

Thèse

**APPROCHE HYPERELASTIQUE POUR LA SIMULATION DES
RENFORTS FIBREUX EN GRANDES TRANSFORMATIONS**

Présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Pour obtenir
le grade de docteur

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique
Spécialité : Mécanique

Par

Yamina AIMENE

Soutenance prévue le 29 novembre 2007 devant la commission d'examen

Jury

BOISSE Philippe	Professeur	Directeur
DRAPIER Sylvain	Professeur	Rapporteur
GANGHOFFER Jean-François	Professeur	Rapporteur
SIDOROFF François	Professeur	Examineur
HAGEGE Benjamin	Maître de conférences	Examineur
VIDAL-SALLE Emmanuelle	Maître de conférences	Examineur

APPROCHE HYPERELASTIQUE POUR LA SIMULATION DES RENFORTS FIBREUX EN GRANDES TRANSFORMATIONS

RESUME : Un modèle de comportement hyperélastique est proposé pour la simulation des renforts fibreux de composites en particulier tissés. Son objectif est de simuler à l'échelle macroscopique des opérations de mise en forme. Il représente une alternative aux approches continues hypoélastiques existantes.

Un potentiel énergétique simple reproduisant les non linéarités matérielles connues des renforts tissés est proposé. Classiquement, les modes de déformations se caractérisent par des déformations faibles dans la direction des mèches et de grandes déformations de cisaillement plan. Le modèle est implémenté dans une routine utilisateur Vumat d'Abaqus/Explicit. La sensibilité de la solution à la densité de maillage et la pertinence des résultats ont été analysées pour différents tests de référence en grandes transformations : cisaillement pur et simple, cisaillement pur - extension. Enfin, le modèle est testé pour simuler une opération de formage par poinçon hémisphérique. Des résultats satisfaisants sont obtenus, notamment sur la prise en compte ou non de la rigidité associée au cisaillement plan entre les mèches.

Mots clés : Hyperélasticité, renforts tissés, mise en forme, comportement mécanique des textiles techniques, Abaqus.

A HYPERELASTIC APPROACH TO SIMULATE FIBROUS COMPOSITE REINFORCEMENTS AT LARGE STRAINS

ABSTRACT: A hyperelastic model is proposed to simulate the fibre composites. Its objective is to simulate at the macroscopic level the forming operation. It represents an alternative to hypo-elastic continuous approaches.

A simple energetic potential reproducing the non linearities known of woven is proposed. Classically, deformation modes are characterized by weak strains in the fibre direction and large plane shear strains. The model is implemented in routine user of Vumat of Abaqus/Explicit. The sensitivity of the solution to the number of elements and the relevancy of the results are analysed for different reference tests of large strain: picture frame test, simple shear test and simple shear -extension test. Finally, the model is tested to simulate the forming with hemispherical punch. Satisfactory results were obtained especially when taking or not in account the shear rigidity in the simulation.

Keywords: Hyperelasticity, woven reinforcements, forming, fabric mechanical behaviour, Abaqus.

Sommaire

Introduction générale.....	7
Chapitre 1 : Les renforts tissés de matériaux composites.....	9
1.2 Introduction	9
1.3 Les renforts textiles des matériaux composites	10
1.3.1 Les fibres constituant les renforts.....	10
1.3.2 Les différents types de renforts	10
1.4 Comportement mécanique des renforts tissés	13
1.4.1 Modes de déformation des renforts	13
1.4.2 Comportement en traction biaxiale.....	15
1.4.3 Comportement en cisaillement plan	18
1.5 Formage des renforts continus.....	20
1.5.1 Spécificité de la mise en forme des composites	20
1.5.2 Problématiques de la mise en forme d'un renfort fibreux.....	23
1.6 Conclusion	23
Chapitre 2 : Différentes approches de simulation de drapage des renforts tissés.....	25
2.1 Aspect numérique du formage des tissus	25
2.2 La nature multiéchelle des matériaux composites.....	26
2.3 Approches cinématiques et mécaniques.....	27
2.3.1 Approche géométrique par l'algorithme du filet.....	27
2.3.2 Approche mécanique par éléments finis.....	29
2.4 Conclusion	40
Chapitre 3 : Formulations et modèles de comportement hyperélastiques	41
3.1 Introduction	41
3.2 Résultats de base en mécanique continue.....	41
3.2.1 Généralités	41
3.2.2 Matériau hyperélastique	46
3.3 Les potentiels élastiques	50
3.3.1 Les modèles constitutifs en hyperélasticité isotrope	51
3.3.2 Modèles en hyperélasticité anisotrope.....	53
3.4 Conclusion	55
Chapitre 4 : Modèles hyperélastiques pour les renforts tissés	57
4.1 Introduction	57
4.2 Modèles de comportement des renforts tissés.....	57
4.2.1 Mode de déformation des renforts tissés	57
4.2.2 Le renfort tissé : milieu continu anisotrope.....	58
4.3 Loi constitutive hyperélastique pour les renforts tissés.....	59
4.3.1 Loi de comportement hyperélastique des renforts tissés en fonction des invariants de type 1.....	61

4.3.2	Loi constitutive hyperélastique des renforts tissés en fonction des invariants de type 2	68
4.4	Expression du potentiel	70
4.4.1	Représentation additive du potentiel	70
4.4.2	Formes particulières du potentiel pour les renforts tissés.....	72
4.4.3	Tenseurs de contraintes	74
4.5	Loi de comportement en fonction des invariants de type 3, proposition non pertinente pour la physique des renforts tissés	75
4.6	Analyse des lois de comportement	77
4.6.1	Comparaison des lois obtenues avec les potentiels de type 1 et de type 2.....	77
4.6.2	Force sur le cadre de cisaillement pur	78
4.7	Conclusion	85
Chapitre 5 : Tests élémentaires et simulations d'emboutissage		87
5.1	Introduction	87
5.2	Implémentation dans Abaqus/Explicit	88
5.2.1	Rappel des formules de changement de base	89
5.2.2	Matrice de passage de l'orientation actuelle à la base de Green-Naghdi	89
5.2.3	Projection du tenseur de contraintes de Cauchy dans la base de Green-Naghdi	91
5.2.4	Mises en œuvre dans Abaqus	92
5.3	Identification des paramètres du modèle	93
5.3.1	Tests élémentaires d'identification	93
5.3.2	Fonctions objectives d'identification des paramètres matériau.....	99
5.3.3	Caractéristiques mécaniques des renforts tissés utilisés.....	100
5.4	Tests de vérification du modèle.....	106
5.4.1	Tests élémentaires de vérification	106
5.4.2	Simulation de l'emboutissage d'un dôme hémisphérique.....	114
5.5	Conclusion	121
Conclusion générale.....		123
Références bibliographiques.....		125

Introduction générale

De nombreux composites sont réalisés à partir de renforts textiles (tissés, NCF i.e. non-crimp fabrics, tressé, unidirectionnels, etc.). Cet assemblage est à l'heure actuelle très présent dans les applications modernes de haute technologie et tout particulièrement aérospatiale, aéronautique. Ce succès croissant est dû à de nombreuses qualités qui leur sont reconnues en particulier la légèreté, la résistance, l'anisotropie contrôlée, la quasi-absence de corrosion et la complexité des formes réalisables.

Les procédés de mise en forme des composites sont nombreux et souvent complexes. Il s'agit généralement d'obtenir une forme surfacique 3D, souvent complexe et non-développable à partir d'une géométrie mince et plane. Le formage des composites fibreux concerne le renfort fibreux. Il est réalisé dans un état où la matrice est quasi-absente voire absente comme c'est le cas du formage des tissus secs. Ce sont les mécanismes de déformation principalement le cisaillement plan et la flexion, rendus possible par la nature fibreuse du renfort, qui permettent l'obtention de la forme finale complexe du composite.

La maîtrise complète de tels procédés n'est pas encore acquise ce qui freine leur industrialisation. Pour maîtriser le formage des renforts fibreux autrement que par une campagne d'essais-erreurs sur des fabrications souvent coûteuses, il est nécessaire de mettre au point des modélisations et des simulations, éventuellement simplifiées, de l'opération de formage des renforts tissés. La simulation numérique de l'opération permet de juger, au stade de la conception de la faisabilité d'une forme et de prédire les propriétés mécaniques de la structure en service.

Les modèles pour la mise en forme sont assez nombreux, les plus communément utilisés sont les modèles cinématiques basés sur des algorithmes géométriques et les modèles mécaniques. Les modèles géométriques sont assez efficaces pour la prédiction de la drapabilité des renforts tissés classiques, spécialement les préimprégnés, et ils sont compétitifs en temps de calcul, cependant ils ne prennent en considération ni les conditions aux limites statiques de l'opération de formage (efforts appliqués, contact entre le tissu et les outils) ni le comportement mécanique du renfort fibreux. Les modèles mécaniques (ou physiques) prennent en considération tous les aspects de l'opération de formage. Ces aspects sont

modélisés par les équations de la mécanique, plus précisément les équations d'équilibre, les équations constitutives et les conditions aux limites. Le problème ainsi posé est résolu de façon approchée, généralement par la méthode des éléments finis.

Dans le cadre des approches mécaniques, la caractérisation du comportement mécanique des renforts tissés est nécessaire. Celle-ci est difficile car la structure fibreuse et tissée des renforts confère à ceux-ci un comportement anisotrope et non linéaire. Ces spécificités sont engendrées par des phénomènes complexes intervenant à différentes échelles d'observation imbriquées, l'échelle microscopique (la fibre), l'échelle mésoscopique (la cellule élémentaire) et l'échelle macroscopique (le renfort). Le matériau composite est par conséquent typiquement multiéchelle. Ceci est autant vrai durant l'opération de formage, spécialement du renfort seul, que pour le composite en service. Le comportement mécanique des renforts tissés a fait l'objet de nombreuses études, il est essentiellement conditionné par le type de fil et le mode de tissage utilisés. Il est caractérisé par la très faible valeur de plusieurs rigidités (flexion, compression, cisaillement) comparativement à la rigidité en tension qui peut être très élevée.

En raison de la nature multiéchelle du composite et de ces fibres de renforcement, différentes approches pour modéliser le procédé de formage existent. Ces approches peuvent être analytiques, géométriques, éléments finis, etc. et modélisent le composite à l'échelle macro, méso ou microscopique. L'analyse du formage des composites par la méthode des éléments finis permet une modélisation physique très représentative. En effet, elle prend en considération les différents aspects mis en jeu dans l'opération à modéliser, en particulier ceux du composite fibreux. La loi de comportement des matériaux et les conditions aux limites statiques et cinématiques du problème sont pris en compte.

Pour simuler avec un effort numérique raisonnable l'opération de formage, les modèles macroscopiques sont intéressants mais ils nécessitent la mise en place de modèles suffisamment simples parvenant à prendre en compte les spécificités du comportement des renforts textiles qui dépend essentiellement de la direction des fibres ainsi que du changement d'ondulation des mèches et de l'angle de blocage entre les mèches. Globalement, la difficulté majeure consiste en la mise au point d'une formulation permettant de simplifier la structure 3D hétérogène des échelles mésoscopique et microscopique. Néanmoins, l'avantage de cette approche est la possibilité d'intégrer la loi de comportement dans l'approche éléments finis standard.

Dans cette optique, un modèle de comportement hyperélastique macroscopique est proposé pour les renforts de composites textiles. Ce modèle continu a pour objectif la simulation à l'échelle macroscopique des opérations de mise en forme. La formulation d'une loi de comportement satisfaisante en hyperélasticité repose sur la proposition d'un potentiel

élastique, judicieux. Celui-ci doit obéir au principe d'indifférence matérielle qui assure l'objectivité des équations constitutives, respecter les groupes de symétries matérielles qui permettent de reproduire le comportement anisotrope des renforts tissés ([SPE84]) et enfin reproduire les non linéarités connues des renforts tissés. Deux approches existent pour définir les potentiels intervenants dans les lois constitutives : l'approche physique basée sur la théorie statistique et l'approche phénoménologique fondée sur les observations expérimentales.

Le potentiel proposé est construit sur la base d'observations expérimentales mettant en relief les modes de déformations les plus importants des renforts qui sont la déformation de tension dans les directions chaîne et trame et de cisaillement plan entre les mèches. Ce modèle hyperélastique anisotrope représente une alternative aux approches continues hypoélastiques existantes ([SID01] ; [HAG05]).

Chapitre 1 : Les renforts tissés de matériaux composites

1.1 Introduction

Les matériaux composites sont de plus en plus prisés. Ce succès toujours croissant est dû à de nombreuses qualités qui leur sont reconnues à l'instar de :

- La légèreté, caractéristique très recherchée notamment dans le domaine des transports car elle permet de réduire la consommation de carburant et d'augmenter ainsi la capacité de chargement ou le rayon d'action.
- La possibilité de réaliser des pièces de formes très complexes intégrant plusieurs fonctionnalités ce qui réduit les opérations d'assemblage.
- La bonne résistance à la corrosion permettant l'utilisation en milieu marin.
- La bonne tenue à la fatigue conférant aux pièces une grande longévité.
- Les qualités d'amortissement des vibrations et des bruits recherchés dans les domaines du sport et des transports.

Les matériaux composites sont des matériaux obtenus à partir de l'association de deux constituants ou plus, dans le but de faire jouer à chacun un rôle spécifique dépendant de ses propriétés mécaniques ([BIL93]). Dans le cas le plus classique de deux constituants, le matériau composite consiste en :

- Une matrice qui est un matériau de liaison assurant la cohésion et le transfert des actions à l'ensemble du matériau composite par l'intermédiaire du renfort. Elle se présente sous forme de résine thermoplastique ou thermodurcissable.
- Un renfort qui est le constituant procurant les principales propriétés mécaniques du composite. Il se présente généralement sous deux aspects possibles, un réseau de mèches (tissées, tricotées, tressées) ou des inclusions de différentes formes (lamellaire, granulaire etc.). Le choix du renfort dépend de l'application envisagée.

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons aux renforts fibreux tissés, très présents dans les applications modernes de haute technologie : aérospatiale, aéronautique, automobile, constructions navales etc.

1.2 Les renforts textiles des matériaux composites

Les textiles techniques pris comme renforts structuraux dans les matériaux composites sont très variés et couvrent une grande gamme d'applications industrielles en raison de leurs caractéristiques mécaniques. Celles-ci dépendent du choix des constituants, de leur géométrie, de leur paramètre de fabrication et des post-traitements éventuels.

Le tissu est composé d'un enchevêtrement de mèches. Ce sont des structures discrètes constituées d'un grand nombre de filaments appelés fibres. Les fibres étant de diamètres très faibles (quelques μm), leur nombre dans une mèche est très variable et peut atteindre plusieurs dizaines de milliers. La géométrie du tissu dépend à la fois de celle des mèches, et de l'armure du tissu qui est le mode d'entrecroisement des mèches des directions chaîne et trame.

1.2.1 Les fibres constituant les renforts

Une fibre textile est un solide à une dimension dont la structure cristalline est fortement orientée. On peut définir une fibre par sa section moyenne dans la direction transversale. Son diamètre moyen est très faible, entre 5 et 30 μm , et sa longueur totale peut varier de 2 cm à plusieurs kilomètres. Lorsque la longueur dépasse plusieurs centaines de mètres, on utilise le terme de filament continu, ou simplement filament.

1.2.2 Les différents types de renforts

Les fibres sont assemblées en fils de base ou mèches. Cet assemblage peut être une torsion en fils simple, retordus pour fabriquer les fils retors, ou juste sans torsion, on les désigne par stratifil ou roving. Ces produits sont largement utilisés dans le domaine des composites soit directement ou après assemblage par tissage. Les assemblages des fils servant à la fabrication des renforts pour composite sont divers, on distingue les assemblages surfaciques (mats, tricots, tissus, tressés) et les structures tridirectionnelles.

1.2.2.1 Les assemblages

Il existe plusieurs catégories de renforts à base de fibres : les mats, les tissés, les tressés, les tricots et les multidirectionnels.

- Les mats sont des nappes de filaments, de fibres discontinues ou de fils de base, disposés sans orientations préférentielles et maintenus ensembles par un liant soluble. Ce sont des matériaux déformables, quasi isotropes dans leur plan et peu coûteux.

- Les tissus sont réalisés sur des métiers à tisser. Ils sont obtenus par entrecroisement des mèches selon deux directions perpendiculaires, chaîne et trame. Ils peuvent avoir différentes

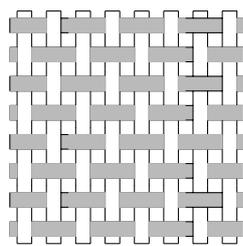
armures, on distingue : la toile ou le taffetas, le sergé $n \times m$ et le satin (figure 1.1a, b, c). L'armure contrôle la rigidité du tissu, on obtient respectivement un tissu relativement rigide, souple et dense et très souple et déformable.

- Les tissus haut module sont constitués de deux nappes de mèches superposées et maintenues ensemble par un fil fin (figure 1.1d). Les armures unidirectionnelles sont constituées de fils de chaîne maintenus par des fils de trame fins (figure 1.1e).

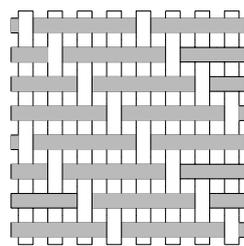
- Les NCF (Non-Crimp Fabric)(figure 1.1f) sont formés d'une nappe de fils de chaîne parallèles cousu par des fils de trame. Ils sont très utilisés en particulier dans les applications aéronautiques.

- Les tricots (figure 1.1g) sont formés par bouclage d'un ou plusieurs fils et offrent de plus grandes possibilités de motifs que le tissage. Leur principale caractéristique est leur déformabilité.

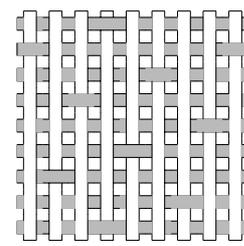
- Les multidirectionnels (figure 1.1h) sont des structures 3D formées de fibres orientées dans plusieurs directions de l'espace. Les différentes couches sont liées, par conséquent le risque de délaminage est très faible. Ils permettent des applications demandant de hautes performances, en particulier en aérospatiale.



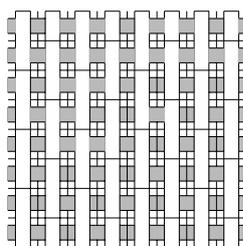
(a) - Taffetas



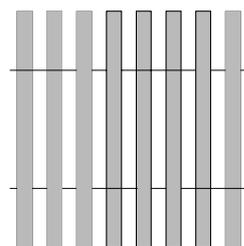
(b) - Sergé 3x1



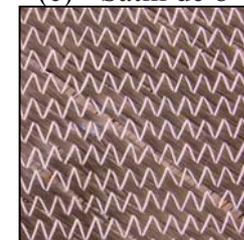
(c) - Satin de 8



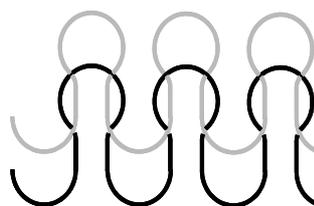
(d) - Haut module



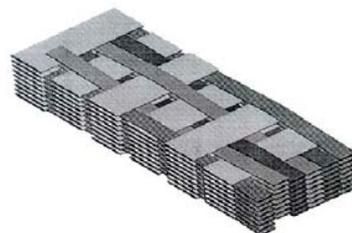
(e) - Unidirectionnel



(f) – Les NCF



(g) - Tricot "chaîne"



(h) - Multidirectionnels

Figure 1. 1 : Différents assemblages de mèches pour des renforts surfaciques.

Tous ces renforts sont constitués de la répétition d'un motif, appelé maille élémentaire. La connaissance de la géométrie de ce motif permet de reconstruire le tissu complet par périodicité (figure 1.2).

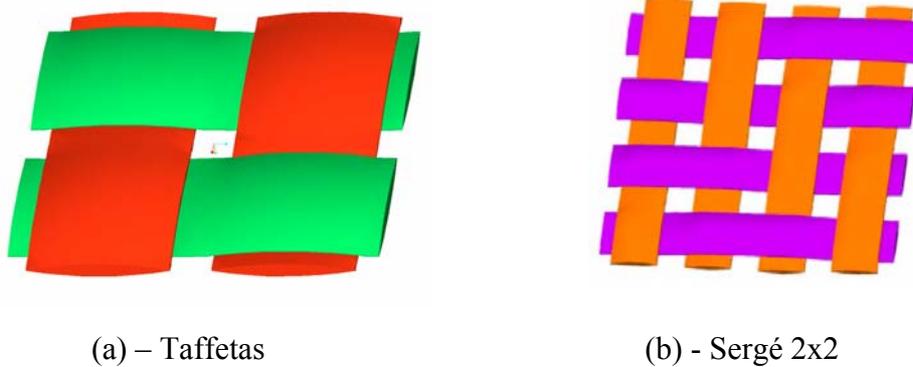


Figure 1.2 : Deux exemples de mailles élémentaires de renforts tissés.
(a) armure taffetas. (b) armure sergé 2x2.

1.2.2.2 Les caractéristiques des renforts tissés

Il est important de souligner la grande variété des renforts tissés. Il est par ailleurs possible de construire des tissus mixtes en utilisant des matériaux différents dans les directions chaîne et trame, ou des tissus hybrides en employant des fils de natures différentes dans la même direction. Un tissu est dit équilibré lorsque les fils de chaîne et de trame sont identiques ou très semblables et que le motif du tissage est symétrique.

Le comportement mécanique des tissus dépend fortement des mèches le constituant et de leurs armures. Ainsi, pour caractériser un tissu de fibre utilisé comme renfort pour les matériaux composites, on donnera :

Pour le fil : sa nature et son type (mode d'assemblage, avec ou sans torsion, traitement de surface, etc.), sa ténacité (sa résistance à la rupture en traction ; en Newton), sa masse linéique (en tex, 1tex = 1g/km) et sa rigidité (en Newton).

Pour le tissu : son armure, sa contexture (densité ; en fil/mm du tissu), son embuvage et son retrait (c'est l'équivalent de l'embuvage, pour les mèches de la trame).

L'embuvage caractérise l'ondulation des mèches de chaîne (en%), il est défini par :

$$\text{Embuvage} = \frac{\text{longueur d'un fil} - \text{longueur du tissu dont il est extrait}}{\text{longueur du tissu}} \times 100$$

1.3 Comportement mécanique des renforts tissés

Le renfort tissé hérite ses principales caractéristiques mécaniques de celles des fibres le constituant ainsi que du type d'assemblage utilisé pour le construire. Les mèches qui forment le renfort ont une rigidité à la traction très élevée dans l'axe des filaments due à l'addition des rigidités des fibres les constituant. Les sections droites très faibles des filaments entraînent une rigidité à la flexion et à la compression très faibles.

1.3.1 Modes de déformation des renforts

Non glissement chaîne-trame

Les essais de formage sur des renforts fibreux composés de deux directions (chaîne et trame), montrent que les mèches ne glissent pas entre elles lors de l'opération de formage. En effet, deux réseaux de lignes droites perpendiculaires tracés le long des directions chaîne et trame avant formage deviennent courbes mais restent continus (figure 1.3). Un glissement peut parfois avoir lieu, mais il s'agit d'une défaillance de la mise en forme. L'hypothèse de non-glissement entre les réseaux chaîne et trame sera faite par la suite, notamment dans les modèles continus de simulation de la mise en forme.

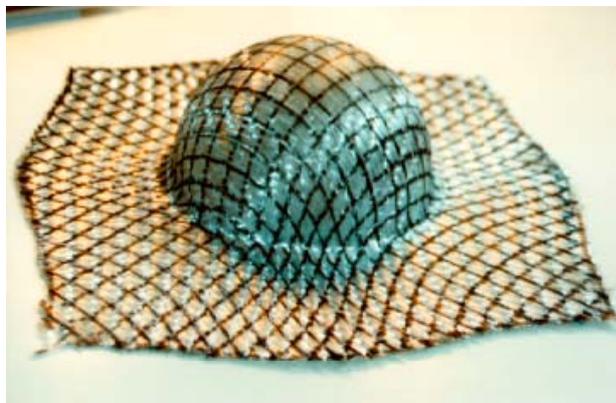


Figure 1. 3 : Transformation de deux réseaux de lignes initialement droites ([CHE94])

Allongement dans la direction des mèches

Le tissé sollicité dans la direction des mèches, subit un allongement dans cette direction (figure 1.4a), généralement très faible (quelques pour-cent). Les fibres constituant le tissé ont des rigidités à la traction très élevées, et l'allongement est ainsi principalement attribué à la diminution des ondulations associées à l'entrelacement des fils (figure 1.6). Ces allongements peuvent correspondre à des énergies de déformation importantes.

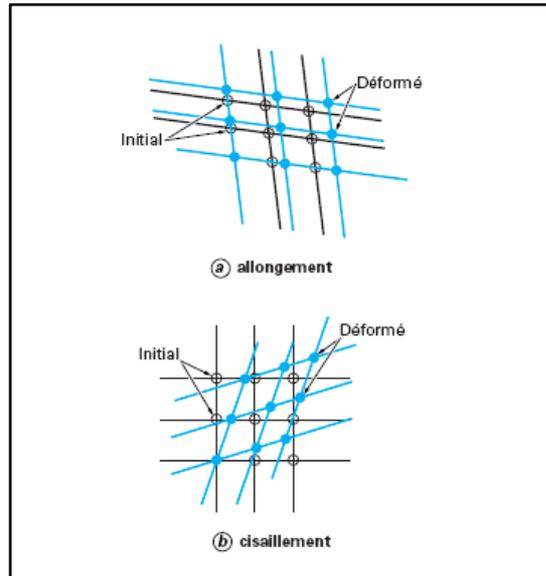


Figure 1. 4 : Allongement et cisaillement d'un renfort tissé dans son plan

Déformation de cisaillement dans le plan

En raison du tissage, de grandes rotations des mèches sont possibles. Elles se produisent autour des points de superposition des réseaux chaîne-trame (effet treillis) (figure 1.4b). Cette déformation de cisaillement est le mécanisme principal de déformation d'un renfort tissé dans son plan. Ces déformations peuvent être très grandes (§ 1.3.3) même pour des efforts très faibles notamment lorsque l'on ne dépasse pas l'angle de blocage (figure 1.9).

Déformation de flexion

La rigidité de flexion d'un tissé (sans résine ou avec une résine fluide) est faible, voire très faible. Ceci est le résultat des très faibles sections des fibres auquel s'ajoute le glissement relatif des fibres qui est possible. La rigidité de flexion est souvent négligeable. Cet aspect est utilisé dans la mise en forme des tissés. On parle souvent de drapage et le tissé est souvent modélisé par une membrane (rigidité de flexion nulle). Néanmoins, dans certains matériaux épais ou composés de fibres peu flexibles, la rigidité peut avoir une influence et on devra considérer le renfort tissé comme une coque.

Déformation de compression

Lorsqu'un tissé est soumis à une charge de compression, même très faible, le flambement est immédiat.

Compaction transverse

Lorsque le renfort est soumis à une sollicitation de compaction perpendiculairement à son plan, il s'écrase d'abord très facilement puis avec une rigidité plus grande lorsque les vides entre les fibres se combent. Un telle compaction est réalisée dans le procédé RTM (Resin Transfer Moulding) (§ 1.4.1.1) et dans l'emboutissage des CFRTP (Composite Fiber Reinforced ThermoPlastic) (§ 1.4.1.3). Il est important de mentionner ici que le comportement en tension du renfort tissé est aussi lié à cet écrasement transverse.

1.3.2 Comportement en traction biaxiale

Problème non linéaire multiéchelle

Des essais de traction pratiqués sur le tissu dans les directions des mèches, mettent classiquement en évidence un comportement en traction non linéaire des tissés. Il est caractérisé par une rigidification progressive, à l'origine du comportement non linéaire, suivi d'une linéarité de comportement qui correspond à celles des mèches seules (figure 1.5)

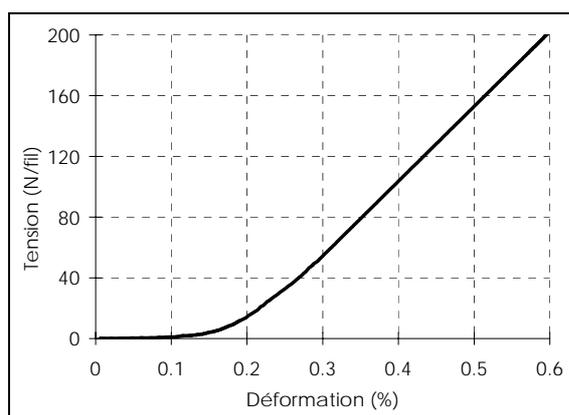


Figure 1.5 : Essai de traction biaxiale sur un renfort tissé (fibres de verre, armure taffetas), dans la direction des fibres ([BUE98]).

La non linéarité du début de chargement est une conséquence du tissage qui confère au tissé une ondulation naturelle. Sous l'effort de traction, les mèches s'allongent et tendent à devenir rectiligne provoquant ainsi une modification, voire une réduction de ces ondulations. Dans le cas extrême où une direction est laissée totalement libre de se déplacer, les mèches sollicitées deviennent totalement droites et les autres fortement ondulées (figure 1.6 cas b). Pour d'autres cas intermédiaires, un état d'équilibre est atteint, où les deux directions ont subi des variations d'ondulation. Il apparaît donc très clairement que ce phénomène est biaxial et que les deux réseaux de mèches sont en interaction.

La non linéarité de début de chargement (Figure 1.5) est d'origine géométrique. Elle est constatée à l'échelle du motif élémentaire de tissage, est liée aux changements d'ondulations

des mèches, et est qualifiée de mésoscopique. Son effet se voit complété et amplifié par d'autres phénomènes se manifestant au niveau des fibres elles mêmes, c'est-à-dire à une échelle microscopique. Sous l'effet des différents efforts de traction suivant l'axe des mèches, l'ondulation initiale se réduit, les mèches se compriment transversalement, et au niveau du contact entre les deux réseaux, les fibres se réarrangent, faisant varier la forme de la section transverse des fils. Les phénomènes mis en jeu à cette échelle sont liés aux contacts entre les fibres et engendrent des phénomènes à l'échelle mésoscopique (modification de la forme de la section de la mèche). L'ensemble de ces phénomènes est à l'origine des non linéarités matérielles observées à l'échelle macroscopique du tissu, lors de la déformation de celui-ci.

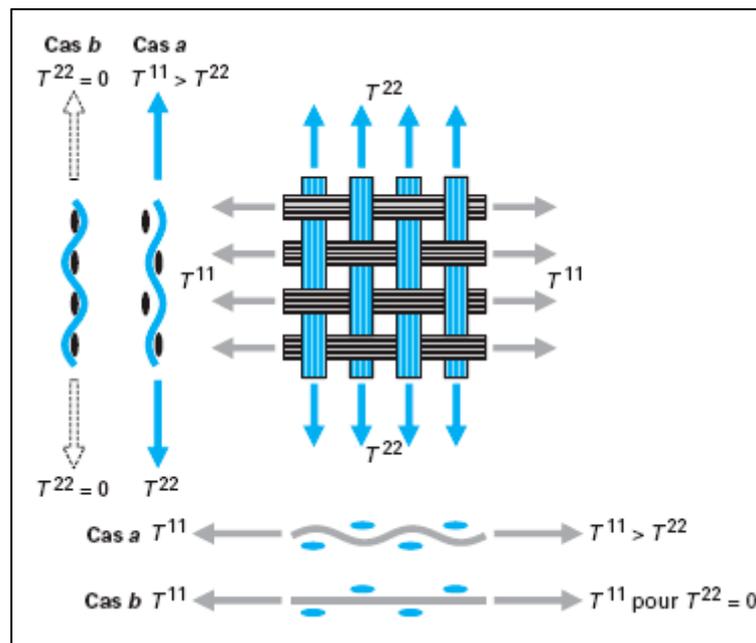


Figure 1. 6 : Variations d'ondulation pour les tensions chaîne et trame ([BUE98])

Essai de traction biaxiale

Afin de mettre en évidence le caractère biaxial du comportement des tissés, pour mieux le comprendre et mieux le modéliser, des essais biaxiaux sont nécessaires. Un dispositif permettant des essais de traction sur des matériaux tissés dans deux directions simultanément a été conçu au LMSP (Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés, Orléans) ([BUE98]). Le dispositif (figure 1.7) repose sur le principe de deux losanges déformables. Il permet de mener des essais à rapport de déformations imposé entre les deux directions de tissage. Les mesures des déformations sont faites soit par méthodes optiques, soit par systèmes mécaniques.

Les tests ont conduit à des résultats quantitatifs et ont permis de mettre en relief les différents phénomènes qui interviennent lors de la déformation du tissu. Le comportement en tension est donné par des courbes tension en fonction des déformations axiales des directions chaîne et

trame, elles servent à la construction des surfaces de tensions qui décrivent de manière exhaustive le comportement en traction ([BUE98] ; [BOI01]).

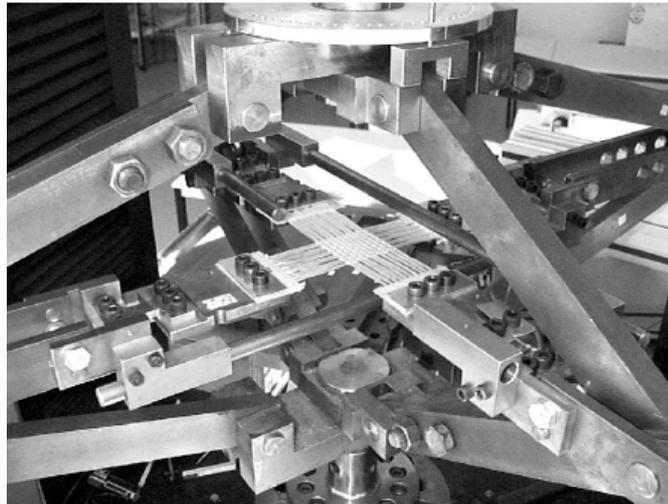


Figure 1. 7 : Dispositif de traction biaxiale sur une éprouvette en croix ([BUE98])

La figure 1.8, présente les résultats d'un essai de traction biaxiale pour différents rapports de biaxialité $k = \epsilon_{chaîne} / \epsilon_{trame}$ (ϵ : déformation), obtenus sur un tissu équilibré, le sergé 2x2 de carbone. Les courbes de comportement tension-déformation mettent en évidence l'influence du tissage sur le comportement qui est nettement non linéaire, bien que celui des mèches seules soit linéaire. Les non linéarités sont observées aux faibles efforts, les linéarités à des efforts plus importants. L'étendue de la zone non linéaire dépend du rapport k , elle est maximale pour les essais libres et est significative de l'embuvage du tissu dans cette direction. Enfin, la partie linéaire du comportement est caractérisée par une rigidité proche de celle des mèches seules en traction.

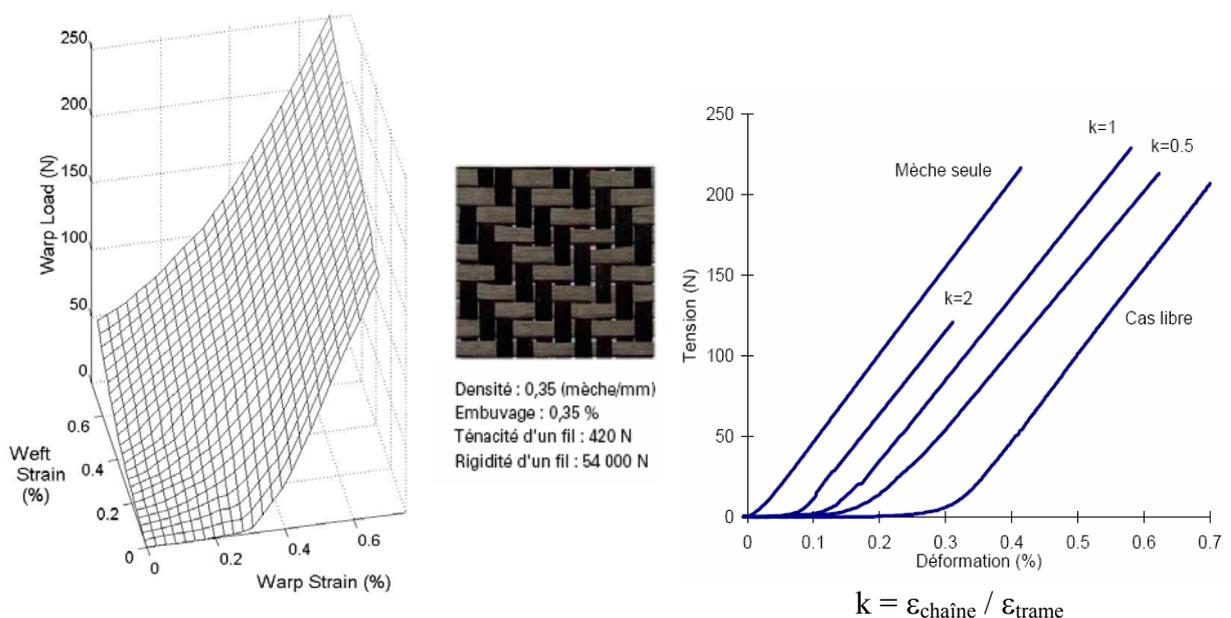


Figure 1. 8 : Comportement en tension biaxiale pour un sergé 2x2 de carbone ([BUE98] ; [GAS00] ; [BOI01])

1.3.3 Comportement en cisaillement plan

Distorsion d'un tissu dans son plan

Des essais de cisaillement plan pratiqués sur les tissus mettent en évidence le comportement en cisaillement non linéaire des tissés. Il est caractérisé par trois zones distinctes (figure 1.9). La première (I), de rigidité très faible correspond à une phase linéaire, sa pente est très faible. Elle est suivie d'une zone transitoire non linéaire (II) qui correspond à une rigidification progressive, pour terminer avec une zone (III) de rigidité plus élevée que celles observées précédemment.

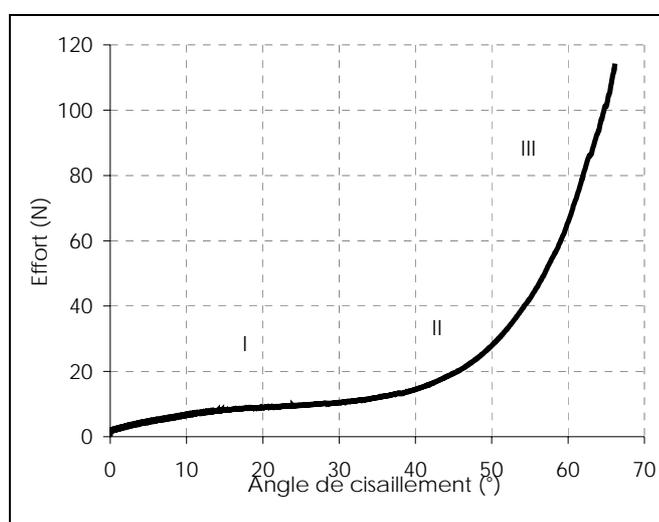


Figure 1. 9 : Essai de cisaillement sur renfort tissé (fibres de verre, armure taffetas) ([DUM03]).

La sollicitation de cisaillement entraîne dans le tissu des variations d'orientations permises au début entre les réseaux chaîne et trame. Ces variations angulaires donnent naissance à des frictions entre les mèches qui sont principalement attribuées à la rigidité initiale de cisaillement. La friction est assimilée à un couple résistant généré à chaque croisement des mèches (figure 1.10a). La non linéarité qui suit correspond à la mise en contact progressive des mèches adjacentes. Lorsque toutes les mèches voisines sont mises en contact, tous les interstices entre les mèches sont alors fermés, le tissu est bloqué et c'est le début de la troisième phase. Celle-ci est quasi-linéaire, elle correspond à une grande rigidité attribuée à une diminution de la largeur des mèches. A partir du point de blocage, les rotations supplémentaires sont limitées par la compressibilité latérale (figure 1.10b) des mèches, ce qui explique la grande rigidité observée. Dans cette zone, la rigidité en cisaillement peut conduire à des plissements.

La non linéarité matérielle de comportement en cisaillement plan, observée à l'échelle macroscopique du tissu est aussi d'origine géométrique à l'échelle mésoscopique. En effet des changements importants apparaissent dans la géométrie de la cellule élémentaire, ils sont caractérisés par une modification de la section due à l'écrasement latéral et au réarrangement des mèches.

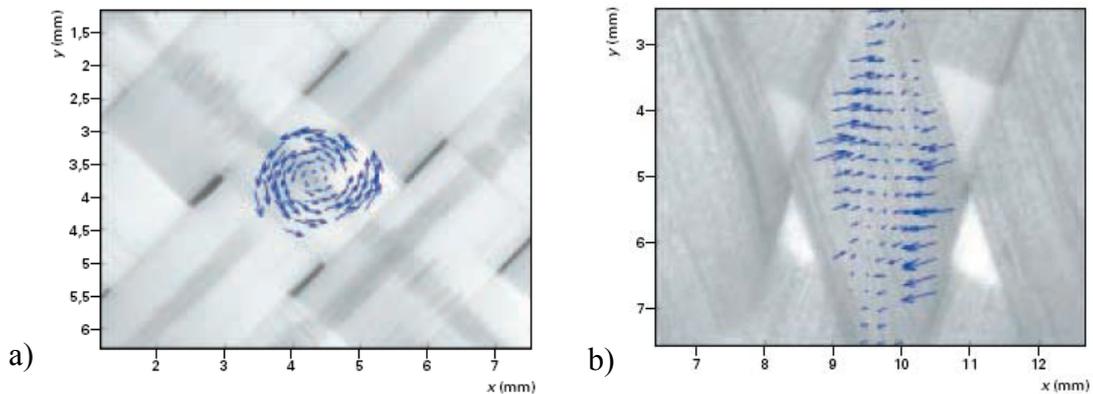


Figure 1. 10 : Changement des déplacements à l'intérieur d'une mèche
a) dans la zone (I), b) dans la zone (III) ([DUM03])

Les plus fortes rigidités du tissu sont celles de tension. Ce sont elles qui guident principalement les changements de forme par exemple du formage du renfort. Par contre, la rigidité en cisaillement plan est faible (au moins dans un premier temps) ce qui permet de grandes distorsions qui sont le mode membranaire principal de formage. Les études concernant le comportement en cisaillement sont très nombreuses, sans doute parce que c'est le mode de déformation majeur des tissus ([KAW73b]; [MCB97]; [PRO97]; [MCG98]; [WAN98]; [POT02]; [LEB03]; [LOM03] et [LOM06]).

Essai de cisaillement plan

Les tests exécutés par plusieurs laboratoires sur les propriétés de cisaillement plan montrent une grande variation des résultats (dans le cas des fibres de verre par exemple) ([DUM03]; [CAO04]; [LOM04]). Néanmoins différentes études tendent à montrer que l'analyse du cisaillement par cadre déformable est la plus satisfaisante pour imposer un état de cisaillement homogène dans un réseau tissé ([LON02]). Le dispositif (figure 1.11) est constitué d'un cadre carré articulé, dont les côtés sont parallèles aux directions des mèches, il est monté sur une machine de traction conventionnelle. L'analyse en cisaillement peut aussi être réalisée par test de traction, sur une éprouvette où les mèches sont orientées à 45° (test bias) ([LON02]) (figure 1.11).

