N°d'ordre 2007–ISAL–0053

Année 2007

THÈSE

Fretting et Usure des Contacts Mécaniques : Modélisation Numérique

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité : MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Ludovic GALLEGO Ingénieur INSA Lyon

Thèse soutenue le 28 septembre 2007 devant la Commission d'examen

Jury

MICHEL BRUNET GEORGES CAILLETAUD LAURENT CHAMBON Stéphane DEYBER Frédéric LEBON DANIEL NÉLIAS Professeur (INSA Lyon) Professeur (ENSMP) Ingénieur (EADS IW) Ingénieur (Snecma) Professeur (Université de Provence) Professeur (INSA Lyon) Examinateur Rapporteur Examinateur Examinateur Rapporteur Directeur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon 20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

INSA Di	rection de la Recherche	- Ecoles Doctorales 2007
SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	CHIMIE DE LVON	M Jean Marc LANCELIN
CHIMIE	http://sakura.cpe.fr/ED206	Université Claude Bernard Lvon 1
		Bât CPE
		43 bd du 11 novembre 1918
	M. Jean Marc LANCELIN	69622 VILLEURBANNE Cedex
		Tél : 04.72.43 13 95 Fax :
	Insa : R. GOURDON	lancelin@hikari.cpe.fr
	ELECTRONIQUE,	M. Alain NICOLAS
E.E.A.	ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE	Ecole Centrale de Lyon
	http://www.insa-lyon.fr/eea	Bätiment H9
	M. Alain NICOLAS	36 avenue Guy de Collongue
		09134 ECULLY
		101:04.72.18 00 97 Fax:04 78 43 37 17
	AM 64 42 Exy 64 E4	Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
	FUOLUTION ECOSYSTEME	M Jean-Bierre ELANDROIS
E2M2	MICROBIOLOGIE, MODELISATION	CNRS LIMR 5558
	http://biomsery.univ-lyon1.fr/E2M2	Université Claude Bernard Lvon 1
		Bât G. Mendel
	M. Jean-Pierre FLANDROIS	43 bd du 11 novembre 1918
	Insa : S. GRENIER	69622 VILLEURBANNE Cédex
		Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49
		06 07 53 89 13
		e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
	INFORMATIQUE ET INFORMATION	M. Alain MILLE
EDIIS	POUR LA SOCIETE	Universite Claude Bernard Lyon 1
	http://ediis.univ-lyon1.tr	LIRIS - EDIIS
	M Aloin MILLE	Ballment Naulibus
		45 DU UU II IIOVCIIIDIC 1916 60602 VIII EURRANNE Ceder
	Secrétariat · I BUISSON	$T_{\rm El}^{\rm F}$ 1 · 04 72 · 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53
		ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-	M. Didier REVEL
EDISS	<u>SANTE</u>	Hôpital Cardiologique de Lyon
		Bâtiment Central
		28 Avenue Doyen Lépine
	M. Didier REVEL	69500 BRON
	Insa : M. LAGARDE	Iel: 04.72.357232 Fax:
	MATERIALLY DE LVON	M Jean Marc PELLETTER
	MATERIAL DE DION	INSA de Lvon
		MATEIS
	M. Jean Marc PELLETIER	Bâtiment Blaise Pascal
		7 avenue Jean Capelle
	Secrétariat : C. BERNAVON	69621 VILLEURBANNE Cédex
	83.85	Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28
		Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
	MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE	M.Pascal KOIRAN
Math IF	FUNDAMENTALE	Leole Normale Superleure de Lyon
		40 allee d'Italie
	M. Descel KOIDAN	09304 LYON Cedex 07
	Wi, I ascal KOINAN	Pascal koiran@ens-lyon fr
	Insa · G. BAYADA	Secrétariat : Fatine Latif @math.univ-lvon 1.fr
	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE	M. Jean Louis GUYADER
MEGA	CIVIL, ACOUSTIQUE	INSA de Lyon
		Laboratoire de Vibrations et Acoustique
	M. Jean Louis GUYADER	Bâtiment Antoine de Saint Exupéry
		25 bis avenue Jean Capelle
	Secretariat : M. LABOUNE	09021 VILLEURBANNE Cedex
	PM: /1./U -Fax: 8/.12	161:04.72.18.71.70 Fax: 04 72 18 87 12
	SCIENCES DES SOCIETES DE	I IIIEyawiva.III5d-Iyon.II Mmo Clauda Isaballa PPFI OT
SSED	<u>I 'ENVIRONNEMENT ET DI DROIT</u>	Université Ivon 2
GGEL		86 rue Pasteur
	Mme Claude-Isabelle BRELOT	69365 LYON Cedex 07
		Tél: 04.78.69.72.76 Fax: 04.37.28.04.48
		Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr
	Insa : J.Y. TOUSSAINT	

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier toutes les personnes ayant participé au groupe de travail sur le fretting avec Snecma :

- la composante expérimentale avec Siegfried Fouvry de l'École Centrale de Lyon et ses doctorants qui se sont succédés : Christophe Paulin, Jocelyn Arthaud, Caroline Mary et Jean Meriaux ;
- la toute récente composante dynamique numérique : Loïc Salles et Laurent Blanc également de l'ECL;
- le partie modélisation des matériaux de lÉcole des Mines : Georges Cailletaud, Thomas Dick et Eva Héripré ;
- la branche Snecma : Christophe Jacq, Stéphane Deyber, Bénédicte Bonnet et Nathalie Serres.

Je tiens particulièrement à remercier Christophe Jacq qui m'a accueilli en stage de fin d'étude et a eu confiance en moi pour débuter une thèse avec Snecma. Son successeur au sein du groupe de travail, Stéphane Deyber, s'est révélé tout autant compétent et agréable comme superviseur industriel.

Je remercie encore une fois le professeur Georges Cailletaud pour avoir accepter la tâche de rapporteur ainsi que le professeur Frédéric Lebon. Je tiens à saluer Laurent Chambon et le professeur Michel Brunet qui ont accepté la tâche d'examinateur.

Évidemment j'ai une infinie reconnaissance en mon directeur de thèse, Daniel Nélias. Il a bien essayé de me « dynamiser » et d'améliorer mes qualités d'orateur au cours de ces trois dernières années. Il a toujours été au rendez-vous lors de mes interrogations techniques et s'est révélé fortement sympathique au cours de nos déplacements en congrès ou lors des dîners chez lui.

Enfin je remercie tous mes amis du laboratoire. Particulièrement Alexandre (le râleur), Cyril (le whisky), Bertrand (dit Lambert), Guillaume (un peu violent mais quand même un très bon coturne), Claire (et son gros ventre), Eduard (le roumain), Daniel M. (la pause sans café), Tarek (le sage) et tous les autres collègues de bureau : Walid, Tong, Zain, Zeb, Asif et François. Je souhaite du courage à Benjamin qui va prendre la suite de mon travail et ne doute aucunement qu'il va grandement l'améliorer. Ces trois années de thèse auraient été différentes et moins sensationnelles sans Vince et Nahiène. Nos sorties sont mémorables, j'espère pouvoir remettre ça de nombreuses fois.

Mes derniers mots vont vers ma famille et vers LN qui m'apporte son soutien même à 20 000 kilomètres de Lyon.

Résumé

Les pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteurs font face à des sollicitations de type fretting. Il en résulte deux endommagements possibles. L'amorçage et propagation de fissures et l'usure des surfaces en contact. Ce travail s'attardera sur le second point. Des lois d'usure basées sur un critère énergétique seront utilisées pour quantifier l'usure d'un contact mécanique. L'analyse fine du contact aube-disque ou de tout autre contact requiert un outil de calcul à la fois robuste et rapide. Dès lors, la loi d'usure choisie peut être implémentée et des prédictions d'usure peuvent être faites en un temps très court. Pour mener à bien cet objectif, un code de contact dit semi-analytique est développé. La structure est simplifiée en supposant un contact entre deux massifs élastiques semiinfinis. Des solutions analytiques donnant les contributions élémentaires de chargements normaux et tangentiels constants sur une surface rectangulaire sont utilisées pour obtenir par sommation les déplacements élastiques de la surface chargée. Les déplacements élastiques sont alors exprimés par un double produit de convolution discret entre des coefficients d'influence et les pressions et cisaillements dans le contact. Le problème normal et le problème tangentiel en glissement total ou en glissement partiel est alors résolu. La résolution se fait par minimisation de l'énergie complémentaire. Un algorithme d'optimisation sous contraintes est alors mis en place notamment à partir d'une méthode du gradient conjugué. Pour accélérer les calculs, les transformées de Fourier rapides (FFT) sont utilisées pour effectuer le double produit de convolution. Le problème de contact résolu, les contraintes en sous-couche peuvent alors être calculées. Le code est validé à partir de solutions analytiques de la littérature pour des géométries simples. Des simulations d'usure sont effectuées sur un contact cylindre-plan en glissement total ou en glissement partiel. Les résultats d'usure peuvent être comparés à des essais effectués par le LTDS (École Centrale) sur une machine de fretting. Le code de contact est ensuite appliqué au cas industriel du contact aube-disque. La simulation se fait à partir d'une modélisation multi-échelles. Un calcul de la structure est réalisé à partir d'un modèle éléments-finis. Puis les efforts obtenus au niveau des interfaces aube-disque sont utilisés pour résoudre le contact à partir du code semi-analytique sur une géométrie plus fine. Une simulation d'usure est alors entreprise.

MOTS CLÉS: tribologie, fretting, usure, contact, stick-slip, modélisation numérique

Table des matières

Та	ble de	es matiè	res	i
Ta	ble de	es figure	s	v
Li	ste de	s tablea	ux	xi
In	trodu	ction		1
1	Synt	hèse Bi	bliographique	3
	1.1	Contex	te et motivations de l'étude	5
		1.1.1	Liaisons aube-disque des turboréacteurs	5
		1.1.2	Besoin en modélisation	9
	1.2	Frettin	g	1
		1.2.1	Définition	1
		1.2.2	Pratiques expérimentales	1
		1.2.3	Conditions de glissement	4
		1.2.4	Régimes de glissement	6
		1.2.5	Endommagements	7
	1.3	Usure		21
		1.3.1	Généralités sur les modèles d'usure	21
		1.3.2	Modèle d'usure pour le contact aube-disque	:4
	1.4	Modéli	sation en mécanique des contacts	1
		1.4.1	Généralités	1
		1.4.2	Application au contact aube-disque	3
		1.4.3	Application à l'usure	5
	1.5	Bilan .		5
2	Mod	lélisatio	n numérique 3	57
	2.1	Théorie	e du contact élastique	9
		2.1.1	Cinématique du contact	9
		2.1.2	Torseur des efforts transmis dans le contact	-2
		2.1.3	Espace élastique semi-infini	4
		2.1.4	Discrétisation des massifs	0
		2.1.5	Problème de contact normal	2

		2.1.6	Problème de contact tangentiel	56
		2.1.7	Formulations variationnelles	58
	2.2	Analys	e numérique	62
		2.2.1	Résolution numérique du problème de contact	62
		2.2.2	Méthode DC-FFT	68
		2.2.3	Algorithme du gradient conjugué	74
		2.2.4	Résolution du problème normal	75
		2.2.5	Résolution du problème tangentiel	80
	2.3	Modéli	isation de l'usure	93
		2.3.1	Loi d'usure employée	93
		2.3.2	Implémentation de la loi d'usure	94
		2.3.3	Usure dans le cadre d'une modélisation multi-échelles du contact	95
3	Valio	dation d	lu modèle de contact	99
	3.1	Solutio	ons Analytiques et validation	100
		3.1.1	Contact hertzien	100
		3.1.2	Problème de Cattaneo-Mindlin	106
		3.1.3	Sphère en torsion	111
		3.1.4	Sphère chargée normalement avec frottement	114
	3.2	Extens	ion des résultats	118
		3.2.1	Contact poinçon-plan	118
		3.2.2	Étude du contact circulaire et elliptique	122
4	App	lication	S	137
	4.1	Exemp	Ples académiques : le contact cylindre-plan	138
		4.1.1	Usure du cylindre	138
		4.1.2	Usure du cylindre et du plan	147
		4.1.3	Contact élastique tangentiel	151
	4.2	Usure	des pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteurs	161
		4.2.1	Description du modèle	161
		4.2.2	Modélisation d'un cycle de chargement	163
Co	onclus	ion et p	perspectives	185
A	Sim	ulations	en stick-slip du contact sphère-plan	189
B	Sim	ulations	en stick-slip du contact ellipsoïde-plan	191
С	Sim	ulations	en stick-slip du contact sphère-plan pour des matériaux différe	nts201
D	Mod	èle FEN	M aube-disque avec ressorts	211
~	D 1	Portée	extrados	211
	D.2	Portée	intrados	214

E	Modèle FEM aube-disque avec usure 21					
	E.1	Portée intrados	217			
	E.2	Portée exrados	220			
	E.3	Usure	222			
Bil	Bibliographie 22					

Table des matières

Table des figures

1.1	Coupe d'un turboréacteur double-corps	5
1.2	Principe du turboréacteur double-flux	6
1.3	Ensemble aube-disque fan	7
1.4	Origine et nature des sollicitations de fretting du contact aube-disque	7
1.5	Structure du contact aube-disque	8
1.6	Distribution de pression sur la portée tridimensionnelle	9
1.7	Distribution de pression sur la portée bidimensionnelle	10
1.8	Pression sur une portée d'aube à partir des solutions d'Alexandrov	10
1.9	Conditions de sollicitations de l'essai de fretting	12
1.10	Essai classique de fretting wear de type mono-contact	13
1.11	Essai classique de fretting wear de type bi-contact	13
1.12	Les trois modes de fretting	14
1.13	Définition de la condition de glissement alterné	15
1.14	Boucles de fretting et conditions de glissement	15
1.15	Carte de la condition de glissement	16
1.16	Critères de transition de la condition de glissement	16
1.17	Cartes de sollicitations en fretting et carte de réponse du matériau	17
1.18	Courbes de Wöhler d'un essai de fatigue et de fretting-fatigue	19
1.19	Propagation de fissure en deux étapes	19
1.20	Le circuit tribologique	23
1.21	Modélisation discrète des premiers et troisième corps	24
1.22	Chronologie de l'étude menée par Paulin	25
1.23	Réponse locale du matériau et zones d'activation des différents domaines	25
1.24	Évolution des coefficients de frottement pour les trois domaines	26
1.25	Coefficients de frottement expérimentaux et théoriques	27
1.26	Volume d'usure en fonction de l'énergie dissipée cumulée réduite	28
1.27	Évolution du coefficient d'usure en fonction de la demi-largeur du contact	29
1.28	Évolution des coefficients de frottement pour le contact non-revêtu	30
1.29	Approximation géométrique du problème de contact aube-disque	34
1.30	Modélisation du contact aube-disque par zoom strucural	34
2.1	Définition des surfaces et déplacements	40
2.2	Les déplacements de corps rigides	40

22	Los forzas et moments dans la contrat	12
2.5	Les forces et moments dans le contact	43
2.4	Les types de chargement : c) ponetuel b) rectangulaire c) triangulaire	40
2.5	Les types de chargement : a) ponctuer, b) rectangurane, c) trangurane : .	50
2.0		55 54
2.7		54
2.8		57
2.9		64
2.10	Comparaison des temps de calcul des méthodes itératives	65
2.11	Temps de calcul entre trois méthodes de résolution de contact	66
2.12	Besoins de mémoire entre trois méthodes de résolution de contact	67
2.13	Périodicité et recouvrement induits par le produit de convolution discret .	71
2.14	Suppression du recouvrement par zero-padding	71
2.15	Wrap-around et zero-padding de coefficients pairs	73
2.16	Wrap-around et zero-padding de coefficients impairs	73
2.17	Résolution du contact normal	79
2.18	Résolution du contact tangentiel	86
2.19	Résolution du contact tangentiel piloté en effort en glissement total	91
2.20	Simulations d'usure multi-échelles	97
0.1		100
3.1	Validation du contact hertzien	102
3.2	Contraintes du contact hertzien en surface pour $y = 0$	104
3.3	Contraintes du contact hertzien en surface pour $z = 0$	104
3.4	Contraintes du contact hertzien en profondeur pour $x = y = 0$	104
3.5	Contraintes de von Mises du contact hertzien en profondeur pour $y = 0$.	105
3.6	Le problème de contact avec un effort tangentiel oscillant	107
3.7	Simulation du problème de Cattaneo-Mindlin	108
3.8	Contraintes en surface du contact tangentiel adhérant	108
3.9	Contraintes en surface du contact tangentiel en glissement partiel	109
3.10	Glissements du contact tangentiel en glissement partiel	109
3.11	Angle des glissements pour le contact tangentiel en glissement partiel	110
3.12	Glissements et cisaillements pour le problème de Mindlin	110
3.13	Contraintes en surface du contact tangentiel en torsion	112
3.14	Erreur sur la direction du cisaillement pour le contact en torsion	112
3.15	Glissements et cisaillements pour la sphère en rotation	113
3.16	Ratio c/a des simulations de contact normal avec frottement	115
3.17	Pressions et cisaillements sur la surface de contact	115
3.18	Évolution de la pression maximale en fonction du coefficient de frottement	116
3.19	Contact normal avec frottement à chaque incrément de chargement	116
3.20	Glissements et cisaillements pour le contact normal avec frottement	117
3.21	Géométrie du contact poincon-plan	118
3.22	Effets du chargement normal et tangentiel pour le contact poincon-plan	119
3.23	Contact poincon-plan pour différentes positions du centre de pression	120
3.24	Pression et contrainte de von Mises maximale du contact poincon-plan	120
<i>J. L</i> r	ression et contrainte de von mises maximule du contact poinçon plui	- 40

3.25	Effet du centre de pression sur les contraintes du contact poinçon-plan	121
3.26	Loi de Spence pour un contact elliptique	123
3.27	Boucles de fretting pour plusieurs coefficients de frottement	125
3.28	Le critère de fatigue multi-axial de Dang Van [FOU 96a]	126
3.29	Contraintes du problème de Mindlin au cours du chargement et frottement	126
3.30	Boucles de fretting obtenues pour le contact elliptique	128
3.31	Contraintes du problème de Mindlin et rapport d'ellipticité	129
3.32	Contraintes du problème de Mindlin au cours du chargement et l'ellipticité	131
3.33	Boucles de fretting pour des couples de matériaux différents	133
3.34	Contraintes du problème de Mindlin et couples de matériaux	134
3.35	Contraintes du problème de Mindlin au cours du chargement et matériaux	136
4.1	La géométrie cylindre-plan	138
4.2	Boucle de fretting approchée	139
4.3	Géométrie initiale et usée	140
4.4	Évolution de l'usure et de la distribution de pression	141
4.5	Évolution de la profondeur d'usure et du coefficient de variation	142
4.6	Temps de calcul	142
4.7	Conséquence de ΔN sur la largeur et la profondeur d'usure \ldots \ldots	143
4.8	Coefficient de variation et de la largeur d'usure pour différents ΔN	143
4.9	Évolution de la profondeur d'usure et de son erreur pour différents ΔN	144
4.10	Conséquence de la discrétisation sur la profondeur d'usure finale	145
4.11	Évolution du coefficient de variation pour différents maillages	146
4.12	Conséquence du mésalignement sur la distribution d'usure	147
4.13	Évolution des données du test et des données de la simulation	148
4.14	Évolution de l'énergie dissipée par frottement	149
4.15	Comparaison de la trace d'usure pour le test et la simulation	150
4.16	Influence du paramètre ΔN sur la trace d'usure	150
4.17	Trajet du chargement normal et tangentiel	151
4.18	Bûche de fretting en effort normal imposé et glissement total	152
4.19	Bûche de fretting en déplacement normal imposé et glissement total	152
4.20	Distribution théorique du glissement cumulé pendant un cycle	153
4.21	Usure du cylindre et du plan pour différents comportements et lois	154
4.22	Cinétique de l'usure de la simulation en glissement total	154
4.23	Distribution des glissements cumulés sur les géométries initiales et usées .	155
4.24	Distribution des pressions sur la géométrie initiale et usée	155
4.25	Boucle de fretting dans le cas d'un glissement total faible	156
4.26	Indication sur la distribution spatiale de l'usure	157
4.27	Volume d'usure des différentes lois d'usure en fonction du débattement .	157
4.28	Simulations de fretting en glissement partiel	158
4.29	Trace d'usure pour les simulations en glissement partiel	159
4.30	Contraintes en surfaces et glissements des simulations en glissement partiel	159
4.31	Rapport des énergies totales et de frottement en glissement partiel et total	160

4.32	Repères locaux des géométries de contact	161
4.33	Géométries utilisées dans le code éléments-finis et le code semi-analytique	162
4.34	Rapport entre l'effort normal et tangentiel pour chaque portée	163
4.35	Trajet des efforts appliqués sur chaque portée	164
4.36	Trajet des moments appliqués sur chaque portée	165
4.37	Positions du centre de pression	165
4.38	Pression de contact pour la portée intrados	166
4.39	Pression de contact pour la portée intrados	166
4.40	Cisaillement à l'incrément 8 pour la portée intrados	167
4.41	Cisaillement à l'incrément 12 pour la portée intrados	167
4.42	Cisaillement à l'incrément 15 pour la portée intrados	168
4.43	Glissement à l'incrément 8 pour la portée intrados	169
4.44	Glissement à l'incrément 12 pour la portée intrados	170
4.45	Glissement à l'incrément 15 pour la portée intrados	170
4.46	Glissement à l'incrément 8 pour la portée extrados	172
4.47	Glissement à l'incrément 8 pour la portée extrados	172
4.48	Énergie dissipée par frottement à chaque incrément	173
4.49	Temps de calcul pour un cycle de fretting	175
4.50	Simulation d'usure multi-échelles simplifiée	175
4.51	Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée intrados non-usée	176
4.52	Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée extrados non-usée	177
4.53	Le modèle éléments-finis modifié avec l'incorporation de ressorts	179
4.54	Évolution de l'usure au niveau des deux portées	179
4.55	Pression de contact pour la portée intrados à différents niveaux d'usure	180
4.56	Pression de contact pour la portée extrados à différents niveaux d'usure .	181
4.57	Usure pour la portée intrados à différents niveaux d'usure	181
4.58	Usure pour la portée extrados à différents niveaux d'usure	181
4.59	Erreur sur le position du centre de pression avec l'usure	182
4.60	Simulation élastique et élastoplastique du contact cylindre-plan en fretting	188
A 1	Contraintes du problème de Mindlin pour plusieurs frottement en A	100
A.1	Contraintes du problème de Mindlin pour plusieurs frottement en A	109
A.2	Contraintes du probleme de Mindlin pour plusieurs frottement en B	190
B .1	Contraintes en surface du problème de Mindlin d'un contact elliptique	192
B.2	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b < 1 - \mu = 0.3 - A$	193
B.3	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \ge 1 - \mu = 0, 3 - A$	194
B.4	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \le 1 - \mu = 0.3 - B$	195
B.5	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \ge 1 - \mu = 0.3 - B$	196
B.6	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \le 1 - \mu = 0.9 - A$	197
B.7	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \ge 1 - \mu = 0.9 - A$	198
B. 8	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \le 1 - \mu = 0.9 - B$	199
B.9	Contraintes du problème de Mindlin - $a/b \ge 1 - \mu = 0.9 - B$	200
C.1	Contraintes en surface du problème de Mindlin - $\mu = 0, 3 - A$	202

C.2	Contraintes en surface du problème de Mindlin - $\mu = 0, 3$ - B 203
C.3	Contraintes en surface du problème de Mindlin - $\mu = 0,9$ - A
C.4	Contraintes en surface du problème de Mindlin - $\mu = 0,9$ - B 205
C.5	Contraintes du problème de Mindlin - $\mu = 0, 3$ - A
C.6	Contraintes du problème de Mindlin - $\mu = 0, 3$ - B
C.7	Contraintes du problème de Mindlin - $\mu = 0,9$ - A
C.8	Contraintes du problème de Mindlin - $\mu = 0,9$ - B
D.1	Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée
D.2	Évolution du chargement - Extrados
D.3	Évolution des moments - Extrados
D.4	Glissement cumulé - Extrados
D.5	Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée - Intrados 214
D.6	Évolution du chargement - Intrados
D.7	Évolution des moments - Intrados
D.8	Glissement cumulé - Intrados
E.1	Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée - Intrados 217
E.2	Évolution du chargement à différents niveaux d'usure - Intrados 218
E.3	Évolution des moments à différents niveaux d'usure - Intrados 218
E.4	Position du centre de pression à différents niveaux d'usure - Intrados 219
E.5	Glissement cumulé sur la portée intrados
E.6	Evolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée
E.7	Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée - Extrados 220
E.8	Évolution des moments à différents niveaux d'usure - Extrados
E.9	Position du centre de pression à différents niveaux d'usure - Extrados 221
E.10	Glissement cumulé sur la portée extrados
E.11	Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée intrados 223
E.12	Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée extrados 224

Table des figures

Liste des tableaux

2.1	Bilan du problème normal
2.2	Bilan du problème tangentiel
2.3	Bilan du problème tangentiel en glissement total
3.1	Problème d'indentation normale avec frottement du contact elliptique 122
3.2	Problème de Mindlin dans le cas du contact elliptique
3.3	Problème de Cattaneo-Mindlin avec des matériaux élastiques différents . 132
4.1	Caractéristiques générales des simulations 138
4.2	Simulation de référence
4.2 4.3	Simulation de référence \ldots
4.2 4.3 4.4	Simulation de référence $\dots \dots \dots$
4.2 4.3 4.4 4.5	Simulation de référence $\dots \dots \dots$

Liste des tableaux

Introduction

L'usure par fretting des pieds d'aube de soufflante des turboréacteurs est un problème ancien et récurrent. Le motoriste Snecma veut lutter contre cet endommagement dont le principal défaut est d'augmenter les coûts de maintenance des compagnies aériennes.

Les principaux thèmes de cette thèse sont l'usure, le fretting et la mécanique des contacts, sujets étudiés par les tribologues. La tribologie, mot proposé par G. Salomon en 1968, est la science du frottement, de la lubrification et de l'usure. Le frottement est une des principales sources de perte d'énergie. L'usure coûte énormément aux entreprises comme aux particuliers. La tribologie est une science pluridisciplinaire. Un problème tribologique pour être étudié dans sa globalité doit aborder les trois grands domaines suivants :

- La caractérisation des matériaux et des lois de frottement mis en jeu;
- La caractérisation des surfaces et des couches proches de l'extrême surface. La connaissance de l'environnement du contact ainsi que des lois physico-chimiques des surfaces jouent un rôle clé;
- L'application des lois de la mécanique. La mécanique du solide pour le comportement des structures et la mécanique des fluides pour les contacts lubrifiés.

Les deux premiers domaines sont plutôt d'ordre expérimental. Cette thèse ne s'attarde pas sur ces problématiques. Des résultats issues de travaux effectués ou en cours sont cependant utilisés, notamment les recherches menées au LTDS¹ par l'équipe de S. Fouvry. Ces derniers cherchent à comprendre et à formaliser la durée de vie en usure d'un lubrifiant solide utilisé pour le contact aube/disque ainsi qu'à quantifier les étapes successives de l'endommagement des surfaces en contact.

Cette thèse porte essentiellement sur la mécanique du contact et les outils numériques nécessaires à sa compréhension. Un travail de modélisation numérique du contact est fait en vue d'une prédiction d'usure à partir des résultats expérimentaux du LTDS. L'enjeu est le développement d'une méthodologie de calcul du contact assez rapide pour pouvoir effectuer des calculs d'usure et intégrer la prise en compte de cet endommagement dès la phase de conception du moteur.

Le premier chapitre reprend le contexte industriel. Une présentation des turboréacteurs et de la liaison aube-disque de soufflante est faite puis le travail de la thèse est replacé dans l'état actuel des besoins du motoriste. Ensuite un état de l'art est donné dans le but d'introduire et de présenter les problèmes de fretting et d'usure. Une loi d'usure établie

¹Laboratoire de Tribologie et de Dynamique de Structures, École Centrale de Lyon

par le LTDS et utile à la modélisation est présentée. Ce chapitre se termine par un résumé non-exhaustif des différentes méthodes de calcul utilisées en mécanique des contacts.

Le deuxième chapitre détaille le développement d'un code de calcul de contact dans le but de simuler des usures en fretting. Le problème de contact est dans un premier temps posé. Sont distingués le problème normal et le problème tangentiel. La méthode utilisée pour résoudre le contact est dite « semi-analytique ». Les différentes hypothèses qui permettent d'utiliser cette méthode sont abordées. Puis un descriptif de la mise en forme numérique du problème de contact est fait. La transformée de Fourier rapide (FFT) qui permet d'accélérer les calculs est introduite. Les algorithmes utilisés, basés sur la méthode du gradient conjugué sont détaillés. Ce chapitre reprend également l'intégration de la loi d'usure dans le code de contact. Pour terminer, il est montré comment à partir d'un code éléments finis et du code de contact développé, il est possible d'effectuer une modélisation « multi-échelles ».

Le troisième chapitre s'attarde sur la validation du code de contact. Différentes simulations sont faites à partir de problèmes académiques dont les solutions analytiques existent dans la littérature. Les capacités du code à résoudre les problèmes de contact sont soulignées. Une série de résultats basés sur des géométries élémentaires est présentée et analysée.

Le dernier chapitre est une application du code d'usure. Des simulations d'usure sur la géométrie cylindre-plan sont faites. L'objectif est de détecter l'influence de certains paramètres sur les résultats en terme d'usure. Cette simulation permet également de valider la méthode en comparant l'usure obtenue numériquement et celle obtenue expérimentalement sur cette même géométrie par l'équipe du LTDS. Ce chapitre se termine par l'application du code d'usure au cas industriel. Des simulations d'usure aube-disque sont faites. Ces simulations sont multi-échelles et font appel à un modèle éléments finis de la structure aube-disque.

Chapitre 1

Synthèse Bibliographique

Ce premier chapitre reprend tout d'abord la problématique industrielle qui a conduit à ce travail de thèse. Ensuite, un état de l'art sur le fretting, l'usure et la modélisation en mécanique du contact est fait.

Sommaire

1.1	Conte	xte et motivations de l'étude	5
	1.1.1	Liaisons aube-disque des turboréacteurs	5
	1.1.2	Besoin en modélisation	9
1.2	Fretti	ng	11
	1.2.1	Définition	11
	1.2.2	Pratiques expérimentales	11
	1.2.3	Conditions de glissement	14
	1.2.4	Régimes de glissement	16
	1.2.5	Endommagements	17
1.3	Usure		21
	1.3.1	Généralités sur les modèles d'usure	21
	1.3.2	Modèle d'usure pour le contact aube-disque	24
1.4	Modél	lisation en mécanique des contacts	31
	1.4.1	Généralités	31
	1.4.2	Application au contact aube-disque	33

	1.4.3	Application à l'usure	35
1.5	Bilan		35

1.1 Contexte et motivations de l'étude

1.1.1 Liaisons aube-disque des turboréacteurs

Les moteurs utilisés dans l'aéronautique civile sont principalement des turbo-réacteurs double-corps (cf. FIG.1.1). Le turboréacteur est une turbomachine produisant une poussée par réaction. Dans le cas des turbo-réacteurs simple corps, le flux est comprimé dans le compresseur. Le carburant est injecté dans le flux au niveau de la chambre de combustion. Les gaz sont alors élevés à haute température, ils se détendent puis transmettent leur énergie à la turbine qui entraine elle même le compresseur. Le turbo-réacteur double-corps qui permet un meilleur rendement et une meilleure efficacité du moteur est composé d'un compresseur dit basse pression et d'un compresseur dit haute pression. Couplés à la turbine basse et haute pression respectivement, ces deux compresseurs forment deux ensembles cinématiquement indépendants.



FIG. 1.1: Coupe d'un turbo-réacteur double-corps - www.snecma.com

Les turbo-réacteurs civils font aussi appel à la technologie double-flux (cf. FIG.1.2). Contrairement aux réacteurs simple-flux qui sont bruyants et atteignent leur meilleur ren-

1. Synthèse Bibliographique

dement pour des vitesses au delà de Mach 1, les réacteurs double-flux sont bien plus économiques. Le premier étage du compresseur basse pression des moteurs double-flux est la soufflante (ou « fan » en anglais). Les dimensions de la soufflante sont bien plus importantes que les étages suivants. Celle-ci comprime un flux qui va être divisé en deux parties : le flux primaire et le flux secondaire. Le flux primaire (ou flux chaud) est celui qui traverse l'ensemble haute et basse pression. Le flux secondaire (ou flux froid) contourne le moteur. L'essentiel de la poussée (80%) est fournit par le flux secondaire.



FIG. 1.2: Principe du turbo-réacteur double-flux - www.snecma.com

La soufflante, cf. FIG.1.3, est composée d'un disque (« disk ») sur lequel sont fixées les aubes (« blades ») par une liaison en queue d'aronde (« dovetail joint »).

La force centrifuge, cf. FIG.1.4, de part la rotation du moteur entraîne l'ascension des aubes qui viennent se plaquer contre le disque au niveau des interfaces de contact entre les aubes et le disque. Ces interfaces sont nommés portées. Il résulte de cette effort centrifuge un chargement normal et tangentiel et des micro-déplacements relatifs des deux ensembles au niveau de la portée. Ces sollicitations sont dites oligocycliques, car caractérisées par de fortes intensités et de faibles fréquences. Elles sont associées aux phases de changements de régime moteur au cours du vol et sont souvent simplifiées à la prise en compte du démarrage et de l'arrêt du turboréacteur. Un cycle oligocyclique correspond à un vol. Les portées ne sont pas seulement soumises à des sollicitations oligocycliques mais également polycycliques. Ce sont des sollicitations de faibles intensités et de fortes fréquences (quelques dizaines à quelques centaines de Hertz). Ces sollicitations trouvent leurs origines dans les vibrations apparaissant au cours du vol. Ces vibrations sont dues aux modes de vibration de la structure ou aux instabilités aérodynamiques.



FIG. 1.3: Ensemble aube-disque fan



FIG. 1.4: Origine et nature des sollicitations de fretting du contact aube-disque

7

1. Synthèse Bibliographique

Le phénomène qui définit un contact entre deux surfaces normalement chargées et soumises à un micro-déplacement relatif est dénommé « fretting » . Le fretting entraîne deux types de dégradations : l'usure des surfaces et la fatigue par amorçage et propagation de fissures.

Le degré de gravité de ces avaries de surfaces est très différent. Alors que l'usure crée essentiellement un problème de coût de maintenance conséquent au traitement de ces surfaces usées, la fatigue peut entraîner la perte d'une aube, voire la rupture du disque. Une avarie du moteur est dangereuse pour la sécurité des occupants de l'appareil.

Les motoristes font cependant appel à des technologies de pointe pour remédier à ces problèmes et faire de l'avion le moyen de transport le plus sûr de tous. Le matériau utilisé pour la fabrication des aubes et du disque est un alliage de titane : le Ti-6Al-4V. Les alliages de titane présentent des qualités mécaniques remarquables pour une faible masse volumique. De plus, ils sont peu sensibles à la corrosion grâce à l'existence d'une couche d'oxyde en surface. Le disque est forgé puis usiné et grenaillé. Les aubes sont elles forgées, usinées puis grenaillées au niveau de la portée. Le grenaillage introduit des contraintes résiduelles de compression en surface pour limiter l'initiation et la propagation de fissures.

Les propriétés tribologiques des alliages de titane se révèlent cependant médiocres. La technologie utilisée pour améliorer cette situation est un traitement superficiel des portées d'aube (FIG.1.5). Outre le grenaillage, un revêtement, actuellement un plasma de cuivrenickel-indium (Ci-Ni-In), d'une épaisseur moyenne de 150 μ m est ajouté. Sur celui-ci est déposé un lubrifiant solide à faible coefficient de frottement : le Molydag (MoS2).



FIG. 1.5: Structure du contact aube-disque [PAU 06]

1.1.2 Besoin en modélisation

Les technologies améliorant la tenue de vie de la liaison aube-disque ont avant tout été développées à partir d'avancées sur la nature des matériaux et des procédés de fabrication mises en œuvre par des séries d'essais expérimentaux.



FIG. 1.6: Distribution de pression sur la portée tridimensionnelle

Les besoins actuels se situent au niveau de la modélisation. D'une part la géométrie de la portée est contraignante. La géométrie est telle que les gradients de contraintes sont très marqués. La variation est de l'ordre du Mpa/ μ m. Les capacités de calcul 3D actuelles ne permettent pas d'utiliser un maillage assez fin (FIG.1.6). Pour isoler correctement le champ de pression, la géométrie du contact aube-disque peut être approximée par un contact plan-plan bidimensionnel avec des congés de raccordement. Des solutions analytiques développées par Alexandrov [ALE 86] sont utilisées. Le champ de pression est représenté sur la figure 1.7. Un pic de pression apparaît au niveau des congés de raccordement. Celui-ci est d'autant plus étroit que les rayons sont faibles.

Les durées de vie en fatigue calculées dépendent donc de la finesse de la représentation.

Une deuxième difficulté apparaît du fait de l'usure des surfaces. Les durées de vie sont calculées à partir des surfaces vierges de toute usure. Or cette usure a un impact évident sur la durée de vie en fatigue.

- L'usure modifie les surfaces de telles sorte que les champs de pression sont plus « aplatis », les pics de pression sont moins importants.
- L'usure observée en flotte peut atteindre 200 μ m sur le disque, soit plus que la profondeur d'action du grenaillage.

L'usure ôte la couche superficielle du matériau, là où sont initiées les micro-fissures.
Les calculs de durée de vie sur surfaces initiales sont donc erronés. La durée de vie en



FIG. 1.7: Distribution de pression sur la portée bidimensionnelle



FIG. 1.8: Pression sur une portée d'aube à partir des solutions d'Alexandrov

terme d'usure des surfaces en contact (dont le revêtement) doit aussi être estimée. Il faut dès la phase de conception du moteur, pouvoir estimer la durée de vie du revêtement afin d'augmenter celle-ci pour réduire les opérations de maintenance sur les moteurs en flotte. Là encore les moyens de calcul numérique limitent la simulation d'usure sur des géométries tridimensionnelles. Et cela d'autant plus que l'usure est un phénomène cyclique à simuler.

Ce travail de thèse se situe dans l'amélioration des outils numériques. Le but est de mettre au point un code de contact robuste et rapide permettant une description plus complète que les solutions analytiques mais permettant d'atteindre des finesses de maillage qui ne sont pas possible en utilisant les codes éléments finis. Les lois d'usure en fretting développées par l'équipe du LTDS ajoutées au code de contact en font un code d'usure rapide. La vitesse de calcul permet alors de pouvoir mener à terme des calculs sur l'application aube-disque avec des temps acceptables en terme de contraintes industrielles.

1.2 Fretting

1.2.1 Définition

Le fretting est défini comme étant un mouvement oscillatoire de faible amplitude, souvent tangentiel, appliqué à deux surfaces en contact. Le fretting est souvent présenté comme l'une des avaries de surfaces les plus critiques des applications industrielles. Il se retrouve dans toutes les liaisons quasi-statiques. Les exemples de fretting ne manquent pas, on peut le retrouver dans les systèmes suivants : les liaisons (cannelures, liaisons par axe, pieds d'aube de turbine...), les empilages multiples (arbres de transmissions), les assemblages rivés (boulonnés), les câbles, les conduits flexibles...; et concernent toutes les industries : constructions mécaniques, aéronautiques, biomédicales, industrie nucléaire, génie civil...

Lorsque les faibles débattements résultent de vibrations externes appliquées à des surfaces qui ne sont pas soumises à des déplacements imposés, on parle de fretting-wear. Si le déplacement est la conséquence de la déformation de l'une des deux structures en contact soumise à une sollicitation cyclique, il s'agit de fretting-fatigue. Quand les produits de la dégradation sont des oxydes, on utilise le terme fretting-corrosion.

1.2.2 Pratiques expérimentales

Les pratiques expérimentales mises en place dans le cadre du fretting sont avant tout vouées à la détermination des durées de vie en fatigue (propagation de fissure) et en usure des contacts sollicités.

Deux configurations de chargement sont majoritairement développées, cf. FIG.1.9. L'essai de fretting-fatigue dérive d'un essai classique de fatigue. Une éprouvette de traction est soumise à des sollicitations cycliques (souvent de la traction répétée). Deux éprouvettes viennent « pincer » cette dernière. Le déplacement au niveau du contact est généré par la déformation relative entre les surfaces en contact. L'essai de fretting-wear consiste à appliquer un déplacement alterné à une éprouvette maintenue en contact contre une autre. Les dispositifs expérimentaux pour réaliser des essais de fretting-wear peuvent être élaborés à partir de machines de traction-compression. Classiquement, il s'agit d'imposer une charge normale de contact entre les deux éprouvettes à tester. Puis une sollicitation cyclique et tangentielle est appliquée à l'une des éprouvettes. Des essais de type mono-contact, cf. FIG.1.10, ont été mis en place au LTDS par Paulin [PAU 05, PAU 06]. L'une des deux éprouvettes est placée en tête du vérin hydraulique qui sert à imposer la sollicitation cyclique de déplacement et l'autre est fixée sur la base de la machine. Le déplacement est mesuré par un extensomètre. La machine est asservie par le biais de ce déplacement. Les géométries des échantillons peuvent être diverses : cylindres, poinçons axisymétriques, poinçons 2D,... Les chargements normaux sont compris entre 200 N et 5000 N pour des demi-largeurs de contacts a entre 160 μ m et 800 μ m. Pour des chargements plus élevés (>5000 N), les essais de type bi-contact, cf. FIG.1.11, sont préférables. Une éprouvette centrale (barre) est pincée entre deux poinçons. Les géométries des poin-



FIG. 1.9: Conditions de sollicitations de l'essai de fretting-fatigue et de l'essai de frettingwear [PAU 06]

çons peuvent être diverses. Cette assemblage à l'avantage d'équilibrer le chargement de part et d'autre de l'axe de travail de la machine et est également développé au LTDS [PAU 05].

13



FIG. 1.10: Essai classique de fretting wear de type mono-contact [PAU 06]



FIG. 1.11: Essai classique de fretting wear de type bi-contact [PAU 06]

1.2.3 Conditions de glissement

Trois modes de fretting ont été défini par Mohrbacher [MOH 95b] notamment dans le cadre du contact sphère-plan. Ces trois modes représentés à la figure FIG.1.12 sont :

- le mode I : déplacement linéaire ;
- le mode II : déplacement radial ;
- le mode III : déplacement circonférentiel.



FIG. 1.12: Les trois modes de fretting [MOH 95b]

Plus simple à mettre en œuvre et plus représentatif de la plupart des situations industrielles, le mode I est le plus étudié, notamment par le biais de l'essai classique de fretting-wear. Un cylindre est maintenu en contact sur un plan avec une force normale N constante. Un déplacement tangentiel $\pm 2\delta^*$ est imposé à l'un des corps, l'autre étant fixe par rapport au bâti de la machine. δ^* est mesuré sur la machine. On note Q la force tangentielle mesurée. La largeur de la zone de contact est 2a. Soit $e = \frac{\delta^*}{a}$. Si e est inférieur à 1 il s'agit de fretting car il existe une zone non exposée à l'atmosphère ambiante, dans le cas contraire on parle alors de glissement alterné. Cette condition de glissement est exposée à la figure FIG.1.13.

En fonction de l'effort normal et de l'amplitude du débattement imposé, deux conditions de glissement peuvent être rencontrées et différenciées en observant la forme du cycle de fretting (cf. FIG.1.13) :

- la condition de *glissement partiel* : la zone de contact est séparable en une zone d'adhérence et une zone de glissement. La force tangentielle maximale Q^* imposée par le biais du débattement ne dépasse jamais en valeur absolue le produit de l'effort normal par le coefficient de frottement ($|Q^*| < \mu P$). Le cycle de fretting est de forme « elliptique » ;
- la condition de *glissement total* : il n'y a aucune zone qui est de façon permanente en adhérence. Au cours du cycle l'effort tangentiel maximal Q^* atteint en valeur

15



FIG. 1.13: Définition de la condition de glissement alterné [PAU 06]

absolue le produit de l'effort normal par le coefficient de frottement ($|Q^*| = \mu P$). La forme du cycle est un parallélogramme.

La loi de Coulomb est donc utilisée pour définir le coefficient de frottement μ .



FIG. 1.14: Boucles de fretting et conditions de glissement

L'énergie Ed dissipée au cours du cycle par frottement est quantifiable avec l'aire du cycle de fretting. Cette dissipation d'énergie peut se faire à travers de nombreux mécanismes : création de débris, élévation de température, fissuration, déformation plastique, transformation physico-chimique...

L'ouverture de cycle δ_0 est la valeur du débattement pour un effort tangentiel nul. L'intérêt de cette valeur est qu'elle est, contrairement à δ^* , indépendante de la rigidité du montage. En glissement total, c'est le glissement réel du centre du contact.

Un critère de transition doit être établi pour définir le passage d'une condition de glissement à l'autre en fonction des déplacements et efforts tangentiels, cf. FIG.1.15.

Du point de vue expérimental des critères quantitatifs doivent être établis pour déterminer la condition de glissement à partir de la boucle de fretting. Une simple observation



FIG. 1.15: Carte de la condition de glissement [PAU 06]

de cette dernière n'est pas suffisante. Fouvry [FOU 97a] en propose trois pour le contact sphère-plan, cf. FIG.1.16. Ces critères ont été établis à partir des solutions analytiques de Mindlin [MIN 49] du contact sphère-plan en glissement partiel.



