

Thèse

Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis

Présentée devant
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Pour obtenir
Le grade de docteur

Formation doctorale : MECANIQUE – GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL
École doctorale : École doctorale MEGA

Par
Nahiène Hamila
Soutenue le 04 décembre 2007 devant la Commission d'examen

Jury MM.

Directeur	P. BOISSE	Professeur (INSA de Lyon)
Rapporteur	L. BOUBAKAR	Professeur (Université Franche Comté)
Co-directeur	M. BRUNET	Professeur (INSA de Lyon)
	S. CHATEL	Ingénieur de recherche (EADS)
Rapporteur	D. FAVIER	Professeur (Université Joseph Fourier)
	C. HOCHARD	Professeur (Université Aix Marseille)
	A. MAAZOUZ	Professeur (INSA de Lyon)

Laboratoire de recherche : LAMCOS

Résumé

La simulation de la mise en forme des renforts de composites a plusieurs objectifs. Elle permet de déterminer la faisabilité, ou les conditions de cette faisabilité et surtout elle permet de connaître la position des fibres après formage. Ceci est important pour l'identification des caractéristiques mécaniques du composite en service et pour le calcul de la perméabilité après drapage nécessaire pour une analyse correcte de l'injection. Les simulations évitent les coûteuses études expérimentales par essais-erreurs. Le travail présenté dans ce document concerne la première étape de la mise en forme des composites avant injection, à savoir, la mise en forme de renforts tissés.

Les apports de ce travail sont les suivants : la définition d'un élément fini à trois nœuds composé de mailles tissées où les directions chaîne et trame sont quelconques par rapport aux cotés de l'élément, la prise en compte de la rigidité de flexion et la mise en place d'une gestion du contact permettant la mise en forme simultanée des multiplis. Enfin, un ensemble de simulations de mise en forme donne des informations quant à l'importance des différentes rigidités d'un renfort fibreux tissé et quant à la possibilité de les négliger ou non.

Abstract :

The simulation of the forming process of composite reinforcements has several objectives. It allows to determine feasibility or the conditions of this feasibility and above all it allows to know the positions of the fibers after forming. This is important to determine the mechanical characteristics of the composite in service and to calculate the permeability after draping necessary for a correct analysis of the injection moulding process. Simulations avoid the expensive experimental studies by test-errors. The work presented in this document relates to the first point: forming process of woven reinforcements.

The contributions of this work are as follow: definition of a three node element with arbitrary directions of the yarns with regard to the element sides, consideration of the bending stiffness, and implementation of a contact management allowing simultaneous multiplis forming process. Finally, a set of simulations of forming processes emphasizes the importance of the different stiffnesses of woven reinforcements and the possibility of neglecting some of them.

	<u>ECOLE DOCTORALE</u>	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u> http://ediis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL <i>Hôpital Cardiologique de Lyon</i> Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.35 72 32 Fax : Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u> M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M. Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry

	Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SSED	<u>SCIENCES DES SOCIETES, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT</u> Mme Claude-Isabelle BRELOT Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr

Table des matières

INTRODUCTION.....	5
1 COMPOSITES ET RENFORTS TISSES	9
1.1 Classifications	9
1.2 Les tissus et leurs caractéristiques	12
1.2.1 Les renforts tissés bidirectionnels.....	12
1.2.2 Quelques autres formes d'assemblages.....	14
1.3 Les sandwichs et les stratifiées	14
1.4 Le moulage par injection de résine liquide (RTM).....	15
2 DIFFERENTES APPROCHES POUR LA SIMULATION DE LA MISE EN FORME DES RENFORTS TISSES	17
2.1 Caractérisations mécaniques des renforts tissés	17
2.1.1 Comportement mécanique en tension.....	18
2.1.2 Comportement mécanique en cisaillement	21
2.1.3 Découplage des rigidités membranaires	24
2.1.4 Comportement mécanique en flexion	27
2.2 Les méthodes de simulation de mise en forme d'un renfort	27
2.2.1 Approche géométrique.....	28
2.2.2 Approche continue.....	30
2.2.3 Approche discrète	31
2.3 Simulation de la mise en forme des multi plis.....	32
3 ELEMENTS FINIS SEMI-DISCRETS POUR LE FORMAGE DES RENFORTS TISSES.....	33
3.1 Schéma temporel explicite adopté.....	34
3.1.1 Cadre général :.....	34
3.1.2 En explicite	34
3.1.3 Equation de la dynamique et mise en oeuvre.....	35
3.2 La rigidité membranaire.....	36
3.2.1 Eléments de Cinématique	37
3.2.2 Composantes de déformations axiales virtuelles et distorsions virtuelles	41
3.2.3 Travaux virtuels et modélisation des efforts	43
3.2.4 Discrétisation élément fini	43
3.2.5 Elément fini semi-discret à direction quelconque.....	46

3.3	La rigidité en flexion	51
3.3.1	Expression de la courbure dans la direction d'une mèche	52
3.3.2	Calcul de la rotation des cotés en fonction de la position des éléments voisins	55
3.3.2.1	Calcul de la rotation de flexion en fonction des rotations de corps rigide des éléments finis:	55
3.3.3	Forces internes dues à la rigidité à la courbure	59
3.4	Tests de validation élémentaires.....	59
3.4.1	Extension puis rotation de solide rigide.....	59
3.4.2	Test de cisaillement simple.....	60
3.4.3	Cisaillement pure	61
3.4.3.1	Picture frame	62
3.4.3.2	Bias test.....	63
3.4.4	Validation de la flexion.....	65
4	GESTION DU CONTACT DANS LE CADRE DE LA MISE EN FORME DES MULTIPLIS.....	69
4.1	Positionnement du problème et formulation.....	70
4.1.1	Interfaces de contact et conditions d'imperméabilité.....	70
4.1.2	Forces liées au contact et formulation du problème.....	72
4.2	Résolution.....	73
4.2.1	Schéma semi implicite	73
4.2.2	Calcul des forces de contact.....	75
4.3	Gestion géométrique.....	80
4.3.1	Description géométrique des surfaces de contact	80
4.3.2	Contact nœud-surface	84
4.3.3	Contact nœud arête et contact nœud-nœud	87
4.3.4	Contact arête- arête.....	88
4.4	Recherche des zones de contact.....	90
5	EXEMPLES DE SIMULATIONS DE MISE EN FORME DE RENFORTS TISSES.....	93
5.1	Drapage	94
5.1.1	Description du dispositif.....	94
5.1.2	Résultats de simulation	95
5.2	Air bag.....	97
5.2.1	Description du dispositif.....	97
5.2.2	Résultats de simulation	98
5.3	Emboutissage d'un coin de valise.....	100
5.4	Emboutissage à l'aide d'un poinçon hémisphérique	103
5.4.1	Description des outils	103
5.4.2	Emboutissage d'un mono pli	104
5.4.3	Emboutissage d'un multiplis	106

6 PERSPECTIVE ET FAISABILITE : ELEMENT FINI POUR LES MULTIPLIS.	109
CONCLUSION	117
BIBLIOGRAPHIE.....	119

Introduction

Depuis les années 80, l'importance grandissante des matériaux composites dans le développement des domaines de hautes technologies (aéronautique, automobile, armement, génie civil, sport, etc.) a encouragé et favorisé la recherche dédiée à la promotion de ces matériaux. Dans bien des cas, leurs caractéristiques sont plus avantageuses que celle des matériaux standards en raison de leurs performances mécaniques et thermiques élevées pour des masses volumiques plus faibles.

Si le coût de la matière première s'est vu réduit du fait de leur généralisation, le prix des pièces finies reste élevé car les procédés de mise en forme sont encore au stade de développement. L'accent est mis sur ce point en recherche dans un souci de productivité et d'automatisation de la fabrication.

Les procédés de mise en forme des matériaux composites sont divers et coûteux, tant d'un point de vue matériel qu'humain. Les nouvelles technologies aéronautiques et le développement d'avions tels que l'A380 mènent à introduire des structures composites stratifiées de très fortes épaisseurs, composées d'un grand nombre de plis. Le procédé RTM consiste en une première étape de drapage du renfort puis une seconde étape d'injection de la matrice sur le renfort mis en forme afin de consolider et maintenir ce dernier. Dans le cas d'un multiplis, l'opération de drapage est souvent effectuée couche après couche. Dans un objectif de gain de temps, des solutions de mise en forme simultanée des couches, en particulier par des procédés d'emboutissage, font actuellement l'objet de mises au point. Les efforts de recherche concernant les procédés d'emboutissage portent tant sur l'aspect expérimental que sur l'aspect numérique. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail qui consiste à établir des

méthodes de simulation de mise en forme des renforts textiles à fibres continues pour les matériaux composites monoplis et multiplis.

La simulation de la mise en forme des renforts composites a plusieurs objectifs. Elle permet de déterminer la faisabilité, ou les conditions de cette faisabilité et surtout elle permet de connaître la position des fibres après formage. Ceci est important pour la détermination des caractéristiques mécaniques du composite en service et pour le calcul de la perméabilité après drapage nécessaire pour une analyse correcte de l'injection. Les simulations évitent les coûteuses études expérimentales par essais-erreurs.

Ce travail s'insère dans la suite de ceux de l'équipe « Mise en forme des composites » dont l'objet concerne principalement la mise au point de logiciels de simulation de mise en forme des renforts 2D et 3D [CHERUET 2002] [YOUSSEF 2005] [AIMENE 2007] [DE LUYCKER 2008] ainsi que l'analyse expérimentale et numérique du comportement mécanique des renforts aux échelles méso et macroscopiques [BUET-GAUTHIER 1998] [HANKLAR 1998] [HIVET 2002] [DUMONT 2003] [HAGEGE 2004] [BADEL 2008].

Le travail présenté dans ce document concerne le premier point : simulation de la mise en forme de renforts tissées minces. Les apports de ce travail sont les suivants :

- La définition d'un élément fini à trois nœuds composé de mailles tissées où les directions chaîne et trame sont quelconques par rapport aux cotés de l'élément. Ceci permet d'utiliser le même maillage pour chaque pli dans le cas d'un multiplis où chacun des plis a une orientation différente. Par ailleurs ceci permet d'envisager l'utilisation de maillages automatiques ou de remaillages.
- La prise en compte de la rigidité de flexion. Bien que celle-ci soit faible pour les renforts tissés compte tenu de leur nature fibreuse, on verra que cette rigidité de flexion peut avoir une importance notable sur la forme des éventuels plissements.

- La mise en place d'une gestion du contact permettant la mise en forme simultanée des multiplis. La mise en forme simultanée de plusieurs couches de différentes orientations sur des surfaces à double courbure conduit à de grand glissement entre ces couches. Ceci, combiné aux éventuels plissements, amène à des conditions de contact complexes qui ont nécessité, en particulier, la mise en place d'un contact arête-arête .
- Enfin, un ensemble de simulations de mise en forme donne des informations quant à l'importance des différentes rigidités d'un renfort fibreux tissé et quant à la possibilité de les négliger ou de les prendre en compte.

1 Composites et renforts tissés

Un matériau composite est par définition un matériau constitué de plusieurs matériaux non miscibles et avec une forte capacité d'adhésion. Le matériau possède des propriétés mécaniques que ses composants n'auraient pas eues indépendamment les uns des autres. Ils sont dans la plupart des cas constitués d'une ossature, appelée renfort, qui assure la tenue mécanique de par sa plus grande rigidité par rapport à la matrice qui l'enrobe et assure la cohésion de l'ensemble.

1.1 Classifications

Leur classification peut se faire selon plusieurs critères [GAY 1997] : ils peuvent être classifiés selon la forme ou la nature (minérale ou organique) des constituants, ou même plus simplement selon leurs domaines d'utilisation... Une des classifications s'opère justement sur la géométrie du renfort, qui peut en effet être fait de particules, de nano fibres, de fibres courtes ou de fibres continues. Cette étude portera principalement sur ce dernier type de renforcement et plus particulièrement sur le cas du renfort tissé.

Les fibres continues sont pour leur part assemblées soit sous forme tricotée, tressée, tissée bidirectionnelle, ou encore sous forme multidirectionnelle. L'interaction des mèches à l'échelle mésoscopique gouverne le comportement du tissu à l'échelle macroscopique. La connaissance du comportement du tissu à l'échelle mésoscopique sera exploitée pour l'étude du tissu à l'échelle macroscopique, ce qui permettra d'appréhender la forme finale d'une structure tissée soumise à différentes sollicitations mécaniques et de maîtriser son procédé de fabrication.

Compte tenu de son faible coût et de ses bonnes performances mécaniques, le verre est l'un des constituants de renfort le plus utilisé. Il est utilisé tant dans les domaines nautiques, que dans les bâtiments ou l'automobile. Les fibres de verre présentent une bonne adhérence avec la résine, de bonnes propriétés mécaniques, bien qu'elles soient inférieures aux fibres de carbone, et une bonne isolation électrique pour la plus parts des applications [BERREUR et al. 2001]. Elles ont néanmoins une rigidité souvent insuffisante pour les applications aéronautiques et un vieillissement accéléré au contact avec l'eau ou l'exposition aux UV.

Les fibres de carbone sont principalement destinées aux structures à hautes performances en aéronautique ou dans l'industrie du sport. Malgré leur coût assez élevé ainsi qu'un allongement à la rupture plus faible (inférieur à 2%) que le verre (4%), leur production n'a cessé d'évoluer.

Les fibres d'aramide ou Kevlar, connues pour leur utilisation dans le domaine de la protection balistique, trouveront aussi leur place dans l'aéronautique, vu justement une bonne résistance à la traction, un bon facteur d'amortissement aux vibrations, et une densité faible. Elles ont pour inconvénient de présenter une faible résistance à la compression, une reprise d'humidité importante et on leur reproche souvent la difficulté de la découpe des renforts secs.

Certaines fibres naturelles, présentent l'avantage d'être recyclables et par conséquent plus écologiques, peuvent être une bonne alternative aux fibres de verres. Malheureusement elles ne sont pas fabriquées par un processus industriels et la reproductibilité de leurs propriétés physiques est plus difficile à appréhender.

La deuxième forme de classification évoquée, se base sur la géométrie du renfort. Les plus utilisées sont décrites par la suite.

Les renforts à particules sont des billes plongées dans une matrice, apportant d'excellente résistance à l'usure, aussi bien qu'à l'abrasion, qu'en érosion ou

encore en frottement [MASOUNAVE et al. 1996], tout en diminuant considérablement la masse volumique [PARADIS 2004]. Ils trouveront leurs applications autant dans les chemises de moteurs que dans les bielles ou les couronnes de pistons, que dans les cadres de vélos, des pièces de missiles ou les moteurs d'avions...

Les nano fibres ont un diamètre inférieur à 100 nm et un rapport longueur/diamètre d'au moins 100. Les nano fibres traditionnelles, objet de nombreuses études [ELBAZ 2005], ont un diamètre inférieur à 100 nm et un rapport longueur/diamètre d'au moins 100. Les nano composites à base d'argile et d'oléfine thermoplastique (TPO) sont à la fois plus légères, rigides et recyclables (car il y a moins d'additifs dans le plastique), en plus d'être moins fragiles à basse température. L'incorporation de petites quantités d'argile augmente les propriétés barrière vis-à-vis de l'eau et des gaz. Les nano fibres silicate/polymère présentent des propriétés améliorées tant au niveau de la stabilité thermique que de l'ininflammabilité. Les nano fibres de carbone peuvent servir de renforts conducteurs pour dissiper l'électricité statique dans des équipements de fabrication de disques durs ou de semi-conducteurs. Ils peuvent également être insérés dans des pièces automobiles plastiques pour les rendre conductrices et permettre de les peindre en utilisant leurs propriétés électrostatiques.

Les matériaux composites à fibres courtes présentent l'avantage d'être très facilement mis en forme, et sont utilisés pour des structures fortement non développables.

Finalement, les matériaux composites à fibres continues sont le plus souvent constitués de mèches qui elles même sont constituées de plusieurs milliers de fibres. Les mèches peuvent être sous forme unidirectionnelle, c'est-à-dire toutes de la même orientation, et peuvent aussi être tissées en deux ou trois dimensions. Compte tenu de l'importance que prennent les tissus à deux dimensions ils seront plus amplement développés par la suite.

Jusqu'ici les classifications évoquées portaient sur le renfort. La classification peut également se baser sur les matrices. Ces dernières ont pour rôle de lier les fibres entre elles, de répartir les contraintes et de consolider la structure dans sa forme finale. Elles ont aussi pour rôle majeur d'empêcher le mouvement relatif des fils et des fibres qui sont possibles dans le renfort sec et ainsi de rendre le matériau continu.

Deux principales catégories sont utilisées : Les résines thermodurcissables et les polymères thermoplastiques. Leurs propriétés différentes conduisent à des procédés de mise en forme distincts. Les résines thermodurcissables durcissent lors du chauffage et une fois le processus de polymérisation engendré il est irréversible. Pour leur part les résines thermoplastiques s'assouplissent avec la chaleur puis se rigidifient en se refroidissant. Leur mise en forme a l'avantage d'être réversible mais elles seront sensibles aux faibles températures.

1.2 Les tissus et leurs caractéristiques

Les types d'assemblages de renforts les plus répandus sont les unidirectionnels (UD), les renforts tissés, les tissus multidirectionnels, les renforts tressés et les renforts tricotés.

1.2.1 Les renforts tissés bidirectionnels

Les renforts tissés bidirectionnels (qu'on aura différenciés des renforts tricotés) sont obtenus par entrelacement perpendiculaire de mèches. On appelle chaîne le fil placé dans le sens de la longueur du tissu, et trame celui entraîné transversalement par la navette pour former le motif du tissage. On distingue[SCARDINO 1989]:

- La toile ou taffetas : le fil de trame passe alternativement dessus puis dessous chaque mèche de chaîne. Le produit obtenu est plat et

relativement rigide mais peu déformable. Son embuvage¹ est important (Figure 1-1 (a)).

- Le sergé $n \times m$: le fil de trame passe au dessus de m fils de chaîne, chacun passant à son tour sur n fils de trame. Les points de liage successifs forment une diagonale. (Figure 1-1 (b)).
- Le satin de n : chaque fil de trame flotte au dessus de $(n-1)$ fils de chaîne; les points de liage ne sont pas consécutifs. Ces tissus sont très souples, plats et déformables (Figure 1-1(c)).
- Les tissus unidirectionnels (ou UD) sont fabriqués à partir de deux nappes de mèches superposées (Figure 1-1 (d)).
- On distingue les UD où les fibres sont juxtaposés et les NCF (Non Crimp Fabric) ou les fibres sont juxtaposées (sans ondulations) et maintenues ensemble par des fils fins cousus (stichs) (Figure 1-1 (e)).

Les sergés et les satins, de par leurs faibles embuvages, sont particulièrement bien adaptés au drapage.

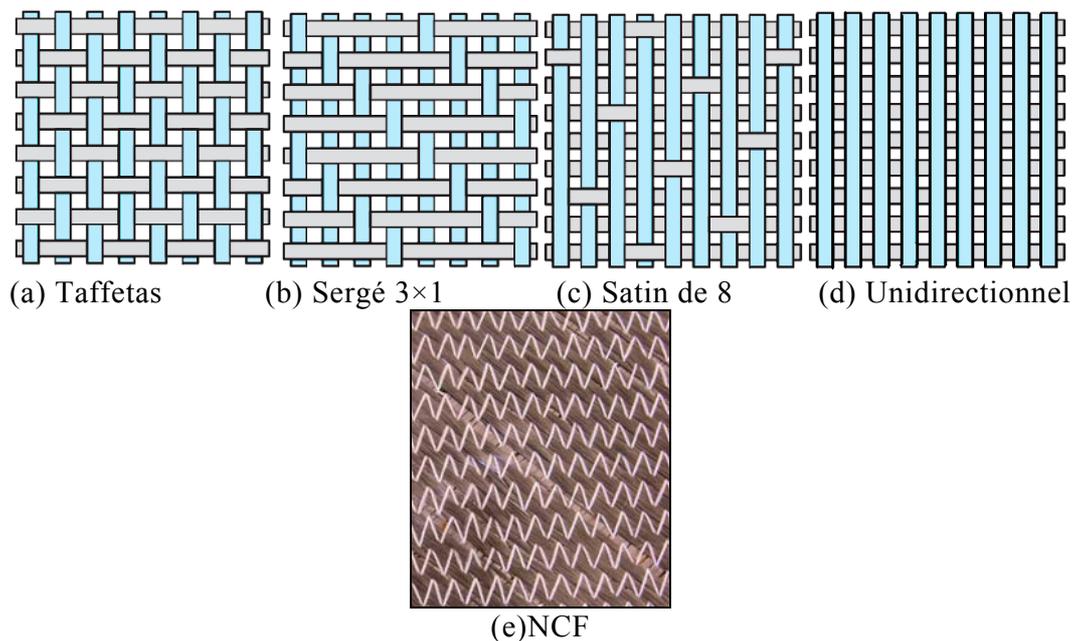


Figure 1-1 Principaux types de tissages

¹ L'embuvage est la relation entre la longueur d'un tissu et la longueur de mèche nécessaire à son tissage. Un tissu avec un embuvage bas sera préféré dans la mesure où l'embuvage fragilise le matériau.

1.2.2 Quelques autres formes d'assemblages

D'autres formes d'assemblage existent, dont les plus répandus sont les renforts tricotés et les renforts multidirectionnels. Une description détaillée des renforts tricotés est proposée dans [HAGEGE 2004]. La très forte déformabilité des mailles permet en plus d'une excellente formabilité, une très bonne perméabilité qui permet plus d'aisance à l'injection de la résine, et une très bonne résistance aux chocs pour les composites renforcées d'un tricot. Comparés aux UD ou aux tissés, les renforts tricotés présentent une plus forte ténacité. Ainsi ils seront utilisés pour des structures à géométries fortement non développables tel que les casques cyclistes ou les prothèses médicales.

Il est intéressant d'évoquer brièvement aussi une autre forme d'assemblage qui prend de plus en plus de place dans les technologies actuelles et qui est encore à un stade de développement. Il s'agit des tissus multidimensionnels [KIBLER 1993]. Ils présentent l'avantage d'être indélaminable, de conserver leurs rigidités et d'avoir une masse volumique faible.

1.3 Les sandwichs et les stratifiées

Dans le chapitre 1.2 les assemblages des mèches ont été évoqués pour la classification des différents tissus. Une autre forme d'assemblage permet d'effectuer une autre forme de classification. Une structure composite peut être un assemblage d'un pain de mousse ou d'une structure en nid d'abeille (structures mécaniques avec de faibles caractéristiques mécanique mais d'une masse volumique très faible) enrobé d'un matériau ayant des propriétés mécaniques plus fortes. On parlera dans ce cas de matériaux composites de type sandwich.

Une autre forme d'assemblage sur lequel portera ce travail, est le stratifié. Les matériaux composites stratifiés sont composés d'un certain nombre de couches de tissus, souvent avec des orientations de fibres différentes, renforcé par de la

résine. Dans le cas des renforts secs, les plis sont mis en forme avant l'injection de la résine. Cette mise en forme peut être faite soit couche par couche ou simultanément. L'avantage lié à la mise en forme simultanée de toutes les couches est évident, mais rend le problème bien plus complexe dans la mesure où la drapabilité de l'ensemble doit être contrôlée en même temps. C'est là que prend toute l'importance de la simulation de la mise en forme des multiplis.

1.4 Le moulage par injection de résine liquide (RTM)

Ce procédé (en anglais RTM, pour Resin Transfer Moulding) utilise dans une première phase des tissus secs (sans résine). Il se décompose en cinq étapes décrites ci-dessous et Figure 1-2:

1. découpe du tissu à la dimension voulue ;
2. mise en forme du tissu par estampage ou emboutissage ;
3. injection de la résine liquide, à haute température, dans le moule fermé (pression 0,1 à 0,4 MPa) ;
4. polymérisation de la résine ;
5. refroidissement et démoulage après polymérisation de la résine.

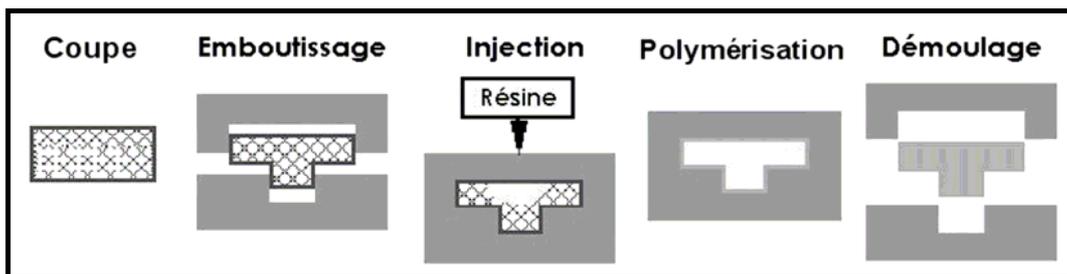


Figure 1-2 *Principe du moulage par injection basse pression de résine liquide (RTM), schématisé en cinq étapes principales.*

Les outils nécessaires sont au nombre de trois :

1. un poinçon, contre-moule ayant la forme intérieure de la pièce finale à fabriquer,

2. une matrice, constituant le moule et ayant la forme extérieure de la préforme composite,
3. un serre-flan, dont la fonction est d'autoriser un glissement limité du tissu sur la matrice en le maintenant sur les bords.

Les résines époxydes sont les plus utilisées en RTM.

2 Différentes approches pour la simulation de la mise en forme des renforts tissés

La simulation du drapage prend de plus en plus de place du fait que elle constitue une excellente alternative à l'expérimentation pour définir les conditions de faisabilité de la mise en forme, (à savoir les chargements à appliquer sur les outils, leurs vitesses, l'orientation initiale des tissus etc.) et pour pouvoir détecter les défauts de fabrication (plissement des tissus, déchirures etc.) [BOISSE 2007].

Une autre raison propre aux matériaux composites est la nécessité de connaître en tout point l'orientation des fibres et leurs densités afin d'appréhender le comportement du produit fini et de pouvoir déterminer la porosité des tissus avant injection des résines.

2.1 Caractérisations mécaniques des renforts tissés

On peut retenir trois formes de rigidités qui pilotent le comportement d'un tissu : la rigidité en tension qui est liée à l'extension des fibres, la rigidité en cisaillement qui vient de la variation d'angle entre les mèches et leur écrasement les unes sur les autres, et la rigidité en flexion qui est très faible face aux deux autres formes de rigidités. L'expression du comportement du tissu peut être obtenue soit par expérimentation, soit parfois par des méthodes analytiques ou encore par des simulations à l'échelle des cellules élémentaires représentatives (CER) [BOISSE et al. 2005]. Une CER est définie comme étant un motif permettant par simple translation de reconstituer l'intégralité du tissage (Figure 2-1)

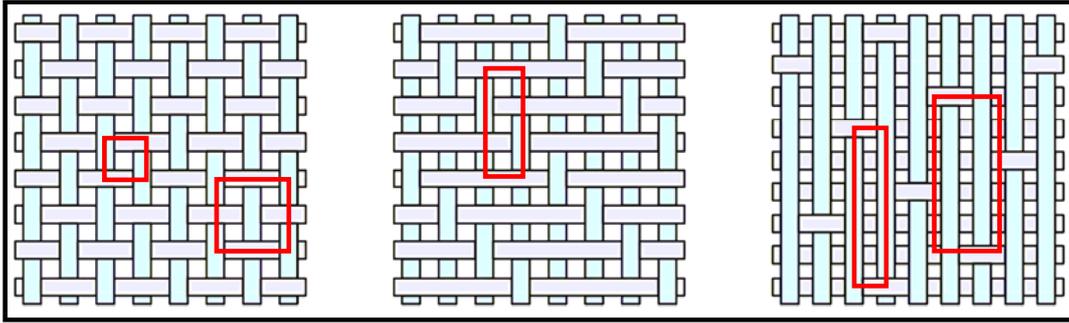


Figure 2-1 Représentations de tissés à l'aide de CER.

2.1.1 Comportement mécanique en tension

Le diamètre des fibres constituant les mèches sont très petites par rapport à leurs longueurs. Par conséquent elles ne peuvent être soumises qu'à des tensions dans leurs direction longitudinale \vec{h}_α (Figure 2-2). Les mèches considérées dans cette études sont composées de fibres juxtaposées dans la même direction \vec{h}_α . Les fibres pouvant glisser en elles, tout effet de cisaillement dans la mèche est éliminé. Alors le tenseur de Cauchy a pour forme, pour un tissu bidirectionnel,

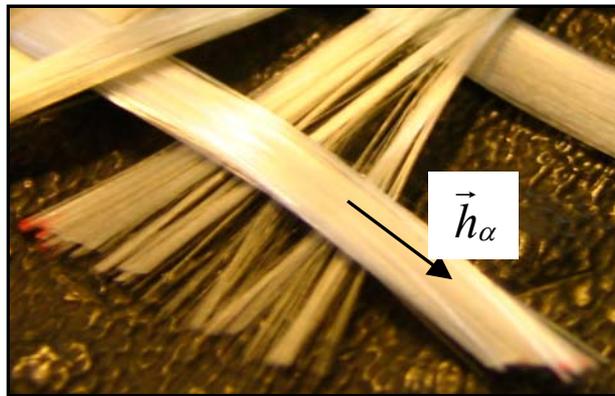
$$\overline{\overline{\sigma}} = \sum_{\alpha=1}^2 \sigma^{\alpha\alpha} \vec{h}_\alpha \otimes \vec{h}_\alpha.$$


Figure 2-2 Mèche constituée de milliers de fibres.

On définit un nouveau tenseur de Tension $\overline{\overline{T}}$ qui est obtenu par l'intégration de la contrainte de Cauchy sur la section de la mèche orientée selon la direction \vec{h}_α . On a dans le tissu : $\overline{\overline{T}} = \int_S \overline{\overline{\sigma}} dS$, ou encore: $T^{\alpha\alpha} = \int_S \sigma^{\alpha\alpha} dS$, (α étant l'indice de la mèche). Tel que précisé précédemment, la tension dans les mèches dépend

principalement de deux facteurs : l'étirement des fibres, mais également de l'embuvage. Tel que décrit dans la Figure 2-3, le fait de tirer sur une fibre selon une orientation, conduira à la rétractation de la fibre dans l'autre orientation. Ainsi la tension dans une mèche sera fonction de la déformation de la mèche, mais également de la déformation de la mèche se trouvant dans l'autre orientation.

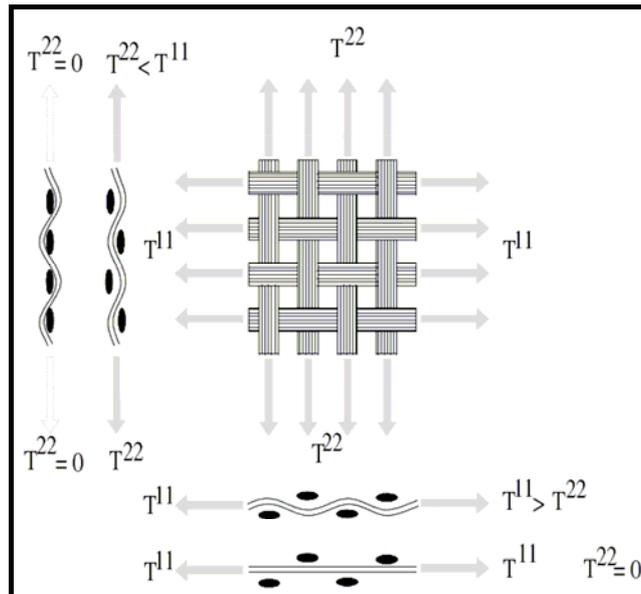


Figure 2-3 Influence de l'embuvage sur des tensions chaînes et trames

Pour la caractérisation du comportement d'un tissu en tension on utilisera soit des techniques expérimentales, soit des simulations éléments finis à l'échelle mésoscopique [GASSER et al. 2000]. Pour l'expérimentation, une des techniques consiste à définir la loi de comportement du tissu à l'aide d'une machine de traction biaxiale (Figure 2-4).

Cela consiste à effectuer des essais de traction dans une direction, tout en maintenant une déformation dans l'autre direction constante. Ainsi pour chaque ratio $k = \frac{\varepsilon_{chaîne}}{\varepsilon_{trame}}$ on obtient une courbe de traction (Figure 2-5 (a)), et cela permet

enfin de tracer des surfaces de tension (Figure 2-5(b)).

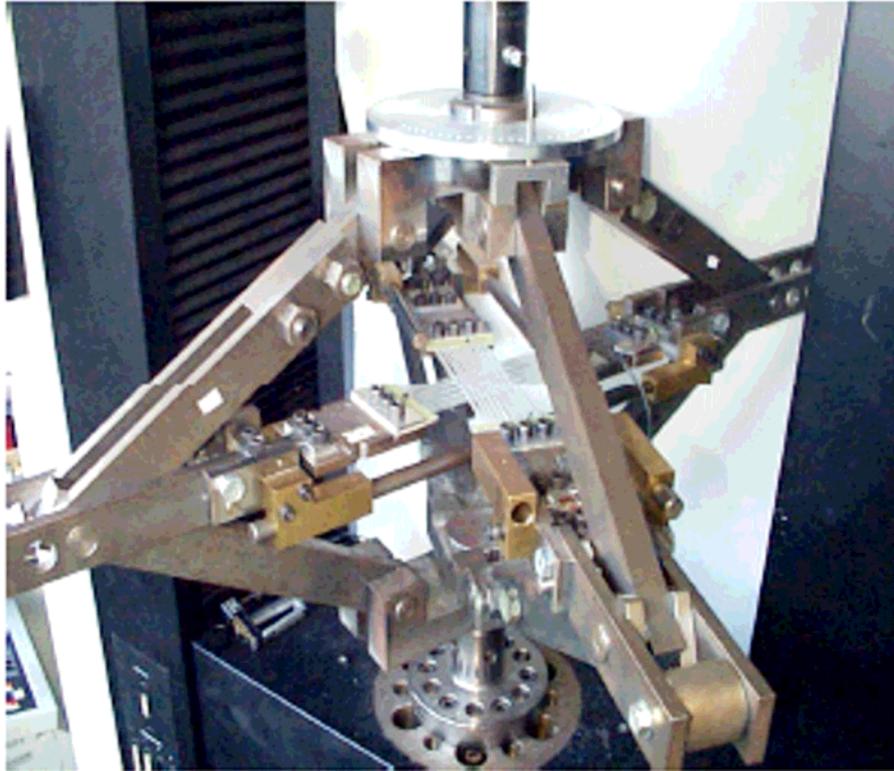


Figure 2-4 Dispositif de traction biaxiale sur un tissu en croix [BUET-GAUTHIER et al. 2001]

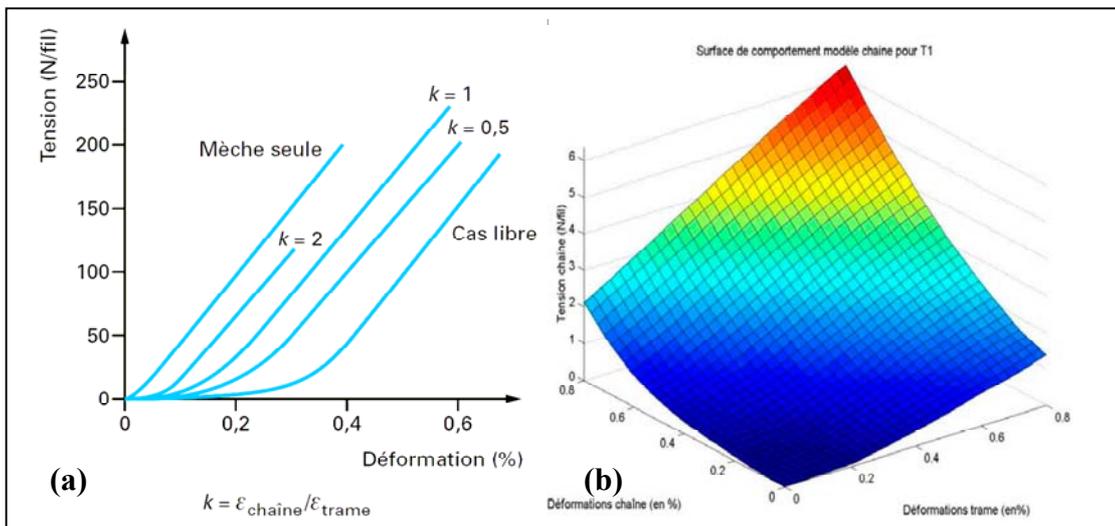


Figure 2-5 Surface de traction biaxiale. [BUET-GAUTHIER et al. 2001]

La deuxième méthode évoquée consiste à effectuer une simulation 3D d'une CER à l'échelle mésoscopique (Figure 2-6), et de définir encore une fois les courbes de traction Il a été montré que les résultats expérimentaux concordaient bien avec les résultats éléments finis.

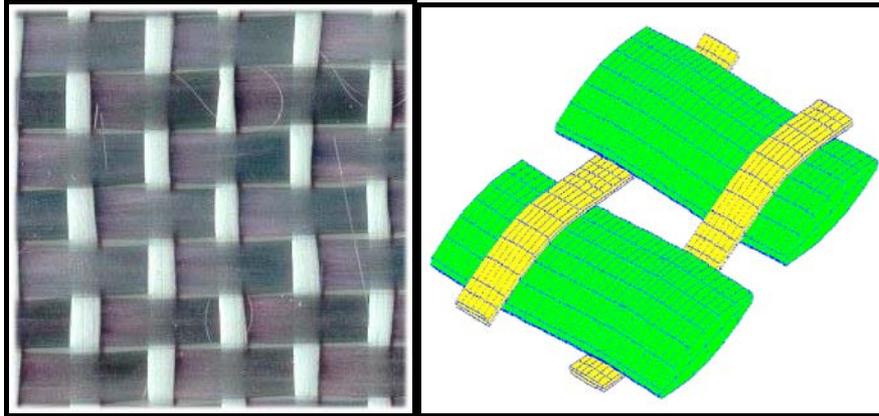


Figure 2-6 Cellule élémentaire représentative sur un tissu déséquilibré

Il est aussi intéressant de citer une troisième méthode qui voit en ce moment le jour et qui consiste, en partant de la géométrie du profil du tissage, à décrire des courbes de traction analytiquement [SUN et al. 2005][HIVET et al. 2007].

