

N° d'ordre 2010-ISAL-0133  
Année 2010

THESE

# Dynamique des Machines Tournantes pour la Conception des Turbines à Vapeur et des Compresseurs Centrifuges : de la Théorie à la Pratique

Présentée devant  
L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de docteur

Formation doctorale :  
**Mécanique**

Ecole doctorale :  
**MEGA** (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique) de Lyon

Spécialité :  
**Génie Mécanique**

Par :  
**Jean-Marc PUGNET**  
Ingénieur Arts et Métiers  
Ingénieur Automaticien de l'Université de Grenoble

Soutenue le 17 décembre 2010 devant la Commission d'examen

Olivier BONNEAU Professeur, Université de Poitiers, Rapporteur  
Xavier COUDRAY Ingénieur, Chief Engineer GE Oil&Gas, Examineur  
Régis DUFOUR Professeur, INSA Lyon, Directeur de thèse  
David EWINS Professeur, University of Bristol, Rapporteur  
Guy FERRARIS Professeur, INSA Lyon, Examineur  
Roger OHAYON Professeur, CNAM Paris, Président  
Michel LALANNE Professeur, INSA Lyon, Examineur

## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://sakura.cpe.fr/ED206">http://sakura.cpe.fr/ED206</a>  M. Jean Marc LANCELIN  Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : <a href="mailto:lancelin@hikari.cpe.fr">lancelin@hikari.cpe.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<u><b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b></u> <a href="http://www.insa-lyon.fr/eea">http://www.insa-lyon.fr/eea</a> M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:eea@ec-lyon.fr">eea@ec-lyon.fr</a> Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
<b>E2M2</b>	<u><b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b></u> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a>  M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<u><b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b></u>  Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<u><b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b></u> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a> M. Alain MILLE	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a> - alain.mille@liris.cnrs.fr
<b>Matériaux</b>	<u><b>MATERIAUX DE LYON</b></u>  M. Jean Marc PELLETIER  Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr">Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<u><b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b></u>  M. Jean Louis GUYADER  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:mega@lva.insa-lyon.fr">mega@lva.insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<u><b>ScSo*</b></u>  M. OBADIA Lionel  Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

En tant que musicien amateur, j'ai longtemps envié certains de mes amis qui ont fait leur métier de leur passion de la Musique.

Au fil des années, mon contact avec les turbomachines et les opportunités d'aborder des aspects scientifiques et techniques toujours nouveaux ont modelé une approche de plus en plus physique, curieuse et globale, mais teintée de plus en plus d'humilité devant ce qui avait déjà été accompli et ce qu'il restait à faire.

En souhaitant ardemment laisser ma pierre dans cet immense édifice, mon métier se mutait en passion !

Pendant que cette passion me dévorait, mon épouse et mes enfants attendaient patiemment qu'elle me laissât quelques instants à leur consacrer.

*A ANNY, SANDRINE ET CHRISTOPHE*

# Remerciements

J'ai effectué ce travail dans le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'INSA de Lyon. Il y a fort longtemps que les contacts qui s'étaient noués entre nous dépassaient l'aspect purement professionnel. Aussi, je souhaite remercier particulièrement Monsieur le Professeur Régis Dufour qui m'a accueilli en toute bienveillance et en toute confiance en tant que directeur de thèse, ainsi que Monsieur le Professeur Guy Ferraris. Tous deux m'ont prodigué des conseils utiles et éclairés dans ce travail particulier de doctorat.

Je remercie aussi Monsieur Johan Der Hagopian, HDR, maître de conférence à l'INSA, qui m'a révélé des aspects modernes sur le contrôle des paliers magnétiques actifs.

Et puis je tiens à remercier également mon ancien employeur. Un industriel est toujours partagé entre la nécessité de démontrer son savoir faire et celle de le protéger ! Non seulement j'ai pu ici lever le voile sur quelques problèmes survenus sur des turbomachines en service sur des sites qui n'avaient pas fait l'objet de publications, mais il m'a bienveillamment fourni quelques cas de calculs supplémentaires.

Certains des développements qui sont présentés dans ce mémoire ne sont pas le fruit d'un travail purement personnel, mais celui d'une équipe. Je voudrais donc ici remercier cette équipe de spécialistes très compétents qui m'ont accompagné dans ma carrière. Parmi eux, je souhaite citer trois personnes qui ont laissé une trace indélébile dans la conception mécanique et dynamique des turbomachines et qui m'ont par conséquent beaucoup apporté, Messieurs François-Xavier Lemant, Bernard Vinsonneau et surtout Alain Gelin.

Et puis, je voudrais formuler une gratitude toute particulière pour Monsieur le Professeur Michel Lalanne qui n'a pas été seulement à l'origine de nombreux développements décisifs, mais qui m'a aussi offert de façon complètement désintéressée plusieurs opportunités de valorisation de ma carrière dans des organismes extérieurs et même internationaux.

Enfin, je remercie les Professeurs David Ewins et Olivier Bonneau, rapporteurs de ce mémoire, ainsi que le Professeur Roger Ohayon et Monsieur Xavier Coudray, membres du Jury. J'espère que les membres du jury pourront en relayer les résultats vers les mondes académique et industriel.

# Résumé

Ce mémoire s'attache à expliciter une série de phénomènes dynamiques concernant en particulier les turbines à vapeur industrielles et les compresseurs centrifuges multi étagés dits de procédé. De nombreux cas vécus sont cités pour servir d'exemples et de support. Le mémoire pourrait apparaître parfois comme très technologique voire descriptif ou même (trop ?) proche de la vulgarisation scientifique. Néanmoins, il est important de donner un aspect historique et industriel aussi complet que possible pour replacer les développements concernés dans leur contexte et aussi de décrire le retour d'expérience obtenu sur les machines en exploitation.

Une longue introduction décrit ces turbomachines ainsi que l'état de l'art en dynamique de rotor pour les applications pétrolières et gazières, basé largement sur la philosophie des standards publiés par l'American Petroleum Institute (API).

Dans un premier temps, on présente le développement d'un outil de dynamique de rotor en flexion ayant pour but de montrer les différents phénomènes que l'on trouve sur les turbomachines concernées. Cet outil n'a pas pour but de se substituer aux progiciels de dynamique de rotor ; son objectif est d'être utilisé par les ingénieurs de bureaux d'études non spécialistes pour comprendre la réaction de certains rotors ou par le personnel de mise en service et de maintenance, ainsi que de répondre à des besoins de formation.

L'étude de la réponse des rotors aux balourds peut paraître un domaine trivial, néanmoins il apparaît que la détermination des amortissements modaux suivant les standards API reste notablement insuffisante. On propose une voie d'analyse multimodale constituant une sérieuse amélioration de ces standards. Cette méthode s'applique aussi bien à des prévisions qu'à des résultats expérimentaux, suivant le même esprit pragmatique que l'API.

On aborde ensuite de façon plus descriptive l'ensemble des travaux réalisés sur le problème fondamental de la stabilité vibratoire latérale des rotors de compresseurs centrifuges où les effets aérodynamiques modélisés par des raideurs croisées viennent consommer la capacité d'amortissement des paliers hydrodynamiques, surtout lorsque les niveaux de puissance et de pression augmentent pour des applications de récupération assistée des hydrocarbures.

L'introduction du contrôle actif dans les turbomachines a nécessité un développement assez long, certes assez technologique. On présente la constitution du savoir faire d'un constructeur en matière de paliers magnétiques actifs et on explique l'origine de quelques instabilités rencontrées. L'aspect du comportement sur les paliers auxiliaires est également abordé. Les nouvelles perspectives ouvertes par les techniques neuro-floues sont montrées comme une possibilité de synthétiser des contrôleurs à partir d'objectifs de performances.

L'ensemble des phénomènes de dynamique des lignes d'arbres en torsion est présenté. Deux aspects particuliers de modélisation sont traités pour améliorer la prévision des fréquences propres. Le premier concerne le montage avec un fort serrage des d'accouplements sur les bouts d'arbres, et le second concerne les arbres épaulés avec de grands changements de diamètre, ce qui a nécessité le

développement d'un élément fini de torsion à deux degrés de liberté par nœud d'un tronçon conique. Le cas des excitations instationnaires générées par les machines électriques est traité. On aborde également le couplage flexion torsion.

Les systèmes disques aubes sont présentés pour les deux types de turbomachines. On présente un développement original pour étudier la tenue en fatigue des étages de turbines à vapeur soumis à l'injection partielle. Pour les compresseurs centrifuges, on montre à partir de cas industriels que le diagramme d'interférence n'est parfois pas suffisant pour expliquer et éviter certains incidents survenus sur des machines en service.

Afin de compléter les phénomènes vibratoires, on montre plusieurs aspects vibroacoustiques qui ont été rencontrés industriellement sur des turbomachines et on termine ce chapitre sur une présentation des recherches poussées et indispensables qui sont en cours sur les excitations d'origine acoustique dans les étages de compresseurs centrifuges.

Le mémoire se termine sur une modélisation dynamique originale du comportement d'un compresseur centrifuge dans ses réseaux d'aspiration et de refoulement. A partir des caractéristiques aérodynamiques du compresseur et thermodynamiques du gaz et des réseaux, on explique facilement l'adaptation de la machine lors de ses changements de régime de production. Le modèle établi est aussi utilisé pour démontrer l'instabilité près du point de pompage de la caractéristique de compression et aussi pour étudier le comportement lors du pompage.

Enfin, la conclusion remet en exergue les points forts issus de ce travail avec les développements originaux, des prescriptions pour la conception, des propositions pour l'amélioration de normes, dans un domaine où il est indispensable de raisonner en multi physique.

# Abstract

This dissertation deals with the explanation of a series of dynamical phenomena concerning particularly the industrial steam turbines and the multistage centrifugal compressors (process compressors). Several historic cases are reported as examples and support. The dissertation could appear sometimes as very technological, even descriptive or even (too much?) closed to scientific popularisation. Nevertheless, it seems important to explain the historical and industrial aspects as completely as possible to put the concerned developments back in their context and also to show the feedback from the machines in operation on the fields.

A long introduction deals with the description of these turbomachines and to the state of the art in rotordynamics for oil and gas applications, mainly based on the philosophy of the standards edited by the American Petroleum Institute (API).

In a first step, the development of a lateral rotordynamics tool is presented the purpose of which being to show the different phenomena encountered on the concerned turbomachines. The purpose of this tool is not to replace any rotordynamics software; its aim is a use by non-specialist design engineers to help understanding of particular behaviours of some rotors, or the use by field engineers for commissioning and maintenance, or also for training needs.

One can think that the analysis of the response of rotors to unbalance is a trivial field; nevertheless, it seems that the determination of damping according to API standards remains notably insufficient. A new way of multimodal analysis is proposed, which would constitute a deep improvement in these standards. This method can be applied as well from prediction than experimental results, according to the same pragmatic aspect than API.

The whole works performed on the fundamental question of the stability of lateral vibrations of centrifugal compressors rotors is then presented. Aerodynamical effects are modelled by cross couplings which consume the damping capability of hydrodynamic bearings, especially with the increase in power and pressure levels for enhanced hydrocarbons recovery.

The introduction of active control in turbomachinery has needed a rather long development, with more technological aspects. The constitution of a manufacturer's know-how in the field of active magnetic bearings is presented and the root causes of some instabilities are investigated. The aspect of the behaviour on the auxiliary (back-up) bearings is also discussed. The new perspectives brought by neuro-fuzzy techniques are shown as a possibility to synthesise controllers from performances objectives.

The whole shaft lines torsional phenomena are presented. Two special modelling aspects are investigated in order to improve the prediction of natural frequencies. The first one considers the assembling of couplings with high interference fits on the shaft ends. The second one deals with shouldered shafts with big changes in diameter, which needs the development of a torsional finite element with two degrees of freedom per node for conical sections. The unstationary excitations generated by

electric machines are also taken into account. At last, the lateral-torsional coupling is also discussed.

The disk-blade systems are presented for both types de turbomachines. An original development is proposed for the fatigue resistance assessment of steam turbine stages under partial arc injection. In the case of centrifugal compressors, it is shown that the interference or coincidence diagram is not always sufficient to explain and to avoid incidents happening on machines in operation.

In order to be more complete on vibratory phenomena, several vibroacoustic aspects industrially observed on turbomachines are presented. This chapter is then closed by a presentation of on-going very sophisticated researches on acoustical excitations in centrifugal compressors stages.

The dissertation takes end with an original dynamic modelling of the behaviour of a centrifugal compressor in its suction and discharge piping systems. From the aerodynamical characteristics of the compressor and the thermodynamical properties of the gas and the piping systems, the adaptation of the machine is easily explained when its operating conditions are changed. The model which is thus built is also used to demonstrate the instability around the surge point of the compressor characteristics and to study the behaviour during surge.

At last, the conclusion points out the major aspects of this work with original developments, prescriptions for the design, proposals for standardization improvement, in a domain where it is necessary to think multi-physics.

# Avant propos

Les turbomachines industrielles sont construites à l'unité, sous spécification particulière. Même pour les turbines à vapeur, qui ont l'avantage de travailler avec un fluide unique, par rapport aux compresseurs centrifuges qui sont adaptés aux gaz naturels trouvés sur chaque site, aucune machine n'est jamais totalement identique à celles qui l'ont précédée.

Ces turbomachines, installées dans des unités de récupération d'énergie (turbines à vapeur) ou de traitement de gaz naturel (compresseurs centrifuges), constituent les moteurs de ces unités. Sans elles, le fluide ne circulerait pas et la production ne se ferait pas. Leur disponibilité et leur fiabilité sont des éléments clés de l'exploitation des unités de production.

Pour fixer les enjeux liés à ces turbomachines, on va préciser quelques critères technico-économiques. Les puissances unitaires sont de 5 MW pour les compresseurs (maxi 20), de 12 MW pour les turbines à vapeur (maxi 40). Les coûts de production sont compris entre 4 et 8 millions d'euros selon la puissance de la machine et les conditions de service. Puisque ces machines constituent les "moteurs" des procédés dans lesquels elles sont installées, un incident qui surviendrait et nécessiterait un arrêt prolongé aurait de fortes incidences en terme de coût de perte de production (40 000 euros par jour pour la valorisation de l'énergie produite par une turbine à vapeur de 12 MW et certainement beaucoup plus dans les applications pétrolières et gazières des compresseurs centrifuges, en coût direct, hors coûts de personnel). La recherche de la fiabilité est un élément au moins aussi important que celle de performances élevées, ce qui reste un exercice difficile dans ce domaine où l'unicité des machines construites réduit considérablement le retour d'expérience.

Non seulement les turbomachines doivent être conçues spécifiquement et précisément pour le service qu'elles doivent rendre, mais elles doivent rester économes en énergie. Les clients établissent des tableaux de comparaison des constructeurs prétendant à un projet et donnent un poids très lourd au rendement avant de sélectionner leur fournisseur. Ensuite, à l'issue de la production des machines, leurs performances aérodynamiques sont mesurées, et de lourdes pénalités financières sont appliquées si les objectifs ne sont pas respectés.

Il va sans dire que toutes les professions utilisant et fabriquant des turbomachines font des efforts considérables et continus pour afficher les meilleures performances, et ceci, non seulement pour des motifs évidents de compétitivité, mais aussi pour la protection de l'environnement. Il faut citer la mise en place dans certains pays, comme la Norvège, de taxes sur la puissance installée.

S'il est indispensable de satisfaire ces considérations évidentes relatives aux performances aérothermodynamiques, encore faut-il que la turbomachine soit capable de fonctionner convenablement. Une machine dont les matériaux ne seraient pas adaptés à la corrosivité des fluides à manipuler, ou qui laisserait s'échapper des gaz dangereux ne serait pas mise en service. Une machine qui montrerait un niveau vibratoire trop important ou qui présenterait une instabilité, ne pourrait pas être exploitée. Mais, par ailleurs, une machine trop chère ne serait pas vendue !

C'est ainsi que la Recherche et Développement a pour but de développer des techniques et technologies de plus en plus performantes en ce qui concerne les performances aérothermodynamiques, la réduction des pertes, la métallurgie, le dimensionnement des enveloppes, les étanchéités de sorties d'arbre, la sélection des paliers. Pour ceci, elle a besoin d'outils de prévision toujours plus précis et plus fiables dans les domaines de la thermodynamique (équations d'états), de l'aérodynamique (prévision de performances et analyse d'écoulement), de la mécanique (outils de dimensionnement adaptés aux différents composants, analyse de structure), de la thermique (dilatations différentielles, contraintes thermiques) de la vibration (systèmes disque aubes : ailettes de turbines à vapeur, roues de compresseurs centrifuges) et de la dynamique de rotors (flexion, torsion, équilibrage dynamique).

L'évolution des turbomachines industrielles auxquelles nous nous intéressons a été considérable. Pour citer quelques éléments, on prendra l'exemple d'une entreprise française. On a vu les puissances unitaires des turbines à vapeurs destinées à des applications de récupération d'énergie passer de 25 à 45 MW, les vitesses périphériques des aubages terminaux à condensation de 300 à 360 m/s en montant la vitesse de rotation de 6900 à 10000 tr/min, ce qui a un impact décisif sur le rendement de tous les étages de la machine. Les puissances unitaires de corps de compresseurs centrifuges destinés à l'industrie pétrolière ont atteint 30 MW, les vitesses de rotation dépassent les 16000 tr/min, les rendements des étages de compressions ont été améliorés de 10 points, les pressions de refoulement sont passées de 200 à 420 bar (500 sur un prototype), les garnitures mécaniques sèches d'étanchéité de sorties d'arbre et les paliers magnétiques actifs ont été introduits, des compresseurs manipulant du gaz naturel humide contenant 20% de CO<sub>2</sub> et d'H<sub>2</sub>S ont été mis en service (et même 80% avec présence de chlorures pour une application particulière).

La Recherche et Développement a naturellement accompagné ces profondes évolutions. Toujours à titre d'exemple, on citera les domaines abordés pour le développement multi physique particulièrement riche des étages et des roues de compresseurs centrifuge :

- la refonte complète des logiciels de prévision des performances aérodynamiques (triangulation et modèles de pertes) avec des gaz réels (coefficient de compressibilité) ;
- la construction d'un compresseur d'essais des étages permettant de refouler jusqu'à 20 bar pour mettre en évidence l'effet de nombres de Reynolds élevés ;
- la mise en place d'une méthode d'analyse d'écoulements (CFD – Computational Fluid Dynamics – basée sur les équations de Navier Stokes) ;
- le développement d'un outil basé sur le code aux éléments finis ANSYS pour l'analyse des contraintes dans les roues (répétitivité cyclique) et le calcul des fréquences et modes propres (ordres de Fourier et diagrammes d'interférence) ;
- la validation de ce logiciel de mécanique et de vibration par des méthodes optiques (utilisation de la photo-élasticimétrie avec figeage de contraintes en rotations, et interférométrie laser pour les modes propres) ;
- le développement de l'usinage 5 axes pour les roues dont les aubes sont de structure tridimensionnelle (grands coefficients de débit), puis de l'usinage à grande vitesse ;

- le développement du brasage sous vide à haute température pour l'assemblage du flasque sur les sommets d'aubes (roues fermées) pour les roues tridimensionnelles et à très petit coefficient de débit (respect de la géométrie) ;
- des essais de fatigue plastique sur des roues brasée et soudée simulant les démarrages arrêts de la durée de vie d'une machine ;
- le développement du soudage robotisé pour l'assemblage des roues de coefficients de débit moyens et de grands diamètres ;
- une recherche technologique sur l'adaptation sur les étanchéités de matériaux abrasibles ou de thermoplastiques conformables afin de réduire les recirculations internes ;
- et, à titre complémentaire, la recherche de revêtements pour éviter l'encrassement des étages et la détérioration des états de surface des parois de la veine (dépôts avec éventuellement polymérisation des composés les plus lourds des fluides) afin que l'étage conserve ses caractéristiques dans le temps.

Ce développement a permis de créer de nouvelles familles d'étages de compresseurs couvrant toute la gamme en matière de diamètres, coefficients de débit, masses molaires, nombres de Reynolds, et entièrement paramétrables afin d'optimiser les performances aérothermodynamiques de la machine en fonction de l'unicité de ses conditions de service, tout en tenant compte des possibilités de réalisation mécanique et vibratoire et des impératifs de production (usinage 5 axes).

Il est clair que les méthodes d'analyses mises en place font de la prévision une part fondamentale de la conception des turbomachines. La plupart des expérimentations réalisées ont eu notamment pour but de valider ce "banc d'essais numérique" qui, redisons le encore une fois, est rendu absolument nécessaire par l'unicité des applications de chacune des turbomachines construites.

De nombreux aspects scientifiques ont été abordés pendant une carrière consacrée à la Recherche et Développement et à l'expertise technique. Chaque fois que l'on aborde un domaine, de nouvelles interrogations surgissent. Les aspects abordés s'élargissent et s'approfondissent sans cesse et il est important pour avancer de compter sur les compétences et l'expérience d'une équipe pluridisciplinaire capable de conjuguer la thermodynamique, l'aérodynamique, la mécanique, l'analyse de contrainte, la thermique, la dynamique, la métallurgie, la fatigue, la corrosion, la technologie, l'acoustique, la mesure, le traitement du signal, et les outils mathématiques, statistiques ou informatiques... tout en restant au service des applications envisagées. Il est évident que tout ce travail ne peut pas être accompli sans l'appui et l'apport de laboratoires universitaires spécialisés, compétents et reconnus pour leur expérience des contacts avec l'industrie.

L'expérience personnelle est un facteur primordial, et celle-ci s'enrichit des contributions à la résolution des problèmes qui surviennent sur les turbomachines en fonctionnement sur les sites, ce qui se fait toujours sous une très forte pression du client, compte tenu des coûts extrêmement élevés des pertes de production.

Rien n'est jamais totalement achevé en Recherche et Développement, et peut-être les cas abordés susciteront-ils de nouveaux développements par les interrogations qu'ils suscitent.

# Sommaire

1.	Introduction	p.31
1.1	Description des turbomachines concernées	p.31
1.1.1	Turbines à vapeur industrielles	p.31
1.1.2	Compresseurs centrifuges	p.34
1.1.3	Autres machines abordées	p.38
1.2	Éléments de l'état de l'art en dynamique de rotor	p.39
1.2.1	Ouvrages de base	p.39
1.2.2	Publications	p.40
1.2.3	Actes des congrès	p.40
1.2.4	Normes	p.40
1.2.5	Principes de la conception en dynamique de rotor des turbomachines destinées à l'industrie pétrolière	p.42
1.2.5.1	Analyse de flexion (ou latérale)	p.42
1.2.5.2	Essai de vérification de la réponse du rotor au balourd	p.44
1.2.5.3	Analyse de torsion (ou torsionnelle)	p.45
1.2.5.4	Niveaux vibratoires admissibles	p.46
1.2.5.5	Équilibrage dynamique	p.46
1.2.5.6	Stabilité vibratoire latérale	p.48
1.3	Domaines abordés dans ce mémoire	p.49
2.	Modèle simple d'étude de la phénoménologie de la dynamique d'un rotor en flexion	p.51
2.1	Originalité de la méthode	p.52
2.2	Formulation du modèle de rotor	p.53
2.2.1	Système d'axes	p.53
2.2.2	Constitution du rotor	p.54
2.2.3	Déplacements	p.55
2.2.4	Energie cinétique	p.55
2.2.4.1	Disque rigide	p.56
2.2.4.2	Arbre	p.56
2.2.4.3	Balourd	p.57
2.2.5	Energie élastique	p.58
2.2.5.1	Déformation élastique de l'arbre	p.58
2.2.5.2	Déplacements dans les paliers	p.58
2.2.6	Généralisation au contour d'un rotor industriel	p.59
2.2.7	Equation matricielle d'équilibre dynamique	p.61

2.2.7.1	Matrice de masse	p.61
2.2.7.2	Matrice de raideur	p.62
2.2.7.3	Matrice d'amortissement	p.63
2.2.7.4	Vecteur d'excitation des balourds	p.64
2.3	Représentation d'état	p.65
2.4	Fréquences propres	p.66
2.4.1	Cas général des fréquences propres en rotation	p.66
2.4.2	Cas particulier des fréquences propres "à l'arrêt"	p.67
2.5	Modes propres	p.67
2.5.1	Valeurs propres	p.67
2.5.2	Formes modales – déplacements physiques	p.67
2.5.3	Précession	p.68
2.6	Réponse aux balourds	p.68
2.6.1	Résolution directe de l'équation d'équilibre dynamique	p.68
2.6.2	Déplacements physiques	p.70
2.6.3	Caractéristiques de trajectoires elliptiques	p.70
2.6.4	Inclinaison des capteurs	p.70
2.7	Equilibrage dynamique	p.71
2.8	Validité du modèle	p.72
2.8.1	Rotor de compresseur centrifuge	p.72
2.8.2	Rotor de turbine à vapeur	p.74
2.8.3	Conclusion sur la validité	p.76
2.9	Développement informatique et capacités	p.76
2.10	Exemple de calculs	p.78
2.10.1	Données	p.78
2.10.2	Fréquences propres "à l'arrêt"	p.78
2.10.3	Fréquences propres en rotation	p.79
2.10.4	Critères API en fonction des paramètres modaux	p.80
2.10.5	Diagramme de Campbell	p.81
2.10.6	Influence de la raideur croisée sur la stabilité	p.82
2.10.7	Réponse aux balourds	p.82
2.10.8	Inversion de la précession pour des paliers anisotropes	p.85
2.10.9	Traitement API de la réponse aux balourds	p.85
2.10.10	Approche multimodale pour l'évaluation des amortissements modaux à partir de la réponse aux balourds	p.85
2.10.11	Equilibrage dynamique	p.86
2.11	Conclusion	p.87

3. Interprétations de la réponse des rotors aux balourds	p.88
3.1 Critique de la procédure API de caractérisation des vitesses critiques	p.88
3.1.1 Différents résultats de vitesse critique obtenus pour la même fréquence propre	p.88
3.1.2 Application	p.89
3.1.3 Nombre de vitesses critiques	p.90
3.2 Détermination des vitesses critiques API à partir des caractéristiques modales	p.92
3.2.1 Formulation	p.92
3.2.2 Application	p.93
3.3 Amélioration de la caractérisation des amortissements par analyse multimodale de la réponse aux balourds	p.94
3.3.1 Approche multimodale	p.94
3.3.1.1 Système à un degré de liberté	p.94
3.3.1.2 Système à plusieurs degrés de liberté	p.96
3.3.1.3 Application à la réponse au balourd	p.97
3.3.1.4 Retour aux paramètres modaux	p.100
3.3.1.5 Perspectives d'amélioration	p.101
3.3.2 Application de l'approche multimodale au cas réel d'un compresseur centrifuge	p.102
3.3.2.1 Traitement des résultats de mesure	p.102
3.3.2.2 Réponse au balourd central	p.104
3.3.2.3 Réponse aux balourds aux extrémités	p.105
3.3.2.4 Analyse de la plage à grande vitesse	p.106
3.3.2.5 Conclusion	p.107
3.4 Interprétation de cas particuliers	p.108
3.4.1 Inversion de la précession de la réponse au balourd	p.108
3.4.2 Influence de la métallurgie et des conditions de fonctionnement	p.109
3.4.2.1 Balourds thermiques	p.109
3.4.2.2 Corrosion différentielle	p.110
3.4.2.3 Faux rond	p.110
3.4.2.4 Conséquences sur le niveau global des vibrations	p.110
3.4.2.5 Vibrations créées par les champs de températures et les dilatations des enveloppes	p.110
3.4.2.6 Diagrammes de Campbell particuliers	p.111
3.4.2.7 Instabilité de fonctionnement au balourd	p.112
3.4.2.8 Influence des conditions de fonctionnement sur une ligne d'arbres sur quatre paliers	p.113
3.5 Conclusions	p.115

4.	Stabilité vibratoire des compresseurs centrifuges	p.117
4.1	Elimination de l'instabilité d'un compresseur centrifuge	p.118
4.2	Améliorations dans la prévision de la stabilité vibratoire	p.123
4.2.1	Essais de paliers hydrodynamiques à patins oscillants	p.123
4.2.2	Caractérisation des étanchéités tournantes à gaz	p.124
4.2.3	Développement d'un critère global de stabilité	p.125
4.3	Situation actuelle	p.126
4.4	Considérations sur la dispersion des réalisations	p.127
4.4.1	Tolérances de fabrication des paliers	p.127
4.4.2	Influence des conditions de fonctionnement sur les paliers	p.129
4.4.3	Influence des conditions de fonctionnement de la machine	p.130
4.4.4	Influence des conditions d'installation	p.130
4.5	Conclusion	p.131
5.	Turbomachines et paliers magnétiques actifs	p.132
5.1	Premier compresseur centrifuge européen à PMA	p.132
5.2	Compréhension des caractéristiques des PMA	p.134
5.2.1	Capacité de charge des PMA	p.134
5.2.1.1	Palier radial	p.134
5.2.1.2	Butée axiale	p.135
5.2.1.3	Prise en compte de l'entrefer	p.135
5.2.2	Caractéristiques dynamiques des PMA	p.136
5.2.3	Réalisation de l'analyse dynamique d'un rotor sur PMA	p.137
5.2.4	Tracé d'un diagramme de Campbell	p.137
5.2.5	Calcul de la réponse aux balourds	p.138
5.2.6	Dispositif de contrôle automatique de balourd	p.138
5.2.7	Optimisation de l'amortissement	p.139
5.2.8	Position vis-à-vis des normes	p.140
5.3	Instabilité subsynchrone du compresseur équipé de PMA	p.140
5.4	Instabilité d'un turboalternateur équipé d'AMA	p.142
5.4.1	Application	p.142
5.4.2	Explication intuitive de l'influence sur la stabilité	p.143
5.4.3	Démonstration formelle de l'instabilité	p.143
5.5	Conceptions particulières de compresseurs centrifuges à PMA	p.146

5.5.1	Compresseur centrifuge sans butée	p.146
5.5.2	Etude dynamique d'un compresseur centrifuge de gaz acide à PMA dans le gaz	p.147
5.5.3	Compresseur centrifuge en porte-à-faux	p.149
5.6	Autres développements réalisés autour des PMA	p.150
5.6.1	Tracés automatiques de diagrammes de Campbell	p.150
5.6.2	Simulations de l'atterrissage dans les paliers auxiliaires	p.150
5.6.2.1	Atterrissage d'un rotor à axe horizontal	p.150
5.6.2.2	Atterrissage d'un rotor à axe vertical	p.152
5.6.2.3	Atterrissage dans la direction axiale	p.153
5.6.3	Considérations sur le couplage des axes – Schéma bloc d'asservissement	p.154
5.7	Développement de groupes motocompresseurs intégrés	p.156
5.8	Développements récents en contrôle des PMA	p.159
5.8.1	Technique neuro-floue	p.160
5.8.2	Linéarisation des paliers magnétiques	p.161
5.8.3	Principe du contrôle flou modal	p.162
5.8.4	Applications aux turbomachines	p.163
5.8.4.1	Equilibrage dynamique	p.163
5.8.4.2	Modélisation et surveillance	p.164
5.8.4.3	PMA	p.164
5.9	Conclusion	p.164
6.	Dynamique des rotors en torsion et couplage flexion torsion	p.166
6.1	Modélisation des bouts d'arbres	p.166
6.2	Modélisation des arbres épaulés	p.168
6.2.1	Calculs de référence	p.168
6.2.2	Modèles analytiques	p.169
6.2.2.1	Différentes modélisations	p.170
6.2.2.2	Résultats obtenus avec les modèles analytiques	p.172
6.2.3	Modèles aux éléments finis de poutres en torsion	p.173
6.2.3.1	Modélisation des tronçons à 1 ddl par nœud	p.174
6.2.3.2	Modélisation des tronçons à 2 ddl par nœud	p.174
6.2.3.3	Résultats obtenus avec les modèles aux éléments finis	p.176
6.2.4	Conclusion	p.177
6.3	Excitations des lignes d'arbre en torsion	p.177
6.3.1	Diagramme de Campbell en torsion	p.177
6.3.2	Excitations stationnaires	p.178
6.3.2.1	Origine mécanique	p.178
6.3.2.2	Origine électrique	p.179

6.3.2.3	Tenue de la ligne d'arbres en fatigue	p.179
6.3.3	Excitations instationnaires d'origine électrique	p.180
6.3.3.1	Courts-circuits et faux couplages	p.180
6.3.3.2	Démarrage d'un moteur électrique	p.186
6.3.3.3	Tenue de la ligne d'arbres en fatigue	p.187
6.3.3.4	Moyen d'amélioration de la tenue aux couples instationnaires	p.188
6.4	Couplage flexion torsion	p.190
6.5	Sources de dispersion	p.194
6.6	Conclusion	p.195
7.	Systèmes disques aubes	p.196
7.1	Vibrations d'aubages de turbines à vapeur soumis au phénomène d'injection partielle	p.196
7.1.1	Dispositif d'injection partielle	p.196
7.1.2	Montage en paquets des aubages des turbines à action	p.197
7.1.3	Fréquences propres d'un paquet d'aubages	p.198
7.1.4	Considérations générales sur la tenue en fatigue	p.199
7.1.5	Réponse vibratoire à l'injection partielle	p.199
7.1.6	Conclusion, choix d'un nombre optimal d'ailettes par paquets	p.203
7.2	Vibrations de roues de compresseurs centrifuges	p.204
7.2.1	Développement d'une première méthode d'analyse	p.205
7.2.2	Validation par des méthodes optiques	p.205
7.2.3	Développement d'un code d'analyse statique et dynamique sous ANSYS®	p.206
7.2.4	Diagramme de coïncidence pour l'analyse des résonances	p.207
7.2.5	Analyse de difficultés rencontrées sur des compresseurs centrifuges	p.208
7.2.5.1	Ruptures en festons au diamètre extérieur	p.209
7.2.5.2	Ruptures des bords d'attaque des aubes	p.210
7.2.6	Plages d'incertitudes	p.214
7.2.7	Conclusion et dernières possibles	p.215
8.	Implications vibroacoustiques	p.216
8.1	Pulsations de pression générées par les compresseurs alternatifs	p.216
8.1.1	Mauvaise conception d'une bouteille antipulsatoire	p.217
8.1.2	Mauvaise réalisation d'un encastrement de tuyauterie	p.218

8.1.3	Conclusion	p.219
8.2	Phénomènes vibroacoustiques dans des turbines à vapeur industrielles	p.219
8.2.1	Coïncidence de fréquences propres mécanique et acoustique dans des aubes tournantes	p.219
8.2.2	Excitations liées aux écoulements de vapeur	p.221
8.3	Prise en compte de phénomènes acoustiques dans les vibrations de roues de compresseurs centrifuges	p.222
8.3.1	Excitations de Tyler Sofrin	p.223
8.3.2	Excitations acoustiques instationnaires dues au couplage des différentes rangées d'aubages	p.224
8.3.3	Importance des moyens à mettre en œuvre	p.227
8.4	Conclusion	p.227
9.	Modèle dynamique d'un compresseur centrifuge et de ses réseaux	p.228
9.1	Nécessité de réalisation de simulations dynamiques	p.228
9.2	Modélisation d'un compresseur centrifuge et d'un réseau	p.229
9.2.1	Caractéristiques d'un compresseur centrifuge	p.229
9.2.2	Caractéristiques d'un réseau	p.230
9.2.3	Point de fonctionnement	p.231
9.2.4	Technique usuelle de simulation de fonctionnement	p.231
9.2.5	Développement d'un nouveau modèle de simulation de fonctionnement	p.231
9.3	Instabilité à l'amorce du pompage	p.238
9.4	Etude de la stabilité près du maximum de la courbe de hauteur développée	p.242
9.5	Simulation du pompage	p.243
9.6	Conclusion	p.246
10	Conclusions	p.247
10.1	Conclusions particulières	p.247
10.2	Points forts des recherches réalisées	p.249
10.3	Perspectives	p.249

# Annexes p.253

Annexe A – Formulation du modèle permettant l'étude de la phénoménologie de la dynamique d'un rotor en flexion p.255

Annexe B – Méthodes numériques p.264

Annexe C – Logique floue et réseaux de neurones p.268

Annexe D – Développement de modèles de tronçons coniques aux éléments finis en torsion p.274

Annexe E – Principe de la modélisation thermodynamique d'état d'un compresseur dans ses réseaux p.281

# Références bibliographiques p.286

# Liste des principales abréviations

<b>Symbole</b>	<b>Désignation</b>	<b>Unité</b>
1 Mécanique et vibratoire		
A, B, C, D	coefficients des cubiques	$m^{-2}, m^{-1}, / ,m$
AF	facteur d'amplification API	/
[C]	matrice d'amortissement	N.s/m ou rad.s/m.N en torsion
E	module d'Young	Pa ou GPa
F(t)	force appliquée temporelle	N
[F(t)]	vecteur des forces appliquées	N
f, Fréq	fréquence	Hz
i	symbole des nombres complexes	$\sqrt{-1}$
I, I <sub>p</sub>	inertie polaire	kg.m <sup>2</sup>
I <sub>S</sub>	moment quadratique de surface	m <sup>4</sup>
I <sub>T</sub>	inertie transverse	kg.m <sup>2</sup>
K	raideur	m/N ou rad/m.N en torsion
K <sub>XZ</sub> ou k <sub>XZ</sub>	raideur croisée	m/N
[K]	matrice de raideur	m/N ou rad/m.N en torsion
M	masse	kg
[M]	matrice de masse ou d'inertie	kg ou kg.m <sup>2</sup> en torsion
q	participation modale	/
t	temps	s
u	déplacement horizontal (suivant X)	m ou $\mu m$
U	balourd U = m d	kg.m ou g.mm
V	vibration	$\mu m$
X	déplacement	m
Y	position axiale sur le rotor	m ou mm
w	déplacement vertical (suivant Z)	m ou $\mu m$
$\phi$	mode propre	m ou rad en torsion
[ $\phi$ ]	matrice des modes propres disposées en colonnes	
$\Gamma$	couple	m.N
$\lambda$	valeur propre	/
$\varphi$	phase	rad
$\nu$	coefficient de Poisson	/
$\rho$	masse volumique	kg/m <sup>3</sup>
$\theta$ et $\psi$	pentés des déplacements u et v	/
$\omega$	pulsation	rad/s
$\omega_r$	pulsation de rotation	rad/s
$\Omega$	vitesse de rotation	tr/min
2 Symboles		
$\dot{X} = dX/dt$	symbole de dérivation d'une variable X par rapport au temps	
$\ddot{X} = d^2X/dt^2$	symbole de dérivée seconde d'une variable X par rapport au temps	
[A] <sup>t</sup>	symbole de transposition d'une matrice [A]	

### 3 Aérothermodynamique

H	enthalpie	J/kg
$M_m$	masse molaire	kg/kmol
P	pression	Pa ou bar
$Q_m$	débit massique	kg/s (ou t/h)
$Q_v$	débit volumique	$m^3/s$
R	constante thermodynamique du gaz	J/kg.K
$R_0$	constante thermodynamique	8314,32 J/kmol.K
T	température	K
U	vitesse (célérité) de fluide	m/s
$U_2$	vitesse périphérique	m/s
V	volume spécifique	$m^3/kg$
Vol	volume	$m^3$
W	puissance	W
Wc	énergie cinétique	J
Z	coefficient de compressibilité du gaz	/
$\phi$	coefficient de débit	/
$\gamma$	coefficient isentropique du gaz	/
$\psi$	coefficient de hauteur	/
$\eta_p$	rendement polytropique	/
$\rho$	masse volumique	$kg/m^3$

### 4 Electromagnétisme

B	induction magnétique	T
S	surface	$m^2$
$\varepsilon$	entrefer	m
$\mu$	perméabilité magnétique	H/m

# Liste des tableaux et figures

## Chapitre 1

Figure 1.1	Turbine à condensation (Échappement radial)	p.32
Figure 1.2	Turbine à condensation (Échappement axial)	p.32
Figure 1.3	Turbine à contrepression	p.32
Figure 1.4	Turbine à contrepression et extraction réglée	p.32
Figure 1.5	Turbine à condensation et extraction réglée	p.32
Figure 1.6	Vue écorchée d'une turbine à vapeur industrielle	p.33
Figure 1.7	Corps de compresseur centrifuge	p.35
Figure 1.8	Cartouche de compresseur centrifuge haute pression	p.35
Figure 1.9	Compresseur de gaz lourd à deux sections en ligne	p.36
Figure 1.10	Vue écorchée d'un compresseur centrifuge "barrel"	p.36
Figure 1.11	Compresseur avec un corps moulé "split"	p.37
Figure 1.12	Deux compresseurs pour station de gazoduc	p.37
Figure 1.13	Paliers à patins oscillants	p.37
Figure 1.14	Garniture mécanique d'étanchéité de bout d'arbre	p.37
Figure 1.15	Etanchéités internes à labyrinthes	p.37
Figure 1.16	Roue 2D	p.37
Figure 1.17	Vue écorchée d'une roue 3D	p.37
Figure 1.18	Moyeu de roue 3D avec aubes intercalaires	p.37
Figure 1.19	Etanchéité à nid d'abeilles	p.38
Figure 1.20	Groupe turbine à vapeur, réducteur, alternateur	p.39
Figure 1.21	Réducteur à axes parallèles	p.39
Figure 1.22	Alternateur	p.39
Figure 1.23	Groupe moteur, multiplicateur compresseur centrifuge	p.39
Figure 1.24	Groupe motocompresseur alternatif (4 cylindres)	p.39
Figure 1.25	Diagramme des vitesses critiques non amorties [API612] – [API617]	p.42
Figure 1.26	Modes propres et configurations de balourds	p.43
Figure 1.27	Amplitude de réponse au balourd, facteur d'amplification et marge de séparation [API684]	p.43
Figure 1.28	Banc d'équilibrage à vitesse nominale sous vide	p.47
Figure 1.29	Raideur croisée et décrétement logarithmique [API617]	p.48
Figure 1.30	Critère de stabilité API – Niveau 1 [API617]	p.49

## Chapitre 2

Figure 2.1	Système d'axes	p.54
Figure 2.2	Modèle élémentaire de rotor	p.54
Figure 2.3	Contour d'un rotor industriel	p.59
Figure 2.4	Caractéristiques de paliers hydrodynamiques à patins oscillants	p.60
Figure 2.5	Rotor de compresseur centrifuge multi étagé	p.73
Figure 2.6	Linéarisation des caractéristiques des paliers du compresseur	p.73
Figure 2.7	Diagramme de Campbell du compresseur centrifuge comparé aux résultats de ROTORINSA®	p.73
Tableau 2.8	Comparaison des fréquences propres complexes du compresseur	p.74
Figure 2.9	Rotor de turbine à vapeur	p.74

Figure 2.10	Linéarisation des caractéristiques des paliers de la turbine	p.75
Figure 2.11	Diagramme de Campbell de la turbine à vapeur comparé aux résultats de ROTORINSA®	p.75
Tableau 2.12	Comparaison des fréquences propres complexes de la turbine	p.75
Figure 2.13	Organigramme du fichier du "démonstrateur"	p.77
Tableau 2.14	Données géométriques et matériaux	p.78
Tableau 2.15	Données des paliers et de fonctionnement	p.78
Figure 2.16	Tracé du contour du rotor	p.78
Tableau 2.17	Valeurs des fréquences propres à l'arrêt	p.78
Figure 2.18	Tracés des modes propres verticaux à l'arrêt	p.79
Figure 2.19	Valeurs des fréquences propres en rotation	p.79
Figure 2.20	Tracés de modes propres en rotation	p.80
Figure 2.21	Caractérisation API à partir des données modales	p.81
Figure 2.22	Diagrammes de Campbell des fréquences propres et des amortissements modaux	p.81
Figure 2.23	Diagramme de Campbell du compresseur centrifuge du § 2.8	p.82
Figure 2.24	Déstabilisation de modes propres en fonction de la raideur croisée	p.82
Figure 2.25	Déstabilisation de modes propres en fonction de la vitesse	p.82
Tableau 2.26	Distribution de balourds	p.83
Tableau 2.27	Amplitudes et phase de la réponse aux balourds	p.83
Figure 2.28	Maxima de réponse aux balourds	p.83
Figure 2.29	Caractéristiques de l'ellipse de la trajectoire	p.83
Figure 2.30	Déformée en rotation	p.84
Figure 2.31	Orbite de la trajectoire	p.84
Figure 2.32	Réponse aux balourds dans les plans des capteurs	p.84
Figure 2.33	Orbites des trajectoires aux capteurs	p.84
Figure 2.34	Précession de la réponse aux balourds	p.85
Figure 2.35	Analyse API d'une vitesse critique	p.85
Tableau 2.36	Caractéristiques API d'une vitesse critique	p.85
Figure 2.37	Tracé des cercles modaux pour une réponse aux balourds	p.86
Figure 2.38	Equilibrage dynamique multi-plans multi-vitesses	p.87
Figure 2.39	Vibrations initiales et résiduelles aux capteurs	p.87

### Chapitre 3

Figure 3.1	Amplitude de réponse au balourd, amplification à la résonance et marge de séparation [API684]	p.88
Figure 3.2	Réponse d'un rotor à un balourd central	p.89
Figure 3.3	Réponse d'un rotor de compresseur centrifuge à un balourd central	p.90
Tableau 3.4	Vitesses critiques (tr/min) et facteurs d'amplification – Définition API	p.90
Figure 3.5	Amplitudes de réponse en fonction de l'inclinaison des capteurs	p.91
Figure 3.6	Maxima des réponses en fonction de l'inclinaison des capteurs	p.91
Figure 3.7	Grand axe et petit axe de la trajectoire au plan 1	p.91
Figure 3.8	Modes propres en rotation	p.92
Figure 3.9	Réponse harmonique et réponse au balourd	p.93
Tableau 3.10	Vitesses critiques et facteurs d'amplification – Définition modale	p.93
Figure 3.11	Diagramme de Nyquist de la mobilité d'un système à 1 degré de liberté	p.95
Figure 3.12	Détermination de la résonance à partir de la mobilité	p.95

Figure 3.13	Détermination de l'amortissement modal à partir de la mobilité	p.96
Figure 3.14	Mobilités d'un système à 3 degrés de liberté	p.97
Figure 3.15	Diagrammes des mobilités de la réponse au balourd central	p.98
Tableau 3.16	Vitesses critiques et facteurs d'amplification – Analyse modale	p.98
Figure 3.17	Identification des courbes de mobilité par des cercles modaux	p.99
Figure 3.18	Maxima des mobilités	p.100
Tableau 3.19	Analyse modale sur les maxima de mobilité	p.100
Tableau 3.20	Comparaison des analyses modales	p.101
Figure 3.21	Ellipse de la courbe de mobilité des capteurs C1	p.101
Figure 3.22	Mesures vibratoires du rotor balourdé	p.103
Figure 3.23	Réponses aux balourds tests seuls	p.103
Figure 3.24	Phases des réponses aux balourds	p.104
Figure 3.25	Courbes de mobilité pour les lancers avec un balourd central	p.104
Figure 3.26	Courbes de mobilité pour les lancers avec les balourds aux extrémités en phase	p.105
Figure 3.27	Courbes de mobilité pour les lancers avec les balourds aux extrémités en opposition de phase	p.106
Figure 3.28	Comparaison mobilité palier côté butée et résonance de support	p.106
Tableau 3.29	Analyse modale MDOF de la plage 10000/13575 tr/min	p.106
Figure 3.30	Fonctions de transfert relevées sur un corps de palier	p.107
Figure 3.31	Evolution du petit axe de l'ellipse de la trajectoire et de la précession	p.108
Figure 3.32	Evolution des orbites	p.108
Figure 3.33	Diagramme de Campbell particulier d'un compresseur centrifuge	p.111
Figure 3.34	Compresseur centrifuge expérimental de mesure de performances	p.112
Figure 3.35	Tirant déformé après rotation sur sa propre vitesse critique	p.112
Figure 3.36	Ligne PV d'un turboalternateur	p.113
Figure 3.37	Montage turbo-réducteur sur socle	p.113
Figure 3.38	Influence du lignage sur les réactions de paliers	p.113
Figure 3.39	Fréquences propres et amortissements modaux en fonction du délignage	p.114
Figure 3.40	Vitesses critiques et facteur d'amplification en fonction du délignage et de la charge	p.114
Figure 3.41	Réponses vibratoires en fonction de la charge et du délignage	p.115

## Chapitre 4

Figure 4.1	Formes modales typiques d'un rotor de compresseur centrifuge	p.117
Figure 4.2	Diagrammes de Campbell d'un compresseur centrifuge	p.118
Figure 4.3	Module de compression	p.118
Figure 4.4	Rotors de compresseurs centrifuges de gas lift	p.119
Figure 4.5	Compresseur centrifuge en essais à pleine charge	p.119
Figure 4.6	Diagramme de réglage des paliers à patins oscillants	p.120
Figure 4.7	Comparaison des caractéristiques dynamiques d'un labyrinthe et d'un nid d'abeilles	p.121
Figure 4.8	Diagrammes des marges de stabilité	p.121
Figure 4.9	Spectres vibratoires typiques	p.122
Figure 4.10	Essais de caractérisation dynamique de paliers – Instrumentation	p.123

Figure 4.11	Essais de caractérisation subsynchrone de paliers hydrodynamiques	p.124
Figure 4.12	Banc de caractérisation dynamique d'étanchéités du TAMU	p.125
Figure 4.13	Critères de stabilité de Fulton et de Kirk-Donald	p.125
Figure 4.14	Diagramme global de stabilité	p.126
Figure 4.15	Influence des tolérances de fabrication sur le jeu	p.128
Figure 4.16	Influence des tolérances de fabrication sur la précharge géométrique	p.128
Figure 4.17	Influence de la tolérance de l'épaisseur des patins sur la précharge géométrique	p.129
Figure 4.18	Influence de la tolérance du rayon de courbure des patins sur la précharge géométrique	p.129
Figure 4.19	Caractéristiques dynamiques non synchrones d'un palier à cinq Patins oscillants	p.130

## Chapitre 5

Figure 5.1	Compresseur centrifuge à PMA	p.132
Figure 5.2	Palier magnétique actif et garniture sèche	p.133
Figure 5.3	Fonction de transfert d'un PMA	p.136
Figure 5.4	Caractéristiques dynamiques des PMA	p.136
Figure 5.5	Diagramme de Campbell d'un rotor de compresseur centrifuge sur paliers magnétiques actifs	p.137
Figure 5.6	Profil du filtre du contrôle automatique de balourd	p.138
Figure 5.7	Effet du contrôle automatique de balourd sur la réponse au balourd	p.138
Figure 5.8	Diagramme des vitesses critiques non amorties avec contrôle automatique de balourd	p.139
Figure 5.9	Vitesses critiques supplémentaires dues au contrôle automatique de balourd	p.139
Figure 5.10	Avance de phase spatiale	p.140
Figure 5.11	Réalisation de l'avance de phase spatiale	p.140
Figure 5.12	Effet de l'avance de phase spatiale sur un mode rétrograde	p.140
Figure 5.13	Sous-marin à propulsion nucléaire	p.142
Figure 5.14	Modèle aux éléments finis du turboalternateur	p.142
Tableau 5.15	Nombre de modes propres instables	p.145
Figure 5.16	Modes propres instables de rotor	p.145
Figure 5.17	Coupe de compresseur centrifuge à PMA sans butée	p.146
Figure 5.18	Multiplicateur hélicoïdal à simple hélice	p.146
Figure 5.19	Rotor avec un PMA amortisseur côté butée	p.148
Figure 5.20	Rotor avec un PMA amortisseur central	p.148
Figure 5.21	Compresseur de gazoduc à PMA à entrée axiale	p.149
Figure 5.22	Compensation de la poussée au démarrage par dépressurisation partielle de la roue	p.149
Figure 5.23	Rotor de compresseur à paliers magnétiques	p.150
Figure 5.24	Simulation d'atterrissage avec un axe horizontal (vitesse constante)	p.151
Figure 5.25	Simulation d'atterrissage avec un axe horizontal (descente en vitesse)	p.151
Figure 5.26	Spectre cascade en descente en vitesse lors d'un atterrissage	p.151
Figure 5.27	Projet d'une installation de récupération sous-marine en Norvège	p.152

Figure 5.28	Simulation d'atterrissage avec un axe vertical	p.152
Figure 5.29	Atterrissage vertical avec un palier auxiliaire 3 points	p.153
Figure 5.30	Projet ENTARES – Réacteur nucléaire HTR	p.153
Figure 5.31	Schéma bloc multimodal de l'asservissement de position par PMA	p.155
Figure 5.32	Moteur électrique à grande vitesse (entraînement d'un compresseur centrifuge de transport de gaz)	p.156
Figure 5.33	Motocompresseur centrifuge sur skid	p.157
Figure 5.34	Motocompresseur intégré	p.157
Figure 5.35	Architecture du motocompresseur centrifuge intégré	p.157
Figure 5.36	Réfrigération, principe et circuits externes	p.158
Figure 5.37	Réfrigération, circulations internes	p.158
Figure 5.38	Unité pilote de motocompresseur centrifuge intégré	p.158
Figure 5.39	Mesures des performances aérodynamiques et thermiques	p.159
Figure 5.40	Différents réglages des asservissements des PMA du compresseur	p.159
Figure 5.41	Génération d'un modèle inverse d'actionneur électromagnétique par réseau de neurones	p.160
Figure 5.42	Système de commande électromagnétique linéaire	p.161
Figure 5.43	Courbes d'hystérésis magnétique d'un matériau ferromagnétique (induction B en fonction de l'excitation H)	p.161
Figure 5.44	Contrôleur flou pour un système à 3 ddl	p.162
Figure 5.45	Dispositif multi degrés de liberté pour la validation d'un contrôleur flou	p.163

## Chapitre 6

Figure 6.1	Ligne d'arbres de compresseur alternatif	p.166
Figure 6.2	Embiellage	p.166
Figure 6.3	Instrumentation embarquée	p.167
Figure 6.4	Spectre cascade	p.167
Tableau 6.5	Fréquences critiques de torsion	p.167
Figure 6.6	Contour des rotors	p.168
Tableau 6.7	Modèles	p.168
Figure 6.8	Modèles tridimensionnels éléments finis	p.169
Figure 6.9	Élément SOLID187	p.169
Figure 6.10	Déformées modales	p.169
Figure 6.11	Définition géométrique du congé équivalent	p.170
Figure 6.12	Arbres épaulés, coefficient de pénétration p	p.171
Figure 6.13	Arbres épaulés, modèle équivalent	p.171
Figure 6.14	Définition de la ligne de fuite et du cône équivalent au congé	p.171
Figure 6.15	Modélisation des lignes de fuite par des cylindres	p.172
Figure 6.16	Modélisation des lignes de fuite par des cônes	p.172
Figure 6.17	Décomposition des disques en tronçons coniques	p.172
Tableau 6.18	Fréquences propres (Hz) des modèles analytiques	p.173
Figure 6.19	Etude paramétrique de minimisation du critère	p.173
Figure 6.20	Définition d'un tronçon conique	p.174
Tableau 6.21	Fréquences propres (Hz) des modèles aux éléments finis de poutres	p.176
Figure 6.22	Minimisation du critère pour les éléments finis cylindriques	p.176
Figure 6.23	Minimisation du critère pour les éléments finis coniques	p.176
Figure 6.24	Diagramme de Campbell d'un motocompresseur à vitesse fixe	p.177

Figure 6.25	Diagramme de Campbell d'un motocompresseur à vitesse variable	p.178
Figure 6.26	Combinaisons des fréquences d'excitation électriques	p.179
Figure 6.27	Excitations générées par les moteurs à vitesse variable	p.179
Figure 6.28	Formes modales et couples modaux	p.180
Figure 6.29	Balayages en célérité	p.180
Figure 6.30	Courant de court-circuit d'un alternateur	p.181
Figure 6.31	Couples électromagnétiques de court-circuit	p.181
Figure 6.32	Réponse au court-circuit biphasé	p.184
Figure 6.33	Réponse au court-circuit triphasé	p.184
Figure 6.34	Réponse à un faux couplage à 120°	p.184
Tableau 6.35	Extrema des excitations et des réponses instationnaires ( $\Gamma/\Gamma_n$ )	p.184
Figure 6.36	Participations modales des trois premiers modes propres dans la réponse au faux couplage	p.185
Figure 6.37	Réponse au faux couplage pour deux valeurs d'amortissements modaux	p.185
Figure 6.38	Maximum et minimum des amplitudes des oscillations libres après élimination du court-circuit biphasé	p.185
Figure 6.39	Réponses au court-circuit biphasé pour deux temps différents d'élimination du défaut	p.186
Figure 6.40	Couples de démarrage d'un moteur électrique asynchrone	p.186
Figure 6.41	Réponse instationnaire en montée en vitesse d'un moteur	p.187
Figure 6.42	Courbe de fatigue de Wöhler	p.188
Figure 6.43	Réponse au court-circuit biphasé – Accouplement à lames	p.189
Figure 6.44	Réponse au court-circuit biphasé – Accouplement à plots élastiques	p.189
Figure 6.45	Roue chevron de réducteur avec arbre normal et arbre torsible	p.189
Figure 6.46	Réponses maximales en couple en fonction de la raideur de l'arbre torsible	p.190
Figure 6.47	Réponses maximales en contrainte en fonction de la raideur de l'arbre torsible	p.190
Figure 6.48	Diagramme de Campbell d'un motocompresseur de reformage catalytique	p.191
Figure 6.49	Transmission des réactions de denture aux paliers	p.192
Tableau 6.50	Fréquences propres couplées flexion-torsion	p.192
Figure 6.51	Modes propres couplés flexion torsion	p.192
Tableau 6.52	Couples maximaux de réponse aux courts-circuits	p.193

## Chapitre 7

Figure 7.1	Dispositif d'injection partielle	p.197
Figure 7.2	Distribution angulaire de la puissance en injection partielle	p.197
Figure 7.3	Montage en paquets des aubages tournants	p.197
Figure 7.4	Modes propres de paquets d'aubages à action	p.198
Figure 7.5	Diagramme de Haigh de tenue en fatigue	p.199
Figure 7.6	Rotor incidenté de turbine	p.200
Figure 7.7	Faciès de rupture du pied d'aubage	p.200
Figure 7.8	Contenu fréquentiel de l'excitation	p.201
Figure 7.9	Combinaison de Fresnel des excitations	p.201
Figure 7.10	Contenu fréquentiel de la réponse	p.203
Figure 7.11	Réponse temporelle en contrainte	p.203
Figure 7.12	Distribution des contraintes de Von Mises en centrifuge	p.203

Figure 7.13	Coefficient de sécurité en fatigue	p.203
Figure 7.14	Résultante de l'excitation tangentielle	p.204
Figure 7.15	Roue 3D de compresseur centrifuge	p.205
Figure 7.16	Modèle de photoélasticimétrie d'une roue de compresseur centrifuge	p.205
Figure 7.17	Analyse modale d'une roue tridimensionnelle de compresseur centrifuge par interférométrie laser	p.205
Tableau 7.18	Comparaison calcul mesure des fréquences propres de deux roues de compresseur centrifuge	p.206
Figure 7.19	Modèles d'usinage et maillage pour analyse aux éléments finis	p.207
Figure 7.20	Analyses statiques de contraintes	p.207
Figure 7.21	Analyses dynamiques de roues de compresseur centrifuge en rotation	p.207
Figure 7.22	Diagramme de coïncidence	p.208
Figure 7.23	Incidents survenus au diamètre extérieur ou au bord d'attaque de roues de compresseurs	p.208
Figure 7.24	Incident sur les deux premiers étages	p.209
Figure 7.25	Diagrammes de coïncidence des trois étages	p.209
Tableau 7.26	Nombre de résonances	p.209
Figure 7.27	Etage de compression	p.210
Figure 7.28	Propagation de deux fissures	p.210
Figure 7.29	Vue macrographique de la fissure	p.210
Figure 7.30	Faciès de rupture et propagation de la fissure	p.210
Figure 7.31	Mode propre	p.211
Figure 7.32	Contraintes modales	p.211
Figure 7.33	Diagramme de coïncidence	p.211
Figure 7.34	Diagramme de Haigh de tenue en fatigue	p.212
Figure 7.35	Représentation graphique de la règle de Neuber pour un chargement alterné	p.213
Tableau 7.36	Caractéristiques de l'acier 20MV6	p.213
Figure 7.37	Proposition de modification de l'assemblage aubes/flasque par un congé pré usiné dans le flasque	p.214

## Chapitre 8

Figure 8.1	Bouteilles antipulsatoires et réseaux gaz	p.216
Figure 8.2	Longue bouteille antipulsatoire	p.217
Tableau 8.3	Pulsations de pression (% c-c)	p.217
Tableau 8.4	Vibrations mesurées (mm/s rms)	p.218
Figure 8.5	Points de mesure des vibrations	p.218
Figure 8.6	Apparition d'une fissure sur une bouteille antipulsatoire	p.218
Figure 8.7	Turbocompresseur de gaz de synthèse d'ammoniac	p.219
Figure 8.8	Aubage mobile court à action	p.220
Figure 8.9	Cernes de fatigue et propagation de la fissure dans le tenon	p.220
Figure 8.10	Possibilité de vibration du ruban autour de la ligne des rivets	p.220
Figure 8.11	Canal inter aube	p.220
Figure 8.12	Modification de la rangée	p.221
Figure 8.13	Petite turbine d'entraînement mécanique	p.221
Figure 8.14	Soupape régulatrice double siège et commande	p.221
Figure 8.15	Diagramme de coïncidence	p.224
Figure 8.16	Emplacement des capteurs	p.225
Figure 8.17	Diagramme de Campbell expérimental	p.225

Figure 8.18	Fluctuations de pression à l'amont de la roue	p.225
Figure 8.19	Fluctuations de pression dans le diffuseur	p.225
Figure 8.20	Spectre de pression 2D dans la section 10	p.226
Figure 8.21	Spectre de pression 2D dans la section 30	p.226
Figure 8.22	Compresseur centrifuge d'essais	p.227
Figure 8.23	Etage de compression centrifuge	p.227
Figure 8.24	Boucle d'essais de compresseur expérimental	p.227

## Chapitre 9

Figure 9.1	Effet du pompage sur les vibrations d'un compresseur centrifuge	p.228
Figure 9.2	Courbes caractéristiques d'un compresseur centrifuge	p.230
Figure 9.3	Courbes caractéristiques de réseaux gaz	p.231
Figure 9.4	Point de fonctionnement d'un compresseur centrifuge sur son réseau de refoulement	p.231
Figure 9.5	Organigramme du modèle aérothermodynamique de compresseur dans ses réseaux	p.232
Tableau 9.6	Caractéristiques thermodynamiques d'un gaz naturel	p.233
Figure 9.7	Réponse transitoire à une augmentation de vitesse	p.236
Figure 9.8	Réponse transitoire à une diminution de la consommation	p.236
Figure 9.9	Trajectoires des réponses transitoires dans le plan adimensionnel de la caractéristique $\phi - \psi$ de compression	p.237
Figure 9.10	Sortie de la zone de fonctionnement du compresseur	p.237
Figure 9.11	Coefficient de hauteur et rendement polytropique hors de la plage de fonctionnement	p.238
Figure 9.12	Réponses à une perturbation de -1% de vitesse en 15 s pour deux coefficients de débit situés de part et d'autre du maximum de hauteur polytropique	p.239
Figure 9.13	Réponse à une perturbation de vitesse de +1% pour un point de fonctionnement à gauche du maximum de hauteur polytropique	p.240
Figure 9.14	Réponses à des perturbations en débit de 1% en 15 secondes	p.240
Figure 9.15	Réponse oscillatoire instable à une variation de débit pour de très petits volumes à l'aspiration et au refoulement	p.241
Figure 9.16	Réponse oscillatoire amortie pour $\phi = 0,016$ et de très petits volumes de tuyauterie	p.241
Figure 9.17	Réponse oscillatoire permanente pour de très petits volumes de tuyauterie	p.241
Figure 9.18	Réponse à une perturbation de 1% de débit en 15 secondes pour de très grands volumes de réseaux gaz	p.242
Figure 9.19	Etude de la stabilité – Evolution des valeurs propres en fonction du coefficient de débit	p.243
Figure 9.20	Croisement des deux premières valeurs propres	p.244
Figure 9.21	Caractéristique complète du compresseur centrifuge	p.245
Figure 9.22	Cycle de pompage dans la caractéristique adimensionnelle	p.246
Figure 9.23	Fluctuation du débit massique en pompage	p.246
Figure 9.24	Fluctuations des pressions d'aspiration et de refoulement en pompage	p.246

## Annexes

Figure C.1	Fonctions d'appartenance	p.268
Figure C.2	Système d'aide à la décision par logique floue	p.269
Figure C.3	Pendule inversé	p.270
Figure C.4	Modèle du pendule inversé	p.270
Figure C.5	Profil de force appliquée au chariot du pendule	p.270
Figure C6	Performance d'un contrôleur à logique floue sur le pendule inversé	p.271
Figure C.7	Neurone biologique	p.271
Figure C.8	Neurone synthétique	p.271
Figure C.9	Fonctions d'activation des neurones synthétiques	p.272
Figure C.10	Réseau de neurones	p.272
Figure C.11	Identification neuronale d'un système	p.272
Figure C.12	Réglage d'un contrôleur neuronal en fonction d'un gabarit de performance	p.272
Figure C.13	Simulation d'un contrôleur neuronal	p.273
Figure D.1	Modèle de validation des éléments coniques en torsion	p.279
Tableau D.2	Comparaison des premières fréquences propres de torsion	p.280
Figure D.3	Effet du modèle à 2ddl/nœud sur la déformée modale	p.280

# 1. Introduction

## 1.1 Description des turbomachines concernées

Avant d'entrer dans les développements, il convient de présenter brièvement les types de turbomachines sur lesquelles ont porté les travaux. Il s'agit des turbines à vapeur industrielles et des compresseurs centrifuges. Ces deux types de machines sont toujours définis pour des applications spécifiques. L'utilisation du terme de "turbomachines" se restreindra alors dans la suite à ces deux types de machines.

### 1.1.1 Turbines à vapeur industrielles

Les turbines à vapeur dites "industrielles" sont des machines mono corps qui couvrent essentiellement des applications de récupération d'énergie, bien souvent dans un contexte de cogénération d'énergie thermique et électrique.

C'est ainsi que l'on trouvera d'une façon assez schématique :

- des machines à condensation où l'on maximise la chute d'enthalpie, comme par exemple dans des cycles combinés (récupération de la chaleur des gaz d'échappement des turbines à gaz) ; ces machines ont des échappements soit radiaux (figure 1.1), soit axiaux (figure 1.2) suivant les conditions d'installation et la technique du condenseur ;
- des machines à contrepression (figure 1.3) où la totalité du débit de vapeur sera envoyé dans un autre procédé, comme par exemple des sucreries ou des unités de chauffage urbain ;
- des machines que l'on pourrait appeler "mixtes" où une partie importante du débit de vapeur est prélevé en cours de détente pour alimenter l'autre procédé et le reste va à l'échappement à plus basse pression pour maximiser l'énergie électrique produite, comme par exemple dans les usines de production de pâte à papier, ou encore des usines d'incinérations d'ordures ménagères. Dans ce cas, la pression du réseau de soutirage est très souvent régulée par le système de la turbine, ce qui maximise la production énergétique. Ainsi, la figure 1.4 montre une turbine à contrepression où un jeu de soupapes régulatrices, analogue à celui qui assure la régulation de vitesse en tête de la machine, a été ajouté pour cette fonction. La figure 1.5 est la coupe d'une turbine à condensation où l'on a utilisé un obturateur à grille (en jaune) qui assure la même fonction. Dans ce cas de turbines que l'on appelle "à extraction réglée", on réalise une régulation multi variables découplant totalement les deux fonctions vitesse et pression.

Une autre particularité des lignes d'arbres incluant ces turbines est que la puissance est transmise à l'alternateur par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse. Les vitesses de rotations sont donc largement plus élevées que les 1 500 ou 3 000 tr/min des turbines des centrales de production d'électricité. Ces vitesses de rotation sont adaptées pour obtenir des triangles de vitesse et des auteurs d'aubages conduisant à de hauts rendements aérodynamiques.

Cette particularité conduit naturellement à un autre domaine d'application de ces turbines à vapeur industrielles qui est celui des entraînements mécaniques de

compresseurs centrifuges (jusqu'à 16 000 tr/min industries de la pétrochimie et du raffinage) ou de pompes (de l'ordre de 5 500 tr/min pour les pompes alimentaires des centrales thermiques par exemple), applications pour lesquelles on a besoin de hautes vitesses de rotation.

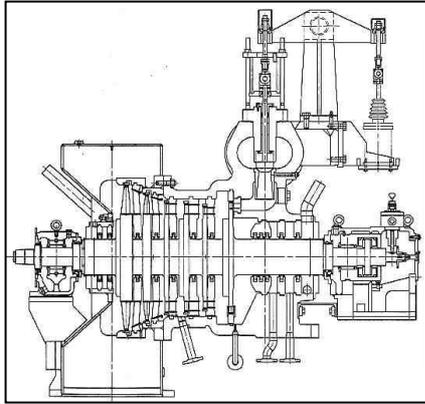


Figure 1.1  
Turbine à condensation  
(Échappement radial)

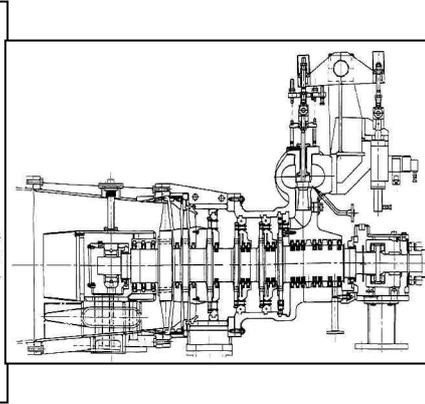


Figure 1.2  
Turbine à condensation  
(Échappement axial)

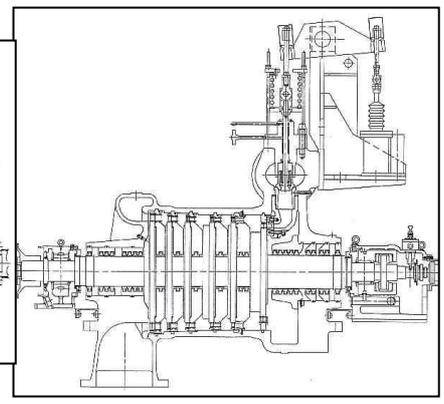


Figure 1.3  
Turbine à contrepression

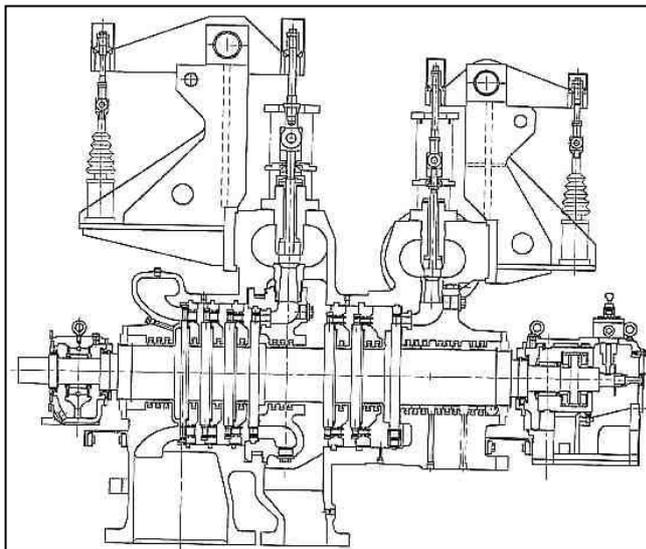


Figure 1.4 - Turbine à contrepression  
et extraction réglée

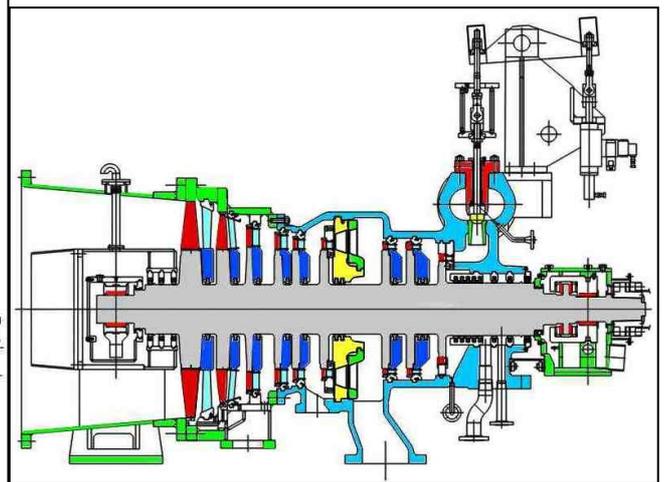


Figure 1.5 - Turbine à condensation  
et extraction réglée

Les turbines industrielles (figure 1.6) se composent :

- d'une enveloppe en acier moulé pour l'admission, se terminant souvent en une partie d'échappement à basse pression en mécano soudé ; elle possède un plan de joint horizontal boulonné ; son montage sur socle ou sur massif en béton doit autoriser toutes les dilatations thermiques sans aucun bridage ;
- de paliers portant le rotor et d'une butée ; la technique utilisée pour les coussinets et la butée est celle des paliers hydrodynamiques à patins oscillants (figure 1.13) ; dans le cas des machines à échappement axial, comme dans la figure 1.6, le palier côté échappement dans le flux de vapeur est porté dans l'enveloppe par des bras ;
- d'un rotor monobloc en acier forgé portant les aubages mobiles et accouplé par un accouplement flexible à la machine entraînée ;

- d'aubages fixes montés dans des diaphragmes assemblés dans le stator ;
- d'étanchéités de sorties d'arbre et d'étanchéités internes à labyrinthes ;
- d'organes de contrôle des débits de vapeur (boîte à soupapes régulatrices pour l'admission, boîte à soupapes ou obturateur à grille pour l'extraction) intégrés à l'enveloppe et commandés par des servovérins hydrauliques ;
- d'une vanne d'arrêt de sécurité.

On citera, pour être plus complet, qu'il existe d'autres configurations de turbines à vapeur industrielles, comme les turbines à réducteur intégré (étages aérodynamiques séparés montés en porte-à-faux sur des sorties d'arbre d'un réducteur à engrenage).

Sans vouloir comparer les avantages relatifs des techniques des turbines à action (détente complète dans les aubes fixes et récupération de l'énergie cinétiques dans les aubages mobiles) ou à réaction (détente partagée entre les aubages fixes et mobiles), nous allons travailler sur des machines ayant des aubages à action pour les parties haute et moyenne pression et des aubages torsés à réaction pour les parties basse pression à condensation.

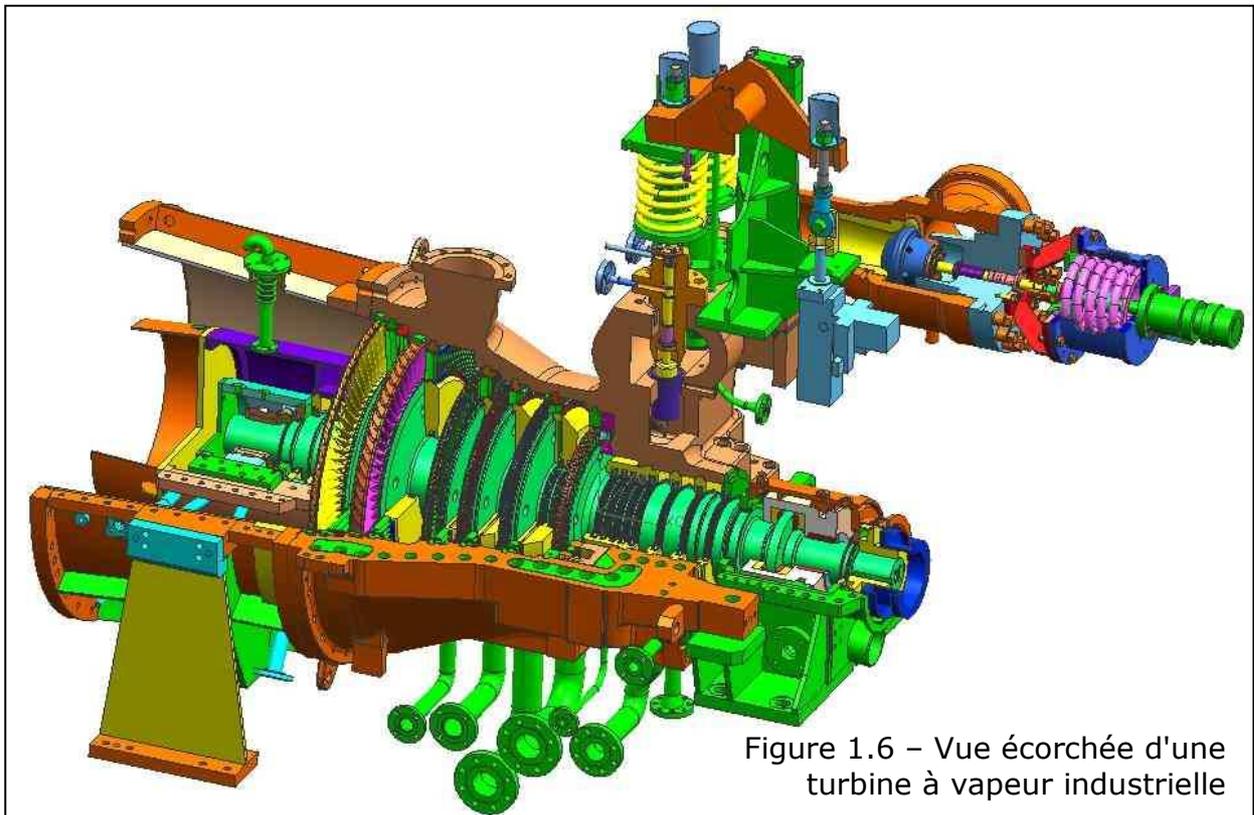


Figure 1.6 – Vue écorchée d'une turbine à vapeur industrielle

Deux grandes familles de normes régissent la conception de ces turbines :

- les normes éditées par le Comité Electrotechnique International (CEI ou IEC) ;
- les standards américains de l'American Petroleum Institute (API) pour les applications pétrolières et pétrochimiques – le standard API 612 [**API612**], renforcée par la recommandation de l'API RP 684 [**API684**], est celui qui propose le plus de développements sur le plan de la dynamique de rotor.

Ces normes sont présentées aux chapitres 1.2.4 et 1.2.5.

### 1.1.2 Compresseurs centrifuges

Les compresseurs centrifuges sont une technique plus récente que la turbine à vapeur. Ils ont pris le relais de compresseurs alternatifs (à pistons) dans les applications nécessitant de plus grands débits volumiques. Ils se situent entre ces compresseurs alternatifs et les compresseurs axiaux de grands coefficients de débit.

Les compresseurs centrifuges présentent des avantages indéniables de disponibilité (maintenance réduite) par rapport aux machines alternatives, ainsi que de pouvoir manipuler des débits volumiques beaucoup plus grands avec une taille de machine acceptable. Les machines auxquelles nous nous intéressons sont celles destinées à l'industrie du pétrole, de la pétrochimie et du gaz naturel. On les appelle aussi souvent compresseurs centrifuges "de procédé", étant donnée leur implication dans le traitement auquel ils sont associés.

Sur le plan aérodynamique, les compresseurs centrifuges couvrent une très large plage de coefficient de débit entre 0,005 et 0,12. Ils se situent au-delà des compresseurs alternatifs et en dessous des machines hélico-centrifuges, et donc en dessous des compresseurs axiaux qui ont des coefficients de débit supérieurs à 0,3.

La plage de machines à laquelle nous nous intéressons utilise typiquement des vitesses périphériques au niveau du diamètre extérieur des roues ou impulseurs atteignent 300 m/s. Ceci conduit à des vitesses de rotation de 5 500 à 18 000 tr/min, suivant les diamètres de roues sélectionnés (ici de 300 à 700 mm). Les puissances par corps atteignent 30 MW. Leurs applications couvrent :

- dans le domaine du gaz naturel : la récupération du gaz sur champ, le traitement (désulfuration séparation), le transport (gazoducs) et le stockage en cavités ;
- dans le domaine du pétrole : la récupération assistée du pétrole par les procédés de "gas lift" (compression jusqu'à 150 bar) ou de réinjection de gaz naturel dans le champ (au-delà de 300 bar) ;
- dans le domaine du raffinage : les unités de craquage, d'hydrotraitement, d'aromatisation, d'isomérisation, d'alkylation, etc. où les compresseurs centrifuges font tourner la charge dans les réacteurs et constituent ainsi les véritables moteurs des raffineries ;
- dans le domaine de la pétrochimie : les unités d'engrais (ammoniac, urée), etc.

Les plages de pression sont les plus étendues dans les domaines du gaz naturel et du pétrole (où l'on manipule la phase gazeuse) : de la pression atmosphérique à 800 bar.

La composition du gaz est celle du gisement, donc la masse, et surtout les composants "acides" (dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  et sulfure d'hydrogène  $\text{H}_2\text{S}$ ) sont typique de chaque site. Les composants acides sont en constante augmentation dans les applications, compte tenu de la diminution des ressources (on a longtemps laissé de côté les champs "acides"), de l'évolution des procédés de traitement qui tolèrent mieux ces composants, et enfin de la protection de l'environnement (récupération des effluents acides qui étaient autrefois torchés, et que l'on va maintenant traiter). L'impact de ces composants acides en milieu humide est considérable sur la métallurgie de la machine en raison des risques de fissuration par corrosion sous tension qu'ils génèrent.

Les applications de raffinerie et de pétrochimie voient la plus grande plage de masse molaire depuis 4 ou 5 kg/kmol pour les précédés nécessitant une forte recirculation d'hydrogène, jusqu'à 40 à 50 kg/kmol pour les groupes de réfrigération (alkylation).

Ces éléments, associés aux productions des sites, expliquent l'unicité des applications de ces compresseurs, pour lesquels les activités de conception, et par conséquent d'études de dynamique constituent une phase primordiale dans la production. L'architecture des lignes de compression est également très dépendante de l'application.

Pour atteindre des taux de compression élevés (100 par exemple entre 4,5 à 450 bar pour une application de réinjection de gaz naturel), il est nécessaire de disposer plusieurs machines multi étagées en série. Les étages sont regroupés en sections pour lesquelles la limite est la température de refoulement pour des considérations de comportement du gaz, de technologies d'étanchéités et de rendement aérodynamique. Les sections sont regroupées par corps avec comme seule limite les considérations de dynamique de rotor ; ce point concerne directement le présent mémoire. Enfin, les corps sont regroupés par lignes d'arbres pour limiter le nombre d'entraîneurs, le volume et les poids des installations (considérations particulièrement importantes en offshore).

On trouvera donc :

- des corps avec une seule section d'étages en ligne (coupe d'un compresseur à 4 roues de grand coefficient de débit en figure 1.7 et photographie d'un compresseur à haute pression à 6 roues en figure 1.8) ;
- des corps en deux sections en ligne (à titre d'exemple, la figure 1.9 représente la coupe et la photographie de l'aérodynamique d'un compresseur centrifuge à 2 sections en ligne (3 + 3 étages), configuration classique de machine manipulant des gaz de masse molaire élevée ;
- des compresseurs à deux sections en "back to back", arrangement semblable au précédent, mais où les deux aspirations sont aux extrémités et les deux refoulements au centre.

On pourra ensuite installer jusqu'à trois corps sur la même ligne d'arbres avec le même entraîneur.

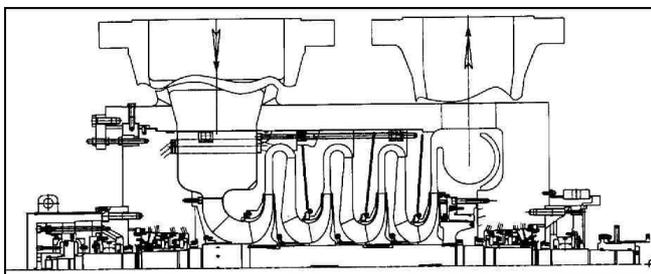


Figure 1.7 – Corps de compresseur centrifuge



Figure 1.8 – Cartouche de compresseur centrifuge haute pression

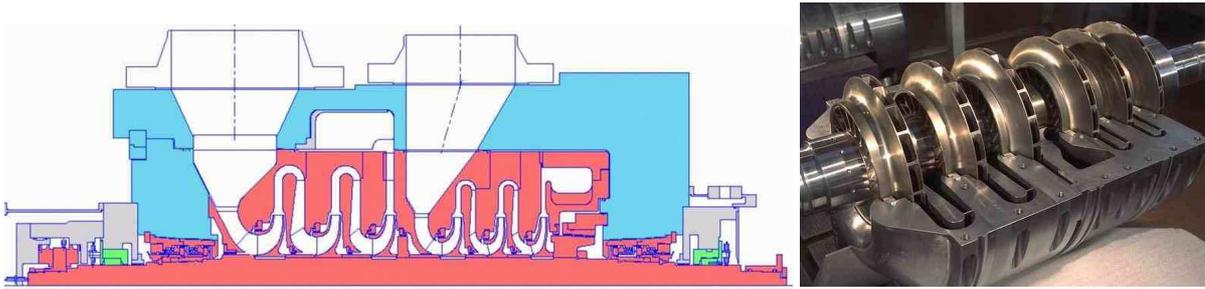


Figure 1.9 – Compresseur de gaz lourd à deux sections en ligne

Les corps des compresseurs centrifuges (figure 1.10) sont constitués :

- d'une enveloppe pouvant être en acier moulé pour les corps de grandes dimensions à relativement faible pression avec un plan de joint horizontal boulonné (figure 1.11) comme pour les turbines à vapeur ou pour des compresseurs de gazoducs ("boosters" – figure 1.12), mais plus généralement en acier forgé, ces corps de type "barrel" (figures 1.7 et 1.9) étant fermés par un couvercle retenu axialement par des anneaux de cisaillement ; les tubulures sont naturellement moulées pour les corps "split" et dans le cas des corps "barrel", sont rapportées par soudage (figure 1.7) ou lamées dans l'épaisseur de l'enveloppe (figure 1.9) ;
- d'une cartouche aérodynamique comportant l'aérodynamique statorique et dans laquelle est montée le rotor (figure 1.8) qui est donc insérée dans l'enveloppe ;
- d'un rotor en acier forgé portant les roues ainsi qu'un piston d'équilibrage (à gauche sur la figure 1.8) destiné à compenser la pression différentielle s'appliquant sur les roues entre la pression d'aspiration et la pression de refoulement ;
- de paliers généralement flasqués sur le corps avec des coussinets hydrauliques du type hydrodynamique à patins oscillants et une butée également hydrodynamique à patins oscillants (figure 1.13) ;
- de garnitures d'étanchéités de sortie d'arbre, de type mécanique à gaz (figure 1.14) ;
- d'étanchéités inter étages de type à labyrinthe pour limiter les recirculations internes aux ouïes de roues et sur le rotor (figure 1.15).

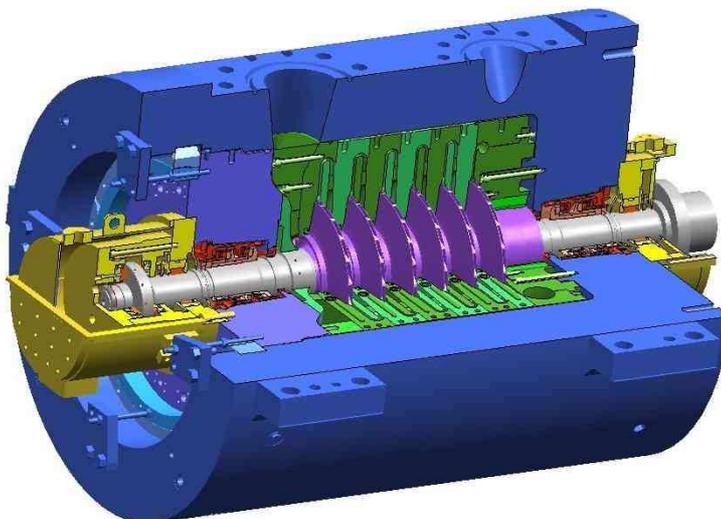


Figure 1.10 – Vue écorchée d'un compresseur centrifuge "barrel"

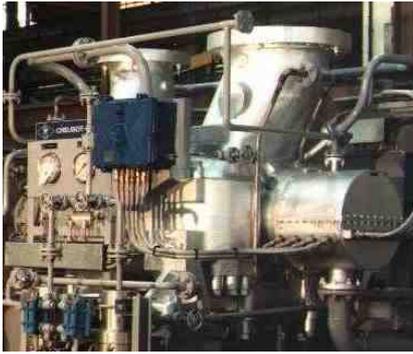


Figure 1.11 – Compresseur avec un corps moulé "split"



Figure 1.12 – Corps de compresseurs pour station de gazoduc



Figure 1.13  
Paliers à patins oscillants



Figure 1.14  
Garniture mécanique d'étanchéité de bout d'arbre

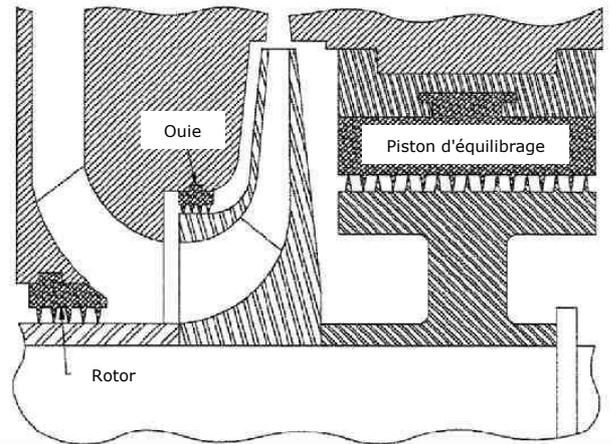


Figure 1.15  
Etanchéités internes à labyrinthes

Les dilatations différentielles axiales importantes, notamment en transitoire, dans les compresseurs multi étagés interdisant tout contrôle des jeux en sommet d'aubages, les roues sont du type fermé (flasque brasé ou soudé sur les sommets des aubages – figure 1.16). En fonction du coefficient de débit, on trouvera des étages de type bidimensionnel (figure 1.16) ou tridimensionnel afin d'adapter les triangles de vitesses à la base et en tête du profil à la vitesse d'entraînement (vue écorchée en figure 1.17). La technique des aubes intercalaires diminue le nombre de Mach à l'entrée, ce qui augmente la capacité d'un étage pour de grands débits volumiques (moyeu aubagé en figure 1.18 avant brasage du flasque).



Figure 1.16  
Roue 2D

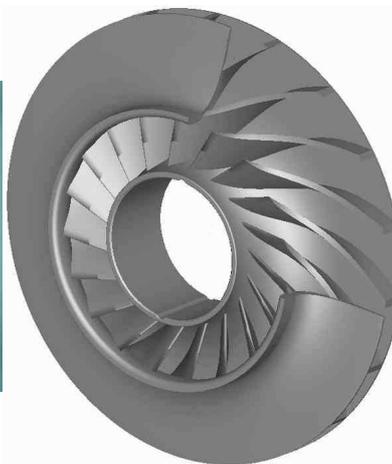
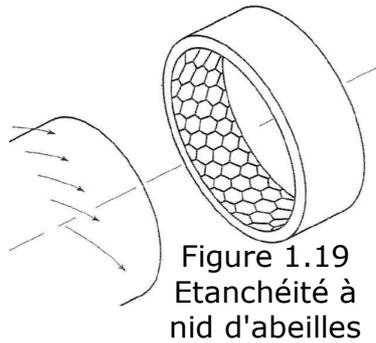


Figure 1.17 – Vue écorchée d'une roue 3D



Figure 1.18 – Moyeu de roue 3D avec aubes intercalaires



En haute pression, l'étanchéité utilisée pour le piston d'équilibrage est très souvent du type à nid d'abeilles (figure 1.19) à la place du labyrinthe, pour des raisons de dynamique de rotor qui seront examinées plus loin.

Figure 1.19  
Etanchéité à  
nid d'abeilles

Les compresseurs centrifuges concernés par ce mémoire sont conçus suivant le standard API STD 617 **[API617]** de l'American Petroleum Institute. Sur le plan de la métallurgie, il faut aussi citer le standard NACE MR0175 **[NACE0175]** – National American of Corrosion Engineers – particulièrement utile pour traiter les problèmes de corrosion sous tension liés à la fissuration sous l'action des sulfures.

Comme pour les turbines à vapeur, on dira que l'API STD 617 **[API617]** est la norme la plus développée sur le plan du comportement dynamique des rotors, et qu'elle est renforcée par la recommandation très développée de l'API RP 684 **[API684]** (voir paragraphe 1.2.5).

### 1.1.3 Autres machines abordées

Les turbines à vapeur industrielles ont des vitesses de rotation nettement supérieures à 3 000 tr/min (50 Hz). Pour la production d'électricité, il est nécessaire d'avoir un réducteur à engrenages, ramenant la vitesse de celle de la turbine à celle de l'alternateur. Pour l'alternateur, on choisit des machines à quatre pôles à 1 500 tr/min, nettement moins chères que les machines à deux pôles à 3 000 tr/min.

La ligne d'arbre (figure 1.20) se compose alors d'une turbine à vapeur, un réducteur (figure 1.21) et un alternateur (figure 1.22). On s'intéressera dans la suite à deux situations : celle du comportement en torsion d'une ligne complète et celle du comportement en flexion de la ligne petite vitesse (roue du réducteur et rotor de l'alternateur).

L'entraînement à grande vitesse des compresseurs centrifuges peut se faire soit directement par une turbine à gaz ou par une turbine à vapeur (raffineries), mais beaucoup plus généralement à partir d'un moteur électrique et d'un multiplicateur de vitesse à engrenages (figure 1.23). Pour couvrir une très large plage de production, l'entraîneur est à vitesse variable, ce qui est normal pour les turbines, mais nécessite un générateur de fréquence variable pour les moteurs électriques. Ce cas sera abordé pour le comportement en torsion d'une ligne motocompresseur.

Bien que le mémoire porte essentiellement sur les deux types de turbomachines que l'on vient de décrire, certaines applications qui seront abordées concerneront les compresseurs alternatifs (figure 1.24). Elles concerneront des phénomènes de torsion ainsi que des phénomènes acoustiques.



Figure 1.20 – Groupe turbine à vapeur, réducteur, alternateur



Figure 1.21 – Réducteur à axes parallèles



Figure 1.22 – Alternateur



Figure 1.23 – Groupe moteur, multiplicateur, compresseur centrifuge

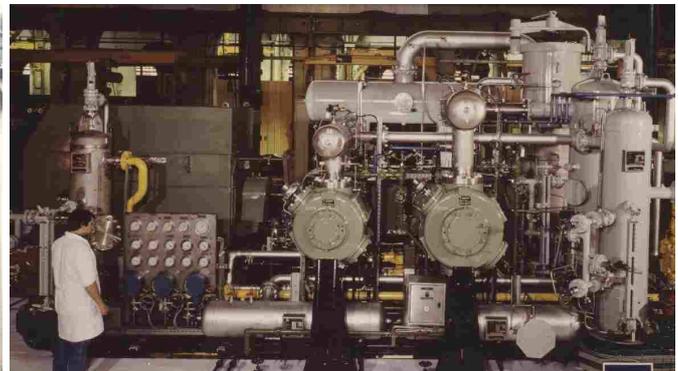


Figure 1.24 - Groupe motocompresseur alternatif (4 cylindres)

## 1.2 Eléments de l'état de l'art en dynamique de rotor

C'est une gageure que de décrire l'état de l'art en dynamique de rotor des turbomachines, tant le domaine est vaste, et tant les techniques se sont spécialisées pour chaque type de turbomachine, voire d'application.

Néanmoins, en se limitant au domaine des machines qui concernent ce mémoire, un certain nombre de sources sont d'un grand intérêt. On les classera en ouvrages de base, publications, actes de congrès et normes.

### 1.2.1 Ouvrages de base

Trois livres apportent une contribution décisive à la science de la dynamique de rotor (par ordre de date de publication) :

- Rotordynamics Prediction in Engineering de Lalanne et Ferraris en 1990 et 1998 [**Lalan90**] ;
- Turbomachinery Rotordynamics, Phenomena, Modeling, & Analysis de Childs en 1993 [**Childs93**] ;
- Rotordynamics of Turbomachinery de Vance en 1998 [**Vance**].

Il faut également citer deux livres relatifs à la lubrification des paliers, qui constituent les conditions aux limites des rotors :

- Basic lubrication theory de Cameron en 1977 [**Cameron**] ;
- Lubrification hydrodynamique – Paliers et Butées de Frêne, Nicolas Degueurce et al. [**Frêne90**], également publié en version anglaise en 1997 [**Frêne97**].

Par ailleurs, de nombreux autres ouvrages existent et apportent des éclairages différents sur la dynamique des turbomachines et leur comportement, on citera par exemple la troisième édition de l'Analyse vibratoire en maintenance – Surveillance et diagnostic des machines de Boulanger et Pachaud en 2007 [**Boulanger**].

### 1.2.2 Publications

Les articles concernant la dynamique de rotor sont le plus souvent publiés dans les transactions de l'ASME (American Society of Mechanical Engineers) comme le Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, ceux relatifs à la lubrification dans celles de l'ASME – Journal of Tribology, Journal of Sound and Vibrations – et de l'ASLE (American Society of Lubrication Engineers).

Néanmoins, il ne faut pas oublier d'autres revues qui consacrent certains numéros à ces phénoménologies comme la Revue Pétrole et Technique, la Houille Blanche, etc.

Enfin la collection des Techniques de l'Ingénieur, dans la série BM5 du Génie Mécanique, consacre plusieurs articles à ce domaine.

### 1.2.3 Actes des congrès

Un certain nombre de congrès internationaux consacrent des sessions spécifiques aux vibrations des machines tournantes. On citera, parmi les principaux :

- les congrès Turbo Expo organisés par l'ASME et l'ASME IGTI (International Gas Turbine Institute) qui se tiennent tous les ans alternativement en Amérique et en Europe ;
- les congrès européens de l'IMEchE (Institution of Mechanical Engineers) – organisme anglais – European Congress of Fluid Machinery qui se tiennent tous les ans à La Haye (Pays Bas) ;
- les conférences internationales sur les vibrations des machines tournantes organisées tous les quatre ans au Royaume Uni par l'IMEchE ;
- les conférences internationales sur la dynamique de rotor organisées tous les quatre ans, en alternance avec celles de l'alinéa précédent, par le Comité scientifique pour la dynamique de rotor de l'IFTToMM (International Federation for the promotion of the Mechanics and Machines Science) ;
- le Turbomachinery Symposium organisé tous les ans à Houston par le Turbomachinery Laboratory de l'université du Texas A&M.

### 1.2.4 Normes

Les normes donnent habituellement des critères et des limites à ne pas dépasser. C'est le cas, par exemple, d'un paragraphe particulier de la norme suivante :

- norme CEI 60045.1 du Comité Electrotechnique International (Turbines à vapeur partie 1 – Spécification) éditée en 1991 [**CEI45-1**],

ou de normes plus spécifiques comme :

- la norme ISO 1940/1 2<sup>ème</sup> édition de 2003, définissant des critères d'équilibrage de rotors en état rigide [**ISO1940-1**], cette norme devant être reprise sous forme de la norme française NF E90-600 ;
- la norme ISO 1940/2 de 1997, s'intéressant aux différents types de balourds provoquant des défauts d'équilibrage [**ISO1940-2**] ;
- la norme ISO 11342 de 1994, pour les méthodes et critères d'équilibrage de rotors en état flexible [**ISO11342**] ;
- les normes ISO 7919 parties 1 de 1996 et 3 de 2009, relatives aux niveaux de vibrations admissibles mesurés sur les parties tournantes in situ [**ISO7919-1**] et [**ISO7919-3**] – on remarquera que les niveaux proposés par ces normes sont beaucoup plus élevés que ceux des standards API que l'on va décrire au paragraphe 1.2.5, parce que ces derniers s'appliquent à des essais de réception en usine, forcément plus sévères que pour une machine ayant fonctionné plusieurs années ;
- les normes ISO 10816 parties 1 de 1995 et 3 de 2009, relatives aux niveaux de vibrations admissibles mesurés sur les parties non tournantes [**ISO10816-1**] et [**ISO10816-3**].

Par ailleurs, l'industrie pétrolière et gazière a jugé bon de codifier, non seulement les niveaux de balourds résiduels et de vibrations admissibles, mais aussi la façon de concevoir les machines et de procéder à l'analyse dynamique de rotor. L'API (American Petroleum Institute) a édité des standards de recommandations pour les différents types de machines qu'elle utilise comme par exemple :

- le Standard API 612 6<sup>ème</sup> édition de 2005 pour les turbines à vapeur d'usage spécial destinées à l'industrie pétrolière et à ses industries connexes [**API612**] ;
- le Standard API 617 7<sup>ème</sup> édition de 2002 pour les compresseurs centrifuges destinés aux industries gazière, pétrolière chimique et pétrochimique [**API617**] ;

mais aussi avec d'autres documents relatifs aux pompes centrifuges, aux turbines à gaz, aux moteurs électriques et alternateurs, aux compresseurs alternatifs, aux transmissions à engrenages, aux compresseurs centrifuges intégrés à des multiplicateurs, aux ventilateurs, aux accouplements, etc.

De plus, l'API et l'ISO ont passé des accords qui font que certaines recommandations API se déclinent automatiquement en normes internationales ISO. C'est par exemple le cas de l'ISO 10439 de 2002 [**ISO10439**] pour les compresseurs centrifuges destinés aux industries gazière, pétrolière et pétrochimique et de l'ISO 10437 de 2003 [**ISO10437**] pour les turbines à vapeur d'usage particulier. Ces documents sont aussi relayés en normes européennes.

Ces standards API décrivent, entre autres, les différents éléments de conception des machines, les matériaux à utiliser, la documentation à fournir, les contrôles et essais à pratiquer. Les chapitres de ces standards relatifs aux analyses vibratoires comportent bien sûr les éléments spécifiques des machines concernées, mais ils sont tous construits sur le même plan, couvert et expliqué par un document de "pratique recommandée", l'API RP 684 2<sup>ème</sup> édition de 2005, qui aborde les sujets des vitesses

critiques de flexion, de réponse au balourd, de stabilité vibratoire, de comportement en torsion de ligne d'arbres et d'équilibrage dynamique **[API684]**.

Puisque les turbomachines de ce mémoire sont dans le domaine de cette industrie, on va décrire brièvement dans le paragraphe suivant les principes de la conception en dynamique de rotor.

### 1.2.5 Principes de la conception en dynamique de rotor des turbomachines destinées à l'industrie pétrolière

Il ne s'agit pas ici de reproduire la norme dont la diffusion est d'ailleurs protégée, mais d'en donner un résumé et une interprétation.

La norme commence par définir qui est en charge de l'analyse dynamique afin d'être sûr qu'elle sera bien réalisée, et par lister les différents types de phénomènes qui sont susceptible d'affecter la dynamique de rotor.

#### 1.2.5.1 Analyse de flexion (ou latérale)

On utilisera indifféremment les termes d'analyse de flexion ou d'analyse latérale (définition anglo-saxonne), appellations dont on trouvera plus loin l'équivalent pour l'analyse de torsion ou torsionnelle.

Le principe de base est que les vitesses critiques de flexion sont déterminées par les maxima des réponses au balourd du système rotor palier.

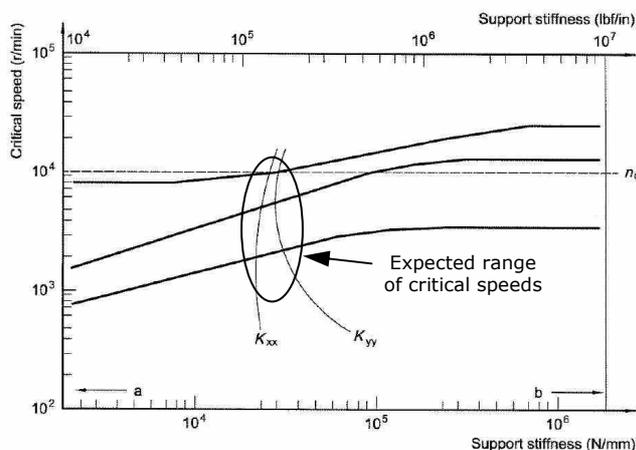


Figure 1.25 – Diagramme des vitesses critiques non amorties **[API612]** – **[API617]**

On réalise une étude paramétrique des vitesses critiques des rotors balourdés en fonction de la raideur des paliers non amortis (figure 1.25, issue des figures 1 de l'API 612 **[API612]** et 1.2-2 de l'API 617 **[API617]**). En superposant les courbes de raideurs des paliers hydrodynamiques en fonction de la vitesse de rotation, on a une idée de la position des vitesses critiques que l'on obtiendra.

*Commentaire N°1 : la prise en compte des caractéristiques réelles des paliers amortis conduit à de grands écarts avec ce diagramme qui prend alors un aspect secondaire. Il n'est pas utile de*

*lui consacrer trop de temps.*

On procède ensuite à la détermination des vitesses critiques dites "amorties", tenant donc compte des caractéristiques complètes des paliers hydrodynamiques dans leurs différentes configurations (plage de température d'huile, tolérance de réalisation sur le jeu et la précharge géométrique) et fonction de la vitesse de rotation, ainsi que de la charge (en effet, dans le cas des turbines à vapeur à injection partielle, la charge sur les paliers dépend de la puissance délivrée). Les raideurs des supports de paliers sont

aussi considérées si elles sont inférieures à 3,5 fois la raideur des films d'huile. On introduit aussi les caractéristiques dynamiques des étanchéités tournantes de sortie d'arbre, le cas échéant.

Ces analyses sont faites machine par machine. En effet, les accouplements flexibles utilisés découplent complètement chacun des rotors, mais en cas d'utilisation d'accouplement rigide, il y a lieu de calculer la ligne complète. On aura l'occasion de revenir sur ce sujet au chapitre 6.

La plage d'étude en vitesse est de 0 à 125% de la survitesse (seuil de déclenchement en vitesse).

Différentes distributions de balourds sont appliquées, de façon à exciter tous les modes propres, comme montré sur la figure 1.26 pour l'arrangement des rotors entre paliers. D'autres configurations sont aussi prévues les machines en porte-à-faux. Les balourds  $U_i$  utilisés pour le calcul sont égaux à 4 fois la valeur suivante :

$$U_i = \frac{6350 m_i}{n_c} \quad (1.1)$$

- où  $U_i$  est exprimé en g.mm ;  
 $m_i$  est une masse (kg) dont la définition change en fonction de la vitesse critique à étudier (masse du rotor, masse en porte-à-faux ou masse supportée par le palier – même si physiquement ce sont les poids qui sont repris) – voir la norme pour les valeurs exactes ;  
 $n_c$  est la vitesse critique (tr/min) que l'on veut étudier.

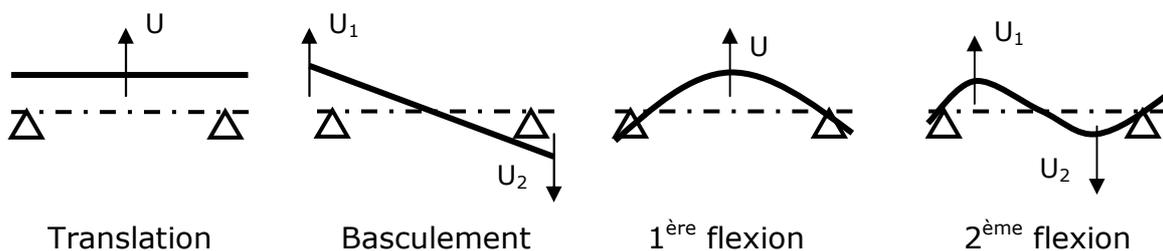


Figure 1.26 – Modes propres et configurations de balourds

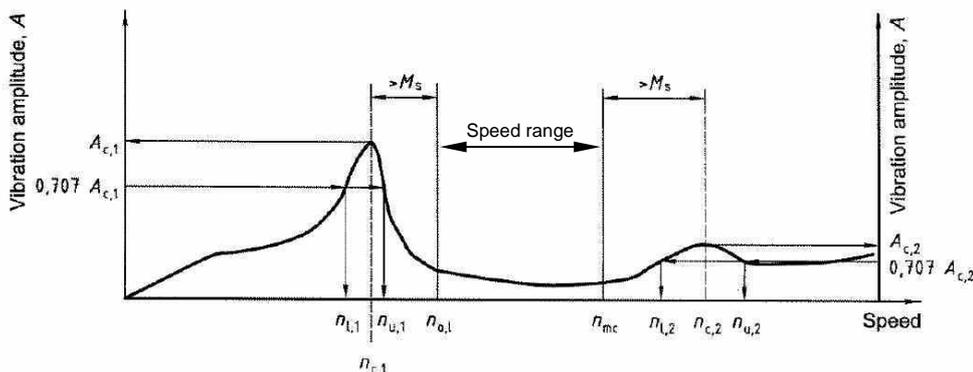


Figure 1.27 – Amplitude de réponse au balourd, amplification à la résonance et marge de séparation [API684]

Sur chaque courbe d'amplitude de réponse (figure 1.27, issue de la figure 2.70 de l'API RP 684 [API684]) où l'on a ainsi maximisé la participation modale par le choix de la distribution de balourds, on détermine :

- un facteur d'amplification AF (amplification factor),

$$AF = \frac{n_c}{\Delta n} \quad (1.2)$$

avec  $n_c$ , vitesse critique au maximum de la courbe de réponse,  
 $\Delta n$ , plage de vitesse sous-tendue à -3 dB.

- des marges de séparation  $M_s$  : distances entre les vitesses critiques et la borne la plus proche de la plage de vitesse de rotation ("speed range" dans la figure 1.27).

Si le facteur d'amplification est inférieur à 2,5 on considère qu'il ne s'agit plus d'une vitesse critique et cette "critically damped response" peut parfaitement se trouver dans la plage de vitesse de fonctionnement. Sinon, les marges de séparation requises sont fonction du facteur d'amplification (voir la norme pour les valeurs numériques).

On applique ensuite un facteur multiplicatif sur les courbes de réponse afin que l'amplitude de vibration crête à crête ( $\mu\text{m}$ ) aux emplacements des capteurs soit égale à :

$$A = 25,4 \sqrt{\frac{12000}{n}} \quad (1.3)$$

où  $n$  est la vitesse de rotation de la plage de fonctionnement la plus proche de la vitesse critique en flexion,

et l'on vérifie que le grand axe des ellipses des trajectoires en tout point du rotor est inférieur à 75% des jeux sur toute la plage de vitesse.

*Commentaire N°2 : L'équation 1.2 du facteur d'amplification est identique à la définition des amplifications à la résonance des systèmes faiblement amortis, ce qui n'est pas du tout le cas ici. Il faut bien dissocier ces deux notions, et considérer les éléments ci-dessus comme des définitions.*

*Commentaire N°3 : La figure 1.27 est un cas idéalisé, avec des vitesses critiques éloignées et donc une réponse monomodale. Généralement, ce n'est pas le cas, et les participations à la réponse au balourd de modes propres voisin peuvent interdire la définition des facteurs d'amplification en étalant la courbe d'amplitude de réponse. Ce point sera abordé dans le chapitre X de la réponse au balourd.*

*Commentaire N°4 : on verra aussi dans le même chapitre X que pour un même calcul de réponse au balourd, le facteur d'amplification est fonction du point d'observation de la réponse, ce qui complique encore l'interprétation.*

*Commentaire N°5 : dans toute l'analyse dynamique en flexion, il n'est question que de réponse au balourd, et jamais de calcul de fréquence propre et de mode propre. La définition d'un diagramme de Campbell reste optionnelle.*

#### 1.2.5.2 Essai de vérification de la réponse du rotor au balourd

*Commentaire N°6 : la norme est très pragmatique et considère que les hypothèses ayant servi aux analyses doivent être vérifiées expérimentalement. Comme il est de plus très difficile de prévoir les amortissements et que leur connaissance est fondamentale pour assurer le bon fonctionnement de la machine (traversée des vitesses critiques et stabilité des compresseurs centrifuges), cet essai de réponse prend toute sa signification.*

L'essai de réponse au balourd consiste à déterminer expérimentalement la réponse à un balourd installé connu et à comparer les résultats obtenus à ceux prévus (paragraphe 1.5.2.1). Il est pratiqué pendant les essais mécaniques de la machine.

On enregistre les vibrations de la machine pendant la décélération entre 105 et 60% de la vitesse nominale, pour le rotor d'origine, et pour le rotor équipé d'un balourd connu. Ces vibrations sont bien sûr filtrées sur la vitesse de rotation pour ne garder que la raie de balourd. On fait la différence vectorielle entre les vibrations obtenues pour éliminer l'effet des balourds résiduels d'équilibrage et des faux ronds, et ne garder que l'effet du balourd connu installé.

Le modèle ayant servi à la prévision sera considéré comme correct si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- les vitesses critiques mesurées ne diffèrent pas de plus de 5% de celles qui ont été prévues ;
- les amplitudes mesurées sur toutes les voies des capteurs n'excèdent pas celles qui ont été prévues avec les conditions de calcul les plus défavorables (en général la plus basse température d'huile, le jeu minimal et la précharge géométrique maximale),

sinon, il faut retoucher le modèle ayant servi à calculer la machine.

Par ailleurs, la condition de l'équation (1.3) doit être satisfaite.

*Commentaire N°7 : s'il faut retoucher le modèle, il est probable que de nombreux critères vont être changés et qu'il faudra alors peut-être modifier la définition jeu - précharge géométrique des paliers sur la machine essayée. Cet essai représente donc aussi un retour d'expérience important sur la prévision des caractéristiques dynamiques des paliers et plus particulièrement des amortissements.*

Des essais complémentaires doivent être réalisés si l'on n'arrive pas à satisfaire les conditions exigées. Ceci peut s'avérer onéreux et coûteux en délai s'il faut ouvrir la machine pour installer de nouveaux balourds.

### 1.2.5.3 Analyse de torsion (ou torsionnelle)

L'analyse dynamique de torsion doit bien évidemment être pratiquée sur la ligne d'arbres complète du groupe.

Les sources possibles d'excitation sont données, ce qui définit une liste des fréquences d'excitation.

On calcule les fréquences propres de torsion de la ligne d'arbres et on vérifie que celles-ci ne se trouvent pas à plus ou moins 10% des fréquences d'excitation sur toute la plage de vitesse. Si on n'arrive vraiment pas à respecter ce critère après avoir cherché d'autres solutions (généralement en jouant sur les accouplements), on vérifie que la ou les résonances ne produiront pas d'effet négatif sur la résistance de la ligne d'arbres.

*Commentaire N°8 : dans le cas machines avec une très grande plage de vitesse de rotation (on a vu de 55 à 105% de la vitesse nominale), cette condition ne peut*

*jamais être vérifiée. C'est souvent vrai aussi avec deux vitesses de rotation dans la ligne d'arbre cas des groupes moteur, multiplicateur, compresseur) quand on ajoute les harmoniques dans les fréquences d'excitation. Il faut donc s'attendre à souvent définir des niveaux d'excitation et faire des calculs de résistance en fatigue (fatigue classique à grand nombre de cycles). Ceci est donc très important dans le cas de l'entraînement des lignes de compression par des moteurs électriques à vitesses variables, pour lesquels les générateurs de fréquence induisent un très large spectre d'excitation.*

En plus des résonances en torsion, on doit vérifier aussi la tenue de la ligne d'arbres aux phénomènes transitoires constitués par :

- les courts circuits (2 ou 3 phases) aux bornes des alternateurs (turboalternateurs) ou des moteurs électriques (motocompresseurs) ;
- les faux couplages sur les alternateurs ;
- les démarrages des moteurs électriques.

*Commentaire N°9 : Si les deux premiers types d'excitation sont accidentels, le troisième fait partie de la vie normale de la machine.*

Dans ce dernier cas, il est souvent très difficile d'assurer l'intégrité de la ligne d'arbres sous l'effet de ces transitoires dont l'amplitude atteint facilement 6 à 10 fois le couple nominal et même parfois plus. Il faut réaliser des calculs de tenue ne fatigue cumulée à petit nombre de cycles (en utilisant la loi de Miner par exemple) et vérifier que le nombre d'incidents est compatible avec la durée de vie du groupe, le nombre d'événements restant à définir (les standards API citent des valeurs de l'ordre de 1000 à 1500 démarrages, mais pouvant monter jusqu'à 5000).

#### 1.2.5.4 Niveaux vibratoires admissibles

Les niveaux vibratoires admissibles s'entendent pour l'API en vibrations relatives entre le rotor et le palier. Néanmoins, si les supports de paliers sont trop souples, on peut être amené à considérer les vibrations absolues en ajoutant celles des corps de paliers.

Le niveau de vibration admissible crête à crête ( $\mu\text{m}$ ) global et non filtré pendant les essais mécaniques est de :

$$A = \text{Max} \left( 25 ; 25,4 \sqrt{\frac{12000}{n}} \right) \quad (1.4)$$

avec  $n$  la vitesse maximale continue (tr/min) définie par les standards API en fonction du type de machine.

Au-delà de cette vitesse maximale continue jusqu'à la survitesse, le niveau vibratoire ne doit pas dépasser 1,5 fois cette valeur.

#### 1.2.5.5 Equilibrage dynamique

L'équilibrage des rotors de turbines à vapeur et de compresseurs centrifuges se fait généralement en état rigide sur des machines à équilibrer. Le critère de balourd résiduel admissible défini pour chacun des paliers est donné par :

$$U_{\max} = \frac{6350 m}{n} \quad (1.5)$$

équation identique à l'équation (1.1), mais où  $m$  est la masse du rotor reprise par le palier et où  $n$  est la vitesse maximale continue.

Le balourd résiduel par palier est mesuré directement sur les machines à équilibrer en rotor rigide **[NF90601]**.

*Commentaire N°10 : la définition de ce balourd résiduel est assez subtile. En effet, on réalise un équilibre en rotor rigide alors que le rotor n'est évidemment pas dans ces conditions à la vitesse maximale continue. L'API a réussi à trouver une équation liée à la fois à la vitesse maximale continue et à l'équilibrage en rigide ! Si l'on fait la transposition pour un rotor qui serait encore en rigide à la vitesse maximale continue, on trouve une classe d'équilibrage G 0,67 suivant la définition de l'ISO 1940-1 **[ISO1940-1]**, ce qui correspond à une qualité très élevée.*

*Commentaire N°11 : les prévisions d'amplitude de réponse au balourd conduisent à des valeurs largement inférieures à celles des vibrations admissibles du paragraphe 1.2.5.4. Il y a lieu de tenir compte de plusieurs phénomènes. La vibration admissible est une vibration globale comprenant tous les harmoniques et le faux rond. De plus, il est probable qu'elle contienne aussi une part de balourd thermique du rotor entre sa condition d'équilibrage à froid sur machine à équilibrer et sa condition d'essais à chaud dans la machine.*

Dans une annexe, les standards API donnent une procédure pour la mesure du balourd résiduel sur machine à équilibrer. Cette procédure comprend la définition de la tolérance d'équilibrage.

*Commentaire N°12 : lorsque la machine a été qualifiée à l'aide de la norme NF E90-601 ou de la norme ISO correspondante **[NF90601]**, on peut dire qu'elle est étalonnée et que les éléments demandés par l'API ne sont pas fondés. Heureusement, cette procédure complètement n'est que très rarement appliquée.*



Figure 1.28  
Banc d'équilibrage à vitesse nominale sous vide

Il est possible de réaliser également un équilibrage à vitesse nominale. Cet essai est pratiqué dans une chambre sous vide (figure 1.28) avec un rotor supporté par des paliers hydrodynamiques du même type que ceux qui équiperont la machine. L'API précise que le critère d'équilibrage doit être défini d'un commun accord entre le fournisseur et le client.

*Commentaire N°13 : il faut proposer une mesure des vibrations résiduelles relatives entre rotor et paliers. On enregistre les vibrations filtrées sur la vitesse de rotation en décélération dont on soustrait vectoriellement le faux rond enregistré préalablement à faible vitesse. Le critère est une*

*fraction – 60% par exemple – de la vibration admissible en essais en usine (paragraphe 1.2.5.4).*

### 1.2.5.6 Stabilité vibratoire latérale

Cette étude est spécifique aux compresseurs centrifuges à moyenne et haute pression qui sont soumis à des interactions fluide structure au niveau des étanchéités internes générant des raideurs croisées déstabilisant les modes propres de flexion. Ce chapitre a été introduit dans l'API 617 seulement à partir de la 7<sup>ème</sup> édition en juillet 2002 **[API617]**.

L'étude se passe en plusieurs phases. On commence par une vérification de niveau 1 qui, si elle est satisfaite ne nécessite pas de passer au niveau 2.

Dans l'étude de niveau 1, on place au centre du rotor une raideur croisée  $Q_A$  égale à la somme des raideurs croisées de chaque roue définies par l'équation :

$$q_A = \frac{28,65 P}{D_r L_d N} \frac{\rho_{ref}}{\rho_{asp}} \quad (1.6)$$

avec  $q_A$  la raideur croisée (N/m) de l'étage,

$P$  la puissance gaz de l'étage (W),

$D_r$  le diamètre extérieur de la roue (mm),

$L_d$  le minimum entre les largeurs du diffuseur ou de la roue (mm),

$N$  la vitesse de rotation (mm),

$\rho_{asp}$  et  $\rho_{ref}$  les masses volumiques du gaz à l'aspiration et au refoulement de l'étage ( $\text{kg/m}^3$ ),

28,65 un coefficient intégrant aussi toutes les unités.

Toutes ces valeurs sont définies pour le fonctionnement à la vitesse maximale continue.

*Commentaire N°14 : cette équation, représentant un couple par unité de largeur du diffuseur de sortie est tirée de celle définie par Wachel et Von Nimitz en 1981 **[Wachel81]** en considérant la masse molaire de l'air (28,7 kg/kmol). Par conséquent, cette application est un peu conservatrice pour les applications de gaz naturel (de 16 à 22 kg/kmol). Elle est optimiste pour les applications de réfrigération (de 40 à 50 kg/kmol), mais ces machines ne sont pas à haute pression. Elle est très défavorable pour les applications de recycle d'hydrogène (5 à 10 kg/kmol) qui nécessiteront de faire de façon généralement inutile l'étude de niveau 2.*

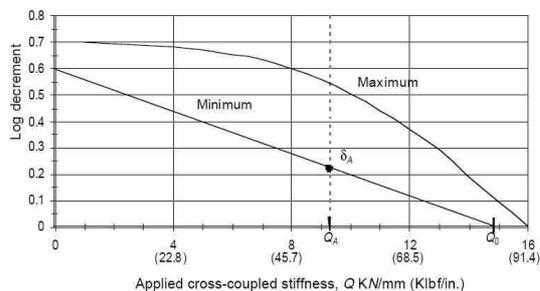
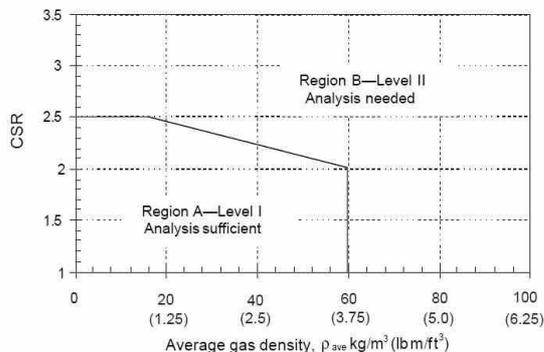


Figure 1.29 – Raideur croisée et décrement logarithmique **[API617]**

- Si  $Q_0/Q_A > 2$ ,
- ou si  $\delta_A > 0,1$  (décrement logarithmique obtenu pour la raideur croisée  $Q_A$ ),

On trace un diagramme du décrement logarithmique calculé pour le premier mode propre à précession positive de l'ensemble rotor, palier raideur croisée centrale, en faisant varier cette raideur croisée jusqu'à le déstabiliser (figure 1.29, issue de la figure 1.2-4 de l'API 617 **[API617]**). Cette étude est faite pour les jeux minimal et maximal des paliers. On obtient une raideur croisée limite  $Q_0$  d'instabilité.

- ou encore si on se situe dans la zone A de la figure 1.30, issue de la figure 1.2-5 de l'API 617 **[API617]** (CSR étant le rapport de la vitesse maximale continue à la vitesse critique calculée sur paliers de raideur infinie et  $\rho_{ave}$  étant la masse volumique moyenne du gaz dans le compresseur),



alors le compresseur est considéré comme étant stable. Sinon, il faut passer à l'analyse de niveau 2.

