

## Thèse

---

# Contribution à l'étude d'éléments finis de type coque sans degrés de liberté en rotation ou à formulation solide pour des simulations numériques de l'emboutissage et du retour élastique

---

Présentée devant  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de docteur

École doctorale  
**Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :  
**MECANIQUE, GENIE MECANIQUE, GENIE CIVIL**

Par  
**Bruno BASSA**  
Ingénieur

Thèse soutenue le 17 novembre 2011 devant la commission d'examen

### Jury

Mr. A. Combescure	Professeur	Président
Mme. S. Thuillier	Professeur	Rapporteur
Mr. K. Saanouni	Professeur	Rapporteur
Mr. D. Vieilledent	Docteur Ingénieur	Examineur
Mr. M. Brunet	Professeur	Directeur de thèse
Mr. F. Sabourin	Maître de Conférence	Directeur de thèse

LaMCoS – UMR CNRS 5259 - INSA-Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (France)



*INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2011-2015*

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 INFOMATHS Bâtiment Braconnier 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44.82.94 Fax 04 72 43 16 87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

## Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>I. Un nouvel élément de type solide-coque : SB9<math>\gamma</math>25</b>	
<b>I.A. Rappels sur les éléments de base</b>	<b>I-4</b>
I.A.1. Élément quadrilatéral pour plaque/coque : Q4 $\gamma$ 24	I-4
I.A.2. Élément de type coque-solide à 5 nœuds : Q5 $\gamma$ 26	I-19
I.A.3. Formulation d'un élément solide-coque à 8 nœuds : ShB8PS	I-25
<b>I.B. Élément solide-coque modifié à 8 nœuds : SB8<math>\gamma</math>24</b>	<b>I-43</b>
I.B.1. Champ des déformations postulées	I-43
I.B.2. Effets de membrane et de flexion	I-47
I.B.3. Conséquences sur la stabilisation	I-48
I.B.4. Validations	I-50
<b>I.C. Élément de type solide-coque à 9 nœuds : SB9<math>\gamma</math>25</b>	<b>I-54</b>
I.C.1. Champ assumé de déformation normale	I-54
I.C.2. Validations	I-56
I.C.3. Efforts nodaux équivalents	I-58
<b>I.D. Annexes</b>	<b>I-61</b>
I.D.1. Annexe I.A	I-61
I.D.2. Annexe I.B	I-62
I.D.3. Annexe I.C	I-64
<b>I.E. Références</b>	<b>I-66</b>
<b>II. Validations numériques des éléments solides-coques</b>	
<b>II.A Cas linéaires</b>	<b>II-1</b>
II.A.1. Exemples des quadrangles de base	II-1
II.A.2. Test de la plaque à cinq éléments en flexion	II-2
II.A.3. Plaque circulaire encastrée	II-6
II.A.4. Hémisphère pincé avec un orifice d'angle 18°	II-7
II.A.5. Test Cylindre pincé avec des bords libres	II-8
II.A.6. Poutre vrillée	II-9
<b>II.B Cas de non linéarités</b>	<b>II-10</b>
II.B.1. Plaque circulaire encastrée	II-10
II.B.2. Arc encastré	II-11
II.B.3. Bottoming test	II-12
II.B.4. Flanging avec laminage	II-15
<b>II.C Références</b>	<b>II-17</b>
<b>III. Autre élément solide-coque à 9 nœuds : SB9DK25</b>	
<b>III.A. Rappels sur les éléments de base</b>	<b>III-3</b>
III.A.1. Élément coque quadrangulaire : DKS16	III-3
III.A.2. Élément coque quadrangulaire à 9 nœuds : DKS18	III-5
<b>III.B. Formulation de l'élément solide-coque à huit noeuds : SB8DK24</b>	<b>III-6</b>
III.B.1. Caractéristiques du SB8 $\gamma$ 24 utiles à la formulation de SB8DK24	III-6

III.B.2	Matrice de raideur élastoplastique [ $K_{ep}$ ]	III-12
III.B.3.	Matrice de raideur pour la stabilisation [ $K_{stab}$ ]	III-14
<b>III.C. Élément solide-coque à 9noeuds de type Kirchhoff : SB9DK25</b>		<b>III-17</b>
III.C.1.	Déformation normale	III-17
III.C.2	Efforts nodaux équivalents à une pression	III-18
<b>III.D. Annexe :Présentation sommaire du solide-coque DKB24</b>		<b>III-20</b>
III.D.1.	Déplacements locaux et rotations locales	III-20
III.D.2	Déformations locales	III-21
<b>III.E. Références</b>		<b>III-29</b>
<b>IV. Validation de l'élément SB9DK25</b>		<b>IV-1</b>
<b>IV.A. Exemples linéaires</b>		<b>IV-2</b>
IV.A.1.	Patch test	IV-2
IV.A.2.	Plaque circulaire encastrée	IV-3
IV.A.3.	Hémisphère pincé	IV-4
IV.A.4.	Cylindre pincé avec bords libres	IV-4
IV.A.5.	Poutre vrillée	IV-5
<b>IV.B. Exemples non linéaires</b>		<b>IV-7</b>
IV.B.1.	Hémisphère pincé	IV-7
IV.B.2.	Plaque circulaire encastrée	IV-8
IV.B.3.	Bottoming test	IV-8
IV.B.4.	Arc encastré	IV-11
<b>IV.C. Références</b>		<b>IV-12</b>
<b>V. Mise en forme explicite</b>		<b>V-1</b>
<b>V.A. Forme incrémentale</b>		<b>V-2</b>
<b>V.B. Principe des travaux virtuels</b>		<b>V-3</b>
<b>V.C. Discrétisation par éléments finis</b>		<b>V.4</b>
V.C.1.	Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en statique	V-4
V.C.2.	Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique	V-5
<b>V.D. Schéma d'intégration temporelle</b>		<b>V.5</b>
V.D.1.	Schéma explicite des différences finies centrées	V-6
V.D.2.	Calcul du pas de temps critique par la méthode [ $M^{-1}$ ].[K]	V-7
V.D.3.	Amortissement des oscillations numériques	V-10
<b>V.E. Non linéarité due au contact</b>		<b>V-11</b>
V.E.1.	Pénalisation	V-11
V.E.2.	Projection dynamique	V-12
V.E.3.	Gestion d'un contact lors de l'amincissement de l'épaisseur	V-14
<b>V.F. Conclusion partielle sur les éléments de type solide-coque</b>		<b>V-15</b>
<b>V.G. Références</b>		<b>V-16</b>
<b>VI. Mise en forme d'un 'U' et retour élastique</b>		<b>VI-1</b>
<b>VI.A. Mise en forme d'un 'U' par emboutissage</b>		<b>VI-2</b>
VI.A.1	Le processus traditionnel d'emboutissage	VI-2
VI.A.2	Inconvénients liés au procédé	VI-3
VI.A.3	Protocoles de mise en forme par emboutissage au LaMCoS	VI-3
<b>VI.B. Résultats expérimentaux</b>		<b>VI-11</b>
VI.B.1	Contexte	VI-11
VI.B.2	Retour élastique	VI-11

VI.B.3	Formes des emboutis non laminés après retour élastique	VI-11
VI.B.4	Formes des emboutis laminés après retour élastique	VI-13
VI.B.5	Efforts développés pendant la mise en forme	VI-14
<b>VI.C. Résultats numériques</b>		<b>VI-15</b>
VI.C.1	Forme du 'U' de Numisheet 93	VI-15
VI.C.2	Forme du 'U 2010'	VI-19
VI.C.3	Forme du 'U rouleau'	VI-22
<b>VI.D. Comparaison des résultats</b>		<b>VI-29</b>
VI.D.1	Résultats des expériences	VI-29
VI.D.2	Remarques sur les résultats numériques	VI-30
VI.D.3	Comparaison des efforts de mise en forme	VI-32
<b>VI.E. Références</b>		<b>VI-13</b>

**Conclusion générale et perspectives** **x**

<b>I. Complément : Théorie des plaques</b>		<b>CI-1</b>
<b>I.A. Théorie de Kirchhoff</b>		<b>CI-2</b>
I.A.1. Hypothèses de Kirchhoff		CI-2
I.A.2. Déformations		CI-3
I.A.3. Relations de comportement en élasticité linéaire isotrope		CI-4
<b>I.B. Théorie de plaque épaisse (Mindlin)</b>		<b>CI-15</b>
I.B.1. Hypothèses de Mindlin		CI-15
I.B.2. Déplacements		CI-15
I.B.3. Déformations		CI-15
I.B.4. Contraintes et efforts internes		CI-16
I.B.5. Remarques		CI-17
I.B.6. Exemples		CI-17
<b>I.C. Références</b>		<b>CI-21</b>
<b>II. Complément : Élément "C<sup>0</sup>" (Belytschko)</b>		<b>CII-1</b>
<b>II.A. Caractéristiques</b>		<b>CII-2</b>
<b>II.B. Membrane</b>		<b>CII-3</b>
II.B.1. Déplacements		CII-3
II.B.2. Déformations		CII-3
II.B.3. Elasticité isotrope		CII-4
II.B.4. Travaux virtuels		CII-4
<b>II.C. Flexion</b>		<b>CII-5</b>
II.C.1. Rotations		CII-5
II.C.2. Courbures		CII-5
II.C.3. Elasticité isotrope		CII-5
II.C.4. Travaux virtuels		CII-6
<b>II.D. Cisaillement</b>		<b>CII-6</b>
II.D.1. Déplacements		CII-6
II.D.2. Déformations		CII-6
II.D.3. Décomposition		CII-7
II.D.4. Elasticité isotrope		CII-7
II.D.5. Principe des travaux virtuels		CII-8
<b>II.E. Etude de <math>\{\theta^*\}</math> et <math>\{W^*\}</math></b>		<b>CII-8</b>
II.E.1. Expression de $\{W^*\}$		CII-8

II.E.2.	Expressions de $\theta_x$ et $\theta_y$ composant $\{\Theta_e^*\}$	CII-9
II.E.3.	Expression de $\{W_e^*\}$	CII-10
II.E.4.	Conséquences	CII-10
<b>II.F.</b>	<b>Matrice de raideur de l'élément</b>	<b>CII-11</b>
II.F.1.	Travaux virtuels	CII-11
II.F.2.	Matrice	CII-11
<b>II.G.</b>	<b>Résultats pour une plaque encadrée</b>	<b>CII-12</b>
II.G.1.	Données	CII-12
II.G.2.	Résultats	CII-12
<b>II.H.</b>	<b>Références</b>	<b>CII-13</b>
<b>III.</b>	<b>Complément : Élément quadrilatéral pour plaque épaisse :Q4γ24</b>	<b>CIII-1</b>
<b>III.A.</b>	<b>Formulation de base</b>	<b>CIII-2</b>
III.A.1.	Membrane	CIII-3
III.A.2.	Flexion	CIII-5
III.A.3.	Cisaillement	CIII-7
III.A.4.	Déformations issues des rotations fictives $\theta_z$	CIII-9
III.A.5.	Efforts équivalents pour une pression	CIII-10
III.A.6.	Exemples numériques	CIII-10
<b>III.B.</b>	<b>Intégration sélective</b>	<b>CIII-11</b>
III.B.1.	Justification	CIII-11
III.B.2.	Conséquence	CIII-11
III.B.3.	Exemples numériques	CIII-11
<b>III.C.</b>	<b>Champ assumé des déformations en cisaillement transversal</b>	<b>CIII-12</b>
III.C.1.	Relations utiles	CIII-12
III.C.2.	Déformations	CIII-12
III.C.3.	Exemples numériques	CIII-14
<b>III.D.</b>	<b>Formulation issue d'une intégration réduite</b>	<b>CIII-14</b>
III.D.1.	Notations	CIII-15
III.D.2.	Propriétés utiles	CIII-16
III.D.3.	Mise en évidence du vecteur $\{\gamma\}$	CIII-16
III.D.4.	Déformations en membrane	CIII-17
III.D.5.	Matrice de raideur en membrane	CIII-18
III.D.6.	Déformations en flexion	CIII-19
III.D.7.	Matrice de raideur en flexion	CIII-20
III.D.8.	Stabilisation pour le champ assumé des déformations de CT	CIII-20
<b>III.E.</b>	<b>Références</b>	<b>CIII-24</b>
<b>IV.</b>	<b>Complément : Élément DKT12</b>	<b>CIV-1</b>
<b>IV.A.</b>	<b>Caractéristiques et interpolations</b>	<b>CIV-2</b>
IV.A.1	Définition du repère local	CIV-2
IV.A.2	Interpolation par les fonctions d'aire	CIV-3
<b>IV.B.</b>	<b>Effets de membrane</b>	<b>CIV-3</b>
<b>IV.C.</b>	<b>Effets de flexion</b>	<b>CIV-4</b>
IV.C.1.	Déplacements	CIV-4
IV.C.2.	Matrice de flexion $[B^b]$	CIV-5
<b>IV.D.</b>	<b>Autres écritures des effets de flexion</b>	<b>CIV-8</b>
IV.D.1.	Rotations de corps rigides	CIV-8

IV.D.2.	Angles de flexion	CIV-9
IV.D.3.	Superposition des courbures	CIV-10
IV.D.4.	Matrice gradient	CIV-11
<b>IIV.E.</b>	<b>Références</b>	<b>CIV-12</b>
<b>V.</b>	<b>Complément : Élément DKS16</b>	<b>CV-1</b>
<b>V.A</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>CV-2</b>
V.A.1.	Repère local	CV-2
V.A.2.	Fonctions d'interpolation	CV-3
<b>V.B</b>	<b>Membrane</b>	<b>CV-4</b>
V.B.1.	Notations	CV-4
V.B.2.	Propriétés utiles	CV-5
V.B.3.	Vecteur $\{\gamma\}$	CV-5
V.B.4.	Déplacements	CV-6
V.B.5.	Déformations de membrane	CV-6
V.B.6.	Contraintes de membrane	CV-8
V.B.7.	Efforts internes : contribution des effets de membrane	CV-9
V.B.8.	Stabilisation en membrane	CV-9
<b>V.C</b>	<b>Courbures pour les effets de flexion</b>	<b>CV-12</b>
V.C.1.	Rotations de corps rigide utiles	CV-12
V.C.2.	Angles de flexion	CV-13
V.C.3.	Courbures	CV-14
V.C.4.	Superposition	CV-14
V.C.5.	Expressions matricielles	CV-15
V.C.6.	Détails de la matrice [C]	CV-17
V.C.7.	Contraintes dues aux effets de flexion	CV-19
V.C.8.	Efforts internes dus aux effets de flexion	CV-19
V.C.9.	Stabilisation en flexion	CV-19
<b>V.D</b>	<b>Compléments sur la stabilisation en membrane</b>	<b>CV-23</b>
V.D.1.	Stabilisation physique	CV-23
V.D.2.	Stabilisation physique – Autre forme	CV-24
V.D.3.	Stabilisation basée sur une étude aux valeurs propres	CV-25
V.D.4.	Influence du gauchissement	CV-26
V.D.5.	Exemples de prédiction du retour élastique	CV-29
<b>V.E</b>	<b>Références</b>	<b>CV-30</b>
<b>VI.</b>	<b>Complément : Élément solide-coque ShB8PS</b>	<b>CVI-1</b>
<b>VI.A</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>CVI-2</b>
VI.A.1.	Repère local	CVI-2
VI.A.2.	Fonctions d'interpolation	CVI-3
<b>VI.B</b>	<b>Intégration réduite</b>	<b>CVI-5</b>
VI.B.1.	Déplacements locaux	CVI-5
VI.B.2.	Déformations	CVI-6
VI.B.3.	Contraintes (matériau élastique isotrope)	CVI-8
VI.B.4.	Matrice de raideur (intégrée en $\zeta$ )	CVI-8
<b>VI.C</b>	<b>Stabilisation - Préliminaires</b>	<b>CVI-9</b>
VI.C.1.	Notations	CVI-9
VI.C.2.	Propriétés utiles	CVI-9
VI.C.3.	Champ de déplacements	CVI-10
VI.C.4.	Déformations	CVI-12



VI.C.5.	Matrice de raideur	CVI-13
VI.C.6.	Mise en évidence des vecteurs $\{\gamma\}$	CVI-14
<b>VI.D</b>	<b>Stabilisation - Développement</b>	<b>CVI-14</b>
VI.D.1.	Déformations et contraintes généralisées	CVI-14
VI.D.2.	Matrice de stabilisation	CVI-16
VI.D.3.	Efforts internes	CVI-17
<b>VI.E</b>	<b>Stabilisation – Autre possibilité</b>	<b>CVI-19</b>
<b>VI.F</b>	<b>Etude non linéaire</b>	<b>CVI-20</b>
VI.F.1.	Matrice de raideur géométrique	CVI-20
VI.F.2.	Elastoplasticité	CVI-20
VI.F.3.	Efforts internes	CVI-21
<b>VI.G</b>	<b>Remarques importantes</b>	<b>CVI-21</b>
<b>VI.H</b>	<b>Annexes</b>	<b>CVI-22</b>
<b>VI.I</b>	<b>Références</b>	<b>CVI-24</b>

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>



## Remerciements

Grâce aux Accords Inter-Universitaires signés entre l'INSA de Lyon et l'Université de N'Djaména pour aider cette dernière en général et particulièrement le Département de Technologie de la Faculté des Sciences Exactes et Appliquées de cette Université à disposer de enseignants de niveau magistral, j'ai été accepté à l'INSA de Lyon dans le Laboratoire de Mécanique de Contact et de Solides (LaMCoS) pour réaliser cette thèse de doctorat. Il va de soi que j'exprime toute ma gratitude au Professeur Alain COMBESCURE qui a bien voulu m'accepter au LaMCoS pour effectuer toutes les recherches liées à ce travail ;

Je n'ai pas de mots pour remercier mes encadreurs le Professeur Michel BRUNET qui a été responsable de l'équipe de recherches Mécanique des Solides et Endommagements (MSE) et le Maître de Conférence Francis SABOURIN que j'ai eu la chance et l'honneur de rencontrer la première fois en 1997 comme enseignant dans sa mission de coopération au Tchad. En 2003, on s'est revu, moi tout jeune enseignant et mon ancien maître, et la possibilité de faire un DEA (Master II) sous son encadrement a été évoqué et mis sur pied. Et aujourd'hui, si je suis toujours avec Francis SABOURIN entrain de réaliser ce travail de thèse de doctorat, ce n'est pas un hasard étant donné qu'il me connaît jusqu'à mes manquements et il sait ce qu'il faut faire pour me motiver dans le travail et m'aider à débloquer toutes les situations qui semblent sans issue.

Merci aux Professeurs S.THUILLIER de l'Université de Bretagne Sud et K. SAANOUNI de l'Université de Troyes d'avoir bien voulu accepter cette lourde tâche de rapporteurs.

Je remercie Monsieur Daniel VIEILLEDENT du groupe ESI d'avoir bien voulu examiner ce travail de thèse de doctorat.

Je réitère mes remerciements au Professeur Alain COMBESCURE pour avoir accepté de sacrifier un peu de son temps dans son agenda bien chargé et d'être examinateur de ce travail et ainsi le valoriser.

Je ne peux pas oublier celle qui gère le point névralgique de l'équipe MSE ; Isabelle COMBY. Merci pour toute cette disponibilité pour tous les petits détails administratifs liés à cette thèse.

Enfin, il est sûr que j'oublie certaines personnes. Qu'ils m'en excusent ! Ces quatre dernières années m'ont permis de rencontrer beaucoup de personnes qui ont toutes eu un rôle dans ma vie et par conséquent dans la construction de ce travail. Ils se reconnaîtront...



## Avant-propos

Dénommée Université du Tchad à sa création en 1971, l'actuelle Université de N'Djaména comprend quatre facultés qui offraient jusqu'à un passé récent des formations de niveau licence. Certaines facultés proposent aujourd'hui des Master I. Depuis sa création jusqu'à aujourd'hui, l'évolution de cette université n'est pas perceptible pour diverses raisons dont les guerres qu'a connues le pays.

Beaucoup de mesures ont été prises et mises en œuvre par diverses coopérations dont la plus importante est la coopération française. Ceci pour donner une impulsion à l'Université de N'Djaména afin de l'aider à rattraper un tant soit peu son retard. Parmi ces mesures, on peut citer la création de nouveaux départements, l'équipement des laboratoires et la formation des formateurs de haut niveau.

Dans ce cadre, le Département de Technologie logé dans la Faculté des Sciences Exactes et Appliquées, une des quatre facultés de l'Université N'Djaména, a été créé en 1987 avec l'aide concertée du Programme des Nations Unies pour Développement (PNUD) et de la Coopération Française pour pallier la carence en agents de maîtrise dans les domaines techniques, essentiellement en mécanique et en électricité, afin de participer au développement du Tchad.

Les activités de ce département de Technologie ont débuté presque essentiellement avec des enseignants expatriés et après quelques années de fonctionnement, les techniciens supérieurs qui ont été formés et employés par les entreprises de la place ont donné entière satisfaction.

Il a donc été décidé de procéder au développement de ce jeune département en renforçant ses capacités par la formation des formateurs locaux pour prendre le relais des expatriés et par l'équipement de ses laboratoires.

La mise en place de cette stratégie de formation de formateurs a commencé avec les licenciés en physique, formés au sein de la Faculté des Sciences Exactes et Appliquées de l'Université de N'djaména, à qui on a octroyé des bourses d'étude du gouvernement français pour suivre des études d'ingénierie, principalement à l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé.

A la fin de leur formation, munis d'un diplôme d'ingénieur de conception, soit en génie mécanique soit en génie électrique, ces lauréats reviennent au pays exercer une année puis bénéficient d'une autre bourse du même gouvernement français pour entrer dans le monde de la recherche en s'inscrivant à un diplôme d'études approfondies (actuel master II).

Si tout se passe bien avec le DEA, l'étudiant revient une année plus tard pour une thèse de doctorat en alternance c'est-à-dire que chaque année il vient dans un laboratoire d'accueil (le plus souvent en France) pour environ trois mois et ceci pendant quatre séjours afin de parachever la préparation de cette thèse. Si le document est approuvé, il peut être soutenu en public.

Dans la plupart des situations, ces thèses sont aussi orientées vers le renforcement des connaissances théoriques du futur enseignant et non uniquement à la recherche ciblée apportant des solutions aux problèmes scientifiques de l'heure.

C'est donc dans cette logique que j'ai évolué pour aujourd'hui me retrouver au Laboratoire de Mécanique de Contact et des Solides (LaMCoS) de l'INSA de Lyon en France où j'ai d'abord fait le Master II en mécanique puis, depuis quatre années, une thèse de doctorat en Mécanique des solides dont le résultat se trouve être ce document.

Le travail a été dévolu au développement des éléments finis de type coque sans degrés de liberté en rotation pour la simulation de la mise en forme et du retour élastique. Je suis, au risque de me tromper, le premier tchadien que l'on est en train de former dans le développement des éléments finis destinés à la mécanique. Il me reviendra alors de perpétuer cette discipline au Tchad car les éléments finis sont devenus un outil puissant dans la résolution des problèmes complexes dans divers domaines, au delà de la Mécanique des solides et des contacts.

Cette coopération Nord-Sud entre le Tchad et la France, relative à la formation des formateurs dans les domaines techniques, doit s'intensifier pour permettre au Tchad de développer son secteur technique et technologique car le retard est si grand qu'on ne peut pas espérer le combler avec seulement neuf enseignants de rang doctoral formés sur une coopération débutée il y a plus de vingt années.

## Introduction générale

Le contexte actuel de crise économique associée à la mondialisation qui laisse cours à la concurrence renforce les industriels dans leur politique de minimisation des coûts de recherche pour le développement des produits. C'est en particulier ce qui se passe dans l'aérospatial, l'aéronautique, l'automobile où l'approche par la réalisation des prototypes, très coûteuse, est délaissée au profit des simulations de ces prototypes par les éléments finis. Et, en général, c'est aux chercheurs et ingénieurs développeurs des codes que revient la tâche d'élaborer des éléments finis et des méthodes efficaces et utiles pour des simulations qui prédisent la réalité avec des marges d'erreurs acceptables permettant ainsi de diminuer drastiquement les dépenses qu'occasionnent les recherches par l'expérimental.

De par le grand nombre d'articles, de livres et des conférences qui traitent des éléments finis, il n'y a pas de doute que les chercheurs et ingénieurs contribuent largement au développement des éléments finis qui peut prendre ensuite quelques années pour passer du monde académique universitaire au monde industriel commercial.

L'intérêt des éléments finis est qu'ils représentent un outil puissant d'analyse numérique pour arriver à des solutions approchées des problèmes que rencontrent les ingénieurs qui ne cherchent plus des solutions exactes et fermes car elles nécessitent énormément d'efforts intellectuels et de temps lorsqu'elles sont possibles. Effectivement, pour des problèmes réels de l'heure, il est pratiquement impossible de trouver des solutions analytiques simples en partant des équations classiques de la Mécanique des milieux continus les gouvernant et des conditions de départ imposées. D'où la justification de l'importance accordée aujourd'hui aux simulations numériques 'éléments finis' dans les écoles d'ingénieurs et les industries.

En quelque sorte, l'histoire de la Méthode des éléments finis remonte à la Grèce antique avec Eudoxos - utilisation des formes géométriques simples pour approcher des longueurs, des surfaces et des volumes - et Archimède qui sommait un nombre fini des cordes droites (« éléments ») pour trouver un modèle de calcul du périmètre d'un cercle.

La description de la solution d'un problème de surface minimale, extrêmement proche de la Méthode des éléments finis, avait été faite en 1851 par Schellbach. Plus tard, des articles qui fondent cette méthode ont été publiés par Ritz et Gallerkin en 1909 et 1915. Et en 1956, grâce à l'apparition de l'ordinateur, Clough, Martin, Topp et Turner l'avaient déjà utilisée dans les calculs des parties de la structure d'un avion Boeing. Leurs travaux avaient permis de faire de cette méthode une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures. Ainsi est née la méthode des éléments finis comme vue de nos jours.

La méthode des éléments finis a cette capacité de prédire le comportement d'une structure soumise à des sollicitations complexes en formulant individuellement des



solutions par une des trois célèbres approches - approche directe, approche variationnelle et approche des résidus pondérés - pour les éléments qui discrétisent un domaine avant de les assembler pour représenter le problème entier.

L'approche directe est liée directement à la méthode de rigidité de l'analyse des structures et pour la comprendre, une connaissance de l'algèbre matricielle est nécessaire.

L'approche variationnelle est basée sur le calcul des variations d'une fonctionnelle ; l'énergie potentielle ou l'énergie complémentaire peut constituer la fonctionnelle en mécanique des solides.

L'approche des résidus pondérés est avantageuse en ce sens qu'elle peut s'appliquer aux problèmes où aucune fonctionnelle n'est disponible. Cette approche est beaucoup prisée dans les applications non structurelles comme le transfert de chaleur et la mécanique des fluides.

Les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs ont développé les idées essentielles de la méthode, indépendamment les uns des autres, dans des différentes périodes et pour des différentes raisons. Les efforts de ces trois groupes de spécialistes ont abouti à trois ensembles de travaux, avec des points de vue différents. Comme la popularité de la MEF a commencé à grandir dans les communautés des ingénieurs et des physiciens, les mathématiciens se sont ensuite intéressés à donner à la méthode une base mathématique ferme. Des études ont été faites pour l'évaluation des erreurs de discrétisation, les taux de convergence et la stabilité pour les différents types d'approximation par éléments finis.

Suivant le type de problème qui se présente, trois catégories d'applications de cette méthode sont disponibles :

La première catégorie - de loin la plus importante en terme d'application de la méthode – concerne les problèmes d'équilibre qui sont du domaine de la mécanique des solides où la connaissance des déplacements, des déformations et des contraintes est nécessaire pour un chargement mécanique donné ;

Les problèmes aux valeurs propres constituent la seconde catégorie. Ce sont en fait des problèmes stationnaires dont la résolution a besoin de la détermination des fréquences naturelles des modes de vibrations des solides et des fluides.

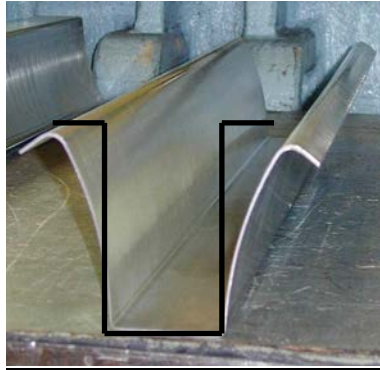
Dans la troisième catégorie, la dimension temps est intégrée aux problèmes des deux premières catégories.

Les domaines d'application de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénierie, mais reste que les ingénieurs civils, mécaniques et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

Comme la méthode est appliquée à des problèmes de plus en plus grands et complexes, il devient important que le processus de résolution soit économique. La croissance dans le domaine de l'ingénierie et de la technologie des ordinateurs va sans doute continuer à avoir des effets significatifs sur l'évolution de la méthode et avec la puissance des ordinateurs d'aujourd'hui, le nombre d'éléments utilisés pour analyser la structure est facilement gérable.

Avec les pressions économiques continues pour l'amélioration de la productivité en ingénierie, les programmes d'éléments finis ont joué un rôle important dans la croissance remarquable de la CAO et cette méthodologie, qui reste toujours passionnante, constitue une partie importante de la « caisse à outils de l'ingénieur ».

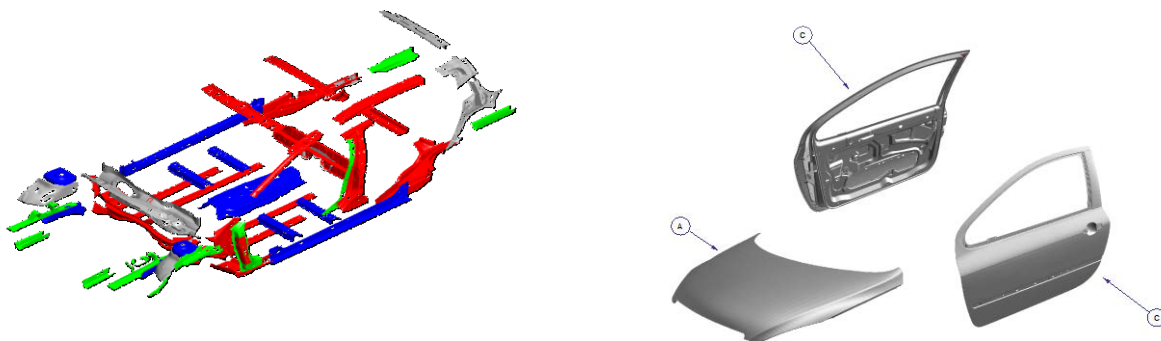
Objectifs de la thèse :



Fondamentalement, il s'agit de développer des éléments finis « brique » de type « solide-coque ». On entend par là, des éléments volumiques mais qui se comportent bien en flexion sans avoir à en superposer plusieurs couches dans l'épaisseur d'une structure pouvant être mince. De tels éléments existent mais ils sont formulés parfois sous hypothèse d'état plan de contrainte d'où le second objectif qui consiste à utiliser une loi de comportement générale 3D.

Ces éléments sont utilisés pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures coques et la gestion des zones de transition (passage des zones massives aux zones à faible épaisseur).

En particulier, ils doivent prendre en charge l'emboutissage et retour élastique des structures qu'elles soient très minces ou épaisses.



En général, pour la modélisation des structures minces comme les ouvrants des véhicules, les carrosseries des avions, des trains, des bateaux et des véhicules sont utilisées les éléments finis de type « coque » ou « coque-solide » assujettis à l'hypothèse des contraintes planes.

Mais souvent ces structures minces sont raboutées à d'autres plus épaisses comme les longerons et les bâtis. Un problème de raccordement, des maillages 2D pour les structures à faible épaisseur et des maillages 3D adaptés aux pièces massives, se pose donc.

D'où l'objet de développement de ces éléments brique de type solide coque qui ont une cinématique relativement facile à mettre en œuvre et permettent un calcul correct de la variation de l'épaisseur et une connexion directe aux éléments solides classiques puisque les déplacements sont les seuls degrés de liberté avec un traitement naturel des conditions de contact sur les deux faces de la structure.

Ainsi l'effort a été porté en particulier sur l'élaboration d'un élément fini solide coque avec un nœud supplémentaire en son centre afin d'éviter d'utiliser l'hypothèse d'un état plan de contrainte (même partiel) qui élimine à tort la contrainte suivant l'épaisseur et empêche ainsi l'utilisation de certaines briques pour analyser des structures soumises à des pressions normales par exemple.

Ces éléments sont à interpolation linéaires et sont sous intégrés dans le plan afin de réduire sensiblement le temps de calcul.

Le **premier chapitre** de cette thèse expose le développement de l'élément brique de type solide-coque dénommé SB9 $\gamma$ 25 obtenu par adjonction d'un nœud supplémentaire au centre de l'élément brique SB8 $\gamma$ 24 élaboré en premier.

Cette formulation part de la présentation de l'élément ShB8PS ([7], [8] et [9]) qui est légèrement améliorée après des modifications apportées essentiellement en stabilisation des modes à énergie nulle. En outre, un champ de cisaillement transversal a été « assumé » en utilisant l'interpolation propre à la coque Q4 $\gamma$ 24 y compris la stabilisation des effets parasites du cisaillement transversal. Ainsi modifié, il est baptisé SB8 $\gamma$ 24 mais s'utilise comme le ShB8PS en état plan de contraintes avec, en plus, le module de Young sur la diagonale de la matrice de comportement.

D'autres éléments finis développés et /ou utilisés au sein du Laboratoire LaMCoS ont été nécessaires aux développements des deux nouveaux éléments.

Le **deuxième chapitre** est consacré à la validation des deux éléments brique de type solide-coque par des exemples de niveau académique, en linéaire et en non linéaire. Une vue particulière est portée sur la contrainte normale que donnent les résultats de l'élément SB9 $\gamma$ 25 afin de justifier l'ajout d'un nœud au centre de la brique SB8 $\gamma$ 24. Ce qui devait permettre d'utiliser une loi générale de comportement élastique 3D et faire ressortir la contrainte normale suivant l'épaisseur, et par la suite quand il le faut, les efforts équivalents dus à une pression normale.

Le **troisième chapitre** présente un autre élément solide-coque construit à partir du quadrangle de type coque à huit nœuds DKS16 élaboré au LaMCoS, Il a l'avantage de négliger l'énergie de cisaillement transversal mais ne peut travailler que sous l'hypothèse des contraintes planes avec le module E sur la diagonale.

Le **quatrième chapitre** est consacré à la validation de cet élément à 9 nœuds dénommé SB9DK25 (Solid-Brick 9-node Discrete Kirchhoff 25-dof).

Le **cinquième chapitre** est rédigé pour étendre l'étude de ces éléments aux schémas de calcul *explicite* - matrice masse, pas de temps critique - puisque les calculs des cas de grandes transformations inhérentes aux mises en forme et la gestion de contact sont difficiles à faire converger en *implicite*.

Enfin, un **sixième chapitre** est présentée pour décrire la campagne des expériences menée avec la machine de mise en forme fixée à l'appareil de traction compression. Les valeurs relevées sont comparées aux résultats numériques précédemment obtenus afin de tirer les conclusions utiles.

Les six compléments dans ce document sont organisés comme suit :

Le **premier complément** rappelle la Théorie des plaques minces (Kirchhoff) et épaisses (Mindlin) afin de faciliter la compréhension des deux catégories d'éléments finis de type solide-coque (SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25) basés sur la théorie de Mindlin et (SB8DK24 et SB9DK25) fondés sur la théorie de Kirchhoff.

Le **deuxième et le troisième compléments** détaillent les éléments finis de type coque triangulaire de Belytschko 'C<sup>0</sup>' et quadrangulaire de Bathe Q4 $\gamma$ 24 formulés suivant la théorie de Mindlin avec champ de cisaillement transversal « assumé » ; méthode utilisée dans les éléments solides-coques SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25. De plus, il est prévu en perspective de cette thèse, le développement d'éléments prismatiques à 6 puis à 7 nœuds (6 sommets et un nœud central) dont les résultats seront à comparer directement à ceux donnés par le triangle 'C<sup>0</sup>'.

Le **quatrième et le cinquième compléments**, quant à eux, présentent sur la base de la théorie de Kirchhoff (Discrete Kirchhoff Theory) les éléments finis de type coque triangulaire de Morley DKT12 et quadrangulaire DKS16 de Sabourin et Brunet. La flexion de cet élément quadrangle est utilisée dans l'élaboration des éléments solides-coques SB8DK24 et SB9DK25. En outre, lors du développement ultérieur d'éléments prismatiques à 7 nœuds sans énergie de déformation de CT, c'est la flexion du triangle DKT12 qui sera implémentée.

Le **sixième complément** rappelle les caractéristiques de l'élément brique de type solide-coque SHB8PS qui n'est pas exactement l'élément construit par Abed-Meraim et Combescure car cet élément est retravaillé par Sabourin pour donner cette autre version de SHB8PS. Plusieurs caractéristiques de cet élément sont utilisées pour la formulation des éléments solides-coques construits dans ce document dont la décomposition en « modes » et une partie de la stabilisation.

Notes :

# I. Un nouvel élément de type solide-coque : SB9 $\gamma$ 25

<b>I. Un nouvel élément de type solide-coque : SB9<math>\gamma</math>25</b>	<b>I-1</b>
<b>I.A. Rappels sur les éléments de base</b>	<b>I-4</b>
I.A.1. Élément quadrilatéral pour plaque/coque : Q4 $\gamma$ 24	I-4
I.A.1.a) Formulation générale	I-4
I.A.1.b) Intégration réduite sélective (SRI)	I-9
I.A.1.c) Champ assumé de déformations de cisaillement transversal	I-11
I.A.1.d) Intégration réduite	I-14
I.A.2. Élément de type coque-solide à 5 nœuds : Q5 $\gamma$ 26	I-19
I.A.2.a) Formulation initiale	I-19
I.A.2.b) Matrice complète de comportement 3D	I-21
I.A.3. Formulation d'un élément solide-coque a 8 nœuds : 'ShB8PS'	I-25
I.A.3.a) Décomposition des modes	I-25
I.A.3.b) Repère local	I-29
I.A.3.c) Champ de déplacements	I-30
I.A.3.d) Dérivées utiles	I-31
I.A.3.e) Matrice de raideur hors stabilisation [K <sub>0</sub> ]	I-33
I.A.3.f) Stabilisation des modes {h <sub>1</sub> } et {h <sub>2</sub> }	I-35
I.A.3.g) Stabilisation des modes {h <sub>3</sub> } et {h <sub>4</sub> }	I-37
<b>I.B. Élément solide-coque modifié à 8 noeuds : 'SB8<math>\gamma</math>24'</b>	<b>I-43</b>
I.B.1. Champ des déformations postulées	I-43
I.B.1.a) Relations utiles	I-44
I.B.1.b) Déformations de cisaillement transversal	I-44
I.B.1.c) Matrice de raideur élémentaire de stabilisation	I-46
I.B.2. Effets de membrane et de flexion	I-47
I.B.3. Conséquence sur la stabilisation	I-48
I.B.4. Validation	I-50
<b>I.C. Élément de type solide-coque à 9 nœuds: 'SB9<math>\gamma</math>25</b>	<b>I-54</b>
I.C.1. Champ assumé de déformation normale	I-54
I.C.2. Validation	I-56
I.C.3. Efforts nodaux équivalents	I-58
<b>I.D. Annexes</b>	<b>I-61</b>
I.D.1. Annexe I-A	I-61
I.D.2. Annexe I-B	I-62
I.D.3. Annexe I-C	I-64
<b>I.E. References</b>	<b>I-66</b>

La majorité des études de calcul des structures porte sur des éléments minces : poutres et coques. Cependant, il est souvent intéressant de lier ces zones minces à des parties plus massives ou encore d'utiliser directement un modèle géométrique volumique en provenance directe de la CAO. C'est pourquoi les éléments qui se présentent comme des "solides" (6 ou 8 nœuds à trois translations par nœud) mais ayant un comportement en flexion comparable à celui d'éléments "coques" (3 ou 4 nœuds à trois translations et trois rotations par nœud) sont très prisés actuellement ; surtout s'ils sont à intégration réduite (dans le "plan") afin de ne pas pénaliser le temps des calculs fortement non linéaires nécessitant de toute façon un maillage dense (à cause du contact, par exemple).

Par ailleurs, les éléments de type brique (comme le C3D8 d'Abaqus) ne donnent pas des résultats corrects dans les zones en flexion ou alors il faut les placer en plusieurs couches dans l'épaisseur.

Pour pallier cela, des éléments dits "solide-coque" (ou "coque-solide") ont été proposés ; c'est le cas de l'élément SC8R d'Abaqus et il est tentant d'y voir un élément "universel" en terme d'utilisation. Il affiche un bon comportement en flexion même pour de faibles épaisseurs, mais il ne faut pas espérer des résultats corrects – pour tout dire ils peuvent même être vraiment faux ! – si un amincissement lui est imposé directement. Or, il est parfois utile d'imposer une épaisseur donnée quand le jeu entre deux outils devient inférieur à l'épaisseur de la tôle lors d'une opération de mise en forme.

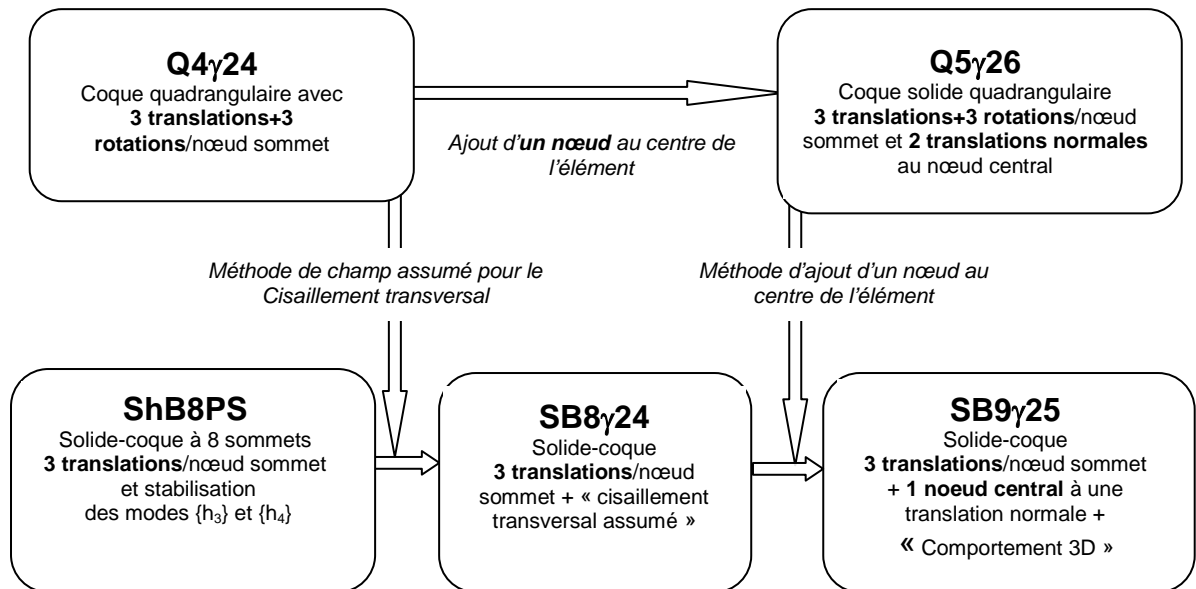
De plus, la gestion numérique du contact est largement facilitée avec des éléments solides-coques (issus d'un élément volumique) comparée à celle dévolue aux éléments de type coque-solide (issus d'un élément surfacique). En effet, pour ces derniers, l'amincissement éventuel impose de calculer les efforts correspondants à appliquer aux degrés de liberté du nœud central.

Ce chapitre concerne donc la formulation et l'évaluation d'un nouvel élément fini de type solide-coque pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures minces susceptibles d'être soumises aussi à une contrainte normale non négligeable. Dénommé SB9 $\gamma$ 25, cet élément est une brique à neuf nœuds dont huit sont aux sommets et un au centre de l'élément. Chaque nœud sommet est muni de trois translations tandis que le nœud central est doté d'une translation dans la direction de « l'épaisseur ».

Il est ainsi conçu pour pouvoir être utilisé dans la simulation des mises en forme de produits « plats » où peuvent se constater des fortes déformations incluant des flexions accompagnées d'un amincissement volontairement localisé de l'épaisseur. Ce, avec une loi de comportement véritablement 3D y compris en élasticité où il n'est pas rare qu'un état plan de contraintes soit en partie imposé dans la formulation d'autres éléments de ce type. En effet, les éléments briques de type solides-coques présentent souvent une contrainte normale dont le résultat est le produit du module de Young par la déformation suivant l'épaisseur. Par ailleurs ces « briques » présentent parfois des blocages en cisaillement transversal dont la gestion n'est pas toujours aisée.

Pour la formulation de ce nouvel élément de type solide-coque nommé SB9 $\gamma$ 25, les caractéristiques d'un élément coque-solide à cinq nœuds Q5 $\gamma$ 26 [10] et d'un élément solide-coque ShB8PS ([1], [2] et [9]) ont été judicieusement imbriquées moyennant quelques adaptations. Le Q5 $\gamma$ 26 provient du quadrangle de Bathe [3] qui a été modifié par adjonction d'un nœud supplémentaire au centre de la surface

moyenne afin d'utiliser dans sa globalité la matrice de comportement 3D. Le ShB8PS est une brique utilisée pour des structures à faible épaisseur et nécessite par conséquent un état plan de contraintes avec le module de Young sur la diagonale de la matrice de comportement entre  $\sigma_{zz}$  et  $\varepsilon_{zz}$  où 'z' est dans la direction de l'épaisseur.



**Figure I.0** Description de l'élaboration de l'élément SB9 $\gamma$ 25

Dans ce chapitre, après un bref rappel sur la méthode d'intégration réduite et la méthode de champ assumé de déformations, sont donnés les grands traits des éléments finis de base, à savoir : l'élément coque Q4 $\gamma$ 24 ; l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26 et l'élément solide-coque ShB8PS.

Ensuite, vient l'élaboration de l'élément solide-coque à huit nœuds SB8 $\gamma$ 24 qui est issu de l'élément « brique » ShB8PS mais qui utilise la méthode des déformations de cisaillement assumé pour éviter les phénomènes de verrouillage en cisaillement transversal.

On arrive enfin à l'élément solide-coque recherché SB9 $\gamma$ 25 en ajoutant un nœud supplémentaire muni d'une translation au centre de l'élément SB8 $\gamma$ 24 puisque le but final est de pouvoir utiliser une véritable matrice de comportement 3D comme avec l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26.

Ces éléments utilisent tous la méthode d'intégration réduite (sauf dans la direction de l'épaisseur) pour sa capacité à diminuer au mieux le temps de calcul tout en occupant moins d'espace mémoire dans les ordinateurs même si après il faut chercher à gérer les modes *hourglass* qu'elle génère.

Pour la validation de ces deux nouveaux éléments de type solide-coque SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25, des exemples académiques sont effectués et les résultats sont regroupés et commentés au deuxième chapitre.



## I.A. Rappels sur les éléments de base

### I.A.1. Élément quadrilatéral pour plaque/coque : Q4 $\gamma$ 24

#### I.A.1.a) Formulation générale

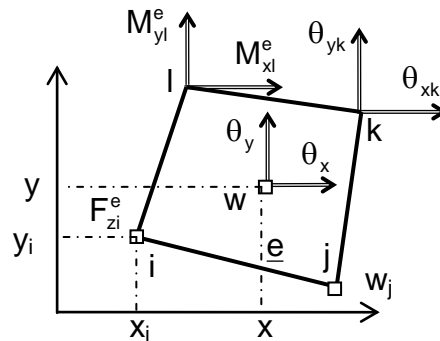


Figure I.1 Repère local d'un quadrilatère

Le but de la présentation de cet élément est double. Premièrement, la méthode de champ assumé des déformations de cisaillement transversal, qui va être présentée ici, sera reprise par la suite pour gérer le cisaillement transversal des éléments solides-coques dont l'élaboration est décrite dans ce document. Deuxièmement, la méthode - utilisée pour le modifier en un autre élément quadrangulaire à 5 nœuds dont un est situé au centre du plan moyen permettant d'utiliser complètement la vraie matrice 3D de comportement [10] - sera donc étendue aux solides-coques par l'ajout d'un neuvième nœud à un élément défini initialement par 8 nœuds.

Conçu pour être utilisé dans la théorie des plaques épaisses ou théorie de Mindlin, l'élément Q4 $\gamma$ 24 est un quadrangle ayant six degrés de liberté par nœud à savoir trois translations et trois rotations dans le repère global de la structure.

Les translations locales  $u$  et  $v$  dans le plan  $(x, y)$  perpendiculaire à la normale  $z$  (ne pas confondre avec le repère global  $(X, Y, Z)$ ) permettent la définition des effets de membrane.

La translation  $w$  normale au plan et les rotations  $\theta_x, \theta_y$  servent à établir les effets de cisaillement transversal (Figure I-1 précédente). Seules les rotations  $\theta_x, \theta_y$  servent à établir les effets de flexion.

Le sixième degré de liberté  $\theta_z$  suivant la normale  $z$  à la surface moyenne est utilisé pour éviter les singularités dans la matrice de raideur assemblée en ajoutant une raideur « artificielle » relative à  $\theta_z$  (en chacun des points d'intégration pour la version à intégration complète).

Pour ce qui concerne cet élément proposé par Bathe et Dvorkin [3], un bref rappel de ses grands traits est fait dans ce paragraphe. Au cas où une nécessité de mieux comprendre la formulation de l'élément se ferait sentir, des détails sont donnés dans le Complément III.

## (1) Déformations et contraintes

Dans sa formulation de base, l'expression du cisaillement transversal de l'élément quadrangulaire est :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} w, x + \theta_y \\ w, y - \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w, x \\ w, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & \mathbf{J}^{-1} \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w, \xi \\ w, \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} w, x + \theta_y \\ w, y - \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & \mathbf{J}^{-1} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N} \rangle & & & \\ & \langle \mathbf{N} \rangle & & \\ & & \langle \mathbf{N}, \xi \rangle & \\ & & & \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \Theta_x^e \rangle \\ \langle \Theta_y^e \rangle \\ \langle \mathbf{W}^e \rangle \end{Bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

On peut noter dans cette expression de cisaillement transversal les fonctions d'interpolation  $\{\mathbf{N}\}$  et ses dérivées. Et aussi la matrice unité  $[\mathbf{1}]$  et  $[\mathbf{J}^{-1}]$  qui est l'inverse de la matrice jacobienne. On rappelle ici les fonctions d'interpolation  $\{\mathbf{N}\}$  et les déplacements dans le repère local :

$$\{\mathbf{N}\}^T = \langle \mathbf{N} \rangle = 1/4 \cdot \langle (1-\xi) \cdot (1-\eta) \mid (1+\xi) \cdot (1-\eta) \mid (1+\xi) \cdot (1+\eta) \mid (1-\xi) \cdot (1+\eta) \rangle \quad (\text{I.3})$$

$$\{\tilde{\mathbf{U}}_e\}^T = \langle \tilde{\mathbf{U}}_e \rangle = \langle \langle \Theta_x^e \rangle \mid \langle \Theta_y^e \rangle \mid \langle \mathbf{W}^e \rangle \rangle \quad (\text{I.4})$$

$$\text{avec : } \langle \Theta_x^e \rangle^T = \langle \Theta_x^e \rangle = \langle \theta_{x1} \mid \theta_{x2} \mid \theta_{x3} \mid \theta_{x4} \rangle$$

$$\langle \Theta_y^e \rangle^T = \langle \Theta_y^e \rangle = \langle \theta_{y1} \mid \theta_{y2} \mid \theta_{y3} \mid \theta_{y4} \rangle$$

$$\langle \mathbf{W}^e \rangle^T = \langle \mathbf{W}^e \rangle = \langle w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4 \rangle$$

Pour donner une écriture simple à la forme de l'expression de déformations de cisaillement, on pose  $[\mathbf{B}^{\text{ct}}]$  la matrice gradient de déformations de cisaillement transversal telle que :

$$[\mathbf{B}^{\text{ct}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \\ \hline & \mathbf{J}^{-1} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N} \rangle & & & \\ & \langle \mathbf{N} \rangle & & \\ & & \langle \mathbf{N}, \xi \rangle & \\ & & & \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

Dans la suite du document, on note ct\_cisaillement transversal à la place de s\_shear (cisaillement en anglais) parce que la lettre s est à utiliser pour stabilisation.

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} 2\bar{\epsilon}_{xz} \\ 2\bar{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^{\text{ct}}] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} \quad (\text{I.6})$$

Il faut rappeler que les déformations de cisaillement transversal proviennent des déplacements en translation  $w$  et en rotation  $\theta_x$  et  $\theta_y$ .

Par conséquent la matrice gradient des déformations de cisaillement transversal  $[\mathbf{B}^{ct}]$  peut être représentée par deux composantes : une matrice  $[\mathbf{B}_u^{ct}]$  liée à la translation verticale  $w$  - et donc aux translations  $\{\mathbf{U}_e\}$  dans le repère global - et l'autre  $[\mathbf{B}_\theta^{ct}]$  liée aux deux rotations.

Ainsi, mises ensemble avec les matrices gradient des effets de membrane  $[\mathbf{B}^m]$  et de flexion  $[\mathbf{B}^b]$  qui sont détaillées dans le Complément III, elles servent à relier les déformations aux déplacements dans le repère local comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{cases} = \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{B}^m] & z \cdot [\mathbf{B}^b] \\ \hline [\mathbf{B}_u^{ct}] & [\mathbf{B}_\theta^{ct}] \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_e\} \\ \{\Theta_e\} \end{Bmatrix} \quad \underline{z = \zeta \cdot h/2} \quad (I.7)$$

A ce stade, les composantes de déformation de cisaillement transversal sont indépendantes de  $z$ , position dans l'épaisseur, et sont donc notées avec une barre.

Ci-dessous sont donnés les déplacements en translation (I.8) et en rotation (I.9) dans le repère global de la structure.

$$\{\mathbf{U}_e\}^T = \langle U_{x1} \quad U_{y1} \quad U_{z1} \quad U_{x2} \quad U_{y2} \quad U_{z2} \quad U_{x3} \quad U_{y3} \quad U_{z3} \quad U_{x4} \quad U_{y4} \quad U_{z4} \rangle \quad (I.8)$$

$$\{\Theta_e\}^T = \langle \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{z3} \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{z4} \rangle \quad (I.9)$$

Les déformations de membrane et de flexion calculées en intégration réduite au point de Gauss ( $\xi=\eta=0$ ) ne sont vraiment mises en évidence que lorsqu'on étend les calculs aux points de Lobatto - 3 en élasticité et au moins 5 en plasticité - suivant  $\zeta$ .

Le champ des contraintes dans cet élément coque peut alors être établi sous la condition d'état plan des contraintes grâce à la matrice de comportement  $[\mathbf{D}]$  ci-après réduite à cinq lignes et cinq colonnes puisque la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  est nulle par hypothèse. Et pour écrire simplement la relation (I.10) en élasticité isotrope, on pose :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{cases} = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \cdot \{\gamma\} ; \quad \{\gamma\} = \begin{cases} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} = [\mathbf{D}] \cdot \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{cases} ; \quad [\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & (1-\nu)/2 & & \\ & & & (1-\nu)/2 & \\ & & & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (I.10)$$

Etant en hypothèse de contraintes planes, la contrainte  $\sigma_{zz}$  ne figure pas dans la relation (I.10) puisqu'elle est négligée.  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Il est à noter que cette matrice de comportement fait parfois intervenir le facteur 5/6 de correction de cisaillement transversal qui est obtenu à partir de l'intégration du carré de la fonction poids de Reissner donnée par  $g(\zeta)=5/4(1-\zeta^2)$ .

## (2) Matrice de raideur élémentaire

Toujours dans le cas d'un comportement élastique du matériau, la matrice de raideur de l'élément est la somme des matrices de raideur de membrane, de flexion et de cisaillement calculées grâce au Principe des Travaux Virtuels en utilisant toutes les relations établies auparavant :

$$[\mathbf{K}_e] = [\mathbf{K}^m] + [\mathbf{K}^b] + [\mathbf{K}^{ct}] \quad (I.11)$$

Dans cette relation, on rappelle successivement les expressions des matrices de raideur de membrane, de flexion et de cisaillement. Pour tout autre détail, bien vouloir se référer au Complément III qui traite plus amplement ce sujet.

$$[\mathbf{K}^m] = \iint [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot dS ; \quad [\mathbf{K}^b] = \iint [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot dS ; \quad [\mathbf{K}^{ct}] = \iint [\mathbf{B}^{ct}]^T \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}^{ct}] \cdot dS \quad (I.12)$$

$$\text{Avec : } [\mathbf{D}^m] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot dz = h \cdot [\mathbf{D}] ;$$

$$[\mathbf{D}^b] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot z^2 \cdot dz = h^3 / 12 \cdot [\mathbf{D}]$$

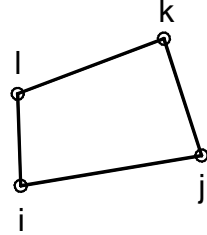
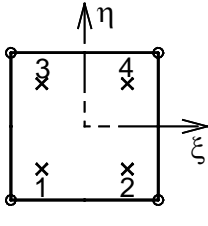
$$[\mathbf{D}^{ct}] = \frac{E \cdot h}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left[ \begin{array}{c|c} 5/6 & \\ \hline & 5/6 \end{array} \right]$$

Dans des situations où la non linéarité matérielle apparaît, les matrices de raideurs ne sont plus calculées avec la loi constitutive  $[\mathbf{D}]$  mais avec une loi issue de la loi d'écoulement en plasticité ; on tient alors compte du couplage des effets de membrane et de flexion. Par ailleurs, on peut faire appel au critère de Hill pour établir la matrice de comportement élastoplastique en tenant compte d'une orthotropie.

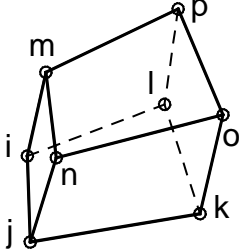
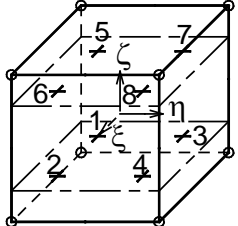
L'exemple d'une plaque encadrée (voir Figure I.2 ci-après) va permettre de comparer les résultats issus de différentes méthodes d'intégrations numériques (intégration complète, intégration réduite, intégration sélective, champ assumé) entre elles et avec la théorie de Mindlin afin de justifier le choix porté sur la méthode de champ assumé et celle de l'intégration réduite pour la suite.

On choisit de commencer par appliquer sur l'exemple la méthode d'intégration complète qui consiste à calculer en 2x2 points d'intégration d'un quadrangle l'intégrale du polynôme  $f(\xi, \eta)$  dans le tableau I.1 et en 2x2x2 points d'intégration d'une brique l'intégrale de  $f(\xi, \eta, \zeta)$  dans le tableau I.2 ci-après. Dans les deux tableaux « d° : f » désigne le degré maximal du polynôme  $f$  qui est 3 pour les deux cas,  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont les points d'intégration,  $\omega_i$  est le poids d'intégration.

**Nota :** L'objet de ce chapitre étant la présentation des éléments de type solides – coques (« briques »), on estime essentiel que le tableau I.2 relatif à l'intégration complète d'une brique accompagne celui de l'élément de type coque bien que ce paragraphe ne soit pas dédié aux briques.

Elément réel	Points d'intégration	Intégration numérique	d°:f
		$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta).d\xi.d\eta = \sum_{i=1}^4 \omega_i.f(\xi_i, \eta_i); \omega_i = 1$ $\xi_1 = \xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \xi_2 = \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\eta_1 = \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \eta_3 = \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	3:ξ 3:η

**Tableau I.1** Intégration complète dans un quadrangle

Elément réel	Points d'intégration	Intégration numérique	d°:f
		$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta).d\xi.d\eta.d\zeta = I$ $I = \sum_{i=1}^8 \omega_i.f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i); \omega_i = 1$ $\xi_i = -\frac{1}{\sqrt{3}} : i = 1,3,5,7; \quad \xi_i = \frac{1}{\sqrt{3}} : i = 2,4,6,8$ $\eta_i = -\frac{1}{\sqrt{3}} : i = 1,2,5,6; \quad \eta_i = \frac{1}{\sqrt{3}} : i = 3,4,7,8$ $\zeta_i = -\frac{1}{\sqrt{3}} : i = 1,2,3,4; \quad \zeta_i = \frac{1}{\sqrt{3}} : i = 5,6,7,8$	3:ξ 3:η 3:ζ

**Tableau I.2** Intégration complète dans une brique

### (3) Exemple de la plaque encastree

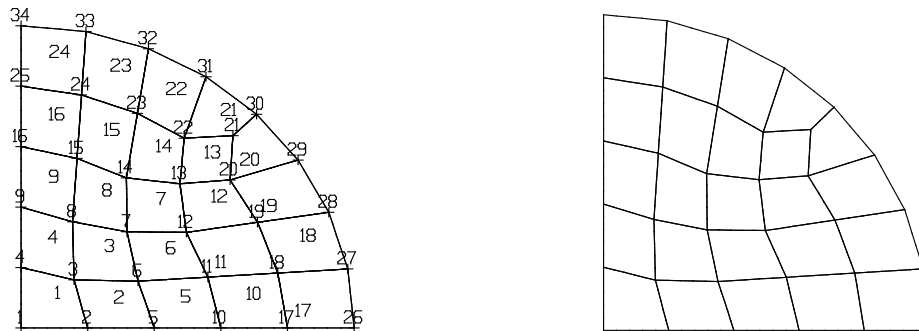
Dans cet exemple, les calculs sont à effectuer sur des plaques de rayon 100 mm, d'épaisseurs allant de 0,1 à 25 mm (voir tableau I.3).

Ces six plaques sont soumises à une pression normale 'p' qui est fonction de l'épaisseur :  $p = 0.01172 \times h^3$  afin d'avoir un déplacement normal du centre (nœud 1) de la plaque suivant la théorie de Kirchhoff égal à 1 mm

Toutes ces plaques sont dans un même matériau élastique isotrope : module de Young  $E = 200000 \text{ N/mm}^2$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

On rappelle que le résultat recherché est le déplacement du nœud central de la plaque (nœud 1).

Et, pour simplifier les calculs, seul un quart de la plaque (symétries aidant) est maillé avec des éléments quadrangles moyennant des liaisons appropriées.



**Figure I.2** Quart de la plaque encastée maillée avec le Q4 $\gamma$ 24

Les résultats des calculs par la méthode d'intégration complète sont regroupés dans le tableau I.3 et directement comparés à ceux de la théorie de Mindlin (déplacement = 1 mm en théorie de Kirchhoff quelle que soit l'épaisseur) :

Epaisseur : h (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression: p (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Intégration complète	<b>0.00102</b>	<b>0.01007</b>	<b>0.2047</b>	<b>0.5274</b>	<b>0.7698</b>	<b>0.9543</b>	<b>1.1174</b>
Théorie (Mindlin)	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

**Tableau I.3** Déplacements du nœud 1 par une intégration complète.

On constate que le déplacement normal du centre de la plaque circulaire (nœud 1 de la plaque) calculé par la méthode d'intégration complète (mais sans cisaillement assumé !) est très faible par rapport à celui obtenu par la théorie de Mindlin pour des épaisseurs en dessous de 15 mm.

Il y a là une surestimation de la rigidité de la plaque lorsqu'elle est mince, on dit qu'il y a verrouillage en cisaillement transversal.

Comme cette méthode ne donne pas de bons résultats, dans le sous paragraphe qui suit est présentée la méthode d'intégration réduite sélective (SRI) afin de voir le résultat qu'elle peut donner avec le même exemple.

### I.A.1.b) Intégration réduite sélective (SRI)

#### (1) *Justification*

Une intégration sélective est nécessaire quand l'épaisseur de la plaque devient faible devant ses autres dimensions.

Dans ce cas, en effet, l'influence des termes de cisaillement prédomine dans la solution numérique. Peuvent alors être obtenus des résultats non réalistes dus à une raideur trop importante. Il y a "blocage" ou "verrouillage" en cisaillement ("Shear locking").

La méthode consiste à combiner astucieusement les techniques d'intégration complète et réduite (Voir Tableau I.6). On peut calculer la matrice de flexion (bending en anglais) [ $K^b$ ] – ainsi que celle des effets de membrane - en considérant une intégration complète c'est à dire en 2 fois 2 points et la matrice de cisaillement transversal [ $K^{ct}$ ] avec 1 fois 1 point d'intégration.

## (2) Conséquence

La matrice de raideur en flexion se calcule comme suit :

$$[\mathbf{H}^b(\xi, \eta)] = {}^T[\mathbf{B}^b] \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot \det[\mathbf{J}] \quad (\text{I.13})$$

$$[\mathbf{K}^b] = [\mathbf{H}^b(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})] + [\mathbf{H}^b(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})] + [\mathbf{H}^b(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})] + [\mathbf{H}^b(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})] \quad (\text{I.14})$$

Et la matrice de raideur en cisaillement transversal est donc :

$$[\mathbf{H}^{ct}(\xi, \eta)] = [\mathbf{B}^{ct}]^T \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}^{ct}] \cdot \det[\mathbf{J}] \quad (\text{I.15})$$

$$[\mathbf{K}^{ct}] = 2 \times 2 \cdot [\mathbf{H}^{ct}(0,0)] = 4 \cdot [\mathbf{H}^{ct}(0,0)] \quad (\text{I.16})$$

Les matrices de comportement  $[\mathbf{D}^b]$  pour la flexion et  $[\mathbf{D}^{ct}]$  pour le cisaillement transversal sont celles données dans la relation (I.12).

## (3) Exemple de la plaque encastree

Le même exemple de la plaque encastree (I-A-1-a) en conservant les mêmes données, mais en intégration sélective, donne les résultats qui sont réunis dans le tableau I.4.

Epaisseur : h (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression: p (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Intégration complète	0.00102	0.01007	0.2047	0.5274	0.7698	0.9543	1.1174
Intégration sélective	<b>0.89003</b>	<b>0.90760</b>	<b>0.9847</b>	<b>1.0319</b>	<b>1.0924</b>	<b>1.1739</b>	<b>1.2774</b>
Théorie (Mindlin)	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

**Tableau I.4** Déplacements du nœud 1 par intégration sélective.

Avec la méthode d'intégration sélective, il y a une nette amélioration car les valeurs du déplacement vertical du nœud 1 ne sont pas très éloignées de celles de la théorie de Mindlin pour les différentes valeurs d'épaisseur des plaques.

Pour améliorer un peu plus ces résultats comparativement à la théorie de Mindlin, il convient de présenter la méthode de champ assumé de déformation, et particulièrement son cisaillement.

Dans le tableau I.5 ci-dessous sont regroupés différents types d'éléments quadrangulaires avec des techniques 'classiques' d'intégrations numériques.

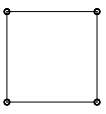
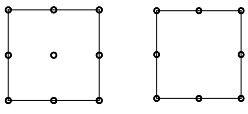
Exemples		Linéaire	Quadratique
			
		Lagrange	Lagrange "Serendip"
Complète		2 x 2	3 x 3
Réduite		1 x 1	2 x 2
Sélective	Flexion	2 x 2	3 x 3
	Cisaillement	1 x 1	2 x 2

Tableau I.5 Types d'éléments et méthodes d'intégration

### I.A.1.c) Champ assumé de déformations de cisaillement transversal

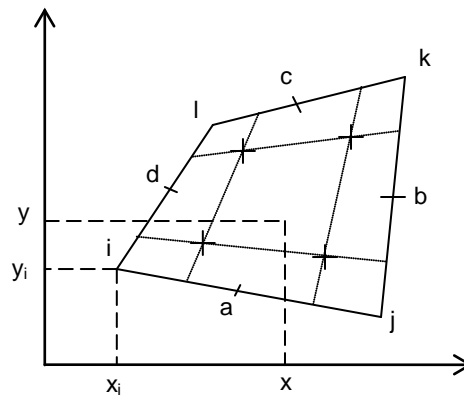


Figure I.3 L'élément coque Q4 $\gamma$ 24 dans le repère local

C'est une méthode qui peut remplacer la méthode d'intégration sélective (§I-A-1-b) ou la méthode d'intégration réduite en un point d'intégration (§I-A-1-d). La particularité de cette méthode est de calculer le cisaillement transversal d'un quadrangle -  $\{\gamma\}$  - pas directement aux quatre points d'intégration comme pour la membrane et pour la flexion mais de les interpoler à l'aide des valeurs calculées aux quatre points (a, b, c, d), milieux des côtés du quadrilatère (voir figure I-3). Ces composantes suivant xz et yz, servent ensuite à définir un champ de déformations "assumé" dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  en un point courant.

Cette procédure a un premier avantage, entre autres, qui est celui d'éviter le phénomène de blocage en cisaillement transversal.

#### (1) **Déformations de cisaillement transversal**

Son application impose de se placer au préalable en  $\zeta=0$  et positionner ensuite les points milieux des côtés  $\underline{a}(\xi=0, \eta=-1)$ ,  $\underline{b}(\xi=1, \eta=0)$ ,  $\underline{c}(\xi=0, \eta=1)$  et  $\underline{d}(\xi=-1, \eta=0)$ , afin de calculer les déformations de cisaillement transversal en partant du champ imposé suivant :



$$\begin{cases} \gamma_\xi = 1/2.(1 - \eta)\gamma_{\xi a} + 1/2.(1 + \eta)\gamma_{\xi c} \\ \gamma_\eta = 1/2.(1 - \xi)\gamma_{\eta d} + 1/2.(1 + \xi)\gamma_{\eta b} \end{cases} \quad (I.17)$$

On cherche la matrice gradient de déformation qui relie les déformations de cisaillement  $\{\gamma\}$  aux déplacements dans le repère local. Pour cela, on commence d'abord par écrire le champ imposé en (I.17) sous la forme matricielle donnée par (I.18) :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \eta & & & 1 + \eta & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 + \xi & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi a} \\ \gamma_{\eta a} \\ \gamma_{\xi b} \\ \gamma_{\eta b} \\ \gamma_{\xi c} \\ \gamma_{\eta c} \\ \gamma_{\xi d} \\ \gamma_{\eta d} \end{Bmatrix} \quad (I.18)$$

Afin d'avoir l'équation (I.18) dans le repère local de l'élément réel, on utilise successivement les relations (I.19) qui lient les déformations de cisaillement dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  à celles définies dans le repère de l'élément réel par la matrice jacobienne en  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  et  $\underline{d}$  et la relation (I.20) :

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi a} \\ \gamma_{\eta a} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_a]_{(2 \times 2)} \begin{Bmatrix} \gamma_{x a} \\ \gamma_{y a} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_a] \{\gamma_a\} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi b} \\ \gamma_{\eta b} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_b]_{(2 \times 2)} \begin{Bmatrix} \gamma_{x b} \\ \gamma_{y b} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_b] \{\gamma_b\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi c} \\ \gamma_{\eta c} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_c]_{(2 \times 2)} \begin{Bmatrix} \gamma_{x c} \\ \gamma_{y c} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_c] \{\gamma_c\} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi d} \\ \gamma_{\eta d} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_d]_{(2 \times 2)} \begin{Bmatrix} \gamma_{x d} \\ \gamma_{y d} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_d] \{\gamma_d\} \end{cases} \quad (I.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}]_{(2 \times 2)} \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} \quad (I.20)$$

$$\{\gamma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{J}^{-1}(\xi, \eta)] \begin{bmatrix} 1 - \eta & & & 1 + \eta & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 + \xi & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\mathbf{J}_a] \{\gamma_a\} \\ [\mathbf{J}_b] \{\gamma_b\} \\ [\mathbf{J}_c] \{\gamma_c\} \\ [\mathbf{J}_d] \{\gamma_d\} \end{Bmatrix} \quad (I.21)$$

Les quatre déformations de cisaillement (relation I.22) dont les composantes sont utilisées dans la relation (I.21) sont reliées aux déplacements locaux par la même matrice  $[\mathbf{B}^{ct}]$  établie dans la relation (I.5) mais calculée, ici, respectivement aux points  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  et  $\underline{d}$  milieux des côtés :



En analysant le tableau I.6, on constate que les résultats obtenus par la combinaison de la méthode d'intégration complète (pour la membrane et la flexion) et la méthode de champ assumé de déformations (pour le cisaillement transversal) sont bien meilleurs comparés aux autres méthodes d'intégrations à savoir l'intégration sélective et l'intégration complète sans champ assumé de cisaillement.

Mais la contrepartie de ces bons résultats est lourde en termes de temps de calcul. Ceci est lié aux 2x2 points d'intégration de Gauss dans le plan moyen de l'élément en intégration complète, il faut proposer mieux.

Il n'y a que l'intégration réduite – exposée dans le paragraphe ci-après - qui n'a qu'un seul point d'intégration au centre du plan de l'élément pour pallier ce problème de temps de calcul élevé en intégration complète.

#### **I.A.1.d) Intégration réduite**

Cette méthode consiste à prendre un seul point d'intégration de Gauss au centre O ( $\xi=\eta=0$ ) du plan moyen de l'élément au lieu de quatre points comme en intégration complète (paragraphe I-A-1-a) pour calculer les matrices des raideurs de membrane, de flexion et de cisaillement.

L'avantage de la technique d'intégration réduite se résume principalement à un temps de calcul moindre.

Elle permet par ailleurs d'éviter les verrouillages en cisaillement transversal. On trouvera dans [8] et [11] de longs développements à ce sujet.

##### **(1) *Modes à énergie nulle***

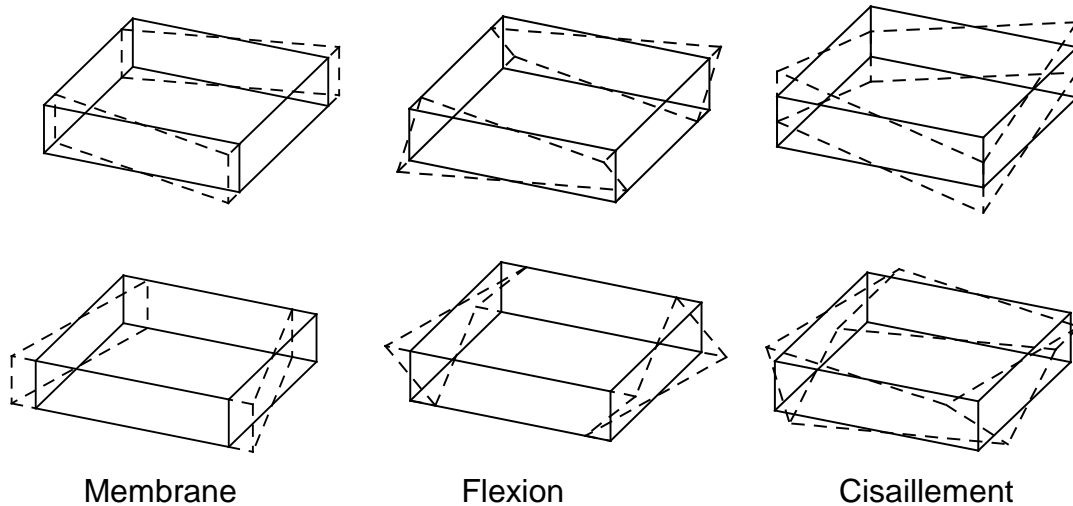
Cependant les éléments calculés en intégration réduite peuvent conduire à développer des modes à énergie nulle bien qu'il y ait déplacement des nœuds. L'influence des modes à énergie nulle peut ainsi conduire à de sévères distorsions, créant des zones où aucune contrainte n'accompagne la déformation constatée de l'élément.

Ce genre de déformation est très loin de la réalité. Par exemple, à un seul point au centre d'un quadrangle, correspondent les modes de la Figure I.4 ci-après. Ces modes sont réunis sous le vocable du phénomène 'hourglass' ou 'sablier'.

Plusieurs techniques dites de stabilisation dont celle de Belytschko ([4] et [5]) existent pour contrer les modes à énergie nulle introduits par la méthode d'intégration réduite.

Elles permettent d'éviter ce problème sans introduire une rigidité excessive sur la réponse physique de l'élément.

Plusieurs d'entre elles montrent une efficacité qui dépend énormément de la qualité des maillages et des ajustements de coefficients correcteurs.



**Figure I.4** Modes à énergie nulle dus à l'intégration réduite

La plupart des logiciels spécialisés dans le domaine de l'emboutissage utilisent la méthode d'intégration réduite en un seul point et contrôle les modes "sabliers" ("Hourglass control") principalement pour un gain de temps de calcul [4].

## (2) Matrices gradient de déformations de membrane et de flexion

Dans cette présentation, on rappelle juste l'essentiel puisque tous les autres détails peuvent être trouvés dans le Complément III.

On a donc, dans l'ordre, les matrices gradient de membrane et de flexion (bending en anglais) hors stabilisation dans lesquelles les vecteurs  $\langle \mathbf{b}_x \rangle$  et  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$  sont les dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  des fonctions d'interpolation d'un quadrangle (voir Equation I.3) calculées en  $\xi=0$  et  $\eta=0$  dans le repère local :

$$[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_0^b] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & -\langle \mathbf{b}_y \rangle \\ -\langle \mathbf{b}_y \rangle & | & -\langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

Et pour assurer la stabilisation respectivement des effets de membrane et de flexion puisque l'intégration réduite introduit des modes 'sabliers', on dispose des opérateurs gradients suivants :

$$[\mathbf{B}_s^m] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \\ \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_s^b] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \\ \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.26})$$

Le vecteur 'gamma'  $\{\gamma\} = \frac{1}{4}(\{\mathbf{h}\} - (\langle \mathbf{h} \rangle \cdot \{\mathbf{C}_x^e\})\{\mathbf{b}_x\} - (\langle \mathbf{h} \rangle \cdot \{\mathbf{C}_y^e\})\{\mathbf{b}_y\})$  est explicité dans le même Complément III.

### (3) Matrices de raideur de membrane et de flexion

Les matrices de raideur élémentaires stabilisées de membrane et de flexion sont calculées à partir de Principe des Travaux Virtuels et se résument à :

Pour la membrane :

$$[\mathbf{K}_e^m] = [\mathbf{K}_0^m] + [\mathbf{K}_s^m] \quad (I.27)$$

$$[\mathbf{K}_0^m] = [\mathbf{B}_0^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}_0^m] \cdot A, \text{ matrice de raideur en membrane non stabilisée ;}$$

$$[\mathbf{K}_s^m] = [\mathbf{B}_s^m]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_s^m], \text{ matrice pour la stabilisation en membrane ;}$$

$$[\mathbf{D}^m] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot dz, \text{ matrice de comportement pour la membrane ;}$$

$$[\mathbf{D}^s] = \left[ \begin{array}{c|c} H_{xx} \cdot D_{11}^m + H_{yy} \cdot D_{33}^m & H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m \\ \hline H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m & H_{yy} \cdot D_{22}^m + H_{xx} \cdot D_{33}^m \end{array} \right] \text{ si } D_{13} = D_{23} = 0, \text{ matrice utile à la}$$

stabilisation en membrane dont les termes sont explicités dans le Complément III.

Pour la flexion:

$$[\mathbf{K}_e^b] = [\mathbf{K}_0^b] + [\mathbf{K}_s^b] \quad (I.28)$$

$$[\mathbf{K}_0^b] = [\mathbf{B}_0^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}_0^b] \cdot A, \text{ matrice de raideur de flexion « non stabilisée » ;}$$

$$[\mathbf{K}_s^b] = [\mathbf{B}_s^b]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_s^b], \text{ matrice de raideur pour la stabilisation en flexion ;}$$

$$[\mathbf{D}^b] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot z^2 \cdot dz, \text{ matrice de comportement de flexion ;}$$

$$[\mathbf{D}^s] = \left[ \begin{array}{c|c} H_{yy} \cdot D_{22}^b + H_{xx} \cdot D_{33}^b & -H_{xy} \cdot D_{12}^b - H_{xy} \cdot D_{33}^b \\ \hline -H_{xy} \cdot D_{12}^b - H_{xy} \cdot D_{33}^b & H_{xx} \cdot D_{11}^b + H_{yy} \cdot D_{33}^b \end{array} \right] \text{ si } D_{13} = D_{23} = 0, \text{ matrice de}$$

comportement pour la stabilisation en flexion plus détaillée dans AI-2.

Où  $[\mathbf{D}]$  est la matrice constitutive élastique isotrope et  $A$  est l'aire de l'élément.

#### (4) Matrices gradient de déformations de cisaillement transversal

La relation de déformations de cisaillement transversal en champ assumé (I.24) est ici calculée en  $\xi=0$  et  $\eta=0$  (I.29) puisque nous sommes en intégration réduite. Elle peut être développée en fonction des termes de l'inverse du Jacobien (I.30), puis arrangée et mise sous une forme facile à interpréter (I.31) :

$$\{\gamma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{J}^{-1}(0,0)] \cdot \begin{bmatrix} 1-\eta & & & 1+\eta & & \\ & & & & & \\ & & 1+\xi & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 1-\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [\mathbf{J}_a] [\mathbf{B}_a^{ct}] \\ [\mathbf{J}_b] [\mathbf{B}_b^{ct}] \\ [\mathbf{J}_c] [\mathbf{B}_c^{ct}] \\ [\mathbf{J}_d] [\mathbf{B}_d^{ct}] \end{Bmatrix} \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} \quad (I.29)$$

$$[\mathbf{J}^{-1}(0,0)] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

$$\{\gamma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = [[\mathbf{B}_{c0}] + \eta \cdot [\mathbf{B}_{c1}] + \xi \cdot [\mathbf{B}_{c2}]] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} \quad (I.31)$$

où:  $\{\tilde{\mathbf{U}}_e\}^T = \langle \tilde{\mathbf{U}}_e \rangle = \langle \theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3} \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{y4} \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \rangle$

$$[\mathbf{B}_{c0}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & & & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{21} & & & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [\mathbf{J}_a] [\mathbf{B}_a^{ct}] \\ [\mathbf{J}_b] [\mathbf{B}_b^{ct}] \\ [\mathbf{J}_c] [\mathbf{B}_c^{ct}] \\ [\mathbf{J}_d] [\mathbf{B}_d^{ct}] \end{Bmatrix} \quad (I.32)$$

$$[\mathbf{B}_{c1}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{11} & & & & \\ -\bar{J}_{21} & & & \bar{J}_{21} & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [\mathbf{J}_a] [\mathbf{B}_a^{ct}] \\ [\mathbf{J}_b] [\mathbf{B}_b^{ct}] \\ [\mathbf{J}_c] [\mathbf{B}_c^{ct}] \\ [\mathbf{J}_d] [\mathbf{B}_d^{ct}] \end{Bmatrix} \quad (I.33)$$

$$[\mathbf{B}_{c2}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} & & & \bar{J}_{12} & & & & -\bar{J}_{12} \\ & & & \bar{J}_{22} & & & & -\bar{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [\mathbf{J}_a] [\mathbf{B}_a^{ct}] \\ [\mathbf{J}_b] [\mathbf{B}_b^{ct}] \\ [\mathbf{J}_c] [\mathbf{B}_c^{ct}] \\ [\mathbf{J}_d] [\mathbf{B}_d^{ct}] \end{Bmatrix} \quad (I.34)$$

Dans les trois opérateurs gradient (relations I.32, I.33 et I.34) les termes ( $\bar{J}_{11}, \bar{J}_{12}, \bar{J}_{21}, \bar{J}_{22}$ ) sont les composantes de l'inverse de la matrice jacobienne et la barre au dessus de la lettre J remplace le (-1) habituellement trouvé sur ces termes.

La première de ces trois matrices,  $[\mathbf{B}_{c0}]$ , représente la matrice gradient pour la raideur hors stabilisation.

Multipliée par la fonction poids de Reissner  $g(\zeta)=5/4 \cdot (1-\zeta^2)$ , cette matrice des effets de cisaillement (non stabilisée)  $[\mathbf{B}_{c0}]$  est utilisée pour le calcul de la matrice de raideur utile tandis que les matrices  $[\mathbf{B}_{c1}]$  et  $[\mathbf{B}_{c2}]$  permettent quant à elles d'éviter les modes à énergie nulle introduits.

### (5) Matrices de raideur de cisaillement transversal

Les matrices de raideur, correspondant à la stabilisation (s en exposant) du cisaillement transversal de cet élément coque, se calculent grâce aux formules :

$$[\mathbf{K}_{C1}^s] = \iiint_V [\mathbf{B}_{C1}] \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}_{C1}] \cdot \eta^2 dv \quad (I.35)$$

$$[\mathbf{K}_{C2}^s] = \iiint_V {}^T [\mathbf{B}_{C2}] \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}_{C2}] \cdot \xi^2 dv \quad (I.36)$$

Les résultats du calcul des intégrales suivantes, extraites des expressions des matrices de raideur de stabilisation (relations I.35 et I.36) où ds est un élément de surface et A l'aire complète du quadrangle permettent d'écrire (I.39) et (I.40) :

$$\iint \xi^2 \cdot ds = \frac{A}{3} \quad (I.37)$$

$$\iint \eta^2 \cdot ds = \frac{A}{3} \quad (I.38)$$

$$[\mathbf{K}_{C1}^s] = \int_{-h/2}^{h/2} {}^T [\mathbf{B}_{C1}] \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}_{C1}] \cdot dz \cdot \frac{A}{3} = {}^T [\mathbf{B}_{C1}] \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}_{C1}] \cdot \frac{V}{3} \quad (I.39)$$

$$[\mathbf{K}_{C2}^s] = \int_{-h/2}^{h/2} {}^T [\mathbf{B}_{C2}] \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}_{C2}] \cdot dz \cdot \frac{A}{3} = [\mathbf{B}_{C2}] \cdot [\mathbf{D}^{ct}] \cdot [\mathbf{B}_{C2}] \cdot \frac{V}{3} \quad (I.40)$$

On rappelle ici la matrice de comportement relative au cisaillement transversal :

$$[\mathbf{D}^{ct}] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 5/6 & | & \\ \hline & & 5/6 \end{bmatrix} \quad (I.41)$$

En sommant les deux matrices de raideur de stabilisation, on obtient la matrice élémentaire de raideur pour la stabilisation de cisaillement transversal :

$$[\mathbf{K}_{ct}^s] = [\mathbf{K}_{C1}^s] + [\mathbf{K}_{C2}^s] \quad (I.42)$$

### (6) Exemple de la plaque encadrée

Après cette présentation assez sommaire de l'intégration réduite, il convient de revenir sur l'exemple de la plaque encadrée (Figure I.2) utilisé auparavant dans l'intégration complète en maintenant les mêmes données et appliquer cette fois-ci la méthode d'intégration réduite.

Les résultats de cette méthode sont regroupés dans le tableau I.7 ci-après et comparés à ceux de l'intégration complète et de la théorie de Mindlin :

Epaisseur : h (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression: p (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Intégration complète	0.00102	0.01007	0.2047	0.5274	0.7698	0.9543	1.1174
Intégration sélective	0.89003	0.90760	0.9847	1.0319	1.0924	1.1739	1.2774
Intégration complète +Champ $\gamma$ "imposé"	0.98907	0.98951	1.0005	1.0346	1.0917	1.1718	1.2745
Intégration réduite +Champ $\gamma$ "assumé"	<b>0.99452</b>	<b>0.99499</b>	<b>1.0063</b>	<b>1.0410</b>	<b>1.0980</b>	<b>1.1772</b>	<b>1.27862</b>
Théorie (Mindlin)	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

**Tableau I.7** Déplacements du nœud 1 par intégration réduite

En faisant l'analyse de ce tableau I.7, on peut dire que les calculs effectués en intégration réduite couplée à la méthode de champ assumé pour le cisaillement transversal donnent des résultats satisfaisants.

Par rapport aux autres méthodes, les valeurs obtenues avec cette technique sont proches de celles de la théorie de Mindlin. Elle est adoptée pour la suite des calculs

La méthode d'intégration réduite est adoptée pour la suite parce qu'elle est bénéfique en termes de temps de calcul. Néanmoins, des soins sont à prendre pour la gestion des modes à énergie nulle comme cela a été évoqué auparavant. Le verrouillage en cisaillement transversal peut être géré par la méthode de champ assumé de cisaillement transversal.

L'élément coque Q4 $\gamma$ 24, en intégration réduite pour les effets de membrane, de flexion et pour le cisaillement (en champ assumé), est un élément classique pour la mise en forme mais son utilisation exclusive en état plan des contraintes limite son champ d'emploi.

Par contre, en modifiant cet élément coque Q4 $\gamma$ 24 pour avoir l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26, décrit dans le paragraphe qui suit, la loi constitutive complète 3D peut être utilisée permettant ainsi de calculer une vraie contrainte normale lors d'un amincissement volontairement provoqué de l'épaisseur, par exemple.

## I.A.2. Élément de type coque-solide à 5 nœuds : Q5 $\gamma$ 26

### I.A.2.a) Formulation initiale

Cet élément est présenté ici pour montrer l'évolution d'un élément de type coque vers un élément coque-solide et par la suite arriver à un élément solide-coque car finalement l'objectif dans ce chapitre est de montrer l'élaboration de l'élément brique de type solide-coque SB9 $\gamma$ 25

Cet élément coque-solide en question est conçu en ajoutant un nœud supplémentaire au centre de la surface moyenne de l'élément Q4 $\gamma$ 24 ( $\xi = \eta = 0$ ). Ce dernier nœud est muni de deux degrés de liberté en translation normale à la surface et donc dans la direction de l'épaisseur de l'élément. C'est ainsi un nouvel élément de type coque-solide, à 5 nœuds et 26 degrés de liberté, qu'on peut nommer Q5 $\gamma$ 26.



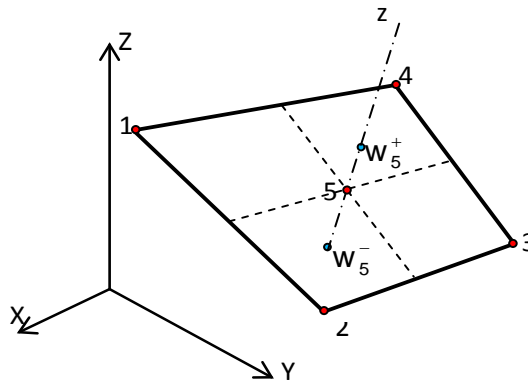
Comme les effets de membrane, de flexion et de cisaillement transversal de l'élément Q5 $\gamma$ 26 (qui sont exactement ceux de Q4 $\gamma$ 24 "réduit") ne sont pas utiles pour la formulation du futur élément de type solide-coque à 9 nœuds 'SB9 $\gamma$ 25', ils ne sont pas détaillés ici.

Concernant le cisaillement transversal, il est rappelé que les déformations de cisaillement transversal proviennent des cisaillements calculés à chaque milieu de côté par la méthode de champ assumé des déformations (paragraphe I-A-1-d) dans le but d'éviter le phénomène de verrouillage en cisaillement transversal.

Il reste par ailleurs à montrer comment l'élément Q4 $\gamma$ 24 à intégration réduite a été modifié en Q5 $\gamma$ 26 pour obtenir la contrainte normale  $\sigma_{zz}$ .

En effet, le nœud supplémentaire '5' situé au centre de l'élément est muni de deux degrés de liberté (Figure I.5). Ces degrés de liberté sont deux translations locales respectivement appelées  $w_5^-$  et  $w_5^+$  (Figure I.5) dans la direction normale 'z'. Cette particularité permet d'avoir un champ de déplacement quadratique 'w' – selon la position 'z' dans la direction de l'épaisseur – qui donne lieu ensuite à une déformation linéaire  $\varepsilon_{zz}$ .

Cette déformation linéaire est à ajouter aux cinq autres  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $2\varepsilon_{xy}$ ,  $2\varepsilon_{xz}$ ,  $2\varepsilon_{yz}$  ('x', 'y' sont des coordonnées dans le plan de l'élément). Ainsi, avec le Q5 $\gamma$ 26, une relation complète 3D de comportement contraintes-déformations peut désormais remplacer la précédente hypothèse d'état plan de contraintes dans le cas de Q4 $\gamma$ 24, comme démontré par Sansalone [10].



**Figure I.5 :** Quadrilatère à cinq nœuds 'Q5 $\gamma$ 26'

Dans le repère global (X, Y, Z), les translations  $\{\mathbf{U}_e\}$  et les rotations  $\{\Theta_e\}$  aux nœuds de l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26 sont les mêmes que celles définissant le quadrangle Q4 $\gamma$ 24 (relations I.8 et I.9) alors que les translations associées au nœud central '5' dans le repère local (x, y, z) - où 'z' est la direction normale au centre de l'élément-, sont réunies dans  $\{\mathbf{W}_e\}$  telles que:

$$\{\mathbf{W}_e\}^T = \langle w_5^- \quad w_5^+ \rangle \quad (\text{I.43})$$

Les matrices gradient originales  $[\mathbf{B}^m]$ ,  $[\mathbf{B}^b]$ ,  $[\mathbf{B}^{ct}]$ , liées à la membrane, à la bending) et aux effets de cisaillement transversal demeurent les mêmes que celles de l'élément coque proposé par Bathe et Dvorkin [12] (voir Complément III.).

On a montré auparavant que la matrice de cisaillement  $[\mathbf{B}^{ct}]$  est composée de deux parties ; une partie liée aux translations normales des nœuds sommets et l'autre partie liée aux rotations comme on peut le voir dans la relation (I.44).

Toutes ces matrices sont, pour chacune, la contribution d'une vraie matrice gradient calculée en ( $\xi=\eta=0$ ) et d'une matrice gradient qui gère la stabilisation.

Ainsi, avec 'h' dénotant l'épaisseur, on peut rappeler les cinq premières composantes de déformations établies dans la formulation du quadrilatère Q4 $\gamma$ 24 (relation I.7) mais avec une petite nuance puisque les matrices gradient de cisaillement transversal sont directement multipliées par la fonction poids de Reissner  $g(\zeta)=5/4(1-\zeta^2)$  dans la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{[B^m]} & z \cdot \mathbf{[B^b]} \\ \hline g(\zeta) \cdot \mathbf{[B_u^{ct}]} & g(\zeta) \cdot \mathbf{[B_\theta^{ct}]} \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{\{U_e\}} \\ \mathbf{\{\Theta_e\}} \end{Bmatrix} \quad (I.44)$$

On constate l'absence de la sixième déformation  $\varepsilon_{zz}$  dans l'expression ci-dessus. Une absence justifiée dans l'élaboration du Q4 $\gamma$ 24 où l'hypothèse des contraintes planes était d'actualité.

Ici, cette déformation doit être traitée afin d'utiliser pleinement la matrice de comportement contraintes-déformations 3D. C'est l'objet du sous paragraphe I-A-2-b suivant.

### **I.A.2.b) Matrice complète de comportement 3D**

Ici, l'hypothèse de contraintes planes peut être considérée comme dépassée parce qu'avec la mise en place de la déformation linéaire normale au plan, c'est désormais la relation de comportement 3D qui est utilisée dans toute sa plénitude.

En effet, les translations normales du nœud '5',  $w_5^-$  et  $w_5^+$ , sont respectivement situées sur les peaux supérieure et inférieure de la coque.

#### **(1) *Mise en place de la déformation linéaire $\varepsilon_{zz}$***

Pour obtenir la forme quadratique finale de la translation verticale 'w' et la forme linéaire de la déformation  $\varepsilon_{zz}$ , on impose :

$$w(z = -h/2) = w_5^-, \quad w(z = h/2) = w_5^+ \quad \text{et} \quad w(z = 0) = w_5 = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)/4,$$

D'où :

$$w(z) = \frac{1}{4} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2}\right) (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2 \frac{z^2}{h^2} (w_5^+ + w_5^-) + \frac{z}{h} (w_5^+ - w_5^-) \quad (I.45)$$

En dérivant la relation (I.45) par rapport à z, on arrive à la déformation recherchée :

$$\varepsilon_{zz} = \left(\frac{4z}{h} - 1\right) \frac{w_5^-}{h} - \frac{8z}{h} \frac{w_5}{h} + \left(\frac{4z}{h} + 1\right) \frac{w_5^+}{h} \quad \text{où} \quad w_5 = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)/4 \quad \text{et} \quad z = \zeta \cdot h/2$$

Par conséquent, on réécrit cette déformation suivant l'épaisseur dans le repère local comme suit :



## (2) Déformations et contraintes

En mettant à contribution cette déformation en (I.50), la relation (I.44) est modifiée pour lier maintenant six déformations aux déplacements qui intègrent les translations verticales  $\{\mathbf{W}_e\}$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}^m & z \cdot \mathbf{B}^b & \\ \hline g(\zeta) \cdot \mathbf{B}_u^c & g(\zeta) \cdot \mathbf{B}_\theta^c & \\ \hline \zeta \cdot \mathbf{B}_u^p & \zeta \cdot \mathbf{B}_w^p + \mathbf{B}_w^p & \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_e\} \\ \{\Theta_e\} \\ \{\mathbf{W}_e\} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{(0,0,\zeta)}^{6 \times 26} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_e\} \\ \{\Theta_e\} \\ \{\mathbf{W}_e\} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.51})$$

Toutes ces déformations, initialement dans le seul repère local défini au point de Gauss lié à l'intégration réduite dans le plan, sont calculées à partir des déplacements exprimés dans le repère global (sauf pour  $\{\mathbf{W}_e\}$ ).

Selon l'ordre des composants des déformations et des contraintes, et dans le cas simple d'isotropie et d'élasticité, la matrice constitutive tridimensionnelle  $[\mathbf{D}]$  relie les contraintes aux déformations obtenues dans la relation (I.52) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} ; [\mathbf{D}] = [\mathbf{D}_e] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & & & & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & & & & \lambda \\ & & \mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ \lambda & \lambda & & & & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{I.52})$$

Notons que les coefficients de Lamé ( $\lambda$  et  $\mu$ ) dans cette matrice de comportement élastique sont fonction du module du Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

## (3) Matrice de raideur élémentaire

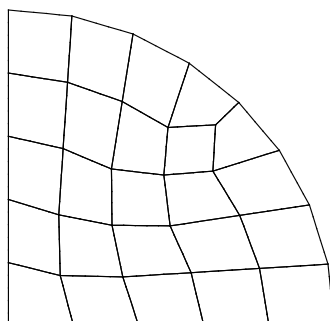
Disposant des relations (I.46) et (I.47), la matrice de raideur  $[\mathbf{K}_e]$  (hors stabilisation) de l'élément peut alors être calculée grâce à la relation courante:

$$[\mathbf{K}_e] = \iiint^T [\mathbf{B}_{(0,0,\zeta)}] [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_{(0,0,\zeta)}] dv \quad (\text{I.53})$$

Il est important de remarquer que, lors du calcul de la matrice de raideur de l'élément donnée par la relation (I.53), l'intégration du carré de la fonction poids de Reissner  $g(\zeta) = 5/4 \cdot (1 - \zeta^2)$  - valant  $5/6$  dans les cas d'élasticité pure - pour les phénomènes de cisaillement transversal nécessite cinq points d'intégration de Lobatto suivant  $\zeta$ .

#### (4) Exemple de la plaque encadrée

Pour illustrer la présentation de l'élément coque Q5 $\gamma$ 26, on reprend l'exemple de la plaque encadrée (Figure I.2) jusque-là utilisé afin de connaître, entre autres, la contrainte normale due à la pression normale appliquée sur la plaque.



**Figure I.6** Quart de la plaque encadrée maillée avec le Q5 $\gamma$ 26

En effet, en considérant une plaque circulaire de rayon  $R = 100$  mm, d'épaisseur  $h = 1$  mm et dont les caractéristiques du matériau isotrope sont le module de Young  $E = 200000$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , on cherche à déterminer le déplacement du nœud central de cette plaque (nœud 1) et la contrainte normale sur la peau supérieure et la peau inférieure de la structure après l'avoir maillée avec les éléments de type coque-solide Q5 $\gamma$ 26.

La plaque en question - dont la frontière est encadrée - est sujette à une pression uniforme normale au plan.

Les calculs sont effectués en intégration réduite pour les effets de membrane et de flexion et par la technique de champ assumé des déformations pour le cisaillement transversal.

Les résultats issus du calcul sont à comparer, en priorité, au déplacement théorique de Mindlin. Et ensuite aux résultats des calculs effectués précédemment avec l'élément coque Q4 $\gamma$ 24 en intégration complète, en intégration sélective et enfin, en intégration réduite associé au champ assumé.

Epaisseur : h (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression: p (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Intégration complète	0.00102	0.01007	0.2047	0.5274	0.7698	0.9543	1.1174
Intégration sélective	0.89003	0.90760	0.9847	1.0319	1.0924	1.1739	1.2774
Intégration réduite+ Champ assumé	0.99452	0.99499	1.0063	1.0410	1.0980	1.1772	1.27862
Q5 $\gamma$ 26 (Intégration réduite + Champ assumé)	<b>0.98704</b>	<b>0.98741</b>	<b>0.9980</b>	<b>1.0316</b>	<b>1.0875</b>	<b>1.1660</b>	<b>1.26690</b>
Théorie (Mindlin)	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

**Tableau I.8** Déplacements du nœud central (4) de l'élément Q5 $\gamma$ 26

Dans le tableau I.8 des résultats, les déplacements du nœud central pour ces différentes épaisseurs sont aussi proches de ceux donnés par la théorie de Mindlin.

Ils sont cependant moins précis que les déplacements issus des calculs faits avec l'élément Q4 $\gamma$ 24 en intégration réduite car les efforts équivalents ne sont pas seulement appliqués aux nœuds sommets mais aussi aux nœuds centraux (la justification est donnée dans le paragraphe suivant) afin d'obtenir la bonne répartition de contrainte normale entre la peau inférieure et la peau supérieure de la coque ; ceci sera rappelé et détaillé dans la présentation de l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25.

Justement, on peut lire, dans le tableau I.9, sur la peau inférieure de la structure maillée avec le Q5 $\gamma$ 26 une contrainte normale valant exactement '-p' (l'opposé de la pression normale appliquée) et sur la peau supérieure une contrainte nulle.

Ce qui représente un avantage par rapport aux calculs faits en utilisant l'élément Q4 $\gamma$ 24 où on ne peut pas avoir une contrainte normale  $\sigma_{zz}$  puisque le Q4 $\gamma$ 24 est utilisé sous l'hypothèse d'état plan de contraintes

Epaisseur : h (mm)		0,1	1	5	10	15	20	25
Pression: p (N/mm <sup>2</sup> )		1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Q5 $\gamma$ 26	$\sigma_{zz}(\text{sup})$ (MPa)	0	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_{zz}(\text{inf})$ (MPa)	-0.000012	-0.01172	-1.465	-11.72	-39.555	-93.76	-183.125

**Tableau I.9** Contraintes normales  $\sigma_{zz}$  de la structure

Voici donc un élément coque qui, modifié, est devenu un élément de type coque-solide denommé Q5 $\gamma$ 26, qui arrive à sortir du cadre des conditions de contraintes planes et présenter ainsi une contrainte normale  $\sigma_{zz}$ .

Cette méthode d'ajout d'un nœud central, qui vient d'être développée avec un élément coque, peut aussi s'appliquer aux éléments « briques » à huit nœuds tels le ShB8PS [2] qui ne peuvent, initialement, s'utiliser que sous une hypothèse d'état plan de contraintes avec une contrainte normale "irréaliste". Pour y parvenir, l'élément brique à huit nœuds de type coque-solide ShB8PS est résumé dans le paragraphe qui suit. Des modifications sont ensuite opérées pour arriver à l'élément solide-coque à neuf nœuds.

### I.A.3. Formulation d'un élément solide-coque à 8 nœuds : 'ShB8PS'

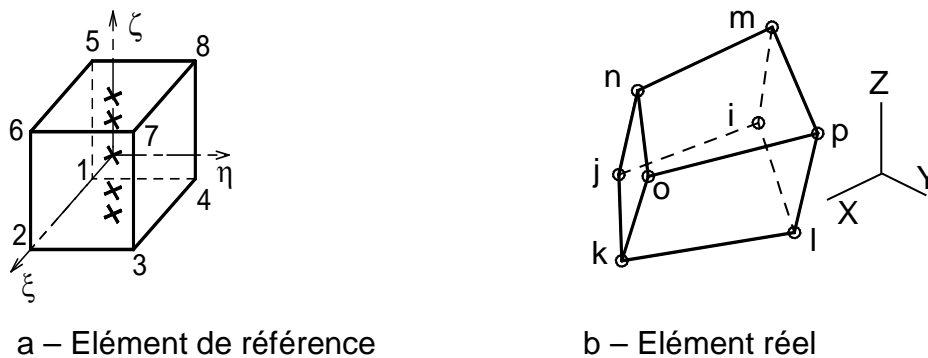
#### I.A.3.a) Décomposition des modes

L'élément appelé 'ShB8PS' dans [1], [2] et [9] est un élément « brique » à 8 nœuds avec une stabilisation physique. Une première version dite version initiale a été proposée en 2002 [1], une seconde en 2003 [9] et la dernière dite version améliorée en 2009 [2]. Par la présentation des différentes versions de cet élément « brique », les auteurs ont montré que, bien qu'elle soit efficace dans de nombreux codes comme ASTER, PLEXUS et INCA, quelques retouches peuvent toujours être apportées pour l'améliorer.

En effet, il a été constaté dans toutes les versions de cet élément que la stabilisation n'est faite que pour les modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$  or il s'avère que certaines parties des modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  qui sont multipliées par  $\xi$  et  $\eta$  s'annulent du fait de l'intégration réduite ( $\xi=0$  et  $\eta=0$ ).

Une réorganisation de la matrice gradient de déformation est faite et il est établi une matrice gradient de stabilisation des parties des modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  afin d'éclairer la suite de la démarche dans la formulation du nouvel élément.

Seules les principales parties du ShB8PS, modifiées ou laissées intactes pour formuler le futur élément de type solide-coque SB9 $\gamma$ 25, sont détaillées dans les paragraphes qui suivent. Tous les autres détails sont disponibles dans le Complément IV.



**Figure I.7.** Elément hexaédrique à huit nœuds.

Comme cela peut être vu dans la figure I.7-a, ' $\zeta$ ' est une direction privilégiée de l'épaisseur le long de laquelle sont distribués plusieurs points d'intégration (3 pour l'élasticité, 5, 7 ou plus pour la plasticité).

Le fait qu'il soit sous-intégré en  $\xi=0$  et  $\eta=0$  donne lieu à des modes à énergie nulle qui sont contrebalancés par une matrice de raideur de stabilisation. En vue de mettre aisément en évidence ces modes à énergie nulle, les habituelles fonctions d'interpolation (Equation I.54) sont écrites différemment (Equation I.55).

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i)(1 + \zeta \cdot \zeta_i) ; \quad n = 1 \text{ à } 8 \quad (\text{I.54})$$

$$\{N\} = \frac{1}{8} (\{S\} + \{a_1\}\xi + \{a_2\}\eta + \{a_3\}\zeta + \{h_1\}\eta\xi + \{h_2\}\xi\zeta + \{h_3\}\xi\eta + \{h_4\}\xi\eta\zeta) \quad (\text{I.55})$$

Les termes des fonctions d'interpolation dans l'équation (I.55) sont explicités dans le tableau I.10 suivant pour plus de clarté et surtout parce que par la suite seront rencontrés les termes de ces fonctions d'interpolation :  $\{S\}$ ,  $\{a_1\}$ ,  $\{a_2\}$ ,  $\{a_3\}$ ,  $\{h_1\}$ ,  $\{h_2\}$ ,  $\{h_3\}$ ,  $\{h_4\}$ .

n		$\xi_n$	$\eta_n$	$\zeta_n$	$\eta_n \zeta_n$	$\xi_n \zeta_n$	$\xi_n \eta_n$	$\xi_n \eta_n \zeta_n$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
3	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
5	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
	$\{S\}$	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$	$\{a_3\}$	$\{h_1\}$	$\{h_2\}$	$\{h_3\}$	$\{h_4\}$

Tableau I.10 : Vecteurs  $\{S\}$ ,  $\{a_1\}$ ,  $\{a_2\}$ ,  $\{a_3\}$ ,  $\{h_1\}$ ,  $\{h_2\}$ ,  $\{h_3\}$ ,  $\{h_4\}$

Ces modes prennent en compte le mouvement de corps rigide et diverses déformations qui pourront être interprétées comme provenant d'effets de membrane, de flexion, de cisaillement et de gauchissement (warping) dans les trois directions  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ .

Dans le but de les traiter correctement, ils sont regroupés dans les trois ensembles de figures qui suivent (Figures I.8, I.9, I.10).

Le premier ensemble contient tous les modes qui correspondent aux déplacements suivant l'axe  $\xi$  de l'élément parent. Les modes dans le deuxième ensemble correspondent quant à eux aux déplacements suivant l'axe  $\eta$  et le dernier ensemble regroupe les modes suivant  $\zeta$ .

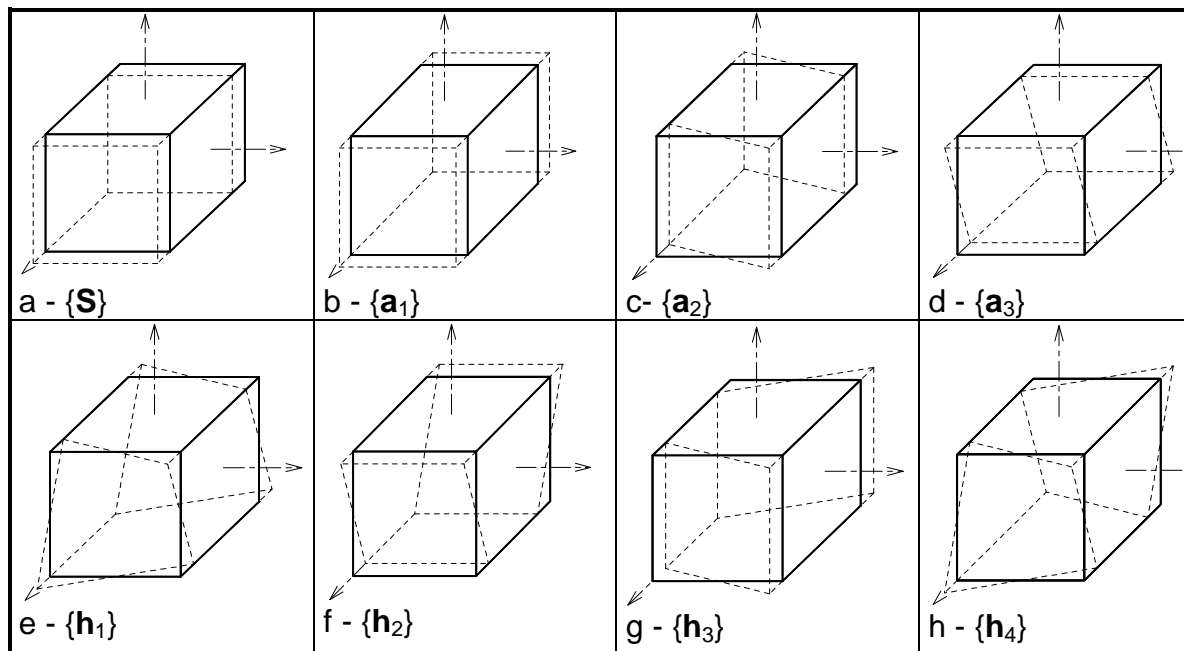


Figure I.8 Modes suivant ' $\xi$ '



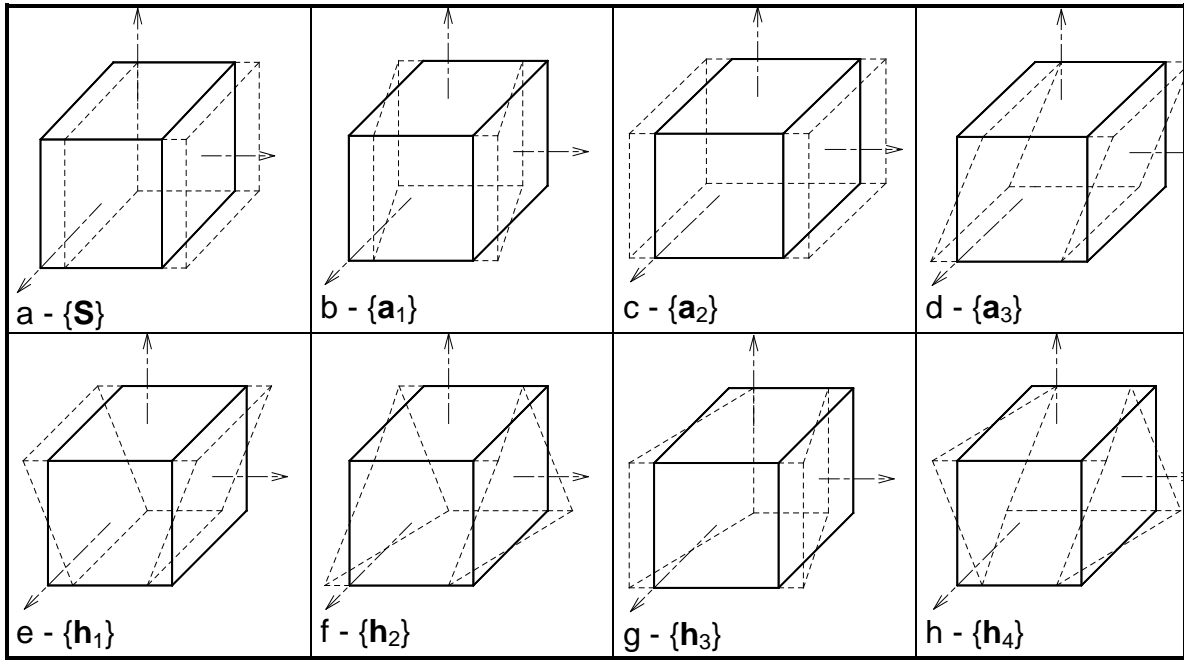


Figure I.9 Modes suivant 'η'

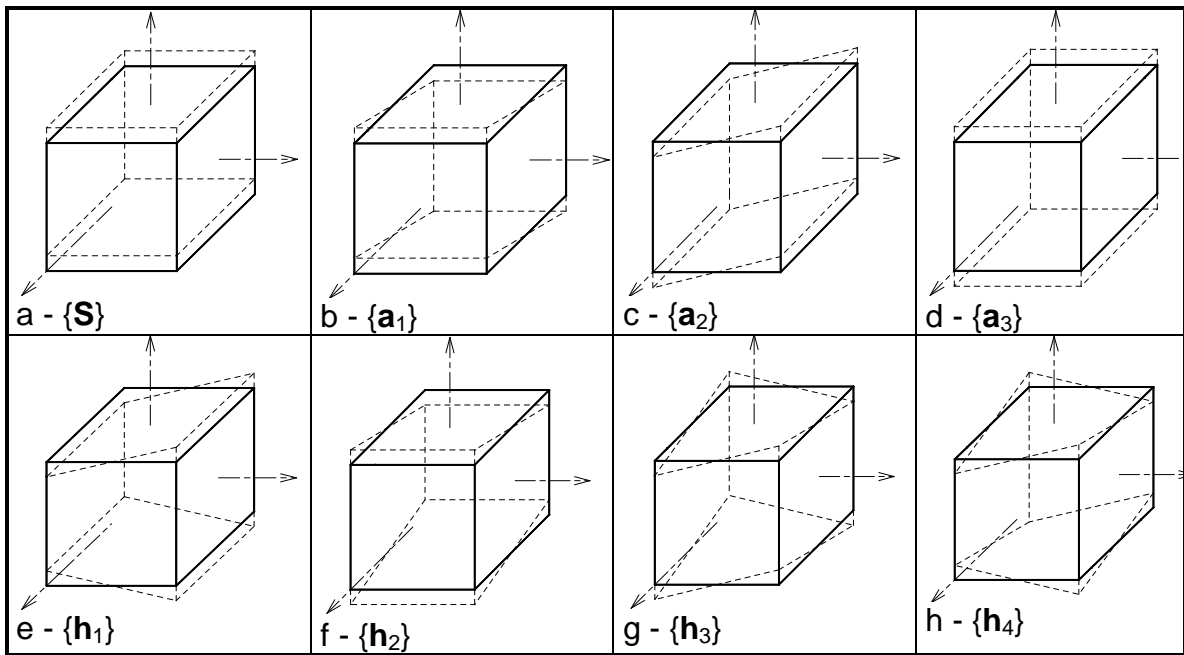


Figure I.10 Modes suivant 'ζ'

### I.A.3.b) Repère local

Afin d'utiliser pleinement les 24 modes précédemment soulignés et surtout que l'élément coque solide SHB8PS est sensé être utilisé pour donner des résultats semblables à ceux des éléments coques, il convient donc de l'avoir dans une configuration où apparaît son 'épaisseur'.