2.1.2 Comportement mécanique en cisaillement

De nombreux travaux ont également été menés pour l'identification de la rigidité en cisaillement. Les méthodes sont similaires aux techniques utilisées pour la définition des surfaces de tension, à savoir par une simulation 3D à l'échelle mésoscopique, ou par expérimentations. Deux méthodes expérimentales se distinguent : le picture frame et le bias test.

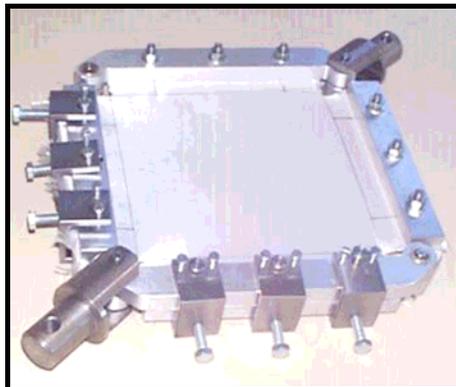


Figure 2-7 Dispositif expérimental du Picture Frame.

Le picture frame, développé par McGuinness [MCGUINNESS et al. 1998], consiste en l'utilisation d'un cadre articulé à ses quatre coins (Figure 2-7). Deux des coins opposés sont fixés à une machine de traction qui les éloigne l'un de

l'autre à vitesse constante, appliquant ainsi à l'éprouvette tissée un état de cisaillement pur. Les mèches de l'éprouvette sont alignées avec le dispositif et rendues solidaires des bras grâce à des mâchoires métalliques, fermées par des boulons.

Par la suite ce cadre est placé dans une machine de traction. L'angle de cisaillement γ est défini par la cinématique du cadre. En considérant que la puissance fournie par le cadre est égale à celle distribuée sur l'ensemble des cellules élémentaire, l'expression liant la force exercée sur le cadre à l'angle de cisaillement est [BOISSE et al. 2006]:

$$F(\gamma) = C(\gamma) \frac{\sqrt{2} \text{ ncell}}{a \left(\cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right)} \quad \text{eq (2.1.1)}$$

Où ncell est le nombre de CER dans le cadre, γ l'angle dans le cadre, $F(\gamma)$ la force exercée par la machine sur le cadre, $C(\gamma)$ le couple de cisaillement dans chaque CER et a la longueur du coté du cadre.

La Courbe de cisaillement obtenue suite à cet essai prend l'allure de la Figure 2-8 (essai effectué par [DUMONT 2003]).

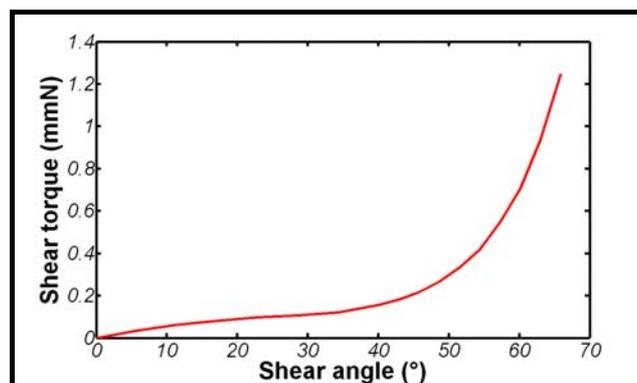


Figure 2-8 Courbe de cisaillement $C(\gamma)$ pour du taffetas en fibre de verre [DUMONT 2003]

Au cours du cisaillement, il y a une rigidification du tissu qui se caractérise en une première étape, par la rotation des mèches autour d'elles-mêmes, qui produit

du frottement (Figure 2-9 (a)), puis les mèches s'écrasent entre elles (Figure 2-9(b)) ce qui conduit à une augmentation sensible de la rigidité observée Figure 2-8.

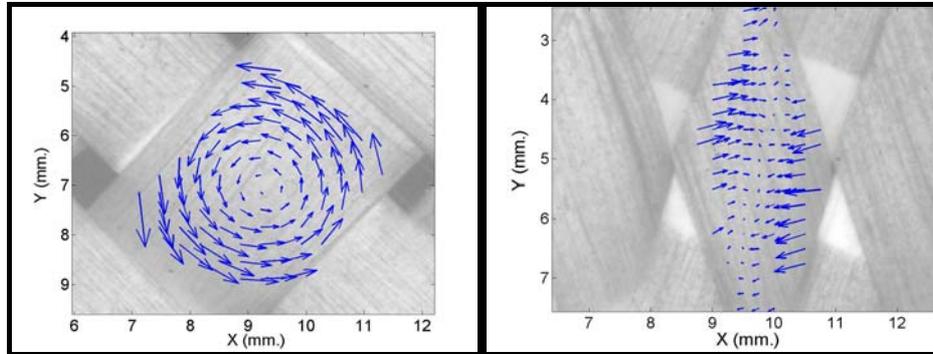


Figure 2-9 Déformation de fibres en cisaillement [DUMONT 2003].

Le Bias Test est une autre expérimentation permettant de caractériser le comportement du tissu en cisaillement. Il consiste à encasturer un tissu rectangulaire orienté à $\pm 45^\circ$ à deux extrémités et d'effectuer des tests de traction.

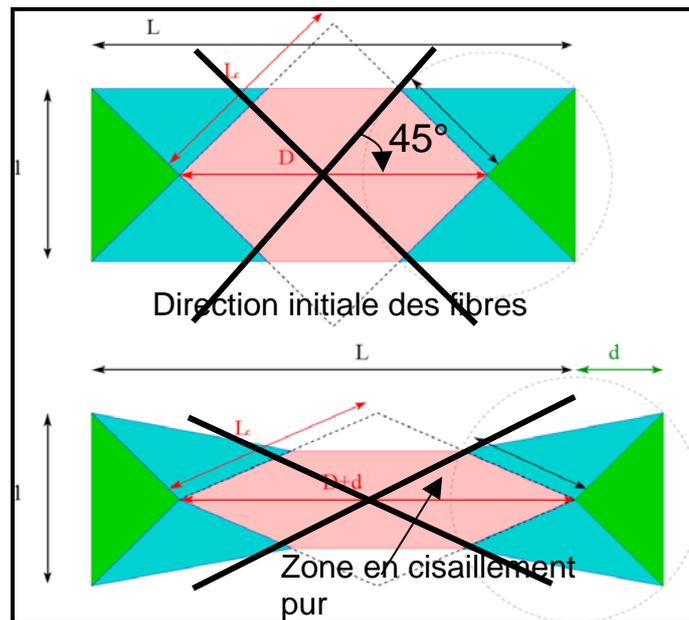


Figure 2-10 Zone de cisaillement pour le Bias Test [DE LUYCKER et al. 2006].

On distingue trois zones dans le tissu (Figure 2-10):

- une zone en cisaillement pur (en rose)

- une zone en demi cisaillement ; l'angle de cisaillement étant la moitié de l'angle de la zone en cisaillement pur. (en azur)
- une zone sans cisaillement. (en vert)

Comme pour le Picture Frame, une expression a été établie dans [DE LUYCKER et al. 2006] associant à la géométrie du cadre et à la force exercée par la machine de traction sur les bords un couple de cisaillement.

$$C(\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot N_\gamma} \cdot F \cdot D \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{D+d}{\sqrt{2} \cdot D} \right)^2} - \frac{N_{\frac{\gamma}{2}}}{2 \cdot N_\gamma} \cdot C\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{eq (2.1.2)}$$

$C(\gamma)$ est le couple dans une CER en fonction de l'angle γ entre les mèches, F la force exercée par la machine sur le cadre, N_γ le nombre de CER dans la zone en cisaillement pur, $N_{\frac{\gamma}{2}}$ le nombre de CER dans la zone en demi cisaillement, D la diagonale de la zone en cisaillement pur dans la configuration initiale et $D+d$ la longueur de cette même diagonale dans une configuration intermédiaire (voir Figure 2-10).

2.1.3 Découplage des rigidités membranaires

Un renfort composite est composé d'un nombre fini de cellules élémentaires tissées (telle que représenté Figure 2-11). Le diamètre des fibres constituant les mèches est généralement très fin (5 à 7 μm pour le carbone, 10-20 μm pour l'aramide, 5-25 μm pour le verre) [SCARDINO 1989]. Pour les fibres continues leur diamètre est extrêmement petit face à leur longueur. Par conséquent, le seul chargement mécanique qui peut être appliqué à ces fibres est un chargement en traction dans la direction des fibres. Les mèches sont constituées de milliers de fibres, et ces fibres peuvent glisser les unes par rapport aux autres. Ainsi la rigidité en tension reste bien supérieure aux autres formes de rigidités. (Le tissu considéré est sec, i.e. sans matrice).

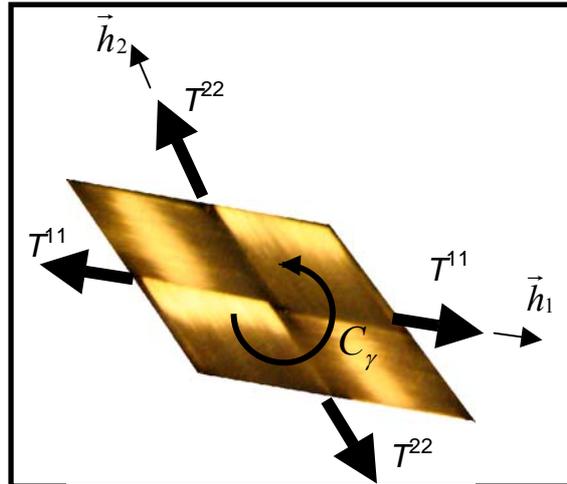


Figure 2-11 Cellule élémentaire soumise à de la tension et à un couple de cisaillement.

Le chargement sur une cellule élémentaire est composé des tensions T^{11} et T^{22} dans la direction des mèches et d'un couple de C_γ orthogonal à la surface du tissu causé par l'action des chaînes et des trames lors du cisaillement plan (Figure 2-11). Vu que les mèches chaînes et trame sont tissées, la rigidité en cisaillement est petite. Mais il a été montré que le couple de cisaillement joue un rôle important dans l'apparition et le développement de plissements durant le drapage.

Il a été montré dans [BUET-GAUTHIER et al. 2001] que l'influence de l'angle de cisaillement avait peu d'influence sur le comportement en tension. En pratiquant les tests de tractions biaxiales de la Figure 2-4 pour des angles de cisaillement différents, Buet-Gauthier a montré que ces derniers avaient peu d'influence sur le comportement du tissu en traction (Figure 2-12). Cela permet d'exprimer l'état de tension du tissu uniquement en fonction de sa déformée dans la direction des mèches ($T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ et $T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$).

L'indépendance du couple de cisaillement vis-à-vis de la tension des mèches est moins vraie. Launay a mis en évidence des modifications de la rigidité en cisaillement pour des tensions différentes [LAUNAY et al. 2007] (Figure 2-13). Il n'existe que très peu de données à ce sujet. Quasiment tous les résultats de test de cisaillement des renforts tissés donnent le couple de cisaillement en

fonction de l'angle chaîne-trame. Le fait que l'énergie de déformation de cisaillement ne dépende pas des tensions est donc une hypothèse discutable mais classique.

Partant de ces hypothèses, on peut alors exprimer le travail virtuel des efforts membranaires sous la forme :

eq(2.1.3)

$$-W_{int}^{*t} = \sum_{p=1}^{n_{CER}} \left(\varepsilon_{11}(\vec{\eta}) T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_1^p + \varepsilon_{22}(\vec{\eta}) T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_2^p \right) + \sum_{p=1}^{n_{CER}} \gamma(\vec{\eta}) C_\gamma$$

n_{CER} étant le nombre de cellules élémentaires dans le domaine,

$\varepsilon_{11}(\vec{\eta})$ et $\varepsilon_{22}(\vec{\eta})$ étant les déformations virtuelles dans les directions \vec{h}_1 et \vec{h}_2 dans le champ virtuel $\vec{\eta}$, L_1^p et L_2^p les longueurs de CER dans les directions \vec{h}_1 et \vec{h}_2 , et $\gamma(\vec{\eta})$ l'angle entre \vec{h}_1 et \vec{h}_2 dans le champ de déplacement virtuel $\vec{\eta}$.

Les différentes grandeurs sont supposées constantes dans chaque CER.

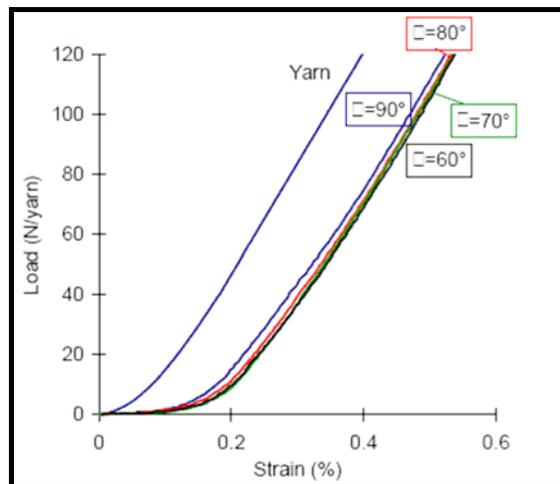


Figure 2-12 Courbes de traction pour différents angles de cisaillement [BUET-GAUTHIER et al. 2001]

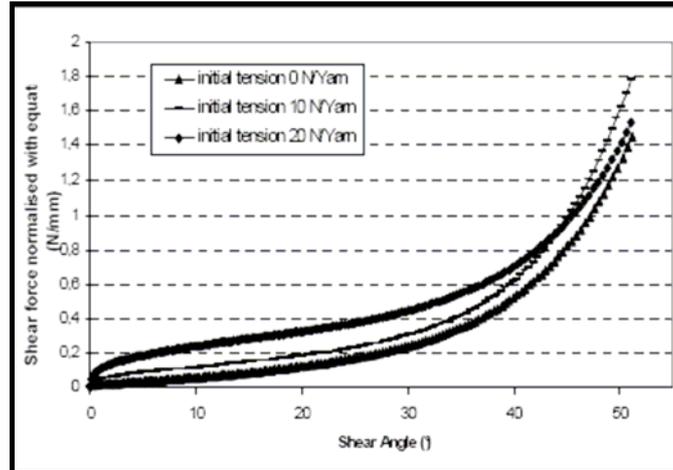


Figure 2-13 Influences des prétentions sur la réponse en cisaillement lors d'un test de picture frame [LAUNAY et al. 2007]

2.1.4 Comportement mécanique en flexion

La rigidité en Flexion est quasiment négligeable face aux autres formes de rigidité, cependant elle reste capitale pour la description de la forme des plis. La plus part des travaux traitant de la question, associent à une courbure χ du tissu, un moment de flexion M ([LAHEY et al. 2004]). Les méthodes expérimentales les plus répandues pour la caractérisation du comportement d'un tissu en flexion sont celles de Kawabata. Elles consistent principalement à des expérimentations où les mèches sont soumises à leurs propres poids [CASIEZ 2001] puis de déduire les coefficients de rigidités en flexion de l'allure qu'elles prennent.

2.2 Les méthodes de simulation de mise en forme d'un renfort

La simulation du drapage d'un tissu peut être faite soit par une méthode géométrique du type de l'algorithme du filet, soit par une méthode mécanique. La méthode géométrique se base sur l'hypothèse que les mèches sont inextensibles et ne prend pas en compte les conditions aux limites ni le

comportement du tissu ; elle reste cependant très rapide. L'approche mécanique, pour sa part, prend en compte les conditions aux limites, le comportement du matériau, et l'historique de la mise en forme. Les méthodes les plus utilisées se basent soit sur une approche discrète de système de masses ressorts, soit sur une approche continue. L'approche traitée est semi-discrète ; elle se situe entre les deux précédentes. Elle utilise des éléments finis (membranes ou coques), mais ceux-ci sont constitués de fils ou de mailles tissées et non d'un milieu continu.

2.2.1 Approche géométrique

On utilise aussi la terminologie « approche cinématique ». Cette méthode repose sur les hypothèses (fortes) suivantes :

- les mèches sont inextensibles ;
- les intersections entre les réseaux chaîne et trame ne peuvent pas glisser ;
- les rotations entre les deux réseaux sont libres ;
- le contact du tissé avec la surface de l'outil se fait sans glissement.

Comme le montre la Figure 2-14, la position d'un nœud C peut être déterminée si celles de deux de ses voisins (A et B) sur le filet sont déjà connues. AC et BC ont des longueurs connues. C est défini comme l'intersection des deux géodésiques issues de A et B, et qui se coupent en C en vérifiant ces longueurs. Cela constitue un petit problème, en général non linéaire qui peut être résolu très rapidement.

La surface de l'outil doit être définie, soit analytiquement, soit par facettes planes ou de degrés supérieurs, soit par des « panneaux » courbes [INDERMAUR et al. 1999]. Pour initier le drapage suivant le schéma de la Figure 2-14, il est nécessaire de positionner un premier nœud et de fixer deux directions initiales de dépose (chaîne et trame). Il s'agit en général des axes de symétrie s'ils existent. Le résultat du drapage dépend de ces directions.

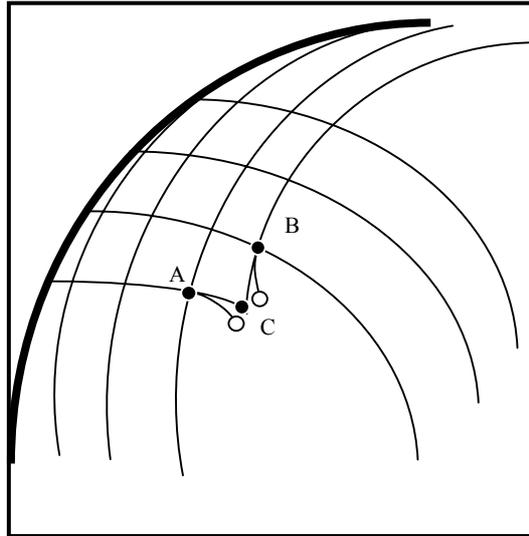


Figure 2-14 *Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B.*

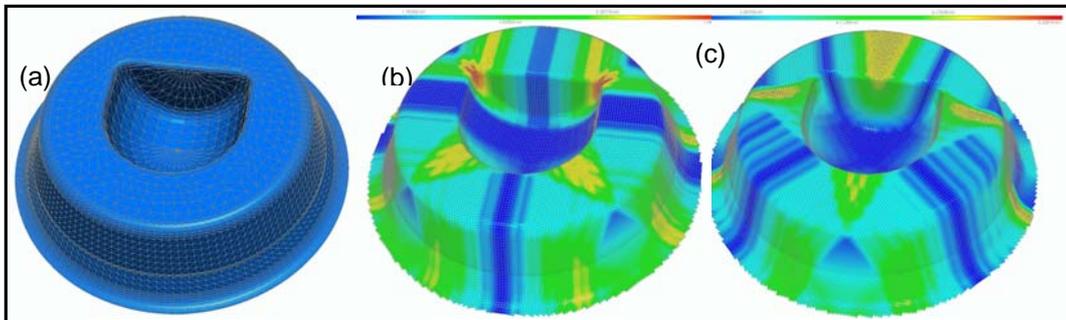


Figure 2-15 *Simulation du drapage d'une pièce fortement non développable à l'aide de l'algorithme du filet. [BOROUCHAKI et al. 2002]*

La Figure 2-15 présente le résultat d'une simulation de drapage pour une pièce mécanique fortement non développable et pour deux orientations initiales des renforts [BOROUCHAKI et al. 2002].

Si la méthode du filet conduit à des outils logiciels rapides (dont de nombreux sont commercialisés)[VAN DER WEEËN 1991], les hypothèses utilisées restreignent l'utilisation de cette méthode. En effet, le résultat est identique quel que soit le matériau utilisé. Or, bien souvent le résultat de la mise en forme dépend des caractéristiques mécaniques du renfort. De plus, les conditions aux limites en efforts, c'est-à-dire, par exemple, les efforts créés par les outils (serre-flan en particulier), ne sont pas pris en compte.

2.2.2 Approche continue

Une première famille des modèles est obtenue en homogénéisant le comportement mécanique de la meso-structure et en considérant le tissu comme un continuum anisotrope [SPENCER 2000][DONG et al. 2001][PENG et al. 2005]. Pour des analyses en déformations finies, les codes élément finis emploient fréquemment les équations constitutives élastiques en taux (loi hypoelastic) :

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \overset{\equiv}{C} : \overset{\equiv}{D} \quad \text{eq(2.2.1)}$$

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \overset{\equiv}{\mathbf{Q}} \cdot \left(\frac{d}{dt} \left(\overset{\equiv}{\mathbf{Q}}^T \cdot \overset{\equiv}{\sigma} \cdot \overset{\equiv}{\mathbf{Q}} \right) \right) \cdot \overset{\equiv}{\mathbf{Q}} = \overset{\bullet}{\sigma} + \overset{\equiv}{\sigma} \cdot \overset{\equiv}{\Omega} - \overset{\equiv}{\Omega} \cdot \overset{\equiv}{\sigma} \quad \text{eq(2.2.2)}$$

$\overset{\equiv}{\sigma}$ et $\overset{\equiv}{D}$ sont respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur de taux de déformation. $\overset{\nabla}{\sigma}$ est la dérivé objectif de $\overset{\equiv}{\sigma}$ associée à la rotation $\overset{\equiv}{\mathbf{Q}}$. Le schéma incrémental classique de Hughes et de Winget [HUGHES 1980] est construit à partir de l'équation eq(2.2.2) pour le calcul des contraintes :

$$\left[\overset{\sigma}{\sigma} \right]_{e_i^{n+1}} = \left[\overset{\sigma}{\sigma} \right]_{e_i^n} + \left[\overset{C}{C} \right]_{e_i^{n+1/2}} \left[\overset{\Delta \varepsilon}{\Delta \varepsilon} \right]_{e_i^{n+1/2}} \quad \text{eq(2.2.3)}$$

avec

$$\left[\overset{\Delta \varepsilon}{\Delta \varepsilon} \right]_{e_i^{n+1/2}} = \left[\overset{D}{D} \right]_{e_i^{n+1/2}} \Delta t \quad \text{eq(2.2.4)}$$

Pour un milieu fibreux, le tenseur constitutif $\overset{\equiv}{C}$ est orienté par $\vec{\mathbf{f}}$ la direction de fibre. $\vec{\mathbf{f}}$ est une direction matérielle. Soit $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ le repère orthonormé obtenu à partir du repère de base initial tourné par $\overset{\equiv}{\mathbf{Q}}$. $\vec{\mathbf{f}}$ n'est en général pas fixe dans $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ puisque c'est une direction matérielle. La direction de fibre initiale $\vec{\mathbf{f}}^0$ est transformée par $\overset{\equiv}{\mathbf{F}}$ (le tenseur de gradient) en $\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{f}}_1$, tandis qu' $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ est tourné par $\overset{\equiv}{\mathbf{Q}}$. Pour traiter cette situation, caractéristique des milieux fibreux, deux approches ont été développées dans le cadre des formulations hypoélastiques présentées ci-dessus. La première [DONG et al. 2001][PENG et al. 2005]emploie la dérivée objective classique de Green Naghdi qui est employé dans certains codes E.F. par exemple ABAQUS. Tous les calculs sont exécutés

dans le repère tourné par la rotation polaire. L'opérateur de comportement est obtenu dans ce repère à partir de sa forme spécifique dans le repère des fibres par un changement de base. La deuxième approche [BOISSE et al. 2005] consiste à utiliser une autre dérivée objective définie par la rotation de la fibre. Il peut être montré [HAGEGE 2004] que dans certains cas, la deuxième approche est préférable.

2.2.3 Approche discrète

L'approche discrète est à l'opposé de l'approche continue, elle considère et modélise les composants des renforts fibreux à une basse échelle. Ces composants peuvent être des mèches, des cellules ou parfois des fibres.

Le fait que ces éléments sont souvent à l'échelle mésoscopique, on parlera dans ce cas de modélisation méso-mécanique [PICKETT et al. 2005]. La plus grande difficulté réside dans la description des composants du modèle discret à l'échelle mésoscopique. Un compromis doit être trouvé entre une description précise (qui peut être coûteux d'un point de vue numérique) et une simple description, qui permettrait de simuler une mise en forme complète.

Certaines analyses ont été proposées où toutes les fibres sont modélisées (modélisation à l'échelle microscopique)[DURVILLE 2002][DUHOVIC et al. 2006] mais le nombre de fibres dans une structure composite limite le calcul à de petites structures.

Des éléments de poutres, de barres ou encore de ressorts sont les plus souvent utilisés pour la représentation des mèches. Dans [PICKETT et al. 2005], un modèle élément fini méso-mécanique de NCF utilise des éléments finis volumique pour chaque mèche est des éléments de barres pour les fils fins (Figure 2-16). Un contact frottant a été pris en compte.

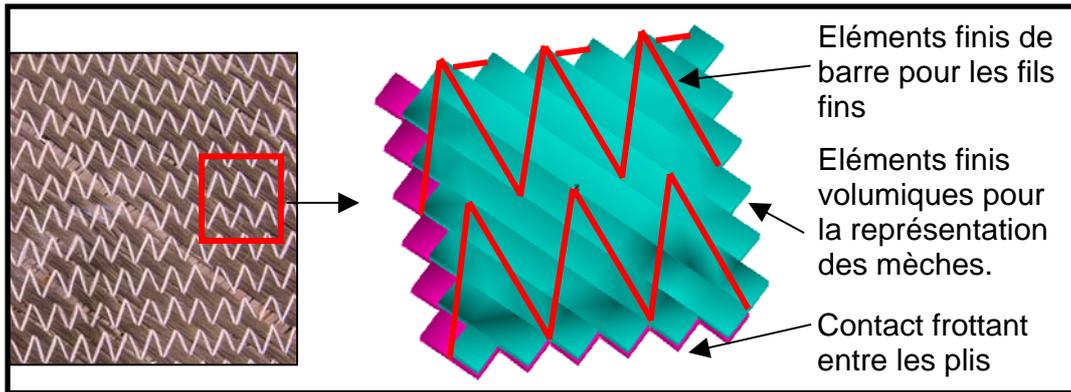


Figure 2-16 Une représentation d'une CER de NCF à l'aide d'un modèle méso mécanique [PICKETT et al. 2005]

2.3 Simulation de la mise en forme des multi plis

Actuellement, pour la simulation de la mise en forme des multi plis, on utilise une couche d'éléments finis par plis et l'itération entre les plis est faite avec une gestion standard du contact entre coques. Certains auteurs ont néanmoins tenté une nouvelle approche où ils traitent l'ensemble des plis à l'aide d'un seul élément fini. Cela implique bien entendu que de la matière circule à travers le domaine de contrôle et impose d'utiliser une approche ALE [LAMERS 2004][TEN THIJE 2007]. La formulation ALE se décompose en une étape lagrangienne, puis une étape de remaillage où la position des nœuds est déterminée, et enfin une étape convective où les grandeurs physiques sont réactualisées. Une étude de faisabilité a été effectuée dans ce sens et sera brièvement présentée au chapitre 6.

3 Eléments finis semi-discrets pour le formage des renforts tissés

Dans le chapitre 2 on a présenté différentes approches pour la simulation du drapage. Une alternative aux approches continues ou aux approches discrètes serait l'approche semi discrète. Elle consiste à représenter un ensemble de cellules élémentaires à l'aide d'un seul élément fini. Le gain par rapport à l'approche discrète est immédiat dans la mesure où le nombre de DDL s'en trouve fortement diminué. Ce gain existe également par rapport à l'approche continue car seules les énergies de déformation de modèles simplifiés d'un nombre fini de cellules sont prises en compte au lieu d'utiliser un modèle continu homogénéisé complexe à déterminer et à actualiser.

La rigidité des tissus se décompose en trois rigidités principales. Les rigidités membranaires, à savoir la rigidité liée à la tension des fibres et celle liée au cisaillement dans le plan des mèches (i.e. la variation d'angle entre les mèches), sont les plus importantes, et la rigidité en flexion s'opposant à la courbure du tissu. La rigidité en tension prédomine sur les autres rigidités. La caractérisation de ces rigidités a souvent été effectuée à l'échelle mésoscopique, et est exploitée à l'échelle macroscopique en les introduisant dans les éléments finis semi-discrets.

Les développements suivants ont été effectués dans un code élément fini explicite, nommé PLAST3D, mis en œuvre par M. Brunet, H. Walter et L. Baillet. Le schéma temporel utilisé étant le schéma β_2 , ses grands traits seront en un premier temps présentés.

La convention de sommation d'Einstein est adoptée pour les indices latins. Les indices grecs répétés ne sont donc pas sommés.

La convention de notation adoptée pour les matrices lignes et colonnes est celle utilisée par Batoz :

- $\{ \}$ Matrice colonne.
- $\langle \rangle$ Matrice ligne.
- $[]_{n \times m}$ Matrice $n \times m$ où n et m sont différents de 1.

3.1 Schéma temporel explicite adopté

Le schéma utilisé dans PLAST3D est le schéma β_2 . Il s'agit d'un schéma standard qui peut être consulté, par exemple dans le chapitre 6 de [BELYTSCHKO et al. 2000] ou le chapitre 10 de [ZIENKIEWICZ et al. 2000].

3.1.1 Cadre général :

Dans le schéma β_2 les degrés de liberté sont discrétisés sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \{u_{n+1}\} = \{q_0\} + b_0 \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\} \\ \{\dot{u}_{n+1}\} = \{q_1\} + b_1 \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\} \\ \{\ddot{u}_{n+1}\} = \{q_2\} + b_2 \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\} \end{cases} \quad \text{eq(3.1.1)}$$

$$\begin{aligned} \{q_0\} &= \{u_n\} + \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{u}_n\} & b_0 &= \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta_0 \\ \text{Avec : } \{q_1\} &= \{\dot{u}_n\} + \Delta t \{\ddot{u}_n\} & \text{et : } b_1 &= \Delta t \beta_1 \\ \{q_2\} &= \{\ddot{u}_n\} & b_2 &= 1 \\ & & \Delta t &= t_{n+1} - t_n \end{aligned}$$

3.1.2 En explicite

Dans le cadre explicite $\beta_0=0$ (pour alléger l'écriture on écrit $\beta = \beta_1$), d'où :

$$\begin{cases} \{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{u}_n\} \\ \{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + \Delta t \{\ddot{u}_n\} + \Delta t \beta \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\} \\ \{\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{u}_n\} + \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\} \end{cases} \quad \text{eq(3.1.2)}$$

L'incrément d'accélération $\{\Delta\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{u}_{n+1}\} - \{\ddot{u}_n\}$ nous permet de réécrire la vitesse sous la forme :

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + \Delta t(1 - \beta)\{\ddot{u}_n\} + \Delta t\beta\{\ddot{u}_{n+1}\}$$

L'incrément de déplacement s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{aligned}\{\Delta u_{n+1}\} &= \{u_{n+2}\} - \{u_{n+1}\} \\ &= \Delta t\{\dot{u}_{n+1}\} + \frac{1}{2}\Delta t^2\{\ddot{u}_{n+1}\} \\ &= \Delta t\{\dot{u}_n\} + \Delta t^2(1 - \beta)\{\ddot{u}_n\} + \Delta t^2\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\{\ddot{u}_{n+1}\}\end{aligned}$$

Finalement on a:

$$\boxed{\{\dot{u}_{n+1}\} = \frac{\beta}{\Delta t(\beta + \frac{1}{2})}\{\Delta u_{n+1}\} + \frac{1}{2\beta + 1}\{\dot{u}_n\} + \Delta t\frac{1 - \beta}{2\beta + 1}\{\ddot{u}_n\}}$$
 eq(3.1.3)

$$\boxed{\{\ddot{u}_{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t^2(\beta + \frac{1}{2})}\{\Delta u_{n+1}\} - \frac{1}{\Delta t(\beta + \frac{1}{2})}\{\dot{u}_n\} - \frac{1 - \beta}{\beta + \frac{1}{2}}\{\ddot{u}_n\}}$$
 eq(3.1.4)

3.1.3 Equation de la dynamique et mise en oeuvre

L'équation de la dynamique s'écrit à tout instant sous la forme :

$$\boxed{[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + \{F_{int}\} = \{F_{ext}\}}$$
 eq(3.1.5)

Où $[M]$ est la matrice de masse diagonalisée (mass lumping) tel que décrit dans [ZIENKIEWICZ et al. 2000]), $[C]$ matrice d'amortissement, $\{F_{int}\}$ les forces internes et $\{F_{ext}\}$ les forces externes.

Les conditions initiales étant en déplacement $\{u_{(t=0)}\} = \{u_0\}$ et en vitesse $\{\dot{u}_{(t=0)}\} = \{\dot{u}_0\}$.

la vitesse et l'accélération s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} \{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{\tilde{u}}_n\} + \frac{\beta}{\Delta t(\beta + \frac{1}{2})} \{\Delta u_{n+1}\} \\ \{\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{\tilde{u}}_n\} + \frac{1}{\Delta t^2(\beta + \frac{1}{2})} \{\Delta u_{n+1}\} \end{cases} \quad \text{eq(3.1.6)}$$

Où :

$$\begin{cases} \{\dot{\tilde{u}}_n\} = \frac{1}{2\beta + 1} \{\dot{u}_n\} + \Delta t \frac{1 - \beta}{2\beta + 1} \{\ddot{u}_n\} \\ \{\ddot{\tilde{u}}_n\} = -\frac{1}{\Delta t(\beta + \frac{1}{2})} \{\dot{u}_n\} - \frac{1 - \beta}{\beta + \frac{1}{2}} \{\ddot{u}_n\} \end{cases}$$

La matrice d'amortissement est prise égale à $\alpha[M]$

L'incrément de déplacement sera :

$$\frac{\alpha\beta + \frac{1}{\Delta t}}{\Delta t(\beta + \frac{1}{2})} [M] \{\Delta u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^{ext}\} - \{F_{n+1}^{int}\} - \alpha[M] \{\dot{\tilde{u}}_n\} - [M] \{\ddot{\tilde{u}}_n\} \quad \text{eq(3.1.7)}$$

Rappelons que $\{\Delta u_{n+1}\} = \{u_{n+2}\} - \{u_{n+1}\}$.

Le schéma est conditionnellement stable pour β compris entre 0.5 et 1. Cela implique qu'il est soumis à la condition de stabilité imposant que le pas de temps Δt soit inférieur à un pas de temps critique. Il s'agit du critère de stabilité de Courant-Frederick-Lewis. Il est obtenu en calculé en effectuant une analyse spectrale de la matrice d'amplification. Pour $\beta=0.5$ le schéma $\beta 2$ est le schéma des différences centrales. Le fait de le prendre plus grand que 0.5 permet d'introduire de l'amortissement numérique qui élimine les hautes fréquences, et peut si nécessaire stabiliser de nombreux calculs.

3.2 La rigidité membranaire

Les éléments finis semi-discrets définis au préalable dans [BOISSE et al. 2001]et [ZOUARI et al. 2006] imposent que les cotés des éléments soient dirigés par les mèches chaînes et trames. Cela rend le maillage parfois difficile et limite les possibilités de remaillages éventuels. Pour palier cette difficulté, un

élément fini triangulaire, dont la base naturelle est indépendante de l'orientation des mèches, est introduit. Il est en particulier nécessaire pour les simulations de mise en forme simultanées de plusieurs plis lorsque les plis ont une orientation différente (par exemple simulations du paragraphe 5.4.3)

3.2.1 *Eléments de Cinématique*

Ce paragraphe reprend des points standards de la théorie des milieux continus consultables par exemple dans [BASAR et al. 2000] et [BONET et al. 1997].

On définit en un premier lieu un référentiel spatial $\mathbf{R}_{spatial}$ invariant avec le temps et la position d'un point M de la surface caractérisant le tissu, dans le repère $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ à l'aide du vecteur :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overline{OM} \\ &= x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad \text{eq(3.2.1)}$$

Un référentiel matériel est associé au tissu paramétré à l'aide des paramètres (r^1, r^2) , orientés de sorte que les vecteurs de la base naturelle (covariante) $\{\vec{k}_1, \vec{k}_2\}$ soient dans la direction des mèches (Figure 3-1).

Pour $\alpha = 1, 2$ on a :

$$\vec{k}_\alpha = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r^\alpha} \quad \text{eq(3.2.2)}$$

La base duale (contravariante) se définit, de sorte que $\vec{k}_\alpha \cdot \vec{k}^\beta = \delta_\alpha^\beta$ (δ_α^β symbole de Kronecker), par:

$$\vec{k}^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i} \vec{e}_i \quad \text{eq(3.2.3)}$$

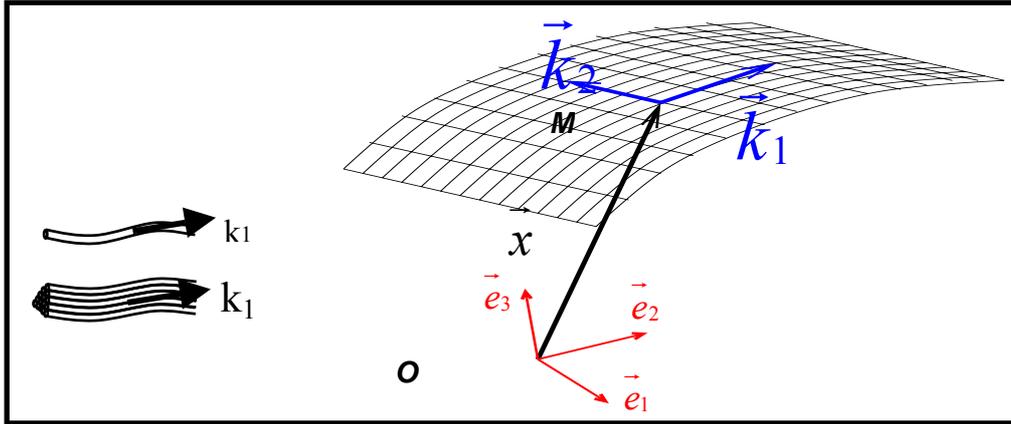


Figure 3-1 Référentiel spatial et référentiel tissu

Les fibres sont orientées par les vecteurs normés \vec{h}_α (pour $\alpha=1,2$). \vec{h}_α et \vec{h}^α sont définis par :

$$\vec{h}_\alpha = \frac{1}{\|\vec{k}_\alpha\|} \vec{k}_\alpha \quad \vec{h}^\alpha = \frac{1}{\|\vec{k}^\alpha\|} \vec{k}^\alpha \quad \text{eq(3.2.4)}$$

Ces deux jeux de vecteurs ne sont pas duaux dans la mesure où, $\vec{h}^\alpha \cdot \vec{h}_\beta$ est certes nul pour $\alpha \neq \beta$, mais est différent de un pour $\alpha = \beta$.