FIG. 1.16: Critères de transition de la condition de glissement [FOU 97a]

1.2.4 Régimes de glissement

Les cartes de fretting sont intéressantes pour synthétiser l'influence des sollicitations en fretting sur l'endommagement. Elles ont d'abord été introduites par Vingsbo et Söderberg [VIN 88] dans le cas d'un contact sphère-plan pour tracer la transition entre les conditions de glissement. Ces cartes de fretting ont ensuite été améliorées par Vincent [VIN 92] en introduisant la notion de régime de glissement qui prend en compte l'évolution dans le temps de cette condition de glissement, on distingue alors :

le régime de glissement partiel : la condition de glissement partiel est observée pendant tout l'essai;
17

- *le régime de glissement total* : la condition de glissement total est observée pendant tout l'essai ;
- *le régime de glissement mixte* : on passe d'une condition de glissement total à une condition de glissement partiel pendant l'essai.

Ces trois régimes peuvent être placés dans un plan en fonction de l'effort normal et du débattement dans ce qui s'appelle la carte de sollicitation locale (ou « running condition fretting map »), cf. FIG.1.17. Une deuxième carte de fretting qui correspond à la carte de réponse du matériau (ou « material response fretting map ») peut être tracée. Elle définit les endommagements classiquement observés en fonction de ce même effort normal et amplitude de débattement. De nombreuses études [FOU 96a, FOU 04] s'accordent pour dire que la fissuration est prépondérante en régime de glissement partiel et mixte, et que l'usure par formation de débris est l'endommagement principal en régime de glissement total.



FIG. 1.17: Cartes de sollicitations en fretting et carte de réponse du matériau [PAU 06]

1.2.5 Endommagements

Les deux endommagements principaux qui apparaissent dans les situations de fretting et qui apparaissent de part la nature cyclique du phénomène sont l'usure et la fatigue (fissuration). L'usure peut être assimilée à une réponse du système tribologique suite à une déformation locale excessive. La fatigue peut être considérée comme une réponse du système tribologique à une contrainte locale excessive. Ces deux phénomènes sont souvent considérés et étudiés séparément et indépendamment l'un de l'autre. Or comme le montre la carte de réponse en fretting du matériau, certaines situations sont propices à une compétition entre les deux endommagements.

1.2.5.1 Usure

De manière générale on distingue deux types d'usure : les usures liées au frottement et les autres. Les autres types d'usures sont l'usure par érosion, qui résulte de l'enlèvement de matière par un fluide chargé de particules en contact avec la surface d'un matériau, l'usure par cavitation, associée à la fatigue superficielle du matériau sous l'effet des ondes de choc dues à l'implosion de bulles de vapeur dans les liquides. Les usures liées aux frottements sont premièrement l'usure adhésive où suite à des surcharges locales, des jonctions se créent entre deux corps glissants l'un contre l'autre. Ces jonctions peuvent également être créées par fusion (soudure). L'usure abrasive est une usure où un corps dur déforme plastiquement avec ou sans enlèvement de matière un corps plus mou. L'usure corrosive ou tribochimique intervient lorsque le frottement se déroule dans un environnement corrosif. L'usure par fissuration est créée par les contraintes mécaniques générées par le frottement qui entraîne la création et la propagation de fissures. Enfin l'usure par fretting est considérée à part entière comme une forme d'usure liée au frottement. Des débris et/ou des dégradations de surfaces sont générés à l'intérieur du contact par des processus mécaniques, adhésifs...

1.2.5.2 Fissuration

Les problèmes de fissuration en fretting sont étudiés selon deux directions. La première consiste à l'étude des durées de vie d'une éprouvette soumise à des sollicitations de fretting et d'une contrainte de traction uni-axiale cyclique. Cette étude passe par la réalisation d'essais de fretting-fatigue. La deuxième direction de recherche est celle qui s'intéresse à l'action unique des sollicitations de fretting sur l'amorçage des fissures. Cet axe de recherche fait appel à des essais de fretting-wear.

Les durées de vie en fatigue sont le plus souvent calculées à partir des courbes Wöhler. Ce sont des courbes d'abattements réalisées à partir d'essais de traction uni-axiale cyclique. Une courbe délimite sur un système d'axe « Nombre de cycles - Contrainte » la durée de vie de l'éprouvette. L'étude de fatigue en fretting-fatigue permet de reproduire ce même type de courbe mais modifiée de part l'entrée en jeu des sollicitations de fretting. Ces nouvelles courbes de Wöhler dépendent alors des paramètres de l'essai de fretting : l'effort normal P et le débattement δ^* . La durée de vie diminue alors avec l'augmentation de la pression de contact, cf. FIG.1.18. Cette même durée de vie diminue dans un premier temps avec l'augmentation du glissement pour finalement augmenter pour des glissements plus important. En effet l'augmentation du débattement entraîne une usure plus importante qui vient gommer les micro fissures initiées en surfaces. En fretting-fatigue, deux stades sont généralement observés [WAT 81] dans la propagation des fissures (FIG.1.19) :

19



FIG. 1.18: Courbes de Wöhler d'un essai de fatigue et de fretting-fatigue [LIS 04]

- après amorçage en surface, la fissure croit dans la direction du plan de cisaillement maximal soit avec un angle de 10°à 60° par rapport à la surface. Le champs de contraintes créé par le contact est prépondérant. La longueur de ces fissures courtes dépend des sollicitations imposées mais surtout de la sensibilité au cisaillement du matériau;
- à partir d'une certaine profondeur, la contrainte de traction uni-axiale est dominante.
 La fissure change de direction. Une fissure longue se crée perpendiculairement à la contrainte principale maximale.



FIG. 1.19: Propagation de fissure en deux étapes en condition de fretting-fatigue [LIS 04]

Le seuil de transition entre la fissure courte et la fissure longue fait l'objet de recherche [HIL 88, NIX 88]. En effet selon certaines conditions la fissure courte ne se propage pas en fissure longue ce qui implique un arrêt de fissuration et des durées de vie infinies.

Pour déterminer la condition d'amorçage des fissures courtes, il faut procéder à des essais de fretting-wear. La sollicitation de fatigue créée par la contrainte uni-axiale n'étant plus présente, la transition d'une fissure courte à longue n'est plus possible. Les critères de fatigue multi-axiaux ont été adaptés pour prédire cette condition d'amorçage, notamment par Fouvry [FOU 96b] dans le cas des aciers et à l'aide du critère de Dang Van.

1. Synthèse Bibliographique

Le risque d'amorçage reste cependant lié à la carte de réponse en fretting du matériau. Ces essais permettent aussi de déterminer les longueurs des fissures courtes et développer des modèles permettant de prédire leur longueur en fonction du couple de matériaux et des sollicitations de contact. Là encore les cinétiques d'usure ont un forte influence sur la longueur des fissures. Elleuch [ELL 02] montre que pour une amplitude de débattement croissante, la longueur de fissure augmente puis décroît dès le régime de glissement total atteint.

1.3 Usure

1.3.1 Généralités sur les modèles d'usure

Contrairement à la fissuration, l'usure est moins bien formalisée. D'une part il s'agit d'un phénomène et non d'une grandeur physique, l'usure n'a pas d'unité légale. D'autre part, l'usure fait intervenir un nombre de mécanismes importants plus ou moins quantifiables tel que :

- la modifications des surfaces par enlèvement de matière à l'interface ;
- la présence de débris de troisième corps à l'interface ;
- le flux de ces débris à l'intérieur et vers l'extérieur du contact;
- les mécanismes de transfert ;
- l'influence de l'environnement;
- le couplage entre les aspects thermodynamiques, physico-chimiques, mécaniques.

1.3.1.1 Approche quantitative

De nombreuses lois d'usure ont été présentées dans la littérature. Ludema [MEN 95] entreprend de recenser toutes ces lois d'usure depuis 1947. Il en dénombre plus de trois cents. Au final, 182 lois d'usure lui paraissent dignes d'intérêt. Il distingue trois visions différentes de ces lois d'usure :

- **Jusqu'en 1970** Les lois d'usure sont empiriques. Ces lois sont développées à partir d'essais spécifiques où certaines conditions d'essais sont modifiées pour déterminer l'impact sur l'usure. Barwell [BAR 58] propose une loi où le taux d'usure est identifié par le volume d'usure V. Ce volume d'usure est exprimé en fonction du temps t et à partir de courbes du type $V = \frac{\beta}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t)), V = \alpha t$ ou $V = \beta \exp(\alpha t)$. Les paramètres α et β sont déterminés empiriquement. Rhee [RHE 70] propose une loi d'usure sur la masse perdue où interviennent l'effort normal et la vitesse de glissement, et des coefficients empiriques. Dans tous les cas, ces lois sont souvent précises, mais uniquement valables pour le type et les conditions du test qui les ont validées.
- **de 1970 à 1980** Des équations basées sur la mécanique des contacts sont essentiellement utilisées. Ces équations prennent en compte l'aire de contact. Les propriétés des matériaux tels que le module d'Young *E* ou la dureté *K* ont un impact sur les cinétiques d'usure. L'exemple le plus repris de ce type de lois et proposé plus tôt que cette période est la célèbre loi éponyme d'Archard [ARC 53]

$$W = Ks \frac{P}{p_m} , \qquad (1.1)$$

avec W le volume usé, s la distance de glissement, P le chargement normal, p_m la limite d'écoulement en terme de pression (approximativement équivalente à la dureté) du matériaux le plus mou. K est une constante reliant la probabilité lorsque

deux aspérités se rencontrent de créer une particule d'usure. Cependant K peut simplement être définie comme un coefficient d'usure et sa valeur est obtenue par le biais de l'expérience. La loi d'Archard est théorique et s'applique difficilement à la réalité des contacts dans leurs diversités. Elle sera adaptée de diverses façons par les expérimentateurs pour coller aux expériences particulières qui les concernent.

de 1980 à 1995 De nombreuses lois basées sur la mécanique de la rupture ont été développées. La résistance à l'usure n'est plus considérée comme une propriété intrinsèque aux matériaux, et le seul calcul des propriétés mécaniques du contact (tel que l'aire réelle de contact) ne suffit plus.

Ces lois sont nombreuses et très particulières. Une tentative de regroupement de tout les résultats d'essais de type pion-disque sur une carte d'usure a été entrepris par Lim et Ashby [LIM 87]. L'objectif était de créer une base de données assez vaste et définir ainsi des domaines avec des comportements identiques et des transitions entre différents régimes d'usure. Les résultats sont donnés en terme de dégradations et en fonction d'une vitesse et d'une pression de contact adimensionnée. Cette démarche qui prend rapidement une ampleur internationale est vite abandonnée suite à des paramètres non pris en compte (raideur du contact imposé par le banc d'essai, disposition horizontale ou verticale du contact pion-disque...) qui se révèlent finalement importants sur l'usure.

A l'heure actuelle, une approche quantitative basée sur l'énergie dissipée par frottement est largement développée, notamment par une équipe de l'Ecole Centrale de Lyon et ce dans le cas du fretting. L'énergie dissipée par frottement est considérée comme activateur principal des processus de dégradation des systèmes tribologiques. Les processus d'usure sont pilotés par les températures de contact, les transformations de films tribochimiques, le transfert de matière entre surfaces, les ruptures par contraintes mécaniques ou thermiques. Morhbacher [MOH 95a] est le premier à avoir introduit le concept d'énergie dissipée cumulée dans l'étude de l'usure en fretting. Une relation linéaire a été plusieurs fois validées entre le volume usé et l'énergie dissipée [FOU 97b, FOU 01, FOU 96a]. Cette approche permet de déterminer des coefficients d'usure énergétiques pour différents systèmes tribologiques [MOH 95a, HUQ 02, LIS 03]. Cette démarche est également adoptée à l'étude des couches dures avec la détermination de leur durée de vie [LIS 05]. Le champ de densité d'énergie locale calculé sur toute la surface de contact peut à partir d'un coefficient d'usure énergétique prédire la profondeur d'usure maximale et donc une durée de vie de ces couches dures.

1.3.1.2 Approche qualitative

L'équipe de Berthier à l'INSA de Lyon aborde l'usure à partir d'une démarche plus complète. Celle-ci repose sur la prise en compte de l'interface entre les deux corps en contact. Cette interface est baptisée «troisième corps» par Godet [GOD 84]. Ce concept permet de réunir sous une seule et même approche les théories bien maîtrisées de la lubrification fluide et les problèmes de frottement et d'usure plus délicats à modéliser. Ce « troisième corps » est intercalé entre les deux « premiers corps » . Ce troisième corps peut donc être ajouté dans le contact. Dans le cas de la lubrification on utilise des huiles ou des graisses. Ce troisième corps défini également les particules d'usure qui existent à l'interface. Dans ce dernier cas on parle de troisième corps solide. Le troisième corps est ici créé dans le contact par dégradation des premiers corps. Le troisième corps transmet la charge dans le contact, accommode les vitesses entre les deux premiers corps et sépare les deux premiers corps en réduisant leur interaction.

Prendre en compte un troisième corps solide se révèle difficile. Celui-ci est de nature discret et discontinu. Il crée d'ailleurs des concentrations de contraintes beaucoup plus importante que ne peut le prédire la mécanique des contacts lisses. Les particules de troisième corps sont réactives au sens physico-chimique. La rhéologie de ce milieu est difficile à déterminer. La modélisation mécanique de ce troisième corps est possible mais compromise par le manque de connaissance en loi de comportement.

Pour pallier aux manques de formalisme de l'usure, Berthier [BER 88] propose une approche globale : le « triplet tribologique » . C'est l'étude du contact sur trois échelles :

- le mécanisme qui agit sur les conditions de contact est étudié ;
- les matériaux des premiers corps sollicités « tribologiquement » qui se fissurent, se déforment, changent de phase ou de structure et génèrent le troisième corps ;
- le troisième corps qui circule dans le contact.

La circulation de matière à l'intérieur et à l'extérieur du contact est abordée sous le concept de « circuit tribologique » . Il s'agit d'une représentation bidimensionnelle des débits de troisièmes corps : débits sources provenant des premiers corps ou de l'extérieur, débit d'éjection, débit de recirculation, débit d'usure. L'aspect novateur de la démarche est l'usure qui n'est plus considérée comme la perte de matière des premiers corps mais comme la fuite des particules hors du contact.



FIG. 1.20: Le circuit tribologique d'un contact [FIL 04]

Les travaux de simulation numérique en cours de développement dans l'équipe de Berthier tentent d'aborder l'usure selon cette démarche globale. Ils utilisent un code éléments finis en dynamique pour déterminer les conditions de contact. Enfin le troisième corps est modélisé à partir d'une méthode aux éléments discrets. Une modélisation de la dégradation est simulée à partir des ces éléments discrets, solidaires en début de simulation puis désolidarisés et libres de se comporter comme un troisième corps après endommagement. Ces trois modèles sont en cours d'unification.

Tous ces travaux restent cependant appliqués à une analyse qualitative de l'usure. La complexité des simulations, les moyens de calculs et la difficulté de caractériser la



FIG. 1.21: Modélisation discrète des premiers et troisième corps [FIL 04]

dégradation des matériaux et la rhéologie du troisième corps en font une démarche non applicable à une prédiction d'usure quantitative dans un cadre industriel.

1.3.2 Modèle d'usure pour le contact aube-disque

L'usure du contact aube-disque va être modélisée à partir des formulations énergétiques mises en place à l'École Centrale de Lyon. Cette approche présente deux intérêts :

- 1. ces lois d'usure ont été spécifiquement mises en place pour le contact aube-disque et ont été développées à partir d'un approche tribologique du contact et en tenant compte des aspects phénoménologiques de l'usure ;
- 2. ces lois d'usure sont simples et facilement utilisables dans le cadre d'une modélisation numérique.

Cette étude a été menée par Paulin [PAU 06] à partir d'essais de fretting-wear. Pour valider les lois d'usure, plusieurs configurations de chargement, de déplacement et de géométrie (taille du contact) sont testées. L'étude est menée de façon à suivre l'évolution tribologique de la vie du contact aube-disque comme le précise la figure FIG.1.22. Ce de façon à associer aux différents couples de matériaux les cinétiques d'usures ainsi que les grandeurs quantitatives représentatives associées.

La durée de vie du lubrifiant est étudiée à partir de la configuration cylindre-plan. En faisant varier les conditions de chargement, trois domaines sont définis. Ceux-ci sont présentés à la figure FIG.1.23. Ils caractérisent trois comportements différents qui se différencient par l'évolution du coefficient de frottement (FIG.1.24), la forme des cycles de fretting, et la composition chimique de la trace de fretting. Cette démarche est validée pour un large spectre de dimensions et de géométries en contact.

Le domaine I est caractérisé par une évolution du coefficient de frottement en trois étapes. Il augmente de façon monotone dans un premier temps. L'élément dominant est le Molydag. Mais progressivement des interactions Cu-Ni-In/Ti-6Al-4V interviennent. Ensuite le coefficient de frottement se stabilise. Les éléments de la surface sont constitués de Molydag (50%) et de Cu-Ni-In (50%). Ce plateau est assimilé à la dégradation par

25



FIG. 1.22: Chronologie de l'étude menée par Paulin [PAU 06]



FIG. 1.23: Carte de réponse locale du matériau et zones d'activation des différents domaines [PAU 06]

oxydation du Molydag. Ensuite survient un saut en coefficient de frottement qui marque l'installation d'un contact Cu-Ni-In / Ti-6Al-4V.

Trois étapes caractérisent également l'évolution du coefficient de frottement dans le domaine II. Comme pour le domaine I, il augmente de façon monotone dans un premier temps. L'élément dominant est le Molydag. Ensuite un saut en coefficient de frottement est observé. Les éléments dominants de la surface revêtue s'inversent. Cette étape correspond donc à l'élimination du Molydag et au passage vers un contact Cu-Ni-In / Ti-6Al-4V. Finalement la valeur du coefficient de frottement reste ensuite stable.

Pour le domaine III, la valeur du coefficient de frottement augmente rapidement durant les premiers cycles. Une fois arrivé à 0,7-0,8 le coefficient reste stable. Dans ce domaine les proportions de Molydag puis de Cu-Ni-In diminuent rapidement. Par contre le titane apparaît sur la surface revêtue. La sévérité des conditions de sollicitation est responsable de l'usure du contre-corps en titane.



FIG. 1.24: Évolution des coefficients de frottement pour les trois domaines [PAU 06]

À partir de l'analyse chimique de la composition de la surface revêtue, Paulin émet une loi de mélange permettant d'identifier un coefficient de frottement théorique

$$\mu_{th} = \mu_{Molydag} C_{Molydag} + \mu_{CuNiIn} C_{CuNiIn} + \mu_{Ti} C_{Ti} , \qquad (1.2)$$

où C est la surface relative correspondant au matériau. La comparaison entre le frottement théorique et expérimental est présentée à la figure FIG.1.25. Le coefficient théorique corrèle bien le coefficient expérimental dans le domaine I. Par contre dans le domaine II et III le coefficient théorique est sous-estimé. Cette divergence s'explique par la modification des propriétés du troisième corps solide pour des sollicitations trop importantes. Le frottement ne peut s'exprimer en fonction des constituants des premiers corps.

Paulin développe dans sa thèse un critère et une loi de durée de vie du contact lubrifié. La durée de vie du contact est définie à partir d'un frottement seuil au-delà duquel le lubrifiant est considéré dégradé. Ce seuil correspond au saut en coefficient de frottement observé dans les domaines I et II. Il définit une densité d'énergie dissipée ($J.mm^2$) moyenne par cycle. Celle-ci intègre le coefficient de frottement moyen $\bar{\mu}$ observé entre le début et l'instant où le coefficient de frottement seuil est atteint. Cette énergie dissipée est exprimée à partir de la pression maximale p_0 dans le contact

$$Edhm = 4\bar{\mu}P_0\delta_0. \tag{1.3}$$

Des courbes d'endurance du dépôt sont alors exprimées à partir de la capacité énergétique *Edhc* du vernis lubrifiant

$$Edhm = \frac{Edhc}{N_{DDV}}.$$
 (1.4)



FIG. 1.25: Comparaison entre les coefficients de frottement expérimentaux et théoriques [PAU 06]

Cette approche a été validée indépendamment de la configuration de contact, et peut être appliquée telle quelle au contact aube-disque. Cette approche est validée quelle que soit les conditions de sollicitation hormis dans le domaine III où est observée une dégradation de la capacité énergétique du Molydag suite à l'endommagement du contre-corps en Ti-6Al-4V.

Paulin présente ensuite une étude sur l'endommagement sous sollicitation de frettingwear après élimination du Molydag. Les cinétiques d'usure du contact Ti-6Al-4V grenaillé revêtu de Cu-Ni-In / Ti-6Al-4V grenaillé puis Ti-6Al-4V grenaillé / Ti-6Al-4V grenaillé sont déterminées. La connaissance des cinétiques d'usure de ces couples de matériaux est essentielle à la prédiction de l'usure du système au travers de variables quantitatives dans l'optique de l'optimisation des procédures de maintenance. Dans ces études les volumes d'usure sont obtenus par relevés profilométriques.

L'énergie dissipée cumulée est utilisée pour définir la cinétique d'usure du contact Ti-6Al-4V grenaillé revêtu de Cu-Ni-In / Ti-6Al-4V grenaillé. Les essais permettent d'obtenir une loi du type

$$\frac{V}{V_{ref}} = \gamma \frac{\sum Ed}{\sum Ed_{ref}} \,. \tag{1.5}$$

Ed est l'énergie dissipée durant 1 cycle, *V* le volume d'usure, et γ le coefficient énergétique. L'indice *ref* rapporte au résultat d'un essai de référence. Cependant pour différentes amplitudes de glissement δ_0 , le coefficient γ n'est pas constant. L'auteur explique ce fait à partir des phénomènes d'adhésion qui existent dans ce type de contact métallique. Le flux de troisième corps est dépendant de l'amplitude de débattement. Plus le glissement est grand, plus le flux de débris est important. L'énergie dissipée est responsable de la création de troisième corps. L'amplitude de débattement conditionne son flux d'éjection. L'auteur introduit alors le concept d'énergie dissipée réduite définie par

$$\sum \tilde{Ed} = \frac{\delta_0}{\delta_0 ref} \sum Ed .$$
(1.6)

Une relation linéaire (FIG.1.26) est établie pour décrire la cinétique d'usure quelque soit l'amplitude de glissement

$$\frac{V}{V_{ref}} = \alpha \frac{\sum \tilde{Ed}}{\sum \tilde{Ed}_{ref}} \,. \tag{1.7}$$



FIG. 1.26: Évolution du volume d'usure en fonction de l'énergie dissipée cumulée réduite pour des cylindres de différents rayons [PAU 06]

Les cinétiques d'usure sont cependant composées d'un régime transitoire et d'un régime stabilisé. Une explication de ce régime transitoire est donnée à partir de l'activation de transformations tribologiques superficielles (TTS). Finalement la loi d'usure s'écrit

$$\frac{V}{V_{ref}} = \alpha \frac{\sum \vec{Ed}}{\sum \vec{Ed}_{ref}} + \frac{V_{act}}{V_{ref}} \,. \tag{1.8}$$

Cette cinétique d'usure est stable quelque soit la géométrie et taille de la zone de contact. De même la combinaison de cycles en glissement partiel et total ne modifie pas la cinétique d'usure.

L'énergie dissipée cumulée est également utilisée pour définir la cinétique d'usure du contact Ti-6Al-4V grenaillé / Ti-6Al-4V grenaillé. Là encore le contact est adhérant et une loi d'usure du même type est utilisée

$$\frac{V}{V_{ref}} = \alpha \frac{\Sigma \tilde{Ed}}{\Sigma \tilde{Ed}_{ref}} \,. \tag{1.9}$$

Cette relation n'est cependant pas stable avec la taille du contact, cf. FIG.1.27. Mais tend à se stabiliser pour de grands contacts et donc à l'échelle du contact aube-disque.

De même lors du cumul de cycles en glissement total et de cycles en glissement partiel, cette loi n'est pas validée. Une usure intervient suite à la dégradation du matériau pendant les cycles en glissement partiel. Le volume d'usure est obtenu par une loi du type

$$\frac{V}{V_{ref}} = \alpha \frac{\Sigma \tilde{Ed}}{\Sigma \tilde{Ed}_{ref}} + \frac{V^{GP}(N)}{V_{ref}} + \alpha \frac{\Sigma \tilde{Ed}}{\Sigma \tilde{Ed}_{ref}} .$$
(1.10)

 V^{GP} est le volume associé à une phase en glissement partiel situé entre deux phases en glissement total. L'origine de ce volume est expliqué par la fracturation du troisième corps au centre du contact. Ce volume est complètement fragilisé après 2000 cycles. Paulin traduit le comportement de cette usure à partir de la loi suivante

$$V^{GP} = a \times N, \qquad \qquad \text{lorsque } N < 2000, \qquad (1.11)$$

$$V^{GP} = b, \qquad \qquad \text{lorsque } N > 2000. \tag{1.12}$$





Pour résumer, les cinétiques d'usure du contact aube-disque revêtu ou non ont été déterminées. Ces cinétiques d'usure bien qu'explicitées sous forme simple restent cependant complexes à mettre en œuvre. Notamment dans le cas du contact revêtu, le volume usé lors de la phase transitoire n'est pas parfaitement déterminé par l'auteur et demande un formalisme plus rigoureux. En ce qui concerne le contact non lubrifié, la dépendance à la taille du contact peut d'une part poser problème. En effet la taille du contact augmente avec l'usure. D'autre part un manque de formalisme existe au niveau de la détermination du volume usé dans les cycles en glissement partiel. Pour les simulations numériques que nous allons effectuer, nous nous contenterons donc d'appliquer la seule composante commune parfaitement formalisée pour le contact revêtu ou non : la phase d'usure en glissement total pour un régime stabilisé. La loi d'usure employée écrite sous une forme simple est

$$V = \alpha_{usure} \sum_{N} \delta_0(N) E d(N) . \qquad (1.13)$$

L'auteur montre d'autre part que le coefficient de frottement pour le contact revêtu ou non évolue rapidement dès les premiers cycles vers une valeur stable, cf. FIG.1.28. Le coefficient de frottement sera donc gardé constant lors des simulations numériques effectuées.



FIG. 1.28: Évolution des coefficients de frottement pour le contact non-revêtu [PAU 06]

1.4 Modélisation en mécanique des contacts

1.4.1 Généralités

1.4.1.1 Solutions analytiques

Contact hertzien La mécanique des contacts a réellement émergé suite au papier de Heinrich Hertz *On the contact of elastic solids* [HER 82] publié en 1882. Il présenta alors les résultats de ce que l'on nomme à présent le contact hertzien. Le problème traité est celui du contact élastique, sous un chargement normal statique. Les surfaces de corps en contact sont de type paraboloïde elliptique et non-conformes. Cette non-conformité indique que les surfaces non-déformées des deux corps ne sont superposables autrement qu'en un point (contact ponctuel) ou une ligne (contact linéique). La théorie de Hertz est fondée sur les hypothèses suivantes :

- la zone de contact est elliptique ;
- le problème est sans frottement ;
- les hypothèses des massifs élastiques semi-infinis.

Ce dernier point permet l'utilisation d'un pan important de la théorie de l'élasticité développée dans le cadre de l'espace élastique semi-infini. Les hypothèses des massifs élastiques semi-infinis sont validées si :

- la taille de la zone de contact est faible par rapport à la dimension des corps. Dans ce cas les contraintes sont fortement concentrées dans la région proche de la zone de contact et ne sont pas influencées par des conditions limites lointaines. Cette condition est assurée par la non-conformité;
- les rayons de courbure doivent cependant être grands par rapport à la dimension du contact. Cette condition permet de valider la précédente. Mais elle implique aussi que les pentes des surfaces en contact doivent être faibles. Cela permet d'approcher la région proche du contact par un plan et d'éviter d'atteindre des niveaux de contraintes non compatibles avec la théorie de l'élasticité linéaire.

Les hypothèses de Hertz sont restrictives mais suffisent souvent à l'étude d'une partie importante des problèmes industriels. Les solutions de Hertz fournissent la distribution de pression, les dimensions du contact et l'amplitude des différents déplacements élastiques ou rigide et la solution en contraintes dans le volume. De nombreuses solutions analytiques ont été formulées dans le cas de contacts non-hertziens particuliers. L'ouvrage référence de la mécanique des contacts rédigé par Johnson [JOH 85] présente de façon exhaustive toutes ces solutions. Contrairement à d'autres ouvrages qui ne s'attardent que sur l'obtention des solutions de contact, celui-ci analyse ces résultats et la physique du problème.

Géométries non-hertziennes Un nombre important de solutions existe lorsque les géométries en contact ne peuvent être assimilées à des ellipsoïdes, telles que les contacts conformes. Les solutions restent cependant basées sur les hypothèses des massifs semiinfinis. D'autres solutions concernent le contact contre plaques ou coques. Enfin, les problèmes induits par des discontinuités géométriques, comme les bords anguleux, coins, etc., sont aussi abordés. Un nombre important de ces solutions est donné dans le cas de problèmes bi-dimensionnels. De même des solutions existent pour les problèmes tridimensionnels, cependant pour des géométries présentant généralement une particularité telle que l'axisymétrie. Ces solutions sont obtenues à partir d'outils mathématiques puissants. Notamment à partir des solutions des « équations intégrales singulières » . Ces études ont été menées par Muskhelishvili [MUS 53] , puis Mikhlin [MIK 57] et Galin [GAL 53]. Aleksandrov [ALE 86] utilise également cette méthode. Ou encore à partir des «transformées intégrales», comme les transformée de Fourier [SNE 51]. L'ouvrage de Gladwell [GLA 80] présente ces deux méthodes. Concernant le contact des surfaces rugueuses, une solution est fournie par Westergaard [WES 39] pour une surface sinusoï-dale. Dans ce domaine les solutions données par Greenwood et Willamson [GRE 66] font références. Elles donnent la solution du contact plan rugueux à partir d'une méthode statistique qui suppose une distribution gaussienne d'aspérités sphériques dont la position du sommet diffère.

Comportement non-élastique ou non-homogène Des solutions analytiques existent pour les contacts avec une couche (revêtement) d'épaisseur constante et de propriétés élastiques différentes au reste du volume[MEI 68]. Les méthodes intégrales sont utilisées dans ce cas [GLA 80]. Concernant la plasticité, celle-ci est abordée tout d'abord dans le cadre de solides supposés rigides - parfaitement plastiques. L'indentation est étudiée au travers de cette analyse [JOH 85] et pour un certain nombre de géométries. Des résultats [JOH 85] existent également pour l'indentation élasto-plastique de type cône, sphère ou pyramide à partir d'une hypothèse de répartition radiale des déplacements dans le volume.

Comportement avec frottement La définition du frottement de Coulomb est utilisée dans la plupart des modèles analytiques existants. Une première solution est celle du contact hertzien en glissement. Les cisaillements en surface sont directement obtenus par l'application de la loi de Coulomb. La solution du champ de contraintes résultant de cette configuration est fournie pour le contact cylindrique par McEwen [MCE 49], pour le contact sphérique par Hamilton [HAM 63]. Ces solutions sont reprises et étendues aux contacts elliptiques par Sackfields et Hills [SAC 83]. Cattaneo [CAT 38] et Mindlin [MIN 49] fournissent les solutions du contact en glissement partiel. Le problème posé est celui du contact sphérique chargé normalement sur lequel un effort tangentiel, ne dépassant pas la limite fixée par la loi de Coulomb pour atteindre le glissement, est ensuite imposé. Le respect de la loi de Coulomb en tout point de la surface de contact créé une zone annulaire de glissement sur les bords du contact. Une configuration de chargement plus complexe est étudiée par Mindlin et Deresiewicz [MIN 53], le contact est chargé avec une force normale et tangentielle proportionnelles entre elles. Le problème de Cattaneo-Mindlin est étendu et généralisé par Ciavarella [CIA 98a, CIA 98b] dans le cas bi-dimensionnel pour des géométries quelconques.

1.4.1.2 Modèles numériques

Méthodes des éléments finis Cette méthode (« finite element method », FEM) est la plus aboutie de la modélisation numérique en mécanique. De nombreux logiciels commerciaux, avec des interfaces graphiques facilitant l'utilisation existent. La quantité de phénomènes physiques pouvant être pris en compte est importante (dynamique, thermique, plasticité, viscosité, champs magnétiques, etc.). Cependant les temps de calculs sont importants, et le sont d'autant plus que les forts gradients de contraintes à proximité des zones de contact obligent à utiliser un maillage fin. Une alternative proche de la méthode des éléments finis est la méthode des éléments frontières (« boundary element method », BEM). Elle est similaire à cette dernière en dehors du fait que seules les surfaces des corps sont maillées.

Méthodes semi-analytiques Lorsque les solutions analytiques ne sont pas facilement obtenues, il est possible de discrétiser le problème et de le résoudre en sommant numériquement des solutions analytiques de problèmes élémentaires. On dénommera « semianalytiques » (SA) ce type de méthode. De nombreux modèles ont été développés dans la littérature pour résoudre les problèmes de contact sous chargement statique. Les premiers modèles furent présentés par Bentall et Johnson [BEN 67] et Paul et Hashemi [PAU 81]. Kalker [KAL 90] publie un ouvrage qui formalise cette méthode. Nowell étudie le fretting avec ces méthodes mais reste sur des modèles bi-dimensionnels [NOW 98, DIN 04]. Les techniques numériques utilisées par les différents auteurs diffèrent. Jaeger [JAE 04] propose d'utiliser un algorithme de Gauss Seidel au lieu de l'algorithme de Newton-Raphson utilisé par Kalker. Ces méthodes ont ensuite été améliorées avec l'utilisation de techniques accélératrices comme les méthodes multigrilles [BRA 90, LUB 91] ou les transformées de Fourier rapides [JU 96, NOG 97, POL 00, LIU 00] et des algorithmes de résolutions performants tel que le gradient conjugué [POL 99]. La finesse des discrétisations dès lors permise par ces méthodes en font celles de référence dans l'étude des contact rugueux [AI 99]. Un revêtement d'épaisseur constante peut être ajouté. Deux équipes ont particulièrement publié sur le sujet. L'équipe de Bhushan[TIA 96, PEN 00, PEN 01, PEN 02, CAI 05] et l'équipe de Wang [LIU 02, LIU 01a] qui introduisit la thermo-élasticité. Les surfaces fractales ont été approchées par le même biais [WIL 04]. De nombreux progrès sont encore possibles. Récemment les phénomènes d'élasto-plasticité et de thermo-élastoplasticité [JAC 01, JAC 02, SAI 02, ANT 04, BOU 04, ANT 05, BOU 05, NEL 06] ont été ajoutés à ce type de méthode au LaMCoS.

1.4.2 Application au contact aube-disque

Les solutions analytiques sont assez souvent appliquées à l'étude du contact aubedisque, notamment dans le cadre des problèmes de fretting-fatigue. Ces modèles restent bi-dimensionnels. Les auteurs récurrents dans la littérature qui effectuent ce type de travaux sont l'équipe de Farris [MCV 99, GOR 02, MUR 04, RAJ 04], et celle de Nowell et Hills [NOW 03, SAC 05, RAJ 06]. Le contact aube-disque est supposé équivalent à un contact poinçon-plan avec des rayons de courbure en sortie de portée comme l'illustre la figure FIG.1.29. Les solutions basées sur les équations intégrales singulières sont utilisées.



FIG. 1.29: Approximation géométrique du problème de contact aube-disque [RAJ 06]

Les éléments finis sont largement utilisés dans la modélisation du contact aube-disque [MEG 96, CON 06]. Une technique de zoom structural [COR 99, SIN 02, BEI 03] peut être utilisée pour obtenir un maillage plus fin au niveau de la portée de l'aube. Le modèle fin est piloté à partir des déplacements relevés sur le modèle global. Pour prendre en compte la microstructure cristalline du matériau ou introduire la plasticité, la modélisation éléments finis est obligatoire [ARA 01]. Ces travaux traitent essentiellement de l'aspect matériau et de l'impact des sollicitations de fretting à partir de géométries académiques [DIC 06b, DIC 06a].



FIG. 1.30: Modélisation du contact aube-disque par zoom strucural [SIN 02]

La littérature n'abonde pas de modélisations du contact aube-disque avec les méthodes semi-analytiques. Les rares exemples sont des applications bi-dimensionnelles. Dini et

35

Nowell [DIN 04] résolvent ainsi le contact aube-disque revêtu.

1.4.3 Application à l'usure

La littérature concernant la modélisation de l'usure est riche. La géométrie étant évolutives avec l'usure, les solutions analytiques ne peuvent être évidement pas utilisées. Pour déterminer les taux d'usure, la loi d'Archard est quasiment systématiquement utilisée.

La modélisation par éléments finis est largement employée. La difficulté de la modélisation repose sur la prise en compte géométrique de l'usure. Généralement un remaillage complet ou partiel des corps est à effectuer. Il est possible de se contenter de ne déplacer que les nœuds en surface [OQV 01], mais le maillage doit être épais dans la profondeur ou les taux d'usure faibles pour éviter une trop grande distorsion des éléments. Ces approches éléments finis ont été développées pour l'étude de l'usure par glissement [POD 99, HEG 05]. Des études de l'usure en fretting sont également faites notamment par Leen [MCC 04]. Ce dernier s'attarde à démontrer l'importance de l'usure sur les durées de vie en fretting-fatigue [MAD 07]. Enfin Paulin utilise la loi d'usure énergétique [PAU 07] dans une simulation d'usure par éléments finis. Tous ces modèles sont bi-dimensionnels.

Des simulations d'usure réalisées à partir de méthodes semi-analytiques existent. Johansson [JOH 93] simule l'usure du contact glissant en tenant compte de la chaleur générée par frottement. Il présente également des solutions pour l'usure en fretting [JOH 94]. Goryacheva simule l'usure de contact en glissement partiel [GOR 01]. La loi d'Archard est également systématiquement utilisée.

1.5 Bilan

Le travail à effectuer au cours de cette thèse consiste à analyser un contact adhérant ou glissant notamment sur le plan de l'usure en s'appuyant sur une méthode semi-analytique via un code de recherche développé au LaMCoS. L'application concerne la prédiction des usures aux niveaux des portées de la liaison aube-disque des turboréacteurs soumises aux sollicitations de type fretting. Au travers de la bibliographie concernant le fretting, il a été souligné que l'usure est un phénomène qui peut être relié à l'énergie dissipée dans le contact. Bien que ce phénomène inclut des mécanismes complexes, notamment la présence de troisième corps à l'interface, des lois linéaires peuvent être formulées entre l'usure et l'énergie dissipée par frottement. D'autre part, l'usure est produite essentiellement par des sollicitations de type oligocyclique. Cependant l'impact de cycles polycycliques n'est pas nul sur les taux d'usure. Mais de par le manque de données et de formalisme de cet aspect, il sera négligé. Ces sollicitations permettent alors d'obtenir l'usure de la surface à partir de la loi d'usure choisie. Le fretting et l'usure résultante sont des phénomènes cycliques. Il convient alors de pouvoir effectuer les calculs de contact assez rapidement pour que l'outil soit utilisable dans le cadre d'un bureau d'étude. Les méthodes semi-analytiques sont donc adaptées. Elles permettent de résoudre le contact tridimensionnel dans des temps très courts et avec un maillage très fin. La suite de l'exposé présente donc le code qui a été développé. Celui-ci résout le contact élastique avec frottement. L'aspect revêtement n'a pas été introduit. Ce dernier ne présente pas de difficulté particulière mais les formulations présentées dans la littérature concernent les revêtements d'épaisseur constante. Or l'usure attaque premièrement le revêtement. Enfin, étant donnée l'expertise du laboratoire, ce code qui a été développé dans le cadre de l'élasticité peut être facilement adapté à la thermo-élasto-plasticité.

Chapitre 2

Modélisation numérique

Ce chapitre s'attarde sur le développement du code de contact et d'usure. Une première partie traite des aspects théoriques du contact élastique qui permettent de poser les bases du code. La deuxième partie décrit les méthodes numériques utilisées. Enfin une dernière partie traite de l'utilisation du code avec la loi d'usure. Une modélisation « multi-échelles » du contact est faite via le couplage avec un code éléments finis.

Sommaire

2.1	Théorie du contact élastique		
	2.1.1	Cinématique du contact	
	2.1.2	Torseur des efforts transmis dans le contact	
	2.1.3	Espace élastique semi-infini	
	2.1.4	Discrétisation des massifs	
	2.1.5	Problème de contact normal	
	2.1.6	Problème de contact tangentiel	
	2.1.7	Formulations variationnelles	
2.2	Analyse numérique		
	2.2.1	Résolution numérique du problème de contact	
	2.2.2	Méthode DC-FFT	

	2.2.3	Algorithme du gradient conjugué	74
	2.2.4	Résolution du problème normal	75
	2.2.5	Résolution du problème tangentiel	80
2.3	3 Modélisation de l'usure		93
	2.3.1	Loi d'usure employée	93
	2.3.2	Implémentation de la loi d'usure	94
	2.3.3	Usure dans le cadre d'une modélisation multi-échelles du contact .	95

2.1 Théorie du contact élastique

2.1.1 Cinématique du contact

Soit deux corps élastiques 1 et 2 définis par leurs surfaces non-déformées dans le repère orthogonal Oxyz (FIG.2.1). Le plan x - y est disposé de façon à séparer au mieux ces deux corps. Dans le cas du contact de deux surfaces non-conformes, il s'agit du plan tangent au premier point (ou ligne) en contact. Les surfaces sont alors définies par

$$z_1 = f_1(x, y), z_2 = f_2(x, y).$$
(2.1)

La séparation des corps est

$$h(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y).$$
(2.2)

Les pentes de f_1 et f_2 sont assez faibles pour pouvoir approcher ces surfaces par le plan x - y. Les mouvements permanents relatifs entre les deux corps en contact sont définis par les vitesses linéaires dites de glissement v_x , v_y et les vitesses angulaires dites de roulement ω_x , ω_y et de pivotement ω_z . Différents type de mouvement peuvent être définis suivant ces vitesses linéaires et de rotation. Kalker [KAL 90] s'attarde sur le ratio entre :

- les vitesses relatives (entre les corps 1 et 2) des particules de la zone de contact ;
- les vitesses relatives de ces particules par rapport à la zone de contact.

Il définit les mouvements suivant :

- lorsque la vitesse relative de toutes les particules de la zone de contact est beaucoup plus faible que la vitesse de ces particules par rapport à la zone de contact, il s'agit d'un mouvement de type roulement (« rolling motion »);
- lorsque la vitesse relative de quelques particules de la zone de contact est du même ordre de grandeur que la vitesse de ces particules par rapport à la zone de contact, il s'agit d'un mouvement de type débattement (« shift »).

Lorsque le mouvement se déroule pendant un intervalle de temps fini, avec une variation linéaire des grandeurs physiques, on parle d'étude en débattements finis (« finite shift »). C'est dans ce cadre que sera résolu le contact, c'est-à-dire sans vitesses relatives entre les corps mais avec débattements relatifs finis longitudinaux et angulaires dans les trois directions (cf. FIG.2.2).