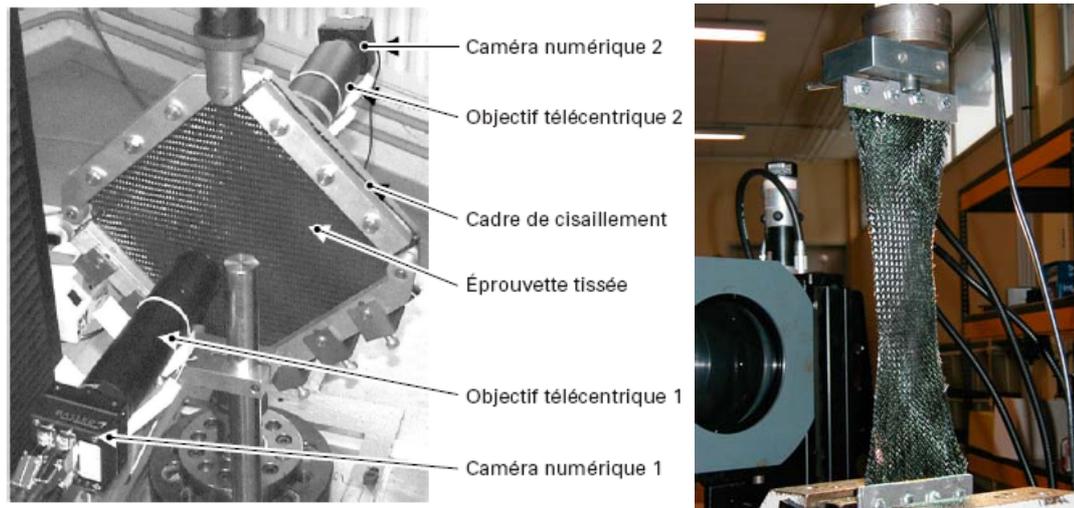


Figure 1. 11 : Test de cisaillement pur sur cadre (à gauche) ([DUM03]) et le bias test (à droite) ([LON02])

1.4 *Formage des renforts continus*

Il est nécessaire de distinguer entre le formage des composites à fibres courtes et à fibres continues. Les fibres courtes améliorent les propriétés mécaniques du matériau mais la matrice est l'élément de base. Le formage dans ce cas est un problème d'écoulement de la résine chargée de renfort. Dans le cas des fibres continues, le renfort joue le rôle principal dans le comportement du composite. Le formage résulte des rotations des mèches entre elles. La résine, lorsqu'elle est présente, joue un rôle mineur car elle est fluide ou pâteuse. Dans ce qui suit, seul le formage des renforts à fibres continues sera analysé.

1.4.1 **Spécificité de la mise en forme des composites**

La mise en forme des matériaux composites diffère de celle des matériaux classiques et utilise la composition fibres-matrice. Les procédés de formage sont assez divers et souvent complexes, ils dépendent de la nature du renfort, de la matrice et de la pièce à obtenir. En général, le formage des composites fibreux est utilisé pour l'élaboration de pièces minces.

Le formage concerne le renfort fibreux. Il s'agit généralement d'obtenir une forme surfacique 3D, souvent complexe et non développable à partir d'un tissu plan. Le formage est réalisé dans un état où la matrice ne joue pas son rôle. Ce sont les mécanismes de déformations des renforts, et principalement le cisaillement plan et la flexion, qui permettent l'obtention de la forme finale complexe du composite.

Deux types de résines peuvent être utilisés : les résines thermodurcissables, plus traditionnelles, et les résines thermoplastiques. En fonction du type de résine utilisée, le

procédé diffère, on parlera principalement du procédé RTM (Resin Transfer moulding) et du drapage dans le cas d'une résine thermodurcissable et du formage des CFRTP (Composite Fiber Reinforced ThermoPlastic), dans le cas d'une résine thermoplastique ([BOI04]).

1.4.1.1 Le procédé RTM (Resin Transfer Moulding)

Le RTM est un procédé à deux étapes. Dans un premier temps, le renfort (généralement tissé) est mis en forme par un emboutissage dans un système poinçon matrice. A la fin du formage, la résine est injectée à haute température dans le moule à travers l'outillage (figure 1.12) ([RUD97] et [PAR00]). La pièce est ensuite démoulée après polymérisation de la résine.

Dans ce procédé, la mise en forme du renfort se fait en l'absence de résine, les déformations du renfort seul permettent alors d'atteindre des formes non développables. Ces déformations sont associées au cisaillement dans le plan et à la flexion.

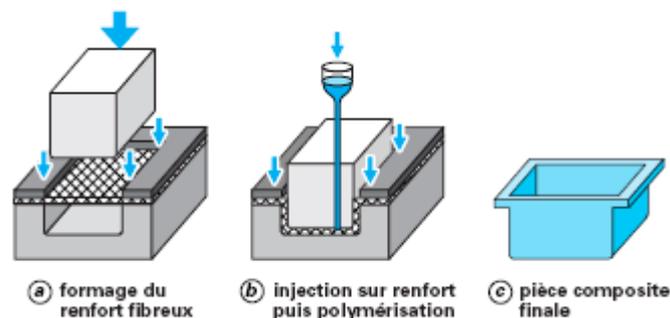


Figure 1. 12 : Les principales étapes du procédé RTM ([BOI04])

Cependant, dans le procédé R.T.M., l'injection de la résine est un phénomène non maîtrisé car dépendant de la viscosité de la résine et de la perméabilité du renfort qui dépend du formage. L'infusion est une technique qui est développée actuellement ([CEL99] et [CEL07] ; [HEI07]). Elle consiste à remplacer l'injection dans le procédé RTM par une infusion dans la direction transverse. Une couche de résine liquide ou solide recouvre la préforme. L'infusion est provoquée par un cycle de pression appliqué sur le renfort sec. Outre des temps de cycle plus faibles, la qualité de l'imprégnation du renfort par la résine est meilleure.

1.4.1.2 La mise en forme des préimprégnés thermodurcissables

Le renfort est initialement noyé dans une résine fluide. La phase de mise en forme se fait tout d'abord à froid, puis on chauffe le système pour que la résine polymérise. Quand la résine a complètement refroidi, on procède au démoulage. Le procédé de formage associé est le plus souvent le drapage. Un grand nombre de pièces aéronautiques sont fabriquées ainsi ([BLA95] ; [RUD97] ; [MOU99]).

Lors du formage du composite, la matrice est présente mais elle n'est pas solide, ceci permet la mise en forme par les mêmes mécanismes que précédemment, la flexion et le cisaillement plan (figure 1.13), car la rigidité de la résine est faible.

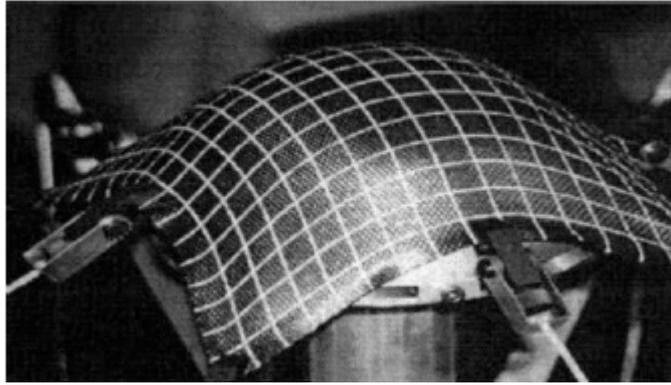


Figure 1. 13: Drapage de préimprégné ([BLA95])

1.4.1.3 Mise en forme des préimprégnés thermoplastiques

Les préimprégnés thermoplastiques (CFRTP, Composite Fiber Reinforced ThermoPlastic) s'obtiennent à partir d'un renfort préimprégné d'une résine, rigide à la température ambiante. Le préimprégné est préalablement chauffé à une température supérieure à celle de fusion de la résine. L'opération de formage a ensuite lieu par un emboutissage, c'est le thermoformage. Après une phase de consolidation (compression transverse) dont le but est d'éviter les vides entre les plis, le composite retrouve sa rigidité complète après refroidissement (figure 1.14). Dans ce procédé, la mise en forme du renfort est réalisée dans un état où la résine est suffisamment fluide permettant ainsi les déformations de cisaillement plan et de flexion.

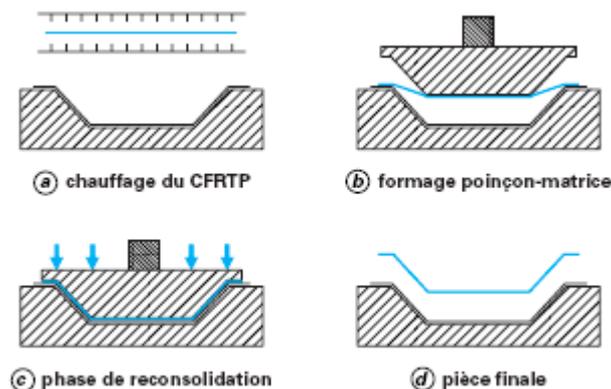


Figure 1. 14 : Phases de la mise en forme des CFRTP par emboutissage poinçon-matrice ([BOI04]).

Il est à noter ici que les composites à résine thermoplastique nécessitent un chauffage préalable pour faire atteindre à la résine un état suffisamment fluide permettant ainsi le formage du composite. Par contre les composites à résine thermodurcissable nécessitent le maintien du moule à une température élevée pendant plusieurs heures afin de permettre la polymérisation de la résine et donc son durcissement. Cette opération s'avère coûteuse, c'est l'une des raisons qui empêche son l'industrialisation en grande série et qui a donné naissance

aux composites à résine thermoplastique qui apparaissent comme une alternative prometteuse et en plein essor ([COG92] ; [KRE97]).

1.4.2 Problématiques de la mise en forme d'un renfort fibreux

Le formage des renforts fibreux est une opération très délicate et complexe dont la technique n'est pas totalement maîtrisée. Pour qu'une mise en forme soit possible, il faut que celle-ci soit réalisée sans défaut. Les défauts possibles sont nombreux, les plus fréquents sont les plissements du tissu. Il peut également dans certains cas apparaître des déchirures des fibres, des glissements entre les réseaux de mèches et des porosités résiduelles. Une question majeure concerne la faisabilité d'une pièce sans défaut dans le renfort pour une géométrie donnée.

La faisabilité d'une forme dépend des différents réglages possibles du procédé : les efforts sur les outils (poinçon, serre-flanc), la vitesse, la température de fabrication etc. Tous ces paramètres altèrent de manière considérable les résultats du formage.

Un autre aspect très important concerne la position des fibres après formage. Celle-ci est importante à au moins deux titres. D'une part, la rigidité et la résistance de la pièce finale (après durcissement de la résine) dépendent de l'orientation des fibres, et d'autre part, et c'est le cas du procédé RTM, en particulier la perméabilité du renfort et l'injection de la résine dépend fortement de la déformation de la préforme ([DRA05] ; [HEI07]).

Pour maîtriser le formage des renforts fibreux autrement que par une campagne d'essais-erreurs sur des fabrications souvent coûteuses, il est nécessaire de mettre au point des modélisations et des simulations, éventuellement simplifiées, de l'opération de formage des renforts tissés.

1.5 Conclusion

La réalisation de la pièce en matériau composite diffère notablement de celle utilisant les matériaux plus classiques tels que les métaux. Les procédés de fabrication utilisent la mise en forme du renfort. Ils sont spécifiques, car ils utilisent l'absence de la matrice pour permettre la déformation du renfort continu rendu possible par sa nature fibreuse.

Pour maîtriser le formage des renforts fibreux il est nécessaire de mettre au point des modélisations et des simulations, éventuellement simplifiées, de l'opération de formage des renforts tissés. Ces modélisations nécessitent la connaissance du comportement mécanique des renforts

Chapitre 2 : Différentes approches de simulation de drapage des renforts tissés

2.1 Aspect numérique du formage des tissus

Les procédés de mise en forme sont divers, leur maîtrise complète n'est pas encore acquise et freine leur industrialisation massive. La simulation numérique permet de juger, au stade de la conception, la faisabilité d'une structure. Elle permet de fixer les différents paramètres (les efforts sur les outils, l'orientation initiale, le type de matériau etc) rendant le formage possible, de déceler les risques éventuels de défauts (porosités, plis, rupture des mèches) et de prédire les propriétés mécaniques de la structure en service. Dans le cas particulier des composites, la simulation numérique du formage permet de prédire les directions et la densité des fibres en tous points après le formage. Ces deux paramètres, très importants, permettent d'analyser le comportement en service du renfort pour ce qui concerne la rigidité, la rupture, l'endommagement etc.

Les modèles pour la mise en forme sont nombreux, les plus communément utilisés sont les modèles cinématiques et les modèles mécaniques. Une synthèse des différentes approches est disponible dans ([BOI07a] ; [BOI07b]).

Les modèles cinématiques ([MAR56] ; [VAN91] ; [LON94] ; [BOR03]) sont dits d'«algorithme du filet». Ils sont assez efficaces pour la prédiction de la drapabilité des renforts tissés classiques, spécialement préimprégnés, et ils sont très compétitifs en temps de calcul. Plusieurs outils industriels sont commercialisés à l'exemple de FiberSIM et ESI-QuickFORM. Néanmoins ces modèles ne prennent en considération ni les conditions aux limites statiques de l'opération de formage (efforts appliqués, contact entre le tissu et les outils) ni le comportement mécanique des fibres, quoique certains aspects constitutifs aient été introduits dans certaines approches ([LON01]). Ces derniers sont très importants dans le cas du formage avec matrice et poinçon. En effet, la force sur l'outil et l'effort sur le serre-flanc influencent de manière non négligeable l'opération de formage.

Les modèles mécaniques (ou physiques) prennent en considération tous les aspects de l'opération de formage. Ces aspects sont modélisés par les équations de la mécanique, plus précisément les équations d'équilibre, les équations constitutives et les conditions aux limites.

Le problème ainsi posé est résolu de manière approchée, généralement par la méthode des éléments finis (EF). Ainsi, l'analyse par éléments finis de l'opération de formage des composites comprend la modélisation des l'outils, du contact entre les différentes parties mises en contact et surtout le comportement mécanique du composite pendant le formage. De nos jours, dans une analyse par EF, le temps de calcul pose de moins en moins de problèmes, grâce à des processeurs performants et des méthodes de calculs efficaces. Le vrai problème réside dans la difficulté de modéliser tous les aspects d'une opération de formage, et plus particulièrement les phénomènes à des échelles inférieures. En raison de la nature multiéchelle du composite et de ses fibres de renforcement, différentes approches sont possibles pour modéliser le procédé de formage par EF.

Dans ce qui suit, une synthèse des principales méthodes est exposée avec un intérêt particulier porté sur les approches par la méthode des éléments finis.

2.2 La nature multiéchelle des matériaux composites

Le matériau composite est le résultat de l'association de renforts et d'une matrice. Les renforts sont constitués de mèches assemblées selon un motif particulier. Les mèches sont composées de fibres. Le formage d'un matériau composite diffère de celui des matériaux tels que les métaux et les polymères, à cause de la structure fibres-matrice. Lors d'une opération de formage d'un composite, la matrice, lorsqu'elle est présente, a un rôle secondaire, c'est le renfort qui a le rôle principal (§ 1.4). Durant le formage, les mèches subissent de très faibles extensions dans leur direction et de grandes rotations entre les réseaux de mèches sont possibles, permettant ainsi d'obtenir des formes complexes à doubles courbures, non développables. Ceci est très spécifique au matériau composite qui hérite ainsi son comportement de l'architecture et des propriétés de ses constituants.

Le matériau composite est par conséquent typiquement multiéchelle. Ceci est autant vrai durant l'opération de formage, spécialement du renfort seul, que pour le composite en service. On distingue généralement trois échelles. L'échelle macroscopique concerne la pièce, c'est l'échelle où le formage du composite est étudié. L'échelle mésoscopique est celle de la cellule tissée élémentaire, et enfin l'échelle microscopique est celle des fibres.

En raison de la nature multiéchelle du composite et de ses fibres de renforcement, différentes approches pour modéliser le procédé de formage existent. Ces approches peuvent être analytiques, géométriques, EF, etc. et modélisent le composite à l'échelle macro, méso ou microscopique. Dans ce qui suit, nous nous limitons à présenter les méthodes les plus utilisées : géométrique et EF.

2.3 Approches cinématiques et mécaniques

Les méthodes de simulation de l'opération de formage des composites fibreux ont une complexité plus ou moins grande suivant qu'elles prennent en compte ou non certains phénomènes. Les approches les plus simples sont les méthodes géométriques qui font des hypothèses très simplificatrices concernant le comportement du tissé mais qui sont très rapides ([MAR56] ; [VAN91] ; [LON94] ; [BOR03]). Les méthodes par éléments finis permettent d'introduire d'avantage de physique et en particulier le comportement mécanique du renfort et l'effet des efforts exercés par les outils.

2.3.1 Approche géométrique par l'algorithme du filet

L'analyse du formage des composites par l'approche géométrique consiste à placer un filet sur une surface le long de lignes géodésiques. La position des mèches dépend des conditions cinématiques initiales et de la surface sur laquelle le tissu sera formé. Cette approche repose sur les (fortes) hypothèses suivantes :

- les mèches sont inextensibles.
- les intersections entre les réseaux de mèches ne peuvent pas glisser.
- la rotation entre les réseaux chaîne et trame est libre.
- le contact du tissé avec la surface de l'outil se fait sans glissement.

Différents algorithmes géométriques existent, l'algorithme du filet, algorithme de mosaïque etc., le plus utilisé reste l'algorithme du filet (fishnet) ([VAN91]).

Principe de l'approche du filet

Le renfort tissé est mis progressivement en place à partir d'une ligne initiale. La position d'un point C peut être déterminée si celle de deux de ses voisins (A et B) (figure 2.1) et la longueur des arcs AB et AC sont connues. Le point C est défini comme l'intersection des deux géodésiques issues de A et de B. Cela peut être formulé comme un problème de minimisation de distance entre deux points, qui est en général un problème non linéaire. La formulation implique l'intégration d'équations différentielles des lignes géodésiques, qui peuvent être résolues numériquement avec les différences finies. La surface de l'outil doit être déterminée soit analytiquement, soit par des facettes planes ou de degrés supérieurs, soit par des panneaux courbes.

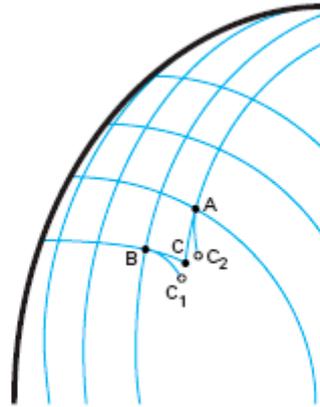


Figure 2. 1 : Détermination de la position du point C connaissant celles de A et B

Pour amorcer le drapage, il est nécessaire de positionner un premier nœud et de fixer deux directions initiales (chaîne et trame). Le résultat du drapage dépend de ces directions. La figure 2.2 présente le résultat d'une simulation de drapage pour une pièce mécanique fortement non développable et pour deux orientations initiales des renforts.

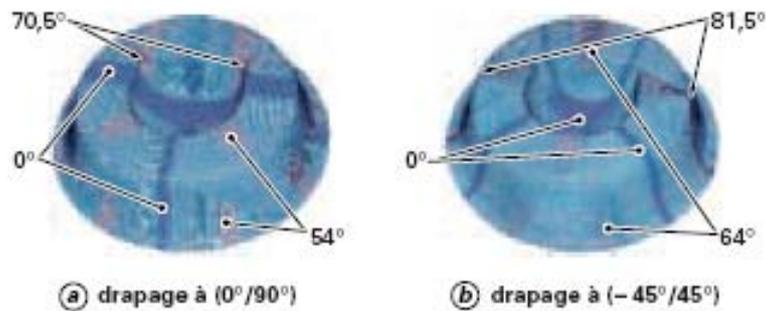


Figure 2. 2 : Simulation du drapage d'une pièce fortement non développable ([VAN91])

Le bénéfice de cette approche est qu'elle conduit à des outils logiciels rapides, dont de nombreux sont commercialisés. Néanmoins les très fortes hypothèses utilisées restreignent l'utilisation de cette méthode. En effet, elle ne prend en considération ni le comportement mécanique des matériaux utilisés, ni les efforts sur les outils. Le résultat du formage est ainsi le même pour tous les matériaux, et pour différentes conditions aux limites statiques du formage (efforts sur les outils, et spécialement le serre-flanc).

2.3.2 Approche mécanique par éléments finis

L'analyse du formage des composites par la méthode des éléments finis permet une modélisation physique très représentative. En effet, elle prend en considération les différents aspects mis en jeu dans l'opération à modéliser, en particulier ceux du composite fibreux. La loi de comportement des matériaux et les conditions aux limites statiques et cinématiques du problème sont prises en compte, néanmoins, il est nécessaire de mettre au point des approches simplifiées pour pouvoir obtenir des temps de calcul compétitifs.

2.3.2.1 Approche continue pour l'analyse du processus de formage

Globalement, la difficulté consiste en la mise au point d'une formulation permettant de simplifier la structure 3D hétérogène de l'échelle mésoscopique en un élément surfacique continu à l'échelle macroscopique capable de simuler une opération de formage

Les renforts tissés ne sont pas des structures continues à des échelles inférieures. Cependant, ils sont postulés comme tels à l'échelle macroscopique car le tissage réduit considérablement le glissement entre les mèches, et ainsi deux points voisins dans la configuration initiale restent voisins après le formage (figure 2.3) ([BOI94]) (§ 1.3.1).

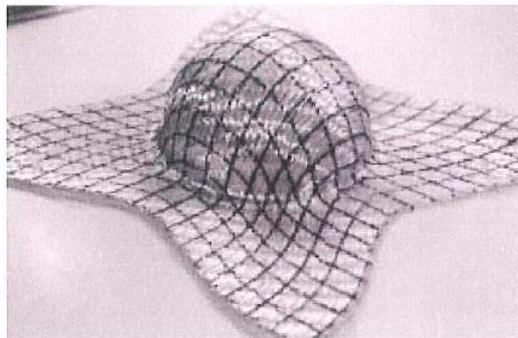


Figure 2. 3 Déformation de lignes droites tracées avant l'opération de formage ([BOI94])

L'avantage de cette approche est la possibilité de l'utiliser dans l'approche éléments finis standard, néanmoins la loi de comportement du modèle continu doit traduire le comportement spécifique des renforts fibreux qui dépend essentiellement de la direction des fibres ainsi que du changement d'ondulation des mèches et de l'angle de blocage. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'il est quasiment impossible de représenter toutes les spécificités du comportement mésoscopique, voire microscopique à l'échelle macroscopique.

2.3.2.1.1 Modèle hypoélastique pour les matériaux fibreux

Les approches hypoélastiques traditionnellement développées dans les codes de calcul par EF (comme Abaqus) pour simuler les métaux isotropes et anisotropes en grandes transformations sont basées sur la formulation corotationnelle de Jaumann ([DAF83] ; [GIL93]) ou l'approche de Green-Naghdi ([DIE79] ; [GIL93]). Pour simplifier dans un premier temps la formulation de milieux anisotropes, il est supposé que l'on est près d'un milieu à une seule direction de fibres. Ces modèles sont caractérisés par une rotation qui définit un référentiel dans lequel sont effectuées des dérivées objectives de la loi hypoélastique puis est actualisée la direction d'orthotropie. Les rotations utilisées dans les dérivées de Green-Naghdi et Jaumann constituent des rotations moyennes du matériau. La rotation $\underline{\underline{R}}$ issue de la décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ (§ 3.2.1.1) est utilisée dans Green-Naghdi. La rotation $\underline{\underline{Q}}$ qui définit le référentiel corotationnel dans lequel le tenseur taux de rotation $\underline{\underline{W}}$ (le tenseur antisymétrique) issu de la composition additive du tenseur gradient des vitesses $\underline{\underline{L}}$ est nul, est utilisée dans Jaumann. Ces approches ne peuvent pas être utilisées pour modéliser les matériaux fibreux en grandes transformations car les rotations ne coïncident pas avec celles des fibres (figure 2.4).

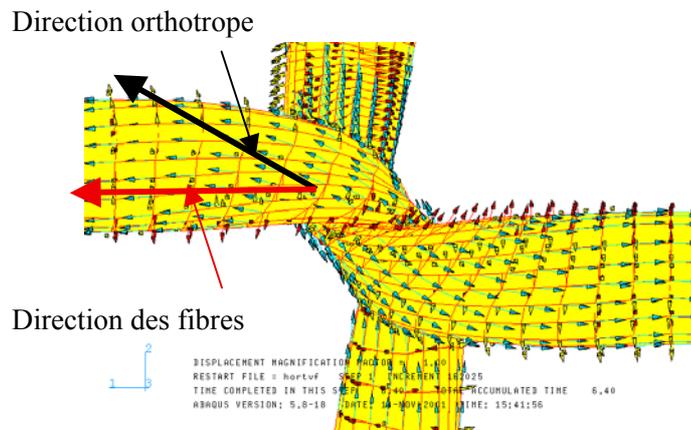


Figure 2.4 Evolution de la direction orthotrope dans la formulation de Green-Naghdi ([HAG04])

La rotation $\underline{\underline{\Delta}}$ des fibres est une alternative intéressante pour les milieux ayant une direction forte d'anisotropie ([HAG04] ; [HAG05]). Elle permet une dérivée objective de la loi hypoélastique ainsi que l'actualisation de la direction d'orthotropie qui coïncide ici avec la direction matérielle.

Le tenseur constitutif $\underline{\underline{C}}$ dans la base actuelle $\{\underline{\underline{\kappa}}^t\}$ est obtenue par le transport rotationnel du tenseur constitutif ${}^0\underline{\underline{C}}$ dans l'orientation initiale $\{\underline{\underline{\kappa}}^0\}$, soit :

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = {}^0 C_{ijkl} \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_i^t \otimes \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_j^t \otimes \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_k^t \otimes \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_l^t \quad (2.1)$$

Où la propriété des transports selon laquelle les composantes du tenseur constitutif dans l'orientation initiale $\{\underline{\underline{\underline{\kappa}}}^0\}$ et actuelle $\{\underline{\underline{\underline{\kappa}}}^t\}$ sont égales, a été utilisée.

La loi constitutive hypoélastique s'exprime par :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^\nabla = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{D}}} \quad (2.2)$$

$\underline{\underline{\underline{D}}}$ est le tenseur taux de déformations, $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^\nabla$ est la dérivée objective du tenseur de contraintes de Cauchy associée à la rotation $\underline{\underline{\underline{\Delta}}}$, il est donné par :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^\nabla = \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \quad (2.3)$$

Les cumuls tensoriels du tenseur de déformation $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ et du tenseur de contraintes $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ associé à une telle dérivée objective sont respectivement :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot \left(\int_0^t \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \cdot \underline{\underline{\underline{D}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Delta}}} dt \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \quad (2.4)$$

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot \left(\int_0^t \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \cdot \underline{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{\underline{D}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\Delta}}} dt \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) donnera la déformation logarithmique dans la direction forte d'anisotropie, et l'équation (2.5) assure la sommation des incréments de contraintes le long de cette direction.

Cette approche peut être utilisée dans le cas des renforts tissés, dont le comportement est loin d'être orthotrope en raison des variations angulaires possibles entre les mèches. Pour cela, on superpose au même point deux matériaux ayant chacun sa propre direction matérielle. Néanmoins, cette superposition ne permet pas d'intégrer l'interaction entre les deux réseaux de mèches. Afin de prendre en considération les variations angulaires chaîne-trame, il est nécessaire d'abandonner la dérivée rotationnelle et d'utiliser la dérivée de Lie basée sur le tenseur gradient de la transformation normée $\underline{\underline{\underline{F}}}_N$ (l'application qui conserve les normes) ([HAG04]).

2.3.2.1.2 *Modèle constitutif non orthogonal*

Dans ces approches (développées par Yu et al. [YU02] ; Xue et al. [XUE03]), la loi constitutive reliant les contraintes et les déformations du milieu continu est formulée dans une base non orthogonale formée par les directions matérielles du renfort.

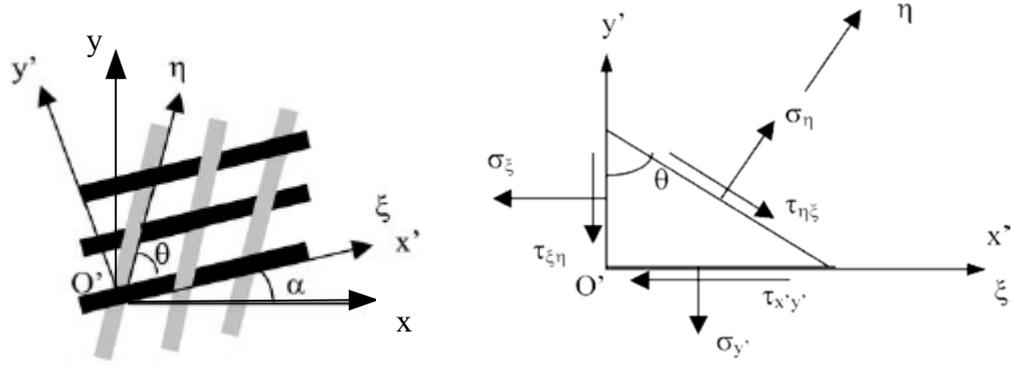


Figure 2. 5 : Composantes du tenseur de contraintes sur un élément en base non orthogonale et orthogonale

Dans le modèle de Xue ([XUE03]), les bases orthogonales et non orthogonale utilisées pour repérer un élément du milieu continu sont respectivement dotées les coordonnées x', y' pour la base orthogonale locale et ξ et η pour la base non orthogonale (figure 2.5), (ici $x' = \xi$).

Le modèle suppose un découplage entre les tensions et le cisaillement. Ce résultat est justifié expérimentalement ([BUE01]) où il a été établi que les propriétés des tensions biaxiales sont très faiblement affectées par le cisaillement plan. Ceci justifie l'écriture suivante de la loi de comportement en base non orthogonale :

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\eta\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-\beta)D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

D_{11} , D_{22} , D_{12} et D_{21} sont les coefficients de tension identifiés par les essais de tractions biaxiales et D_{33} est un coefficient de cisaillement identifié par les essais de cisaillement. β est un coefficient qui tient compte de la contribution du cisaillement aux contraintes $\tau_{\xi\eta}$ et $\tau_{\eta\xi}$ qui sont différentes puisque la base est non orthogonale.

La loi constitutive (2.6) peut s'exprimer dans la base orthogonale locale. Pour cela les relations entre les composantes des contraintes et des déformations dans les deux bases (non orthogonale et orthogonale locale) sont établies.

Les contraintes dans les deux bases sont reliées par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\cotg \theta & -\cotg \theta \\ -\cotg \theta & \cotg \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\eta\xi} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}_2 \begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\eta\xi} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Où $\underline{\underline{T}}_2$ représente la matrice de passage de la base non orthogonale à la base orthogonale dotées les coordonnées x', y' .

Les déformations dans les deux bases sont reliées par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}_3 \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Où $\underline{\underline{T}}_3$ représente la matrice de passage de la base orthogonale dotées les coordonnées x', y' à la base non orthogonale.

Où ε_ξ et ε_η sont les déformations des directions chaîne et trame et $\gamma_{\xi\eta}$ est la variation d'angle par rapport à position initiale.

Ces différentes expressions permettent d'exprimer la loi constitutive en fonction des propriétés des directions des fibres, en base orthogonale locale, puis dans une base orthogonale globale définie par la rotation $\underline{\underline{R}}$:

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{x',y'} = \underline{\underline{T}}_2 [\underline{\underline{D}}] \underline{\underline{T}}_3 [\underline{\underline{\varepsilon}}]_{x',y'} \quad [\underline{\underline{\sigma}}]_{x,y} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{T}}_2 [\underline{\underline{D}}] \underline{\underline{T}}_3 [\underline{\underline{R}}]^T [\underline{\underline{\varepsilon}}]_{x,y} \quad (2.9)$$

2.3.2.2 Approche discrète ou mésoscopique

A l'inverse de l'approche continue, l'approche discrète modélise le comportement à des échelles plus petites. Elle considère les renforts fibreux comme un ensemble d'éléments (mèches, fibres, cellule élémentaire etc.). On distingue entre les approches aux échelles mésoscopique et microscopique. L'analyse par EF concerne les problèmes traitant des éléments mis en contact ou reliés par des ressorts. L'avantage de cette approche c'est de pouvoir justifier certains aspects du comportement du matériau en fonction de sa structure interne, comme les directions des fibres. Néanmoins, il est très difficile de construire à l'échelle mésoscopique des modèles à la fois performants et simples pour analyser des opérations de formage.

Les éléments poutres et barres sont très couramment utilisés pour décrire les mèches ([CHE01], [SHA03] ; [SKO07]). La figure 2.6 illustre une cellule élémentaire du matériau, constituée de 4 barres à deux nœuds représentant les mèches et un ou deux éléments barres pour modéliser la rigidité au cisaillement ([SHA03]). Cette approche a été utilisée pour simuler le drapage hémisphérique ([SKO07]).

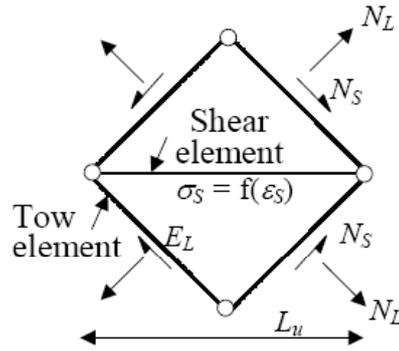


Figure 2. 6 : Cellule élémentaire composée de 4 barres pour les mèches et une barre pour le cisaillement ([SHA03])

Les systèmes masses-ressorts sont aussi utilisés pour modéliser des renforts tissés (figure 2.7) ([BEN05] ; [BEN07]). Les ressorts modélisent les tensions, le cisaillement, la flexion et aussi les appuis élastiques. Le drapage d'un tissu sur une forme carrée a été réalisé avec ce modèle. Les mêmes auteurs ont tenté d'introduire les variations d'ondulations et les interactions entre les mèches, mais le modèle est limité aux sections droites planes et concerne un nombre faible de cellules tissées.

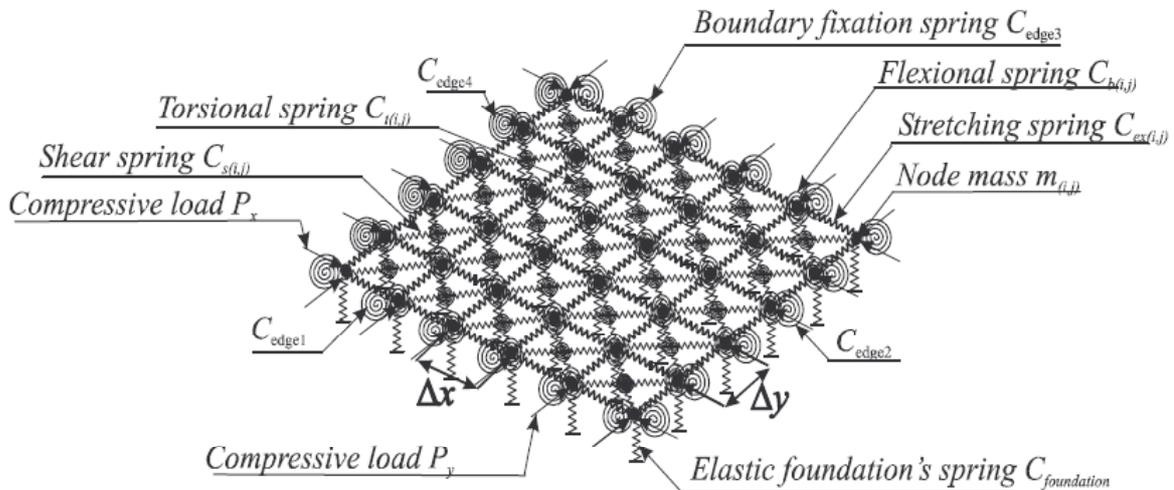


Figure 2. 7: Modèle discret de renfort basé sur un système masses-ressorts ([BEN05])

Un modèle méso-mécanique ([PIC05]) est développé pour modéliser les NCF. Il utilise des éléments 3D pour chaque mèche et des éléments barres pour les coutures (figure 2.8). Les frottements entre les mèches mises en contact sont pris en compte.

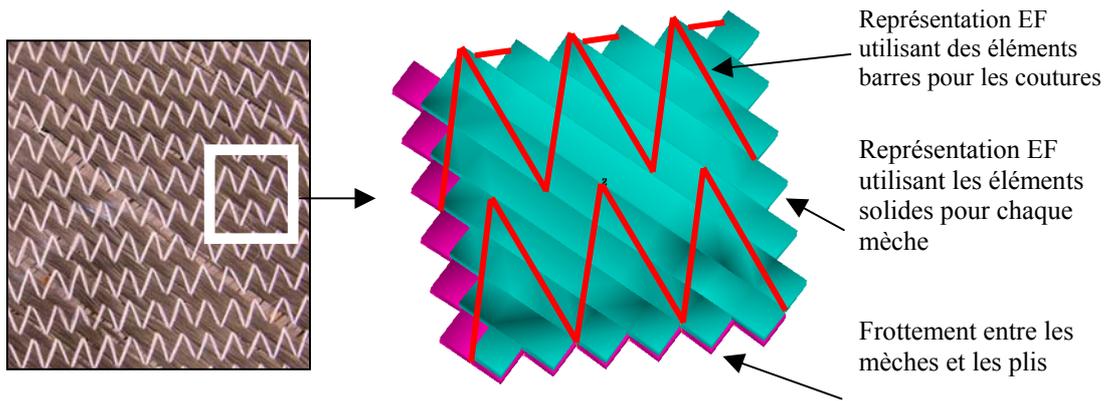


Figure 2. 8 : Représentation d'une cellule d'un modèle mécanique mésoscopique pour les NCF ([PIC05])

2.3.2.3 Approche semi-discrète

L'approche semi-discrète ([BOI94]) associe la méthode des EF et l'analyse mésoscopique d'une cellule tissée élémentaire. Des éléments finis spécifiques sont développés sur la base des modes de déformation des renforts tissés. C'est dans la prise en compte uniquement des énergies développées par ces modes spécifiques que réside l'intérêt du modèle. La description des renforts par EF suppose que deux mèches initialement superposées le restent après formage, ce qui a été vérifié expérimentalement (figure 2.3).

Equations dynamiques simplifiées des renforts

Les fibres qui constituent le renfort ont des diamètres très faibles (quelques μm) pour des longueurs relativement élevées. Elles sont par conséquent sollicitées en tension dans leur direction \underline{h}_1 , (figure 2.9) ; les modes de compression et de flexion étant négligés. Dans le cas de deux réseaux de fils dirigés selon \underline{h}_1 et \underline{h}_2 (figure 2.10), la variation de l'angle entre les mèches est possible. Ainsi, les modes pris en compte pour décrire le comportement des renforts tissés sont : les tensions non linéaires dues aux changements d'ondulations et le cisaillement plan non linéaire également et fortement dépendant de l'angle de blocage entre les deux réseaux de fibres (figure 2.10).

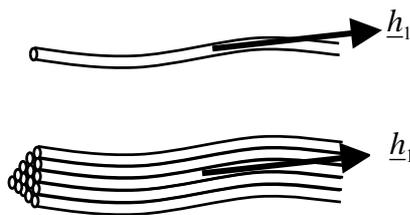


Figure 2. 9 : Fibres et mèche

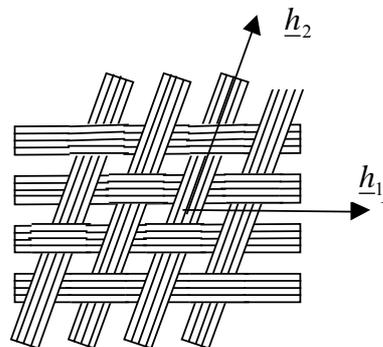


Figure 2. 10 : Réseau de mèches

Pour prendre en compte la tension dans les mèches des directions chaîne et trame, l'expression suivante du tenseur de tension dans un domaine tissé est donnée :

$$\underline{\underline{T}} = T^{11} \underline{h}_1 \otimes \underline{h}_1 + T^{22} \underline{h}_2 \otimes \underline{h}_2 \quad (2.10)$$

Où T^{11} et T^{22} sont les tensions dans les mèches définies par :

$$T^{11} = \int_{A_1} \sigma^{11} dS, \quad T^{22} = \int_{A_2} \sigma^{22} dS \quad (2.11)$$

Où A_i désigne la section des mèches de la direction i et σ^{11} et σ^{22} sont les contraintes de Cauchy définies par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^{ii} \underline{h}_i \otimes \underline{h}_i \quad (\text{Sans sommation, } i = 1, 2) \quad (2.12)$$

Aussi pour prendre en compte la variation d'angle entre les directions chaîne et trame, un couple C , normal au renfort est considéré dans chaque intersection entre deux réseaux de fils.

Par conséquent, l'équilibre global prend la forme simplifiée suivante, où n_{cell} représente le nombre total de cellules élémentaires :

$\forall \underline{\underline{\eta}} / \underline{\underline{\eta}} = 0$ sur Γ_u , la frontière du domaine à déplacements imposés:

$$\sum_{p=1}^{n_{\text{cell}}} \left({}^p \varepsilon_{11}(\underline{\underline{\eta}}) {}^p T^{11} L_1 + {}^p \varepsilon_{22}(\underline{\underline{\eta}}) {}^p T^{22} L_2 \right) + \sum_{p=1}^{n_{\text{cell}}} {}^p C {}^p \gamma(\underline{\underline{\eta}}) - W_{\text{ext}}(\underline{\underline{\eta}}) = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\eta}} dV \quad (2.13)$$

Avec

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{\alpha\beta} \underline{h}^\alpha \otimes \underline{h}^\beta$: le tenseur gradient symétrique du déplacement virtuel $\underline{\underline{\eta}}$. Ses composantes diagonales représentent les déformations de tension dans les directions des mèches.

$\underline{h}^1, \underline{h}^2$: les vecteurs contravariants reliés à \underline{h}_1 et \underline{h}_2 par δ_α^β .

$\underline{\underline{T}}$: le tenseur diagonal des tensions dans les mèches.

C : le couple dû au cisaillement pour la cellule élémentaire.

$\underline{\underline{u}}$: l'accélération.

ρ : la masse volumique du tissu.

L_1, L_2 : Les longueurs, dans le plan moyen, des mèches des directions chaîne et trame.

$\gamma(\underline{\underline{\eta}})$: le glissement entre les mèches chaîne et trame pour le champ de déplacement virtuel $\underline{\underline{\eta}}$.