Dans cette configuration, tout point de l'élément réel est défini par les coordonnées (x, y, z) dans le repère local qui doit être mis en place. 'z' est pris dans l'épaisseur de l'élément réel en correspondance avec  $\zeta$  dans l'élément de référence ( $-1 \leq \zeta \leq 1$ ). 'x' et 'y' sont sur une surface normale à 'z'.

Les nœuds i, j, k, l puis m, n, o, p de cette brique sont pris dans cet ordre pour définir la direction de l'épaisseur sachant qu'en réalité les distances i-m, j-n, k-o et l-p ne sont pas égales (voir Figure I.11 ci-après).

Parmi les différentes façons de définir le repère local, pour une valeur de  $\zeta$  donnée, le plus simple consiste à utiliser les points milieux a, b, c et d (Figure I.11) des segments A-B, B-C, C-D et D-A.

Ainsi, les points 'c' (milieu de A-D) et 'd' (milieu de B-C) définissent le vecteur  $\vec{x} = \vec{cd} / \|\vec{cd}\|$  (le choix de cette direction n'est pas obligatoire, on peut en choisir une autre) ; puis les points 'a' (milieu de A-B) et 'b' (milieu de C-D) définissent le vecteur  $\vec{z} = \vec{cd} \wedge \vec{ab} / \|\vec{cd} \wedge \vec{ab}\|$  ; et enfin on obtient le dernier vecteur en faisant le produit vectoriel  $\vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$  afin de former le trièdre direct local en  $\zeta$ .

Et la matrice  $[\mathbf{R}_\zeta]$ , ci-après, permet de faire passer les coordonnées et les déplacements du repère local au repère global (X, Y, Z):

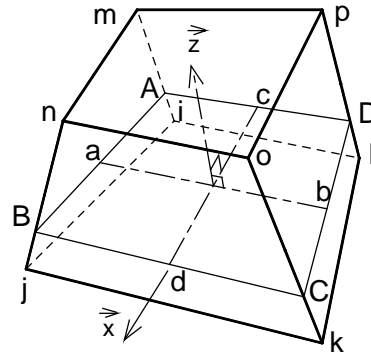
$$[\mathbf{R}_\zeta] = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ \\ yX & yY & yZ \\ zX & zY & zZ \end{bmatrix} \quad (I.56)$$

Les coordonnées des points A, B, C et D grâce auxquelles ont été définis les axes du repère local (Figure I.11) sont obtenus par une interpolation en  $\zeta$  dans le repère global (X, Y, Z).

Pour le point 'A' par exemple, en fonction des coordonnées des nœuds  $\underline{j}$  et  $\underline{m}$ , on a :

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1-\zeta) \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(1+\zeta) \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \quad (I.57)$$

On procède de la même manière pour les points 'B', 'C', et 'D' avec respectivement les nœuds  $\underline{j}$  et  $\underline{n}$ ,  $\underline{k}$  et  $\underline{o}$ ,  $\underline{l}$  et  $\underline{p}$ .



**Figure I.11** Repère local du solide coque ShB8PS

Dans la suite, les coordonnées locales de chaque point de cet élément coque solide sont écrites 'x', 'y' (coordonnées "dans le plan") et 'z' (position suivant l'épaisseur) tandis que les coordonnées nodales (Equation I.58) et les déplacements nodaux suivant les axes du repère local (Equation I.59) sont :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{X}_L^e\}^T &= \langle x_i \mid x_j \mid x_k \mid x_l \mid x_m \mid x_n \mid x_o \mid x_p \rangle \\ \{\mathbf{Y}_L^e\}^T &= \langle y_i \mid y_j \mid y_k \mid y_l \mid y_m \mid y_n \mid y_o \mid y_p \rangle \\ \{\mathbf{Z}_L^e\}^T &= \langle z_i \mid z_j \mid z_k \mid z_l \mid z_m \mid z_n \mid z_o \mid z_p \rangle \end{aligned} \quad (I.58)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_x^e\}^T &= \langle u_i \mid u_j \mid u_k \mid u_l \mid u_m \mid u_n \mid u_o \mid u_p \rangle \\ \{\mathbf{U}_y^e\}^T &= \langle v_i \mid v_j \mid v_k \mid v_l \mid v_m \mid v_n \mid v_o \mid v_p \rangle \\ \{\mathbf{U}_z^e\}^T &= \langle w_i \mid w_j \mid w_k \mid w_l \mid w_m \mid w_n \mid w_o \mid w_p \rangle \end{aligned} \quad (I.59)$$

Les déplacements dans le repère global (X, Y, Z) sont écrits sous la forme suivante :

$$\{\mathbf{U}_e\}^T = \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle U_{x_i} \mid U_{y_i} \mid U_{z_i} \mid U_{x_j} \mid U_{y_j} \mid U_{z_j} \mid \dots \mid U_{x_p} \mid U_{y_p} \mid U_{z_p} \rangle \quad (I.60)$$

### I.A.3.c) Champ de déplacements

Toujours dans le repère local, les trois translations u, v, et w d'un point courant de l'élément sont recherchées sous la forme qui suit :

$$\begin{cases} u = a_{0u} + a_{xu}x + a_{yu}y + a_{zu}z + c_{1u}\eta\zeta + c_{2u}\xi\zeta + c_{3u}\xi\eta + c_{4u}\xi\eta\zeta \\ v = a_{0v} + a_{xv}x + a_{yv}y + a_{zv}z + c_{1v}\eta\zeta + c_{2v}\xi\zeta + c_{3v}\xi\eta + c_{4v}\xi\eta\zeta \\ w = a_{0w} + a_{xw}x + a_{yw}y + a_{zw}z + c_{1w}\eta\zeta + c_{2w}\xi\zeta + c_{3w}\xi\eta + c_{4w}\xi\eta\zeta \end{cases} \quad (I.61)$$

Evidemment, en tenant compte de la relation (I.55), les translations locales en chaque nœud s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_x^e\} &= a_{0u} \{\mathbf{S}\} + a_{xu} \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yu} \{\mathbf{Y}_L^e\} + a_{zu} \{\mathbf{Z}_L^e\} + c_{1u} \{\mathbf{h}_1\} + c_{2u} \{\mathbf{h}_2\} + c_{3u} \{\mathbf{h}_3\} + c_{4u} \{\mathbf{h}_4\} \\ \{\mathbf{U}_y^e\} &= a_{0v} \{\mathbf{S}\} + a_{xv} \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yv} \{\mathbf{Y}_L^e\} + a_{zv} \{\mathbf{Z}_L^e\} + c_{1v} \{\mathbf{h}_1\} + c_{2v} \{\mathbf{h}_2\} + c_{3v} \{\mathbf{h}_3\} + c_{4v} \{\mathbf{h}_4\} \\ \{\mathbf{U}_z^e\} &= a_{0w} \{\mathbf{S}\} + a_{xw} \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yw} \{\mathbf{Y}_L^e\} + a_{zw} \{\mathbf{Z}_L^e\} + c_{1w} \{\mathbf{h}_1\} + c_{2w} \{\mathbf{h}_2\} + c_{3w} \{\mathbf{h}_3\} + c_{4w} \{\mathbf{h}_4\} \end{aligned}$$

Par conséquent, il peut être assez aisément montré en utilisant les relations d'orthogonalité (voir Complément IV) que:

$$\begin{aligned} a_{xu} &= \{\mathbf{b}_x\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\}; & a_{yu} &= \{\mathbf{b}_y\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\}; & a_{zu} &= \{\mathbf{b}_z\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\}; & c_{\alpha u} &= \{\gamma_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ a_{xv} &= \{\mathbf{b}_x\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}; & a_{yv} &= \{\mathbf{b}_y\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}; & a_{zv} &= \{\mathbf{b}_z\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}; & c_{\alpha v} &= \{\gamma_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}; & \alpha &= 1..4 \quad (I.62) \\ a_{xw} &= \{\mathbf{b}_x\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\}; & a_{yw} &= \{\mathbf{b}_y\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\}; & a_{zw} &= \{\mathbf{b}_z\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\}; & c_{\alpha w} &= \{\gamma_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \{\mathbf{b}_x\}^T = \{\mathbf{N}_{,x}(\xi = \eta = \zeta = 0)\}^T = \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \{\mathbf{b}_y\}^T = \{\mathbf{N}_{,y}(\xi = \eta = \zeta = 0)\}^T = \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \{\mathbf{b}_z\}^T = \{\mathbf{N}_{,z}(\xi = \eta = \zeta = 0)\}^T = \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{cases}$$

$$\{\gamma_\alpha\} = 1/8 \cdot (\{\mathbf{h}_\alpha\} - (\{\mathbf{h}_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{X}_L^e\})\{\mathbf{b}_x\} - (\{\mathbf{h}_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{Y}_L^e\})\{\mathbf{b}_y\} - (\{\mathbf{h}_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{Z}_L^e\})\{\mathbf{b}_z\})$$

Les vecteurs  $\{\mathbf{b}_x\}^T$ ;  $\{\mathbf{b}_y\}^T$ ;  $\{\mathbf{b}_z\}^T$  et  $\{\gamma_\alpha\}$  écrits ci-dessus sont largement détaillés dans le Complément IV. On réécrit alors sous un format matriciel très simple les déplacements locaux (I.61) :

$$\begin{cases} u = a_{0u} + \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot z + \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \mathbf{h}_\alpha \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ v = a_{0v} + \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot z + \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \mathbf{h}_\alpha \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ w = a_{0w} + \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot z + \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \mathbf{h}_\alpha \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \end{cases} \text{ avec } \alpha = 1 \text{ à } 4 \quad (I.63)$$

### I.A.3.d) Dérivées utiles

Les dérivées écrites ci-dessous sont calculées à partir du champ des déplacements (I.63) et vont permettre d'établir le champ des déformations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \{\{\mathbf{b}_x\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,x}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\}; & \frac{\partial u}{\partial y} = \{\{\mathbf{b}_y\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,y}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\}; & \frac{\partial u}{\partial z} = \{\{\mathbf{b}_z\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,z}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \{\{\mathbf{b}_x\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,x}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}; & \frac{\partial v}{\partial y} = \{\{\mathbf{b}_y\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,y}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}; & \frac{\partial v}{\partial z} = \{\{\mathbf{b}_z\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,z}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \{\{\mathbf{b}_x\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,x}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\}; & \frac{\partial w}{\partial y} = \{\{\mathbf{b}_y\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,y}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\}; & \frac{\partial w}{\partial z} = \{\{\mathbf{b}_z\} + \{\gamma_\alpha\} \mathbf{h}_{\alpha,z}\}^T \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \end{cases} \quad (I.64)$$

Dans les équations ci-dessus (I.63 et I.64), pour  $\alpha$  variant de 1 à 4, on définit les fonctions  $h_\alpha$  telles que  $h_1 = \eta\zeta$ ,  $h_2 = \xi\zeta$ ,  $h_3 = \xi\eta$  et  $h_4 = \xi\eta\zeta$ , appelés par ailleurs facteurs ou modes.

Ces fonctions ne sont pas à confondre avec les vecteurs  $\{\mathbf{h}_1\}$ ,  $\{\mathbf{h}_2\}$ ,  $\{\mathbf{h}_3\}$ ,  $\{\mathbf{h}_4\}$  définis dans le tableau I.8 et utilisés dans l'équation (I.61).

Ci-après sont détaillées les dérivées des fonctions  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  et  $h_4$  qui sont utilisées dans l'équation (I.64). A cet effet, notons  $\bar{J}_{\underline{m}\underline{n}}$  (ligne  $\underline{m}$  variant de 1 à 3, colonne  $\underline{n}$  variant de 1 à 3) correspondant au terme général de l'inverse de la matrice jacobienne  $[\mathbf{J}^{-1}]$  :

$$h_1 = \eta \zeta; \begin{Bmatrix} h_{1,x} \\ h_{1,y} \\ h_{1,z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} h_{1,\xi} \\ h_{1,\eta} \\ h_{1,\zeta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} 0 \\ \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} = \zeta \begin{Bmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{22} \\ \bar{J}_{32} \end{Bmatrix} + \eta \begin{Bmatrix} \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{33} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.65})$$

$$h_2 = \xi \zeta; \begin{Bmatrix} h_{2,x} \\ h_{2,y} \\ h_{2,z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} h_{2,\xi} \\ h_{2,\eta} \\ h_{2,\zeta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \zeta \\ 0 \\ \xi \end{Bmatrix} = \zeta \begin{Bmatrix} \bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{21} \\ \bar{J}_{31} \end{Bmatrix} + \xi \begin{Bmatrix} \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{33} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.66})$$

$$h_3 = \xi \eta; \begin{Bmatrix} h_{3,x} \\ h_{3,y} \\ h_{3,z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} h_{3,\xi} \\ h_{3,\eta} \\ h_{3,\zeta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \\ 0 \end{Bmatrix} = \eta \begin{Bmatrix} \bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{21} \\ \bar{J}_{31} \end{Bmatrix} + \xi \begin{Bmatrix} \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{22} \\ \bar{J}_{32} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.67})$$

$$h_4 = \xi \eta; \begin{Bmatrix} h_{4,x} \\ h_{4,y} \\ h_{4,z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} h_{4,\xi} \\ h_{4,\eta} \\ h_{4,\zeta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \eta \zeta \\ \xi \zeta \\ \xi \eta \end{Bmatrix} = \zeta \begin{Bmatrix} \eta \bar{J}_{11} + \xi \bar{J}_{12} \\ \eta \bar{J}_{21} + \xi \bar{J}_{22} \\ \eta \bar{J}_{31} + \xi \bar{J}_{32} \end{Bmatrix} + \xi \eta \begin{Bmatrix} \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{33} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.68})$$

Avec les dérivées établies dans la relation (I.64), on peut construire la matrice-colonne des déformations (I.69) qui est reliée aux déplacements dans le repère local par le biais de la matrice gradient de déformation.

Notons que dans la relation (I.69) les composantes de déformation de cisaillement transversal ne dépendent pas de  $\zeta$ .

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \\ & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} \\ & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix} \quad (\text{I.69})$$

où le produit  $\langle \gamma_\alpha \rangle \cdot h_\alpha$  est telle que la sommation sur  $\alpha$  varie de 1 à 4.

On pose ci-après la matrice gradient de déformations qui sera exprimée dans le repère global grâce à la matrice de passage  $[\mathbf{R}_e]$  (voir Complément IV) :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \\ & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} \\ & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} \end{bmatrix} \quad (\text{I.70})$$

Comme il peut être vérifié, dû à l'intégration réduite en  $\xi=0$  et  $\eta=0$ , les facteurs  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  ne vont pas apparaître ainsi qu'une partie des facteurs  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  dans l'opérateur gradient  $[\mathbf{B}]$ .

Donc, la matrice de raideur pour la stabilisation des modes sabliers doit au moins prendre en compte les modes  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$ .

Il convient alors de développer et simplifier les termes de cette matrice gradient en tenant compte des remarques qui viennent d'être faites.

### I.A.3.e) Matrice de raideur hors stabilisation $[\mathbf{K}_0]$

Dans [1], [2] et [9], la matrice gradient de déformation utile présentée est celle de la relation (I.70) pour  $\alpha$  allant de 1 à 2.

Et pour effectuer la stabilisation, il a été utilisé la méthode de stabilisation physique avec la matrice gradient issue de la même relation (I.70) mais pour  $\alpha$  allant de 3 à 4. Une matrice qui serait nulle du fait de l'intégration réduite en  $\xi=0$  et  $\eta=0$ .

Or, en développant complètement les termes de l'opérateur gradient  $[\mathbf{B}]$  dans la relation (I.70), on peut réaliser qu'en plus de  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$ , des parties de  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  qui sont multipliées par  $\xi$  ou par  $\eta$  s'annulent systématiquement puisque l'élément est en intégration réduite.

La matrice gradient de déformation utile, qui n'est autre que la matrice  $[\mathbf{B}]$  de la relation (I.70) pour  $\alpha$  allant de 1 à 2 ([1], [2] et [9]), a été réorganisée. Tous les termes des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  ayant en facteur  $\zeta$  sont maintenus dans la matrice gradient utile qui devient ici la matrice  $[\mathbf{B}_{0\zeta}]$  donnée en (I.71). Et les parties de ces modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  qui sont nulles parce qu'ayant en facteur  $\xi$  ou  $\eta$  sont regroupées pour former une autre matrice gradient de stabilisation (voir paragraphe suivant : § f).

$$[\mathbf{B}_{0\zeta}] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{12}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{11}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) & & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{22}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{21}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) & \\ & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{32}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{31}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{22}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{21}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{12}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{11}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) & \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{32}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{31}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) & & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{12}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{11}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) \\ & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{32}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{31}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \zeta(\bar{\mathbf{J}}_{22}\langle \boldsymbol{\gamma}_1 \rangle + \bar{\mathbf{J}}_{21}\langle \boldsymbol{\gamma}_2 \rangle) \end{bmatrix} \quad (\text{I.71})$$

Cette matrice gradient des déformations  $[\mathbf{B}_{0\zeta}]$  lie les six déformations aux vingt quatre translations dans le repère local (Equation I.72).

Le zéro '0' en indice évoque l'intégration réduite en  $\xi=\eta=0$  et la lettre grecque zêta ' $\zeta$ ' dénote l'intégration dans l'épaisseur aux points de Lobatto ou de Gauss.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{0\zeta}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{u}_y^e \\ \mathbf{u}_z^e \end{Bmatrix} \quad (\text{I.72})$$

En élasticité linéaire isotrope, les contraintes sont calculées en multipliant les déformations de la relation précédente (I.72) par la matrice de comportement tridimensionnelle 'réduite' puisque sur sa diagonale se trouve le module de Young E.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}; \quad [\mathbf{D}] = [\mathbf{D}_{el}] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & & & & \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & & & & \\ & & E & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{I.73})$$

Les coefficients 'réduits' de Lamé ( $\bar{\lambda}$ ,  $\mu$ ) sont fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

Dans la relation (I.73), les expressions des contraintes dans le plan  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont identiques à celles qu'on obtiendrait en état plan de contraintes tandis que la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  est liée à la déformation correspondante  $\varepsilon_{zz}$  par le module de Young E.

On peut parler d'un pseudo-état plan de contraintes à partir de l'instant où la contrainte à travers l'épaisseur n'est pas nulle (ou négligeable) comme l'aurait imposé la condition des contraintes planes typique des coques.

Dans le cas d'un comportement élastoplastique, la matrice constitutive  $[\mathbf{D}^{ep}]$  est calculée grâce à la matrice de comportement élastique  $[\mathbf{D}]$  en (I.73).

Sans entrer dans les détails de son élaboration son expression se résume à ce qui suit :

$$[\mathbf{D}^{ep}] = [\mathbf{D}] - \frac{[\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{a}\} \cdot \langle \mathbf{a} \rangle \cdot [\mathbf{D}]}{\mathbf{H}' + \langle \mathbf{a} \rangle \cdot [\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{a}\}} \quad (\text{I.74})$$

$$\{\mathbf{a}\} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & & & \\ -H & H+F & -F & & & \\ -G & -F & F+G & & & \\ & & & 2N & & \\ & & & & 2M & \\ & & & & & EL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sigma_{eq}} [\mathbf{P}] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

Le calcul de  $\{\mathbf{a}\}$  provient de la relation  $d\sigma_{eq} = \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \{d\boldsymbol{\sigma}\}$  et F, G, H, L, M, N sont des caractéristiques du matériau dans le critère de Hill.

Par ailleurs, la loi d'écrouissage dans le module tangent  $\mathbf{H}' = \frac{d\bar{\sigma}_{eq}}{d\bar{\varepsilon}_{eq}^p}$  est à choisir parmi

les lois ci-dessous notées (1) pour la linéaire, (2) pour celle de Ludwick, (3) pour celle de Swift et (4) pour celle de Hollomon ou d'autres telles que Hockett-Sherby.

$$\begin{cases}
 \sigma_{eq} = \sigma_0 + H' \cdot \varepsilon_{eq}^p & (1) \\
 \sigma_{eq} = \sigma_0 + A \cdot (\varepsilon_{eq}^p)^n & (2) \\
 \sigma_{eq} = B \cdot (C + \varepsilon_{eq}^p)^n & (3) \\
 \sigma_{eq} = K \cdot (\varepsilon_{eq}^p)^n & (4)
 \end{cases} \quad (I.75)$$

Avec  $\varepsilon_{eq}^p = \bar{\varepsilon}^p$  et  $\sigma_{eq} = \bar{\sigma}$  sur la courbe uniaxiale en écoulement plastique.

Les relations (I.71), (I.72) et (I.73) utilisées dans le Principe des Travaux Virtuels permettent de calculer la matrice de raideur  $[K_0]$  sans les raideurs de stabilisation des modes à énergie nulle :

$$[K_0] = \iiint^T [B_{0\zeta}] [D^{ep}] [B_{0\zeta}] dv = 4 \sum_{q=1}^{npint} [B_{0\zeta}(\zeta_q)] [D^{ep}] [B_{0\zeta}(\zeta_q)] \det[J(0,0,\zeta_q)] \varpi(\zeta_q) \quad (I.76)$$

Dans cette équation (I.76), 'npint' est le nombre des points d'intégration dans l'épaisseur – au moins 5 pour un comportement élastique plastique –, ' $\varpi$ ' est le poids à la position  $\zeta_q$  le long de l'épaisseur.

Les positions extrêmes sont sur la surface inférieure (à  $\zeta_1=-1$ ) et sur la surface supérieure (à  $\zeta_{npint}=1$ ) ou non, suivant le schéma choisi généralement connu aux points d'intégration de Lobatto ou de Gauss.

Le facteur '4' vient du fait que ' $\det[J(0,0,\zeta_q)]$ ' est calculé en  $\xi = \eta = 0$ .

Il est impératif de noter que le volume 'V' de l'élément n'est pas exactement obtenu avec une seule intégration suivant  $\zeta$  en utilisant les fonctions de forme classiques (Equation I.55). De plus, les vecteurs  $\langle b_x \rangle$ ,  $\langle b_y \rangle$  et  $\langle b_z \rangle$  – qui sont associés aussi aux vecteurs  $\langle \gamma_\alpha \rangle$  – sont effectivement les dérivées des fonctions d'interpolations établies en (I.55) (voir la fin du Complément VI) pour la programmation) et non ceux proposés par Flanagan et Belytschko [6] tels que :

$$\{b_x\} = \frac{1}{V_e} \iiint \{N_{,x}\} dv; \{b_y\} = \frac{1}{V_e} \iiint \{N_{,y}\} dv; \{b_z\} = \frac{1}{V_e} \iiint \{N_{,z}\} dv \quad (I.77)$$

La matrice de raideur hors stabilisation étant mise en place, il reste à tableur sur les paramètres qui peuvent lui être utiles pour éviter les modes à énergie nulle lors de son utilisation dans les calculs en implicite.

### I.A.3.f) Stabilisation des modes $\{h_1\}$ et $\{h_2\}$

Comme on pourra le vérifier, ce paragraphe est traité juste pour mieux comprendre ce qui se développe. Il n'a rien à voir avec la formulation initiale de ShB8PS. C'est d'ailleurs à raison si cela n'a pas été traité dans [1], [2] et [9] puisque le ShB8PS est destiné à la simulation des mises en forme des structures de faible épaisseur. Ces modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  combinés donneraient une sorte de torsion (Figure I.12) dont l'impact est, en général..., insignifiant dans la mise en forme des produits plats où 'aucune' sollicitation de torsion n'est requise.



### (1) Matrice gradient de déformation

Comme il a été dit auparavant, tous les termes des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  qui ont été ôtés de la matrice gradient de déformation  $[\mathbf{B}]$  afin d'obtenir la matrice  $[\mathbf{B}_{0\zeta}]$  sont réunis ci-après dans la matrice dite matrice gradient de stabilisation des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  ;  $[\mathbf{B}_{12}^s]$  :

$$[\mathbf{B}_{12}^s] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{13}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) & & \\ & \bar{J}_{23}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) & \\ & & \bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) \\ \bar{J}_{23}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) & \bar{J}_{13}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) & \\ \bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) & & \bar{J}_{13}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) \\ & \bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) & \bar{J}_{23}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle) \end{bmatrix} \quad (\text{I.78})$$

Il est à relever alors l'influence néfaste du terme  $\bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle)$  dans la matrice gradient utile de toutes les versions de l'élément ShB8PS puisqu'en décomposant ce terme, on trouve un morceau du mode  $\{\mathbf{h}_1\}$  ( $\bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle)$ ) et un autre du mode  $\{\mathbf{h}_2\}$  ( $\bar{J}_{33}(\xi\langle\gamma_2\rangle)$ ) qui correspondent aux deux modes non stabilisés du ShB8PS et qu'on peut voir respectivement dans les figures (I.8.e et I.9.f) reportées à la figure I.12-a.

Ces deux figures de I.12-a combinées donnent la figure suivante I.12-b qui peut être décrite comme une torsion libre autour de la direction 'z'.

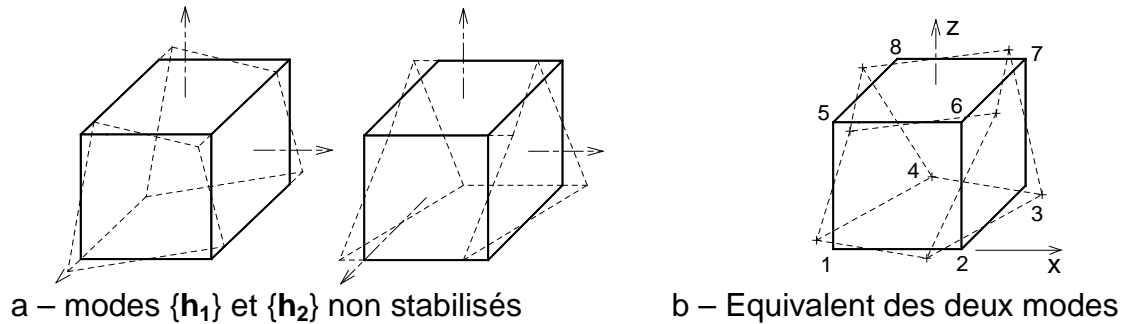


Figure I.12 'Torsion libre' autour de 'z' par combinaison de deux modes

### (2) Matrice de raideur de stabilisation

Pour rappel, tout ce qui est traité dans ce paragraphe l'est juste pour mener à bien la compréhension de la formulation du nouvel élément qui utilise fortement les caractéristiques du ShB8PS. Dans les versions du ShB8PS, aucune stabilisation de ces modes n'a été faite.

En utilisant les relations (I.78) et (I.73) dans la formule ci-dessous, on peut calculer la matrice de raideur de stabilisation des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$ .

$$[\mathbf{K}_{12}^s] = \iiint^T [\mathbf{B}_{12}^s] [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_{12}^s] dv$$

Cette matrice de raideur se réduit à la forme très simplifiée (I.79) compte tenu du fait que :

$$\iiint \xi^2 dv = \iiint \eta^2 dv = V/3 ; \iiint \xi \eta dv = 0$$

$$\bar{J}_{13} = \bar{J}_{23} = 0 \text{ montré ci-après (voir paragraphe I.A.3.b dans la section 2)}$$

$$[\mathbf{K}_{12}^s] = \begin{bmatrix} \mu(\langle \gamma_1 \rangle \langle \gamma_1 \rangle + \langle \gamma_2 \rangle \langle \gamma_2 \rangle) V/3 & & \\ & \mu(\langle \gamma_1 \rangle \langle \gamma_1 \rangle + \langle \gamma_2 \rangle \langle \gamma_2 \rangle) V/3 & \\ & & E.(\langle \gamma_1 \rangle \langle \gamma_1 \rangle + \langle \gamma_2 \rangle \langle \gamma_2 \rangle) V/3 \end{bmatrix} \quad (I.79)$$

Elle devrait être ajoutée à la matrice de raideur des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$  (paragraphe suivant) mais pour les raisons évoquées auparavant (pas de torsion dans la mise en forme des produits plats), on verra plus loin dans la formulation du SB8γ24, que seule la 'dernière' composante de cette matrice de raideur de stabilisation (3<sup>ème</sup> ligne et 3<sup>ème</sup> colonne) est prise en compte pour stabiliser le pincement.

Et lorsqu'une vraie loi de comportement 3D doit être utilisée comme plus loin dans l'élaboration de l'élément solide-coque SB9γ25 alors le module de Young dans cette relation (I.79), à la 3<sup>ème</sup> ligne et 3<sup>ème</sup> colonne, est remplacé par le facteur  $\lambda+2\mu$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

### I.A.3.g) Stabilisation des modes $\{h_3\}$ et $\{h_4\}$

#### (1) *Autre repère local*

On présente ici un autre repère local dont la caractérisation est légèrement différente (voir figure I-13 ci-après) de celle du repère local présenté dans le paragraphe I-A-3-b. C'est dans ce nouveau repère que la matrice de raideur pour la stabilisation de l'élément de type coque-solide est définie afin d'opérer certaines simplifications.

Dans ce repère, on peut montrer que, quelle que soit la forme de l'élément d'étude, les valeurs des composantes  $\bar{J}_{12}$ ,  $\bar{J}_{13}$  et  $\bar{J}_{23}$  de l'inverse du Jacobien sont toujours nulles.

C'est en fait un repère local (en  $\xi, \eta$  et  $\zeta=0$ ) dont la définition commence par le calcul de  $U_x, U_y, U_z$  qui sont les composantes d'un vecteur  $\bar{U}$  qui n'est pas un déplacement mais un vecteur nécessaire à la mise en place du premier axe  $\bar{x}$  :

$$U_x = x, \xi = \{\mathbf{N}, \xi\}^T \cdot \{\mathbf{X}_G^e\} ; U_y = y, \xi = \{\mathbf{N}, \xi\}^T \cdot \{\mathbf{Y}_G^e\} ; U_z = z, \xi = \{\mathbf{N}, \xi\}^T \cdot \{\mathbf{Z}_G^e\}$$

$\{\mathbf{N}\}$  est la fonction de forme établie dans la relation (I.55) et  $\{\mathbf{X}_G^e\}, \{\mathbf{Y}_G^e\}, \{\mathbf{Z}_G^e\}$  les coordonnées des nœuds de l'élément dans le repère global (voir relation I.58 pour la notation dans le repère Local)

On peut alors avoir le premier axe  $\bar{x}$  de ce repère local exprimé comme suit :

$$\bar{x} = \bar{U} / \|\bar{U}\|$$

Les composantes suivantes sont celles d'un vecteur  $\bar{V}$  utile au calcul du second axe  $\bar{y}$  du repère local,  $\bar{x}$  étant déjà établi :

$$V_x = x, \eta = \{\mathbf{N}, \eta\}^T \cdot \{\mathbf{X}_G^e\}; \quad V_y = y, \eta = \{\mathbf{N}, \eta\}^T \cdot \{\mathbf{Y}_G^e\}; \quad V_z = z, \eta = \{\mathbf{N}, \eta\}^T \cdot \{\mathbf{Z}_G^e\}$$

Afin d'être orthogonal à l'axe  $\bar{x} = \bar{U} / \|\bar{U}\|$ : 
$$\bar{y} = (\bar{V} - (\bar{x} \cdot \bar{V})\bar{x}) / \|\bar{V} - (\bar{x} \cdot \bar{V})\bar{x}\| \quad (I.80)$$

On détermine enfin le dernier axe  $\bar{z}$  en procédant au produit vectoriel suivant :

$$\bar{z} = \bar{x} \wedge \bar{y} \quad (I.81)$$

La matrice de passage dont les termes sont les projetés des axes x, y et z du repère local dans le repère global (X, Y, Z) est :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ \\ yX & yY & yZ \\ zX & zY & zZ \end{bmatrix}$$

## (2) Démonstration de $\bar{J}_{12} = \bar{J}_{13} = \bar{J}_{23} = 0$

On peut maintenant montrer que dans un tel repère,  $\bar{J}_{12}$ ,  $\bar{J}_{13}$  et  $\bar{J}_{23}$  sont nuls. En effet, en plaçant l'origine de ce repère au centre de l'élément brique d'épaisseur 'h', on peut vérifier simplement « à la main » que tous les termes qui sont en dehors de la diagonale du Jacobien sont nuls.

Dans un tel repère où les axes peuvent être considérés parallèles aux côtés de l'élément brique de longueur 'L', de largeur 'l' et de hauteur 'h', on écrit le Jacobien comme suit, puis on remplace les coordonnées des nœuds de la brique dans la matrice jacobienne par leurs valeurs (L/2 ou -L/2, l/2 ou -l/2, h/2 ou -h/2) suivant leurs positions.

$$[\mathbf{J}] = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{13} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & \mathbf{J}_{23} \\ \mathbf{J}_{31} & \mathbf{J}_{32} & \mathbf{J}_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} -X_1 + X_2 + X_3 - X_4 & -Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_4 & -Z_1 + Z_2 + Z_3 - Z_4 \\ -X_5 + X_6 + X_7 - X_8 & -Y_5 + Y_6 + Y_7 - Y_8 & -Z_5 + Z_6 + Z_7 - Z_8 \\ -X_1 - X_2 + X_3 + X_4 & -Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Z_1 - Z_2 + Z_3 + Z_4 \\ -X_5 - X_6 + X_7 + X_8 & -Y_5 - Y_6 + Y_7 + Y_8 & -Z_5 - Z_6 + Z_7 + Z_8 \\ -X_1 - X_2 - X_3 - X_4 & -Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 & -Z_1 - Z_2 - Z_3 - Z_4 \\ X_5 + X_6 + X_7 + X_8 & Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 & Z_5 + Z_6 + Z_7 + Z_8 \end{bmatrix}$$

Avec toutes ces considérations évoquées, la matrice Jacobienne et son inverse sont :

$$[\mathbf{J}] = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 4L & 0 & 0 \\ 0 & 4l & 0 \\ 0 & 0 & 4h \end{bmatrix} \quad [\mathbf{J}^{-1}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_{11} & \bar{\mathbf{J}}_{12} & \bar{\mathbf{J}}_{13} \\ \bar{\mathbf{J}}_{21} & \bar{\mathbf{J}}_{22} & \bar{\mathbf{J}}_{23} \\ \bar{\mathbf{J}}_{31} & \bar{\mathbf{J}}_{32} & \bar{\mathbf{J}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/L & 0 & 0 \\ 0 & 2/l & 0 \\ 0 & 0 & 2/h \end{bmatrix}$$

Voilà vérifié que  $\bar{\mathbf{J}}_{12}$ ,  $\bar{\mathbf{J}}_{13}$  et  $\bar{\mathbf{J}}_{23}$  sont nuls alors que  $\bar{\mathbf{J}}_{33}$  vaut  $2/h$ ; où 'h' est une épaisseur constante quelle que soit de forme l'élément dans le plan.

**Il faut noter par contre que pour un élément aux formes non régulières, il a été vérifié numériquement que  $\bar{\mathbf{J}}_{12}$ ,  $\bar{\mathbf{J}}_{13}$  et  $\bar{\mathbf{J}}_{23}$  sont bien nuls mais pas  $\bar{\mathbf{J}}_{21}$ . De même  $\bar{\mathbf{J}}_{31}$  et  $\bar{\mathbf{J}}_{32}$  ne sont pas nuls si l'épaisseur est variable.**

### (3) Matrice gradient de stabilisation des modes $\{h_3\}$ et $\{h_4\}$

Tous les termes des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$ , nuls du fait de l'intégration réduite, sont regroupés dans les matrices gradients suivantes  $[\mathbf{B}_{34}]$  et  $[\mathbf{B}_{\zeta 4}]$ .

Ces deux matrices  $[\mathbf{B}_{34}]$  et  $[\mathbf{B}_{\zeta 4}]$  sont intentionnellement séparées de cette façon pour une meilleure lisibilité et pour que les termes du mode  $\{h_4\}$  contenant  $\zeta$  regroupés à part dans la matrice  $[\mathbf{B}_{\zeta 4}]$  puissent être mieux gérés par la suite.

$$[\mathbf{B}_{34}] = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{J}}_{11}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{12}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{13}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle & & \\ & (\bar{\mathbf{J}}_{21}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{22}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{23}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle & \\ & & (\bar{\mathbf{J}}_{31}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{32}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{33}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle \\ (\bar{\mathbf{J}}_{21}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{22}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{23}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle & (\bar{\mathbf{J}}_{11}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{12}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{13}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle & \\ (\bar{\mathbf{J}}_{31}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{32}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{33}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle & & (\bar{\mathbf{J}}_{11}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{12}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{13}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle \\ & (\bar{\mathbf{J}}_{31}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{32}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{33}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle & \bar{\mathbf{J}}_{21}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{22}\xi\langle\gamma_3\rangle + \bar{\mathbf{J}}_{23}\xi\eta\langle\gamma_4\rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.82})$$

$$[\mathbf{B}_{\zeta 4}] = \zeta \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{J}}_{11}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{12}\xi)\langle\gamma_4\rangle & & \\ & (\bar{\mathbf{J}}_{21}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{22}\xi)\langle\gamma_4\rangle & \\ & & (\bar{\mathbf{J}}_{31}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{32}\xi)\langle\gamma_4\rangle \\ (\bar{\mathbf{J}}_{21}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{22}\xi)\langle\gamma_4\rangle & (\bar{\mathbf{J}}_{11}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{12}\xi)\langle\gamma_4\rangle & \\ (\bar{\mathbf{J}}_{31}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{32}\xi)\langle\gamma_4\rangle & & (\bar{\mathbf{J}}_{11}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{12}\xi)\langle\gamma_4\rangle \\ & (\bar{\mathbf{J}}_{31}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{32}\xi)\langle\gamma_4\rangle & (\bar{\mathbf{J}}_{21}\eta + \bar{\mathbf{J}}_{22}\xi)\langle\gamma_4\rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.83})$$

De sorte à simplifier autant que possible le calcul de la matrice de raideur de stabilisation mais aussi à traiter plus efficacement le verrouillage en cisaillement [2], on peut noter que les matrices  $[\mathbf{B}_{34}]$  et  $[\mathbf{B}_{\zeta 4}]$  sont remplacées par la matrice suivante  $[\mathbf{B}^s]$  (Equation I.84 ci-après). La forme simplifiée de  $[\mathbf{B}^s]$  peut être justifiée par le fait que les termes  $\bar{J}_{12}$ ,  $\bar{J}_{13}$  et  $\bar{J}_{23}$  sont montrés auparavant nuls.

Mais dans [2], il semble injustifié à ce niveau de développement que les auteurs puissent omettre le terme  $\bar{J}_{22}\xi(c\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle)$  à la 5<sup>ème</sup> ligne et 3<sup>ème</sup> de la matrice gradient dédiée à la stabilisation.

$$[\mathbf{B}^s] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}\eta(\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle) & & & & \\ & \bar{J}_{22}\xi(\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle) & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \bar{J}_{11}\eta(c\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle) \\ & & & & \bar{J}_{22}\xi(c\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle) \end{bmatrix} \quad (\text{I.84})$$

Prévu pour éliminer les verrouillages en membrane et en cisaillement, cet opérateur gradient de déformation  $[\mathbf{B}^s]$  est projeté sur un sous espace approprié [2]. Par ailleurs, il est certes déjà montré que  $\bar{J}_{31} = \bar{J}_{32} = 0$  mais on peut rappeler que ceci ne peut être exactement vérifié que si l'épaisseur de l'élément est constante.

Sinon, il convient de considérer que ce genre d'élément est utilisé pour mailler une 'coque' – c'est-à-dire sans un changement brusque de l'épaisseur –  $\bar{J}_{31}$ ,  $\bar{J}_{32}$  (3<sup>ème</sup> ligne, 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> colonnes dans l'inverse du Jacobien) sont assez petits pour justifier la simplification.

Pour l'équation  $\bar{J}_{21} = 0$ , c'est différent puisque  $\bar{J}_{21}$  (2<sup>ème</sup> ligne, 1<sup>ère</sup> colonne de l'inverse du Jacobien) peut être non négligeable si la forme de l'élément dans le plan s'écarte d'un rectangle.

Précisément, les auteurs déjà cités suggèrent de prendre le facteur 'c' égal à 0.1 si la forme dans le plan est parfaitement rectangulaire et nul sinon pour gérer  $\bar{J}_{21}$ .

#### (4) **Matrice de raideur de stabilisation des modes $\{h_3\}$ et $\{h_4\}$**

Grâce à la matrice de comportement  $[\mathbf{D}]$  établie en (I.73) et à la matrice gradient adoptée pour la stabilisation  $[\mathbf{B}^s]$  dans la relation (I.84), on peut calculer la matrice de raideur pour la stabilisation à partir de la formule :

$$[\mathbf{K}^s] = \iiint_V {}^T [\mathbf{B}^s] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}^s] \cdot dv$$

On obtient une matrice de raideur de stabilisation  $[\mathbf{K}^s]$  diagonale :

$$[\mathbf{K}^s] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx}^s & & \\ & \mathbf{K}_{yy}^s & \\ & & \mathbf{K}_{zz}^s \end{bmatrix} ; \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{xx}^s = H_{11}(\bar{\lambda} + 2\mu)[\{\gamma_3\}\{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3}\{\gamma_4\}\{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{yy}^s = H_{22}(\bar{\lambda} + 2\mu)[\{\gamma_3\}\{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3}\{\gamma_4\}\{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{zz}^s = (H_{11} + H_{22})\mu[c^2\{\gamma_3\}\{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3}\{\gamma_4\}\{\gamma_4\}^T] \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

Même sans entrer dans les détails des propriétés essentielles des vecteurs  $\{\gamma_\alpha\}$ , il est important de remarquer l'extrême simplicité de cette matrice de raideur.

On rappelle que les coefficients  $\bar{\lambda}$  et  $\mu$  dans les termes de cette matrice de raideur sont les coefficients de Lamé, appelés aussi coefficients 'réduits' de Lamé à cause de  $\bar{\lambda}$ . Et les facteurs  $H_{11}$  et  $H_{22}$  sont calculés comme suit, avec 'V' le volume de l'élément :

$$H_{11} = \bar{J}_{11}^2 \iiint \eta^2 dv = \bar{J}_{11}^2 V/3 ; H_{22} = \bar{J}_{22}^2 \iiint \xi^2 dv = \bar{J}_{22}^2 V/3 ; \iiint \xi^2 \zeta^2 dv = \iiint \eta^2 \zeta^2 dv = V/9 \quad (I.86)$$

Avant toute opération d'assemblage des différentes matrices de raideurs, il importe que  $[K^s]$  (Equation I.85), établie dans le repère local du paragraphe I-A-3-f, puisse passer dans le repère global. Et il en va de même pour la matrice de raideur de stabilisation  $[K_{12}^s]$  (I.79) et la matrice de raideur utile hors stabilisation  $[K_0]$  (I.76).

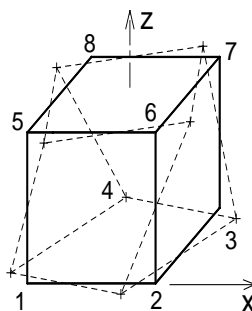
### (5) Remarque sur la stabilisation

Grâce à cet exemple de « torsion libre », on peut montrer qu'en prenant en compte l'expression  $(\bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle))$  dans l'opérateur gradient  $[B_{12}^s]$  qu'utilise la matrice de raideur de stabilisation  $[K_{12}^s]$  (I.78), le problème induit par la 'torsion libre' autour de l'axe z' dans [9], due aux deux modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  non stabilisés, est résolu bien que son impact sur la mise en forme des tôles soit généralement sans effet.

C'est un exemple qui est destiné à montrer que les modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  ont été stabilisés. A cet effet, on considère l'élément brique (Figure I.12. bis) de 100 mm de longueur et de largeur. Les caractéristiques du matériau de cet élément sont : Module de Young  $E = 200000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

Pour avoir la configuration de la torsion libre autour de l'axe z, on impose sur les nœuds suivants de l'élément les déplacements  $U_x$  et  $U_y$  : **1**(-1,1), **2**(-1,-1), **3**(1,-1), **4**(1,1), **5**(1,-1), **6**(1,1), **7**(-1, 1), **8**(-1,-1). On cherche les forces de réaction pour caractériser la raideur de cette torsion.

Les résultats des calculs obtenus avec le ShB8PS sont à comparer à ceux de l'élément brique 'C3D8' dans le code Abaqus.



**Figure I.12.bis : Torsion libre autour de 'z'**

Comme réponse, à chaque nœud de l'élément, on a donc relevé les Forces de Réaction  $|F_x| = |F_y| = 1282051.2$  N pour un calcul fait avec le ShB8PS.

$|F_x| = |F_y| = 1.2821E+06$  N sont les forces données par le calcul effectué avec l'élément 'C3D8' du code Abaqus.

On constate l'exactitude entre les résultats donnés par les deux éléments et la conclusion à tirer est qu'une 'amélioration' a été effectivement apportée au ShB8PS.

Cependant il faut noter, avant de passer au paragraphe suivant, que le facteur ' $c = 0.1$ ', obligatoire en vue de stabiliser le mode  $\{h_3\}$  suivant  $\zeta$ , dans la matrice gradient de stabilisation  $[B^s]$  (relation 1.84) semble être imposé arbitrairement puisqu'il conduit à un résultat faux pour un exemple bien connu de la plaque carrée traitée dans le deuxième chapitre (paragraphe II-A-1).

Par ailleurs, dans [2], les auteurs affirment que l'élément ShB8PS ne passerait l'exemple de la plaque en flexion (bending Patch test) qu'après un maillage fin (4x4 au moins) de la structure pour tendre vers les bons résultats. Par ailleurs, ils ont confirmé qu'il faut intégrer la méthode de cisaillement assumé pour résoudre ce problème. La prise en compte de cette méthode est faite dans le paragraphe suivant dédié à la formulation de l'élément de type solide coque SB8 $\gamma$ 24.

## I.B. Élément solide-coque modifié à 8 noeuds : 'SB8 $\gamma$ 24'

Pour la formulation de cet élément, la « brique » ShB8PS décrite dans le paragraphe précédent est utilisée mais en y ajoutant la méthode d'interpolation donnant le cisaillement transversal de Q4 $\gamma$ 24, y compris la stabilisation associée.

Pour rappel, les auteurs [2] ont montré que l'élément ShB8PS passe le Patch-test de membrane mais pas celui de la flexion. Cependant les résultats numériques ne peuvent converger vers ceux d'une solution analytique que lorsque chacun des cinq éléments originaux maillant la plaque est subdivisé en 4x4 éléments.

En vue d'obtenir directement des résultats corrects avec le maillage original constitué par ces cinq éléments, une importante modification est apportée à la formulation précédente des déformations de 'cisaillement transversal' du ShB8PS grâce à la méthode des déformations assumées (postulées). Dans la suite est présenté le « ShB8PS modifié » dénommé SB8 $\gamma$ 24.

### I.B.1. Champ des déformations postulées

Cette méthode, présentée dans le paragraphe II, est utilisée ici pour interpoler les déformations de cisaillement transversal de l'élément ShB8PS à partir des déformations calculées au milieu de chaque face milieu (voir Figure I.13) afin d'éviter, entre autres, le phénomène de blocage en cisaillement transversal.

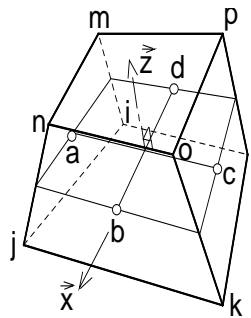


Figure I.13 : Repère local du ShB8PS

C'est exactement la méthode de champ assumé en intégration réduite, traitée dans le paragraphe I-A-1-d, mais appliquée ici sur un élément brique de type solide coque. L'application de cette méthode sur cet élément brique impose donc de se placer au préalable en  $\zeta=0$  (voir Figure I.13) et positionner ensuite les points milieux des côtés  $\underline{a}(\xi=0, \eta=-1)$ ,  $\underline{b}(\xi=1, \eta=0)$ ,  $\underline{c}(\xi=0, \eta=1)$  et  $\underline{d}(\xi=-1, \eta=0)$  afin de calculer les déformations de cisaillement.

Les déformations de cisaillement transversal sont calculées en ces quatre positions puis interpolées comme suit :

$$\begin{cases} \gamma_{\xi} = 1/2.(1 - \eta)\gamma_{\xi}^a + 1/2.(1 + \eta)\gamma_{\xi}^c \\ \gamma_{\eta} = 1/2.(1 - \xi)\gamma_{\eta}^d + 1/2.(1 + \xi)\gamma_{\eta}^b \end{cases} \quad (I.87)$$

L'écriture de l'expression (I.17) est référencée (I.87) pour signifier qu'ici est traité le champ assumé de cisaillement transversal pour un élément brique.



### I.B.1.a) Relations utiles

La matrice jacobienne calculée en  $\bar{\xi}=\bar{\eta}=\bar{\zeta}=0$  est notée comme suit :

$$[\mathbf{J}^{-1}(0,0,0)] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} & \bar{J}_{32} & \bar{J}_{33} \end{bmatrix} \text{ de sorte à avoir : } \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz}(\xi, \eta) \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi} \\ \gamma_{\eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.88})$$

Liées à la position 'a' ( $\xi_a = 0, \eta_a = -1$ ) les relations utiles pour la programmation sont :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^a \\ \gamma_{\eta}^a \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_{xy}^a] \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz}^a \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz}^a \end{Bmatrix}; \quad [\mathbf{J}_{xy}^a] = \begin{bmatrix} J_{11}^a & J_{12}^a \\ J_{21}^a & J_{22}^a \end{bmatrix} \quad (\xi=0, \eta=-1) \quad (\text{I.89})$$

$$[\mathbf{J}^a] = \begin{bmatrix} J_{11}^a & J_{12}^a & J_{13}^a \\ J_{21}^a & J_{22}^a & J_{23}^a \\ J_{31}^a & J_{32}^a & J_{33}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}_{,\xi} \rangle^T \\ \langle \mathbf{N}_{,\eta} \rangle^T \\ \langle \mathbf{N}_{,\zeta} \rangle^T \end{bmatrix} \cdot [\langle \mathbf{X}_L^e \rangle \quad \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \quad \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle] \quad (\xi=0, \eta=-1, \zeta=0)$$

$$[\mathbf{J}^a]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}^a & \bar{J}_{12}^a & \bar{J}_{13}^a \\ \bar{J}_{21}^a & \bar{J}_{22}^a & \bar{J}_{23}^a \\ \bar{J}_{31}^a & \bar{J}_{32}^a & \bar{J}_{33}^a \end{bmatrix}$$

Aux points  $\underline{b}$  ( $\xi_b=1, \eta_b=0$ ),  $\underline{c}$  ( $\xi_c=0, \eta_c=1$ ) et  $\underline{d}$  ( $\xi_d=-1, \eta_d=0$ ) les expressions sont identiques à celle de la relation (I.89) mais calculées en ces positions.

### I.B.1.b) Déformations de cisaillement transversal

Au point  $\underline{a}$ , les déformations de cisaillement sont liées aux translations dans le repère local par la matrice gradient  $[\mathbf{B}_a]$  dont les termes sont explicitées dans les relations ci-après ; (I.91) et (I.92) :

$$\begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz}^a \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz}^a \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^a] \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \\ \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \\ \langle \mathbf{U}_z^e \rangle \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [\mathbf{B}^a] = [\mathbf{B}_{ct}] + [\mathbf{B}_{ct}^a] \quad (\text{I.90})$$

$$[\mathbf{B}_{ct}] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_z \rangle & & \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ & \langle \mathbf{b}_z \rangle & \\ & & \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.91})$$

$$[\mathbf{B}_{ct}^a] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{33}^a(\eta_a \langle \gamma_1 \rangle + \xi_a \langle \gamma_2 \rangle) & & (\bar{J}_{11}^a \eta_a + \bar{J}_{12}^a \xi_a) \langle \gamma_3 \rangle \\ & \bar{J}_{33}^a(\eta_a \langle \gamma_1 \rangle + \xi_a \langle \gamma_2 \rangle) & \\ & & (\bar{J}_{21}^a \eta_a + \bar{J}_{22}^a \xi_a) \langle \gamma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{I.92})$$

Il peut être remarqué que le vecteur  $\langle \gamma_4 \rangle$  n'est pas inclus dans la matrice gradient de la relation (I.92) puisque le produit  $\xi\eta$  est nul aux points a, b, c, d.

En procédant de la même manière pour avoir les équivalents des relations (I.89) et (I.90) en b ( $\xi_b, \eta_b$ ), c ( $\xi_c, \eta_c$ ) et d ( $\xi_d, \eta_d$ ), les relations donnant les déformations de cisaillement transversal (I.87) dans le repère local mises sous forme matricielle (où  $\bar{J}_{12} = \bar{J}_{13} = \bar{J}_{23} = 0$ ) deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | & | & | \\ 1-\eta & | & | & | & 1+\eta & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ 1+\xi & | & | & | & 1-\xi & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^a \\ \gamma_\eta^a \\ \gamma_\xi^b \\ \gamma_\eta^b \\ \gamma_\xi^c \\ \gamma_\eta^c \\ \gamma_\xi^d \\ \gamma_\eta^d \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^a \\ \gamma_\eta^a \\ \gamma_\xi^b \\ \gamma_\eta^b \\ \gamma_\xi^c \\ \gamma_\eta^c \\ \gamma_\xi^d \\ \gamma_\eta^d \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}_e] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{u}_y^e \\ \mathbf{u}_z^e \end{Bmatrix} \quad (\text{I.93})$$

$$\text{où : } [\mathbf{C}_e]_{(8 \times 24)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{xy}^a \cdot \mathbf{B}^a \\ \mathbf{J}_{xy}^b \cdot \mathbf{B}^b \\ \mathbf{J}_{xy}^c \cdot \mathbf{B}^c \\ \mathbf{J}_{xy}^d \cdot \mathbf{B}^d \end{bmatrix} \quad (\text{I.94})$$

On peut développer et réorganiser la relation (I.93), en tenant compte de (I.88) pour passer dans le repère local (x, y) lié à l'élément réel, afin d'avoir une écriture simple des déformations de cisaillement comme donnée ci-après :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz}(\varepsilon, \eta) \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz}(\varepsilon, \eta) \end{Bmatrix} = \mathbb{[[} [\mathbf{B}_{C0}] + \eta \cdot [\mathbf{B}_{C1}] + \xi \cdot [\mathbf{B}_{C2}] \mathbb{]}} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{u}_y^e \\ \mathbf{u}_z^e \end{Bmatrix} \quad (\text{I.95})$$

On rappelle ici les translations locales aux huit nœuds de l'élément qui sont exactement celles données dans la relation (I.59) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x^e \end{Bmatrix}^T &= \langle \mathbf{u}_i \mid \mathbf{u}_j \mid \mathbf{u}_k \mid \mathbf{u}_l \mid \mathbf{u}_m \mid \mathbf{u}_n \mid \mathbf{u}_o \mid \mathbf{u}_p \rangle \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_y^e \end{Bmatrix}^T &= \langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_j \mid \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_l \mid \mathbf{v}_m \mid \mathbf{v}_n \mid \mathbf{v}_o \mid \mathbf{v}_p \rangle \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_z^e \end{Bmatrix}^T &= \langle \mathbf{w}_i \mid \mathbf{w}_j \mid \mathbf{w}_k \mid \mathbf{w}_l \mid \mathbf{w}_m \mid \mathbf{w}_n \mid \mathbf{w}_o \mid \mathbf{w}_p \rangle \end{aligned}$$

On rappelle aussi que la barre sur les composantes des déformations de cisaillement signifie que, pour avoir les déformations réelles, il faut multiplier leurs expressions par la fonction poids de Reissner  $g(\zeta) = 5/4 \cdot (1 - \zeta^2)$ . Et cette barre est à distinguer de celle sur les termes de l'inverse de la matrice jacobienne signifiant « moins 1 » dans les expressions ci-après.

En tenant compte du fait que  $\bar{J}_{12}$  est nul, les opérateurs gradients de la relation (I.87) deviennent :

$$[\mathbf{B}_{c0}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{11} & & \\ \bar{J}_{21} & & & \bar{J}_{21} & & \\ & & \bar{J}_{22} & & & \\ & & & \bar{J}_{22} & & \\ & & & & & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{C}_e]; \quad (\text{I.96})$$

$$[\mathbf{B}_{c1}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{11} & & \\ -\bar{J}_{21} & & & \bar{J}_{21} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{C}_e]; \quad (\text{I.97})$$

$$[\mathbf{B}_{c2}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & \bar{J}_{22} & & \\ & & & & & \\ & & & & & -\bar{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{C}_e] \quad (\text{I.98})$$

Dans ces trois opérateurs gradient (relations (I.96), (I.97) et (I.98)), les termes ( $\bar{J}_{11}, \bar{J}_{12}, \bar{J}_{21}, \bar{J}_{22}$ ) sont les composantes de l'inverse de la matrice jacobienne (I.88) et la barre au-dessus de la lettre J remplace le (-1) habituellement trouvé sur ces termes.

La première de ces trois matrices  $[\mathbf{B}_{c0}]$  représente la matrice gradient pour la raideur hors stabilisation. Multipliée par la fonction poids de Reissner  $g(\zeta)=5/4 \cdot (1-\zeta^2)$ , cette matrice des effets de cisaillement (non stabilisée)  $[\mathbf{B}_{c0}]$  est utilisée pour le calcul de la matrice de raideur utile tandis que les matrices  $[\mathbf{B}_{c1}]$  et  $[\mathbf{B}_{c2}]$  permettent quant à elles d'obtenir les matrices de raideur de stabilisation ci- après. On trouve en Annexe I.C (à la fin de ce chapitre) les formes développées des matrices  $[\mathbf{B}_{c0}]$ ,  $[\mathbf{B}_{c1}]$  et  $[\mathbf{B}_{c2}]$ .

### I.B.1.c) Matrice de raideur élémentaire de stabilisation

Les matrices de raideur de stabilisation du cisaillement transversal se calculent, en tenant compte des relations (I.37) et (I.38), comme suit :

$$[\mathbf{K}_{c1}^s] = \iiint^T [\mathbf{B}_{c1}] \cdot [\mathbf{D}_c] \cdot [\mathbf{B}_{c1}] \cdot dv = \frac{A}{3} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} {}^T [\mathbf{B}_{c1}] \cdot [\mathbf{D}_c] \cdot [\mathbf{B}_{c1}] \cdot dz = {}^T [\mathbf{B}_{c1}] \cdot [\mathbf{D}_c] \cdot [\mathbf{B}_{c1}] \cdot \frac{V}{3}$$

$$[\mathbf{K}_{c2}^s] = \iiint^T [\mathbf{B}_{c2}] \cdot [\mathbf{D}_c] \cdot [\mathbf{B}_{c2}] \cdot dv = \frac{A}{3} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} {}^T [\mathbf{B}_{c2}] \cdot [\mathbf{D}_c] \cdot [\mathbf{B}_{c2}] \cdot dz = {}^T [\mathbf{B}_{c2}] \cdot [\mathbf{D}_c] \cdot [\mathbf{B}_{c2}] \cdot \frac{V}{3}$$

$$[\mathbf{D}_c] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 5/6 & & \\ & & \\ & & 5/6 \end{bmatrix}$$

En sommant les deux matrices de raideur de stabilisation, on obtient la matrice élémentaire de raideur pour la stabilisation de cisaillement transversal :

$$[\mathbf{K}_{ct}^s] = [\mathbf{K}_{c1}^s] + [\mathbf{K}_{c2}^s] \quad (\text{I.99})$$

## I.B.2. Effets de membrane et de flexion

Comme les effets de cisaillement transversal viennent d'être traités dans le paragraphe précédent, la décomposition des autres effets est faite ci-après.

Les quatre premières lignes de la matrice  $[\mathbf{B}_{0\zeta}]$  (Equation I.71) sont scindées en deux parties (membrane et flexion) et les cinquième et sixième lignes (pour le cisaillement transversal) sont réécrites en utilisant les relations détaillées dans le sous paragraphe précédent (§ I-B-1).

Le quatrième effet – nommé « pinch » pour pincement – sera traité en détails dans le paragraphe dédié à l'élément SB9 $\gamma$ 25.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{B}_0^m] + \zeta [\mathbf{B}_0^b] & \\ \hline [\mathbf{B}_c^p] + \zeta [\mathbf{B}_\zeta^p] & \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = g(\zeta) [\mathbf{B}_{C0}] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix} ; g(\zeta) = \frac{5}{4}(1 - \zeta^2) \quad (\text{I.100})$$

$$[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \\ \hline & & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} ; [\mathbf{B}_0^b] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} \langle \gamma_2 \rangle & | & \\ \hline & & \bar{J}_{22} \langle \gamma_1 \rangle + \bar{J}_{21} \langle \gamma_2 \rangle \\ \bar{J}_{22} \langle \gamma_1 \rangle + \bar{J}_{21} \langle \gamma_2 \rangle & | & \bar{J}_{11} \langle \gamma_2 \rangle \end{bmatrix} \quad \text{car } \bar{J}_{12} = 0 \quad (\text{I.101})$$

$$[\mathbf{B}_c^p] = \langle \mathbf{b}_z \rangle ; \quad [\mathbf{B}_\zeta^p] = \bar{J}_{32} \langle \gamma_1 \rangle + \bar{J}_{31} \langle \gamma_2 \rangle = \bar{J}_{32} \langle \gamma_1 \rangle^T + \bar{J}_{31} \langle \gamma_2 \rangle^T \quad (\text{I.102})$$

Pour ce qui est de  $[\mathbf{B}_0^m]$  et  $[\mathbf{B}_0^b]$ , la différence, par rapport à  $[\mathbf{B}_{0\zeta}]$ , est que le calcul est fait en  $\xi = \eta = \zeta = 0$  ; c'est pourquoi  $\bar{J}_{12} = 0$ .

Evidemment, cette décomposition suppose que la forme de cet élément ressemble à celle d'un élément fini coque. Ce qui est déjà pris en compte dans la formulation du ShB8PS initial puisque la loi de comportement élastique intègre les conditions des contraintes planes (Equation I.73). De plus, comme cela a été dit avant, si l'épaisseur de l'élément est constante  $\bar{J}_{31} = \bar{J}_{32} = 0$ . Et la matrice gradient donnant  $\varepsilon_{zz}$  ne dépend donc pas de  $\zeta$ .

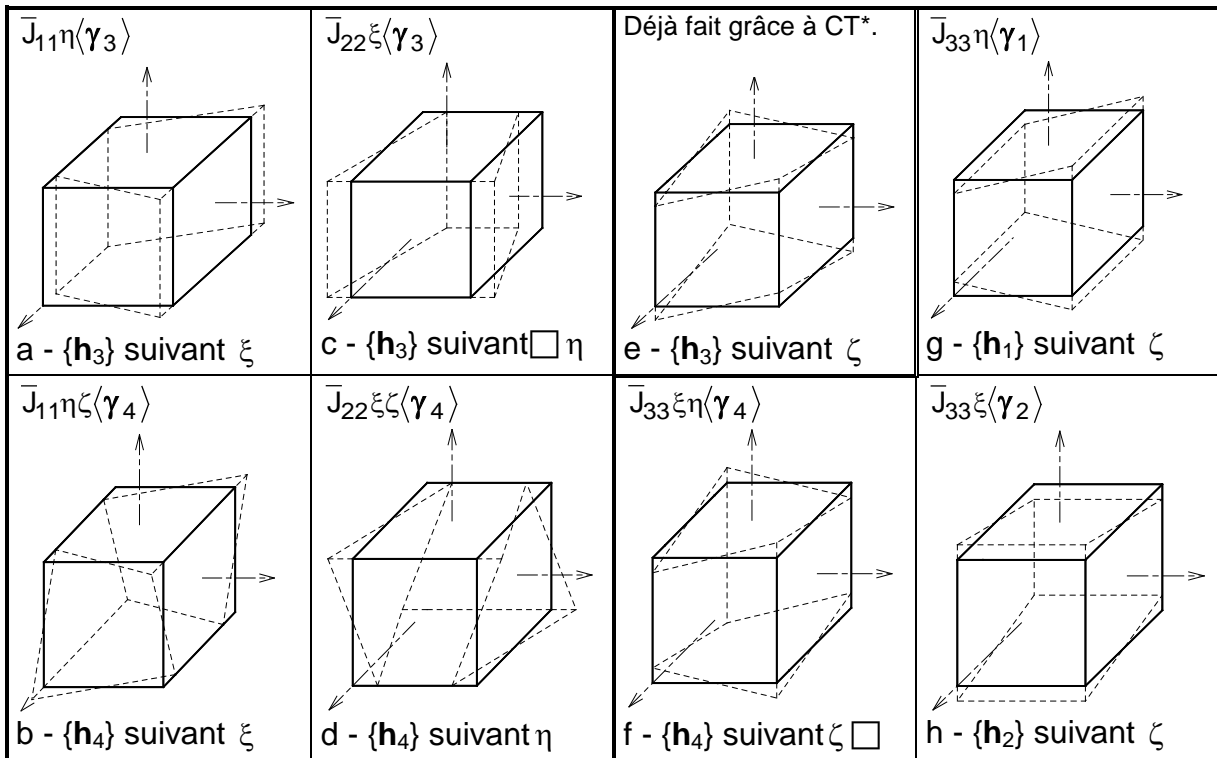
### I.B.3. Conséquence sur la stabilisation

Dans la figure ci-dessous (Figure I.14), on dénombre seulement sept modes à stabiliser. Le mode  $\{h_3\}$  suivant  $\zeta$  est stabilisé grâce au champ assumé de déformations de cisaillement transversal.

Avec la matrice  $[B^s]$  (relation I.104) qui remplace celle établie dans la formulation de l'élément ShB8PS (relation I.84), ces sept modes sont stabilisés.

En fait, la simplicité des formes des matrices de raideur, données par les relations (I.79) et (I.85), a permis de repenser l'expression de la matrice gradient  $[B^s]$  dont la forme simplifiée est donnée par la relation (I.104).

Cette matrice gradient de stabilisation  $[B^s]$  prend en compte non seulement la relation (I.84) pour la stabilisation des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$  mais aussi la relation (I.78) pour les modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$ .



\*CT : Cisaillement transversal

**Figure I.14** Modes à stabiliser (excepté  $\{h_3\}$ ) suivant  $\zeta$

Les déformations « généralisées »  $q_x$ ,  $q_y$  et  $q_z$ , relatives aux modes à énergie nulle, sont liées aux déplacements dans le repère local grâce à la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = [B^s] \begin{Bmatrix} U_x^e \\ U_y^e \\ U_z^e \end{Bmatrix} \quad (I.103)$$

On donne ci après l'expression de la nouvelle matrice gradient de stabilisation  $[\mathbf{B}^s]$  :

$$[\mathbf{B}^s] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}\eta(\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle) & & \\ & \bar{J}_{22}\xi(\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle) & \\ & & \bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle + \xi\eta\langle\gamma_4\rangle) \end{bmatrix} \quad (\text{I.104})$$

La matrice  $[\mathbf{B}^s]$ , utilisée dans la formule ci-après avec la matrice de comportement  $[\mathbf{D}]$  donnée dans la relation (I.73), participe au calcul de la matrice de raideur de stabilisation  $[\mathbf{K}^s]$  donnée dans la relation (I.105).

$$[\mathbf{K}^s] = \iiint_V \mathbf{B}^{sT} \cdot [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{B}^s \cdot dv$$

$$[\mathbf{K}^s] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx}^s & & \\ & \mathbf{K}_{yy}^s & \\ & & \mathbf{K}_{zz}^s \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{xx}^s = \bar{J}_{11}^2 \frac{V}{3} (\bar{\lambda} + 2\mu) [f_m \{\gamma_3\} \cdot \{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3} f_b \{\gamma_4\} \cdot \{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{yy}^s = \bar{J}_{22}^2 \frac{V}{3} (\bar{\lambda} + 2\mu) [f_m \{\gamma_3\} \cdot \{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3} f_b \{\gamma_4\} \cdot \{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{zz}^s = \bar{J}_{33}^2 \frac{V}{3} E f_p [ \{\gamma_1\} \cdot \{\gamma_1\}^T + \{\gamma_2\} \cdot \{\gamma_2\}^T + \frac{1}{3} \{\gamma_4\} \cdot \{\gamma_4\}^T ] \end{cases} \quad (\text{I.105})$$

Avec les coefficients de Lamé ( $\bar{\lambda}$  et  $\mu$ ) et le module de Young E, les termes de cette matrice sont déterminés en tenant compte des valeurs des intégrales suivantes où V désigne le volume de l'élément :

$$\iiint \eta^2 dv = \frac{V}{3}; \quad \iiint \xi^2 dv = \frac{V}{3}; \quad \iiint \xi^2 \zeta^2 dv = \iiint \eta^2 \zeta^2 dv = \iiint \eta^2 \xi^2 dv = \frac{V}{9} \quad (\text{I.106})$$

La matrice de raideur de stabilisation  $[\mathbf{K}^s]$  donnée par l'équation (I.105) présente la plus simple expression directement comparable à celle établie en (I.85).

Les coefficients  $f_m$ ,  $f_b$ ,  $f_p$  sont trois coefficients liés aux effets de membrane, de flexion et de pincement. Ils valent 1.0 pour des exemples très spécifiques où le résultat doit être comparé à celui obtenu par les éléments hexaédriques classiques intégrés complètement c'est-à-dire aux 2x2x2 points d'intégration.

Mais pour l'utilisation des coques-solides – c'est-à-dire quand la flexion est prépondérante – les facteurs ( $f_b$ ,  $f_p$ ) doivent être plus petits, par exemple  $10^{-3}$ .

En effet, hormis les modes  $\{\mathbf{h}_3\}$  suivant  $\zeta$  et suivant  $\eta$  (Figure I.14-a et c), tous les autres modes sont compris dans les déformations de cisaillement transversal  $\varepsilon_{xz}$  ou  $\varepsilon_{yz}$  déjà assumées.

En outre, le coefficient  $f_m$  est parfois incontournable pour s'affranchir d'un blocage en membrane dans le cas des maillages grossiers initialement courbes [18].

La relation (I.105) peut être revue en prenant en compte  $\bar{J}_{21}$  considéré jusqu'ici nul dans les matrices gradient de stabilisation des modes  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  (relations I.81 et I.82). Or,  $\bar{J}_{21}$  n'est pas nul dans toutes les situations. En fait, on peut réécrire la matrice gradient de stabilisation donnée dans la relation (I.104), en considérant  $\bar{J}_{21}$  non nul, sous cette nouvelle forme donnée par la relation (I.107) :

$$[\mathbf{B}^s] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}\eta\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle & & \\ & (\bar{J}_{21}\eta + \bar{J}_{22}\xi)\langle\gamma_3\rangle + \zeta\langle\gamma_4\rangle & \\ & & \bar{J}_{33}(\eta\langle\gamma_1\rangle + \xi\langle\gamma_2\rangle + \xi\eta\langle\gamma_4\rangle) \end{bmatrix} \quad (\text{I.107})$$

Dans la 2<sup>ème</sup> ligne et 2<sup>ème</sup> colonne de l'expression finale de la matrice gradient de stabilisation des différents modes (relation I.107), on voit bien les termes  $\bar{J}_{21}\eta\langle\gamma_3\rangle$  de la relation (I.81) et  $\bar{J}_{21}\xi\zeta\langle\gamma_4\rangle$  de la relation (I.82) qui n'étaient pas pris en compte au départ parce que  $\bar{J}_{21}$  était considéré nul.

En adoptant la même démarche qu'auparavant pour exprimer la relation (I.105), on arrive à la matrice de raideur de stabilisation ci-dessous dont les termes n'utilisent, contrairement à celle d'avant, qu'un seul facteur de correction  $f_E = 10^{-4}$  dans tous les exemples traités par la suite :

$$[\mathbf{K}^s] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx}^s & & \\ & \mathbf{K}_{yy}^s & \\ & & \mathbf{K}_{zz}^s \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{xx}^s = H_{11}(\bar{\lambda} + 2\mu)f_E[\{\gamma_3\}\{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3}\{\gamma_4\}\{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{yy}^s = H_{22}(\bar{\lambda} + 2\mu)f_E[\{\gamma_3\}\{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3}\{\gamma_4\}\{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{zz}^s = H_{33}E f_E[\{\gamma_1\}\{\gamma_1\}^T + \{\gamma_2\}\{\gamma_2\}^T + \frac{1}{3}\{\gamma_4\}\{\gamma_4\}^T] \end{cases} \quad (\text{I.108})$$

En plus des coefficients de Lamé ( $\bar{\lambda}$  et  $\mu$ ) et du module de Young E, les composantes de cette matrice utilisent pour leur calcul les valeurs des facteurs  $H_{11}$ ,  $H_{22}$  et  $H_{33}$  ci-dessous données où 'V' représente le volume de l'élément :

$$H_{11} = \bar{J}_{11}^2 \frac{V}{3}; \quad H_{22} = (\bar{J}_{21}^2 + \bar{J}_{22}^2) \frac{V}{3}; \quad H_{33} = \bar{J}_{33}^2 \frac{V}{3} \quad (\text{I.109})$$

## I.B.4. Validation

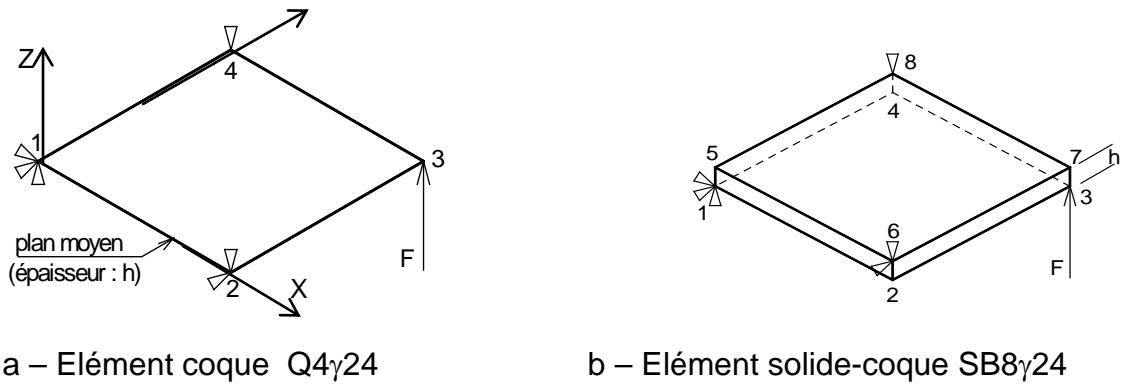
Pour ce test à faire passer aux éléments finis de type coque Q4 $\gamma$ 24 et solide-coque SB8 $\gamma$ 24 exposés ici, on considère une plaque carrée (1, 2, 3, 4) de côté L=100 mm et d'épaisseur h=1mm (voir Figure I.15.a ci-après) dont les trois nœuds (1, 2, 4) sont bloqués. On applique un effort vertical  $F = 1\text{N}$  au quatrième nœud (3).

Les caractéristiques du matériau sont le module de Young  $E = 2.10^5$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ . On cherche à connaître la déflexion  $U_z$  au nœud (3).

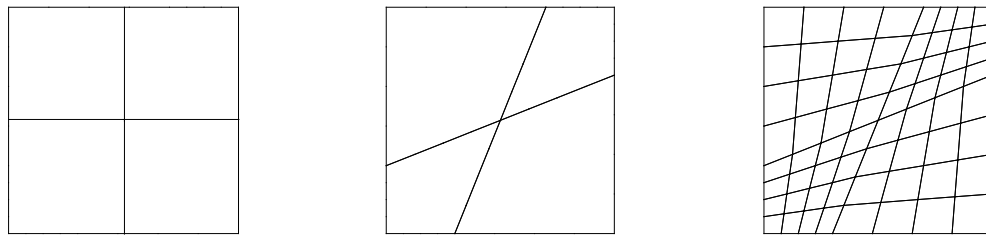
Les résultats analytiques utiles qui vont servir de référence sont les moments  $M_{xx}=M_{yy}=0$  ;  $M_{xy} = -F/2$  et la déflexion  $U_z(3) = 0.39$  mm.

En analysant les résultats regroupés dans les tableaux ci-après, ces valeurs sont numériquement obtenues quel que soit le maillage – régulier, irrégulier et grossier ou raffiné – (voir Figure I.16) aussi bien avec le quadrilatère Q4 $\gamma$ 24 qu'avec le solide-coque SB8 $\gamma$ 24 (Figure I.15).

De plus, il est établi l'équivalence (voir les tableaux ci-après I.9-a et b puis c et d) entre les déplacements (translations et rotations) des nœuds 2, 3, 7, 8 du solide-coque (Figure. I.15-b) et ceux des nœuds 2, 3 et 4 de l'élément coque classique Q4 $\gamma$ 24 (Figure. I.15-a). On peut noter aussi dans ces tableaux une concordance entre les contraintes et les déformations dans ces deux éléments.



**Figure I.15.** Plaque carrée simplement appuyée aux trois coins.



a – Maillage régulier b – Maillage grossier irrégulier c – Maillage raffiné

**Figure I.16.** Différents maillages de la plaque carrée

Les quatre tableaux suivants sont des extraits de résultats du calcul de la plaque carrée effectué respectivement avec un élément coque  $Q4\gamma24$  et un élément solide-coque  $SB8\gamma24$ . Les tableaux I.11-a et I.11-b permettent d'établir l'équivalence entre les déplacements des nœuds tandis que les tableaux I.11-c et I.11-d montrent la correspondance entre les déformations et les contraintes données par les deux éléments.

Plaque carrée - Un seul élément $Q4\gamma24$												
Noeud	Ux	Fx	Uy	Fy	Uz	Fz	$\theta_x$	Mx	$\theta_y$	My	$\theta_z$	Mz
1	0.000		0.000		0.000							
	0.000000		0.000000		0.000000		0.000000		-0.000000		0.000000	U
	0.000000		0.000000		1.000000		0.000000		0.000000		0.000000	F
2	100.000		0.000		0.000							
	0.000000		0.000000		0.000000		<b>0.003900</b>		-0.000000		0.000000	U
	0.000000		0.000000		-1.000000		0.000000		0.000000		0.000000	F
3	100.000		100.000		0.000							
	0.000000		0.000000		<b>0.390078</b>		<b>0.003900</b>		<b>-0.003900</b>		0.000000	U
	0.000000		0.000000		1.000000		0.000000		0.000000		0.000000	F
4	0.000		100.000		0.000							
	0.000000		0.000000		0.000000		0.000000		<b>-0.003900</b>		0.000000	U
	0.000000		0.000000		-1.000000		0.000000		0.000000		0.000000	F

**Tableau I.11 – a** Déplacements des nœuds de l'élément  $Q4\gamma24$



Plaque carrée - Un seul élément SB8γ24						
Noeud	Ux	Fx	Uy	Fy	Uz	Fz
1	0.000000		0.000000		0.000000	
	0.000		0.000		-0.500	
	0.000000		0.000000		0.000000	U
2	100.000		0.000		-0.500	
	0.000000		<b>0.003900</b>		0.000000	U
	0.000000		-0.000000		-0.000000	F
3	100.000		100.000		-0.500	
	-0.000000		<b>0.003900</b>		<b>0.390094</b>	U
	0.000000		-0.000000		1.000000	F
4	0.000		100.000		-0.500	
	-0.000000		0.000000		0.000000	U
	0.000000		0.000000		-0.000000	F
5	0.000		0.000		0.500	
	-0.000000		-0.000000		-0.000000	U
	-0.000000		-0.000000		-0.000000	F
6	100.000		0.000		0.500	
	-0.000000		0.000000		0.000000	U
	-0.000000		0.000000		-1.000000	F
7	100.000		100.000		0.500	
	<b>-0.003901</b>		0.000000		0.390094	U
	-0.000000		0.000000		0.000000	F
8	0.000		100.000		0.500	
	<b>-0.003901</b>		-0.000000		0.000000	U
	-0.000000		-0.000000		-1.000000	F

**Tableau I.11 – b.** Déplacements des nœuds de l'élément SB8γ24

Comme énoncé auparavant, on peut vérifier (tableaux I.11-a et I.11-b précédents : écritures en gras) qu'effectivement, sur le nœud numéroté (3) de l'élément coque comme sur celui de l'élément solide-coque (en ce serait la moyenne des déplacements des nœuds 3 et 7) il y a une translation verticale de **0,39 mm** conforme à celle donnée par la théorie.

Pour faire une correspondance entre les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  de l'élément coque et les translations  $U_x$  et  $U_y$  correspondantes de l'élément « brique », on définit les relations suivantes :  $\theta_x = 1/h(-U_y^+ + U_y^-)$  et  $\theta_y = 1/h(U_x^+ - U_x^-)$ .

Ainsi, sur le nœud (3) de l'élément quadrangulaire, la rotation  $\theta_x=0.0039$  (écriture en gras et italique) peut être obtenue en utilisant la translation  $U_y$  du nœud (3) de SB8γ24 comme  $U_y^-$  et  $U_y$  du nœud (7) de SB8γ24 comme  $U_y^+$  dans la relation  $\theta_x = 1/h(-U_y^+ + U_y^-)$ .

De par les conditions aux limites imposées, on a la rotation  $\theta_x = 0.0039$  au nœud 2 et  $\theta_y = -0.0039$  au nœud 4 du quadrangle. Le nœud 3 possède les deux rotations  $\theta_x = 0.0039$  et  $\theta_y = -0.0039$  ; alors qu'il n'y a aucune rotation au nœud 1.

Plaque carrée - Un seul élément Q4γ24 pide : points d'intégration dans l'épaisseur						
exx	eyy	exy	exz	eyz	ezz	pide
-0.000000	0.000000	0.000019	0.000000	0.000000	0.000000	1
-0.000000	0.000000	0.000013	-0.000000	-0.000000	0.000000	2
0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	3
0.000000	-0.000000	-0.000013	-0.000000	-0.000000	-0.000000	4
0.000000	-0.000000	-0.000019	0.000000	0.000000	-0.000000	5
Sxx	Syy	Sxy	Sxz	Syz	Szz	pide
-0.000000	0.000000	<b>3.000000</b>	0.000000	0.000000	0.000000	1
-0.000000	0.000000	1.963961	-0.000000	-0.000000	0.000000	2
0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	3
0.000000	-0.000000	-1.963961	-0.000000	-0.000000	0.000000	4
0.000000	-0.000000	<b>-3.000000</b>	0.000000	0.000000	0.000000	5

**Tableau I.11 – c.** Déformations et contraintes de l'élément Q4γ24

Plaque carrée - Un seul élément SB8γ24 pide : points d'intégration dans l'épaisseur						
exx	eyy	ezz	exy	exz	eyz	pide
-7.920E-18	1.142E-17	-1.000E-09	1.950E-05	0.000E+00	0.000E+00	1
-5.769E-18	8.533E-18	-1.000E-09	1.276E-05	-1.395E-19	-2.748E-20	2
-1.692E-18	3.058E-18	-1.000E-09	3.012E-18	-8.132E-20	5.168E-20	3
2.388E-18	-2.418E-18	-1.000E-09	-1.276E-05	-1.395E-19	-2.748E-20	4
4.538E-18	-5.306E-18	-1.000E-09	-1.950E-05	0.000E+00	0.000E+00	5
Sxx	Syy	Szz	Sxy	Sxz	Syz	pide
-9.876E-13	1.988E-12	-2.000E-04	<b>3.000E+00</b>	0.000E+00	0.000E+00	1
-7.053E-13	1.495E-12	-2.000E-04	1.964E+00	-2.146E-14	-4.228E-15	2
-1.702E-13	5.605E-13	-2.000E-04	4.634E-13	-1.251E-14	7.951E-15	3
3.655E-13	-3.739E-13	-2.000E-04	-1.964E+00	-2.146E-14	-4.228E-15	4
6.475E-13	-8.670E-13	-2.000E-04	<b>-3.000E+00</b>	0.000E+00	0.000E+00	5

**Tableau I.11 – d** Déformations et contraintes de l'élément SB8γ24

On peut constater, entre autres, que les contraintes  $\sigma_{xy}$  (Sxy) de l'élément Q4γ24 (écriture en gras dans le tableau I.11-c) sont exactement les mêmes que celles de l'élément de type solide-coque SB8γ24 (écriture en gras dans le tableau I.11-d).

Un commentaire sur la valeur des contraintes normales  $\sigma_{zz}$  (Szz) sera fait au paragraphe I-C-2 après les résultats donnés par l'élément SB9γ25.

On conclut pour l'instant, en attendant d'autres exemples dans le chapitre suivant, que cet élément de type solide coque nommé SB8γ24 est une amélioration notable de l'élément ShB8PS initial qui ne passe pas du tout ce test et qu'il peut alors servir de base à l'élaboration d'un nouvel élément doté d'un nœud central supplémentaire ; ce, afin de procéder par analogie avec l'élaboration d'un élément coque-solide Q5γ26 (cinq nœuds) comme cela a été présenté auparavant.

## I.C. Élément de type solide-coque à 9 nœuds: 'SB9γ25'

### I.C.1. Champ assumé de déformation normale

Lors de la description de l'élément coque-solide à cinq nœuds Q5γ26 dans le paragraphe I-A-2, il a été montré que c'est l'ajout d'un cinquième nœud au Q4γ24 qui a permis à ce quadrilatère d'afficher une vraie contrainte normale  $\sigma_{zz}$ . Ce fait sert d'argument de base pour adjoindre un nœud supplémentaire au centre d'un élément « brique » qui s'utilisera avec une matrice de comportement 3D complet et non pas avec seulement le module de Young sur la diagonale comme c'est le cas du SB8γ24 décrit dans le précédent paragraphe.

Dans les mises en forme des structures par hydroformage, sertissage ou parfois par emboutissage, l'influence de la contrainte normale peut se révéler utile. D'autant que les efforts de contact obtenus avec une matrice qui n'est pas complète sont, la plupart du temps, non réalistes.

En outre, dans certaines structures coexistent des zones épaisses et des zones à faible épaisseur. La simulation EF (Eléments Finis) de pareilles structures nécessite l'utilisation de deux types d'éléments coques et « briques », aux caractéristiques et conditions d'utilisation différentes, afin de gérer les zones de transition. Suivant les cas, disposer d'un élément « brique » comme le SB9γ25 pourrait assurer le travail fait par deux types d'éléments différents.

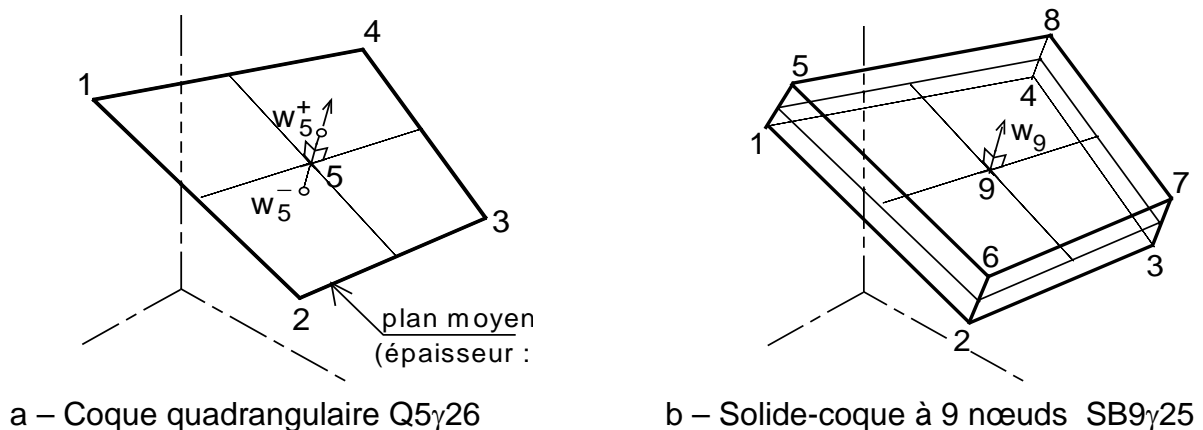


Figure I.17. Nœud supplémentaire au centre d'un élément

Sans entrer de nouveau dans les détails de l'élément Q5γ26, on rappelle simplement que le nœud '5' (Figure I.17-a) est transféré sur le plan milieu à chaque itération et les degrés de liberté  $w_5^-$ ,  $w_5^+$  correspondent respectivement à la surface inférieure et à la surface supérieure de l'élément.

Appliquée à un solide-coque basé sur un hexaèdre à 8 nœuds (Figure I.17-b), une méthodologie similaire consiste à ajouter un neuvième nœud au centre de la « brique » ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ) muni d'un seul degré de liberté en translation  $w_9$  normal à la surface moyenne. Les relations (Equation I.105) pour avoir  $w_9^-$  et  $w_9^+$  tiennent compte du fait que la translation 'normale'  $w_9^-$  dépend des nœuds « inférieurs » (1, 2, 3, 4) et que  $w_9^+$  est dépendant des nœuds « supérieurs » (5, 6, 7, 8) :

$$w_9^- = 1/4 \cdot (w_1 + w_2 + w_3 + w_4); \quad w_9^+ = 1/4 \cdot (w_5 + w_6 + w_7 + w_8) \quad (I.110)$$

Pour introduire la composante de déformation  $\varepsilon_{zz}$ , le champ assumé de déplacement normal 'w' est tel que :

$$w(\xi, \eta, z) = w(\xi, \eta, 0) + \left(\frac{2z^2}{h^2} - \frac{z}{h}\right)w_9^- - \frac{4z^2}{h^2}w_9 + \left(\frac{2z^2}{h^2} + \frac{z}{h}\right)w_9^+; \quad z = \zeta \frac{1}{2}h; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (I.111)$$

Et comme cette déformation  $\varepsilon_{zz}$  n'est autre que la dérivée par rapport à la variable 'z' de ce déplacement postulé 'w', on a par conséquent :

$$\varepsilon_{zz} = (2\zeta - 1) \frac{w_9^-}{h} - 4\zeta \frac{w_9}{h} + (2\zeta + 1) \frac{w_9^+}{h} = \frac{-w_9^- + w_9^+}{h} + 2\zeta \frac{w_9^- + w_9^+ - 2w_9}{h}; \quad h = \frac{V}{A_0} \quad (I.112)$$

Dans les équations (I.111) et (I.112), 'h' est l'épaisseur dans la direction 'z' normale au plan moyen logeant le nœud numéro 9. Cette épaisseur est aisément calculée avec le volume 'V' et l'aire 'A<sub>0</sub>' en se situant à  $\zeta = 0$  comme le montre l'extrait de programme placé en Annexe I-A à la fin de ce chapitre.

La première partie de  $\varepsilon_{zz}$  qui ne dépend pas de  $\zeta$  peut être identifiée comme suit :

$$\frac{-w_9^- + w_9^+}{h} = \frac{1}{4h} (-w_1 - w_2 - w_3 - w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8) = \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_z^e \}$$

En rappelant que pour une brique régulière, le vecteur  $\langle \mathbf{b}_z \rangle$  a pour expression  $\langle \mathbf{b}_z \rangle = 1/4h \cdot \langle -1 \mid -1 \mid -1 \mid -1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \rangle$ , on peut poser  $[\mathbf{B}_c^p] = \langle \mathbf{b}_z \rangle$  de sorte que :

$$\frac{-w_9^- + w_9^+}{h} = [\mathbf{B}_c^p] \{ \mathbf{U}_z^e \} \quad (I.113)$$

En prenant en compte l'équation (I.110), la forme la plus simple de la seconde partie de  $\varepsilon_{zz}$  comprenant  $\zeta$  est :

$$2 \frac{w_9^+ + w_9^- - 2w_9}{h} = 2 \frac{1}{4h} (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8) - \frac{4}{h} \cdot w_9; \quad (I.114)$$

Par analogie avec l'utilisation de  $\langle \mathbf{b}_z \rangle = \langle b_{z1} \ b_{z2} \ b_{z3} \ b_{z4} \ b_{z5} \ b_{z6} \ b_{z7} \ b_{z8} \rangle$  pour le ratio  $(-w_9^- + w_9^+)/h$  (Equation I.113), on peut poser pour remplacer l'expression de la relation (I.114) :

$$[\mathbf{B}_\zeta^p] = 2 \langle -b_{z1} \ -b_{z2} \ -b_{z3} \ -b_{z4} \ b_{z5} \ b_{z6} \ b_{z7} \ b_{z8} \rangle \quad \text{et} \quad [\mathbf{B}_w^p] = \langle -4/h \rangle \quad (I.115)$$

$$2 \frac{w_9^+ + w_9^- - 2w_9}{h} = [\mathbf{B}_\zeta^p] \{ \mathbf{U}_z^e \} + [\mathbf{B}_w^p] \cdot \{ w_9 \} \quad (I.116)$$

Finalement, on peut constater dans les relations (I.117), (I.118) et (I.119) que toutes les six composantes de déformation sont liées aux déplacements des nœuds de l'élément  $\{\mathbf{U}_x^e\}$ ,  $\{\mathbf{U}_y^e\}$ ,  $\{\mathbf{U}_z^e\}$ ,  $\{w_9\}$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \left[ [\mathbf{B}_0^m] + \zeta [\mathbf{B}_0^b] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix} \quad (\text{I.117})$$

$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = g(\zeta) [\mathbf{B}_{c0}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix} \quad (\text{I.118})$$

$$\varepsilon_{zz} = \left[ [\mathbf{B}_c^p] + \zeta [\mathbf{B}_\zeta^p] \mid \zeta [\mathbf{B}_w^p] \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_z^e \\ w_9 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.119})$$

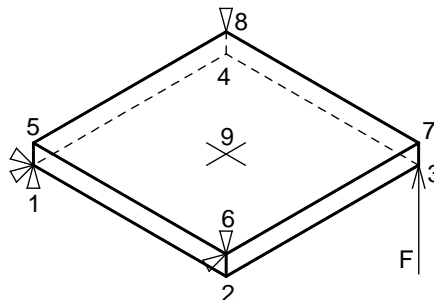
Les matrices  $[\mathbf{B}_0^m]$ ,  $[\mathbf{B}_0^b]$  (Equation I.101) et  $[\mathbf{B}_{c0}]$  (Equation I.96) ne sont pas modifiées. Il en va de même pour la fonction parabolique ou fonction poids de Reissner  $g(\zeta)=5/4 \cdot (1-\zeta^2)$  et la matrice de raideur de stabilisation (Equation I.108).

Par ailleurs, la loi de comportement n'inclut plus une hypothèse de contraintes planes puisque grâce à ce neuvième nœud la matrice complète de comportement 3D est utilisée.

Avant de finir ce paragraphe, une remarque importante doit être faite : contrairement à l'élément ShB8PS [2] les vecteurs  $\langle \mathbf{b}_x \rangle$ ,  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$  et  $\langle \mathbf{b}_z \rangle$  ne peuvent pas être ceux proposés par Flanagan et Belytschko [6] sauf seulement pour le calcul de volume (voir à la fin de ce chapitre en Annexe I-B) ; les fonctions de forme classiques restent incontournables !

## I.C.2. Validation

L'exemple présenté dans le paragraphe I-B-4 est repris ici pour une première validation de l'élément SB9 $\gamma$ 25 avec une loi de comportement complète, élastique et isotrope en 3D. Les données géométriques et matérielles restent inchangées. Les conditions aux limites relatives aux translations verticales sont clairement montrées dans la figure ci-dessous (Figure I.18) ainsi que les autres conditions pour éviter les déplacements de corps rigides.



**Figure I.18** Plaque carrée: un seul élément SB9 $\gamma$ 25

On cherche à connaître le déplacement des nœuds et les contraintes dans l'élément.

Plaque carrée - Un seul élément SB9γ25						
Noeud	X	Y	Z			
...						
9	50.000	50.000	0.000			
	<b>0.097523</b>			<b>U</b>		
	0.000000			<b>F</b>		
pide : points d'intégration dans l'épaisseur						
1	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$	$\epsilon_{xy}$	$\epsilon_{xz}$	$\epsilon_{yz}$ pide
	<b>3.00E-10</b>	<b>3.00E-10</b>	-1.000E-9	0.0000195	0.000000	0.000000 1
	<b>3.00E-10</b>	<b>3.00E-10</b>	-1.000E-9	0.0000128	0.000000	0.000000 2
	<b>3.00E-10</b>	<b>3.00E-10</b>	-1.000E-9	0.0000000	0.000000	0.000000 3
	<b>3.00E-10</b>	<b>3.00E-10</b>	-1.000E-9	-0.0000128	0.000000	0.000000 4
	<b>3.00E-10</b>	<b>3.00E-10</b>	-1.000E-9	-0.0000195	0.000000	0.000000 5
1	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{xz}$	$\sigma_{yz}$ pide
	0.000000	0.000000	-0.000200	<b>3.000000</b>	0.000000	0.000000 1
	0.000000	0.000000	-0.000200	1.963961	0.000000	0.000000 2
	0.000000	0.000000	-0.000200	0.000000	0.000000	0.000000 3
	0.000000	0.000000	-0.000200	-1.963961	0.000000	0.000000 4
	0.000000	0.000000	-0.000200	<b>-3.000000</b>	0.000000	0.000000 5
...						

**Tableau I.12** Déplacement du nœud 9, déformations et contraintes du SB9γ25

Pour ce qui est des résultats affichés dans le tableau I.12, les déplacements nodaux ainsi que les efforts de réaction sont exactement égaux à ceux affichés dans les tableaux (I.11-b et d) et n'y sont donc pas reportés, exceptés ceux de la translation du nœud supplémentaire '9' grâce auquel on peut utiliser la loi de comportement complète en 3D.

Même si les composantes des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont nulles dans le tableau I.12 comme dans le tableau I.11-d, elles sont obtenues différemment (voir tableau I.13 ci-dessous) :

SB8γ24 : Pseudo-état plan de contraintes	SB9γ25 : Loi de comportement générale 3D
$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d} & \bar{\lambda} & \\ \bar{\lambda} & \bar{d} & \\ & & E \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix}; \text{ avec: } \begin{cases} \epsilon_{xx} = 0 \\ \epsilon_{yy} = 0 \\ \epsilon_{zz} = -10^{-9} \end{cases}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d & \lambda & \lambda \\ \lambda & d & \lambda \\ \lambda & \lambda & d \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix}; \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_{xx} = 3 \cdot 10^{-10} \\ \epsilon_{yy} = 3 \cdot 10^{-10} \\ \epsilon_{zz} = -1 \cdot 10^{-9} \end{cases}$
$\bar{d} = \bar{\lambda} + 2\mu; \quad \bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1 - \nu^2)}; \quad \left  \begin{array}{l} E = 2.10^5 \\ \nu = 0.3 \end{array} \right.$	$d = \lambda + 2\mu; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}; \quad \left  \begin{array}{l} E = 2.10^5 \\ \nu = 0.3 \end{array} \right.$

**Tableau I.13** Relations contraintes-déformations des éléments SB8γ24 et SB9γ25

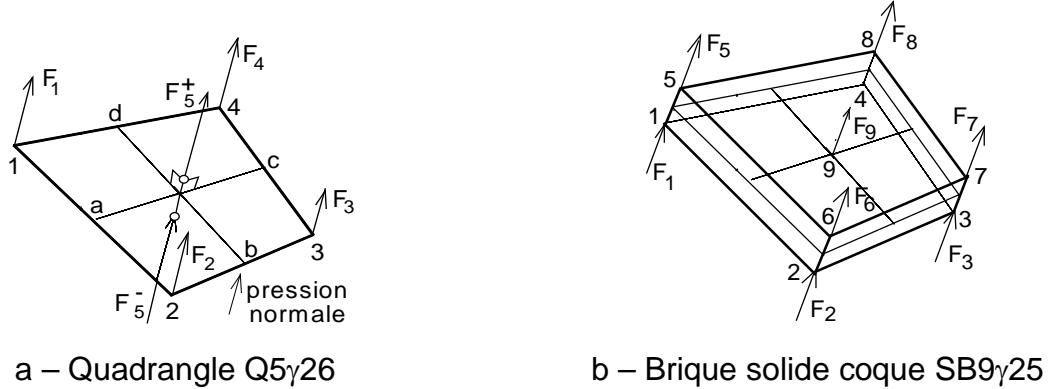
La contrainte normale  $\sigma_{zz}$  s'explique par deux forces localisées de 1N (nœuds 1 et 3 sur la face inférieure et 6 et 8 sur la peau supérieure ; voir figure I.18) et une surface de  $10^4 \text{ mm}^2$

### I.C.3. Efforts nodaux équivalents

L'avantage d'avoir des degrés de liberté supplémentaires réels au lieu des simples paramètres est la possibilité d'agir physiquement sur eux.

Par exemple, les forces nodales équivalentes à une pression normale sont distribuées aux sommets mais aussi sur les nœuds supplémentaires en vue d'avoir une répartition correcte de la contrainte normale comme c'est fait pour les éléments Q5 $\gamma$ 26 [10].

Une méthode similaire est présentée ici dans l'élaboration de la « brique » de type solide-coque SB9 $\gamma$ 25 à 9 nœuds et 25 degrés de liberté (Figure I.19-b).



**Figure I.19** : Forces équivalentes à la pression normale

Afin de trouver facilement la distribution des forces requises à chaque nœud, considérons un élément hexaédrique (Figure I.19-b) sur lequel est déclaré une pression normale 'p' qui serait par ailleurs, c'est-à-dire pour un élément classique de type coque, appliquée sur le plan moyen (a, b, c, d) de l'élément (Figure. I.19-a). Avec un matériau élastique, la composante de contrainte attendue  $\sigma_{zz}$  est :

$$\sigma_{zz}^{(p)} = \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\right)p \quad (\text{I.120})$$

Avec 'w' dénotant la translation normale, les forces  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8$  sont données par le travail virtuel (symbole ' $\hat{\cdot}$ ') et les relations suivantes (Equation I.121) où 'h' et ' $A_0$ ' ont été précédemment définis (Equation I.112) avec  $w_9^-$  et  $w_9^+$  (Equation I.110):

$$\sum_{i=1}^8 F_i \hat{w}_i + F_9 \hat{w}_9 = pA_0 \frac{1}{2} (\hat{w}_9^+ + \hat{w}_9^-) + \iiint \hat{\varepsilon}_{zz} \sigma_{zz}^{(p)} dV \quad (\text{I.121})$$

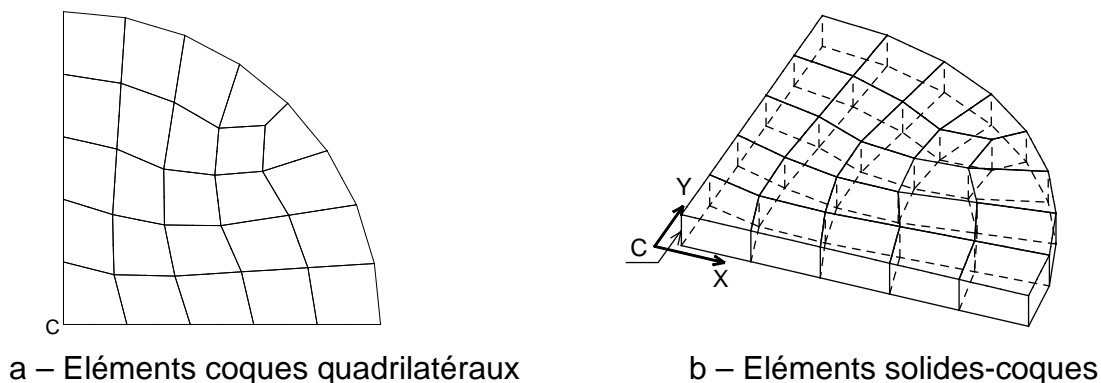
$$\hat{\varepsilon}_{zz} = \frac{\hat{w}_9^+ - \hat{w}_9^-}{h} + 4 \frac{z}{h} \frac{\hat{w}_9^+ + \hat{w}_9^- - 2\hat{w}_9}{h} \quad (\text{I.122})$$

En combinant les trois équations précédentes (I.120, I.121 et I.122) et suivant que la pression appliquée est positive ou négative, les deux distributions requises sont :

$$p \geq 0: F_9 = -\frac{2}{3} pA_0; F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \frac{1}{3} pA_0; F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = \frac{1}{12} pA_0 \quad (\text{I.123})$$

$$p < 0: F_9 = \frac{2}{3} pA_0; F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = -\frac{1}{12} pA_0; F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = -\frac{1}{3} pA_0 \quad (\text{I.124})$$

On reprend dans ce paragraphe l'exemple de la plaque encadrée pour montrer que le neuvième nœud ajouté au centre de la « brique » (SB9 $\gamma$ 25) joue bien son rôle en donnant la contrainte normale et par conséquent contribue à mettre en exergue les forces équivalentes de pression normale qui peut être appliquée sur une structure.



**Figure I.20** Plaque circulaire encadrée

En effet s'il faut le rappeler, la plaque circulaire en question – dont la frontière est encadrée – est sujette à une pression normale. Les données habituelles sont : rayon  $R = 100$  mm; épaisseur = 1 mm; matériau isotrope:  $E = 200000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ ; pression uniforme normale au plan  $p = 0.01172$  N/mm<sup>2</sup>.  $U_C = 1$  mm correspond au déplacement théorique du centre de la plaque selon la théorie de Kirchhoff et celle de Mindlin (1.005) puisque cette plaque est une plaque mince. C'est un résultat de référence.

On cherche à connaître en plus du déplacement du nœud central de la plaque, la contrainte normale sur les peaux inférieure et supérieure de l'élément solide coque qui a servi à mailler la structure.

D'autres résultats, en particulier ceux des éléments coque Q4 $\gamma$ 24, coque-solide Q5 $\gamma$ 26 et de l'élément solide coque SB8 $\gamma$ 24, vont servir de base pour faire la comparaison.

Les résultats regroupés dans le tableau I.14 sont issus d'un calcul effectué sur le quart de la structure à cause des symétries que présente la plaque circulaire.

		Q4 $\gamma$ 24	Q5 $\gamma$ 26	SB8 $\gamma$ 24	SB9 $\gamma$ 25
$U_C$ (mm)		0.9894	0.9874	0.9950	0.9950
$\sigma_{zz}$	Haut	0.0	0.0	0.0	0.0
	Bas	0.0	-0.01172	0.0	-0.01172

**Tableau I.14.**  $U_C$  et  $\sigma_{zz}$  de la plaque circulaire maillée

Avant d'analyser le tableau I.14, il faut tout d'abord remarquer que les éléments Q4 $\gamma$ 24 et Q5 $\gamma$ 26 (Figure I.20-a) sont des éléments coque et coque-solide avec une intégration réduite dans le plan milieu tandis que SB8 $\gamma$ 24, SB9 $\gamma$ 25 sont des éléments solides-coques (Figure I.20-b).

Comme dit auparavant, l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26 utilise une loi de comportement générale 3D grâce aux deux degrés de liberté du nœud supplémentaire et il est aussi montré dans ce chapitre que le nœud supplémentaire



de l'élément de type solide-coque SB9 $\gamma$ 25 ne permet pas seulement l'emploi des lois de comportement élastiques 3D mais aussi l'affectation d'une partie des forces nodales équivalentes à la pression normale afin d'obtenir une bonne répartition de la contrainte normale (paragraphe I-C-3).

Les résultats du tableau I.14 permettent, après analyse, de tirer les conclusions suivantes :

- Les déplacements obtenus avec les éléments solides-coques sont meilleurs que ceux donnés par les éléments de type coque ou coque-solide;
- La composante de la contrainte normale ( $\sigma_{zz}$ ) varie à travers l'épaisseur de la valeur  $\sigma_{zz} = -p$  ('p': pression) à la valeur  $\sigma_{zz} = 0$ . Il en va de même avec l'élément Q5 $\gamma$ 26 même si le déplacement  $U_c$  correspondant est avec moins de précision que celui de la brique SB9 $\gamma$ 25.

Par conséquent, la brique peut être indiquée pour espérer obtenir un bon déplacement et afficher une contrainte normale.

## I.D. Annexes

### I.D.1. Annexe I-A

```
PROCEDURE repere_local (Xi, Yi, Zi, Xj, Yj, Zj, Xk, Yk, Zk, Xl, Yl, Zl,
                      Xm, Ym, Zm, Xn, Yn, Zn, Xo, Yo, Zo, Xp, Yp, Zp : DOUBLE ;
                      VAR xX, xY, xZ, yX, yY, yZ, zX, zY, zZ : DOUBLE ;
                      VAR A0 : DOUBLE) ;
```

```
VAR Ux, Uy, Uz : DOUBLE ;
    Vx, Vy, Vz : DOUBLE ;
    nx, ny, nz : DOUBLE ;
    d, ps : DOUBLE ;
```

```
BEGIN
{vecteur de base 1}
Ux := -Xi + Xj + Xk - Xl - Xm + Xn + Xo - Xp ;
Uy := -Yi + Yj + Yk - Yl - Ym + Yn + Yo - Yp ;
Uz := -Zi + Zj + Zk - Zl - Zm + Zn + Zo - Zp ;

d := SQRT (Ux * Ux + Uy * Uy + Uz * Uz) ;
xX := Ux / d ; xY := Uy / d ; xZ := Uz / d ;

{vecteur de base 2} ;
Vx := -Xi - Xj + Xk + Xl - Xm - Xn + Xo + Xp ;
Vy := -Yi - Yj + Yk + Yl - Ym - Yn + Yo + Yp ;
Vz := -Zi - Zj + Zk + Zl - Zm - Zn + Zo + Zp ;
ps := xX * Vx + xY * Vy + xZ * Vz ;
yX := Vx - ps * xX ;
yY := Vy - ps * xY ;
yZ := Vz - ps * xZ ;

d := SQRT (yX * yX + yY * yY + yZ * yZ) ;
yX := yX / d ; yY := yY / d ; yZ := yZ / d ;

{vecteur de base 3} ;
zX := xY * yZ - xZ * yY ;
zY := xZ * yX - xX * yZ ;
zZ := xX * yY - xY * yX ;

d := SQRT (zX * zX + zY * zY + zZ * zZ) ;
zX := zX / d ; zY := zY / d ; zZ := zZ / d ;

{Surface utile Ao}
nX := Uy * Vz - Uz * Vy ;
nY := Uz * Vx - Ux * Vz ;
nZ := Ux * Vy - Uy * Vx ;
A0 := SQRT (nX * nX + nY * nY + nZ * nZ) / 16 ;
END ;
```

Dans le repère global de la structure

$$\{\mathbf{X}_G^e\}^T = [X_i \mid X_j \mid X_k \mid X_l \mid X_m \mid X_n \mid X_o \mid X_p]$$

$$\{\mathbf{Y}_G^e\}^T = [Y_i \mid Y_j \mid Y_k \mid Y_l \mid Y_m \mid Y_n \mid Y_o \mid Y_p]$$

$$\{\mathbf{Z}_G^e\}^T = [Z_i \mid Z_j \mid Z_k \mid Z_l \mid Z_m \mid Z_n \mid Z_o \mid Z_p]$$

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{N}\}^T \cdot \{\mathbf{X}_G^e\}; \quad \mathbf{Y} = \{\mathbf{N}\}^T \cdot \{\mathbf{Y}_G^e\}; \quad \mathbf{Z} = \{\mathbf{N}\}^T \cdot \{\mathbf{Z}_G^e\}$$

Premier vecteur

$$\vec{\mathbf{U}} : U_X = X_{,\xi}; \quad U_Y = Y_{,\xi}; \quad U_Z = Z_{,\xi}$$

Second vecteur

$$\vec{\mathbf{V}} : V_X = X_{,\eta}; \quad V_Y = Y_{,\eta}; \quad V_Z = Z_{,\eta}$$

$$\text{Premier axe local : } \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{U}} / \|\vec{\mathbf{U}}\|$$

$$\text{Second axe local : } \vec{\mathbf{y}} = (\vec{\mathbf{V}} - (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{V}}) \vec{\mathbf{x}}) / \|\vec{\mathbf{V}} - (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{V}}) \vec{\mathbf{x}}\|$$

Troisième axe local :  $\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}$  {produit vectoriel}

Matrice de passage:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ \\ yX & yY & yZ \\ zX & zY & zZ \end{bmatrix}$$

Aire en  $\zeta=0$ : utile pour la hauteur  
 $h = \text{Volume} / A_0$ .

