(t)$ représente l'amortissement et les effets gyroscopiques. La matrice $K(t)$ correspond à la matrice de rigidité du système. Ces matrices sont de taille $n \times n$. Cette équation est une équation matricielle différentielle à coefficients non constants. Un système asymétrique supporté par des paliers asymétriques est régit par ce type d'équations avec des matrices M et C à coefficients périodiques.

Pour analyser les solutions de ce problème, il est commun d'analyser uniquement le problème homogène associé en supprimant l'excitation du système $F(t)$.

Dans le cas où les matrices du système sont dépendantes du temps, seule une méthode d'intégration numérique sur le système permet de prédire la stabilité du système en analysant la matrice d'amplification du vecteur d'état comme le proposent Oncescu et *al.* [89] ou Guilhen [50].

Dans un grand nombre de cas, les matrices $M - C - K$ sont constantes et il est intéressant d'analyser le problème dans le domaine fréquentiel en posant la solution sous la forme $u = xe^{\lambda t}$.

Le problème (B.1) est reposé sous la forme (B.2) qui correspond à la définition d'un problème aux valeurs propres quadratiques.

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0 \quad (\text{B.2})$$

Sur des structures présentant peu d'effets dissipatifs, la matrice C a peu d'influence sur la forme de la solution et peut être écrite de façon proportionnelle à M et K comme le démontre Géraudin [44]. Le problème initial peut donc être simplifié selon la nouvelle forme (B.3).

$$(-\lambda^2 M + K)x = 0 \quad (\text{B.3})$$

Cette nouvelle forme correspond à un problème aux valeurs propres généralisées.

Si la matrice de masse est unitaire, le problème (B.3) prend la forme (B.4) avec I la matrice identité. cette dernière forme correspond à un problème aux valeurs propres sur la matrice K .

$$(-\lambda^2 I + K)x = 0 \quad (\text{B.4})$$

La principale différence entre ces trois types de problèmes réside dans le fait que le problème aux valeurs propres quadratiques présente $2n$ valeurs propres tandis que les deux autres présentent uniquement n valeurs propres.

En effet, si les matrices $M - K$ sont symétriques définies positives, comme cela est le cas pour des problèmes mécaniques, la résolution du problème aux valeurs propres généralisées sur $M - K$ conduit à l'obtention des n valeurs propres $\tilde{\lambda}_i^2$ et des n vecteurs propres ϕ_i . Les solutions sont purement imaginaires et le système est donc toujours stable.

Si les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la matrice de masse, leur définition conduit aux équivalences (B.5) et (B.6).

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_n] \\ \forall i \quad \phi_i^T M \phi_i &= 1 \quad \phi_i^T K \phi_i = \tilde{\lambda}_i^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\Phi^T M \Phi = I \quad \Phi^T K \Phi = \tilde{\Lambda}^2 \quad (\text{B.6})$$

Cependant, la définition des vecteurs propres conduit également à la définition des équivalences sur l'inverse de M , K et $K - \lambda^2 M$. Ces équivalences sont écrites dans les équations (B.7) et (B.8).

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^n \phi_i \phi_i^T \quad K^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\lambda}_i^2} \quad (\text{B.7})$$

$$Z^{-1} = (K - \lambda^2 M)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\lambda}_i^2 - \lambda^2)} \quad (\text{B.8})$$

Il est intéressant de remarquer que la sommation partielle de m modes avec $m < n$ ne produit pas l'inverse de la matrice attendu, éqs. (B.9) et (B.10).

$$M^{-1} \neq \sum_{i=1}^m \phi_i \phi_i^T \quad K^{-1} \neq \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{\tilde{\lambda}_i^2} \quad (\text{B.9})$$

$$Z^{-1} = (K - \lambda^2 M)^{-1} \neq \sum_{i=1}^m \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\lambda}_i^2 - \lambda^2)} \quad (\text{B.10})$$

Pour les systèmes présentant des effets gyroscopiques, la matrice C prend la forme $C = \Omega G + C_a$ avec Ω la vitesse de rotation, G la matrice des effets gyroscopiques et C_a la matrice des amortissements. Le problème aux valeurs propres quadratiques nécessite d'être résolu par linéarisation pour obtenir le problème sous la forme (B.11).

$$A - \lambda B = 0 \quad (\text{B.11})$$

Les matrices A et B de taille $2n \times 2n$ peuvent prendre différentes formes selon la procédure de linéarisation qui est associée aux types des matrices M et K étudiées (Tisseur et Meerbergen [108]). Dans la première forme compagnon, les matrices $A - B$ prennent les formes selon l'équation (B.12) tandis que sous la second forme compagnon, elles prennent les formes selon l'équation (B.13) avec N une matrice qui est classiquement la matrice identité ou une matrice multiple de celle-ci.

$$A = \begin{bmatrix} O & N \\ -K & -C \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Les différences importantes d'un point de vue mécanique sont les suivantes :

- les solutions $\tilde{\lambda}_i$ deviennent complexes avec une partie réelle qui traduit la stabilité du système,
- la partie imaginaire associée à la fréquence de vibration du système évolue en fonction de la vitesse de rotation Ω .

Annexe C

Définition des disques dans une approche dynamique rotor de ligne d'arbre

Dans les modèles éléments finis de type ligne d'arbre (Genta [42], Childs [26], Lallanne et Ferraris [68]), la géométrie d'un rotor est représentée à l'aide de deux types d'éléments : des éléments inertiels dénommés disques pour les parties massives de la ligne d'arbre représentant en général les roues aubagées et des éléments de type poutre pour les arbres qui relient les roues aubagées et les paliers du rotor. Comme le souligne Lallanne et Ferraris [68], la définition entre ces deux types d'éléments n'est pas évidente car, selon le découpage de la section du rotor entre disque et arbre, les fréquences de vibrations du rotor vont évoluer en conséquence. Si le rotor est construit en plusieurs parties avec un disque rapporté sur l'arbre par une technologie spécifique comme le fretage ou une couronne boulonnée, le découpage peut être motivé par le changement de pièces. Cependant, sur des rotors monoblocs ou des rotors assemblés par curvic-coupling et maintenus en compression par un tirant, le disque et l'arbre font partie de la même pièce et il n'existe pas *a priori* de découpage évident de la section. En effet, lors d'un mode de flexion, une partie du disque est en compression ou traction et contribue à la rigidité de la structure. Pour un arbre, la distribution du champ de déformation est bien représentée par l'hypothèse de Bernouilli contrairement au disque qui se déforme élastiquement sans suivre l'hypothèse de Bernouilli.

Pour évaluer la rigidité du disque, des modélisations éléments finis volumiques puis éléments poutres sont mises en place sur un cas simple. Les résultats obtenus permettent de définir un découpage représentatif de la situation réelle.

Géométrie

La géométrie étudiée est axi-symétrique avec deux diamètres différents et encastree à une extrémité (Figure C.1). La partie de la géométrie de diamètre R_{Ae} représente un arbre

alors que la partie de diamètre R_D représente un disque. Pour une longueur de l'arbre L_A ,

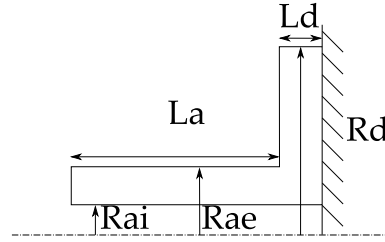


FIG. C.1: Géométrie du rotor étudié

un rayon extérieur de l'arbre R_{Ae} et pour un rayon intérieur R_{Ai} constants, différents ratios de rayon extérieur $\frac{R_D}{R_{Ae}}$ et de l'épaisseur du disque $\frac{L_D}{L_A}$ sont testés et permettent d'obtenir une carte des fréquences naturelles du premier mode de flexion en fonction des ratios.