$W_{\text{ext}}(\underline{\underline{\eta}})$: est le travail virtuel des efforts extérieurs.

${}^p A$ désigne la quantité A pour la cellule $n^{\circ}p$.

Enfin pour mettre en œuvre une simulation EF de formage des renforts tissés basée sur cette approche, il est nécessaire de déterminer les tensions T^{11} et T^{22} et le couple C de cisaillement pour un champs de déformation donné, dans la cellule élémentaire.

Deux fonctions définissant les surfaces de tensions $T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ et $T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ et une fonction donnant les couples élémentaires en fonction des angles de glissement des mèches sont données. Elles supposent que les tensions dans les mèches sont indépendantes de l'angle de cisaillement et elles prennent en compte le caractère biaxial du comportement en tension ([BUE01]). Il est supposé que le cisaillement n'affecte pas les tensions dans les essais de traction biaxiale, ce qui est vérifié expérimentalement ([BUE01]), et la fonction couple C ne dépend que de γ , ce qui est moins vrai ([DUM03] et [LOM04]), mais supposé ici.

Test virtuel et expérimental pour la détermination du comportement des tissés

L'équation (2.13) nécessite la connaissance des surfaces de tension $T^{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ et $T^{22}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ et de l'expression $C(\gamma)$, le couple en fonction de l'angle de cisaillement.

Différentes approches sont possibles :

- Les essais expérimentaux : ils sont menés grâce à des dispositifs susceptibles de tester le tissu ([KAW73a] ; [KAW73b] ; [BUE98]). Le test de traction biaxiale est décrit au paragraphe 1.3.2 et le test de cisaillement pur au paragraphe 1.3.3.
- La simulation 3D par EF à l'échelle mésoscopique : ces essais numériques sont effectués sur une cellule élémentaire de tissé pour déterminer le comportement en tension ([GAS00] ; [BOI01] ; [BOI05b]) et en cisaillement ([BAD07]). Ces analyses ne sont pas classiques car le comportement mécanique des mèches composées de fibres est très spécifique à cause de leur structure fibreuse et ondulatoire. A cela s'ajoute la localisation du contact surtout en cisaillement lorsque l'angle de blocage est atteint.

L'élément fini à quatre nœuds d'une cellule de tissé

L'équation dynamique simplifiée (2.13) permet de construire des éléments finis spécifiques pour le formage des tissés ([BOI05a] ; [ZOU06]). L'élément à quatre nœuds est présenté sur la figure 2.11. Il est composé de n_{cell}^e cellules élémentaires. Dans cet élément fini, les directions des fibres coïncident avec celles des coordonnées naturelles de l'élément de référence ξ_1 et ξ_2 et ce pour deux raisons majeures : d'abord parce les expressions des efforts intérieurs sont plus simples et donc améliorent les temps de calcul, et ensuite parce que dans le cas d'un matériau à deux directions d'anisotropie très rigides par rapport aux autres, l'analyse EF peut conduire à un blocage dans ces directions lorsque celles-ci ne coïncident pas avec les bords de l'élément ([YU04]).

L'approche dynamique explicite est utilisée, elle nécessite seulement l'écriture du vecteur des forces nodales intérieures élémentaires \underline{F}_{int}^e . Celles-ci sont reliées au travail élémentaire intérieur W_{int}^e par la relation suivante :

$$W_{int}^e(\underline{\eta}) = \sum_{p=1}^{ncell^e} {}^p\varepsilon_{11}(\underline{\eta}) {}^pT^{11} {}^pL_1 + {}^p\varepsilon_{22}(\underline{\eta}) {}^pT^{22} {}^pL_2 + \sum_{p=1}^{ncell^e} {}^p\gamma(\underline{\eta}) {}^pC = \eta_s (\underline{F}_{int}^e)_s \quad (2.14)$$

L'indice s varie de 1 à 12 dans le cas d'un quadrilatère à quatre nœuds.

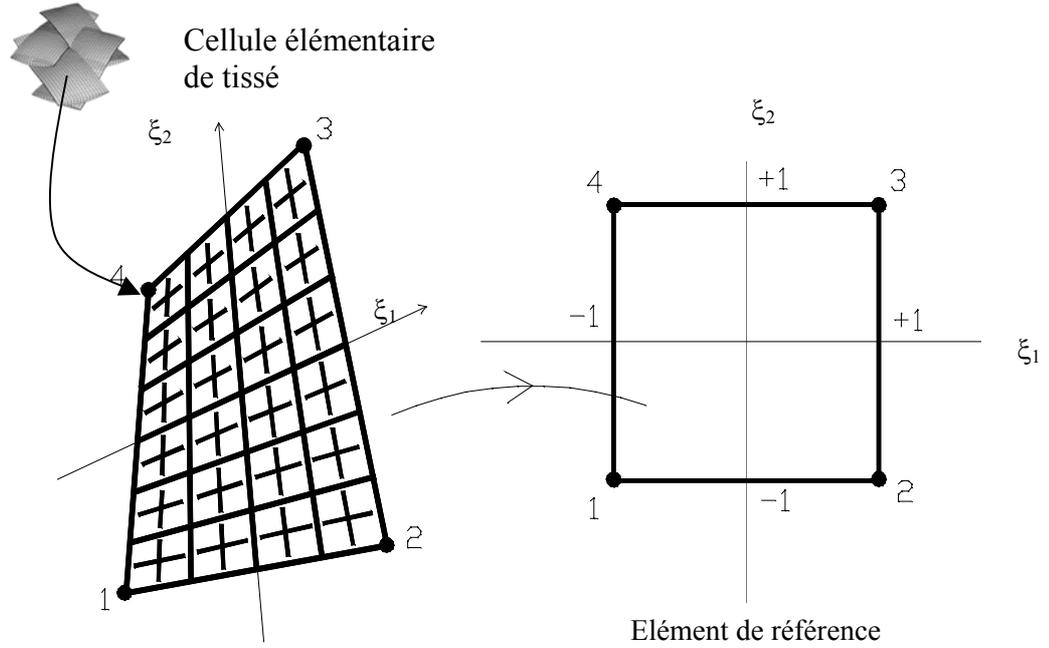


Figure 2. 11: Élément fini à quatre noeuds de cellules de tissés

Les composantes $B_{\alpha\alpha s}$ de la matrice d'interpolation des déformations de tension sont définies à partir des composantes des déformations virtuelles de tension $\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha}$:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha} \cdot \underline{g}_\alpha = \frac{\partial N^k}{\partial \xi_\alpha} (\underline{g}_\alpha)_m \eta_s = B_{\alpha\alpha s} \eta_s \quad (2.15)$$

Où $k = \text{partie entière de } \left(\frac{s+2}{3} \right)$ et $m = s - 3(k-1)$. N^k désigne la fonction d'interpolation au nœud k.

Les composantes $B_{\gamma s}$ de la matrice d'interpolation de la déformation de cisaillement et l'angle ${}^p\gamma(\underline{\eta})$ entre les deux réseaux de mèches sont définies à partir des composantes des déformations virtuelles de cisaillement $\gamma(\underline{\eta})$:

$$\gamma(\underline{\eta}) = B_{\gamma s} \eta_s = \left\{ \frac{\partial N^k}{\partial \xi_1} \left[\cotg\theta \frac{(\underline{g}_1)_m}{\|\underline{g}_1\|^2} - \frac{(\underline{g}_2)_m}{\sin\theta \|\underline{g}_1\| \|\underline{g}_2\|} \right] + \frac{\partial N^k}{\partial \xi_2} \left[\cotg\theta \frac{(\underline{g}_2)_m}{\|\underline{g}_2\|^2} - \frac{(\underline{g}_1)_m}{\sin\theta \|\underline{g}_1\| \|\underline{g}_2\|} \right] \right\} \eta_s \quad (2.16)$$

où :

$\underline{g}_\alpha = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi_\alpha}$ et $\underline{g}_{\alpha\eta} = \frac{\partial (\underline{x} + \underline{\eta})}{\partial \xi_\alpha}$ (avec $\alpha = 1$ à 2) sont les vecteurs matériels covariants dans la configuration actuelle et virtuelle respectivement, et $\theta = (\underline{g}_1, \underline{g}_2)$.

A partir des coefficients d'interpolation $B_{\alpha\alpha s}$ et $B_{\gamma s}$ donnés par les équations (2.15) et (2.16), le travail virtuel des forces intérieures est relié aux déplacements virtuels par :

$$W_{\text{int}}^e(\underline{\eta}) = \eta_s \left(\sum_{p=1}^{\text{ncell}^e} \|\underline{g}_1\|^{-2} {}^p B_{11s} {}^p T^{11} + \|\underline{g}_2\|^{-2} {}^p B_{22s} {}^p T^{22} + {}^p C {}^p B_{\gamma s} \right) = \eta_s \left(\underline{F}_{\text{int}}^e \right)_s \quad (2.17)$$

2.3.2.4 Formage multi-plis et simulation de re-consolidation

Il existe différents procédés de mise en forme dans lesquels le comportement transversal i.e. les contraintes et les déformations à travers l'épaisseur est un problème majeur. C'est le cas des fibres continues et des procédés de formage avec matrice thermoplastique (CFRTP) (§ 1.4.1.3). Après le thermoformage, la reconsolidation est obtenue en appliquant une pression sur le poinçon. L'objectif de cette dernière étape est d'enlever toute porosité résiduelle aux interfaces des plis car elle peut être une source de fissure durant la mise en service du composite et plus particulièrement dans les applications aéronautiques.

- *Simulation du procédé de formage des CFRTP*

L'un des principaux modes de formage est le glissement relatif entre les plis. Dans le but d'autoriser les glissements, chaque pli est modélisé par des éléments coques (Fig. 2.12). Il s'agit du formage en Z d'un renfort constitué de 10 plis qui fléchissent en permettant le glissement entre les différentes couches. Les résultats de la simulation sont en accord avec l'expérience ([CHR02]).

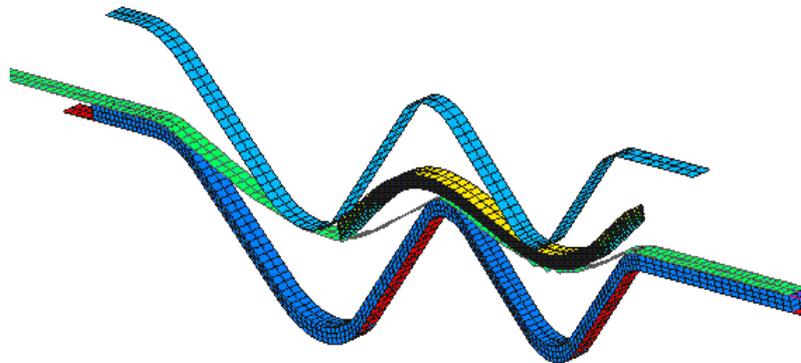


Figure 2. 12: Formage d'un renfort en Z ([CHR01])

- *Elément coque à pincement*

La reconsolidation a été étudiée par Lee et al ([LEE87]) et quelques modèles de consolidation locale ont été proposés. Ces études montrent que la reconsolidation dépend de l'état de contraintes dans le laminé et surtout des contraintes normales au stade de la reconsolidation. Ces composantes des contraintes ne sont pas présentes dans la théorie classique des coques. Quelques éléments finis avec des contraintes/déformations à travers l'épaisseur ont été proposés ([SIM90] ; [BUT94] ; [BLE00]). Dans l'élément coque utilisé, un degré de liberté de déformation dans l'épaisseur est introduit ([CHR02] ; [SOU06]).

2.4 Conclusion

L'analyse par éléments finis EF est probablement l'approche la plus utilisée pour simuler les opérations de formage. Ces simulations sur les composites sont importantes car non seulement elles permettent de déterminer la faisabilité du formage lui-même, mais encore elles donnent les directions des fibres et leur densité après le formage, essentielles pour analyser les pièces de composites en service.

L'approche EF est une approche mécanique et la compréhension du comportement pendant le formage est essentielle pour le calcul. Un modèle numérique n'est précis que s'il est construit sur la base d'observations expérimentales pertinentes. Il est donc important de rappeler la nécessité d'avoir des tests précis (expérimentaux ou virtuels) pour déterminer les propriétés mécaniques des matériaux. Ceci est peut être le cas des métaux, mais en revanche ce n'est pas le cas des composites. Par exemple, les benchmarks exécutés par plusieurs laboratoires sur les propriétés de cisaillement plan montrent une grande disparité des résultats dans le cas des fibres de verre utilisées dans les applications automobiles ([CAO04]).

Actuellement, deux approches par EF sont très populaires. L'approche continue qui modélise à l'échelle macroscopique le comportement du renfort par un milieu continu équivalent susceptible de reproduire les phénomènes des échelles plus petites, et l'approche discrète qui modélise le comportement des renforts à l'échelle mésoscopique. Néanmoins l'approche continue reste la plus utilisée dans l'industrie. Parmi les approches continues, celles qui sont classiquement utilisées sont les approches hypoélastiques. Elles présentent des inconvénients, en particulier un cycle de chargement ne conduit pas forcément à l'état de départ. Dans cette optique, un modèle continu hyperélastique est proposé pour reproduire la physique des renforts tissés, il présente une alternative aux modèles hypoélastiques.

Chapitre 3 : Formulations et modèles de comportement hyperélastiques

3.1 Introduction

Les matériaux hyperélastiques sont une classe de matériaux pour lesquels est postulée l'existence d'une énergie de déformation, qui est une fonction du tenseur gradient de la transformation. De cette énergie de déformation dérive la loi de comportement. La formulation d'une loi de comportement satisfaisante en hyperélasticité repose sur la proposition d'un potentiel élastique W , judicieux, objectif et respectant les symétries matérielles du matériau considéré. Deux approches existent pour définir les potentiels intervenant dans les lois constitutives : l'approche physique basée sur la théorie statistique et l'approche phénoménologique fondée sur les observations expérimentales.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les modèles de comportement hyperélastiques les plus utilisés et en particulier les modèles anisotropes construits sur la base de l'approche phénoménologique. Pour ce faire, les différents résultats de base en mécanique des grandes transformations sont exposés dans un premier temps. Ainsi sont rappelées les différentes grandeurs tensorielles utilisées dans la modélisation des milieux continus et la formulation des milieux hyperélastiques isotropes et anisotropes basée sur les tenseurs de structure. Dans un second temps, les potentiels hyperélastiques les plus utilisés sont exposés.

3.2 Résultats de base en mécanique continue

3.2.1 Généralités

La cinématique des grandes transformations nécessite une attention particulière. En effet, lors de la transformation d'un solide, celui-ci occupe des configurations successives et il est essentiel de préciser dans quelle configuration la description des déformations et des contraintes est effectuée. En effet, le choix des tenseurs dépend de la configuration retenue pour décrire l'évolution du solide. Dans ce qui suit, quelques notions élémentaires de la mécanique des milieux continus en grandes transformations sont rappelées. Un résumé succinct de la formulation hyperélastique est présenté avec un intérêt particulier pour les milieux anisotropes.

3.2.1.1 Cinématique

Soit un solide déformable Ω occupant une configuration initiale donnée C^0 à l'instant t_0 . Ce même solide occupe la configuration courante C^t à l'instant t (figure 3.1). On définit la fonction placement φ qui associe à un point matériel $M(\underline{X})$ de C^0 le point $m(\underline{x})$ de C^t :

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X}) = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}) \quad (3.1)$$

\underline{X} représente la position du point matériel M , \underline{x} celle du même point à l'instant t et \underline{u} est le vecteur déplacement du point considéré.

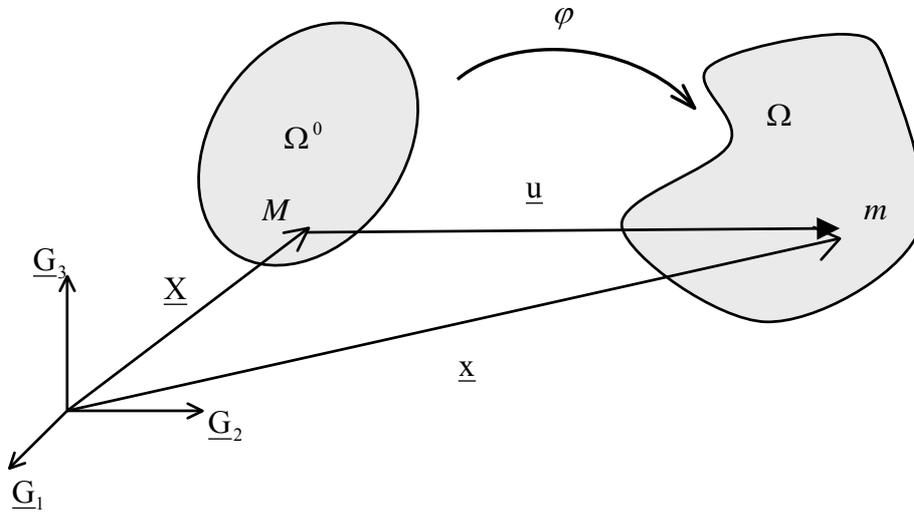


Figure 3. 1 : Cinématique d'un solide déformable

Rappelons $\underline{\underline{F}}$, le tenseur gradient de la transformation ou l'application linéaire tangente qui transporte un segment matériel de C^0 à C^t :

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad (3.2)$$

Le tenseur gradient $\underline{\underline{F}}$ permet également d'obtenir les lois de transformations des éléments d'aire et de volume. Ainsi un élément de surface dS de normale unitaire \underline{N} défini dans C^0 se transforme en élément de surface ds de normale unitaire \underline{n} dans C^t par :

$$\underline{n} ds = J \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{N} dS \quad (3.3)$$

Et un élément de volume dV^0 dans C^0 se transforme en dV dans C^t :

$$dV = J dV^0 \quad \text{avec} \quad J = \det \underline{\underline{F}} = \frac{\rho}{\rho^0}$$

Où J est le Jacobien de la transformation, ρ^0 et ρ sont respectivement la masse volumique dans la configuration initiale et actuelle.

L'application $\underline{\underline{F}}$ est donc bijective, la création et la perte de matière ne sont pas autorisées dans le solide. C'est le principe de la conservation de la masse, qui se traduit par la condition suivante sur $\underline{\underline{F}}$, $\det \underline{\underline{F}} = J > 0$

Le théorème de la décomposition polaire permet d'écrire $\underline{\underline{F}}$ de manière unique :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad (3.4)$$

Où $\underline{\underline{R}}$ est le tenseur orthogonal de rotation pure, $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ sont les tenseurs d'élongation à droite et à gauche respectivement, ils sont symétriques définis positifs, ils possèdent les mêmes valeurs propres.

On rappelle les tenseurs de déformation de Cauchy Green droit et gauche :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^2 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}}^2 \quad (3.5)$$

Les tenseurs $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{U}}$ décrivent les déformations dans la configuration initiale, alors que $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{V}}$ les décrivent dans la configuration actuelle.

La condition essentielle que doit assurer un tenseur de déformation est qu'il doit être nul dans le cas d'un mouvement de solide rigide. Hill a proposé une double famille de mesure des déformations en posant ([SID82] ; [WEI00] ; [BIL03]) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}}_\alpha &= \frac{1}{\alpha} (\underline{\underline{U}}^\alpha - \underline{\underline{1}}) & \alpha \neq 0 & \quad \varepsilon_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\underline{\underline{V}}^\alpha - \underline{\underline{1}}) \\ \underline{\underline{E}}_0 &= \log \underline{\underline{U}} & \alpha = 0 & \quad \varepsilon_0 = \log \underline{\underline{V}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

On retrouve le tenseur de Green-Lagrange défini sur C^0 pour $\alpha = 2$ et d'Euler-Almansi défini sur C^1 pour $\alpha = -2$:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}) \quad \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{V}}^{-2} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{B}}^{-1} - \underline{\underline{1}})$$

Remarque

Le tenseur d'Almansi représente le transport covariant direct par $\underline{\underline{F}}$ de la configuration C^0 à la configuration C' du tenseur de déformation de Green Lagrange :

$$\underline{\underline{T}}_\infty(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{A}} \quad (3.7)$$

Le tenseur identité représente le transport covariant direct par $\underline{\underline{F}}$ de la configuration C^0 à la configuration C' du tenseur de déformation de Cauchy Green droit :

$$\underline{\underline{T}}_\infty(\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \quad (3.8)$$

3.2.1.2 Statique

De même nous rappelons ici les tenseurs de contraintes mis en jeu dans la formulation des milieux continus. Plusieurs tenseurs de contraintes sont possibles pour décrire un état de contraintes dans un milieu déformable. On distingue entre ceux définis sur la configuration C^0 et la configuration C^t , pour cela considérons l'effort intérieur de cohésion \underline{df} exercé sur un élément de surface ds de la configuration déformée C^t :

$$\underline{df} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} ds \quad (3.9)$$

On définit ainsi le vecteur contraintes \underline{t} par la relation :

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (3.10)$$

Ce résultat est appelé théorème de Cauchy, il stipule que $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur qui transforme le vecteur unitaire d'une surface s en un vecteur contraintes appliqué sur s (figure 3.2). Ce tenseur est symétrique, son écriture dans la configuration actuelle lui donne un caractère Eulérien.

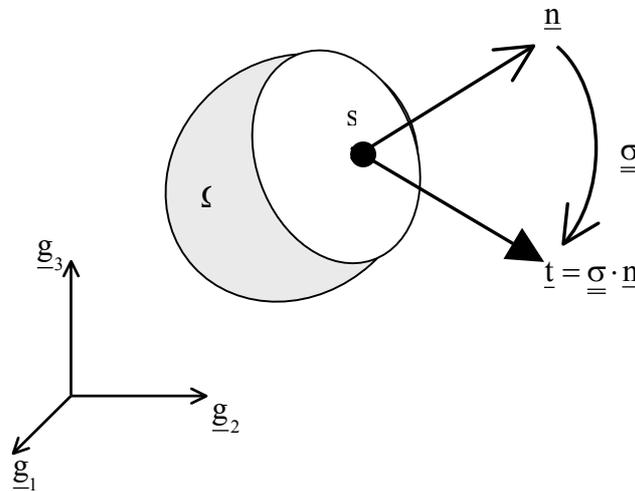


Figure 3.2 : Interprétation géométrique du tenseur de contraintes de Cauchy

L'écriture de l'équation (3.9) en fonction des grandeurs dans la configuration non déformée permet de définir le premier tenseur de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{P}}$. En substituant (3.3) dans (3.9) :

$$\underline{df} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{N} dS$$

On définit ainsi le pseudo-vecteur contraintes \underline{t}_0 par la relation :

$$\underline{t}_0 = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{N} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{P}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{F}^{-T}$$

$\underline{\underline{P}}$ est le premier tenseur de Piola Kirchhoff ou tenseur de Boussinesq. Ce tenseur n'est ni eulérien ni lagrangien de plus il n'est pas symétrique.

L'image de \underline{t}^0 par l'application \underline{F}^{-1} permet d'introduire un tenseur de contraintes lagrangien symétrique, le second tenseur de Piola Kirchhoff ou tenseur de Piola Lagrange $\underline{\underline{S}}$:

$$\hat{\underline{\underline{t}}}^0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{t}}^0 \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\underline{t}}}^0 = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{N}} \quad (3.11)$$

Avec

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (3.12)$$

De l'équation (3.12), on définit le tenseur de Kirchhoff :

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

Ce tenseur est eulérien et symétrique, il permet de définir le vecteur de contraintes $\underline{\underline{t}}^* = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{t}}$ dans la configuration déformée C' avec : $\underline{\underline{t}}^* = \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}}$

La figure 3.3 illustre une représentation géométrique des tenseurs de contraintes présentés ci-dessus.

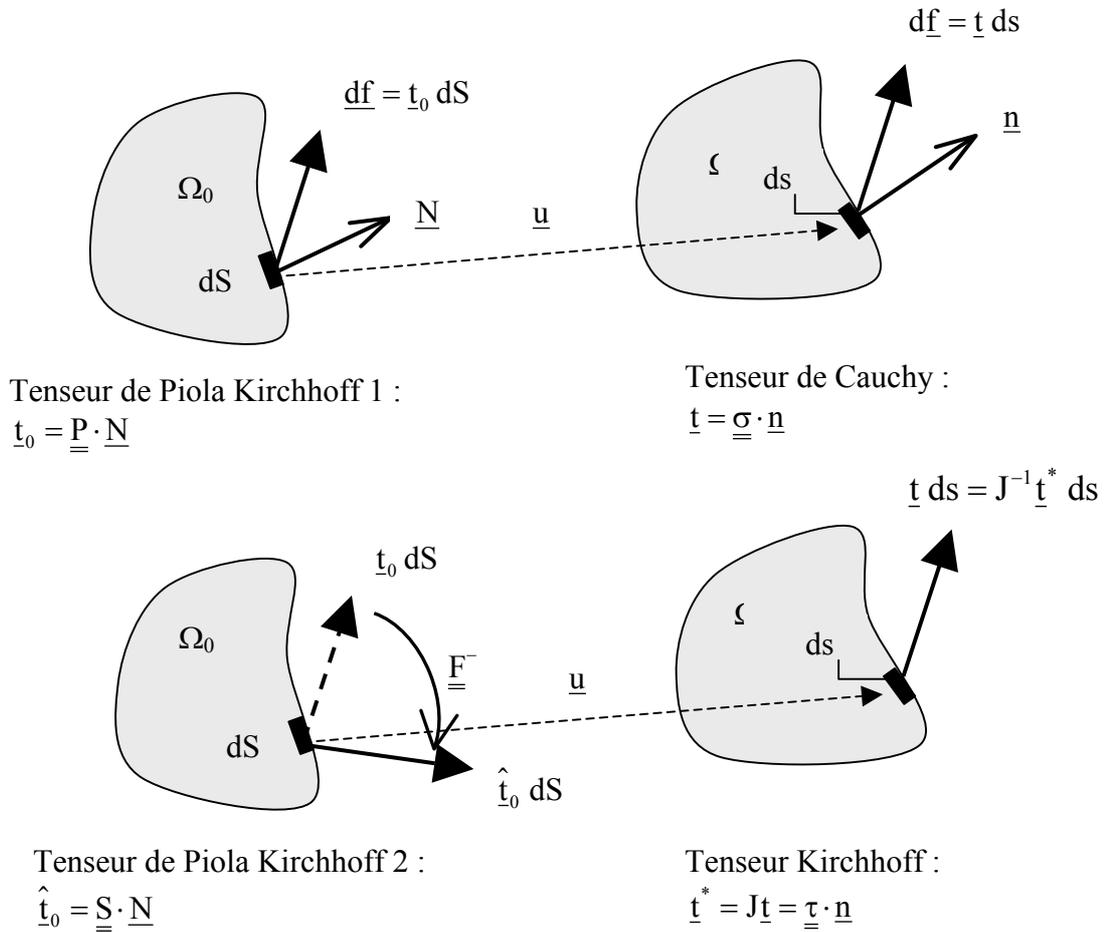


Figure 3.3 : Définition des tenseurs de contraintes

Remarque

Le tenseur de Kirchhoff représente le transport contravariant direct par $\underline{\underline{F}}$ de la configuration C^0 à la configuration C' du second tenseur de contraintes Piola Kirchhoff :

$$\underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{S}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tau}} \quad (3.13)$$

Par conséquent :

$$[\underline{J}\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{g}\}} = [\underline{S}]_{\{\underline{G}\}} \quad (3.14)$$

En effet, $T^{\circ\circ}(\underline{S}) = \underline{F} \cdot (S^{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j) \cdot \underline{F}^T = S^{ij} \left((\underline{F} \cdot \underline{G}_i) \otimes (\underline{G}_j \cdot \underline{F}^T) \right) = S^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$

Donc les composantes du tenseur \underline{S} dans la base $\{\underline{G}\}$ et les composantes de son image par le transport \underline{F} dans la base $\{\underline{g}\}$ image de $\{\underline{G}\}$ par \underline{F} , sont égales. C'est la propriété des transports.

3.2.2 Matériau hyperélastique

3.2.2.1 Equations de l'hyperélasticité

- *Définition*

Un matériau hyperélastique est un matériau élastique pour lequel il existe une énergie de déformation $W = \rho_0 \psi$ qui ne dépend que de la déformation ([MAR83] ; [BON97] ; [WEI00]).

$$W = W(\underline{F}) \quad (3.15)$$

La fonction W est appelée potentiel élastique et décrit l'énergie de déformation par unité de volume indéformable. ψ est l'énergie par unité de masse ou l'énergie libre spécifique aussi appelée énergie libre d'Helmholtz et ρ_0 est la densité massique du volume indéformable.

Le potentiel élastique W doit respecter le principe d'indifférence matérielle qui garantit son invariance dans toute rotation de la configuration actuelle C^t , cette condition se traduit par :

$$W(\underline{F}) = W(\underline{Q} \cdot \underline{F}) \quad \forall \underline{Q} \text{ Orthogonal} \quad (3.16)$$

Dans le cas où \underline{Q} est la rotation particulière \underline{R}^T issue de la décomposition polaire de \underline{F} , la condition (3.16) donne alors :

$$W(\underline{F}) = W(\underline{R}^T \cdot \underline{F}) = W(\underline{U}) \quad (3.17)$$

On montre ainsi que le principe d'objectivité est équivalent à l'assertion que le potentiel W est fonction de \underline{U} , et donc de \underline{C} ou de \underline{E} :

$$W = W(\underline{C}) \quad (3.18)$$

Réciproquement, puisque \underline{C} ne change pas dans un changement de référentiel, il est clair que le potentiel (3.18) est objectif.

- **loi de comportement d'un matériau hyperélastique**

Le matériau hyperélastique ne dissipe pas d'énergie, et donc le premier et le second principe de la thermodynamique se réduisent à la satisfaction de l'inégalité de Clausius-Duhem, qui s'exprime, dans le cas purement mécanique, par :

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} - \dot{W} = 0 \quad (3.19)$$

Ce bilan énergétique traduit que la dissipation intrinsèque est nulle, ce qui signifie que tout le travail des efforts internes est stocké sous forme d'énergie ([SID82]).

En combinant les équations (3.18) et (3.19), nous avons :

$$\left(\underline{\underline{S}} - \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}} \right) : \underline{\underline{\dot{E}}} = 0 \quad (3.20)$$

Il en résulte la forme générale de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique donnée dans la configuration initiale C^0 , en fonction du tenseur de Green Lagrange $\underline{\underline{E}}$:

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (3.21)$$

En fonction du tenseur de Cauchy Green droit $\underline{\underline{C}}$:

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (3.22)$$

La loi de comportement dans la configuration déformée C^t peut être donnée par le tenseur de contrainte de Cauchy qui s'obtient du second tenseur de Piola Kirchhoff par le transporté direct par $\underline{\underline{F}}$, voir l'équation (3.13).

- **Propriétés**

Le potentiel élastique total sur tout le volume indéformable V_0 est, d'après (3.18) :

$$\Pi = \int_{V_0} W \, dV_0$$

La puissance totale des efforts internes dans le volume indéformable V_0 est d'après (3.19) :

$$P = \int_{V_0} \dot{W} \, dV_0 = \int_{V_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \, dV_0 = \dot{\Pi} \quad (3.23)$$

Le travail des efforts internes entre t_1 et t_2 est :

$$\int_{t_1}^{t_2} P \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\Pi} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\Pi = \Pi(\underline{\underline{E}}_2) - \Pi(\underline{\underline{E}}_1) \quad (3.24)$$

Pour un matériau hyperélastique, le travail des efforts intérieurs durant le processus de déformation ne dépend que des valeurs initiale et finale de la déformation, c'est-à-dire que le travail est indépendant du chemin suivi. Il en résulte que le travail sur un chemin fermé est nul. Il s'agit là d'une propriété simple, mais que la plupart des modèles hypoélastiques ne vérifient pas.

3.2.2.2 Les symétries matérielles

Un matériau symétrique est un matériau qui possède des propriétés de construction géométrique et donc interne identiques dans différentes directions. Les symétries matérielles caractérisent l'invariance de la loi de comportement, par conséquent l'invariance de l'énergie potentielle W pour un matériau hyperélastique, dans une rotation de la configuration de référence C^0 (avant déformation). On définit ainsi le "groupe d'isotropie" \mathcal{G} ([OGD84]) du matériau qui représente l'ensemble de toutes les rotations laissant invariant le potentiel W :

$$W(\underline{\underline{C}}) = W(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T) \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{G} \quad (3.25)$$

Pour un matériau isotrope, toutes les directions matérielles sont équivalentes, \mathcal{G} est le groupe orthogonal tout entier et l'équation (3.25) est alors satisfaite pour toute rotation de la configuration de référence. Une telle fonction est dite isotrope, au sens mathématique, de son argument, le tenseur $\underline{\underline{C}}$. Les théorèmes de représentation, qui sont des résultats mathématiques, permettent de représenter le potentiel W par une fonction scalaire d'arguments scalaires et de réduire ainsi le nombre de coefficients. Ces arguments sont les trois invariants du tenseur $\underline{\underline{C}}$.

Pour caractériser l'anisotropie d'un matériau, il est important de caractériser son groupe d'isotropie qui résulte de la structure du matériau et/ou de l'histoire de la déformation qu'il a subie ([SID82]; [OGD84]). L'équation (3.25) est alors satisfaite pour les rotations de la configuration de référence autour des directions privilégiées. La fonction W n'est donc pas isotrope et les théorèmes de représentations ne sont plus applicables. Néanmoins, on peut se ramener à une fonction isotrope en utilisant les tenseurs de structure.

En effet, Boehler ([BOE78]) a établi que toute fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle d'arguments de vecteurs ou de tenseurs relatif à toute anisotropie, peut être exprimée par une fonction isotrope de ces arguments auxquels s'ajoutent les tenseurs de structure.

Ceci signifie que le potentiel W d'un matériau anisotrope peut être représenté par une fonction isotrope de son argument le tenseur $\underline{\underline{C}}$ auquel s'ajoutent des tenseurs de structure. Spencer ([SPE84]) a établi la formulation d'un milieu continu hyperélastique anisotrope basée

sur les tenseurs de structure. Ainsi dans le cas d'un matériau isotrope transverse, ayant une direction d'anisotropie caractérisée par le vecteur \underline{L}_1 , l'équation (3.25) devient :

$$W(\underline{C}) = \widetilde{W}(\underline{C}, \underline{L}_{11})$$

Où \widetilde{W} est une fonction scalaire isotrope de \underline{C} et de \underline{L}_{11} , donc :

$$\widetilde{W}(\underline{C}, \underline{L}_{11}) = \widetilde{W}(\underline{Q} \cdot \underline{C} \cdot \underline{Q}^T, \underline{Q} \cdot \underline{L}_{11} \cdot \underline{Q}^T) \quad \forall \underline{Q} \quad (3.26)$$

Avec \underline{L}_{11} un tenseur de structure construit sur la direction \underline{L}_1 par : $\underline{L}_{11} = \underline{L}_1 \otimes \underline{L}_1$

La fonction isotrope W est représentée, en vertu du théorème de représentation, par la fonction d'arguments scalaires suivante :

$$W(\underline{C}) = \overline{W}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (3.27)$$

Où I_1, I_2, I_3 sont les invariants de \underline{C} , ils caractérisent la déformation isotrope, I_4 et I_5 , introduits par Ericksen et Rivlin ([ERI54]), sont les invariants mixtes reliant le tenseur \underline{C} à la direction d'anisotropie, ils sont donc associés à la déformation anisotrope.

La loi de comportement (3.22) est par conséquent donnée par l'expression :

$$\underline{S} = 2 \sum_{\alpha=1}^5 \frac{\partial \overline{W}}{\partial I_\alpha} \frac{I_\alpha}{\partial \underline{C}} \quad (3.28)$$

Les invariants de \underline{C} sont soit les invariants principaux soit les invariants de base ([TRU92]) :

– Les invariants principaux :

$$I_1 = \text{Tr}(\underline{C}) \quad I_2 = \text{Tr}(\underline{\text{cof}} \underline{C}) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{Tr}(\underline{C}^2)) \quad I_3 = \det(\underline{C})$$

Où $\underline{\text{cof}} \underline{C} = \det \underline{C} \underline{C}^{-T}$ est le tenseur cofacteur de \underline{C} .

– Les invariants de base ou les moments

$$I_1 = \text{Tr}(\underline{C}) \quad I_2 = \text{Tr}(\underline{C}^2) \quad I_3 = \text{Tr}(\underline{C}^3)$$

Les invariants mixtes sont :

– Les invariants mixtes en fonction des invariants principaux de \underline{C} :

$$I_4 = \text{tr}(\underline{C} \cdot \underline{L}_{11}) ; \quad I_5 = \text{Tr}(\underline{\text{cof}} \underline{C} \cdot \underline{L}_{11})$$

– Les invariants mixtes en fonction des invariants de base de \underline{C} :

$$I_4 = \text{tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11}) ; \quad I_5 = \text{tr}(\underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{L}}_{11})$$

Nous indiquons ici que les théorèmes de représentation des fonctions isotropes permettent de représenter une fonction isotrope d'arguments tensoriels par une fonction d'arguments scalaires, donc objective et isotrope. Ces scalaires sont les invariants et les invariants mixtes des arguments tensoriels. Pour un nombre d'arguments tensoriels, on connaît la liste des différents invariants qui interviennent dans la représentation d'une fonction scalaire. Une synthèse de ces résultats est présente dans ([SPE70] ; [BOE78] ; [TRU92]).

3.3 Les potentiels élastiques

La formulation d'une loi de comportement satisfaisante en hyperélasticité repose sur la proposition d'un potentiel élastique W judicieux. Deux approches existent pour définir les potentiels : l'approche physique basée sur la théorie statistique et l'approche phénoménologique basée sur les observations expérimentales. Alors que la première approche consiste à rechercher une explication physique des phénomènes observés à partir d'hypothèses sur la structure moléculaire du matériau, sur la loi statistique de répartition des atomes, etc, la seconde approche propose une expression mathématique du potentiel en se référant aux phénomènes observés lors d'essais expérimentaux. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux potentiels construits dans le cadre de l'approche phénoménologique.

- *Un petit historique*

Ces dernières décennies, de grands efforts ont été déployés pour développer des théories sur les lois constitutives des matériaux hyperélastiques isotropes. A ce titre, sont citées les contributions de Rivlin, Spencer, Ogden, etc. ([RIV51] ; [RIV56] ; [SPE70] ; [MAR83] ; [OGD84] ; [TRU92] ; [ARR93]). Ces modèles hyperélastiques ont été principalement utilisés pour modéliser les élastomères. Ils ont été implémentés avec succès dans différents codes de calculs industriels. Cependant, l'investigation des lois constitutives pour les matériaux hyperélastiques fortement anisotropes est loin d'être accomplie. Elle intéresse de plus en plus les chercheurs en raison de la très grande variété de ces matériaux, très présents dans différentes applications industrielles et dans nombre de biomatériaux. Spencer ([SPE84]) a développé une théorie hyperélastique continue pour les matériaux anisotropes. Dans sa formulation, une description globale du comportement anisotrope à l'échelle macroscopique est fournie. Elle se base sur l'existence d'un potentiel élastique, qui est une fonction d'un tenseur de déformation et des tenseurs de structure (§ 3.2.2.2). Cette approche a largement été utilisée par différents auteurs, principalement dans les domaines de la mécanique pour modéliser les composites fibreux et la biomécanique pour modéliser les ligaments, les tendons, les tissus veineux et cardiaques, etc. On peut citer les travaux de Hirokawa et Tsuruno ([HIR00]) et Weiss ([WEI94] ; [WEI96]) pour la modélisation par éléments finis des ligaments et des tendons ; Humphrey ([HUM87] ; [HUM90]) et Holzapfel ([HOL96] ;

[HOL00] et [HOL01]) pour modéliser les tissus cardiaques et les tissus veineux ; Klisch et Lotz ([KLI99]), pour étudier les anneaux fibreux ; Reese ([REE01]) pour étudier les membranes pneumatiques renforcées par des fibres, etc. Différentes formes du potentiel ont été proposées dont la fonction exponentielle de Weiss ([WEI96]) pour les matériaux isotropes transverses et qui a été généralisée pour les matériaux à deux directions d'anisotropie ([LIM01] ; [MIL04]). Très récemment, une variété de potentiels anisotropes a été proposée, elle repose sur des critères purement mathématiques, développés quelques décennies plus tôt ([MOR52] ; [Ball77] ; [MAR83]), mais fortement exploités depuis une dizaine d'années en vue de construire les potentiels hyperélastiques. Il s'agit notamment des conditions de polyconvexité et de coercivité (appelée aussi condition de croissance), elles ont la propriété d'être suffisantes pour assurer l'existence du minimum local ou global de l'énergie de déformation. Ces conditions sont globalement assurées par le choix des invariants dont une liste très exhaustive a été établie par Hartmann et Neff ([HAR03] ; [SCH03]). Basés sur ces critères, divers potentiels ont été proposés pour modéliser les matériaux isotropes transverses ([HAR03] et [SCH03]), orthotropes ([ITS04]) et anisotropes ([SCH05], [BAL06]). Par ailleurs, mentionnons que les potentiels de Ogden, Mooney-Rivlin et le Néo-Hookéen (§ 3.3.1) remplissent bien ces critères de polyconvexité ([HAR03]).

- ***Restriction sur le potentiel***

La proposition d'un potentiel élastique est guidée par des restrictions ([BAL77] ; [OGD84] ; [CIA88] ; [TRU92] ; etc.), qui assurent au matériau considéré un comportement physique acceptable au moins dans un domaine expérimental bien défini. Le potentiel élastique qui, par définition, est une fonction scalaire d'un tenseur de déformation, le tenseur $\underline{\underline{C}}$ par exemple, doit essentiellement :

- Obéir au principe d'indifférence matérielle qui assure l'objectivité des équations constitutives ([SID82] ; [GAR07]).
- Respecter des symétries matérielles afin de reproduire le comportement anisotrope des matériaux considérés, comme c'est le cas des renforts tissés ([SID82] ; [GAR07]).
- Respecter la condition $W(\underline{\underline{1}}) = 0$ qui assure que l'énergie interne est nulle pour toute transformation rigide à partir d'un état naturel libre de toutes contraintes ($\underline{\underline{1}}$ est le tenseur identité)
- $W(\underline{\underline{C}}) \geq 0$ qui assure que l'énergie de déformation augmente avec la déformation.

3.3.1 Les modèles constitutifs en hyperélasticité isotrope

Plusieurs expressions du potentiel ont été proposées afin de modéliser un milieu hyperélastique isotrope. Nous distinguons entre celles formulées en fonctions des élongations, et celles exprimées en fonction des invariants des tenseurs de déformation. De nombreux articles et ouvrages ([MAR83] ; [OGD84] ; [BON97]; [WEI00]) présentent les potentiels

élastiques couramment utilisés. Il ne semble pas utile de dresser encore ici cette liste. Seuls les potentiels de Mooney-Rivlin et Ogden en raison de leur emploi très courant, sont présentés.