## I.D.2. Annexe I-B

```

PROCEDURE matrice_BFlanagan_en_zero(x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,
                                     x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8:DOUBLE;
                                     VAR B:mat_3_8; VAR volume:DOUBLE);
VAR i : INTEGER;
BEGIN
  (* <bx> *)
  B[1,1]:=y2*(z6-z3+z5-z4)+y3*(z2-z4)+
          y4*(z3-z8+z2-z5)+y5*(z8-z6+z4-z2)+
          y6*(z5-z2)+y8*(z4-z5);

  B[1,2]:=y3*(z7-z4+z6-z1)+y4*(z3-z1)+
          y1*(z4-z5+z3-z6)+y6*(z5-z7+z1-z3)+
          y7*(z6-z3)+y5*(z1-z6);

  B[1,3]:=y4*(z8-z1+z7-z2)+y1*(z4-z2)+
          y2*(z1-z6+z4-z7)+y7*(z6-z8+z2-z4)+
          y8*(z7-z4)+y6*(z2-z7);

  B[1,4]:=y1*(z5-z2+z8-z3)+y2*(z1-z3)+
          y3*(z2-z7+z1-z8)+y8*(z7-z5+z3-z1)+
          y5*(z8-z1)+y7*(z3-z8);

  B[1,5]:=y8*(z4-z7+z1-z6)+y7*(z8-z6)+
          y6*(z7-z2+z8-z1)+y1*(z2-z4+z6-z8)+
          y4*(z1-z8)+y2*(z6-z1);

  B[1,6]:=y5*(z1-z8+z2-z7)+y8*(z5-z7)+
          y7*(z8-z3+z5-z2)+y2*(z3-z1+z7-z5)+
          y1*(z2-z5)+y3*(z7-z2);

  B[1,7]:=y6*(z2-z5+z3-z8)+y5*(z6-z8)+
          y8*(z5-z4+z6-z3)+y3*(z4-z2+z8-z6)+
          y2*(z3-z6)+y4*(z8-z3);

  B[1,8]:=y7*(z3-z6+z4-z5)+y6*(z7-z5)+
          y5*(z6-z1+z7-z4)+y4*(z1-z3+z5-z7)+
          y3*(z4-z7)+y1*(z5-z4);

  (* <by> *)
  B[2,1]:=z2*(x6-x3+x5-x4)+z3*(x2-x4)+
          z4*(x3-x8+x2-x5)+z5*(x8-x6+x4-x2)+
          z6*(x5-x2)+z8*(x4-x5);

  B[2,2]:=z3*(x7-x4+x6-x1)+z4*(x3-x1)+
          z1*(x4-x5+x3-x6)+z6*(x5-x7+x1-x3)+
          z7*(x6-x3)+z5*(x1-x6);

  B[2,3]:=z4*(x8-x1+x7-x2)+z1*(x4-x2)+
          z2*(x1-x6+x4-x7)+z7*(x6-x8+x2-x4)+
          z8*(x7-x4)+z6*(x2-x7);

  B[2,4]:=z1*(x5-x2+x8-x3)+z2*(x1-x3)+
          z3*(x2-x7+x1-x8)+z8*(x7-x5+x3-x1)+
          z5*(x8-x1)+z7*(x3-x8);

  B[2,5]:=z8*(x4-x7+x1-x6)+z7*(x8-x6)+
          z6*(x7-x2+x8-x1)+z1*(x2-x4+x6-x8)+
          z4*(x1-x8)+z2*(x6-x1);

  B[2,6]:=z5*(x1-x8+x2-x7)+z8*(x5-x7)+
          z7*(x8-x3+x5-x2)+z2*(x3-x1+x7-x5)+
          z1*(x2-x5)+z3*(x7-x2);

```

```

B[2,7]:=z6*(x2-x5+x3-x8)+z5*(x6-x8)+
      z8*(x5-x4+x6-x3)+z3*(x4-x2+x8-x6)+
      z2*(x3-x6)+z4*(x8-x3);

B[2,8]:=z7*(x3-x6+x4-x5)+z6*(x7-x5)+
      z5*(x6-x1+x7-x4)+z4*(x1-x3+x5-x7)+
      z3*(x4-x7)+z1*(x5-x4);

(* <bz> *)
B[3,1]:=x2*(y6-y3+y5-y4)+x3*(y2-y4)+
      x4*(y3-y8+y2-y5)+x5*(y8-y6+y4-y2)+
      x6*(y5-y2)+x8*(y4-y5);

B[3,2]:=x3*(y7-y4+y6-y1)+x4*(y3-y1)+
      x1*(y4-y5+y3-y6)+x6*(y5-y7+y1-y3)+
      x7*(y6-y3)+x5*(y1-y6);

B[3,3]:=x4*(y8-y1+y7-y2)+x1*(y4-y2)+
      x2*(y1-y6+y4-y7)+x7*(y6-y8+y2-y4)+
      x8*(y7-y4)+x6*(y2-y7);

B[3,4]:=x1*(y5-y2+y8-y3)+x2*(y1-y3)+
      x3*(y2-y7+y1-y8)+x8*(y7-y5+y3-y1)+
      x5*(y8-y1)+x7*(y3-y8);

B[3,5]:=x8*(y4-y7+y1-y6)+x7*(y8-y6)+
      x6*(y7-y2+y8-y1)+x1*(y2-y4+y6-y8)+
      x4*(y1-y8)+x2*(y6-y1);

B[3,6]:=x5*(y1-y8+y2-y7)+x8*(y5-y7)+
      x7*(y8-y3+y5-y2)+x2*(y3-y1+y7-y5)+
      x1*(y2-y5)+x3*(y7-y2);

B[3,7]:=x6*(y2-y5+y3-y8)+x5*(y6-y8)+
      x8*(y5-y4+y6-y3)+x3*(y4-y2+y8-y6)+
      x2*(y3-y6)+x4*(y8-y3);

B[3,8]:=x7*(y3-y6+y4-y5)+x6*(y7-y5)+
      x5*(y6-y1+y7-y4)+x4*(y1-y3+y5-y7)+
      x3*(y4-y7)+x1*(y5-y4);

{trois possibilités pour calculer le volume}
volume:=(B[1,1]*x1+B[1,2]*x2+B[1,3]*x3+B[1,4]*x4+
      B[1,5]*x5+B[1,6]*x6+B[1,7]*x7+B[1,8]*x8)/12.0;
{
Volume:=(B[2,1]*y1+B[2,2]*y2+B[2,3]*y3+B[2,4]*y4+
      B[2,5]*y5+B[2,6]*y6+B[2,7]*y7+B[2,8]*y8)/12.0;

Volume:=(B[3,1]*z1+B[3,2]*z2+B[3,3]*z3+B[3,4]*z4+
      B[3,5]*z5+B[3,6]*z6+B[3,7]*z7+B[3,8]*z8)/12.0;
}

FOR i:=1 TO 8 DO
  BEGIN
    B[1,i]:=B[1,i]/(12.0*volume);
    B[2,i]:=B[2,i]/(12.0*volume);
    B[3,i]:=B[3,i]/(12.0*volume);
  END;
END;

```

### I.D.3. Annexe I-C

$$\begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz}(\xi, \eta) \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{C0} + \xi \mathbf{B}_{C1} + \eta \mathbf{B}_{C2}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{C0} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1x}^{C0} & \mathbf{B}_{1y}^{C0} & \mathbf{B}_{1z}^{C0} \\ \mathbf{B}_{2x}^{C0} & \mathbf{B}_{2y}^{C0} & \mathbf{B}_{2z}^{C0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{1x}^{C0} = (\bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{11}^a + \mathbf{J}_{11}^c)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{11}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{11}^c - \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{11}^a)\langle \gamma_1 \rangle)/2 \text{ puisque } \bar{J}_{12} = 0 \text{ dans le repère local}$$

$$\mathbf{B}_{1y}^{C0} = (\bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{12}^a + \mathbf{J}_{12}^c)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{11}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{12}^c - \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_1 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{1z}^{C0} = (\bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{11}^a + \mathbf{J}_{11}^c)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{12}^a + \mathbf{J}_{12}^c)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{11}(\bar{J}_{11}^c \mathbf{J}_{11}^c + \bar{J}_{21}^c \mathbf{J}_{12}^c - \bar{J}_{11}^a \mathbf{J}_{11}^a - \bar{J}_{21}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_3 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{2x}^{C0} = (\bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{11}^a + \mathbf{J}_{11}^c)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{21}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{11}^c - \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{11}^a)\langle \gamma_1 \rangle)/2 + (\bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{21}^b + \mathbf{J}_{21}^d)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{22}(\bar{J}_{33}^b \mathbf{J}_{21}^b - \bar{J}_{33}^d \mathbf{J}_{21}^d)\langle \gamma_2 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{2y}^{C0} = (\bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{12}^a + \mathbf{J}_{12}^c)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{21}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{12}^c - \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_1 \rangle)/2 + (\bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{22}^b + \mathbf{J}_{22}^d)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{22}(\bar{J}_{33}^b \mathbf{J}_{22}^b - \bar{J}_{33}^d \mathbf{J}_{22}^d)\langle \gamma_2 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{2z}^{C0} = (\bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{11}^a + \mathbf{J}_{11}^c)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{12}^a + \mathbf{J}_{12}^c)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{21}(\bar{J}_{11}^c \mathbf{J}_{11}^c + \bar{J}_{21}^c \mathbf{J}_{12}^c - \bar{J}_{11}^a \mathbf{J}_{11}^a - \bar{J}_{21}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_3 \rangle)/2 + (\bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{21}^b + \mathbf{J}_{21}^d)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{22}^a + \mathbf{J}_{22}^c)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{22}(\bar{J}_{12}^b \mathbf{J}_{12}^b + \bar{J}_{22}^b \mathbf{J}_{22}^b - \bar{J}_{12}^d \mathbf{J}_{21}^d - \bar{J}_{22}^d \mathbf{J}_{22}^d)\langle \gamma_3 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{C1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1x}^{C1} & \mathbf{B}_{1y}^{C1} & \mathbf{B}_{1z}^{C1} \\ \mathbf{B}_{2x}^{C1} & \mathbf{B}_{2y}^{C1} & \mathbf{B}_{2z}^{C1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{1x}^{C1} = (\bar{J}_{12}(\mathbf{J}_{21}^b - \mathbf{J}_{21}^d)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{12}(\bar{J}_{33}^b \mathbf{J}_{21}^b + \bar{J}_{33}^d \mathbf{J}_{21}^d)\langle \gamma_2 \rangle)/2 = 0, \bar{J}_{12} = 0 \text{ dans le repère local}$$

$$\mathbf{B}_{1y}^{C1} = (\bar{J}_{12}(\mathbf{J}_{22}^b - \mathbf{J}_{22}^d)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{12}(\bar{J}_{33}^b \mathbf{J}_{22}^b + \bar{J}_{33}^d \mathbf{J}_{22}^d)\langle \gamma_2 \rangle)/2 = 0, \bar{J}_{12} = 0 \text{ dans le repère local}$$

$$\mathbf{B}_{1z}^{C1} = (\bar{J}_{12}(\mathbf{J}_{21}^b - \mathbf{J}_{21}^d)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{12}(\mathbf{J}_{22}^b - \mathbf{J}_{22}^d)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{12}(\bar{J}_{12}^b \mathbf{J}_{21}^b + \bar{J}_{22}^b \mathbf{J}_{22}^b + \bar{J}_{12}^d \mathbf{J}_{21}^d + \bar{J}_{22}^d \mathbf{J}_{22}^d)\langle \gamma_3 \rangle)/2 = 0$$

$$\mathbf{B}_{2x}^{C1} = (\bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{21}^b - \mathbf{J}_{21}^d)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{22}(\bar{J}_{33}^b \mathbf{J}_{21}^b + \bar{J}_{33}^d \mathbf{J}_{21}^d)\langle \gamma_2 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{2y}^{C1} = (\bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{22}^b - \mathbf{J}_{22}^d)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{22}(\bar{J}_{33}^b \mathbf{J}_{22}^b + \bar{J}_{33}^d \mathbf{J}_{22}^d)\langle \gamma_2 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{2z}^{C1} = (\bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{21}^b - \mathbf{J}_{21}^d)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{22}(\mathbf{J}_{22}^b - \mathbf{J}_{22}^d)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{22}(\bar{J}_{12}^b \mathbf{J}_{21}^b + \bar{J}_{22}^b \mathbf{J}_{22}^b + \bar{J}_{12}^d \mathbf{J}_{21}^d + \bar{J}_{22}^d \mathbf{J}_{22}^d)\langle \gamma_3 \rangle)/2$$

$$\mathbf{B}_{C2} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1x}^{C2} & \mathbf{B}_{1y}^{C2} & \mathbf{B}_{1z}^{C2} \\ \mathbf{B}_{2x}^{C2} & \mathbf{B}_{2y}^{C2} & \mathbf{B}_{2z}^{C2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{1x}^{C2} = (\bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{11}^c - \mathbf{J}_{11}^a)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{11}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{11}^c + \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{11}^a)\langle \gamma_1 \rangle) / 2$$

(1x8)

$$\mathbf{B}_{1y}^{C2} = (\bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{12}^c - \mathbf{J}_{12}^a)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{11}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{12}^c + \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_1 \rangle) / 2$$

(1x8)

$$\mathbf{B}_{1z}^{C2} = (\bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{11}^c - \mathbf{J}_{11}^a)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{11}(\mathbf{J}_{12}^c - \mathbf{J}_{12}^a)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{11}(\bar{J}_{11}^c \mathbf{J}_{11}^c + \bar{J}_{11}^a \mathbf{J}_{11}^a + \bar{J}_{21}^c \mathbf{J}_{12}^c + \bar{J}_{21}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_3 \rangle) / 2$$

(1x8)

$$\mathbf{B}_{1x}^{C2} = (\bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{11}^c - \mathbf{J}_{11}^a)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{21}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{11}^c + \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{11}^a)\langle \gamma_1 \rangle) / 2$$

(1x8)

$$\mathbf{B}_{2y}^{C2} = (\bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{12}^c - \mathbf{J}_{12}^a)\langle \mathbf{b}_z \rangle + \bar{J}_{21}(\bar{J}_{33}^c \mathbf{J}_{12}^c + \bar{J}_{33}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_1 \rangle) / 2$$

(1x8)

$$\mathbf{B}_{2z}^{C2} = (\bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{11}^c - \mathbf{J}_{11}^a)\langle \mathbf{b}_x \rangle + \bar{J}_{21}(\mathbf{J}_{12}^c - \mathbf{J}_{12}^a)\langle \mathbf{b}_y \rangle + \bar{J}_{21}(\bar{J}_{11}^c \mathbf{J}_{11}^c + \bar{J}_{11}^a \mathbf{J}_{11}^a + \bar{J}_{21}^c \mathbf{J}_{12}^c + \bar{J}_{21}^a \mathbf{J}_{12}^a)\langle \gamma_3 \rangle) / 2$$

(1x8)

## I.E. References

- [1] Abed-Meraim F. Combescure A. *A new adaptative assumed strain-continuum mechanics shell element for impact analysis*. Computers and Structures, 2002; **80**:791-803.
- [2] Abed-Meraim F., Combescure A., *An improved assumed strain solid-shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elastic-plastic stability analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009; **80**:1640-1686.
- [3] Bathe KJ, Dvorkin EN. A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1985; **21**:367-383
- [4] Belytschko,T.,ONG ,J.S.J ,LIU,W.K.,KENNEDY,J.M.,*A hourglass control in linear and non linear problem*, Computer method in applied mechanics and engineering,1984, **43**:251-276
- [5] Belytschko T, Leviathan I. *Physical stabilisation of the 4-node shell element with one point quadrature*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1994; **113**:321-350
- [6] Flanagan ,D.F.,Belytschko,T.,*A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.1981; **17**:679-706
- [7] Flores FG, Estrada CF. *A rotation-free thin shell quadrilateral*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2007; **196**:2631-2646
- [8] HINTON,E.,OWEN,D.R.J., *Finite element software for plates and shells*, Pineridge Press, Swansea UK., 1984, 403 pages
- [9] Legay A. Combescure A. Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element *SHB8PS*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003; **57**:1299-1322.
- [10] Sansalone M. *A new shell formulation using complete 3D constitutive laws. Application to sheet metal forming simulations*. Thèse de doctorat – INSA de Lyon – Ecole doctorale MEGA – 2011
- [11] ZIENKIEWICK,O.C., *La méthode des éléments finis*, McGraw-Hill, 1979, 851 pages

## II. Validation numérique des éléments solides-coques

<b>II.</b>	<b>Validation numérique des éléments solides-coques</b>	<b>II-1</b>
<b>II.A.</b>	<b>Cas linéaires</b>	<b>II-2</b>
II.A.1.	Exemple des quadrangles de base	II-2
II.A.2.	Test de la plaque à cinq éléments en flexion (Patch test bending)	II-3
II.A.3.	Plaque circulaire encastrée	II-7
II.A.4.	Hémisphère pincée avec un orifice d'angle $18^\circ$	II-8
II.A.5.	Cylindre pincé avec des bords libres	II-9
II.A.6.	Poutre vrillée	II-10
<b>II.B.</b>	<b>Cas de non linéarité</b>	<b>II-11</b>
II.B.1.	Plaque circulaire encastrée	II-11
II.B.2.	Arc encastré	II-12
II.B.3.	Bottoming test	II-13
II.B.4.	Flanging avec laminage	II-16
<b>II.C.</b>	<b>Références</b>	<b>II-18</b>



## II.A. Cas linéaires

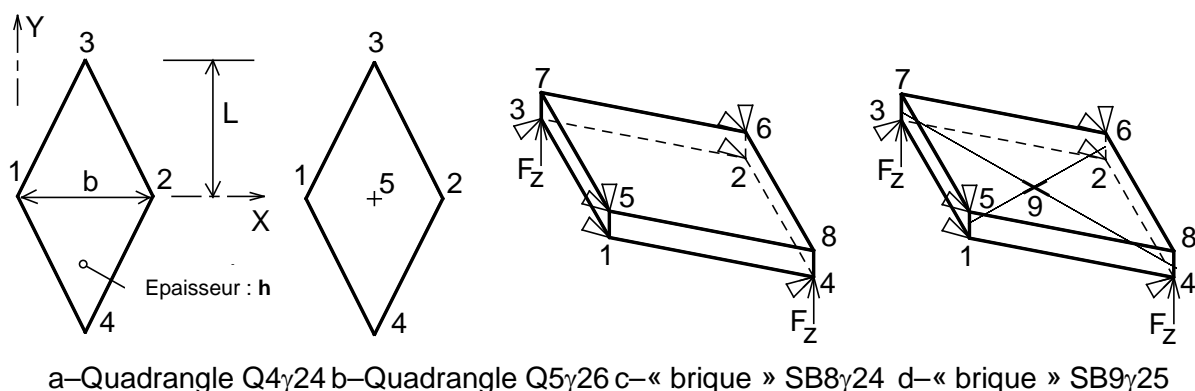
A travers cette première série d'exemples académiques en calculs linéaires, le but est d'arriver à montrer que les deux éléments briques de type solides-coques SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25 formulés dans le premier chapitre peuvent passer ces tests académiques classiques.

Les résultats donnés par ces éléments implémentés dans les codes maisons vont être comparés successivement aux résultats théoriques, puis aux résultats numériques donnés par d'autres éléments quadrangulaires de type coque, coques solide ou des éléments « brique » de type solides coques implémentés dans ces codes maisons ou dans d'autres codes reconnus comme Abaqus.

La pertinence des résultats donnés par ces éléments « briques » va permettre de les dédier à des exemples réels tels l'emboutissage des tôles en alliage d'aluminium ou en acier avec ou sans laminage et d'observer le retour élastique.

Il aura ainsi été montré que la technique d'adjonction d'un nœud supplémentaire à un élément coque ou à un élément « brique » permet de mettre en évidence les contraintes à travers l'épaisseur en utilisant complètement une loi de comportement 3D et ne perturbe pas les résultats dans des cas où la flexion est prépondérante.

### II.A.1.Exemple des quadrangles de base



**Figure II-1.** Exemples de base

Dans le but de comparer les réponses des deux éléments briques de type solide-coque détaillés dans le chapitre I avec les résultats donnés par l'élément quadrilatère de type coque Q4 $\gamma$ 24 et l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26 dans les mêmes conditions, un losange est désigné tel qu'il apparaît dans la Figure II.1 (a, b, c et d). Les données sont :  $b = L = 30$  mm,  $h = 2$  mm,  $E = 200000$  N/mm<sup>2</sup>,  $\nu = 0.3$ .

Les principales conditions aux limites sont liées aux translations suivant 'Z' (normales au plan (X, Y)) :  $w_1 = w_2 = 0$  pour les quadrilatères (Figure II-1-b) ou  $w_5 = w_6 = 0$  pour les éléments solides-coques (Figure II-1-c).

D'autres considérations sont faites pour imposer un plan de symétrie (X, Z) et éviter un mouvement de corps rigide. Deux forces égales ( $F_Z = 200$  N) sont imposées aux nœuds 3 et 4 et les translations normales correspondantes ( $w_3, w_4$ ) sont reportées dans le tableau II.1 avec les composantes de déformations et contraintes au dessus (peau supérieure,  $\zeta=1$ ) et en dessous (peau inférieure,  $\zeta=-1$ ) de l'élément.

	$w_3=w_4$ (mm)	$\sigma_{YY}$	$\sigma_{XX}$	$\epsilon_{XX}$	$\epsilon_{YY}$	$\epsilon_{ZZ}$	Peau
Q4 $\gamma$ 24	0.821557	-300.0 300.0	75.0 -75.0	8.25E-4 -8.25E-4	-1.6125E-3 1.6125E-3	3.3750E-4 -3.3750E-4	sup Inf
Q5 $\gamma$ 26	0.821557	-300.0 300.0	75.0 -75.0	8.25E-4 -8.25E-4	-1.6125E-3 1.6125E-3	3.3750E-4 -3.3750E-4	sup inf
SB8 $\gamma$ 24	0.822186	-300.0 300.0	75.0 -75.0	8.25E-4 -8.25E-4	-1.6125E-3 1.6125E-3	-2.2222E-6 -2.2222E-6	sup inf
SB9 $\gamma$ 25	0.822186	-300.0 300.0	75.0 -75.0	8.25E-4 -8.25E-4	-1.6125E-3 1.6125E-3	3.3528E-4 -3.3972E-4	sup inf

**Tableau II-1.** Déplacements, déformations et contraintes

On peut tout de suite noter en analysant le tableau II.1 que les composantes, sur la peau supérieure et sur la peau inférieure, des contraintes et des déformations dans le plan (X, Y) sont identiques pour tous les éléments. L'élément solide-coque SB8 $\gamma$ 24 présente des composantes de déformations normales différentes de celles des autres éléments.

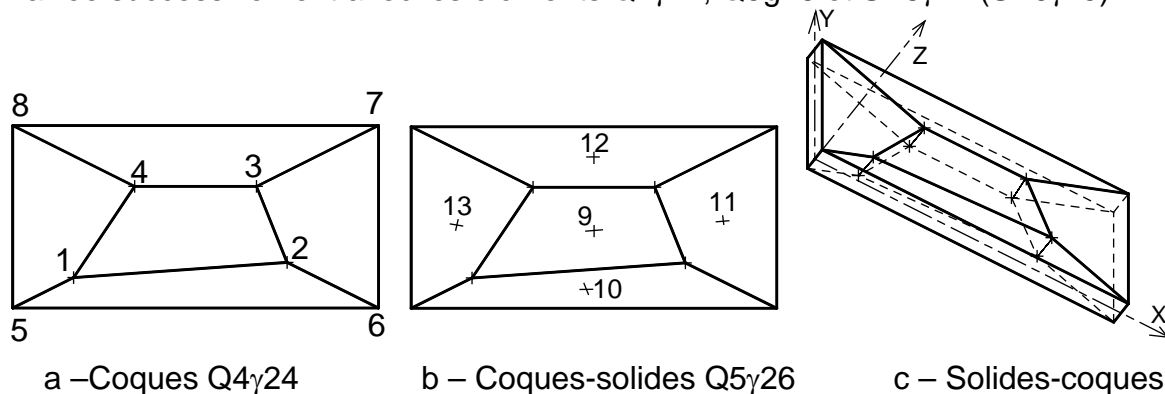
Les translations  $w_3$  et  $w_4$  qu'affichent les éléments en question sont similaires. Mais elles sont éloignées des résultats obtenus avec les briques classiques (C3D8 d'Abaqus) en intégration complète :  $w_3 = w_4 = 0.152147$  mm (cinq fois plus petits!).

Pour la déformation normale  $\epsilon_{ZZ}$ , quelques remarques doivent être faites :

- Premièrement, il est presque évident que l'élément Q5 $\gamma$ 26, même avec la formulation de la contrainte à travers l'épaisseur, ne « voit » pas  $\epsilon_{ZZ}$  à cause des deux forces  $F_z$  puisque ces charges sont appliquées aux sommets '3' et '4' et non sur le degré de liberté inférieur du nœud central '5' (Figure II-1-b) ;
- Deuxièmement, le solide-coque SB8 $\gamma$ 24 voit la déformation normale due au chargement (-2.2222E-6) mais pas celle due à la flexion (voir Equation I.73) ;
- Finalement, 'SB9 $\gamma$ 25' est le seul solide-coque qui prend en compte les deux effets sur la peau supérieure:  $\epsilon_{ZZ} = 3.375E-4+(-2.22E-6)$ ; et sur la peau inférieure de l'élément :  $\epsilon_{ZZ} = (-3.375E-4)+(-2.22E-6)$ .

## II.A.2. Test de la plaque à cinq éléments en flexion (Patch test bending)

On rappelle que l'élément ShB8PS initial ne peut passer ce test que si chaque élément est subdivisé en au moins 4x4 sous éléments. Ici, la plaque originale à cinq éléments est directement utilisée (Figure II-2 ci-après) avec les données géométriques suivantes : Longueur (suivant X) = 24; largeur (suivant Y) = 12; épaisseur (suivant Z) 'h' = 1.0 et  $E = 1.0E6$ ,  $\nu = 0.25$  pour le matériau. Elle est maillée successivement avec les éléments Q4 $\gamma$ 24, Q5 $\gamma$ 26 et SB8 $\gamma$ 24 (SB9 $\gamma$ 25).



**Figure II-2.** Maillages avec différents types d'éléments pour le "Bending Patch-test"

## II.A.2.a) Maillage avec l'élément quadrilatère de type coque Q4γ24

Maillée avec l'élément coque Q4γ24 et l'élément de type coque-solide Q5γ26, la plaque a son nœud '5' complètement encastré tandis que les rotations sont seulement imposées aux nœuds 6, 7 et 8 tel que :

$$\theta_x = 10^{-3}(x/2+2); \theta_y = -10^{-3}(2+y/2).$$

En fait, ces rotations proviennent d'un champ de déplacement normal :

$$U_z = 10^{-3}(x^2 + xy + y^2)/2.$$

Nœud	Cx	Cy	Cz				{coordonnées nodales}
1	4.0000	2.0000	0.0000				
2	18.0000	3.0000	0.0000				
3	16.0000	8.0000	0.0000				
4	8.0000	8.0000	0.0000				
5	0.0000	0.0000	0.0000				
6	24.0000	0.0000	0.0000				
7	24.0000	12.0000	0.0000				
8	0.0000	12.0000	0.0000				
Nœud	Ux	Uy	Uz	Rx	Ry	Rz	{déplacements}
1	0.0000	0.0000	<b>0.0140</b>	0.0040	-0.0050	0.0000	
2	0.0000	0.0000	<b>0.1935</b>	0.0120	-0.0195	0.0000	
3	0.0000	0.0000	<b>0.2240</b>	0.0160	-0.0200	0.0000	
4	0.0000	0.0000	<b>0.0960</b>	0.0120	-0.0120	0.0000	
5	0.0000	0.0000	<b>0.0000</b>	0.0000	0.0000	0.0000	
6	0.0000	0.0000	<b>0.2880</b>	0.0120	-0.0240	0.0000	
7	0.0000	0.0000	<b>0.5040</b>	0.0240	-0.0300	0.0000	
8	0.0000	0.0000	<b>0.0720</b>	0.0120	-0.0060	0.0000	
El.1	Sxx	Syy	Sxy	Sxz	Syz	Szz	{Contraintes}
Haut	<b>-666.6673</b>	<b>-666.6673</b>	<b>-200.0002</b>	0.0000	0.0000	0.0000	
Moyen	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
Bas	<b>666.6673</b>	<b>666.6673</b>	<b>200.0002</b>	0.0000	0.0000	0.0000	

**Tableau II-2.** Résultats du maillage avec cinq éléments de type coques Q4γ24

Les résultats des déplacements (en gras dans le tableau II-2) peuvent facilement être retrouvés par un calcul manuel avec le champ de déplacement normal  $U_z = 10^{-3}(x^2 + xy + y^2)/2$  et les coordonnées des nœuds. A tous les nœuds de la plaque maillée avec les éléments coques Q4γ24, on trouve les bonnes translations.

Les valeurs des contraintes données dans le tableau II-2 sur la peau inférieure de la structure :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -0.666667 \text{ GPa} \text{ et } \sigma_{xy} = -0.2000 \text{ GPa}$$

Et celles sur la peau supérieure sont :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = +0.666667 \text{ GPa} \text{ et } \sigma_{xy} = +0.2000 \text{ GPa}$$

Ces contraintes sont bien conformes aux résultats donnés [2] issus de la théorie de McNeal [3].

### II.A.2.b) Maillage avec l'élément quadrilatère de type coque Q5 $\gamma$ 26

En prenant le cas d'un maillage avec l'élément Q5 $\gamma$ 26 (Figure II-2-b, précédente), puisque seul le nœud supplémentaire différencie cet élément de l'élément quadrangulaire Q4 $\gamma$ 24 (Figure II-2-a), les résultats de déplacements et de contraintes sont identiques à ceux du tableau II-2.

En conséquence, seuls les déplacements suivant 'Z' et les coordonnées des nœuds supplémentaires sont donnés ci-après (Tableau II-3).

Il peut être constaté que les nœuds supplémentaires en question (9, 10, 11, 12 et 13) ne vérifient pas le champ de déplacement  $U_z$  ; par ailleurs, ils sont toujours positionnés au centre de leurs éléments correspondants.

En outre, dans un tel cas, il devrait être remarqué une égalité des degrés de liberté  $U_z^-$  et  $U_z^+$  en chaque nœud supplémentaire.

Nœud	Cx	Cy	Cz	$U_z^-$	$U_z^+$	{Q5 $\gamma$ 26: nœuds sup}
9	11.500	5.250	0.000	0.131958	0.131958	
10	11.500	1.250	0.000	0.123958	0.123958	
11	20.500	5.750	0.000	0.302458	0.302458	
12	12.000	10.000	0.000	0.224083	0.224083	
13	3.000	5.500	0.000	0.045583	0.045583	

**Tableau II-3.** Résultats des nœuds supplémentaires de l'élément Q5 $\gamma$ 26

### II.A.2.c) Maillage avec l'élément brique de type solide-coque SB8 $\gamma$ 24

Evidemment, pour un maillage de cette structure avec des éléments solides-coques SB8 $\gamma$ 24 (Figure II-1-c), il y a 16 nœuds sur lesquels aucune rotation ne peut être directement appliquée, ceci est réalisé grâce aux translations nodales suivant X et Y (écrits en italique dans le tableau II-4 ci-après) aux sommets des éléments.

Nœud	Cx	Cy	Cz	Ux	Uy	Uz	
1	16.000	8.000	-0.500	0.010000	0.008000	<b>0.224000</b>	
2	8.000	8.000	-0.500	0.006000	0.006000	<b>0.096000</b>	
3	4.000	2.000	-0.500	0.002500	0.002000	<b>0.014000</b>	
4	18.000	3.000	-0.500	0.009750	0.006000	<b>0.193500</b>	
5	16.000	8.000	0.500	-0.010000	-0.008000	<b>0.224000</b>	
6	8.000	8.000	0.500	-0.006000	-0.006000	<b>0.096000</b>	
7	4.000	2.000	0.500	-0.002500	-0.002000	<b>0.014000</b>	
8	18.000	3.000	0.500	-0.009750	-0.006000	<b>0.193500</b>	
9	0.000	0.000	-0.500	0.000000	0.000000	0.000000	
10	24.000	0.000	-0.500	<i>0.012000</i>	<i>0.006000</i>	<b>0.288000</b>	
11	0.000	0.000	0.500	0.000000	0.000000	0.000000	
12	24.000	0.000	0.500	<i>-0.012000</i>	<i>-0.006000</i>	<b>0.288000</b>	
13	24.000	12.000	-0.500	<i>0.015000</i>	<i>0.012000</i>	<b>0.504000</b>	
14	24.000	12.000	0.500	<i>-0.015000</i>	<i>-0.012000</i>	<b>0.504000</b>	
15	0.000	12.000	-0.500	<i>0.003000</i>	<i>0.006000</i>	<b>0.072000</b>	
16	0.000	12.000	0.500	<i>-0.003000</i>	<i>-0.006000</i>	<b>0.072000</b>	
	Sxx	Syy	Szz	Sxy	Sxz	Syz	
	-666.666667	-666.666667	0.000000	-200.000000	0.000000	0.000000	Haut
	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	Moyen
	666.666667	666.666667	0.000000	200.000000	0.000000	0.000000	Bas

**Tableau II-4.** Déplacements et contraintes du solide-coque SB8 $\gamma$ 24

On peut tout de suite remarquer que les contraintes sur les peaux supérieure et inférieure de la plaque maillée par les éléments brique SB8 $\gamma$ 24 sont exactement les mêmes que celles obtenues avec l'élément coque Q4 $\gamma$ 24 (et bien sûr Q5 $\gamma$ 26) dans le tableau II-2. Il faut rappeler que dans [3] sont données les mêmes contraintes.

Afin de pouvoir interpréter les résultats de déplacements dans le Tableau II-4, il est important de noter que les noeuds du quadrangle Q4 $\gamma$ 24 et de la brique SB8 $\gamma$ 24 sont différemment numérotés. Par exemple, la rotation  $\theta_x$  du nœud numéro '1' de l'élément coque Q4 $\gamma$ 24 (Tableau II-2, Figure II-1-a) est égal à la différence des déplacements suivant Y des nœuds '4' et '7' de l'élément brique SB8 $\gamma$ 24 divisée par son épaisseur 'h'. Ceci a déjà été établi dans le chapitre I, afin d'effectuer une correspondance entre les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  aux nœuds de l'élément coque et les translations  $U_x$  et  $U_y$  sur les noeuds de l'élément « brique », par les relations :

$$\theta_x = 1/h(-U_y^+ + U_y^-) \text{ et } \theta_y = 1/h(U_x^+ - U_x^-).$$

Ainsi, sur le nœud (1) du Q4 $\gamma$ 24, la rotation  $\theta_x=0.004$  (notée Rx dans le tableau II-2) peut être obtenue en utilisant les translations  $U_y = 0.002$  et  $U_y = -0.002$  respectivement des nœuds (3) et (7) de l'élément SB8 $\gamma$ 24 pour remplacer  $U_y^-$  et  $U_y^+$  dans la relation  $\theta_x = 1/h(-U_y^+ + U_y^-)$  en sachant que l'épaisseur vaut 1 mm.

#### II.A.2.d) Maillage avec l'élément brique de type solide-coque SB9 $\gamma$ 25

Pour ce qui concerne le maillage avec les éléments « brique » SB9 $\gamma$ 25, il est complètement inutile d'afficher leurs résultats puisqu'ils sont exactement égaux à ceux du Tableau II-4.

Ainsi, dans le Tableau II-5 sont réunis seulement les déplacements locaux des cinq nœuds supplémentaires situés au milieu de chaque élément ; lesquels nœuds permettent d'utiliser une loi de comportement générale 3D contrairement au SB8 $\gamma$ 24 qui nécessite une hypothèse d'un état plan de contraintes.

Nœud	Cx	Cy	Cz	Uz {Solide-coque SB9 $\gamma$ 25:nœuds sup.}
17	11.500	5.250	0.000	0.131792
18	11.500	1.250	0.000	0.123792
19	20.500	5.750	0.000	0.302292
20	12.000	10.000	0.000	0.223917
21	3.000	5.500	0.000	0.045417

**Tableau II-5.** Déplacements des nœuds supplémentaires du solide-coque SB9 $\gamma$ 25

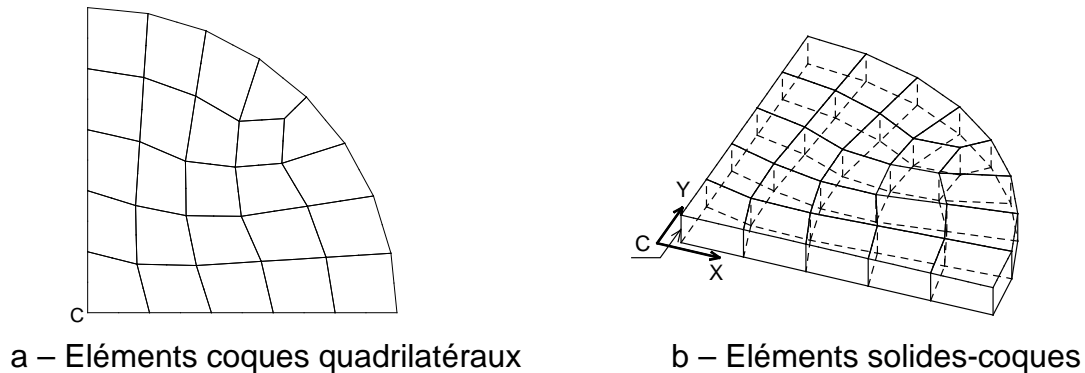
Finalement, bien que le test de la plaque à cinq éléments en flexion soit réputé difficile à passer, tous les éléments cités ici ont réussi à le faire. Et en particulier, les deux éléments « brique » de type solide coque.

Cela semble évident pour l'élément coque Q4 $\gamma$ 24 puisqu'il est assujéti à la méthode de déformation assumée pour le champ de cisaillement transversal et à l'habituelle hypothèse  $\sigma_{zz} = 0$  (Z étant la direction normale) ; et par conséquent, pour le solide-coque modifié SB8 $\gamma$ 24 même si la contrainte normale n'est alors pas obligatoirement nulle.

### II.A.3. Plaque circulaire encastrée

Comme on doit s'en rendre compte, cet exemple a servi à illustrer un certain nombre de méthodes d'intégrations dans le premier chapitre. On le reprend ici spécialement pour évaluer et valider les deux éléments SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25.

Les résultats obtenus des calculs effectués avec ces éléments vont être comparés à ceux de Q4 $\gamma$ 24 et Q5 $\gamma$ 26 et à ceux de S4R, SC8R et C3D8 d'Abaqus.



**Figure II-3.** Plaque circulaire encastrée

Une plaque circulaire – dont la frontière est encastrée – est soumise à une pression normale. Les données habituelles sont : rayon  $R = 100$  mm; épaisseur = 1 mm; matériau isotrope :  $E = 200000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ ; Pression uniforme normale au plan  $p = 0.01172$  N/mm<sup>2</sup> (sur la face inférieure).

$U_C = 1$  mm correspond au déplacement théorique du centre de la plaque selon la théorie de Kirchhoff et celle de Mindlin (1.005) puisque cette plaque est mince.

		Q4 $\gamma$ 24	Q5 $\gamma$ 26	SB8 $\gamma$ 24	SB9 $\gamma$ 25	S4R Abaqus	SC8R Abaqus	C3D8 Abaqus
$U_C$ (mm)		0.9894	0.9874	0.9950	0.9950	0.9950	0.98833	0.00844
$\sigma_{zz}$	Haut	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	Non disponible	-0.1674
	Bas	0.0	-0.01172	0.0	-0.01172	0.0	disponible	0.1555

**Tableau II-6.** Déplacements du nœud central et composantes de  $\sigma_{zz}$ .

Tout d'abord, il faut noter que les éléments Q4 $\gamma$ 24, S4R sont des éléments coques classiques avec une intégration réduite dans le plan milieu tandis que SB8 $\gamma$ 24, SC8R sont des éléments solides-coques 'classiques' (Figure II-3-b) et C3D8 est une brique ordinaire; les résultats de ceux-ci sont complètement faux puisqu'il n'y a qu'une seule couche d'éléments à travers l'épaisseur (Figure II-3-b).

Effectivement, comme traité dans le chapitre I, SB9 $\gamma$ 25 est un élément de type solide-coque ayant un nœud supplémentaire dont le degré de liberté ne permet pas seulement l'emploi des lois de comportement élastiques 3D mais aussi l'affectation d'une partie des forces nodales équivalentes à la pression normale à ce nœud supplémentaire afin d'obtenir une bonne répartition de la contrainte normale.

Ce qui peut être aisément vu dans les résultats affichés (Tableau II-6) : la composante de la contrainte normale ( $\sigma_{zz}$ ) varie à travers l'épaisseur de la valeur  $-p$  ('p': pression) à une valeur nulle. Il en va de même avec l'élément Q5 $\gamma$ 26 même si le déplacement  $U_C$  correspondant est obtenu avec moins de précision que celui de la brique SB9 $\gamma$ 25.

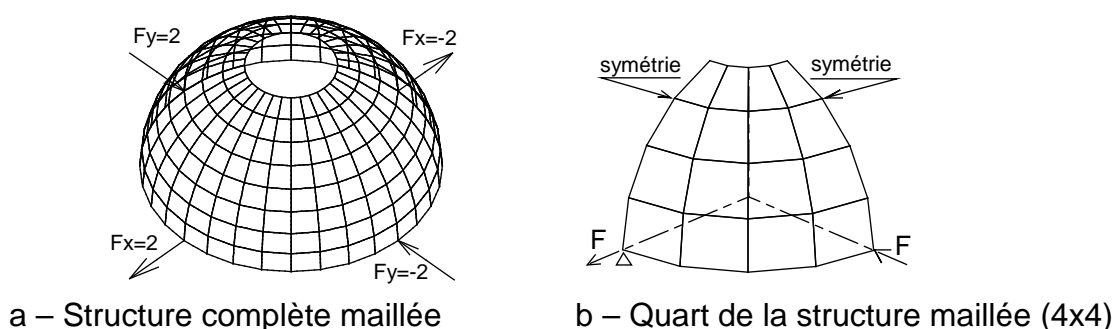
## II.A.4. Hémisphère pincée avec un orifice d'angle 18°

Ce problème introduit une géométrie initialement courbe. Une coque hémisphérique très mince (rayon  $R = 10$ , épaisseur  $h = 0.04$ ), trouée en son sommet suivant un angle d'ouverture égal à  $18^\circ$  (Figure II-4-a), est soumise à un effort interne suivant l'axe Y ( $F_y = -2$  N) et un autre effort externe suivant l'axe X ( $F_x = 2$  N).

Le module de Young  $E=6,825.10^7$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$  sont les caractéristiques utiles d'un matériau élastique et isotrope.

Les valeurs des déplacements des points sollicités sont comparés aux résultats de référence de Simo [4]:  $U_x=-U_y=0.093$ .

Nota : certains auteurs proposent une autre valeur de référence : 0.094.



**Figure II-4.** Coque hémisphérique pincée.

En raison des conditions de symétrie, seulement un quart de la structure a été maillée avec des éléments quadrangles (Figure II-4-b) ou des éléments solides (non représenté puisque l'épaisseur est très petite) et différentes discrétisations : 4x4 (Figure II-4-b), 8x8 (Figure II-4-a) et 16x16 non représenté.

$U_x = -U_y$	Eléments coques quadrilatéraux			Eléments solides coques (briques)		
	S4R(Abaqus)	Q4 $\gamma$ 24	Q5 $\gamma$ 26	SB8 $\gamma$ 24	SB9 $\gamma$ 25	SC8R(Abaqus)
4x4	0.09556	0.09318	0.09280	0.10060	0.10020	0.10840
8x8	0.09429	0.09269	0.09251	0.09587	0.09584	0.09717
16x16	0.09383	0.09286	0.09276	0.09422	0.09422	0.09447

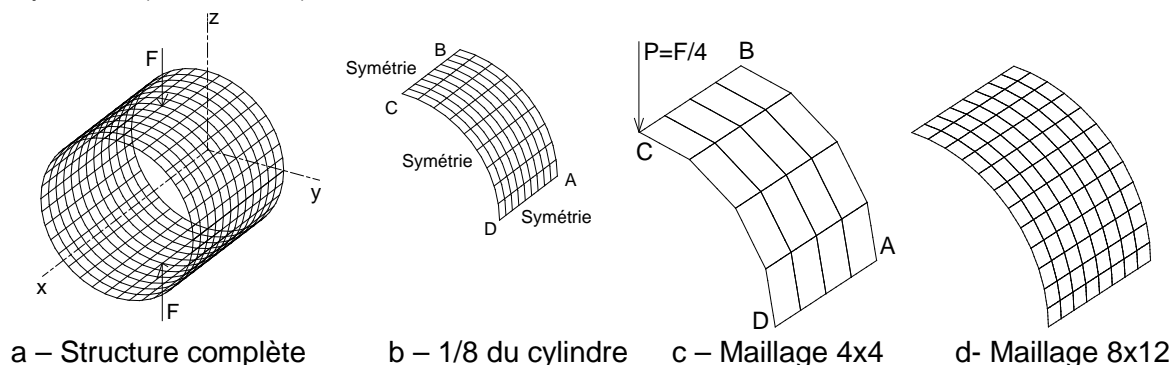
**Tableau II-7.** Déplacements des points sollicités de l'hémisphère pincé

Du tableau II-7, il peut être constaté que les solides-coques SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25 sont un peu flexibles (mous) par rapport aux quadrangles quand le maillage est grossier mais il en va de même pour le SC8R implémenté dans le code Abaqus. Par contre, les résultats sont excellents quand le maillage est suffisamment dense.

Une fois de plus, il faut rappeler que Q5 $\gamma$ 26 et SB9 $\gamma$ 25 sont les seuls éléments (dans Tableau II-7) qui utilisent la loi de comportement générale 3D élastique contrairement à l'élément SC8R comme indiqué dans le chapitre I.

## II.A.5. Cylindre pincé avec des bords libres

Comme l'exemple de l'hémisphère pincé (voir exemple II-4) ne montre pas une réelle sensibilité aux résultats issus de la variation de la densité de maillage, une autre structure est étudiée afin de confirmer ce fait. A cause des symétries, seulement un huitième du cylindre pincé (Figure II-5-a, b) est maillé avec différentes discrétisations (Figure II-5-c, d) et éléments étudiés dans le chapitre I à savoir l'élément coque Q4 $\gamma$ 24, le coque-solide Q5 $\gamma$ 26 et les deux « briques » de type solide-coque SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25.



**Figure II-5.** Cylindre pincé avec bords libres

Le cylindre, décrit par les figures II-5 (a, b, c et d), a une longueur  $L = 10.35$ , un rayon  $R = 4.953$  et une épaisseur  $h = 0.094$ . Les caractéristiques du matériau dans lequel est fait ce cylindre sont : module de Young  $E = 10.5 \times 10^6$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3125$ ;

En sollicitant cette structure par deux forces égales et opposées  $F = 100$  N comme indiqué dans la Figure II.5-a, on cherche à connaître la translation verticale du point C (Figure II.5-b) pour les différents maillages afin de le comparer au déplacement de référence : 0.1139 [3].

	Maillage 4x4	Maillage 4x6	Maillage 6x6	Maillage 6x8	Maillage 8x8	Maillage 8x12
Q4 $\gamma$ 24	0.1011	0.10790	0.10795	0.11050	0.11050	0.11235
Q5 $\gamma$ 26	0.1008	0.10745	0.10767	0.11020	0.11024	0.11216
SB8 $\gamma$ 24	0.1001	0.10700	0.10715	0.10990	0.10991	0.11204
SB9 $\gamma$ 25	0.0997	0.10696	0.10711	0.10993	0.10992	0.11206

**Tableau II-8** Déplacement du point sollicité pour les coques et les solides-coques

Dans ce Tableau II-8, les deux éléments de type « brique » semblent être un peu raides malgré le raffinement du maillage. Le déplacement du point C est après tout très proche du résultat de référence pour les deux « briques ». Les éléments coques donnent des résultats légèrement meilleurs.

Avec l'élément coque S4R code Abaqus (Tableau II-9), les déplacements du point C sont pratiquement identiques à ceux donnés par le Q4 $\gamma$ 24 (tableau II-8).

Code Abaqus	Maillage 4x4	Maillage 8x12	Code Abaqus	4x4	8x12
Élément S4R	0.1011	0.1123	Élément S4	0.1003	0.1119

**Tableau II-9** Déplacement du point sollicité pour les éléments S4 et S4R



## II.A.6. Poutre vrillée

Le problème de la poutre vrillée à 90° [3] est introduit ici pour mettre en exergue la sensibilité des éléments coques au gauchissement. La forme initiale de cette poutre est montrée à la figure II.6 avec un maillage 12x2. Les paramètres utiles sont : longueur (suivant Z)  $L=12.0$ , largeur  $l = 1.0$ , épaisseur = 0.32, module d'élasticité  $E = 2.9 \times 10^7$  MPa, coefficient de Poisson = 0.22. Si la force  $P$  dans le plan ( $P=1$  N) est appliquée au point C suivant la direction Y (Figure II.6.a), le résultat analytique du déplacement  $U_{Y(C)} = 5.424 \times 10^{-3}$ . Si un effort  $Q$  hors plan ( $Q=1$  N) est prescrit alors le déplacement théorique suivant X est  $U_{X(C)} = 1.754 \times 10^{-3}$ .

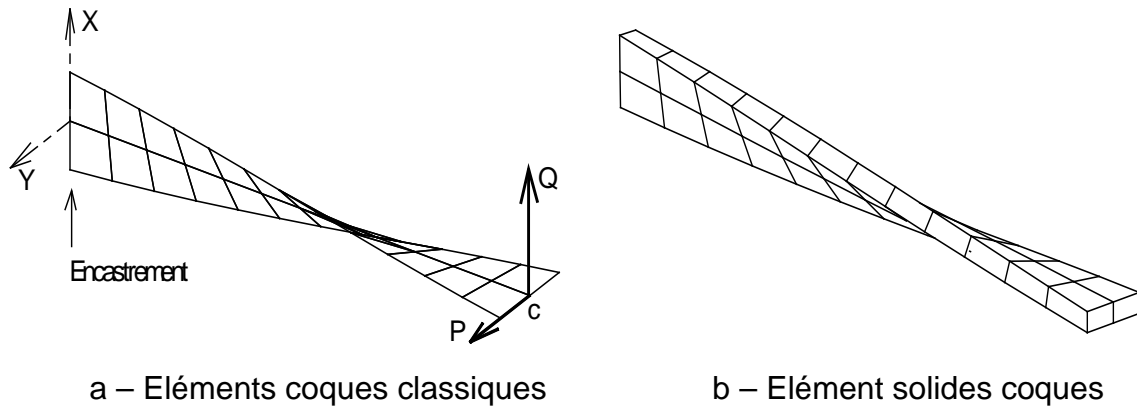


Figure II-6 Poutre vrillée

Deux séries de calculs ont été faites : une avec un maillage 12x2 (Fig. II-6) et une autre avec un maillage 48x8. Tous les résultats réunis dans le tableau II.10 ci-dessous sont à comparer entre eux et avec ceux obtenus par Abaqus (SC8R).

	$U_{Y(C)} \times 10^{-3}$ dû à l'effort 'P'			$U_{X(C)} \times 10^{-3}$ dû à l'effort 'Q'		
	SC8R Abaqus	SB8 $\gamma$ 24	SB9 $\gamma$ 25	SB9 $\gamma$ 25	SB8 $\gamma$ 24	SC8R Abaqus
Maillage 12x2	5.490	5.451	5.452	1.882	1.882	1.798
Maillage 48x8	5.420	5.418	5.418	1.757	1.756	1.743

Tableau II.10 : Déplacement du point sollicité pour les solides coques

Comme il peut aisément être constaté en comparant les résultats numériques et ceux analytiques [5], les solides-coques traités dans ce document (chapitre I) donnent de bons résultats dès que le maillage se densifie. Ils ne sont pas sensibles au gauchissement et n'ont donc pas besoin d'un traitement spécial, contrairement aux éléments coques classiques avec une intégration réduite dans le plan.

Comme tous les exemples précédents, celui-ci montre de petites différences respectivement entre les résultats donnés par le SB8 $\gamma$ 24 (état plan de contraintes) et le SB9 $\gamma$ 25 (loi de comportement 3D). Une différence insignifiante. A cette occasion, il est rappelé que le facteur  $f_E$  compris dans l'équation (I.108) du premier chapitre reste égal à  $10^{-4}$  quel que soit l'exemple traité dans ce chapitre.

## II.B. Cas de non linéarité

### II.B.1. Plaque circulaire encastrée

C'est le même exemple de la plaque encastrée mais cette fois-ci en non linéarité. Toutes les données restent les mêmes (I-C-3) sauf la pression qui varie maintenant jusqu'à la valeur de 1 N/mm<sup>2</sup>. Avec une telle pression, un calcul linéaire donnerait un déplacement du centre de la structure  $U_C$  complètement faux. Par conséquent, un calcul non linéaire géométrique est effectué afin de prendre en considération les effets de membrane. Plusieurs études théoriques donnent des expressions de ce déplacement variant [6].

$$U_C \left(1 + k \cdot \frac{U_C^2}{h^2}\right) = \frac{p \cdot R^4}{64D} \quad ; \text{ avec } \begin{array}{ll} k = 0.488 & \text{Timoshenko} \\ k = 0.523 & \text{Federhoffer} \\ k = 0.583 & \text{Nadaï} \end{array} \quad (\text{II.1})$$

Le paramètre matériel  $D$  est classiquement égal à  $E \cdot h^3 / 12(1-\nu^2)$ ,  $R$  est le rayon,  $h$  l'épaisseur et 'p' la pression. Ainsi, selon Nadaï, Federhoffer et Timoshenko respectivement, le déplacement  $U_C$  est 5.17mm, 5.35 mm ou 5.47 mm.

Avec le maillage montré dans les Figures (II-3-a, b) et une pression progressivement appliquée en 19 incréments – 10 pour une variation de pression de 0 à 0.1 N/mm<sup>2</sup> et 9 après la valeur de 0.1 N/mm<sup>2</sup> jusqu'à 1.0 N/mm<sup>2</sup> –, les résultats numériques sont présentés dans le Tableau II-11. Il est utile de rappeler ici que tous les éléments cités sont à intégration réduite d'où le choix de S4R dans Abaqus.

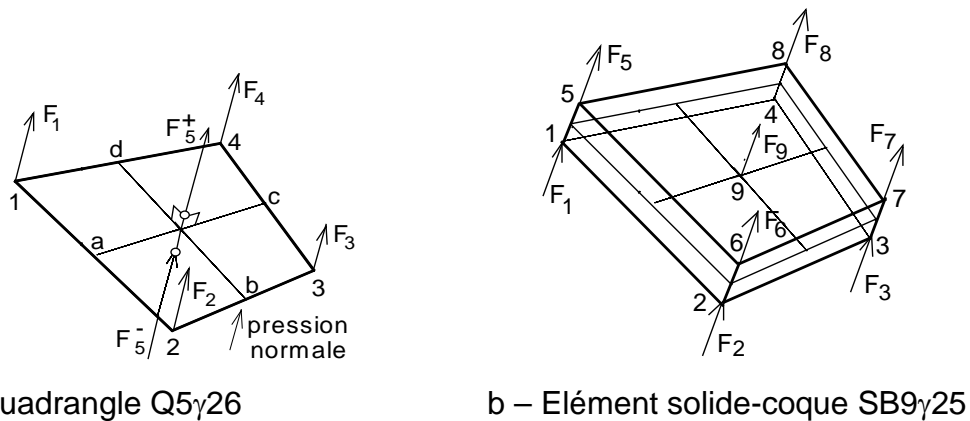
	Eléments coques quadrilatéraux			Eléments solides-coques (briques)		
	S4R Abaqus	Q4γ24	Q5γ26	SB8γ24	SB9γ25	SC8R Abaqus
$U_C$ (mm)	5.111	5.223	5.223	5.250	5.254	4.996

**Tableau II-11** Déplacement normal du centre ( $U_C$ ) pour une pression  $p = 1$  MPa

Dans le tableau II-11, on voit que le déplacement du point C de la plaque maillée par les solides-coques SB8g24 et SB9g25 est proche de celui donné par la théorie. L'écart tourne autour de 3%, ce qui est acceptable mais permet de dire quand même que ces éléments sont un peu 'mous' comparés aux autres.

Par ailleurs, pour montrer la répartition des efforts de pression aux nœuds des éléments, spécifiquement de l'élément coque-solide Q5γ26 et de l'élément solide-coque SB9γ25, on se sert de la figure suivante (Figure II-7).

Si la pression est appliquée sur la surface inférieure alors les efforts équivalents sont comme indiqués sur la figure II-7-a (6 valeurs) Sur la figure II-7-b donnant la répartition des efforts sur les nœuds du solide-coque SB9γ25, il faut noter que les efforts aux nœuds « supérieurs » de l'élément ne sont pas nuls lorsque la pression est appliquée sur la surface inférieure ; de même, les efforts sur les nœuds « inférieurs » ne sont pas nuls quand la pression agit sur la surface supérieure.



a – Quadrangle Q5 $\gamma$ 26

b – Élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25

**Figure II-7** Forces équivalentes de pression normale

Il est essentiel de rappeler que les forces équivalentes dues à la pression ont été appliquées aux sommets mais aussi aux degrés de liberté du nœud central du quadrangle Q5 $\gamma$ 26 ( $F_5^-$ ,  $F_5^+$  sur la Figure II-7a) et au neuvième nœud de la brique SB9 $\gamma$ 25 ( $F_9$  sur la Figure II-7-b).

Enfin, il faut se souvenir que pour les deux derniers éléments cités, l'élasticité ne prend pas en compte l'hypothèse d'état plan de contraintes contrairement aux éléments Q4 $\gamma$ 24 et SB8 $\gamma$ 24.

La contrainte normale  $\sigma_{zz}$ , une valeur égale à -0.9985 est affichée au premier point d'intégration de Lobatto situé sur la peau inférieure et une valeur exactement nulle au dernier point d'intégration de Lobatto situé sur la peau supérieure de des éléments Q5 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25 (cinq points d'intégration dans l'épaisseur).

## II.B.2. Arc encastré

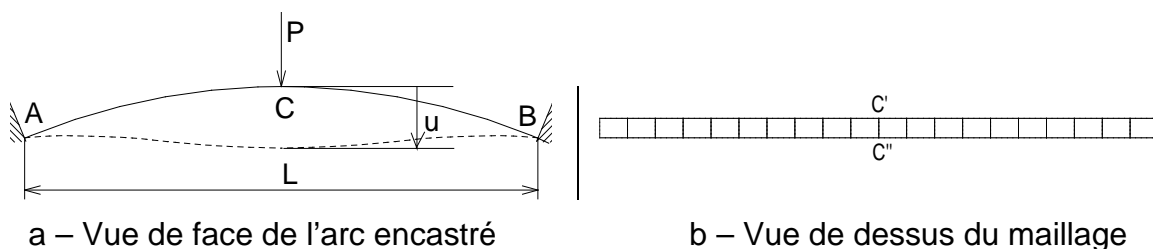
Ce test consiste à soumettre à une charge localisée verticale  $P$  un arc encastré à ses extrémités A et B. Il prend en compte deux types de non linéarités, géométrique et matérielle.

En effet, on a :

Pour la géométrie : Longueur  $L = 863.6$  mm; largeur  $b = 24.4$  mm; épaisseur  $h = 15$  mm; rayon  $R = 3381.1$  mm ;

Pour le matériau :  $\bar{\sigma} = \sigma_0 + H' \cdot \bar{\epsilon}_p$  ;  $H' = E$  ;  $E = 68950$  MPa;  $\nu = 0.5$ ;  $\sigma_0 = 137.9$  MPa.

Le déplacement vertical 'u' (Figure a) des nœuds C' C'' (Figure b) est imposé progressivement jusqu' à 40 mm et les forces correspondantes ( $F_{C'}$  et  $F_{C''}$ ) donnent le résultat  $P = F_{C'} + F_{C''}$ .



a – Vue de face de l'arc encastré

b – Vue de dessus du maillage

**Figure II-8.** Arc encastré

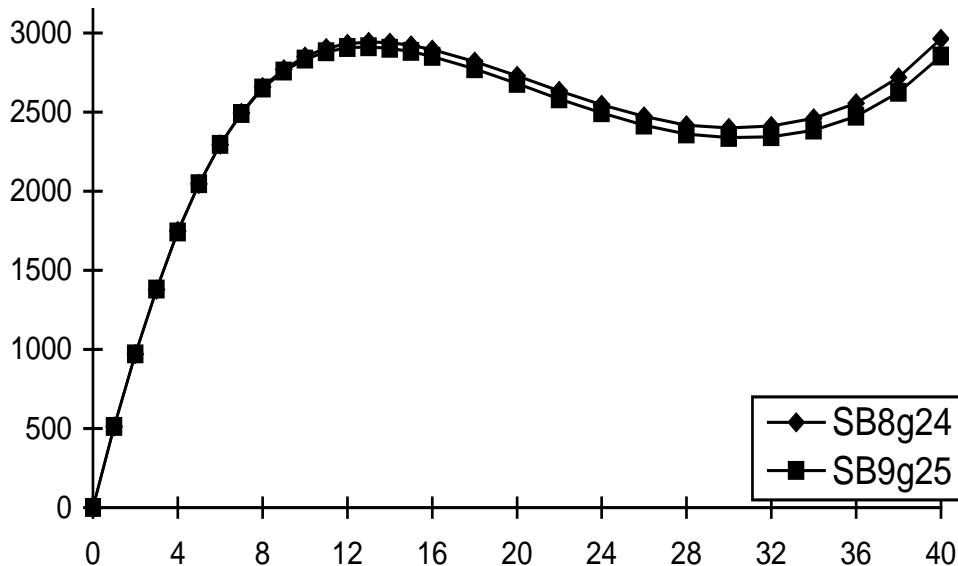


Figure II-9. Effort "P" en fonction du déplacement "u" pour les solides-coques

Les résultats donnés par les éléments coques classiques  $Q4\gamma24$  ne sont pas affichés dans la figure II-9 puisqu'ils sont pratiquement confondus avec ceux venant de élément solide-coque  $SB8\gamma24$ . Dans ce cas, l'élément  $SB9\gamma25$  semble être un peu moins raide mais les résultats sont proches de ceux donnés dans [3].

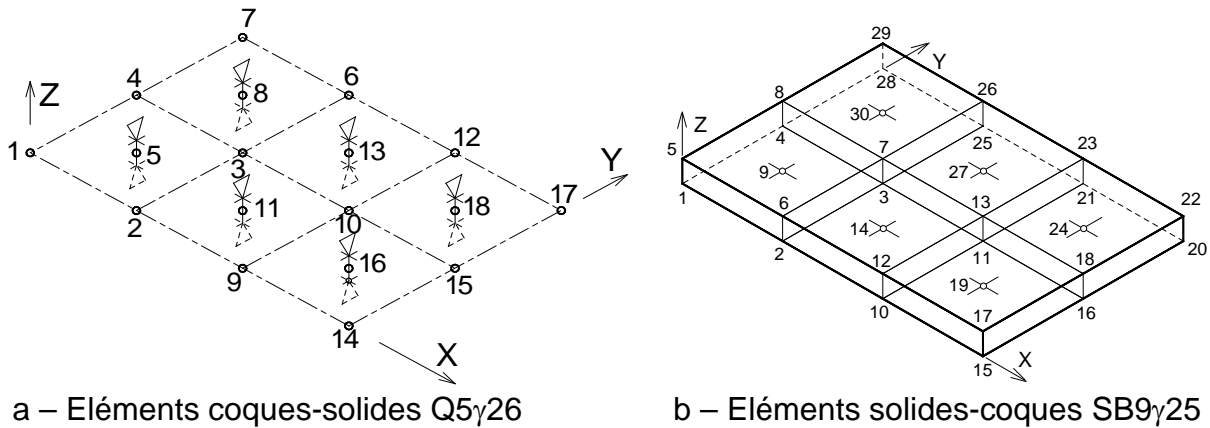
Par ailleurs, le comportement plastique est bien pris en compte dans la stabilisation en utilisant le facteur  $f_E$  présenté dans le premier chapitre (Equation I.108). Donc, à ce niveau, il n'est point besoin de distinguer l'élasticité de la plasticité pour le calcul de la matrice de stabilisation

### II.B.3. Bottoming test

Le bottoming est une mise en forme où le fond de la structure, si l'objet voulu est avec un fond fermé, est volontairement écrasé en général pour diminuer le retour élastique en diminuant l'épaisseur.

Pour ce second exemple, on considère qu'une structure métallique, de longueur 15 mm suivant l'axe X, de largeur 10 mm suivant l'axe Y et d'épaisseur 2 mm, est maillé avec six (6) éléments  $Q5\gamma26$  comme indiqué sur la figure I.7.

L'écrasement local de la structure pour arriver à une épaisseur finale de 1 mm est effectué avec des conditions aux limites directement prescrites sur les degrés de liberté du nœud central dans le plan (X, Y) de l'élément.



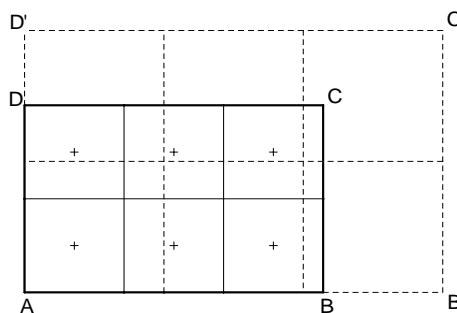
**Figure II.10** Structure parallélépipédique maillée avec six éléments.

Les conditions aux limites imposées afin d'éviter tout mouvement de corps rigide de l'élément Q5γ26 sont :  $U_{X1} = 0$ ,  $U_{Y1} = 0$ ,  $U_{X4} = 0$ ,  $U_{X7} = 0$ ,  $U_{Y2} = 0$ ,  $U_{Y9} = 0$ ,  $U_{Y14} = 0$ .

De plus, pour exécuter l'écrasement de la structure, un déplacement vertical nul est imposé aux degrés de liberté inférieurs des nœuds 5, 8, 11, 13, 16, 18 de l'élément ( $w_5^- = w_8^- = w_{11}^- = w_{13}^- = w_{16}^- = w_{18}^- = 0.0$ ) tandis que les degrés de liberté supérieurs de ces mêmes nœuds sont dotés d'un déplacement vertical de -1.0 mm en 100 incréments ( $w_5^+ = w_8^+ = w_{11}^+ = w_{13}^+ = w_{16}^+ = w_{18}^+ = -1.0$ ).

Les paramètres utiles du matériau sont : module de Young  $E = 71000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ ,  $\bar{\sigma} = 576.79(0.01658 + \bar{\epsilon}_p)^{0.3593}$  pour un écrouissage isotrope et coefficients de Lankford  $r_0 = 0.70$ ,  $r_{45} = 0.72$ ,  $r_{90} = 0.74$  pour l'anisotropie.

A la fin d'un calcul implicite en 100 incréments et en notant que les nœuds 1, 7, 17 et 14 de la figure II.10 correspondent aux nœuds A, D, C et B, on obtient alors les déplacements suivants :  $BB' = 6.181$ ,  $DD' = 4.121$  (Figure II.11) et la contrainte normale constante  $\sigma_{zz} = -507.9$  MPa quel que soit l'élément ou le point d'intégration.



**Figure II.11** Vue de dessus du maillage initial et du maillage déformé

Evidemment, ce calcul ne peut pas être fait avec des éléments coques classiques comme le Q4γ24 (ou le S4R dans le code Abaqus). Par contre, une brique à intégration réduite (C3D8R) donne des résultats corrects puisqu'il n'y a pas de flexion et la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  reste constant dans l'épaisseur. Pour ce calcul non linéaire, tous les douze nœuds inférieurs sont bloqués suivant la direction Z alors

qu'un déplacement normal de -1 mm est imposé aux 12 nœuds supérieurs (Figure II.10.a). Comme cela a été montré dans le tableau II-12 suivant, le neuvième nœud de l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25 donne des résultats identiques à ceux issus du maillage fait avec les éléments C3D8R du code Abaqus tandis que les résultats donnés par l'élément SB8 $\gamma$ 24 sont légèrement différents à cause de la loi constitutive élastique un peu particulière (Equation I.73 du chapitre I où E est sur la diagonale).

	Elément solide	Coque-solide	Eléments solides-coques (brique)		
	C3D8R Abaqus	Q5 $\gamma$ 26	SB8 $\gamma$ 24	SB9 $\gamma$ 25	SC8R Abaqus
BB' (mm)	6.187	6.181	6.133	6.183	6.113*
DD' (mm)	4.125	4.121	4.088	4.122	4.075*
$\sigma_{zz}$ (MPa)	-507.9	-507.9	-508.0	-508.0	indisponibles
$\sigma_{xx}$ & $\sigma_{yy}$	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>504.8</b>

**Tableau II-12.** Principaux résultats du test bottoming.

Le cas de l'élément SC8R implémenté dans Abaqus mérite un commentaire. Non seulement la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  n'est pas disponible mais les contraintes dans le plan – qui devraient être nulles ! – atteignent 504.8 MPa ! Sans mentionner que ce résultat est donné avec l'avertissement suivant :

THE SYSTEM MATRIX HAS 1 NEGATIVE EIGENVALUE. NEGATIVE EIGENVALUES MEAN THAT THE SYSTEM MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINITE.

De plus, les valeurs numériques affichées dans la dernière colonne du tableau II-12 imposent que tous les huit nœuds situés dans le plan (X, Z) ( Figure II.10.b) doivent être bloqués dans la direction Y et que les six nœuds situés dans le plan (Y, Z) doivent être bloqués dans la direction X. Sinon, les résultats en terme de déplacements, déformations et contraintes sont complètement faux ; ainsi dans le tableau II.13 est donné un extrait des résultats pour un maillage effectué avec le SC8R d'Abaqus dans les mêmes conditions de liaison que les autres éléments.

ELEMENT	PT	SEC	S11	S22	S12	MISES
1	1	1	206.9	279.1	-110.5	315.5
1	1	5	-310.3	-122.4	111.4	332.5

**Tableau II-13** Extraits des résultats d'un maillage avec le SC8R

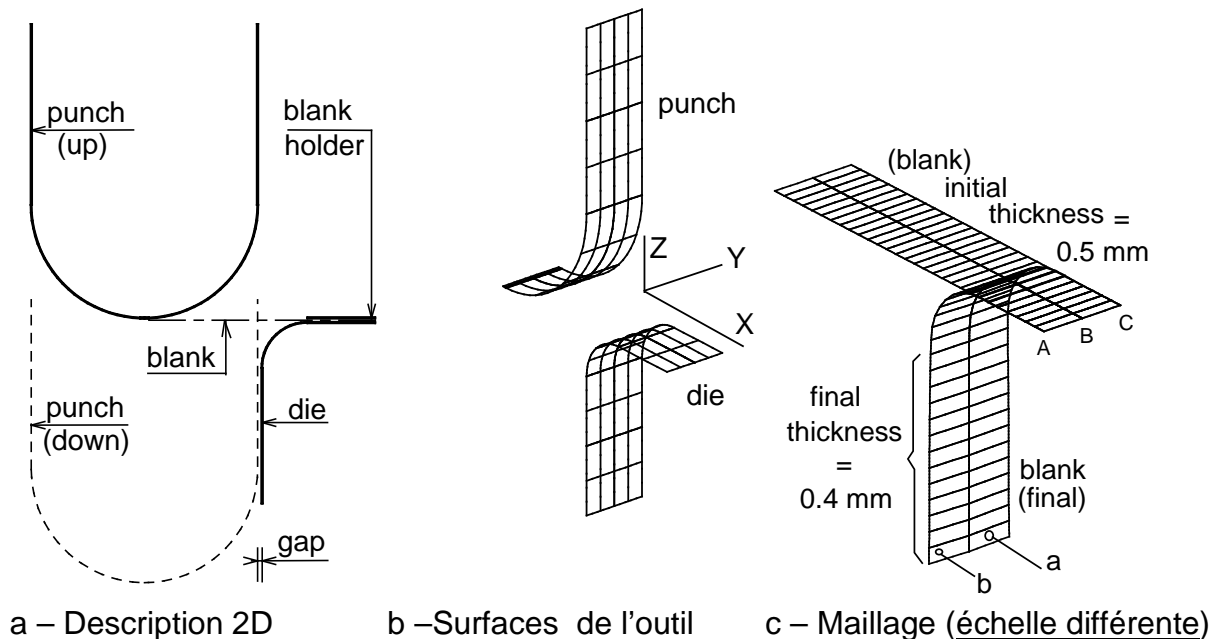
Ce phénomène de flexion ne peut apparaître avec les autres types d'éléments même si seul le degré de liberté suivant Y des quatre nœuds inférieurs situé sur l'axe X est imposé nul aussi bien que le degré de liberté suivant X des trois nœuds inférieurs situés sur l'axe Y (Figure II-10-b).

Enfin, pour l'élément coque solide Q5γ26 les forces  $F_5^+, F_8^+, F_{11}^+, F_{13}^+, F_{16}^+, F_{18}^+$  correspondant aux degrés de liberté du nœud central  $w_5^+, w_8^+, w_{11}^+, w_{13}^+, w_{16}^+, w_{18}^+$  sont toutes égales à -23143.480 N. En divisant cette valeur par la surface finale (21.392x13.992), la composante constante de la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  (-463.92 MPa) est alors effectivement trouvée.

Un second calcul, en imposant  $F_5^+ = F_8^+ = F_{11}^+ = F_{13}^+ = F_{16}^+ = F_{18}^+ = -23143.42$  N au lieu d'un déplacement permet d'avoir effectivement un amincissement de 1 mm.

## II.B.4. Flanging avec laminage

Sans entrer dans les détails de la gestion de contact et des caractéristiques inhérents au schéma explicite utilisé ici (par exemple matrice de masse et pas de temps critique), le dernier exemple présenté est un test de mise en forme. Le 'flan' est initialement plat (Longueur = 45 mm, largeur = 10 mm, épaisseur = 0.5 mm) tenu entre une matrice (rayon d'entrée = 10 mm) et un serre-flan (avec un peu de jeu : 0.01 mm). Un poinçon (rayon 25 mm) se déplace vers le bas. La valeur (0.4 mm) du jeu (Figure II-12-a) est en dessous de l'épaisseur initiale du flan dont le maillage est donné en figure II-12-c.



**Figure II-12** Emboutissage d'une tôle avec laminage.

Le matériau est un alliage d'aluminium caractérisé par :  $E = 69000$  MPa,  $\nu = 0.32$ ,  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup> et un écrouissage combiné défini par les paramètres suivants :  $\sigma_0 = 159$  MPa;  $Q = 171.3$  MPa;  $b = 12.9$ ;  $C_1 = 258.7$  MPa;  $\gamma_1 = 1.78$ ;  $C_2 = 11630$  MPa;  $\gamma_2 = 235.6$ . Une anisotropie initiale est prise en compte grâce aux paramètres de Lankford:  $r_0 = 0.66$ ,  $r_{90} = 0.69$  et  $r_{45} = 0.82$ , les détails d'identification du matériau pouvant être trouvés dans la référence [1].

La course du poinçon est de 60 mm et effectuée avec deux vitesses – 5 m/s et 2.5 m/s – dans le but de mettre en évidence l'influence de la vitesse sur la mise en forme. Les frottements ne sont pas considérés dans le but de comparer les résultats directement avec ceux venant d'un calcul implicite. En outre, les degrés de liberté

des nœuds situés en A, B et C (Figure II-12-c) sont bloqués suivant X et dans la direction Y pour le nœud en B

Cet exemple étant considéré comme un test de faisabilité, deux résultats sont choisis. Evidemment le premier est l'épaisseur qui est effectivement égale à 0.400000 mm (!) dans la zone correspondante (Figure II-12-c). Le second est la contrainte normale dans les éléments a et b (Figure II-12-c) qui est donnée dans le tableau II-15 pour les cinq points d'intégration de Lobatto à travers l'épaisseur. Cette contrainte peut être comparée à -332.7 MPa, valeur obtenue avec un schéma de calcul implicite similaire à l'exemple du 'bottoming' mais avec un autre matériau et un amincissement différent.

Position du point d'intégration à travers l'épaisseur	1: $\zeta = -1.0$	2: $\zeta = -\sqrt{3/7}$	3: $\zeta = 0.0$	4: $\zeta = \sqrt{3/7}$	5: $\zeta = 1.0$
Contrainte normale pour $V = 5 \text{ m/s}$	-359.9	-360.0	-360.1	-360.0	-359.9
Contrainte normale pour $V = 2.5 \text{ m/s}$	-333.6	-334.4	-335.1	-334.7	-333.5

**Tableau II-14**  $\sigma_{zz}$  dans les éléments a et b en fonction de la vitesse du poinçon

Comparé à l'exemple du 'bottoming', le flan n'est pas simplement comprimé entre le poinçon et la matrice. Cette fois, il a été fléchi puis laminé durant la descente du poinçon. A travers l'épaisseur, la constance de la contrainte normale – comme c'est attendu ici –, a été un peu affectée par la contrainte préalable et les inévitables oscillations dues au schéma explicite d'autant plus que l'amortissement considéré n'est pas significatif.

Les cas tests qui viennent d'être présentés sont de deux types ; linéaires et non linéaires. La linéarité permet d'évaluer et valider ces éléments dans des situations relativement faciles comme les petites perturbations tandis que la non linéarité les soumet aux conditions difficiles des grandes transformations.

Toutes les épreuves auxquelles ont été soumis les éléments brique de type solides coques, SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25 sont des tests de niveau académique.

Ces deux éléments utilisent la méthode d'intégration réduite et la technique de champ assumé pour le cisaillement transversal. L'élément SB9 $\gamma$ 25 se différencie de l'autre brique parce qu'il possède un nœud supplémentaire en son centre afin de pouvoir utiliser la vraie matrice de comportement 3D.

Les résultats donnés par ces éléments sont satisfaisants et même parfois meilleurs que ceux des éléments coques classiques. Mieux que cela, l'élément solide coque SB9 $\gamma$ 25 donne une vraie contrainte normale moyennant de calculer les forces équivalentes à une pression normale. Ce qu'on n'arrive pas à obtenir avec la plupart d'éléments « briques » de type solide-coque.



## II.C. Références

- [1] Carbonnière J, Thuillier S, Sabourin F, Brunet M. *Comparison of the work hardening of metallic sheets in bending-unbending and simple shear*. International Journal of Mechanical Sciences 2009; **51**:122-130
- [2] Legay A. Combescure A. *Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003; **57**:1299-1322.
- [3] Macneal H, Harder L. *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite elements in Analysis and Design, 1985; **1**:3-20
- [4] Simo JC, Fox DD, Rifai MS. *On a stress resultant geometrically exact shell model Part 3: computational aspects of the non-linear theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1990; **79**:91-126
- [5] Smolenski W.M., *Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999; **178**:89-113
- [6] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells* (2<sup>nd</sup> edition). McGraw-Hill 1959; 568 pages

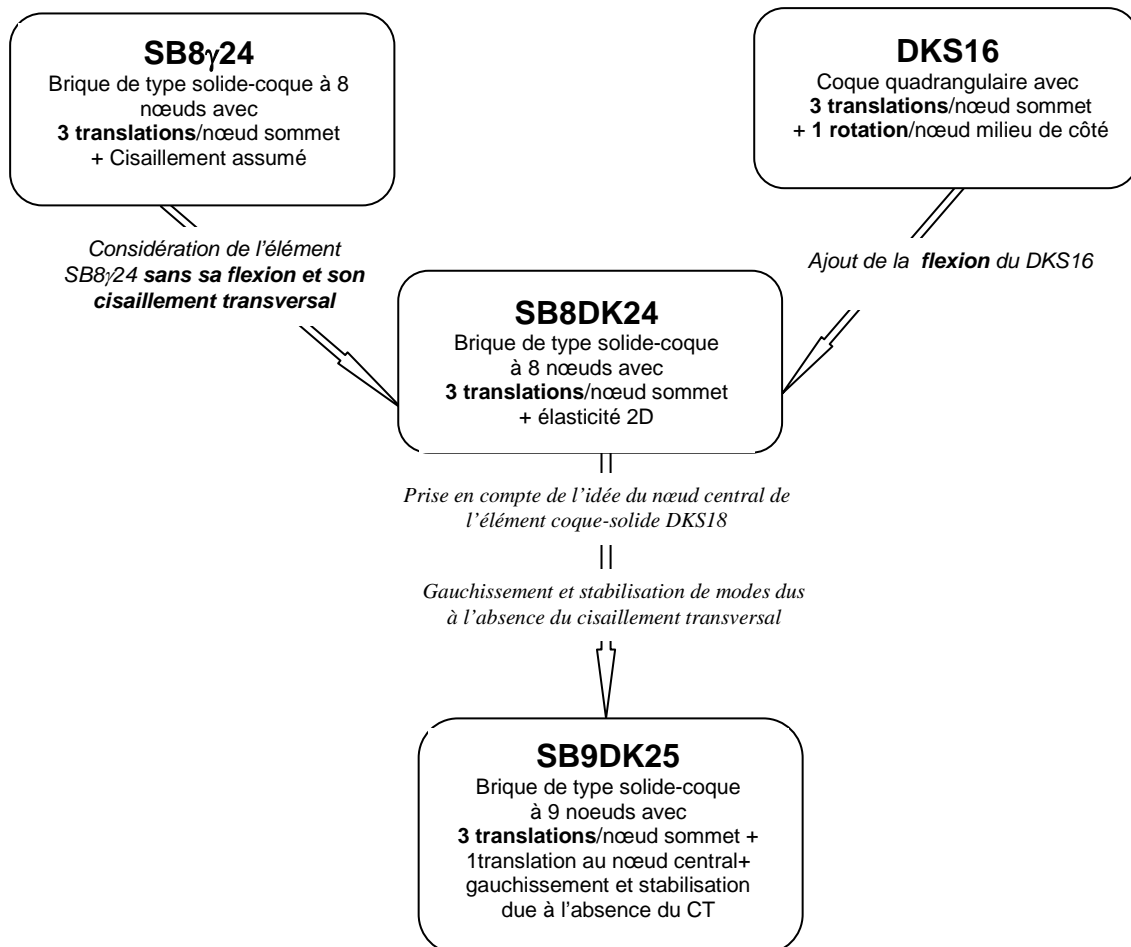
## III. Autre élément solide-coque à 9 nœuds : SB9DK25

<b>III.</b>	<b>Autre élément solide-coque à 9 nœuds : SB9DK25</b>	<b>III-1</b>
<b>III.A.</b>	<b>Rappels sur les éléments de base</b>	<b>III-3</b>
III.A.1.	Élément coque quadrangulaire : DKS16	III-3
III.A.2.	Élément coque quadrangulaire à 9 nœuds : DKS18	III-5
<b>III.B.</b>	<b>Formulation de l'élément solide-coque à huit nœuds SB8DK24</b>	<b>III-6</b>
III.B.1.	Caractéristiques du SB8DK24 utiles à la formulation de SB8DK24	III-6
III.B.2.	Matrice de raideur élastoplastique $[K_{ep}]$	III-12
III.B.3.	Matrice de raideur pour la stabilisation $[K_{stab}]$	III-14
<b>III.C.</b>	<b>Élément solide-coque à 9 nœuds de type Kirchhoff : SB9DK25</b>	<b>III-17</b>
III.C.1.	Déformation normale	III-17
III.C.2.	Efforts nodaux équivalents à une pression	III-18
<b>III.D.</b>	<b>Annexe: Présentation sommaire du solide-coque DKB24</b>	<b>III-20</b>
III.D.1.	Déplacements locaux et rotations locales	III-20
III.D.2.	Déformations locales	III-21
<b>III.E.</b>	<b>Références</b>	<b>III-29</b>

Ce travail de thèse a commencé en réalité avec la formulation d'un élément solide-coque à huit nœuds et 24 degrés de liberté, en théorie de Kirchhoff discrète, nommé DKB24 au départ. Puis pendant le déroulement de la thèse, alors qu'une autre thèse basée sur l'élaboration d'un élément coque-solide muni d'un nœud supplémentaire s'achevait, l'idée est venue de modifier cette « brique » de type solide-coque à huit nœuds en un élément fini « brique » à neuf nœuds qui peut être utilisé en élasticité 3D.

Par conséquent toute la théorie mise en place pour l'élément DKB24 ('Discret Kirchhoff Brick' à 24 degrés de liberté), renommé SB8DK24 ('Solid Brick' à 8 nœuds, 'Discrete Kirchhoff' avec 24 degrés de liberté) dans sa nouvelle formulation, a été portée en annexe pour témoigner de l'histoire de l'élaboration de l'élément « brique » de type solide-coque SB9DK25 ('Solid Brick' à 9 nœuds, 'Discrete Kirchhoff' theory avec 25 degrés de liberté).

Cet élément solide-coque SB9DK25 a été « élaboré » en partant des caractéristiques et des propriétés de l'élément SB8DK24, décrit dans le premier chapitre, **sans sa flexion et son cisaillement transversal** remplacés par la seule flexion de l'élément DKS16 [10], la prise en compte du gauchissement et la stabilisation des modes à énergie nulle causés par l'absence de cisaillement transversal dans la théorie « discrète » de Kirchhoff. Et pour aboutir à l'élément SB9DK25 en question, il faut s'approprier l'idée du nœud supplémentaire ajouté au centre de l'élément DKS16 pour avoir l'élément coque-solide DKS18 [11]. Le schéma ci-après illustre parfaitement la situation :



**Figure III-0** Procédure d'élaboration de l'élément SB9DK25

### III.A. Rappels sur les éléments de base

Ce sont des rappels assez succincts des éléments coque DKS16 [10] et coque-solide DKS18 afin de rendre claire la formulation de l'élément « brique » de type solide-coque SB9DK25 qui utilise des caractéristiques de ces éléments quadrangulaires en théorie de Kirchhoff. Il est à rappeler que l'élément SB9DK25 (chapitre I) a été formulé en utilisant les caractéristiques des éléments quadrangles en théorie de Mindlin.

L'élément coque-solide DKS18 [11] est, en fait, l'élément coque DKS16 qui a été modifié en ajoutant un nœud-milieu (numéroté '9') doté de deux degrés de liberté locaux (une translation normale  $w_9^+$  à la surface supérieure et l'autre  $w_9^-$  à la surface inférieure de l'élément) dans le but d'utiliser une vraie loi de comportement 3D.

#### III.A.1. Élément coque quadrangulaire : DKS16

Comme l'élément triangulaire DKT12 (Voir Complément IV), l'élément DKS16 a des nœuds aux sommets et des nœuds aux milieux des côtés.

Cet élément DKS16 (voir aussi Complément V) est donc un quadrilatère à **huit nœuds** à bords droits. Les huit nœuds sont repartis en quatre nœuds sommets munis de trois translations chacun et quatre nœuds milieux de côtés dotés chacun d'un degré de liberté en rotation dans la direction du côté correspondant.

Un point courant de cet élément dispose de trois déplacements  $(u, v, w)$  dans le repère local, les deux premiers sont dans le plan moyen de l'élément et le dernier est normal à ce plan.

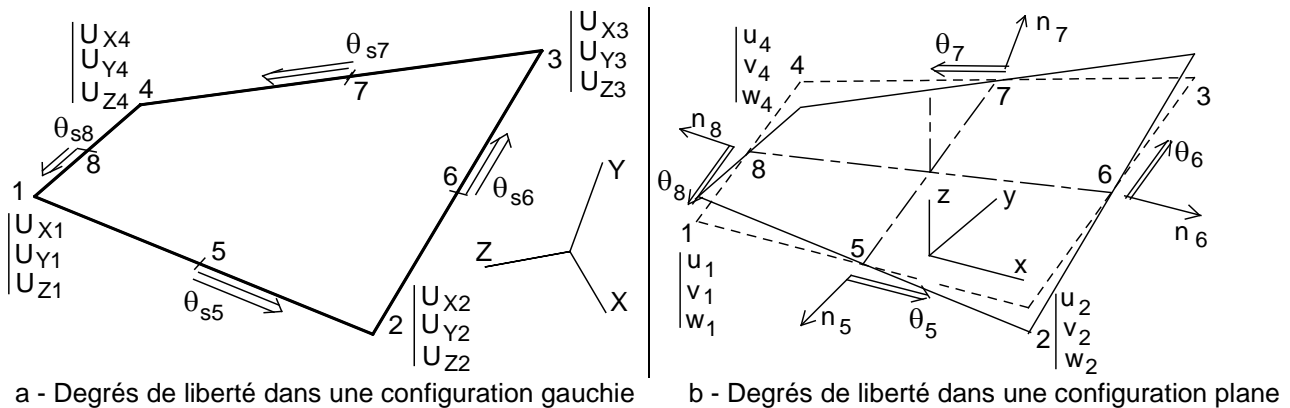


Figure III-1 Élément quadrangle DKS16

Etant donné que cet élément est destiné à des calculs non linéaires, l'intégration réduite dans le plan  $(x, y)$  est préférée pour les effets de membrane et les effets de flexion.

Pour les effets de membrane, les déplacements dans le plan de l'élément sont interpolés par les fonctions bilinéaires classiques.

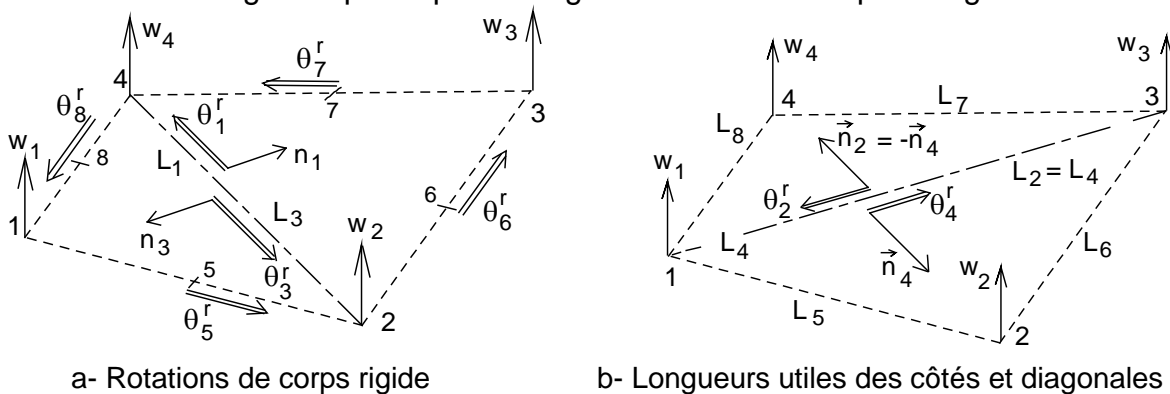
La formulation de la stabilisation de ces effets est extraite des nombreux travaux de Belytschko ([1], [2], [3], [4]) sur la stabilisation des modes à énergie nulle après une

intégration en un seul point dans le plan moyen de l'élément. Et ce, avec les maintenant bien connus vecteurs  $\langle \gamma \rangle$ .

Pour les effets de flexion, les fonctions d'interpolation proposées par Long [6] sont utilisées pour exprimer les angles de rotations de corps rigides  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  (voir Figure III-2) à partir des translations  $w_1, w_2, w_3, w_4$  normales au plan (x, y) dont l'origine est au centre de l'élément.

La différence entre ces rotations de corps rigide et les degrés de liberté en rotation donne les angles de flexion  $\theta_5^b, \theta_6^b, \theta_7^b, \theta_8^b$  utiles à l'établissement des courbures dans la direction des côtés ; courbure désignées par :  $\kappa_5, \kappa_6, \kappa_7, \kappa_8$ .

Les autres angles  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r$  (voir Figure III-2), nécessaires à la mise en place des angles de flexion restants pour avoir les courbures « internes » notées  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ , sont développés comme dans les éléments S3 [9] et S4 [5] issus de l'élément de Morley [7] en considérant deux premiers triangles séparés par la diagonale 1-3 dans le quadrangle et deux autres triangles séparés par la diagonale 2-4 dans ce quadrangle.



**Figure III-2.** Configuration plane de l'élément quadrilatéral DKS16

De plus, en superposant les déformations dans des directions normales aux diagonales 1-3 et 2-4 (voir Figure III-2), certains modes de flexion à énergie nulle seront supprimés.

L'énergie de déformations de cisaillement transversal est négligée du fait de la théorie de Kirchhoff même si celle-ci n'est vérifiée qu'en certains points, d'où le terme « discret »

Toutes les déformations calculées permettront d'évaluer les efforts internes qui se manifestent dans la structure, mais il faut alors tenir aussi compte du fait qu'une intégration réduite est toujours accompagnée des modes à énergie nulle qu'il faudra nécessairement stabiliser. Le Complément V décrit amplement la formulation de cet élément quadrangulaire de type coque et traite quelques exemples classiques pour sa validation. Dans la référence [10] se trouve plus d'exemples traités couvrant même des situations se rapprochant de la réalité industrielle.

Il importe de rappeler les déformations de flexion de cet élément puisque c'est cette flexion qui va être utilisée pour formuler l'élément « brique » dont on parle ici :  $\{\epsilon_e^b\} = z \cdot \{\kappa\}$  avec les courbures  $\{\kappa\} = [B_U^b] \{U_e\} + [B_\theta^b] \{\theta_e\}$  dont les termes sont explicités dans le sous paragraphe V.C.5.3) du Complément V.

### III.A.2. Élément coque quadrangulaire à 9 nœuds : DKS18

C'est un élément qui a dix huit (18) degrés de liberté ; aux seize (16) degrés de liberté du DKS16 sont ajoutées les deux (2) translations normales  $w_9^-$  et  $w_9^+$  du nœud 9 situé au centre de l'élément.

La prise en compte de ces degrés de liberté supplémentaires  ${}^T\{\mathbf{W}_e\} = \langle \mathbf{W}_e \rangle = \langle w_9^- \quad w_9^+ \rangle$  dans l'expression des déformations de l'élément DKS16 permet d'écrire le champ de déformations du DKS18 comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}^m] & | & z \cdot [\mathbf{B}^b] & | & \\ \hline \zeta \cdot [\mathbf{B}_u^p] & | & \zeta \cdot [\mathbf{B}_w^p] + [\bar{\mathbf{B}}_w^p] & | & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_e\} \\ \{\Theta_e\} \\ \{\mathbf{W}_e\} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{(0,0^+\zeta)}]_{6 \times 18} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_e\} \\ \{\Theta_e\} \\ \{\mathbf{W}_e\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

On note dans cette relation (III.1) que  $z = \zeta h/2$  pour  $-1 < \zeta < 1$ .

Naturellement, les matrices gradient de déformations  $[\mathbf{B}_u^p]$ ,  $[\mathbf{B}_w^p]$  et  $[\bar{\mathbf{B}}_w^p]$  sont identiques à celles données par les relations (I-47) à (I-49) du premier chapitre.

La matrice de raideur s'obtient ensuite par une intégration dans le volume, suivant la même procédure calculatoire et les précautions à prendre pour l'assemblage, comme celle de la relation (I.53) du premier chapitre. Par ailleurs, comme il n'est point question du cisaillement transversal dans la théorie de Kirchhoff, il ne peut être question ici de la fonction de Reissner et seulement trois points d'intégration de Lobatto, dans la direction de l'épaisseur, sont suffisants pour obtenir une matrice de raideur convenable en flexion dans le cas d'une élasticité pure.

$$[\mathbf{K}_e] = \iiint_V {}^T[\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot dv = A \cdot \int_{-h/2}^{h/2} {}^T[\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot dz \quad (\text{III-2})$$

où A est l'aire de l'élément

Cette modification du DKS16 en DKS18 a rigidifié légèrement l'élément qui semblait un peu souple au départ. Cette conclusion est tirée après analyse et interprétation des résultats de plusieurs exemples linéaires et non linéaires donnés dans le deuxième chapitre de la thèse de Sansalone [11]. Par conséquent, il ne sera pas traité d'exemples ici pour la validation de cet élément formulé et validé dans [11] sauf pour un test de bottoming où cet élément prend tout son sens.

De cet élément, on retient l'idée d'ajout du nœud supplémentaire afin de postuler un déplacement quadratique pour formuler, au moment venu, la « brique » de type solide coque à 9 nœuds SB9DK25

### III.B. Formulation de l'élément solide-coque à huit nœuds SB8DK24

#### III.B.1. Caractéristiques du SB8 $\gamma$ 24 utiles à la formulation de SB8DK24

L'élément solide-coque à huit nœuds SB8 $\gamma$ 24 a été largement décrit dans le premier chapitre en son paragraphe I.B. Il va être rappelé ici uniquement les déformations de membrane et de pincement de cet élément solide-coque qui entreront dans la formulation de la « brique » SB9DK25.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_0^m] & | \\ \hline & [\mathbf{B}_c^p] + \zeta[\mathbf{B}_\zeta^p] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

$$[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \\ \hline & \langle \mathbf{b}_y \rangle & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_c^p] = \langle \mathbf{b}_z \rangle; \quad \text{où :}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x \rangle^T &= \{\mathbf{N}_{,x}(\xi = \eta = \zeta = 0)\}^T = \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle^T &= \{\mathbf{N}_{,y}(\xi = \eta = \zeta = 0)\}^T = \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle^T &= \{\mathbf{N}_{,z}(\xi = \eta = \zeta = 0)\}^T = \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{aligned}$$

$$[\mathbf{B}_\zeta^p] = \bar{J}_{32} \langle \gamma_1 \rangle + \bar{J}_{31} \langle \gamma_2 \rangle = \bar{J}_{32} \{\gamma_1\}^T + \bar{J}_{31} \{\gamma_2\}^T$$

$$\{\gamma_\alpha\} = 1/8 \cdot (\{\mathbf{h}_\alpha\} - (\{\mathbf{h}_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{X}_L^e\}) \langle \mathbf{b}_x \rangle - (\{\mathbf{h}_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{Y}_L^e\}) \langle \mathbf{b}_y \rangle - (\{\mathbf{h}_\alpha\}^T \cdot \{\mathbf{Z}_L^e\}) \langle \mathbf{b}_z \rangle)$$

Les termes ( $\langle \mathbf{b}_x \rangle$  et  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$ ) de la matrice gradient de membrane  $[\mathbf{B}_0^m]$  ainsi que celui ( $\langle \mathbf{b}_z \rangle$ ) de la matrice gradient de pincement  $[\mathbf{B}_c^p]$  sont les dérivées de la fonction de forme  $\{\mathbf{N}\}$  (voir relation I.55), respectivement par rapport x, y et z, calculées en  $\xi = \eta = \zeta = 0$ .

$\{\mathbf{U}_x^e\}$ ,  $\{\mathbf{U}_y^e\}$  et  $\{\mathbf{U}_z^e\}$  sont les translations de l'élément « brique » de type solide-coque dans le repère local ; tous les détails de l'établissement de ces relations liées à la formule (III-3), sont donnés le chapitre I.

#### III.B.1.a) Déformations de flexion

Les déformations de flexion à considérer ici pour l'élaboration de l'élément solide-coque SB8DK24 sont celles de l'élément coque DKS16, amplement détaillées dans le Complément V. Mais il importe dans la relation exprimant ces déformations de transformer les translations aux nœuds de l'élément « brique » de type solide-coque en des déplacements des nœuds du quadrangle ainsi que les rotations aux milieux des côtés. On reprend donc les déformations telles qu'établies par les relations (CV-46) et (CV-45) du Complément V :

$$\{\varepsilon^b\} = \mathbf{z} \cdot \{\kappa\} = \mathbf{z} \cdot [\mathbf{B}_U^b] \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} + [\mathbf{B}_0^b] \{\theta_e\} \quad (\text{III-4})$$

Où  $\{\tilde{\mathbf{U}}_e\}$  représente les translations de l'élément dans le repère global et  $\{\Theta\}$  les rotations.

La matrice gradient de déformations de flexion est une superposition des matrices  $[\mathbf{B}_U^b]$  et  $[\mathbf{B}_0^b]$  mais lorsque l'influence du gauchissement - dont la nécessité apparaît principalement dû à un coefficient de stabilisation de membre très petit (environ  $10^{-4}$ ), doit être prise en compte alors il faut ajouter la matrice  $[\mathbf{B}_p^m]$  à  $[\mathbf{B}_U^b]$  avec :

$$[\mathbf{B}_p^m] = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} p_{y24} & p_{y31} & p_{y42} & p_{y13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{x42} & p_{x13} & p_{x24} & p_{x31} \\ p_{x42} & p_{x13} & p_{x24} & p_{x31} & p_{y24} & p_{y31} & p_{y41} & p_{y13} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [\mathbf{R}_U] \\ [\mathbf{R}_V] \end{Bmatrix} \quad (\text{III-5})$$

Les termes de la matrice  $[\mathbf{B}_p^m]$  sont les projections des normales à la surface aux nœuds;  $[\mathbf{R}_U]$  et  $[\mathbf{R}_V]$  les matrices de passage du repère local au repère global données par les relations (CV-15) et (CV-16) du Complément V.

### (1) Transformations des translations normales

Les quatre nœuds (1, 2, 3, 4) du quadrilatère DKS16, considéré comme plan de la « brique » SB8 $\gamma$ 24 démunie de sa flexion et de son cisaillement transversal, se situent respectivement entre les nœuds sommets (i et m), (j et n), (k et o) et (l et p) de ce solide-coque (Figure III-3). Etant donné que ce sont les translations normales et les rotations des milieux des côtés de cet élément coque qui sont intéressantes pour mettre en place la flexion, il sera donc question de transformer d'abord ces translations normales en déplacements aux nœuds de la « brique ». Ensuite les rotations vont être transformées en translations aux nœuds de la « brique ».

La translation normale du nœud 1 du quadrilatère est la moitié de la somme des translations normales des nœuds i et m de la « brique ». Les translations normales des autres nœuds du quadrilatère sont aussi, pour chacun d'eux, la moitié de la somme des translations des nœuds d'au-dessus et d'en dessous appartenant au SB8DK24.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_1\} &= \frac{1}{2} \{\{\mathbf{U}_i\} + \{\mathbf{U}_m\}\}; & \{\mathbf{U}_2\} &= \frac{1}{2} \{\{\mathbf{U}_j\} + \{\mathbf{U}_n\}\}; \\ \{\mathbf{U}_3\} &= \frac{1}{2} \{\{\mathbf{U}_k\} + \{\mathbf{U}_o\}\}; & \{\mathbf{U}_4\} &= \frac{1}{2} \{\{\mathbf{U}_l\} + \{\mathbf{U}_p\}\} \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

Dans le repère global, chaque nœud est muni de trois composantes de translations  $\langle U_x \ U_y \ U_z \rangle$  quel que soit le type d'élément.

A la lumière de la relation entre les translations d'un quadrangle et celles d'une « brique » de type solide-coque, on peut donner une nouvelle dimension (3x24) à la 'contribution' en translation normale de la matrice gradient de flexion qui était de taille 3x12. En effet, en tenant compte de la relation (III.6) dans la contribution en translation normale de la matrice de flexion, on peut écrire :

$$[\mathbf{B}_U^b] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} = 1/2 \left[ [\mathbf{B}_U^b] \mid [\mathbf{B}_U^b] \right] \cdot \{\mathbf{U}_e\} \quad (\text{III-7})$$



Où  $\{\mathbf{U}_e\}$  représente les translations des nœuds du solide-coque SB8DK24, identiques à celles de SB8 $\gamma$ 24 (voir la relation I.60 du chapitre I)

## (2) Transformations des rotations

En prenant le DKS16, bien détaillé dans Complément V, comme la surface milieu du SB8DK24, les degrés de liberté en rotation aux milieux de ses côtés se situent aux milieux des faces « parallèles » à l'épaisseur de la « brique ».

Au milieu de chacune de ces faces est défini un repère local (Figure III-3 suivante) où s'établissent les relations entre les rotations des milieux des faces et les translations aux nœuds de la « brique » SB8DK24.

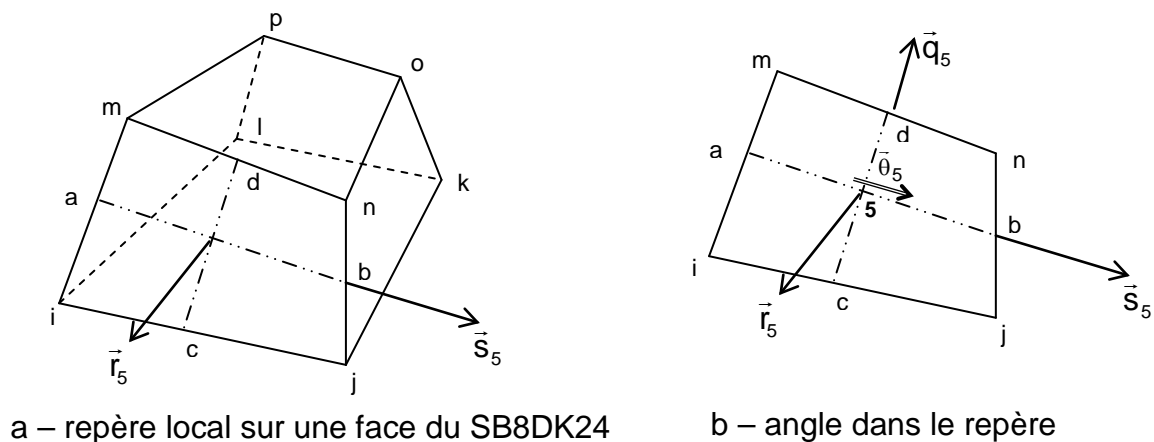


Figure III.3 Repères locaux des milieux des faces

Pour ne pas surcharger la figure III-3-a, un seul repère local  $(\vec{q}_5, \vec{s}_5, \vec{r}_5)$  est lié à la face (i, j, n, m) dénommée face  $\underline{5}$  puisque portant la rotation  $\theta_5$  et c'est seul ce repère qui sera détaillé ici, les autres se définissant de la même manière.

Les autres faces, relatives aux rotations  $\theta_6, \theta_7, \theta_8$ , sont notées  $\underline{6}$ ,  $\underline{7}$  et  $\underline{8}$  et portent respectivement les repères locaux  $(\vec{q}_6, \vec{s}_6, \vec{r}_6)$ ,  $(\vec{q}_7, \vec{s}_7, \vec{r}_7)$  et  $(\vec{q}_8, \vec{s}_8, \vec{r}_8)$ .

Dans la description du repère local  $(\vec{q}_5, \vec{s}_5, \vec{r}_5)$  de la face  $\underline{5}$ , il convient de posséder les vecteurs  $\vec{ab}$  et  $\vec{cd}$  à partir des points a, b, c, d sur les côtés de la face considérée (Figure III-3-b). Il faut noter que le segment [ab], dont  $\underline{5}$  est le nœud milieu, représente le coté du quadrangle DKS16, par conséquent il est logique que sur cette face se retrouve l'angle de rotation recherché  $\theta_5$ . Les formules qui suivent permettent d'avoir les vecteurs de base  $\vec{r}$  et  $\vec{s}$  qu'on identifie dans l'ordre à  $\vec{z}$  et  $\vec{x}$  de la face considérée.

Pour la face  $\underline{5}$ , on définit :

$$\vec{r}_5 = \vec{cd} \wedge \vec{ab} / \|\vec{cd} \wedge \vec{ab}\|, \vec{s}_5 = \vec{ab} / \|\vec{ab}\|, \vec{q}_5 = \vec{r}_5 \wedge \vec{s}_5.$$

On considère le vecteur normal  $\vec{n}_5$  colinéaire à  $\vec{r}_5$  et le vecteur tangent  $\vec{t}_5$  colinéaire à  $\vec{s}_5$  de façon à projeter l'angle de rotation  $\vec{\theta}_5$  (voir figure III-3 précédente) tel que :

$$\vec{\theta}_5 = \theta_{n5} \cdot \vec{n}_5 + \theta_{t5} \cdot \vec{t}_5.$$

Les composantes de cet angle sont définies par les relations qui suivent :  $\theta_{t5} = w, y$  (dans Complément VI, on a posé que  $\theta_5 = \theta_{t5}$ ) qui provient de la relation de gradient :

$$\theta_i = \vec{\text{grad}}(w)(-\vec{n}_i) \text{ et } \theta_{n5} = \frac{w_b - w_a}{L_5}$$

La relation suivante relate des « rotations » qui s'effectuent au centre de la face i, j, k, l.

$$\begin{Bmatrix} w, x \\ w, y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A_5} \begin{bmatrix} y_j - y_m & y_n - y_i & y_m - y_j & y_i - y_n \\ x_m - x_j & x_i - x_n & x_j - x_m & x_n - x_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \\ w_l \end{Bmatrix},$$

Et c'est la seconde ligne de cette relation matricielle, dérivée de la translation normale par rapport à la variable y, qui correspond à la rotation recherchée (Figure III-3-b) dans le repère local :

$$\theta_5 = w, y = \frac{x_m - x_j}{2 \cdot A_5} \cdot w_i + \frac{x_i - x_n}{2 \cdot A_5} \cdot w_j + \frac{x_j - x_m}{2 \cdot A_5} \cdot w_k + \frac{x_n - x_i}{2 \cdot A_5} \cdot w_l \quad (\text{III-8})$$

Pour permettre une simplification en écriture, on pose :

$$P_5 = \frac{x_m - x_j}{2 \cdot A_5} \text{ et } Q_5 = \frac{x_i - x_n}{2 \cdot A_5} \quad (\text{III-9})$$

Où  $A_5$  représente l'aire de la face  $\underline{5}$  (voir Figure III-3-b).

Le vecteur  $\vec{r}$  ayant été identifié à  $\vec{z}$ , dans le repère local lié à la face  $\underline{5}$  (Figure III-3-b), on considère  $\vec{z}_5$  ( $z_5X$ ,  $z_5Y$  et  $z_5Z$  : projections sur les axes du repère global) en lieu et place de  $\vec{r}_5$  de sorte qu'on puisse adapter la matrice de passage (relation III-1 à III-3).

Ceci, afin de transformer les translations normales (III-8) en translations  $\langle \mathbf{U}_i \rangle = \langle U_{xi} \mid U_{yi} \mid U_{zi} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{U}_j \rangle = \langle U_{xj} \mid U_{yj} \mid U_{zj} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{U}_m \rangle = \langle U_{xm} \mid U_{ym} \mid U_{zm} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{U}_n \rangle = \langle U_{xn} \mid U_{yn} \mid U_{zn} \rangle$  exprimées dans le repère global.

L'angle de rotation au milieu de la face  $\underline{5}$  s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\theta_5 = \langle P_5 \cdot z_5X \mid P_5 \cdot z_5Y \mid P_5 \cdot z_5Z \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_i \rangle + \langle Q_5 \cdot z_5X \mid Q_5 \cdot z_5Y \mid Q_5 \cdot z_5Z \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_j \rangle \\ + \langle -Q_5 \cdot z_5X \mid -Q_5 \cdot z_5Y \mid -Q_5 \cdot z_5Z \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_m \rangle + \langle -P_5 \cdot z_5X \mid -P_5 \cdot z_5Y \mid -P_5 \cdot z_5Z \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_n \rangle$$

Les expressions des angles de rotation  $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$  en fonction des translations des nœuds sommets du solide-coque dans le repère global de chacune des faces sont telles que, pour chacun des angles, la procédure de transformation est identique à celle de la rotation  $\theta_5$  mais en prenant le soin d'être sur la bonne face à chaque fois :

$$\begin{aligned}
 \theta_5 &= \langle P_5 \cdot z_5 X \mid P_5 \cdot z_5 Y \mid P_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_i\} + \langle Q_5 \cdot z_5 X \mid Q_5 \cdot z_5 Y \mid Q_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_j\} \\
 &\quad + \langle -Q_5 \cdot z_5 X \mid -Q_5 \cdot z_5 Y \mid -Q_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_m\} + \langle -P_5 \cdot z_5 X \mid -P_5 \cdot z_5 Y \mid -P_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_n\} \\
 \theta_6 &= \langle P_6 \cdot z_6 X \mid P_6 \cdot z_6 Y \mid P_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_j\} + \langle Q_6 \cdot z_6 X \mid Q_6 \cdot z_6 Y \mid Q_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_k\} \\
 &\quad + \langle -Q_6 \cdot z_6 X \mid -Q_6 \cdot z_6 Y \mid -Q_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_n\} + \langle -P_6 \cdot z_6 X \mid -P_6 \cdot z_6 Y \mid -P_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_o\} \\
 \theta_7 &= \langle P_7 \cdot z_7 X \mid P_7 \cdot z_7 Y \mid P_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_k\} + \langle Q_7 \cdot z_7 X \mid Q_7 \cdot z_7 Y \mid Q_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_l\} \\
 &\quad + \langle -Q_7 \cdot z_7 X \mid -Q_7 \cdot z_7 Y \mid -Q_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_o\} + \langle -P_7 \cdot z_7 X \mid -P_7 \cdot z_7 Y \mid -P_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_p\} \\
 \theta_8 &= \langle P_8 \cdot z_8 X \mid P_8 \cdot z_8 Y \mid P_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_l\} + \langle Q_8 \cdot z_8 X \mid Q_8 \cdot z_8 Y \mid Q_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_i\} \\
 &\quad + \langle -Q_8 \cdot z_8 X \mid -Q_8 \cdot z_8 Y \mid -Q_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_p\} + \langle -P_8 \cdot z_8 X \mid -P_8 \cdot z_8 Y \mid -P_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_m\}
 \end{aligned}
 \tag{III-10}$$

La forme matricielle de la relation (III-10) permet de tirer la matrice de transformation  $[T]$  des translations de l'élément « brique » de type solide-coque en rotations des côtés du quadrangle DKS16. La transposée de cette matrice de transformation notée  $^T[T]$  est :

$${}^T[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} P_5 \cdot z_5 X & & & Q_8 \cdot z_8 X \\ P_5 \cdot z_5 Y & & & Q_8 \cdot z_8 X \\ P_5 \cdot z_5 Z & & & Q_8 \cdot z_8 X \\ Q_5 \cdot z_5 X & P_6 \cdot z_6 X & & \\ Q_5 \cdot z_5 Y & P_6 \cdot z_6 Y & & \\ Q_5 \cdot z_5 Z & P_6 \cdot z_6 Z & & \\ & Q_6 \cdot z_6 X & P_7 \cdot z_7 X & \\ & Q_6 \cdot z_6 Y & P_7 \cdot z_7 Y & \\ & Q_6 \cdot z_6 Z & P_7 \cdot z_7 Z & \\ & & Q_7 \cdot z_7 X & P_8 \cdot z_8 X \\ & & Q_7 \cdot z_7 Y & P_8 \cdot z_8 X \\ & & Q_7 \cdot z_7 Z & P_8 \cdot z_8 X \\ -P_5 \cdot z_5 X & & & -P_8 \cdot z_8 X \\ -P_5 \cdot z_5 Y & & & -P_8 \cdot z_8 X \\ -P_5 \cdot z_5 Z & & & -P_8 \cdot z_8 X \\ -Q_5 \cdot z_5 X & -P_6 \cdot z_6 X & & \\ -Q_5 \cdot z_5 Y & -P_6 \cdot z_6 Y & & \\ -Q_5 \cdot z_5 Z & -P_6 \cdot z_6 Z & & \\ & -Q_6 \cdot z_6 X & -P_7 \cdot z_7 X & \\ & -Q_6 \cdot z_6 Y & -P_7 \cdot z_7 Y & \\ & -Q_6 \cdot z_6 Z & -P_7 \cdot z_7 Z & \\ & & -Q_7 \cdot z_7 X & -Q_8 \cdot z_8 X \\ & & -Q_7 \cdot z_7 Y & -Q_8 \cdot z_8 X \\ & & -Q_7 \cdot z_7 Z & -Q_8 \cdot z_8 X \end{bmatrix} \quad (III-11)$$

### III.B.1.b) Déformations non nulles

Grâce à toutes ces transformations opérées précédemment, on obtient l'expression des déformations suivantes, propre à l'élément SB8DK24 :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{B}_0^m] + z \cdot \left[ \frac{1}{2} [\mathbf{B}_U^b] \right] & [\mathbf{B}_U^b] + [\mathbf{B}_\theta^b] \cdot [\mathbf{T}] \\ \hline & [\mathbf{B}_c^p] + \zeta [\mathbf{B}_\zeta^p] \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ \dots \\ U_{z4} \\ U_{x5} \\ \dots \\ U_{z7} \\ U_{x8} \\ U_{y8} \\ U_{z8} \end{Bmatrix}_{(24 \times 1)} \quad (III-12)$$

On pose  $[B]$  la matrice gradient complète des différentes matrices gradient des déformations de l'élément SB8DK24 où  $[B_U^b]_{(3 \times 12)}$  et  $[B_\theta^b]_{(3 \times 4)}$  proviennent directement de la formulation de l'élément coque DKS16 (Voir Complément V) :

$$[B] = \left[ \begin{array}{c|c} [B_0^m] + z \cdot \left[ \frac{1}{2} [B_U^b] \mid [B_U^b] + [B_\theta^b] [T] \right] & \\ \hline & [B_c^p] + \zeta [B_\zeta^p] \end{array} \right]$$

Et les déplacements du SB8DK24 dans le repère global sont :

$$\langle U_e \rangle = \langle U_{x1} \mid U_{y1} \mid \dots \mid U_{z4} \mid U_{x5} \mid \dots \mid U_{z7} \mid U_{x8} \mid U_{y8} \mid U_{z8} \rangle.$$

### III.B.2. Matrice de raideur élastoplastique $[K_{ep}]$

#### III.B.2.a) Calcul des matrices de raideurs

La matrice de raideur due aux effets de membrane, de flexion (pas de CT) et de pincement est obtenue en utilisant le Principe des Travaux Virtuels. Les contraintes et déformations utilisées sont liées par la loi de comportement élastique linéaire  $\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$  en état plan de contraintes sauf E sur la diagonale pour la relation entre  $\sigma_{zz}$  et  $\varepsilon_{zz}$  et:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \{\sigma\}^T = \langle \sigma_{xx} \mid \sigma_{yy} \mid \sigma_{xy} \mid \sigma_{zz} \rangle, \\ \langle \varepsilon \rangle &= \{\varepsilon\}^T = \langle \varepsilon_{xx} \mid \varepsilon_{yy} \mid 2\varepsilon_{xy} \mid \varepsilon_{zz} \rangle \end{aligned}$$

Dans un contexte de plasticité, il est impératif d'utiliser à la place de la matrice  $[D]$  élastique, la matrice comportement élastoplastique  $[D^{ep}]$  dont l'expression est :

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \cdot \{a\} \langle a \rangle [D]}{H' + \langle a \rangle [D] \cdot \{a\}}$$

Cette matrice a été sommairement explicitée dans la relation (I-74) du premier chapitre et est simplement appelée ici.

Par ce Principe des Travaux Virtuels, et spécifiquement dans le calcul du travail virtuel interne  $\hat{P}_{int}$  où est utilisée la relation (III-12), on établit simplement la matrice de raideur élastoplastique de l'élément SB8DK24 comme suit :

$$\hat{P}_{int} = \iiint \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdot \{\sigma\} \cdot dv = \iiint \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdot [D^{ep}] \cdot \{\varepsilon\} \cdot dv = \langle \hat{U}_e \rangle \cdot \left( \iiint^T [B] \cdot [D^{ep}] \cdot [B] \cdot dv \right) \cdot \{U_e\} = \langle \hat{U}_e \rangle \cdot [K_{ep}] \cdot \{U_e\}$$

$$[K_{ep}] = \iiint^T [B] \cdot [D^{ep}] \cdot [B] \cdot dv = A \int_{-h/2}^{h/2} [B] \cdot [D^{ep}] \cdot [B] \cdot dz \quad (III-13)$$

En outre, lors des grandes transformations, il faut tenir compte de la matrice de raideur due aux contraintes initiales par la matrice de raideur géométrique suivante :



### III.B.2.b) Contraintes

#### (1) *Contraintes des effets de membrane, de flexion et de pincement*

En prédiction élastique, les contraintes recherchées s'obtiennent en utilisant les trois premières déformations de la relation (III-12) pour les effets de membrane et de flexion et la dernière déformation pour l'effet de pincement, grâce à la formule suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ 2\varepsilon_{xy}^m \end{Bmatrix} + Z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) ; \sigma_{zz} = E \cdot \varepsilon_{zz} \quad (\text{III-16})$$

où E est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson

#### (2) *Effets de cisaillement*

Pour ce qui est des effets de cisaillement, on doit remarquer que la théorie discrète de Kirchhoff suppose des déformations de cisaillement transversal nulles. Il sera question plus loin de la stabilisation et des conséquences de la nullité de l'énergie de déformation de cisaillement transversal.