Les différentes valeurs numériques des paramètres sont présentées dans le tableau C.1

$L_A=1$	$R_{Ae}=0.15$	$R_{Ai}=0.015$	$E=200\ 000\text{MPa}$
	$\frac{L_D}{L_A} = [0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5]$		
	$\frac{R_D}{R_{Ae}} = [1; 2; 3; 4.33; 6; 11; 21]$		

TAB. C.1: Paramètres numériques évalués

Remarque : du fait de l'encastrement du disque, la masse du disque influence faiblement la fréquence de vibration du premier mode de flexion alors que la raideur du disque est le principal facteur influant la fréquence de résonance.

Étude de la modélisation solide

La modélisation de l'ensemble (arbre + disque) par des éléments solides permet de définir le comportement réel et la contribution du disque dans le phénomène de flexion. Les fréquences du premier mode de flexion (Figure C.2) sont présentées en fonction du rapport $\frac{L_D}{L_A}$ et des différents rapports $\frac{R_D}{R_{Ae}}$.

Pour un ratio $\frac{L_D}{L_A}$ inférieur à 0.2, l'évolution des fréquences de vibration est assez prononcée. Au delà de ce ratio et pour un rapport $\frac{R_D}{R_{Ae}}$ supérieur à 2, les fréquences de vibration convergent vers une fréquence de 180Hz correspondant à un abaissement de la fréquence de vibration de la poutre (240Hz-180Hz). Ce résultat montre clairement que la notion d'encastrement est un concept idéalisé. En effet, même dans le cas où l'on considère une poutre qui sort d'un massif semi-infini, l'analyse de la poutre seule encastree conduit à une fréquence 10 % supérieure de celle d'un système poutre avec un massif semi-infini.

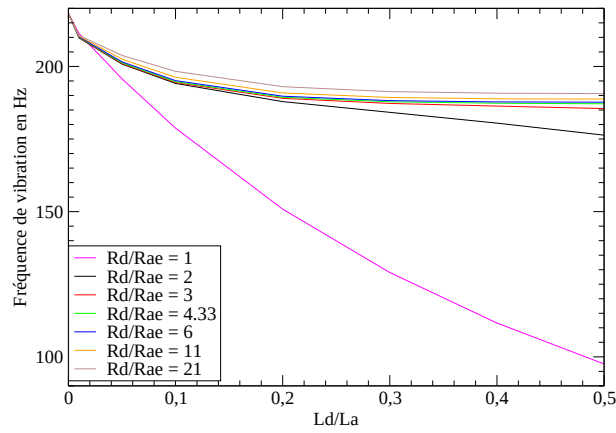


FIG. C.2: Fréquences du mode de flexion d'un arbre modélisé par des éléments solides

Étude de la modélisation poutre

A présent, le système est modélisé par des éléments poutres représentant les différentes sections de la géométrie. Le calcul des fréquences du premier mode de flexion pour les mêmes paramètres testés précédemment donne les résultats présentés sur la figure C.3.

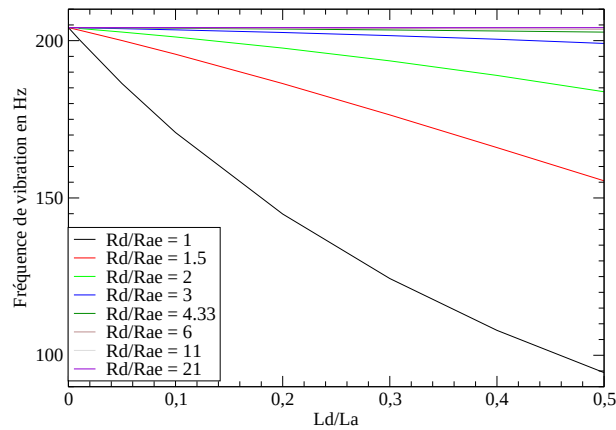


FIG. C.3: Fréquences du mode de flexion d'un arbre modélisé par des éléments poutres

Les fréquences de vibration ont également tendance à diminuer. Cependant, pour un rapport $\frac{R_D}{R_{Ae}}$ supérieur à 3, l'influence du ratio $\frac{R_D}{R_{Ae}}$ est moins marquée. Le système tend à se comporter comme si le disque n'avait pas d'influence sur la fréquence de résonance du système : l'encastrement se retrouve positionné entre l'arbre et le disque.

Comparaison des deux modélisations

Afin de comparer les modèles, les fréquences des deux modèles sont normées par rapport à la fréquence obtenue pour un rapport $\frac{R_D}{R_{Ae}}$ égal à 1 selon la formule analytique issue de Blevins [16], éq. (C.1). En effet, pour une poutre de longueur L , la fréquence du premier mode de flexion obtenue par élément volumique et par élément poutre est différente, ce qui ne permettait pas de comparer directement les modélisations.

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (C.1)$$

où m est la masse par unité de longueur, E est le module d'Young, I est le moment d'inertie de la poutre, et $\lambda_i = 1.875, 4.694, 7.855 \dots$ pour une condition libre-encastéré.

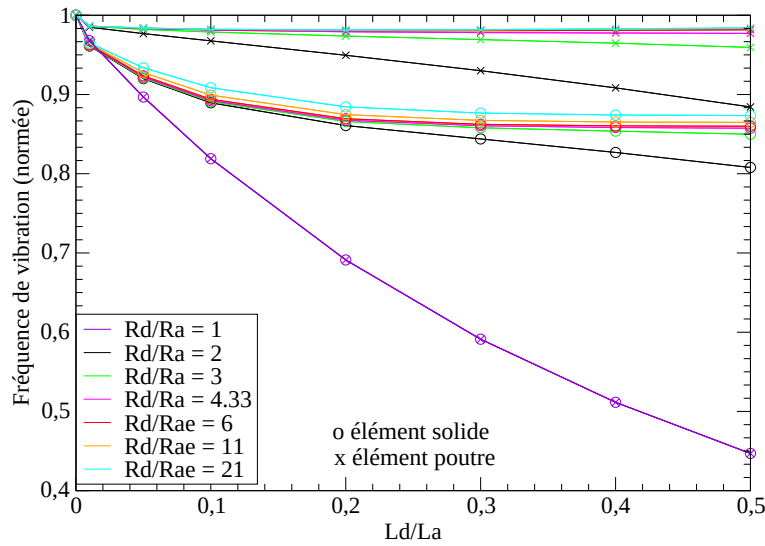


FIG. C.4: Évolution des fréquences normalisées pour les différents ratios

La Figure C.4 présente les fréquences des deux modèles normés. Avec une modélisation poutre d'un ensemble (arbre + disque), quelque soit le rapport $\frac{R_D}{R_{Ae}}$, les fréquences de vibration sont surestimées par rapport à une modélisation avec des éléments solides. La contribution du disque avec modélisation poutre est quasi inexistante dès que le rayon du disque est trois fois plus grand que le rayon extérieur de l'arbre.

Synthèse

Afin de prendre en compte la contribution d'un disque dans un modèle d'éléments poutres, les courbes de la figure C.4 peuvent être interprétées comme un abaque :

- Pour une ligne d'arbre complète chaque partie du rotor peut être interprétée comme un sous problème, ce qui permet de définir un couple $(\frac{R_D}{R_{Ae}}, \frac{L_D}{L_A})$ local.

- Pour un couple $(\frac{R_D}{R_{Ae}}, \frac{L_D}{L_A})$, une fréquence réelle est évaluée à l'aide des éléments volumiques. Ensuite une correspondance est trouvée avec un modèle poutre. La masse manquante est alors ajoutée à l'aide d'un noeud masse (élément de type MASS21 sous ANSYS V11).

Cette manipulation peut être interprétée comme une spécification de solutions locales pour la solution globale qui se rapproche finalement de la méthode éléments finis. Actuellement l'abaque est crée pour un problème libre - encastré et d'autres configurations pourraient être testées : (libre - libre), (glissant - glissant), (glissant - libre), (glissant - encastré).

Annexe D

Flexion d'une poutre élasto-plastique

Dans cette annexe, le problème d'une poutre élasto-plastique soumise à un chargement combiné traction-flexion est résolu analytiquement. En effet, ce problème très académique présente l'intérêt de donner une solution analytique qui peut alors définir une loi probabiliste sur une inconnue du problème en connaissant les autres de façon probabiliste.