Un troisième paramétrage (ξ^1, ξ^2) est défini (qui correspondra par la suite aux coordonnées du repère isoparamétrique des éléments finis), auquel on associe la base naturelle $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ tel que :

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^\alpha} \quad \vec{g}^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \vec{e}_i \quad \text{eq(3.2.5)}$$

Pour tout champ de vecteurs des déplacements virtuels $\vec{\eta}(\xi^1, \xi^2)$, on définit le tenseur gradient qui associe à un fibré matériel (infinitésimal) \vec{dx} de \mathcal{S} le vecteur $\vec{d\eta}$ tel que :

$$d\vec{\eta} = \overline{\nabla} \vec{\eta} \cdot d\vec{x} \quad \text{eq(3.2.6)}$$

On a :

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{\eta} = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^i} \cdot \vec{k}_j (\vec{k}^i \otimes \vec{k}^j) \quad \text{eq(3.2.7)}$$

On peut ainsi exprimer la composante du gradient dans la direction des mèches \vec{k}_α (sans sommation sur les α):

$$\overline{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \vec{k}_\alpha \cdot \overline{\overline{\nabla}}\vec{\eta} \cdot \vec{k}_\alpha = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^\alpha} \cdot \vec{k}_\alpha \quad \text{eq(3.2.8)}$$

$\overline{\varepsilon}_{\alpha\alpha}$ n'est pas une composante dans une base normée. On considère $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ la composante axiale de déformation dans la direction de la mèche :

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\alpha} = \vec{h}_\alpha \cdot \overline{\overline{\nabla}}\vec{\eta} \cdot \vec{h}_\alpha = \frac{1}{\|\vec{k}_\alpha\|^2} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^\alpha} \cdot \vec{k}_\alpha = \frac{1}{\|\vec{k}_\alpha\|^2} \overline{\varepsilon}_{\alpha\alpha}} \quad \text{eq(3.2.9)}$$

L'angle de cisaillement correspond au changement d'angle entre les mèches. La formulation qui suit permet d'identifier pour un champ virtuel un angle virtuel associé.

En supposant que le tissu est soumis à un champ $\vec{\eta}(\xi^1, \xi^2)$, le fibré matériel \vec{dx} deviendra $\vec{\delta x} = \vec{dx} + \vec{d\eta}$.

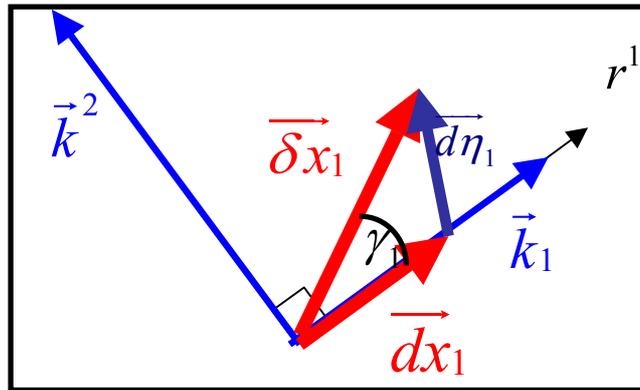


Figure 3-2 Terme du cisaillement lié au fibré 1

Après déformation, le fibré \vec{dx}_1 orienté selon \vec{k}_1 devient $\vec{\delta x}_1$. On s'intéresse à l'angle $\gamma_1 = \gamma_1(\vec{\eta})$ entre \vec{dx}_1 et $\vec{\delta x}_1$, défini par :

$$\begin{aligned}\sin(\gamma_1) &= \frac{\overrightarrow{\delta x_1} \cdot \vec{k}^2}{\|\overrightarrow{\delta x_1}\| \|\vec{k}^2\|} \\ &= \frac{(\overrightarrow{dx_1} + \overrightarrow{d\eta_1}) \cdot \vec{h}^2}{\|\overrightarrow{\delta x_1}\|}\end{aligned}\quad \text{eq(3.2.10)}$$

$\overrightarrow{dx_1}$ est orienté par \vec{k}_1 et par conséquent orthogonal à \vec{h}^2 d'où :

$$\sin(\gamma_1) = \frac{\overrightarrow{d\eta_1} \cdot \vec{h}^2}{\|\overrightarrow{\delta x_1}\|} \quad \text{eq(3.2.11)}$$

En supposant le champ $\vec{\eta}$ petit nous pouvons faire l'approximation $\|\overrightarrow{\delta x_1}\| = \|\overrightarrow{dx_1}\|$ et $\sin(\gamma_1) = \gamma_1$. Et finalement:

$$\gamma_1 = \frac{\overrightarrow{d\eta_1} \cdot \vec{h}^2}{\|\overrightarrow{dx_1}\|} \quad \text{eq(3.2.12)}$$

γ_1 s'exprime en fonction du gradient sous la forme:

$$\overrightarrow{d\eta_1} = \overline{\nabla} \vec{\eta} \cdot \overrightarrow{dx_1} = \overline{\nabla} \vec{\eta} (dx_1 \vec{h}_1)$$

$$\gamma_1 = \left(\overline{\nabla} \vec{\eta} \cdot \vec{h}_1 \right) \cdot \vec{h}^2$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\vec{k}^2\| \|\vec{k}_1\|} \left(\vec{k}^2 \cdot \overline{\nabla} \vec{\eta} \cdot \vec{k}_1 \right) = \frac{1}{\|\vec{k}^2\| \|\vec{k}_1\|} \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^1} \cdot \vec{k}_1 \left(\vec{k}^2 \cdot \vec{k}^1 \right) + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^2} \cdot \vec{k}_1 \left(\vec{k}^2 \cdot \vec{k}^2 \right) \right)$$

Enfin:

$$\boxed{\gamma_1 = \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^1} \cdot \vec{k}_1 \right) \frac{\vec{k}^2 \cdot \vec{k}^1}{\|\vec{k}^2\| \|\vec{k}_1\|} + \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^2} \cdot \vec{k}_1 \right) \frac{\|\vec{k}^2\|}{\|\vec{k}_1\|}} \quad \text{eq(3.2.13)}$$

La même opération est effectuée sur γ_2^* :

$$\gamma_2 = -\frac{d\vec{\eta}_2 \cdot \vec{h}^1}{dx_2} \quad \text{eq(3.2.14)}$$

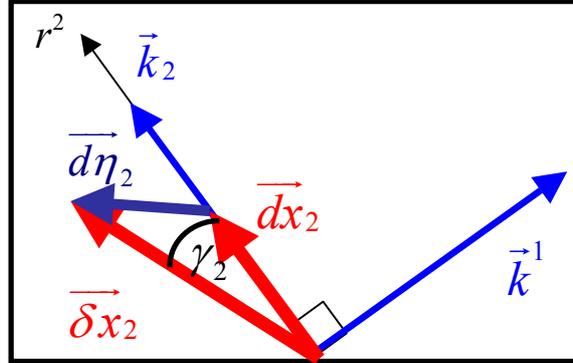


Figure 3-3 Terme du cisaillement lié au fibré 2

$$d\vec{\eta}_2 = \vec{\nabla} \vec{\eta} \cdot d\vec{x}_2 = \vec{\nabla} \vec{\eta} (dx_2 \vec{h}_2) \quad \text{eq(3.2.15)}$$

$$\gamma_2 = -\vec{h}^1 \cdot \vec{\nabla} \vec{\eta} \cdot \vec{h}_2 \quad \text{eq(3.2.16)}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\|\vec{k}^1\| \|\vec{k}_2\|} (\vec{k}^1 \cdot \vec{\nabla} \vec{\eta} \cdot \vec{k}_2)$$

$$\gamma_2 = -\left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^2} \cdot \vec{k}_2 \right) \frac{\vec{k}^1 \cdot \vec{k}^2}{\|\vec{k}^1\| \|\vec{k}_2\|} - \left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^1} \cdot \vec{k}_2 \right) \frac{\|\vec{k}^1\|}{\|\vec{k}_2\|} \quad \text{eq(3.2.17)}$$

Au final la variation d'angle entre les mèches 1 et 2 et :

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \vec{h}^2 \cdot \vec{\nabla} \vec{\eta} \cdot \vec{h}_1 + \vec{h}^1 \cdot \vec{\nabla} \vec{\eta} \cdot \vec{h}_2 \quad \text{eq(3.2.18)}$$

3.2.2 Composantes de déformations axiales virtuelles et distorsions virtuelles

Par un jeu de dérivées partielles successives on a :

* Le signe ‘-’ est lié à l’orientation de l’angle

$$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^1} \frac{\partial \xi^1}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi^2}{\partial r^\alpha} \quad \text{eq(3.2.19)}$$

$$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^1} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial r^\alpha} \right) + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial r^\alpha} \right) \quad \text{eq(3.2.20)}$$

En exploitant les équations eq(3.2.2) et eq(3.2.5) on a:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r^\beta} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial r^\beta} = \vec{g}^{-\alpha} \cdot \vec{k}_\beta \quad \text{eq(3.2.21)}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^1} \vec{g}^{-1} \cdot \vec{k}_\alpha + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^2} \vec{g}^{-2} \cdot \vec{k}_\alpha \quad \text{eq(3.2.22)}$$

D'où les termes en élongation (somme sur les i):

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\|\vec{k}_\alpha\|^2} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial r^\alpha} \cdot \vec{k}_\alpha \\ &= \frac{(\vec{g}^{-i} \cdot \vec{k}_\alpha)}{\|\vec{k}_\alpha\|^2} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^i} \cdot \vec{k}_\alpha \end{aligned}} \quad \text{eq(3.2.23)}$$

Et les termes en variations d'angles (somme sur les i):

$$\boxed{\gamma = \gamma_1 - \gamma_2} \quad \text{eq(3.2.24)}$$

avec :

$$\gamma_1 = \left(\left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^i} \cdot \vec{k}_1 \right) (\vec{g}^{-i} \cdot \vec{k}_1) \right) \frac{\vec{k}^2 \cdot \vec{k}^1}{\|\vec{k}^2\| \|\vec{k}^1\|} + \left(\left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^i} \cdot \vec{k}_1 \right) (\vec{g}^{-i} \cdot \vec{k}_2) \right) \frac{\|\vec{k}^2\|}{\|\vec{k}^1\|} \quad \text{eq(3.2.25)}$$

$$\gamma_2 = - \left(\left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^i} \cdot \vec{k}_2 \right) (\vec{g}^{-i} \cdot \vec{k}_2) \right) \frac{\vec{k}^1 \cdot \vec{k}^2}{\|\vec{k}^1\| \|\vec{k}^2\|} - \left(\left(\frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^i} \cdot \vec{k}_2 \right) (\vec{g}^{-i} \cdot \vec{k}_1) \right) \frac{\|\vec{k}^1\|}{\|\vec{k}^2\|} \quad \text{eq(3.2.26)}$$

3.2.3 Travaux virtuels et modélisation des efforts

Le principe des travaux virtuels s'écrit sous la forme suivante :

$\forall \vec{\eta}$ cinématiquement admissible à zéro on a :

$$W(\vec{\eta}) = 0 = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} - W_{\text{acc}} \quad \text{eq(3.2.27)}$$

- W_{int} : Travail virtuel des efforts internes.
- W_{ext} : Travail virtuel des forces externes.
- W_{acc} : Travail virtuel des forces d'accélération.

La particularité du tissu réside dans l'écriture du travail virtuel des efforts internes qui diffère de son écriture dans le cadre des milieux continus. La formulation du travail virtuel des efforts membranaires a été longuement discutée dans le chapitre 2.1.3. Partant de ces hypothèses sur les différentes rigidités, l'énergie virtuelle des efforts internes d'un renfort composite est utilisée sous la forme:

eq(3.2.28)

$$-W_{\text{int}}^{*t} = \sum_{p=1}^{n_{\text{CER}}} \left(\varepsilon_{11}(\vec{\eta}) T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_1^p + \varepsilon_{22}(\vec{\eta}) T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_2^p \right) + \sum_{p=1}^{n_{\text{CER}}} \gamma(\vec{\eta}) C_\gamma$$

n_{CER} étant le nombre de cellules élémentaires dans le domaine, $\varepsilon_{11}(\vec{\eta})$ et $\varepsilon_{22}(\vec{\eta})$ étant les déformations virtuelles dans les directions \vec{h}_1 et \vec{h}_2 dans le champ virtuel $\vec{\eta}$, L_1^p et L_2^p les longueurs de CER dans les directions \vec{h}_1 et \vec{h}_2 , et $\gamma(\vec{\eta})$ l'angle entre \vec{h}_1 et \vec{h}_2 dans le champ de déplacement virtuel $\vec{\eta}$. Les différentes grandeurs sont supposées constantes dans chaque CER.

3.2.4 Discrétisation élément fini

Les fonctions de forme d'un élément fini triangulaire sont (se référer à la numérotation de la Figure 3-4 (a)) :

$$\{N_T\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi^1, \xi^2) \\ N_2(\xi^1, \xi^2) \\ N_3(\xi^1, \xi^2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \xi^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \xi^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.2.29)}$$

D'où leurs dérivées par rapport à leurs paramètres :

$$\left\langle \frac{\partial N_T}{\partial \xi^1} \right\rangle = \langle -1 \ 1 \ 0 \rangle \quad \text{eq(3.2.30)}$$

$$\left\langle \frac{\partial N_T}{\partial \xi^2} \right\rangle = \langle -1 \ 0 \ 1 \rangle \quad \text{eq(3.2.31)}$$

Pour un quadrangle à quatre nœuds (se référer à la numérotation de la Figure 3-4 (b)):

$$\{N_Q\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi^1, \xi^2) \\ N_2(\xi^1, \xi^2) \\ N_3(\xi^1, \xi^2) \\ N_4(\xi^1, \xi^2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \xi^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \xi^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \xi^1 \xi^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.2.32)}$$

$$\left\langle \frac{\partial N_Q}{\partial \xi^1} \right\rangle = \frac{1}{4} \langle -1 \ 1 \ 1 \ -1 \rangle + \frac{1}{4} \xi^2 \langle 1 \ -1 \ 1 \ -1 \rangle \quad \text{eq(3.2.33)}$$

$$\left\langle \frac{\partial N_Q}{\partial \xi^2} \right\rangle = \frac{1}{4} \langle -1 \ -1 \ 1 \ 1 \rangle + \frac{1}{4} \xi^1 \langle 1 \ -1 \ 1 \ -1 \rangle \quad \text{eq(3.2.34)}$$

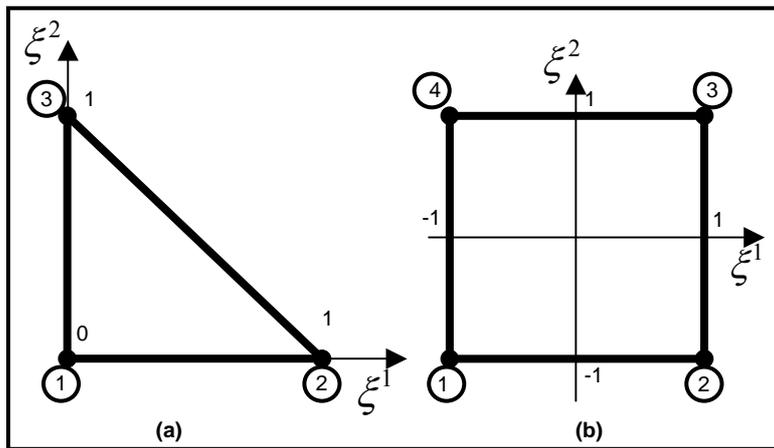


Figure 3-4 Repères isoparamétrique du triangle (a) et du quadrangle (b).

Et les vecteurs de la base isoparamétrique sont dans les deux cas:

$$\vec{g}_1 = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi^1} \right\rangle \{\vec{x}\} \quad \text{eq(3.2.35)}$$

$$\vec{g}_2 = \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi^2} \right\rangle \{\vec{x}\} \quad \text{eq(3.2.36)}$$

$\{\vec{x}\}$ étant la colonne contenant les vecteurs positions des nœuds de l'élément fini.

Les vecteurs de la base naturelle sont constants dans l'élément fini triangulaire, et ainsi tous les fibrés initialement parallèles entre eux le restent au cours du calcul. De plus la taille des CER est constante dans chaque élément. Cela n'est pas le cas pour le quadrangle, ce qui complique considérablement la sommation sur les CER.

Jusqu'ici seuls des éléments finis ayant une base matérielle confondue avec la base isoparamétrique ont été exploités dans la formulation semi-discrète [BOISSE et al. 2001][ZOUARI et al. 2006].

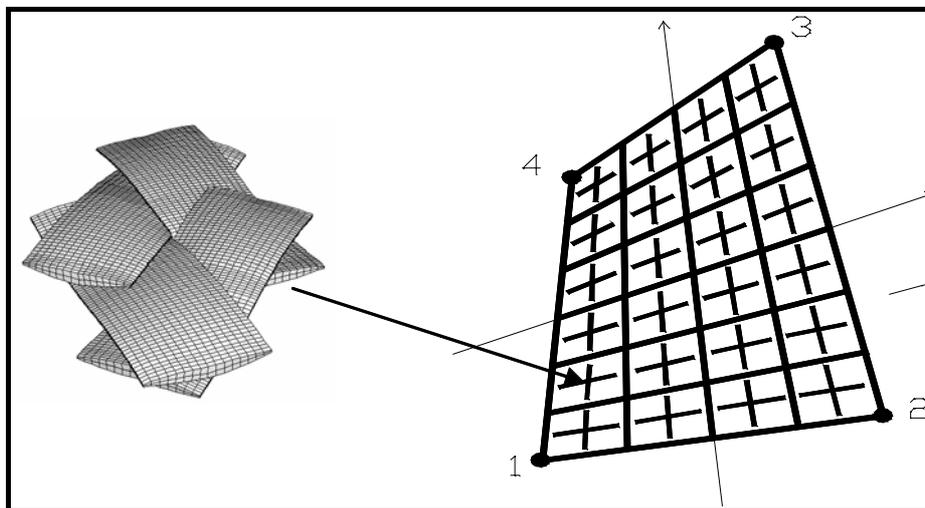


Figure 3-5 Elément finis quadrangulaire semi discret.

Pour les éléments finis quadrangulaire où les vecteurs de la base naturelle de l'élément sont orientés par les fibres, il a été établit une relation qui permet de

définir la position de « Cellule de Gauss » qui permet un calcul réduit de la sommation sur l'ensemble des CER de l'élément fini (à l'instar des points de Gauss). Les forces internes peuvent être écrites :

eq(3.2.37)

$$\{F_{int}^e\} = \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\delta=1}^2 \frac{n_c n_t}{4} \left(\begin{array}{l} \frac{L_1}{\|\vec{k}_1(\lambda_1, \lambda_2)\|^2} T^{11}(\lambda_1, \lambda_2) \{B_{11}(\lambda_1, \lambda_2)\} + \frac{L_2}{\|\vec{k}_2(\lambda_1, \lambda_2)\|^2} T^{22}(\lambda_1, \lambda_2) \{B_{22}(\lambda_1, \lambda_2)\} \\ + C(\lambda_1, \lambda_2) \{B_\gamma(\lambda_1, \lambda_2)\} \end{array} \right)$$

La position des Cellule de Gauss étant défini par :

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{(n_c^2 - 1)}{3n_c^2}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{n_t^2 - 1}{3n_t^2}}$$

n_c et n_t étant le nombre de chaîne et de trame traversant l'élément fini. On constatera que lorsque le nombre de CER tend vers l'infini la position des cellules de Gauss tend vers la position des points de Gauss.

3.2.5 Élément fini semi-discret à direction quelconque

Définissons :

$\langle \vec{\eta}_1 \vec{\eta}_2 \vec{\eta}_3 \rangle$: Les vecteurs déplacements virtuels nodaux.

$\langle \eta \rangle = \langle \langle \eta_1 \rangle : \langle \eta_2 \rangle : \langle \eta_3 \rangle \rangle$: Les degrés de liberté de l'élément où :

$$\langle \eta_i \rangle = \langle \vec{\eta}_i \cdot \vec{e}_1 \quad \vec{\eta}_i \cdot \vec{e}_2 \quad \vec{\eta}_i \cdot \vec{e}_3 \rangle = \langle \eta_{1i} \quad \eta_{2i} \quad \eta_{3i} \rangle$$

Et les coordonnées de \vec{k}_i dans la base globale :

$$\langle k_i \rangle = \langle \vec{k}_i \cdot \vec{e}_1 : \vec{k}_i \cdot \vec{e}_2 : \vec{k}_i \cdot \vec{e}_3 \rangle$$

La composante du gradient du champ virtuel dans la direction de la mèche orientée par \vec{g}_α s'exprime en fonction des DDL par :

eq(3.2.38)

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}(\vec{\eta}) = \frac{\vec{k}_\alpha}{\|\vec{k}_\alpha\|^2} \cdot \left\langle \frac{\partial N_1(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i}(\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) : \frac{\partial N_2(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i}(\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) : \frac{\partial N_3(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i}(\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \right\rangle \begin{Bmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \dots \\ \vec{\eta}_2 \\ \dots \\ \vec{\eta}_3 \end{Bmatrix}$$

Et on a $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \langle B_{\alpha\alpha} \rangle \{ \eta \}$ avec :

eq(3.2.39)

$$\langle B_{\alpha\alpha} \rangle = \frac{1}{\|\vec{k}_\alpha\|^2} \left\langle \frac{\partial N_1(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i}(\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \langle k_\alpha \rangle : \frac{\partial N_2(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i}(\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \langle k_\alpha \rangle : \frac{\partial N_3(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i}(\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \langle k_\alpha \rangle \right\rangle$$

La déformation des mèches est obtenue à l'aide d'un cumul dans la direction de la mèche :

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{n+1} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^n + \langle B_{\alpha\alpha} \rangle \{ \Delta u_n^{n+1} \} \quad \text{eq(3.2.40)}$$

Et au final les forces internes dues aux tensions sont:

$$\begin{aligned} -W_{int}^t &= \langle \eta \rangle \sum_{p=1}^{n_{CER}} \left(\{ B_{11} \} T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_1^p + \{ B_{22} \} T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_2^p \right) \\ F_{int}^t &= \sum_{p=1}^{n_{CER}} \left(\{ B_{11} \} T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_1^p + \{ B_{22} \} T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) L_2^p \right) \end{aligned} \quad \text{eq(3.2.41)}$$

La discrétisation de l'angle de cisaillement se fait comme suit :

eq(3.2.42)

$$\gamma_1 = \sum_I^{noeuds} \left(\left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \cdot \vec{k}_1 \right) (\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \right) \frac{\vec{k}^2 \cdot \vec{k}^1}{\|\vec{k}^2\| \|\vec{k}^1\|} + \left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \cdot \vec{k}_1 \right) (\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \right) \frac{\|\vec{k}^2\|}{\|\vec{k}^1\|} \right) \vec{\eta}_I$$

eq(3.2.43)

$$\gamma_2 = - \sum_I^{noeuds} \left(\left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \cdot \vec{k}_2 \right) (\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \right) \frac{\vec{k}^1 \cdot \vec{k}^2}{\|\vec{k}^1\| \|\vec{k}^2\|} + \left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \cdot \vec{k}_2 \right) (\vec{g} \cdot \vec{k}_\alpha) \right) \frac{\|\vec{k}^1\|}{\|\vec{k}^2\|} \right) \vec{\eta}_I$$

eq(3.2.44)

$$\gamma = \sum_I^{noeuds} \left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \langle k_1 \rangle \right) (\bar{g}^j \cdot \bar{k}_1) \right) \frac{\bar{k}^2 \cdot \bar{k}^1}{\|\bar{k}^2\| \|\bar{k}_1\|} + \left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \langle k_1 \rangle \right) (\bar{g}^j \cdot \bar{k}_2) \right) \frac{\|\bar{k}^2\|}{\|\bar{k}_1\|} + \left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \langle k_2 \rangle \right) (\bar{g}^j \cdot \bar{k}_1) \right) \frac{\bar{k}^1 \cdot \bar{k}^2}{\|\bar{k}^1\| \|\bar{k}_2\|} + \left(\left(\frac{\partial N_I(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^j} \langle k_2 \rangle \right) (\bar{g}^j \cdot \bar{k}_2) \right) \frac{\|\bar{k}^1\|}{\|\bar{k}_2\|} \right) \{\eta_i\}$$

Que l'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\gamma = \langle B_\gamma \rangle \{\eta\} \quad \text{eq(3.2.45)}$$

Et finalement les forces internes dues au cisaillement:

$$\begin{aligned} -W_{\text{int}}^c &= \langle \eta \rangle \sum_{p=1}^{n_{\text{CER}}} \{B_\gamma\} C_\gamma \\ F_{\text{int}}^c &= \sum_{p=1}^{n_{\text{CER}}} \{B_\gamma\} C_\gamma \end{aligned} \quad \text{eq(3.2.46)}$$

L'expression des forces internes est établie dans n'importe quelle base matérielle. Pour les triangles, il existe une base particulièrement avantageuse pour la sommation sur l'ensemble des CER. Connaissant la base $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$, reste à déterminer $\{\bar{k}_1, \bar{k}_2\}$. Soulignons que $\bar{g}^i \cdot \bar{k}_\alpha$ et la i ème coordonnée de \bar{g}_α dans la base $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$. Sachant que les deux bases sont matérielles (elles sont associées aux mêmes fibrés matériels au cours du temps), les coordonnées de l'une dans l'autre sont inchangées durant le calcul. Leur calcul ne s'effectue qu'une fois avant de boucler sur l'ensemble des pas de temps. L'orientation initiale des fibres est connue pour l'ensemble du tissu. Cette information étant introduite, lors de la mise en donnée, à l'aide des vecteurs directeurs \bar{h}_1 et \bar{h}_2 (pour la fibre 1 et 2). En un premier temps on recherche le sommet par lequel la mèche passe à « l'intérieur du triangle ». Cette condition, en supposant que le sommet soit le point A s'écrit (cf. la Figure 3-6) :

$$\overline{(AB \wedge \bar{h}) \cdot (\bar{h} \wedge AC)} \geq 0 \quad \text{eq(3.2.47)}$$

La seconde étape consiste à calculer le point d'intersection P de la droite (BC) et de la droite passant par A et de directrice \vec{h} . On en déduit le coefficient a tel que $\vec{BP} = a \vec{BC}$.

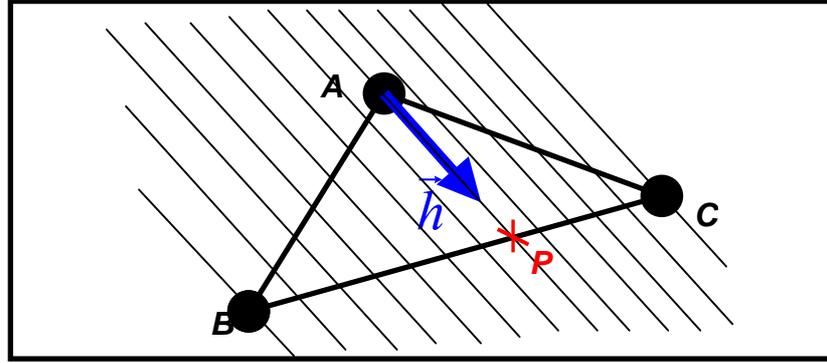


Figure 3-6 Choix de la base matérielle

A supposer que $\vec{g}_1 = \vec{BC}$, $\vec{g}_2 = \vec{BA}$ et $\vec{k}_i = \vec{PA}$ on aura $\vec{k}_i = \vec{g}_2 - a \vec{g}_1$. Ce qui nous donne $\vec{g}^{-1} \cdot \vec{k}_i = -a$ et $\vec{g}^{-2} \cdot \vec{k}_i = 1$. Cette forme de description apporte un avantage certain à l'intégration de l'énergie de l'élément.

Afin de visualiser la mise en œuvre de l'élément fini un exemple de configuration et de valeur pour l'effort interne est proposé. On se place dans le cas de la Figure 3-7. Les coordonnées de la base matérielle sont :

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \left(\vec{g}^{-1} \cdot \vec{k}_1 \right) \vec{g}_1 + \left(\vec{g}^{-2} \cdot \vec{k}_1 \right) \vec{g}_2 & \vec{k}_2 &= \left(\vec{g}^{-1} \cdot \vec{k}_2 \right) \vec{g}_1 + \left(\vec{g}^{-2} \cdot \vec{k}_2 \right) \vec{g}_2 \\ \vec{k}_1 &= \vec{g}_1 - a \vec{g}_2 & \vec{k}_2 &= -b \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \end{aligned}$$

Ainsi les dérivées des déplacement virtuels s'exprimeront en fonction de leurs composantes nodales sous la forme (en utilisant l'équation eq(3.2.21)) :

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial r^j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r^j} = \langle a-1 \quad 1 \quad -a \rangle \langle \eta_{i1} \quad \eta_{i2} \quad \eta_{i3} \rangle^T \quad \text{eq(3.2.48)}$$

D'où l'expression du travail virtuel en tension (somme sur i et j) de l'élément :

$$-W_{int}^{te}(\vec{\eta}) = -\langle \eta^e \rangle \{ F_{int}^{te} \} = \left(\sum_{p=1}^{ncelle} {}^p B_{1ij} {}^p T^{11} \frac{{}^p L_1}{\|\vec{k}_1\|^2} + {}^p B_{2ij} {}^p T^{22} \frac{{}^p L_2}{\|\vec{k}_2\|^2} \right) \eta_{ij} \text{ eq(3.2.49)}$$

Et l'expression du travail virtuel en cisaillement:

eq(3.2.50)

$$-W_{int}^{ce}(\vec{\eta}) = -\langle \eta^e \rangle \{ F_{int}^{ce} \} = \left(\sum_{p=1}^{ncelle} {}^p C \left(B_{1ij} \frac{\vec{k}^1}{\|\vec{k}_1\|} \cdot \frac{\vec{k}^2}{\|\vec{k}_2\|} + B_{3ij} \frac{\|\vec{k}^2\|}{\|\vec{k}_1\|} + B_{4ij} \frac{\|\vec{k}^1\|}{\|\vec{k}_2\|} + B_{2ij} \frac{\vec{k}^2}{\|\vec{k}_2\|} \cdot \frac{\vec{k}^1}{\|\vec{k}_1\|} \right) \right) \eta_{ij}$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial r^2} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r^2} = \langle b \ -1 \ -b \ 1 \rangle \langle \eta_{i1} \ \eta_{i2} \ \eta_{i3} \rangle^T \text{ eq(3.2.51)}$$

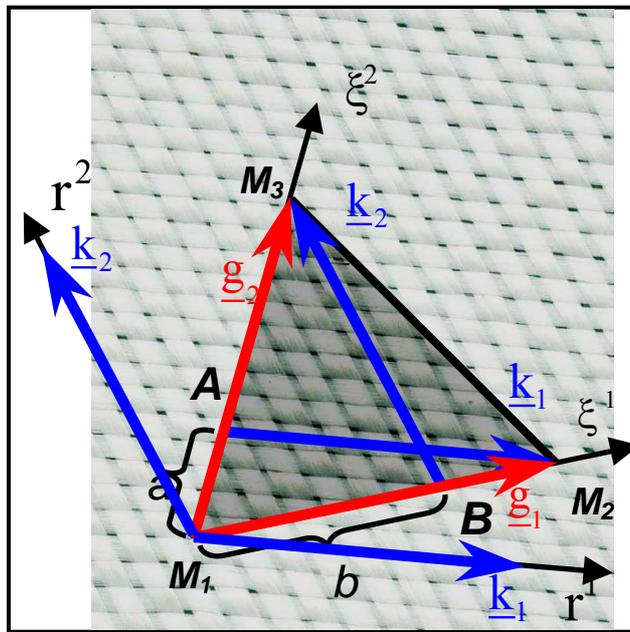


Figure 3-7 Elément fini semi discret triangulaire pour un tissu à direction quelconque.

Avec :

- $B_{1i1} = (a-1)k_{1i}$ $B_{1i2} = k_{1i}$ $B_{1i3} = -ak_{1i}$
- $B_{2i1} = (b-1)k_{2i}$ $B_{2i2} = -b k_{2i}$ $B_{2i3} = k_{2i}$
- $B_{3i1} = (b-1)k_{1i}$ $B_{3i2} = -b k_{1i}$ $B_{3i3} = k_{1i}$
- $B_{4i1} = (a-1)k_{2i}$ $B_{4i2} = k_{2i}$ $B_{4i3} = -a k_{2i}$

Compte tenu de la valeur constante des quantités d'un élément triangulaire l'expression des forces internes s'en trouve simplifiée :

$$\left\{ \mathbf{F}_{int}^e \right\} = n^{CER} C^e \left(\left\{ B_1 \right\} \frac{\vec{k}^1}{\|\vec{k}_1\|} \cdot \frac{\vec{k}^2}{\|\vec{k}_2\|} + \left\{ B_3 \right\} \frac{\|\vec{k}^2\|}{\|\vec{k}_1\|} + \left\{ B_4 \right\} \frac{\|\vec{k}^1\|}{\|\vec{k}_2\|} + \left\{ B_2 \right\} \frac{\vec{k}^2}{\|\vec{k}_2\|} \cdot \frac{\vec{k}^1}{\|\vec{k}_1\|} \right) + n^{CER} T^{11} \left\{ B_1 \right\} \frac{L_1}{\|\vec{k}_1\|^2} + n^{CER} T^{22} \left\{ B_2 \right\} \frac{L_2}{\|\vec{k}_2\|^2} \quad \text{eq(3.2.52)}$$

L_1 et L_2 étant les longueurs des cellules élémentaires dans les directions 1 et 2. Sachant que la base matérielle est constante dans l'élément, L_1 et L_2 le sont également. Nous pouvons donc remplacer $n^{CER} L_1$ par $n_1 \frac{\|\vec{k}_1\|}{2}$ et $n^{CER} L_2$ par $n_2 \frac{\|\vec{k}_2\|}{2}$, n_1 et n_2 étant le nombre de mèches orientées selon 1 et selon 2 traversant l'élément. Ce résultat découle directement du choix de la base matérielle établie plus haut. On réécrit l'équation eq(3.2.52) sous la forme :

$$\left\{ \mathbf{F}_{int}^e \right\} = n^{CER} C^e \left(\left\{ B_1 \right\} \frac{\vec{k}^1}{\|\vec{k}_1\|} \cdot \frac{\vec{k}^2}{\|\vec{k}_2\|} + \left\{ B_3 \right\} \frac{\|\vec{k}^2\|}{\|\vec{k}_1\|} + \left\{ B_4 \right\} \frac{\|\vec{k}^1\|}{\|\vec{k}_2\|} + \left\{ B_2 \right\} \frac{\vec{k}^2}{\|\vec{k}_2\|} \cdot \frac{\vec{k}^1}{\|\vec{k}_1\|} \right) + \frac{n_2}{\|\vec{k}_1\|} T^{11} \left\{ B_1 \right\} + \frac{n_1}{\|\vec{k}_2\|} T^{22} \left\{ B_2 \right\} \quad \text{eq(3.2.53)}$$

3.3 La rigidité en flexion

Dans la plupart des simulations, la rigidité en flexion peut être négligée. Cependant introduire la flexion permet dans certain cas d'avoir une meilleure description de la forme des plis. On introduit alors cette rigidité dans l'élément fini triangulaire pour étudier son influence. La flexion des milieux fibreux est spécifique compte tenu des glissement possibles entre les fibres. Les modèles de rigidité en flexion trouvés dans la littérature concernant les milieux fibreux associent la courbure χ de la mèche au moment de flexion M ([CASIEZ 2001],

[LAHEY et al. 2004]). Pour définir la courbure des éléments finis, on s'intéresse aux éléments finis de coques de type Kirchhoff qui permettra d'identifier la courbure des mèches et de les assimiler à un ensemble de poutres au sein d'un même élément. La formulation proposée prend pour point de départ l'élément S3 décrit dans [BRUNET et al. 1995][SABOURIN et al. 2006]. L'élément S3 a l'avantage de décrire la courbure d'une structure uniquement à l'aide des DDL en déplacement, ce qui peut diminuer le nombre global de degrés de liberté et simplifier considérablement d'éventuels remaillages. Il existe un certain nombre de travaux qui proposent également des éléments finis triangulaires sans DDL en rotation. On citera par exemples les travaux d'Onate [ONATE et al. 2000] ou de Laurent et Rio [LAURENT et al. 2001].

3.3.1 Expression de la courbure dans la direction d'une mèche

Soit w le déplacement normal au plan du triangle. On le décompose en deux termes tel que $w = w^b + w^r$ où w^b correspond à la partie du déplacement normal entraînant un changement de courbure et w^r à la partie du déplacement normal entraînant une rotation de corps rigide de l'élément fini.