- **Modèle de Mooney-Rivlin**

Le modèle de Mooney-Rivlin ([MOO40] ; [RIV56]) a été développé pour modéliser les matériaux incompressibles caoutchouteux. Il est exprimé en fonction des invariants du tenseur de déformation de Cauchy Green droit (§ 3.2.2.2). Il a deux paramètres. Sa forme est :

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (3.29)$$

De nombreux modèles sont fondés sur cette approche, avec des ordres supérieurs ce qui permet de faire évoluer le nombre de paramètres matériau. Toutefois, il a été prouvé que le comportement d'une telle loi n'est pas stable suivant l'ordre choisi, ce qui rend le choix de celui-ci difficile ([HEU95]).

Parmi ces potentiels, nous citons le modèle de Rivlin et Saunders ([RIV51]), toujours pour les matériaux incompressibles :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^m C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (3.30)$$

Plus tard celui-ci a été généralisé aux matériaux compressibles, c'est le modèle de Ogden et Barthold ([OGD84]) dont l'expression est :

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{i,j,k=0}^m C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 1)^k \quad (3.31)$$

C_{ijk} sont les constantes matériau, m est un nombre pouvant prendre des valeurs infinies. Cette expression permet de retrouver le potentiel de Mooney-Rivlin (3.29) pour $m = 1$ et $k = 0$ et le potentiel Néo-Hookéen (pour $i = 1$; $j = 0$ et $k = 0$) dont l'équation est :

$$W(\underline{\underline{C}}) = C_{100} (I_1 - 3)$$

Le modèle Néo-Hookéen a été proposé par Treloar ([TRE44]) sur la base de l'approche statistique, dans laquelle est admise l'origine quasi entropique de l'élasticité caoutchoutique. La constante $C_{100} = NkT / 2$, où N est la densité de chaînes molécules, k est la constante de Boltzmann et T la température. Le domaine de validité pour le néo-Hookéen se limite aux déformations "moyennes" (élongation inférieure à 1.5) mais il représente une bonne approximation pour modéliser le comportement hyperélastique des élastomères incompressibles pour de grandes élongations (jusqu'à 7.5). Ce modèle a servi à d'autres auteurs pour valider leurs modèles à l'instar du modèle statistique d'Arruda et Boyce ([ARR93]) et le modèle d'Ogden ([OGD72]).

Le modèle de Mooney-Rivlin est encore très employé dans de nombreux codes de calculs par éléments finis comme Abaqus, Ansys, Samcef, en raison de son nombre réduit de paramètre et de sa simplicité, cependant, son domaine de validité se limite à 100% de déformation en traction et il est surtout applicable aux matériaux incompressibles.

- **Potentiel d'Ogden**

Le modèle d'Ogden ([OGD72]) a été développé pour modéliser les élastomères. Il est exprimé en fonction des élongations, le potentiel correspondant consiste en une combinaison linéaire de puissances des élongations principales, pour les matériaux incompressibles :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_p^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} [\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3]$$

Les constantes α_p et μ_p sont les paramètres matériaux. λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres des tenseurs d'élongations principales. Les puissances mises en jeu dans le potentiel d'Ogden sont réelles ce qui lui confère un intérêt particulier.

Ce potentiel a été généralisé aux matériaux compressibles, c'est le modèle compressible de Ogden ([OGD84]) dont l'expression est :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_p^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} [\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3] + g(J)$$

$g(J)$ est le terme prenant en compte les changements de volume.

Bien que le choix des paramètres ne soit pas trivial, Ogden obtient de bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux même pour des élongations très importantes, de l'ordre de 7,5 en utilisant seulement 6 paramètres. Comme pour le précédent potentiel, un nombre important de paramètres peut entraîner des instabilités.

3.3.2 Modèles en hyperélasticité anisotrope

- **Le modèle de Weiss**

Ce potentiel a été formulé par Weiss ([WEI94] ; [WEI96]) pour modéliser les matériaux isotropes transverses. C'est une extension du modèle de Mooney-Rivlin pour lequel une fonction exponentielle des invariants mixtes a été introduite afin de modéliser le comportement des fibres. Celui-ci a été utilisé dans le domaine de la biomécanique pour modéliser des tissus biologiques souples.

$$W = W(I_1, I_2, I_4) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) + C_3 \left(e^{(I_4 - 1)} - I_4 \right) \quad (3.32)$$

Ce modèle a été extrapolé par Holzapfel ([HOL01]) pour modéliser le comportement d'un matériau orthotrope : les parois artérielles. Il a été exploité par Milani ([MIL04]) pour modéliser un renfort enrobé de matrice. Le potentiel proposé est la somme de trois termes. Le premier terme est un potentiel modélisant les déformations de la matrice seule. Il correspond à la première phase de la réponse dans laquelle les fibres ne sont pas actives. Le second terme, dû à l'interaction fibre-matrice, correspond à la phase intermédiaire de la réponse dans laquelle la matrice et les fibres interagissent. Le dernier terme est le potentiel qui reproduit le durcissement dû aux déformations des fibres vers la fin du chargement. Le potentiel reprenant les tensions dans les deux réseaux de fibres est représenté par des fonctions exponentielles :

$$W = W|_{\text{matrice}} + \frac{m}{2}(I_1 - 3)(I_4 + I_6 - 2)|_{\text{interaction}} + \frac{k_1}{2k_2}\left(e^{(I_4-1)^2} - 1\right) + \frac{k_1}{2k_2}\left(e^{(I_6-1)^2} - 1\right)|_{\text{fibres}} \quad (3.33)$$

C_1, C_2, C_3, m, k_1 et k_2 sont des constantes du modèle à déterminer.

I_1, I_2 , sont les invariants principaux, I_4 et I_6 sont les invariants mixtes construits sur les deux directions d'anisotropies (§ 3.2.2.2).

$W|_{\text{matrice}}$: représente un potentiel isotrope, dans la majorité des cas le potentiel de Mooney-Rivlin ou le potentiel d'Ogden est considéré (§ 3.3.1).

- **Le modèle de Itskov et Aksel**

Itskov et Aksel ([ITS04]) ont proposé une forme de l'énergie de déformation modélisant les milieux orthotropes et isotropes transverses. Elle est représentée par une série puissance comparable à celle des milieux isotropes, mais avec une forme particulière des invariants. Cette énergie est polyconvexe et satisfait les conditions de contraintes nulles à l'état naturel :

$$W = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^s \mu_r \left[\frac{1}{\alpha_r} \left(\tilde{I}_r^{\alpha_r} - 1 \right) + \frac{1}{\beta_r} \left(\tilde{J}_r^{\beta_r} - 1 \right) + \frac{1}{\gamma_r} \left(\text{III}^{-\gamma_r} - 1 \right) \right] \quad (3.34)$$

Où μ_r, α_r, β_r et γ_r ($r = 1, 2, \dots, s$) sont des constantes matériau à déterminer grâce à des données expérimentales, III représente le déterminant du tenseur de Cauchy Green droit $\underline{\underline{C}}$ et \tilde{I}_r et \tilde{J}_r sont les invariants généralisés obtenus par combinaison linéaire des invariants du tenseur $\underline{\underline{C}}$, ils sont donnés par :

$$\tilde{I}_r = \sum_i^n w_i^{(r)} I_i \quad \text{et} \quad \tilde{J}_r = \sum_i^n w_i^{(r)} J_i \quad r = 1, 2, \dots$$

Avec : $I_i = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii})$ et $J_i = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{Cof C}}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii})$ où $\underline{\underline{\text{Cof C}}} = \det \underline{\underline{C}} \underline{\underline{C}}^{-T}$

Et $w_i^{(r)}$ sont des coefficients de pondération des directions matérielles principales avec :

$$\sum_i^n w_i^{(r)} = 1 \quad r = 1, 2, \dots$$

Dans le cas particulier d'un matériau isotrope ($w_i^{(r)} = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$ et $r = 1, 2, \dots, s$) ce modèle se réduit au matériau de Mooney-Rivlin généralisé.

- **Le modèle de Hartmann et Neff**

De récentes recherches ([HAR03] ; [SCH03]) sont orientées sur la proposition de potentiels élastiques basés sur des critères mathématiques assurant l'existence d'un minimum de l'énergie de déformation. Ces auteurs ont focalisé leurs travaux sur la formulation des matériaux isotropes transverses en déformations finies. Ces potentiels sont la somme de fonctions polyconvexes objectives intégrant des expressions semblables au développement polynomial proposé par Rivlin et Saunders ([RIV51]) :

$$W = \sum_{j=1}^n \widehat{W}_j(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{L}})$$

Où \widehat{W}_j est une fonction élémentaire scalaire polyconvexe objective. Une liste très élargie de ces fonctions élémentaires a été établie par Schröder et Neff (SCH03)].

Basé sur ces fonctions élémentaires, un potentiel a été proposé par Schröder, Neff et Balzani ([SCH05]) pour caractériser un composite anisotrope (fibres-matrice). Le modèle correspondant est la superposition de différents modèles isotropes transverses, sa forme est :

$$W_{\text{POLY}} = W^{\text{iso}} + W^{\text{fibres}} \quad \text{avec} \quad W^{\text{fibres}} = \sum_{a=1}^n W^{\text{fi}(a)}$$

Avec

$$\begin{aligned} W^{\text{iso}} &= \alpha_1 \frac{I_1}{I_3^{1/2}} + \alpha_2 \frac{I_2}{I_3^{1/2}} - \alpha_3 \ln(I_3) + \alpha_4 \left(I_3^{\alpha_5} + \frac{1}{I_3^{\alpha_5}} - 2 \right) \\ W^{\text{fi}(a)} &= \alpha_6 \left(I_5^{(a)} - I_1 I_4 + I_2 \right) + \alpha_7 \frac{J_4^{(a)\alpha_8}}{I_3^{1/2}} + \alpha_9 \left(I_1 I_4^{(a)} - I_5^{(a)} \right) + \alpha_9 I_4^{(a)\alpha_{11}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Où les α_i sont des constantes matériau à déterminer.

3.4 Conclusion

La modélisation d'un milieu continu hyperélastique passe par la proposition d'un potentiel élastique W , qui est une fonction du tenseur de déformation choisi pour la mesure de la déformation à partir de l'état naturel. Un tenseur de déformation lagrangien, assure l'écriture d'une loi de comportement objective, l'introduction des tenseurs de structures comme arguments supplémentaires dans les potentiels caractérisant un milieu anisotrope, conduit à un potentiel isotrope au sens mathématique, et ainsi la possibilité d'utiliser les théorèmes de représentation.

Il existe dans la littérature plusieurs formes du potentiel, celles exprimées en fonction des invariants et celles en fonction des élongations. Si les modèles hyperélastiques pour les milieux isotropes sont maîtrisés, ceux pour les matériaux hyperélastiques anisotropes suscitent encore l'intérêt des chercheurs et ceci en raison de la très grande variété des matériaux anisotropes, très présents dans les domaines de la mécanique et de la biomécanique.

Les modèles hyperélastiques anisotropes proposés ont été majoritairement formulés pour modéliser les milieux isotropes transverses et orthotropes. Les modèles hyperélastiques pour les matériaux anisotropes sont rares, de plus ils ont principalement été formulés pour l'analyse des composites fibres-matrices. Le comportement de ces composites est dû au comportement des fibres, de la résine et également à l'interaction entre les deux constituants. Le comportement des renforts secs est différent du comportement des composites fibres-matrice, car les modes prépondérants de déformations ne sont pas les mêmes. Par conséquent, les potentiels hyperélastiques anisotropes proposés ne s'adaptent pas bien aux cas des renforts secs, pour lesquels les modes prépondérants de déformation sont les variations angulaires des directions chaîne et trame ainsi que les extensions de fibres. C'est pourquoi un modèle de comportement simplifié et spécifique est proposé pour modéliser les renforts de textiles techniques secs. Il s'appuie sur le comportement particulier de ceux-ci lié à leur structure composée de fibres dans deux directions chaîne et trame.

Chapitre 4 : Modèles hyperélastiques pour les renforts tissés

4.1 Introduction

La caractérisation du comportement mécanique des renforts tissés est nécessaire dès lors que l'on utilise des approches mécaniques par éléments finis. Celle-ci est difficile en raison des phénomènes complexes intervenant à différentes échelles d'observation. Pour simuler avec un effort numérique raisonnable l'opération de formage, les modèles macroscopiques sont intéressants, mais ils nécessitent la mise en place de modèles suffisamment simples parvenant à prendre en compte les spécificités du comportement des renforts textiles.

Dans cette optique, un modèle de comportement hyperélastique est proposé dans le but de simuler le comportement des renforts de composites textiles ([AIM07]). Ce modèle continu a pour objectif la simulation à l'échelle macroscopique des opérations de mise en forme. Il est basé sur la proposition d'un potentiel énergétique simple obéissant au principe d'indifférence matérielle qui assure l'objectivité des équations constitutives, respectant les groupes de symétries matérielles qui permettent de reproduire le comportement anisotrope des renforts tissés ([SPE84]) et enfin reproduisant les non linéarités connues des renforts tissés. Ce modèle hyperélastique anisotrope représente une alternative aux approches continues hypoélastiques existantes ([DON01] ; [XUE03], [HAG05]).

4.2 Modèles de comportement des renforts tissés

4.2.1 Mode de déformation des renforts tissés

Dans le chapitre 1, le comportement des renforts tissés a été décrit. Il ressort clairement que les modes de déformation des renforts tissés sont très spécifiques en raison des sections très petites des fibres et des mouvements possibles entre les mèches et entre les fibres les constituants. Les modes de déformations caractéristiques des renforts tissés sont la déformation de tension dans la direction des mèches et la déformation de cisaillement plan. Les déformations de tension sont très faibles mais correspondent à de grandes rigidités et éventuellement à des énergies de déformation élevées. Les déformations de cisaillement

peuvent être très importantes, elles correspondent à de grandes rotations relatives des mèches chaîne et trame et elles sont caractérisées par de faibles rigidités et énergies de déformation. Le comportement à la traction est non linéaire en raison de la structure tissée à laquelle s'ajoute l'écrasement transverse des mèches. Le comportement en cisaillement est également non linéaire en raison de l'écrasement latéral des mèches survenant lorsque l'angle entre les mèches atteint un angle limite.

4.2.2 Le renfort tissé : milieu continu anisotrope

Les renforts tissés sont des structures constituées par deux réseaux de mèches tissées dans deux directions selon une certaine armure. Ces deux réseaux de mèches ne sont pas bloqués comme dans les composites, et sont donc susceptibles de se déplacer l'un par rapport à l'autre. Cette structure n'est par conséquent pas continue, mais est postulée comme telle à l'échelle macroscopique car le tissage réduit considérablement le glissement entre les mèches, et ainsi deux points voisins avant déformations le restent après déformation ([BOI07a]). La géométrie du tissage et l'interaction entre les deux réseaux de mèches permettent de modéliser le comportement des renforts tissés par un matériau continu ayant des propriétés macroscopiques fortement anisotropes.

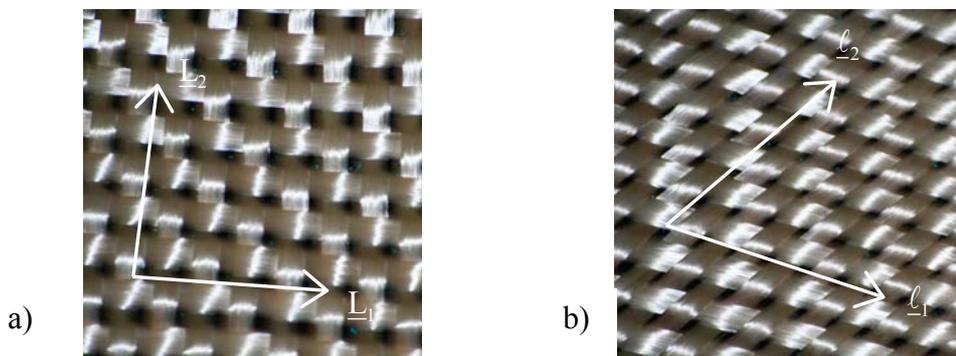


Figure 4. 1 : Renfort tissé (taffetas de verre)
 \underline{L}_2 a) avant déformation, b) après déformation

Les deux réseaux de mèches sont caractérisés respectivement par les vecteurs unitaires \underline{L}_1 et \underline{L}_2 dans la configuration de référence C^0 . Ces deux vecteurs qui définissent localement les deux directions privilégiées, définissent une base, appelés l'orientation initiale, à partir de laquelle les directions d'anisotropie du matériau varient. Dans le cas particulier des renforts tissés étudiés, ces deux directions d'anisotropies sont orthogonales dans la configuration de référence.

Pour écrire une loi de comportement objective des renforts tissés prenant en compte le caractère anisotrope du milieu continu sans avoir à introduire les vecteurs traduisant l'anisotropie locale des mèches qui varie en fonction du temps et de la position dans le milieu

continu, la réponse est formulée en fonction de grandeurs associées à la configuration de référence ([SID82]). Le comportement élastique en grande transformation est alors souvent formulé en fonction du tenseur de déformation de Cauchy Green droit $\underline{\underline{C}}$ et du second tenseur de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$.

4.3 Loi constitutive hyperélastique pour les renforts tissés

Dans le cadre du comportement hyperélastique, l'existence d'une énergie de déformation W est postulée ([OGD84] ; [TRU92] ; [WEI00]). Cette énergie est une fonction scalaire du tenseur de déformation. Elle doit obéir au principe d'indifférence matérielle qui assure l'objectivité des équations constitutives. En effet, celles-ci doivent être les mêmes pour tout observateur. L'énergie doit également respecter des symétries matérielles afin de reproduire le comportement anisotrope des renforts tissés (voir § 3.2.2).

Donc
$$W(\underline{\underline{C}}) = W(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T) \quad (4.1)$$

Pour toute rotation $\underline{\underline{Q}}$ autour des axes des symétries matérielles.

Cette condition est satisfaite si et seulement si le potentiel est exprimé par une des expressions suivantes :

- L'énergie de déformation est une fonction scalaire des composantes du tenseur $\underline{\underline{C}}$ dans la base formée par les directions matérielles du renfort $\underline{\underline{L}}_1$ et $\underline{\underline{L}}_2$ ([SPE70] ; [OGD84]).
- L'énergie potentielle est une fonction scalaire du tenseur de déformation auquel viennent s'ajouter les tenseurs de structures (§ 3.2.2.2).

Dans cette optique et afin de prendre en considération l'anisotropie dans le modèle hyperélastique proposé, deux expressions du potentiel sont proposées. Ces expressions sont exprimées en fonction des invariants et ceci en vertu du théorème de représentation (§ 3.2.2.2). Les invariants considérés sont appelés dans ce qui suit les invariants de type 1 et de type 2. Ces deux expressions du potentiel donnent naissance à deux expressions de la même loi de comportement hyperélastique pour les renforts tissés. Les caractéristiques du comportement des renforts tissés imposent un choix judicieux des invariants. Nous illustrerons alors une loi de comportement pour les tissés, elle est exprimée en fonction d'un jeu d'invariants appelé les invariants de type 3. Elle s'avèrera non adaptée au comportement des renforts tissés.

Les différentes expressions générales du potentiel ainsi que les invariants mis en jeu sont :

- **Potentiel fonction des invariants de type 1**

Deux tenseurs de second ordre $\underline{\underline{L}}_{11}$ et $\underline{\underline{L}}_{22}$ sont introduits dans l'expression de l'énergie de déformation W dans le but de prendre en considération la dépendance directionnelle du comportement des renforts tissés des deux directions d'anisotropie. La fonction ainsi obtenue est une fonction isotrope, au sens mathématique, L'équation (4.1) s'écrira par conséquent :

$$W(\underline{\underline{C}}) = \widetilde{W}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{L}}_{11}, \underline{\underline{L}}_{22}) = \widetilde{W}(Q \cdot \underline{\underline{C}} \cdot Q^T, Q \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot Q^T, Q \cdot \underline{\underline{L}}_{22} \cdot Q^T) \quad (4.2)$$

Avec
$$\underline{\underline{L}}_{ii} = \underline{L}_i \otimes \underline{L}_i \quad (\text{sans sommation}), \quad i=1,2 \quad (4.3)$$

Ces tenseurs de structure ont été introduits par ([BOE78]) (§ 3.2.2.2) pour introduire le comportement anisotrope dans le modèle hyperélastique, sa principale propriété est :

$$\sum_{i=1}^2 \underline{\underline{L}}_{ii} = \underline{\underline{1}}, \quad \text{où } \underline{\underline{1}} \text{ est le tenseur identité.} \quad (4.4)$$

Pour compléter le produit tensoriel des deux vecteurs, nous définissons également :

$$\underline{\underline{L}}_{ij} = \underline{L}_i \otimes \underline{L}_j \quad i \neq j=1,2 \quad (4.5)$$

La fonction scalaire d'arguments $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{L}}_{11}$ et $\underline{\underline{L}}_{22}$ donnée par l'équation (4.2) est une fonction isotrope que le théorème de représentation des fonctions isotropes permet d'exprimer en fonction d'un certain nombre d'invariants ([SID82] ; [TRU92]). Des invariants ayant un sens physique sont considérés. Ils sont pris parmi une liste d'invariants mathématiques. Leur choix est motivé par les principaux modes de déformation des renforts tissés à savoir les tensions dans les mèches et le cisaillement chaîne-trame. Le potentiel sera :

$$\widetilde{W}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{L}}_{11}, \underline{\underline{L}}_{22}) = \overline{W}(I_1, I_2, I_{12}) \quad (4.6)$$

Où I_1 et I_2 sont des invariants de tension et I_{12} est l'invariant de cisaillement, ils sont définis dans le tableau 4.1.

- **Potentiel fonction des invariants de type 2**

Dans cette approche alternative les invariants sont : les élongations dans les deux directions matérielles du renfort tissé et le cosinus de l'angle non orienté entre ces deux directions matérielles, soit :

$$W = \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \cos \theta) \quad (4.7)$$

Où λ_1, λ_2 sont les élongations dans les directions d'anisotropie et θ l'angle entre les mèches.

- **Potentiel fonction des invariants de type 3**

L'expression du potentiel en fonction des invariants dits de type 3 (voir tableau 4.1) est :

$$\widetilde{W}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{L}}_{11}, \underline{\underline{L}}_{22}) = \overline{W}(I_1, I_2, \bar{I}_{12}) \quad (4.8)$$

Où I_1 et I_2 sont des invariants de tension et \bar{I}_{12} est l'invariant de cisaillement.

Les invariants inclus dans les trois potentiels présentés sont résumés dans le tableau 4.1, leur interprétation géométrique ainsi que les lois de comportement obtenues sont présentées dans les paragraphes (§ 4.3.1, § 4.3.2 et § 4.5). Donc dans ce qui suit, les appellations et les notations suivantes des invariants sont adoptées.

Tableau 4.1 : Différents jeux d'invariants

Invariants	tensions	cisaillement
Type 1	$I_i = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) \quad (i = 1, 2)$	$I_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22})$
Type 2	λ_i (élongation) $(i = 1, 2)$	$\cos \theta$ (θ est l'angle entre les mèches)
Type 3	$I_i = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) \quad (i = 1, 2)$	$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22})$

4.3.1 Loi de comportement hyperélastique des renforts tissés en fonction des invariants de type 1

4.3.1.1 Forme générale du potentiel en fonction des invariants de type 1

L'expression du potentiel est :

$$\widetilde{W}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{L}}_{11}, \underline{\underline{L}}_{22}) = \overline{W}(I_1, I_2, I_{12}) \quad (4.9)$$

\overline{W} est une fonction énergie de déformation objective, elle constitue l'équation de base à partir de laquelle dérivent les tenseurs des contraintes et d'élasticité. Les invariants de type 1 : I_1 , I_2 et I_{12} utilisés sont présentés dans le paragraphe suivant.

4.3.1.1.1 Les invariants de type 1

Les arguments de l'équation (4.9) sont deux invariants de tension I_1 et I_2 et un invariant de cisaillement I_{12} . Le choix de ces derniers a été fait afin de modéliser convenablement le

comportement des renforts tissés, caractérisé par deux modes prépondérants, la traction des mèches et le cisaillement plan. A ce titre, ces invariants possèdent une interprétation géométrique très claire.

- **Invariants de tension**

Les invariants de tension utilisés sont donnés par :

$$I_i = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) \quad (\text{sans sommation ; } i = 1, 2) \quad (4.10)$$

Ce sont des invariants mathématiques obtenus à partir du théorème de représentation des fonctions isotropes.

- **Invariant de cisaillement**

L'invariant de cisaillement utilisé a pour expression :

$$I_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) \quad (4.11)$$

L'expression de l'invariant I_{12} dérive en partie de l'invariant (mathématique) $\text{Tr}(\underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{L}}_{ii})$ (§4.2.2.2) ([SID82] ; [MAR83] ; [SPE84]). En effet, d'après l'équation (4.4) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) &= \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{L}}_{ii} + \underline{\underline{L}}_{jj}) \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) \quad (i \neq j ; i, j = 1, 2) \\ &= \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) + \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{jj} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) \quad (i \neq j ; i, j = 1, 2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Tr}(\underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) + \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{jj} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) \quad i \neq j = 1, 2 \text{ (sans sommation)}$$

Dans le but de simplifier l'expression de l'invariant I_{12} , l'expression de l'invariant de type 3 est introduite soit :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) \quad (4.12)$$

Ainsi, l'invariant de cisaillement se réécrit donc :

$$I_{12} = \frac{\bar{I}_{12}}{I_1 I_2} \quad (4.13)$$

4.3.1.1.2 Interprétation géométrique des invariants

- **Invariants de tension**

Ils représentent le carré de l'élongation dans la direction d'anisotropie i .

En effet :

$$I_i = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii}) = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{L}}_{ii}$$

Or $\underline{\underline{L}}_{ii} = \underline{L}_i \otimes \underline{L}_i$ d'après l'équation (4.3), il s'en suit que :

$$I_i = \underline{L}_i \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_i = C_{ii} = \lambda_i^2 \text{ (sans sommation)} \quad (4.14)$$

Où λ_i ($i = 1, 2$) désigne l'élongation associée à la direction matérielle \underline{L}_i ($i = 1, 2$). Ces deux invariants sont directement reliés aux données expérimentales obtenues sur des essais de traction sur des renforts tissés.

- **Invariant de cisaillement**

Pour illustrer l'interprétation géométrique de I_{12} , commençons par rappeler les expressions du tenseur $\underline{\underline{C}}$ et des tenseurs de structure $\underline{\underline{L}}_{ii}$ dans la base de l'orientation initiale des mèches, soit:

$$\underline{\underline{C}} = C_{ij} \underline{L}_i \otimes \underline{L}_j \quad \text{et} \quad \underline{\underline{L}}_{ii} = \underline{L}_i \otimes \underline{L}_i \quad i = 1, 2 \quad (4.15)$$

L'invariant de cisaillement est :

$$I_{12} = \frac{\bar{I}_{12}}{I_1 I_2}$$

Nous avons :

$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} : \underline{\underline{L}}_{22} \cdot \underline{\underline{C}} = [\underline{\underline{C}} \cdot (\underline{L}_1 \otimes \underline{L}_1)] : [(\underline{L}_2 \otimes \underline{L}_2) \cdot \underline{\underline{C}}]$ en raison de la propriété suivante $\text{Tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^T) = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}$ et l'expression (4.5).

Les propriétés tensorielles suivantes $\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{c}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}) \otimes \underline{c}$ et $(\underline{b} \otimes \underline{c}) \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{b} \otimes (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{c})$ permettent de réécrire l'équation précédente comme ceci :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) = [(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_1) \otimes \underline{L}_1] : [\underline{L}_2 \otimes (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_2)]$$

mais $(\underline{a} \otimes \underline{b}) : (\underline{c} \otimes \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d})$

Donc $\text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) = [(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_1) \cdot \underline{L}_2] [\underline{L}_1 \cdot (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_2)] = (\underline{L}_2 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_1)(\underline{L}_1 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_2)$

et $\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) = (\underline{L}_1 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_2)(\underline{L}_2 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{L}_1) = C_{12} C_{21}$ (4.16)

Ainsi d'après l'équation (4.13),
$$I_{12} = \frac{C_{12}^2}{C_{11}C_{22}} = \cos^2 \theta \quad (4.17)$$

Avec $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ l'angle entre les deux réseaux de mèches et γ l'angle de glissement des deux réseaux de mèches (figure 4.2).

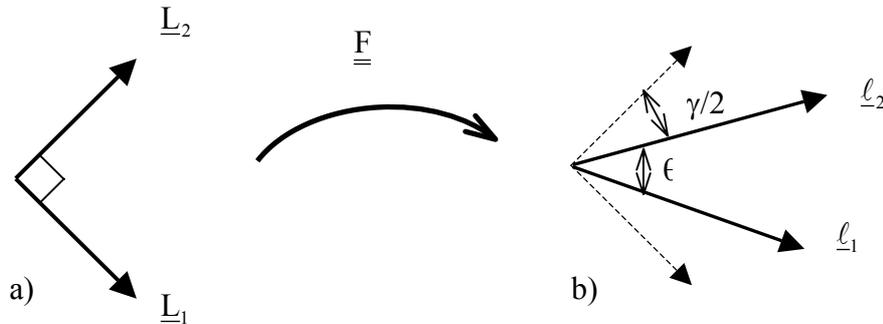


Figure 4. 2 : Transport des directions matérielles
a) Orientation initiale des mèches et b) Orientation finale des mèches

Ainsi I_{12} représente le carré du cosinus de l'angle entre les directions matérielles \underline{l}_1 et \underline{l}_2 dans la configuration actuelle, i.e. les vecteurs \underline{L}_1 et \underline{L}_2 transportés par $\underline{\underline{F}}$ le tenseur gradient de la transformation.

4.3.1.2 Expression de la loi de comportement

Dans le cas d'un matériau hyperélastique, le second tenseur de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ dérive du potentiel W par la relation suivante ([TRU92] ; [WEI00]) (§ 3.2.2.1):

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (4.18)$$

Il est à noter que cette expression n'est valable que dans le cas des matériaux non dissipatifs, ce qui correspond à l'hypothèse du présent développement (§ 3.2.2), sinon ce ne sont plus des matériaux élastiques. Le potentiel W étant une fonction des invariants, $\underline{\underline{S}}$ s'obtient en combinant les équations (4.9) et (4.18) par:

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (4.19)$$

L'expression de $\underline{\underline{S}}$ nécessite ainsi la dérivée des invariants choisis I_1 , I_2 et I_{12} par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$.

4.3.1.2.1 Dérivées des invariants de type 1

- **Dérivée des invariants de tension**

Les dérivées des invariants de tension sont données par :

$$\frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ii})}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{L}}_{ii})}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{L}}_{ii} \quad (i = 1, 2) \quad (4.20)$$

En effet la dérivée de I_i par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$ est :

$$\frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{L}}_{ii})}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial (C_{pq} L_{pq}^{ii})}{\partial C_{kl}} \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l = \frac{\partial C_{pq}}{\partial C_{kl}} L_{pq}^{ii} \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l$$

Avec :

$$\frac{\partial C}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial C_{pq}}{\partial C_{kl}} \underline{\underline{L}}_p \otimes \underline{\underline{L}}_q \otimes \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l = \delta_{pk} \delta_{ql} \underline{\underline{L}}_p \otimes \underline{\underline{L}}_q \otimes \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l$$

On en déduit :

$$\frac{\partial C_{pq}}{\partial C_{kl}} = \delta_{pk} \delta_{ql} \quad (4.21)$$

Ainsi, $\frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}} = \delta_{pk} \delta_{ql} L_{pq}^{ii} \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l = L_{lk}^{ii} \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l = L_{lk}^{ii} \underline{\underline{L}}_k \otimes \underline{\underline{L}}_l$ car $\underline{\underline{L}}_{ii}$ est symétrique. D'où la dérivée exprimée par l'équation (4.20).

Il est à noter que pour des raisons de simplicité, la notation L_{pq}^{ii} a été introduite pour désigner la composante pq du tenseur de structure $\underline{\underline{L}}_{ii}$.

- **Dérivée de l'invariant de cisaillement**

La dérivée de l'invariant de cisaillement donné par l'équation (4.12), par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$ est :

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} = -\frac{I_2 \bar{I}_{12}}{(I_1 I_2)^2} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{I_1 \bar{I}_{12}}{(I_1 I_2)^2} \underline{\underline{L}}_{22} + \frac{1}{I_1 I_2} \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \quad (4.22)$$

En effet,

$$\frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial I_{12}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial I_{12}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial I_{12}}{\partial \bar{I}_{12}} \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (4.23)$$

Pour faciliter la dérivée de l'invariant \bar{I}_{12} , nous le ré-exprimons comme suit :

D'après l'équation (4.16) et la propriété suivante $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{b}} \otimes \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{c}}$, nous avons :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) = (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{L}}_2 \otimes \underline{\underline{L}}_1)(\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{L}}_1 \otimes \underline{\underline{L}}_2) = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{21}) \quad (4.24)$$

Donc :

$$\frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} (\text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{21})) = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{21}) \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) + \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{21}) \quad (4.25)$$

Or la généralisation de l'équation (4.20) engendre la dérivée suivante : $\frac{\partial \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{ij})}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{L}}_{ij}$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{21}) \underline{\underline{L}}_{12} + \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) \underline{\underline{L}}_{21}$$

Le tenseur $\underline{\underline{C}}$ étant symétrique donc d'après (4.16): $\text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{21})$

$$\text{Ainsi: } \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{12}) (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21})$$

$$\text{Autrement : } \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \bar{I}_{12}^{1/2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \quad (4.26)$$

En combinant les équations (4.23), (4.20) et (4.22), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= -\frac{I_2 \bar{I}_{12}}{(I_1 I_2)^2} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{I_1 \bar{I}_{12}}{(I_1 I_2)^2} \underline{\underline{L}}_{22} + \frac{1}{I_1 I_2} \bar{I}_{12}^{1/2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \\ \frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= -\frac{I_{12}}{I_1} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{I_{12}}{I_2} \underline{\underline{L}}_{22} + \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 I_2}} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Donc la dérivée du scalaire I_{12} par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$ engendre un tenseur d'ordre deux dont les composantes dans la base de l'orientation initiale sont données par l'équation (4.27).

4.3.1.2.2 Tenseur de contraintes

L'expression du second tenseur de Piola Kirchhoff est donnée par l'équation (4.19), elle est rappelée ici :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)$$

En remplaçant les dérivées (4.20) et (4.27) dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} \underline{\underline{L}}_{11} + 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} \underline{\underline{L}}_{22} + 2 \left[-\frac{I_{12}}{I_1} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{I_{12}}{I_2} \underline{\underline{L}}_{22} + \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 I_2}} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \right] \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}}$$

Laquelle après réarrangement des termes, donne l'expression suivante du second tenseur de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} - \frac{I_{12}}{I_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right] \underline{\underline{L}}_{11} + 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} - \frac{I_{12}}{I_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right] \underline{\underline{L}}_{22} + 2 \left[\sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 I_2}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right] (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \quad (4.28)$$

Les composantes de $\underline{\underline{S}}$ dans le repère initial des mèches sont notées :

$$\underline{\underline{S}} = S_{ij} \underline{\underline{L}}_i \otimes \underline{\underline{L}}_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.29)$$

Avec :

$$S_{11} = 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} - \frac{I_{12}}{I_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right) \quad (4.30)$$

$$S_{22} = 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} - \frac{I_{12}}{I_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right) \quad (4.31)$$

$$S_{12} = 2 \sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 I_2}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \quad (4.32)$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy est donné par (§ 3.2.1.2) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad (4.33)$$

En introduisant l'expression générale du tenseur $\underline{\underline{S}}$ donnée par l'équation (4.29) dans l'équation (4.33) précédente, nous obtenons le tenseur de Cauchy dans la base non orthogonale non normée :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} S^{ij} \underline{\underline{\ell}}_i \otimes \underline{\underline{\ell}}_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.34)$$

Notons que : $\underline{\underline{\ell}}_i = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{L}}_i \quad (i = 1, 2)$

Ainsi, nous avons : $\sigma^{ij} = \frac{1}{J} S^{ij} \quad (4.35)$

Donc les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff dans la base de l'orientation initiale sont égales aux composantes du tenseur de contraintes de Cauchy dans la base non orthogonale non normée obtenue par le transport par $\underline{\underline{F}}$ de l'orientation initiale (figure 4.2).

4.3.2 Loi constitutive hyperélastique des renforts tissés en fonction des invariants de type 2

4.3.2.1 Forme générale du potentiel en fonction des invariants de type 2

Dans cette approche alternative, nous rappelons que les invariants sont : les élongations dans les deux directions matérielles du renfort tissé et le cosinus de l'angle non orienté entre ces deux directions matérielles, soit :

$$W = \widehat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \cos \theta) \quad (4.36)$$

L'équation précédente est une fonction scalaire d'arguments scalaires. Le potentiel est par conséquent objectif et respecte les symétries matérielles du matériau considéré. Ces deux propriétés assurent l'objectivité de la loi de comportement qui dérivera de ce potentiel.

4.3.2.2 Expression de la loi de comportement

Le second tenseur de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ dérive du potentiel W par la relation (4.18) rappelée ici :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \overline{W}}{\partial \underline{\underline{C}}}$$

Comme dans le paragraphe précédent, l'expression précédente nécessite la dérivée des invariants par rapport aux invariants du tenseur de déformation de Cauchy Green droit $\underline{\underline{C}}$.

4.3.2.2.1 Dérivées des invariants de type 2

- Dérivées de λ_i

La dérivée de l'élongation λ_i par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$ est :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2\lambda_i} \underline{\underline{L}}_{ii} \quad (i = 1, 2) \quad (4.37)$$

En effet, d'après l'équation (4.20), nous avons :

$$\frac{\partial I_i}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{2\lambda_i \partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{L}}_{ii} \quad (i = 1, 2)$$

D'où le résultat de l'équation (4.37).

- **Dérivées de $\cos\theta$**

La dérivée de $\cos\theta$ par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$ est :

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) - \frac{\cos\theta}{2\lambda_1^2} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{\cos\theta}{2\lambda_2^2} \underline{\underline{L}}_{22} \quad (4.38)$$

En effet en substituant les équations (4.14) et (4.17) dans l'équation (4.27), nous avons:

$$\frac{\partial \cos^2\theta}{\partial \underline{\underline{C}}} = -\frac{\cos^2\theta}{\lambda_1^2} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{\cos^2\theta}{\lambda_2^2} \underline{\underline{L}}_{22} + \frac{\cos\theta}{\lambda_1\lambda_2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21})$$

Ainsi, la dérivée de $\cos\theta$ par rapport au tenseur $\underline{\underline{C}}$:

$$\frac{2\cos\theta \partial \cos\theta}{\partial \underline{\underline{C}}} = -\frac{1}{\lambda_1^2} \cos^2\theta \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{1}{\lambda_2^2} \cos^2\theta \underline{\underline{L}}_{22} + \frac{\cos\theta}{\lambda_1\lambda_2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21})$$

D'où l'équation (4.38) après simplification.

4.3.2.2.2 Tenseur des contraintes

Dans le cas particulier du potentiel donné par l'équation (4.36), le second tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff est donné en procédant à des dérivées partielles :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left(\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos\theta} \frac{\partial \cos\theta}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (4.39)$$

En remplaçant les équations (4.37) et (4.38) dans l'équation précédente, nous obtenons:

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1} \frac{1}{2\lambda_1} \underline{\underline{L}}_{11} + 2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} \frac{1}{2\lambda_2} \underline{\underline{L}}_{22} + 2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos\theta} \left[\frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) - \frac{\cos\theta}{2\lambda_1^2} \underline{\underline{L}}_{11} - \frac{\cos\theta}{2\lambda_2^2} \underline{\underline{L}}_{22} \right]$$

Et en simplifiant l'expression précédente, nous obtenons la loi de comportement de renforts tissés :

$$\underline{\underline{S}} = \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1} - \frac{\cos\theta}{\lambda_1^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos\theta} \right) \underline{\underline{L}}_{11} + \left(\frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} - \frac{\cos\theta}{\lambda_2^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos\theta} \right) \underline{\underline{L}}_{22} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos\theta} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21}) \quad (4.40)$$

Les composante du second tenseur de Piola Kirchhoff sont données dans l'orientation initiale (équation (4.29)) par :

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1} - \frac{\cos \theta}{\lambda_1^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad (4.41)$$

$$S_{22} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad (4.42)$$

Et

$$S_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad (4.43)$$

C'est le tenseur de contraintes lagrangien. Dans la configuration actuelle, le tenseur de contraintes de Cauchy est donné par l'équation (4.33) et sa projection dans l'orientation actuelle est donnée par (4.34).

4.4 Expression du potentiel

4.4.1 Représentation additive du potentiel

Compte tenu des modes de déformation prépondérants des renforts tissés, la réponse élastique est principalement due à la résistance des mèches à la traction dans les directions chaîne et trame et à la résistance du tissé aux variations angulaires chaîne-trame. Dans le cadre hyperélastique, le potentiel est supposé être la somme de trois énergies de déformation : les deux premiers termes représentent les énergies de déformation de tension dans les directions chaîne et trame et le troisième terme représente l'énergie de déformation de cisaillement plan. Ces fonctions ne sont pas couplées, elles sont basées sur deux hypothèses simplificatrices :

- a) Les tensions dans les mèches et le cisaillement plan sont indépendants.
- b) Les tensions dans les mèches sont découplées.

Ceci conduit donc à un potentiel somme de deux potentiels de tension et un potentiel de cisaillement.

Ces hypothèses importantes peuvent être discutées.

Hypothèse 1 :

Il a été montré expérimentalement lors d'essais biaxiaux que les tensions dans les mèches ne dépendaient que peu de l'angle entre les directions chaîne et trame ([BUE01]) (figure 4.3). L'hypothèse de potentiel de tension indépendant du cisaillement est donc correctement justifiée. Il n'en va pas de même dans l'autre sens. Des travaux récents ([LAU07]) ont mis en évidence des modifications de rigidité en cisaillement lorsque les tensions sont appliquées (figure 4.4). Ceci s'explique assez bien car les résistances à la rotation relative des mèches chaîne et trame est plus grande lorsque celles-ci sont tendues. Néanmoins, il n'existe que très peu de données à ce sujet, quasiment tous les résultats de test de cisaillement des renforts

tissés, qu'ils viennent de picture frame ou de bias tests donnent "l'effort" de cisaillement en fonction de l'angle chaîne-trame. Le fait que l'énergie de déformation de cisaillement ne dépende pas des tensions est donc une hypothèse discutable mais classique.