Considérons une poutre de section $2h - b$ dans le plan $x_2 - x_3$ chargée par une association traction F / flexion M selon l'axe x_3 présentée sur la figure D.1. Pour la résolution du problème, la section de normale x_1 est supposée rester droite quelque soit l'état de contrainte de la matière.

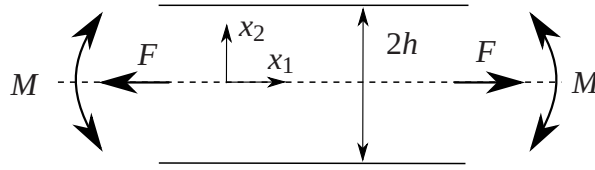


FIG. D.1: Géométrie et chargement de la poutre

Dans le cas d'un chargement combiné traction / flexion, l'état de contrainte est uniaxial. L'écriture de l'équilibre des contraintes sur la section donne les équations (D.1) et (D.2).

$$F = \int_{-h}^h \sigma_{11} b dx_2 \quad (D.1)$$

$$M = \int_{-h}^h x_2 \sigma_{11} b dx_2 \quad (D.2)$$

Le but de l'étude est de déterminer le moment de flexion complémentaire M pour obtenir la contrainte à la rupture du matériau sur la peau de la poutre ($x_2 = h$ ou $x_2 = -h$) en connaissant l'effort de traction F . La contrainte de traction σ_T associée à l'effort de traction s'exprime simplement $\sigma_T = F/S$ avec S l'aire de la section $S = 2bh$. Dans les travaux réalisés sur les pieds de pale, cette contrainte de traction est supérieure à la limite élastique du matériau puisque une pale s'est déjà rompue par l'effort de traction appliqué.

Le comportement du matériau est supposé bilinéaire avec une première zone élastique (E, μ) suivie d'une zone plastique (R_e, R_m, A avec $E_T = \frac{R_m - R_e}{A}$), fig. D.2. Dans un premier temps, le comportement matériau est défini sans écrouissage.

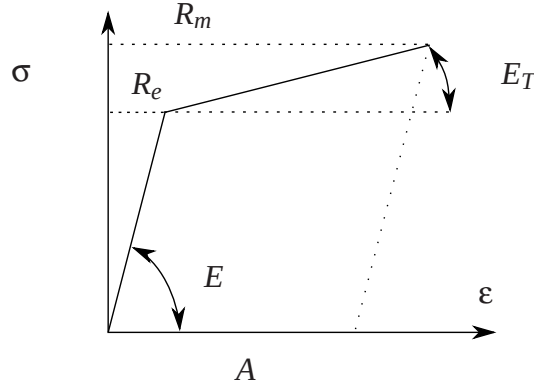


FIG. D.2: Loi de comportement bilinéaire de la poutre

Loi matériau sans écrouissage

Plusieurs cas de profils de contraintes apparaissent. Le cas le plus simple est une contrainte de traction qui dépasse la limite à la rupture du matériau. Dans ce cas, le moment de flexion complémentaire est nul $M = 0$.

Le second cas correspond à une contrainte supérieure à la limite d'élasticité en tout point de la section. La section de la poutre est donc plastifiée selon le profil, visible sur la figure D.3, avec a_1 inférieur à $-h$.

Entre a_1 et h , $\sigma(x_2) = \frac{R_m - R_e}{h - a_1}(x_2 - a_1) + R_e$.

Puisque a_1 est inférieur à $-h$, l'équilibre sur la force de traction permet d'écrire directement $\sigma(x = 0) = \sigma_T$ et donc $a_1 = \frac{R_e - \sigma_T}{\sigma_T - R_m}h$ doit vérifier $a_1 < -h$. Le moment de flexion s'exprime directement selon l'expression (D.3).

$$M = \frac{2}{3} \frac{R_m - R_e}{h - a_1} h^3 b \quad (D.3)$$

Dans les configurations étudiées, seules ces deux premières configurations sont apparues. Les configurations de contraintes avec élasticité nécessitent la résolution d'une équation du second ordre pour obtenir la position de la ligne de contrainte égale à la limite d'élasticité. Ce type de résolution est utilisé dans le cas du matériau avec écrouissage.

Loi matériau avec écrouissage

Si la loi matériau est définie sans écrouissage, le durcissement des matériaux engendré par les déformations lors d'une traction dans une première étape est négligé. Cette défini-

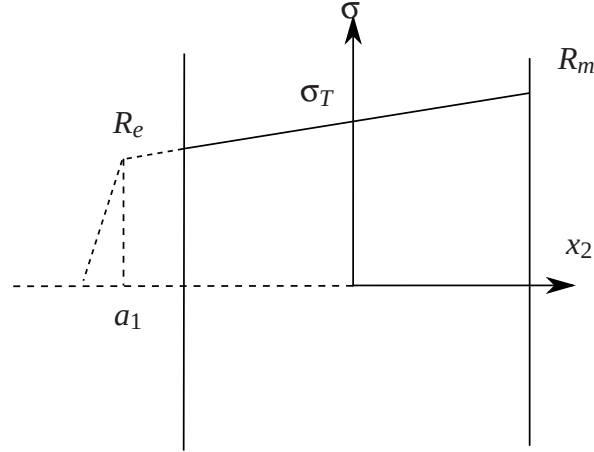


FIG. D.3: Profil de contraintes avec une loi matériau sans écrouissage

tion permet d'obtenir une réponse de la structure pour un chargement unique qui correspondrait à une application simultanée du chargement de traction avec celui de flexion.

Dans le cas des pales de turbines, le chargement est appliqué en deux étapes. Tout d'abord, le champ centrifuge est appliqué sur les sections. Ensuite un moment de flexion correspondant aux touches en tête de pale est appliqué. De ce fait, avant application de la contrainte de flexion, l'ensemble de la section est écroui avec un niveau de contrainte égal à σ_T . Le profil de contrainte de flexion associé à l'hypothèse d'écrouissage isotrope sans plastification de compression est présenté sur la figure D.4. H est la largeur de la section qui plastifie de façon complémentaire par l'application du moment.

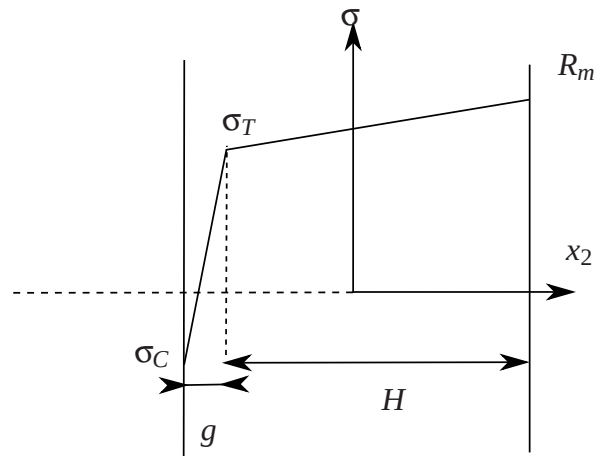


FIG. D.4: Profil de contraintes avec une loi matériau avec écrouissage isotrope

Le champ de contrainte doit satisfaire l'équation sur le bilan de force (D.1) réécrite

sous la forme (D.4) avec les équations complémentaires géométriques (D.5) et l'hypothèse que la section droite de normale x_1 reste droite réécrite sur les contraintes (D.6) et (D.7).

$$H \frac{R_m - \sigma_T}{2} = g \frac{\sigma_T - \sigma_C}{2} \quad (D.4)$$

$$H + g = 2h \quad (D.5)$$

$$\frac{\sigma_T - \sigma_C}{g} = KE \quad (D.6)$$

$$\frac{R_m - \sigma_T}{H} = KE_T \quad (D.7)$$

Ce système d'équations peut être réécrit sous la forme d'une équation unique sur H , éq. (D.8), mais du second ordre qui prend pour solution positive (D.9).