Figure 1.30 – Critère de stabilité API – Niveau 1 **[API617]**

*Commentaire N°15 : le rapport Q0/QA est très comparable aux marges de stabilité utilisées par Kuzdzal, Hustak et Sorokes **[Kuzdzal]** en 1994 et par Gelin, Pugnet et al. **[Gelin96-1]**, **[Gelin96-3]** en 1996 ou **[Gelin97]** en 1997 pour résoudre des problèmes de stabilité sur des compresseurs moyenne pression de gaz naturel.*

*Commentaire N°16 : le diagramme de la figure 1.30 correspond bien à une partie du critère défini par Fulton en 1984 à partir de l'analyse des difficultés rencontrées sur la flotte des machines installées par un grand opérateur pétrolier **[Fulton]**. A l'époque, les compresseurs n'étaient pas encore équipés de garnitures mécaniques sèches pour les étanchéités de sortie d'arbre, mais de garnitures hydrauliques à anneaux flottants. Bien que les raideurs croisées générées par les paliers minces que constituent les anneaux flottants aient disparu lors du changement de technique, le diagramme défini par Fulton a gardé toute sa valeur.*

*Commentaire N°17 : l'API n'hésite pas à parler de décrétement logarithmique, alors que cette notion n'a réellement de sens que pour des amortissements faibles.*

Dans l'**étude de niveau 2**, on modélise le plus possible d'éléments en terme d'impédances mécaniques (l'API cite les étanchéités à labyrinthes, le piston d'équilibrage, les roues, les éléments frettés, les hystérésis métallurgiques, même si tout n'est pas modélisable), et pour les conditions extrêmes de tolérance conduisant au décrétement logarithmique le plus bas. Le critère à respecter est alors un décrétement logarithmique supérieur à 0,1 (ou une valeur à discuter avec le client si on n'y arrive pas).

*Commentaire N°18 : la représentativité physique de ces calculs d'amortissement est largement basée sur la qualité de la prévision des caractéristiques dynamiques de toutes les impédances liant le rotor au stator. La source principale d'amortissement résidant dans les paliers hydrodynamiques, on comprend bien l'importance attachée à l'essai de réponse au balourd (paragraphe 1.2.5.2).*

### 1.3 Domaines abordés dans ce mémoire

La dynamique est un très vaste domaine et seuls certains aspects seront abordés. On illustrera aussi les différents chapitres de cas qui ont nécessité des développements spéciaux et dont la solution n'était pas triviale.

Dans un premier temps, on présentera le développement d'un outil permettant de mettre en évidence la phénoménologie de l'analyse latérale de dynamique de rotor. Le but n'est pas de créer un nouveau logiciel de dynamique de rotor, les outils existants étant largement plus sophistiqués, mais de donner un moyen d'appréhender et de comprendre des phénomènes sans passer par une modélisation lourde.

On exposera ensuite les difficultés d'interprétation que présente l'analyse de la réponse des rotors aux balourds et on proposera une amélioration basée sur une approche multimodale.

On abordera le cas de l'instabilité des compresseurs centrifuges. Même si maintenant les études sont maintenant codifiées (paragraphe 1.2.5.6) et les logiciels de caractérisation dynamique de certains composants existent, il a été une époque où cette analyse était plus difficile et il a fallu jouer le rôle de pionnier.

Toujours dans le domaine de la dynamique latérale de rotor, on abordera le développement des turbomachines à paliers magnétiques actifs.

En dynamique torsionnelle de rotor, on apportera des éléments d'amélioration de la modélisation en vue de prédire de façon plus exacte les fréquences propres. Ce chapitre sera aussi l'occasion d'aborder le couplage flexion torsion.

En quittant les rotors, on s'intéressera aux systèmes disque aubes dans deux domaines particuliers, celui des rangées de turbines à vapeur en injection partielle et celui des modes locaux des roues de compresseurs centrifuges.

En quittant le domaine des vibrations, on développera une théorie et un modèle thermodynamique permettant d'expliquer la dynamique du fonctionnement d'un compresseur centrifuge dans ses réseaux de gaz. Ce modèle sera appliqué aussi au cas du pompage.

Enfin, avant de conclure, on abordera certains aspects acoustiques qui ont un impact fort sur la tenue en fatigue de certains composants, donc sur la fiabilité vibratoire des turbomachines. Ces aspects couvriront les turbines à vapeur, les compresseurs centrifuges et les compresseurs alternatifs.

## 2. Modèle simple d'étude de la phénoménologie de la dynamique d'un rotor en flexion

Il existe beaucoup de logiciels très sophistiqués en analyse latérale de la dynamique de rotor. La plupart sont basés sur des méthodes aux éléments finis. On citera par exemple, et par ordre alphabétique trois codes basés sur une modélisation en poutres de Timoshenko avec des disques rigides :

- Cadyac<sup>®</sup> développé par la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France ;
- ROTORINSA<sup>®</sup> développé par le LaMCoS de l'INSA de Lyon [**Ferraris07**] ;
- Madyn 2000<sup>®</sup> développé par l'Université Technique de Darmstadt dans l'environnement MATLAB<sup>®</sup> [**Madyn**], incluant des modules de caractérisation des paliers hydrodynamiques, des étanchéités et un module de paliers magnétiques actifs ;
- XLTRC<sup>®</sup> développé par le laboratoire des Turbomachines du TAMU (Université Texas A&M), qui est un ensemble complet incluant la caractérisation dynamique des paliers hydrodynamiques et des étanchéités gaz à labyrinthes ou nids d'abeilles.

Dans ce mémoire, on a utilisé une variante de ROTORINSA<sup>®</sup> [**Ferraris07**] incluant la caractérisation des paliers hydrodynamiques à patins oscillants basée sur la théorie de la lubrification de Frêne, Nicolas, Degueurce et al. [**Frêne90**] ou [**Frêne97**].

Même les grands codes généralistes d'analyse aux éléments finis introduisent des options de dynamique de rotor, comme par exemple ANSYS Multiphysics<sup>®</sup> version 11 [**ANSYS**] ou comme MSC Nastran<sup>®</sup> qui a reçu l'appui de la NASA pour ce développement. On citera aussi particulièrement SAMCEF for rotors<sup>®</sup>, la variante du logiciels aux éléments finis développé par SAMTECH à Liège. Ces codes prennent en compte une modélisation de disques flexibles, voire aubagés.

Il n'est pas question ici de présenter un nouveau code, mais de mettre à disposition des ingénieurs de bureau d'études et d'essais un outil mettant en exergue immédiatement des phénomènes de dynamique de rotor en flexion sans dépendre de l'utilisation d'un code plus lourd d'emploi bien qu'évidemment plus précis. Cet outil a également été pensé pour servir de support à des formations ou pour aider des personnels de maintenance ou d'intervention sur site qui se trouvent alors coupés de leur support de calculs.

On veut donc créer un modèle simple et réaliste de rotor pour l'observation de la phénoménologie de dynamique de rotor en flexion en introduisant progressivement les différents éléments tels que :

- les effets gyroscopiques,
- l'amortissement des paliers,
- l'anisotropie des paliers,
- la raideur croisée,
- la réponse aux balourds.

Le modèle considère les quatre premiers modes propres du système rotor paliers :

- mode propre cylindrique ou de translation du rotor dans ses paliers (éventuellement "dégénéré", c'est-à-dire avec des nœuds situés à l'extérieur des paliers), correspondant au premier mode propre de suspension ;
- mode propre conique ou de basculement du rotor dans ses paliers, avec un nœud central, correspondant au deuxième mode propre de suspension ;
- premier mode propre de flexion, avec deux nœuds situés entre les paliers, correspondant au premier mode propre élastique ;
- deuxième mode propre de flexion, avec trois nœuds, correspondant au deuxième mode propre élastique ;

ces quatre modes propres intervenant systématiquement dans toutes les analyses de flexion des turbines à vapeur industrielles et des compresseurs centrifuges multi étagés.

## 2.1 Originalité de la méthode

La méthode principale est dérivée du livre Rotordynamics Prediction in Engineering de Lalanne et Ferraris Besso [**Lalan90**].

On appliquera les équations de Lagrange [**Lagrange**] à une méthode de Rayleigh-Ritz [**Ritz**].

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{Q}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial Q} \right) + \left( \frac{\partial U}{\partial Q} \right) = F_Q \quad (2.1)$$

- T et U sont les énergies cinétique et de déformation exprimées à partir des paramètres généralisés Q de la méthode de Rayleigh-Ritz (paramètres définis ci-dessous),
- $\dot{Q}$  désigne la dérivée de Q par rapport au temps,
- $F_Q$  est la force généralisée relative au paramètre Q.

L'application de la méthode de Rayleigh-Ritz nécessite de considérer une déformée a priori. Pour prendre en compte les quatre formes modales citées, on considérera des polynômes cubiques (à quatre coefficients) pour les déformées suivant les axes X et Z de la figure 2.1 :

$$\begin{cases} u(t) = A_u(t)y^3 + B_u(t)y^2 + C_u(t)y + D_u(t) \\ w(t) = A_w(t)y^3 + B_w(t)y^2 + C_w(t)y + D_w(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

$A_u(t)$  ,  $B_u(t)$  , ...  $D_w(t)$  sont des fonctions temporelles qui constituent les huit paramètres donc les coordonnées généralisées des équations de Lagrange.

Cette formulation prendra mieux en compte les effets gyroscopiques des parties en porte à faux, notamment s'il s'agit d'un disque, que l'utilisation des traditionnelles arches de sinusoides. Le fait de travailler dans le système des coefficients de ces polynômes cubiques représente la véritable originalité de ce développement.

Par contre, ce choix de déformée typique dans la méthode de Rayleigh-Ritz conduit à une rigidification de l'arbre. En effet, les applications pour des poutres appuyées aux extrémités conduisent à des fréquences propres égales à :

- masse concentrée au centre d'une poutre sans masse :  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{64EI}{ML^3}}$  pour une valeur théorique de  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{48EI}{ML^3}}$  soit une augmentation de la fréquence propre de 15%,  
avec  $f$  la fréquence propre (Hz),  
 $M$  la masse concentrée (kg),  
 $E$  le module d'Young du matériau (MPa),  
 $I$  l'inertie de flexion (m<sup>4</sup>);  
 $L$  la longueur entre les appuis (m) ;
- poutre de masse répartie :  $f = \frac{\sqrt{30}}{\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho \left( S + \frac{5I}{9} \right)}}$  pour une valeur théorique de  $f = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$  soit une augmentation de la fréquence propre de 11% pour les proportions habituelles des rotors.  
avec  $S$  l'aire de la poutre (m<sup>2</sup>),  
 $\rho$  la masse volumique du matériau (kg/m<sup>3</sup>).

Ceci est l'occasion de rappeler que le meilleur choix de la déformée est celui qui conduit à la fréquence propre la plus basse. Pour cette modélisation, qui est commode pour représenter les différentes formes modales du rotor, l'application à la masse répartie diminue de 2 l'ordre de l'expression de la déformée mais rigidifie notablement la poutre.

Pour ne pas trop fausser l'ordre de grandeur des fréquences propres calculées, on appliquera la correction empirique suivante sur le module d'Young équivalent du matériau en fonction de la répartition des masses :

$$E_{\text{éq}} = E \frac{M_{\text{Rotor}}}{1,333M_{\text{Disque}} + 1,223M_{\text{Arbre}}} \quad (2.3)$$

Malgré cette correction élémentaire sur le module d'Young, on insiste à nouveau sur le fait que ce développement reste basé sur un système simplifié avec une cubique unique pour l'ensemble du rotor au lieu d'une cubique par tronçon pour les codes aux éléments finis.

## 2.2 Formulation du modèle de rotor

### 2.2.1 Système d'axes

La figure 2.1 montre le référentiel direct utilisé L'axe Y porte le rotor. L'origine du trièdre a été placée au centre du rotor afin de diminuer le nombre d'itérations de la méthode numérique de recherche des fréquences propres en réduisant les couplages entre les coefficients des polynômes cubiques.

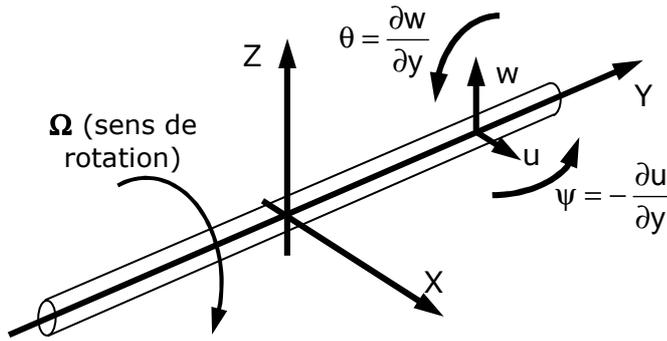


Figure 2.1  
Système d'axes

## 2.2.2 Constitution du rotor

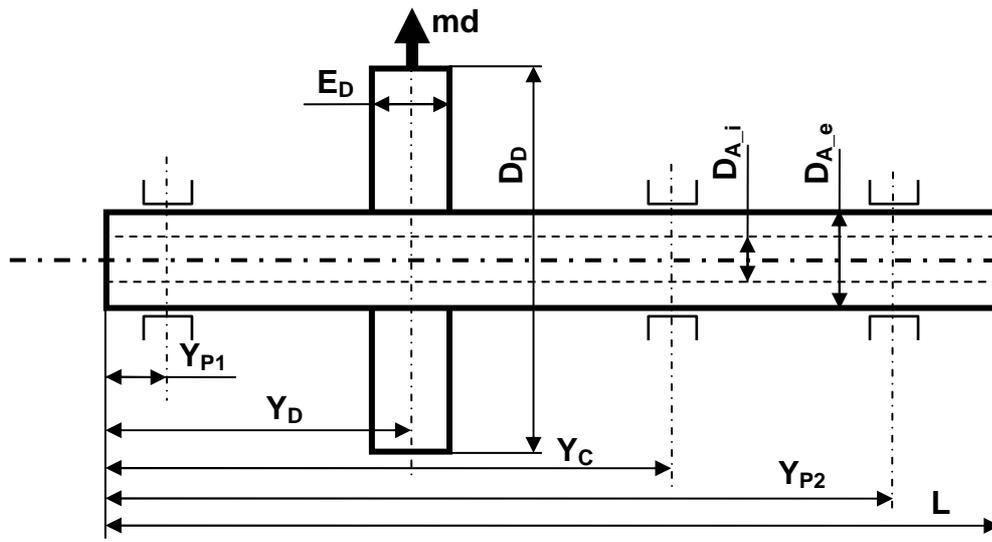


Figure 2.2  
Modèle  
élémentaire  
de rotor

Le rotor élémentaire axisymétrique de la figure 2.2 est constitué :

- d'un arbre de diamètres extérieur  $D_{A_e}$  et intérieur  $D_{A_i}$  constants et de longueur  $L$ ,
- d'un disque rigide de diamètre extérieur  $D_D$  et d'épaisseur  $E_D$  situé à l'abscisse  $y_D$ ,
- d'un matériau de masse volumique  $\rho$  et de module d'Young  $E$ ,
- de paliers porteurs situés aux abscisses  $Y_{P1}$  et  $Y_{P2}$  et de caractéristiques dynamiques de raideur et d'amortissement idéales (aucun terme croisé) pouvant être isotropes ou non :

$$[K_{Pi}] = \begin{bmatrix} K_{Xi} & 0 \\ 0 & K_{Zi} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [C_{Pi}] = \begin{bmatrix} C_{Xi} & 0 \\ 0 & C_{Zi} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

En se référant à la théorie des paliers hydrodynamiques, on a des caractéristiques dynamiques typiques d'un palier à patins oscillants.

- d'un palier comportant uniquement une raideur croisée situé en  $Y_C$  (donc éventuellement dans le plan d'un palier porteur, ou dans celui d'un piston d'équilibrage) :

$$[K_C] = \begin{bmatrix} 0 & K_{XZ} \\ K_{ZX} = -K_{XZ} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Placée au niveau d'un palier porteur, cette raideur croisée s'ajoute aux caractéristiques précédentes pour modéliser un palier hydrodynamique lisse (pour des paliers hydrodynamiques à patins oscillants, l'amortissement croisé,

généralement très faible, n'aura pas à être modélisé). Placée au niveau du disque, elle représente les effets aérodynamiques de confinement, prépondérants dans l'étude des compresseurs centrifuges à haute pression.

- d'un balourd  $m_d$  situé sur le disque.

Il tourne à la vitesse de rotation  $\Omega$ .

Les autres grandeurs utilisées dans la formulation sont : (2.6)

- la masse du disque  $M_D = \rho \frac{\pi(D_D^2 - D_A^2)}{4} E_D$
- l'inertie polaire du disque  $I_{PD} = \rho \frac{\pi(D_D^4 - D_A^4)}{32} E_D = \frac{M_D}{8} (D_D^2 + D_A^2)$
- l'inertie transverse du disque  $I_{TD} = \frac{I_{PD}}{2} + \frac{M_D E_D^2}{12}$
- la section droite de l'arbre  $S_A = \frac{\pi(D_{A_e}^2 - D_{A_i}^2)}{4}$
- le moment quadratique de la section de l'arbre autour de son axe transverse  $I_{SA} = \frac{\pi(D_{A_e}^4 - D_{A_i}^4)}{64} = \frac{S_A}{16} (D_{A_e}^2 + D_{A_i}^2)$
- la masse linéique de l'arbre  $M_A = \rho S_A$
- l'inertie transverse linéique de l'arbre  $I_{TA} = \rho I_A$
- l'inertie polaire linéique de l'arbre  $I_{PA} = 2\rho I_A$

### 2.2.3 Déplacements

Les translations et rotations locales, ainsi que leurs dérivées temporelles sont :

$$\begin{cases} u(t) = A_u(t)y^3 + B_u(t)y^2 + C_u(t)y + D_u(t) \\ w(t) = A_w(t)y^3 + B_w(t)y^2 + C_w(t)y + D_w(t) \\ \theta(t) = \frac{\partial w}{\partial y} = 3A_w(t)y^2 + 2B_w(t)y + C_w(t) \\ \psi(t) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3A_u(t)y^2 - 2B_u(t)y - C_u(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Leurs dérivées temporelles s'écrivent (symbole de dérivation :  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ) :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \dot{A}_u(t)y^3 + \dot{B}_u(t)y^2 + \dot{C}_u(t)y + \dot{D}_u(t) \\ \dot{w}(t) = \dot{A}_w(t)y^3 + \dot{B}_w(t)y^2 + \dot{C}_w(t)y + \dot{D}_w(t) \\ \dot{\theta}(t) = 3\dot{A}_w(t)y^2 + 2\dot{B}_w(t)y + \dot{C}_w(t) \\ \dot{\psi}(t) = -3\dot{A}_u(t)y^2 - 2\dot{B}_u(t)y - \dot{C}_u(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

### 2.2.4 Energie cinétique

L'énergie cinétique totale est la somme de celles du disque, de l'arbre et des balourds.

### 2.2.4.1 Disque rigide

Pour un disque rigide, l'expression est :

$$T_D = \frac{M_D}{2} (\dot{u}_D^2 + \dot{w}_D^2) + \frac{I_{TD}}{2} (\dot{\theta}_D^2 + \dot{\psi}_D^2) + I_{PD} \Omega \dot{\psi}_D \theta_D \quad (2.9)$$

Dans cette expression,

- le terme d'énergie cinétique de rotation  $\frac{I_{PD}}{2} \Omega^2$  est purement et simplement omis car, étant constant, il n'apporte aucun élément dans les équations de Lagrange ;
- le dernier terme  $I_{PD} \Omega \dot{\psi}_D \theta_D$  représente les effets gyroscopiques.

Le détail du développement du calcul est donné en annexe A. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} T_D = & (\dot{A}_u^2 + \dot{A}_w^2) \left( \frac{M_D Y_D^6}{2} + \frac{9 I_{TD} Y_D^4}{2} \right) + (\dot{B}_u^2 + \dot{B}_w^2) \left( \frac{M_D Y_D^4}{2} + 2 I_{TD} Y_D^2 \right) \\ & + (\dot{C}_u^2 + \dot{C}_w^2) \left( \frac{M_D Y_D^2}{2} + \frac{I_{TD}}{2} \right) + (\dot{D}_u^2 + \dot{D}_w^2) \left( \frac{M_D}{2} \right) + \dot{A}_u A_w (-9 I_{PD} \Omega Y_D^4) \\ & + \dot{A}_u \dot{B}_u (M_D Y_D^5 + 6 I_{TD} Y_D^3) + \dot{A}_u B_w (-6 I_{PD} \Omega Y_D^3) + \dot{A}_u \dot{C}_u (M_D Y_D^4 + 3 I_{TD} Y_D^2) \\ & + \dot{A}_u C_w (-3 I_{PD} \Omega Y_D^2) + \dot{A}_u \dot{D}_u (M_D Y_D^3) + \dot{A}_w \dot{B}_w (M_D Y_D^5 + 6 I_{TD} Y_D^3) \\ & + \dot{A}_w \dot{C}_w (M_D Y_D^4 + 3 I_{TD} Y_D^2) + \dot{A}_w \dot{D}_w (M_D Y_D^3) + \dot{B}_u \dot{C}_u (M_D Y_D^3 + 2 I_{TD} Y_D) \\ & + \dot{B}_u A_w (-6 I_{PD} \Omega Y_D^3) + \dot{B}_u B_w (-4 I_{PD} \Omega Y_D^2) + \dot{B}_u C_w (-2 I_{PD} \Omega Y_D) + \dot{B}_u \dot{D}_u (M_D Y_D^2) \\ & + \dot{B}_w \dot{C}_w (M_D Y_D^3 + 2 I_{TD} Y_D) + \dot{B}_w \dot{D}_w (M_D Y_D^2) + \dot{C}_u \dot{D}_u (M_D Y_D) + \dot{C}_u A_w (-3 I_{PD} \Omega Y_D^2) \\ & + \dot{C}_u B_w (-2 I_{PD} \Omega Y_D) + \dot{C}_u C_w (-I_{PD} \Omega) + \dot{C}_w \dot{D}_w (M_D Y_D) \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.2.4.2 Arbre

L'arbre est une poutre de Timoshenko pour lequel l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_A = \frac{\rho S_A}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I_A}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + 2 \rho I_A \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.11)$$

soit, d'après les expressions de masse et d'inerties linéiques définies par les équations (2.6) :

$$T_A = \frac{M_A}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{I_{TA}}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + I_{PA} \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.12)$$

Tous calculs effectués, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_A = & \left( \dot{A}_u^2 + \dot{A}_w^2 \right) \left( \frac{M_A L^7}{14} + \frac{9 I_{TA} L^5}{10} \right) + \left( \dot{B}_u^2 + \dot{B}_w^2 \right) \left( \frac{M_A L^5}{10} + \frac{2 I_{TA} L^3}{3} \right) \\
& + \left( \dot{C}_u^2 + \dot{C}_w^2 \right) \left( \frac{M_A L^3}{6} + \frac{I_{TA} L}{2} \right) + \left( \dot{D}_u^2 + \dot{D}_w^2 \right) \left( \frac{M_A L}{2} \right) + \dot{A}_u A_w \left( -\frac{9 I_{PA} \Omega L^5}{5} \right) \\
& + \dot{A}_u \dot{B}_u \left( \frac{M_A L^6}{6} + \frac{3 I_{TA} L^4}{2} \right) + \dot{A}_u \dot{B}_w \left( -\frac{3 I_{PA} \Omega L^4}{2} \right) + \dot{A}_u \dot{C}_u \left( \frac{M_A L^5}{5} + I_{TA} L^3 \right) \\
& + \dot{A}_u \dot{C}_w \left( -I_{PA} \Omega L^3 \right) + \dot{A}_u \dot{D}_u \left( \frac{M_A L^4}{4} \right) + \dot{A}_w \dot{B}_w \left( \frac{M_A L^6}{6} + \frac{3 I_{TA} L^4}{2} \right) \\
& + \dot{A}_w \dot{C}_w \left( \frac{M_A L^5}{5} + I_{TA} L^3 \right) + \dot{A}_w \dot{D}_w \left( \frac{M_A L^4}{4} \right) + \dot{B}_u A_w \left( -\frac{3 I_{PA} \Omega L^4}{2} \right) \\
& + \dot{B}_u \dot{C}_u \left( \frac{M_A L^4}{4} + I_{TA} L^2 \right) + \dot{B}_u \dot{B}_w \left( -\frac{4 I_{PA} \Omega L^3}{3} \right) + \dot{B}_u \dot{C}_w \left( -I_{PA} \Omega L^2 \right) + \dot{B}_u \dot{D}_u \left( \frac{M_A L^3}{3} \right) \\
& + \dot{B}_w \dot{C}_w \left( \frac{M_A L^4}{4} + I_{TA} L^2 \right) + \dot{B}_w \dot{D}_w \left( \frac{M_A L^3}{3} \right) + \dot{C}_u \dot{D}_u \left( \frac{M_A L^2}{2} \right) + \dot{C}_u A_w \left( -I_{PA} \Omega L^3 \right) \\
& + \dot{C}_u \dot{B}_w \left( -I_{PA} \Omega L^2 \right) + \dot{C}_u \dot{C}_w \left( -I_{PA} \Omega L \right) + \dot{C}_w \dot{D}_w \left( \frac{M_A L^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

#### 2.2.4.3 Balourd

Un balourd, placé en  $Y_B$ , généralement au niveau d'un disque, est caractérisé par sa valeur  $m d$  (balourd de masse  $m$  placé à l'excentricité  $d$ ) et positionné angulairement à l'angle  $\varphi$  par rapport à la référence du rotor placée sur sa génératrice supérieure ( $X=0$ ), a pour coordonnées et vitesses instantanées :

$$\begin{cases} x(t) = u_B + d \sin(\Omega t + \varphi) \\ z(t) = w_B + d \cos(\Omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{u}_B + d \Omega \cos(\Omega t + \varphi) \\ \frac{dz(t)}{dt} = \dot{w}_B - d \Omega \sin(\Omega t + \varphi) \end{cases} \tag{2.14}$$

Son énergie cinétique est alors :

$$T_{Bal} = \frac{m}{2} \left[ \left( \dot{u}_B^2 + \dot{w}_B^2 \right) + \Omega^2 d^2 + 2 \Omega d \dot{u}_B \cos(\Omega t + \varphi) - 2 \Omega d \dot{w}_B \sin(\Omega t + \varphi) \right] \tag{2.15}$$

Le terme  $m \Omega^2 d^2 / 2$  est une constante et n'apportera rien dans les dérivations de l'équation de Lagrange. De plus, la masse  $m$  du balourd est très inférieure à celle du rotor, et l'on néglige le terme  $\frac{m}{2} \left[ \left( \dot{u}_B \right)^2 + \left( \dot{w}_B \right)^2 \right]$ . L'expression de l'énergie cinétique du balourd 2.15 se réduit alors à :

$$T_{Bal} = m d \Omega \left[ \dot{u}_B \cos(\Omega t + \varphi) - \dot{w}_B \sin(\Omega t + \varphi) \right] \tag{2.16}$$

soit, en introduisant les coordonnées généralisées :

$$T_{Bal} = m d \Omega \left[ \begin{aligned} & \left( \dot{A}_u Y_B^3 + \dot{B}_u Y_B^2 + \dot{C}_u Y_B + \dot{D}_u \right) \cos(\Omega t + \varphi) \\ & - \left( \dot{A}_w Y_B^3 + \dot{B}_w Y_B^2 + \dot{C}_w Y_B + \dot{D}_w \right) \sin(\Omega t + \varphi) \end{aligned} \right] \tag{2.17}$$

## 2.2.5 Energie élastique

L'énergie élastique provient de deux sources : celle due à la déformation de l'arbre et celle due au déplacement dans les paliers et les liaisons.

### 2.2.5.1 Déformation de l'arbre

L'énergie élastique de déformation de l'arbre, sans considérer de force axiale, est donnée par l'expression :

$$U_A = \frac{EI_{SA}}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.18)$$

Tous calculs effectués, l'intégration d'équation (2.18) donne :

$$\frac{U_A}{EI_{SA}} = 6(A_u^2 + A_w^2)L^3 + 6(A_u B_u + A_w B_w)L^2 + 2(B_u^2 + B_w^2)L \quad (2.19)$$

### 2.2.5.2 Déplacements dans les paliers

Les forces exercées par les liaisons avec le milieu extérieur (paliers et raideurs croisées dues à l'aérodynamique) sont des forces externes  $F_{qi}$  appliquées au second membre de l'équation de Lagrange. Elles sont obtenues par la méthode des travaux virtuels :

$$\delta W_p = \vec{F} \cdot \vec{\Delta} = F_{q1} \delta q_1 + F_{q2} \delta q_2 + F_{q3} \delta q_3 + \dots \quad (2.20)$$

avec :  $\vec{F} = - [K_{Pi}] \begin{bmatrix} u_{Pi} \\ w_{Pi} \end{bmatrix} - [C_{Pi}] \begin{bmatrix} \dot{u}_{Pi} \\ \dot{w}_{Pi} \end{bmatrix}$  la force de réaction du palier d'indice  $i$  où  $[K_{Pi}]$  et  $[C_{Pi}]$  sont les matrices de raideur et d'amortissement définies en (2.4),  
 $\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta u_{Pi} \\ \delta w_{Pi} \end{bmatrix}$  le vecteur de déplacement virtuel au niveau de ce palier.

En exprimant les vecteurs force et déplacement en fonction des coefficients des polynômes cubiques et en les reportant dans l'équation (2.20) du travail virtuel pour le palier d'indice  $i$  à la position axiale  $Y_{Pi}$ , il vient l'équation (2.21), dans laquelle :

$F_{AuPi}$  désigne la force généralisée relative à la coordonnée généralisée  $A_u$  pour le palier d'indice  $i$ , force à mettre au second membre de l'équation de Lagrange (2.1),

et ainsi de suite pour chacune des coordonnées généralisées définies dans l'équation (2.7)

On applique le même principe pour la raideur croisée, où cette fois il n'y a qu'une matrice de raideur antisymétrique  $[K_C]$  définie par l'équation (2.5) située à l'abscisse  $Y$ . Après application à l'équation (2.20), on obtient l'équation (2.22) avec le même formalisme d'écriture.

$$\begin{cases}
F_{AuPi} = \begin{bmatrix} -K_{Xi} (A_u Y_{Pi}^6 + B_u Y_{Pi}^5 + C_u Y_{Pi}^4 + D_u Y_{Pi}^3) \\ -C_{Xi} (\dot{A}_u Y_{Pi}^6 + \dot{B}_u Y_{Pi}^5 + \dot{C}_u Y_{Pi}^4 + \dot{D}_u Y_{Pi}^3) \end{bmatrix} \\
F_{BuPi} = \begin{bmatrix} -K_{Xi} (A_u Y_{Pi}^5 + B_u Y_{Pi}^4 + C_u Y_{Pi}^3 + D_u Y_{Pi}^2) \\ -C_{Xi} (\dot{A}_u Y_{Pi}^5 + \dot{B}_u Y_{Pi}^4 + \dot{C}_u Y_{Pi}^3 + \dot{D}_u Y_{Pi}^2) \end{bmatrix} \\
F_{CuPi} = \begin{bmatrix} -K_{Xi} (A_u Y_{Pi}^4 + B_u Y_{Pi}^3 + C_u Y_{Pi}^2 + D_u Y_{Pi}) \\ -C_{Xi} (\dot{A}_u Y_{Pi}^4 + \dot{B}_u Y_{Pi}^3 + \dot{C}_u Y_{Pi}^2 + \dot{D}_u Y_{Pi}) \end{bmatrix} \\
F_{DuPi} = -K_{Xi} (A_u Y_{Pi}^3 + B_u Y_{Pi}^2 + C_u Y_{Pi} + D_u) - C_{Xi} (\dot{A}_u Y_{Pi}^3 + \dot{B}_u Y_{Pi}^2 + \dot{C}_u Y_{Pi} + \dot{D}_u) \\
F_{AwPi} = \begin{bmatrix} -K_{Xi} (A_w Y_{Pi}^6 + B_w Y_{Pi}^5 + C_w Y_{Pi}^4 + D_w Y_{Pi}^3) \\ -C_{Xi} (\dot{A}_w Y_{Pi}^6 + \dot{B}_w Y_{Pi}^5 + \dot{C}_w Y_{Pi}^4 + \dot{D}_w Y_{Pi}^3) \end{bmatrix} \\
F_{BwPi} = \begin{bmatrix} -K_{Xi} (A_w Y_{Pi}^5 + B_w Y_{Pi}^4 + C_w Y_{Pi}^3 + D_w Y_{Pi}^2) \\ -C_{Xi} (\dot{A}_w Y_{Pi}^5 + \dot{B}_w Y_{Pi}^4 + \dot{C}_w Y_{Pi}^3 + \dot{D}_w Y_{Pi}^2) \end{bmatrix} \\
F_{CwPi} = \begin{bmatrix} -K_{Xi} (A_w Y_{Pi}^4 + B_w Y_{Pi}^3 + C_w Y_{Pi}^2 + D_w Y_{Pi}) \\ -C_{Xi} (\dot{A}_w Y_{Pi}^4 + \dot{B}_w Y_{Pi}^3 + \dot{C}_w Y_{Pi}^2 + \dot{D}_w Y_{Pi}) \end{bmatrix} \\
F_{DwPi} = -K_{Xi} (A_w Y_{Pi}^3 + B_w Y_{Pi}^2 + C_w Y_{Pi} + D_w) - C_{Xi} (\dot{A}_w Y_{Pi}^3 + \dot{B}_w Y_{Pi}^2 + \dot{C}_w Y_{Pi} + \dot{D}_w)
\end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases}
F_{AuPC} = -K_{XZ} (A_w Y_{PC}^6 + B_w Y_{PC}^5 + C_w Y_{PC}^4 + D_w Y_{PC}^3) \\
F_{BuPC} = -K_{XZ} (A_w Y_{PC}^5 + B_w Y_{PC}^4 + C_w Y_{PC}^3 + D_w Y_{PC}^2) \\
F_{CuPC} = -K_{XZ} (A_w Y_{PC}^4 + B_w Y_{PC}^3 + C_w Y_{PC}^2 + D_w Y_{PC}) \\
F_{DuPC} = -K_{XZ} (A_w Y_{PC}^3 + B_w Y_{PC}^2 + C_w Y_{PC} + D_w) \\
F_{AwPC} = K_{XZ} (A_u Y_{PC}^6 + B_u Y_{PC}^5 + C_u Y_{PC}^4 + D_u Y_{PC}^3) \\
F_{BwPC} = K_{XZ} (A_u Y_{PC}^5 + B_u Y_{PC}^4 + C_u Y_{PC}^3 + D_u Y_{PC}^2) \\
F_{CwPC} = K_{XZ} (A_u Y_{PC}^4 + B_u Y_{PC}^3 + C_u Y_{PC}^2 + D_u Y_{PC}) \\
F_{DwPC} = K_{XZ} (A_u Y_{PC}^3 + B_u Y_{PC}^2 + C_u Y_{PC} + D_u)
\end{cases} \quad (2.22)$$

## 2.2.6 Généralisation au contour d'un rotor industriel

A partir des équations de Lagrange appliquées au modèle de rotor élémentaire dans les paragraphes 2.2.4 et 2.2.5, on généralisera facilement les équations au cas d'un rotor moins académique, comportant plusieurs disques et plusieurs tronçons d'arbre de diamètres différents et dont un exemple de contour est donné en figure 2.3.

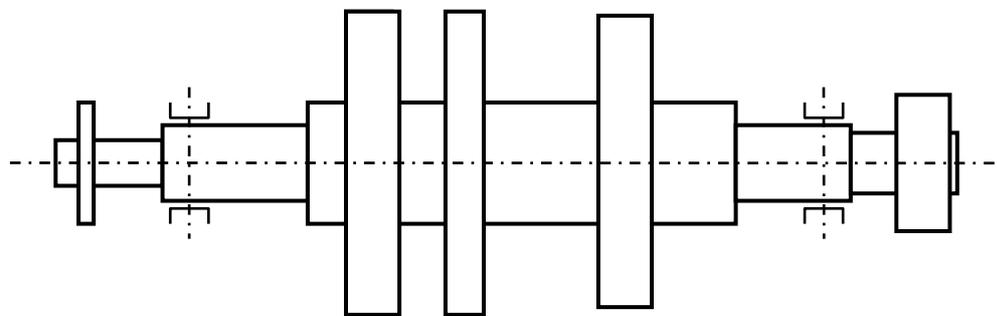


Figure 2.3  
Contour d'un rotor industriel

De la même façon, plusieurs raideurs croisées pourront être introduites, par exemple au niveau de chaque disque et de chaque palier (pour modéliser un palier lisse). On aura aussi une distribution de balourds.

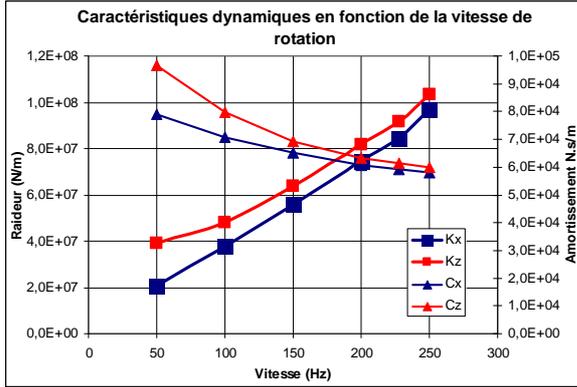


Figure 2.4 – Caractéristiques de paliers hydrodynamiques à patins oscillants

Si l'on peut augmenter le nombre des  $n_a$  tronçons d'arbre, des  $n_d$  disques et des  $n_c$  raideurs croisées, on ne changera pas le nombre de paliers porteurs, car ce nombre est lié au choix de la déformée en cubique effectué dans la méthode de Rayleigh Ritz. Leurs caractéristiques dynamiques seront aussi fonction de la vitesse de rotation (variation sensiblement linéaire entre deux vitesses de rotation particulières, comme le montre la figure 2.4 correspondant à une application de compresseur centrifuge).

Par contre, on introduira une liaison supplémentaire avec le milieu extérieur, de même formulation que les paliers, qui servira à modéliser par exemple un piston d'équilibrage axial de compresseur centrifuge dont l'étanchéité a une influence prépondérante sur la stabilité vibratoire des machines à haute pression. Cette liaison supplémentaire et les raideurs croisées, étant de nature "couplage fluide structure", c'est-à-dire liées à la vitesse de rotation et à la masse volumique du gaz dans la machine, auront des caractéristiques dynamiques proportionnelles au carré de la vitesse de rotation (donc nulles à l'arrêt et proportionnelles à la hauteur développée par le compresseur).

Dans les expressions des paragraphes 2.2.4 et 2.2.5, on remplace chacun des termes simples par des sommes :

- l'équation (2.9) d'énergie cinétique d'un disque devenant pour  $n_d$  disques :

$$T_D = \sum_{i=1}^{n_d} \left( \frac{M_{Di}}{2} (\dot{u}_{Di}^2 + \dot{w}_{Di}^2) + \frac{I_{TDi}}{2} (\dot{\theta}_{Di}^2 + \dot{\psi}_{Di}^2) + I_{PDi} \Omega \dot{\psi}_{Di} \theta_{Di} \right) \quad (2.23)$$

et il suffit de faire une sommation directe terme à terme sur l'équation (2.10) ;

- l'équation (2.12) d'énergie cinétique de l'arbre devenant pour  $n_a$  tronçons :

$$T_A = \sum_{j=1}^{n_a} \left( \frac{\rho S_j}{2} \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I_{SAj}}{2} \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + 2\rho I_{SAj} \Omega \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \dot{\psi} \theta dy \right) \quad (2.24)$$

et il suffit de faire une sommation directe terme à terme sur l'équation (2.13) de remplacer les termes  $M_A L^7 - M_A L^6 - M_A L^5 - M_A L^4 - M_A L^3 - M_A L^2 - M_A L$  respectivement par :

$$\sum_{j=1}^{n_a} M_{Aj} (L_{2j}^7 - L_{1j}^7) \quad \sum_{j=1}^{n_a} M_{Aj} (L_{2j}^6 - L_{1j}^6) \quad \sum_{j=1}^{n_a} M_{Aj} (L_{2j}^5 - L_{1j}^5) \quad \sum_{j=1}^{n_a} M_{Aj} (L_{2j}^4 - L_{1j}^4), \text{ etc.}$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les abscisses de début et de fin de chaque tronçon ;

- l'équation (2.18) d'énergie élastique de déformation de l'arbre devenant :

$$U_A = \sum_{j=1}^{n_a} \left( \frac{EI_{SAj}}{2} \int_{L_{1j}}^{L_{2j}} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \right) \quad (2.25)$$

l'équation (2.19) se transforme en :

$$U_A = E \sum_{j=1}^{n_a} \left[ 6(A_u^2 + A_w^2) I_{SAj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3) + 6(A_u B_u + A_w B_w) I_{SAj} (L_{2j}^2 - L_{1j}^2) + 2(B_u^2 + B_w^2) I_{SAj} (L_{2j} - L_{1j}) \right] \quad (2.26)$$

- sommation directe des expressions (2.17) pour les balourds et (2.22) pour les raideurs croisées.

## 2.2.7 Equation matricielle d'équilibre dynamique

Le développement des équations de Lagrange (2.1) sur chacune des huit coordonnées généralisées  $A_u, A_w, B_u, \dots, D_u, D_w$ , qui est développé dans l'annexe A, conduit au système matriciel d'équilibre dynamique :

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} A_u \\ B_u \\ \vdots \\ C_w \\ D_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A_u \\ B_u \\ \vdots \\ C_w \\ D_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_u \\ B_u \\ \vdots \\ C_w \\ D_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Pour écrire ce système, on ramène en fait les forces généralisées des paliers et raideurs croisées dans le premier membre, et on passe au second membre les termes provenant de l'énergie cinétique des balourds.

### 2.2.7.1 Matrice de masse

La matrice de masse (2.28) est symétrique :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} = M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{31} = M_{13} & M_{32} = M_{23} & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} = M_{14} & M_{42} = M_{24} & M_{43} = M_{34} & M_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} = M_{11} & M_{56} = M_{12} & M_{57} = M_{13} & M_{58} = M_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{65} = M_{12} & M_{66} = M_{22} & M_{67} = M_{23} & M_{68} = M_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{75} = M_{13} & M_{76} = M_{23} & M_{77} = M_{33} & M_{78} = M_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{85} = M_{14} & M_{86} = M_{24} & M_{87} = M_{34} & M_{88} = M_{44} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Elle dépend de seulement 10 termes (2.29) :

$$M_{11} = \sum_{j=1}^{n_d} (M_{Dj} Y_{Dj}^6 + 9I_{TDj} Y_{Dj}^4) + \sum_{j=1}^{n_a} \left[ \frac{M_{Aj} (L_{2j}^7 - L_{1j}^7)}{7} + \frac{9I_{TAj} (L_{2j}^5 - L_{1j}^5)}{5} \right]$$

$$M_{12} = \sum_{j=1}^{n_d} (M_{Dj} Y_{Dj}^5 + 6I_{TDj} Y_{Dj}^3) + \sum_{j=1}^{n_a} \left[ \frac{M_{Aj} (L_{2j}^6 - L_{1j}^6)}{6} + \frac{3I_{TAj} (L_{2j}^4 - L_{1j}^4)}{2} \right]$$

$$M_{13} = \sum_{j=1}^{n_d} (M_{Dj} Y_{Dj}^4 + 3I_{TDj} Y_{Dj}^2) + \sum_{j=1}^{n_a} \left[ \frac{M_{Aj} (L_{2j}^5 - L_{1j}^5)}{5} + I_{TAj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3) \right]$$

$$M_{14} = \sum_{j=1}^{n_d} M_{Dj} Y_{Dj}^3 + \sum_{j=1}^{n_a} \frac{M_{Aj} (L_{2j}^4 - L_{1j}^4)}{4}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &= \sum_{j=1}^{n_d} (M_{Dj} Y_{Dj}^4 + 4I_{TDj} Y_{Dj}^2) + \sum_{j=1}^{n_a} \left[ \frac{M_{Aj} (L_{2j}^5 - L_{1j}^5)}{5} + \frac{4I_{TAj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3)}{3} \right] \\
M_{23} &= \sum_{j=1}^{n_d} (M_{Dj} Y_{Dj}^3 + 2I_{TDj} Y_{Dj}) + \sum_{j=1}^{n_a} \left[ \frac{M_{Aj} (L_{2j}^4 - L_{1j}^4)}{4} + I_{TAj} (L_{2j}^2 - L_{1j}^2) \right] \\
M_{24} &= \sum_{j=1}^{n_d} M_{Dj} Y_{Dj}^2 + \sum_{j=1}^{n_a} \frac{M_{Aj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3)}{3} \\
M_{33} &= \sum_{j=1}^{n_d} (M_{Dj} Y_{Dj}^2 + I_{TDj}) + \sum_{j=1}^{n_a} \left[ \frac{M_{Aj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3)}{3} + I_{TAj} (L_{2j} - L_{1j}) \right] \\
M_{34} &= \sum_{j=1}^{n_d} M_{Dj} Y_{Dj} + \sum_{j=1}^{n_a} \frac{M_{Aj} (L_{2j}^2 - L_{1j}^2)}{2} \\
M_{44} &= \sum_{j=1}^{n_d} M_{Dj} + \sum_{j=1}^{n_a} M_{Aj} (L_{2j} - L_{1j})
\end{aligned} \tag{2.29}$$

### 2.2.7.2 Matrice de raideur

La matrice de raideur (2.30) comporte une partie symétrique provenant de l'arbre et des raideurs directes des paliers et une partie antisymétrique provenant des raideurs croisées :

$$[K] = \begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\
K_{21} = K_{12} & K_{22} & K_{23} = K_{14} & K_{24} = K_{33} & K_{25} = K_{16} & K_{26} = K_{17} & K_{27} = K_{18} & K_{28} \\
K_{31} = K_{13} & K_{32} = K_{14} & K_{33} & K_{34} & K_{35} = K_{17} & K_{36} = K_{18} & K_{37} = K_{28} & K_{38} \\
K_{41} = K_{14} & K_{42} = K_{33} & K_{43} = K_{34} & K_{44} & K_{45} = K_{18} & K_{46} = K_{28} & K_{47} = K_{38} & K_{48} \\
K_{51} = -K_{15} & K_{52} = -K_{16} & K_{53} = -K_{17} & K_{54} = -K_{18} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\
K_{61} = -K_{16} & K_{62} = -K_{17} & K_{63} = -K_{18} & K_{64} = -K_{28} & K_{65} = K_{56} & K_{66} & K_{67} = K_{58} & K_{68} = K_{77} \\
K_{71} = -K_{17} & K_{72} = -K_{18} & K_{73} = -K_{28} & K_{74} = -K_{38} & K_{75} = K_{57} & K_{76} = K_{58} & K_{77} & K_{78} \\
K_{81} = -K_{18} & K_{82} = -K_{28} & K_{83} = -K_{38} & K_{84} = -K_{48} & K_{85} = K_{58} & K_{86} = K_{77} & K_{87} = K_{78} & K_{88}
\end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Elle nécessite 23 termes (2.31) :

$$K_{11} = 12E \sum_{j=1}^{n_a} I_{SAj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3) + K_{X1} Y_{P1}^6 + K_{X2} Y_{P2}^6$$

$$K_{12} = 6E \sum_{j=1}^{n_a} I_{SAj} (L_{2j}^2 - L_{1j}^2) + K_{X1} Y_{P1}^5 + K_{X2} Y_{P2}^5$$

$$K_{13} = K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4$$

$$K_{14} = K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3$$

$$K_{15} = \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} Y_{PCj}^6$$

$$K_{16} = \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} Y_{PCj}^5$$

$$K_{17} = \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} Y_{PCj}^4$$

$$K_{18} = \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} Y_{PCj}^3$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= 4E \sum_{j=1}^{n_a} I_{SAj} (L_{2j} - L_{1j}) + K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4 & K_{28} &= \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} Y_{PCj}^2 \\
K_{33} &= K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 & K_{34} &= K_{X1} Y_{P1} + K_{X2} Y_{P2} \\
K_{38} &= \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} Y_{PCj} & K_{44} &= K_{X1} + K_{X2} \\
K_{48} &= \sum_{j=1}^{n_c} K_{XZj} & K_{55} &= 12E \sum_{j=1}^{n_a} I_{SAj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3) + K_{Z1} Y_{P1}^6 + K_{Z2} Y_{P2}^6 \\
K_{56} &= 6E \sum_{j=1}^{n_a} I_{SAj} (L_{2j}^2 - L_{1j}^2) + K_{Z1} Y_{P1}^5 + K_{Z2} Y_{P2}^5 & K_{57} &= K_{Z1} Y_{P1}^4 + K_{Z2} Y_{P2}^4 \\
K_{58} &= K_{Z1} Y_{P1}^3 + K_{Z2} Y_{P2}^3 & K_{66} &= 4E \sum_{j=1}^{n_a} I_{SAj} (L_{2j} - L_{1j}) + K_{Z1} Y_{P1}^4 + K_{Z2} Y_{P2}^4 \\
K_{77} &= K_{Z1} Y_{P1}^2 + K_{Z2} Y_{P2}^2 & K_{78} &= K_{Z1} Y_{P1} + K_{Z2} Y_{P2} \\
K_{88} &= K_{Z1} + K_{Z2}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

### 2.2.7.3 Matrice d'amortissement

La matrice d'amortissement (2.32) comporte, comme la matrice de raideur, des parties symétriques et des parties antisymétriques, l'antisymétrie étant due aux effets gyroscopiques. Pour des raisons pratiques d'écriture des signes, on préférera garder les termes  $D_{51}$  plutôt que  $D_{15}$ .

$$[C] = \begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} = C_{22} & C_{14} & C_{15} = -C_{51} & C_{16} = -C_{52} & C_{17} = -C_{53} & 0 \\
C_{21} = C_{12} & C_{22} & C_{23} = C_{14} & C_{24} = C_{33} & C_{25} = -C_{52} & C_{26} = -C_{62} & C_{27} = -C_{63} & 0 \\
C_{31} = C_{22} & C_{32} = C_{14} & C_{33} & C_{34} & C_{35} = -C_{53} & C_{36} = -C_{63} & C_{37} = -C_{73} & 0 \\
C_{41} = C_{14} & C_{42} = C_{33} & C_{43} = C_{34} & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} = C_{66} & C_{58} \\
C_{61} = C_{52} & C_{62} & C_{63} & 0 & C_{65} = C_{56} & C_{66} & C_{67} = C_{58} & C_{68} = C_{77} \\
C_{71} = C_{53} & C_{72} = C_{63} & C_{73} & 0 & C_{75} = C_{66} & C_{77} = C_{58} & C_{77} & C_{78} \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{85} = C_{58} & C_{86} = C_{77} & C_{87} = C_{78} & C_{88}
\end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Elle comporte 20 termes (2.33) :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{X1} Y_{P1}^6 + C_{X2} Y_{P2}^6 & C_{12} &= C_{X1} Y_{P1}^5 + C_{X2} Y_{P2}^5 \\
C_{14} &= C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 & C_{22} &= C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4 \\
C_{33} &= C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 & C_{34} &= C_{X1} Y_{P1} + C_{X2} Y_{P2} \\
C_{44} &= C_{X1} + C_{X2} & C_{51} &= 9\Omega \left[ \sum_{j=1}^{n_d} I_{PDj} Y_{Dj}^4 + \sum_{j=1}^{n_a} I_{PAj} \frac{(L_{2j}^5 - L_{1j}^5)}{5} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{52} &= 3\Omega \left[ 2 \sum_{j=1}^{n_d} I_{PDj} Y_{Dj}^3 + \sum_{j=1}^{n_a} \frac{I_{PAj} (L_{2j}^4 - L_{1j}^4)}{2} \right] & C_{53} &= \Omega \left[ 3 \sum_{j=1}^{n_d} I_{PDj} Y_{Dj}^2 + \sum_{j=1}^{n_a} I_{PAj} (L_{2j}^3 - L_{1j}^3) \right] \\
C_{55} &= C_{Z1} Y_{P1}^6 + C_{Z2} Y_{P2}^6 & C_{56} &= C_{Z1} Y_{P1}^5 + C_{Z2} Y_{P2}^5 & (2.33) \\
C_{58} &= C_{Z1} Y_{P1}^3 + C_{Z2} Y_{P2}^3 & C_{62} &= 4\Omega \left[ \sum_{j=1}^{n_d} I_{PDj} Y_{Dj}^2 + \sum_{j=1}^{n_a} I_{PAj} \frac{(L_{2j}^3 - L_{1j}^3)}{3} \right] = \frac{4C_{53}}{3} \\
C_{63} &= \Omega \left[ 2 \sum_{j=1}^{n_d} I_{PDj} Y_{Dj} + \sum_{j=1}^{n_a} I_{PAj} (L_{2j}^2 - L_{1j}^2) \right] & C_{66} &= C_{Z1} Y_{P1}^4 + C_{Z2} Y_{P2}^4 \\
C_{73} &= \Omega \left[ \sum_{j=1}^{n_d} I_{PDj} + \sum_{j=1}^{n_a} I_{PAj} (L_{2j} - L_{1j}) \right] & C_{77} &= C_{Z1} Y_{P1}^2 + C_{Z2} Y_{P2}^2 \\
C_{78} &= C_{Z1} Y_{P1} + C_{Z2} Y_{P2} & C_{88} &= C_{Z1} + C_{Z2}
\end{aligned}$$

#### 2.2.7.4 Vecteur d'excitation des balourds

Ce vecteur (2.34) comprend des termes harmoniques de la vitesse de rotation, tenant compte des phases des balourds  $\varphi$  ayant pour référence angulaire la direction verticale au temps  $t=0$ . Le sens de rotation va de Z sur X suivant le système d'axes direct défini à la figure 2.1.

On généralise aussi l'application des balourds en introduisant les coordonnées  $Y_b$  au lieu de la position des disques  $Y_D$ . On développe alors ce vecteur d'excitation en termes en sinus et cosinus dont les coefficients sont donnés en (2.35) :

$$\{F(t)\} = \Omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^3 \sin(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^2 \sin(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj} \sin(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j \sin(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^3 \cos(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^2 \cos(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj} \cos(\Omega t + \varphi_j) \\ \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j \cos(\Omega t + \varphi_j) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Bal}_{As} \cos(\Omega t) + \text{Bal}_{Ac} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Bs} \cos(\Omega t) + \text{Bal}_{Bc} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Cs} \cos(\Omega t) + \text{Bal}_{Cc} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Ds} \cos(\Omega t) + \text{Bal}_{Dc} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Ac} \cos(\Omega t) - \text{Bal}_{As} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Bc} \cos(\Omega t) - \text{Bal}_{Bs} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Cc} \cos(\Omega t) - \text{Bal}_{Cs} \sin(\Omega t) \\ \text{Bal}_{Dc} \cos(\Omega t) - \text{Bal}_{Ds} \sin(\Omega t) \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\text{Bal}_{Ac} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^3 \cos(\varphi_j) & \text{Bal}_{As} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^3 \sin(\varphi_j) \\
\text{Bal}_{Bc} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^2 \cos(\varphi_j) & \text{Bal}_{Bs} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj}^2 \sin(\varphi_j) \\
\text{Bal}_{Cc} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj} \cos(\varphi_j) & \text{Bal}_{Cs} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j Y_{bj} \sin(\varphi_j) \\
\text{Bal}_{Dc} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j \cos(\varphi_j) & \text{Bal}_{Ds} &= \Omega^2 \sum_{j=1}^{n_b} m_j d_j \sin(\varphi_j)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

## 2.3 Représentation d'état

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres est une opération fondamentale en dynamique de rotor. Les valeurs propres comportent les fréquences propres et les amortissements modaux. Les vecteurs propres comportent les formes modales et les précessions. Cette opération établit alors la "carte modale" du système rotor paliers, évolution des fréquences propres et des amortissements modaux en fonction de la vitesse de rotation sous forme d'un diagramme de Campbell.

Le système d'équations dynamiques est tel que sa matrice de raideur n'est pas symétrique. De plus, la présence d'amortissements localisés au niveau des paliers et la présence de termes gyroscopiques interdisent l'utilisation de l'équation d'un amortissement proportionnel de Rayleigh de la forme  $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$ . Il faut donc résoudre le système complet (2.27) sans son second membre (2.34) dont les valeurs propres sont complexes.

La résolution consiste tout d'abord à transformer le système d'équations différentielles du second ordre en un système du premier ordre. On va utiliser la formulation des équations d'état. En partant du système matriciel classique de l'équation (2.27)

$$[M] \frac{d^2}{dt^2} [X] + [C] \frac{d}{dt} [X] + [K][X] = [F(t)] \text{ en coordonnées généralisées } [X], \text{ on utilise un}$$

vecteur d'état comprenant à la fois  $[X]$  et sa dérivée temporelle  $\frac{d}{dt}[X]$ . Ce vecteur d'état, de taille double de  $[X]$  et sa propre dérivée temporelle s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} [X] \\ \frac{d}{dt}[X] \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}[X] \\ \frac{d^2}{dt^2}[X] \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

Pour ajuster la taille du système d'équations (2.27) à celle du vecteur d'état, une deuxième équation matricielle triviale est ajoutée à la deuxième ligne de (2.37) :

$$\begin{cases} [M] \frac{d^2}{dt^2} [X] + [C] \frac{d}{dt} [X] + [K][X] = [F(t)] \\ [M] \frac{d}{dt} [X] - [M] \frac{d}{dt} [X] = [0] \end{cases} \tag{2.37}$$

On arrange alors l'écriture de (2.37) sous la forme d'état :

$$\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F(t)] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

## 2.4 Fréquences propres

### 2.4.1 Cas général des fréquences propres en rotation

On cherche des solutions de l'équation différentielle (2.38) homogène qui sont de type harmonique  $[\phi]e^{rt}$ . La dérivée (2.36) devient :  $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [X] \\ \frac{d}{dt} [X] \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} [X] \\ \frac{d}{dt} [X] \end{bmatrix}$  et par conséquent (2.38) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

On pré multiplie (2.39) par l'inverse de  $r \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}$  égal à  $\frac{1}{r} \begin{bmatrix} [K]^{-1} & [0] \\ [0] & [M]^{-1} \end{bmatrix}$

$$\text{ce qui conduit à : } \left( \begin{bmatrix} [K]^{-1}[C] & | & [K]^{-1}[M] \\ -[I] & & [0] \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} [X] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

On est donc ramené à un problème de recherche de valeurs propres d'une matrice  $[D]$  de taille double du système d'origine, telle que  $([D] - \lambda[I])[\phi] = [0]$ , cette matrice d'état s'écrivant :  $[D] = \begin{bmatrix} [K]^{-1}[C] & | & [K]^{-1}[M] \\ -[I] & & [0] \end{bmatrix}$  (2.41)

Les valeurs propres complexes  $\lambda$  comprennent le coefficient d'amortissement propre (partie réelle) et la fréquence propre (partie imaginaire positive ou négative) sous la forme :

$$\begin{cases} r_{1m} = -1/\lambda_{1m} = \alpha_m + i \omega_m \\ r_{2m} = -1/\lambda_{2m} = \alpha_m - i \omega_m \end{cases} \quad (2.42)$$

avec  $\omega_m = 2 \pi F_{Pm}$  ( $F_{Pm}$  étant la  $m^{\text{ème}}$  fréquence propre),

$\alpha_m = \zeta_m \|r_m\|$  ( $\zeta_m$  étant l'amortissement modal associé et  $\|r_m\|$  module de  $r_m$ ),

$$i = \sqrt{-1}$$

Les valeurs propres de la matrice d'état étant complexes conjuguées ont deux à deux le même module et ne peuvent pas être déterminées directement par la méthode de QR **[Chatelin]**. Pour ne pas alourdir par un préconditionnement la résolution numérique qui devait rester facilement portable, on a adopté une méthode de Jacobi complexe (Annexe B3).

On classe les inverses des valeurs propres par ordre croissant de fréquence propre. Suivant les configurations de rotors et de paliers, il est possible d'obtenir des valeurs

propres purement réelles, correspondant à des modes propres très stables et non oscillants.

## 2.4.2 Cas particulier des fréquences propres "à l'arrêt"

On a l'habitude de déterminer des fréquences propres dites "à l'arrêt" à partir du système (2.27) dans lequel on enlève l'amortissement, les effets gyroscopiques ainsi que les raideurs croisées (d'où cette appellation). L'équation matricielle se simplifie en (2.43) :

$$\frac{d^2}{dt^2} \{X\} + [M]^{-1} [K] \{X\} = \{0\} \quad (2.43)$$

puis encore, avec des solutions harmoniques, en :  $\omega^2 \{X\} = -[M]^{-1} [K] \{X\}$  (2.44)

Les pulsations propres  $\omega_i$  sont les racines carrées des valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice d'état à l'arrêt :  $[D_{arr}] = -[M]^{-1} [K]$ . (2.45)

De plus, si les paliers sont isotropes, les fréquences propres sont doubles, c'est-à-dire que les déplacements modaux ne sont pas orientés (déplacements plans dans n'importe quelle direction, horizontale, verticale ou inclinée), ce qui diminue encore la taille du système à résoudre.

## 2.5 Modes propres

### 2.5.1 Valeurs propres

Bien que la résolution de Jacobi laisse une matrice de transformation comportant les vecteurs propres, on a préféré les recalculer à partir de la matrice d'état et des valeurs propres, en application de l'équation (2.40). On donne arbitrairement une valeur unité à l'une des composantes des déplacements généralisés du vecteur propre et l'on élimine la ligne correspondante du système d'équations. On a un système de 15 inconnues que l'on résout par la méthode du pivot de Gauss-Jordan (Annexe B1).

Pour éviter d'avoir choisi un déplacement proche d'un nœud des coordonnées généralisées, plusieurs calculs sont effectués et l'on garde la solution de plus faible résidu.

Puisque les valeurs propres sont complexes conjuguées et que la matrice d'état est une matrice réelle, les vecteurs propres sont également complexes conjugués. La démonstration en est la suivante :

$$\begin{cases} [D] \{\phi\} = ([D_r] + i[0])[\phi_r + i\phi_i] = [D_r][\phi_r] + i[D_r][\phi_i] \\ [D] \{\phi\} = ([D_r] + i[0])[\phi_r - i\phi_i] = [D_r][\phi_r] - i[D_r][\phi_i] \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} (\lambda_r + i\lambda_i)[\phi_r + i\phi_i] = (\lambda_r[\phi_r] - \lambda_i[\phi_i]) + i(\lambda_r[\phi_i] + \lambda_i[\phi_r]) \\ (\lambda_r - i\lambda_i)[\phi_r - i\phi_i] = (\lambda_r[\phi_r] - \lambda_i[\phi_i]) - i(\lambda_r[\phi_i] + \lambda_i[\phi_r]) \end{cases} \quad (2.47)$$

### 2.5.2 Formes modales – déplacements physiques

Pour tracer une forme modale physique, il faut choisir une forme réelle pure. On choisit alors la combinaison linéaire suivante des vecteurs conjugués et valeurs propres conjuguées qui ont donc des pulsations propres  $\pm \omega_m$  :

$$\Psi_m = (\phi_r + i\phi_i)e^{(\alpha_m + i\omega_m)t} + (\phi_r - i\phi_i)e^{(\alpha_m - i\omega_m)t} = 2[\phi_r \cos(\omega_m t) - \phi_i \sin(\omega_m t)]e^{\alpha_m t} \quad (2.48)$$

Il ne faut pas oublier que le traitement précédent s'effectue dans les coordonnées généralisées des équations de Lagrange, et que les vecteurs propres obtenus sont les coefficients A - B - C - D du polynôme cubique définissant la forme modale physique, conformément à l'application de la méthode de Rayleigh Ritz, ces coefficients se décomposant sur les deux directions X et Z et en parties réelle (notée avec l'indice "Re") et imaginaire (indice "Im") :

$$\begin{cases} U(t) = U_{Re} \cos(\omega t) - U_{Im} \sin(\omega t) \\ W(t) = W_{Re} \cos(\omega t) - W_{Im} \sin(\omega t) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} U_{Re} = (A_u y^3 + B_u y^2 + C_u y + D_u)_{Re} \\ U_{Im} = (A_u y^3 + B_u y^2 + C_u y + D_u)_{Im} \\ W_{Re} = (A_w y^3 + B_w y^2 + C_w y + D_w)_{Re} \\ W_{Im} = (A_w y^3 + B_w y^2 + C_w y + D_w)_{Im} \end{cases} \quad (2.49)$$

Le choix de la forme (2.49) est lié à la détermination de la précession (paragraphe 2.5.3).

Pour des questions de représentation graphique, le maximum de chaque déformée est ensuite choisi égal au dixième de la longueur du rotor.

### 2.5.3 Précession

Les effets gyroscopiques, en séparant les fréquences propres, créent des modes propres tournant dans le sens de la rotation du rotor dits "directs" ou à précession directe ou positive, et des modes propres tournant en sens inverse de la rotation, dits "rétrogrades" ou à précession inverse ou négative.

Il est donc important de séparer par leur précession les deux modes propres qui ont le même type de forme modale (deux modes propres correspondant à la première flexion du rotor par exemple). En première approximation, seuls les modes propres à précession positive sont excitables par le balourd.

La détermination de la précession se fait suivant la définition proposée par John Vance **[Vance]** : La précession en chaque position du rotor est du signe du produit vectoriel des déplacements  $\vec{U}$  et  $\vec{W}$  :

$$U_{Re} W_{Im} - W_{Re} U_{Im} \quad (2.50)$$

La précession peut varier le long du rotor, notamment au franchissement des nœuds. Ici, on l'exprimera uniquement au niveau du point du rotor ayant la plus grande déformée.

## 2.6 Réponse aux balourds

### 2.6.1 Résolution directe de l'équation d'équilibre dynamique

Le calcul de la réponse aux balourds ne nécessite pas de connaître les valeurs propres et vecteurs propres, ni même de passer par la représentation d'état. On résout en fait directement l'équation matricielle dynamique (2.27) :

$$[M] \frac{d^2}{dt^2} [X] + [C] \frac{d}{dt} [X] + [K] [X] = [F(t)]$$

avec le vecteur d'excitation balourds défini par l'équation (2.34), et en cherchant des réponses harmoniques de la forme :

$$[X(t)] = \begin{bmatrix} A_{uc} \cos(\Omega t) - A_{us} \sin(\Omega t) \\ B_{uc} \cos(\Omega t) - B_{us} \sin(\Omega t) \\ \vdots \\ C_{wc} \cos(\Omega t) - C_{ws} \sin(\Omega t) \\ D_{wc} \cos(\Omega t) - D_{ws} \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

où le signe "-" devant le terme en sinus détermine la précession de la réponse avec la même équation (2.50) que celle utilisée pour les modes propres. On reporte les dérivées de  $[X(t)]$  :

$$\frac{d}{dt} [X(t)] = \Omega \begin{bmatrix} -A_{uc} \sin(\Omega t) - A_{us} \cos(\Omega t) \\ -B_{uc} \sin(\Omega t) - B_{us} \cos(\Omega t) \\ \vdots \\ -C_{wc} \sin(\Omega t) - C_{ws} \cos(\Omega t) \\ -D_{wc} \sin(\Omega t) - D_{ws} \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dt^2} [X(t)] = \Omega^2 \begin{bmatrix} -A_{uc} \cos(\Omega t) + A_{us} \sin(\Omega t) \\ -B_{uc} \cos(\Omega t) + B_{us} \sin(\Omega t) \\ \vdots \\ -C_{wc} \cos(\Omega t) + C_{ws} \sin(\Omega t) \\ -D_{wc} \cos(\Omega t) + D_{ws} \sin(\Omega t) \end{bmatrix}$$

dans l'équation (2.27). En identifiant les termes en sinus (d'indice "s") et cosinus (d'indice "c") on obtient le système (2.52) de 16 équations linéaires à 16 inconnues  $A_{uc}, A_{us}, B_{uc}, \dots, D_{us}, A_{wc}, \dots, D_{ws}$ . Tous les coefficients sont réels. La résolution se fait par la méthode d'élimination du pivot de Gauss-Jordan (Annexe B1).

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 [M] + [K] & -\Omega [C] \\ -\Omega [C] & \Omega^2 [M] - [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{uc} \\ B_{uc} \\ C_{uc} \\ D_{uc} \\ A_{wc} \\ B_{wc} \\ C_{wc} \\ D_{wc} \\ A_{us} \\ B_{us} \\ C_{us} \\ D_{us} \\ A_{ws} \\ B_{ws} \\ C_{ws} \\ D_{ws} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bal_{As} \\ Bal_{Bs} \\ Bal_{Cs} \\ Bal_{Ds} \\ Bal_{Ac} \\ Bal_{Bc} \\ Bal_{Cc} \\ Bal_{Dc} \\ Bal_{Ac} \\ Bal_{Bc} \\ Bal_{Cc} \\ Bal_{Dc} \\ -Bal_{As} \\ -Bal_{Bs} \\ -Bal_{Cs} \\ -Bal_{Ds} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

## 2.6.2 Déplacements physiques

La solution du système (2.52) donne les coefficients des polynômes cubiques des déformées. En reprenant l'écriture de l'équation (2.49), on obtient alors le vecteur de déflexion à l'abscisse Y du rotor avec :

$$\text{avec : } \begin{cases} U_{Re} = A_{UC} Y^3 + B_{UC} Y^2 + C_{UC} Y + D_{UC} \\ U_{Im} = A_{US} Y^3 + B_{US} Y^2 + C_{US} Y + D_{US} \\ W_{Re} = A_{WC} Y^3 + B_{WC} Y^2 + C_{WC} Y + D_{WC} \\ W_{Im} = A_{WS} Y^3 + B_{WS} Y^2 + C_{WS} Y + D_{WS} \end{cases} \quad (2.53)$$

On s'intéresse aussi aux maxima de la réponse aux balourds, qui sont égaux à :

$$\begin{cases} U_{\max} = \sqrt{U_{Re}^2 + U_{Im}^2} \\ W_{\max} = \sqrt{W_{Re}^2 + W_{Im}^2} \end{cases} \quad (2.54)$$

## 2.6.3 Caractéristiques des trajectoires elliptiques

A partir de l'expression du déplacement physique des équations (2.49) et (2.53), on détermine le grand axe et le petit axe de la trajectoire si les paliers sont anisotropes, comme étant les extrema de  $U(t)^2 + W(t)^2$ . En notant  $\theta = \omega t$ , on obtient :

$$\frac{d(U(\theta)^2 + W(\theta)^2)}{d\theta} = (U_{Im}^2 + W_{Im}^2 - U_{Re}^2 - W_{Re}^2) \sin(2\theta) - 2(U_{Re} U_{Im} + W_{Re} W_{Im}) \cos(2\theta) \quad (2.55)$$

qui s'annule pour :

$$2\theta = \text{Arctan} \left( \frac{2(U_{Re} U_{Im} + W_{Re} W_{Im})}{(U_{Im}^2 + W_{Im}^2 - U_{Re}^2 - W_{Re}^2)} \right) \quad (2.56)$$

D'où les caractéristiques de l'ellipse de la trajectoire :

- inclinaison du grand axe :  $\theta$
- valeur du grand axe :  $\sqrt{U(\theta)^2 + W(\theta)^2}$  (2.57)
- valeur du petit axe :  $\sqrt{U\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2 + W\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2}$

## 2.6.4 Inclinaison des capteurs

Généralement, les capteurs de vibration aux paliers ne peuvent pas être placés dans les directions verticale et horizontale en raison de la présence des plans de joint des paliers. Leur position avec une inclinaison par rapport aux axes du trièdre XYZ de la figure (2.1) nécessite d'effectuer une rotation du repère XZ autour de Y pour établir les comportements vus de ces capteurs.

## 2.7 Equilibrage dynamique

La méthode d'équilibrage dynamique qui est utilisée ici est celle des coefficients d'influence, très largement répandue et décrite par exemple dans un article des Techniques de l'Ingénieur **[Pugnet97]**.

La détermination de ces coefficients d'influence représente un autre intérêt du calcul des réponses au balourd. Pour un balourd test donné, on calcule la réponse dans le plan et dans la direction du capteur utilisé. Le coefficient d'influence est le rapport vectoriel de la vibration observée au balourd installé. Ce coefficient dépend évidemment de la vitesse de rotation, de la position axiale du plan d'équilibrage, ainsi que de la position axiale et de l'inclinaison du capteur de mesure.

Pour effectuer un équilibrage dynamique, on part d'un rotor balourdé pour lequel on connaît la réponse vibratoire initiale en fonction de la vitesse de rotation, et l'on choisit plusieurs plans d'équilibrage, plusieurs vitesses d'équilibrage. Des coefficients de pondération notés  $Pond_v$  privilégient l'abaissement de la vibration résiduelle de certains régimes de rotation.

Puisque les réponses au balourd sont idéalement linéaires, on écrit le niveau vibratoire résiduel obtenu sur chacun des capteurs d'observation à chaque vitesse de rotation d'équilibrage de la façon suivante :

$$\begin{cases} Urés_{Re-C-V} = Uini_{Re-C-V} + \sum_p InfU_{Re-PX-C-V} B_{PX} + \sum_p InfU_{Re-PZ-C-V} B_{PZ} \\ Urés_{Im-C-V} = Uini_{Im-C-V} + \sum_p InfU_{Im-PX-C-V} B_{PX} + \sum_p InfU_{Im-PZ-C-V} B_{PZ} \\ Wrés_{Re-C-V} = Wini_{Re-C-V} + \sum_p InfW_{Re-PX-C-V} B_{PX} + \sum_p InfW_{Re-PZ-C-V} B_{PZ} \\ Wrés_{Im-C-V} = Wini_{Im-C-V} + \sum_p InfW_{Im-PX-C-V} B_{PX} + \sum_p InfW_{Im-PZ-C-V} B_{PZ} \end{cases} \quad (2.58)$$

avec  $Urés$  et  $Wrés$ , les composantes vibratoires résiduelles après équilibrage en parties réelle (indice  $Re$ ) et imaginaire (indice  $Im$ ) au capteur  $C$  à la vitesse  $V$  ;

$Uini$  et  $Wini$ , les composantes vibratoires initiales utilisant le même symbolisme ;

$InfU$ , les coefficients d'influence en parties réelle et imaginaire relatifs aux balourds correcteurs dans chaque plan d'indice  $P$  et à chaque vitesse d'indice  $V$  et pour chaque direction de capteur de mesure d'indice  $C$  ;

$B_{PX}$  et  $B_{PZ}$ , les composantes suivant les axes  $X$  et  $Z$  des balourds correcteurs à installer dans chaque plan  $P$ .

Il faut rappeler que les amplitudes maximales obtenues dans chaque voie de mesure  $C$  sont, en application de l'équation (2.54) :

$$\begin{cases} Urés_{C-max} = \sqrt{Urés_{Re-C-V}^2 + Urés_{Ime-C-V}^2} \\ Wrés_{C-max} = \sqrt{Wrés_{Re-C-V}^2 + Wrés_{Ime-C-V}^2} \end{cases} \quad (2.59)$$

Le but de l'équilibrage dynamique étant de réduire globalement tous les niveaux vibratoires à toutes les vitesses d'équilibrage, on va s'intéresser à un critère quadratique choisi égal à la somme des carrés des maxima des amplitudes vibratoires suivant toutes les directions et vitesses de rotations observées. Ce critère intègre les coefficients de pondération pour chaque vitesse de rotation :

$$Cr_{équil} = \sum_{C-V} Pond_v \left( Urés_{Re-C-V}^2 + Urés_{Ime-C-V}^2 + Wrés_{Re-C-V}^2 + Wrés_{Ime-C-V}^2 \right) \quad (2.60)$$

Afin de limiter le nombre de termes, on regroupe toutes les composantes de balourds correcteurs dans un vecteur de  $2P$  composantes ( $P$  verticales et  $P$  horizontales), ainsi que les coefficients d'influence en  $2C$  valeurs ( $C$  réelles et  $C$  imaginaires) pour chaque vitesse et chaque composante de balourd. En développant l'expression du critère, il vient alors :

$$Cr_{\text{équil}} = \sum_V \left\{ \sum_C \left[ \begin{aligned} &Vini_{C-V}^2 + \sum_{2P} (Inf_{P-C-V} B_P)^2 + 2 Vini_{C-V} \sum_{2P} (Inf_{P-C-V} B_P) \\ &+ 2 \left( \sum_{P1=1, 2P-1} (Inf_{P1-C-V} B_{P1}) \right) \left( \sum_{P2=P1, 2P} (Inf_{P2-C-V} B_{P2}) \right) \right] \right\} \quad (2.61) \end{aligned}$$

où  $B_{P1}$  et  $B_{P2}$  sont issus des doubles produits de l'élevation au carré avec P1 différent de P2.

Puisque le critère est quadratique en  $B_p$  et que tous les coefficients de  $B_p^2$  sont positifs, on va pouvoir le minimiser en cherchant les zéros de ses dérivées partielles par rapport à chaque composante de l'ensemble des balourds correcteurs  $B_p$  :

$$\frac{\partial Cr_{\text{éq}}}{\partial B_p} = \sum_V \left\{ \sum_C \left[ \begin{aligned} &2 (Inf_{P-C-V})^2 B_P + 2 (Vini_{C-V} Inf_{P-C-V}) B_P \\ &+ 2 Inf_{P-C-V} \left( \sum_{P3=1, P-1 \text{ et } P+1, 2P} Inf_{P3-C-V} B_{P3} \right) B_P \right] \right\} \quad (2.62) \end{aligned}$$

Après développement, on obtient un système linéaire de 2P équations à 2P inconnues  $B_p$  :

$$[(\text{Mat}(I, J))][B_p] = [\text{Vec}_p] \quad (2.63)$$

avec les expressions suivantes pour  $\text{Mat}(I, I)$  sur la diagonale,  $\text{Mat}(I, J)$  en dehors de la diagonale avec I différent de J, et  $\text{Vec}(I)$  comme second terme des équations :

$$\begin{cases} \text{Mat}(I, I) = \sum_V \text{Pond}_V \left[ \sum_C (Inf_{PI-V-C})^2 \right] \\ \text{Mat}(I, J) = \sum_V \text{Pond}_V \left[ \sum_C (Inf_{PI-V-C} Inf_{PJ-V-C}) \right] \\ \text{Vec}(I) = -\sum_V \text{Pond}_V \left[ \sum_C (Vini_{V-C} Inf_{PI-V-C}) \right] \end{cases} \quad (2.64)$$

où PI et PJ sont les composantes d'indice I et J du vecteur des balourds correcteurs  $[B_p]$ . On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss-Jordan (annexe B1).

Enfin on remarquera que si le système d'équations initial est carré (par exemple 2 plans correcteurs avec 4 composantes de balourds pour 2 plans de mesure avec 4 voies de capteurs et une seule vitesse de rotation d'équilibrage), on obtient une annulation des vibrations résiduelles sur toutes les voies.

## 2.8 Validité du modèle

Il a déjà été dit au paragraphe 2.1 que l'hypothèse de la cubique pour la déformée du rotor raidissait le modèle et qu'un module d'Young apparent du matériau avait été établi par l'équation (2.3). Néanmoins, il reste important de valider ce modèle par rapport à un calcul avec un logiciel de dynamique de rotor. Des calculs comparatifs ont été passés pour des rotors réels. Les calculs de référence ont été réalisés grâce au logiciel dérivé de ROTORINSA® cité dans l'introduction du chapitre 2.

### 2.8.1 Rotor de compresseur centrifuge

La géométrie, représentée sur la figure 2.5, montre le rotor choisi. Il s'agit d'un rotor de compresseur centrifuge à 8 étages en deux sections, de longueur 2556,5 mm, d'entraxe paliers 2127 mm et de masse 1003 kg (508,2 kg pour le rotor et 493,8 kg

pour les disques). Les diamètres d'arbre sous les roues sont de 183 et 240,4 mm. Cette machine tourne à 8050 tr/min.

De petites masses ajoutées ont été omises, et l'écrou maintenant le piston d'équilibrage a été "fondu" avec celui-ci. On a simplement corrigé la masse volumique des éléments ajoutés de 4% afin de retrouver leur masse.

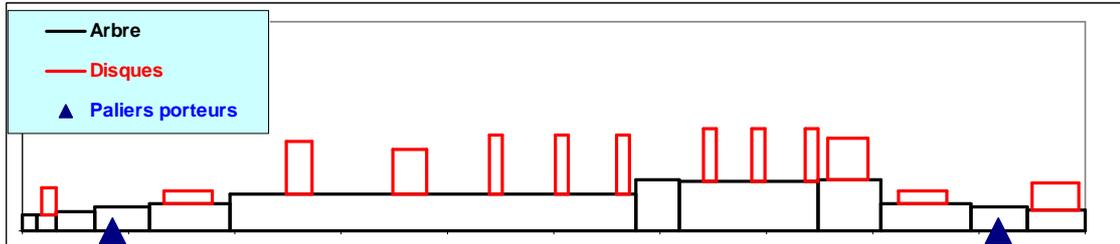


Figure 2.5 – Rotor de compresseur centrifuge multi étagé

Afin de définir la variation linéaire des caractéristiques dynamiques des paliers hydrodynamiques à patins oscillants, on a fait une régression linéaire sur les valeurs calculées avec le code de paliers tel que montré sur la figure 2.6. Puisque celles-ci varient assez rapidement entre 2000 et 4000 tr/min, on a fait la régression linéaire entre 4000 et 12000 tr/min.

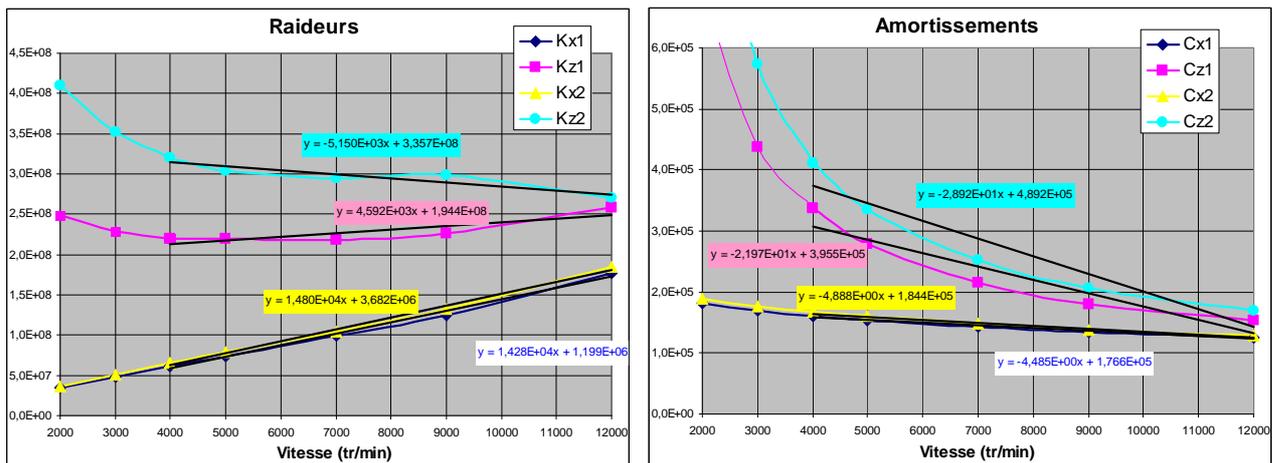
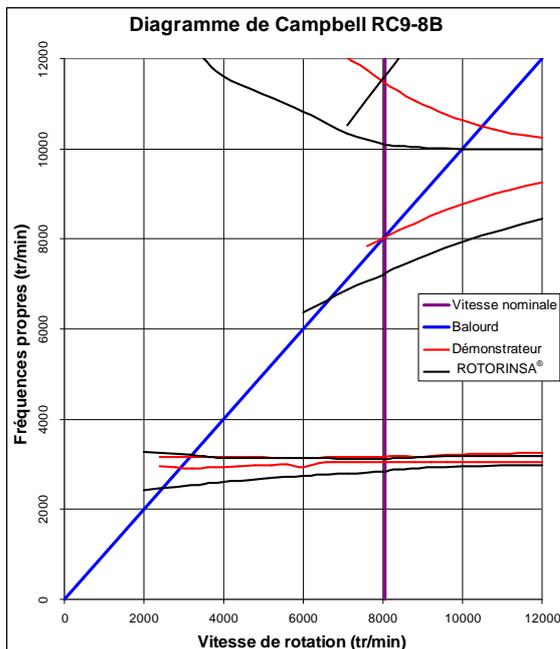


Figure 2.6 – Linéarisation des caractéristiques des paliers compresseur



La figure 2.7 compare le diagramme de Campbell obtenu par rapport à celui du calcul ROTORINSA®. Les courbes ne sont tracées qu'à partir du moment où l'on peut définir un facteur d'amplification suivant l'API RP 582 ( $\zeta < 0,382$ ).

Figure 2.7 – Diagramme de Campbell du compresseur centrifuge comparé aux résultats de ROTORINSA®

La même simulation a été faite sans appliquer la correction du module d'Young proposée par l'équation (2.3). L'influence de cette correction est plus importante sur le premier mode propre de flexion (7,8%) que sur les autres. On s'aperçoit ici qu'elle est absolument nécessaire et que l'on a une excellente corrélation sur ce 1<sup>er</sup> mode propre, alors que le modèle apparaît encore un peu trop raide pour les modes propres supérieurs.

Le tableau 2.8 compare les valeurs des fréquences propres complexes pour la vitesse maximale d'analyse de 12000 tr/min en utilisant les caractéristiques correspondantes de paliers. Les écarts sur les fréquences propres sont inférieurs à 0,5% pour la première forme modale et à 4% pour la seconde. En ce qui concerne les amortissements modaux, on constate simplement que les valeurs semblent être surestimées pour les modes propres à précession inverse avec des écarts plus importants que sur les modes propres à précession directe.

N°	Nature mode propre	Solveur ROTORINSA®		Démonstrateur	
		Fr. propre	Am. modal	Fr. propre	Am. modal
1	Translation préc.<0	2958 tr/min	0,021	2968 tr/min	0,027
2	Translation préc.>0	3184 tr/min	0,022	3192 tr/min	0,017
3	Basculement préc.<0	8737 tr/min	0,230	8453 tr/min	0,213
4	Basculement préc.>0	10390 tr/min	0,196	9982 tr/min	0,127

## 2.8.2 Rotor de turbine à vapeur

L'application est un rotor de turbine à vapeur d'un centre de valorisation énergétique des déchets ménagers de 17 MW à 6100 tr/min (admission à 58 bar, 397°C, vide de 75 mbar et soutirage réglé à 11 bar, échappement axial du type de la figure 1.5). Le rotor de la figure 2.9 a 9 roues, une longueur de 4206 mm, un entraxe de 3625 mm et une masse de 8660 kg.

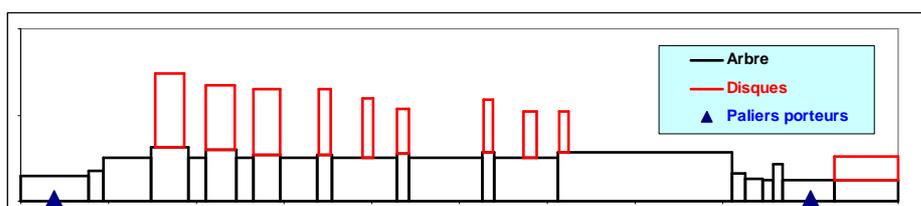


Figure 2.9 – Rotor de turbine à vapeur

La figure 2.10 montre la régression linéaire effectuée sur les caractéristiques dynamiques des paliers. Comme il s'agit d'un rotor très lourd, ces caractéristiques varient très rapidement en dessous de 3 à 4000 tr/min. Les valeurs utilisées à 2000 tr/min pour le démonstrateur sont donc une extrapolation. D'ailleurs, cette machine est équipée d'une pompe de soulèvement à haute pression alimentant une cavité hydrostatique dans les patins inférieurs afin de décoller le rotor à basse vitesse de rotation.

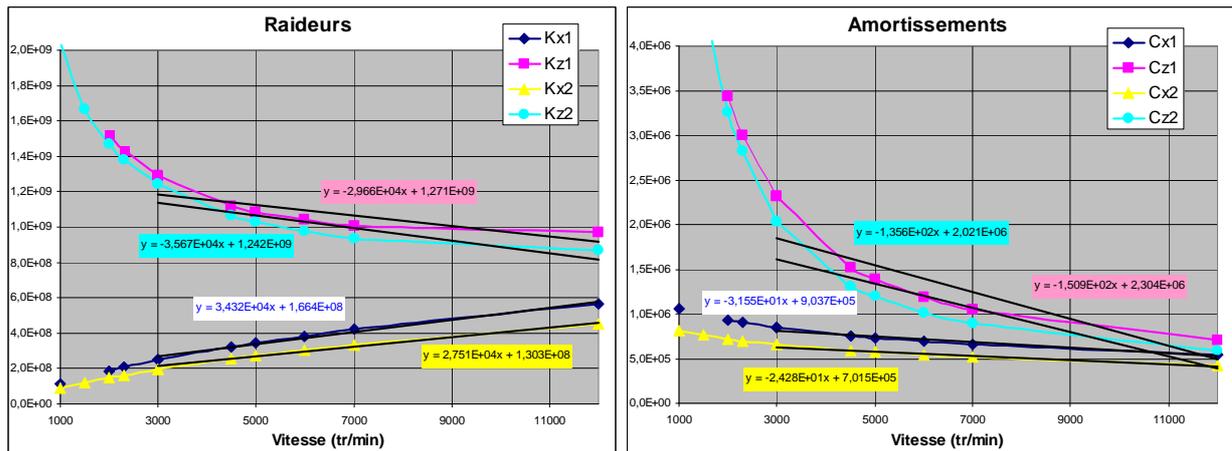
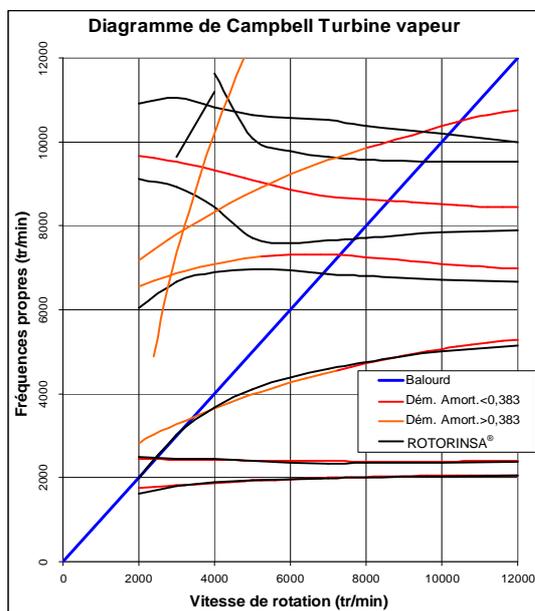


Figure 2.10 – Linéarisation des caractéristiques des paliers de la turbine



La figure 2.11 compare le diagramme de Campbell obtenu à celui du calcul ROTORINSA<sup>®</sup>. Contrairement au paragraphe 2.8.1, les courbes sont tracées sans limitation sur l'amortissement modal. Néanmoins, on a repéré différemment, en orange et en rouge, les tronçons de courbes du démonstrateur ayant des amortissements modaux  $\zeta$  supérieurs ou inférieurs à 0,382 (limite de définition de l'amplification à la résonance). La correspondance est excellente sur les trois premiers modes propres et diverge réellement seulement à partir du sixième.

Figure 2.11 – Diagramme de Campbell de la turbine à vapeur comparé aux résultats de ROTORINSA<sup>®</sup>

Le tableau 2.12 compare les valeurs des fréquences propres complexes pour la vitesse maximale d'analyse de 12000 tr/min en utilisant les caractéristiques correspondantes de paliers. Les fréquences propres ont tendance à être toutes supérieures aux résultats de ROTORINSA<sup>®</sup> d'environ 2% pour les trois premières et à 10% pour les autres. Les amortissements modaux sont assez bien représentés, en remarquant que les écarts obtenus sont d'autant plus grands qu'ils le sont aussi sur les fréquences propres, ce qui est assez normal.

Tableau 2.12 – Comparaison des fréquences propres complexes de la turbine					
N°	Nature mode propre	Solveur ROTORINSA <sup>®</sup>		Démonstrateur	
		Fr. propre	Am. modal	Fr. propre	Am. modal
1	Translation préc.<0	2058 tr/min	0,032	2050 tr/min	0,028
2	Translation préc.>0	2370 tr/min	0,031	2414 tr/min	0,037
3	Basculement préc.<0	5144 tr/min	0,217	5255 tr/min	0,232
4	Basculement préc.>0	6679 tr/min	0,170	7108 tr/min	0,214
5	1 <sup>ère</sup> flexion préc.<0	7897 tr/min	0,171	8618 tr/min	0,245
6	1 <sup>ère</sup> flexion préc.>0	9522 tr/min	0,132	10605 tr/min	0,209

### 2.8.3 Conclusion sur la validité

La comparaison des résultats obtenus par le démonstrateur sur deux exemples différents montre une bonne correspondance avec ceux du logiciel ROTORINSA® malgré la rusticité du modèle utilisé et les hypothèses faites sur la variation des caractéristiques dynamiques des paliers. Ceci est valable aussi bien pour les fréquences propres (pour lesquelles la correction du module d'Young proposée par l'équation (2.3) se révèle tout à fait efficace) que pour les amortissements modaux.

## 2.9 Développement informatique et capacités

Le modèle est développé sous la forme d'une feuille de calculs EXCEL™ avec une programmation en VisualBasic™ (4925 lignes) de façon à ce qu'il puisse être implanté sur tout PC sans aucune modalité particulière, la taille du fichier étant inférieure à 2 Mo.

L'organigramme des fonctionnalités du code est donné en figure 2.13 où apparaissent les références des paragraphes correspondant aux développements introduits.

Les capacités sont les suivantes :

- 22 éléments d'arbre ;
- 16 disques ou éléments rapportés ;
- masses volumiques éventuellement différentes pour l'arbre et les disques ;
- 2 paliers porteurs isotropes ou non avec raideurs et amortissements directs variant linéairement entre deux vitesses de rotation ;
- 1 palier supplémentaire pouvant simuler une étanchéité interne à nid d'abeilles avec le même type de caractéristiques que les paliers porteurs, mais qui ne sera pas utilisé pour le calcul des modes propres à l'arrêt ;
- 20 emplacements de raideurs croisées (que l'on peut placer aussi au niveau des paliers dans le cas de l'utilisation de coussinets lisses par exemple) qui sont fonction du carré de la vitesse de rotation ;
- distribution de 10 balourds avec amplitude et phase ;
- position et inclinaison des deux capteurs aux paliers ;
- 5 plans de balourds correcteurs et 5 vitesses d'équilibrage avec des coefficients de pondération.

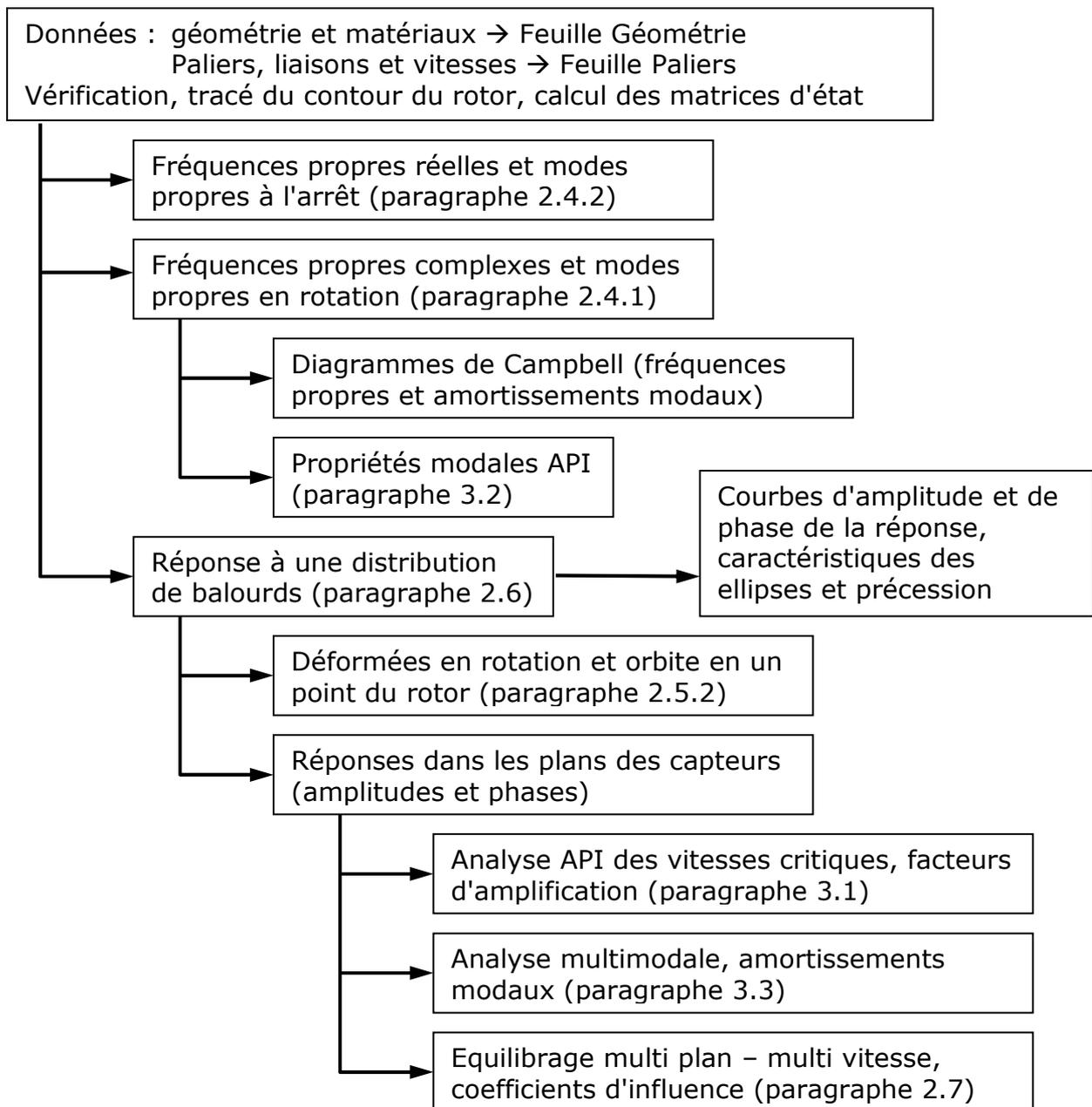


Figure 2.13 – Organigramme du fichier du "démonstrateur"

## 2.10 Exemples de calculs

### 2.10.1 Données

Les tableaux 2.14 et 2.15 montrent les écrans de mise en données et la figure 2.16 le tracé du contour du rotor.

1. Géométrie										2. Matériaux			
Arbre					Disques					Arbre			
Tronçons		Coordonnées			Diamètre		Epaisseur		Position		Masse		Sur tronçon
N°	Longueur	Diam ext	Diam int	Début	Fin	N°	mm	mm	mm	mm	kg	N°	
1	250	80		0	250	1	200	20	40	4,1	1		
2	150	105		250	400	2	130	100	300	3,6	2		
3	600	125		400	1000	3	400	35	450	31,0	3		
4	250	105		1000	1250	4	400	30	630	25,5	3		
5	250	80		1250	1500	5	400	20	980	17,7	3		
6						6	170	80	1050	8,8	4		
7						7	130	100	1190	3,6	4		
8						8	150	90	1450	8,9	5		
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													

Tableau 2.14 – Données géométriques et matériaux

Tableau 2.15 – Données des paliers et de fonctionnement

3. Paliers porteurs (1 et 2) et liaison supplémentaire				5. Raideurs croisées		6. Vitesses maximales			
Positions des paliers		Code des couleurs		A	B		C		
Position palier porteur 1	200,0 mm	Données		14 000	14 000	14 000	14 000	14 000	
Position palier porteur 2	1 300,0 mm	Résultats de calculs		1	450,0	1,00E+03	233	233	
Position liaison supplémentaire	1 050,0 mm	Erreurs		2	630,0	1,50E+03	17 500	17 500	
Option Paliers porteurs (1 et 2) raides ou souples				Paliers raides		Résultats globaux			
Nota : si cette option est cochée, les caractéristiques ci-dessous seront ignorées				<input type="checkbox"/> Oui		Longueur totale arbre		1 500,0 mm	
Variation linéaire des caractéristiques dynamiques des paliers en fonction de la vitesse de rotation						Charge sur le palier 1		111,1 daN	
Entre les vitesses de				4 000 et 14 000 tr/min		Charge sur le palier 2		114,8 daN	
Palier N°1						7. Commandes		Longueur 1500	
Raideur verticale de	9,00E+06	à	1,20E+07	N/m					
Raideur horizontale de	6,00E+06	à	9,00E+06	N/m					
Amortissement vertical de	1,00E+04	à	1,00E+04	N.s/m					
Amortissement horizontal de	1,00E+04	à	1,00E+04	N.s/m					
Palier N°2									
Raideur verticale de	1,20E+07	à	1,50E+07	N/m					
Raideur horizontale de	8,00E+06	à	1,20E+07	N/m					
Amortissement vertical de	1,00E+04	à	1,00E+04	N.s/m					
Amortissement horizontal de	1,00E+04	à	1,00E+04	N.s/m					
4. Liaison supplémentaire (par exemple nid d'abeilles)									
Raideur verticale de	2,00E+06	N/m	à la vitesse de						
Raideur horizontale de	2,00E+06	N/m	1,40E+04	tr/min					
Amortissement vertical de		N.s/m							
Amortissement horizontal de		N.s/m							
Messages :				Paliers souples : utilisation des caractéristiques des paliers 1 et 2		Calculs préliminaires terminés			

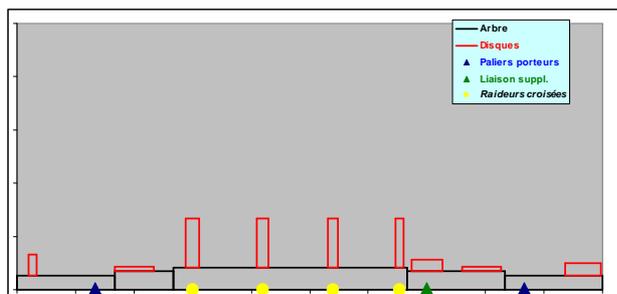


Figure 2.16 – Tracé du contour du rotor

### 2.10.2 Fréquences propres "à l'arrêt"

Fréquences propres approchées à l'arrêt								
N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Identification	translation horizontale	translation verticale	basculement horizontal	basculement vertical	1ère flexion horizontale	1ère flexion verticale	2ème flexion horizontale	2ème flexion verticale
rad/s	2,0993E+02	2,6429E+02	3,5146E+02	4,5356E+02	1,1631E+03	1,1852E+03	2,4679E+03	2,4686E+03
Hz	3,3412E+01	4,2064E+01	5,5937E+01	7,2186E+01	1,8511E+02	1,8863E+02	3,9279E+02	3,9289E+02
tr/min	2 004,7	2 523,8	3 356,2	4 331,2	11 106,5	11 317,7	23 567,1	23 573,2
Position des nœuds (mm)		690,0	690,0	450,0	465,0	255,0	255,0	765,0
				1 125,0	1 110,0	765,0	765,0	1 335,0
Itérations de la méthode de JACOBI :			15	Calculs modes propres à l'arrêt terminés				

Tableau 2.17 – Valeurs des fréquences propres à l'arrêt

Le tableau 2.17 donne le résultat des calculs des fréquences propres dites à l'arrêt, suivant la définition du paragraphe 2.4.2. Le nombre d'itérations de 15 montre que la convergence de l'algorithme de recherche des valeurs propres est très rapide.

Un module d'identification des formes modales a été introduit, en travaillant sur le nombre et la position des nœuds par rapport à la position des paliers. Ce module est très simplifié et peut être facilement mis en défaut. Il n'a été établi que pour les rotors entre paliers, et pas pour ceux en porte à faux. Le résultat apparaît sur la figure 2.18. Il est aussi utilisé pour les modes propres en rotation (figure 2.20) et dans le diagramme de Campbell.

Les paliers de cet exemple étant anisotropes, les modes propres sont orientés suivant les directions horizontale et verticale. Le tableau 2.17 en a donné les fréquences propres et la figure 2.18 présente les formes modales des modes propres verticaux, les modes propres horizontaux ayant pratiquement les mêmes déformées dans la direction perpendiculaire.

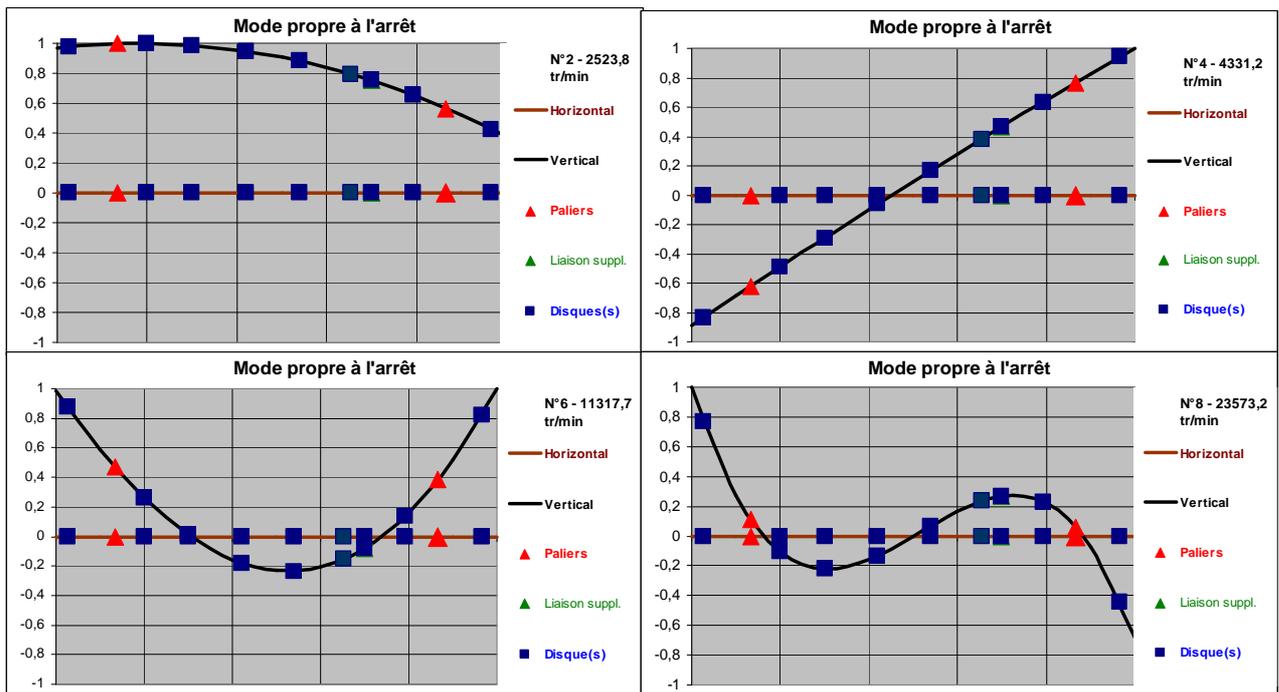


Figure 2.18 – Tracés des modes propres verticaux à l'arrêt

### 2.10.3 Fréquences propres en rotation

Vitesse de rotation		14 000 tr/min		Matrice d'état		Valeurs propres		
Calculs modes propres en rotation terminés				<input type="checkbox"/> Stockage dans "Matrices"		<input type="checkbox"/> Edition dans "Matrices"		
Itération de la méthode de JACOBI :				198				
Vitesse maximale		14 000 tr/min						
Vit. maxi d'étude API		17 500 tr/min						
Fréquences propres en rotation								
N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Identification	translation horizontale	translation verticale	basculement horizontal	basculement vertical	1ère flexion horizontale	1ère flexion verticale	2ème flexion circulaire	2ème flexion circulaire
rad/s	2,9039E+02	3,2539E+02	4,4359E+02	5,8308E+02	1,1132E+03	1,2871E+03	2,3325E+03	2,6187E+03
Hz	4,6220E+01	5,1790E+01	7,0600E+01	9,2800E+01	1,7717E+02	2,0485E+02	3,7122E+02	4,1678E+02
tr/min	2 773,0	3 107,2	4 236,0	5 568,0	10 630,4	12 290,9	22 273,4	25 007,1
La précession est déterminée sur le point de plus grande amplitude modale								
Précession	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0
Valeur des amortissements (les valeurs en rouge correspondent à une amplification "AF" API > 2,5)								
ζ (modal)	0,128	0,105	0,205	0,2	0,064	0,063	0,002	0,002
δ (log dec)	0,612	0,66	1,314	1,28	0,403	0,398	0,014	0,011
Position des nœuds (mm)			660,0	705,0	465,0	480,0	255,0	240,0
					1 110,0	1 125,0	765,0	765,0
							1 320,0	1 335,0

Figure 2.19 – Valeurs des fréquences propres en rotation

La figure 2.19 donne les valeurs des fréquences propres en rotation. Avec des paliers anisotropes, c'est plus l'anisotropie des paliers que les effets gyroscopiques qui découplent les modes propres à précessions positive et négative. On voit que le calcul a nécessité 198 itérations pour la recherche des valeurs propres par la méthode de Jacobi.

La figure 2.20 donne certaines formes modales représentées par les trajectoires de onze points de l'arbre également espacés et celles des disques, ainsi que les déformées de l'arbre pour les plus grands déplacements. Les paliers sont placés pour évaluer l'effet de l'amortissement qu'ils peuvent apporter par rapport à la position des nœuds de la déformée. Les premiers modes propres ont des trajectoires très elliptiques en raison de l'anisotropie des paliers. Elles sont parfaitement circulaires pour des paliers isotropes. Lorsqu'on "monte" dans l'ordre des modes propres, les déformées sont moins elliptiques.

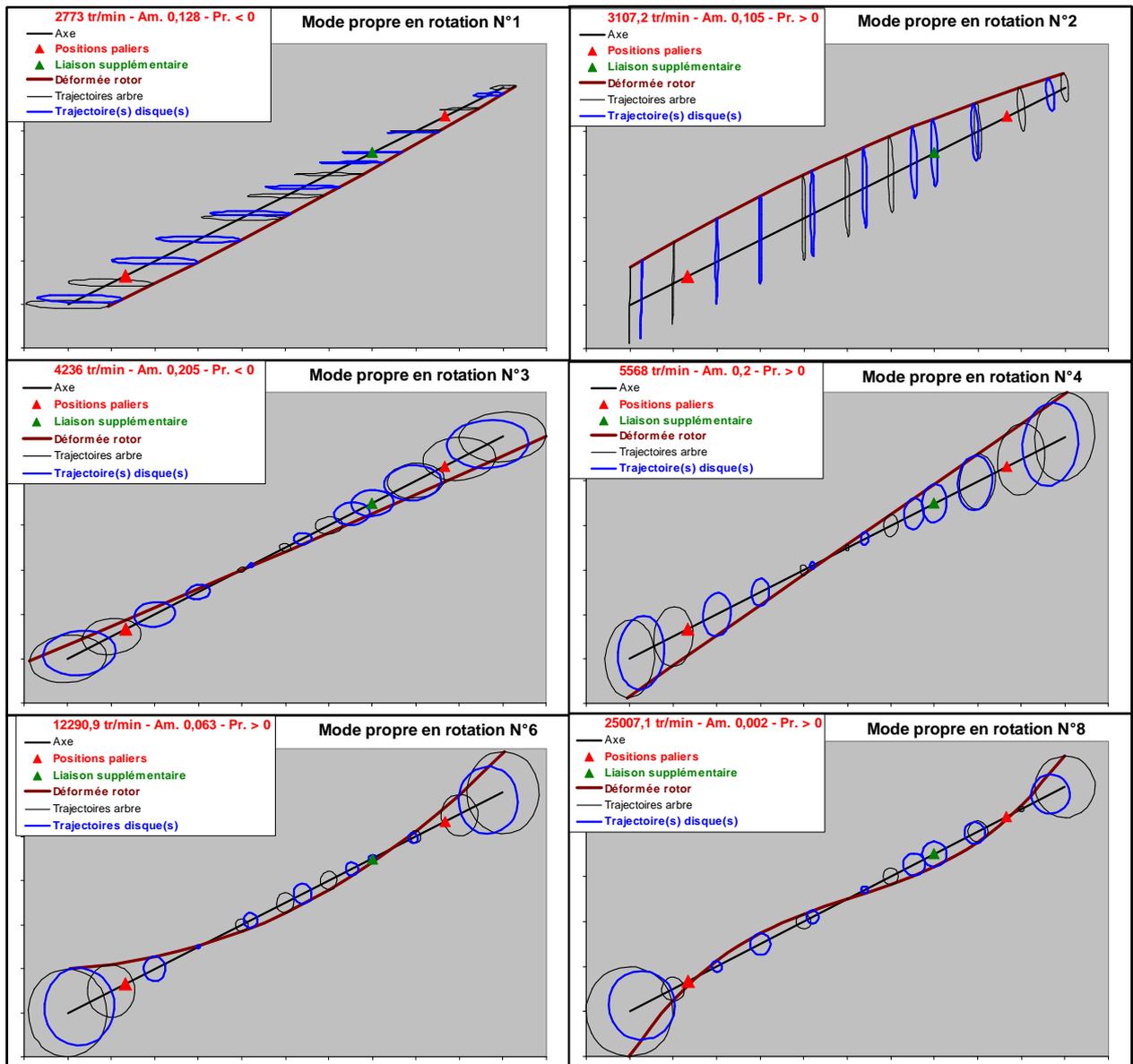


Figure 2.20 – Tracés de modes propres en rotation

#### 2.10.4 Critères API à partir des paramètres modaux

Par exemple, l'analyse de la fréquence propre N°4 (5568 tr/min – amortissement modal 0,200) conduit, suivant le développement du paragraphe 3.2, à une vitesse critique de 5805 tr/min avec un facteur d'amplification de 2,07. La figure 2.21 représente les courbes de réponse du mode propre à une excitation harmonique (amplitude constante) et à une excitation de type balourd (amplitude fonction du

carré de la fréquence). Ces courbes sont normées par rapport à leur maximum. De plus, l'amplification à la résonance correspondant à cette analyse de réponse au balourd est de 2,55.

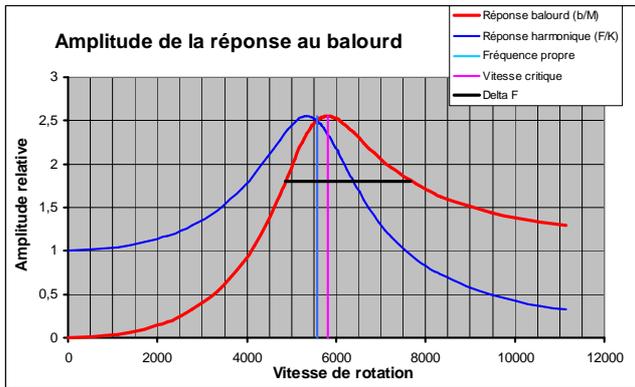


Figure 2.21 – Caractérisation API à partir des données modales

### 2.10.5 Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell de la figure 2.22 est tracé en fréquences propres ainsi qu'en amortissements modaux. On peut aller jusqu'à 26 valeurs de vitesse de rotation (tous les 5%, jusqu'à 125% de la vitesse maximale continue, suivant la définition des normes API). Différents types de représentations peuvent être choisis, simplement par ordre des fréquences propres calculées, mais aussi en fonction des formes modales identifiées. Lorsque les courbes sont proches, voire se croisent, l'identification des formes modales est difficile.

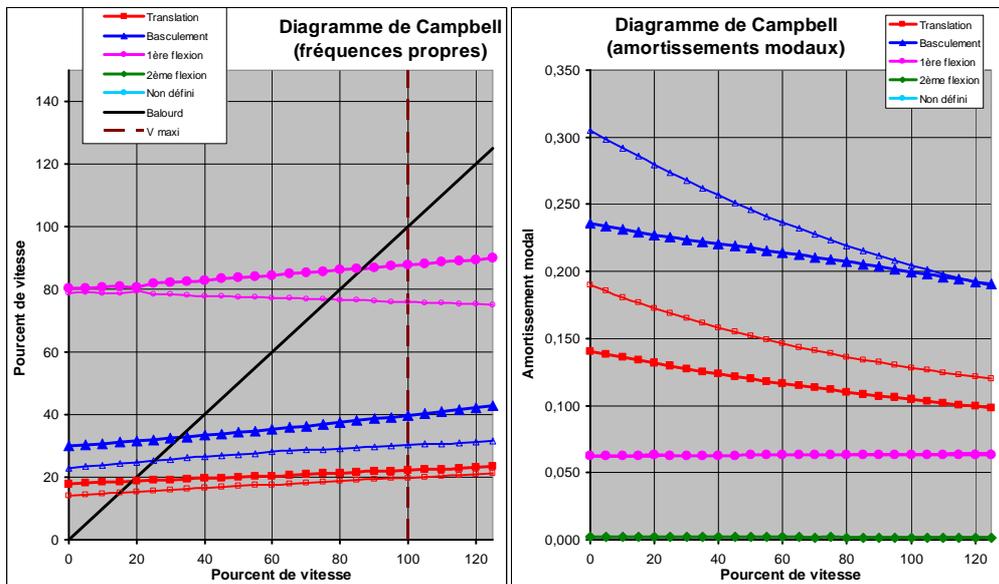


Figure 2.22 – Diagrammes de Campbell des fréquences propres et des amortissements modaux

Un autre exemple est représenté figure 2.23, correspondant au cas du compresseur centrifuge utilisé pour la vérification de la validité du "démonstrateur" au paragraphe 2.8. On voit simplement que, sur un cas industriel, les fréquences propres qui apparaissent se coupent, et qu'il est difficile d'identifier facilement les formes modales. On a donc laissé la possibilité de relier les marques par ordre de fréquence propre, par identification des modes propres (figure 2.22), on ne pas les relier du tout (figure 2.23).

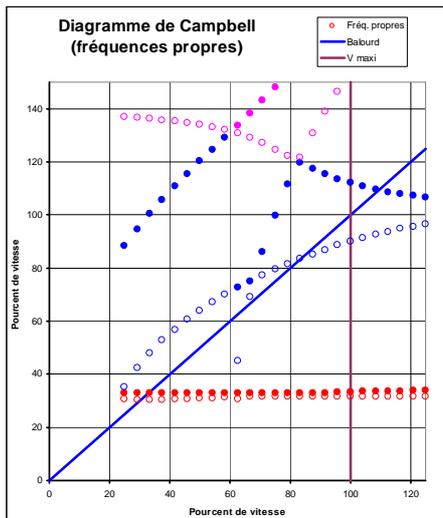


Figure 2.23 – Diagramme de Campbell du compresseur centrifuge du § 2.8

### 2.10.6 Influence de la raideur croisée sur la stabilité

La figure 2.24 montre la déstabilisation du mode propre de translation à précession positive en fonction de la raideur croisée placée au niveau de la troisième roue de la figure 2.16 pour la vitesse de 14000 tr/min. Le diagramme de Campbell en amortissement de la figure 2.25 a été tracé pour une raideur croisée de  $5,5 \cdot 10^6$  N/m à la vitesse nominale, la raideur croisée s'appliquant en fonction du carré de la vitesse de rotation. L'instabilité du mode propre de translation à précession positive apparaît pour la vitesse de 13750 tr/min.

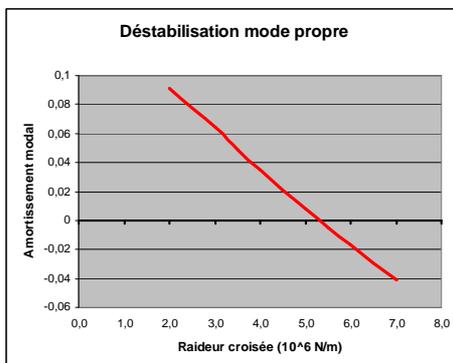


Figure 2.24  
Déstabilisation d'un mode propre en fonction de la raideur croisée

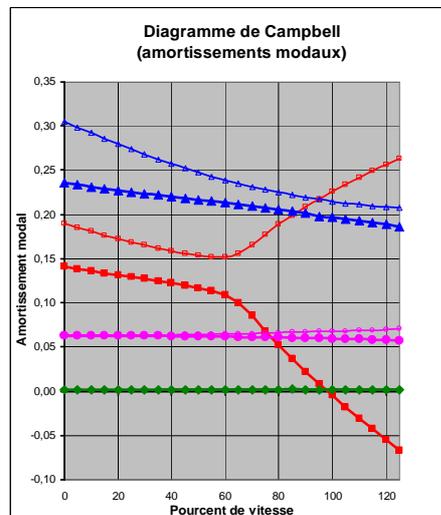


Figure 2.25  
Déstabilisation d'un mode propre en fonction de la vitesse

### 2.10.7 Réponse aux balourds

La plage de vitesse est coupée en 500 intervalles.

Le tableau 2.26 donne la mise en données de la distribution de balourds, la figure 2.28 la réponse en amplitudes horizontale et verticale et en phase pour la position axiale choisie de 750 mm (milieu du rotor). Le tableau 2.27 récapitule les maxima obtenus sur chaque courbe de réponse au moyen d'une interpolation parabolique entre trois points voisins.

Distribution des balourds installés			
N°	Position (mm)	Balourd (g.mm)	Phase (degrés)
1	40	100	0
2	450	100	90
3	630	100	180
4	810	100	270
5	980	100	0
6	1450	100	90
7			
8			
9			
10			
Plage de vitesse	de :	770	tr/min
	à :	15 400	tr/min
Position axiale à		750	mm

Tableau 2.26 – Distribution de balourds

N°	Maxima des réponses							
	Horizontal		Vertical		Grand axe		Petit axe	
	tr/min	µm (0-cr)	tr/min	µm (0-cr)	tr/min	µm (cr-cr)	tr/min	µm (cr-cr)
1	2 227,0	1,5	2 709,0	1,9	2 537,6	2,0	2 055,1	0,4
2	12 187,6	10,7	12 163,0	11,4	2 920,9	1,7	2 782,4	1,5
3					3 029,8	1,4	2 973,2	1,3
4					12 114,4	11,3	12 246,2	10,8

Tableau 2.27 – Maxima de réponse aux balourds

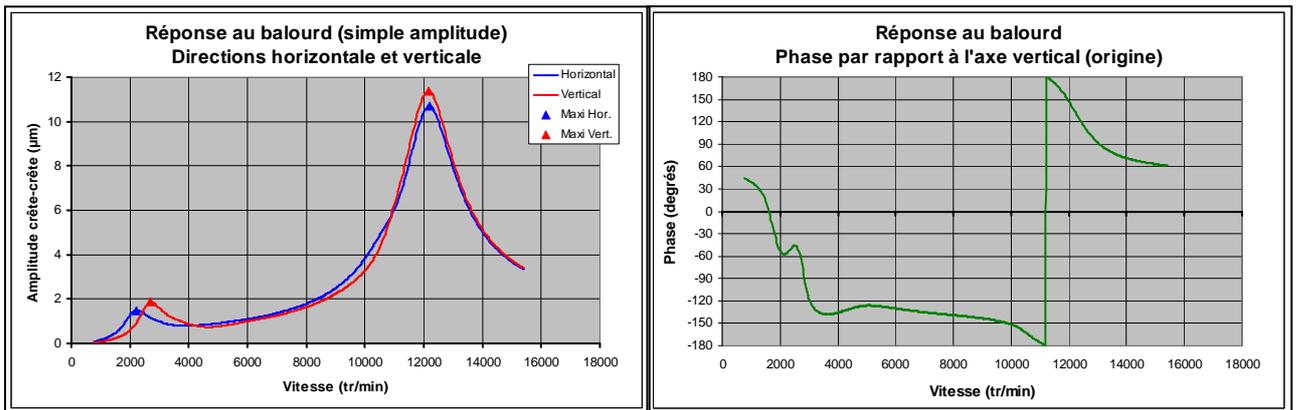


Figure 2.28 – Amplitudes et phase de la réponse aux balourds

La figure 2.29 représente les grand et petit axes de l'ellipse de l'orbite de la trajectoire ainsi que son inclinaison, ces courbes sont ici très perturbées compte tenu de l'anisotropie des paliers anisotropes et de la complexité de la distribution des balourds.

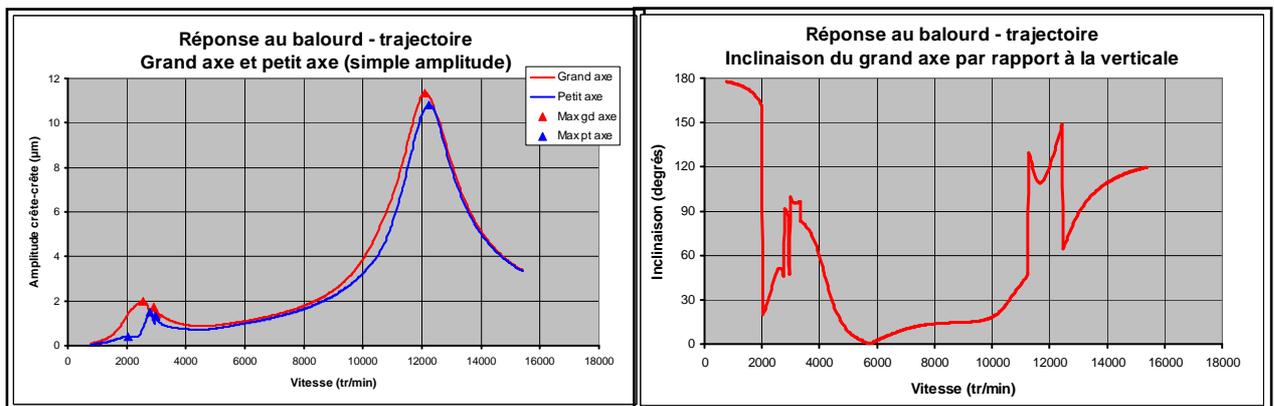


Figure 2.29 – Caractéristiques de l'ellipse de la trajectoire

A faible vitesse de rotation, l'effet de l'anisotropie des paliers est important. La figure 2.30 montre la déformée en rotation du rotor sous l'effet de la répartition de balourds à 2000 tr/min et la figure 2.31 l'orbite poursuivie pour la même vitesse et le même point du rotor que sur les figures 2.27 à 2.29. La position du rotor pour  $\Omega t_1=0$  est repérée afin de montrer la phase.