FIG. 2.1: Définition des surfaces et déplacements



FIG. 2.2: Les déplacements de corps rigides

On remarquera que ces vitesses et déplacements sont donnés au point *O*, c'est-à-dire en un point central de la zone contact. Les angles de « roulement » ne créent ainsi donc pas un mouvement de type roulement entre les corps. En effet, dans cette configuration le centre de rotation est proche de la zone de contact, l'angle de rotation étant supposé faible, le mouvement de corps rigide créé tangentiellement à la surface est négligeable par rapport à sa composante normale. On vient donc créer ce que l'on appelle un *mésalignement* entre les surfaces. Finalement la distance entre les corps g(x, y) qui permet de définir la condition de contact, est construite à partir de la séparation initiale des corps, le déplacement de corps rigide $\delta_z = \delta_{z1} + \delta_{z2}$, la contribution des angles $\phi_x = \phi_{x1} + \phi_{x2}$ et $\phi_y = \phi_{y1} + \phi_{y2}$ et le déplacement normal élastique des surfaces $\bar{u}_z = \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2}$,

$$g(x,y) = h(x,y) + \bar{u}_z - \delta_z - y \cdot \phi_x + x \cdot \phi_y.$$
(2.3)

La condition de contact en déplacement est alors définie par

$$g(x,y) = 0$$
, dans le contact, (2.4)

$$g(x,y) > 0$$
, à l'extérieur du contact. (2.5)

Il s'agit à présent de définir le glissement à l'interface. Dans la suite de l'exposé le terme glissement désignera l'amplitude (ou distance de glissement) **s**. Il s'agit d'un vecteur de composantes s_x et s_y . Il est nécessaire d'introduire un indice référant au temps dans la notation, **s**^t. Soit la notation ($= \frac{d}{dt}$) pour dériver par rapport au temps. La vitesse de glissement est définie par **s**. Soit \mathbf{x}_1^t et \mathbf{x}_2^t , les coordonnées de deux points en contact de chaque corps. Soit $\mathbf{\bar{u}}_{\tau 1}^t = \begin{pmatrix} \vec{u}_{x1}^t \\ \vec{u}_{y1}^t \end{pmatrix}$ et $\mathbf{\bar{u}}_{\tau 2}^t = \begin{pmatrix} \vec{u}_{x2}^t \\ \vec{u}_{y2}^t \end{pmatrix}$ les déplacements élastiques tangentiels des surfaces. Quand le système passe d'un temps t' à t, la variation de chaque terme est supposée linéaire. Les points en contact subissent un déplacement de corps rigide et se retrouve en $\mathbf{x}_1^{t'}$ et $\mathbf{x}_2^{t'}$. Le glissement s'écrit

$$\mathbf{s}^{t} = \dot{\mathbf{s}}^{t} \left(t - t' \right) = \left\{ \left(\bar{\mathbf{u}}_{\tau_{1}}^{t} - \bar{\mathbf{u}}_{\tau_{2}}^{t} \right) - \left(\bar{\mathbf{u}}_{\tau_{1}}^{t'} - \bar{\mathbf{u}}_{\tau_{2}}^{t'} \right) \right\} - \left(\dot{\mathbf{x}}_{1}^{t} - \dot{\mathbf{x}}_{2}^{t} \right) \left(t - t' \right).$$
(2.6)

Les vecteurs **s**^t et **s**^t sont colinéaires. Le terme $(\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}_2^t)$ est la contribution des déplacements de corps rigide et est fonction de la variation de δ_x , δ_y et ϕ_z . On néglige la contribution de ϕ_x et ϕ_y . Il vient :

$$(\dot{\mathbf{x_{1}}^{t}} - \dot{\mathbf{x_{2}}^{t}})(t - t') = (\mathbf{x_{1}}^{t} - \mathbf{x_{1}}^{t'}) - (\mathbf{x_{2}}^{t} - \mathbf{x_{2}}^{t'}),$$
(2.7)
$$(\dot{\mathbf{x_{1}}^{t}} - \dot{\mathbf{x_{2}}^{t}})(t - t') = \begin{pmatrix} (\delta_{\mathbf{x1}}^{t} - y \cdot \phi_{z1}^{t} - (\delta_{\mathbf{x1}}^{t'} - y \cdot \phi_{z1}^{t'})) + (\delta_{\mathbf{x2}}^{t} - y \cdot \phi_{z2}^{t} - (\delta_{\mathbf{x2}}^{t'} - y \cdot \phi_{z2}^{t'})) \\ (\delta_{\mathbf{y1}}^{t} + x \cdot \phi_{z1}^{t} - (\delta_{\mathbf{y1}}^{t'} + x \cdot \phi_{z1}^{t'})) + (\delta_{\mathbf{y2}}^{t} + x \cdot \phi_{z2}^{t} - (\delta_{\mathbf{y2}}^{t'} + x \cdot \phi_{z2}^{t'})) \\ (2.8)$$

Pour plus de simplicité dans l'écriture l'emploi de Δ est fait pour indiquer la différence d'une grandeur entre les instants *t* et *t'*. Ce qui revient à écrire

$$(\dot{\mathbf{x}_{1}}^{t} - \dot{\mathbf{x}_{2}}^{t}) (t - t') = \begin{pmatrix} (\Delta \delta_{\mathbf{x}1}^{t} - y \cdot \Delta \phi_{z1}^{t}) + (\Delta \delta_{\mathbf{x}2}^{t} - y \cdot \Delta \phi_{z2}^{t}) \\ (\Delta \delta_{\mathbf{y}1}^{t} + x \cdot \Delta \phi_{z1}^{t}) + (\Delta \delta_{\mathbf{y}2}^{t} + x \cdot \Delta \phi_{z2}^{t}) \end{pmatrix}.$$

$$(2.9)$$

Finalement le glissement s'exprime

$$\mathbf{s}^{t} = \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}_{x}^{t} - \Delta \delta_{\mathbf{x}}^{t} + y \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \\ \Delta \bar{u}_{y}^{t} - \Delta \delta_{\mathbf{y1}}^{t} - x \cdot \Delta \phi_{z1}^{t} \end{pmatrix}.$$
(2.10)

2.1.2 Torseur des efforts transmis dans le contact

Le torseur des efforts transmis dans le contact est défini par la force normale P, la force tangentielle \mathbf{Q} de composantes Q_x et Q_y , et le moment \mathbf{M} transmis au point O de composantes M_x , M_y et M_z . M_x et M_y seront dénommés moments de flexion, tandis que M_z sera dénommé moment de torsion. Ces forces et moments sont transmis à travers la zone de contact Γ_C par le biais des contraintes surfaciques. Les contraintes normales ou pressions de contact sont notées p tandis que les contraintes tangentielles ou cisaillements surfaciques de composantes q_x et q_y sont notées \mathbf{q}_{τ} . Ces champs de contraintes doivent vérifier les équations d'équilibre, soit

$$P = \int_{\Gamma_C} p \, dS,\tag{2.11}$$

$$Q_x = \int_{\Gamma_C} q_x \, dS,\tag{2.12}$$

$$Q_y = \int_{\Gamma_C} q_y \, dS,\tag{2.13}$$

$$M_x = \int_{\Gamma_C} p \cdot y \, dS, \tag{2.14}$$

$$M_y = -\int_{\Gamma_C} p \cdot x \, dS, \tag{2.15}$$

$$M_z = \int_{\Gamma_C} (x \cdot q_y - y \cdot q_x) \, dS. \tag{2.16}$$

43



FIG. 2.3: Les forces et moments dans le contact

2.1.3 Espace élastique semi-infini

Une description de la théorie de l'espace élastique semi-infini est donnée. Celle-ci est à l'origine de la solution du contact hertzien. C'est également à partir de cette théorie que sont développées des solutions analytiques particulières entre déplacements élastiques et chargements qui sont alors utilisées dans les méthodes numériques de résolution du contact dites « semi-analytiques » .

Soit un demi-espace élastique homogène isotrope, limité par le plan z = 0. Les conditions aux limites à l'infini en terme de déplacement sont nulles. Le but est de résoudre le problème de Newmann : déterminer l'état élastique (contraintes et déformations) de ce demi-espace sous l'action de contraintes normales p(x,y) et tangentielles $q_x(x,y)$ et $q_y(x,y)$ appliquées sur une surface fermée *S* proche de l'origine. Le tenseur des contraintes σ est défini par ces six composantes, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} . La théorie des potentiels a été utilisée par Boussinesq [BOU 85] et Cerruti [CER 82] pour déterminer les champs de contraintes et déformations de ce demi-espace élastique. Cette approche été reprise par Love [LOV 52] et est résumée par Johnson [JOH 85]. Les équations de Lamé (ou de Navier) sont les équations d'équilibre reformulées en déplacements et à l'aide de la loi de comportement. En négligeant les forces volumiques, les équations de Navier se résument à

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0. \tag{2.17}$$

Les équations en déplacements sont des fonctions bi-harmoniques car elles doivent vérifier une équation de type Laplace. Elles doivent aussi vérifier les conditions aux limites en terme de déplacement et chargement. Soit $C(\xi, \eta)$ un point de la surface sous chargement S et A(x, y, z) un point quelconque du demi-espace. Soit la distance entre ces deux points

$$CA \equiv \rho = \left\{ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 \right\}^{1/2}.$$
 (2.18)

Trois fonctions potentiels vérifiant l'équation de Laplace sont définies

$$F_{1} = \int \int_{S} q_{x}(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta,$$

$$G_{1} = \int \int_{S} q_{y}(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta,$$

$$H_{1} = \int \int_{S} p(\xi, \eta) \Omega \, d\xi \, d\eta,$$

(2.19)

où

$$\Omega = z \ln(\rho + z) - \rho. \tag{2.20}$$

Les fonctions potentiel suivantes sont également définies

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int \int_S q_x(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi \, d\eta,$$

$$G = \frac{\partial G_1}{\partial x} = \int \int_S q_y(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi \, d\eta,$$

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial x} = \int \int_S p(\xi, \eta) \ln(\rho + z) \, d\xi \, d\eta.$$
(2.21)

Soit

$$\psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}$$
(2.22)

et

$$\Psi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}.$$
(2.23)

D'après Love [LOV 52] les composantes des déplacements élastiques u_x , u_y et u_z au point A(x, y, z) sont de la forme

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - z\frac{\partial \psi}{\partial x} \right\},\tag{2.24}$$

$$u_{y} = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \psi_{1}}{\partial y} - z\frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}, \qquad (2.25)$$

$$u_{z} = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - (1 - 2\nu)\psi - z\frac{\partial\psi}{\partial z} \right\}.$$
 (2.26)

Ces expressions diminuent en $1/\rho$ pour les points éloignés de la zone chargée et respectent donc les conditions aux limites du demi-espace infini. Les contraintes sont obtenues à partir de la loi de Hooke,

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad (2.27)$$

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad (2.28)$$

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad (2.29)$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right),\tag{2.30}$$

$$\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\tag{2.31}$$

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right).$$
(2.32)

Les solutions (2.24) à (2.26) permettent de déterminer tous champs de déplacement pour tous cas de chargement. La difficulté réside dans la double intégration des potentiels (2.19) et (2.21) qui peut être laborieuse.

La solution du déplacement normal dans le cas d'un effort normal unitaire (cf. FIG.2.4) s'écrit

$$\bar{u}_z(r) = \frac{(1-v)}{2\pi G} \frac{P}{r}.$$
 (2.33)

La solution du déplacement normal dans le cas d'une distribution de pression s'écrit

$$\bar{u}_{z}(x,y) = \frac{(1-v^{2})}{\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^{2} + (\eta-y)^{2}}}.$$
(2.34)



FIG. 2.4: Déplacement de la surface d'un demi-espace élastique sous un chargement normal unitaire

Hertz résout le problème de contact elliptique à partir de la solution en déplacement d'un chargement en forme de demi-ellipsoïde. Love développa la solution du déplacement normal dans le cas d'une pression constante sur une surface rectangulaire [BOU 85]. Ce développement est repris par Vergne [VER 85], et étendu au chargement tangentiel. Tous les champs de déplacements et de contraintes sont formulés. Une zone rectangulaire de taille $\Delta x \times \Delta y$ centrée en O est soumise à une pression constante p, ou à un cisaillement q_x ou q_y constant. On donne les solutions des déplacements d'un point $\overline{M}(x, y)$ en surface et des contraintes d'un point M(x, y, z) dans le volume. On note $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. I et J sont des indices qui font référence à x, y ou z.

La contribution des pressions p sur les contraintes du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\sigma_{IJ}}{p} = C_{IJ}^{p}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = S_{IJ}^{p}(x + \frac{\Delta_{x}}{2}, y + \frac{\Delta_{y}}{2}, z, E, \mathbf{v}) + S_{IJ}^{p}(x - \frac{\Delta_{x}}{2}, y - \frac{\Delta_{y}}{2}, z, E, \mathbf{v}) + S_{IJ}^{p}(x + \frac{\Delta_{x}}{2}, y - \frac{\Delta_{y}}{2}, z, E, \mathbf{v}) + S_{IJ}^{p}(x - \frac{\Delta_{x}}{2}, y + \frac{\Delta_{y}}{2}, z, E, \mathbf{v}), \quad (2.35)$$

$$S_{xx}^{p}(x,y,z,E,\nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^{2}+y^{2}-y\rho}{zx}\right) + \frac{1-2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho-y+z}{x}\right) + \frac{z}{2\pi}\frac{xy}{(x^{2}+z^{2})\rho},$$
(2.36)

$$S_{yy}^{p}(x, y, z, E, \nu) = \frac{\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{z^{2} + y^{2} - y\rho}{zx}\right) + \frac{1 - 2\nu}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho - x + z}{y}\right) + \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{(y^{2} + z^{2})\rho},$$
(2.37)

$$S_{zz}^{p}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^{2} + y^{2} - y\rho}{zx}\right) - \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho} \left(\frac{1}{x^{2} + z^{2}} + \frac{1}{y^{2} + z^{2}}\right),$$
(2.38)

$$S_{xy}^{p}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{1 - 2\nu}{2\pi} \ln(\rho + z), \qquad (2.39)$$

$$S_{yz}^{p}(x, y, z, E, \nu) = \frac{z^{2}}{2\pi} \frac{x}{(y^{2} + z^{2})\rho},$$
(2.40)

$$S_{xz}^{p}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z^{2}}{2\pi} \frac{y}{(x^{2} + z^{2})\rho}.$$
(2.41)

La contribution des cisaillements q_x sur les contraintes du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\sigma_{IJ}}{q_x} = C_{IJ}^{q_x}(x, y, z, E, \nu) = S_{IJ}^{q_x}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \nu) + S_{IJ}^{q_x}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \nu)
+ S_{IJ}^{q_x}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \nu) + S_{IJ}^{q_x}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \nu), \quad (2.42)$$

$$S_{xx}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{-x^2 + zy}{(\rho + z)(\rho - y)} \right) + \frac{\mathbf{v}}{\pi} \frac{y}{\rho + z} - \frac{1}{\pi} \ln(\rho - y),$$
(2.43)

$$S_{yy}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{y}{\rho(\rho + z)} - \frac{\mathbf{v}}{\pi} \left(\frac{y}{\rho + z} + \ln(\rho - y) \right),$$
(2.44)

$$S_{zz}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{y}{\rho(x^2 + z^2)},$$
(2.45)

$$S_{xy}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{x}{\rho(\rho + z)} - \frac{\mathbf{v}}{\pi} \frac{x}{\rho + z} - \frac{1}{2\pi} \ln(\rho - x), \qquad (2.46)$$

$$S_{yz}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho},$$
(2.47)

$$S_{xz}^{q_x}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z}{2\pi} \frac{xy}{\rho(x^2 + z^2)} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + y^2 - y\rho}{zx}\right).$$
 (2.48)

La contribution des cisaillements q_y sur les contraintes du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\sigma_{IJ}}{q_y} = C_{IJ}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = S_{IJ}^{q_y}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \mathbf{v}) + S_{IJ}^{q_y}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \mathbf{v})
+ S_{IJ}^{q_y}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \mathbf{v}) + S_{IJ}^{q_y}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, z, E, \mathbf{v}), \quad (2.49)$$

avec

$$S_{xx}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{x}{\rho(\rho + z)} - \frac{v}{\pi} \left(\frac{x}{\rho + z} + \ln(\rho - x) \right),$$
(2.50)

$$S_{yy}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{-y^2 + zx}{(\rho + z)(\rho - x)} \right) + \frac{\mathbf{v}}{\pi} \frac{x}{\rho + z} - \frac{1}{\pi} \ln(\rho - x),$$
(2.51)

$$S_{zz}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z^2}{2\pi} \frac{x}{\rho(y^2 + z^2)},$$
(2.52)

$$S_{xy}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{y}{\rho(\rho + z)} - \frac{\mathbf{v}}{\pi} \frac{y}{\rho + z} - \frac{1}{2\pi} \ln(\rho - y), \qquad (2.53)$$

$$S_{yz}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = \frac{z}{2\pi} \frac{yx}{\rho(y^2 + z^2)} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{z^2 + x^2 - x\rho}{zy}\right),$$
(2.54)

$$S_{xz}^{q_y}(x, y, z, E, \mathbf{v}) = -\frac{z}{2\pi} \frac{1}{\rho}.$$
(2.55)

Identiquement aux contraintes, on peut définir les déplacements élastiques en surface. On note $\bar{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2}$. La contribution des pressions *p* sur les déplacements élastiques en surface du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\bar{u}_J}{p} = K_J^p(x, y, E, \nu) = U_J^p(x + \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu) + U_J^p(x - \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu)
+ U_J^p(x + \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu) + U_J^p(x - \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu), \quad (2.56)$$

$$U_x^p(x,y,E,\mathbf{v}) = -\frac{(1+\mathbf{v})(1-2\mathbf{v})}{2\pi E} \left(2x \arctan\left(\frac{\bar{\rho}-y}{x}\right) - y\ln\bar{\rho}\right),\tag{2.57}$$

$$U_{y}^{p}(x,y,E,\mathbf{v}) = -\frac{(1+\mathbf{v})(1-2\mathbf{v})}{2\pi E} \left(2y\arctan\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}-x}{y}\right) - x\ln\bar{\mathbf{p}}\right),\tag{2.58}$$

$$U_{z}^{p}(x,y,E,\mathbf{v}) = -\frac{(1-\mathbf{v}^{2})}{\pi E} \left(y \ln \left(\bar{\mathbf{p}} - x\right) + x \ln \left(\bar{\mathbf{p}} - y\right) \right).$$
(2.59)

La contribution des pressions q_x sur les déplacements élastiques en surface du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\bar{u}_J}{q_x} = K_J^{q_x}(x, y, E, \mathbf{v}) = U_J^{q_x}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, E, \mathbf{v}) + U_J^{q_x}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, E, \mathbf{v})
+ U_J^{q_x}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, E, \mathbf{v}) + U_J^{q_x}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, E, \mathbf{v}), \quad (2.60)$$

avec

$$U_x^{q_x}(x, y, E, \mathbf{v}) = -\frac{1 - \mathbf{v}^2}{\pi E} x \ln(\bar{\rho} - y) - \frac{1 + \mathbf{v}}{\pi E} \ln(\bar{\rho} - x), \qquad (2.61)$$

$$U_{y}^{q_{x}}(x,y,E,\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{v}(1+\mathbf{v})}{\pi E}\bar{\mathbf{\rho}},$$
(2.62)

$$U_z^{q_x}(x,y,E,\mathbf{v}) = \frac{(1+\mathbf{v})(1-2\mathbf{v})}{2\pi E} \left(-2x\arctan\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}-y}{x}\right) + y\ln\bar{\mathbf{p}}\right).$$
(2.63)

La contribution des pressions q_y sur les déplacements élastiques en surface du massif semi-infini est donnée par

$$\frac{\bar{u}_J}{q_y} = K_J^{q_y}(x, y, E, \nu) = U_J^{q_y}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu) + U_J^{q_y}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu)
+ U_J^{q_y}(x + \frac{\Delta_x}{2}, y - \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu) + U_J^{q_y}(x - \frac{\Delta_x}{2}, y + \frac{\Delta_y}{2}, E, \nu), \quad (2.64)$$

$$U_x^{q_y}(x,y,E,\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{v}(1+\mathbf{v})}{\pi E}\bar{\mathbf{\rho}},\tag{2.65}$$

$$U_{y}^{q_{y}}(x,y,E,\nu) = -\frac{1-\nu^{2}}{\pi E}y\ln\left(\bar{\rho}-x\right) - \frac{1+\nu}{\pi E}\ln\left(\bar{\rho}-y\right),$$
(2.66)

$$U_z^{q_y}(x,y,E,\mathbf{v}) = \frac{(1+\mathbf{v})(1-2\mathbf{v})}{2\pi E} \left(-2y\arctan\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}-x}{y}\right) + x\ln\bar{\mathbf{p}}\right).$$
(2.67)

2.1.4 Discrétisation des massifs

Pour pouvoir effectuer une résolution numérique du problème de contact, une discrétisation du problème est nécessaire. Cela passe par la discrétisation des deux demi-espaces élastiques représentant les deux corps en contact. Les solutions en déplacement pour un effort ponctuel (cf. eq.2.33) présentent une singularité. Une description du chargement à partir d'efforts ponctuels est donc à proscrire. Une description plus précise avec un chargement constant sur des zones rectangulaires est donc choisie. Pour conserver la continuité des contraintes, certains auteurs utilisent des chargements triangulaires (cf. FIG.2.5). Détaillons à présent la représentation discrète du corps 1 (*z* positif). La surface est définie



FIG. 2.5: Les types de chargement : a) ponctuel, b) rectangulaire, c) triangulaire

par une grille de points de taille $N_p = N_x \times N_y$, chaque point étant espacé d'une distance Δ_x en x et Δ_y en y. L'utilisation de la transformée de Fourier discrète va par la suite obliger à garder ce pas constant. Chaque point représente une zone rectangulaire sur laquelle sont appliqués des champs de pression p et cisaillement q_x et q_y constants. L'aire de ces zones est $S = \Delta_x \Delta_y$. Les coordonnées des points sont définies par les coordonnées x_i, y_j . z_k est ajouté pour la détermination des contraintes en sous-couche. La distance Δ_z entre chaque plan en sous-couche n'est pas obligatoirement constante. Les contraintes sont déterminées par sommation des contributions de chaque élément discret. Ces contributions ont été précédemment calculées à partir des solutions concernant le demi-espace élastique (équations (2.35), (2.42) et (2.49)). Cela donne pour les champs de contrainte en un point $M(x_i, y_j, z_k)$ du massif 1 les solutions suivantes

$$\sigma_{IJ}(x_i, y_j, z_k) = \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} p(x_k, y_l) (C_{IJ}^p(x_l - x_i, y_m - y_j, z_k, E_1, \mathbf{v}_1)) + \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} q_x(x_k, y_l) (C_{IJ}^{q_x}(x_l - x_i, y_m - y_j, z_k, E_1, \mathbf{v}_1)) + \sum_{l=1, N_x} \sum_{m=1, N_y} q_y(x_k, y_l) (C_{IJ}^{q_y}(x_l - x_i, y_m - y_j, z_k, E_1, \mathbf{v}_1)).$$
(2.68)

De même, les déplacements élastiques sont déterminés par sommation des contributions de chaque élément discret. Cependant, le problème de contact nécessite de connaître la déplacement relatif entre les deux surfaces : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Les solutions (2.56), (2.60) et (2.64) sont utilisées. Il faut veiller à effectuer correctement le changement de repère concernant la contribution du massif 2, celui-ci n'étant pas orienté dans le même sens (*z* négatif). Il faut aussi tenir compte de l'équilibre des efforts entre les deux corps qui pour les pressions se réduit à

$$p = p_1 = p_2, (2.69)$$

et pour les cisaillements

$$q_x = q_{x1} = -q_{x2}, \tag{2.70}$$

$$q_y = q_{y1} = -q_{y2}. \tag{2.71}$$

Finalement les déplacements relatifs normaux s'écrivent

$$\bar{u}_{z}(x_{i}, y_{j}) = \sum_{l=1, N_{x}} \sum_{m=1, N_{y}} p(x_{k}, y_{l}) (K_{z}^{p}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{1}, v_{1}) + K_{z}^{p}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{2}, v_{2})) + \sum_{l=1, N_{x}} \sum_{m=1, N_{y}} q_{x}(x_{k}, y_{l}) (K_{z}^{q_{x}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{1}, v_{1}) - K_{z}^{q_{x}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{2}, v_{2})) + \sum_{l=1, N_{x}} \sum_{m=1, N_{y}} q_{y}(x_{k}, y_{l}) (K_{z}^{q_{y}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{1}, v_{1}) - K_{z}^{q_{y}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{2}, v_{2})).$$

$$(2.72)$$

et les déplacements tangentiels (J = x ou y)

$$\bar{u}_{J}(x_{i}, y_{j}) = \sum_{l=1, N_{x}} \sum_{m=1, N_{y}} p(x_{k}, y_{l}) (K_{J}^{p}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{1}, v_{1}) - K_{J}^{p}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{2}, v_{2})) + \sum_{l=1, N_{x}} \sum_{m=1, N_{y}} q_{x}(x_{k}, y_{l}) (K_{J}^{q_{x}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{1}, v_{1}) + K_{J}^{q_{x}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{2}, v_{2})) + \sum_{l=1, N_{x}} \sum_{m=1, N_{y}} q_{y}(x_{k}, y_{l}) (K_{J}^{q_{y}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{1}, v_{1}) + K_{J}^{q_{y}}(x_{l} - x_{i}, y_{m} - y_{j}, E_{2}, v_{2})).$$

$$(2.73)$$

On peut souligner dès à présent ce que l'on nommera découplage entre le problème normal et tangentiel. Lorsque les matériaux sont identiques, c'est-à-dire $E_1 = E_2 = E$

et $v_1 = v_2 = v$, la contribution des pressions sur les déplacements élastiques tangentiels est nulle (eq. 2.73), et la contribution des cisaillements sur les déplacements élastiques normaux est nulle (eq. 2.72). Il devient évident que la solution du problème normal (cf. paragraphe 2.1.5 page 52) ne dépend pas de la solution du problème tangentiel (cf. paragraphe 2.1.6 page 56), par contre, de par la loi de Coulomb, la solution du problème tangentiel est toujours dépendante de la solution du problème normal.

Pour des raisons de commodité, les relations précédentes sont réécrites avec une notation indicielle, *C* et *K* sont les coefficients d'influence,

$$\sigma_{IJ\,ijk} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{kl} C^p_{IJ\,ijklm} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,ij} C^{q_x}_{IJ\,ijklm} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,ij} C^{q_y}_{IJ\,ijklm},$$
(2.74)

$$u\bar{j}_{ij} = \bar{u}_{J\,ij}^{p} + \bar{u}_{J\,ij}^{q_{x}} + \bar{u}_{J\,ij}^{q_{y}}$$
$$= \sum_{N_{x}} \sum_{N_{y}} p_{kl} K_{J\,ijlm}^{p} + \sum_{N_{x}} \sum_{N_{y}} q_{x\,kl} K_{J\,ijlm}^{q_{x}} + \sum_{N_{x}} \sum_{N_{y}} q_{y\,kl} K_{J\,ijlm}^{q_{y}}.$$
(2.75)

Ces relations peuvent aussi être écrites sous forme matricielle,

$$\bar{\mathbf{u}}_z^p = \mathbf{A}_z^p \mathbf{p},\tag{2.76a}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{z}^{q_{x}} = \mathbf{A}_{z}^{q_{x}} \mathbf{q}_{\mathbf{x}}, \qquad (2.76b)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{z}^{q_{y}} = \mathbf{A}_{z}^{q_{y}} \mathbf{q}_{y}, \qquad (2.76c)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_x^p = \mathbf{A}_x^p \mathbf{p},\tag{2.76d}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_x^{q_x} = \mathbf{A}_x^{q_x} \mathbf{q}_{\mathbf{x}}, \qquad (2.76e)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_x^{q_y} = \mathbf{A}_x^{q_y} \mathbf{q}_y, \qquad (2.76f)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{y}^{\nu} = \mathbf{A}_{y}^{\nu} \mathbf{p}, \qquad (2.76g)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{y}^{q_{x}} = \mathbf{A}_{y}^{q_{x}} \mathbf{q}_{\mathbf{x}}, \tag{2.76h}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{y}^{q_{y}} = \mathbf{A}_{y}^{q_{y}} \mathbf{q}_{y}. \tag{2.76i}$$

De par les propriétés des coefficients d'influence, les matrices A_p^z , $A_{q_x}^x$, $A_{q_y}^y$ sont symétriques. Un autre constat important pour la suite de l'exposé sont les identités entre les termes croisés : $A_{q_y}^x = A_{q_x}^y$, $A_{q_x}^z$, A_p^x et $A_{q_y}^z$, A_p^y .

2.1.5 Problème de contact normal

Il s'agit ici de déterminer l'unique solution d'un système d'équations et d'inéquations qui vérifient les conditions aux limites à l'interface de contact. Les inconnues du problème classique du contact normal sont

- les pressions de contact p_{ij} ;
- les déplacements normaux élastiques relatifs $\bar{u}_{z\,ij}^p$;
- la zone de contact Γ_c ;
- le rapprochement de corps rigide δ_z ;


FIG. 2.6: Le demi-espace infini

- l'écart entre les deux corps g_{ij} .

Les données du problème sont

- le chargement normal P;
- la zone potentielle de contact Γ_p , c'est sur cette zone que la solution est cherchée. Elle doit être assez grande pour vérifier $\Gamma_c \subset \Gamma_p$;
- le chargement tangentiel est nul, c'est-à-dire les cisaillements q_x et q_y sont nuls;
- les conditions aux limites à l'infini sont celles du massif élastique semi-infini.

Le problème peut être résolu en pression ou en déplacement. La résolution en pression est adoptée. Les équations aux coefficients d'influence (2.75) font le lien entre les déplacements et les pressions. La figure FIG.2.7 résume le problème de contact normal. La solution doit vérifier les conditions suivantes

- il n'y a pas interpénétration des corps.

$$g_{ij} = 0 \quad (i,j) \in \Gamma_c, \tag{2.77a}$$

$$g_{ij} > 0 \quad (i,j) \notin \Gamma_c, \tag{2.77b}$$

où g_{ij} est la distance entre les corps

$$g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij} - \delta_z \,; \tag{2.78}$$

2. Modélisation numérique



FIG. 2.7: Le problème normal

- les pressions sont positives ou nulles,

$$p_{ij} > 0 \quad (i,j) \in \Gamma_c, \tag{2.79a}$$

$$p_{ij} = 0 \quad (i,j) \notin \Gamma_c ; \qquad (2.79b)$$

- l'équilibre de la charge

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} p_{ij}S = P.$$
(2.80)

Le problème est défini sur une grille de taille $N_p = N_x \times N_y$. Soit N_c le nombre de points dans la zone de contact et $N_p - N_c$ le nombre de points hors de la zone de contact Γ_c . Le bilan en terme d'inconnues et d'équations est donné dans le tableau TAB.2.2.

Inconnues	Ninc	Equations	N _{eq}
<i>p_{ij}</i>	N _p	(2.79b)	$N_p - N_c$
		(2.77a)	N _c
<i>Bij</i>	N_p	(2.78)	N_p
u_{ij}^p	N_p	(2.75)	N_p
δ_z	1	(2.1.5)	1
Total inconnues	$3N_p+1$	Total équations	$3N_{p}+1$

TAB. 2.1: Bilan du problème normal

Le problème peut donc être résolu. La difficulté du problème est la zone de contact Γ_c qui n'est pas connue à l'avance.

Une deuxième approche est de considérer le rapprochement δ_z comme une donnée du problème. Le chargement normal devient une inconnue. Le problème est identique puisqu'une inconnue est remplacée par une autre. On dénommera ce cas *pilotage en déplacement* et le précédent *pilotage en effort*.

Les moments autour du plan Oxy, M_x et M_y , ne sont pas pris en compte dans les formulations précédentes. Ceux-ci sont donc un résultat de la solution. Il est parfois intéressant de considérer ces moments comme des données du problème de contact. De façon équivalente, on peut prendre en compte la position du centre de pression (x_p, y_p) . Le problème se voit donc ajouter deux équations supplémentaires déduites des équations (2.14) et (2.15)

$$M_x = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{ij} y_j S, \qquad (2.81a)$$

$$M_y = -\sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{ij} x_i S.$$
 (2.81b)

Ou en terme de centre de pression

$$x_p = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{ij} x_i S / P, \qquad (2.82a)$$

$$y_p = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{ij} y_i S / P.$$
(2.82b)

Il est donc nécessaire de prendre en compte deux inconnues supplémentaires pour équilibrer le bilan équations/inconnues. Il faut ajouter le mésalignement entre les deux surfaces, c'est-à-dire ajouter les rotations rigides angulaires $\phi_x = \phi_{x1} + \phi_{x2}$ et $\phi_y = \phi_{y1} + \phi_{y2}$. La condition de non-interpénétration devient

$$g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij} - \phi_x y + \phi_y x - \delta_z = 0(i,j) \in \Gamma_c, \qquad (2.83a)$$

$$g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij} - \phi_x y + \phi_y x - \delta_z > 0(i,j) \notin \Gamma_c.$$
(2.83b)

Le problème normal a ici été posé dans le cadre de contraintes tangentielles nulles. Supposons maintenant que la solution du problème tangentiel est connue. Alors si les matériaux des deux corps élastiques ne sont pas identiques, une contribution élastique vient s'ajouter. Le contact normal peut être résolu indépendamment du problème tangentiel en ajoutant simplement ces contributions élastiques dans la définition de la distance entre les corps

$$g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij} - \phi_x y + \phi_y x - \delta_z + \bar{u}_{z\,ij}^{q_x} + \bar{u}_{z\,ij}^{q_y}.$$
(2.84)

2.1.6 Problème de contact tangentiel

Lorsque les déplacements élastiques tangentiels $\bar{\mathbf{u}}_{\tau}$ de composantes \bar{u}_x et \bar{u}_y ne sont pas nuls, il convient de résoudre le problème de contact tangentiel. Cette éventualité apparaît lorsque un chargement tangentiel \mathbf{Q} est appliqué, et/ou lorsque les solides en contact ont des propriétés élastiques différentes. En effet dans ce dernier cas, les coefficients d'influences K_x^p et K_y^p ne sont pas nuls. Le problème normal et le problème tangentiel sont alors couplés.

Les inconnues du problème tangentiel sont

- les cisaillements en surface q_{xij} et q_{yij} ;
- les déplacements normaux élastiques relatifs $\bar{u}_{xii}^{q_x}$ et $\bar{u}_{vii}^{q_y}$;
- la zone de glissement Γ_{sl} ;
- la zone d'adhérence Γ_{st} ;
- les déplacements de corps rigide δ_x et δ_y ;

- les amplitudes de glissement s_x et s_y , on note le vecteur glissement s.

Les données du problème sont

- le chargement tangentiel Q_x et Q_y ;
- la zone de contact Γ_c , elle vérifie $\Gamma_c \equiv \Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st}$;
- les conditions aux limites à l'infini sont celles du massif élastique semi-infini.

Le problème est illustré à la figure FIG.2.8 à partir d'un état initial au repos. Dans le cadre d'un état à l'instant t précédé par l'instant t', la définition du glissement donnée à l'équation (2.10) est reprise. Dans un premier temps la composante de rotation est oubliée. Le système d'équations et d'inéquations à respecter est le suivant :

la définition des zones de glissement et d'adhérence,

$$\bar{\mathbf{u}}_{\tau \, ij}^{t} - \bar{\mathbf{u}}_{\tau \, ij}^{t'} - \Delta \delta_{\tau}^{t} = \mathbf{s}_{\mathbf{ij}}^{t} = 0 \quad (i, j) \in \Gamma_{st},$$
(2.85a)

$$\bar{\mathbf{u}}_{\tau \, ij}^{t} - \bar{\mathbf{u}}_{\tau \, ij}^{t'} - \Delta \delta_{\tau}^{t} = \mathbf{s_{ij}}^{t} \neq 0 \quad (i, j) \in \Gamma_{sl} ; \qquad (2.85b)$$

- la loi de Coulomb, qui borne les cisaillements à partir du coefficient de frottement μ et qui inverse le sens du cisaillement et du glissement sur une même direction,

$$\left\|\mathbf{q}_{ij}^{t}\right\| < \mu p_{ij}^{t} \quad (i,j) \in \Gamma_{st},$$
(2.86a)

$$\mathbf{q_{ij}} = -\mu p_{ij}^{t} \frac{\mathbf{s_{ij}}^{t}}{\left\|\mathbf{s_{ij}^{t}}\right\|} \quad (i, j) \in \Gamma_{sl} ; \qquad (2.86b)$$



FIG. 2.8: Le problème tangentiel

- l'équilibre de la charge

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} \mathbf{q}_{ij}^{\mathbf{t}} S = \mathbf{Q}^{\mathbf{t}}.$$
(2.87)

L'écriture correcte de la loi de Coulomb est en vitesse, $\mathbf{q_{ij}} = -\mu p_{ij} \frac{\dot{\mathbf{s}_{ij}}}{\|\dot{\mathbf{s}_{ij}}\|}$. Or il a été montré que dans le cadre du contact en débattements finis, la vitesse de glissement est colinéaire au vecteur déplacement en glissement.

Un bilan nombre d'équations/inconnues est donné dans le tableau TAB.2.2. N_{sl} et N_{st} sont respectivement le nombre de points dans la zone de glissement et d'adhérence. Des conclusions équivalentes à celle du paragraphe précédent peuvent être faites. Le bilan est équilibré, et il est également possible de *piloter le problème en déplacement* au lieu de *piloter le problème en effort*. La détermination des zones de glissement et d'adhérence est la principale difficulté du problème.

De façon identique au problème normal, le problème tangentiel peut être complété par la prise en compte du moment autour de l'axe O_z . Ce qui consiste à ajouter une nouvelle

Inconnues	Ninc	Equations	N _{eq}
\mathbf{q}_{ij}^t	$2N_c$	(2.86b)	$2N_{sl}$
		(2.85a)	$2N_{st}$
$\mathbf{\bar{u}}_{\tau ij}^{t}$	$2N_c$	(2.75)	$2N_c$
\mathbf{s}_{ij}^t	$2N_{sl}$	(2.85b)	$2N_{sl}$
$\delta_{ au}^{t}$	2	(2.1.6)	2
Total inconnues	$4N_{c}+2N_{sl}+2$	Total équations	$4N_{c}+2N_{sl}+2$

TAB. 2.2: Bilan du problème tangentiel

équation déduite de l'équation d'équilibre (2.14)

$$M_{z} = \sum_{N_{x}} \sum_{N_{y}} \left(q_{y\,ij} x_{i} - q_{x\,ij} y_{j} \right) S.$$
(2.88)

Il est alors nécessaire de prendre en compte une inconnue supplémentaire, la rotation solide autour de O_z . Les équations (2.85a) et (2.85b) deviennent alors

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau \, ij}^{t} - \Delta \delta_{\tau}^{t} - \begin{pmatrix} -y \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \\ +x \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{s}_{ij}^{t} = 0 \quad (i, j) \in \Gamma_{st},$$
(2.89a)

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau \, ij}^{t} - \Delta \delta_{\tau}^{t} - \begin{pmatrix} -y \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \\ +x \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{s}_{ij}^{t} \neq 0 \quad (i, j) \in \Gamma_{sl}.$$
(2.89b)

2.1.7 Formulations variationnelles

Les formulations variationnelles sont l'écriture d'un problème sous sa forme globale. En mécanique, ces formulations variationnelles ont largement été développées par Duvaut et Lions [DUV 72]. Ils ont d'ailleurs étudié et prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème de contact. La solution du problème normal sans frottement est donnée par la minimisation de l'énergie totale de déformation pour un δ_x imposé sous conditions de respecter la non-interpénétration des corps (2.77a). Kalker reprit ces formulations pour les écrire sous une forme plus commode dans le cadre de la résolution du contact entre massifs élastiques semi-infinis. Résoudre le problème de contact revient à déterminer *p* et **q** qui minimisent l'énergie complémentaire (énergie de déformation élastique exprimée en fonction des contraintes), sous contraintes de respecter la positivité des pressions et la loi de Coulomb en terme de limite de cisaillement, soit exprimée sous sa forme continue

$$\min \int_{\Gamma_c} \left(h^* + \frac{1}{2} \bar{u}_z \right) p dS + \int_{\Gamma_c} \left(\mathbf{W}^*_{\tau} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^t_{\tau} - \bar{\mathbf{u}}^{t-1}_{\tau} \right) \mathbf{q} dS, \tag{2.90a}$$

$$p \ge 0, \tag{2.90b}$$

$$||\mathbf{q}|| \le \mu p. \tag{2.90c}$$

 h^* est la séparation des corps non déformés, c'est-à-dire la séparation initiale des corps additionnée aux mouvements de corps rigide dans la direction normale. \mathbf{W}^*_{τ} le vecteur

du déplacement tangentiel crée par les mouvement de corps rigide. Supposons les deux problèmes découplés. Dans un premier temps, le problème tangentiel est supposé résolu. Sous forme discrète, et en tenant compte des matrices des coefficients d'influence la formulation variationnelle pour le problème normal s'écrit

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} \mathbf{p} + c_{\tau}\right), \qquad (2.91a)$$

$$p_{ij} \ge 0. \tag{2.91b}$$

Où \mathbf{h}^* est le vecteur associé à h^* et donc incluant la séparation initiale des corps et les contributions en déplacement des mouvements de corps rigide. Le problème tangentiel est susceptible de créer des déplacements élastiques normaux. Ces déplacements vont être inclus dans \mathbf{h}^* car supposés connus et ne créant aucun travail. Finalement, $\mathbf{h}^* =$ $\mathbf{h} + \mathbf{A}_z^q \mathbf{q} - \delta_z - \mathbf{y} \cdot \phi_x + \mathbf{x} \cdot \phi_y$. La constante c_τ est le terme relatif à l'énergie complémentaire du problème tangentiel et est supposée connue, soit $c_\tau = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q} + (-\Delta \delta_\tau^t - \bar{\mathbf{u}}_\tau^{t-1})\mathbf{q}$. Résoudre le problème normal se résume donc à un problème de minimisation de forme quadratique sous contraintes.

Maintenant le problème normal est supposé résolu. Le problème tangentiel s'écrit

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{A}_{\tau}^{q} \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{q} + c_p\right), \qquad (2.92a)$$

$$|\mathbf{q}_{\mathbf{ij}}|| \le \mu p_{ij}.\tag{2.92b}$$

Où W^* est le vecteur associé à W^*_{τ} et donc incluant le déplacement tangentiel de corps rigide, les déplacements créés par la rotation de corps rigide. On inclura également dans ce vecteur les déplacements élastiques sous l'effet du chargement normal, et les déplacements élastiques tangentiels au pas de temps précédent. Soit $W^* =$

$$-\Delta \delta_{\tau}^{t} + \begin{pmatrix} \vdots \\ -y_{ij} \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \\ \vdots \\ x_{ij} \cdot \Delta \phi_{z}^{t} \\ \vdots \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{\tau}^{p} \mathbf{p} - \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{t-1}. \text{ La constante } c_{p} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^{T} \mathbf{A}_{z}^{p} \mathbf{p} + (\mathbf{h} - \delta_{z})^{T} \mathbf{p} \text{ est le terme}$$

connu relatif à l'énergie complémentaire du problème normal.

Ces deux problèmes sont donc des problèmes de minimisation de formes quadratiques convexes. De par les propriétés des coefficients d'influence les matrices sont symétriques. Pour pouvoir résoudre ce type de problème il est nécessaire de s'intéresser aux problèmes d'optimisation avec contraintes.

Un problème d'optimisation avec contraintes s'écrit

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad \operatorname{avec} \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0, & i \in \mathcal{E}, \\ c_i(\mathbf{x}) \ge 0, & i \in I. \end{cases}$$
(2.93)

On distingue deux types de contraintes c_i ; les contraintes d'inégalité et les contraintes

d'égalité. Les contraintes d'inégalité sont dites actives lorsque $c_i(\mathbf{x}) = 0$, $i \in I$. L'ensemble actif ou « active set » est alors défini par

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{E} \cup \{i \in I \,|\, c_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$
(2.94)

La difficulté des problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalités est que cet ensemble n'est pas connu à l'avance. Le Lagrangien du problème d'optimisation est :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda) = \phi(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup I} \lambda_i c_i(x).$$
(2.95)

Les scalaires λ_i sont des multiplicateurs de Lagrange. Il y en a autant que de contraintes. Résoudre ce problème est équivalent à résoudre les conditions d'optimalité ou de Karush, Kuhn et Tucker (KKT),

$$\nabla_{x}\mathcal{L}(x,\lambda) = 0, \tag{2.96a}$$

$$c_i(x) = 0$$
, pour tout $i \in \mathcal{E}$, (2.96b)

$$c_i(x) \ge 0$$
, pour tout $i \in I$, (2.96c)

- $\lambda_i(x) \ge 0$, pour tout $i \in I$, (2.96d)
- $\lambda_i(x)c_i(x) = 0$, pour tout $i \in \mathcal{E} \cup I$. (2.96e)

L'équation (2.96e) est la condition de complémentarité, et peut s'écrire

$$c_i(x) > 0, \quad \lambda_i = 0, \tag{2.97a}$$

$$c_i(x) = 0, \quad \lambda_i \ge 0. \tag{2.97b}$$

On parle d'optimisation quadratique lorsque la fonction objective et les contraintes peuvent s'écrire sous forme linéaire

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{R}^n} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{d}, \quad \operatorname{avec} \begin{cases} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, & i \in \mathcal{E}, \\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \ge b_i, & i \in I. \end{cases}$$
(2.98)

Le problème de contact normal fait parti de cette configuration. À partir des conditions de KKT, (2.90) se réécrit

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^{T}\mathbf{A}_{z}^{p}\mathbf{p}+\mathbf{h}^{*T}\mathbf{p}+c_{\tau}-\sum\lambda_{ij}p_{ij}\right)\Leftrightarrow\mathbf{A}_{z}^{p}\mathbf{p}+\mathbf{h}^{*T}-\lambda_{ij}=0,$$
(2.99a)

$$p_{ij} > 0, \quad \lambda_{ij} = 0, \tag{2.99b}$$

$$p_{ij} = 0, \quad \lambda_{ij} \ge 0. \tag{2.99c}$$

 λ_{ij} est en fait l'écart g_{ij} entre les surfaces. On retrouve ainsi les équations définies au paragraphe 2.1.5 à la page 52.

Le problème tangentiel n'est pas quadratique du fait de la contrainte qui n'est pas linéaire. En choisissant d'écrire la contrainte sous la forme commode suivante : $\frac{q_x^2 + q_y^2}{2\mu p} - \frac{\mu p}{2}$, le problème peut se réécrire en appliquant les conditions de KKT

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^{T}\mathbf{A}_{\tau}^{q}\mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T}\mathbf{q} + c_{p} + \sum \lambda_{ij}\left(\frac{q_{x\,ij}^{2} + q_{y\,ij}^{2}}{2\mu p_{ij}} - \frac{\mu p_{ij}}{2}\right)\right)$$
(2.100a)

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_{\tau}^{q} \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T} + \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_{ij} \frac{q_{xij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \\ \lambda_{ij} \frac{q_{yij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$
(2.100b)

$$\left|\left|\mathbf{q}_{ij}\right|\right| < \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} = 0, \tag{2.100c}$$

$$\left|\left|\mathbf{q}_{ij}\right|\right| = \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} \ge 0. \tag{2.100d}$$

 λ_{ij} est en fait la norme du glissement. On retrouve ainsi les équations définies au paragraphe 2.1.6 à la page 52.