### III.B.2.c) Efforts internes

Les efforts internes à l'élément d'aire **A** et d'épaisseur **h**, dus respectivement aux effets de membrane, de flexion et de pincement sont donnés par la relation qui suit :

$$\{F_e\} = \int_{-h/2}^{h/2} [B]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dz \cdot A \quad (\text{III-17})$$

où les contraintes  $\{\sigma\} = \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \mid \sigma_{yy} \mid \sigma_{xy} \mid \sigma_{zz} \rangle$  établies dans la relation (III-16) sont intégrées aux points d'intégration de Lobatto dans la direction de l'épaisseur et la matrice gradient de déformations est donnée dans la relation (III-12).

### III.B.3. Matrice de raideur pour la stabilisation [ $K_{stab}$ ]

Comme l'élément SB8DK24 a été formulé en combinant les caractéristiques et propriétés d'un élément solide coque SB8 $\gamma$ 24 et d'un élément coque DKS16, il va de soi qu'il hérite en même temps de leurs défauts – les modes hourglass – qu'il importe de corriger. Par conséquent, il faut assurer la stabilisation des modes à énergie nulle introduits par l'élément SB8 $\gamma$ 24 et de ceux dus à la considération de la flexion du DKS16 dans cette formulation. Et puisqu'il n'est pas question du cisaillement transversal dans la théorie discrète de Kirchhoff – les déformations  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$  sont nulles –, il faudra assurer la stabilisation des modes à énergie correspondants. On résume dans la figure suivante (Figure III-3) les modes à énergie nulle du solide-coque SB8DK24 à stabiliser.

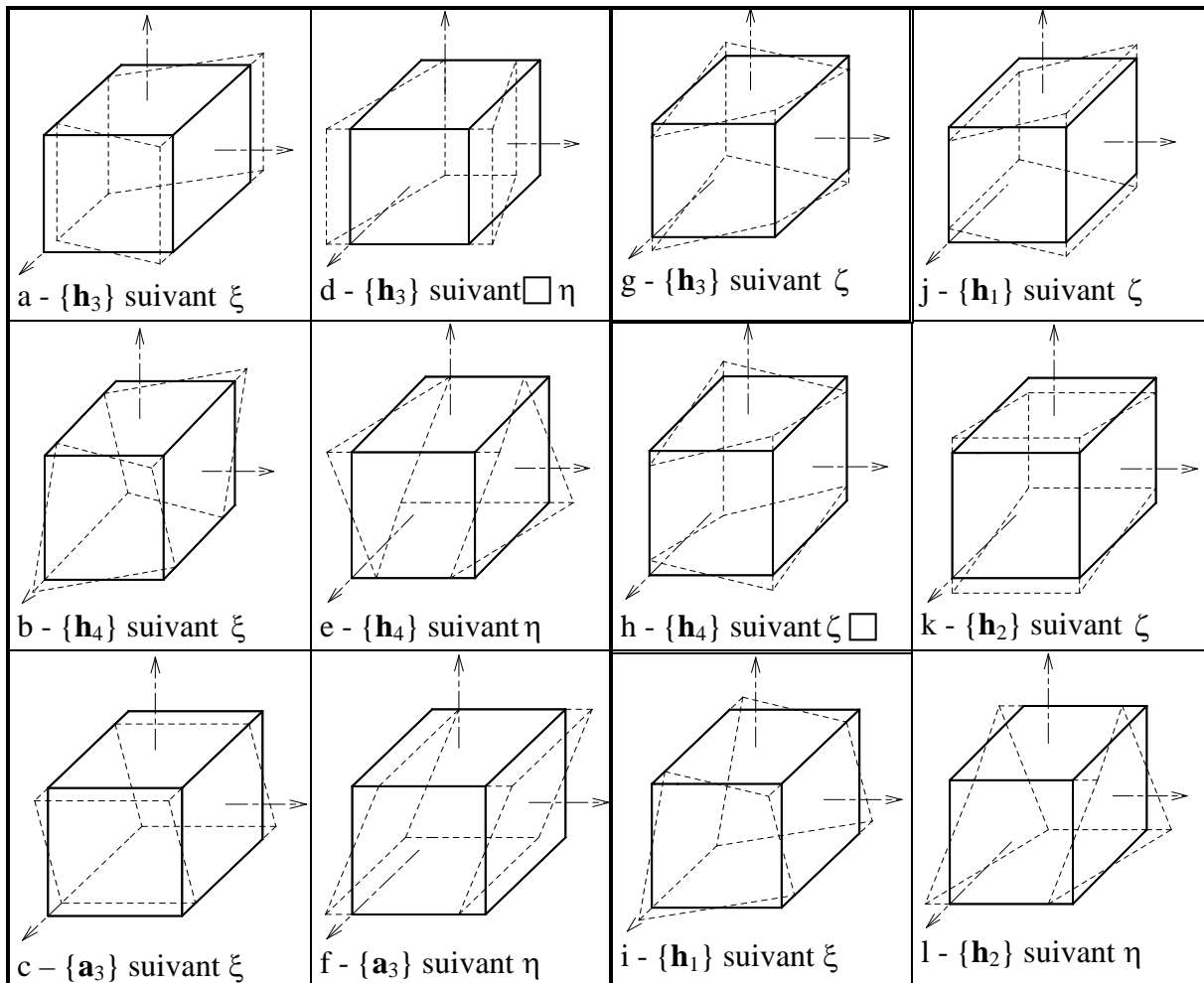


Figure III.4 Modes à énergie nulle du SB8DK24 à stabiliser

### III.B.3.a) Stabilisation des modes à énergie nulle introduits par l'élément SB8 $\gamma$ 24

Comme il a été montré dans le premier chapitre, la stabilisation des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$  assure la stabilisation des effets de membrane, de flexion et de pincement. La stabilisation particulière du cisaillement transversal avec champ assumé fait qu'il n'y a pas besoin d'ajouter les termes manquants des modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$ . Ceci, pour l'élément SB8 $\gamma$ 24.

Or, le fait que les contraintes de CT n'apparaissent pas dans l'élément SB8DK24, fait que les termes manquants de  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  doivent donner lieu à une matrice de stabilisation propre à ces modes quitte à utiliser un facteur multiplicateur petit. La combinaison de ces deux modes sont ceux qu'on a eu à nommer « torsion libre » dans le premier chapitre. A cet effet, on procédera donc aux calculs successifs des matrices de raideur de stabilisations des parties manquantes des modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$ , puis de celles de raideur des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$ .

L'autre partie des instabilités (figure III.4-c et f) semblent être évitées, peut-être par la stabilisation 'intrinsèque' du DKS16.

En effet, en reprenant la même matrice gradient de stabilisation  $[B^s]$  (relation I-104 du Chapitre I) pour stabiliser l'élément solide-coque SB8 $\gamma$ 24, la stabilisation en membrane, en flexion et en pincement de la brique de type solide-coque est assurée.



$$[\mathbf{B}^s] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} \eta \langle \gamma_3 \rangle + \zeta \langle \gamma_4 \rangle & & \\ & \bar{J}_{22} \xi \langle \gamma_3 \rangle + \zeta \langle \gamma_4 \rangle & \\ & & \bar{J}_{33} (\eta \langle \gamma_1 \rangle + \xi \langle \gamma_2 \rangle + \zeta \langle \gamma_4 \rangle) \end{bmatrix}$$

Le terme  $\bar{J}_{33} (\eta \langle \gamma_1 \rangle + \xi \langle \gamma_2 \rangle)$  à la 3<sup>ème</sup> ligne et 3<sup>ème</sup> colonne de cette matrice provient de la matrice gradient de stabilisation des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$   $[\mathbf{B}_{12}^s]$  (relation I.78 du premier chapitre) dans laquelle tous les termes non diagonaux deviennent nuls pour une « brique » régulière. Mais ce terme participe à ce niveau seulement à la stabilisation en pincement comme donné dans la matrice de raideur de stabilisation ci-après, exactement la même pour l'élément SB8 $\gamma$ 24 (voir chapitre I) :

$$[\mathbf{K}^s] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx}^s & & \\ & \mathbf{K}_{yy}^s & \\ & & \mathbf{K}_{zz}^s \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{xx}^s = H_{11} (\bar{\lambda} + 2\mu) f_E [\{\gamma_3\} \cdot \{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3} \{\gamma_4\} \cdot \{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{yy}^s = H_{22} (\bar{\lambda} + 2\mu) f_E [\{\gamma_3\} \cdot \{\gamma_3\}^T + \frac{1}{3} \{\gamma_4\} \cdot \{\gamma_4\}^T] \\ \mathbf{K}_{zz}^s = H_{33} E f_E [\{\gamma_1\} \cdot \{\gamma_1\}^T + \{\gamma_2\} \cdot \{\gamma_2\}^T + \frac{1}{3} \{\gamma_4\} \cdot \{\gamma_4\}^T] \end{cases}$$

### III.B.3.b) Stabilisation des modes autres à énergie nulle

Il a été dit précédemment que les termes manquants des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$ , dus à l'absence des contraintes de cisaillement transversal (CT) dans l'élément solide-coque SB8DK24, doivent donner lieu à une matrice de stabilisation propre à ces modes quitte à utiliser un facteur multiplicateur petit. La combinaison de ces deux modes sont ceux qu'on a eu à nommer « torsion libre » dans le premier chapitre et qui est rappelée par la figure ci-après.

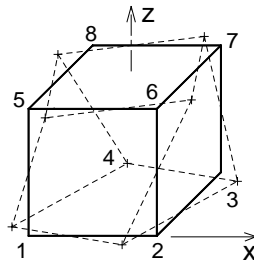


Figure III-5 Mode « torsion » libre

Le terme  $\bar{J}_{33} (\eta \langle \gamma_1 \rangle + \xi \langle \gamma_2 \rangle)$  est pris en compte cette fois ci pour calculer les déformations suivantes (déplacements suivant x et y) utiles à la stabilisation de cette 'torsion libre' :

$$2q_{xz} = \bar{J}_{33} (\eta \langle \gamma_1 \rangle + \xi \langle \gamma_2 \rangle) \cdot \{\mathbf{U}_x^e\}$$

$$2q_{yz} = \bar{J}_{33} (\eta \langle \gamma_1 \rangle + \xi \langle \gamma_2 \rangle) \cdot \{\mathbf{U}_y^e\}$$

Ces déformations utilisées dans l'équivalence énergétique suivante :

$\iiint \langle 2q_{xz} \quad 2q_{yz} \rangle \begin{bmatrix} \mu & \\ & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2q_{xz} \\ 2q_{yz} \end{Bmatrix} dv$  permettent de tirer les termes des matrices de raideur de stabilisation  $[\mathbf{K}^{s1}]$  et  $[\mathbf{K}^{s2}]$  liées à ces modes, dans le repère **local** :

$$[\mathbf{K}^{s1}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx}^{s1} & | & \\ \hline & & \mathbf{K}_{yy}^{s1} \end{bmatrix}; [\mathbf{K}^{s2}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx}^{s2} & | & \\ \hline & & \mathbf{K}_{yy}^{s2} \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{K}_{xx}^{s1} = \bar{J}_{33}^2 \frac{V}{3} \mu \cdot f_E [\{\gamma_1\} \cdot \{\gamma_1\}^T] = \mathbf{K}_{yy}^{s1} \\ \mathbf{K}_{xx}^{s2} = \bar{J}_{33}^2 \frac{V}{3} \mu \cdot f_E [\{\gamma_2\} \cdot \{\gamma_2\}^T] = \mathbf{K}_{yy}^{s2} \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

$$\text{Car } \iiint \eta^2 dv = v/3, \quad \iiint \xi^2 dv = v/3 \quad \iiint \xi^2 \zeta^2 dv = \iiint \eta^2 \zeta^2 dv = \iiint \xi^2 \eta^2 dv = v/9$$

Ces matrices de raideurs sont à s'ajouter à la matrice de raideur de stabilisation précédemment donnée  $[\mathbf{K}^s]$ .

Nota : le facteur  $f_E$  intervenant dans les matrices  $[\mathbf{K}^{s1}]$  et  $[\mathbf{K}^{s2}]$  peut être pris vraiment petit ( $10^{-6}$ ) ; ce qui importe, c'est d'empêcher la « torsion » libre montrée dans la figure III-5.

### III.C. Élément solide-coque à 9 nœuds de type Kirchhoff : SB9DK25

Pour obtenir cet élément, on ajoute un nœud supplémentaire au centre de la « brique » SB8DK24 comme cela a été fait pour avoir l'élément coque-solide DKS18 dans [11] et rappelé au début de ce chapitre ou bien pour formuler l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25. Le nœud central de ce nouvel élément de type solide-coque est muni par contre d'une seule translation normale dans la direction de l'épaisseur, exactement comme pour l'élément SB9 $\gamma$ 25 détaillé dans le premier chapitre. Cette translation suivant l'axe z est notée  $w_9$ . Les autres translations normales aux huit (8) nœuds de l'élément sont notées :

$${}^T \{\mathbf{U}_z^e\} = \langle \mathbf{U}_z^e \rangle = \langle w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4 \mid w_5 \mid w_6 \mid w_7 \mid w_8 \rangle \quad (\text{III-19})$$

#### III.C.1. Déformation normale

Pour pouvoir disposer d'une déformation normale linéaire, on postule le déplacement normal quadratique  $w(z)$  d'expression suivante :

$$w(z) = \frac{z^2}{c^2} \left( \frac{1}{2} (w_9^+ + w_9^-) - w_9 \right) + \frac{z}{c} \frac{1}{2} (w_9^+ - w_9^-) + w_9 \quad (\text{III-20})$$

avec :

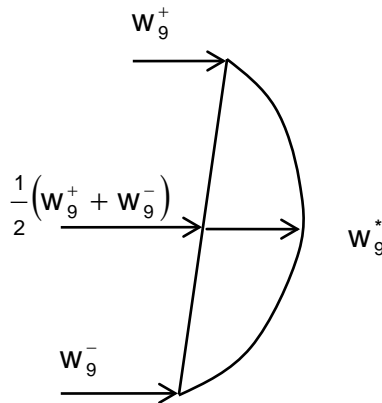
$$\begin{aligned} w_9^+ &= (w_5 + w_6 + w_7 + w_8) / 4 ; \\ w_9^- &= (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) / 4 ; \\ c &= \frac{h}{2} \text{ où } h \text{ est l'épaisseur de l'élément.} \end{aligned}$$

En dérivant ce déplacement quadratique par rapport à la variable z, on obtient la déformation normale linéaire qui suit :

$$\varepsilon_{zz} = \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} + 2 \frac{z}{c} \left( \frac{1}{8c} \langle \mathbf{S} \rangle \{\mathbf{U}_z^e\} - \frac{1}{c} w_9 \right) \quad (\text{III-21})$$

$$\text{avec } \langle \mathbf{S} \rangle = \langle 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \rangle$$

Remarque :



**Figure III-6** Déplacement  $w_9$

Si, à la place du déplacement « complet »  $w_9$ , il est préféré l'utilisation de l'accroissement de translation  $w_9^*$  (par rapport au déplacement du centre de la brique) de sorte que  $w_9 = \frac{1}{2}(w_9^+ + w_9^-) + w_9^*$  alors l'expression de la translation normale quadratique devient :

$$w(z) = \frac{1}{2} w_9^+ \left(1 + \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2} w_9^- \left(1 - \frac{z}{c}\right) + w_9^* \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (\text{III-22})$$

Et, bien évidemment, la déformation normale change aussi d'expression :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2c} (w_9^+ - w_9^-) - \frac{2z}{c^2} \cdot \left(w_9 - \frac{1}{2}(w_9^+ + w_9^-)\right) \text{ devient : } \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2c} (w_9^+ - w_9^-) - \frac{2z}{c^2} \cdot w_9^* \quad (\text{III-23})$$

### III.C.2. Efforts nodaux équivalents à une pression

Ici vont être présentés les efforts  $F_n$  ( $n=1..9$  : voir la figure III-6 suivante) équivalents à une pression normale constante 'p' qui s'exercerait sur la face inférieure de l'élément « brique » de type solide-coque SB9DK25 pour que la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  varie de façon linéaire dans l'épaisseur et s'annule sur la face supérieure :

$$\sigma_{zz}(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{c} - 1\right) \cdot p \quad (\text{III-24})$$

En notant  $A_0$  l'aire de la surface moyenne et puisque  $w_9$  est le déplacement réel et non pas  $-w_9^*$ , il convient d'avoir :

$$\sum_{n=1}^9 F_n \hat{w}_n = p A_0 \frac{1}{2} (\hat{w}_9^+ + \hat{w}_9^-) + \iint \left( \int_{-c}^c \hat{\varepsilon}_{zz} \cdot \sigma_{zz}(p) \cdot dz \right) dS \quad (\text{III-25})$$

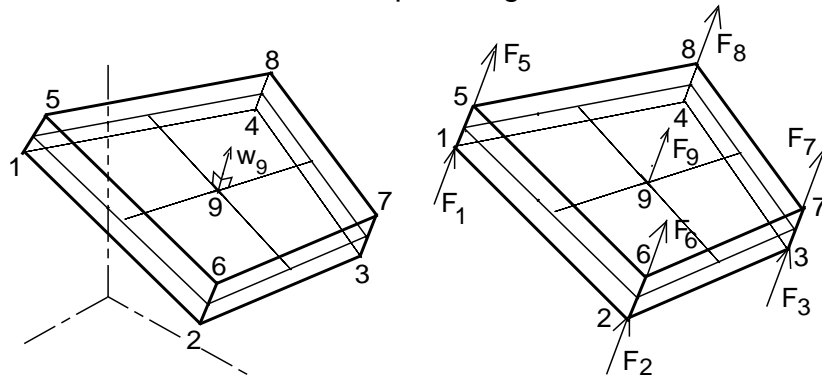
L'expression de cette intégrale ci-dessus en fonction des déplacements normaux s'établit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{-c}^c \hat{\varepsilon}_{zz} \cdot \sigma_{zz}(p) \cdot dz &= p \int_{-c}^c \frac{1}{2} \left( \frac{z}{c} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{w_9^+ - w_9^-}{c} + 2 \frac{z}{c} \left( \frac{1}{2} \frac{w_9^+ + w_9^-}{c} - \frac{w_9}{c} \right) \right) \cdot dz \\
 &= \frac{p}{4} \left( -\frac{w_9^+ - w_9^-}{c} 2c \right) + p \left( \frac{1}{2} \frac{w_9^+ + w_9^-}{c} - \frac{w_9}{c} \right) \frac{c^3}{c^2} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= p \left( -\frac{w_9^+ - w_9^-}{2} + \frac{2}{3} \left( \frac{w_9^+ + w_9^-}{2} - w_9 \right) \right) \\
 &= p \left( \frac{5}{6} w_9^- - \frac{1}{6} w_9^+ - \frac{2}{3} w_9 \right)
 \end{aligned}$$

Alors pour une « brique » de forme régulière, les efforts nodaux équivalents à la pression sont (figure III-6) :

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \frac{1}{3} p A_0 ; F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = \frac{1}{12} p A_0 ; F_9 = -\frac{2}{3} p A_0 \quad (\text{III-26})$$

Nota : ici,  $p$  est positive (suivant la normale) et donc supposée agissant sur la face (1, 2, 3, 4). Si  $p$  est négative, alors il est considéré qu'elle agit sur la face 5, 6, 7, 8).



**Figure III-7** Efforts nodaux équivalents à la pression normale

Remarque :

Il peut sembler étonnant d'avoir des composantes de forces équivalentes sur les nœuds 5, 6, 7, 8 quand la pression agit sur la face (1, 2, 3, 4). De fait, si on utilise  $w_9^*$  au lieu de  $w_9$ , on obtient alors une répartition plus « physique » :

$$p > 0 : F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \frac{1}{4} p A_0 ; F_9 = -\frac{2}{3} p A_0 ; F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = 0$$

$$p < 0 : F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0 ; F_9 = -\frac{2}{3} p A_0 ; F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = \frac{1}{4} p A_0$$

### III.D. Annexe: Présentation sommaire du solide-coque DKB24

L'histoire du développement de la brique DKB24 est décrite par le schéma de principe qui suit, où les degrés de liberté sont exprimés dans un repère local :

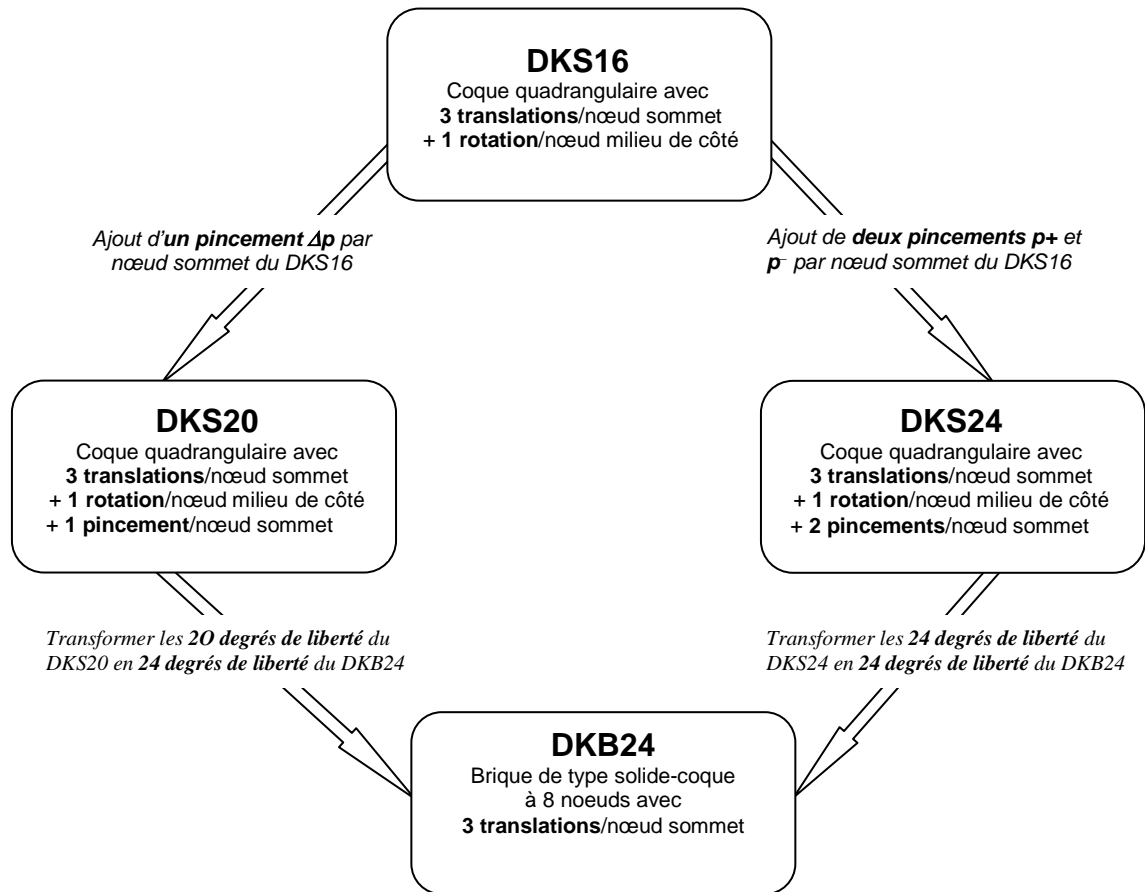


Figure 0 Procédure d'élaboration de l'élément DKB24

#### III.D.1. Déplacements locaux et rotations locales

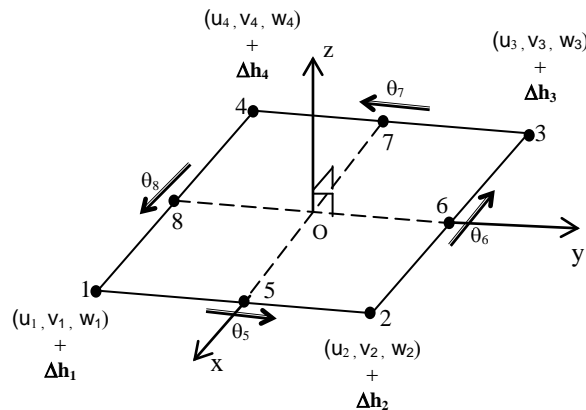


Figure 1 Géométrie de l'élément coque DKS20

### III.D.2. Déformations locales

#### III.D.2.a) Déformations de membrane

En effet, la forme globale de la déformation en membrane du DKS16 étant :

$$\{\varepsilon^m\} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma \rangle h, x & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma \rangle h, y \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma \rangle h, y & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma \rangle h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix},$$

$$\{\varepsilon_0^m\} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{U}_e\} = [\mathbf{B}_0^m] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$$

On pose :  $[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix}$

$$\{\varepsilon_0^m\} = [\mathbf{B}_0^m] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$$

#### III.D.2.b) Déformations de flexion

$$\{\varepsilon^b\} = z \cdot \{\kappa\} = z \cdot [\mathbf{B}_U^b] \cdot \{\mathbf{U}_e\} + [\mathbf{B}_\theta^b] \cdot \{\theta_e\}$$

#### III.D.2.c) Déformations de cisaillement transversal

$$\begin{Bmatrix} 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + w, x + z/h \cdot \Delta h, x \\ -\theta_x + w, y + z/h \cdot \Delta h, y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z/h \cdot \Delta h, x \\ z/h \cdot \Delta h, y \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} \Delta h, x/h \\ \Delta h, y/h \end{Bmatrix} \text{ car } \begin{cases} \theta_y + w, x = 0 \\ -\theta_x + w, y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta h, x \\ \Delta h, y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} y_2 - y_4 & | & y_1 - y_3 & | & y_4 - y_2 & | & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & | & x_3 - x_1 & | & x_2 - x_4 & | & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z/h \cdot \Delta h, x \\ z/h \cdot \Delta h, y \end{Bmatrix} = z/h \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{Bmatrix} = z \cdot [\mathbf{B}^c] \cdot \{\Delta\}$$

### III.D.2.d) Déformation due au pincement

$$\varepsilon_{zz} = w_{p,Z} = \frac{\Delta h}{h}$$

$$\varepsilon_{zz} = [\mathbf{B}^z] \cdot \{\Delta\}$$

### III.D.2.e) Déformations totales

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}_{(6 \times 1)} = \left[ \begin{array}{c|c|c} [\mathbf{B}_0^m] + z \cdot [\mathbf{B}_U^b] & z \cdot [\mathbf{B}_0^b] & \\ \hline & & z \cdot [\mathbf{B}^c] + [\mathbf{B}^z] \end{array} \right]_{(6 \times 20)} \cdot \begin{pmatrix} U_{X1} \\ U_{Y1} \\ \dots \\ U_{Z4} \\ \theta_5 \\ \dots \\ \theta_8 \\ \Delta h_1 \\ \dots \\ \Delta h_4 \end{pmatrix}_{(20 \times 1)}$$

$$[\mathbf{B}] = \left[ \begin{array}{c|c|c} [\mathbf{B}_0^m] + z \cdot [\mathbf{B}_U^b] & z \cdot [\mathbf{B}_0^b] & \\ \hline & & z \cdot [\mathbf{B}^c] + [\mathbf{B}^z] \end{array} \right]$$

$$\langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle U_{X1} \mid U_{Y1} \mid \dots \mid U_{Z4} \mid \theta_5 \mid \dots \mid \theta_8 \mid \Delta h_1 \mid \dots \mid \Delta h_4 \rangle.$$

#### (1) Transformations des translations

$$\{U_1\} = \frac{1}{2} \{ \{U_i\} + \{U_m\} \}; \quad \{U_2\} = \frac{1}{2} \{ \{U_j\} + \{U_n\} \}; \quad \{U_3\} = \frac{1}{2} \{ \{U_k\} + \{U_o\} \}; \quad \{U_4\} = \frac{1}{2} \{ \{U_l\} + \{U_p\} \}$$

Dans le repère global, chaque nœud est muni de trois composantes de translations  $\langle U_x \mid U_y \mid U_z \rangle$

#### (2) Transformations des rotations

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \langle P_5 \cdot z_5 X \mid P_5 \cdot z_5 Y \mid P_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_i\} + \langle Q_5 \cdot z_5 X \mid Q_5 \cdot z_5 Y \mid Q_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_j\} \\ &\quad + \langle -Q_5 \cdot z_5 X \mid -Q_5 \cdot z_5 Y \mid -Q_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_m\} + \langle -P_5 \cdot z_5 X \mid -P_5 \cdot z_5 Y \mid -P_5 \cdot z_5 Z \rangle \cdot \{U_n\} \\ \theta_6 &= \langle P_6 \cdot z_6 X \mid P_6 \cdot z_6 Y \mid P_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_j\} + \langle Q_6 \cdot z_6 X \mid Q_6 \cdot z_6 Y \mid Q_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_k\} \\ &\quad + \langle -Q_6 \cdot z_6 X \mid -Q_6 \cdot z_6 Y \mid -Q_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_n\} + \langle -P_6 \cdot z_6 X \mid -P_6 \cdot z_6 Y \mid -P_6 \cdot z_6 Z \rangle \cdot \{U_o\} \\ \theta_7 &= \langle P_7 \cdot z_7 X \mid P_7 \cdot z_7 Y \mid P_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_k\} + \langle Q_7 \cdot z_7 X \mid Q_7 \cdot z_7 Y \mid Q_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_l\} \\ &\quad + \langle -Q_7 \cdot z_7 X \mid -Q_7 \cdot z_7 Y \mid -Q_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_o\} + \langle -P_7 \cdot z_7 X \mid -P_7 \cdot z_7 Y \mid -P_7 \cdot z_7 Z \rangle \cdot \{U_p\} \\ \theta_8 &= \langle P_8 \cdot z_8 X \mid P_8 \cdot z_8 Y \mid P_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_l\} + \langle Q_8 \cdot z_8 X \mid Q_8 \cdot z_8 Y \mid Q_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_i\} \\ &\quad + \langle -Q_8 \cdot z_8 X \mid -Q_8 \cdot z_8 Y \mid -Q_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_p\} + \langle -P_8 \cdot z_8 X \mid -P_8 \cdot z_8 Y \mid -P_8 \cdot z_8 Z \rangle \cdot \{U_m\} \end{aligned}$$

### (3) Transformation des pincements

Pour le DKS20, le pincement est défini par la fonction :  $f(\Delta h_1) = z/h \cdot (w_m - w_i)$  .

Pour le DKS24, c'est la fonction :  $f(h_1^+, h_1^-) = 2 \cdot z^2/h^2 \cdot (h_1^+ - h_1^-) + z/h \cdot (h_1^+ + h_1^-)$  qui définit le pincement où :

$$\begin{aligned} h_1^+ &= w_m - w_i = w_m - (w_m + w_i)/2 = (w_m - w_i)/2 \\ h_1^- &= w_1 - w_i = (w_m + w_i)/2 - w_i = (w_m - w_i)/2 \end{aligned}$$

Après avoir opéré des simplifications, la fonction liée au pincement du DKS24 devient :  $f(h_1^+, h_1^-) = z/h \cdot (w_m - w_i)$ . C'est donc une fonction linéaire identique à celle du DKS20.

Ce qui justifie le passage par DKS20 qui présente une fonction linéaire en pincement simple à manipuler.

$$\begin{aligned} \Delta h_1 &= w_m - w_i = \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_m\} - \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_i\} \\ \Delta h_2 &= w_n - w_j = \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_n\} - \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_j\} \\ \Delta h_3 &= w_o - w_k = \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_o\} - \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_k\} \\ \Delta h_4 &= w_p - w_l = \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_p\} - \langle zX \ zY \ zZ \rangle \{U_l\} \end{aligned}$$

### (4) Matrice de transformation [T]

En harmonisant toutes ces transformations sous une seule forme matricielle, on arrive à mettre en place la matrice de la transformation des degrés de liberté [T] suivante :





### III.D.2.f) Déformations pour la stabilisation des modes $\{h_1\}$ et $\{h_2\}$

Ici n'est montré que ce type de stabilisation qui est un peu particulière, le reste étant du même genre que ce qui a été présenté dans le corps du chapitre, il n'est pas jugé utile de le reprendre ici.

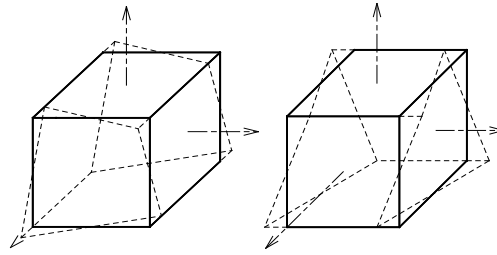


Figure 2 modes « 12 »

La figure 2 ci-dessus représente les deux modes à énergie nulle  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  qu'on regroupe ici sous le nom de modes « 12 » et qu'on peut retrouver au chapitre I sous la dénomination de torsion libre (figure I.12 et I.12.bis).

Lorsqu'on combine les deux schémas de cette figure, on a l'impression d'avoir affaire à un cube en torsion.

La torsion du cube DKB24 va être simulée grâce aux rotations de la matrice des déformations d'un élément dans sa formulation générale.

En effet, une matrice des déformations est constituée classiquement de deux parties, une faite des dilatations sur la diagonale de la matrice et l'autre faite des rotations, on considère ici la matrice faite de la partie avec des rotations:

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} & u, y - v, x & u, z - w, x \\ v, x - u, y & & v, z - w, y \\ w, x - u, z & w, y - v, z & \end{bmatrix}$$

Les composantes en rotation de cette matrice de déformations sont obtenues à partir de la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{Bmatrix} ; \quad \text{où : } \begin{cases} \omega_x = w, y - v, z \\ \omega_y = u, z - w, x \\ \omega_z = v, x - u, y \end{cases}$$

En prenant la face de dessous de la brique de nœuds i, j, k, l (Figure 2) pour y effectuer la dérivation des translations u et v par rapport aux variables x et y conformément à la formule

$$\begin{Bmatrix} f, x \\ f, y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A^-} \begin{bmatrix} y_j - y_l & y_k - y_i & y_l - y_j & y_i - y_k \\ x_l - x_j & x_i - x_k & x_j - x_l & x_k - x_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \\ f_l \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A^-} \begin{bmatrix} y_{jl} & y_{ki} & y_{lj} & y_{ik} \\ x_{lj} & x_{ik} & x_{jl} & x_{ki} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \\ f_l \end{Bmatrix},$$

Les dérivées suivantes sont fonction des translations des nœuds dans le repère local (Figure 2) et doivent être exprimées dans le repère global par l'intermédiaire des matrices de passage  $[R_u]$  et  $[R_v]$

$$v, x = \frac{y_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot v_i + \frac{y_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot v_j + \frac{y_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot v_k + \frac{y_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot v_l$$

$$u, y = \frac{x_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot u_i + \frac{x_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot u_j + \frac{x_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot u_k + \frac{x_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot u_l$$

A partir de ces dérivées, on obtient sur la face de dessous d'aire  $A^-$ , faite des noeuds i, j, k, l, la rotation  $\omega_z^-$  qui représente l'angle de rotation de cette face par rapport à la face de dessus :

$$\omega_z^- = \left\langle \frac{x_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot xX + \frac{y_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot yX \quad \frac{x_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot xY + \frac{y_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot yY \quad \frac{x_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot xZ + \frac{y_{jl}}{2 \cdot A^-} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \end{Bmatrix} +$$

$$\left\langle \frac{x_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot xX + \frac{y_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot yX \quad \frac{x_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot xY + \frac{y_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot yY \quad \frac{x_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot xZ + \frac{y_{ki}}{2 \cdot A^-} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xj} \\ U_{Yj} \\ U_{Zj} \end{Bmatrix} +$$

$$\left\langle \frac{x_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot xX + \frac{y_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot yX \quad \frac{x_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot xY + \frac{y_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot yY \quad \frac{x_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot xZ + \frac{y_{lj}}{2 \cdot A^-} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xk} \\ U_{Yk} \\ U_{Zk} \end{Bmatrix} +$$

$$\left\langle \frac{x_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot xX + \frac{y_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot yX \quad \frac{x_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot xY + \frac{y_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot yY \quad \frac{x_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot xZ + \frac{y_{ik}}{2 \cdot A^-} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \end{Bmatrix}$$

Et en procédant de même sur la face de dessus, constituée des noeuds m,n,o,p et d'aire  $A^+$ , on a la rotation  $\omega_z^+$  qu'on assimile à l'angle de rotation de cette face de dessus par rapport à la face de dessous :

$$\omega_z^+ = \left\langle \frac{x_{np}}{2 \cdot A^+} \cdot xX + \frac{y_{np}}{2 \cdot A^+} \cdot yX \quad \frac{x_{np}}{2 \cdot A^+} \cdot xY + \frac{y_{np}}{2 \cdot A^+} \cdot yY \quad \frac{x_{np}}{2 \cdot A^+} \cdot xZ + \frac{y_{np}}{2 \cdot A^+} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xm} \\ U_{Ym} \\ U_{Zm} \end{Bmatrix} +$$

$$\left\langle \frac{x_{mo}}{2 \cdot A^+} \cdot xX + \frac{y_{mo}}{2 \cdot A^+} \cdot yX \quad \frac{x_{mo}}{2 \cdot A^+} \cdot xY + \frac{y_{mo}}{2 \cdot A^+} \cdot yY \quad \frac{x_{mo}}{2 \cdot A^+} \cdot xZ + \frac{y_{mo}}{2 \cdot A^+} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xn} \\ U_{Yn} \\ U_{Zn} \end{Bmatrix} +$$

$$\left\langle \frac{x_{pn}}{2 \cdot A^+} \cdot xX + \frac{y_{pn}}{2 \cdot A^+} \cdot yX \quad \frac{x_{pn}}{2 \cdot A^+} \cdot xY + \frac{y_{pn}}{2 \cdot A^+} \cdot yY \quad \frac{x_{pn}}{2 \cdot A^+} \cdot xZ + \frac{y_{pn}}{2 \cdot A^+} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xo} \\ U_{Yo} \\ U_{Zo} \end{Bmatrix} +$$

$$\left\langle \frac{x_{om}}{2 \cdot A^+} \cdot xX + \frac{y_{om}}{2 \cdot A^+} \cdot yX \quad \frac{x_{om}}{2 \cdot A^+} \cdot xY + \frac{y_{om}}{2 \cdot A^+} \cdot yY \quad \frac{x_{om}}{2 \cdot A^+} \cdot xZ + \frac{y_{om}}{2 \cdot A^+} \cdot yZ \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} U_{Xp} \\ U_{Yp} \\ U_{Zp} \end{Bmatrix}$$

Pour avoir la matrice gradient liée aux effets de torsion des « modes 12 », on considère la « brique » DKB24 comme une poutre de section elliptique qui serait soumise à une torsion telle qu'une section tournerait dans le sens opposé de l'autre. On peut exprimer l'énergie de torsion comme suit :



$$E_{\text{torsion}} = (\omega_z^- - \omega_z^+) \cdot \frac{G^* \cdot J}{2 \cdot L} \cdot (\omega_z^- - \omega_z^+), \quad G^* = \lambda \cdot \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ avec } \lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ et } \nu = 0,3$$

En tenant compte de la matrice gradient  $[B_{\text{tor}}]$  spécifiant la différence des rotations  $(\omega_z^- - \omega_z^+)$ , on peut réécrire l'énergie de torsion comme suit :

$$E_{\text{torsion}} = \langle \mathbf{U}_e \rangle \cdot \left[ {}^T [B_{\text{tor}}] \cdot \frac{G^* \cdot J}{2 \cdot L} \cdot [B_{\text{tor}}] \right] \cdot \langle \mathbf{U}_e \rangle,$$

La matrice de raideur pour ce phénomène de pseudo torsion sur l'élément solide-coque est donc :

$$[K_{\text{Stab}}^{\text{tor}}] = {}^T [B_{\text{tor}}] \cdot \frac{G^* \cdot J}{2 \cdot L} \cdot [B_{\text{tor}}]$$

Le calcul du terme d'inertie  $J$  nécessite la considération de deux facteurs classiques  $k_{\theta}$  et  $k_{\tau}$  d'une poutre de section rectangulaire (voir figure 3 ci-après) en torsion où peut être inscrite la section elliptique de l'élément brique. Et on suppose que l'aire de la section elliptique est sensiblement égale à celle de la section rectangulaire.

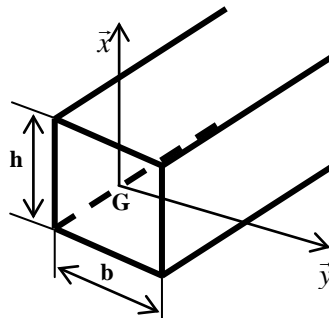


Figure 3 Géométrie d'une section rectangulaire

Pour une section de hauteur  $h$  et de largeur  $b$ , le tableau ci-dessous faisant apparaître les deux facteurs  $k_{\theta}$  et  $k_{\tau}$  en fonction du rapport  $h/b$  est utilisé

$$J = k_{\theta} \cdot h \cdot b^3 \quad M_t = k_{\tau} \cdot \tau_{\text{max}} \cdot h \cdot b^2$$

$h/b$	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	10	Infini
$k_{\theta}$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	1/3
$k_{\tau}$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	1/3

Tableau III-1. Facteurs utiles  $k_{\theta}$  et  $k_{\tau}$  pour calculer le rapport  $h/b$

**Remarque :** la stabilisation des parties manquantes des modes  $\{h_1\}$  et  $\{h_2\}$  qui vient d'être présentée a été programmée dans le code propre à l'élément DKB24 mais n'a pas été retenue ensuite pour les sources de l'élément SB8 $\gamma$ 24. C'est celle, détaillée dans le premier chapitre pour la stabilisation de la « torsion libre » de l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25, qui a été effectivement programmée.

### III.E. Références

- [1] Belytschko T, Leviathan I. *Physical stabilisation of the 4-node shell element with one point quadrature*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1994; **113**:321-350
- [2] Belytschko T., and Tsay C-S., *A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983; **15**:405-420,
- [3] Belytschko,T.,ONG , J.S.J , LIU,W.K., KENNEDY,J.M., *Hourglass control in linear and non linear problem*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 1984; **25**:251-276
- [4] Belytschko T, Kam Liu W, Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & sons, ltd 2000; **6**:491-497
- [5] Brunet, M. and Sabourin, F. (2006), *Analysis of a rotation-free 4-node shell element*, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, **66**:1483-1510
- [6] Flores, F.G. and Oñate, E., *Improvements in the membrane behaviour of the three-node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005;**194**:907-932.
- [7] Long, Y. and Li, J. and Long, Z. and Cen, S. *Area coordinates used in quadrilateral elements*. Communications in Numerical Methods in Engineering 1999; **48**:545-593
- [8] Morley, L.S.D. *The constant plate-bending element*. Journal of Strain Analysis, 1971; **4**:20-24.
- [9] Sabourin, F. and Brunet, M. (2006), *Detailed formulation of the rotation-free triangular element 'S3' for general purpose shell analysis*, Engineering Computations , Vol. 23, No 5, 469-502, Emerald, UK.
- [10] Sabourin F, Carbonnière J and Brunet, M. *A new quadrilateral shell element using 16 degrees of freedom*, Engineering Computations , 2009; **26**:500-540
- [11] Sansalone M. *A new shell formulation using complete 3D constitutive laws. Application to sheet metal forming simulations*. Thèse de doctorat – INSA de Lyon Ecole doctorale MEGA – 2011

Notes :

## IV. Validation de l'élément SB9DK25

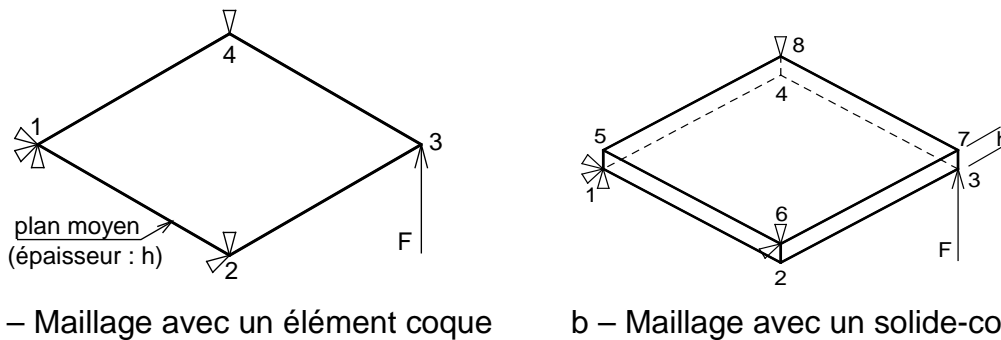
<b>IV.</b>	<b>Validation de l'élément SB9DK25</b>	<b>IV-1</b>
<b>IV.A.</b>	<b>Exemples linéaires</b>	<b>IV-2</b>
IV.A.1.	Patch-test	IV-2
IV.A.2.	Plaque circulaire encastrée	IV-3
IV.A.3.	Hémisphère pincé	IV-4
IV.A.4.	Cylindre pincé avec des bords libres	IV-4
IV.A.5.	Poutre vrillée	IV-5
<b>IV.B.</b>	<b>Exemples non linéaires</b>	<b>IV-7</b>
IV.B.1.	Hémisphère pincé	IV-7
IV.B.2.	Plaque circulaire encastrée	IV-8
IV.B.3.	Bottoming test	IV-8
IV.B.4.	Arc encastré	IV-11
<b>IV.C.</b>	<b>Références</b>	<b>IV-12</b>



## IV.A. Exemples linéaires

### IV.A.1. Patch-test

Un test sous ce nom de Patch-test a été effectué dans le deuxième chapitre. Mais celui-ci est un test de base qu'on se propose d'effectuer pour montrer la flexion à laquelle est soumise une simple plaque carrée. On le trouve parfois sous le nom de Test-Coin, tout simplement, parce qu'un nœud (coin) de la plaque est soumis à un effort  $F = 1$  N alors que les autres sont bloqués.

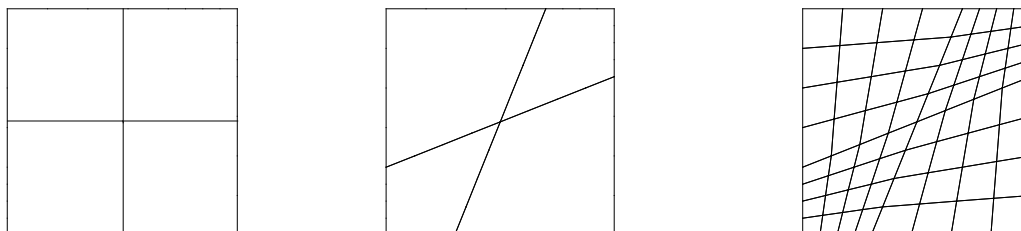


a – Maillage avec un élément coque      b – Maillage avec un solide-coque

**Figure IV-1** « Plaque » carrée simplement appuyée aux trois coins.

Pour ce test, on considère une plaque carrée de côté  $L=100$  mm et d'épaisseur  $h=1$  mm dont trois nœuds sont bloqués tandis qu'est appliqué un effort vertical  $F = 1$  N à un quatrième nœud. Les caractéristiques matérielles sont le module de Young  $E = 2.10^5$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ .

On cherche à connaître la déflexion normale  $U_z$  au nœud où est appliqué l'effort. Tout résultat numérique est à comparer au résultat analytique  **$U_z = 0.39$**  mm.



a – Maillage régulier      b – Maillage grossier irrégulier      c – Maillage raffiné

**Figure IV-2.** Différents maillages de la plaque carrée

Dans le tableau suivant sont regroupés les résultats numériques d'un calcul purement linéaire élastique en implicite effectués avec des codes maisons où ont été implémentés l'élément coque DKS16 (figure IV-1-a), l'élément coque solide DKS18 et les éléments solides-coques SB8DK24 (figure IV-1-b) et SB9DK25 :

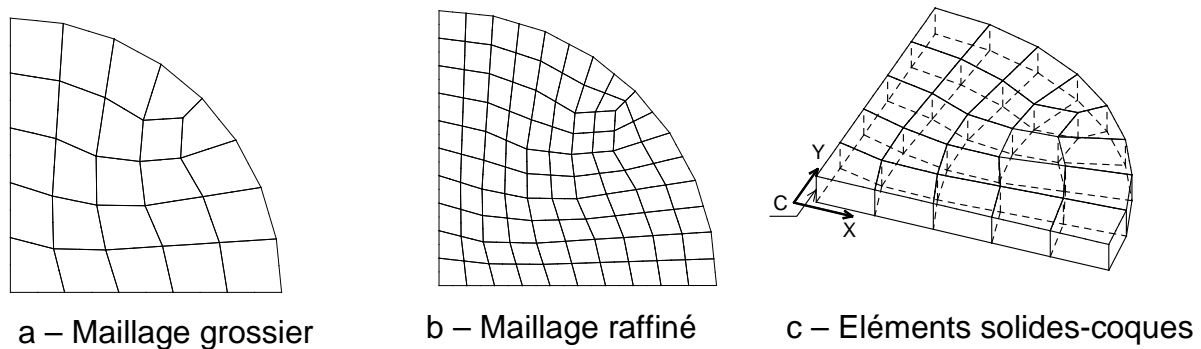
	DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25	Théorie
$U_z(3)$ mm	0.39	0.39	<b>0.39</b>	<b>0.39</b>	<b>0.39</b>

**Tableau IV.1** Résultats des patch-tests

En analysant le tableau IV-1, on constate que le nœud chargé de l'effort  $F$  de la plaque carrée maillée avec les éléments de type solide-coque SB8DK24 ou SB9DK25, on obtient un déplacement de 0.39 mm exactement donné par la théorie et par les éléments coque DKS16 [5] et coque-solide DKS18 [6].

#### IV.A.2. Plaque circulaire encastée

C'est un exemple familier puisqu'il a été largement utilisé dans le chapitre I et même repris dans le chapitre II.



**Figure-IV.3** Quart de la plaque circulaire encastée

La plaque circulaire ci-dessus de rayon  $R=100$  mm et d'épaisseur  $h=1$  mm est encastée à sa périphérie. On la soumet à une pression normale uniforme afin d'évaluer le déplacement de son centre. Un quart seulement de cette plaque est étudié du fait des symétries. Le matériau considéré isotrope est caractérisé par le module de Young  $E=2.10^5$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu=0,3$ .

Le déplacement théorique du centre de la plaque, dans la direction de l'épaisseur, noté  $U_{z0}$  vaut **1** mm en théorie de Kirchhoff (plaque mince) et **1.0005** en théorie de Mindlin (plaque épaisse). Les calculs sont effectués pour deux types de maillages, l'un grossier (figure IV.3-a) et l'autre raffiné (figure IV.3-b) avec des éléments solides-coques SB8DK24 (figure IV.3-c) et SB9DK25 ainsi que des éléments de type coque DKS16 et coque-solide DKS18.

Les résultats obtenus en fonction des maillages sont regroupés dans le tableau IV.2 ci-après.

		DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25	Théorie
$U_{z0}$ en mm	Maillage gros	1.046	1.036	1.0471	1.040	1.0000
	Maillage fin	1.003	0.999	<b>1.0076</b>	<b>0.9999</b>	1.0000

**Tableau IV.2** Déplacement du nœud central de la plaque circulaire-  $U_{z0}$

En étudiant ce tableau IV.2, on note que le déplacement du centre de la structure, quel que soit l'élément adopté pour le maillage, décroît quand le maillage devient dense. Mais tous ces résultats ne s'écartent pas trop de la valeur théorique du déplacement qui est de 1.0005 mm. Au contraire, les résultats numériques du déplacement se rapprochent du déplacement théorique quand le maillage est raffiné.

### IV.A.3. Hémisphère pincé

C'est un problème destiné à introduire une géométrie initiale incurvée.

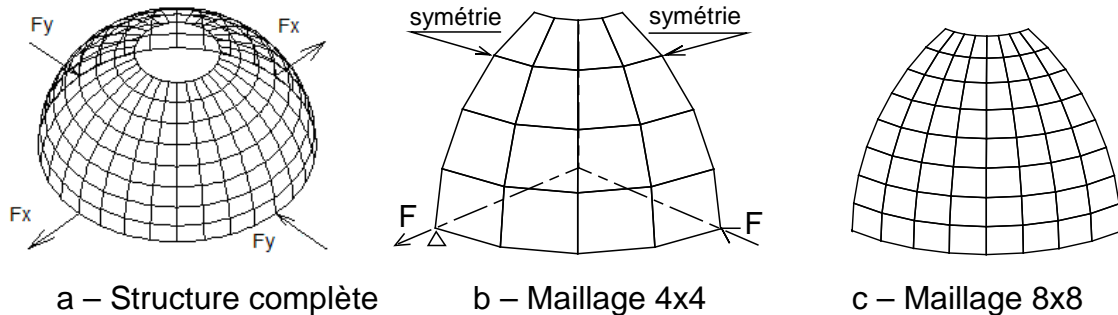


Figure IV-4 Hémisphère pincé

Un hémisphère de rayon  $R = 10$  et d'épaisseur  $h = 0.04$  possède un trou en son sommet suivant un angle d'ouverture de  $18^\circ$ . Deux efforts lui sont appliqués ; l'un « entrant »  $F_y = -1$  N et l'autre « sortant »  $F_x = 1$  N (figure IV-4-a). L'étude est faite sur seulement un quart de la structure pour des raisons de symétries (figure IV-4-b et IV-4-c). Les autres données de ce matériau élastique isotrope sont le module d'Young  $E = 6.825 \cdot 10^7$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

Les déplacements  $U_x$  et  $U_y$ , des points d'applications des forces dans le plan  $(X,Y)$ , sont relevés à l'issue du calcul linéaire lancé pour trois maillages de plus en plus denses (4x4, 8x8 et 16x16 ainsi que 32x32 pour les éléments de type solide-coque) avec un élément coque (DKS16), un élément coque-solide DKS18 et deux éléments de type solide-coque (SB8DK24 et SB9DK25).

Ces résultats sont comparés à ceux de Simo [7] :  $U_x = -U_y = 0.093$  pris comme référence.

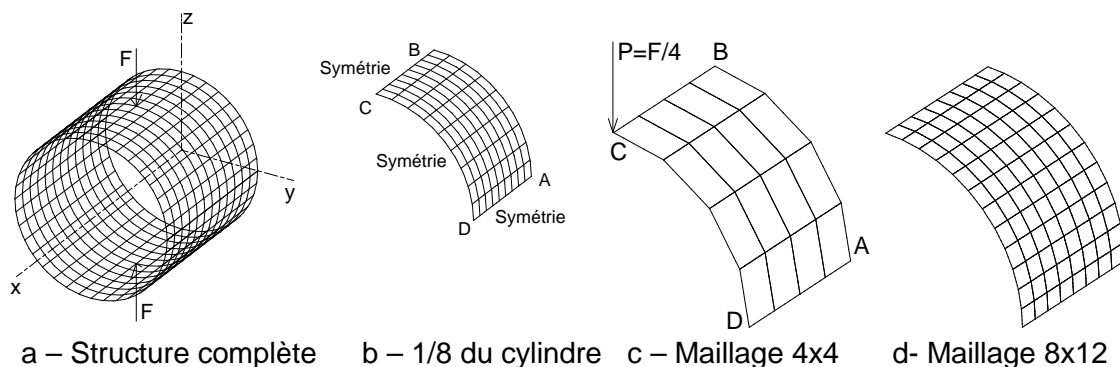
		DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25	Théorie
$U_x = -U_y$ en mm	Hemis_4x4	0.1020	0.1012	0.1101	0.1092	<b>0.094</b>
	Hemis_8x8	0.0968	0.09653	0.09864	0.09834	
	Hemis_16x16	0.0945	0.09450	0.09503	0.09495	
	Hemis_32x32			<b>0.09390</b>	<b>0.09388</b>	

Tableau IV.3 Déplacements des points de charge ( $U_x = -U_y$ )

Pour des facteurs de stabilisation valant tout au plus  $10^{-4}$ , on constate à la lecture de ce tableau qu'il faut raffiner le maillage pour tendre vers le résultat de Simo. Et ceci est vrai pour un maillage effectué avec des éléments solides-coques, des éléments coques-solides ou des éléments coques.

### IV.A.4. Cylindre pincé avec des bords libres

A cause des symétries, seulement un huitième du cylindre pincé (Figure IV-5-a, b) est maillé avec différentes discrétisations (Figure IV-5-c et d). Les éléments de type « Kirchhoff discret » à savoir le DKS16, le DKS18, le SB8DK24 et le SB9DK25 ont servi pour mailler ce cylindre et procéder aux calculs.



**Figure IV-5.** Cylindre pincé avec bords libres

Le cylindre, décrit par les figures IV-5 (a, b, c et d), a une longueur  $L = 10.35$ , un rayon  $R = 4.953$  et une épaisseur  $h = 0.094$ . Les caractéristiques du matériau dans lequel est fait ce cylindre sont : module de Young  $E = 10.5 \times 10^6$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3125$ ;

En sollicitant cette structure par deux forces égales et opposées  $F = 100$  N comme indiqué dans la Figure IV.5-a, on cherche à connaître la translation normale du point C (Figure IV.5-b) pour les différents maillages afin de le comparer au déplacement de référence : 0.1139 [3].

		DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25	Théorie
Uz(C) en mm	Maillage 6x6	-0.1146	-0.1125	-0.1174	-0.1166	<b>-0.1139</b>
	Maillage 6x8	-0.1156	-0.1146	-0.1173	-0.1164	
	Maillage 8x8	-0.1146	-0.1133	-0.1161	-0.1156	
	Maillage 8x12	-0.1151	-0.1147	<b>-0.1158</b>	<b>-0.1153</b>	

**Tableau IV-4** Déplacement normal du point C

Dans ce Tableau IV-4, les deux éléments de type « brique » semblent être un peu souples malgré le raffinement du maillage. Le déplacement du point C est après tout très proche du résultat de référence pour les deux « briques ». Les éléments coques donnent des résultats très légèrement meilleurs.

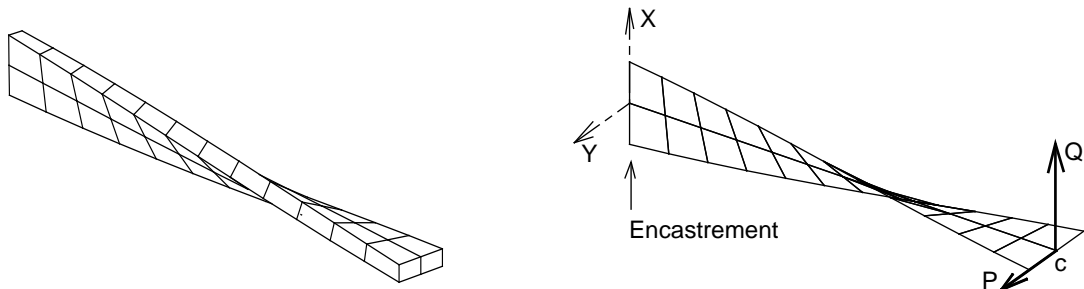
Avec l'élément coque S4R code Abaqus (Tableau IV-5), les déplacements du point C sont pratiquement identiques à ceux donnés par la théorie : -0,1139. Ce qui n'est pas le cas de la coque à intégration complète S4.

Code Abaqus	Maillage 4x4	Maillage 8x12	Code Abaqus	4x4	8x12
Élément S4R	-0.1011	-0.0.1123	Élément S4	-0.1003	-0.1119

**Tableau IV-5** Déplacement du point sollicité pour les éléments S4 et S4R

#### IV.A.5. Poutre vrillée

Ce problème, proposé par Mac Neal et Harder en 1985 [3], est celui d'une coque « hélicoïdale » encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité :  $P = 1$  N dans le plan ou un autre hors plan Q (Voir figure IV-6). C'est un test de mise en évidence de l'influence du gauchissement.



a – Maillage avec des solides-coques      b – Conditions aux limites sur la poutre

**Figure IV-6** Poutre vrillée

Ce test permet de mesurer la sensibilité des éléments solides-coques utilisés dans ce chapitre, à savoir le SB8DK24 et le SB9DK25, au gauchissement. La poutre est présentée sous deux types de maillages : 12x2 et 48x8. La figure IV-6-a est relative aux éléments solides-coques et un maillage 12x2 tandis que la figure IV-6-b correspond à la même densité de maillage avec de éléments coques ou coques-solides.

Les paramètres utiles : longueur de la poutre  $L=12.0$  mm, largeur de la poutre  $l=1.1$  mm, épaisseur de la poutre  $h=0.32$  mm, module d'élasticité  $E=2,9.10^7$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu=0,22$ , force dans le plan  $P=1$  N et force normale au plan  $Q=1$  N.

Les résultats pour ces deux types de maillages effectués avec les éléments solides-coques SB8DK24 et SB9DK25, l'élément coque DKS16 et l'élément coque-solide DKS18 sont récapitulés dans le tableau IV-6. Ils sont comparés entre eux et puis aux valeurs de référence suivantes :  $U_{y(P)} = 5,424.10^{-3}$  et  $U_{x(Q)} = 1,754.10^{-3}$ .

		<i>DKS16</i>	<i>DKS18</i>	<i>SB8DK24</i>	<i>SB8DK25</i>	<i>Théorie</i>
U <sub>x</sub> (Q) en mm	Maillage 12x2	$1.878.10^{-3}$	$1.875.10^{-3}$	$1.883.10^{-3}$	$1.883.10^{-3}$	<b><math>1,754.10^{-3}</math></b>
	Maillage 48x8	$1.755.10^{-3}$	$1.755.10^{-3}$	$1.756.10^{-3}$	<b><math>1.756.10^{-3}</math></b>	
		<i>DKS16</i>	<i>DKS18</i>	<i>SB8DK24</i>	<i>SB8DK25</i>	<i>Théorie</i>
U <sub>y</sub> (P) en mm	Maillage 12x2	$5.429.10^{-3}$	$5.429.10^{-3}$	$5.452.10^{-3}$	$5.451.10^{-3}$	<b><math>5.424.10^{-3}</math></b>
	Maillage 48x8	$5.402.10^{-3}$	$5.402.10^{-3}$	$5.406.10^{-3}$	<b><math>5.406.10^{-3}</math></b>	

**Tableau IV-6** Déplacement U<sub>x</sub> et U<sub>y</sub> de plaque vrillée

A la lecture de ce tableau IV-6, on peut noter que lorsque le maillage se densifie alors les résultats des déplacements suivant x comme suivant y se rapprochent des résultats théoriques quel que soit l'élément qui a servi au maillage.

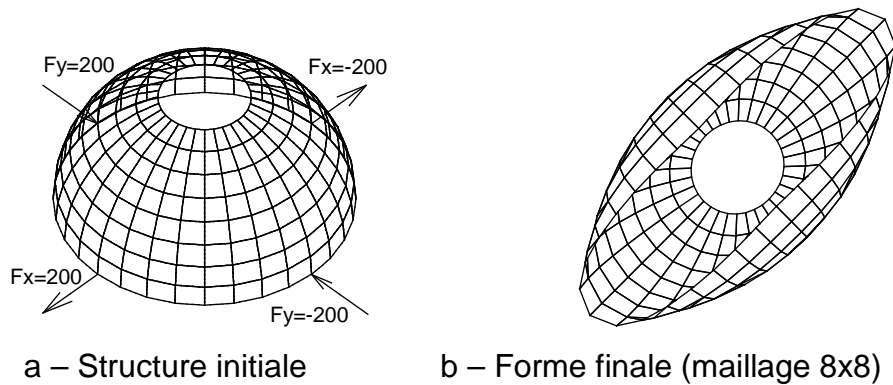
Une fois encore, il est rappelé que l'élément DKS16 est un élément coque de type « Kirchhoff discret » (sans cisaillement transversal dans l'énergie de déformation) à 8 nœuds et 16 ddl (12 translations + 4 rotations). En ajoutant un nœud central doté de 2 ddl (2 translations normales sur les peaux inférieure et supérieure), on obtient l'élément DKS18 qui introduit une contrainte normale ( $\sigma_{zz}$ ) et ne nécessite pas l'hypothèse d'état plan de contraintes comme c'est le cas pour le DKS16. Quant aux éléments solide-coque *SB8DK24* et *SB8DK25*, ce sont respectivement des éléments

du même type que SB8 $\gamma$ 24 et SB8 $\gamma$ 25 mais sans cisaillement transversal et dotés de la flexion du DKS16.

## IV.B. Exemples non linéaires

### IV.B.1. Hémisphère pincé

Pour le cas non linéaire, la charge ( $F_x=-F_y=200$  N) est appliquée en 10 incréments utilisant une Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI) et des itérations d'équilibre de Newton-Raphson (voir figure IV-7 ci-dessous).



**Figure IV-7** .Hémisphère pincée

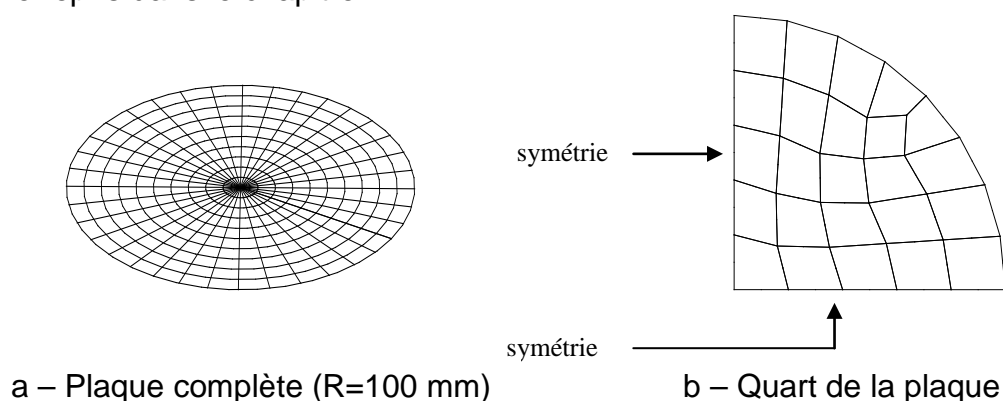
		DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25
$U_x$ en mm	Maillage 4x4	3.9354	3.8782	4.0555	4.1130
	Maillage 8x8	3.8484	3.8367	3.7933	4.3619
	Maillage 16x16	3.8162	3.8115	3.7205	3.8043
		DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25
$U_y$ en mm	Maillage 4x4	-7.4431	-7.3559	-7.6959	-7.6290
	Maillage 8x8	-6.6362	-6.6319	-6.4226	-6.7918
	Maillage 16x16	-6.4472	-6.4434	-6.1113	-6.1711

**Tableau IV-7**      Déplacement  $U_x$  et  $U_y$  des points sollicités de l'hémisphère pincé

Les résultats reportés dans le tableau (IV-7) ci-dessus montrent que les deux éléments « briques » de type solide-coque donnent des résultats des déplacements  $U_x$  et  $U_y$  pratiquement identiques à ceux obtenus avec les éléments coque DKS16 [5] et coque–solide DKS18 [6] qui servent de base de comparaison ici.

## IV.B.2. Plaque circulaire encastrée

C'est un exemple familier puisqu'il a été largement utilisé dans le chapitre I et même repris dans le chapitre II.



**Figure IV-8** Plaque circulaire encastrée

La plaque circulaire ci-dessus de rayon  $R=100$  mm et d'épaisseur  $h=1$  mm est encastrée à sa périphérie. On la soumet à une pression normale uniforme afin d'évaluer le déplacement de son centre mais cette valeur de pression (1 Mpa) est suffisamment importante pour justifier un calcul non-linéaire où les effets de membrane ne peuvent être négligés. Un quart seulement de cette plaque est étudié du fait des symétries. Le matériau considéré isotrope est caractérisé par le module de Young  $E=2.10^5$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu=0,3$ .

Suivant les auteurs, le déplacement théorique du centre O de la plaque est de **5,16** mm (Nadai), **5,35** (Federhoffer), **5,47** (Tomishenko). Les résultats obtenus en fonction maillages effectués sont :

	DKS16	DKS18	SB8DK24	SB9DK25
$U_{zO}$ en mm	5.38	5.36	5.35	5.35

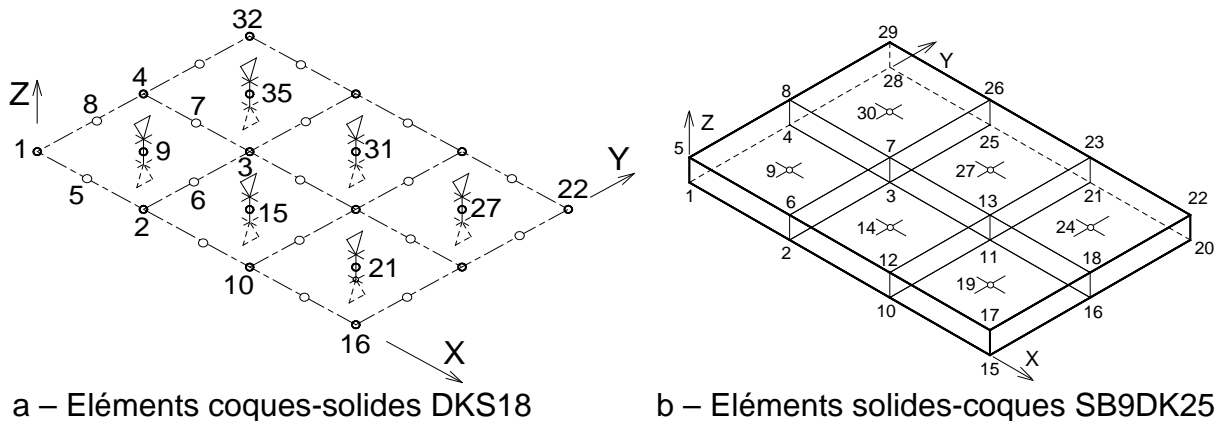
**Tableau IV-8** Déplacement du nœud central de la plaque circulaire-  $U_z(O)$

Le déplacement  $U_{z0}$  du centre de la structure est pratiquement le même quel que soit l'élément se rapproche de la valeur théorique proposée par Federhoffer

## IV.B.3. Bottoming test

Comme cela a été dit auparavant, le bottoming est une mise en forme où le fond de la structure, si l'objet voulu est avec un fond fermé, est volontairement écrasé en général pour diminuer le retour élastique en diminuant son épaisseur. Pour cet exemple, on considère qu'une structure métallique, de longueur 15 mm suivant l'axe X, de largeur 10 mm suivant l'axe Y et d'épaisseur 2 mm, est maillé avec six (6) éléments coques ou solides-coques comme indiqué sur la figure IV-9.

Pour l'élément DKS18, l'écrasement local de la structure pour arriver à une épaisseur finale de 1 mm est effectué avec des conditions aux limites directement prescrites sur les degrés de liberté locaux des nœuds centraux (9, 15, 21, 27, 31, 35 : Figure IV-9).



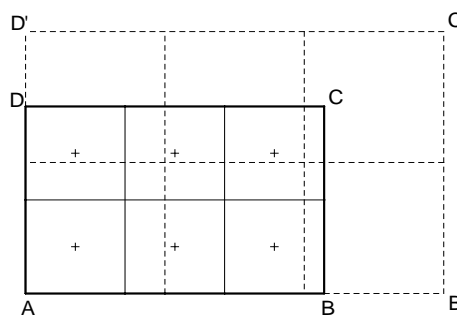
**Figure IV-9** Structure parallélépipédique maillée avec six éléments.

Les conditions aux limites imposées afin d'éviter tout mouvement de corps rigide de l'élément solide-coque SB9DK25 sont :  $U_{X1} = 0$ ,  $U_{Y1} = 0$ ,  $U_{X4} = 0$ ,  $U_{X28} = 0$ ,  $U_{Y2} = 0$ ,  $U_{Y10} = 0$ ,  $U_{Y15} = 0$ .

De plus, pour exécuter l'amincissement de la structure, un déplacement vertical négatif de 1 mm est imposé aux degrés de liberté suivant z des nœuds 5, 6, 12, 17, 8, 7, 13, 18, 29, 26, 23, 22 tandis que les degrés de liberté suivant z des nœuds 1, 2, 10, 15, 4, 3, 11, 16, 28, 25, 21, 20 sont imposés à zéro.

Les paramètres utiles du matériau sont: module de Young  $E = 71000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.33$ ,  $\bar{\sigma} = 576.79(0.01658 + \bar{\epsilon}_p)^{0.3593}$  et  $r_0=1$ ,  $r_{45}=1$  et  $r_{90}=1$  car on ne peut pas imposer d'autres valeurs pour la brique C3D8R.

A la fin d'un calcul implicite en 100 incréments et en notant que les nœuds 1, 7, 17 et 14 ( figure IV.9-a) ou 1, 28, 20 et 15 ( figure IV.9-b) correspondent aux nœuds A, D, C et B sur la figure IV.10, on recapitule dans le tableau IV-9 ci-après les valeurs des déplacements  $BB'$ ,  $DD'$  (Figure IV.10) et de la contrainte normale (constante)  $\sigma_{zz}$ , quel que soit l'élément ou le point d'intégration dans l'épaisseur.



**Figure IV-10** Vue de dessus du maillage initial et du maillage déformé

Les résultats des calculs effectués, avec l'élément brique à intégration réduite C3D8R et l'élément solide-coque SC8R du code Abaqus sont aussi rappelés pour servir de comparaison. Il faut remarquer que dans cet exemple, il n'y a aucun phénomène de flexion, ce qui permet à la brique C3D8R de bien restituer les résultats.



	Elément « solide »	« Coque-solide »	Eléments de type « solide-coque »		
	C3D8R Abaqus	DKS18	SB8DK24	SB9DK25	SC8R Abaqus
BB' (mm)	6.187	6.148	6.1335	6.1834	6.113*
DD' (mm)	4.125	4.099	4.0889	4.1222	4.075*
$\sigma_{zz}$ (MPa)	-507.9	-507.44	-508.0	-508.0	Indisponible*
$\sigma_{xx}$ & $\sigma_{yy}$	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>504.8*</b>

**Tableau IV-9.** Principaux résultats du test bottoming.

Comme cela peut être constaté dans le tableau IV-9 ci-dessus, le neuvième nœud de l'élément solide-coque SB9DK25 a permis d'obtenir des résultats similaires à ceux issus du maillage fait avec les éléments C3D8R du code Abaqus alors que les résultats donnés par l'élément SB8DK24 diffèrent un peu à cause de la particularité de la matrice de comportement ayant le module de Young E sur sa diagonale.

On reprend le commentaire donné au chapitre II pour l'élément SC8R implémenté dans Abaqus. La contrainte normale  $\sigma_{zz}$  n'est pas disponible et les contraintes dans le plan – qui devraient être nulles – atteignent 504.8 MPa !

Comme au chapitre, il est recommandé de pas mentionner que ce résultat est donné avec l'avertissement suivant :

THE SYSTEM MATRIX HAS 1 NEGATIVE EIGENVALUE. NEGATIVE EIGENVALUES MEAN THAT THE SYSTEM MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINITE.

De plus, les valeurs numériques affichées dans la dernière colonne du tableau IV-9 imposent que tous les huit nœuds situés dans le plan (X, Z) ( Figure IV.9.b) doivent être bloqués dans la direction Y et que les six nœuds situés dans le plan (Y, Z) doivent être bloqués dans la direction X. Par ailleurs, les résultats en terme de déplacements, déformations et contraintes sont complètement faux dans le tableau IV.10 où est donné un extrait des résultats pour un maillage effectué avec le SC8R d'Abaqus dans les mêmes conditions que les autres éléments.

ELEMENT	PT	SEC	S11	S22	S12	MISES
1	1	1	206.9	279.1	-110.5	315.5
1	1	5	-310.3	-122.4	111.4	332.5

**Tableau II-10** Extraits des résultats d'un maillage avec le SC8R

Ce phénomène de flexion ne peut apparaître avec les autres types d'éléments même si seul le degré de liberté suivant Y des quatre nœuds inférieurs situé sur l'axe X est imposé nul aussi bien que le degré de liberté suivant X des trois nœuds inférieurs situés sur l'axe Y (Figure IV-9-b).

#### IV.B.4. Arc encastré

Ce test consiste à soumettre à une charge localisée verticale  $P$  un arc encastré à ses extrémités  $A$  et  $B$ . Il prend en compte deux types de non linéarités, géométrique et matérielle. En effet, on a :

- pour la géométrie : Longueur  $L = 863.6$  mm; largeur  $b = 24.4$  mm; épaisseur  $h = 15$  mm; rayon  $R = 3381.1$  mm ;
- pour le matériau :  $\bar{\sigma} = \sigma_0 + H' \cdot \bar{\epsilon}_p$  ;  $H' = E$  ;  $E = 68950$  MPa;  $\nu = 0.5$ ;  $\sigma_0 = 137.9$  MPa.

Le déplacement vertical ' $u$ ' (Figure a) des nœuds  $C'$   $C''$  (Figure b) est imposé progressivement jusqu' à 40 mm et les forces correspondantes ( $F_{C'}$  et  $F_{C''}$ ) donnent le résultat  $P = F_{C'} + F_{C''}$ .

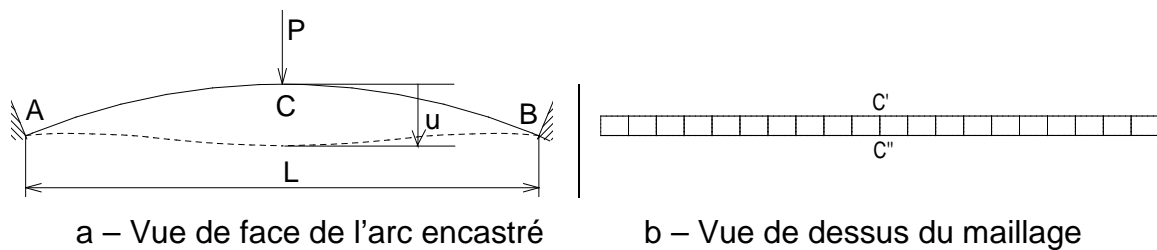


Figure IV-11. Arc encastré

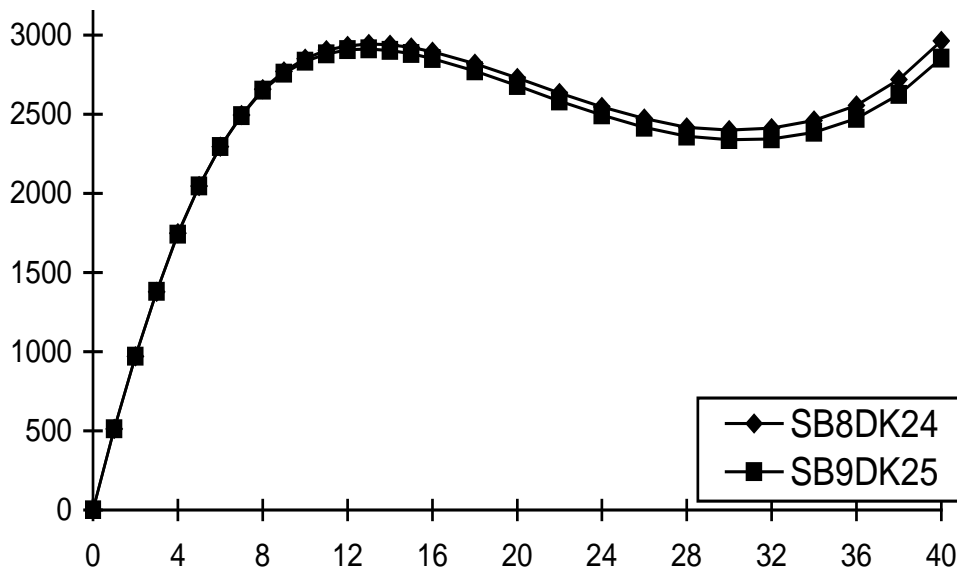


Figure IV-12. Effort " $P$ " en fonction du déplacement " $u$ " pour les solides-coques

Les résultats donnés par les éléments coques classiques ne sont pas affichés dans la figure IV-12 puisqu'ils sont pratiquement confondus avec ceux venant de l'élément solide-coque SB8DK24. Dans ce cas, l'élément SB9DK25 semble être un peu moins raide mais les résultats sont proches de ceux dans la référence [3].

## IV.C. Références

- [1] Batoz JL, Guo YQ, Mercier F. *The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts*. Engineering Computations 1998; **15**:864-892
- [2] Flores FG, Estrada CF. *A rotation-free thin shell quadrilateral*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2007; **196**:2631-2646
- [3] Macneal H, Harder L. *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite elements in Analysis and Design 1985; **17**:3-20
- [4] Razzaque, A. *Program for triangular bending element with derivative smoothing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1973; **10**: 333-343.
- [5] Sabourin F, Carbonnière J and Brunet, M. *A new quadrilateral shell element using 16 degrees of freedom*, Engineering Computations , 2009; **26**:500-540
- [6] Sansalone M. *A new formulation using complete 3D constitutive laws. Application to sheet metal forming simulations*. Thèse de doctorat 2011
- [7] Simo JC, Fox DD, Rifai MS. *On a stress resultant geometrically exact shell model Part 3: computational aspects of the non-linear theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1990; **79**:91-126

## V. Mise en forme explicite

<b>V.</b>	<b>Mise en forme explicite</b>	<b>V-1</b>
<b>V.A.</b>	<b>Forme incrémentale</b>	<b>V-2</b>
<b>V.B.</b>	<b>Principe des travaux virtuels</b>	<b>V-3</b>
<b>V.C.</b>	<b>Discrétisation par éléments finis</b>	<b>V-4</b>
V.C.1.	Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en statique	V-4
V.C.2.	Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique	V-5
<b>V.D.</b>	<b>Schéma d'intégration temporelle</b>	<b>V-5</b>
V.D.1.	Schéma explicite des différences finies centrées	V-6
V.D.2.	Calcul du pas de temps critique par la méthode $[M^{-1}].[K]$	V-7
V.D.3.	Amortissement des oscillations numériques	V-10
<b>V.E.</b>	<b>Non-linéarité due au contact</b>	<b>V-11</b>
V.E.1.	Pénalisation	V-11
V.E.2.	Projection dynamique	V-12
V.E.3.	Gestion de contact lors d'un amincissement de l'épaisseur	V-14
<b>V.F.</b>	<b>Conclusion partielle sur les éléments de type solide-coque</b>	<b>V-15</b>
<b>V.G.</b>	<b>Références</b>	<b>V-16</b>

L'emboutissage des tôles industrielles s'accompagne systématiquement des phénomènes de grands déplacements, de grandes déformations ou encore de contact unilatéral avec frottement de l'outillage rendant délicate la convergence de la solution d'un calcul en schéma implicite.

La résolution des problèmes fortement non linéaires de ce genre s'effectue assez facilement avec la méthode explicite d'intégration par rapport au temps, associée à la discrétisation spatiale par éléments finis. Cependant, au fur et à mesure de l'évolution des calculs, il n'y a pas, comme en schéma implicite, de test sur la précision que ce soit en terme d'efforts, de déplacements ou d'énergie.

Cette méthode a généralement la préférence des concepteurs de codes de calculs industriels - PAMSTAMP, par exemple. - destinés à résoudre des problèmes très fortement non linéaires comme l'emboutissage de tôles.

La méthode explicite, moins "pure" que la méthode implicite - en ce sens qu'il n'y a pas d'itération de correction d'équilibre après chaque incrément de chargement - permet justement de passer les caps difficiles d'un calcul incrémental : difficultés qui ne sont parfois que très localisées mais qui se traduisent par une impossibilité de convergence et donc par une absence de solution dans le cas d'un calcul implicite.

Les éléments « briques » de type solide-coque, particulièrement l'élément SB9γ25 formulé dans le chapitre I, sont utilisés dans cette méthode pour effectuer la simulation de cette mise en forme.

La méthode des différences centrées, une des méthodes utilisées dans le code explicite, sert à résoudre l'équation d'équilibre en dynamique dont la stabilité dépend du pas de temps critique  $\Delta t_c$  qui se calcule en pratique en fonction de la « longueur caractéristique » de l'élément d'étude.

Bien que la méthode de la « longueur caractéristique » soit assez simple d'utilisation, c'est la méthode  $[\mathbf{M}^{-1}].[\mathbf{K}]$  qui est préférée ici pour la détermination de ce pas de temps critique.

Ce choix a pour but de ne pas diminuer de manière prononcée ce pas de temps critique. Il faut donc avoir une distribution de la masse en translation sur les neuf nœuds de l'élément SB9γ25 qui diminue la plus grande valeur propre du produit matriciel  $[\mathbf{M}^{-1}].[\mathbf{K}]$ . Comme cet élément ne dispose pas de rotations, il ne sera pas question de distribution de masse en rotations ici.

## V.A. Forme incrémentale

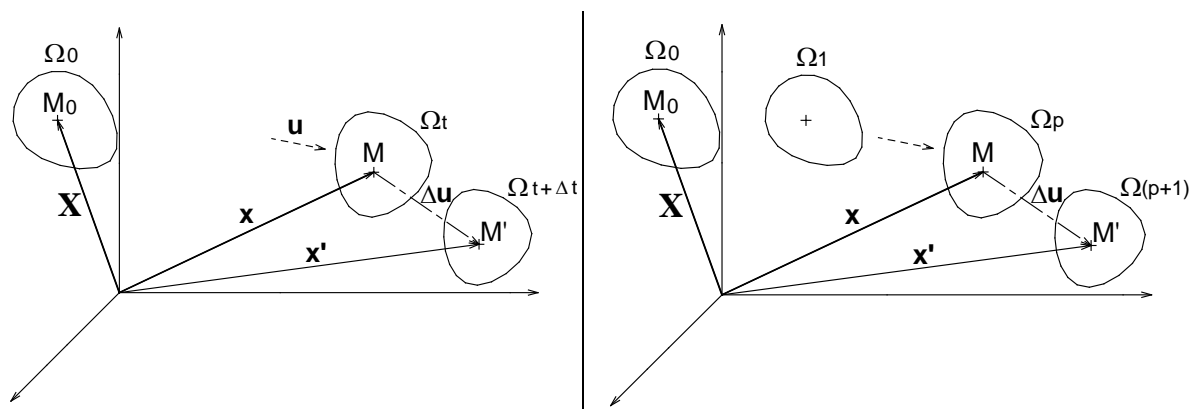


Figure V.1. Modélisation du problème de référence

Pour rappel, la formulation lagrangienne actualisée à chaque itération (FLAI) est décrite succinctement ici bien que largement décrite dans les ouvrages de mécanique de milieux continus.

## V.B. Principe des travaux virtuels

- Les tenseurs  $\mathbf{E}$  (Green-Lagrange) et  $\mathbf{S}$  (second tenseur de Piola-Kirchhoff) sont utilisés car "objectifs" (invariants dans une rotation de corps rigide) et énergétiquement conjugués. La relation suivante (V.1) traduit l'équilibre assuré à l'instant  $t$  :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{ext}}^{(t)} + \hat{\mathbf{P}}_{\text{int}}^{(t)} = 0 \Rightarrow \iiint_{\Omega_0} \mathbf{S}^{(t)} : \hat{\mathbf{E}}^{(t)} . d\vartheta_0 = \iiint_{\Omega_0} \rho_0 . \mathbf{f}^{(t)} . \hat{\mathbf{V}} . d\vartheta_0 + \iint_{S_{F_0}} \mathbf{C}_{N_0}^{(t)} . \hat{\mathbf{V}} . ds_0 \quad \text{où } \hat{\mathbf{E}}_{IJ} = \frac{1}{2} (\hat{V}_{k,I} x_{k,J} + x_{k,I} \hat{V}_{k,J}) \quad (\text{V.1})$$

- Aux accroissements de  $\mathbf{f}$  et de  $\mathbf{C}$  - qui deviennent  $\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f}$  et  $\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}$  - correspond l'étude de l'équilibre à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{\text{ext}}^{(t+\Delta t)} &= \hat{\mathbf{P}}_{\text{ext}}^{(t)} + \Delta\hat{\mathbf{P}}_e \\ \Delta\hat{\mathbf{P}}_e &= \iiint_{\Omega_0} \rho_0 . \Delta\mathbf{f} . \hat{\mathbf{V}} . d\vartheta_0 + \iint_{S_{F_0}} \Delta\mathbf{C}_0 . \hat{\mathbf{V}} . ds_0 \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

$$\mathbf{S}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{S}^{(t)} + \Delta\mathbf{S}$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{IJ}^{(t+\Delta t)} = \hat{\mathbf{E}}_{IJ}^{(t)} + \Delta\hat{\mathbf{E}}_{IJ}$$

$$\Delta\hat{\mathbf{E}}_{IJ} = \frac{1}{2} (\hat{V}_{k,I} \Delta u_{k,J} + \Delta u_{k,I} \hat{V}_{k,J}) \quad (\text{V.3})$$

- Compte tenu de la symétrie de  $\mathbf{S}$ , l'équilibre est assuré à l'instant  $t + \Delta t$  si :

$$\iiint_{\Omega_0} \Delta S_{IJ} . x_{k,I} \hat{V}_{k,J} . d\vartheta_0 + \iiint_{\Omega_0} S_{IJ} . \Delta u_{k,I} \hat{V}_{k,J} . d\vartheta_0 + \iint_{S_{F_0}} S_{IJ} . x_{k,I} \hat{V}_{k,J} . ds_0 = \hat{\mathbf{P}}_{\text{ext}}^{(t)} + \Delta\hat{\mathbf{P}}_e \quad (\text{V.4})$$

Ceci, après avoir négligé les termes en  $\Delta S_{IJ} . \Delta u_{k,I}$ ; ce qui constitue une approximation et oblige donc, même en l'absence de non-linéarité de comportement, à corriger l'équilibre par une ou plusieurs itérations après chaque incrément de chargement. En résumé :

- Le chargement, efforts et déplacements, est appliqué en plusieurs "incréments" ;
- L'équilibre étant réalisé après le "pas" (p) associé au temps t, cette configuration sert de référence pour la prédiction de l'équilibre au pas (p+1) associé au temps t+Δt
- Une correction de cet équilibre est éventuellement réalisée par des "itérations" (i) avant que cette configuration (p+1) serve de référence pour le pas de chargement (p+2)...

Un pas est donc constitué d'un incrément de chargement suivi d'itérations de correction d'équilibre. Un pas est franchi quand l'équilibre est considéré atteint.

- La configuration de référence n'est donc plus  $\Omega_0$  mais  $\Omega_t$  :

$$\Rightarrow \mathbf{x}_k, \mathbf{I} = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{X}_i} = \mathbf{x}_k, i = \delta_{ki} \text{ (Kronecker) et } S_{ij} = \sigma_{ij} \text{ (Cauchy) avec } \Delta S_{ij} \neq \Delta \sigma_{ij}$$

$$\iiint_{\Omega_t} \Delta S_{ij} \cdot \hat{V}_{i,j} d\vartheta + \iiint_{\Omega_t} \sigma_{ij}^{(t)} \cdot \Delta u_{k,i} \cdot \hat{V}_{k,j} d\vartheta + \iiint_{\Omega_t} \sigma_{ij}^{(t)} \cdot \hat{V}_{i,j} d\vartheta = \hat{P}_{ext}^{(t)} + \Delta \hat{P}_e \quad (V.5)$$

- En supposant que l'on puisse utiliser une loi de la forme :  $\Delta S_{ij} = C_{ijkl} \cdot \Delta u_{k,l}$  et en réécrivant (V.5) sous une autre forme, on obtient :

$$\iiint_{\Omega_t} \hat{V}_{i,j} \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta u_{k,l} d\vartheta + \iiint_{\Omega_t} \hat{V}_{k,j} \cdot \sigma_{ij}^{(t)} \cdot \Delta u_{k,i} d\vartheta = \Delta \hat{P}_e + (\hat{P}_{ext}^{(t)} - \iiint_{\Omega_t} \hat{V}_{i,j} \cdot \sigma_{ij}^{(t)} d\vartheta) \quad (V.6)$$

## V.C. Discrétisation par éléments finis

La Méthode des éléments finis permet d'approximer les fonctions solutions par sous domaines. Les sous domaines sont les éléments d'étude dont des points particuliers tels les sommets sont nommés nœuds.

### V.C.1. Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en statique

$$\iiint_{\Omega_t} \hat{V}_{i,j} \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta u_{k,l} d\vartheta \leftrightarrow {}^t \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{K}_L^{(t)} \cdot \Delta \mathbf{U} \text{ où } \mathbf{K}_L : \text{ partie "Linéaire" de la matrice } \mathbf{K} ; \quad (V.7)$$

$$\iiint_{\Omega_t} \hat{V}_{k,j} \cdot \sigma_{ij}^{(t)} \cdot \Delta u_{k,i} d\vartheta \leftrightarrow {}^t \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{K}_{NL}^{(t)} \cdot \Delta \mathbf{U} \text{ où } \mathbf{K}_{NL} : \text{ partie "Non Linéaire" de la matrice } \quad (V.8)$$

$$\Delta \hat{P}_e \leftrightarrow {}^t \hat{\mathbf{V}} \cdot \Delta \mathbf{F} \text{ où } \Delta \mathbf{F} : \text{ incrément de chargement entre } p \text{ (à } t) \text{ et } p+1 \text{ (à } t+\Delta t) ;$$

$$\hat{P}_{ext}^{(t)} - \iiint_{\Omega_t} \hat{V}_{i,j} \cdot \sigma_{ij}^{(t)} d\vartheta \leftrightarrow {}^t \hat{\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{F}^{(t)} - \mathbf{F}_{int}^{(t)}) \text{ où } (\mathbf{F}^{(t)} - \mathbf{F}_{int}^{(t)}) : \text{ "résidus" d'efforts à } t. \quad (V.9)$$

-  $\mathbf{F}_{int}^{(t)}$  représente les efforts qui, appliqués sur les nœuds de la structure à  $t$ , donneraient les contraintes  $\sigma_{ij}^{(t)}$  ; d'où l'indice "int" correspondant à "internes" ;

-  $\mathbf{F}^{(t)}$  représente les efforts appliqués ou les efforts de liaison calculés ;

Si l'équilibre, en fin d'incrément  $p$  ( $t$ ), est parfaitement réalisé, alors :  $\mathbf{F}^{(t)} = \mathbf{F}_{int}^{(t)}$ .

$$\text{D'où : } [\mathbf{K}_L^{(t)} + \mathbf{K}_{NL}^{(t)}] \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F} + (\mathbf{F}^{(t)} - \mathbf{F}_{int}^{(t)}) \quad (V.10)$$

La résolution de cette équation permet le calcul de  $\Delta \mathbf{U}$  puis de  $\Delta \sigma$  pour l'incrément de chargement  $\Delta \mathbf{F}$  et donc de  $\mathbf{U}^{(t+\Delta t)}$  ( $\mathbf{U}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{U}^{(t)} + \Delta \mathbf{U}$ ) et de  $\sigma^{(t+\Delta t)}$ .

-Si, juste après un **incrément** de chargement  $\Delta \mathbf{F}$ , la "différence" ( $\mathbf{F} - \mathbf{F}_{int}$ ) est jugée trop importante - suivant un critère donné -, une ou plusieurs **itérations** ( $i$ ) de correction d'équilibre sont imposées sans incrémenter le chargement.

En Formulation Lagrangienne Actualisée à chaque Itération (FLAI), l'équation pour l'itération  $i$  est :  $[\mathbf{K}_L^{(i-1)} + \mathbf{K}_{NL}^{(i-1)}] \delta \mathbf{U} = (\mathbf{F}^{(i-1)} - \mathbf{F}_{int}^{(i-1)})$  car  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{0}$  ; ce qui donne  $\delta \mathbf{U}$ . (V.11)

## V.C.2. Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique

La discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique en tenant compte du principe des travaux virtuels, est réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis formulée en déplacement comme montré précédemment.

On utilise ici les éléments « brique » de type solide-coque, élaborés dans le chapitre I, pour discrétiser la structure. En tout point P de l'élément, que ce soit le solide-coque SB8 $\gamma$ 24 ou SB9 $\gamma$ 25, les déplacements réels ou virtuels sont interpolés exactement comme précisé dans le chapitre I en fonction des déplacements nodaux réels ou virtuels.

L'équation d'équilibre dynamique pour toute la structure s'écrit donc :

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}^n\} + \{\mathbf{F}_{\text{int}}\} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} \quad (\text{V.12})$$

avec :  $\{\mathbf{F}_{\text{int}}\} = \sum_{\text{nel}} \int_{V_e} [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\sigma}\} dV_e$  : efforts internes ;

$$\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} = \sum_{\text{nel}} \int_{V_e} {}^T[\mathbf{N}]\{\mathbf{f}_v\} dV_e + \sum_{\text{nel}} \int_{S_e} {}^T[\mathbf{N}]\{\mathbf{f}_s\} dS_e \quad (\text{V.13})$$

$$[\mathbf{M}] = \sum_{\text{nel}} \int_{V_e} \rho {}^T[\mathbf{N}][\mathbf{N}] dV_e \quad \text{: masse de la structure ;}$$

où  $\sum_{\text{nel}}$  symbolise le passage des intégrales aux sommes discrètes sur l'ensemble du maillage.  $[\mathbf{B}]$  la matrice gradient reliant déformations et déplacements et où  $\{\mathbf{N}\}$  regroupe les fonctions de forme de l'élément.

Suivant le type de méthode d'intégration temporelle choisi, l'équation d'équilibre n'est pas développée sous la même forme.

Dans le cas d'une méthode explicite comme on le développe ici, l'équation d'équilibre est résolue à l'instant  $t_n$  et permet de calculer les déplacements à l'instant  $t_{n+1}$ .

Dans le cas d'un schéma implicite utilisé le plus souvent pour la précision des résultats ou éviter les oscillations comme dans le cas d'un retour élastique, l'équation d'équilibre est écrite à l'instant  $t_{n+1}$  et nécessite donc l'inversion d'une matrice pour déterminer les déplacements à l'incrément suivant.

## V.D. Schéma d'intégration temporelle

La simulation de l'emboutissage est un problème fortement non-linéaire où interviennent les grands déplacements, les grandes déformations et le contact (avec frottement ou non) comme on a eu à le dire précédemment. La phase de mise en forme, regroupant ces trois types de non linéarités, est modélisée dans cette étude en dynamique explicite.



## V.D.1. Schéma explicite des différences finies centrées

Ce schéma permet de calculer un vecteur inconnu à chaque instant  $t_n$ . Cette inconnue est ici le déplacement  $\underline{u}^n$ . L'algorithme explicite des différences finies centrées exprime les vitesses et les accélérations à l'instant  $t_n$  en fonction des déplacements. Les expressions des vitesses et des accélérations sont données par :

$$\{\dot{\underline{u}}^n\} = \frac{\{\underline{u}^{n+1}\} - \{\underline{u}^{n-1}\}}{2\Delta t} \quad (\text{V.14})$$

$$\{\ddot{\underline{u}}^n\} = \frac{\{\underline{u}^{n+1}\} - 2\{\underline{u}^n\} + \{\underline{u}^{n-1}\}}{\Delta t^2} \quad (\text{V.15})$$

En remplaçant les vitesses et les accélérations par leurs expressions dans la relation (V.12), on peut ensuite isoler les déplacements à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{M}]\{\underline{u}^{n+1}\} = \frac{2}{\Delta t^2} [\mathbf{M}]\{\underline{u}^n\} - \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{M}]\{\underline{u}^{n-1}\} + \{\mathbf{F}_{\text{ext}}^n\} - \{\mathbf{F}_{\text{int}}^n\} \quad (\text{V.16})$$

Pour un nœud libre de se déplacer dans la direction 'i', la relation (V.16) permet de calculer  $u_{(i)}^{n+1}$ . Pour un nœud à déplacement imposé dans cette direction,  $u_{(i)}^{n+1}$  est connu et (V.16) peut donner la composante de l'effort de liaison.

Ce schéma explicite est conditionnellement stable et du second ordre. Le pas de temps  $\Delta t$  ne doit pas dépasser le pas de temps critique  $\Delta t_{\text{cr}}$ . Les pas de temps choisis sont petits mais le calcul de l'état d'équilibre à chaque instant  $t_n$  est peu coûteux en temps. L'équilibre du système dépend uniquement de l'instant précédent et pas de l'inversion de la matrice puisque la matrice de masse est choisie diagonale.

Le pas de temps critique  $\Delta t_{\text{cr}}$  est donc estimé, comme on l'a annoncé précédemment, grâce à la plus grande valeur propre du système qui est calculée par la méthode de  $[\mathbf{M}^{-1}].[\mathbf{K}]$ . Avant de présenter cette méthode, il importe de noter que, bien qu'on ne calcule pas la plus grande valeur propre en pratique, la relation suivante (V.17) couramment utilisée pour le calcul du pas de temps critique provient de cette méthode pour une barre élastique en tension (traction/compression).

$$\Delta t_{\text{cr}} = l_{\min} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (\text{V.17})$$

Dans l'équation (V.17),  $E$  est le module de Young du matériau,  $\rho$  est sa masse volumique et  $l_{\min}$  est une longueur caractéristique (approximativement la plus petite dimension de l'élément) du maillage de la structure. Dans le cas des éléments « briques » de type solide-coque, c'est la plus petite dimension caractérisant le plus petit élément du maillage qui est choisie comme longueur caractéristique. Pour ce qui concerne les éléments solides-coques à **8 nœuds** utilisés dans ce document, c'est l'épaisseur de l'élément qui est considérée comme la longueur caractéristique si elle est inférieure à la plus petite longueur entre deux nœuds (voir listing donné).

## V.D.2. Calcul du pas de temps critique par la méthode $[\mathbf{M}^{-1}][\mathbf{K}]$

Pour calculer « proprement » le pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$  d'un élément fini, il faut nécessairement la matrice de masse  $[\mathbf{M}]$  qu'on choisit diagonale ainsi que la matrice de raideur élastique élémentaire  $[\mathbf{K}]$ , directement extraite du chapitre I présentant l'élément solide-coque SB9725. Après inversion de la matrice de masse de l'élément, le produit  $[\mathbf{M}^{-1}][\mathbf{K}]$  donne la matrice dynamique  $[\mathbf{D}]$ . Le calcul de la plus grande valeur propre de  $[\mathbf{D}]$  permet alors d'obtenir le pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$ .

En effet, par analogie avec une simple barre en traction-compression, la méthode de calcul du pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$  à partir d'une matrice de raideur  $[\mathbf{K}]$  et d'une matrice masse  $[\mathbf{M}]$  directement diagonale est :

$$[\mathbf{K}] = \frac{E.S}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{M}] = \frac{\rho.S.L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{D}] = [\mathbf{M}^{-1}][\mathbf{K}] = \frac{2.E}{\rho.L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (V.18)$$

La plus grande valeur propre de la matrice dynamique  $[\mathbf{D}]$  qui vient juste d'être calculée s'obtient en posant :

$$\lambda_2 = \frac{4E}{\rho L^2} = \omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (V.19)$$

La valeur du pas de temps critique  $\Delta t_{cr}$  devient donc :

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_2} \Rightarrow \Delta t_{cr} = L \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{1}{c} \cdot L \quad \text{où } c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (V.20)$$

On obtient ainsi la formule de la relation (V.17) qui est adoptée en pratique pour le calcul du pas de temps critique.

En fait, le calcul des valeurs propres pour la détermination du pas de temps critique étant consommateur de temps CPU, des méthodes d'approximation comme celle de la longueur caractéristique évoquée précédemment sont souvent utilisées. La méthode faisant intervenir le produit  $[\mathbf{M}^{-1}][\mathbf{K}]$  demeure cependant la seule permettant un calcul « propre » du pas de temps critique c'est-à-dire dépourvu de toute approximation, d'où le choix de cette méthode pour calculer le pas de temps critique du SB9725 mais uniquement lors du développement de cet élément.

La matrice de raideur  $[\mathbf{K}]$  étant celle déjà établie dans le chapitre I en version implicite, il faut disposer cependant de l'inverse de la matrice de masse pour procéder au calcul du produit matriciel entre ces deux matrices.

Plusieurs techniques existent pour diagonaliser la matrice de masse utilisée dans cette méthode de  $[\mathbf{M}^{-1}][\mathbf{K}]$ . Ces techniques et l'influence de la répartition de la masse de l'élément aux nœuds sur la valeur du pas de temps critique sont bien détaillées dans la thèse de Sansalone déjà maintes fois citée.

En effet, pour une matrice  $[\mathbf{M}]$  consistante de dimension  $n$ , la méthode la plus simple consiste à faire la somme des termes de chaque ligne et ainsi obtenir une matrice diagonalisée  $[\mathbf{M}^{diag}]$  :

$$M_{ij}^{\text{diag}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n M_{ik} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

Hughes [1] a proposé une méthode plus générale. Pour les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  d'un nœud d'un élément coque ou solide-coque comportant  $n$  nœuds, les termes diagonaux de la matrice  $[\mathbf{M}]$  de cet élément s'obtiennent en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] &= \int_{V_e} \rho \langle \mathbf{N} \rangle \langle \mathbf{N} \rangle dv \\ m^u &= \text{trace}[\mathbf{M}] \\ m^e &= \int_{V_e} \rho dv \\ M_{ij}^{\text{diag}} &= \frac{m^e}{m^u} M_{ij} \text{ pour } i = j ; 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

On obtient ainsi les termes diagonaux d'une matrice telle que l'énergie cinétique associée aux seuls déplacements nodaux  $\{\mathbf{U}_e\}$  du solide coque SB9 $\gamma$ 25 est de la forme :

$$E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{U}}_e \rangle [\mathbf{M}] \langle \dot{\mathbf{U}}_e \rangle \quad (\text{V.23})$$

Appliquée à l'élément SB9 $\gamma$ 25, cette recherche de valeur propre maximale montre que c'est la **demi épaisseur** de l'élément qui est la longueur caractéristique et non pas l'épaisseur elle-même comme pour l'élément à 8 nœuds du départ (SB8 $\gamma$ 24). Et encore faut-il bien répartir les masses aux nœuds ! Après de nombreux essais numériques, il s'avère que la répartition "optimale" est de déclarer **au nœud central une masse égale à la somme des masses en chacun des nœuds sommets**. On retrouve donc ce que Sansalone avait détaillé largement dans son mémoire de thèse [12] pour l'élément à 5 nœuds Q5 $\gamma$ 26 de type coque-solide.

On retrouve aussi le fait que le degré de liberté du nœud 9 étant une translation normale à la surface, la masse de l'élément dans cette direction vaut le double de celle dans les deux directions perpendiculaires, c'est-à-dire « dans le plan ». Ceci avait déjà été évoqué par Sansalone [12] et il avait été suggéré de travailler dans un repère local en chaque nœud dont un axe serait celui de la normale à la surface à la coque à cet endroit (moyenne pondérée par la surface des normales aux éléments connectés au nœud considéré) et dont les deux autres seraient perpendiculaires en prenant, par exemple, un axe parallèle au plan (X, Z) du repère global de la structure. Pour des raisons de coût en temps de calcul, cette suggestion n'avait pas été retenue par ESI lors de l'implémentation de l'élément Q5 $\gamma$ 26 dans PamStamp 2G.

Par la suite, les résultats obtenus dans des cas industriels donnant satisfaction, et compte tenu du manque de temps en cette fin de la présente thèse, l'implémentation dans les codes INSA s'est fait aussi le plus simplement possible, c'est-à-dire sans la notion de repère local en chaque nœud ; ce qui entrera dans le cadre des perspectives de travail à l'issue de cette thèse. A titre indicatif, la procédure calculant les masses en chaque nœud et le pas de temps critique est listée page suivante.

```

PROCEDURE matrice_masse_diagonale_structure(VAR deltat_c:DOUBLE);

VAR      numelt,i,j,k,l,m,n,o,p,q,s : INTEGER;
Xi,Yi,Zi,Xj,Yj,Zj,Xk,Yk,Zk,Xl,Yl,Zl : DOUBLE;
Xm,Ym,Zm,Xn,Yn,Zn,Xo,Yo,Zo,Xp,Yp,Zp : DOUBLE;
          ptelt : pointelt; {pointeurs sur éléments}
pts,pti,ptj,ptk,ptl,ptm,ptn,pto,ptp : pointnd; {pointeurs sur les noeuds}
          hmin,masseT,volumeT,aire0,h0 : DOUBLE;
          d : ARRAY[1..12] OF DOUBLE; {dist. entre nœuds sommets}

BEGIN
  FOR i:=1 TO nnds DO {initialisation masses aux nœuds}
    BEGIN
      pti:=ndeb^[i]; pti^.masse:=0.0;
    END;

  hmin:=1.0E09;
  FOR numelt:=1 TO nelts DO {boucle sur les éléments}
    BEGIN
      ptelt:=edeb^[numelt];
      i:=ptelt^.Ndelt[1]; pti:=ndeb^[i]; j:=ptelt^.Ndelt[2]; ptj:=ndeb^[j];
      k:=ptelt^.Ndelt[3]; ptk:=ndeb^[k]; l:=ptelt^.Ndelt[4]; ptl:=ndeb^[l];
      m:=ptelt^.Ndelt[5]; ptm:=ndeb^[m]; n:=ptelt^.Ndelt[6]; ptn:=ndeb^[n];
      o:=ptelt^.Ndelt[7]; pto:=ndeb^[o]; p:=ptelt^.Ndelt[8]; ptp:=ndeb^[p];
      s:=ptelt^.Ndelt[9]; pts:=ndeb^[s];

      Xi:=pti^.Cnoeud[1]; Yi:=pti^.Cnoeud[2]; Zi:=pti^.Cnoeud[3];
      Xj:=ptj^.Cnoeud[1]; Yj:=ptj^.Cnoeud[2]; Zj:=ptj^.Cnoeud[3];
      Xk:=ptk^.Cnoeud[1]; Yk:=ptk^.Cnoeud[2]; Zk:=ptk^.Cnoeud[3];
      Xl:=ptl^.Cnoeud[1]; Yl:=ptl^.Cnoeud[2]; Zl:=ptl^.Cnoeud[3];
      Xm:=ptm^.Cnoeud[1]; Ym:=ptm^.Cnoeud[2]; Zm:=ptm^.Cnoeud[3];
      Xn:=ptn^.Cnoeud[1]; Yn:=ptn^.Cnoeud[2]; Zn:=ptn^.Cnoeud[3];
      Xo:=pto^.Cnoeud[1]; Yo:=pto^.Cnoeud[2]; Zo:=pto^.Cnoeud[3];
      Xp:=ptp^.Cnoeud[1]; Yp:=ptp^.Cnoeud[2]; Zp:=ptp^.Cnoeud[3];

      volume_aire_element(Xi,Yi,Zi,Xj,Yj,Zj,Xk,Yk,Zk,Xl,Yl,Zl, Xm,Ym,Zm,
                          Xn,Yn,Zn,Xo,Yo,Zo,Xp,Yp,Zp,volumeT,aire0);

      ptelt^.volume:=volumeT; {volume de l'élément}
      ptelt^.aire:=aire0; {aire dans le plan local}
      h0:=VolumeT/aire0; {épaisseur de l'élément au centre}
      masseT:=ro*volumeT/8.0; {masse en chacun des neouds sommets}
      pti^.masse:=pti^.masse+masseT; ptj^.masse:=ptj^.masse+masseT;
      ptk^.masse:=ptk^.masse+masseT; ptl^.masse:=ptl^.masse+masseT;
      ptm^.masse:=ptm^.masse+masseT; ptn^.masse:=ptn^.masse+masseT;
      pto^.masse:=pto^.masse+masseT; ptp^.masse:=ptp^.masse+masseT;
      pts^.masse:=ro*volumeT; {masse au noeudd supplémentaire 9}
      d[ 1]:=SQRT((Xj-Xi)*(Xj-Xi)+(Yj-Yi)*(Yj-Yi)+(Zj-Zi)*(Zj-Zi));
      d[ 2]:=SQRT((Xk-Xj)*(Xk-Xj)+(Yk-Yj)*(Yk-Yj)+(Zk-Zj)*(Zk-Zj));
      d[ 3]:=SQRT((Xl-Xk)*(Xl-Xk)+(Yl-Yk)*(Yl-Yk)+(Zl-Zk)*(Zl-Zk));
      d[ 4]:=SQRT((Xi-Xl)*(Xi-Xl)+(Yi-Yl)*(Yi-Yl)+(Zi-Zl)*(Zi-Zl));
      d[ 5]:=SQRT((Xn-Xm)*(Xn-Xm)+(Yn-Ym)*(Yn-Ym)+(Zn-Zm)*(Zn-Zm));
      d[ 6]:=SQRT((Xo-Xn)*(Xo-Xn)+(Yo-Yn)*(Yo-Yn)+(Zo-Zn)*(Zo-Zn));
      d[ 7]:=SQRT((Xp-Xo)*(Xp-Xo)+(Yp-Yo)*(Yp-Yo)+(Zp-Zo)*(Zp-Zo));
      d[ 8]:=SQRT((Xm-Xp)*(Xm-Xp)+(Ym-Yp)*(Ym-Yp)+(Zm-Zp)*(Zm-Zp));
      d[ 9]:=SQRT((Xm-Xi)*(Xm-Xi)+(Ym-Yi)*(Ym-Yi)+(Zm-Zi)*(Zm-Zi));
      d[10]:=SQRT((Xn-Xj)*(Xn-Xj)+(Yn-Yj)*(Yn-Yj)+(Zn-Zj)*(Zn-Zj));
      d[11]:=SQRT((Xo-Xk)*(Xo-Xk)+(Yo-Yk)*(Yo-Yk)+(Zo-Zk)*(Zo-Zk));
      d[12]:=SQRT((Xp-Xl)*(Xp-Xl)+(Yp-Yl)*(Yp-Yl)+(Zp-Zl)*(Zp-Zl));
      FOR q:=1 TO 12 DO
        IF d[q]<hmin THEN hmin:=d[q];
      IF hmin>(h0/2.0) THEN hmin:=(h0/2.0); {longueur caract. mini}
      deltat_c:=hmin*SQRT(ro/Mat[1]*coef_dim); {pas de temps critique}
    END;
  END;
END;

```

### V.D.3. Amortissement des oscillations numériques

Pour amortir les oscillations de hautes fréquences lors d'un calcul numérique, il suffit d'introduire une matrice d'amortissement  $[C]$  dont l'écriture la plus classique est celle de Rayleigh faisant apparaître une combinaison des matrices de masse et de raideur. C'est cette formulation qui est généralement admise en numérique :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (V.24)$$

Dans l'équation du mouvement  $[M]\{\ddot{u}\} + \{F_{int}\} = \{F_{ext}\}$  s'ajoutent des forces d'amortissement proportionnelles à la vitesse permettant d'obtenir l'expression suivante :

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + [C]\{\dot{u}^n\} + \{F_{int}^n\} = \{F_{ext}^n\} \quad (V.25)$$

Le produit de la matrice  $[C]$  avec la vitesse  $\{\dot{u}^n\}$  introduit des forces d'amortissement visqueux. La contribution de la masse dans l'expression de l'amortissement, dont le poids est donné par le coefficient  $\alpha$ , peut s'interpréter comme une viscosité du milieu dans lequel évolue le modèle.

La contribution de la raideur est quant à elle l'image d'un amortissement du matériau lui-même. Dans le cas d'un comportement non linéaire, la matrice de raideur n'est pas explicitement construite et le concept d'amortissement exprimé ci-après doit être repensé. La contribution de la raideur dans l'amortissement peut s'interpréter comme un amortissement matériau de type visqueux créant une contrainte supplémentaire proportionnelle au taux de déformation total. La contrainte supplémentaire s'écrit alors classiquement sous la forme

$$\{\sigma_{damp}\} = \bar{\beta}[D_{el}]\{\dot{\varepsilon}\} \quad (V.26)$$

où  $\{\dot{\varepsilon}\}$  est le taux de déformation et  $[D_{el}]$  est la raideur élastique non amortie.

L'amortissement proportionnel à la masse est quant à lui beaucoup plus facile à interpréter puisqu'il apparaît directement dans le calcul des déplacements au pas suivant :

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{\alpha}{2\Delta t} [M] \right) \{u^{n+1}\} = \frac{2}{\Delta t^2} [M] \{u^n\} - \left( \frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{\alpha}{2\Delta t} [M] \right) \{u^{n-1}\} + \{F_{ext}^n\} - \{F_{int}^n\} \quad (V.27)$$

en posant :

$$[C] = \alpha[M]$$

Au lieu de gérer directement le paramètre  $\alpha$ , l'amortissement peut être imposé par le produit adimensionnel  $\alpha\Delta t$ . Les valeurs usuelles de ce produit sont comprises entre 0,01 (amortissement « fort ») et 0,0001 (amortissement « faible »).