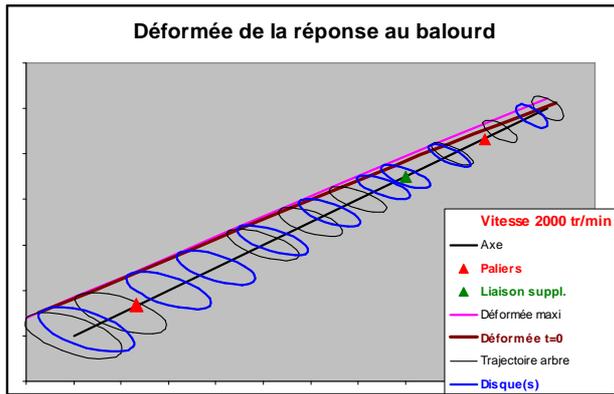


Figure 2.30 – Déformée en rotation

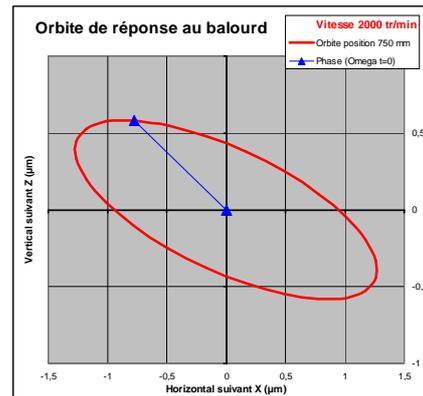


Figure 2.31 – Orbite de la trajectoire

Enfin, les réponses aux balourds sont tracées pour les positions des capteurs de mesures de vibrations aux paliers, cette fois en double amplitude (ou crête à crête), pour vérification des critères des standards API. On effectue une rotation du repère d'observation dans le plan X-Z, compte tenu du fait que le plan de joint des paliers, indispensable au montage, empêche l'installation d'un capteur dans la direction horizontale, notamment pour les compresseurs centrifuges. La figure 2.32 considère des capteurs situés axialement sur le rotor à 250 et 1250 mm, et inclinés à 45°.

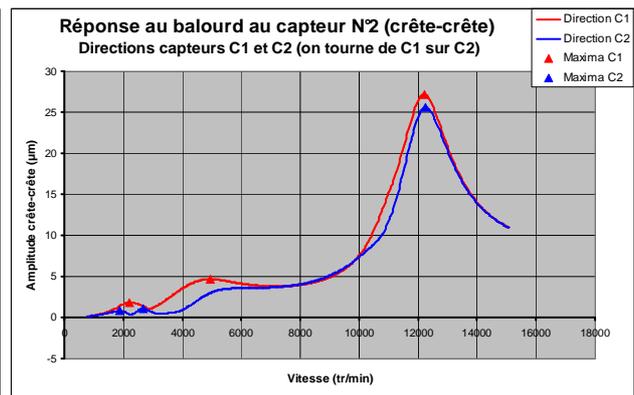
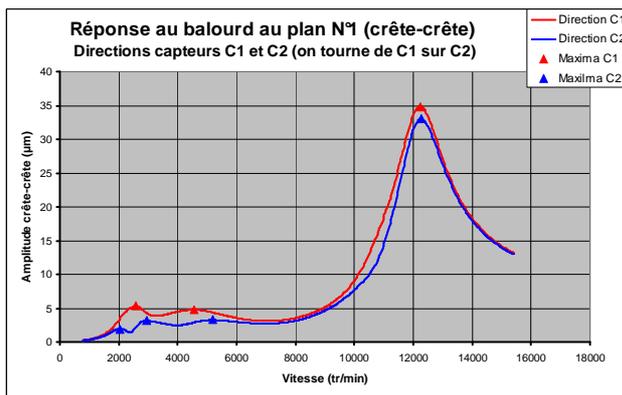
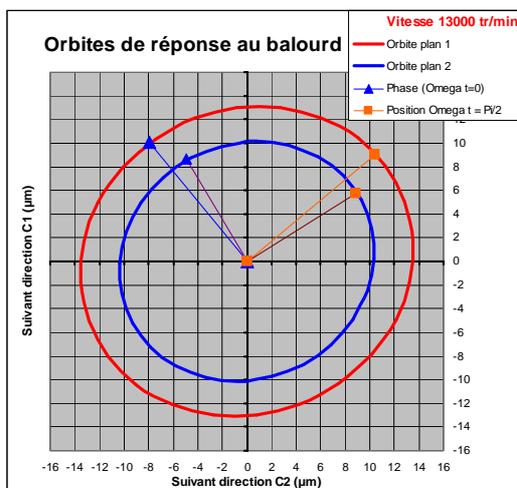


Figure 2.32 – Réponses aux balourds dans les plans des capteurs



La figure 2.33 donne les orbites des trajectoires au niveau de ces capteurs à la vitesse de 13000 tr/min. Bien que les effets de l'anisotropie des paliers s'atténuent en montant en vitesse de rotation en tendant vers des trajectoires circulaires comme celle de la figure 2.33, on voit que, au niveau des paliers, les orbites conservent encore un certain caractère elliptique. On a repéré les positions à  $\Omega t=0$  et  $\Omega t=\pi/2$  pour montrer la phase et la précession.

Figure 2.33 – Orbites des trajectoires aux capteurs

## 2.10.8 Inversion de la précession pour des paliers anisotropes

Lorsque les paliers sont fortement anisotropes, on trouve que la précession de la réponse change sur une partie de la plage de vitesse entre deux modes similaires à précession directe et inverse. Ce phénomène est analysé dans le paragraphe 3.4.1. La figure 2.34 le montre pour l'exemple ci-dessus, dans lequel on a poussé l'anisotropie des paliers jusqu'à un rapport de 2 au lieu de 1,5.

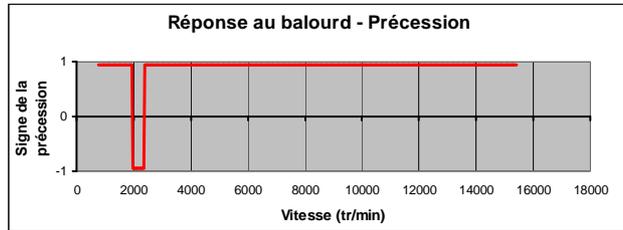


Figure 2.34 – Précession de la réponse aux balourds pour des paliers fortement anisotropes

## 2.10.9 Traitement API de la réponse aux balourds

A partir de la courbe de réponse aux balourds vue des capteurs de vibration, les standards API définissent des facteurs d'amplification (voir paragraphe 1.2.5.1, figure 1.25). Ce traitement est montré sur la figure 2.35 pour la réponse correspondant aux capteurs du plan N°1 de la figure 2.32, avec le tracé des plages sous-tendues à -3 dB au voisinage de la vitesse de 12500 tr/min.

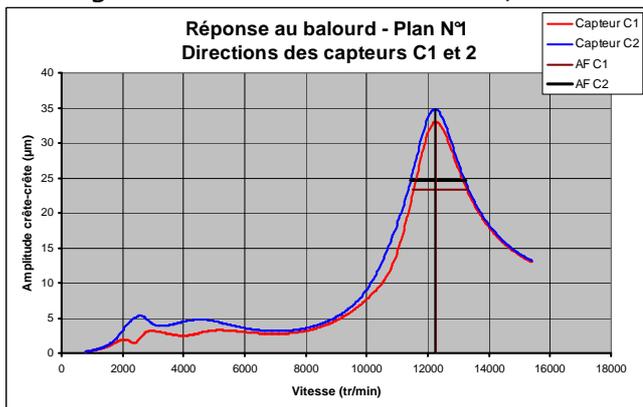


Figure 2.35 – Analyse API d'une vitesse critique

Dans le tableau 2.36, toutes les voies de mesure ont été analysées, et l'on voit qu'il y a autant de vitesses critiques et de facteurs d'amplification que de mesures. Ce phénomène est analysé au chapitre 3.

Amplifications à la résonance API			
Désignation		Vit critique	AF
		tr/min	
Plan N°1	Capteur C1	12 227	6,75
	Capteur C2	12 263	6,87
Plan N°2	Capteur C1	12 205	6,62
	Capteur C2	12 257	6,87
Grand axe ellipse plan N°1		1 785	6,84
Grand axe ellipse plan N°2		1 785	6,84

Tableau 2.36 – Caractéristiques API d'une vitesse critique

## 2.10.10 Approche multimodale pour l'évaluation des amortissements modaux à partir de la réponse aux balourds

Le paragraphe 3.3 présente une amélioration de la détermination des amortissements à partir des calculs de réponse aux balourds par rapport à l'approche monomodale de l'API du paragraphe 2.10.8.

Sur la courbe de réponse du capteur C1 du plan N°1 de la figure 2.31, on voit que le type d'analyse du paragraphe 2.10.8 n'est pas possible, la plage à -3 dB sous-tendue allant de 1999 à 6271 tr/min, soit un facteur d'amplification de 1,06 commun aux deux pics de réponse présents dans la plage. La figure 2.37 montre le traitement multimodal effectué sur la fonction de transfert relative à cette voie de mesure.

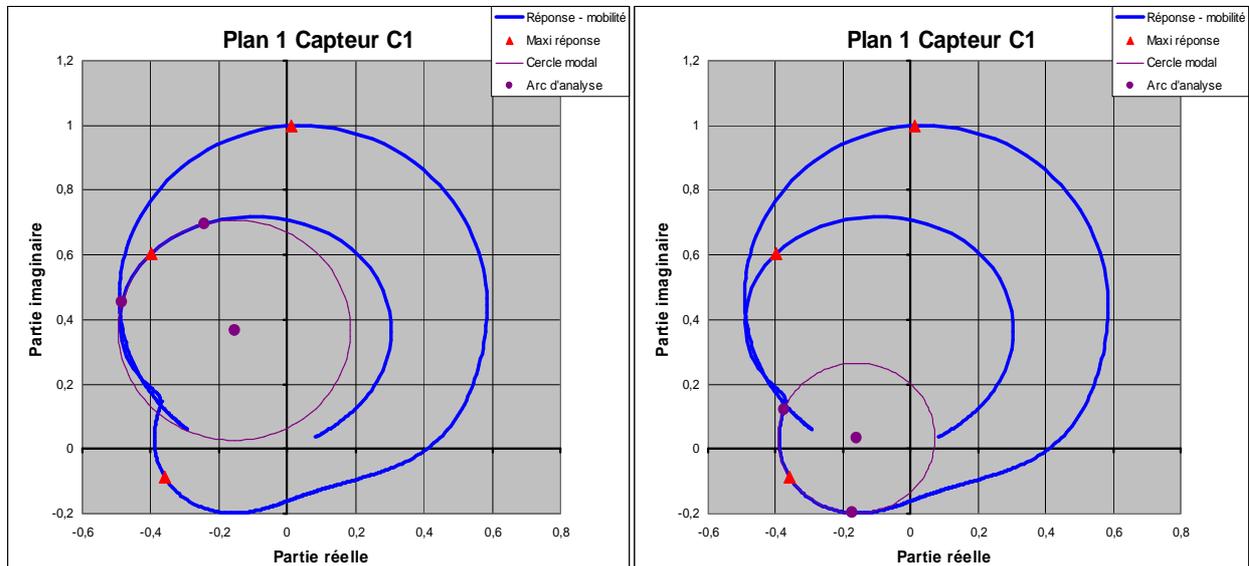


Figure 2.37 – Tracé des cercles modaux pour une réponse aux balourds

Les résultats obtenus sont les suivants :

- 1<sup>er</sup> maximum : 2578,5 tr/min – amortissement modal 0,186 – facteur d'amplification 2,29 ;
- 2<sup>ème</sup> maximum : 4546,4 tr/min – amortissement modal 0,385 – facteur d'amplification sans signification (inférieur à 1).

### 2.10.11 Equilibrage dynamique

La méthode d'équilibrage généralement employée est celle des coefficients d'influence, mais sa mise en œuvre peut s'avérer techniquement complexe. En effet, l'équilibrage sous vide à vitesse nominale des rotors de turbomachines nécessite un investissement important qui s'avère un outil stratégique pour les constructeurs (figure 1.28).

On reprend la même définition de plage de vitesse et la même distribution de balourds que pour la réponse aux balourds et l'étude d'équilibrage est faite dans le repère des capteurs de mesure (paragraphe 2.10.6). La figure 2.38 donne la mise en données et les résultats obtenus pour 2 plans correcteurs et 3 vitesses d'équilibrage avec des coefficients de pondérations différents. La figure 2.39 donne les réponses vues par les capteurs en vibrations initiales et vibrations résiduelles sur la plage d'étude.

Données			Balourds correcteurs			Vibrations				
Position des plans de correction	400	mm	Plan de correction	Valeur	Phase	Voie	Initiales (µm crête-crête)			
	1.450	mm		g/mm	dégrés		Plan 1 C1	Plan 1 C2	Plan 2 C1	Plan 2 C2
		mm	1	307,1	-154,1	vitesse 1	4,78	3,53	4,47	2,81
		mm	2	147,9	-125,3	vitesse 2	4,89	4,55	4,43	4,60
		mm				vitesse 3	29,25	26,97	22,45	20,28
Vitesses de rotation d'équilibrage	5 000	tr/min	Rappel de la plage de vitesse			Résiduelles (µm crête-crête)				
	10 000	tr/min	Minimum	770	tr/min	Voie	Plan 1 C1	Plan 1 C2	Plan 2 C1	Plan 2 C2
	13 000	tr/min	Maximum	14 000	tr/min	vitesse 1	3,31	3,86	4,24	3,49
Coefficients de pondération pour chaque vitesse d'équilibrage (1 par défaut)	2	vitesse 1	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Equilibrage dynamique</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 5px;">Voir coefficients d'influence</div>			vitesse 1	2,24	2,26	3,59	3,52
	3	vitesse 2				vitesse 2	1,20	1,06	2,72	2,73
	1	vitesse 3				vitesse 3				
		vitesse 4				vitesse 4				
		vitesse 5				vitesse 5				
Calculs d'équilibrage terminés			Retour réponse aux capteurs			Retour courbe de réponse au balourd				
Calcul du point de vitesse N°			500							

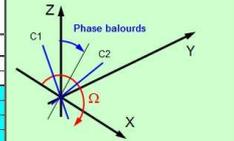


Figure 2.38 – Equilibrage dynamique multi-plans multi-vitesses

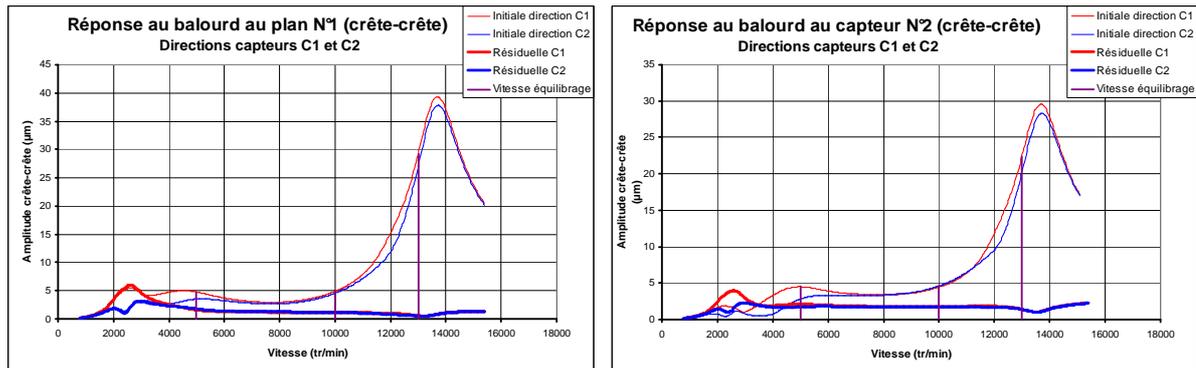


Figure 2.39 – Vibrations initiales et résiduelles aux capteurs

Cette option constitue une aide pour placer des plans d'équilibrage, juger de leur efficacité (balourds correcteurs modérés) et choisir des vitesses d'équilibrage afin d'avoir des niveaux vibratoires convenables sur toute la plage de vitesse de la machine.

## 2.11 Conclusion

L'outil développé reproduit tous les principaux phénomènes de dynamique linéaire de rotor en flexion rencontrés en compresseurs centrifuges de procédé et turbines à vapeur industrielles. La validation réalisée sur des cas industriels conduit à des résultats tout à fait acceptables dans la mesure où l'on connaît suffisamment bien les caractéristiques dynamiques des paliers.

### 3. Interprétations de la réponse des rotors aux balourds

La réponse des rotors aux balourds est un phénomène vécu tous les jours par les exploitants sur leurs machines lorsqu'ils surveillent les niveaux vibratoires ou qu'ils traversent les vitesses critiques lors des arrêts et démarrages.

Les standards API, et notamment le document sur la dynamique de rotor API RP684 **[API684]**, sont extrêmement pragmatiques et basent intégralement l'étude de vibration de flexion d'un rotor sur sa réponse aux balourds. L'aspect stratégique de la vérification expérimentale des "facteurs d'amplification" (paragraphe 1.2.5.1 et 1.2.5.2) réside dans le fait que ceci constitue le seul moyen facile à mettre en œuvre pour vérifier la capacité d'amortissement apportée par les paliers afin de valider la prévision de stabilité vibratoire latérale des compresseurs centrifuges (paragraphe 1.2.5.6 et chapitre 4).

Si ce problème est bien connu, certains points peuvent encore être précisés, et on se propose d'améliorer la procédure de quantification des amortissements des standards API.

#### 3.1 Critique de la procédure API de caractérisation des vitesses critiques

##### 3.1.1 Différents résultats de vitesse critique obtenus pour la même fréquence propre

Rappelons brièvement la méthode présentée au paragraphe 1.2.5.1.

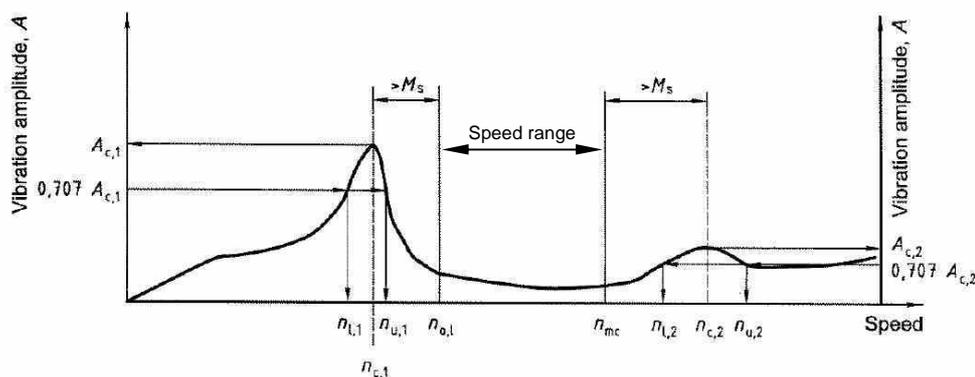


Figure 3.1 – Amplitude de réponse au balourd, amplification à la résonance et marge de séparation **[API684]**

Sur chaque courbe d'amplitude de réponse (figure 3.1, identique à la figure 1.27), on détermine un facteur d'amplification AF (amplification factor),

$$AF = \frac{n_c}{\Delta n} \quad (3.1)$$

avec  $n_c$ , la vitesse critique au maximum de la courbe de réponse,  
 $\Delta n$ , la plage de vitesse sous-tendue à -3 dB.

Même s'il s'agit d'une définition, comme celle de la vitesse critique, son interprétation est liée à une approche monomodale. On se doute que si deux modes propres sont

proches et excités par le même balourd, on aura un étalement de la courbe de réponse qui faussera la détermination du facteur d'amplification, notamment pour en évoluer la nocivité.

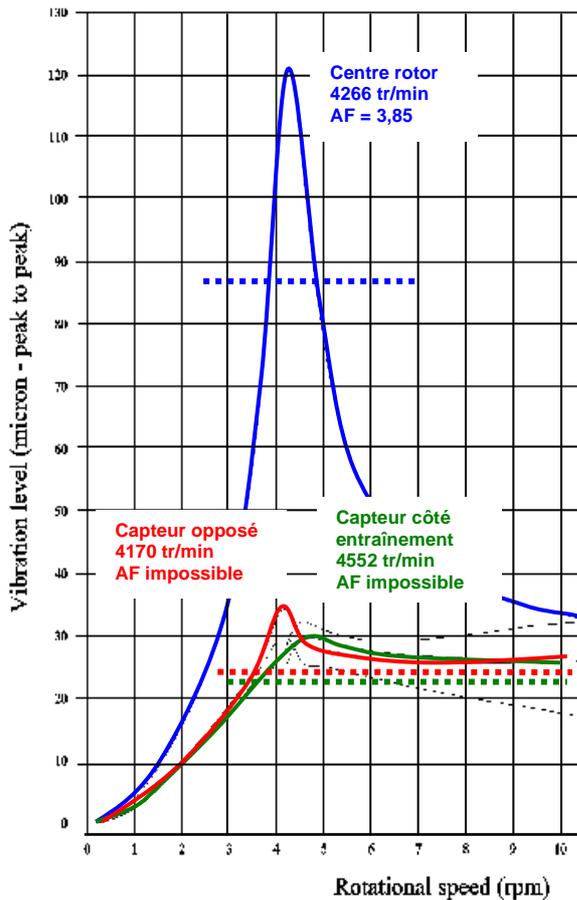


Figure 3.2 – Réponse d'un rotor à un balourd central

De plus, théoriquement, l'étude se faisant dans la position des capteurs (toujours de façon à pouvoir être vérifiée ensuite expérimentalement), les courbes de réponses à chaque palier, et même dans chaque direction de mesure sont différentes. La figure 3.2 montre la réponse d'un rotor de compresseur centrifuge à un balourd central.

Les réponses (grands axes des ellipses es trajectoires) sont tracées au centre du rotor où l'on a placé le balourd ainsi qu'aux deux paliers. On obtient trois vitesses critiques différentes avec 10% d'écart sur les observations aux paliers. Ce qui est peut-être encore plus grave est que l'on ne peut pas déterminer les facteurs d'amplification, donc les amortissements sur les paliers, alors qu'au centre du rotor (où bien sûr on ne pourra pas placer de capteur), le facteur d'amplification est de 3,85 soit largement supérieur à la limite de 2,5 pour que ce mode propre soit considéré comme une vitesse critique au sens de l'API

Cette situation est tout à fait courante.

### 3.1.2 Application

L'application, comme celle des paragraphes suivants, va se faire sur le rotor de compresseur centrifuge à 4 étages ayant servi à la démonstration de phénoménologie de dynamique de rotor en flexion du chapitre 2 (tableaux 2.14 pour la géométrie, 2.15 pour les caractéristiques des paliers anisotropes et figure 2.16 pour le contour du rotor).

Le balourd appliqué pour l'excitation des modes propres cylindriques ou de translation du rotor dans les paliers correspond à la définition de l'API 617 ou API RP 684, **[API617] – [API684]** soit 4 fois la tolérance d'équilibrage répartie sur les roues 2 et 3. La figure 3.3 représente les courbes d'amplitudes de réponse dans les plans horizontal et vertical, ainsi que celles vues des capteurs de vibration. Les paliers étant anisotropes, les trajectoires ne sont pas circulaires et les réponses suivant les deux directions de mesures C1 et C2 (inclinaées à 45° de la verticale) sont différentes dans chaque plan de mesure.

Les résultats de l'analyse API des maxima sont dans le tableau 3.4.

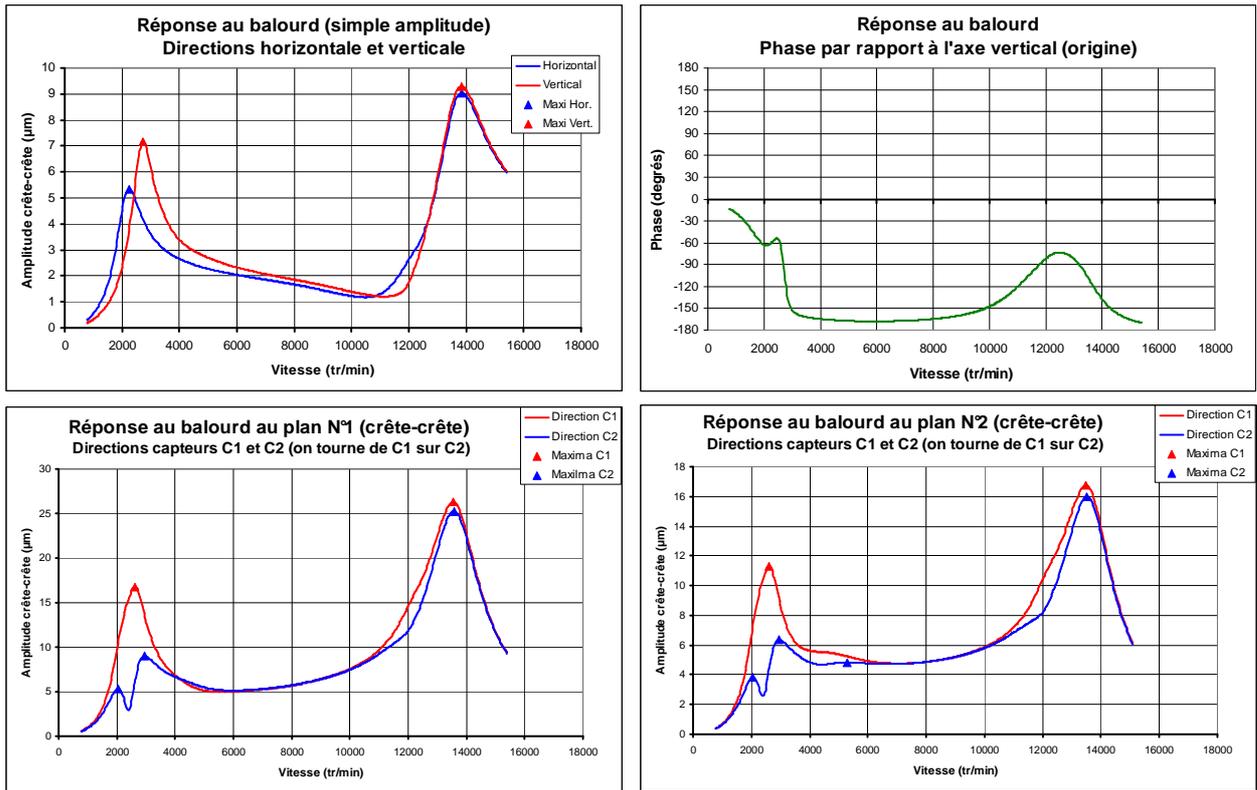


Figure 3.3 – Réponse d'un rotor de compresseur centrifuge à un balourd central

Plan N°1				Plan N°2			
Capteur C1		Capteur C2		Capteur C1		Capteur C2	
Critique	F.amplif.	Critique	F.amplif.	Critique	F.amplif.	Critique	F.amplif.
2 618	2,63	2 032	3,30	2 615	2,55	2 052	3,20
		2 946	1,82			2 954	N.A.
13 541	7,58	13 569	8,42	13 481	7,19	13 518	8,26

On retrouve pour la vitesse critique à 2 954 tr/min du capteur C2 du plan 2, le phénomène cité au paragraphe 3.1 où la courbe sous-tendue englobe plusieurs modes propres, d'où un facteur d'amplification non calculable. La courbe C2 du plan 2 présente aussi un "petit maximum" à 5 297 tr/min qu'il est impossible d'analyser, puisque le segment sous tendu englobe les deux critiques situées de part et d'autre.

### 3.1.3 Nombre de vitesses critiques

En gardant la définition de la vitesse critique comme une vitesse de maximum d'amplitude de réponse, on se demande pourquoi y en a-t-il deux sur les capteurs C2 et une seule sur les capteurs C1 dans la plage de 1500 à 4000 tr/min de la figure 3.3. Pour l'expliquer, on fait varier l'angle d'observation des capteurs, et l'on obtient le réseau de courbes de réponses de la figure 3.5. Ainsi, on savait déjà que les vitesses critiques étaient fonction du point d'observation et voilà que leur nombre et leur position sont de plus fonction de la position angulaire des capteurs dans le cas de paliers anisotropes !

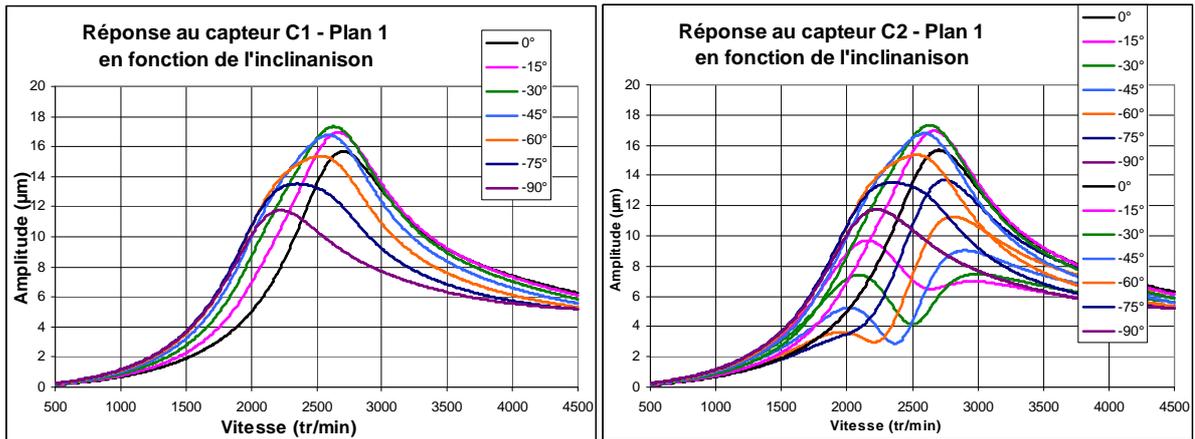


Figure 3.5 – Amplitudes de réponse en fonction de l'inclinaison des capteurs

La figure 3.6 donne les positions des maxima d'amplitudes en fonction de l'inclinaison des capteurs.

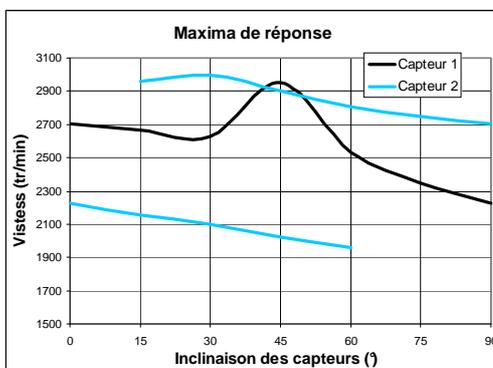


Figure 3.6 – Maxima des réponses en fonction de l'inclinaison des capteurs

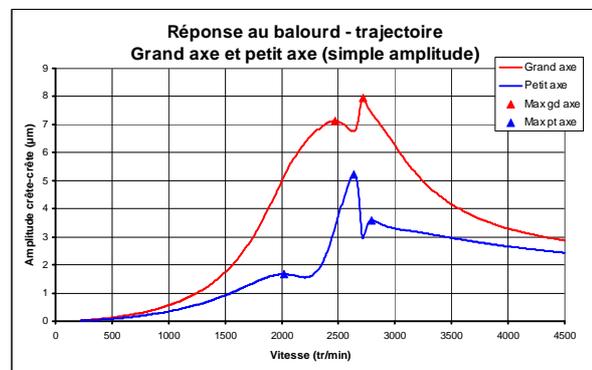


Figure 3.7 – Grand axe et petit axe de la trajectoire au plan 1 – Déplacements maximaux au palier

Par ailleurs, on a l'habitude de considérer l'amplitude maximale du déplacement, car c'est elle qui doit être comparée aux jeux installés dans la turbomachine tout au long du rotor. Ce déplacement maximal est donné par le grand axe des ellipses des orbites et représenté figure 3.7 pour le palier N°1. On obtient deux vitesses critiques à 2467 et 2673 tr/min pour le palier 1 et 2475 et 2750 tr/min pour le palier 2, valeurs encore différentes de celles du tableau 3.4.

Dans le calcul de la réponse aux balourds, on a l'habitude de traiter l'aspect mathématique comme la solution directe de l'équation (2.51) du paragraphe 2.6. Mais on pourrait tout aussi bien chercher les participations modales de la même façon qu'on le fera plus loin au paragraphe 3.3.1.2. Dans la plage de vitesse de rotation de 1500 à 4000 tr/min, on trouverait donc une participation essentiellement des deux premiers modes propres latéraux de la figure 3.8.

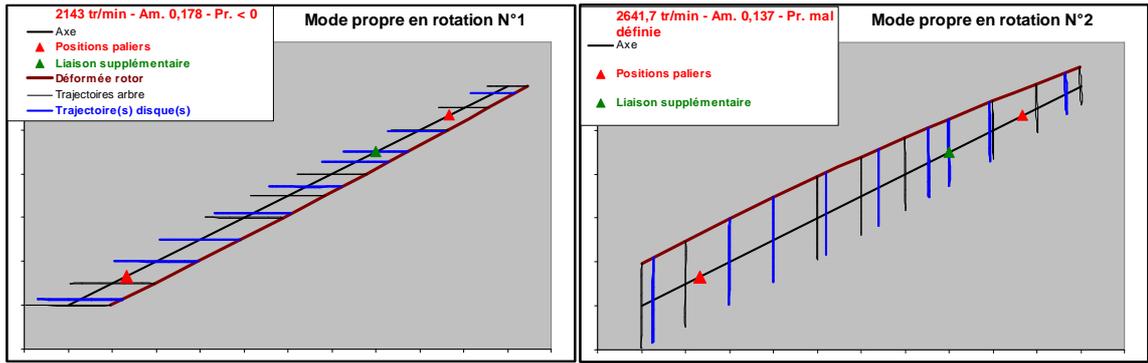


Figure 3.8 – Modes propres en rotation

## 3.2 Détermination des vitesses critiques API à partir des caractéristiques modales

En gardant l'approche monomodale de l'API et en supposant que l'on soit capable de trouver des distributions de balourds privilégiant chacun des modes propres, on va déterminer la vitesse critique et le facteur d'amplification à partir des valeurs propres complexes (fréquence propre et amortissement modal).

### 3.2.1 Formulation

La réponse en amplitude d'un système mono degré de liberté à une excitation harmonique est de la forme  $(-m\omega^2 + ic\omega + k)X = F$ , soit :

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{\sqrt{\Omega^4 + \Omega^2(4\zeta^2 - 2) + 1}} \frac{1}{k} e^{-i\varphi} \quad (3.2)$$

où  $\Omega$  est la pulsation réduite  $\Omega = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}}$  et  $\zeta$  l'amortissement modal.

L'amplification s'exprime par :

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\Omega^4 + \Omega^2(4\zeta^2 - 2) + 1}} \quad (3.3)$$

qui a un maximum  $A_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$  pour la pulsation réduite  $\Omega_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$ .

La réponse du même système excité par un balourd  $U$  est :  $(-m\omega^2 + ic\omega + k)X = U\omega^2$

avec une amplification :  $A(\Omega) = \frac{\Omega^2}{\sqrt{\Omega^4 + \Omega^2(4\zeta^2 - 2) + 1}} \quad (3.4)$

qui a toujours un maximum  $A_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$  mais cette fois pour la pulsation réduite

$\Omega_{rb} = \sqrt{\frac{1}{1-2\zeta^2}}$  qui correspondant par définition à la vitesse critique API.

Les pulsations réduites des vitesses  $n_l$  et  $n_u$  du diagramme API de la figure 3.1, sont :

$$\Omega_l = \sqrt{\frac{1-2\zeta^2-2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-8\zeta^2(1-\zeta^2)}} \quad \text{et} \quad \Omega_u = \sqrt{\frac{1-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{1-8\zeta^2(1-\zeta^2)}}$$

d'où l'on tire finalement le facteur d'amplification API :

$$AF_{API} = \frac{\sqrt{[1 - 8 \zeta^2 (1 - \zeta^2)] / (1 - 2 \zeta^2)}}{\sqrt{1 - 2 \zeta^2 + 2 \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} - \sqrt{1 - 2 \zeta^2 - 2 \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}} \quad (3.5)$$

Rappelons que l'amplification à la résonance sous l'effet d'un balourd est le rapport de l'amplitude à la vitesse critique sur celle à vitesse de rotation infinie correspondant à la ligne d'inertie du rotor.

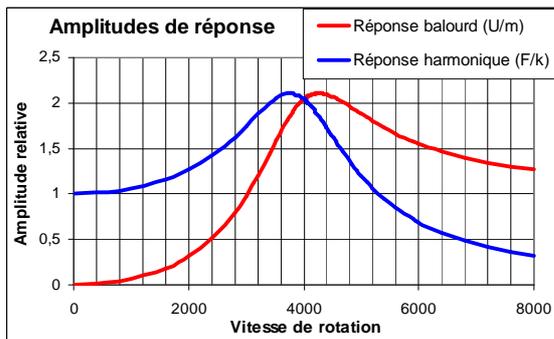


Figure 3.9 – Réponse harmonique et réponse au balourd

Le diagramme de la figure 3.9 montre la différence entre les deux types de réponse pour une fréquence propres de 4000 tr/min et un amortissement modal de 0,245 correspondant à 1,5 d'amplification à la résonance. L'application de ce calcul de réponse au balourd de la figure 3.2 donne une vitesse critique de 4 185 tr/min et une amplification à la résonance de 3,92 (soit un amortissement modal  $\xi = 0,12$ ). Ces valeurs, proches de l'évaluation au centre du rotor sur la figure 3.2 qui n'est malheureusement pas mesurable, sont beaucoup plus réalistes que

les évaluations faites au niveau des paliers.

Par ailleurs, les fréquences propres dépendent de la vitesse de rotation. Il faut donc itérer pour chaque valeur propre sur la vitesse de rotation afin que chaque vitesse critique corresponde à la vitesse de rotation donnée.

Cette méthode de détermination des vitesses critiques et des amortissements modaux, et donc des marges de séparation par rapport à la plage de vitesse de fonctionnement, s'avère très utile en conception. Elle peut de plus être implantée dans les logiciels d'analyse de dynamique de rotor de façon beaucoup plus facile qu'une analyse automatique des courbes de réponses aux balourds.

### 3.2.2 Application

L'application au rotor de compresseur centrifuge à 4 étages du paragraphe 3.1.2 donne les résultats du tableau 3.10.

Forme modale	Précession	Vitesse critique	Facteur ampli.
Translation horizontale	mode plan	2 214 tr/min	2,43
Translation verticale	mode plan	2 693 tr/min	3,37
Basculement	positive	4 638 tr/min	1,69
Première flexion	positive	12 790 tr/min	8,98

Si l'on excepte les modes propres rétrogrades qui sont peu excités par les balourds, on obtient un deuxième jeu de valeurs de vitesses critiques et de facteurs d'amplification. Pour le mode propre "première flexion" peu amorti, il y a une bonne coïncidence avec celui du paragraphe 3.1.2.

Une mention spéciale doit être faite pour les modes de translation. Normalement, les effets gyroscopiques séparent les deux valeurs propres en une à précession négative et l'autre à précession positive. Ici, avec des paliers anisotropes, les deux formes modales sont pratiquement planes sans qu'une précession puisse être réellement définie, car le module du produit vectoriel (2.50) est très petit. Il faut donc s'attendre à ce que ces deux modes propres soient excités par le balourd. Ce phénomène est souvent observé sur les rotors de turbines à vapeur industrielles relativement lourds.

### 3.3 Amélioration de la caractérisation des amortissements par analyse multimodale de la réponse aux balourds

Si la méthode précédente est très utile en conception, elle ne peut pas être vérifiée expérimentalement puisqu'une valeur propre est une entité mathématique. La méthode d'analyse des courbes de réponse aux balourds est accessible expérimentalement, et l'utilisation d'une approche multimodale va améliorer considérablement la situation de l'approche API du paragraphe 3.1.

#### 3.3.1 Approche multimodale

Cette approche est basée sur les travaux de David Ewins sur l'analyse modale expérimentale [**Ewins**] en 1984, puis en 2000.

En plus de l'information d'amplitude de la réponse qui est la seule utilisée par l'API, on considère aussi la phase de la réponse. Celle-ci est en effet disponible sur les machines, puisque l'équilibrage dynamique nécessite cette donnée. Les groupes sont équipés d'un capteur de référence angulaire (top tour ou "keyphasor") et l'utilisation des transformées de Fourier et des fonctions de transfert extraira cette donnée des acquisitions vibratoires.

##### 3.3.1.1 Système à un degré de liberté

La méthode consiste à tracer la réponse du rotor en fonction de la fréquence sous la forme d'un diagramme de Nyquist (partie imaginaire en fonction de la partie réelle – ou composante en sinus en fonction de la composante en cosinus). Dans cette représentation, la fonction de transfert entre l'amplitude de la réponse d'un système et la force de l'excitation qui lui est appliquée d'un système à un degré de liberté est un cercle.

Plusieurs fonctions de transfert peuvent être utilisées :

- la raideur dynamique  $\frac{\text{déplacement}}{\text{force}} = \frac{x}{f}$  ou admittance ;
- l'impédance mécanique  $\frac{\text{vitesse}}{\text{force}} = \frac{\dot{x}}{f} = \frac{v}{f}$  ou mobilité ;
- la masse apparente  $\frac{\text{accélération}}{\text{force}} = \frac{\ddot{x}}{f} = \frac{\gamma}{f}$  ou inertance.

Si l'on souhaite identifier un amortissement visqueux, il faut choisir le tracé en mobilité. En réécrivant l'équation différentielle de l'équilibre dynamique du système à

un seul degré de liberté de la figure 3.11 :  $m \frac{d^2X}{dt^2} + c \frac{dX}{dt} + k X = F(t)$  avec  $X(t) = x e^{i\omega t}$  et  $F(t) = f e^{i\omega t}$  où  $x$  et  $f$  sont complexes, il vient :

$$[(k - m\omega^2) + i(c\omega)]x = f \quad (3.6)$$

L'admittance est alors :  $\frac{x}{f} = \frac{(k - m\omega^2) - i(c\omega)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$  (3.7)

et la mobilité :  $\frac{v}{f} = i\omega \frac{x}{f} = \frac{(c\omega^2) - i\omega(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$  (3.8)

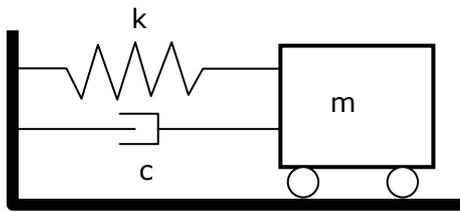
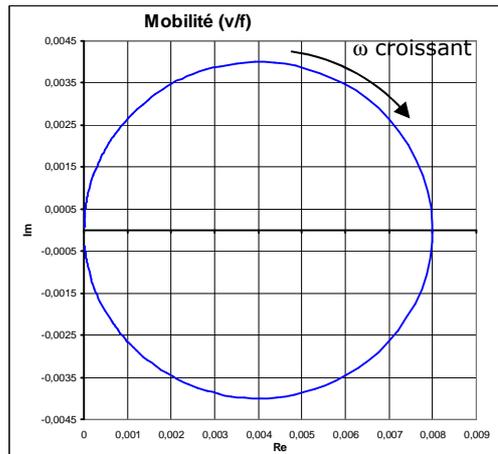


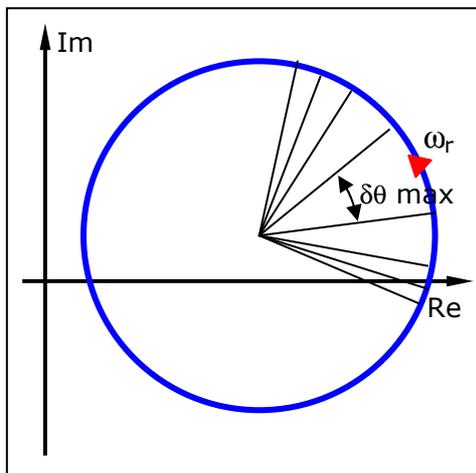
Figure 3.11 – Diagramme de Nyquist de la mobilité d'un système à 1 degré de liberté



La figure 3.11 représente également le diagramme de Nyquist de cette mobilité pour les valeurs :

- $m = 1 \text{ kg}$ ,
- $k = 400\,000 \text{ N/m}$  pour avoir une fréquence propre proche de  $100 \text{ Hz}$  ( $f_0 = \sqrt{k/m}$ ),
- $c = 125 \text{ Ns/m}$  pour avoir un amortissement modal de l'ordre de  $0,1$  ( $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ ).

La courbe de la mobilité est un cercle. Quand on a tracé ce cercle modal, soit numériquement, soit expérimentalement, on peut en déduire les caractéristiques de fréquence propre et d'amortissement modal. Dans tous les cas, on trace des rayons et on s'intéresse aux angles sous tendus par ces rayons.



Pour la recherche de la fréquence de résonance, on trace sur la figure 3.12 des rayons reliant le centre du cercle à des points du cercle distants d'un écart de fréquence constant  $\Delta F$ . On note les incréments d'angle  $\Delta\theta$  sous tendus par chaque secteur. La résonance est située dans le secteur de plus grand incrément  $\Delta\theta$ .

Figure 3.12 – Détermination de la résonance à partir de la mobilité

Ensuite, pour définir l'amortissement modal, on choisit trois points sur le cercle modal : un à la pulsation  $\omega_r$  de la résonance, un à une pulsation inférieure  $\omega_a$ , un à une pulsation supérieure  $\omega_b$ , comme montré sur la figure 3.13, on trace les rayons liant le centre du cercle modal à ces points, ce qui détermine deux angles  $\theta_a$  et  $\theta_b$ .

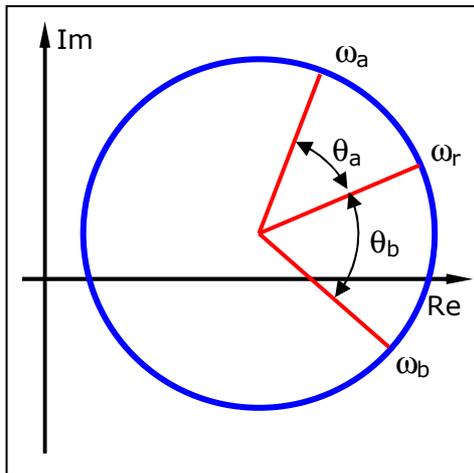


Figure 3.13 – Détermination de l'amortissement modal à partir de la mobilité

Ewins a démontré que l'amortissement modal était donné par l'équation (3.9) :

$$\zeta = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_r \left( \omega_a \tan \frac{\theta_a}{2} + \omega_b \tan \frac{\theta_b}{2} \right)} \quad (3.9)$$

pour laquelle le choix des deux points de pulsation  $\omega_a$  et  $\omega_b$  est fait pour que les deux angles  $\theta_a$  et  $\theta_b$  soient suffisamment grands afin d'apporter une précision suffisante.

Ses travaux proposent une procédure de traitement automatique d'un cercle modal, allant jusqu'à la définition d'un critère de qualité basé sur la détermination des imprécisions dans la définition du cercle notamment à partir de résultats expérimentaux. Dans ce cas, il faut travailler sur un nombre de points de fréquence plus élevé. Cet aspect, pourtant extrêmement important, ne sera pas abordé ici.

### 3.3.1.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Considérons le système à 3 degrés de liberté de l'équation (3.10), pour lequel les amortissements modaux seront choisis égaux à 0.1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{d^2}{dt^2} |X(t)| + |C| \frac{d}{dt} |X(t)| + \begin{vmatrix} 410^5 & -410^5 & 0 \\ -410^5 & 710^5 & -310^5 \\ 0 & -310^5 & 310^5 \end{vmatrix} |X(t)| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

qui a pour fréquences propres : 43,99 – 115,17 et 174,35 Hz

et pour matrice des vecteurs propres normés par rapport à la matrice de masse :

$$|\phi| = \begin{vmatrix} 0,3137 & 0,6542 & 0,6882 \\ 0,5675 & 0,4520 & -0,6882 \\ 0,7613 & -0,6064 & 0,2294 \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

Avec le changement de variable  $[X] = |\phi| [q]$  et en appliquant les amortissements modaux de 0,1, (3.11) se transforme en un système (3.12) de trois équations différentielles découplées des participations modales complexes  $q_i$  :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 55,28 \dot{q}_1 + 7,639 \cdot 10^4 q_1 = 0,7613 F(t) \\ \ddot{q}_2 + 114,7 \dot{q}_2 + 5,236 \cdot 10^5 q_2 = -0,6064 F(t) \\ \ddot{q}_3 + 219,1 \dot{q}_3 + 1,200 \cdot 10^6 q_3 = 0,2294 F(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

dont les solutions serviront à exprimer les mobilités  $M_i$  des différentes masses. Ces mobilités sont exprimées en (3.13) et représentés sur la figure 3.14.

$$\begin{cases} M_1 = 0,3137i\omega q_1 - 0,6542i\omega q_2 + 0,6882i\omega q_3 \\ M_2 = 0,5675i\omega q_1 - 0,4520i\omega q_2 - 0,6882i\omega q_3 \\ M_3 = 0,7613i\omega q_1 - 0,6064i\omega q_2 + 0,2294i\omega q_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

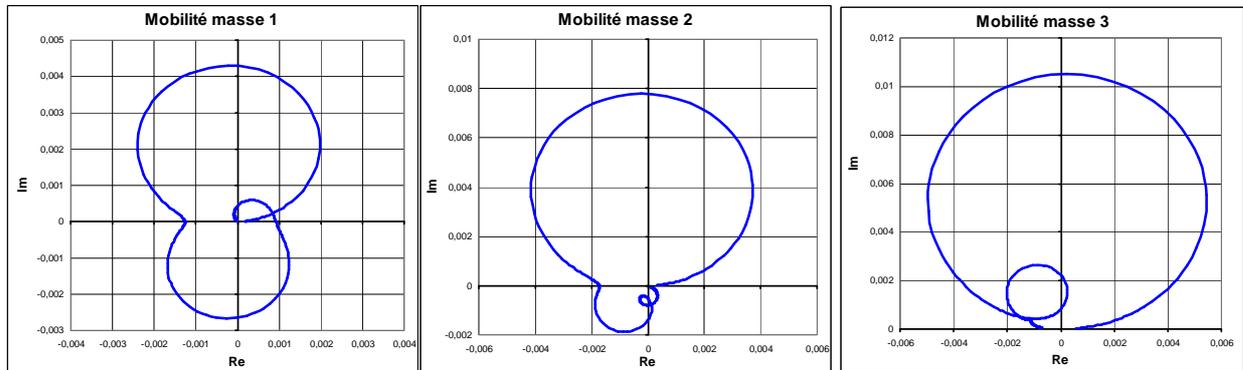


Figure 3.14 – Mobilités d'un système à 3 degrés de liberté

Cette figure 3.14 montre des formes complètement différentes avec trois cercles modaux qui s'enchaînent de façon pas toujours évidente. Comme en analyse modale expérimentale, il faut aussi déplacer l'excitation sur la structure pour mieux mettre en évidence certains modes propres. A partir de ces courbes, il faut alors sélectionner les tronçons qui s'apparentent le plus à des arcs de cercle et extraire les paramètres modaux, comme indiqué au paragraphe 3.3.1.1.

### 3.3.1.3 Application à la réponse au balourd

On remarquera que l'API RP684 présente une seule fois un tel diagramme de Nyquist, non pas dans le but de traiter les modes propres de rotors, mais dans celui de montrer la perturbation amenée par un mode propre de palier situé très bas en raison d'une raideur de support trop faible (présentée plus loin à la figure 3.28 du paragraphe 3.3.2.4). L'approche proposée ici est donc bien nouvelle.

Pour réaliser l'application à la réponse au balourd, on reprend le même rotor de compresseur centrifuge à 4 étages que des paragraphes 3.1.2 et 3.2.2. On applique alors la technique de l'analyse modale multi degrés de liberté. Dans ce cas, on retient comme valeurs de fréquences de résonance les vitesses critiques, telles que définies par l'API, ce qui est d'ailleurs une possibilité laissée par Ewins.

Pour faire cette application, on ne peut pas utiliser directement les courbes de réponses au balourd, puisqu'elles sont tracées en amplitudes de réponse et non pas en vitesse et que l'excitation est fonction du carré de la vitesse de rotation qui n'est pas constante. Pour passer en vitesse vibratoire, il faut multiplier les amplitudes de réponse par  $i\omega$ , et pour revenir à une force d'excitation constante, il faut les diviser par  $\omega^2$ . Par conséquent, le facteur multiplicatif à appliquer sur la réponse est  $i/\omega$ .

La figure 3.15 représente les diagrammes de Nyquist des mobilités pour les quatre voies de mesure. La position des maxima d'amplitude est repérée sur ces courbes.

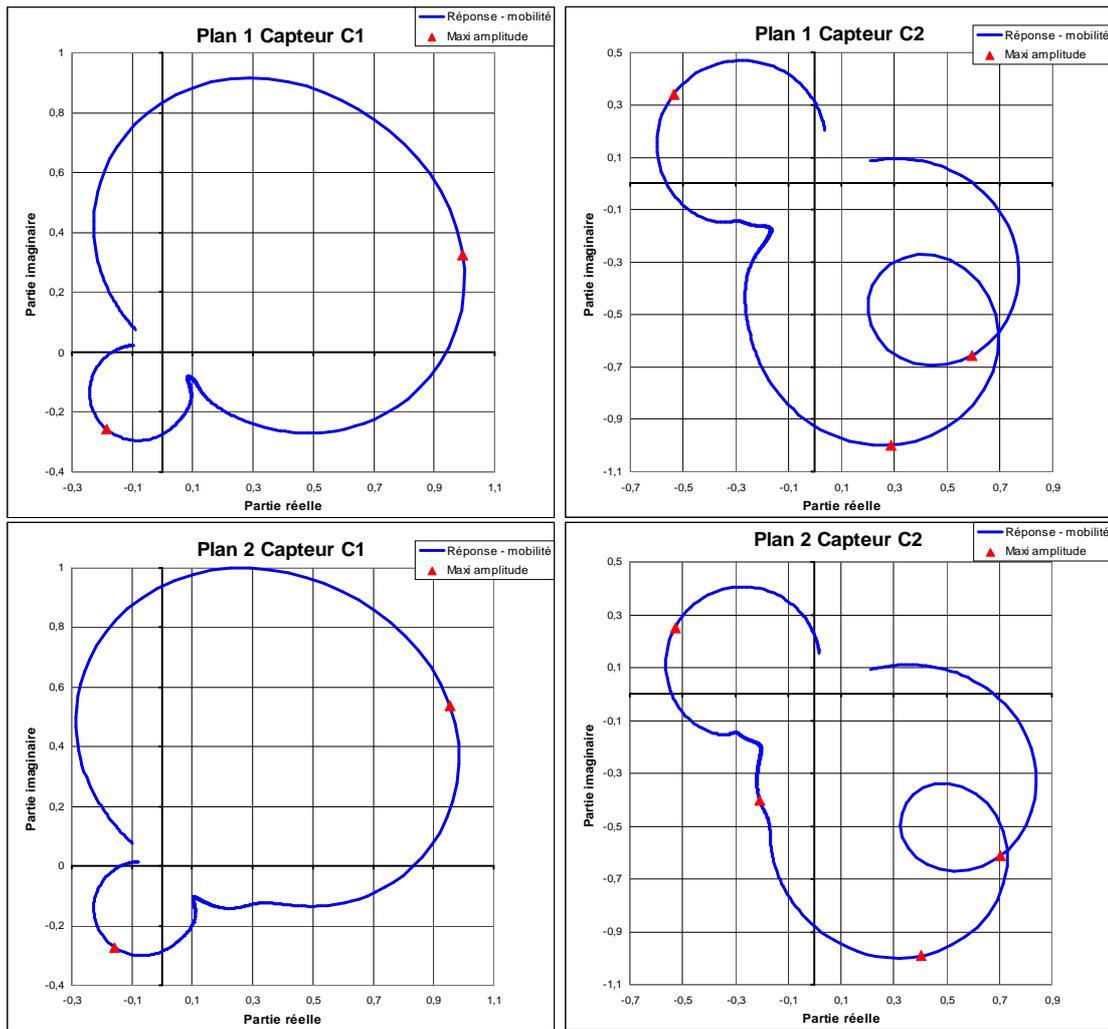


Figure 3.15 – Diagrammes des mobilités de la réponse au balourd central

L'analyse des courbes de la figure 3.17 par les tracés des cercles modaux conduit aux vitesses critiques et facteurs d'amplification du tableau 3.16. Pour cette analyse, les trois points de définition du cercle modal est fait de la façon suivante :

- point central correspondant à la vitesse critique, suivant la définition API,
- points à gauche et à droite à  $-g\%$  et  $+d\%$  de la fréquence du point central, avec  $g$  et  $d$  aussi élevés que possible en vérifiant que le cercle modal et la courbe de mobilité coïncident bien autour de la critique.

La vérification est faite uniquement visuellement et l'établissement d'un critère de qualité pourtant indispensable reste à faire.

Tableau 3.16 – Vitesses critiques et facteurs d'amplification – Analyse modale								
Fréquences en tr/min	Plan N°1				Plan N°2			
	Capteur C1		Capteur C2		Capteur C1		Capteur C2	
Forme	Fréq.	Amplif.	Fréq.	Amplif.	Fréq.	Amplif.	Fréq.	Amplif.
Translation	2622	2,33	2035	2,92	2616	2,34	2047	2,95
			2956	2,54			2943	2,62
Basculement					6211	**	5489	**
1 <sup>ère</sup> Flexion	13554	8,15	~11000	*	11970	6,36	~11000	*
			13580	8,23			13509	8,20
Notas	* amortissement modal ~ 0,66				** amortissement modal ~ 0,74			

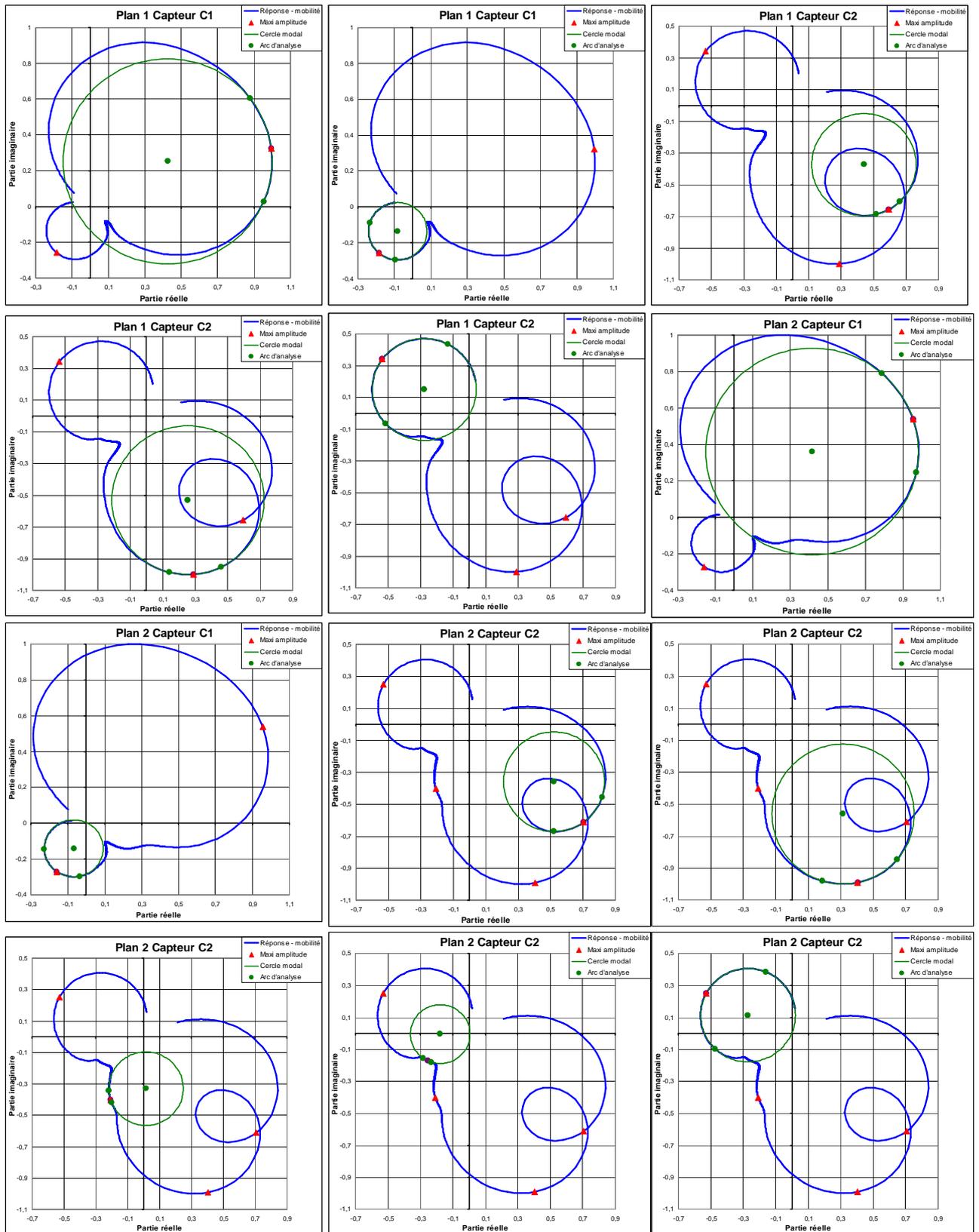


Figure 3.17 – Identification des courbes réelle de mobilité par des cercles modaux

En comparant le tableau 3.16 au tableau 3.4 d'analyse des courbes d'amplitude par la procédure API, on constate que :

- les fréquences de résonance et les vitesses critiques sont évidemment les mêmes puisqu'on a gardé la même définition ;
- le facteur d'amplification absurde du capteur C2 du plan 2 de 0,26 a été corrigé en 2,6, soit 10 fois plus ;
- l'information sur les capteurs "horizontaux" C2 fait apparaître une réponse d'un mode propre très amorti à environ 11000 tr/min ;
- les capteurs du plan 2 montrent aussi la réponse du mode propre de basculement, également très amorti ( $\zeta = 0,74$ ), alors qu'il était impossible de l'analyser.

### 3.3.1.4 Retour aux paramètres modaux

Si maintenant on s'intéresse aux maxima du module de la mobilité, on obtient les positions repérées par les carrés sur la figure 3.18, différents des triangles repérant les maxima d'amplitude utilisés jusqu'alors. Cette figure est établie pour le plan 1 uniquement dans la plage de vitesse limitée à 4500 tr/min.

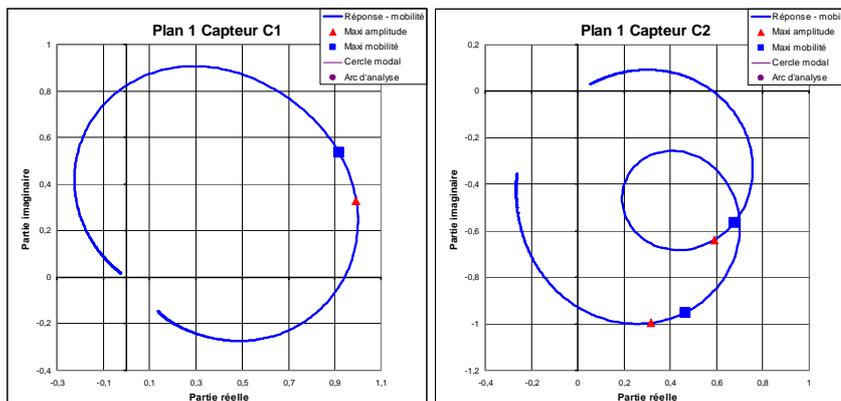


Figure 3.18 – Maxima des mobilités

L'examen des courbes sur les maxima des fonctions de transfert de mobilité conduit cette fois aux résultats du tableau 3.19 sur la totalité de la plage de vitesse.

Tableau 3.19 – Analyse modale sur les maxima de mobilité								
Fréquences en tr/min	Plan N°1				Plan N°2			
	Capteur C1		Capteur C2		Capteur C1		Capteur C2	
Forme	Fréq.	Amplif.	Fréq.	Amplif.	Fréq.	Amplif.	Fréq.	Amplif.
Translation	2505	1,57	1980	2,49	2492	1,60	1988	2,44
			2861	3,26			2863	3,25
1 <sup>ère</sup> Flexion	13477	7,69	13510	8,08	13439	7,47	13466	7,99

Par rapport au tableau 3.16, le nombre de maxima a diminué et surtout on a une grande cohésion entre les plans 1 et 2. On voit dans le tableau 3.20 une bonne corrélation entre les résultats du capteur C2 et ceux du tableau 3.10 issus de l'analyse des propriétés modales en rotation, aussi bien en ce qui concerne les fréquences calculées (on ne sait d'ailleurs plus tellement quel qualificatif leur donner) que les amortissements. Cette analyse serait-elle une réponse à l'interrogation du paragraphe 3.1.3 sur le nombre de vitesses critiques ?

Tableau 3.20 – Comparaison des analyses modales		
Mode propre	Valeurs propres en rotation du tableau 3.10	Analyse multimodale des capteurs C2 du tableau 3.19
Translation horizontale	2214 tr/min – 2,43	1980/1988 tr/min – 2,49/2,44
Translation verticale	2693 tr/min – 3,37	2861/2863 tr/min – 3,26/3,25
1 <sup>ère</sup> flexion directe	12790 tr/min – 8,98	13510/13466 tr/min – 8,08/7,99

Il reste encore à expliquer pourquoi l'analyse modale multi degrés de liberté des mobilités ne sépare pas les deux modes propres horizontal et vertical pour les capteurs C1. La figure 3.21 représente toujours dans la plage de vitesse limitée à 4500 tr/min l'identification modale faite pour le maximum de mobilité dans la direction de ce capteur C1. Or, on constate que cette fonction de transfert de mobilité est plutôt elliptique. Il se trouve que le maximum de mobilité se trouve proche du petit axe (vue de gauche), mais que si l'on considère les sommets du grand axe, on obtient des arcs de cercle plus longs (vue de droite) pour modéliser l'ellipse. Dans ce cas, on obtient non plus un seul mode propre, mais deux que l'on a centré volontairement sur les fréquences obtenues dans la direction du capteur C2.

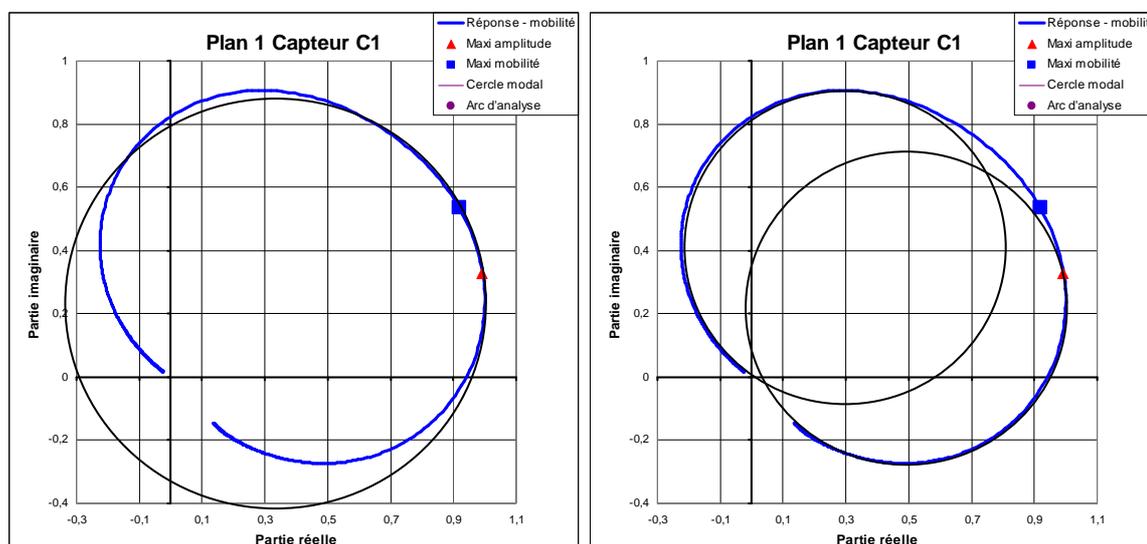


Figure 3.21 – Ellipse de la courbe de mobilité des capteurs C1

De cette façon on arrive à remonter aux paramètres modaux en rotation.

### 3.3.1.5 Perspectives d'amélioration

Dans les traitements des paragraphes 3.3.1.3 et 3.3.1.4, on a bien tracé des cercles modaux autour de maxima, mais de façon purement visuelle. Le paragraphe 3.3.1.4 en particulier qui s'éloigne de la notion de maximum d'amplitude ou de fonction de transfert pour rejoindre celle de reconnaissance de forme nécessite un traitement automatique des courbes de réponse, qui n'a pas été entrepris ici. Cette automatisation de recherche de cercles modaux sur toutes les zones de l'analyse s'avèrera prometteuse.

Comme on l'a vu dans la figure 3.5 sur l'orientation des capteurs, il serait intéressant de faire aussi un changement de repère pour revenir dans le système horizontal et vertical où les modes propres de translation sont réellement découplés comme le montre le tableau 3.16 Mais il n'est pas évident qu'il faille systématiquement se

ramener dans ces plans horizontal et vertical. Il est possible que ceci dépende de la charge appliquée sur les paliers, comme en particulier la force d'injection partielle sur les turbines à vapeur ou la réaction de denture pour les engrenages. Ce point n'a pas été abordé.

Tout laisse à croire qu'à terme, un enrichissement de cette approche d'analyse modale multi degrés de liberté permettra de disposer d'une méthode utilisable aussi bien en conception qu'en résultats d'essais, avec le même pragmatisme que celui des standards API.

### 3.3.2 Application de l'approche multimodale au cas réel d'un compresseur centrifuge

On s'intéressa maintenant au rotor d'un compresseur centrifuge sur lequel des essais de réponses aux balourds ont été effectués, conformément au standard API 617, essais décrits au paragraphe 1.2.5.2. Les essais ont été réalisés jusqu'à une vitesse de 13275 tr/min sur des paliers hydrodynamiques à patins oscillants dans le banc sous vide de la figure 1.28.

On mesure les vibrations relatives entre rotor et paliers à la vitesse de rotation à l'aide de capteurs de proximité à courant de Foucault situés en deux plans à 45 degrés de la verticale. Un capteur supplémentaire (top tour ou "keyphasor") donne la référence de vitesse et de phase. Des filtres suiveurs extraient la composante sur la raie de rotation avec sa phase. Le faux rond (défaut de concentricité entre les pistes de capteurs et la ligne de rotation) est mesuré à la vitesse de 400 tr/min et est extrait du signal vibratoire.

On fait plusieurs lancers, l'un avec le rotor dans son état initial (après équilibrage dynamique à vitesse nominale), et les autres dans les états balourdés avec :

- un balourd central,
- deux balourds en phase aux extrémités,
- deux balourds en opposition de phase aux extrémités.

Les enregistrements se font en descente en vitesse pour s'affranchir des perturbations que pourrait apporter l'entraîneur. Pour chaque type de balourd installé, on fait la différence vectorielle de la mesure du rotor balourdé avec celle du rotor initial de façon à dégager l'effet du seul balourd appliqué.

#### 3.3.2.1 Traitement des résultats de mesure

La figure 3.22 donne les résultats des différentes mesures sous la forme d'un vecteur vibration dans chaque plan de capteurs en amplitude (crête à crête) et en phase (la référence de phase à vitesse nulle étant liée à la position des capteurs et des balourds). Dans ces essais, on a obtenu directement les déplacements d'amplitudes maximales, donc les grands axes des ellipses des orbites, comme cela a été présenté au paragraphe 3.1.3.

Les points de vitesse des acquisitions ne sont pas identiques pour tous les lancers. Afin de calculer les différences vectorielles, il a fallu faire des identifications polynomiales par tronçons sur les phases et les amplitudes. La figure 3.23 montre les courbes d'amplitude correspondant à l'effet des balourds seuls après avoir soustrait la

vibration initiale. Sur la courbe de réponse au balourd central, on a ajouté les segments sous tendus à -3 dB pour obtenir les facteurs d'amplification API.

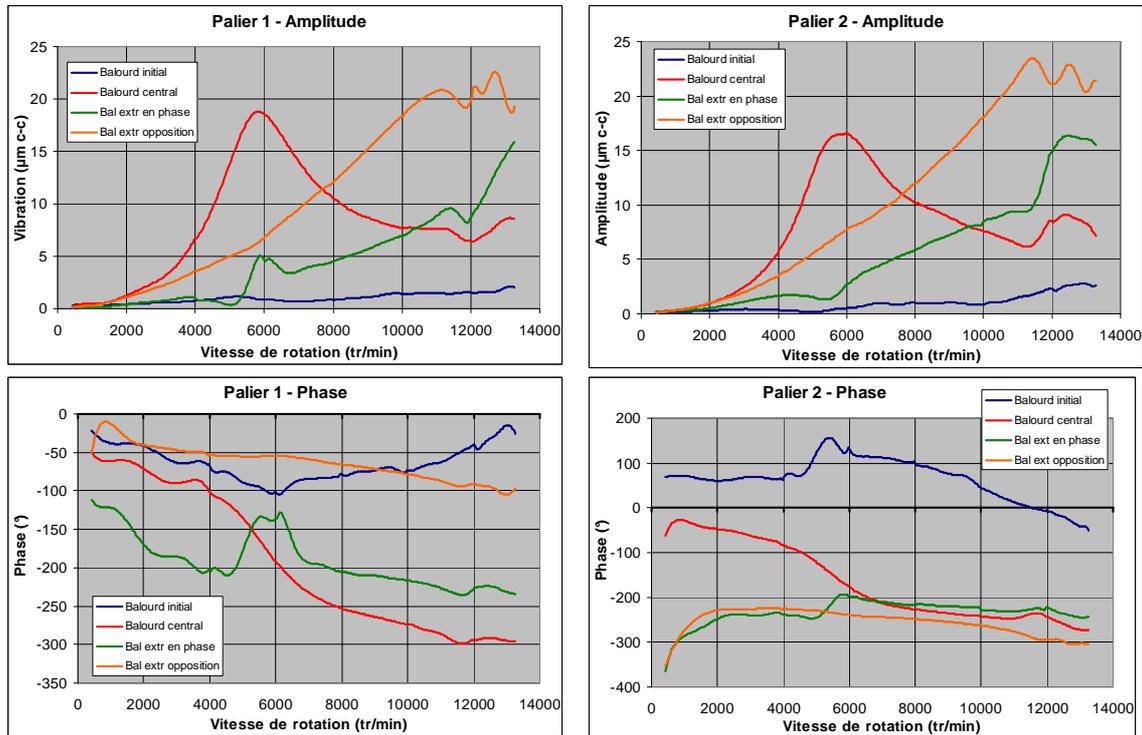


Figure 3.22 – Mesures vibratoires du rotor balourdé

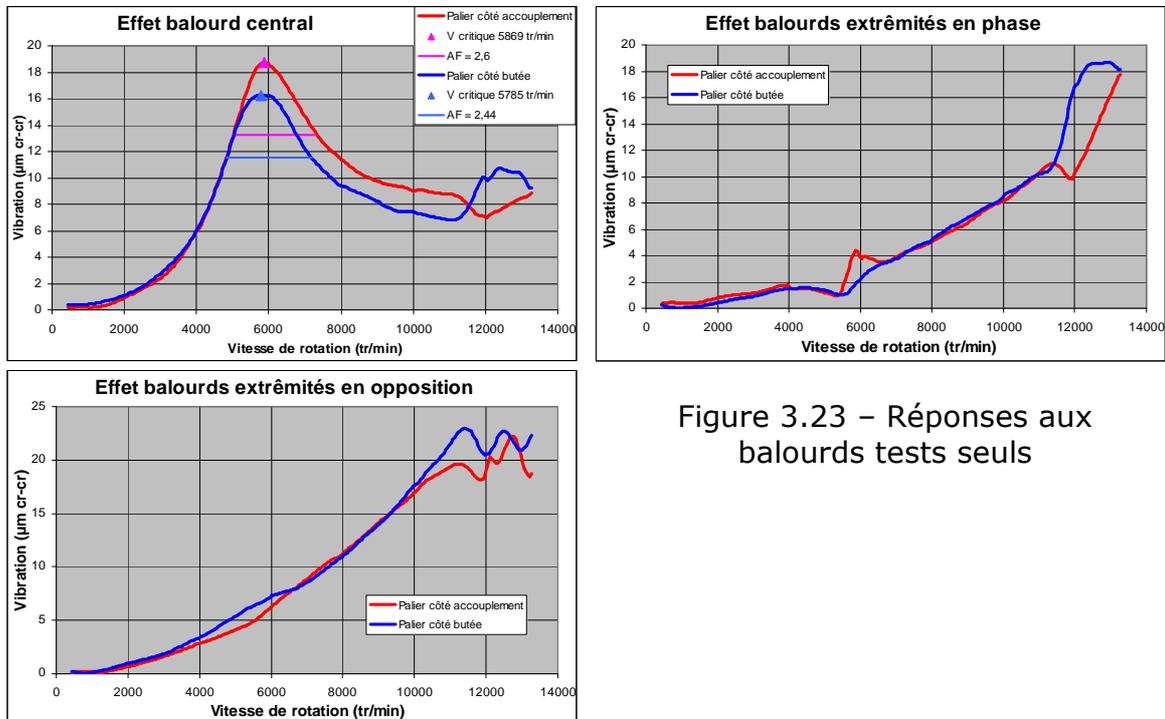


Figure 3.23 – Réponses aux balourds tests seuls

### 3.3.2.2 Réponse au balourd central

Le balourd central a pour effet de faire répondre le mode propre de translation dans les paliers, les balourds aux extrémités en opposition de phase le mode propre de basculement, et les balourds en phase le premier mode propre de flexion.

Il n'est possible de définir des vitesses critiques et des facteurs d'amplification que pour la réponse au balourd central :

- 5889 tr/min (amplification de 2,6) au palier côté accouplement,
- 5785 tr/min (amplification de 2,44) au palier côté butée.

Par contre, les courbes montrent des perturbations au-delà de 11000 tr/min que l'on a du mal à interpréter comme la réponse d'un mode propre de rotor, car il n'y a pratiquement pas d'évolution de la phase dans cette zone (figure 3.24).

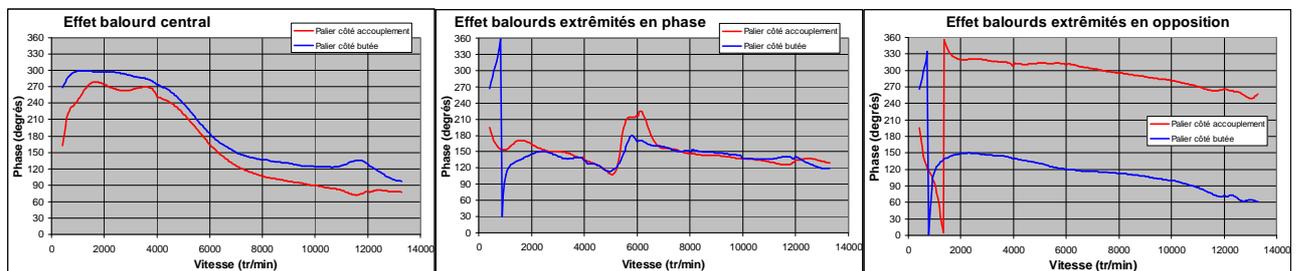


Figure 3.24 – Phases des réponses aux balourds

A partir des réponses en amplitude et phase, on calcule les courbes de mobilité de la figure 3.25.

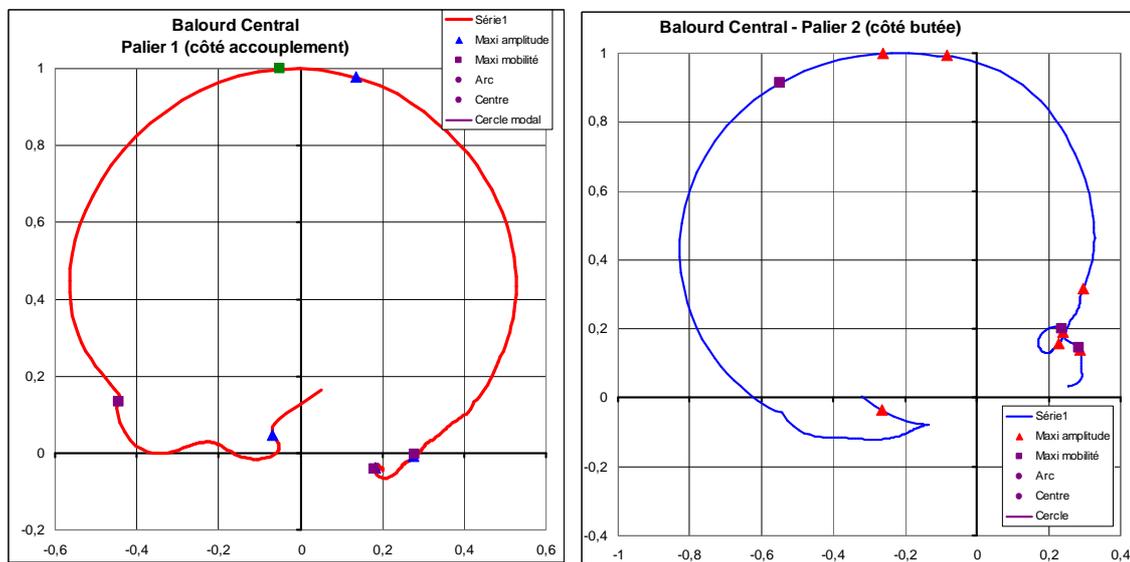


Figure 3.25 – Courbes de mobilité pour les lancers avec un balourd central

On voit bien deux cercles modaux correspondant au mode propre de translation du rotor. Le traitement des caractéristiques de ces cercles modaux donne pour les vitesses critiques (maxima d'amplitudes de réponse, repérés sur les courbes par les triangles) :

- 5865 tr/min pour le palier côté accouplement avec un facteur d'amplification de 2,45 ( $\zeta = 0,18$ ),

- 6003 tr/min pour le palier côté butée avec un facteur d'amplification de 1,57 ( $\zeta = 0,24$ ) ;

et pour celles issues des fréquences propres (maxima des modules de mobilité, repérés sur les courbes par les carrés) :

- 5676 tr/min pour le palier côté accouplement avec un facteur d'amplification de 2,56 ( $\zeta = 0,17$ ),
- 5505 tr/min pour le palier côté butée avec un facteur d'amplification de 2,02 ( $\zeta = 0,20$ ).

Si l'on compare ces données aux calculs analytiques, on avait, suivant la définition du paragraphe 3.1.1, des vitesses critiques relevées sur les courbes d'amplitude de :

- 5740 tr/min pour le palier côté accouplement avec un facteur d'amplification de 1,37 ( $\zeta = 0,26$ ),
- 5740 tr/min pour le palier côté butée avec un facteur d'amplification de 1,60 ( $\zeta = 0,24$ ) ;

et pour celles issues du calcul des fréquences propres, suivant la définition du paragraphe 3.2.1 :

- 5502 tr/min avec un facteur d'amplification de 1,89 ( $\zeta = 0,22$ ),

Les prévisions ont été réalisées avec le solveur du code ROTORINSA<sup>®</sup> sur un modèle à 70 nœuds. Les caractéristiques dynamiques des paliers à patins oscillants ont été déterminées à partir des valeurs mesurées de jeu et de précharge géométrique. Si la prévision des vitesses critiques calculées est assez bien respectée (en moyenne 2,5% en dessous des mesures), les valeurs d'amortissement mesurées sont en moyenne inférieures de 19% à celles prédites. Il semble donc que la méthode de détermination des caractéristiques des paliers à patins oscillants soit trop optimiste.

### 3.3.2.3 Réponse aux balourds aux extrémités

Dans les cas de balourds placés aux extrémités, en phase sur la figure 3.26 et en opposition sur la figure 3.27, on voit qu'il n'y a pas de grands cercles modaux comparables à ceux des figures 3.15 ou 3.25. Les points anguleux des courbes de mobilité correspondent aux limites des identifications polynomiales effectuées sur les résultats d'essais. L'absence de réponse est confirmée par les calculs analytiques qui ont montré que les amortissements des modes propres de basculement à 8426 tr/min et de 1<sup>ère</sup> flexion à 9996 tr/min étaient respectivement 0,45 et 0,39.

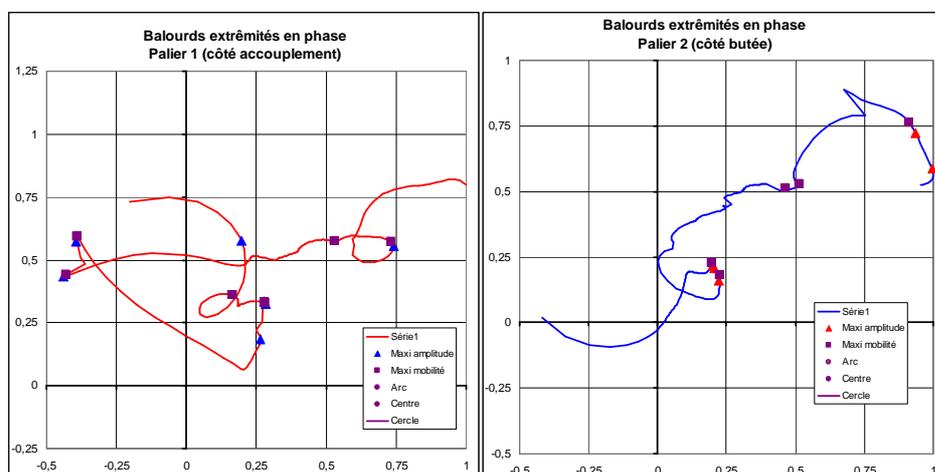


Figure 3.26  
Courbes de  
mobilité pour les  
lancers avec les  
balourds aux  
extrémités en  
phase

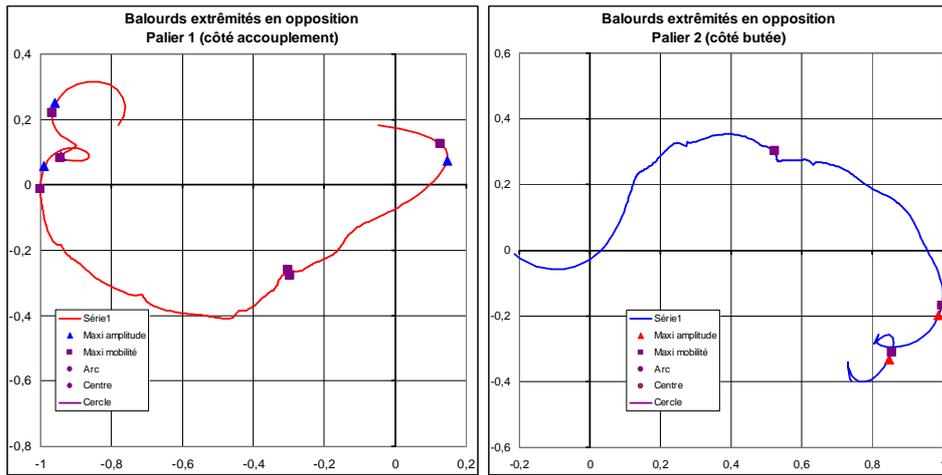


Figure 3.27  
Courbes de mobilité pour les lancers avec les balourds aux extrémités en opposition de phase

### 3.3.2.4 Analyse de la plage à grande vitesse

L'intérêt de ces courbes se situe au niveau de l'analyse de la zone "perturbée" au-delà de 11000 tr/min. La figure 3.28 montre que la réponse du palier côté butée au balourd central présente une petite boucle assez similaire à celle de la figure 2.18 de l'API RP 684, qui se référerait au cas spécifique de la présence d'une résonance de corps de palier dans la plage de fonctionnement de la machine.

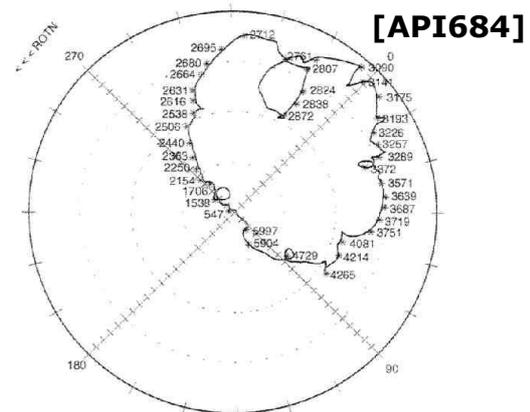
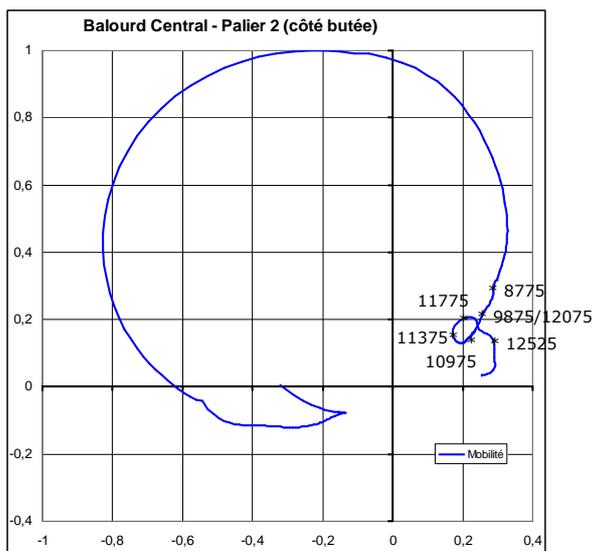


Figure 3.28 – Comparaison mobilité palier côté butée et résonance de support

Les courbes de mobilité ont été analysées dans cette plage de vitesse des maxima de leur module à l'aide de la procédure multimodale développée au paragraphe 3.3 pour les deux paliers et les trois types de balourds appliqués. Deux résonances se dégagent Elles sont répertoriées dans le tableau 3.29.

Tableau 3.29 – Analyse modale MDOF de la plage 10000/13575 tr/min						
Mode propre	Balourd central		Bal. extr. en phase		Bal. extr. en opposition	
	Palier 1	Palier 2	Palier 1	Palier 2	Palier 1	Palier 2
N°1	11884 $\zeta=0,011$	11941 $\zeta=0,018$	11289 $\zeta=0,015$		11016 $\zeta=0,014$	11331 $\zeta=0,007$
N°2		12347 $\zeta=0,035$		12418 $\zeta=0,055$	12686 $\zeta=0,025$	12439 $\zeta=0,04$

Le premier mode propre a des amplifications à la résonance de l'ordre de 30 à 45, beaucoup trop élevées pour qu'il puisse s'agir d'un mode propre de rotor. Il faut donc chercher du côté de la structure.

Les amplifications à la résonance du 2<sup>ème</sup> mode propre sont de l'ordre de 10 à 20. Or le mode propre suivant de rotor prévu analytiquement est le 2<sup>ème</sup> mode propre de flexion qui a des facteurs d'amplification de cet ordre là, mais pour une vitesse critique à 22630 tr/min. Puisqu'on a trouvé 2.5% d'écart seulement sur le mode propre identifié au paragraphe 3.3.2.2, on ne peut pas avoir 85% d'erreur sur le 2<sup>ème</sup> mode propre de flexion avec le même modèle ! Il s'agit donc également de la participation d'un mode propre de structure extérieur au rotor.

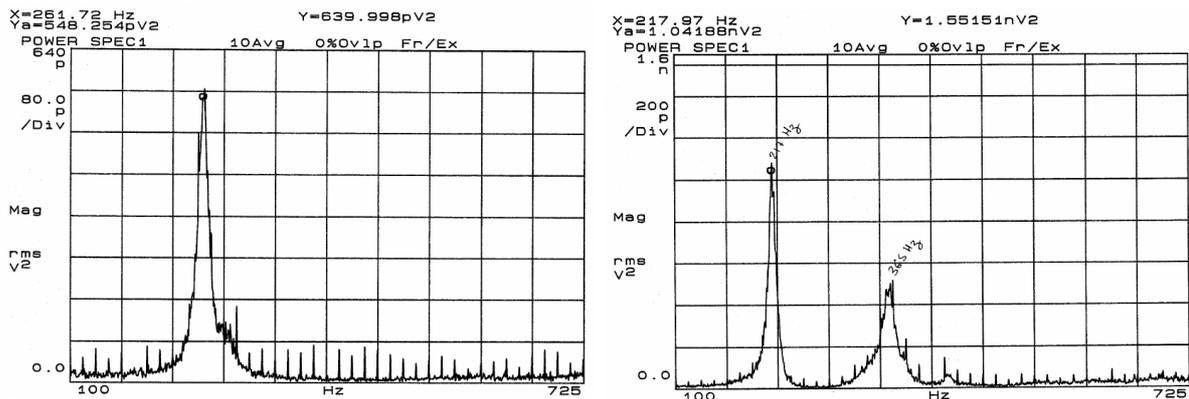


Figure 3.30 – Fonctions de transfert relevées sur un corps de palier

La figure 3.30 montre des fonctions de transfert relevées dans les directions verticale (à gauche) et horizontale (à droite) sur un corps de palier utilisé pour l'essai, avec une excitation au marteau de choc. Bien sûr, les fréquences propres relevées sur ces fonctions de transfert (217 et 262 Hz) ne correspondent pas à celles de l'essai en rotation, mais la présence du rotor dans les paliers avec la liaison du film d'huile peut modifier ces valeurs, et il est troublant de trouver justement la présence de deux modes propres relativement voisins, comme dans les essais de réponse aux balourds du rotor.

### 3.3.2.5 Conclusion

Sur ce cas expérimental, la méthode d'analyse modale multi degrés de liberté a permis de :

- retrouver les facteurs d'amplification à la réponse au balourd ;
- trouver des caractéristiques modales se rapprochant de la définition analytique des modes propres en rotation ;
- aider à expliquer la zone perturbée des mesures au-delà de 10000 tr/min.

L'apport de cette méthode s'avère donc très précieux.

### 3.4 Interprétation de cas particuliers

En dehors du paragraphe 3.4.1 plus théorique, ce chapitre a pour but de montrer plusieurs analyses réalisées à partir de cas vécus.

#### 3.4.1 Inversion de la précession de la réponse au balourd

Si les paliers sont isotropes, les trajectoires sont circulaires et la déformée du rotor fléchi tourne en même temps que le balourd, sans générer aucune fatigue du matériau de l'arbre. Vu des capteurs, il y a une vibration, mais le rotor lui-même ne vibre pas. Dans le cas de paliers anisotropes, il est possible de trouver une plage de vitesse de rotation où la réponse du rotor est en précession inverse, alors que normalement la précession est positive.

Dans le cas de paliers fortement anisotropes, les trajectoires sont elliptiques, et il est intéressant d'examiner l'évolution du petit axe de l'orbite. La figure 3.31 représente cette évolution pour un rotor académique comportant un seul disque placé aux deux tiers de la longueur, et pour une raideur verticale double de la raideur horizontale. Elle comporte aussi le tracé de la précession et l'opposé du petit axe entre les points de changement de précession.

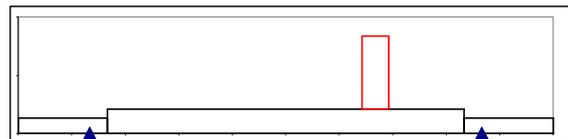
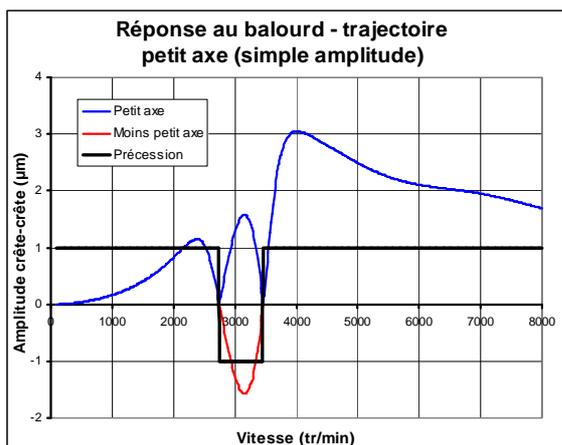
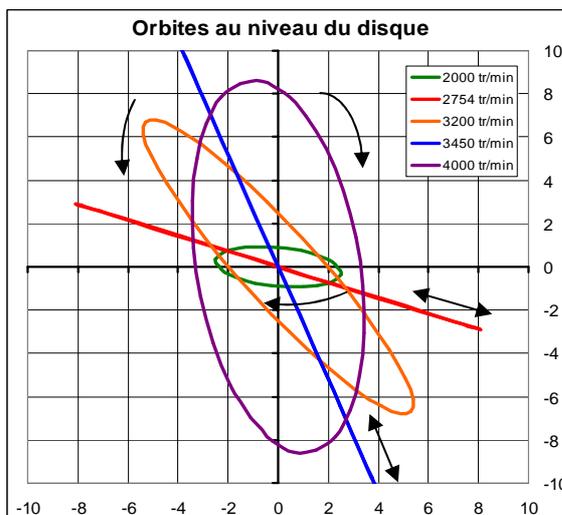


Figure 3.31 – Evolution du petit axe de l'ellipse de la trajectoire et de la précession

Il y a changement de la précession lorsque le petit axe de l'ellipse s'annule, donc lorsque la trajectoire est plate. Si l'on regarde l'opposé de la valeur du petit axe dans la zone de précession négative, il y a parfaite continuité du petit axe. C'est donc en fait l'inversion du signe du petit axe qui gouverne l'inversion de celui de la précession.



Sur la figure 3.32, on a représenté cinq orbites de la position du disque autour de la zone d'inversion de la précession.

Figure 3.32 – Evolution des orbites

### 3.4.2 Influence de la métallurgie et des conditions de fonctionnement

Les arbres des rotors des turbomachines sont forgés dans des aciers finement élaborés pour avoir les textures les plus homogènes possible. Au cours de la fabrication, les traitements thermiques sont pratiqués avec un axe vertical si la longueur le permet. Pour les rotors de turbines qui fonctionnent à chaud, on pratique même un traitement de stabilisation thermique de l'arbre forgé et ébauché en faisant tourner très lentement le rotor dans un four, jusqu'à ce que les déplacements mesurés soient stabilisés. Néanmoins, certaines autres influences se font jour.

#### 3.4.2.1 Balourds thermiques

Il est arrivé, sur des rotors de compresseurs centrifuges de différents matériaux que l'essai mécanique dans la machine révèle des niveaux vibratoires supérieurs au critère d'acceptation du standard API 617 donné à l'équation (1.4), alors que les résultats à la fois de l'équilibrage en état rigide sur machine à équilibrer à "basse vitesse" et de l'équilibrage en état flexible à vitesse nominale sous vide étaient parfaitement corrects.

Après avoir démonté les rotors des compresseurs et les avoir vérifiés, on retrouvait que les caractéristiques d'équilibrage n'avaient pas évolué. On a donc suspecté l'apparition d'un balourd thermique, puisque la principale différence entre l'essai dans la machine et celui dans le banc sous vide est la température, celle due à la compression dans un cas et la température ambiante dans l'autre.

Pour mettre ce phénomène en évidence, on a chauffé à 100°C et à 150°C les rotors installés sur une machine à équilibrer en état rigide à basse vitesse, l'avantage de cette machine étant de mesurer directement le balourd résiduel dans le plan de chaque palier. On a trouvé que l'on prenait de plusieurs fois la tolérance d'équilibrage des standards API – équation (1.5). Le phénomène est parfaitement réversible, le balourd disparaissant en revenant à froid. On ne peut pas dire qu'il s'agissait de mise en place des éléments frettés sur le rotor, puisque même après la rotation à vitesse nominale, on revenait toujours à l'état d'origine. Il ne pouvait s'agir que de balourds thermiques.

Malgré un examen minutieux des modes d'élaboration du matériau et de fabrication du rotor on ne peut pas dire que l'on ait une explication réellement claire des causes d'apparition du phénomène, celui-ci n'étant pas général, mais qui refaisant surface périodiquement. Des études métallurgiques poussées devraient être engagées pour dégager une cause. Au-delà de la recherche d'une cause, on peut dire que ces essais ont permis de dégager plusieurs types de rotors :

- ceux dont le balourd thermique est de l'ordre de 4 fois la tolérance d'équilibrage, et qui peuvent être considérés comme "normaux" ;
- ceux dont le balourd thermique est supérieur à 8 fois la tolérance d'équilibrage (jusqu'à 16 fois) et qui poseront problème dans la machine.

### 3.4.2.2 Corrosion différentielle

On citera le cas de rotors de turbines à vapeur dont le cycle de fabrication amenait à les entreposer quelques mois avant de les monter dans les corps de machines. Lors des essais mécaniques, les niveaux vibratoires dépassaient les valeurs autorisées.

L'apparition de balourds thermiques était soupçonnée, mais ce symptôme subsistait malgré plusieurs traitements de stabilisation à chaud et plusieurs équilibrages. Finalement, on s'est aperçu que c'était pendant le stockage en position horizontale qu'apparaissait un phénomène d'oxydation différentielle entre les génératrices inférieure et supérieure de l'arbre qui générait ensuite le balourd thermique dans la machine. L'application d'une peinture protectrice s'éliminant à chaud a réglé définitivement le problème.

### 3.4.2.3 Faux rond

La mesure du faux rond est obtenue à très faible vitesse de rotation. Le faux rond comporte des éléments géométriques évidents de défauts de concentricité et de circularité, mais aussi des éléments liés à la métallurgie en surface qui perturbent les courants de Foucault utilisés par les capteurs de proximité.

On a aussi trouvé certaines fois, des composantes de faux rond d'origine métallurgique que la démagnétisation des bouts d'arbre ne parvenait pas à réduire. Ici aussi, on tombe dans le cas des études métallurgiques citées au paragraphe 3.4.2.1.

La conséquence est surtout que le faux rond fait ensuite partie des composantes vibratoires mesurées lors du fonctionnement de la machine sur le site et va ainsi masquer des phénomènes qu'il faudrait diagnostiquer pour suivre l'état de la machine.

### 3.4.2.4 Conséquences sur le niveau global des vibrations

Les éléments qui précèdent montrent que les conditions de fonctionnement influent sur le comportement dynamique du rotor en fonction de sa métallurgie. La raie de rotation comportera non seulement le balourd résiduel, tel qu'il est mesuré sur les machines à équilibrer, mais également la déformation thermique qui atteindra plusieurs fois ce balourd résiduel.

Ceci fait le lien, dans les standards API, entre le niveau d'équilibrage et les niveaux vibratoires autorisés lors des essais. En effet, les niveaux vibratoires liés aux balourds résiduels d'équilibrage dynamiques sont très faibles devant ceux autorisés. Il faut en effet laisser de la place aux phénomènes thermiques, et à tous les autres phénomènes synchrones ou non, dont le faux rond.

### 3.4.2.5 Vibrations créées par les champs de températures et les dilatations des enveloppes

Il est connu que les rotors de turbines à vapeur, notamment ceux des machines à condensation sont, "virés" avant leur montée en vitesse, c'est-à-dire qu'on les fait tourner à très basse vitesse pour homogénéiser leur température et leurs déformations thermiques suivant toutes les génératrices.

En effet, pendant l'arrêt de la machine, la génératrice supérieure du rotor est plus chaude du fait de la présence de la masse de la boîte à soupapes, et la génératrice inférieure est plus froide compte tenu du condenseur. Ceci imprime en quelque sorte une déformée rémanente de l'arbre qu'il faut ensuite gommer avant de redémarrer.

Mais évidemment, les stators aussi sont soumis aux dilatations différentielles, et il n'est pas rare que sur de grandes machines, comme il vient d'être dit, la partie supérieure est plus chaude que la partie inférieure, après l'arrêt de la machine. Ceci provoque une flexion de l'ensemble qui "consomme" les jeux. La génératrice inférieure du rotor vient alors frotter sur les étanchéités internes, et un redémarrage provoque des vibrations importantes qui se manifestent par une vibration synchrone, comme un grand balourd. Les régimes transitoires sont importants, car juste après l'arrêt, la flexion du corps ne s'est pas encore produite, et longtemps après, les températures ont fini par s'homogénéiser. Cette impossibilité de redémarrer se produit dans une période de quelques heures à une journée après l'arrêt, ce qui est très dommageable pour la disponibilité de la machine.

### 3.4.2.6 Diagrammes de Campbell particuliers

Dans une turbomachine, les caractéristiques des paliers sont fonction de la vitesse de rotation. On voudrait montrer ici le diagramme de Campbell obtenu au cours de la

conception d'un compresseur centrifuge. La figure 3.33 indique que les modes propres de 1<sup>ère</sup> flexion du rotor suivent l'évolution de la vitesse de rotation. Jamais il n'y a coïncidence, donc il n'y a pas de vitesse critique, mais par contre la distance entre la vitesse de rotation et la fréquence propre correspondante est pratiquement constante, donc la participation de ce mode propre ne change pas sur toute la plage de vitesse de fonctionnement, ce qui n'est pas sans conséquence sur le tracé des courbes de réponse au balourd, même si ce mode propre est bien amorti. La connaissance du diagramme de Campbell, même si celui-ci n'est pas demandé par les standards API dans les analyses dynamiques en flexion, reste donc très importante pour l'interprétation des phénomènes.

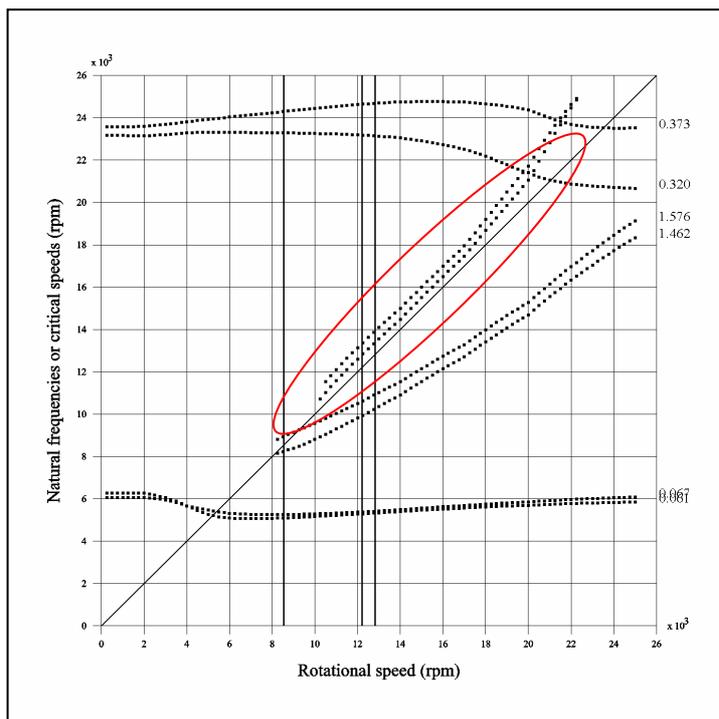


Figure 3.33 – Diagramme de Campbell particulier d'un compresseur centrifuge

### 3.4.2.7 Instabilité de fonctionnement au balourd

Un compresseur expérimental a été construit dans le but de faire des essais de performances aérodynamiques sur différents étages de compressions (puissance maximale 2400 kW, vitesse maximale 16000 tr/min, pression maximale de refoulement 30 bar – figure 3.34). Pour des questions de rapidité de transformation de la machine pour passer d'un étage à l'autre, la machine est conçue en porte-à-faux, avec la roue montée sur un bout d'arbre relié à la pivoterie par une denture Hirth et un tirant de diamètre 30 mm en Inconel 718 vieilli (limite conventionnelle d'élasticité  $R_{p0,2} > 850$  MPa). Dans le but d'effectuer une vérification de la pivoterie et de l'étanchéité de sortie d'arbre, la machine a été mise en rotation sans la roue. Par contre, le tirant, qui avait été mis en place avec un serrage très important (montage de la roue par serrage hydraulique), était resté en place.



Figure 3.34 – Compresseur centrifuge expérimental de mesure de performances

Dans le fonctionnement normal de la machine, ce tirant est maintenu à ses deux extrémités, mais dans cet essai spécifique, il était seulement encastré à l'extrémité du bout d'arbre. Alors que le rotor travaille normalement en rigide, le tirant possède une fréquence propre de flexion beaucoup plus basse. A la traversée de la critique correspondante vers 11000 tr/min, le niveau de vibrations est monté subitement. La figure 3.35 montre l'état de ce tirant (le clavier donne l'échelle). Le filetage dans lequel était encastré le tirant avait un léger défaut de parallélisme avec la ligne de rotation, et dès que la critique du tirant a été atteinte, la déflexion a augmenté, provoquant l'augmentation du balourd installé, ce qui fait boue de neige jusqu'à plastification complète. La descente en vitesse a été rude pour retraverser les modes propres de palier avec le balourd colossal ainsi engendré. A posteriori, on retrouve bien que le calcul de la fréquence propre de flexion du rotor dans les conditions de l'essai redonne bien la vitesse de rotation de l'incident.



Figure 3.35 – Tirant déformé après rotation sur sa propre vitesse critique

Cet essai malheureux est plutôt une curiosité, mais il constitue une preuve irréfutable que le rotor tourne bien sur sa déformée dans les réponses aux balourds. Il apporte aussi celle que l'on peut causer des dégâts considérables. Heureusement ici que la place autour du tirant était vide, puisque aucun étage de compression n'était installé, sinon, il n'y a que le stator pour limiter la déflexion.

### 3.4.2.8 Influence des conditions de fonctionnement sur une ligne d'arbres sur quatre paliers

Dans une usine d'incinération d'ordures ménagères, un turboalternateur de 12 MW est constitué d'une turbine à vapeur industrielle, d'un réducteur de vitesse et d'un alternateur. Le niveau vibratoire de l'alternateur monte de façon importante avec la charge. On s'intéresse donc à la ligne petite vitesse (PV) à 1500 tr/min composée de la roue du réducteur et du rotor de l'alternateur (4 pôles – entraxe 3450 mm), assemblés par un accouplement rigide à plateau boulonné et portés par quatre paliers hydrodynamiques lisses (figure 3.36).

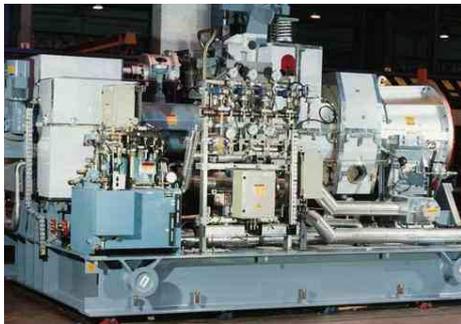
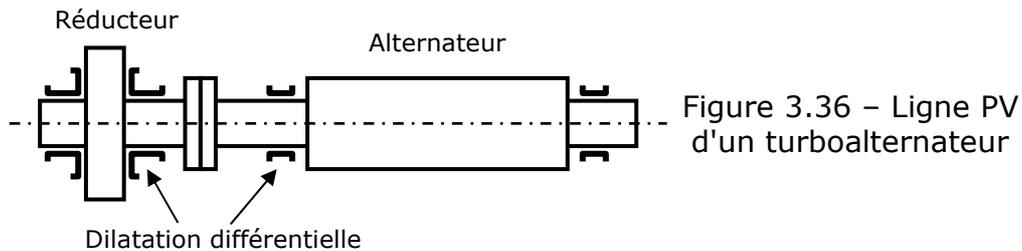
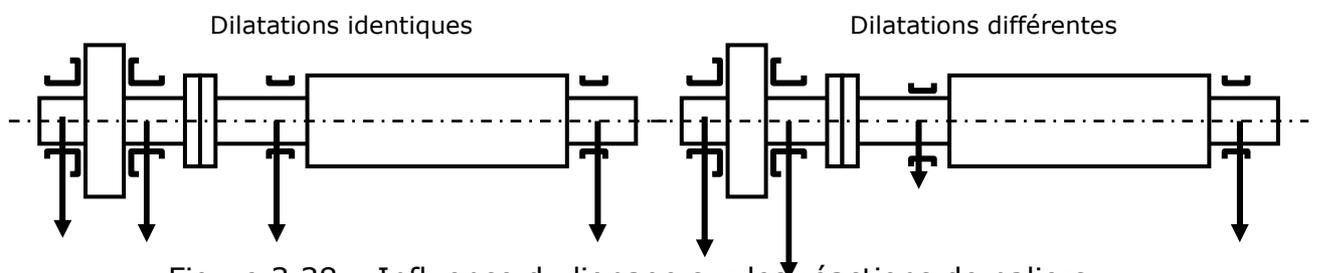


Figure 3.37 – Montage turbo-réducteur sur socle

La turbine et le réducteur sont montés sur un socle métallique (le réducteur étant à gauche sur la figure 3.37), lui-même monté sur le béton du massif, alors que l'alternateur est posé directement sur le béton. On s'est intéressé à la dilatation différentielle verticale entre les paliers de l'alternateur et l'ensemble du corps du réducteur et du socle, qui provoque un déalignement lié aux conditions de service.

Dans cet arrangement, le rotor de l'alternateur est conçu en "rigide", avec sa première vitesse critique de flexion au dessus de la vitesse de rotation pour le rotor non accouplé. Le fait d'avoir un accouplement rigide remonte normalement cette vitesse critique, ce qui simplifie l'étude dynamique de cette ligne PV.

Lorsqu'on applique une dilatation différentielle verticale, les excentricités dans les paliers changent, et les réactions de palier changent aussi. Le rotor de l'alternateur est soumis à son poids, et la roue du réducteur à son poids, plus la réaction de denture (figure 6.49). Si le réducteur se dilate plus que l'alternateur, on soulage le palier côté accouplement de l'alternateur, comme montré sur la figure 3.38.



Une étude paramétrique est réalisée pour des déalignements atteignant 0,3 mm. Toutes les caractéristiques de paliers sont définies en application des méthodes développées par Frêne, Nicolas, Degueurce et al. **[Frêne97]**. On identifie par une cubique la raideur statique des paliers en fonction de l'excentricité, et on établit un plan

d'expérience sur un modèle de poutres aux éléments finis, pour trouver des solutions où les déflexions du rotor sont cohérentes avec les positions verticales et les excentricités de chacun des quatre paliers. Ensuite, on détermine les caractéristiques dynamiques des paliers lisses pour chaque cas et l'on calcule les fréquences propres de la ligne d'arbres avec le code utilisant le solveur ROTORINSA<sup>®</sup>. Celle relative à la flexion de l'alternateur est représentée sur la figure 3.39, ainsi que son amortissement modal.

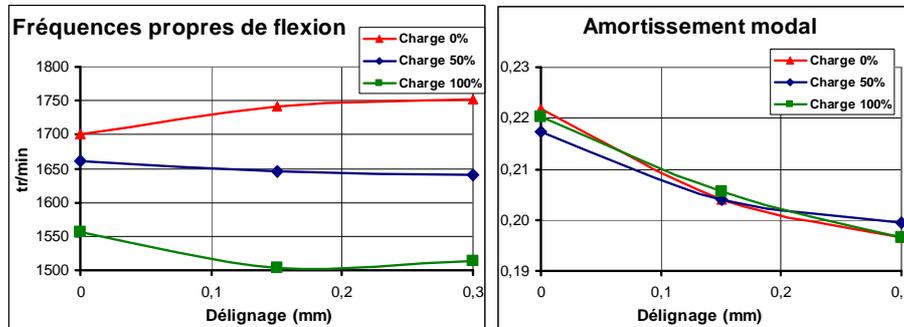


Figure 3.39 – Fréquences propres et amortissements modaux en fonction du délignage

On trouve une diminution de la fréquence propre flexion de l'alternateur par rapport aux 1920 tr/min non accouplé. On est surpris de constater que cette fréquence propre descend même à 1504 tr/min à 100% de charge pour 0,15 mm de délignage. Les effets sont découplés : la charge fait baisser la fréquence propre et le délignage fait baisser l'amortissement.

La figure 3.40 donne les vitesses critiques et les facteurs d'amplification déterminés à partir d'un calcul de réponse au balourd. On s'aperçoit cette fois que la charge a plus d'effet que le délignage sur la vitesse critique. Pour la puissance nominale, la critique descend jusqu'à 1560 tr/min, pour une vitesse de rotation de 1500 tr/min. Néanmoins, le facteur d'amplification étant inférieur à 2,5, cette marche est admise par les standards API.

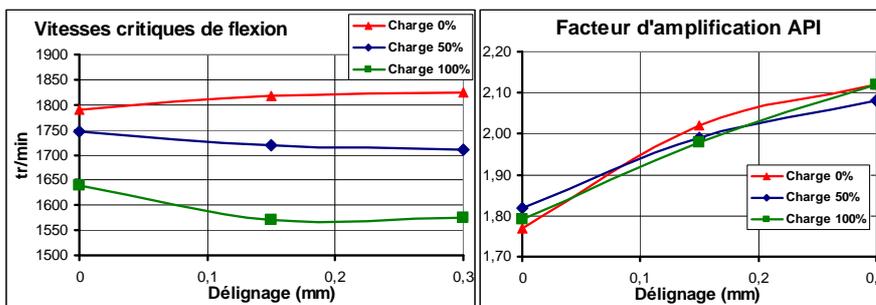


Figure 3.40 – Vitesses critiques et facteur d'amplification en fonction du délignage et de la charge

Pour terminer, on calcule la réponse à un balourd placé au centre de l'alternateur. Le balourd choisi est 4 fois la tolérance d'équilibrage, comme spécifié dans les standards API. La figure 3.41 montre la réponse au niveau des quatre paliers (grand axe de l'ellipse) en fonction de la charge pour un délignage de 0,15 mm, et en fonction du délignage à pleine charge. Il est bien confirmé que la vibration du palier côté accouplement de l'alternateur est très affectée par le niveau de la charge, avec un doublement du niveau entre la marche à vide et la puissance maximale. En revanche, elle l'est beaucoup moins par le délignage, mais ce délignage est lui aussi fonction de la charge (couple entre les deux structures de l'alternateur et du turbo-réducteur sur son socle, et température d'huile du réducteur fonction des pertes à évacuer).

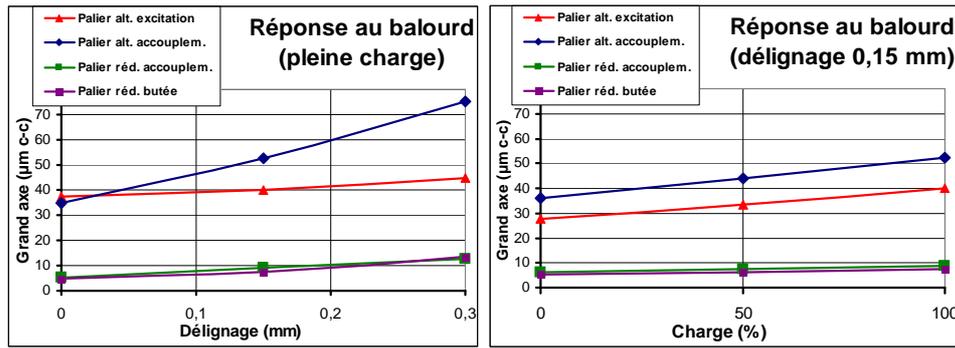


Figure 3.41 – Réponses vibratoires en fonction de la charge et du délignage

L'enseignement de ce cas est que la charge et le lignage ont une influence importante sur la vitesse critique de flexion de l'alternateur. On est surpris de voir descendre cette critique lorsqu'on accouple l'alternateur de 1920 jusqu'à 1560 tr/min, alors qu'on s'attendait à la voir monter. Ce cas est spécifique de ces machines avec un accouplement rigide, et on recommandera d'utiliser la technique de l'arbre torsible (figure 6.45) dont l'effet sera très bénéfique sur le comportement vibratoire aussi bien en flexion en supprimant le phénomène qui vient d'être analysé qu'en torsion pour diminuer la réponse aux courts-circuits (paragraphe 6.3.3.4).

Il est par ailleurs à mentionner que, malgré ce que l'on voit très souvent dans la littérature, le niveau de l'harmonique 2 de la vitesse de rotation n'est pas tellement affecté par le délignage. Par contre, on recommandera de surveiller le niveau de vibration axiale qui semble être un bon indicateur. La présence d'un capteur à courant de Foucault pour mesurer la position axiale du rotor s'avère très utile en prenant le contenu spectral au lieu de la composante continue.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré la difficulté d'interprétation des courbes de réponses aux balourds avec la procédure spécifiée par les standards API.

Bien sûr, la définition de la vitesse critique par la réponse maximale observée lors de la montée en vitesse est parfaitement correcte, et ce phénomène est vécu chaque jour par les exploitants de machines tournantes. La difficulté est qu'il y a autant de jeux de vitesses critiques que de capteurs de mesure. On a même montré que le nombre et la position des vitesses critiques dépendent de l'inclinaison des capteurs dans le cas de paliers anisotropes.

On a introduit une méthode d'analyse multi degrés de liberté des courbes de réponse aux balourds qui s'applique aussi bien pour des résultats analytiques que pour des résultats expérimentaux. Cette méthode sépare les effets des modes propres rapprochés pour la définition des amortissements (facteurs d'amplification), ce qui est fondamental quand on s'attache à vérifier ensuite la stabilité des machines. Elle fait aussi le lien entre la réponse aux balourds et les caractéristiques modales des modes propres latéraux, suivant que l'on s'intéresse aux maxima d'amplitudes (vitesses critiques) ou de mobilité (valeurs propres). On a vérifié aussi sur un cas expérimental qu'elle était aussi une aide pour expliquer des phénomènes annexes perturbant la dynamique de rotor.

Cette méthode est certainement d'un grand apport pour l'analyse des réponses aux balourds des rotors, mais demande à être automatisée pour faciliter et fiabiliser son utilisation. Elle constitue ainsi une proposition d'amélioration des standards API de dynamique de rotor.

## 4. Stabilité des compresseurs centrifuges

L'analyse de la dynamique d'arbres en flexion est une phase fondamentale de la conception des turbomachines. On se référera dans ce chapitre aux compresseurs centrifuges, pour lesquels cet exercice est le plus complet et le plus difficile.

Ce paragraphe va présenter des développements qui sont antérieurs à la publication de la 7<sup>ème</sup> édition du standard API 617 **[API617]** et à la deuxième édition des pratiques recommandées de l'ISO RP 684 **[API684]** présentés au paragraphe 1.2.5.6.

Tout le fondement de la détermination de la stabilité vibratoire d'un compresseur centrifuge est basé sur la quantification des amortissements des fréquences propres. Pour être très clair, il s'agit d'étudier non pas les vitesses critiques, comme cela a été fait au chapitre 2, mais les fréquences propres de l'ensemble rotor – paliers-interactions fluide structure, lorsque la machine est dans ses conditions normales et à sa vitesse normale de fonctionnement.

Les figures qui illustrent ce paragraphe sont issues de cas industriels.

Les applications de réinjection de gaz naturel sur les champs pétroliers pour la récupération assistée des hydrocarbures demandent des niveaux de pression de plus en plus élevés. Huit cent bars de pression de refoulement ont été récemment atteints et l'on parle maintenant de 1000 bar ! Ces machines manipulent un fluide dont la masse volumique est du même ordre de grandeur que celle de l'huile des paliers, provoquant d'importantes interactions fluide structure dans les espaces confinés autour de l'arbre et des roues.