2.2 Analyse numérique

2.2.1 Résolution numérique du problème de contact

Le problème de contact entre deux corps dont le comportement est associé aux demiespaces élastiques a été largement étudié depuis les années 70. Une revue assez complète des méthodes développées est donnée par Allwood [ALL 05]. Le contact tangentiel est rarement traité. Les méthodes présentées seront donc appliquées au problème normal. Ce dernier peut être formulé de la façon suivante

$$g_{ij} = h_{ij} + \bar{u}_{z\,ij}^p - \delta_z$$
 ou $\mathbf{g} = \mathbf{h} + \bar{\mathbf{u}}_z^p - \delta_z$, (2.101a)

$$\bar{u}_{z\,ij}^{p} = \sum_{N_{x}} \sum_{N_{y}} p_{kl} \cdot K_{z\,ijkl}^{p} \qquad \text{ou} \qquad \bar{\mathbf{u}}_{z}^{p} = \mathbf{A}_{z}^{p} \cdot \mathbf{p}, \qquad (2.101b)$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} p_{ij} = P/S \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{p} = P/S. \tag{2.101c}$$

Le système est donné sous forme indicielle ou matricielle. A est la matrice raideur du système définie au paragraphe 2.1.4 page 50. Elle s'exprime à partir des coefficients d'influence. Pour une grille avec N_p points, la matrice est de taille $N_p \times N_p$. i est un vecteur unitaire de taille N_p . Ce système doit vérifier les contraintes définissant les conditions de contact,

$$g_{ij} = 0, \quad p_{ij} > 0, \quad (i,j) \in \Gamma_c,$$
 (2.102a)

$$g_{ij} > 0, \quad p_{ij} = 0, \quad (i, j) \notin \Gamma_c.$$
 (2.102b)

La première difficulté qui apparaît est la zone de contact Γ_c qui est une inconnue à part entière du problème. Le problème de contact est un problème d'optimisation sous contraintes. La formulation variationnelle reprise par Kalker permet de poser les bases du problème de contact et de valider l'utilisation des différents algorithmes. L'évolution de ces algorithmes de contact est le reflet de la deuxième difficulté rencontrée. Souvent développés dans le cadre des surfaces rugueuses, les nouveaux algorithmes ont permis l'augmentation de la taille du problème grâce à une diminution des temps de calcul. Les premières méthodes développées dans les années 70 et 80 reposent sur la description d'un ensemble actif (« active set »), un ensemble de points où le contact est supposé être effectif. Cet ensemble actif évolue au cours du processus itératif pour converger vers la zone de contact réelle. À chaque itération, le système composé des équations (2.101a), (2.101b) et (2.102a) est résolu sur cet ensemble actif. Ce système peut être résolu à partir de méthodes directes d'inversion de matrice i) ou à partir de méthodes itératives ii). Une troisième méthode iii), plus récente, a été largement étudiée dans les années 90. Elle repose sur le calcul rapide de l'équation (2.101b). La multiplication matricielle est abandonnée, laissant place à des méthodes itératives. Ce dernier calcul s'effectuant obligatoirement sur tout le domaine, la théorie des ensembles actifs est abandonnée. En fait, l'ensemble actif qui détermine le lieu d'application des contraintes évolue au cours du processus itératif.

i) Méthodes directes et ensembles actifs :

Conry et Seireg [CON 71] furent les premiers à résoudre le problème de contact numériquement. Ils utilisèrent à cette fin l'algorithme du simplex. Kalker et van Randen [KAL 72] procédèrent en utilisant un algorithme équivalent. Les moyens matériel de l'époque ajoutés à l'inversion matricielle de A qui demande une certaine capacité en terme de stockage et de temps de calcul limitèrent ces auteurs à respectivement 16 et 84 points de discrétisation. Kalker développa ensuite un algorithme formulé plus simplement, c'est son célèbre code CONTACT décrit sur la figure FIG.2.9. L'équation d'équilibre de la charge (2.101c) est effectuée à partir d'une boucle extérieure supplémentaire. Liu, Neuville et Reuben [LIU 01b] procédèrent identiquement, Webster and Sayles [WEB 86] utilisèrent une factorisation de Cholesky, Ahmadi, Keer et Mura [AHM 83] utilisèrent cette méthode mais en supprimant la boucle extérieure en résolvant les trois équations simultanément. Allwood améliora les temps de calcul de cette méthode par inversion de matrice en utilisant un algorithme de mise à jour [ALL 97]. Les temps de calcul de cette dernière méthode sont alors fonction du nombre de points entrant ou sortant de la zone de contact. Hormis Kalker, peu de publications ont été faites sur le problème tangentiel [BJö 94, LI 03]. On peut cependant renvoyer à l'ouvrage de Jaeger [JAE 04].

ii) Méthodes itératives et ensembles actifs :

Pour des raisons de stockage, il apparaît plus judicieux d'utiliser des techniques itératives que d'inversion de matrice. Allwood [ALL 05] remarque que la technique la plus utilisée est celle de Gauss-Seidel alors que les algorithmes de gradient conjugué sont réputés plus rapides. Il compare trois méthodes sur une grille 40×40 : le gradient conjugué, Gauss-Seidel et une méthode de sur-relaxation. Les résultats en terme de rapidité de convergence sont donnés à la figure FIG.2.10 et sont sans équivoque, la méthode du gradient conjugué est la plus efficace.

2. Modélisation numérique



FIG. 2.9: Le code CONTACT de Kalker



FIG. 2.10: Comparaison des temps de calcul des méthodes itératives [ALL 05]

iii) Les méthodes sans ensemble actif :

Dans ces dernières méthodes, l'inversion de la matrice **A** ainsi que sa construction est abandonnée. Elle laisse place à des méthodes rapides qui permettent de déterminer les déplacements de l'équation (2.101b) sans effectuer le calcul matriciel complet. Les techniques utilisées sont possible grâce aux propriétés des coefficients d'influence et impliquent un calcul sur le domaine complet. Une première méthode est l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT). Cette technique a été initialement utilisée par Ju et Farris [JU 96]. La deuxième méthode est la méthode multigrille, dont l'application au contact a été initiée par Brandt et Lubrecht [BRA 90]. La méthode du gradient conjugué pour résoudre les équations (2.101a) et (2.101c) a été efficacement utilisée couplée à la méthode multigrille par Polonsky et Keer [POL 99] et couplée aux FFT par Hu, Barber et Zhu [HU 99] et Ai et Sawamiphakadi [AI 99].

Afin de les comparer, les algorithmes les plus efficaces de chacune des trois approches ont été repris par Allwood [ALL 05]. Il teste la méthode de factorisation de Cholesky avec mises à jour et ensembles actifs, la méthode du gradient conjugué avec ensembles actifs et la méthode du gradient conjugué avec multigrilles. Les résultats en termes de vitesse de calcul sont donnés à la figure FIG.2.11 et en terme de stockage à la figure FIG.2.12. Pour des problèmes de taille supérieure à 2000 points la méthode multigrille avec gradient conjugué est la plus efficace.



FIG. 2.11: Comparaison des temps de calcul entre trois méthodes de type i) ii) et iii) [ALL 05]

Finalement les méthodes adoptées pour résoudre le contact vont être les suivantes :



FIG. 2.12: Comparaison des besoins de mémoire entre trois méthodes de type i) ii) et iii) [ALL 05]

- la résolution du problème normal (N) est effectuée séparément de celle du problème tangentiel (T). Lorsque les propriétés matériaux différent entre les deux corps, un couplage existe entre les deux solutions. La méthode de Panagiotopoulos [PAN 75] va être utilisée. Elle consiste à itérer la résolution des deux problèmes : N-T-N-T-N-T-... Jusqu'à convergence des deux solutions;
- le problème normal va être résolu avec la méthode du gradient conjugué mise en œuvre par Polonsky. Cette méthode sera améliorée avec la prise en compte des moments de flexion des surfaces et du pilotage en déplacement;
- la technique accélératrice utilisée sera la méthode DC-FFT basée sur les transformées de Fourier rapides car plus simple à mettre en œuvre que les multigrilles;
- toutes ces techniques seront transposées à la résolution du problème tangentiel.

2.2.2 Méthode DC-FFT

La méthode utilisée est dite semi-analytique car reposant sur l'utilisation des coefficients d'influence entre déplacements et contraintes en surface (équations (2.75)) et contraintes en sous-couche et contraintes en surface (équations (2.74)).

L'écriture peut se faire sous forme matricielle ou sous forme indicielle avec des doubles sommations. Pour le problème normal simple il s'agit de résoudre :

$$\bar{u}_{z\,ij}^{p} = \sum_{N_{x}} \sum_{N_{y}} p_{kl} \cdot K_{z\,ijkl}^{p} \qquad \text{ou} \qquad \bar{\mathbf{u}}_{z}^{p} = \mathbf{A}_{z}^{p} \cdot \mathbf{p} \qquad (2.103)$$

La taille de la matrice peut être très importante. Si la taille de la zone de calcul est N_p le nombre d'opération nécessaire à une seule de ces doubles sommations est $O(N_p^2)$. Les temps de calculs peuvent donc devenir considérables. Il convient alors d'utiliser des techniques d'accélération. Brandt et Lubrecht [BRA 90] utilisent la méthode « multilevel multisummation » pour résoudre ce type de calcul, cette méthode permet de réduire le nombre d'opérations. L'autre méthode initiée par Ju et Farris est l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT). Ces doubles sommations sont identiques à un produit de convolution discret. Les FFT présentent en plus de l'avantage de réduire le nombre d'opérations, d'être très répandues. De nombreuses librairies fournissent des routines FFT. Cependant lors de l'introduction de cette méthode dans les calculs de contact, une erreur a été constatée dans le résultat si la taille de la zone de calcul n'est pas au moins égale à cinq fois la taille de la zone de contact [JU 96] voir huit [POL 00]. Plus récemment Liu [LIU 00] décrit précisément l'origine des erreurs constatées précédemment. Ce dernier met alors au point une méthodologie appropriée basée sur l'emploi des FFT et ne nécessitant qu'une extension par deux de la zone de calcul. Cette méthode sera utilisée.

Ce paragraphe reprend les travaux de Liu [LIU 00]. Une introduction de quelques notions sur les transformées de Fourier continues et discrètes est faite. L'application au problème de contact et la source de l'erreur sont ensuite présentées. Finalement la méthode DC-FFT est décrite.

2.2.2.1 Les transformées de Fourier continues et discrètes

La convolution linéaire y(t) entre une fonction x(t) et h(t) est définie par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t-\tau)d\tau \equiv x(t) * h(t).$$
 (2.104)

Dans le cadre des problèmes de contact, y(t) est la réponse en déplacement à partir des potentiels définies au paragraphe 2.1.3 page 44. Pour rappel les déplacements élastiques normaux initiés par une distribution de pressions s'écrivent

$$\bar{u}_{z}(x,y) = \frac{(1-v^{2})}{\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi,\eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^{2} + (\eta-y)^{2}}}.$$
(2.105)

Sous forme continue, les déplacements sont donnés par une convolution continue. Sous forme discrète, les déplacements sont donnés par une convolution discrète.

La transformée de Fourier $h(\omega)$ de h(t), c'est à dire sa réponse fréquentielle, est définie par

$$\widetilde{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt.$$
(2.106)

Le théorème de *convolution continue* est obtenu en appliquant la transformée de Fourier (FT) au produit de convolution (2.104), on obtient le théorème de convolution continue

$$\widetilde{y}(\omega) = \widetilde{x}(\omega)h(\omega).$$
 (2.107)

Dès lors, la transformée de Fourier inverse (IFT) permet d'obtenir le résultat du produit de convolution dans le domaine temporel (ou spatial dans le cadre du contact),

$$y(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{y}(\omega) e^{i\omega t} dt.$$
(2.108)

Le problème de contact est cependant résolu dans un domaine fini et discret. Une inévitable erreur numérique due à la discrétisation apparaît par rapport à la solution réelle. Celle-ci dépend donc de l'intervalle de discrétisation Δ_x et Δ_y .

Des définitions équivalentes existent sous forme discrète. Soit h_r et x_r , un échantillon discret de N valeurs de h(t) et x(t) sur une zone de taille L_0 . La transformée de Fourier discrète est définie par

$$\widehat{h}_s = \sum_{r=0}^{N-1} h_r e^{-2\pi i r s/N}, \quad s = 0, ..., N-1.$$
 (2.109)

La transformée de Fourier discrète inverse est définie par

$$h_j = (1/N) \sum_{r=0}^{N-1} \hat{h}_r e^{2\pi i r j/N}, \quad j = 0, ..., N-1.$$
 (2.110)

La convolution discrète est

$$y_j = \sum_{r=0}^{N-1} x_r h_{j-r}, \quad j = 0, ..., N-1.$$
 (2.111)

La convolution discrète est exprimée à partir d'un échantillon de données de longueur finie. Implicitement la convolution discrète se fait sur une longueur infinie en tenant compte d'une périodicité de longueur L_0 des deux échantillons à convoluer. On parle de convolution circulaire. Celle-ci peut être exprimée à l'aide de la fonction Heaviside

$$H(x) \begin{cases} = 0 & \text{if } x < 0, \\ = 1 & \text{if } x \ge 0. \end{cases}$$
(2.112)

On écrit

$$y_j = \mathbf{x} \otimes \mathbf{h} = \sum_{r=0}^{N-1} x_r h_{j-r+NH(r-j)}, \quad j = 0, ..., N-1.$$
 (2.113)

Ici **x** et **h** ont le même nombre de termes $j \in [0, N-1]$. La fonction Heaviside *H* est active lorsque j-r < 0 ce qui permet d'éviter un indice négatif pour *h* et se traduit par le remplacement de celui-ci par j-r+N. On a donc une sommation circulaire, et ainsi introduit une périodicité de l'échantillon. De façon analogue au cas continu, il existe un théorème de convolution discret, soit

$$\widehat{y}_s = \widehat{x}_s \widehat{h}_s, \quad s = 0, ..., N - 1.$$
 (2.114)

Celui-ci est associé au produit de convolution discret circulaire.

La transformée de Fourier rapide (FFT) est un algorithme qui permet d'effectuer la transformée de Fourier (FT) en $O(N \log N)$ au lieu de $O(N^2)$, pour des tailles N puissance de 2. Cette algorithme a été développer par Cooley et Tukey [COO 65]. Nous utiliserons ici une routine développée par Singleton [SIN 69] et qui permet de traiter des cas non puissance de 2. De la même façon, la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT) permet d'effectuer la transformée de Fourier inverse (IFT) en $O(N \log N)$ au lieu de $O(N^2)$. Il est donc intéressant d'utiliser le théorème de convolution pour effectuer un convolution dans le domaine fréquentiel qui coûte O(N) opérations au lieu de la faire dans le domaine initial (temporel ou spatial) en $O(N^2)$ opérations. Au final il aura fallu $O(N + 3N \log N)$ opérations au lieu de $O(N^2)$ ce qui devient très avantageux pour un N important.

2.2.2.2 Source de l'erreur des problèmes de contact résolus avec les FFT

Pour de nombreux problèmes, les fonctions à convoluer ne sont pas périodiques. Une erreur est donc introduite lorsque ce processus calculatoire est effectué pour résoudre des problèmes tel que les problèmes de contact. Le problème qui apparaît est un problème de recouvrement.

La figure FIG.2.13 illustre ce phénomène. Une convolution discrète unidimensionnelle d'un échantillon de pressions p et de coefficients d'influence K est faite. La convolution étant cyclique, la périodicité des pressions est représentée. Au début et en fin du processus de convolution, les pressions ajoutées à gauche et à droite interfèrent avec les coefficients d'influences. Le résultat sera donc biaisé à cause de ce phénomène.

Ces problèmes de recouvrement ne sont pas sans solution. La méthode appropriée consiste à effectuer un « zero-padding » [PRE 92]. Cette technique consiste à étendre la taille des deux échantillons de *N* à 2*N* à l'aide de zéros. De cette manière comme l'illustre la figure FIG.2.14 le recouvrement n'est plus possible. C'est la technique également utilisée par Liu dans le cadre de la DC-FFT. Cependant des auteurs comme Ju et Farris [JU 96] ont procédé à des extensions d'au moins cinq fois la zone de contact pour éviter les erreurs. Liu éclaircit ce fait en décrivant la méthode utilisée par Ju et Farris. Il appelle cette méthode CC-FT (Cyclic Convolution and Fourier Transform). Elle consiste à passer les pressions dans le domaine fréquentiel avec la FFT. Par contre les coefficients d'influence



FIG. 2.13: Périodicité et recouvrement induits par le produit de convolution discret

sont directement déterminés par échantillonnage de la réponse fréquentielle obtenue par une transformée de Fourier continue de la fonction continue associée aux coefficients d'influence. Il apparaît alors une erreur suite à cette échantillonnage, c'est le phénomène d'« aliasing » ou de crénelage. La réponse fréquentielle obtenue ne correspond pas à celle qui aurait du être obtenue si l'échantillonnage eut été fait en amont de la FFT. Ensuite le produit des deux échantillons est fait, puis la IFFT est effectuée pour obtenir le résultat dans le domaine spatial. Cette méthodologie conduit donc à une erreur qui ne peut être limitée sans une extension importante de la zone de contact.



FIG. 2.14: Suppression du recouvrement par zero-padding

2.2.2.3 La méthode DC-FFT

La méthode DC-FFT (Discrete Convolution and Fast Fourier Transform) mise au point par Liu est efficace et va être utilisée. Elle fait appel aux techniques de « zero-padding » et « wrap-around order » . Les détails de ces deux techniques seront apportés après l'énumération des étapes à suivre dans l'emploi de la méthode DC-FFT :

- 1. déterminer les coefficients d'influence; $\{K_j\}_N$,
- 2. étendre ces coefficients d'influence dans un domaine étendu avec zero padding et wrap-around order, $\{K_j\}_{2N}$;
- 3. appliquer la FFT pour obtenir $\{\hat{K}_s\}_{2N}$;
- 4. entrer les pressions, $\{p_j\}_N$;
- 5. étendre les pressions sur le domaine étendu avec zero-padding, $p_j = p_j$, $j \in [0, N-1]$, $p_j = 0$, $j \in [N, 2N-1]$;
- 6. appliquer la FFT pour obtenir $\{\hat{p}_s\}_{2N}$;
- 7. effectuer le produit terme à terme dans le domaine fréquentiel, $\{\hat{v}_s\}_{2N}$;
- 8. appliquer l'IFFT pour obtenir $\{u_j\}_{2N}$;
- 9. garder les termes $\{u_j\}_{2N}, j \in [0, N-1].$
- **Zero-padding :** Des valeurs nulles de N à 2N+1 sont ajoutées à la distribution de pression déjà définie de 0 à N-1.
- **Wrap-around order :** Le zero-padding n'est pas étendu aux coefficients d'influence. En effet, comme l'illustre la figure FIG.2.14, à partir d'une certaine distance l'influence des pressions est annihilée. Il convient en fait d'étendre ces coefficients (cf. FIG.2.15). Pour cela, les coefficients sont calculés de 0 à *N*-1, le coefficient d'indice *N* est mis égal à 0, les coefficients de *N*+1 à 2*N*-1 sont obtenus à partir des coefficients 1 à *N*-1 mais rangés dans le sens inverse, un signe négatif est éventuellement ajouté à ces derniers suivant la parité de la fonction des coefficients d'influence. Ainsi, les coefficients d'influence K_z^p sont étendu comme indiqué sur la FIG.2.15 alors que les coefficients d'influence $K_z^{q_x}$ doivent être étendu comme indiqué à la FIG.2.16 dans la direction *x*.

73



FIG. 2.15: Wrap-around et zero-padding de coefficients pairs



FIG. 2.16: Wrap-around et zero-padding de coefficients impairs

2.2.3 Algorithme du gradient conjugué

L'algorithme du gradient conjugué va être particulièrement utilisé dans ce travail pour résoudre les problèmes de contact. Cette méthode qui date des années 1950 a initialement été proposée par Hestenes et Stiefel [HES 80]. C'est une méthode itérative pour résoudre les problèmes linéaires

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},\tag{2.115}$$

où A est une matrice de taille $N \times N$ symétrique et définie positive. Ce problème est équivalent à la minimisation de la forme quadratique

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}.$$
 (2.116)

Le gradient conjugué peut donc être interprété comme un algorithme pour résoudre les systèmes linéaires, ou une technique de minimisation des formes quadratiques convexes. Le gradient de ϕ est le résidu du système linéaire,

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{r}(\mathbf{x}). \tag{2.117}$$

Cette méthode est itérative. La solution est obtenue à partir des vecteurs direction de descente p_k ,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k. \tag{2.118}$$

La méthode du gradient conjugué est une méthode dérivée de la méthode des directions conjuguées. L'ensemble des vecteurs $p_0, p_1, ...$ sont conjugués par rapport à l'application linéaire de matrice **A** définie-positive, c'est-à-dire $\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j = 0$, pour tout $i \neq j$. En conséquence, la méthode du gradient conjugué est une méthode exacte. Elle permet de minimiser ϕ en N itérations. Cependant l'intérêt de cette méthode ne repose pas sur cette propriété puisque les temps de calcul pour effectuer les N opérations peuvent être assez long. Une propriété plus intéressante est que le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une bonne approximation de \mathbf{x} est faible par rapport à N. La vitesse de décroissance de $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ l'emporte sur le coté exact de la méthode. Le gradient conjugué s'avère performant en temps de calcul, notamment pour résoudre les grands systèmes linéaires. L'autre avantage du gradient conjugué est le gain en mémoire par rapport à certaines méthodes. À chaque itération, la direction conjuguée p_k est obtenue uniquement à partir de l'itération p_{k-1} . Le stockage des itérations précédentes n'est pas nécessaire. Techniquement, une combinaison linéaire entre la direction précédente p_{k-1} et la direction de descente la plus directe, $-\nabla \phi(\mathbf{x}_k)$ (soit $-\mathbf{r}_k$) définit la nouvelle direction de descente

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}, \qquad (2.119)$$

où β_k est choisi de façon à vérifier la propriété de conjugaison, $\mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k = 0$. Finalement l'algorithme est le suivant :

Choix d'une valeur initiale \mathbf{x}_0 ;

Initialisation des variables : $\mathbf{r}_0 \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{p}_0 \leftarrow -\mathbf{r}_0$, $k \leftarrow 0$; while $r_k \neq 0$

$$\alpha_k \leftarrow \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}; \tag{2.120a}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_{k+1} + \alpha_k p_k; \tag{2.120b}$$

$$\mathbf{r}_{k+1} \leftarrow \mathbf{r}_{k+1} + \alpha_k \mathbf{A} p_k; \qquad (2.120c)$$

$$\beta_{k+1} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k};$$
(2.120d)

$$p_{k+1} \leftarrow -\mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k; \qquad (2.120e)$$

$$k \leftarrow k+1; \tag{2.120f}$$

end while

Initialement cette méthode a été développée pour résoudre des problèmes sans contrainte. Cependant elle est utilisable dans le cadre des problèmes d'optimisation avec contraintes [HES 80],

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{R}^n}\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}, \quad \text{avec} \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0, & i \in \mathcal{E}, \\ c_i(\mathbf{x}) \ge 0, & i \in I. \end{cases}$$
(2.121)

2.2.4 Résolution du problème normal

Pour résoudre le problème de contact normal entre deux corps élastiques, la démarche décrite par Polonsky et Keer [POL 99] basée sur un algorithme du gradient conjugué est utilisée. Cette procédure est fondée sur les formulations variationnelles décrites au paragraphe 2.1.7 à la page 58. Pour le problème de contact, il convient de résoudre

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^{T}\mathbf{A}_{z}^{p}\mathbf{p}+\mathbf{h}^{*T}\mathbf{p}+c_{\tau}-\sum\lambda_{ij}p_{ij}\right)\Leftrightarrow\mathbf{A}_{z}^{p}\mathbf{p}+\mathbf{h}^{*T}-\lambda=0,$$
(2.122a)

$$p_{ij} > 0, \quad \lambda_{ij} = 0, \tag{2.122b}$$

$$p_{ij} = 0, \quad \lambda_{ij} \ge 0. \tag{2.122c}$$

Le système doit être linéaire, la première condition pour pouvoir effectuer la minimisation est que le terme $\mathbf{h}^* = \mathbf{h} + \mathbf{A}_z^q \mathbf{q} - \delta_z - \mathbf{y} \cdot \phi_x + \mathbf{x} \cdot \phi_y$ soit connu. On ne peut donc résoudre le système que dans le cadre d'un déplacement de corps rigide δ_z et des angles de rotation rigides ϕ_x et ϕ_y fixés. Ensuite l'algorithme utilisé doit permettre la minimisation de la fonction objective tout en vérifiant les conditions de complémentarité. Il s'agit donc de modifier l'ensemble actif et inactif au cours du processus itératif et non de résoudre le problème sur des ensembles successifs. L'ensemble inactif ou « aire courante de contact » sera noté Γ'_c . La minimisation est effectuée sur l'aire courante de contact. En effet le but est de résoudre la condition de contact $g_{ij} = 0$ dans cette zone. On rappelle que c_{τ} est une constante. On va donc résoudre :

$$\mathbf{A}_{z}^{p}\mathbf{p}+\mathbf{h}+\bar{\mathbf{u}}_{z}^{q}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{z}}-\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\phi}_{x}+\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\phi}_{y}=0,\quad(i,j)\in\Gamma_{c}^{\prime}$$

Initialement tout les points $(i, j) \in \Gamma_c$ sont supposés en contact, c'est-à-dire $\lambda_{ij} = 0$. On calcule un premier pas de descente à partir du gradient conjugué, et on obtient une nouvelle distribution de pression, $p \leftarrow p + x_p$. On vérifie les conditions de complémentarité. Si $p_{ij} < 0$ alors $p_{ij} \leftarrow 0$ et le point de coordonnées (i, j) est exclu de l'aire courante de contact. Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{ij} = g_{ij}$ peuvent alors être déterminés hors du contact pour vérifier les conditions d'optimalités KTT. Si la condition de complémentarité $\lambda_{ij} > 0$ n'est pas respectée alors le point coordonnées (i, j) est inclus dans l'aire courante de contact et le gradient conjugué est réinitialisé. Cette réinitialisation a lieu car de nouveaux points entrent dans la matrice du système linéaire à résoudre. Ces points n'ont pas de précédents historiques dans l'algorithme du gradient conjugué en cours. La réinitialisation est donc obligatoire pour pouvoir déterminer correctement une nouvelle direction de descente. Le critère de convergence est effectué sur la variation de **p**. Lorsque la convergence est atteinte $\Gamma'_c \equiv \Gamma_c$.

Polonsky et Keer résolvent ainsi le problème de contact, mais dans le cas du pilotage en effort et sans tenir compte des angles de flexion. δ_z est alors inconnu. Dans ce cas, l'équation d'équilibre du chargement normal est à prendre en compte. Le système à résoudre peut s'écrire sous forme de système linéaire avec une matrice symétrique. La procédure précédente peut cependant être appliquée sans modifier le système à résoudre. L'astuce consiste à ne pas intégrer l'équation d'équilibre du chargement directement dans le système à résoudre mais plutôt à imposer cet équilibre au cours du processus itératif de résolution par gradients conjugués. Cependant δ_z reste toujours une inconnue. Mais il est possible d'approcher la valeur de δ_z à chaque itération pour une distribution de pression donnée. En résumé, le fait d'imposer le chargement normal permet d'approcher une valeur de déplacement de corps rigide qui va converger au cours du processus itératif. Pour approcher δ_z , la moyenne de $h_{ij} + \bar{u}_{z\,ij}$ est calculée sur Γ'_c . On utilise la propriété suivante,

$$g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij} + h_{ij} - \delta_z = 0, \quad (i,j) \in \Gamma_c \Rightarrow \sum_{(i,j) \in \Gamma_c} \delta_z = \sum_{(i,j) \in \Gamma_c} \bar{u}_{z\,ij} + h_{ij}.$$
(2.123)

Quant aux nouvelles valeurs de p_{ij} qui doivent être modifiées de façon à respecter l'équilibre du chargement, une simple correction suffit,

$$p_{ij} \leftarrow p_{ij} \frac{P}{\sum_{(i,j) \in \Gamma'_c} p_{ij} S}.$$
(2.124)

On peut alors minimiser classiquement la fonction objective à chaque itération et la somme des pressions converge « naturellement » vers le chargement normal désiré. Une condition nécessaire à la convergence est d'imposer initialement le contact sur toute la zone potentielle de contact avec une distribution de pression vérifiant la charge.

Cette technique peut être étendue à la prise en compte des moments autour de Ox et Oz. Il faut approcher δ_z et/ou ϕ_x et ϕ_z . Les mésalignements sont prises en compte, $h_{ij}^* = h_{ij} + \bar{u}_{z\,ij}^q - \delta_z - \phi_x y_j + \phi_y x_i$. À partir de l'identité : $\bar{u}_{z\,ij} + h_{ij}^* = 0$, $(i, j) \in \Gamma_c$, on

peut écrire le système d'équations suivant,

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij}^* = 0, \tag{2.125}$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \left(\bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij}^*\right) / x_i = 0, \tag{2.126}$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \left(\bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij}^*\right) / y_j = 0.$$
(2.127)

Une estimation des δ_z et/ou ϕ_x et ϕ_y peut être faite en résolvant le système suivant sur l'aire courante de contact,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\Gamma'_{c}} 1 & -\Sigma_{\Gamma'_{c}} x_{i} & \Sigma_{\Gamma'_{c}} y_{j} \\ \Sigma_{\Gamma'_{c}} 1/x_{i} & \begin{bmatrix} -\Sigma_{\Gamma'_{c}} 1 & \Sigma_{\Gamma'_{c}} y_{j}/x_{i} \\ -\Sigma_{\Gamma'_{c}} 1/y_{j} & \begin{bmatrix} -\Sigma_{\Gamma'_{c}} 1 & \Sigma_{\Gamma'_{c}} y_{j}/x_{i} \\ -\Sigma_{\Gamma'_{c}} x_{i}/y_{j} & \Sigma_{\Gamma'_{c}} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{z} \\ \left[\phi_{y} \\ \phi_{x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\Gamma'_{c}} (\bar{u}^{p}_{z\,ij} + \bar{u}^{q}_{z\,ij} + h_{ij})/x_{i} \\ \Sigma_{\Gamma'_{c}} (\bar{u}^{p}_{z\,ij} + \bar{u}^{q}_{z\,ij} + h_{ij})/y_{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.128)$$

De même il faut « forcer » les pressions à respecter les équations d'équilibre en effort et/ou moments. Pour cela, elles sont corrigées à partir d'une fonction linéaire : $p_{ij} \leftarrow p_{ij}(a+bx_i+cy_j)$. Les constantes *a*, *b* et *c* sont obtenues en résolvant le système matriciel correspondant aux équations d'équilibre

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}S & \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}x_{i}S & \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}y_{j}S \\ \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}x_{i}S & \begin{bmatrix} \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}x_{i}^{2}S & \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}x_{i}y_{j}S \\ \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}y_{j}S & \begin{bmatrix} \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}x_{i}y_{j}S & \Sigma_{\Gamma'_{c}} p_{ij}y_{j}^{2}S \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M_{y} = Px_{p} \\ -M_{x} = Py_{p} \end{bmatrix}.$$
(2.129)

Les étapes de l'algorithme de résolution du problème de contact normal résumé sur le diagramme FIG.2.17 sont les suivantes :

- 1. initialisation de **p** qui doit vérifier l'équilibre en effort et/ou moment si nécessaire. Toute la zone potentielle de contact est supposée en contact : $\lambda_{ij} = 0$. La variable ζ est initialisée à 0;
- 2. La DC-FFT est appliquée au calcul $\mathbf{\bar{u}}_{z}^{p}$.

Si le calcul est en effort imposé, δ_z est approché, de même si les moments sont imposés, ϕ_x et ϕ_y sont également approchés, cf. équation (2.128);

3. l'écart entre les deux corps sur la zone courante de contact est calculé

$$g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij}^*, \quad (i,j) \in \Gamma_c'.$$
(2.130)

Il s'agit du résidu du système linéaire à résoudre ;

4. la direction de descente **d** est alors calculée dans le cadre du gradient conjugué, à partir du résidu et de la direction de descente précédente (étapes (2.120e) et (2.120f)

du gradient conjugué)

$$d_{ij} \leftarrow -g_{ij} + \zeta \frac{G}{G_{old}} d_{ij}, \quad (i,j) \in \Gamma'_c,$$
(2.131a)

$$d_{ij} \leftarrow 0, \quad (i,j) \notin \Gamma'_c,$$
 (2.131b)

avec
$$G = \sum_{(i,j)\in\Gamma'_c} g_{ij}^2.$$
 (2.131c)

Puis G est stocké dans G_{old} et ζ est réinitialisé à 1 ;

5. la DC-FFT est appliquée à la direction de descente

$$\mathbf{r}_z^p = \mathbf{A}_z^p \mathbf{d}.\tag{2.132}$$

Puis le pas de descente est calculé (étape (2.120b) du gradient conjugué)

$$\alpha = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma'_c} g_{ij}^2}{\sum_{(i,j)\in\Gamma'_c} d_{ij}r_{ij}}; \qquad (2.133)$$

6. les pressions sont remises à jour (étape (2.120c)) du gradient conjugué)

$$p_{ij} \leftarrow p_{ij} + \alpha d_{ij}, \quad (i,j) \in \Gamma'_c;$$
 (2.134)

7. les conditions de complémentarité sont forcées,

si
$$p_{ij} < 0$$
, $(i, j) \in \Gamma'_c$,

alors
$$p_{ij} \leftarrow 0$$
, $\Gamma'_c \leftarrow \Gamma'_c/(i,j)$, (2.135a)

si
$$g_{ij} = \lambda_{ij} < 0$$
, $(i, j) \notin \Gamma'_c$,
alors $p_{ij} \leftarrow -\alpha g_{ij}$, $\zeta \leftarrow 0$, $\Gamma'_c \leftarrow \Gamma'_c \cup (i, j)$; (2.135b)

8. l'équilibre est forcé à partir de la multiplication matricielle (2.129), puis le critère de convergence suivant est testé

$$\varepsilon = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} p_{ij} - p_{old}}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} p_{ij}}.$$
(2.136)

Enfin les pressions sont mémorisées, $p_{old} \leftarrow p$.

La variable ζ permet de réinitialiser le gradient conjugué. Cette réinitialisation se fait pour $\zeta \leftarrow 0$. Tout se passe à l'étape 6 lors de la vérification des conditions de complémentarité. Si un seul point non défini en contact à l'itération courante se retrouve avec une séparation des corps négative, alors ce point passe dans la zone potentielle de contact Γ'_p et le gradient est réinitialisé à l'itération suivante. De plus, la valeur de pression nulle en ce point est réajustée à partir de $-\alpha g_{ij}$. Cette dernière est forcément positive.





2.2.5 Résolution du problème tangentiel

La résolution numérique du contact tangentiel demande plus de vigilance que le problème normal. D'une part la loi de Coulomb introduit une relation non linéaire. De plus, le nombre d'inconnues est deux fois plus important. Il sera fait un distinguo entre différentes configurations qui demandent des moyens de résolutions différents. Une première subdivision peut-être faite, en considérant le cas général d'un contact sous chargement tangentiel en *glissement partiel*. La deuxième configuration concernera le cas du contact en *glissement total*. Enfin, un cas limite, intéressant car apportant un gain de temps en calcul considérable, sera présenté. Il s'agit du contact en glissement total avec hypothèse de *rigidité tangentielle*.

La solution du contact tangentiel dépend de celle du contact normal. Pour tous les algorithmes présentés, la solution du problème normal est déjà connue. Cependant, comme cela a été présenté précédemment, si les deux corps ont des propriétés élastiques différentes, un couplage existe entre le problème normal et tangentiel. Des itérations successives (processus de Panagiotopoulos [PAN 75]) entre les deux problèmes doivent être faites. Pour simplifier la résolution du contact, il peut être utile de faire une hypothèse simplificatrice au niveau du contact tangentiel. Cette hypothèse consiste à découpler la solution du contact tangentiel dans les deux directions. Les déplacements élastiques dans une direction sont toujours fonction des cisaillements dans cette même direction et des cisaillements dans la direction perpendiculaire mais dans une moindre mesure. En négligeant cette dernière contribution et si le problème est résolu pour des efforts uniaxiaux sans moment de torsion, c'est à dire évoluant toujours selon la même direction, alors toutes les composantes des variables du contact dans la direction perpendiculaire restent nulles. Par exemple, pour un contact normalement chargé avec un effort tangentiel toujours colinéaire à l'axe x, toutes les vecteurs $\bar{\mathbf{u}}_{\tau}$, \mathbf{q}_{τ} , \mathbf{s}_{τ} , δ_{τ} sont colinéaires à ce même axe. Il s'en suit une simplification évidente du problème qui permet de réduire le nombre d'inconnues par deux et facilite grandement la convergence car la direction de glissement est connue. Pour résumer, on définira un couplage égal à 2 lorsque

$$\bar{u}_{x\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{kl} K_{x\,ijlm}^p + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,kl} K_{x\,ijlm}^{q_x} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,kl} K_{x\,ijlm}^{q_y}, \qquad (2.137a)$$

$$\bar{u}_{y\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{kl} K^p_{y\,ijlm} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,kl} K^{q_x}_{y\,ijlm} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,kl} K^{q_y}_{y\,ijlm},$$
(2.137b)

$$\bar{u}_{z\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{kl} K_{z\,ijlm}^p + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,kl} K_{z\,ijlm}^{q_x} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,kl} K_{z\,ijlm}^{q_y}; \qquad (2.137c)$$

un couplage égal à 1 lorsque

$$\bar{u}_{x\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,kl} K_{x\,ijlm}^{q_x} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,kl} K_{x\,ijlm}^{q_y}, \qquad (2.138a)$$

$$\bar{u}_{y\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,kl} K_{y\,ijlm}^{q_x} + \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,kl} K_{y\,ijlm}^{q_y}, \qquad (2.138b)$$

$$\bar{u}_{z\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{kl} K_{z\,ijlm}^p \,; \tag{2.138c}$$

couplage égal à 0 lorsque

$$\bar{u}_{x\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{x\,kl} K_{x\,ijlm}^{q_x}, \qquad (2.139a)$$

$$\bar{u}_{y\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} q_{y\,kl} K_{y\,ijlm}^{q_y}, \qquad (2.139b)$$

$$\bar{u}_{z\,ij} = \sum_{N_x} \sum_{N_y} p_{kl} K_{z\,ijlm}^p.$$
 (2.139c)

2.2.5.1 Hypothèses du glissement partiel

Ici le problème tangentiel sera résolu avec un *pilotage en effort* ou un *pilotage en déplacement*. Dans le cas du *pilotage en effort*, celui-ci devra vérifier la condition de Coulomb pour éviter le glissement total du contact : $||\mathbf{Q}|| < \mu P$. Le problème tangentiel va être résolu en transposant la méthode du gradient conjugué mise en œuvre dans le cas du problème normal. Rappelons la formulation variationnelle équivalente du problème

$$\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^{T}\mathbf{A}_{\tau}^{q}\mathbf{q} + \mathbf{W}^{*T}\mathbf{q} + c_{p} + \sum \lambda_{ij}\left(\frac{q_{x\,ij}^{2} + q_{y\,ij}^{2}}{2\mu p_{x\,ij}} - \frac{\mu p_{x\,ij}}{2}\right)\right)$$
(2.140a)
$$\left(\begin{array}{c} \vdots\\ \lambda_{ij}\frac{q_{xij}}{2}\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_{\tau}^{q} \mathbf{q} + \mathbf{W}^{*} + \begin{pmatrix} \gamma_{\mu} p_{ij} \\ \vdots \\ \lambda_{ij} \frac{q_{\nu ij}}{\mu p_{ij}} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0,$$
(2.140b)
$$\left| \left| \mathbf{q}_{ij} \right| \right| < \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} = 0,$$
(2.140c)

$$||\mathbf{q}_{ij}|| = \mu p_{ij}, \quad \lambda_{ij} \ge 0. \tag{2.140d}$$

Dans le cas du problème normal la minimisation et donc la résolution du système n'est faite que dans la zone courante de contact. La condition de complémentarité des multiplicateurs de Lagrange, c'est-à-dire la positivité de la séparation des corps est vérifiée à chaque itération, puis la zone courante de contact modifiée en conséquence. Cette méthodologie est applicable au problème tangentiel en minimisant et en résolvant le système dans la zone courante d'adhérence. Cependant rien ne garantit que la loi de Coulomb soit respectée dans la zone de glissement sans aucune intervention extérieure. Dans la zone de glissement solvent être colinéaires et opposés en signe aux glissements. En d'autres termes, la condition d'optimalité de KTT : $\mathbf{s}_{ij} = -\lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij}/\mu p_{ij}$ est une relation vectorielle, et si \mathbf{q}_{ij} et \mathbf{s}_{ij} ne sont pas colinéaires, le multiplicateur de Lagrange λ_{ij} n'est pas défini. Une possibilité eut été de changer les directions du cisaillement dans la zone de glissement à chaque itération pour vérifier la direction de glissement. Cependant cette méthode ne converge pas d'après Björklund [BJö 94] qui préfère fixer une fois pour toutes les directions des cisaillements de tous nouveaux points entrant dans la zone de

glissement au cours de son algorithme. Cette astuce restreint la méthode à des solutions où l'angle de variation du déplacement de corps rigide reste faible. Nous n'utiliserons pas cette approximation ici.

Il est à noter que l'équation (2.140c) peut s'écrire sous la forme

$$\left(\mathbf{A}_{\tau}^{q} + B\right)\mathbf{q} + \mathbf{W}^{*} = 0, \qquad (2.141)$$

où **B** est la matrice diagonale de termes $\frac{\lambda_{ij}}{(\mu p_{ij})}$. La matrice $(\mathbf{A}_{\tau}^{q} + \mathbf{B})$ est donc symétrique définie positive. En supposant que la matrice **B** et les déplacements de corps rigide inclus dans **W**^{*} soient des constantes connues, la méthode du gradient conjugué peut être utilisée. L'algorithme utilisé consiste là encore à minimiser la fonction objective tout en vérifiant les conditions de complémentarité. Le système linéaire (2.141) est résolu à chaque itération. Cependant ce système linéaire n'est pas figé et évolue au cours des itérations de façon à respecter les conditions de complémentarité. Pour pouvoir écrire ce système linéaire il faut s'affranchir du fait que les multiplicateurs de Lagrange et que les déplacements de corps rigides sont des inconnues du problème. Pour cela comme pour le problème normal, une approximation judicieuse de ces valeurs à chaque itération permet de converger vers elles.

Les multiplicateurs de Lagrange sont dans le cas du problème tangentiel égaux à la norme du glissement. À chaque itération, les multiplicateurs de Lagrange dans la zone d'adhérence prendront pour valeur zéro. Dans la zone de glissement c'est la norme du glissement qui fixera leur valeur. Cependant l'intérêt de ces multiplicateurs est de vérifier que la loi de Coulomb est bien respectée. La norme du glissement peut être pondérée par l'inverse du signe du produit scalaire entre le cisaillement et le glissement. Ainsi si l'angle entre le glissement et le cisaillement est supérieur à 90°, le multiplicateur de Lagrange est négatif. Cela implique que ces points doivent être ôtés de la zone de glissement. Pour résumer, initialement le contact est supposé totalement adhérent, soit $\lambda_{ij} = 0$. Après chaque pas de descente un nouvelle distribution de cisaillements est déterminée. Les multiplicateurs de Lagrange sont obtenus, $\lambda_{ij} = -\|\mathbf{s}_{ij}\| \times signe(\mathbf{s}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij})\|$. Les conditions de complémentarité sont vérifiées. Si $\|\mathbf{q}_{ij}\| > \mu p_{ij}$ alors $\mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mathbf{q}_{ij}\mu p_{ij}/\|q_{ij}\|$ et le point de coordonnées (i, j) est intégré à la zone courante de glissement Γ'_{st} . Ce alors (i, j) est intégré à la zone courante de glissement et d'adhérence convergent naturellement vers Γ_{st} et Γ_{st}

Concernant les déplacements de corps rigides, il faut « forcer » les cisaillements à respecter les équations d'équilibre. Pour estimer les glissements, les identités $\Delta \bar{u}_{x\,ij}^t - \Delta \delta_x^t - y_{ij} \Delta \phi_z^t + \lambda_{ij} \frac{q_{xij}^t}{\mu p_{ij}} = 0$ et $\Delta \bar{u}_{y\,ij}^t - \Delta \delta_y^t + x_{ij} \Delta \phi_z^t + \lambda_{ij} \frac{q_{yij}^t}{\mu p_{ij}} = 0$ sont utilisées. De ces

identités, on en déduit

_ _

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \Delta \bar{u}_{x\,ij}^t - \Delta \delta_x^t - y_j \Delta \phi_z^t + \lambda_{ij} \frac{q_{x\,ij}^t}{\mu p_{ij}} = 0, \qquad (2.142)$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \Delta \bar{u}^t_{y\,ij} - \Delta \delta^t_y + x_i \Delta \phi^t_z + \lambda_{ij} \frac{q^t_{y\,ij}}{\mu p_{ij}} = 0, \qquad (2.143)$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} x_i \left(\Delta \bar{u}_{y\,ij}^t - \Delta \delta_y^t + x_i \Delta \phi_z^t + \lambda_{ij} \frac{q_{y\,ij}^t}{\mu p_{ij}} \right) - y_j \left(\Delta \bar{u}_{x\,ij}^t - \Delta \delta_x^t - y_j \Delta \phi_z^t + \lambda_{ij} \frac{q_{x\,ij}^t}{\mu p_{ij}} \right) = 0.$$
(2.144)

Une estimation des $\Delta \delta_x$, $\Delta \delta_y$ et/ou $\Delta \phi_z$ peut être faite en résolvant le système suivant sur l'aire de contact

$$\begin{bmatrix} \sum_{\Gamma_{c}} 1 & 0 & \sum_{\Gamma_{c}} y_{j} \\ 0 & \sum_{\Gamma_{c}'} 1 & -\sum_{\Gamma_{c}} x_{i} \\ -\sum_{\Gamma_{c}} y_{j} & \sum_{\Gamma_{c}'} x_{i} & -\sum_{\Gamma_{c}} \left(x_{i}^{2} + y_{j}^{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_{x} \\ \Delta \delta_{y} \\ \Delta \phi_{z} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sum_{\Gamma_{c}'} \Delta \bar{u}_{x\,ij} + \lambda_{ij} \frac{d_{xij}}{\mu p_{ij}} \\ \sum_{\Gamma_{c}'} \Delta \bar{u}_{y\,ij} + \lambda_{ij} \frac{d_{yij}}{\mu p_{ij}} \end{bmatrix}$$
$$\sum_{\Gamma_{c}'} \sum_{\tau_{c}'} \Delta \bar{u}_{x\,ij} + \lambda_{ij} \frac{d_{yij}}{\mu p_{ij}} \end{bmatrix}$$
(2.145)

De plus il faut « forcer » les cisaillements à respecter les équations d'équilibre en efforts et/ou moments. Seules les contraintes correspondant à la zone courante d'adhérence seront modifiées. Pour cela, elles sont corrigées en additionnant une contrainte de telle sorte que : $q_{xij} \leftarrow q_{xij} + a - c \cdot y_j$ et $q_{yij} \leftarrow q_{yij} + b + c \cdot x_i$. Les constantes *a*, *b* et *c* sont obtenues en résolvant le système matriciel correspondant aux équations d'équilibre,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\Gamma_{st}} 1 & 0 & -\Sigma_{\Gamma_{st}} y_j \\ 0 & \Sigma_{\Gamma_{st}} 1 & \Sigma_{\Gamma_{st}} x_i \\ -\Sigma_{\Gamma_{st}} y_j & \Sigma_{\Gamma_{st}} x_i & \Sigma_{\Gamma_{st}} \left(x_i^2 + y_j^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x/S - \Sigma_{\Gamma_c} q_{xij} \\ Q_y/S - \Sigma_{\Gamma_c} q_{yij} \end{bmatrix}$$
(2.146)

Le critère de convergence est effectué sur la variation de **q** dans la zone de contact et sur la variation de λ_{ij} dans la zone de glissement. Les zones courantes de glissement et d'adhérence convergent naturellement vers Γ_{sl} et Γ_{st} . Les étapes sont les suivantes :

1. initialisation de **q** qui doit vérifier l'équilibre en effort et/ou moment si nécessaire. Toute la zone de contact est supposée en adhérence, $\lambda_{ij} = 0$. Si couplage=2, la DC-FFT est appliquée pour calculer $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{p}$;

- 2. la DC-FFT est appliquée au calcul $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{q}$. Si le calcul est en effort imposé, $\Delta \delta_x$ et $\Delta \delta_y$ sont approchés, de même si le moment de torsion est imposé, $\Delta \phi_z$ est également approché, cf. équation (2.145);
- 3. le glissement entre les deux corps sur la zone de contact est calculé

$$\mathbf{s}_{ij} = \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{q} + \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{p} - \Delta \delta_{\tau}, \quad (i, j) \in \Gamma_{c}'; \qquad (2.147)$$

4. calcul des multiplicateurs de Lagrange sur Γ'_{sl}

$$\lambda_{ij} = - \left\| \mathbf{s}_{ij} \right\| \times signe(\mathbf{s}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij}); \qquad (2.148)$$

5. les conditions de complémentarité sur les multiplicateurs de Lagrange sont testées. Si $\lambda_{ij} < 0$, alors $\Gamma'_{st} \leftarrow \Gamma'_{st} \cup (i, j)$ et $\zeta = 0$.