Soit $c = \vec{n} \cdot \vec{e}_x$ et $s = \vec{n} \cdot \vec{e}_y$, où \vec{n} est le vecteur orthogonal au bord du domaine de contrôle (i.e. l'élément fini) dans le plan. La courbure s'écrit dans le repère local sous la forme :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w^b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w^b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w^b}{\partial xy} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.1)}$$

Réécrivons $\{\chi\}$ sous forme intégrale en le supposant constant dans l'élément et exploitant les formules de Green – Ostrogradski [ONATE et al. 2000]:

$$\{\mathcal{X}\} = -\frac{1}{A_e} \iint_{A_e} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w^b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w^b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w^b}{\partial xy} \end{Bmatrix} dA = -\frac{1}{A_e} \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} d\Gamma \quad \text{eq(3.3.2)}$$

$$\{\mathcal{X}\} = -\frac{1}{A_e} \sum_{I \text{ coté}=1}^3 L_{I \text{ coté}} \begin{bmatrix} c_{I \text{ coté}} & 0 \\ 0 & s_{I \text{ coté}} \\ s_{I \text{ coté}} & c_{I \text{ coté}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.3)}$$

$$\{\mathcal{X}\} = -\sum_{I \text{ coté}=1}^3 \frac{2}{d_{I \text{ coté}}} \begin{bmatrix} c_{I \text{ coté}} & 0 \\ 0 & s_{I \text{ coté}} \\ s_{I \text{ coté}} & c_{I \text{ coté}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.4)}$$

$L_{I \text{ coté}}$ étant la longueur du coté $I \text{ coté}$ opposé au noeud $I \text{ coté}$, et $d_{I \text{ coté}}$ est la distance du noeud au coté opposé.

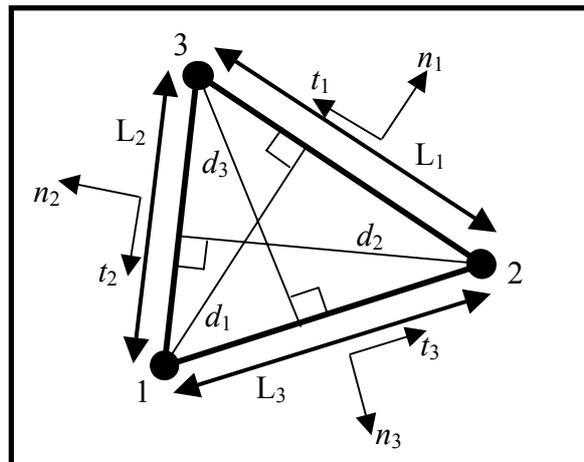


Figure 3-8 Propriétés géométriques de l'élément fini triangulaire.

L'expression qui lie $\left\langle \frac{\partial w^b}{\partial x} \quad \frac{\partial w^b}{\partial y} \right\rangle$ aux coordonnées du gradient de w^b dans les repères locaux $\{\vec{n}_I, \vec{t}_I\}$ est :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial x} \\ \frac{\partial w^b}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_I & s_I \\ -s_I & -c_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial n_I} \\ \frac{\partial w^b}{\partial t_I} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.5)}$$

La formulation du S3 est issue d'une famille d'éléments finis de coques de Morley [BATOZ vol 2] qui fait l'hypothèse que $\frac{\partial w^b}{\partial t_I} = 0$ sur le bord de l'élément.

On a la courbure sous la forme:

$$\boxed{\{\chi\} = -\sum_{I=1}^3 \frac{2}{d_I} \begin{Bmatrix} c_I^2 \\ s_I^2 \\ 2c_I s_I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial w^b \\ \partial n_I \end{Bmatrix}} \quad \text{eq(3.3.6)}$$

De là on déduit l'expression de la courbure d'un fibré orienté par \vec{h} . On a $\vec{h} = h_x \vec{e}_x + h_y \vec{e}_y$ et $\|\vec{h}\| = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_{hh} &= \vec{h} \cdot \vec{\chi} \cdot \vec{h} \\ &= h_x^2 \chi_{xx} + h_y^2 \chi_{yy} + 2h_x h_y \chi_{xy} \end{aligned}} \quad \text{eq(3.3.7)}$$

Et on a au final:

$$\boxed{\chi_{hh} = -\sum_{I=1}^3 \frac{2(\vec{h} \cdot \vec{n}_I)^2}{d_I} \frac{\partial w^b}{\partial n_I}} \quad \text{eq(3.3.8)}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\boxed{\chi_{aa} = -\left\langle \begin{matrix} \frac{2(\vec{h} \cdot \vec{n}_1)^2}{d_1} & \frac{2(\vec{h} \cdot \vec{n}_2)^2}{d_2} & \frac{2(\vec{h} \cdot \vec{n}_3)^2}{d_3} \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial n_1} \\ \frac{\partial w^b}{\partial n_2} \\ \frac{\partial w^b}{\partial n_3} \end{Bmatrix}} \quad \text{eq(3.3.9)}$$

Plusieurs éléments finis proposent des formulations pour le calcul des $\frac{\partial w^b}{\partial n_I}$.

Certains proposent de le traiter comme un degré de liberté à part entière (ex : DKT6), d'autres proposent de le traiter à l'aide des DDL en déplacement des éléments voisins (ex : S3, BPT...).

3.3.2 Calcul de la rotation des cotés en fonction de la position des éléments voisins

3.3.2.1 Calcul de la rotation de flexion en fonction des rotations de corps rigide des éléments finis:

Cette partie la méthode adoptée pour l'expression des rotations entraînant la variation de courbure $\theta_1^b = -\frac{\partial w^b}{\partial n_1}$ sera décrite. Le choix adopté se base sur la

formulation du S3. Sabourin propose de le décrire à l'aide de l'équation du déplacement d'une poutre d'Euler Bernoulli de longueur $d_1 + d_2$ ([SABOURIN et al. 2006]), ayant une liaison pivot à une distance d_1 et auquel on impose un déplacement $w(0)=w_1$ et $w(d_1 + d_2)=w_2$.

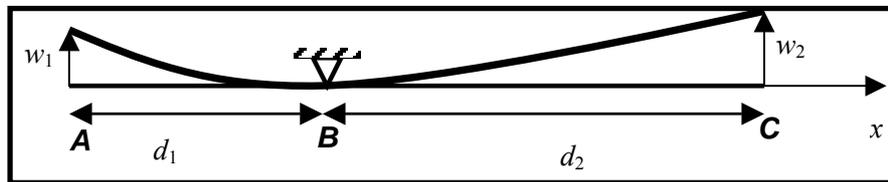


Figure 3-9 Poutre en flexion trois points.

Dans ce cas là, l'expression du déplacement normal en fonction de l'abscisse est :

$$w(x) = \left(\frac{w_1}{d_1} + \frac{w_2}{d_2} \right) (x - d_1) \frac{x}{d_1 + d_2} - \frac{w_1}{d_1} (x - d_1) \quad \text{eq(3.3.10)}$$

On définit la rotation de solide rigide du segment AB et du segment BC autour du point B : $\alpha_1 = \frac{w_1}{d_1}$ et $\alpha_2 = \frac{w_2}{d_2}$.

Or $-w'(d_1) = \alpha_1 \frac{d_2}{d_1 + d_2} - \alpha_2 \frac{d_1}{d_1 + d_2}$ et $-w'(d_1) = \alpha_1 + \theta_1^b$, on a au final :

$$\frac{\partial w^b}{\partial x} = \alpha_1 \frac{d_1}{d_1 + d_2} + \alpha_2 \frac{d_1}{d_1 + d_2} \quad \text{eq(3.3.11)}$$

Cette formule sera le point de départ pour l'expression des rotations de flexions sur les bords des éléments. On les exprimera en fonction des rotations de corps rigides des éléments finis autour de leurs bords.

Rappelons que w_i est le déplacement normal à la surface du nœud i et d_i est la distance du nœud i au coté opposé. Le déplacement global est considéré comme le résultat de trois rotations successives $\frac{w_i}{d_i}$ autour des cotés i . Ce qui donne

l'angle de rotation :

$$\bar{\alpha} = \frac{w_1}{d_1} \bar{t}_1 + \frac{w_2}{d_2} \bar{t}_2 + \frac{w_3}{d_3} \bar{t}_3 \quad \text{eq(3.3.12)}$$

Ainsi la rotation autour du coté i sera $\alpha_i = \bar{\alpha} \cdot \bar{t}_i$.

Soit β_i l'angle au sommet i . Sachant que $\bar{t}_2 = -\sin(\beta_3) \bar{n}_1 - \cos(\beta_3) \bar{t}_1$ et $\bar{t}_3 = -\sin(\beta_2) \bar{n}_1 - \cos(\beta_2) \bar{t}_1$, on a :

$$\alpha_1 = \frac{w_1}{d_1} - \frac{w_2}{d_2} \cos(\beta_3) - \frac{w_3}{d_3} \cos(\beta_2) \quad \text{eq(3.3.13)}$$

Et de la même manière :

$$\alpha_2 = \frac{w_2}{d_2} - \frac{w_3}{d_3} \cos(\beta_1) - \frac{w_1}{d_1} \cos(\beta_3)$$

$$\alpha_3 = \frac{w_3}{d_3} - \frac{w_1}{d_1} \cos(\beta_2) - \frac{w_2}{d_2} \cos(\beta_1) \quad \text{eq(3.3.14)}$$

Ce qui peut être écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & -\frac{\cos(\beta_3)}{d_2} & -\frac{\cos(\beta_2)}{d_3} \\ -\frac{\cos(\beta_3)}{d_1} & \frac{1}{d_2} & -\frac{\cos(\beta_1)}{d_3} \\ -\frac{\cos(\beta_2)}{d_1} & -\frac{\cos(\beta_1)}{d_2} & \frac{1}{d_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.15)}$$

Tous les ingrédients nécessaires pour l'expression de la courbure d'un fibré orienté par un vecteur directeur \bar{h} à l'aide des éléments voisins ont été rassemblés.

Dans la suite les notations utilisées seront celle de la Figure 3-10.

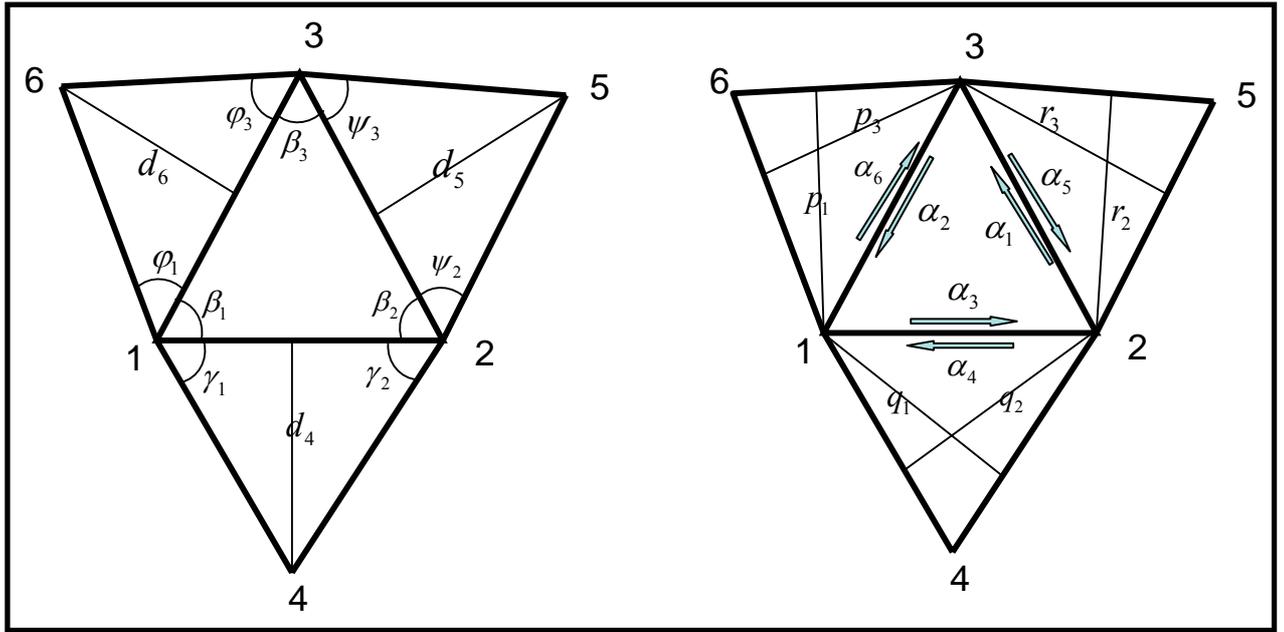


Figure 3-10 Elément fini triangulaire et ses voisins

Soit $\langle e_1^z \rangle$, $\langle e_4^z \rangle$, $\langle e_5^z \rangle$ et $\langle e_6^z \rangle$ les coordonnées de la normale aux triangles (1 2 3), (1 4 2), (2 5 3) et (3 6 1) dans le repère globale, et $\langle u_i \rangle$ les DDL des nœuds i . On en déduit l'expression qui lie les déplacements aux rotations de corps rigide des triangles autour de leurs cotés (voir Figure 3-10 pour les différentes notations) :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} \langle e_1^z \rangle & -\frac{\cos(\beta_3)}{d_2} \langle e_1^z \rangle & -\frac{\cos(\beta_2)}{d_3} \langle e_1^z \rangle \\ -\frac{\cos(\beta_3)}{d_1} \langle e_1^z \rangle & \frac{1}{d_2} \langle e_1^z \rangle & -\frac{\cos(\beta_1)}{d_3} \langle e_1^z \rangle \\ -\frac{\cos(\beta_2)}{d_1} \langle e_1^z \rangle & -\frac{\cos(\beta_1)}{d_2} \langle e_1^z \rangle & \frac{1}{d_3} \langle e_1^z \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \\ \{u_3\} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.16)}$$

$$\alpha_4 = \left\langle \frac{1}{d_4} \langle e_4^z \rangle \quad -\frac{\cos(\gamma_2)}{q_1} \langle e_4^z \rangle \quad -\frac{\cos(\gamma_1)}{q_2} \langle e_4^z \rangle \right\rangle \begin{Bmatrix} \{u_4\} \\ \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.17)}$$

$$\alpha_5 = \left\langle \frac{1}{d_5} \langle e_5^z \rangle \quad -\frac{\cos(\psi_3)}{r_2} \langle e_5^z \rangle \quad -\frac{\cos(\psi_2)}{r_3} \langle e_5^z \rangle \right\rangle \begin{Bmatrix} \{u_5\} \\ \{u_2\} \\ \{u_3\} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.18)}$$

$$\alpha_6 = \left\langle \frac{1}{d_6} \langle e_6^z \rangle - \frac{\cos(\varphi_3)}{p_1} \langle e_6^z \rangle - \frac{\cos(\varphi_1)}{p_3} \langle e_6^z \rangle \right\rangle \begin{Bmatrix} \{u_6\} \\ \{u_1\} \\ \{u_3\} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.19)}$$

En partant de ces expressions, on calcule les rotations de courbure sur les cotés de l'élément. Trois cas se posent :

Le coté i est un bord libre. Ainsi la rotation de courbure $\frac{\partial w^b}{\partial n_i}$ est nulle.

Le coté i est un bord bloqué en rotation. La rotation de courbure $\frac{\partial w^b}{\partial n_i}$ est égale à la rotation de corps rigide α_i . Ce cas apparaît en cas d'encastrement ou bien sur les plans de symétrie. D'ailleurs on peut vérifier que s'il s'agit d'un plan de symétrie : la nullité de la rotation de courbure entraîne l'égalité des rotations de corps rigides des deux éléments de part et d'autre du plan de symétrie.

Le coté i a un élément voisin. En exploitant l'expression du chapitre 3.3.2.1, on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w^b}{\partial n_1} \\ \frac{\partial w^b}{\partial n_2} \\ \frac{\partial w^b}{\partial n_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{d_1+d_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_1}{d_1+d_5} & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_2+d_6} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_2}{d_2+d_6} \\ 0 & 0 & \frac{d_3}{d_3+d_4} & \frac{d_3}{d_3+d_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad \text{eq(3.3.20)}$$

Dans les équations eq(3.3.16), eq(3.3.17), eq(3.3.18) et eq(3.3.19), les rotations des corps rigides des quatre éléments finis autour des cotés du triangle centrale en fonction des degrés de liberté en déplacement ont été écrites sous la forme $\{\alpha\} = [R]\{u\}$. En combinant eq(3.3.9) et eq(3.3.20) la courbure du fibré orienté par \bar{h} est obtenue sous la forme $\chi_{hh} = [D_h]\{\alpha\}$. On a au final $\chi_{aa} = [D_h][R]\{u\}$ ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\chi_{hh} = \langle Bb_{hh} \rangle \{u\} \quad \text{eq(3.3.21)}$$

3.3.3 Forces internes dues à la rigidité à la courbure

A l'instar des autres formes de rigidités, le travail virtuel d à la flexion s'écrit sous la forme :

$$-W_{\text{int}}^f = \langle \eta \rangle \left(\sum_{p=1}^{n_1} \int_{l_p} \{Bb_{11}\} M^{11} dl_p + \sum_{p=1}^{n_2} \int_{l_p} \{Bb_{22}\} M^{22} dl_p \right) \quad \text{eq(3.3.22)}$$

$$\{F_{\text{int}}^f\} = \sum_{p=1}^{n_1} \int_{l_p} \{Bb_{11}\} M^{11} dl_p + \sum_{p=1}^{n_2} \int_{l_p} \{Bb_{22}\} M^{22} dl_p$$

Ce qui se simplifie de par la constance de la courbure au sein de l'élément :

$$\boxed{-W_{\text{int}}^f = \langle \eta \rangle \left(\frac{n_{\text{chaîne}}}{2} \|\vec{g}_1\| \{Bb_{11}\} M^{11} + \frac{n_{\text{trame}}}{2} \|\vec{g}_2\| \{Bb_{22}\} M^{22} \right)} \quad \text{eq(3.3.23)}$$

$$\{F_{\text{int}}^f\} = \frac{n_{\text{chaîne}}}{2} \|\vec{g}_1\| \{Bb_{11}\} M^{11} + \frac{n_{\text{trame}}}{2} \|\vec{g}_2\| \{Bb_{22}\} M^{22}$$

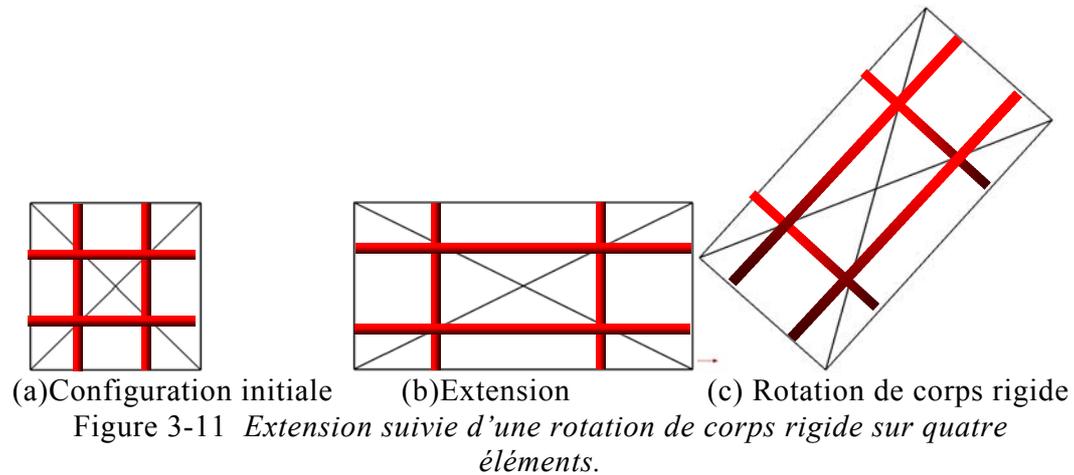
$\{Bb_{11}\}$ et $\{Bb_{22}\}$ sont décrits dans l'équation eq(3.3.21) et $n_{\text{chaîne}}$ et n_{trame} sont le nombre de mèches orientées selon 1 et selon 2 traversant l'élément.

3.4 Tests de validation élémentaires

3.4.1 Extension puis rotation de solide rigide

Un tissu initialement carré (10 cm × 10 cm) où les chaînes et les trames sont parallèles aux cotés du carré, est soumis à un fort allongement, puis est soumis à une rotation de corps rigide jusqu'à 45° (Figure 3-11). La densité de mèche est de 1 fil /cm et leur rigidité est de 10N. Le but du test est d'abord de montrer que l'élément fini décrit bien le comportement en tension puis qu'il n'y a pas de tensions parasites liées aux rotations de corps rigides.

La tension obtenue pour un allongement entraînant $l/l_0=2$, est $T^{11}=6.931\text{N}$ et $T^{22}=0\text{N}$. Ce qui correspond exactement à la solution escomptée dans le cas d'une loi liant les contraintes de Cauchy et les déformations logarithmiques. La rotation n'entraîne aucune variation dans la tension.



3.4.2 Test de cisaillement simple

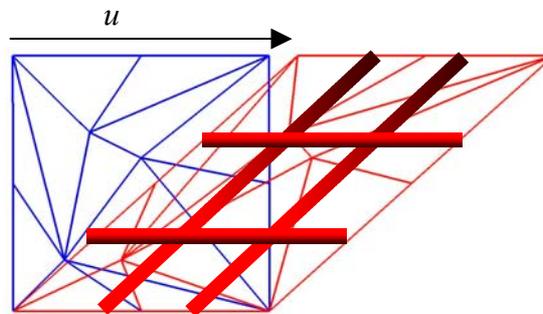


Figure 3-12 Cisaillement simple

Le même tissu que dans le paragraphe 3.4.1 est considéré. On lui applique une cinématique de cisaillement simple (Figure 3-12). Grâce à ce test nous pouvons vérifier la validité de l'expression de l'équation eq(3.2.45). On calcule l'expression de l'angle, dans l'élément central de la Figure 3-12, entre les mèches de deux manières :

- En relevant l'angle entre \vec{k}_1 et \vec{k}_2 avec :

$$\gamma = A \cos \left(\frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{\|\vec{k}_1\| \|\vec{k}_2\|} \right) \quad \text{eq(3.3.24)}$$

-En faisant sur l'ensemble des pas de temps le calcul avec l'élément finis présenté ci-dessus :

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n + \langle B_\gamma \rangle \{ \Delta u_n^{n+1} \} \quad \text{eq(3.3.25)}$$

Le résultat obtenu Figure 3-13 montre bien la concordance entre la valeur obtenue d'une manière théorique (équation eq(3.3.24)) et par le calcul qui valide l'expression de $\{B_\gamma\}$ (équation eq(3.3.25)). De plus la tension T^{11} reste nulle tout au long du calcul.

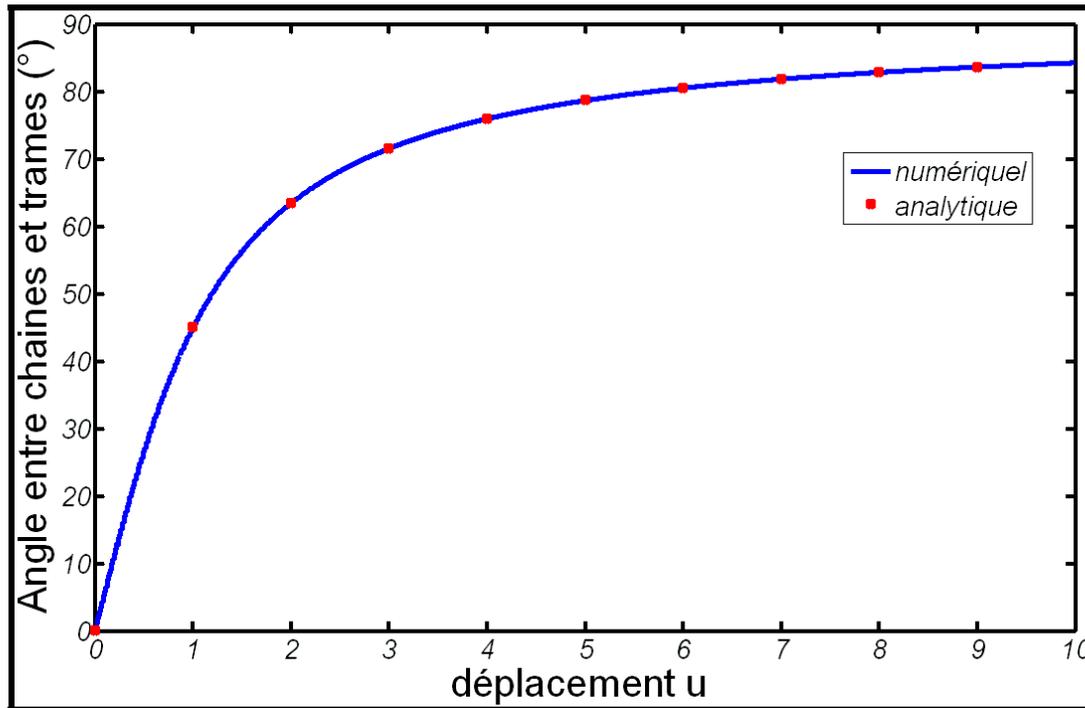


Figure 3-13 Angle entre chaîne et trame, valeur numérique et valeur analytique.

3.4.3 Cisaillement pure

Pour l'identification des propriétés mécaniques en cisaillement, les valeurs expérimentales données par un test de cisaillement, tel que présenté Figure 2-7, sont approximées par un polynôme à coefficients impaires (dans la mesure où $-C(\gamma) = C(-\gamma)$) à l'aide de la méthode des moindres carrés. Cela permet d'avoir un comportement en cisaillement très proche du taffetas en fibre de verre. On a (pour la courbe de cisaillement de la Figure 2-8):

$$C(\gamma) = 0.37044\gamma + 0.84105\gamma^3 + 1.03113\gamma^5.$$

Où γ est exprimé en radiant.

La rigidité en tension est prise linéaire avec $T^{ii}=2300 \varepsilon_{ii}$ (en Newton).

Cela permet de comparer la réponse élément fini aux deux cas tests décrits en 2.1.2 du Picture Frame et du Bias Test.

3.4.3.1 Picture frame

Le Picture Frame est décrit dans le chapitre 2.1.2 . Une cinématique de cisaillement pur est appliquée à une structure tissée initialement carrée de côté $a=100\text{mm}$, maillée de $2 \times 10 \times 10$ éléments (Figure 3-14). Le calcul est effectué sur 20000 pas de temps.

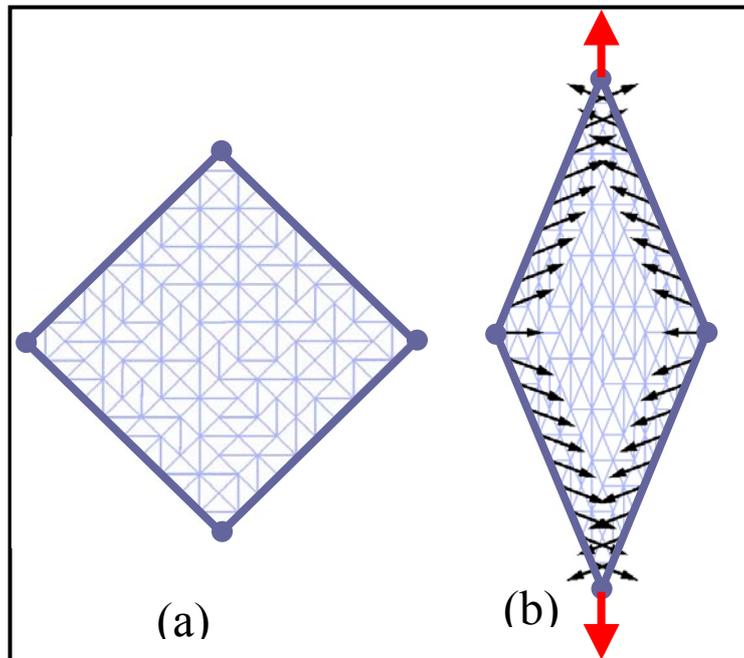


Figure 3-14 *Simulation du Picture Frame. (a) état initial. (b) état final avec les efforts internes aux nœuds.*

On compare d'une part les actions aux extrémités du cadre équilibré par les efforts nodaux des éléments liés au cadre, d'autre par les efforts théoriques donnés par l'équation eq (2.1.1). La réponse obtenue est décrite dans la Figure 3-15 où on peut observer que les deux graphes sont superposés. Cependant lorsque la rigidité en cisaillement augmente, on peut observer de légères

oscillations, qui sont principalement dues aux effets d'inertie et à la tension des mèches qui en découle.

Un autre point est à remarquer dans la Figure 3-14, c'est que les forces externes (visible en (b)) sont perpendiculaires aux mèches, ce qui est conforme au fait que les fibres ne sont pas en tension ce qui est nécessaire pour que l'on puisse parler de cisaillement pur d'un point de vue effort. Cette propriété fait défaut à de nombreux modèles continus.

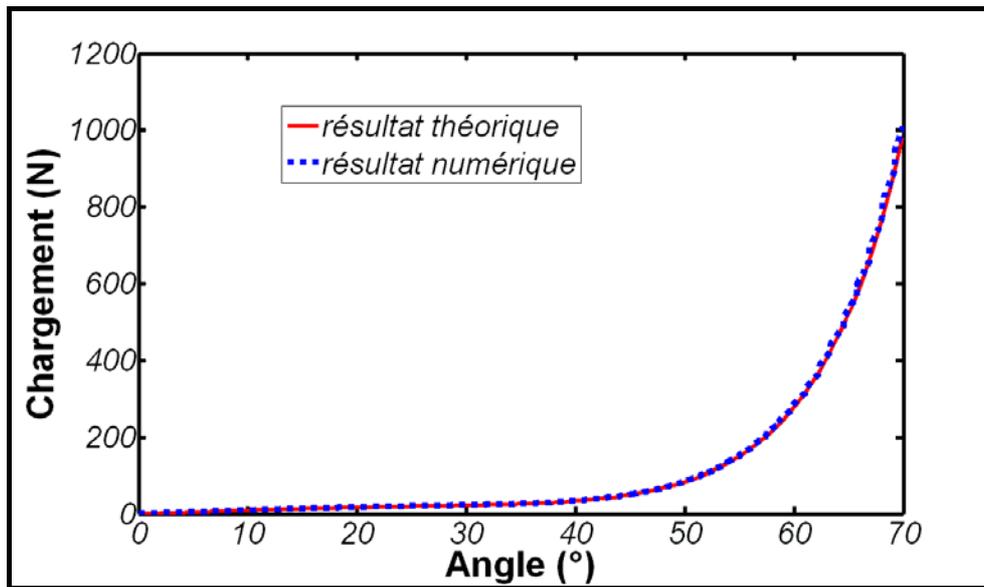


Figure 3-15 Courbe de chargement sur le Picture Frame.

3.4.3.2 Bias test

Le Bias Test est décrit dans le paragraphe 2.1.2. Le maillage du tissu est effectué à l'aide de dix éléments triangulaires (Figure 3-16). Le tissu est initialement rectangulaire de dimension $30 \times 10 \text{ mm}^2$. Il a une densité d'une mèche par millimètre et est traité avec les mêmes propriétés mécaniques que le Picture Frame. Un déplacement de $6 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ par pas de temps est imposé sur le bords droit. Le calcul est effectué sur 100000 pas de temps de 10^{-4} secondes.

Dans la Figure 3-17 la zone en rouge est en cisaillement pur, la zone en vert est en demi cisaillement par rapport à la zone en rouge, et la zone en bleu ne cisaillement pas. A l'instar du Picture Frame, l'expression liant les forces

externes aux couples est connue (équation eq (2.1.2)). Ainsi on peut tracer la courbe de chargement en fonction du déplacement et comparer la réponse analytique et la réponse numérique. On s'aperçoit Figure 3-18 que les réponses sont très proches.

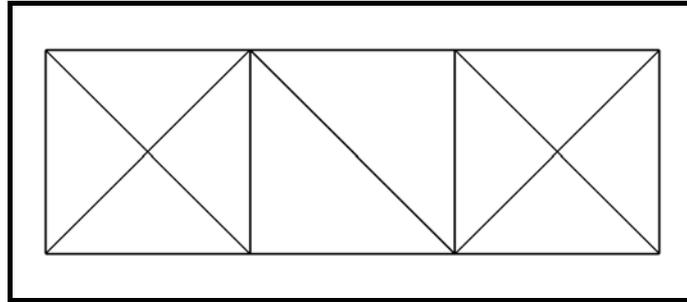


Figure 3-16 Maillage initial pour la simulation du Bias Test

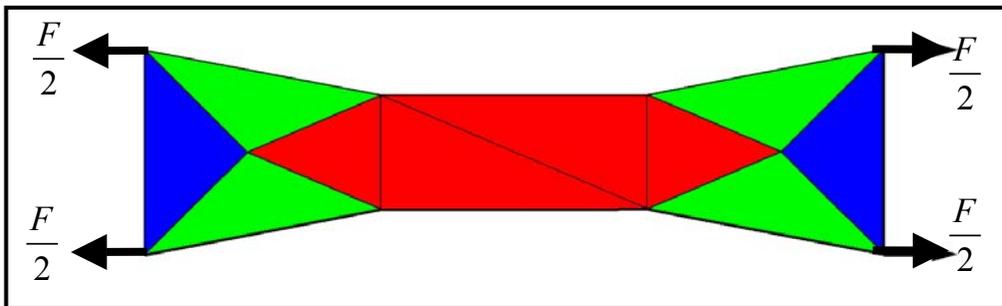


Figure 3-17 Maillage finale du Bias Test

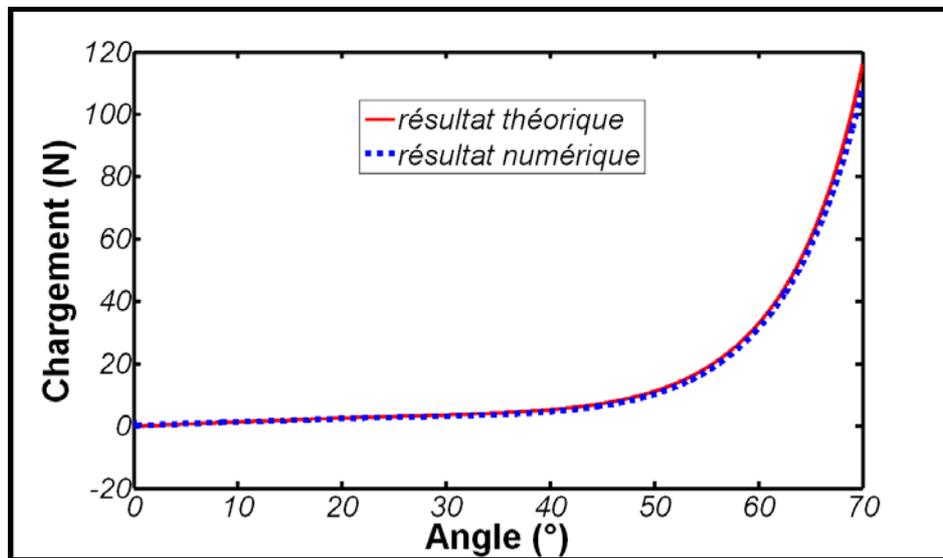
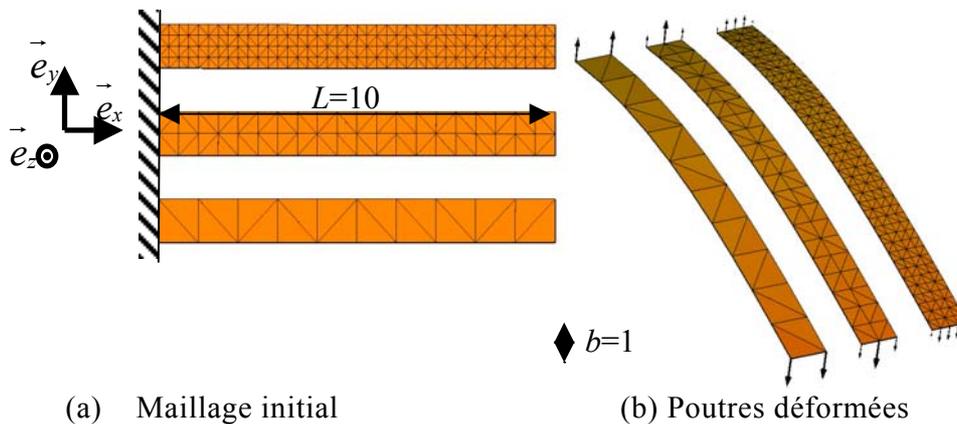


Figure 3-18 Courbes de chargement du Bias Test

La courbe de la Figure 3-18 est plus lisse (lors du blocage lié au cisaillement) que celle de la Figure 3-15. Cela est directement lié au fait que dans le Bias Test les bords libres diminuent considérablement la tension des mèches, ce qui n'est pas le cas du Picture Frame où elles sont encastrées dans le cadre.

3.4.4 Validation de la flexion

La validation de la flexion est effectuée sur des poutres encastrées, auxquelles on applique un chargement à leurs extrémités. Les valeurs analytiques me faisant défaut pour la flexion des tissus, la réponse des triangles a été comparée à des simulations de flexion de coque effectuées à l'aide d'ABAQUS explicite sur les éléments S4R avec un maillage (10×100). La réponse quasi statique est obtenue après relaxation dynamique.



(a) Maillage initial (b) Poutres déformées
Figure 3-19 Trois poutres en flexion avec des densités de maillages différentes.

On pratique sur trois bandes de dimension (1×10), de maillages (2×1×10), (2×2×20) et (2×4×40) différents chargements linéiques (Figure 3-19) selon \bar{e}_z (à chaque fois identique pour les trois densités de maillage).

Pour les coques ABAQUS les propriétés géométriques et matérielles suivantes ont été utilisées :

- Longueur L: 10
- Largeur b: 1
- Epaisseur h: 0.1

- Module d'Young E: 100 000
- Coefficient de Poisson : 0

Pour les éléments finis semi discret nous avons orienté les mèches selon \vec{e}_x et \vec{e}_y . On a une densité d'une mèche par unité de longueur. Pour avoir une concordance avec la théorie des poutres, le moment de flexion est écrit sous la forme $M(\chi) = k \cdot \chi$, où $k = \frac{Ebh^3}{12}$; et la rigidité en tension est linéaire et égale à E.

Le résultat est décrit dans les courbes de la Figure 3-20. Tel que nous pouvons le voir, la réponse des éléments finis semi-discret en grand déplacement est très proche de celle obtenue avec ABAQUS. On remarquera par ailleurs que la convergence est obtenue pour un maillage relativement grossier.