$$4h^2 - 4hH + H^2(1 - \frac{E_T}{E}) = 0 \quad (D.8)$$

Le module tangent d'un matériau est en général très petit devant son module d'Young. Dans le cas du matériau présent sur les pales, le rapport entre le module tangent et le module d'Young est de 1%, ce qui permet de recourir au développement limité présenté dans l'équation (D.9).

$$H = 2h \frac{1 - \sqrt{\frac{E_T}{E}}}{1 - \frac{E_T}{E}} \approx 2h(1 - (\frac{E_T}{E})^{3/2}) \quad (D.9)$$

A partir de l'expression de H , la contrainte σ_C est déterminée, équation (D.10). Dans le cas d'un écrouissage isotrope, on s'assurera que σ_C reste supérieur à $-\sigma_T$ sinon le profil de contrainte devra être complété par une zone plastique en compression

$$\sigma_C = \sigma_T - (R_m - \sigma_T) \frac{E(2h - H)}{E_T H} \quad (D.10)$$

L'application du bilan sur le moment (D.2) permet de trouver le moment résultant sur la section, éq. (D.11), ainsi que la force tangente équivalente en tête de pale, éq. (D.12). h_{pale} correspond à la distance selon l'axe radial entre la section frangible de la pale et le rayon du sommet de la pale.

$$M = \frac{b}{2}(h^2 - (h - H)^2)(KEh + KE_T(H - h) + \sigma_C + \sigma_T) + \frac{b}{3}(KE((h - H)^3 + h^3) + KE_T(h^3 - (h - H)^3)) \quad (D.11)$$

$$F = \frac{M}{h_{pale}} \quad (D.12)$$

Annexe E

Effet gyroscopique sur les maillages volumiques

Cette annexe a pour objectif de montrer par un exemple simple que la résolution par le schéma des différences centrées d'un système mécanique en rotation modélisé par éléments finis solides 3D permet de prendre en compte les effets gyroscopiques associés.

La perte d'aube est un phénomène accidentel qui nécessite deux analyses distinctes afin d'assurer un fonctionnement sécuritaire.

- Tout d'abord, l'aube perdue et les fragments d'aubes complémentaires doivent être contenus par le moteur. Numériquement la prédiction de ce comportement est réalisée à l'aide de modélisations volumiques des différents corps présents (pales, anneau, disque ...) (Carney et *al.* [22], Cosme [30]).

- Ensuite le moteur décélère et le rotor traverse des vitesses critiques. Étant dans une configuration de balourd extrêmement sévère, le passage de l'une de ces vitesses critiques peut causer des dommages complémentaires et ne doit pas conduire à un comportement hasardeux du moteur. Ce point est analysé en général par des approches de dynamique de ligne d'arbre (Roques [96]).

Dans le cas du Blade Shedding, le comportement du rotor est associé aux impacts des pales puisque la position du rotor conduit à la définition de contacts rotor-stator qui provoquent le départ de pales. Pour prendre en compte un tel phénomène, la modélisation de l'ensemble des corps par une représentation volumique est une solution qui semble des plus intéressantes. Cependant cette modélisation requiert de vérifier qu'elle prenne bien en compte les effets gyroscopiques du rotor pour que les trajectoires du mobile correspondent à un comportement physique.

Cette question semble souvent écartée, pourtant, l'équation de la dynamique résolue dans le cas de modèles volumiques avec des maillages tournants est une équation différentielle ordinaire sans matrice sur le terme en vitesse alors que, pour un problème avec des éléments poutres en rotation, l'équation de la dynamique est une équation différentielle avec une matrice anti-symétrique sur le terme en vitesse. En effet, l'application des équations de Lagrange dans le repère fixe sur la structure en rotation conduit à l'obtention des termes de couplage. Dans les modèles volumiques, il est donc supposé que la rota-

tion des noeuds crée implicitement les effets gyroscopiques par décomposition des forces appliquées.

Pour s'assurer de la prise en compte de ces effet, un cas d'étude simple est mis en place. Le cas d'étude est constitué d'un arbre d'une longueur L présentant un disque positionné au tiers de la longueur de l'arbre et supporté à ses extrémités par deux paliers d'une rigidité similaire. Ce système présente ainsi des effets gyroscopiques sur le premier mode comme le démontre Lalanne et Ferraris [68].

Ce système est maillé en éléments volumiques (Figure E.1). Quatre noeuds sont définis le long de l'arbre ($x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}L$, $x_3 = \frac{2}{3}L$ et $x_4 = L$) et couplés par une relation cinématique aux noeuds présents à cette position du maillage. Sur les deux noeuds extrêmes, une rigidité importante est affectée afin de représenter un encastrement des paliers, cette rigidité est mentionnée dans le tableau 1.1. Cette solution de modélisation est requise lorsque la méthode des pénalités est utilisée pour imposer ces conditions. Le recours aux multiplicateurs de Lagrange serait nécessaire pour éviter ce modèle et imposer le blocage directement sur le noeud lié cinématiquement.

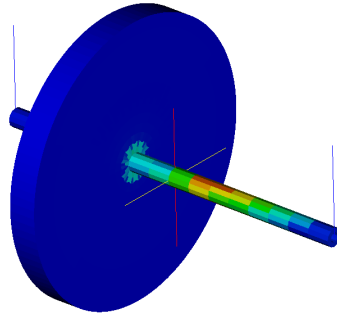


FIG. E.1: Représentation graphique du maillage

Le système est simulé dans deux situations correspondant au retour élastique de la structure suite à une excentration du disque d'une amplitude q_{20} dans la direction Z du rotor et une vitesse nulle du rotor. La première situation correspond à un rotor qui ne tourne pas. La seconde situation correspond à un rotor qui tourne à une vitesse de $3000Tr/Min$. Afin d'obtenir les conditions adéquates à la simulation de ces phénomènes, une phase de pré-charge amortie est réalisée tout d'abord pour le système en rotation.

Analytiquement, ce système peut être résolu par un modèle de Rayleigh-Ritz à un seul mode de pulsation ω . Le calcul montre que dans le cas où le rotor ne tourne pas, le rotor se met à vibrer à la pulsation ω et les équations (E.1) et (E.2) donnent les déplacements du disque.

$$q_1 = 0 \quad (E.1)$$

$$q_2 = q_{20} \cos(\omega t) \quad (E.2)$$

Pour un rotor tournant à une vitesse Ω , le mode se dédouble en 2 modes qui ont des

fréquences distinctes $\omega_1 = \omega(1 - \varepsilon)$ et $\omega_2 = \omega(1 + \varepsilon)$ ¹. Sur le cas étudié, le système se met à vibrer selon les équations (E.3) et (E.4). On retrouve ainsi un terme supplémentaire qui entraîne un mouvement dans le plan normal à l'excentricité initiale et une modulation temporelle de l'excentricité maximum. Les fonctions données (E.3) et (E.4) sont obtenues suite à des approximations dans les termes présents dans les équations.

$$q_1 = q_{20} \cos(\varepsilon \omega t) \sin(\omega t) \quad (\text{E.3})$$

$$q_2 = q_{20} \cos(\varepsilon \omega t) \cos(\omega t) \quad (\text{E.4})$$

Dans le calcul avec le maillage volumique, le comportement dans les deux cas étudiés est présenté dans les figures E.2 et E.3. Le mouvement dans le plan normal à la direction de la première excentricité est retrouvé qualitativement avec une modulation temporelle de l'amplitude maximum comme cela est présent dans les équations précédentes. Cependant il faut remarquer que dans le calcul théorique un seul mode est présent dans la résolution ce qui approxime fortement la solution. En effet le cas étudié correspond à un chargement de type Heavyside qui excite, sur un système réel, l'ensemble du contenu fréquentiel du système modélisé.