On s'intéresse systématiquement à la situation des quatre premiers modes propres dont les déformées sont représentées figure 4.1 :

- mode propre de translation dans les paliers, qui est généralement un mode propre cylindrique dégénéré avec deux nœuds situés à l'extérieur de l'entraxe des paliers,
- mode propre de basculement dans les paliers ou mode propre conique,
- premier mode propre de flexion, avec les deux nœuds situés à l'intérieur de l'entraxe,
- deuxième mode propre de flexion à trois nœuds,

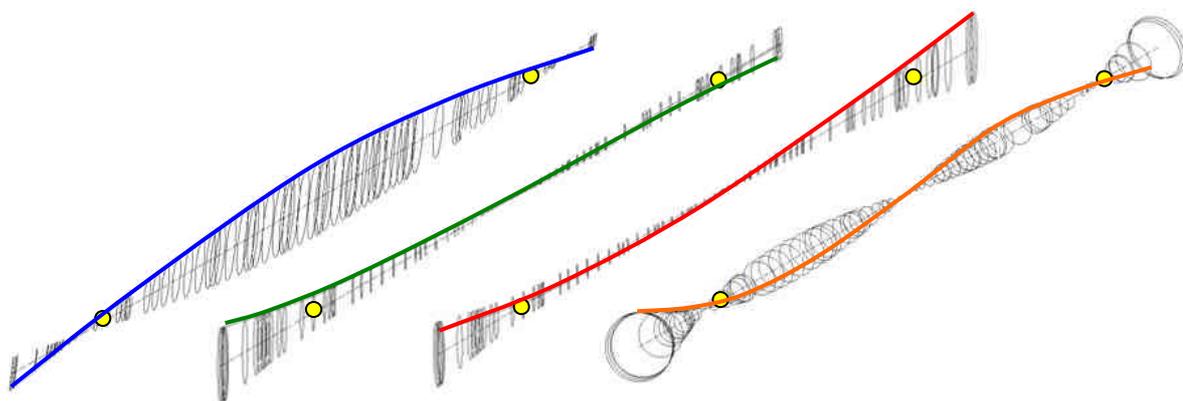


Figure 4.1 – Formes modales typiques d'un rotor de compresseur centrifuge

dans les deux diagrammes de Campbell de la figure 4.2, celui de gauche étant relatif aux fréquences propres, celui de droite aux amortissements modaux. Les amortissements modaux sont transformés en décrets logarithmiques, très utilisés dans l'industrie et dans le standard API 617.

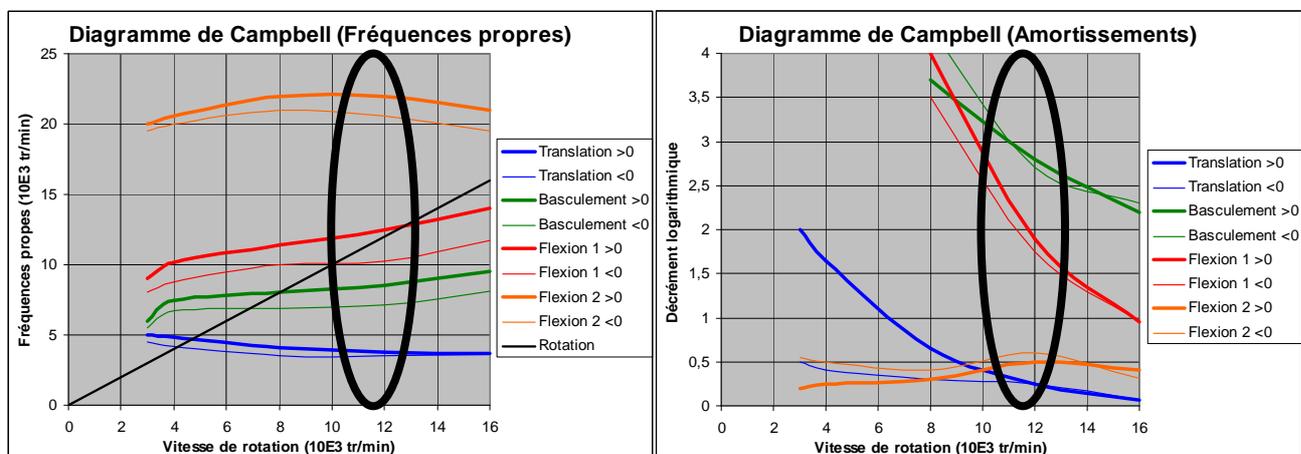


Figure 4.2 – Diagrammes de Campbell d'un compresseur centrifuge

Le but de l'étude de stabilité est d'évaluer au mieux la carte modale du rotor soumis à tous ses effets dans la zone de fonctionnement repérée sur la figure 4.2.

## 4.1 Elimination de l'instabilité vibratoire d'un compresseur centrifuge

Ce paragraphe correspond à un cas historique de 1994 qui a été résolu bien avant la mise en place des procédures de l'API 617.



Figure 4.3 – Module de compression

Une application de gas-lift (autre procédé de récupération assistée du pétrole), nécessitait trois sections de compression pour assurer la compression complète. Afin de minimiser la taille de cet équipement destiné à être installé sur une plateforme offshore, le pari avait été fait d'installer les deux dernières sections à moyenne et haute pression (coefficients de débit les plus faibles) dans le même corps, ce qui simplifiait considérablement l'architecture des lignes d'arbres, et surtout celle du module complet présenté en figure 4.3 avant son montage sur la plateforme. La photographie des rotors des deux corps est donnée sur la figure 4.4.

La conséquence a été que, avec 8 roues en 2 sections, le mode propre de flexion de ce compresseur MP/HP est situé à 30% de la vitesse de rotation. Les principales caractéristiques de cette machine sont les suivantes :

- aspiration 18 bar abs. – 35°C,
- refoulement 141 bar abs. – 118°C,
- deux sections de 4 étages,
- puissance 5 270 kW à 13 802 tr/min,

- entraxe des paliers 1 380 mm.

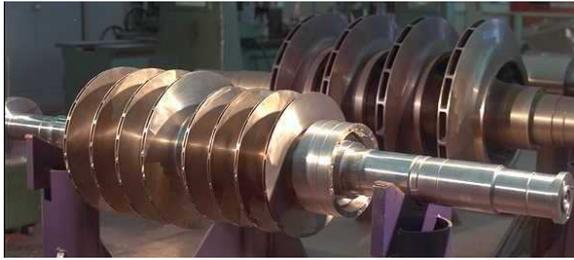


Figure 4.4 – Rotors de compresseurs centrifuges de gas lift

Comme il est usuel sur les matériels destinés à être installés en offshore, des essais à pleine charge (pression et puissance du site) étaient spécifiés (figure 4.5).



Figure 4.5 – Compresseur centrifuge en essais à pleine charge

Le compresseur a alors montré une vibration subsynchrone se développant sur la fréquence du premier mode propre de flexion et dont le niveau montait avec le niveau de pression dans la machine. Le problème n'était pas que les niveaux autorisés par les standards API étaient rapidement dépassés, mais que le phénomène devenait instable en montant en pression et que le seul moyen de contenir les vibrations était le contact avec le stator !

Les phénomènes à considérer sont les suivants :

- géométrie du rotor (distribution de masses, d'inerties et de raideurs) ;
- caractéristiques dynamiques des paliers hydrodynamiques à patins oscillants déterminées par une méthode de perturbation sur une intégration de l'équation de Reynolds **[Frêne90]** et **[Frêne97]** (l'un des développements importants issus de ces travaux est le logiciel **[Edyos]** de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, de caractérisation des paliers et butées hydrodynamiques qui a été validé expérimentalement par des campagnes réalisées au LMS de l'Université de Poitiers, comme par exemple celle exposée dans l'article de 1992 de Fillon, Bligoud et Frêne **[Fillon]**) ;
- effet du piston d'équilibrage qui compense la poussée exercée par la compression sur les roues.
- effet des labyrinthes inter étages limitant la recirculation interne du gaz ;
- effets aérodynamiques des roues dans leurs logements (modélisés comme une raideur croisée appliquée au niveau de la roue.

L'extension faite en 1981 par Wachel et Von Nimitz **[Wachel81]** aux compresseurs centrifuges des "forces d'Alford" des machines axiales **[Alford]** établies en 1965) est sensée couvrir les trois derniers phénomènes de la liste précédente. L'expression de la raideur croisée globale par étage, connue sous le nom de "formule de Wachel" s'écrit :

$$K_{xz} = K \sum \left( \frac{P}{DN} \frac{1}{h} \frac{\rho_r}{\rho_a} \right) \quad (4.1)$$

- avec P la puissance de l'étage,  
 N la vitesse de rotation,  
 D le diamètre extérieur de la roue, et donc  $\frac{P}{DN}$  est proportionnel à la force périphérique correspondant au couple exercé par le gaz,  
 h la largeur de l'écoulement,  
 $\rho_r/\rho_a$  le rapport des masses volumiques refoulement sur aspiration,  
 K un coefficient empirique qui tient aussi compte du système d'unités.

La bibliographie sur ces phénomènes est abondante. Deux publications, connues sous le nom des critères de Kirk-Donald [**Kirk**] en 1983 et de Fulton [**Fulton**] en 1984 donnaient des critères de stabilité issus de l'analyse de flottes de machines installées (voir chapitre 4.2.3 et figure 4.13). D'autres plus récentes s'avéraient très pertinentes pour le problème rencontré (Zeidan, Perez et Peterson en 1993 [**Zeidan**], et Kuzdzal, Hustak et Sorokes en 1994 [**Kuzdzal**]). Les moyens de modélisation n'étaient pas tous disponibles, notamment pour les deux derniers points évoqués. Heureusement, le tout premier code pour les étanchéités à nid d'abeilles devenait accessible en 1995 (Scharrer et Pelletti [**Scharrer**]), issu des travaux du Laboratoire de Turbomachines du Texas AM sur les instabilités des moteurs de la navette spatiale américaine.

Les modifications suivantes ont été apportées au compresseur :

- augmentation locale des diamètres des bouts d'arbre, pour remonter la première fréquence propre de flexion ;
- changement des réglages des paliers hydrodynamiques à patins oscillants, en diminuant le jeu pour augmenter la première fréquence propre de flexion ainsi que la précharge géométrique pour augmenter l'amortissement modal ;
- remplacement de l'étanchéité du labyrinthe à dents du piston d'équilibrage (figure 1.15) en étanchéité à nid d'abeilles (figure 1.19) dans le but de compenser les effets des raideurs croisées développées au niveau des étages de compression ;
- installation d'un dispositif dit de "shunt holes" qui réduit la prégration du gaz à l'entrée de l'étanchéité du piston d'équilibrage, et par conséquent les raideurs croisées qu'il génère (la publication de Pugnet, Gelin et Tricot [**Pugnet98**] fait le point sur ces techniques).

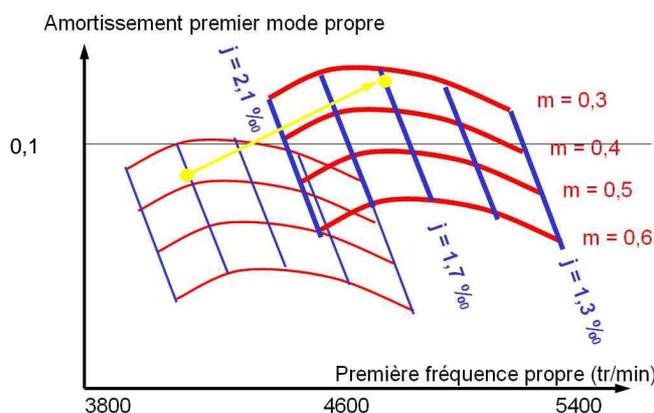


Figure 4.6 – Diagramme de réglage des paliers à patins oscillants

Sans tenir compte des effets liés au gaz, le premier mode propre de flexion voit sa fréquence propre passer de 4140 à 4485 tr/min et son amortissement modal de 0,089 à 0,117. Le diagramme de définition du réglage des paliers de la figure 4.6 donne la position du mode propre et son amortissement en fonction du jeu et de la précharge géométrique des paliers.

Le nid d'abeilles développe un amortissement important, compensant largement sa raideur croisée, alors que les labyrinthes à dents ne développent qu'une raideur croisée s'ajoutant à celle des étages. De plus, le nid d'abeilles a aussi une raideur directe importante (approchant l'ordre de grandeur de celle des paliers) qui remonte le premier mode propre de flexion, ce qui est favorable au comportement d'ensemble. Il est intéressant de noter que les premières utilisations des nids d'abeilles dans les compresseurs centrifuges l'ont été pour des machines à haute pression, non pas pour leurs qualités vis-à-vis de la dynamique de rotor, mais pour leur tenue à la pression (plusieurs centaines de bars à étancher) au niveau du piston d'équilibrage. A cette époque, on a donc participé à stabiliser les machines sans le savoir.

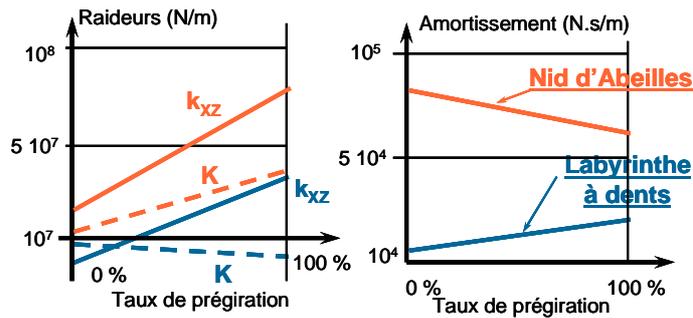


Figure 4.7 – Comparaison des caractéristiques dynamiques d'un labyrinthe et d'un nid d'abeilles

Les systèmes dits de "shunt holes" ou de "whirl breaks" ont pour but de casser la giration du gaz entraîné en rotation par les roues, giration qui intervient directement sur la raideur croisée des labyrinthes (à 30% de prérotation, les labyrinthes sont neutres). La figure 4.7 [Pugnet98] représente l'évolution de ces grandeurs.

Les diagrammes de la figure 4.8 montrent les marges de stabilité (capacité de résistance aux raideurs croisées) obtenues pour le compresseur d'origine et pour le compresseur modifié. La forme de ces diagrammes utilisés depuis 1994 [Kuzdzal] a été reprise par les standards API (paragraphe 1.2.5.6).

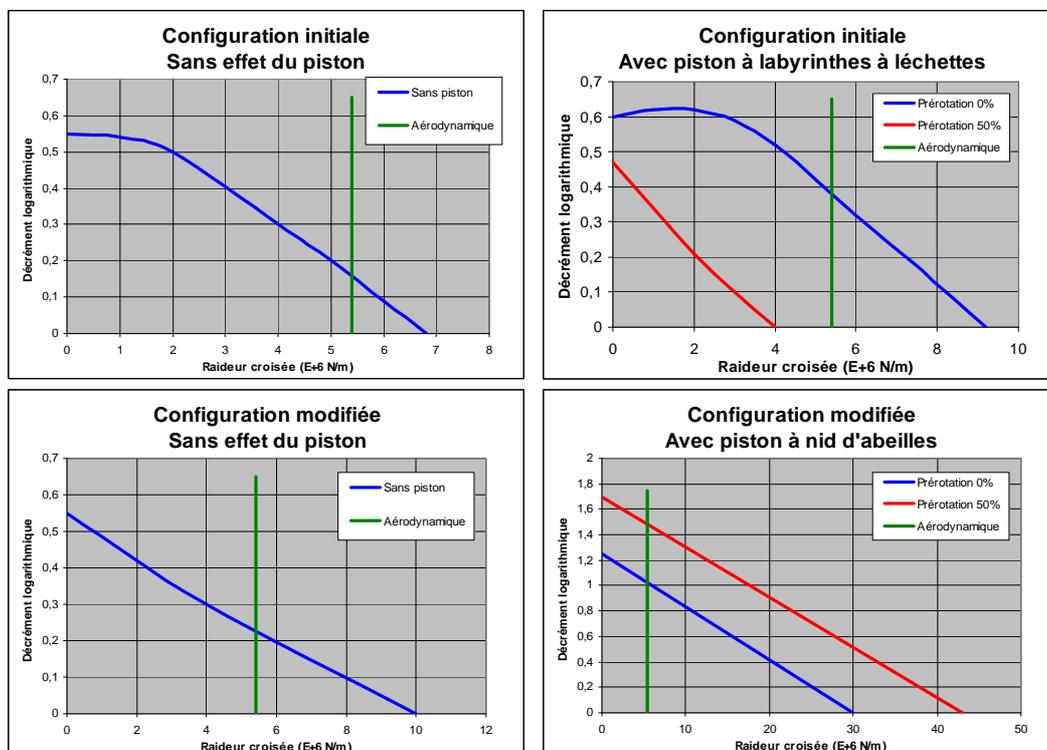
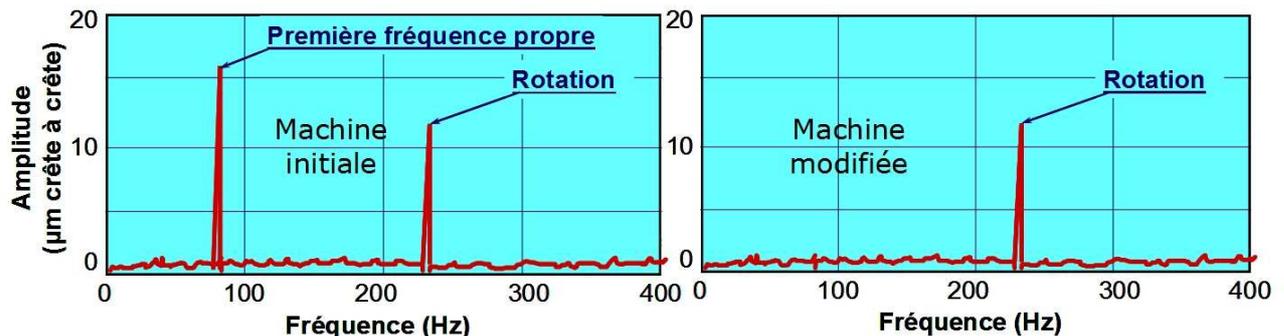


Figure 4.8 – Diagrammes des marges de stabilité

On voit bien que :

- la situation initiale laissait une marge trop faible aux raideurs croisées,
- le labyrinthe classique à dents conduit à l'instabilité de la machine (il est obligatoire d'avoir une prérotation),
- la modification apportée au rotor et au réglage des paliers est efficace,
- l'introduction du nid d'abeilles sur le piston a été l'élément le plus décisif, celui-ci présentant l'avantage d'être moins sensible à la prérotation du gaz à l'entrée.

La figure 4.9 présente le résultat de ces modifications avec une suppression complète de la raie subsynchrone qui apparaissait dans le spectre vibratoire initial.



L'ensemble de ces travaux a été présenté dans les publications de Gelin, Pugnet et al. en 1996 et 1997 [**Gelin96-1**], [**Gelin96-3**], et [**Gelin97**].

Les mêmes modifications ont été apportées d'emblée sur un autre compresseur centrifuge fabriqué à la même époque (2 sections de 4 + 3 roues) refoulant à 215 bar pour une application de réinjection, et qui a montré de suite un excellent comportement vibratoire.

Finalement, on peut dire, avec l'expérience que l'introduction de la technologie des nids d'abeilles a été la plus décisive dans la solution de ce problème. En effet, on a l'habitude de déterminer une "marge de stabilité" qui représente le rapport entre la raideur croisée maximale que le système rotor paliers est capable de supporter jusqu'à l'annulation de l'amortissement modal de son premier mode propre de flexion, à celle qui est installée d'après la formule de Wachel (4.1). Ainsi, avec l'hypothèse d'un taux de prérotation de 50% à l'entrée de l'étanchéité du piston, cette marge de stabilité est passée de 0,8 avec un labyrinthe classique (valeur insuffisante expliquant l'instabilité constatée) à 4,1 avec le nid d'abeilles.

On classe l'influence des effets liés aux écoulements qui se modélisent par des raideurs croisées dans l'ordre décroissant de "nocivité" suivant :

- ensemble des étages de compression,
- piston d'équilibrage,
- étanchéités sur les ouïes de roues,
- étanchéités sur l'arbre.

et disons que, pour mémoire, les étanchéités de sortie d'arbre qui sont maintenant du type mécanique à gaz sont sans aucun effet en dehors de leur masse, ce qui n'était pas le cas auparavant avec la technologie des bagues flottantes à huile.

Finalement, le retour d'expérience obtenu de cette affaire malheureuse aura été exceptionnel. L'influence des étanchéités sur la dynamique de rotor précisée dans la publication de Pugnet, Gelin et Tricot [**Pugnet98**] montre l'avancée considérable effectuée depuis une publication précédente de la même équipe par Vinsonneau, Pugnet et Lhenry [**Vins.85**] qui faisait le point des connaissances en 1985.

## 4.2 Améliorations apportées dans la prévision de la stabilité vibratoire

L'expérience sur cette machine a été l'origine d'une réflexion plus large concernant la stabilité vibratoire des compresseurs centrifuges.

### 4.2.1 Essais de paliers hydrodynamiques à patins oscillants

Il est d'abord apparu nécessaire de bien caractériser les paliers. Pour ceci une campagne expérimentale a été menée sur un rotor très rigide spécialement conçu pour cet essai et installé dans un banc d'équilibrage sous vide. Les paliers sont du type à lubrification dirigée. Les cages de paliers étaient équipées de quatre sondes de proximité à Courant de Foucault. L'excitation de type synchrone était donnée par une distribution de balourds appliquée sur le rotor. Le signal de ces sondes de proximité donnait à la fois les déplacements continus et la réponse vibratoire. De plus, tous les patins étaient équipés de thermocouples. La figure 4.10 montre l'instrumentation.



Figure 4.10 – Essais de caractérisation dynamique de paliers – Instrumentation

Le rotor spécifique construit pour ces essais, que l'on voit au centre de la figure 4.10, répond aux exigences de la norme AFNOR 90601 de 1986 sur les caractéristiques des machines à équilibrer [**NF90601**], donc permet aussi d'étalonner le banc d'équilibrage.

Les résultats de ces essais ont été une quantification en fonction de la vitesse périphérique :

- des jeux (variation liée aux dilatations différentielles entre l'arrêt à froid et le fonctionnement),
- de la précharge géométrique en fonction de la vitesse périphérique,
- de la recirculation d'huile d'un patin à l'autre en fonction de la vitesse périphérique, à la place d'une valeur constante et forfaitaire de 0,4 utilisée habituellement dans le cas de la lubrification dirigée.

Ces données, qui interviennent dans la définition de la géométrie du palier et dans le calcul de l'équilibre thermique des patins oscillants ont été introduites directement

dans le solveur qui intègre l'équation de Reynolds pour obtenir les caractéristiques dynamiques des paliers.

Lors de ces essais, on a aussi voulu mesurer les caractéristiques subsynchrones des paliers hydrodynamiques. Ce point est très important, car l'instabilité vibratoire décrite au paragraphe 4.1 se déclenche sur une fréquence subsynchrone alors que le compresseur est à son régime nominal. Le rotor à 8 roues de la figure 4.4 est monté

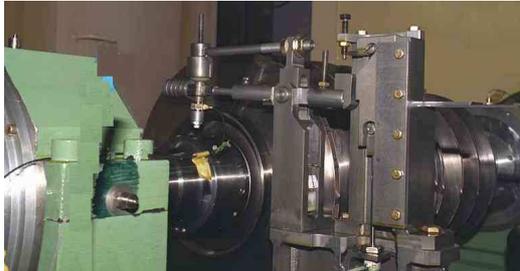


Figure 4.11 – Essais de caractérisation subsynchrone de paliers hydrodynamiques

dans le banc sous vide et est excité par un marteau de choc télécommandé suivant le montage de la figure 4.11. La décroissance des vibrations après le choc permet de quantifier l'amortissement modal du principal mode propre qui répond. En faisant varier le régime de rotation, on fait varier le rapport fréquence subsynchrone sur fréquence de rotation. L'effet mesuré a été trouvé beaucoup plus fort que celui prévu en prenant en compte dans l'intégration de l'équation de Reynolds des paliers l'inertie des patins **[Frêne97]**.

Cette étude expérimentale de caractérisation des paliers a été conduite par Gelin dans le cadre d'un programme de Recherche et Développement, auteur cité au paragraphe 4.1. Les résultats ont été jugés stratégiques. Ils n'ont pas l'objet de publication et ne peuvent pas non plus être divulgués ici.

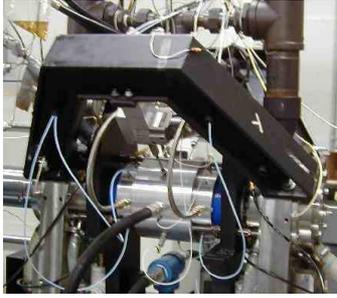
Par ailleurs, il faut citer ici les travaux très importants réalisés au LMS de l'Université de Poitiers qui font l'objet de nombreuses publications constituant des références de caractérisations expérimentales de tous types de paliers radiaux et de butées comme celle de 1992 **[Fillon]**, grâce à la construction de bancs d'essais parfaitement adaptés. On citera de plus le fait que le s'intéresse aussi à des situations dégradées correspondant à la présence de défauts de réalisation comme dans la publication de Bonneau, Berger et Frêne en 2004 sur le comportement dynamique des paliers-butées de lignes d'arbres soumis à des défauts géométriques **[Bonneau]**.

#### 4.2.2 Caractérisation des étanchéités tournantes à gaz

Une telle campagne expérimentale est difficilement envisageable à l'échelle d'un constructeur, par la spécialisation des notions à manipuler. Il a donc fallu participer à titre de mécène au programme lancé par l'Université A&M du Texas sur les étanchéités **[Childs00]**.

Il est à noter que la caractérisation dynamique des labyrinthes à léchettes a particulièrement été étudiée analytiquement (théorie des écoulements à 1, 2 voire 3 domaines de contrôle) et expérimentalement par le laboratoire de turbomachines de l'Université A&M du Texas entre les années 1985 et 2002 (parmi les très nombreuses publications, on citera **[Childs86]**, **[Childs93]**, **[Dawson1]**, **[Dawson2]**). Pour les nids d'abeilles, l'approche est complètement différente puisqu'on s'attache à l'aspect acoustique des résonateurs quart d'onde des cavités des nids d'abeilles influencés par la présence d'une paroi (étude de Kleynhans et Childs en 1997 **[Kleynhans]**).

Le résultat mis à disposition par cette université est un logiciel **[IsotSeal]** validé expérimentalement (figure 4.12) jusqu'à des pressions de 140 bar (niveau 8 fois plus



élevé que celui des études précédentes) et des vitesses de 29 800 tr/min pour toutes les configurations d'étanchéité à labyrinthes ainsi que pour les nids d'abeilles.

Figure 4.12 – Banc de caractérisation dynamique d'étanchéités du TAMU

Dans ce domaine, il faut aussi citer les travaux du LMS de l'Université de Poitiers qui font l'objet de nombreuses publications. Comme dans le cas des paliers, le LMS s'intéresse aussi à des situations non idéales, et l'on citera à titre d'exemple, les travaux de Lucas en 1996 sur l'effet de la rugosité sur les étanchéités annulaires à écoulement turbulent [Lucas].

### 4.2.3 Développement d'un critère global de stabilité vibratoire

Comme il a été évoqué au paragraphe 4.1, deux critères empiriques existaient depuis 1983 pour Kirk-Donald [Kirk] et 1984 pour Fulton [Fulton], ce dernier étant le plus connu et le plus utilisé. Tous deux considèrent la position de la vitesse critique sur paliers infiniment raides en portant en ordonnée le rapport de la vitesse maximale continue à cette vitesse critique. Fulton a recherché des limites à ce rapport en fonction de la masse volumique moyenne du gaz dans la machine. Kirk a recherché les mêmes limites en fonction du produit de la pression de refoulement par l'élévation de pression de la machine. Chacun de ces diagrammes a ses avantages. On retrouve dans Fulton le fait que "l'auto excitation aérodynamique" est fonction à la fois du niveau de pression et de la masse molaire du gaz, par contre ce critère est indépendant de l'architecture du compresseur (un corps de 4 étages de réfrigération à 20 bar a la même masse molaire moyenne qu'un corps de 8 étages de gaz naturel à 120 bar). Kirk a essayé de tenir compte de ce phénomène en introduisant l'élévation de pression, par contre son critère est trop laxiste puisque des compresseurs satisfaisant ce critère ont montré des vibrations subsynchrones. Enfin, le diagramme de Fulton a servi de base au critère de niveau 1 de stabilité qui a été présenté au paragraphe 1.2.5.6 (figure 1.30).

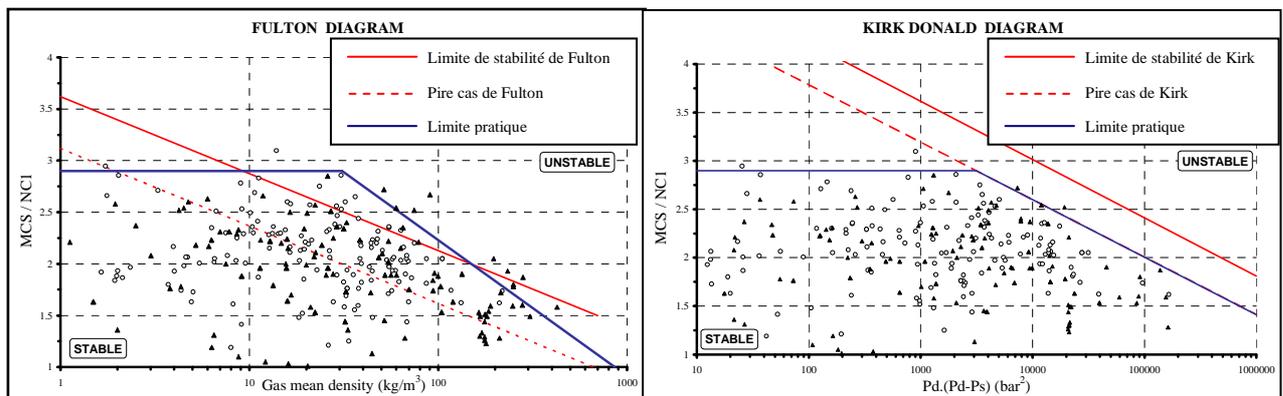


Figure 4.13 – Critères de stabilité de Fulton et de Kirk-Donald

Sur les diagrammes de la figure 4.13 représentant ces critères (en rouge), on a ajouté les points d'un certain nombre de références typiques d'une flotte de compresseurs centrifuges en fonctionnement sur des sites. On a déterminé de nouvelles limites, superposées en bleu sur ces diagrammes, compte tenu de cette expérience et du fait

que la technologie des compresseurs a changé depuis les dates de publication avec l'avènement des garnitures sèches remplaçant les garnitures à film d'huile à bagues flottantes utilisées précédemment, et qui ont un impact important sur la dynamique de rotor.

Par contre, le reproche que l'on peut faire à ces diagrammes est que l'on considère la position de la vitesse critique du rotor rotulé-rotulé, donc en faisant totalement abstraction des efforts faits de la conception de la machine pour maximiser les amortissements modaux par un choix judicieux du réglage des paliers (jeu – précharge géométrique – rapport L/D – décalage de pivot).

A partir des résultats d'expérience, Gelin (auteur déjà cité au paragraphe 4.1) a déterminé dans le cadre d'un programme de Recherche et Développement un nouveau critère considérant cette fois la rapport de la première fréquence propre (et non plus d'une vitesse critique) à la vitesse maximale de fonctionnement, valeur qui prend en compte à la fois la géométrie du rotor et le réglage des paliers, ainsi que la marge de stabilité, déjà définie plus haut qui prend en compte le fonctionnement de la machine – gaz, compression, puissance, jeux des paliers à chaud et température d'huile.

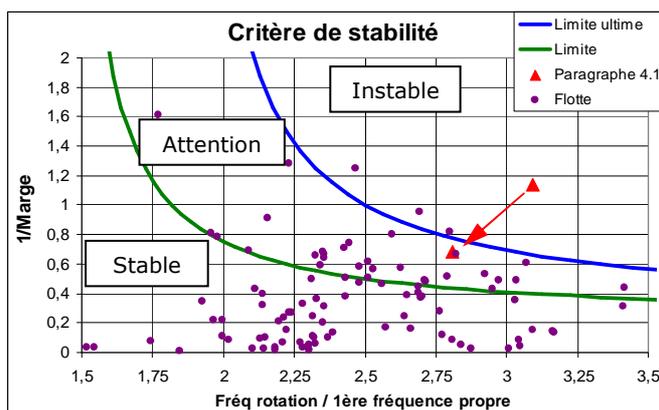


Figure 4.14 – Diagramme global de stabilité

A l'origine, le diagramme de la figure 4.14 ne comportait qu'une trentaine de machines jugées caractéristiques. Deux limites ont été tracées en fonction du retour d'expérience, comme sur les diagrammes de Fulton et de Kirk-Donald. Il faut aussi que la situation de la machine reste en dessous de ces limites.

On peut voir la position de la machine instable du paragraphe 4.1 repérée avec le triangle rouge dans sa position instable et dans sa position modifiée.

Progressivement ce diagramme a été enrichi de l'expérience des machines réalisées. L'utilisation de ce critère s'est avérée particulièrement pertinente.

### 4.3 Situation actuelle

Depuis ces développements qui ont permis de construire des compresseurs centrifuges pendant plusieurs années, le standard API 617 a normalisé la façon de vérifier la stabilité vibratoire dans sa 7<sup>ème</sup> édition de 2002 [**API617**], procédure qui a été décrite au paragraphe 1.2.5.6.

Les moyens de modélisation des étanchéités internes sont maintenant disponibles [**IsotSeal**] après avoir été validés expérimentalement par le laboratoire de turbomachines de l'Université A&M du Texas [**Childs00**]. Actuellement, un projet de consortium prévoit de faire des essais sur la caractérisation des roues elles-mêmes, alors que cette interaction a été jusqu'alors jugée assez arbitrairement secondaire.

Le précédent critère de stabilité de la figure 4.14, présenté au paragraphe 4.2.3, n'a pas été abandonné pour autant. Son utilité reste intacte en ce qui concerne le choix de la technologie à adopter pour le piston d'équilibrage : labyrinthe à léchettes ou nid d'abeilles.

On rappellera à nouveau que les standards API sont très pragmatiques. Parmi les tests de conformité, les essais à pleine charge qui permettent de faire fonctionner la machine pratiquement dans les conditions du site. Par contre, ils sont très chers et longs à mettre en œuvre, et il ne faut pas négliger l'essai de réponse au balourd du rotor pour au moins vérifier que le modèle rotor palier ayant servi à faire l'étude de stabilité est correct sur le plan de la caractérisation de la capacité d'amortissement apportée par les paliers.

## 4.4 Considérations sur la dispersion des réalisations

Avant de clore ce chapitre, il est important de noter que de nombreux facteurs influent sur les caractéristiques modales de l'ensemble rotor-paliers-aérodynamique, notamment les amortissements.

### 4.4.1 Tolérances de fabrication des paliers

On rappelle que les compresseurs centrifuges sont conçus avec des paliers hydrodynamiques à patins oscillants. En complément de la publication déjà citée de Bonneau, Berger et Frêne en 2004 sur le comportement dynamique des paliers-butées de lignes d'arbres soumis à des défauts géométriques **[Bonneau]**, on abordera tout d'abord l'effet des tolérances d'usinage sur le jeu et la précharge géométrique.

La chaîne de cotes conduisant au jeu radial  $j$  comporte les diamètres de la soie de rotor  $D_r$ , de la cage  $D_c$  et l'épaisseur des patins  $E_p$  :

$$j = \frac{D_c - D_r}{2} - E_p \quad (4.2)$$

La précharge géométrique  $m$  est le rapport de la distance  $a$  qui sépare le centre géométrique des patins du centre du palier à la différence entre les rayons de courbure du patin  $R_p$  et de l'arbre  $R_r$ . On l'exprime aussi en fonction du jeu radial  $j$  :

$$m = \frac{a}{R_p - R_r} = 1 - \frac{j}{R_p - D_r / 2} \quad (4.3)$$

En considérant des distributions gaussiennes et appliquant la méthode dite RSS (Root Square Sum) ou de valeur efficace moyenne, on obtient l'écart type  $S$  d'une fonction  $f$  en fonction des écarts types  $\sigma_i$  de ses différentes variables  $y_i$  par l'équation (4.4) :

$$S = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2} \quad (4.4)$$

L'application de (4.4) à (4.2) et (4.3) conduit à (4.5) et (4.6) en notant  $\Delta R$  la différence de rayons de courbure  $R_p - R_r$  :

$$S(j) = \sqrt{\frac{\sigma_{D_c}^2}{4} + \frac{\sigma_{D_r}^2}{4} + \sigma_{E_p}^2} \quad (4.5)$$

$$S(m) = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_{D_c}^2}{4} + \sigma_{E_p}^2 + \frac{j^2}{4 \Delta R^2} \sigma_{D_r}^2 + \frac{(\Delta R + j)^2}{\Delta R^2} \sigma_{R_p}^2}}{\Delta R} \quad (4.6)$$

En considérant un palier de 110 mm de diamètre avec un jeu de 1,8‰ et une précharge géométrique de 0,25 ( $j=0,09 \text{ mm} - R_p=50,12 \text{ mm}$ ), on montre l'influence de la tolérance de chaque dimension constructive en terme de tolérance sur l'obtention du jeu sur la figure 4.15 et de la précharge géométrique sur la figure 4.16. Pour ceci, la règle habituelle consiste à considérer que l'écart type est égal au tiers de la tolérance.

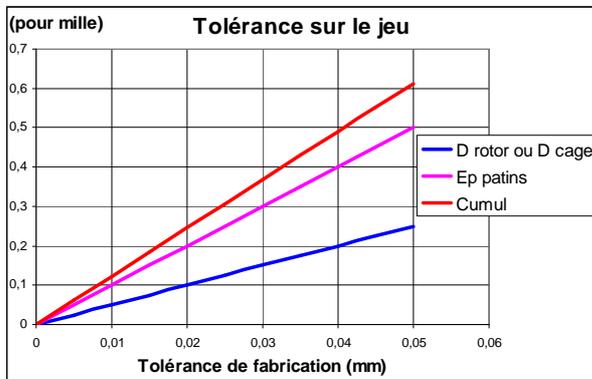


Figure 4.15 – Influence des tolérances de fabrication sur le jeu

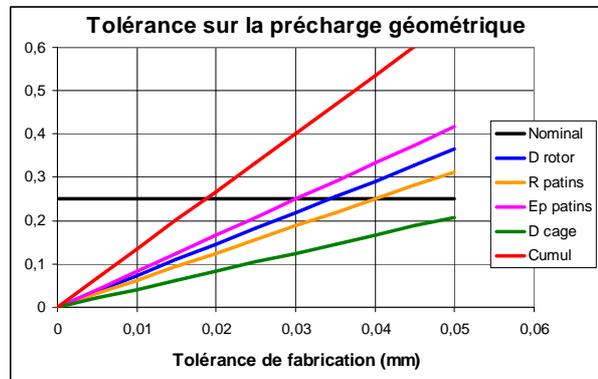


Figure 4.16 – Influence des tolérances de fabrication sur la précharge géométrique

Pour déterminer le cumul, on a supposé que les tolérances étaient identiques sur toutes les variables. Ainsi, des tolérances lâches de 0,05 mm conduisent à une tolérance sur le jeu du tiers de sa valeur, mais surtout à une tolérance de plus de 3 fois la précharge géométrique (dont la valeur a été ajoutée sur la figure 4.15) ! Mais il est utopique de choisir des tolérances de 0,01 mm que l'on ne saura pas réaliser.

Les figures 4.15 et 4.16 ont l'avantage de hiérarchiser l'influence de chaque grandeur. En ce qui concerne la précharge géométrique, on voudrait faire remarquer l'influence du rayon des patins. C'est une donnée qui est difficile à contrôler. La production se fait en usinant une couronne, puis en coupant cette couronne en tronçons angulaires généralement en 4 parties. Pour des paliers à 5 patins oscillants, on aura forcément deux rayons différents. De plus, le fait de couper la couronne peut libérer des tensions internes et faire varier le rayon de courbure intérieur. A la réception des paliers, la mesure du rayon de courbure est assez délicate (soit on mesure une flèche entre trois points en supposant que l'on a bien un cercle entre ces trois points, soit on fait un relevé sur une machine à mesurer tridimensionnelle et l'on calcule le rayon par une méthode de moindres carrés). C'est certainement une donnée sur laquelle il est moins facile de jouer que sur les diamètres de soies de rotor ou l'épaisseur des patins, pour lesquelles les tolérances descendent plus facilement à 0,02 mm.

L'obtention de caractéristiques élevées d'amortissement de paliers pour assurer la stabilité vibratoire du rotor passe par le choix d'une précharge géométrique relativement faible. Plus cette précharge est faible, plus l'influence des tolérances est importante. Les figures 4.17 et 4.18 illustrent parfaitement ce point. L'influence de la même tolérance sur le rayon de courbure des patins est double sur le résultat de la précharge géométrique pour une précharge de 0,2 par rapport à 0,4. L'influence de la tolérance de l'épaisseur est plus forte, mais cette grandeur est plus facilement contrôlable. Il faut aussi rappeler que si la précharge géométrique s'annule, les patins eux-mêmes deviennent instables.

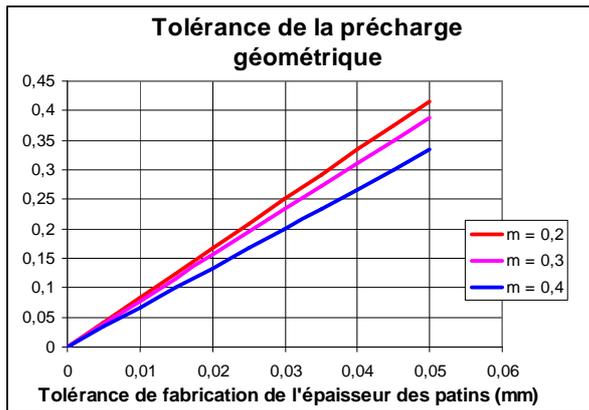


Figure 4.17 – Influence de la tolérance de l'épaisseur des patins sur la précharge géométrique

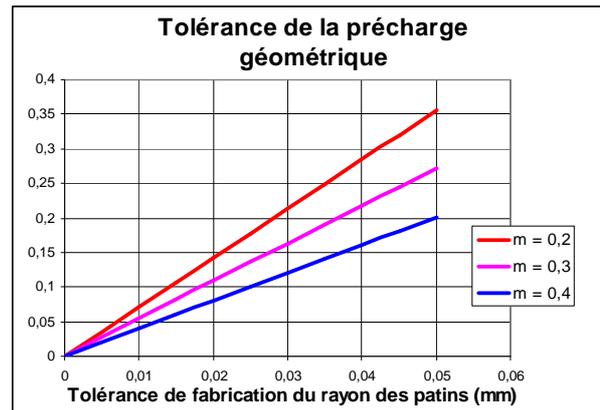


Figure 4.18 – Influence de la tolérance du rayon de courbure des patins sur la précharge géométrique

#### 4.4.2 Influence des conditions de fonctionnement sur les paliers

Au paragraphe 4.4.1 on a montré l'influence des conditions de réalisation des paliers eux-mêmes. Dans les conditions de fonctionnement, d'autres facteurs interviennent. On restera beaucoup plus qualitatif, mais on citera les influences de :

- la température d'huile qui affecte la viscosité de l'huile,
- l'évolution de la qualité de l'huile dans le temps,
- la recirculation d'huile entre patins qui affecte à son tour la température d'huile (les essais du paragraphe 4.2.1 ont montré une corrélation avec la vitesse périphérique pour une lubrification dirigée, mais peut-être d'autres facteurs entrent-ils en considération),
- l'écrasement des pivots sous l'effet des charges qui affectent le jeu radial (pression de Hertz),
- la déformation des patins sous l'effet des champs de pression et de température qui affectent à la fois l'épaisseur et les rayons de courbure des patins (on est dans le domaine de la thermo-élasto-hydro-dynamique – TEHD – des articles déjà cités de **[Fillon]**),
- la dilatation des diamètres de soies et des cages de paliers par transmission thermique dans le rotor et l'enveloppe des compresseurs centrifuges jusqu'aux paliers flasques, qui affecte le jeu,
- le remplacement des patins considérés comme pièces d'usure lors des opérations de maintenance,

Il est important de noter que les standards API demandent de considérer les caractéristiques de palier à froid à l'arrêt aux conditions extrêmes de jeux et de précharges géométriques (jeu maximal-précharge minimale et jeu minimal-précharge maximale pour le cas le plus défavorable). Sans ignorer ces phénomènes, l'API les englobe dans les marges de sécurité adoptées.

De la même façon, l'API demande aussi d'utiliser des caractéristiques de paliers synchrones pour l'étude de la stabilité, sans considération de variation d'inertie des patins avec la fréquence d'excitation. Les essais du paragraphe 4.2.1 avaient montré une forte influence, même trop forte pour assurer une stabilité de fonctionnement, tandis que des mesures réalisées par Debailleux en 1994 donnent des influences plus

réalistes [**Debailleux**]. La figure 4.19 montre les résultats de mesure brute obtenus sur un palier hydrodynamique à 5 patins oscillants de diamètre 160 mm, de rapport L/D 0,7, sans décalage de pivot et de précharge géométrique 0,25, avec une charge verticale de 10 kN placée entre les patins. Les caractéristiques dynamiques des paliers sont tracées en relatif par rapport à leur valeur à chaque vitesse de rotation. Même si cette étude avait été réalisée pour analyser les impédances de paliers pour des fréquences supérieures à la vitesse de rotation (avec des valeurs de raideur horizontale qui s'annulent assez rapidement), on voit que l'influence sur les caractéristiques subsynchrones est importante avec une augmentation des raideurs directes et une diminution de l'amortissement vertical.

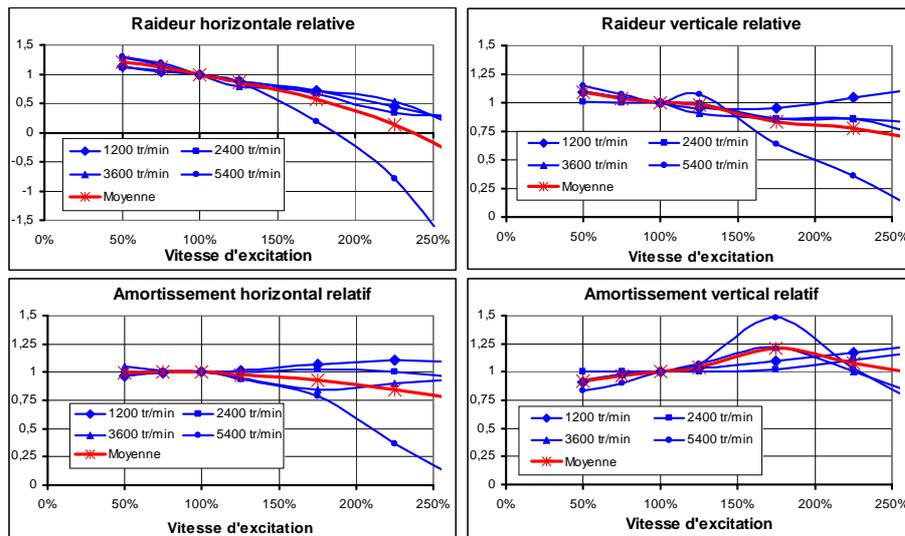


Figure 4.19 – Caractéristiques dynamiques non synchrones d'un palier à 5 patins oscillants

#### 4.4.3 Influence des conditions de fonctionnement de la machine

A l'intérieur du compresseur, d'autres phénomènes influent sur les excitations délivrées par l'aérodynamique, comme par exemple :

- les désalignements radiaux et angulaires entre les paliers et les étanchéités internes (montage, dilatations, efforts appliqués),
- la déformation des étanchéités sous l'effet des champs de pression et de température de fonctionnement (Smalley, Camatti, Childs et al. ont démontré en 2004 [**Smalley**] que la conicité ainsi générée sur une étanchéité de piston d'équilibrage à nid d'abeilles en changeait notablement les caractéristiques dynamiques).

#### 4.4.4 Influence des conditions d'installation

On évoque ici essentiellement les conditions de montage :

- raideurs des supports de paliers (l'API considère qu'au delà de seulement un rapport 3,5 entre la raideur latérale et la raideur du film d'huile, n'est plus nécessaire de considérer ce supportage),
- influence du montage de corps voisins pouvant charger les paliers par dilatations différentielles, par un processus analogue à celui montré au paragraphe 3.4.2.8.

## 4.5 Conclusion

La stabilité vibratoire latérale des turbomachines est une condition sine qua non de leur fonctionnement sur site.

Les moyens de prévision ne cessent de s'affiner, mais un nombre très important de facteurs influent sur les caractéristiques dynamiques de tous les éléments composant la ligne d'arbres et notamment des paliers et des étanchéités. Les conditions de fonctionnement participent également aux modifications en service de la géométrie de ces éléments.

Ce domaine reste très complexe, la littérature et les recherches sur les caractérisations dynamiques des éléments constitutifs des machines se poursuivent. Il faut rester très prudent et garder des marges conséquentes dans les conceptions.

## 5. Turbomachines et paliers magnétiques actifs

Les paliers magnétiques actifs (PMA) constituent toujours un "pôle d'attraction" technique. Actuellement, plus de 1000 turbomachines sont équipées de cette technologie, sans parler des pompes turbo moléculaires qui sont produites en série.

Des développements scientifiques et technologiques ont été réalisés par de nombreux universitaires et de nombreuses entreprises. Les applications industrielles sont centrées sur des régulateurs de type proportionnel, intégral dérivée (PID) numériques à plusieurs cellules dont la prévision du réglage n'est pas triviale. Un reproche fait à cette technique est qu'il faut encore passer beaucoup trop de temps pour parfaire le réglage des actions des régulateurs. Les constructeurs, quant à eux, souhaiteraient disposer de caractéristiques dynamiques des PMA plus définitives, dans la mesure où ils sont responsables de la stabilité vibratoire de la machine.

Dans ce chapitre, on abordera d'abord, plutôt pour mémoire, la construction du premier compresseur centrifuge en Europe équipé de PMA ainsi que les éléments les plus importants permettant de comprendre l'application de cette technique aux turbomachines. Puis on présentera deux cas d'instabilité vécus. Après avoir présenté quelques applications spécifiques, on s'intéressera au fonctionnement dégradé avec l'atterrissage dans les paliers auxiliaires. Enfin on montrera que l'on a encore besoin de conforter la définition des caractéristiques de ces paliers.

### 5.1 Premier compresseur centrifuge européen à PMA

Un pétrolier français a décidé en 1985 d'installer un premier compresseur centrifuge équipé de PMA. Cette installation à terre avait pour but d'évaluer la technologie avant de passer à des applications offshore pour lesquelles l'avantage d'éliminer le système d'huile est considérable. En effet, les systèmes d'huile de lignes de compression destinées à l'industrie pétrolière sont largement plus volumineux et plus lourds que le corps du compresseur lui-même, et il faut savoir que le poids de la structure représente environ deux fois et demi celui du matériel installé.

Dans un premier temps, l'application se limitait au compresseur lui-même, ce qui n'éliminait pas totalement le système d'huile, puisque le principal consommateur reste le multiplicateur entre le moteur électrique et le compresseur.

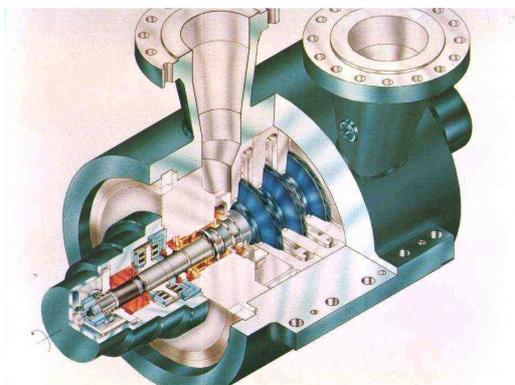


Figure 5.1 –Compresseur centrifuge à PMA

Il faut citer également le fait que le compresseur était aussi le premier à être équipé de garnitures d'étanchéité mécaniques à gaz de bouts d'arbre (dites garnitures sèches). Cela éliminait le système d'huile à haute pression nécessité auparavant par les bagues à film d'huile.

La vue éclatée de la figure 5.1 laisse voir le rotor avec ses trois roues, un PMA et la butée magnétique, ainsi que l'une des deux garnitures sèches de bout d'arbre. Le compresseur a pour caractéristiques :

- gaz naturel doux,
- aspiration 36 bar abs. à 35°C,
- refoulement 66 bar abs.,
- une section de trois roues de diamètre 385 mm,
- puissance 3 700 kW,
- vitesse de rotation 13 600 tr/min,
- entraxe des deux paliers 1 322 mm.

Le schéma de la figure 5.2 montre le principe d'un palier radial avec sa boucle de contrôle, suivant la technique présentée par Habermann en 1984 **[Haber.]**. Chaque palier radial comporte deux axes de contrôle et l'on voit sur la photo de gauche que les électroaimants sont en fait disposés à 45° de la verticale pour répartir le poids du rotor sur les deux axes. La suspension magnétique est évidemment complétée par un 5<sup>ème</sup> axe de contrôle qui est la butée. Le 6<sup>ème</sup> axe de contrôle reste l'entraînement en rotation. La photo de droite montre une garniture sèche mécanique à gaz à rainures spirales destinée à étancher les bouts d'arbre.

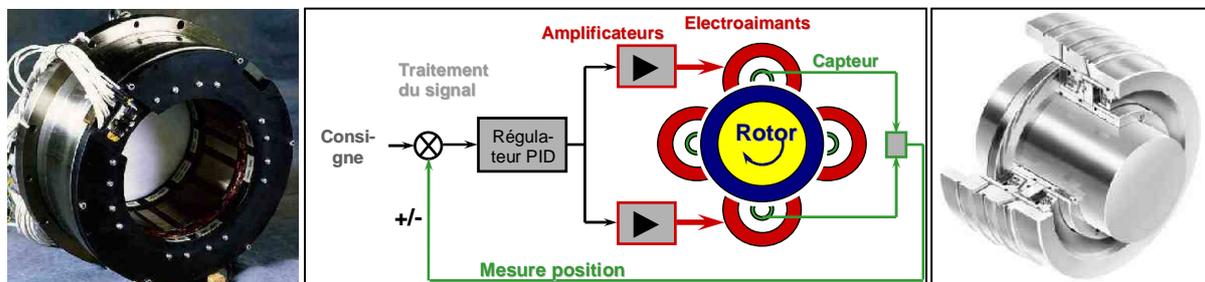


Figure 5.2 – Palier magnétique actif et garniture sèche

En plus du développement technologique évident (qui a été jusqu'à comporter des essais à 110 bar des garnitures sèches sur un compresseur prototype), le travail plus scientifique a consisté à comprendre les phénomènes de dynamique de rotor :

- faire le lien entre les automaticiens qui parlent "fonction de transfert" et les mécaniciens qui parlent "impédances" ;
- intégrer les nouvelles caractéristiques pour le fonctionnement normal (position des fréquences propres, amortissements modaux, réponse aux balourds) ;
- comprendre le fonctionnement avec les dispositifs spéciaux autorisés par l'électronique (voir paragraphe 5.2) ;
- imaginer quelle position prendre vis-à-vis de l'API 617 (en fait on a conclu que les critères continuaient à s'appliquer) ;
- savoir équilibrer le rotor à vitesse nominale ;
- comprendre le comportement en fonctionnement dégradé en cas d'atterrissage, **[Gelin90-1]** ;
- imaginer un programme d'essais spécifique.

La publication de Pugnet, Bolusset et Jehl **[Pugnet87]** en 1987 passe en revue ces différents points, jusqu'aux essais en usine.

Mis à part l'incident survenu au démarrage, et présenté dans le paragraphe 5.3, un excellent retour d'expérience a été établi après 62 000 heures de service par Pugnet, Gelin et Bolusset **[Pugnet95]**. Le taux de disponibilité du compresseur s'avère être supérieur à 99,85% et il faut dire que la technologie des garnitures sèches contribue

aussi largement à un taux de disponibilité aussi élevé. Un seul atterrissage partiel (suivant un seul axe) a été constaté en plus de 10 ans d'exploitation. Le client pour sa part regrette les coûts de remplacement du matériel électronique qui devient rapidement obsolète.

## 5.2 Compréhension des caractéristiques des PMA

La technique des paliers magnétiques actifs peut paraître quelque peu ésotérique pour un mécanicien, comme la dynamique de rotor l'est pour un automaticien. On veut ici apporter quelques explications sur plusieurs notions présentées déjà présentées par Habermann en 1984 dans l'article des Techniques de l'Ingénieur intitulé "Paliers magnétiques" [**Haber.**]. Ces notions sont la base de la technique de la Société de Mécanique Magnétique – S2M – qui possède le plus d'expérience et de références en turbomachines. On ne peut pas donner ici tous les éléments, car certains font partie du savoir faire de S2M qui n'est communiqué aux constructeurs de machines que dans le cadre strict d'accords de confidentialité.

### 5.2.1 Capacité de charge des PMA

La capacité des paliers et butées magnétiques est dictée par les équations de l'électromagnétisme. La force électrique développée par un électroaimant est donnée par l'équation (5.1), en supposant un milieu parfait de perméabilité magnétique

$$\text{relative } \mu_r=1 : \quad F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (5.1)$$

avec : F la force magnétique (N),  
 B l'induction magnétique (T),  
 S la surface (m<sup>2</sup>),  
 $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide ou de l'air de l'entrefer ( $4 \pi 10^{-7}$  H/m).

#### 5.2.1.1 Palier radial

Chaque électroaimant occupe 1/4 de la circonférence, et les encoches du stator où sont logés les enroulements environ 1/3 de la périphérie. La surface utile de chaque pôle est donnée par l'équation (5.2), dont on déduit la force radiale (5.3) développée par le palier radial, sachant que les axes de la figure 5.2 sont en fait placés à 45° de la verticale pour répartir le poids sur le palier suivant deux directions.

$$S_u = \frac{\sqrt{2}}{3} DL \quad (5.2)$$

$$F = \frac{2B^2 DL}{3\mu_0} \quad (5.3)$$

où l'on a introduit le diamètre extérieur D et la longueur L du fourreau de tôles magnétiques rotoriques.

Si l'on utilise des tôles magnétiques en acier à 3% de silicium, la saturation magnétique apparaît à 1,5 T. Avec des alliages de cobalt, on peut monter à 1,9 T. En estimant que le palier est dimensionné pour un effort radial égal à 50% de la charge statique, la capacité spécifique d'un palier magnétique se situe entre 0,6 et 1 MPa. Cette valeur doit être comparée aux pressions généralement admises de 1,4 à 2,2 MPa pour des paliers hydrodynamiques. De plus, s'il y a surcharge instantanée, le PMA

décroche lorsque la saturation magnétique est atteinte, donc pour des pressions de 1,2 à 2 MPa, alors qu'un palier hydraulique tiendra 4 à 8 MPa avant que le film d'huile ne se rompe.

Pour la même charge statique radiale, un PMA devra donc avoir deux fois plus de surface utile qu'un palier hydraulique et aura une capacité de surcharge instantanée deux fois moindre. En prévoyant de plus l'installation des capteurs de position, il faut donc s'attendre à avoir de plus grands entraxes.

### 5.2.1.2 Butée axiale

L'équation (5.1) s'applique toujours pour la butée, avec une surface utile qui, en première approximation, vaut environ la moitié de la surface frontale du disque de butée. La même remarque que pour la capacité des paliers radiaux est faite, et le diamètre du collet de butée magnétique sera plus grand que celui de la butée hydraulique. Il sera nécessaire d'évacuer, en ménageant une circulation forcée de gaz, les pertes par ventilation dans l'entrefer qui sont d'un ordre de grandeur supérieur aux pertes magnétiques.

Avec l'encombrement des électroaimants, il faut aussi tenir compte d'un impact d'encombrement axial plus grand.

Les électroaimants de la butée étant disposés en forme de tore, le collet de butée ne voit pas de changements de polarité dans la rotation, par opposition au palier radial, ce qui élimine les pertes par courant de Foucault et autorise l'utilisation d'un disque monobloc.

### 5.2.1.3 Prise en compte de l'entrefer

L'équation (5.4) donne l'expression de l'induction magnétique B en fonction des ampères-tours NI, et l'équation (5.5) la force magnétique en fonction des ampères-tours et de l'entrefer.

$$NI = \frac{2B\varepsilon}{\mu_0} \quad (5.4)$$

$$F = \frac{\mu_0 (NI)^2 S}{4\varepsilon^2} \quad (5.5)$$

A l'arrêt, au moment de mettre en route la sustentation magnétique, les entrefers sont plus grands que ceux en service. Il faut s'assurer que la capacité des paliers et butée reste suffisante. On reviendra sur ce point au paragraphe 5.5.3.

La différentiation de (5.5) par rapport à  $\varepsilon$  conduit à l'équation (5.6) donnant la raideur négative magnétique  $-F/2\varepsilon$  du palier ou de la butée, qu'il faudra compenser dans tous les cas par le gain en boucle ouverte de la chaîne d'asservissement :

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = -\frac{\mu_0 (NI)^2 S}{8\varepsilon^3} = -\frac{F}{2\varepsilon} \quad (5.6)$$

Pour améliorer les caractéristiques dynamiques de la partie électromagnétique, la S2M a ajouté dans le schéma bloc de la figure 5.2 une boucle interne dite de "contrôle de flux", dont la mesure initialement réalisée avec des cellules à effet Hall, se fait actuellement par une boucle de quelques spires noyée dans le bobinage de l'électroaimant.

De plus, l'analyse de la fonction de transfert en boucle ouverte est le garant de la vérification de la stabilité des modes propres de suspension.

## 5.2.2 Caractéristiques dynamiques des PMA

L'ensemble rotor paliers est contrôlé par des régulateurs de type PID. Schématiquement, l'action proportionnelle confère la raideur, l'action dérivée apporte une avance de phase qui confère l'amortissement dans la plage des fréquences propres et l'action intégrale apporte la précision du positionnement statique (grand gain à fréquence nulle). Par rapport à un régulateur classique, l'action dérivée comporte plusieurs cellules pour bénéficier de l'avance de phase sur toute la plage des fréquences propres de rotor traversées.

Pour effectuer un avant-projet, le principe du calage d'une forme typique de PID en fréquence et en amplitude consiste à placer le creux de la caractéristique de gain. La position en amplitude correspond à une raideur conduisant à un déplacement de 10  $\mu\text{m}$  sous l'application d'un effort radial correspondant à la force périphérique sur les roues générant le couple gaz. La position en fréquence correspond à la moitié de la fréquence propre inertielle pour une raideur double de la valeur trouvée précédemment. De cette façon, on obtient environ  $30^\circ$  d'avance de phase pour la stabilité de la suspension magnétique.

La figure 5.3 montre les tracés en gain et phase de la fonction de transfert en boucle fermée des PMA pour le rotor de 325 kg d'un compresseur centrifuge de 6000 kW tournant à 12000 tr/min avec des roues de 450 mm de diamètre. La figure 5.4 en sépare la partie réelle pour obtenir la raideur  $K$  et la partie imaginaire pour l'amortissement  $C\omega$ .

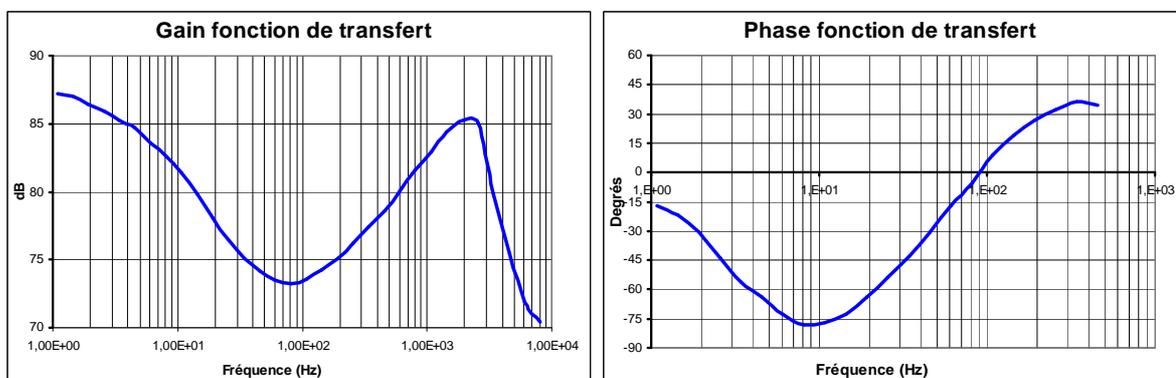


Figure 5.3 – Fonction de transfert d'un PMA

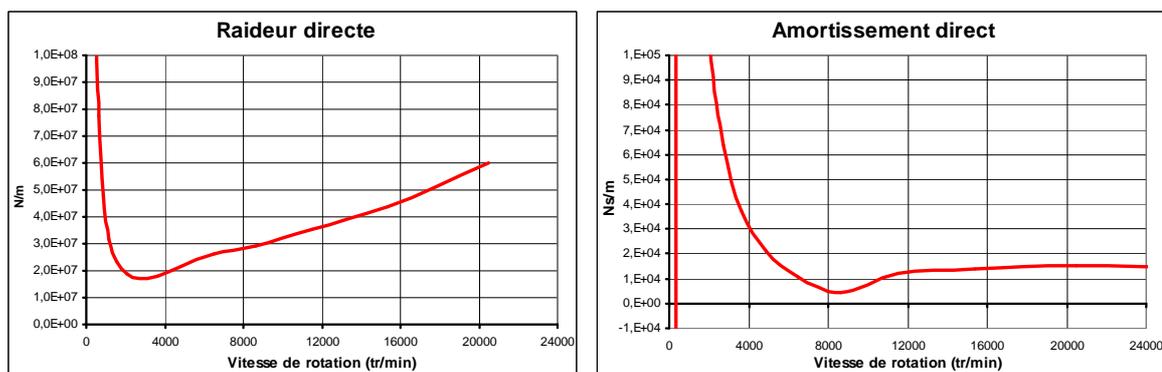


Figure 5.4 – Caractéristiques dynamiques des PMA

Depuis les premières machines construites (paragraphe 5.1), les caractéristiques de offertes par les PMA ont considérablement augmenté. La raideur a été multipliée par 3 pour des fréquences propres de sustentation également multipliées par 3. Parallèlement, la capacité d'amortissement devient significative devant les raideurs croisées développées par les étages de compression (chapitre 4).

### 5.2.3 Réalisation de l'analyse dynamique d'un rotor sur PMA

L'expérience de la S2M leur permet de prédéterminer un réglage des actions du PID en fonction de caractéristiques générales du rotor pour que le constructeur de la turbomachine puisse faire son étude de faisabilité lors de l'avant projet (réglage de la fréquence de suspension en fonction de la masse du rotor et du couple développé par la machine). Puis il faut rentrer dans la dynamique de rotor pour ajuster ces caractéristiques. Cette étude est alors fort complexe, et les études de dynamique sont effectuées en double avec des buts un peu différents :

- l'une par le constructeur des paliers pour annoncer les caractéristiques des paliers tout en vérifiant les marges de phase des modes propres de suspension pour assurer leur stabilité (la S2M utilise le code MADYN<sup>®</sup> **[Madyn]** développé par l'Université Technique de Darmstadt dans l'environnement MATLAB<sup>®</sup> **[MATLAB]**) ;
- l'autre par le constructeur qui reste responsable du comportement des modes propres élastiques de sa machine au titre des standards API (réalisation des études de stabilité évoquées au paragraphe 1.2.5.6).

Par ailleurs, il faut garder en mémoire le fait qu'un PMA est un système de contrôle où la fonction de transfert s'applique entre la mesure du capteur et la force injectée sur le palier, et qu'il ne peut pas y avoir coïncidence de ces deux positions.

### 5.2.4 Tracé d'un diagramme de Campbell

Pour déterminer un diagramme de Campbell, on a besoin de couvrir la totalité des plages de vitesse de rotation et de fréquence.

Dans le cas d'une machine portée sur des paliers hydrodynamiques, les caractéristiques des paliers sont fonction de la vitesse de rotation. Bien que ces caractéristiques soient affectées par la fréquence de l'excitation appliquée par le biais de l'inertie des patins oscillants, l'API spécifie que l'on doit utiliser des caractéristiques "synchrones", indépendantes de ce phénomène. Donc, pour une vitesse de rotation donnée, les caractéristiques des paliers sont indépendantes de la fréquence, et l'on peut calculer toutes les fréquences propres d'un seul coup.

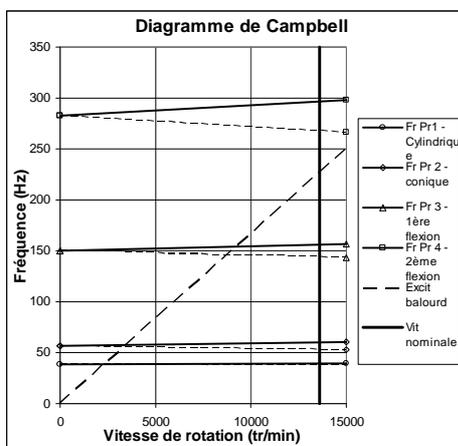


Figure 5.5 – Diagramme de Campbell d'un rotor de compresseur centrifuge sur paliers magnétiques actifs

Dans le cas des PMA, il n'en va pas du tout de même, puisqu'il s'agit d'une boucle d'asservissement dont le gain est évidemment fonction de la fréquence de la perturbation appliquée. Pour chaque vitesse de rotation, pour laquelle on a des effets gyroscopiques particuliers, on est obligé de calculer

indépendamment chaque fréquence propre en itérant sur les caractéristiques de paliers jusqu'à ce qu'il y ait concordance entre la fréquence propre obtenue et la fréquence de définition des caractéristiques dynamiques. La figure 5.5 montre le diagramme de Campbell du compresseur centrifuge du paragraphe 5.1.

### 5.2.5 Calcul de la réponse aux balourds

La situation pour la réponse au balourd est beaucoup plus simple, puisque la fréquence de la perturbation est par définition égale à la vitesse de rotation. Les caractéristiques dynamiques des PMA sont utilisables directement... ou presque, car le paragraphe 5.2.6 décrit un dispositif particulier affectant les caractéristiques synchrones.

### 5.2.6 Dispositif de contrôle automatique de balourd

Ce dispositif a été introduit par la S2M au début pour augmenter la durée de vie des amplificateurs générant les courants des électroaimants des paliers. L'idée vient du fait que la sustentation est réalisée par l'action à basse fréquence des paliers sur les modes propres de suspension alors qu'à la vitesse de rotation, on n'a pas besoin d'introduire de forces pour le sustenter, donc il n'est pas nécessaire de générer de façon permanente des courants à la fréquence de rotation.

Ce dispositif consiste à introduire un filtre suiveur piloté par la mesure de la vitesse de rotation qui annule électroniquement les caractéristiques dynamiques sur cette fréquence. Le profil de gain et de phase est donné figure 5.6.

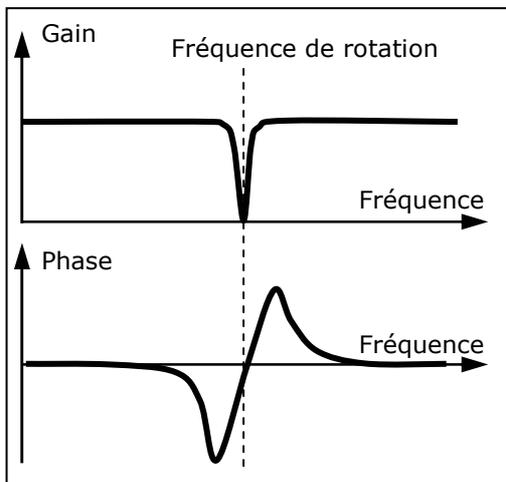


Figure 5.6 – Profil du filtre du contrôle automatique de balourd

Mécaniquement, ce dispositif a également du bon, car il ne contraint pas le rotor par des forces dynamiques en le laissant tourner autour de son axe d'inertie sur sa déformée en libre-libre. La figure 5.7 montre une réponse au balourd calculée dans le cas du compresseur du paragraphe 5.1 (application d'un balourd dit "trois masses"), où l'on voit nettement que le niveau vibratoire – il s'agit d'ailleurs plus de déplacements que de vibrations dans ce cas – est largement diminué dans la plage d'action de ce dispositif.

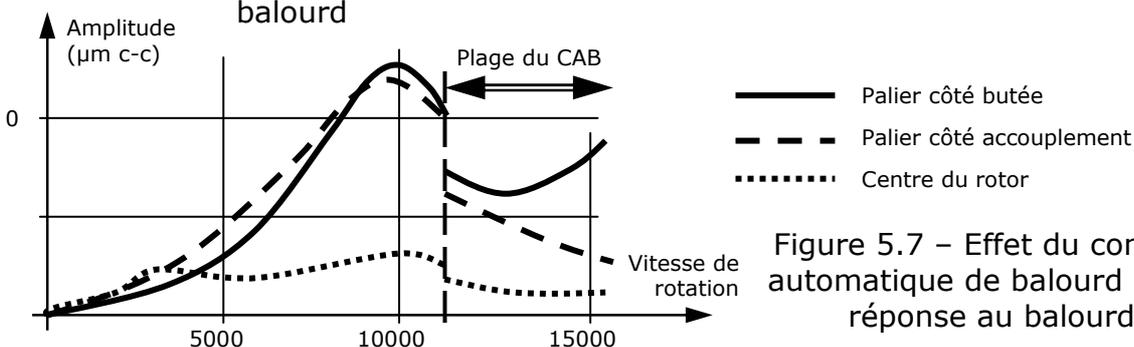


Figure 5.7 – Effet du contrôle automatique de balourd sur la réponse au balourd

Par ailleurs, il est évident que ce dispositif ne doit pas être utilisé près d'une vitesse critique en libre-libre puisqu'on n'a plus alors que les effets gyroscopiques comme capacité d'amortissement. Les figures 5.8 et 5.9 montrent la superposition de la caractéristique des PMA issue des figures 5.3 et 5.4 sur une carte des vitesses critiques où l'on trace la position des fréquences propres non amorties de rotor en fonction de la raideur des paliers (définie figure 1.25 du paragraphe 1.2.5.1). Si l'on tourne loin des fréquences propres, cas de la figure 5.8, rien ne se passe et l'on aura des réponses du type de la figure 5.7. Si l'on est proche d'une fréquence propre de rotor, cas de la figure 5.9, on crée deux fréquences propres supplémentaires, et il est même possible que l'une d'elles soit instable, compte tenu du déphasage apporté par le résolveur (figure 5.6).

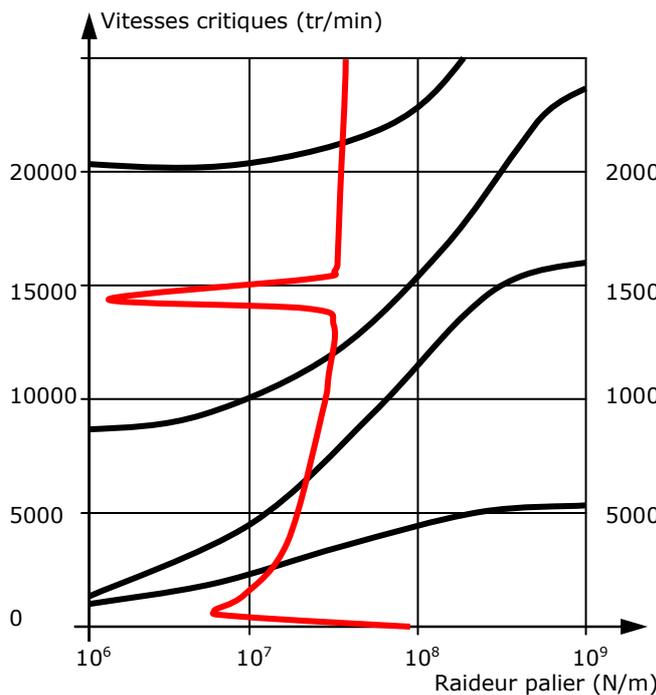


Figure 5.8 – Diagramme des vitesses critiques non amorties avec contrôle automatique de balourd

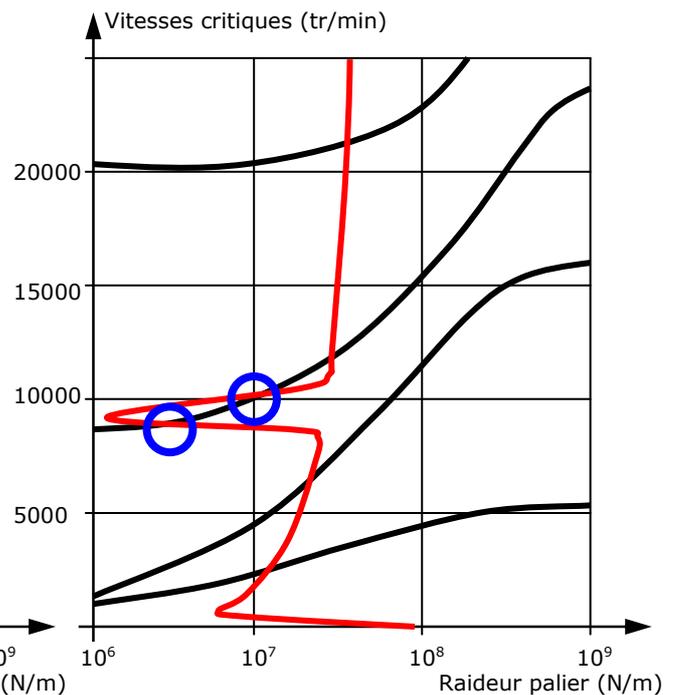


Figure 5.9 – Vitesses critiques supplémentaires dues au contrôle automatique de balourd

Du point de vue de la surveillance du rotor, l'évolution de la réponse reste toujours représentative de l'évolution des balourds installés. L'expérience montre que les critères de niveaux vibratoires des normes pour les machines tournantes continuent de s'appliquer **[API617]**, **[ISO7919-1]** et **[ISO7919-3]**.

### 5.2.7 Optimisation de l'amortissement

Ce dispositif est comparable au contrôle automatique de balourd en ce qu'il utilise aussi un filtre suiveur. Il est actif dans la plage de franchissement des vitesses critiques, et il consiste à imposer une avance de phase de  $90^\circ$  à la force magnétique injectée sur le rotor au lieu de la phase donnée par le régulateur. Le gain de la fonction de transfert n'est pas changé.

Le résultat est donc l'application d'une raideur nulle, mais d'un amortissement maximal  $C = \frac{A}{\omega}$  au lieu de  $C = \frac{A \sin(\varphi)}{\omega}$ . Ceci réduit donc les amplitudes de réponses

aux balourds lors des traversées des vitesses critiques, mais n'a aucun impact sur la stabilité subsynchrone du rotor sous l'effet des excitations aérodynamiques.

### 5.2.8 Position vis-à-vis des normes

1/ Les standards API ont introduit une annexe pour l'application des PMA aux turbomachines. Cette annexe est informative et non normative. Elle s'attache à définir les termes, définir les normes de conception électrique et d'antidéflagrance, et donne des indications sur les dimensionnements et l'instrumentation :

- dimensionnement radial pouvant supporter le poids plus 4% de la force calculée au diamètre extérieur des roues conduisant au couple maximum du compresseur ;
- dimensionnement axial avec deux fois la poussée maximale résiduelle du gaz dans la machine ;
- installation de deux capteurs de température par palier radial et dans la butée ;
- installation de deux capteurs de position radiale dans chaque palier et de position axiale dans la butée ;

ainsi que sur l'installation de batteries de secours en cas de coupure de l'alimentation en électricité.

Ce dernier point est l'occasion de rappeler que les capteurs inductifs radiaux de S2M comportent plusieurs enroulements dont le montage breveté en ponts de Wheatstone élimine naturellement les premiers ordres du faux rond.

2/ En ce qui concerne le domaine technologique fondamental de l'antidéflagrance qu'il faut appliquer pour pouvoir démarrer un compresseur destiné à une application pétrolière ou gazière, il faut noter que ce ne sont pas les paliers magnétiques, mais le compresseur lui-même qui doit obtenir l'agrément et posséder les marquages :



et



conformément à la directive européenne **[ATEX]** – Atmosphères Explosibles – 94/9/CE. Le type de protection choisi est la protection par surpression interne "p", conformément à la norme CEI 60079-2 **[CEI60079]**. La certification est délivrée après essais spécifiques par le LCIE – Laboratoire Central des Industries Electriques.

Un intérêt très fort de cette directive ATEX est qu'elle généralise les risques d'explosivité sans se limiter aux risques électriques, comme dans la batterie de normes CEI. Ainsi, pour l'application des paliers magnétiques actifs, il faut considérer le risque mécanique lié aux atterrissages (générations d'étincelles, échauffements).

## 5.3 Instabilité subsynchrone du compresseur équipé de PMA

Lors de la mise en service sur site du compresseur décrit au paragraphe 5.1, il est apparu une raie subsynchrone dans le spectre vibratoire de la machine. Ce phénomène est d'ailleurs tout à fait identique à celui observé sur les compresseurs centrifuges à haute pression (figure 4.8 du paragraphe 4.1), mais qui n'était pas encore caractérisé.

Dans le cas du compresseur à PMA, le mode propre cylindre de sustentation du rotor dans les PMA se situe très bas, à 20% de la vitesse de rotation, et les caractéristiques d'amortissement des PMA sont beaucoup plus faibles (en valeur absolue) que celles des paliers hydrodynamiques à patins oscillants. Ces deux éléments fondamentaux limitent considérablement la marge de stabilité, et l'on a pu vérifier a posteriori que le

compresseur, tel que construit, se situait dans la zone instable du critère globale de stabilité proposé au paragraphe 4.2.3 (figure 4.11). Ceci laisse à penser que ce critère est valable aussi pour cette technologie de paliers.

Les transformées de Fourier réalisées sur les signaux de mesure de position ont quantifié les niveaux vibratoires suivants pour une pression d'aspiration de 15 bar et une pression de refoulement de 29 bar :

- 2,1  $\mu\text{m}$  crête à crête à 43 Hz,
- 4,8  $\mu\text{m}$  à 112 Hz,
- 1,5  $\mu\text{m}$  à 150 Hz,
- 27,3  $\mu\text{m}$  à 227 Hz (la raie de rotation).

Quand les pressions sont montées à 30 bar à l'aspiration et 59 bar au refoulement, le niveau de la plus basse fréquence propre est passé de 2,1 à 103  $\mu\text{m}$  crête à crête alors que les autres composantes ne changeaient pas. L'amplitude globale maximale autorisée par l'API 617 de 24  $\mu\text{m}$  était largement dépassée alors qu'on n'avait pas encore atteint les pressions de service.

Grâce à l'utilisation de l'électronique, le fournisseur des PMA a imaginé apporter un amortissement supplémentaire à celui conféré par l'action dérivée des régulateurs de position, par un dispositif dit "d'avance de phase spatiale". Le principe consiste à réinjecter une proportion du signal vibratoire d'un axe sur l'axe suivant dans le sens de la rotation du PMA dans la plage de fréquence du mode propre concerné. On obtient une quadrature parfaite. Un montage rapide de cette solution a été effectué sur le site et il a été possible de mettre le compresseur en service. Le résultat sur l'impédance du palier magnétique est montré figure 5.10 sous la forme d'une combinaison de vecteurs de Fresnel. La figure 5.11 donne le schéma électronique simplifié.

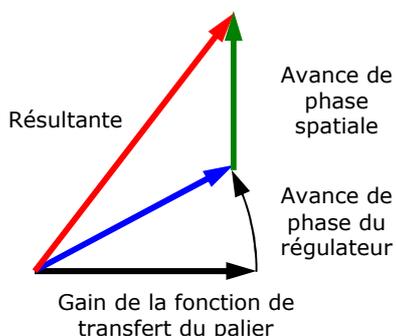


Figure 5.10 – Avance de phase spatiale

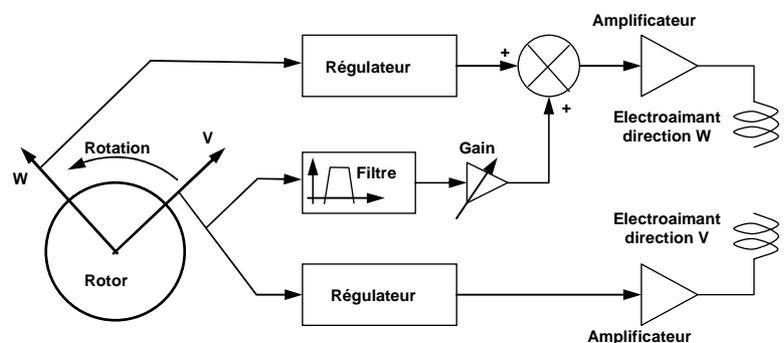


Figure 5.11 – Réalisation de l'avance de phase spatiale

Le problème était résolu, mais un incident est survenu ultérieurement lors de l'installation de la carte électronique définitive contenant ce dispositif. Sur la carte, le potentiomètre dosant la proportion de signal à réinjecter en quadrature était réglé au maximum. La situation était supposée être excellente, mais c'est le mode propre de flexion à précession inverse qui s'est trouvé déstabilisé, comme le montrent les schémas de la figure 5.12, qui reprennent le même symbolisme que celui de la figure 5.10.

Cette expérience a fait l'objet de deux publications en 1989 et 1990 par Bolusset et Pugnet [**Boluss.89**] et [**Boluss.90**].

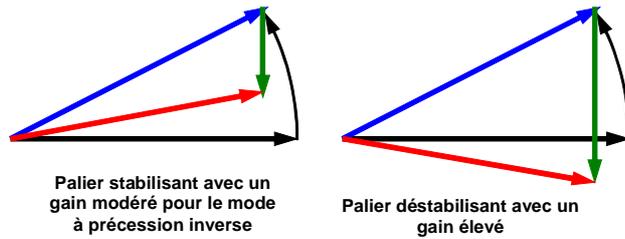


Figure 5.12 – Effet de l'avance de phase spatiale sur un mode rétrograde

## 5.4 Instabilité d'un turboalternateur équipé d'AMA

### 5.4.1 Application

Pour des applications de sous-marins (figure 5.13), il était nécessaire de concevoir des turbines à vapeur ayant une grande discrétion vibroacoustique.



Figure 5.13 – Sous-marin à propulsion nucléaire

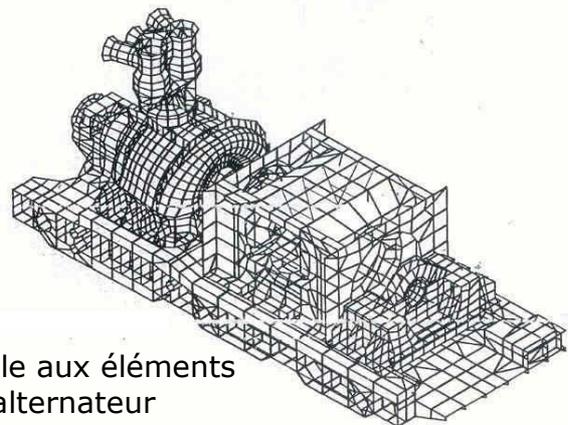


Figure 5.14 – Modèle aux éléments finis du turboalternateur

Le turboalternateur alimentant le bord en électricité comporte une turbine à vapeur entraînant directement un alternateur. L'ensemble est monté sur un socle suspendu à basse fréquence. Les rotors sont accouplés de façon rigide et le palier central est commun aux deux machines pour diminuer l'encombrement global. La solution des PMA a bien sûr été examinée, mais les conditions de fonctionnement et de nécessité de sûreté d'alimentation électrique (qui constitue aussi le secours pour la propulsion), ont fait préférer la solution des paliers hydrodynamiques. Le caractère de confidentialité de l'application interdit de donner les caractéristiques. La figure 5.14 représente le maillage du modèle aux éléments finis.

Des efforts importants ont été faits pour diminuer les sollicitations vibratoires transmises du rotor au berceau porteur (équilibrage, choix des paliers, rodage des soies de paliers, ...). Il a été prévu de profiter de la technique des PMA pour imaginer des paliers magnétiques n'ayant pas de caractéristiques porteuses, mais délivrant des signaux uniquement sur certaines plages de fréquence pour minimiser les vibrations de la structure. L'idée, a priori séduisante, est d'agir à la source avec cette technique d'amortisseur magnétique actif (AMA).

Lorsqu'on a mis les AMA en service, l'augmentation du gain du système destiné à réduire les vibrations de la structure s'est accompagnée d'une augmentation des vibrations synchrones du groupe turboalternateur.

### 5.4.2 Explication intuitive de l'influence sur la stabilité

Dans un tel système, on veut minimiser l'amplitude vibratoire de la structure (socle au niveau de la fixation) en générant une force entre deux autres points (le corps de palier et le rotor). La matrice de raideur de l'ensemble de la structure comporte donc des termes isolés en dehors de la diagonale, représentés schématiquement en (5.7) :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline |K| = \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} x & x & x \\ \hline x & x & x \\ \hline x & x & x \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} x & x & x \\ \hline x & x & x \\ \hline x & x & x \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Degré de liberté du socle} \\
 \text{Degré de liberté du rotor} \\
 \text{Degré de liberté du corps de palier}
 \end{array}
 \tag{5.7}$$

De plus, si l'on veut que le système soit efficace, ces raideurs seront très grandes pour que la force développée soit d'un ordre de grandeur satisfaisant pour une vibration résiduelle très faible. On a donc des termes en dehors de la diagonale qui conduiront à des fréquences propres complexes, et puisque ces termes sont très grands, on peut s'attendre à une forte influence sur la stabilité.

### 5.4.3 Démonstration formelle de l'instabilité

Compte tenu de l'importance stratégique de cette application, il fallait disposer d'une explication scientifique de cette instabilité. Pour ceci, on a utilisé un modèle aux éléments finis. Le maillage, est représenté figure 5.14 comporte le socle, la turbine, les organes d'admission de vapeur, l'alternateur, les corps de palier et le rotor. L'ensemble représente 39 000 degrés de liberté. Les raideurs de liaison entre les différents composants sont soit physiques (blocages autorisant les dilatations différentielles), soit recalées sur les résultats expérimentaux d'analyses modales. Les amortissements sont également issus de ces mesures. Les caractéristiques de paliers sont également des résultats de mesures effectuées par Debailleux **[Debailleux]**.

Pour étudier ce problème aux valeurs et vecteurs propres complexes, on a utilisé la méthode pseudo-modale, proposée dès 1974 par Lalanne et al. **[Lalan75]** puis reprise en 1983, 86 et 87 par Berthier et al. **[Berth83]**, **[Berth86]** et **[Berth87]** puis finalement par Lalanne et Ferraris en 1990 **[Lalan90]** et programmée dans le code ROTORINSA<sup>®</sup>.

Ce modèle a également servi de validation au développement de cette option dans le code aux éléments finis SYSTUS<sup>®</sup> par Nicolas et Vinsonneau en 1990 **[Nicolas]**.

L'équation matricielle d'équilibre dynamique :

$$[M][\ddot{X}] + [C][\dot{X}] + [K][X] = [F(t)] \tag{5.8}$$

admet des valeurs propres complexes. La grande taille de ce système ne permet pas de calculer facilement ces éléments. On évite cette difficulté en diminuant la taille du problème grâce à un changement de base modale.

On s'intéresse alors au système symétrique sans amortissement :

$$[M_s][\ddot{X}] + [K_s][X] = [0] \quad (5.9)$$

avec  $[M] = [M_s]$  symétrique  $\left( [M_s] = \frac{1}{2}([M] + [M]^t) \right) + [M_Q]$  quelconque

et  $[K] = [K_s]$  symétrique  $\left( [K_s] = \frac{1}{2}([K] + [K]^t) \right) + [K_Q]$  quelconque

Ce système admet des valeurs propres  $\omega$  et vecteurs propres  $\phi$  que l'on sait calculer facilement avec les algorithmes utilisés dans les codes aux éléments finis. On sélectionne alors les  $m$  premiers modes propres et on fait une troncature modale du vecteur de déplacement physique :

$$[X] = [\phi]_m [q]_m \quad (5.10)$$

où  $[\phi]_m$  est la matrice constituée des  $m$  premiers vecteurs propres disposés en colonnes,

et  $[q]_m$  est le vecteur des  $m$  participations modales de ces vecteurs propres dans la réponse physique.

En appliquant le changement de base  $[X] = [\phi]_m^t [q]$ , on obtient un système dynamique de taille réduite  $m$  :

$$[M]_m [\ddot{q}] + [C]_m [\dot{q}] + [K]_m [q] = [\phi]_m^t [F(t)] = [F(t)]_m \quad (5.11)$$

où les matrices dites "réduites" :

$$[M]_m = [\phi]_m^t [M] [\phi]_m, [K]_m = [\phi]_m^t [K] [\phi]_m \text{ et } [C]_m = [\phi]_m^t [C] [\phi]_m \quad (5.12)$$

sont des matrices pleines, mais la taille du système est tellement réduite que la recherche des valeurs propres et valeurs propres complexe est beaucoup plus facile et rapide. Dans le cas du turboalternateur, les 160 premiers modes propres ont été considérés pour couvrir une plage de fréquence jusqu'à 4 fois la vitesse de rotation, ce qui a réduit la taille du système complexe à résoudre de 39000 équations à 320.

Les valeurs propres et vecteurs propres sont calculés par le passage en variables d'état  $[[q]^t [\dot{q}]^t]^t = [Q_0] e^{rt}$ , suivant la technique déjà présentée au paragraphe 2.4.1.

L'équation généralisée aux valeurs propres ainsi obtenue admet  $2m$  valeurs propres conjuguées que l'on calcule par la méthode du QR.

Nicolas et Vinsonneau ont discuté en 1990 de la validité de la méthode sur le modèle établi **[Nicolas]**, pour lequel on disposait par ailleurs d'un calcul direct de fréquences propres obtenu à l'époque sur un supercalculateur CRAY. Ensuite, Vinsonneau et Pugnet ont examiné en 1991 la validité de la prise en compte des amortissements **[Vins.91]**.

En 1992, Pugnet et Vinsonneau ont démontré, en utilisant cette méthode de recherche des fréquences propres complexes dans l'espace réduit, que les AMA produisaient des modes propres instables **[Pugnet92]**. Les liaisons des paliers hydrodynamiques entre le rotor et la structure sont les matrices de raideur et

d'amortissement précédemment mesurées par Debailleux **[Debailleux]**. Les AMA sont introduits sous la forme générale de matrices de masse, d'amortissement et de raideurs supplémentaires exprimées par rapport à la raideur directe moyenne des paliers hydrodynamiques :

$$X_{\text{add}} = \frac{K_{\text{add}}}{K_p}, \text{ ou } X_{\text{add}} = \frac{\Omega C_{\text{add}}}{K_p}, \text{ ou encore } X_{\text{add}} = \frac{\Omega^2 M_{\text{add}}}{K_p}, \quad (5.13)$$

avec  $\Omega$  pulsation de rotation.

Le tableau 5.15 donne le nombre de modes propres instables qui apparaissent en fonction des cinq valeurs de  $X_{\text{add}}$  ajoutées dans le modèle, sous forme soit de raideur, soit d'amortissement, soit de masse. Plus la valeur de  $X_{\text{add}}$  augmente, plus le nombre de modes propres instables augmente, plus les fréquences propres se centrent sur la vitesse de rotation.

Tableau 5.15 – Nombre de modes propres instables															
$X_{\text{add}} / K_p$	0,5			1			2			10			100		
$\Delta f / f_c$	K	C	M	K	C	M	K	C	M	K	C	M	K	C	M
$\pm 20\%$			1	2		1	4		1	5	1	3	7	3	2
$\pm 10\%$			1	1		1	2		1	3		2	2	1	2
$\pm 5\%$							1			2		1	1		1
$\pm 2\%$												1	1		1

La figure 5.16 montre une vue partielle des déformées des trois modes propres situés dans la plage de  $\pm 2\%$  autour de la vitesse de rotation. Les vues sont limitées au socle, aux corps de palier et au rotor et montrent bien que ces modes propres instables sont des modes propres de rotor.

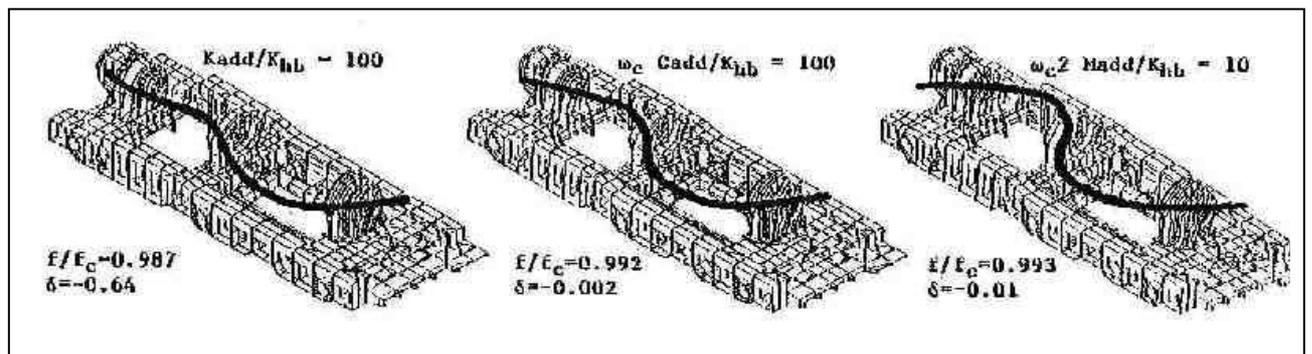


Figure 5.16 – Modes propres instables de rotor

Des tracés de trajectoires transitoires sous l'application d'un balourd complètent la publication **[Pugnet92]**. L'intégration numérique est faite par une méthode de Newmark (annexe B4).

Ainsi, il était démontré formellement que le système développe des modes propres de rotor instables. Par rapport à l'explication intuitive du paragraphe 5.4.1, on a trouvé que ces modes propres se trouvaient très proche de la vitesse de rotation, ce qui correspondait tout à fait à ce qui a été constaté expérimentalement lors des essais de ce dispositif sur le groupe prototype de ce turboalternateur. L'idée, séduisante en soi, de cette technique d'AMA agissant directement à la source sur le rotor, s'est finalement révélée produire l'effet inverse de celui escompté.

Une autre façon de voir les choses est de dire que vouloir compenser l'effet des balourds de façon active directement sur le rotor force les nœuds de vibration à être au niveau des paliers hydrodynamiques, ce qui leur enlève toute capacité d'amortissement. Il faut donc rester prudent avec les systèmes agissant directement sur les rotors.

## 5.5 Conceptions particulières de compresseurs centrifuges à PMA

Avant d'aborder la question plus globale de la conception de groupes complets motocompresseurs intégrés sur PMA au paragraphe 5.7, on va traiter trois cas particuliers de compresseurs centrifuges entraînés par des moteurs séparés.

### 5.5.1 Compresseur centrifuge sans butée

Dans la continuité de la machine du paragraphe 5.1, quatre autres compresseurs centrifuges à PMA ont été ultérieurement installés sur le même site **[Pugnet95]**. On veut s'intéresser ici spécifiquement à la deuxième machine qui avait comme particularité de ne pas posséder de butée magnétique.

L'application est une recompression de gaz naturel acide après collecte sur champ et avant traitement de désulfuration. Les caractéristiques sont :

- compression de gaz naturel comportant 15% d' $H_2S$  et 10% de  $CO_2$  entre 7 et 50 bar,
- 2 sections de 4 et 3 étages (figure 5.17),
- 1800 kW à 14150 tr/min (vitesse fixe),
- ligne d'arbre avec un moteur électrique, un multiplicateur et un compresseur.

La machine ayant 7 étages de compression au lieu de 3 pour celle du chapitre 5.1 et étant destinée au même site, il a été choisi d'avoir une dynamique de rotor équivalente en éliminant la butée du compresseur pour limiter l'entraxe des PMA. La poussée axiale est alors transmise au multiplicateur par l'intermédiaire de l'accouplement. Le multiplicateur est un engrenage hélicoïdal à simple hélice, qui compense sa réaction de denture par des collets sur le pignon (repérés sur la figure 5.18). Ces collets sont donc à nouveau utilisés pour transmettre la poussée du compresseur depuis le pignon grande vitesse vers l'arbre petite vitesse qui comporte la butée.

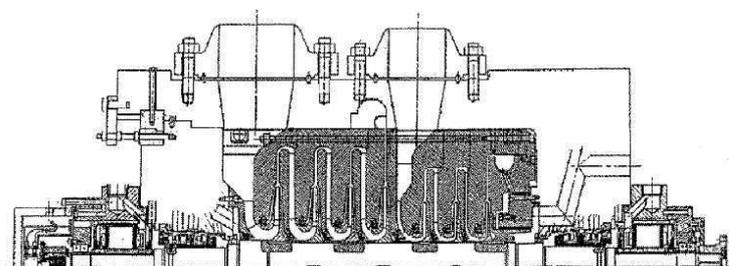


Figure 5.17 – Coupe de compresseur centrifuge à PMA sans butée

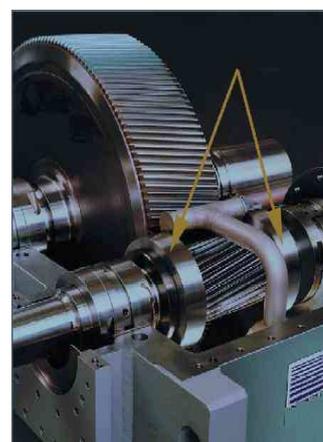


Figure 5.18 – Multiplicateur hélicoïdal à simple hélice

L'accouplement comporte un barreau de titane pour avoir la rigidité nécessaire à la transmission de la poussée et du couple, mais aussi la plus grande souplesse possible en flexion. L'étude des dilatations différentielles entre multiplicateur et compresseur a été prise en compte pour déterminer les charges supplémentaires s'appliquant sur les paliers radiaux. L'étude dynamique de flexion a été conduite en considérant la totalité de la ligne grande vitesse (pignon sur paliers hydrodynamiques, accouplement, compresseur sur PMA).

A la date de la publication **[Pugnet95]** citée au paragraphe 5.1, ce compresseur cumulait déjà 32 000 heures de fonctionnement.

### 5.5.2 Etude dynamique d'un compresseur centrifuge de gaz acide à PMA dans le gaz

Cette étude se place dans le cadre du développement d'un concept de plateformes pétrolières offshore inhabitées, dans le cadre du Grand Projet Innovant "Platine" du Comité d'Etudes Pétrole Marine de la Direction des Hydrocarbures.

Il s'agissait de concevoir un compresseur centrifuge sur paliers magnétiques actifs comprimant le débit le plus petit possible avec au moins 8 étages pour atteindre le rapport de pression le plus élevé possible et avec un entraînement par un moteur électrique à vitesse variable de 2,5 MW tournant à 22500 tr/min. Le débit et la pression d'aspiration sont des conséquences de la conception aérodynamique. Cette étude a été conduite par Pugnet et Bolusset en 1993 **[Pugnet93]**.

Le choix de l'entraîneur à grande vitesse correspondait à un développement en cours chez un constructeur de moteurs électriques. La pression de refoulement est de 140 bar pour viser une application de récupération assistée du pétrole par le procédé de gas-lift. La nécessité de comprimer du gaz acide découlait de la suppression de la désulfuration du gaz pour diminuer la taille de la plate-forme. La solution des paliers magnétiques s'impose pour finir d'éliminer le système d'huile de graissage, puisque le multiplicateur a déjà disparu de la ligne d'arbre, et pour des raisons évidentes de télécommande. L'option de l'installation des paliers dans le gaz du procédé est dictée pour réduire le plus possible l'entraxe.

La sélection aérodynamique du compresseur à 10 étages de compression n'est pas présentée ici. On dira simplement qu'il y avait deux sections de compression, se terminant par des roues de coefficient de débit 0,006. Le choix d'un acier inoxydable martensitique Z4CN16-04 (Virgo 38<sup>®</sup>), déjà largement référencé pour ce type d'application, résolvait la question de la tenue des roues à la corrosion sous tension et de la vitesse périphérique admissible.

Le propos qui nous intéresse ici est celui de la dynamique du rotor du compresseur en flexion. Le fait que l'on ne veuille pas avoir plus d'un mode propre élastique de rotor dans la plage de fonctionnement (le mode propre à trois nœuds trop peu amorti doit rester en dehors de la plage) dicte la solution des PMA dans le gaz. En effet, cette disposition technologique réduit l'entraxe des paliers au minimum, en repoussant les étanchéités de sortie d'arbre en dehors de cet entraxe.

Par contre, il est nécessaire d'utiliser la technique des paliers chemisés puisque les isolants classiques des électroaimants des PMA ne sont pas à même de résister à la corrosion par l'H<sub>2</sub>S contenu dans le gaz de procédé. Les électroaimants des paliers

sont donc protégés par une chemise métallique amagnétique (aciers inoxydables austénitiques ou "duplex" austéno-ferritiques) Malgré la faible perméabilité magnétique relative de ces aciers (de l'ordre de 2 à 5 au lieu de 1500 pour les aciers ferromagnétiques à 3% de silicium), la chemise change la perméabilité magnétique globale du circuit magnétique entre les électroaimants et les tôles magnétiques rotoriques, ce qui affecte à la fois la capacité de charge des paliers (il faut augmenter leur surface active) et leurs performances dynamiques de raideur et d'amortissement.

Par ailleurs, on ne sait pas quelle serait la disponibilité des paliers "atterrisseurs" auxiliaires après un séjour de longue durée dans une ambiance contenant de l' $H_2S$ .

En conclusion, ce type de machine ne pouvait être réalisable que si l'on ajoutait un troisième PMA sur le rotor ayant des performances dynamiques exclusivement d'amortissement. On montre deux dispositions susceptibles d'améliorer la situation, l'une à la figure 5.19 avec ce palier situé en porte-à-faux de l'autre côté de la butée, l'autre à la figure 5.20 avec ce palier situé au niveau de l'espace entre les deux sections.

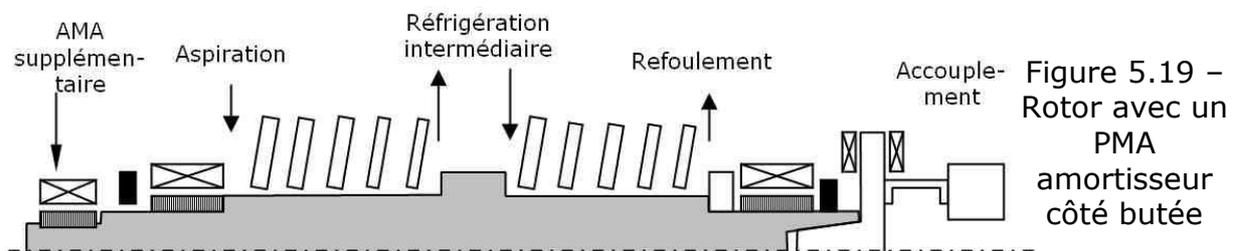


Figure 5.19 – Rotor avec un PMA amortisseur côté butée

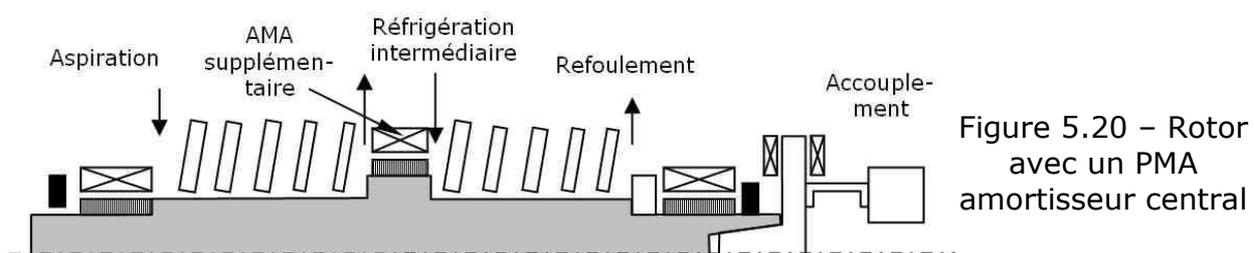


Figure 5.20 – Rotor avec un PMA amortisseur central

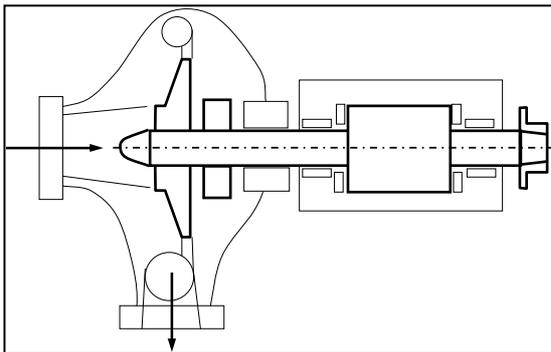
Une disposition originale de montage du collet de butée et de l'accouplement apparaît sur les figures 5.19 et 5.20. Elle diminue les porte-à faux, tout en laissant la butée magnétique à l'atmosphère. Cette disposition a fait l'objet du dépôt d'un brevet européen [**Boluss.95**].

L'état des connaissances de l'époque n'a pas permis de conclure favorablement sur la faisabilité de ce type de machine, pourtant séduisant, compte tenu des impositions du cahier des charges, pour des raisons de dynamique de rotor. Il est sûr que l'expérience vécue avec l'instabilité constatée sur la première machine construite (paragraphe 5.2), même si elle ne repose pas sur des données chiffrées, a pesé dans cette décision pour cette application qui visait un niveau de pression deux fois plus élevé. Malheureusement la confidentialité des résultats de l'étude vis-à-vis des partenaires de ce projet empêche de dévoiler les résultats numériques.

Avec les développements faits ultérieurement sur la stabilité des compresseurs centrifuges (paragraphe 4.2), on aurait pu reprendre l'étude en introduisant des étanchéités internes à nids d'abeilles au niveau du piston d'équilibrage, de l'étanchéité entre les deux sections et sur les ouïes de roues. Actuellement, on peut dire que seule la configuration de la figure 5.20 aurait des chances de conférer un amortissement

suffisant. Mais par contre, cette disposition pose des problèmes difficiles d'acheminement des câbles dans la machine, et il faut aussi signaler que les connecteurs antidéflagrants agréés n'existaient pas à cette époque (alimentation de l'AMA et de ses capteurs). L'installation éventuelle d'un palier auxiliaire central posait également problème, car il devrait avoir un plan de joint ! Enfin, la présence de cet amortisseur central affecte la fréquence propre du premier mode propre élastique à deux nœuds compte tenu de la masse du fourreau magnétique à installer, mais affecte peu la fréquence propre du deuxième mode propre élastique à trois nœuds, puisque l'AMA supplémentaire se situe près du nœud central.

### 5.5.3 Compresseur centrifuge en porte-à-faux



Dans le cas des compresseurs centrifuges de gazoducs (grand débit volumique, faible rapport de compression), la configuration d'une machine à entrée axiale comme la figure 5.21 est particulièrement intéressante, car elle minimise les pertes entre l'aspiration et l'entrée dans la roue.

Figure 5.21 – Compresseur de gazoduc à PMA à entrée axiale

Dans le cas de la marche normale de cette machine, l'effet de fond correspondant à la pression d'aspiration sur la surface de l'étanchéité de bout d'arbre est compensé par le piston d'équilibrage (figure 1.8 paragraphe 1.1.2). A l'arrêt, il n'y a aucune compensation et l'effet de fond est encore plus grand, car ce n'est plus la pression d'aspiration, mais la pression d'équilibre de boucle qui s'applique. L'entrefer à l'arrêt est environ double de celui en service et la force d'attraction magnétique étant inversement proportionnelle au carré de cet entrefer, d'après l'équation (5.5), on se trouve dans le cas évoqué au paragraphe 5.2.1.3 où la butée magnétique n'est pas capable de vaincre cet effort, sauf à lui donner un diamètre rédhibitoire pour la conception de la pivoterie.

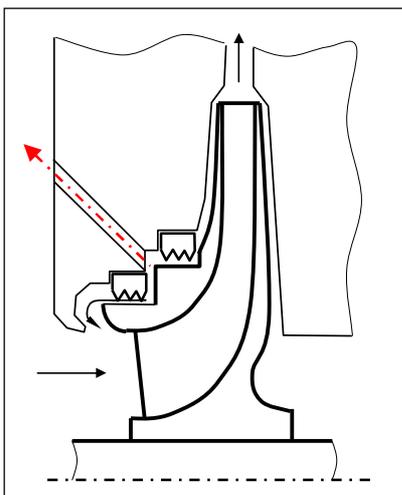


Figure 5.22 – Compensation de la poussée au démarrage par dépressurisation partielle de la roue

Cet écueil a été levé en proposant la disposition de la figure 5.22, qui a fait l'objet du dépôt en 2004 d'un brevet **[Pugnet04.2]**. On limite la poussée par l'intermédiaire d'un contrôle de pression sur une couronne de la face avant de la roue afin de permettre à la butée magnétique de décoller le rotor et de permettre le démarrage du compresseur.

## 5.6 Autres développements réalisés autour des PMA

### 5.6.1 Tracés automatiques de diagrammes de Campbell

Pour éviter l'écueil du calcul très long du diagramme de Campbell évoqué au paragraphe 5.2.4, il a été établie une version spécifique du solveur de ROTORINSA® réalisant automatiquement cette opération. Cette version s'avère aussi utile dans le cas de la modélisation des étanchéités à nid d'abeilles, dont les caractéristiques dépendent aussi de la fréquence de la perturbation.

Par la même occasion, la possibilité offerte d'introduire des liaisons entre différents éléments, comme matrices spéciales a permis de résoudre le problème de la non coïncidence de position des capteurs et des paliers des PMA évoquée au paragraphe 5.2.3 Il était également possible d'introduire les couplages entre les différents axes de la suspension magnétique définis par le constructeur de paliers.

### 5.6.2 Simulations de l'atterrissage dans les paliers auxiliaires

Les PMA disposent de paliers auxiliaires dont le principal but est de recevoir le rotor lorsque la machine est arrêtée et que la sustentation est coupée. Leur jeu doit évidemment être inférieur à celui des étanchéités aérodynamiques. Un autre but, tout aussi essentiel, et auquel on pense immédiatement, est de protéger la machine en cas de panne sur un ou plusieurs axes de sustentation. Pratiquement, cette fonction est très rarement sollicitée, mais elle doit être étudiée car elle met en jeu l'intégrité de la machine.

Différents types de paliers auxiliaires, aussi bien radiaux qu'axiaux sont développés par les fournisseurs de PMA.

#### 5.6.2.1 Atterrissage d'un rotor à axe horizontal

Les travaux de Gelin en 1990 [**Gelin90-1**] et la publication la même année de Gelin, Der Hagopian et Pugnet [**Gelin90-2**] ont montré que l'effet de la gravité était le principal élément assurant la stabilité vibratoire du rotor en cas d'atterrissage, face au frottement dans les paliers auxiliaires. C'est en effet elle qui maintient le rotor dans le fond du palier en empêchant le phénomène d'engrènement des modes propres à précession négative en raison du frottement du rotor sur ces paliers.

On présente une simulation réalisée récemment sur un rotor à 8 étages de compresseur centrifuge en deux sections disposées en back-to-back dont le profil est sur la figure 5.23 dont le projet était établi sur PMA. Les paliers auxiliaires considérés sont des roulements à billes montés dans le stator avec du jeu entre le rotor et la cage intérieure.

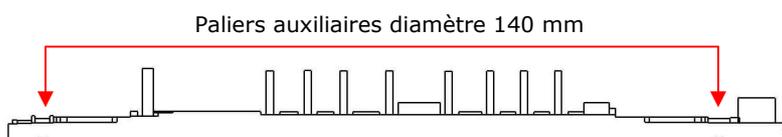


Figure 5.23 – Rotor de compresseur à paliers magnétiques

Le principe du calcul de l'atterrissage est le suivant : la condition initiale est donnée par le comportement du rotor balourdé tournant sur sa sustentation magnétique. On

coupe la sustentation. Chaque extrémité du rotor tombe dans le palier auxiliaire. Les paliers auxiliaires sont modélisés comme des raideurs et des amortissements visqueux dans la direction radiale (qui sont conférés technologiquement par un montage des cages extérieures dans le stator par des rondelles ressorts spiralées) et par un frottement de Coulomb dans la direction tangentielle. La réponse est obtenue par une méthode de réponse modale avec un schéma d'intégration de Newmark (Annexe B4). Le schéma est non linéaire puisqu'il faut vérifier à chaque instant si le contact a lieu ou non pour chaque palier auxiliaire (déplacement radial inférieur ou supérieur au jeu du palier auxiliaire).

L'atterrissage de ce rotor à axe horizontal conduit aux orbites de la figure 5.24 pour un coefficient de frottement de 0,15 et pour un régime de rotation constant.

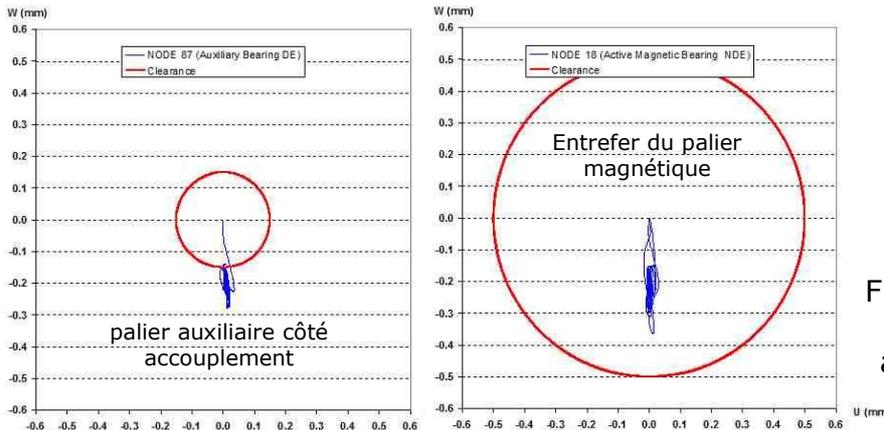


Figure 5.24 – Simulation d'atterrissage avec un axe horizontal (vitesse constante)

Puisque la sustentation a disparu, le système de surveillance va le détecter et déclencher la machine. La descente en vitesse se fait avec une constante de temps de 4 secondes. La figure 5.25 montre les niveaux vibratoires prévus au niveau des deux paliers auxiliaires ainsi qu'au centre du rotor (piston intermédiaire entre les deux sections). Il est en effet très important de s'assurer qu'aucun contact ne se produira tout au long du rotor.

On voit sur cette figure 5.25 le franchissement d'une fréquence propre de flexion. Gelin a montré **[Gelin90-1]**, en appliquant une transformée de Fourier sur ces signaux et en traçant les spectres cascades, que le franchissement de tous les modes propres se faisait avec une contribution toujours importante du mode propre le plus bas en fréquence (mode propre de suspension).

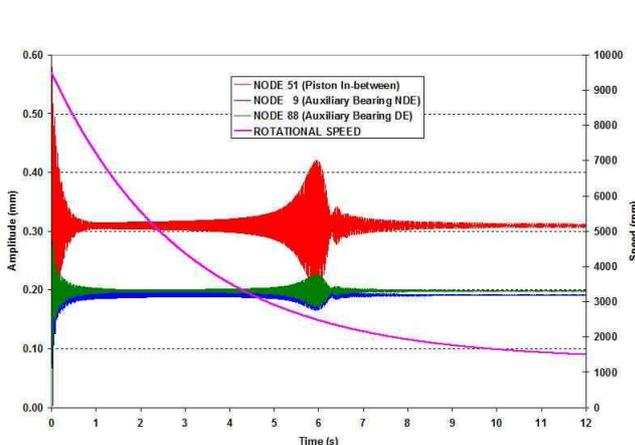


Figure 5.25 – Simulation d'atterrissage avec un axe horizontal (descente en vitesse)

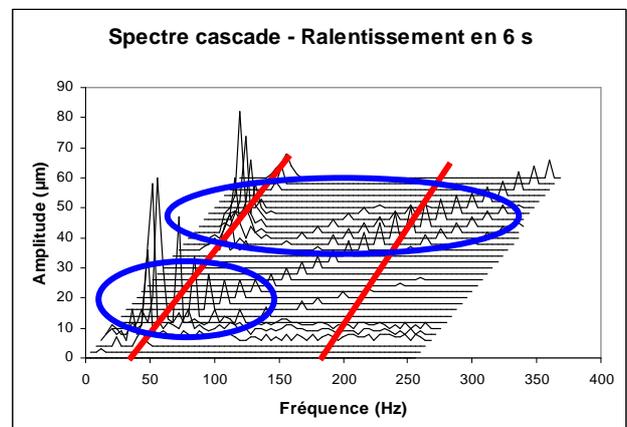


Figure 5.26 – Spectre cascade en descente en vitesse lors d'un atterrissage

Sur le spectre cascade de la figure 5.26, calculé cette fois pour le cas du compresseur du paragraphe 5.1 on a repéré les positions des fréquences propres de flexion, et les ellipses bleues montrent le contenu de la réponse du rotor pendant leurs traversées.

Pour compléter ces études, il faudrait tracer également les diagrammes des efforts exercés sur les paliers auxiliaires.

### 5.6.2.2 Atterrissage d'un rotor à axe vertical

Gelin a aussi montré [**Gelin90-1**] que l'atterrissage pour un rotor privé de l'action de la gravité se faisait avec un louvoiement autour du jeu du palier auxiliaire. Dans le cas d'un axe de rotation vertical, la faculté apportée par la gravité disparaît !

Or les paliers magnétiques actifs constituent une technique de choix dans le développement de motocompresseurs centrifuges sous-marins pour la récupération des hydrocarbures, comme celle de la figure 5.27. Des régions inaccessibles, par exemple en raison de la prise des glaces, pourront alors être exploitées. Pour des raisons de maintenance et de construction des modules sous-marins, des groupes à axe vertical sont souhaités par les exploitants. Au fond de la mer, il est aussi impossible d'installer des groupes d'huile, et la solution des PMA s'impose.

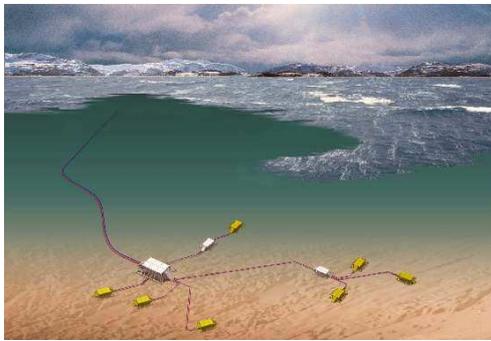


Figure 5.27 – Projet d'une installation de récupération pétrolière sous-marine en Norvège

La figure 5.28 montre la simulation réalisée pour le rotor de compresseur centrifuge à 8 étages en deux sections de la figure 5.23 mis en position verticale. Le diagramme de gauche montre la trajectoire dans le palier auxiliaire côté butée. On remplit tout l'espace, avec des rebonds incessants. Le diagramme de droite montre la réponse temporelle au niveau du piston d'équilibrage.

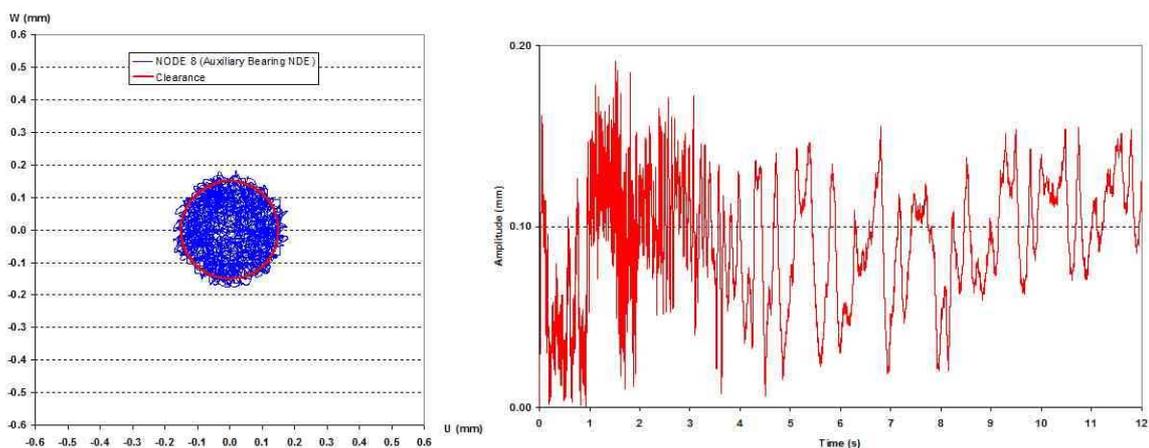


Figure 5.28 – Simulation d'atterrissage avec un axe vertical

On citera aussi le cas d'un rotor de broyeur centrifuge à grande vitesse de rotation et axe vertical monté sur PMA. Compte tenu du diamètre important au niveau de la roue du broyeur, le palier auxiliaire a été réalisé avec 3 petits roulements disposés à 120° autour du rotor au lieu d'un seul grand roulement, comme montré sur la figure 5.29.

Lors de l'essai d'atterrissage, le rotor prend appui sur sa génératrice au contact d'un roulement qui se transforme en pivot, et vient heurter violemment le roulement suivant où le même phénomène se reproduit, comme montré schématiquement sur la partie droite de la figure 5.28. Finalement, les petits roulements atterrisseurs ont été trouvés complètement détruits, les billes ayant partiellement fondu et ayant soudé les cages entre elles.