Le calcul de l'erreur quantifiant la non-colinéarité entre les vecteurs de cisaillements et de glissements est effectué dans la zone de glissement

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{sl} = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma'_{sl}} \left\| \mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right\|}{\sum_{(i,j)\in\Gamma'_{sl}} \lambda_{ij}}; \qquad (2.149)$$

6. la direction de descente **d** est alors calculée dans le cadre du gradient conjugué, à partir du résidu et de la direction de descente précédente (étapes (2.120e) et (2.120f) du gradient conjugué)

$$\mathbf{d}_{ij} \leftarrow \mathbf{s}_{ij} + \zeta \frac{G}{G_{old}} \mathbf{d}_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma'_{st},$$
(2.150a)

$$\mathbf{d}_{ij} \leftarrow (\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij}) + \zeta \frac{G}{G_{old}} \mathbf{d}_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma'_{sl},$$
(2.150b)

avec
$$G = \sum_{(i,j)\in\Gamma_c} (\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}}) \cdot (\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}}).$$
(2.150c)

Puis G est stocké dans G_{old} et ζ est réinitialisé à 1 ;

7. la DC-FFT est appliquée au calcul

$$\mathbf{r}_{\tau}^{q} = \mathbf{A}_{\tau}^{q} \mathbf{d}, \qquad (2.151)$$

puis,

$$\mathbf{r}_{\tau}^{q} \leftarrow \mathbf{r}_{\tau}^{q} + \lambda_{ij} \mathbf{d}_{ij} / \left(\mu p_{ij}\right). \tag{2.152}$$

Ce qui permet d'obtenir le pas de descente (étape (2.120b) du gradient conjugué)

$$\alpha = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij} / (\mu p_{ij}) \right) \cdot \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij} / (\mu p_{ij}) \right)}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}};$$
(2.153)

8. les cisaillements sont remis à jour (étape (2.120c)) du gradient conjugué)

$$\mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mathbf{p}_{ij} + \alpha \mathbf{d}_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma_c ;$$
 (2.154)

9. les conditions de complémentarité sur les cisaillements sont forcées,

si
$$\|\mathbf{q}_{ij}\| > \mu p_{ij}, \quad (i,j) \in \Gamma'_{st},$$

alors $\Gamma'_{sl} \leftarrow \Gamma'_{sl} \cup (i,j),$
 $\xi = 0, \quad \mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mu p_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\|\mathbf{q}_{ij}\|}; \quad (2.155)$

10. l'équilibre en force et/ou moment est « forcé », cf. équation (2.146).
Le calcul de l'erreur sur les variations des vecteurs cisaillements dans la zone de contact est faite,

$$\varepsilon^{c} = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma_{c}} \sqrt{(q_{x\,ij} - q_{x\,old\,ij})^{2} + (q_{y\,ij} - q_{y\,old\,ij})^{2}}}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_{c}} \sqrt{q_{x\,ij}^{2} + q_{y\,ij}^{2}}}.$$
(2.156)

Enfin les cisaillements sont mémorisés, $\mathbf{q}_{old} \leftarrow \mathbf{q}$.

La variable ζ permet de réinitialiser le gradient conjugué. Cette réinitialisation se fait pour $\zeta \leftarrow 0$. Tout se passe lors de la vérification des conditions de complémentarité. Si un seul point passe de la zone courante de glissement à la zone courante d'adhérence ou inversement alors le gradient est réinitialisé à l'itération suivante.



FIG. 2.18: Résolution du contact tangentiel

2.2.5.2 Hypothèses du glissement total

Le problème tangentiel sera ici résolu dans le cadre d'un glissement total de la surface. Cette situation peut arriver à partir d'un pilotage en déplacement pour des débattements tangentiels de corps rigide suffisants. A priori, dans le cadre du pilotage en déplacement il n'est pas possible d'anticiper une situation de glissement total. Dans ce cas l'algorithme présenté précédemment pour le glissement partiel est utilisable. Dès lors que le débattement tangentiel de corps rigide devient important, la zone courante de glissement tend vers la zone de contact. Le problème tangentiel reste solvable. Dans le cas du pilotage en effort, le problème est différent. En effet, la loi de Coulomb locale vient borner l'effort tangentiel maximal. Cela signifie que pour tout entrée du code de contact avec un effort égal au maximum défini par la loi de Coulomb, le problème ne peut être résolu. En effet dans cette situation le contact est glissant et rien n'indique jusqu'où ira ce glissement. On est donc dans l'impossibilité d'estimer les deux déplacements de corps rigides $\Delta \delta_x$ et $\Delta \delta_y$. Le problème doit donc être posé autrement.

Les deux équations d'équilibre en chargement sont ôtées. Il est alors nécessaire d'ajouter deux nouvelles équations pour vérifier l'équilibre équations/inconnues. Les deux équations qui sont ajoutées sont un bilan de l'énergie dissipée par frottement du contact glissant. C'est donc ce critère qui va permettre de définir l'amplitude des glissements et donc l'amplitude des déplacements tangentiels de corps rigide. Deux équations sont nécessaires, l'énergie dissipée sera donc décomposée suivant les deux directions *x* et *y*. Une autre méthode possible est de donner comme entrée l'énergie dissipée (non décomposée dans ces deux directions) et de fournir l'effort tangentiel. On a ainsi un indicateur de l'amplitude du déplacement et un indicateur sur sa direction. Cependant corriger les cisaillements pour vérifier l'équilibre en effort alors que ces cisaillements sont de plus limités par la loi de Coulomb n'est pas judicieux. C'est pourquoi cette possibilité sera abandonnée. C'est donc l'équilibre en énergie dissipée par frottement qui sera utilisé. Ces énergies sont des scalaires positifs. Aucune indication sur le sens du glissement n'est donc fournie. Le signe de l'effort tangentiel dans les deux directions doit alors être mémorisé pour pouvoir indiquer dans quel sens le glissement se fait.

Les inconnues du problème tangentiel en glissement total sont :

- les cisaillements en surface q_{xij} et q_{yij} ;
- les déplacements normaux élastiques relatifs $\bar{u}^q x_{x\,ij}$ et $\bar{u}^q y_{y\,ij}$;
- la zone de glissement Γ_{sl} ;
- la zone d'adhérence Γ_{st} ;
- les déplacements de corps rigide δ_x et δ_y ;
- les amplitudes de glissement s_x et s_y .

Les données du problème sont :

- le chargement tangentiel Q_x et Q_y ;
- l'énergie dissipée par frottement Ed_x et Ed_y ;
- la zone contact Γ_c , dans ce cas $\Gamma_c \equiv \Gamma_{sl}$.

Le système d'équations et d'inéquations à respecter est le suivant :

- la définition des glissements,

$$\bar{\mathbf{u}}_{\tau ij}^{t} - \bar{\mathbf{u}}_{\tau ij}^{t'} - \Delta \delta_{\tau}^{t} = \mathbf{s}_{\mathbf{ij}}^{t} \neq 0 \quad (i, j) \in \Gamma_{sl} ; \qquad (2.157)$$

- la loi de Coulomb.

$$\mathbf{q_{ij}} = -\mu p_{ij}^t \frac{\mathbf{s_{ij}}^t}{\left\|\mathbf{s_{ij}^t}\right\|} \quad (i, j) \in \Gamma_{sl} ; \qquad (2.158)$$

- l'équilibre en terme d'énergie dissipée,

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} -q_{x\,ij}^t s_{x\,ij}^t S = E d_x^t, \qquad (2.159a)$$

$$\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} -q_{y\,ij}^t s_{y\,ij}^t S = E d_y^t.$$
(2.159b)

Le bilan nombre d'équations/inconnues est donné au TAB.2.3.

Inconnues	Ninc	Equations	N _{eq}
\mathbf{q}_{ij}^t	$2N_c$	(2.158)	$2N_c$
$\mathbf{\bar{u}}_{\tau ij}^{t}$	$2N_c$	(2.75)	$2N_c$
\mathbf{s}_{ij}^t	$2N_c$	(2.157)	$2N_c$
$\delta_{ au}^t$	2	(2.159)	2
Total inconnues	$6N_c+2$	Total équations	$6N_c+2$

TAB. 2.3: Bilan du problème tangentiel en glissement total

Le problème peut être également exprimé à partir de la formulation variationnelle. La méthode du gradient conjugué va être reprise pour la résolution. L'algorithme précédent est réutilisé avec quelques modifications. Pour simplifier le problème l'équilibre en moment n'est pas effectué. Cet équilibre impose une modification des cisaillements au cours du processus itératif et limite fortement les succès de convergence.

Pour estimer les déplacements tangentiels de corps rigide, les équations d'équilibre en déplacement (2.159) sont utilisées. De celle-ci, on en déduit

$$\delta_x = \frac{\frac{Ed_x^t}{S} + \sum_{(i,j)\in\Gamma_c} u_{x\,ij}^t q_{x\,ij}^t}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} q_{x\,ij}^t},$$
(2.160a)

$$\delta_{y} = \frac{\frac{Ed_{y}^{t}}{S} + \sum_{(i,j)\in\Gamma_{c}} u_{y\,ij}^{t}q_{y\,ij}^{t}}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_{c}} q_{y\,ij}^{t}}.$$
(2.160b)

Le critère de convergence est effectué sur la variation de \mathbf{q} et sur la variation de λ_{ij} dans la zone de glissement. Les étapes sont les suivantes :
- initialisation de q qui doit vérifier l'équilibre en effort. Les efforts servent uniquement à initialiser les cisaillements. Ils sont initialement orientés dans le bon sens. Toute la zone de contact est en glissement, λ_{ij} = 0. Si couplage=2, la DC-FFT est appliquée pour calculer Δū^p_τ;
- 2. la DC-FFT est appliquée au calcul $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{q}$. $\Delta \delta_{x}$ et $\Delta \delta_{y}$ sont approchés à partir des énergies dissipées, cf. équation (2.160);
- 3. les glissements entre les deux corps sur la zone de contact sont calculés

$$\mathbf{s}_{ij} = \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{q} + \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^{p} - \Delta \delta_{\tau}, \quad (i, j) \in \Gamma_{c} ; \qquad (2.161)$$

4. calcul des multiplicateurs de Lagrange sur Γ'_{sl} ,

$$\lambda_{ij} = - \left\| \mathbf{s}_{ij} \right\| \times signe(\mathbf{s}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij}).$$
(2.162)

Le calcul de l'erreur quantifiant la non-colinéarité entre les vecteurs de cisaillements et de glissements est effectué dans la zone de glissement

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{sl} = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma'_{sl}} \left\| \mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}} \right\|}{\sum_{(i,j)\in\Gamma'_{sl}} \lambda_{ij}}; \qquad (2.163)$$

5. la direction de descente **d** est alors calculée dans le cadre du gradient conjugué, à partir du résidu et de la direction de descente précédente (étapes (2.120e) et (2.120f) du gradient conjugué)

$$\mathbf{d}_{ij} \leftarrow (\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij}) + \zeta \frac{G}{G_{old}} \mathbf{d}_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma_c,$$
(2.164a)

avec
$$G = \sum_{(i,j)\in\Gamma_c} (\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}}) \cdot (\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\mu p_{ij}}).$$
(2.164b)

Puis G est stocké dans G_{old} ;

6. la DC-FFT est appliquée au calcul

$$\mathbf{r}_{\tau}^{q} = \mathbf{A}_{\tau}^{q} \mathbf{d}, \qquad (2.165)$$

puis,

$$\mathbf{r}_{\tau}^{q} \leftarrow \mathbf{r}_{\tau}^{q} + \lambda_{ij} \mathbf{d}_{ij} / \left(\mu p_{ij}\right).$$
(2.166)

Ce qui permet d'obtenir le pas de descente (étape (2.120b) du gradient conjugué)

$$\alpha = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij} / (\mu p_{ij}) \right) \cdot \left(\mathbf{s}_{ij} + \lambda_{ij} \mathbf{q}_{ij} / (\mu p_{ij}) \right)}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_c} \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}.$$
 (2.167)

7. Les cisaillements sont remis à jour (étape (2.120c)) du gradient conjugué) :

$$\mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mathbf{p}_{ij} + \alpha \mathbf{d}_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma_c ;$$
 (2.168)

8. les conditions de complémentarité sur les cisaillements sont forcées

si
$$\|\mathbf{q}_{ij}\| > \mu p_{ij}, (i, j) \in \Gamma_c$$
, alors $\mathbf{q}_{ij} \leftarrow \mu p_{ij} \frac{\mathbf{q}_{ij}}{\|\mathbf{q}_{ij}\|};$ (2.169)

9. l'équilibre en force et/ou moment est « forcé », cf. équation (2.146).

Le calcul de l'erreur sur les variations des vecteurs cisaillements dans la zone de contact est fait

$$\mathbf{\epsilon}^{c} = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma_{c}} \sqrt{\left(q_{x\,ij} - q_{x\,old\,ij}\right)^{2} + \left(q_{y\,ij} - q_{y\,old\,ij}\right)^{2}}}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_{c}} \sqrt{q_{x\,ij}^{2} + q_{y\,ij}^{2}}}.$$
(2.170)

Enfin les cisaillements sont mémorisés : \mathbf{q}_{old} . $\leftarrow \mathbf{q}$

La variable ζ qui permet de réinitialiser le gradient conjugué est toujours laissée à 1, car dans ce cas il n'y plus de points passant d'un état adhérant à glissant ou inversement.



FIG. 2.19: Résolution du contact tangentiel piloté en effort en glissement total

2.2.5.3 Hypothèses du glissement total avec un comportement tangentiel rigide

Le fretting consiste en de petits débattements au niveau de la structure. Cependant ces petits débattements peuvent se révéler importants à l'échelle du contact. Les phases de glissement partiel peuvent devenir relativement négligeables par rapport aux phases de glissement total. Ces phases de glissement partiel peuvent être négligées. Cela suppose que la composante élastique de déplacement tangentiel est faible par rapport au déplacement tangentiel de corps rigide, $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau ij}^t << \Delta \delta_{\tau}^t$. Le problème tangentiel est ainsi fortement simplifié. D'une part les déplacements élastiques ne sont pas calculés. Or ce sont ces déplacements calculés à partir de la DC-FFT qui sont le plus coûteux en temps de calcul. D'autre part, plus besoin d'algorithme itératif pour résoudre le problème, la solution est trouvée automatiquement. En effet, le problème de contact tangentiel est repris sans prise en compte de moment du torsion M_z . Il s'écrit alors de la manière suivante,

$$-\Delta \delta_{\tau}^{t} = \mathbf{s}_{ij}^{t} \quad (i,j) \in \Gamma_{c}, \tag{2.171a}$$

$$\mathbf{q}_{ij}^{t} = \mu p_{ij}^{t} \frac{\Delta \delta_{\tau}^{t}}{\|\Delta \delta_{\tau}^{t}\|} \quad (i, j) \in \Gamma_{c}.$$
(2.171b)

Le problème est *piloté en déplacement*. Le déplacement de corps rigide fournit directement les glissements. Ces glissements sont constants sur toute la surface de contact. De même la loi de Coulomb donne l'amplitude des cisaillements. Puis l'orientation de ces cisaillements est calquée sur celle du déplacement de corps rigide.

2.3 Modélisation de l'usure

2.3.1 Loi d'usure employée

Pour pouvoir effectuer des simulations d'usure dans le cadre du fretting, il faut sélectionner une loi appropriée. La thèse de Paulin [PAU 06] traite du l'usure en fretting. La formulation mise en place par ce dernier est volumique. Pour pouvoir utiliser cette loi d'usure dans le cadre de simulation numérique il est nécessaire de réécrire cette loi sous une formulation locale. De plus δ_0 et *Ed* font référence à un cycle de fretting. La nouvelle loi établie localement doit intégrer le fait que le contact est résolu à différents incréments de temps au cours du cycle de fretting. Il faut donc intégrer la notion de temps dans la loi d'usure locale. La loi d'usure globale est de type énergétique. Formulée simplement, elle s'écrit

$$V = \alpha_{usure} \sum_{N} \delta_0(N) E d(N), \qquad (2.172)$$

où *N* permet de numéroter les cycles de fretting. *V* est donc le volume usé après *N* cycles de fretting. $\delta_0(N)$ est l'amplitude de glissement pour le cycle *N*. Ed(N) est l'énergie dissipée par frottement au cours du cycle *N*. Localement, le paramètre correspondant à *Ed* est la densité d'énergie dissipée par frottement. On la notera *ed*. Il s'agit donc du travail surfacique créé par le cisaillement en surface qui s'exprime à partir du produit scalaire entre le cisaillement **q** et le glissement **s** au point considéré et au cours du temps entre les instants *t'* et *t*

$$ed^t = -\mathbf{q}^t \cdot \mathbf{s}^t. \tag{2.173}$$

D'après la loi de Coulomb, les cisaillements et glissements sont colinéaires et inversés. En utilisant les normes $s^t = ||\mathbf{s}||$ et $q^t = ||\mathbf{q}||$, la densité d'énergie dissipée par frottement s'écrit

$$ed^t = q^t s^t. (2.174)$$

La loi d'usure locale prend alors la forme suivante,

$$\Delta h = \alpha_{usure} \sum_{N} \delta_0(N) \sum_{1 cycle} q^t s^t.$$
(2.175)

L'amplitude de glissement n'est pas un quantité définie pour une simulation de fretting d'un contact quelconque. Cette valeur sera donc remplacée dans une première formulation par l'amplitude de débattement de corps rigide $\Delta \delta_{\tau}^t = \|\Delta \delta_{\tau}^t\|$. Pour un cycle de fretting, la distance parcourue en glissement du contact cylindre-plan est de $4\delta_0$. La « loi d'usure 1 » est définie par

$$\Delta h = \alpha_{usure} \sum_{N} \frac{\sum_{1 cycle} \Delta \delta_{\tau}^{t}}{4} \sum_{1 cycle} q^{t} s^{t}.$$
(2.176)

 δ_{τ} est un paramètre global de la structure. Une définition encore plus localisée de la loi d'usure peut être faite en remplaçant ce dernier par le glissement en chaque point. On

dénommera celle-ci « loi d'usure 2 »

$$\Delta h = \alpha_{usure} \sum_{N} \frac{\sum_{1 cycle} s_{\tau}^{t}}{4} \sum_{1 cycle} q^{t} s^{t}.$$
(2.177)

2.3.2 Implémentation de la loi d'usure

La loi d'usure est implémentée dans un code avec les algorithmes de contact précédemment présentés.

Dans un premier temps le code est développé pour pouvoir effectuer la simulation d'un cycle de fretting, c'est-à-dire un trajet de chargement. Il s'agit alors de gérer l'évolution dans le temps des différentes variables du contact. Le point le plus délicat se situe au niveau de la gestion de la géométrie. Deux types de situation peuvent apparaître.

La première dans le cas où les amplitudes de glissement sont très faibles, donc inférieures à la demi-largeur de maille de la grille dans les deux directions. Il est alors supposé que les deux géométries en vis-à-vis ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre. Les glissements n'entraînent aucune perturbation sur la définition de la séparation initiale des corps. Un parallèle peut être fait avec l'hypothèse des petites perturbations de la méthode des éléments finis.

La deuxième situation correspond au cas où les débattements tangentiels deviennent importants. Dans ce cas les géométries doivent être déplacées l'une par rapport à l'autre. Par abus, c'est le déplacement de corps rigide qui fixera la position des deux surfaces. Ainsi la séparation des corps devient

$$h(x,y) = f1(x,y) - f2(x - \delta_x, y - \delta_y).$$
(2.178)

Pour être plus précis les débattements élastiques peuvent être pris en compte pour ajuster les surfaces l'une par rapport à l'autre, mais là encore on reste dans le cadre de petites perturbations et ces déplacements sont négligés. Les géométries sont discrètes. De façon rigoureuse une interpolation des différents points de la surface 2 sur la grille fixe par rapport à la surface 1 devrait être faite. Cependant on simplifiera la procédure en mettant en vis-à-vis les points à partir de la configuration la plus proche. Les points discrets sont décalés d'un nombre entier de points *ih* et *jh* égal à la partie entière de $\frac{\delta_x}{dx} \pm 0.5$ et $\frac{\delta_y}{dy} \pm 0.5$ (- pour un δ négatif). La géométrie discrète devient alors

$$h_{ij} = f 1_{ij} - f 2_{i-ih \ j-jh}. \tag{2.179}$$

Pour pouvoir effectuer ce décalage il faut soit définir une zone de calcul de taille inférieure à la grille définissant les deux surfaces, soit compléter les points non définis par une valeur majorant les points déjà définis en veillant à ce que ces nouveaux points n'entrent jamais dans la zone de contact. De plus la grille doit être suffisamment grande pour pouvoir effectuer des calculs sur une zone de contact qui va augmenter avec l'usure.

Enfin les valeurs de δ_x et δ_y avec pilotage en effort sont inconnues au moment du calcul du problème normal au temps *t*. La procédure optimale à mettre en place est d'itérer entre

le problème normal et tangentiel de façon à déterminer au mieux ces valeurs. Dans cette situation on se limitera cependant à utiliser les valeurs trouvées à l'instant précédent.

L'usure correspond à une simple intervention sur la définition des surfaces des deux corps en contact. L'usure peut être répartie sur les deux surfaces en vis-à-vis. Un ratio d'usure β entre 0 et 1 est ajouté pour définir la répartition de l'usure entre les deux surfaces. Les surfaces sont mises à jour après la simulation d'un cycle de fretting. Cependant, l'usure après un seul cycle peut s'avérer faible. Un facteur d'accélération ΔN va être employé. Les surfaces ne sont plus mises à jour après un cycle d'usure, mais après ΔN cycles, cependant numériquement un unique cycle de fretting est calculé.

En résumé, du cycle N au cycle $N + \Delta N$, les surfaces sont modifiées de telle sorte que

$$f1(x,y) = f_1(x,y) + \Delta N \beta \Delta h(x,y), \qquad (2.180a)$$

$$f2(x,y) = f_2(x,y) - \Delta N (1-\beta) \Delta h(x,y).$$
 (2.180b)

Le critère pour définir ΔN peut être varié. Tout d'abord celui-ci peut être fixé à l'avance. Une profondeur maximale ou moyenne d'usure peut être choisie entre chaque cycle de mise à jour. Un volume d'usure peut être imposé...

Le processus d'usure est arrêté à partir d'un critère d'arrêt quelconque :

- jusqu'à un nombre de cycles prédéfini, N_{max} ;
- jusqu'à atteindre une profondeur d'usure maximale, $max(h hinitial) = Wear_{max}$;
- jusqu'à homogénéisation de l'usure : un critère *SC*, basé sur le coefficient de variation (écart type / moyenne) des valeurs Δh d'usure non-nulles, est atteint lorsque $SC \leq SC_{max}$.

$$SC = \frac{1}{\bar{\Delta h}} \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{(i,j)\in\Gamma_p|\Delta_h\neq 0} \left(\Delta h_{ij} - \bar{\Delta h}\right)^2}$$
(2.181)

avec
$$\bar{\Delta h} = \frac{1}{m} \sum_{\Gamma_p} \Delta h_{ij}$$
 (2.182)

– etc.

2.3.3 Usure dans le cadre d'une modélisation multi-échelles du contact

Le code développé est à présent capable de simuler des usures en fretting à partir d'un trajet de chargement. L'objectif final est de pouvoir utiliser ce code dans un contexte industriel. Cela implique des calculs sur des géométries de contact et des trajets de chargement non élémentaires.

Le contact est résolu en s'attachant à la définition des géométries des corps proches du contact et en faisant l'hypothèse d'un comportement structural ayant une influence négligeable sur le contact. Ces hypothèses permettent d'utiliser en partie la théorie des massifs semi-infinis. Cependant le trajet de chargement dépend lui de la structure et de son comportement global. Il est donc nécessaire de savoir ce qui se passe au niveau structural pour pouvoir effectuer un calcul au niveau du contact.

Les codes éléments finis sont la méthode la plus répandue pour effectuer ce type de calcul. La modélisation multi-échelles du contact consistera donc à coupler l'utilisation d'un code éléments finis avec le code de contact.

La première étape consiste à effectuer le calcul de structure à partir d'un code éléments finis. Un trajet de chargement statique est appliqué à la structure. Le code EF résout le problème en un certain nombre d'incréments de chargement.

La deuxième étape de la modélisation multi-échelles est le passage de l'échelle de la structure à l'échelle du contact. Pour chaque incrément de chargement, il faut déterminer le torseur statique transmis au niveau de chaque contact. L'énergie dissipée dans les deux directions est également estimée. Cette étape nécessite de définir un repère local à chaque contact pour pouvoir effectuer correctement les sommations des pressions, cisaillements et glissements et obtenir les efforts, moments et énergies dissipées par frottement.

La dernière étape consiste à résoudre le contact pour déterminer ce qui se passe localement à l'échelle micro. Le code de contact est utilisé. Les géométries sont plus fines que le permettent la méthode des éléments finis. A chaque incrément, la résolution dépend de la situation de glissement dans laquelle le contact se trouve. Soit le contact est en situation de glissement partiel, alors c'est le torseur statique qui permet de résoudre le contact. Soit le contact est en situation de glissement total et c'est le torseur statique couplé à l'énergie dissipée qui permet de résoudre le contact.

Cette procédure appliquée (cf. FIG.2.20) à un trajet de chargement permet de déterminer une usure précise au niveau du contact après un cycle. Comme précédemment les usures sont prises en compte en modifiant les surfaces. La procédure d'usure cyclique est effectuée seulement au niveau du contact. Cela suppose que le comportement global de la structure ne se révèle que peu sensible à l'usure. Cependant il est possible d'ajouter une boucle supplémentaire entre le code de contact et le code éléments finis. Un nouveau passage à l'échelle de la structure est fait et cela après avoir intégré l'usure des surfaces dans le code éléments finis. Une nouvelle estimation des torseurs des efforts transmis dans chaque contact est faite. Cette boucle doit être faite après un grand nombre de cycles.



FIG. 2.20: Simulations d'usure multi-échelles

2. Modélisation numérique

Chapitre 3

Validation du modèle de contact

Le code de contact ayant été développé, une série de validations est faite sur des géométries et configurations élémentaires présentant des solutions analytiques. Sont ainsi testés, les résolutions des problèmes de contact normal et tangentiel en glissement partiel, le couplage entre problème normal et tangentiel et le calcul des contraintes en sous-couches. Ensuite une étude est menée sur le fretting des contacts circulaires pour différents couples de matériaux et le fretting des contacts elliptiques pour différents rapports d'ellipticité.

Sommaire

3.1	Solutions Analytiques et validation							
	3.1.1	Contact hertzien						
	3.1.2	Problème de Cattaneo-Mindlin						
	3.1.3	Sphère en torsion						
	3.1.4	Sphère chargée normalement avec frottement						
3.2	Extension des résultats							
	3.2.1	Contact poinçon-plan						
	3.2.2	Étude du contact circulaire et elliptique						

3.1 Solutions Analytiques et validation

3.1.1 Contact hertzien

Le contact hertzien définit le contact sous chargement normal P entre deux solides de surfaces non-conformes et de forme paraboloïdale. Ces surfaces sont définies à partir de leur rayons de courbure dans les directions x et y par

$$z_1 = \frac{1}{2R_{x1}}x^2 + \frac{1}{2R_{y1}}y^2 \tag{3.1a}$$

et

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2R_{x2}}x^2 + \frac{1}{2R_{y2}}y^2\right).$$
 (3.1b)

La séparation des corps s'écrit alors en fonction des rayons de courbure relatifs dans les deux directions

$$h(x,y) = z_1 - z_2 = \frac{1}{2R_x}x^2 + \frac{1}{2R_y}y^2.$$
(3.2)

Le module d'Young équivalent E^* est donnée par

$$E^* = \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2}.$$
(3.3)

La zone de contact est elliptique et la distribution de pression donnée par

$$p(x,y) = p_0 \left\{ 1 - (x/a)^2 - (y/b)^2 \right\}^{1/2},$$
(3.4)

où p_0 est la pression maximale ou « pression de Hertz » et est liée au chargement par

$$P = \frac{2}{3}p_0\pi ab. \tag{3.5}$$

Pour trouver les demi-axes a et b de l'ellipse de contact il faut résoudre les deux équations suivantes,

$$\left(\frac{R_x}{R_y}\right) = \frac{(a/b)^2 \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e)}{\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)}$$
(3.6)

et

$$(ab)^{3/2} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*}\right) \frac{4}{\pi e^2} (b/a)^{3/2} \left[\left\{(a/b)^2 \mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e)\right\} \left\{\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)\right\}\right]^{1/2}.$$
 (3.7)

Cette dernière expression est fonction du rayon de courbure équivalent $R_e = (R_y R_x)^{1/2}$. **E**(*e*) et **K**(*e*) sont des intégrales complètes elliptiques respectivement de première et de seconde espèce et d'argument $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$, où b < a. La résolution se fait à partir d'une procédure numérique de type Newton-Raphson ou un point fixe. Le rapprochement normal de corps rigide est lui obtenu avec l'expression

$$\delta_z = \frac{3P}{2\pi a b E^*} b \mathbf{K}(e). \tag{3.8}$$

Le cas particulier du contact sphérique est plus simple à mettre en œuvre. Dans ce cas $R_{x1} = R_{y1} = R_1$ et $R_{x2} = R_{y2} = R_2$. La zone de contact est circulaire de rayon *a*. La pression de contact est donnée par

$$p(x,y) = p_0 \left\{ 1 - (r/a)^2 \right\}^{1/2}, \qquad (3.9)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Les caractéristiques du contact sont

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*}\right)^{1/3},\tag{3.10}$$

$$\delta_z = \frac{a^2}{r} = \left(\frac{9P^2}{16RE^*}\right)^{1/3},\tag{3.11}$$

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3 R^2}\right)^{1/3}.$$
(3.12)

Trois contacts sont simulés et les résultats sont comparés aux équations analytiques. Les propriétés élastiques des deux solides sont E = 200 GPa et v=0,3. Trois cas sont effectués. Le premier est un contact sphère-plan avec une sphère de rayon 10 mm. Les deux autres sont des contacts elliptiques avec un rayon $R_{x2}=10$ mm et $R_{y2}=20$ mm et inversement. Le chargement normal est choisi à 400 N. L'erreur pour stopper le code de contact est fixée à $\varepsilon = \frac{\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} P_{ij} - P_{old}}{\sum_{(i,j)\in\Gamma_p} P_{ij}} = 5 \cdot 10^{-3}\%$. Les résultats analytiques sont donnés dans le tableau suivant, ainsi que l'erreur de la solution numérique. Les résultats sont symétriques pour le rapport R_x/R_y à 2 ou 0,5. Les erreurs sont faibles. Les erreurs les plus importantes concernent les dimensions de la zone de contact car relevées à partir des coordonnées des points de discrétisation du modèle.

R_{x1}/R_{y2}	a		p_0		δ _z		
1	0,3011	0,0996 %	2106,491	0,0131 %	9,066 10 ⁻³	0,0060 %	
2	0,4228	0,0945 %	1694,091	0,0022 %	$8,024 \ 10^{-3}$	4,2551 10 ⁻⁵ %	
0,5	0,2666	0,1125 %	1694,091	0,0022 %	8,024 10 ⁻³	$4,2551 \ 10^{-5} \ \%$	

De façon général, la distribution de pression est correctement obtenue comme l'atteste la figure FIG.3.1.

Une méthode est exposée par Hamilton et Goodman [HAM 63] pour déterminer le champs de contraintes en sous-couche d'un contact sphérique et en glissement. Les sphères en contact doivent alors avoir des propriétés matériaux identiques pour éviter tout

101



FIG. 3.1: Validation du contact hertzien

couplage entre le problème normal et tangentiel. Le glissement se fait dans la direction x. Les contraintes en surface sont donc

$$p(x,y) = p_0 \left\{ 1 - (r/a)^2 \right\}^{1/2}, \qquad (3.13a)$$

$$q_x(x,y) = \mu p_0 \left\{ 1 - (r/a)^2 \right\}^{1/2},$$
 (3.13b)

$$q_y(x,y) = 0.$$
 (3.13c)

La contribution du problème normal est d'abord traité.

Les composantes non-nulles des contraintes dans le corps 1 (axe z positif) sont détaillées par Hamilton et Goodman le long de l'axe z où

$$\sigma_{xx}(x=0, y=0, z) = \sigma_{yy}(x=0, y=0, z) =$$
(3.14a)
$$p_0 \left\{ (1+\nu) \left[(z/a) \arctan(a/z) - 1 \right] + \frac{1}{2}a^2/(a^2+z^2) \right\},$$

$$\sigma_{zz}(x=0, y=0, z) = -p_0 \left[a^2/(a^2+z^2) \right],$$
(3.14b)

ainsi que pour la surface à l'intérieur de la zone de contact, c'est-à-dire pour r < a,

$$\sigma_{xx}(x, y, z = 0) = p_0 \left[2\nu K_0 + (1 - 2\nu)(G_0 r^{-2} - 2x^2 r^{-4} G_0 + x^2 r^{-2} K_0) \right], \qquad (3.15a)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z = 0) = p_0 \left[2\nu K_0 + (1 - 2\nu)(G_0 r^{-2} - 2y^2 r^{-4} G_0 + y^2 r^{-2} K_0) \right], \quad (3.15b)$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z = 0) = p_0(1 - 2\nu)(xyr^{-2}K_0 - 2xyr^{-4}G_0), \qquad (3.15c)$$

et à l'extérieur de la zone de contact

$$\sigma_{xx}(x, y, z = 0) = p_0 \left[\frac{1}{3} a^2 (1 - 2\nu) (2x^2 r^{-4} - r^{-2}) \right], \qquad (3.16a)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z = 0) = p_0 \left[\frac{1}{3} a^2 (1 - 2\nu) (2y^2 r^{-4} - r^{-2}) \right], \qquad (3.16b)$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z = 0) = p_0 \left[\frac{1}{3} a^2 (1 - 2\nu) x y r^{-4} \right], \qquad (3.16c)$$

avec

$$G_0 = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} - \frac{1}{3} a^3 \right] \text{ et } K_0 = -\frac{1}{a} (a^2 - r^2)^{1/2}.$$
(3.17)

La contribution du problème tangentiel le long de l'axe z est donnée par

$$\sigma_{xz}(x=0, y=0, z) = \mu p_0 \left[\frac{3}{2} (z/a) \arctan(a/z) - 1 - \frac{1}{2} z^2 (z^2 + a^2)^{-1} \right].$$
(3.18)

Sur la surface à l'intérieur de la zone de contact,

$$\sigma_{yy}(x, y, z = 0) = -\mu p_0 \frac{3}{8} \frac{x}{a} \nu, \qquad (3.19)$$

et à l'extérieur de la zone de contact

$$\sigma_{xx}(x, y, z = 0) = -\mu p_0(xr^{-4}) \left[2(r^2 + vy^2)F_0 + v(3 - 4x^2r^{-2})H_0 \right], \qquad (3.20a)$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z = 0) = -\mu p_0(\nu x r^{-4}) \left[2x^2 F_0 + \nu (1 - 4y^2 r^{-2}) H_0 \right],$$
(3.20b)

$$\sigma_{xy}(x, y, z = 0) = -\mu p_0(yr^{-4}) \left[(r^2 - 2\nu x^2) F_0 + \nu (1 - 4x^2 r^{-2}) H_0 \right], \qquad (3.20c)$$

avec

$$F_0 = -\frac{1}{2}(r^2 - a^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}\arctan\left[a(r^2 - a^2)^{-1/2}\right]$$
et (3.21a)

$$H_0 = \frac{1}{2}(r^2 - a^2)^{3/2} - \frac{1}{4}\frac{r^4}{a}\arctan\left[a(r^2 - a^2)^{-1/2}\right] - \frac{1}{4}r^2(r^2 - a^2)^{1/2}.$$
 (3.21b)

Les contraintes obtenues à partir du code sont validées dans le cas précédent de la sphère. Il est possible de vérifier les contraintes sur le plan z = 0 le long des axes x = 0 et y = 0. Les contraintes peuvent aussi être validées en profondeur, le long de l'axe z en x = y = 0. On donne ces contraintes initialement dans le cas du contact hertzien pur, puis avec ajout des cisaillements en x du contact glissant avec un coefficient de frottement de 0,1, 0,3, 0,4 et 0,9. On observe, notamment sur les coupes en y, l'évolution des contraintes équivalentes de von Mises avec ce frottement et le maximum qui initialement en souscouche passe en surface à partir d'un coefficient de 0,3.



FIG. 3.2: Contraintes du contact hertzien en surface pour y = 0. Comparaison entre la solution analytique (trait continu) et numérique (croix) dans le cas du contact sphère-plan



FIG. 3.3: Contraintes du contact hertzien en surface pour z = 0. Comparaison entre la solution analytique (trait continu) et numérique (croix) dans le cas du contact sphère-plan



FIG. 3.4: Contraintes du contact hertzien en profondeur pour x = y = 0. Comparaison entre la solution analytique (trait continu) et numérique (croix) dans le cas du contact sphère-plan



FIG. 3.5: Contraintes de von Mises du contact hertzien en profondeur pour y = 0

3.1.2 Problème de Cattaneo-Mindlin

Définissons le problème de Cattaneo-Mindlin comme étant le cas de deux corps élastiques soumis à un chargement normal P et auxquels on vient appliquer un effort tangentiel Q_x tel que $Q_x < \mu P$. D'après la loi de Coulomb ces deux corps sont en équilibre. Cattaneo [CAT 38] puis Mindlin [MIN 49] démontrèrent pour des géométries hertziennes que la solution du problème tangentiel adhérant présente une singularité sur les bords du contact qui conduit à des cisaillements infinis. Nous nous limiterons dans la suite à donner les solutions pour le contact circulaire. Le couplage entre le problème normal et tangentiel est nul. Dans le cas du contact adhérant, la distribution axisymétrique de cisaillement pour un chargement tangentiel Q_x est fonction des paramètres du contact de Hertz

$$q_x(r) = q_0 \frac{1}{\sqrt{1 - r^2/a^2}},$$
(3.22)

avec $q_0 = Q_x/2\pi a^2$. Ce cisaillement n'est physiquement pas admissible lorsque *r* tend vers *a*, d'une part la théorie élastique n'est plus applicable, et d'autre part la loi de Coulomb n'est pas respectée localement. Ce dernier point indique alors que le problème tangentiel ne peut être résolu sans prendre en compte l'apparition d'une zone de glissement dans le contact. Le contact circulaire de rayon *a* sous un chargement Q_x voit donc apparaître une couronne de glissement au bord du contact bornée par c < r < a. Le cisaillement q_x peut être écrit comme la superposition de deux termes, $q_x = q'_x + q''_x$. Le premier est le cas limite où le contact glisse entièrement. Les cisaillements sont alors,

$$q'_{x} = \mu p_0 \left(1 - r^2/a^2\right)^{1/2} \qquad r \le a. \tag{3.23}$$

Pour équilibrer le chargement et vérifier les conditions d'adhérence le second terme s'écrit

$$q_x'' = -\mu \frac{c}{a} p_0 \left(1 - r^2/c^2\right)^{1/2} \qquad r \le c, \qquad (3.24a)$$

$$q''_x = 0$$
 $r > c.$ (3.24b)

Le rayon de la zone d'adhérence est obtenu à partir de

$$\frac{c}{a} = (1 - Q/\mu P)^{1/3}.$$
(3.25)

Le déplacement rigide tangentiel est

$$\delta_x = \frac{3\mu P}{16a} \left(\frac{2 - \nu_1}{G_1} + \frac{2 - \nu_2}{G_2} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{Q_x}{\mu P} \right)^{2/3} \right\}.$$
 (3.26)

Une expression est également fournie pour les glissements. La composante en y existe du fait du couplage entre les contributions tangentielles mais est habituellement négligée. Les glissements deviennent

$$s_{x} \approx \frac{3\mu P}{16Ga} (2-\nu) \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{c}{r}\right)\right) \left(1 - 2\frac{c^{2}}{r^{2}}\right) + \frac{2}{\pi} \frac{c}{r} \left(1 - \frac{c^{2}}{r^{2}}\right)^{1/2} \right\}, \quad (3.27a)$$

$$s_{y} \approx 0. \qquad (3.27b)$$

À partir des relations précédentes Johnson construit dans son ouvrage [JOH 85] les solutions d'un contact circulaire initialement chargé par une force normale constante *P* et soumis à un chargement tangentiel Q_x oscillant entre les valeurs $\pm Q_*$. Il s'agit donc de la représentation d'un test de fretting de mode I et en glissement partiel.



FIG. 3.6: Le problème de contact avec un effort tangentiel oscillant [JOH 85]

La boucle de fretting est donnée à la FIG.3.6. Entre O et A, le déplacement de corps rigide δ_x et la distribution de cisaillement sont donnés par les équations précédentes. Pendant le déchargement, c'est-à-dire entre A et C, le cisaillement devient

$$q_x = -\frac{3\mu P_0}{2\pi a^3} (a^2 - r^2)^{1/2}, \qquad \qquad c' \le r \le a, \quad (3.28a)$$

$$q_x = -\frac{3\mu P_0}{2\pi a^3} \left\{ (a^2 - r^2)^{1/2} - 2(c'^2 - r^2)^{1/2} \right\}, \qquad c_* \le r \le c', \quad (3.28b)$$

$$q_x = -\frac{3\mu P_0}{2\pi a^3} \left\{ (a^2 - r^2)^{1/2} - 2(c'^2 - r^2)^{1/2} + (c^2 - r^2)^{1/2} \right\}, \qquad r \le c_*.$$
(3.28c)

La zone de glissement est désormais définie par

$$c'^3/a^3 = \frac{1}{2}(1+c_*^3/a^3),$$
 (3.29)

où c_* est la valeur de c au point A. Quant au déplacement de corps rigide il s'écrit

$$\delta_{x} = \frac{3\mu P_{0}}{16a} \left(\frac{2 - \nu_{1}}{G_{1}} + \frac{2 - \nu_{2}}{G_{2}} \right) \left\{ 2 \left(1 - \frac{Q^{*} - Q}{2\mu P_{0}} \right)^{2/3} - \left(1 - \frac{Q^{*}}{\mu P_{0}} \right)^{2/3} - 1 \right\}.$$
 (3.30)

Une boucle de Fretting va être reproduite pour comparer les solutions obtenues par le calcul aux solutions analytiques. Le trajet de chargement est défini à la figure FIG.3.7(a).