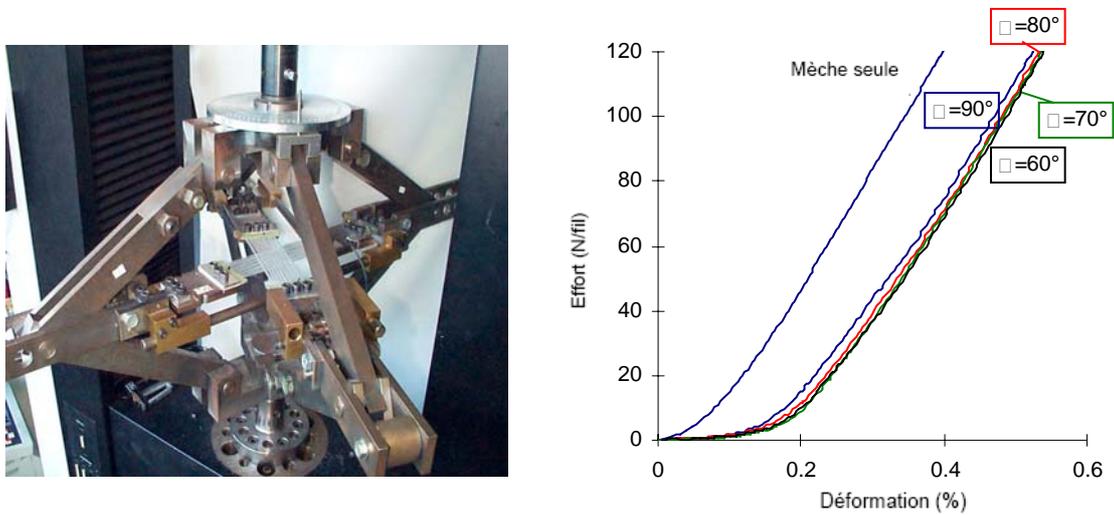


Figure 4. 3 : Tests de traction biaxiale pour différents angles entre chaîne et trame ([BUE01])

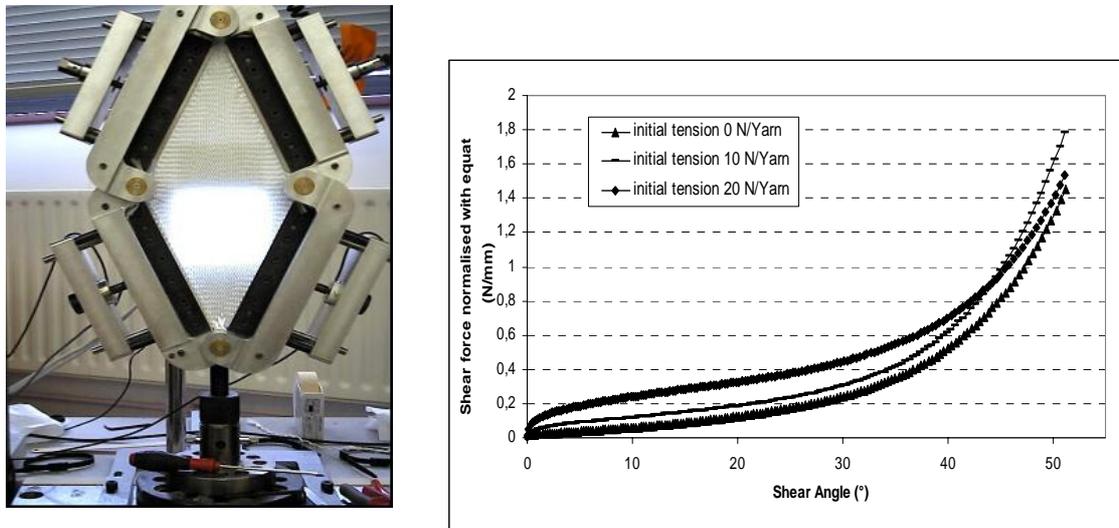


Figure 4. 4 : Influence des pré-tensions sur la réponse en cisaillement lors d'un test de picture frame ([LAU07])

Hypothèse 2 :

Dans le présent travail, les tensions dans les directions chaîne et trame sont supposées découplées. Or les résultats obtenus lors d'un essai biaxial (figure 1.7) montrent que compte tenu du tissage, les tensions – déformations dans les directions chaîne et trame sont couplées.

Cette hypothèse de découplage est faite ici dans un souci de simplicité. Ce sera certainement un objectif futur de construire un potentiel incluant ce couplage.

Il peut être aussi ajouté que les tests de renforts tissés en tension biaxiale sont complexes, qu'il existe peu d'équipement permettant de les réaliser et que ces données sont manquantes pour de nombreux renforts. Par ailleurs les NCF (Non-Crimp fabrics) que montre la figure 1.1f sont très utilisés en particulier dans les applications aéronautiques. Pour ces renforts, l'absence de tissage proprement dit rend correcte l'hypothèse de découplage des tensions. Il en va de même pour les tissus très déséquilibrés comme le C4 montré au tableau 5.4.

Ainsi les équations (4.9) et (4.36) se réécrivent respectivement comme suit:

$$W(\underline{\underline{C}}) = \overline{W}_1(I_1) + \overline{W}_2(I_2) + \overline{W}_c(I_{12}) \quad (4.44)$$

dans le cas du potentiel exprimé par les invariants de type 1 et

$$W(\underline{\underline{C}}) = \widehat{W}_1(\lambda_1) + \widehat{W}_2(\lambda_2) + \widehat{W}_c(\cos \theta) \quad (4.45)$$

dans le cas du potentiel exprimé par les invariants de type 2.

Où,

\overline{W}_1 , \widehat{W}_1 respectivement \overline{W}_2 , \widehat{W}_2 sont les énergies de déformation dues aux tensions dans les deux réseaux de mèches.

\overline{W}_c respectivement \widehat{W}_c est l'énergie de déformation due au cisaillement plan.

Le choix donne naissance à une loi de comportement des renforts tissés simplifiée, mais susceptible de donner des résultats satisfaisants lors de simulations d'emboutissage.

4.4.2 Formes particulières du potentiel pour les renforts tissés

Le potentiel est pris parmi les fonctions continûment dérivables par rapport aux invariants considérés et satisfaisant la condition de contrainte nulle à l'état naturel. Compte tenu des deux jeux d'invariants pris en compte dans l'expression du potentiel et de leurs interprétations physiques, des polynômes fonctions des elongations sont pris pour représenter les deux premiers termes du potentiel en traction et un polynôme en cosinus de l'angle entre les mèches est utilisé pour représenter le potentiel en cisaillement plan. En effet un choix judicieux de constantes peut faire converger les deux potentiels vers un potentiel unique. La loi de comportement étant identique. Le potentiel possède des constantes à déterminer. Pour ce faire, trois essais expérimentaux sont nécessaires : deux essais de traction dans les deux directions d'anisotropie (directions chaîne et trame respectivement) ([BUE01]), et un essai de cisaillement plan de cadre (picture frame) ([DUM03]). En raison de l'hypothèse sur le découplage des tensions des directions chaîne et trame les résultats expérimentaux de traction de mèches seules sont considérés. Les constantes du modèle sont déterminées en reliant les

données expérimentales aux données du modèle. Ceci consiste à minimiser une fonctionnelle mettant en jeu la différence entre les valeurs calculées et les données expérimentales.

Pour des raisons de simplicité, le potentiel exprimé avec les invariants de type 1 est noté par une barre et celui écrit avec les invariants de type 2 est noté avec un chapeau.

4.4.2.1 En fonction des invariants de type 1

Des polynômes, fonctions des invariants considérés, sont pris pour représenter chacun des trois termes du potentiel, leur forme est :

$$\overline{W}_1(I_1) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{i+1} A_i (I_1^{i+1} - 1) \quad (4.46)$$

$$\overline{W}_2(I_2) = \sum_{j=0}^s \frac{1}{j+1} B_j (I_2^{j+1} - 1) \quad (4.47)$$

$$\overline{W}_c(I_{12}) = \sum_{k=1}^t \frac{1}{k} C_k I_{12}^k \quad (4.48)$$

La forme globale du potentiel proposé est alors :

$$W(\underline{C}) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{i+1} A_i (I_1^{i+1} - 1) + \sum_{j=0}^s \frac{1}{j+1} B_j (I_2^{j+1} - 1) + \sum_{k=1}^t \frac{1}{k} C_k I_{12}^k \quad (4.49)$$

Ce potentiel s'annule pour une déformation nulle. En effet, pour $I_1 = I_2 = 1$ et $I_{12} = 0$, $W = 0$.

A_i , B_j et C_k sont des constantes à déterminer en couplant les données expérimentales et les données du modèle. r , s et t sont les degrés des polynômes d'interpolations.

4.4.2.2 En fonction des invariant de type 2

Des polynômes fonctions des élongations sont pris pour représenter les deux premiers termes du potentiel en traction et un polynôme en cosinus de l'angle entre les mèches est utilisé pour représenter le potentiel en cisaillement plan. Ces derniers sont de la forme :

$$\widehat{W}_1(\lambda_1) = \sum_{\alpha=0}^m \frac{1}{\alpha+2} a_\alpha (\lambda_1^{\alpha+2} - 1) \quad (4.50)$$

$$\widehat{W}_2(\lambda_2) = \sum_{\beta=0}^n \frac{1}{\beta+2} b_\beta (\lambda_2^{\beta+2} - 1) \quad (4.51)$$

$$\widehat{W}_c(\cos \theta) = \sum_{\gamma=1}^p \frac{1}{\gamma} c_\gamma \cos^\gamma \theta \quad (4.52)$$

La forme globale du potentiel proposé est alors :

$$\widehat{W} = \sum_{\alpha=0}^m \frac{1}{\alpha+2} a_{\alpha} (\lambda_1^{\alpha+2} - 1) + \sum_{\beta=0}^n \frac{1}{\beta+2} b_{\beta} (\lambda_2^{\beta+2} - 1) + \sum_{\gamma=1}^p \frac{1}{\gamma+1} c_{\gamma} \cos^{\gamma+1} \theta \quad (4.53)$$

Ce potentiel s'annule pour une déformation nulle. En effet, pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\cos\theta = 0$, $W = 0$. a_{α} , b_{β} et c_{γ} sont des constantes à déterminer en couplant les données expérimentales et les données du modèle. m , n et p sont les degrés des polynômes proposés.

4.4.3 Tenseurs de contraintes

En fonction des potentiels proposés, le second tenseur de Piola Kirchhoff possède une expression particulière. Il est exprimé dans ce qui suit en fonction des invariants de type 1 et de type 2.

4.4.3.1 Le tenseur de Piola Kirchhoff 2 en fonction des invariants de type 1

En combinant les équations (4.18) et (4.44), le second tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff s'écrit :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \overline{W}_c}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)$$

L'expression du second tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff fait intervenir des dérivées du potentiel par rapport aux différents invariants.

$$\frac{\partial \overline{W}_1}{\partial I_1} = \sum_{i=0}^r A_i I_1^i \quad ; \quad \frac{\partial \overline{W}_2}{\partial I_2} = \sum_{j=0}^s B_j I_2^j \quad ; \quad \frac{\partial \overline{W}_c}{\partial I_{12}} = \sum_{k=1}^t C_k I_{12}^{k-1} \quad (4.54)$$

En remplaçant les expressions (4.54) respectivement dans les expressions (4.30), (4.31) et (4.43), nous obtenons après simplifications les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale :

$$S_{11} = 2 \left(\sum_{i=0}^r A_i I_1^i - \frac{1}{I_1} \sum_{k=1}^t C_k I_{12}^k \right) \quad (4.55)$$

$$S_{22} = 2 \left(\sum_{j=0}^s B_j I_2^j - \frac{1}{I_2} \sum_{k=1}^t C_k I_{12}^k \right) \quad (4.56)$$

$$S_{12} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \sum_{k=1}^t C_k I_{12}^{k-1/2} \right) \quad (4.57)$$

La condition de contraintes nulles dans l'état naturel est vérifiée seulement si :

$$\sum_{i=0}^r A_i = 0 \quad ; \quad \sum_{j=0}^s B_j = 0$$

4.4.3.2 Le Second tenseur de Piola Kirchhoff en fonction des invariants de type 2

Le second tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff s'écrit :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial \widehat{W}_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \widehat{W}_2}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \widehat{W}_C}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (4.58)$$

Son expression fait intervenir des dérivées du potentiel par rapport aux différents invariants.

$$\frac{\partial \widehat{W}_1}{\partial \lambda_1} = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha \lambda_1^{\alpha+1} \quad ; \quad \frac{\partial \widehat{W}_2}{\partial \lambda_2} = \sum_{\beta=0}^n b_\beta \lambda_2^{\beta+1} \quad ; \quad \frac{\partial \widehat{W}_C}{\partial \cos \theta} = \sum_{\gamma=1}^p c_\gamma \cos^\gamma \theta \quad (4.59)$$

En remplaçant les expressions (4.59) dans l'expression (4.41), (4.42) et (4.43) respectivement, nous obtenons après simplifications les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale :

$$S_{11} = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha \lambda_1^\alpha - \frac{\cos \theta}{\lambda_1^2} \sum_{\gamma=1}^p c_\gamma \cos^\gamma \theta \quad (4.60)$$

$$S_{22} = \sum_{\beta=0}^n b_\beta \lambda_2^\beta - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \sum_{\gamma=1}^p c_\gamma \cos^\gamma \theta \quad (4.61)$$

$$S_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\gamma=1}^p c_\gamma \cos^\gamma \theta \quad (4.62)$$

La condition de contraintes nulles dans l'état naturel est vérifiée seulement si :

$$\sum_{\alpha=0}^m a_\alpha = 0 \quad ; \quad \sum_{\beta=0}^n b_\beta = 0$$

4.5 Loi de comportement en fonction des invariants de type 3, proposition non pertinente pour la physique des renforts tissés

Une loi de comportement est proposée à partir d'un autre ensemble d'invariants dits de type 3. Si on peut penser retenir ces invariants dans un premier temps, il va être montré que la loi de comportement correspondante n'est pas pertinente pour les renforts tissés. Le potentiel (4.8) est rappelé ici :

$$\widetilde{W}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{L}}_{11}, \underline{\underline{L}}_{22}) = \widetilde{W}(I_1, I_2, \bar{I}_{12}) \quad (4.63)$$

Les invariants, appelés les invariants de type 3, sont définis comme ceci :

- Les invariants de tension sont ceux définies par l'équation (4.10).
- L'invariant de cisaillement est l'invariant \bar{I}_{12} de l'équation (4.12), rappelé ici :

$$\bar{I}_{12} = \text{Tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{11} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{L}}_{22}) \quad (4.64)$$

Où l'invariant \bar{I}_{12} représente le carré de la composante C_{12} du tenseur $\underline{\underline{C}}$ dans l'orientation initiale conformément à l'équation (4.16), donc :

$$\bar{I}_{12} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos^2 \theta \quad (4.65)$$

Cet invariant a été considéré car dans le cas d'un test de cisaillement pur, il implique un état de contrainte de cisaillement pur dans la configuration non déformée ($S_{11} = S_{22} = 0$).

Nous rappelons qu'en hyperélasticité, le second tenseur de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ dérive du potentiel W par la relation suivante :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (4.66)$$

Le potentiel \widetilde{W} étant une fonction des invariants, $\underline{\underline{S}}$ s'obtient à partir de la dérivée partielle par rapport aux invariants :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left(\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \bar{I}_{12}} \frac{\partial \bar{I}_{12}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (4.67)$$

En remplaçant les dérivées des invariants données par les expressions (4.20) et (4.26), nous obtenons :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial I_1} \underline{\underline{L}}_{11} + 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial I_2} \underline{\underline{L}}_{22} + 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \bar{I}_{12}} \bar{I}_{12}^{1/2} (\underline{\underline{L}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{21})$$

Ainsi dans l'orientation initiale, les composantes de $\underline{\underline{S}}$ sont :

$$S_{11} = 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial I_1} ; \quad S_{22} = 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial I_2} \quad \text{et} \quad S_{12} = 2 \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \bar{I}_{12}} \bar{I}_{12}^{1/2} \quad (4.68)$$

Cette loi de comportement n'est pas pertinente pour les renforts tissés et cela est illustré aux paragraphes (§ 4.6.2.2) et (§ 5.4.1).

4.6 Analyse des lois de comportement

Deux types d'analyses et une proposition sont effectués dans ce qui suit. Dans un premier temps, une comparaison entre les modèles hyperélastiques obtenus avec les invariants de type 1 et de type 2 est effectuée, ensuite l'analyse de la forme du potentiel est réalisée pour les différentes lois de comportement proposées, elle est basée sur le cadre de cisaillement pur. Finalement une proposition pour le calcul des tensions dans les mèches est faite.

4.6.1 Comparaison des lois obtenues avec les potentiels de type 1 et de type 2

Les composantes de $\underline{\underline{S}}$ sont donnée par l'équation (4.28) rappelée ici :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} - \frac{I_{12}}{I_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right] \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{11}}} + 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} - \frac{I_{12}}{I_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right] \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{22}}} + 2 \left[\sqrt{\frac{I_{12}}{I_1 I_2}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_{12}} \right] (\underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{12}}} + \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{21}}}) \quad (4.69)$$

Nous rappelons ici l'interprétation physique des invariants de type 1, nous les exprimons ainsi en fonction des invariants de type 2 par:

$$I_i = \lambda_i^2 \quad (i = 1, 2) \text{ et } I_{12} = \cos^2 \theta \quad (4.70)$$

En remplaçant les expressions (4.70) dans l'équation (4.69), nous avons :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\cos^2 \theta}{\lambda_1^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \cos^2 \theta} \right] \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{11}}} + 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_2^2} - \frac{\cos^2 \theta}{\lambda_2^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \cos^2 \theta} \right] \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{22}}} + 2 \left[\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \cos^2 \theta} \right] (\underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{12}}} + \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{21}}})$$

Avec
$$\widetilde{W}(\underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{11}}}, \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{11}}}, \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{22}}}) = \bar{W}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cos^2 \theta)$$

Après simplification, nous avons :

$$\underline{\underline{S}} = \left[\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\cos \theta}{\lambda_1^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \cos \theta} \right] \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{11}}} + \left[\frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \lambda_2^2} - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \cos \theta} \right] \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{22}}} + \left[\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \cos \theta} \right] (\underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{12}}} + \underline{\underline{L}}_{\underline{\underline{21}}})$$

Il en résulte que lorsque le potentiel est fonction du carré des élongations et le carré du cosinus de l'angle entre les mèches, les potentiels formulés avec les invariants de type 1 et de type 2 sont les mêmes.

4.6.2 Force sur le cadre de cisaillement pur

Dans ce qui suit et en fonction des lois de comportement formulées avec les invariants de type 1 et de type 3, nous présentons dans le cas particulier du test de cisaillement pur par cadre, les forces appliquées sur les côtés du cadre.

Les forces sur les côtés du cadre sont déterminées en fonction de la configuration non déformée en utilisant le tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff 1 $\underline{\underline{P}}$.

4.6.2.1 Cas de la loi de comportement fonction des invariants de type 2

- *La sollicitation*

$$\underline{\underline{F}}_{\{\underline{G}\}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

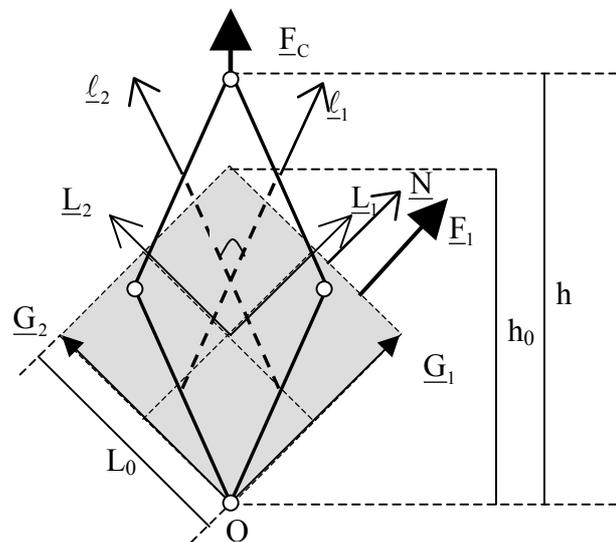


Figure 4. 5 : Cisaillement sur cadre (orientation initiale des mèches à 0°)

γ est l'angle de glissement entre les mèches, donc $\gamma = 90^\circ - \theta$ où θ est l'angle entre les mèches (figure 4.2).

- *La loi hyperélastique*

La loi hyperélastique proposée donne le second tenseur de Piola Kirchhoff. Ses composantes dans l'orientation initiale (confondue ici avec la base globale $\{\underline{G}\}$) sont :

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1} - \frac{\cos \theta}{\lambda_1^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad S_{22} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad S_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta}$$

L'expression du second tenseur de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale obtenue lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ est :

$$[\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} -S_{12} \cos \theta & S_{12} \\ S_{12} & -S_{12} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Car $\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_i} = 0$ pour $\lambda_i = 1$ ($i = 1, 2$)

Pour simplifier la notation, posons $[\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix}$

- **Calcul de la force sur le côté du cadre**

La force sur le côté du cadre est reliée au premier tenseur de Piola Kirchhoff si l'on considère la configuration non déformée. La matrice de ce tenseur en base globale est donnée par :

$$[\underline{\underline{P}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{F}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} \quad (4.73)$$

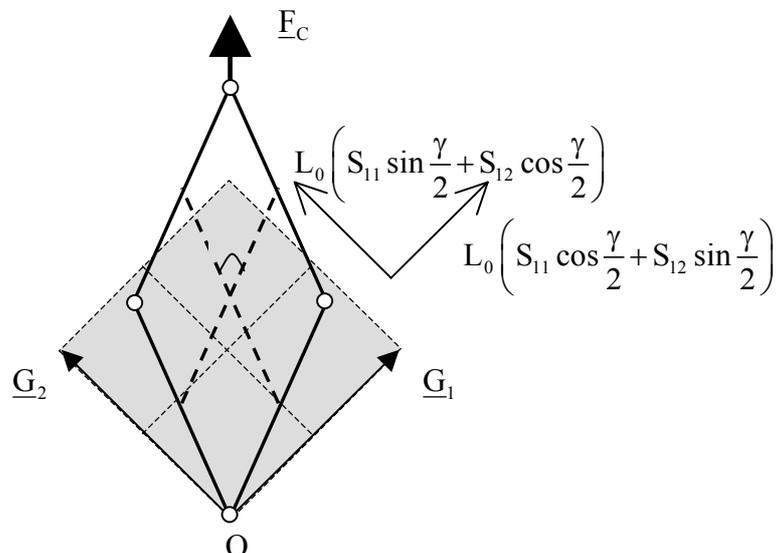
Après calcul on trouve :

$$[\underline{\underline{P}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} S_{11} \cos \frac{\gamma}{2} + S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} & S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} + S_{22} \sin \frac{\gamma}{2} \\ S_{11} \sin \frac{\gamma}{2} + S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} & S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} + S_{22} \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

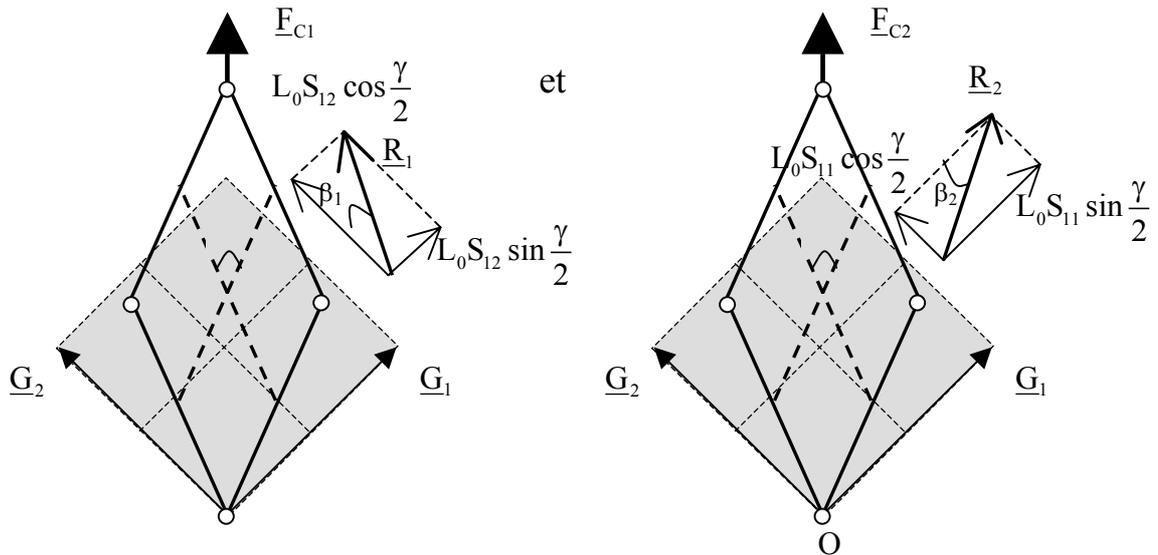
Ainsi le vecteur force \underline{F}_1 sur le côté du cadre de normale \underline{N} ou \underline{G}_1 (figure 4.5) est :

$$\{\underline{F}_1\}_{\{L\}} = [\underline{\underline{P}}]_{\{L\}} \{\underline{G}_1\}_{\{L\}} L_0 = \begin{Bmatrix} S_{11} \cos \frac{\gamma}{2} + S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} \\ S_{11} \sin \frac{\gamma}{2} + S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} \end{Bmatrix} L_0 \quad (4.75)$$

- **Représentation graphique**



Dans ce qui suit, nous déterminons les composantes de la force exercée sur le cadre obtenue par le modèle hyperélastique proposé dans la base $\{\underline{\ell}\}$ i.e. le long des deux réseaux de mèches. Pour cela, nous procédons à la décomposition suivante des composantes :



Où $\underline{F}_C = \underline{F}_{C1} + \underline{F}_{C2}$

La résultante \underline{R}_1 est orientée le long du bord, i.e. dans la direction $\underline{\ell}_1$, en effet :

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} L_0}{S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} L_0} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{Son intensité est : } R_1 = L_0 \sqrt{\left(S_{12} \sin \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(S_{12} \cos \frac{\gamma}{2}\right)^2} = L_0 S_{12}$$

La résultante \underline{R}_2 est orientée le long des mèches i.e. dans la direction $\underline{\ell}_2$, en effet :

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{S_{11} \sin \frac{\gamma}{2} L_0}{S_{11} \cos \frac{\gamma}{2} L_0} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{Son intensité est : } R_2 = L_0 \sqrt{\left(S_{11} \sin \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(S_{11} \cos \frac{\gamma}{2}\right)^2} = L_0 S_{11}$$

Donc la réaction sur le côté du cadre se décompose en une première composante dans la direction des mèches et la seconde dans une direction du bord. Elles sont exprimées en fonction des composantes du second tenseur de Piola Kirchoff par :

$$\{\underline{E}_1\}_{\{\ell\}} = \begin{Bmatrix} -S_{12} \cos \theta \\ S_{12} \end{Bmatrix} L_0$$

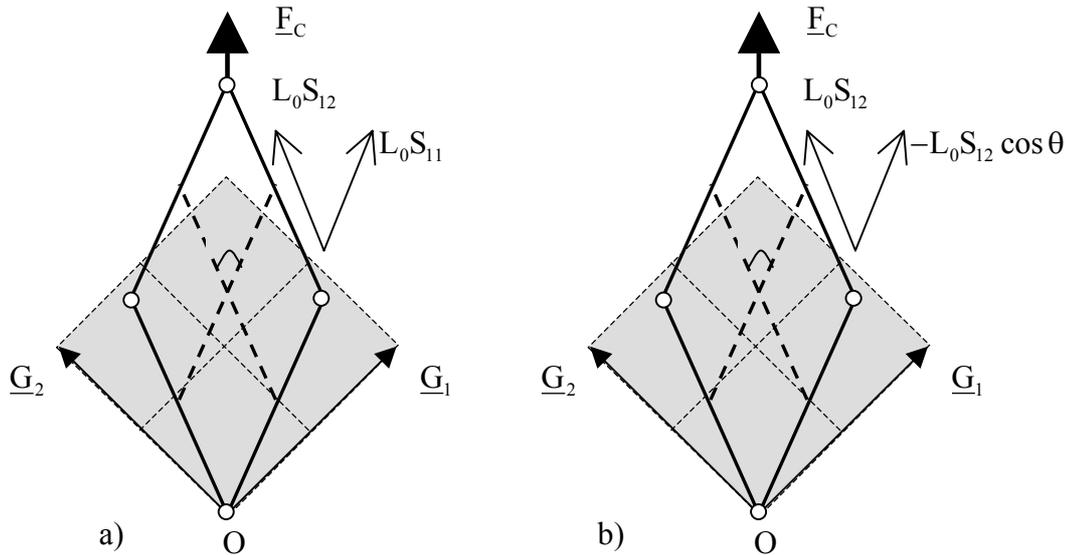


Figure 4. 6 : Représentation des composantes sur le côté du cadre de cisaillement pur
a) cas général ; b) Loi hyperélastique considérée

Il est à noter qu'il est important de trouver une action sur le bord perpendiculaire aux mèches, autrement le modèle ne reproduirait pas le cisaillement pur d'un tissé. Ceci est illustré dans le paragraphe § 4.6.2.3.

4.6.2.2 Cas de la loi hyperélastique en fonction des invariants de type 3

- *loi hyperélastique*

La loi hyperélastique dans le cas des invariants de type 3 engendre les composantes, dans l'orientation initiale (confondue ici avec la base globale $\{\underline{G}\}$) du second tenseur de Piola Kirchoff, suivantes :

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2}, \quad S_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta}$$

L'expression du second tenseur de Piola Kirchoff dans l'orientation initiale obtenue lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ est :

$$[\underline{S}]_{\{L\}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

- **Force sur le côté du cadre**

La force sur le côté du cadre est reliée au premier tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff dont la matrice en base globale est de la forme :

$$[\underline{P}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} & S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} \\ S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} & S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Ainsi le vecteur force sur le côté du cadre de normale \underline{N} est :

$$\{\underline{F}_1\}_{\{L\}} = [\underline{P}]_{\{L\}} \{\underline{N}\}_{\{L\}} L_0 = \begin{Bmatrix} S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} \\ S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} \end{Bmatrix} L_0 \quad (4.78)$$

- **Représentation graphique**

La résultante \underline{R} de la force exercée sur le côté du cadre est orientée le long du bord, i.e. dans la direction $\underline{\ell}_1$, car d'après la figure 4.7, nous avons :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{S_{12} \sin \frac{\gamma}{2} L_0}{S_{12} \cos \frac{\gamma}{2} L_0} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

De plus son intensité vaut : $R = L_0 \sqrt{\left(S_{12} \sin \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(S_{12} \cos \frac{\gamma}{2}\right)^2} = L_0 S_{12}$

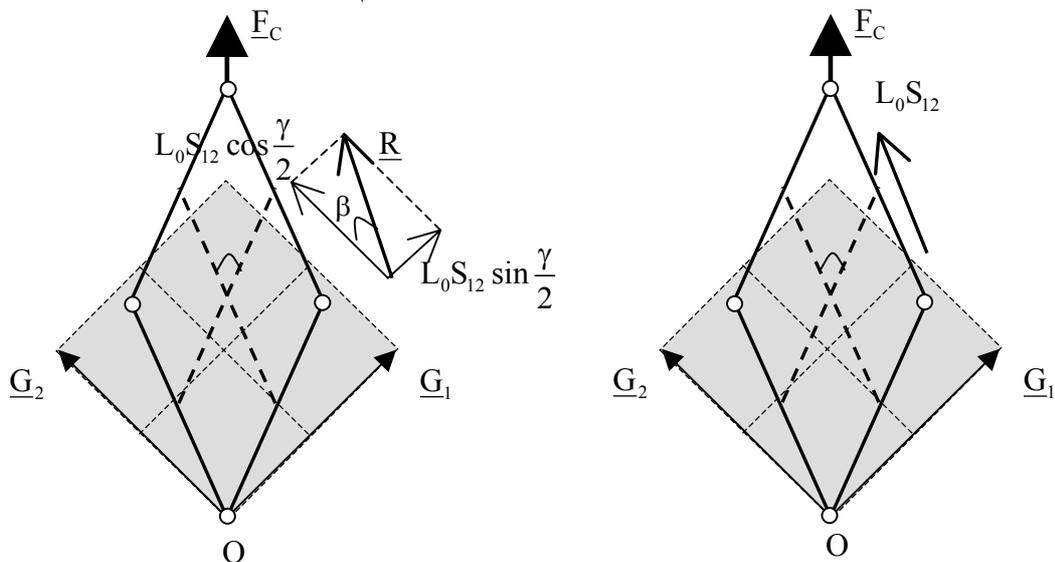


Figure 4. 7: Représentation des forces sur le côté du cadre de cisaillement pur
Cas de la loi non pertinente pour les tissés a) les composantes b) la résultante

La loi de comportement obtenue avec les invariants de type 3 engendre des efforts portés par les côtés du cadre. Un tel chargement, orienté le long des bords, est généralement considéré comme un cisaillement pur, mais il n'est pas compatible avec un essai de cisaillement pur de tissé.

4.6.2.3 Calcul des tensions dans les mèches

- *Cas de la loi hyperélastique non pertinente pour les tissus*

La réaction dans la direction des mèches donne la tension dans l'ensemble des mèches du côté considéré. La tension totale dans les mèches est :

$$T_\ell = L_0 S_{12} \cos \theta \neq 0$$

La tension dans une mèche est : $\frac{T_\ell}{L_0 n}$

n étant la densité des mèches sens chaîne n_c ou trame n_t .

Avec les invariants de type 3, la loi de comportement engendre des tensions dans les mèches dans un essai de cisaillement pur.

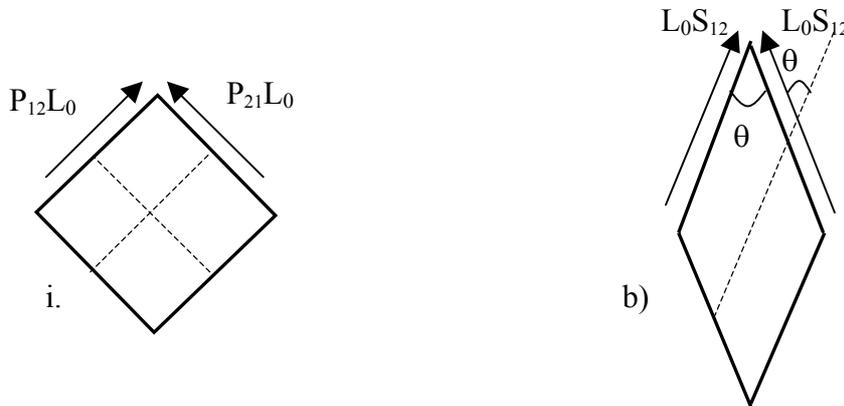


Figure 4. 8 : Forces sur le côté du cadre dans le cas de la loi hyperélastique non pertinente
a) sur la configuration non déformée, b) sur la configuration actuelle

• *Cas de la loi hyperélastique proposée pour les tissus*

La réaction dans la direction des mèches donne la tension dans l'ensemble des mèches du côté considéré. La tension totale dans les mèches est :

$$T_\ell = L_0 (S_{11} + S_{12} \cos \theta) \quad (4.79)$$

Or la loi hyperélastique proposée donne la relation suivante entre les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff (voir l'équation (4.72)) :

$$S_{11} = -S_{12} \cos \theta$$

Ce qui engendre une tension nulle dans les mèches.

Les tensions dans les mèches sont nulles ce qui coïncide avec l'essai de cisaillement pur des tissus. Il en résulte que la résultante des forces sur chaque côté du cadre est perpendiculaire à la direction des mèches.

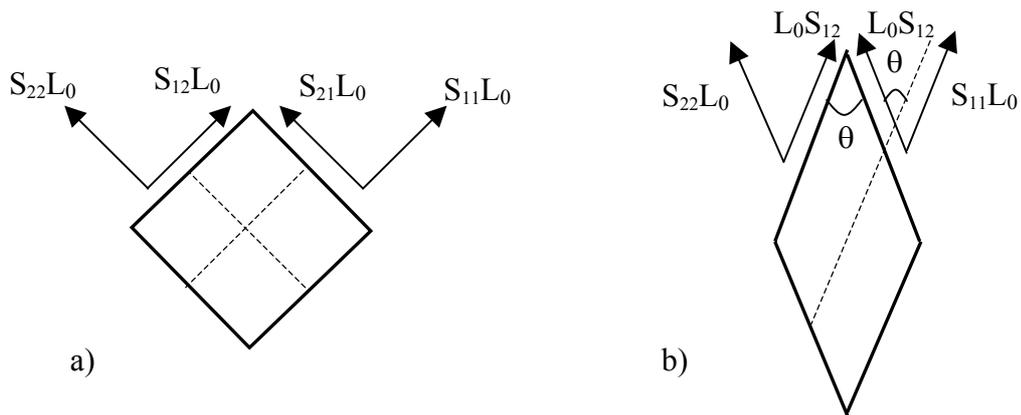


Figure 4. 9 : Forces sur le côté du cadre dans le cas de la loi hyperélastique proposée a) sur la configuration non déformée, b) sur la configuration actuelle

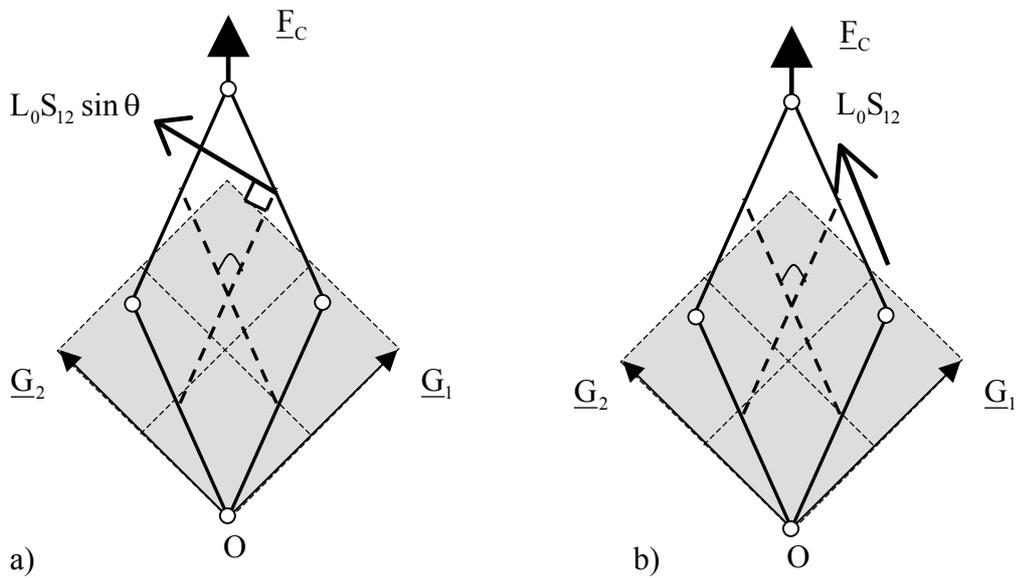


Figure 4. 10 : Réactions sur le côté du cadre de cisaillement pur a) avec les invariants de type 1 et 2 ; b) avec l'invariant de type 3

4.7 Conclusion

Un modèle de comportement hyperélastique anisotrope est proposé pour la simulation des renforts fibreux de composites en particulier tissés. Il repose sur la proposition d'une expression de l'énergie de déformation W objective prenant en compte le comportement anisotrope des renforts tissés. A cet effet, deux potentiels ont été proposés. Le premier est une fonction scalaire des invariants de type 1. Ce sont les invariants mixtes choisis du tenseur de déformation de Cauchy Green droit et de tenseurs de structure introduits afin de prendre en compte l'anisotropie des renforts tissés. Le second potentiel est une fonction scalaire des élongations dans les directions chaîne et trame et du cosinus de l'angle entre les mèches, appelés ici les invariants de type 2. Chacun des potentiels est construit par l'addition de trois potentiels, deux énergies de tension et une énergie de cisaillement plan. Ce choix a été dicté par les modes prépondérants de déformation des renforts tissés, qui sont des élongations très faibles dans les directions des mèches, et de grandes variations angulaires dans le plan du tissé.

Ce modèle continu est susceptible de reproduire les spécificités du comportement des renforts tissés observés à l'échelle macroscopique (les non linéarités de comportements notamment en cisaillement), qui sont dues à des effets observés à des échelles plus petites. Les potentiels font intervenir des constantes qui peuvent être déterminées en minimisant la différence entre les valeurs du modèle et les données expérimentales de tests élémentaires.

Il a été montré que la forme simple du potentiel proposé permet de retrouver le comportement spécifique d'un tissé dans le cas d'un test caractéristique : le picture frame. Il a été montré qu'un autre choix d'invariants pouvait conduire à un comportement non satisfaisant car impliquant des tensions dans le cas du cisaillement pur.

Chapitre 5 : Tests élémentaires et simulations d'emboutissage

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une loi de comportement hyperélastique a été développée pour simuler le comportement des renforts tissés. Il s'agit d'une proposition d'un potentiel hyperélastique susceptible de reproduire le comportement des renforts tissés limité dans ce modèle essentiellement aux grandes variations angulaires des deux réseaux de mèches et aux extensions de celles-ci. De ce potentiel dérive la loi de comportement des renforts tissés.

Dans le modèle hyperélastique proposé, le potentiel énergétique est la somme de trois termes, deux potentiels de tension et un potentiel de cisaillement. Chacun de ces trois termes fait intervenir des constantes qui sont déterminées par identification à partir de données expérimentales. C'est la phase d'identification des paramètres du modèle dans laquelle les écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales, sont minimisés. Trois essais d'identification sont nécessaires : un essai de cisaillement pur ([DUM03]) et deux essais de traction dans chacune des directions d'anisotropie ([BUE98]).

Le modèle a été soumis à plusieurs tests de références en grandes transformations, c'est la phase de validation du modèle. Deux types de tests ont été effectués, des tests élémentaires sur un cadre et des tests de simulations d'emboutissage. Les tests élémentaires sont : les tests de cisaillement pur et simple et les tests de cisaillement simple - extension. Le modèle a été testé pour différentes densités de maillage, pour différentes orientations initiales des mèches et pour des éléments quadrangulaires et triangulaires, et ce sur un tissu sec équilibré. Les résultats du modèle ont été comparés avec des solutions de référence. Le test d'emboutissage pour simuler une opération de formage a été réalisé par poinçon hémisphérique. Le modèle a été testé pour différentes orientations initiales des mèches ($0^\circ/90^\circ$ et $\pm 45^\circ$). Deux versions du modèle ont été testées, avec et sans prise en compte de la rigidité de cisaillement plan. Deux types de renfort sec ont été considérés : le taffetas de verre équilibré (T6) et le sergé 2x2 de carbone très déséquilibré (C4).