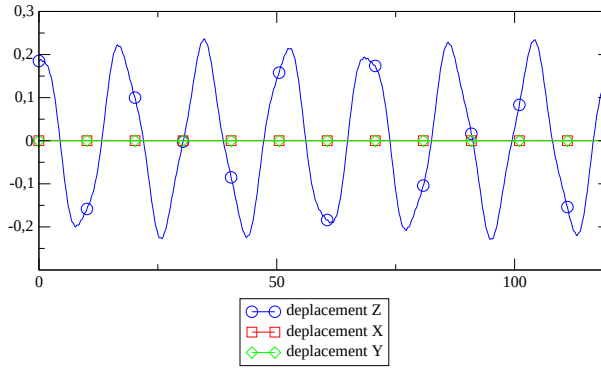


FIG. E.2: Déplacement du disque lorsque le rotor ne tourne pas

Dans la littérature, la dynamique rotor commence à être étudiée avec des modèles volumiques par décomposition du mouvement dans le repère fixe (Combescure et Lazarus [29]). Aussi les auteurs rappellent que plusieurs termes modifient l'équation de la dynamique. Il s'agit du couplage gyroscopique dû aux forces de Coriolis, du raidissement centrifuge et du raidissement géométrique. Dans le travail mené dans cette partie, seul le premier point est analysé mais en réalité l'ensemble des actions est pris en compte par la rotation du maillage mais nécessite de réaliser dans un premier temps un calcul amorti de précharge centrifuge. On notera qu'un travail plus complet pourrait être réalisé pour identifier quantitativement les différents effets.

¹ ε est un terme de couplage gyroscopique proportionnel aux propriétés géométriques du rotor et à la vitesse de rotation Ω

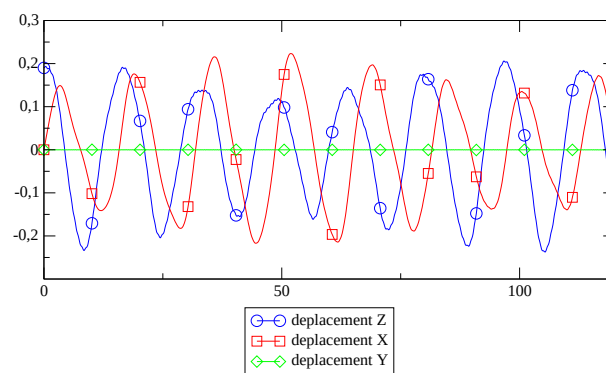


FIG. E.3: Déplacement du disque lorsque le rotor tourne à $3000tr.min^{-1}$

Annexe F

Définition des modes dynamiques par rapport aux modes statiques

Cette annexe complète la définition des modes dynamiques par rapport aux modes statiques dans une synthèse modale à interfaces fixes.

En effet, dans la partie 1.4, une analyse de la synthèse modale a été réalisée par rapport à la fréquence d'excitation ω . Ce travail a permis de définir les formulations des modes statiques et dynamiques à prendre en considération en fonction de la fréquence ω . Complémentairement, le critère de masse modale effective défini dans la partie 4.5.2 permet de classer par ordre d'importance les modes dans une base modale. En effet, la masse totale se décompose sur les modes de la structure de façon hétérogène. Ce critère a donc été utilisé sur les modes dynamiques d'une synthèse modale. Cependant ce critère est associé à un vecteur de Ritz arbitraire : selon la direction étudiée X , Y ou Z , la masse modale effective ne sera pas la même. De plus, ce critère n'est pas associé à la forme des modes statiques. Dans cette annexe, nous proposons donc deux nouveaux critères qui, basé sur les propriétés de la projection des modes dynamiques du système, définissent le poids des modes dynamiques et ainsi une base des modes dynamiques optimale.

Dans les équations écrites dans la partie 1.4, le découpage des noeuds est uniquement réalisé entre les noeuds maîtres q_M et noeuds esclaves q_S . Ce découpage physique peut être amélioré par la distinction dans les noeuds esclaves de ceux appartenant à un élément possédant un noeud maître q_{Sc} et ceux appartenant à un élément n'en possédant pas q_{Sl} . Cette distinction est matérialisée sur la figure F.1. Par définition les nombres de degré de liberté q_M , q_{Sc} et q_{Sl} sont respectivement de n_m , n_{sc} et n_{sl} ($n_s = n_{sc} + n_{sl}$).

En accord avec cette définition, le système mécanique caractérisé par ses matrices symétriques de masse M et de rigidité K s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_{MM} & M_{MSc} & M_{MSl} \\ M_{ScM} & & \\ M_{SlM} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_{Sc} \\ \ddot{q}_{Sl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{MM} & K_{MSc} & K_{MSl} \\ K_{ScM} & & \\ K_{SlM} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_{Sc} \\ q_{Sl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (F.1)$$

Si l'équation de la dynamique est obtenue par l'utilisation de la méthode des éléments finis, les matrices de masse M et de rigidité K sont obtenues par assemblage des matrices

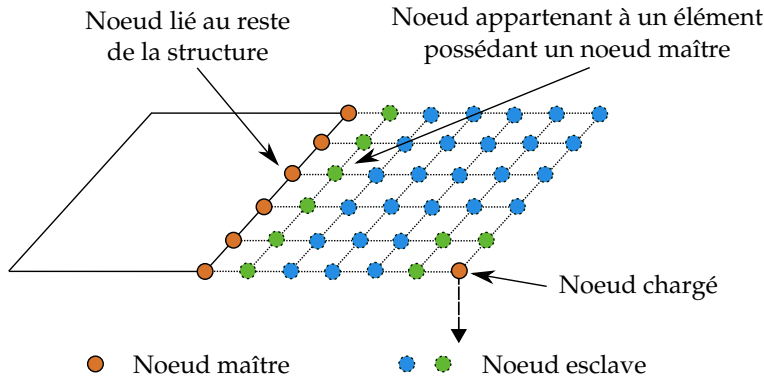


FIG. F.1: Définition dans un domaine des noeuds maîtres, esclaves non liés aux noeuds maîtres et esclaves liés aux maîtres

élémentaires du système. Dans ce cas, les matrices K_{MSl} , K_{SML} , M_{MSl} et M_{SLM} sont nulles. L'équation (F.1) peut donc se réécrire sous la forme (F.2)

$$\begin{bmatrix} M_{MM} & M_{MSc} & 0 \\ M_{ScM} & & \\ 0 & M_{SS} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_{Sc} \\ \ddot{q}_{Sl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{MM} & K_{MSc} & 0 \\ K_{ScM} & & \\ 0 & K_{SS} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_{Sc} \\ q_{Sl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (F.2)$$

L'impédance de ce système réduit donnée dans la partie 1.4 par l'équation (1.71) peut être reformulée sous la forme projetée (F.3)

$$\bar{Z}_{MM} = K_{MM} - \omega^2 M_{MM} - (K_{MSc} - \omega^2 M_{MSc}) P_{n_s}^T \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} P_{n_s} (K_{ScM} - \omega^2 M_{ScM}) \quad (F.3)$$

où P_{n_s} est la matrice de projection présentant la forme (F.4). $I_{n_{sc}n_{sc}}$ et $0_{n_{sl}n_{sc}}$ sont respectivement des matrices identités de dimension $n_{sc} \times n_{sc}$ et nulles de dimension $n_{sl} \times n_{sc}$.

$$P_{n_s} = \begin{bmatrix} I_{n_{sc}n_{sc}} \\ 0_{n_{sl}n_{sc}} \end{bmatrix} \quad (F.4)$$

Intéressons-nous à la projection de la résolvante de la dynamique dans deux situations extrêmes : ω tend vers zéro, éq. (F.5) et ω tend vers l'infini, éq. (F.6).

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} P_{n_s}^T \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} P_{n_s} = P_{n_s}^T K_{SS}^{-1} P_{n_s} \quad (F.5)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P_{n_s}^T \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\phi_i \phi_i^T}{(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2)} P_{n_s} = \frac{1}{\omega^2} P_{n_s}^T M_{SS}^{-1} P_{n_s} \quad (F.6)$$

Dans ces expressions, il est intéressant de noter la décomposition des matrices de rigidité et de masse sur la base des modes dynamiques. On notera que l'équation (F.5) présente un intérêt limité car la matrice de K_{SS}^{-1} est pleine et demande un temps considérable pour être calculée.