Les données du contact circulaire précédent sont réutilisées. Le chargement normal *P* est de 400 N. Un coefficient de frottement μ =0,1 est choisi. L'effort Q_x oscille entre $\pm 0,9\mu \cdot P$ pour ne pas dépasser la limite de frottement.



FIG. 3.7: Simulation du problème de Cattaneo-Mindlin

Une simulation du contact adhérant est préalablement effectuée avec un coefficient de frottement infini. Les solutions en cisaillement sont comparées et validées sur la figure FIG.3.8 pour le chargement correspondant au point A, cf. FIG.3.7(a). Les pics de cisaillements sont retrouvés par le calcul. Un léger décalage est visible à cause de la taille du contact qui diffère légèrement. Pour un rayon supérieur à 0,85 fois le rayon de contact, la loi de Coulomb n'est pas respectée pour un frottement de 0,1.



FIG. 3.8: Contraintes en surface du contact tangentiel adhérant

Les résultats de la simulation du contact en glissement partiel sont analysés en terme de contraintes à la figure FIG.3.9. Les résultats analytiques et numériques sont comparés au point de chargement maximal A, puis au point de déchargement B correspondant à un effort tangentiel nul. À cette instant il existe toujours des contraintes de cisaillement à l'interface qui ne s'annulent pas mais s'équilibrent. Les solutions obtenues par le calcul aux points intermédiaires A' et B', correspondent à un même chargement mais pour les phases de chargement croissant et décroissant respectivement. Pendant le chargement le cisaillement est limité aux bords par μp , le glissement se fait dans cette zone et dans le



FIG. 3.9: Contraintes en surface du contact tangentiel en glissement partiel

sens inverse du cisaillement. Pendant le déchargement le cisaillement est limité par $-\mu p$ et caractérise un glissement qui a changé de sens.

Les solutions en terme de glissement sont données à la figure FIG.3.10. Cette distribution de glissement n'est pas axisymétrique. Les résultats obtenus numériquement et analytiquement sont identiques. Il faut souligner qu'une des hypothèses faites par Mindlin dans la résolution du problème est la non-considération des déplacements élastiques engendrés dans la direction y. Ces déplacements sont négligeables. Les résultats des simulations numériques obtenus en tenant compte ou non du couplage entre les deux directions tangentielles sont identiques, ce qui conforte cette dernière hypothèse. On peut néanmoins observer l'existence d'un angle faible (cf. FIG.3.11) entre les glissements obtenus avec la simulation considérant le couplage et la direction x. Représentés graphiquement les vecteurs cisaillements sont presque colinéaires à cette direction x et sont bien opposés et colinéaires aux glissements, cf. FIG.3.12.



FIG. 3.10: Glissements du contact tangentiel en glissement partiel



FIG. 3.11: Angle entre les directions de glissement et l'axe *x* pour la simulation du contact tangentiel en glissement partiel



FIG. 3.12: Représentation vectorielle des glissements et cisaillements pour le problème de Mindlin, solution numérique avec couplage tangentiel

3.1.3 Sphère en torsion

Le problème de la sphère en torsion a également été traité par Mindlin [MIN 49]. Ce cas s'apparente au fretting de mode III. Un contact circulaire sous chargement P est soumis à un moment de torsion M_z . Le moment de torsion ne doit pas dépasser une certaine valeur pour rester en condition de glissement partiel. Les solutions sont reprises par Johnson [JOH 85] et détaillées par Dintwa [DIN 05] pour deux matériaux identiques. Dans le repère cylindrique (r, θ, z) , le cisaillement s'exprime

$$q_{\theta} = \frac{3\mu P}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2}, \qquad c \le r \le a, \quad (3.31a)$$

$$q_{\theta} = \frac{3\mu P}{(\pi a)^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} + k^2 \mathbf{D}(k) \mathbf{F}(k', \phi) - \mathbf{K}(k) \mathbf{E}(k', \phi) \right], \qquad r \le c, \quad (3.31b)$$

où

$$k = \sqrt{1 - (c/a)^2} = \sqrt{1 - k'^2},$$
 (3.32a)

$$k' = c/a, \tag{3.32b}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{k'^2 - (r/a)^2}{1 - (r/a)^2}}.$$
(3.32c)

(3.32d)

Cette solution fait appel aux intégrales elliptiques de première et seconde espèce de module k' et d'amplitude φ , $\mathbf{F}(k', \varphi)$ et $\mathbf{E}(k', \varphi)$ respectivement. $\mathbf{D}(k)$ est l'intégrale elliptique complète de module k et donnée par $\mathbf{D}(k) = (\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k))/k^2$, où \mathbf{K} et \mathbf{E} sont les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce.

L'angle de torsion est lié au rayon c par

$$\phi_z = \frac{3\mu P}{4\pi G a^2} k^2 \mathbf{D}(k). \tag{3.33}$$

Le moment de torsion est donné par

$$M_{z} = \frac{\mu P a}{4\pi} \left\{ \frac{3\pi^{2}}{4} + k' k^{2} \left[6\mathbf{K}(k) + (4k'^{2} - 3)\mathbf{D} \right] - 3k\mathbf{K}(k) \arcsin(k') - 3k^{2} \left[\mathbf{K}(k) \int_{0}^{\pi/2} \frac{\arcsin(k'\sin\alpha) \, d\alpha}{(1 - k'^{2}\sin^{2}\alpha)^{3/2}} - \mathbf{D}(k) \int_{0}^{\pi/2} \frac{\arcsin(k'\sin\alpha) \, d\alpha}{(1 - k'^{2}\sin^{2}\alpha)^{1/2}} \right] \right\}.$$
 (3.34)

Le moment de torsion limite pour atteindre le glissement total de la surface de contact est donné par

$$M_z(max) = \frac{3\pi}{16}\mu Pa. \tag{3.35}$$

Le contact circulaire précédent est simulé avec un moment de torsion $M_z=5$ N·mm. L'angle de rotation rigide ϕ_z obtenu par le calcul numérique est de 0,0832 degré. L'erreur par rapport à la solution analytique de 0,0831 degré est de 0,1%. La distribution de cisaillement trouvée par le calcul est validée par rapport à la solution analytique à la figure FIG.3.13. La simulation doit être effectuée en tenant compte du couplage entre les deux directions tangentielles. Autrement une légère composante radiale de cisaillement peut apparaître, cf. FIG.3.14. Les cisaillements et glissements obtenus numériquement sont bien circonférentiels et de signe opposé, cf. FIG.3.15.



FIG. 3.13: Contraintes en surface du contact tangentiel sous l'effet d'un moment de torsion



FIG. 3.14: Erreur sur la direction du cisaillement pour la simulation de contact en torsion



FIG. 3.15: Représentation vectorielle des glissements et cisaillements pour la sphère en rotation, solution numérique avec couplage tangentiel

3.1.4 Sphère chargée normalement avec frottement

La solution du contact de Hertz est donnée en considérant un frottement nul à l'interface. Or lorsque ce frottement n'est pas nul et si les propriétés élastiques des deux corps sont différentes, un couplage entre le problème normal et tangentiel existe ; un cisaillement tangentiel radial apparaît. Dans le cas d'un contact totalement adhérant, l'équation du cisaillement a été détaillée par Goodman [GOO 62]. Cette solution ne vérifie pas la loi de Coulomb localement à la périphérie du contact. Une zone de glissement doit être prise en compte. Le glissement est dirigé radialement, ce cas s'apparente donc au fretting de mode II. La zone de glissement est un disque de rayon supérieur *a* et de rayon inférieur *c*. D'après Spence [SPE 75] *c* vérifie

$$\frac{a}{2c}\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = \frac{\beta}{\mu}\mathbf{K}'(c/a), \qquad (3.36)$$

où $\mathbf{K}'(c/a) = \mathbf{K}(\sqrt{1 - (c/a)^2})$. Cette expression est fonction de la constante,

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - 2\nu_1)/G_1 - (1 - 2\nu_2)/G_2}{(1 - \nu_1)/G_1 + (1 - \nu_2)/G_2} \right].$$
(3.37)

Ce paramètre proposé par Dundurs [DUN 72] permet de caractériser la dissimilarité des matériaux. Il prend les valeurs extrêmes $\pm 0, 5$. Ces valeurs sont atteintes lorsqu'un des corps est rigide et l'autre a un coefficient de poisson nul. Ce paramètre est nul pour des matériaux élastiques similaires mais également pour deux matériaux incompressibles (v = 0, 5).

Une série de simulations est effectuée avec le contact circulaire précédent. Le coefficient de Poisson de chaque corps est modifié pour obtenir un ß non nul tout en gardant le module d'Young équivalent constant. On choisit $v_1 = 0,06$ et $v_2 = 0,42$, ce qui correspond à un β de 0,1938. Cinq simulations sont effectuées pour des coefficients de frottement de 0,05, 0,075, 0,1, 0,15 et 0,2. Le chargement est appliqué incrémentalement. Le chargement ne peut être appliqué directement. Le frottement est un phénomène nonlinéaire qui dépend du trajet de chargement. De cette manière il est possible de valider la loi émise par Spence à l'équation (3.36). Le rapport entre la zone d'adhérence et le rayon de contact est constant pour un même rapport μ/β . On doit alors observer un rapport constant au cours du chargement. Mais ce rapport est établi après au moins deux incréments puisque la solution dépend de l'historique. La figure FIG.3.16(a) représente l'évolution de ce ratio pour chaque coefficient de frottement en fonction du chargement. Plus le coefficient de frottement est élevé plus la zone d'adhérence est grande. C'est ce constat qu'exprime la loi de Spence. Un vérification entre la courbe théorique et les valeurs obtenues par le calcul est donnée à la figure FIG.3.16(b). Il faut cependant nuancer cette comparaison. Spence établit cette loi en considérant l'effet du chargement normal sur le problème tangentiel, mais néglige l'effet du chargement tangentiel sur le problème normal. Pour un μ supérieur à 0,075, les résultats de la simulations sont validés. Par contre pour des valeurs inférieures, un écart assez important est constaté. On peut expliquer en partie ce résultat à partir des incertitudes sur le calcul. D'une part le coefficient de frottement étant faible, les cisaillements sont faibles. D'autre part plus la taille de la zone d'adhérence est réduite plus une erreur sur l'estimation du rayon peut être faite. Enfin ce résultat souligne néanmoins les limites du code pour des zones d'adhérence très faibles.



(a) En fonction du chargement

(b) Comparaison avec la courbe théorique donnée par Spence [SPE 75]

FIG. 3.16: Ratio c/a des simulations de contact normal avec frottement



(a) Pour les différents coefficients de frottement (b) 1 ou 10 incréments de chargement pour μ =0,1

FIG. 3.17: Pressions et cisaillements sur la surface de contact

La figure FIG.3.17(a) reprend les pressions de contact (en gris) et les cisaillements obtenus au dernier incrément pour chaque simulation. La forme arrondie des cisaillements ne peut être obtenue qu'à partir d'un chargement incrémental. La solution est bien radiale et anti-symétrique, cf. FIG.3.20. La solution obtenue en un seul incrément est comparée pour le cas μ =0,1 à la figure FIG.3.17(b). On note que pour le coefficient de frottement le plus important, la pression est bruitée. Ce bruit résulte du pas d'incrémentation. Ce dernier est choisi pour charger le contact en 10 incréments pour chaque simulation. Or plus le coefficient de frottement est élevé, plus la zone d'adhérence est grande. L'extension en valeur absolue de la zone d'adhérence entre chaque incrément de chargement est plus importante. La solution étant déterminée à partir du pas précédent, il s'en suit une erreur plus importante lorsque la taille de la zone d'adhérence est grandement augmentée. Ce défaut est illustré à la figure FIG.3.19, où sont représentés les pressions et cisaillements au cours du chargement pour un frottement μ de 0,01, 0,1 et 0,25. On distingue clairement le premier incrément ou le rapport c/a est inférieur au suivant et donc au résultat donné par la

Loi de Spence. On note que le rapport c/a peut être observé par l'angle entre l'axe des x et la droite qui passe par 0 et le point délimitant la zone d'adhérence et de glissement. Cette angle n'est pas nettement constant pour μ =0,01, ce qui souligne le manque d'efficacité du code pour des zones d'adhérence très faibles. Enfin on voit clairement que pour μ =0,25, l'angle est très faible, les zones de glissement et d'adhérence ne se superpose pas entre les incréments, d'où l'apparition du bruit sur la solution en cisaillement.

On peut observer à la figure FIG.3.17(a) une élévation de la pression maximale qui diffère donc de celle de Hertz. Cette élévation augmente avec le coefficient de frottement, puis se stabilise vers une valeur constante, cf. FIG.3.18.



FIG. 3.18: Évolution de la pression maximale en fonction du coefficient de frottement



FIG. 3.19: Pressions et cisaillements du contact normal avec frottement à chaque incrément de chargement



FIG. 3.20: Représentation vectorielle des glissements et cisaillements pour la sphère en contact normal avec frottement

3.2 Extension des résultats

3.2.1 Contact poinçon-plan

Les simulations précédentes ont permis de valider différents aspects du code.

- le problème normal piloté à partir d'un effort ;
- le problème tangentiel piloté à partir d'un effort ;
- le problème tangentiel avec un moment de torsion ;
- le couplage entre le problème normal et tangentiel ;
- le calcul des contraintes en sous-couches.

On peut facilement obtenir des résultats équivalents pour le problème normal et pour le problème tangentiel piloté à partir d'un déplacement. Il reste à démontrer la résolution du problème normal avec un moment de flexion. Ce point ne sera pas validé avec des solutions analytiques mais une étude sur le contact poinçon-plan sera faite. On considère un poinçon axisymétrique (cf. FIG.3.21) constitué d'une zone centrale plane de rayon R_a , et d'un rayon de courbure R_c aux bords. La géométrie du poinçon est décrite par

$$z_2 = f_2(r = \sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le R_a, \\ -\frac{1}{2R_c}(r - R_a)^2, & R_a \le r. \end{cases}$$
(3.38)



FIG. 3.21: Géométrie du contact poinçon-plan

Une solution analytique est donnée par Ciavarella pour cette géométrie sous l'effet d'un effort normal et tangentiel en glissement partiel [CIA 99]. Dans un premier temps, les simulations du code peuvent être validées pour ce problème en comparant l'extension du rayon a de la zone de contact pour un chargement P croissant avec la formule analytique suivante,

$$P = \frac{E^* R_a^3}{3R_c} \frac{3\sin\phi_0 + \sin^3\phi_0 - 3\phi_0\cos\phi_0}{\cos^3\phi_0},$$
 (3.39)

où $\cos \phi_0 = \frac{R_a}{a}$ et $\frac{1}{E^*} = \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2}$. Les propriétés des deux matériaux sont $E=200\ 000\ \text{MPa}$ et v=0,3. La géométrie est définie avec R_a =0,1 mm et R_c =0,2 mm. Le contact normal est résolu pour différentes valeurs du chargement normal : P =40, 170, 450, 1050, 2450, 6100, 17600 N. Les distributions de pression et cisaillement adimensionnées par la valeur moyenne $P/\pi a^2$ sont tracées sur le figure FIG.3.22(b). On retrouve bien une solution axisymétrique et cette distribution de pression est similaire à celle donnée par Ciavarella [CIA 99]. Le contact tangentiel est également résolu pour un effort $Q_x = 0.9\mu \cdot P$, avec $\mu = 0.9$. Le rayon de la zone de contact est défini par a. Le couple rayon de contact a - chargement normal P est validé avec la solution analytique précédente. Le tracé de ce résultat est donné à la figure FIG.3.22(a).



FIG. 3.22: Effets du chargement normal et tangentiel pour le contact poinçon-plan (μ =0,9)

À présent la simulation P=170 N est prise pour référence. Le chargement normal est appliqué au point x = y = 0. Le moment de flexion est nul. Le code est utilisé en imposant cette fois-ci la position du centre de pression, c'est-à-dire le point d'application du chargement normal ou le moment de flexion autour du point O. Une série de simulations est faite pour un centre de pression $P(x_p, y_p)$, avec $y_p = 0$ et $x_p = 0$, $0,05R_a$, $0,1R_a$, $0,2R_a$, $0,3R_a$, $0,4R_a$, $0,5R_a$ et $0,6R_a$. La distribution de pression n'est alors plus axisymétrique. Celle-ci est donnée le long de l'axe x à la figure FIG.3.23. Les valeurs sont adimmensionnées avec la pression moyenne et la largeur de contact a de la simulation de référence ($x_c = 0$). On peut observer un décalage vers les x positifs du champ de pression ainsi qu'une augmentation sensible de la pression maximale. Cette augmentation de pression est donnée à la figure FIG.3.24. Ne pas prendre en compte la position du centre de pression pour ce type de géométrie peut donc mener à obtenir des résultats éloignés de la réalité. Le centre de pression a également un impact important sur les contraintes obtenues en sous-couches. Les contraintes de von Mises sont calculées pour le contact poinçon-plan sans frottement, cf. FIG.3.25.



FIG. 3.23: Pression de contact du contact poinçon-plan pour différentes positions du centre de pression



FIG. 3.24: Variations de la pression maximale et de la contrainte de von Mises maximale avec la position du centre de pression pour le contact poinçon-plan

121



FIG. 3.25: Effet du centre de pression sur les contraintes en sous-couche du contact poinçon-plan

3.2.2 Étude du contact circulaire et elliptique

Dans cette partie nous allons mener une étude étendue des contacts elliptiques et circulaires sur des situations qui ne présentent pas de solution analytique. Dans un premier temps il s'agira d'étudier le problème d'indentation normale avec frottement sur un contact elliptique dont les deux corps sont élastiquement différents. Ensuite une étude du problème de Cattaneo-Mindlin est effectuée dans le cadre du contact elliptique notamment à travers l'observation du champ de contraintes en sous-couche. Ensuite le problème de Cattaneo-Mindlin sera abordé dans le cadre du contact circulaire mais pour des couples de matériaux aux propriétés élastiques différentes.

3.2.2.1 Indentation normale avec frottement d'un contact elliptique

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_{1}/E_{2}	β	R_{x2} (mm)	R_{y2} (mm)	<i>P</i> (N)
900	112,5	8	0,2222	10	3,3662	134,89
900	112,5	8	0,2222	10	1,13315	35,119

 TAB. 3.1: Simulations effectuées pour l'étude du problème d'indentation normale avec frottement dans le cas du contact elliptique

Une série de simulations est effectuée à partir de deux géométries ellipsoïde-plan définies au tableau 3.1. Le rayon en x est gardé constant tandis que celui autour de y est modifié autour de deux valeurs. Les propriétés élastiques des deux matériaux sont différentes, pour cela on modifie seulement leur module d'Young. Le coefficient de Poisson est gardé à v = 0,3. Le module d'Young équivalent est égal à celui du couple $E_1 = E_2 =$ 200 000 MPa, $v_1 = v_2 = 0,3$. Le chargement normal est choisi pour obtenir une pression de Hertz égale à $p_0 = 2106,491$ MPa, c'est-à-dire égale à celle du chargement de 400 N sur le contact sphère-plan de rayon 10 mm et de même module d'Young équivalent. La constante de Dundurs qui caractérise le couplage entre le problème normal et tangentiel est $\beta = 0,2222$. Étant donné cette valeur, on choisit d'effectuer ces simulations avec un coefficient de frottement μ à 0,05, 0,1, 0,15, 0,2 et 0,25.

Comme pour le contact circulaire, une zone de glissement apparaît au bord de la zone de contact. Cette zone de glissement est elliptique. Les dimensions de la zone d'adhérence sont relevées dans les directions x et y. On les notera respectivement c_a et c_b . Les dimensions de l'ellipse de contact sont a et b. La zone de glissement s'apparente plutôt à un anneau de largeur constante. Pour un même rapport μ/β , on observe donc un rapport c_b/b inférieur à c_a/a , où b est la plus grande demi-largeur de l'ellipse. Pour un contact dont l'ellipticité augmente, le rapport c_b/b tend à diminuer tandis que c_a/a augmente, cf. FIG.3.26. Une courbe comme celle de Spence donnée pour le contact circulaire peut être tracée. Les résultats du contact elliptique encadrent donc cette dernière, cf. FIG.3.26. On peut ajouter le cas limite du contact linéique qui borne bien les résultats du contact

elliptique. Cette formule donnée également par Spence [SPE 75] est

$$\frac{\mathbf{K}(c/a)}{\mathbf{K}'(c/a)} = \frac{\beta}{\mu},\tag{3.40}$$

où $\mathbf{K}'(c/a) = \mathbf{K}(\sqrt{1-c^2/a^2})$, et $\mathbf{K}(c/a)$ est une intégrale complète elliptique de seconde espèce.



FIG. 3.26: Loi de Spence pour un contact elliptique

3.2.2.2 Problème de Cattaneo-Mindlin pour un contact elliptique

La simulation de référence est celle présentée à la section 3.1.2 page 106. Le contact est circulaire. Le rayon de courbure de la sphère est $R_x = R_y = 10$ mm. Les propriétés des deux corps sont $E_1 = E_2 = 200\ 000$ MPa et $v_1 = v_2 = 0,3$. Le chargement normal Pest de 400 N. On applique de la même façon un chargement tangentiel Q_x oscillant entre $\pm 0,9\mu \cdot P$. Des coefficients de frottement μ de 0,1, 0,3, 0,4 et 0,9 sont choisis dans un premier temps. Pour tester l'insensibilité du code au coefficient de frottement, on peut vérifier que les boucles de fretting obtenues sont bien indépendantes du frottement choisi. Pour rappel, la phase ascendante à partir du chargement nul de la boucle de fretting est donnée à l'équation (3.26) et peut se réécrire

$$\frac{\delta_x}{\mu P} = \frac{3}{16a} \left(\frac{2 - \nu_1}{G_1} + \frac{2 - \nu_2}{G_2} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{Q_x}{\mu P} \right)^{2/3} \right\}.$$
 (3.41)

Les boucles de fretting sont redimensionnées pour ne pas intégrer ni le coefficient de frottement, ni le chargement normal à la figure FIG.3.27. Pour les quatre coefficients de frottement choisis, ces boucles de fretting se superposent parfaitement. Une observation des contraintes va être faite dans l'étude du contact elliptique de cette section et l'étude du contact circulaire de la section suivante. Pour ne pas multiplier les résultats, deux coefficients de frottement sont choisis. C'est à partir de l'observation des contraintes en sous-couche dans le plan Oxz que l'on va faire le choix des deux coefficients à conserver. Les contraintes en sous-couche sont donc représentées à l'annexe A page 189 à la figure FIG.A.1 et la figure FIG.A.2 respectivement pour l'incrément maximum de chargement A (Q_x positif) et pour l'incrément B où Q_x s'annule. Comme pour le problème de contact hertzien glissant, la contrainte maximale est en sous-couche pour un coefficient de frottement inférieur ou égal à 0,3 et atteint la surface pour un frottement supérieur à 0,3. La suite de l'étude sera donc menée avec un coefficient de frottement μ de 0,3 et de 0,9.

L'intérêt du mécanicien dans l'étude des contraintes est de déterminer et quantifier le risque de formation de fissures. Cet endommagement est prépondérant pour le fretting dans le cas du glissement partiel. Un maximum de contrainte en surface est plus néfaste. Les risques de fissuration sont donc plus grand pour un frottement de 0,9 que de 0,3. Un premier point à observer est donc la position du maximum des contraintes. On choisira donc de tracer l'historique de la position du maximum de contrainte ainsi que la valeur de cette contrainte maximale en fonction de la profondeur au cours de la boucle de fretting. Tous les points du chargement son représentés, le premier point où le contact est seulement chargé normalement, les points suivants qui correspondent au premier chargement de 0 vers $+0.9\mu \cdot P$, et les points du cycle de fretting proprement dit. Pour étudier et quantifier les risques de fissuration, il faut choisir un critère. Le critère de Dang Van est habituellement utilisé pour la fatigue de contact en comportement élastique à grand nombre de cycles [DAN 02, FOU 96a]. Il s'agit d'un critère multi-axial où le cisaillement de Tresca ($\tau = \frac{1}{2} \sup_{i \neq i} (|\sigma_i - \sigma_i|)$ et la pression hydrostatique ($p_h = \frac{1}{2} \sum (\sigma_{ii})$) interviennent. Si pendant le trajet de chargement l'influence combinée de ces deux variables présentent un maximum supérieur à une valeur limite alors il y a un risque d'ap-
125

parition de fissures ($\tau(t) + \alpha p_h(t) > \beta$). Ce risque est quantifié au travers du paramètre d, cf. FIG.3.28. De façon équivalente, il s'agit de tracer l'évolution de τ en fonction de p_h et de vérifier que tous les points restent sous une droite définissant le critère. Ce critère est à appliquer à tous les points du solide. Dans les exemples qui vont suivre, nous nous intéresserons uniquement au point le plus chargé au sens de la contrainte équivalente de von Mises. Ce point est observé à chaque inversion du chargement tangentiel, c'est-à-dire lorsque $Q_x = \pm 0,9\mu P$. Les résultats seront donc donnés pour le point le plus chargé au point A du trajet de chargement. Une première série de résultats est donnée pour le contact circulaire et les deux coefficients de frottement $\mu = 0,3$ et 0,9, cf. FIG.3.29. La contrainte maximale (cf. FIG.3.29(a)) reste en profondeur proche de celle du contact hertzien classique (0,48a), pour un coefficient de 0,3 alors que pour un coefficient de 0,9, elle monte en surface et oscille de part et d'autre de la zone de contact tout en restant dans la zone de glissement, du coté des x positifs pour un effort Q_x négatif et inversement. La valeur de la contrainte maximale (cf. FIG.3.29(b)) reste proche de celle du contact hertzien classique $(\sigma_{vonMises MAX} = 0, 61 p_0, \text{ pour } v = 0, 3)$ pour un frottement de 0,3 alors que pour un frottement de 0,9 elle va fortement augmenter pour atteindre une valeur maximale de $1,457p_0$. Le trajet du cisaillement de Tresca en fonction de la pression hydrostatique est donné à la figure FIG.3.29(c). Le trajet pour $\mu = 0.9$ à une amplitude beaucoup plus importante que le trajet pour $\mu = 0,3$ qui est quasiment stationnaire.



FIG. 3.27: Boucles de fretting obtenues pour le contact circulaire à partir de plusieurs coefficients de frottement



FIG. 3.28: Le critère de fatigue multi-axial de Dang Van [FOU 96a]



(a) Coordonnées de la contrainte équivalente de von (b) Profondeur du point de la contrainte équivalente Mises maximale de von Mises Maximale



(c) Trajet du point le plus chargé (au sens de $\sigma_{vonMises}$) en terme de pression hydrostatique et de contrainte de cisaillement de Tresca

FIG. 3.29: Étude des contraintes dans le plan *Oxz* pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire au cours du chargement pour plusieurs coefficients de frottement

126

À présent le problème de Mindlin est réalisé sur des géométries ellipsoïde-plan. Les données géométriques sont répertoriées dans le tableau TAB.3.2. Le chargement et les rayons de courbure sont choisis de façon à conserver une pression de Hertz $p_0 = 2$ 106,491 MPa et des rapports d'ellipticité a/b d'environ 30, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 et 1/30.

R_{x2} (mm)	$R_{y2} (\mathrm{mm})$	<i>P</i> (N)	a/b	b/a
10	10	400	1	1
10	29,707	1190,4	0,4857	2,0589
10	88,2498	2735,1	0,2405	4,1580
10	262,1624	5670,5	0,1223	8,1766
10	778,8023	11104	0,0637	15,699
10	2313,5775	21067	0,0338	29,587
10	3,3662	134,89	2,0587	0,4857
10	1,13315	35,119	4,1574	0,2405
10	0,38144	8,2505	8,1790	0,1222
10	0,12840	1,8308	15,701	0,0637
10	0,04322	0,39358	29,500	0,0339

 TAB. 3.2: Simulations effectuées pour l'étude du problème de Cattaneo-Mindlin dans le cas du contact elliptique

La boucle de fretting est tracée pour ces différentes simulations, cf. FIG.3.30. La demilargeur de contact intervient dans la boucle de fretting comme l'indique l'équation (3.41) dans le cas du contact circulaire. Pour ne pas tenir compte de la taille du contact, il faut donc redimensionner la boucle en multipliant le terme de déplacement δ_x par *a*. On peut alors souligner l'influence de l'ellipticité du contact sur la raideur tangentielle du contact. Plus le contact est allongé (tend vers un contact linéaire) dans la direction transversale au mouvement, plus le contact est raide.

Les distributions en surface de pression et de cisaillement sont données dans l'annexe B sur la figure FIG.B.1 à la page 192. La solution pour un contact elliptique se révèle être la même que pour le contact circulaire. Les contraintes en sous-couches sont données aux figures suivantes dans la même annexe, pour les deux frottements et pour les points de chargement A et B. Pour analyser les résultats, un tracé de la position du point le plus chargé selon la contrainte équivalente de von Mises est donné aux figures FIG.3.31(a) et FIG.3.31(b) ainsi que sa valeur à la FIG.3.31(c) pour les différents rapports d'ellipticité. Pour un coefficient de frottement de 0,3, la contrainte maximale s'enfonce légèrement pour un rapport d'ellipticité s'éloignant de 1. Cette profondeur tend vers une valeur constante excepté pour la contrainte au point de chargement A où pour un rapport b/a augmentant après un premier éloignement de la contrainte par rapport à la surface, cette dernière a ensuite tendance à se rapprocher. La position en *x* est proche de 0, donc centrée par rapport au contact pour un rapport a/b très grand (vers la configuration cylindre-plan dont la longueur est dans la direction du mouvement) et tend vers une valeur positive pour

un rapport b/a qui augmente. En résumé, les contraintes centrées par rapport au contact bascule vers les x positifs pour un rapport b/a qui augmente. La valeur maximale de la contrainte de von Mises diminue légèrement lorsque l'ellipticité augmente. Pour un coefficient de frottement de 0,9, le maximum reste toujours en surface. La position en x, initialement en x négatif pour une ellipticité faible passe aux x positifs pour des valeurs d'ellipticité qui augmentent. La valeur maximale de la contrainte de von Mises diminue de façon générale lorsque l'ellipticité augmente et ce de manière plus prononcée pour le point de chargement B et un rapport b/a qui augmente.



FIG. 3.30: Boucles de fretting obtenues pour le contact elliptique pour différents rapports d'ellipticité



(a) Coordonnée en *z* (profondeur) de la contrainte équivalente de von Mises maximale



(b) Coordonnée en *x* de la contrainte équivalente de von Mises maximale



(c) Valeur du point le plus chargé au sens de la contrainte équivalente de von Mises

FIG. 3.31: Étude des contraintes dans le plan *Oxz* pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapports d'ellipticité

Les cas extrêmes $a \approx 30b$, $b \approx 30a$ et la simulation de référence sont repris à la figure FIG.3.32 pour le coefficient de frottement 0,3 et 0,9. Le point dont la contrainte est maximale au point de chargement A est suivi le long du chargement, en observant ses coordonnées (cf. FIG.3.32(a) et FIG.3.32(b)), la valeur de la contrainte équivalente de von Mises et la profondeur (cf. FIG.3.32(c) et FIG.3.32(d)), et le tracé du cisaillement de Tresca en fonction de la contrainte hydrostatique (cf. FIG.3.32(e) et FIG.3.32(f)). Pour le frottement de 0,3, il a déjà été souligné que la contrainte maximale se trouvait en profondeur et ce pour des valeurs plus importantes lorsque l'ellipticité augmente. On note bien également à la figure FIG.3.32(a) que plus on se rapproche d'un contact cylindrique transversal à la direction du mouvement, plus les contraintes ont tendance à basculer par rapport à x. La figure FIG.3.32(e) montre que le contact sphérique est ici le plus contraignant au sens du critère de fatigue multi-axial de Dang Van. Pour un coefficient de frottement de 0,9, la contrainte maximale est en surface, et est la plus excentrée du centre (selon x) pour le contact sphérique, cf. FIG.3.32(b). La figure FIG.3.32(f) montre ici également que le contact sphérique est le plus contraignant au sens du critère de fatigue multi-axial de Dang Van.



(a) Coordonnées de la contrainte équivalente de von (b) Coordonnées de la contrainte équivalente de von Mises maximale - $\mu = 0, 3$ Mises maximale - $\mu = 0,9$

0.8

20.0 (a, b) = 0.4

8.5



de von Mises Maximale - $\mu = 0, 3$



(e) Trajet du point le plus chargé (au sens de $\sigma_{vonMises}$) en terme de pression hydrostatique et de contrainte de cisaillement de Tresca - $\mu = 0, 3$

(c) Profondeur du point de la contrainte équivalente (d) Profondeur du point de la contrainte équivalente de von Mises Maximale - $\mu = 0,9$

1

 $\sigma_{vonMises MAX}/p_0$

1.5



(f) Trajet du point le plus chargé (au sens de $\sigma_{vonMises}$) en terme de pression hydrostatique et de contrainte de cisaillement de Tresca - $\mu = 0,9$

FIG. 3.32: Étude des contraintes dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique au cours du chargement pour plusieurs rapports d'ellipticité

3.2.2.3 Problème de Cattaneo-Mindlin pour un contact circulaire et un couple de matériaux différents

Le problème de Cattaneo-Mindlin pour un contact circulaire, mais pour des couples de matériaux différents est ici étudié. Les deux matériaux étant différents, il existe un couplage entre le problème normal et tangentiel. Les simulations sont menées à partir de la géométrie et du chargement de référence. Les modules d'Young des deux matériaux vont être changés et ce de façon à conserver un module d'Young équivalent égal à la simulation de référence. Les données des simulations sont répertoriées dans le tableau TAB.3.3. Les différentes simulations on été faites pour un rapport E_1/E_2 de 1, 2, 4 et 8. Dans le tableau a été également ajoutée la valeur de la constante de Dundurs β qui quantifie le degré de couplage entre problème normal et tangentiel.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	E_{1}/E_{2}	β
200	200	1	0
300	150	2	0,0952
500	125	4	0,1714
900	112,5	8	0,2222

TAB. 3.3: Simulations effectuées pour l'étude du problème de Cattaneo-Mindlin dans le cas du contact circulaire avec des matériaux aux propriétés élastiques différentes

Le tracé des boucles de fretting est donnée à la figure FIG.3.33 pour les deux coefficients de frottement. Un léger décalage apparaît lorsque les deux matériaux différent. Ce décalage augmente avec le degré de couplage et est plus marqué pour un coefficient de 0,3 que de 0,9. Pour un coefficient de 0,9 le cisaillement est plus important que pour un coefficient de frottement de 0,3. La contribution des cisaillements sur les déplacements élastiques tangentiels est donc plus importante pour un coefficient de frottement fort, alors que la contribution des pressions de contact sur les déplacements élastiques tangentiels est indépendante du frottement et reste donc la même. D'où un décalage de la boucle de fretting plus important pour un coefficient de frottement faible. Ce décalage va dans le sens d'un contact moins raide dans la direction tangentielle.

Les distributions en surface de pression et de cisaillement sont données dans l'annexe C à la page 201. Les solutions sont données aux points A et B du chargement pour $\mu = 0, 3$ aux figures FIG.C.1 et FIG.C.2 respectivement et pour $\mu = 0,9$ aux points A (FIG.C.3) et B (FIG.C.4) également. On observe principalement une pression maximale qui augmente par rapport à la pression de Hertz pour un couplage qui augmente. Les résultats ne sont plus symétriques selon x lorsque les matériaux sont différents, excepté pour q_y qui reste négligeable. Les contraintes en sous-couches sont données aux figures FIG.C.5, FIG.C.6, FIG.C.7 et FIG.C.8, pour les deux frottements et pour les points de chargement A et B. La solution en pression est plus éloignée de celle de Hertz pour un frottement fort, alors que la solution en cisaillement est plus éloignée de celle de Mindlin pour un coefficient de frottement faible. De façon générale, pour des matériaux différents (par exemple un cas récurrent dans la littérature est celui du massif rigide sur un massif élastique) la solution

133

donnée par Mindlin pour la distribution de cisaillement devient très vite approximative. Les contraintes en sous-couches correspondantes sont données dans la même annexe aux pages suivantes. Pour résumer l'état de contraintes, le tracé de la position et de la valeur de la contrainte équivalente de von Mise maximale pour les deux corps est donnée à la figure FIG.3.34. On observe peu de variations pour des rapports E_1/E_2 inférieur ou égal à 4 de la position du maximum de la contrainte de von Mises. Cependant pour μ =0,3 au point de chargement A et pour un rapport égal à 8, on peut observer que le maximum de contrainte passe en surface pour le corps 2 (cf. FIG.3.34(a)), c'est-à-dire le moins rigide. Pour μ = 0,9 et pour un rapport E_1/E_2 égal à 8, au point de chargement B, le maximum de contrainte se trouve à une valeur x négative pour le corps 2 (le moins rigide) au lieu d'une valeur x positive pour des rapports inférieurs à 8.



FIG. 3.33: Boucles de fretting obtenues pour le contact circulaire pour des couples de matériaux différents



(a) Coordonnée en z (profondeur) de la contrainte équivalente de von Mises maximale



(b) Coordonnée en *x* de la contrainte équivalente de von Mises maximale



(c) Valeur du point le plus chargé au sens de la contrainte équivalente de von Mises

FIG. 3.34: Étude des contraintes dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour plusieurs couples de matériaux - symbole \times corps 1, symbole \circ corps 2

Le cas extrême $E_1 = 8E_2$ et la simulation de référence sont repris à la figure FIG.3.35 pour le coefficient de frottement 0,3 et 0,9. Les résultats sont donnés pour les deux corps en vis-à-vis. Le point dont la contrainte est maximale au point de chargement A est suivi le long du chargement, en observant ses coordonnées (cf. FIG.3.35(a) et FIG.3.35(b)), la valeur de la contrainte équivalente de von Mises et la profondeur (cf. FIG.3.35(c) et FIG.3.35(d)), et le tracé du cisaillement de Tresca en fonction de la contrainte hydrostatique (cf. FIG.3.35(e) et FIG.3.35(f)). Pour le frottement de 0,3, le maximum se trouve en profondeur pour la simulation de référence. Lorsque les matériaux différent, on peut observer que la position des points en profondeur est équivalente à la simulation de référence, mais ces points restent beaucoup plus regroupés dans la direction x par rapport à la simulation de référence. À certains incréments du chargement, le maximum peut atteindre la surface et ce pour les deux corps. La figure FIG.3.35(e) montre que le contact pour des matériaux différents est ici le plus contraignant au sens du critère de fatigue multi-axial de Dang Van. Cependant ce résultat est à relativiser puisque les matériaux sont différents les paramètres du critère de fatigue le sont également. Pour un coefficient de frottement de 0,9, la contrainte maximale est en surface, et est la plus proche du centre (selon x) pour le contact où les matériaux sont différents, cf. FIG.3.35(b). La figure FIG.3.35(f) montre ici également que le contact pour des matériaux différents peut être plus contraignant au sens du critère de fatigue multi-axial de Dang Van pour le corps 2 (le moins rigide) et moins contraignant pour le corps 1 (le plus rigide). Là encore les résultats sont à nuancer puisque les matériaux sont différents les paramètres du critère de fatigue le sont également.



(a) Coordonnées de la contrainte équivalente de von (b) Coordonnées de la contrainte équivalente de von Mises maximale - $\mu = 0, 3$ Mises maximale - $\mu = 0.9$



(c) Profondeur du point de la contrainte équivalente (d) Profondeur du point de la contrainte équivalente de von Mises Maximale - $\mu = 0, 3$



(e) Trajet du point le plus chargé (au sens de $\sigma_{vonMises}$) en terme de pression hydrostatique et de contrainte de cisaillement de Tresca - $\mu = 0,3$



de von Mises Maximale - $\mu = 0,9$



(f) Trajet du point le plus chargé (au sens de $\sigma_{vonMises}$) en terme de pression hydrostatique et de contrainte de cisaillement de Tresca - $\mu = 0,9$

FIG. 3.35: Étude des contraintes dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire au cours du chargement pour plusieurs couples de matériaux

Chapitre 4 Applications

Le code développé est appliqué aux problèmes d'usure. Une première partie concerne la simulation des essais de fretting sur géométrie cylindre-plan. Une étude des paramètres influant sur le modèle est faite. Une comparaison des traces d'usure obtenues expérimentalement est donnée. Enfin des simulations d'usure en glissement partiel sont présentées. La seconde partie concerne l'application au problème aube-disque. À partir d'un modèle éléments finis, une simulation d'un cycle de fretting est réalisée selon l'approche multi-échelles. Des résultats d'usure sont donnés.

Sommaire

4.1	Exem	ples académiques : le contact cylindre-plan
	4.1.1	Usure du cylindre
	4.1.2	Usure du cylindre et du plan
	4.1.3	Contact élastique tangentiel
4.2	Usure	des pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteurs 161
	4.2.1	Description du modèle
	4.2.2	Modélisation d'un cycle de chargement
4.2	4.1.2 4.1.3 Usure 4.2.1 4.2.2	Contact élastique tangentiel 147 Contact élastique tangentiel 151 des pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteurs 161 Description du modèle 161 Modélisation d'un cycle de chargement 163

4.1 Exemples académiques : le contact cylindre-plan

Les simulations numériques qui vont être présentées correspondent aux travaux expérimentaux de Paulin et Fouvry [PAU 05, PAU 06] sur l'usure en fretting d'un contact cylindre-plan Ti-6Al-4V/Ti-6Al-4V. Un déplacement tangentiel alternatif est imposé au cylindre tandis que les surfaces sont maintenues en contact par un chargement normal constant P. Les caractéristiques géométriques et matériaux de la simulation sont résumées sur la figure FIG.4.1 et dans le tableau TAB.4.1.

Rayon du c	R = 10 mm	
Longueur du cylindre		L = 3 mm
Matériau du cylindre		Ti-6Al-4V
Matériau du plan		Ti-6Al-4V
Ti-6Al-4V	Module d'Young	<i>E</i> =119 MPa
Coefficient de Poisson		v=0,3

TAB. 4.1: Caractéristiques générales des simulations

Cette partie présente divers résultats d'usure [GAL 05, GAL 06b, GAL 06a, GAL 07] obtenus au cours de la thèse. Ces résultats ont été établis à partir du code d'usure en constante évolution. Les résultats sont disposés de façon à suivre l'évolution chronologique et donc la complexification du code d'usure.



FIG. 4.1: La géométrie cylindre-plan

4.1.1 Usure du cylindre

Ces premiers résultats sont obtenus avec une version très simplifiée du code d'usure. Le contact normal est calculé. Le contact tangentiel est supposé rigide. Seul le cylindre s'use, $\beta = 1$. Cette dernière hypothèse non physique permet d'accélérer les calculs. En effet la géométrie plane restant plane une seule résolution du problème de contact est nécessaire par cycle puisque quelque soit la position du cylindre par rapport au plan la

configuration du contact est la même. Le traitement des positions des deux corps en visà-vis n'est donc pas effectué.

On considère un régime de glissement total. Le déplacement tangentiel δ_0 du centre du contact est la variable qui doit être prise en compte pour quantifier l'usure. Contrairement à δ^* , cette valeur est indépendante de la compliance de l'appareil. Le coefficient de frottement n'est pas constant pendant l'expérience. Sa valeur initiale en début de test est de 0,5 puis après quelques cycles tend vers une valeur stable de 0,8. Ce régime transitoire correspond à la formation de transformations tribologiques superficielles (TTS).



FIG. 4.2: Boucle de fretting approchée

Pour les simulations de ces tests de fretting, plusieurs hypothèses sont faites :

- le coefficient de frottement est supposé constant et égal à 0,8 durant toute la simulation (la période transitoire où le coefficient de frottement évolue de 0,5 à 0,8 est négligée);
- les tests étudiés sont effectués avec une valeur $\delta^* = 75 \ \mu m$, une valeur de 67 μm est fixée pour δ_0 dans le cadre de nos simulations.

Ces essais sont faits en glissement total. Le débattement tangentiel doit être assez important pour que le cycle expérimental de fretting puissent être approché par le cycle idéalisé représenté à la figure FIG.4.2. Ces simulations peuvent donc être effectuées dans le cadre de l'hypothèse d'un comportement tangentiel rigide.

Plusieurs simulations sont effectuées avec cette géométrie. À partir de ces simulations, une étude d'influence des différents paramètres employés est menée pour analyser le fonctionnement du code. Pour ces simulations, les paramètres qui ont uniquement un effet proportionnel sur les résultats, tels que α_{usure} , δ_0 , μ et N_{max} (nombre de cycles pour stopper la simulation d'usure) sont gardés constants. Le coefficient d'usure α_{usure} et N_{max} sont choisis de manière à étudier les résultats sur de faibles valeurs d'usure, c'est-à-dire pour observer ce qui se passe pendant la phase d'usure transitoire avant l'homogénéisation parfaite de l'usure sur la surface.

Premières observations La géométrie initiale et après N_{max} cycles d'usure est présentée à la figure FIG.4.3. Le tableau TAB.4.2 présente la configuration de référence. Les configurations suivantes sont articulées autour de celle de référence avec à chaque fois un paramètre modifié. L'évolution de l'usure est détaillée sur la figure FIG.4.4 en terme de profondeur d'usure, de géométrie du profil usé et de pression de contact selon les deux axes de symétrie.