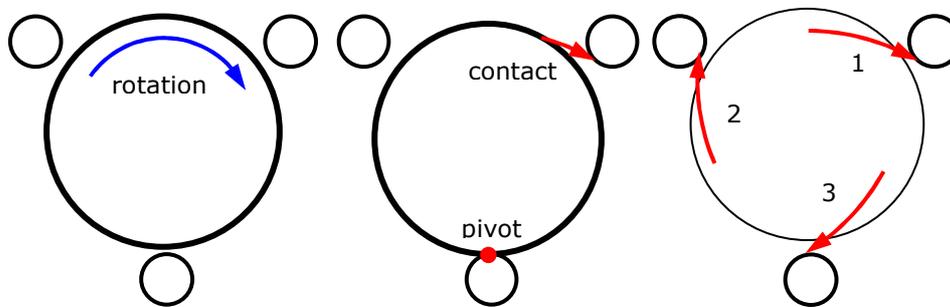
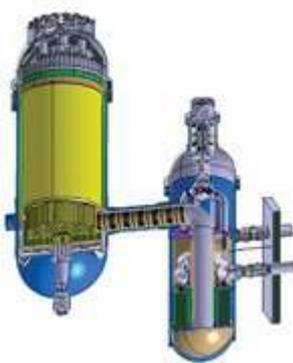


Figure 5.29 – Atterrissage vertical avec un palier auxiliaire 3 points



Cette expérience nous a poussé à refuser l'utilisation de cette technique sur le projet de turbomachine de 300 MW électriques d'un réacteur nucléaire à gaz (hélium) à haute température (HTR) élaboré par un consortium international et dont on peut voir une illustration figure 5.30 (turbomachine à droite du réacteur).

Figure 5.30 – Projet ENTARES – Réacteur nucléaire HTR

Pour ces applications de machines tournantes à axe vertical, Pugnet a déposé en 2004 un brevet international d'invention **[Pugnet04.1]** dont le but est de recréer artificiellement une attraction radiale en cas de détection de la perte d'un axe de suspension magnétique. Le système de commande possède un indice SIL très élevé (Safety Integrity Level suivant la norme CEI 61508 **[CEI61508]**).

### 5.6.2.3 Atterrissage dans la direction axiale

Par ailleurs, les essais d'atterrissage axial réalisés sur le premier compresseur à PMA (paragraphe 5.1) ont montré que le comportement du rotor était beaucoup plus sollicité que lors des atterrissages purement radiaux. L'essai avait été fait en stoppant le régulateur de position et en envoyant le courant maximal dans l'électroaimant pour simuler la poussée du gaz.

Il est suggéré de développer cette option d'atterrissage en cas d'avarie électrique sur la butée en complétant le logiciel de simulation de comportement établi par Gelin. L'idée consiste à considérer le contact entre le collet de butée et le palier axial auxiliaire sur un seul point de la circonférence du palier auxiliaire axial. En effet, les précisions d'usinage et de montage ainsi que les dilatations différentielles en fonctionnement (il s'agit de machines thermiques) font qu'il est illusoire de penser que le contact va se réaliser sur toute la périphérie du palier auxiliaire de butée. Le point de contact peut éventuellement tourner avec le rotor suivant que l'on considère que le défaut d'équerrage est plus sur le rotor que sur le stator. Les forces de frottement sollicitent alors naturellement les modes propres de flexion.

Pour ce développement, on pourra aussi s'inspirer des travaux de Berger, Bonneau et Frêne en 2004 sur l'influence de la butée sur le comportement en flexion d'un arbre flexible **[Berger]**.

Lorsque les paliers atterrisseurs sont du type à roulements, on peut également modéliser la dynamique de la cage intérieure de ce roulement qui va se mettre progressivement en mouvement sous l'action du frottement.

### 5.6.3 Considérations sur le couplage des axes dans le contrôle des PMA – Schéma bloc d'asservissement

Rappelons d'abord qu'une suspension par paliers magnétiques actifs a d'abord pour but de sustenter un rotor dans l'espace. C'est un asservissement de position à 5 axes (directions horizontale et verticale sur 2 paliers et direction axiale sur la butée). Dans ce paragraphe, on va s'intéresser au contrôle des modes propres radiaux de corps solide du rotor par les 4 axes des paliers radiaux. On va avoir deux couplages principaux :

- couplage entre le mode propre de translation et le mode propre de basculement lorsqu'on applique un effort sur un axe de palier qui n'est évidemment pas localisé au centre de gravité,
- couplage entre les directions horizontale et verticale en rotation généré par les effets gyroscopiques et par les raideurs croisées aérodynamiques.

Le premier couplage est traité en appliquant le principe de régulation multivariable dans chaque plan. Entre la sortie des régulateurs et la commande des actionneurs, on introduit une matrice de coefficients linéaires inverse de celle de couplage entre les axes et la réponse des deux modes propres de corps solide. Dans ces conditions, les consignes de position deviennent des consignes modales. De la même façon, les caractéristiques inertielles du rotor deviennent la masse et l'inertie transverse.

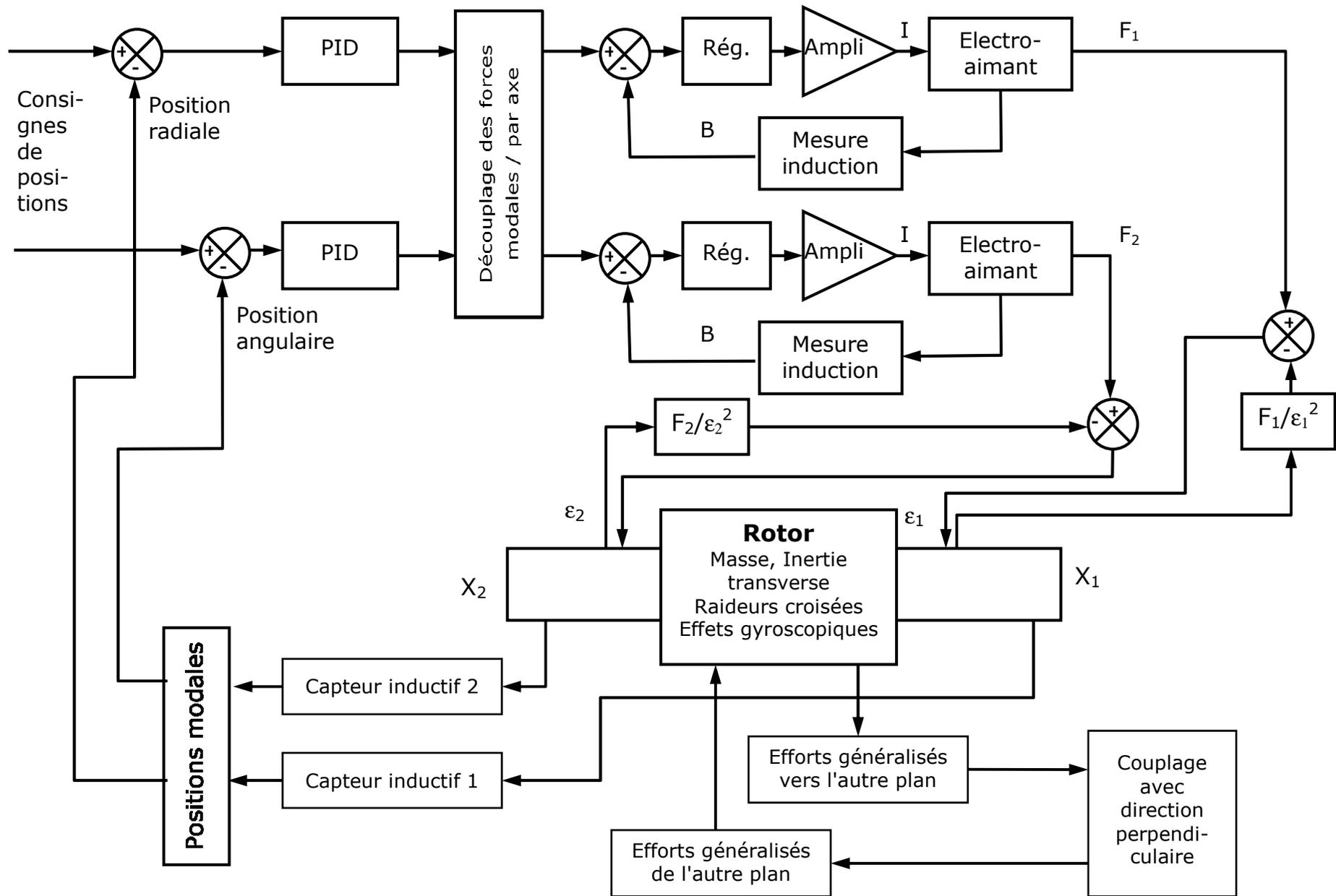
Le deuxième couplage n'est pas traité, car la notion de phase variable générée par la propagation des modes propres à précession directe et inverse à trajectoire circulaire (les paliers sont généralement isotropes) à la vitesse de rotation ne peut pas être traitée aisément par les asservissements linéaires.

La figure 5.31 montre un schéma bloc de cet asservissement radial qui prend en compte :

- les 4 axes de commandes
- les boucles de contrôle de flux des actionneurs
- la raideur négative des électroaimants
- le découplage des deux modes propres de corps solide
- la non coïncidence de position des capteurs de position.

Le traitement de ce problème d'asservissement s'attache évidemment à la vérification de la stabilité de chaque boucle par l'analyse de sa fonction de transfert en boucle ouverte. On cherche bien sûr à placer les fréquences propres de suspension aussi haut que possible vis-à-vis des fréquences des propres élastiques en libre libre du rotor.

Figure 5.31 – Schéma bloc multimodal de l'asservissement de position par PMA



Ensuite, la fonction de transfert en boucle fermée est une conséquence de celle en boucle ouverte et donne les caractéristiques de raideur et d'amortissement (figures 5.3 et 5.4). Le comportement des modes propres élastiques est donc totalement dissocié de l'étude de l'asservissement. Il doit néanmoins être pris en compte dans le processus, pour placer correctement les fréquences propres de suspension, de manière à ce que l'action dérivée génère un amortissement suffisant des modes propres élastiques.

## 5.7 Développement de groupes motocompresseurs intégrés

Il est séduisant de pouvoir mettre en ligne un moteur électrique et un compresseur centrifuge sans multiplicateur, donc sans aucun système d'huile. L'avènement des moteurs électriques puissants à grande vitesse (moteurs asynchrones de 8000 à 20000 tr/min) a été un autre élément nouveau qui autorise de nouvelles architectures de machines utilisant des PMA :

- Les moteurs synchrones sont apparus dès les années 1970, mais sont limités à des vitesses de rotation de l'ordre de 6300 tr/min par le système de redresseur à diodes tournantes de l'excitation.
- Des moteurs de type homopolaire ont été développés à la fin des années 1980 pour des vitesses de rotation supérieure, mais ils avaient trop de pertes thermiques.
- Les moteurs à aimants permanents sont destinés à des vitesses de rotation plus élevées que celles des compresseurs centrifuges de procédés.
- Il en est de même pour les moteurs à griffes.
- Les moteurs électriques asynchrones à induction couvrent maintenant des plages de vitesse et de puissance bien adaptées à celles des compresseurs centrifuges (données Convertteam™) :



- jusqu'à 20000 tr/min ou 30 MW en moteurs séparés (figure 5.32),
- jusqu'à 19000 tr/min ou 17 MW en moteurs intégrés pressurisés au gaz de procédé.

Figure 5.32 – Moteur électrique à grande vitesse (entraînement d'un compresseur centrifuge de transport de gaz)

Avec ces nouveaux entraîneurs, les compressoristes conçoivent des machines intégrées où moteur et compresseur sont dans une enceinte commune et dans le gaz de procédé. Le moteur est réfrigéré par une circulation de gaz générée par le compresseur. Moyennant plus de pertes par ventilation du moteur électrique (à la pression d'aspiration du compresseur), cette solution élimine totalement les garnitures d'étanchéité de bout d'arbre et les effluents à l'atmosphère. La figure 5.33 montre la solution classique d'un motocompresseur avec multiplicateur et système d'huile sur socle et la figure 5.34 celle d'une machine intégrée. Les compresseurs en rouge sur la figure 5.33 et en gris sur la 5.34 ont sensiblement la même échelle.

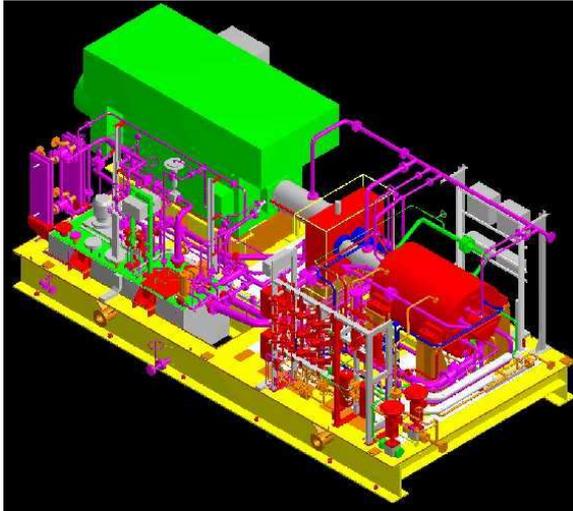


Figure 5.33 – Moto-compresseur centrifuge sur skid

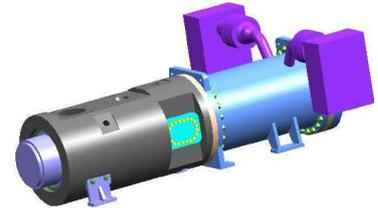


Figure 5.34 – Moto-compresseur intégré

Le développement de la gamme de motocompresseurs centrifuges est couvert par plusieurs brevets d'invention relatifs à l'architecture de la machine (par Laboube, Pugnet et Friez en 2004 **[Laboub1]**) et aux moyens de réfrigération du moteur électrique et des PMA (par Laboube, Friez et Pugnet, toujours en 2004 **[Laboub2]**).

La figure 5.35 montre l'arrangement avec 4 paliers magnétiques et un accouplement flexible installé dans le gaz naturel. Cet arrangement n'a rien de particulièrement original par rapport à des machines classiques séparées, mais il démarque de brevets de concurrents où l'on construit un rotor commun sur 3 PMA, plus économique et plus compact, mais posant plus de problèmes de dynamique de rotor et surtout de production. Avec cet arrangement à 4 PMA, on garde l'avantage d'un rotor subcritique pour le moteur, le compresseur étant toujours supercritique.

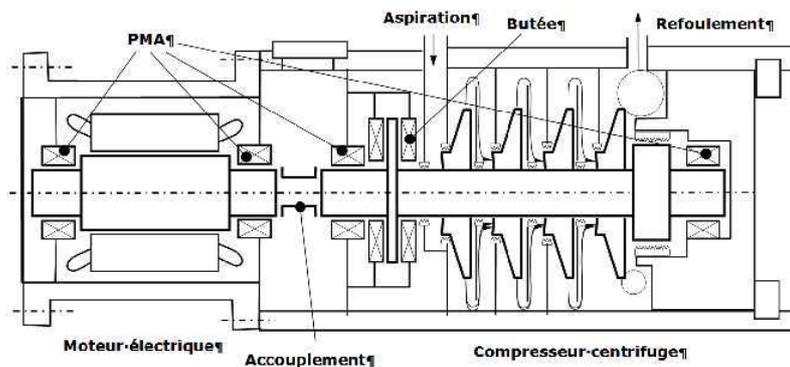


Figure 5.35 – Architecture du motocompresseur centrifuge intégré

Un autre aspect fondamental de ces architectures est la réfrigération du moteur électrique et des paliers magnétiques, qui, installés dans le gaz du procédé à la pression d'aspiration du compresseur, génèrent des pertes par ventilation importantes. Cette réfrigération est réalisée par une circulation de gaz prélevée à la sortie du diffuseur du premier étage de compression. Ainsi, on minimise la température du flux thermique qui revient à l'aspiration, ce qui préserve le rendement aérodynamique du compresseur (rendement sensiblement inversement proportionnel à la température absolue d'aspiration). La figure 5.36 montre le principe et les circuits externes, et la figure 5.37 les circuits internes de cette réfrigération.

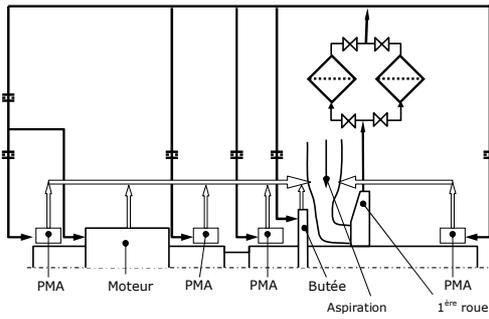


Figure 5.36 – Réfrigération, principe et circuits externes

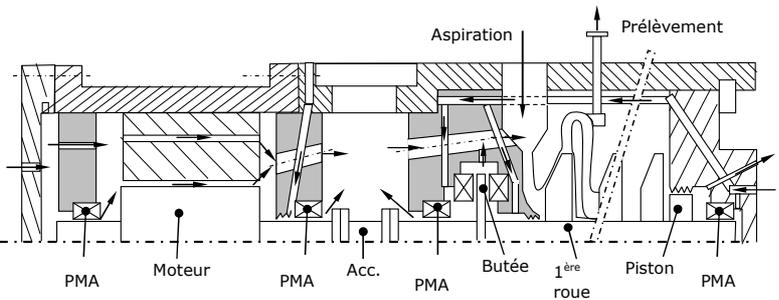


Figure 5.37 – Réfrigération, circulations internes

L'entreprise a produit une unité pilote qui a été essayée en usine à pleine charge et en gaz naturel. Les caractéristiques principales de cette machine sont :

- compresseur destiné à une application de stockage de gaz naturel à haute pression (figure 5.38),
- 6 étages de compressions répartis en 2 sections en lignes,
- aspiration 50 bar et refoulement 220 bar,
- 6 000 kW à 12 000 tr/min,
- rotor de masse 370 kg,
- paliers magnétiques D 120 mm – L 90 mm avec amplificateurs 30 A / 300 V maximum.



Figure 5.38 – Unité pilote de motocompresseur centrifuge intégré

La procédure d'essais à pleine charge du groupe pilote est présentée dans la publication de Alban, Pellerin, Laboube et al. de 2009 **[Alban]**. Cette publication étudie également les circuits de réfrigération en mesurant toutes les pressions, températures et débits de la figure 5.39. Même si les résultats ne sont pas détaillés ici, ce point est très important, car il conduit à la vérification :

- de la quantification des pertes par ventilation,
- des pertes de charges des différents circuits,
- de l'impact sur le rendement aérodynamique du groupe,
- de l'échauffement du moteur vis-à-vis de sa classe d'échauffement de ses isolants.

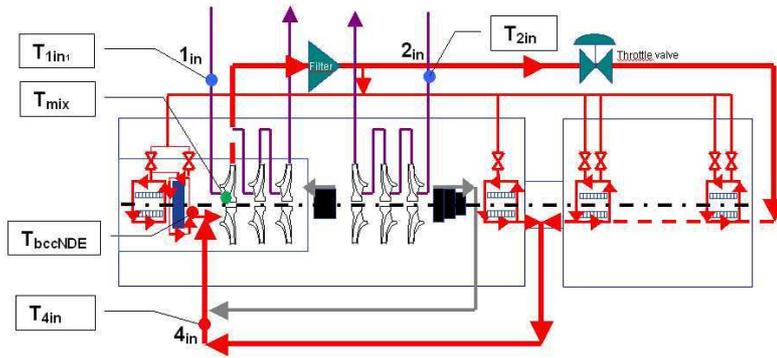


Figure 5.39 – Mesures des performances aérodynamiques et thermiques

En ce qui concerne l'application des PMA au compresseur, la figure 5.40 montre le réglage prévu du gain et de la phase des paliers, a dû être adapté une première fois lors des essais mécaniques du compresseur seul, puis une seconde fois lors des essais en gaz naturel conduits jusqu'à la puissance de 5500 kW.

Entre la conception et l'essai du compresseur seul, il n'y a pas grande différence. Par contre le passage au groupe complet a nécessité de changer drastiquement le réglage des régulateurs en diminuant les gains (diminution de l'action proportionnelle). La courbe de phase changeant peu, cela signifie que ce sont les coefficients de raideur et d'amortissement qui se trouvent diminués, avec un changement des vitesses critiques et des fréquences propres, une augmentation des amplifications à la résonance et une diminution des marges de stabilité. L'impact sur le comportement dynamique global est donc significatif.

La question de la détermination des caractéristiques de PMA n'est pas triviale. Il apparaît de plus nécessaire de continuer de parfaire les méthodes de prédiction pour modéliser toujours plus finement le compresseur, puisque c'est son comportement qui décide des réglages à installer lors des essais.

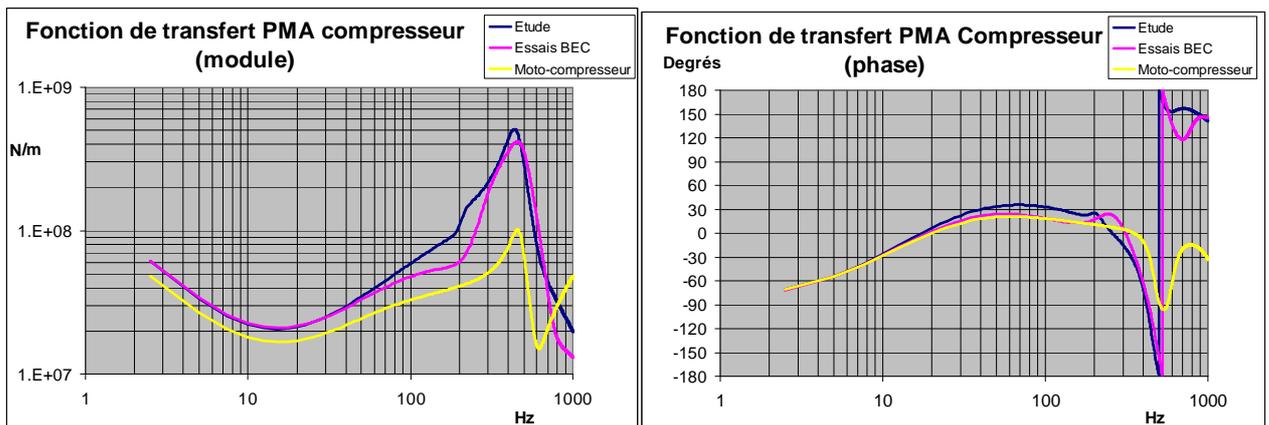


Figure 5.40 – Différents réglages des asservissements des PMA du compresseur

## 5.8 Développement récents en contrôle des PMA

Pour pallier cette difficulté de prédiction des caractéristiques des paliers magnétiques vis-à-vis de la dynamique de rotor, on peut se demander s'il ne serait pas intéressant de générer le contrôleur avec d'autres techniques.

L'objectif est le suivant : générer un contrôleur PID que l'on sait parfaitement mettre en œuvre avec les moyens technologiques existants, qui soit plus fiable vis-à-vis de la

mise en service de la machine. Il ne faut pas oublier que le fabricant de la turbomachine reste maître d'œuvre de sa conception, et se doit d'assurer la stabilité vibratoire dans les conditions spécifiées. En effet, si l'on doit atténuer un gain de boucle au cours de la mise en service, la valeur des termes d'amortissement en est diminuée d'autant, alors que les effets de raideurs croisées des écoulements aérodynamiques ne changent pas. Dans ce cas, c'est toute l'étude de stabilité qui est à revoir, et que fait-on si les exigences l'API 617 (chapitre 1.2.5.6) ne sont plus respectées, et surtout si la machine montre des vibrations subsynchrones ?

### 5.8.1 Technique neuro-floue

L'annexe C décrit les rudiments de la logique floue et des réseaux de neurones. Leur association peut constituer une piste intéressante pour générer des contrôleurs.

La structure des réseaux de neurones, avec une propagation unidirectionnelle de l'information de l'entrée vers la sortie, laisse penser à une programmation informatique facile à mettre en œuvre et rapide d'exécution.

Il est évident que les notions d'observabilité et de commandabilité doivent être respectées. De plus, comme il a été dit dans l'annexe C, cette technique étant essentiellement basée sur des analyses temporelles, il faudra rester très prudent sur la définition des stabilités des modes propres de suspension, ainsi que sur l'interprétation de la stabilité vibratoire sous l'effet des raideurs croisées développées par l'aérodynamique (chapitre 4).

### 5.8.2 Linéarisation des paliers magnétiques

L'une des applications des réseaux de neurones est l'identification de systèmes complexes. Son application à la partie électromagnétique des PMA est très intéressante. En effet, à partir d'une modélisation précise de la partie magnétique depuis l'entrée des courants dans les bobines jusqu'à la force magnétique générée par axe, on peut générer un réseau de neurones reproduisant la fonction inverse de l'actionneur électromagnétique. Ce chapitre est un tiré de la publication de Der Hagopian et Mahfoud faite en 2010 sur les investigations sur le contrôle actif utilisant des actionneurs électromagnétiques **[DerHagop2]**. La figure 5.41 montre la génération de ce système en utilisation des modules de Simulink® **[MATLAB]** et la figure 5.42 l'intégration dans le système de commande.

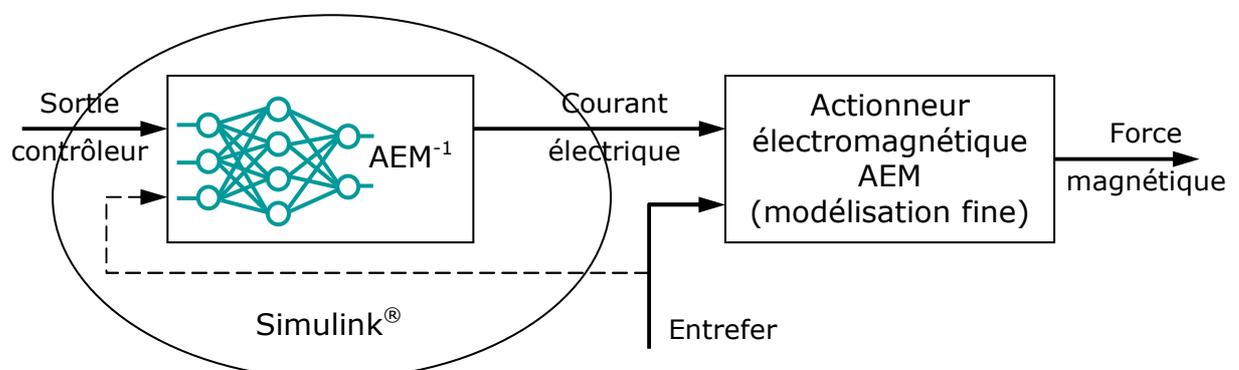


Figure 5.41 – Génération d'un modèle inverse d'actionneur électromagnétique par réseau de neurones

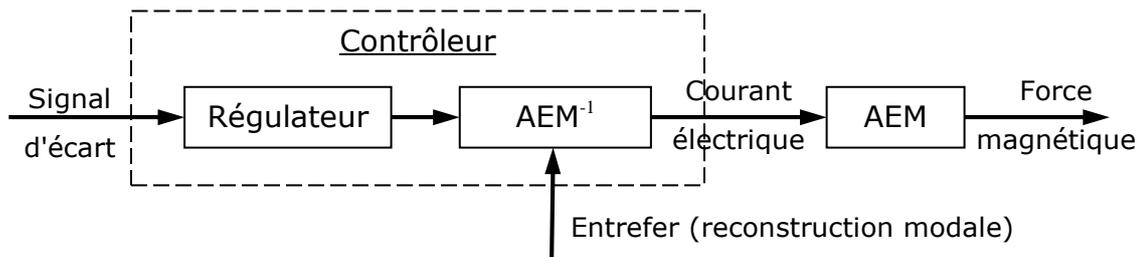


Figure 5.42 – Système de commande électromagnétique linéaire

Le contrôleur génère une force électromagnétique rigoureusement proportionnelle au signal de commande issu du régulateur. Ainsi, le problème d'instabilité lié à l'entrefer présenté au paragraphe 5.2.1.3 et exprimé par la raideur négative de l'équation (5.6), qui a été contourné par la S2M en introduisant une boucle de contrôle de flux, se trouve directement résolu.

Il n'est plus nécessaire d'introduire une instrumentation supplémentaire (mesure de flux), puisque la mesure de l'entrefer est faite naturellement par celle de la position des capteurs. L'utilisation d'une reconstruction modale résout aussi le problème de la non coïncidence de la position des paliers et des capteurs.

Enfin, la linéarisation est complète, et considère non seulement le fait que la force magnétique est proportionnelle au carré de l'induction magnétique, donc du courant (ce qui génère des fréquences doubles), et inversement proportionnelle à une fonction de l'entrefer comme indiqué dans l'équation (5.14), mais aussi la courbe d'aimantation du matériau des fourreaux magnétiques montés sur l'arbre avec sa boucle d'hystérésis comme montré sur la figure 5.43.

$$F = \frac{N^2 \mu_0 a f I^2}{2 \left[ (e \pm \delta_a) + \frac{b + c + d - 2a}{\mu_r} \right]} \quad (5.14)$$

où  $N I$  est le nombre d'ampères tours,  
 $e$  est l'entrefer et  $\delta_a$  sa variation,  
 $a, b, c, d$  et  $f$  sont des caractéristiques géométriques de l'électroaimant,  
 $\mu_r$  est la perméabilité magnétique relative du circuit (de l'ordre de 700),  
l'effet des courants de Foucault est négligé.

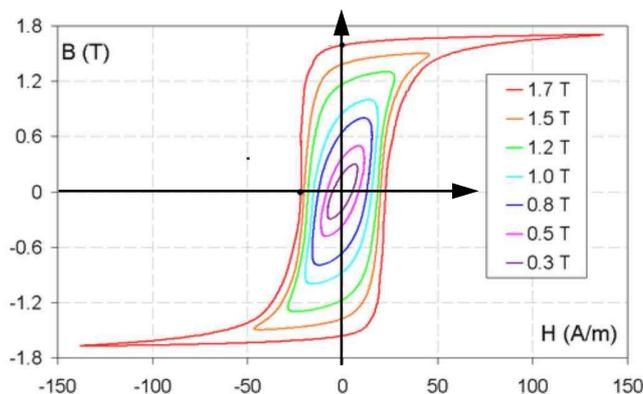


Figure 5.43 – Courbes d'hystérésis magnétique d'un matériau ferromagnétique (induction magnétique  $B$  en fonction de l'excitation magnétique  $H$ )

On remarquera que cette fonction peut être identifiée à partir d'une campagne expérimentale simple.

### 5.8.3 Principe du contrôle flu modal

Le système est mis sous la forme d'une équation différentielle matricielle (5.15) en application des équations de Lagrange sur les expressions des énergies cinétique et de déformation et du théorème des travaux virtuels :

$$[M][\ddot{\delta}] + [C][\dot{\delta}] + [K][\delta] = [F_{ext}] + [F_{cont}] \quad (5.15)$$

où  $[\delta]$  est le vecteur des grandeurs physiques,

$[F_{ext}]$  est le vecteur des forces extérieures de perturbation,

$[F_{cont}]$  est le vecteur des forces appliquées par le système de contrôle,

est mis sous la forme d'état :  $[X] = \begin{bmatrix} [\delta] \\ [\dot{\delta}] \end{bmatrix}$

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B][U] \quad (5.16)$$

$$\text{soit } \begin{bmatrix} [\dot{\delta}] \\ [\ddot{\delta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [1] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\delta] \\ [\dot{\delta}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [F_{ext}] + [F_{cont}] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

suivant une technique déjà utilisée au paragraphe 2.3.

A partir de la matrice  $[A]$ , on cherche les valeurs propres et vecteurs propres  $[\Phi]$  du système et l'on effectue une réduction modale par le changement de base :

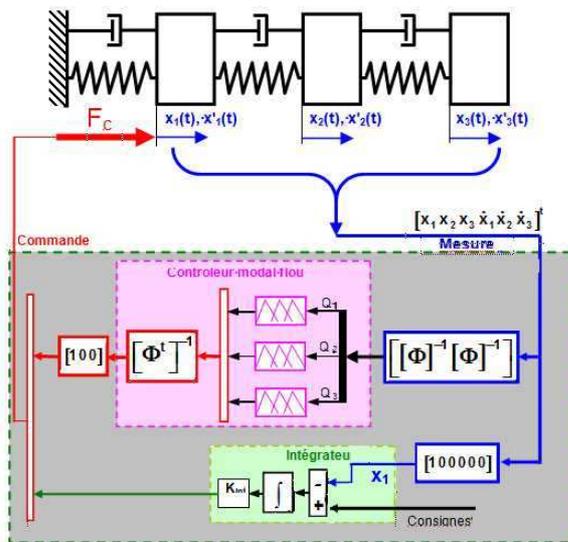
$$[\delta] = [\Phi][q] \quad (5.18)$$

où  $[q]$  est le vecteur des participations modales. Il vient :

$$[\Phi^t M \Phi][\dot{q}] + [\Phi^t C \Phi][\dot{q}] + [\Phi^t K \Phi][q] = [\Phi^t] [F_{ext} + F_{cont}] \quad (5.19)$$

ce qui permet de réécrire (5.17) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [\dot{q}] \\ [\ddot{q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [1] \\ -[\Phi^t M \Phi]^{-1} [\Phi^t K \Phi] & -[\Phi^t M \Phi]^{-1} [\Phi^t C \Phi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [q] \\ [\dot{q}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [\Phi^t M \Phi]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi^t] [F_{ext} + F_{cont}] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (5.20)$$



La figure 5.44 donne une illustration de l'application d'un contrôleur flu sur un système à 3 ddl dont on veut piloter la position de la première masse.

Le vecteur de mesure est obtenu par des capteurs placés sur chacun des degrés de liberté et les vitesses de déplacement sont générées par des dérivations avec des filtres de Kalman. Ce vecteur est ensuite transformé en vecteur de participations modales.

Figure 5.44 – Contrôleur flu pour un système à 3 ddl

Chaque mode propre est contrôlé de façon indépendante par un contrôleur flu, et le résultat est retransformé dans l'espace physique pour générer la force de commande. L'action intégrale est traitée ici de façon séparée.

Dans le cas de rotors de turbomachine sur paliers magnétiques actifs, on peut se demander s'il est nécessaire d'installer l'action intégrale si la raideur de suspension définie par l'action proportionnelle est suffisante et si aucune force radiale spécifique n'est attendue. Cette remarque ne concerne que les paliers radiaux, mais pas la butée soumise à une poussée éminemment variable suivant le régime de fonctionnement.

Der Hagopian et Mahfoud ont présenté en 2009 **[DerHagop1]** le principe d'un contrôle modal flou d'une structure représentée figure 5.45 par l'intermédiaire d'un électroaimant placé en extrémité. Un modèle inverse de l'actionneur électromagnétique a été établi à partir de mesures d'efforts afin de linéariser l'appareil dans la plage de fréquence utilisée. Le contrôleur flou est du type Takagi-Sugeno. La mesure des quatre positions aux capteurs C1 à C4 permet d'identifier les participations modales des quatre premiers modes propres de la structure et de calculer la valeur de l'entrefer utilisée dans le modèle inverse de linéarisation de l'actionneur électromagnétique. Les vitesses modales sont également calculées à partir des dérivées des positions délivrées par les capteurs. Les performances du contrôleur sont testées expérimentalement par l'application d'impacts comme perturbations. Les résultats montrent l'efficacité et la robustesse du contrôleur mis en place.

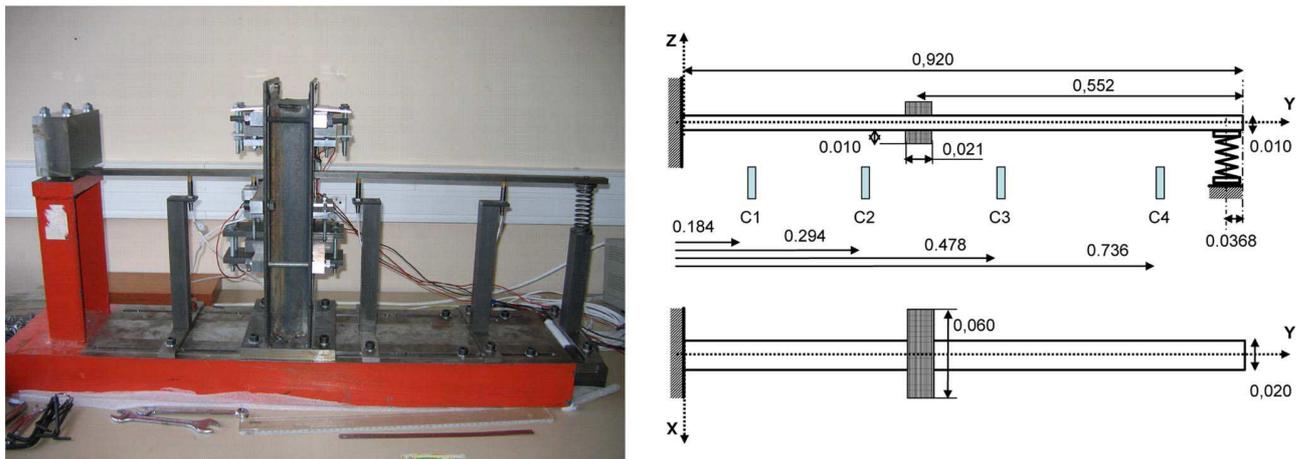


Figure 5.45 – Dispositif multidegré de liberté pour la validation d'un contrôleur flou

## 5.8.4 Applications aux turbomachines

Dans ce paragraphe, on va citer quelques références bibliographiques montrant l'utilisation de ces techniques de la logique floue et des réseaux de neurones dans le domaine des machines tournantes.

### 5.8.4.1 Equilibrage dynamique

La littérature montre plusieurs articles consacrés à l'utilisation de ces techniques dans l'équilibrage dynamique des rotors, comme l'étude de Villafañe Saldarriaga et al. en 2007 consacrée à l'équilibrage dynamique d'un rotor hautement flexible en utilisant la technique des réseaux de neurones **[Villafañe]**.

#### 5.8.4.2 Modélisation et surveillance

Mahfoud, Der Hagopian et al. proposent en 2007 une méthode dans le domaine du contrôle et de la surveillance des machines tournantes **[Mahfoud]**. Cette méthode est basée sur l'idée de représenter la machine tournante par un modèle simple équivalent dont la constitution sera obtenue expérimentalement. L'identification utilise un nombre limité de forces d'excitation et de capteurs de déplacement situés le long de l'axe du rotor. On utilise une procédure d'optimisation basée sur une technique de moindres carrés. La taille du modèle (nombre de degrés de liberté et de modes) correspond au nombre de capteurs. Une fois que les matrices d'état sont identifiées, on peut déterminer en temps réel les forces d'excitation extérieure dans la plage de fréquence considérée. La méthode proposée a été évaluée numériquement et expérimentalement. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode. Puisque la détermination des forces externes est très importante dans l'analyse du comportement des machines tournantes, le modèle inverse pourrait être facilement adapté dans le but de la surveillance et du diagnostic.

#### 5.8.4.3 PMA

Couzon et Der Hagopian ont présenté en 2007 les résultats d'une étude sur une suspension magnétique d'un rotor de pompe turbomoléculaire destinée à la production de silicium **[Couzon]**. La technique neuro-floue a été utilisée pour synthétiser un contrôleur modal du rotor supporté par des paliers magnétiques actifs. Pour l'instant, on se borne à contrôler les modes propres de la machine à l'arrêt.

### 5.9 Conclusion

Le développement des compresseurs centrifuges de procédés sur paliers magnétiques actifs est une aventure qui a commencé au début des années 80. De très nombreux auteurs se sont intéressés au sujet et la littérature est très abondante, mais il y a peu de constructeurs de compresseurs et de constructeurs de paliers magnétiques ayant une réelle expérience et une connaissance complète de l'ensemble des phénomènes.

Pour que cette technique soit mature, de nombreux développements ont été nécessaires, comme par exemple :

- la disponibilité de moteurs électriques à grande vitesse ;
- l'avènement des contrôleurs numériques ;
- l'augmentation des capacités de raideur et d'amortissement ;
- l'installation des PMA dans le gaz de procédé (mais il reste encore à considérer le cas des gaz acides) ;
- l'intégration des machines ;
- l'étude des situations dégradées ;
- l'évolution des normes ;
- et bien sûr avoir un retour d'expérience sur les installations pilotes.

La montée en niveau de pression des applications et les risques associés pour la stabilité vibratoire des compresseurs (chapitre 4 et paragraphe 5.3) nécessite une prévision suffisamment fine des caractéristiques dynamiques de ces paliers pour disposer d'une capacité suffisante d'amortissement. Depuis l'origine **[Gelin90-1]**, la synthèse de régulateurs modaux constitue une voie prometteuse.

Les nouvelles techniques de logique floue et de réseaux de neurones apportent déjà une solution de linéarisation des actionneurs et semblent constituer une piste fort intéressante pour synthétiser des contrôleurs répondant à des critères de fonctionnement bien définis basés sur une modélisation fine des phénomènes ou des campagnes expérimentales simples.

On ne peut qu'encourager les travaux des thèses en cours au LaMCoS sur l'application de ces techniques aux rotors de machines tournantes, qu'il s'agisse de moteurs électriques ou de compresseurs centrifuges.

## 6. Modélisations des rotors en torsion et couplage flexion torsion

Les définitions API des marges de séparation entre les vitesses critiques de torsion et les régimes de fonctionnement sont assez étroites. Il convient donc d'avoir de bonnes modélisations, d'autant plus que, contrairement à la dynamique de flexion, la vérification expérimentale n'est pas triviale. Les deux premiers paragraphes s'attachent à des aspects particuliers de la constitution des rotors de turbomachine.

L'essentiel des analyses torsionnelles est consacré aux réponses à différentes excitations. On s'intéressera donc ensuite à deux cas : une excitation instationnaire due à un accident électrique sur un alternateur, les excitations stationnaires générées par les entraîneurs à vitesse variable.

On terminera par la nécessité dans certains cas d'effectuer une étude couplée flexion torsion.

### 6.1 Modélisation des bouts d'arbres

Les règles habituelles de définition des raideurs des bouts d'arbre au niveau des accouplements consistent à ne considérer qu'une proportion de la longueur d'arbre sous le moyeu – typiquement 30% ou 50% en fonction du type d'accouplement : cylindrique, conique, présence de clavettes, etc. On trouve ces règles dans le livre **[KerWilson]** et aussi dans les publications faites au Symposium des turbomachines à Houston **[Corbo]** ou **[Wachel92]**. Le standard API **[API684]** se réfère d'ailleurs à ces deux derniers documents.

Lors d'essais réalisés sur des compresseurs alternatifs, Pugnet, Camus, Grazziani et al. **[Pugnet06]** ont démontré qu'il n'en était rien pour des accouplements possédant un serrage important. Cette étude a été réalisée sur un motocompresseur alternatif de 675 kW tournant à 1000 tr/min et comprimant du gaz naturel entre 24 et 66 bar.

La figure 6.1 montre la ligne d'arbres où le moteur électrique asynchrone entraîne directement le compresseur par un accouplement à lames flexibles freiné d'un côté sur le bout d'arbre du moteur électrique et flasqué de l'autre sur le volant d'inertie du compresseur. Le compresseur comporte deux cylindres horizontaux montés dans le même axe avec un embiellage représenté par la figure 6.2. L'arbre du compresseur est donc extrêmement court.



Figure 6.1 – Ligne d'arbres de compresseur alternatif



Figure 6.2 – Embiellage

Deux configurations de lignes d'arbres ont pu être essayées avec des arrangements différents de volant d'inertie et de moyeu d'accouplement.

Les fréquences critiques de torsion ont été mesurées à l'aide de jauges de déformation dont le signal est transmis par télémétrie (figure 6.3) au système d'acquisitions et d'analyse par transformée de Fourier. Le spectre cascade de la figure 6.4 correspond au cas de l'arrêt de la ligne d'arbres qui continue d'être excitée par le couple oscillatoire dû au mouvement des pistons. Il montre l'impact de chaque harmonique de la vitesse de rotation sur la réponse du premier mode propre de torsion.

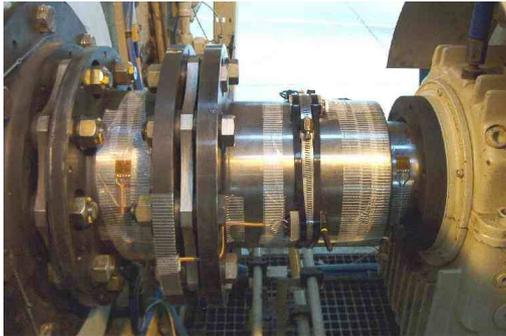


Figure 6.3 – Instrumentation embarquée

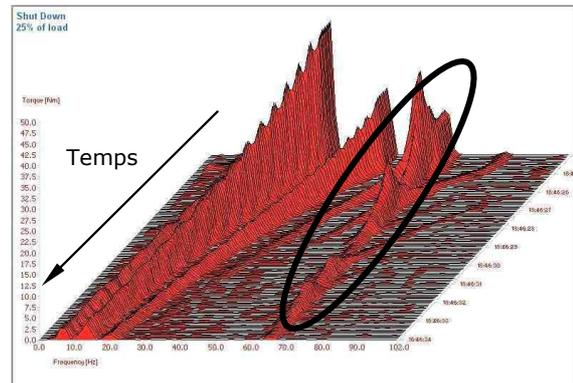


Figure 6.4 – Spectre cascade

Le tableau 6.5 compare la prévision faite avec les méthodes traditionnelles et la mesure. L'écart observé étant anormalement grand, on a remis en cause le type de modélisation du bout d'arbre compte tenu du fretage élevé utilisé (0,6 à 1‰) pour une aussi faible vitesse de rotation. Si l'on considère un moyeu d'accouplement monobloc avec le rotor du moteur, les résultats sont au contraire remarquables (dernières colonnes du tableau 6.5).

Tableau 6.5 – Fréquences critiques de torsion					
Configuration de la ligne d'arbres	Mesures sur site	Modélisation du bout d'arbre du moteur			
		Conventionnelle		Monobloc	
		Calcul	Ecart	Calcul	Ecart
1	64,45 Hz	56,62 Hz	-12,1%	65,73%	2,0%
2	84,96 Hz	72,02 Hz	-15,2%	83,87%	-1,3%

Comme autres enseignements, on dira aussi que :

- la modélisation du vilebrequin et des pistons, avec des méthodes s'apparentant à celles de H. Blanc dans son article des Techniques de l'Ingénieur [**Blanc**] est parfaitement correcte ;
- l'amortissement modal obtenu par la forme de la courbe de réponse lors du franchissement de la critique est de l'ordre de 0,07 à 0,09.

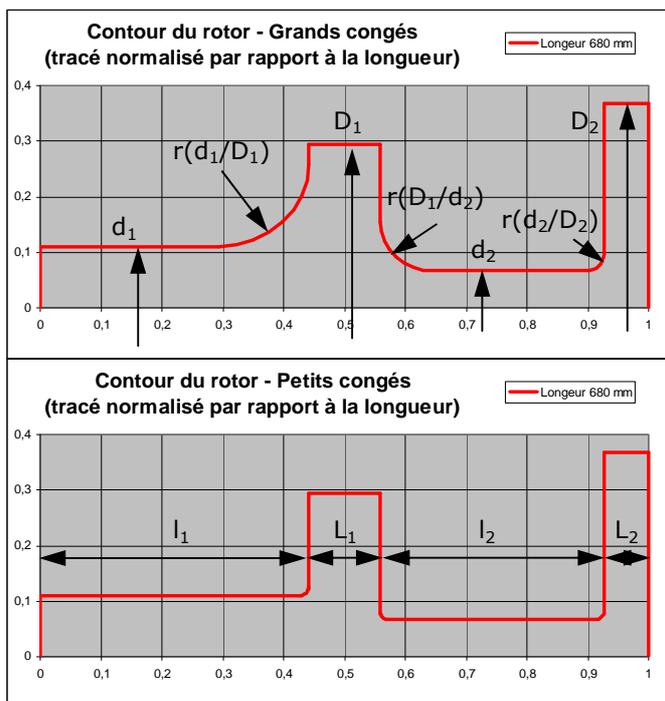
La conclusion principale est que la règle de conception à adopter pour des accouplements fortement frettés sur le bout d'arbre de la machine ou montés avec un serrage hydraulique, consiste à considérer l'accouplement comme étant monobloc avec l'arbre.

## 6.2 Modélisation des arbres épaulés

Les arbres de turbomachines ont de grands changements de diamètre, comme ceux des turbines à vapeur avec des disques monoblocs. On sait évidemment que la totalité du matériau du disque ne participe pas à la raideur de torsion, mais de nombreux types de modélisation de torsion se disputent la primeur sans qu'il y ait véritablement eu de comparaison globale.

Le but de ce chapitre est de proposer une discrétisation simple, facilement utilisable industriellement, notamment avec un seul tronçon pour la définition du congé, associée à la meilleure méthode numérique de résolution. On va donc considérer différents modèles aussi bien analytiques qu'aux éléments finis en comparant leurs résultats à une référence.

Le modèle simple choisi comporte deux tronçons d'arbre et deux disques, le rotor étant encasturé à gauche et libre à droite avec deux configurations différentes de congés de raccordement. Les contours des rotors sont donnés figure 6.6, et les dimensions dans le tableau 6.7.



Dimensions (mm)	Grands congés	Petits congés
$d_1$	150	150
$l_1$	300	300
$r(d_1/D_1)$	100	10
$D_1$	400	400
$L_1$	80	80
$r(D_1/d_2)$	60	10
$d_2$	90	90
$l_2$	250	250
$r(d_2/D_2)$	20	10
$D_2$	500	500
$L_2$	50	50

Figure 6.6  
Contour des rotors

Le matériau est un acier de masse volumique  $7\,850\text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $206\text{ GPa}$  et de coefficient de Poisson  $0,3$ .

### 6.2.1 Calculs de référence

Les calculs de référence ont été réalisés à l'aide du code ANSYS® Version 11.0 [ANSYS]. Les modèles volumiques représentés figure 6.8 comportent :

- 908 éléments, 1957 nœuds et 5871 degrés de liberté pour les grands congés ;
- 1554 éléments, 3066 nœuds et 9198 degrés de liberté pour les petits congés, ce modèle étant nécessairement plus fin, puisque la procédure de maillage automatique prend en compte de plus petits rayons.

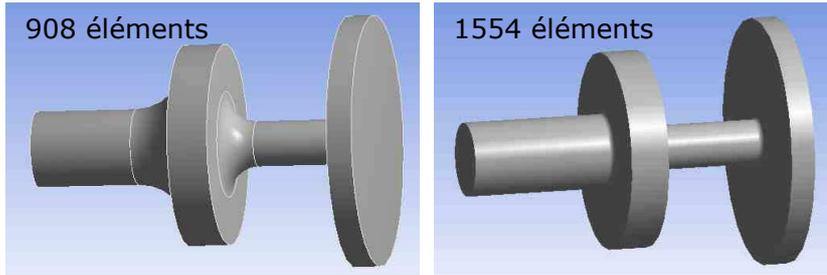
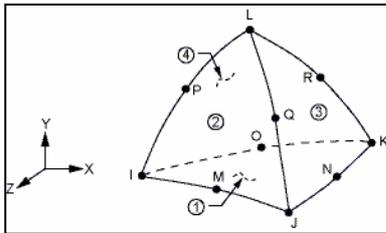


Figure 6.8 – Modèles tridimensionnels éléments finis



Les éléments sont des tétraèdres isoparamétriques à 10 nœuds à 3 ddl par nœud et de formulation quadratique (type SOLID187 d'ANSYS®), représentés à la figure 6.9.

Figure 6.9 – Élément SOLID187

Après avoir éliminé les modes propres de flexion, on obtient les résultats suivants :

- fréquences propres de 142,96 et 504,50 Hz pour les congés de grands rayons ;
- fréquences propres de 130,99 et 475,55 Hz pour les congés de petits rayons ;
- modes propres représentés sur la figure 6.10 dans la configuration à grands congés.

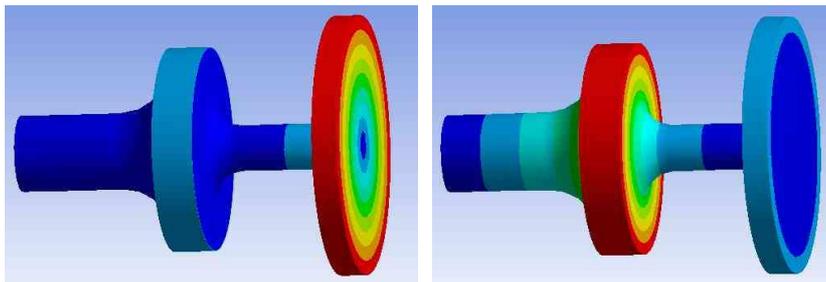


Figure 6.10 – Déformées modales

Avec des écarts de 9% sur la première fréquence propre et de 6% sur la seconde, il est indéniable que la valeur des rayons des congés de raccordement des disques est l'un des éléments participant à la définition des raideurs de torsion.

## 6.2.2 Modèles analytiques

Les bureaux d'études modélisent souvent les lignes d'arbres en torsion à l'aide de modèles analytiques avec des inerties concentrées. Ceci est justifié par le fait que les machines constituant la ligne d'arbres sont de nature différente (moteur électrique ou alternateur avec des bobinages rotoriques, compresseur centrifuge avec ses roues ou turbine à vapeur avec ses disques, multiplicateurs ou réducteurs à engrenages avec plusieurs vitesses de rotation, accouplements, chacun des constituants provenant de constructeurs différents). Le standard API sur la dynamique de rotor **[API684]** reprend ce type de modélisation.

On découpe alors le rotor en tronçons et l'on calcule la raideur élémentaire et l'inertie élémentaire de chaque tronçon. Les inerties sont réparties par moitié sur les extrémités des tronçons. Elles sont reliées par les raideurs des tronçons d'arbre. Les équations différentielles des oscillations libres non amorties, pour un système en ligne

avec la 1<sup>ère</sup> section de l'arbre encastrée, sont écrites directement sous la forme matricielle de l'équation 6.1 :

$$\begin{bmatrix} \frac{I_{12} + I_{23}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{23} + I_{34}}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{I_{n-2,n-1} + I_{n-1,n}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{I_n}{2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt^2} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$+ \begin{bmatrix} K_{12} + K_{23} & -K_{23} & \dots & 0 & 0 \\ -K_{23} & K_{23} + K_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{n-2,n-1} + K_{n-1,n} & -K_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & -K_{n-1,n} & K_{n-1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{bmatrix} = [0]$$

où  $I_{ij}$  est l'inertie du tronçon reliant les nœuds successifs  $i$  et  $j$  (avec  $j=i+1$  pour une ligne d'arbres sans branchement),

$K_{ij}$  est la raideur du tronçon reliant les nœuds successifs  $i$  et  $j$ ,

$[\theta]$  est le vecteur des angles de torsion aux nœuds.

### 6.2.2.1 Différentes modélisations

On considère trois grandes familles :

- la géométrie pure et simple, sans aucune participation du matériau à la résistance en torsion (figure 6.11) ;
- l'utilisation de "pénétrations", considérant que le petit diamètre se prolonge dans le grand sur une certaine distance pour compenser le métal disque qui ne travaille pas en torsion (figures 6.12 et 6.13) ;
- l'utilisation de lignes de fuite pour déterminer la partie du disque qui travaille en torsion (figures 6.14, 6.15 et 6.16).

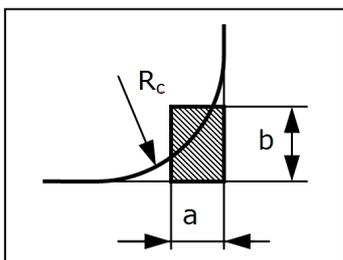


Figure 6.11 – Définition géométrique du congé équivalent

1/ La modélisation de la géométrie pure et simple suit directement le contour. La modélisation du congé de rayon  $R_c$  est issue de l'équation (6.3) et de la figure 6.14 pour  $\alpha=45^\circ$ , de façon à ce que tous les modèles soient cohérents entre eux. On définit un rectangle de même surface que le congé ayant pour largeur et hauteur les dimensions  $a$  et  $b$  définies sur la figure 6.11 et par les équations (6.2).

$$\begin{cases} a = b/2 \\ b = R_c \sqrt{2 - \pi/2} \end{cases} \quad (6.2)$$

2/ Ker Wilson [**KerWilson**] a proposé dans ses études sur le comportement des lignes d'arbres de navires d'utiliser des pénétrations du petit diamètre dans le plus grand, en fonction du rapport du grand au petit diamètre. Le standard sur la dynamique de rotor de l'API [**API684**] reprend exactement la même définition. Henri Blanc [**Blanc**] améliore cette approche en introduisant l'influence du rayon du congé de l'épaulement. La figure 6.12 montre l'évolution de ces coefficients de pénétration,

et la figure 6.13 le modèle équivalent avec les contours utilisés pour la définition de la raideur et de l'inertie.

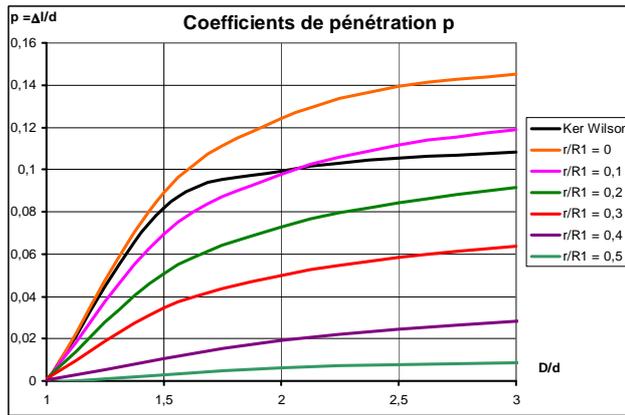


Figure 6.12 – Arbres épaulés, coefficients de pénétration p

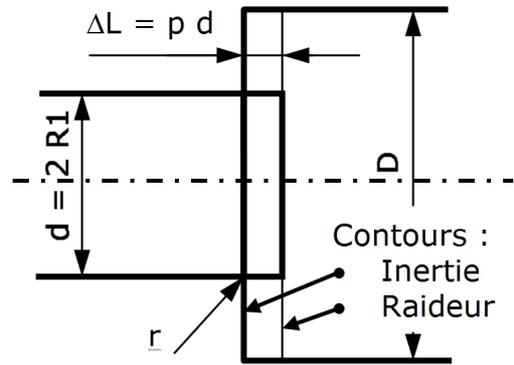


Figure 6.13 – Arbres épaulés, modèle équivalent avec pénétration

3/ L'utilisation de lignes de fuite inclinées conduit à la détermination de diamètres équivalents des différents éléments du raccordement entre l'arbre, le congé et le disque, comme ceci est fait industriellement pour les modélisations en flexion. En torsion, on peut penser que l'inclinaison de ces lignes est de 45°, mais, afin d'avoir plus de latitude dans l'analyse des modèles, on laisse la possibilité de la faire varier

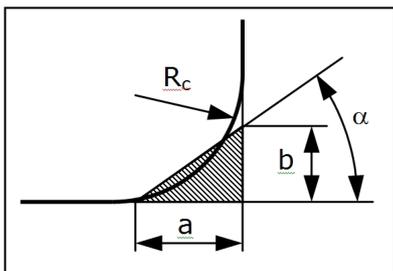


Figure 6.14 – Définition de la ligne de fuite et du cône équivalent au congé

en l'introduisant comme variable  $\alpha$ . La figure 6.14 montre la définition de la modélisation utilisée pour les congés. Le triangle de côtés :

$$\begin{cases} a = R_c \sqrt{\frac{2 - \pi/2}{\text{tg } \alpha}} \\ b = a \text{tg } \alpha \end{cases} \quad (6.3)$$

a une surface identique à celle du congé de rayon  $R_c$ .

On introduit encore deux variantes pour la définition de la raideur :

- cylindres de diamètres moyens (figure 6.15) :

$$D_{\text{moy}} = \frac{D + d}{2} \quad (6.4)$$

où d et D sont les deux diamètres d'extrémités du cône,

- cylindres dont les diamètres appelés ici "équivalents" conduisent à une raideur de torsion du tronçon identique à celle du cône (figure 6.16) suivant l'équation (6.5) proposée aussi par **[Blanc]** :

$$D_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{3 D^3 d^3}{D^2 + D d + d^2}} \quad (6.5)$$

A partir de cette définition, la figure 6.17 représente les discrétisations adoptées en deux tronçons de cônes de raideur pour le disque intermédiaire et en un seul cône de raideur pour le disque d'extrémité. Les inerties sont évidemment définies avec les diamètres extérieurs des disques.

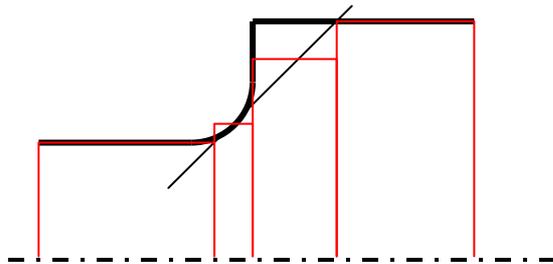


Figure 6.15 – Modélisation des lignes de fuites par des cylindres

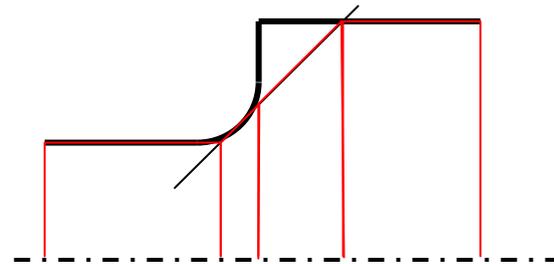


Figure 6.16 – Modélisation des lignes de fuites par des cônes

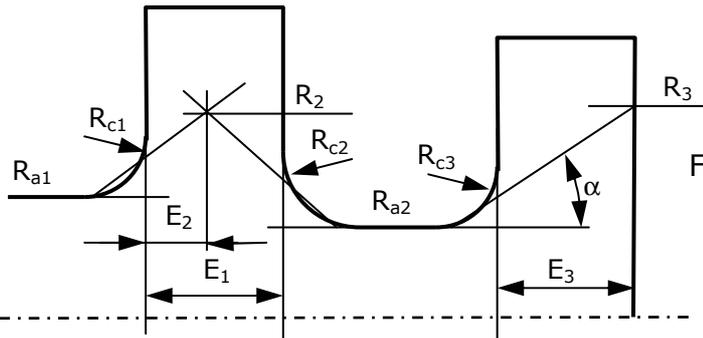


Figure 6.17 – Décomposition des disques en tronçons coniques

Pour le disque central, les expressions de la longueur  $E_2$  et du rayon  $R_2$  en fonction des rayons d'arbres  $R_{a1}$  et  $R_{a2}$ , des rayons de congés  $R_{c1}$  et  $R_{c2}$ , de l'épaisseur du disque  $E_1$  et de l'angle de fuite  $\alpha$  sont :

$$\begin{cases} E_2 = \frac{R_{a2} - R_{a1}}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{E_1}{2} + \frac{R_{c2} - R_{c1}}{2} \sqrt{\frac{2 - \pi/2}{\operatorname{tg} \alpha}} \\ R_2 = \frac{R_{a2} + R_{a1}}{2} + \frac{E_1 \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{R_{c2} + R_{c1}}{2} \sqrt{(2 - \pi/2) \operatorname{tg} \alpha} \end{cases} \quad (6.6)$$

Pour le disque d'extrémité, l'expression du rayon  $R_3$  en fonction du rayon d'arbre, du rayon de congé  $R_{c3}$ , de l'épaisseur du disque  $E_3$  et de l'angle de fuite  $\gamma$  est :

$$R_3 = R_{a2} + E_3 \operatorname{tg} \alpha + R_{c3} \sqrt{(2 - \pi/2) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6.7)$$

### 6.2.2.2 Résultats obtenus par les modèles analytiques

On a calculé les solutions par une méthode de Jacobi, suivant l'algorithme développé par Bathe **[Bathe]** en 1976 pour effectuer les analyses dynamiques aux éléments finis.

Parmi toutes les simulations effectuées, on a trouvé que les résultats des deux premières fréquences propres ne dépendaient pas de la finesse adoptée par la modélisation des arbres tant que le rapport  $L/D$  reste inférieur à 1, et très peu au-delà (moins de 0,04% pour la première fréquence propre et de 0,75% pour la seconde pour des rapports longueur sur diamètre allant jusqu'à 3). Le tableau 6.18 compare les différents modèles pour une discrétisation  $L/D=0,7$ . Pour classer les solutions, on utilise le critère de l'équation (6.8) considérant les carrés des écarts relatifs (en pourcent) par rapport au calcul de référence. Puisque les comportements sont assez différents pour le premier et le second modes propres, on a introduit une pondération d'un coefficient 2 sur l'écart de la fréquence propre la plus basse car c'est celle dont on veut assurer au mieux la détermination pour des questions de réponse aux excitations instationnaires :

$$\text{Critère} = \sum_{\text{petit et grand rayons}} \left[ 2 \left( \frac{100 \Delta f_1}{f_1} \right)^2 + \left( \frac{100 \Delta f_2}{f_2} \right)^2 \right] \quad (6.8)$$

Tableau 6.18 – Fréquences propres (Hz) des modèles analytiques						
Type de calcul	Type de congés	Petits rayons		Grands rayons		Critère
Géométrie pure		135,89	490,41	141,70	491,89	55
Pénétrations sans effet des congés		130,70	479,82	130,62	463,96	141
Pénétrations avec effet des congés		131,03	479,81	133,27	470,81	92
Lignes à 45° - cylindres moyens		133,96	484,70	142,56	518,17	29
Lignes à 45° - cylindres équivalents		133,03	483,47	143,96	513,13	13,8
<b>Référence éléments finis 3D</b>		<b>130,99</b>	<b>475,55</b>	<b>142,96</b>	<b>504,50</b>	<b>/</b>

Les modélisations avec coefficients de pénétration s'avèrent les meilleures pour la première fréquence propre avec des congés de petits rayons, mais s'éloignent trop de la réalité pour les trois autres calculs, ce qui leur confère le plus mauvais score. La prise en compte des rayons des congés proposée par Blanc n'est pas suffisante. Les modélisations basées sur le principe de cônes définis par des lignes de fuite à 45° sont les meilleures pour les congés de grand rayon. Pour celles-ci, l'utilisation de cylindres équivalents s'avère trop raide dans tous les cas. Sur le plan du critère de comparaison, la solution avec des cylindres de diamètres équivalents aux cônes est incontestablement la meilleure.

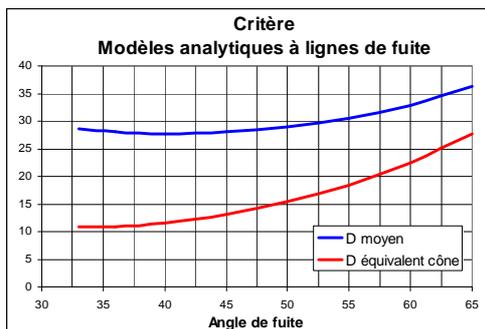


Figure 6.19 – Etude paramétrique de minimisation du critère

Compte tenu du score obtenu par cette dernière solution, on a fait une étude paramétrique sur l'inclinaison  $\alpha$  des lignes de fuite définissant les cônes. La figure 6.19 montre que l'optimum s'obtient pour un angle de 33° pour un critère de 11,33, soit un écart quadratique moyen de prévision de 1,4%.

### 6.2.3 Modèles aux éléments finis de poutres de torsion

On comparera sur le même cas de calcul deux modélisations aux éléments finis de poutres en torsion :

- modèle à un degré de liberté par nœud,
- modèle à deux degrés de liberté par nœud.

Par analogie au paragraphe 6.2.2 précédent, on va considérer les trois discrétisations utilisées dans les modélisations analytiques :

- "géométrie", avec le tracé des congés de la figure 6.11 ;
- "cylindres de diamètre moyen", suivant la figure 6.14 et l'équation (6.4) ;
- "cylindres de diamètre équivalent aux cônes", suivant l'équation (6.5) ;

De plus, on ajoutera une réelle discrétisation "cônes", pour laquelle on va utiliser la capacité de modélisation des éléments finis.

### 6.2.3.1 Modélisations des tronçons à 1 ddl par nœud

Le modèle à 1 ddl par nœud est classique et utilise une fonction de forme linéaire. Les matrices élémentaires de masse et de raideur s'écrivent, pour un élément cylindrique :

$$[M] = \frac{\rho J_M L}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [K] = \frac{G J_K}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9) - (6.10)$$

avec  $J$  inertie polaire de la section de diamètre  $D$  :  $J = \frac{\pi D^4}{32}$ , le diamètre de masse

$D_M$  conduisant à  $J_M$  pouvant être différent de celui de définition de la raideur  $D_K$  conduisant à  $J_K$  ;

$\rho$  masse volumique du matériau ;

$L$  longueur de l'élément ;

$G$  module de torsion du matériau :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ;

$E$  module d'Young du matériau ;

$\nu$  coefficient de Poisson ;

$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$  vecteur déplacement.

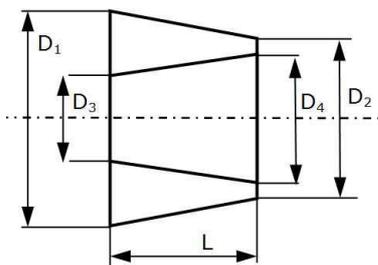


Figure 6.20 - Définition d'un tronçon conique

Pour la modélisation en cônes, il est nécessaire de disposer d'éléments finis de torsion de tronçons coniques. Afin de considérer des épaulements, on considère que le cône définissant la raideur peut être différent de celui définissant l'inertie, tel que représenté sur la figure 6.20 avec des diamètres variant linéairement sur la longueur  $L$  entre respectivement  $D_1$  à gauche et  $D_2$  à droite pour l'inertie à  $D_3$  et  $D_4$  pour la raideur. Le développement est présenté dans l'annexe D1, et les équations des matrices de masse (D1.7) et de raideur (D1.12) sont rappelées en (6.11) et (6.12) :

$$[M] = \frac{J_1 \rho L}{210} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix} \text{ et } [K] = \frac{G J_3 \rho}{5L} \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \quad (6.11) - (6.12)$$

où  $J_1$  et  $J_3$  sont les moments quadratiques des sections à gauche de diamètres  $D_1$  et  $D_3$ ,

les termes de masse  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont définis dans l'équation (D1.8) en fonction du rapport  $D_2/D_1$ ,

le terme de raideur  $K_1$  est défini par l'équation (D1.13) en fonction du rapport  $D_4/D_3$ .

### 6.2.3.2 Modélisations des tronçons à 2 ddl par nœud

Ky Dinh Tran **[Tran]** a développé un modèle à 2 ddl par nœud de tronçon cylindrique.

Les degrés de liberté comportent les déplacements et leurs dérivées :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 = \theta_{x=0} \\ \gamma_1 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} \\ \theta_2 = \theta_{x=L} \\ \gamma_2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=L} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

La continuité des pentes de part et d'autre de chaque nœud ainsi obtenue laisse présager que le phénomène de prise en compte du métal qui ne travaille pas au niveau des épaulements est mieux appréhendé.

La fonction de forme de ce modèle est une cubique :  $\theta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$  et les matrices élémentaires de masse et de raideur obtenues par Ky Dinh Tran en écrivant les équations de Lagrange **[Lagrange]** sont :

$$[M] = \frac{\rho J_M L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$[K] = \frac{G J_K}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Dans l'assemblage des matrices élémentaires, on élimine le degré de liberté de l'encastrement  $\theta_1=0$  et on libère la pente  $\gamma_1$ .

Le développement des éléments de tronçons coniques est présenté dans l'annexe D2, et les équations des matrices et de masse (D2.7) et de raideur (D2.15) sont rappelées en (6.16) et (6.17) :

$$[M] = \frac{J_1 \rho L}{27720} \begin{bmatrix} M_4 & M_5 L & M_6 & M_7 L \\ M_5 L & M_8 L^2 & M_9 L & M_{10} L^2 \\ M_6 & M_9 L & M_{11} & M_{12} L \\ M_7 L & M_{10} L^2 & M_{12} L & M_{13} L^2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$[K] = \frac{G J_3}{420L} \begin{bmatrix} K_2 & K_3 L & -K_2 & K_4 L \\ K_3 L & K_5 L^2 & -K_3 L & K_6 L^2 \\ -K_2 & -K_3 L & K_2 & -K_4 L \\ K_4 L & K_6 L^2 & -K_4 L & K_7 L^2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

où  $J_1$  et  $J_3$  sont les moments quadratiques des sections à gauche de diamètres  $D_1$  et  $D_3$ ,

les termes de masse  $M_4$  à  $M_{13}$  sont définis dans l'équation (D2.8) en fonction du rapport  $D_2/D_1$ ,

les termes de raideur  $K_2$  à  $K_7$  sont définis dans l'équation (D2.16) en fonction du rapport  $D_4/D_3$ .

### 6.2.3.3 Résultats obtenus par les modèles aux éléments finis

On constate que les valeurs des fréquences propres sont pratiquement insensibles à la finesse du maillage avec au maximum 0,03% d'écart pour des taux de discrétisation L/D variant de 0,2 à 3. Le tableau 6.21 donne les résultats obtenus pour un angle de fuite  $\alpha$  de 45° et un taux L/D=0,7 :

Tableau 6.21 – Fréquences propres (Hz) des modèles aux éléments finis de poutres						
Type de calcul	Type de congés	Petits rayons		Grands rayons		Critère
1 ddl/nœud – géométrie		135,89	490,66	141,71	492,09	55
1 ddl/nœud – cylindres moyens		133,97	485,05	145,57	518,93	30
1 ddl/nœud – cylindres équivalents		133,04	483,87	143,96	513,39	14,6
1 ddl/nœud – tronçons coniques		134,33	485,55	146,21	519,91	36,4
2 ddl/nœud – géométrie		136,11	491,02	143,70	498,85	53
2 ddl/nœud – cylindres moyens		134,15	483,80	147,18	523,15	40
2 ddl/nœud – cylindres équivalents		133,17	482,01	145,33	516,53	17,7
2 ddl/nœud – tronçons coniques		132,58	483,58	143,55	509,47	9,8
<b>Référence éléments finis 3D</b>		<b>130,99</b>	<b>475,55</b>	<b>142,96</b>	<b>504,50</b>	<b>/</b>

Comme pour les modèles analytiques, on fait une étude de minimisation du critère en fonction de l'angle de fuite pour les éléments de tronçons cylindriques de diamètres moyens et diamètres équivalents des cônes à la figure 6.22, ainsi que pour les éléments de tronçons coniques à la figure 6.23.

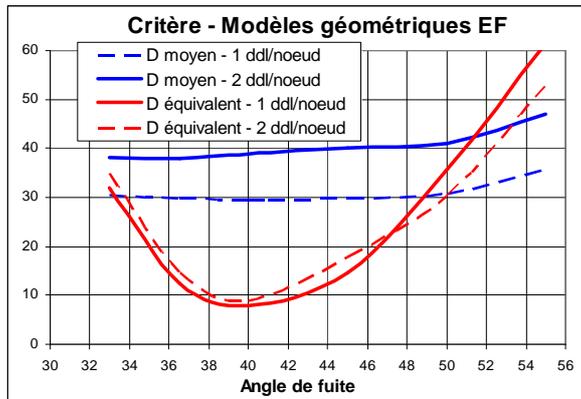


Figure 6.22 – Minimisation du critère pour les éléments finis cylindriques

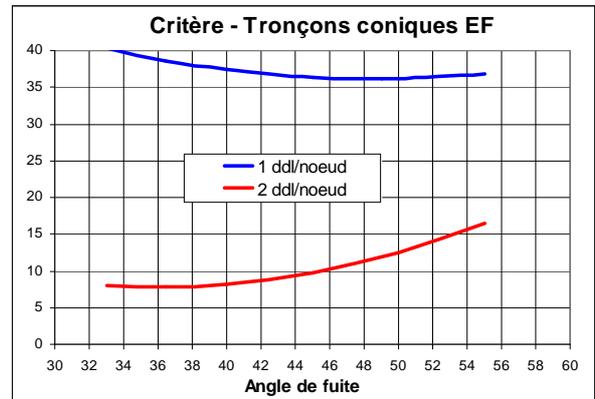


Figure 6.23 – Minimisation du critère pour les éléments finis coniques

Malgré la remarque formulée au paragraphe de l'annexe D3.2, il apparaît que l'utilisation du modèle aux éléments finis à 2 degrés de liberté par nœud conduit aux meilleurs résultats. Deux choix sont pratiquement équivalents :

- l'utilisation d'éléments cylindriques avec des diamètres équivalents définis par la formule de Blanc (6.5) et un angle de fuite de 39°, conduisant à un critère de 8,3 soit un écart moyen de prévision de 1,4% sur les 2 premières fréquences propres des deux cas à petits et grands congés de raccordement,
- l'utilisation d'éléments coniques développés à l'annexe D2 et un angle de fuite de 36°, conduisant à un critère de 7,8 soit un écart moyen de prévision 1,1% sur les mêmes fréquences propres.

## 6.2.4 Conclusion

Parmi tous les modèles étudiés, on distingue particulièrement :

- un modèle analytique basé sur le tracé de ligne de fuites et la définition de diamètres équivalents aux cônes ainsi créés,
- le modèle aux éléments finis à 2 ddl/nœud utilisant soit des éléments cylindriques basés sur la même définition, soit des éléments de tronçons coniques qui ont été développés à l'annexe D2.

Dans tous les cas, le congé de raccordement de l'épaulement est modélisé par un seul élément. L'angle optimal d'inclinaison des lignes de fuite pour la définition des cônes est compris entre 35 et 39°. Le type de contour pour la définition des cônes de raideur est donné figure 6.17.

On rappelle que, pour la définition des modèles analytiques, la raideur de torsion d'un élément conique de longueur  $L$ , et de diamètres  $d$  et  $D$  est, en application de

l'équation (6.5) :

$$K = \frac{3G\pi d^3 D^3}{32L(d^2 + dD + D^2)}. \quad (6.18)$$

## 6.3 Excitations des lignes d'arbres en torsion

Les lignes d'arbres des turbomachines sont sollicitées par deux grandes familles d'excitation :

- des excitations stationnaires liées à des raies cinématiques ;
- des excitations instationnaires de grande amplitude liées aux phénomènes électriques transitoires sur les moteurs d'entraînements des motocompresseurs centrifuges ou les alternateurs des turboalternateurs.

### 6.3.1 Diagramme de Campbell en torsion

Avant d'examiner ces différents types d'excitation, on va s'intéresser au tracé du diagramme de Campbell d'un groupe motocompresseur centrifuge à vitesse variable entraîné par un moteur électrique à basse vitesse de rotation. La ligne est donc constituée du moteur, d'un multiplicateur de vitesse à engrenages et du compresseur centrifuge, avec des vitesses nominales de rotation par exemple de 1500 tr/min (moteur à deux paires de pôles) et de 6500 tr/min (application de réfrigération).

Il y a lieu de tenir compte des raies cinématiques des deux lignes basse et haute vitesse, ainsi que de leur harmonique 2, ainsi que de la fréquence électrique du réseau et de son harmonique 2 généré lors des transitoires électriques.

La figure 6.24 représente le diagramme de Campbell pour une application à vitesse fixe. Deux zones d'excitation sont repérées, l'une pour la ligne basse vitesse et les fréquences électriques, l'autre pour la ligne haute vitesse. Les fréquences propres de torsion ont été ajoutées (1810 – 3450 – 5580 – 9090 – 22600 et 27320 tr/min). Le diagramme ne fait pas apparaître de résonance à  $\pm 10\%$ , sauf deux points repérés sur la figure 6.24. Le plus bas montre une résonance du 3<sup>ème</sup> mode propre de torsion sur l'harmonique 4 de la vitesse de rotation, soit l'harmonique 2 de la fréquence électrique et à la vitesse du moteur ; cela signifie que ce mode propre répondra

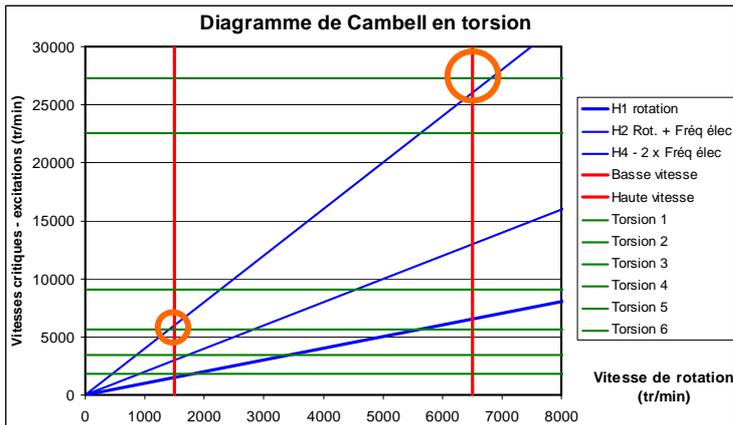


Figure 6.24 – Diagramme de Campbell d'un motocompresseur à vitesse fixe

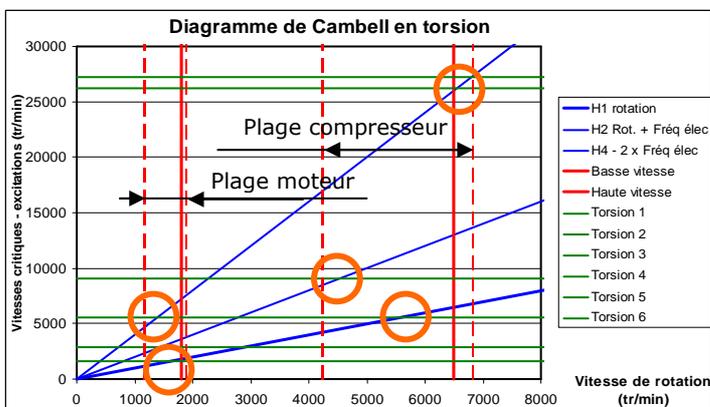


Figure 6.25 – Diagramme de Campbell d'un motocompresseur à vitesse variable

démontrer par calculs qu'il n'y a pas de danger à fonctionner sur ces résonances.

Le paragraphe 6.1 donne une valeur expérimentale d'amortissement modal de 0,07 à 0,09 qui s'est avérée cohérente avec d'autres mesures pratiquées sur des lignes de motocompresseurs centrifuges.

### 6.3.2 Excitations stationnaires

Ces excitations ont deux origines, une origine mécanique et une origine électrique.

#### 6.3.2.1 Origine mécanique

Pour les excitations d'origine mécanique, des documents publiés dans les recueils de conférence des Symposiums de turbomachines de Houston organisés par le Laboratoire des turbomachines de l'Université du Texas A&M, comme ceux de Wachel et Szenasi en 1992 [Wachel92] puis par Corbo et Malanoski en 1996 [Corbo], documents cités dans le standard de l'API sur la dynamique de rotor [API684]. Typiquement, les excitations au niveau du compresseur centrifuge, du multiplicateur, des accouplements etc. sont de l'ordre du pourcent du couple permanent, cette valeur pouvant être considérée comme très conservative.

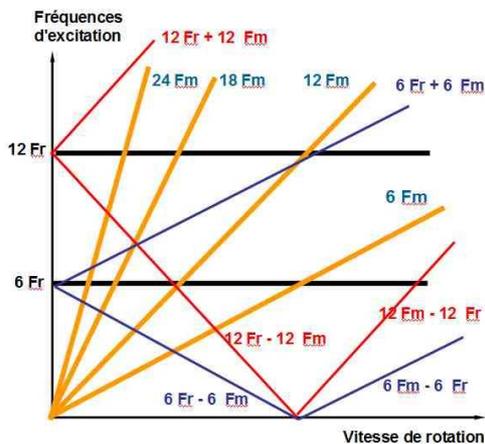
particulièrement lors du transitoire électrique. Le plus élevé est une résonance du 6<sup>ème</sup> mode propre sur la même excitation et à la vitesse du compresseur ; cette résonance ne présentera aucun danger, puisque l'excitation électrique est liée à la basse vitesse de rotation et non à la haute vitesse.

La figure 6.25 représente un diagramme de Campbell pour une application similaire (même compresseur centrifuge, même configuration de ligne d'arbres) mais avec un entraîneur à vitesse variable à 1800 tr/min. Les fréquences propres de torsion sont 1690 – 2310 – 5580 – 9090 – 26200 – 27230 tr/min. La plage de vitesse varie de 65 à 105% du nominal.

Le nombre de résonances a considérablement augmenté, et il est évident qu'avec ces configurations, il faudra appliquer le paragraphe de l'API consistant à

### 6.3.2.2 Origine électrique

Les excitations stationnaires d'origine électrique se trouvent dans le cas de moteurs électriques à vitesse variable. Ces moteurs doivent être alimentés à fréquence variable. Les générateurs de fréquence redressent le courant alternatif du réseau, puis reconstituent un nouveau courant alternatif actuellement à l'aide d'IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor).



Le courant redressé n'est pas parfaitement continu et le courant alternatif généré n'est pas parfaitement sinusoïdal, d'où la présence dans le couple du moteurs d'harmoniques de la fréquence du réseau et de la fréquence d'alimentation du moteur. On a même des combinaisons linéaires entre ces fréquences, comme le montre la figure 6.26 (avec : Fr – fréquence du réseau et Fm – fréquence d'alimentation du moteur).

Figure 6.26 – Combinaisons des fréquences d'excitation électriques

La superposition de ce diagramme avec le diagramme de Campbell de la figure 6.25 met en évidence de nombreuses résonances.

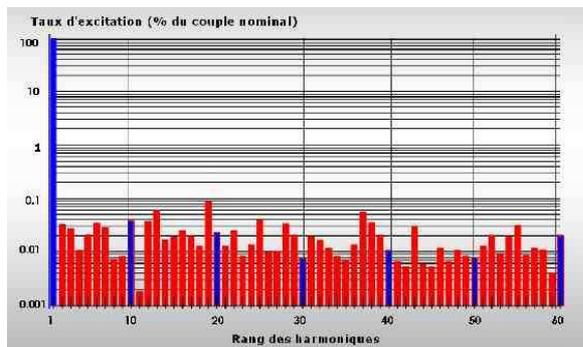


Figure 6.27 – Excitations générées par les moteurs à vitesse variable

Il y a donc lieu de tenir compte d'excitations de torsion appliquées sur la ligne d'arbres sur pratiquement toutes les fréquences propres. Les constructeurs travaillent à réduire ces excitations grâce à des montages électroniques reproduisant au mieux la sinusoïde. La figure 6.27 est un exemple de ces excitations. Cette figure suscite deux remarques : tout d'abord aucune harmonique de la vitesse de rotation n'est épargnée par les excitations jusqu'à des rangs très élevés, et ensuite les niveaux d'excitation sont très faibles avec les technologies modernes.

### 6.3.2.3 Tenue de la ligne d'arbres en fatigue

Les endroits les plus vulnérables sont les bouts d'arbre, car ils ont les plus petits diamètres et constituent les zones les plus torsibles, ainsi que les accouplements. La résistance en fatigue doit être vérifiée compte tenu de la capacité du matériau **[BrFlav]**, et des concentrations liées aux épaulements et à la présence éventuelle de rainures de clavettes **[Peterson]**.

Dans les analyses modales, on a l'habitude de représenter les modes propres, les maxima d'amplitude correspondent aux points conduisant aux plus grandes participations modales. En torsion, il s'avère utile de représenter aussi les couples modaux, ce qui donne immédiatement une information pertinente sur l'endroit le plus sensible de la ligne d'arbres. La figure 6.28 en donne un exemple pour deux modes propres de torsion. Pour le premier, le couple maximal est sensiblement situé au ventre du mode propre, tandis que pour le second il est à un nœud. On peut aussi

tracer les diagrammes de la figure 6.29, dans lesquels on fait un balayage en fréquence pour une amplitude d'excitation donnée, ce qui visualise immédiatement les zones sensibles.

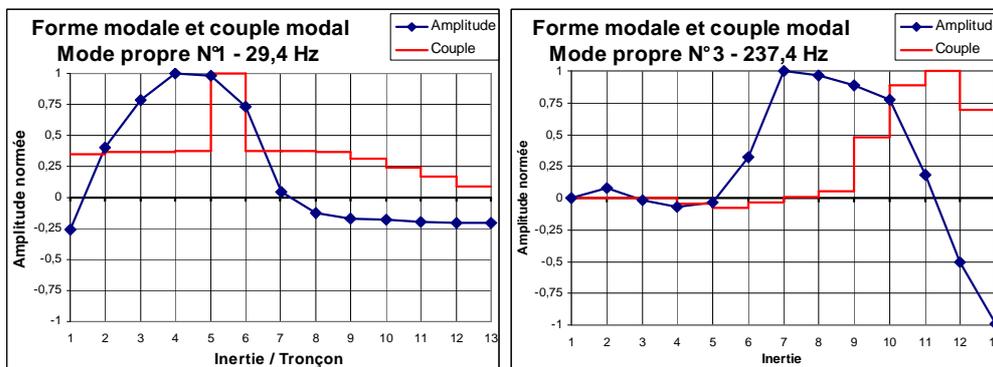


Figure 6.28 – Formes modales et couples modaux

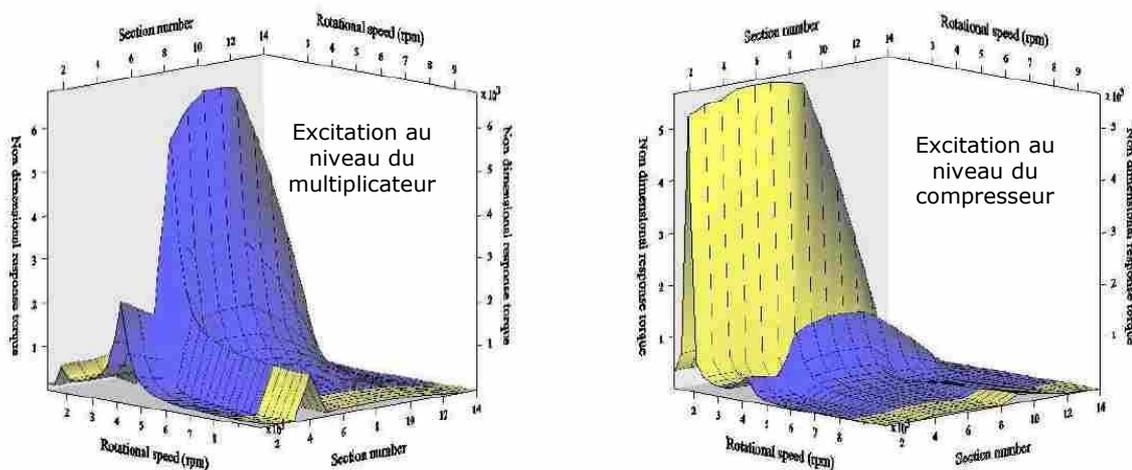


Figure 6.29 – Balayages en vitesse

### 6.3.3 Excitations instationnaires d'origine électrique

Ici aussi, on divisera ces excitations en deux familles, ce que l'on pourra appeler les "accidents" comme les courts-circuits et ce qui fait partie du cycle de fonctionnement normal de la machine comme les démarrages.

#### 6.3.3.1 Courts-circuits et faux couplages

Les courts-circuits sont susceptibles d'affecter tous les moteurs électriques et les alternateurs. Dans le cas des moteurs à vitesse variables, les courts-circuits se produisant en amont du générateur de fréquence n'ont pas d'effet, mais ceux entre le moteur et le générateur sont à considérer. Les courts-circuits comportent plusieurs familles :

- courts-circuits monophasés (entre une phase et la terre), dans 80% des cas :
- courts-circuits biphasés (deux phases entre elles ou entre deux phases et la terre), dans 15% des cas ;
- courts-circuits triphasés (trois phases entre elles), dans seulement 5% des cas.

Les couplages des alternateurs sur les réseaux électriques sont effectués par un synchro coupleur qui d'une part amène la fréquence de rotation en concordance avec

celles du réseau du groupe et d'autre part annule le décalage de phase entre l'alternateur et le réseau. En cas de défaillance, le faux couplage intervient en obligeant le groupe à tourner presque instantanément de l'angle qui permettra de recalibrer les phases. Un cas particulièrement contraignant est le faux couplage à 120°.

Ces phénomènes électriques qui génèrent des couples transitoires de l'ordre de 6 à 8 fois le couple nominal ont des conséquences importantes sur l'intégrité des lignes d'arbres et ont en conséquence été très étudiés.

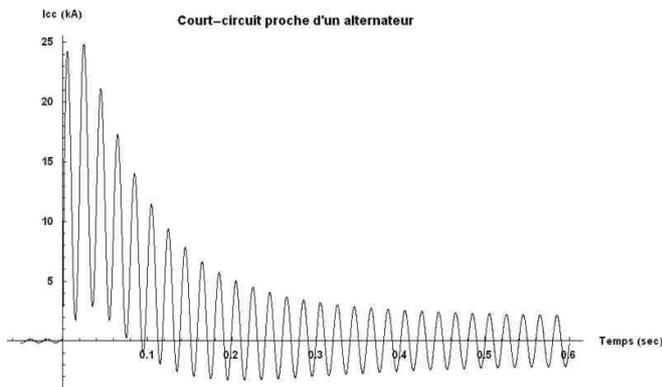


Figure 6.30 – Courant de court-circuit d'un alternateur

Le cahier N°158 de Schneider Electric, rédigé par Metz-Noblat, Dumas et Poulain **[DeMetz]** est un excellent condensé du calcul des intensités de court-circuit. Il fait appel à deux méthodes de détermination de ces courants, une méthode d'impédances et celle de la norme CEI 60909 partie 0 en 1<sup>ère</sup> édition de 2001 **[CEI60909]**. La figure 6.30 illustre l'amplitude des oscillations du courant de court-circuit.

Le cours sur les machines asynchrones (1<sup>ère</sup> partie) de l'Université catholique de Louvain **[Elec2753]** montre comment passer du courant de court-circuit au couple électromagnétique de court-circuit sur la ligne d'arbres. La figure 6.31 donne les couples de courts-circuits électromagnétiques biphasé et triphasé sur un moteur asynchrone.

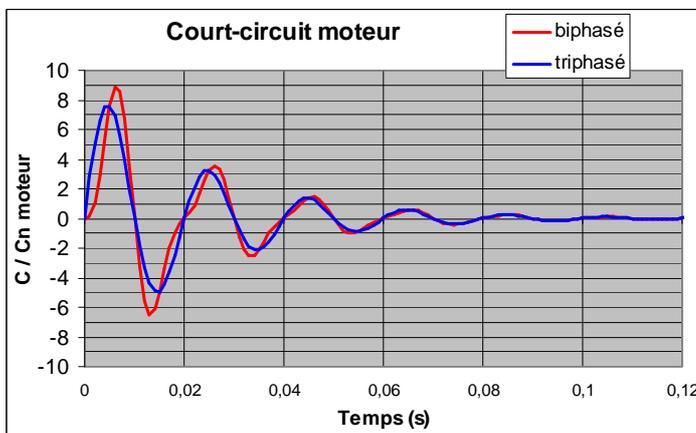


Figure 6.31 – Couples électromagnétiques de court-circuit

Ces couples de court-circuit  $\Gamma_{cc}$  sont souvent écrits sous la forme :

$$\frac{\Gamma_{cc}}{\Gamma_n} = A_0 e^{-\delta_0 t} + A_1 \sin \omega t e^{-\delta_1 t} + A_2 \sin 2 \omega t e^{-\delta_2 t} \quad (6.19)$$

ou bien, plus généralement, sous celle d'une série de Fourier amortie :

$$\frac{\Gamma_{cc}}{\Gamma_n} = \sum_k (\alpha_k \sin k \omega t + \beta_k \cos k \omega t) e^{-\delta_k t} \quad (6.20)$$

avec  $\omega$  la pulsation (rad/s) du réseau électrique ( $2\pi f$ ) ;

k l'harmonique considéré ;

- $\Gamma_n$  le couple nominal correspondant toujours à la puissance maximale de la machine électrique ;
- $\Gamma_{cc}$  le couple électromagnétique d'excitation fonction du temps ;
- $\alpha_k$  et  $\beta_k$  les coefficients de la série de Fourier ;
- $\delta_k$  l'amortissement électromagnétique.

Le comportement dynamique de la ligne d'arbres est donc la réponse forcée au couple d'excitation appliqué au niveau de la machine électrique (répartie sur les différentes inerties modélisées pour la partie active), avec comme conditions initiales les angles de torsion correspondant au régime stationnaire précédent :

$$[M] \frac{d}{dt^2} [X] + [C] \frac{d}{dt} [X] + [K] [X] = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{cc}(t) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

où  $\Gamma_1, \Gamma_2$  etc. sont les couples permanents s'appliquant au niveau de la turbomachine ;

$\Gamma_{cc}(t)$  est le couple de court-circuit.

Si l'on utilise un modèle analytique, comme au paragraphe 6.2.2, on résout analytiquement l'équation (6.21) pour chacun des termes de l'excitation (6.20) – ou (6.19) – par une technique de réponse modale et en considérant des amortissements visqueux. Si  $[\phi]$  est la matrice des vecteurs propres de l'équation (6.1) sans second membre, normées par rapport à la matrice de masse  $[M]$ , on obtient alors pour chacun des modes propres l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + 2 \zeta_i \omega_i \frac{dq_i}{dt} + \omega_i^2 q_i = G_i + \sum_k (H_{i-k} \cos k\omega t + I_{i-k} \sin k\omega t) e^{-\delta_k t} \quad (6.22)$$

avec  $q_i$  la participation du mode propre d'indice  $i$  dans la réponse ;

$\omega_i$  sa pulsation propre ;

$\zeta_i$  son amortissement modal ;

$H_{i-k}$  et  $I_{i-k}$  les coefficients du couple modal d'excitation du mode propre  $i$  aux différents harmoniques  $k$  ;

$G_i$  le couple modal constant qui continue de s'appliquer après l'apparition de la perturbation, comme un couple moteur de turbine par exemple.

On cherche des solutions de la forme :

$$q_i(t) = L_i + \sum_k (M_{i-k} \cos k\omega t + N_{i-k} \sin k\omega t) e^{-\delta_k t} + \left( P_i \cos \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} t + Q_i \sin \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} t \right) e^{-\omega_i \zeta_i t} \quad (6.23)$$

qui contiennent les solutions générales et particulières de l'équation (6.22). Dans cette expression.

On a :

$$L_i = \frac{G_i}{\omega_i^2} \quad (6.24)$$

et, en notant :

$$\begin{cases} Y_{i-k} = \delta_k^2 + \omega_i^2 - k^2 \omega^2 - 2 \omega_i \zeta_i \delta_k \\ Z_{i-k} = 2 k \omega (\omega_i \zeta_i - \delta_k) \end{cases} \quad (6.25)$$

il vient, par identification des termes en sinus et cosinus :

$$\begin{cases} M_{i-k} = \frac{Y_{i-k} H_{i-k} - Z_{i-k} J_{i-k}}{Y_{i-k}^2 + Z_{i-k}^2} \\ N_{i-k} = \frac{Y_{i-k} J_{i-k} + Z_{i-k} H_{i-k}}{Y_{i-k}^2 + Z_{i-k}^2} \\ P_{i-k} = q_{i(t=0)} - L_{i-k} - \sum_k M_{i-k} \\ Q_{i-k} = \frac{\omega_i \zeta_i P_{i-k} + \sum_k (\delta_k M_{i-k} - k \omega N_{i-k}) - \dot{q}_{i(t=0)}}{\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}} \end{cases} \quad (6.26)$$

où  $q_{i(t=0)}$  et  $\dot{q}_{i(t=0)}$  sont les conditions initiales issues de l'équilibre dynamique. On remarquera que  $\dot{q}_{i(t=0)}$  est nul lorsqu'on applique la perturbation à partir d'un état d'équilibre statique, mais ne l'est plus s'il y a un changement du régime d'excitation, comme par exemple l'ouverture du disjoncteur alors que le transitoire n'est pas encore amorti.

Cette méthode d'intégration directe s'avère très rapide en temps de calcul et évite une intégration numérique par exemple avec la méthode de Newmark (annexe B4). Le résultat est évidemment totalement indépendant du pas de temps choisi.

L'application de cette méthode est donnée sur le cas d'un turboalternateur de 17 MW destiné à la valorisation énergétique des déchets ménagers. La ligne comprend la turbine à vapeur déjà présentée au paragraphe 2.8.2 (figure 2.9) à 6100 tr/min (coupe du type de la figure 1.5), un réducteur avec un arbre torsible (figure 6.45) et un alternateur à 4 pôles à 1500 tr/min. L'inertie totale de la ligne d'arbres est de 13 188 kg.m<sup>2</sup> ramenée à la ligne grande vitesse. Les trois principaux cas de court-circuit biphasé, de court-circuit triphasé et de faux couplage à 120 degrés sont présentés. Les équations des excitations données par le fournisseur de l'alternateur sont :

$$\Gamma_{\text{biph}} / \Gamma_n = 9,24 \sin(\omega t) e^{-4,06t} + 4,62 \sin(2 \omega t) e^{-2,34t} + 0,18 e^{-3,66t} \quad (6.27)$$

$$\Gamma_{\text{triph}} / \Gamma_n = 10,63 \sin(\omega t) e^{-4,95t} + 0,66 \sin(\omega t) e^{-47,619t} + 0,28 e^{-5,78t} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{faux-c}} / \Gamma_n = & 6,32 \sin(\omega t + 2,09) e^{-2,61t} + 0,212 \sin(\omega t + 2,09) e^{-1,57t} \\ & + 1,25 \sin(\omega t + 2,09) e^{-43,9t} + 3,16 e^{-2,61t} + 0,106 e^{-1,57t} + 0,625 e^{-43,9t} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Les figures 6.32, 6.33 et 6.34 représentent pour chacun des trois cas de perturbations le couple d'excitation et la réponse au niveau du bout d'arbre de la turbine, où l'amplitude a toujours été trouvée maximale.

Toutes les figures 6.32 à 6.39 présentent les couples de réponse instationnaires au même endroit, et toujours normés par rapport au couple nominal. Ils sont notés de façon uniforme  $\Gamma/\Gamma_n$ .

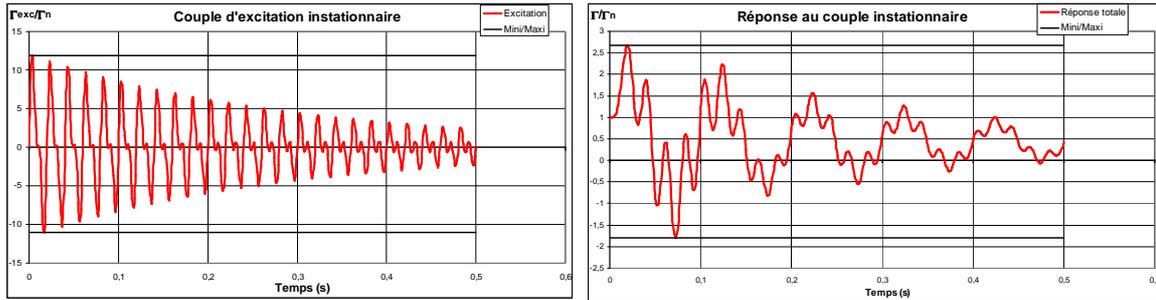


Figure 6.32 – Réponse au court-circuit biphasé

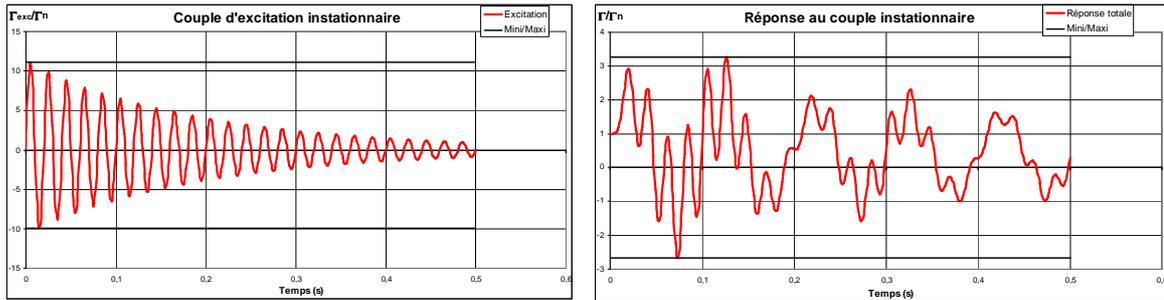


Figure 6.33 – Réponse au court-circuit triphasé

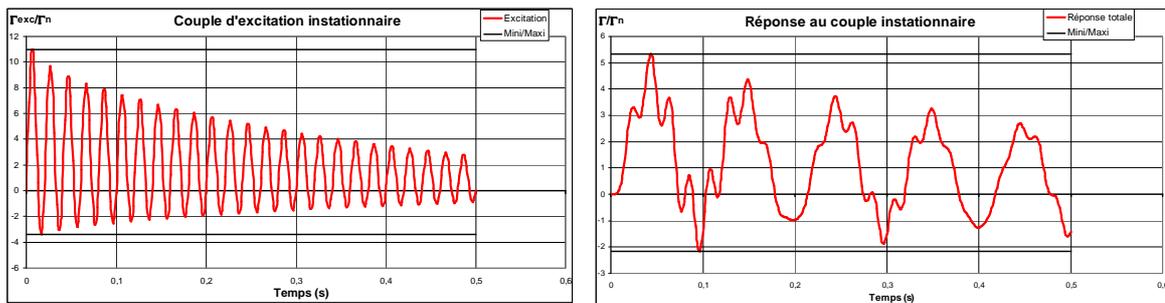


Figure 6.34 – Réponse à un faux couplage à 120°

Le tableau 6.35 indique les extrema relevés. Le cas du faux couplage est bien le cas le plus contraignant.

Tableau 6.35 – Extrema des excitations et des réponses instationnaires ( $\Gamma/\Gamma_n$ )											
Court-circuit biphasé				Court-circuit triphasé				Faux couplage à 120°			
Excitation		Réponse		Excitation		Réponse		Excitation		Réponse	
Mini	Maxi	Mini	Maxi	Mini	Maxi	Mini	Maxi	Mini	Maxi	Mini	Maxi
-11,0	11,9	-1,80	2,67	-9,9	11,2	-2,66	3,26	-3,39	9,94	-2,16	5,34

La figure 6.36 représente les participations des trois premiers modes propres dans la réponse au faux couplage (figure 6.34). On voit que la participation du premier mode propre est prédominante (fréquence propre 9,86 Hz) devant celle du deuxième mode propre (malgré la proximité de sa fréquence propre 45,09 Hz de la fréquence d'excitation forcée 50 Hz), et a fortiori du 3<sup>ème</sup> mode propre (63,62 Hz) et des autres modes propres supérieurs.

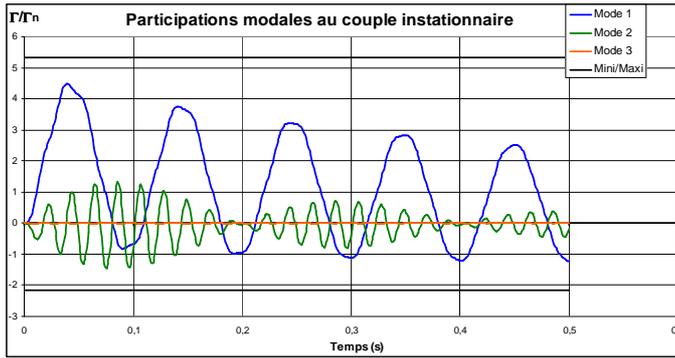


Figure 6.36 – Participations des trois premiers modes propres dans la réponse au faux couplage

Les calculs précédents ont été réalisés avec des amortissements modaux de 0,05. La figure 6.37 compare les résultats obtenus sur une durée plus longue avec deux valeurs d'amortissements de 0,012 et de 0,002. La conclusion est que la valeur de l'amortissement modal n'affecte pas beaucoup les valeurs de pic de la réponse qui sont obtenus très rapidement après l'apparition du défaut, mais allongent considérablement le transitoire qui suit. Ceci impacte la tenue à la fatigue non pas par l'amplitude des cycles de fatigue, mais par leur nombre.

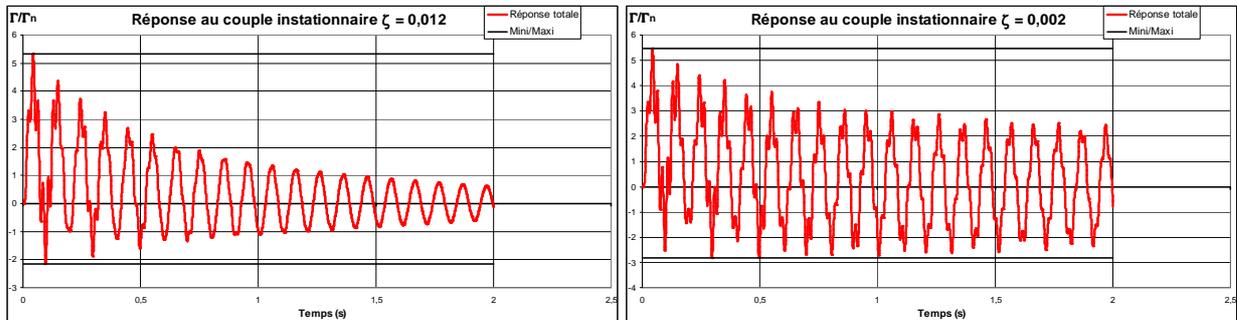


Figure 6.37 – Réponse au faux couplage pour deux valeurs d'amortissements modaux

Lorsque le défaut électrique est détecté par le système de surveillance, le disjoncteur s'ouvre et la machine se trouve en oscillations libres avec de nouvelles conditions initiales d'angles et de vitesses angulaires correspondant à la réponse précédente au temps d'ouverture du disjoncteur. Une étude paramétrique sur ce temps d'élimination du défaut électrique entre 0,1 et 0,2 s a été faite dans le cas du court-circuit biphasé ( $\zeta=0,012$ ). La figure 6.38 montre les extrema obtenus après l'ouverture du disjoncteur, comparé à ceux sans ouverture (figure 6.32). Il arrive donc que le

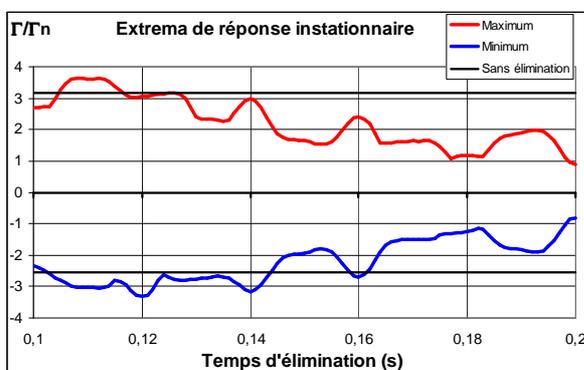


Figure 6.38 – Maximum et minimum des amplitudes des oscillations libres après élimination du court-circuit biphasé

maximum de réponse observé dans un tronçon se trouve après ce temps d'élimination du court-circuit (entre 0,105 et 0,117 s). Il apparaît que c'est la conjonction des vitesses modales des deux premiers modes propres qui est déterminante pour les amplitudes des oscillations libres. La figure 6.39 montre les réponses maximale et minimale obtenues pour des temps d'élimination de respectivement 0,108 et 0,200 seconde.

On voit nettement le changement du régime vibratoire dans la réponse. Le fondamental de l'excitation à 50 Hz s'estompe au profit principalement de la fréquence du premier mode propre élastique.

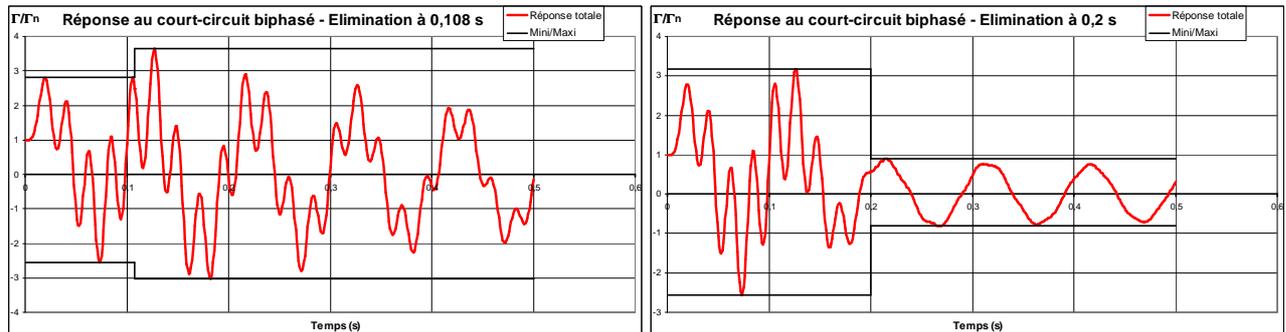


Figure 6.39 – Réponses au court-circuit biphasé pour deux temps différents d'élimination du défaut

Au moment du court-circuit, le couple initial de la machine électrique est remplacé par celui du court-circuit. Certains auteurs tiennent même compte de la réponse de la régulation de vitesse qui va diminuer le couple moteur de la turbine à vapeur et par conséquent affecter le régime dynamique – terme L des équations (6.23) et (6.24) non constant.

### 6.3.3.2 Démarrage d'un moteur électrique.

Le démarrage d'un moteur comprend deux phases :

- l'établissement du flux au moment de la connexion au réseau ;
- la montée en vitesse.

La phase d'établissement du flux est tout à fait analogue au phénomène de court-circuit du paragraphe 6.3.3.1. La figure 6.40 en donne un exemple pour un moteur électrique asynchrone.

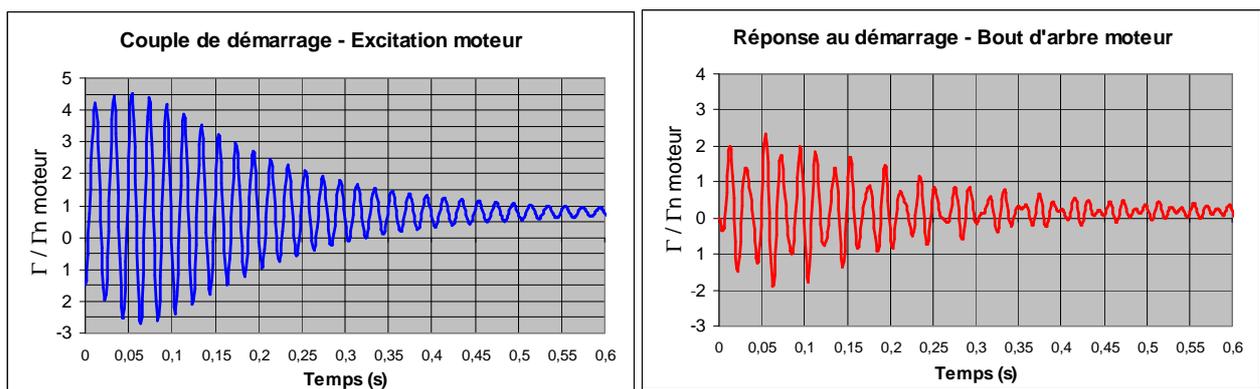


Figure 6.40 – Couples de démarrage d'un moteur électrique asynchrone

Ensuite, lors de la montée en vitesse, un moteur synchrone qui démarre en asynchrone délivre une excitation électromagnétique à une fréquence égale entre la différence entre la fréquence du réseau électrique et la fréquence électrique de rotation (vitesse du moteur multipliée par le nombre de paires de pôles).

Le calcul est assez complexe, puisqu'il faut au préalable avoir déterminé la courbe de montée en régime de la ligne d'arbre, compte tenu des couples stationnaires de

démarrage du moteur d'une part, et du couple résistant du compresseur d'autre part, tous deux fonction de la vitesse de rotation. Ceci demande une première intégration numérique sur le fonctionnement du procédé qui n'est pas du propos de ce document.

Ensuite, le constructeur du moteur fournit une courbe définissant l'amplitude du couple électromagnétique délivré en fonction de la vitesse de rotation. Il faut donc faire une deuxième intégration sur la ligne d'arbres. Puisque l'excitation est à fréquence variable, il est cette fois tout à fait exclu d'envisager une solution analytique. On utilise alors une méthode de réponse modale en intégrant numériquement sur chacun des modes propres les équations différentielles :

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} + 2\zeta_i \omega_i \frac{dq_i}{dt} + \omega_i^2 q_i = \Gamma_i(t) \quad (6.30)$$

où  $q_i$  est la participation modale

$\Gamma_i(t)$  est le couple modal exciteur.

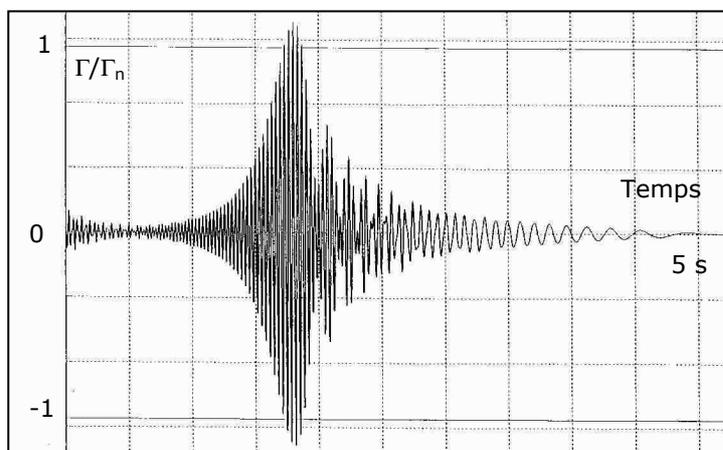


Figure 6.41 – Réponse instationnaire en montée en vitesse d'un moteur

La figure 6.41 donne un exemple de la réponse dans la ligne d'arbre. On voit bien la fréquence variable qui descend de 50 Hz à zéro. La traversée d'une vitesse critique de flexion se fait avec un couple oscillatoire important qui est fonction, non seulement de l'amortissement modal, mais aussi de l'accélération au moment du franchissement de cette critique.

La réalisation de ce type de calcul est prévue en option dans la norme API 617 sur les compresseurs centrifuges **[API617]**.

Dans le cas d'un moteur à vitesse variable, ce type d'excitation n'existe pas, puisque la machine est démarrée depuis la vitesse nulle par la régulation de vitesse.

### 6.3.3.3 Tenue de la ligne d'arbres en fatigue

L'importance des couples générés par ces phénomènes instationnaires interdit de dimensionner une ligne d'arbres pour une tenue en fatigue à grand nombre de cycles. Les trop grands diamètres nécessaires pour les bouts d'arbre et les accouplements seraient totalement incompatibles avec les impératifs de la dynamique de flexion.

Comme il est dit dans l'API 617, la tenue en fatigue doit être vérifiée en "fatigue cumulative", c'est-à-dire en endommagement. La figure 6.42 montre une courbe de Wöhler d'essais en fatigue d'un acier, avec deux zones, l'une à grand nombre de cycles où la résistance en fatigue a atteint une asymptote qui est la limite conventionnelle de fatigue (celle qui est utilisée au paragraphe 6.3.2.3) et une à petit nombre de cycles.

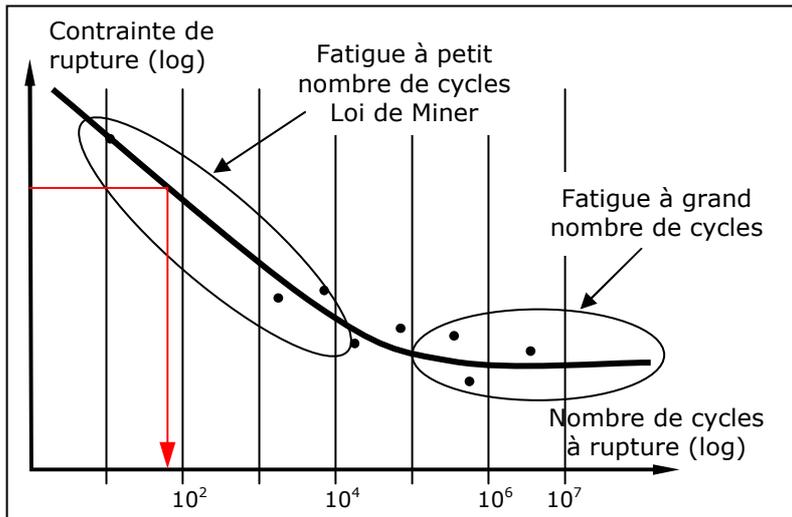


Figure 6.42 – Courbe de résistance à la fatigue de Wöhler

Pour chaque phénomène instationnaire, on compte le nombre de cycles obtenus par niveau de couple (par exemple  $1,5 C_n$ ,  $2 C_n$ ,  $2,5 C_n$  etc.). Pour chaque niveau de couple, donc de contrainte équivalente (tenant compte des coefficients de concentration de contrainte **[Peterson]**), la courbe de Wöhler (figure 6.42) donne le nombre de cycles admissibles. Lorsque la contrainte installée est supérieure à la limite conventionnelle de fatigue, le nombre de cycles à rupture est proportionnel à la contrainte dans une échelle log-log. La loi de Miner **[BrFlav]** définit l'endommagement lié au phénomène instationnaire par la relation (6.31) :

$$\text{Endommagement} = \sum \frac{\text{Nb réalisé}}{\text{Nb autorisé}} \quad (6.31)$$

Comme cette loi est assez conservatrice, il n'y a pas lieu de prendre de coefficient de sécurité et le nombre de phénomènes appliqués est alors l'inverse de l'endommagement.

Bien sûr, ce nombre doit être interprété car :

- les démarrages des moteurs font partie du cycle de vie de la machine ;
  - les courts-circuits et faux couplages sont accidentels ;
  - les endommagements propres à chaque phénomène ne sont pas les mêmes ;
- et il faut donc définir ce qu'une ligne d'arbres est susceptible de subir.

#### 6.3.3.4 Moyen d'amélioration de la tenue aux couples instationnaires

Le meilleur moyen pour diminuer l'amplitude de la réponse aux couples électromagnétiques instationnaires est d'avoir la première fréquence propre de torsion la plus basse possible devant la fréquence du réseau électrique. Pour ceci, il faut jouer sur la technologie :

- choix des accouplements ;
- utilisation d'arbre torsible.

Dans le premier cas, si l'on choisit des accouplements plus souples, on réduit en même temps leur capacité en couple maximal. Tout est toujours question de compromis. Néanmoins, on illustrera ce propos par le cas d'un motocompresseur alternatif (celui ayant servi de base au paragraphe 6.1), pour lequel un changement de technologie d'accouplement a donné des résultats exceptionnels.

La figure 6.43 se réfère à la ligne motocompresseur avec un accouplement à lames, la réponse au court-circuit biphasé oscille entre -6 et +5,5 fois le couple nominal.

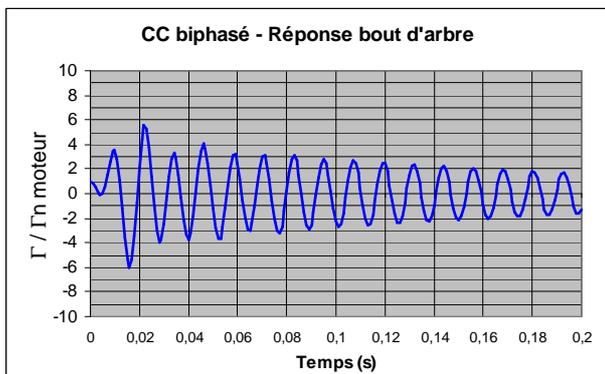
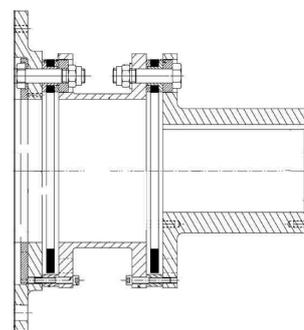


Figure 6.43 – Réponse au court-circuit biphasé Accouplement à lames



La figure 6.44 se réfère à la ligne équipée d'un accouplement à plots élastiques. La réponse oscille entre plus ou moins 1 fois le couple nominal. Les deux courbes de réponse étant tracées à la même échelle, on voit aussi la réduction très importante d'amplitude apportée par la baisse drastique de la première fréquence propre de torsion.

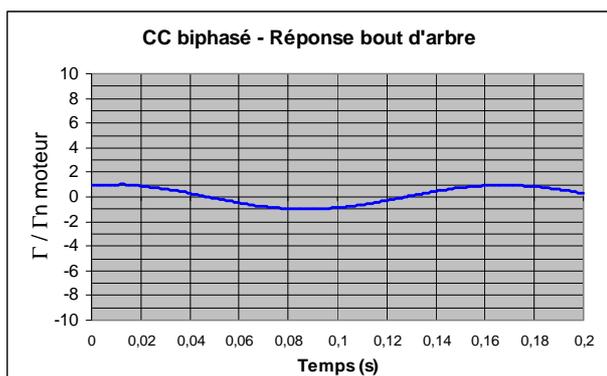
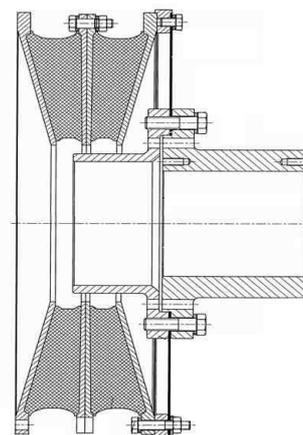


Figure 6.44 – Réponse au court-circuit biphasé Accouplement à plots élastiques



Dans le cas des turboalternateurs, l'utilisation pour le réducteur de vitesse de la technique de l'arbre torsible est très efficace. Dans cette technique (figure 6.45), l'arbre supportant la roue du réducteur est creux, et l'alternateur est accouplé à l'arbre petite vitesse du réducteur par l'intermédiaire d'un arbre passant à l'intérieur de la roue et flasqué de l'autre côté de la roue. La longueur de cet arbre intérieur et son petit diamètre lui confère une raideur torsionnelle beaucoup plus faible, impactant directement la première fréquence propre.