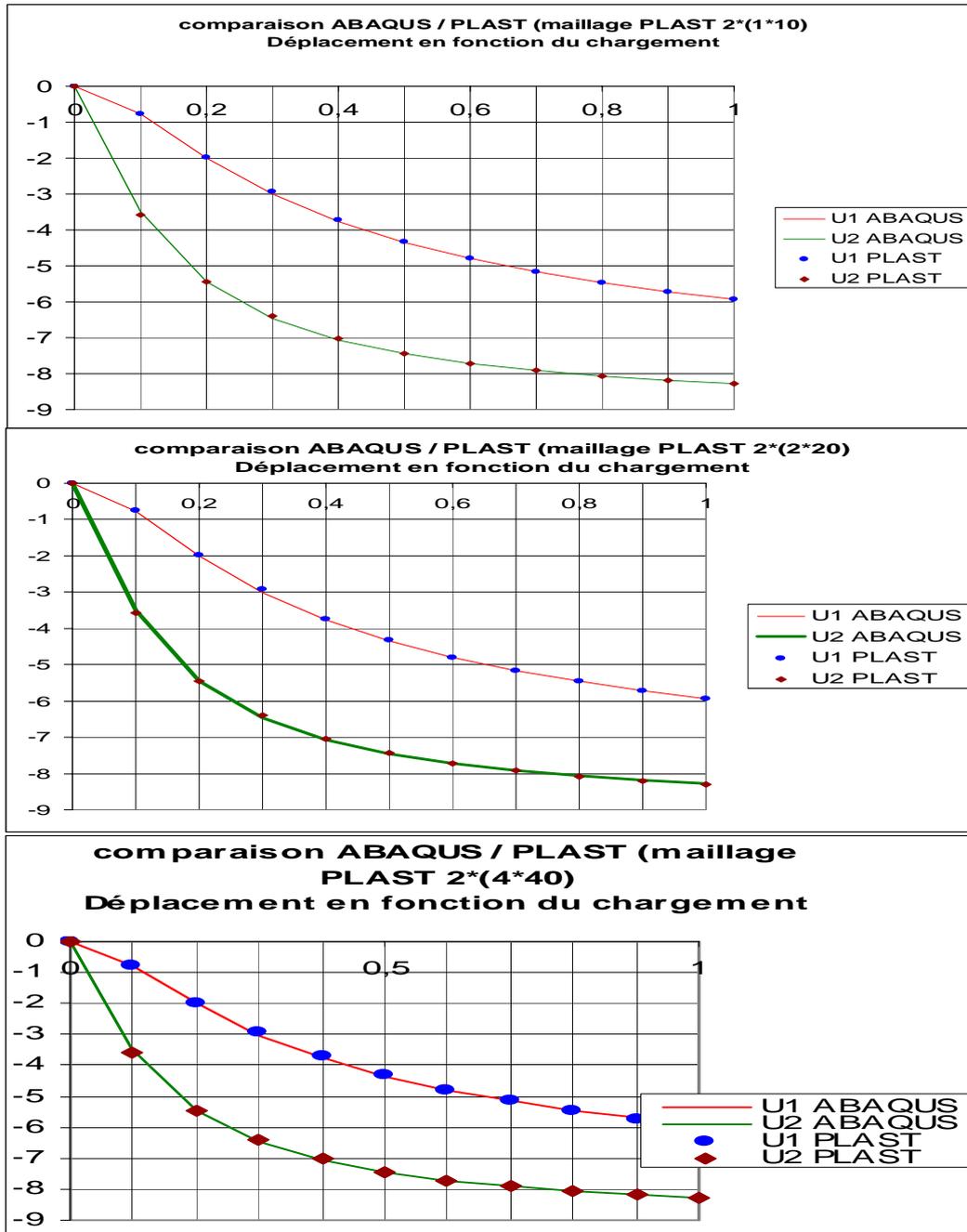


Figure 3-20 Flèche des poutres en flexion pour trois densités de maillage.

4 Gestion du contact dans le cadre de la mise en forme des multiplis

La mise en forme des matériaux composites stratifiés est souvent effectuée en drapant les couches les unes après les autres. Cela est coûteux en termes de temps et de main d'œuvre. De plus en plus on tend à vouloir mettre en forme l'ensemble des couches simultanément, et ce, entre autre par des procédés d'emboutissage. Lors des procédés d'emboutissage, les contacts avec les outils jouent un rôle majeur, que ce soit expérimentalement ou lors dans leurs simulations. D'une manière standard le seul corps déformable rentrant en action est le flan, les autres corps étant quasi-rigides.

La particularité dans notre problématique, et que l'on met en jeu un grand nombre de corps déformables qui rentrent en interaction, en particulier dans le cas des formages de multiplis. La difficulté de la gestion du contact multi corps s'en trouve accrue du fait que ces corps sont des structures élancées et que le contact s'opère sur une grande partie de leurs surfaces et ce des deux cotés. Ainsi on se trouvera à la fois dans les hypothèses des contraintes planes, et très souvent avec un nœud esclave contraint par plusieurs facettes maîtresses.

Le travail effectué a été implémenté dans PLAST3D qui ne concerne que les éléments finis 3D hexaédriques sans gestion d'épaisseur, chaque nœud ne pouvant être contraint que par une seule facette maîtresse à la fois [WALTER 1999] [BAILLET et al. 2000]. Il a fallu adapter la gestion du contact, aux problèmes des structures minces avec des contraintes multiples, et trouver les méthodes optimales avec un coût numérique raisonnable pour la gestion géométrique de recherche des zones entrant en contact.

Un autre problème est apparu, propre au contact entre coques, qui a du être traité en introduisant des conditions de contact entre arêtes. Ce type de contact s'est

avéré coûteux en mémoire et en temps de calcul. Cependant il est capital à la bonne marche de la simulation des procédés d'emboutissage en particulier compte tenu des plissements qui sont nombreux dans le drapage des tissés. Par ailleurs le coût numérique est aussi amplifié du fait que le schéma temporel est explicite, et que les critères de stabilité de Courant conduit à des pas de temps petits et nombreux. Un état de l'art est proposé dans [HEINSTEIN et al. 2000] où les méthodes de gestion du contact les plus couramment utilisées dans les codes explicites sont présentées.

4.1 Positionnement du problème et formulation

La gestion de contact entre plusieurs corps déformables posent deux problèmes : Le premier problème consiste à imposer la non pénétration de deux corps. A savoir qu'en un point il ne peut y avoir qu'une seule particule matérielle. Le second problème est la gestion du frottement.

4.1.1 Interfaces de contact et conditions d'imperméabilité

Soit deux corps A et B occupant les domaines spatiaux Ω_A et Ω_B . Leurs bords respectifs sont Γ_A et Γ_B . Γ_C , la surface de contact entre les deux corps, est définie par : $\Omega_A \cap \Omega_B = \Gamma_C$.

Pour tout point B de la surface Γ_B positionné en \vec{x}_B , on définit le point A de la surface Γ_A qui minimise la distance entre le B et la surface Γ_A . Pour se faire on définit une carte locale (ξ_A^1, ξ_A^2) (paramétrisation de la surface Γ_A) et on calcule $(\bar{\xi}_A^1, \bar{\xi}_A^2)$ qui minimise $\|\vec{x}_B - \vec{x}_A\|$. Soit $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ la base naturelle associée au paramétrage (ξ_A^1, ξ_A^2) . Définir le paramétrage $(\bar{\xi}_A^1, \bar{\xi}_A^2)$ qui minimise la distance entre le point B et la surface Γ_A revient à résoudre l'équation eq(4.1.1).

(pour $\alpha = 1, 2$) :

$$\frac{\partial \left(\left\| \vec{x}_B - \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right) \right\| \right)}{\partial \xi_A^\alpha} = - \frac{\vec{x}_B - \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right)}{\left\| \vec{x}_B - \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right) \right\|} \cdot \frac{\partial \left(\vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right) \right)}{\partial \xi_A^\alpha} = 0 \quad \text{eq(4.1.1)}$$

Alors on a :

$$- \frac{\vec{x}_B - \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right)}{\left\| \vec{x}_B - \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right) \right\|} \cdot \vec{a}_\alpha = 0 \quad \text{eq(4.1.2)}$$

Ainsi la distance minimale est atteinte quand $\vec{x}_B - \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right)$ est orthogonal à la surface Γ_A .

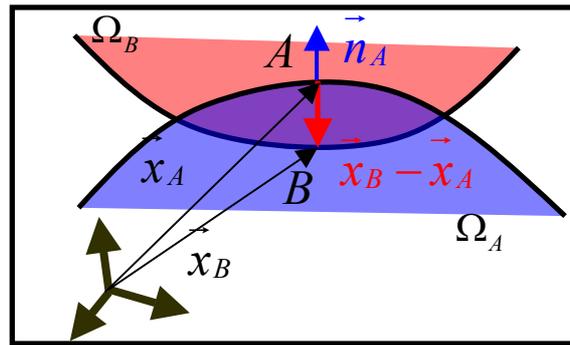


Figure 4-1 Deux corps interpénétrant : fonction gap.

Soit \vec{n}_A la normale sortante du domaine Ω_A au point $\vec{x}_A = \vec{x} \left(\begin{smallmatrix} \bar{\xi}_A^1 \\ \bar{\xi}_A^2 \end{smallmatrix} \right)$ de la surface Γ_A . Une fonction « gap » est définie par:

$$\boxed{\begin{aligned} g_N(\vec{x}_B) &= (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{n}_A \quad \text{si } (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{n}_A \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{n}_A < 0 \end{aligned}} \quad \text{eq(4.1.3)}$$

Imposer la non interpénétration des deux corps consiste alors à veiller à ce qu'à tout instant $(\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{n}_A$.

4.1.2 Forces liées au contact et formulation du problème

Sur Γ_C la continuité de la pression de contact est assurée. La pression de contact exercée sur la surface Γ_C d'un corps Ω se décompose en une partie normale $\sigma_N = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ et en une partie tangentielle $\sigma_T = \left\| \vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \sigma_N \cdot \vec{n} \right\|$. Le contact ne travaillant qu'en compression, on a $\sigma_N \leq 0$; et nul s'il n'y a pas de contact (c'est à dire quand $g_N(\vec{x}_B) > 0$).

On a alors les conditions d'Hertz-Signorini-Moreau également connues sous le nom de condition de complémentarité de Karush-Kuhn-Tucker dans la théorie de l'optimisation [DUVAUT et al. 1972][WRIGGERS 2006]:

$$\begin{cases} \sigma_N \leq 0 \\ g_N(\vec{x}) \geq 0 \\ \sigma_N \cdot g_N = 0 \end{cases} \quad \text{eq(4.1.4)}$$

On se place pour notre problème dans le cadre des frottements de Coulomb. Soit $\left\| \vec{v}_T \right\|$ la vitesse relative tangentielle entre les deux corps, en supposant que le corps A et le corps B soient en contact au point \vec{x} , la loi de coulomb s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} \text{si } \sigma_T(\vec{x}, t) < -\mu \sigma_N(\vec{x}, t) \text{ alors } \left\| \vec{v}_T(\vec{x}, t) \right\| = 0 \\ \text{si } \sigma_T(\vec{x}, t) = -\mu \sigma_N(\vec{x}, t) \text{ alors } \left\| \vec{v}_T(\vec{x}, t) \right\| = \kappa(\vec{x}, t) \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \sigma_N \cdot \vec{n} \right) \end{cases} \quad \text{eq(4.1.5)}$$

La première condition est une condition d'adhérence. La seconde indique la condition de glissement où la vitesse relative est colinéaire à la force tangentielle. La colinéarité n'est liée qu'au modèle simplifié du frottement isotrope [KONYUKOV et al. 2005], qui devrait être plus complexe pour le contact entre tissus.

En introduisant les forces de contact, le principe des travaux virtuels est :

$$W(\vec{\eta}) = 0 = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} - W_{\text{acc}} + W_{\text{cont}} \quad \text{eq(4.1.6)}$$

Où le travail virtuel des forces de contact est donné par [BELYTSCHKO et al. 2000]:

$$W_{cont} = \int_{\Gamma_C} \vec{\eta} \cdot \left(\overline{\overline{\sigma}}_A \cdot \vec{n}_A + \overline{\overline{\sigma}}_B \cdot \vec{n}_B \right) d\Gamma \quad \text{eq(4.1.7)}$$

Ainsi l'introduction de l'équation eq(4.1.7) dans les travaux virtuels permet d'imposer l'égalité des pressions sur les deux corps et d'établir l'équilibre quelque soit $\vec{\eta}$ admissible.

4.2 Résolution

Comme dans le chapitre 3, la convention de notation adoptée est celle utilisée par Batoz :

- $\{ \}$ Matrice colonne.
- $\langle \rangle$ Matrice ligne.
- $[]_{n \times m}$ Matrice $n \times m$ où n et m sont différents de 1.

4.2.1 Schéma semi implicite

La discrétisation du contact dans une stratégie maître esclave consiste à résoudre l'équation de la dynamique incluant la force de contact, et cela sous la contrainte de non pénétration (pour une plus grande lisibilité on élimine le terme en amortissement). A l'instant t_{n+1} l'équation de la dynamique est :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}_{n+1}\} + \{F_{n+1}^{int}\} + [G_{n+1}]^T \{\lambda_{n+1}\} &= \{F_{n+1}^{ext}\} \\ [G_{n+1}](\{u_{n+1}\} + \{X_0\}) &= \{0\} \end{aligned} \quad \text{eq(4.2.1)}$$

Dans le cadre du schéma β_2 , décrit chapitre 3.1, si le déplacement sur un pas de temps est petit, le traitement du contact revient à résoudre le système:

$$\begin{bmatrix} [b_2[M] + b_0[K]] & [G_{n+1}]^T \\ b_0[G_{n+1}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta \ddot{u}_{n+1}\} \\ \{\lambda_{n+1}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{n+1}^{ext}\} - [M]\{q_2\} + [K]\{q_0\} \\ -[G_{n+1}](\{q_0\} + \{X_0\}) \end{Bmatrix} \quad \text{eq(4.2.2)}$$

Dans le cadre explicite où $b_0=0$ le système est singulier. C'est pourquoi on adopte un schéma dit « semi-implicite » (parfois semi-explicite) de type prédicteur-correcteur qui consiste à effectuer une étape de prédiction en résolvant l'équation de la dynamique à l'instant t_n sans les forces de contact, de calculer la pénétration et d'en déduire le déplacement correctif nécessaire au respect de la contrainte $[G_{n+1}]$ afin d'obtenir l'équilibre à l'instant t_{n+1} . Cette méthode est qualifiée de Multiplicateurs de Lagrange à Incréments Avant [CARPENTER et al. 1991].

Au lieu de résoudre l'équation eq(4.2.2) le système suivant est résolu :

$$\boxed{\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}_n\} + \{F_n^{\text{int}}\} + [G_{n+1}]^T \{\lambda_n\} &= \{F_n^{\text{ext}}\} \\ [G_{n+1}]\{\{u_{n+1}\} + \{X_0\}\} &= \{0\} \end{aligned}} \quad \text{eq(4.2.3)}$$

Détaillons ici comment en partant du système ci-dessus on définit les déplacements correctif. Par souci de clarté, le système sera écrit pour les différences centrales. Soit l'accélération :

$$\{\ddot{u}_n\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u_{n+1}\} - 2\{u_n\} + \{u_{n-1}\}) \quad \text{eq(4.2.4)}$$

$$\{\ddot{u}_n\} = [M]^{-1} (\{F_n^{\text{ext}}\} - \{F_n^{\text{int}}\} - [G_{n+1}]^T \{\lambda_n\}) \quad \text{eq(4.2.5)}$$

En injectant eq(4.2.5) dans eq(4.2.4) le déplacement total est donné par:

$$\{u_{n+1}\} = h^2 [M]^{-1} (\{F_n^{\text{ext}}\} - \{F_n^{\text{int}}\}) + 2\{u_n\} - \{u_{n-1}\} - \Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}]^T \{\lambda_n\} \quad \text{eq(4.2.6)}$$

Les multiplicateurs de Lagrange $\{\lambda_n\}$ étant inconnus, le déplacement total u_{n+1} à l'instant t_{n+1} est décomposé en un déplacement prédictif u_{n+1}^* correspondant à la réponse de la structure sans les forces de contact et un déplacement correctif u_{n+1}^c .

$$\boxed{\{u_{n+1}\} = \{u_{n+1}^*\} + \{u_{n+1}^c\}} \quad \text{eq(4.2.7)}$$

Avec :

$$\begin{cases} \{u_{n+1}^*\} = \Delta t^2 [M]^{-1} (\{F_n^{ext}\} - \{F_n^{int}\}) + 2\{u_n\} - \{u_{n-1}\} \\ \{u_{n+1}^c\} = -\Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}]^T \{\lambda_n\} \end{cases} \quad \text{eq(4.2.8)}$$

Ainsi tout le problème consiste à résoudre le système :

$$\begin{cases} -[G_{n+1}]\{u_{n+1}^c\} = [G_{n+1}](\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) \\ \Delta t^2 [G_{n+1}][M]^{-1}[G_{n+1}]^T \{\lambda_n\} = [G_{n+1}](\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) \end{cases} \quad \text{eq(4.2.9)}$$

D'où l'expression des multiplicateurs de Lagrange :

$$\{\lambda_n\} = \frac{1}{\Delta t^2} ([G_{n+1}][M]^{-1}[G_{n+1}]^T)^{-1} [G_{n+1}](\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) \quad \text{eq(4.2.10)}$$

Au final la gestion du contact consistera à effectuer deux étapes :

- 1 La résolution de l'équation de la dynamique sans les forces de contact et le calcul de u_{n+1}^*
- 2 Le calcul des multiplicateurs de Lagrange en résolvant le système ci-dessus et en déduire les déplacements correctifs correspondants.

4.2.2 Calcul des forces de contact

Plusieurs auteurs proposent de résoudre le système à l'aide du gradient conjugué [SHA et al. 1998][ZYWICZ et al. 1999]. Certes la méthode du gradient conjugué est réputée être une des plus stables ; de plus pour une structure de taille $n \times n$ la convergence est obtenue au maximum en n itérations. Cela est vrai uniquement dans le cadre totalement adhérent. Le schéma de Gauss-Seidel par bloc utilisé par [CARPENTER et al. 1991] a été préféré. La convergence du schéma de Gauss-Seidel n'est plus à prouver [CIARLET 2002], cependant les démonstrations sont fournies pour la résolution de système linéaire. Le problème du contact étant non linéaire (pour le cas non adhérent), une démonstration de la convergence du schéma est présentée dans [JAEGER 2005] pour les problèmes de contact non adhérent. Cette méthode évite d'effectuer l'assemblage nécessaire dans les autres méthodes et permet d'avoir une gestion locale à une contrainte à la fois.

Le but est de résoudre le système :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta t^2 [G_{n+1}] [M]^{-1} [G_{n+1}]^T \{\lambda\} &= [G_{n+1}] (\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) \\ [A] \{\lambda\} &= \{b\} \end{aligned}} \quad \text{eq(4.2.11)}$$

En l'écrivant sous forme de bloc :

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & \cdots & [A_{1I}] & \cdots & [A_{1N}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{I1}] & \cdots & [A_{II}] & \cdots & [A_{IN}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A_{N1}] & \cdots & [A_{NI}] & \cdots & [A_{NN}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\lambda_1\} \\ \vdots \\ \{\lambda_I\} \\ \vdots \\ \{\lambda_N\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b_1\} \\ \vdots \\ \{b_I\} \\ \vdots \\ \{b_N\} \end{Bmatrix} \quad \text{eq(4.2.12)}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec :} \quad [A_{IJ}] &= \Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M]^{-1} [G_{n+1}^J]^T \\ \{b_I\} &= [G_{n+1}^I]^T (\{u_{n+1}^{*I}\} + \{X_0^I\}) \end{aligned} \quad \text{eq(4.2.13)}$$

Où $[G_{n+1}^I]$ est la contrainte I associé à un nœud esclave et une facette maîtresse.

On décompose la matrice $[A]$ sous la forme $[A] = [M] - [N]$ où :

$$[M] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [0] & \cdots & \cdots & [0] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ [A_{I1}] & \cdots & [A_{II}] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & [0] \\ [A_{N1}] & \cdots & [A_{NI}] & \cdots & [A_{NN}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad -[N] = \begin{bmatrix} [0] & [A_{12}] & \cdots & \cdots & [A_{1N}] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & [0] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & [A_{N-1N}] \\ [0] & \cdots & 0 & \cdots & [0] \end{bmatrix}$$

Le schéma itératif où le passage de l'itération i à $i+1$ s'écrit alors:

$$[M] \{\lambda^{i+1}\} = [N] \{\lambda^i\} + \{b\} \quad \text{eq(4.2.14)}$$

On effectue, pour $I = 1 \cdots N$, la boucle :

$$\sum_{J=1}^I [A_{IJ}] \{\lambda_J^{i+1}\} = - \sum_{J=I+1}^N [A_{IJ}] \{\lambda_J^i\} + \{b_I\} \quad \text{eq(4.2.15)}$$

On peut écrire la ligne ci-dessus sous la forme :

$$\sum_{J=1}^{I-1} [A_{IJ}] \{\lambda_J^{i+1}\} + [A_{II}] \{\lambda_I^{i+1}\} = [A_{II}] \{\lambda_I^i\} - \sum_{J=1}^N [A_{IJ}] \{\lambda_J^i\} + \{b_I\} \quad \text{eq(4.2.16)}$$

et:

$$\begin{aligned} \Delta \{\lambda_I^{i \rightarrow i+1}\} &= [A_{II}]^{-1} \left(- \sum_{J=1}^{I-1} [A_{IJ}] \{\lambda_J^{i+1}\} - \sum_{J=I}^N [A_{IJ}] \{\lambda_J^i\} + \{b_I\} \right) \\ &= [A_{II}]^{-1} \{p^{i \rightarrow i+1}\} \end{aligned} \quad \text{eq(4.2.17)}$$

Rappelons l'expression du déplacement correctif :

$$\begin{aligned} \{u_c\} &= -\Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}] \{\lambda_n\} \\ &= -\Delta t^2 \sum_{J=1}^N ([M]^{-1} [G_{n+1}^J]^T \{\lambda_n^J\}) \end{aligned} \quad \text{eq(4.2.18)}$$

Il convient de différencier une itération globale de Gauss-Seidel et une itération locale. L'itération globale c'est quand on a bouclé sur l'ensemble des contraintes et qu'on a vérifié la convergence ; et l'itération locale c'est l'opération sur une contrainte locale.

Ainsi sur une itération globale de Gauss-Seidel l'incrément de déplacement correctif est :

$$\begin{aligned} \{\Delta u_c\} &= \{u_c^{i+1}\} - \{u_c^i\} \\ \{\Delta u_c^J\} &= -\Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}^J]^T \{\Delta \lambda_J\} \end{aligned} \quad \text{eq(4.2.19)}$$

A l'échelle locale, lorsque nous sommes à la $I^{\text{ème}}$ contrainte le déplacement correctif est :

$$\begin{aligned} \{u_c^{i \rightarrow i+1}\} &= \{u_c^i\} + \sum_{J=1}^{I-1} \{u_c^J\} \\ &= -\sum_{J=1}^N ([M]^{-1} [G_{n+1}^J]^T \{\lambda_J^i\}) - \sum_{J=1}^N ([M]^{-1} [G_{n+1}^J]^T \{\lambda_J^{i+1}\}) \end{aligned} \quad \text{eq(4.2.20)}$$

Ce qui correspond à l'incrément de multiplicateur de Lagrange :

eq(4.2.21)

$$\begin{aligned} \{\Delta\lambda^I\} &= \left(\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T\right)^{-1} \left([G_{n+1}^I] (\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) + [G_{n+1}^I] \{u_c^{i \rightarrow i+1}\}\right) \\ &= \left(\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T\right)^{-1} \{p_I^{i \rightarrow i+1}\} \end{aligned}$$

On a :

$$\boxed{\{p_I^{i \rightarrow i+1}\} = [G_{n+1}^I] (\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) + \{u_c^{i \rightarrow i+1}\}} \quad \text{eq(4.2.22)}$$

Et :

$$\boxed{\{\Delta\lambda^I\} = \left(\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T\right)^{-1} \{p_I^{i \rightarrow i+1}\}} \quad \text{eq(4.2.23)}$$

Au final le schéma de résolution consistera à boucler jusqu'à convergence en effectuant les itérations suivantes :

Pour $I = 1 \dots N$

- 1 $\{p_I^{i \rightarrow i+1}\} = [G_{n+1}^I] (\{u_{n+1}^*\} + \{X_0\}) + \{u_c^{i \rightarrow i+1}\}$
- 2 $\{\Delta\lambda^I\} = \left(\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T\right)^{-1} \{p_I^{i \rightarrow i+1}\}$
- 3 $\{\lambda_I^{i+1}\} = \{\lambda_I^i\} + \{\Delta\lambda_I\}$
- 4 $\{\Delta u_I^c\} = -\Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T \{\Delta\lambda_I\}$
- 5 $\{u_c^{i \rightarrow i+1}\} = \{u_c^{i \rightarrow i+1}\} + \{\Delta u_I^c\}$

si $\frac{\|\Delta\lambda\|_2}{\|\lambda\|_2}$ alors $\{u_{n+1}\} = \{u_{n+1}^*\} + \{u_{n+1}^c\}$

sinon répétition de la boucle

I est le numéro de la contrainte. $\{p_I\}$ contient les coordonnées du vecteur « pénétration », $\{\lambda_I\}$ les coordonnées des forces au point de contact et $\{u_c\}$ les déplacements correctifs.

L'exécution du schéma tel qu'il est présenté ci-dessus conduit à l'adhérence entre les deux corps. La gestion du frottement se fait comme suit. On décompose les multiplicateurs de Lagrange en partie normale et partie

tangentielle $\{\lambda_l^{i+1}\} = \{\lambda_n\} + \{\lambda_l\}$ puis on remplace la partie tangentielle par $\mu \times \{\lambda_n\}$ et on réinjecte dans l'étape 4) le $\{\Delta\lambda_l\}$ corrigé. Les étapes 3) et 4) deviennent :

- $\{F_C^{totale}\} = \{\lambda_l^i\} + \{\Delta\lambda_l\}$ Calcul de la force de contact sur le point de contact
- $F_C^{normale} = \langle n \rangle \{F_C^{totale}\}$ Calcul de la norme de la force normale
- $\{F_C^{tangentielle}\} = \{F_C^{totale}\} - F_C^{normale} \{n\}$ Calcul de la force tangentielle
- $F_C^T = \sqrt{\langle F_C^{tangentielle} \rangle \{F_C^{tangentielle}\}}$ Expression de sa norme
si $F_C^T > \mu F_C^{normale}$ alors
 - $\{t\} = \frac{1}{F_C^T} \{F_C^{tangentielle}\}$
 - $F_C^T = \mu F_C^{normale}$ Application de la loi de Coulomb
 - $\{\Delta\lambda_l\} = F_C^{normale} \{n\} + F_C^T \{t\} - \{\lambda_l^i\}$
- fin
- $\{\Delta u_l^c\} = -\Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T \{\Delta\lambda_l\}$

Durant un pas de temps, trois évènements peuvent avoir lieu entre deux corps : soit ils sont en contact, ou bien ils s'impactent, ou sinon ils se décolent.

La gestion du décollement se fait en annulant la force de contact ; ainsi l'étape 4) est remplacée par :

si $\|\lambda_l^{i+1}\| > 0$ alors

$$\{\Delta u_l^c\} = -\{\lambda_l^i\}$$

sinon

$$\{\Delta u_l^c\} = -\Delta t^2 [M]^{-1} [G_{n+1}^I]^T \{\Delta\lambda_l\}$$

Il faut bien voir que si durant le pas de temps les deux corps se décolent, ceci revient à avoir $\|\lambda_l^{i+1}\| > 0$, et les forces de contact agiront comme des forces de tractions et imposeront le recollement des deux corps.

La gestion du contact à l'aide de la pénalité a également été implémentée et testée. La pénalité gère l'imperméabilité des coques en fonction d'un coefficient

qui gouverne la force de contact. Ce coefficient conduit à une force de contact soit trop petit (ce qui conduit à une pénétration tolérée mais peu contrôlable), soit trop grand (et les deux corps se repoussent plus que nécessaire). De plus la méthode de pénalité prend en compte l'action simultanée de deux corps de part et d'autre d'une même coque avec un pas de temps de retard. Un autre point a joué en la faveur de l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange, le calcul des forces de contact avec la pénalité coûte à peu près autant qu'une itération de Gauss-Seidel. La convergence avec le schéma de Gauss-Seidel étant rapide (quelques itérations), la méthode de pénalité a été finalement abandonnée.

4.3 Gestion géométrique

4.3.1 Description géométrique des surfaces de contact

La gestion géométrique du contact est souvent la partie la plus onéreuse en termes de temps de calcul. Elle consiste à décrire d'une manière discrète la partie de chacun des deux corps A et B rentrant en contact. L'interaction des deux corps se fait au travers de doublons d'entités géométriques discrètes. Ces doublons d'entités sont soit [HALLQUIST 2005]:

- Un nœud + une facette.
- Un nœud + un nœud.
- Un nœud + un segment.
- Une arête + une arête.

Les trois premiers doublons s'inscrivent, comme on le verra par la suite, dans le cadre d'une stratégie standard des couples maîtres esclaves, et le dernier n'implique aucune hiérarchie entre les deux corps. Le concept de hiérarchie est lié au fait que dans la gestion géométrique des deux corps, on définit un des deux corps par ses nœuds et le second par des surfaces discrètes. Les conditions de contact sont alors imposées aux nœuds esclaves qui ne doivent pas pénétrer dans le domaine délimité par les surfaces maîtresses. Cela implique tel qu'on le verra par la suite que les nœuds du corps maître peuvent se trouver dans le corps

esclave et non l'inverse. Cela nous conduira à inverser dans l'ensemble de nos simulations de mise en forme des multi-plis les couples : à savoir que pour une interface, on gère le contact à l'aide de deux couples maître esclave. On montrera par la suite qu'un certain nombre de défauts persistent, et s'en trouvent accentués par le fait que se soit du contact multicoques. Pour supprimer ses défauts on ajoute le quatrième doublon cité plus haut, à savoir du contact arête contre arête. Ce dernier ne présente pas de hiérarchie dans la mesure où la même condition de contact est imposée aux deux arêtes à la fois. Ainsi, si on utilise une double stratégie maîtres-esclaves inversées à laquelle on ajoute du contact arête-arête, les deux corps ont très peu (en général aucune) zone en commun (aucune si la surface maîtresse est facettisée).

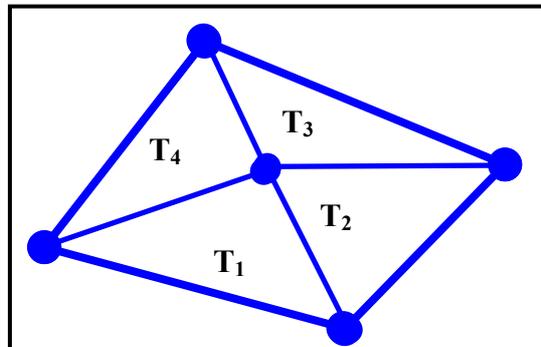


Figure 4-2 Surface maîtresse quadrangulaire décomposée en triangles.

Les facettes de contact peuvent être soit des triangles soit des quadrangles. Si elles sont décrites en fonction de quatre points, du fait que ces points sont, sauf exception, non coplanaires, on décompose ces surfaces à l'aide de quatre triangles (Figure 4-2) qui ont pour sommet commun le barycentre du quadrangle ([HEINSTEIN et al. 2000], [BAILLET et al. 2000]). Lorsqu'une facette est décrite à l'aide d'un triangle (elle en est plane) la minimisation de la distance (eq(4.1.3) et eq(4.1.1)) est linéaire et se résout en une itération. Pour une surface courbe la minimisation de la distance est un problème non linéaire, et de ce fait un schéma itératif tel que du schéma de Newton-Raphson par exemple ([WRIGGERS 2006]) doit être adopté.

Une autre particularité liée au contact entre coques implique que les surfaces de contact ne se situent pas sur les nœuds éléments finis (Figure 4-3(a)), mais sur une peau supérieure et une peau inférieure décrivant l'épaisseur (Figure 4-3(b)). Pour décrire ces surfaces, on les représente à l'aide de point de contact que l'on place à une demi-épaisseur des nœuds éléments finis puis on gère les conditions de non pénétration à partir des surfaces générées par ces points [WANG et al. 1997]. Cette méthode a été utilisée par différents auteurs afin de s'écarter des hypothèses des contraintes planes et d'introduire un degré de liberté supplémentaire en pincement [EL-ABBASI et al. 1998] [EL-ABBASI et al. 1999][HARTMANN et al. 2007].

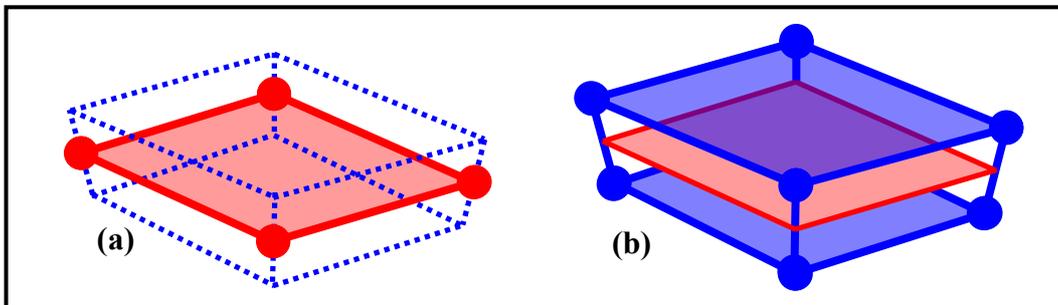


Figure 4-3 Gestion de l'épaisseur avec des points de contact.

La normale est définie en faisant une moyenne pondérée de l'ensemble des normales aux triangles entourant le nœud concerné.

$$\vec{n} = \frac{\sum_i^{n_{\text{triangles}}} \alpha_i \vec{n}_i}{\sum_i \alpha_i} \quad \text{eq(4.3.1)}$$

Le choix de la pondération α_i peut porter par exemple sur l'aire du triangle i , ou aussi sur l'angle au sommet de ce triangle [SU et al. 2005] (Figure 4-4). Ce choix de pondération permet de donner une importance différente à chaque triangle si la taille d'un des triangles est grande par rapport à ses voisins.

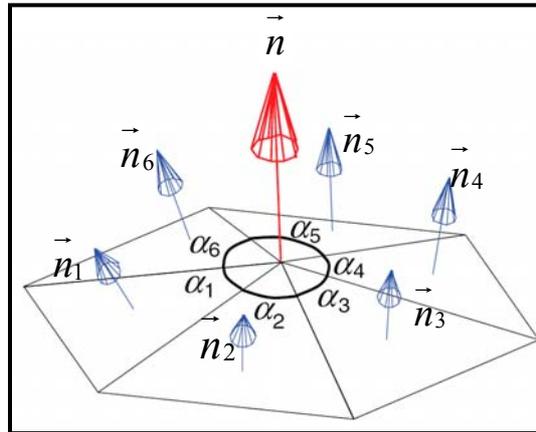


Figure 4-4 Normales aux nœuds obtenus définis en moyennant les normales des surfaces adjacentes.[SU et al. 2005]

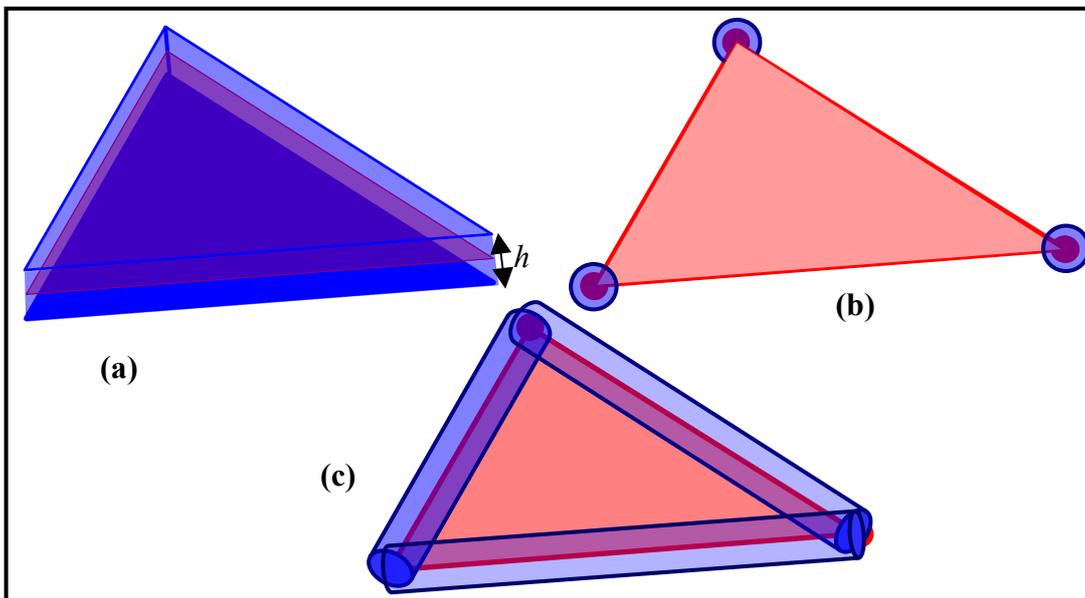


Figure 4-5 Représentations volumiques.(a) Surfaces - Prismes droits. (b) Nœuds - Sphères. (c) Arêtes - Cylindres.

Une autre méthode pour décrire les surfaces de contact consiste à utiliser des entités géométriques volumiques, à savoir représenter les points de contact par des sphères, les arêtes par des cylindres, et les triangles par des prismes droits [WHIRLEY et al. 1993]. Cela permet, contrairement à la première méthode, de se détacher du concept de normale sortante et de normale entrante, et d'avoir une gestion plus rapide de la recherche des zones de contact.