5.2 Implémentation dans Abaqus/Explicit

Le modèle hyperélastique présenté est implémenté dans le code de calcul d'Abaqus. Ceci est réalisé grâce à la programmation d'une Vumat (explicit Vectorized User Material) qui est une routine utilisateur en fortran qui permet de définir la loi de comportement dans Abaqus/Explicit. Il est appliqué aux éléments de membranes quadrangulaires M3D4R. Dans la Vumat, le seul tenseur requis à la sortie de la routine est le tenseur de Cauchy actualisé et projeté dans la base de Green-Naghdi, la base de l'orientation initiale tournée par la rotation polaire $\underline{\underline{R}}$. Nous rappelons que le modèle hyperélastique propose une expression du second tenseur de Piola Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$. Deux alternatives sont utilisées pour définir le tenseur de contraintes de Cauchy en base de Green Naghdi : la propriété des transports des tenseurs et les propriétés de changement de base. Quelques formules de changement de base sont requises, car les tenseurs mis en jeu dans la Vumat sont projetés dans différentes bases :

- la base OND (orthonormée directe) globale $\{\underline{\underline{G}}\}$,
- la base OND de l'orientation initiale des mèches $\{\underline{\underline{L}}\}$,
- la base de l'orientation actuelle des mèches $\{\underline{\underline{\ell}}^t\}$,
- la base OND de Green-Naghdi $\{\underline{\underline{e}}^t\}$,
- la base mixte $\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}$.

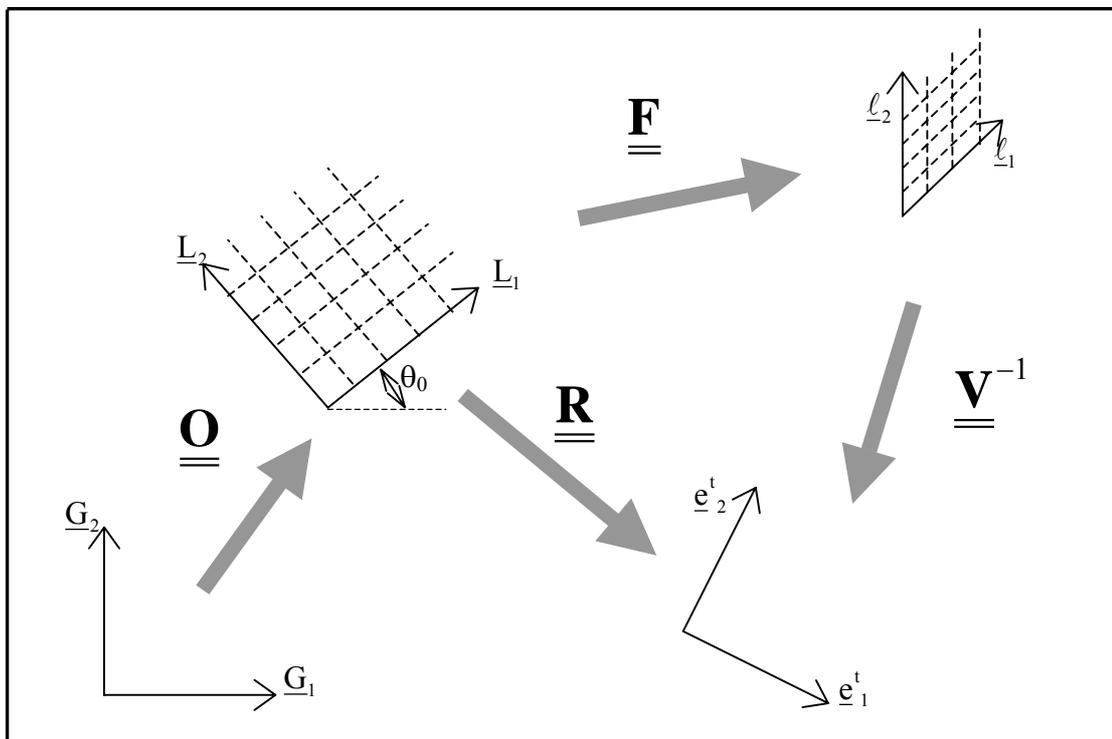


Figure 5. 1 : Les différentes bases de projection des tenseurs

5.2.1 Rappel des formules de changement de base

La matrice de passage est définie comme la matrice permettant d'exprimer les composantes d'un tenseur dans la nouvelle base en fonction de ses composantes dans l'ancienne base. Nous rappelons ici les formules de changement de base requises pour projeter le tenseur de contraintes de Cauchy dans la base de Green-Naghdi:

Soit $\underline{\underline{\alpha}}$ le tenseur qui transforme l'orientation actuelle $\{\underline{\ell}^t\}$ en base de Green-Naghdi $\{\underline{e}^t\}$:

$$\underline{e}^t = \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\ell}^t$$

Pour un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 deux fois contravariants, nous avons :

$$[\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{e}^t\}} = [\underline{\underline{\alpha}}]_{\{\underline{\ell}^t\}}^T [\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{\ell}^t\}} [\underline{\underline{\alpha}}]_{\{\underline{\ell}^t\}} \quad (5.1)$$

Soit $\underline{\underline{\Delta}}$ le tenseur qui transforme l'orientation initiale $\{\underline{L}\}$ en base de Green-Naghdi $\{\underline{e}^t\}$:

$$\underline{e}_\alpha^t = \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{L}_\alpha$$

Pour le tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 deux fois contravariants, nous avons :

$$[\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{e}^t\}} = [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{\underline{L}\}}^T [\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{L}\}} [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{\underline{L}\}} \quad (5.2)$$

$$[\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{e}^t\}} = [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{\underline{G} \otimes \underline{L}\}}^T [\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{G}\}} [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{\underline{G} \otimes \underline{L}\}} \quad (5.3)$$

5.2.2 Matrice de passage de l'orientation actuelle à la base de Green-Naghdi

Nous rappelons que la base de Green-Naghdi $\{\underline{e}^t\}$ est obtenue par le transport rotationnel par $\underline{\underline{R}}$ de l'orientation initiale $\{\underline{L}\}$:

$$\underline{e}_\alpha^t = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{L}_\alpha \quad (5.4)$$

D'après la figure 5.1 ci-dessus, la base de Green-Naghdi $\{\underline{e}^t\}$ est la base image de l'orientation actuelle $\{\underline{\ell}^t\}$ par le transport deux fois covariants défini par $\underline{\underline{V}}^{-1}$.

Les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy étant connues dans la base $\{\underline{\ell}^t\}$, la formule de changement de base donnant ses composantes dans la base de Green-Naghdi est :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{e}^t\}} = [\underline{\underline{V}}^{-1}]_{\{\underline{\ell}^t\}}^T [\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{\ell}^t\}} [\underline{\underline{V}}^{-1}]_{\{\underline{\ell}^t\}}$$

Or les composantes du tenseur $\underline{\underline{V}}^{-1}$ ne sont pas connues dans la base $\{\underline{\ell}^t\}$. En effet la Vumat fournit uniquement $\underline{\underline{R}}_{\{G \otimes L\}}$ et $\underline{\underline{F}}_{\{G \otimes L\}}$, donc nous disposons de $\underline{\underline{V}}^{-1}$ en base globale :

$$\underline{\underline{V}}^{-1}_{\{G\}} = \underline{\underline{R}}_{\{G \otimes L\}} \underline{\underline{F}}^{-1}_{\{G \otimes L\}} \quad (5.5)$$

Afin d'exprimer les composantes de $\underline{\underline{V}}^{-1}$ dans la base $\{\underline{\ell}^t\}$, nous introduisons le tenseur d'élongation pure droit $\underline{\underline{U}}$ soit : $\underline{\underline{U}}^T = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{R}}$ (5.6)

D'après la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}$, l'expression du tenseur $\underline{\underline{R}}$ est donnée par :

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}$$

En remplaçant l'expression précédente dans l'expression (5.6), nous avons :

$$\underline{\underline{U}}^T = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (5.7)$$

L'équation (5.7) représente le transport inverse par $\underline{\underline{F}}$ deux fois covariants, de $\underline{\underline{V}}^{-1}$ c'est à dire:

$$\underline{\underline{T}}_{\infty}^{-1}(\underline{\underline{V}}^{-1}) = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^T \quad (5.8)$$

L'écriture de la propriété des transports engendre :

$$\underline{\underline{U}}^T_{\{L\}} = \underline{\underline{V}}^{-1}_{\{\ell\}} \quad (5.9)$$

Par conséquent, l'écriture de la formule de changement de base des composantes du tenseur de contraintes de Cauchy de l'orientation actuelle vers la base de Green-Naghdi est :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{e^t\}} = \underline{\underline{U}}_{\{L\}} \underline{\underline{\sigma}}_{\{\ell\}} \underline{\underline{U}}_{\{L\}}^T \quad (5.10)$$

Ainsi, la matrice de passage du tenseur de contraintes de Cauchy de l'orientation actuelle vers la base de Green-Naghdi est la matrice du tenseur d'élongation droit $\underline{\underline{U}}$ dans l'orientation initiale.

Le tenseur de contraintes de Cauchy dans la base de l'orientation actuelle possède les mêmes composantes que le tenseur de Piola Kirchhoff 2 $\underline{\underline{S}}$ dans l'orientation initiale (§ 3.2.1.2), pondérées par le Jacobien de la transformation J :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{\ell\}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{S}}_{\{L\}}$$

Par conséquent :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{e^t\}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{U}}_{\{L\}} \underline{\underline{S}}_{\{L\}} \underline{\underline{U}}_{\{L\}}^T$$

5.2.3 Projection du tenseur de contraintes de Cauchy dans la base de Green-Naghdi

Rappelons que le tenseur de contraintes de Kirchhoff est le transport par $\underline{\underline{F}}$ du second tenseur de Piola Kirchhoff, soit : $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{J}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{S}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$

La projection du tenseur de contraintes de Cauchy dans la base globale $\{\underline{\underline{G}}\}$ est donnée par l'expression suivante :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T \quad (5.11)$$

Ainsi la formule de changement de base fournissant les composantes de contraintes de Cauchy actualisées en base de Green-Naghdi est l'équation (5.3) soit :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{\underline{e}}^t\}} = [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}}^T [\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}} \quad (5.12)$$

En injectant l'équation (5.11) dans l'équation (5.12), nous avons:

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{\underline{e}}^t\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}}^T [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}} \quad (5.13)$$

Or $[\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}} = [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}$ et $[\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}$

Où $\underline{\underline{O}}$ est le tenseur de rotation représentant l'orientation initiale (figure 5.1). Il est défini par :

$$\underline{\underline{L}}_i = \underline{\underline{O}} \cdot \underline{\underline{G}}_i \quad (5.14)$$

Sa matrice dans la base globale est donnée par :

$$[\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

θ_0 représente l'angle de rotation de l'orientation initiale $\{\underline{\underline{L}}\}$ par rapport à la base globale $\{\underline{\underline{G}}\}$ (figure 5.1).

Donc

$$[\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}}^T [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} \quad (5.16)$$

Et

$$[\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{L}}\}} = [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{R}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} \quad (5.17)$$

Ainsi l'équation (5.13) s'écrit : $[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{\underline{\underline{e}}^t\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}^T [\underline{\underline{O}}]_{\{\underline{\underline{G}}\}}$

La matrice de $\underline{\underline{U}}$ étant connue dans l'orientation initiale, sa projection dans cette base est donnée par l'équation (5.2) soit :

$$[\underline{\underline{U}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T \quad (5.18)$$

Sachant que $[\underline{\underline{O}}]_{\{L\}} = [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T$.

En injectant les équations (5.16), (5.17) et (5.18) dans l'équation (5.13), nous avons :

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{\sigma}}]_{\{e^t\}} &= \frac{1}{J} [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T \left([\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T \right) [\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} \left([\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T \right)^T [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} \\ [\underline{\underline{\sigma}}]_{\{e^t\}} &= \frac{1}{J} \left([\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} \right) [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}} \left([\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T [\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} \right) [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}}^T \left([\underline{\underline{O}}]_{\{G\}}^T [\underline{\underline{O}}]_{\{G\}} \right) \end{aligned}$$

Après simplification, l'expression des contraintes de Cauchy en base de Green-Naghdi est :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{e^t\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}}^T \quad (5.19)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{U}}$ et J sont respectivement le tenseur de contraintes de Cauchy, le tenseur des elongations droit et le déterminant du tenseur gradient de la transformation.

5.2.4 Mises en œuvre dans Abaqus

- *Entrée de la Vumat*

Le code fournit à l'entrée de la routine:

- La matrice de $\underline{\underline{F}}$ en base mixte : $[\underline{\underline{F}}]_{\{G \otimes L\}}$
- La matrice de $\underline{\underline{U}}$ dans de l'orientation initiale : $[\underline{\underline{U}}]_{\{L\}}$

- *Sortie de la Vumat*

La seule matrice requise par le code à la sortie de la routine est la matrice du tenseur des contraintes de Cauchy actualisé dans la base de Green-Naghdi:

- *Algorithme Vumat*

Sur un incrément de temps $[t, t + \Delta t]$

Début de la boucle sur les points de Gauss :

- Inverser $\underline{\underline{U}}$ à $t + \Delta t$ dans la base de l'orientation initiale : $[\underline{\underline{U}}^{-1}]_{\{L\}} = \text{Inv} \left[[\underline{\underline{U}}]_{\{L\}} \right]$

- Calculer $\underline{\underline{C}}$ dans l'orientation initiale : $[\underline{\underline{C}}]_{\{L\}} = [\underline{\underline{F}}^T]_{\{L \otimes G\}} [\underline{\underline{F}}]_{\{G \otimes L\}}$
- Calculer des élongations λ_1 et λ_2 et l'angle entre les mèches θ à partir de $[\underline{\underline{C}}]_{\{L\}}$
- Calculer à partir des équations (4.60), (4.61) et (4.62) le tenseur $\underline{\underline{S}}$ dans l'orientation initiale : $[\underline{\underline{S}}]_{\{L\}}$
- Calculer $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base de Green-Naghdi : $[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{e^i\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}}^T [\underline{\underline{S}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{U}}]_{\{L\}}$

Fin de la boucle.

5.3 Identification des paramètres du modèle

L'identification des paramètres matériaux inclus dans le modèle hyperélastique proposé, consiste à ajuster les solutions données par le modèle aux données expérimentales de certains essais. Pour cela, un choix des essais élémentaires est nécessaire. Celui-ci est effectué sur la variété des essais expérimentaux existants pour les tissés et il est dicté par les hypothèses du modèle proposé. Nous rappelons que le modèle proposé ne prend pas en considération le caractère biaxial de la traction des tissés, ce qui signifie que l'effet sur le comportement en tension des ondulations naturelles des tissés, est négligé, de même il suppose que les tensions et le cisaillement plan sont indépendants. Ces hypothèses entraînent que chacune des trois parties du potentiel est identifiée de manière indépendante par un essai élémentaire.

Les trois essais élémentaires retenus sont : un essai de cisaillement plan de cadre (picture frame)([DUM03]) et deux essais de traction dans chacune des directions des mèches ([BUE98]).

L'identification des constantes du modèle hyperélastique proposé se fait par la minimisation de trois fonctions, représentant chacune les écarts entre les valeurs expérimentales et celles du modèle hyperélastique d'un essai bien défini. L'ajustement des données expérimentales a été effectué par la méthode des moindres carrés.

5.3.1 Tests élémentaires d'identification

Les données expérimentales fournies par les deux essais retenus pour identifier les constantes du modèle sont : la force appliquée sur la machine en fonction du déplacement, dans le cas de l'essai de traction et la force d'extension du cadre en fonction de l'angle de glissement des mèches pour l'essai de cisaillement pur.

Dans ce qui suit, les solutions données par le modèle hyperélastique proposé sont déterminées pour ces deux essais : l'expression du tenseur de Piola Kirchhoff 2 est donnée pour chacun

des deux essais. Les forces appliquées lors des essais sont déterminées et reliées aux composantes du tenseur de Piola Kirchhoff 2 dans l'orientation initiale.

5.3.1.1 Test de traction simple

Dans cette essai, le tissu est orienté à $0^\circ/90^\circ$ par rapport à la base globale $\{\underline{G}\}$ (figure 5.2). L'élongation des mèches dans la direction perpendiculaire à la direction de traction est unitaire ($\lambda = 1$). Les mèches des directions chaîne et trame restent perpendiculaires pendant tout l'essai ($\cos \theta = 0$). L'essai de traction simple effectué dans une direction des mèches, permet de déterminer les constantes matériau présentent dans le potentiel de tension (§ 4.4.2) en rapport avec cette direction. La force appliquée sur la machine de traction est reliée à une seule composante du second tenseur de Piola Kirchhoff. Cette relation est établie dans ce qui suit.

- **Sollicitation**

Le tenseur gradient de la transformation dans la base globale $\{\underline{G}\}$ est :

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix}_{\{\underline{G}\}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

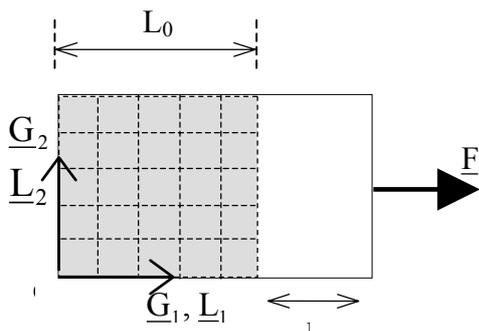
$$J = \lambda_1$$


Figure 5. 2 : Essai de traction uniaxiale, orientation initiale des fibres à $0^\circ/90^\circ$

L'élongation des mèches dans la direction de \underline{G}_1 est : $\lambda_1 = \frac{L_0 + u}{L_0}$

- **Loi hyperélastique**

Les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale $\{\underline{L}\}$ qui coïncide ici avec la base globale $\{\underline{G}\}$, données par le modèle hyperélastique proposé sont (§4.3.2.2.2) :

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_1} \quad S_{12} = S_{22} = 0 \quad (5.20)$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy dans la base globale $\{\underline{G}\}$ s'exprime en fonction du second tenseur de Piola Kirchhoff, en projetant dans la base globale la relation (4.33):

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{F}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{F}}]_{\{G\}}^T \quad (5.21)$$

Ses composantes sont :

$$\sigma_{11} = \lambda_1 S_{11} \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$$

- **Force appliquée sur la machine**

La force appliquée sur la machine est reliée au tenseur de contraintes de Cauchy dans la configuration actuelle par :

$$\{\underline{F}_1\}_{\{G\}} = [\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} \{\underline{G}_1\}_{\{G\}} L \quad \text{soit} \quad \{\underline{F}_1\}_{\{G\}} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 S^{11} \\ S^{21} \end{array} \right\} L$$

En considérant $L = L_0$, la force d'extension sur la machine est égale à :

$$F_1 = \lambda_1 S_{11} L_0 \quad (5.22)$$

5.3.1.2 Test de cisaillement Pur

Cet essai permet de déterminer les constantes matériau présentent dans le troisième terme du potentiel, le potentiel de cisaillement (§ 4.4.2). Le tissu est orienté à $\pm 45^\circ$ par rapport à la base globale $\{\underline{G}\}$, cet essai élémentaire est caractérisé par les élongations unitaires des mèches ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). La force verticale appliquée sur le cadre de cisaillement pur est reliée à la composante S_{12} du second tenseur de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale. Dans ce qui suit, cette relation est déterminée.

- **La sollicitation**

Le tenseur gradient de la transformation dans la base globale $\{\underline{G}\}$ est :

$$[\underline{\underline{F}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$J = f_1 f_2$$

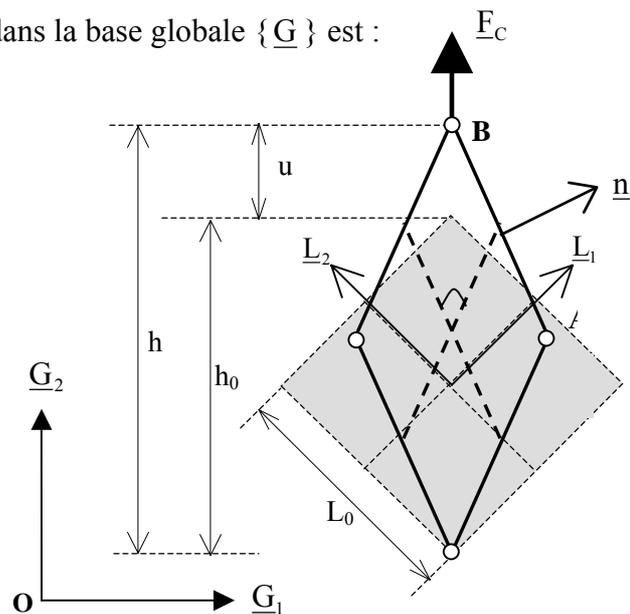


Figure 5. 3 : Essai de cisaillement pur, orientation initiale des fibres à $\pm 45^\circ$

Avec :

$$f_1 = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad f_2 = \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (5.23)$$

$$f_1 = \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{et} \quad f_2 = \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \quad (5.24)$$

Où θ est l'angle entre les mèches et γ l'angle de glissement des réseaux de mèches.

- **La loi hyperélastique**

Le second tenseur de Piola Kirchhoff donné par le modèle hyperélastique proposé, a pour expression dans l'orientation initiale (§ 4.6.2.1) :

$$[\underline{\underline{S}}]_{\{L\}} = \begin{bmatrix} -S_{12} \cos \theta & S_{12} \\ S_{12} & -S_{12} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Avec
$$S_{12} = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta}$$

L'orientation initiale est tournée de $\theta_0 = +45^\circ$ par rapport à la base globale $\{\underline{G}\}$. Ainsi le second tenseur de Piola Kirchhoff en base globale est obtenu par :

$$[\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{O}}]_{\{L\}}^T [\underline{\underline{S}}]_{\{L\}} [\underline{\underline{O}}]_{\{L\}} \quad \text{avec} \quad [\underline{\underline{O}}]_{\{L\}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Où $\underline{\underline{O}}$ est le tenseur de rotation défini par l'équation (5.14).

L'expression du tenseur $\underline{\underline{S}}$ après calcul est :

$$[\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} -S_{12}(1 + \cos \theta) & 0 \\ 0 & S_{12}(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy dans la base globale $\{\underline{G}\}$ est donné par l'expression suivante (équation (4.33)) :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \frac{1}{J} [\underline{\underline{F}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{S}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{F}}]_{\{G\}}^T$$

Ses composantes, après calcul et simplification, sont données par :

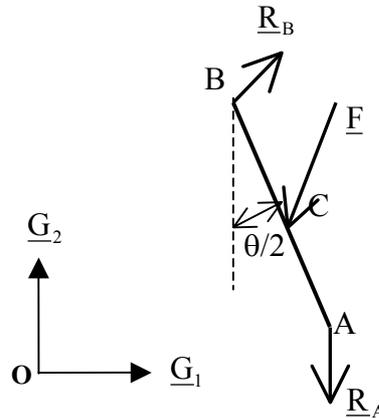
$$\sigma_{11} = -\frac{f_1}{f_2}(1 + \cos \theta)S_{12} \quad \sigma_{22} = \frac{f_2}{f_1}(1 - \cos \theta)S_{12} \quad \sigma_{12} = 0 \quad (5.27)$$

- **La force verticale d'extension du cadre**

La force verticale \underline{F}_c d'extension du cadre (figure 5.3) a pour expression :

$$F_c = F_2 - \cotg \frac{\theta}{2} F_1 \quad (5.28)$$

Elle s'obtient en considérant l'équilibre de la barre AB.



\underline{R}_A est verticale par symétrie. On note les composantes \underline{R}_B et \underline{F} dans la base $\{\underline{G}\}$ par :

$$\{\underline{R}_B\}_{\{G\}} = \begin{Bmatrix} R_{1B} \\ R_{2B} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\underline{F}\}_{\{G\}} = - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

La barre AB étant en équilibre, la résultante des actions mécaniques extérieures est nulle :

$$\underline{F} + \underline{R}_A + \underline{R}_B = \underline{0}$$

Sa projection horizontale selon \underline{G}_1 est :

$$-F_1 + R_{A1} = 0 \quad \text{donc} \quad F_1 = R_{A1} \quad (5.29)$$

De même, le moment résultant des forces appliquées sur la barre AB par rapport au point A est nul :

$$\underline{AB} \wedge \underline{R}_B + \underline{AC} \wedge \underline{F} = \underline{0}$$

Sa projection dans la base $\{\underline{G}\}$ donne l'équation suivant :

$$\frac{L_0}{2} \cos \frac{\theta}{2} F_1 + \frac{L_0}{2} \sin \frac{\theta}{2} F_2 - L_0 \cos \frac{\theta}{2} R_{B1} - L_0 \sin \frac{\theta}{2} R_{B2} = 0$$

où L_0 est la longueur de la barre AB.

En simplifiant par $\frac{L_0}{2} \sin \frac{\theta}{2}$, l'équation précédente donne :

$$\cotg \frac{\theta}{2} F_1 + F_2 + 2 \cotg \frac{\theta}{2} R_1 - 2R_2 = 0 \quad (5.30)$$

En remplaçant l'équation (5.29) dans l'équation(5.30), nous avons :

$$F_2 - \cotg \frac{\theta}{2} F_1 - 2R_2 = 0$$

La force \underline{F}_c exercée sur le cadre de cisaillement pur est donnée, compte tenu de la symétrie du cadre, par :

$$F_c = 2R_2 = F_2 - \cotg \frac{\theta}{2} F_1$$

Cette équation, s'appliquerait aussi bien aux tissus équilibrés que déséquilibrés, car dans l'essai de cisaillement pur, F_1 et F_2 ne dépendent que de la composante S_{12} du second tenseur de Piola Kirchhoff, qui elle-même ne dépend que du cosinus de l'angle entre les deux réseaux de mèches.

\underline{F} représente l'action du tissu sur le côté AB du cadre de cisaillement pur, de normale \underline{n} (figure 5.3). Cette force est reliée au tenseur de contraintes de Cauchy par la relation suivante :

$$\{\underline{F}\}_{\{G\}} = [\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} \{\underline{n}\}_{\{G\}} L \quad \text{et} \quad \{\underline{n}\}_{\{G\}} = \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Dans ce test, $L = L_0$. En combinant les équations (5.27) et (5.31), nous avons :

$$\{\underline{F}\}_{\{G\}} = \begin{Bmatrix} -S_{12} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) L_0 \\ S_{12} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) L_0 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Ainsi, la force \underline{F}_c d'extension du cadre s'obtient en combinant les équations (5.23), (5.28) et (5.32), son expression est :

$$F_c = \sqrt{2} L_0 f_2 S_{12} \quad (5.33)$$

En effet, en remplaçant (5.32) dans (5.28), nous avons :

$$F_c = S_{12} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) L_0 + \cotg \frac{\theta}{2} S_{12} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) L_0$$

Qui donne après simplification :

$$F_c = 2 \cos \frac{\theta}{2} L_0 S_{12}$$

Mais $f_2 = \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}$ (d'après l'équation (5.23)), d'où l'équation (5.33).

5.3.2 Fonctions objectives d'identification des paramètres matériau

L'identification des paramètres matériau inclus dans le modèle hyperélastique nécessite la minimisation des écarts entre les données expérimentales et théoriques. En raison des hypothèses sur le potentiel proposé, la force appliquée dans chaque essai d'identification retenu est reliée à une seule composante du second tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff dans l'orientation initiale. Ainsi trois fonctions sont minimisées, elles sont construites sur les contraintes de Piola Kirchhoff 2. Chaque fonction fait intervenir les composantes de deux vecteurs de données issus de l'essai considéré : les vecteurs de données théoriques et expérimentales. Les fonctions sont :

$$R_1(\underline{S}_1, \bar{\underline{S}}_1) = \sum_{i=1}^{n_1} (S_{1i}(\bar{\lambda}_{1i}) - \bar{S}_{1i})^2 \quad (5.34)$$

$$R_2(\underline{S}_2, \bar{\underline{S}}_2) = \sum_{i=1}^{n_2} (S_{2i}(\bar{\lambda}_{2i}) - \bar{S}_{2i})^2 \quad (5.35)$$

$$R_c(\underline{S}_c, \bar{\underline{S}}_c) = \sum_{i=1}^{n_3} (S_{ci} - \bar{S}_{ci})^2 \quad (5.36)$$

Les deux premières fonctions représentent les écarts des données issues d'un essai de traction des mèches des directions chaîne et trame et la troisième fonction ceux issus d'un essai de cisaillement pur. n_1 , n_2 et n_3 sont respectivement le nombre de valeurs expérimentales des trois essais d'identification, \underline{S}_1 , \underline{S}_2 et \underline{S}_c sont les vecteurs de données théoriques et $\bar{\underline{S}}_1$, $\bar{\underline{S}}_2$ et $\bar{\underline{S}}_c$ les vecteurs de données expérimentales des essais de traction dans les directions chaîne et trame et de l'essai de cisaillement pur. La barre fait référence aux valeurs expérimentales. \bar{S}_1 , \bar{S}_2 et \bar{S}_c sont déduits des forces appliquées lors des différents tests considérés, ils sont déduits des expressions (5.22) et (5.33), leurs composantes sont :

$$\bar{S}_{1i} = \frac{\bar{F}_{1i}}{\lambda_{1i} L_0} \quad (i = 1, n_1) \quad (5.37)$$

$$\bar{S}_{2i} = \frac{\bar{F}_{2i}}{\lambda_{2i} L_0} \quad (i = 1, n_2) \quad (5.38)$$

$$\bar{S}_{ci} = \frac{\bar{F}_{ci}}{\sqrt{2} L_0 f_{2i}} \quad (i = 1, n_3) \quad (5.39)$$

La minimisation des fonctions précédentes permettant d'ajuster le mieux possible des résultats du modèle aux données expérimentales a été réalisée par la méthode des moindres carrés sous Matlab. Les résultats de cet ajustement sont présentés ci-dessous pour chaque matériau utilisé dans les simulations numériques.

5.3.3 Caractéristiques mécaniques des renforts tissés utilisés

Deux types de renforts tissés ont été utilisés, le taffetas de verre équilibré et le sergé 2×2 de carbone très déséquilibré. Afin de simplifier la désignation des tissus, on les référence par les codes internes T6 et C4 respectivement. Pour le T6, plusieurs courbes de traction existent, elles dépendent du rapport de biaxialité ([BUE98]). En raison de l'hypothèse sur le potentiel ne prenant pas en compte l'effet du tissage, un essai de traction sur la mèche seule est considéré. Dans le cas du tissu très déséquilibré, on retient les essais de traction libres (mèches libres dans l'autre direction), car ce sont les seules données existantes.

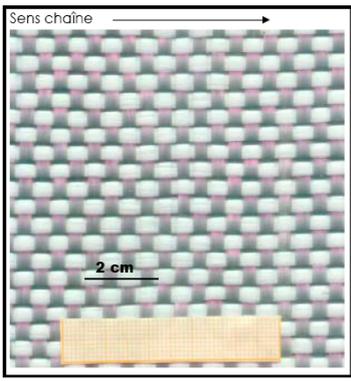
Les données expérimentales nécessaires pour l'identification sont les courbes expérimentales : force-déformation pour ce qui est de la sollicitation de traction et force-angle de cisaillement entre les mèches dans le cas du cisaillement plan.

Dans ce qui suit, le potentiel utilisé est celui proposé en fonction des invariants de type 2, c'est-à-dire les elongations des mèches et le cosinus de l'angle entre les mèches, soit le potentiel donné par l'équation (4.53).

5.3.3.1 Taffetas de verre équilibré T6

Le T6 est relativement équilibré, il peut être considéré comme tel dans les modélisations. Deux tests sont alors suffisants pour identifier les constantes du modèle, un test de traction dans une direction des mèches et un test de cisaillement pur. Ses caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 5.1 : Caractéristiques mécaniques du tissu T6

Caractéristiques mécaniques		
Rigidité sens chaîne (N)	37000	
Rigidité sens trame (N)	38000	
Densités de mèches (mèches /mm)	0.22	
Epaisseur (mm)	1.1	

- *Interpolation de la traction*

Dans le cas de la traction, les courbes expérimentales ([BUE98]) illustrent le caractère biaxial de la traction dans le tissé dû aux ondulations naturelles de ce dernier. Le modèle que nous

proposons, considère que les tensions dans les deux réseaux de mèches sont découplées. A priori, prendre la courbe de traction de la mèche seule paraît être raisonnable ce qui revient à négliger complètement l'effet du tissage. Néanmoins, il est possible de considérer d'autres courbes : la courbe de traction du tissé avec les mèches libres dans l'autre direction, ce qui revient à exagérer l'effet du tissage, ou la courbe de traction équibiaxée (les déformations dans les directions chaîne et trame sont les mêmes), un cas intermédiaire entre les deux précédents. Dans cette étude, nous considérons le comportement en traction des mèches seules.

Le comportement de la mèche de verre seule est caractérisé par une phase non linéaire suivie par une phase linéaire ([BUE98]). De la courbe expérimentale tension-déformation de la mèche est déterminée la courbe expérimentale force-élongation en considérant un échantillon de taille L_0 et la densité de mèches du taffetas de verre. L'équation (5.22) permet d'établir les courbes expérimentales $S_{ii}-\lambda_i$ exprimant la composante du tenseur de Piola Kirchhoff 2 dans la direction i des mèches en fonction de l'élongation de celles-ci. Un polynôme de degré 3 est utilisé pour interpoler la courbe $S_{ii}-\lambda_i$. Nous rappelons les expressions des composantes S_{11} et S_{22} obtenues par le modèle hyperélastique proposé et données par les équations (4.60) et (4.61) (dans ce cas $\cos\theta = 0$), soit :

$$S_{11} = \sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha} \lambda_1^{\alpha} , \quad S_{22} = \sum_{\alpha=0}^m b_{\alpha} \lambda_2^{\alpha} \quad (5.40)$$

Avec $\sum_{\alpha=0}^m a_{\alpha} = 0$ et $\sum_{\alpha=0}^m b_{\alpha} = 0$

Le tissu T6 étant équilibré, les constantes a_{α} et b_{α} sont égales. Les constantes matériau obtenues sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5.2 : Les paramètres matériaux pour le potentiels de traction (cas du T6).

a_0 [kPa]	a_1 [kPa]	a_2 [kPa]	a_3 [kPa]
-14.495	23.482	-10.818	1.831

L'élongation des mèches du T6 étant très faible, la $S_{ii}-\varepsilon_i$ est représentée où ε_i est la déformation en %.

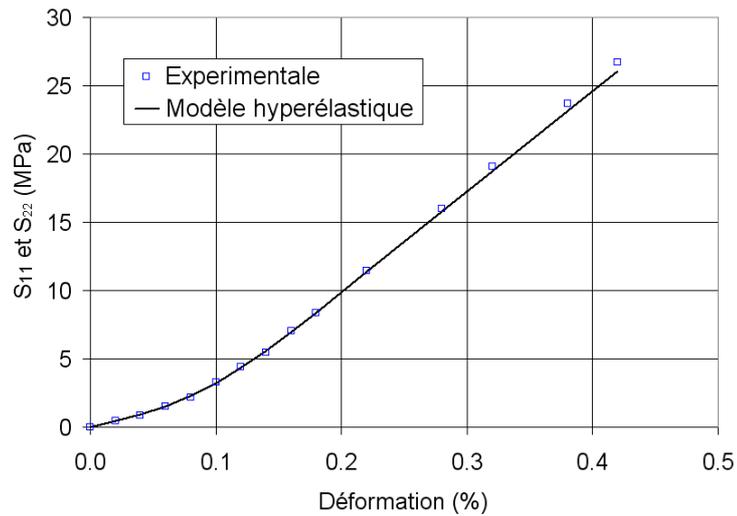


Figure 5. 4 : Composantes de Piola Kirchhoff 2 expérimentales et données par le modèles (S_{11} sens chaîne et S_{22} sens trame) dans l'orientation initiale en fonction des déformations

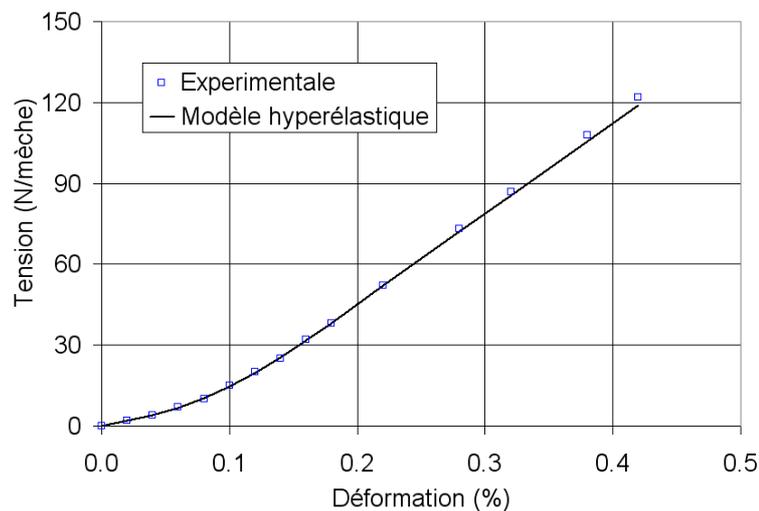


Figure 5. 5 : Courbe tension dans les mèches en fonction des déformations expérimentale ([BUE98]) et obtenue avec le modèle hyperélastique

- **Interpolation du cisaillement**

La courbe expérimentale $S_{12}-\cos\theta$ obtenue à partir de l'essai de cisaillement plan ([DUM03]) a été interpolée par un polynôme de degré 9 en cosinus de l'angle entre les mèches. Nous rappelons l'expression obtenue par le modèle hyperélastique proposé, donnée par l'équation (4.62) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, soit :

$$S_{12} = \sum_{\gamma=1}^p c_{\gamma} \cos^{\gamma}\theta \quad (5.41)$$

Les constantes matériau obtenues sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5.3 : Les paramètres matériaux pour le potentiel de cisaillement (cas du T6).

c_1 [kPa]	c_2 [kPa]	c_3 [kPa]	c_4 [kPa]	c_5 [kPa]	c_6 [kPa]	c_7 [kPa]	c_8 [kPa]	c_9 [kPa]
0.00045	-0.00801	95.314	-0.605	2.177	-4.593	5.637	-3.722	1.023

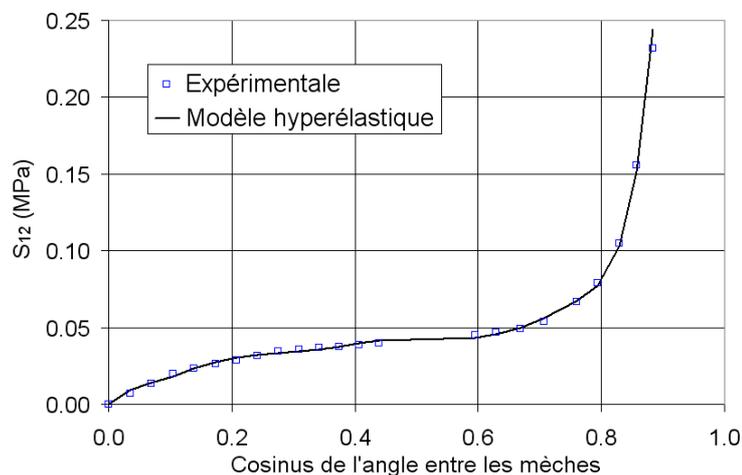


Figure 5. 6 : Composante S_{12} de Piola Kirchhoff 2 expérimentale et donnée par le modèle dans l'orientation initiale en fonction de cosinus de l'angle entre les mèches

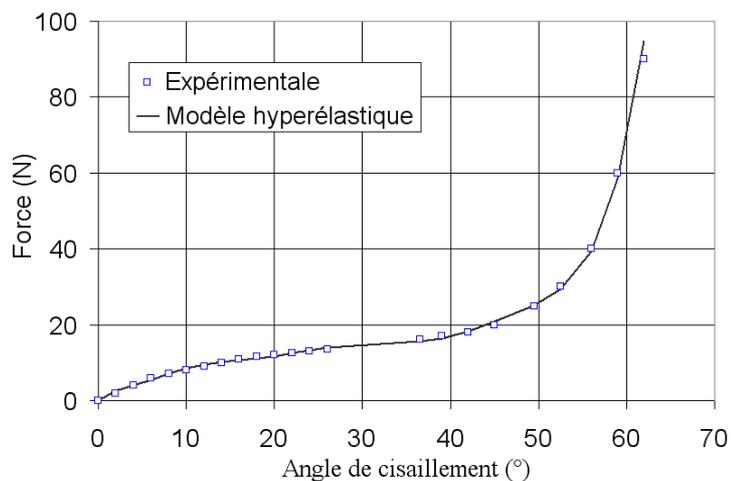


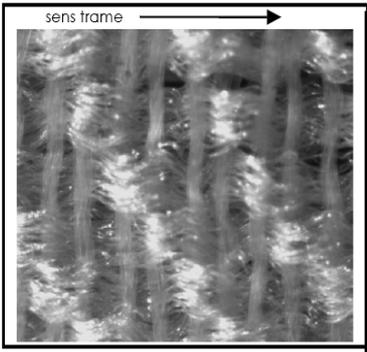
Figure 5. 7. : Courbe force – angle de cisaillement expérimentale ([DUM03]) et obtenue par le modèle hyperélastique

5.3.3.2 Sergé 2x2 de carbone très déséquilibré C4

Le tissu C4 possède des rigidités très faibles dans les directions chaîne et trame, il est très déséquilibré, le rapport des rigidités est d'environ 250. Ses caractéristiques mécaniques sont résumées ici :

Tableau 5.4 : Caractéristiques mécanique du tissu C4

Caractéristiques mécaniques	
Rigidité sens chaîne (N)	50
Rigidité sens trame (N)	0.2
Densités de mèches (mèches /mm)	2.85
Epaisseur (mm)	1.1



- **Interpolation de la traction**

Dans le cas de la traction du tissu C4, les seules courbes expérimentales existantes sont les courbes des tractions uniaxiales ([DUM03]). Dans ce qui suit, ces courbes expérimentales sont interpolées.

Les données expérimentales des composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff sont interpolées par un polynôme de degré 5 en λ , l'élongation des mèches. Les expressions des composantes interpolées S_{11} et S_{22} sont rappelées dans l'équation (5.40).