Au contraire, le calcul de $P_{n_s}^T M_{SS}^{-1} P_{n_s}$ est aisé car la matrice de masse est symétrique définie positive et à dominante diagonale (chacun des termes de la diagonale est supérieur à la somme des autres termes de la ligne ou de la colonne). De ce fait, le conditionnement de la matrice M_{SS} est proche de 1 et si l'on utilise un algorithme de Jacobi, le rayon spectral associé à la matrice d'itération sera bien inférieur à 1 : le calcul de M_{SS}^{-1} par une méthode itérative de type de Jacobi, Gauss-Seidel ou du gradient convergera rapidement¹.

Nous proposons donc de nous intéresser uniquement à l'équation (F.7).

$$P_{n_s}^T \sum_{i=1}^{n_s} \phi_i \phi_i^T P_{n_s} = P_{n_s}^T M_{SS}^{-1} P_{n_s} \quad (F.7)$$

Calculons la trace de ces matrices, éqs. (F.8-F.9). Dans l'expression (F.8), ϕ_{ij} correspond au déplacement du degré de liberté j du mode i . Dans l'expression (F.9), le terme m'_{ssii} correspond au scalaire de la matrice M_{SS}^{-1} présent en position i sur la diagonale, il vaut m_{ssii}^{-1} uniquement si la matrice de masse M_{SS} est diagonale.

$$tr(P_{n_s}^T \sum_{i=1}^{n_s} \phi_i \phi_i^T P_{n_s}) = \sum_{i=1}^{n_s} (\sum_{j=1}^{n_{sc}} \phi_{ij}^2) \quad (F.8)$$

$$tr(P_{n_s}^T M_{SS}^{-1} P_{n_s}) = \sum_{i=1}^{n_{sc}} m'_{ssii} \quad (F.9)$$

L'équation (F.9) ne donne pas l'inverse de la masse du système. En effet, si l'on considère une matrice de masse diagonale avec seulement des degrés de liberté de translation, la masse totale du système vaut $m_T = \sum_{i=1}^{n_s} m_{ssii}$ et donc $m_T^{-1} \neq \sum_{i=1}^{n_{sc}} m'_{ssii}$.

Par ailleurs, les expressions (F.8) et (F.9) sont égales ce qui donne l'égalité (F.10).

$$m'_T = \sum_{i=1}^{n_{sc}} m'_{ssii} = \sum_{i=1}^{n_s} (\sum_{j=1}^{n_{sc}} \phi_{ij}^2) \quad (F.10)$$

Par définition de la matrice de masse, les termes m'_{ssii} sont strictement supérieurs à zéro. De ce fait, la somme est supérieure à zéro. Par ailleurs, le terme extrait des modes ϕ_{ij} est élevé au carré. De ce fait, le terme $\sum_{j=1}^{n_{sc}} \phi_{ij}^2$, supérieur à zéro, correspond au poids de chaque mode dans le calcul de la masse inverse. Concrètement, ces termes peuvent être comparés les uns par rapport aux autres puisque, conformément à l'impédance du système réduit écrit selon le formalisme de Faucher, éq. (1.92), la masse inverse du système dynamique $\Phi_m \Phi_m^T$ est seulement écrite selon les m premiers modes correspondant à la gamme de fréquence d'étude.

Dans la définition proposée, la mesure de l'influence de chacun des modes est réalisée à l'aide de la trace des matrices en utilisant la propriété $Tr(A+B) = TrA + TrB$. Cette méthode est fondamentalement différente du critère de masse effective dans lequel la

¹On notera que si la matrice de masse a été définie diagonale (par un lumping), le calcul de l'inverse est explicite.

mesure de l'influence de chaque mode est réalisée à l'aide de l'opérateur $M_{SS}q_{xyz}$. En effet, les masses modales effectives peuvent être écrites comme suit :

$$\alpha_i^{e2} = q_{xyz}^T M_{SS} \phi_i \phi_i^T M_{SS} q_{xyz} \quad (F.11)$$

Ce critère pourrait être associé à un vecteur q_{sc} unitaire sur les degrés de liberté q_{sc} et nul sur les degrés de liberté q_{sl} . Ce nouveau critère, éq. (F.12) donnerait alors, de la même façon, une mesure du couplage entre les modes dynamiques et les modes statiques.

$$\alpha_i^{sc2} = q_{sc}^T M_{SS} \phi_i \phi_i^T M_{SS} q_{sc} \quad m_{Tsc} = q_{sc}^T M_{SS} q_{sc} = \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_i^{sc2} \quad (F.12)$$

Cette dernière mesure peut être préférée à la précédente car elle ne nécessite pas de calculer la matrice inverse M_{SS}^{-1} .

Bibliographie

- [1] F. Abed-Meraim and A. Combescure. Shb8ps - a new adaptive, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis. *Computers & Structures*, 80 :791–803, 2002.
- [2] D. Afolabi. Symplectic geometry and vibrating systems with periodic coefficient. *Journal of Sound and Vibration*, 177(5) :623–634, 1994.
- [3] S. El Arem. Shearing effects on the breathing mechanism of a cracked beam section in bi-axial flexure. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 28 :1079–1087, 2009.
- [4] E. Arnoult. *Modélisation Numérique et approche expérimentale du contact en dynamique : Application au contact Aubes / Carter de Turboréacteur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2000.
- [5] V.H. Balden and G.N. Nurick. Numerical simulation of the post-failure motion of steel plates subjected to blast loading. *International Journal of Impact Engineering*, 32 :14–34, 2005.
- [6] Y. Bao and T. Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46 :81–98, 2004.
- [7] Y. Bao and T. Wierzbicki. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 72 :1049–1069, 2005.
- [8] R. T. Barrett. Fastener design manual. Technical Report 1228, NASA, 1990.
- [9] A. R. Bartha. *Dry Friction Backward Whirl of Rotors*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of technology Zurich, 2000.
- [10] T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Non linear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2000.
- [11] M. Benidir. Caractérisation des polynômes de hurwitz et de schur complexes. *Traitement du signal*, 5 :153–159, 1988.
- [12] D. E. Bently and C. T. Hatch. *Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics*. Bently Pressurized Bearing Co, 2003.

- [13] R. Bigret. *Vibrations des machines tournantes et des structures*. Technique et Documentation, 1980.
- [14] H. F. Black. Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus. *J. Mech. Eng. Sci.*, 10 :1–12, 1968.
- [15] J.-S. Blazy. *Comportement mécanique des mousses d'aluminium : caractérisations expérimentales sous sollicitations complexes et simulations numériques dans le cadre de l'élasto-plasticité compressible*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2003.
- [16] R. D. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger publishing company, 1995.
- [17] P. Bonello and P. M. Hai. Computational studies of the unbalance response of a whole aero-engine model with squeeze-film bearings. In *ASME Turbo Expo*, number GT2009-59687, 2009.
- [18] T. Borvik, O.S. Hopperstad, T. Berstad, and M. Langseth. Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses part ii : numerical simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 27 :37–64, 2002.
- [19] T. Borvik, M. Langseth, O.S. Hopperstad, and K.A. Malo. Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses part i : Experimental study. *International Journal of Impact Engineering*, 27 : 19–35, 2002.
- [20] T. Borvik, O. S. Hopperstad, M. Langseth, and K. A. Malo. Effect of target thickness in blunt projectile penetration of weldox 460e steel plates. *International Journal of Impact Engineering*, 28 :413–464, 2003.
- [21] A. Brun. *Evaluation des propriétés elastovisco plastiques par les barres de Kolsky*. PhD thesis, Bordeaux, 2000.
- [22] K. S. Carney, C. Lawrence, and D. V. Carney. Aircraft engine blade-out dynamics. In *7th International LS-DYNA Users' Conference*, 2002.
- [23] K.S. Carney, J.M. Pereira, D.M. Revilock, and P. Matheny. Jet engine fan blade containment using an alternate geometry. *International Journal of Impact Engineering*, 36 :720–728, 2009.
- [24] F. Cazes, M. Coret, A. Combescure, and A. Gravouil. A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :1476–1490, 2009.