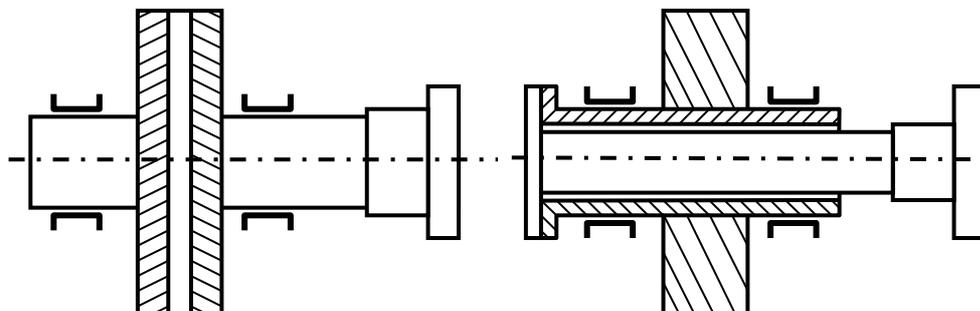


Figure 6.45 – Roue chevron de réducteur avec arbre normal et arbre torsible

Typiquement, sur une ligne turboalternateur, la première fréquence propre de torsion passe de 32 à 20 Hz et la réponse maximale au court-circuit de 7 à 2,4 fois le couple nominal.

Néanmoins, il ne s'agit pas que de baisser le rapport  $\Gamma_{\max}/\Gamma_n$  dans une ligne d'arbres. Il faut encore s'assurer que les contraintes développées sont admissibles. En effet, si l'on agit sur un diamètre de tronçon pour ajuster une fréquence propre, on va changer le module de torsion de ce tronçon. Ceci est illustré dans les figures 6.46 et 6.47 établies sur le cas du turboalternateur ayant servi à l'étude du paragraphe 3.3.1. Dans la plage de raideur considérée, la fréquence propre du premier mode propre varie entre 5,01 et 12,27 Hz.

La figure 6.46 donne la valeur de  $\Gamma_{\max}/\Gamma_n$  dans les bouts d'arbres de la turbine et de l'alternateur ainsi que dans l'arbre torsible du réducteur pour différentes valeurs de raideur de cet arbre torsible. La figure 6.47 donne la valeur de  $\sigma_{\max}/\sigma_n$  sachant que l'ajustement de la raideur du torsible se fait par son diamètre extérieur.

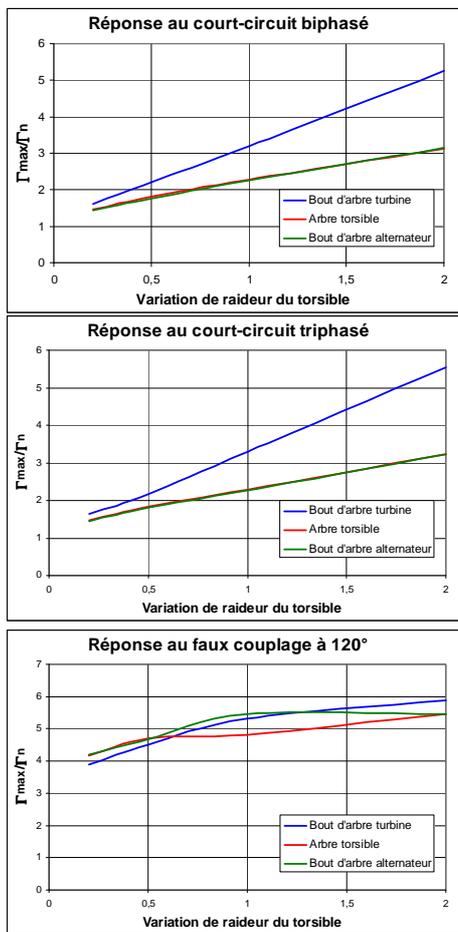


Figure 6.46 – Réponses maximales en couple en fonction de la raideur de l'arbre torsible

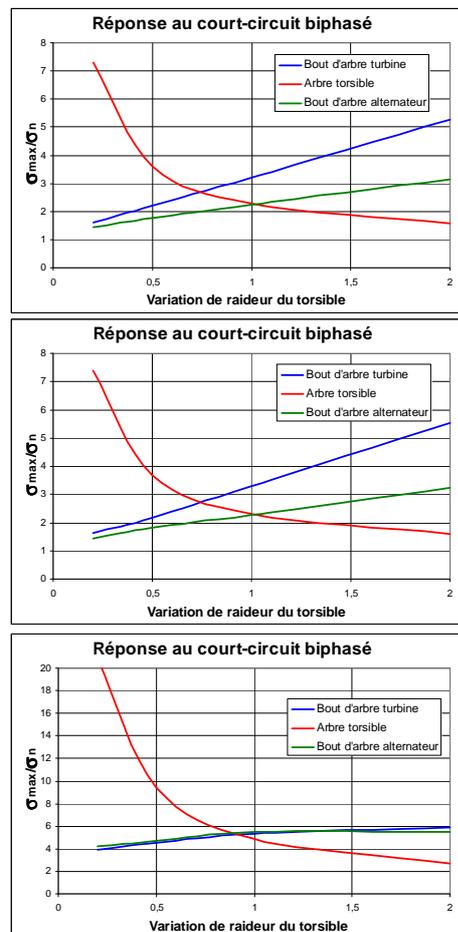


Figure 6.47 – Réponses maximales en contrainte en fonction de la raideur de l'arbre torsible

De ces figures, il apparaît que le meilleur compromis correspond à une raideur de torsion égale à 90% de celle utilisée pour la construction. Encore reste-t-il à vérifier si cette valeur peut être installée technologiquement.

## 6.4 Couplage flexion torsion

Certains motocompresseurs ont de très grandes plages de fonctionnement pour adapter la production de gaz à la demande. C'est le cas d'une application de

reformage catalytique en raffinerie qui mérite quelques mots d'explication. Cette application a pour but d'augmenter l'indice d'octane des essences en transformant des chaînes carbonées droites (l'heptane n-C7 ou  $C_7H_{16}$  a un indice d'octane RON de 0) en chaînes aromatiques (le toluène  $C_7H_8$  a un indice d'octane RON de 120). Cette transformation se fait à 500°C et 25 bar, en faisant tourner la charge d'essence avec un fort excédent d'hydrogène sur un catalyseur au platine. En marche normale, la masse molaire manipulée est de l'ordre de 7 à 8 kg/kmol. Mais il faut périodiquement régénérer le catalyseur en brûlant des dépôts par une circulation d'air. Dans ce cas, la masse molaire passe à 28 kg/kmol et il faut ralentir le régime du compresseur pour que ce fonctionnement particulier reste compatible avec les performances aérodynamiques du compresseur et la puissance de l'entraîneur.

Dans le cadre de la conception d'un tel motocompresseur centrifuge (4 étages, 5000 kW à 7360 tr/min), la plage de vitesse variait de 41 à 105% de la vitesse de rotation. La plage d'étude de l'API montant jusqu'à la survitesse (116%), il ne restait pratiquement plus aucune plage de vitesse disponible pour loger les fréquences propres de torsion, tel qu'illustré par le diagramme de Campbell de la figure 6.48.

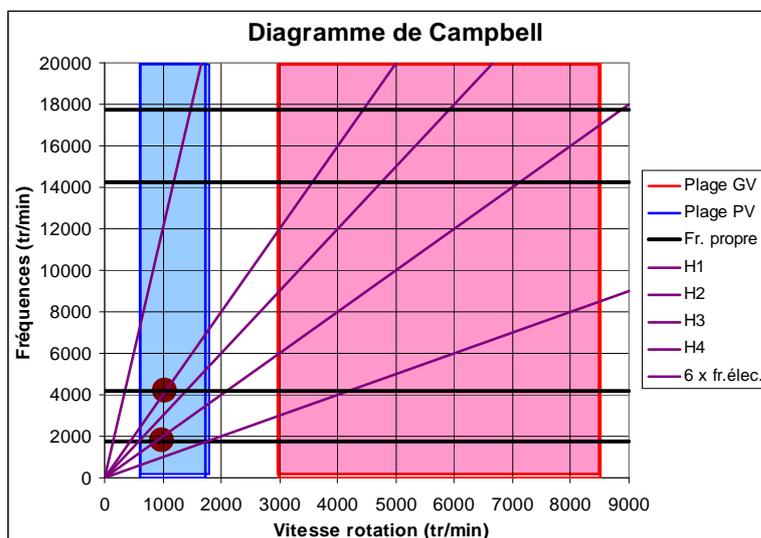


Figure 6.48 – Diagramme de Campbell d'un motocompresseur de reformage catalytique

De nombreuses résonances se font jour. Pour chacune d'entre elles, il a fallu effectuer un calcul en fatigue. L'harmonique H12 (6 fois la fréquence électrique) a été placée parce que les excitations stationnaires du moteur électrique tombent en résonance sur les 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> modes propres de torsion.

Bien qu'un court-circuit soit hautement improbable, puisqu'il ne peut se produire que sur la longueur toujours limitée de câbles enterrés entre le variateur de fréquence et le moteur, ceci est déjà arrivé sur des sites. L'étude de résistance aux courts-circuits doit donc être réalisée et sur toute la plage de la vitesse de rotation. Pour cette machine, on trouve deux résonances des modes propres de torsion respectivement à 57% de vitesse sur le fondamental de la fréquence d'alimentation électrique du moteur et à 69% de vitesse sur son harmonique 2. Ces résonances sont repérées sur la figure 6.48. En se plaçant en résonance, la réponse au couple de court-circuit triphasé dépasse la capacité maximale de l'accouplement du compresseur.

Avant de chercher une solution technologique différente, on a voulu voir si la modélisation était correcte. Les amortissements modaux choisis pour l'étude torsionnelle correspondent à un fonctionnement stable. Or, pendant le court-circuit, les couples développés font plusieurs fois le couple nominal. Au niveau du multiplicateur entre le moteur électrique et le compresseur centrifuge, ce couple se traduit par des réactions de denture qui sollicitent les paliers du multiplicateur pour que les mobiles restent en équilibre. L'idée consiste donc à modéliser le déplacement dans les paliers hydrodynamique et de bénéficier de leur amortissement localisé élevé

pour participer à l'amortissement global des modes propres de torsion. La figure 6.49 représente la transmission aux paliers de ces réactions de denture.

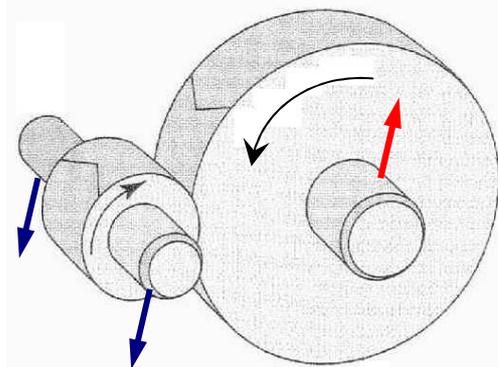


Figure 6.49 – Transmission des réactions de denture aux paliers

Ceci nécessite un calcul couplé flexion torsion. Ce calcul a été réalisé par un laboratoire spécialisé danois qui disposait du code correspondant. Le résultat de l'étude est de disposer d'amortissements modaux relatifs aux modes propres de torsion, dus aux paliers du multiplicateur qui vont s'ajouter aux amortissements normaux de torsion.

Le tableau 6.50 donne le résultat pour tous les modes propres calculés (flexion et torsion), avec leurs amortissements modaux, comparés à ceux du calcul en torsion seule.

Tableau 6.50 – Fréquences propres couplées flexion-torsion		
Calcul flexion torsion		Torsion seule
Fréquence propre (Hz)	Amortissement modal	Fréquence propre (Hz)
9,5	> 1	
9,7	> 1	
28,5	0,010	29,4
33,6	0,77	
34,4	0,77	
68,4	0,026	69,6
257,5	0,014	237,3
268,5	0,007	295,4

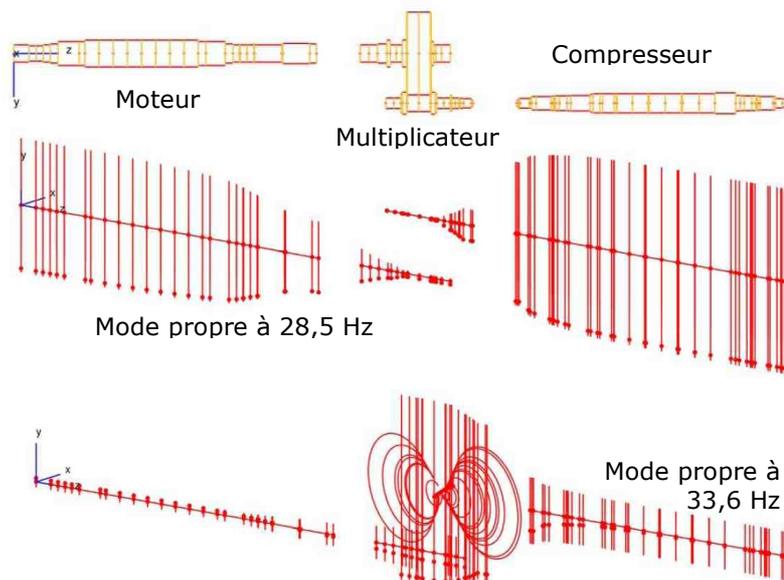


Figure 6.51 – Modes propres couplés flexion torsion

La figure 6.51 montre le modèle de la ligne d'arbres, ainsi que les deux modes propres à 28,5 et 33,6 Hz. Les barres verticales représentent les angles de torsion et les ellipses les trajectoires latérales. Le premier mode propre comporte essentiellement de la torsion, le second un fort couplage flexion torsion (mode propre de basculement du mobile grande vitesse du multiplicateur). Ceci explique la différence entre leurs amortissements modaux 0,01 et 0,77.

Malheureusement, dans le modèle étudié, les amortissements modaux supplémentaires sont de 0,01 et de 0,03 sur les deux résonances à 28,5 et 68,4 Hz, car il y a peu de participation de la flexion. Ceci était intéressant comparé à la valeur empirique d'amortissement modal de 0,01 qui était utilisée, mais n'est plus à considérer au regard de la valeur de 0,07 mesurée plus récemment sur des lignes motocompresseurs.

Cette étude ne s'est pas avérée suffisante pour ne pas modifier la technologie prévue. Le tableau 6.52 indique bout d'arbre par bout d'arbre les valeurs de couples instationnaires maximaux auxquelles on a pu atteindre sous l'effet des courts-circuits biphasés et triphasés sur les deux résonances et à la vitesse nominale. Les symboles PV et GV signifient petite vitesse et grande vitesse. Les formules types de court-circuit sont l'équation (6.29) pour le court-circuit triphasé et (6.30) pour le biphasé.

$$\Gamma / \Gamma_n = 0,016 - 0,634 e^{-19,74t} - 5,96 \sin(\omega t - 0,236) e^{-28,64t} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \Gamma / \Gamma_n = & -1,853 + 1,93 e^{-1,04t} + 0,181 \sin(\omega t + 0,7) e^{-7t} + 0,934 \sin(\omega t) e^{-48t} \\ & - 0,887 \sin(\omega t / 6 - 2,285) e^{-24,4t} - 2,191 \sin(2 \omega t - 2,137) e^{-0,24t} \\ & + 1,642 \sin(2 \omega t + 0,022) e^{-77t} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Condition du calcul	Résonance 57%		Résonance 69%		Vit. nomin. 100%	
	biphasé	triphasé	biphasé	triphasé	biphasé	triphasé
Maxi couple excitation	4,36 $\Gamma_n$	5,14 $\Gamma_n$	3,98 $\Gamma_n$	5,20 $\Gamma_n$	4,23 $\Gamma_n$	5,48 $\Gamma_n$
Arbre moteur	3,05	11,08	2,48	10,71	1,86	4,65
Accouplement PV	3,21	11,46	2,61	11,12	1,98	4,94
Arbre multi PV	3,23	11,56	2,63	11,21	1,98	5,02
Arbre multi GV	4,90	12,06	4,72	11,98	2,96	6,79
Accouplement GV	4,99	12,04	4,89	11,97	3,05	6,85
Arbre compresseur	4,98	11,94	4,89	11,87	3,05	6,82

Dans tous les cas, la réponse maximale instationnaire se situe au niveau de l'accouplement du compresseur (GV). Les réponses en résonance sont deux fois plus sévères que celles à vitesse nominale. Le court-circuit triphasé est environ 2,5 fois plus sévère que le biphasé, mais même si son occurrence est beaucoup plus faible, son apparition détruirait l'accouplement. D'autres mesures de protection ont été prises.

Rien ne dit que pour d'autres applications, on aurait pu bénéficier d'un gain d'amortissement supérieur. Un autre intérêt réside dans la définition de fréquences propres de torsion plus précises que sur le modèle de torsion seule (2 à 3% plus basses sur les deux premières, et jusqu'à 10% d'écart sur les suivantes).

## 6.5 Sources de dispersion

Avant de conclure ce chapitre, on voudrait insister sur les sources de dispersion qui peuvent conduire à des écarts entre la prévision et la réalité des choses.

Aux paragraphes 6.1 et 6.2, on a cherché des améliorations à apporter aux modélisations pour réduire les écarts de prévision pour les accouplements frettés et les arbres épaulés.

La validation du code d'analyse torsionnelle utilisé, réalisée sur un rotor de turbine à vapeur suspendu verticalement, a conduit aux résultats du tableau 6.53.

Fréquence propre	1	2	3	4	5	6	7
Mesure	485	709	1038	1183	1850	1880	2314
Prévision	486	668	1079	1170	1749	1818	2326
Ecart	+0,2%	-5,8%	+3,9%	-1,1%	-5,5%	-3,3%	+0,5%

Il est donc difficile de prévoir correctement plusieurs fréquences propres.

Dans le cas du turboalternateur utilisé au paragraphe 6.3.3.1, une variation des raideurs des accouplements provoque les variations suivantes :

- 10% de raideur de l'accouplement entre turbine et réducteur : 0,3% sur la 1<sup>ère</sup> fréquence propre et 2,1% sur la deuxième ;
- 10% de raideur de l'arbre torsible liant le réducteur à l'alternateur : 3,4% sur la 1<sup>ère</sup> fréquence propre et 0,5% sur la deuxième ;
- ces deux effets se cumulant directement (mais présentant aussi une possibilité d'ajustement de ces deux fréquences propres).

Un autre exemple à citer est celui de six groupes motocompresseurs identiques installés sur un même site gazier, sur lesquels 36 valeurs de la 1<sup>ère</sup> fréquence propre ont été obtenues dans différentes conditions de fonctionnement. L'analyse statistique de ces résultats a dégagé une première fréquence propre moyenne de 8,61 Hz avec un écart-type de 6,2% (intervalles de confiance de 95% sur la moyenne et sur l'écart-type).

Cet écart-type est très significatif ! Une source technologique de dispersion est constituée par les accouplements à plots élastiques (figure 6.44) utilisés avec un matériau dont les caractéristiques sont fonction de la température et du couple appliqué. Ceci est probablement vrai aussi dans le cas des accouplements à lames (figures 6.3 et 6.43), pour lesquelles la raideur torsionnelle des lames flexibles, déterminée expérimentalement, est fonction du couple de serrage installé, et l'on connaît les difficultés d'obtenir un couple de serrage précis dans une zone d'accessibilité toujours limitée.

Or c'est bien la position de la première fréquence propre qui détermine la réponse aux excitations instationnaires d'origine électrique. De plus, dans ce cas, les couples de court-circuit ou de démarrage sont calculés temporellement point par point, puis transformés pour la commodité des calculs mécaniques sous la forme de fonctions sinusoïdales amorties du type (6.20) avec des termes propres à chaque constructeur.

Enfin, on a vu que lors de l'élimination du court-circuit, le temps d'élimination du défaut a une forte influence sur la réponse instationnaire.

Contrairement aux réponses aux excitations stationnaires, l'amortissement modal influe peu sur les amplitudes instationnaires. Il joue surtout sur la décroissance des réponses et donc sur le nombre de cycles à considérer dans la détermination en fatigue, qui elle-même est basée sur une définition statistique. Les remarques formulées sur l'influence des accouplements sont tout aussi vraies pour les amortissements modaux.

De leur côté, les excitations stationnaires sont purement indicatives en fonction de quelques mesures sur des machines discrètes.

Finalement, les sources de dispersion des résultats sont très nombreuses.

## 6.6 Conclusion

La conclusion de ce chapitre est que la modélisation en torsion reste toujours perfectible. Pour ceci, il est nécessaire de disposer de résultats expérimentaux sur des machines en service, et la technique de la télémétrie s'avère très efficace, couplée à un traitement du signal par transformée de Fourier rapide.

De nouvelles modélisations ont été proposées pour les éléments frettés et les arbres épaulés afin d'améliorer la prévision des fréquences propres de torsion. Pour les arbres épaulés, on a proposé un modèle analytique et un modèle aux éléments finis, tous deux introduisant des tronçons coniques. On remarquera de plus que la connaissance du rayon du congé de raccordement permettrait d'introduire directement la concentration de contrainte correspondante.

Les problèmes les plus ardues restent liés à l'utilisation des machines électriques dans les lignes d'arbres avec les excitations stationnaires des couples dits quelquefois "pendulaires" émis par les générateurs de fréquence, et surtout par les phénomènes instationnaires.

Contrairement aux phénomènes de flexion, la détermination des réponses instationnaires est très importante. Pour les turboalternateurs, les cas de courts-circuits et de faux couplages sont dimensionnants. Pour les motocompresseurs centrifuges, les cas de démarrage et de courts-circuits le sont, et dans ce cas, le démarrage n'est pas accidentel comme le court-circuit, car il fait au contraire partie du cycle de vie normal de la machine.

Dans ces conditions, il est naturel que les analyses torsionnelles débouchent pratiquement toutes sur des études de tenue en fatigue, avec la nécessité de définir des cycles de vie.

On a vu que les sources de dispersion des résultats resteront toujours très nombreuses, ce qui amènera à prendre des marges importantes dans les évaluations de tenue en fatigue.

Enfin, le couplage flexion torsion est un moyen de mieux appréhender les fréquences propres et amortissements modaux nécessaires aux calculs de réponse.

## 7. Systèmes disques aubes

Les roues des turbomachines sont le siège d'échanges d'énergie importants entre le gaz et le rotor. La puissance spécifique pouvant dépasser 100 kW par kilogramme de masse de roue donne une idée de l'amplitude des excitations aérodynamiques qui s'exercent sur des pièces tournantes déjà très sollicitées par les effets centrifuges.

En ce qui concerne les chargements centrifuge, on remarquera que les standards applicables demandent la réalisation d'essais particuliers en survitesse, équivalents des essais réglementaires hydrauliques des récipients sous pression :

- essais du premier rotor d'une série de turbines à vapeur à la vitesse maximale transitoire qui serait atteinte en cas de disjonction à pleine charge, en supposant que le système de régulation de vitesse soit inefficace, et que ce soit le déclenchement de la protection de survitesse (110%) qui provoque la fermeture de la vanne d'arrêt **[CEI45-1]**, et après détente complète de la vapeur incluse dans le corps ;
- essai de chaque roue de compresseur centrifuge à au moins 115% de la vitesse maximale continue, soit 121% de la vitesse nominale pour les machines à vitesse variable **[API617]**, après quoi on fait des vérifications dimensionnelles et un ressuage fluorescent.

Il est certain que ces essais de survitesse vont plastifier localement les zones de fortes concentrations de contrainte (pieds des aubes de turbine, raccordement des aubes de compresseur sur les disques du moyeu et du flasque).

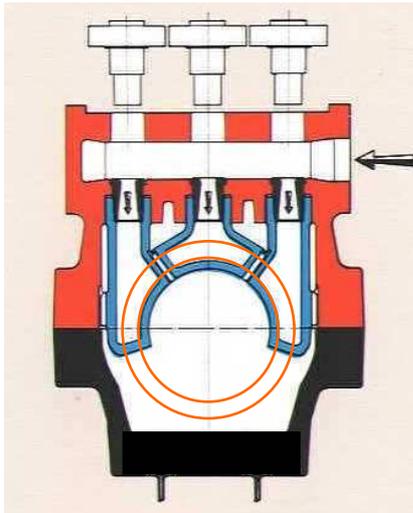
La plupart des avaries des turbomachines mettent en cause les phénomènes vibratoires des systèmes disques aubes et leur tenue en fatigue. Comme les machines de procédé sont construites à l'unité, le retour d'expérience est forcément limité et la recherche de solutions fiables de réparation demande des investigations souvent longues, concourant à des pertes de production importantes pour les exploitants.

Dans ce chapitre, on présente deux applications, l'une relative aux aubages de turbines à vapeur industrielles soumis à l'injection partielle, l'autre aux vibrations de roues de compresseurs centrifuges.

### 7.1 Vibrations d'aubages de turbines à vapeur soumis au phénomène d'injection partielle

#### 7.1.1 Dispositif d'injection partielle

L'injection partielle est une technique spécifique des turbines à vapeur industrielles. Elle consiste à installer sur les étages dits "de régulation" différents secteurs angulaires, chacun étant équipé d'aubages distributeurs et étant alimenté par une soupape régulatrice d'admission de vapeur, comme représenté sur la figure 7.1. Ce dispositif a pour but d'améliorer le rendement de la turbine lors des fonctionnements en marche partielle où les premiers étages réalisent l'essentiel de la puissance délivrée, en créant des triangles de vitesse corrects notamment sur la partie injectée du premier étage. Les grandes turbines des centrales de production d'électricité n'ont pas ce dispositif et sont alimentées en injection totale dès la première rangée.



Le pourcentage d'injection (partie de la circonférence alimentée) est choisi pour ne pas avoir à installer des aubes trop courtes qui auraient trop de pertes par frottement. Ce dispositif est également utilisé sur les étages courants de certaines machines à haute pression et à petit débit pour la même raison.

Figure 7.1 – Dispositif d'injection partielle

Sur l'aspect dynamique, les aubes sont soumises des sollicitations autres que celles d'un étage courant. En plus du sillage des distributeurs, elles subissent en quelque sorte des "chocs", dans un sens ou dans l'autre, à chaque entrée et chaque sortie de chaque secteur injecté. La figure 7.2 représente le profil de la charge statique appliquée à chaque aube sur un tour.

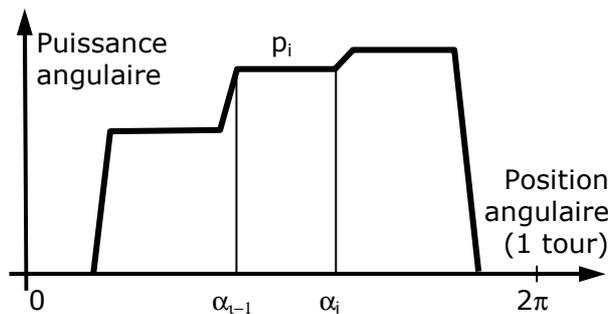


Figure 7.2 – Distribution angulaire de la puissance en injection partielle

### 7.1.2 Montage en paquets des aubages des turbines à action

Les aubages tournants des turbines à action sont assemblés par paquets par l'intermédiaire d'un ruban fixé par rivetage sur les sommets d'aubages (figure 7.3). Ce ruban sert à la fois à améliorer les performances aérodynamiques de l'étage en réalisant une étanchéité de la veine vapeur au diamètre extérieur, et à transmettre des efforts tangentiels d'une aube à l'autre.



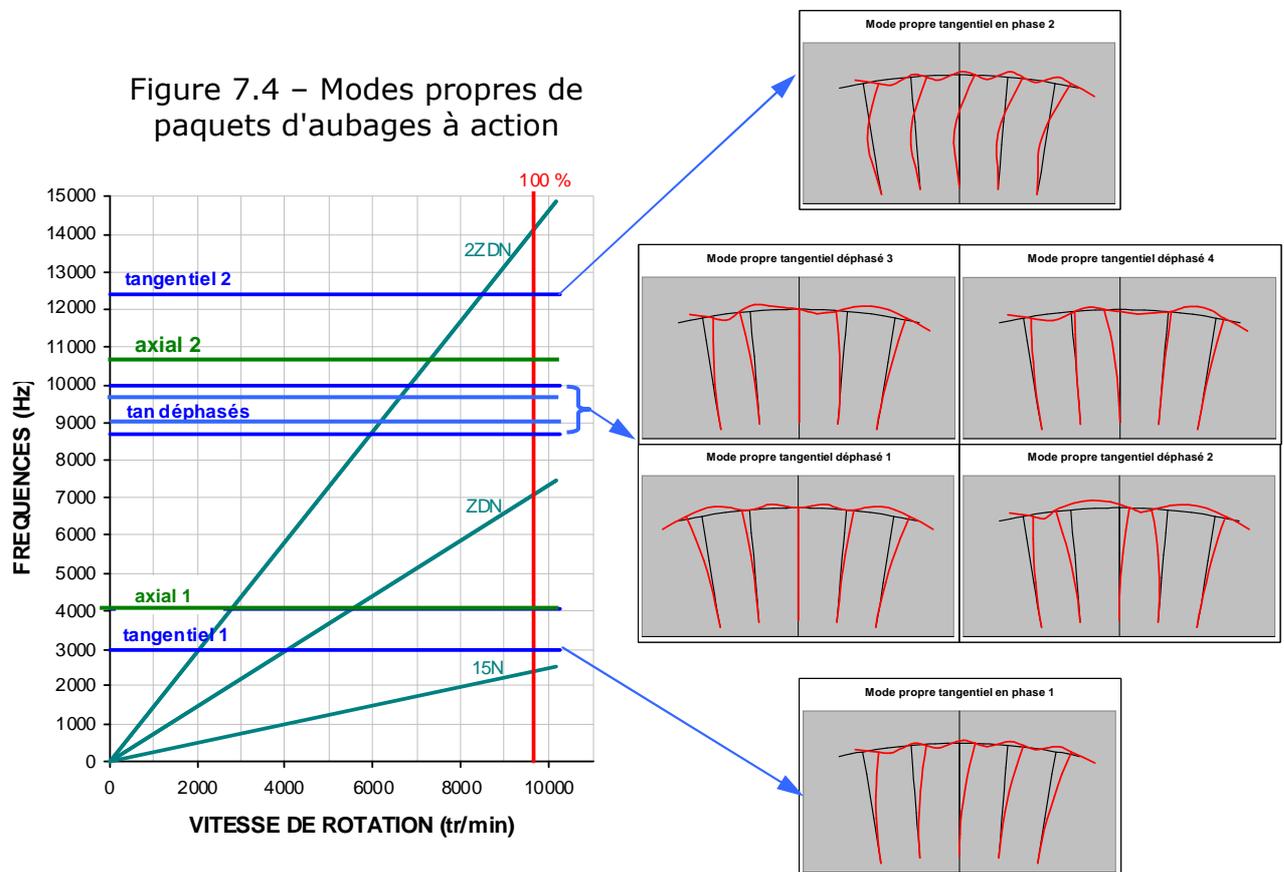
Figure 7.3 – Montage en paquets des aubages tournants

Sur une rangée de turbine à vapeur à action, on essaie d'avoir un nombre d'aubages tournants correspondant à un nombre premier, ne serait-ce que pour éviter un phénomène de sirène avec celui des distributeurs (dont le nombre est pair pour autoriser le démontage au plan de joint). On trouvera en conséquence des paquets de nombres différents d'aubages qui auront donc des susceptibilités différentes aux excitations. Les calculs doivent être réalisés pour chaque rangée, pour chaque type de paquet. Du fait que les paquets ne représentent pas une sous division exacte du disque, on n'applique pas les techniques de symétrie cyclique, mais les calculs sont faits paquet par paquet en structures indépendantes.

### 7.1.3 Fréquences propres d'un paquet d'aubages

Si le ruban renforce considérablement la résistance d'un paquet d'aubages par rapport à un aubage seul grâce à cette transmission d'efforts, il apporte une très grande richesse de la carte modale du paquet. En plus des modes propres fondamentaux de flexion dans les deux directions axiale et transversale ainsi que de torsion, il apporte des modes propres déphasés ( $n-1$  s'il y a  $n$  aubages dans le paquet) à des fréquences intermédiaires. La figure 7.4 représente les premiers modes propres qui se développent dans la direction tangentielle.

Dans le cas de l'injection partielle, la présence des discontinuités dans l'écoulement crée une excitation sur les harmoniques de la vitesse de rotation jusqu'à un ordre très élevé. Cette richesse de l'excitation s'ajoute à la richesse de la carte modale et est représentée sur le diagramme de Campbell de la figure 7.4, tracé conformément au standard API 612 [API612]. Pour des aubages courts comme ceux étudiés, il n'y a pratiquement aucun raidissement centrifuge.



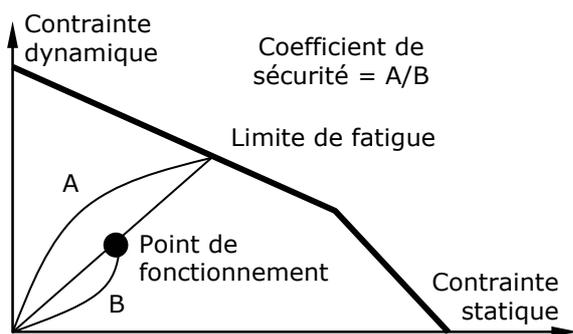
On remarquera que les déformées des différents aubages du paquet sont très différentes entre les différents modes propres tangentiels déphasés, ce qui leur confère des susceptibilités vibratoires très différentes en fonction des excitations qui leur sont imposées et qui explique de nombreux incidents parvenus sur des turbines à vapeur. Compte tenu des amortissements modaux très faibles, le mode propre qui se trouve en résonance a une importance prépondérante dans la réponse. De plus, les incertitudes liées au processus de fabrication font que la distribution statistique des fréquences propres peut couvrir une plage non négligeable.

## 7.1.4 Considérations générales sur la tenue en fatigue

On s'intéresse beaucoup plus aux modes propres qui se développent dans la direction tangentielle, donc dans le plan de la roue, comme sur la figure 7.4. La plupart des ruptures observées leur sont imputables. Généralement, les modes propres tangentiels déphasés sont excités par le sillage des distributeurs, surtout lorsqu'on arrive vers les étages moyenne pression qui sont plus hauts, alors que le premier mode propre en phase est excité par l'injection partielle pour les aubages de tête et par toutes les non uniformités d'écoulement pour les aubages terminaux basse pression. Il faut être très prudent dans la conception de ces rangées d'aubages et considérer des coefficients de sécurité en fatigue élevés.

Les nombres de cycles auxquels sont soumis les matériaux sont considérables. A 1000 Hz, un an de fonctionnement correspond à  $3 \cdot 10^{10}$  cycles, ce qui nous place déjà très à droite dans les courbes de Wöhler (figure 6.42). Dit d'une autre façon, la détermination conventionnelle des limites de fatigue en laboratoire se fait en  $10^7$  cycles, ce qui représente 3 heures de fonctionnement pour l'excitation d'un mode propre à 1000 Hz (moins de 20 minutes pour  $10^6$  cycles).

En plus des contraintes alternées appliquées au matériau, on tient compte des contraintes statiques appliquées (effets centrifuges, poussée de la vapeur, etc.), et



des concentrations de contraintes issues des calculs aux éléments finis, pour caractériser la limite en fatigue dans des diagrammes de Goodman ou de Haigh, comme présenté dans le recueil sur les données technologiques sur la fatigue de Brand, Flavenot, Grégoire et al. **[BrFlav]** édité en 1980 par le CETIM. La figure 7.5 montre un diagramme de Haigh idéalisé tel que demandé par le standard API 612, avec la définition du coefficient de sécurité sur la ligne qui rejoint l'origine, le point de fonctionnement et la limite de fatigue. D'autres critères plus sophistiqués comme le critère de fatigue multiaxiale de

Dang Van **[DangVan]** peuvent être appliqués, mais ils nécessitent plus de calculs, ce qui est réhébitoraire dans la conception de machines unitaires sous spécification.

Lorsqu'on traverse la ligne de condensation de la vapeur on peut avoir accumulation des sels transportés et éventuellement diminution des limites de fatigue des aciers inoxydables martensitiques par le phénomène de fatigue-corrosion **[Lieurade]**. La Commission Electrotechnique Internationale a d'ailleurs développé en 1991 la spécification technique CEI TS 61370 pour définir la qualité de l'eau utilisée dans les turbines à vapeur **[CEI61370]**.

## 7.1.5 Réponse vibratoire à l'injection partielle

Compte tenu de l'importance de la prévision du phénomène d'injection partielle sur les performances des turbines à vapeur industrielles, et du fait que les avaries par ruptures d'aubages sur ces turbines ne sont pas rares, le CETIM a engagé une étude expérimentale sur ce domaine dans le cadre de ses actions professionnelles, mais les progrès sont trop lents pour qu'un résultat soit encore exploitable. Par ailleurs, les

moyens d'évaluation des contraintes dynamique à notre disposition sont des méthodes pseudo empiriques.

A la suite d'un incident survenu sur une turbine à vapeur de récupération d'énergie dans une papeterie, il est apparu qu'une détermination plus scientifique des contraintes dynamiques était nécessaire. L'application se réfère à une rangée développant 5 400 kW à 5 305 tr/min et constituée de 115 aubages mobiles de 95,5 mm de hauteur sur un diamètre de base de 1 075 mm. Les paquets concernés comportent 7 aubages. On voit à la figure 7.6 le rotor avec l'aubage incidenté qui se situe sur l'étage suivant l'obturateur à grille après le soutirage (cf. figure 1.5), l'écoulement se faisant vers l'avant ; la partie supérieure de cet obturateur est restée en place après qu'on ait démonté la demi-partie supérieure de l'enveloppe.

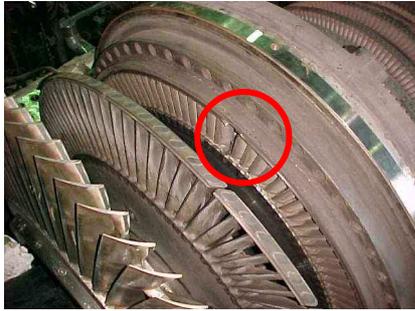


Figure 7.6 – Rotor incidenté de turbine

L'examen des faciès de rupture, figure 7.7, ayant montré la présence de fatigue sous l'effet d'une sollicitation dynamique dans la direction tangentielle, on ne s'intéresse qu'aux modes propres dans cette direction. Une généralisation aux deux directions tangentielle et axiale est parfaitement envisageable.

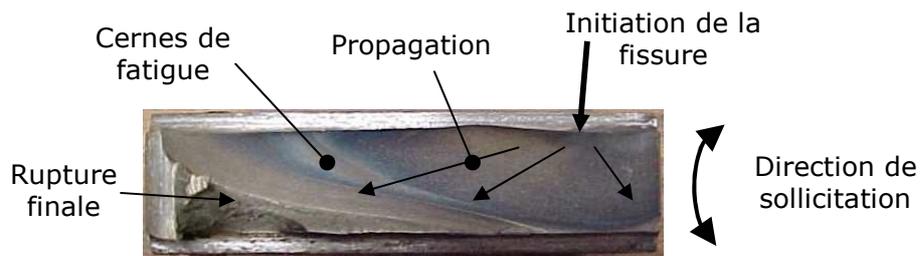


Figure 7.7 – Faciès de rupture du pied d'aubage

Le principe de ce développement est le suivant. Tout d'abord, il faut disposer de la carte modale du paquet d'aubages :

- pour ceci, on calcule les fréquences propres et modes propres par une méthode aux éléments finis (analogue à la figure 7.4),
- puis on dresse un tableau des contraintes modales dans les zones d'intérêt, généralement le pied et le tenon.

Pour tenir compte des incertitudes de modélisation et de réalisation, on décide de placer le premier mode propre tangentiel en résonance sur l'harmonique le plus proche de la vitesse de rotation, soit l'harmonique 9 à 795 Hz.

Ensuite, il faut connaître le stimulus. Les calculs aérothermodynamiques donnent le profil de l'effort appliqué sur chaque ailette (figure 7.2). Ce profil comporte des plateaux correspondant à chaque partie d'injection, ainsi que des phases de montée et de descente entre ces plateaux. Ces phases sont déterminées soit par les hypothèses des méthodes empiriques évoquées plus haut, soit par des analyses d'écoulement Navier Stokes. La puissance angulaire dans le secteur d'indice  $i$  est donnée par l'équation (7.1) :

$$P_{\text{secteur } N^{\circ}i} = \frac{\Delta H_{\text{secteur}} \dot{M}_{\text{secteur}}}{\text{Angle}_{\text{secteur}}} \quad (7.1)$$

avec  $\Delta H$  chute d'enthalpie et  $\dot{M}$  débit massique dans le secteur, soit en généralisant de façon symbolique sur la roue complète :

$$Pr = \sum_{i=1}^n \left( [p_1 \cdots p_{i-1}]_0^{\alpha_i - 1} [p_i]_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} [p_{i+1} \cdots p_n]_{\alpha_i}^{2\pi} \right) \quad (7.2)$$

On fait alors une décomposition en série de Fourier de ce stimulus avec :

terme constant :  $A_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i (\alpha_i - \alpha_{i-1})}{2\pi}$  (7.3)

termes en cosinus :  $A_j = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} p_i \cos(j\theta) d\theta}{\pi}$  et en en sinus :  $B_j = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} p_i \sin(j\theta) d\theta}{\pi}$

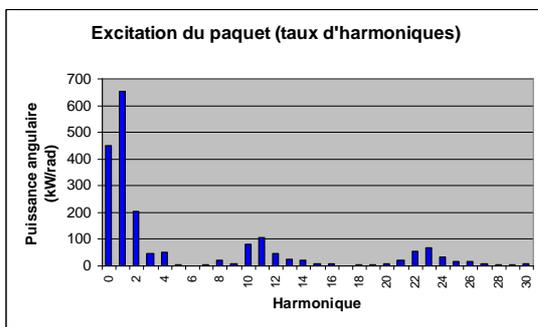


Figure 7.8 – Contenu fréquentiel de l'excitation

En couvrant la zone des fréquences propres étudiées, on obtient la figure 7.8. Si cette zone couvre l'excitation par les distributeurs, il faut les ajouter au stimulus.

Il faut alors remarquer que dans la rotation, chaque aubage du paquet est soumis au même stimulus, mais pas au même instant, car chaque aube entre à son tour dans la zone injectée. Ce retard s'exprime par un déphasage de l'excitation entre aubages égal à :

$$2\pi N_h / N_a \quad (7.4)$$

où  $N_h$  est le numéro de l'harmonique qui nous

intéresse et  $N_a$  le nombre d'aubages de la rangée tournante. La prise en compte de ce déphasage est fondamentale dans ce qui suit.

Une fois que l'on dispose de ces éléments, on peut établir la réponse globale du paquet d'ailettes pour le mode propre considéré et pour un amortissement donné en utilisant une généralisation de la réponse modale. Pour le 1<sup>er</sup> mode propre qui est celui le plus sollicité, on a l'équation (7.5) de la participation modale :

$$\frac{\ddot{q}_1}{\omega_1^2} + \frac{2\zeta_1 \dot{q}_1}{\omega_1} + q_1 = [\phi_1]^t [F_{exc}] \quad (7.5)$$

où  $\omega_1$  est la pulsation propre de ce mode propre et  $[F_{exc}]$  le vecteur d'excitation défini comme suit.

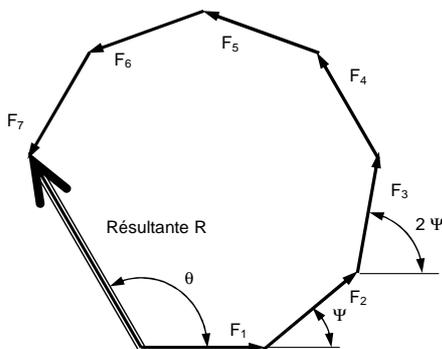


Figure 7.9 – Combinaison de Fresnel des excitations

Le vecteur d'excitation  $[F_{exc}]$  est une série de Fourier dont chaque terme comporte la somme des stimuli sur chaque ailette du paquet. Par exemple, pour le 1<sup>er</sup> mode propre tangentiel où toutes les ailettes du paquet ont la même déformée, on représente cette combinaison sous la forme de la combinaison des vecteurs de Fresnel de la figure 7.9. Si l'on n'est pas sur le 1<sup>er</sup> mode propre, les longueurs et direction des vecteurs tiennent compte des amplitudes relatives et des phases des déplacements de chaque ailette du paquet.

En combinant les expressions (7.6) de chacune des excitations :

$$\begin{cases} F1_{k \text{ exc}} = F_s [A_k \cos(k \omega_r t) + B_k \sin(k \omega_r t)] \\ F2_{k \text{ exc}} = F_s [A_k \cos(k \omega_r t + k\Psi) + B_k \sin(k \omega_r t + k\Psi)] \\ \dots \\ Fn_{k \text{ exc}} = F_s [A_k \cos(k \omega_N t + k(n-1)\Psi) + B_k \sin(k \omega_N t + k(n-1)\Psi)] \end{cases} \quad (7.6)$$

on obtient l'expression générale du vecteur d'excitation (7.7) pour le mode propre  $i$  et l'harmonique  $k$  :

$$[\phi_i]^T [F_{k \text{ exc}}] = F_s [C_{ik} \cos(k \omega_N t) + D_{ik} \sin(k \omega_N t)] \quad (7.7)$$

$$\text{avec : } C_{ik} = A_k \sum_{n=1}^{N_A} [\phi_{in} \cos((n-1)k\Psi)] + B_k \sum_{n=1}^{N_A} [\phi_{in} \sin((n-1)k\Psi)]$$

$$D_{ik} = B_k \sum_{n=1}^{N_A} [\phi_{in} \cos((n-1)k\Psi)] - A_k \sum_{n=1}^{N_A} [\phi_{in} \sin((n-1)k\Psi)]$$

En revenant sur le premier mode propre, on cherche une solution harmonique pour chaque composante de la série de Fourier :

$$q_k = a_k \cos(k \omega_r t) + b_k \sin(k \omega_r t) \quad (7.8)$$

En notant  $H_{\text{rés}}$  l'harmonique de la résonance  $H_{\text{rés}} = \frac{\omega_1}{\omega_r}$ , c'est à dire  $\frac{k \omega_r}{\omega_1} = \frac{k}{H_{\text{rés}}}$ , il vient par identification :

$$\begin{cases} \frac{a_k}{q_s} = \frac{1}{N_A} \frac{C_k \left[ 1 - \left( \frac{k}{H_{\text{rés}}} \right)^2 \right] - 2 \zeta_1 D_k \frac{k}{H_{\text{rés}}}}{\left[ 1 - \left( \frac{k}{H_{\text{rés}}} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2 \zeta_1 \frac{k}{H_{\text{rés}}} \right]^2} \\ \frac{b_k}{q_s} = \frac{1}{N_A} \frac{D_k \left[ 1 - \left( \frac{k}{H_{\text{rés}}} \right)^2 \right] + 2 \zeta_1 C_k \frac{k}{H_{\text{rés}}}}{\left[ 1 - \left( \frac{k}{H_{\text{rés}}} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2 \zeta_1 \frac{k}{H_{\text{rés}}} \right]^2} \end{cases} \quad (7.9)$$

On introduit aussi la réponse stationnaire d'indice  $s$ , qui est solution de l'équation  $[K]\{X_s\} = \{F_s\}$  soit pour le 1<sup>er</sup> mode propre, une réduction de l'équation (7.5) sous la

forme :  $q_s = [\phi_1]^T [F_s]$  dont la solution  $\phi_1 F_s = \frac{q_s}{N_A}$  va donner la référence de la réponse dynamique par rapport à la réponse stationnaire.

En revenant à la réponse physique, l'amplification dynamique sur les amplitudes et sur les contraintes par rapport à la marche stationnaire s'obtient en reconstituant le signal qui vient d'être défini par sa décomposition en série de Fourier :

$$\frac{q(t)}{q_s} = \frac{a_0}{q_s} + \sum_k \left[ \frac{a_k}{q_s} \cos(k \omega_r t) + \frac{b_k}{q_s} \sin(k \omega_r t) \right] \quad (7.10)$$

dont on cherche les valeurs extrêmes dans la rotation sur un tour  $t \in \left[ 0 ; \frac{2\pi}{\omega_r} \right]$

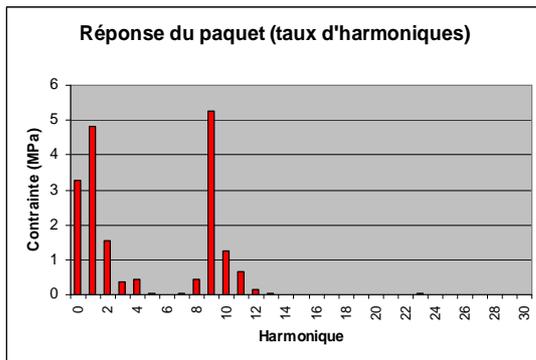


Figure 7.10 – Contenu fréquentiel de la réponse

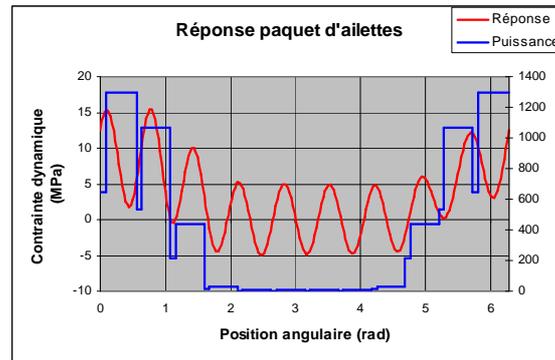


Figure 7.11 – Réponse temporelle en contrainte

La figure 7.10 donne le taux d'harmonique dans la réponse du paquet en considérant un amortissement modal de 0,0035 (2% de décrément logarithmique) et la figure 7.11 la reconstitution de l'évolution temporelle des contraintes de flexion au pied.

La réponse étant faite directement en contraintes dynamiques, il suffit alors de tenir compte des contraintes d'origine centrifuge et d'appliquer des coefficients de concentration de contrainte pour vérifier la tenue en fatigue (figure 7.12) sur le diagramme de Haigh de la figure 7.13. Le coefficient de sécurité en fatigue s'est avéré être de l'ordre de 2,5 donc a priori suffisant. Mais c'est aussi cette rangée qui traversait la ligne de saturations de la vapeur d'eau et la présence de sels recueillis sur l'étage laisse à penser que le phénomène de fatigue-corrosion (paragraphe 7.1.4) a joué en diminuant la limite de fatigue.

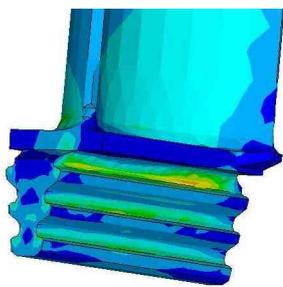


Figure 7.12 – Distribution des contraintes de Von Mises en centrifuge

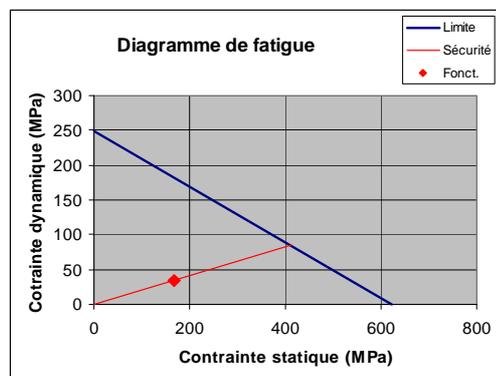


Figure 7.13 – Coefficient de sécurité en fatigue

### 7.1.6 Conclusion, choix d'un nombre optimal d'ailettes par paquets

On dispose ainsi d'une méthode analytique de calcul de la réponse à l'injection partielle, dont on a comparé les résultats par rapport à des méthodes empiriques utilisées résultant de l'expérience de deux grands constructeurs américains de turbines à vapeur. Les ordres de grandeur sont cohérents, mais avec la méthode analytique, on sait ce que l'on fait.

Dans le phénomène d'injection partielle, c'est le premier mode propre tangential

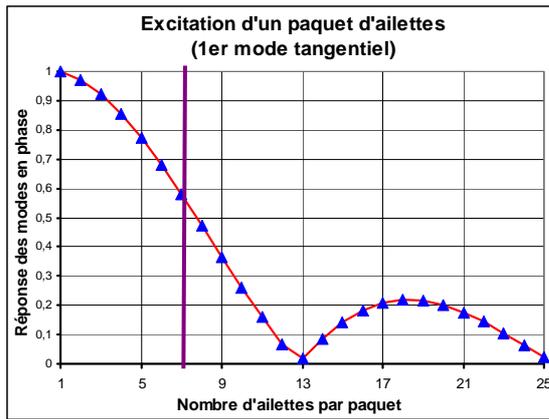


Figure 7.14 – Résultante de l'excitation tangentielle

(mode propre en phase de toutes les ailettes du paquet dans le plan de la roue) qui est affecté. En reprenant la construction des vecteurs de Fresnel de la figure 7.9, on peut chercher harmonique par harmonique de la vitesse de rotation quelle est la résultante des forces tangentielles de vapeur sur l'ensemble du paquet. La figure 7.14 montre ce résultat pour la configuration de la rangée d'aubages étudiée au paragraphe 7.1.5, c'est-à-dire pour 115 ailettes au total et une résonance sur l'harmonique 9 de la vitesse de rotation. La position des paquets de 7 ailettes, montre que ce choix, qui avait été dicté par d'autres considérations, en particulier de montage,

n'était pas optimal. Si celui-ci avait été de 13 ailettes, la situation aurait été considérablement meilleure.

Or le nombre de 13 ailettes correspond au nombre total d'ailettes de la rangée divisé par l'harmonique de la vitesse de la rotation où se trouve la résonance. C'est-à-dire que pour 13 ailettes, le cercle de la combinaison des vecteurs de Fresnel de la figure 7.9 se referme pratiquement totalement, ou que, plus physiquement, le paquet couvre une arche de sinusöide complète de la forme de l'excitation.

Ce nombre est donc optimal pour la réalisation, quitte à modifier la procédure de montage et par exemple à usiner des tenons coniques pour faciliter l'introduction du ruban avant rivetage des bouterolles.

## 7.2 Vibrations de roues de compresseurs centrifuges

En montant en vitesse de rotation, en pression et en coefficients de débit, donc en puissance, les compresseurs centrifuges ont rencontré des avaries sur les roues. Ce phénomène a été très étudié. Le calcul de structure aux éléments finis d'une structure aussi complexe demande des modèles lourds dont l'analyse dynamique est très longue, voire impensable sur les anciens calculateurs. La théorie de la propagation des ondes de Henry en 1984 **[Henry]** fait partie des travaux majeurs qui ont permis de développer les techniques de soustructuration et de répétitivité cyclique. On peut ainsi se contenter de l'analyse dynamique d'un secteur répétitif comportant une aube (et éventuellement l'aube intercalaire), et l'on est capable de reconstruire les modes propres sur l'ensemble de la structure de la roue. La figure 7.15 montre un moyeu aubagé et la roue fermée correspondante de compresseur centrifuge. Cette roue de grand coefficient de débit comporte 22 aubes tridimensionnelles, dont 11 intercalaires.

Cette théorie a été vérifiée expérimentalement sur différentes structures répétitives et parmi les premiers travaux sur des roues de compresseurs centrifuges, on citera la publication 1990 de Berlioz, Henry, Pugnet et al. **[Berlioz]**, basée sur les mesures effectuées en 1988 par Pugnet, Pocheron et Fichet **[Pugnet88]**. Des essais en rotation ont suivi pour mettre en évidence l'effet du raidissement centrifuge.

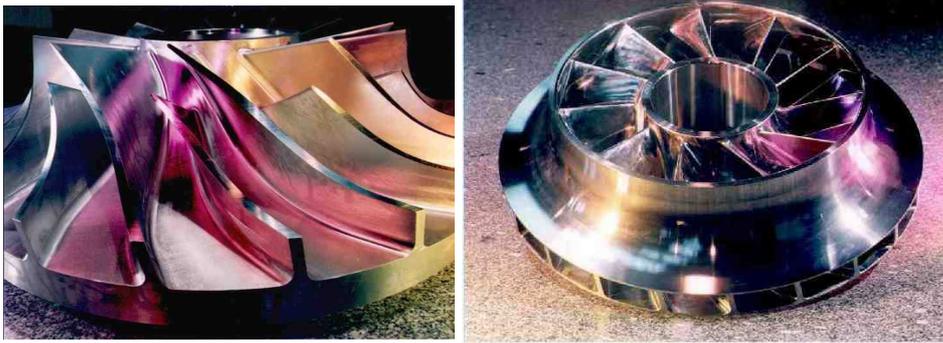


Figure 7.15 – Roue 3D de compresseur centrifuge

### 7.2.1 Développement d'une première méthode d'analyse

Lors de l'introduction de roues tridimensionnelles de compresseurs centrifuges usinées en 5 axes citée dans l'avant propos, on a d'abord développé des liaisons de répétitivité cyclique dans le code général aux éléments finis SYSTUS® **[SYSTUS]** pour l'analyse de contraintes, puis couplé SYSTUS® au code Turbodyn® développé par le LaMCoS de l'INSA de Lyon **[Jacquet]** grâce aux fichiers "Interface" de SYSTUS®. De cette façon, SYSTUS® traite la modélisation, l'aspect des contraintes d'origine centrifuge et tous les affichages, alors que Turbodyn® traite l'aspect dynamique.

### 7.2.2 Validation par des méthodes optiques

Afin de valider cette méthode d'analyse de pièces de géométrie complexe (figure 7.15) a été validée par des méthodes optiques. On a pratiqué des campagnes expérimentales de mesures de contraintes par photoélasticimétrie avec figeage des contraintes sur une roue en résine époxy (figure 7.16) et d'analyse modale par interférométrie laser (figure 7.17). Les résultats concernant la définition des fréquences et modes propres ont été publiés en 1996 par Gelin, Pugno et Jacquet-Richardet **[Gelin96-2]**. Le tableau 7.18 résume la comparaison calcul expérimentation.

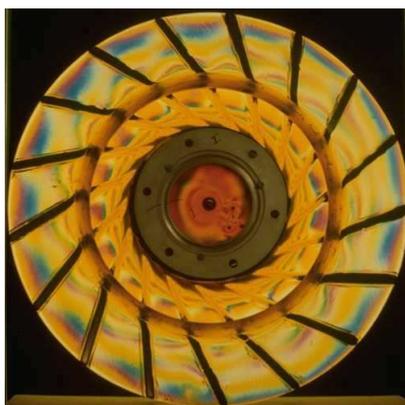


Figure 7.16 – Modèle de photoélasticimétrie d'une roue de compresseur centrifuge

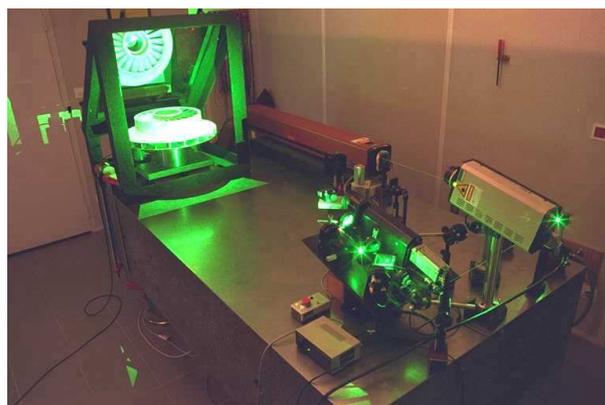


Figure 7.17 – Analyse modale d'une roue tridimensionnelle de compresseur centrifuge par interférométrie laser

On remarquera que les identifications des formes modales expérimentales ne sont pas toujours aisées. En dehors d'un écart important de 24% sur l'une des fréquences propres, justifié par la différence de conditions aux limites (fixation sur l'arbre en calcul et libre libre pour la mesure – d'ailleurs le mode propre à 1 diamètre modal est

devenu un mode propre de corps solide et a disparu), les résultats obtenus sont remarquables.

Roue bidimensionnelle				Roue tridimensionnelle				
Mesure (Hz)	Prévision (Hz)	Ecart (%)	Forme modale	Mesure moyeu (Hz)	Mesure flasque (Hz)	Prévision (Hz)	Ecart (%)	Forme modale
1337	1259	-5,8	2D			2016		1D
2666	2638	-1,1	3D	1763	1829	2228	24,0	2D
3869	3879	0,2	4D	2839	2847	2892	1,7	3D
4847	4910	1,3	5D	3598	3600	3611	0,3	4D
5649	5822	3,1	6D	4171		4237	1,6	5D
6514	6670	2,4	7D	4494	4489	4625	3,0	6D
7230	7477	3,4	8D	4859		4819	0,8	7D
7923	8242	4,0	9D	4976	4979			8D
8679	8948	3,1	10D		5066			9D
9147	9557	4,5	11D	3838	3843	de 3956		Aubes
5315	5611	5,5	3D-1C		4232	à 4100		1D-1C
7112	7662	4,9	4D-1C		4867	5198	6,8	2D-1C
8829	9287	5,2	5D-1C	5352	5348	5391	0,8	3D-1C
				5569	5564			4D-1C
				5828	5826			5D-1C
				6077	6065			6D-1C
					6264			7D-1C

### 7.2.3 Développement d'un code d'analyse statique et dynamique sous ANSYS®

Cette analyse est maintenant faite couramment par les options de codes généralistes d'analyse aux éléments finis comme par exemple ANSYS® **[ANSYS]**. Par contre, on a voulu développer des méthodes de modélisation et d'exploitation automatiques afin de généraliser l'utilisation de cette méthode à la conception des compresseurs centrifuges dont on rappellera qu'ils sont très souvent produits unitairement.

Des routines dans le langage ANSYS ont été développées afin de générer automatiquement la géométrie des aubes à partir des modèles d'usinage (surfaces réglées) et de récupérer les contours. En environ 10 minutes, des modèles sont disponibles pour l'analyse des contraintes, l'étude du serrage sur l'arbre (capacité en couple lors du fonctionnement) et l'analyse dynamique. La figure 7.19 montre les secteurs répétitifs d'une roue 2D et d'une roue 3D, issus du modèle d'usinage, ainsi que le modèle aux éléments finis généré automatiquement pour la roue 3D avec 142 578 degrés de liberté et qui comporte aussi un tronçon d'arbre.

Les analyses sont lancées et les résultats directement exploitables avec les outils d'analyse d'ANSYS®. On voit sur la figure 7.20 un calcul à l'arrêt (serrage) à gauche, un calcul en rotation (vue côté extradados au centre et intrados à droite), et sur la figure 7.21 les résultats de calculs de fréquences propres de modes propres d'ensemble (4 diamètres nodaux d'une roue bidimensionnelle à gauche) et de modes propres locaux (festons au centre et aubes à droite sur une roue tridimensionnelle).

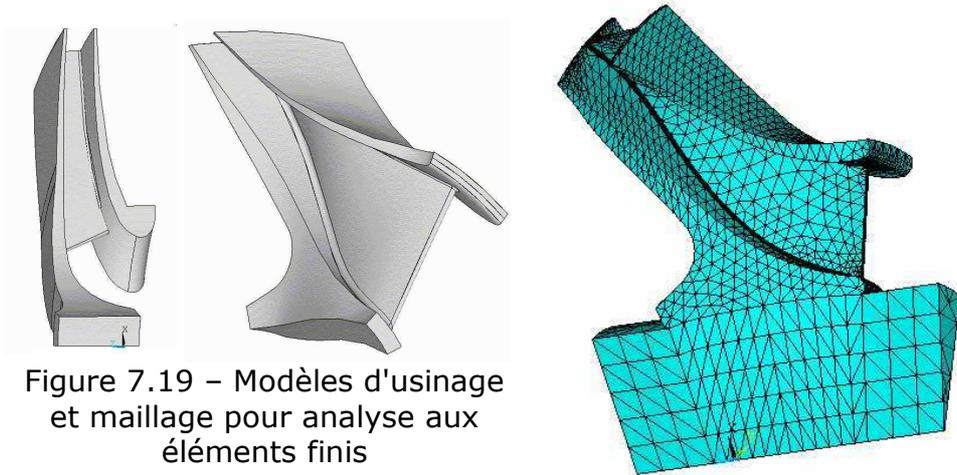


Figure 7.19 – Modèles d'usinage et maillage pour analyse aux éléments finis

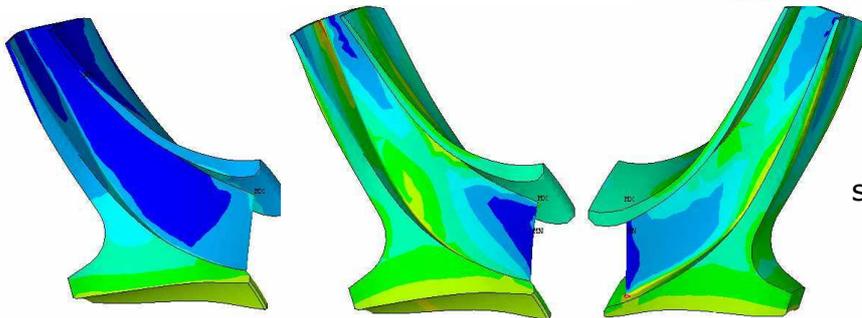


Figure 7.20 – Analyses statiques de contraintes

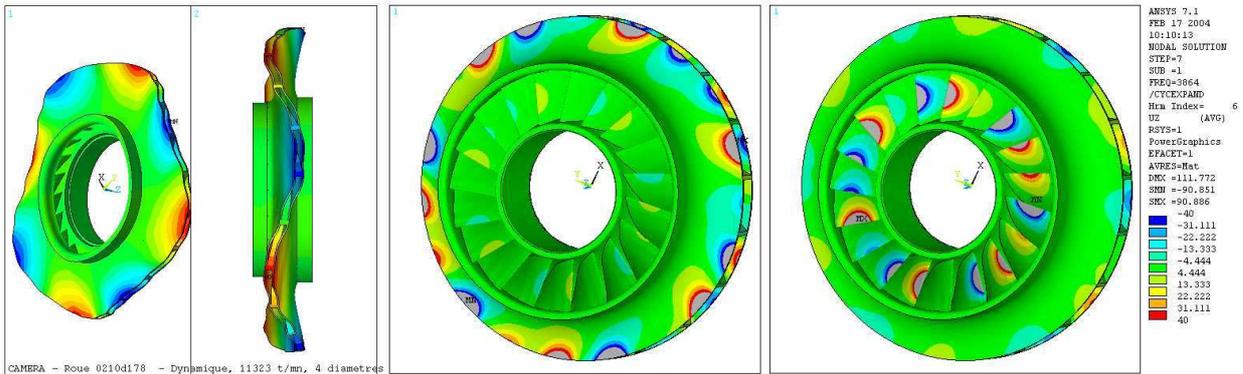


Figure 7.21 – Analyses dynamiques de roues de compresseur centrifuge en rotation

#### 7.2.4 Diagramme de coïncidence pour l'analyse des résonances

Le diagramme de Campbell est insuffisant pour juger de la présence ou non d'une résonance dangereuse. En effet, on trouve beaucoup de coïncidences fréquentielles, mais toutes ne sont pas dangereuses, sinon aucune machine ne pourrait être construite.

Les coïncidences sont à considérer si l'on a également coïncidence de la forme de l'excitation et de celles des modes propres (afin que l'excitation modale au second membre de l'équation dynamique  $[\phi]^T [F(t)]$  soit maximale). On utilise pour ceci un diagramme de coïncidence ou d'interférence, tel qu'établi en 2003 par Singh, Sullivan, Thakur et al. **[Singh]**.

Les fréquences propres sont calculées par ordres de Fourier qui sont liés directement aux diamètres nodaux. Le nombre d'ordres de Fourier est de  $N/2$  si le nombre de secteurs répétitifs est pair, et  $(N-1)/2$  s'il est impair.

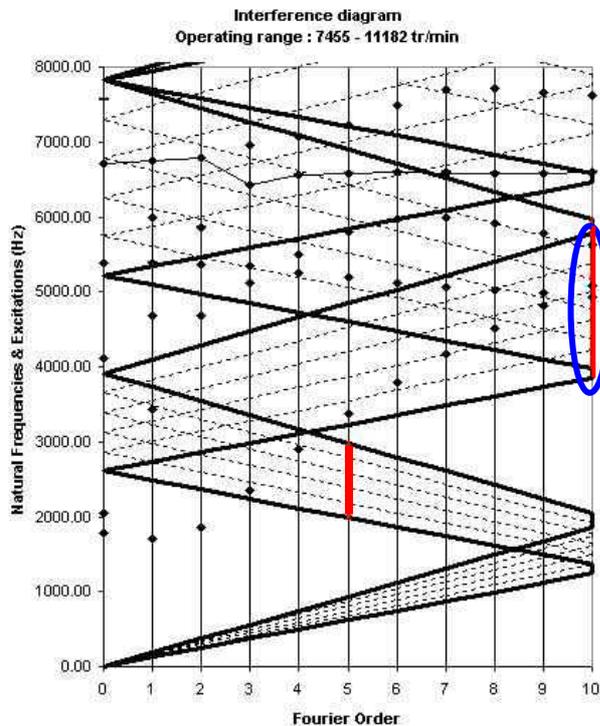


Figure 7.22 – Diagramme de coïncidence

Le diagramme de la figure 7.22 représente le comportement vibratoire d'une roue de compresseur alimentée par un distributeur à 16 aubes. Pour chaque ordre de Fourier, on place les fréquences propres calculées (les points). La roue ayant 21 secteurs, l'ordre de Fourier 10 est en fait commun à 10 et 11 diamètres nodaux. On superpose la plage de vitesse de rotation (comprise entre les droites inclinées en traits forts noirs et qui serpente entre les nombres de Fourier pour monter en harmoniques). Enfin on place les fréquences d'excitation sur l'harmonique 16 de la plage de vitesse de rotation pour le fondamental (trait gras rouge) et pour l'harmonique 2 (trait fin rouge.)

Dans ce cas il n'y a aucune coïncidence de formes d'excitation et modale sur le fondamental de l'excitation, mais 3 résonances sont possibles sur l'harmonique 2 de l'excitation, dont l'une proche de la

vitesse nominale de la machine.

Sur des machines à large plage de vitesse de rotation, il devient pratiquement impossible d'éviter des coïncidences. Le plus souvent, on change le nombre d'aubes du distributeur après une vérification aérodynamique. Sinon, le problème change de domaine : est-ce que les contraintes dynamiques sont acceptables pour la tenue en fatigue ?

### 7.2.5 Analyse de difficultés rencontrées sur des compresseurs centrifuges

L'utilisation de roues tridimensionnelles avec des puissances importantes (4 MW sur un étage de 480 mm de diamètre par exemple) sollicite énormément le matériel et des ruptures par fatigue ont été observées sur différentes roues en opération. Il faut préciser de suite que seuls les modes propres locaux sont concernés, comme le montrent les photographies de la figure 7.23 avec des ruptures "en feston" au diamètre extérieur, ou de bords d'attaque des aubes tridimensionnelles.



Figure 7.23 – Incidents survenus au diamètre extérieur ou au bord d'attaque de roues de compresseurs



Dans certains cas, l'utilisation du diagramme de coïncidence explique bien la résonance, et l'on change les fréquences d'excitation en jouant sur le nombre d'aubes directrices. Dans d'autres cas, ce diagramme n'indique pas de risque évident de résonance. Pour l'illustrer, on prendra deux exemples.

### 7.2.5.1 Ruptures en festons au diamètre extérieur



Figure 7.24 – Incident sur les deux premiers étages

Dans le cas du compresseur montré sur la photo 7.24, les deux premières roues sont affectées. Il s'agit d'un compresseur en deux sections (3 roues de 447 mm de diamètre et 4 roues de 395 mm), comprimant entre 4 et 70 bar des gaz naturels lourds (30 kg/kmol pour la 1<sup>ère</sup> section et 40 pour la seconde) et acide (8% de CO<sub>2</sub> – 2% d'H<sub>2</sub>S et saturation en humidité). La puissance du compresseur est de 6 500 kW pour une vitesse nominale de 13 330 tr/min.

On a tracé figure 7.25 les diagrammes de coïncidence des trois roues constituant la première section. La roue N° 1 possède 26 aubes, 13 longues et 13 intercalaires ; avec 13 secteurs répétitifs, l'ordre de Fourier maximal est 6. Les deux autres roues ont 22 aubes, 11 longues et 11 intercalaires ; avec 11 secteurs répétitifs, l'ordre de Fourier maximal est 5. Le distributeur d'entrée et les redresseurs des canaux de retour comportent tous 16 aubages.

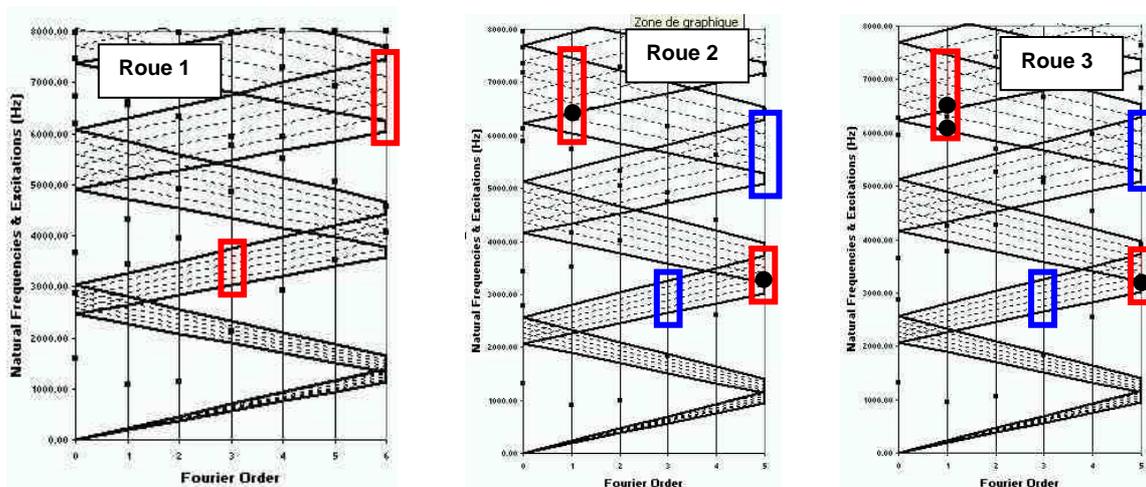


Figure 7.25 – Diagrammes de coïncidence des trois étages

Tableau 7.26 – Nombre de résonances			
Roue	Ordre 1	Ordre 2	Rupture
1	0	0	oui
2	1	1	oui
3	1	2	non

Les positions des coïncidences des fréquences et formes entre les modes propres et les excitations sont repérées sur les diagrammes par les rectangles rouges pour le fondamental et l'harmonique 2. Le tableau 7.26 récapitule les nombres de résonances.

Les diagrammes de coïncidence n'expliquent pas l'incident sur la roue 1, ils expliquent sur la roue 2, mais pourquoi la roue 3 a tenu avec plus de résonances possibles et un niveau d'excitation supérieur, la pression du gaz est plus élevée ?

Quoi qu'il en soit, la machine a été modifiée en installant 14 aubes dans les canaux de retour alimentant les roues 2 et 3, ce qui conduit à la position des rectangles bleus sur les diagrammes de la figure 7.25, pour lesquels on ne trouve plus de résonance. Quant à la roue 1, on a utilisé la technique de "scalopage" du diamètre extérieur entre les aubes, qui modifie les fréquences propres de ces modes propres locaux, au prix d'une légère modification des performances aérodynamiques.

### 7.2.5.2 Ruptures des bords d'attaque des aubes

L'autre exemple concerne des modes propres locaux sur les bords d'attaque d'aubes d'une roue tridimensionnelle de grand coefficient de débit (partie droite de la figure 7.23). L'application concerne deux compresseurs centrifuges de gaz naturel installés sur une plate-forme offshore. L'étage incriminé de diamètre 480 mm développe une puissance proche de 4 MW à une vitesse de rotation nominale de 9 660 tr/min. C'est un étage de très grand coefficient de débit de 0,11 avec une pression d'aspiration de 44 bar abs à 45°C. La construction de la roue (coupe 7.27) est réalisée par un moyeu aubagé en acier inoxydable martensitique à 16% de chrome Z4CN16-4, usiné en 5 axes à haute vitesse, et un flasque assemblé sur les sommets d'aubes par brasage à haute température avec une brasure or-nickel.

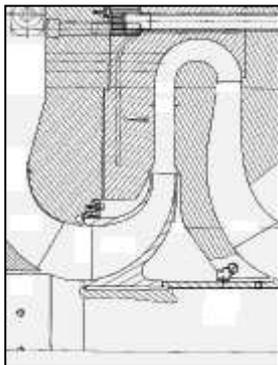


Figure 7.27 –  
Etage de  
compression

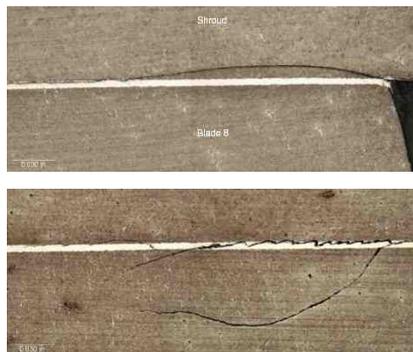


Figure 7.28 –  
Propagation de deux  
fissures

Figure 7.30 – Faciès de rupture  
et propagation de la fissure

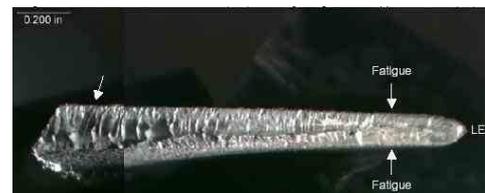
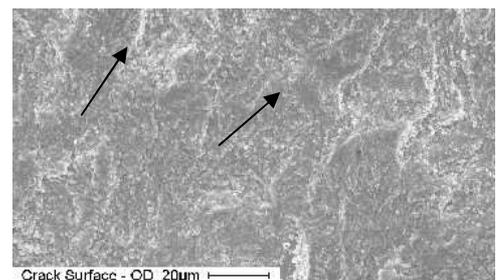


Figure 7.29 – Vue  
macrographique de la fissure



Un incident a été observé sur chaque machine après 11000 à 12500 heures de fonctionnement et 130 à 150 démarrages. L'analyse des ruptures montre une propagation de fissure au niveau de la liaison de l'aube et du flasque. Cette fissure se propage non seulement dans la brasure, mais également dans le matériau de base (figure 7.28), ce qui ne met pas en cause seulement la qualité de la brasure elle-même. L'observation micrographique du faciès d'une rupture (figure 7.29) montre qu'au-delà de la rupture ductile de la partie centrale due à une contrainte radiale élevée, l'initiation de la fissure est due à de la flexion apparaissant en plusieurs points du pourtour. L'analyse au microscope électronique à balayage met en évidence des stries de fatigue (figure 7.30). Un phénomène vibratoire est nettement mis en cause.

L'analyse dynamique de la roue a été réalisée suivant la technique du paragraphe 7.2.3. Les fréquences propres ont été confirmées par une analyse modale expérimentale. La roue possède 19 aubes et les calculs de fréquences et modes propres sont faits jusqu'à l'ordre de Fourier 9. Le distributeur placé en amont possède 16 aubes. Le diagramme de coïncidence de la figure 7.33 met en évidence une excitation possible d'un mode propre de flexion des aubes (figure 7.31) à 3978 Hz par l'harmonique 2 de l'excitation des distributeurs à 75% de la vitesse de rotation nominale. La figure 7.32 montre la répartition des contraintes modales de Von Mises, avec un maximum (repéré MX) qui se situe bien au niveau de l'initiation des fissures. Le maximum de contrainte modale radiale se situe au même endroit.

On est en présence d'une rupture pour laquelle on trouve :

- une analyse métallurgique conduisant à une rupture par fatigue,
- la présence d'une coïncidence possible d'un mode propre d'aubes sur l'harmonique 2 de l'excitation des distributeurs,
- la coexistence des maxima de contraintes radiales statiques et dynamiques au niveau de l'initiation de la fissure,
- une concentration de contrainte importante au niveau de la connexion par brasage.

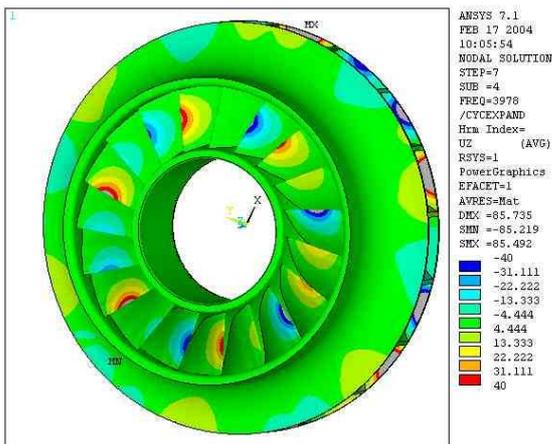


Figure 7.31 – Mode propre

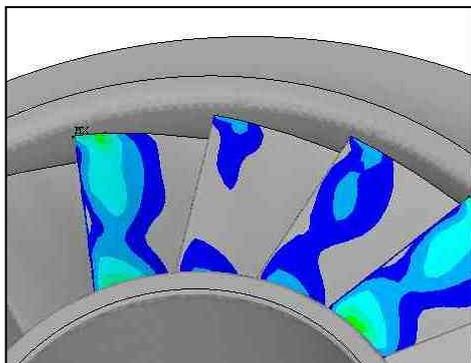


Figure 7.32 – Contraintes modales

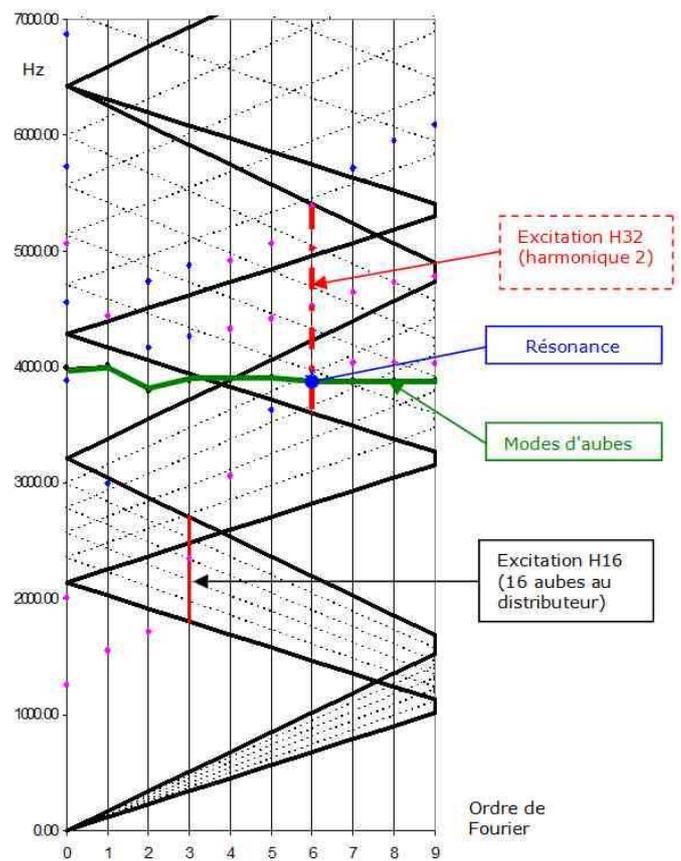


Figure 7.33 – Diagramme de coïncidence

Même si les machines étaient exploitées de façon continue à une vitesse de rotation nettement supérieure aux 75% correspondant à la résonance, on rappelle qu'il suffit de 7 heures de fonctionnement à cette vitesse sur les 12 à 13000 effectuées pour atteindre les  $10^8$  cycles suffisants pour initier une rupture de fatigue.

La question restant en suspens est la suivante : l'excitation par l'harmonique 2 de la fréquence de passage des distributeurs est-elle d'amplitude suffisante pour développer les contraintes conduisant à l'apparition de la fissure ?

Les études se sont poursuivies pour :

- faire une analyse Navier-Stokes d'écoulement stationnaire à la sortie du diffuseur,
- faire une analyse Navier-Stokes d'écoulement stationnaire dans la roue,
- chercher la décomposition de Fourier de l'écoulement instationnaire en sortie du distributeur vu par la roue,
- calculer l'impact sur les pressions instationnaires développées sur le contour de la roue,
- calculer le vecteur d'excitation modale pour le mode propre incriminé,
- calculer la participation modale, compte tenu d'un amortissement modal supposé,
- déterminer les contraintes dynamiques locales générées,
- effectuer un calcul de durée de vie.

Ce dernier exercice est très difficile et très risqué pour plusieurs raisons.

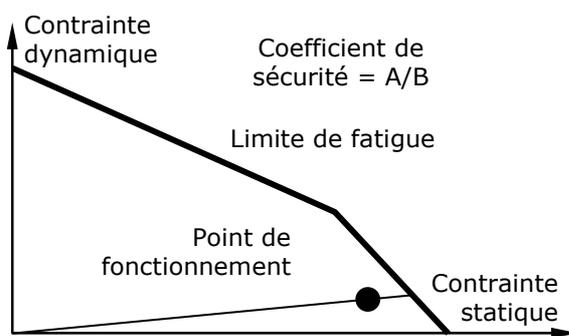


Figure 7.34 – Diagramme de Haigh de tenue en fatigue

a/ Tout d'abord, la présence d'une concentration de contrainte importante au niveau de la brasure, due à un rayon de raccordement de quelques dixièmes de millimètre, entraîne l'existence de contraintes statiques et dynamiques importantes, plaçant le point correspondant très à droite dans le diagramme de fatigue de Haigh (figure 7.34). Le coefficient de sécurité en fatigue sera obligatoirement faible.

b/ Ensuite, le travail dans cette zone qui atteint la limite d'élasticité du matériau nécessite de considérer le phénomène de déformation élastoplastique. Flavenot décrit cette approche dans un article des techniques de l'Ingénieur **[Flavenot]**. Lorsque le matériau est soumis à une déformation plastique cyclique, sa durée de vie  $N$  (en cycles) est donnée par la courbe de Manson-Coffin dont l'équation (7.11) est :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c \quad (7.11)$$

avec  $\varepsilon_a$  déformation totale, somme de la déformation élastique  $\varepsilon_e$  et de la déformation plastique  $\varepsilon_p$ ,

$\varepsilon_f'$  limite de déformation ductile en fatigue,

$\sigma_f'$  contrainte limite de résistance en fatigue,

$E$  module d'Young,

$b$  et  $c$  constantes du matériau.

En présence d'un coefficient de contrainte  $K_t$  élevé, la contrainte locale est amenée à dépasser la limite d'élasticité, et il convient de déterminer les états de contrainte  $\sigma_{loc}$  et de déformation  $\varepsilon_{loc}$  locales. Ces quantités sont reliées aux grandeurs connues  $\sigma_{nom}$  et  $K_t$  grâce à la règle de Neuber qui s'exprime par l'expression (7.12) :

$$\sigma_{loc} \varepsilon_{loc} = \frac{K_t^2 \sigma_{nom}^2}{E} = C^{ste} \quad (7.12)$$

La figure 7.35 permet de relier ces notions où le point A représente le point de

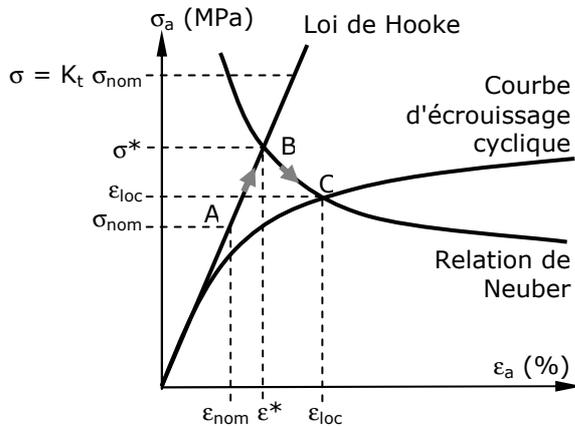


Figure 7.35 – Représentation graphique de la règle de Neuber pour un chargement alterné

le point de contrainte nominale  $\sigma_{nom}$ , au-delà de la limite d'élasticité par application de la loi de Hooke incluant la concentration de contrainte, le point B est un état de contrainte virtuel  $\sigma^*$  de façon à avoir un point de référence de la courbe de Neuber, et le point C représente l'état de contrainte existant réellement, à l'intersection de la courbe d'érouissage du matériau, qui s'exprime elle-même par l'équation (7.13), issue de la norme NF A03-403 :

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'} \quad (7.13)$$

où  $K'$  est le coefficient de résistance plastique et  $n'$  l'exposant d'érouissage cyclique.

Cette détermination de durée de vie nécessite de déterminer expérimentalement plusieurs notions pour chaque matériau utilisé : les coefficients de l'équation de Manson-Coffin et ceux de la courbe d'érouissage, qui n'ont pas les mêmes règles de similitude que celles utilisées pour détermination de la limite conventionnelle de tenue en fatigue classique des aciers.

Le tableau 7.36 donne ces coefficients, à titre d'exemple, pour un acier au manganèse de type 20MV6, érouissable et amagnétique, résistant bien à l'usure et aux effets de la pression, utilisé notamment dans la construction de vérins à vis, **[Flavenot]** :

Tableau 7.36 – Caractéristiques de l'acier 20MV6		
Propriétés mécaniques	Coefficients de l'équation de Manson-Coffin	Coefficients de la courbe d'érouissage cyclique
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R_{e0,2\%} = 525</math> MPa</li> <li>• <math>R_m = 735</math> MPa</li> <li>• <math>E = 210</math> GPa</li> <li>• <math>A(\%) = 23</math></li> <li>• <math>\sigma_D^R = 362</math> MPa</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_f' = 1036</math> MPa</li> <li>• <math>\varepsilon_f' = 0,5962</math></li> <li>• <math>b = -0,07</math></li> <li>• <math>c = -0,63</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>n' = 0,1119</math></li> <li>• <math>K' = 1095,47</math></li> </ul>

c/ La troisième difficulté évoquée est celle de la complexité des états de contraintes dans les zones de raccordement. On est très loin de contraintes uniaxiales, et il faut penser à utiliser des critères plus sophistiqués de tenue en fatigue, comme celui proposé par Dang Van en 1989 pour la fatigue biaxiale et multiaxiale **[Dang Van]**, critère qui est d'ailleurs introduit dans les modules de définition de la durée en fatigue de plusieurs logiciels d'analyse aux éléments finis.

d/ Enfin, la quatrième difficulté est celle de connaître le coefficient de concentration de contrainte  $K_t$ . En effet, ce coefficient est obtenu au niveau d'un assemblage brasé dont les micro défauts peuvent faire varier notablement la valeur. Il est difficile dans

ces conditions de prévoir valablement une durée de vie. Afin de mieux appréhender la concentration de contrainte au raccordement des aubes sur le flasque, il est suggéré d'utiliser la disposition de la figure 7.37, où l'on va assembler l'aube sur un bossage. De cette façon, on éloigne la brasure de la concentration de contrainte, on diminue et on contrôle mieux la valeur du coefficient de concentration de contrainte grâce à un congé de plus grand rayon qui est usiné. Mais il est évident que cette disposition technologique est beaucoup plus onéreuse, puisqu'on ne peut plus usiner l'intérieur du flasque par tournage, mais par fraisage 5 axes de formes tridimensionnelles complexes.

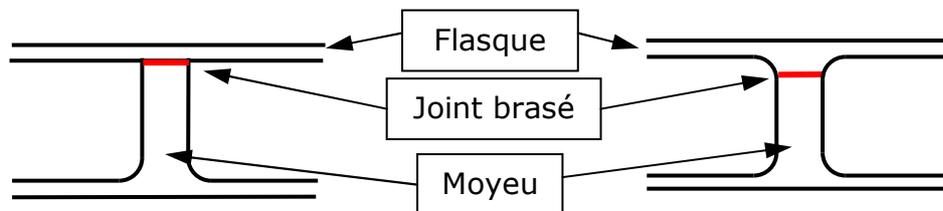


Figure 7.37 – Proposition de modification de l'assemblage aubes/flasque par un congé pré usiné dans le flasque

Pour revenir au cas de la machine faisant l'objet de ce paragraphe, deux modifications ont été introduites :

- changement du profil de l'aube en lui donnant une forme conique de façon à changer la valeur de la fréquence propre des aubes ; en abaissant la fréquence de résonance, on se place bien mieux dans un diagramme de fatigue, puisqu'à la fois les contraintes statiques d'origine centrifuge et d'autre part le niveau d'excitation aérodynamique diminuent ;
- inclinaison du bord d'attaque de l'aube (dit "rake angle") par rapport à la direction radiale ; ceci ajoute une capacité de flexion du bord d'attaque conduisant à un assouplissement du montage réduisant notablement les contraintes radiales.

### 7.2.6 Plages d'incertitude

Avant de conclure, il est absolument nécessaire d'évoquer le sujet des plages d'incertitude. Les calculs proposés sont toujours réalisés dans des conditions optimales correspondant aux données de conception. La réalisation d'aubes de turbines à vapeur ou de roues de compresseurs centrifuges comporte tellement d'opérations que de nombreuses dispersions sont introduites. Citons par exemple :

- pour les paquets d'ailettes des turbines à vapeur, les dispersions sont celles :
  - de la géométrie des profils, surtout sur les profils torsés,
  - de la masse des profils,
  - des tolérances d'usinage des pieds sapins des aubes et des accrochages du rotor,
  - du montage (citons le fait que les aubes sont pesées individuellement et réparties en fonction de leur masse pour minimiser les balourds installés),
  - de l'assemblage du ruban par rivetage pour les ailettes à action ;
- et pour les roues de compresseur centrifuge :
  - de l'usinage sur les épaisseurs et les formes des profils des aubes,
  - des nombreuses opérations de reprise d'usinage induisant une non uniformité angulaire des épaisseurs du moyeu et du flasque, notamment au diamètre extérieur,

- des opérations d'assemblage (brasage à haute température ou soudage robotisé) et des traitements thermiques introduisant des déformations thermiques entre les différentes phases d'usinage.

Ces dispersions génèrent une plage d'incertitude dans la détermination des fréquences propres pouvant dans certains cas atteindre 10%. Expérimentalement, on a constaté sur des montages d'aubes de turbine à vapeur que l'on avait autant de fréquences propres que d'aubes dans le paquet pour le premier mode propre de flexion dans le plan de la roue. Cette sorte de désaccordage (mistuning) est aussi un autre effet de ces dispersions.

### 7.2.7 Conclusion et avancées possibles

La montée en puissance et en niveau de pression des compresseurs centrifuges augmente les niveaux d'excitations aérodynamiques appliquées aux roues des étages de compression. La généralisation de la vitesse variable, et la très grande richesse modale de ces objets implique qu'il y aura obligatoirement des résonances dans chaque machine. Chaque fabricant de compresseur a subi des incidents de rupture de roues de compresseur par fatigue. Ces incidents sont très préjudiciables à la production des sites, soulevant des enjeux économiques gigantesques.

La détermination de la tenue en fatigue des roues de compresseurs centrifuges est une technique extrêmement complexe. Elle nécessite des analyses mécaniques, vibratoires, aérodynamiques et métallurgiques très sophistiquées (analyses Navier-Stokes d'écoulement stationnaires et instationnaires, analyses fines de contraintes aux éléments finis avec déformations élastoplastiques, analyses vibratoires avec sous-structuration et utilisation des ordres de Fourier, utilisation de critères de tenue en fatigue élastoplastique et multiaxiale).

Malgré les études effectuées, tous les incidents ne sont pas encore expliqués ! On renvoie ici au paragraphe 8.3 de ce mémoire, dans lequel on présente les recherches introduisant des excitations d'origine acoustique venant s'ajouter aux traditionnelles excitations mécaniques créées par les sillages des aubages, et donnant de nouvelles pistes d'analyse.

Pour la suite, on aura besoin de plus de poursuivre la détermination des niveaux d'excitations aérodynamique et acoustique, de préciser les amortissements aéromécaniques, de mieux maîtriser les états de contrainte locaux, et de bien connaître les caractéristiques de tenue en fatigue des matériaux utilisés. On aura aussi besoin de critères pour estimer quand il faudra entreprendre de telles analyses a priori lors de la conception des machines, car il ne faut pas oublier que pour des machines construites unitairement sous spécification, il n'est pas envisageable d'appliquer systématiquement de telles analyses à tous les étages de compression !

De nombreuses campagnes expérimentales seront encore nécessaires pour mieux comprendre et valider les phénomènes. La recherche reste très active. Cette technique devient de plus en plus multiphysique et l'enjeu en termes d'amélioration de la fiabilité des compresseurs centrifuges est énorme.

## 8. Implications acoustiques

Il est évident que les phénomènes acoustiques sont très importants vis-à-vis du bruit émis par les machines et ont un impact très fort sur la protection de l'environnement. Dans ce domaine, il faut absolument insister sur le fait que les turbomachines ne sont pas les seules à rayonner du bruit, mais que les pulsations de pression qu'elles génèrent se transmettent en amont et en aval dans les tuyauteries de gaz, ce qui en fait des "radiateurs" acoustiques de très grande longueur, d'autant plus émissifs que leurs épaisseurs sont faibles. En plus des nombreuses normes relatives au mesurage des niveaux de bruit, on citera le document technique **[VDI3733]** qui permet d'évaluer le bruit émis par les réseaux de tuyauteries à partir de la connaissance des pulsations de pression internes.

Si le problème du bruit émis par les installations est important, car il conditionne souvent l'autorisation d'exploiter, (dans les milieux habités, celle-ci est de plus en plus fondée sur le fait qu'une installation nouvelle doit se fondre dans l'environnement), le but de ce chapitre est plutôt de montrer quelques applications où les phénomènes acoustiques sont impliqués dans le comportement vibratoire des turbomachines, ce qui leur confère un impact important sur la fiabilité.

Les trois types de machines concernées par ce mémoire seront abordés : les compresseurs alternatifs, les turbines à vapeur et les compresseurs centrifuges.

### 8.1 Pulsations de pression générées par les compresseurs alternatifs

Ce domaine de génération de pression par les machines à piston est très connu et l'industrie pétrolière l'a très codifié par l'intermédiaire du standard API 618 **[API618]**. Ce standard propose plusieurs approches pour appréhender le phénomène acoustique. La plus sophistiquée consiste à :



Figure 8.1 – Bouteilles antipulsatoires et réseaux gaz

- dimensionner la bouteille antipulsatoire destinée à limiter le niveau des pulsations de pression émises (la figure 8.1 montre la complication de l'installation dans l'environnement proche du compresseur),
- calculer les fréquences propres acoustiques dans le réseau de tuyauterie entre la bouteille et une impédance de grand volume,
- calculer la réponse acoustique en fluctuations de pressions locales (coudes en particulier),
- calculer les fréquences propres mécaniques des lignes de tuyauteries,
- calculer la réponse vibratoire de la ligne de tuyauteries, afin de déterminer les amplitudes vibratoires et les efforts sur les ancrages.

Malgré ces études, des problèmes subsistent et deux exemples sont donnés.

### 8.1.1 Mauvaise conception d'une bouteille antipulsatoire



Figure 8.2 – Longue bouteille antipulsatoire

Il s'agit d'un cas où les modifications successives de conception, liées à l'évolution des impositions de la spécification technique ont fait perdre de vue l'aspect de résonateur acoustique interne de la bouteille. Le compresseur est une machine de recycle dans une unité de séparation de propane à partir du gaz naturel. La vitesse de rotation est de 990 tr/min. La pression d'aspiration est de 23 bar, celle de refoulement de 66 bar. La puissance maximale est de 870 kW. La machine possède deux cylindres à double effet et la bouteille d'aspiration est commune aux deux cylindres et placée en partie supérieure de la machine (figure 8.2).

Le volume intérieur de la bouteille était conforme à l'API 618 en ce qui concerne l'atténuation des pulsations de pression. Par contre, la longueur finale de 4,440 mètres, combinée avec une célérité du son de 296 m/s conduit à des fréquences propres acoustiques multiples de 33,64 Hz (caractéristiques du gaz : 23 bar abs. – 12°C – 26,51 kg/kmol – facteur de compressibilité 0,848 –  $\gamma=1,156$  calculées à partir de l'équation d'état de SRK).

Ceci signifie que tous les harmoniques pairs de la vitesse de rotation de 16,5 Hz se trouvent en résonance sur une fréquence propre acoustique de la bouteille !

Les conséquences au niveau du fonctionnement sont :

- des niveaux de vibration élevés du compresseur et de la ligne de tuyauterie,
- des ruptures à répétition de l'instrumentation installée sur la ligne d'aspiration,
- les ruptures des volants de manœuvre des vannes de by-pass,
- et à moyen terme un risque de fissuration des tubulures de raccordement de la bouteille sur les cylindres du compresseur, puisque il a été estimé qu'un effort alternatif déséquilibré de 500 daN se développait sur les fonds de la bouteille.

Après avoir changé la spécification et modifié la conception interne de la bouteille en adjoignant deux baffles et des tubes à choc, tous les problèmes ont disparu. Le tableau 8.3 donne les niveaux de pulsations de pression prévus à l'aide du logiciel PULSIM® [PULSIM] de l'Université de Delft à la bride d'aspiration de la bouteille dans les deux configurations de bouteilles, ainsi que les résultats de mesures obtenus après modification. Ces niveaux sont exprimés en pourcentage crête à crête de la pression statique. Dans la configuration d'origine, les pulsations de pression dépassaient deux fois les niveaux admissibles définis par l'API 618 et atteignaient même 20 fois cette valeur à certains emplacements de la ligne. Les niveaux de pulsation de pression sur la ligne de refoulement sont également indiqués, mais cette ligne n'a jamais posé de problème.

Tableau 8.3 - Pulsations de pression (% c-c)					
Cas de charge		25%	50%	75%	100%
Prédiction aspiration	Origine	1,6	1,8	2,9	2,9
	Modifié	1,3	1,3	1,3	<1
Mesures	Aspiration	0,9	1,2	1,03	1,06
	Refoulement	1,19	0,79	0,98	0,98

Le tableau 8.4 montre l'impact sur les niveaux vibratoires du compresseur exprimés en vitesse vibratoire pour le cas de charge 75% et mesurés aux points de la figure 8.5. On s'aperçoit que l'on a gagné 25% du niveau efficace moyen dans la direction axiale qui est la plus souple.

Tableau 8.4 - Vibrations mesurées (mm/s rms)						
Point N°	Origine			Modification		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1		11,5	6,6	8,9	4,7	4,6
2		4,2	8,2	8,9	2,2	3,6
3	6,9	13,2	8,1	2,7	5,1	5,9
4	6,6	6,8	3,6	2,2	2,2	1,5
5		3,8	3,8		5,3	4,6
6		3,5	3,6		5,0	3,2
7	7,7	6,7	3,6	5,0	4,8	3,8
8	3,9	2,6	3,0		3,1	3,3
9	3,3	1,8	3,2		3,1	3,6
10	4,3	2,1	2,1		3,0	1,6
11	5,7	8,6	4,9	2,9	12,9	6,6
12	3,7	9,5	4,7	3,3	14,3	8,9
13	2,5	1,0	1,6	0,3	1,6	1,5
14	2,2	0,9	1,5	0,1	0,9	1,5
15	10,7	9,0	5,7	2,1	8,9	5,1
16	8,1	9,5	6,1	2,2	9,4	6,6
17	1,3	2,6	1,7	0,4	2,0	1,6
<b>Moyenne</b>	<b>5,8</b>	<b>6,9</b>	<b>4,7</b>	<b>4,3</b>	<b>6,5</b>	<b>4,5</b>
	<b>Gains</b>			<b>25%</b>	<b>6%</b>	<b>5%</b>

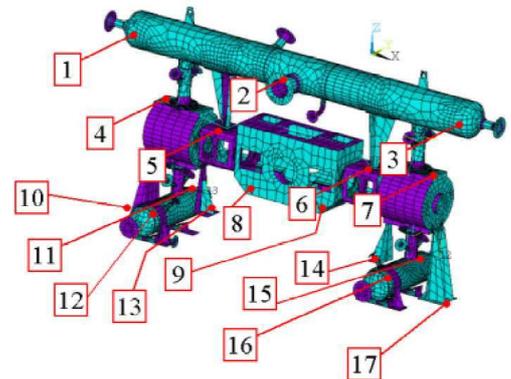


Figure 8.5 – Points de mesure des vibrations

On a également constaté que le bruit émis avait diminué, mais on ne dispose pas de mesures comparatives.

### 8.1.2 Mauvaise réalisation d'un encastrement de tuyauterie



Figure 8.6 – Apparition d'une fissure sur une bouteille antipulsatoire

Sur une installation d'un compresseur alternatif de collecte de gaz naturel sur champ, identique à celui de la figure 8.6, il s'est produit une fissure sur la tubulure de la bouteille antipulsatoire de refoulement. Cet incident peut s'avérer extrêmement dangereux en raison de la mise à l'atmosphère d'une part d'un gaz explosible, et d'autre part d'H<sub>2</sub>S, gaz létal même dans des proportions très faibles.

Cet incident ne peut être lié qu'à un phénomène vibratoire.

L'étude API 618 de niveau 3, décrite en introduction du paragraphe 8.1 avait pourtant été faite correctement. En interviewant le superviseur qui avait démarré l'installation, on s'est aperçu que le support de la tuyauterie à proximité du compresseur qui devait être un point fixe, donc un encastrement parfait, était en fait réalisé par un tube de 2 pouces de diamètre et de 2 mètres de hauteur fiché dans un dé de béton posé dans le sable, et maintenant la tuyauterie par un simple collier. L'encastrement n'était en fait pas plus rigide qu'un vulgaire panneau routier !

Après avoir remplacé l'encastrement par un supportage vertical comme condition aux limites dans le calcul des fréquences propres de la tuyauterie, on a trouvé un mode propre très proche de l'harmonique 2 de la vitesse de rotation du compresseur (2 fois 400 tr/min), harmonique très énergétique de l'excitation pneumatique.

La modification a consisté à ramener le point fixe sur le socle de la machine.

### 8.1.3 Conclusion

On a montré dans ces applications que les problèmes vibratoires pouvaient être la conséquence soit de résonances mécaniques, soit de résonances acoustiques excitées par les pulsations de pression émises par la machine.

Il est évident qu'un effort encore plus important doit être réalisé pour éviter la conjonction d'une résonance mécanique et d'une résonance acoustique qui conduirait à de très grands coefficients d'amplification.

Généralement, de type d'incidents est aussi lié à une certaine méconnaissance de la physique des phénomènes par les équipes impliquées. Il est nécessaire de rappeler les efforts de formation qui doivent être accomplis.

## 8.2 Exemples de phénomènes vibroacoustiques rencontrés dans des turbines à vapeur industrielles

Deux exemples vont être traités :

- celui d'une rangée d'aubages de turbines à vapeur où l'on a justement eu conjonction d'une résonance mécanique, d'une résonance acoustique et d'une excitation,
- celui d'une vibration à fréquence variable liée à des écoulements.

### 8.2.1 Coïncidence de fréquences propres mécanique et acoustique dans des aubes tournantes

L'application concerne une turbine à vapeur de 20 MW d'entraînement d'un compresseur de gaz de synthèse d'ammoniac dans une unité de 1000 tonnes par jour (figure 8.7). Le gaz de synthèse étant très léger ( $3 \text{ H}_2 + \text{N}_2$ ), la vitesse de rotation est très élevée (11200 tr/min) au nominal, la plage de vitesse de rotation étant de 80 à 105% du nominal. Le groupe complet comprend aussi trois compresseurs centrifuges multi étagés pour comprimer le gaz de synthèse entre 25 et 250 bar, incluant aussi un étage de recycle.



Figure 8.7 –  
Turbocompresseur  
de gaz de synthèse  
d'ammoniac

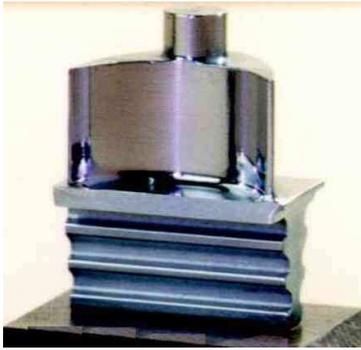


Figure 8.8 – Aubage mobile court à action

Le premier étage développe une puissance de l'ordre de 5 MW. Il est constitué d'aubages à action à section constante très courts (21 mm de hauteur, largeur de disque 40 mm) tenus sur le disque par des pieds sapins et liés au sommet en paquets par des rubans rivetés (analogue à la figure 8.8, avec un montage du type de la figure 7.3). Les conditions de vapeur sont très élevées 120 bar et 520°C. Le matériau utilisé est un acier à 13% de chrome allié avec du niobium pour lui conférer une bonne tenue au fluage.

Lors du démarrage de l'installation à 9000 tr/min tout allait bien, puis à la mise en production, quand la vitesse du groupe a été poussée à 11000 tr/min le niveau vibratoire est monté brusquement. L'un des paquets d'ailettes avait perdu son ruban. Cet incident s'est produit plusieurs fois et de façon extrêmement rapide.

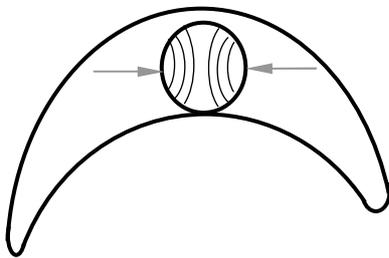


Figure 8.9 – Cernes de fatigue et propagation de la fissure dans le tenon

La représentation des cernes de fatigue au niveau de zone fracturée du tenon est donnée figure 8.9. La direction de propagation indique tout à fait un phénomène de basculement du ruban autour de la ligne des tenons. Ce basculement est facilité par le relèvement des extrémités du ruban soumis à une force centrifuge importante (le diamètre de base étant de 550 mm, l'accélération centrifuge est de l'ordre de 38 000 g). Le contact des extrémités du ruban sur les aubes étant libéré, le ruban est capable de vibrer comme montré sur la figure 8.10.

Les investigations théoriques et expérimentales ont permis de retrouver que la fréquence de balancement du ruban correspondant bien à la fréquence de passage des distributeurs (40 distributeurs – 7300 Hz).

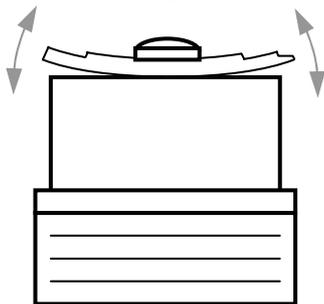


Figure 8.10 – Possibilité de vibration du ruban autour de la ligne des rivets

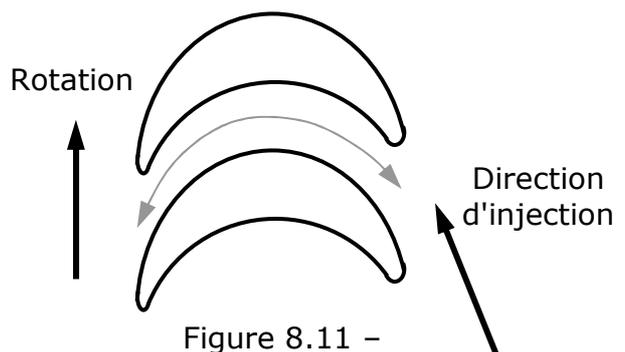


Figure 8.11 – Canal inter aube

Par ailleurs, comme il s'agissait de la première rangée de la turbine qui était en injection partielle, on a engagé une investigation aérodynamique pour étudier le phénomène d'entrée dans la zone d'injection. On a trouvé que l'onde de pression générée dans le canal inter aube lors de l'injection se réfléchissait dans la cavité aval (conformément aux équations d'Allievi utilisées dans le calcul des coups de bélier). La longueur du canal étant de l'ordre de 60 mm (figure 8.11) et la vitesse du son de 900 m/s, la fréquence propre acoustique d'un tel résonateur "demi-longueur d'onde" est

de l'ordre de 7500 Hz, pratiquement accordée sur la fréquence de passage des distributeurs.

Dans ce cas, la conjonction des deux résonances mécanique et acoustique explique la rupture très rapide, puisqu'à cette fréquence, il suffit de 20 minutes de fonctionnement pour atteindre les  $10^7$  cycles conduisant à l'initiation de la fissure de fatigue.

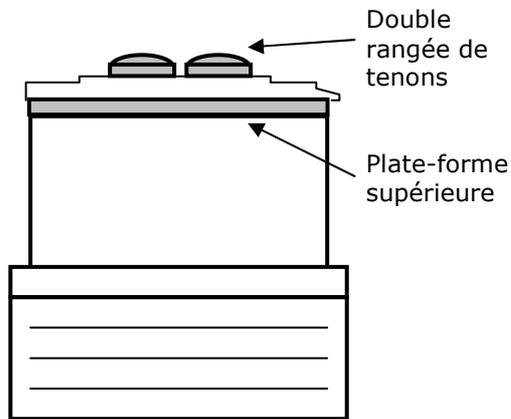


Figure 8.12 – Modification de la rangée

La modification représentée à la figure 8.12 a consisté à installer une plate-forme supérieure en tête des aubes pour protéger le ruban des pulsations de pression générées dans le canal inter aube, et de tenir le ruban avec deux tenons au lieu d'un seul pour empêcher tout basculement.

Ce type de construction est devenu standard après cet incident sur les aubages larges dont on soupçonne une susceptibilité vibratoire du ruban ou une réponse acoustique du canal.

### 8.2.2 Excitations liées aux écoulements de vapeur

L'illustration concerne une petite turbine à vapeur de faible puissance à deux étages entraînant une pompe à 3000 tr/min dans une installation de pétrochimie. La figure 8.13 montre la coupe d'une telle machine.

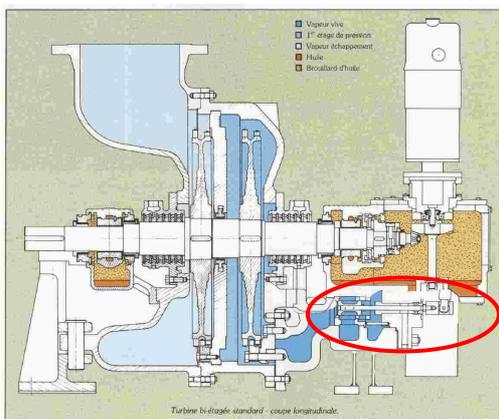


Figure 8.13 – Petite turbine d'entraînement mécanique

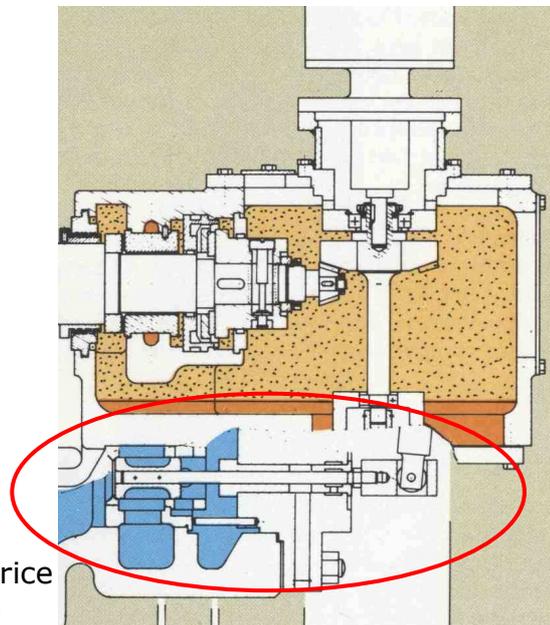


Figure 8.14 – Soupape régulatrice double siège et commande

La soupape régulatrice à double siège présente comme avantage d'être équilibrée du point de vue effort de manœuvre, ce qui permet une commande facile par la tringlerie du servomoteur (la figure 8.14 montre l'entraînement du régulateur de vitesse mécanique par un renvoi d'angle installé dans le palier avant – le servomoteur et la tringlerie sont cachés par le palier – le trajet de la vapeur autour de la soupape double siège est en bleu). Puisque la vapeur passe par les deux côtés de la soupape régulatrice, il faut que son corps soit maintenu par des bras de façon à ce que le flux

de vapeur partant vers l'avant (la droite) soit redirigé vers les étages de détente. Il s'agit de pièces de fonderie.

Sur cette machine, les cardans de la tringlerie qui pilotait la soupape régulatrice d'admission de vapeur double siège à partir du servomoteur du régulateur de vitesse étaient trouvés régulièrement détériorés. On a d'abord suspecté un problème de résonance mécanique de la commande sous l'effet de la vapeur, et on a mesuré les vibrations axiales sur la tige de commande de la soupape.

On a trouvé que la fréquence de vibration était fonction du régime de la machine, au fur et à mesure que la vitesse montait pour passer plus de débit sur la pompe, la fréquence de la vibration augmentait. Finalement, on a calculé la fréquence des tourbillons de Karman derrière les bras supportant le corps de la soupape régulatrice, avec un nombre de Strouhal de 0,3 :

$$Fr = \frac{St V}{d} \quad (8.1)$$

avec  $Fr$  la fréquence des tourbillons (Hz),

$St$  le nombre de Strouhal (0,3),

$V$  la vitesse du fluide autour de l'obstacle (m/s),

$D$  la largeur de l'obstacle (m).

On a trouvé une bonne corrélation avec la fréquence mesurée, et les fluctuations de pression des tourbillons se retrouvaient donc sur la partie gauche de la soupape régulatrice. On a éliminé le problème en profilant les bras, de façon à ce que la largeur de l'obstacle passe de celle des bras à celle du bord de fuite.

Un type de phénomène de même nature a été trouvé sur une installation de turbine à vapeur qui devait réaliser un niveau acoustique particulièrement bas pour une application militaire sensible. Une raie particulière apparaissait dans le spectre à certaines puissances, qui s'est révélée être liée à l'excitation d'un mode propre d'un puits thermométrique destiné à mesurer la température à l'admission de la turbine par les tourbillons de Karman qu'il générerait. On peut même imaginer qu'un fonctionnement de longue durée aurait pu causer une fissuration et une fuite de vapeur.

### 8.3 Prise en compte de phénomènes acoustiques dans les vibrations de roues de compresseurs centrifuges

Ce paragraphe constitue une suite au chapitre 7.2 afin de montrer les nouvelles recherches qui apportent à la fois des réponses et de nouvelles interrogations aux questions posées.

La bibliographie dans ce domaine n'est pas très abondante. Les premiers articles consacrés aux phénomènes acoustiques dans les turbomachines étaient consacrés aux machines axiales. Parmi eux, on citera l'étude phénoménologique de Tyler et Sofrin en 1962 **[Tyler]**, qui est développée brièvement au paragraphe 8.3.1. Celle-ci était motivée, comme beaucoup à cette époque, par la caractérisation du bruit au voisinage des aéroports et la recherche de son atténuation. Le résultat de cette étude d'interaction rotor-stator est la connaissance d'une liste de fréquences d'excitations acoustiques.

Sur la base de ces données, Ehrich a concentré ses études en 1969 [**Ehrich**] sur la caractérisation de fréquences propres acoustiques dans des cavités annulaires bidimensionnelles, en prenant en compte l'effet d'un écoulement axial avec une composante giratoire.

Après plusieurs dizaines d'années d'études consacrées aux machines axiales, il faut attendre 1999 pour voir le premier article consacré à la rupture par fatigue à grand nombre de cycles de la roue d'un compresseur centrifuge causée par une auto excitation aéroélastique. Cet article comporte deux parties, la première [**Eckert**] relative à l'exposé du cas et aux mesures réalisées et la seconde [**Ni**] relative aux mécanismes et à la modélisation.

A partir de cette étude, les auteurs se sont intéressés :

- aux résonances acoustiques dans une volute d'entrée de turbocompresseur,
- aux interactions rotor-stator et aux formes acoustiques qui en résultent dans le cas d'une pompe turbine radiale réversible,
- aux conditions critiques de résonance acoustique.

D'autres sources d'excitations acoustiques ont été investiguées en montrant comment le développement des vortex de sillage aux bords de fuite pouvait exciter les résonances acoustiques inter aubes. Les modes propres correspondants, caractérisés par différents types de formes modales (modes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ ) présentés en 1989 par Parker et Stoneman sont connus sous le terme de modes de [**Parker**].

Sven König a publié en 2009 un article sur la caractérisation des fréquences propres et modes propres acoustiques dans les cavités latérales entourant une roue de compresseur centrifuge [**König1**]. Avec ses collègues Petry et Wagner, il a publié une autre étude, toujours en 2009, où l'on montre que la rupture en festons par fatigue d'une roue de compresseur centrifuge est liée à la coïncidence d'un mode propre mécanique, d'un mode propre acoustique et de l'excitation par la fréquence de passage des aubages distributeurs situés en amont [**König2**].

Encore plus récemment, Moyroud, Picavet et al. ont montré que les formes acoustiques des excitations de Tyler-Sofrin se réfléchissaient sur les aubages redresseurs du canal de retour situé en aval de la roue, pour provoquer une nouvelle excitation acoustique dont la fréquence correspond à une harmonique égale à la somme des nombres d'aubages distributeurs situés en amont et du nombre d'aubages redresseurs situés en aval [**Moyroud**]. Un résumé de cette étude fort intéressante est présenté au paragraphe 8.3.2.

Toutes ces recherches débouchent sur de nouvelles sources d'excitations, complétant celle triviale des sillages des aubages distributeurs utilisée au chapitre 7.2.

### 8.3.1 Excitations de Tyler Sofrin

Le champ de fluctuations de pression rayonné par un rotor a été déterminé expérimentalement comme une superposition d'ondes tournant à la vitesse de rotation  $N$ , dont chaque forme a un nombre de lobes égal aux harmoniques de la fréquence de passage des aubages tournants. Ce champ s'exprime [**Tyler**] par une décomposition en série de Fourier par :

$$p(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos[nN_a (\theta - \Omega t) + \phi_n(r)] \quad (8.2)$$

où  $n$  est l'harmonique considéré,  $N_a$  le nombre d'aubages tournants,  $\Omega$  la fréquence de rotation et  $a_n(r)$  et  $\phi_n(r)$  représentent l'évolution du champ de pression radial du rayon (effet de pied, de tête, etc.).

Par une technique de combinaison spatio-temporelle (assez proche de celle utilisée au paragraphe 7.1.5 pour déterminer le déphasage (7.4) des sillages des distributeurs vu par deux aubages tournants), Tyler et Sofrin ont étudié l'interaction rotor-stator de façon analytique en combinant les champs de pression générés par les aubages tournants à partir de la source amont de chaque aubage distributeur. Ainsi, pour l'harmonique  $n$ , on obtient l'expression (8.3), qui est assez différente de celle (8.2bis) dérivée du champ de pression (8.2) délivré par le rotor seul :

$$p_{mn} = N_d a_{mn} \cos(m\theta - nN_a \Omega t + \phi_{mn}) \quad (8.3)$$

$$p_n = a_n \cos[bN_a (\theta - \Omega t) + \phi_n] \quad (8.2bis)$$

Le nombre de formes en lobes générées est ainsi différent de celui du rotor seul et fait intervenir aussi le nombre d'aubages distributeurs  $N_d$  :

$$m = nN_a + kN_d \quad (8.4)$$

où  $k$  est un entier variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Cette équation (8.4) conduit aux fréquences des excitations générées, désignées par excitations de Tyler-Sofrin.

L'article comporte également des analyses acoustiques d'atténuation des niveaux des pulsations de pression dans le conduit annulaire suivant la roue, puis de radiation en champ lointain, qui ne concernent pas le présent mémoire. Le développement réalisé par Tyler-Sofrin est phénoménologique et se distingue d'autres approches plus globales mais quantitatives, comme les travaux réalisés par la NASA en 1975 sur la prévision du niveau de bruit émis par les compresseurs axiaux [Heidmann].