La gestion géométrique de l'épaisseur est faite en travaillant directement sur les nœuds éléments finis. La fonction de gap s'en trouve modifiée et au lieu de l'écrire sous la forme eq(4.1.3) on la remplacera par :

$$\begin{aligned}
 g_N(\vec{x}_B, t) &= \min\left(\|\vec{x}_B - \vec{x}_A\|\right) \quad \text{si} \quad (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{n}_A > \frac{h}{2} \\
 &= \frac{h}{2} \quad \text{sinon}
 \end{aligned}
 \tag{4.3.2}$$

La facettisation de la surface de contact a certes l'avantage d'être rapide mais l'aspect anguleux a tendance à faire vibrer la structure lors du passage d'un nœud esclave d'une facette à une autre. Ainsi les quadrangles ont également été traité à l'aide d'interpolation bi-cubique hermitienne ([BAILLET et al. 2000],[WANG et al. 2001], [MALGOUYRES 2005]). Cela a été mis en place dans PLAST3D pour les coques mais n'a pas été exploité dans la mesure où les calculs de multiplis ont été effectués uniquement avec des triangles. Or il s'avère qu'on ne peut dégénérer une interpolation d'Hermite pour l'utiliser sous forme de triangles. C'est pourquoi certains auteurs proposent d'utiliser des triangles de Bézier pour la gestion de facettes triangulaires [KRSTULOVIC-OPARA et al. 2002][KLOOSTERMAN 2002].

4.3.2 Contact nœud-surface

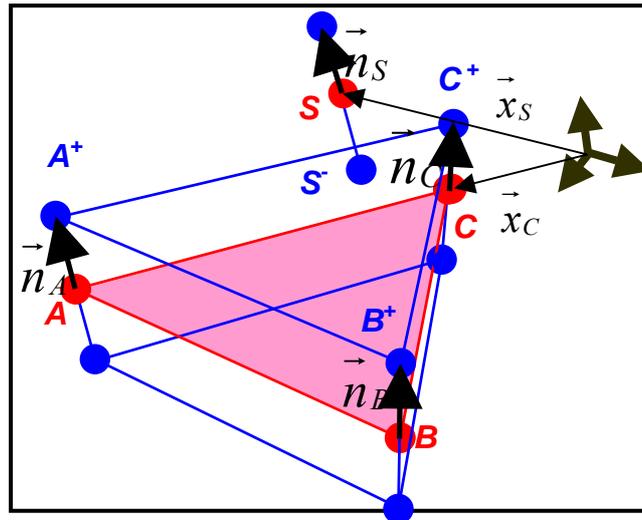


Figure 4-6 *Nœuds esclave sur une surface maîtresse. Gestion de l'épaisseur avec des points de contact.*

Une fois qu'un nœud esclave est détecté comme étant pénétrant, les conditions de non pénétration imposent qu'il soit sur la surface maîtresse. Si la surface est facetisée, cela revient à ce que, au cas où une pénétration est détectée, le point de contact de la surface esclave soit coplanaire avec les points de contact de la facette maîtresse. La position de ces points est donnée par les vecteurs (cf. Figure 4-6):

$$\vec{x}^+ = \vec{x} + \frac{h}{2} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{x}^- = \vec{x} - \frac{h}{2} \vec{n} \quad \text{eq(4.3.3)}$$

La coplanarité des points de contact s'écrit sous la forme :

$$\vec{x}_{S^-} = s(\vec{x}_{B^+} - \vec{x}_{A^+}) + t(\vec{x}_{C^+} - \vec{x}_{A^+}) + \vec{x}_{A^+} \quad \text{eq(4.3.4)}$$

Ce qui revient à l'écrire à l'aide des fonctions de forme d'un triangle (qui correspondent d'ailleurs aux coordonnées barycentriques du projeté du point esclave) :

$$\vec{x}_{S^-} = N_1(s, t) \vec{x}_{A^+} + N_2(s, t) \vec{x}_{B^+} + N_3(s, t) \vec{x}_{C^+} \quad \text{eq(4.3.5)}$$

Que l'on peut reproduire en fonction des coordonnées des nœuds et des normales aux nœuds sous la forme :

$$\{0\}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_1[1]_{3 \times 3} & N_2[1]_{3 \times 3} & N_3[1]_{3 \times 3} & -[1]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \{x_A\} \\ \{x_B\} \\ \{x_C\} \\ \{x_S\} \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} h_A \{n_A\} \\ h_B \{n_B\} \\ h_C \{n_C\} \\ -h_S \{n_S\} \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad \text{eq(4.3.6)}$$

On retrouve ainsi une forme modifiée de l'équation eq(4.2.1) :

$$\begin{array}{l} [M] \{\ddot{u}_n\} + \{F_n^{\text{int}}\} + [G_{n+1}]^T \{\lambda_n\} = \{F_n^{\text{ext}}\} \\ [G_{n+1}] (\{u_{n+1}\} + \{v_{n+1}\} + \{X_0\}) = \{0\} \end{array} \quad \text{eq(4.3.7)}$$

Où $[G_{n+1}]$ est l'assemblage des $[G_{n+1}^I]$:

$$[G_{n+1}^I] = \left[N_1 [1]_{3 \times 3} \ ; \ N_2 [1]_{3 \times 3} \ ; \ N_3 [1]_{3 \times 3} \ ; \ - [1]_{3 \times 3} \right] \quad \text{eq(4.3.8)}$$

Un avantage en faveur de l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange à incrémentes avant, apparaît compte tenu de la forme que prend $[G_{n+1}^I]$. En effet, l'inversion de la matrice $\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M^I]^{-1} [G_{n+1}^I]^T$ de l'équation eq(4.2.23) se trouve fortement simplifiée.

Soit la matrice de masse diagonalisée :

$$[M^I] = \begin{bmatrix} m_A [1]_{3 \times 3} & \cdots & \cdots & [0]_{3 \times 3} \\ \vdots & m_B [1]_{3 \times 3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & m_C [1]_{3 \times 3} & \vdots \\ [0]_{3 \times 3} & \cdots & \cdots & m_S [1]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad \text{eq(4.3.9)}$$

Où m_A , m_B , m_C et m_S sont les masses associées aux nœuds A , B , C et S .

On a :

$$\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M^I]^{-1} [G_{n+1}^I]^T = \Delta t^2 \left(\frac{N_1^2}{m_A} + \frac{N_2^2}{m_B} + \frac{N_3^2}{m_C} + \frac{1}{m_S} \right) [1]_{3 \times 3} \quad \text{eq(4.3.10)}$$

Il en résulte alors l'inverse dans l'équation eq(4.2.23):

$$\left(\Delta t^2 [G_{n+1}^I] [M^I]^{-1} [G_{n+1}^I]^T \right)^{-1} = \frac{1}{\Delta t^2 \left(\frac{N_1^2}{m_A} + \frac{N_2^2}{m_B} + \frac{N_3^2}{m_C} + \frac{1}{m_S} \right)} [1]_{3 \times 3} \quad \text{eq(4.3.11)}$$

Ainsi le gain de temps de calcul est immédiat.

L'identification des coefficients s et t est faite par projection du nœud esclave sur la facette maîtresse après l'étape prédictive. Ils sont donnés par [HILL 1994] (en notant $\vec{u} = \vec{x}_{B^+} - \vec{x}_{A^+}$, $\vec{v} = \vec{x}_{C^+} - \vec{x}_{A^+}$ et $\vec{w} = \vec{x}_{S^+} - \vec{x}_{A^+}$):

$$s = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{u})}{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})} \quad \text{eq(4.3.12)}$$

$$t = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{w} \cdot \vec{v})}{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})} \quad \text{eq(4.3.13)}$$

4.3.3 Contact nœud arête et contact nœud-nœud

Le contact nœuds arête est utilisé lors de la gestion des « angles morts », ou lors de la gestion des plans de symétrie. Le fait que la surface maîtresse n'ait pas une continuité C^1 implique que, après prédiction, lors de la projection du nœud esclave sur les facettes maîtresses la pénétration n'est pas détectée même si elle a lieu. La projection se fait orthogonalement à la surface maîtresse, c'est pourquoi la détection n'est faite que si le point esclave se trouve dans le prisme droit dont la base est la facette triangulaire maîtresse (Figure 4-7).

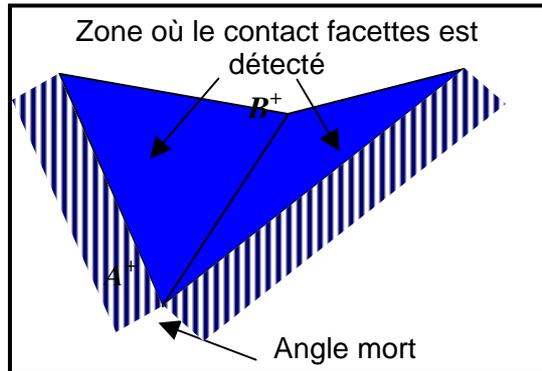


Figure 4-7 Angles mort dans les surfaces de contact.

La condition de non pénétration est gérée comme pour le contact à deux dimensions, à savoir :

$$0 \leq \left(s(\vec{x}_{B^+} - \vec{x}_{A^+}) - (\vec{x}_{S^-} - \vec{x}_{A^+}) \right) \cdot \vec{n} \quad \text{eq(4.3.14)}$$

\vec{n} étant la moyenne des normales aux deux facettes adjacentes. Ainsi le nœud esclave glisse sur le plan orthogonal à \vec{n} . La condition d'adhérence s'écrit sous la forme matricielle :

$$\{0\}_{3 \times 1} = \left[s [1]_{3 \times 3} \ ; \ (1-s) [1]_{3 \times 3} \ ; \ - [1]_{3 \times 3} \right] \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} x_A \\ x_B \\ x_S \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} h_A \{n_A\} \\ h_B \{n_B\} \\ -h_S \{n_S\} \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad \text{eq(4.3.15)}$$

Une fois introduit le contact nœud facette et le contact nœud arête, il reste une zone où le contact n'est pas détecté. Cette zone apparaît pour les mêmes raisons que celles citées ultérieurement sauf qu'elle se situe « en dessous » des points de contacts maîtres. Et dans ce cas un contact nœud-nœud est traité.

4.3.4 Contact arête- arête

La gestion du contact maître esclave standard présente un certain nombre de défauts qui conduisent à l'interpénétration des surfaces entre elles. Trois exemples sont présentés Figure 4-8 extrait de [WINKELMULLER 2000]. L'exemple (a) est le plus fréquent et conduit très souvent à la divergence. L'exemple (b) ne conduit pas toujours à la divergence mais est source de localisations des contraintes.

La solution apportée pour remédier à ce problème consiste à gérer le contact entre les arêtes. Ainsi une interface gérée par deux couples maître-esclaves inversé et du contact arêtes-arêtes ne présente aucune zone d'interpénétration. La condition de contact s'écrit (Figure 4-9) :

eq(4.3.16)

$$\{0\}_{3 \times 1} = \left[r [1]_{3 \times 3} \ ; \ (1-r) [1]_{3 \times 3} \ ; \ s [1]_{3 \times 3} \ ; \ (1-s) [1]_{3 \times 3} \ ; \ \right] \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} h_A \{n_A\} \\ h_B \{n_B\} \\ h_C \{n_C\} \\ h_D \{n_D\} \end{array} \right\} \end{array} \right)$$

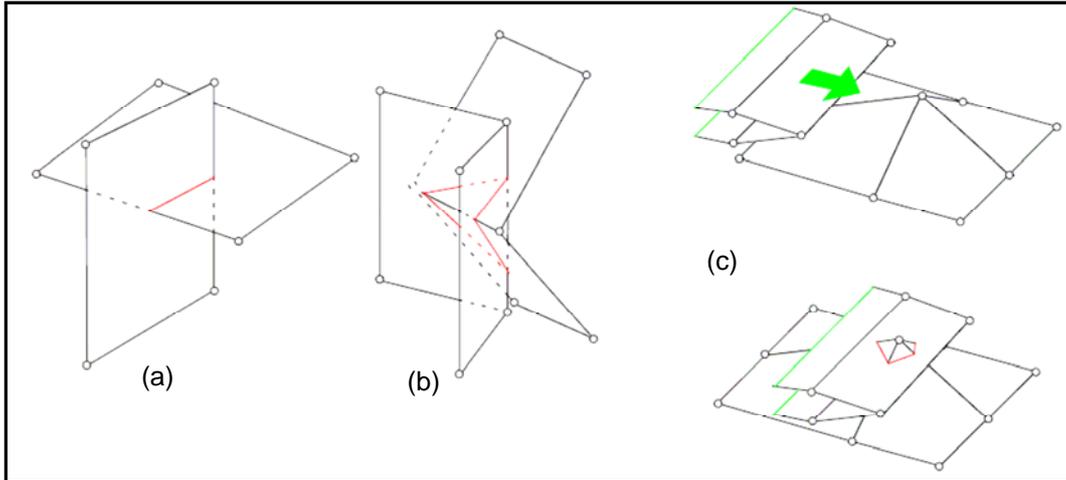


Figure 4-8 Défauts liés à l'absence de contact arête-arête.

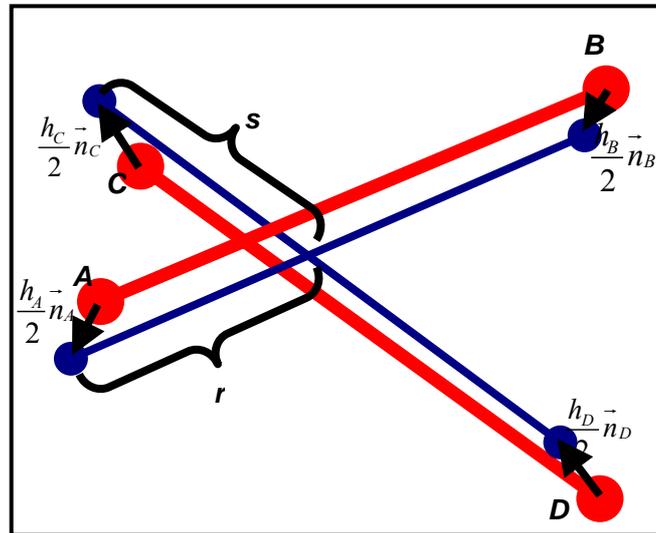


Figure 4-9 Gestion du contact entre segment.

L'expression de r et de s se fait par une méthode connue dans le domaine de l'infographie appelée « closest point approach » qui donne les points des deux segments les plus proches en fonction des deux coefficients r et s .

(en notant $\vec{u} = \vec{x}_{B^+} - \vec{x}_{A^+}$, $\vec{v} = \vec{x}_{D^+} - \vec{x}_{C^+}$ et $\vec{w} = \vec{x}_{C^+} - \vec{x}_{A^+}$):

$$s = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{u})}{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

$$t = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{w} \cdot \vec{v})}{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

4.4 Recherche des zones de contact

La méthode adoptée en est décrite dans [WANG et al. 1997]. Elle consiste à décomposer la recherche des zones de contact en une étape de recherche globale suivie d'une recherche locale. La recherche globale, contrairement à la recherche locale, n'est pas effectuée tous les pas de temps du fait qu'il s'agit d'une localisation grossière du voisinage. Elle est bien plus coûteuse en temps de calcul que toutes les autres étapes du contact.

La recherche globale consiste à entourer la facette par un hexaèdre défini par

$$\begin{array}{l} x_{\min} = \min(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ y_{\min} = \min(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ z_{\min} = \min(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} x_{\max} = \max(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ y_{\max} = \max(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ z_{\max} = \max(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{array}$$

puis d'identifier tous les nœuds esclaves se trouvant dedans (

Figure 4-10). On stocke pour chaque nœuds esclave la facette voisine.

Puis on procède à l'étape locale. Pour chaque nœud esclave on parcourt l'ensemble des facettes voisines (en suivant le schéma décrit Figure 4-11) et on vérifie s'il est pénétrant, puis si leur projeté se trouve à l'intérieur de la facette. Si, une fois la boucle sur les facettes voisines terminée, le nœud est détecté pénétrant mais ne se projette sur aucune d'entre elles, alors on vérifie le contact entre les nœuds et les segments des facettes voisines. Et si enfin aucun contact n'est détecté sur les segments alors on vérifie le contact nœud contre nœud.

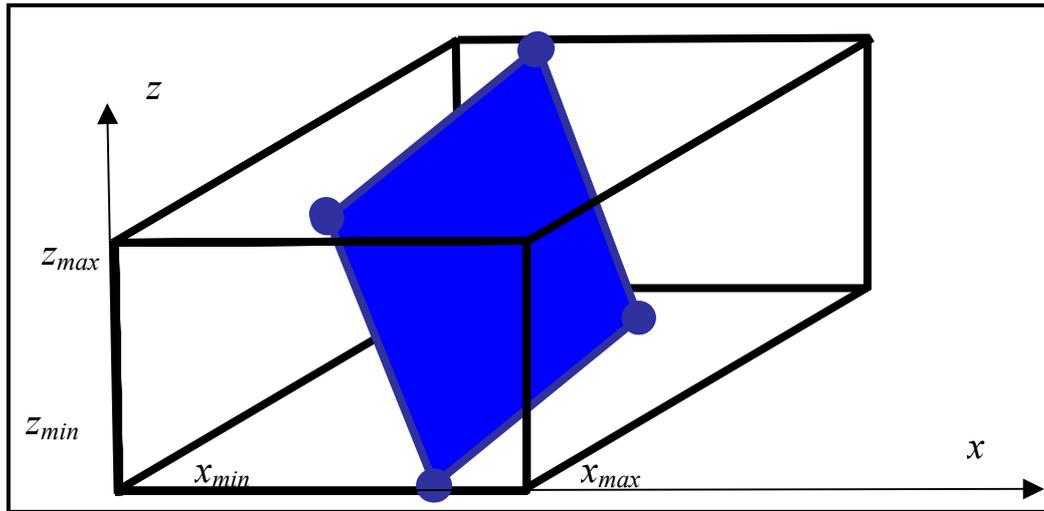


Figure 4-10 Boite gérant l'étape de recherche globale.

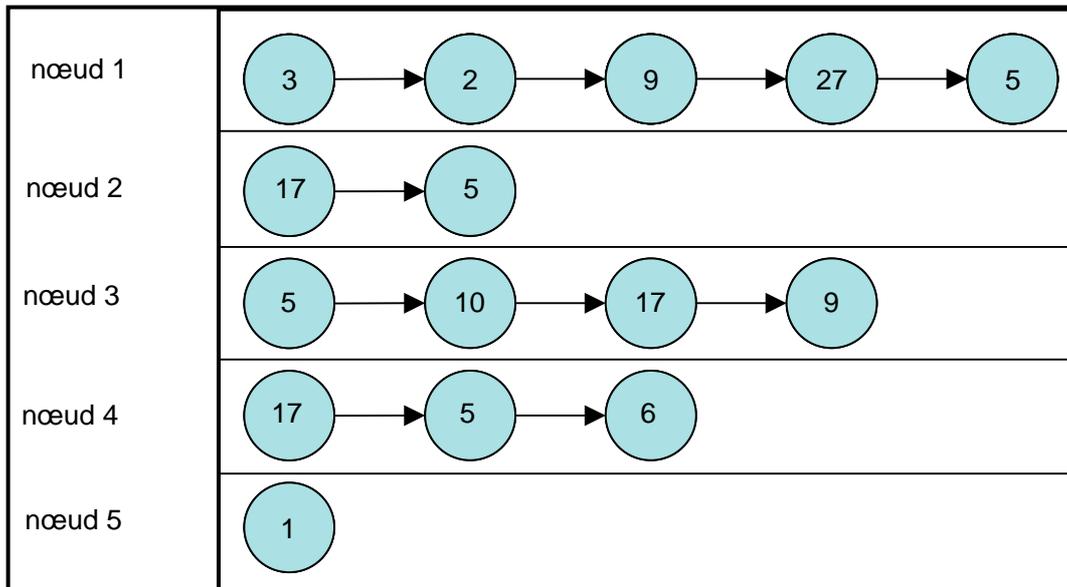
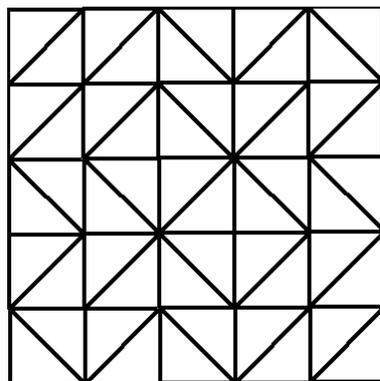


Figure 4-11 Stockage des nœuds esclaves et des surfaces maîtresses voisines.
(Bucket sorting)

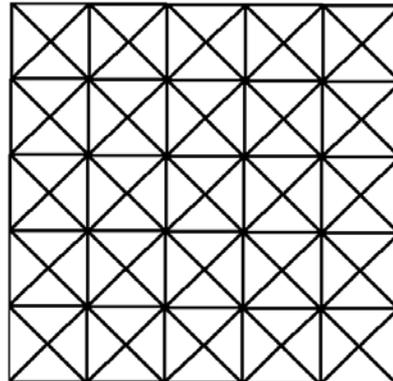
5 Exemples de simulations de mise en forme de renforts tissés

On se propose dans ce chapitre de pratiquer un certain nombre de simulations afin de mettre en évidence l'importance des différentes rigidités sur la forme finale d'un renfort tissé lors d'un drapage ou d'un emboutissage. Les exemples traités sont les suivant :

- Dans le paragraphe 5.1 on simule des drapages d'un tissu carré sur des géométries sphériques, cylindriques et cubiques.
- Dans le paragraphe 5.2 on applique des pressions sur des coussins.
- Dans le paragraphe 5.3 on pratique le premier emboutissage d'un monopli carré à l'aide d'un poinçon carré.
- Dans le paragraphe 5.4 on pratique des emboutissages à l'aide d'un poinçon hémisphérique sur un monopli puis sur un deux plis et enfin sur un cinq plis.



(a) maillage de densité $2 \times 5 \times 5$



(b) maillage de densité $4 \times 5 \times 5$

Figure 5-1 Maillage de type A (a) et maillage de type CD (b)

Outre le airbag du paragraphe 5.2, qui a été maillé à l'aide d'un mailleur automatique, les flans sont tous initialement carrés. Deux formes de maillage avec des éléments finis triangulaires sont utilisées : le maillage de type A

(Figure 5-1 (a)) et le maillage de type CD (Cross Directional) (Figure 5-1 (b)). Les flans carrés sont décomposés en $n \times n$ carrés et ces carrés sont décomposés de 2 éléments pour le maillage de type A et de 4 éléments pour le maillage de type CD. L'emboutissage d'un coin de valise a été pratiqué à l'aide d'éléments finis quadrangulaires dans un maillage régulier.

5.1 Drapage

5.1.1 Description du dispositif

La simulation du drapage sur des formes volumiques simples est inspirée des nombreux exemples présents dans [FARE 2002] et [SZE et al. 2005]. Les exemples traités correspondent au drapage d'une couche de tissu sur un volume donné. La forme obtenue est celle prise par le tissu sous l'action de son poids propre. En pratique dans le cadre d'un logiciel de dynamique explicite, on déplace le solide vers le tissé. En ce qui concerne les caractéristiques mécaniques on prend en compte la rigidité en tension et la rigidité en cisaillement. Trois rigidités en cisaillement sont considérées:

- Une rigidité de cisaillement tel que mesurée expérimentalement (taffetas de verre).
- Une rigidité de cisaillement nulle.
- Une rigidité de cisaillement correspondant à celle d'un matériau élastique isotrope.

On pratique le drapage sur trois formes de tables :

- 1 Une forme cylindrique (Figure 5-2 (a)).
- 2 Une forme hémisphérique (Figure 5-2 (b)).
- 3 Une forme cubique (Figure 5-2 (c)).

Pour les drapages cylindrique et hémisphérique, le maillage du tissu est de type A et est constitué de $2 \times 150 \times 150$ éléments, et pour le drapage sur la forme

cubique le maillage est constitué de $2 \times 200 \times 200$ éléments. Le maillage étant trop fin, il ne peut malheureusement être visualisé dans notre document.

Les CER sont carrés de côté 0.5. La rigidité en tension est de 100N. Le cisaillement tissu est pris sous la forme : $C(\gamma) = 0.37044\gamma - 0.84105\gamma^3 + 1.03113\gamma^5$. Les Calculs sont effectués sur 150000 pas de temps de 10^{-5} s. Une vitesse constante de 100mm/s est imposée aux surfaces rigides.

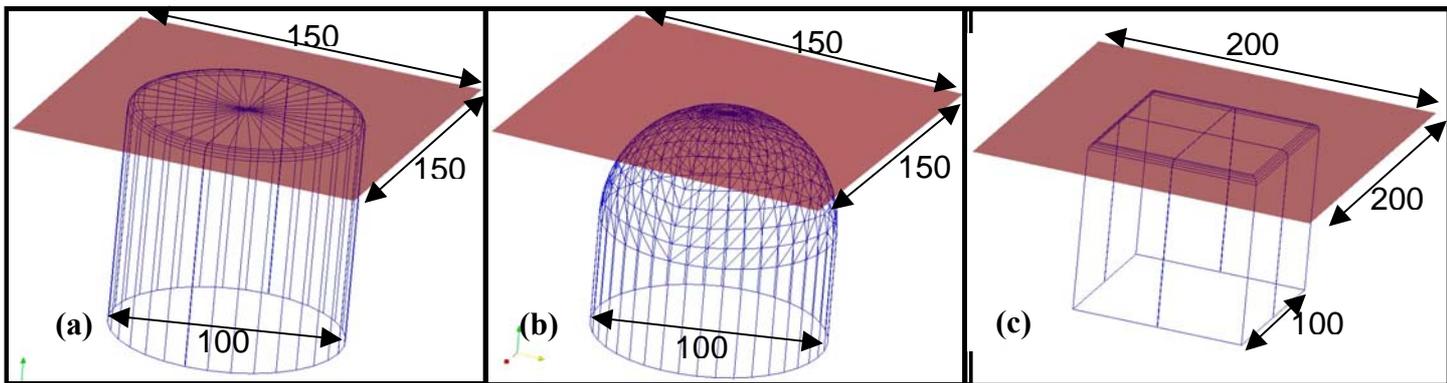


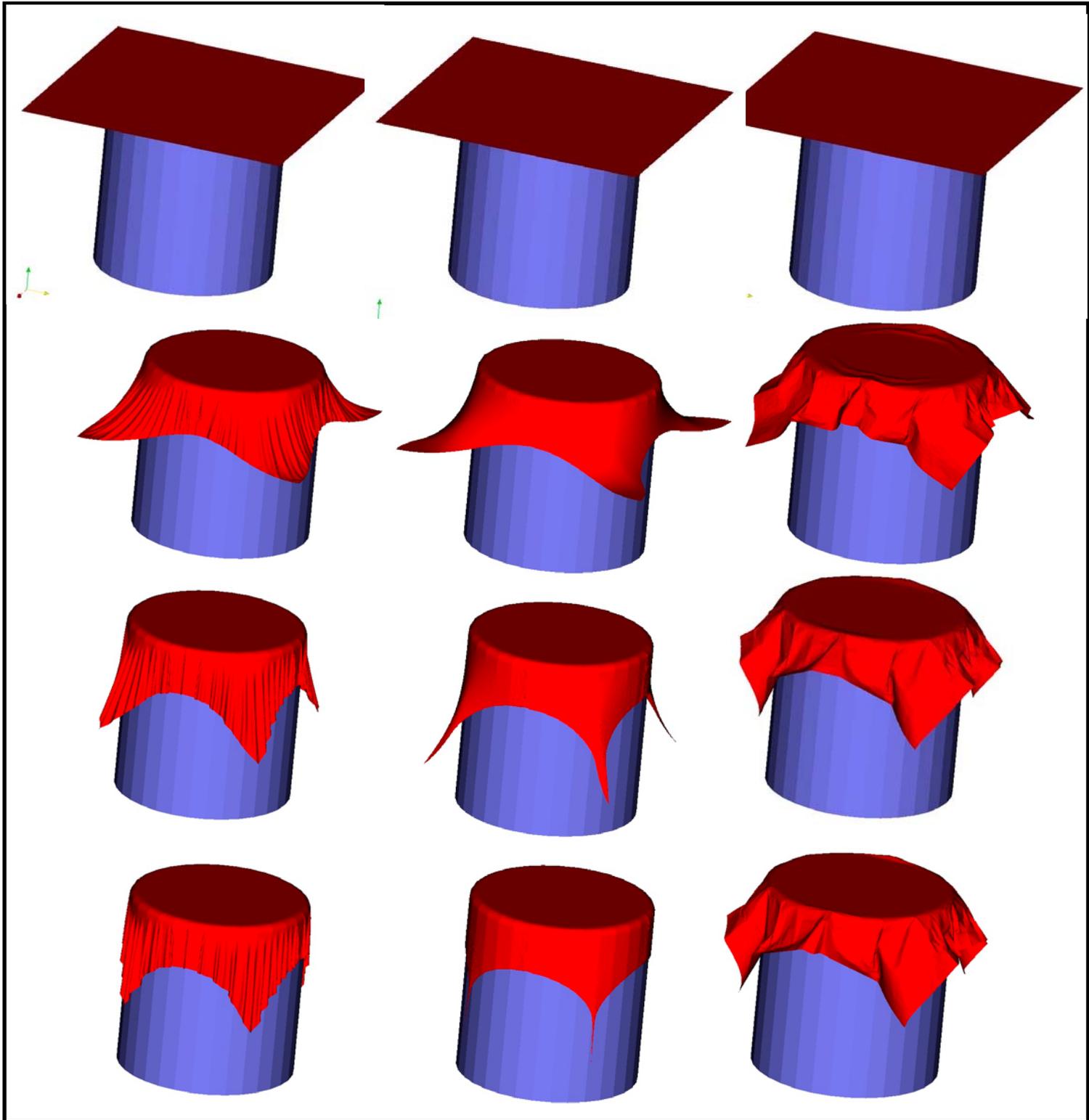
Figure 5-2 Géométries utilisées pour les trois formes de drapage.

5.1.2 Résultats de simulation

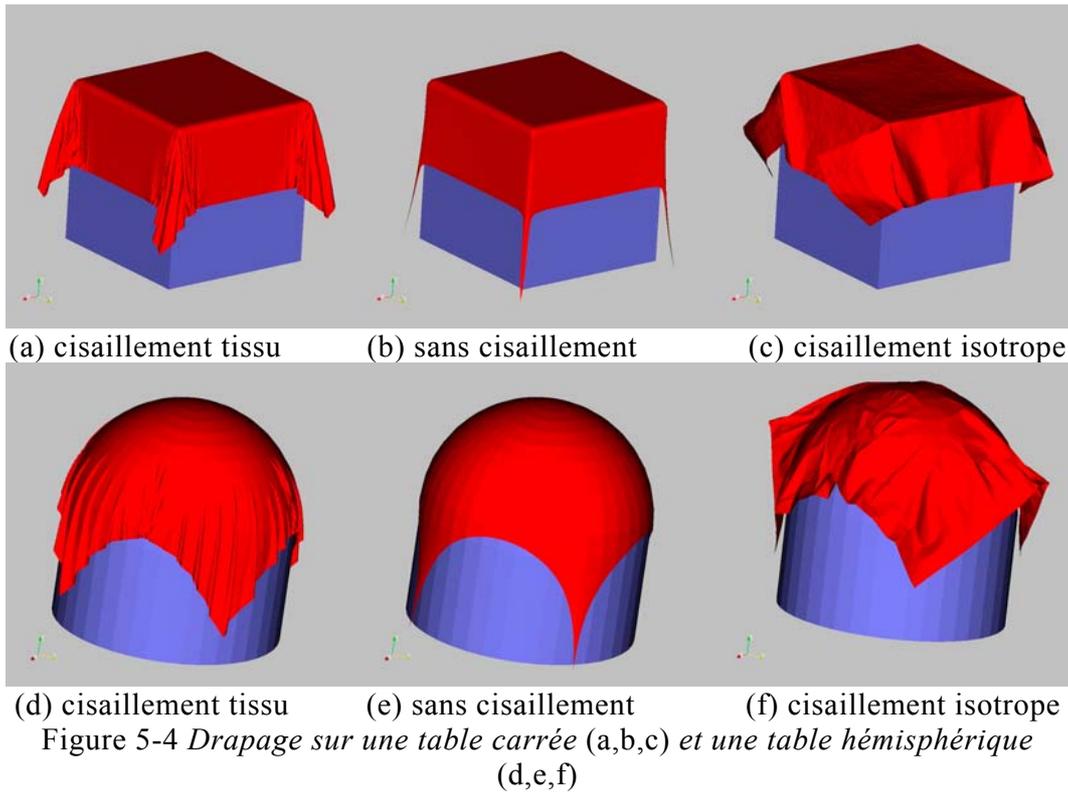
Le drapage sans rigidité de cisaillement donne une réponse proche à celle qu'aurait donnée une simulation à l'aide de l'algorithme du filet.

Pour le cas où le comportement en cisaillement est isotrope, le drapage n'est pas possible. On obtient une déformée correspondant à celle que prend dans ce cas une feuille de papier.

Ces tests montrent bien que le comportement en cisaillement dans le plan est essentiel pour le drapage. Ils illustrent bien l'importance de la rigidité de cisaillement. Le fait d'utiliser une rigidité en cisaillement prélevé sur des valeurs expérimentales, semble donner des formes de plissement réalistes.



(a) rigidité en cisaillement d'un tissu (b) sans rigidité en cisaillement (c) rigidité en cisaillement isotrope
Figure 5-3 Différentes étapes du drapage sur une forme cylindrique



5.2 Air bag

5.2.1 Description du dispositif

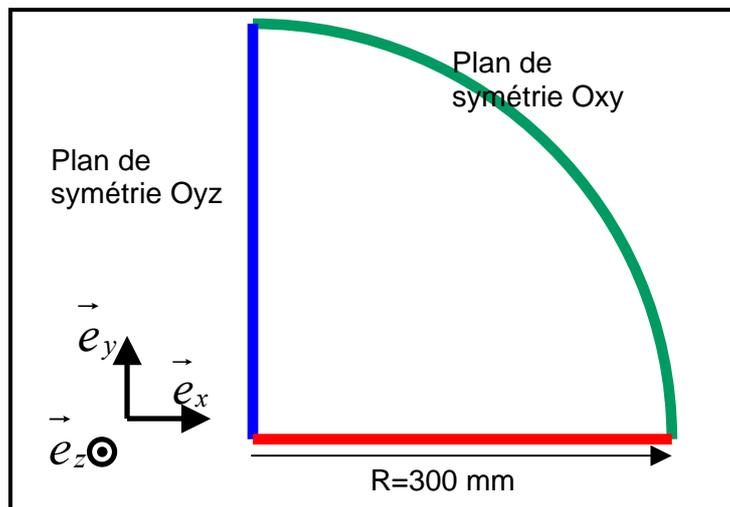


Figure 5-5 *Géométrie du huitième de l'airbag*

Cette simulation consiste à appliquer une pression dans un airbag et de comparer la réponse du renfort en prenant en compte différentes rigidités. Elle a été inspirée d'un ensemble de simulation comparant des tissus avec et sans rigidité de flexion apparu dans [FLORES et al. 2005]. Les caractéristiques mécaniques en cisaillement sont celle du taffetas de verres, à savoir $C(\gamma) = 0.37044\gamma - 0.84105\gamma^3 + 1.03113\gamma^5$ (γ en radian) ; la rigidité en tension est prise égale à 2300N ; et la flexion est exprimée par $M(\chi) = 0.1\chi - 0.005\chi^3$. La simulation est effectuée sur le huitième de la géométrie en exploitant les symétries. La géométrie initiale est constituée d'un quart de disque de rayon=300mm (Figure 5-5). Dans les cas membranaires les nœuds se trouvant sur la partie rouge sont bloqués en déplacement selon \vec{e}_y , en bleu selon \vec{e}_x et en vers selon \vec{e}_z ; et dans le cas de la flexion la structure est bloquée en rotation sur les zones rouge et bleue. On applique une pression de 10^{-3} N.mm⁻².

Le maillage a été effectué à l'aide d'un mailleur automatique. La finesse du maillage ne permet pas de le visualiser ; précisons tout de même qu'il est constitué de 13915 nœuds et de 27400 éléments pour le quart de la géométrie.

5.2.2 Résultats de simulation

Les causes d'apparition de plis sont multiples. Dans la Figure 5-6 on a appliqué la pression sur une structure n'ayant aucune rigidité ni en cisaillement ni en flexion. On observe que l'absence de rigidité en cisaillement ne fait apparaître aucun plissement contrairement à la Figure 5-7 où on a placé de la rigidité en cisaillement et à la Figure 5-8 où on prend en compte le cisaillement et la flexion. Ce qui est par ailleurs intéressant d'observer, c'est que le fait de négliger la rigidité en flexion suffit certes à localiser les zones de plissement mais ne suffit pas à décrire correctement la forme des plis (Figure 5-7 et Figure 5-8). D'autre part dans la Figure 5-9(a) et (b) on voit clairement que la rigidité en cisaillement est autant la cause de plissements que la compression des mèches.

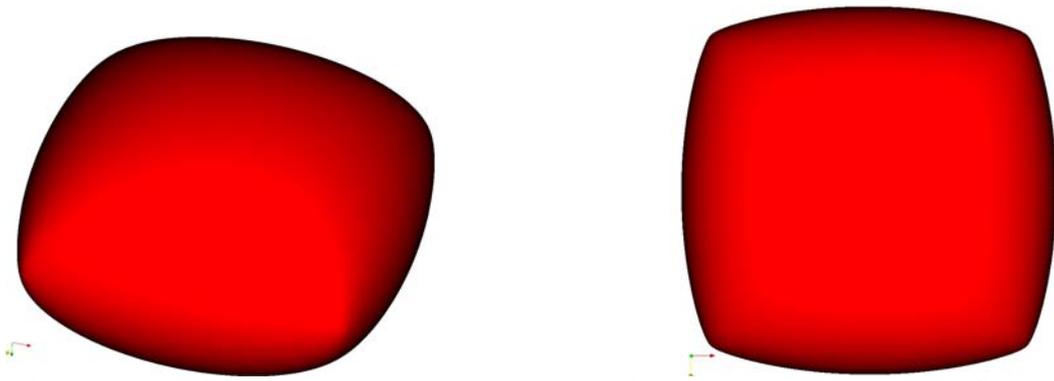


Figure 5-6 Airbag soumis à une pression. Rigidités en cisaillement et en flexion nulles.