4. Applications

Simulation n° 1		
Données simulation	<i>P</i> (N)	400
	Mésalignement	NON
Données du modèle	$dx (\mu m)$	6,5
	<i>dy</i> (µm)	30,3
	nx	100
	ny	100
	$N_{max}/\Delta N$	20000

TAB. 4.2: Simulation de référence



FIG. 4.3: Géométrie initiale et usée (simulation n^o 1)

Il apparaît que les pressions de contact évoluent naturellement vers un profil plat, c'est-à-dire vers une usure homogène puisque dans ce cas la loi d'usure utilisée est proportionnelle à la pression de contact. L'usure est maximale aux extrémités du cylindre, là où se retrouvent les pics de pression produits par la discontinuité géométrique. Les extrémités du cylindre induisent des solutions singulières. À cet endroit la pression de contact est théoriquement infinie. Les pressions obtenues par calcul numérique sont finies et dépendent de la finesse de la discrétisation. Cet artefact numérique permet de moyenner l'usure sur les bords et de ne pas avoir une usure infinie qui ne serait pas physiquement admissible. Après N_{max} cycles d'usure, la singularité est « gommée » . Le profil d'usure est le principal résultat. Il permet de définir un critère de durée de vie du composant. L'évolution de trois valeurs de profondeur d'usure est tracée sur la figure FIG.4.5 :

– la valeur maximale localisée au centre de l'extrémité du cylindre (x = 0, $y = \pm 1,5$ mm);

- la valeur moyenne ;
- la valeur au centre de la géométrie.

Le coefficient de variation défini à l'équation (2.181) décroit avec l'usure, cf. FIG.4.5. Plusieurs pics peuvent être observés, ils correspondent aux cycles où l'aire de contact augmente. Ces pics s'atténuent lorsque la discrétisation est plus fine. La diminution du coefficient de variation traduit une homogénéisation de l'usure. Après un grand nombre



FIG. 4.4: Évolution de l'usure et de la distribution de pression (simulation nº 1)

de cycles, ce coefficient se stabilise, et l'usure est équi-répartie sur la surface. À partir de considérations géométriques il est alors possible de déterminer l'évolution des surfaces sans avoir à effectuer de calcul numérique supplémentaire.

Simulations nº 2		
Données simulation	<i>P</i> (N)	400
	Mésalignement	NON
Données du modèle	$dx (\mu m)$	6,5
	<i>dy</i> (µm)	30,3
	nx	100
	ny	100
	$N_{max}/\Delta N$	$2 \leq N_{max}/\Delta N \leq 40000$

,

Influence du pas d'usure Une nouvelle série de simulations (simulations n^o 2, tableau TAB.4.3) est effectuée. L'impact du pas ΔN pour lequel la géométrie est mise à jour est étudié. Un premier résultat est la réduction du temps de calcul avec l'augmentation de ΔN , le nombre de calculs de contact à réaliser est $N_{max}/\Delta N$. Comme le montre la figure FIG.4.6, le temps CPU augmente quasiment linéairement avec le nombre de calculs de contact (en multipliant ΔN par deux le temps CPU est divisé par deux). Réduire dramatiquement le nombre de calculs de contact intermédiaires peut toutefois introduire une



FIG. 4.5: Évolution de la profondeur d'usure et du coefficient de variation (simulation $n^{o} 1$)

erreur numérique. En considérant le cas avec ΔN minimum comme exact (soit ici le cas $N_{max}/\Delta N$ =40000), l'erreur relative sur la valeur moyenne de la demi-largeur d'usure est tracée à la figure FIG.4.7 pour différentes valeurs de ΔN . Sur la même figure, un tracé similaire mais considérant la profondeur d'usure est donné.



FIG. 4.6: Temps de calcul (simulations nº 2)

Pour $(N_{max}/\Delta N)>10$ l'erreur sur la demi-largeur est nulle (FIG.4.7). Pour une valeur entre 1 et 10, l'erreur n'est plus négligeable. L'aire potentielle de contact étant discrète, pour les valeurs supérieures à 10 l'erreur n'augmente pas progressivement mais sous forme de saut correspondant à une demi-largeur augmentée d'un nombre fini de points de discrétisation. Si plus de points avaient été tracés, le graphe aurait été en forme d' « escalier ». Une tendance similaire est observée pour la profondeur d'usure (FIG.4.7). Dès que $N_{max}/\Delta N$ est inférieur à 20, l'erreur sur la profondeur d'usure moyenne dépasse 1,5%. Ces deux derniers graphes nous informe que dans le cas présent, la valeur optimale



FIG. 4.7: Conséquence de ΔN sur la largeur et la profondeur d'usure (simulations n° 2)

en terme de résultat est $N_{max}/\Delta N$ =40.



FIG. 4.8: Évolution du coefficient de variation et de la largeur d'usure pour différents ΔN (simulations n° 2)

Sur la figure FIG.4.8 le coefficient de variation a un comportement similaire pour $N_{max}/\Delta N$ =20, 40 et 20 000 cycles. Avec $N_{max}/\Delta N$ =10, le coefficient de variation diverge. L'observation de ce coefficient est donc une indication sur la crédibilité des résultats par rapport aux choix des paramètres de calcul de l'usure. Sur cette même courbe est tracée l'évolution de la demi-largeur d'usure. Pour une valeur $N_{max}/\Delta N$ inférieure ou égale à 20, *i.e.* pour une valeur inférieure à la valeur optimale de 40 citée précédemment, la courbe perd sa forme d' « escalier ».

La figure FIG.4.9 présente l'évolution de la profondeur moyenne d'usure et de l'erreur relative en fonction du nombre de cycles. Après chaque calcul de contact, la géométrie



FIG. 4.9: Évolution de la profondeur d'usure et de son erreur pour différents ΔN (simulations n^o 2)

est mise à jour en ajoutant Δh . Si la valeur est trop faible, les modifications apportées à la géométrie ne sont pas suffisantes pour obtenir une distribution de pression différente. Il faut donc veiller à choisir ΔN de façon à ce que l'usure soit assez importante pour ne pas effectuer de calcul redondant. Par contre, comme précédemment expliqué, un ΔN trop important introduit une erreur relative qui peut ne plus être négligeable. Sur la figure FIG.4.9, la relation proportionnelle qui lie l'erreur relative de la profondeur d'usure au Δh moyen est claire. Ainsi pour une erreur de 1%, la valeur correspondante de Δh est $2,5.10^{-5}$ mm. Et pour aller jusqu'à une profondeur moyenne de $150 \,\mu$ m, $0,150 / 2,5.10^{-5}$ = 7500 calculs de contact sont nécessaires. Une amplitude ΔN peut être par exemple choisie de façon à avoir une erreur inférieure à 1% selon la procédure suivante :

- déterminer la pression de contact moyenne avec la géométrie initiale;
- à partir de la loi d'usure, calculer la valeur moyenne de $\Delta h = f(ed)$ avec $\Delta N=1$;
- en déduire l'incrément optimal $\Delta N = (2, 5.10^{-5} / \Delta h)$.

Simulations n° 3		
Données simulation	<i>P</i> (N)	400
	Mésalignement	NON
Données du modèle	$dx (\mu m)$	$6,5 \times K$ avec $K=1/2, 1, 2, 100/35, 100/25, 100/15$
	<i>dy</i> (µm)	$30,3 \times K$
	nx	100/K
	ny	100/K
	$N_{max}/\Delta N$	20000

TAB. 4.4: Influence de la discrétisation

Influence de la discrétisation L'influence de la discrétisation sur les résultats d'usure est évidente. L'intérêt de la méthode utilisée est d'ailleurs d'effectuer des calculs d'usure sur des maillages plus fins que le permettent les temps de calcul des méthodes FEM. L'influence du maillage (tableau TAB.4.4) est donc étudiée dans cette série de simulation.



FIG. 4.10: Conséquence de la discrétisation sur la profondeur d'usure finale (simulations nº 3)

En considérant les résultats justes pour le maillage le plus fin (200×200) , l'erreur absolue sur la profondeur d'usure finale au centre de la géométrie, *i.e.* loin des singularités, est tracée. L'erreur augmente quand le nombre de points de discrétisation diminue. Le temps CPU augmente lui proportionnellement à $n\log(n)$. Un compromis doit donc être fait. L'évolution du coefficient de variation avec le nombre de cycles pour différentes discrétisations est tracée à la figure FIG.4.11. Les fluctuations suites à l'augmentation de la zone usée sont plus importantes pour un maillage grossier. Il faut donc un maillage assez fin pour avoir une prédiction de l'usure indépendante de la taille du maillage.



FIG. 4.11: Évolution du coefficient de variation pour différents maillages (simulations $n^{o} 3$)

Simulation nº 4		
Données simulation	<i>P</i> (N)	400
	Mésalignement	OUI, Centre de pression $C(0 \pm 0,01;0,1 \pm 0,01)$
Données du modèle	$dx (\mu m)$	6,5
	<i>dy</i> (µm)	30,3
	nx	100
	ny	100
	$N_{max}/\Delta N$	20000

TAB. 4.5: Prise en compte d'un mésalignement

Mésalignement Pour illustrer l'importance du point d'application du chargement sur les résultats en usure, un exemple est donné dans le tableau TAB.4.5. Dans le cas présenté un décalage de 0,1 mm (6 % de la taille du contact) qui équivaut à un moment de 0,04 N·m conduit à une différence d'environ 10 % du résultat en terme de profondeur d'usure.



FIG. 4.12: Conséquence du mésalignement sur la distribution d'usure (simulations nº 4)

4.1.2 Usure du cylindre et du plan

Lorsque la gestion des surfaces en contact est effective, il est possible d'effectuer des simulations d'usure dont les deux corps s'usent. Le code se contente ici de résoudre le contact normal en différents points de chargement. Le contact tangentiel est toujours rigide et donc les valeurs de glissement égales aux débattements tangentiels de corps rigides. L'usure va maintenant être équi-répartie sur les deux surfaces, β =0,5.

La simulation suivante (cf. tableau TAB.4.6) reproduit un test de fretting mené par Christophe Paulin au LTDS. Les géométries et conditions de chargement sont inchangées

147

Sim	ulati	ons	n° :	5	
		•			

Données simulation	<i>P</i> (N)	400
	Mésalignement	NON
Données du modèle	$dx (\mu m)$	16
	<i>dy</i> (µm)	23,622
	nx	128
	ny	128
	$N_{max}/\Delta N$	3000

TAB. 4.6: Simulation pour la comparaison avec les essais



FIG. 4.13: Évolution des données du test et des données de la simulation

par rapport aux simulations précédentes. Le coefficient d'usure α_{usure} est celui déterminé par Christophe Paulin dans le cadre du contact Ti-6Al-4V/Ti-6Al-4V pour la géométrie cylindre-plan. La trace d'usure est comparée aux résultats de nos simulations. L'usure est obtenue après N_{scar} cycles de fretting. La figure FIG.4.13 montre l'évolution du coefficient de frottement, de l'effort normal et tangentiel et de l'amplitude de déplacement pendant le test par rapport aux valeurs qui sont gardées constantes dans le cas de la simulation. Notamment le chargement ne peut être considéré constant et l'évolution de l'énergie dissipée par frottement se révèle différente dans le cas du test et de la simulation (FIG.4.14). Il est plus approprié de comparer la trace d'usure à une énergie dissipée équivalente qu'à un même nombre de cycles. La comparaison est faite sur la figure FIG.4.15, on s'attachera surtout au résultat en terme d'usure totale car souvent des phénomènes de transfert de matière ne permettent pas l'observation unique d'une surface sans l'autre. La corrélation est bonne, ce qui valide la méthode numérique de prédiction d'usure.

Le paramètre ΔN a un impact beaucoup plus important lorsque les positions des géométries sont prises en compte. D'une part si ΔN est trop grand une erreur globale sur la trace d'usure va apparaître mais de plus un bruitage des géométries peut se révéler, cf.



FIG. 4.14: Évolution de l'énergie dissipée par frottement

FIG.4.16. Le critère précédemment mise en place pour déterminer une valeur optimale de ΔN se révèle encore plus important et doit être utilisé de façon à ne pas observer l'apparition de ce bruit. L'objectif est de ne pas choisir un ΔN trop faible pour alourdir les temps de calculs. Une démarche qui a été approchée est le filtrage ou lissage des surfaces après chaque incrément d'usure pour éviter le profil bruité. Filtrer le bruit de la trace d'usure de la figure FIG.4.16 peut se révéler simple mais sur des profils plus complexes tels que ceux obtenus dans les simulations d'usure du contact aube-disque la démarche devient délicate si l'on veut conserver la forme d'une trace d'usure assez anguleuse sur les bords. Finalement aucune méthode concluante de lissage ou filtrage n'a pu être appliquée.

149



FIG. 4.15: Comparaison de la trace d'usure pour le test et la simulation



FIG. 4.16: Influence du paramètre ΔN sur la trace d'usure

4.1.3 Contact élastique tangentiel

A présent le code d'usure est complet. La prise en compte d'un comportement élastique tangentiel est possible.

Plusieurs simulations d'usure en fretting sont présentées. Ces simulations sont une déclinaison d'une simulation de référence. Cette simulation de référence est basée sur la géométrie cylindre-plan. Le coefficient de frottement est choisi et gardé égal à 0,7. Le chargement normal est de 400 N. Le déplacement tangentiel maximum est de 68 μ m. Le comportement tangentiel est élastique. La simulation est stoppée après N_{end} cycles et 2000 calculs de boucle de fretting sont faits, soit un cycle de fretting numérique pour prédire l'endommagement en usure chaque ($N_{end}/2000$) cycles de fretting. La loi d'usure 2 est utilisée, cf. équation (2.177). Le cycle de fretting correspond au trajet de chargement présenté à la figure FIG.4.17 entre les points A et E. Le trajet de chargement entre O et A est simulé mais n'est pas pris en compte dans le calcul d'usure. Cette phase d'initialisation est obligatoire au calcul numérique mais peut être effectuée en un seul incrément entre O et A.



FIG. 4.17: Trajet du chargement normal et tangentiel

Pilotage normal en effort ou en déplacement La bûche de fretting de la figure FIG.4.18 montre l'évolution avec le temps de la boucle de fretting pour la simulation de référence. Une deuxième simulation (FIG.4.19), similaire à celle de référence mais avec un déplacement normal de corps rigide imposé à 5,05 μ m et équivalent au chargement normal de 400 N appliqué sur la géométrie initiale est faite. Alors qu'aucun changement particulier de la forme de la boucle de fretting ne peut être souligné sur la simulation de référence, une rapide diminution du chargement tangentiel est observable sur la deuxième simulation. La raison de cette diminution est la distance initiale entre les deux géométries qui reste constante alors que celles-ci s'usent. L'approche effective des deux surfaces après être entrées en contact diminue. À la fin l'usure tend à s'annuler. Une conclusion de ce résultat peut être fait dans le cadre de l'expérimentation. Piloter un essai de fretting

à partir du chargement normal ou du déplacement normal peut mener à des résultats rapidement différents. L'expérimentateur doit donc veiller à imposer correctement l'un ou l'autre. Notamment pour l'essai d'usure présenté précédemment, le chargement normal n'était pas maintenu à une valeur parfaitement constante. Ce défaut est lié au maintient du chargement par le biais d'une vis qui impose le déplacement normal et qui doit être réajustée pendant l'essai de façon à garder l'effort à sa valeur initiale. L'équipe de Fouvry a actuellement remédié à ce défaut.



FIG. 4.18: Bûche de fretting en effort normal imposé et glissement total



FIG. 4.19: Bûche de fretting en déplacement normal imposé et glissement total

Loi d'usure 1 ou 2 Deux formulations pour la loi d'usure locale, cf. équations (2.176) et (2.177), ont été proposées pour extrapoler la loi d'usure globale donnée par l'équation (2.172). La loi d'usure n'est pas égale à la loi d'usure 1, ni à la loi d'usure globale. En effet l'amplitude de glissement n'est pas constante sur toute la surface de contact, en d'autres

termes $\sum_{1 \text{ cycle}} |\Delta s^t| \neq 4\delta_0$. Dans le cas du fretting entre le cylindre non-usé et le plan, la distribution du glissement cumulé est tracée en fonction du débattement tangentiel et de la demi-largeur de contact à la figure FIG.4.20.



FIG. 4.20: Distribution théorique du glissement cumulé pendant un cycle

La simulation de référence et une simulation équivalente mais avec un comportement tangentiel rigide sont comparées en utilisant les loi d'usure 1 et 2. Les géométries finales sont données à la figure FIG.4.21. Les répartitions géométriques de l'usure sont équivalentes. Cependant on observe à la figure FIG.4.22, qui présente le tracé de la profondeur d'usure maximale et le volume d'usure en fonction du nombre de cycles, que le comportement élastique tangentiel réduit le taux d'usure. Cette observation évidente a priori est expliquée par le fait que lorsque le comportement tangentiel est supposé rigide une partie de l'énergie du système n'est plus dissipée élastiquement ce qui se traduit par des amplitudes de glissement surestimées dans le cas du comportement tangentiel rigide.

La distribution de glissement cumulé sur le plan est tracée à la figure FIG.4.23 pour les cas rigide et élastique. Cette distribution de glissement établie pour le premier cycle est en accord avec le profil schématisé à la figure FIG.4.20. Cette distribution est complètement différente après N_{end} cycles. La forme en « escalier » de la distribution de glissement est conséquente à la discrétisation en temps du cycle de fretting. La nécessité d'employer des incréments d'usure (*i.e.* un ΔN) très faibles entre chaque calcul de cycle de fretting pour éviter tous pics de pression et toutes discontinuités excessives des surfaces de contact (bruit de la figure FIG.4.16) est en partie expliquée à cause de cette forme d'« escalier ». Enfin ces distributions de glissement. La figure FIG.4.24 souligne la distribution des pressions à différents incréments de temps pour le premier et dernier cycle de fretting de la simulation de référence. On observe une très forte différence, autant dans la forme de la distribution de pression de contact que dans la taille de la zone de contact. La surface de

153



FIG. 4.21: Profils usés du cylindre et du plan pour différents comportements et lois d'usure



FIG. 4.22: Cinétique de l'usure de la simulation en glissement total

contact s'élargit et le profil des pressions de contact est aplati. Des effets de « coins » font apparaître des pics de pressions aux incréments où le déplacement tangentiel est maximum, *i.e.* aux points A, C et E de la figure FIG.4.17. Ces effets de bord sont conséquents à l'usure du plan.



FIG. 4.23: Distribution des glissements cumulés sur les géométries initiales et usées



FIG. 4.24: Distribution des pressions sur la géométrie initiale et usée

Régime de glissement mixte Une simulation représentative d'un essai en glissement total mais dont les conditions sont proches du régime en glissement partiel est présentée. Le chargement normal est gardé égal à 400 N ou à sa valeur équivalente en terme de déplacement normal de corps rigide. Le déplacement tangentiel maximal est fixé 7,5 μ m. Pour ces deux simulations représentées à la figure FIG.4.25, la forme de la boucle de fretting ne tend pas vers une boucle de fretting en glissement partiel. Hors dans cette configuration, le régime de glissement mixte est observé expérimentalement : le contact évolue de la condition de glissement total à la condition de glissement partiel. Le régime de glissement mixte est expliqué par les modifications des propriétés matériaux superficielles et l'augmentation du coefficient de frottement. De part le résultat de la simulation, il est possible de conclure que la modification macroscopique des géométries des surfaces conséquente à l'usure ne sont pas un facteur supplémentaire du mécanisme de passage d'une condition en glissement total à une condition de glissement partiel.



FIG. 4.25: Boucle de fretting dans le cas d'un glissement total faible

Comportement tangentiel rigide ou élastique Une simulation identique à la dernière a été effectuée dans le cas d'un comportement tangentiel rigide. À la figure FIG.4.26 le ratio entre la profondeur d'usure et le volume d'usure est comparé pour $\delta_x=7,5 \ \mu m$ et $\delta_x=68 \ \mu m$. Ce ratio est un parfait indicateur de la distribution d'usure. Il apparaît que pour un débattement tangentiel important ce ratio est égal quelque soit le comportement tangentiel, alors que pour des débattements faibles, la non-superposition des courbes indique que la distribution d'usure en considérant un comportement tangentiel élastique ou rigide se révèle différente. Cependant cet écart diminue au fur et à mesure de la progression de l'usure. L'impact du comportement tangentiel est finalement négligeable sur la répartition de l'usure.

Les répartitions d'usure à partir d'un comportement tangentiel rigide ou élastique, à partir de la loi d'usure 1 ou 2, sont équivalentes. En terme de volume d'usure, une comparaison est effectuée à la figure FIG.4.27 entre les simulations de fretting dans le cas élastique ou rigide avec la loi d'usure 2, et le volume théorique obtenu à partir de la loi



FIG. 4.26: Indication sur la distribution spatiale de l'usure

d'usure sous sa formulation globale et originelle, $V = \alpha_{usure} (4\delta_x^2 \mu P)$. La figure FIG.4.27 illustre que la différence en terme de volume d'usure est faible entre les simulations prenant en compte un comportement tangentiel rigide ou élastique. En s'intéressant de plus près à ce volume d'usure pour des débattement δ_x plus faibles, il apparaît qu'une erreur supérieure à 200 % existe. Par contre l'erreur faite en utilisant une loi d'usure globale au lieu d'une loi locale est importante pour des débattements tangentiels élevés et peut dépasser ici les 30 %. Il a été montré que cette erreur est due à la non-uniformité du glissement cumulé sur les surfaces de contact. Cependant cette erreur est faible en glissement total et doit être inférieure à celle induite par l'incertitude sur le coefficient d'usure de la loi d'usure empirique. Pour résumer, les simulations en régime de glissement total peuvent être effectuées à partir de l'hypothèse du comportement tangentiel rigide.



FIG. 4.27: Volume d'usure des différentes lois d'usure en fonction du débattement

157

Régime de glissement partiel Des résultats de simulation de fretting en glissement partiel sont présentés à la figure FIG.4.28. Une première simulation est faite à partir du chargement normal et tangentiel égaux à 400 N et 200 N respectivement. Trois autre simulations ont été effectuées, (i) en remplaçant le chargement normal avec son déplacement de corps rigide normal équivalent, (ii) en remplaçant le chargement tangentiel avec son déplacement de corps rigide tangentiel équivalent, et (iii) en effectuant ces deux remplacements à la fois. En glissement partiel, les amplitudes de glissement sont très faibles, l'usure calculée est alors très réduite. Expérimentalement l'usure qui peut être observée dans cette situation est également faible. Le coefficient d'usure est ici multiplié par 1000 pour obtenir des usures suffisantes lorsque la simulations est stoppée après N_{end} cycles. Les géométries usées obtenues en fin de simulation sont données à la figure FIG.4.29. Un disque central non-usé est observé sur la trace d'usure finale. Ce disque correspond à la zone d'adhérence. La distribution des glissements et des contraintes en surface pour le premier et dernier cycle de fretting est donnée à la figure FIG.4.30 lorsque l'effort normal et tangentiel sont imposés.



FIG. 4.28: Simulations de fretting en glissement partiel

Tout d'abord la figure FIG.4.28 montre que en imposant soit un chargement normal ou tangentiel il résulte une augmentation du déplacement de corps rigide correspondant. L'usure diminue donc la rigidité normal et tangentiel du contact. L'usure maximale est obtenue pour $\delta_z=5,05 \ \mu\text{m}$ et $Q_x=200 \ \text{N}$, c'est-à-dire pour la configuration où le rapport Q_x/P est le plus important. La figure FIG.4.28 souligne le faible volume d'usure, et ce volume d'usure tend vers une valeur constante, l'usure tend à s'annuler. Ce fait s'explique en observant les zones de glissement et d'adhérence à la figure FIG.4.30. Les cisaillements en surface sont très faibles au niveau de la surface usée contrairement à la zone non-usée. Le glissement coïncide avec la surface usée, où les cisaillements sont très faibles voir presque nuls, d'où une usure qui tend à s'annuler.

Usure et régime de glissement L'évolution du ratio entre l'énergie dissipée par frottement et l'énergie totale (ces énergies ont été définies à la figure FIG.1.14) est tracée en



FIG. 4.29: Trace d'usure pour les simulations en glissement partiel



FIG. 4.30: Contraintes en surfaces et glissements des simulations en glissement partiel

fonction du temps sur la figure FIG.4.31, pour différentes valeurs de l'amplitude du déplacement de corps rigide tangentiel. En glissement total, ce ratio augmente rapidement et tend ensuite vers une asymptote horizontale. Plus le déplacement tangentiel est important, plus le ratio de l'énergie dissipée par frottement sur l'énergie totale augmente. En glissement partiel, ce ratio diminue. Les cinétiques d'usure sont opposées entre les simulations en condition de glissement partiel ($\delta_x=2,62 \ \mu$ m) et en condition de glissement total ($\delta_x=28$, 38 et 68 μ m). La compétition entre la fissuration et l'usure est favorable à l'usure dans le cadre du glissement total, et à la fissuration dans le cadre du glissement partiel, quand l'évolution de la géométrie est prise en compte.



FIG. 4.31: Rapport des énergies totales et de frottement pour les simulations en glissement partiel et total
4.2 Usure des pieds d'aubes de soufflantes de turboréacteurs

Dans cette partie, le code d'usure va être utilisé dans le cadre d'un modèle aube-disque via la modélisation multi-échelles. Le modèle choisi correspond à une soufflante à portées rectilignes.

4.2.1 Description du modèle





Le modèle éléments-finis fourni par Snecma est un modèle Abaqus Standard. Le calcul est statique et correspond à l'application d'un chargement centrifuge sur l'aube et le disque et d'un chargement de type pressions aérodynamiques sur les faces de l'aube. Le coefficient de frottement est de 0,6 et les propriétés élastiques sont E=119500 MPa et v=0,29. Le trajet de chargement appliqué est triangulaire et correspond à un démarrage et arrêt du moteur. Le contact est défini en sélectionnant les surfaces maîtres et esclaves des deux portées. Le contact est résolu à partir d'une méthode de pénalité préférée à la formulation Lagrangienne. Cette dernière est exacte et devrait être privilégiée dans les problèmes de fretting mais des difficultés de convergence empêchent de mener à terme un calcul du modèle avec une usure des surfaces. Dans ce modèle le revêtement n'est pas maillé. Un espace vide existe alors entre l'aube et le disque au niveau des portées. Pour combler ce vide, une interférence de -0,15 mm est ajoutée pour que les surfaces soient initialement en condition de contact. La taille du modèle est de 86652 degrés de liberté.

Les données en termes de pressions, cisaillements, glissements sont recueillies sur chaque portée pour chaque incrément de calcul. À partir de ces données, les torseurs des efforts transmis dans le contact sont construits par sommations des contraintes. Un repère local est préalablement défini pour chaque portée. Ce repère est positionné au centre de la portée. À partir des contraintes de cisaillement et des glissements, l'énergie dissipée par frottement dans chaque portée est calculée.

Les surfaces des portées sont construites pour leur utilisation dans le code. Elles sont définies par les dimensions des portées et les rayons en sortie de portées. On choisira de



FIG. 4.33: Géométries utilisées dans le code éléments-finis et le code semi-analytique

les discrétiser avec 128 points dans la direction x (direction radiale du moteur), c'est-àdire la petite dimension de la portée et 256 points dans la direction y (direction axiale du moteur), c'est-à-dire la grande dimension de la portée. La distance entre chaque point est d'environ de 63 μ m le long de l'axe 0x et de 564 μ m le long de l'axe Oy. Les repères locaux de chaque portée sont définis à la figure FIG.4.32. Le bord d'attaque se trouve du coté des y négatifs pour la portée intrados et extrados. L'axe central du moteur est lui du coté des x négatifs et des x positifs pour la portée intrados et extrados et extrados respectivement.

Un premier résultat du modèle éléments-finis aube-disque est le tracé du rapport entre l'effort tangentiel et l'effort normal. L'axe des abscisses correspond aux 22 incréments du calcul. Le chargement maximal est atteint à l'incrément 8, à partir de cet instant les efforts centrifuge et aérodynamique sont relâchés. Ce tracé est donné pour la portée côté « intrados » et côté « extrados » de l'aube. On distingue deux types de comportement. Pour l'intrados, le rapport Q/P est égal au coefficient de frottement (0,6) jusqu'à l'incrément 8. La portée est donc en phase de glissement total durant la montée en régime du moteur. Après l'incrément 8, le régime moteur diminue, le mouvement de l'aube tend à s'inverser. Celle-ci, étant à ce moment serrée entre les dents du disque, ne se met pas à glisser immédiatement. La portée est en phase de glissement partiel. Le chargement tangentiel sur la portée diminue puis change de signe. Puis à la fin du cycle, la pression exercée par les dents du disque diminue et la portée termine sa course en glissement total. La portée coté extrados subit approximativement le même traitement, à l'exception que les phases correspondant au glissement total pour l'intrados, sont des phases de glissement partiel proches de la limite du glissement total.

Le comportement des portées de l'aube explique l'intérêt du développement dans le code de contact d'un algorithme pour la résolution du contact tangentiel piloté en effort et en glissement partiel et d'un algorithme pour la résolution du contact tangentiel piloté à partir des énergies dissipées par frottement et en glissement total.



FIG. 4.34: Rapport entre l'effort normal et tangentiel pour chaque portée

4.2.2 Modélisation d'un cycle de chargement

Nous allons ici détailler les résultats en terme de pressions, cisaillements en surface et glissements fournis par le code de contact et comparer aux résultats issus du modèle éléments-finis. Un cyle de fretting pour chaque portée correspond à 22 incréments. Nous ne nous attarderons pas à donner les résultats de chaque incrément. Il est possible de sélectionner des incréments dont les résultats et comportements sont différents a priori. Sur la portée intrados nous analyserons se qui se passe au niveau de :

l'incrément 8, Le chargement normal y est maximal, et le contact se trouve en glissement total ;

l'incrément 12, Le contact se trouve en phase de glissement partiel;

l'incrément 15, Le contact se trouve en phase de glissement partiel mais la direction du chargement tangentiel s'est inversée.

Sur la portée extrados nous analyserons se qui se passe au niveau de l'incrément 8 ; le chargement normal y est maximal, et le contact se trouve en glissement partiel.

Cette analyse sera effectuée avec le code de contact en augmentant le degré de complexité du modèle :

- Simulation n° 1 Le contact normal est résolu sans prise en compte des moments de flexion M_x et M_y . Le contact tangentiel est résolu de façon uni-axiale. Le chargement tangentiel est en effet dominant dans la direction x. On supposera que tout se fait dans cette direction. L'influence de l'effort en x sera négligée dans la direction y (couplage 0). Le problème tangentiel est ainsi grandement simplifié.
- Simulation n° 2 Idem à la simulation n° 1, excepté que les moments de flexion sont intégrés à la solution du contact normal.
- Simulation n° 3 Le contact normal est résolu avec prise en compte des moments de flexion M_x et M_y . Le contact tangentiel est résolu de façon bi-axiale. L'influence de l'effort en x n'est plus négligée dans la direction y et inversement (couplage 1). Le moment de rotation n'est pas pris en compte.
- Simulation n° 4 Idem à la simulation n° 3, excepté que le moment de rotation est intégré à la solution du contact tangentiel.



FIG. 4.35: Trajet des efforts appliqués sur chaque portée

Pressions et chargement normal Le détail de l'évolution du chargement sur les portées intrados et extrados est donné aux figures FIG.4.35 et FIG.4.36. Pour la simulation n^o 1, les moments de flexion ne sont pas imposés. Ceux-ci restent alors à une valeur nulle. Le même résultat peut être donné en terme de centre des pressions. En début et fin de cycle, c'est-à-dire en limite de contact, ces centres de pression sont très désaxés. La solution avec ou sans prise en compte des moments de flexion est donnée à la figure FIG.4.37 pour l'incrément 8 mais également pour l'incrément 1 où le mésalignement est plus important.

Une représentation tridimensionnelle du champs de pression obtenue à partir de la simulation n° 2 est donnée à la figure FIG.4.38. Le premier constat est l'importante amplitude des pics de pression et leur très fine largeur par rapport aux dimensions de la pièce. Cela souligne les dimensions très contraignantes de la géométrie. Notamment les rayons en sortie de portée qui peuvent être très faibles (≈ 1 mm pour les rayons du disque au niveau du bord d'attaque et du bord de fuite). La parfaite représentation de ces pics n'est pas abordable avec les tailles de discrétisation utilisées. Augmenter le nombre de points par deux dans chaque direction reste abordable, mais plus risque d'être très coûteux en temps de calcul pour des pics de pression qui restent néanmoins très localisés. Pour insister sur la taille de la discrétisation sur la solution en pression, une simulation identique à la n° 2 est faite, avec une discrétisation plus large proche de celle du modèle élément-finis. Les deux solutions se rapprochent alors et les pics de pression sont moins bien isolés.

Cisaillements et chargement tangentiel Les chargements relatifs au problème tangentiel sont illustrés pour les simulations n° 2, 3 et 4. La composante selon y nulle de l'effort tangentiel rappelle l'hypothèse uni-axiale de la simulation n° 2. Les moments de torsion



FIG. 4.36: Trajet des moments appliqués sur chaque portée



FIG. 4.37: Positions du centre de pression

ne sont pas imposés aux simulations n^o 2 et 3. Par contre ce moment de torsion est imposé à la simulation n^o 4. Cependant la prise en compte de ce moment de torsion n'est possible qu'au travers de l'algorithme de contact tangentiel en glissement partiel. En glissement total (incréments 9 à 17), ce moment est laissé libre. Le résultat est cependant correct. L'explication est donnée par la composante de rotation de corps rigide qui devient négligeable par rapport aux translations tangentiels de corps rigide.

Les profils de cisaillement sont donnés aux incréments 8, 12 et 15 pour la portée intrados aux figures FIG.4.40, FIG.4.41 et FIG.4.42. Les composantes suivant x et y sont données. La composante selon y, conformément au chargement dans la même direction se révèle faible par rapport à la composante dans la direction x. Évidemment la composante en y est nulle dans le cas de la simulation n° 2 faisant l'hypothèse d'un chargement uniaxial. La comparaison entre les résultats en terme de cisaillement du code semi-analytique et du code éléments-finis doit être fait à partir des composantes x qui sont quasiment

165



FIG. 4.38: Pression de contact à l'incrément de chargement maximal pour la portée intrados



FIG. 4.39: Pression de contact à l'incrément de chargement maximal (8) pour la portée intrados

égales à l'amplitude du cisaillement. La comparaison des composantes en y permet essentiellement de souligner l'angle entre les directions des cisaillements obtenues à partir de chaque méthode. Concernant le résultat à l'incrément 8, celui-ci est équivalent au résultat en terme de pression, le glissement étant total au cours de cet incrément. Pour principale différence on peut noter l'inversion de signe pour la composante y au niveau des y positifs. Cela traduit un légère variation angulaire sur le cisaillement entre les deux solutions. Les résultats à l'incrément 12, c'est-à-dire pour un incrément en glissement partiel sont cohérents entre le code semi-analytique et les éléments-finis. À l'incrément 15, donc toujours en glissement partiel mais après inversion de sens du chargement tangentiel, des différences plus marquées apparaissent. La tendance globale reste bonne mais quelques différences de signe et donc de direction de cisaillement apparaissent au niveau des pics de pression.



FIG. 4.40: Cisaillement à l'incrément 8 pour la portée intrados



FIG. 4.41: Cisaillement à l'incrément 12 pour la portée intrados



FIG. 4.42: Cisaillement à l'incrément 15 pour la portée intrados

Glissements Les solutions entre le code semi-analytique et le modèle éléments-finis étant validées en terme de cisaillement, il s'agit maintenant de s'intéresser au second terme entrant dans la loi d'usure : le glissement. Il est primordial d'obtenir une bonne approximation des glissements. C'est ceux-ci qui vont contrôler la cinétique d'usure. De plus le poids de ces glissements est double dans la loi d'usure 2.

Les glissements à l'incrément 8 (cf. FIG.4.43) pour la portée intrados, celle-ci étant en état de glissement total, sont déterminés à partir de l'équilibre en terme d'énergie dissipée par frottement. Il en découle un résultat conforme en terme d'amplitude globale de glissement entre les solutions semi-analytiques et la solution éléments-finis. La distribution locale des glissements reste cependant légèrement différente entre les deux solutions. Cette distribution de glissement est correcte le long de l'axe x, c'est-à-dire que le glissement est constant d'un bord à l'autre de la portée dans la direction radiale du moteur. Par contre la distribution de glissement reste beaucoup plus homogène dans le cas semi-analytique que dans le cas éléments-finis le long de l'axe y. Cette différence notable ne peut-être sans conséquences sur les résultats en terme d'usure. Pour l'incréments 12 (cf. FIG.4.44), c'est-à-dire en situation de glissement partiel, les portées sont quasiment adhérentes en tout point, ce résultat est retrouvé par les deux méthodes de calcul. Pour l'incrément 15 (cf. FIG.4.45), une petite zone de glissement apparaît. Le code semi-analytique retrouve cette zone, mais l'amplitude est différente. Par contre dans la direction y une zone de glissement apparaît également. Celle-ci n'est pas retrouvée avec le code semi-analytique. Cependant cette zone de glissement très localisée (sur un nœud) dévoile surtout la déficience du modèle éléments-finis dont les résultats ne sont pas très réguliers.



FIG. 4.43: Glissement à l'incrément 8 pour la portée intrados



FIG. 4.44: Glissement à l'incrément 12 pour la portée intrados



FIG. 4.45: Glissement à l'incrément 15 pour la portée intrados

Ces derniers résultats de glissement pour la configuration en glissement partiel ne permettent pas d'estimer la qualité des solutions obtenues à partir du code semi-analytique. La portée extrados est elle de façon permanente en glissement partiel. On peut cependant observer une dissipation d'énergie par frottement non négligeable, notamment à l'incrément 8. Ce qui traduit un glissement assez important. Les solutions obtenues à partir du modèle éléments-finis et du code semi-analytique sont données aux FIG.4.46 et FIG.4.47 respectivement. Le premier commentaire à faire est l'amplitude des glissements qui n'est pas la même et ne permet pas de tracer les résultats sur un même graphe. Un facteur d'ordre 10 différencie les solutions du code semi-analytique de celles du code élémentsfinis. Les zones de glissement et d'adhérence sont cependant cohérentes, mais seulement pour la simulation nº 4, c'est-à-dire lorsque le moment de torsion est pris en compte. On souligne ainsi l'importance de ce moment de torsion sur la répartition des zones de glissement et d'adhérence.

Plusieurs hypothèses ont été émises quand à l'écart obtenu pour les glissements pour les deux modèles. La première est la présence du revêtement sous forme d'interférence négative entre les portées en vis-à-vis. Ce revêtement se traduit comme un vide incompressible est qui n'est pas pris en compte dans le modèle semi-analytique. Un second modèle FEM réalisé par Snecma a été étudié. Dans celui-ci le revêtement est maillé et ses propriétés élastiques sont choisies égales à celle du titane. Une première observation est un modèle qui converge plus rapidement et qui donne des résultats plus réguliers que le modèle initial. Cependant le problème de glissement n'est pas résolu, l'ordre de grandeur reste le même. La deuxième hypothèse repose sur l'hypothèse de découplage des effets structurels et des effets du contact au niveau de la géométrie des interfaces de contact. Après vérification, les contraintes de structures n'entrainent pas de distortion globale des surfaces en contact. Enfin la dernière hypothèse qui reste à vérifier est que l'hypothèse des massifs semi-infinis est abusive au niveau de la description du contact et se traduit par une différence de rigidité entre les massifs finis de l'aube et du disque et les massifs semi-infinis assez importante pour obtenir des déplacements élastiques superficiels très différents.



FIG. 4.46: Glissement à l'incrément 8 pour la portée extrados



FIG. 4.47: Glissement à l'incrément 8 pour la portée extrados



FIG. 4.48: Énergie dissipée par frottement à chaque incrément

173

Usures Les usures consécutives à l'application d'un seul cycle de fretting sont données aux figures FIG.4.51 et FIG.4.52. La loi d'usure 2 est utilisée avec un coefficient d'usure $\alpha_{usure} = * * * * \frac{\mu m^3}{J \cdot \mu m}$. Les courbes noires représentent les profils d'usure obtenus à partir du modèle FEM et serviront de références. En couleur sont tracés les résultats des quatre simulations précédentes obtenues avec le code SA. Deux simulations, la n° 5 et la n° 6 ont été ajoutées. Ces dernières simulations correspondent à une usure calculée à partir des résultats en glissement fournis par le code éléments-finis. Le problème normal est cependant résolu à partir du code semi-analytique, en tenant compte ou non des moments de flexion pour la simulation nº 6 et nº 5 respectivement. Les cisaillements en surface sont obtenus par application directe de la loi de Coulomb à partir des glissements obtenus par le modèle éléments-finis et les pressions de contact obtenus à partir du code SA. On obtient donc par ce biais les cisaillements dans les zones de glissement. Les cisaillements dans les zones d'adhérence ne peuvent être déterminés, mais la démarche est suffisante à la détermination de l'usure. Le principal défaut de cette démarche est que le calcul d'usure devient encore plus dépendant de la solution élément-finis. Cependant dans l'état actuel des résultats obtenus pour les profils de glissements à partir du code SA, il est préférable d'utiliser les valeurs du modèle éléments-finis. La procédure mise en place est résumée sur le diagramme de la figure FIG.4.50. Pour la portée intrados, l'erreur en terme de volume usé est négligeable entre les simulations nº 1, 2, 3 et 4 et les simulations nº 5 et 6. L'énergie dissipée est avant tout le fruit des incréments en glissement total, situation dans laquelle le code SA offre des résultats comparables au modèle FEM. Cependant la forme du profil de glissement reste prépondérante sur la solution en terme d'usure. Ainsi la différence à l'incrément 8 entre le profil de glissement obtenu entre le code SA et le modèle FEM selon la direction y précédemment soulignée se répercute sur le résultat d'usure. Au final, si l'usure obtenue par éléments-finis est choisie comme référence, la simulation n° 6 est alors la plus correcte. Ce constat est identique pour la partie extrados. Le facteur 10 entre les glissements FEM et SA devient un facteur 100 sur l'usure. Une erreur non seulement en terme de distribution mais également en terme de volume d'usure total survient. Enfin, ces simulations ne sont pas égales en temps de calcul étant donnée la complexité croissante du modèle de contact lors du passage de la simulation nº 1 à n° 4. La simulation n° 5 et 6 ne concernant que le contact normal sont alors beaucoup plus brèves. Ces temps de calculs sont schématisés à la figure FIG.4.49 pour un cycle de fretting.



FIG. 4.49: Temps de calcul pour un cycle de fretting



FIG. 4.50: Simulation d'usure multi-échelles simplifiée





FIG. 4.51: Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée intrados non-usée

176



FIG. 4.52: Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée extrados non-usée

4. Applications

Une simulation d'usure est entreprise à partir de la simulation n^o 6 jusqu'à 110 000 cycles. Un des objectifs de cette simulation est de prélever les usures à différents instants de la simulation afin de réinjecter ces usures dans le modèle FEM. On ferme ainsi la boucle entre le code SA et le modèle FEM. Les nouveaux modèles FEM sont résolus et les données au niveau du contact obtenues. Une comparaison entre les résultats obtenus avec le modèle sans usure et avec les modèles avec différents niveaux d'usure peut être fait. Ainsi on observant la variation des paramètres du contact qui sont utilisés en entrée du code SA, il sera possible de valider l'hypothèse de la non-variation de ceux-ci au cours du processus d'usure ou le cas échéant de déterminer une plage d'usure durant laquelle ces données peuvent être supposées constantes.

Pour mener à bien cette étude, il faut d'abord automatiser une procédure de remplacement des surfaces du modèle FEM à partir des usures obtenues avec le code SA. La stratégie adoptée est un déplacement des nœuds des surfaces maîtres et esclaves de chaque portée, d'une amplitude égale à l'usure obtenue au point le plus proche sur la géométrie utilisée dans le code SA, et ce dans la direction normale au plan des portées. Ces calculs éléments-finis sur surfaces usées ont été entrepris par Fulleringer [FUL 06] au cours de son stage de fin d'étude. Il s'avéra difficile de faire converger les modèles intégrant l'usure des surfaces. Ces problèmes de convergence sont causés par la mise en contact de surfaces usées donc devenues non-planes. Pour pallier à cette difficulté Fulleringer modifia le jeu de données Abaqus en incorporant des ressorts de faibles raideurs qui permettent de retenir l'aube et favoriser la mise en contact (cf. FIG.4.53). La seconde recommandation soulignée par Fulleringer pour faire aboutir le calcul est d'imposer un premier incrément de temps de calcul très court pour favoriser la mise en contact. Ces modifications ont été effectuées par Fulleringer sur le modèle initialement présenté prenant en compte un revêtement à partir de l'interférence. Une comparaison de ces deux modèles est donnée à l'annexe D page 211 à partir des tracés de l'évolution des différentes variables utiles à la résolution du contact et du problème d'usure. Les efforts et moments restent équivalents au cours du temps pour les deux modèles, excepté en fin de cycle. On retrouve cette différence au niveau de l'énergie dissipée par frottement cumulée. Cette différence intervient du fait d'un glissement plus prononcé en fin de cycle pour le modèle sans ressort. Les tracés des glissements cumulés illustrent ce constat. Le modèle modifié offre donc une solution qui sera différente en terme d'usure (moins d'usure) en comparaison au modèle initial. On peut cependant noter à travers les variations de paramètres comme le moments M_x que la solution pour le modèle modifié est plus stable. Tout ces résultats soulignent l'instabilité du modèle en fin de cycle après déchargement lors de la perte progressive du contact, hors à cette instant les glissements peuvent être importants. La modélisation éléments-finis du système aube-disque devrait donc être améliorée si l'on veut procéder à des estimations d'usure, dans le cas suivant une différence de 30 % de l'énergie dissipée dans le contact va entraîner une différence supérieure du taux d'usure entre les deux modèles.