### 8.3.2 Excitations acoustiques instationnaires dues au couplage des différentes rangées d'aubages

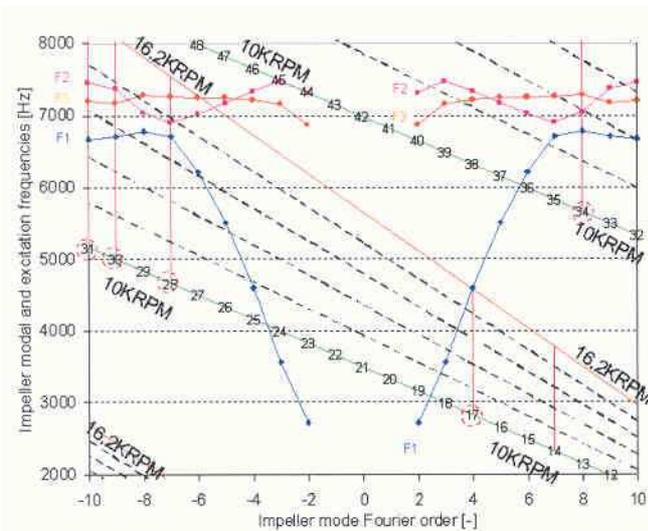


Figure 8.15 – Diagramme de coïncidence

La figure 8.15 donne le diagramme de coïncidence de la roue centrifuge étudiée par [Moyroud], tel que défini au paragraphe 7.2.3, mais avec la différence que l'ordre de Fourier varie de  $-9$  à  $+9$  pour les 17 aubes de la roue au lieu de  $0$  à  $9$ . Cette différence s'explique par l'équation (8.4) des excitations de Taylor Sofrin où le coefficient  $k$  peut être aussi bien positif que négatif.

Les harmoniques de la vitesse de rotation sont notés. Ceux qui sont repérés sont ceux sur lesquels on a relevé une réponse significative.

La figure 8.16 montre l'emplacement des capteurs installés sur l'étage de compression centrifuge, et la figure 8.17 est un diagramme de Campbell expérimental mesuré sur la jauge de contrainte repérée SG2. Ce diagramme montre la réponse la plus importante sur l'harmonique 30 à la vitesse de 13400 tr/min.

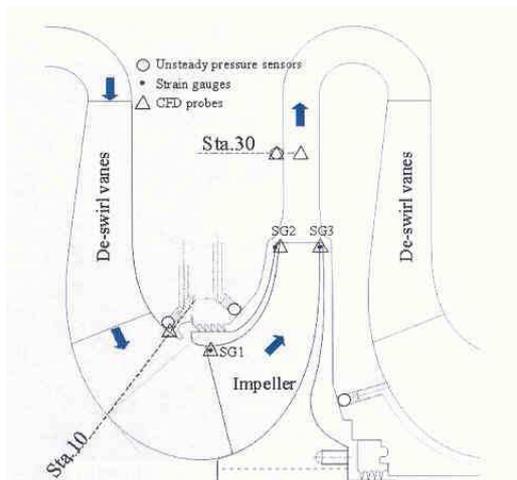


Figure 8.16 – Emplacement des capteurs

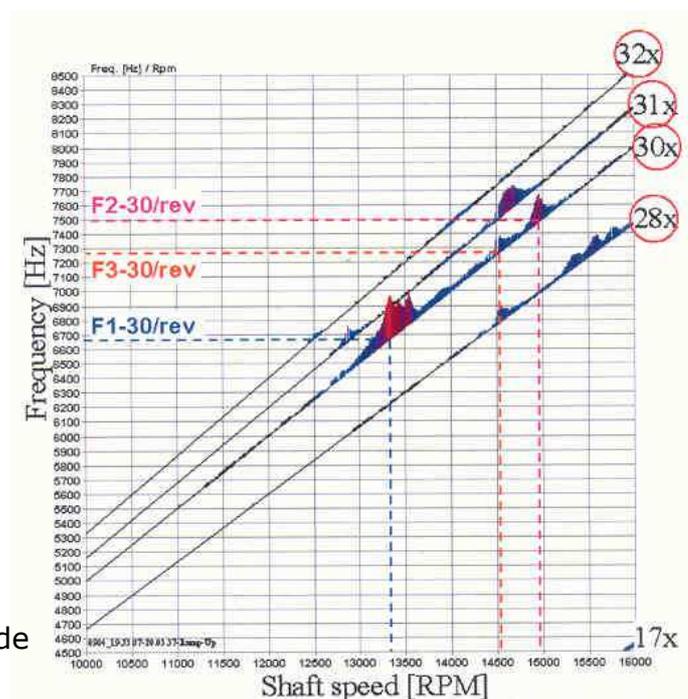


Figure 8.17 – Diagramme de Campbell expérimental

La question est de savoir pourquoi l'harmonique 30 donne le plus d'amplitude de réponse qui n'est un multiple ni des 14 aubages directeurs placés devant la roue, ni des 17 aubages de la roue, ni des 16 aubages redresseurs du canal de retour. Pour ceci, une étude d'analyse aérodynamique instationnaire a été réalisée sur la totalité de l'étage représenté aux figures 8.16 et 8.23. Cette analyse est très complète, le nombre de cellules allant jusqu'à 48,4 millions de cellules, et l'étude instationnaire étant réalisée sur 4 rotations avec 2520 pas de calcul par tour (la périodicité étant atteinte avant la fin de la 3<sup>ème</sup> rotation).

Les figures 8.18 et 8.19 donnent les spectres de réponse en pressions instationnaires issues de la simulation aux stations 10 entre le distributeur et l'entrée dans la roue, et 30 dans le diffuseur.

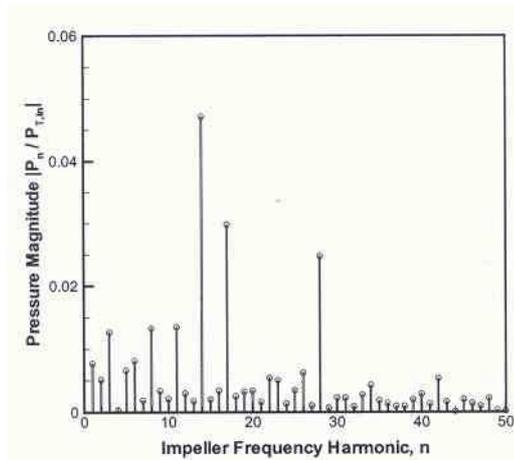


Figure 8.18 – Fluctuations de pression à l'amont de la roue

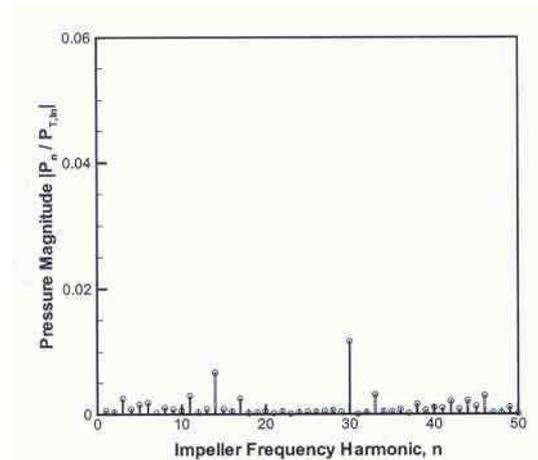


Figure 8.19 – Fluctuations de pression dans le diffuseur

Le spectre de pression de la figure 8.18 montre trois raies importantes aux harmoniques 14 (nombre d'aubages distributeurs), 17 (nombres d'aubages de la roue) et 28 (double du nombre d'aubages distributeurs). L'amplitude de l'harmonique 2 (H28) étant moitié de celle du fondamentale (H14). Dans le diffuseur (figure 8.19), les niveaux des harmoniques 14 et 17 sont plus faibles qu'en amont de la roue, l'harmonique 28 a disparu, mais la 30 est apparue.

L'étude acoustique a été faite sous la forme des excitations de Tyler-Sofrin, mais en adjoignant une réflexion des pulsations de pression sur l'obstacle des  $N_r$  aubages redresseurs du canal de retour :

$$m' = m \pm k'N_r = nN_a \pm kN_d \pm k'N_r \quad (8.5)$$

A partir de l'étude bidimensionnelle des résultats suivant la forme de l'équation (8.5), on obtient, après un changement de repère, les spectres des figures 8.20 et 8.21 respectivement dans les deux sections 10 et 30.

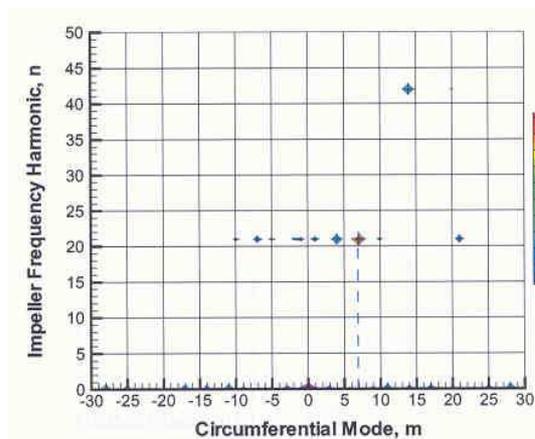


Figure 8.20 – Spectre de pression 2D dans la section 10

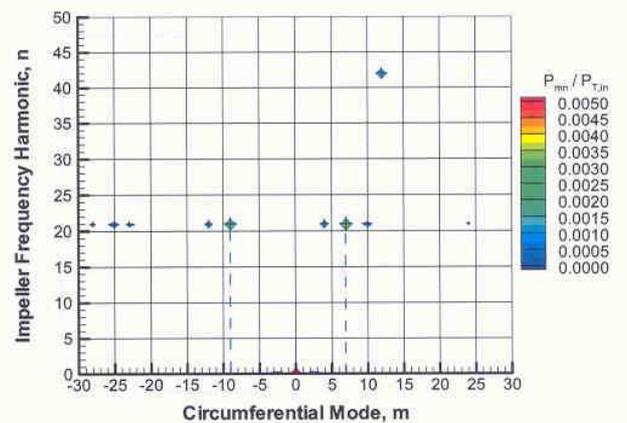


Figure 8.21 – Spectre de pression 2D dans la section 30

Dans la section 10 apparaît l'harmonique  $n=21$  associée au mode  $m=+7$  (précession directe), alors que dans la section 30, elle est associée aux modes  $+7$  et  $-9$  (précession inverse). Le mode 7 est lié à la présence du fondamental des 14 aubes directrices vu par la roue. La différence entre ces modes  $+7 - (-9) = 16$  étant le nombre d'aubages redresseurs du canal de retour, soit encore  $k'=-1$  dans l'équation (8.5). Moyroud explique que tous ces chiffres sont cohérents, puisque l'harmonique 30 en aval est créé par  $30=21-(-9)$ , alors qu'en amont, on avait une harmonique 14 obtenue par  $14=21-7$ .

Sur ces figures, on voit aussi apparaître l'harmonique  $n=42$ . Sur la figure 8.20, à l'amont de la roue, elle est associée à l'ordre  $m=+14$ , c'est-à-dire à harmonique 2 de la fréquence de passage des distributeurs  $42-14=28$ . Sur la figure 8.21, à l'aval de la roue, elle est associée cette fois à l'ordre 12, ce qui redonne toujours la même harmonique d'excitation  $42-12=30$ .

En conclusion, on obtient une excitation acoustique égale à la somme du nombre des aubages du distributeur et du canal de retour.

### 8.3.3 Importance des moyens à mettre en œuvre

Dans chacune des recherches, les moyens mis en œuvre, tant au niveau de la modélisation que de l'investigation expérimentale sont colossaux. Le chiffre de 48,4 millions de cellules pour l'étage complet de l'étude de Moyroud qui comporte un calcul instationnaire de 10 000 pas de temps, montre les efforts réalisés au niveau de la CFD. N'oublions pas que les calculs – et leurs dépouillements évidemment – doivent être réalisés pour chaque régime de rotation.

Sur le plan expérimental, l'utilisation de machines à pleine échelle, comme le compresseur split de la figure 8.22 pour König et le compresseur baril des figures 8.23 et 8.24 pour Moyroud, avec des instrumentations embarquées (capteurs de pressions instationnaires, jauges de contraintes) transmettant leurs informations par télémétrie, représentent des campagnes d'essais énormes.

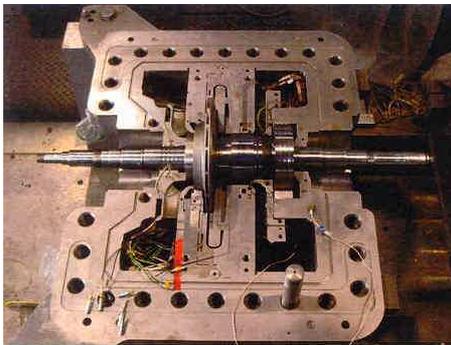


Figure 8.22 – Compresseur centrifuge d'essais

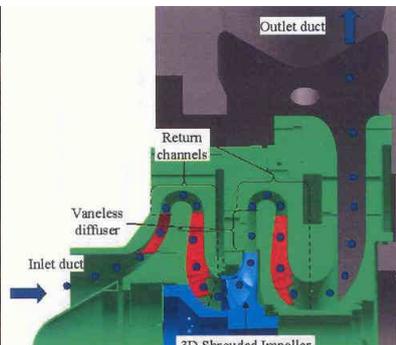


Figure 8.23 – Etage de compression centrifuge



Figure 8.24 – Boucle d'essais de compresseur expérimental

## 8.4 Conclusion

Les phénomènes acoustiques sont très loin de se limiter au bruit rayonnant émis par une machine et son installation, même si cet aspect est primordial. Ils sont aussi la cause d'implications vibroacoustiques pouvant conduire à des avaries sévères, causes de pertes de productions importantes.

Les efforts de recherche engagés sur les roues de compresseurs centrifuges mettent en exergue des excitations acoustiques sur de nouvelles harmoniques de la vitesse de rotation. Différentes hypothèses se font jour, et la recherche sur ce thème est en pleine effervescence.

Ce chapitre a évoqué quelques exemples parmi une immense diversité de cas. La conception de composants de turbomachines qui était déjà largement multiphysique doit intégrer également cette dimension acoustique. Les études à entreprendre sont extrêmement lourdes et, dans le cas de machines unitaires construites sous spécifications, il faudra disposer de critères pour savoir les déclencher.

## 9. Modèle dynamique d'un compresseur centrifuge et de ses réseaux

Ce chapitre se démarque de la dynamique vibratoire. Il s'attache au développement d'un modèle original pour expliquer le régime transitoire d'un compresseur centrifuge lorsqu'on modifie ses conditions de fonctionnement, et notamment au mécanisme d'adaptation du débit traversant la machine. Ce changement impose en effet un transitoire hors de la caractéristique statique de compression.

### 9.1 Nécessité de réalisation de simulations dynamiques

Le pompage des compresseurs, dont un point a été établi en 1999 par Pugnet **[Pugnet99]**, est un phénomène redouté des exploitants. Celui des compresseurs axiaux (turbines à gaz) est catastrophique. Celui des compresseurs centrifuges, s'il ne casse pas réellement la machine, provoque néanmoins des dégâts internes qui affectent lourdement leur rendement.

Le pompage se caractérise par une inversion brutale du débit de gaz traversant la machine. C'est un peu comme si un coup de canon était tiré dans la machine, et l'on parle d'ailleurs de "coup de pompage". Pour l'illustrer, la figure 9.1 montre l'enregistrement vibratoire qui a été obtenu inopinément lors d'un coup de pompage d'un compresseur centrifuge de gaz naturel.

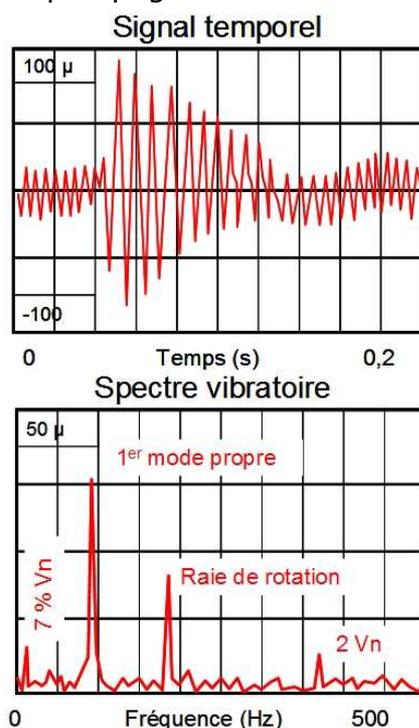


Figure 9.1 – Effet du pompage sur les vibrations d'un compresseur centrifuge

Sur l'enregistrement temporel, on voit la machine vibrer normalement sur sa vitesse de rotation. Lorsque le pompage survient, l'amplitude des vibrations passe brusquement de 40 à plus de 240  $\mu\text{m}$  crête à crête. Comme il s'agit d'un choc, on voit alors la réponse libre amortie du premier mode propre de flexion. Puis les vibrations reviennent sur l'amplitude de la réponse au balourd, mis avec une porteuse à basse fréquence.

La transformée de Fourier de ce signal montre la raie de balourd, la raie correspondant au premier mode propre de flexion excité par le choc, et une raie à basse fréquence à environ 7% de la vitesse de rotation, typique du phénomène de décollement tournant dans les diffuseurs lisses (début d'instabilité aérodynamique spécifique aux compresseurs centrifuges fonctionnant à bas débit).

De tels niveaux vibratoires aux paliers laissent présager des déplacements beaucoup plus importants au niveau de l'aérodynamique, donc une destruction des lèchettes des labyrinthes des étanchéités internes (figure 1.15), ce qui nécessite un arrêt de la production et leur remplacement. Des techniques spéciales ont aussi été développées dans le cas de l'utilisation des nids d'abeilles comme le revêtement abrasif que l'on peut voir sur la figure 1.8 pour éviter des contacts trop durs et l'engrènement sur des modes propres rétrogrades. Pour les réseaux de gaz, les coups de pompage sont aussi très dommageables, car ils excitent tous leurs modes propres mécaniques avec

de grandes amplitudes de plusieurs centimètres, avec un risque évident sur l'étanchéité des brides.

Le pompage apparaît lorsque le débit devient trop faible et les compresseurs centrifuges sont équipés de dispositifs antipompage, plus ou moins sophistiqués, consistant à recirculer une partie du débit comprimé pour que le débit dans la machine reste supérieur à la limite de pompage, sans perturber la production. Le risque lié à l'apparition du pompage a dû être quantifié et des simulations dynamiques ont été développées.

Le but de ce chapitre n'est pas de chercher les causes aérodynamiques de l'instabilité des étages de compression, mais de comprendre la dynamique de fonctionnement d'une machine sur ses réseaux de gaz. En établissant un modèle dynamique de compresseur, on expliquera dans un premier temps son comportement transitoire entre deux régimes de fonctionnement, puis on passera aux instabilités.

## 9.2 Modélisation d'un compresseur centrifuge et d'un réseau

Les ingénieurs de projets et de bureau d'études sont tellement habitués à voir les courbes de hauteur développée des compresseurs, qu'ils ont tendance à penser que c'est le compresseur qui impose la pression de refoulement pour une pression d'aspiration donnée. Mais alors comment expliquer les changements de régime ? En fait, la pression dans un réseau, que l'on considérera ici comme un plénum est le résultat d'un bilan de masse et d'énergie :

- à un instant donné, on a telle masse de gaz dans le réseau ;
- entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , il entre une certaine quantité de gaz à une certaine enthalpie dans le réseau, il en sort une autre à une autre enthalpie ;
- à l'instant  $t_2$ , les bilans de masse et d'énergie donnent une nouvelle masse de gaz et une nouvelle enthalpie dans le même volume, dont déduit donc la nouvelle pression et la nouvelle température.

Les pressions imposées par ces bilans à l'aspiration et au refoulement deviennent alors des "conditions aux limites" pour le fonctionnement du compresseur. Puisqu'il ne s'agit plus d'une conséquence de l'application des courbes de performance, il faut imaginer un autre mode de fonctionnement du compresseur.

### 9.2.1 Caractéristiques d'un compresseur centrifuge

On a l'habitude de représenter le fonctionnement d'une turbomachine en utilisant les coefficients sans dimension de Rateau :

- coefficient de débit : 
$$\phi = \frac{4 Q_v}{\pi D_2^2 U_2} \quad (9.1)$$

avec  $Q_v$  débit volumique ( $\text{m}^3/\text{s}$ ),  
 $D_2$  diamètre extérieur (m),  
 $U_2$  vitesse périphérique (m/s) ;

**Nota 1** : dans le domaine des compresseurs, le coefficient de débit est différent du coefficient de Rateau, car il considère la surface frontale de la roue au lieu du carré de son diamètre ; physiquement, c'est le rapport entre la vitesse du gaz sur la surface totale de la roue à la vitesse périphérique.

- rendement polytropique :  $\eta_p = \frac{Q_{m-c} \Delta H}{W}$  (9.2)

avec  $Q_{m-c}$  débit massique dans le compresseur (kg/s),  
 $W$  puissance mécanique à l'arbre (W) ;

**Nota 2** : dans le domaine des compresseurs, on utilise la notion d'analyse polytropique, plutôt que isentropique, définie par un rendement polytropique constant entre l'entrée et la sortie. C'est une entité qui n'est pas physique mais qui présente le gros avantage d'établir un rendement indépendant du rapport de pression.

- coefficient de hauteur polytropique :  $\psi = \frac{\Delta H_p}{U_2^2}$  (9.3)

avec  $\Delta H_p$  enthalpie communiquée au gaz exprimée de façon approchée par :

$$\Delta H_p = \frac{Z_a R T_a}{\gamma \eta_p} \left( \left( \frac{P_r}{P_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p}} - 1 \right) \quad (9.4)$$

$Z_a$  coefficient de compressibilité du gaz à l'aspiration reliant la pression et la température au volume spécifique  $PV = ZRT$ , et qui sera déterminé aux équations (9.8) à (9.10),

$R$  constante thermodynamique du gaz  $R = \frac{R_0}{M_m}$ ,  $M_m$  masse molaire du gaz,

$T_a$  température d'aspiration,

$\gamma$  coefficient isentropique de la loi de Laplace  $PV^\gamma = C^{ste}$  dans une transformation adiabatique où  $V$  est le volume spécifique, inverse de la masse volumique  $\rho$ ,

$\eta_p$  rendement polytropique,

$P_a$  et  $P_r$  pressions d'aspiration et de refoulement.

Les courbes caractéristiques d'un compresseur à 5 étages sont tracées sur la figure 9.2 en coefficients adimensionnels :

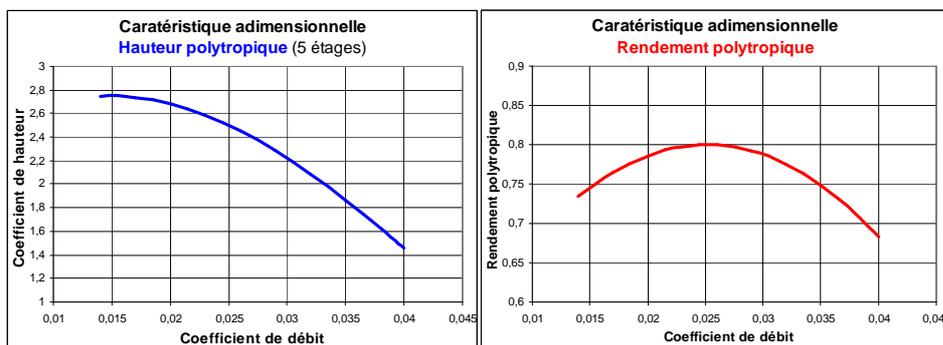


Figure 9.2 – Courbes caractéristiques adimensionnelles d'un compresseur centrifuge

## 9.2.2 Caractéristiques d'un réseau

Un réseau de gaz présente une caractéristique pression débit, vue de la bride de connexion au compresseur fonction de sa nature. La figure 9.3 en donne plusieurs exemples. Pour un réseau résistant classique (Courbe A), on va avoir une variation parabolique du type  $P = K Q^2$  où  $K$  correspond à une somme de pertes de charge répartie et singulières, telles que définies par le formulaire établi par Idel'cik en 1969

**[Idel'Cik]**. Si le réseau débite sur un élément présentant une détente sonique (Courbe B), la courbe est pratiquement linéaire  $\frac{P}{\sqrt{T}} = KQ_{m-s}$ . Si le réseau comporte une grande capacité pneumatique (Courbe C), comme dans le cas des compresseurs de transport ou de stockage de gaz naturel, ces pertes de charge ne concernent qu'une partie de l'élévation de pression  $P = P_0 + KQ_{m-s}^2$ . Dans le cas de groupes de réfrigération (Courbe D), la pression est constante, fixée par l'équilibre liquide vapeur.

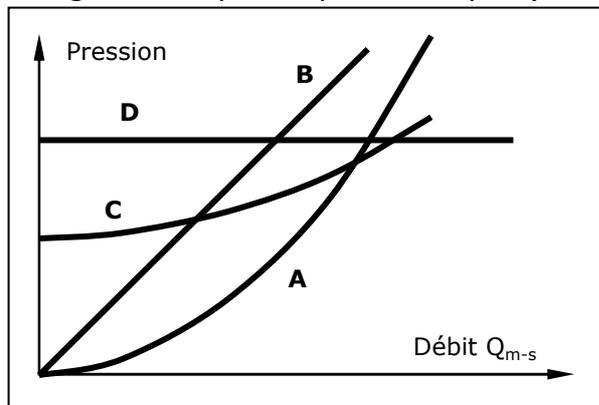


Figure 9.3 – Courbes caractéristiques de différents réseaux gaz

### 9.2.3 Point de fonctionnement

Schématiquement, le point de fonctionnement d'un compresseur se situe à l'intersection de sa courbe caractéristique et de celle du réseau sur lequel il débite, tel que montré par exemple sur la figure 9.4 où l'on reprend la forme adimensionnelle de la figure 9.2 et un réseau résistant de type A de la figure 9.3.

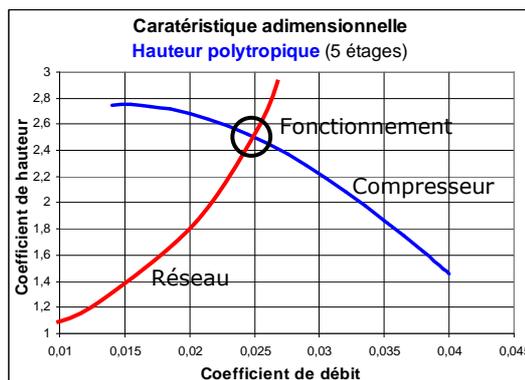


Figure 9.4 – Point de fonctionnement d'un compresseur centrifuge sur son réseau de refoulement

### 9.2.4 Technique usuelle de simulation de fonctionnement

La technique habituelle de simulation consiste à calculer les pressions dans les réseaux, en déduire le coefficient de hauteur polytropique du compresseur, puis le coefficient de débit sur la caractéristique ci-dessus, et en déduire le débit traversant le compresseur. Cette méthode simple a deux inconvénients : elle ne respecte pas le bilan d'énergie, elle ne marche pas dans la zone instable de fonctionnement du compresseur.

### 9.2.5 Développement d'un nouveau modèle de simulation de fonctionnement

L'idée du nouveau modèle consiste à dissocier les deux notions de la hauteur :

- la hauteur réelle disponible  $\Delta H_D$ , développée par le compresseur dans ses échanges d'énergie (transformation d'énergie mécanique en énergie thermique sous forme d'enthalpie), soit en fonction de l'équation (9.3) :

$$\Delta H_D = \frac{\psi U_2^2}{\eta_p} \quad (9.3 \text{ bis})$$

- la hauteur réelle requise  $\Delta H_R$ , nécessaire pour transvaser du gaz depuis l'aspiration jusqu'au refoulement, compte tenu des pressions imposées par les réseaux, soit en fonction de l'équation (9.4) :

$$\Delta H_R = \frac{Z_a R T_a}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P_r}{P_a} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma \eta_p}} - 1 \right) \quad (9.4 \text{ bis})$$

- si ces deux hauteurs sont égales, le fonctionnement est stable. Sinon, la différence d'énergie est transformée en variation d'énergie cinétique, ce qui provoque l'augmentation ou la réduction du débit traversant la machine.

Le schéma fonctionnel est représenté figure 9.5.

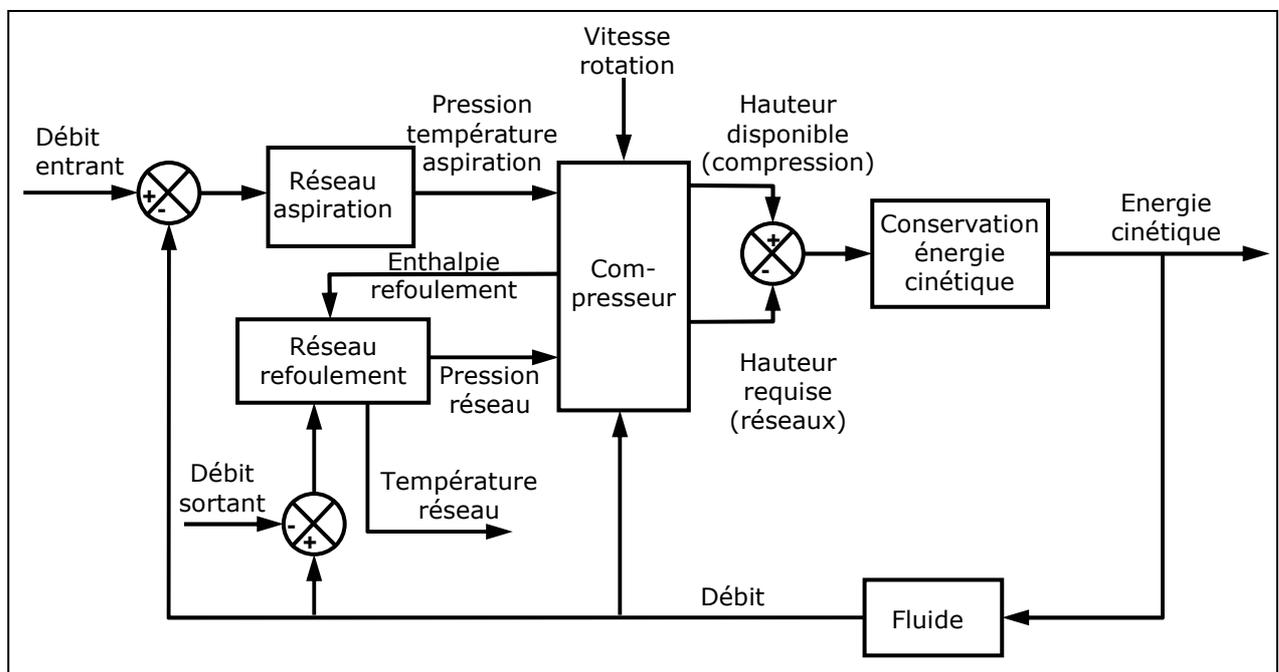


Figure 9.5 – Schéma fonctionnel du modèle aérothermodynamique de compresseur dans ses réseaux

Les simulations numériques qui sont faites ici concernent un compresseur centrifuge, de puissance 7900 kW à 13000 tr/min, comprimant 120 t/h de gaz naturel de 19 kg/kmol de masse molaire entre 25 bar abs., 15°C (288,15 K) et 82,5 bar abs.

Les caractéristiques adimensionnelles du compresseur (figure 9.2) sont numérisées sous la forme polynomiale :

$$\psi = 28533 \phi^3 - 4069,3 \phi^2 + 102,82 \phi + 2,027 \quad (9.5)$$

$$\eta_p = -532 \phi^2 + 26,78 \phi + 0,463 \quad (9.6)$$

On peut contrôler la qualité de cette modélisation en calculant une régression linéaire du rapport  $\psi/\eta_p$  qui doit être physiquement une expression linéaire du coefficient de débit  $\phi$ , la droite d'Euler, avec une inclinaison fonction de la tangente de l'angle métal

de sortie des aubes au diamètre extérieur (pour une entrée axiale). Les expressions (9.5) et (9.6) conduisent à une droite d'Euler d'équation  $\frac{\Psi}{\eta_p} = -61,983\phi + 4,6527$  (9.7)

avec un coefficient de détermination statistique  $R^2$  de 99,8%.

Les notions de thermodynamique des mélanges gazeux utilisées ici sont empruntées à l'ouvrage de base de ce domaine de propriétés des gaz et des liquides dans sa 4<sup>ème</sup> édition de Reid, Prausnitz et Poling en 1987 **[Reid]**. Cet ouvrage est souvent appelé le "Reid et Sherwood" du nom des auteurs des premières éditions.

On détermine les caractéristiques du gaz à partir de l'équation d'état thermodynamique de Soave Redlich Kwong **[SRK]** dont la forme générale est donnée par l'équation (9.8), ou de toute autre équation d'état adaptée à la nature du gaz dans le plan d'expérience du tableau 9.6 (sauf l'entropie  $S$  qui n'est pas utilisée directement dans ce modèle) :

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{c}{V(V-b)} \quad (9.8)$$

La loi des gaz parfaits  $PV = RT$ , obtenue en combinant la loi de Charles, la loi de Gay-Lussac et l'hypothèse d'Avogadro n'est pas respectée pour un gaz réel. On introduit une correction sous la forme d'un coefficient de compressibilité  $Z$  :  $PV = ZRT$  (9.9)

Ce coefficient  $Z$  est solution de l'équation :

$$Z^3 - Z^2 + (A - B - B^2)Z - AB = 0 \quad A = \frac{cP}{R^2 T^2} \quad B = \frac{bP}{RT} \quad (9.10)$$

les coefficients  $b$  et  $c$  étant fonction des proportions des constituants dans le mélange gazeux, de leurs pressions et températures critiques ainsi que de leurs coefficients acentriques respectifs et des coefficients d'interaction entre eux.

Tableau 9.6 - Caractéristiques thermodynamiques d'un gaz naturel								
SRK		P = 20 bar	P = 50 bar	P = 80 bar	P = 110 bar	P = 140 bar	Nature du gaz	
Z	T = 10 °C	0,9423	0,8574	0,7817	0,7295	0,7107	Composant	Pourcentage
	T = 50 °C	0,9653	0,9177	0,8783	0,8505	0,8365	CH4	85,1
	T = 90 °C	0,9792	0,9522	0,9314	0,9178	0,9119	C2H6	8,8
	T = 130 °C	0,9881	0,9737	0,9638	0,9587	0,9586	C3H8	2,6
	T = 170 °C	0,9939	0,9876	0,9846	0,985	0,9887	C4H10 A	0,7
Gamma	T = 10 °C	1,2751	1,3255	1,462	1,7243	2,089	C5H12 A	0,1
	T = 50 °C	1,2633	1,3013	1,3748	1,4902	1,6451	C6H14 A	0,05
	T = 90 °C	1,25	1,2819	1,3329	1,4041	1,494	N2	0,9
	T = 130 °C	1,2364	1,2646	1,3044	1,3558	1,4177	CO2	1,75
	T = 170 °C	1,2233	1,2488	1,282	1,3225	1,3695	Masse molaire	
H (kJ/kg)	T = 10 °C	489,8466	448,7015	404,8109	362,3897	327,6105	19 kg/kmol	
	T = 50 °C	579,9754	549,7008	519,5975	491,0481	465,5656		
	T = 90 °C	672,7384	649,3065	626,7286	605,5949	586,4401		
	T = 130 °C	769,0519	750,4386	732,8119	716,4458	701,5573		
	T = 170 °C	869,5254	854,5286	840,4828	827,516	815,7173		

On établit des régressions permettant de relier facilement les grandeurs d'état thermodynamiques entre elles, avec ici une formulation quadratique pour une pression absolue exprimée en pascals et une température en kelvins :

$$\begin{aligned}
Z = & \left( -0,05737506 (1.10^{-2} T)^2 + 0,33167005 (1.10^{-2} T) - 0,35218783 \right) (1.10^{-7} P)^2 \\
& + \left( -0,00145276 (1.10^{-2} T)^2 + 0,26101998 (1.10^{-2} T) - 1,18311082 \right) (1.10^{-7} P) \quad (9.11) \\
& + \left( -0,02447261 (1.10^{-2} T)^2 + 0,13581117 (1.10^{-2} T) + 0,8681705 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H = & \left( -1,899560666 (1.10^{-2} T)^2 + 10,6566518 (1.10^{-2} T) - 4,82576314 \right) (1.10^{-7} P)^2 \\
& + \left( -26,7822686 (1.10^{-2} T)^2 + 225,443152 (1.10^{-2} T) - 660,23018 \right) (1.10^{-7} P) \quad (9.12) \\
& + \left( 16,2514897 (1.10^{-2} T)^2 + 106,464793 (1.10^{-2} T) + 88,9258152 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma = & \left( 0,35617049 (1.10^{-2} T)^2 - 2,90543203 (1.10^{-2} T) + 5,94562486 \right) (1.10^{-7} P)^2 \\
& + \left( -0,24543029 (1.10^{-2} T)^2 + 1,97385186 (1.10^{-2} T) - 3,88787502 \right) (1.10^{-7} P) \quad (9.13) \\
& + \left( 0,03483784 (1.10^{-2} T)^2 - 0,31260924 (1.10^{-2} T) + 1,9136293 \right)
\end{aligned}$$

On détermine l'équilibre statique de l'ensemble du système pour avoir les conditions initiales :

- vitesse de rotation : 12 500 tr/min,
- diamètre des roues :  $D_2 = 420$  mm,
- vitesse périphérique :  $U_2 = 275$  m/s,
- coefficient de débit :  $\phi = 0,025$ ,
- débit volumique réel aspiré :  $Q_v = 0,952$  m<sup>3</sup>/s,
- débit massique :  $Q_{m-c} = 19,67$  kg/s (70,8 t/h),
- enthalpie aspiration : 494,64 kJ/kg,
- coefficient de hauteur polytropique : 2,50,
- rendement polytropique : 0,80,
- hauteur réelle développée : 236,1 kJ/kg,
- pression de refoulement : 91,08 bar abs.,
- température de refoulement : 130,86°C (404,01 K),
- enthalpie refoulement : 730,77 kJ/kg,
- masse volumique au refoulement : 53,418 kg/m<sup>3</sup>,
- vitesse au refoulement : 21,89 m/s dans un diamètre de 146,4 mm,
- réseau de refoulement : considéré sans perte de charge ( $\rho_r$  constant),
- masse incluse dans le réseau de refoulement : 269,6 kg dans 300 m de longueur,
- masse incluse dans le compresseur : 11,11 kg dans 0,3 m<sup>3</sup>,
- vitesse moyenne dans le compresseur : 153,23 m/s (en moyenne 7 fois celle de refoulement),
- vitesse à l'aspiration : 32,31 m/s dans un diamètre de 193,7 mm,
- réseau d'aspiration considéré sans perte de charge ( $\rho_a$  constant),
- masse incluse dans le réseau d'aspiration : 60,89 kg dans 100 m de longueur,
- énergie cinétique totale du gaz : 226,84 kJ.

On applique la perturbation (changement de consommation sur le refoulement, changement de vitesse de rotation, mais pression et température constante à l'aspiration). On s'attache à ce que toutes les variables restent en équilibre à la sortie de pas de temps. Dans l'établissement des bilans, on suppose que les variables varient linéairement avec le temps entre  $t$  et  $t+dt$ , et l'on néglige dans les intégrales les termes en  $dt^2$ .

- la variable fonction du temps est le coefficient de débit :  $\phi$
- débit massique aspiré de l'équation (9.1) :  $Q_{m-c} = \frac{\pi D_2^2}{4} \frac{\omega_r D_2}{2} \phi \rho_a$  où  $\omega_r(t)$  est la pulsation de rotation incluant la perturbation en vitesse
- coefficient de hauteur  $\psi$  de l'équation (9.5)
- rendement polytropique  $\eta_p$  de l'équation (9.6)
- hauteur disponible de l'équation (9.3bis) :  $\Delta H_D = \frac{\psi \left( \frac{\omega_r D_2}{2} \right)^2}{\eta_p}$
- enthalpie au refoulement du compresseur, entrante dans le réseau de refoulement de 9.11 et (9.3bis) :  $H_{comp} = H_a + \Delta H_D$  (9.14)
- débit sortant du réseau de refoulement avec une hypothèse de détente critique à la sortie :  $Q_{m-s} = K(t) P_r$  où  $K(t)$  est la perturbation en débit (9.15)
- bilan de masse dans le réseau de refoulement :

$$M_r(t+dt) = M_r(t) + \frac{Q_{m-c}(t) + Q_{m-c}(t+dt)}{2} - \frac{Q_{m-s}(t) + Q_{m-s}(t+dt)}{2} \quad (9.16)$$

- masse volumique dans le réseau de refoulement :  $\rho_r = \frac{M_r}{Vol_r}$  (9.17)
- bilan de chaleur (enthalpie) dans le réseau de refoulement :

$$M_r(t+dt)H_r(t+dt) = M_r(t)H_r(t) + \frac{Q_{m-c}(t+dt)H_{comp}(t) + Q_{m-c}(t)H_{comp}(t+dt)}{2} dt - \frac{Q_{m-s}(t+dt)H_r(t) + Q_{m-s}(t)H_r(t+dt)}{2} dt \quad (9.18)$$

- pression et température du réseau de refoulement déterminées par une dichotomie sur  $P_r$  pour retrouver la masse volumique  $\rho_r = \frac{P_r}{Z_r R T_r}$  et l'enthalpie  $H_r$  ; à chaque itération,  $T_r$  est solution de l'équation du second degré (9.9) où  $P_r$  et  $H_r$  sont données, et l'on ajuste le coefficient de compressibilité  $Z_r(P_r, T_r)$  de l'équation (9.9)

- vitesse dans le réseau de refoulement :  $U_r = \frac{Q_c}{\rho_r S_r}$  avec  $S_r$  aire du tube (9.19)

- vitesse dans le réseau d'aspiration :  $U_a = \frac{Q_c}{\rho_a S_a}$  avec  $S_a$  aire du tube (9.20)

- énergie cinétique totale du gaz :

$$Wc = \frac{1}{2} \left( M_a U_a^2 + Vol_c \frac{\rho_a + \rho_r}{2} U_c^2 + M_r U_r^2 \right) \quad (9.21)$$

avec  $U_c = 7U_r$  en statique,

- coefficient isentropique moyen du gaz  $\gamma_m = \frac{\gamma(P_a, T_a) + \gamma(P_r, T_r)}{2}$  entre l'aspiration et le refoulement, à partir de l'équation (9.11)

- hauteur requise par les réseaux  $\Delta H_R$  d'après l'équation (9.4bis)
- bilan d'énergie, et variation d'énergie cinétique :

$$\Delta W_C = \frac{(\Delta H_D(t+dt) - \Delta H_R(t+dt))Q_{m-c}(t) + (\Delta H_D(t) - \Delta H_R(t))Q_{m-c}(t+dt)}{2} dt \quad (9.22)$$

- on itère par dichotomie sur le coefficient de débit à  $t+dt$  dans la plage de définition du compresseur pour que  $\Delta W_C = W_C(t+dt) - W_C(t)$  (9.23)

La figure 9.7 donne les résultats de la simulation pour 5% d'augmentation de vitesse en 6 secondes : variations de pression et de température dans le réseau de refoulement, et variations des débits massiques dans le compresseur et à la sortie du réseau de refoulement (production). La figure 9.8 donne les mêmes résultats pour une diminution de la consommation de 10% en 1 seconde.

On constate que le système possède deux constantes de temps, l'une pneumatique de 6,6 s et l'autre thermique de 19 s ; cette dernière est théoriquement plus longue si l'on tenait compte des échanges thermiques du gaz avec le tube au refoulement. Il faut sensiblement une minute pour que le nouvel équilibre soit atteint.

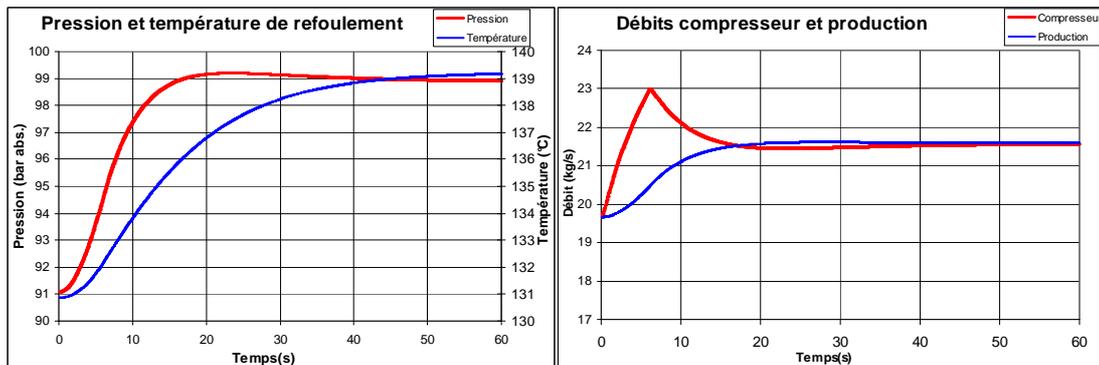


Figure 9.7 – Réponse transitoire à une augmentation de vitesse

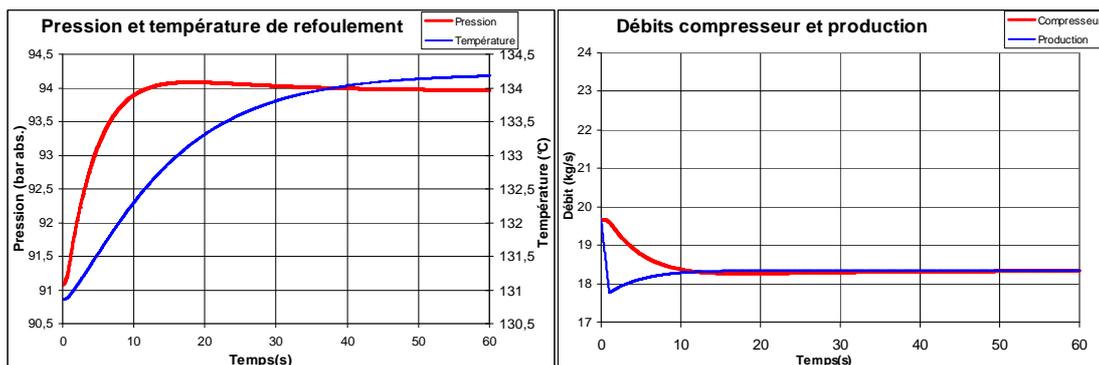


Figure 9.8 – Réponse transitoire à une diminution de la consommation

La figure 9.9 montre les trajectoires dans le réseau adimensionnel du compresseur en haut à gauche pour la variation de vitesse de la figure 9.7, en haut à droite pour la variation de consommation de la figure 9.8. En bas, on a ajouté la réponse à une variation instantanée de vitesse de 5%, où l'on s'écarte plus de la caractéristique du compresseur. Dans cette trajectoire, on distingue nettement trois phases :

- la condition initiale est le point A ;
- la partie AB est la variation de vitesse (0,1 seconde) ;
- la partie BC est la réponse à l'augmentation du débit du compresseur (1 seconde) ;

- la partie CD est la réponse à l'augmentation du débit sortant vers la consommation, qui intervient à travers la constante de temps pneumatique (15 secondes) ;
- finalement, le point d'équilibre D est atteint alors que la stabilisation thermique n'est pas encore terminée.

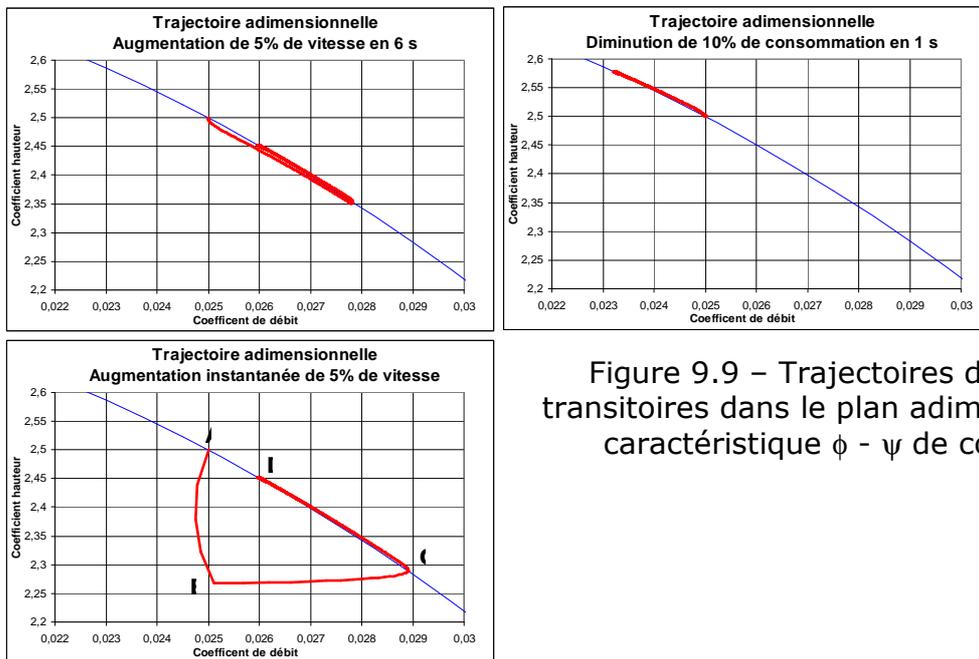


Figure 9.9 – Trajectoires des réponses transitoires dans le plan adimensionnel de la caractéristique  $\phi - \psi$  de compression

Ceci explique pourquoi la trajectoire de la réponse du cas de la figure 9.8 reste beaucoup plus proche de la courbe caractéristique du compresseur que celle du cas de la figure 9.7, car la perturbation est appliquée à la sortie de la constante de temps pneumatique dans le cas de la variation de consommation, alors qu'elle l'est en amont dans le cas de la variation de vitesse.

Numériquement, le schéma est très stable. Le pas de temps d'intégration a été poussé jusqu'à 4 secondes sans modification des courbes de réponse en pression et température. Avec 5 secondes, une oscillation apparaît sur les débits. Les simulations ci-dessus ont été effectuées avec un pas de 0,025 s afin d'avoir les courbes de réponse en débits aussi lisses que possible, surtout pour la variation de vitesse en 0,1 s.

Enfin, on va examiner deux autres simulations relatives à des délestages de 10% de vitesse. La figure 9.10 montre les trajectoires adimensionnelles pour ces variations en 8,2 et 8 secondes. Dans le premier cas, on retrouve bien une situation d'équilibre, dans le second, on sort de la plage de définition de coefficient de débit du compresseur, et on rentre dans la zone d'instabilité étudiée au paragraphe 9.3.

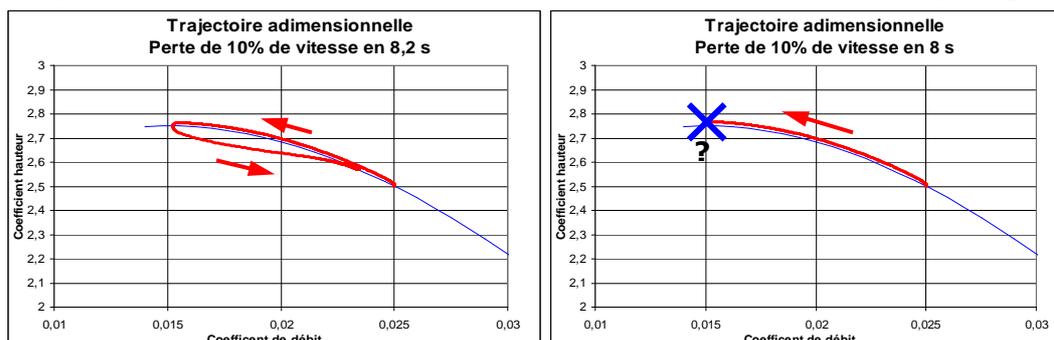


Figure 9.10 – Sortie de la zone de fonctionnement du compresseur

### 9.3 Instabilité à l'amorce du pompage

Si, dans la figure 9.2, on diminue le coefficient de débit en deçà de 0,15, alors les pertes par incidence deviennent importantes, et le coefficient de hauteur se met à diminuer. On a coutume de dire qu'un fonctionnement sur cette la partie tombante de la caractéristique est instable. Encore faut-il le démontrer. Cette annulation de la pente de la caractéristique de hauteur est l'un des critères utilisés pour la définition de la limite de pompage.

Ici encore, on ne considère que les caractéristiques du compresseur et des réseaux, les critères de décrochement aérodynamique n'étant pas pris en compte.

On a besoin de définir les caractéristiques du compresseur dans cette plage de coefficient de débit entre 0 et le maximum du coefficient de hauteur polytropique. On a coutume de modéliser le coefficient  $\psi$  par une cubique de pente nulle pour  $f = 0$  et pour  $f$  correspondant au maximum de la plage normale de fonctionnement. Il y a donc continuité de la caractéristique complète du compresseur. Pour définir le coefficient de hauteur à débit nul  $\psi_0$ , on considère l'équation d'équilibre de pression d'un anneau gaz tournant à la vitesse  $\omega_r$  entre les diamètres  $D_1$  et  $D_2$  en condition isotherme ( $T$  constante) et en négligeant la variation du coefficient de compressibilité :

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{\omega_r^2}{8ZR T}(D_2^2 - D_1^2)} \quad (9.24)$$

En appliquant l'équation (9.24) aux 5 étages du compresseur étudié dans le paragraphe 9.2.5, on obtient un rapport  $P_2/P_1$  de 2,617 pour  $D_1 = D_2/2$  et en faisant varier linéairement la température de chaque étage entre les températures d'aspiration et de refoulement pour  $\phi = 0,15$ . La hauteur polytropique est calculée avec l'équation (9.4) et on en déduit le coefficient de hauteur  $\psi_0 = 2,006$  grâce à l'équation (9.3).

Le rendement polytropique s'obtient en poursuivant la droite d'Euler d'équation (9.7) évoquée au paragraphe 9.2.5. Pour être cohérent, on itère sur le rendement polytropique débit nul à insérer dans l'équation (9.4), et l'on obtient les expressions des deuxièmes parties du coefficient de hauteur polytropique et du rendement polytropique :

$$\begin{cases} \psi = -440714\phi^3 + 9916,07\phi^2 + 2,0063 \\ \eta_p = \frac{-440714\phi^3 + 9916,07\phi^2 + 2,0063}{-61,983\phi + 4,6527} \end{cases} \quad (9.25)$$

La figure 9.11 représente les courbes obtenues. Il est évident que l'on peut avoir de sérieux doutes sur la validité du rendement (donc de l'utilisation de la droite d'Euler) dans la partie à débit négatif.

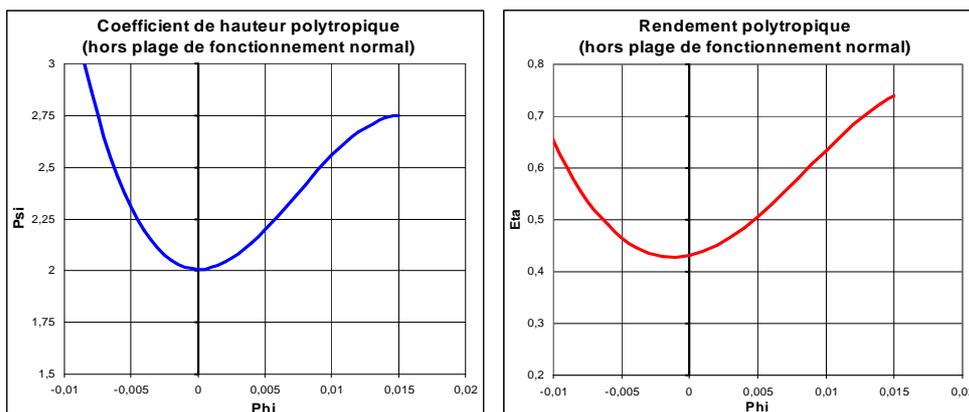


Figure 9.11 – Coefficient de hauteur et rendement polytropique hors de la plage de fonctionnement

Pour le réseau on va choisir une caractéristique du type C de la figure 9.3, ayant comme caractéristique :  $Q_s = K\sqrt{P_r - P_0}$  (9.26)

On utilise alors la technique de simulation développée au paragraphe 9.2, dans laquelle on limite simplement la possibilité de variation du coefficient de débit entre 0 et 0,018.

La figure 9.12 montre le résultat de deux simulations effectuées avec une baisse de vitesse de 1% en 15 secondes, avec des coefficients de débit de 0,014 et de 0,016 situés de part et d'autre du maximum de la courbe de hauteur polytropique.

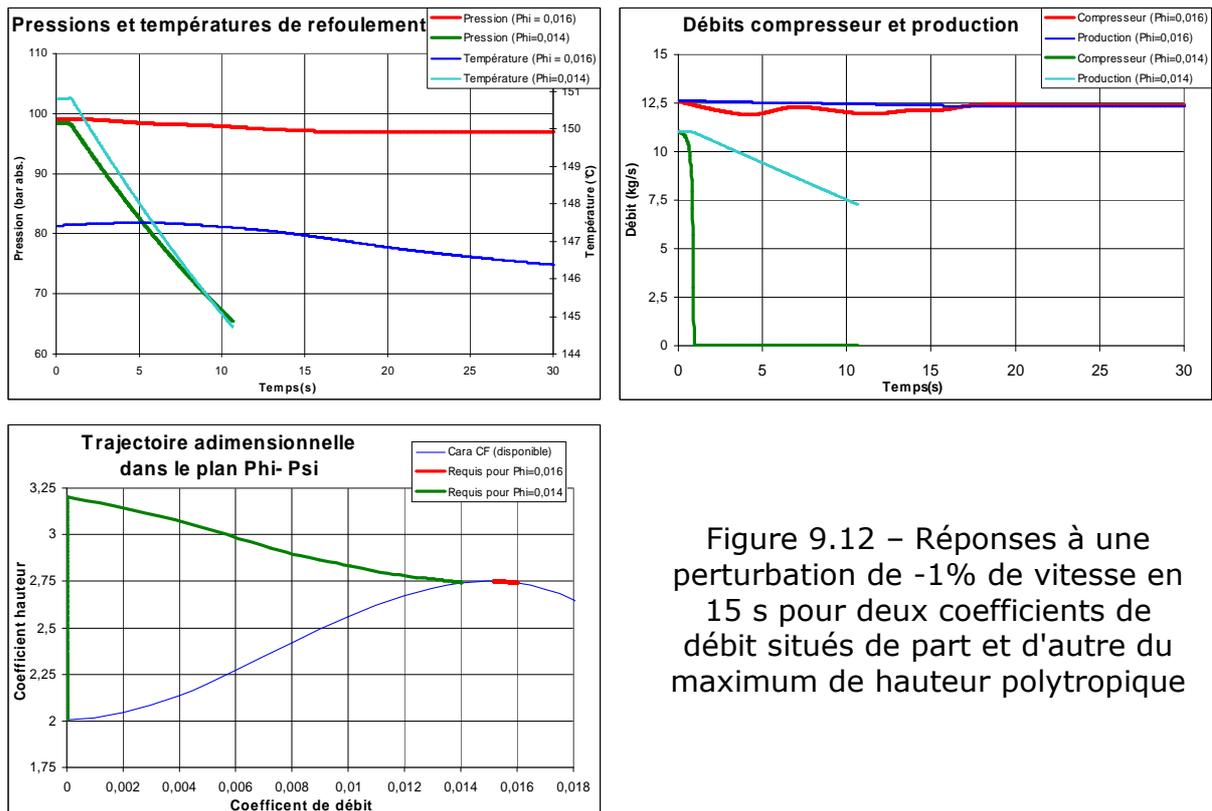


Figure 9.12 – Réponses à une perturbation de -1% de vitesse en 15 s pour deux coefficients de débit situés de part et d'autre du maximum de hauteur polytropique

Il apparaît un fonctionnement stable et un fonctionnement instable. Pour la simulation autour du coefficient de 0,016,  $\phi$  diminue jusqu'à une valeur très proche de 0,015, correspondant à un fonctionnement comparable à celui de la partie gauche de la figure 9.10. Pour la simulation autour du coefficient de 0,014, les valeurs de pression et de température restent stables pendant environ 1 seconde, puis s'effondrent, pendant que le débit s'annule. Le débit commence à s'affaler à 0,5 seconde, alors que la vitesse de rotation n'a varié que de 0,03% et il s'annule à 3,18 secondes. Le tracé de la trajectoire dans le plan adimensionnel  $\phi - \psi$  montre que l'écart entre la hauteur disponible (caractéristique compresseur) et la hauteur requise s'accroît au fur et à mesure que le coefficient de débit instantané diminue, ce qui accélère la décroissance du débit.

On pourrait croire que la perturbation introduite qui éloigne de façon transitoire le point de fonctionnement du maximum de la courbe de hauteur polytropique favorise l'apparition de l'instabilité. La figure 9.13 montre le résultat de la simulation pour une augmentation de la vitesse de rotation. Les résultats sont parfaitement superposables à ceux de la figure 9.12, même si la perturbation est opposée à celle appliquée précédemment.

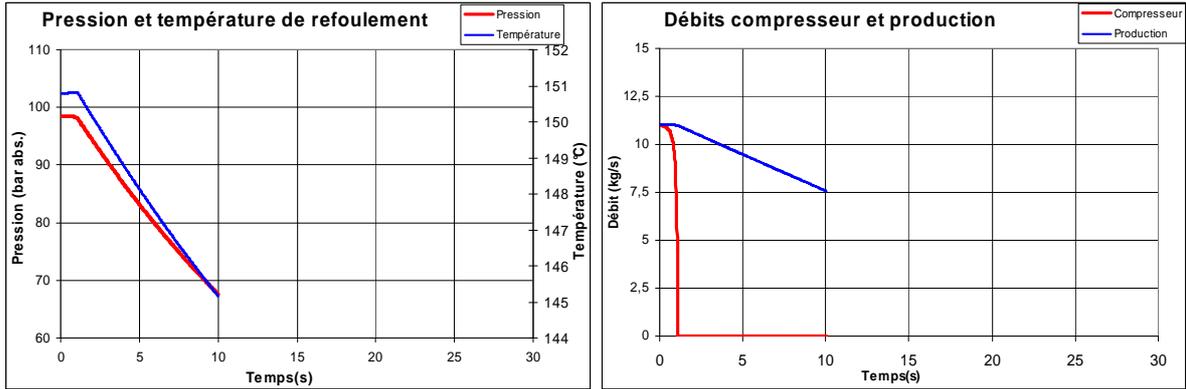


Figure 9.13 – Réponse à une perturbation de vitesse de +1% pour un point de fonctionnement à gauche du maximum de hauteur polytropique

La figure 9.14 montre les réponses en débit à des perturbations de -1% et de +1% de débit en 15 secondes. L'instabilité se manifeste rigoureusement de la même façon.

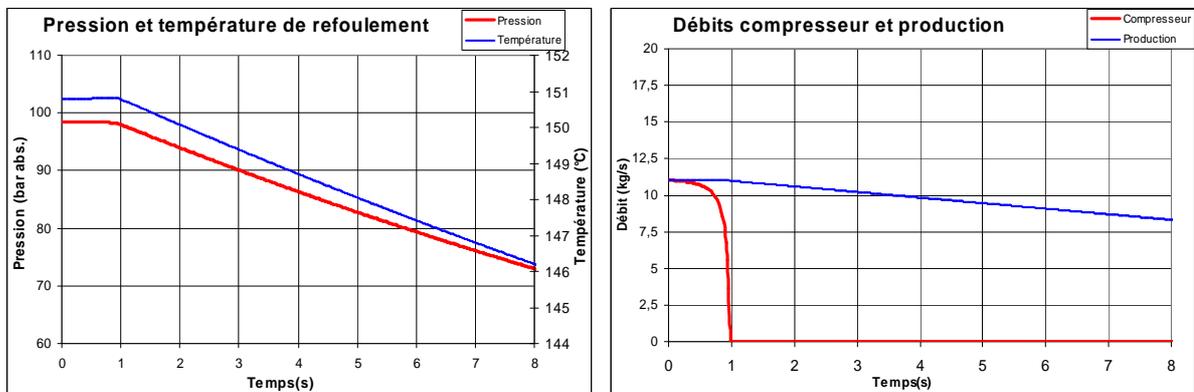


Figure 9.14 – Réponses à des perturbations en débit de 1% en 15 secondes

La vitesse de variation des perturbations n'a aucune influence sur le résultat. Les simulations réalisées avec des variations en 1 -10 - 100 - 1000 - 10000 secondes restent parfaitement identiques. Le filtrage par les constantes de temps pneumatique et thermique du réseau de refoulement ne joue absolument pas.

Une autre simulation intéressante a été réalisée pour minimiser les volumes des réseaux d'aspiration et de refoulement. On a considéré des longueurs de 1 mètre à l'aspiration et 3 mètres au refoulement, ce qui est totalement irréaliste par rapport à la taille de la machine, et l'on obtient les résultats de la figure 9.15 (avec une perturbation de 1% de variation de débit très lente - sur 10000 secondes). Il apparaît un régime oscillatoire instable. L'étude a été faite sur une durée de 2,1 secondes.

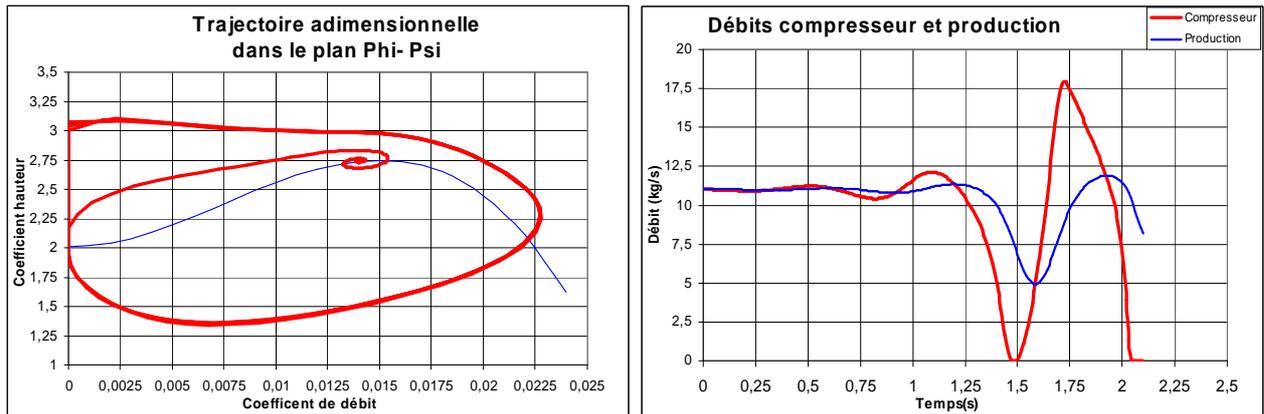


Figure 9.15 – Réponse oscillatoire instable à une variation de débit pour de très petits volumes à l'aspiration et au refoulement

La même simulation réalisée autour du coefficient de débit de 0,016 (perturbation de 1% de débit en 1 seconde), montre le comportement également oscillatoire de la figure 9.16, mais cette fois stable. On a aussi cherché la limite de la stabilité. Celle-ci se situe pour le coefficient de débit de 0,015125 soit 0,8% en dessous du maximum de la courbe de hauteur polytropique du compresseur (figure 9.17), pour lequel on obtient un fonctionnement oscillatoire permanent.

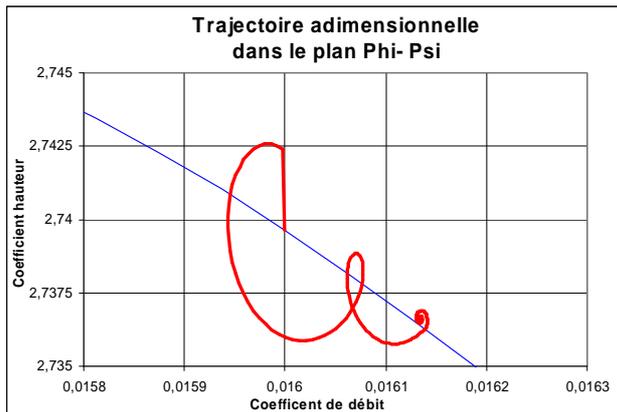


Figure 9.16 – Réponse oscillatoire amortie pour  $\phi = 0,016$  et de très petits volumes de tuyauterie

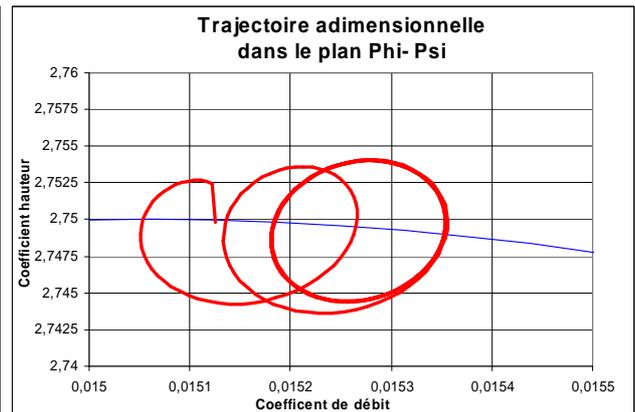


Figure 9.17 – Réponse oscillatoire permanente pour de très petits volumes de tuyauterie

Inversement, si l'on considère de grands volumes de réseaux (1000 mètres à l'aspiration et 3000 mètres au refoulement), on constate, sur la figure 9.18 que le fonctionnement est du même type que celui de la figure 9.14 pour la même perturbation appliquée, mais avec une durée de stabilité un peu plus longue (4,7 secondes au lieu de 1 seconde) avant que le compresseur ne décroche. De même, le décrochage se fait plus lentement (en 1,8 seconde au lieu de 0,5 seconde).

La pente de la caractéristique de hauteur polytropique du compresseur est donc le facteur déterminant qui conditionne la stabilité du fonctionnement.

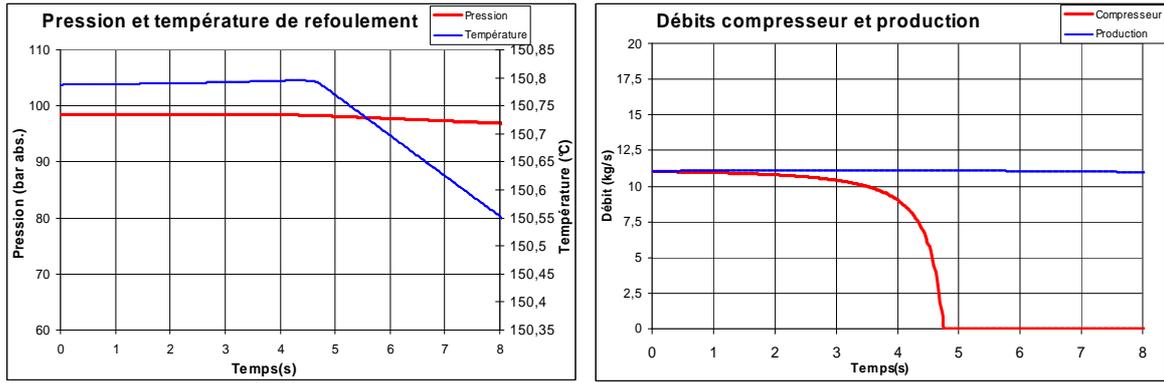


Figure 9.18 – Réponse à une perturbation de 1% de débit en 15 secondes pour de très grands volumes de réseaux gaz

## 9.4 Etude de la stabilité près du maximum de la courbe de hauteur développée

Des comportements périodiques et apériodiques, stables et instables, peuvent être trouvés en utilisant une méthode de variables d'état [Pugnet99]. On va reprendre ici ces travaux mais en utilisant une modélisation beaucoup plus complète et très proche de celle développée au paragraphe 9.2.

Chaque grandeur physique  $G(t)$  est décomposée par une partie fixe notée  $G^F$  (correspondant au point de fonctionnement) et une partie variable notée  $G^V$  issue de la différentiation de  $dG(t)$ . Par exemple l'expression (9.26) pour la pression de refoulement, issue de (C1.1) de l'annexe C1 est :

$$P_r(t) = P_r^F + dP_r(t) = P_r^F + P_r^V \quad (9.26)$$

La différence par rapport aux simulations du paragraphe 9.3 est donc d'étudier l'effet de très petites perturbations.

L'annexe E donne la modélisation en variables d'état. En repartant de la définition du point de fonctionnement (annexe E2), on différencie les équations des conservations de la masse (annexe E3), de la chaleur (annexe E4) et de l'énergie mécanique (annexe E5). Ceci conduit aux trois équations différentielles (9.27) ou (E3.3) de l'annexe E3, (9.28) ou (E4.6) de l'annexe E4 et (9.29) ou (E5.5) de l'annexe E5 :

$$\frac{dP_r^V / dt}{P_r^F} - \frac{dT_r^V / dt}{T_r^F} = \frac{Q_m^F}{M_r^F} \left( \frac{\phi^V}{\phi^F} - \frac{P_r^V}{2 \Delta P^F} \right) \quad (9.27)$$

$$M_r^F \left( H_1 \frac{dP_r^V}{dt} + H_2 \frac{dT_r^V}{dt} \right) = Q_m^F \left[ \frac{U_2^2}{\eta_p^F} \left( \psi_1 + \frac{\psi^F}{\eta_p^F} \eta_1 \right) \phi^V - H_1 P_r^V - H_2 T_r^V \right] \quad (9.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Q_m^F}{\phi^F} \left[ \frac{L_a}{\rho_a S_a} + \frac{4(7)^2 \text{Vol}_c}{S_r^2 (\rho_a + \rho_r^F)} \right] \frac{d\phi^V}{dt} + \frac{Q_m^F}{2 S_r T_r^F} \left[ \frac{4(7)^2 \text{Vol}_c \rho_r^F}{S_r (\rho_a + \rho_r^F)^2} + \frac{L_r}{\rho_r^F} \right] \frac{dT_r^V}{dt} \\ & + \frac{Q_m^F}{2 S_r} \left[ \frac{L_r}{\rho_r^F \Delta P^F} - \frac{1}{P_r^F} \left( \frac{4(7)^2 \text{Vol}_c \rho_r^F}{S_r (\rho_a + \rho_r^F)^2} + \frac{L_r}{\rho_r^F} \right) \right] \frac{dP_r^V}{dt} \\ & = \left[ \Delta H_D^F \left( \frac{\psi_1}{\psi^F} - \frac{\eta_1}{\eta_p^F} \right) + \frac{Z_a R T_c^F}{\eta_p^F} \ln \left( \frac{P_r^F}{P_a} \right) \right] \phi^V - \frac{Z_a R T_c^F}{\eta_p^F} \frac{P_r^V}{P_r^F} \end{aligned} \quad (9.29)$$

en fonction de trois grandeurs d'état : les variations du coefficient de débit  $\phi^V$ , de la pression  $P_r^V$  et de la de température  $T_r^V$  dans le réseau de refoulement.

Cet ensemble constitue un système d'équations d'état dont on étudie les valeurs propres. La caractéristique de réseau résistant utilisée est celle du type C de la figure 9.3, et l'on peut faire varier la pente du réseau résistant en utilisant différentes valeurs de chute de pression dans la vanne. La figure 9.19 représente les parties réelles et imaginaires des deux premières fréquences propres obtenues en fonction du coefficient de débit et du  $\Delta P$  dans la vanne pour le cas du compresseur traité au paragraphe 9.2.

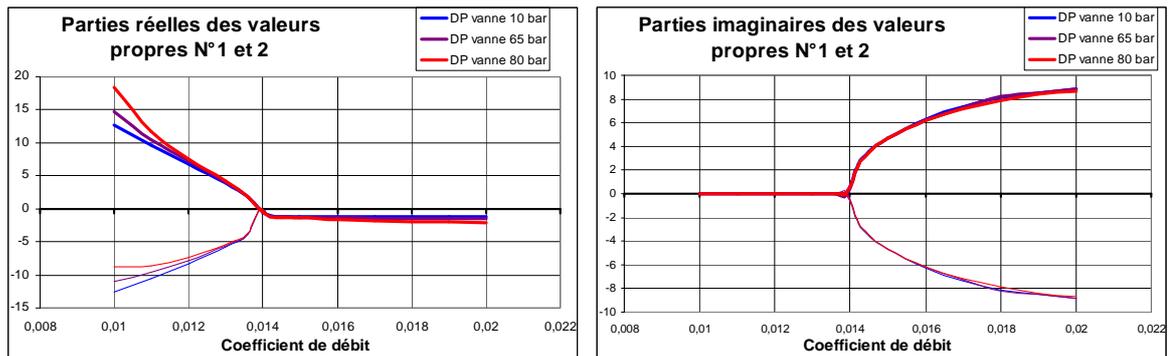


Figure 9.19 – Etude de la stabilité – Evolution des valeurs propres en fonction du coefficient de débit

En partant d'un coefficient de débit de 0,2, les deux premières valeurs propres sont complexes conjuguées. L'introduction d'une perturbation conduit à un fonctionnement périodique stable. Lorsqu'on diminue le coefficient de débit, la pulsation du phénomène diminue, alors que le  $\Delta P$  dans la vanne au refoulement n'a aucune influence. Ce fonctionnement continue jusqu'à un coefficient de débit de 0,139, inférieur à 0,150 correspondant au maximum de hauteur développée. Ce seuil de 0,139 est totalement indépendant du  $\Delta P$  dans la vanne. En dessous de ce seuil, on obtient deux valeurs propres réelles, l'une négative, correspondant à un mode propre apériodique très stable et l'autre positive, correspondant à un mode propre apériodique très instable. Plus le coefficient de débit diminue, plus l'instabilité est violente, et cette fois, le  $\Delta P$  dans la vanne participe aussi à l'instabilité mais dans une moindre mesure.

La troisième valeur propre suit le même comportement en passant également d'un fonctionnement oscillatoire stable à un fonctionnement apériodique instable pour rigoureusement le même seuil de coefficient de débit, mais pour des valeurs très faibles des parties réelle et imaginaire.

On trouve donc le déclenchement d'une instabilité pour un seuil de coefficient de débit très légèrement inférieur au maximum de la courbe de hauteur polytropique développée par le compresseur. La pente de la caractéristique du compresseur est l'élément déclenchant de l'instabilité.

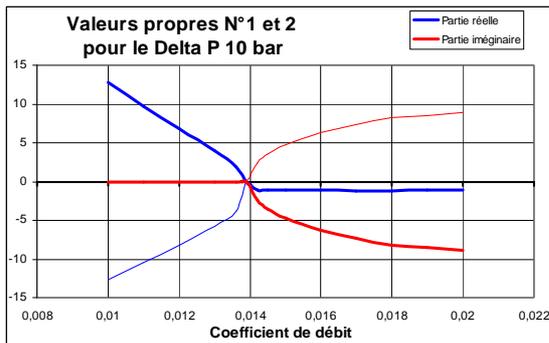


Figure 9.20 – Croisement des deux premières valeurs propres

Pour terminer, on montre figure 9.20 qu'il y a une sorte de continuité dans la valeur absolue des valeurs propres en fonction du coefficient de débit avec un basculement entre les parties réelle et imaginaire lorsqu'on traverse le seuil de stabilité du coefficient de débit.

Quand on diminue le coefficient de débit depuis la plage de fonctionnement normal du compresseur, la pulsation propre du régime périodique diminue. Lorsqu'elle s'annule, alors l'une des valeurs propres devient apériodique instable. Juste au moment de cette

annulation, la partie réelle de la troisième valeur passe subitement de  $-0,003$  à  $-2$  avant de redescendre tout aussi brusquement sur la valeur instable à  $+0,003$ .

## 9.5 Simulation du pompage

Botros a été l'un des pionniers de la simulation numérique du comportement des machines, comme dans sa publication de 1994 sur le comportement des stations de compression en pompage [Botros]. Néanmoins son modèle de fonctionnement de la machine en pompage ne tient pas compte de la conservation de l'énergie, dans une zone où les perturbations sont très violentes. Dans des publications récentes, on s'intéresse pas seulement au compresseur, mais aux conséquences sur le procédé, comme White et Kurz en 1996 [White] ou Rakopoulos, Michos et Giamoumis en 2007 [Rakop].

On remarque que chaque fois que l'on arrête un motocompresseur centrifuge, le couple aérodynamique de freinage est tel que la descente en vitesse se fait avec une constante de temps de quelques secondes, inférieure aux constantes de temps pneumatiques des réseaux de gaz. Des moyens anti-pompage sophistiqués sont donc installés. Une vanne dite "d'antipompage" va s'ouvrir lorsque le coefficient de débit devient trop faible et recirculer du gaz depuis le refoulement vers l'aspiration du compresseur de façon à garder artificiellement un débit aspiré suffisant. De nombreux articles, comme par Tijl en 2004 [Tijl] ont été publiés mais le pompage du compresseur n'est pas modélisé puisqu'on veut démontrer qu'on n'y entre pas.

Malheureusement, sur les sites, il arrive que les systèmes antipompage aient des faiblesses, dues par exemple à la formation d'hydrates qui peuvent bloquer l'ouverture des vannes. L'exemple qui est traité est celui d'un compresseur de réinjection de gaz naturel de 6700 kW à 14000 tr/min refoulant à 382 bar (aspiration à 166 bar) pour une récupération assistée de pétrole (réinjection) sur une plate-forme offshore en Mer du Nord. Cette machine a été malencontreusement laissée en pompage pendant 40 minutes. Les exploitants ont souhaité connaître l'amplitude des variations de pression et la fréquence du phénomène afin de vérifier l'intégrité en fatigue de la ligne de tuyauterie de refoulement.

La figure 9.21 représente la caractéristique complète de hauteur du compresseur centrifuge. La partie de fonctionnement normal de la machine est analogue à la courbe de la figure 9.2. Le reste de la caractéristique est analogue à la figure 9.11, sachant qu'on utilise aussi la même cubique pour décrire la partie de débit à contrecourant.

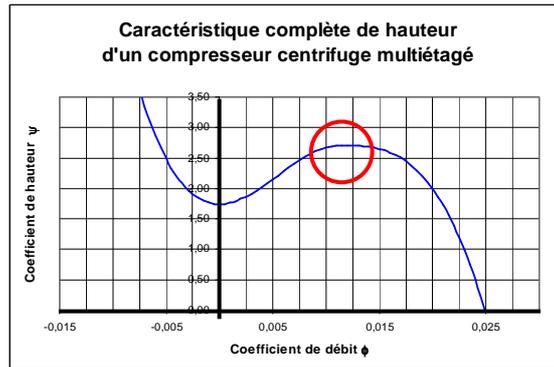


Figure 9.21 – Caractéristique complète du compresseur centrifuge

Puisque l'apparition du décrochage de débit a été formellement simulée au paragraphe 9.4, on applique le modèle général du paragraphe 9.2 au comportement global. Dans ce cas, la définition de la thermodynamique du gaz a dû tenir compte du niveau de pression, et l'on a utilisé l'équation d'état de Lee, Kesler et Plöcker, dite LKP à trois paramètres (pression, température et coefficient acentrique) développée par Lee en 1975 [LK] et améliorée par Plöcker, Knapp et Prausnitz en 1978 [Plöc.LKP]. Cette équation d'état qui utilise la forme du viriel – équation (9.30) – est l'une des seules à donner des coefficients de compressibilité corrects – équation (9.31) – ( $Z=0,717$  à l'aspiration et  $1,032$  au refoulement au point nominal).

$$P = \frac{T}{V} + \frac{BT}{V^2} + \frac{CT}{V^3} + \frac{DT}{V^6} + \frac{c_4}{T^2 V^3} \left( \beta + \frac{\gamma}{V^2} \right) e^{-\frac{\gamma}{V^2}} \quad (9.30)$$

$$Z = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^5} + \frac{c_4 (\beta + \gamma/V^2)}{T^3 V^2} e^{-\frac{\gamma}{V^2}} \quad (9.31)$$

La caractéristique du compresseur est définie par une cubique analogue à l'équation (9.5) dans la zone de fonctionnement puis par une autre cubique analogue à celle de l'équation (9.25) définie au paragraphe 9.3 pour tout le reste de la plage.

La différence majeure par rapport au paragraphe 9.2.5 intervient dans le schéma d'intégration où, dans la zone de l'instabilité, on utilise un pas de temps variable. Ce pas de temps est diminué chaque fois que l'on traverse la zone d'instabilité, donc lorsque le coefficient de débit est compris entre 0 et 0,12.

Dans ces conditions, on trouve les résultats des figures 9.22 pour le cycle de pompage dans la caractéristique du compresseur, 9.23 pour la fluctuation de débit et 9.24 pour les fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement. Le pompage correspond à une oscillation de relaxation avec des inversions de débit qui se font en environ 0,05 seconde, d'où la violence du phénomène. Dès que le compresseur "décroche", les pressions dans les réseaux n'ont pas le temps de changer, alors que la différence entre els hauteurs requise et disponible devient très grande. L'amplitude des variations de pression était de 6 bar sur l'aspiration, mais de 95 bar sur le refoulement. La période du phénomène est de 6,65 secondes, fonction uniquement du volume des tuyauteries.

Ce résultat montre bien que le phénomène du pompage est une instabilité globale du compresseur et des réseaux de gaz. L'amplitude des phénomènes calculés montre aussi la dangerosité de ce phénomène. Généralement, après de tels fonctionnements, les étanchéités internes des compresseurs centrifuges (figure 1.15) sont détruites, ce qui a un impact majeur sur le rendement de la machine, pouvant se démultiplier en un autre impact sur le procédé par le biais de températures de refoulement plus élevées.

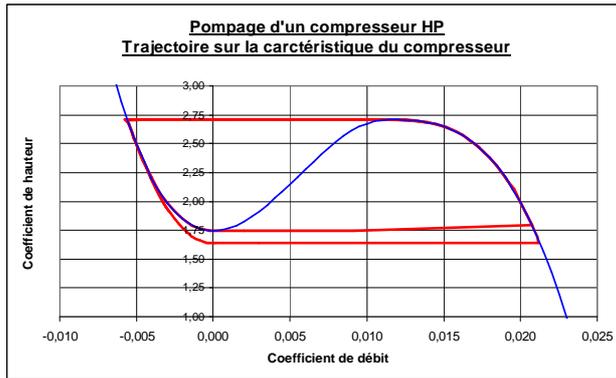


Figure 9.22 – Cycle de pompage dans la caractéristique adimensionnelle

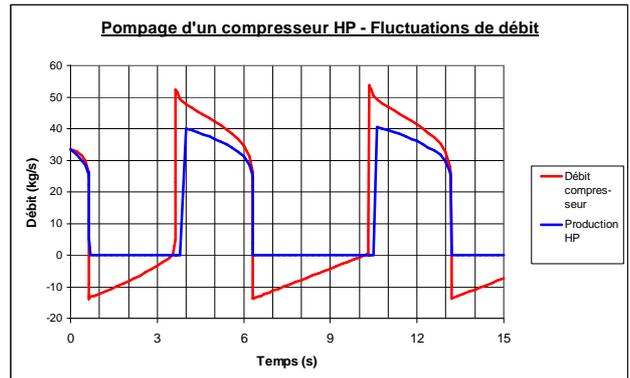


Figure 9.23 – Fluctuation du débit massique en pompage

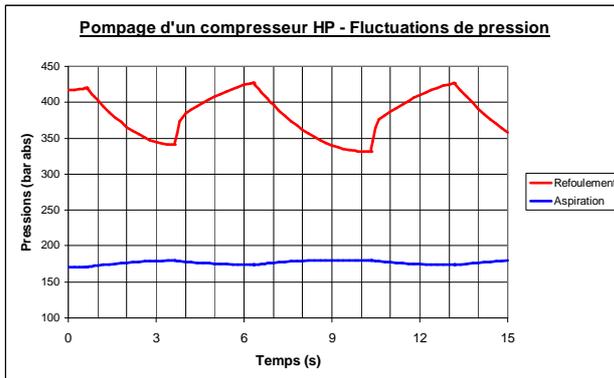
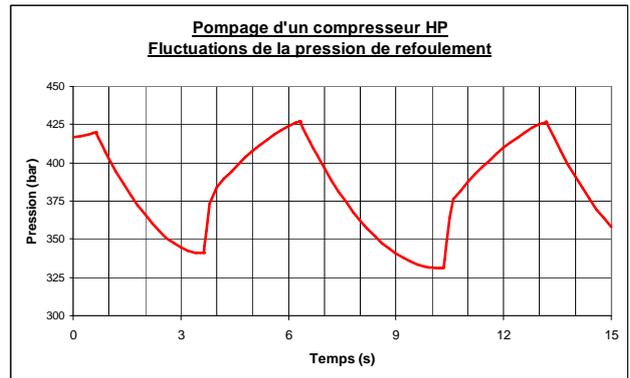


Figure 9.24 – Fluctuations des pressions d'aspiration et de refoulement en pompage



## 9.6 Conclusion

Le modèle proposé de dissociation des hauteurs requise par les réseaux et disponible du compresseur et de conservation globale de l'énergie permet de comprendre le fonctionnement d'un compresseur dans ses régimes transitoires entre deux états de fonctionnement. Son fonctionnement s'étend aussi au domaine du pompage. Il est donc d'un usage général.

## 10. Conclusions

Le mémoire se place dans le cadre de la conception de grands projets de turbomachines : turbines à vapeur industrielles et compresseurs centrifuges multi étagés de procédé, qui sont conçus pratiquement à l'unité sous spécification du client pour répondre à un besoin particulier.

Les enjeux économiques liés à ces machines sont très importants. Elles constituent véritablement les "moteurs" des unités industrielles (récupération d'énergie, unités pétrolières, gazières et pétrochimiques). Si la machine s'arrête, l'unité aussi et les pertes de production s'accumulent très vite. Rappelons, comme ordres de grandeur, que les coûts de conception et de construction se situent entre 4 et 8 millions d'euros alors que la valorisation journalière de la production dans les unités est de l'ordre de 20 à 100 milliers d'euros (et parfois beaucoup plus). Leurs coûts interdisent les redondances, mais une avarie nécessitant un arrêt de longue durée est économiquement redoutable. De plus, dans ce cas, il est toujours très difficile d'en avoir les signes avant coureurs.

Il est donc essentiel que la fiabilité et la disponibilité de ces turbomachines soient très élevées.

L'inconvénient est que leur unicité rend plus difficile l'établissement d'un retour d'expérience statistique. Puisqu'il n'y a pas de séries, et évidemment encore moins de prototypes, il est nécessaire que les moyens de conception soient rapides et fiables.

On va conclure ce mémoire en mettant d'abord en exergue les résultats propres à chacun des thèmes abordés, puis on exposera des aspects plus généraux relatifs aux retombées et aux perspectives.

### 10.1 Conclusions particulières

Un outil de dynamique de rotor en flexion a été développé de façon à mettre en évidence les différents phénomènes que l'on trouve sur les turbomachines. Cet outil qui ne se substitue pas aux progiciels de dynamique de rotor est d'une utilisation facile sous Excel<sup>®</sup>. Il considère les quatre premières formes modales latérales qui sont toujours examinées lors des analyses dynamiques des turbomachines. L'originalité est de considérer des polynômes cubiques pour représenter les quatre types de déformées modales et d'avoir utilisé les coefficients de ces polynômes comme coordonnées généralisées des équations de Lagrange. Les effets gyroscopiques sont modélisés. Les paliers sont anisotropes et incluent amortissements et raideurs croisées. La recherche des valeurs propres, vecteurs propres se fait par une méthode de Jacobi complexe. Cet outil a été validé sur deux cas industriels de turbine à vapeur et de compresseur centrifuge. Les résultats sont tout à fait convenables, mais il faut rappeler qu'il est quand même nécessaire disposer de caractéristiques dynamiques réalistes de paliers.

Bien que l'analyse de la réponse aux balourds soit un domaine a priori trivial, on s'est intéressé au détail des réponses vues de chacun des capteurs de déplacement. Les vitesses critiques varient suivant la position axiale et l'inclinaison angulaire de ces capteurs. L'interprétation des vitesses critiques et des facteurs d'amplification suivant la définition des standards l'API n'est théoriquement pas aisée. Elle diffère notablement de l'interprétation modale. Afin d'améliorer cette interprétation, on a

introduit le principe de l'analyse modale expérimentale multi degrés de liberté. L'analyse proposée s'applique aussi bien aux résultats de prédiction qu'aux mesures réalisées sur la machine, de façon tout aussi pragmatique que l'analyse mono degré de liberté de l'API. On peut alors séparer les effets des modes propres rapprochés pour la définition des amortissements, ce qui est fondamental quand on s'attache à la stabilité vibratoire latérale des machines. De plus, cette méthode fait le lien entre la réponse aux balourds et les caractéristiques des modes propres de flexion.

Le troisième volet abordé concerne le problème fondamental de la stabilité vibratoire latérale des rotors de compresseurs centrifuges à haute pression. Le gaz naturel à 500 bar a une masse volumique de l'ordre de  $500 \text{ kg/m}^3$  qui n'est pas si éloignée de celle de l'huile dans les paliers et les effets aérodynamiques dus au confinement de ce gaz entre rotor et stator génèrent un couplage fluide structure matérialisé par des raideurs croisées consommant la capacité d'amortissement des paliers hydrodynamiques. Même si ces questions sont maintenant codifiées par l'API, il est apparu intéressant de rappeler les développements réalisés au cours des années 1990 pour dominer cette question et pour disposer de critères de conception.

L'introduction des paliers magnétiques actifs dans les compresseurs centrifuges de procédé s'est réalisée assez lentement car il fallait arriver à une ligne d'arbres complète sans huile, et donc disposer d'entraîneurs à grande vitesse non lubrifiés. On ne peut pas faire abstraction d'aspects largement technologiques. On expose les éléments de dimensionnement différenciant cette technique de celle des paliers hydrodynamiques et l'on montre différentes conceptions particulières. Sur un aspect plus scientifique, on explique l'origine de deux instabilités rencontrées, la première sur un compresseur centrifuge rejoint le mécanisme d'instabilité dû au couplage fluide structure et la seconde sur un groupe turboalternateur où l'idée a priori séduisante d'utiliser des amortisseurs magnétiques actifs pour compenser les forces de balourds a généré en fait des modes propres instables de rotor. L'aspect du comportement sur les paliers auxiliaires est également abordé, notamment pour les groupes à axe vertical et l'on suggère un développement pour les atterrissages axiaux.

Bien que l'analyse dynamique de torsion des lignes d'arbres soit aussi un domaine largement exploré, on a souhaité donner un aperçu relativement exhaustif des études réalisées sur les turbines à vapeur industrielles et les compresseurs centrifuges. On a proposé des améliorations de modélisation pour prédire des fréquences propres plus précises dans le cas des accouplements montés avec de forts serrages et dans celui des arbres épaulés avec deux voies possibles, l'une pour des systèmes analytiques, l'autre pour des systèmes aux éléments finis ayant nécessité de développer un élément fini de tronçon conique en torsion à deux degrés de liberté par nœud. Les différentes excitations stationnaires et instationnaires des lignes d'arbres ont été présentées. L'utilisation de larges plages de vitesse fait que l'on n'échappe pratiquement jamais à une analyse en fatigue. Les différents cas d'analyse à grand nombre de cycles (excitations stationnaires) et à petit nombre de cycles (excitations instationnaires liées aux machines électriques) ont été montrés. Enfin le couplage flexion torsion a été montré comme une voie de meilleure connaissance des amortissements modaux en torsion par le biais de la contribution apportée par les déplacements des mobiles du multiplicateur dans leurs paliers.

Les systèmes disques aubes sont présentés pour les deux types de turbomachines. Dans le cas des turbines à vapeur industrielles, on a présenté un développement original pour étudier la tenue en fatigue des étages à action soumis à l'injection partielle. A partir de la connaissance du profil de la force vapeur développée sur une

aube lors de la rotation et de la connaissance des contraintes stationnaires de service, on trace le diagramme de tenue en fatigue. Pour les compresseurs centrifuges, on a montré les développements entrepris pour déterminer avec précision les fréquences propres et modes propres des roues aubées en utilisant les répétitivités cycliques. Le tracé d'un diagramme d'interférence permet de trouver les résonances par coïncidence à la fois fréquentielle et spatiale de l'excitation et des modes propres. On montre l'introduction de la technique de Neuber pour prendre en compte la fatigue plastique dans des zones fortement chargées en centrifuge avec des concentrations de contrainte élevées. Par contre, deux cas industriels sont présentés pour lesquels ce diagramme de coïncidence n'est pas suffisant pour expliquer totalement les incidents survenus en service.

L'analyse des phénomènes vibratoires est complétée par une présentation de phénomènes vibroacoustiques. Une application est consacrée aux compresseurs alternatifs, pour lesquels le processus même de la compression génère un taux très important d'harmoniques susceptible d'exciter des résonances acoustiques et/ou mécaniques de réseaux de tuyauterie ou d'accessoires. Pour les turbines à vapeur, on retiendra surtout la coïncidence de résonances acoustique et mécanique sur un montage d'aubes ayant conduit à une rupture par fatigue extrêmement rapide. Dans les compresseurs centrifuges, on a présenté les recherches en cours sur les excitations acoustiques mises en évidence par les réponses vibratoires des roues.

La dernière partie du mémoire présente une modélisation dynamique originale du comportement d'un compresseur centrifuge dans ses réseaux d'aspiration et de refoulement. Lors des régimes transitoires, les pressions aux brides de la machine sont définies par les bilans de masse dans les réseaux de gaz. L'idée de base consiste à considérer deux hauteurs du compresseur, celle qui est imposée par le rapport de pression des réseaux et celle qu'il est capable de fournir. La différence d'énergie correspondante est alors transformée en énergie cinétique. Ce modèle explique comment on change physiquement de point de fonctionnement. Sa transposition en variables d'états permet de démontrer formellement l'instabilité du fonctionnement couplé compresseur-réseau proche au pompage. L'utilisation de ce modèle sert aussi pour évaluer la période et l'amplitude des cycles d'oscillations de relaxation en pompage dans le cas où les dispositifs de sécurité seraient bloqués par des formations d'hydrates.

## 10.2 Points forts des recherches réalisées

Ce travail a été basé sur les expériences recueillies sur plus de trente cas industriels de machines en fonctionnement sur site ou en essais en usine. Sans constituer une base statistique car les phénomènes observés sont très différents, ces retours n'en constituent pas moins une expérience précieuse.

On n'insistera jamais assez sur la nécessité de valider expérimentalement toute méthode de conception. Il peut s'agir d'essais sur :

- des éprouvettes,
- des bancs d'essais spécifiques,
- des prototypes,
- des composants ou des machines aux bancs d'essais en usine
- des machines sur site,
- voire des modèles numériques sur des cas référencés.

L'expérience en modélisation expérimentale pour avoir des dispositifs représentatifs de la réalité, en mesures et en traitement des acquisitions est un facteur déterminant. La compréhension des phénomènes et l'interprétation des résultats restent ensuite une phase fondamentale.

Les domaines nécessaires à la conception d'une turbomachine sont très nombreux et le "spectre" des équipes de recherches et de bureau d'études doit rester très large. A titre d'exemple, les domaines scientifiques utilisés dans la réalisation de la recherche de ce mémoire sont :

- dynamique de rotor en flexion et en torsion,
- dynamique des systèmes disques aubes,
- réponses stationnaires et instationnaires,
- éléments finis,
- analyse de contrainte,
- métallurgie et corrosion,
- thermodynamique des gaz réels,
- aérodynamique,
- technologie,
- électromécanique,
- électromagnétisme,
- automatique,
- acoustique,
- thermique,
- analyse vibratoire,
- traitement du signal,
- modélisation d'état des systèmes,
- mathématiques et analyse numérique (valeurs propres et de vecteurs propres),
- informatique.

Il est évident que les recherches dans chacun de ces domaines multiphysiques sont très spécifiques et qu'il est nécessaire de s'appuyer sur les compétences des laboratoires universitaires spécialisés, mais il reste au constructeur à orchestrer les efforts de tous pour réaliser des avancées décisives.

Néanmoins, on n'a jamais perdu de vue dans ce mémoire la dimension industrielle de la conception et de la construction des turbomachines. Quatre exemples peuvent illustrer ce point :

- les aspects technologiques,
- les aspects normatifs,
- la prise en compte de la propriété intellectuelle avec les brevets d'invention,
- la recherche des causes d'incertitude, chaque fois que cela a été possible.

Parmi tous les éléments des recherches de ce mémoire, on retiendra plus particulièrement les résultats originaux suivants les plus importants (dans l'ordre de présentation du mémoire) :

- La disponibilité d'un outil réaliste, simple mais complet, de démonstration de dynamique de rotor en flexion pour les bureaux d'études, les équipes de démarrage sur site, la formation ; cet outil, écrit sous Excel<sup>®</sup> est très facilement portable ;
- Une voie physique de compréhension des réponses aux balourds basée sur l'analyse modale multi degrés de liberté utilisable aussi bien en prévision qu'en essais ;

- La proposition d'un schéma bloc d'asservissement multi variables (multimodal) des paliers magnétiques actifs ;
- L'amélioration de la modélisation en torsion des accouplements frettés et des arbres épaulés, avec l'établissement de règles simples d'analyse pour des modèles analytiques ou aux éléments finis ;
- Le développement d'un élément de tronçon conique de torsion à deux degrés de liberté par nœud (l'angle et la pente) très utile pour les congés de raccordement des arbres épaulés ;
- Une méthode d'analyse des rangées d'aubes de turbines à vapeur soumises à injection partielle (méthode analytique se substituant à des méthodes empiriques) ; cette méthode est utilisable directement en conception en débouchant directement sur le tracé d'un diagramme de tenue en fatigue ;
- L'établissement d'un modèle dynamique de simulation du comportement thermodynamique d'un compresseur centrifuge dans ces réseaux de gaz ; ce modèle explique et quantifie les changements de régimes de production des machines ainsi que les instabilités liées au pompage.

On trouve donc :

- des modèles,
- des méthodes de conception,
- des dispositions technologiques (certaines ayant fait l'objet de dépôt de brevets d'invention),
- des propositions d'amélioration de la conception (liaisonnement des paquets d'aubes de turbine à action et des flasques de roues de compresseur, paliers magnétiques actifs etc.),
- des pistes d'amélioration de la normalisation.

## 10.3 Perspectives

Comme il a été dit dans l'introduction, toute avancée reste transitoire en recherche et développements. Si l'on a pu poser quelques pierres dans l'édifice de la connaissance des turbomachines, sa construction est loin de s'achever. On peut citer quelques pistes.

Une voie nouvelle voie d'analyse des réponses aux balourds a été ouverte. Pour qu'elle soit efficace, il faudrait que cette méthode soit automatisée avec la définition de critères de qualité sur le tracé des cercles modaux.

L'utilisation de cette méthode dans les standards API pourrait vraiment améliorer la définition expérimentale des amortissements qui sont des éléments fondamentaux dans la prévision de la stabilité vibratoire latérale des compresseurs centrifuges à haute pression.

Les améliorations sur la conception et les modélisations de torsion devraient être mises en place dans les bureaux d'études.

Les études basées sur les systèmes neuro-flous sont une source prometteuse de définition des paramètres de réglage des systèmes de contrôle des paliers magnétiques actifs. La prédiction fiable de ces caractéristiques est un élément fort de la prévision de la stabilité vibratoire latérale des compresseurs centrifuges. Beaucoup

de travail reste à faire dans ce domaine, et il va sans dire qu'il faudra aussi résoudre les problèmes de responsabilité entre le fabricant de la turbomachine et le fournisseur des paliers.

Toujours dans le domaine des machines à paliers magnétiques actifs, il serait souhaitable de disposer d'une méthode de prévision d'atterrissage dans la direction axiale, dans la mesure où les réponses mesurées sont plus marquées que celles dans la direction radiale. Des éléments de définition sont proposés dans le mémoire.

Les méthodes d'analyse du couplage flexion torsion en dynamique de rotor ne sont pas facilement accessibles. Lorsque des efforts radiaux sont générés sur les paliers (cas des engrenages), il est dommage de ne pas considérer cette source naturelle d'amortissement qui améliore la résistance à toutes les excitations instationnaires d'origine électrique. Dans ce cas, il ya aura de grands déplacements dans les paliers hydrodynamiques et les caractéristiques dynamiques des paliers introduites dans les modèles devront en tenir compte.

Les recherches sur les excitations acoustiques dans les étages de turbomachine sont en plein essor. On dispose de plusieurs pistes intéressantes, mais on peut se demander si toutes bien générales ou simplement liées à l'explication d'un cas particulier. Quoi qu'il en soit, on ne peut qu'encourager les efforts réalisés dans ce domaine complexe qui requiert des moyens expérimentaux énormes, mais qui sont à la hauteur des enjeux. Ce domaine est extrêmement complexe.

Les études de durée de vie avec le phénomène de fatigue plastique nécessitent la connaissance des coefficients de l'équation de Manson-Coffin. On ne peut qu'encourager la poursuite de campagnes expérimentales sur les matériaux utilisés pour la construction des roues de compresseur et les ailettes de turbine. Nous n'oublierons de mentionner que les facteurs température et corrosion risquent bien de compliquer considérablement les choses.

Ceci ne dispense pas de poursuivre une veille et de saisir les opportunités d'être membre de consortiums de recherche proposés par des laboratoires universitaires spécialisés, car il ne faut pas oublier que les validations expérimentales réalistes nécessitent des moyens tellement onéreux qu'il faut l'union des efforts de tous les partenaires pour avoir les meilleures chances de succès.

# Annexes

<b>Annexe A – Formulation du modèle permettant l'étude de la phénoménologie de la dynamique d'un rotor en flexion</b>		p.255
A1	Energie cinétique d'un disque rigide	p.255
A2	Energie cinétique de l'arbre	p.256
A3	Energie de déformation de l'arbre	p.256
A4	Energie de déplacement dans les paliers	p.256
A5	Application des équations de Lagrange aux différentes coordonnées généralisées	p.258
A5.1	Application à la coordonnée $A_u$	p.258
A5.2	Application à la coordonnée $B_u$	p.258
A5.3	Application à la coordonnée $C_u$	p.259
A5.4	Application à la coordonnée $D_u$	p.260
A5.5	Application à la coordonnée $A_w$	p.260
A5.6	Application à la coordonnée $B_w$	p.261
A5.7	Application à la coordonnée $C_w$	p.262
A5.8	Application à la coordonnée $D_w$	p.263
<b>Annexe B – Méthodes numériques</b>		p.264
B1	Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss-Jordan	p.264
B2	Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan	p.265
B3	Recherche des valeurs propres vecteurs propres par la méthode de JACOBI complexe	p.265
B4	Schéma d'intégration de Newmark	p.267
<b>Annexe C – Logique floue et réseaux de neurones</b>		p.268
C1	Logique floue	p.268
C2	Réseaux de neurones	p.271
C3	Systèmes neuro-flous	p.273

<b>Annexe D – Développement de modèles aux éléments finis de tronçons coniques</b>		p.274
D1	Modèle à 1 ddl/nœud	p.274
	D1.1 Energie cinétique – Matrice de masse	p.274
	D1.2 Energie de déformation – Matrice de raideur	p.275
D2	Modèle à 2 ddl/nœud	p.275
	D2.1 Energie cinétique – Matrice de masse	p.275
	D2.2 Energie de déformation – Matrice de raideur	p.276
D3	Validation	p.279
	D3.1 Energie cinétique – Matrice de masse	p.279
	D3.2 Comparaison des différents modèles	p.280
	D3.3 Conclusion	p.280

<b>Annexe E – Principe de la modélisation thermodynamique d'état d'un compresseur dans ses réseaux</b>		p.281
E1	Principes de la méthode adoptée	p.281
E2	Point de fonctionnement	p.281
E3	Conservation de la masse	p.282
E4	Conservation de la chaleur	p.283
E5	Conservation de l'énergie cinétique	p.284
E6	Equation d'état	p.285

# Annexe A – Formulation du modèle permettant l'étude de la phénoménologie de la dynamique d'un rotor en flexion

Cette annexe donne le détail du développement des équations qui n'apparaît pas dans le paragraphe 2.2 du chapitre 2, afin de ne pas l'alourdir.

## A1 Energie cinétique d'un disque rigide

L'expression de l'énergie cinétique du disque de l'équation (2.9) est rappelée :

$$T_D = \frac{M_D}{2} (\dot{u}_D^2 + \dot{w}_D^2) + \frac{I_{TD}}{2} (\dot{\theta}_D^2 + \dot{\psi}_D^2) + I_{PD} \Omega \dot{\psi}_D \theta_D \quad (2.9)$$

On détermine, à partir de l'expression des dérivées temporelles (2.8) des déplacements, les termes suivants :

$$\begin{aligned} \dot{u}_D^2 &= \dot{A}_u^2 Y_D^6 + 2\dot{A}_u \dot{B}_u Y_D^5 + \dot{B}_u^2 Y_D^4 + 2\dot{A}_u \dot{C}_u Y_D^4 + 2\dot{A}_u \dot{D}_u Y_D^3 + 2\dot{B}_u \dot{C}_u Y_D^3 + \dot{C}_u^2 Y_D^2 \\ &\quad + 2\dot{B}_u \dot{D}_u Y_D^2 + 2\dot{C}_u \dot{D}_u Y_D + \dot{D}_u^2 \\ \dot{w}_D^2 &= \dot{A}_w^2 Y_D^6 + 2\dot{A}_w \dot{B}_w Y_D^5 + \dot{B}_w^2 Y_D^4 + 2\dot{A}_w \dot{C}_w Y_D^4 + 2\dot{A}_w \dot{D}_w Y_D^3 + 2\dot{B}_w \dot{C}_w Y_D^3 + \dot{C}_w^2 Y_D^2 \\ &\quad + 2\dot{B}_w \dot{D}_w Y_D^2 + 2\dot{C}_w \dot{D}_w Y_D + \dot{D}_w^2 \\ \dot{\theta}_D^2 &= 9\dot{A}_w^2 Y_D^4 + 12\dot{A}_w \dot{B}_w Y_D^3 + 4\dot{B}_w^2 Y_D^2 + 6\dot{A}_w \dot{C}_w Y_D^2 + 4\dot{B}_w \dot{C}_w Y_D + \dot{C}_w^2 \\ \dot{\psi}_D^2 &= 9\dot{A}_u^2 Y_D^4 + 12\dot{A}_u \dot{B}_u Y_D^3 + 4\dot{B}_u^2 Y_D^2 + 6\dot{A}_u \dot{C}_u Y_D^2 + 4\dot{B}_u \dot{C}_u Y_D + \dot{C}_u^2 \\ \dot{\psi}_D \theta_D &= -9\dot{A}_u A_w Y_D^4 - 6\dot{B}_u A_w Y_D^3 - 6\dot{A}_u B_w Y_D^3 - 4\dot{B}_u B_w Y_D^2 - 3\dot{A}_u C_w Y_D^2 - 3\dot{C}_u A_w Y_D^2 \\ &\quad - 2\dot{B}_u C_w Y_D - 2\dot{C}_u B_w Y_D - \dot{C}_u C_w \end{aligned} \quad (A.1)$$

que l'on reporte dans l'expression de l'énergie cinétique (2.9) :

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{M_D}{2} \left[ \begin{aligned} &(\dot{A}_u^2 + \dot{A}_w^2) Y_D^6 + 2(\dot{A}_u \dot{B}_u + \dot{A}_w \dot{B}_w) Y_D^5 + (\dot{B}_u^2 + \dot{B}_w^2 + 2\dot{A}_u \dot{C}_u + 2\dot{A}_w \dot{C}_w) Y_D^4 \\ &+ 2(\dot{A}_u \dot{D}_u + \dot{B}_u \dot{C}_u + \dot{A}_w \dot{D}_w + \dot{B}_w \dot{C}_w) Y_D^3 + (\dot{C}_u^2 + \dot{C}_w^2 + 2\dot{B}_u \dot{D}_u + 2\dot{B}_w \dot{D}_w) Y_D^2 \\ &+ 2(\dot{C}_u \dot{D}_u + \dot{C}_w \dot{D}_w) Y_D + (\dot{D}_u^2 + \dot{D}_w^2) \end{aligned} \right] \\ &+ \frac{I_{TD}}{2} \left[ \begin{aligned} &9(\dot{A}_u^2 + \dot{A}_w^2) Y_D^4 + 12(\dot{A}_u \dot{B}_u + \dot{A}_w \dot{B}_w) Y_D^3 \\ &+ (4\dot{B}_u^2 + 4\dot{B}_w^2 + 6\dot{A}_u \dot{C}_u + 6\dot{A}_w \dot{C}_w) Y_D^2 + 4(\dot{B}_u \dot{C}_u + \dot{B}_w \dot{C}_w) Y_D + \dot{C}_u^2 + \dot{C}_w^2 \end{aligned} \right] \\ &- I_{PD} \Omega \left[ \begin{aligned} &9\dot{A}_u A_w Y_D^4 + 6(\dot{B}_u A_w + \dot{A}_u B_w) Y_D^3 + (4\dot{B}_u B_w + 3\dot{A}_u C_w + 3\dot{C}_u A_w) Y_D^2 \\ &+ 2(\dot{B}_u C_w + \dot{C}_u B_w) Y_D + \dot{C}_u C_w \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (A.2)$$

En réorganisant cette expression en fonction des coordonnées généralisées  $A_u, A_w, \dots$ , on obtient l'équation (2.10)

## A2 Energie cinétique de l'arbre

En comparant l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre - équation (2.12) -

$$T_A = \frac{M_A}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{I_{TA}}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + I_{PA} \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (2.12)$$

à celle du disque - équation (2.9) -, on s'aperçoit qu'il faut remplacer :

- $M_D$  par  $M_A$     $I_{TD}$  par  $I_{TA}$     $I_{PD}$  par  $I_{PA}$

ainsi que, en résultat du calcul des intégrales :

- $Y_D^6$  par  $L^7/7$     $Y_D^5$  par  $L^6/6$     $Y_D^4$  par  $L^5/5$     $Y_D^3$  par  $L^4/4$     $Y_D^2$  par  $L^3/3$     $Y_D$  par  $L^2/2$ ,
- et la constante par  $L$

Ce remplacement terme à terme conduit directement de l'équation (2.12) à (2.13).

## A3 Energie de déformation de l'arbre

Il faut calculer l'expression (2.18) :

$$U_A = \frac{EI_{SA}}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.18)$$

Les déplacements  $u$  et  $w$  étant donnés dans les expressions (2.7), on utilise leurs dérivées partielles par rapport à  $Y$  :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3 A_u y^2 + 2 B_u y + C_u \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3 A_w y^2 + 2 B_w y + C_w \quad (A.3)$$

$$\text{d'où} \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 = (6 A_u y + 2 B_u)^2 = 36 A_u^2 y^2 + 24 A_u B_u y + 4 B_u^2 \quad (A.4)$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 = 36 A_w^2 y^2 + 24 A_w B_w y + 4 B_w^2$$

que l'on intègre sur la longueur de l'arbre :

$$\int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy = 12 (A_u^2 + A_w^2) L^3 + 12 (A_u B_u + A_w B_w) L^2 + 4 (B_u^2 + B_w^2) L \quad (A.5)$$

$$\text{soit l'équation :} \quad \frac{U_A}{EI_{SA}} = 6 (A_u^2 + A_w^2) L^3 + 6 (A_u B_u + A_w B_w) L^2 + 2 (B_u^2 + B_w^2) L \quad (2.19)$$

## A4 Energie de déplacement dans les paliers

Pour calculer le travail virtuel de l'équation (2.20) :

$$\delta W_p = \vec{F} \cdot \vec{\Delta} = F_{q1} \delta q_1 + F_{q2} \delta q_2 + F_{q3} \delta q_3 + \dots \quad (2.20)$$

on utilise :  $\vec{F} = - [K_{pi}] \begin{bmatrix} u_{pi} \\ w_{pi} \end{bmatrix} - [C_{pi}] \begin{bmatrix} \dot{u}_{pi} \\ \dot{w}_{pi} \end{bmatrix}$  la force de réaction du palier d'indice  $i$  où

$[K_{pi}]$  et  $[C_{pi}]$  sont les matrices de raideur et d'amortissement définies en (2.4),

$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \partial u_{p_i} \\ \partial w_{p_i} \end{bmatrix}$  le vecteur de déplacement virtuel au niveau de ce palier :

$$\bar{\Delta} = \begin{Bmatrix} \partial u \\ \partial w \end{Bmatrix}$$

Pour le palier N°1 situé à l'abscisse  $Y_{p1}$ , on a :

$$\begin{cases} F_{P1u} = -K_{X1} (A_u Y_{p1}^3 + B_u Y_{p1}^2 + C_u Y_{p1} + D_u) - C_{X1} (\dot{A}_u Y_{p1}^3 + \dot{B}_u Y_{p1}^2 + \dot{C}_u Y_{p1} + \dot{D}_u) \\ F_{P1w} = -K_{Z1} (A_w Y_{p1}^3 + B_w Y_{p1}^2 + C_w Y_{p1} + D_w) - C_{Z1} (\dot{A}_w Y_{p1}^3 + \dot{B}_w Y_{p1}^2 + \dot{C}_w Y_{p1} + \dot{D}_w) \end{cases} \quad (A.6)$$

$$\begin{cases} \partial u = Y_{p1}^3 \partial A_u + Y_{p1}^2 \partial B_u + Y_{p1} \partial C_u + \partial D_u \\ \partial w = Y_{p1}^3 \partial A_w + Y_{p1}^2 \partial B_w + Y_{p1} \partial C_w + \partial D_w \end{cases} \quad (A.7)$$

ce qui conduit à l'expression du travail virtuel :

$$\begin{aligned} \partial W_{P1} = & \left[ -K_{X1} (A_u Y_{p1}^3 + B_u Y_{p1}^2 + C_u Y_{p1} + D_u) - C_{X1} (\dot{A}_u Y_{p1}^3 + \dot{B}_u Y_{p1}^2 + \dot{C}_u Y_{p1} + \dot{D}_u) \right] \\ & (Y_{p1}^3 \partial A_u + Y_{p1}^2 \partial B_u + Y_{p1} \partial C_u + \partial D_u) \\ & + \left[ -K_{Z1} (A_w Y_{p1}^3 + B_w Y_{p1}^2 + C_w Y_{p1} + D_w) - C_{Z1} (\dot{A}_w Y_{p1}^3 + \dot{B}_w Y_{p1}^2 + \dot{C}_w Y_{p1} + \dot{D}_w) \right] \\ & (Y_{p1}^3 \partial A_w + Y_{p1}^2 \partial B_w + Y_{p1} \partial C_w + \partial D_w) \end{aligned} \quad (A.8)$$

En développant (A.8), et en organisant le résultat en fonction des déplacements virtuels sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial W_{P1} = & F_{AuP1} \partial A_u + F_{BuP1} \partial B_u + F_{CuP1} \partial C_u + F_{DuP1} \partial D_u \\ & + F_{AwP1} \partial A_w + F_{BwP1} \partial B_w + F_{CwP1} \partial C_w + F_{DwP1} \partial D_w \end{aligned} \quad (A.9)$$

on obtient l'expression des forces généralisées de l'équation (2.21).

Pour le second palier, il suffit de remplacer immédiatement  $Y_{p1}$  par sa position axiale  $Y_{p2}$ . Pour la liaison supplémentaire, on remplace par son abscisse  $Y_{p3}$ .

Pour une raideur croisée, le même principe est appliqué, mais avec une expression plus simple de la force de réaction  $\vec{F} = -[K_C] \begin{bmatrix} u_C \\ w_C \end{bmatrix}$  où la matrice de raideur  $[K_C]$  est

$$\text{donnée par l'équation (2.5) : } [K_C] = \begin{bmatrix} 0 & K_{XZ} \\ -K_{XZ} & 0 \end{bmatrix}$$

La force délivrée par le palier est :

$$\begin{cases} F_{PCu} = -K_{XZ} (A_w Y_{PC}^3 + B_w Y_{PC}^2 + C_w Y_{PC} + D_w) \\ F_{PCw} = K_{XZ} (A_u Y_{PC}^3 + B_u Y_{PC}^2 + C_u Y_{PC} + D_u) \end{cases} \quad (A.10)$$

et le travail virtuel :

$$\begin{aligned} \partial W_{PC} = & -K_{XZ} (A_w Y_{PC}^3 + B_w Y_{PC}^2 + C_w Y_{PC} + D_w) (Y_{PC}^3 \partial A_u + Y_{PC}^2 \partial B_u + Y_{PC} \partial C_u + \partial D_u) \\ & + K_{XZ} (A_u Y_{PC}^3 + B_u Y_{PC}^2 + C_u Y_{PC} + D_u) (Y_{PC}^3 \partial A_w + Y_{PC}^2 \partial B_w + Y_{PC} \partial C_w + \partial D_w) \end{aligned} \quad (A.11)$$

L'écriture du développement de (A.11) sous la forme de (A.9) donne les forces relatives à chacune des coordonnées généralisées utilisées dans l'équation (2.22).

## A5 Application des équations de Lagrange aux différentes coordonnées généralisées

Dans ce chapitre, on limite le développement des différents termes des équations de Lagrange (2.1) au cas du rotor élémentaire de diamètre constant avec un seul disque. L'extension au contour d'un rotor industriel est décrite dans le paragraphe 2.2.6.