## V.E. Non-linéarité due au contact

Contrairement aux éléments coques ou coques-solides où il convient de distinguer deux cas (pénétration du nœud de l'élément – doté de son épaisseur ! – dans un seul outil ou contact avec deux outils – pincement –), le contact des nœuds d'un élément solide-coque (à 8 ou 9 nœuds) ne peut se faire qu'avec un outil et la notion d'épaisseur associée n'est plus de mise.

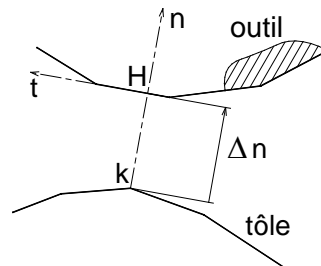
### V.E.1. Pénalisation

Dans les paragraphes suivants, seul le contact avec l'outillage est pris en compte. Pour les liaisons "classiques", c'est à dire les suppressions de certains degrés de liberté pour assurer l'équilibre de la structure ou imposer des symétries, une méthode habituelle de pénalisation est utilisée.

En occultant ici la notion de repère local, cette pénalisation consiste, pour imposer un déplacement  $\Delta U_i$  (ligne i dans la matrice-colonne des déplacements), à multiplier le terme diagonal  $K_{ii}$  (ligne i et colonne i) de la matrice de raideur par un "grand" coefficient (R). L'effort  $\Delta F_i$  - dans le second membre - est alors considéré connu et pris égal à  $\Delta U_i \times R$ .

Dans la méthode développée ici, la géométrie de la structure (tôle) n'est pas contrainte à suivre exactement celle de l'outillage ; ce sont des *efforts* judicieusement calculés qui sont appliqués à cette structure pour l'empêcher de pénétrer exagérément dans l'outillage.

En fait, à l'outil - indéformable et dont la position dans l'espace à l'instant t est connue - correspondent des "ressorts" de grande raideur agissant dans des directions privilégiées ; les *efforts* en question sont donc caractéristiques d'une légère pénétration.



**Figure V-1** Modèle du contact entre la structure et un outil

On peut imaginer un de ces ressorts comme un élément de longueur nulle connecté à un nœud (k) de la structure d'une part et à l'outil d'autre part au point H (voir figure V-1). Le support de l'effort exercé par la tôle sur ce ressort passe par k et, en l'absence de frottement, a pour direction une normale  $\vec{n}$  à une facette de l'outil.

Dans la configuration d'une mise en forme où on suppose que l'élément maillant la structure est en contact avec un seul outil comme précisé précédemment, la loi de comportement de cet élément particulier de raideur  $R_n$  est :

$$\Delta F_n = R_n \cdot (\Delta u_n - \Delta g_n) \text{ avec } \Delta \vec{F}_n = \Delta F_n \cdot \vec{n} \quad (\text{V.28})$$

Dans la relation (V.28), suivant la normale  $\vec{n}$  et par rapport à un repère global fixe, le déplacement de l'outil est noté  $\Delta g_{n,\vec{n}}$  et le déplacement du nœud k est noté  $\Delta u_{n,\vec{n}}$ .

Dès que le frottement est pris en compte, toujours en 2 dimensions, la loi de comportement devient :

$$\begin{aligned} \Delta F_n &= R_n \cdot (\Delta u_n - \Delta g_n) \\ \Delta F_t &= R_t \cdot (\Delta u_t - \Delta g_t) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Delta \vec{u}_k &= \Delta u_n \cdot \vec{n} + \Delta u_t \cdot \vec{t} : \text{tôle} \\ \Delta \vec{g}_H &= \Delta g_n \cdot \vec{n} + \Delta g_t \cdot \vec{t} : \text{outil} \end{aligned} \quad (V.29)$$

Si le frottement est "glissant" (Coulomb), on a :

$$F_t = \mu \cdot |F_n| \Rightarrow R_t = \frac{\mu \cdot |F_n|}{d_t} \quad \text{où} \quad d_t = \sum |\Delta_i u_t - \Delta_i g_t| \quad (V.30)$$

En trois dimensions, un repère local ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{n}$ ) est utilisé tel que, par exemple, l'axe  $\vec{x}$  reste parallèle au plan ( $\vec{X}, \vec{Z}$ ) du repère global fixe. Si  $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_n$  sont les efforts exercés par le nœud (k) sur l'élément "ressort", la formulation matricielle de cet élément est:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_t \cdot \Delta g_x \\ R_t \cdot \Delta g_y \\ R_n \cdot \Delta g_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_t & & \\ & R_t & \\ & & R_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_n \end{Bmatrix} \quad (V.31)$$

On a donc affaire à un "élément fini" dont, après changement de base, les coefficients de la matrice carrée sont assemblés avec ceux de la matrice globale de rigidité de la tôle tandis que les composantes d'efforts  $R_t \cdot \Delta g_x, R_t \cdot \Delta g_y$  et  $R_n \cdot \Delta g_n$ , après changement de base, sont ajoutées au second membre de l'équation  $[\mathbf{K}] \cdot \{\Delta \mathbf{U}\} = \{\Delta \mathbf{F}\}$ .

Avec  $\Delta n \cdot \vec{n}$ , la distance entre k et H en début d'incrément,  $\Delta \vec{g}_H$ , l'incrément de déplacement imposé pour l'outil et  $\Delta \vec{u}_k$ , le déplacement du nœud k calculé (connu en fin d'incrément), un critère géométrique de contact est :

$$-\Delta n + \Delta u_n - \Delta g_n > 0 \quad (V.32)$$

Une condition mécanique de rupture de contact est :  $F_n \leq 0$  où  $F_n = \sum \Delta_i F_n$

## V.E.2. Projection dynamique

Il y a plusieurs techniques de gestion de contact par projection dynamique et celle qui suit est développée dans le code explicite de l'INSA afin de traiter le contact des éléments coques (mais alors le nœud est doté d'une épaisseur) et coques-solides avec des carreaux NURBS (Non Uniform Rational Basis-Splines) générés par tout progiciel de DAO (entité 128). Cette technique est utilisée ici avec les nœuds des éléments solides-coques dotés seulement d'une masse.

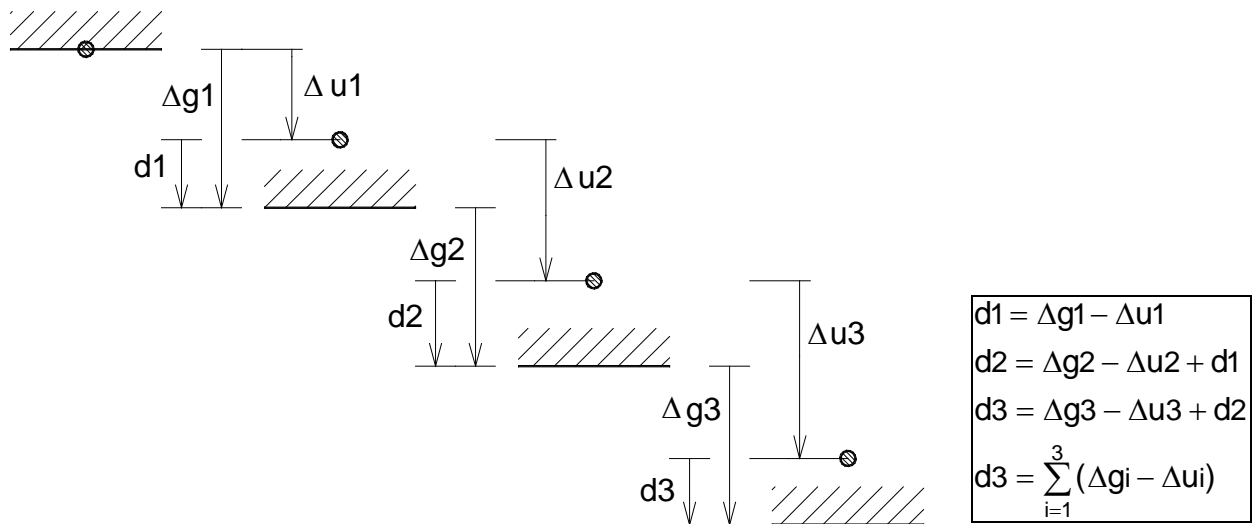


Figure V-2 Contact sur trois itérations

La "pénétration -  $d_i$ " d'un nœud de la structure dans l'outil après le pas  $i$  (voir figure V-2) est connue grâce à l'expression :

$$d_i = \sum (\Delta g_i - \Delta u_i) \quad (V.33)$$

Dans (V.33),  $\Delta g_i$  représente le déplacement de l'outil qu'on peut qualifier de déplacement de corps rigide et  $\Delta u_i$  est le déplacement du nœud  $i$  de la structure déformable (tôle).

Cette "pénétration" peut donc être directement utilisée pour calculer l'effort de contact, c'est-à-dire l'effort à appliquer au nœud pour le "ramener" sur la surface de l'outil au pas suivant ( $i+1$ ).

Pour y parvenir, la relation (V.25) donnée précédemment est résolue en appliquant au nœud  $k$  de l'élément (de masse  $m$ ) un effort de contact de la forme  $F_c = m \cdot \gamma$  où l'accélération  $\gamma$  est calculée en fonction de la pénétration ' $d_i$ ' pour que, dans un intervalle de temps  $\Delta t$ , le nœud se déplace de cette distance ' $d$ ' suivant la normale sortante à l'outil considéré [11].

Il y a en fait deux méthodes qui décrivent les efforts de contact dans cette projection dynamique. La première méthode nommée « méthode initiale » donne l'effort de contact  $F_c$  recherché (cet effort est noté  $F_n$  dans le paragraphe traitant 'la pénalisation') à partir de l'équation (V.25) où l'effet d'amortissement n'est pas pris en compte :

$$F_c = F_i + \frac{m}{\Delta t^2} (d^* - u_t + u_{t-\Delta t}) \quad (V.34)$$

Dans l'expression de la relation (V.34, on peut noter le déplacement  $U_t$  à l'instant  $t$ , le déplacement  $U_{t+\Delta t}$  à l'instant  $t+\Delta t$ , le déplacement  $d^*$  à imposer pour ramener ce nœud sur la surface à l'instant  $t + \Delta t$  et l'effort interne  $F_i$ .



La deuxième méthode dite « méthode modifiée » - principalement utilisée pour le contact avec le serre flan - définit un nouvel effort de contact par la relation:

$$F_c^* = \frac{m}{\Delta t^2} (d^* - u_t + u_{t-\Delta t}) \quad (V.35)$$

En effet dans (V.34), la valeur de l'effort  $F_c$  tend, au cours du temps vers celle de  $F_i$ . La valeur de  $d^*$ , très petite, n'est donc pas aisément exploitable numériquement ni pour le test géométrique de contact ni pour la gestion du déplacement du serre-flan.

Si on considère un mouvement uniformément accéléré de vitesse initiale  $v_0$  alors la pénétration est décrite par la relation  $d = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t$  à partir de laquelle on calcule l'accélération  $\gamma$  et donc l'effort  $F_c$  en l'absence d'amortissement. L'effort  $F_c^* \cdot \vec{n}$  n'est effectivement appliqué au nœud que si  $F_c^* > 0$ .

Si, au cours de la mise en forme, l'effort total exercé sur le serre-flan - par les nœuds en contact - dépasse l'effort de retenue (pression hydraulique, etc.) **déclaré**, les surfaces actives du serre-flan sont déplacées jusqu'à "égalité" de ces deux efforts.

Le calcul de cette nouvelle position du serre-flan est itératif mais le déplacement initial tient compte de la profondeur moyenne de pénétration des nœuds dans cet outil.

Lors de la simulation, si des frottements doivent être considérées alors pour tout nœud en contact avec un outil, l'effort au nœud a une composante normale de contact  $\vec{F}_n = F_c^* \cdot \vec{n}$  et une autre tangentielle  $\vec{F}_t$ .

Pour calculer cette force normale, il suffit de connaître la force de contact donnée par la « méthode modifiée » (V.35). Par contre le calcul de la force tangentielle nécessite de connaître au préalable la vitesse tangentielle  $\vec{V}_t$  au nœud par rapport à l'outil.

En fait, la vitesse du nœud par rapport à l'outil, à un instant  $t$ , est décomposée en vitesses normale et tangentielle :

$$\vec{V}_{/outil} = V_n \cdot \vec{n} + \vec{V}_t \quad (V.36)$$

Si  $\|\vec{V}_t\| > \varepsilon$  alors l'effort tangentiel recherché est :

$$\vec{F}_t = -\mu \cdot F_n \cdot \frac{\vec{V}_t}{\|\vec{V}_t\|} \quad (V.37)$$

### V.E.3. Gestion de contact lors d'un amincissement de l'épaisseur

Dans la thèse de Sansalone [12], la gestion de contact avec amincissement dans le cas de coques-solides à 5 nœuds a été détaillée en séparant bien le rôle du nœud central assurant l'amincissement de celui des nœuds sommets servant au repositionnement du plan moyen. Ceci ne sera pas repris ici.

## V.F. Conclusion partielle sur les éléments de type solide-coque

Avant une conclusion plus générale, est présentée ici une conclusion partielle quant à la **méthode** de développement d'éléments solides-coques avec une déformation linéaire à travers l'épaisseur.

Que ce soit sous l'hypothèse de Mindlin (*SB9 $\gamma$ 25*) ou celle de la théorie de Kirchhoff "discret" (*SB9DK25*) pour ces hexaèdres – dans tous les cas sous intégrés sauf dans la direction privilégiée de l'épaisseur –, une loi constitutive 3D complète est utilisée.

La principale caractéristique de cette méthode consiste à ajouter un nœud supplémentaire au centre de l'élément (initialement à 8 nœuds), nœud doté seulement d'un degré de liberté : une translation locale normale à la surface moyenne. Cette translation est dédiée à la déformation normale et il est possible d'agir sur le nœud supplémentaire, indépendamment des autres nœuds situés aux sommets, dans le but d'imposer un effort équivalent à une pression normale, par exemple. Cela fait la différence avec des éléments dotés de variables nodales supplémentaires sans signification physique (Enhanced Assumed Strain : EAS).

Il est à noter qu'il n'a pas suffi de partir d'un élément solide-coque à 8-nœuds – en l'occurrence le *ShB8PS* – et de lui adjoindre un nœud supplémentaire ; il a fallu au préalable en revoir la stabilisation, bien séparer membrane et flexion et, surtout, ajouter un champ assumé de cisaillement transversal pour obtenir l'élément *SB8 $\gamma$ 24* ou utiliser la flexion (sans cisaillement transversal) de l'élément coque *DKS16* afin de bâtir l'élément *SB8DK24* qui, lui, a imposé la stabilisation d'autres modes.

Comme cela a été dit auparavant, seule l'intégration réduite (« dans le plan ») est intéressante pour des calculs fortement non linéaires. Précisément, à propos de la stabilisation des modes à énergie nulle (dits "hourglass"), il n'y a rien de nouveau puisqu'elle est inspirée par les travaux de Belytschko ; même s'il y a des précautions à prendre et s'il faut étudier finement les modes à stabiliser restants, les techniques de stabilisation n'ont pas d'influence sur la méthodologie présentée ici.

En rapport direct avec ce chapitre, un inconvénient en terme de temps de calcul quand on passe d'un élément solide-coque à 8 nœuds à un élément solide-coque à 9 nœuds est la diminution du pas de temps critique malgré une répartition judicieuse des masses aux nœuds. C'est, à ce stade de l'étude, la contrepartie incontournable du fait de disposer d'un comportement 3D complet tout en assurant des résultats corrects dans les zones où la flexion est prépondérante.

## V.G. Références

- [1] BRUNET, M., *Modélisation numérique des grandes déformations élasto-plastiques avec contact et frottement - Application à la mise en forme des métaux*, Thèse de doctorat d'état, INSA de Lyon, 1987, 202 pages.
- [2] BRUNET, M., *A finite element analysis method for unilateral contact and friction problem involving finite strain and large displacements*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1988, volume 7, pages 209-220.
- [3] CAMPOS, L.T., ODEN, J.T., KIKUCHI, N., *A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatic*, Computer Methods Applied Mechanics, 1982, volume 34, pages 821-835.
- [4] CHARLIER, R., GODINAS, CESCOTTO, S., *On the modelling of contact problems with friction by the finite element method*, Proc. Int. Conf., SMIRT, Bruxelles, 1985.
- [5] CHARLIER, R., HABRAKEM, A.M., *On the modelling of tridimensional contact with friction problems in context of large displacements*, Proc. Int. Conf. NUMIFORM'86, Göteborg, 25-29 August 1986.
- [6] CHENG, J.H., KIKUCHI, N., *An analysis of metal forming processes using large deformation elasto-plastic formulations*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 1985, volume 49, pages 71-108.
- [7] GRISARD, L., *Modélisation bidimensionnelle de la mise en forme des tôles*, Thèse de doctorat en sciences appliquées, Université de Liège, 1993, 383 pages.
- [8] HUO, T., NAKAMICHI, E., *Evaluation of dynamic explicit / elasto viscoplastic finite element method in sheet forming simulation*, Int. Conf. Proc. NUMISHEET'93, Tokyo, 1993, pages 173-197.
- [9] KIKUCHI, N., SONG, Y.J., *Penalty / finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 1981, volume 3, pages 1-22.
- [10] SCHWEIZERHOF, K., WEIMAR, K., HALLQUIST, J.O., STILLMAN, D.W., *Improving standard shell elements, friction models and contact algorithms for the efficient solution of sheet metal forming problems with LS-DYNA3D*, Proc. Int. Conf. Simulation of 3D sheet metal forming, 14-16 May 1991, Zürich.
- [11] BOULMANE, L., *Application des techniques implicites-explicites de la dynamique transitoire à la simulation numérique de mise en forme des métaux*, Thèse de doctorat en sciences pour l'ingénieur, Université de Franche-Comté, 1994, 174 p.
- [12] Sansalone M. *A new shell formulation using complete 3D constitutive laws. Application to sheet metal forming simulations*. Thèse de doctorat – INSA de Lyon – Ecole doctorale MEGA – 2011

## VI. Mise en forme d'un 'U' et retour élastique

<b>VI.</b>	<b>Mise en forme d'un 'U' et retour élastique</b>	<b>VI-1</b>
<b>VI.A.</b>	<b>Mise en forme d'un 'U' par emboutissage</b>	<b>VI-2</b>
VI.A.1.	Le processus traditionnel d'emboutissage	VI-2
VI.A.2.	Inconvénients liés au procédé	VI-3
VI.A.3.	Protocoles de mise en forme par emboutissage au LaMCoS	VI-3
<b>VI.B.</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>VI-11</b>
VI.B.1.	Contexte	VI-11
VI.B.2.	Retour élastique	VI-11
VI.B.3.	Formes des emboutis non laminés après retour élastique	VI-11
VI.B.4.	Formes des emboutis laminés après retour élastique	VI-13
VI.B.5.	Efforts développés pendant la mise en forme	VI-14
<b>VI.C.</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>VI-15</b>
VI.C.1.	Forme du 'U' de Numisheet 93	VI-15
VI.C.2.	Forme 'U 2010'	VI-19
VI.C.3.	Forme 'U rouleau'	VI-22
<b>VI.D.</b>	<b>Comparaison des résultats</b>	<b>VI-29</b>
VI.D.1.	Résultats des expériences	VI-29
VI.D.2.	Remarques sur les résultats numériques	VI-30
VI.D.3.	Comparaison des efforts de mise en forme	VI-32
<b>VI.E.</b>	<b>Références</b>	<b>VI-33</b>

Vu la concurrence entre les constructeurs à qui importent énormément les aspects confidentiels de leurs pièces industrielles afin d'innover et d'être à même de rester compétitifs, il est difficile aux chercheurs de disposer des données industrielles réelles relatives à la mise en forme des « produits » provenant de ces constructeurs.

Afin de valider de manière expérimentale les solides-coques SB8 $\gamma$ 24, SB9 $\gamma$ 25, SB8DK24 et SB9DK25 formulés dans ce document pour la simulation des mises en forme avec un amincissement voulu de l'épaisseur des structures plates et minces, deux dispositifs pour emboutir sans et avec laminage, propriétés de LaMCoS, vont permettre d'avoir des résultats expérimentaux auxquels seront confrontés les résultats numériques fournis par les codes où sont implémentés ces éléments de type solide coque SB8 $\gamma$ 24, SB9 $\gamma$ 25, SB8DK24 et SB9DK25.

Cette comparaison, entre les résultats expérimentaux et numériques des formes obtenues par emboutissage (et des efforts développés) – avec et sans laminage – après le retour élastique, va permettre de valider définitivement ces éléments solides-coques si une similarité entre ces résultats est constatée.

Il n'est pas fortuit de présenter au préalable les dispositifs utiles aux opérations de mises en forme par l'emboutissage avant de procéder à l'analyse des résultats.

## **VI.A. Mise en forme d'un 'U' par emboutissage**

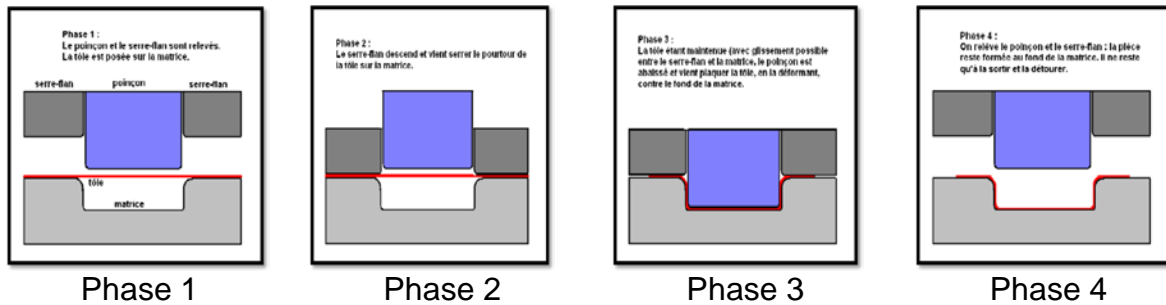
### **VI.A.1. Le processus traditionnel d'emboutissage**

Ce principe est fondé sur la déformation plastique à froid d'un produit initial plat (tôle) pour obtenir la forme souhaitée. L'emboutissage se pratique à l'aide de presses à emboutir de forte puissance munies d'outillages spéciaux qui comportent généralement trois pièces :

- une matrice, en creux, épouse la forme extérieure de la pièce
- un poinçon, en relief, épouse sa forme intérieure en préservant l'épaisseur de la tôle
- un serre-flan entoure le poinçon, s'applique contre le pourtour de la matrice et maintient la tôle pendant le processus créant aussi des efforts de retenue.

L'opération d'emboutissage classique se fait en 4 phases comme indiquées sur la figure V-1 ci-après :

- Phase 1 : poinçon et serre flan sont relevés. La tôle, généralement lubrifiée, est posée sur la matrice.
- Phase 2 : le serre flan est descendu et vient appliquer une pression bien déterminée, afin de maintenir la tôle.
- Phase 3 : le poinçon descend et déforme la tôle de façon plastique en l'appliquant éventuellement contre le fond de la matrice.
- Phase 4 : le poinçon et le serre flan se relèvent ; la pièce conserve la forme acquise (limite d'élasticité dépassée) au retour élastique près.



**Figure VI-1** Les quatre phases d'une opération d'emboutissage classique

## VI.A.2. Inconvénients liés au procédé

Un tel procédé nécessite de prendre des précautions et pose certains problèmes techniques :

- L'entrée de la matrice doit être très arrondie et polie pour éviter toute déchirure du métal et pour optimiser le comportement des zones de rétreint ; aucun angle ne doit être vif et un parfait état de surface est primordial : la mise au point de tels outils est une opération très spécialisée et très coûteuse notamment pour les pièces d'aspect.
- Une étude de retour élastique peut être nécessaire pour s'assurer de la possibilité d'assemblage final.
- Les opérations d'emboutissage posent de gros problèmes de frottement, d'usure et de lubrification.

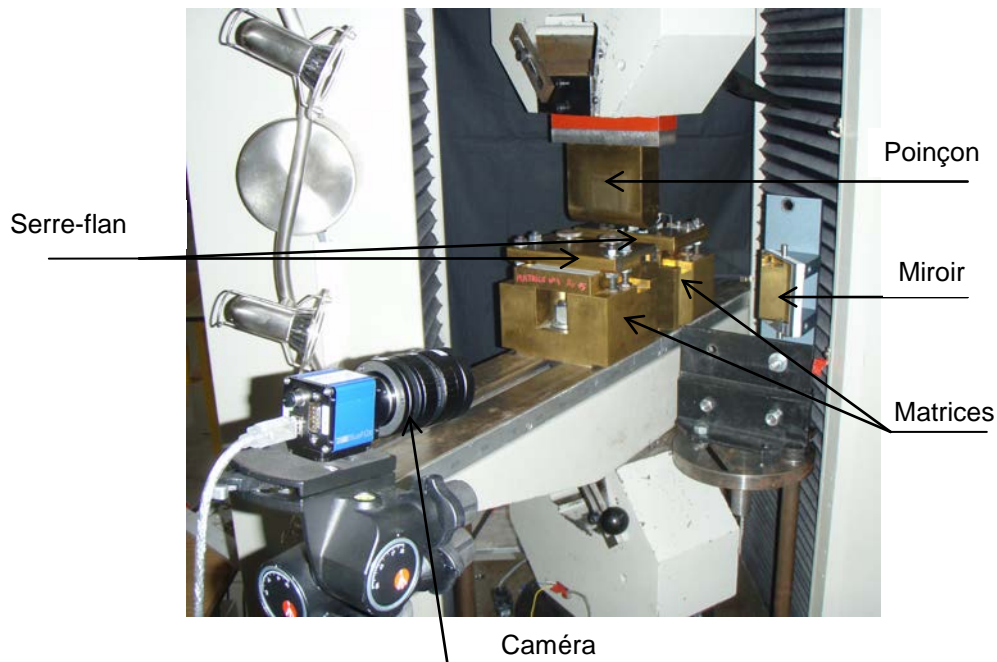
## VI.A.3. Protocoles de mise en forme par emboutissage au LaMCoS

### VI.A.3.a) Ancien montage

Depuis presque deux décennies, les opérations d'emboutissage 'simples' ainsi que d'autres opérations de mises en forme comme le pliage, le sertissage sont effectuées au laboratoire LaMCoS sur le dispositif expérimental [3] monté sur la machine de traction-compression SCHENK 250 KN (voir figure VI-2 ci-après).

L'outillage d'emboutissage, monté sur la machine de traction-compression, est composé :

- d'un poinçon solidaire du mors supérieur mobile de la machine de traction ;
- de deux blocs matrices mobiles sur le plateau du banc afin de permettre un jeu poinçon matrice variable ;
- de quatre plateaux matrices appairées supportant des rayons d'entrée matrice de 2, 4, 10 et 15 mm ;
- de deux serre-flans positionnés par des cales de surépaisseur et bloqués géométriquement par des écrous inférieurs et supérieurs. Ils n'exercent pas de pression sur la tôle ;
- d'une barrette de serrage sur un des serre-flans, qui peut être abaissée et bloquer le flan contre la matrice ;
- d'un capteur d'avalement monté sur l'autre serre flan.



**Figure VI-2** Montage de l'outillage sur la machine de traction

Grâce à ce dispositif, plusieurs campagnes d'expériences ont été menées pour l'analyse d'emboutissage et de retour élastique sur divers matériaux dont celles menées pour la thèse [2].

En définissant le paramètre « jeu sur épaisseur » comme le rapport du jeu entre le poinçon et la matrice par l'épaisseur de l'éprouvette, les conclusions tirées de [2] stipulent que plus le rapport jeu sur épaisseur est grand, plus prononcé est le retour élastique décrit par un rayon résiduel sur le mur de l'éprouvette après l'emboutissage (voir figure VI-3 ci-après, à droite).

### **(1) Influence du « jeu sur épaisseur » sur le rayon de courbure résiduel**

Pour connaître les rayons de courbure résiduels  $R_{res}$ , on identifie sur l'embouti trois zones présentant une histoire de déformation différente après avoir noté que  $R_m$  est le rayon d'entrée matrice,  $R_p$  est le rayon du poinçon et  $e$  l'épaisseur de l'éprouvette (figure V-3, à gauche) :

- La zone 1 est pliée à  $R_m + e/2$
- La zone 2 est pliée à  $R_m + e/2$  puis dépliée à l'infini
- La zone 3 est pliée à  $R_p + e/2$

Des mesures sont faites avec une machine tridimensionnelle (une méthode parmi d'autres) sur la seconde zone de l'embouti après le retour élastique. Une autre méthode consiste à numériser le profil de la pièce à l'aide d'un scanner et à mesurer le rayon de courbure à l'aide d'un logiciel CAO. Cette deuxième méthode sera utilisée pour évaluer l'influence du laminage sur le retour élastique dans le cas de notre étude (paragraphe V.B suivant).

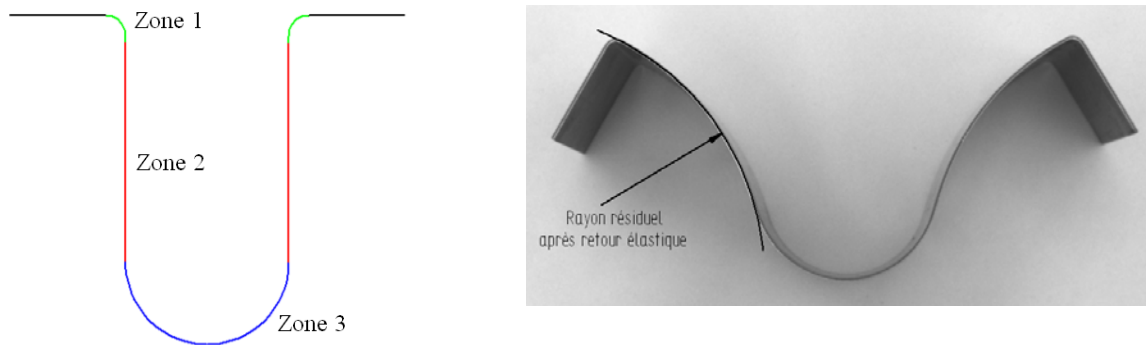


Figure VI-3 Zones de mêmes histoires de déformation et rayons résiduels des murs

## (2) Phénomène de rebond et rayon d'entrée matrice

Avec ce montage (figure VI-2), d'autres phénomènes influencent le retour élastique. On peut citer entre autres le phénomène de rebond dont il faut gérer le 'rayon de rebond' (voir figure VI-4).

Le retour élastique diminue pour des petits rayons d'entrée matrice [7] à cause du phénomène de rebond (figure VI-3 et VI-4). La tôle ne suit pas exactement la géométrie de l'entrée matrice car la déviation géométrique occasionnée est non négligeable devant la valeur du rayon. Pour les pliages sur les grands rayons, cette déviation devient négligeable et la tôle suit correctement l'outillage.

La figure VI-4 ci-après montre la formation d'un rayon de 'rebond' qui ne peut être mesuré avec précision mais dont l'estimation permet de dire qu'il est d'autant plus petit que le jeu sur épaisseur est faible. Cette courbure, inverse de celle du rayon matrice, diminue le retour élastique.

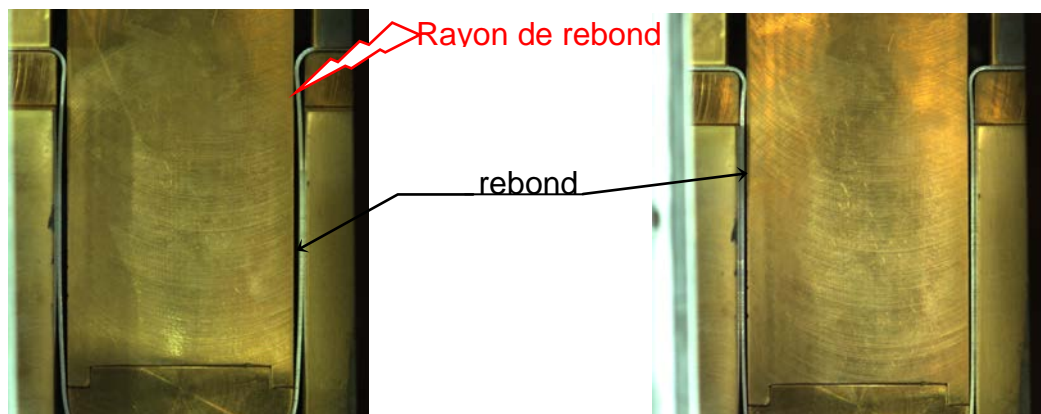


Figure VI-4 Phénomène de rebond

Dans [4] ont été évoquées les limites de ce dispositif expérimental (figure VI-4). Cet appareil n'a pas été conçu pour supporter des fortes charges comme lors de l'emboutissage avec laminage par exemple. Pour des jeux supérieurs à l'épaisseur, il n'y a pas de problème mais dès que ce paramètre doit être diminué pour assurer un emboutissage avec laminage alors les problèmes surgissent telle l'inadéquation du dispositif de serrage de la matrice sur les mors de la machine de traction. Il y a des risques de translation des parties de la matrice lors des opérations avec laminage.



Et comme les résultats donnés par les éléments finis élaborés dans ce document doivent être confirmés ou infirmés par des résultats issus des expériences d'emboutissage avec laminage (jeu poinçon-matrice inférieur à l'épaisseur de la tôle), il n'est pas indiqué d'utiliser l'appareil d'emboutissage décrit précédemment à cause des mouvements de translation dus aux glissements et au manque de rigidité [4].

Un nouveau dispositif a été conçu et fabriqué en 2010 [1] dans le but d'opérer des mises en forme qu'on voudrait accompagnées de la diminution d'épaisseur. En outre, il est prévu pour s'affranchir du coefficient de frottement difficile à quantifier. Cet appareillage, indiqué pour l'emboutissage avec laminage, est décrit ci-après.

### VI.A.3.b) Nouveau montage

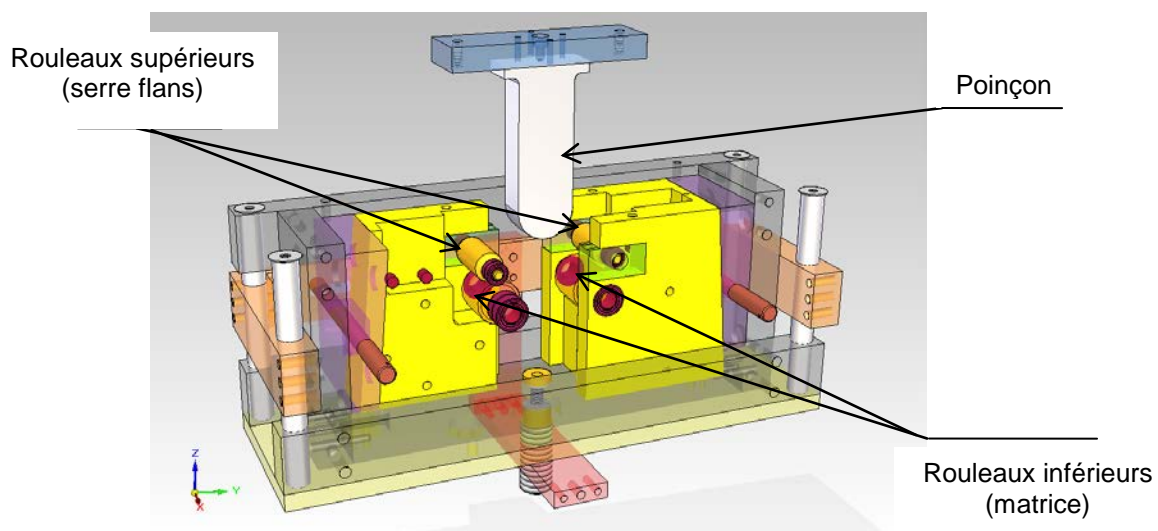
Ce dispositif expérimental (voir figure VI-5, VI-6 et VI-7) a été conçu et fabriqué lors du projet de fin d'étude de l'année 2010 [1]. Il est destiné aux expériences de mises en forme dont l'emboutissage avec laminage.

Les opérations d'emboutissage avec laminage vont être effectuées sur des pièces en alliage d'aluminium dans un premier temps pour éprouver la résistance à la pression et au matage de certains éléments roulants du dispositif (roulements, rouleaux...) et le poinçon.

L'alliage d'aluminium a été choisi puisqu'il présente des bonnes aptitudes à la déformation et donc au laminage en sollicitant relativement peu d'effort. Des efforts dont le maximum peut facilement être supporté par les éléments du dispositif.

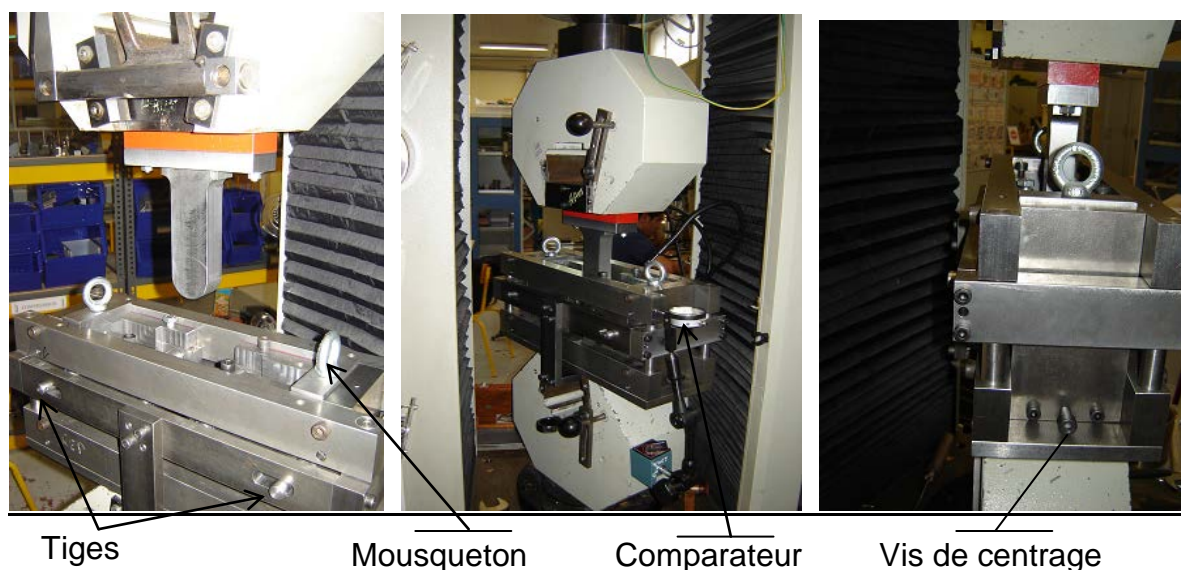
Et c'est justement le phénomène de roulement sans glissement de la tôle sur les rouleaux qui fait que le frottement entre tôle et matrice ainsi qu'entre tôle et serre flan ne sera pas pris en compte dans la simulation EF (Eléments Finis).

Les pièces embouties simplement ou embouties et laminées en même temps sont étudiées suivant les profils qu'elles présentent après retour élastique. C'est en fait l'étude du retour élastique de ces éprouvettes embouties qui est effectué.



**Figure VI-5** Dispositif d'emboutissage avec laminage

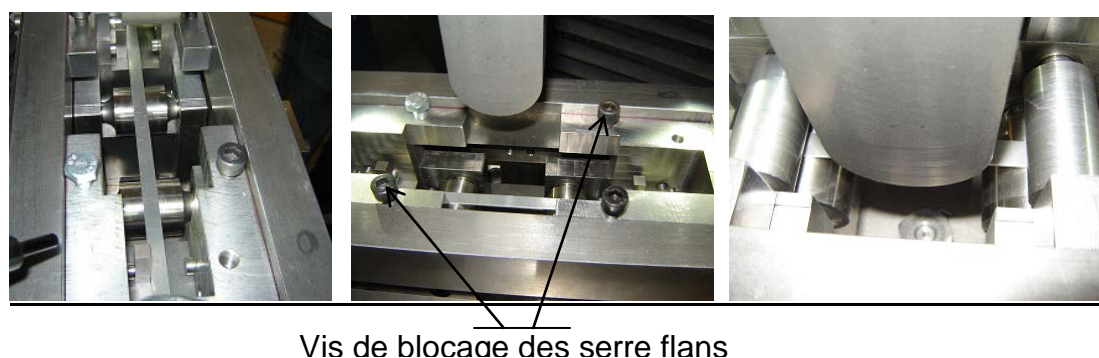
Sur la figure VI-5 sont indiqués clairement les composants essentiels qui participent à la mise en forme du type emboutissage. On peut positionner facilement le poinçon, les rouleaux inférieurs et les rouleaux supérieurs.



**Figure VI-6** Différentes vues du dispositif d'emboutissage avec laminage monté sur la machine de traction-compression SCHENK 250 kN

Les deux tiges indiquées sur la figure VI-6 ont pour rôle d'immobiliser les cales biseautées en translation verticale afin d'empêcher tout écartement des rouleaux inférieurs par rapport au poinçon lorsque leur position a été fixée. Les mousquetons permettent de retirer les cales, ce qui faciliterait le retrait de l'éprouvette emboutie. Les deux vis de centrage (une vis de chaque côté) rapprochent ou écartent les rouleaux inférieurs du poinçon lors du réglage du paramètre « jeu sur épaisseur ».

Sur la figure VI-7, ci-après, est montrée la mise en place de l'éprouvette et des rouleaux supérieurs préparant à une opération d'emboutissage. L'éprouvette est posée sur les rouleaux inférieurs puis sont montés les rouleaux supérieurs. Et l'opération d'emboutissage - avec ou sans laminage simultané - peut commencer en faisant descendre le poinçon.



**Figure VI-7** Opération d'emboutissage

La figure VI-8 montre la forme prise par l'éprouvette après cette opération d'emboutissage. Quelques précautions sont à prendre lors du retrait du produit (éprouvette emboutie). Ces précautions se résument à l'écartement des rouleaux

inférieurs avant de remonter le poinçon et libérer le flan embouti. Pour y parvenir, il faut retirer les tiges qui bloquent les cales biseautées (Figure VI-6), faire remonter ces cales et écarter les rouleaux supérieurs après dévissage des vis (Figure VI-7) qui bloquent ces rouleaux par rapport au bâti.



Figure VI-8 Eprouvette emboutie

### (1) Montage du dispositif

#### (a) Description

Sans entrer dans le détail descriptif de cette machine, par ailleurs bien fait dans [1], les principaux éléments à connaître dans cet appareil destiné, parmi d'autres opérations, à l'emboutissage avec et sans laminage sont : le poinçon, les deux rouleaux inférieurs faisant office de matrice et les deux rouleaux supérieurs servant de serre flans.

Avec des vis, le poinçon est rendu solidaire du mors supérieur mobile de la machine de traction compression SCHENK 250 kN du Laboratoire LaMCoS. Bien qu'il présente l'inconvénient de n'avoir aucune mise en position, ce système de fixation permet d'ajuster en rotation le poinçon par rapport au système.

En fixant sa course à 90 mm pour que la mise en forme soit correcte, le poinçon - de 50 mm de diamètre à son extrémité - emboutit une éprouvette en tôle de manière à avoir un pliage en forme de 'U'. Conçu et fabriqué dans un matériau très rigide (limite élastique : Z160 spécifique aux outils de mise en forme), il permet d'opérer des emboutissages accompagnés ou non de laminage suivant le besoin.

Les rouleaux inférieurs jouent le rôle de la matrice de ce système. Ils font partie intégrante de l'outil de mise en forme qui a l'avantage de centrer les éléments mobiles et d'assurer ainsi la symétrie essentielle à l'obtention d'un produit 'uniforme' et exploitable. Les deux rouleaux inférieurs (matrice) sont en liaison pivot avec le bloc. Leurs positions (écartement) peuvent être réglées par rapport au poinçon grâce à un système vis-écrou situé en dessous du bâti et de deux vis latérales.

Les serre-flans (rouleaux supérieurs) ne sont utiles qu'en emboutissage afin de donner une bonne forme en 'U' au flan (éprouvette). L'espace entre le rouleau inférieur (matrice) où repose l'éprouvette et le rouleau supérieur faisant office de serre-flan est légèrement plus grand que l'épaisseur de l'éprouvette afin d'assurer une mise en forme 'sans frottement'. Deux dispositions de montage de ces rouleaux serre flans permettent d'effectuer l'emboutissage des tôles de 1mm et de 2mm. Les serre flans sont immobilisés (sauf rotation), après montage, par vissage sur le bloc.

## (b) Mise en place

La première opération à réaliser est le réglage du jeu sur épaisseur ( $j/e$ ) : le poinçon est descendu entre les deux rouleaux inférieurs servant de matrice. Ces rouleaux sont ensuite mis en contact contre le poinçon. Le poinçon, solidaire de la traverse supérieure de la machine de traction, est fixé en rotation. Les deux rouleaux inférieurs (matrice) sont ensuite écartés légèrement afin de régler le jeu sur épaisseur grâce à des cales étalons. Ces cales permettent d'obtenir le jeu poinçon/matrice désiré.

On remonte le poinçon et on dépose une éprouvette (tôle rectangulaire plane) sur les deux rouleaux inférieurs. Puis on met en place les rouleaux supérieurs (serre flans) qui sont en liaison pivot avec le bâti. Ils reposent librement sur l'éprouvette. L'éprouvette, ainsi prise entre matrice (rouleaux inférieurs) et serre-flans (rouleaux supérieurs), peut être emboutie en faisant descendre le poinçon.

Pour une opération d'emboutissage sans laminage, il suffit de faire un centrage du dispositif au préalable en mettant en contact le poinçon et les rouleaux inférieurs. Puis on écarte légèrement les rouleaux du poinçon et avec des cales étalons on assure le jeu nécessaire pour que l'éprouvette soit emboutie sans être laminée. Le jeu à assurer est juste supérieur à l'épaisseur de la pièce à emboutir.

Et pour une opération avec laminage, après l'opération de centrage, on écarte les rouleaux du poinçon et on procède à un réglage de jeu utile à l'opération d'emboutissage accompagné de laminage par tâtonnement vu les multiples jeux propres au mécanisme qui se reportent automatiquement sur le produit final. En effet, sur le bâti qui semble être la partie du dispositif présentant le moins de jeu, on a pu mesurer avec un comparateur un jeu de  $7/100$  en appuyant fortement dessus avec la main. On peut imaginer les jeux que peuvent introduire les autres organes...

Vu l'importance des jeux qui ne sont pas encore maîtrisés, la procédure adoptée pour effectuer l'opération d'emboutissage avec laminage n'est pas du tout « industrielle » mais elle offre la possibilité d'obtenir des résultats exploitables. Ainsi on ne peut pas fixer au préalable un taux précis de laminage.

Avec un jeu d'environ  $0.5$  (cale étalon de  $0.5$ ) entre rouleaux et poinçon, on a un laminage d'environ  $26\%$ . Lorsque c'est une cale étalon de  $0.6$ , on a un laminage de  $19\%$  et en utilisant une cale de  $0.7$  on arrive à laminier à un taux de  $10\%$ . Il faut noter que toutes les éprouvettes utilisées, en alliage d'aluminium, ont une épaisseur de  $1.15\text{ mm}$  avec quelques rares fois des variations d'un centième de millimètre.

Les flans (éprouvettes) sont découpés aux dimensions  $270 \times 10\text{ mm}$  puis nettoyés à l'alcool. Les dimensions utiles (épaisseur, longueur et largeur) sont remesurés avant l'essai. Les mesures d'épaisseurs sont faites aux extrémités et au milieu de l'éprouvette pour s'assurer de leur quasi-uniformité.

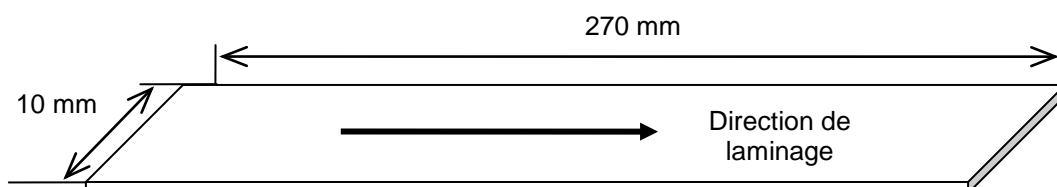


Figure VI-9 Géométrie des flans à emboutir

Il faut bien aligner l'éprouvette avec le profil du bloc supportant les rouleaux. Pour cela, des tétons de réglage ont été prévus et garantissent son bon alignement sans créer des désalignements pour l'éprouvette durant les expérimentations.

L'emboutissage proprement dit commence après cette procédure de mise en place. Un programme de pilotage permet de contrôler la vitesse de déplacement de la traverse, fixée à 10mm/min pour tous les essais, ainsi que les enregistrements simultanés de la course du poinçon (environ 90 mm), de l'avalement et de l'effort exercé verticalement par le poinçon (dépendant du taux de laminage).

Une fois l'opération terminée, avant de faire remonter le poinçon, il faut écarter les rouleaux pour que le poinçon n'entraîne pas la pièce emboutie lors de sa remontée. Une fois le poinçon remonté et les serre-flans retirés, l'embouti est extrait manuellement et délicatement pour ne pas fausser la forme du retour élastique. Trois essais sont réalisés pour chaque configuration pour assurer la répétabilité.

## **(2) Les vérifications à faire pendant les expérimentations**

### Translations des supports rouleaux

C'est une vérification importante à faire surtout lors d'une mise en forme nécessitant de très grands efforts comme l'emboutissage accompagné du laminage. Ces efforts vont avoir tendance à écarter les rouleaux qui vont repousser les cales inclinées (biseautées).

Après réglage, il faut vérifier que les cales inclinées ne remontent pas lors de l'opération d'emboutissage avec laminage afin d'assurer une uniformité du taux de laminage sur tout le « mur » de l'éprouvette. Comme ce contrôle est difficile à effectuer visuellement, il faut s'équiper d'un comparateur pour vérifier que la cale ne se déplace pas pendant l'expérimentation.

### Translation du bâti

Il a été dit précédemment qu'un petit effort exercé sur le bâti a fait déceler le rattrapage d'un jeu de l'ordre de 7/100. Il faut donc vérifier que le bâti ne se déplace pas pendant l'expérimentation (dévisser les vis de réglage en translation). Un mauvais centrage du poinçon entre les rouleaux entraînerait une dissymétrie des efforts.

### Mesure du laminage

Le réglage précis de la distance entre les rouleaux ne suffit pas pour déterminer précisément le taux de laminage de l'éprouvette. Il faut mesurer l'épaisseur avant et après l'expérimentation au pied à coulisse, par exemple.

## VI.B. Résultats expérimentaux

### VI.B.1. Contexte

Plusieurs expériences ont été menées avec le nouveau dispositif (figure VI-5) mais seuls les résultats – d'emboutissage sans et avec laminage – obtenus avec les éprouvettes de 270 mm de long, 10 mm de large et 1.15 mm en moyenne d'épaisseur, en alliage d'aluminium de nuance 6016 vont être exploités.

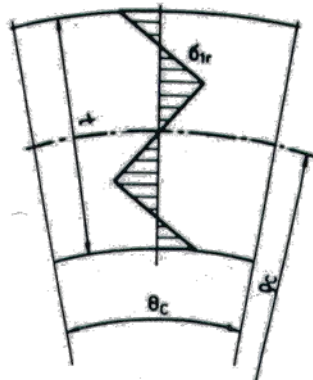
Ce sont les profils de ces emboutis qui sont étudiés pour évaluer l'impact du laminage sur le retour élastique.

### VI.B.2. Retour élastique

Après extraction des outils à la fin la mise en forme, la pièce ne garde pas la géométrie désirée, c'est le phénomène de retour élastique.

Des hétérogénéités de contraintes apparaissent dans la pièce (encore dans l'outil fermé) :

- dans l'épaisseur de la tôle après passage sur les rayons des outils ;
- entre des zones ayant subi des trajets de déformation différents sur la pièce.



**Figure VI-10** Visualisation des contraintes dans l'épaisseur du matériau après retour élastique

Lors de l'arrêt de la charge, ces contraintes se redistribuent pour obtenir un nouvel équilibre dans la pièce. La pièce « s'ouvre ». Ainsi, pour paramétrer le retour élastique, les grandeurs représentatives sont soit des variations angulaires, soit des rayons de courbure [2].

### VI.B.3. Formes des emboutis non laminés après retour élastique

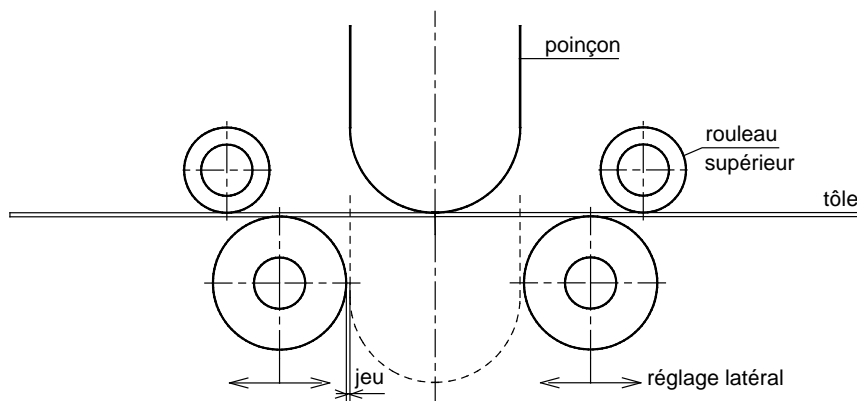
Sur le schéma ci-après (figure VI-11) est montré le réglage du jeu nécessaire à l'opération d'emboutissage ainsi que la position de la tôle entre les rouleaux inférieurs (matrice) et les rouleaux supérieurs (serre-flans).

Toutes les éprouvettes mises en forme (une forme en 'U') avec le nouveau dispositif d'emboutissage (figure VI-5) sont dénommées 'U rouleau' à cause de la forme – des rouleaux dans ce dispositif – de la « matrice ». Cette dénomination permet de les distinguer des autres formes de 'U' à savoir le 'U Numisheet' qui est un classique ayant été présenté au Congrès de Numisheet en 1993. Le troisième 'U',

nommé ici 'U2010' puisqu' ayant servi à une thèse achevée en 2010 [4], est la forme donnée aux éprouvettes grâce à l'ancien dispositif d'emboutissage (figure VI-2).

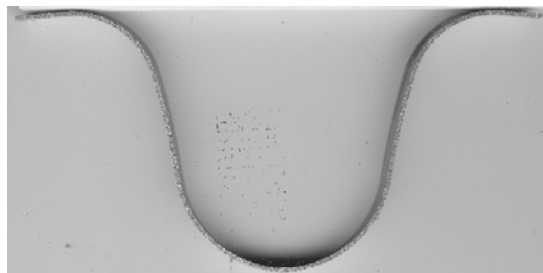
Les emboutis non laminés en question sont des éprouvettes auxquelles on a données une forme de 'U rouleau' comme sur la figure VI-12 et qui devraient garder leurs épaisseurs initiales.

Par rapport à ces emboutis non laminés, on pourra comparer des emboutis laminés afin d'évaluer l'influence laminage sur le retour élastique, du moins pour un taux donné.



**Figure VI-11** Schéma de l'opération d'emboutissage

Pour valider l'expérience, on vérifie la répétabilité des résultats en comparant trois éprouvettes embouties. Si les profils des trois éprouvettes 'identiques', embouties dans les mêmes conditions, se superposent alors peut exploiter ces résultats. Le profil d'un embouti peut être scanné (figure VI-12) afin de servir de référence pour des comparaisons avec emboutis laminés dans le prochain paragraphe.



**Figure VI-12** Eprouvette emboutie non laminée

On n'a pas beaucoup insisté sur les opérations d'emboutissage sans laminage car beaucoup des travaux ont été effectués les concernant, on peut citer entre autres travaux la thèse de Carbonnière [2].

Les produits obtenus lors de l'opération d'emboutissage sans laminage à partir des éprouvettes en alliage d'aluminium (6016) de 10 mm de largeur montrent effectivement qu'il y a retour élastique mais qu'on ne saurait quantifier ici

En fait, il est plus question de voir la tendance du retour élastique sur des éprouvettes ayant subies un emboutissage accompagné d'un laminage à un taux donné.

#### VI.B.4. Formes des emboutis laminés après retour élastique

Les emboutis dits laminés sont obtenus à partir des éprouvettes de mêmes dimensions que des emboutis non laminés (270 mm de long, 10 mm de large, 1,15 mm d'épaisseur). Pendant leur mise en forme, ils subissent en plus une opération de laminage qui consiste à volontairement diminuer leurs épaisseurs.

Les résultats issus de l'emboutissage avec laminage sont ceux qui nous intéressent le plus car ils vont permettre de valider les éléments solides coques SB9 $\gamma$ 25 et SB9DK25 qui possèdent un nœud supplémentaire en leurs centres afin de restituer correctement la déformation normale à travers l'épaisseur.

De plus, par l'utilisation de la loi de comportement complète 3D, la contrainte normale vraie peut ainsi être évaluée et permettre le calcul des efforts normaux équivalents à la pression.

Les résultats présentés (figure VI-13-a et b) sont ceux d'emboutis laminés à 10 % et 19 %. Un laminage à 26 % (figure VI-13-c) a aussi été effectué afin d'observer le comportement du retour élastique quand le laminage devient important.

Mais il faut noter que le but de laminier la tôle lors de l'emboutissage n'est pas d'en diminuer fortement l'épaisseur mais d'agir suffisamment pour diminuer le retour élastique. Le taux de 10% est déjà suffisant et les autres laminages montrés ici prouvent seulement les possibilités du dispositif expérimental.

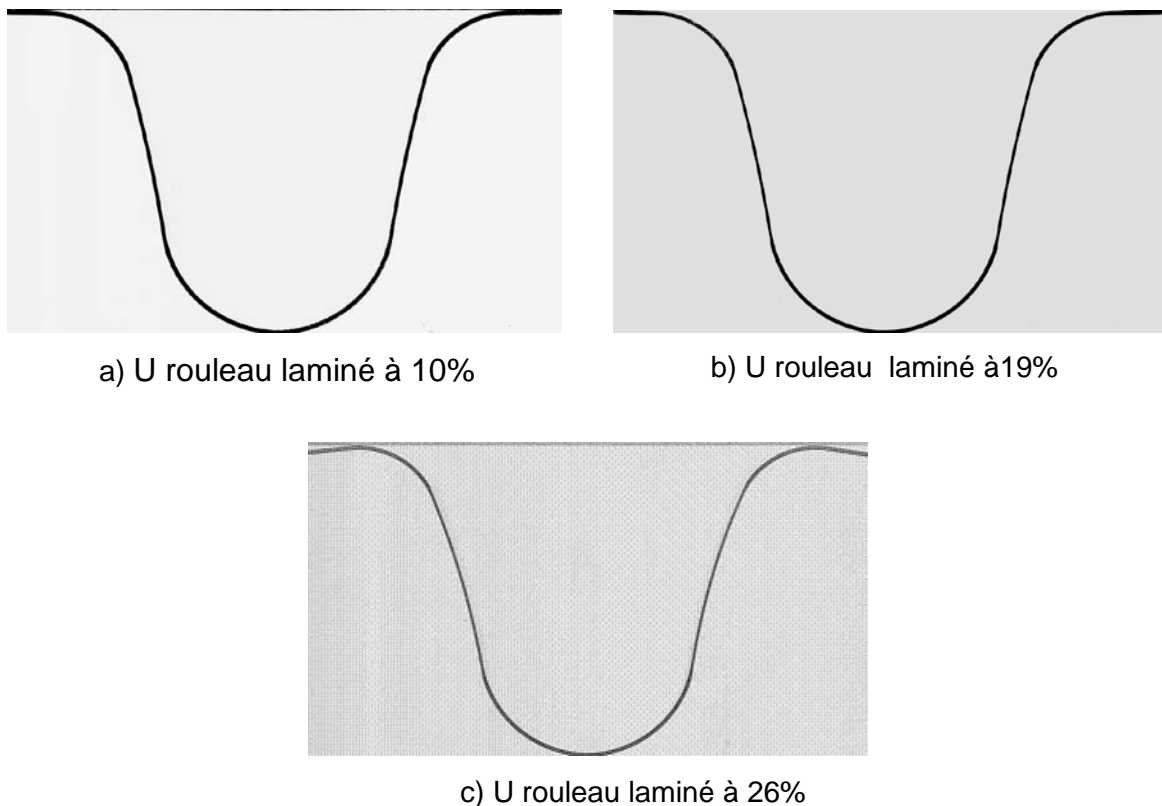


Figure VI-13 Eprouvettes embouties avec laminage



Suivant la progression du taux de laminage après une mise en forme d'emboutissage avec laminage, deux situations se présentent :

- La première concerne l'évolution « négative » du retour élastique lorsque le taux de laminage va de 10 à 19% (Figures VI-13-a et VI-13-b). En fait on constate visuellement que le retour élastique diminue quand on se rapproche de 19%.
- La deuxième situation montre qu'au-delà de 26% de laminage (peut être avant car on ne sait rien de ce qui se passe entre 19 et 26% de laminage), le retour élastique va croissant à cause peut être de l'affaiblissement du mur par un amincissement exagéré de l'épaisseur

### VI.B.5. Efforts développés pendant la mise en forme

Pendant le déroulement des expériences, l'acquisition des valeurs des forces de mise en forme avec laminage à 10 et 19 % (dénommées ici forces de laminage pour faire simple) a permis de tracer sous Excel les courbes ci après qui décrivent les efforts mis en jeu par la machine de traction compression de 250 kN (Figures VI-6), tout au long de la course du poinçon, pour emboutir et laminar à un taux de 10% une première éprouvette (Figure VI-14) et une seconde éprouvette à un taux de 19% (Figure VI-15)

Les deux courbes étant très chahutées, à cause des vibrations, des moyennes ont été tracées dessus. Elles ont la même tendance et peuvent être décrites par leurs deux paliers :

- Le premier palier qui semble être une courbe linéaire décrit le pliage de l'éprouvette entraînée vers le bas par le poinçon ;
- Le pic brutal d'effort correspond au début de laminage ;
- Le deuxième palier est un morceau de courbe pratiquement constante dénotant toute la phase de laminage. Le laminage se fait à un effort constant ;
- La dernière partie de la courbe correspond à la décharge des efforts de mise en forme. Elle est d'ailleurs sans intérêt.

#### Courbe de force de laminage à 10%

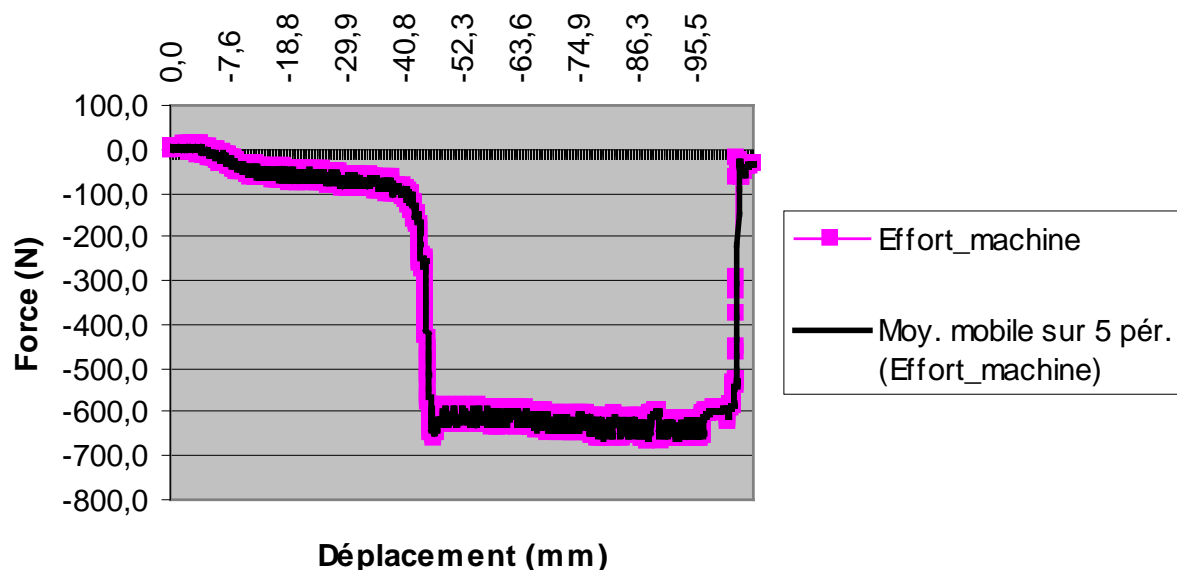


Figure VI-14 Evolution d'effort de laminage à 10%

## Courbe de forme de laminage à 19 %

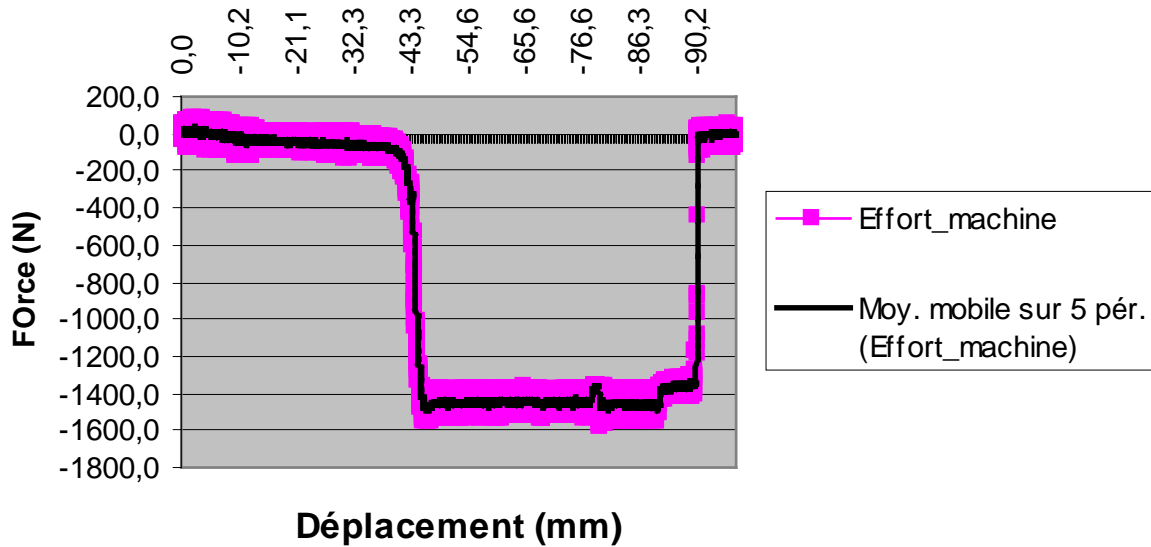


Figure VI-15 Evolution d'effort de laminage à 19%

On peut noter que l'effort devient important quand le taux de laminage augmente. En effet, à un taux de **10 %** correspond un effort de laminage avoisinant **650 N** (Figure VI-14) et lorsqu'on impose un laminage à **19 %** alors l'effort à développer est de l'ordre de **1550 N**.

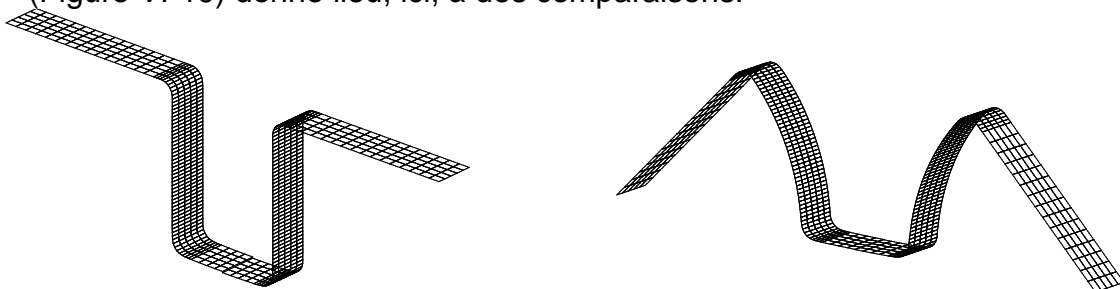
Dans le paragraphe qui suit, les forces dans la simulation numérique de la mise en forme de 'U rouleau' permettront de tracer des courbes d'efforts de laminage. Ainsi une comparaison pourra être faite et des conclusions tirées.

## VI.C. Résultats numériques

### VI.C.1. Forme du 'U' de Numisheet 93

Les données et les résultats expérimentaux correspondent au test proposé au congrès NumiSheet'93 ; test devenu depuis une référence car, entre autres, il met bien en évidence l'influence du type d'élément ou de la densité du maillage sur les résultats du retour élastique de cette mise en forme.

Il s'agit de donner la forme d'un 'U' avec un fond plat (Figure VI-16-a) à une simple bande de tôle de largeur 35 mm et de longueur 350 mm. Après retrait des outils, la forme en 'U' n'est pas conservée (Figure VI-16-b). Plusieurs paramètres (rayons, angles, distances) rendent compte de cette modification de forme mais seul le rayon « R » (Figure VI-19) donne lieu, ici, à des comparaisons.



a - Forme en 'U' juste après l'emboutissage      b - Forme en 'U' après le retour élastique  
**Figure VI-16** Forme en 'U' avec un fond plat ou 'U Numisheet 93'

### VI.C.1.a) Données

#### - Matériau :

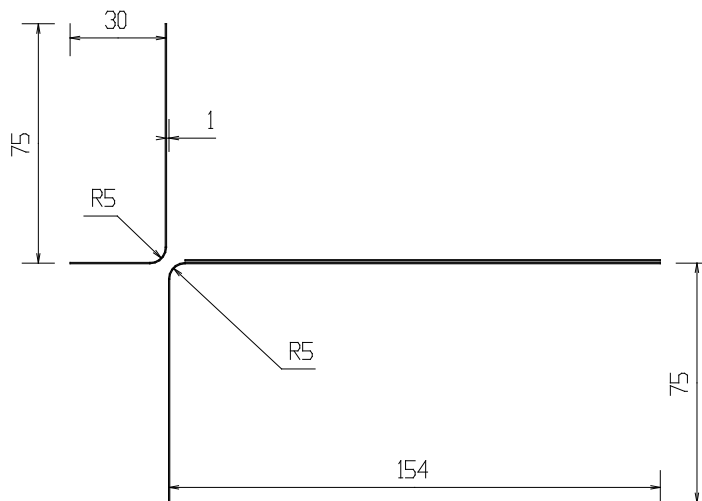
- alliage d'aluminium :  $E = 71000 \text{ Mpa}$  ;  $\nu = 0.33$  ;
- paramètres de *Lankford* :  $r_0 = 0.71$  ;  $r_{45} = 0.58$  ;  $r_{90} = 0.7$  ;
- écrouissage :  $\sigma = 576.79 \times (0.01658 + \varepsilon^p)^{0.3593}$  .

#### - Maillages :

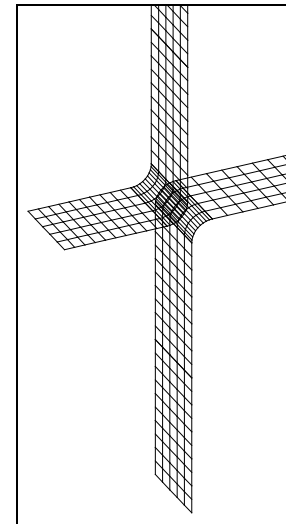
- seul un quart de la structure est étudié du fait des deux symétries ;
- **le pas du maillage** du flan dans la largeur est de 3.5 mm et **varie dans le sens de la longueur suivant 4 cas : 1.5 mm, 2.5 mm, 3.5 mm et 5 mm.**

#### - Outillage :

- effort de serrage du serre flan = 2.45 kN pour le flan complet ;
- coefficient de frottement entre flan et outils = 0.162 .
- jeu de 1 mm entre poinçon et matrice (voir figure suivante).



a - Description 2D



b- Surfaces des outils

**Figure VI-17** Outillage pour l'emboutissage d'une forme en 'U'

#### - Paramètres :

- vitesse de descente du poinçon : 5 m/s ;
- masse volumique :  $2.6 \times 10^{-6}$  (égale à celle du matériau) ;
- pas d'amortissement déclaré.

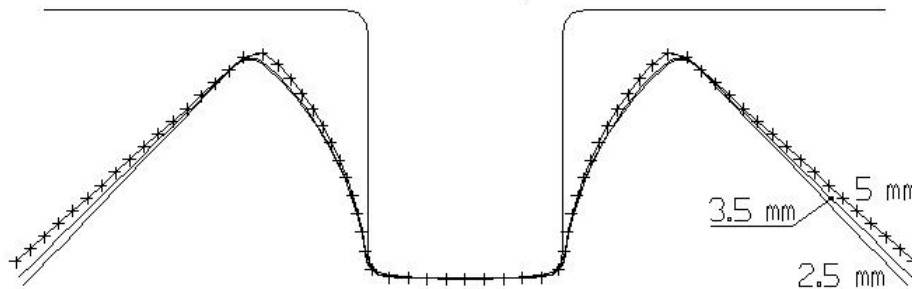
### VI.C.1.b) Résultats pour différents éléments et finesse de maillage

La valeur moyenne du rayon résiduel obtenue à partir des expérimentations effectuées pour le Congrès de Numisheet 93 est de **88,7 mm** dans les proceedings de ce congrès reprise dans l'Annexe V du photocopié de Calcul des structures par éléments finis dont les auteurs sont Sabourin Francis et Emmanuelle SALLE [6]

### (1) Avec l'élément Rotation Free 'S3'

Pour un pas de maillage de 2.5 mm avec l'élément 'Rotation Free S3', ce rayon est de **85,85** mm et avec 3.5 mm le rayon résiduel passe à **86,30** mm (Figure VI-18). Ces résultats sont tirés de l'Annexe VIII du polycopié de Calcul des structures par éléments finis [6] où il est montré que le rayon résiduel reste correct jusqu'à 5 mm.

On sait d'ailleurs, à partir de la référence [5], que l'élément 'S3' est très peu sensible au maillage et les résultats numériques obtenus, pour des calculs effectués avec cet élément sont proches de l'expérimental.

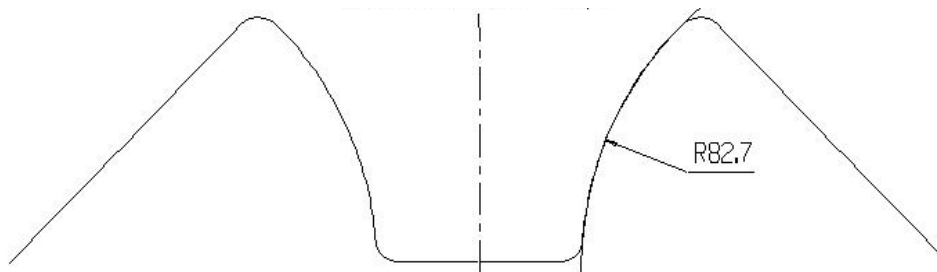


**Figure VI-18** Retours élastiques de 'U Numisheet 93' simulés avec l'élément 'Rotation Free S3' (découpages : 2.5, 3.5, 5 mm)

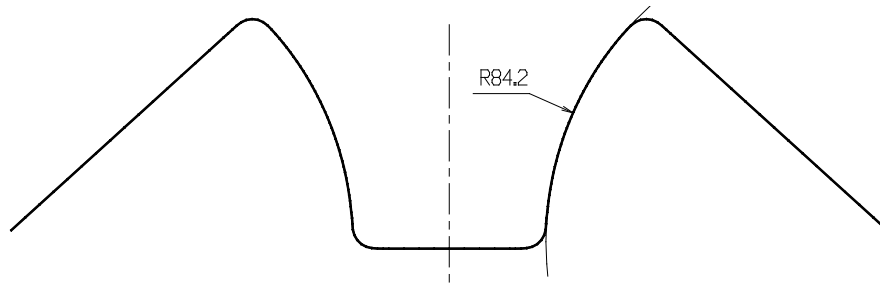
### (2) Avec les éléments solides-coques SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25

Pour une vitesse de 2 m/s pendant l'emboutissage et un maillage de 1.5x3.5 effectué avec l'élément de type solide-coque SB8 $\gamma$ 24 (figure VI-19) puis avec l'élément SB9 $\gamma$ 25 (figure VI-20), les rayons résiduels après la simulation du retour élastique sont respectivement **82,7** mm de **84,2** mm, des résultats qui se trouvent non loin de l'expérimental et bien proches de la valeur numérique donnée par l'élément coque triangulaire 'S3'.

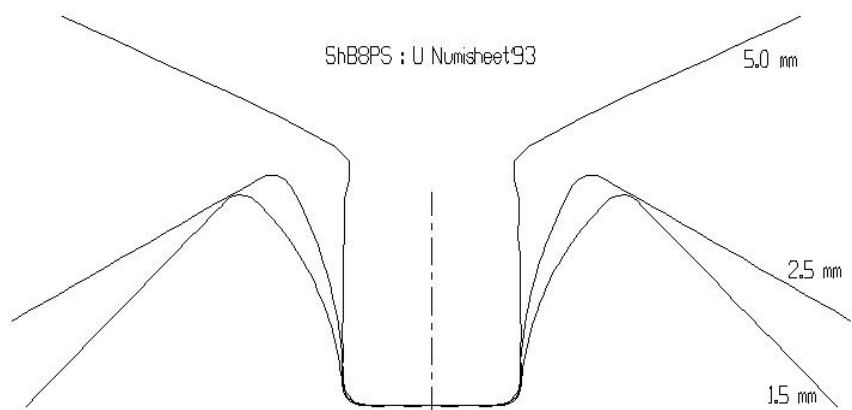
Il faut cependant noter que les éléments SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25 sont très sensibles au maillage. En effet, quand la dimension de la maille croît le retour élastique diminue et on voit même apparaître un phénomène contraire au retour élastique (figure VI-21).



**Figure VI-19** Retour élastique de 'U Numisheet 93' simulé avec l'élément solide-coque SB8 $\gamma$ 24 (pas de maillage : 1.5 mm)

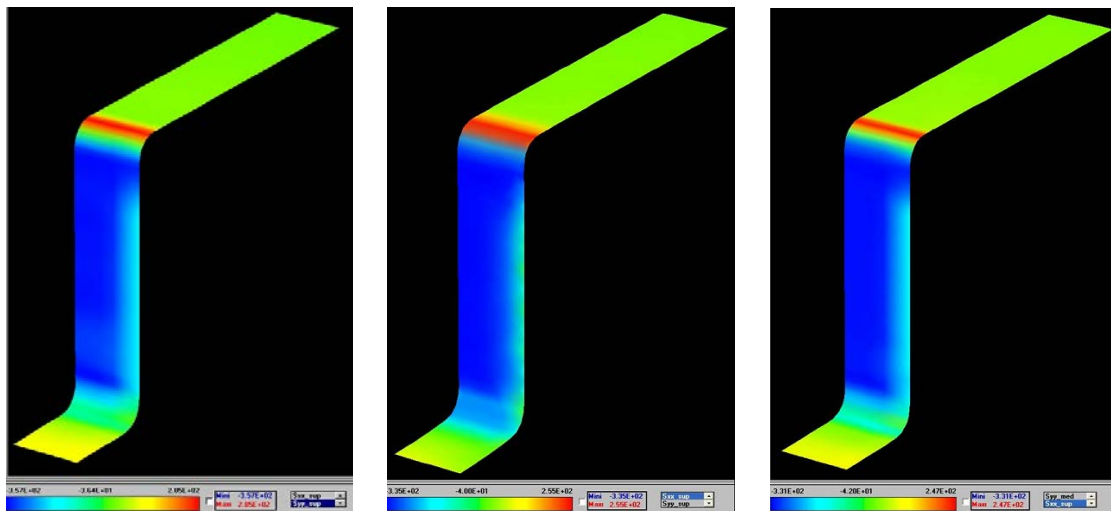


**Figure VI-20** Retour élastique de 'U Numisheet 93' simulée avec l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25 (découpage : 1.5mm)



**Figure VI-21** Retour élastique de 'U Numisheet 93' simulé avec l'élément solide-coque 'ShB8PS' (maillages : 1.5, 2.5 et 5 mm)

### (3) Contraintes dans les éléments 'S3', SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25



$\sigma$  en peau supérieure  
- 357 MPa (SB9 $\gamma$ 25)

$\sigma$  en peau supérieure  
-335 MPa (élément S3)

$\sigma$  en peau supérieure  
-331 MPa (SB8 $\gamma$ 24)

**Figure VI-22** Contraintes dans le mur (en peau supérieure)

Dans cette figure VI-22, est dessinée la répartition des contraintes suivant la direction du profil sur la peau supérieure donnée par chaque élément (SB9 $\gamma$ 25, S3 et SB8 $\gamma$ 24) à la fin de la mise en forme. Cette répartition montre une même tendance et des

valeurs (extrema) pas si différentes. Les solides – coques restituent des contraintes voisines à celles que donne l'élément 'S3' quand le maillage est suffisamment dense.

**N.B.** En deçà de la plus petite valeur de la finesse de maillage précisée dans tous les cas précédents, les formes obtenues après retour élastique ne varient plus.

## VI.C.2. Forme 'U 2010'

### VI.C.2.a) Données

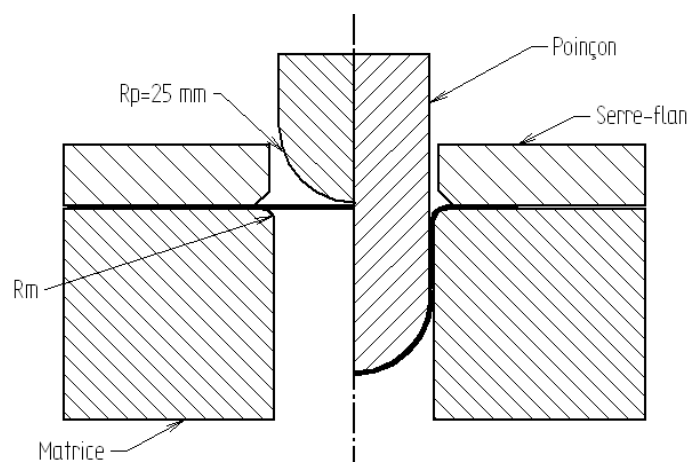
Contrairement à l'exemple précédent, le poinçon a une extrémité incurvée ( $R_p = 25$  mm) et il n'existe aucune force serre-flan, un jeu de 0,01 mm étant maintenu entre l'éprouvette et le serre-flan (Figure VI-23). Le rayon d'entrée matrice  $R_m$  est égal à 10 mm. Le jeu entre la matrice et le poinçon est de 3,0 mm (0,5 mm de jeu plus l'épaisseur de l'éprouvette) pour la mise en forme sans laminage, puis on réduit ce jeu à 2,3 mm (0,2 mm de moins que l'épaisseur de la tôle) pour le cas de la mise en forme avec laminage, c'est-à-dire avec un phénomène d'amincissement de l'épaisseur au cours des 102 mm de course du poinçon (avec une vitesse de 2,5 m/s). Le coefficient de frottement entre le serre-flan et l'outillage est estimé à 0,1.

Les données matérielles de l'éprouvette en alliage d'aluminium (300 mm de long, 10 mm de large et 2.5 mm d'épaisseur) sont :  $E = 69$  GPa,  $\nu = 0.32$ ,  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup>, coefficients de Lankford :  $r_0 = 0.66$ ,  $r_{45} = 0.82$ ,  $R_{90} = 0.69$  et un écrouissage combiné défini par:  $\sigma_0 = 159$  MPa,  $Q = 268.8$  MPa,  $b = 12.9$  pour la partie isotrope ( $\bar{\sigma} = \sigma_0 + Q(1 - e^{-b\bar{\epsilon}^p})$ ) et  $C = 258.7$  MPa,  $\gamma = 1.78$  pour l'aspect cinématique

( $\{d\alpha\} = C \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \{\sigma - \alpha\} - \gamma \{\alpha\} d\bar{\epsilon}^p$ ,  $\alpha$  représentant le déplacement de la surface de charge

dans l'espace des contraintes). L'identification a été effectuée avant le procédé d'emboutissage grâce à certaines procédures détaillées dans [2].

À propos des résultats numériques, même si la simulation surestime légèrement le retour élastique, des résultats satisfaisants sont obtenus (figure VI-27-b). Surtout, un léger amincissement de l'épaisseur dans le mur (8% de laminage)) contribue à faire diminuer le retour élastique.

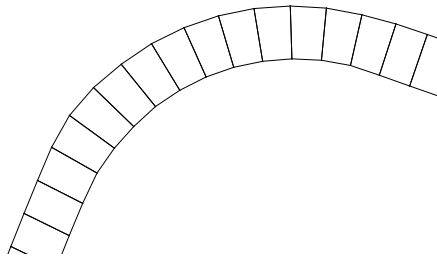


**Figure VI-23** Opération de mise en forme avec laminage

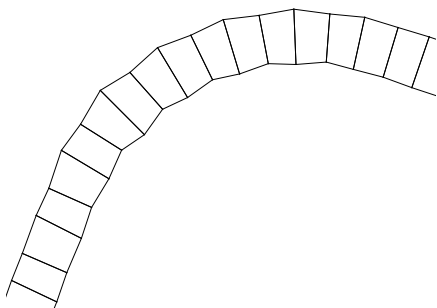
### VI.C.2.b) Résultats

Comme on a eu le dire précédemment, le 'U2010' est une forme donnée aux emboutis avec l'ancien dispositif de mise en forme du LamCoS lors de la thèse [4] qui s'est achevée en 2010. Un nom donné juste pour le besoin de différenciation des 'U' utilisés dans ce document.

La simulation de cette forme avec les éléments solides-coques formulés dans ce document donne, avec le coefficient de stabilisation en membrane (coef\_stab\_membrane) pris égal à 1.0, des contours parfaits au niveau des rayons d'entrée matrice (Figures VI-24, V-25) et même du mur (Figure VI-26) contrairement à un coefficient de  $10^{-4}$  pour lequel on a des instabilités.



**Figure VI-24** Arrondi supérieur après retour élastique simulé avec coef\_stab\_membrane = 1.0



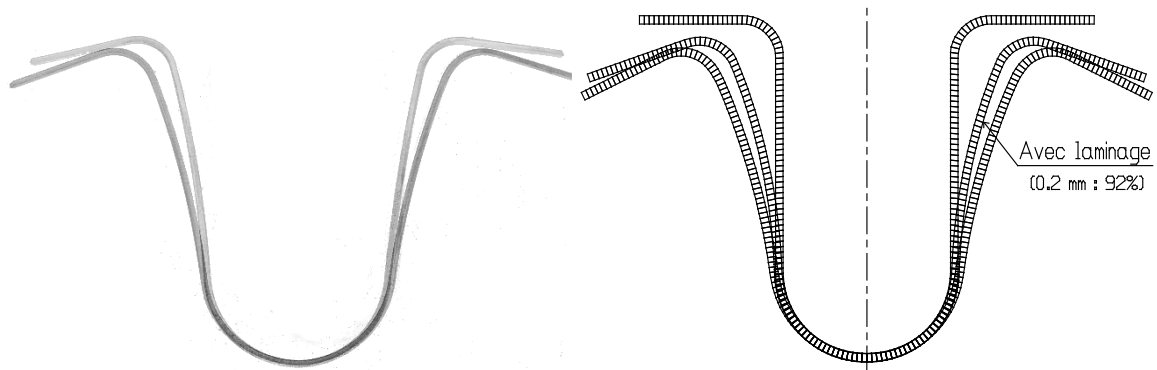
**Figure VI-25** Arrondi supérieur après retour élastique simulé avec coef\_stab\_membrane =  $10^{-4}$



a – Mur avec coef\_stab\_membrane=1.0    b – coef\_stab\_membrane=  $10^{-4}$

**Figure VI-26** Mur après retour élastique

Dans la thèse de Sansalone [4], il a été montré que le laminage à un taux de 8% fait diminuer le retour élastique ; ce qui était retrouvé numériquement avec l'élément coque-solide Q5 $\gamma$ 26. Simulée avec des éléments briques de type solide-coque, on obtient la même tendance (figure VI-27-b) c'est-à-dire que la forme de l'embouti laminé à 8% après retour élastique se situe entre l'embouti avant retour élastique et l'embouti non laminé après retour élastique.

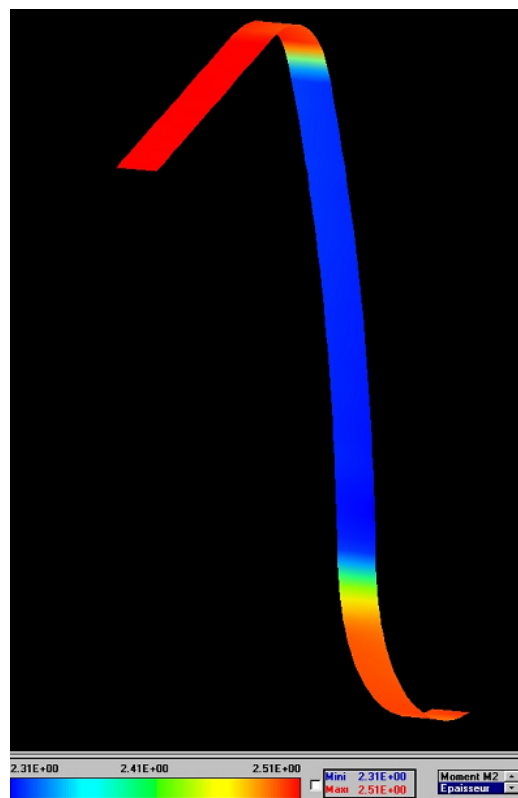


a – Résultats expérimentaux avec et sans laminage

b – Prédictions numériques

**Figure VI-27.** Résultats de mises en forme avec et sans laminage

Dans la figure VI-28 ci après, on distingue nettement toute la zone où l'épaisseur a diminué (zone en bleu). La partie en rouge a maintenu une épaisseur intacte, voire légèrement augmentée. On peut lire une épaisseur minimale de 2.31 mm (épaisseur finale ou amincie) et une épaisseur maximale de 2.51 mm (épaisseur initiale)



**Figure VI-28** Variation de l'épaisseur dans l'embouti simulée avec des éléments solides-coques SB9 $\gamma$ 25



### VI.C.3. Forme 'U rouleau'

On parle de 'U rouleau' ici à cause de la forme héritée des rouleaux du système de mise en forme conçu et fabriqué lors d'un projet de fin d'études en 2010 [1]

#### VI.C.3.a) Données

##### - Matériau :

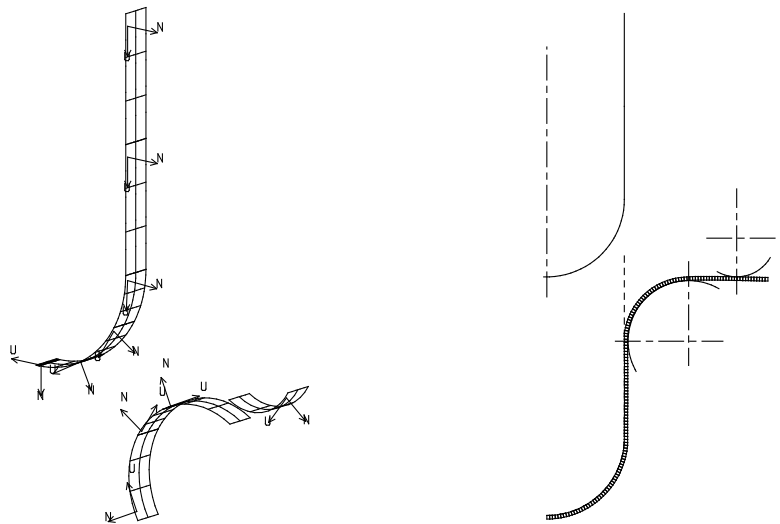
- alliage d'aluminium nuance 6016 :  $E = 57642 \text{ Mpa}$  ;  $\nu = 0.381$  ;
- paramètres de *Lankford* :  $r_0 = 1.22$  ;  $r_{45} = 1.07$  ;  $r_{90} = 0.82$  ;
- écrouissage combiné défini par :  $\sigma_0 = 118.44 \text{ MPa}$ ,  $Q = 111.768 \text{ MPa}$ ,  $b = 16.886$  pour une pièce isotrope ( $\bar{\sigma} = \sigma_0 + Q(1 - e^{-b\bar{\epsilon}^p})$ ) et  $C = 382 \text{ MPa}$  et  $\gamma = 3.625$  pour l'aspect cinématique ( $\{d\alpha\} = C \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \{\sigma - \alpha\} - \gamma \{\alpha\} d\bar{\epsilon}^p$ ). On trouvera les détails de l'identification dans ces lois dans [2]

##### - Maillages :

- seul un quart de la structure est étudié du fait des deux symétries ;
- le pas de maillage (entre deux lignes de nœuds) du flan dans la largeur est de 3.5 mm et varie dans le sens de la longueur suivant 2 cas : 0.9 mm et 0.6mm.
- Au moins trois éléments dans la largeur pour éviter des instabilités

##### - Outillage :

- coefficient de frottement nul entre flan et outils
- pas d'efforts de serre-flans (rouleaux supérieurs)



a – Surfaces des outils en 3D

b – Outillages en 2D

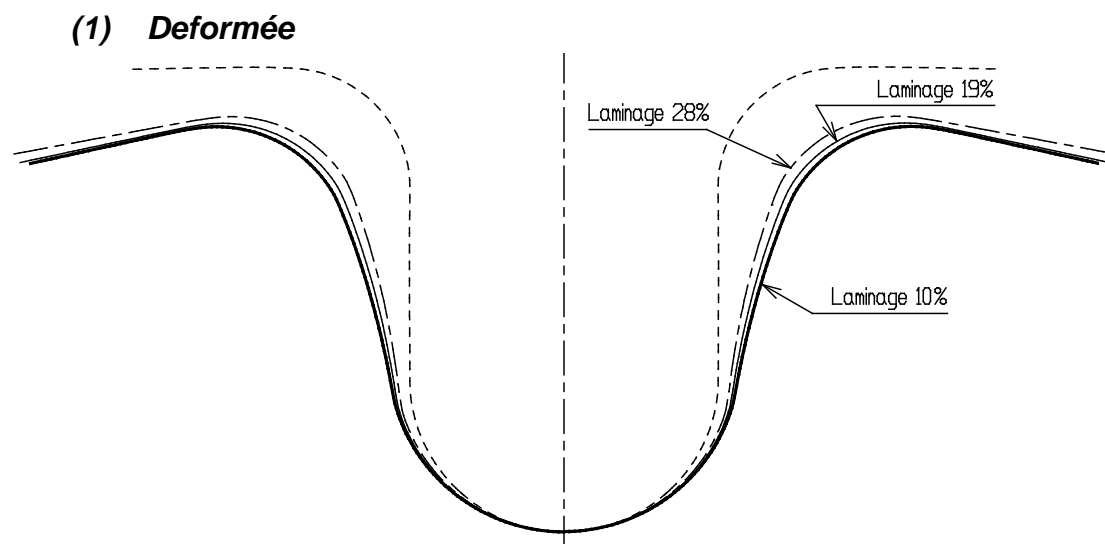
**Figure VI-29** Principales surfaces des outillages

#### VI.C.3.b) Résultats

En faisant évoluer le taux de laminage (10, 19 et 26%), on constate que le 'U' se referme quand le taux de laminage augmente (figure VI-30). Ce qui ne correspond

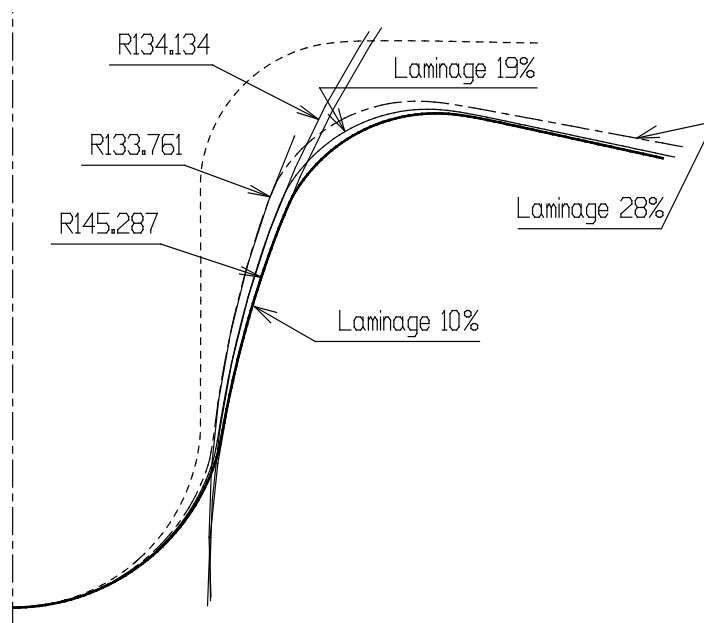
pas tout à fait à l'expérience où, à 26% et au-delà, le retour élastique s'accroît, à cause probablement de l'affaiblissement des murs (figures VI-13-c et d).

Les meilleurs résultats sont ceux donnés par un maillage fin dont le pas vaut 0,6 mm qui permet à la tôle d'épouser correctement le bout incurvé du poinçon.



**Figure VI-30** Evolution du retour élastique en fonction de laminage - SB9 $\gamma$ 25

Mais la forme générale est trompeuse car le rayon résiduel dans le mur décroît quand le taux de laminage augmente (figure VI-31). Il y a donc plus de retour élastique dans cette zone quand le laminage croît ; ce qui est conforme à l'expérience.



**Figure VI-31** Evolution des rayons résiduels (mur) en fonction des taux de laminage

Le rayon qu'imprime le rouleau inférieur (équivalent du rayon d'entrée matrice) reste pratiquement constant après retour élastique quand le taux de laminage varie (Figure VI-32). Tout est donc tributaire du rayon imposé par le poinçon.

En effet, en fond d'embouti, plus il y a de laminage, plus le rayon formé sur la tôle est proche de celui du poinçon ; ce qui est logique puisque l'effort vertical augmente. Il se peut donc que les simulations numériques ne rendent pas compte de ce phénomène par sous estimation de la valeur de cet effort ou, plus probablement, que les rouleaux ne tournent pas vraiment librement quand le laminage est trop important et qu'il conviendrait donc de déclarer du frottement dans les données numériques.

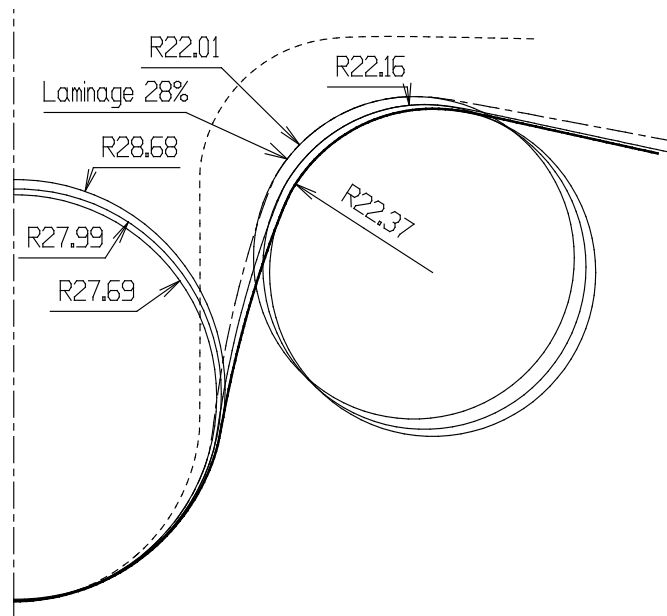


Figure VI-32 Valeurs des rayons en fonction du taux de laminage lors du retour élastique

## (2) Amincissement de l'épaisseur

Avec les éléments solide-coques SB9 $\gamma$ 25, le contact est facile à gérer numériquement et l'épaisseur finale en fin de mise en forme est toujours conforme à celle imposée. Il fait toutefois tenir compte des approximations dues à la CAO (carreaux de surfaces NURBS obtenus à partir de "contours" puis de "profils". Sans compter que 10%, 19% et 26% sont des taux eux aussi approchés basés sur des mesures de l'épaisseur finale après les expérimentations...

La figure VI-33 montre, par exemple, une valeur finale affichée de 0.938 (se référant à la couleur) au lieu de 0.932 théorique. Ce qui importe, c'est que la valeur apparaisse bien constante dans toute la zone laminée ; ce qui est effectivement le cas quel que soit le taux de laminage : tous les diagrammes colorés ressemblant à la figure ci-contre.

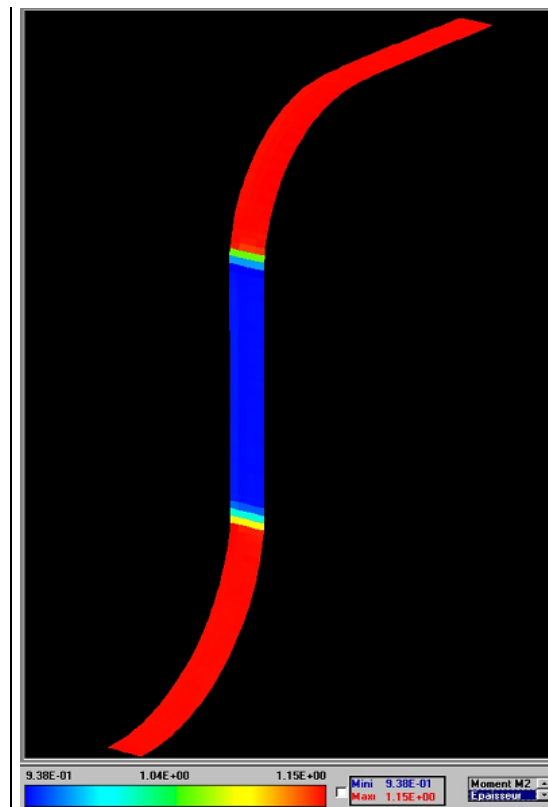
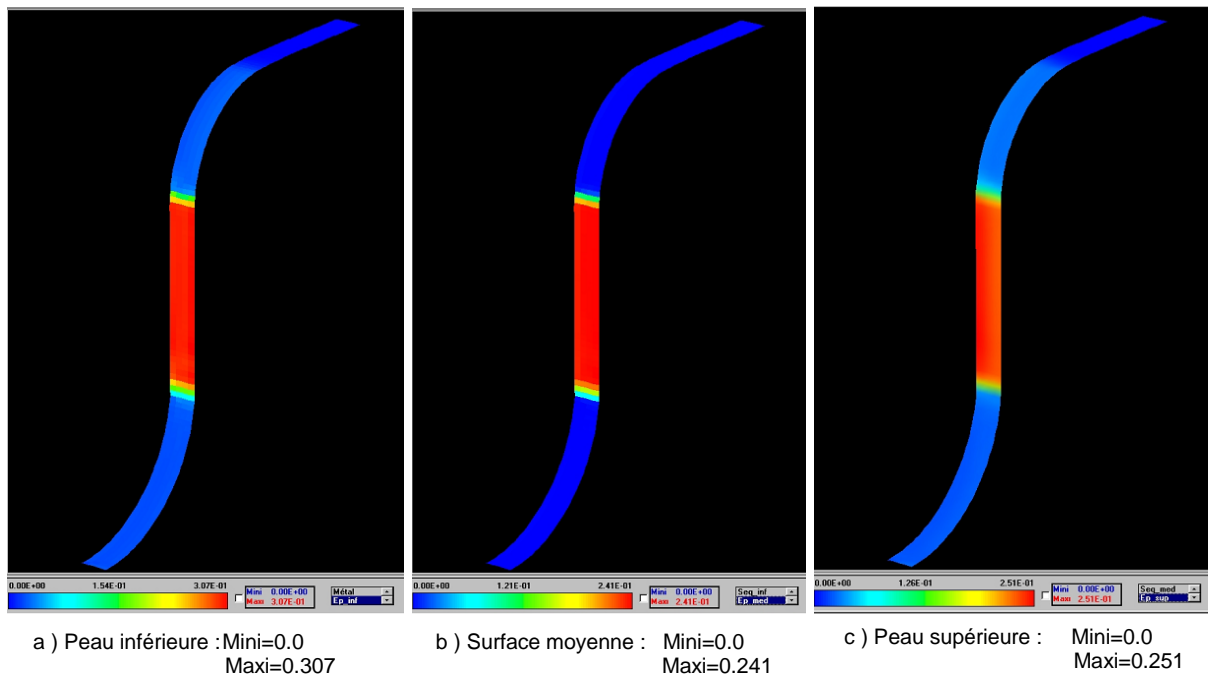


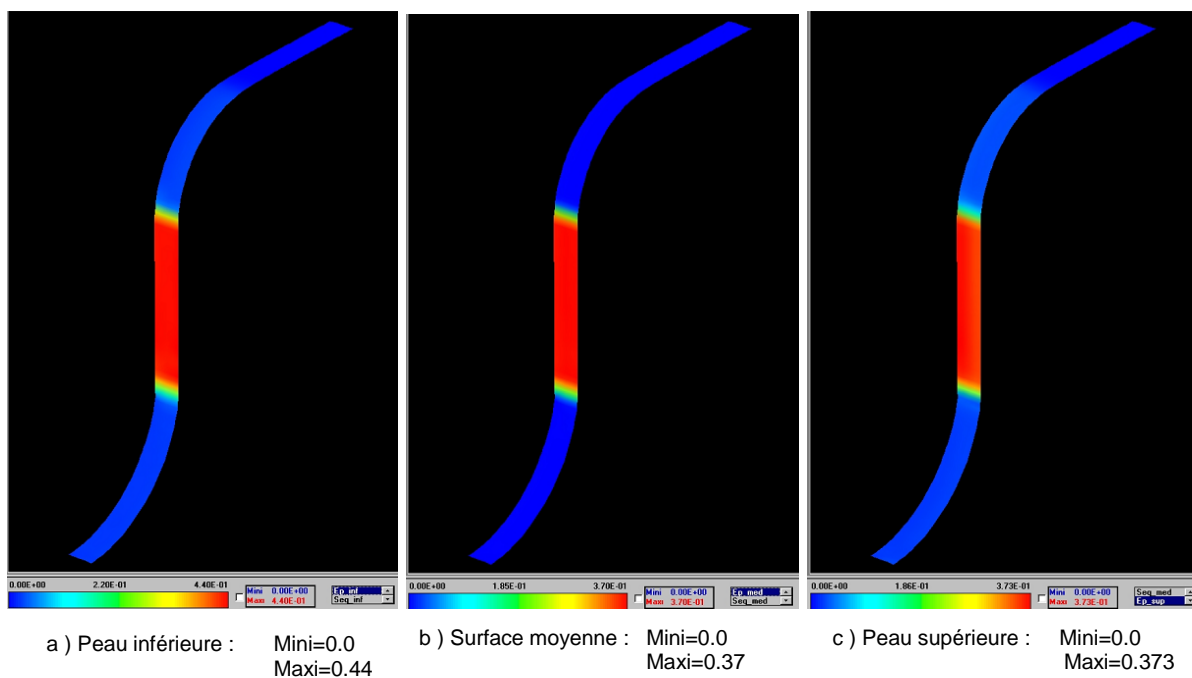
Figure VI-33 Epaisseur du U laminé à 19%

### (3) Déformation plastique équivalente

Les figures VI-34 et VI-35 montrent les déformations plastiques cumulées sur les peaux inférieure et supérieure ainsi que sur la surface moyenne pour, dans l'ordre, un laminage de 19 % et un de 26 %. Quel que soit le taux de laminage, la valeur maximale peut varier suivant la situation c'est-à-dire que la valeur prise sur la peau supérieure peut être différente de la valeur sur la peau inférieure et de celle en surface moyenne ; sans toutefois un grand écart entre ces différentes valeurs.



**Figure VI-34** Déformation plastique équivalente de U rouleau laminé à 19 %

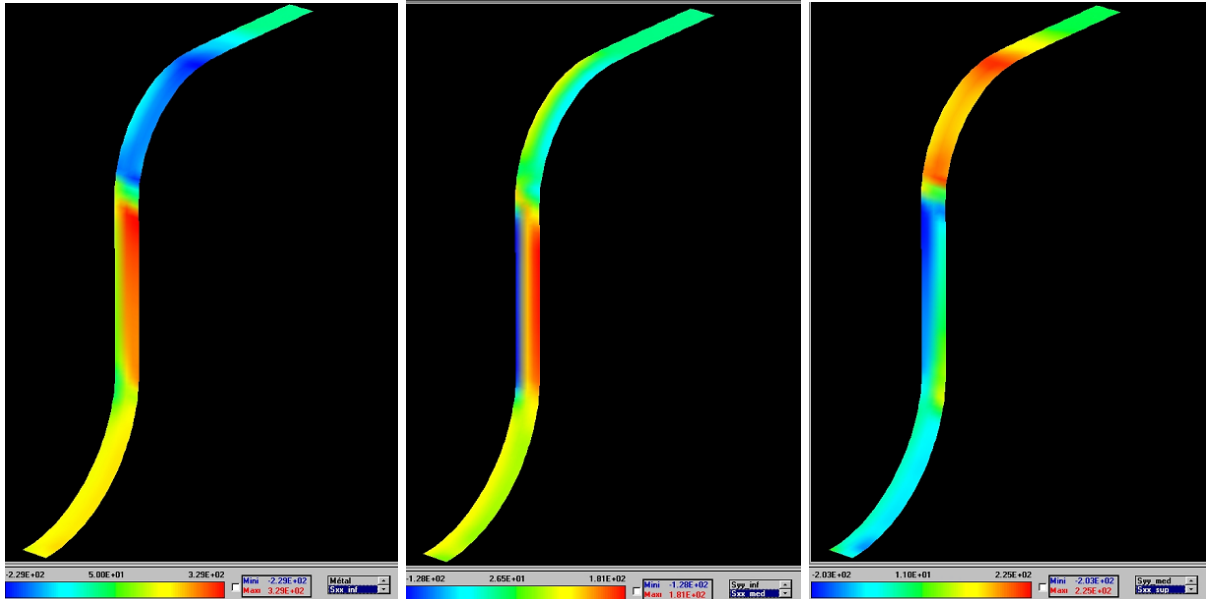


**Figure VI-35** Déformation plastique équivalente de U rouleau laminé à 26 %

#### (4) Répartition de la contrainte dans le sens du profil

Qu'importe le taux de laminage, en confrontant les contraintes en peaux inférieure (figure VI-36-a) et supérieure (figure VI-36-c) on constate que, à l'entrée de la matrice (rouleau inférieur), la contrainte en peau inférieure minimale (figure VI-36-a) obtenue par compression de la peau inférieure de la structure s'oppose à la tension de la peau supérieure qui est décrite par la contrainte en peau supérieure maximale (figure VI-36-c). Ceci est dû à une flexion en fin de mise en forme.

Et quand la tôle est entraînée vers le bas par le poinçon, le phénomène de flexion « alternée » s'établit dans l'épaisseur du mur. La peau comprimée se tend et celle tendue se comprime. Ce qui est bien décrit par la figure VI-10 et restitué par le contraste des contraintes qu'on peut constater sur le mur (fig. VI-36-a,c et VI-37-a,c).

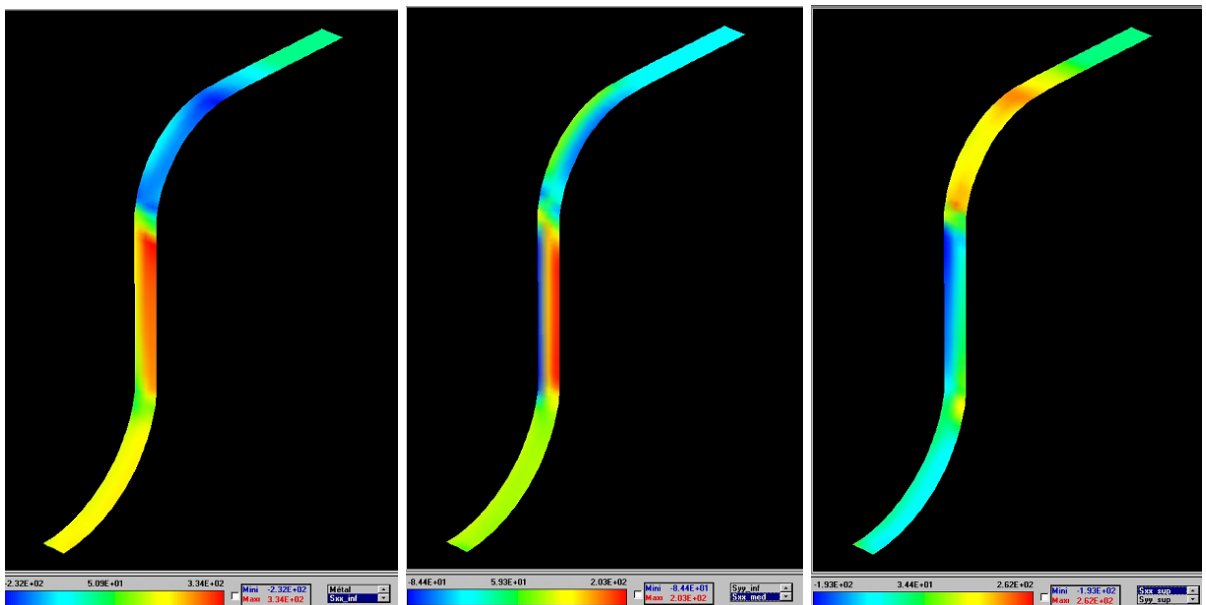


a) Peau inférieure : Mini=-229 MPa  
Maxi=329 MPa

b) Surf. moyenne : Mini=-128 MPa  
Maxi=181 MPa

c) Peau supérieure : Mini=-203 MPa  
Maxi=225 MPa

**Figure VI-36** Contrainte "longitudinale" de U rouleau laminé à 19%



a) Peau inférieure : Mini=-232 MPa  
Maxi=334 MPa

b) Surf. moyenne : Mini=-84.4 MPa  
Maxi=203 MPa

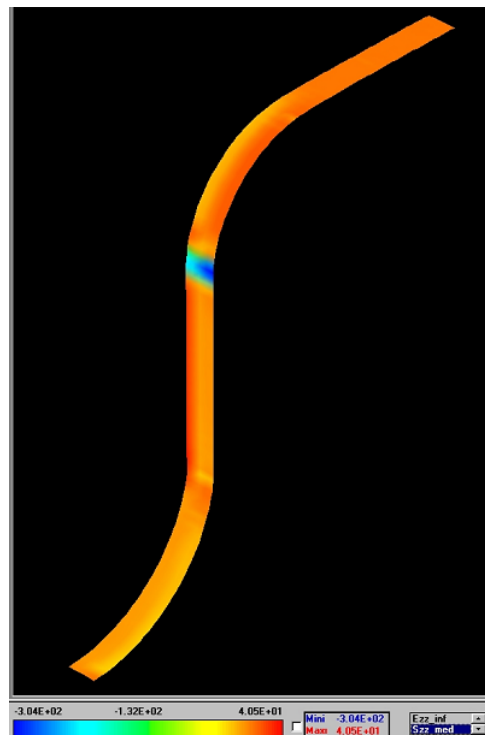
c) Peau supérieure : Mini=-192 MPa  
Maxi=262 MPa

**Figure VI-37** Contrainte longitudinale de U rouleau laminé à 26%

## (5) *Contrainte normale*

Sur la figure VI-38 ci-après est donnée la répartition de contrainte normale dans la structure emboutie laminée. Bien localisée, en bleu sur cette figure, est la contrainte normale issue du contact entre le poinçon et le rouleau inférieur lors du laminage en fin de mise en forme.

Cette contrainte n'est décelée que par des éléments particuliers ayant un nœud supplémentaire en leur centre pour le besoin de la cause. Les éléments coques-solides Q5 $\gamma$ 26 et DKS18 dans [2] restituent fidèlement cette contrainte ainsi que l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25 formulé dans ce document. Il n'y a pas de doute que l'autre élément solide-coque SB9DK25 se comporte de la même manière que SB9 $\gamma$ 25 pour ce qui concerne la détection correcte de la contrainte normale.