Les simulations d'usure sont donc entreprises à partir des résultats du modèle de Fulleringer. Un incrément d'usure maximal entre chaque cycle est choisi à Δh_{max} =0.05 μ m. Un cycle de fretting est ici décomposé en 17 incréments. Pour effectuer ces 110 000



FIG. 4.53: Le modèle éléments-finis modifié avec l'incorporation de ressorts

cycles, pour la partie extrados, 1 158 cycles de fretting sont calculés, ce qui revient à résoudre 19 686 fois le problème normal. Pour l'intrados, 2 068 cycles sont simulés, soit 35 156 résolutions du problème normal. Environ 4 heures de calcul ont été nécessaires pour l'extrados contre 12 heures pour l'intrados.

Le nombre de calculs réduit pour l'extrados s'explique par une usure plus faible que l'intrados. L'évolution du volume usé (cf. FIG.4.54) est quasiment linéaire pour les deux portées. La profondeur d'usure maximale initialement plus importante pour l'extrados du fait de la forte dissymétrie du profil d'usure devient progressivement plus importante au niveau de l'intrados qui use plus. L'évolution de la profondeur d'usure ralentit dans les deux cas avec l'usure des portées. Ce ralentissement est une conséquence de l'aplanissement des profils de pression de contact et du « gommage » des pics de pression du fait des nouvelles surfaces usées.



FIG. 4.54: Évolution de l'usure au niveau des deux portées

L'évolution de ces pressions de contact est donnée aux figures FIG.4.55 et FIG.4.56 pour les deux portées et à l'incrément maximal de chargement. Sont représentées, du plus sombre au plus clair les résultats obtenus tout les 10 000 cycles d'usure entre 0 et 110 000 cycles. L'évolution de l'usure totale (soit deux fois l'usure sur chaque corps ; l'usure est équi-répartie sur les deux corps dans cette simulation) est donnée en suivant la même convention de couleur aux figures FIG.4.57 et FIG.4.58. La dissymétrie initiale des profils d'usure est conservée et même augmentée avec l'usure. Comme le montre les profils usés dans la direction y, leur forme est très dépendante de la distribution des glissements. L'utilisation des glissements prélevés à partir du modèle FEM, et n'évoluant pas au cours de l'usure est donc une hypothèse très forte.

À l'annexe E page 217 sont ajoutés les tracés des résultats des modèles FEM auxquels ont été ajoutés l'usure des portées. 500, 1 000, 5 000, 10 000, 20 000, 50 000 et 110 000 cycles ont été simulés. Ce dernier n'ayant pas convergé aucun résultat ne sera donné. Il apparaît que les chargements normaux et tangentiels sont peu affectés par l'usure en restant constant. Une différence d'énergie cumulée existe entre les différents modèles arrivés en fin de cycle. Cependant les différences observées n'obéissent à aucune logique permettant de faire le lien avec le taux d'usure de la surface. On imputera donc ces différences aux difficultés de convergence du modèle en fin de cycle. L'écart principal conséquent à l'usure des surfaces se situe au niveau du moment de flexion M_{y} et donc pour la coordonnée en x du centre de pression : x_c . Une erreur croissante est donc faite au cours du processus itératif d'usure. Cette erreur est donnée à la figure FIG.4.59 selon la formule $\frac{|x_c(N \ cycles) - x_c(0 \ cycles)|}{I}$, où L_x est la largeur de la portée dans la direction x. Cette erreur s'explique par le moment autour de x qui est influencé par la répartition d'usure le long de l'axe x, c'est-à-dire dans la direction de la plus courte dimension de la portée. Le rapport de longueur étant d'environ 20 entre les deux directions, l'usure modifie surtout l'angle moyen qui peut être approximé entre la portée usée et la portée non-usée autour de l'axe Oy que celui autour de l'axe Ox.

Dans l'annexe E sont également ajoutés les tracés des usures pour un cycle de fretting obtenues à partir du modèle FEM à différents stades d'usure (courbe noire) et les usures obtenues lors de la simulation d'usure avec le code SA aux mêmes stades (courbes grises). La première différence à relever imputable à la différence d'énergie dissipée par frottement cumulée et donc aux glissements en fin de cycle est le volume d'usure qui n'est pas respecté. Le deuxième point est la répartition de cette usure. Dans le cas FEM comme SA on observe un « gommage » des pics d'usure. La répartition dans la direction y est relativement satisfaisante entre les deux modèles. La répartition le long de la direction x est elle beaucoup moins respectée au fur et à mesure de l'usure. On observe un basculement de l'angle global de cette répartition d'usure sur le modèle FEM qui n'est pas présent dans le cas du modèle SA si les données ne sont pas mises à jour, notamment le centre de pression. Cette différence est liée au moment de flexion M_y qui varie avec l'usure. Ce basculement n'est pas visible jusqu'à 10 000 cycles sur la portée intrados.



FIG. 4.55: Pression de contact à l'incrément de chargement maximal (8) pour la portée intrados à différents niveaux d'usure



FIG. 4.56: Pression de contact à l'incrément de chargement maximal (8) pour la portée extrados à différents niveaux d'usure



FIG. 4.57: Usure totale sur chaque corps pour la portée intrados à différents niveaux d'usure



FIG. 4.58: Usure totale sur chaque corps pour la portée extrados à différents niveaux d'usure

181



FIG. 4.59: Erreur sur le position du centre de pression avec l'usure

Bilan des simulations d'usure sur le contact aube-disque Des simulations d'usure à partir du code développé au cours de cette thèse ont été effectuées sur un exemple industriel : le contact aube-disque de soufflante. Le code de calcul est utilisé comme zoom sur les zones de contact à partir de résultats provenant d'un modèle éléments-finis de la structure, d'où le terme de modélisation multi-échelles. L'objectif final est de pouvoir utiliser le plus indépendamment possible du modèle FEM le code semi-analytique. Cependant des différences, rencontrées aux niveaux des glissements entre les modèles FEM et SA, et non expliquées nous obligent par précaution à utiliser le code SA dans une configuration simplifiée où seul le contact normal est résolu. Le calcul d'usure a été effectué entre 0 et 110 000 cycles sans bouclage entre le modèle structurel et les deux modèles de contact pour chaque portée. Il est donc fait l'hypothèse que les données d'entrées du code SA et donc les résultats du modèle FEM ne varient pas avec l'usure. Après vérification du comportement des modèles FEM avec des géométrie usées, il apparaît une variation non-négligeable du moment de flexion M_{ν} . Cette variation n'entraîne cependant pas de conséquences dramatiques jusqu'à 10 000 cycles, soit pour une usure maximale de presque 20 µm de la portée intrados. Ces simulations ont également souligné l'importance du modèle FEM dans la prédiction de l'usure. D'une part il faut un modèle qui puisse converger lorsque sa géométrie est mise à jour à partir de l'usure calculée. Cette condition parait indispensable pour pouvoir faire des simulations avec des usures supérieures à 20 µm où le bouclage entre le modèle FEM et SA doit être fait. D'autre part, les résultats en terme de glissement sont très sensibles au modèle FEM et à sa vitesse de convergence. Il faut alors un modèle stable, le dernier modèle fourni avec un revêtement maillé paraît adéquate. Il faut également piloter la taille des incréments de temps de ces modèles de façon à ce que ces incréments de temps ne soit pas trop grands ce qui peut créer des profils de glissement cumulé non-continus et peut détériorer le résultat en usure. 4. Applications

Conclusion et perspectives

Conclusion

La problématique industrielle du fretting des pieds d'aube de soufflante a insufflé ce travail de thèse. Pour répondre aux besoins du motoriste Snecma, un modèle d'étude du contact a été développé. Dans un premier temps, seules les sollicitations de type oligo-cycliques donc dépendantes de la force centrifuge appliquée aux aubes sont supposées intervenir dans la quantification de l'usure. Des lois empiriques proposées par le LTDS¹, basées sur l'énergie dissipée par frottement et adaptées à cette problématique sont utilisées. Pour analyser un contact et quantifier son usure, le modèle de contact à développer doit s'affranchir de temps de calcul trop long. D'une part, l'usure est un processus cyclique à simuler. D'autre part l'analyse d'un contact doit se faire sur des discrétisations très fines.

Pour analyser les contacts en général et le contact aube-disque en particulier, une modélisation dite « semi-analytique » a été effectuée. Cette modélisation est basée sur la théorie des massifs élastiques semi-infinis qui permet de construire la relation entre les sollicitations normales et tangentielles du contact et les déplacements élastiques résultants des surfaces en contact par le biais de solutions analytiques élémentaires. Cette relation s'exprime sous forme de produits de convolution discrète entre des coefficients d'influence et les sollicitations du contact : pressions et cisaillements. La résolution du contact se fait en décomposant ce dernier sous forme de deux problèmes indépendants, le problème de contact normal et le problème de contact tangentiel. Une des difficultés propres à ces deux problèmes est la détermination des zones de contact du problème normal et des éventuelles zones d'adhérence dans le cas du glissement partiel pour le problème tangentiel. Le problème qui peut s'exprimer sous forme de minimisation de l'énergie complémentaire, est résolu comme un problème d'optimisation sous contraintes. De part ses propriétés de convergence, l'algorithme du gradient conjugué est alors utilisé. Pour accélérer le produit de convolution qui s'avère coûteux en temps de calcul, les transformées de Fourier rapides (FFT) sont utilisées. Quelques minutes suffisent alors pour résoudre des problèmes de contact sur une grille de plusieurs dizaines de milliers de points. Les problèmes normal et tangentiel sont supposés indépendants, le problème normal se résout sans connaitre la solution du problème tangentiel, puis le problème tangentiel est résolu à partir de la solution du problème normal pour vérifier la loi de frottement de

¹Laboratoire de Tribologie et de Dynamique de Structures, École Centrale de Lyon

Coulomb. Cependant ce découplage n'est vérifié que pour le contact élastique entre deux matériaux identiques. Lorsque les matériaux différent, un couplage existe et doit être pris en compte. La méthode utilisée consiste alors à itérer la résolution du problème normal et tangentiel jusqu'à convergence.

Le modèle de contact développé a été validé par comparaison à des solutions analytiques données dans la littérature. Le problème de contact normal est parfaitement résolu à partir d'un effort ou d'un déplacement de corps rigide normal. Les moments de flexion peuvent être pris en compte par l'intermédiaire d'un mésalignement des surfaces de contact. Le problème tangentiel est également résolu en effort ou en déplacement de corps rigide. Le moment de torsion peut être intégré dans la résolution du problème. Les solutions analytiques utilisées pour la validation outre le problème de contact de Hertz, s'apparentent toute à des situations de fretting qui peuvent être répertoriées sous les termes de modes de fretting suivant la direction des sollicitations. Les contraintes en sous-couche ont aussi été validées par comparaison avec des solutions analytiques. Enfin une étude menée sur le contact elliptique pour le problème de Cattaneo-Mindlin a été faite pour analyser l'effet du frottement et de l'ellipticité sur les solutions du contact en surface et en sous-couche. Le même type d'étude a été mené sur le contact sphérique pour des matériaux non identiques. Dans ce dernier cas le couplage du problème normal et tangentiel illustre l'importance de ce couplage sur la solution.

Le problème de contact étant validé, la loi d'usure énergétique est implémentée pour obtenir et quantifier des usures en fretting. La loi établie par le LTDS, formulée globalement i.e. sous forme de volume d'usure est écrite sous une forme locale qui lie l'énergie dissipée localement par frottement à une profondeur d'usure. Deux formulations locales sont présentées. L'implémentation se fait alors par un simple réajustement de la distance entre les deux corps qui définit la géométrie du contact. Divers simulations sont alors menées sur la géométrie élémentaire cylindre-plan habituellement utilisée par l'expérimentateur. Elles permettent d'observer que l'usure tend à aplanir le profil des pressions; le nombre de cycles entre chaque mise à jour des géométries doit être correctement fixé pour obtenir une usure non-bruitée pour des temps de calculs acceptables ; les résultats d'usure en supposant un comportement tangentiel rigide du contact sont équivalents aux résultats élastiques pour des simulations en glissement total. Une comparaison des profils d'usures obtenus par l'expérience et par la simulation a permis de valider le modèle d'usure. Enfin une étude de l'usure en glissement partiel (stick-slip) a été effectuée, il en résulte que l'usure déjà très faible sur une surface vierge tend à s'annuler pour une surface usée à partir de la loi énergétique.

Le modèle de contact et d'usure a ensuite été appliqué au cas industriel du fretting des pieds d'aube de soufflante. Le modèle de contact est couplé à un modèle éléments finis de la structure aube-disque pour former une modélisation multi-échelles de la structure. La résolution préalable du modèle structural permet de déterminer les efforts et énergies transmises dans le contact pour résoudre ensuite le contact de manière plus fine avec le modèle semi-analytique. Un algorithme spécifique aux situations de glissement total qui apparaissent dans le contact comparées entre le modèle semi-analytique. Les solutions du problème de contact comparées entre le modèle semi-analytique et le mo-

187

dèle éléments finis permettent de valider le code en terme de pression et cisaillement de contact, cependant la solution en terme d'amplitude de glissement se révèle significativement différente pour les phases de glissement partiel. L'usure du contact aube-disque est alors effectuée à partir d'un modélisation multi-échelles simplifiée, où le problème normal est résolu par la méthode semi-analytique, et le problème tangentiel à partir des solutions du modèle éléments finis. Le calcul est effectué à partir des solutions du modèle éléments finis non-usé. Les géométries usées injectées dans le modèle éléments finis soulignent que le comportement peut être modifié surtout après 20 000 cycles, ce qui correspond à une usure de 20 μ m de la portée intrados.

Perspectives

Les perspectives pouvant être apportées à ce travail sont nombreuses.

Elles concernent d'abord l'amélioration du modèle de contact. D'une part, le revêtement des portées d'aube n'est pas pris en compte dans le modèle. De nombreux développements de revêtements simples ou multi-couches, de milieux à gradient de propriété existent dans la littérature et peuvent être facilement adaptés au modèle de contact. Cependant les modèles ne doivent pas présenter d'inhomogénéités dans les directions transverses du massif semi-infinis ou alors elle doivent présenter une certaine périodicité pour que les transformées de Fourier rapides puissent être utilisées. Prendre en compte un revêtement usé se révèle donc moins simple qu'il n'y parait. L'inhomogénéité qui apparaît est son épaisseur qui varie le long de la surface. Une solution brutale est de le simplifier par un tapis de ressorts indépendants les uns des autres. Le deuxième point est d'apporter plus de physique au modèle en ajoutant l'aspect plasticité. Le modèle ad'hoc existe, il s'agit donc de fusionner les codes. Ajouter la plasticité dans le cadre de la simulation d'usure n'est cependant pas forcément judicieux. Les temps de calcul augmentent et une première simulation a pu être réalisée sur le contact cylindre-plan vierge de toute usure. Il s'avère que la plasticité reste confinée aux bords du cylindre, entraînant un abaissement des pics de pression mais pas de changement significatif général du profil de pression. Ces pics de pression étant gommés avec l'usure, prendre en compte la plasticité devient inutile. Enfin pour la modélisation dite multi-échelles du contact aube-disque, il faut investiguer la source du désaccord entre les glissements obtenus par le modèle éléments finis et le code semi-analytique. L'objectif étant de pouvoir réaliser les calculs d'usure à partir d'un code s'affranchissant au maximum des résultats du modèle de la structure.

Le second type d'amélioration concerne plus spécifiquement le modèle d'usure. Aucune comparaison n'a été délivrée dans ce manuscrit mais, bien que concordant en terme de cinétique globale, la distribution de cette usure sur les portées n'est pas identique aux relevés profilométriques effectués sur les pièces en service. L'une des hypothèses à développer et à prendre en compte est le volume d'usure créé pendant les cycles en glissement partiel. Les sollicitations polycycliques fatiguent la superficie du contact, cette zone endommagée est ensuite éliminée après le passage d'une sollicitation oligocyclique. Le manque de formalisme existant ne permet pas d'intégrer l'usure en glissement partiel



FIG. 4.60: Comparaison entre une simulation élastique et élastoplastique du champ de pression et de contrainte de von Mises au cours d'un cycle de fretting du contact cylindreplan

dans notre modèle. Ce travail nécessiterait au préalable des efforts du point de vue expérimental. Un autre point qui semble être intéressant de développer est la prise en compte d'un coefficient de frottement local évoluant avec l'usure, notamment après l'élimination locale totale de la couche du revêtement. Cela s'apparente aux lois de mélange présentées au paragraphe 1.3.2 sur le modèle d'usure à la page 24.

Annexe A

Simulations en stick-slip du contact sphère-plan



FIG. A.1: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan *Oxz* pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour plusieurs coefficients de frottement au point A du chargement



FIG. A.2: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan *Oxz* pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour plusieurs coefficients de frottement au point B du chargement

Annexe B

Simulations en stick-slip du contact ellipsoïde-plan





(a) En y = 0 pour $\mu = 0,3$ au point de chargement A



(c) En y = 0 pour $\mu = 0.9$ au point de chargement A



(e) En y = 0 pour $\mu = 0,3$ au point de chargement B



(b) En x = 0 pour $\mu = 0,3$ au point de chargement A



(d) En x = 0 pour $\mu = 0.9$ au point de chargement A



(f) En x = 0 pour $\mu = 0,3$ au point de chargement B



(g) En y = 0 pour $\mu = 0.9$ au point de chargement B

 $\frac{0}{x/a}$

0.5

1

-0.5

(h) En x = 0 pour $\mu = 0,9$ au point de chargement B

FIG. B.1: Distribution de contraintes en surface pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique - pressions de contact *p* en noir et cisaillement *q* en bleu pour les différents rapports d'ellipticité - les résultats se superposent parfaitement

 p/p_0 et $q_x/(\mu p_0)$

0.5

0 -0.5

-1

-1



FIG. B.2: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \le 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0, 3$ au point A du chargement



FIG. B.3: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \ge 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0, 3$ au point A du chargement



FIG. B.4: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \le 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,3$ au point B du chargement



FIG. B.5: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \ge 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0, 3$ au point B du chargement


FIG. B.6: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \le 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point A du chargement



FIG. B.7: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \ge 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point A du chargement



FIG. B.8: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \le 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point B du chargement



FIG. B.9: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact elliptique pour plusieurs rapport d'ellipticité $a/b \ge 1$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point B du chargement

Annexe C

Simulations en stick-slip du contact sphère-plan pour des matériaux différents



FIG. C.1: Distribution de contraintes en surface pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0, 3$ au point A du chargement - $\frac{E_1}{E_2} = 1$ en noir, $\frac{E_1}{E_2} = 2$ en rouge, $\frac{E_1}{E_2} = 4$ en bleu et $\frac{E_1}{E_2} = 8$ en vert



FIG. C.2: Distribution de contraintes en surface pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0, 3$ au point B du chargement - $\frac{E_1}{E_2} = 1$ en noir, $\frac{E_1}{E_2} = 2$ en rouge, $\frac{E_1}{E_2} = 4$ en bleu et $\frac{E_1}{E_2} = 8$ en vert



FIG. C.3: Distribution de contraintes en surface pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point A du chargement - $\frac{E_1}{E_2} = 1$ en noir, $\frac{E_1}{E_2} = 2$ en rouge, $\frac{E_1}{E_2} = 4$ en bleu et $\frac{E_1}{E_2} = 8$ en vert



FIG. C.4: Distribution de contraintes en surface pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point B du chargement - $\frac{E_1}{E_2} = 1$ en noir, $\frac{E_1}{E_2} = 2$ en rouge, $\frac{E_1}{E_2} = 4$ en bleu et $\frac{E_1}{E_2} = 8$ en vert



FIG. C.5: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0,3$ au point A du chargement



FIG. C.6: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0,3$ au point B du chargement



FIG. C.7: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point A du chargement



FIG. C.8: État de contraintes de von Mises en sous-couche dans le plan Oxz pour le problème de Mindlin d'un contact circulaire pour deux corps élastiques différents et un coefficient de frottement $\mu = 0,9$ au point B du chargement

C. Simulations en stick-slip du contact sphère-plan pour des matériaux différents

Annexe D

211

Modèle FEM aube-disque avec ressorts

D.1 Portée extrados



FIG. D.1: Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée entre le modèle avec ou sans ressorts



FIG. D.2: Évolution du chargement entre le modèle avec ou sans ressorts



FIG. D.3: Évolution des moments entre le modèle avec ou sans ressorts

Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique

213



FIG. D.4: Glissement cumulé sur la portée extrados entre les modèles avec ou sans ressorts

D.2 Portée intrados



FIG. D.5: Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée entre le modèle avec ou sans ressorts



FIG. D.6: Évolution du chargement entre le modèle avec ou sans ressorts



FIG. D.7: Évolution des moments entre le modèle avec ou sans ressorts



FIG. D.8: Glissement cumulé sur la portée intrados entre les modèles avec ou sans ressorts

D. Modèle FEM aube-disque avec ressorts

Annexe E

217

Modèle FEM aube-disque avec usure

E.1 Portée intrados



FIG. E.1: Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée à différents niveaux d'usure



FIG. E.2: Évolution du chargement à différents niveaux d'usure



FIG. E.3: Évolution des moments à différents niveaux d'usure

Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique



FIG. E.4: Position du centre de pression à différents niveaux d'usure



FIG. E.5: Glissement cumulé - Intrados

E.2 Portée exrados



FIG. E.6: Évolution de l'énergie dissipée par frottement cumulée à différents niveaux d'usure



FIG. E.7: Évolution du chargement à différents niveaux d'usure



FIG. E.8: Évolution des moments à différents niveaux d'usure



FIG. E.9: Position du centre de pression à différents niveaux d'usure



FIG. E.10: Glissement cumulé sur la portée extrados

E.3 Usure



FIG. E.11: Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée intrados à différents niveaux d'usure

223



FIG. E.12: Usures consécutives à un cycle de fretting sur la portée extrados à différents niveaux d'usure

Bibliographie

[AHM 83] Ahmadi N., Keer L. M., Mura T.

Non-hertzian contact stress analysis for an elastic half space-normal and sliding contact. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 19(4), 1983, p. 357–373.

[AI 99] AI X., SAWAMIPHAKDI K.

Solving elastic contact between rough surfaces as an unconstrained strain energy minimization by using CGM and FFT Techniques. *ASME J. Tribol.*, vol. 121, 1999, p. 639–647.

[ALE 86] ALEXANDROV V., ROMALIS B. Contact problems in mechanical engineering. Mashinostroenie, 1986.

[ALL 97] ALLWOOD J. M., BRYANT G. F., STUBBS R. E. An efficient treatment of binary nonlinearities applied to elastic contact problems without friction. J. Eng. Math., vol. 31, 1997, p. 81–98.

[ALL 05] ALLWOOD J. M.

Survey and performance assessment of solution methods for elastic rough contact problems. *ASME J. Tribol.*, vol. 127, 2005, p. 10–23.

[ANT 04] ANTALUCA E., NÉLIAS D., CRETU S.

A three-dimensional friction model for elastic-plastic contact - Application to dented surfaces. *ASME/STLE International Joint Tribology Conference*, 2004. paper TRIB2004-64331.

[ANT 05] ANTALUCA E.

Contribution à l'étude des contacts élasto-plastiques - effet d'un chargement normal et tangential. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2005.

[ARA 01] ARAKERE N. K., SWANSON G. Fretting Stresses in Single Crystal Superalloy Turbine Blade Attachments. J. Tribol., vol. 123, nº 2, 2001, p. 413–423, ASME.

[ARC 53] ARCHARD J. F.

Contact and rubbing of flat surfaces. J. Appl. Phys., vol. 24, 1953, p. 981-988.

[BAR 58] BARWELL F. T.

Wear of metals. *Wear*, vol. 1, n^o 4, 1958, p. 317–332.

[BEI 03] BEISHEIM J. R., SINCLAIR G. B.

On the Three-Dimensional Finite Element Analysis of Dovetail Attachments. J. Turbomach., vol. 125, nº 2, 2003, p. 372–379, ASME.

[BEN 67] BENTALL R. H., JOHNSON K. L. Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers. <i>International Journal of</i>
Mechanical Sciences, vol. 9, nº 6, 1967, p. 389-404.
[BER 88] BERTHIER Y.
Mécanismes et tribologie. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1988.
[BJö 94] BJÖRKLUND S., ANDERSSON S. A numerical model for real elastic contacts subjected to normal and tangential loading. <i>Wear</i> , vol. 179, 1994, p. 117–122.
[BOU 85] BOUSSINESQ J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élas- tiques. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
[BOU 04] BOUCLY V.
Modélisation semi-analytique du contact thermo-élasto-plastique. Master's thesis, INSA de Lyon, 2004.
[BOU 05] BOUCLY V., NÉLIAS D., LIU S., WANG Q. J., KEER L. M. Contact Analyses for Bodies with Frictional Heating and Plastic Behavior. ASME J. Tribol., vol. 127, 2005, p. 355–364.
[BRA 90] BRANDT A., LUBRECHT A. A. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. J. Comp. Phys., vol. 90, 1990, p. 348–370.
[CAI 05] CAI S., BHUSHAN B. A numerical three-dimensional contact model for rough, multilayered elastic/plastic solid surfaces. <i>Wear</i> , vol. 259, nº 7-12, 2005, p. 1408–1423.
[CAT 38] CATTANEO C.
Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi. <i>Accademia Nazio-nale Lincei, Rendiconti, Ser. 6</i> , vol. XXVII, 1938, p. 342–348, 434–436, 474–478.
[CER 82] CERRUTI V. Ricerche intorno all'equilibrio de' corpi elastici isotropi. <i>Rend. Accad. Lincei</i> , vol. 3, nº 13, 1882, p. 81–122.
[CIA 98a] CIAVARELLA M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory. International Journal of Solids and Structures, vol. 35, nº 18, 1998, p. 2349–2362.
[CIA 98b] CIAVARELLA M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II–Examples. <i>Internatio-nal Journal of Solids and Structures</i> , vol. 35, nº 18, 1998, p. 2363–2378.
[CIA 99] CIAVARELLA M. Indentation by nominally flat or conical indenters with rounded corners. <i>International Journal of Solids and Structures</i> , vol. 36, n ^o 27, 1999, p. 4149–4181.
[CON 71] CONRY T. F., SEIREG A.A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. J. Appl. Mech., vol. 38, 1971, p. 387–392.
226 Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique

[CON 06] CONNER B. P., NICHOLAS T. Using a Dovetail Fixture to Study Fretting Fatigue and Fretting Palliatives. J. Eng. Mater. Technol., vol. 128, nº 2, 2006, p. 133-141, ASME. [COO 65] COOLEY J. W., TUKEY J. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Mathematics of Computation, vol. 19, 1965, p. 297-301. [COR 99] CORMIER N. G., SMALLWOOD B. S., SINCLAIR G. B., MEDA G. Aggressive submodelling of stress concentrations. International Journal for Numerical *Methods in Engineering*, vol. 46, n^o 6, 1999, p. 889–909. [DAN 02] DANG VAN K., MAITOURNAM M. H. On some recent trends in modelling of contact fatigue and wear in rail. Wear, vol. 253, nº 1-2, 2002, p. 219–227. [DIC 06a] DICK T., CAILLETAUD G. Fretting modelling with a crystal plasticity model of Ti6Al4V. Computational Materials Science, vol. 38, nº 1, 2006, p. 113–125. [DIC 06b] DICK T., PAULIN C., CAILLETAUD G., FOUVRY S.

Experimental and numerical analysis of local and global plastic behaviour in fretting wear. *Tribology International*, vol. 39, nº 10, 2006, p. 1036–1044.

[DIN 04] DINI D., NOWELL D. Flat and rounded fretting contact problems incorporating elastic layers. *International Journal Of Mechanical Sciences*, vol. 46, nº 11, 2004, p. 1635–1657.

[DIN 05] DINTWA E., ZEEBROECK M. V., TIJSKENS E., RAMON H. Torsion of viscoelastic spheres in contact. *Granular Matter*, vol. 7, n^o 2, 2005, p. 169– 179.

[DUN 72] DUNDURS J., LEE M. S.

Stress concentration at a sharp edge in contact problems. *Journal of Elasticity*, vol. 2, 1972, p. 109–112.

[DUV 72] DUVAUT G., LIONS J. L. Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972.

[ELL 02] ELLEUCH K.

Comportement en fretting d'alliages d'aluminium - Effet de l'anodisation. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.

[FIL 04] FILLOT N.

Etude mécanique de l'usure - Modélisation par élements discrets des débits de troisième corps solide. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2004.

[FOU 96a] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L.

Quantification of fretting damage. Wear, vol. 200, 1996, p. 186–205.

[FOU 96b] FOUVRY S., KAPSA P., VINCENT L., VAN K. D. Theoretical analysis of fatigue cracking under dry friction for fretting loading conditions. *Wear*, vol. 195, n° 1-2, 1996, p. 21–34.

```
[FOU 97a] FOUVRY S.
```

Etude quantitatives des dégradations en fretting. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1997.

- [FOU 97b] FOUVRY S., KAPSA P., ZAHOUANI H., VINCENT L. Wear analysis in fretting of hard coatings through a dissipated energy concept. *Wear*, vol. 203–204, 1997, p. 393–403.
- [FOU 01] FOUVRY S., KAPSA P.

An energy description of hard coatings wear mechanisms. *Surf. Coat. Technol.*, vol. 138, 2001, p. 141–148.

- [FOU 04] FOUVRY S., DUÓ P., PERRUCHAUT P. A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage : friction, wear and crack nucleation. *Wear*, vol. 257, n° 90, 2004, p. 916–929.
- [FUL 06] FULLERINGER B. Rapport de stage : Calculs d'usure d'att

Rapport de stage : Calculs d'usure d'attaches AUBE/DISQUE sur fan type CFM56-5B. rapport, 2006, INSA de Lyon - Snecma.

```
[GAL 53] GALIN L. A.
```

Contact Problems in the Theory of Elasticity. Moscow-Leningrad, October 1953. English translation by H. Moss, edited by I. N. Sneddon, North Carolina State College, Departments of Mathematics and Engineering Research, NSF Grant No. G16447, 1961.

[GAL 05] GALLEGO L., NELIAS D., JACQ C. A comprehensive elastic-plastic model to predict wear and to define the optimum geometry of fretting surfaces. *Proceedings of the World Tribology Congress III*, Washington, D.C., United States, 2005 p. 917 - 918.

```
[GAL 06a] GALLEGO L., NELIAS D.
```

Modeling of fretting wear under stick-slip conditions. *ASME/STLE International Joint Tribology Conference, IJTC 2006*, San Antonio, TX, United States, 22/10/2006-25/10/2006 p. 1 - 2.

[GAL 06b] GALLEGO L., NÉLIAS D., JACQ C. A comprehensive method to predict wear and to define the optimum geometry of fretting surfaces. ASME J. Tribol., vol. 128, 2006, p. 476–485.

[GAL 07] GALLEGO L., NELIAS D. Modeling of Fretting Wear Under Gross Slip and Partial Slip Conditions. *Journal of Tribology*, vol. 129, nº 3, 2007, p. 528-535, ASME.

[GLA 80] GLADWELL G.

Contact problems in the classical theory of elasticity. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.

[GOD 84] GODET M.

The 3rd-Body Approach - A Mechanical View Of Wear. *Wear*, vol. 100, n^o 1-3, 1984, p. 437–452.

[GOO 62] GOODMAN L. E.

Contact stress analysis of normally loaded rough spheres. J. Appl. Mech., vol. 29, 1962, page 515.

- [GOR 01] GORYACHEVA I. G., RAJEEV P. T., FARRIS T. N. Wear in Partial Slip Contact. J. Tribol., vol. 123, n^o 4, 2001, p. 848–856, ASME.
- [GOR 02] GORYACHEVA I. G., MURTHY H., FARRIS T. N. Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges. *International Journal Of Fatigue*, vol. 24, n^o 11, 2002, p. 1191–1201.
- [GRE 66] GREENWOOD J. A., WILLAMSON J. B. P. Contact of normally flat surfaces. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 295, 1966, p. 300– 319.
- [HAM 63] HAMILTON G. M., GOODMAN L. E. The stress field created by a circular sliding contact. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, nº MAR, 1963, page 371.
- [HEG 05] HEGADEKATTE V., HUBER N., KRAFT O. Finite element based simulation of dry sliding wear. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, vol. 13, nº 1, 2005, p. 57–75.
- [HER 82] HERTZ H.

On the contact of elastic solids. J. Reine Angew. Math., vol. 92, 1882, p. 156-171.

- [HES 80] HESTENES M. R. Conjugate direction methods in optimization. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1980.
- [HIL 88] HILLS D. A., NOWELL D., O'CONNOR J. J. On the mechanics of fretting fatigue. *Wear*, vol. 125, n^o Issues 1-2, 1988, p. 129–146.

[HU 99] HU Y. Z., BARBER G. C., ZHU D.

Numerical analysis for the elastic contact of real rough surfaces. *Tribol. Trans.*, vol. 42(3), 1999, p. 443–452.

[HUQ 02] HUQ M. Z., CELIS J. P. Expressing wear rate in sliding contacts based on dissipated energy. *Wear*, vol. 252, nº 5-6, 2002, p. 375–383.

[JAC 01] JACQ C.

Limite d'endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitruré en présence d'indentations. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2001.

[JAC 02] JACQ C., NELIAS D., LORMAND G., GIRODIN D. Development of a Three-Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code. *J. Tribol.*, vol. 124, n^o 4, 2002, p. 653–667, ASME.

[JAE 04] JAEGER J.

New Solutions in Contact Mechanics. Witpress, Southampton, Boston, 2004.

[JOH 85] JOHNSON K. L.

Contact Mechanics. Cambridge University Press, London, 1985.

[JOH 93] JOHANSSON L.

Model and numerical algorithm for sliding contact between two elastic half-planes with frictional heat generation and wear. *Wear*, vol. 160, n^o 1, 1993, p. 77–93.

[JOH 94] JOHANSSON L.

Numerical-Simulation Of Contact Pressure Evolution In Fretting. Journal Of Tribology-Transactions Of The Asme, vol. 116, nº 2, 1994, p. 247–254.

- [JU 96] JU Y., FARRIS T. N. Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. ASME J. Tribol., vol. 118, 1996, p. 320–328.
- [KAL 72] KALKER J. J., VAN RANDEN Y. A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-hertzian half-space contact problems. J. Eng. Math., vol. 6(2), 1972, p. 193–206.
- [KAL 90] KALKER J. J.

Three dimensional elastic bodies in rolling contact. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[LI 03] LI J., BERGER E. J.

A semi-analytical approach to three-dimensional normal contact problems with friction. *Computational Mechanics*, vol. 30, n^o 4, 2003, p. 310–322.

[LIM 87] LIM S. C., ASHBY M. F., BRUNTON J. H. Wear-Rate Transitions And Their Relationship To Wear Mechanisms. Acta Metallurgica, vol. 35, nº 6, 1987, p. 1343–1348.

[LIS 03] LISKIEWICZ T., FOUVRY S., WENDLER B. Impact of variable loading conditions on fretting wear. Surface & Coatings Technology, vol. 163, 2003, p. 465–471.

[LIS 04] LISKIEWICZ T.

Hard Coatings Durability Under Variable Fretting Wear Conditions. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2004.

[LIS 05] LISKIEWICZ T., FOUVRY S.

Development of a friction energy capacity approach to predict the surface coating endurance under complex oscillating sliding conditions. *Tribology International*, vol. 38, n° 1, 2005, p. 69–79.

[LIU 00] LIU S., WANG Q., LIU G.

A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses. *Wear*, vol. 243, 2000, p. 101–111.

[LIU 01a] LIU G., WANG Q., LIU S.

A Three-Dimensional Thermal-Mechanical Asperity Contact Model for Two Nominally Flat Surfaces in Contact. J. Tribol., vol. 123, n^o 3, 2001, p. 595–602, ASME.

[LIU 01b] LIU Z., NEVILLE A., REUBEN R. L. A numerical calculation of the contact area and pressure of real surfaces in sliding wear. ASME J. Tribol., vol. 123, 2001, p. 27–35. [LIU 02] LIU S., WANG Q.

Studying contact stress fields caused by surface tractions with a discrete convolution and fast Fourier transform algorithm. *ASME J. Tribol.*, vol. 124, 2002, p. 36–45.

- [LOV 52] LOVE A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press, London, 4 édition, 1952.
- [LUB 91] LUBRECHT A. A., IOANNIDES

A fast Solution of the dry contact problem and the associated sub-surface stress field, using multilevel techniques. *ASME J. Tribol.*, vol. 113, 1991, p. 128–133.

[MAD 07] MADGE J., LEEN S., SHIPWAY P. The critical role of fretting wear in the analysis of fretting fatigue. *Wear*, vol. In Press, Corrected Proof, 2007, p. –.

- [MCC 04] MCCOLL I. R., DING J., LEEN S. B. Finite element simulation and experimental validation of fretting wear. Wear, vol. 256, nº 11-12, 2004, p. 1114–1127.
- [MCE 49] MCEWEN E.

Stress in elastic cylinders in contact along a generatrix. *Philosophical Magazine*, vol. 40, 1949, p. 454–459.

[MCV 99] MCVEIGH P. A., HARISH G., FARRIS T. N., SZOLWINSKI M. P. Modeling interfacial conditions in nominally flat contacts for application to fretting fatigue of turbine engine components. *International Journal Of Fatigue*, vol. 21, 1999, p. S157–S165.

[MEG 96] MEGUID S. A., REFAAT M. H., PAPANIKOS P. Theoretical and experimental studies of structural integrity of dovetail joints in ae-

roengine discs. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 56, n^o 1-4, 1996, p. 668–677.

[MEI 68] MEIJERS P.

The contact problem of a rigid cylinder on an elastic layer. *Applied Science Research*, vol. 18, 1968, page 353.

[MEN 95] MENG H. C., LUDEMA K. C. Wear Models And Predictive Equations - Their Form And Content. Wear, vol. 181, 1995, p. 443–457.

[MIK 57] MIKHLIN S. Integral equations. Pergamon press, London, 1957.

[MIN 49] MINDLIN R. D. Compliance of elastic bodies in contact. ASME J. Appl. Mech., vol. 16, 1949, p. 259– 268.

[MIN 53] MINDLIN R. D., DERESIEWICZ H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 20, 1953, p. 327–344. [MOH 95a] MOHRBACHER H., BLANPAIN B., CELIS J. P., ROOS J. R., STALS L., VANSTAPPEN M.

Oxidational Wear Of Tin Coatings On Tool Steel And Nitrided Tool Steel In Unlubricated Fretting. *Wear*, vol. 188, nº 1-2, 1995, p. 130–137.

- [MOH 95b] MOHRBACHER H., CELIS J. P., ROOS J. R. Laboratory testing of displacement and load induced fretting. *Tribology International*, vol. 28, 1995, p. 269–278.
- [MUR 04] MURTHY H., HARISH G., FARRIS T. N. Efficient modeling of fretting of blade/disk contacts including load history effects. *Journal Of Tribology-Transactions Of The Asme*, vol. 126, n^o 1, 2004, p. 56–64.
- [MUS 53] MUSKHELISHVILI N. Singular integral equations. P. Nordhoff N.V., Gronnigen, 1953.
- [NEL 06] NELIAS D., BOUCLY V., BRUNET M. Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces : Proposal for a Wear or Running-in Model. J. Tribol., vol. 128, nº 2, 2006, p. 236–244, ASME.
- [NIX 88] NIX K. J., LINDLEY T. C.

The influence of relative slip range and contact material on the fretting properties of 3.5NiCrMoV rotor steel. *Wear*, vol. 125, 1988, p. 147–162.

[NOG 97] NOGI T., KATO T.

Influence on a Hard Surface Layer on the Limit of Elastic Contact-Part I : Analysis Using a Real Surface Model. *ASME J. Tribol.*, vol. 119, 1997, p. 493–500.

- [NOW 98] NOWELL D., DAI D. N.
 - Analysis of surface tractions in complex fretting fatigue cycles using quadratic programming. *Journal Of Tribology-Transactions Of The Asme*, vol. 120, n° 4, 1998, p. 744–749.
- [NOW 03] NOWELL D., DINI D.
 Stress gradient effects in fretting fatigue. *Tribology International*, vol. 36, n^o 2, 2003, p. 71–78.
- [OQV 01] OQVIST M.

Numerical simulations of mild wear using updated geometry with different step size approaches. *Wear*, vol. 249, n^o 1-2, 2001, p. 6–11.

[PAN 75] PANAGIOTOPOULOS P. D.

A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction-boundary value problem in the theory of elasticity. *Ingenieur-Archiv*, vol. 44, 1975, p. 421–432.

[PAU 81] PAUL B., HASHEMI J.

Contact pressure on closely conforming elastic bodies. *ASME J. Appl. Mech.*, , 1981, p. 543–548.

[PAU 05] PAULIN C., FOUVRY S., DEYBER S.

Wear kinetics of Ti-6Al-4V under constant end variable fretting sliding conditions. *Wear*, vol. 259, 2005, p. 292–299.
```
[PAU 06] PAULIN C.
```

Etude de l'endommagement du contact multicouche aube/disque sous chargement de fretting : impact des sollicitations variables et de la dimension du contact. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.

[PAU 07] PAULIN C., FOUVRY S., MEUNIER C. Finite element modelling of fretting wear surface evolution : Application to a Ti-6A1-4V contact. *Wear*, vol. In Press, Corrected Proof, 2007, p. –.

[PEN 00] PENG W., BHUSHAN B.

Modelling of surfaces with a bimodal roughness distribution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J* : *Journal of Engineering Tribology*, vol. 214, n° 5, 2000, p. 459–470.

[PEN 01] PENG W., BHUSHAN B. Three-dimensional contact analysis of layered elastic/plastic solids with rough surfaces. *Wear*, vol. 249, nº 9, 2001, p. 741–760.

[PEN 02] PENG W., BHUSHAN B. Sliding Contact Analysis of Layered Elastic/Plastic Solids With Rough Surfaces. J. Tribol., vol. 124, nº 1, 2002, p. 46–61, ASME.

- [POD 99] PODRA P., ANDERSSON S. Simulating sliding wear with finite element method. *Tribology International*, vol. 32, n^o 2, 1999, p. 71–81.
- [POL 99] POLONSKY I. A., KEER L. M. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multisummation and conjugate gradient techniques. *Wear*, vol. 231, 1999, p. 206–219.

[POL 00] POLONSKY I. A., KEER L. M.

Fast methods for solving rough contact problems : a comparative study. *ASME J. Tribol.*, vol. 122, 2000, p. 36–40.

[PRE 92] PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P. Numerical Recipes in Fortran 77 - The Art of Scientific Computing, vol. 1. Cambridge University Press, 1992.

[RAJ 04] RAJEEV P. T., MURTHY H., FARRIS T. N. Load history effects on fretting contacts of isotropic materials. *Journal Of Engineering For Gas Turbines And Power-Transactions Of The Asme*, vol. 126, n^o 2, 2004, p. 385– 390.

[RAJ 06] RAJASEKARAN R., NOWELL D. Fretting fatigue in dovetail blade roots : Experiment and analysis. *Tribology International*, vol. 39, n^o 10, 2006, p. 1277–1285.

[RHE 70] RHEE S. K.

Wear equation for polymers sliding against metal surfaces. *Wear*, vol. 16, n^o 6, 1970, p. 431–445.

[SAC 83] SACKFIELD A., HILLS D. A. Some Useful Results In The Classical Hertz Contact Problem. Journal Of Strain Analysis For Engineering Design, vol. 18, nº 2, 1983, p. 101–105. [SAC 05] SACKFIELD A., DINI D., HILLS D. The finite and semi-infinite tilted, flat but rounded punch. International Journal of Solids and Structures, vol. 42, nº 18-19, 2005, p. 4988–5009. [SAI 02] SAINSOT P., JACQ C., NELIAS D. A numerical model for elastoplastic rough contact. Cmes-Computer Modeling In Engineering & Sciences, vol. 3, nº 4, 2002, p. 497–506. [SIN 69] SINGLETON R. C. An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, vol. AU-17, nº 2, 1969, p. 93–103. [SIN 02] SINCLAIR G. B., CORMIER N. G., GRIFFIN J. H., MEDA G. Contact Stresses in Dovetail Attachments : Finite Element Modeling. J. Eng. Gas Turbines Power, vol. 124, nº 1, 2002, p. 182–189, ASME. [SNE 51] SNEDDON I. Fourier transforms. McGraw-Hill, New York, 1951. [SPE 75] SPENCE D. A. The hertz contact problem with finite friction. *Journal of Elasticity*, vol. 5, n^o 3, 1975, p. 297-319. [TIA 96] TIAN X. F., BHUSHAN B. A numerical three-dimensional model for the contact of rough surfaces by variational principle. Journal Of Tribology-Transactions Of The Asme, vol. 118, nº 1, 1996, p. 33–42. [VER 85] VERGNE F. Calcul des déplacements et des contraintes dans un demi-espace élastique chargé en surface par des actions distribuées normales ou tangentielles quelconques. Master's thesis, INSA de Lyon, 1985. [VIN 88] VINGSBO O., SÖDERBERG S. On fretting maps. Wear, vol. 126, 1988, p. 131–132. [VIN 92] VINCENT L., BERTHIER Y., GODET M. Testing methods in fretting fatigue : a critical appraisal. ASTM STP, vol. 1159, 1992, p. 33-48. [WAT 81] WATERHOUSE R. B. Fretting fatigue. Applied Science Publishers, 1981. [WEB 86] WEBSTER M. N., SAYLES R. S. A numerical model for the elastic frictionless contact of real rough surfaces. ASME J. *Tribol.*, vol. 108, 1986, p. 314–320. [WES 39] WESTERGAARD H. M. Bearing pressures and cracks. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 6, 1939, page 49.

[WIL 04] WILLNER K.

Elasto-Plastic Normal Contact of Three-Dimensional Fractal Surfaces Using Halfspace Theory. *J. Tribol.*, vol. 126, n^o 1, 2004, p. 28–33, ASME.