### A5.1 Application à la coordonnée $A_u$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{A}_u} \right) &= (M_D Y_D^6 + 9 I_{TD} Y_D^4) \ddot{A}_u - (9 I_{PD} \Omega Y_D^4) \dot{A}_w + (M_D Y_D^5 + 6 I_{TD} Y_D^3) \ddot{B}_u \\ &\quad - (6 I_{PD} \Omega Y_D^3) \dot{B}_w + (M_D Y_D^4 + 3 I_{TD} Y_D^2) \ddot{C}_u - (3 I_{PD} \Omega Y_D^2) \dot{C}_w + (M_D Y_D^3) \ddot{D}_u \\ &\quad + \left( \frac{M_A L^7}{7} + \frac{9 I_{TA} L^5}{5} \right) \ddot{A}_u - \left( \frac{9 I_{PA} \Omega L^5}{5} \right) \dot{A}_w + \left( \frac{M_A L^6}{6} + \frac{3 I_{TA} L^4}{2} \right) \ddot{B}_u \\ &\quad - \left( \frac{3 I_{PA} \Omega L^4}{2} \right) \dot{B}_w + \left( \frac{M_A L^5}{5} + I_{TA} L^3 \right) \ddot{C}_u - (I_{PA} \Omega L^3) \dot{C}_w + \left( \frac{M_A L^4}{4} \right) \ddot{D}_u \end{aligned} \quad (A.12)$$

$$\text{et} \quad - \left( \frac{\partial T}{\partial A_u} \right) = 0 \quad (A.13)$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{Bal}}{\partial \dot{A}_u} \right) = -m d \Omega^2 Y_D^3 \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad - \left( \frac{\partial T_{Bal}}{\partial A_u} \right) = 0 \quad (A.14)$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – s'écrit :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial A_u} \right) = 12 E I_{SA} L^3 A_u + 6 E I_{SA} L^2 B_u \quad (A.15)$$

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{A_u} &= - (K_{X1} Y_{P1}^6 + K_{X2} Y_{P2}^6) A_u - (K_{X1} Y_{P1}^5 + K_{X2} Y_{P2}^5) B_u - (K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4) C_u \\ &\quad - (K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3) D_u - (C_{X1} Y_{P1}^6 + C_{X2} Y_{P2}^6) \dot{A}_u - (C_{X1} Y_{P1}^5 + C_{X2} Y_{P2}^5) \dot{B}_u \\ &\quad - (C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4) \dot{C}_u - (C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3) \dot{D}_u \\ &\quad - K_{XZ} Y_{PC}^6 A_w - K_{XZ} Y_{PC}^5 B_w - K_{XZ} Y_{PC}^4 C_w - K_{XZ} Y_{PC}^3 D_w \end{aligned} \quad (A.16)$$

### A5.2 Application à la coordonnée $B_u$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{B}_u} \right) &= \left( M_D Y_D^5 + 6 I_{TD} Y_D^3 \right) \ddot{A}_u - \left( 6 I_{PD} \Omega Y_D^3 \right) \dot{A}_w + \left( M_D Y_D^4 + 4 I_{TD} Y_D^2 \right) \ddot{B}_u \\
&\quad - \left( 4 I_{PD} \Omega Y_D^2 \right) \dot{B}_w + \left( M_D Y_D^3 + 2 I_{TD} Y_D \right) \ddot{C}_u - \left( 2 I_{PD} \Omega Y_D \right) \dot{C}_w + \left( M_D Y_D^2 \right) \ddot{D}_u \\
&\quad + \left( \frac{M_A L^6}{6} + \frac{3 I_{TA} L^4}{2} \right) \ddot{A}_u - \left( \frac{3 I_{PA} \Omega L^4}{2} \right) \dot{A}_w + \left( \frac{M_A L^5}{5} + \frac{4 I_{TA} L^3}{3} \right) \ddot{B}_u \\
&\quad - \left( \frac{4 I_{PA} \Omega L^3}{3} \right) \dot{B}_w + \left( \frac{M_A L^4}{4} + I_{TA} L^2 \right) \ddot{C}_u - \left( I_{PA} \Omega L^2 \right) \dot{C}_w + \left( \frac{M_A L^3}{3} \right) \ddot{D}_u
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\text{et} \quad - \left( \frac{\partial T}{\partial B_u} \right) = 0 \tag{A.18}$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial \dot{B}_u} \right) = -m d \Omega^2 Y_D^2 \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad - \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial C_u} \right) = 0 \tag{A.19}$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – s'écrit :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial B_u} \right) = 6 E I_{SA} L^2 A_u + 4 E I_{SA} L B_u \tag{A.20}$$

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned}
F_{B_u} &= - \left( K_{X1} Y_{P1}^5 + K_{X2} Y_{P2}^5 \right) A_u - \left( K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4 \right) B_u - \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) C_u \\
&\quad - \left( K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 \right) D_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^5 + C_{X2} Y_{P2}^5 \right) \dot{A}_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4 \right) \dot{B}_u \\
&\quad - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) \dot{C}_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 \right) \dot{D}_u \\
&\quad - K_{XZ} Y_{PC}^5 A_w - K_{XZ} Y_{PC}^4 B_w - K_{XZ} Y_{PC}^3 C_w - K_{XZ} Y_{PC}^2 D_w
\end{aligned} \tag{A.21}$$

### A5.3 Application à la coordonnée $C_u$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{C}_u} \right) &= \left( M_D Y_D^4 + 3 I_{TD} Y_D^2 \right) \ddot{A}_u - \left( 3 I_{PD} \Omega Y_D^2 \right) \dot{A}_w + \left( M_D Y_D^3 + 2 I_{TD} Y_D \right) \ddot{B}_u \\
&\quad - \left( 2 I_{PD} \Omega Y_D \right) \dot{B}_w + \left( M_D Y_D^2 + I_{TD} \right) \ddot{C}_u - \left( I_{PD} \Omega \right) \dot{C}_w + \left( M_D Y_D \right) \ddot{D}_u \\
&\quad + \left( \frac{M_A L^5}{5} + I_{TA} L^3 \right) \ddot{A}_u - \left( I_{PA} \Omega L^3 \right) \dot{A}_w + \left( \frac{M_A L^4}{4} + I_{TA} L^2 \right) \ddot{B}_u \\
&\quad - \left( I_{PA} \Omega L^2 \right) \dot{B}_w + \left( \frac{M_A L^3}{3} + I_{TA} L \right) \ddot{C}_u - \left( I_{PA} \Omega L \right) \dot{C}_w + \left( \frac{M_A L^2}{2} \right) \ddot{D}_u
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\text{et} \quad - \left( \frac{\partial T}{\partial C_u} \right) = 0 \tag{A.23}$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial \dot{C}_u} \right) = -m d \Omega^2 Y_D \sin(\Omega t + \varphi) \text{ et } - \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial C_u} \right) = 0 \quad (\text{A.24})$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – est nulle :  $\left( \frac{\partial U}{\partial C_u} \right) = 0$  (A.25)

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{C_u} = & - \left( K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4 \right) A_u - \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) B_u - \left( K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 \right) C_u \\ & - \left( K_{X1} Y_{P1} + K_{X2} Y_{P2} \right) D_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4 \right) \dot{A}_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) \dot{B}_u \\ & - \left( C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 \right) \dot{C}_u - \left( C_{X1} Y_{P1} + C_{X2} Y_{P2} \right) \dot{D}_u \\ & - K_{XZ} Y_{PC}^4 A_w - K_{XZ} Y_{PC}^3 B_w - K_{XZ} Y_{PC}^2 C_w - K_{XZ} Y_{PC} D_w \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

#### A5.4 Application à la coordonnée $D_u$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{D}_u} \right) = & \left( M_D Y_D^3 \right) \ddot{A}_u + \left( M_D Y_D^2 \right) \ddot{B}_u + \left( M_D Y_D \right) \ddot{C}_u + \left( M_D \right) \ddot{D}_u \\ & + \left( \frac{M_A L^4}{4} \right) \ddot{A}_u + \left( \frac{M_A L^3}{3} \right) \ddot{B}_u + \left( \frac{M_A L^2}{2} \right) \ddot{C}_u + \left( M_A L \right) \ddot{D}_u \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\text{et } - \left( \frac{\partial T}{\partial D_u} \right) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial \dot{D}_u} \right) = -m d \Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi) \text{ et } - \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial D_u} \right) = 0 \quad (\text{A.29})$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – est nulle :  $\left( \frac{\partial U}{\partial D_u} \right) = 0$  (A.30)

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{D_u} = & - \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) A_u - \left( K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 \right) B_u - \left( K_{X1} Y_{P1} + K_{X2} Y_{P2} \right) C_u \\ & - \left( K_{X1} + K_{X2} \right) D_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) \dot{A}_u - \left( C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 \right) \dot{B}_u \\ & - \left( C_{X1} Y_{P1} + C_{X2} Y_{P2} \right) \dot{C}_u - \left( C_{X1} + C_{X2} \right) \dot{D}_u - K_{XZ} Y_{PC}^3 A_w - K_{XZ} Y_{PC}^2 B_w \\ & - K_{XZ} Y_{PC} C_w - K_{XZ} D_w \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

#### A5.5 Application à la coordonnée $A_w$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{A}_w} \right) &= \left( M_D Y_D^6 + 9 I_{TD} Y_D^4 \right) \ddot{A}_w + \left( M_D Y_D^5 + 6 I_{TD} Y_D^3 \right) \ddot{B}_w + \left( M_D Y_D^4 + 3 I_{TD} Y_D^2 \right) \ddot{C}_w \\ &+ \left( M_D Y_D^3 \right) \dot{D}_w + \left( \frac{M_A L^7}{7} + \frac{9 I_{TA} L^5}{5} \right) \ddot{A}_w + \left( \frac{M_A L^6}{6} + \frac{3 I_{TA} L^4}{2} \right) \ddot{B}_w \\ &+ \left( \frac{M_A L^5}{5} + I_{TA} L^3 \right) \ddot{C}_w + \left( \frac{M_A L^4}{4} \right) \dot{D}_w \end{aligned} \quad (A.32)$$

et

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial T}{\partial A_w} \right) &= \left( 9 I_{PD} \Omega Y_D^4 \right) \dot{A}_u + \left( 6 I_{PD} \Omega Y_D^3 \right) \dot{B}_u + \left( 3 I_{PD} \Omega Y_D^2 \right) \dot{C}_u \\ &+ \left( \frac{9 I_{PA} \Omega L^5}{5} \right) \dot{A}_u + \left( \frac{3 I_{PA} \Omega L^4}{2} \right) \dot{B}_u + \left( I_{PA} \Omega L^3 \right) \dot{C}_u \end{aligned} \quad (A.33)$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{Bal}}{\partial \dot{A}_w} \right) = -m d \Omega^2 Y_D^3 \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad - \left( \frac{\partial T_{Bal}}{\partial A_w} \right) = 0 \quad (A.34)$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – s'écrit :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial A_w} \right) = 12 E I_{SA} L^3 A_w + 6 E I_{SA} L^2 B_w \quad (A.35)$$

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{Aw} &= - \left( K_{X1} Y_{P1}^6 + K_{X2} Y_{P2}^6 \right) A_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^5 + K_{X2} Y_{P2}^5 \right) B_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4 \right) C_w \\ &- \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) D_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^6 + C_{X2} Y_{P2}^6 \right) \dot{A}_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^5 + C_{X2} Y_{P2}^5 \right) \dot{B}_w \\ &- \left( C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4 \right) \dot{C}_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) \dot{D}_w \\ &+ K_{XZ} Y_{PC}^6 A_u + K_{XZ} Y_{PC}^5 B_u + K_{XZ} Y_{PC}^4 C_u + K_{XZ} Y_{PC}^3 D_u \end{aligned} \quad (A.36)$$

## A5.6 Application à la coordonnée $B_w$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{B}_w} \right) &= \left( M_D Y_D^5 + 6 I_T Y_D^3 \right) \ddot{A}_w + \left( M_D Y_D^4 + 4 I_T Y_D^2 \right) \ddot{B}_w + \left( M_D Y_D^3 + 3 I_T Y_D \right) \ddot{C}_w \\ &+ \left( M_D Y_D^2 \right) \dot{D}_w + \left( \frac{M_A L^6}{6} + \frac{3 I_{TA} L^4}{2} \right) \ddot{A}_w + \left( \frac{M_A L^5}{5} + \frac{4 I_{TA} L^3}{3} \right) \ddot{B}_w \\ &+ \left( \frac{M_A L^4}{4} + I_{TA} L^2 \right) \ddot{C}_w + \left( \frac{M_A L^3}{3} \right) \dot{D}_w \end{aligned} \quad (A.37)$$

et

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial T}{\partial B_w} \right) &= \left( 6 I_{PD} \Omega Y_D^3 \right) \dot{A}_u + \left( 4 I_{PD} \Omega Y_D^2 \right) \dot{B}_u + \left( 2 I_{PD} \Omega Y_D \right) \dot{C}_u \\ &+ \left( \frac{3 I_{PA} \Omega L^4}{2} \right) \dot{A}_u + \left( \frac{4 I_{PA} \Omega L^3}{3} \right) \dot{B}_u + \left( I_{PA} \Omega L^2 \right) \dot{C}_u \end{aligned} \quad (A.38)$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial \dot{B}_w} \right) = -m d \Omega^2 Y_D^2 \cos(\Omega t + \varphi) \text{ et } - \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial B_w} \right) = 0 \quad (\text{A.39})$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – s'écrit :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial B_w} \right) = 6 E I_{SA} L^2 A_w + 4 E I_{SA} L B_w \quad (\text{A.40})$$

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{B_w} = & - \left( K_{X1} Y_{P1}^5 + K_{X2} Y_{P2}^5 \right) A_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4 \right) B_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) C_w \\ & - \left( K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 \right) D_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^5 + C_{X2} Y_{P2}^5 \right) \dot{A}_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4 \right) \dot{B}_w \\ & - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) \dot{C}_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 \right) \dot{D}_w \\ & + K_{XZ} Y_{PC}^5 A_u + K_{XZ} Y_{PC}^4 B_u + K_{XZ} Y_{PC}^3 C_u + K_{XZ} Y_{PC}^2 D_u \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

### A5.7 Application à la coordonnée $C_w$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{C}_w} \right) = & \left( M_D Y_D^4 + 3 I_{TD} Y_D^2 \right) \ddot{A}_w + \left( M_D Y_D^3 + 2 I_{TD} Y_D \right) \ddot{B}_w + \left( M_D Y_D^2 + I_{TD} \right) \ddot{C}_w \\ & + \left( M_D Y_D \right) \ddot{D}_w + \left( \frac{M_A L^5}{5} + I_{TA} L^3 \right) \ddot{A}_w + \left( \frac{M_A L^4}{4} + I_{TA} L^2 \right) \ddot{B}_w \\ & + \left( \frac{M_A L^3}{3} + I_{TA} L \right) \ddot{C}_w + \left( \frac{M_A L^2}{2} \right) \ddot{D}_w \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \text{et } - \left( \frac{\partial T}{\partial C_w} \right) = & \left( 3 I_{PD} \Omega Y_D^2 \right) \dot{A}_u + \left( 2 I_{PD} \Omega Y_D \right) \dot{B}_u + \left( I_{PD} \Omega \right) \dot{C}_u \\ & + \left( I_{PA} \Omega L^3 \right) \dot{A}_u + \left( I_{PA} \Omega L^2 \right) \dot{B}_u + \left( I_{PA} \Omega L \right) \dot{C}_u \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial \dot{C}_w} \right) = -m d \Omega^2 Y_D \cos(\Omega t + \varphi) \text{ et } - \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial C_w} \right) = 0 \quad (\text{A.44})$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – est nulle :  $\left( \frac{\partial U}{\partial C_w} \right) = 0$  (A.45)

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{C_w} = & - \left( K_{X1} Y_{P1}^4 + K_{X2} Y_{P2}^4 \right) A_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) B_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 \right) C_w \\ & - \left( K_{X1} Y_{P1} + K_{X2} Y_{P2} \right) D_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^4 + C_{X2} Y_{P2}^4 \right) A_w^0 - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) B_w^0 \\ & - \left( C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 \right) C_w^0 - \left( C_{X1} Y_{P1} + C_{X2} Y_{P2} \right) D_w^0 \\ & + K_{XZ} Y_{PC}^4 A_u + K_{XZ} Y_{PC}^3 B_u + K_{XZ} Y_{PC}^2 C_u + K_{XZ} Y_{PC} D_u \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

## A5.8 Application à la coordonnée $D_w$

Les dérivées des énergies cinétiques du disque et de l'arbre données par les équations (2.10) et (2.13) sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{D}_w} \right) &= (M_D Y_D^3) \ddot{A}_w + (M_D Y_D^2) \ddot{B}_w + (M_D Y_D) \ddot{C}_w + (M_D) \ddot{D}_w \\ &+ \left( \frac{M_A L^4}{4} \right) \ddot{A}_w + \left( \frac{M_A L^3}{3} \right) \ddot{B}_w + \left( \frac{M_A L^2}{2} \right) \ddot{C}_w + (M_A L) \ddot{D}_w \end{aligned} \quad (A.47)$$

$$\text{et} \quad - \left( \frac{\partial T}{\partial D_w} \right) = 0 \quad (A.48)$$

Celles de l'énergie cinétique du balourd – équation (2.17) – sont :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial \dot{D}_w} \right) = -m d \Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad - \left( \frac{\partial T_{\text{Bal}}}{\partial D_w} \right) = 0 \quad (A.49)$$

La dérivée de l'énergie de déformation élastique de l'arbre – équation (2.19) – est nulle :  $\left( \frac{\partial U}{\partial D_w} \right) = 0$  (A.50)

La force généralisée tirée des équations (2.21) et (2.22) est :

$$\begin{aligned} F_{D_w} &= - \left( K_{X1} Y_{P1}^3 + K_{X2} Y_{P2}^3 \right) A_w - \left( K_{X1} Y_{P1}^2 + K_{X2} Y_{P2}^2 \right) B_w - \left( K_{X1} Y_{P1} + K_{X2} Y_{P2} \right) C_w \\ &- \left( K_{X1} + K_{X2} \right) D_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^3 + C_{X2} Y_{P2}^3 \right) \dot{A}_w - \left( C_{X1} Y_{P1}^2 + C_{X2} Y_{P2}^2 \right) \dot{B}_w \\ &- \left( C_{X1} Y_{P1} + C_{X2} Y_{P2} \right) \dot{C}_w - \left( C_{X1} + C_{X2} \right) \dot{D}_w + K_{XZ} Y_{PC}^3 A_u \\ &+ K_{XZ} Y_{PC}^2 B_u + K_{XZ} Y_{PC} C_u + K_{XZ} D_u \end{aligned} \quad (A.51)$$

## Annexe B – Méthodes numériques

Bien que les méthodes numériques qui ont été utilisées soient connues par ailleurs, il semble intéressant d'en donner un rappel.

### B1 Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

On veut résoudre un système d'équations  $[A][X] = [B]$  (B1.1)  
où  $[A]$  est une matrice de coefficients,  $[B]$  un vecteur donné, et  $[X]$  le vecteur inconnu.

On peut utiliser la méthode des cofacteurs, mais celle du pivot de Gauss Jordan est beaucoup plus rapide, décrite par exemple dans le cours de licence de mathématiques de Pastre de 2003 [**Pastre**]. On crée un tableau à  $n$  lignes et  $n + 1$  colonnes en bordant la matrice  $[A]$  à droite par le vecteur  $[B]$  :

$$[[A] \mid [B]] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right] \quad (\text{B1.2})$$

La transformation de Gauss-Jordan consiste à transformer ce système en un système équivalent dont le bloc gauche est l'identité, c'est-à-dire qu'il faut modifier la matrice  $[[A] \mid [B]]$  pour qu'elle devienne de la forme :  $[[I_n] \mid [X]]$ .

On notera :

- $l_i^k$  la ligne  $i$  de la matrice  $[A]$  à l'itération  $k$ ,
- $a_{ij}^k$  le scalaire  $a_{ij}$  de la matrice  $[A]$  à l'itération  $k$ .

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour  $k$  allant de 1 à  $n$ ,

si il existe une ligne  $i \geq k$  telle que  $a_{ik}^{k-1} \neq 0$  alors,  $a_{ik}^{k-1}$  est dit le pivot et :

- on permute cette ligne  $i$  avec la ligne  $k$  :  $l_i \leftrightarrow l_k$ , soit  $l_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{kk}^{k-1}} l_k^{k-1}$  (B1.3)

- et on applique les combinaisons linéaires pour  $i$  allant de 1 à  $n$  sauf pour  $i = k$  :  $l_i^k \leftarrow l_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \times l_k^k$  (B1.4)

sinon  $[A]$  n'est pas inversible et il faut abandonner.

Après l'étape  $k$  de l'algorithme, la colonne  $k$  a tous ses coefficients nuls sauf un : celui de la diagonale, qui vaut 1.

**Variante** : on peut aussi chercher le coefficient  $a_{ik}^{k-1}$ ,  $i \geq k$  le plus grand (en valeur absolue) avant d'échanger les lignes. Cela améliore la stabilité de l'algorithme. De même on peut aussi faire des échanges sur les colonnes pour trouver un coefficient plus grand, mais il faut garder la trace de ces permutations si l'on veut aussi calculer

le déterminant de la matrice  $[A]$ . C'est cette variante, plus robuste, qui a été programmée.

On notera que l'algorithme transforme la matrice  $[A]$  en matrice unité. Si l'on a besoin de la réutiliser, il faut l'avoir préalablement archivée.

## B2 Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan

Inverser une matrice  $[A]$  carrée inversible d'ordre  $n$  revient à résoudre pour  $i$  allant de 1 à  $n$  les  $n$  systèmes linéaires  $[A][f_i] = [e_i]$ . (B2.1)

Pour cela, on étend la méthode du paragraphe B1 décrite par Pastre **[Pastre]** en créant un tableau à  $n$  lignes et  $2n$  colonnes en bordant la matrice  $[A]$  par la matrice unité  $[I_n]$ .

$$[[A] \mid [I_n]] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \quad (\text{B2.2})$$

La transformation de Gauss-Jordan consiste à transformer ce système en un système équivalent dont le bloc gauche est l'identité, c'est-à-dire qu'il faut modifier la matrice  $[[A] \mid [I_n]]$  pour qu'elle devienne de la forme :  $[[I_n] \mid [A]^{-1}]$ .

Le même algorithme qu'au paragraphe B1 est alors utilisé avec la variante citée. Comme dans ce paragraphe B1, si l'on a besoin de réutiliser la matrice  $[A]$ , il faut l'avoir préalablement archivée puisque l'algorithme la transforme en matrice unité.

## B3 Recherche des valeurs propres vecteurs propres par la méthode de JACOBI complexe

Le problème aux valeurs propres de l'équation  $([A] - \lambda[I])[X] = [0]$  (B3.1) étant à résoudre pour une matrice d'état  $[A]$  non symétrique, on va modifier la méthode de Jacobi traditionnelle pour l'appliquer à des solutions complexes **[Ferraris09]**.

On va utiliser la matrice des vecteurs propres  $[\phi]$  que l'on initialise à la matrice unité  $[I]$ .

Le but de la méthode est de transformer par des rotations successives la matrice  $[A]$  en une matrice diagonale. A l'itération  $i$ , cette matrice d'état est devenue de la forme suivante :

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & a & \cdots & b & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & c & \cdots & d & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array} \right], \text{ les termes } a \text{ et } d \text{ étant sur la diagonale.} \quad (\text{B3.2})$$

On s'intéresse à la sous matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  où au moins b ou c est non nul et dont on va chercher les valeurs propres et vecteurs propres :  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} [V_i] = \lambda [V_i]$ . (B3.3)

La résolution de l'équation caractéristique :

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (\text{B3.4})$$

est triviale avec deux solutions complexes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  à partir desquelles on détermine les deux vecteurs propres complexes en fixant arbitrairement l'une de leur composante égale à 1 :

$$[V_{i1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} + jy_{i1} \end{bmatrix} \text{ et } [V_{i2}] = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i2} + jy_{i2} \end{bmatrix} \quad (\text{B3.5})$$

A partir de ces vecteurs propres, on construit une matrice de rotation :

$$[R_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{i1} + jy_{i1} & 0 & x_{i2} + jy_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B3.7})$$

que l'on applique sur la matrice des vecteurs propres :  $[\phi_i] = [\phi_{i-1}][R_i]$ . (B3.8)

De même, la matrice d'état devient, à partir de celle obtenue à l'itération précédente :

$$[A_i] = [R_i]^{-1} [A_{i-1}] [R_i] \quad (\text{B3.9})$$

où  $[R_i]^{-1}$  est très facile à calculer.

On arrête l'algorithme lorsque tous les termes en dehors de la diagonale de la matrice  $[A_i]$  sont très petits devant ceux de la diagonale. Les termes diagonaux comportent alors les valeurs propres de  $[A]$ , et la matrice  $[\phi]$  est celle des vecteurs propres de  $[A_i]$ .

L'algorithme est accéléré lorsque on choisit pour b ou c le terme de plus grand module en dehors de la diagonale de la matrice (B3.2). Ceci a aussi permis d'utiliser un autre mode d'arrêt qui s'est avéré aussi un peu moins coûteux en temps de calcul pour l'application au modèle du chapitre 2. Ce mode consiste à arrêter les itérations lorsque l'on ne change plus de pivot, c'est-à-dire que le terme le plus grand ne peut plus être réduit. D'ailleurs, au-delà de cette itération, l'algorithme diverge.

## B4 Schéma d'intégration de Newmark

La méthode de Newmark permet la résolution numérique des équations différentielles du deuxième ordre dont les termes sont éventuellement très compliqués **[Newmark]**. Un avantage majeur de cette méthode par rapport à l'intégration directe d'Euler **[Euler]** est que le système reste en équilibre dynamique à chaque instant  $t + dt$  à la sortie de chacun des pas de temps itérations.

On considère l'équation :

$$\ddot{y}(t) = f(y(t), \dot{y}(t), t) \quad (\text{B4.1})$$

où  $t$  est le paramètre d'intégration, que l'on considérera ici comme étant le temps,  
 $y(t)$  est la valeur de la grandeur à intégrer à l'instant  $t$ ,  
 $\dot{y}(t)$  est la dérivée par rapport à  $t$  de la grandeur à intégrer à l'instant  $t$   
 $\ddot{y}(t)$  est la dérivée seconde par rapport à  $t$  de la grandeur à intégrer à l'instant  $t$   
 $f$  est la fonction permettant d'exprimer  $y'(t)$  à partir du phénomène physique observé ou de la fonction mathématique à intégrer.

Le calcul des forces pour chaque position et vitesse peut nécessiter éventuellement des calculs très lourds.

Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité la position et la vitesse à l'instant  $t$  à partir des mêmes grandeurs à l'instant  $t-dt$ . Ce développement contient un terme d'erreur du troisième ordre proportionnel à la dérivée de l'accélération. En partant de l'hypothèse selon laquelle l'accélération varie linéairement sur l'intervalle, on aboutit à des équations qui ne dépendent plus de la dérivée troisième mais qui introduisent les dérivées à l'instant  $t$  en plus de celles à l'instant  $t-dt$ .

Evidemment, il faut disposer de conditions initiales pour  $y(t_0)$  et  $\dot{y}(t_0)$ . Ensuite, l'algorithme est particulièrement simple :

- à l'instant  $t$ , on connaît  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$  ;
- on initialise  $\ddot{y}(t + dt) = \ddot{y}(t)$  ;
- on calcule la grandeur  $y$  et sa vitesse à l'instant  $t+dt$  :

$$\begin{cases} \dot{y}(t + dt) = \dot{y}(t) + \frac{\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t + dt)}{2} dt \\ y(t + dt) = y(t) + \dot{y}(t) dt + \frac{1}{3} \left[ \ddot{y}(t) + \frac{\ddot{y}(t + dt)}{2} \right] dt^2 \end{cases} \quad (\text{B4.2})$$

- avec ces nouvelles valeurs, on recalcule

$$\ddot{y}(t + dt) = f(y(t + dt), \dot{y}(t + dt), t + dt) \quad (\text{B4.3})$$

- et l'on itère jusqu'à ce que  $y(t + dt)$  ne varie pas plus d'une très petite valeur  $\varepsilon$  entre deux itérations successives.

Cette technique s'applique également aux équations non linéaires, en introduisant des itérations supplémentaires liées aux non linéarités à l'intérieur de chaque pas de temps de calcul.

# Annexe C – Logique floue et réseaux de neurones

Cette annexe est destinée à donner une courte introduction sur ces techniques qui complètent la panoplie habituelle du contrôle des processus que l'on résumera de façon synthétique, et peut-être abusive à l'utilisation des systèmes logiques (contrôle booléen) ou à celle des servomécanismes linéaires. Ces techniques sont proposées comme une avancée pour la synthèse des régulateurs des paliers magnétiques actifs (paragraphe 5.8.1).

## C1 Logique floue

Ce terme apparaît quelque peu antinomique ! L'algèbre de Boole enseigne qu'une entité est vraie ou fausse. Mais puisque tout n'est pas tout noir ou tout blanc, la logique floue permet de réconcilier le postulat de départ de Boole avec la réalité des choses.

On s'intéresse au cas d'entités dites "non dénombrables", c'est-à-dire variables telles qu'on les trouve dans la commande des systèmes (positions mécaniques, tensions, intensités, champs électriques, pressions, températures, etc.).

L'exemple typique est celui de la taille d'une personne. On peut décider que quelqu'un de plus de 1,80 est grand. Est-ce que pour autant, on est petit à 1,79 m ? La logique floue va répondre à cette question en fixant un autre seuil instaurant une seconde vérité : on est petit par exemple en dessous de 1,50 m. Entre ces deux seuils, on est "moyen", mais la logique floue va quantifier cet état à l'aide d'une combinaison des deux variables de sortie qui viennent d'être décidées "petit" ou "grand". Un exemple de quantification est donné sur la figure C.1, sachant qu'en pratique, on est libre de choisir la fonction, linéaire ou non, reliant les deux niveaux entre les deux seuils.

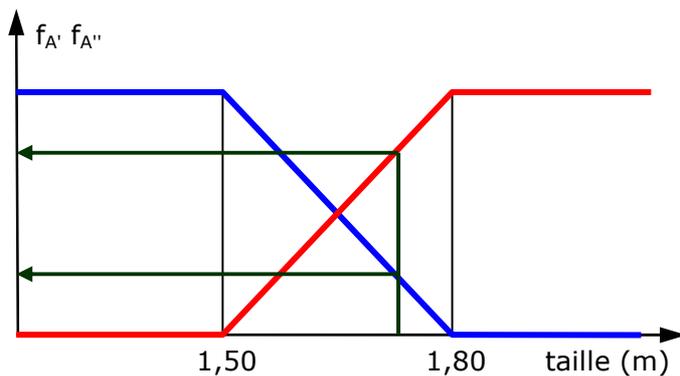


Figure C.1 – Fonctions d'appartenance

Ainsi, quelqu'un mesurant 1,73 m sera 75% "grand" et 25% "petit".

Les relations utilisées pour quantifier une variable  $x$  par rapport aux niveaux choisis sont appelées fonctions d'appartenance  $f_A(x)$ . La fonction est définie entre 0 et 1. On associe à chaque élément  $x$  de  $X$  le degré d'appartenance  $A(X)$  à  $f_A(x)$  de la façon suivante :

$$A = \frac{\sum_{x \in X} f_A(x)}{x} \quad \text{dans le cas d'un système dénombrable (comme par exemple des populations),} \quad (C1.1)$$

$$A = \frac{\int_x f_A(x)}{x} \quad \text{pour un système non dénombrable.} \quad (C1.2)$$

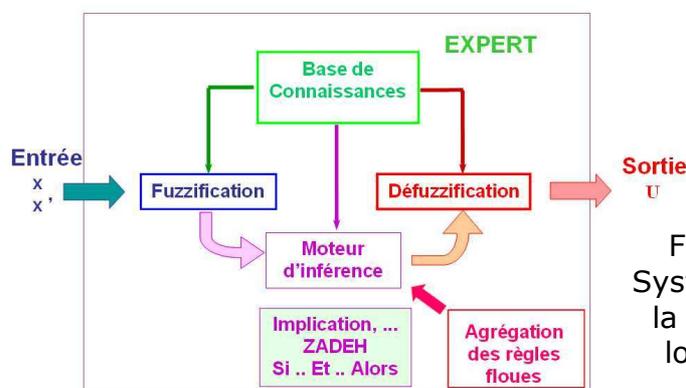
Si l'on généralise à plusieurs variables, le sous-ensemble flou est défini par les fonctions d'appartenance à toutes les fonctions.

Pratiquement, pour faire du contrôle actif, on peut fixer les seuils sur chaque variable à sa plage utile dans le contrôle. Si une mesure est comprise entre 0,10 et 0,15 mm, il est inutile de la quantifier en dehors de cette plage. Il en est de même pour une tension de commande utilisée entre 5 et 8 V.

La logique floue constitue une aide à la décision par l'intermédiaire d'un contrôleur flou. Ce contrôle s'applique à des systèmes complexes, à des systèmes non linéaires et allie efficacité et robustesse. Il est utilisé dans domaines comme par exemple l'économie, les sciences naturelles et humaines, la robotique et, en ce qui nous concerne, la maîtrise du comportement dynamique.

Le principe d'un contrôleur flou est le suivant :

- on a des entrées  $x$ , avec éventuellement leurs dérivées temporelles  $\dot{x}$  ;
- un expert a établi une base de connaissance sur la définition des entrées ;
- les entrées subissent en conséquence une opération de fuzzification qui transforme leurs grandeurs physiques en variables floues par l'intermédiaire des fonctions d'appartenance ;
- l'expert a aussi défini un moteur d'inférence sous forme de tests simples (sur la base de la logique "si... ou... et... alors..." ) ;
- la base de connaissance transforme les résultats de ce calcul d'inférence en variables physiques de sortie par une opération de défuzzification pour les appliquer aux commandes du système.



La figure C.2 représente ce principe d'aide à la décision par la logique floue.

Figure C.2 – Système d'aide à la décision par logique floue

La défuzzification s'effectue par différentes techniques :

- Mamdani qui calcule la sortie par les aires sous-tendues par les fonctions d'appartenance, en application de l'équation (C1.2),
- Sugeno avec l'utilisation de fonctions de pondération, très intéressante en contrôle actif car très rapide en temps de calcul,
- Tsukamoto qui utilise des courbes.

L'exemple du contrôle flou d'un pendule inversé est donné à titre d'illustration. La figure C.3 montre le schéma du dispositif. Le but du contrôle est de maintenir verticale la tige du pendule.

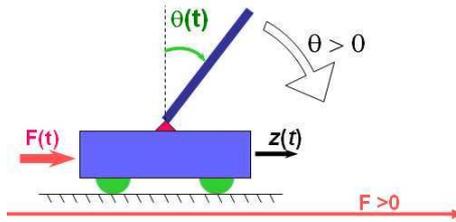


Figure C.3 – Pendule inversé

Les règles définies par l'expert sont les suivantes :

- si  $\theta > 0$  et  $\dot{\theta} > 0$  alors  $F > 0$
- si  $\theta > 0$  et  $\dot{\theta} < 0$  alors  $F = 0$
- si  $\theta < 0$  et  $\dot{\theta} > 0$  alors  $F = 0$
- si  $\theta < 0$  et  $\dot{\theta} < 0$  alors  $F < 0$

Après fuzzification des entrées  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  en  $x_1-x_2$  et  $\dot{x}_1-\dot{x}_2$ , l'application des règles est traduite par la méthode de Sugeno en relations linéaires du type :

$$\begin{cases} z_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 \end{cases} \quad (C1.3)$$

L'agrégation des règles floues et la défuzzification se fait en introduisant des gains  $W$  qui permettront de régler les performances du contrôle :

$$F = \frac{\sum_1^4 W_i z_i}{\sum_1^4 W_i} \quad (C1.4)$$

Le modèle représenté par l'équation (C1.5) est totalement non linéaire :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \cos \theta \frac{-F - mL \dot{\theta}^2 \sin \theta}{m_c + m}}{L \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta}{m_c + m} \right)} \\ \ddot{z} = \frac{F + mL (\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \sin \theta)}{m_c + m} \end{cases} \quad (C1.5)$$

La figure C.4 représente le modèle qui peut être modélisé avec toutes ses non-linéarités à l'aide de Matlab® et calculé avec Simulink® **[MATLAB]**. La figure C.5 représente le profil de la force appliquée sur le chariot qui s'avère être une surface gauche, alors qu'une structure de contrôleur de type PID aurait conduit à une surface plane.

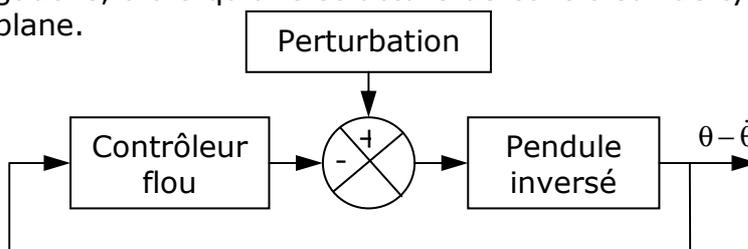


Figure C.4 – Modèle du pendule inversé

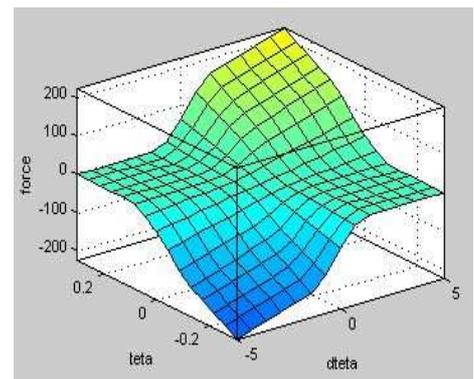


Figure C.5 – Profil de force appliquée au chariot du pendule

Les performances obtenues pour un chariot de 1 kg, une barre de 0,1 kg de longueur 1 m, et des conditions initiales toutes nulles, sauf  $\theta = 0,17$  rad ( $10^\circ$ ) sont représentées sur la figure C.6.

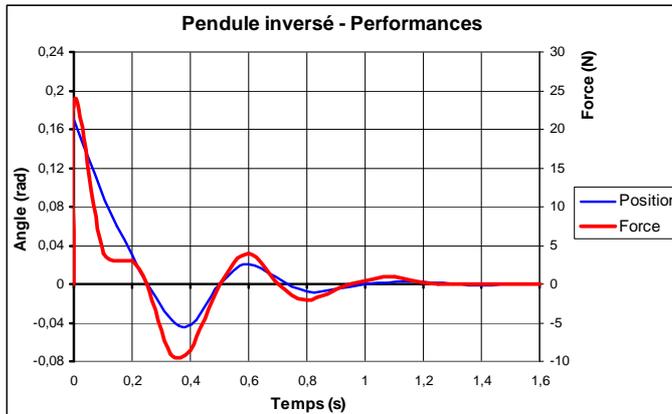


Figure C.6 – Performance d'un contrôleur à logique floue sur le pendule inversé

## C2 Réseaux de neurones

La figure C.7 représente un neurone biologique et la figure C.8 correspond à une synthèse artificielle de l'espace synaptique.

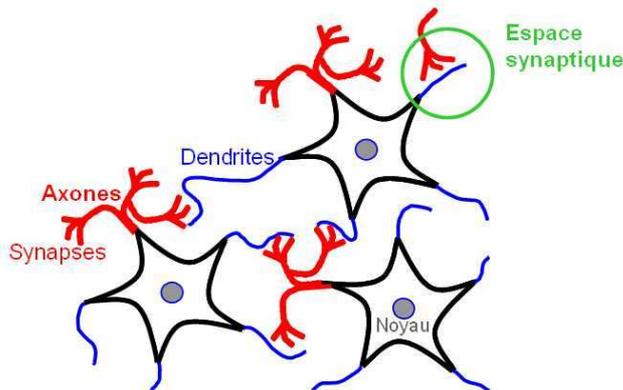


Figure C.7 – Neurone biologique

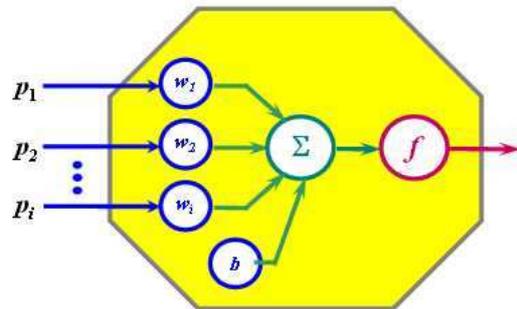


Figure C.8 – Neurone synthétique

La fonction d'activation réalisée par le neurone synthétique est de la forme :

$$x = f\left(\sum_{i=1}^R p_i w_i + b\right) \quad (C2.1)$$

ce qui ouvre un champ énorme d'application grâce aux choix de la fonction d'activation  $f$ , des pondérations  $w_i$  et du biais  $b$ . La figure C.9 donne les différents types de fonction d'activation, les plus utilisées en contrôle actif étant la fonction linéaire et la tangente sigmoïde (non linéaire).

La figure C.10 représente un réseau de neurones synthétiques. Les neurones sont disposés en couches. Les fonctions d'activation doivent être les mêmes dans chaque couche. L'information circule de l'entrée vers la sortie sans retour en arrière.

Une fois choisis un nombre de couches, un nombre de neurones par couche, une fonction d'activation, la définition des pondérations  $w_{ij}$  et des biais  $b_{ij}$  pour chaque neurone laisse une énorme plage d'adaptation.

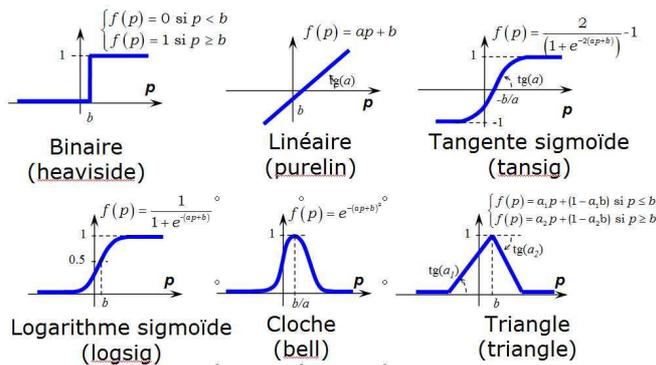


Figure C.9 – Fonctions d'activation des neurones synthétiques

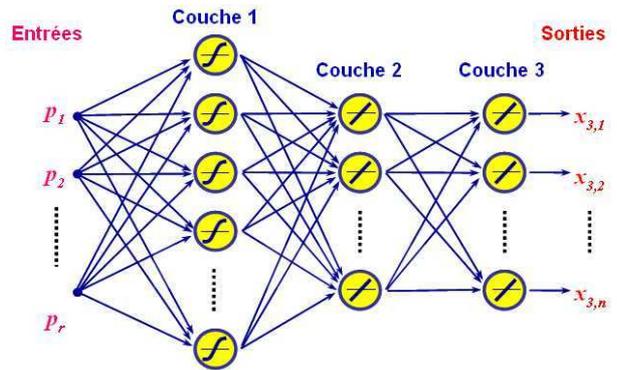


Figure C.10 – Réseau de neurones

Le système se résout évidemment par intégration numérique temporelle. Le réglage se fait pour obtenir un objectif à partir d'un profil d'entrée ; c'est donc un système à apprentissage.

L'étude des neurones artificiels a été initiée par Werbos en 1975, puis perfectionnée en 1985 par Parker et Lu. Mais ce n'est qu'en 1986 que Rumelhart et McClelland et al. ont permis à cette approche de se répandre grâce à la formalisation de la méthode d'apprentissage des procédés parallèles distribués (PDP) **[Rumelhart]**. Cette phase d'apprentissage supervisé est réalisée par un algorithme de rétropropagation qui utilise des poids synaptiques et une méthode de gradient minimisant une fonction d'erreur. Pour éviter les problèmes liés à une stabilisation dans un minimum local, on ajoute un terme d'inertie (momentum) permettant de sortir de ce minimum et de reprendre la descente de la fonction d'erreur. A chaque itération, on change les poids concernant les informations des changements précédents, ce qui évite les oscillations et accélère l'optimisation du réseau.

Les applications en contrôle actif sont principalement l'identification neuronale (figure C.11) souvent dans le but d'identifier les non-linéarités et le réglage de contrôleurs neuronaux (figure C.12).

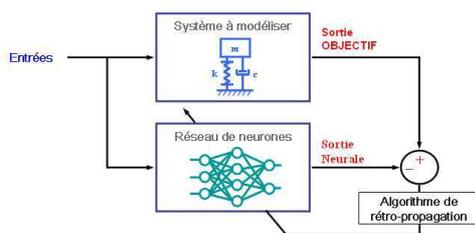


Figure C.11 – Identification neuronale d'un système

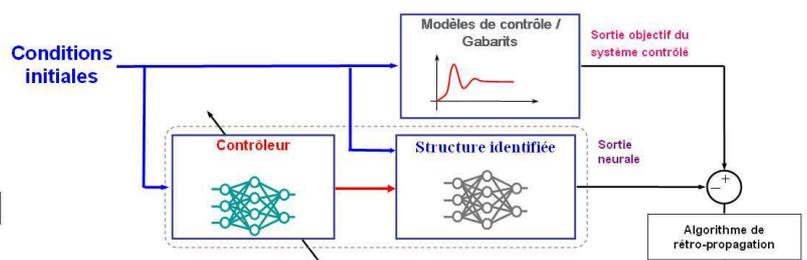


Figure C.12 – Réglage d'un contrôleur neuronal en fonction d'un gabarit de performance

Dans la mesure où l'analyse réalisée ici est purement temporelle, il faut être prudent vis-à-vis de la stabilité qui demande plutôt une analyse fréquentielle (diagrammes fréquentiels de Bode, de Nyquist, de surtension de Black, position des pôles...). Il peut très bien y avoir des minima locaux et il est nécessaire de faire beaucoup de simulations dans des zones de fonctionnement différentes et avec des perturbations différentes pour s'assurer de la stabilité qui ne doit jamais être sacrifiée au profit de la performance.

Une illustration de la performance est proposée pour le contrôle d'un système simple à un seul degré de liberté de fréquence propre 10 Hz et très faiblement amorti ( $\alpha=0,01$ ) soumis à un échelon de Heaviside conduisant à un déplacement de 0,2 m. La figure C.13 montre la réponse du système libre sans contrôle ( $\alpha=0,01$ ), et celle obtenue après synthèse d'un contrôleur neuronal défini pour un calibre destiné à réaliser un amortissement critique ( $\alpha=0,7$ ).

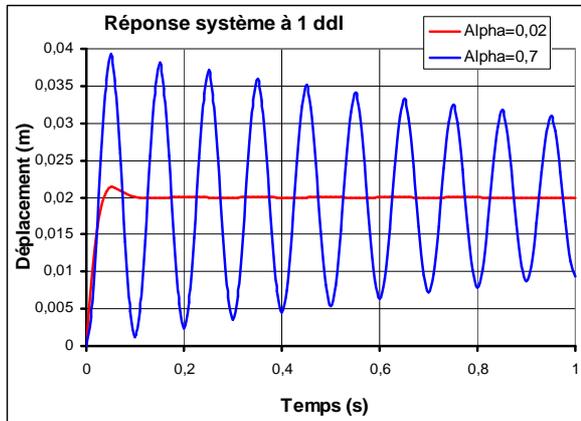


Figure C.13 – Simulation d'un contrôleur neuronal

### C3 Systèmes neuro-flous

Cette technique intègre la logique floue sous la forme d'un réseau de neurones, ce qui permet de disposer de systèmes adaptatifs à apprentissage pouvant contrôler des systèmes non linéaires avec des règles simples.

## Annexe D – Développement de modèles de tronçons coniques aux éléments finis en torsion

Le paragraphe 6.2.3 du chapitre 6 sur les modélisations de torsion nécessite l'utilisation d'éléments finis de tronçons coniques. Plutôt que de chercher des diamètres équivalents utilisant des formules analytiques, il a été décidé d'utiliser des éléments finis directement adaptés dont le développement est fait à l'aide de la méthode des équations de Lagrange.

On considère que les diamètres varient linéairement sur la longueur de l'élément entre :

- $D_M$  variant de  $D_1$  ( $x=0$ ) et  $D_2$  ( $x=L$ ) pour la définition de la masse :

$$D_M = D_1 (1 + \alpha x) \text{ où } \alpha = \frac{D_2 - D_1}{D_1 L} \quad (D1)$$

$$J_M(x) = \frac{\pi D_1^4}{32} (1 + \alpha x)^4 \quad (D2)$$

- $D_K$  variant de  $D_3$  ( $x=0$ ) et  $D_4$  ( $x=L$ ) pour la définition de la raideur :

$$D_K = D_3 (1 + \beta x) \text{ où } \beta = \frac{D_4 - D_3}{D_3 L} \quad (D3)$$

$$J_K(x) = \frac{\pi D_3^4}{32} (1 + \beta x)^4 \quad (D4)$$

### D1 Modèle à 1 ddl/nœud

La fonction de forme de l'élément est linéaire :

$$\theta = \frac{1}{L} [\theta_1 L + (\theta_2 - \theta_1)x] \quad (D1.1)$$

#### D1.1 Energie cinétique – Matrice de masse

La vitesse angulaire étant :

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L} [\dot{\theta}_1 L + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)x] \quad (D1.2)$$

l'énergie cinétique est définie par :

$$T = \frac{\pi D_1^4 \rho}{2 \cdot 32 L^2} \int_0^L (1 + \alpha x)^4 [\dot{\theta}_1 L + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)x]^2 dx \quad (D1.3)$$

Après développement et intégration, cette énergie cinétique devient :

$$T = \frac{\pi D_1^4 \rho L}{2 \cdot 32} \left[ A_1 \dot{\theta}_1^2 + B_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + C_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \right] \quad (D1.4)$$

$$= \frac{\pi D_1^4 \rho L}{32 L^2} \left[ \dot{\theta}_1^2 \frac{A_1 + C_1 - B_1}{2} + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left( \frac{B_1 - C_1}{2} \right) + \dot{\theta}_2^2 \frac{C_1}{2} \right]$$

avec :

$$\begin{cases} A1 = 1 + 2 \alpha L + 2 \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \alpha^4 L^4 / 5 \\ B1 = 1 + 8 \alpha L / 3 + 3 \alpha^2 L^2 + 8 \alpha^3 L^3 / 5 + \alpha^4 L^4 / 3 \\ C1 = 1 / 3 + \alpha L + 6 \alpha^2 L^2 / 5 + 2 \alpha^3 L^3 / 3 + \alpha^4 L^4 / 7 \end{cases} \quad (D1.5)$$

En appliquant les équations de Lagrange à l'énergie cinétique (D1.4) et (D1.5) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix} = \frac{\pi D_1^4 \rho L}{32} \begin{bmatrix} A_1 + C_1 - B_1 & \frac{B_1}{2} - C_1 \\ \frac{B_1}{2} - C_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (D1.6)$$

En développant les coefficients et en remplaçant  $\alpha L$  par  $\frac{D_2}{D_1} - 1$  d'après (D1), on obtient finalement la matrice de masse :

$$[M] = \frac{J_1 \rho L}{210} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix} \quad (D1.7)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} M_1 = 70 + 70 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 42 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 14 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 2 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_2 = 35 + 70 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 63 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 28 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 5 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_3 = 70 + 210 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 126 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 140 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 21 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \end{cases} \quad (D1.8)$$

## D1.2 Energie de déformation – Matrice de raideur

La pente de la déformée étant :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{L} (\theta_2 - \theta_1) \quad (D1.9)$$

L'énergie de déformation est définie par :

$$U = \frac{G \pi D_3^4}{2.32 L^2} (\theta_2 - \theta_1)^2 \int_0^L (1 + \beta x)^4 dx \quad (D1.10)$$

$$\text{soit : } U = \frac{G \pi D_3^4}{2.32 L^2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2 \theta_1 \theta_2) \left( L + 2 \beta L^2 + 2 \beta^2 L^3 + \beta^3 L^4 + \frac{\beta^4 L^5}{5} \right) \quad (D1.11)$$

En appliquant les équations de Lagrange à l'énergie de déformation (D1.11) et en remplaçant  $\beta L$  par  $\frac{D_4}{D_3} - 1$  d'après (D3), on obtient finalement la matrice de raideur :

$$[K] = \frac{G J_3 \rho}{5 L} \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \quad (D1.12)$$

$$\text{avec : } K_1 = 5 + 10 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) + 10 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 + 5 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 + \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4 \quad (D1.13)$$

## D2 Modèle à 2 ddl/nœud

La fonction de forme de l'élément est cubique :

$$\theta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (D2.1)$$

où les coefficients s'expriment en fonction des degrés de liberté définis par l'équation (6.9) par :

$$\begin{cases} a_0 = \theta_1 \\ a_1 = \gamma_1 \\ a_2 = 3 \frac{\theta_1 - \theta_2}{L^2} - \frac{2\gamma_1 + \gamma_2}{L} \\ a_3 = 2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{L^3} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{L^2} \end{cases} \quad (D2.2)$$

## D2.1 Energie cinétique – Matrice de masse

L'énergie cinétique a la même expression qu'en (D1.3) :

$$T = \frac{\pi D_1^4 \rho}{2.32 L^2} \int_0^L (1 + \alpha x)^4 [\dot{\theta}_1 L + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)x]^2 dx$$

mais avec un développement beaucoup plus long de 246 termes, compte tenu des coefficients de (D2.2). En combinant plusieurs expressions des coefficients, cette énergie cinétique s'exprime par :

$$T = \frac{J_1 \rho L}{2} \left( \begin{aligned} &\dot{\theta}_1^2 J_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 J_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\gamma}_1 J_3 + \dot{\theta}_1 \dot{\gamma}_2 J_4 + \dot{\theta}_2^2 J_5 \\ &+ \dot{\theta}_2 \dot{\gamma}_1 J_6 + \dot{\theta}_2 \dot{\gamma}_2 J_7 + \dot{\gamma}_1^2 J_8 + \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 J_9 + \dot{\gamma}_2^2 J_{10} \end{aligned} \right) \quad (D2.3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} J_1 = 4I_1 - 6I_2 + 9I_3 + 2I_4 - 6I_5 + I_7 \\ J_2 = -8I_1 + 12I_2 - 18I_3 - 2I_4 + 6I_5 \\ J_3 = (4I_1 - 7I_2 + 16I_3 - 2I_4 - 4I_5 + I_6)L \\ J_4 = (4I_1 - 5I_2 + 6I_3 + I_4 - 2I_5)L \\ J_5 = 4I_1 - 6I_2 + 9I_3 \\ J_6 = (-4I_1 + 7I_2 - 16I_3 + 3I_4)L \\ J_7 = (-4I_1 + 5I_2 - 6I_3)L \\ J_8 = (I_1 - 2I_2 + 6I_3 - 2I_4 + I_5)L^2 \\ J_9 = (2I_1 - 3I_2 + 6I_3 - I_4)L^2 \\ J_{10} = (I_1 - I_2 + I_3)L^2 \end{cases} \quad (D2.4)$$

$$\text{et } \begin{cases} I_1 = \frac{\alpha^4 L^4}{11} + \frac{2\alpha^3 L^3}{5} + \frac{2\alpha^2 L^2}{3} + \frac{\alpha L}{2} + \frac{1}{7} \\ I_2 = \frac{\alpha^4 L^4}{5} + \frac{8\alpha^3 L^3}{9} + \frac{3\alpha^2 L^2}{2} + \frac{8\alpha L}{7} + \frac{1}{3} \\ I_3 = \frac{\alpha^4 L^4}{9} + \frac{\alpha^3 L^3}{2} + \frac{6\alpha^2 L^2}{7} + \frac{2\alpha L}{3} + \frac{1}{5} \\ I_4 = \frac{\alpha^4 L^4}{4} + \frac{8\alpha^3 L^3}{7} + 2\alpha^2 L^2 + \frac{8\alpha L}{5} + \frac{1}{2} \\ I_5 = \frac{\alpha^4 L^4}{7} + \frac{2\alpha^3 L^3}{3} + \frac{6\alpha^2 L^2}{5} + \alpha L + \frac{1}{3} \\ I_6 = \frac{\alpha^4 L^4}{3} + \frac{8\alpha^3 L^3}{5} + 3\alpha^2 L^2 + \frac{8\alpha L}{3} + 1 \\ I_7 = \frac{\alpha^4 L^4}{5} + \alpha^3 L^3 + 2\alpha^2 L^2 + 2\alpha L + 1 \end{cases} \quad (D2.5)$$

En appliquant les équations de Lagrange à l'énergie cinétique (D2.3) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_1} \end{bmatrix} = \frac{J_1 \rho L}{2} \begin{bmatrix} 2J_1 & J_3 & J_2 & J_4 \\ J_3 & 2J_8 & J_6 & J_9 \\ J_2 & J_6 & 2J_5 & J_7 \\ J_4 & J_9 & J_7 & 2J_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} \quad (D2.6)$$

L'équation (D2.6) conduit à la matrice de masse (D2.7), en introduisant les expressions de (D2.4) et (D2.5) ainsi que celle de  $\alpha L = \frac{D_2}{D_1} - 1$  donnée en (D1) :

$$[M] = \frac{J_1 \rho L}{27720} \begin{bmatrix} M_4 & M_5 L & M_6 & M_7 L \\ M_5 L & M_8 L^2 & M_9 L & M_{10} L^2 \\ M_6 & M_9 L & M_{11} & M_{12} L \\ M_7 L & M_{10} L^2 & M_{12} L & M_{13} L^2 \end{bmatrix} \quad (D2.7)$$

dont les coefficients  $M_4$  à  $M_{13}$  sont définis par (D2.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_4 = 10296 + 9504 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 5016 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 1452 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 180 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_5 = 1452 - 1848 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) - 1122 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 352 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 46 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_6 = 3564 + 7128 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 6072 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 2508 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 414 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_7 = -858 - 1584 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) - 1254 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 - 484 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 - 75 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_8 = 264 + 396 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 264 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 88 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 12 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_9 = 858 + 1848 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 1650 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 704 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 119 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_{10} = -198 - 396 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) - 330 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 - 132 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 - 21 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_{11} = 10296 + 31680 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 38280 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 21252 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 4536 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_{12} = -1452 - 3960 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) - 4290 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 - 2156 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 - 420 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \\ M_{13} = 264 + 660 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right) + 660 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^2 + 308 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^3 + 56 \left( \frac{D_2}{D_1} - 1 \right)^4 \end{array} \right.$$

## D2.2 Energie de déformation – Matrice de raideur

La pente de la déformée étant :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \quad (D2.9)$$

l'énergie de déformation est définie par :

$$U = \frac{G\pi D_3^4}{2.32L^2} \int_0^L (1 + \beta x)^4 (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^2 dx \quad (D2.10)$$

$a_1, a_2$  et  $a_3$  étant reliés aux degrés de liberté par les relations (D2.2).

Le développement de (D2.10) comporte 205 termes. En combinant plusieurs expressions des coefficients, cette énergie de déformation s'exprime par :

$$U = \frac{GJ_3}{2L} \begin{pmatrix} \theta_1^2 P_1 - 2\theta_1 \theta_2 P_1 + \theta_1 \gamma_1 P_2 + \theta_1 \gamma_2 P_3 + \theta_2^2 P_1 \\ -\theta_2 \gamma_1 P_2 - \theta_2 \gamma_2 P_3 + \gamma_1^2 P_4 + \gamma_1 \gamma_2 P_5 + \gamma_2^2 P_6 \end{pmatrix} \quad (D2.11)$$

$$\text{avec} \begin{cases} P_1 = 4Q_1 - 6Q_2 + 9Q_3 \\ P_2 = (4Q_1 - 7Q_2 + 12Q_3 + 2Q_4 - 3Q_5)L \\ P_3 = (4Q_1 - 5Q_2 + 6Q_3)L \\ P_4 = (Q_1 - 2Q_2 + 4Q_3 + Q_4 - 2Q_5 + Q_6)L^2 \\ P_5 = (2Q_1 - 3Q_2 + 4Q_3 + Q_4 - Q_5)L^2 \\ P_6 = (Q_1 - Q_2 + Q_3)L^2 \end{cases} \quad (D2.12)$$

$$\text{et} \begin{cases} Q_1 = \beta^4 L^4 + \frac{9}{2}\beta^3 L^3 + \frac{54}{7}\beta^2 L^2 + 6\beta L + \frac{9}{5} \\ Q_2 = \frac{3}{2}\beta^4 L^4 + \frac{48}{7}\beta^3 L^3 + 12\beta^2 L^2 + \frac{48}{5}\beta L + 3 \\ Q_3 = \frac{4}{7}\beta^4 L^4 + \frac{8}{3}\beta^3 L^3 + \frac{24}{5}\beta^2 L^2 + 4\beta L + \frac{4}{3} \\ Q_4 = \frac{6}{7}\beta^4 L^4 + 4\beta^3 L^3 + \frac{36}{5}\beta^2 L^2 + 6\beta L + 2 \\ Q_5 = \frac{2}{3}\beta^4 L^4 + \frac{16}{5}\beta^3 L^3 + 6\beta^2 L^2 + \frac{16}{3}\beta L + 2 \\ Q_6 = \frac{1}{5}\beta^4 L^4 + \beta^3 L^3 + 2\beta^2 L^2 + 2\beta L + 1 \end{cases} \quad (D2.13)$$

En appliquant les équations de Lagrange à l'énergie de déformation (D2.11) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} \end{bmatrix} = \frac{GJ_3}{2L} \begin{bmatrix} 2N_1 & N_2 & -2N_1 & N_3 \\ N_2 & 2N_4 & -N_2 & N_5 \\ -2N_1 & -N_2 & 2N_1 & -N_3 \\ N_3 & N_5 & -N_3 & 2N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \gamma_1 \\ \theta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (D2.14)$$

L'équation (D2.14) conduit à la matrice de raideur (D2.15), en introduisant les expressions de (D2.12) et (D2.13) ainsi que celle de  $\beta L = \frac{D_4}{D_3} - 1$  donnée en (D3) :

$$[K] = \frac{GJ_3}{420L} \begin{bmatrix} K_2 & K_3 L & -K_2 & K_4 L \\ K_3 L & K_5 L^2 & -K_3 L & K_6 L^2 \\ -K_2 & -K_3 L & K_2 & -K_4 L \\ K_4 L & K_6 L^2 & -K_4 L & K_7 L^2 \end{bmatrix} \quad (D2.15)$$

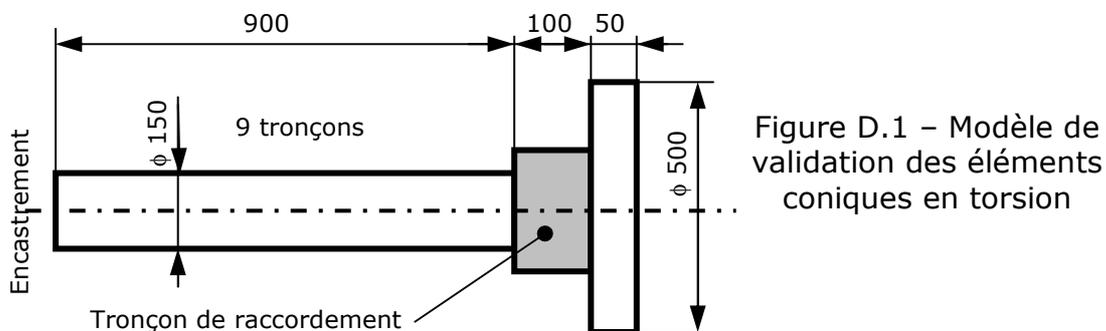
dont les coefficients  $K_2$  à  $K_7$  sont définis par (D2.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 K_2 = 504 + 1008 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) + 864 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 + 360 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 + 60 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4 \\
 K_3 = 42 + 168 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) + 180 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 + 84 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 + 15 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4 \\
 K_4 = 42 + 0 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) - 72 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 - 60 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 - 15 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4 \\
 K_5 = 56 + 56 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) + 48 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 + 22 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 + 4 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4 \\
 K_6 = -14 - 28 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) - 36 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 - 22 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 - 5 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4 \\
 K_7 = 56 + 168 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right) + 216 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^2 + 130 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^3 + 30 \left( \frac{D_4}{D_3} - 1 \right)^4
 \end{array} \right. \quad (D2.16)$$

## D3 Validation

### D3.1 Comparaison des différents modèles

La validation de ces éléments finis de tronçons coniques en torsion est faite par vraisemblance sur un modèle simple représenté à la figure D.1. Le rotor est encasturé à gauche et libre à droite. Le tronçon de raccordement entre l'arbre et le disque sera constitué de différents types de cylindres ou de cônes définis au tableau D.2.



Le tableau D.2 compare les valeurs de la première fréquence propre obtenues pour les différentes configurations de raccordement, et indique également celles valeurs obtenues avec les éléments classiques de tronçons cylindriques du paragraphe 6.2.3.1. Pour calculer le tronçon de raccordement conique avec des éléments cylindriques, on l'a décomposé en 10 sous-tronçons de longueurs égales et de diamètres égaux aux diamètres moyens du cône. Les conclusions sont les suivantes :

- les résultats obtenus par les éléments cylindriques et coniques sont rigoureusement identiques pour des modèles de rotors cylindriques ;
- les résultats obtenus par les modèles coniques se situent bien entre ceux des modèles cylindriques qui les encadrent
- le modèle à 2 ddl/nœud a tendance à être un peu plus raide que celui à 1 ddl puisqu'on trouve de l'ordre de 1 Hz de plus, néanmoins dans le cas d'utilisation des éléments de raideur coniques, cette tendance s'inverse, puisqu'on a cette fois 0,5 à 1 Hz de moins.

Elément de raccordement (mm)				Type d'éléments finis			
Raideur		Inertie		Tronçon conique		Tronçon cylindrique	
$\phi$ à gauche	$\phi$ à droite	$\phi$ à gauche	$\phi$ à droite	1 ddl/nœud	2 ddl/nœud	1 ddl/nœud	2 ddl/nœud
150	150	150	150	198,17	199,19	198,17	199,19
250	250	250	250	196,82	197,76	196,82	197,76
250	250	150	150	206,51	207,51	206,51	207,51
150	150	250	250	189,49	190,29	189,49	190,29
150	250	150	150	204,99	204,02	203,88	203,91
150	150	150	250	194,97	195,52	194,59	194,68
150	250	150	250	201,56	201,19	200,07	200,09

### D3.2 Critique du modèle à 2 ddl/nœud

Il paraît paradoxal que le modèle à 2 ddl/nœud, établi pour avoir plus de souplesse au niveau du disque donne des fréquences propres plus élevées (en moyenne 0,25% sur tous les cas du tableau D.2). L'explication réside dans le fait que la continuité de la pente imposée à la jonction entre les éléments épaulés raidit le tronçon d'arbre, autant qu'il assouplit le tronçon de disque. La figure D.3 illustre ce phénomène dans le cas de la deuxième ligne du tableau D.2 (transition du diamètre d'arbre à 250 mm sur 100 mm de long avant l'épaulement du disque).

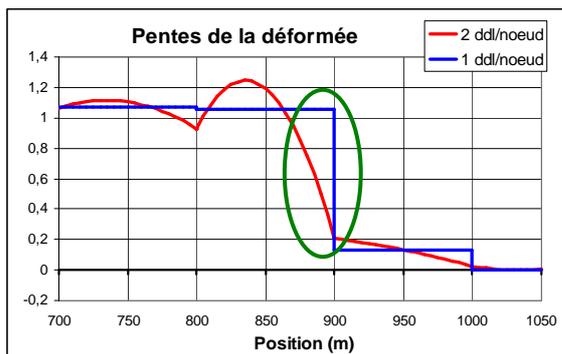


Figure D.3 – Effet du modèle à 2ddl/nœud sur la déformée modale

On voit que dans ce tronçon de raccordement (entre 900 et 1000 mm) on a une variation pratiquement linéaire de  $\gamma$ , l'ensemble "s'équilibrant" par rapport au modèle à 1 ddl/nœud. Dans le disque (position de 1000 à 1050), on a un effet de cette pente variable, mais très ténue avec un départ à  $\gamma=0,00379$ . Par opposition, on a une diminution considérable de la pente  $\gamma$  dans le dernier élément d'arbre de diamètre 150 mm entre 875 et 900 mm, provoquant l'effet prédominant de raidissement.

Pour améliorer ce modèle, on pourrait imaginer libérer le degré de liberté  $\gamma$  de part et d'autre de la frontière des tronçons, en constituant en quelque sorte un élément à 3 ddl/nœud. Les matrices élémentaires de masse et de raideur ne changent pas, seul leur assemblage est différent. L'exercice a été fait sur les différents modèles de tronçons cylindriques (3<sup>ème</sup> colonne du tableau D.2), avec des fréquences propres ne s'écartant pas de plus de 0,01 Hz du modèle à 1 ddl/nœud !

### D3.3 Conclusion

En conclusion, les résultats obtenus sont très cohérents. Le modèle utilisant des éléments coniques à 2 ddl/nœud n'apporte pas les effets escomptés.

# Annexe E – Principe de la modélisation thermodynamique d'état d'un compresseur dans ses réseaux

Le but de cette annexe est de poser les principes de la modélisation par variables d'état du comportement thermodynamique d'un compresseur centrifuge dans ses réseaux de gaz. Les hypothèses effectuées pour le fonctionnement sont identiques à celles du paragraphe 9.2.

## E1 Principes de la méthode adoptée

On s'intéresse à de petites variations autour d'un point de fonctionnement du compresseur dans ses réseaux. On reprend donc les équations du paragraphe 9.2 en linéarisant les expressions par différentiation. On écrit chaque grandeur sous la forme d'une partie constante liée au fonctionnement (notée avec un indice supérieur "F") et d'une partie variable fonction du temps (notée avec un indice supérieur "V"), comme par exemple pour la pression dans le réseau de refoulement :

$$P_r(t) = P_r^F + dP_r(t) = P_r^F + P_r^V \quad (E1.1)$$

Dans cet exercice, on va garder trois des grandeurs comme variables principales : les variations du coefficient de débit  $\phi^V$  et celles de la pression et de la température du réseau de refoulement  $P_r^V$  et  $T_r^V$ .

## E2 Point de fonctionnement

De l'équation (9.1), on déduit la variation de débit du compresseur :

$$Q_c^V = \frac{Q_{m-c}^F}{\phi^F} \phi^V \quad (E2.1)$$

La différentiation de l'équation (9.25)  $\left\{ \begin{array}{l} \psi = -440714 \phi^3 + 9916,07 \phi^2 + 2,0063 \\ \eta_p = \frac{-440714 \phi^3 + 9916,07 \phi^2 + 2,0063}{-61,983 \phi + 4,6527} \end{array} \right.$

donne les variations de caractéristiques adimensionnelles du compresseur autour du point de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^V = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)_{\phi^F} \phi^V = \psi_1 \phi^V \\ \eta_p^V = \left( \frac{\partial \eta_p}{\partial \phi} \right)_{\phi^F} \phi^V = \eta_1 \phi^V \end{array} \right. \quad (E2.2)$$

d'où l'on déduit la variation de la hauteur disponible donnée par l'équation (9.3bis)

$$\Delta H_D = \frac{\psi U_2^2}{\eta_p}, \text{ qui est donc directement fonction du coefficient de débit } \phi^V:$$

$$\Delta H_D^V = \Delta H_D^F \left( \frac{\psi^V}{\psi^F} - \frac{\eta_p^V}{\eta_p^F} \right) = \Delta H_D^F \left( \frac{\psi_1}{\psi^F} - \frac{\eta_1}{\eta_p^F} \right) \phi^V \quad (E2.3)$$

En adoptant un réseau résistant du type C de la figure 9.3, de façon à pouvoir faire varier la pente de la caractéristique au point de fonctionnement, on déduit de la l'équation (9.26)  $Q_{m-s}(t) = K \sqrt{P_r(t) - P_0}$  :

$$Q_{m-s}^V = \frac{Q_{m-s}^F}{2 \Delta P^F} P_r^V \quad (E2.4)$$

avec  $\Delta P^F = P_r^F - P_0$  qui est la valeur permettant de faire varier la pente du réseau résistant pour une étude paramétrique.

De l'équation (9.4bis)  $\Delta H_R = \frac{Z_a R T_a}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P_r}{P_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p}} - 1 \right)$ , on tire la variation de hauteur

requis pour transvaser du débit entre les réseaux d'aspiration et de refoulement. On admettra que toutes les données thermodynamiques du gaz  $Z$ ,  $\gamma$ , etc. restent constantes dans les petites variations considérées.

Sachant que la différentielle de  $u^V$  est :

$$du^V = d e^{\ln(u)^V} = u^V d[\ln(u)^V] = u^V \left[ \frac{du}{u} + \ln(u) dv \right] \quad (E2.5)$$

celle de (9.4bis) s'obtient en identifiant  $u$  à  $\frac{P_r}{P_a}$  et  $v$  à  $\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p}$ , soit :

$$d\Delta H_R = \frac{Z_a R T_a}{\gamma - 1} \left( \frac{P_r}{P_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p}} \left[ \frac{dP_r}{P_r} \frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p} - \ln \left( \frac{P_r}{P_a} \right) \frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p^2} d\eta_p \right] \quad (E2.6)$$

En remarquant que  $P_r^F = P_c^F$  à l'équilibre et que la température de refoulement du

compresseur est liée à la pression par :  $\frac{T_c}{T_a} = \left( \frac{P_c}{P_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma \eta_p}}$  (E2.7)

(E2.6) se simplifie et en introduisant la symbolique des grandeurs fixes, ainsi que l'expression de  $\eta_p^F$  de (E2.2) et variables on obtient :

$$\Delta H_R^V = \frac{Z_a R T_c^F}{\eta_p^F} \left[ \frac{P_r^V}{P_r^F} - \ln \left( \frac{P_r^F}{P_a} \right) \frac{\eta_1 \phi^V}{\eta_p^F} \right] \quad (E2.8)$$

A l'équilibre, les débits massiques dans le compresseur et en production sont égaux, et l'on notera :  $Q_{m-c}^F = Q_{m-s}^F = Q_m^F$

### E3 Conservation de la masse

De l'équation  $M_r(t) = M_r(0) + \int_0^t [Q_{m-c}(t) - Q_{m-s}(t)] dt$  qui donne la masse de gaz incluse dans le réseau de refoulement, on déduit directement l'équation différentielle de conservation de la masse dans ce réseau :

$$\frac{dM_r^V}{dt} = Vol_r \frac{d\rho_r^V}{dt} = \frac{Q_{m-c}^F}{\phi^F} \phi^V - \frac{Q_{m-s}^F}{2 \Delta P^F} P_r^V \quad (E3.1)$$

Comme la masse volumique est apparue, on associe l'équation d'état thermodynamique (9.9)  $\frac{P_r}{\rho_r} = Z_r R T_r$ , conduisant à :

$$\rho_r^V = \rho_r^F \left( \frac{P_r^V}{P_r^F} - \frac{T_r^V}{T_r^F} \right) \quad (E3.2)$$

La troisième variable, la variation de la température dans le réseau de refoulement  $T_r^V$  vient d'apparaître. Il n'est en effet pas opportun de relier la variation de température à celle de la pression par la loi de Laplace  $P / \rho^\gamma = C^{ste}$ , comme cela a été fait dans l'article **[Pugnet99]** car s'il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur, le réseau de refoulement ne travaille pas à masse constante et voit entrer de la chaleur du compresseur et en sortir par le débit allant vers la consommation. De plus, les résultats de simulation du paragraphe 9.2.5 ont montré que la constante de temps thermique était différente de la constante de temps pneumatique du réseau.

La conservation de la masse conduit finalement à :

$$\frac{dP_r^V / dt}{P_r^F} - \frac{dT_r^V / dt}{T_r^F} = \frac{Q_m^F}{M_r^F} \left( \frac{\phi^V}{\phi^F} - \frac{P_r^V}{2 \Delta P^F} \right) \quad (E3.3)$$

## E4 Conservation de la chaleur

L'équation (9.18) de conservation de l'enthalpie nécessitait une résolution itérative. Ici, puisqu'on s'intéresse à de petites perturbations, il faut linéariser cette partie en différentiant l'équation (9.12) définissant l'enthalpie dans le réseau de refoulement :

$$H = \left( -1,899560666 (1.10^{-2} T)^2 + 10,6566518 (1.10^{-2} T) - 4,82576314 \right) (1.10^{-7} P)^2 \\ + \left( -26,7822686 (1.10^{-2} T)^2 + 225,443152 (1.10^{-2} T) - 660,23018 \right) (1.10^{-7} P) \quad (9.12) \\ + \left( 16,2514897 (1.10^{-2} T)^2 + 106,464793 (1.10^{-2} T) + 88,9258152 \right)$$

$$\text{soit :} \quad H_r^V = H_1 P_r^V + H_2 T_r^V \quad (E4.1)$$

$$H_1 = \left( -3,79912.10^{-18} T_r^{F2} + 2,13133.10^{-15} T_r^F - 9,65153.10^{-14} \right) P_r^F$$

avec :

$$+ \left( -2,67823.10^{-10} T_r^{F2} + 2,55443.10^{-7} T_r^F - 6,60230.10^{-5} \right)$$

$$H_2 = \left( -3,79912.10^{-18} P_r^{F2} - 5,35645.10^{-10} P_r^F + 3,25030.10^{-3} \right) T_r^F$$

et

$$+ \left( 1,06567.10^{-15} P_r^{F2} + 2,55443.10^{-7} P_r^F + 1,06465 \right)$$

L'équation (9.18) se réécrit :  $M_r(t)H_r(t) = M_r(0)H_r(0) + \int_0^t [Q_{m-c}(t)H_c(t) - Q_{m-s}(t)H_r(t)]$  et se différentie sous la forme :

$$\frac{d(M_r(t)H_r(t))}{dt} = Q_{m-c}(t)H_c(t) - Q_{m-s}(t)H_r(t) \quad (E4.2)$$

$$\text{soit :} \quad M_r^F \frac{dH_r^V}{dt} + H_r^F \text{Vol}_r \frac{d\rho_r^V}{dt} = Q_m^F H_c^V + H_c^F Q_{m-c}^V - Q_m^F H_r^V - H_r^F Q_{m-s}^V \quad (E4.3)$$

Puisque  $H_r^F = H_c^F$ , l'équation (E4.3) inclut l'équation (E3.1) de la dérivée de la masse volumique dans la conservation de la masse, et (E4.3) se réduit à :

$$M_r^F \frac{dH_r^V}{dt} = Q_m^F H_c^V - Q_m^F H_r^V \quad (E4.4)$$

où l'enthalpie dans le réseau de refoulement  $H_r^V$  est liée à  $P_r^V$  et  $T_r^V$  par (E4.1),  
l'enthalpie au refoulement du compresseur  $H_c^V$  est liée au coefficient de débit  $\phi^V$

par l'équation (9.3bis) :  $H_c = H_a + \frac{\psi U_2^2}{\eta_p}$ , soit avec (E2.2) :

$$H_c^V = \frac{U_2^2}{\eta_p^F} \left( \psi_1 + \frac{\psi^F}{\eta_p^F} \eta_1 \right) \phi^V \quad (E4.5)$$

L'équation de conservation de l'enthalpie à vitesse de rotation constante (E4.4) se réécrit sous la forme (E4.6), où ne subsistent plus que les trois variables choisies initialement :

$$M_r^F \left( H_1 \frac{dP_r^V}{dt} + H_2 \frac{dT_r^V}{dt} \right) = Q_m^F \left[ \frac{U_2^2}{\eta_p^F} \left( \psi_1 + \frac{\psi^F}{\eta_p^F} \eta_1 \right) \phi^V - H_1 P_r^V - H_2 T_r^V \right] \quad (E4.6)$$

## E5 Conservation de l'énergie mécanique

L'équation (9.21) donne l'énergie cinétique du gaz :

$$Wc = \frac{1}{2} \left( M_a U_a^2 + Vol_c \frac{\rho_a + \rho_r}{2} U_c^2 + M_r U_r^2 \right) \quad (9.21)$$

Les vitesses de fluide étant liées aux débits massiques par  $Q = \rho S U$ , on exprime l'équation (9.21) en débits, sachant que le débit à l'aspiration est le même que celui du compresseur  $Q_{m-c}$ , et que le débit dans le réseau de refoulement est le même que le débit sortant  $Q_{m-s}$ . On simplifie aussi les expressions, puisque  $M = \rho S L$  :

$$Wc = \left[ \frac{L_a}{2 \rho_a S_a} + \frac{2 Vol_c}{(S_r / 7)^2 (\rho_a + \rho_r)} \right] Q_{m-c}^2 + \frac{L_r}{2 \rho_r S_r} Q_{m-s}^2 \quad (E5.1)$$

où le terme  $S_r/7$  représente l'accroissement de vitesse choisi dans le compresseur.

L'équation (E5.1) comporte trois variables  $Q_{m-c}$ ,  $Q_{m-s}$  et  $\rho_r$ , et sa différentiation conduit à (E5.2) :

$$Wc^V = \left[ \frac{L_a}{\rho_a S_a} + \frac{4(7)^2 Vol_c}{S_r^2 (\rho_a + \rho_r^F)} \right] Q_m^F Q_{m-c}^V + \frac{L_r Q_m^F}{\rho_r^F S_r} Q_{m-s}^V - \left[ \frac{2(7)^2 Vol_c Q_m^F^2}{S_r^2 (\rho_a + \rho_r^F)^2} + \frac{L_r Q_m^F^2}{2 \rho_r^F S_r} \right] \rho_r^V \quad (E5.2)$$

où  $Q_{m-c}^V$ ,  $Q_{m-s}^V$  et  $\rho_r^V$  sont liées aux variables de base par les équations (E2.1), (E2.4) et (E3.2).

La conservation de l'énergie cinétique est obtenue en considérant les hauteurs disponibles et requises, comme dans l'équation (9.22) :

$$\frac{dWc}{dt} = (\Delta H_D - \Delta H_R) Q_{m-c} \quad (E5.3)$$

$$\text{soit : } \frac{dWc^V}{dt} = (\Delta H_D^F - \Delta H_R^F) Q_{m-c}^V + (\Delta H_D^V - \Delta H_R^V) Q_m^F = Q_m^F (\Delta H_D^V - \Delta H_R^V) \quad (E5.4)$$

car  $\Delta H_D^F = \Delta H_R^F$ ,

et où  $\Delta H_D^V$  et  $\Delta H_R^V$  ont été définis par les équations (E2.3) et (E2.8).

Finalement, puisque  $Q_{m-c}^F = Q_{m-s}^F$ , ce débit se simplifie dans l'équation de conservation de l'énergie cinétique (E5.4) qui devient :

$$\begin{aligned} & \frac{Q_m^F}{\phi^F} \left[ \frac{L_a}{\rho_a S_a} + \frac{4(7)^2 \text{Vol}_c}{S_r^2 (\rho_a + \rho_r^F)} \right] \frac{d\phi^V}{dt} + \frac{Q_m^F}{2S_r T_r^F} \left[ \frac{4(7)^2 \text{Vol}_c \rho_r^F}{S_r (\rho_a + \rho_r^F)^2} + \frac{L_r}{\rho_r^F} \right] \frac{dT_r^V}{dt} \\ & + \frac{Q_m^F}{2S_r} \left[ \frac{L_r}{\rho_r^F \Delta P^F} - \frac{1}{P_r^F} \left( \frac{4(7)^2 \text{Vol}_c \rho_r^F}{S_r (\rho_a + \rho_r^F)^2} + \frac{L_r}{\rho_r^F} \right) \right] \frac{dP_r^V}{dt} \\ & = \left[ \Delta H_D^F \left( \frac{\psi_1}{\psi^F} - \frac{\eta_1}{\eta_p^F} \right) + \frac{Z_a R T_c^F}{\eta_p^F} \ln \left( \frac{P_r^F}{P_a} \right) \right] \phi^V - \frac{Z_a R T_c^F}{\eta_p^F} \frac{P_r^V}{P_r^F} \end{aligned} \quad (\text{E5.5})$$

## E6 Equation d'état

Les équations (E3.3) de conservation de la masse, (E4.6) de conservation de la chaleur et (E5.5) de conservation de l'énergie cinétique constituent un système d'équations linéaires d'inconnues  $\frac{d\phi^V}{dt}$ ,  $\frac{dP_r^V}{dt}$  et  $\frac{dT_r^V}{dt}$  s'écrivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & C_{3.3}^2 & C_{3.3}^3 \\ 0 & C_{4.6}^2 & C_{4.6}^3 \\ C_{5.5}^1 & C_{5.5}^2 & C_{5.5}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\phi^V / dt \\ dP_r^V / dt \\ dT_r^V / dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{3.3}^4 & C_{3.3}^5 & 0 \\ C_{4.6}^4 & C_{4.6}^5 & C_{4.6}^6 \\ C_{5.5}^4 & C_{5.5}^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^V \\ P_r^V \\ T_r^V \end{bmatrix} \quad (\text{E6.1})$$

où  $C_j^i$  représente les coefficients des équations (E3.3), (E4.6) et (E5.5).

En prémultipliant (E6.1) par l'inverse de la matrice du premier membre, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi^V \\ P_r^V \\ T_r^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{3.3}^2 & C_{3.3}^3 \\ 0 & C_{4.6}^2 & C_{4.6}^3 \\ C_{5.5}^1 & C_{5.5}^2 & C_{5.5}^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{3.3}^4 & C_{3.3}^5 & 0 \\ C_{4.6}^4 & C_{4.6}^5 & C_{4.6}^6 \\ C_{5.5}^4 & C_{5.5}^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^V \\ P_r^V \\ T_r^V \end{bmatrix} \quad (\text{E6.2})$$

qui est donc une équation du vecteur d'état  $[\phi^V \ P_r^V \ T_r^V]^t$  contenant les trois variables indépendantes sélectionnés au paragraphe C1.

L'examen de la partie réelle des valeurs propres de la matrice :

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & C_{3.3}^2 & C_{3.3}^3 \\ 0 & C_{4.6}^2 & C_{4.6}^3 \\ C_{5.5}^1 & C_{5.5}^2 & C_{5.5}^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{3.3}^4 & C_{3.3}^5 & 0 \\ C_{4.6}^4 & C_{4.6}^5 & C_{4.6}^6 \\ C_{5.5}^4 & C_{5.5}^5 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E6.3})$$

définit la stabilité du système.

# Bibliographie

- [Alban]** ALBAN Thomas, PELLERIN Olivier, LABOUBE Pierre, at al. Mechanical and performance testing method of an integrated high speed motor compressor. **In** : 38<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T38, 2009, 27 p.
- [Alford]** ALFORD J.S. Protecting Turbomachinery from Self-excited Rotor Whirl. New York : ASME (Association of Mechanical Engineers), Journal of Engineering for Power N°87 (4), 1965, pp. 333-344
- [API612]** API. Petroleum, petrochemical and natural gas industries – Steam turbines – Special purpose applications. API Standard 612, 6<sup>th</sup> edition. Washington : API (American Petroleum Institute) 2005, 113 p.  
Product number CX61206
- [API617]** API. Axial and Centrifugal Compressors and Expander-compressors for Petroleum, Chemical and Gas Industry Services. API Standard 617, 7<sup>th</sup> edition. Washington : API, 2002, 193 p.  
Product number C61707
- [API618]** API. Reciprocating compressors for Petroleum, Chemical and Gas Industry Services. API Standard 618, 5<sup>th</sup> edition. Washington : API, 2007, 190 p.  
Product number C61805
- [API684]** API. Standard Paragraphs Rotordynamic Tutorial: Lateral critical speeds, Unbalance response, Stability, Train torsionals and Rotor balancing. API RP 684, 2<sup>nd</sup> edition. Washington : API, 2005, 303 p.  
Product number C68402
- [ANSYS]** ANSYS Inc. Comprehensive coupled physics tool combining structural, thermal, computational fluid dynamics, acoustic and electromagnetic simulation. ANSYS® Multiphysics software. Canonsburg, Pennsylvania
- [ATEX]** Directive ATmosphères EXplosives. Directive 94/9/EC of the European Parliament and the Council of 23 March 1994 on the laws of the Member States concerning equipment and protective systems intended for use in potentially explosive atmospheres. Bruxelles : Communauté européenne. Journal officiel N° L100/1. Addendum du 31 décembre 2003. 33 p. **[En ligne]** Disponible sur : <<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=CONSLEG:1994L0009:20031120:en:PDF>> (Consulté le 05.04.2010)  
ATEX Guidelines. 3<sup>rd</sup> edition. Juin 2009; 68 p. **[En ligne]** Disponible sur : <[http://ec.europa.eu/enterprise/sectors/mechanical/files/atex/guide/atexguidelines\\_june2009\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/enterprise/sectors/mechanical/files/atex/guide/atexguidelines_june2009_en.pdf)> (Consulté le 05.04.2010)

- [Bathe]** BATHE Klaus-Jurgen. Numerical methods in finite element analysis. Upper Saddle River (New Jersey) : Prentice Hall, 1976  
ISBN 0138271901
- [Berger]** BERGER S., BONNEAU O., FRENE J. Influence of axial thrust bearing on the dynamic behavior of an elastic shaft: Coupling between the axial dynamic behaviour and the bending vibrations of a flexible shaft. New York : ASME, Journal of Vibrations and Acoustics 2001, Vol. 123, pp. 145-149.
- [Berlioz]** BERLIOZ Alain, HENRY Rémy, PUGNET Jean-Marc et al. Experimental and theoretical analysis of a rotating shrouded impeller. **In** : 3<sup>rd</sup> IFToMM International Conference on Rotordynamics (International Federation for the promotion of the Mechanics and Machines Science), Lyon, September 1990. Besançon : Comité français pour la promotion de la science des mécanismes et des machines, Proceedings 1990, 7p.
- [Berth83]** BERTHIER Patrick, FERRARIS Guy, LALANNE Michel. Prediction of critical speeds, unbalance and nonsynchronous forced response of rotors. **In** : The Shock and Vibration Bulletin N°59. Washington : The Shock and Vibration Information Center (Naval Research Laboratory), 1983
- [Berth86]** BERTHIER Patrick, FERRARIS Guy, LALANNE Michel. Prédiction du comportement dynamique des moteurs d'avion : vitesses critiques – effets de balourd. **In** : Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Volume N°5. Montrouge : Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 1986  
ISSN 0750-7240
- [Berth87]** BERTHIER Patrick, FERRARIS Guy, DER HAGOPIAN Johan, LALANNE Michel. Application d'une méthode pseudo-modale à la détermination du comportement dynamique des monorotors et des multirotors coaxiaux. **In** : Proceedings of 7th World IFToMM Congress, Sevilla (Espagne). Oxford (Oxfordshire) : Pergamon Press, 1987  
ISBN 0080348157
- [Blanc]** BLANC Henri. Dynamique des rotors en torsion – Répartition de l'inertie et de la raideur. **In** : Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique, volume BM5. Paris : Techniques de l'Ingénieur, 2000, BM5 122-1, pp.BM5 122-24  
ISSN 0245-9612
- [Boluss.89]** BOLUSSET Daniel, PUGNET Jean-Marc. Expérience acquise d'une mise en service industriel d'un compresseur centrifuges sur paliers magnétiques actifs. Paris : SFM (Société Française de Mécanique), Revue Française de Mécanique Bulletin N°1989-1, 1989, pp. 93-97  
ISSN 0373-6601

- [Boluss.90]** BOLUSSET Daniel, PUGNET Jean-Marc. Industrial commissioning of an oil-free centrifugal compressor – an experience rich in lessons. **In** : Proceedings of 4<sup>th</sup> IMechE European Congress of Fluid Machinery, The Hague. London : IMechE (Institution of Mechanical Engineers), Proceedings C403/032, 1990, pp. 135-141
- [Boluss95]** BOLUSSET Daniel. Machine rotative à poussée axiale. Brevet d'invention français, européen et norvégien EP 0703 366 A1 [En ligne]. 19 septembre 1995. Disponible sur : <[http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=19960327&DB=EPODOC&locale=fr\\_EP&CC=EP&NR=0703366A1&KC=A1](http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=19960327&DB=EPODOC&locale=fr_EP&CC=EP&NR=0703366A1&KC=A1)> (Consulté le 02.04.2010)
- [Bonneau]** BONNEAU O., BERGER S., FRENE J. Comportement dynamique des paliers-butées de lignes d'arbres soumis à des défauts géométriques. Amsterdam : Elsevier Science, Journal Mécanique & Industries, 2004, Vol. 5, pp.41-47
- [Boulanger]** BOULANGER Alain, PACHAUD Christian. Analyse vibratoire en maintenance – Surveillance et diagnostic des machines. 3<sup>ème</sup> édition. Paris : Dunod, 2007, 418 p. (L'Usine Nouvelle – série gestion industrielle)  
ISBN 972100499991
- [Botros]** BOTROS K.K. Transient phenomena in compression stations during surge. New York : ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 116 N°1, 1994, pp. 132-142
- [BrFlav]** BRAND A, FLAVENOT Jean-François, GREGOIRE R et al. Données technologiques sur la fatigue. Senlis : Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM), 1980, 383 p.  
ISBN 285400242
- [Cameron]** CAMERON Alastair. Basic lubrication theory. Chichester (Sussex) : Horwood Publishing Ltd, 1977, 216 p. (Hellis Horwood Series in Engineering Science)  
ISBN 0853120579
- [CEI45-1]** CEI (IEC). Turbines à vapeur partie 1 – Spécification. CEI/IEC 60045-1. Genève : Commission Electrotechnique Internationale, 1991
- [CEI60079]** CEI (IEC). Atmosphères explosives – Partie 2 : Protection du matériel par enveloppe à surpression interne. CEI/IEC TS 60079-2 5<sup>ème</sup> édition. Genève : Commission Electrotechnique Internationale, 2007, 16 p.
- [CEI60909]** CEI (IEC). Courants de court circuit dans les réseaux triphasés à courant alternatif – Partie 0 : Calcul des courants. CEI/IEC 60909. Genève : Commission Electrotechnique Internationale. Première édition 2001. 84 p.

- [CEI61508]** CEI (IEC). Sécurité fonctionnelle des systèmes électriques/ électroniques/ électroniques programmables relatifs à la sécurité. Partie 0 : La sécurité fonctionnelle et la CEI 61508. CEI/IEC/TR 62508-0. Genève : Commission Electrotechnique Internationale. Première édition 2005. 32 p.  
Partie 1 : Exigences générales. Première édition 1998. 55 p.
- [CEI61370]** CEI (IEC). Turbines à vapeur – Pureté de la vapeur. CEI/IEC TS 61370. Genève : Commission Electrotechnique Internationale, 2002
- [Chatelin]** CHATELIN Françoise. Valeurs propres de matrices. Paris : Masson, 1988, 223p. (Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise) ISBN 2225809682
- [Childs86]** CHILDS Dara, Scharrer Joseph. Experimental Rotordynamic Coefficient Results for Teeth on Rotor and Teeth on Stator Labyrinth Gas Seals. New York : ASME, 86GT12, Transactions of the ASME – Journal of Engineering for Gas Turbines and Power Vol. 108, 1986, pp.599-604
- [Childs93]** CHILDS Dara. Turbomachinery Rotordynamics, Phenomena, Modeling, & Analysis. New York : John Wiley and Sons Inc, 1993, 476 p.
- [Childs00]** CHILDS Dara. An R&D program to develop Validated computer prediction codes for honeycomb stator and hole pattern stator annula gas seals. Seventeen-company consortium (\$510,000). College station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery laboratory, 1996-2000
- [Corbo]** CORBO Mark, MALANOSKI Stanley. Practical design against torsional vibrations. **In** : 25<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T25, 1996, pp 189-221
- [Couzon]** COUZON P., DER HAGOPIAN J. Neuro-fuzzy active control of rotor suspended on active magnetic bearing. Blacksburg (Virginia) : Polytechnic Institute and State University– Thousand Oaks (California) : Sage Science Press, Journal of Vibration and Control, Vol. 13 N°4, 2007, p.365-384
- [DangVan]** DANG VAN K., GRIVEAU B., MESSAGE O. On a new multiaxial fatigue criterion: theory and application. Biaxial and multiaxial fatigue. EGF3 (edited by M.W. Brown and K.J. Miller). London : Mechanical Engineering Publications, 1989, pp.479-496.
- [Dawson1]** DAWSON Mathew, CHILDS Dara, PHILLIPS S. et al. Theory versus Experiments for the Dynamic Impedances of Annular Gas Seals: Part 1 – Tests Facility and Apparatus. New York : ASME, Journal of Gas Turbines and Power, Vol. 124, Issue 4, October 2002, pp. 958-962
- [Dawson2]** DAWSON Mathew, CHILDS Dara, HOLT C. et al. Theory versus Experiments for the Dynamic Impedances of Annular Gas Seals: Part 2 – Smooth and Honeycomb Seals. New York : ASME, Journal of Gas Turbines and Power, Vol. 124, Issue 4, October 2002, pp. 963-970

- [Debailleux]** DEBAILLEUX Claude. Paliers à 5 patins oscillants de précharge 0,25 – 0,5 – 0,75 (Rapport pour la Direction des Constructions Navales). Lille : Polytech Lille (anciennement EUDIL), Université de Lille, février 1994
- [DeMetz]** DE METZ-NOBLAT B., DUMAS F., POULAIN C. Calcul des courants de court circuit. Cahier technique Schneider Electric N°158. **[En ligne]**. Disponible sur : <[http://www.schneider\\_electric.fr/stock\\_images/cahiers\\_techniques/ct158.pdf](http://www.schneider_electric.fr/stock_images/cahiers_techniques/ct158.pdf)>. 32 p. (Consulté le 27.11.2009)
- [DerHagop1]** DER HAGOPIAN Johan, MAHFOUD, Jarir. Numerical and Experimental Investigation of the Active Control by Using Electromagnetic Actuator. **In** : Proceedings of the XIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 2009), Almeida, C. A. (Editor), ABCM, Angra dos Reis, RJ , Brazil, March 2009
- [DerHagop2]** DER HAGOPIAN Johan, MAHFOUD, Jarir. Electromagnetic Actuator Design for the Control of Light Structures. **In** : Smart Structures and Systems. Yuseong-gu Daejeon (Corée) : Techno Press, Vol. 6, No. 1, 2010, pp. 29-38. **[En ligne]**. Disponible sur : <<http://technopress.kaist.ac.kr/samplejournal/pdf/sss0601003.pdf>>. (Consulté le 13.05.2010)  
ISSN 1738-1584
- [Eckert]** ECKERT L. High cycle fatigue cracks at radial fan impellers caused by aeroelastic self-excited impeller vibrations, Part 1: Case history, root cause analysis, measurements. New York : ASME, ASME Design Engineering Technical Conference, paper DETC99/VIB-8261
- [EDYOS]** CHAN HEW WAI C. EDYOS – Progiciel développé par EDF pour les calculs linéaires et non linéaires de paliers hybrides et de paliers et butées hydrodynamiques. Clamart : EDF, Direction des Etudes et Recherches. Rapport EDF-DER-97-ND-00121, 1997, 49p.  
ISSN 1161-0611
- [Elec2753]** Cours ELEC2753. Machines asynchrones – 1<sup>ère</sup> partie. Université catholique de Louvain. **[En ligne]**. Disponible sur : <<http://lci.ucl.ac.br/~matagne/ELEC2753/SEM05/S06TRAN1.PPT>> 2009. 23 p. (Consulté le 27.11.2009)
- [Euler]** EULER Leonhard. De Integratione æquationum differentialum per approximationem, in Institutionum Calculi Integralis. Volumen primum, Liber prior, Pars prima, Sectio secunda, Caput VII. Petropolis (Brésil) : Petropolis Impensis Academiae Scientiarum, 1768, pp. 424-425
- [Ehrich]** EHRICH F.F. Acoustic resonances and multiple pure tone noise in turbomachinery inlets. New York : ASME, Journal of Engineering for Power, 1969, pp. 253-262

- [Ewins]** EWINS David. Modal Testing: Theory and Practice. Taunton (Somerset, England) : Research Study Press Ltd., 1<sup>st</sup> edition 1984, 269 p., 2<sup>nd</sup> edition, 2000, 562 p.  
ISBN 1<sup>ère</sup> édition : 0863800173 (Research Study Press) 0471904724 (John Wiley) – 2<sup>ème</sup> édition : 0863802182 et 9780863802188
- [Ferraris07]** FERRARIS BESSO Guy. Logiciel ROTORINSA<sup>®</sup> version 3.4.2. Lyon : LaMCoS, INSA de Lyon CAST, 2007
- [Ferraris09]** FERRARIS BESSO Guy. Dynamique de rotor. Lyon : INSA de Lyon CAST, 2009 (Code formation 161)
- [Fillon]** FILLON, M. BLIGOUD, JC. FRENE J. Experimental study of tilting pad journal bearings – Comparison with theoretical thermoelastohydrodynamic results. New York : ASME, Journal of Tribology, Vol 114 N° 3, 1992, pp. 579-584
- [Flavenot]** FLAVENOT Jean-François. Concentration de contrainte, prévision de durée de vie en fatigue. **In** : Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique, travail des matériaux d'assemblage volume BM7. Paris : Techniques de l'Ingénieur, 2004, BM7 850, pp.BM7 850-1-5  
ISSN 1776-0143
- [Frêne90]** FRENE Jean, NICOLAS Daniel, DEGUEURCE Bernard et al. Lubrification hydrodynamique – Paliers et Butées. Paris : Editions Eyrolles, 1990, 488 p. (Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France)  
ISBN 03994198
- [Frêne97]** FRENE Jean, NICOLAS Daniel, DEGUEURCE Bernard et al. Hydrodynamic Lubrication – Bearings and thrust bearings. Amsterdam : Elsevier Science, 1997, 470 p.  
ISBN 0444823662
- [Fulton]** FULTON JW. The decision to full load testing a high pressure centrifugal compressor in its module prior to tow-out. **In** : Proceedings of 2<sup>nd</sup> IMechE European Congress of Fluid Machinery, The Hague, 1984. London : IMechE, 1984
- [Gelin90-1]** GELIN Alain. Etude théorique et expérimentale des comportements dynamiques permanent et transitoire de rotors sur paliers magnétiques. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 1990, 136 p.
- [Gelin90-2]** GELIN Alain, DER HAGOPIAN Johan, PUGNET Jean-Marc. Dynamic behavior of flexible rotors with active magnetic bearings on safety auxiliary bearings. **In** : 3<sup>rd</sup> IFToMM International Conference on Rotordynamics, Lyon, September 1990. Besançon : Comité français pour la promotion de la science des mécanismes et des machines, Proceedings 1990, 6p.

- [Gelin96-1]** GELIN Alain, PUGNET Jean-Marc, POCHERON Jean-Claude et al. Elimination of sub-synchronous vibration on a multi-stage process centrifugal compressor during full load tests under natural gas. **In** : 6th IMechE International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Oxford, 1996. London : IMechE, Proceedings C500/089, 1996, pp.341-350
- [Gelin96-2]** GELIN Alain, PUGNET Jean-Marc, JACQUET-RICHARDET Georges. Accurate prediction in dynamics of centrifugal impellers. **In** : 6th IMechE International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Oxford, 1996. London : IMechE, Paper C500/090, 1996, pp. 77-87
- [Gelin96-3]** GELIN Alain, PUGNET Jean-Marc, BOLUSSET Daniel et al. Experience in Full-Load Testing of Natural Centrifugal Compressors for Rotordynamics Improvements. **In** : ASME-IGTI International Gas Turbine and Aero engine Congress, Birmingham, 1996. Norcross (Georgia) : ASME/IGTI (International Gas Turbine Institute) Paper 96-GT-378 11p.
- [Gelin97]** GELIN Alain, PUGNET Jean-Marc, BOLUSSET Daniel et al. Experience in Full-Load Testing of Natural Centrifugal Compressors for Rotordynamics Improvements. New York : ASME, Transactions of the ASME – Journal of Engineering for Gas Turbines and Power Vol. 119, 1997, pp.934-941
- [Haberm.]** HABERMANN Helmut. Paliers magnétiques. **In** : Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique, volume B5. Paris : Techniques de l'Ingénieur, 1984, B5345-1, pp.B5345-20
- [Heidmann]** HEIDMANN F.M. Interim prediction noise for fan and compressor source noise. Cleveland (Ohio) : NASA Lewis Research Center, Technical memorandum NASA TM X-71763, 1975, 83 p.
- [Henry]** HENRY Rémy, FERRARIS BESSO Guy. Substructuring and wave propagation. An efficient technique for impeller dynamic analysis. New York : ASME, Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, Vol. 106 N°1, 1984, pp. 2-10
- [Idel'Cik]** IDEL'CIK I. Memento des pertes de charge. Paris : Editions Eyrolles (Collection de la Direction des Etudes et Recherche d'Electricité de France), 1969, 504 p.  
ISBN 2212059000
- [IsotSeal]** TAMU – Turbomachinery Laboratory. Logiciel IsotSeal® de prédiction des caractéristiques dynamiques des étanchéités à gaz, 2002.
- [ISO1940-1]** ISO. Vibrations et chocs mécaniques – Exigences en matière de qualité dans l'équilibrage des rotors rigides – Partie 1 : Détermination des balourds rigides admissibles. Norme ISO 1940-1. Genève : International Standardization Organization, 2003, 28 p.

- [ISO1940-2]** ISO. Vibrations et chocs mécaniques – Exigences en matière de qualité dans l'équilibrage des rotors rigides – Partie 2 : Défauts d'équilibrage. Norme ISO 1940-2. Genève : International Standardization Organization, 1997, 18 p.
- [ISO7919-1]** ISO. Vibrations des machines non alternatives – Mesurage sur les arbres tournants et critères d'évaluation – Partie 1 : Lignes directrices générales. Norme ISO 7919-1. Genève : International Standardization Organization, 1996, 21 p.
- [ISO7919-3]** ISO. Vibrations des machines non alternatives – Mesurage sur les arbres tournants et critères d'évaluation – Partie 3 : Machines industrielles couplées. Norme ISO 7919-1. Genève : International Standardization Organization, 2009
- [ISO10437]** ISO. Petroleum, petrochemical and natural gas industries – Steam turbines – Special purpose applications. Norme ISO 10437. Genève : International Standardization Organization, 2003, 113 p.
- [ISO10439]** ISO. Petroleum, chemical and gas service industries – Centrifugal compressors. Norme ISO 10439. Genève : International Standardization Organization, 2002, 127 p.
- [ISO10816-1]** ISO. Vibrations mécaniques – Evaluation des machines par mesurage sur les parties non tournantes – Partie 1 : Lignes directrices générales. Norme ISO 10816-1. Genève : International Standardization Organization, 1995, 19 p.
- [ISO10816-3]** ISO. Vibrations mécaniques – Evaluation des machines par mesurage sur les parties non tournantes – Partie 3 : Machines industrielles de puissance nominale supérieure à 15 kW et de vitesse de fonctionnement comprise entre 120 r/min et 15 000 r/min, lorsqu'elle est mesurée in situ. Norme ISO 10816-3. Genève : International Standardization Organization, 2009, 13 p.
- [ISO11342]** ISO. Vibrations mécaniques – Méthodes et critères d'équilibrage des rotors flexibles. Norme ISO 11342. Genève : International Standardization Organization, 1994
- [Jacquet]** JACQUET-RICHARDET Georges. Logiciel TURBODYN® version 3.4.2. Lyon : LaMCoS, INSA de Lyon - CAST, 2007
- [KerWilson]** Ker Wilson William. Practical solution of torsional vibration problems: With examples from marine, electrical, aeronautical and automobile engineering practice. London (England) : Taylor & Francis Group (Hardcover), 1956  
ISBN 9780412091100
- [Kirk]** KIRK Gordon, DONALD G.H. Design Criteria for Improved Stability of Centrifugal Compressors. New York : ASME, Applied Mechanics Division Vol. 55, 1983, pp. 59-71

- [Kleynhans]** KLEYNHANS G., CHILDS Dara The Acoustic Influence of Cell Depth on the Rotordynamic Characteristics of Smooth Rotor/Honeycomb Stator Annular Gas Seals. New York : ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 119, 1997 pp. 949-957
- [König1]** KONIG Sven. Acoustic eigenmodes in the side cavities of centrifugal compressors. **In** : Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land Sea and Air in Orlando (Florida), June 2009. New York : ASME, paper GT2009-59650, 2009, 11 p.
- [König2]** KONIG Sven, PETRY Nico, WAGNER Norbert. Aeroacoustic phenomena in high-pressure centrifugal compressors – A possible root cause for impeller failures. **In** : 38<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T38, 2009, pp 103-121
- [Kuzdzal]** KUZDZAL M.J., HUSTAK J.F., SOROKES J.M. Identification and Resolution of Aerodynamically Induced Subsynchronous vibration During Hydrocarbon Testing of a 34,000 HP Centrifugal Compressor. **In** : IFToMM, 4<sup>th</sup> International Congress on Rotordynamics, Chicago, 1994. Besançon : Comité français pour la promotion de la science des mécanismes et des machines, Proceedings, 1994, pp. 143-151
- [Lagrange]** DE LAGRANGE Joseph Louis. Le principe de moindre action. 1788
- [Lalan75]** LALANNE M., Paulard M., Trompette P. Response of Thick Structures Damped by Viscoelastic Material with Application to Layered Beams and Plates. **In** : The Shock and Vibration Bulletin N°45. Washington : The Shock and Vibration Information Center (Naval Research Laboratory), 1975, pp. 65-70
- [Lalan90]** LALANNE Michel, FERRARIS BESSO Guy. Rotordynamics Prediction in Engineering. Chichester (West Sussex, England) : John Wiley and Sons, first edition, 1990, 198 p. - second edition, 1998, 254 p. ISBN 0471926337 (1<sup>ère</sup> édition) 0471972886 (2<sup>ème</sup> édition)
- [Laboub1]** LABOUBE Pierre, PUGNET Jean-Marc, FRIEZ Patrick. Groupe compresseur centrifuge intégré (architecture). Brevet d'invention français, européen, américain et international PCT WO 2004/083644 A1 **[En ligne]**. 10 Mars 2003. Disponible sur : <[http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20040930&DB=&locale=fr\\_EP&CC=WO&NR=2004083644A1&KC=A1](http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20040930&DB=&locale=fr_EP&CC=WO&NR=2004083644A1&KC=A1)> (Consulté le 12.11.2009)
- [Laboub2]** LABOUBE Pierre, FRIEZ Patrick, PUGNET Jean-Marc, et al. Groupe moto compresseur centrifuge (réfrigération). Brevet d'invention français, européen, américain et international PCT WO 2004/094833 A1 **[En ligne]**. 11 Avril 2003. Disponible sur : <[http://v3.espacenet.com/publicationDetails/biblio?DB=EPODOC&at=6&locale=fr\\_EP&FT=D&CC=US&NR=2007172363A1&KC=A1](http://v3.espacenet.com/publicationDetails/biblio?DB=EPODOC&at=6&locale=fr_EP&FT=D&CC=US&NR=2007172363A1&KC=A1)> (Consulté le 12.11.2009)

- [LK]** LEE B.I., KESSLER M.G. A generalized thermodynamic correlation based on three-parameters corresponding state. New York : AIChE (American Institute of Chemical Engineers), AIChE Journal 21, 1975, pp. 510-527
- [Lieurade]** LIEURADE Henri-Paul. Essais de fatigue-corrosion **In** : Techniques de l'Ingénieur, traité Génie matériaux métalliques, Vol. MB3. Paris : Techniques de l'Ingénieur, 1998, pp. M135-1 – M135-29  
ISSN 17628733
- [Lucas]** LUCAS V., BONNEAU O., FRENE J. Roughness influence on the turbulent flow through annular seals including inertia effects. New York : ASME, Journal of Tribology January 1996, Vol. 113, pp. 175-182
- [Madyn]** MADYN 2000<sup>®</sup> version 3.4 Comprehensive tool for Rotor dynamics. Zurich (Suisse) : Delta JS
- [Mahfoud]** MAHFOUD J., DER HAGOPIAN J., LEVECQUE N., STEFFEN V. Experimental Model to Control and Monitor Rotating Machines. Kindlington (England) : Elsevier Science. **In** : Journal of Mechanism and Machine Theory (44), 2009, pp. 761-771. **[En ligne]**. Disponible sur <[http://www.cadfamily.com/download/Standard/Planar/Experimental-model-to-control-and-monitor-rotating-machines\\_2009\\_Mechanism-and-Machine-Theory.pdf](http://www.cadfamily.com/download/Standard/Planar/Experimental-model-to-control-and-monitor-rotating-machines_2009_Mechanism-and-Machine-Theory.pdf)> (Consulté le 13.05.2010)  
ISSN 1077546307074578
- [MATLAB]** MATLAB<sup>®</sup> Version R2010a (7.10) et SIMULINK<sup>®</sup> Version 7. Langage de calcul scientifique de haut niveau et environnement interactif pour le développement d'algorithmes de simulation de comportements dynamiques. Natick (Massachusetts) : The MathWorks. Paris : The MathWorks SAS
- [Moyroud]** MOYROUD François, PICAUVET, Alain, RICHARDS Simon, et al. Unsteady acoustic forcing on an impeller due to coupled blade row interactions. **In** : Proceedings of ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea and Air, Glasgow, UK, June 2010. New York : ASME, paper GT2010-23771, 11p.
- [NACE0175]** NACE. Petroleum and natural gas industries – Materials for use in H<sub>2</sub>S-containing in oil and gas production. NACE MR0175/ISO 15176. Houston : National Association of Corrosion Engineers, 2003, et Genève : International Standardization Organization, 2003.
- [Newmark]** NEWMARK N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics. New York : ASCE (American Society of Civil Engineers), Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85 N°EM3, Proceeding of the ASCE N°2094, 1959 pp. 67-94
- [NF10814]** AFNOR. Vibrations mécaniques – Susceptibilité et sensibilité des machines aux balourds. Norme NF ISO 10814. Paris : Association Française de Normalisation, 1997

- [NF90601]** AFNOR. Vibrations et chocs mécaniques – Machines à équilibrer, description, caractéristiques et possibilités. Norme NF E90601. Paris : Association Française de Normalisation, 1986, 40 p.
- [Ni]** NI A. High cycle fatigue cracks at radial fan impellers caused by aeroelastic self-excited impeller vibrations, Part 2: Mechanisms and numerical model. New York : ASME, ASME Design Engineering Technical Conference, paper DETC99/VIB-8262
- [Nicolas]** NICOLAS Valérie, VINSONNEAU Bernard. Détermination des fréquences propres complexes par une méthode pseudo modale. **In** : Congrès international StruCoMe 1990. Paris : Actes du congrès StruCoMe 90, 1990
- [Parker]** PARKER R., STONEMAN S.A.T. The excitation and consequences of acoustic resonances in enclosed fluid flow around solid bodies. **London** : IMechE Proceedings 203, 1989, pp. 9-19
- [Pastre]** PASTRE D. Intégration numérique d'une équation différentielle (Méthode de Gauss-Jordan – Calcul de l'inverse d'une matrice). Paris : Université René Descartes **[en ligne]**, 2003 (Cours de licence de mathématiques). Disponible sur <<http://www.math-info.univ-paris5.fr/pastre/meth-num/MN/2-gauss-jordan.pdf>>, 13 p. (Consulté le 12.11.2009)
- [Peterson]** PILKEY Walter, PILKEY Deborah. Peterson's stress concentration factors. Chichester (West Sussex, England) : John Wiley and Sons, third edition, 2008, 560 p. ISBN 9780470048245
- [Plöc.LKP]** PLÖCKER Ulf, KNAPP Helmut, PRAUSNITZ John. Calculation of high pressure vapour-liquid equilibria from a corresponding-states correlation with emphasis on asymmetric mixtures. Kindlington (England) : Elsevier Science, Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development 17(3), 1978, pp. 324-332
- [Pugnet87]** PUGNET Jean-Marc, BOLUSSET Daniel, JEHL Joseph. The application of dry gas seals and active magnetic bearings to an oil-free centrifugal compressor. **In** : 3<sup>rd</sup> IMechE European Congress of Fluid Machinery, The Hague, 1987,. London : IMechE, Proceedings C101/87, pp. 35-41 (Charles Sharpe Beecher Prize 1988)
- [Pugnet88]** PUGNET Jean-Marc, POCHERON Jean-Claude, FICHET, Bruno. Fréquences propres et modes propres d'une roue de compresseur centrifuge. **In** : Dynamique de roues de pompes et de compresseurs centrifuges – Contribution à la CAO. Rapport d'action 85PO789 financée par le MRES. Paris : Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur, 1988

- [Pugnet92]** PUGNET Jean-Marc, VINSONNEAU Bernard. Modelling a turbomachine for complex Eigen frequency calculations and dynamic response prediction – application to vibration control of a turbo-generator. **In** : 5<sup>th</sup> IMechE International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Bath, 1992. London : IMechE, Proceedings C432/033, pp. 549-556
- [Pugnet93]** PUGNET Jean-Marc, BOLUSSET Daniel. Développement d'un nouveau concept de compresseurs de gaz acide à paliers magnétiques dans le gaz. Rapport de Grand Projet Innovant 94-4-90-0021 sur le Fonds des Hydrocarbures (FSH). Paris : Direction des Hydrocarbures (DHYCA), 1993
- [Pugnet95]** PUGNET Jean-Marc, GELIN Alain, BOLUSSET Daniel. Les compresseurs centrifuges de Thermodyn équipés de paliers magnétiques actifs. Conférence 1995 de l'Association Française des Techniciens et Professionnels du pétrole. Paris : AFTP, Revue Pétrole et Techniques N°395/85F, 1995, pp. 88-104  
ISSN 0152-5425
- [Pugnet97]** PUGNET Jean-Marc. Equilibrage des rotors rigides et flexibles. **In** : Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique, vol. BM5. Paris : Techniques de l'Ingénieur, 1997, pp. BM5130-1 – BM5130-15
- [Pugnet98]** PUGNET Jean-Marc, GELIN Alain, TRICOT Daniel. Influence des étanchéités sur le comportement vibratoire des compresseurs centrifuges. In : Congrès SHF (Société Hydrotechnique de France), Chatou, 1998. Paris : SHF - La Houille Blanche, N°3/4, 1998, pp.117-122  
ISSN 0018-6368
- [Pugnet99]** PUGNET Jean-Marc. Pompage des compresseurs. **In** : Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique, vol. BM4. Paris : Techniques de l'Ingénieur, 1999, pp. BM4182-1 – BM4182-18
- [Pugnet03]** PUGNET Jean-Marc, BONNEFOI Patrice, LABOUBE Pierre, et al. Groupe moto compresseur centrifuge à réfrigération assistée. Brevet d'invention français et européen EP 1 467 104 A1 **[En ligne]**. 11 Avril 2003. Disponible sur : <[http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20041013&DB=&locale=fr\\_EP&CC=EP&NR=1467104A1&KC=A1](http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20041013&DB=&locale=fr_EP&CC=EP&NR=1467104A1&KC=A1)> (Consulté le 12.11.2009)
- [Pugnet04.1]** PUGNET Jean-Marc. Palier magnétique actif et machine pourvue d'un tel palier (axe vertical de rotation). Brevet d'invention français et européen EP 1 596 080 A1 **[En ligne]**. 3 Mai 2004. Disponible sur : <[http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20051116&DB=&locale=fr\\_EP&CC=EP&NR=1596080A1&KC=A1](http://v3.espacenet.com/publicationDetails/originalDocument?FT=D&date=20051116&DB=&locale=fr_EP&CC=EP&NR=1596080A1&KC=A1)> (Consulté le 04.04.2010)

- [Pugnet04.2]** PUGNET Jean-Marc. Compresseur pour groupe compresseur centrifuge de type en porte-à-faux. Brevet d'invention français et européen EP 1 473 664.A1 **[En ligne]**. 3 novembre 2004. Disponible sur : <[http://v3.espacenet.com/publicationDetails/biblio?DB=EPODOC&adjacent=true&locale=fr\\_EP&FT=D&date=20041103&CC=EP&NR=1473464A1&KC=A1](http://v3.espacenet.com/publicationDetails/biblio?DB=EPODOC&adjacent=true&locale=fr_EP&FT=D&date=20041103&CC=EP&NR=1473464A1&KC=A1)> (Consulté le 04.04.2010)
- [Pugnet06]** PUGNET Jean-Marc, CAMUS Jean, GRAZIANI Franco et al. Torsional behaviour improvements on reciprocating compressors. **In** : 7<sup>th</sup> IFToMM on Rotordynamics, Vienna, September 2006. Besançon : Comité français pour la promotion de la science des mécanismes et des machines, Proceedings ID140, 2006, 10 p.
- [PULSIM]** TNO-TPD. Netherlands Organization for Applied Scientific Research, Institute for Applied Physics. PULSIM<sup>®</sup>, software for the study of pulsation and vibration modelling and control of compressor installations. Delft (Pays Bas).
- [Rakop.]** RAKOPOULOS C.D., MICHOS C.N., GIALOUMIS E.G. A computational study of compressor surge during transient operation of turbo charges diesel engines. Inderscience Publisher. International Journal of Alternative Propulsion, Vol. 1 N°2/3, 2007, pp. 250-274  
ISSN 14710234
- [Reid]** REID Robert, PRAUSNITZ John POLING Bruce. Properties of Gases and Liquids. Columbus (Ohio) : McGraw Hill Book Company, 4<sup>th</sup> edition, 1987, 753 p.  
ISBN 0070517991
- [Ritz]** RITZ Walter. Uber eine neue methode zur lösung genwisser variationsproblem der mathematischen physic. Annales de chimie et de physique, 13, 145, 1908, p. 172
- [Rumelhart]** RUMELHART David, MCCLELLAND James, PDP Group. Parallel distributed processing: Explanations on the microstructure of cognition. MIT Press (Massachusetts) : Bradford Books. 1986, 567 p.  
ISBN 9780262181200
- [Scharrer]** SCHARRER Joseph, PELLETTI Joseph. Gasseal<sup>™</sup> Software - Operating Manual. South Island : Rotordynamics-Seal Research, 1995
- [Singh]** SINGH Murari, SULLIVAN W., THAKUR B. et al. Resonance Identification for Impellers. **In** : 32<sup>nd</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T32, 2003, pp 59-70
- [SRK]** SOAVE G. Equilibrium Constants from a Modified Redlich-Kwong Equation of State. Kindlington (England) : Elsevier Science, Chemical Engineering Science N° 27, 1972, pp. 1197-1203  
ISSN 00092509

- [Smalley]** SMALLEY Antony, CAMATTI Massimo, CHILDS Dara et al. Dynamic Characteristics of the Diverging-Taper Honeycomb-Stator Seal. **In** : 2004 ASME IGTI Conference, Vienna. Norcross (Georgia) : ASME/IGTI, paper GT2004- 53084, 2004 – New York : ASME, Journal of Turbomachinery N°128 (4), 2006, pp. 717-724
- [Starling]** STARLING K.E. Fluid Thermodynamic Properties for light petroleum system. Houston : Gulf Publications Co., 1973
- [SYSTUS]** ESI Group. A versatile simulation software for advanced analysis in mechanics, electrotechnics and heat transfer. Logiciel SYSTUS®. Lyon.
- [Tijl]** TIJL Peter. Modeling simulation and evaluation of a centrifugal compressor with surge avoidance control. DCT 2004.039, 2004, 33 p.
- [Tran]** TRAN Ky Dinh. Comportement dynamique en torsion de machines tournantes. Mémoire de CNAM. Lyon : Conservatoire National d'Arts et Métiers, 1997, 98 p.
- [Tyler]** TYLER J. M., SOFRIN, T. G. Axial Flow Compressor Noise Studies. **In** : SAA Transactions, Vol. 70. Washington : Society of Automotive Engineers International, 1962, pp. 309-332 – 1961 Manly Memorial Award
- [Vance]** VANCE John M. Rotordynamics of Turbomachinery. New York : John Wiley and Sons Inc, 1998, 387 p.
- [VDI3733]** VDI. Technical document VDI 3733 – Noise at pipes. Dusseldorf : Verein Deutscher Ingenieure, 1996, 74 p.
- [Villafañe]** VILLAFAÑE SALDARRIAGA M., MAHFOUD J., STEFFEN V, DER HAGOPIAN J. Balancing of highly flexible rotors by using artificial neural networks. **In** : ASME International Design Engineering Technical Conference Las Vegas (Nevada) September 2007 New York : ASME, IDTEC 2007-34176, 2007
- [Vins.85]** VINSONNEAU Bernard, PUGNET Jean-Marc, LHENRY Bernard. Phénomènes de flexion pris en compte pour la conception d'un rotor de turbomachine. **In** : Conférence 1985 de l'ATEE (Association Technique Energie Environnement). Paris : Revue La Technique Moderne N°12, 1985, pp. 51-58
- [Vins.91]** VINSONNEAU Bernard, PUGNET Jean-Marc. Modélisation d'une turbomachine pour des calculs de fréquences propres complexes et de réponses dynamiques – Application au contrôle des vibrations d'un turboalternateur. **In** : Conférence internationale StruCoMe, Paris, 1991.
- [Wachel81]** WACHEL J.C., VON NIMITZ W.W. Ensuring the Reliability of Offshore Gas Compression Systems. **In** : European Offshore Petroleum Conference, EUR 205. Shelton (Connecticut) : Society of Petroleum Engineers, Journal of Petroleum Technology, Vol. 33 N°11, 1981, pp. 2252-2260

- [Wachel92]** WACHEL J.C., SZENASI Fred. Analysis of torsional vibrations in rotating machinery. **In** : 21<sup>st</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T21, 1992, pp 127-151
- [White]** WHITE R.C., KURZ R. Surge Avoidance for Compressor Systems. **In** : 35<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T35, 1996 pp. 3-15
- [Zeidan]** ZEIDAN F.Y., PEREZ R.X., PETERSON E.S. The use of Honeycomb Seals in Stabilizing two Centrifugal Compressors. **In** : 22<sup>nd</sup> Turbomachinery Symposium, Houston. College Station (Texas) : Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory, Proceedings T22, 1993 pp. 3-15

## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : PUGNET

DATE de SOUTENANCE : 17 décembre 2010

(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

Prénoms : Jean-Marc, Jacques, Yves

TITRE : Dynamique des Machines tournantes pour la conception des Turbines à vapeur et des Compresseurs centrifuges :  
de la Théorie à la Pratique

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2010-ISAL-0133

Ecole doctorale : MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique)

Spécialité : Génie Mécanique

Cote B.I.U. – Lyon : T 50/210/19 /

et

bis

CLASSE :

#### RESUME :

Les turbines à vapeur industrielles et les compresseurs centrifuges de procédé sont des turbomachines conçues pour un usage spécifique et construites à l'unité. Les méthodes de conception doivent être fiables. On commence par décrire les deux types de machines, leurs applications et les normes applicables. Puis un modèle simple et réaliste de dynamique de rotor en flexion est présenté, simulant tous les principaux phénomènes. Ensuite, on s'intéresse à l'interprétation de réponses aux balourds et à l'amélioration de la procédure de définition des amortissements ; une approche multimodale est proposée, améliorant considérablement la procédure spécifiée par les standards API. Puis, le mémoire présente les développements faits sur la stabilité vibratoire des compresseurs centrifuges à haute pression, ainsi que leurs critères de conception. Un chapitre est dédié aux paliers magnétiques actifs, à des retours d'expérience et à l'état actuel des développements des systèmes de contrôle. Dans le cas de la torsion, on s'est attaché à l'amélioration de la modélisation pour prévoir des fréquences propres plus précises, et l'analyse des réponses aux excitations instationnaires dues aux machines électriques.

Pour les systèmes disques-aubes, une méthode originale d'analyse porte sur la réponse des aubes de turbines à vapeur industrielles à injection partielle. De plus une analyse dynamique des roues de compresseurs centrifuges est présentée y compris l'implication des excitations acoustiques. Une méthode originale de simulation thermodynamique a été développée pour expliquer les changements de régimes ainsi que le comportement lors du pompage.

En conclusion, cette thèse, qui s'appuie sur l'analyse d'une trentaine de cas industriels en combinant modélisations et expérimentations, propose des améliorations significatives pour la conception et l'évolution des normes, dans le but d'augmenter la fiabilité de ces grands projets construits pratiquement à l'unité.

#### MOTS-CLES :

Dynamique – Dynamique de rotor – Flexion – Torsion – Balourd – Analyse modale – Excitations stationnaires – Excitations instationnaires – Eléments finis – Système disques aubes – Vibration – Contraintes – Fatigue – Turbomachines – Turbines à vapeur – Compresseurs centrifuges – Paliers magnétiques actifs – Stabilité – Simulation dynamique – Thermodynamique – Acoustique – Conception – Retour d'expérience

Laboratoire(s) de recherche : LaMCoS (Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures) INSA/CNRS UMR 5259

Directeur de thèse : Professeur Régis DUFOUR, INSA Lyon

Président de Jury : Professeur Roger OHAYON

Composition du jury : Olivier BONNEAU Professeur, Université de Poitiers, Rapporteur  
Xavier COUDRAY Ingénieur, Chief Engineer GE Oil&Gas, Examineur  
Régis DUFOUR Professeur, INSA Lyon, Directeur de thèse  
David EWINS Professeur, University of Bristol, Rapporteur  
Guy FERRARIS Professeur, INSA Lyon, Examineur  
Roger OHAYON Professeur, CNAM Paris, Président  
Michel LALANNE Professeur, INSA Lyon, Examineur