**Figure VI-38** Contrainte normale  $\sigma_{zz}$  moyenne : Mini=-304 MPa  
Maxi=40.5 MPa

### VI.C.3.c) Efforts développés pendant la mise en forme

En utilisant les mêmes données matérielles et géométriques utilisées lors des expériences de mise en forme, un quart de l'éprouvette est maillé avec les éléments solides-coques SB9 $\gamma$ 25. La simulation de la mise en forme est effectuée avec le code explicite de l'INSA où sont implémentés ces éléments solides-coques particuliers. Avec un faible amortissement ( $\alpha \cdot \Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ ), les efforts relevés sont ceux qui agissent pour amincir l'épaisseur de la tôle sur une course du poinçon de 90 mm. Les courbes obtenues avec ces efforts (ces forces sont multipliées par 4 pour toute la structure) sous Excel sont pour un laminage de 10 % (Figure VI-39) et pour un laminage de 19 % (Figure VI-40)

### Courbe de force de laminage à 10 %\_numérique

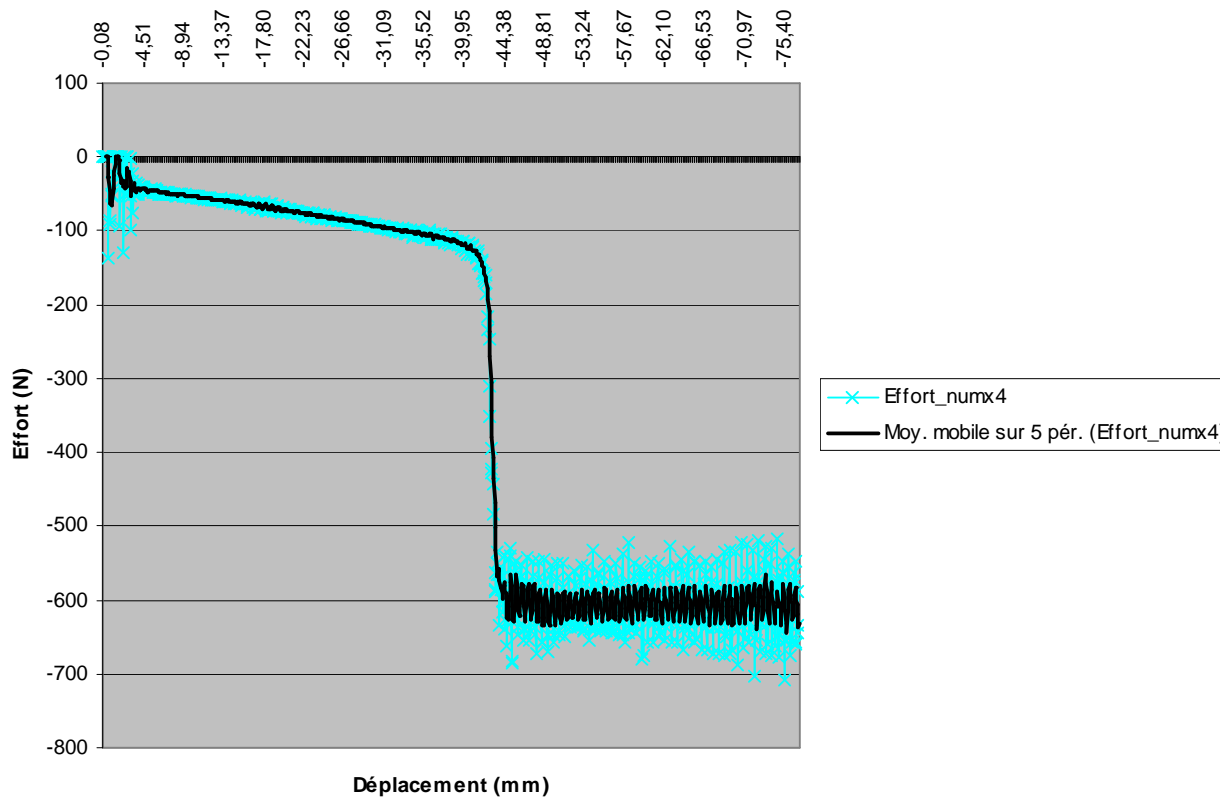


Figure VI-39 Simulation de l'effort de descente du poinçon (laminage à 10 %)

### Courbe de force de laminage à 19 %\_numérique

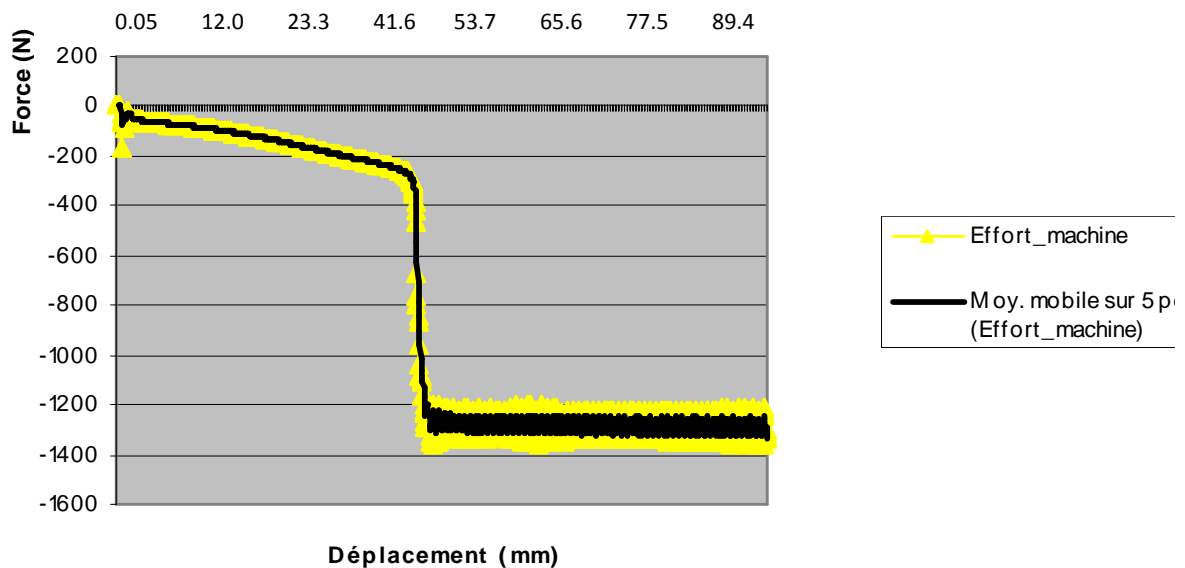


Figure VI-40 Simulation de l'effort de descente du poinçon (laminage à 19 %)

L'effort maximal qu'on peut lire sur la figure VI-39 est d'environ 600 N, pratiquement le même effort lors des expériences (650 N) pour un laminage de 10 %.

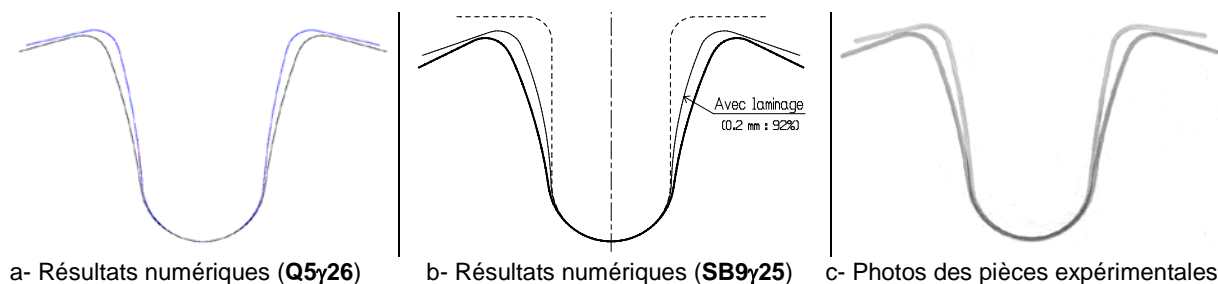
Pour un laminage de 19 %, l'effort en simulation numérique (1300N) est un peu en dessous de la valeur obtenue des efforts de mise en forme expérimentale (1550 N).

**N.B.** Quant à l'amincissement de 26%, le résultat expérimental n'est pas fiable car, à la fin de l'expérience, les rouleaux figurant la matrice ne tournaient plus librement...

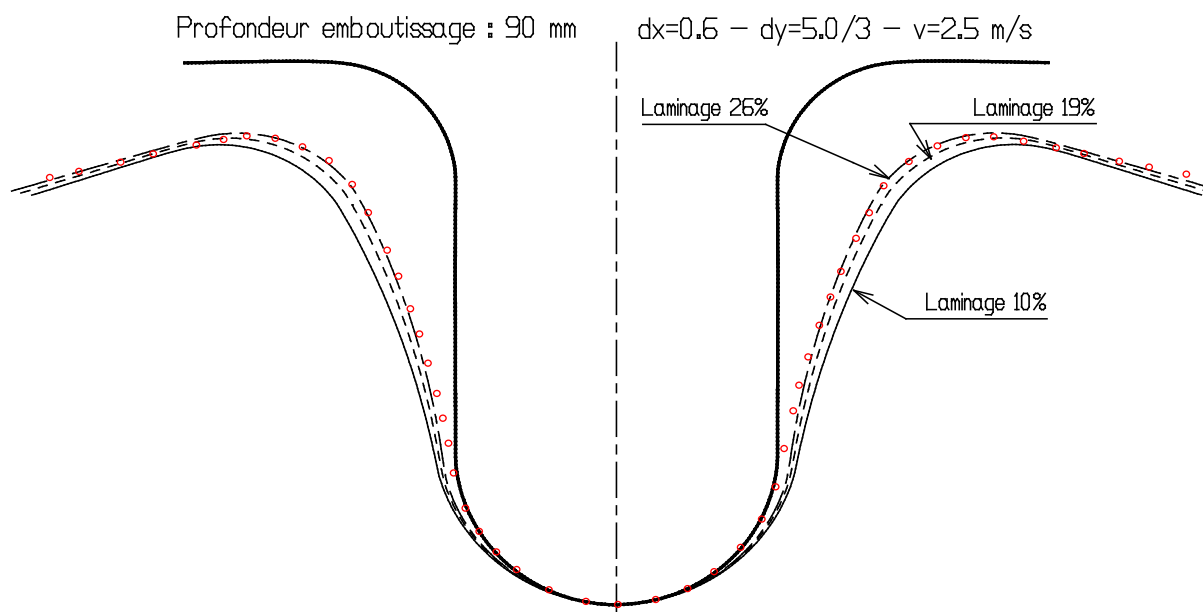
## VI.D. Comparaison des résultats

### VI.D.1. Résultats des expériences

Les résultats tant expérimentaux que numériques dans la thèse de Sansalone [4] montrent que le retour élastique sur un embouti diminue quand il est accompagné d'un laminage de 8%. En effet, sur toutes les figures suivantes (figure VI-41), on voit bien que l'ouverture de l'embouti avec laminage est moins prononcée que celle de l'embouti sans laminage (voir aussi la figure VI-27). En outre, visuellement parlant, les résultats obtenus avec l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25 semblent mieux refléter les formes expérimentales que ceux donnés par les éléments coque-solide Q5 $\gamma$ 26.



**Figure VI-41** Résultats de 'U 2010'



**Figure VI-42** Résultats 'U Rouleau'- Numériques : 10%,19% et 26 % - Expérience : 26%

Les figures VI-41 précédentes sont relatives au 'U 2010' embouti avec l'outillage usuel. La figure VI-42 concerne le 'U rouleau' où la matrice et le serre flan sont remplacés par des rouleaux tournant librement.



L'aspect "prototype" du dispositif expérimental n'a pas permis d'imposer une valeur identique de la profondeur d'emboutissage pour tous les cas de laminage. En conséquence, il est illusoire de superposer les profils scannés des éprouvettes correspondantes. Tout au plus, pour le laminage de 26% dont la profondeur d'emboutissage est bien de 90 mm, il est envisageable de superposer des points relevés sur le profil expérimental (Fig. VI-43) et le tracé de la surface moyenne après retour élastique (points en rouge sur Fig. VI-42). On constate alors que les ouvertures en fond d'embouti numérique et expérimentale sont différentes. Des investigations ultérieures seront menées pour en connaître la raison même s'il y a un fort soupçon relatif à l'effort des descente du poinçon, soupçon affirmé par la constatation que les rouleaux ne tournaient plus librement après cette campagne d'essais et qu'ils ont dû être changés pour permettre la réalisation d'essais de pliage sur très petit rayon.

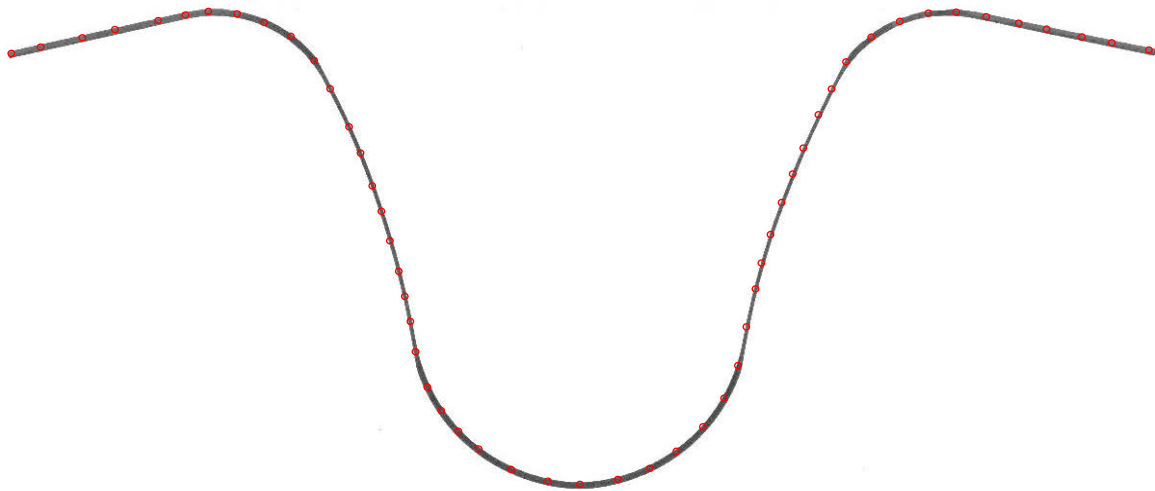


Figure VI-43 'U Rouleau'- Résultats expérimentaux (laminage 26%)

## VI.D.2. Remarques sur les résultats numériques

### VI.D.2.a) Influence de la finesse de maillage dans le sens du profil

En prenant 3 éléments dans la largeur de l'éprouvette maillée assez finement dans le sens du profil (0.6 mm), une vitesse de mise en forme de 2.5 m/s et une course du poinçon de 77 mm, on parvient aux résultats suivants, après retour élastique, pour trois taux de laminage.

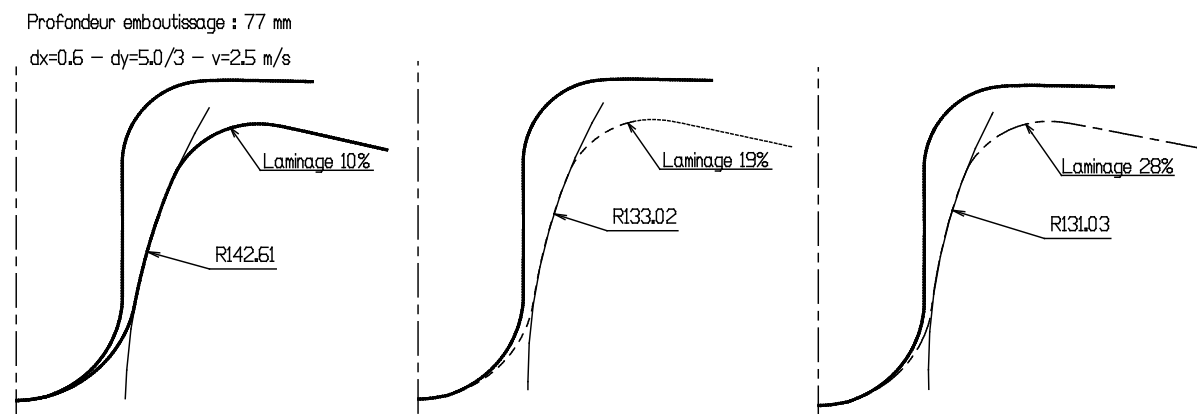
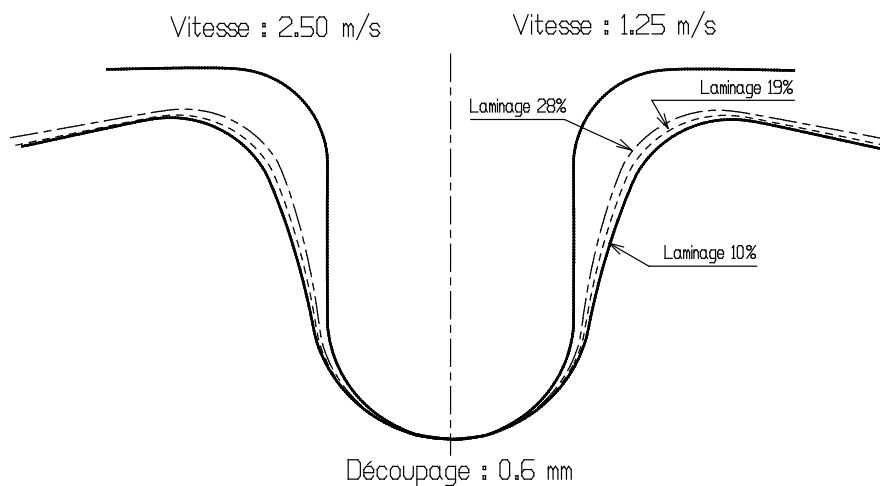


Figure VI-44 Variation des rayons résiduels en fonction du taux de laminage

Lorsqu'on compare les valeurs des rayons résiduels à celles de la figure V-31 où la taille de maille est égale à 0,9 mm, on voit bien que pour un maillage plus fin le rayon résiduel augmente. Le retour élastique diminue. On a pour le laminage de 10 %, un rayon résiduel de 142.61 mm pour le maillage de 0,6 mm (Figure VI-44) alors que ce rayon est de 145.287 mm pour un maillage de 0.9 mm (figure VI-31).

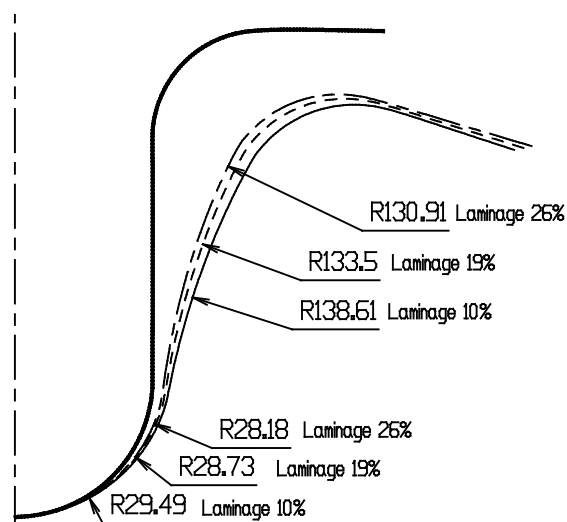
### VI.D.2.b) Influence de la vitesse du poinçon



**Figure VI-45** Influence de la vitesse sur le retour élastique

Sur la figure ci-dessus (Figure VI-45), pour montrer que la variation de la vitesse n'a ici aucune influence sur le retour, il est disposé de façon symétrique des courbes du retour élastique obtenues avec une vitesse de 2,5 m/s à gauche et des courbes relatives à la vitesse de 1,25 m/s à droite. Par conséquent, il a été arrêté la vitesse de 2,5 m/s pour les simulations dans le but de réduire le temps des calculs.

### VI.D.2.c) Influence de la course du poinçon



**Figure VI-46** Influence de la course du poinçon (90 mm) sur le retour élastique

Précédemment les calculs ont été effectués avec une course de poinçon de 77 mm (Figures VI-30, VI-31 et VI-32) mais lorsque qu'on fixe la course à 90 mm (Figure VI-46), tous les rayons résiduels diminuent comparés à ceux de la figure VI-31. Donc, lorsque la profondeur d'emboutissage croît, alors le retour élastique augmente aussi. La profondeur arrêtée en définitive pour les expériences est 90 mm comme indiqué dans les travaux du PFE 2010 [1].

### VI.D.3. Comparaison des efforts de mise en forme

Sur la figure ci-dessus (Figure VI-47) sont superposées deux courbes d'efforts de mise en forme avec un taux de laminage de 10 % (expérimentale et numérique). Ces deux courbes ont pratiquement la même allure. Ceci montre que l'élément solide-coque SB9 $\gamma$ 25, bien qu'avec un amortissement  $\alpha \cdot \Delta t$  de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4}$  simule correctement les efforts mis en jeu lors de la mise en forme.

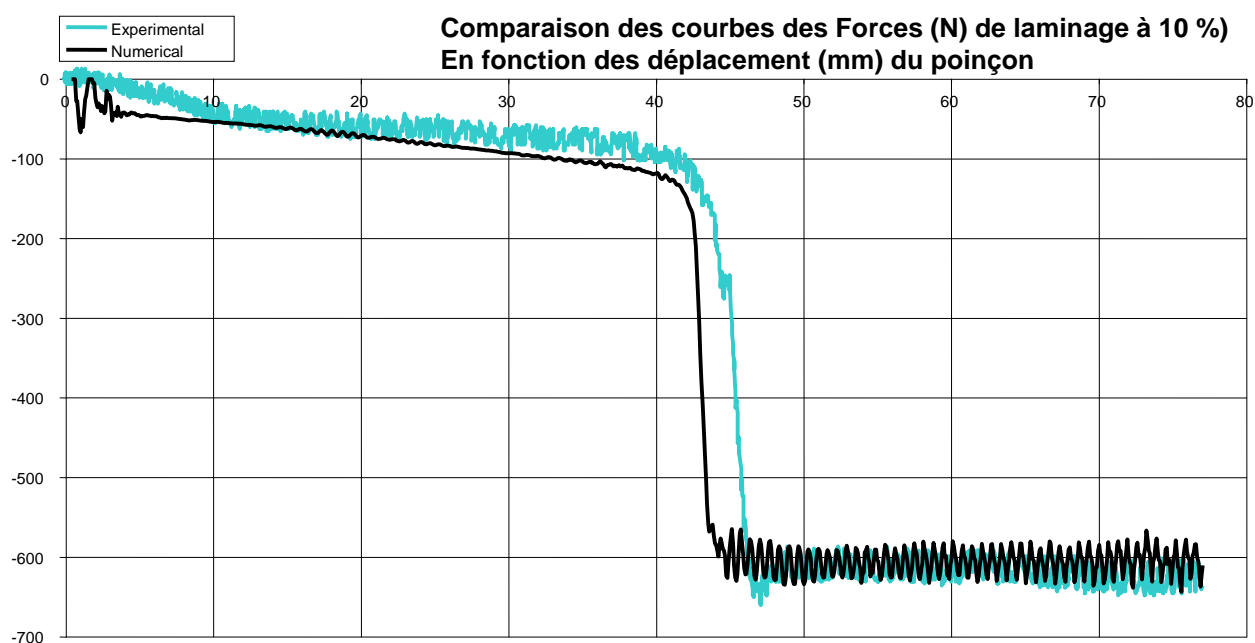


Figure VI-47 Comparaison des courbes expérimentale et numérique

Ensuite, quand le taux de laminage augmente, les efforts deviennent plus importants et la considération de l'amortissement dans la simulation ne perturbe en rien l'effort vertical de descente du poinçon obtenu numériquement.

Enfin, on a déjà précisé que, pour un laminage de 19%, le pic d'effort lors de la mise en forme expérimentale est de 1550 N (Fig. VI-15) tandis que la simulation numérique donne un effort maximal de mise en forme autour de 1300 N (Fig. VI-40).

Pour le laminage de 26% , la différence entre l'effort "numérique" et l'effort donné par l'expérience est importante mais n'est volontairement pas rapportée ici dans l'attente du résultat de l'analyse quant à la détérioration des roulements des rouleaux figurant la "matrice". En effet, l'hypothèse de roulement sans glissement de la tôle sur ces rouleaux - qui se traduit ensuite par une déclaration de frottement nul dans le code de mise en forme par éléments finis – n'est plus valide.

## VI.E. Références

- [1] Boch. C, Tiercin. R, *Analyse expérimentale et numérique de l'endommagement en pliage de tôles*, Projet de fin d'étude, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010
- [2] Carbonnière. J, *Contribution à l'étude du retour élastique en emboutissage*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2009
- [3] Morestin. F, *Contribution à l'étude du retour élastique lors de la mise en forme des produits plats*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993
- [4] Sansalone M. *A new shell formulation using complete 3D constitutive laws. Application to sheet metal forming simulations*. Thèse de doctorat – INSA de Lyon – Ecole doctorale MEGA – 2011
- [5] Sabourin F., Brunet M., Detailed formulation of the rotation-free triangular element "S3" for general purpose shell analysis, *Engineering Computations* 2006; **23**:469-502
- [6] Sabourin F., Sallé E., *Calcul des structures par éléments finis*, polycopié, INSA Lyon
- [7] Umehara Y., *Analysis of shape fixability in high tensile strength steel sheets in press forming*, Mémoires Scientifiques Revue Métallurgie 1980; **6**: 247-253,

Notes :

## Conclusion générale et perspectives

Le but de ce travail est de développer des éléments hexaédriques de type solide-coque afin de simuler la mise en forme avec diminution volontaire de l'épaisseur et d'apprécier l'impact de ce laminage sur le retour élastique. Ces éléments à intégration réduite ont été développés respectivement sur les fondements de la théorie de Mindlin (SB8 $\gamma$ 24 et SB9 $\gamma$ 25) et de la théorie de Kirchhoff (SB8DK24 et SB9DK25) ; la technique de stabilisation des modes à énergie étant inspirée des nombreux travaux de Belytschko.

Le point particulier et innovant dans cette étude a été d'ajouter un nœud supplémentaire au centre de l'élément de type solide coque à huit nœud-sommets et 24 degrés de liberté - SB8 $\gamma$ 24 ou SB8DK24 – afin d'obtenir un solide-coque à neuf nœuds et 25 degrés de liberté ; respectivement SB9 $\gamma$ 25 ou SB9DK25. Ce nœud supplémentaire est muni d'un seul degré de liberté qui est une translation normale au plan milieu de l'élément. Et c'est à partir du champ de déplacement postulé lié à ce degré de liberté qu'il a été possible de formuler la déformation normale donnant, grâce à la loi constitutive complète 3D, la vraie contrainte normale. De plus, il est possible d'agir sur ce nœud central, indépendamment des autres nœuds qui sont les nœuds sommets, pour y imposer une part des efforts équivalents à une pression normale. Ce qui marque la différence avec les solides coques relativement récents dotés de variables nodales supplémentaires sans signification physique.

Implémentés dans des codes propres au LaMCoS, ces éléments finis ont permis de traiter – suivant un schéma implicite – des exemples classiques, en linéaire et non linéaire, puis de simuler des mises en forme dans un code explicite. Ils n'ont présenté aucun problème significatif même si, exceptionnellement, les solutions présentent une sensibilité à la densité du maillage.

Dans le cadre de l'étude expérimentale pour valider ces éléments finis, la dernière machine de mise en forme conçue et fabriquée au laboratoire LaMCoS de l'INSA, lors du projet de fin d'études de 2010, a été utilisée pour emboutir des pièces, ayant la forme d'un U afin de tester le comportement numérique des éléments finis, la prédiction de la géométrie de la pièce après retour élastique ainsi que l'évolution des efforts mis en jeu. En outre, les résultats expérimentaux obtenus avec un appareillage plus ancien valident les résultats numériques obtenus avec ces éléments solides-coques et montrent que le retour élastique peut être réduit lorsque cette mise en forme est accompagnée d'une réduction de l'épaisseur (laminage). Comme pour les éléments coques de base, il a été constaté que la densité du maillage influe sensiblement sur le retour élastique simulé, lui, en implicite.

Quant au code explicite développé afin de servir à la simulation de la mise en forme, il a nécessité une étude sur la répartition des masses en chaque nœud - plus particulièrement au nœud central - afin de pas trop diminuer le pas de temps critique. La technique de la gestion de contact par projection dynamique sur des carreaux de surfaces NURBS utilisée dans les codes de l'INSA pour des éléments volumiques reste inchangée avec les nouveaux éléments finis proposés ici. Ceci est un avantage

pour une implémentation dans un code commercial au détriment de la complexité du maillage avec des éléments volumiques (par rapport à des éléments surfaciques).

En **perspectives**, les points qui n'ont pas été traités faute de temps feront l'objet d'une étude future, suite des présents travaux. On peut noter par ordre de priorité :

- La formulation des éléments finis prismatiques de type solide-coque à partir des éléments triangulaires de type coque en théorie de Mindlin et de Kirchhoff.
- Le perfectionnement de la machine de mise en forme, conçue et fabriquée en 2010, car les jeux internes et les multiples réglages à effectuer sur la machine avant une expérimentation sont des sources d'erreurs. Ce perfectionnement est utile vu qu'il est difficile d'assurer un réglage précis du taux de laminage et obtenir ainsi une éprouvette aux caractéristiques souhaitées. En plus, il faudra limiter ces taux de laminage sous peine de détériorer les roulements des rouleaux ou bien concevoir des liaisons "pivot" plus robustes.
- Enfin, il reste à intervenir sur le contact. En effet, il a été constaté que la contrainte normale n'était pas nulle sur la peau supérieure dans le cas où il n'y a contact que sur la peau inférieure et, inversement, s'il n'y a contact que sur la peau inférieure, la contrainte normale n'est pas nulle sur la peau supérieure. De fait, il n'y a rien d'étonnant à cela car, dans le cas d'une pression normale, il est nécessaire de déclarer un effort au nœud central pour que la contrainte normale soit nulle sur la face opposée à celle où la pression agit. Mais ceci s'effectuerait au détriment de la simplicité de la gestion de contact évoquée dans la conclusion.
- Eventuellement, pourrait être testée l'influence de l'écroutissage (isotrope ou combiné) sur le retour élastique en cas de forts laminages du mur du flan.

# I. Complément : Théorie des Plaques

<b>I.</b>	<b>Complément_Théorie des Plaques</b>	<b>I-1</b>
<b>I.A.</b>	<b>Théorie de Kirchhoff</b>	<b>I-2</b>
I.A.1.	Hypothèses de Kirchhoff	I-2
I.A.2.	Déformations	I-3
I.A.3.	Relation de comportement en élasticité linéaire isotrope	I-4
<b>I.B.</b>	<b>Théorie de plaque épaisse (Mindlin)</b>	<b>I-15</b>
I.B.1.	Hypothèse de Mindlin	I-15
I.B.2.	Déplacements	I-15
I.B.3.	Déformations	I-15
I.B.4.	Contraintes et efforts internes	I-16
I.B.5.	Remarques	I-17
I.B.6.	Exemple	I-17
<b>I.C.</b>	<b>Bibliographie du Complément I</b>	<b>I-21</b>



Les plaques et les coques sont des structures minces dont l'épaisseur s'étend de part et d'autre d'une surface plane (plaque) ou gauche (coque). Elles sont faites de matériau homogène ou hétérogène pouvant donner des structures composites multicouches. On traitera ici la plaque qui est un cas particulier de la coque.

Une plaque désigne une structure plane dont l'épaisseur  $h$ , mesurée sur  $z$  de part et d'autre du plan moyen, est petite devant les deux autres dimensions disposées dans le plan  $(x,y)$ .

Deux types de théories usuelles sont propres aux plaques ; la théorie de Kirchhoff-Love pour les plaques minces où il n'est pas tenu compte du cisaillement transversal dans l'énergie de déformation et la théorie de Mindlin-Reissner pour les plaques épaisses avec prise en compte de cette énergie.

## I.A. Théorie de Kirchhoff

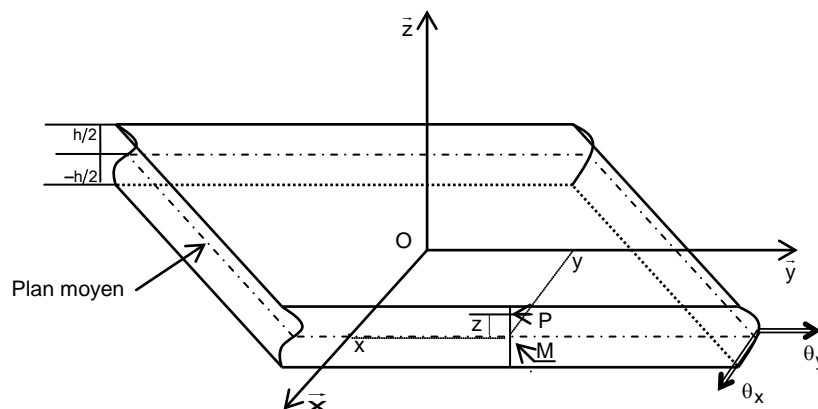
### I.A.1. Hypothèses de Kirchhoff

- Tout segment initialement normal à la surface moyenne avant déformation, reste normal à la surface moyenne déformée ( $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ). L'influence du cisaillement transversal est négligée dans l'énergie de déformation ;
- La contrainte  $\sigma_{zz}$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en toute cote  $z$  ;  $z$  variant entre moins la demi épaisseur et la demi épaisseur.

#### I.A.1.a) Déplacements

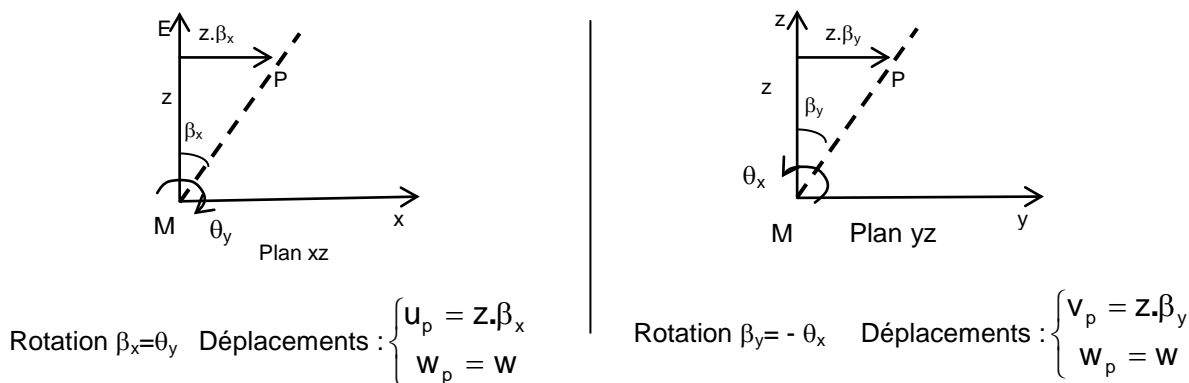
Soient deux points M et P de la section de la plaque (voir Figure CI-1 ci-dessous) tels que M soit dans le plan moyen  $(O,x,y)$  et P à la cote  $z$  de ce plan moyen.

Ces deux points décrivent le vecteur  $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$  avec  $\vec{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}$  et  $\vec{MP} = z \cdot \vec{z}$



**Figure CI-1** Caractéristiques géométriques de la plaque

Le champ de déplacements d'un point courant P de la plaque est donné par la relation  $\vec{u}_P = \vec{u}_M + \vec{\theta} \wedge \vec{MP}$  où les translations du point M sont supposées connues.  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont les rotations d'un segment normal à la plaque lors de sa déformation de flexion respectivement autour de l'axe x et de l'axe y.



**Figure CI-2** Déplacements et rotations

On peut relever sur cette figure CI-2 que  $\beta_x = \theta_y$  et  $\beta_y = -\theta_x$  d'une part et d'autre part que  $\beta_x = -w,y$  et  $\beta_y = -w,x$ . Les angles  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont supposés petits (incrément). Le champ de déplacement du point P à la cote z de la plaque se calcule donc à partir de la formule suivante :

$$\begin{cases} u_p \\ v_p \\ w_p \end{cases} = \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} + \begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_p = u(x,y) + z \cdot \theta_y(x,y) = u(x,y) - z \cdot w,x(x,y) \\ v_p = v(x,y) - z \cdot \theta_x(x,y) = v(x,y) - z \cdot w,y(x,y) \\ w_p = w(x,y) \end{cases} \quad (CI-1)$$

Pour respecter l'hypothèse selon laquelle tout segment initialement normal à la surface moyenne avant déformation, reste normal à la surface moyenne déformée, il faudrait que les déplacements dans le plan soient constants ou nuls.

## I.A.2. Déformations

En petites perturbations, les déformations au voisinage du point P sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \partial u_p / \partial x \\ \partial v_p / \partial y \\ \partial u_p / \partial y + \partial v_p / \partial x \end{cases}$$

Et en tenant compte de la relation (CI-1), on arrive à :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \end{cases} = \begin{cases} u,x - z \cdot w,xx \\ v,y - z \cdot w,yy \\ u,y - z \cdot w,xy + v,x - z \cdot w,yx \end{cases} = \begin{cases} u,x \\ v,y \\ u,y + v,x \end{cases} + z \cdot \begin{cases} -w,xx \\ -w,yy \\ -2 \cdot w,xy \end{cases} \quad (CI-2)$$

Ce devrait être une situation de déformations planes puisque les déformations  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zx}$  sont nulles mais comme on a considéré la plaque en état de contraintes planes alors la déformation  $\varepsilon_{zz} = -\nu/E \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  sera autorisée de façon à permettre l'effet de Poisson (dilatation ou contraction latérale relative à un état de compression ou traction).

Posons :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^m\} + z \cdot \{\kappa\} \quad (\text{CI-3})$$

où :  $\langle \varepsilon^m \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle$  sont les déformations de membrane (**m** pour membrane) ;  
 $\langle \kappa \rangle = \langle -w,_{xx} \quad -w,_{yy} \quad -2w,_{xy} \rangle$  sont les courbures dues à la flexion ;  
 $2\varepsilon_{xz} = 2\varepsilon_{yz} = 0$  par hypothèse (Kirchhoff).

### I.A.3. Relation de comportement en élasticité linéaire isotrope

#### I.A.3.a) Elasticité linéaire isotrope

Considérons un matériau homogène, isotrope avec un comportement élastique linéaire. L'homogénéité implique que les lois contraintes-déformations sont identiques en tout point du milieu tandis que l'isotropie impose qu'aucune direction n'est privilégiée du point de vue mécanique. L'étude se faisant sous une hypothèse de contrainte plane c'est-à-dire  $\sigma_{zz} = 0$ , la loi de comportement est de type :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\{\varepsilon^m\} + z \cdot \{\kappa\}\} = \{\sigma\} \quad (\text{CI-4})$$

Pendant cela ne signifie pas que la déformation suivant l'épaisseur est nulle et il a été montré précédemment que la valeur qui lui a été donnée permet la prise en compte de l'effet Poisson :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{CI-5})$$

#### I.A.3.b) Contraintes intégrées

Les efforts normaux  $\langle N \rangle = \langle N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy} \rangle$  (à ne pas confondre avec les fonctions d'interpolation) et les moments  $\langle M \rangle = \langle M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy} \rangle$  (Figure CI-3 ci-après) sont les efforts résultants des contraintes  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rangle$  suivant l'épaisseur de la plaque.

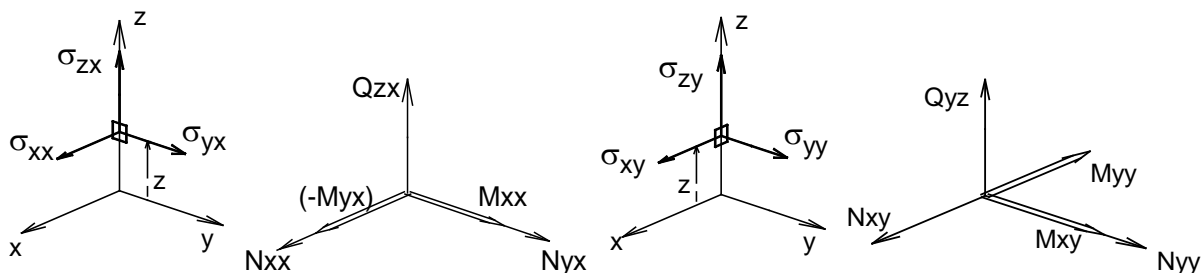


Figure CI-3 Contraintes  $\sigma$ , Efforts **N** et **Q** et moments **M**

Par intégration dans l'épaisseur des contraintes par les formules qui suivent, on obtient donc les efforts normaux et les moments de flexion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{matrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{matrix} \end{array} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} \cdot dz ; \text{efforts normaux} \quad (CI-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} \cdot z \cdot dz ; \text{moments de flexion}$$

En utilisant la loi de comportement (CI-4) dans la relation (CI-6), les efforts normaux s'expriment alors en fonction des déformations de membrane et la matrice de comportement  $[\mathbf{D}^m]$  qui les relie provient de l'intégration dans l'épaisseur de la matrice  $[\mathbf{D}]$  (CI-4).

Les moments de flexion sont quant à eux en relation avec les courbures de flexion par l'intermédiaire de la matrice de comportement  $[\mathbf{D}^b]$  qui est la traduction de l'intégrale dans l'épaisseur du produit de la matrice  $[\mathbf{D}]$  par le carré de la variable  $z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{matrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{matrix} \end{array} \right\} = \left[ \mathbf{D}^m \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left[ \mathbf{D}^m \right] \{ \boldsymbol{\varepsilon}^m \} \quad (CI-7)$$

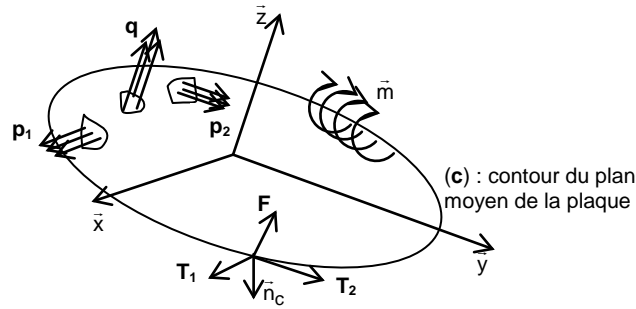
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\} = \left[ \mathbf{D}^b \right] \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{array} \right\} = \left[ \mathbf{D}^b \right] \{ \boldsymbol{\kappa} \}$$

Avec :

$$\left[ \mathbf{D}^m \right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{D}] \cdot dz = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \mathbf{D}^b \right] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{D}] \cdot z^2 \cdot dz = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

### I.A.3.c) Travail virtuel des efforts extérieurs



**Figure CI-4** Plaque sous sollicitations

Un recensement de l'ensemble des efforts que l'on peut avoir sur la plaque de la figure CI-4 est fait ici.

Pour cela, il faut remplacer les indices '1' et '2' par 'x' et 'y' et définir au préalable la normale au contour de la structure  $\vec{n}_c$  ( $\mathbf{c}$  pour contour) et le vecteur tangent  $\vec{t}$  qui accompagne cette normale mais qui n'est pas représenté sur la figure CI-4. On distingue donc :

- Les efforts surfaciques appliqués perpendiculairement au plan moyen de la plaque. Ces forces sont assimilées à une pression  $q \equiv p_3$  (N/mm<sup>2</sup>) où  $p_3$  est une composante du vecteur pression  $\langle \vec{\mathbf{p}} \rangle = \langle p_1 \ p_2 \ p_3 \rangle$  ;
- Les efforts surfaciques dans le plan de la plaque  $p_1$  et  $p_2$  (N/mm<sup>2</sup>) composantes de  $\langle \vec{\mathbf{p}} \rangle = \langle p_1 \ p_2 \ p_3 \rangle$  ;
- Les efforts linéiques normaux  $T_3 \equiv F$  (N.m/m),  $T_3$  est la composante du vecteur force  $\langle \vec{\mathbf{T}} \rangle = \langle T_1 \ T_2 \ T_3 \rangle$  ;
- Les efforts linéiques dans le plan  $T_1$  et  $T_2$  (N.m/m) composantes de  $\langle \vec{\mathbf{T}} \rangle = \langle T_1 \ T_2 \ T_3 \rangle$  ;
- Les moments linéiques  $\langle \vec{\mathbf{m}} \rangle = \langle m_1 \ m_2 \ 0 \rangle$  ;
- Il n'y a pas de couple par unité de surface (N.m/m<sup>2</sup>).

On peut alors, en considérant l'élément de surface  $dS$ , calculer assez aisément le travail virtuel extérieur à partir de la formule suivante :

$$\hat{P}_{\text{ext}} = \iint_D (p_1 \cdot \hat{u} + p_2 \cdot \hat{v} + q \cdot \hat{w}) \cdot dS + \int_{\partial D} (T_1 \cdot \hat{u} + T_2 \cdot \hat{v} + F \cdot \hat{w} + \langle \vec{\mathbf{m}} \rangle \cdot \langle \hat{\theta} \rangle) \cdot dS$$

$$\hat{P}_{\text{ext}} = \iint_D (p_\alpha \cdot \hat{u}_\alpha + p_3 \cdot \hat{u}_3) \cdot dS + \int_{\partial D} (T_\alpha \cdot \hat{u}_\alpha + T_3 \cdot \hat{u}_3 + m_\alpha \cdot \hat{\theta}_\alpha) \cdot dS \quad \begin{matrix} \alpha = 1,2 \\ \beta = 1,2 \end{matrix} \quad (\text{CI-8})$$

### I.A.3.d) Travail virtuel des efforts intérieurs

Sous l'hypothèse de petits déplacements où le découplage des effets de membrane et de flexion est effectif, on traite ici le cas d'une plaque épaisse où le cisaillement transversal est pris en compte. Et pour le cas de la plaque mince, il suffit d'appliquer l'hypothèse de Kirchhoff (effets de cisaillement négligés).

On définit ce travail par :

$$-\hat{P}_{\text{int}} = \iiint_V \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdot \langle \sigma \rangle \cdot dv = \iint_D \left( \langle \hat{\varepsilon}^m \rangle \cdot \langle \mathbf{N} \rangle + \langle \hat{\kappa} \rangle \cdot \langle \mathbf{M} \rangle + \langle \hat{\gamma} \rangle \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle \right) \cdot ds$$

Avec  $\iint_D \langle \bar{\mathbf{U}}, i \rangle \cdot \langle \bar{\mathbf{V}} \rangle \cdot dS + \iint_{\partial D} \langle \bar{\mathbf{U}} \rangle \cdot \langle \bar{\mathbf{V}}, i \rangle \cdot dS = \int_{\partial D} \langle \bar{\mathbf{U}} \rangle \cdot \langle \bar{\mathbf{V}} \rangle \cdot n_i \cdot ds$

$$-\hat{P}_{\text{int}} = \iint_D \left( \hat{u}_\alpha \cdot (N_{\alpha\beta}, \beta) + \hat{u}_3 \cdot (Q_\alpha, \alpha) + \hat{\theta}_2 \cdot (M_{1\alpha}, \alpha - Q_1) - \hat{\theta}_1 \cdot (M_{2\alpha}, \alpha - Q_2) \right) \cdot dS - \quad \alpha = 1,2$$

$$\int_{\partial D} \left( \hat{u}_\alpha \cdot (N_{\alpha\beta} \cdot n_\beta) + \hat{u}_3 \cdot (Q_\alpha, \alpha) + \hat{\theta}_2 \cdot (M_{1\alpha} \cdot n_\alpha) - \hat{\theta}_1 \cdot (M_{2\alpha} \cdot n_\alpha) \right) \cdot ds \quad \beta = 1,2 \quad (\text{CI-9})$$

### I.A.3.e) Equations d'équilibre

Le Principe des Puissances Virtuelles s'écrit simplement :  $\hat{P}_i + \hat{P}_e = \hat{P}_a$  (CI-10)

En quasi-statique,  $\hat{P}_a$  est nulle et les expressions de  $\hat{P}_e$  et  $\hat{P}_i$  sont valables pour n'importe quel champ virtuel. Les expressions sont donc égalables deux à deux. Nous obtenons au final les six équations suivantes dont deux sont en efforts  $[\mathbf{N}]$  et trois sont en moments  $[\mathbf{M}]$ . Les deux premières sont relatives aux efforts ( $\langle \bar{\mathbf{p}} \rangle$  et  $\langle \bar{\mathbf{T}} \rangle$ ) et aux déplacements  $\bar{\mathbf{u}} (u = u_1, v = u_2)$  dans le plan. La plaque déformée reste plane : c'est le sous problème membranaire.

Les quatre autres équations relatives au sous problème de flexion sont liées aux efforts ( $q, F, m, R_p$ ) et au déplacement ( $w$ ) hors plan. La plaque ne se déforme pas dans son plan.

On constate que ces deux sous problèmes sont découplés du fait de l'élasticité. Et cela simplifie considérablement les résolutions.

#### (1) *Sous problème membranaire*

a) Dans le domaine D, en fonction des translations dans le plan, on a :

$$N_{\alpha\beta}, \beta + p_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{N}] + \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (\text{CI-11})$$

où  $\bar{\mathbf{p}} = p_1 \cdot \bar{\mathbf{x}} + p_2 \cdot \bar{\mathbf{y}}$  est la pression dans le plan ;

b) Sur le contour  $\partial D$ , en fonction des translations dans le plan, on a :

$$T_\alpha = -N_{\alpha\beta} \cdot n_\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{\mathbf{T}} \rangle = [\mathbf{N}] \cdot \langle \bar{\mathbf{n}}_c \rangle \quad \begin{matrix} \alpha = 1,2 \\ \beta = 1,2 \end{matrix} \quad (\text{CI-12})$$

## (2) Sous problème de flexion

a) Dans le domaine D, en fonction de la translation normale, on a :

$$Q_{\alpha,\alpha} + p_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}\{\mathbf{Q}\} + p_3 = 0 \quad (\text{CI-13})$$

or comme  $M_{\beta\alpha,\alpha} - Q_{\beta} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{M}] - \{\mathbf{Q}\} = 0$  pour une plaque mince alors on a :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{M}]) + p_3 = 0 \quad (\text{CI-14})$$

b) Sur le contour  $\partial D$ , en fonction de translation normale dans le plan, on a :

$F - Q_{\alpha} \cdot n_{\alpha} = 0$  et il vient d'être posé que pour une plaque mince  $\overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{M}] - \{\mathbf{Q}\} = 0$ , alors :

$$F - \overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{M}] \cdot \{\bar{\mathbf{n}}_c\} = 0 \quad (\text{CI-15})$$

c) Sur le contour  $\partial D$ , aux bords dérivables, on a :  $m_2 - M_{1\alpha} \cdot n_{\alpha} = 0$  et  $m_1 + M_{2\alpha} \cdot n_{\alpha} = 0$   
Ce qui donne :

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\bar{\mathbf{n}}_c\} = m_2 \cdot \bar{x} - m_1 \cdot \bar{y} \quad (\text{CI-16})$$

### I.A.3.f) Résolution des sous problèmes de flexion

Nous avons à présent des relations entre les efforts extérieurs et le tenseur des contraintes (CI-14 à CI-1.16), des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations (CI-6) et des relations entre déformations et déplacements (CI-2 ou CI-3). Il est possible alors d'effectuer un raccourci et d'établir des relations entre efforts et déplacements.

Commençons par renommer D, raideur en flexion des plaques, le terme suivant :

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Le travail intermédiaire consiste à trouver la relation entre les moments  $[\mathbf{M}]$  et le déplacement  $\mathbf{w}$  en considérant l'expression de  $[\mathbf{M}]$  en fonction des courbures (CI-1.6) et l'expression des courbures en fonction de  $w$  (CI-2 ou CI-3), il vient :

$M_{ij} = D((1 - \nu)(w,ij) + \nu(w,kk)\delta_{ij})$  avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i=j$  et nul sinon. Soit de façon explicite :

$$[\mathbf{M}] = -D((1 - \nu) \cdot \text{grad}(\overrightarrow{\text{grad}}(w)) + \nu \cdot \Delta(w) \cdot [\mathbf{I}]) \quad (\text{CI-17})$$

La relation (CI-17) ci-dessus mise dans l'équation (CI-14) permet d'obtenir :

$p_3 + M_{ij,ij} = 0$  soit  $p_3 + D((1 - \nu)(w,ijj) + \nu(w,kkij)\delta_{ij}) = 0$  d'où  $p_3 = D(w,ijj)$  c'est-à-dire

$$p_3 = D\Delta\Delta(w) \quad (\text{CI-18})$$

### I.A.3.g) - Exemple

Cet exemple est destiné à montrer les effets de flexion.

#### (1) Données

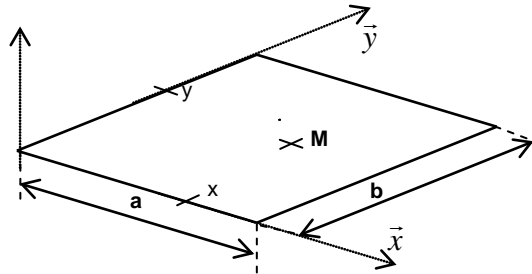


Figure CI-5 Plaque rectangulaire mince

Une plaque rectangulaire mince  $a \cdot b \cdot h$  (Figure CI-5) est appuyée sur sa périphérie et soumise à une pression normale  $p = p_0 \cdot (\sin \pi x/a) \cdot (\sin \pi y/b)$

#### (2) Déplacements et courbures

Etant soumise à la flexion, on définit les déplacements d'un point courant P de la plaque dont la position est  $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$  par  $\vec{u}_P = \vec{u}_M + \vec{\theta} \wedge \vec{MP}$  dans le repère global  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , soit :

$$\begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w, x \\ -w, y \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \cdot w, x \\ -z \cdot w, y \\ w \end{Bmatrix}$$

On tire les déformations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} -w, xx \\ -w, yy \\ -2 \cdot w, xy \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2 \cdot \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \cdot \langle \kappa \rangle$$

Avec  $\langle \kappa \rangle = \langle \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad 2 \cdot \kappa_{xy} \rangle$  les courbures.

#### (3) Moments de flexion

Les moments de flexion (CI-1.6), fonction des courbures, peuvent être exprimés en fonction des déplacements compte tenu des relations entre courbures et déplacements (CI-3) :

$$[\mathbf{M}] = -D \cdot \begin{bmatrix} w, xx + \nu \cdot w, yy & (1 - \nu) \cdot w, xy \\ (1 - \nu) \cdot w, xy & \nu \cdot w, xx + w, yy \end{bmatrix};$$

Avec  $D = E \cdot h^3 / 12(1 - \nu^2)$  la rigidité flexionnelle



#### (4) Equilibre

En appliquant doublement la divergence sur les moments ci-dessus, on a :

$$\overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{M}] = M_{ij,j} \cdot \mathbf{e}_i = \begin{cases} -D \cdot (w,xxx + v \cdot w,yyx + (1-v) \cdot w,xyy) \\ -D \cdot ((1-v) \cdot w,xyx + v \cdot w,xxv + w,yyy) \end{cases}$$

D'où l'équation de Lagrange (1811) :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{div}}[\mathbf{M}]) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} = \Delta(\Delta w)$$

#### (5) Conditions aux limites

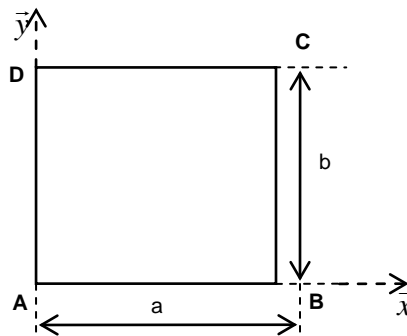


Figure CI-6 Autre vue de la plaque mince

**Bord AB** : la normale du contour est  $\langle \vec{n}_c \rangle = \langle 0 \quad -1 \rangle$  alors la relation (CI-16) nous permet d'avoir  $[\mathbf{M}]\langle \vec{n}_c \rangle = (-M_{xy} \quad -M_{yy}) = (m_y \quad 0)$

On en tire  $M_{yy} = 0$  et  $w = 0$  sur les bords AB et CD c'est-à-dire en ( $y = 0$  et  $y = b$ ).

**Bord BC** : la normale du contour est  $\langle \vec{n}_c \rangle = \langle 1 \quad 0 \rangle$  et par application de la relation (CI-16), on a :  $[\mathbf{M}]\langle \vec{n}_c \rangle = (M_{xx} \quad -M_{xy}) = (0 \quad -m_x)$

Ce qui donne  $M_{xx} = 0$  et  $w = 0$  sur les bords BC et DA c'est-à-dire en ( $x = a$  et  $x = 0$ ).

#### (6) Champ de déplacements

Par analogie avec la pression  $p = p_0 \cdot (\sin \pi x/a) \cdot (\sin \pi y/b)$ , on choisit le déplacement  $w(x,y) = c \cdot (\sin \pi x/a) \cdot (\sin \pi y/b)$  dont les dérivées secondes par rapport à  $x$  et  $y$  ( $w,xx = -\frac{\pi^2}{a^2} \cdot w$  et  $w,yy = -\frac{\pi^2}{b^2} \cdot w$ ) conduisent aux moments de flexion ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ) et au déplacement  $w$  devant être nul sur le contour.

Par application de la relation (CI-18) où on prend l'effort surfacique  $p_3 = p$ , on a :

$\frac{p}{D} = \Delta(\Delta w)$ . Ce qui donne  $\pi^4/a^4 \cdot w + 2 \cdot \pi^4/a^2 \cdot b^2 \cdot w + \pi^4/b^4 \cdot w = p/D$  d'où le coefficient

du déplacement normal  $w$  est :  $c = \frac{p_0}{D \cdot (\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2)^2}$ .

### (7) Contraintes dans l'épaisseur

De cette relation  $[M] = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} = -D \cdot \begin{bmatrix} w,xx + \nu \cdot w,yy & (1-\nu) \cdot w,xy \\ (1-\nu) \cdot w,xy & \nu \cdot w,xx + w,yy \end{bmatrix}$ , on extrait :

$$\begin{cases} M_{xx} = -D \cdot (w,xx + \nu \cdot w,yy) = D \cdot (\pi^2/a^2 + \nu \cdot \pi^2/b^2) \cdot w \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \cdot w,xy = -D(1-\nu) \cdot (\pi^2/a \cdot b) \cdot c \cdot \cos(\pi \cdot x/a) \cdot \cos(\pi \cdot y/b) \\ M_{yy} = -D \cdot (\nu \cdot w,xx + w,yy) = D \cdot (\nu \cdot \pi^2/a^2 + \pi^2/b^2) \cdot w \end{cases}$$

En utilisant la relation (CI-9), on obtient les contraintes suivantes pour une cote  $z$  se situant entre  $-h/2$  et  $h/2$  :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = z \cdot (12/h^3) \cdot M_{xx} \\ \sigma_{yy} = z \cdot (12/h^3) \cdot M_{yy} \\ \sigma_{xy} = z \cdot (12/h^3) \cdot M_{xy} \end{cases}$$

Au milieu de la plaque, c'est-à-dire au point ( $x = a/2$  ;  $y = b/2$ ), on a :

$$\begin{cases} M_{xx} = D \cdot \pi^2 \cdot c \cdot (1/a^2 + \nu/b^2) \cdot w \\ M_{xy} = 0 \\ M_{yy} = D \cdot \pi^2 \cdot c \cdot (\nu/a^2 + 1/b^2) \cdot w \end{cases}$$

### (8) Plaque carrée sous pression constante

Ici, comme la plaque est carrée, le côté  $a$  vaut le côté  $b$ .

On pose  $p = p_0 \cdot 2/\pi$  car  $\int_0^a \sin \pi x/a \cdot dx = a \cdot 2/\pi$  et  $\int_0^b \sin \pi y/b \cdot dx = b \cdot 2/\pi$  par conséquent

$$w_{\text{centre}} = p \cdot \frac{a^4}{D \cdot 8 \cdot \pi^3} = 4,03 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{p \cdot a^4}{D} \text{ à comparer à : } \begin{cases} k = 4,06 \leftrightarrow a/h = 100 \\ k = 4,27 \leftrightarrow a/h = 10 \end{cases}$$

Les contraintes au centre sont :

$$(\sigma_{xx})_{z=h/2} = (\sigma_{yy})_{z=h/2} = 6 \cdot p \cdot \frac{(1+\nu) \cdot a^2}{8 \cdot \pi \cdot h^2} \text{ à comparer à } 6 \cdot p \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot (1+\nu) \cdot 0,0368$$

#### I.A.3.h) Autre exemple

C'est un exemple qui permet d'aborder le problème de flexion d'une plaque dans un repère désormais cylindrique (Figure CI-7).

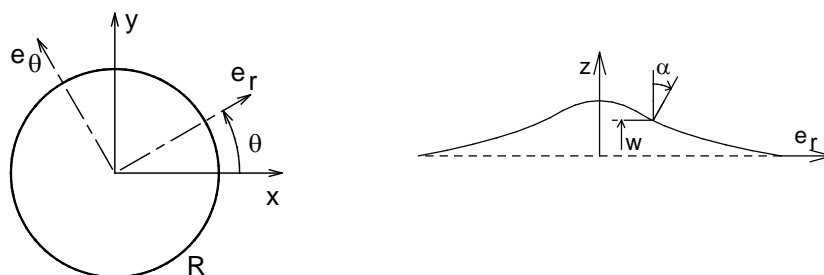


Figure CI-7 Coordonnées cylindriques de la plaque circulaire (Kirchhoff)

## (1) Déplacements et déformations virtuels

L'étude est faite en coordonnées cylindriques puisque la forme de l'élément est circulaire, alors le champ des petits déplacements est :

$$\hat{u}_p = \hat{u}_M + \bar{\theta} \wedge \vec{MP} = \hat{w} \cdot \vec{z} + (-\hat{w}, r \cdot \vec{e}_\theta) \wedge (z \cdot \vec{z}) \text{ soit } \hat{u}_p = -z \cdot \hat{w}, r \cdot \vec{e}_r + \hat{w} \cdot \vec{z} \quad (\text{CI-19})$$

Le tenseur des déformations est alors déterminé comme écrit ci-dessous :

$$[\hat{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -z \cdot \hat{w}'' & & \\ & -z \cdot \frac{\hat{w}'}{r} & \\ & & \end{bmatrix} \text{ où } w' = w, r \text{ et } w'' = w, rr \quad (\text{CI-20})$$

## (2) Loi de comportement

Sous l'hypothèse d'état de contrainte plane où  $\sigma_{zz}$  est négligée ( $\sigma_{zz} = -p$  sur face inférieure !), les déformations  $\varepsilon_{rr} = -z \cdot w''$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = -z \cdot w'/r$  dans la matrice de déformations établie précédemment par l'équation (CI-20), par le biais de la matrice de comportement, permettent de calculer les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \cdot \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \cdot \varepsilon_{rr}) \end{cases} \quad (\text{CI-21})$$

En tenant compte des relations CI-2 et CI-3 dans l'équation (CI-21), on peut par application de la relation CI-6 adaptée au repère cylindrique, obtenir les moments de flexion relatifs aux contraintes ci-dessus :

$$\begin{cases} M_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} \cdot z \cdot dz = -D \cdot (w'' + \nu \cdot \frac{w'}{r}) \\ M_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} \cdot z \cdot dz = -D \cdot (\nu \cdot w'' + \frac{w'}{r}) \end{cases}$$

$$\text{où } D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$$

La quantité D joue un rôle analogue au produit EI et est souvent désignée par la rigidité flexionnelle de la plaque.

### (3) Calcul du Travail virtuel interne

Les travaux virtuels  $-\hat{P}_{int}$  et  $\hat{P}_{ext}$  sont alors calculés sur le domaine  $\Omega$  constitué d'une couronne de rayons R1 et R2 en tenant compte de la relation (CI-3).

$$-\hat{P}_{int} = \iiint_{\Omega} \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdot \{\sigma\}_j \cdot dv = \iint_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} \cdot z \cdot \hat{w}'' \cdot dz + \sigma_{\theta\theta} \cdot z \cdot \frac{\hat{w}'}{r} \cdot dz \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \int_{R1}^{R2} \left( \hat{w}'' \cdot M_{rr} + \frac{\hat{w}'}{r} \cdot M_{\theta\theta} \right) \cdot r \cdot dr$$

Les termes du travail virtuel intérieur sont développés ci-après en suivant la même démarche que dans le paragraphe II-7 pour une exploitation plus judicieuse :

$$\hat{w}'' \cdot r \cdot M_{rr} = (\hat{w}' \cdot r \cdot M_{rr})_{,r} - \hat{w}' \cdot (r \cdot M_{rr})_{,r} = (\hat{w}' \cdot r \cdot M_{rr})_{,r} - (\hat{w} \cdot (r \cdot M_{rr})_{,r})_{,r} + \hat{w} \cdot (r \cdot M_{rr})_{,rr}$$

$$\hat{w}' \cdot M_{\theta\theta} = (\hat{w} \cdot M_{\theta\theta})_{,r} - \hat{w} \cdot M_{\theta\theta,r}$$

Soit alors :

$$-\hat{P}_{int} = 2 \cdot \pi \cdot \left( [\hat{w}' \cdot r \cdot M_{rr}]_{R1}^{R2} + [\hat{w} \cdot (r \cdot M_{rr})_{,r} - M_{\theta\theta}]_{R1}^{R2} + \hat{w} \cdot ((r \cdot M_{rr})_{,rr} - M_{\theta\theta,r}) \cdot dr \right)$$

### (4) Calcul du Travail externe

Le travail virtuel externe est :

$$\hat{P}_{ext} = 2 \cdot \pi \cdot \left( [\hat{\alpha} \cdot r \cdot M_{rr}]_{R1}^{R2} + [\hat{w} \cdot (T_z \cdot r)]_{R1}^{R2} + p \cdot \int_{R1}^{R2} r \cdot \hat{w} \cdot dr \right) \text{ avec } \hat{\alpha} = -\hat{w}_{,r} = -\hat{w}'$$

Le Principe des Travaux Virtuels appliqué, ici, permet la détermination de l'effort  $T_z$  en comparant les termes deux à deux:  $-\hat{P}_{int} + \hat{P}_{ext} = 0$

$$\text{Soit } (r \cdot M_{rr})_{,r} - M_{\theta\theta} = T_z \cdot r ; \text{ ou encore } (r \cdot M_{rr})_{,rr} - M_{\theta\theta,r} = -p \cdot r \Rightarrow T_z = -\frac{p \cdot r}{2}$$

Cette dernière relation peut être trouvée en écrivant l'équilibre d'un disque de rayon r soumis à une pression p orientée suivant  $\vec{z}$  :

$$p \cdot \pi \cdot r^2 + T_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 0$$

### (5) Expression de w

Pour pouvoir exprimer le déplacement normal au plan de l'élément, on part de l'équation différentielle :

$$(w'' \cdot r + v \cdot w')_{,r} - (v \cdot w'' + \frac{w'}{r}) = \frac{p \cdot r^2}{2 \cdot D}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$w''' + \frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} = \frac{p \cdot r}{2 \cdot D}$$

Pour permettre une résolution aisée, donnons à cette équation différentielle la forme suivante :

$$\left(\frac{1}{r} \cdot (r \cdot w'), r\right), r = \frac{p \cdot r}{2 \cdot D}$$

On obtient donc :

$$w' = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} + C_1 \cdot \frac{r}{2} + C_2 \cdot \frac{1}{r}$$

Dans le cas d'une plaque encadrée à sa périphérie, on a les conditions aux limites suivantes pour avoir les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  dans la dérivée première de  $w$  écrite précédemment :

$$w' = 0 \text{ pour } r = 0 \text{ et } r = R.$$

Après une nouvelle recherche de primitive, on arrive à la solution recherchée, c'est-à-dire le déplacement  $w$  avec  $C_3$  à déterminer :

$$w = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D} - \frac{p \cdot R^2 \cdot r^2}{32 \cdot D} + C_3$$

Comme aux bords de l'élément, il n'y a pas de déplacement puisque la périphérie est encadrée ( $w=0$  pour  $r=R$  où  $R$  est le rayon de la plaque) alors on obtient enfin:

$$w = \frac{p}{64 \cdot D} \cdot (R^2 - r^2)^2$$

## (6) Déformations et contraintes

En déterminant les dérivées première et seconde du déplacement normal au plan de l'élément dans le repère cylindrique :

$$w = \frac{p}{64 \cdot D} \cdot (R^2 - r^2)^2 \Rightarrow w' = -\frac{p}{16 \cdot D} \cdot (R^2 - r^2) \cdot r \Rightarrow w'' = -\frac{p}{16 \cdot D} \cdot (R^2 - 3 \cdot r^2)$$

Les expressions des déformations  $\{\epsilon\}$ , des contraintes  $\{\sigma\}$  (et des moments  $\{M\}$ ) qui sont fonction de ces dérivées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{rr} = -z \cdot w'' = \frac{p}{16 \cdot D} \cdot (R^2 - 3 \cdot r^2) \cdot z \\ \epsilon_{\theta\theta} = -z \cdot \frac{w'}{r} = \frac{p}{16 \cdot D} \cdot (R^2 - r^2) \cdot z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{p}{16} \cdot \frac{12}{h^3} \cdot (R^2 \cdot (1 + \nu) - r^2 \cdot (3 + \nu)) \cdot z \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{16} \cdot \frac{12}{h^3} \cdot (R^2 \cdot (1 + \nu) - r^2 \cdot (1 + 3 \cdot \nu)) \cdot z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{rr} = \frac{p \cdot R^2}{16} \cdot (1 + \nu) \cdot \left(1 - \xi^2 \cdot \frac{3 + \nu}{1 + \nu}\right) \\ M_{\theta\theta} = \frac{p \cdot R^2}{16} \cdot (1 + \nu) \cdot \left(1 - \xi^2 \cdot \frac{1 + 3 \cdot \nu}{1 + \nu}\right) \end{array} \right. \text{ où } \xi = \frac{r}{R}$$

On peut facilement monter ici que les contraintes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sont prépondérantes devant  $\sigma_{zz} = -p$  en considérant par exemple  $R = 100 \text{ mm}$ ,  $r = 0 \text{ mm}$ ,  $h = 1 \text{ mm}$  et  $z = \pm 0.5 \text{ mm}$ .

## I.B. Théorie de plaque épaisse (Mindlin)

Tout ce qui a été développé dans la théorie de Kirchhoff (plaque mince) est valable ici dans le développement de la théorie des plaques épaisses sauf que les courbures s'exprimeront différemment et qu'il faudra en plus prendre en considération le cisaillement transversal et son effet dans cette théorie dite de Mindlin-Reissner.

### I.B.1. Hypothèse de Mindlin

Les points d'un segment normal à la surface moyenne initiale restent sur un segment dans la configuration déformée, mais ce segment de droite n'est plus perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

L'influence du cisaillement transversal n'est pas négligée dans l'énergie de déformation. L'autre hypothèse générale aux plaques, déjà évoquée dans la théorie de Kirchhoff, est que la contrainte  $\sigma_{zz}$  (hors plan) est négligeable devant  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  (dans le plan).

### I.B.2. Déplacements

Les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  n'étant pas exactement les dérivées du déplacement normal  $w$  par les variables d'espace  $x$  et  $y$  (Figure CI-2), c'est-à-dire  $\theta_x \neq w,y$  et  $\theta_y \neq -w,x$ , alors les déplacements du point P à la cote  $z$  sont :

$$\begin{cases} u_p = u(x, y) + z \cdot \theta_y(x, y) \\ v_p = v(x, y) - z \cdot \theta_x(x, y) \\ w_p = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{CI-22})$$

### I.B.3. Déformations

En plus des déformations de membrane et de flexion, sont exprimées ici les déformations de cisaillement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u,x + z \cdot \theta_{y,x} \\ v,y - z \cdot \theta_{x,y} \\ u,y + z \cdot \theta_{y,y} + v,x - z \cdot \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u,x \\ v,y \\ u,y + v,x \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{CI-23})$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \cdot \bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2 \cdot \bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w,x + \theta_y \\ w,y - \theta_x \end{Bmatrix} = \{\gamma\} = \{\varepsilon^{ct}\} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = 5/4 \cdot (1 - 4 \cdot z^2/h^2) \cdot \{\gamma\} \quad (\text{CI-24})$$

(ct pour cisaillement transversal)

## I.B.4. Contraintes et efforts internes

Dans cette théorie des plaques épaisses, la définition donnée aux contraintes et leur forme intégrée (dans l'épaisseur) est identique à celle de la théorie de Kirchhoff (§ II) à laquelle il faut ajouter les relations liées aux phénomènes de cisaillement transversal, particulièrement les efforts généralisés de cisaillement suivants :

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz$$

Or les contraintes dans la relation qui précède sont liées aux déformations de cisaillement par la formule :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & | & \\ & | & 5/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix}$$

Ce qui permet de réécrire les efforts de cisaillement sous la forme :

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & | & \\ & | & 5/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}^S] \cdot \{\gamma\}$$

Et en l'utilisant dans la relation (CI-21), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{5}{4} (1 - 4 \cdot z^2/h^2) \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E \cdot h} \cdot \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{z^2}{h^2}\right) \cdot \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}$$

On sait d'autre part que  $\{\boldsymbol{\sigma}^S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \mu \cdot \begin{Bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{xz} \\ 2\bar{\varepsilon}_{yz} \end{Bmatrix}$  par conséquent :

$$\{\boldsymbol{\sigma}^S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{z^2}{h^2}\right) \cdot \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}^S\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = 1/h \cdot \{\mathbf{Q}\} \cdot 3/2 \cdot \left(1 - 4 \cdot (z^2/h^2)\right) \quad (\text{CI.25})$$

Ce dernier résultat s'obtient donc par analogie avec la répartition parabolique des contraintes de cisaillement dans une poutre de section rectangulaire  $b \cdot h$ .

Le coefficient  $\psi = 5/6$  dans la relation (CI-24) est obtenu en calculant l'énergie de déformation due au cisaillement transversal (par unité de surface du plan moyen) :

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \langle \gamma \rangle \cdot \{\mathbf{Q}\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E \cdot h} \cdot (Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2) \cdot \frac{1}{\psi}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} 2 \cdot \left( \sigma_{xz} \cdot \frac{\sigma_{xz}}{2\nu} + \sigma_{yz} \cdot \frac{\sigma_{yz}}{2\nu} \right) \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot (Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2) \cdot \frac{9}{4 \cdot h^2} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - 4 \cdot \frac{z^2}{h^2}\right) \cdot dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot (Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2) \cdot \frac{6}{5 \cdot h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E \cdot h} \cdot (Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2) \cdot \frac{1}{\psi} \end{aligned}$$

On obtient ainsi :  $\psi = 5/6$

## I.B.5. Remarques

Il faut remarquer que ces efforts internes sont produits lors de la sollicitation de la plaque par les efforts extérieurs qui s'y appliquent (Figure CI-4). En prenant la plaque comme un solide dans l'espace, les forces et moments s'exerçant sur elle vérifient la relation d'équilibre.

L'énergie de déformation dans la théorie de Mindlin se présente comme l'énergie de déformation dans la théorie de Kirchhoff à laquelle on a ajouté la partie relative aux effets de cisaillement. Par conséquent dans l'expression du Principe des Travaux virtuels, il faut tenir compte du phénomène de cisaillement. Et ce sont en fait les mêmes efforts extérieurs appliqués sur la plaque de Kirchhoff qui sont reconduits ici.

## I.B.6. Exemple

On reprend ici l'exemple (I.A.3.h) illustrant la théorie de Kirchhoff pour montrer l'utilisation des travaux virtuels sur une plaque épaisse en théorie de Mindlin où se cumulent les efforts de flexion et de cisaillement.

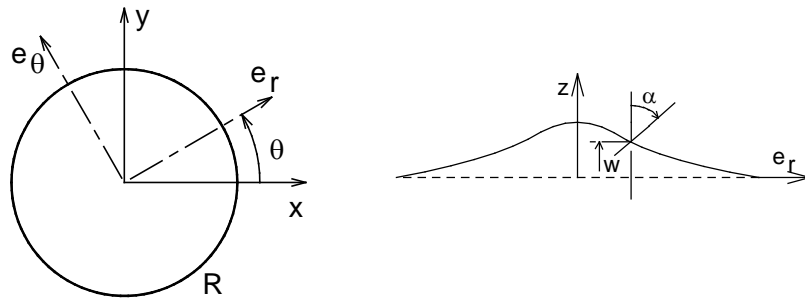


Figure CI-7 Coordonnées cylindriques de la plaque circulaire (Mindlin)

### I.B.6.a) Déplacements déformations virtuels

Les déplacements dans la théorie de Mindlin, en coordonnées polaires, sont:

$$\hat{U}_p = \hat{U}_M + \hat{\alpha} \wedge \vec{MP} = \hat{w} \cdot \vec{z} + (\alpha \cdot \vec{e}_\theta) \wedge (z \cdot \vec{z}) \Rightarrow \hat{U}_p = z \cdot \hat{\alpha} \cdot \vec{e}_r + \hat{w} \cdot \vec{z} \quad (\text{CI-26})$$

Les dérivées de ces déplacements dans la formule  $[\hat{\varepsilon}] = 1/2 \cdot [\text{grad}(\hat{u}) + {}^T \text{grad}(\hat{u})]$  donnent les déformations :

$$[\hat{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} z \cdot \hat{\alpha}' & & \frac{1}{2}(\hat{w}' + \hat{\alpha}) \\ & z \cdot \frac{\hat{\alpha}}{r} & \\ \frac{1}{2}(\hat{w}' + \hat{\alpha}) & & \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} w' = w, r \\ \alpha' = \alpha, r \end{cases} \quad (\text{CI-27})$$

Ce champ de déplacements **conduirait** à :  $\varepsilon_{zz} = 0$  mais donnant une contrainte normale non nulle  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$



### I.B.6.b) Principe des Travaux Virtuels

Le domaine  $\Omega$  choisi est constitué d'une couronne de rayons R1 et R2.

Définissons en premier lieu le travail virtuel interne  $\hat{P}_{int}$  :

$$-\hat{P}_{int} = \iiint_{\Omega} \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot d\mathbf{v} = \iint_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} \cdot z \cdot \hat{\alpha}' \cdot dz + \sigma_{\theta\theta} \cdot z \cdot \frac{\hat{\alpha}}{r} \cdot dz \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta + \iint_{\Omega} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} \cdot (\hat{w}' + \hat{\alpha}) \cdot dz \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

En ayant recours aux équations des moments (CI-6) dans le repère cylindrique, l'expression de ce travail interne se simplifie et devient :

$$\hat{P}_{int} = 2 \cdot \pi \cdot \int_{R1}^{R2} \left( \hat{\alpha}' \cdot M_{rr} + \frac{\hat{\alpha}}{r} \cdot M_{\theta\theta} \right) \cdot r \cdot dr + 2 \cdot \pi \cdot \int_{R1}^{R2} Q_{rz} \cdot (\hat{w}' + \hat{\alpha}) \cdot r \cdot dr$$

En second lieu, établissons le travail virtuel externe  $\hat{P}_{ext}$  tel que :

$$\hat{P}_{ext} = 2 \cdot \pi \cdot \left( [\hat{\alpha} \cdot r \cdot M_{rr}]_{R1}^{R2} + [\hat{w} \cdot T_z \cdot r]_{R1}^{R2} + p \cdot \int_{R1}^{R2} \hat{w} \cdot r \cdot dr \right)$$

En appliquant le Principe des Travaux Virtuels  $\hat{P}_i + \hat{P}_e = 0$  , on a :

$$\int_{R1}^{R2} \left( \hat{\alpha}' \cdot M_{rr} + \frac{\hat{\alpha}}{r} \cdot M_{\theta\theta} \right) \cdot r \cdot dr + \int_{R1}^{R2} Q_{rz} \cdot (\hat{w}' + \hat{\alpha}) \cdot r \cdot dr + \left( [\hat{\alpha} \cdot r \cdot M_{rr}]_{R1}^{R2} + [\hat{w} \cdot T_z \cdot r]_{R1}^{R2} + p \cdot \int_{R1}^{R2} \hat{w} \cdot r \cdot dr \right) = 0$$

or, comme  $\hat{\alpha}' \cdot r \cdot M_{rr} = (\hat{\alpha} \cdot r \cdot M_{rr})_{,r} - \hat{\alpha} \cdot (r \cdot M_{rr})_{,r}$  et  $\hat{w}' \cdot r \cdot Q_{rz} = (\hat{w} \cdot r \cdot Q_{rz})_{,r} - \hat{w} \cdot (r \cdot Q_{rz})_{,r}$  , on réécrit :

$$\int_{R1}^{R2} \left( - (r \cdot M_{rr})_{,r} + M_{\theta\theta} + r \cdot Q_{rz} \right) \hat{\alpha} \cdot dr + \int_{R1}^{R2} \left( - (r \cdot Q_{rz})_{,r} + p \cdot r \right) \hat{w} \cdot dr + \left( [\hat{w} \cdot r \cdot Q_{rz}]_{R1}^{R2} + [\hat{w} \cdot T_z \cdot r]_{R1}^{R2} \right) = 0$$

Et en exploitant le Principe des Travaux Virtuels par comparaison des termes associés à un déplacement virtuel considéré, tout se réduit au système d'équations suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \int_{R1}^{R2} \left( - (r \cdot M_{rr})_{,r} + M_{\theta\theta} + r \cdot Q_{rz} \right) \hat{\alpha} \cdot dr = 0 \\ \int_{R1}^{R2} \left( - (r \cdot Q_{rz})_{,r} + p \cdot r \right) \hat{w} \cdot dr = 0 \\ \int_{R1}^{R2} \left( \hat{w} \cdot r \cdot Q_{rz} \right)_{,r} + [\hat{w} \cdot T_z \cdot r]_{R1}^{R2} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} (r \cdot M_{rr})_{,r} - M_{\theta\theta} - r \cdot Q_{rz} = 0 \\ (r \cdot Q_{rz})_{,r} + p \cdot r = 0 \\ T_z = Q_{rz} = -\frac{p \cdot r}{2} \end{cases} \quad (CI-28)$$

La dernière relation du système ci-dessus peut être trouvée en écrivant l'équilibre d'un disque de rayon r soumis à une pression p orientée suivant  $\vec{z}$  :  $p \cdot \pi \cdot r^2 + T_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 0$  ( $T_z = 0$  pour  $r = 0$ )

### I.B.6.c) Loi de comportement

Pour la **flexion**, en considérant un état plan de contraintes, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \cdot \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \cdot \varepsilon_{rr}) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = -z \cdot \alpha' \\ \varepsilon_{\theta\theta} = z \cdot \frac{\alpha}{r} \end{array} \right. \quad (\text{CI-29})$$

Et les moments de flexion se déduisent par intégration des contraintes de la relation (CI-29) suivant l'épaisseur de la plaque :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} \cdot z \cdot dz = D \cdot (\alpha' + \nu \cdot \frac{\alpha}{r}) \\ M_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} \cdot z \cdot dz = D \cdot (\nu \cdot \alpha' + \frac{\alpha}{r}) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \quad (\text{CI-30})$$

Pour le **cisaillement**, et par analogie avec une poutre de section rectangulaire :

$$V_c = \frac{1}{2} \iint_S \frac{Q_{rz}^2}{G \cdot \psi \cdot h} \cdot dS = \frac{1}{2} \iint_S Q_{rz} \cdot \frac{Q_{rz}}{G \cdot \psi \cdot h} \cdot ds$$

D'où l'expression du cisaillement transversal suivant :

$$2 \cdot \varepsilon_{rz} = \frac{Q_{rz}}{G \cdot \psi \cdot h} \quad \text{avec} \quad \psi = 5/6.$$

On en déduit l'effort :

$$Q_{rz} = \frac{5}{6} \cdot \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \cdot 2 \cdot \varepsilon_{rz} = C \cdot (\alpha + w') \quad \text{où} \quad C = \frac{5}{6} \cdot \frac{E \cdot h}{2(1+\nu)} \quad (\text{CI-31})$$

### I.B.6.d) Expressions de w et de $\alpha$

En injectant les moments de flexion (CI-30) dans l'équation  $(r \cdot M_{rr})_r - M_{\theta\theta} - r \cdot Q_{rz} = 0$  de la relation (CI-28) tout en y considérant  $T_z = Q_{rz} = -\frac{p \cdot r}{2}$ , on obtient l'équation différentielle en  $\alpha$  suivante :

$$\alpha'' \cdot r + \alpha' - \frac{\alpha}{r} = -\frac{p \cdot r^2}{2 \cdot D}$$

Sa résolution donne :

$$\alpha = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D}$$

Les conditions aux limites suivantes assurent les calculs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  :

$$\underline{\alpha = 0 \text{ en } r = 0} \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \alpha = C_1 \cdot r - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D}$$

$\alpha = 0$  en  $r = R$  (plaque encastree à sa periphérie) ; d'où la solution recherchée :

$$\alpha = \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot (R^2 - r^2) \quad (\text{CI-32})$$

La détermination du déplacement normal au plan de l'élément nécessite l'utilisation de l'équation (CI-31) tout en considérant l'expression de la solution (CI-32) :

$$w_{,r} = -\frac{p \cdot r}{2 \cdot C} - \alpha \text{ dont la résolution donne : } w = K_1 - \frac{p \cdot r^2}{4 \cdot C} - \frac{p \cdot r^2}{32 \cdot D} (R^2 - \frac{r^2}{2}) \quad (\text{CI-33})$$

Les conditions aux limites évaluent le coefficient  $K_1$  pour que se pose la solution définitive :

$$\underline{w = 0 \text{ pour } r = R} \Rightarrow K_1 = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot D} + \frac{p \cdot R^2}{4 \cdot C} \Rightarrow K_1 = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot D} \cdot (1 + \phi) \text{ où } \phi = \frac{16 \cdot D}{R^2 \cdot C}$$

D'où la solution en  $w$  recherchée :

$$w = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot D} (1 - \xi^2)(1 - \xi^2 + \phi) \quad \text{où } \xi = \frac{r}{R} \quad (\text{CI-34})$$

### **I.B.6.e) Contraintes intégrées**

En remplaçant dans  $\alpha$  (CI-32) et  $w$  (CI-34) par leurs expressions dans les moments de la relation (CI-30) rappelée ci-après :

$$\left| \begin{aligned} M_{rr} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} \cdot z \cdot dz = D \cdot (\alpha' + \nu \cdot \frac{\alpha}{r}) \\ M_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} \cdot z \cdot dz = D \cdot (\nu \cdot \alpha' + \frac{\alpha}{r}) \end{aligned} \right. \quad \text{où } D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

On arrive à :

$$\left| \begin{aligned} M_{rr} &= \frac{p \cdot R^2}{16} (1 + \nu)(1 - \xi^2) \cdot \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \\ M_{\theta\theta} &= \frac{p \cdot R^2}{16} (1 + \nu)(1 - \xi^2) \cdot \frac{1 + 3 \cdot \nu}{1 + \nu} \end{aligned} \right. \text{ avec } \xi = \frac{r}{R} \quad (\text{CI-35})$$

### **I.B.6.f) Remarque**

Dans le cas d'une plaque appuyée sur sa periphérie, la condition :  $M_{rr} = 0$  en  $r = R$  remplace la condition précédente :  $\alpha = 0$  en  $r = R$ . Les déplacements deviennent :

$$\alpha = \frac{p \cdot R^3}{16 \cdot D} (\xi \frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \xi^3) \quad w = \frac{p \cdot R^4}{64 \cdot D} (1 - \xi^2)(2 \frac{3 + \nu}{1 + \nu} - 1 - \xi^2 + \phi) \text{ où } \phi = \frac{16 \cdot h^2}{5 \cdot R^2} \frac{1}{1 - \nu}$$

## I.C. Bibliographie du Complément I

- [1] BATOZ, J.L., DHATT, G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol.1 Solides élastiques, Vol. 2: Poutres et plaques, Hermès, Paris, 1990, Volume 1, 455 pages, volume 2, 483 pages.
- [2] BLANC, M., *Méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles*, Polycopié ENSAM, Paris, 1987, 157 pages.
- [3] DUBIGEON, S., *Mécanique des milieux continus, Eléments finis*, Tome 3, polycopié ENSM, Nantes, 1985, 88 pages.
- [4] DUBIGEON, S., *Mécanique des milieux continus*, Tome 2, Cours polycopié ENSM, Nantes, 1985, 192 pages.
- [5] GACHON, H., *Théorie non linéaire des plaques*, Fascicule 1, Polycopié ENSAM, Paris, 1987, 125 pages.
- [6] HAN, W.S., *Analyse linéaire et non linéaire de plaques et coques en statique et dynamique*, thèse de doctorat : Institut Polytechnique de Lorraine, 1989, 200 pages.
- [7] HINTON, E., OWEN, D.R.J., *Finite element software for plates and shells*, Pineridge Press, Swansea U.K., 1984, 403 pages
- [8] IMBERT, J.F., *Analyse des structures par éléments finis*, Editions CEPADUES, Toulouse, 1991, 505 pages.
- [9] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985, 532 pages.
- [10] ROCKEY, K.C., EVANS, H.R., GRIFFITHS, D.W., NETHERCOT, D.A., *Introduction à la méthode des éléments finis*, Eyrolles, Paris, 1979, 228 pages.
- [11] SABONNADIÈRE, J.C., COULOMB, J.L., *Eléments finis et CAO*, Hermès, Paris, 1986, 210 pages.
- [12] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKI-KRIEGER, S., *Théorie des plaques et coques*, Dunod, Paris, 1961, 580 pages.
- [13] ZIENKIEWICK, O.C., *La méthode des éléments finis*, McGraw-Hill, 1979, 851 pages.
- [14] ONATE, E., ZIENKIEWICZ, O.C., SUAREZ, B., TAYLOR, R.L., *A general methodology for deriving shear-constrained Reissner-Mindlin plate elements*, International journal for numerical methods in engineering, 1990, Publication n°5.

Notes :

## II. Complément : Elément "C<sup>0</sup>" (Belytschko)

<b>II.</b>	<b>Complément_Elément "C<sup>0</sup>" (Belytschko)</b>	<b>II-1</b>
<b>II.A.</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>II-2</b>
<b>II.B.</b>	<b>Membrane</b>	<b>II-3</b>
II.B.1.	Déplacements	II-3
II.B.2.	Déformations	II-3
II.B.3.	Elasticité isotrope	II-4
II.B.4.	Travaux virtuels	II-4
<b>II.C.</b>	<b>Flexion</b>	<b>II-5</b>
II.C.1.	Rotations	II-5
II.C.2.	Courbures	II-5
II.C.3.	Elasticité isotrope	II-5
II.C.4.	Travaux virtuels	II-6
<b>II.D.</b>	<b>Cisaillement</b>	<b>II-6</b>
II.D.1.	Déplacements	II-6
II.D.2.	Déformations	II-6
II.D.3.	Décomposition	II-7
II.D.4.	Elasticité isotrope	II-7
II.D.5.	Principe des travaux virtuels	II-8
<b>II.E.</b>	<b>Etude de <math>\{\Theta_e^*\}</math> et <math>\{W_e^*\}</math></b>	<b>II-8</b>
II.E.1.	Expression de $\{w^*\}$	II-8
II.E.2.	Expression de $\theta_x^*$ et $\theta_y^*$ composant $\{\Theta_e^*\}$	II-9
II.E.3.	Expression de $\{W_e^*\}$	II-10
II.E.4.	Conséquence	II-10
<b>II.F.</b>	<b>Matrice de raideur de l'élément</b>	<b>II-11</b>
II.F.1.	Travaux virtuels	II-11
II.F.2.	Matrices	II-11
<b>II.G.</b>	<b>Résultats pour une plaque circulaire encadrée</b>	<b>II-12</b>
II.G.1.	Données	II-12
II.G.2.	Résultats	II-12
<b>II.H.</b>	<b>Références</b>	<b>II-13</b>

## II.A. Caractéristiques

L'élément «C<sup>0</sup>» est cité, bien que jugé parfois plutôt "raide", comme élément disponible dans les codes de calcul dynamique explicite LS-DYNA3D [12] et PAM-STAMP (ESI). Laquelle présence est justifiée par un temps de calcul réduit puisqu'il n'y a qu'un seul point d'intégration dans le plan. De plus, il ne présente aucun blocage notable en cisaillement si le maillage est « assez » dense.

C'est un élément à trois nœuds avec, pour la **flexion** et le **cisaillement**, trois degrés de liberté où les rotations ( $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) sont indépendantes du déplacement normal ( $w$ ). La formulation développée ci-dessous fait intervenir un repère "corotationnel" (Rc) dans la figure CII-1 – en l'absence de fort cisaillement dans le plan – où les coordonnées  $x_1, y_1$  et  $y_2$  sont nulles entraînant ainsi des simplifications intéressantes.

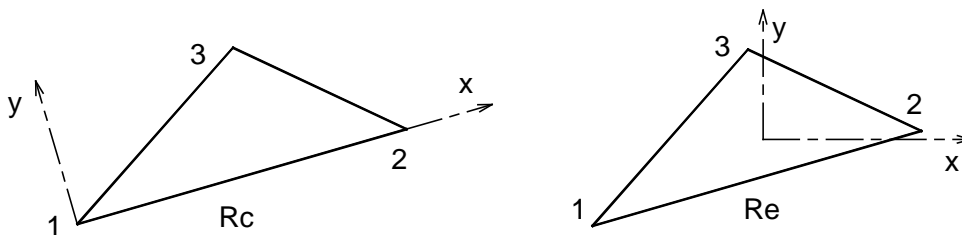


Figure CII-1 Les repères corotationnel (Rc) et local (Re)

### Interpolation

Pour les effets de membrane et de flexion, les fonctions d'interpolation sont les fonctions d'aire. Ces fonctions de forme s'identifient avec les coordonnées de surface  $L_1, L_2, L_3$  [11]:

$$N_1 = L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2 \cdot A} (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y - x \cdot y_3 + x \cdot y_2 - x_2 \cdot y)$$

$$N_2 = L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{1}{2 \cdot A} (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y - x \cdot y_1 + x \cdot y_3 - x_3 \cdot y)$$

$$N_3 = L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{1}{2 \cdot A} (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y - x \cdot y_2 + x \cdot y_1 - x_1 \cdot y)$$

$$\iint L_1^p \cdot L_2^q \cdot L_3^r \cdot dx \cdot dy = 2 \cdot A \cdot \frac{p! \cdot q! \cdot r!}{(p + q + r + 2)!}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

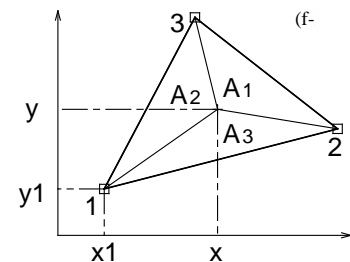


Figure CII-2 Surfaces élémentaires  $A_1, A_2, A_3$

Pour le cisaillement, ces fonctions sont modifiées ; c'est ce qui fait l'originalité de cet élément qui entre alors dans la catégorie des éléments à champ de cisaillement "supposé" ('assumed shear strain field').

Dans le repère corotationnel Rc,  $x_1 = y_1 = y_2 = 0$  et l'aire du triangle vaut :  $A = \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot y_3$

$$\Rightarrow \langle \mathbf{L} \rangle = \langle L_1 \mid L_2 \mid L_3 \rangle = \frac{1}{x_2 \cdot y_3} \langle x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y - x \cdot y_3 - x_2 \cdot y \mid x \cdot y_3 - x_3 \cdot y \mid x_2 \cdot y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \mathbf{L}, x \rangle = \frac{1}{x_2 \cdot y_3} \langle -y_3 \mid y_3 \mid 0 \rangle \text{ et } \langle \mathbf{L}, y \rangle = \frac{1}{x_2 \cdot y_3} \langle x_3 - x_2 \mid -x_3 \mid x_2 \rangle$$

## II.B. Membrane

### II.B.1. Déplacements

Les déplacements  $u$  et  $v$ , dans le plan  $(\bar{x}, \bar{y})$ , d'un point courant de coordonnées  $x$  et  $y$  s'expriment en fonction des déplacements des nœuds de l'élément :

$$\begin{cases} u = L_1 \cdot u_1 + L_2 \cdot u_2 + L_3 \cdot u_3 \\ v = L_1 \cdot v_1 + L_2 \cdot v_2 + L_3 \cdot v_3 \end{cases} \quad (\text{CII-1})$$

$L_1, L_2, L_3$  sont les fonctions d'interpolation explicitées précédemment

### II.B.2. Déformations

Les dérivées des déplacements par rapport à  $x$  et  $y$  dans le repère local permettent d'établir les déformations en membrane comme suit :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u, x \\ v, y \\ u, y + v, x \end{Bmatrix} \quad (\text{CII-2})$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} = \frac{1}{x_2 \cdot y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & & y_3 & & & \\ & x_3 - x_2 & & -x_3 & & x_2 \\ x_3 - x_2 & -y_3 & -x_3 & y_3 & x_2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^m] \{\mathbf{U}_e\} \quad (\text{CII-3})$$

On remarque tout de suite la matrice gradient des déformations des effets de membrane :

$$[\mathbf{B}^m] = \frac{1}{x_2 \cdot y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & & y_3 & & & \\ & x_3 - x_2 & & -x_3 & & x_2 \\ x_3 - x_2 & -y_3 & -x_3 & y_3 & x_2 & \end{bmatrix} \quad (\text{CII-4})$$

$\langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \mid u_2 \quad v_2 \mid u_3 \quad v_3 \rangle$  les déplacements dans le repère local.

Pour les effets de membrane, il s'agit tout simplement du classique triangle CST (Constant Strain Triangle) même si la matrice  $\mathbf{B}^m$  est simplifiée par le fait que l'origine du repère local est au nœud  $i$  et que le premier côté de ce repère est porté par le premier côté du triangle.



### II.B.3. Elasticité isotrope

Les contraintes obtenues par la loi constitutive, lorsqu'elles sont intégrées suivant l'épaisseur de l'élément, permettent la détermination des efforts normaux  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$  :

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \cdot (1 - \nu) \end{bmatrix} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (\text{CII-5})$$

On note :  $[\mathbf{D}^m] = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \cdot (1 - \nu) \end{bmatrix}$ , la matrice de comportement en membrane ;

### II.B.4. Travaux virtuels

Le Principe de Travaux Virtuels (PTV) est essentiel dans la mise en place des matrices des raideurs ; en membrane, en flexion et en cisaillement.

#### Matrice de raideur en membrane

Les travaux virtuels des efforts internes  $\hat{P}_{int}^m$  et des efforts extérieurs  $\hat{P}_{ext}^m$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{int}^m &= - \iint \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^m \rangle \cdot \{\mathbf{N}\} \cdot dx \cdot dy = {}^t \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot dx \cdot dy \cdot \{\mathbf{U}_e\} \equiv \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot dx \cdot dy \cdot \{\mathbf{U}_e\} \\ \hat{P}_{ext}^m &= \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \{\mathbf{F}_e\} \quad \text{où } \langle \mathbf{F}_e \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \mid F_{x2} \quad F_{y2} \mid F_{x3} \quad F_{y3} \rangle \end{aligned} \quad (\text{CII-6})$$

Le Principe des Travaux Virtuels est appliqué ici, en considérant les travaux ci-dessus détaillés, pour la détermination de la matrice de raideur en membrane  $[\mathbf{K}_e^m]$ .

La matrice de raideur en membrane extraite du travail virtuel  $\hat{P}_{int}^m$  est :

$$[\tilde{\mathbf{K}}_e^m] = [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot A \quad (\text{CII-7})$$

où  $A = \frac{1}{2}(x_2 \cdot y_3)$  est l'aire de l'élément

En appliquant le PTV  $\hat{P}_{int}^m + \hat{P}_{ext}^m = 0$ , cette matrice  $[\tilde{\mathbf{K}}_e^m]$  est arrangée différemment de sorte qu'elle respecte la disposition des composantes des efforts et des déplacements.

## II.C. Flexion

### II.C.1. Rotations

Les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , autour des axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , d'un point courant de coordonnées  $x$  et  $y$  s'expriment en fonction des rotations des nœuds et des fonctions d'aire  $L_1, L_2, L_3$  [11] :

$$\begin{cases} \theta_x = L_1 \cdot \theta_{x1} + L_2 \cdot \theta_{x2} + L_3 \cdot \theta_{x3} \\ \theta_y = L_1 \cdot \theta_{y1} + L_2 \cdot \theta_{y2} + L_3 \cdot \theta_{y3} \end{cases} \quad (\text{CII-8})$$

### II.C.2. Courbures

En dérivant ces rotations (CII-8) dans le repère local par rapport à  $x$  et à  $y$ , on peut formuler les courbures suivantes mises sous forme matricielle :

$$\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{xx} \\ \mathbf{K}_{yy} \\ 2 \cdot \mathbf{K}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{K}\} = \frac{1}{2.A} \begin{bmatrix} & -y_3 & & y_3 & & \\ x_2 - x_3 & & x_3 & & -x_2 & \\ y_3 & x_3 - x_2 & -y_3 & -x_3 & & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^b] \cdot \{\Theta_e\} \quad (\text{CII-9})$$

- où :
- $[\mathbf{B}^b]$  est la matrice gradient des déformations en flexion
  - $\{\Theta_e\}$  la matrice colonne des rotations des nœuds dans le repère local

### II.C.3. Elasticité isotrope

Comme cela a été établi pour les efforts normaux (CII-5), on a les moments dus aux effets de flexion, formulés comme suit :

$$[\mathbf{M}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{K}\} = [\mathbf{D}^b] \cdot \{\mathbf{K}\} \quad (\text{CII-10})$$

## II.C.4. Travaux virtuels

Identiquement à (CII-6) sont définis ci-dessous des travaux virtuels des effets de flexion liés respectivement aux sollicitations internes et aux sollicitations externes :

$$\begin{aligned}\hat{P}_{int}^b &= -\iint \langle \hat{\mathbf{K}} \rangle \cdot \langle \mathbf{M} \rangle \cdot dx \cdot dy = -\langle \hat{\Theta}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot dx \cdot dy \cdot \langle \Theta_e \rangle \\ \hat{P}_{ext}^b &= \langle \hat{\Theta}_e \rangle \cdot \langle \mathbf{M}_e \rangle \quad \text{où } \langle \mathbf{M}_e \rangle = \langle M_{x1} \quad M_{y1} \mid M_{x2} \quad M_{y2} \mid M_{x3} \quad M_{y3} \rangle\end{aligned}\quad (\text{CII-11})$$

Dans  $\hat{P}_{int}^b$ , on pose la matrice de raideur de flexion :

$$[\mathbf{K}_e^b] = [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot A \quad (\text{CII-12})$$

où  $A = \frac{1}{2}(x_2 \cdot y_3)$  est l'aire de l'élément.

Avec  $\hat{P}_{int}^b + \hat{P}_{ext}^b = 0$ , on arrange  $[\mathbf{K}_e^b]$  de sorte qu'on puisse l'avoir différemment en respectant la disposition des déplacements et des efforts dans le repère global.

## II.D. Cisaillement

### II.D.1. Déplacements

Le déplacement normal au plan de l'élément s'exprime en fonction des déplacements normaux des nœuds de cet élément :

$$w = L_1 \cdot w_1 + L_2 \cdot w_2 + L_3 \cdot w_3 \quad (\text{CII-13})$$

### II.D.2. Déformations

En considérant les rotations de la relation (CII-8) et les dérivées du déplacement  $w$  (CII-13) par rapport à  $x$  et  $y$ , on définit les déformations en cisaillement par :

$$\langle \gamma \rangle = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \bar{\epsilon}_{xz} \\ 2 \cdot \bar{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_r^s] \cdot \langle \Theta_e \rangle + [\mathbf{B}_d^s] \cdot \langle \mathbf{W}_e \rangle \quad (\text{CII-14})$$

$$\begin{aligned}\text{Où : } - [\mathbf{B}_r^s] &= \begin{bmatrix} | & L_1 & | & L_2 & | & L_3 \\ \hline -L_1 & & -L_2 & & -L_3 & \end{bmatrix} \\ - [\mathbf{B}_d^s] &= \frac{1}{x_2 \cdot y_3} \begin{bmatrix} -y_3 & y_3 \\ \hline x_3 - x_2 & -x_3 & x_2 \end{bmatrix} \\ - \langle \Theta_e \rangle &= \langle \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \mid \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \mid \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \rangle \\ - \langle \mathbf{W}_e \rangle &= \langle w_1 \quad w_2 \quad w_3 \rangle\end{aligned}$$

### II.D.3. Décomposition

Le vecteur déplacement est décomposé en deux modes :

$$\begin{Bmatrix} \{\Theta_e\} \\ \{W_e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Theta_e\} \\ \{W_e^*\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \{W_e^s\} \end{Bmatrix}$$

Cette décomposition a une influence directe sur l'écriture des courbures et des déformations en cisaillement transversal :

- Les courbures deviennent

$$\{\mathbf{k}\} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}^b & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{\Theta_e\} \\ \{W_e\} \end{Bmatrix} ;$$

- Et les déformations de cisaillement transversal (CII-14) sont réécrites comme suit:

$$\{\gamma\} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_r^s & \mathbf{B}_d^s \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{\Theta_e\} \\ \{W_e\} \end{Bmatrix} \quad (\text{CII-15})$$

Les composantes avec des « \* » ( $\theta$  et  $W$ ) sont en théorie de Kirchhoff et ne donnent donc pas de cisaillement transversal. En outre,  $\theta^*$  est obtenu à partir de  $\theta$  en minimisant leur « différence »  $f$  au sens des moindres carrés :

- En considérant la fonction  $f = \langle \{\Theta_e\} - \{\Theta_e^*\} \rangle \cdot \langle \{\Theta_e\} - \{\Theta_e^*\} \rangle$  minimale, on peut poser  $\{\Theta_e\} \approx \{\Theta_e^*\}$  ;
- $\{W_e\} = \{W_e^*\} + \{W_e^s\}$  tel que  $\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_r^s & \mathbf{B}_d^s \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{\Theta_e^*\} \\ \{W_e^*\} \end{Bmatrix} = 0$  suivant la théorie de Kirchhoff qui lie les rotations aux déplacements normaux au plan de l'élément (*Kirchhoff* entre  $\{\Theta_e^*\}$  et  $\{W_e^*\}$ ) complètement détaillés un peu plus loin dans le paragraphe II.E.

En effet avec ces hypothèses, on a :

$$\{\gamma\} \approx \{\gamma^s\} = \mathbf{B}_d^s \{W_e^s\} = \mathbf{B}_d^s \{ \{W_e\} - \{W_e^*\} \} \quad (\text{CII-16})$$

### II.D.4. Elasticité isotrope

L'intégration des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de l'élément donne donc les efforts tranchants  $Q_{xz}, Q_{yz}$  qui peuvent aussi être obtenus directement partant de la relation (CII-16) :

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \cdot dz = \frac{E \cdot h}{2 \cdot (1 + \nu)} \begin{bmatrix} 5/6 & | & \\ | & 5/6 \end{bmatrix} \cdot \{\gamma^s\} = \mathbf{D}^s \{\gamma^s\} \quad (\text{CII-17})$$

## II.D.5. Principe des travaux virtuels

La démarche devient classique lorsqu'on cherche à déterminer la matrice de raideur, on passera donc toujours par le Principe des Travaux Virtuels pour obtenir les raideurs provenant des effets de cisaillement transversal du triangle « C<sup>0</sup> » de Belytschko [3].

Les relations (CII-16) et (CII-17) sont utiles pour calculer les travaux virtuels  $\hat{P}_{int}^s$  et  $\hat{P}_{ext}^s$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{int}^s &= -\iint \langle \hat{\gamma}^s \rangle \cdot \{Q\} \cdot ds = -\iint \langle \hat{\gamma}^s \rangle \cdot [D^s] \cdot \{\gamma^s\} \cdot dx \cdot dy = -\langle \hat{W}_e^s \rangle \cdot \iint [B_d^s] [D^s] [B_d^s] \cdot dx \cdot dy \cdot \{W_e^s\} \\ \hat{P}_{ext}^s &= \langle \hat{W}_e^s \rangle \cdot \{Q_e\} \quad \text{où } \langle Q \rangle_e = \langle F_{z1} \ F_{z2} \ F_{z3} \rangle \text{ et } \langle W_e \rangle = \langle w_1 \ w_2 \ w_3 \rangle \end{aligned} \quad (CII-18)$$

Par application du PTV, on a  $\langle \hat{W}_e \rangle \cdot \{Q_e\} = \langle \hat{W}_e \rangle \cdot [K_e^s] \cdot \{\hat{W}_e\}$  où la matrice de raideur de cisaillement  $[K_e^s]$  est une matrice réarrangée  $[\tilde{K}_e^s] = [B_d^s] [D^s] [B_d^s] \cdot A$  tirée de  $\hat{P}_{int}^s$ .

## II.E. Etude de $\{\theta_e^*\}$ et $\{W_e^*\}$

### II.E.1. Expression de $\{w^*\}$

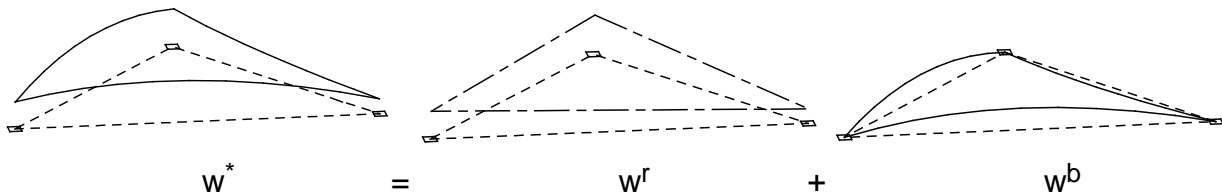


Figure CII-3 Composition des déplacements

Ce déplacement normal d'un point courant (x, y) du plan moyen est la conséquence d'un mode rigide et d'un déplacement dû aux courbures comme sur la figure CII-3.

- Le déplacement de corps rigide est défini par :

$$\begin{aligned} w^r &= t + ((\omega_x \cdot \bar{x} + \omega_y \cdot \bar{y}) \wedge (x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{y})) \cdot \bar{z} \\ \Rightarrow w^r &= t + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned}$$

- Le déplacement  $w^b$  calculé avec l'hypothèse de *Kirchhoff* à partir des courbures constantes dans tout l'élément  $\{K\}$  est de la forme :

$$w^b = \langle H_1(x,y) \mid H_2(x,y) \mid H_3(x,y) \rangle \cdot \{K\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_1 = -\frac{1}{2}x^2 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y + d_1 \\ H_2 = -\frac{1}{2}y^2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y + d_2 \\ H_3 = -\frac{1}{2}x \cdot y + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y + d_3 \end{cases}$$

En effet, selon la théorie de *Kirchhoff*,  $-\theta_y = w, x$  et  $\theta_x = w, y$  et les courbures sont formulées par :

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ 2 \cdot K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w^b, xx \\ -w^b, yy \\ -2 \cdot w^b, xy \end{Bmatrix}$$

Les fonctions  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  sont déterminées grâce aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} w^b(0,0) = 0 \\ w^b(x_2,0) = 0 \\ w^b(x_3,y_3) = 0 \end{cases}$$

Le déplacement normal au plan dû à la flexion de l'élément triangulaire "C<sup>0</sup>" devient alors :

$$w^b = -\frac{1}{2} \langle x^2 - x_2 \cdot x - (x_3 - x_2) \cdot y \cdot x_3 / y_3 \mid y^2 - y_3 \cdot y \mid x \cdot y - x_3 \cdot y \rangle \cdot \{\mathbf{K}\}$$

On peut alors déduire le déplacement  $w^*$  en sommant  $w^b$  et  $w^r$  par :

$$w^* = w^b + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x + t$$

On prend  $t = 0$  car cette translation est inutile par la suite du fait des dérivations, ce qui permet d'écrire :

$$\{\mathbf{W}_e^*\} = \begin{Bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ w_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x_2 \\ y_3 & -x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CII-19})$$

## II.E.2. Expression de $\theta_x^*$ et $\theta_y^*$ composant $\{\Theta_e^*\}$

Selon l'hypothèse de *Kirchhoff* :  $\theta_x^* = w^*,y$  et  $\theta_y^* = -w^*,x$ . Ce qui donne :

$$\begin{cases} \theta_x^* = \frac{1}{2} \langle (x_3 - x_2) \cdot x_3 / y_3 \mid y_3 - 2 \cdot y \mid x_3 - x \rangle \cdot \{\mathbf{K}\} + \omega_x \\ \theta_y^* = \frac{1}{2} \langle [2 \cdot x - x_2 \mid 0 \mid y] \rangle \cdot \{\mathbf{K}\} + \omega_y \end{cases}$$

Aux trois nœuds du triangle, on peut alors avoir des rotations dans le repère local exprimées en fonction des rotations provenant des courbures et de celles de corps rigide.

$$\{\Theta_e^*\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1}^* \\ \theta_{y1}^* \\ \theta_{x2}^* \\ \theta_{y2}^* \\ \theta_{x3}^* \\ \theta_{y3}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r & y_3 & x_3 \\ -x_2 & & \\ r & y_3 & x_3 - x_2 \\ x_2 & & \\ r & -y_3 & \\ 2 \cdot x_3 - x_2 & & y_3 \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{K}\} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} \quad \text{avec } r = \frac{x_3}{y_3} (x_3 - x_2)$$

En tenant compte du fait que  $\{\mathbf{K}\} = [\mathbf{B}^b] \cdot \{\Theta_e\}$  (voir CII-9), on a les rotations suivantes :

$$\{\Theta_e^*\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{K}\} + [\mathbf{R}] \cdot \{\omega\} = [\mathbf{C}] [\mathbf{B}^b] \cdot \{\Theta_e\} + [\mathbf{R}] \cdot \{\omega\} \quad (\text{CII-20})$$

Dans la suite, on posera :  $[\mathbf{M}_L] = [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}^b]$

### II.E.3. Expression de $\{\mathbf{W}_e^*\}$

On définit successivement :

$$\begin{aligned} \langle \Theta_e - \Theta_e^* \rangle &= {}^t [1 - [\mathbf{M}_L]] \cdot \{\Theta_e\} - {}^t [\mathbf{R}] \cdot \{\omega\} \\ &= \langle p_1 - \omega_x \mid p_2 - \omega_y \mid p_3 - \omega_x \mid p_4 - \omega_y \mid p_5 - \omega_x \mid p_6 - \omega_y \rangle \\ f &= \langle \Theta_e - \Theta_e^* \rangle \cdot \{\Theta_e - \Theta_e^*\} \\ &= (p_1 - \omega_x)^2 + (p_2 - \omega_y)^2 + (p_3 - \omega_x)^2 + (p_4 - \omega_y)^2 + (p_5 - \omega_x)^2 + (p_6 - \omega_y)^2 \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes  $p_i$  ( $i=1$  à  $6$ ), on calcule l'extremum de la fonction  $f$  en  $\omega_x$  et  $\omega_y$ , soient :

$$\begin{cases} f, \omega_x = 0 \\ f, \omega_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = \frac{1}{3}(p_1 + p_3 + p_5) \\ \omega_y = \frac{1}{3}(p_2 + p_4 + p_6) \end{cases} \quad (\text{CII-21})$$

Pour déterminer facilement les déplacements recherchés  $\mathbf{W}_e^*$ , on pose donc maintenant :  $\{\omega\} = 1/3 \cdot [\mathbf{R}] \cdot [1 - [\mathbf{M}_L]] \cdot \{\Theta_e\}$  qu'il faut remplacer dans la relation (CII-19). Soit alors :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{W}_e^*\} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x_2 \\ y_3 & -x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x_2 \\ y_3 & -x_3 \end{bmatrix} \cdot \{\omega\} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x_2 \\ y_3 & -x_3 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{R}] \cdot [1 - [\mathbf{M}_L]] \cdot \{\Theta_e\} \\ \{\mathbf{W}_e^*\} &= -\frac{1}{3} [\mathbf{X}] \cdot [1 - [\mathbf{M}_L]] \cdot \{\Theta_e\} \end{aligned} \quad (\text{CII-22})$$

On constate bien que les déplacements  $\mathbf{W}_e^*$  sont fonction des rotations  $\Theta_e$

### II.E.4. Conséquence

Les déformations de cisaillement se doivent d'être réécrites au vu de la relation (CII-22).

Partant de  $\{\mathbf{W}_e^s\} = \{\mathbf{W}_e\} - \{\mathbf{W}_e^*\}$ , on obtient  $\{\mathbf{W}_e^s\} = \{\mathbf{W}_e\} + \frac{1}{3} \cdot [\mathbf{X}] \cdot [1 - [\mathbf{M}_L]] \cdot \{\Theta_e\}$  et la relation (CII.1-16) devient :  $\{\gamma^s\} = [\mathbf{B}_0^s] \cdot \{\Theta_e\} + [\mathbf{B}_d^s] \cdot \{\mathbf{W}_e\}$  où  $[\mathbf{B}_0^s] = 1/3 \cdot [\mathbf{B}_d^s] \cdot [\mathbf{X}] \cdot [1 - [\mathbf{M}_L]]$ .