- [25] CEA/JRC. *A Computer Program for the Finite Element Simulation of Fluid-Structure Systems under Transient Dynamic Loading*, 2009.
- [26] Dara Childs. *Turbomachinery rotordynamics*. Wiley, 1993.
- [27] S. Chocron, C.E. Anderson Jr., J.D. Walker, and M. Ravid. A unified model for long-rod penetration in multiple metallic plates. *International Journal of Impact Engineering*, 2003.
- [28] Y. Chuzel. *Caractérisation expérimentale et simulation numérique d'impacts de glace à haute vitesse*. PhD thesis, INSA Lyon, 2009.
- [29] D. Combescure and A. Lazarus. Refined finite element modelling for the vibration analysis of large rotating machines : Application to the gas turbine modular helium reactor power conversion unit. *Journal of Sound and Vibration*, 318 :1262–1280, 2008.
- [30] N. Cosme. *Modélisation d'un moteur complet en perte d'aube en dynamique rapide*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes, 2004.
- [31] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928.
- [32] R. R. Craig and M. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 6 :1313–1319, 1968.
- [33] R. R. Craig and C. J. Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. *Proceedings of the AIAA/ASME 18th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, B :89–99, 1977.
- [34] R. de Borst. *Damage, material instabilities and failure in Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley&Sons,Ltd, 2004.
- [35] C. Defaye. *Analyse et modélisation du comportement des films fluides amortisseurs (Squeeze Film Damper)*. PhD thesis, Thèse de l'Université de Poitiers, 2006.
- [36] DMPE. Procès verbal d'essai dt/mpe : Essais de traction 12a traction lisse. Technical Report 300049932-0100, Turbomeca, 2008.
- [37] J. Eftis, C. Carrasco, and R.A. Osegueda. A constitutive-microdamage model to simulate hypervelocity projectile-target impact, material damage and fracture. *International Journal of Plasticity*, 19 :1321–1354, 2003.
- [38] T. Elguedj. *Simulation numérique de la propagation de fissure en fatigue par le méthode des éléments finis étendus : prise en compte de la plasticité et du contact frottement*. PhD thesis, INSA Lyon, 2006.

- [39] E. Fasanella and K. Jackson. Best practices for crash modeling and simulation. Technical Report NASA/TM-2002-211944, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2002.
- [40] V. Faucher and A. Combescure. A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :509–533, 2003.
- [41] C. Felipa. *Introduction to Finite Element Methods*. Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado, 2008.
- [42] G. Genta. *Dynamics of Rotating Systems*. 2005.
- [43] G. Genta and C. Delprete. Acceleration through critical speeds of an anisotropic, non-linear, torsionally stiff rotor with many degrees of freedom. *Journal of Sound and Vibration*, 180(3) :258–275, 1995.
- [44] M. G radin and D. Rixen. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. MASSON, 1993.
- [45] K. + R. Gieck. *Formulaire technique*. Gieck Verlag, 1997, 78^e édition.
- [46] M. Giraud and J. Silet. Turbines à gaz aéronautiques et terrestres. *Techniques de l'ingénieur*, B4-4410-4410 :30p, 1996.
- [47] I. Giraudon-Guilloteau. *Modélisation du contact en dynamique : Construction d'un élément simplifié de contact et application à l'interaction rotor/stator*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [48] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [49] A. Gravouil and A. Combescure. Multitime step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 540 :199–225, 2001.
- [50] P. M. Guilhen. *Prédiction du comportement dynamique de rotors dans le cas d'équations   coefficients périodiques : Instabilit  - Réponse aux balourds*. PhD thesis, INSA Lyon, 1988.
- [51] N. K. Gupta, R. Ansari, and S.K. Gupta. Normal impact of ogive nosed projectiles on thin plates. *International Journal of Impact Engineering*, 25 :641–660, 2001.
- [52] R.J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA*, 3 :380, 1965.
- [53] C. J. Hayhurst and R. A. Clegg. Cylindrically symmetric sph simulations of hypervelocity impacts on thin plates. *International Journal Impact Engineering*, 20 : 337–348, 1997.

- [54] M. Herran. Calcul de lâcher de pale avec ls-dyna. Technical Report AA014731, Turbomeca, 2007.
- [55] M. Herran. Rapport annuel de première année de thèse : Prédiction des efforts aux attaches moteur lors d'un blade shedding. Technical Report AA027186, Turbomeca, 2007.
- [56] M. Herran, H. Chalons, D. Nélias, and R. Ortiz. Modelling the impact of a blade on a shield during a blade shedding. In *Proc. of the Vibrations, Choc and Bruit Congress, Ecully, France*, June 2008.
- [57] D.H. Hibner and D.F. Buono. Experimental study of transient dynamic of a flexible rotor. Technical report, Pratt & Whitney Aircraft, 1976.
- [58] H.M. Hilber. Analysis and design of numerical integration methods in structural dynamics. Technical Report 76-29, University of California, Berkeley, 1976.
- [59] E. Hinton, T. Rock, and O. C. Zienkiewicz. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. *Earthquake Engrg. Struct. Dynamics*, 4 : 245–249, 1976.
- [60] T.J.R. Hughes. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behaviour. *Computational Methods for Transient Analysis*, 3 :67–153, 1983.
- [61] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Dover Publications, Inc, 2000.
- [62] B.M. Irons. Structural eigenvalue problems : Elimination of unwanted variables. *AIAA*, 3 :961–962, 1965.
- [63] G.R. Johnson and W.H. Cook. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high rates and high temperatures. In *Proceedings of 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, Netherlands*, 1983.
- [64] G.R. Johnson and W.H. Cook. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21 :31–48, 1985.
- [65] Y. Ng Kelvin. Turbine rotor burst containment analysis using msc/dytran : An analytical approach to prediction primary containment. In *MSC Users' Conference Proceedings*, 1996.
- [66] J.R. Klepaczko. An experimental technique for shear testing of materials at high and very high strain rates, the case of mild steel. *International Journal of Impact Engineering*, 15 :25–39, 1994.
- [67] A. Kraus and J. Frischbier. Containment and penetration simulation in case of blade loss in low pressure turbine. *Dynamore*, 2002.

- [68] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*. 1990.
- [69] M. Legrand. *Modèles de prediction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2005.
- [70] M. Legrand, A. Batailly, and C. Pierre. Blade-tips top casing direct contact interaction in aircraft engines. In *Conférence Vibrations, Chocs et Bruits*, 2008.
- [71] M. Legrand, C. Pierre, P. Cartraud, and J.-P. Lombard. Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 319 :366–391, 2009.
- [72] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides*. DUNOD, 1985.
- [73] N. Lesaffre, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Contact analysis of a flexible bladed-rotor. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26 :541–557, 2007.
- [74] N. Lesaffre, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. *Journal of Sound and Vibration*, 299 : 1005–1032, 2007.
- [75] A. Letellier. *Contribution à la modélisation des impacts d'oiseaux sur les aubes des réacteurs d'avions*. PhD thesis, Université d'Evry, 1996.
- [76] C. F. Van Loan. A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a hamiltonian matrix. *Linear Algebra Appl.*, 61 :233–251, 1984.
- [77] J.A. Mathis. Design procedures and analysis of turbine rotor fragment hazard containment. Technical Report DOT/FAA/AR-96/121, Wichita State University, 1997.
- [78] B. Maurel. *Modélisation par la méthode SPH de l'impact d'un réservoir rempli de fluide*. PhD thesis, INSA Lyon, 2008.
- [79] T. Menouillard. *Dynamique explicite pour la simulation numérique de propagation de fissure par la méthode des Elements Finis Etendus*. PhD thesis, INSA Lyon, 2007.
- [80] Y. Michel, J.-M. Chevalier, C. Durin, C. Espinosa, F. Malaise, and J.-J. Barrau. Hypervelocity impacts on thin brittle targets : Experimental data and sph simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 33 :441–451, 2006.
- [81] N. Moes, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [82] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Intéactions Fluides-Structures*. MASSON, 1992.