Tableau 5.5 : Les paramètres matériaux pour les potentiels de traction sens chaîne (cas du C4)

a_0 [kPa]	a_1 [kPa]	a_2 [kPa]	a_3 [kPa]	a_4 [kPa]	a_5 [kPa]
-37.594	175.216	-326.367	303.680	-141.163	26.228

Tableau 5.6 : Les paramètres matériaux pour les potentiels de traction sens trame (cas du C4).

b_0 [Pa]	b_1 [Pa]	b_2 [Pa]	b_3 [Pa]	b_4 [Pa]	b_5 [Pa]
0.0428	-0.1443	0.1597	-0.0568	0.0098	-0.0112

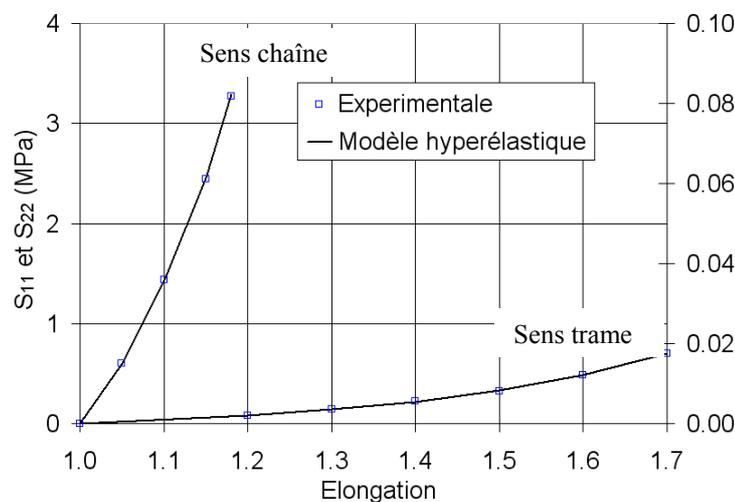


Figure 5. 8 : Composantes de Piola Kirchhoff 2 (S_{11} sens chaîne, S_{22} sens trame) expérimentales et données par le modèle dans l'orientation initiale en fonction des élongations

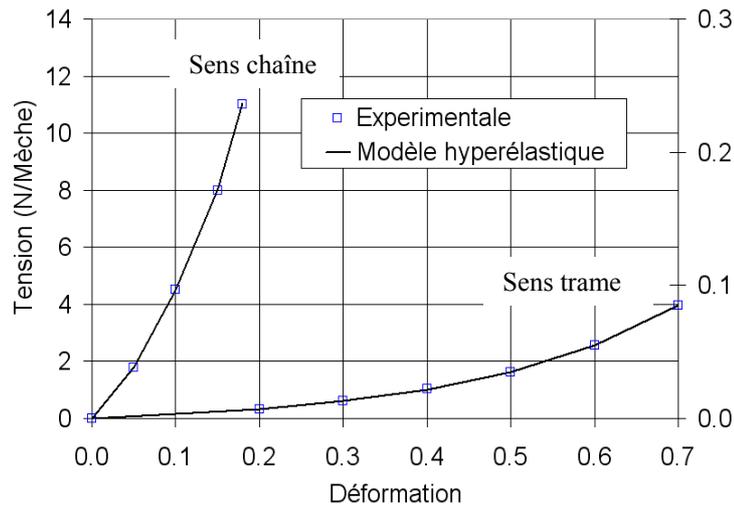


Figure 5. 9 : Courbe tension dans les mèches en fonction de la déformation Expérimentale ([DUM03]) et obtenue par le modèle hyperélastique

- **Interpolation du cisaillement**

Dans le cas du cisaillement du C4, les données expérimentales sont la courbe couple élémentaire en fonction de l'angle de glissement ([DUM03]). De cette courbe est extraite la force appliquée sur le cadre de cisaillement plan en utilisant la formule suivante ([ZOU06]) :

$$C(\gamma) = \frac{L_0}{N_t N_c} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) F_C$$

L'expression de la force appliquée sur le cadre est donnée par l'équation suivante, en prenant en compte l'équation (5.24) :

$$F_C = \sqrt{2} \frac{1}{f_1} \frac{N_t N_c}{L_0} C(\gamma) \quad (5.42)$$

N_t et N_c représentent le nombre de mèches dans les directions trame et chaîne respectivement.

Enfin la composante S_{12} du second tenseur de Piola Kirchhoff est obtenue en utilisant les équations (5.42) et (5.33).

La composante S_{12} a été interpolée par un polynôme de degré 9 en cosinus de l'angle entre les mèches. Les constantes d'ajustement sont données dans le tableau suivant :

Tableau 5.7 : Les paramètres matériaux pour le potentiel de cisaillement (cas du C4).

c_1 [kPa]	c_2 [kPa]	c_3 [kPa]	c_4 [kPa]	c_5 [kPa]	c_6 [kPa]	c_7 [kPa]	c_8 [kPa]	c_9 [kPa]
0.002	-0.044	0.5089	-3.142	11.129	-24.260	30.777	-21.253	6.163

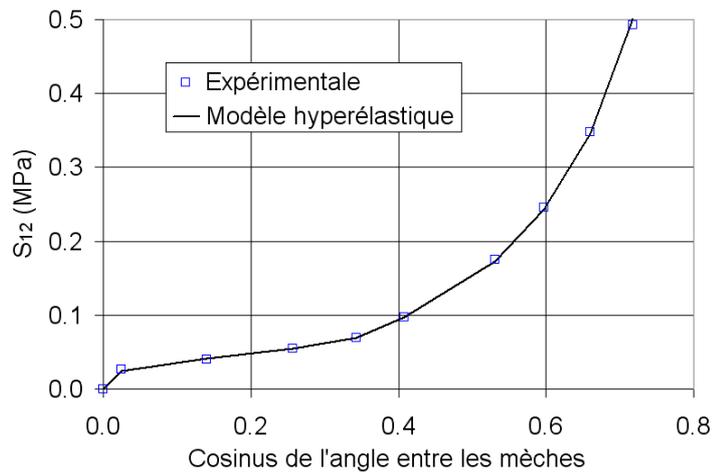


Figure 5. 10 : La composante S_{12} de Piola Kirchhoff 2 expérimentale et donnée par le modèle dans l'orientation initiale en fonction de cosinus de l'angle entre les mèches.

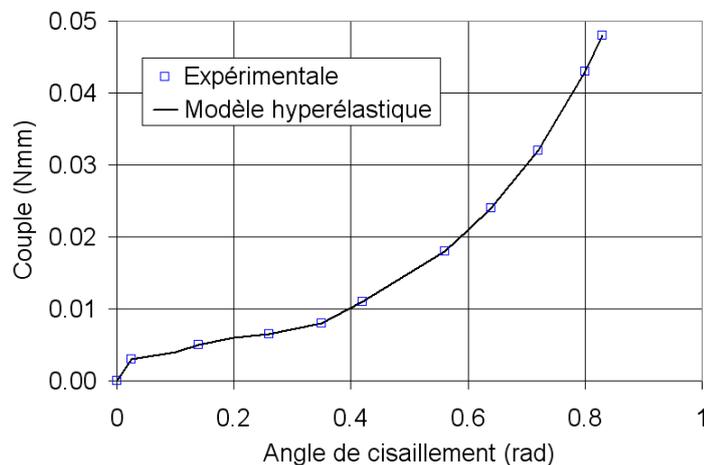


Figure 5.11 : Courbe couple-angle de cisaillement expérimentale ([DUM03]) et obtenue avec le modèle hyperélastique

5.4 Tests de vérification du modèle

A partir des valeurs matériau identifiées dans le paragraphe précédent (§ 5.3), des tests de validation sont effectués dans le but de montrer les résultats du modèle en comparaison avec certains tests de référence. Deux types de tests de références en grande transformation ont été effectués : des tests élémentaires sur un échantillon de tissu et un test d'emboutissage sur un dôme hémisphérique pour simuler une opération de formage.

5.4.1 Tests élémentaires de vérification

Les tests élémentaires sont : les tests de cisaillement simple et pur (pour des aspects complémentaires d'identification) ainsi qu'un test cisaillement simple - extension le long

d'un chemin fermé et un test d'extension - cisaillement simple en considérant un seul réseau de fibres. Le modèle a été testé pour différentes densités de maillage (1, 4, 9, 25 et 100 éléments), pour différentes orientations initiales des mèches ($0^\circ/90^\circ$ et $\pm 45^\circ$) et pour différents types d'éléments finis, les éléments de membranes quadrangulaires M3D4R et triangulaires M3D3R réguliers et non réguliers. Les résultats du modèle hyperélastique proposé ont été comparés avec des solutions de référence. Les critères mis en place sont quantitatifs relatifs aux grandeurs cinématiques (angles, déplacement) et statiques (forces, contraintes).

Dans ce qui suit, la sensibilité de la solution à la densité de maillage et à l'orientation initiale des mèches est analysée pour les différents tests cités, réalisés sur un échantillon de tissé (1000×1000) mm². Le comportement de la mèche seule en tension a été considéré.

5.4.1.1 Test de cisaillement pur

Bien que le test de cisaillement pur soit un test d'identification, il fait également partie des tests de validation. L'objectif est de comparer les réactions sur les bords du cadre dans le cas de la loi de comportement proposée obtenue avec les invariants de type 1 et 2 (§ 4.3.1 et § 4.3.2) et la loi de comportement non pertinente pour les tissés obtenue avec les invariants de type 3 (§ 4.5).

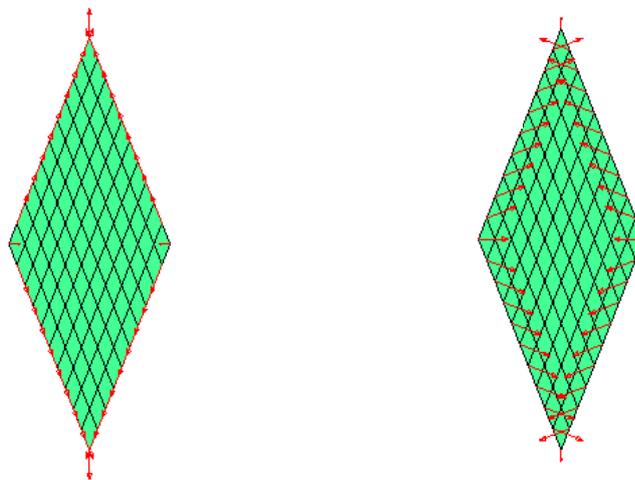


Figure 5. 12. Répartition des réactions sur le côté du cadre de cisaillement pur à $\pm 45^\circ$ avec le modèle non pertinent (à gauche) et le modèle proposé (à droite)

La figure 5. 12 compare les réactions obtenues sur les côtés du cadre de cisaillement pur dans le cas des lois de comportement obtenues avec les invariants de types 1 et 2 et de type 3. Elle montre que le potentiel proposé engendre des réactions perpendiculaires aux directions des mèches induisant ainsi des tensions nulles dans les mèches. Par conséquent, le modèle permet de retrouver un aspect de comportement spécifique au tissé. D'autre part, le modèle obtenu avec les invariants de type 3 conduit à une loi de comportement qui engendre des réactions

orientées le long des bords. Celui-ci est non satisfaisant car il induit des tensions dans les mèches, ce qui ne correspond pas à la physique des tissés. Ces exemples illustrent l'importance du choix du jeu d'invariants pour l'écriture du potentiel.

5.4.1.2 Test de cisaillement simple

$$[\underline{\mathbf{F}}]_{\{\underline{\mathbf{G}}\}} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec $a = u / L_0$

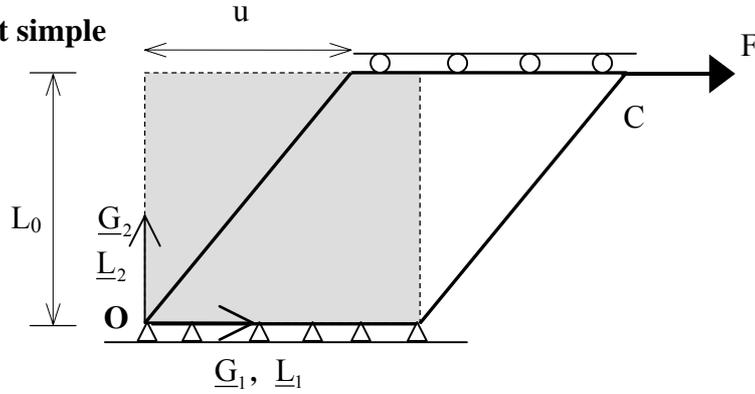


Figure 5. 13. Cisaillement simple d'un renfort tissé carré

Les composantes du second tenseur de Piola Kirchhoff données, dans l'orientation initiale $\{\underline{\mathbf{L}}\}$, par le modèle hyperélastique proposé sont :

$$S_{11} = \cos \theta \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad S_{22} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_2} - \frac{\cos \theta}{\lambda_2^2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad S_{12} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \cos \theta} \quad (5.43)$$

Les composantes du tenseur de contraintes de Cauchy dans la base globale $\{\underline{\mathbf{G}}\}$ sont données en fonction des composantes du second tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff par :

$$\sigma_{11} = S_{11} + a S_{12} + a(S_{12} + a S_{22}) \quad ; \quad \sigma_{22} = S_{22} \quad ; \quad \sigma_{12} = S_{12} + a S_{22} \quad (5.44)$$

Pour une orientation initiale à $0^\circ/90^\circ$ et :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{S_{11} + S_{22}}{2} (a+1)^2 + (a^2 - 1) S_{12} \\ \sigma_{22} &= \frac{S_{11} + S_{22}}{2} + S_{12} \\ \sigma_{11} &= \frac{S_{11}}{2} (a+1) + \frac{S_{22}}{2} (a-1) + a S_{12} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Pour une orientation initiale à $\pm 45^\circ$

- **Orientation initiale 0°/90°**

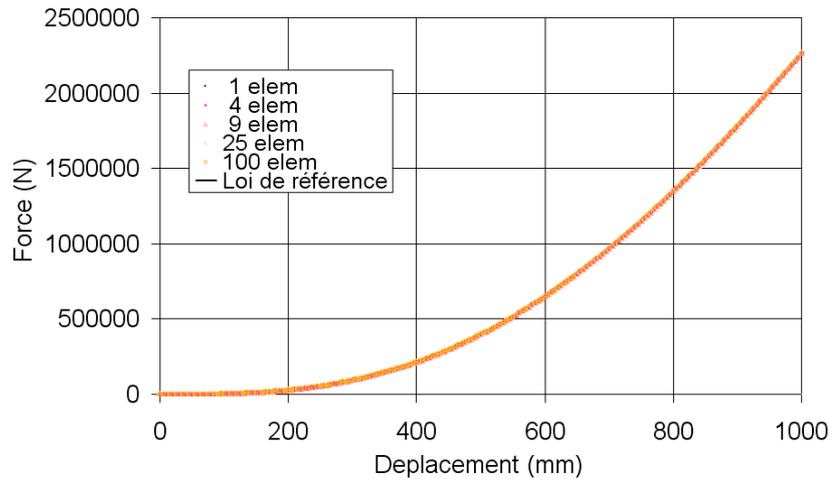


Figure 5. 14 : Résultante F en fonction du déplacement du point C

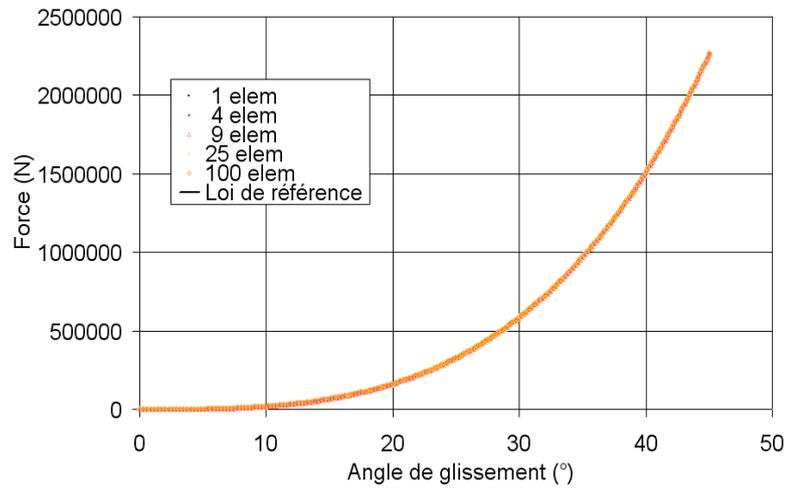


Figure 5. 15 : Résultante F en fonction de l'angle de glissement des mèches

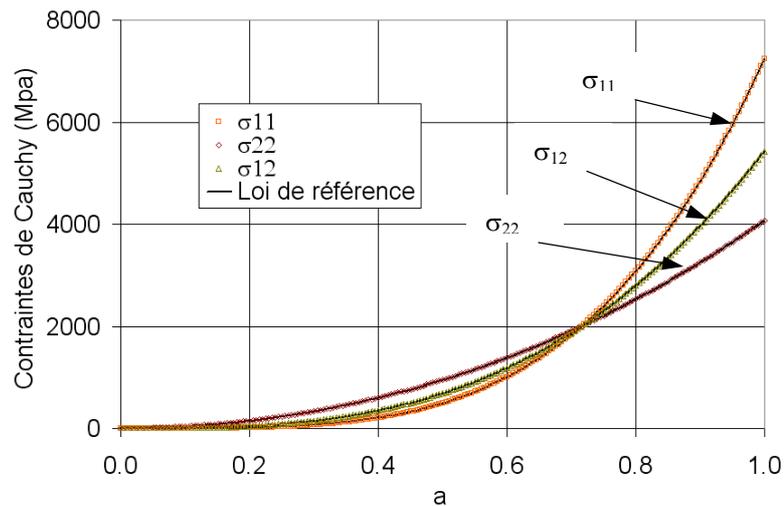


Figure 5. 16 : Contraintes de Cauchy en fonction de a

- *Orientation initiale $\pm 45^\circ$*

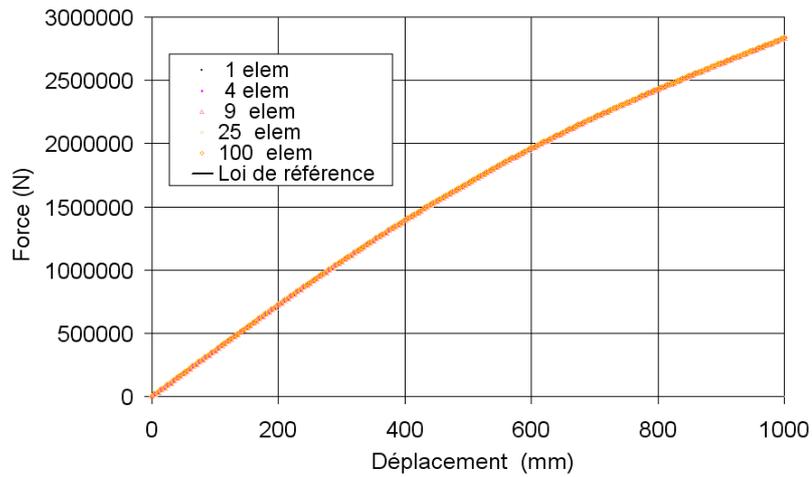


Figure 5. 17 : Résultante F en fonction du déplacement du point C

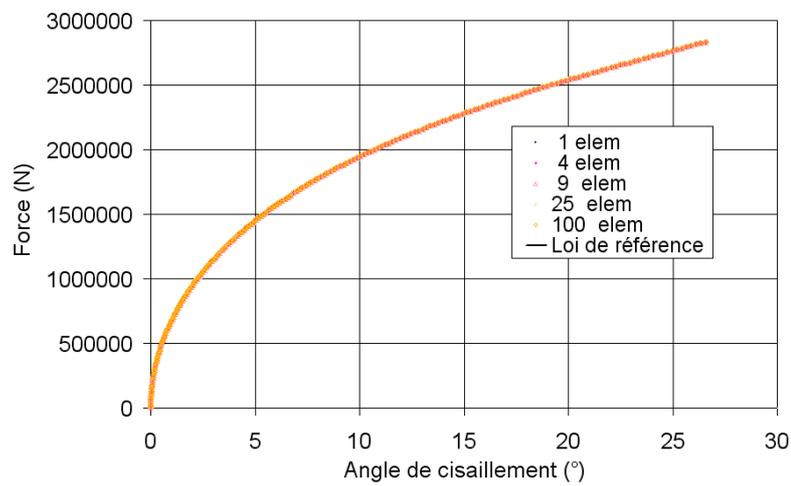


Figure 5. 18 : Résultante F de l'angle de glissement des mèches

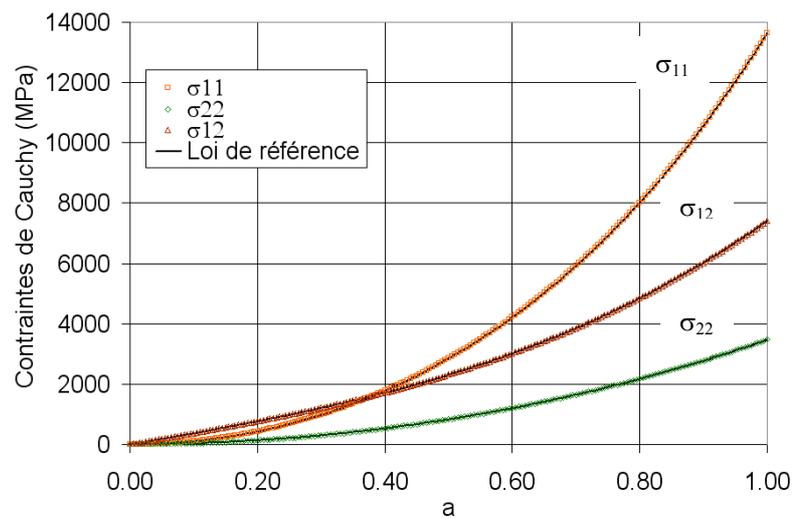


Figure 5. 19 . Contraintes de Cauchy en fonction de a

Les figures 5.14 et 5.17 illustrent les variations de la résultante F des composantes horizontales des réactions sur le côté supérieur du renfort en fonction du déplacement du point C. De même les figures 5.15 et 5.18 montrent les variations de la force F en fonction de l'angle de cisaillement des mèches et ce pour une orientation initiale des mèches de $0^\circ/90^\circ$ et $\pm 45^\circ$ respectivement. Les résultats numériques obtenus pour différentes densités de maillage (1, 4, 9, 16 et 100 éléments) sont identiques et sont en accord avec la loi de référence.

Les figures 5.16 et 5.19 montrent les variations des contraintes de Cauchy en base globale en fonction du paramètre a pour une orientation initiale de $0^\circ/90^\circ$ et $\pm 45^\circ$ respectivement. Les résultats de calculs analytique et numérique donnés par le modèle sont superposés.

5.4.1.3 Test d'extension - cisaillement simple

Un test de cisaillement simple - extension est réalisé sur un échantillon à un seul réseau de fibres orienté à 0° . La rigidité de cisaillement est nulle.

La sollicitation

$$[\underline{F}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

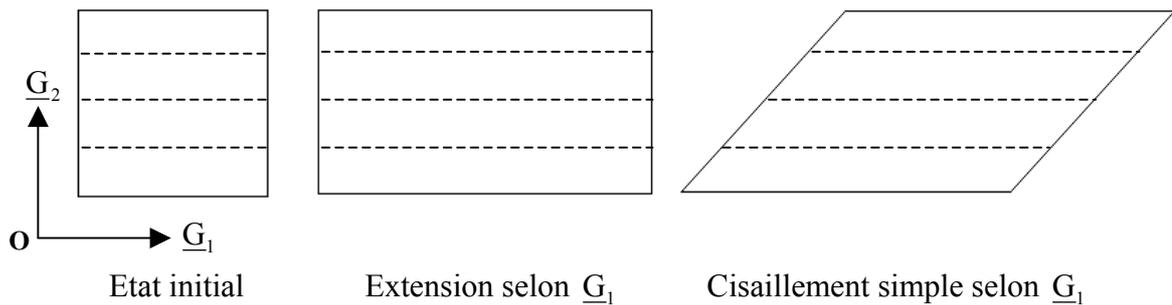


Figure 5. 20 : Phase du test d'extension - cisaillement simple

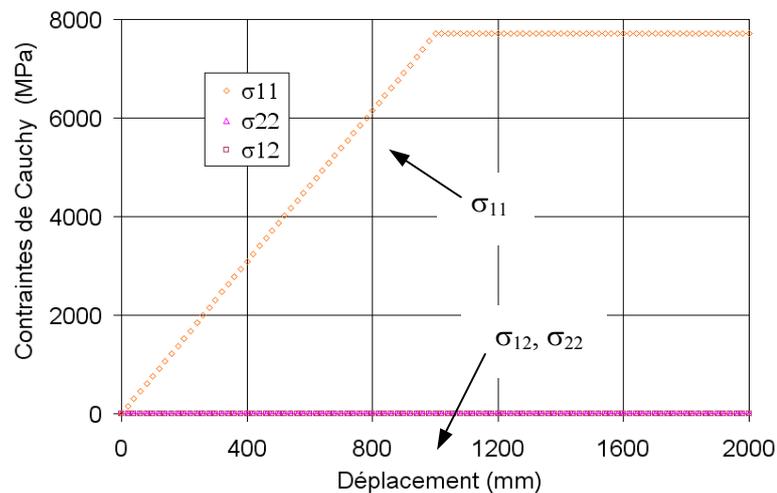


Figure 5. 21 . Contraintes de Cauchy en base globale en fonction du déplacement

Dans le test d'extension - cisaillement simple (figure 5.20), la seule composante non nulle du tenseur de contraintes de Cauchy en base globale est σ_{11} (figure 5.21). Ceci est prévisible en raison des conditions du test correspondant à un seul réseau de mèches orienté à 0° selon \underline{G}_1 et la rigidité en cisaillement nulle (voir les équations (5.44)). De plus la courbe de la contrainte de Cauchy σ_{11} en fonction du déplacement est linéaire dans la phase d'extension, puis constante dans la phase de cisaillement simple. Ce résultat est physique, car la déformation des mèches initialement nulle avant l'essai, augmente pendant la phase d'extension. Dans la seconde phase, la contrainte σ_{11} reste constante car d'une part les fibres ont la même élongation qui correspond à celle acquise à la fin de la première phase de la sollicitation, et d'autre part, il n'y a qu'un seul réseau de fibres à 0° et la rigidité au cisaillement est nulle.

Ce test n'est pas correctement décrit par les modèles hypoélastiques.

5.4.1.4 Cycle fermé de sollicitation cisaillement simple - extension

On considère dans ce qui suit un chemin de déformation fermé appliqué sur un échantillon de tissu carré. Le chargement consiste en 4 phases caractérisées par l'évolution temporelle indiquée sur la figure (5.22)

La sollicitation
$$\begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{=}\underline{=} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Deux chemins sont considérés : la boucle (0, 1, 2, 3, 4) dont l'évolution est indiquée sur la figure 5.22. Elle correspond à la sollicitation CS-E-CS-E (CS indique le cisaillement simple et E fait référence à l'extension) et le chemin (0, 1, 2, 1, 0) caractérisé par un aller au point 2 et un retour à la position initiale en empruntant le même chemin. Ce dernier correspond à la sollicitation CS-E-E-CS.

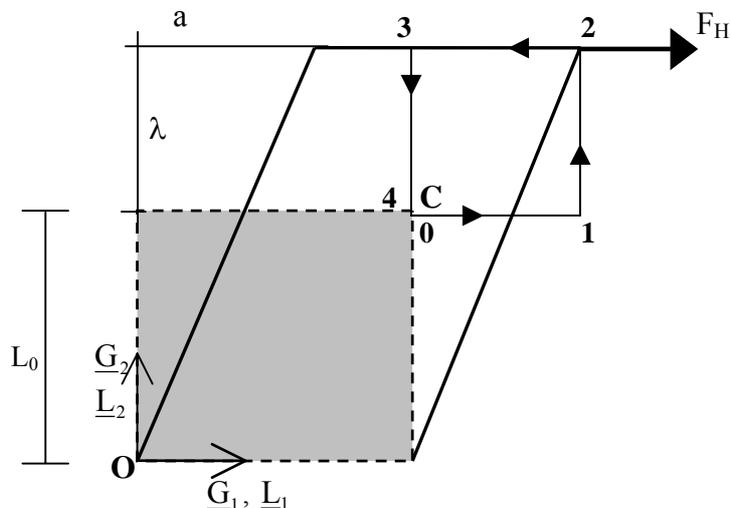


Figure 5. 22 : Essai de cisaillement simple – extension (chemin fermé)

Le test de cisaillement simple - extension a été réalisé sur différents types de maillages, des quadrangles et des triangles, soit les éléments M4D3R et M3D3R respectivement :

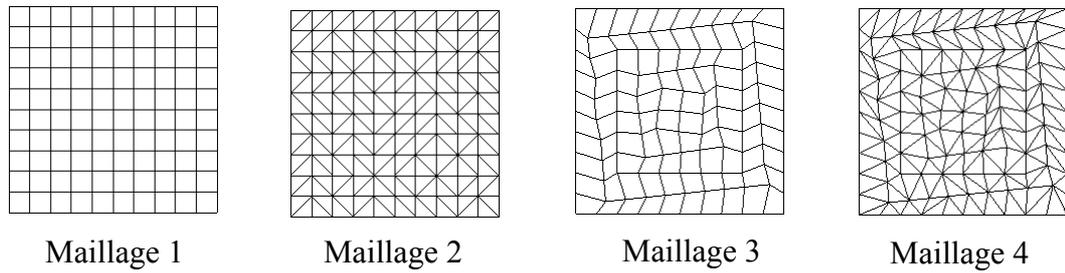


Figure 5. 23: Différents type de maillages

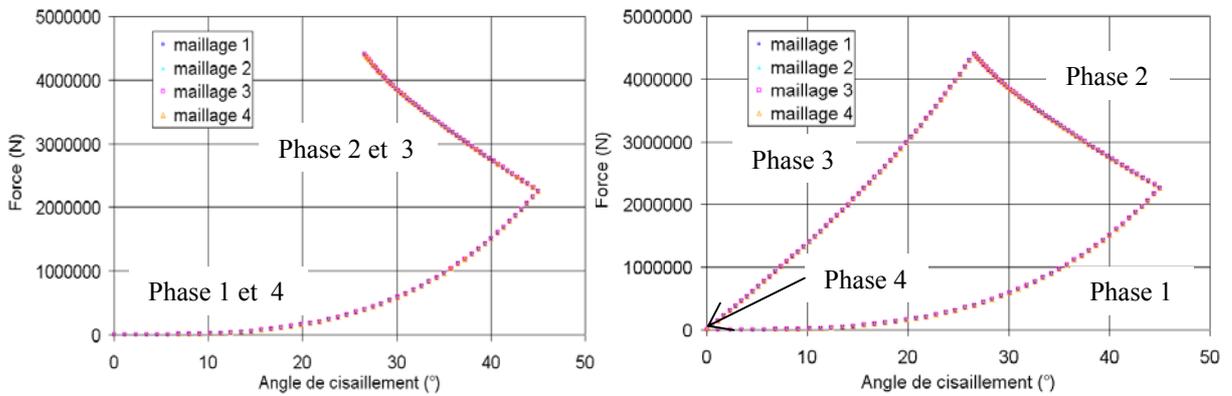


Figure 5. 24 : Force F_H en fonction de l'angle de glissement des mèches chemin fermé (0, 1, 2, 1, 0) (à gauche) et (0, 1, 2, 3, 4) (à droite)

La figure 5.24 montre les variations de la force F_H (la résultante des composantes horizontales des réactions sur le côté supérieur du renfort)(figure 5.22) en fonction de l'angle de glissement entre les mèches, obtenues pour les différents maillages de la figure (5.23). Il est à noter que les résultats du modèle proposé sont indépendants du type de maillage considéré.

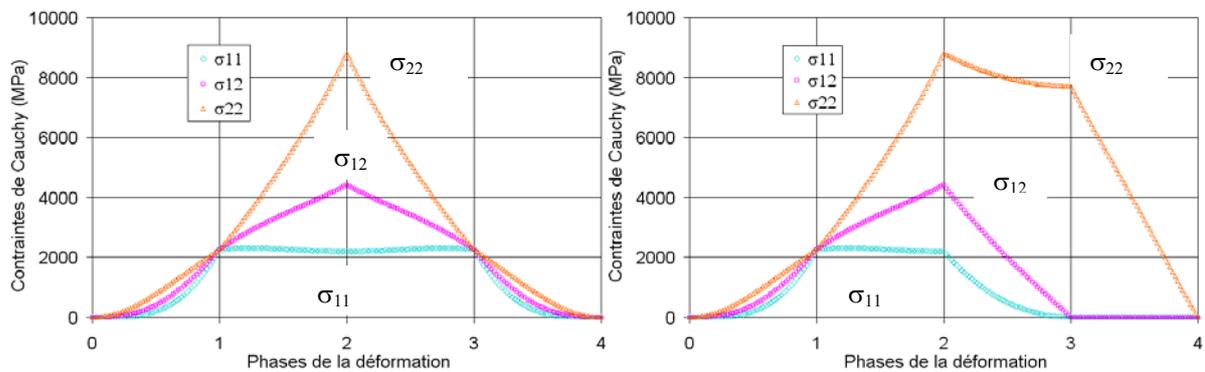


Figure 5. 25 : Contraintes de Cauchy en base globale cas des chemins fermés (0, 1, 2, 1, 0) (à gauche) et (0, 1, 2, 3, 4) (à droite)

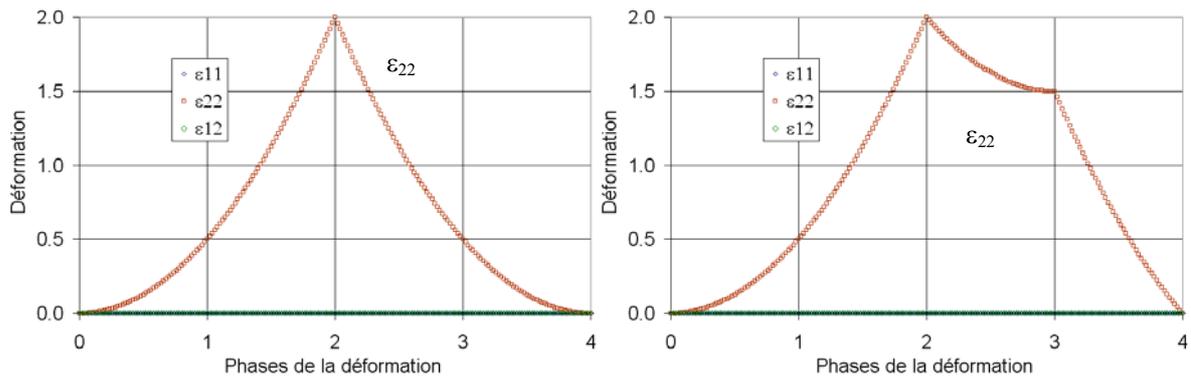


Figure 5. 26 : Déformations en base de Green Naghdi
cas du chemin fermé (0, 1, 2, 1, 0) (à gauche) et (0, 1, 2, 3, 4) (à droite)

Les figures (5.25 et 5.26) montrent que sur un chemin de déformation fermé dont l'aller et le retour s'effectuent selon le même chemin, les courbes des contraintes et des déformations en fonction des phases de la déformation montrent que l'histoire des déformations et des contraintes sont identiques à l'aller et au retour dans le cas du chemin (0, 1, 2, 1, 0). De plus, les contraintes et les déformations s'annulent à la fin de la dernière phase et ceci pour les deux chemins empruntés. Cette propriété selon laquelle le solide retrouve son état naturel non déformé dans un cycle de chargement fermé est importante et inhérente aux modèles hyperélastiques, elle leur confère un avantage majeur par rapport aux lois hypoélastiques.

5.4.2 Simulation de l'emboutissage d'un dôme hémisphérique

Le test d'emboutissage pour simuler une opération de formage a été réalisé par poinçon hémisphérique. C'est un test classique pour le formage des composites. Différentes orientations initiales des mèches (0° et $\pm 45^\circ$) ont été considérées avec deux versions du modèle hyperélastique proposé : avec l'énergie de déformation de tension seule et avec l'énergie de déformation de tension et de cisaillement, c'est-à-dire avec et sans prise en compte de la rigidité au cisaillement plan. Deux types de renforts secs ont été considérés : le taffetas de verre équilibré, le T6 et le sergé 2x2 de carbone très déséquilibré, le C4.

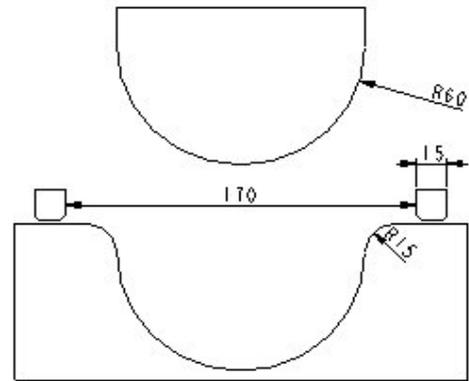


Figure 5. 27: Géométrie du dôme hémisphérique

Les tests numériques d'emboutissage ont été réalisées sur un renfort tissé carré (400×400) mm² maillé par des éléments de membranes quadrangulaires (56×56). La géométrie du dôme hémisphérique est illustrée sur la figure 5.27. Le maillage des outils est caractérisé par un raffinement autour du dôme de façon à assurer de bonnes conditions de contact. Les tests d'emboutissage ont été réalisés sans serre-flanc.

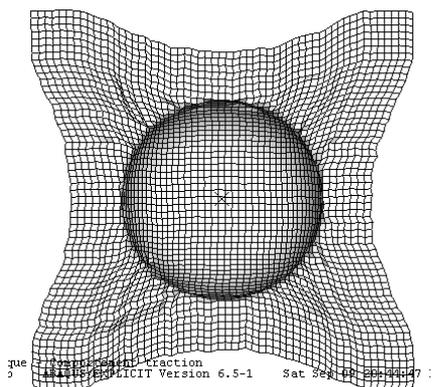
Les principaux résultats comparés sont la déformée à la fin de la descente du poinçon, la déformation des mèches et les angles entre les directions chaîne et trame.

5.4.2.1 Simulation d'emboutissage du T6

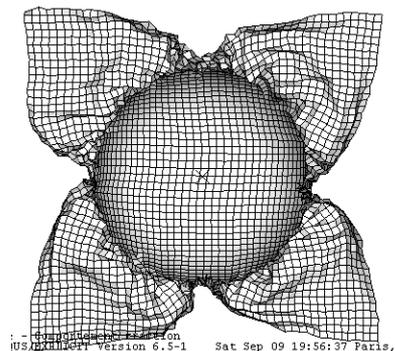
Nous rappelons que le T6 est un tissu équilibré, ses caractéristiques sont présentées au paragraphe (§ 5.3.3.1). Les résultats observés concernent les déformées obtenues et les angles entre les deux réseaux de mèches des sens chaîne et trame.

- *La déformée*

La déformée obtenue par le modèle met en évidence l'équilibre des rigidités du tissu dans les directions chaîne et trame (figures 5.28 et 5.29). La déformée obtenue par les deux approches, pour une orientation des mèches à $0^\circ/90^\circ$ et $\pm 45^\circ$ est symétrique. Ces observations correspondent bien aux déformées expérimentales (figure 5.30).



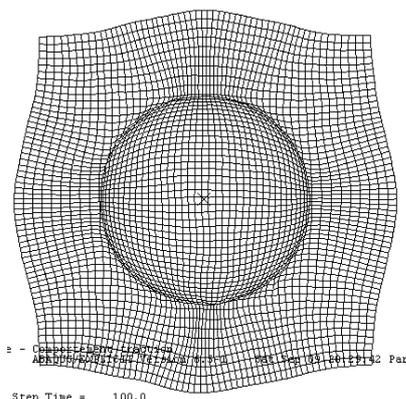
Sans rigidité de cisaillement



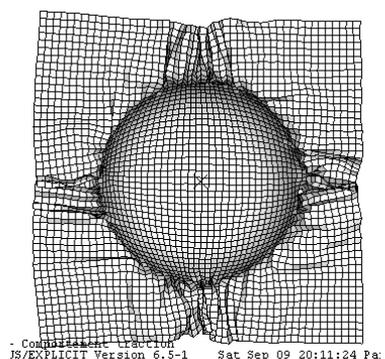
Avec rigidité de cisaillement

Figure 5. 28: Déformées, orientation initiale des mèches à 0°/90°

La mise en forme sans rigidité de cisaillement conduit à un avalement important selon les plans de symétrie et beaucoup moindre selon les diagonales. L'introduction de la rigidité de cisaillement modifie beaucoup le profil obtenu. La déformée est caractérisée par des plis. Ces plis sont très nombreux car le test d'emboutissage a été réalisé sans serre-flanc. Celui-ci qui a justement pour rôle d'éviter les défauts d'emboutissage tels que l'apparition de plis en exerçant des tensions dans le tissu. Les plis se localisent aux endroits ayant les variations angulaires les plus importantes (observées sur la déformée obtenue sans rigidité de cisaillement), sur les diagonales pour le tissu à 0°/90°. Ces plis peuvent être dus à la compression du tissu mais surtout au cisaillement de celui-ci.



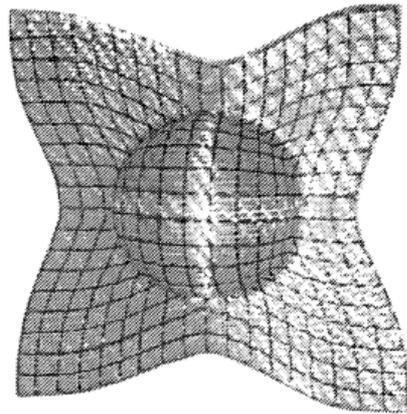
Sans rigidité de cisaillement



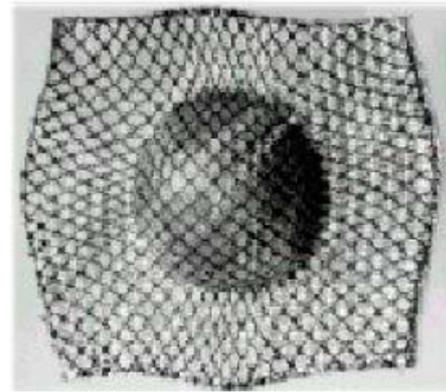
Avec rigidité de cisaillement

Figure 5. 29: Déformées, orientation initiale des mèches à ± 45°

De même, dans le cas du tissu orienté à ± 45°, des plis très nombreux apparaissent dans la déformée, ils sont localisés sur les médianes.