Par conséquent le travail virtuel des efforts internes de (CII-18) doit être modifié comme suit :

$$\begin{aligned} -\hat{P}_{\text{int}}^s &= \iint \langle \hat{\gamma}^s \rangle \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot \langle \hat{\gamma}^s \rangle dx \cdot dy = \langle \hat{\mathbf{W}}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}_d^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_d^s] dx \cdot dy \cdot \{\mathbf{W}_e\} + \langle \hat{\Theta}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}_0^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_0^s] dx \cdot dy \cdot \{\Theta_e\} \\ &\quad + \langle \hat{\mathbf{W}}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}_d^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_0^s] dx \cdot dy \cdot \{\Theta_e\} + \langle \hat{\Theta}_e \rangle \cdot \iint [\mathbf{B}_0^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_d^s] dx \cdot dy \cdot \{\mathbf{W}_e\} \end{aligned}$$

Le Principe des Travaux Virtuels doit tenir compte de cette nouvelle forme du travail virtuel des efforts internes.

## II.F. Matrice de raideur de l'élément

### II.F.1. Travaux virtuels

On note successivement le travail virtuel des efforts extérieurs et le travail virtuel des efforts internes :

$$\hat{P}_{\text{ext}} = \hat{P}_{\text{ext}}^m + \hat{P}_{\text{ext}}^b + \hat{P}_{\text{ext}}^s = \langle \langle \hat{\mathbf{V}}_e \rangle \mid \langle \hat{\Theta}_e \rangle \mid \langle \hat{\mathbf{W}}_e \rangle \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{F}}_e \rangle = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \langle \hat{\mathbf{F}}_e \rangle$$

$$\hat{P}_{\text{int}} = \hat{P}_{\text{int}}^m + \hat{P}_{\text{int}}^b + \hat{P}_{\text{int}}^s = \langle \langle \hat{\mathbf{V}}_e \rangle \mid \langle \hat{\Theta}_e \rangle \mid \langle \hat{\mathbf{W}}_e \rangle \rangle \cdot [\tilde{\mathbf{K}}_e] \cdot \begin{Bmatrix} \langle \hat{\mathbf{V}}_e \rangle \\ \langle \hat{\Theta}_e \rangle \\ \langle \hat{\mathbf{W}}_e \rangle \end{Bmatrix} = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\tilde{\mathbf{K}}_e] \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle$$

### II.F.2. Matrices

En élasticité, la matrice de raideur de l'élément rend compte des effets de membrane, de flexion et de cisaillement transversal de manière découplée ce qui ne serait pas le cas en élastoplasticité où, en particulier, il y aurait un couplage membrane - flexion.

Par application du Principe des Travaux Virtuels, on a toutes les matrices des raideurs qui, globalement assemblées dans le repère local, donnent :

$$[\tilde{\mathbf{K}}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{vv}^m] & & \\ & [\mathbf{K}_{\theta\theta}^b] + [\mathbf{K}_{\theta\theta}^s] & \\ & & [\mathbf{K}_{ww}^s] \end{bmatrix} \quad (\text{CII-23})$$

$$[\mathbf{K}_{\theta\theta}^m] = [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot A; \quad [\mathbf{K}_{\theta\theta}^s] = [\mathbf{B}_{\theta}^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_{\theta}^s] \cdot A; \quad [\mathbf{K}_{\theta w}^s] = [\mathbf{B}_{\theta}^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_d^s] \cdot A \quad \text{où } A \text{ est l'aire.}$$

$$[\mathbf{K}_{\theta\theta}^b] = [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot A \quad [\mathbf{K}_{w\theta}^s] = [\mathbf{K}_{\theta w}^s]^T \quad [\mathbf{K}_{ww}^s] = [\mathbf{B}_d^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}_d^s] \cdot A$$

Dans le repère local Rc (voir Figure CII-1), cette matrice est ensuite arrangée pour donner  $[\bar{\mathbf{K}}_e]$  correspondant à la disposition des efforts et déplacements ci-après :

$$\langle \bar{\mathbf{F}}_e \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \mid F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \mid F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{z3} \quad M_{x3} \quad M_{y3} \rangle$$

$$\langle \bar{\mathbf{U}}_e \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \mid u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \mid u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \langle \bar{\mathbf{F}}_1 \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{F}}_2 \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{F}}_3 \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} & \bar{\mathbf{K}}_{13} \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} & \bar{\mathbf{K}}_{23} \\ \bar{\mathbf{K}}_{31} & \bar{\mathbf{K}}_{32} & \bar{\mathbf{K}}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \bar{\mathbf{U}}_1 \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{U}}_2 \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{U}}_3 \rangle \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \langle \bar{\mathbf{F}}_e \rangle = [\bar{\mathbf{K}}_e] \langle \bar{\mathbf{U}}_e \rangle \quad \text{avec } [\bar{\mathbf{K}}_e] \text{ symétrique} \quad (\text{CII-24})$$

Avant assemblage, un changement de base transforme les matrices  $\bar{\mathbf{K}}_{ij}$  (repère local) en matrices  $\mathbf{K}_{ij}$  exprimées dans le repère global.

La raideur fictive en rotation autour de la normale sera détaillée dans le Complément III.



## II.G. Résultats pour une plaque circulaire encastrée

### II.G.1. Données

Plaque circulaire **encastrée** de rayon  $R = 100$  mm soumise à une pression  $p$  ; l'épaisseur  $h$  varie de 0,1 mm à 50 mm ; le matériau a pour caractéristiques :  $E = 200000$  N/mm<sup>2</sup> et  $\nu = 0,3$  ;

Afin d'avoir un déplacement du nœud C conforme à la théorie de Kirchhoff, la pression  $p$  est calculée en fonction de l'épaisseur  $h$  telle que :  $p = 0,01172 \times h^3$

Seul le maillage d'un quart de la plaque est étudié moyennant des liaisons appropriées.

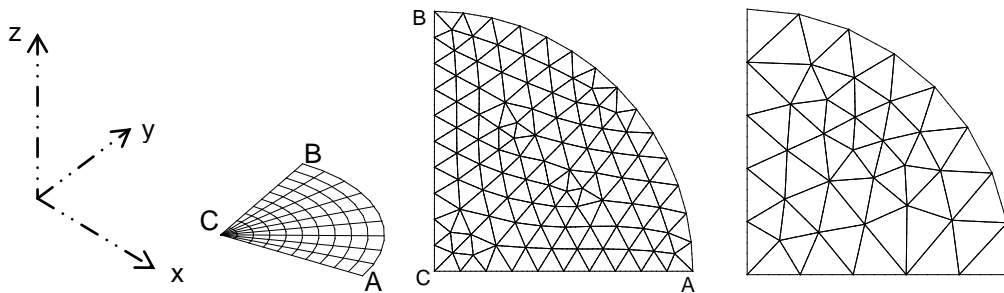


Figure CII-4 Différents maillages d'un quart de la plaque encastrée

### II.G.2. Résultats

Ils sont relatifs au déplacement ( $w_c$ ) suivant  $z$  du centre de la plaque pour 190 éléments

h (mm)	0,1	1	5	10	20	30	40	50
p (N/mm <sup>2</sup> )	1,172E-5	0,01172	1,4652	11,72	93,772	316,48	750,18	1465,19
Élément $C^0$	0,98897	0,9896	1,0008	1,0349	1,1723	1,4010	1,7212	2,1328
Théorie	1,0000	1,0005	1,0110	1,0457	1,1829	1,4114	1,7314	2,1428

Tableau CII-1 Déplacements pour un maillage dense de la plaque encastrée

Avec un maillage moins dense (58 éléments) c'est-à-dire un maillage grossier, on obtient :

Épaisseur h	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Pression p	1,172E-5	9,376E-5	7,5E-4	2,531E-3	0,006	0,01172
Élément $C^0$	0,28537	0,54587	0,7799	0,86642	0,9047	0,92473

Tableau CII-2 Déplacements pour un maillage grossier de la plaque encastrée

Regroupés dans les tableaux ci-dessus (CII-1 et CII-2), ces résultats mettent en évidence l'influence de la densité du maillage sur le phénomène de **blocage en cisaillement**. Ce blocage n'est pas sévère pour une densité suffisante ou pour un rapport ( $h / R$ )  $> 0,01$ .

En perspective de cette thèse, il est doré et déjà prévu d'élaborer un élément prismatique à 7 nœuds à champ de cisaillement assumé qui sera muni d'un nœud supplémentaire au centre, nœud doté d'un seul degré de liberté : une translation locale. C'est pourquoi cet élément 'C0' est intéressant pour servir de base de comparaison.

## II.H. Références

- [1] BATOZ, J.L., DHATT, G., *Modélisation des structures par éléments finis, Coques*, Hermès, Paris, 1990, volume 3, 564 pages.
- [2] BATOZ, J.L., *Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés*, thèse de doctorat : Université de Laval, Québec, 1977, 146 pages.
- [3] BELYTSCHKO, T., STOLARSKI, H., CARPENTER, N., *A  $C^0$  triangular plate element with one point quadrature*, International journal for numerical methods in engineering, 1984, Volume 20, pages 787-802.
- [4] HINTON, E., OWEN, D.R.J., *Finite element software for plates and shells*, Pineridge Press, Swansea U.K., 1984, 403 pages
- [5] HUGHES, T. J. R., *The finite element method*, Prentice-Hall, 1987, 803 pages.
- [6] IMBERT, J.F., *Analyse des structures par éléments finis*, Editions CEPADUES, Toulouse, 1991, 505 pages.
- [7] MACNEAL, H., HARDER, L., *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*, Finite elements in analysis and design, 1985, vol. 1, pp. 3-20.
- [8] ROCKEY, K.C., *Introduction à la méthode des éléments finis*, Eyrolles, Paris, 1983, 190 pages.
- [9] STOLARSKI, H., BELYTSCHKO, T., *Shear and membrane locking in curved  $C^0$  elements*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 1983, Vol. 41, pages 279-296.
- [10] STOLARSKI, H., BELYTSCHKO, T., *Membrane locking and reduced integration for curved elements*, Transactions of the ASME, 1982, Vol. 49, pages 172-176.
- [11] STOLARSKI H., BELYTSCHKO T., CARPENTER N., *A simple triangular curved shell element*, Engineering computers, 1984, Volume 1, pages 210-218.
- [12] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKI-KRIEGER, S., *Théorie des plaques et coques*, Dunod, Paris, 1961, 580 pages.
- [13] ZIENKIEWICK, O.C., *La méthode des éléments finis*, McGraw-Hill, 1979, 851 pages.
- [14] BATHE, K.J., HO, L.W., *A simple and effective element (DKT) for analysis of general shell structures*, Computer and structures, 1981, Volume 13, pages 673-681.
- [15] BATOZ, J.L., DHATT, G., *Modélisation des structures par éléments finis - Plaques*, Hermès, Paris, 1992, volume 2, 485 pages.

Notes :

## III. Complément : Elément pour plaque épaisse : Q4 $\gamma$ 24

<b>III.</b>	<b>Complément_élément pour plaque épaisse : Q4<math>\gamma</math>24</b>	<b>III-1</b>
<b>III.A.</b>	<b>Formulation de base</b>	<b>III-2</b>
III.A.1.	Membrane	III-3
III.A.2.	Flexion	III-5
III.A.3.	Cisaillement	III-7
III.A.4.	Déformations issues des rotations fictives $\theta_z$	III-9
III.A.5.	Efforts équivalents pour une pression	III-10
III.A.6.	Exemple numérique	III-10
<b>III.B.</b>	<b>Intégration sélective</b>	<b>III-11</b>
III.B.1.	Justification	III-11
III.B.2.	Conséquence	III-11
III.B.3.	Exemple numérique	III-11
<b>III.C.</b>	<b>Champ assumé des déformations en cisaillement transversal</b>	<b>III-12</b>
III.C.1.	Relations utiles	III-12
III.C.2.	Déformations	III-12
III.C.3.	Exemple numérique	III-14
<b>III.D.</b>	<b>Formulation issue d'une intégration réduite</b>	<b>III-14</b>
III.D.1.	Notations	III-15
III.D.2.	Propriétés utiles :	III-16
III.D.3.	Mise en évidence du vecteur $\{\gamma\}$	III-16
III.D.4.	Déformation en membrane	III-17
III.D.5.	Matrice de raideur en membrane	III-18
III.D.6.	Déformation en flexion	III-19
III.D.7.	Matrice de raideur en flexion	III-20
III.D.8.	Stabilisation pour le champ assumé des déformations de CT	III-20
<b>III.E.</b>	<b>REFERENCES</b>	<b>III-24</b>

Conçu pour être utilisé dans la théorie des plaques et coques épaisses ou théorie de Mindlin, l'élément dénommé Q4γ24 est un quadrangle ayant six degrés de liberté par nœud à savoir trois translations et trois rotations dans le repère global.

Les translations  $u$  et  $v$  dans le plan permettent la définition des effets de membrane. La translation normale au plan  $w$  et les rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  servent à formuler les effets de cisaillement. Seules les rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  servent à définir les effets de flexion.

Un sixième degré de liberté  $\theta_z$  est utilisé pour éviter les singularités dans la matrice de raideur assemblée en ajoutant la raideur « artificielle » relative à cette rotation  $\theta_z$  (en chacun des points d'intégration pour la version à intégration complète).

### III.A. Formulation de base

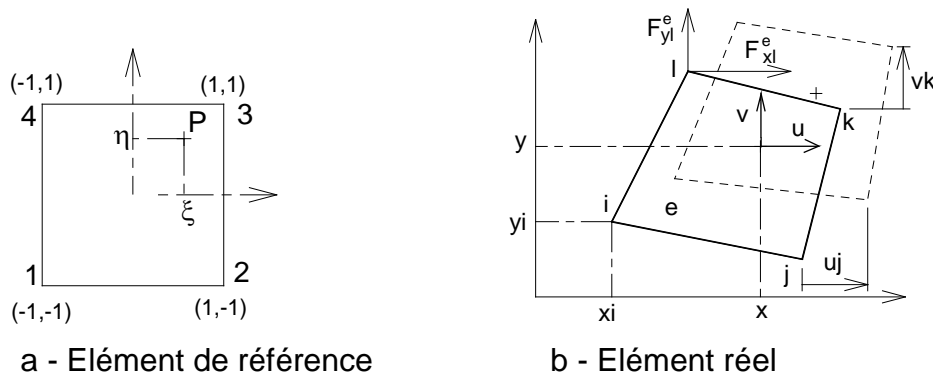


Figure CIII-1. Elément de référence et élément réel

Le quadrilatère étant isoparamétrique, les fonctions d'interpolation utilisées pour définir les coordonnées ( $x = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{X} \}$  et  $y = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{Y} \}$ ) et les déplacements ( $u = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{U} \}$  et  $v = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{V} \}$ ) d'un point courant de cet élément sont identiques. Elles sont notées :

$$\langle \mathbf{N} \rangle = 1/4 \cdot \langle (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \rangle \quad (\text{CIII-1})$$

Les autres notations sont :

$$\{ \mathbf{X} \} = \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix} \quad \{ \mathbf{Y} \} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{ \mathbf{U} \} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_l \end{Bmatrix} \quad \{ \mathbf{V} \} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_l \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-2})$$

### III.A.1. Membrane

#### III.A.1.a) Relations utiles

$$\begin{Bmatrix} f, \xi \\ f, \eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \cdot \begin{Bmatrix} f, x \\ f, y \end{Bmatrix} \quad \text{où } [\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{\mathbf{X}\} \mid \{\mathbf{Y}\}] \quad \text{et } \iint f \cdot dx \cdot dy = \iint f \cdot \det[\mathbf{J}] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

#### III.A.1.b) Déformations

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^{xx} \\ \varepsilon^{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ v, x \\ v, y \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{J}^{-1}] & \\ & [\mathbf{J}^{-1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u, \xi \\ u, \eta \\ v, \xi \\ v, \eta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^m \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{J}_{inv}] \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle & | & \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle & | & \\ \langle \mathbf{N}, \xi \rangle & | & \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle & | & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}\} \\ \{\mathbf{V}\} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{J}_{inv}] \cdot [\mathbf{N}_d] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} \quad (\text{CIII-3})$$

En posant  $[\mathbf{B}^m] = [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{J}_{inv}] \cdot [\mathbf{N}_d]$  dans la relation (CIII-3) où  $\{\tilde{\mathbf{U}}_e\}$  représente les déplacements dans le repère local, on a la forme matricielle des déformations de membrane :

$$\{\varepsilon^m\} = [\mathbf{B}^m] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} \quad (\text{CIII-4})$$

#### III.A.1.c) Contraintes

Classiquement, la loi de comportement liant les contraintes aux déformations de la relation (CIII-3) est donnée par :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \cdot \{\varepsilon^m\} = [\mathbf{D}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-5})$$

Dans l'équation (CIII-5), la matrice de comportement  $[\mathbf{D}]$  dispose de deux formes suivant que le quadrangle est en état plan de contraintes (utile pour les plaques/coques) ou en état plan de déformations (qui n'est que brièvement évoqué ici).

**(1) Etat plan des contraintes:  $\sigma_{zz} = 0$**

En élasticité isotrope :

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & | & \\ \nu & 1 & | & \\ \hline & & & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{CIII-6})$$

**(2) Etat plan des déformations :  $\varepsilon_{zz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$**

En élasticité isotrope :

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & | & \\ \nu & 1-\nu & | & \\ \hline & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{CIII-7})$$

**III.A.1.d) Matrice de raideur de membrane**

Elle est obtenue par application du Principe des Travaux Virtuels (PTV)  $\hat{P}_{int} + \hat{P}_{ext} = 0$  où le travail virtuel dû aux efforts internes est :

$$-\hat{P}_{int} = \iiint \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdot \langle \sigma \rangle \cdot dv = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \left[ \iint [\mathbf{B}^m] \left( \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot dz \right) \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot dS \right] \cdot \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \left[ \iint [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \right] \cdot \langle \mathbf{U}_e \rangle;$$

On aperçoit dans la forme intégrale ci-dessus la matrice de comportement spécifique aux phénomènes de membrane :

$$[\mathbf{D}^m] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot dz = h \cdot [\mathbf{D}] \text{ en élasticité}$$

où l'exposant  $\underline{m}$  pour la matrice  $[\mathbf{D}]$  correspond à "membrane", h étant l'épaisseur de l'élément, supposée constante.

Rigoureusement, pour déterminer  $[\mathbf{K}^m]$ , on pose :

$$[\tilde{\mathbf{K}}_e] = \iiint [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot \det[\mathbf{J}] \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{q=1}^4 [\mathbf{H}(\xi_q, \eta_q)] \cdot \varpi_q \quad (\text{CIII-8})$$

$$\text{où : } [\mathbf{H}(\xi, \eta)] = [\mathbf{B}^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}^m] \cdot \det[\mathbf{J}] ; \varpi_q = 1 ; \xi_q = \pm 1/\sqrt{3} ; \eta_q = \pm 1/\sqrt{3}$$

C'est donc une intégration numérique en 2 fois 2 points suivant  $\xi$  et  $\eta$  tel que:

$$[\tilde{\mathbf{K}}_e] = [\mathbf{H}(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})] + [\mathbf{H}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})] + [\mathbf{H}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})] + [\mathbf{H}(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})]$$

Le travail virtuel des efforts extérieurs  $\hat{P}_{ext} = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \{\mathbf{F}_e\}$ , mis à contribution dans le PTV, impose d'arranger la matrice  $[\tilde{\mathbf{K}}_e]$  pour donner la matrice  $[\mathbf{K}_e]$  correspondant à  $\{\mathbf{U}_e\}$  telle que  ${}^t\{\mathbf{U}_e\} = \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle u_i \quad v_i \mid u_j \quad v_j \mid u_k \quad v_k \mid u_l \quad v_l \rangle$  et on a finalement :

$$[\mathbf{K}_e] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lm} & \mathbf{K}_{ln} \\ \mathbf{K}_{ml} & \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mn} \\ \mathbf{K}_{nl} & \mathbf{K}_{nm} & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{K}^m] \quad (\text{CIII-9})$$

### III.A.2. Flexion

#### III.A.2.a) Courbures

Pour la flexion, ce quadrilatère utilise les dérivées des rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  interpolées par les fonctions bilinéaires (CIII-1) pour la formulation des courbures.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle &= 1/4 \cdot \langle (1-\xi) \cdot (1-\eta) \mid (1+\xi) \cdot (1-\eta) \mid (1+\xi) \cdot (1+\eta) \mid (1-\xi) \cdot (1+\eta) \rangle \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{\mathbf{X}\} \\ y = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{\mathbf{Y}\} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \theta_x = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{\Theta_x\} \\ \theta_y = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{\Theta_y\} \end{cases} \end{aligned}$$

On rappelle ici que :

$$\{\mathbf{X}\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{Y}\} = \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix} \quad \{\Theta_x\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{xk} \\ \theta_{xl} \end{Bmatrix} \quad \{\Theta_y\} = \begin{Bmatrix} \theta_{yi} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{yk} \\ \theta_{yl} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-10})$$

Bien qu'indépendantes des translations normales  ${}^t\{\mathbf{W}\} = \langle \mathbf{W} \rangle = \langle w_i \quad w_j \quad w_k \quad w_l \rangle$  aux nœuds de l'élément, les courbures exprimant les effets de flexion usent de la matrice colonne des déplacements  ${}^t\{\tilde{\mathbf{U}}_e\} = \langle \tilde{\mathbf{U}}_e \rangle = \langle \langle \Theta_x \rangle \quad \langle \Theta_y \rangle \quad \langle \mathbf{W} \rangle \rangle$  incluant ces translations normales pour ne pas avoir à manipuler par la suite plusieurs types de matrices colonnes de déplacements :

$$\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{y,x} \\ \theta_{y,y} \end{Bmatrix}$$



$$\{\kappa\} = [\mathbf{C}^b] \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{J}^{-1} & \\ \hline & \mathbf{J}^{-1} \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{x,\xi} \\ \theta_{x,\eta} \\ \theta_{y,\xi} \\ \theta_{y,\eta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}^b][\mathbf{J}^b] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle & & \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle & & \\ & \langle \mathbf{N}, \xi \rangle & \\ & \langle \mathbf{N}, \eta \rangle & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-11})$$

On tire la matrice gradient  $[\mathbf{B}^b] = [\mathbf{C}^b][\mathbf{J}^b][\mathbf{N}^b]$  dans la relation (CIII-6) pour faciliter la formulation des courbures sous la forme suivante :

$$\{\kappa\} = [\mathbf{B}^b] \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} \quad (\text{CIII-12})$$

### III.A.2.b) Contraintes intégrées

Pour établir ces contraintes dues à la flexion, il est pratique de partir de la définition des moments  ${}^t\{\mathbf{M}\} = \langle \mathbf{M} \rangle = \langle M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy} \rangle$  provenant des courbures :

$${}^t\{\kappa\} = \langle \kappa \rangle = \langle \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy} \rangle ; \quad \{\mathbf{M}\} = [\mathbf{D}^b] \{\kappa\} \quad (\text{CIII-13})$$

Avec  $[\mathbf{D}^b]$  la matrice de comportement de flexion dont la démonstration sera faite dans le paragraphe dédié au Principe des Travaux Virtuels lié aux phénomènes de flexion.

Dans le cas de l'élasticité, les contraintes liées à ces moments (CIII-12) peuvent donc se calculer à partir de la formule :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12}{h^3} \cdot z \cdot \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-14})$$

### III.A.2.c) Matrice de raideur de flexion

Le Principe des Travaux Virtuels est conventionnellement énoncé par :  $\hat{P}_{int} + \hat{P}_{ext} = 0$  où le travail virtuel due aux moments de flexion est :

$$-\hat{P}_{int} = \iiint \langle \hat{\kappa} \rangle \cdot \{\mathbf{M}\} \cdot dv = \langle \hat{\tilde{\mathbf{U}}}_e \rangle \cdot \left[ \iint [\mathbf{B}^b]^T \cdot \left( \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot z^2 \cdot dz \right) \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot dS \right] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\} = \langle \hat{\tilde{\mathbf{U}}}_e \rangle \cdot \left[ \iint [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot dS \right] \cdot \{\tilde{\mathbf{U}}_e\}$$

Dans ce travail virtuel, on peut noter la présence de la matrice de comportement de flexion  $[\mathbf{D}^b]$  évoquée en (CIII-12) dont la démonstration promise est faite ici.

En effet,  $[\mathbf{D}^b] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot z^2 \cdot dz = h^3/12 \cdot [\mathbf{D}]$  (en élasticité) où l'exposant  $\underline{b}$  pour la matrice  $[\mathbf{D}]$  correspond à "bending"(flexion) et 'h' est l'épaisseur de l'élément.

On tire de  $\hat{P}_{int}$  la matrice de raideur de flexion sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}^b] = \iint [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}^b] \cdot \det[\mathbf{J}] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (CIII-15)$$

La matrice de raideur de flexion dont la disposition des composantes doit se conformer à la relation  $\{\mathbf{F}_e\} = [\mathbf{K}_e] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$  provenant de l'application du Principe des Travaux Virtuels où le Travail virtuel des efforts extérieure est  $\hat{P}_{ext} = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \{\mathbf{F}_e\}$ , en rappelant que :

$$\begin{cases} {}^t\{\mathbf{F}_e\} = \langle \mathbf{F}_e \rangle = \langle M_{xi} & M_{yi} & F_{zi} & | & M_{xj} & M_{yj} & F_{zj} & | & M_{xk} & M_{yk} & F_{zk} & | & M_{xl} & M_{yl} & F_{zl} \rangle \\ {}^t\{\mathbf{U}_e\} = \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle \theta_{xi} & \theta_{yi} & w_{zi} & | & \theta_{xj} & \theta_{yj} & w_{zj} & | & \theta_{xk} & \theta_{yk} & w_{zk} & | & \theta_{xl} & \theta_{yl} & w_{zl} \rangle \end{cases}$$

### III.A.3. Cisaillement

#### III.A.3.a) Déformations

Les déformations de cisaillement transversal sont exprimées par:

$$\{\gamma\} = \begin{cases} w, x + \theta_y \\ w, y - \theta_x \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \\ w, x \\ w, y \end{cases}$$

$$\{\gamma\} = [\mathbf{C}^s] \cdot \begin{bmatrix} [1] & | & \\ \hline & & [\mathbf{J}^{-1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \theta_x \\ \theta_y \\ w, \xi \\ w, \eta \end{cases} = [\mathbf{C}^s] \cdot [\mathbf{J}^s] \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N} \rangle & | & & \\ \hline & & \langle \mathbf{N} \rangle & \\ \hline & & & \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \\ \hline & & & \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \langle \Theta_x \rangle \\ \langle \Theta_y \rangle \\ \langle \mathbf{W} \rangle \end{cases} \quad (CIII-16)$$

En notant par  $[\mathbf{B}^s] = [\mathbf{C}^s] \cdot [\mathbf{J}^s] \cdot [\mathbf{N}^s]$  la matrice gradient de cisaillement dans la relation ci-dessus, l'écriture des distorsions (CIII-8) se simplifie et devient :

$$\{\gamma\} = [\mathbf{B}^s] \cdot \{\hat{\mathbf{U}}_e\} \quad (CIII-17)$$

On rappelle que :  $\langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle = \langle \langle \Theta_x \rangle \quad \langle \Theta_y \rangle \quad \langle \mathbf{W} \rangle \rangle$

### III.A.3.b) Contraintes intégrées

Pour avoir les contraintes de cisaillement, on part des forces généralisées de cisaillement :

$$\{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{D}^s] \cdot \{\gamma\} \quad (\text{CIII-18})$$

où : -  $\{\mathbf{Q}\} = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}$  la matrice des forces de cisaillement

$$- [\mathbf{D}^s] = \frac{E.h}{2.(1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & | & \\ \hline & & 5/6 \end{bmatrix} \text{ la matrice de comportement élastique de cisaillement ;}$$

$$- \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \text{ la matrice des déformations de cisaillement transversal.}$$

En élasticité, les contraintes liées aux effets de cisaillement sont donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{3}{2.h} \left(1 - \frac{4.z^2}{h^2}\right) \cdot \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-19})$$

### III.A.3.c) Matrice de raideur de cisaillement

Les travaux virtuels ci-dessous établis permettent d'énoncer le Principe des Travaux Virtuels :

$$\hat{P}_{int} = - \int_S \langle \hat{\gamma} \rangle \cdot \{\mathbf{Q}\} \cdot ds = - \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \left[ \int \int [\mathbf{B}^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}^s] \cdot dx \cdot dy \right] \cdot \{\mathbf{U}_e\} = - \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\tilde{\mathbf{K}}^s] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$$

$$\hat{P}_{ext} = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot \langle \tilde{\mathbf{F}}_e \rangle \text{ où } \langle \tilde{\mathbf{F}}_e \rangle = \langle M_{xi} \quad M_{xj} \quad M_{xk} \quad M_{xl} \quad | \quad M_{yi} \quad M_{yj} \quad M_{yk} \quad M_{yl} \quad | \quad F_{zi} \quad F_{zj} \quad F_{zk} \quad F_{zl} \rangle$$

A partir de la puissance  $\hat{P}_{int}$ , la matrice de raideur de cisaillement  $[\mathbf{K}^s]$  est disponible sous la forme :

$$[\tilde{\mathbf{K}}^s] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^s]^T \cdot [\mathbf{D}^s] \cdot [\mathbf{B}^s] \cdot \det[\mathbf{J}] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (\text{CIII-20})$$

Nota :  $[\tilde{\mathbf{K}}^s]$  est ensuite arrangée pour donner la matrice  $[\mathbf{K}^s]$  correspondant à une disposition différente des composantes d'efforts  $\{\mathbf{F}_e\}$  et de déplacements  $\{\mathbf{U}_e\}$  telle que :  $\{\mathbf{F}_e\} = [\mathbf{K}^s] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$ .

$$\text{Pour rappel : } \begin{cases} {}^t\{\mathbf{F}_e\} = \langle \mathbf{F}_e \rangle = \langle M_{xi} \quad M_{yi} \quad F_{zi} \quad | \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad F_{zj} \quad | \quad M_{xk} \quad M_{yk} \quad F_{zk} \quad | \quad M_{xl} \quad M_{yl} \quad F_{zl} \rangle \\ {}^t\{\mathbf{U}_e\} = \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad w_{zi} \quad | \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad w_{zj} \quad | \quad \theta_{xk} \quad \theta_{yk} \quad w_{zk} \quad | \quad \theta_{xl} \quad \theta_{yl} \quad w_{zl} \rangle \end{cases}$$

### III.A.4. Déformations issues des rotations fictives $\theta_z$

Pour éviter des singularités lors de l'assemblage de la matrice de raideur globale, le sixième degré de liberté  $\theta_z$  ( $z$  est l'axe local normal à la surface en  $(\xi, \eta)$ ) est utilisé pour déterminer des déformations. Il est interpolé par les fonctions de formes habituelles (CIII-1) sous la forme :

$$\theta_z(\xi, \eta) = N_1 \cdot \theta_{z1} + N_2 \cdot \theta_{zj} + N_3 \cdot \theta_{zk} + N_4 \cdot \theta_{z1} \quad (\text{CIII-21})$$

Les dérivées de ce degré de liberté (équation CIII-21) par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$  donnent alors les « déformations » recherchées :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \mathbf{N}, \xi \\ \mathbf{N}, \eta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^z] \begin{Bmatrix} \{\Theta_i\} \\ \{\Theta_j\} \\ \{\Theta_k\} \\ \{\Theta_l\} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-22})$$

Avec  $\{\Theta_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}$  les rotations dans le repère global après un changement de base  $[\mathbf{R}_w]$ .

De cette équation des déformations (CIII-22), on déduit la matrice gradient des déformations des rotations fictives :

$$[\mathbf{B}^z(\xi, \eta)] = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \end{Bmatrix} \cdot [\mathbf{R}_w] \quad (\text{CIII-23})$$

En usant de l'énergie virtuelle, on peut tirer la matrice des raideurs fictives :

$$\hat{w} = \int_S \lambda \frac{E \cdot h^3}{12} (\hat{\theta}_z, x \cdot \theta_{z,x} + \hat{\theta}_z, y \cdot \theta_{z,y}) \cdot dS$$

avec  $\lambda$  suffisamment "petit" =  $10^{-3}$ , par exemple.

D'où la matrice des raideurs fictives en intégration complète :

$$[\mathbf{K}_e^z] = \sum_{i=1}^4 [\mathbf{B}^z(\xi_i, \eta_i)]^T \cdot [\mathbf{D}^z] \cdot [\mathbf{B}^z(\xi_i, \eta_i)] \cdot \det \mathbf{J} \cdot \omega_i \quad (\text{CIII-24})$$

Avec : -  $[\mathbf{D}^z] = \frac{E \cdot h^3}{12} \begin{bmatrix} \lambda & | \\ \hline & \lambda \end{bmatrix}$  où  $h$  = épaisseur de l'élément ;

-  $\omega_i = 1$ , le poids du point d'intégration.

### III.A.5. Efforts équivalents pour une pression

Le travail virtuel de la pression  $p$ , normale à la surface moyenne de l'élément  $(i, j, k, l)$ , est :

$$p \iint \hat{\mathbf{w}} \cdot d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} = p \cdot {}^t \hat{\mathbf{W}} \cdot \iint {}^t \mathbf{N} \cdot d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} = {}^t \hat{\mathbf{W}} \cdot p \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t \mathbf{N} \cdot \det[\mathbf{J}] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

En notant  $\mathbf{G}(\xi, \eta) = p \cdot \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \det[\mathbf{J}]$ , on obtient les efforts équivalents :

$$\{\mathbf{F}_{eq}\} = \left\{ \mathbf{G}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} + \left\{ \mathbf{G}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} + \left\{ \mathbf{G}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} + \left\{ \mathbf{G}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$

Avec, par ailleurs :

$${}^t \{\mathbf{F}_{eq}\} = \langle \mathbf{F}_{eq} \rangle = \langle F_{zi} \quad F_{zj} \quad F_{zk} \quad F_{zl} \rangle$$

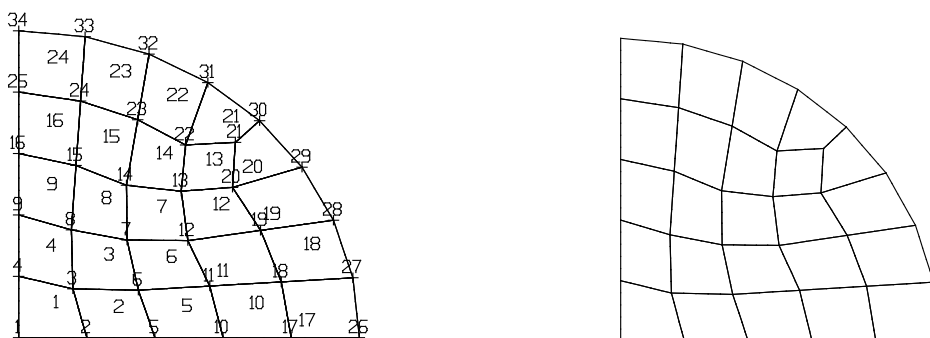
**Remarque** : la pression  $p$  ne donne pas de moments équivalents ; ce qui serait le cas avec un élément respectant la théorie de *Kirchhoff* des plaques minces.

### III.A.6. Exemple numérique

Cet exemple permet de montrer que l'intégration complète toute seule donne des résultats médiocres comparativement aux résultats obtenus par la théorie de Mindlin lorsque l'épaisseur de la plaque va croissant de 1 mm à 25 mm.

- Données** :- plaque circulaire encastrée de rayon 100 mm soumise à une pression  $p$  ;  
 - l'épaisseur  $h$  varie de 0,1 mm à 25 mm (voir tableau CIII-1) ;  
 - le matériau a pour caractéristiques :  $E = 200000 \text{ N/mm}^2$  et  $\nu = 0,3$  ;  
 - la pression  $p$  est calculée en fonction de  $h$  :  $p = 0.01172 \times h^3$ .

Les calculs sont effectués sur un quart de la plaque (symétries aidant) maillée avec des éléments quadrangulaires (Figure CIII-2) formulés en intégration complète comme on vient de le dire et les résultats, regroupés ci-après dans le tableau CIII-1, montrent le déplacement normal du centre (noeud 1) de la plaque, **qui est de 1 mm en théorie de Kirchhoff**.



**Figure CIII-2.** Plaque circulaire encastrée (Un quart maillé)

Epaisseur : $h$ (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression : $p$ (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Intégration complète	0.00102	0.01007	0.2047	0.5274	0.7698	0.9543	1.1174
Théorie ( <i>Mindlin</i> )	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

**Tableau CIII-1.** Déplacements du nœud central (1) de la plaque

De fait, on constate dans le tableau CIII-1 que le déplacement normal du centre de la plaque circulaire en intégration complète est très faible comparé à celui donné par la théorie de Mindlin pour des épaisseurs en dessous de 15 mm. A partir de 20 mm d'épaisseur, l'écart se réduit entre les résultats d'une intégration complète et ceux de la théorie de Mindlin. On constate là une surestimation de la rigidité de la plaque lorsqu'elle est mince. Ceci nous conduit à rechercher des solutions dans l'intégration sélective.

### III.B. Intégration sélective

#### III.B.1. Justification

Une intégration sélective est nécessaire quand l'épaisseur de la plaque devient faible devant ses autres dimensions.

Dans ce cas, en effet, l'influence des termes de cisaillement prédomine dans la solution numérique. Peuvent alors être obtenus des résultats non réalistes dus à une raideur trop importante. Il y a "blocage" ou "verrouillage" en cisaillement ("Shear locking" en Anglais).

Une méthode consiste à combiner astucieusement les techniques d'intégration complète et réduite. On peut calculer la matrice  $[K^b]$  en considérant une intégration complète c'est à dire en 2 fois 2 points et la matrice  $[K^s]$  avec 1 fois 1 point d'intégration.

#### III.B.2. Conséquence

La matrice de raideur en flexion se calcule comme suit :

$[H^b(\xi, \eta)] = [B^b]^T \cdot [D^b] \cdot [B^b] \det[J] \Rightarrow [K^b] = [H^b(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})] + [H^b(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})] + [H^b(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})] + [H^b(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})]$   
 et la matrice de raideur en cisaillement est donc :

$$[H^s(\xi, \eta)] = [B^s]^T \cdot [D^s] \cdot [B^s] \det[J] \Rightarrow [K^s] = 2 \times 2 \cdot [H^s(0,0)] = 4 \cdot [H^s(0,0)].$$

#### III.B.3. Exemple numérique

On reprend le même exemple de la plaque encastree (Figure CIII-2) utilisé en intégration complète (§III.A.6) avec les mêmes données.

Les résultats du déplacement normal du centre de cette plaque (nœud 1) sont réunis dans le Tableau CIII-2 :

Epaisseur : h (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression : p (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Intégration sélective	0.89003	0.90760	0.9847	1.0319	1.0924	1.1739	1.2774
Théorie (Mindlin)	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

Tableau CIII-2. Déplacements du nœud central (1) de la plaque

On constate qu'avec l'intégration sélective, il y a une nette amélioration car les valeurs du déplacement vertical du centre de la plaque ne sont pas très éloignées de celles de la théorie de Mindlin pour différentes valeurs d'épaisseur de la plaque.

### III.C. Champ assumé des déformations en cisaillement transversal

C'est une méthode qui peut remplacer la méthode d'intégration sélective ou la méthode d'intégration réduite en un point d'intégration.

La particularité de l'élément Q4 $\gamma$ 24 réside dans le fait que le cisaillement transversal (*shear* en Anglais) -  $\{\gamma\}$  - n'est pas directement exprimé aux quatre points d'intégration comme pour la membrane et pour la flexion mais interpolé à l'aide des valeurs calculées aux quatre points (a, b, c, d), milieux des côtés du quadrilatère (voir figure CIII-3).

Ces valeurs - dans les directions x, y - servent ensuite à définir un champ de déformations "assumé" (*assumed shear strain field*) - dans les directions  $\xi, \eta$  - en un point courant.

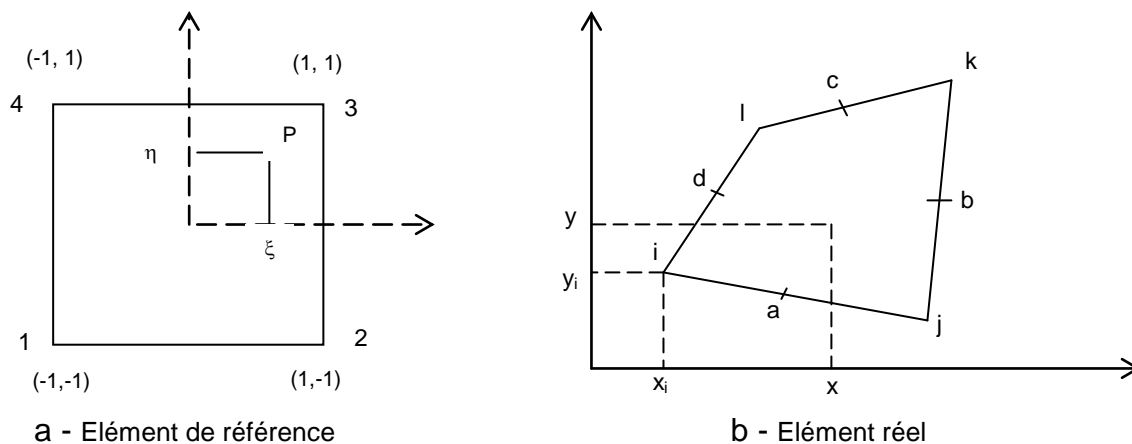


Figure CIII-3. Les nœuds milieux des côtés de l'élément

#### III.C.1. Relations utiles

Le champ imposé est défini de la sorte :

$$\begin{cases} \gamma_{\xi} = 1/2 \cdot (1 - \eta) \gamma_{\xi a} + 1/2 \cdot (1 + \eta) \gamma_{\xi c} \\ \gamma_{\eta} = 1/2 \cdot (1 - \xi) \gamma_{\eta d} + 1/2 \cdot (1 + \xi) \gamma_{\eta b} \end{cases}$$

[J] étant le Jacobien, on pose la relation :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi} \\ \gamma_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-25})$$

#### III.C.2. Déformations

On cherche, dans le repère local, la matrice gradient de déformations  $[B^S]$  qui relie les distorsions  $\{\gamma_{xy}\}$  aux déplacements  $\{\tilde{U}_e\}$  telle que :

$$\{\gamma_{xy}\} = [B^S] \cdot \{\tilde{U}_e\} \quad (\text{CIII-26})$$

En chaque point représentant le nœud milieu du côté du quadrangle c'est-à-dire aux points a, b, c, d de l'élément réel (Figure CIII-3-b), les déformations sont :





### III.C.3. Exemple numérique

Toujours avec le même exemple de la plaque encadrée, utilisé précédemment en intégration complète et en intégration sélective, mais cette fois-ci calculé avec la méthode de champ imposé. Les résultats sont regroupés dans le tableau (CIII-3) qui suit :

Epaisseur : h (mm)	0,1	1	5	10	15	20	25
Pression : p (N/mm <sup>2</sup> )	1.172E-5	0.01172	1.4652	11.720	39.555	93.772	183.125
Champ $\gamma$ "imposé"	0.98907	0.98951	1.0005	1.0346	1.0917	1.1718	1.2745
Théorie ( <i>Mindlin</i> )	1.0000	1.0005	1.0110	1.0457	1.1029	1.1829	1.2857

**Tableau CIII-3.** Déplacements du nœud central (1) de la plaque

On peut estimer ici que le champ assumé des déformations de cisaillement transversal donne de bons résultats comparés aux autres méthodes présentées avant.

Etant donné que l'intégration complète sans champ assumé ne donne pas d'assez bons résultats, l'intégration complète mais avec champ assumé peut être une alternative à une intégration sélective.

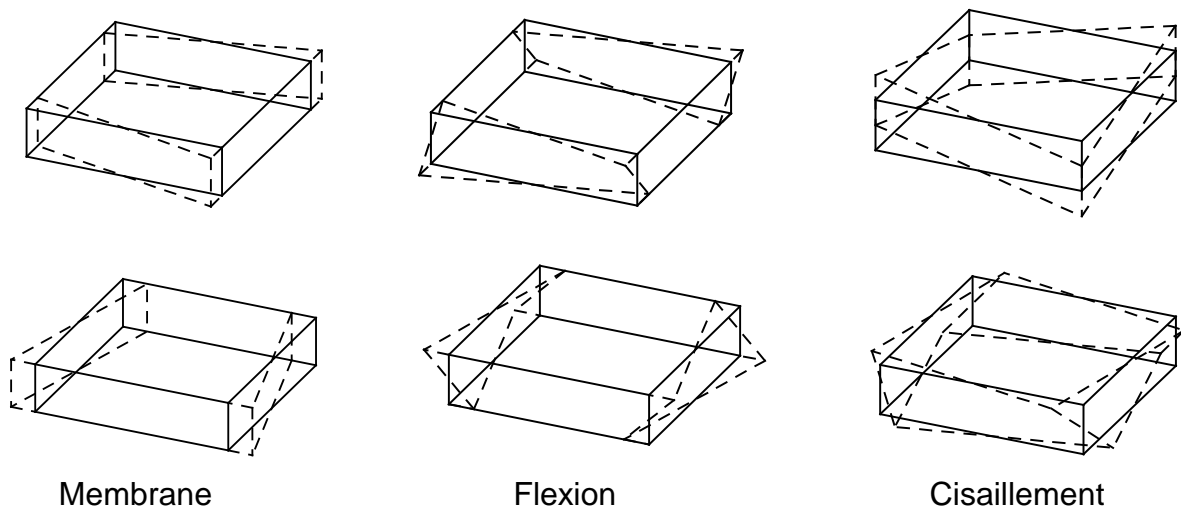
Et même dans le cas d'une intégration entièrement réduite (membrane, flexion et cisaillement transversal), la notion de champ assumé sera gardée bien qu'alors adaptée à une intégration en un seul point.

### III.D. Formulation issue d'une intégration réduite

On parle d'intégration réduite quand les deux matrices  $[K^b]$  et  $[K^s]$  sont calculées avec un nombre réduit de points d'intégration de Gauss Legendre comparée à l'intégration complète. Pour ce quadrilatère, la matrice de raideur de flexion  $[K^b]$  ne serait calculée qu'au point ( $\xi=0, \eta=0$ ):

$$[K^b(\xi=0, \eta=0)] = 2 \times 2 \cdot [H^b(0,0)]$$

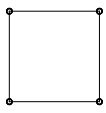
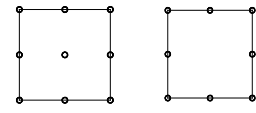
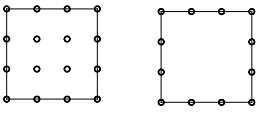
On trouvera dans [8] et [15] de longs développements à ce sujet. Il faut noter toutefois l'éventualité de modes à énergie nulle (grossièrement sans déplacement du ou des points d'intégration). Par exemple, à un seul point au centre d'un quadrangle, correspondent :



**Figure CIII-4.** Quelques modes à énergie nulle

La plupart des logiciels spécialisés dans le domaine de l'emboutissage utilisent ce quadrilatère avec intégration réduite en un seul point et contrôle des modes "sabliers" ("Hourglass control") [17] principalement pour un gain de temps de calcul.

On regroupe dans le tableau CIII-4 suivant les types d'intégration possibles pour les quadrangles linéaires, quadratiques et cubiques.

Exemple		Linéaire	Quadratique	Cubique
				
		Lagrange	Lagrange "Serendip"	Lagrange "Serendip"
Complète		2 x 2	3 x 3	4 x 4
Réduite		1 x 1	2 x 2	3 x 3
Sélective	Flexion	2 x 2	3 x 3	4 x 4
	Cisaillement	1 x 1	2 x 2	3 x 3

**Tableau CIII-4** Différents types d'intégration

Ici est présentée la version à intégration réduite de l'élément Q4 $\gamma$ 24 où la stabilisation des modes à énergie nulle pour les effets de membrane et de flexion est extraite des travaux de *Belytschko*, faisant intervenir les réputés vecteurs  $\{\gamma\}$ .

Le détail de la méthode n'est pas traité, seules les matrices gradients de déformations ayant servi au calcul des déformations et des matrices de raideur associées pour une intégration en un seul point dans le plan moyen de l'élément sont abordées.

### III.D.1. Notations

Les classiques fonctions bilinéaires sont décomposées en:

$$\{\mathbf{N}\} = \frac{1}{4} (\{\mathbf{S}\} + \{\mathbf{a}_\xi\}\xi + \{\mathbf{a}_\eta\}\eta + \{\mathbf{h}\}\xi\eta) \quad (\text{CIII-31})$$

$$\begin{aligned} \text{Où : } \langle \mathbf{S} \rangle = \{\mathbf{S}\}^T &= \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \rangle; & \langle \mathbf{a}_\xi \rangle = \{\mathbf{a}_\xi\}^T &= \langle -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \rangle; \\ \langle \mathbf{h} \rangle = \{\mathbf{h}\}^T &= \langle 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \rangle; & \langle \mathbf{a}_\eta \rangle = \{\mathbf{a}_\eta\}^T &= \langle -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \rangle. \end{aligned}$$

Dans le repère local (x, y, z), on note les déplacements d'un point de l'élément et ses coordonnées par :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}_x^e \rangle &= \langle u_i \quad u_j \quad u_k \quad u_l \rangle & \langle \mathbf{C}_x^e \rangle &= \langle x_i \quad x_j \quad x_k \quad x_l \rangle \\ \langle \mathbf{U}_y^e \rangle &= \langle v_i \quad v_j \quad v_k \quad v_l \rangle & \text{et } \langle \mathbf{C}_y^e \rangle &= \langle y_i \quad y_j \quad y_k \quad y_l \rangle \\ \langle \mathbf{U}_z^e \rangle &= \langle w_i \quad w_j \quad w_k \quad w_l \rangle & \langle \mathbf{C}_z^e \rangle &= \langle z_i \quad z_j \quad z_k \quad z_l \rangle \end{aligned}$$

Alors que dans le repère global, ces déplacements sont:

$$\langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle U_{Xi} \mid U_{Yi} \mid U_{Zi} \mid U_{Xj} \mid U_{Yj} \mid U_{Zj} \mid \dots \mid U_{Xi} \mid U_{Yi} \mid U_{Zi} \rangle$$

Par ailleurs, on a d'une part les vecteurs de Hallquist:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x \rangle &= \langle \mathbf{b}_x \rangle^T = \langle \mathbf{N}, x(\xi = \eta = 0) \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle &= \langle \mathbf{b}_y \rangle^T = \langle \mathbf{N}, y(\xi = \eta = 0) \rangle \end{aligned} \quad (\text{CIII-32})$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{N}} \rangle &= \langle \mathbf{N}(\xi = \eta = 0) \rangle = 1/4 \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle &= \langle \mathbf{N}, \xi(0,0) \rangle = 1/4 \cdot \langle \mathbf{a}_\xi \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle &= \langle \mathbf{N}, \eta(0,0) \rangle = 1/4 \cdot \langle \mathbf{a}_\eta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi\eta \rangle &= \langle \mathbf{N}, \xi\eta(0,0) \rangle = 1/4 \cdot \langle \mathbf{h} \rangle \end{aligned}$$

### III.D.2. Propriétés utiles :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{N}} \rangle \cdot \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle &= 0 \\ \langle \bar{\mathbf{N}} \rangle \cdot \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle &= \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{C}_x^e \rangle & \langle \mathbf{C}_y^e \rangle \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} &= \langle \bar{\mathbf{J}}^{-1} \rangle \cdot \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{C}_x^e \rangle & \langle \mathbf{C}_y^e \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \langle \mathbf{h} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \langle \mathbf{h} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \langle \mathbf{h} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

### III.D.3. Mise en évidence du vecteur $\langle \gamma \rangle$

Les "déformations" généralisées seront associées au mode  $\langle \mathbf{h} \rangle$  sous la forme :

$$\bar{q}_x = \langle \gamma \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_x^e \rangle ; \bar{q}_y = \langle \gamma \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_y^e \rangle .$$

D'une manière générale, le vecteur  $\langle \gamma \rangle$  doit vérifier  $\langle \gamma \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_R^e \rangle = 0$  afin d'être "normal" à un champ de petits déplacements de corps rigide  $\langle \mathbf{U}_R^e \rangle = c_0 \langle \mathbf{S} \rangle + c_x \langle \mathbf{C}_x^e \rangle + c_y \langle \mathbf{C}_y^e \rangle$  et ne pas créer des déformations dans un tel cas quels que soient  $c_0$ ,  $c_x$  et  $c_y$ .

Compte tenu des propriétés utiles précédentes et en recherchant  $\langle \gamma \rangle$  sous la forme :

$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{4} (\langle \mathbf{h} \rangle + d_x \langle \mathbf{b}_x \rangle + d_y \langle \mathbf{b}_y \rangle)$ , on trouve :

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{4} (\langle \mathbf{h} \rangle - (\langle \mathbf{h} \rangle \cdot \langle \mathbf{C}_x^e \rangle) \langle \mathbf{b}_x \rangle - (\langle \mathbf{h} \rangle \cdot \langle \mathbf{C}_y^e \rangle) \langle \mathbf{b}_y \rangle) \quad (\text{CIII-33})$$

### III.D.4. Déformation en membrane

En notant que, dans un repère local  $(x, y, z)$  où  $z$  est la normale à la surface moyenne à l'endroit considéré, les déformations de membrane  $\{\boldsymbol{\epsilon}_e^m\}$  sont de la forme :

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_e^m\} = \begin{Bmatrix} u,x \\ u,y \\ u,x+u,y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h,x & & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h,y & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h,y & & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h,x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_x^e\} \\ \{\mathbf{U}_y^e\} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-34})$$

Avec :

$$\begin{aligned} - \langle \mathbf{U}_x^e \rangle &= \{\mathbf{U}_x^e\}^T = \langle u_i \quad u_j \quad u_k \quad u_l \rangle \text{ les déplacements dans le repère local ;} \\ - \langle \mathbf{U}_y^e \rangle &= \{\mathbf{U}_y^e\}^T = \langle v_i \quad v_j \quad v_k \quad v_l \rangle \\ - \begin{Bmatrix} h,x \\ h,y \end{Bmatrix} &= [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} h,\xi \\ h,\eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} \text{ où } h = \xi\eta \end{aligned}$$

Les matrices  $[\mathbf{R}_u]$ ,  $[\mathbf{R}_v]$  et  $[\mathbf{R}_w]$  ci- dessous définies servent à faire passer les déplacements du repère global au repère local de la structure :

$$\{\mathbf{U}_x^e\} = [\mathbf{R}_u] \cdot \{\mathbf{U}_e\}; \quad [\mathbf{R}_u] = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ & & & & & & & & & \\ & & & xX & xY & xZ & & & & & & \\ & & & & & & xX & xY & xZ & & & \\ & & & & & & & & & xX & xY & xZ \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} xX \\ xY \\ xZ \end{Bmatrix} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (\text{CIII-35})$$

$$\{\mathbf{U}_y^e\} = [\mathbf{R}_v] \cdot \{\mathbf{U}_e\}; \quad [\mathbf{R}_v] = \begin{bmatrix} yX & yY & yZ & & & & & & & & & \\ & & & yX & yY & yZ & & & & & & \\ & & & & & & yX & yY & yZ & & & \\ & & & & & & & & & yX & yY & yZ \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{Bmatrix} yX \\ yY \\ yZ \end{Bmatrix} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (\text{CIII-36})$$

$$\{\mathbf{U}_z^e\} = [\mathbf{R}_w] \cdot \{\mathbf{U}_e\}; \quad [\mathbf{R}_w] = \begin{bmatrix} zX & zY & zZ & & & & & & & & & \\ & & & zX & zY & zZ & & & & & & \\ & & & & & & zX & zY & zZ & & & \\ & & & & & & & & & zX & zY & zZ \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}; \quad \bar{z} = \begin{Bmatrix} zX \\ zY \\ zZ \end{Bmatrix} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (\text{CIII-37})$$

La formulation (CIII-34) des déformations devient :

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_e^m\} = [\mathbf{B}_0^m] \cdot \{\mathbf{U}_e\} + \begin{bmatrix} h,x & & \\ & h,y & \\ & h,y & h,x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-38})$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{q}_x^m = \langle \gamma \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_x^e \} \\ \bar{q}_y^m = \langle \gamma \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_y^e \} \end{cases} \quad (\text{CIII-39})$$

$$[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & & \\ & & \langle \mathbf{b}_y \rangle & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & & \\ & & & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix} \quad (\text{CIII-40})$$

Les vecteurs de Hallquist (équation CIII-32), dans la matrice gradient des déformations « non-stabilisée »  $[\mathbf{B}_0^m]$  (équation CIII-40) issue de l'intégration **au centre de l'élément**, peuvent aussi prendre la forme suivante pratique à utiliser :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x \rangle &= \frac{1}{2A} \langle y_{24} \mid y_{31} \mid y_{42} \mid y_{13} \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle &= \frac{1}{2A} \langle x_{42} \mid x_{13} \mid x_{24} \mid x_{31} \rangle \end{aligned} \quad (A : \text{aire de l'élément}) \quad (\text{CIII-41})$$

En portant les déformations généralisées énoncées en CIII-32 dans le repère global, on tire la matrice gradient suivante nécessaire à la stabilisation :

$$[\mathbf{B}_s^m] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | & \\ & & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix} \quad (\text{CIII-42})$$

### III.D.5. Matrice de raideur en membrane

La matrice de raideur en membrane  $[\mathbf{K}_e^m]$  provient de la relation suivante :

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{K}_e^m] \cdot \{ \mathbf{U}_e \} = \iiint \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^m \rangle \cdot [\mathbf{D}] \cdot \{ \boldsymbol{\varepsilon}_e^m \} \cdot dv = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{B}_0^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}_0^m] \cdot A \cdot \{ \mathbf{U}_e \} + \langle \hat{q}_x^m \quad \hat{q}_y^m \rangle \cdot [\mathbf{D}_s^m] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x^m \\ \bar{q}_y^m \end{Bmatrix}$$

La matrice de raideur en membrane, somme des matrices des raideurs en membrane non stabilisée et des raideurs pour la stabilisation en membrane, est tirée de cette relation ci-dessus :

$$[\mathbf{K}_e^m] = [\mathbf{K}_0^m] + [\mathbf{K}_s^m] \quad (\text{CIII-43})$$

Où, avec 'A' comme l'aire de l'élément en question:

$$- [\mathbf{K}_0^m] = [\mathbf{B}_0^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}_0^m] \cdot A, \text{ matrice de raideur en membrane non stabilisée ;}$$

$$- [\mathbf{K}_s^m] = [\mathbf{B}_s^m]^T \cdot [\mathbf{D}_s^m] \cdot [\mathbf{B}_s^m], \text{ matrice pour la stabilisation en membrane ;}$$

$$- [\mathbf{D}^m] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot dz, \text{ matrice de comportement pour la membrane}$$

$$- [\mathbf{D}_s^m] = \begin{bmatrix} H_{xx} \cdot D_{11}^m + H_{yy} \cdot D_{33}^m & H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m \\ H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m & H_{yy} \cdot D_{22}^m + H_{xx} \cdot D_{33}^m \end{bmatrix} \text{ si } D_{13} = D_{23} = 0, \text{ matrice utile à la}$$

stabilisation en membrane dont les termes sont explicités ci – dessous :

$$\begin{cases} H_{xx} = \iint (h, x) \cdot (h, x) \cdot dx \cdot dy = \iint (h, x) \cdot (h, x) \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \\ H_{yy} = \iint (h, y) \cdot (h, y) \cdot dx \cdot dy = \iint (h, y) \cdot (h, y) \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \\ H_{xy} = \iint (h, x) \cdot (h, y) \cdot dx \cdot dy = \iint (h, x) \cdot (h, y) \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \end{cases} \quad (\text{CIII-44})$$

Le calcul de ces facteurs  $H_{xx}, H_{yy}, H_{xy}$  en sommation directe est faisable avec les quatre points d'intégration de Gauss-Legendre, par exemple pour le premier facteur :

$$H_{xx} = \sum_{r=1}^4 (\eta_r \cdot \mathbf{J}_{11}^{-1} + \xi_r \cdot \mathbf{J}_{12}^{-1})^2 \cdot \det \mathbf{J}(\xi_r, \eta_r) \cdot \omega_r \quad (\text{CIII-45})$$

$$\text{où : } \begin{cases} \xi_1 = \xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; & \xi_2 = \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \eta_1 = \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; & \eta_3 = \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} ; \quad \omega_r = 1 \text{ le poids.}$$

$$[\mathbf{J}^{-1}(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{(-1)} & \mathbf{J}_{12}^{(-1)} \\ \mathbf{J}_{21}^{(-1)} & \mathbf{J}_{22}^{(-1)} \end{bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} h, x \\ h, y \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} h, \xi \\ h, \eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}.$$

### III.D.6. Déformation en flexion

Pour exprimer les déformations de flexion, on part des courbures  $\{\mathbf{k}_e\}$  ci dessous :

$$\{\mathbf{k}_e\} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma \rangle h, x \\ -\langle \mathbf{b}_y \rangle - \langle \gamma \rangle h, y \\ -\langle \mathbf{b}_x \rangle - \langle \gamma \rangle h, x \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma \rangle h, y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Theta_x^e \\ \Theta_y^e \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-46})$$

Par analogie avec les déformations de membrane (CIII-38, CIII-40 et CIII-42), les matrices  $[\mathbf{B}_0^b]$  et  $[\mathbf{B}_s^b]$  respectivement de flexion non stabilisée et de stabilisation des effets de flexion sont:

$$[\mathbf{B}_0^b] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ -\langle \mathbf{b}_y \rangle \\ -\langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix} \quad (\text{CIII-47})$$

$$\text{Si on a } \begin{cases} \bar{q}_x^b = \langle \gamma \rangle \cdot \Theta_x^e \\ \bar{q}_y^b = \langle \gamma \rangle \cdot \Theta_y^e \end{cases} \text{ alors } [\mathbf{B}_s^b] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle \\ \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix} \quad (\text{CIII-48})$$

Les vecteurs de Hallquist  $\langle \mathbf{b}_x \rangle$  et  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$  (équations CIII-41 et CIII-34), les matrices de passage  $[\mathbf{R}_u]$  et  $[\mathbf{R}_v]$  (équations CIII-35 et CIII-36) et le vecteur gamma  $\langle \gamma \rangle$  (équation CIII-33) ont déjà été définis.

### III.D.7. Matrice de raideur en flexion

Dans l'expression de la puissance virtuelle des efforts internes, comme en membrane, on peut avoir la matrice des raideurs en flexion  $[\mathbf{K}_e^b]$  telle que :

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{K}_e^b] \cdot \{\mathbf{U}_e\} = \iiint \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^b \rangle \cdot [\mathbf{D}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}_e^b\} \cdot dv = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{B}_0^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}_0^b] \cdot \mathbf{A} \cdot \{\mathbf{U}_e\} + \langle \hat{q}_x^b \quad \hat{q}_y^b \rangle \cdot [\mathbf{D}_s^b] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x^b \\ \bar{q}_y^b \end{Bmatrix}$$

On déduit de l'équation ci-dessus la matrice de raideur de flexion, somme des raideurs de flexion « non stabilisées » et des raideurs pour la stabilisation :

$$[\mathbf{K}_e^b] = [\mathbf{K}_0^b] + [\mathbf{K}_s^b] \quad (\text{CIII-49})$$

Où, avec A l'aire de l'élément :

- $[\mathbf{K}_0^b] = [\mathbf{B}_0^b]^T \cdot [\mathbf{D}^b] \cdot [\mathbf{B}_0^b] \cdot \mathbf{A}$ , matrice de raideur de flexion « non stabilisée » ;
- $[\mathbf{K}_s^b] = [\mathbf{B}_s^b]^T \cdot [\mathbf{D}_s^b] \cdot [\mathbf{B}_s^b]$ , matrice de raideur pour la stabilisation en flexion;
- $[\mathbf{D}^b] = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] \cdot z^2 \cdot dz$ , matrice de comportement de flexion ;
- $[\mathbf{D}_s^b] = \begin{bmatrix} H_{yy} \cdot D_{22}^b + H_{xx} \cdot D_{33}^b & -H_{xy} \cdot D_{12}^b - H_{xy} \cdot D_{33}^b \\ -H_{xy} \cdot D_{12}^b - H_{xy} \cdot D_{33}^b & H_{xx} \cdot D_{11}^b + H_{yy} \cdot D_{33}^b \end{bmatrix}$  si  $D_{13} = D_{23} = 0$ , matrice de

comportement pour la stabilisation en flexion.

Pour le calcul des facteurs  $H_{xx}, H_{yy}, H_{xy}$  dans cette matrice de comportement pour la stabilisation, on peut se référer à l'équation (CIII-44).

### III.D.8. Stabilisation pour le champ assumé des déformations de CT

#### III.D.8.a) Stabilisation

La relation (CIII-28) est réorganisée pour mettre en évidence des matrices gradient qui sont relatives aux modes 'hourglass' dans les déformations de cisaillement transversal (CT). En effet, l'autre forme des déformations en cisaillement transversal est :

$$\{\gamma_{xy}\} = [[\mathbf{B}_{s0}] + \eta \cdot [\mathbf{B}_{s1}] + \xi \cdot [\mathbf{B}_{s2}]] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \boldsymbol{\Theta}_e \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-50})$$

La matrice  $[\mathbf{B}_{s0}]$  est la matrice gradient non stabilisée issue de l'intégration réduite au centre du plan moyen de l'élément telle que :

$$[\mathbf{B}_{s0}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{11} & & & \bar{J}_{12} \\ & & & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{21} & & & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{J}_e \mathbf{B}_e] \quad (\text{CIII-51})$$

Les matrices  $[\mathbf{B}_{s1}]$  et  $[\mathbf{B}_{s2}]$  sont utiles pour gérer modes à énergie nulle apparaissant avec le phénomène de cisaillement transversal :

$$[\mathbf{B}_{s1}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\bar{J}_{11} & & & & \bar{J}_{11} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ -\bar{J}_{21} & & & & \bar{J}_{21} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{J}_e \mathbf{B}_e] \quad (\text{CIII-52})$$

$$[\mathbf{B}_{s2}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & & & \bar{J}_{12} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & \bar{J}_{22} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{J}_e \mathbf{B}_e] \quad (\text{CIII-53})$$

Dans les expressions de ces matrices gradients (CIII-51, CIII-52, CIII-53), le produit matriciel  $\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{B}_e$  est détaillé en (CIII-29) et les termes  $\bar{J}_{11}$ ,  $\bar{J}_{21}$ ,  $\bar{J}_{12}$ ,  $\bar{J}_{22}$  sont les composantes de l'inverse de la matrice jacobienne calculée en  $\xi = 0, \eta = 0$  :

$$[\mathbf{J}_0^{-1}] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix}$$

On rappelle ici les translations et rotations dans le repère global :

$$\langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle \mathbf{U}_{x1} \mid \mathbf{U}_{y1} \mid \mathbf{U}_{z1} \mid \mathbf{U}_{x2} \mid \mathbf{U}_{y2} \mid \mathbf{U}_{z2} \mid \mathbf{U}_{x3} \mid \mathbf{U}_{y3} \mid \mathbf{U}_{z3} \mid \mathbf{U}_{x4} \mid \mathbf{U}_{y4} \mid \mathbf{U}_{z4} \rangle$$

$$\langle \mathbf{\Theta}_e \rangle = \langle \theta_{x1} \mid \theta_{y1} \mid \theta_{z1} \mid \theta_{x2} \mid \theta_{y2} \mid \theta_{z2} \mid \theta_{x3} \mid \theta_{y3} \mid \theta_{z3} \mid \theta_{x4} \mid \theta_{y4} \mid \theta_{z4} \rangle$$

De la relation (CIII-50) se distinguent les trois expressions suivantes qui ont chacune un rôle spécifique à jouer dans la déformation de cisaillement transversal :

- la première, relative aux déformations de cisaillement transversal  $2\bar{\epsilon}_{xz}$  et  $2\bar{\epsilon}_{yz}$  calculées en  $\xi = 0, \eta = 0$  et non stabilisées, est :

$$\begin{Bmatrix} 2\bar{\epsilon}_{xz} \\ 2\bar{\epsilon}_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{s0}] \cdot \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{U}_e \rangle \\ \langle \mathbf{\Theta}_e \rangle \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-54})$$

- les deux autres qui serviront à la stabilisation sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \bar{q}_{1x} \\ \bar{q}_{1y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{s1}] \cdot \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{U}_e \rangle \\ \langle \mathbf{\Theta}_e \rangle \end{Bmatrix} ; \quad (\text{CIII-55})$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{q}_{2x} \\ \bar{q}_{2y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{s2}] \cdot \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{U}_e \rangle \\ \langle \mathbf{\Theta}_e \rangle \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-56})$$



### III.D.8.b) Matrices de raideur associées au cisaillement transversal

A partir de l'incontournable principe des travaux virtuels, on obtient rapidement la matrice globale des raideurs associées au cisaillement transversal suivant :

$$[\mathbf{K}_{\text{Stab}}^{\text{S}}] = \iiint [\mathbf{B}_{\text{S1}}]^{\text{T}} \cdot [\mathbf{D}^{\text{S}}] \cdot [\mathbf{B}_{\text{S1}}] \cdot \eta^2 \cdot dV + \iiint [\mathbf{B}_{\text{S1}}]^{\text{T}} \cdot [\mathbf{D}^{\text{S}}] \cdot [\mathbf{B}_{\text{S1}}] \cdot \xi^2 \cdot dV$$

Pour réduire l'écriture de cette matrice de stabilisation, on calcule les intégrales suivantes qui en sont extraites :

$$\iint \eta^2 \cdot dS = \iint \xi^2 \cdot dS = \frac{A}{3}.$$

Le résultat issu de ce calcul permet d'écrire la matrice de comportement en élasticité  $[\bar{\mathbf{D}}^{\text{S}}]$  où 'A' l'aire du quadrangle défini par les nœuds i, j, k, l :

$$[\bar{\mathbf{D}}^{\text{S}}] = \frac{A \cdot h}{3} \cdot [\mathbf{D}^{\text{S}}], \text{ avec } [\mathbf{D}^{\text{S}}] = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \begin{array}{c|c} 5/6 & \\ \hline & 5/6 \end{array} \right].$$

Par conséquent la matrice de stabilisation est mise sous cette nouvelle écriture :

$$[\mathbf{K}_{\text{Stab}}^{\text{S}}] = [\mathbf{B}_{\text{S1}}]^{\text{T}} \cdot [\bar{\mathbf{D}}^{\text{S}}] \cdot [\mathbf{B}_{\text{S1}}] + [\mathbf{B}_{\text{S2}}]^{\text{T}} \cdot [\bar{\mathbf{D}}^{\text{S}}] \cdot [\mathbf{B}_{\text{S2}}]$$

$$[\mathbf{K}_{\text{Stab}}^{\text{S}}] = [\mathbf{K}_{\text{stab}}^{\text{S1}}] + [\mathbf{K}_{\text{stab}}^{\text{S2}}] \tag{CIII-57}$$

### III.D.8.c) Matrice de raideur fictive stabilisée liée à $\theta_z$

En préambule de la constitution de cette matrice de raideur fictive, il faut noter que lors du passage à l'intégration réduite en un seul point de Gauss (au centre de l'élément), une méthode de stabilisation des modes à énergie nulle est requise pour cette contribution en rotation fictive  $\theta_z$  autour de l'axe local 'z' normal à la surface en ( $\xi = 0, \eta = 0$ ).

Sur le même principe qui a permis d'aboutir à (CIII-23), le calcul de la matrice gradient  $[\mathbf{B}_0^z]$  (matrice non stabilisée calculée en  $\xi=\eta=0$ ) au centre de l'élément quadrangle donne :

$$[\mathbf{B}_0^z] = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \left[ \begin{array}{c} \langle \mathbf{N}, \xi(0,0) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta(0,0) \rangle \end{array} \right] \cdot [\mathbf{R}_w] = \left[ \begin{array}{c} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{array} \right] \cdot [\mathbf{R}_w] \tag{CIII-58}$$

où :  $\langle \mathbf{b}_x \rangle$  et  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$  sont les vecteurs de Hallquist et  $[\mathbf{R}_w]$  la matrice de passage.

La matrice  $[\mathbf{B}_s^z]$ , utile à la stabilisation est obtenue à partir du vecteur gamma  $\langle \gamma \rangle$  également défini précédemment :

$$[\mathbf{B}_s^z(\xi, \eta)] = \langle \gamma \rangle \cdot [\mathbf{R}_w] \tag{CIII-59}$$

A la fin, les déformations relatives aux rotations fictives sont de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \cdot h,x \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \cdot h,y \end{bmatrix} \cdot \{\boldsymbol{\theta}_e^z\}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_0^z] \cdot \{\boldsymbol{\theta}_e^z\} + \begin{bmatrix} h,x \\ h,y \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{zx}^0 \\ \bar{\mathbf{q}}_{zy}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{CIII-60})$$

avec, comme en (CIII-38),  $\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_{zx}^0 \\ \bar{\mathbf{q}}_{zy}^0 \end{Bmatrix} = \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \cdot \{\boldsymbol{\theta}_e^z\}$  les déformations généralisées ; h,x et h,y les dérivées par rapport à x et y de la fonction  $h=\xi\eta$ .

Et par application du principe des travaux virtuels, on arrive à bâtir la matrice de raideur stabilisée suivante pour la rotation fictive  $\theta_z$  :

$$[\mathbf{K}_e^z] = [\mathbf{K}_0^z] + [\mathbf{K}_s^z] \quad (\text{CIII-61})$$

Avec : -  $[\mathbf{K}_0^z] = [\mathbf{B}_0^z]^T \cdot [\mathbf{D}^z] \cdot [\mathbf{B}_0^z]$ , matrice de raideur fictive en rotation non stabilisée

-  $[\mathbf{K}_s^z] = [\mathbf{B}_s^z]^T \cdot [\mathbf{D}^z] \cdot [\mathbf{B}_s^z]$ , matrice pour la stabilisation des raideurs fictives en rotation

-  $[\mathbf{D}^z] = \frac{E \cdot h^3}{12} \begin{bmatrix} \lambda & | \\ \hline & \lambda \end{bmatrix}$ , h = épaisseur de l'élément ;

-  $\lambda$  : facteur « petit » valant de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$  en général.

### III.E. REFERENCES

- [1] BATHE K.J., DVORKIN E.N., *A four-node plate bending element based on Mindlin Reissner plate theory and mixed interpolation*, Int. J. Num. Meth. Eng., 21, 367-383, 1985.
- [2] BATOZ J.L., TAHOR M.B., *Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element*, Int. J. Num. Meth. Eng., 18, 1655-77, 1982.
- [3] CRISFIELD M.A., *A four-noded thin-plate bending element using shear constraints. A modified version of Lyon's element*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 38, 93-120, 1983.
- [4] DVORKIN E.N., BATHE K.J., *A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis*, Eng. Comp., 1, 77-88, 1984.
- [5] HINTON E., HUANG H.C., *A family of quadrilateral Mindlin plate element with substitute shear strain field*, Comp. And Struct., 23, 409-431, 1986.
- [6] HUGHES T.J.R., TAYLOR R.L., KANOKNUKULCHAI W., *A simple and efficient element for plate bending*, Int. J. Num. Meth. Eng., 11, 1529-1543, 1977.
- [7] HUGHES T.J., TAYLOR R.L., TEZDUYAR T.E., *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four node bilinear isoparametric element*, J. Appl. Mech., 46, 587-596, 1981.
- [8] MALKUS D.S., HUGHES T.J.R., *Mixed finite element methods-reduced and selective integration techniques : a unification of concepts*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 15, 63-81, 1978.
- [9] MINDLIN R.D., *Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates*, J. Appl. Meth., 18, 31-38, 1951.
- [10] ONATE E., TAYLOR R.L., ZIENKIEWICZ O.C., *Consistent formulation of shear constrained Reissner-Mindlin plate elements*, Discretization Meth. in Structural Mechanics, Springer-Verlag, 1990.
- [11] ONATE E., et al., *A general Methodology for Deriving Shear-Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements*, Publicacion CIMNE, 5, June 1990.
- [12] PUGH E.D.L., HINTON E., ZIENKIEWICZ O.C., *A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration*, J. Appl. Mech., 12, 1059-1079, 1978.
- [13] REISSNER E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., 69-76, 1945.
- [14] ZIENKIEWICZ O.C., LEFEBVRE D., *Three field mixed-approximation and the plate bending problem*, Com. Appl. Num. Meth., 3, 301-309, 1987.
- [15] ZIENKIEWICZ O.C., TOO J., TAYLOR R.L., *Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells*, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 275-290, 1971.

## IV. Complément : Elément DKT12

<b>IV.</b>	<b>Complément_Elément DKT12</b>	<b>IV-1</b>
<b>IV.A.</b>	<b>Caractéristiques et interpolations</b>	<b>IV-2</b>
IV.A.1.	Définition du repère local	IV-2
IV.A.2.	Interpolation par les fonctions d'aires	IV-3
<b>IV.B.</b>	<b>Effets de membrane</b>	<b>IV-3</b>
<b>IV.C.</b>	<b>Effets de flexion</b>	<b>IV-4</b>
IV.C.1.	Déplacements	IV-4
IV.C.2.	Matrice de flexion $[B^b]$	IV-5
<b>IV.D.</b>	<b>Autres écritures des effets de flexion</b>	<b>IV-8</b>
IV.D.1.	Rotations de corps rigide	IV-8
IV.D.2.	Angles de flexion	IV-9
IV.D.3.	Superposition des courbures	IV-10
IV.D.4.	Matrice gradient	IV-11
<b>IV.E.</b>	<b>Références</b>	<b>IV-12</b>

## IV.A. Caractéristiques et interpolations

Il s'agit d'un triangle à 6 nœuds à bords droits. Les trois nœuds aux sommets (1, 2, 3) sont dotés de trois composantes de translation notées  $U_x, U_y, U_z$  dans le repère global de la structure et  $u, v, w$  dans le repère local de l'élément où  $u$  et  $v$  sont dans le plan moyen de l'élément et  $w$  normal à ce plan.

Les trois nœuds aux milieux des côtés (4, 5, 6) sont dotés d'une composante de rotation dans la direction du côté considéré :  $\theta_{t_4}, \theta_{t_5}$  et  $\theta_{t_6}$

### IV.A.1. Définition du repère local

La normale au repère local  $(\bar{x}, \bar{y})$  en question est définie avec l'axe  $\bar{z}$  perpendiculaire au plan du triangle.

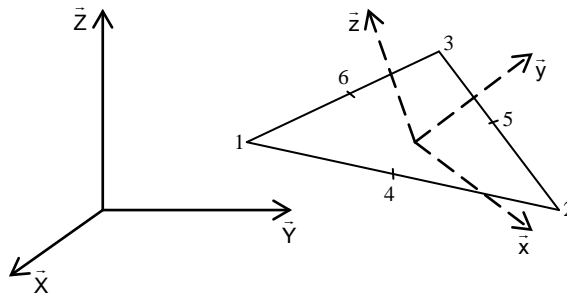


Figure CIV-1 Repère local de l'élément

$$\bar{z} = \frac{\bar{r}_{12} \wedge \bar{r}_{13}}{\|\bar{r}_{12} \wedge \bar{r}_{13}\|} = \begin{Bmatrix} zX \\ zY \\ zZ \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-1})$$

$zX, zY$  et  $zZ$  sont les projections de l'axe local  $\bar{z}$  sur les axes  $\bar{X}, \bar{Y}$  et  $\bar{Z}$  du repère global de la structure.

L'axe  $\bar{x}$  du repère local est, par exemple, porté par le côté 1-2 de l'élément :

$$\bar{x} = \frac{\bar{r}_{12}}{\|\bar{r}_{12}\|} = \begin{Bmatrix} xX \\ xY \\ xZ \end{Bmatrix}$$

$yX, yY$  et  $yZ$  sont calculés à partir du produit vectoriel  $\bar{z} \wedge \bar{x}$ .

Les déplacements locaux  $u_i, v_i$  et  $w_i$  sont reliés aux déplacements globaux  $U_{xi}, U_{yi}$  et  $U_{zi}$  par la matrice de passage  $[\mathbf{R}]$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \cdot \{ \mathbf{U}_e \} = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ \\ yX & yY & yZ \\ zX & zY & zZ \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{zi} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-2})$$

## IV.A.2. Interpolation par les fonctions d'aires

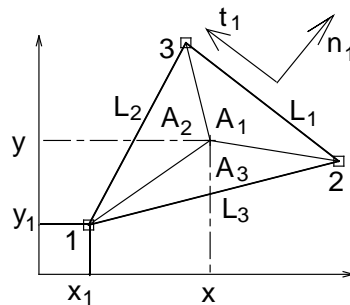


Figure CIV-2 Aires et longueurs des côtés

En partant de la figure CIV-2 ci-dessus, on définit les rapports  $\frac{A_1}{A}$ ,  $\frac{A_2}{A}$  et  $\frac{A_3}{A}$  qui sont les fonctions d'aire d'un triangle utiles pour effectuer des interpolations.

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A} (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y - x \cdot y_3 + x \cdot y_2 - x_2 \cdot y) \\ \frac{A_2}{A} = \frac{1}{2A} (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y - x \cdot y_1 + x \cdot y_3 - x_3 \cdot y) \\ \frac{A_3}{A} = \frac{1}{2A} (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y - x \cdot y_2 + x \cdot y_1 - x_1 \cdot y) \end{cases} \quad (\text{CIV-3})$$

## IV.B. Effets de membrane

Les déplacements dans le plan d'un point courant de l'élément, interpolés par les fonctions d'aire (CIV-3), à utiliser pour les effets de membrane sont:

$$\begin{cases} u = \frac{A_1}{A} u_1 + \frac{A_2}{A} u_2 + \frac{A_3}{A} u_3 \\ v = \frac{A_1}{A} v_1 + \frac{A_2}{A} v_2 + \frac{A_3}{A} v_3 \end{cases} \quad (\text{CIV-4})$$

En dérivant les déplacements dans le plan par rapport aux variables  $x$  et  $y$ , on établit les déformations en prenant en compte la relation (CIV-3) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & & y_{31} & & y_{12} & \\ & x_{32} & & x_{13} & & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \end{cases} \quad (\text{CIV-5})$$

De la relation (CIV-5) peut être extraite  $[\bar{\mathbf{B}}_m]$  la matrice gradient des déformations de membrane dans le repère local :

$$[\bar{\mathbf{B}}_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & & y_{31} & & y_{12} & \\ & x_{32} & & x_{13} & & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{CIV-6})$$

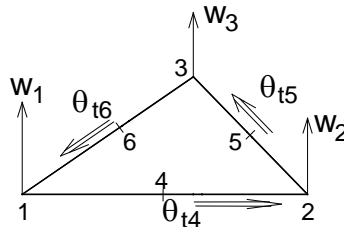
On peut réécrire l'équation (CIII.1-5) sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u, x \\ v, x \\ u, y - v, x \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{B}}_m] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-7})$$

Pour avoir ces déformations liées aux déplacements directement dans le repère global, il convient d'utiliser la matrice de passage (équation CIV-2).

## IV.C. Effets de flexion

### IV.C.1. Déplacements



**Figure CIV-3** Les rotations autour des côtés

Il est connu que l'élément DKT12 [4] est issu de l'association des éléments DKT6 et CST. Pour les effets de flexion du DKT12 dépendant des translations  $w_1, w_2, w_3$  et des rotations  $\theta_{t4}, \theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$  (figure CIV-3 précédent), on reprend les caractéristiques de DKT6 dont les degrés de liberté utiles pour les effets de flexion interpolés sont :

$$\begin{cases} w = \frac{A_1}{A} w_1 + \frac{A_2}{A} w_2 + \frac{A_3}{A} w_3 \\ \theta_x = \left(1 - \frac{2A_3}{A}\right) \theta_{x4} + \left(1 - \frac{2A_1}{A}\right) \theta_{x5} + \left(1 - \frac{2A_2}{A}\right) \theta_{x6} \\ \theta_y = \left(1 - \frac{2A_3}{A}\right) \theta_{y4} + \left(1 - \frac{2A_1}{A}\right) \theta_{y5} + \left(1 - \frac{2A_2}{A}\right) \theta_{y6} \end{cases} \quad (\text{CIV-8})$$

Avec  $A_1, A_2$  et  $A_3$  les aires dont la somme donne l'aire  $A$ . Et  $\theta_{x4}, \theta_{y4}, \theta_{x5}, \theta_{y5}, \theta_{x6}$  et  $\theta_{y6}$  ne sont pas uniquement les projections de  $\theta_{t4}, \theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$  sur les axes  $x$  et  $y$  du repère local dans le plan mais imposent aussi les relations de Kirchhoff :  $\theta_n = w, t$  aux nœuds 4, 5, 6 de sorte que :

$$\begin{cases} \theta_{n4} = \frac{w_2 - w_1}{L_3} \\ \theta_{n5} = \frac{w_3 - w_2}{L_1} \\ \theta_{n6} = \frac{w_1 - w_3}{L_2} \end{cases} \quad (\text{CIV-9})$$

Les projections des degrés de liberté en rotation  $\bar{\theta}_4, \bar{\theta}_5$  et  $\bar{\theta}_6$  successivement dans le repère  $(\bar{n}_i, \bar{t}_i)_{i=1,2,3}$  puis dans le repère local  $(\bar{x}, \bar{y})$  en utilisant les figures CIV-2 et CIV-3 donnent :

$$\bar{\theta}_4 = \theta_{n4} \cdot \bar{n}_3 + \theta_{t4} \cdot \bar{t}_3 = \theta_{x4} \cdot \bar{x} + \theta_{y4} \cdot \bar{y} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{n}_3 = n_{3x} \cdot \bar{x} + n_{3y} \cdot \bar{y} \\ \bar{t}_3 = n_{3x} \cdot \bar{y} - n_{3y} \cdot \bar{x} \end{cases}, \quad (\text{CIV-10})$$

$$\bar{\theta}_5 = \theta_{n5} \cdot \bar{n}_1 + \theta_{t5} \cdot \bar{t}_1 = \theta_{x5} \cdot \bar{x} + \theta_{y5} \cdot \bar{y} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{n}_1 = n_{1x} \cdot \bar{x} + n_{1y} \cdot \bar{y} \\ \bar{t}_1 = n_{1x} \cdot \bar{y} - n_{1y} \cdot \bar{x} \end{cases}, \quad (\text{CIV-11})$$

$$\bar{\theta}_6 = \theta_{n6} \cdot \bar{n}_2 + \theta_{t6} \cdot \bar{t}_2 = \theta_{x6} \cdot \bar{x} + \theta_{y6} \cdot \bar{y} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{n}_2 = n_{2x} \cdot \bar{x} + n_{2y} \cdot \bar{y} \\ \bar{t}_2 = n_{2x} \cdot \bar{y} - n_{2y} \cdot \bar{x} \end{cases}, \quad (\text{CIV-12})$$

#### IV.C.2. Matrice de flexion $[B^b]$

Afin de construire cette matrice gradient « de flexion », il faut au préalable disposer de l'expression des courbures en utilisant les dérivées des équations (CIV-8), (CIV-10) et (CIV-11) par rapport à  $x$  et  $y$  et en tenant compte de (CIV-3) et (CIV-8) :

$$\{\mathbf{k}\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} & y_{21} & & y_{32} & & y_{13} \\ x_{21} & & x_{32} & & x_{13} & \\ y_{12} & x_{12} & y_{23} & x_{23} & y_{31} & x_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x5} \\ \theta_{y5} \\ \theta_{x6} \\ \theta_{y6} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-13})$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \end{cases}$$

Pour obtenir la matrice gradient  $[B^b]$  reliant les courbures aux "déplacements locaux" des nœuds du DKT12 c'est-à-dire aux translations  $w_1, w_2, w_3$  et aux rotations  $\theta_{t4}, \theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$ , il faut remplacer les composantes  $\theta_{xm}, \theta_{ym}$  ( $m = 4, 5, 6$ ) dans l'expression des courbures (CIV-13) par  $\theta_{tm}, \theta_{nm}$  puis remplacer  $\theta_{nm}$  par les translations normales  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).



Pour parvenir à cela, on traitera le cas des angles  $\theta_{x4}$  et  $\theta_{y4}$ , les autres angles s'obtiendront par déduction. Dans la relation (CIV-10) :  $\bar{\theta}_4 = \theta_{n4} \cdot \bar{n}_3 + \theta_{t4} \cdot \bar{t}_3 = \theta_{x4} \cdot \bar{x} + \theta_{y4} \cdot \bar{y}$ , posons les vecteurs  $\bar{n}_3 = c_3 \cdot \bar{x} + s_3 \cdot \bar{y}$  et  $\bar{t}_3 = -s_3 \cdot \bar{x} + c_3 \cdot \bar{y}$  où  $c_3 = y_{21}/L_3 = (y_2 - y_1)/L_3$  ;  $s_3 = -x_{21}/L_3 = -(x_2 - x_1)/L_3$ . Tout en tenant compte de (CIV-9), les termes de ces deux vecteurs modifient la relation (CIV-10). Ce qui donne :

$$\bar{\theta}_4 = \theta_{x4} \cdot \bar{x} + \theta_{y4} \cdot \bar{y} = \frac{w_2 - w_1}{L_3} \cdot (c_3 \cdot \bar{x} + s_3 \cdot \bar{y}) + \theta_{t4} \cdot (-s_3 \cdot \bar{x} + c_3 \cdot \bar{y})$$

En procédant par identification des termes, les angles  $\theta_{x4}$  et  $\theta_{y4}$  sont fonction désormais des déplacements perpendiculaires au plan ( $w_1, w_2$ ) de l'élément et de la rotation de corps solide  $\theta_{t4}$  c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \theta_{x4} = \frac{w_2 - w_1}{L_3} \cdot c_3 - \theta_{t4} \cdot s_3 \\ \theta_{y4} = \frac{w_2 - w_1}{L_3} \cdot s_3 + \theta_{t4} \cdot c_3 \end{cases} \quad (\text{CIV-14})$$

De façon analogue, sont définis les angles  $\theta_{x5}$ ,  $\theta_{y5}$ ,  $\theta_{x6}$  et  $\theta_{y6}$

$$\begin{cases} \theta_{x5} = \frac{w_3 - w_2}{L_1} \cdot c_1 - \theta_{t5} \cdot s_1 \\ \theta_{y5} = \frac{w_3 - w_2}{L_1} \cdot s_1 + \theta_{t5} \cdot c_1 \end{cases} \quad (\text{CIV-15})$$

$$\begin{cases} \theta_{x6} = \frac{w_1 - w_3}{L_2} \cdot c_2 - \theta_{t6} \cdot s_2 \\ \theta_{y6} = \frac{w_1 - w_3}{L_2} \cdot s_2 + \theta_{t6} \cdot c_2 \end{cases} \quad (\text{CIV-16})$$

Les relations (CIV-14), (CIV-15) et (CIV-16) mises dans (CIV-13) permettent d'exprimer les courbures directement dans le repère local (x, y) avec la matrice de flexion  $[\mathbf{B}^b]$  en fonction des degrés de liberté locaux  $w_1, w_2, w_3, \theta_{t4}, \theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$ , soit :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^b] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_2 \\ \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{[B^b]} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} & y_{21} & & y_{32} & & y_{13} \\ x_{21} & & x_{32} & & x_{13} & \\ y_{12} & x_{12} & y_{23} & x_{23} & y_{31} & x_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{c_3}{L_3} & \frac{c_3}{L_3} & & & -s_3 & & \\ -\frac{s_3}{L_3} & \frac{s_3}{L_3} & & & c_3 & & \\ & -\frac{c_1}{L_1} & \frac{c_1}{L_1} & & & -s_1 & \\ & -\frac{s_1}{L_1} & \frac{s_1}{L_1} & & & c_1 & \\ -\frac{c_2}{L_2} & \frac{c_2}{L_2} & & & & & -s_2 \\ -\frac{s_2}{L_2} & \frac{s_2}{L_2} & & & & & c_2 \end{bmatrix}$$

En passant l'expression des courbures dans le repère global, la matrice gradient des déformations dans le repère global  $\mathbf{[B^b]}$  se distingue facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{array} \right\} = \mathbf{[B^b]} \cdot \begin{bmatrix} zX & zY & zZ & & & & & & & & \\ & & & zX & zY & zZ & & & & & \\ & & & & & & zX & zY & zZ & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{z1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{z2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \\ U_{z3} \\ \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{array} \right\}$$

La matrice gradient des déformations de flexion  $\mathbf{[B^b]}$  dans le repère global est alors :

$$\mathbf{[B^b]} = \mathbf{[\bar{B}^b]} \cdot \begin{bmatrix} zX & zY & zZ & & & & & & & & \\ & & & zX & zY & zZ & & & & & \\ & & & & & & zX & zY & zZ & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(CIV-17)}$$

#### IV.D. Autres écritures des effets de flexion

Etant donné que certains angles de rotations de corps rigide du DKS16 [Complément V] seront définis à partir des triangles de type S3 [1] et afin de mettre en évidence la caractéristique commune avec l'élément 'S3' (Rotation Free), il est nécessaire de formuler différemment les courbures en faisant apparaître clairement le mouvement de corps rigide du triangle induit par les translations normales.

$$\{\mathbf{k}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_{xx} \\ \mathbf{k}_{yy} \\ 2\mathbf{k}_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_\theta] \begin{Bmatrix} \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} + [\mathbf{B}_w] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{k}_\theta\} + \{\mathbf{k}_w\} \quad (\text{CIV-18})$$

Avec :

$$\{\mathbf{k}_\theta\} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} c_3^2 \cdot L_3 & c_1^2 \cdot L_1 & c_2^2 \cdot L_2 \\ s_3^2 \cdot L_3 & s_1^2 \cdot L_1 & s_2^2 \cdot L_2 \\ 2 \cdot c_3 \cdot s_3 \cdot L_3 & 2 \cdot c_1 \cdot s_1 \cdot L_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 \cdot L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ s_3^2 & s_1^2 \cdot L_1 & s_2^2 \\ 2 \cdot c_3 \cdot s_3 & 2 \cdot c_1 \cdot s_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2\theta_{t4}/h_3 \\ 2\theta_{t5}/h_1 \\ 2\theta_{t6}/h_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-19})$$

$$\text{et } \{\mathbf{k}_w\} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} c_2 \cdot s_2 - c_3 \cdot s_3 & c_3 \cdot s_3 - c_1 \cdot s_1 & c_1 \cdot s_1 - c_2 \cdot s_2 \\ c_3 \cdot s_3 - c_2 \cdot s_2 & c_1 \cdot s_1 - c_3 \cdot s_3 & c_2 \cdot s_2 - c_1 \cdot s_1 \\ 2 \cdot (c_3^2 - c_2^2) & 2 \cdot (c_1^2 - c_3^2) & 2 \cdot (c_2^2 - c_1^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-20})$$

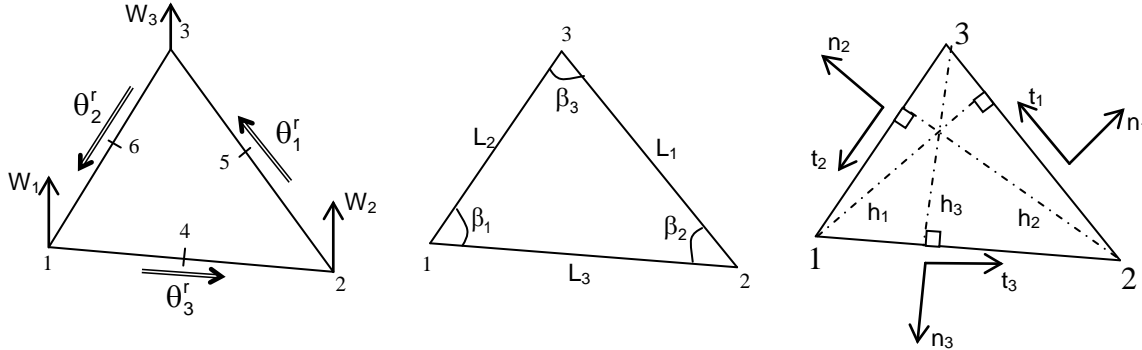


Figure CIV-4 Caractéristiques géométriques utiles du triangle DKT12

##### IV.D.1. Rotations de corps rigide

Les angles de rotation de solide rigide  $\theta_1^r$ ,  $\theta_2^r$ ,  $\theta_3^r$  de ce triangle relatifs respectivement aux côtés 2-3, 3-1 et 1-2 se calculent aisément à partir des déplacements  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  et de ses caractéristiques géométriques (voir Figure CIV-4)

Le déplacement  $w$  est interpolé de la même manière que les déplacements  $u$  et  $v$  avec les fonctions d'aire déjà établies en (CIV-3):

$$w = \frac{A_1}{A} w_1 + \frac{A_2}{A} w_2 + \frac{A_3}{A} w_3 ; w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \text{ où } N_i = \frac{A_i}{A} \quad (\text{CIV-21})$$

Les angles de rotation de "corps rigide"  $\theta_i^r$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont tels que :

$$\theta_i^r = -w_{,n_i} = -(n_{ix} w_{,x} + n_{iy} w_{,y}) \quad (\text{CIV-22})$$

En tenant compte des caractéristiques géométriques du triangle DKT12 sur la figure CIV-4, ces angles de rotation de corps rigide peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \theta_1^r = -(w_{,n_1}) = -c_1(w_{,x}) - s_1(w_{,y}) = \frac{w_1}{h_1} - \frac{w_2}{h_2} \cos \beta_3 - \frac{w_3}{h_3} \cos \beta_2 \\ \theta_2^r = -(w_{,n_2}) = \frac{w_2}{h_2} - \frac{w_3}{h_3} \cos \beta_1 - \frac{w_1}{h_1} \cos \beta_3 \\ \theta_3^r = -(w_{,n_3}) = \frac{w_3}{h_3} - \frac{w_1}{h_1} \cos \beta_2 - \frac{w_2}{h_2} \cos \beta_1 \end{cases} \quad (\text{CIV-23})$$

Cette relation (CIV-23) peut être mise sous la forme matricielle (relation CIV-24) suivante où l'expression de la matrice  $[\mathbf{C}_w]$  est donnée plus bas :

$$\begin{Bmatrix} \theta_1^r \\ \theta_2^r \\ \theta_3^r \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}_w] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-24})$$

$$[\mathbf{C}_w] = - \begin{bmatrix} n_{1x} N_{1,x} + n_{1y} N_{1,y} & n_{1x} N_{2,x} + n_{1y} N_{2,y} & n_{1x} N_{3,x} + n_{1y} N_{3,y} \\ n_{2x} N_{1,x} + n_{2y} N_{1,y} & n_{2x} N_{2,x} + n_{2y} N_{2,y} & n_{2x} N_{3,x} + n_{2y} N_{3,y} \\ n_{3x} N_{1,x} + n_{3y} N_{1,y} & n_{3x} N_{2,x} + n_{3y} N_{2,y} & n_{3x} N_{3,x} + n_{3y} N_{3,y} \end{bmatrix} \quad (\text{CIV-25})$$

#### IV.D.2. Angles de flexion

De manière simple, pour chacun des côtés du triangle, un angle de flexion peut être défini comme étant la différence entre un degré de liberté et la rotation de corps rigide (CIV-24) de l'élément autour de ce côté. Ainsi, les angles de flexion  $\theta_1^b$ ,  $\theta_2^b$ ,  $\theta_3^b$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \theta_1^b = \theta_{t5} - \theta_1^r \\ \theta_2^b = \theta_{t6} - \theta_2^r \\ \theta_3^b = \theta_{t4} - \theta_3^r \end{cases} \quad (\text{CIV-26})$$

Notés  $\theta_i^b$  ( $i = 1, 2, 3$ ), ces angles de flexion correspondent à la différence ci-dessous après avoir pris par commodité pour la suite :  $\theta_1 = \theta_{t5}$  ;  $\theta_2 = \theta_{t6}$  ;  $\theta_3 = \theta_{t4}$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1^b \\ \theta_2^b \\ \theta_3^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \theta_1^r \\ \theta_2^r \\ \theta_3^r \end{Bmatrix} = \{\theta_e\} - \{\theta_e^r\} \quad (\text{CIV-27})$$

En mettant les équations (CIV-19) et (CIV-22) dans (CIV-23), On obtient donc les courbures en fonction des angles de flexion :

$$\{\mathbf{\kappa}\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2 \cdot \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ 2 \cdot c_1 \cdot s_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 & 2 \cdot c_3 \cdot s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{2\theta_1^b}{h_1} \\ \frac{2\theta_2^b}{h_2} \\ \frac{2\theta_3^b}{h_3} \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-28})$$

On voit apparaître les courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  prises dans les directions normales  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  à chacun des côtés du triangle DKT12 :

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{2\theta_1^b}{h_1} \\ \kappa_2 = \frac{2\theta_2^b}{h_2} \\ \kappa_3 = \frac{2\theta_3^b}{h_3} \end{cases} \quad (\text{CIV-29})$$

L'état des courbures dans l'élément peut alors être vu comme la superposition des courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$ .

#### IV.D.3. Superposition des courbures

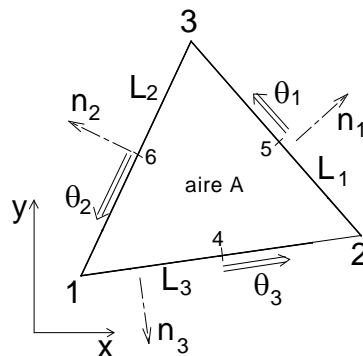


Figure CIV-5 normales et longueurs de l'élément

Les courbures dans le repère local  $(\vec{x}, \vec{y})$  deviennent alors :

$$\{\mathbf{\kappa}\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2 \cdot \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{1x}^2 & n_{2x}^2 & n_{3x}^2 \\ n_{1y}^2 & n_{2y}^2 & n_{3y}^2 \\ 2n_{1x}n_{1y} & 2n_{2x}n_{2y} & 2n_{3x}n_{3y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1^b L_1 \\ \theta_2^b L_2 \\ \theta_3^b L_3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{A} \quad (\text{CIV-30})$$

En prenant les courbures "directionnelles"  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  sous la forme suivante où les longueurs  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  et le surface  $A$  sont sur la Figure CIV-5:

$$\begin{cases} \kappa_1 = \theta_1^b \frac{L_1}{A} \\ \kappa_2 = \theta_2^b \frac{L_2}{A} \\ \kappa_3 = \theta_3^b \frac{L_3}{A} \end{cases} \quad (\text{CIV-31})$$

On a: 
$$\begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_{yy} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{R}_i]^T [\boldsymbol{\kappa}_{ni}] [\mathbf{R}_i] \quad (\text{CIV-32})$$

Avec : 
$$[\boldsymbol{\kappa}_{ni}] = \begin{bmatrix} \kappa_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
 matrice définissant les courbures directionnelles;

$$[\mathbf{R}_i] = \begin{bmatrix} n_{ix} & n_{iy} \\ -n_{iy} & n_{ix} \end{bmatrix},$$
 matrices de passage;

$$\bar{n}_i = \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \end{bmatrix},$$
 cosinus directeurs.

L'état de courbures (constantes) dans l'élément apparaît donc comme la superposition des courbures  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  prises dans les directions normales à chacun des côtés.

#### IV.D.4. Matrice gradient

De l'expression des courbures, dans le repère local, donnée ci-dessous dans (CIV-33),

$$\{\boldsymbol{\kappa}\} = [\mathbf{B}_\theta^b] \begin{Bmatrix} \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} + [\mathbf{B}_w^b] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{CIV-33})$$

on définit les matrices gradients de déformations, fonction des translations  $w$   $[\mathbf{B}_U^b]$  et fonction des rotations  $\theta$   $[\mathbf{B}_\theta^b]$ , comme suit :

$$\begin{cases} [\mathbf{B}_U^b] = [\mathbf{R}][\mathbf{H}][\mathbf{C}] \\ [\mathbf{B}_\theta^b] = -[\mathbf{R}][\mathbf{H}] \end{cases} \quad (\text{CIV-34})$$

Avec :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} n_{1x}^2 & n_{2x}^2 & n_{3x}^2 \\ n_{1y}^2 & n_{2y}^2 & n_{3y}^2 \\ 2n_{1x}n_{1y} & 2n_{2x}n_{2y} & 2n_{3x}n_{3y} \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{H}] = -\frac{1}{A} \begin{bmatrix} L_1 & & \\ & L_2 & \\ & & L_3 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}_w][\mathbf{R}_w]$$

où  $[\mathbf{C}_w]$  est défini en (CIV-25) et  $[\mathbf{R}_w]$  est donnée par la relation (CIV-2)

Pour avoir les courbures dans le repère local, on exprime simplement les translations normales au plan de l'élément à partir des translations données dans le repère global  $\{\mathbf{w}_e\} = [\mathbf{R}_w]\{\mathbf{U}_e\}$ . Evidemment les rotations aux milieux des côtés de l'élément ne sont pas concernées lors du changement de repère :

$$\{\mathbf{k}\} = [\mathbf{B}_\theta^b]\{\theta_e\} + [\mathbf{B}_U^b]\{\mathbf{U}_e\} \quad (\text{CIV-35})$$

où :  $\{\mathbf{U}_e\}^T = \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle U_{x1} \mid U_{y1} \mid U_{z1} \mid U_{x2} \mid U_{y2} \mid U_{z2} \mid U_{x3} \mid U_{y3} \mid U_{z3} \rangle$ .

## IV.E. Références

- [1] F. Sabourin et M. Brunet, *Detailed formulation of the rotation-free triangular shell element 'S3' for general purpose shell analysis*, Engineering Computations, Vol 23, p469-502, 2006.
- [2] F.G. Flores et E. Oñate, *Improvements in the membrane behaviour of the three-node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 194, p907-932, 2005.
- [3] L.S.D. Morley, *The constant plate-bending element*, Journal of Strain Analysis, vol 6, p20-24, 1971.
- [4] J.L. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis - Poutres et Plaques - II*, Hermes, Paris, 482p, 1990.
- [5] J.L. Batoz, Y.Q. Guo et H. Shakourzadeh, *Analyse non linéaire de coques minces élastoplastiques avec l'élément DKT12*, Revue européenne des éléments finis, vol 7, p223-239, 1998.

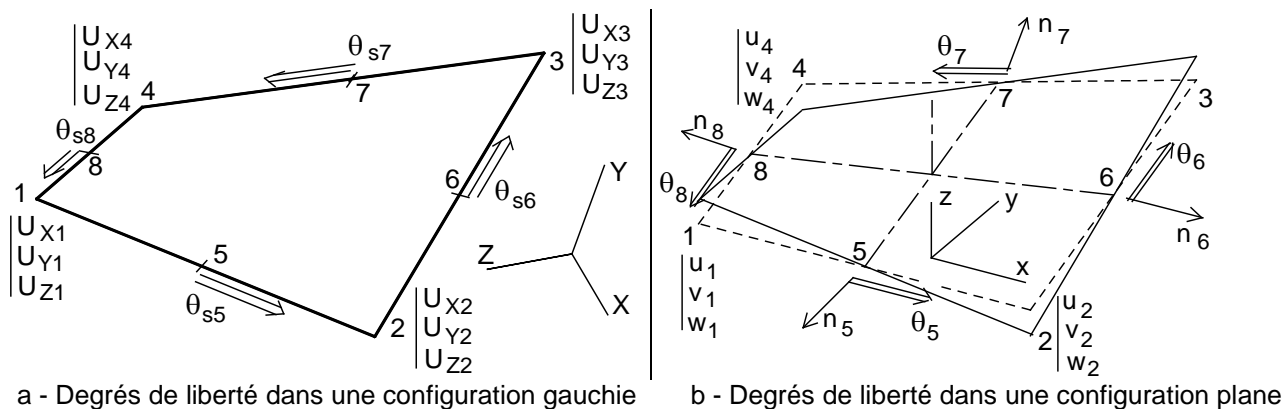
## V. Complément : Élément DKS16

<b>V.</b>	<b>Complément_élément DKS16</b>	<b>CV-1</b>
<b>V.A.</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>CV-2</b>
V.A.1.	Repère local	CV-2
V.A.2.	Fonctions d'interpolation	CV-3
<b>V.B.</b>	<b>Membrane</b>	<b>CV-4</b>
V.B.1.	Notations	CV-4
V.B.2.	Propriétés utiles	CV-5
V.B.3.	Vecteur $\{\gamma\}$	CV-5
V.B.4.	Déplacements	CV-6
V.B.5.	Déformations de membrane	CV-6
V.B.6.	Contraintes de membrane	CV-8
V.B.7.	Efforts internes : contribution des effets de membrane	CV-9
V.B.8.	Stabilisation en membrane	CV-9
<b>V.C.</b>	<b>Courbures pour les effets de flexion</b>	<b>CV-12</b>
V.C.1.	Rotations de corps rigide utiles	CV-12
V.C.2.	Angles de flexion	CV-13
V.C.3.	Courbures	CV-14
V.C.4.	Superposition	CV-14
V.C.5.	Expressions matricielles	CV-15
V.C.6.	Détail de la matrice [C]	CV-17
V.C.7.	Contraintes dues aux effets de flexion	CV-19
V.C.8.	Efforts internes dus aux effets de flexion	CV-19
V.C.9.	Stabilisation en flexion	CV-19
<b>V.D.</b>	<b>Compléments sur la stabilisation en membrane</b>	<b>CV-23</b>
V.D.1.	Stabilisation physique	CV-23
V.D.2.	Stabilisation physique – Autre forme	CV-24
V.D.3.	Stabilisation basée sur une étude aux valeurs propres	CV-25
V.D.4.	Influence du gauchissement	CV-26
V.D.5.	Exemple de prédiction de retour élastique	CV-29
<b>V.E.</b>	<b>Références</b>	<b>CV-30</b>



## V.A. Caractéristiques

C'est un quadrilatère à **huit nœuds** à bords droits : quatre nœuds sommets (1, 2, 3, 4) dotés de trois composantes de translation notées  $U_x, U_y, U_z$  dans le repère global de la structure et  $u, v, w$  dans le repère local de l'élément où  $u$  et  $v$  sont dans le plan moyen de l'élément et  $w$  normal à ce plan ; et quatre nœuds aux milieux des côtés (5, 6, 7, 8) munis d'une composante de rotation dans la direction du côté considéré :  $\theta_{s5}, \theta_{s6}, \theta_{s7}$  et  $\theta_{s8}$ .



**Figure CV-1** Elément quadrangle DKS16

Les composantes  $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4$  sont utilisées pour les effets de membrane tandis que les translations  $w_1, w_2, w_3, w_4$  normales au plan  $(x, y)$  définissent les angles de rotation de corps rigides utiles à la flexion.

Le calcul des rotations de corps rigide  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  sera nécessaire pour que leurs différences avec les degrés de liberté en rotation donnent les angles de flexion  $\theta_5^b, \theta_6^b, \theta_7^b, \theta_8^b$  puis les courbures par superposition.

De même, certains modes de flexion à énergie nulle seront supprimés en superposant des déformations dans des directions normales aux diagonales 1-3 et 2-4 par découpage du quadrilatère en deux triangles S3 [5] - (1-3-4), (3-1-2) - puis en deux autres : (2-4-1) et (4-2-3).

### V.A.1. Repère local

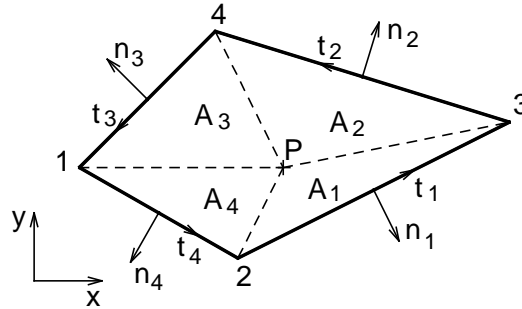
Comme cet élément sera utilisé pour effectuer des calculs fortement non linéaires, une intégration réduite est préférée à l'intégration exacte. Il n'y aura donc qu'un seul point d'intégration dans le plan local  $(x, y)$  - aussi bien pour les effets de membrane que pour ceux de flexion -, sachant qu'il y a autant de points d'intégration que souhaité suivant  $z$ .

La normale au repère local  $(x, y)$  en question est définie par :  $\vec{z} = (\vec{r}_{57} \wedge \vec{r}_{68}) / \|\vec{r}_{57} \wedge \vec{r}_{68}\|$ ; l'axe  $\vec{x}$  étant ensuite pris, par exemple, parallèle au côté 1-2 (voir Figure CV-1.b). On obtient enfin l'axe  $\vec{y}$  en faisant le produit vectoriel de  $\vec{z}$  par l'axe  $\vec{x}$ .

## V.A.2. Fonctions d'interpolation

Les fonctions d'interpolation  $\bar{N}_i(x, y)$  ( $i = 1..4$ ) proposées par Long [1] et détaillées ci après sont utilisées pour exprimer les angles de rotation de corps rigide  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  à partir des translations  $w_1, w_2, w_3, w_4$  normales au plan  $(x, y)$ .

### Interpolation par les fonctions d'aires d'un quadrilatère pour les effets de flexion



**Figure CV-2** Surfaces élémentaires d'un quadrangle

Pour rappeler les fonctions d'aire d'un quadrilatère, inspirées des travaux de Long [1], nous considérons les surfaces élémentaires  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  sur la figure CV-2 dont la somme donne la surface du quadrangle  $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ . On définit alors :

$$\begin{aligned} 2.A_1 &= a_4 + b_4x_4 + c_4y_4; & 2.A_2 &= a_1 + b_1x_1 + c_1y_1; \\ 2.A_3 &= a_2 + b_2x_2 + c_2y_2; & 2.A_4 &= a_3 + b_3x_3 + c_3y_3. \end{aligned}$$

On a aussi besoin, pour définir ces fonctions d'aires, des termes suivants :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{A_1}{A}; & g_2 &= \frac{A_2}{A}; & g_3 &= \frac{A_3}{A}; & g_4 &= \frac{A_4}{A} \quad \text{et } g_0 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \\ L_1 &= (a_1 + b_1x + c_1y)/2.A; & L_2 &= (a_2 + b_2x + c_2y)/2.A; \\ L_3 &= (a_3 + b_3x + c_3y)/2.A; & L_4 &= (a_4 + b_4x + c_4y)/2.A; \end{aligned}$$

On note alors ces fonctions utiles pour la flexion comme suit :

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{L_1}{g_2} + \frac{L_2}{g_4} - \frac{L_3 + L_4}{g_1} + \frac{g_3}{g_0} (g_1L_1L_2 - g_2L_2L_3 + g_3L_3L_4 - g_4L_4L_1) \right) \\ \bar{N}_2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{L_2}{g_3} + \frac{L_3}{g_1} - \frac{L_4 + L_1}{g_2} + \frac{g_4}{g_0} (g_2L_2L_3 - g_3L_3L_4 + g_4L_4L_1 - g_1L_1L_2) \right) \\ \bar{N}_3 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{L_3}{g_4} + \frac{L_4}{g_2} - \frac{L_1 + L_2}{g_3} + \frac{g_1}{g_0} (g_3L_3L_4 - g_4L_4L_1 + g_1L_1L_2 - g_2L_2L_3) \right) \\ \bar{N}_4 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{L_4}{g_1} + \frac{L_1}{g_3} - \frac{L_2 + L_3}{g_4} + \frac{g_2}{g_0} (g_4L_4L_1 - g_1L_1L_2 + g_2L_2L_3 - g_3L_3L_4) \right) \end{cases} \quad (\text{CV-1})$$

Pour les effets de membrane, ce sont les classiques fonction bilinéaires qui permettent d'interpoler les composantes  $(u, v)$  de translation dans le plan à partir des composantes  $U_1, U_2, U_3, U_4, V_1, V_2, V_3, V_4$ .

## V.B. Membrane

Toute la formulation est extraite des nombreux travaux de Belytschko sur la stabilisation des modes à énergie nulle ([6], [7] et [8]) avec les vecteurs  $\{\gamma\}$ , après une intégration réduite de l'élément.