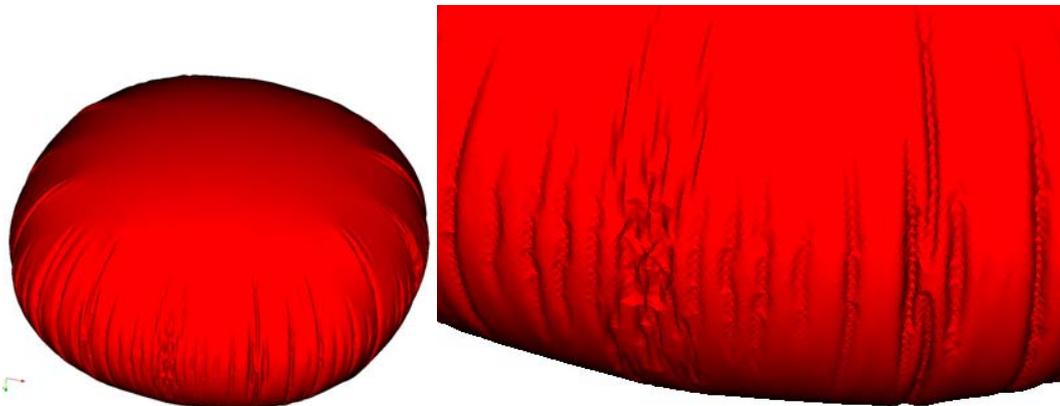


Figure 5-7 Airbag soumis à une pression. Rigidité en flexion nulle.

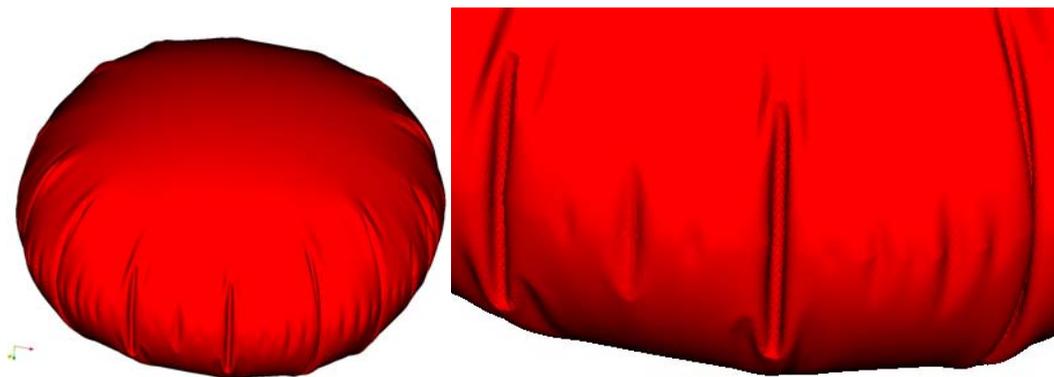


Figure 5-8 Airbag soumis à une pression. Rigidité en flexion prise en compte.

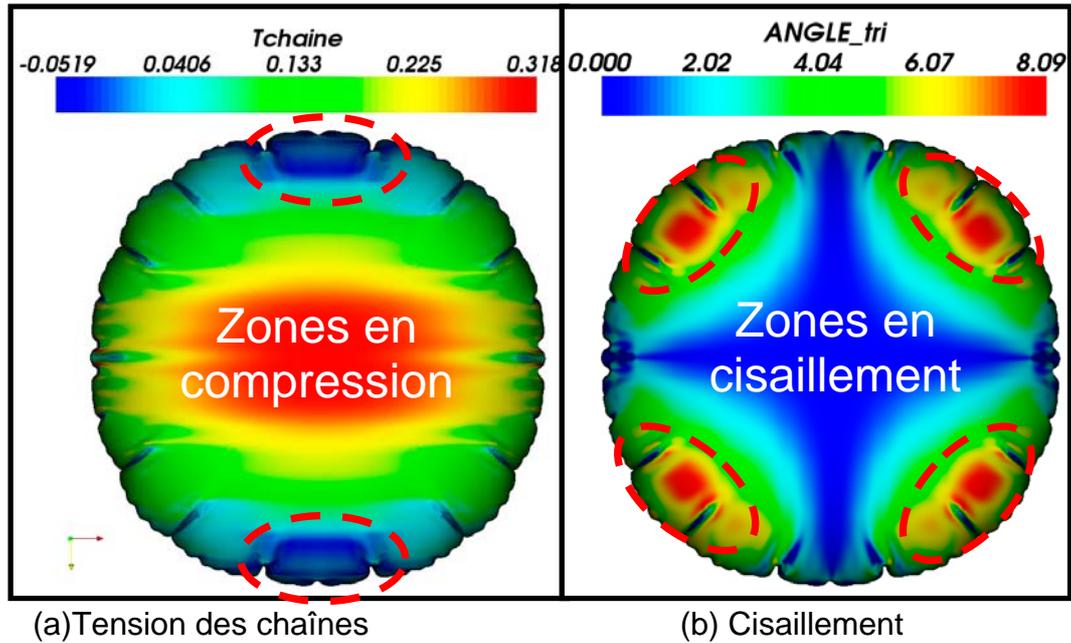


Figure 5-9 Isovaleurs airbag en fin de simulation.

5.3 Emboutissage d'un coin de valise

La simulation suivante consiste à emboutir un renfort tissé à l'aide d'un poinçon de forme carrée. Cette étude a été proposée comme benchmark par Nakamachi pour la conférence Numisheet 1993 [NAKAMACHI 1993]. Elle a été initialement utilisée pour les tôles en métal et a été par la suite pratiquée (uniquement en simulation) avec des renforts tissés [ZOUARI et al. 2006]. Le poinçon est de section carrée ($70 \times 70 \text{ mm}^2$) avec un rayon de raccordement de 8 mm. La matrice est également de section carrée ($74 \times 74 \text{ mm}^2$) avec un rayon de raccordement de 2 mm. En exploitant les symétries de la structure, le calcul est effectué sur un quart de géométrie (Figure 5-10).

Le quart de flan est un carré de côté 75 mm, et est maillé à l'aide de 150×150 éléments finis quadrangulaires. La densité de mèche du tissu est de 0,5 mèches par millimètre. La rigidité en tension est prise linéaire égale à 2000 N. Le cisaillement (s'il est pris en compte) est déterminé en fonction du polynôme : $C(\gamma) = 0.37044\gamma - 0.84105\gamma^3 + 1.03113\gamma^5$ (γ en radian, il s'agit des

caractéristiques du taffetas de verre). Une force de 300N est exercée sur le serre-flan. Un coefficient de frottement de 0,1 est pris entre la matrice et le flan et le serre-flan et le flan.

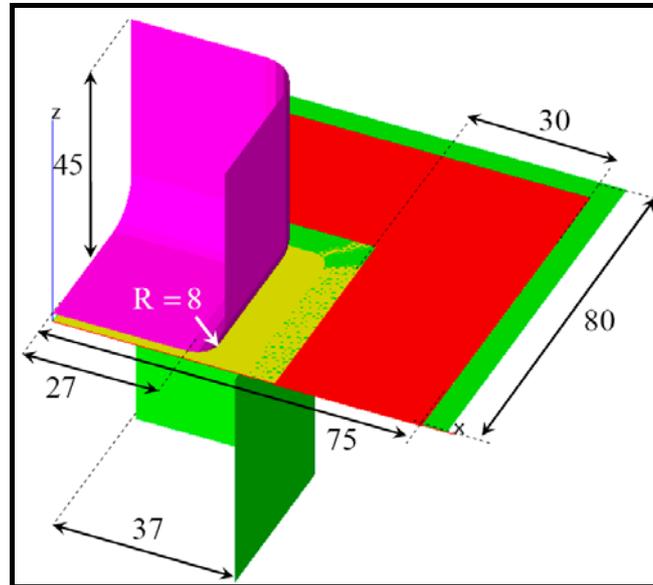


Figure 5-10 : Géométrie des outils

Il est intéressant d'observer les différences entre la Figure 5-11 et Figure 5-12. La première ne prend pas en compte la rigidité en cisaillement alors que la seconde la prend en compte. Cela conduit, pour le premier cas, à l'apparition d'aucun pli et en un angle de cisaillement excessif. La simulation Figure 5-12 est effectuée sans rigidité en flexion. La bonne qualité du résultat montre bien que dans de nombreuses simulations cela peut être négligé.

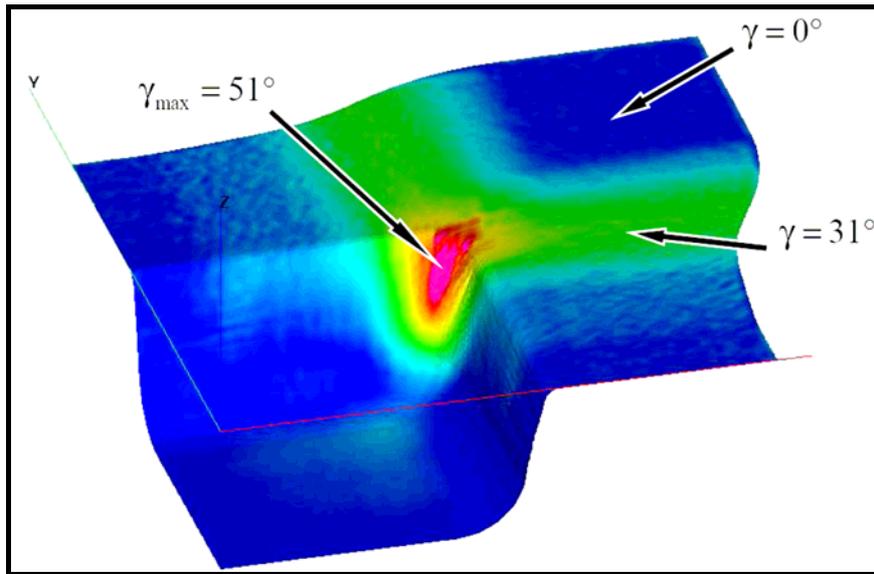


Figure 5-11 *Forme finale suite à un emboutissage avec poinçon carré. Rigidité en cisaillement nulle*

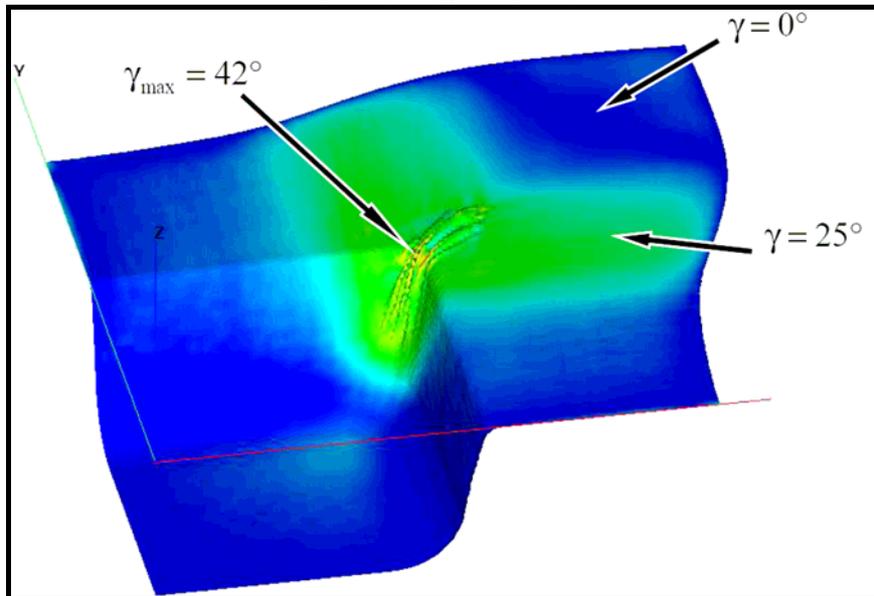


Figure 5-12: *Forme finale suite à un emboutissage avec poinçon carré.*

5.4 Emboutissage à l'aide d'un poinçon hémisphérique

5.4.1 Description des outils

Les caractéristiques géométriques de la simulation de l'emboutissage d'un tissu initialement carré de côté ($300 \times 300 \text{ mm}^2$) à l'aide d'un poinçon hémisphérique de rayon $R=75 \text{ mm}$ est présentée Figure 5-13. Elle a été proposée dans [CHEROUAT 1994]. Pour l'ensemble des emboutissages qui suivent les symétries ont été exploitées afin que le calcul soit effectué sur un quart de la géométrie. Le même maillage est utilisé pour l'ensemble des tissus. Le maillage du tissu est du type CD est constitué de $4 \times 20 \times 20$ éléments (Figure 5-14). Les mêmes propriétés mécaniques que pour l'emboutissage d'un coin de valise sont exploitées. L'effort serre flan est également égal à 300 N . Le coefficient de frottement est pris égal à $0,1$.

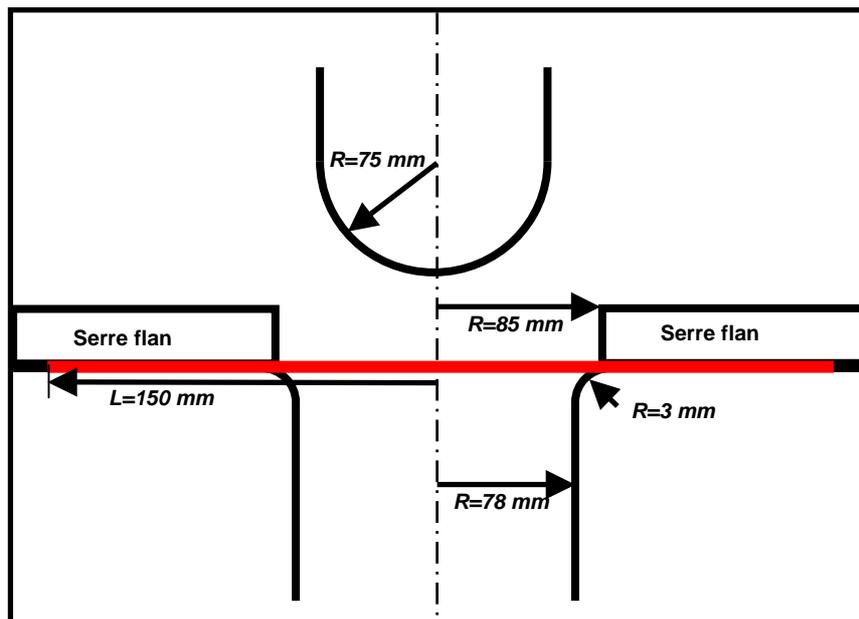


Figure 5-13 Géométrie des outils pour l'emboutissage avec poinçon hémisphérique.

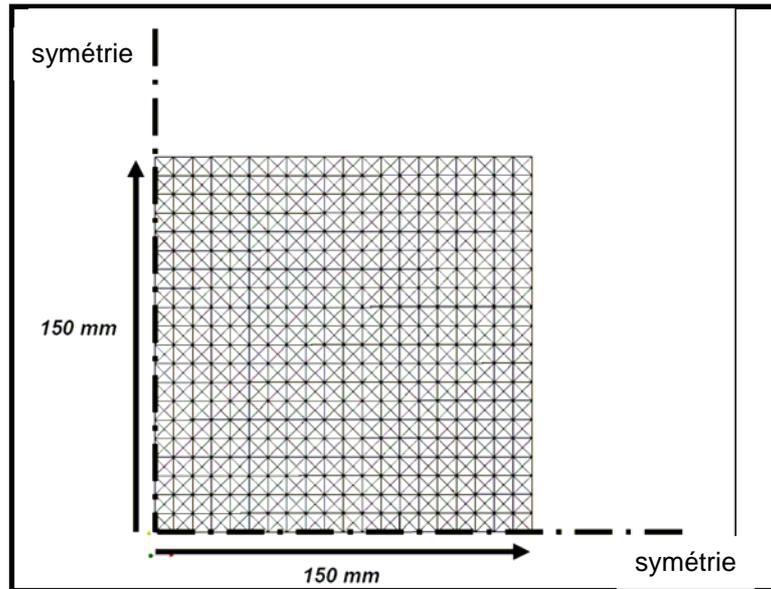
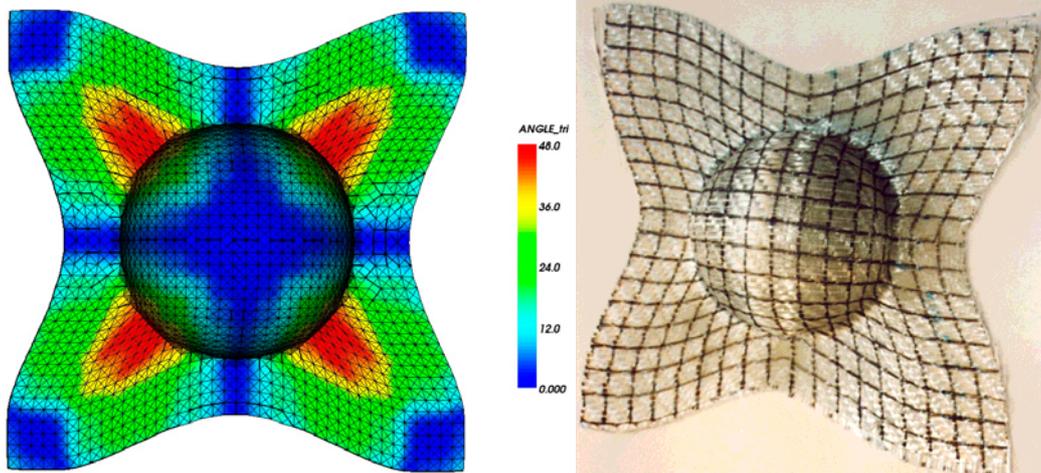


Figure 5-14 *Maillage du tissu*

5.4.2 *Emboutissage d'un mono pli*

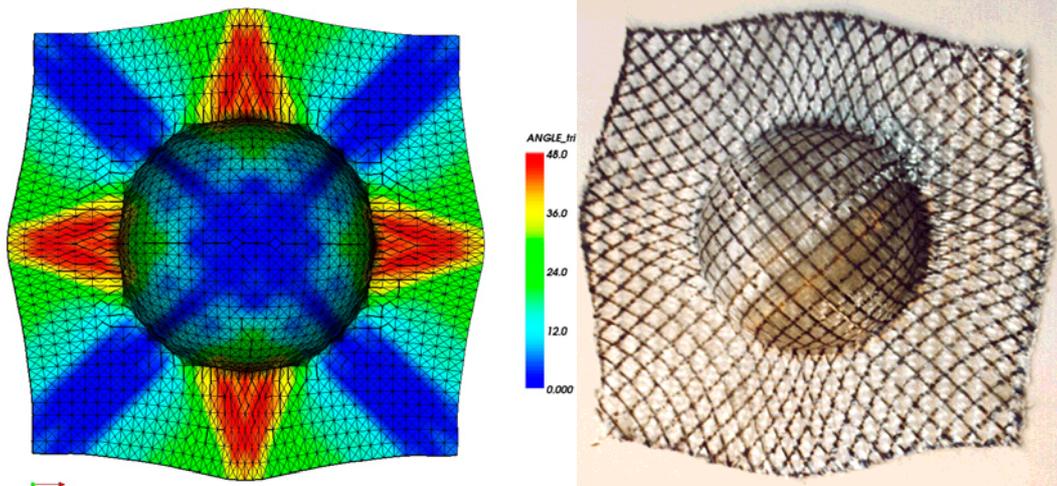
En un premier temps on a pratiqué deux emboutissages sur un seul pli avec un tissu orienté à $0-90^\circ$ (Figure 5-15) et un tissu à $\pm 45^\circ$ (Figure 5-16). On a pu comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux [CHEROUAT 1994].



(a) Résultat numérique

(b) Résultat expérimental

Figure 5-15 *Tissu orienté à $(0-90^\circ)$ embouti à l'aide d'un poinçon hémisphérique. Comparaison de l'expérimentation [CHEROUAT 1994] avec la simulation*



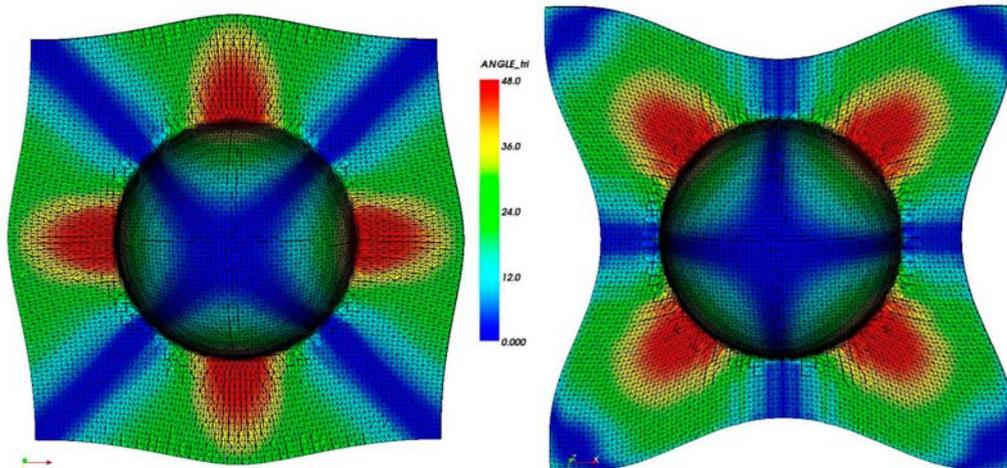
(a) Résultat numérique

(b) Résultat expérimental

Figure 5-16 *Tissu orienté à $(\pm 45^\circ)$ embouti à l'aide d'un poinçon hémisphérique. Comparaison de l'expérimentation [CHEROUAT 1994] avec la simulation*

Dans les deux cas la forme globale du renfort obtenue par simulation est très proche de celle obtenue expérimentalement, et il en est de même pour les angles entre les chaînes et les trames. L'angle de cisaillement maximal obtenu par simulation est de 46° pour le tissu orienté à $0-90^\circ$, et de 49° pour le tissu orienté à $\pm 45^\circ$. Ces résultats sont très proches des résultats expérimentaux.

Il est intéressant de vérifier l'indépendance du résultat vis à vis du maillage. Ainsi en pratiquant la même simulation à l'aide d'un maillage de type A constitué de $2 \times 50 \times 50$ éléments (Figure 5-17), la géométrie finale de la structure reste inchangée et le champ de cisaillement très voisin.



(a) tissu orienté à $\pm 45^\circ$ (b) tissu orienté à $0/90^\circ$
 Figure 5-17 Cisaillement d'un renfort tissé suite à un emboutissage hémisphérique. Maillage de type A composé de $2 \times 50 \times 50$ éléments.

5.4.3 Emboutissage d'un multiplis

Dans le paragraphe précédent on a validé les simulations dans le cadre d'une seule couche. Cela nous permet de pouvoir pratiquer cet emboutissage dans le cadre d'un empilement de plusieurs couches d'orientations différentes. Il est intéressant de voir Figure 5-18 l'importance du contact arête-arête dans la gestion de l'emboutissage multiplis. Dans le cas où le contact entre arêtes n'est pas pris en compte il apparaît des zones de cisaillement localisées qui conduisent très souvent à la divergence du calcul. Sa prise en compte permet d'empiler plusieurs couches (exemple avec cinq plis Figure 5-19).

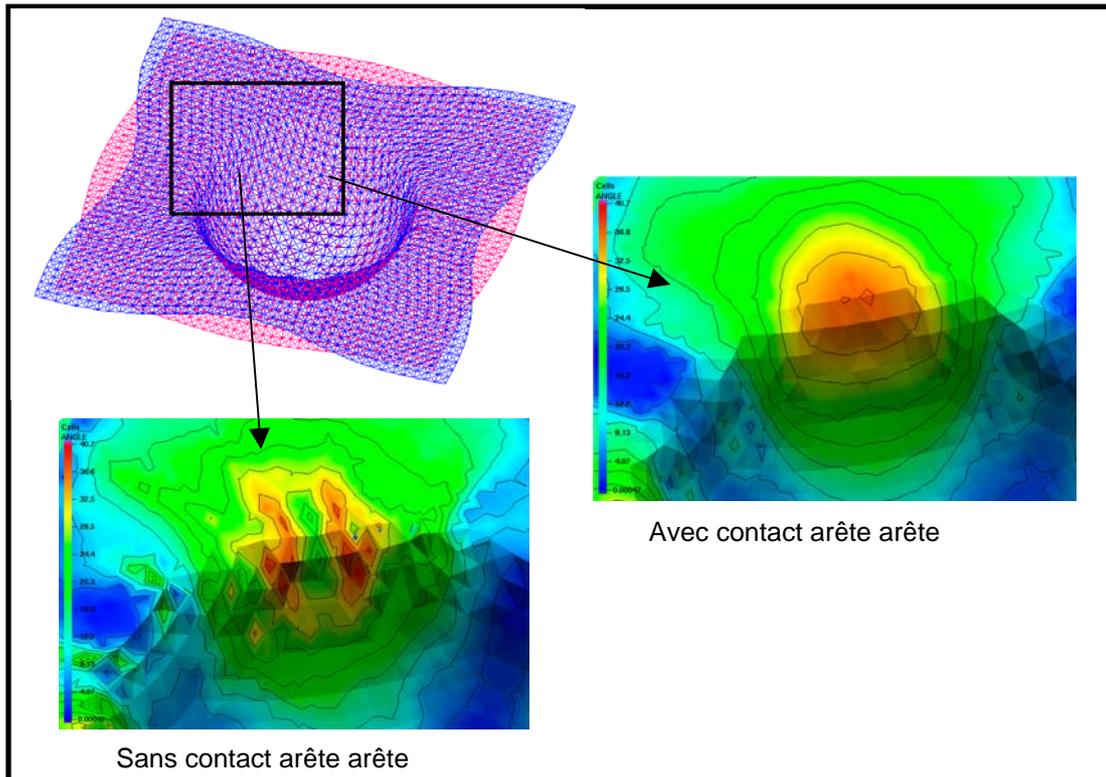


Figure 5-18 *Emboutissage de deux plis. Cisaillement entre chaîne et trame.*

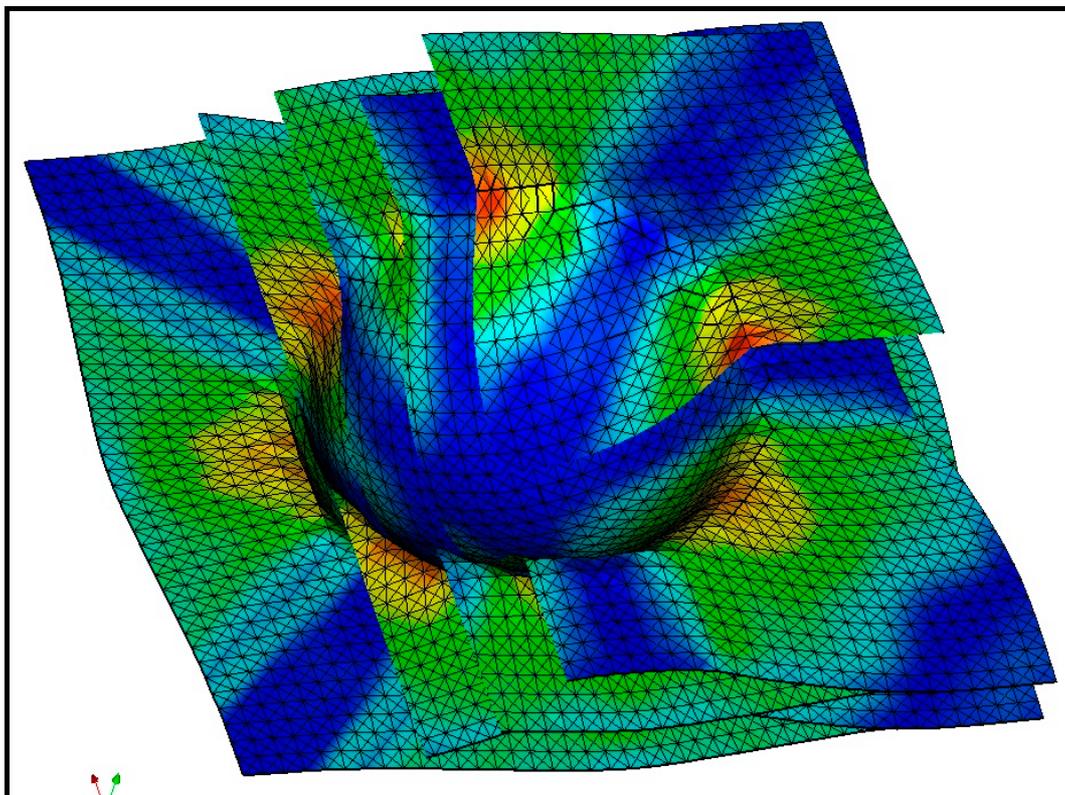


Figure 5-19 *Emboutissage de cinq plis*

6 Perspective et faisabilité : Elément fini pour les multiplis.

La simulation de la mise en forme des renforts secs pour les multiplis est particulièrement difficile du point de vue numérique dans la mesure où le coût du contact est très important face aux autres étapes du calcul (environ 60% du temps de calcul). De plus, les multiplis semblent augmenter les instabilités liées au contact et rendent parfois la convergence difficile. Certaines études où on propose d'utiliser un élément fini pour l'ensemble des couches sont en cours [LAMERS 2004][TEN THIJE 2007]. Cela implique de traiter le flux de la matière à travers l'élément fini au cours du formage (Figure 6-1) dans la mesure où les différentes couches sont en mouvement relatif les unes par rapport aux autres. Pour la simulation des solides, les repères iso paramétriques des éléments finis sont attachés à la matière au cours du calcul. Ce qui n'est plus le cas si le domaine de contrôle gère l'ensemble des plis. La formulation n'étant plus matérielle, une formulation Eulérienne-Lagrangienne Arbitraire (ALE) s'impose.

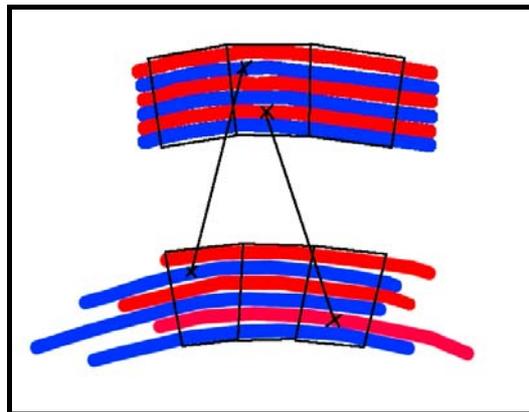


Figure 6-1 Ecoulement de la matière à travers les domaines de contrôle

Une formulation détaillée du problème mécanique et mathématique peut être lue dans le chapitre 7 de [BELYTSCHKO et al. 2000] ou encore le chapitre 1 de [DONEA et al. 2003]. Seuls les grands traits sont présentés ici.

Trois référentiels sont à distinguer (Figure 6-2):

Le référentiel spatial (ou eulérien). Associé au référentiel galiléen, constant au cours du temps. Les coordonnées spatiales représenteront des particules différentes avec le temps.

Le référentiel matériel (lagrangien). Attaché à la matière, les coordonnées matérielles réfèreront aux mêmes particules au cours du temps.

Le référentiel ALE. Arbitraire, il n'est ni attaché à la matière ni fixe dans le temps. Les deux premiers référentiels sont des cas particuliers de ce dernier.

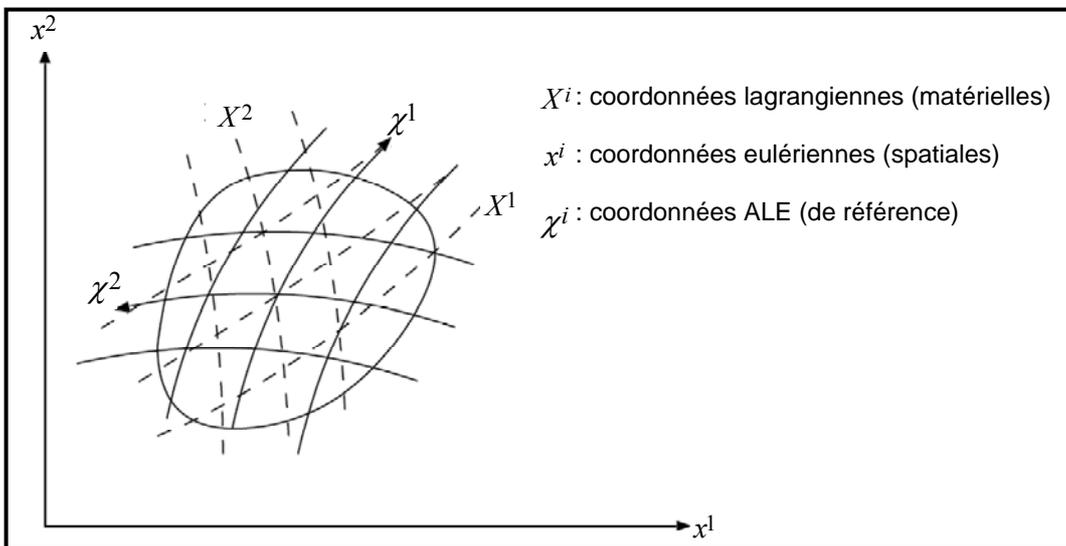


Figure 6-2 Différents paramétrages mis en jeu pour les formulations

La dérivée d'une grandeur f par rapport au temps, associée à une particule est décrite dans le référentiel matériel par :

$$\frac{df}{dt}(X^i, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X^i, t) \quad \text{eq(6.1.1)}$$

La dérivée totale de f par rapport au temps est égale à sa dérivée partielle du fait que les X^i sont indépendants du temps. Les coordonnées χ^i du référentiel ALE sont dépendantes du temps mais aussi des coordonnées dans les autres référentiels. $\frac{df}{dt}$ devient dans le référentiel ALE:

$$\frac{df(\chi^i, t)}{dt} = \frac{df(\chi^i(X^i, t), t)}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t}(\chi^i, t) \right|_{\chi^i} + \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(\chi^i, t) \frac{\partial \chi^i}{\partial t}(X^i, t) \Big|_{X^i} \quad \text{eq(6.1.2)}$$

f pouvant être la position d'une particule ou la vitesse d'une particule. Le principe des travaux virtuels s'exprime différemment et la résolution numérique conduit à résoudre un problème d'advection diffusion (EDP hyperbolique) ([BELYTSCHKO et al. 2000]). Cela exige des traitements particuliers pour préserver la consistance (formulations de type SUPG par exemple). A cela s'ajoute la difficulté de la gestion du mouvement du référentiel ALE, à savoir le mouvement des nœuds, et de le traiter simultanément avec le mouvement de la matière. Il est bien plus simple de décomposer les problèmes en découplant la formulation ALE en une étape lagrangienne standard, une étape de remaillage puis en une étape eulérienne. Il s'agit d'une formulation « ALE Split ».

L'étape lagrangienne consiste à effectuer le calcul élément fini standard et d'identifier le déplacement de la matière sur un pas de temps. Puis intervient l'étape de remaillage. On positionne les nœuds éléments finis (en vert dans la Figure 6-3) et on calcule le déplacement relatif de la matière par rapport au référentiel ALE. Puis intervient l'étape eulérienne. L'étape eulérienne est en fait une étape convective dans la mesure où, en se plaçant dans le référentiel élément fini, la matière circule (Figure 6-4). Dans la pratique elle consiste à éliminer les discontinuités dans les éléments finis dues au fait que les champs tensoriels sont discontinus d'un élément fini à un autre. Cette étape peut être effectuée à l'aide d'un schéma aux volumes finis [VAN HAAREN et al. 2000] ou aux éléments finis ou aux éléments finis (formulation de type Galerkin discontinue [GEIJSELAERS et al. 2003]).

Nous avons traité un exemple, proposé Figure 6-5, où trois plis (en 2D) sont traités à l'aide d'une formulation ALE. Ils sont encastrés à l'extrémité gauche, et à l'extrémité droite on lui impose une vitesse constante jusqu'à atteindre un déplacement final $u_{CL}=1$. La zone en rouge est 5 fois plus rigide que la partie en bleue. La longueur totale est de 10. Les nœuds éléments finis restent sur la

discontinuité matérielle. La partie lagrangienne est effectuée à l'aide d'un schéma aux différences centrales, et l'étape eulérienne est traitée à l'aide d'un schéma aux volumes finis [DESPRES et al. 2005]. Le résultat numérique est proche du résultat analytique.

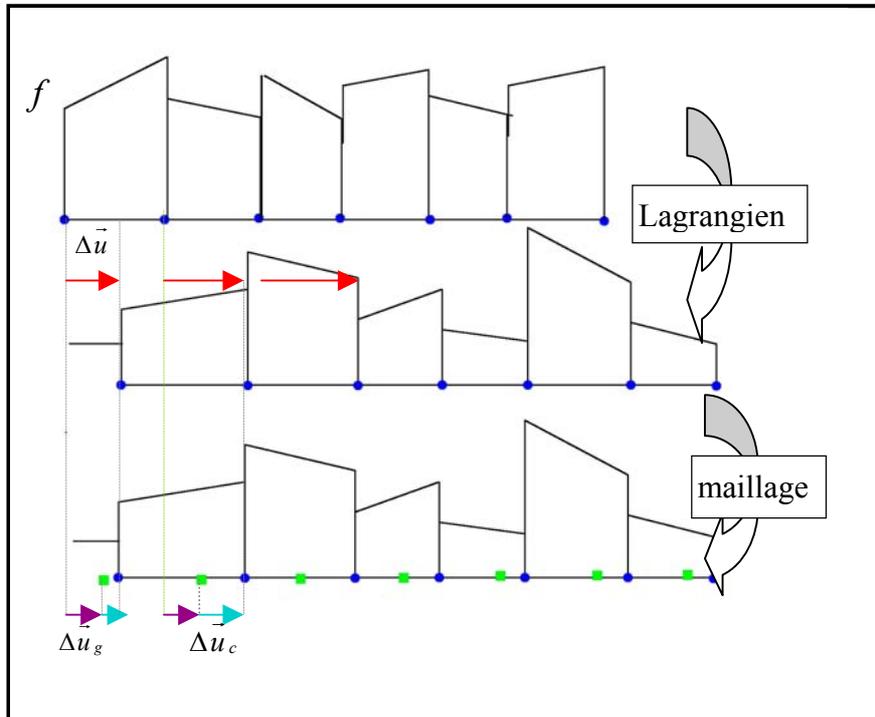


Figure 6-3 Formulation ALE, étape lagrangienne et remaillage.