- [83] A. Muszynska. *Rotordynamics*. Taylor & Francis, 2005.
- [84] US Navy. *Naval Ordnance, chapter XV, the naval proving ground*. 1937.
- [85] H.D. Nelson. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. In *Transactions of ASME*, 79-WA/DE-5, number 79-WA/DE-5, 1980.
- [86] A. Neme. *Comportement de plaques epaisses à l'impact de cylindres. Modélisation du comportement de la plaque*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, 1994.
- [87] N.M. Newmark. A method for computation of structural dynamics. In *Proc. of the American Society of Civil Engineers*, pages 67–94. EMS, 1959.
- [88] L. Noels. *Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures*. PhD thesis, Thèse, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées, 2004.
- [89] F. Oncescu, A. A. Lakis, and G. Ostiguy. Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation. *Journal of sound and vibrations*, 245(2) :303–328, 2001.
- [90] R. Ortiz, G. Portemont, J.L. Charles, and J.F. Sobry. Assesment of explicit f. e. capabilities for full scale coupled fluid/strucutre aircraft ditching simulations. In *ICAS Congress*, 2002.
- [91] R. Ortiz, M. Herran, and H. Chalons. Blade loss studies in low-pressure turbines - from blade containment to controlled blade-shedding. In *Computational Methods and Experimental Measurements*, 2009.
- [92] C. A. Papadopoulos. The strain energy release approach for modeling cracks in rotors : A state of the art review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 : 763–789, 2008.
- [93] L. Penazzi. *Comportement à l'impact de plaques métalliques minces*. PhD thesis, Université de Paris 6, 1991.
- [94] M. Ravid and SR. Bodner. Dynamic perforation of viscoplastic plates by rigid projectiles. *International Journal of Impact Engineering*, 21 (6) :577–591, 1983.
- [95] Lord Rayleigh. *Theory of Sound*. Dover Publications, 1945, 1st Ed. 1877.
- [96] S. Roques. *Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentielle*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2007.
- [97] A. Rusinek, J.R. Klepaczko, and R. Bernier. Caractérisation de trois alliages et modélisation du comportement themoviscoplastique. Technical Report AA018838, Turbomeca- LPMM Metz, 2007.

- [98] A. Rusinek, J.A. Rodríguez-Martínez, R. Zaera, J.R. Klepaczko, A. Arias, and C. Sauvelet. Experimental and numerical study on the perforation process of mild steel sheets subjected to perpendicular impact by hemispherical projectiles. *International Journal of Impact Engineering*, 36 :565–587, 2009.
- [99] H. Saravanamuttoo, G. Rogers, and H. Cohen. *Gas Turbine Theory*. Pearson Education, 2005.
- [100] S. Sarkar and S.N. Atluri. Effects of multiple blade interaction on the containment of blade fragments during a rotor failure. *Finite Elements in Analysis and Design*, 23 :211–223, 1996.
- [101] G. J. Sheu. On the hollowness ratio effect on the dynamics of a spinning rayleigh beam. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47 :414–422, 2007.
- [102] W.-H. Shyu, Z.-D. Ma, and G. M. Hulbert. A new component mode synthesis method : Quasi-static mode compensation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 24 :271–281, 1997.
- [103] E. Stamper and S. Hale. The use of ls-dyna models to predict containment of disk burst fragments. In *10th International LS-DYNA Users' Conference*, 2008.
- [104] C.M. Stoisser and S. Audebert. A comprehensive theoretical, numerical and experimental approach for crack detection in power plant rotating machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22 :818–844, 2008.
- [105] A. Suffis. *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de rupture sous impacts*. PhD thesis, INSA Lyon, 2004.
- [106] X. Teng and T. Wierzbicki. Evaluation of six fracture models in high velocity perforation. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :1653–1678, 2006.
- [107] W.T. Thomson. An approximate theory of armor penetration. *Journal of Applied Physics*, 26 :80–82, 1955.
- [108] F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, 43 (2) :235–286, 2001.
- [109] O. Verlinden. *Simulation du comportement dynamique des systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe*. PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, 1994.
- [110] J.D. Walker and C.E. JR. Anderson. A time-dependent model for long-rod penetration. *International Journal Impact Engineering*, 16(1) :19–48, 1995.
- [111] T. Wierzbicki. Petalling of plates under explosive and impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, 22 :935–954, 1999.

- [112] T. Wierzbicki, Y. Bao, Y.-W. Lee, and Y. Bai. Calibration and evaluation of seven fracture models. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47 :719–743, 2005.
- [113] J. C. Wilkins. *A perspective on the numerical and experimental characteristics of multi-mode dry-friction whip and whirl*. PhD thesis, Texas A&M University, 2008.
- [114] T. Winter, A. Hub, and H. Beck. Simulation of containment-test of fast spinning rotors by explicit fem. In *6th European LS-DYNA Users' Conference*, 2007.
- [115] J. A. Zukas and T. Nicholas. *Impact dynamics*. Krieger Pub Co, 1982.

NOM : HERRAN

DATE de SOUTENANCE : 16 février 2010

Prénoms : Mathieu, Laurent

TITRE : Analyse et simulation du phénomène de perte de pales généralisée sur un turbomoteur d'hélicoptère

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2010-ISAL-010

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ : Dans les turbomoteurs, le déclenchement de la protection mécanique contre les survitesses d'un rotor par "Blade Shedding" conduit à des chargements mécaniques intenses sur la structure. En effet, cette protection est basée sur le départ de l'ensemble des pales de ce rotor. Grâce à l'amélioration des moyens de simulation, la prédiction du comportement de la structure devient accessible autant dans ses déformations irréversibles que dans sa réponse vibratoire. Néanmoins, les méthodes de modélisation doivent évoluer pour atteindre ce but. Dans ce contexte, à la frontière des cadres universitaires et industriels, l'objectif de ce travail de recherche est de proposer une méthodologie et des outils capables de simuler le départ généralisé de pales au sein du moteur. Au cours de cette thèse, des essais de cette protection sont tout d'abord analysés et fournissent des données quantitatives et qualitatives aussi bien sur le scénario que sur la sollicitation exercée sur le moteur. Ces informations permettent ainsi d'orienter la modélisation des rotors soit vers des approches de dynamique rotor de ligne d'arbre en transitoire, soit vers des approches volumiques pour simuler le départ des pales. De façon complémentaire, on utilise la réduction par synthèse modale pour représenter les carters, et on propose une approche originale de réduction dans le domaine des moyennes fréquences. Par ailleurs, le caractère extrêmement bref et non linéaire ainsi que la nécessité de prendre en compte de nombreux contacts orientent les travaux vers la méthode des éléments finis résolue par un schéma d'intégration explicite. Dans un premier temps, les résultats obtenus permettent d'appréhender la séquence de départ des pales qui n'a, à ce jour, pas pu être observée expérimentalement. Dans un second temps, les modèles fournissent des estimations du chargement au niveau de la liaison moteur-hélicoptère. Enfin, on ébauche les axes de développements pour une modélisation satisfaisante du "Blade Shedding".

MOTS-CLÉS : Overspeed protection, Blade Out, Rotordynamics, System impedance, Model reduction, Component mode synthesis, Newmark algorithm, Central difference scheme, Johnson-Cook elasto-visco-plastic law, Plastic strain criteria, Triaxiality, Perforation

Laboratoire(s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides
UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Daniel NÉLIAS

Président du jury :

Composition du jury : Pierre-Alain BOUCARD
Hervé CHALONS
Daniel NÉLIAS
Alexis RUSINEK

Patrice CARTRAUD
Alain COMBESURE
Roland ORTIZ
Arnaud SUFFIS