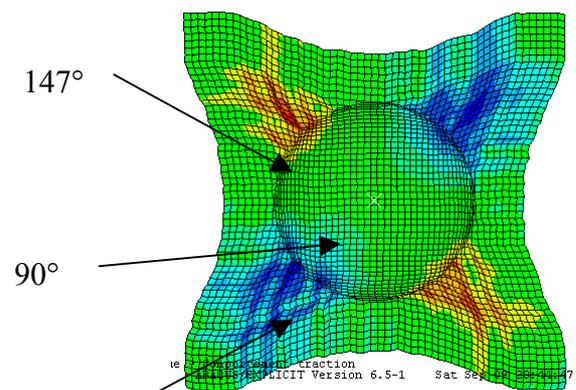
Expérience ($0^\circ/90^\circ$)



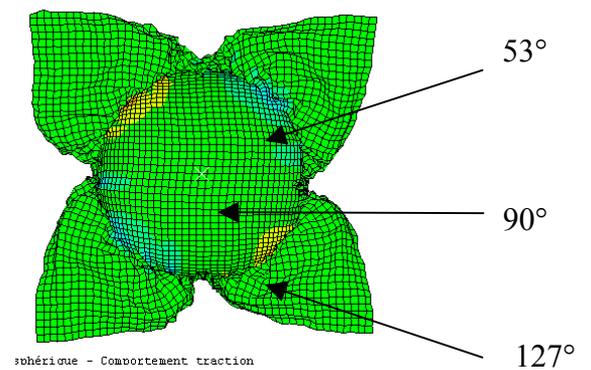
Expérience ($\pm 45^\circ$)

Figure 5. 30: Déformées expérimentales ([CHE94])

- **Réorientation des mèches**



Sans rigidité de cisaillement



Avec rigidité de cisaillement

Figure 5. 31: Angle entre les mèches, orientation initiale des mèches à $0^\circ/90^\circ$

L'introduction de la rigidité de cisaillement influence l'angle entre les mèches des directions chaîne et trame. Le cisaillement entraîne une diminution des variations d'angle entre les deux réseaux de mèche. En effet, dans le cas du tissé orienté à $0^\circ/90^\circ$, l'angle maximum passe de 147° sans rigidité de cisaillement à 127° avec rigidité de cisaillement, soit une variation angulaire de 57° sans rigidité de cisaillement contre 37° avec rigidité de cisaillement. Dans le cas du tissu orienté à $\pm 45^\circ$ l'angle passe 141° sans rigidité de cisaillement à 138° avec rigidité de cisaillement, soit une variation angulaire de 51° contre 46° avec prise ne compte de la rigidité de cisaillement. Les zones de cisaillement maximum sont localisées, elles se situent à la base de l'hémisphère, tandis qu'au sommet de l'hémisphère, le tissu n'est pas cisailé. Dans les figures 5.31 et 5.32, on présente quelques résultats concernant les angles entre les mèches dans le cas du tissu à $0^\circ/90^\circ$ et $\pm 45^\circ$ respectivement.

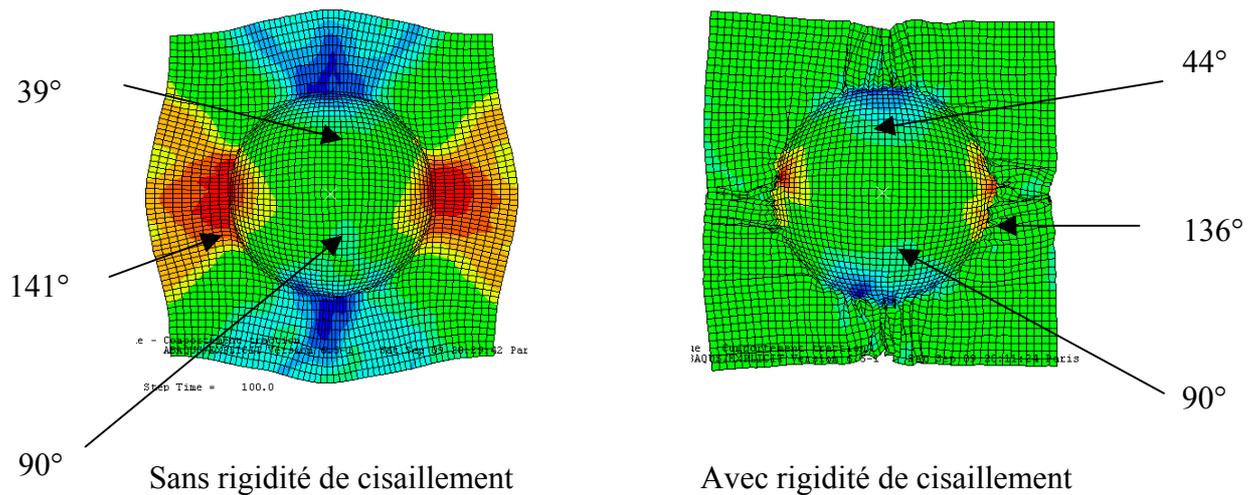


Figure 5. 32: Angle entre les mèches, orientation initiale des mèches à $\pm 45^\circ$

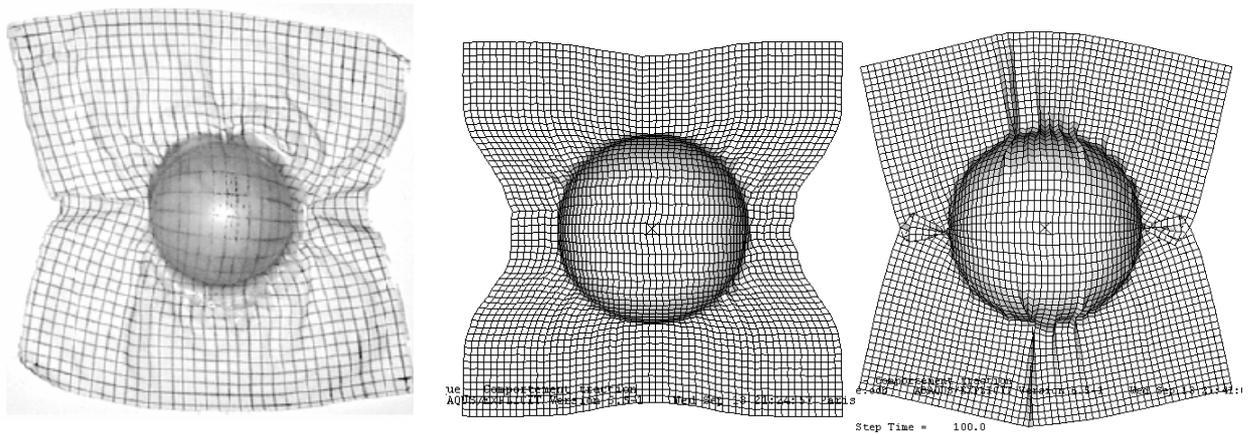
5.4.2.2 Simulation d'emboutissage du C4

Nous rappelons que les caractéristiques du C4 sont présentées au paragraphe (§ 5.3.3.2). Il s'agit d'un tissu très déséquilibré. De même que pour le T6, deux versions du modèle ont été utilisées, une version prenant en compte l'énergie de déformation de tension seule et une version prenant en compte l'énergie de déformation de tension et de cisaillement. Les résultats observés concernent les déformées obtenues, les angles entre les deux réseaux de mèches des sens chaîne et trame ainsi que la déformation des mèches. Ces résultats sont résumés dans ce qui suit.

- **La déformée**

La déformée obtenue par le modèle met en évidence le très fort déséquilibre existant entre les deux directions du tissu. La direction chaîne (horizontale sur les figures) qui correspond aux mèches les plus rigides montre un avalement important du tissu dans la matrice conduisant à l'apparition des plis. La direction trame qui correspond à des mèches qui se déforment très fortement ne subit donc pas d'avalement visible. Ces observations coïncident bien avec la déformée expérimentale ([DUM03]) (voir figure 5.33).

L'introduction de la rigidité de cisaillement modifie néanmoins beaucoup le profil obtenu. Sans rigidité de cisaillement, l'avalement conduit à une localisation de la courbure du bord, laissant les coins ainsi que les bords parallèles à la direction chaîne, proches de leur configuration initiale. Avec la prise en compte du cisaillement, les bords parallèles à la direction chaîne sont inclinés, des plis apparaissent et sont orientés selon la trame (verticale sur les figures). Ces plis ressemblent à ceux observés sur la déformée expérimentale. Ils sont le résultat d'instabilités dues à la compression du tissu mais aussi au cisaillement de celui-ci.



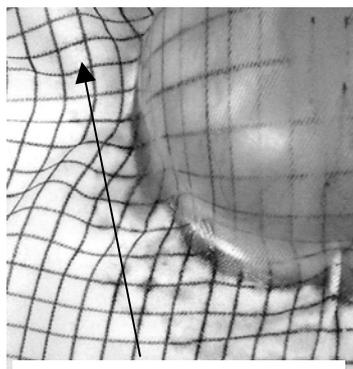
Expérimentale ([DUM03]) Sans rigidité de cisaillement Avec rigidité de cisaillement

Figure 5. 33: Déformée, orientation initiale des mèches à 0°/90

- *Déformation dans les directions chaîne et trame*

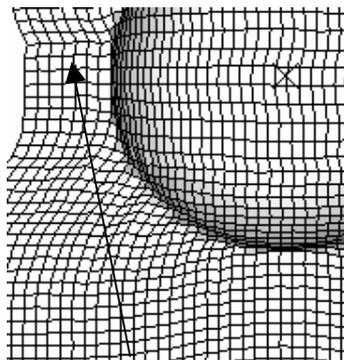
Le rapport de ces déformations, au sommet de l'hémisphère, là où elles sont maximales à la fin de l'emboutissage, s'établit à 1.8, valeur proche de celles trouvées lors des simulations. Les simulations avec ou sans prise en compte de la rigidité au cisaillement traduisent également cette différence de déformée dans les directions chaîne et trame (figure 5.34).

Dans la partie utile de la préforme, on obtient des résultats voisins et cohérents avec l'expérience, et ce avec les deux formulations utilisées.



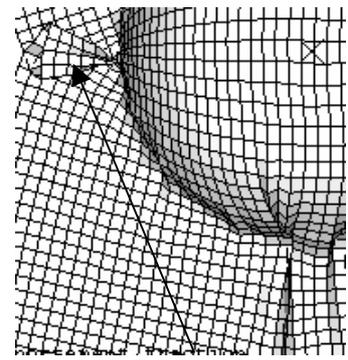
$L_{trame}/L_{chaîne} = 1,80$

a)



$L_{trame}/L_{chaîne} = 1,86$

b)



$L_{trame}/L_{chaîne} = 1,82$

c)

Figure 5. 34 : Rapport des élongations déterminées sur le sommet du dôme
a) expérimentale b) sans rigidité de cisaillement c) avec rigidité de cisaillement

- **Réorientation des mèches**

L'introduction de la rigidité de cisaillement influence les résultats d'orientation des mèches. Le cisaillement entraîne une diminution des variations d'angles entre les deux réseaux de mèches des directions chaîne et trame. En effet, l'angle maximum passe de 137° sans rigidité de cisaillement à 124° avec rigidité de cisaillement, soit une variation angulaire de 47° sans cisaillement contre 34° avec rigidité de cisaillement. Le cas réel étant situé entre les deux cas, la variation angulaire maximum est de 37° . Avec la prise en compte de la rigidité de cisaillement, les valeurs des variations d'angles obtenues se rapprochent du cas réel. Le C4 étant très déséquilibré, sa formabilité est due principalement à son extensibilité dans le sens trame lorsque l'angle de blocage, qui est très faible ici, est atteint. Les zones de cisaillement maximum sont également beaucoup plus localisées, elles se situent à la base de l'hémisphère, tandis qu'au sommet de l'hémisphère, le tissu n'est pas cisailé. Dans la figure 5.35, on présente quelques résultats concernant les angles entre les mèches.

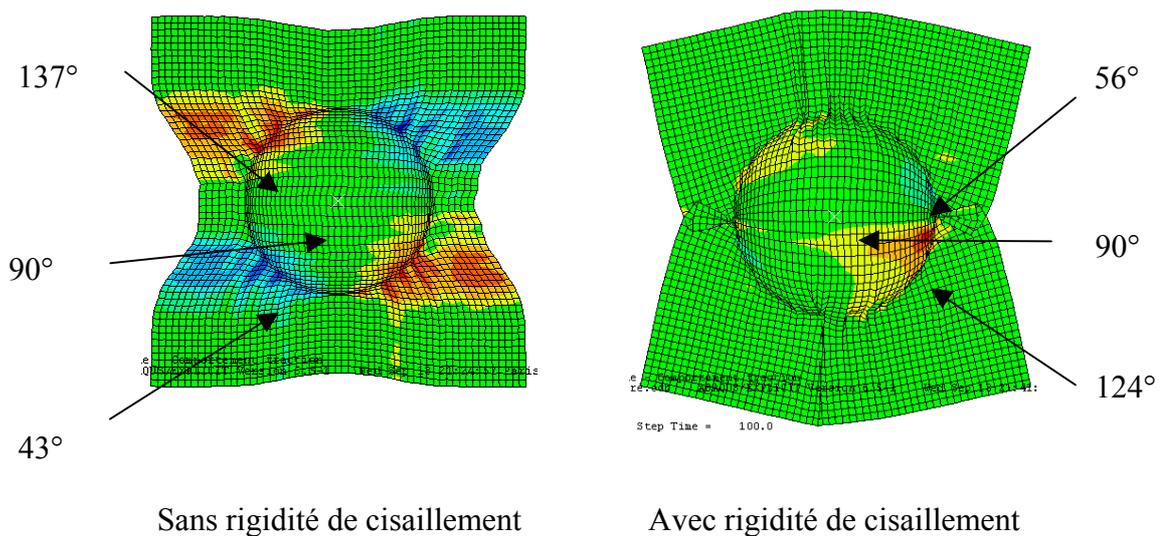


Figure 5. 35: Angle entre les mèches, orientation initiale des mèches à $0^\circ/90^\circ$

D'après les observations précédentes, le modèle hyperélastique proposé permet d'intégrer le comportement mécanique à la fois en tension et en cisaillement pour simuler les renforts tissés. L'opération d'emboutissage du renfort très déséquilibré sur le dôme hémisphérique dégage plusieurs résultats importants. Les rigidités de tension introduites dans le modèle permettent de retrouver le fort déséquilibre des elongations chaîne et trame observées expérimentalement. Le rapport des elongations, lié à la disproportion des rigidités des mèches, est proche du cas réel. La rigidité de cisaillement intégrée au modèle entraîne l'apparition d'instabilités qui correspondent à des plis à la surface de la déformée. Ainsi certains plis observés sur la préforme ont été reproduits.

Le modèle hyperélastique proposé avec la seconde approche (prise en compte des énergies de déformation de tension et de cisaillement) est plus conforme à la réalité. Ceci est lié au fait que l'on simule le formage d'une pièce très non-développable qui demande pour sa formabilité de dépasser l'angle limite de cisaillement. L'apport du terme de cisaillement se situe principalement dans la description de la déformée après l'apparition des plissements. Néanmoins, l'approche sans rigidité de cisaillement permet de trouver les zones où l'angle limite est dépassé, et où des instabilités à la surface du flanc risquent d'apparaître.

5.5 Conclusion

Un modèle de comportement hyperélastique anisotrope est proposé pour la simulation des renforts fibreux de composites en particulier tissés. La sensibilité de la solution à la densité de maillage et la pertinence des résultats ont été analysées pour différents tests de référence en grandes transformations : tests cisaillement pur et simple et test de cisaillement - extension. Les résultats obtenus dans ces différents tests montrent une bonne concordance avec les données expérimentales ou les lois de références. Le modèle est également testé pour simuler une opération de formage par poinçon hémisphérique sur un tissu équilibré et un tissu très déséquilibré. Deux approches du modèle hyperélastique ont été testées avec des critères qualitatifs (la déformée) et quantitatifs (valeurs maximales) relatifs aux grandeurs cinématiques (déformation et angle) : approche avec prise en compte de l'énergie de déformation de tension seule et approche avec prise en compte de l'énergie de déformation de tension et de cisaillement. Des résultats globalement satisfaisants sont obtenus pour ce qui est de la déformée du tissu qui montre bien une différence entre le tissu équilibré et le tissu non équilibré ainsi que l'apparition des plis lors de la prise en compte de la rigidité associée au cisaillement plan entre les mèches. Des résultats quantitatifs satisfaisants ont aussi été obtenus pour ce qui concerne les rapports des déformations maximales entre les directions chaîne et trame et les angles maximaux entre ces deux directions.

Les résultats des simulations recoupent bien les observations expérimentales surtout dans le cas du tissu déséquilibré. Ceci montre que le modèle hyperélastique proposé intègre deux caractéristiques importantes des renforts tissés : les comportements en tension et en cisaillement des mèches. En effet, le comportement en tension est susceptible de reproduire le déséquilibre des elongations chaîne et trame du tissu très déséquilibré lié à la disproportion des rigidités des mèches. Par contre, le comportement en cisaillement est susceptible de faire apparaître les instabilités qui se traduisent par des plissements liés au fait que l'on simule le formage de pièce fortement non-développable et qui demande de dépasser l'angle limite de cisaillement.

Il est tout de même à préciser ici que le potentiel considéré a pour hypothèse le découplage de la traction dans les sens chaîne et trame. Cette hypothèse simplificatrice devrait être remise en cause pour traduire le couplage des tensions chaîne/trame lié au tissage, surtout lorsqu'il

s'agit de tissu équilibré. En effet, dans le cas de tissu très déséquilibré, l'hypothèse de découplage est justifiée : l'allongement dans la direction chaîne de plus grande rigidité n'est point altéré par la direction trame très extensible et réciproquement, l'allongement dans la direction trame très extensible n'est pas altéré par les mèches de la direction chaîne très rigides. Donc le comportement du tissu déséquilibré se réduirait au comportement des mèches seules dans chaque direction, et l'effet du tissage se trouverait négligé. Ainsi le modèle proposé s'appliquerait plus pour des tissus très déséquilibrés et les renforts non tissés à l'instar des NCF (Non-Crimp fabrics).

Conclusion générale

Dans la présente étude, un modèle de comportement hyperélastique est proposé pour les renforts de composites textiles. Ce modèle continu a pour objectif la simulation à l'échelle macroscopique des opérations de mise en forme. Il est basé sur la proposition d'un potentiel élastique simple et spécifique aux renforts tissés dont dérive la loi de comportement hyperélastique objective susceptible de reproduire le caractère anisotrope et non linéaire du comportement des renforts fibreux. L'intérêt de recourir à une telle approche est dicté d'une part par la nature complexe du comportement des renforts inhérente à la nature multiéchelle de ses fibres de renforcement et d'autre part par la possibilité d'intégrer la loi de comportement dans l'approche éléments finis standard.

Compte tenu des modes de déformation prépondérants des renforts tissés, la réponse élastique est principalement due à la résistance des mèches à la traction dans les directions chaîne et trame et aux variations angulaires. Le potentiel proposé prend en considération ces deux aspects du comportement. Deux hypothèses simplificatrices sont à la base de la construction du potentiel. La première admet que les tensions et le cisaillement plan sont indépendants et la seconde hypothèse suppose que les tensions dans les mèches sont découplées. Si la première hypothèse est probablement vraie dans un sens ([BUE98]) et moins évidente dans l'autre sens ([DUM03] ; [LOM05]), la seconde hypothèse est bien contestable dans le cas des renforts tissés classiques car elle néglige le caractère biaxial du comportement en tension ce qui signifie que l'effet sur le comportement en tension, des ondulations naturelles des tissés, est négligé. Néanmoins cette dernière hypothèse s'adapterait bien aux renforts cousus, les NCF (Non-crimp fabrics) et les tissus très déséquilibrés pour lesquels l'effet du tissage peut être négligé.

Le potentiel proposé est ainsi la somme de trois termes. Les deux premiers termes représentent les potentiels de tension dans les directions chaîne et trame. L'hypothèse de découplage des tensions engendre que chaque terme est exprimé exclusivement en fonction de l'élongation des mèches de la direction considérée. Le troisième terme est l'énergie de déformation de cisaillement plan due aux rotations possibles entre les deux réseaux de mèches. Deux expressions du potentiel ont été proposées. La première est exprimée en fonction des invariants mixtes du tenseur de déformation de Cauchy Green droit, et la seconde expression en fonction des élongations et du cosinus de l'angle entre les mèches. Ces deux

expressions du potentiel donnent naissance à deux expressions de la même loi de comportement hyperélastique pour les renforts tissés. Les caractéristiques du comportement des renforts tissés imposent un choix judicieux des invariants. C'est ainsi qu'une loi de comportement non pertinente pour les tissés a aussi été considérée. Chacun de ces trois termes fait intervenir des constantes qui sont identifiées en ajustant les données du modèle aux données expérimentales. Trois essais d'identification sont alors nécessaires : un essai de cisaillement pur ([DUM03]) et deux essais de traction dans chacune des directions d'anisotropie ([BUE98]). Il est donc important d'avoir des tests précis (expérimentaux ou virtuels) pour déterminer les propriétés mécaniques des matériaux.

Le modèle hyperélastique présenté est implémenté dans une routine utilisateur Vumat d'Abaqus/Explicit. La sensibilité de la solution à la densité de maillage et la pertinence des résultats ont été analysées pour différents tests de référence en grandes transformations : cisaillement pur et simple et cisaillement - extension. Les résultats obtenus dans ces différents tests montrent une bonne concordance avec les données expérimentales ou les lois de référence. Le modèle est également testé pour simuler une opération de formage par poinçon hémisphérique sur un tissu équilibré et un tissu déséquilibré. Des résultats qualitatifs satisfaisants sont obtenus pour ce qui est de la déformée du tissu qui montre bien une différence entre le tissu équilibré et le tissu non équilibré ainsi que l'apparition des plis lors de la prise en compte de la rigidité associée au cisaillement plan entre les mèches.

Le modèle hyperélastique proposé présente une alternative intéressante pour le traitement numérique de l'opération de formage des renforts de composites fibreux, néanmoins les résultats sont inhérents aux hypothèses posées sur le potentiel, notamment le découplage de la traction dans les directions chaîne et trame. En effet cette hypothèse simplificatrice doit être remise en cause, d'où la nécessité de construire un potentiel prenant en compte le caractère biaxial de la traction des renforts tissés traduisant ainsi le couplage des tensions chaîne et trame liée au tissage.

Références bibliographiques

- [AIM07] AIMENE Y., BOISSE P., SIDOROFF F. et al. A hyper-elastic approach to simulate fibrous composite reinforcements at finite strains. Actes des Journées Nationales sur les Composites, Marseille, 2007, pp. 967-973.
- [ARR93] ARRUDA E.M., BOYCE M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials. Journal of the mechanics and physics of solids, 1993, vol. 42, n° 2, pp. 389-412.
- [BAD07] BADEL P., VIDAL-SALLE E., BOISSE P. Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. Computational materials science, 2007, vol. 40, n° 4, pp. 439-448.
- [BAL77] BALL J.M. Convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity. Archive of rational mechanics and analysis. 1977, vol. 63, pp. 337-403.
- [BAL06] BALZANI D., NEFF P., SCHRÖDER J. et al. A polyconvex framework for soft biological tissue. Ajustment to experimental data. International journal of solids and structures, 2006, vol. 42, pp. 4352-4371.
- [BEN05] BEN BOUBAKER B., HAUSSY B., GANGHOFFER J.F. Discrete models of fabrics accounting for yarn interactions. European finite element journal, 2005, vol. 14, n° 6-7, pp. 653-676.
- [BEN07] BEN BOUBAKER B., HAUSSY B., GANGHOFFER J.F. Discrete models of woven structures. Macroscopic approach. Composites Part B: Engineering, 2007, vol. 38, n° 4, pp. 498-505.
- [BIL93] BILLOËT J.L. Introduction aux matériaux composites à hautes performances. Tecknea, Paris, 1993.
- [BIL03] BILLOËT J.L. Contribution à la compréhension des problèmes en grandes transformations. Cours de DEA Solides structures et systèmes mécaniques S3M, option 2 ENSAM, Paris, 2003, 75 p.
- [BLA95] BLANLOT R., BILLOËT J.L. Numerical formulation of the evolutive anisotropic behaviour of composite woven fabrics in order to simulate forming processes. Proceedings of ICCM 10, Vancouver, 1995, pp. 229-236.
- [BLE00] BLETZINGER K.U., BISCHOFF M., RAMM E. A unified approach for shear-locking- free triangular shell finite elements. Computer and structures, 2000, vol. 75, pp. 321-334.
- [BOE78] BOEHLER J.P. Lois de comportement anisotrope des milieux continus. Journal de mécanique, 1978, vol. 17, pp. 153-170.

- [BOI94] BOISSE P. Modèles mécaniques et numériques pour l'analyse non-linéaire des structures minces. Thèse d'habilitation à diriger la recherche : Université de Besançon, 1994.
- [BOI01] BOISSE P., GASSER A., HIVET G. Analyses of fabric tensile behaviour: determination of the biaxial tension-strain surfaces and their use in forming simulations. *Composites Part A*, 2001, vol. 32, pp. 1395-1414.
- [BOI04] BOISSE P. Mise en forme des renforts fibreux de composites. *Edition techniques de l'ingénieur*, 2004, n° AM 3 734, pp. 1-10.
- [BOI05a] BOISSE P., ZOUARI B., GASSER A. A mesoscopic approach for the simulation of woven fibre composite forming. *Composites science and technology*, 2005, vol. 65, pp. 429-436.
- [BOI05b] BOISSE P., GASSER A., HAGEGE B. et al. Analysis of the mechanical behaviour of woven fibrous material using virtual tests at the unit cell level. *International journal of material science*, 2005, vol. 40, pp. 5955-5962.
- [BOI07a] BOISSE P. Finite element analysis of composite forming. In : Long A.C., ed. *Composite forming technologies*. Woodhead Publishing, 2007, pp. 46-79.
- [BOI07b] BOISSE P., HAMILA N., HELENON F. et al. Draping of textile composite reinforcements: continuous and discrete approaches", *Advanced Composites letter*. 2007, vol. 3, 4, pp. 119-125.
- [BON97] BONET J., WOOD R. D. *Non linear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997, 248 p.
- [BOR03] BOROUCAKI H., CHEROUAT A. Geometrical draping of composites. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série II B*, 2003, n° 331, pp. 437-442.
- [BUE98] BUET-GAUTIER K. Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés. Thèse LMSP Orléans : Université d'Orléans, 1998, 125 p.
- [BUE01] BUET-GAUTIER K., BOISSE P. Experimental analysis and models for biaxial mechanical behaviour of composite woven reinforcements. *Experimental mechanics*, 2001, vol. 41, n° 3, pp. 260-269.
- [BUT94] BUTCHER N., RAMM E., ROEHL D. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International journal for numerical methods in engineering*, 1994, vol. 37, pp. 2551-2568.
- [CAO04] CAO J., CHENG H.S., YU T.X. et al. A cooperative benchmark effort on testing of woven composites. *Proceedings of the 7th International ESAFORM conference on material forming*, Trondheim, Norway, 2004, pp.305-308.
- [CEL99] CELLE P., DRAPIER S., BERGHEAU J.M. Contribution à l'étude de l'écoulement dans un milieu compressible – Infusion de résine dans un composite déformable. 1999. <http://www.utc.fr/lrm/giens05/CDROM/CDROM/22.pdf>.
- [CEL07] CELLE P., DRAPIER S., BERGHEAU J.M. et al. Simulation numérique de l'infusion d'une résine thermoplastique dans un milieu poreux compressible. *Actes des Journée Nationales sur les Composites, France*, 2007, pp. 927-935.

- [CHE94] CHEROUAT A. Simulation numérique du préformage des tissus de fibres de verre par la méthode des éléments finis. Thèse en Science pour l'ingénieur, Université de Franche-Comté, 1994.
- [CHE01] CHEROUAT A., BILLOËT J.L. Mechanical and numerical modelling of composite manufacturing processes deep-drawing and laying-up of thin pre-impregnated woven fabrics. *Journal of material processing technology*, 2001, vol. 118, pp. 460-471.
- [CHR01] CHERUET A. Analyse et simulation de la mise en forme de composites thermoplastiques. Thèse LMSP, Université d'Orléans, 2001, 164 p.
- [CHR02] CHERUET A., SOULAT D., BOISSE P. et al. Analysis of the interply porosities in thermoplastic composites forming processes. *International journal of forming processes*, 2002, vol. 5, n° 2-3-4, pp. 247-258.
- [CIA88] CIARLET P.G. *Mathematical elasticity. Vol. I: Three-dimensional elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [COG92] COGSWELL F.N., LEACH D.C. Thermoplastic structural composites in service. *Plastic, rubber and composites processing and applications*, 1992, vol. 18, pp. 249-254.
- [DAF83] DAFALIAS Y.F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations. *Trans. of the ASME, Journal of applied mechanics*, 1983, vol. 50, pp. 561-565.
- [DIE79] DIENES J.K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta mechanica*, 1979, vol. 32, pp. 217-232.
- [DON01] DONG L., LEKAKOU C., BADER M.G. Processing of composites: Simulations of the draping of the fabrics with updated material behaviour law. *Journal of composite materials*, 2001, vol. 35, No2, pp. 38-63.
- [DRA05] DRAPIER S., MONNATTE J., ELBOUAZZAOUI O. et al. Characterization of transient through thickness permeabilities of Non Crimp New Concept (NC2) multiaxial fabrics. *Composites Part A*, 2005, vol. 36, pp. 877-892.
- [DUM03] DUMONT F. Expérimentations et modèles de comportement de renforts de composites tissés. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003, 149 p.
- [ERI54] ERICKSEN J.L., RIVLIN R.S. Large elastic deformations of homogeneous anisotropic materials, *Journal of rational mechanics and analysis*. 1954, vol. 3, pp. 281-301.
- [GAR07] GARRIGUES J. *Fondements de la mécanique des milieux continus*, Hermes, Paris, 2007, 250 p.
- [GAS00] GASSER A., BOISSE P., HANKLAR S. Analysis of the mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests. *Computational materials science*, 2000, vol. 17, pp. 7-20.
- [GIL93] GILORMINI P., ROUDIER P., ROUGEE P. Taux de rotation des directions matérielles dans un milieu déformable. *Comptes-rendus à l'Académie des Sciences de Paris* 316, II, 1993, pp. 1659-1666.

- [HAG04] HAGEGE B. Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations: application aux renforts tricotés. Thèse LMSP : ENSAM Paris, 2004, 262 p.
- [HAG05] HAGEGE B., BOISSE P., BILLOËT J.L. Finite element analyses of knitted composite reinforcement at large strain. *Revue européenne des éléments finis*, 2005, vol. 14 n° 6-7, pp.767-776.
- [HAR03] HARTMANN S., NEFF P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International journal of solids and structures*, 2003, vol. 40, pp. 2768-2791.
- [HEI07] HEIDER D., SIMACEK P., DOMINAUSKAS A. et al. Infusion design methodology for thick-section, low-permeability preforms using inter-laminar flow media. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2007, vol. 38, n° 2, pp. 525-534.
- [HIR00] HIROKAWA S., TSURUNO R. Three-dimensional deformation and stress distribution in an analytical/computational model of the anterior cruciate ligament. *Journal of biomechanics*, 2000, vol. 33, pp. 1069-1077.
- [HEU95] HEUILLET P. Modélisation du comportement hyperélastique des caoutchoucs et élastomères thermoplastiques, compacts ou cellulaires. SIA, 1995, pp. 1-26.
- [HOL96] HOLZAPFEL G.A., EBERLEIN R, WRIGGERS P. et al. Large strain analysis on soft biological membranes: Formulation and finite element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996, vol. 132, pp. 45-61.
- [HOL00] HOLZAPFEL G.A., GASSER T.C., OGDEN R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and comparative study of material models. *Journal of elasticity*, 2000, vol. 61, pp. 1-48.
- [HOL01] HOLZAPFEL G.A., GASSER T.C. A viscoelastique model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis and computational aspects and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2001, vol. 132, pp. 45-61.
- [HUM87] HUMPHREY J.D., YIN F.C.P. On constitutive relations and finite deformation of passive cardiac tissue : I : A pseudostrain energy function. *Journal of biomechanical engineering*, 1987, vol. 109, pp. 298-304.
- [HUM90] HUMPHREY J.D. Determination of a constitutive relation for passive Myocardium. *Journal of biomechanical engineering*, 1990, vol. 112, pp. 333-339.
- [ITS04] ITSKOV M., AKSEL N. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International journal of solids and structures*, 2004, vol. 41, pp. 3833-3848.
- [KAW73a] KAWABATA S., NIWA M., KAWAI H. The finite deformation theory of plain weave fabrics Part I: The biaxial deformation Theory. *Journal of the textile institute*, 1973, vol. 64, n° 1, pp. 21-46.
- [KAW73b] KAWABATA S., NIWA M., KAWAI H. The finite deformation theory of plain weave fabrics Part I: The Part III: The shear deformation theory. *Journal of the textile institute*, 1973, vol. 64, n° 1, pp.62-85.

- [KLI99] KLISCH S.M., LOTZ J.C. Application of a fiber-reinforced continuum theory to multiple deformation of the annulus fibrosus. *Journal of biomechanics*, 1999, vol. 32, pp. 1027-1036.
- [KRE97] KREBS J., BHATTACHARYA D., FRIEDRICH K. production and evaluation of secondary composite aircraft components: a comprehensive case study. *Composite Part A*, 1997, vol. 28A, pp. 484-489.
- [LAU07] LAUNAY J., HIVET G., DUONG A.V. et al. Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear behaviour of woven composite reinforcements. *Composites science and technology*. 2007. Accepté pour publication.
- [LEB03] LEBRUN G., BUREAU M.N., DENAULT J. Evaluation of bias-extension and picture-frame test methods for the measurement of intraply shear properties of PP/glass commingled fabrics. *Composite structures*, 2003, vol. 61, pp.341–352.
- [LEE87] LEE W., SPRINGER G., A model of the manufacturing process of thermoplastic matrix composites. *Journal of composite materials*, 1987, vol. 21, pp. 1017-1055.
- [LIM01] LIMBERT G. Finite element modelling of biological connective soft tissues, application to the ligaments of human knee. Thèse de l'Université de Southampton, 2001, 244 p.
- [LOM03] LOMOV S.V., TRUONG CHI T., VERPOEST I. et al. Mathematical modelling of internal geometry and deformability of woven performs. *International journal forming processes*, 2003, vol. 6, n° 3-4, pp.413-42.
- [LOM04] LOMOV S.V., STOILOVA T., VERPOEST I. Shear of woven fabrics: theoretical model, numerical experiments and full strain measurements. *Proceedings of the 8th international conference ESAFORM*, Trondheim, 2004, pp. 345-348.
- [LOM05] LOMOV S.V., BERNAL E., IVANOV D.S. et al. Homogenisation of a sheared unit cell of textile composites: FEA and approximate inclusion model. *European finite element journal*, 2005, vol. 14, n° 6-7, pp. 709-729.
- [LOM06] LOMOV S.V., VERPOEST I. Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements. *Composites science and technology*, 2006, vol. 66, pp.919-933.
- [LON94] LONG A.C., RUDD C.D. A simulation of reinforcement deformation during the production of preform for liquid moulding processes. *International mechanical journal of engineering and manufacturing*, 1994, vol. 208, pp. 269-278.
- [LON01] LONG A.C., SOUTER B.J., ROBITAILLE F., Mechanical modelling of in-plane shear and draping for woven and non-crimp reinforcements. *Journal of thermoplastic composite materials*, 2001, vol. 14, pp. 316-326.
- [LON02] LONG A.C. Characterisation and modelling of fabric deformation during forming of textile composite. *International journal of forming processes*, 2002, vol. 4, pp. 285-301.
- [MAR56] MARK C., TAYLOR H.M. The fitting of woven cloth to surfaces. *Journal of textile institute*, 1956, vol. 47, pp. 477-488.

- [MAS83] MARSDEN E., HUGHES T.J.R. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-hall, Englewood Cliffs, 1983, 556 p.
- [MCB97] MCBRIDE, T.M., CHEN J. Unit-cell geometry in plain-weave fabrics during shear deformations. *Composites science and technology*, 1997, vol. 57 n° 3, pp. 345-351.
- [MCG98] MCGUINNESS G.B., BRADAIGH C.M.O. Characterisation of thermoplastic composite melts in rhombus-shear: the picture-frame experiment. *Composites Part A*, 1998, vol. 29, n° 1-2, pp. 115-132.
- [MIL04] MILANI A.S., NEMES J.A. An intelligent inverse method for characterization of textile reinforced thermoplastic composites using a hyperelastic constitutive model. *Composites science and technology*, 2004, vol. 64, pp. 1565-1576.
- [MOO40] MOONEY M. A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics*, 1940, vol. 11, pp.582-592.
- [MOR52] MORREY, C.B. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific journal of mathematics*, 1952, vol. 2, pp. 25-53.
- [MOU99] MOURITZ A.P., BANNISTER M.K., FALZON P.J. et al. Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites. *Composite Part A*, 1999, vol. 30, pp. 1445-1461.
- [OGD72] OGDEN R.W. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theorie and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the royal society of London A.*, 1972, vol. 326, pp. 565-584.
- [OGD84] OGDEN R.W. *Non-linear elastic deformations*. Wiley et Sons, New York, 1984, 532 p.
- [PAR00] PARNAS R.S. *Liquid Composite Molding*, Hanser Garner publications, 2000.
- [PIC05] PICKETT A.K., CREECH G., DE LUCA P. Simplified and Advanced Simulation Methods for Prediction of Fabric Draping. *European finite element journal*, 2005, vol. 14, n° 6-7, pp. 677-691.
- [POT02] POTTER K. Bias extension measurements on cross-plyed unidirectional prepreg. *Composites Part A*, 2002, vol. 33, pp.63-73.
- [PRO97] PRODROMOU, A.G., CHEN J. On the relationship between shear angle and wrinkling of textile composite performs. *Composites Part A*, 1997, vol. 28, n° 5, pp. 491-503.
- [REE01] REESE S., RAIBLE T., WRIGGERS P. Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes. *International journal of solids and structures*, 2001, vol. 38, pp. 9525-9544.
- [RIV51] RIVLIN R.S., SAUNDERS D.W. Large elastic deformations of isotropic materials. (vii) experiments on the deformation of rubber. *Philosophical transactions royal society*, 1951, vol. 243, pp. 251-288.
- [RIV56] Rivlin R.S. *Large elastic deformations, Rheology-Theory and applications*. 1956, vol. 1, pp. 351-385.
- [RUD97] RUDD C.D., LONG A.C. *Liquid Molding Technologies*. Ed. Woodhead Publishing Limited, 1997.

- [SCH03] SCHRÖDER J., NEFF P. Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *International journal of solids and structures*, 2003, vol. 40, pp. 401-445.
- [SCH05] SCHRÖDER J., NEFF P., BALZANI D. A variational Approach for material stable anisotropic hyperelasticity. *International journal of solids and structures*, 2005, vol. 42, pp. 4352-4371.
- [SHA03] SHARMA S.B., SUTCLIFFE M.P.F. A simplified finite element approach to draping of woven fabric. *Proceedings of the 6th International conference ESAFORM on material forming, Salerno, Italie, 2003*, pp. 887-890.
- [SID82] SIDOROFF F. Cours sur les grandes transformations et endommagement. Rapport GRECO n° 51, Sophia-Antipolis, 1982, 39 p.
- [SID01] SIDOROFF F., DOGUI A. Some issues about anisotropic elastic-plastic models at finite strain. *International journal of solids and structures*, 2001, vol. 38, pp. 9569-9578.
- [SIM90] SIMO J.C., FOX D.D., RIFAI M.S. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part 4: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1990, vol. 79, pp. 21-70.
- [SKO07] SKORDOS A., MONROY ACEVES C.X. et al. A simplified rate dependent model of forming and wrinkling of pre-impregnated woven Composites. *Composites Part A: Applied science and manufacturing*, 2007, vol. 38, pp. 1318-1330.
- [SOU06] SOULAT D., CHERUET A., YOUSSEF M. et al. Simulation of continuous fibre reinforced thermoplastic using a shell finite element with transverse stress. *Computers and structures*, 2006, vol. 84, n° 13-14, pp. 888-903.
- [SPE70] SPENCER A.J.M. A static theory of finite elasticity. *Journal of the institute of mathematics and its applications*, 1970, vol. 6, pp. 164-200.
- [SPE84] SPENCER A.J.M. *Continuum theory of the mechanics of fibres-reinforced composites*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [TRE44] TRELOAR L.R.G. Stress-strain data for Vulcanised rubber under various types of deformation. *Transaction Faraday society*, 1944, vol. 40, pp. 59-70.
- [TRU92] TRUESDELL C., NOLL W. *The nonlinear field theories of mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992, 602 p.
- [VAN91] VAN DER WEËN F. Algorithms for draping fabrics on double-curved surfaces. *International journal for numerical methods in engineering*, 1991, vol. 31, pp. 1415-1426.
- [WAN98] WANG J., PAGE J.R., PATON R. Experimental investigation of the draping properties of reinforcement fabrics. *Composites Science and Technology*, 1998, vol. 58, pp.229-237.
- [WEI00] WEICHERT D., BASAR Y. *Nonlinear continuum mechanics of solids*. Springer, New York, 2000, 193 p.
- [WEI94] WEISS J.A. A constitutive model and finite element representation for transversely isotropic soft tissues. Thèse de doctorat, département de biomécanique, Université d'Utah, 1994.

- [WEI96] WEISS J.A., MAKER B.N., GOVINDJEE S. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996, vol. 135, pp. 107-128.
- [XUE03] XUE P., PENG X., CAO J. A Non-orthogonal Constitutive Model for Characterizing Woven Composites. *Composites Part A*, 2003, Vol. 34, pp. 183-193.
- [YU02] YU W.R., POURBOGHRAT F., CHUNG K. et al. Non-orthogonal constitutive equation for woven fabric reinforced thermoplastic composites. *Composites Part A*, 2002, vol. 33, pp. 1095-1105.
- [YU04] YU X., YE L., MAI Y.W. Finite element spurious wrinkles on the thermoforming simulation of woven fabric reinforced composites. *Proceedings of the 7th International conference ESAFORM*, Trondheim, 2004, pp. 325-328.
- [ZOU06] ZOUARI B. DANIEL J.L., BOISSE P. A woven reinforcement forming simulation method. Influence of the shear stiffness. *Computers and structures*, 2006, vol. 84, pp. 351-363.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES
DE LYON

NOM : AIMENE
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

DATE de SOUTENANCE : 29 Novembre 2007

Prénoms : Yamina

TITRE : Approche hyperélastique pour la simulation des renforts fibreux en grandes transformations

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2007-ISAL-0083

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité : Mécanique

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RESUME : Un modèle de comportement hyperélastique est proposé pour la simulation des renforts fibreux de composites en particulier tissés. Son objectif est de simuler à l'échelle macroscopique des opérations de mise en forme. Il représente une alternative aux approches continues hypoélastiques existantes

Un potentiel énergétique simple reproduisant les non linéarités matérielles connues des renforts tissés est proposé.

Classiquement, les modes de déformations se caractérisent par des déformations faibles dans la direction des mèches et de grandes déformations de cisaillement plan. Le modèle est implémenté dans une routine utilisateur Vumat d'Abaqus/Explicit.

La sensibilité de la solution à la densité de maillage et la pertinence des résultats ont été analysées pour différents tests de référence en grandes transformations : cisaillement pur et simple, cisaillement pur - extension. Enfin, le modèle est testé pour simuler une opération de formage par poinçon hémisphérique. Des résultats satisfaisants sont obtenus, notamment sur la prise en compte ou non de la rigidité associée au cisaillement plan entre les mèches

MOTS-CLES : Hyperélasticité, renforts tissés, mise en forme, comportement mécanique des textiles techniques, Abaqus

Laboratoire (s) de recherche :LaMCos

Directeur de thèse: Philippe BOISSE

Président de jury :

Composition du jury :

BOISSE Philippe	Professeur	Directeur
DRAPIER Sylvain	Professeur	Rapporteur
GANGHOFFER Jean-François	Professeur	Rapporteur
SIDOROFF François	Professeur	Examineur
HAGEGE Benjamin	Maître de conférences	Examineur
VIDAL-SALLE Emmanuelle	Maître de conférences	Examineur