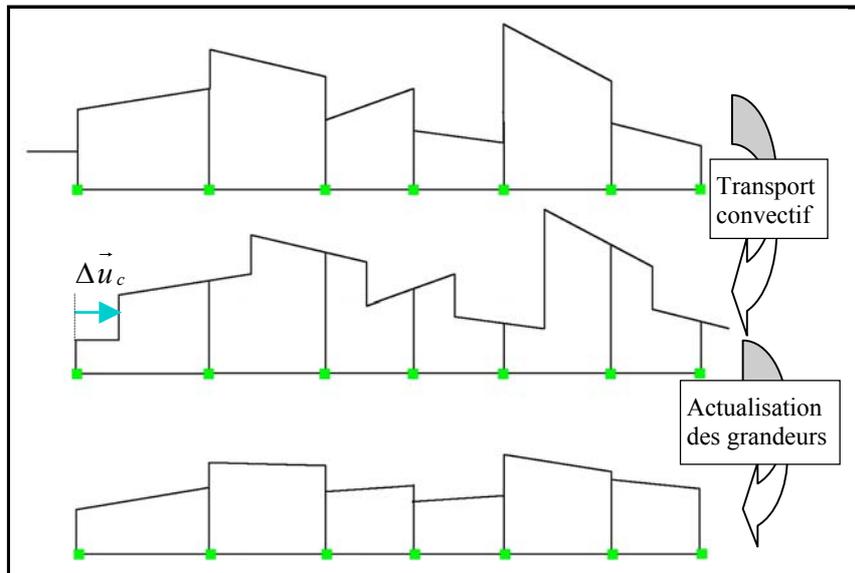


Figure 6-4 Etape eulérienne, actualisation des grandeurs

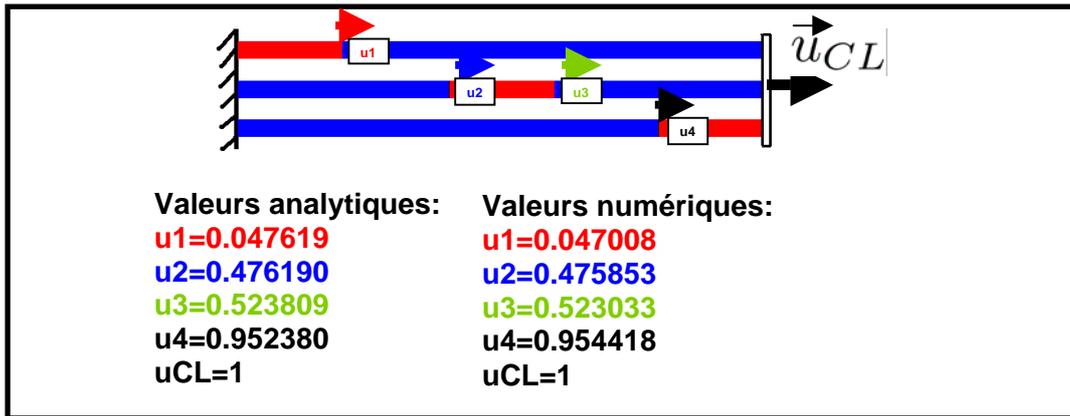


Figure 6-5 Exemple d'application de la formulation ALE sur 3 plis

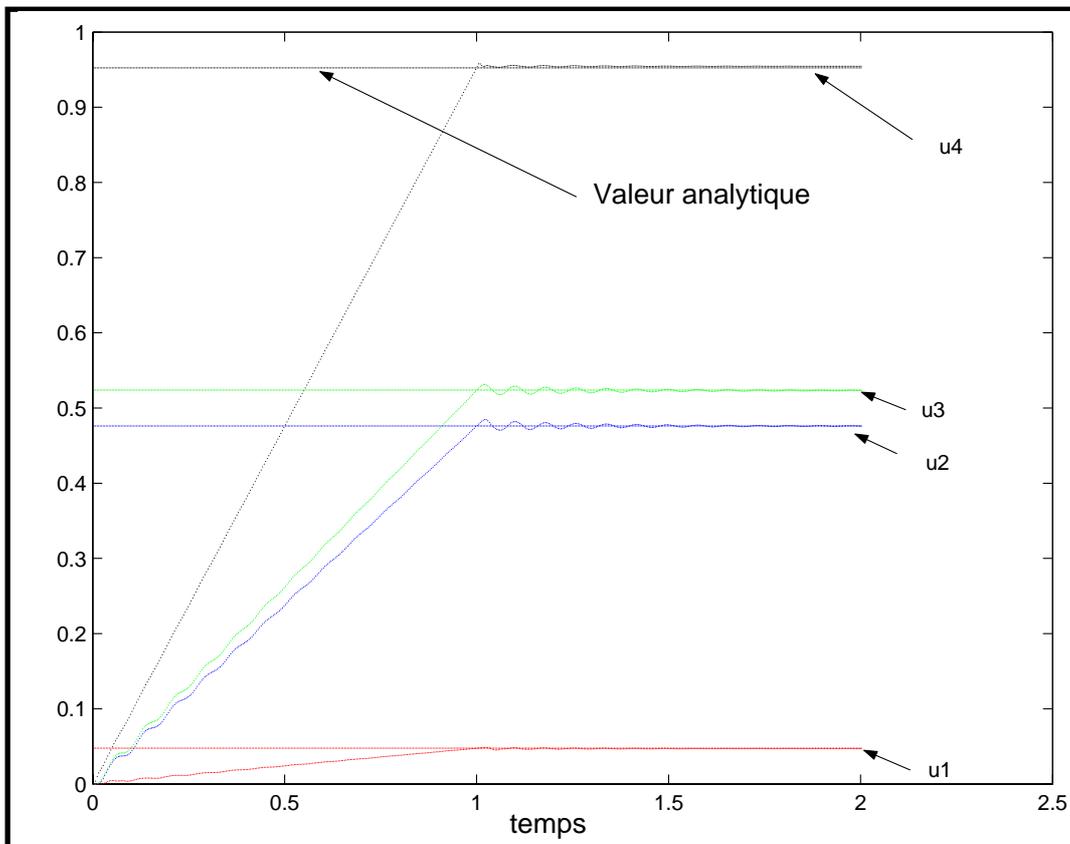


Figure 6-6 Déplacement des nœuds en fonction du temps.

La formulation ALE étant sommairement décrite, quelques travaux ont déjà été effectués pour la gestion de l'ensemble en diminuant le nombre de DDL [TEN THIJE 2007]. Cela consiste à définir un seul degré de liberté pour le déplacement normal à la surface et deux DDL pour chaque pli et pour chaque nœud pour le déplacement dans le plan (Figure 6-7). Cela implique que le

décollement des plis entre eux ne soit pas pris en compte. Mais cela permet de ne gérer le contact qu'entre les plis externes et les outils.

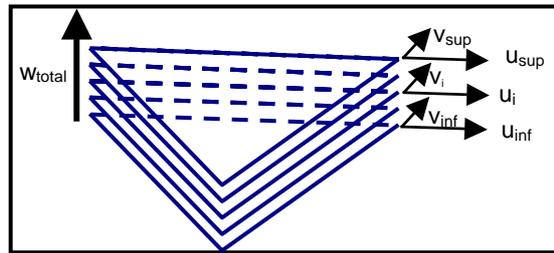


Figure 6-7 *Elément finis globale pour la gestion des multiplis*

De nombreux points restent irrésolus et exigent des connaissances dans des domaines de compétences assez vastes.

Une difficulté se trouve dans le remaillage : La première étape consistant à lisser la surface décrivant le multiplis ne pose pas de problème particulier (les nœuds devant rester sur la surface moyenne représentant le multiplis), mais reste à définir le critère qui positionne les nœuds sur cette surface. Les nœuds doivent-ils se concentrer dans les zones à forts cisaillements, ou à fortes courbures ? Quelles formulations utiliser pour la gestion du mouvement des nœuds ?

La modification de la direction des mèches est très importante dans la prise en compte du comportement des matériaux et doit être faite avec soin.

Reste que la plus grosse difficulté, se trouve dans la gestion des bords des domaines (Figure 6-8). Les nœuds se trouvant initialement sur le bord ne pouvant suivre tous les plis simultanément, il est capital d'établir une technique permettant de gérer une discontinuité dans l'élément fini permettant de gérer des zones où la matière est inexistante (Figure 6-9).

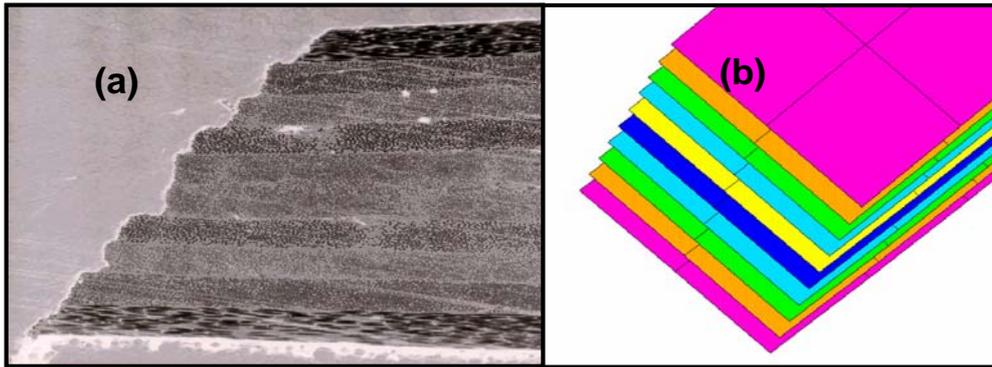


Figure 6-8 *Bord d'un multiplis. (a) expérimentation (b) simulation*[CHERUET et al. 2002]

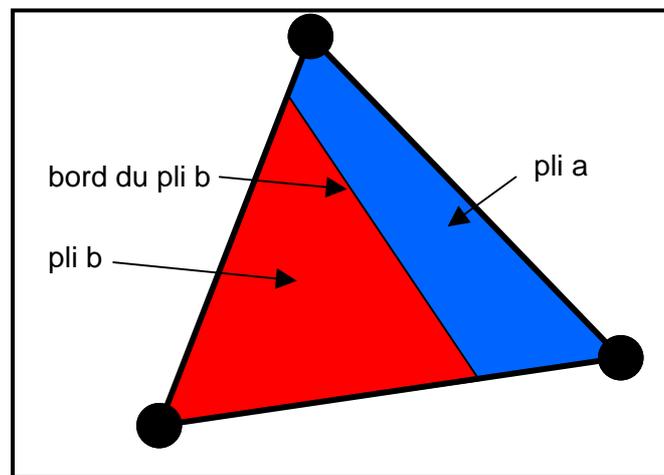


Figure 6-9 *Elément fini global contenant le bord d'un pli*

Conclusion

Ce travail a pour objectif de contribuer à la simulation de la mise en forme des renforts textiles à fibres continues des matériaux composites. Compte tenu de la composition interne de ces renforts qui sont composés de mèches tissées, elles mêmes composées de fibres, les outils de simulation de l'emboutissage des métaux ne peuvent pas être utilisés.

Les éléments finis mis en place sont dits semi-discret car ils sont composés d'un nombre fini de mailles tissées. Une forme simplifiée et spécifique de l'énergie de déformation de membrane est utilisée.

L'élément triangulaire à trois nœuds mis en place permet une orientation quelconque des mèches par rapport aux cotés de l'élément. Ceci est important dans le cas où le renfort est composé de plusieurs plis d'orientations différentes. Le même maillage peut alors être utilisé pour chaque pli. Ceci permet aussi l'utilisation de mailleur automatique et de remaillages.

La rigidité de flexion des matériaux fibreux (sans résine) est faible. Néanmoins, elle peut être nécessaire pour décrire certains phénomènes. Elle a été introduite dans l'élément mis en place, sans degré de liberté supplémentaire, en utilisant une formulation de type S3, c'est-à-dire en utilisant la position et les déplacements des nœuds voisins pour définir la courbure. Il a été montré sur un exemple de simulation de déploiement d'airbag que cette rigidité de flexion permet de mieux décrire la forme des plissements.

Un objectif important de ce travail est la mise en forme simultanée de plusieurs plis. Ceci nous a conduit à mettre en place des stratégies de gestion du contact-frottement qui prennent en compte la complexité engendrée par les grands glissements relatifs entre les plis. Ce traitement du contact est basé sur une méthode de multiplicateurs de Lagrange à incréments avant associé à un schéma

de Gauss-Seidel par bloc, ce qui permet d'assurer la condition d'impénétrabilité sur l'ensemble de la structure en peu d'itérations. La gestion des contacts, en particuliers dans les emboutissages multiplis reste complexe et coûteuse en temps de calcul.

Une alternative intéressante consiste à décrire l'ensemble des plis dans un même élément fini multicouche. Si ce schéma est couramment utilisé pour les composites en servie, il est nettement plus complexe en mise en forme, puisqu'en l'absence de résine les plis « entrent » et « sortent » de l'élément. Une formulation ALE est nécessaire. Cette voie devrait diminuer le coût du contact et du nombre d'éléments finis utilisés dans le cas de la description pli par pli de la présente étude.

Cependant, si on veut préserver la stratégie actuelle de gestion pli par pli, deux points peuvent être développé pour le traitement du contact. Le contact utilisé est un contact avec frottement isotrope. La texture de la surface n'est pas prise en compte et il serait intéressant de voir s'ils existent des directions privilégiées pour les forces de frottement. Le second point à traiter est le lissage des surfaces de contact en gérant un contact arête-arête à l'aide de courbes. Cela permettrait de stabiliser le calcul et éventuellement de grossir le maillage.

Bibliographie

[AIMENE 2007]

AIMENE Yamina. Approche hyper élastique pour la simulation des renforts fibreux de composites en grandes transformations. Thèse de doctorat. Lyon : INSA de Lyon, 2007.

[BADEL 2008]

BADEL Pierre. Modélisation méso-macro du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant des analyses par tomographie 3D. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, prévue fin 2008.

[BAILLET et al. 2000]

BAILLET L., WALTER H., BRUNET M. A 3D contact algorithm for explicit dynamic F.E. code applied to the ironing process. Metal Forming 2000, Cracovie, Pologne, pp141-147.

[BASAR et al. 2000]

BASAR Yavuz, WEICHERT Dieter . Nonlinear continuum mechanics of solids, Fundamental mathematical and physical concepts. Berlin: Springer Verlag, 2000.

[BELYTSCHKO et al. 2000]

BELYTSCHKO Ted, LIU Wing Kam. Nonlinear Finite Elements For Continua and Structures. New York : Wiley, 2000, 666 p.

[BERREUR et al. 2001]

BERREUR Louis, DE MAILLARD Bertrand, NOSBERGER Stanislas. L'industrie française des matériaux composites. [en ligne]. Ministère de l'économie des finances et de l'industrie. Etude réalisée par NODAL CONSULTANTS, 2001,128 p. Disponible sur :

[http://www.plasticway.com/plasticway/bclaplast.nsf/0/df2ff28977dab6bcc1256d9c0052d908/\\$FILE/Rapport%20mat%C3%A9riaux%20composites.pdf](http://www.plasticway.com/plasticway/bclaplast.nsf/0/df2ff28977dab6bcc1256d9c0052d908/$FILE/Rapport%20mat%C3%A9riaux%20composites.pdf) (consulté le 15.06.07)

[BERTHELOT 1999]

BERTHELOT Jean-Marie. Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures. 3^{ème} 2d. TEC & DOC, Paris, 1999, 642 p.

[BOISSE 1994]

BOISSE Philippe. Modèles mécaniques et numériques pour l'analyse non-linéaire des structures minces. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Besançon : Laboratoire de mécanique appliquée, Université de Franche-Comté, 1994.

[BOISSE et al. 2001]

BOISSE P., DANIEL J. L., HIVET G. , SOULAT D. A simplified explicit approach for simulations of fibre fabric deformation during manufacturing preforms for R.T.M. process. International Journal of Forming Processes, 2001 ,Vol.3, n°3-4, pp. 351-363.

[BOISSE 2004]

BOISSE Philippe. Mise en forme des renforts fibreux de composites. Techniques de l'ingénieur. Dossier A3734, 2004, pp. 10

[BOISSE et al. 2005]

BOISSE Philippe, GASSER ALAIN, HAGEGE BENJAMIN, BILLOET JEAN-LOUIS. Analysis of the mechanical behavior of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level. Journal of materials science, 2005, vol.40, pp. 5955-5962.

[BOISSE et al. 2006]

BOISSE Philippe, ZOUARI Bassem, DANIEL Jean-Luc. Importance of In-Plane Shear Rigidity in Finite Element Analyses of Woven Fabric Composite Preforming. Composites Part A, 2006, vol.37, n° 12, pp. 2201-2212.

[BOISSE 2007]

BOISSE Philippe. Finite element analysis of composite forming. In : LONG A.C. Composites forming technologies. Cambridge England : Woodhead Publishing In Textiles, 2007, pp.46-79.

[BONET et al. 1997]

BONET Javier, WOOD Richard D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge : Cambridge university press, 1997.

[BOROUCHAKI et al. 2002]

BOROUCHAKI H., CHEROUAT A. Une nouvelle approche géométrique pour le drapage de structures composites. Revue des composites et des matériaux avancés, 2002, vol 12, no 3, pp. 407-421.

[BRUNET et al. 1995]

BRUNET M., SABOURIN F. A simplified triangular shell element with a necking criterion for 3-D sheet forming analysis. *Journal of Materials Processing Technology*, 1995, vol 30, pp. 238-251.

[BUET-GAUTHIER et al. 2001]

BUET-GAUTHIER K., BOISSE P. Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements *Experimental Mechanics*. 2001, vol 41, no 3, pp. 260-269.

[BUET-GAUTHIER 1998]

BUET-GAUTHIER K. Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés. Thèse de doctorat. Orléans : Université d'Orléans, 1998.

[CARPENTER et al. 1991]

CARPENTER Nicholas J., TAYLOR Robert L., KATONA Michael G. Lagrange constraints for transient finite element

surface contact. International journal for numerical methods in engineering, 1991, vol 32, pp. 103-128.

[CASIEZ 2001]

CASIEZ Géry. Modélisation et simulation du comportement dynamique d'un fil en flexion. [en ligne]. DEA Instrumentations et analyses avancées. Lille : Université des sciences et technologies Lille I, 2001. Disponible sur : <http://www2.lifl.fr/~casiez/publications/dea-casiez.pdf> (consulté le 25.06.07)

[CHEROUAT 1994]

CHEROUAT A. Simulation Numérique du préformage des Tissus de Fibres de Verre par la méthode des éléments finis. Thèse de doctorat. Besançon : Université de Franche Comté. 1994

[CHERUET et al. 2002]

CHERUET A., SOULAT D., BOISSE P., SOCCARD E., MAISON-LE POEC S. Analysis of the interply porosities in thermoplastic composites forming processes. International journal of forming processes, 2002, vol 5, no. 2-4 pp. 247-258.

[CHERUET 2002]

CHERUET A. Analyse et simulation de la mise en forme de composites thermoplastiques. Thèse de doctorat. Orléans : Université d'Orléans, 2002.

[CIARLET 2002]

CIARLET P. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Paris : Dunod, 2002.

[DECAUDIN et al. 2005]

DECAUDIN Philippe, THOMASZEWSKI Bernhard, CANI Marie-Paule. Virtual garments based on geometric features of fabric buckling. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rapport de recherche no 5549. Rhone-Alpes : Avril 2005.

[DE LUYCKER et al. 2006]

DE LUYCKER Emmanuel, BOISSE Philippe, MORESTIN Fabrice. In: SNECMA Maia meeting. Villaroche, 2006.

[DE LUYCKER 2008]

DE LUYCKER Emmanuel. Simulation de la mise en forme des renforts de composites interlocks. Thèse de doctorat. Lyon : INSA de Lyon, prévue 2008.

[DESPRES et al. 2005]

DESPRES Bruno, DUBOIS François. Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Paris : Les éditions de l'école polytechnique, 2005, 202 p.

[DONEA et al. 2003]

DONEA Jean, HUERTA Antonio. Finite Element Method for Flow Problems. New York : Wiley, 2003, 350 p.

[DONG et al. 2001]

DONG L., LEKAKOU C., BADER M.G. Processing of Composites: Simulations of the Draping of Fabrics with Updated Material Behaviour Law. Journal of Composite Materials, Vol.35, n°02, 2001.

[DUHOVIC et al. 2006]

DUHOVIC M., BHATTACHARYYA D. Simulating the Deformation Mechanisms of Knitted Fabric Composites. Composites A. vol 37, no 11, pp. 1897-1915, 2006.

[DUMONT 2003]

DUMONT François. Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement du renfort mécanique de renforts composites tissés. Thèse de doctorat. Paris : UPMC, 2003.

[DURVILLE 2002]

DURVILLE D. Modélisation par éléments finis des propriétés mécaniques des structures textiles. European Journal of Computational Mechanics. vol 11, no 2-3-4, pp. 463-477, 2002.

[DUVAUT et al. 1972]

DUVAUT Georges, LIONS Jacques Louis. Les inéquations en mécanique et en physique. Paris : Dunod, 1972.

[DURVILLE 2005]

DURVILLE Damien. Numerical simulation of entangled material properties. Journal of materials science. 2005, vol 40 pp. 5941-5948.

[EL-ABBASI et al. 1998]

EL-ABBASI N., MEGUID A. Large deformation analysis of contact in degenerate shell elements. International journal for numerical methods in engineering, 1998, Vol.43, pp. 1127-1141.

[EL-ABBASI et al. 1999]

EL-ABBASI N., MEGUID A. On treatment of frictional contact in shell structures using variational inequalities. International journal for numerical methods in engineering, 1999, Vol.46, pp. 275-295.

[ELBAZ 2005]

ELBAZ Mikaël. Les nano composites à matrice organique. [en ligne]. Master nanotechnologie. Lyon : UCBL, 2005.
Disponible sur : http://spiral.univ-lyon1.fr/files_m/M1396/Files/52567_1525.doc (consulté le 17.06.07)

[FARE 2002]

FARE Comlan Nadjombé. Modélisation mathématique et simulation numérique du drapé d'un textile. Thèse de doctorat. Mulhouse : Université de Haute-Alsace, 2002.

[FARIN 2001]

FARIN Gerald. Curves and surfaces for CADG : practical Guide. Edition 5. Boston : Morgan Kaufmann Publishers, 2001.

[FLORES et al. 2005]

FLORES Fernando G., ONATE Eugenio. Application of a rotation-free triangle element for finite strain analysis of thin shells and membranes. In : ONATE E., KROPLIN B. Textile Composites And Inflatable Structures. Barcelona : Springer, 2005, pp.69-88.

[FUJUN et al. 2000]

FUNJUN Wang, JIANGANG Cheng, ZHENHAN Yao. A contact searching algorithm for contact-impact problems. ACTA MECHANICA SINICA, 2000, vol 16,no 4, pp. 374-382.

[GAY 1997]

GAY Daniel. Matériaux composites. 4^{ème} 2d. Paris : Hermès, 1997, 672 p. (Collection matériaux).

[GASSER et al. 2000]

GASSER ALAIN, BOISSE Philippe, HANKLAR SOMCHAI. Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests. Computational materials science, 2000, vol.17, pp. 7-20.

[GAO et al. 2002]

GAO Zheng-Sen, YOUNG Wen-Bin. Study of the bending induced gap in fiber performing of woven fiber mats. Polymer composites, 2002, vol 23, no. 2, pp.239-248.

[GEIJSELAERS et al. 2003]

GEIJSELAERS H. J. M., HUETINK J. A second order discontinuous Galerkin method for advection on unstructured triangular meshes. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2003, vol 19, issue 4, pp. 275-284.

[HAGEGE 2004]

HAGEGE Benjamin. Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations : application aux renforts tricotés. Thèse de doctorat. Paris : ENSAM de Paris, 2004.

[HAGEGE et al. 2005]

HAGEGE Benjamin, BOISSE Philippe, BILLOET Jean-Louis. Finite element analyses of knitted composite reinforcement at large strain. *European Journal of Computational Mechanics*, 2005, vol 14(6-7), pp. 767-776.

[HALLQUIST 2005]

HALLQUIST John. LS-DYNA theory manual. Livermore : Livermore Software Technology Corporation. November 2005.

[HANKLAR 1998]

HANKLAR Somchai. Modélisation mécanique et numérique des tissus de fibres. Simulation du comportement mésoscopique de la maille élémentaire. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris VI (UPMC), 1998.

[HARTMANN et al. 2007]

HARTMANN S., BRUNSENN S., RAMM E., WOHLMUTH B. Unilateral non-linear contact of thin-walled structures using a primal-dual active set strategy. *International journal for numerical methods in engineering*, 2007, Vol.70, issue 8, pp. 883-912.

[HEINSTEIN et al. 2000]

HEINSTEIN Martin W., MELLO Frank J., ATTAWAY Stephen W., LAURSEN Tod A. Contact-impact modelling in explicit transient dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000, Vol.187, pp. 621-640.

[HIVET et al. 2007]

HIVET Gilles, BOISSE Philippe. Consistent mesoscopic mechanical behaviour model for woven composite reinforcements in biaxial tension. *Composites Part B*, 2007, vol.xxx, pp. xxx-xxx. Accepté pour publication.

[HIVET 2002]

HIVET Gilles. Modélisation mésoscopique pour le comportement biaxial et la mise en forme des renforts de composites tissés. Thèse de doctorat. Orléans : Université d'Orléans, 2002.

[HILL 1994]

HILL F. S. Jr. The Pleasures of 'Perp Dot' Products. In : Paul S. HECKBERT. *Graphics Gems IV*. San Diego: Academic Press, 1994, pp. 138-148.

[HUGHES 1980]

HUGHES T.J.R, WINJET J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. . *International journal for numerical methods in engineering*, 1980, Vol.15, pp. 1862-1876.

[INDERMAUR et al. 1999]

INDERMAUR M., SIMACEK P., ADVANI S.G. The influence of draping on the filling of doubly curved molds in the resin transfer molding process. *International Journal of Forming Processes*, 1999, vol 2, no 3-4, p. 321-351.

[JAEGER 2005]

JAEGER J. Gauss-Seidel method for frictional contact problems. Chapitre 9 In: *New solutions in contact mechanics*. Germany : WIT Press, 2005, 328 p.

[KIBLER 1993]

KIBLER John J. Mechanics of Multidirectional Carbon-Carbon Composite Materials. In : Buckley, J.D., Edie, D.D. *Carbon-Carbon Materials and Composites*. Park Ridge, New

Jersey/USA: William Andrew Publishing/Noyes, 1993, pp.169-193.

[KLOOSTERMAN 2002]

KLOOSTERMAN Gertjan. Contact methods in finite element simulation. PhD thesis. Twente : Universiteit Twente, 2002.

[KONYUKOV et al. 2005]

KONYUKOV Alexander, SCHWEIZERHOF Karl. Modelling of anisotropic surfaces within a covariant contact description. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2005, vol 5, pp. 421-422.

[KRSTULOVIC-OPARA et al. 2002]

KRSTULOVIC-OPARA L., WRIGGERS P., KORELC J. A C1-continuous formulation for 3D finite deformation frictional contact. Computational Mechanics. 2002, vol 29, pp. 27-42.

[LAHEY 2002]

LAHEY T.J. Modelling the hysteresis in the bending of fabrics. PhD thesis. Waterloo : University of Waterloo, 2002.

[LAHEY et al. 2004]

LAHEY T.J., HEPPLER G. R. Mechanical modelling of Fabrics in Bending. ASME, 2004, vol.71, pp. 32-40.

[LAMERS 2004]

LAMERS E.A.D. Shape distortion in fabric reinforced composite products due to processing induced fibre reorientation. PhD thesis. Twente : Universiteit Twente, 2002.

[LAUNAY et al. 2007]

LAUNAY J., HIVET G., DUONG A.V., BOISSE P. Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear. Composites Science and Technology. à paraître (2007)

[LOMOV et al. 2006]

LOMOV S.V., VERPOEST I. Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements. Composites Science and Technology. 2006, vol 66, pp. 919–933.

[MALGOUYRES 2005]

MALGOUYRES Rémy. Algorithmes pour la synthèse d'image et l'animation 3D. 2^{ème} Edition. Paris : Dunod, 2005, 305 p.

[MASOUNAVE et al. 1996]

MASOUNAVE Jacques, VILLAR Nathalie. Elaboration des composites à particules. Techniques de l'ingénieur, traité Matériaux métalliques. Dossier M2448, 1996, pp. 25.

[MCGUINNESS et al. 1998]

MCGUINNESS G. B., BRADAIGH C. M. O. Characterisation of thermoplastic composite melts in rhombus-shear: the picture frame experiment. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 1998, vol.17, pp. 115-132.

[NAKAMACHI 1993]

NAKAMACHI E. Guide to the benchmark test. Simulation and Experiment, Numisheet 93, Tokyo 1993.

[NGO NGOC et al. 2002]

NGO NGOC C., BRUNIAUX P., CASTELAIN J.M. Modeling friction for yarn/fabric simulation: Application to bending hysteresis. Proceedings 14th European Simulation Symposium, 2002.

[NGO NGOC et al. 2004]

NGO NGOC C., BOIVIN S. Non linear cloth simulation. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Janvier 2004, rapport de recherche no 5099.

[ONATE et al. 2000]

ONATE Eugenio, ZARATE Francisco. Rotation-free triangular plate and shell elements. International Journal For numerical Methods In Engineering, 2000, Vol.47, pp. 557-603.

[PARADIS 2004]

PARADIS François. Analyse du comportement structural d'un composite mince en béton. [en ligne]. Maîtrise en génie civil. Montréal : Université Laval, 2004. Disponible sur : <http://www.theses.ulaval.ca/2004/21701/21701.html> (consulté le 15.06.07)

[PENG et al. 2005]

PENG X., CAO J. A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. Composites Part A, 2005, Vol.36, pp. 859-874.

[PICKETT et al. 2005]

PICKETT A.K., CREECH G., DE LUCAS P. Simplified and Advanced Simulation Methods for Prediction of Fabric Draping. European Journal of Computational Mechanics, 2005, vol 14, no 6-7, pp. 677-691.

[LAURENT et al. 2001]

LAURENT H., RIO G. Formulation of a thin shell finite element with continuity C0 and convected material frame notion. Computational Mechanics, 2001, vol 27, no 3, pp. 218-232.

[SABOURIN et al. 2006]

SABOURIN Francis, BRUNET Michel. Detailed formulation of the rotation-free triangular element "S3" for general purpose shell analysis. Engineering computations, 2006, Vol.23, n°5, pp. 469-502.

[SCARDINO 1989]

SCARDINO F. An introduction to textile structures and their behaviour. In: Chou T.W. , Ko F.K (eds.) Textile structural composites, Composite Material Series, 1989, Elsevier. pp.126.

[SHA et al. 1998]

SHA D., TAMMA K.K., LI M. Robust explicit computational developments and solution strategies for impact problems involving friction. International journal for numerical methods in engineering, 1998, vol 39, issue 5, pp. 721-739.

[SPENCER 2000]

SPENCER A.J.M. Theory of fabric-reinforced viscous fluid. Composites Part A, 2000, Vol.31, pp. 1311-1321.

[SU et al. 2005]

SU Y., SENTHIL KUMAR A. Templatized refinement of triangles meshes using surface interpolation. International journal for numerical methods in engineering, 2005, vol 65, issue 9, pp. 1472-1494.

[SUN et al. 2005]

SUN Huiyu, PAN Ning, POSTLE Ron. On the Poisson's ratios of a woven fabric. Composite structures, 2005, vol.68, pp. 505-510.

[SZE et al. 2005]

SZE K.Y., LIU X.H. A new skeletal model for fabric drapes. International Journal of Mechanics and Materials in Design, Springer Sciences, 2005, vol.2, pp. 225-243.

[TEN THIJE 2007]

TEN THIJE René. Finite element simulations of laminated composite forming process. PhD thesis. Twente : Universiteit Twente, 2007.

[VAN DER WEEËN 1991]

VAN DER WEEËN B. Algorithms for draping fabrics on doubly-curved surfaces. International journal for numerical methods in engineering, 1991, vol.31, pp. 1415-1426.

[VAN HAAREN et al. 2000]

VAN HAAREN M. J., STOKER H. C., VAN DEN BOOGAARD A. H., HUETINK J. The ALE-method with triangular elements: direct convection of integration point values. International journal for numerical methods in engineering, 2000, vol 49, issue 5, pp. 697-720.

[WALTER 1999]

WALTER Hélène. Modélisation 3D par éléments finis du contact avec frottement et de l'endommagement du béton : application à l'étude de fixations ancrées dans une structure en béton. Thèse de doctorat. Lyon : INSA de Lyon, 1999.

[WALTON et al. 1996]

WALTON, D.J., MEEK, D.S. A triangular G_1 patch from boundary curves. Computer-Aided Design, 1996, Vol. 28, No. 2, pp 113-123.

[WANG et al. 1997]

WANG Sheng Peng, NAKAMACHI Eiji. The inside-outside search algorithm for finite element analysis. International journal for numerical methods in engineering, 1997, Vol.40, pp. 3665-3685.

[WANG et al. 2001]

WANG F., CHENG J., YAO Z. FFS contact searching algorithm for dynamic finite element analysis. International journal for numerical methods in engineering, 2001, Vol.52, pp. 655-672.

[WHIRLEY et al. 1993]

WHIRLEY R.G., ENGELMANN B.E. Automatic contact in DYNA3D for vehicle crashworthiness. ASME winter meeting, New Orleans 1993.

[WINKELMULLER 2000]

WINKELMULLER Gérard. Auto-Contact en dynamique rapide. in Modélisation en Dynamique Rapide - De la Théorie à la Pratique, Cours tenu à Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur (IPSI), Paris, 17-19 October 2000.

[WRIGGERS et al. 1997]

WRIGGERS P., ZAVARISE G. On contact between three dimensional beams undergoing large deflection. Communications in numerical methods in engineering, 1997, vol 13 pp. 429-438.

[WRIGGERS 2006]

WRIGGERS Peter. Computational contact mechanics. Second Edition. Berlin : Springer, 2006, 520 p.

[YOUSSEF 2005]

YOUSSEF Majed. Milieux fibreux tissés: Modélisation et simulation de la mise en forme des CFRTP à géométrie non développable, Thèse de doctorat. Orléans : Université d'Orléans, 2005.

[YU et al. 2006]

YU Xiaobo, CARTWRIGHT Bruce, MCGUCKIN Damian, YE Lin, MAI Yiu-Wing. Intra-ply shear locking in finite element analyses of woven fabric forming processes. Composites Part A, 2006, vol 37, pp. 790-803.

[ZIENKIEWICZ et al. 2000]

ZIENKIEWICZ O.C., TALOR R.L. Finite Elements Method. Volume 1: The basis. Edition 5. Swansea : Betterworth Heinmann, 2000, p 689.

[ZOUARI et al. 2006]

ZOUARI Bassem, DANIEL Jean-Luc, BOISSE Philippe. A woven reinforcement forming simulation method. Influence of the shear stiffness. Computers & Structures, 2006, vol.84, pp. 351-363.

[ZYWICZ et al. 1999]

ZYWICZ E., PUSO M. A general conjugate-gradient-based predictor corrector solver for explicit finite element contact. International journal for numerical methods in engineering, 1999, vol 44, pp. 439-459.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES
APPLIQUEES DE LYON

NOM : HAMILA

DATE de SOUTENANCE : Le mardi 04 décembre 2007

Prénoms : Nahiene

TITRE : Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre :2007-ISAL0092

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : MECANIQUE - GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RESUME :

La simulation de la mise en forme des renforts de composites a plusieurs objectifs. Elle permet de déterminer la faisabilité, ou les conditions de cette faisabilité et surtout elle permet de connaître la position des fibres après formage. Ceci est important pour l'identification des caractéristiques mécaniques du composite en service et pour le calcul de la perméabilité après drapage nécessaire pour une analyse correcte de l'injection. Les simulations évitent les coûteuses études expérimentales par essais-erreurs. Le travail présenté dans ce document concerne la première étape de la mise en forme des composites avant injection, à savoir, la mise en forme de renforts tissés.

Les apports de ce travail sont les suivants : la définition d'un élément fini à trois nœuds composé de mailles tissées où les directions chaîne et trame sont quelconques par rapport aux cotés de l'élément, la prise en compte de la rigidité de flexion et la mise en place d'une gestion du contact permettant la mise en forme simultanée des multiplis. Enfin, un ensemble de simulations de mise en forme donne des informations quant à l'importance des différentes rigidités d'un renfort fibreux tissé et quant à la possibilité de les négliger ou non.

MOTS-CLES :

Matériaux composites, renfort tissé, mise en forme, éléments finis semi-discret, simulation numérique, drapage, multiplis, éléments finis de coques, algorithme de contact.

Laboratoire (s) de recherche : LAMCOS INSA de Lyon

Directeur de thèse: P. BOISSE – M. BRUNET

Président de jury :

Composition du jury :

Pr. P. BOISSE, Pr. L. BOUBAKAR, Pr. M. BRUNET, S. CHATEL, Pr. D. FAVIER, Pr. C. HOCHARD, Pr. A. MAAZOUZ