### V.B.1. Notations

$$N_i = 1/4 \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i) = 1/4 \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i + \eta \cdot \eta_i + \xi \cdot \eta \cdot \xi_i \cdot \eta_i), \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1 \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

Ces classiques fonctions bilinéaires ci-dessus sont décomposées comme suit:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = 1/4 \cdot (\langle \mathbf{S} \rangle + \xi \cdot \langle \mathbf{a}_\xi \rangle + \eta \cdot \langle \mathbf{a}_\eta \rangle + \xi \eta \cdot \langle \mathbf{h} \rangle) \quad (\text{CV-2})$$

$$\text{où : } \langle \mathbf{S} \rangle = \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \rangle ; \langle \mathbf{a}_\xi \rangle = \langle -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \rangle ; \langle \mathbf{a}_\eta \rangle = \langle -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \rangle ; \langle \mathbf{h} \rangle = \langle 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \rangle.$$

Dans le repère local (x ,y), les déplacements et les coordonnées sont notés :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}_x^e \rangle &= \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \rangle & \text{et} & & \langle \mathbf{C}_x^e \rangle &= \langle x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \rangle \\ \langle \mathbf{U}_y^e \rangle &= \langle v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \rangle & & & \langle \mathbf{C}_y^e \rangle &= \langle y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \rangle \end{aligned} \quad (\text{CV-3})$$

Dans le repère global, les déplacements sont :

$$\langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle U_{x1} \mid U_{y1} \mid U_{z1} \mid U_{x2} \mid U_{y2} \mid U_{z2} \mid \dots \mid U_{x4} \mid U_{y4} \mid U_{z4} \rangle$$

Avec  $N_{i,\xi} = \frac{1}{4} \cdot \xi_i(1 + \eta \cdot \eta_i)$  et  $N_{i,\eta} = \frac{1}{4} \cdot \eta_i(1 + \xi \cdot \xi_i)$ , on peut écrire la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (\text{CV-4})$$

Les fonctions bilinéaires (CV-2) et leurs dérivées par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi\eta$  calculées en  $\xi=0$  et  $\eta=0$  sont notées :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}(\xi = \eta = 0) \rangle &= 1/4 \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \xi(\xi = \eta = 0) \rangle &= 1/4 \cdot \langle \mathbf{a}_\xi \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta(\xi = \eta = 0) \rangle &= 1/4 \cdot \langle \mathbf{a}_\eta \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \xi\eta(\xi = \eta = 0) \rangle &= 1/4 \cdot \langle \mathbf{h} \rangle \end{aligned} \quad (\text{CV-5})$$

Et avec A l'aire du quadrangle, on définit les « vecteurs » de Hallquist :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x \rangle &= \langle \mathbf{N}, x(0,0) \rangle = \frac{1}{2A} \langle y_2 - y_4 \mid y_3 - y_1 \mid y_4 - y_2 \mid y_1 - y_3 \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle &= \langle \mathbf{N}, y(0,0) \rangle = \frac{1}{2A} \langle x_4 - x_2 \mid x_1 - x_3 \mid x_2 - x_4 \mid x_3 - x_1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{CV-6})$$

## V.B.2. Propriétés utiles

A partir des notations ci-dessus (équations CV-5 et CV-6), on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{ \mathbf{a}_\xi \} = 0 \\ \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{ \mathbf{a}_\eta \} = 0 \\ \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{ \mathbf{h} \} = 0 \\ \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{ \mathbf{b}_x \} = 0 \\ \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{ \mathbf{b}_y \} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{a}_\xi \rangle \cdot \{ \mathbf{h} \} = 0 \\ \langle \mathbf{a}_\eta \rangle \cdot \{ \mathbf{h} \} = 0 \\ \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{ \mathbf{h} \} = 0 \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{ \mathbf{h} \} = 0 \end{cases} \quad (\text{CV-7})$$

On peut établir une relation entre les vecteurs de Hallquist et le Jacobien  $[\mathbf{J}]$ .

$$[\mathbf{J}(0,0)] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}(0,0)] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi(0,0) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta(0,0) \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{ \mathbf{C}_x^e \} \\ \{ \mathbf{C}_y^e \} \end{bmatrix}$$

L'inverse du Jacobien se détermine facilement en sachant que  $A = 4 \cdot \det[\mathbf{J}(0,0)]$  c'est-à-dire  $\det[\mathbf{J}(0,0)] = \frac{A}{4}$  alors :

$$[\mathbf{J}^{-1}(0,0)] = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 & y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

On aboutit à la relation suivante qui lie les vecteurs de Hallquist et le Jacobien :

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi(0,0) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta(0,0) \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \{ \mathbf{C}_x^e \} \\ \{ \mathbf{C}_y^e \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## V.B.3. Vecteur $\{ \gamma \}$

Par la suite, les "déformations" généralisées seront associées au mode  $\{ \mathbf{h} \}$  sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{q}_x = \langle \gamma \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_x^e \} \\ \bar{q}_y = \langle \gamma \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_y^e \} \end{cases} \quad (\text{CV-8})$$

sous la condition suivante qui empêche la présence des déformations quels que soient les coefficients  $c_0$ ,  $c_x$  et  $c_y$  dans le champ de petits déplacements de corps rigide  $\{ \mathbf{U}_R^e \} = c_0 \{ \mathbf{S} \} + c_x \{ \mathbf{C}_x^e \} + c_y \{ \mathbf{C}_y^e \}$  :  $\langle \gamma \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_R^e \} = 0$

Compte tenu des propriétés utiles précédentes et en recherchant  $\langle \gamma \rangle$  sous la forme  $\langle \gamma \rangle = 1/4 \cdot \{ \mathbf{h} \} + d_x \{ \mathbf{b}_x \} + d_y \{ \mathbf{b}_y \}$ , on trouve :

$$\langle \gamma \rangle = 1/4 \cdot \left( \{ \mathbf{h} \} - \langle \mathbf{h} \rangle \cdot \{ \mathbf{C}_x^e \} \{ \mathbf{b}_x \} - \langle \mathbf{h} \rangle \cdot \{ \mathbf{C}_y^e \} \{ \mathbf{b}_y \} \right) \quad (\text{CV-9})$$

## V.B.4. Déplacements

On met en évidence cette formulation en interpolant les déplacements  $(u, v)$  dans le plan par les polynômes :

$$\begin{cases} u = a_{0u} + a_{xu}x + a_{yu}y + c_u \xi \eta \\ v = a_{0v} + a_{xv}x + a_{yv}y + c_v \xi \eta \end{cases} \quad (CV-10)$$

En considérant ces translations (CV-10) aux quatre nœuds 1, 2, 3, 4, on obtient :

$$\begin{cases} \{\mathbf{U}_x^e\} = a_{0u} \{\mathbf{S}\} + a_{xu} \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yu} \{\mathbf{Y}_L^e\} + c_u \{\mathbf{h}\} \\ \{\mathbf{U}_y^e\} = a_{0v} \{\mathbf{S}\} + a_{xv} \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yv} \{\mathbf{Y}_L^e\} + c_v \{\mathbf{h}\} \end{cases} \quad (CV-11)$$

Avec les propriétés précisées précédemment et en multipliant (CV-11) par les vecteurs de Hallquist  $\langle \mathbf{b}_x \rangle$ ,  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$  (CV-6) puis par le vecteur  $\langle \boldsymbol{\gamma} \rangle$  (CV-9), on arrive à :

$$\begin{cases} a_{xu} = \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ a_{yu} = \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ c_u = \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{xv} = \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ a_{yv} = \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ c_v = \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \end{cases} \quad (CV-12)$$

## V.B.5. Déformations de membrane

Les effets de membrane surviennent quand les nœuds se déplacent dans le plan  $(x,y)$ . Bien évidemment le cisaillement transversal n'intervient pas puisqu'on a affaire à un élément de type « Kirchhoff discret ».

En partant des déplacements (CV-10) qu'on dérive par rapport à  $x$  et  $y$ , on exprime les déformations dans le plan  $(x, y)$  en petites perturbations comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u,x = a_{xu} + c_u \cdot h, x \\ \varepsilon_{yy} = v,y = a_{xv} + c_v \cdot h, y \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot (u,y + v,x) = \frac{1}{2} \cdot (a_{yu} + c_u \cdot h, y + a_{xv} + c_v \cdot h, x) \end{cases}$$

Ces déformations peuvent être écrites sous forme matricielle, en prenant le soin de remplacer les coefficients  $a_{xu}, a_{xv}, a_{yu}, a_{yv}, c_u, c_v$  par leurs expressions (CV-12) :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x & | & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y & | & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\mathbf{U}_x^e\} \\ \{\mathbf{U}_y^e\} \end{Bmatrix} \quad (CV-13)$$

$$\text{où : } \begin{Bmatrix} h, x \\ h, y \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} h, \xi \\ h, \eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} \text{ puisque } h = \xi \eta \text{ et } \begin{cases} \{\mathbf{U}_x^e\} = [\mathbf{R}_u] \cdot \{\mathbf{U}_e\} \\ \{\mathbf{U}_y^e\} = [\mathbf{R}_v] \cdot \{\mathbf{U}_e\} \end{cases}$$

Les matrices  $[R_u]$  et  $[R_v]$  explicitées ci-dessous, dont les termes sont les projections des axes  $x$  et  $y$  dans le repère global, sont utiles pour faire passer les déplacements du repère global  $R_G(O,X,Y,Z)$  dans le repère local  $R_L(O,x,y,z)$ .

$$[R_u] = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ & & & & & & & & \\ & & & xX & xY & xZ & & & & & \\ & & & & & & xX & xY & xZ & & \\ & & & & & & & & & xX & xY & xZ \end{bmatrix} ; \bar{x} = \begin{pmatrix} xX \\ xY \\ xZ \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})} \quad (CV-14)$$

$$[R_v] = \begin{bmatrix} yX & yY & yZ & & & & & & & & \\ & & & yX & yY & yZ & & & & & \\ & & & & & & yX & yY & yZ & & \\ & & & & & & & & & yX & yY & yZ \end{bmatrix} ; \bar{y} = \begin{pmatrix} yX \\ yY \\ yZ \end{pmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})} \quad (CV-15)$$

Comme les nœuds d'un élément quadrangulaire  $i, j, k, l$  ne sont généralement pas situés dans un plan comme c'est le cas d'un triangle, la procédure qui suit est un exemple possible d'un repère local en  $\xi$  et  $\eta$ .

Commençons par calculer  $xX, xY, xZ$ , composantes de l'axe  $\bar{x}$  dans le repère global  $(X, Y, Z)$  en utilisant les coordonnées aux nœuds données par la relation (CV-3)

$$\begin{aligned} xX &= x, \xi = 1/4 \cdot \langle - (1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & - (1+\eta) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} C_x^e \\ C_y^e \\ C_z^e \end{Bmatrix} \\ xY &= y, \xi = 1/4 \cdot \langle - (1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & - (1+\eta) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} C_x^e \\ C_y^e \\ C_z^e \end{Bmatrix} \\ xZ &= z, \xi = 1/4 \cdot \langle - (1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & - (1+\eta) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} C_x^e \\ C_y^e \\ C_z^e \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Cependant il faut noter que le facteur  $1/4$  n'est pas à prendre en compte en programmation. Les projections de  $x$  sur les axes du repère global ci-dessus doivent être normées :

$$\begin{cases} xX = xX / \sqrt{xX^2 + xY^2 + xZ^2} \\ xY = xY / \sqrt{xX^2 + xY^2 + xZ^2} \\ xZ = xZ / \sqrt{xX^2 + xY^2 + xZ^2} \end{cases}$$

Les termes suivants sont utiles pour calculer les projections de  $\bar{z}$  sur le repère global :

$$\begin{aligned} V_x &= x, \eta = 1/4 \cdot \langle - (1-\xi) & - (1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} C_x^e \\ C_y^e \\ C_z^e \end{Bmatrix} \\ V_y &= y, \eta = 1/4 \cdot \langle - (1-\xi) & - (1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} C_x^e \\ C_y^e \\ C_z^e \end{Bmatrix} \\ V_z &= z, \eta = 1/4 \cdot \langle - (1-\xi) & - (1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \rangle \cdot \begin{Bmatrix} C_x^e \\ C_y^e \\ C_z^e \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

En effet, on détermine les composantes  $zX, zY, zZ$ , projections de  $\bar{z}$  sur les axes  $\bar{X}, \bar{Y}$  et  $\bar{Z}$  en procédant au produit vectoriel suivant :

$$\begin{cases} zX \\ zY \\ zZ \end{cases} = \begin{cases} xX \\ xY \\ xZ \end{cases} \wedge \begin{cases} V_x \\ V_y \\ V_z \end{cases} \text{ dont les termes normés sont : } \begin{cases} zX = zX / \sqrt{zX^2 + zY^2 + zZ^2} \\ zY = zY / \sqrt{zX^2 + zY^2 + zZ^2} \\ zZ = zZ / \sqrt{zX^2 + zY^2 + zZ^2} \end{cases}$$

Les composantes  $yX, yY, yZ$  de l'axe  $\bar{y}$  dans le repère global  $(X, Y, Z)$  s'obtiennent par le produit vectoriel qui suit :

$$\begin{Bmatrix} yX \\ yY \\ yZ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} zX \\ zY \\ zZ \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} xX \\ xY \\ xZ \end{Bmatrix}$$

Dans l'expression de la déformation (CV-13), on tire la matrice gradient des déformations en membrane  $[\mathbf{B}_0^m]$  en  $(\xi=0$  et  $\eta=0)$  avec les matrices de passage  $[\mathbf{R}_u]$  et  $[\mathbf{R}_v]$  déjà définies (CV-14 et CV-15) :

$$[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{bmatrix} \quad (\text{CV.16})$$

Les "déformations" généralisées  $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  déjà exposées (CV-8) et le vecteur gamma  $\{\gamma\}$  (CV-9), permettent de réécrire les déformations données en (CV-13) :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} = [\mathbf{B}_0^m] \cdot \{\mathbf{U}_e\} + \begin{bmatrix} h,x & | & \\ & | & h,y \\ h,y & | & h,x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CV.17})$$

où  $[\mathbf{B}_0^m] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$  exprime la déformation due aux effets de membrane calculés en  $(0,0)$  et le terme supplémentaire définit la stabilisation en membrane.

### V.B.6. Contraintes de membrane

Etant donné qu'une procédure particulière renvoie un état de contraintes plastiquement admissible après rabattement radial, seul l'accroissement de contraintes en prédiction élastique est présenté ici.

Classiquement, la loi constitutive suivante donne l'accroissement des contraintes en fonction de l'accroissement des déformations :

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{xx} \\ d\sigma_{yy} \\ d\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \cdot \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \\ 2 \cdot d\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \text{ avec } [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2 \cdot \mu & | & \bar{\lambda} & | & \\ \bar{\lambda} & | & \bar{\lambda} + 2 \cdot \mu & | & \\ \hline & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{CV-18})$$

$\bar{\lambda} = \frac{\nu \cdot E}{(1 - \nu^2)}$  est la forme réduite du coefficient de Lamé  $\lambda$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ . Dans ces coefficients de Lamé,  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Il s'agit donc, partiellement, d'un état plan de contraintes.

## V.B.7. Efforts internes : contribution des effets de membrane

Les contraintes de l'élément et la matrice gradient de déformation étant établies, on peut très facilement obtenir les efforts internes dus aux effets de membrane par la formule suivante qui, sous sa forme de sommation, tient compte du nombre de points d'intégration dans l'épaisseur et du poids en ces points. Comme il s'agit d'une intégration réduite dans le plan, 'A' correspond à l'aire du quadrilatère :

$$\{\mathbf{F}^m\} = A \cdot \int [\mathbf{B}^m]^T \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = A \cdot [\mathbf{B}^m]^T \cdot \frac{h}{2} \left\{ \sum_{q=1}^{npi} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cdot \bar{w}_q \\ \sigma_{yy} \cdot \bar{w}_q \\ \sigma_{xy} \cdot \bar{w}_q \end{Bmatrix} \right\} \quad (\text{CV-19})$$

## V.B.8. Stabilisation en membrane

### V.B.8.a) Matrice de raideur de stabilisation

La matrice de raideur en membrane de l'élément  $[\mathbf{K}_e^m]$  est tirée du travail virtuel des efforts interne et arrangée par application du Principe des Travaux Virtuels :

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{K}_e^m] \cdot \{\mathbf{U}_e\} = \iiint \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^m \rangle \cdot [\mathbf{D}] \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} \cdot dv = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{B}_0^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}_0^m] \cdot A \cdot \{\mathbf{U}_e\} + \langle \hat{q}_x \quad \hat{q}_y \rangle \cdot [\mathbf{D}_s^m] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-20})$$

En élasticité, cette matrice de raideur est la somme d'une matrice de raideur en membrane  $[\mathbf{K}_0^m] = [\mathbf{B}_0^m]^T \cdot [\mathbf{D}^m] \cdot [\mathbf{B}_0^m] \cdot A$  calculée en  $\xi=0$  et  $\eta=0$  et d'une matrice de raideur de stabilisation en membrane  $[\mathbf{K}_s^m] = [\mathbf{B}_s^m]^T \cdot [\mathbf{D}_s^m] \cdot [\mathbf{B}_s^m]$ :

$$[\mathbf{K}_e^m] = [\mathbf{K}_0^m] + [\mathbf{K}_s^m] \quad (\text{CV-21})$$

Et puisqu'on parle de stabilisation, on s'intéressera aux termes constitutifs de la matrice de raideur de stabilisation en membrane :

$$[\mathbf{K}_s^m] = [\mathbf{B}_s^m]^T \cdot [\mathbf{D}_s^m] \cdot [\mathbf{B}_s^m] \quad (\text{CV-22})$$

Le premier terme dans cette matrice de raideur est la matrice gradient de déformations pour la stabilisation en membrane  $[\mathbf{B}_s^m]$  qui est fonction du vecteur gamma et des matrices de passage  $[\mathbf{R}_u]$  et  $[\mathbf{R}_v]$  détaillées en (CV-14) et (CV-15) :

$$[\mathbf{B}_s^m] = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle & | & \\ \hline & & \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_u] \\ [\mathbf{R}_v] \end{bmatrix} \quad (\text{CV-23})$$

$$\text{avec } \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \rangle.$$

$$[\mathbf{D}_s^m] = \begin{bmatrix} H_{xx} \cdot D_{11}^m + H_{yy} \cdot D_{33}^m & | & H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m \\ \hline H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m & | & H_{yy} \cdot D_{22}^m + H_{xx} \cdot D_{33}^m \end{bmatrix} \quad (\text{CV-24})$$



### V.B.8.b) Calcul des composantes de $[D_s^m]$

Le travail virtuel des efforts  $\hat{P}_{int}$  ( CV-21), fondamentalement s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{int} = & \iiint \langle \hat{\epsilon}_e^m \rangle \cdot [D] \cdot \{ \epsilon_e^m \} \cdot dv = \langle \hat{U}_e \rangle \iint [B_0^m]^T \cdot \left( \int_{-t/2}^{t/2} [D] \cdot dz \right) \cdot [B_0^m] \cdot dx \cdot dy \cdot \{ U_e \} \\ & + \langle \hat{q}_x \quad \hat{q}_y \rangle \cdot \iint \left[ \begin{array}{c|c|c} h,x & 0 & h,y \\ \hline 0 & h,y & h,x \end{array} \right] \cdot \left( \int_{-t/2}^{t/2} [D] \cdot z \right) \cdot \left[ \begin{array}{c|c} h,x & 0 \\ \hline 0 & h,y \\ \hline h,y & h,x \end{array} \right] \cdot dx \cdot dy \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dans cette formulation, on va exploiter uniquement la partie dédiée à la stabilisation pour ressortir les composantes de la matrice  $[D_s^m]$ . En effet dans cette partie :

$$\langle \hat{q}_x \quad \hat{q}_y \rangle \cdot \iint \left[ \begin{array}{c|c|c} h,x & 0 & h,y \\ \hline 0 & h,y & h,x \end{array} \right] \cdot \left( \int_{-t/2}^{t/2} [D] \cdot dz \right) \cdot \left[ \begin{array}{c|c} h,x & 0 \\ \hline 0 & h,y \\ \hline h,y & h,x \end{array} \right] \cdot dx \cdot dy \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{array} \right\} \quad (CV-25)$$

on reconnaît la matrice de comportement de membrane  $[D^m]$  telle que  $[D^m] = \int_{-t/2}^{t/2} [D] \cdot dz$  et

dont les composantes sont  $D_{11}^m, D_{12}^m, D_{22}^m, D_{33}^m$ . On peut donc tirer la forme de la matrice de comportement de stabilisation en membrane en réécrivant cette partie dédiée à la stabilisation comme suit :

$$\langle \hat{q}_x \quad \hat{q}_y \rangle \cdot \left( \iint \left[ \begin{array}{c|c|c} h,x & 0 & h,y \\ \hline 0 & h,y & h,x \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c|c} D_{11}^m & D_{12}^m & \\ \hline D_{21}^m & D_{22}^m & \\ \hline & & D_{33}^m \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} h,x & 0 \\ \hline 0 & h,y \\ \hline h,y & h,x \end{array} \right] \cdot dx \cdot dy \right) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{array} \right\}$$

D'où cette forme finale de la matrice de comportement de stabilisation en membrane :

$$\left[ \begin{array}{c|c} D_{11}^m \cdot \iint (h,x)^2 \cdot dx \cdot dy + D_{33}^m \cdot \iint (h,x)(h,y) \cdot dx \cdot dy & D_{12}^m \cdot \iint (h,x)(h,y) \cdot dx \cdot dy + D_{33}^m \cdot \iint (h,y)^2 \cdot dx \cdot dy \\ \hline D_{11}^m \cdot \iint (h,x)(h,y) \cdot dx \cdot dy + D_{33}^m \cdot \iint (h,x)^2 \cdot dx \cdot dy & D_{22}^m \cdot \iint (h,y)^2 \cdot dx \cdot dy + D_{33}^m \cdot \iint (h,x)(h,y) \cdot dx \cdot dy \end{array} \right]$$

Tout ce qui est en double intégration dans cette matrice est calculé en posant :

$$\begin{cases} H_{xx} = \iint (h,x)(h,x) \cdot dx \cdot dy = \iint (h,x)(h,x) \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \\ H_{yy} = \iint (h,y)(h,y) \cdot dx \cdot dy = \iint (h,y)(h,y) \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \\ H_{xy} = \iint (h,x)(h,y) \cdot dx \cdot dy = \iint (h,x)(h,y) \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \end{cases} \quad (CV-26)$$

Et comme  $\begin{Bmatrix} h_x \\ h_y \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} h_\xi \\ h_\eta \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}$  où  $[J^{-1}(\xi, \eta)] = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$  est l'inverse du Jacobien, les facteurs  $H_{xx}, H_{yy}, H_{xy}$  sont intégrés avec les quatre points de Gauss

Legendre qui sont  $\begin{matrix} \xi_1 = -1/\sqrt{3} \\ \eta_1 = -1/\sqrt{3} \end{matrix}; \begin{matrix} \xi_1 = -1/\sqrt{3} \\ \eta_1 = 1/\sqrt{3} \end{matrix}; \begin{matrix} \xi_1 = 1/\sqrt{3} \\ \eta_1 = 1/\sqrt{3} \end{matrix}; \begin{matrix} \xi_1 = 1/\sqrt{3} \\ \eta_1 = -1/\sqrt{3} \end{matrix}$

On calcule, par exemple, le facteur  $H_{xx}$  comme suit :  $H_{xx} = \sum_{r=1}^4 (\eta_r J_{22} - \xi_r J_{12})^2$ . Les autres facteurs  $H_{yy}$  et  $H_{xy}$  se déterminent de la même façon.

### V.B.8.c) Efforts internes de stabilisation

Les déformations généralisées  $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  sont liées aux "contraintes"  $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$  par :

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx} \cdot D_{11} + H_{yy} \cdot D_{33} & H_{xy} \cdot D_{12} + H_{xy} \cdot D_{33} \\ H_{xy} \cdot D_{12} + H_{xy} \cdot D_{33} & H_{yy} \cdot D_{22} + H_{xx} \cdot D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \quad (CV-27)$$

Après intégration de ces contraintes  $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$  dans l'épaisseur notée ici  $t$  pour éviter toute confusion avec  $h$ , les efforts internes relatifs à la stabilisation en membrane, définis dans le plan  $(x,y)$  aux quatre nœuds de l'élément, ont pour expression dans le repère global :

$$\{\mathbf{F}_s^m\} = \int [\mathbf{B}_s^m]^T \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{Bmatrix} dz = [\mathbf{B}_s^m]^T \cdot \frac{t}{2} \left\{ \sum_{q=1}^{npi} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \cdot \varpi_q \\ \bar{Q}_y \cdot \varpi_q \end{Bmatrix} \right\} \quad (CV-28)$$

$\varpi_q$  est le poids aux points d'intégration de Lobatto (un point sur la peau supérieure et un autre sur la peau inférieure).

Ces efforts internes de stabilisation des effets membrane doivent être ajoutés aux efforts internes physiques (CV-19). Dans le cas de grandes transformations, un calcul incrémental s'impose et il faut donc sommer les contraintes  $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$  après chaque itération.

### V.B.8.d) Remarques

- La stabilisation décrite précédemment est dite "physique" car elle ne nécessite pas de facteur particulier autre que les caractéristiques du matériau et la géométrie de l'élément. Un comportement élasto-plastique est même directement pris en compte par la matrice  $[D_s^m]$  (CV-25).

- Dans les cas élastiques de sollicitations en membrane pure, les résultats sont les mêmes que ceux obtenus par une intégration complète 2x2. Mais on retrouve aussi, hélas !, les phénomènes de blocage en membrane associés...

- Afin d'éviter ce type de verrouillage, une méthode simple consiste à multiplier  $[D_s^m]$  par un facteur de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-3}$ .

## V.C. Courbures pour les effets de flexion

### V.C.1. Rotations de corps rigide utiles

Rechercher les rotations de corps rigides est nécessaire pour exprimer les angles de flexion utiles aux calculs des courbures. Exactement comme cela a été développé pour l'élément S4 [2] mais avec de légères modifications de notations dues à la numérotation des noeuds, les composantes  $w_1, w_2, w_3, w_4$  de translation des noeuds 1, 2, 3, 4 normales au plan défini par les axes  $x$  et  $y$  du repère local permettent de calculer les rotations de corps rigide  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$ .

Avec la translation normale  $w = \bar{N}_1 w_1 + \bar{N}_2 w_2 + \bar{N}_3 w_3 + \bar{N}_4 w_4$  où  $\bar{N}_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) sont les fonctions d'aires du quadrilatère, la détermination des angles de rotation  $\theta_i^r$  ( $i = 5, 6, 7, 8$ ) au milieu de chaque côté du quadrangle s'effectue grâce à la relation :

$$\theta_i^r = -w, n_i = -(n_{ix} w, x + n_{iy} w, y) \quad (CV-29)$$

Avec les dérivées des fonctions d'aire par rapport aux variables  $x$  et  $y$  ( $\bar{N}_k^5, x$  et  $\bar{N}_k^5, y$ ), ( $\bar{N}_k^6, x$  et  $\bar{N}_k^6, y$ ), ( $\bar{N}_k^7, x$  et  $\bar{N}_k^7, y$ ), ( $\bar{N}_k^8, x$  et  $\bar{N}_k^8, y$ ) respectivement aux points  $\underline{5} : ((x_1 + x_2)/2; (y_1 + y_2)/2)$ ;  $\underline{6} : ((x_2 + x_3)/2; (y_2 + y_3)/2)$ ;  $\underline{7} : ((x_3 + x_4)/2; (y_3 + y_4)/2)$ ;  $\underline{8} : ((x_4 + x_1)/2; (y_4 + y_1)/2)$  qui matérialisent les milieux des côtés du DKS16, on a les angles de rotation recherchés :

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_5^r &= -\sum_{k=1}^4 (n_{5x} \bar{N}_k^5, x + n_{5y} \bar{N}_k^5, y) w_k \\ \theta_6^r &= -\sum_{k=1}^4 (n_{6x} \bar{N}_k^6, x + n_{6y} \bar{N}_k^6, y) w_k \\ \theta_7^r &= -\sum_{k=1}^4 (n_{7x} \bar{N}_k^7, x + n_{7y} \bar{N}_k^7, y) w_k \\ \theta_8^r &= -\sum_{k=1}^4 (n_{8x} \bar{N}_k^8, x + n_{8y} \bar{N}_k^8, y) w_k \end{aligned} \right. \quad (CV-30)$$

On note dans la suite,  $w_k = U_{xk} z_x + U_{yk} z_y + U_{zk} z_z$  pour ( $k=1, 2, 3, 4$ ),. Après avoir remarqué que les composantes  $z_x, z_y$  et  $z_z$  sont celles notées auparavant  $zX, zY, zZ$ .

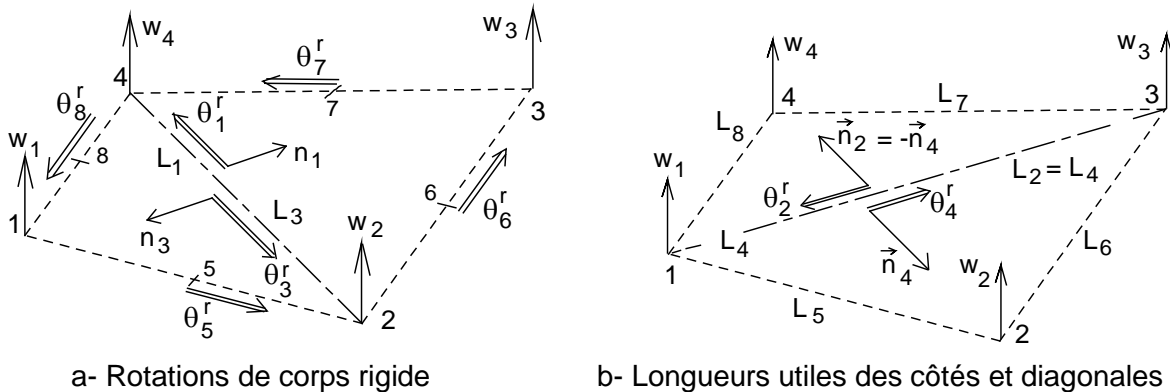


Figure CV-3. Configuration plane de l'élément quadrilatéral DKS16

Les rotations (CV-30) ne peuvent à elles seules donner la totalité des angles de flexion incontournables pour mettre en place les courbures, par conséquent calculer les angles  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r$  (Figure CV.3) est plus qu'une nécessité car cela assurera non seulement l'obtention du reste des angles de flexion mais aussi l'« annihilation » partielle des singularités que peut présenter cet élément si on n'utilisait que ces quatre rotations autour des côtés. En effet, ces singularités peuvent être partiellement levées en superposant des déformations dans des directions normales aux diagonales 1-3 et 2-4 (Figure CV-3 ci-dessus).

Pour avoir ces rotations, on considère sur la figure (CV-3.a) les triangles **e1** de sommets (1, 2, 4) et **e3** de sommets (3, 4, 2) d'une part et sur la figure (CV-3.b) les triangles **e2** de sommets (2, 3, 1) et **e4** de sommets (4, 1, 3) d'autre part. Et comme développées dans l'élément DKT12 [3] mais avec cette fois ci les déplacements  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , les triangles **e1**(1,2,4), **e2**(2,3,1), **e3**(3,4,2) et **e4**(4,1,3) donnent dans l'ordre les rotations de corps rigides :

$$\begin{cases} \theta_1^r = -(n_{1x}N_i^{e1}, x + n_{1y}N_i^{e1}, y)w_1 - (n_{1x}N_j^{e1}, x + n_{1y}N_j^{e1}, y)w_2 - (n_{1x}N_k^{e1}, x + n_{1y}N_k^{e1}, y)w_4 \\ \theta_2^r = -(n_{2x}N_i^{e2}, x + n_{2y}N_i^{e2}, y)w_2 - (n_{2x}N_j^{e2}, x + n_{2y}N_j^{e2}, y)w_3 - (n_{2x}N_k^{e2}, x + n_{2y}N_k^{e2}, y)w_1 \\ \theta_3^r = -(n_{3x}N_i^{e3}, x + n_{3y}N_i^{e3}, y)w_3 - (n_{3x}N_j^{e3}, x + n_{3y}N_j^{e3}, y)w_4 - (n_{3x}N_k^{e3}, x + n_{3y}N_k^{e3}, y)w_2 \\ \theta_4^r = -(n_{4x}N_i^{e4}, x + n_{4y}N_i^{e4}, y)w_4 - (n_{4x}N_j^{e4}, x + n_{4y}N_j^{e4}, y)w_1 - (n_{4x}N_k^{e4}, x + n_{4y}N_k^{e4}, y)w_3 \end{cases} \quad (CV-31)$$

où  $N_i, N_j, N_k$  sont les trois fonctions d'aires successives du triangle (i, j, k).

## V.C.2. Angles de flexion

La façon de calculer les angles de flexion d'un élément dit Rotation-Free (RF) ne sera pas reprise ici. On pourra se reporter aux travaux de Sabourin [5] en ce domaine car cette présentation est adoptée ici pour définir les angles de flexion qui seront utilisés pour le calcul des courbures « internes ».

En effet, pour avoir les angles de flexion ( $\theta_5^b, \theta_6^b, \theta_7^b, \theta_8^b$ ), on soustrait des degrés de liberté en rotation  $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$  les rotations de corps rigides  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  relatifs aux milieux des côtés du quadrangle ; on a donc :

$$\theta_5^b = \theta_5 - \theta_5^r; \quad \theta_6^b = \theta_6 - \theta_6^r; \quad \theta_7^b = \theta_7 - \theta_7^r; \quad \theta_8^b = \theta_8 - \theta_8^r. \quad (CV-32)$$

Et pour disposer des angles de flexion  $\theta_1^b, \theta_2^b, \theta_3^b, \theta_4^b$ , ce sont seules les rotations de corps rigide  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r$  (équation CV-31) qui sont utilisées en reprenant l'hypothèse déjà faite dans la mise en œuvre des angles de flexion de l'élément Rotation Free S3 [3] où il est stipulé que les deux triangles voisins sont faits de même matériau et ont la même épaisseur :

$$\theta_1^b = -\frac{A_1(\theta_1^r + \theta_3^r)}{A_1 + A_3}; \quad \theta_2^b = -\frac{A_2(\theta_2^r + \theta_4^r)}{A_2 + A_4}; \quad \theta_3^b = -\frac{A_3(\theta_3^r + \theta_1^r)}{A_3 + A_1}; \quad \theta_4^b = -\frac{A_4(\theta_4^r + \theta_2^r)}{A_4 + A_2}. \quad (CV-33)$$

### V.C.3. Courbures

La formulation des courbures du DKS16 est inspirée de celles utilisées dans l'élément S4 [2] et par conséquent de l'élément S3 [5].

Comme dans l'élément S4, les courbures ( $\kappa_5, \kappa_6, \kappa_7, \kappa_8$ ) dans des directions normales à chacun des côtés sont calculées à partir des relations suivantes :

$\kappa_m = \theta_m^b \cdot L_m / A$  ; où  $m = 5..8$  et  $A$  est l'aire de l'élément "plat" (1, 2, 3, 4). Les quatre courbures relatives aux quatre côtés de cet élément sont donc :

$$\kappa_5 = \frac{L_5(\theta_5 - \theta_5^r)}{A}; \kappa_6 = \frac{L_6(\theta_6 - \theta_6^r)}{A}; \kappa_7 = \frac{L_7(\theta_7 - \theta_7^r)}{A}; \kappa_8 = \frac{L_8(\theta_8 - \theta_8^r)}{A}. \quad (CV-34)$$

Le reste des courbures  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$  est défini en considérant dans un premier temps que les courbures  $\kappa_{1-3}$ ,  $\kappa_{2-4}$ ,  $\kappa_{3-1}$  et  $\kappa_{4-2}$  explicitées ci-dessous sont deux à deux égales c'est à dire  $\kappa_{3-1} = \kappa_{1-3}$  et  $\kappa_{2-4} = \kappa_{4-2}$ .

$$\kappa_{1-3} = -\frac{L_1(\theta_1^r + \theta_3^r)}{A}; \kappa_{2-4} = -\frac{L_2(\theta_2^r + \theta_4^r)}{A}; \kappa_{3-1} = -\frac{L_3(\theta_3^r + \theta_1^r)}{A}; \kappa_{4-2} = -\frac{L_4(\theta_4^r + \theta_2^r)}{A}$$

Dans un second temps pour des facilités d'écriture, on impose par exemple une courbure moyenne égale à  $(\kappa_{1-3} + \kappa_{2-4})/2$ . On notera alors  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  et  $\kappa_4$  ces "courbures" :

$$\kappa_1 = -\frac{L_1 \cdot \theta_1^r}{2A}; \kappa_2 = -\frac{L_2 \cdot \theta_2^r}{2A}; \kappa_3 = -\frac{L_3 \cdot \theta_3^r}{2A}; \kappa_4 = -\frac{L_4 \cdot \theta_4^r}{2A}. \quad (CV-35)$$

où  $L_2 = L_4 =$  longueur de la diagonale 2-4 et  $L_1 = L_3 =$  longueur de 1-3 (Voir Figure CV-3)

### V.C.4. Superposition

Ces huit courbures (CV-35 et CV-34) sont "superposées" comme dans les éléments S3 [5] et S4 [2] :

$$\begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_{yy} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^8 [\mathbf{R}_m]^T [\kappa_{nm}] [\mathbf{R}_m] \quad (CV-36)$$

**Remarques :**  $[\kappa_{nm}] = \begin{bmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  est exprimée dans le repère  $(\bar{n}_m, \bar{t}_m)$  ;

$[\mathbf{R}_m] = \begin{bmatrix} n_{mx} & n_{my} \\ -n_{my} & n_{mx} \end{bmatrix}$  est la matrice de changement de base;

$\bar{n}_m = \begin{bmatrix} n_{mx} \\ n_{my} \end{bmatrix} = n_{mx} \bar{x} + n_{my} \bar{y}$  est dans le repère local  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

## V.C.5. Expressions matricielles

La formulation matricielle des courbures est peu différente de celle de l'élément S4 :

$$\{\mathbf{k}\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2 \cdot \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \cdot \{\mathbf{k}_{nm}\}$$

où  $\{\mathbf{k}_{nm}\}$  est la matrice des courbures élémentaires prises dans le repère  $(\bar{n}_m, \bar{t}_m)$  et  $[\mathbf{R}]$  la matrice produite par les matrices de changement de base  $[\mathbf{R}_m]$  utilisées pour la superposition des courbures. Les formes de ces matrices sont réduites à :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} n_{1x}^2 & n_{2x}^2 & n_{3x}^2 & n_{4x}^2 & n_{5x}^2 & n_{6x}^2 & n_{7x}^2 & n_{8x}^2 \\ n_{1y}^2 & n_{2y}^2 & n_{3y}^2 & n_{4y}^2 & n_{5y}^2 & n_{6y}^2 & n_{7y}^2 & n_{8y}^2 \\ 2n_{1x}n_{2x} & 2n_{2x}n_{2y} & 2n_{3x}n_{3y} & 2n_{4x}n_{4y} & 2n_{5x}n_{5y} & 2n_{6x}n_{6y} & 2n_{7x}n_{7y} & 2n_{8x}n_{8y} \end{bmatrix} \quad (\text{CV-37})$$

$$\langle \mathbf{k}_{nm} \rangle = \langle \kappa_1 \mid \kappa_2 \mid \kappa_3 \mid \kappa_4 \mid \kappa_5 \mid \kappa_6 \mid \kappa_7 \mid \kappa_8 \rangle$$

Dans le repère  $(\bar{n}_m, \bar{t}_m)$ , en remplaçant les courbures "directionnelles" par leurs termes qui sont des rotations des corps rigides et des degrés de liberté aux nœuds milieux des côtés,  $\{\mathbf{k}_{nm}\}$  devient en se rappelant bien sûr que  $L_1=L_3$  et  $L_2=L_4$  :

$$\{\mathbf{k}_n\} = -\frac{1}{2 \cdot A} \begin{bmatrix} L_1 & & & & & & & \\ & L_2 & & & & & & \\ & & L_3 & & & & & \\ & & & L_4 & & & & \\ & & & & 2L_5 & & & \\ & & & & & 2L_6 & & \\ & & & & & & 2L_7 & \\ & & & & & & & 2L_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1^r \\ \theta_2^r \\ \theta_3^r \\ \theta_4^r \\ \theta_5^r \\ \theta_6^r \\ \theta_7^r \\ \theta_8^r \end{Bmatrix} + \frac{1}{A} \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & L_5 & & & \\ & & & & & L_6 & & \\ & & & & & & L_7 & \\ & & & & & & & L_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-38})$$

$$\text{En posant } [\mathbf{H}_w] = -\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} L_1 & & & & & & & \\ & L_2 & & & & & & \\ & & L_3 & & & & & \\ & & & L_4 & & & & \\ & & & & 2L_5 & & & \\ & & & & & 2L_6 & & \\ & & & & & & 2L_7 & \\ & & & & & & & 2L_8 \end{bmatrix} \quad \text{et } [\mathbf{H}_\theta] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} L_5 & & & \\ & L_6 & & \\ & & L_7 & \\ & & & L_8 \end{bmatrix} \quad (\text{CV.39})$$



### (3) Matrice $[R.H_0]$

Elle correspond, à un **signe moins** près, aux 4 dernières colonnes de la matrice  $[R.H_w]$  dont l'expression est donnée par la relation précédente (CV-44).

Finalement, après avoir défini les relations (CV-41) , (CV-44) et suivantes, la matrice des courbures peut être exprimée en fonction des translations dans le repère global par la relation (CV-45) qui suit :

$$\{\kappa\} = [B_U^b]\{U_e\} + [B_\theta^b]\{\theta_e\} \quad (CV-45)$$

$[B_U^b] = [R.H_w][C]$  : matrice gradient de flexion liée aux translations dans le repère global ;

$[B_\theta^b] = [R.H_0]$  : matrice gradient en flexion liée aux rotations dans le repère global.

Et par conséquent les déformations de flexion sont :

$$\{\varepsilon_e^b\} = Z \cdot \{\kappa\} \quad \text{soit} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^b \\ \varepsilon_{yy}^b \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy}^b \end{Bmatrix} = Z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (CV-46)$$

### V.C.6. Détail de la matrice $[C]$

Cette matrice, dont les composantes sont à détailler, se présente sous la forme :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & c_4^1 & c_5^1 & c_6^1 & & & & c_{10}^1 & c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ & & & c_4^2 & c_5^2 & c_6^2 & c_7^2 & c_8^2 & c_9^2 & c_{10}^2 & c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ & & & c_4^3 & c_5^3 & c_6^3 & c_7^3 & c_8^3 & c_9^3 & c_{10}^3 & c_{11}^3 & c_{12}^3 \\ c_1^4 & c_2^4 & c_3^4 & & & & c_7^4 & c_8^4 & c_9^4 & c_{10}^4 & c_{11}^4 & c_{12}^4 \\ c_1^5 & c_2^5 & c_3^5 & c_4^5 & c_5^5 & c_6^5 & c_7^5 & c_8^5 & c_9^5 & c_{10}^5 & c_{11}^5 & c_{12}^5 \\ c_1^6 & c_2^6 & c_3^6 & c_4^6 & c_5^6 & c_6^6 & c_7^6 & c_8^6 & c_9^6 & c_{10}^6 & c_{11}^6 & c_{12}^6 \\ c_1^7 & c_2^7 & c_3^7 & c_4^7 & c_5^7 & c_6^7 & c_7^7 & c_8^7 & c_9^7 & c_{10}^7 & c_{11}^7 & c_{12}^7 \\ c_1^8 & c_2^8 & c_3^8 & c_4^8 & c_5^8 & c_6^8 & c_7^8 & c_8^8 & c_9^8 & c_{10}^8 & c_{11}^8 & c_{12}^8 \end{bmatrix}$$

Les rotations de corps rigide  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r$  ont été exprimées à partir des caractéristiques géométriques des triangles **e1**(1,2,4), **e2**(2,3,1), **e3**(3,4,2) et **e4**(4,1,3). Les termes de la matrice  $[C]$  qui entrent dans la formulation de ces rotations sont détaillés comme suit :

Du triangle **e1** (1,2,4), on a :

$$\begin{aligned} c_1^1 &= a_{11}z_X; & c_2^1 &= a_{11}z_Y; & c_3^1 &= a_{11}z_Z; & a_{11} &= -(n_{1x}N_i^{e1}, x + n_{1y}N_i^{e1}, y) \\ c_4^1 &= a_{12}z_X; & c_5^1 &= a_{12}z_Y; & c_6^1 &= a_{12}z_Z; & \text{avec} & a_{12} = -(n_{1x}N_j^{e1}, x + n_{1y}N_j^{e1}, y) \\ c_{10}^1 &= a_{14}z_X; & c_{11}^1 &= a_{14}z_Y; & c_{12}^1 &= a_{14}z_Z & & a_{14} = -(n_{1x}N_k^{e1}, x + n_{1y}N_k^{e1}, y) \end{aligned}$$



Du triangle **e2** (2,3,1), on a :

$$\begin{aligned} c_4^2 &= a_{22}Z_X; & c_5^2 &= a_{22}Z_Y; & c_6^2 &= a_{22}Z_Z; & a_{22} &= -(n_{2x}N_i^{e2}, x + n_{2y}N_i^{e2}, y) \\ c_7^2 &= a_{23}Z_X; & c_8^2 &= a_{23}Z_Y; & c_9^2 &= a_{23}Z_Z; & \text{avec } a_{23} &= -(n_{2x}N_j^{e2}, x + n_{2y}N_j^{e2}, y) \\ c_1^2 &= a_{21}Z_X; & c_2^2 &= a_{21}Z_Y; & c_3^2 &= a_{21}Z_Z; & a_{21} &= -(n_{2x}N_k^{e2}, x + n_{2y}N_k^{e2}, y) \end{aligned}$$

Du triangle **e3** (3, 4, 2), on a :

$$\begin{aligned} c_7^3 &= a_{33}Z_X; & c_8^3 &= a_{33}Z_Y; & c_9^3 &= a_{33}Z_Z; & a_{33} &= -(n_{3x}N_i^{e3}, x + n_{3y}N_i^{e3}, y) \\ c_{10}^3 &= a_{34}Z_X; & c_{11}^3 &= a_{34}Z_Y; & c_{12}^3 &= a_{34}Z_Z; & \text{avec } a_{34} &= -(n_{3x}N_j^{e3}, x + n_{3y}N_j^{e3}, y) \\ c_4^3 &= a_{32}Z_X; & c_5^3 &= a_{32}Z_Y; & c_6^3 &= a_{32}Z_Z; & a_{32} &= -(n_{3x}N_k^{e3}, x + n_{3y}N_k^{e3}, y) \end{aligned}$$

Du triangle **e4** (4, 1, 3), on a :

$$\begin{aligned} c_{10}^4 &= a_{44}Z_X; & c_{11}^4 &= a_{44}Z_Y; & c_{12}^4 &= a_{44}Z_Z; & a_{44} &= -(n_{4x}N_i^{e4}, x + n_{4y}N_i^{e4}, y) \\ c_4^4 &= a_{34}Z_X; & c_2^4 &= a_{41}Z_Y; & c_3^4 &= a_{41}Z_Z; & \text{avec } a_{41} &= -(n_{4x}N_j^{e4}, x + n_{4y}N_j^{e4}, y) \\ c_7^4 &= a_{43}Z_X; & c_8^4 &= a_{43}Z_Y; & c_9^4 &= a_{43}Z_Z; & a_{43} &= -(n_{4x}N_k^{e4}, x + n_{4y}N_k^{e4}, y) \end{aligned}$$

Les autres rotations  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  utilisent directement des caractéristiques géométriques du quadrangle, en particulier les coordonnées des milieux des côtés, pour leur formulation:

Du milieu du côté **1-2** où sont calculées  $\bar{N}_k^5, x$  et  $\bar{N}_k^5, y$ , on a :

$$\begin{aligned} c_1^5 &= a_{51}Z_X; & c_2^5 &= a_{51}Z_Y; & c_3^5 &= a_{51}Z_Z; & a_{51} &= -(n_{5x}\bar{N}_1^5, x + n_{5y}\bar{N}_1^5, y) \\ c_4^5 &= a_{52}Z_X; & c_5^5 &= a_{52}Z_Y; & c_6^5 &= a_{52}Z_Z; & \text{avec } a_{52} &= -(n_{5x}\bar{N}_2^5, x + n_{5y}\bar{N}_2^5, y) \\ c_7^5 &= a_{53}Z_X; & c_8^5 &= a_{53}Z_Y; & c_9^5 &= a_{53}Z_Z; & a_{53} &= -(n_{5x}\bar{N}_3^5, x + n_{5y}\bar{N}_3^5, y) \\ c_{10}^5 &= a_{54}Z_X; & c_{11}^5 &= a_{54}Z_Y; & c_{12}^5 &= a_{54}Z_Z; & a_{54} &= -(n_{5x}\bar{N}_4^5, x + n_{5y}\bar{N}_4^5, y) \end{aligned}$$

Du milieu du côté **2-3** où sont calculées  $\bar{N}_k^6, x$  et  $\bar{N}_k^6, y$ , on a :

$$\begin{aligned} c_1^6 &= a_{61}Z_X; & c_2^6 &= a_{61}Z_Y; & c_3^6 &= a_{61}Z_Z; & a_{61} &= -(n_{6x}\bar{N}_1^6, x + n_{6y}\bar{N}_1^6, y) \\ c_4^6 &= a_{62}Z_X; & c_5^6 &= a_{62}Z_Y; & c_6^6 &= a_{62}Z_Z; & \text{avec } a_{62} &= -(n_{6x}\bar{N}_2^6, x + n_{6y}\bar{N}_2^6, y) \\ c_7^6 &= a_{63}Z_X; & c_8^6 &= a_{63}Z_Y; & c_9^6 &= a_{63}Z_Z; & a_{63} &= -(n_{6x}\bar{N}_3^6, x + n_{6y}\bar{N}_3^6, y) \\ c_{10}^6 &= a_{64}Z_X; & c_{11}^6 &= a_{64}Z_Y; & c_{12}^6 &= a_{64}Z_Z; & a_{64} &= -(n_{6x}\bar{N}_4^6, x + n_{6y}\bar{N}_4^6, y) \end{aligned}$$

Du milieu du côté **3-4** où sont calculées  $\bar{N}_k^7, x$  et  $\bar{N}_k^7, y$ , on a :

$$\begin{aligned} c_1^7 &= a_{71}Z_X; & c_2^7 &= a_{61}Z_Y; & c_3^7 &= a_{71}Z_Z; & a_{71} &= -(n_{7x}\bar{N}_1^7, x + n_{7y}\bar{N}_1^7, y) \\ c_4^7 &= a_{72}Z_X; & c_5^7 &= a_{72}Z_Y; & c_6^7 &= a_{72}Z_Z; & \text{avec } a_{72} &= -(n_{7x}\bar{N}_2^7, x + n_{7y}\bar{N}_2^7, y) \\ c_7^7 &= a_{73}Z_X; & c_8^7 &= a_{73}Z_Y; & c_9^7 &= a_{73}Z_Z; & a_{73} &= -(n_{7x}\bar{N}_3^7, x + n_{7y}\bar{N}_3^7, y) \\ c_{10}^7 &= a_{74}Z_X; & c_{11}^7 &= a_{74}Z_Y; & c_{12}^7 &= a_{74}Z_Z; & a_{74} &= -(n_{7x}\bar{N}_4^7, x + n_{7y}\bar{N}_4^7, y) \end{aligned}$$

Du milieu du côté **4-1** où sont calculées  $\bar{N}_k^8, x$  et  $\bar{N}_k^8, y$ , on a :

$$\begin{aligned} c_1^8 &= a_{81}Z_X; & c_2^8 &= a_{81}Z_Y; & c_3^8 &= a_{81}Z_Z; & a_{81} &= -(n_{8x}\bar{N}_1^8, x + n_{8y}\bar{N}_1^8, y) \\ c_4^8 &= a_{82}Z_X; & c_5^8 &= a_{82}Z_Y; & c_6^8 &= a_{82}Z_Z; & \text{avec } a_{82} &= -(n_{8x}\bar{N}_2^8, x + n_{8y}\bar{N}_2^8, y) \\ c_7^8 &= a_{83}Z_X; & c_8^8 &= a_{83}Z_Y; & c_9^8 &= a_{83}Z_Z; & a_{83} &= -(n_{8x}\bar{N}_3^8, x + n_{8y}\bar{N}_3^8, y) \\ c_{10}^8 &= a_{84}Z_X; & c_{11}^8 &= a_{84}Z_Y; & c_{12}^8 &= a_{84}Z_Z; & a_{84} &= -(n_{8x}\bar{N}_4^8, x + n_{8y}\bar{N}_4^8, y) \end{aligned}$$

### V.C.7. Contraintes dues aux effets de flexion

Partant des déformations en flexion notées  $\varepsilon_{xx}^b, \varepsilon_{yy}^b, 2\varepsilon_{xy}^b$  (bending pour flexion en anglais) les contraintes dues à la flexion sont obtenues en multipliant la matrice de comportement 2D par la matrice colonne des déformations en flexion.

En élasticité, il y a découplage entre membrane et flexion et ces contraintes sont stipulées par les moments de flexion suivants :

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}^b] \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2 \cdot \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{D}^b] = \int_{-t/2}^{t/2} [\mathbf{D}] z^2 dz \quad (\text{CV-47})$$

$[\mathbf{D}]$  étant la matrice de comportement élastique en état plan de contraintes..

En élastoplasticité, apparaît une matrice de comportement de couplage membrane-flexion  $[\mathbf{D}^{mb}]$  qui peut prendre en compte le critère de Hill s'il y a une anisotropie initiale.

### V.C.8. Efforts internes dus aux effets de flexion

$$\{\mathbf{F}^b\} = A \cdot \int [\mathbf{B}^b]^T \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz = A \cdot [\mathbf{B}^b]^T \cdot \frac{t^2}{4} \left\{ \sum_{q=1}^{npi} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot \zeta_q \cdot \varpi_q \right\} \quad (\text{CV-48})$$

Ces efforts dus à la flexion comprennent des forces au sens propre du terme (c'est le dual des translations) et des moments correspondant aux rotations.

Dans la relation (CV-48),  $t$  a été adopté pour désigner l'épaisseur de l'élément pour éviter toute confusion avec  $h$  qui est utilisée pour désigner des fonctions relatives aux différents modes.  $A$  est l'aire de l'élément

### V.C.9. Stabilisation en flexion

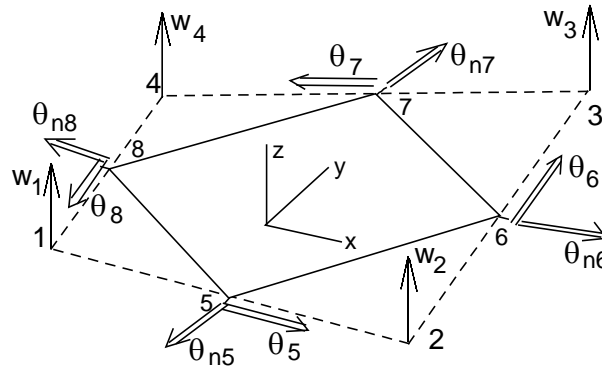
Dans le développement de l'élément sans degrés de liberté en rotation S4, il a suffi de prendre en compte les courbures "internes" pour s'affranchir de modes à énergie nulle [2]. D'autres dispositions sont prises pour ce qui concerne le quadrangle DKS16, entre autre la nécessité d'ajouter une matrice de raideur en flexion propre à une stabilisation à la *Belytschko* ([6], [7] et [8])

#### V.C.9.a) Matrice gradient de stabilisation de flexion $[\bar{\mathbf{B}}_s^b]$

Pour procéder par analogie la plus directe avec les effets de membrane, on pose :

$$\begin{cases} \beta_x = \langle \mathbf{N}(\xi, \eta) \rangle \cdot \{\beta_x^e\} = \theta_y \\ \beta_y = \langle \mathbf{N}(\xi, \eta) \rangle \cdot \{\beta_y^e\} = -\theta_x \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \langle \beta_x^e \rangle = \langle \theta_{y5} & \theta_{y6} & \theta_{y7} & \theta_{y8} \rangle \\ \langle \beta_y^e \rangle = -\langle \theta_{x5} & \theta_{x6} & \theta_{x7} & \theta_{x8} \rangle \end{cases} \quad (\text{CV-49})$$

On remarquera qu'il s'agit bien des coordonnées des nœuds intermédiaires ; tout se passe donc comme si on s'intéressait au quadrilatère (5, 6, 7, 8) présenté sur la figure (CV-4) :



**Figure CV-4.** Degrés de liberté pour la stabilisation en flexion

Les conditions de Kirchhoff sont imposées en un nœud "milieu"  $m$  ( $m = 5,6,7,8$ ) avec :

$$\begin{cases} \theta_{n5} = (w_2 - w_1)/L_5 \\ \theta_{n6} = (w_3 - w_2)/L_6 \\ \theta_{n7} = (w_4 - w_3)/L_7 \\ \theta_{n8} = (w_1 - w_4)/L_8 \end{cases}, \text{ où } L_5 = L_{1-2} ; L_6 = L_{2-3} ; L_7 = L_{3-4} ; L_8 = L_{4-1} \quad (\text{CV-50})$$

Les composantes de rotation suivant  $x$  et  $y$  sont :

$$\begin{cases} \theta_{xm} = n_{mx} \theta_{nm} - n_{my} \theta_m \\ \theta_{ym} = n_{my} \theta_{nm} + n_{mx} \theta_m \end{cases}, \text{ où } \bar{n}_m = n_{mx} \bar{x} + n_{my} \bar{y} \text{ pour } m = 5, 6, 7, 8 \quad (\text{CV-51})$$

On définit les courbures par :

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-52})$$

Ces courbures peuvent être décomposées et mises sous la forme suivante dans le but de récupérer aisément, pour la stabilisation, la partie liée aux courbures notées  $\langle \bar{\chi}_x \quad \bar{\chi}_y \rangle$  :

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h, x & \\ & h, y \\ h, y & h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \end{Bmatrix} ;$$

La définition des déformations « généralisées » suivantes est utile pour la stabilisation des effets parasites de la flexion :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | \\ \hline & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{B}}_s^b] \cdot \begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-53})$$

Dans la relation (CV-53) la matrice gradient des déformations  $[\bar{\mathbf{B}}_s^b]$  utiles à la stabilisation, exprimée dans le repère local est :

$$[\bar{\mathbf{B}}_s^b] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | \\ \hline & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{CV-54})$$

Pour « exprimer » cette matrice gradient (CV-54) en fonction des translations données dans le repère global, il s'avère nécessaire d'opérer certaines transformations pour les rotations  $\langle \beta_x^e \rangle$  et  $\langle \beta_y^e \rangle$  c'est-à-dire poser:  $\begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} = [[\mathbf{M}_w] \quad [\mathbf{M}_\theta]] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_e \\ \theta_e \end{Bmatrix}$  or  $\{\mathbf{W}_e\} = [\mathbf{R}_w] \cdot \{\mathbf{U}_e\}$  dans le repère global (CV-41), ce qui donne :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} = [[\mathbf{M}_w] \quad [\mathbf{M}_\theta]] \cdot \begin{Bmatrix} [\mathbf{R}_w] \cdot \{\mathbf{W}_e\} \\ \theta_e \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-55})$$

Lorsqu'on remplace les rotations  $\langle \beta_x^e \rangle$  et  $\langle \beta_y^e \rangle$  dans la relation (CV-53) par leurs expressions dans la relation (CV-55), il ressort une matrice gradient de stabilisation de flexion qui sera ensuite multipliée par des translations nodales définies dans le repère global :

$$[\bar{\mathbf{B}}_s^b] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | \\ \hline & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \cdot [[\mathbf{M}_w \cdot \mathbf{R}_w] \quad [\mathbf{M}_\theta]] \quad (\text{CV-56})$$

Les matrices  $[\mathbf{M}_\theta]$  et  $[\mathbf{M}_w]$  sont exprimées ci-dessous et  $[\mathbf{R}_w]$  est donnée en (CV-42) :

$$[\mathbf{M}_\theta] = \begin{bmatrix} n_{5x} & & & \\ & n_{6x} & & \\ & & n_{7x} & \\ & & & n_{8x} \\ n_{5y} & & & \\ & n_{6y} & & \\ & & n_{7y} & \\ & & & n_{8y} \end{bmatrix}; [\mathbf{M}_w] = \begin{bmatrix} -n_{5y}/L_5 & n_{5y}/L_5 & & \\ & -n_{6y}/L_6 & n_{6y}/L_6 & \\ & & -n_{7y}/L_7 & n_{7y}/L_7 \\ n_{8y}/L_8 & & & -n_{8y}/L_8 \\ n_{5x}/L_5 & -n_{5x}/L_5 & & \\ & n_{6x}/L_6 & -n_{6x}/L_6 & \\ & & n_{7x}/L_7 & -n_{7x}/L_7 \\ -n_{8x}/L_8 & & & n_{8x}/L_8 \end{bmatrix}; \vec{n}_m = \begin{bmatrix} n_{mx} \\ n_{my} \\ (\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \quad m = 5..8 \quad (\text{CV-57})$$

### V.C.9.b) Matrice de raideur de stabilisation de flexion $[\bar{\mathbf{K}}_s^b]$

En procédant au calcul du travail virtuel des efforts internes, on peut mettre en place la matrice de raideur de stabilisation en flexion :

$$\langle\langle \hat{\beta}_x^e \mid \hat{\beta}_y^e \rangle\rangle \cdot [\bar{\mathbf{K}}_s^b] \cdot \begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} = \langle\langle \hat{\beta}_x^e \mid \hat{\beta}_y^e \rangle\rangle \cdot [\bar{\mathbf{B}}_s^b]^T \cdot [\mathbf{D}_s^b] \cdot [\bar{\mathbf{B}}_s^b] \cdot \begin{Bmatrix} \beta_x^e \\ \beta_y^e \end{Bmatrix} ;$$

La matrice de raideur  $[\bar{\mathbf{K}}_s^b]$ , réarrangée devient :

$$[\mathbf{K}_s^b] = [\mathbf{B}_s^b]^T \cdot [\mathbf{D}_s^b] \cdot [\mathbf{B}_s^b] \quad \text{avec} \quad [\mathbf{D}_s^b] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{xx} D_{11}^b + \tilde{\mathbf{H}}_{yy} D_{33}^b & \tilde{\mathbf{H}}_{xy} D_{12}^b + \tilde{\mathbf{H}}_{xy} D_{33}^b \\ \tilde{\mathbf{H}}_{xy} D_{12}^b + \tilde{\mathbf{H}}_{xy} D_{33}^b & \tilde{\mathbf{H}}_{yy} D_{22}^b + \tilde{\mathbf{H}}_{xx} D_{33}^b \end{bmatrix} \quad (\text{CV-58})$$

La matrice de comportement de stabilisation de flexion  $[\mathbf{D}_s^b]$  est déterminée en adoptant la même procédure utilisée pour obtenir  $[\mathbf{D}_s^m]$  (paragraphe V.B.8.b).

Les facteurs dans la matrice de comportement de stabilisation de flexion, avec le symbole «tild», sont calculés sur le quadrangle (5, 6, 7, 8) (Voir figure CV-4).

De ce fait, ce symbole permet de les différencier de ceux de la matrice de comportement de stabilisation de membrane qui sont calculés dans le quadrangle (1, 2, 3, 4).

### V.C.9.c) Efforts de stabilisation

On peut adopter le "comportement" incrémental suivant :

$$\begin{Bmatrix} d\bar{\mu}_x \\ d\bar{\mu}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^b \tilde{\mathbf{H}}_{xx} + D_{33}^b \tilde{\mathbf{H}}_{yy} & (D_{12}^b + D_{33}^b \tilde{\mathbf{H}}_{xy}) \\ (D_{12}^b + D_{33}^b \tilde{\mathbf{H}}_{xy}) & D_{22}^b \tilde{\mathbf{H}}_{yy} + D_{33}^b \tilde{\mathbf{H}}_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\bar{\chi}_x \\ d\bar{\chi}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-59})$$

Les efforts internes (forces aux nœuds 1, 2, 3, 4 et moments aux nœuds 5, 6, 7, 8) seront :

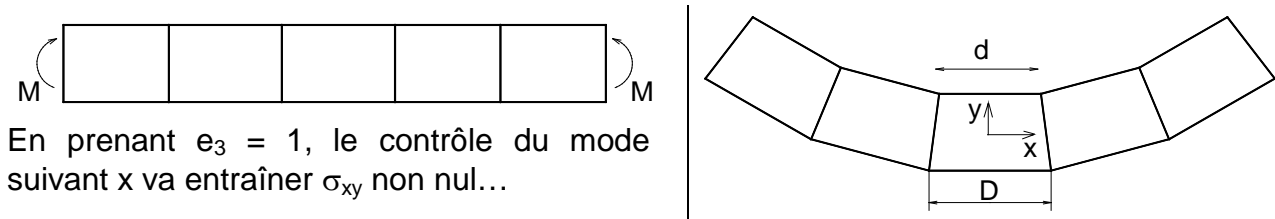
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s^b \\ \mathbf{M}_s^b \end{Bmatrix}_{(16)} = [\mathbf{B}_s^b]^T \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_x \\ \bar{\mu}_y \end{Bmatrix} z^2 \cdot dz = [\mathbf{B}_s^b]^T \cdot \left\{ \sum_{q=1}^{npi} \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_x \\ \bar{\mu}_y \end{Bmatrix} \varpi_q \zeta_q^2 \right\} \frac{t^3}{8} \quad (\text{CV-60})$$

$$\left| \begin{array}{l} \zeta_q : \text{position} \\ \varpi_q : \text{poids} \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} npi = 3 : \text{élasticité} \\ npi > 3 : \text{élastoplasticité} \end{array} \right.$$

## V.D. Compléments sur la stabilisation en membrane

La plupart des relations suivantes proviennent de l'ouvrage de *Belytschko* [9]: "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures" (2000) aux éditions John Wiley. En fait, cet ouvrage est très complet en ce domaine et seules les parties ayant donné lieu à une programmation sont résumées dans ce qui suit.

### V.D.1. Stabilisation physique



**Figure CV-5** Exemple simple de blocage en cisaillement dans le plan dû au contrôle

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + e_1 \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x & e_2 \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y \\ e_2 \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x & \langle \mathbf{b}_y \rangle + e_1 \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + e_3 \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, y & \langle \mathbf{b}_x \rangle + e_3 \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-61})$$

"Normalement", on prend  $e_1 = e_3 = 1$  et  $e_2 = 0$  mais, pour éliminer le blocage en cisaillement (dans le plan) dû au contrôle (voir figure CV-5), on impose  $e_3 = 0$ . Si, en outre, on choisit  $e_2 = -1$ , il n'y aura pas de blocage pour un matériau incompressible.

Dans ce dernier cas (matériau incompressible), les définitions des déformations deviennent :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e^m\} = [\bar{\mathbf{B}}_0^m] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h, x & -h, y \\ -h, x & h, y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-62})$$

où :  $[\bar{\mathbf{B}}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix}$  est la matrice gradient de membrane calculée en  $\xi=0$  et  $\eta=0$ ;

$\begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} = \langle \boldsymbol{\gamma} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix}$  représente les déformations de stabilisation dans le repère local.

Si la loi de comportement s'écrit sous la forme :  $\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix}$ , on arrive aux « contraintes » de stabilisation :

$$\begin{cases} Q_x = (C_{11} - C_{12})(h, x, \bar{q}_x - h, y, \bar{q}_y) \\ Q_y = (C_{11} - C_{12})(h, x, \bar{q}_x - h, y, \bar{q}_y) \end{cases} \quad (CV-63)$$

La matrice de raideur de stabilisation s'obtient avec une équivalence énergétique :

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left( \int \langle q_x \mid q_y \rangle \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} dS \right) dz = \langle \langle \mathbf{u}_x^e \mid \mathbf{u}_y^e \rangle \rangle \cdot [\bar{\mathbf{K}}_s^m] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{u}_y^e \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} q_x = h, x, \bar{q}_x - h, y, \bar{q}_y \\ q_y = -h, x, \bar{q}_x + h, y, \bar{q}_y \end{cases}$$

D'où la matrice de raideur dans le repère local pour la stabilisation en membrane:

$$[\bar{\mathbf{K}}_s^m] = \begin{bmatrix} H_{xx} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & -H_{xy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \\ -H_{xy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & H_{yy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} (C_{11} - 2C_{12} + C_{22}) dz \quad (CV-64)$$

Avec  $[\langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle]_{4 \times 4}$  produit des vecteurs « gamma »  $\langle \gamma \rangle$  et 't', l'épaisseur de l'élément (pour ne pas confondre avec h).

En **élasticité isotrope** que ce soit de type 3D ( $C_{11} = C_{22} = \lambda + 2\mu$  ;  $C_{12} = \lambda$ ) ou de type état plan de contraintes ( $C_{11} = C_{22} = E/(1-\nu^2)$  ;  $C_{12} = \nu C_{11}$ ), on arrive à la même relation :

$$[\bar{\mathbf{K}}_s^m] = 2\mu t \begin{bmatrix} H_{xx} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & -H_{xy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \\ -H_{xy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & H_{yy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \quad (CV-65)$$

## V.D.2. Stabilisation physique – Autre forme

En prenant effectivement  $e_1 = e_3 = 1$  et  $e_2 = 0$ , les déformations deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_e^m \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{B}}_0^m] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x^e \\ \mathbf{u}_y^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h, x & & \\ & h, y & \\ h, y & & h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \quad (CV-66)$$

Si, en outre :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \\ C_{12} & C_{22} & \\ & & C_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Alors l'expression du travail virtuel permettant de définir la matrice  $[\bar{\mathbf{K}}_s^m]$  est :

$$\hat{q}_x \bar{q}_x C_{11} (h, x)^2 + C_{12} (h, x)(h, y)(\hat{q}_x \bar{q}_y + \bar{q}_x \hat{q}_y) + \hat{q}_y \bar{q}_y C_{22} (h, y)^2 + (\hat{q}_x h, y + \hat{q}_y h, x) C_{33} (\bar{q}_x h, y + \bar{q}_y h, x)$$

Ce qui, sous la forme d'une écriture matricielle, se traduit par :

$$\langle \hat{q}_x \quad \hat{q}_y \rangle \cdot \left[ \begin{array}{c|c} C_{11}(h,x)^2 + C_{33}(h,y)^2 & (C_{12} + C_{33})(h,x)(h,y) \\ \hline (C_{12} + C_{33})(h,x)(h,y) & C_{33}(h,x)^2 + C_{22}(h,y)^2 \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \bar{q}_x = \langle \gamma \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \\ \bar{q}_y = \langle \gamma \rangle \cdot \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \end{cases}$$

Dans le cas d'un état plan de contraintes et pour un matériau élastique isotrope :

$$[\bar{\mathbf{K}}_s^m] = \frac{E t}{1 + \nu} \left[ \begin{array}{c|c} (C_1 H_{xx} + C_2 H_{yy}) \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & C_3 H_{xy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \\ \hline C_3 H_{xy} \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & (C_1 H_{yy} + C_2 H_{xx}) \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \end{array} \right] \quad (\text{CV-67})$$

les facteurs  $H_{xx}, H_{yy}, H_{xy}$  sont définis en (CV-26) ;

$$C_1 = \frac{1}{1 - \nu} ; C_2 = \frac{1}{2} ; C_3 = \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} ;$$

$$\begin{Bmatrix} h, x \\ h, y \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} h, \xi \\ h, \eta \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix} \text{ où } h = \xi \eta ; t : \text{ épaisseur.}$$

Lors d'un comportement élastoplastique, il est souvent préférable de prendre la matrice  $[\mathbf{D}]$  associée telle que  $[\mathbf{D}^m] = \int_{-t/2}^{t/2} [\mathbf{D}] dz$ , ce qui permet d'écrire la matrice (CV-67) sous la forme qui suit mais dans le repère local :

$$[\bar{\mathbf{K}}_s^m] = \left[ \begin{array}{c|c} (H_{xx} D_{11}^m + H_{yy} D_{33}^m) \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & (H_{xy} D_{12}^m + H_{xy} D_{33}^m) \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \\ \hline (H_{xy} D_{12}^m + H_{xy} D_{33}^m) \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle & (H_{yy} D_{22}^m + H_{xx} D_{33}^m) \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \end{array} \right] \quad (\text{CV-68})$$

Le travail virtuel correspondant est alors :

$$\langle \langle \hat{\mathbf{U}}_x^e \rangle \mid \langle \hat{\mathbf{U}}_y^e \rangle \rangle \cdot [\bar{\mathbf{K}}_s^m] \cdot \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \\ \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \end{Bmatrix} \quad (\text{CV-69})$$

### V.D.3. Stabilisation basée sur une étude aux valeurs propres

On peut aussi faire référence à une autre méthode de stabilisation telle que la plus grande valeur propre de la matrice de raideur de stabilisation ( $\lambda_h$ ) soit "calée" sur la borne minimale de la plus grande valeur propre ( $\lambda_r$ ) de la matrice de raideur calculée au "centre", c'est-à-dire au seul point d'intégration  $\xi = \eta = 0$ .

$$\alpha_s = \frac{\lambda_h}{\lambda_r} ; \lambda_r = \frac{\langle \mathbf{V} \rangle \cdot [\mathbf{K}_0] \cdot \langle \mathbf{V} \rangle}{\langle \mathbf{V} \rangle \cdot [\mathbf{M}_e] \cdot \langle \mathbf{V} \rangle} ; \lambda_h = \frac{\langle \mathbf{V} \rangle \cdot [\mathbf{K}_s] \cdot \langle \mathbf{V} \rangle}{\langle \mathbf{V} \rangle \cdot [\mathbf{M}_e] \cdot \langle \mathbf{V} \rangle} ; \langle \mathbf{V} \rangle = \langle \langle \mathbf{h} \rangle \quad \langle \mathbf{0} \rangle \rangle \text{ ou } \langle \mathbf{V} \rangle = \langle \langle \mathbf{0} \rangle \quad \langle \mathbf{h} \rangle \rangle$$

$$\langle \mathbf{h} \rangle = \langle 1 \mid -1 \mid 1 \mid -1 \rangle$$

$\alpha_s$  est un facteur d'échelle (*scaling parameter*) préconisé à **0.1** par *Belytschko* [9] mais souvent bien inférieur pour éviter le blocage en membrane dans des cas de gauchissement des éléments ; soit initialement soit au cours d'un calcul incrémental.

$$\lambda_r = \frac{1}{2} A \frac{E}{\rho} (\langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \langle \mathbf{b}_y \rangle) ; \lambda_h = \frac{C_Q}{\rho} \Rightarrow C_Q = \frac{1}{2} \alpha_s A E (\langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \langle \mathbf{b}_y \rangle)$$



## V.D.4. Influence du gauchissement

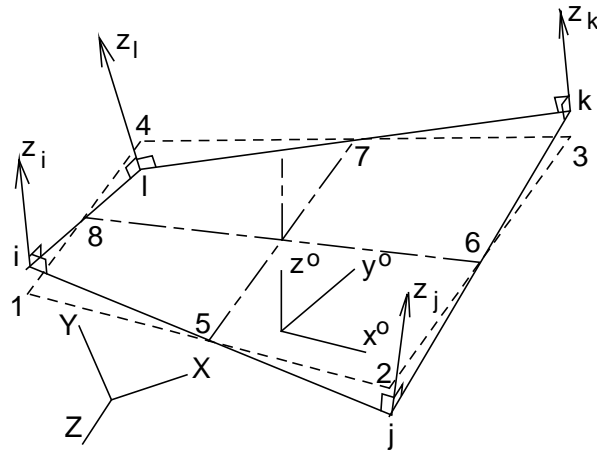


Figure CV-6. Élément gauchi

Un gauchissement de l'élément se traduit par le fait que les nœuds  $i, j, k, l$  ne sont pas dans le même plan (Figure CV-6 ci-dessus). Les normales  $\vec{z}_i, \vec{z}_j, \vec{z}_k, \vec{z}_l$  ne sont donc pas colinéaires avec  $\vec{z}_0$ , normale au plan 1, 2, 3, 4 et définie par les segments 5-7 et 8-6. On note :

$$\vec{z}_i = z_{xi}\vec{X} + z_{yi}\vec{Y} + z_{zi}\vec{Z} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{x}^o = x_x\vec{X} + x_y\vec{Y} + x_z\vec{Z} \\ \vec{y}^o = y_x\vec{X} + y_y\vec{Y} + y_z\vec{Z} \\ \vec{z}^o = z_x\vec{X} + z_y\vec{Y} + z_z\vec{Z} \end{cases}$$

Dans le repère local  $(\vec{x}^o, \vec{y}^o, \vec{z}^o)$ , les composantes de  $\vec{z}_i$  sont :

$$\vec{z}_i = p_{xi}\vec{x}^o + p_{yi}\vec{y}^o + p_{zi}\vec{z}^o \quad \text{où} : \begin{cases} p_{xi} = z_{xi}x_x + z_{yi}x_y + z_{zi}x_z \\ p_{yi} = z_{xi}x_x + z_{yi}x_y + z_{zi}x_z \end{cases}$$

En un point courant, la normale est interpolée par les classiques fonctions bilinéaires :

$$\begin{cases} p_x = N_1(\xi, \eta)p_{xi} + N_2(\xi, \eta)p_{xj} + N_3(\xi, \eta)p_{xk} + N_4(\xi, \eta)p_{xl} \\ p_y = N_1(\xi, \eta)p_{yi} + N_2(\xi, \eta)p_{yj} + N_3(\xi, \eta)p_{yk} + N_4(\xi, \eta)p_{yl} \end{cases}$$

En un point situé à la cote  $(\zeta t/2)$  dans l'épaisseur 't', c'est-à-dire pour  $-1 \leq \zeta \leq 1$  :

$$\begin{cases} x = x^m + \frac{t}{2}\zeta p_x \\ y = y^m + \frac{t}{2}\zeta p_y \end{cases} \quad \text{où } x^m \text{ et } y^m \text{ sont les coordonnées d'un point de la surface moyenne.}$$

Les dérivées des fonctions de forme  $N_q(\xi, \eta)$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  deviennent :

$$\begin{cases} N_{q,\xi} = (N_{q,x})(x, \xi) + (N_{q,y})(y, \xi) \\ N_{q,\eta} = (N_{q,x})(x, \eta) + (N_{q,y})(y, \eta) \end{cases} \quad \text{pour } q = 1, 2, 3, 4.$$

Et donc, sous forme matricielle, ces dérivées des fonctions de forme s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} N_{q,\xi} \\ N_{q,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x^m, \xi & | & y^m, \xi \\ x^m, \eta & | & y^m, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{q,x} \\ N_{q,y} \end{Bmatrix} + \frac{t}{2} \zeta \begin{bmatrix} p_x, \xi & | & p_y, \xi \\ p_x, \eta & | & p_y, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{q,x} \\ N_{q,y} \end{Bmatrix}$$

Avec :  $\begin{Bmatrix} N_{q,x} \\ N_{q,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} N_{q,\xi} \\ N_{q,\eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} y, \xi & | & -y, \xi \\ -x, \eta & | & y, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{q,\xi} \\ N_{q,\eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{q,x} \\ N_{q,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{xq} \\ b_{yq} \end{Bmatrix} + \frac{t}{2} \zeta \begin{Bmatrix} b_{xq}^c \\ b_{yq}^c \end{Bmatrix}$

où :  $\begin{Bmatrix} b_{xq} \\ b_{yq} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} y^m, \xi & | & -y^m, \xi \\ -x^m, \eta & | & y^m, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{q,\xi} \\ N_{q,\eta} \end{Bmatrix} ;$

$$\begin{Bmatrix} b_{xq}^c \\ b_{yq}^c \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} p_y, \xi & | & -p_y, \xi \\ -p_x, \eta & | & p_x, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{q,\xi} \\ N_{q,\eta} \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x^m, \xi + \frac{t}{2} \zeta p_x, \xi & | & y^m, \xi + \frac{t}{2} \zeta p_y, \xi \\ x^m, \eta + \frac{t}{2} \zeta p_x, \eta & | & y^m, \eta + \frac{t}{2} \zeta p_y, \eta \end{bmatrix} \text{ est l'expression complète du Jacobien}$$

Belytschko [9] a montré que les termes linéaires en  $(\zeta \cdot t/2)$  et d'un ordre supérieur ont peu d'effet pour les coques minces ; le seul terme faisant intervenir  $(\zeta t/2)$  est donc celui des dérivées  $N_{q,x} = b_{xq} + \frac{t}{2} \zeta b_{xq}^c$  et  $N_{q,y} = b_{yq} + \frac{t}{2} \zeta b_{yq}^c$  où  $[\mathbf{J}]$  est calculé sans  $(\zeta t/2)$  et  $(\zeta^2 t^2 / 4)$ .

Dans ce qui suit et afin de faciliter les sommations, on pose :

$$p_{x1} = p_{xi}; p_{y1} = p_{yi}; p_{x2} = p_{xj}; p_{y2} = p_{yj}; p_{x3} = p_{xk}; p_{y3} = p_{yk}; p_{x4} = p_{xl}; p_{y4} = p_{yl}.$$

Sans tenir compte de la stabilisation en membrane à ce niveau, les déformations en membrane sont :

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_e^m\} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \mathbf{b}_x^c \rangle z & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \mathbf{b}_y^c \rangle z \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \mathbf{b}_y^c \rangle z & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \mathbf{b}_x^c \rangle z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \end{Bmatrix} ;$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle b_{x1} & | & b_{x2} & | & b_{x3} & | & b_{x4} \rangle \\ \langle b_{y1} & | & b_{y2} & | & b_{y3} & | & b_{y4} \rangle \end{Bmatrix}, \text{ autre expression des vecteurs de Hallquist}$$

$$\begin{Bmatrix} \langle \mathbf{b}_x^c \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y^c \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle b_{x1}^c & | & b_{x2}^c & | & b_{x3}^c & | & b_{x4}^c \rangle \\ \langle b_{y1}^c & | & b_{y2}^c & | & b_{y3}^c & | & b_{y4}^c \rangle \end{Bmatrix}, \text{ vecteurs de Hallquist pour le gauchissement}$$

$$z = \zeta t/2 ; -1 \leq \zeta \leq 1$$

En posant successivement la matrice gradient de déformations non stabilisée et la matrice due au gauchissement :

$$[\mathbf{B}_0^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B}_p^m] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x^c \rangle & | & \langle \mathbf{b}_y^c \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y^c \rangle & | & \langle \mathbf{b}_x^c \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{bmatrix},$$

Les matrices  $[\mathbf{R}_u]$  et  $[\mathbf{R}_v]$  étant données par les équations (CV-14) et (CV-15), on réécrit les déformations en membrane comme suit :

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_e^m\} = [\mathbf{B}_0^m] \{\mathbf{U}_e\} + \frac{t}{2} \zeta [\mathbf{B}_p^m] \{\mathbf{U}_e\};$$

De même, sans tenir compte de la stabilisation en flexion et avec les matrices  $[\mathbf{B}_U^b] = [\mathbf{R}][\mathbf{H}_w][\mathbf{C}]$  et  $[\mathbf{B}_\theta^b] = [\mathbf{R}][\mathbf{H}_\theta][\mathbf{R}_w]$  détaillées en (CV-50), on exprime les déformations de flexion :

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_e^b\} = z \{\boldsymbol{\kappa}\} = \frac{t}{2} \zeta [\mathbf{B}_U^b] \{\mathbf{U}_e\} + \frac{t}{2} \zeta [\mathbf{B}_\theta^b] \{\boldsymbol{\theta}_e\};$$

Dans le développement de cette matrice de déformations de flexion, on trouvera dans l'ordre par analogie avec les effets de membrane, les vecteurs de Hallquist et ceux pour le gauchissement :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x \rangle &= \frac{1}{2A} \langle y_2 - y_4 \mid y_3 - y_1 \mid y_4 - y_2 \mid y_1 - y_3 \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle &= \frac{1}{2A} \langle x_4 - x_2 \mid x_1 - x_3 \mid x_2 - x_4 \mid x_3 - x_1 \rangle, \end{aligned}$$

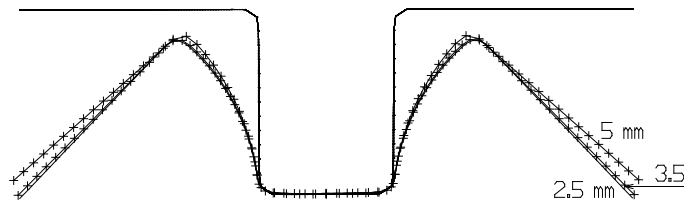
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_x^c \rangle &= \frac{1}{2A} \langle p_{y2} - p_{y4} \mid p_{y3} - p_{y1} \mid p_{y4} - p_{y2} \mid p_{y1} - p_{y3} \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y^c \rangle &= \frac{1}{2A} \langle p_{x4} - p_{x2} \mid p_{x1} - p_{x3} \mid p_{x2} - p_{x4} \mid p_{x3} - p_{x1} \rangle \end{aligned}$$

où A est l'aire du quadrangle

Dans la programmation correspondante, il suffit donc de rajouter  $[\mathbf{B}_p^m]$  à  $[\mathbf{B}_U^b]$ .

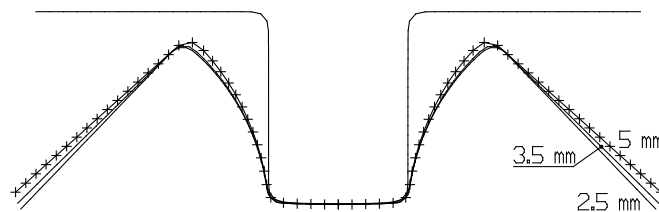
## V.D.5. Exemple de prédiction de retour élastique

Ci-après sont donnés les différents cas de figures relatives aux retours élastiques d'une structure en 'U' maillée successivement avec l'élément DKT12, 'S3', 'S4' et le DKS16.



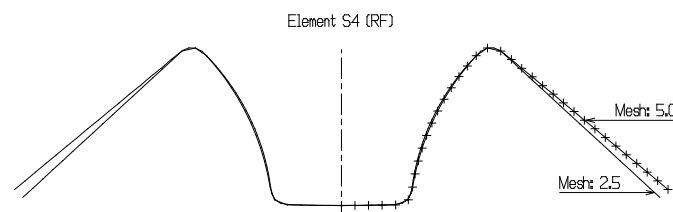
**Figure CV-7.** Élément triangulaire 'DKT12'

Les formes après retour élastique pour trois maillages (2.5, 3.5 et 5 mm) données à la figure CV-7 montrent que l'élément triangulaire 'DKT12' est peu sensible au maillage.



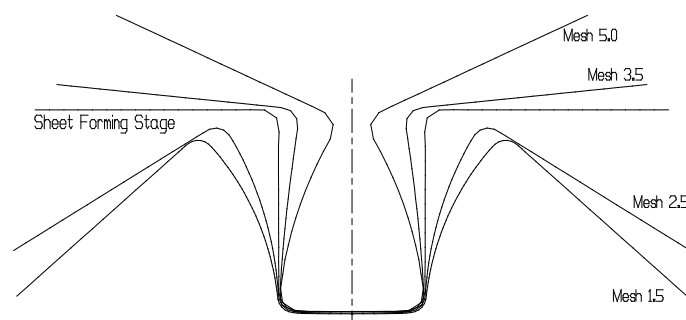
**Figure CV-8.** Élément triangulaire RF 'S3'

Les formes après retour élastique pour trois maillages (2.5, 3.5 et 5 mm) données à la figure CV-8 montrent que le triangle 'Rotation Free' (RF) 'S3' – libre en rotation – est très peu sensible au maillage.



**Figure CV-9.** Élément quadrangulaire RF 'S4'

La figure CV-9 correspond aux formes après retour élastique pour deux maillages (2.5 et 5 mm) obtenues avec l'élément RF quadrilatère S4. Comme le triangle 'Rotation-Free' (S3) correspondant, ce quadrilatère est peu sensible à la taille de maille.



**Figure CV-10.** Élément quadrangulaire 'DKS16'

La figure CV-10 correspond aux formes après retour élastique pour 4 maillages (1.5, 2.5, 3.5 et 5 mm) obtenues avec l'élément DKS16. Contrairement au triangle 'DKT12', ce quadrilatère est très sensible à la taille de maille.

## V.E. Références

- [1] Long, Y. and Li, J. and Long, Z. and Cen, S. (1999), "Area coordinates used in quadrilateral elements", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pp.:545-593
- [2] Brunet, M. and Sabourin, F. (2006), "Analysis of a rotation-free 4-node shell element", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, 1483-1510
- [3] Morley, L.S.D. (1971), "The constant plate-bending element", *Journal of Strain Analysis*, vol.6, pp. 20-24.
- [4] Oñate, E. and Zarate, F. (2000), "Rotation-free triangular plate and shell elements", *International Journal. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, pp. 557-603.
- [5] Sabourin, F. and Brunet, M. (2006), "Detailed formulation of the rotation-free triangular element 'S3' for general purpose shell analysis", *Engineering Computations*, Vol. 23, No 5, 469-502, Emerald, UK
- [6] Belytschko, T. and Tsay, C-S. (1983), "A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 405-420.
- [7] Belytschko, T. and Wong; BL. and Chiang, HY. (1992), "Advances in one point quadrature of shell elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 96, pp. 93-107.
- [8] Belytschko, T. and Leviathan, I. (1994), "Physical stabilisation of the 4-node shell element with one point quadrature", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 113, pp. 321-350.
- [9] Belytschko, T. *et al.* (2000), "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures", *John Wiley & sons, Ltd*, (650 p.), pp. 491-497.

## VI. Complément : Élément solide-coque SHB8PS

<b>VI.</b>	<b>Complément_Élément solide-coque SHB8PS</b>	<b>CVI-1</b>
<b>VI.A.</b>	<b>Caractéristiques</b>	<b>CVI-2</b>
VI.A.1.	Repère local	CVI-2
VI.A.2.	Fonctions d'interpolation	CVI-3
<b>VI.B.</b>	<b>Intégration réduite</b>	<b>CVI-5</b>
VI.B.1.	Déplacements locaux	CVI-5
VI.B.2.	Déformations	CVI-6
VI.B.3.	Contraintes (matériau élastique isotrope)	CVI-8
VI.B.4.	Matrice de raideur (intégrée en $\zeta$ )	CVI-8
<b>VI.C.</b>	<b>Stabilisation – Préliminaires</b>	<b>CVI-9</b>
VI.C.1.	Notations	CVI-9
VI.C.2.	Propriétés utiles	CVI-9
VI.C.3.	Champ de déplacement	CVI-10
VI.C.4.	Déformations	CVI-12
VI.C.5.	Matrice de raideur	CVI-13
VI.C.6.	Mise en évidence des vecteurs $\{\gamma_\alpha\}$	CVI-14
<b>VI.D.</b>	<b>Stabilisation - développement</b>	<b>CVI-14</b>
VI.D.1.	Déformations et contraintes généralisées	CVI-14
VI.D.2.	Matrice de stabilisation	CVI-16
VI.D.3.	Efforts internes	CVI-17
<b>VI.E.</b>	<b>Stabilisation – Autre possibilité</b>	<b>CVI-19</b>
<b>VI.F.</b>	<b>Etude non-linéaire</b>	<b>CVI-20</b>
VI.F.1.	Matrice de raideur géométrique	CVI-20
VI.F.2.	Elastoplasticité	CVI-20
VI.F.3.	Efforts internes	CVI-21
<b>VI.G.</b>	<b>Remarque importante</b>	<b>CVI-21</b>
<b>VI.H.</b>	<b>Annexe</b>	<b>CVI-22</b>
<b>VI.I.</b>	<b>Référence</b>	<b>CVI-24</b>

## VI.A. Caractéristiques

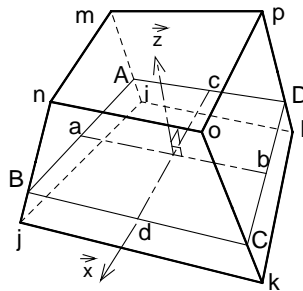
L'élément dénommé SHB8PS [2] est un élément brique à huit nœuds dont la direction suivant l'épaisseur est préférée par rapport aux autres. Le fait qu'il soit sous-intégré induit des modes « sablier » qui ont été « stabilisés » en utilisant la méthode de stabilisation à la Belytschko [1]. La théorie sur l'Intégration réduite sera reprise succinctement pour montrer surtout qu'elle apporte des solutions aux verrouillages numériques de l'élément.

L'hypothèse importante qui a été faite dans la formulation de cet élément est le comportement élastique du matériau qui correspond à un état plan de contraintes plus le module d'Young sur la diagonale de la matrice représentative de la loi de comportement donnant une contrainte dans l'épaisseur.

Cet élément qui permet de mailler des structures minces a une formulation plus simple que celle d'un élément coque qui introduit des rotations. Proche de l'élément massif avec un point d'intégration de Belytschko [1], il a été introduit dans des codes comme ASTER, PLEXUS et ABAQUS.

### VI.A.1. Repère local

Le SHB8 est sensé être utilisé pour donner des résultats semblables à ceux des éléments coques, il convient donc de l'avoir dans une configuration où son épaisseur est faible. Dans cette configuration, tout point de l'élément réel est défini par les coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère local. 'z' est pris dans l'épaisseur de l'élément réel en correspondance avec  $\zeta$  dans l'élément "parent" ( $-1 \leq \zeta \leq 1$ ). Pour éviter des confusions, les coordonnées dans le repère global de la structure sont notées en majuscules : X, Y, Z.



**Figure CVI-1** repère local en  $\zeta$  suivant l'épaisseur de l'élément

Les nœuds i, j, k, l puis m, n, o, p de cette brique sont pris dans cet ordre pour prendre en compte son épaisseur car dans la réalité les distances i-m, j-n, k-o et l-p ne sont pas égales (Figure CIV-1 ci-dessus).

Les coordonnées des points A, B, C et D (Figure CIV-1) sont obtenus par une interpolation en  $\zeta$  dans le repère global (X, Y, Z). Pour le point A par exemple, on a :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\zeta) \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(1+\zeta) \begin{pmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{pmatrix} ;$$

On procède de la même manière pour les points B, C, et D avec respectivement les nœuds j et n, k et o, l et p.

Les milieux des points A, B, C, D permettront de définir les vecteurs  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  nécessaires à la mise en place du repère local :

Les points 'c' (milieu de A-D) et 'd' (milieu de B-C) définissent le vecteur  $\vec{x} = \vec{cd} / \|\vec{cd}\|$  ;

Les points 'a' (milieu de A-B) et 'b' (milieu de C-D) définissent le vecteur  $\vec{z} = \vec{cd} \wedge \vec{ab} / \|\vec{cd} \wedge \vec{ab}\|$  ;

Puis le dernier vecteur  $\vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x}$  afin de former le trièdre direct local en  $\zeta$  qui est lié au repère global par la relation suivante, où  $[R_\zeta]$  est la matrice de passage:

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = [R_\zeta] \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}; [R_\zeta] = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ \\ yX & yY & yZ \\ zX & zY & zZ \end{bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [R_\zeta] \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{zi} \end{Bmatrix} \text{ en un nœud } i.$$

## VI.A.2. Fonctions d'interpolation

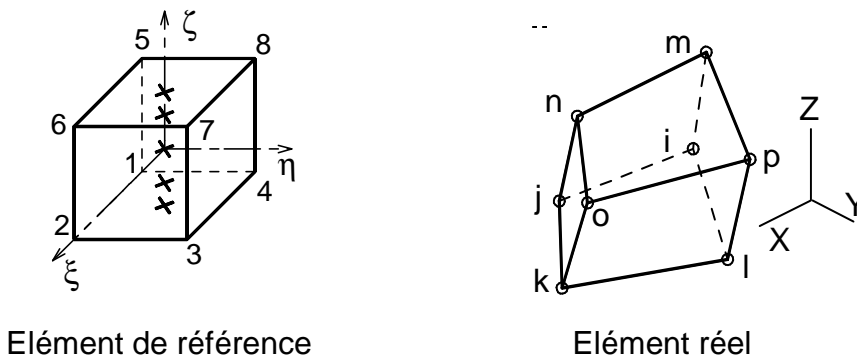


Figure CVI-2 le SHB8PS

Ce sont les fonctions d'interpolation  $N_n = 1/8 (1 + \xi \cdot \xi_n)(1 + \eta \cdot \eta_n)(1 + \zeta \cdot \zeta_n)$  avec  $\underline{n}$  variant de 1 à 8. En décomposant l'expression de  $N_n$ , on montre aisément que :

$$\{N\} = \frac{1}{8} (\{S\} + \{a_1\}\xi + \{a_2\}\eta + \{a_3\}\zeta + \{h_1\}\eta\zeta + \{h_2\}\xi\zeta + \{h_3\}\xi\eta + \{h_4\}\xi\eta\zeta) \quad (CVI-1)$$

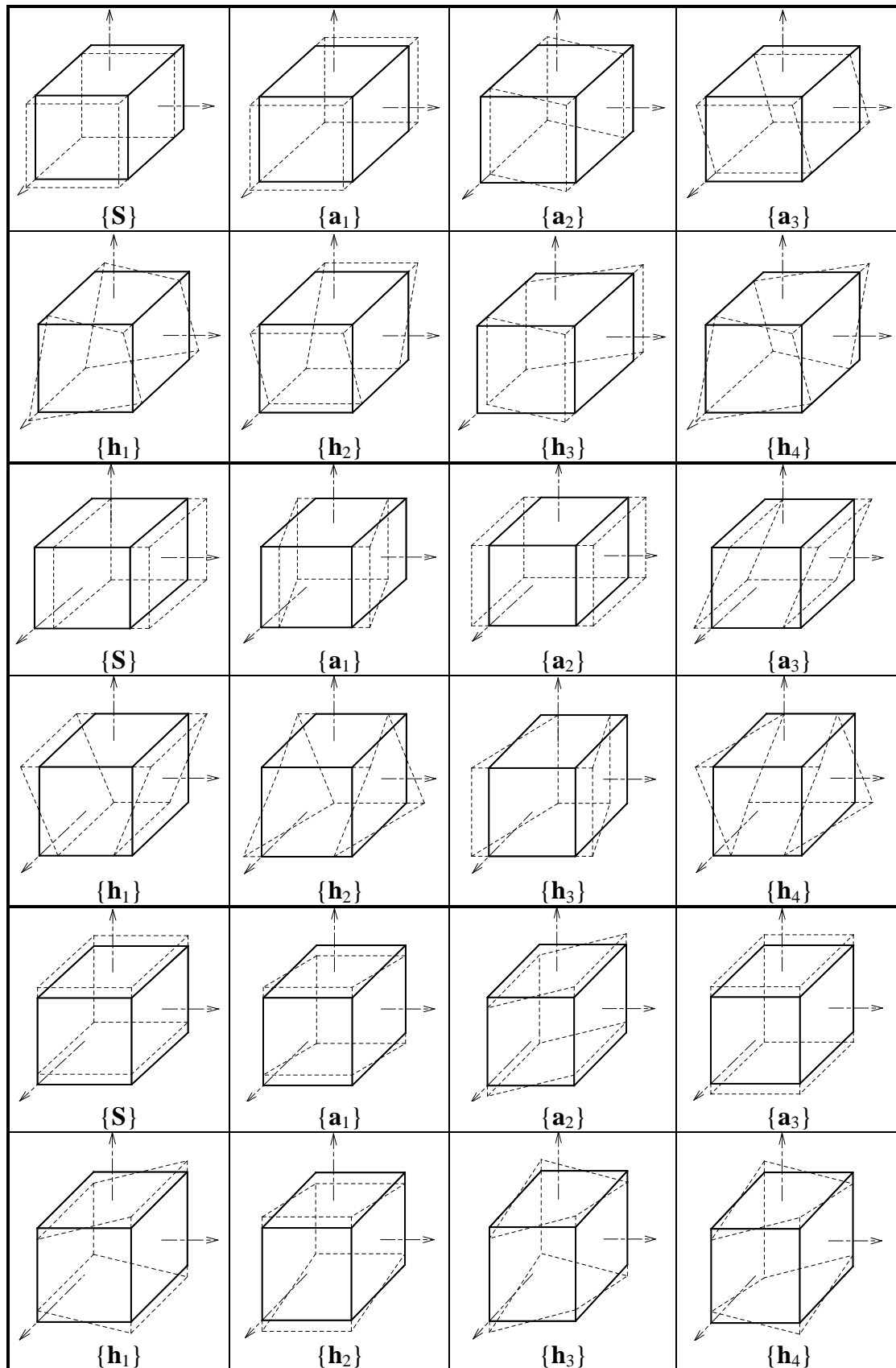
Les valeurs des termes de ces fonctions d'interpolation sont les suivantes :

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\eta \cdot \zeta$	$\xi \cdot \zeta$	$\xi \cdot \eta$	$\xi \cdot \eta \cdot \zeta$
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
$\{S\}$	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$	$\{a_3\}$	$\{h_1\}$	$\{h_2\}$	$\{h_3\}$	$\{h_4\}$

Tableau CIV-1 Décomposition des fonctions de forme



Les 24 modes, associés aux diverses déformations, prennent en compte le mouvement de corps rigide et diverses déformations interprétables sous la désignation de membrane, flexion, cisaillement et gauchissement ; et ce, dans les trois directions  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ .



**Tableau CVI-2** 24 modes de déplacements et déformations



## VI.B.2. Déformations

Les composantes de translation  $u, v, w$  d'un point de l'élément ainsi que ses coordonnées locales  $x, y, z$  sont interpolées avec  $\langle \mathbf{N} \rangle$  (CVI-1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_x^e \} \\ v = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_y^e \} \\ w = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{U}_z^e \} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{X}_L^e \} \\ y = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{Y}_L^e \} \\ z = \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \{ \mathbf{Z}_L^e \} \end{cases} \quad (\text{CVI-5})$$

La relation (CVI-6) qui suit dans laquelle  $[\mathbf{J}^{-1}]$  est l'inverse du Jacobien sera utile dans bien des cas dans la suite du document :

$$\begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ u, z \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} u, \xi \\ u, \eta \\ u, \zeta \end{Bmatrix} \quad (\text{CVI-6})$$

Pour mettre en place le Jacobien, les dérivées suivantes sont utiles :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{cases} \text{ équivalentes à } \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

On tire donc de ces dérivées la matrice Jacobienne  $[\mathbf{J}]$  telle que :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi & z, \xi \\ x, \eta & y, \eta & z, \eta \\ x, \zeta & y, \zeta & z, \zeta \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-7})$$

L'inverse de cette matrice jacobienne notée  $[\mathbf{J}^{-1}]$  est utilisée dans la relation (CVI-6). Les termes de Jacobien  $[\mathbf{J}]$  qui sont des dérivées des coordonnées de l'élément données par la relation (CVI-5) sont explicitées comme suit :

$$\begin{cases} x, \xi = \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \cdot \{ \mathbf{X}_L^e \} \\ x, \eta = \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \cdot \{ \mathbf{X}_L^e \} \\ x, \zeta = \langle \mathbf{N}, \zeta \rangle \cdot \{ \mathbf{X}_L^e \} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y, \xi = \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \cdot \{ \mathbf{Y}_L^e \} \\ y, \eta = \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \cdot \{ \mathbf{Y}_L^e \} \\ y, \zeta = \langle \mathbf{N}, \zeta \rangle \cdot \{ \mathbf{Y}_L^e \} \end{cases} ; \quad \begin{cases} z, \xi = \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \cdot \{ \mathbf{Z}_L^e \} \\ z, \eta = \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \cdot \{ \mathbf{Z}_L^e \} \\ z, \zeta = \langle \mathbf{N}, \zeta \rangle \cdot \{ \mathbf{Z}_L^e \} \end{cases} \text{ avec } [\mathbf{N}_d] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \eta \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \zeta \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-9})$$

Les relations (CVI-9) Permettent de simplifier l'écriture du Jacobien comme suit :

$$[\mathbf{J}] = [\mathbf{N}_d] \cdot [ \{ \mathbf{X}_L^e \} \mid \{ \mathbf{Y}_L^e \} \mid \{ \mathbf{Z}_L^e \} ] \quad (\text{CVI-10})$$

Avec comme coordonnées locales des huit nœuds de l'élément :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle = \langle x_i \mid x_j \mid x_k \mid x_l \mid x_m \mid x_n \mid x_o \mid x_p \rangle = \{ \mathbf{X}_L^e \}^T \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle = \langle y_i \mid y_j \mid y_k \mid y_l \mid y_m \mid y_n \mid y_o \mid y_p \rangle = \{ \mathbf{Y}_L^e \}^T \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle = \langle z_i \mid z_j \mid z_k \mid z_l \mid z_m \mid z_n \mid z_o \mid z_p \rangle = \{ \mathbf{Z}_L^e \}^T \end{cases} \quad \text{(CVI-11)}$$

Les six relations  $\varepsilon_{xx} = 1/2.(u,x + u,x) = u,x$ ,  $\varepsilon_{yy} = 1/2.(v,y + v,y) = v,y$ ,  $\varepsilon_{xy} = 1/2.(u,y + v,x)$ ,  $\varepsilon_{xz} = 1/2.(u,z + w,x)$ ,  $\varepsilon_{yz} = 1/2.(v,z + w,y)$  et  $\varepsilon_{zz} = 1/2.(w,z + w,z) = w,z$  mises sous forme matricielle, après quelques transformations, donnent la matrice des déformations  $\{ \boldsymbol{\varepsilon}_e \}$  :

$$\{ \boldsymbol{\varepsilon}_e \} = [\mathbf{C}_e][\mathbf{J}_e][\mathbf{N}_e][\mathbf{R}_e] \cdot \{ \mathbf{U}_e \} = \underset{(6 \times 24)}{[\mathbf{B}]} \cdot \underset{(24 \times 1)}{\{ \mathbf{U}_e \}} \quad \text{(CVI-12)}$$

Explicitons les différents termes se trouvant dans cette relation (CVI-12) :

- $[\mathbf{C}_e]$  définit la matrice qui lie les déformations aux dérivées par rapport à x, y et z des translations dans le repère local. Elle s'écrit :

$$[\mathbf{C}_e] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} ; \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{cases} = [\mathbf{C}_e] \begin{cases} u,x \\ u,y \\ u,z \\ v,x \\ v,y \\ v,z \\ w,x \\ w,y \\ w,z \end{cases}$$

- Les dérivées par rapport à x, y, et z des translations dans le repère local sont  $\langle u,x \mid u,y \mid u,z \mid v,x \mid v,y \mid v,z \mid w,x \mid w,y \mid w,z \rangle$  et celles par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  sont  $\langle u,\xi \mid u,\eta \mid u,\zeta \mid v,\xi \mid v,\eta \mid v,\zeta \mid w,\xi \mid w,\eta \mid w,\zeta \rangle$ . Ces deux groupes de dérivées sont en relation par le biais de la matrice inverse du Jacobien  $[\mathbf{J}_e]$  telle que :

- $[\mathbf{J}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}^{-1}] & & \\ & [\mathbf{J}^{-1}] & \\ & & [\mathbf{J}^{-1}] \end{bmatrix}$ , on obtient facilement  $[\mathbf{J}^{-1}]$  en inversant la relation (CVI-7)

- $[\mathbf{N}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{N}_d] & & \\ & [\mathbf{N}_d] & \\ & & [\mathbf{N}_d] \end{bmatrix}$  dont le terme  $[\mathbf{N}_d]$  (CVI-9) regroupe  $\langle \mathbf{N},\xi \rangle$ ,  $\langle \mathbf{N},\eta \rangle$  et  $\langle \mathbf{N},\zeta \rangle$ .

- $[\mathbf{R}_e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_x] \\ [\mathbf{R}_y] \\ [\mathbf{R}_z] \end{bmatrix}$  : matrice de passage générale (voir la relation (CVI-4) pour les termes).

La matrice gradient  $[\mathbf{B}]$  est calculée avec  $\xi=0$  et  $\eta=0$  mais en  $\zeta$ , c'est-à-dire suivant la position dans l'épaisseur de l'élément.

### VI.B.3. Contraintes (matériau élastique isotrope)

L'existence des déformations peut entraîner des contraintes d'où la relation suivante qui utilise la matrice de comportement  $[D]$  :

$$\{\sigma_e\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2.\varepsilon_{xy} \\ 2.\varepsilon_{xz} \\ 2.\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad [D] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2.\mu & \bar{\lambda} & & & & \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2.\mu & & & & \\ & & E & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-13})$$

Où  $\bar{\lambda} = \frac{\nu.E}{(1-\nu^2)} \neq \lambda = \frac{\nu.E}{(1-2.\nu)(1+\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2.(1+\nu)}$  et  $(\bar{\lambda} + 2.\mu) = E/(1-\nu^2)$ .

La matrice  $[D]$  correspond donc en partie à celle d'un état plan de contraintes où la composante  $\sigma_{zz}$  **serait** nulle. C'est le seul aspect de cette formulation qui peut faire penser aux coques.

### VI.B.4. Matrice de raideur (intégrée en $\zeta$ )

Rappelons ici, qu'en intégration réduite, les calculs s'effectuent en  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  et  $\zeta$  reste la variable d'intégration. La matrice de raideur est tributaire des points d'intégration en ce  $\zeta$  dans l'épaisseur. Dans le cas où il y a 'npi' (nombre de points d'intégration) points d'intégration en  $\zeta$  dans l'épaisseur (3 en élasticité ; 5 ou plus en élastoplasticité), la matrice de raideur a pour expression :

$$[K_e] = \left[ \iiint_{\Omega_e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \, dv \right] = \sum_{q=1}^{npi} [B(0,0,\zeta_q)]^T \cdot [D] \cdot [B(0,0,\zeta_q)] \cdot \det[J(0,0,\zeta_q)] \cdot 4.\omega_q \quad (\text{CVI-14})$$

Où les matrices  $[B]$  et  $[D]$  ont été définies en (CVI-12) et (CVI-13). Le chiffre '4' dans l'expression de la matrice de raideur (CVI-14) représente le poids en  $\xi$  et en  $\eta$  correspondant au fait qu'on se place en  $\xi = 0$  et  $\eta = 0$ .

## VI.C. Stabilisation – Préliminaires

Les déformations sont fonction des dérivées des déplacements qui sont liées aux dérivées des fonctions de forme  $\langle \mathbf{N} \rangle$  par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ . Et la recherche des valeurs de  $\langle \mathbf{N}, \xi \rangle$  et  $\langle \mathbf{N}, \eta \rangle$  en  $\xi = 0$  et  $\eta = 0$  entraîne immédiatement l'absence de contrôle des modes  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  (voir tableau CVI-1). Ces modes ne sont pas les seuls modes à énergie nulle, un examen attentif a permis de déceler deux autres modes « sablier » dont un se trouve dans le groupe des modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  (mode situé sur la 2<sup>ème</sup> ligne intersectée par la 1<sup>ère</sup> colonne du tableau des modes) et l'autre mode appartient au groupe des modes  $\{\mathbf{h}_2\}$  (mode positionné sur la 4<sup>ème</sup> ligne intersectée par la 2<sup>ème</sup> colonne). On parvient à corriger ces modes en question ( $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  en totalité ainsi que  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$  en partie et si nécessaire) en ajoutant à la matrice de raideur précédente (CVI.14) une matrice de raideur dite "de stabilisation".

La méthode de la recherche de la matrice de raideur de stabilisation est issue des travaux de Belytschko [1] relatifs à un élément "brique à 8 nœuds" où une sous-intégration en un seul point ( $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\zeta = 0$ ) remplace une intégration complète en huit points ( $2 \times 2 \times 2$ ). Cette décomposition en "modes", exposée en début de cette présentation, est étendue ici à une intégration en  $\xi = 0$  et  $\eta = 0$  mais avec plusieurs points en  $\zeta$ ; c'est-à-dire dans "l'épaisseur".

### VI.C.1. Notations

Afin d'utiliser les expressions proposées par Belytschko et ses co-auteurs dans l'établissement de la matrice de stabilisation, on pose :

$$\langle \mathbf{b}_x \rangle = \langle \mathbf{N}, x(0,0,0) \rangle = \{\mathbf{b}_x\}^T; \quad \langle \mathbf{b}_y \rangle = \langle \mathbf{N}, y(0,0,0) \rangle = \{\mathbf{b}_y\}^T; \quad \langle \mathbf{b}_z \rangle = \langle \mathbf{N}, z(0,0,0) \rangle = \{\mathbf{b}_z\}^T \quad (\text{CVI-15})$$

$$\langle \bar{\mathbf{N}} \rangle = \langle \mathbf{N}(0,0,0) \rangle = \{\bar{\mathbf{N}}\}^T = \{\mathbf{S}\}^T; \quad (\text{CVI-16})$$

$$\langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle = \langle \mathbf{N}, \xi(0,0,0) \rangle = \{\bar{\mathbf{N}}, \xi\}^T \quad \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle = \langle \mathbf{N}, \eta(0,0,0) \rangle = \{\bar{\mathbf{N}}, \eta\}^T \quad \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle = \langle \mathbf{N}, \zeta(0,0,0) \rangle = \{\bar{\mathbf{N}}, \zeta\}^T \quad (\text{CVI-17})$$

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{N}}\} &= 1/8 \{\mathbf{S}\}; \quad \{\bar{\mathbf{N}}, \xi\} = 1/8 \{\mathbf{a}_1\}; \quad \{\bar{\mathbf{N}}, \eta\} = 1/8 \{\mathbf{a}_2\}; \quad \{\bar{\mathbf{N}}, \zeta\} = 1/8 \{\mathbf{a}_3\}; \\ \{\bar{\mathbf{N}}, \eta \zeta\} &= 1/8 \{\mathbf{h}_1\}; \quad \{\bar{\mathbf{N}}, \xi \zeta\} = 1/8 \{\mathbf{h}_2\}; \quad \{\bar{\mathbf{N}}, \xi \eta\} = 1/8 \{\mathbf{h}_3\}; \quad \{\bar{\mathbf{N}}, \xi \eta \zeta\} = 1/8 \{\mathbf{h}_4\}. \end{aligned} \quad (\text{CVI-18})$$

### VI.C.2. Propriétés utiles

- Les produits suivants sont nuls dénotant ainsi la notion d'orthogonalité entre les vecteurs :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{N}} \rangle \cdot \{\bar{\mathbf{N}}, \xi\} &= 0 & \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{S}\} &= 0 \\ \langle \bar{\mathbf{N}} \rangle \cdot \{\bar{\mathbf{N}}, \eta\} &= 0 \text{ et } & \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{S}\} &= 0 \\ \langle \bar{\mathbf{N}} \rangle \cdot \{\bar{\mathbf{N}}, \zeta\} &= 0 & \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{S}\} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{CVI-19})$$

- Le produit entre la matrice des vecteurs  $\langle \mathbf{b}_x \rangle$ ,  $\langle \mathbf{b}_y \rangle$ ,  $\langle \mathbf{b}_z \rangle$  et la matrice des coordonnées des nœuds de l'élément donne la matrice identité :

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-20})$$

La relation (CVI-20) est simple à démontrer :

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, x \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, y \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, z \rangle \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{J}}^{-1}] \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \end{bmatrix} \text{ et comme } [\bar{\mathbf{J}}] = \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix}, \text{ on a :}$$

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{N}}, \xi \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \eta \rangle & \langle \bar{\mathbf{N}}, \zeta \rangle \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Y}_L^e \rangle \\ \langle \mathbf{Z}_L^e \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La simple définition des vecteurs  $\{\mathbf{S}\}$ ,  $\{\mathbf{a}_1\}$ ,  $\{\mathbf{a}_2\}$ ,  $\{\mathbf{a}_3\}$ ,  $\{\mathbf{h}_1\}$ ,  $\{\mathbf{h}_2\}$ ,  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  donne :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{\mathbf{a}_\varphi\} = 0 \text{ pour } \varphi = 1,2,3; \\ \langle \mathbf{a}_\varphi \rangle \cdot \{\mathbf{h}_\alpha\} = 0 \text{ pour } \alpha = 1,2,3,4; \\ \langle \mathbf{h}_\beta \rangle \cdot \{\mathbf{h}_\alpha\} = 8\delta_{\alpha\beta} \text{ pour } \alpha = \beta = 1,2,3,4. \end{cases} \quad (\text{CVI-21})$$

- Les dernières propriétés, pour  $\alpha = 1..4$ , sont :

$$\langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{h}_\alpha\} = 0; \quad \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{h}_\alpha\} = 0; \quad \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{h}_\alpha\} = 0 \quad (\text{CVI-22})$$

### VI.C.3. Champ de déplacement

Ce champ de déplacement, utile à l'établissement des déformations, est défini sous la forme de trois composantes (u, v, w) dans le repère local telles que :

$$\begin{cases} u = a_{0u} + a_{xu} \cdot x + a_{yu} \cdot y + a_{zu} \cdot z + c_{1u} \cdot \eta \zeta + c_{2u} \cdot \xi \zeta + c_{3u} \cdot \xi \eta + c_{4u} \cdot \xi \eta \zeta \\ v = a_{0v} + a_{xv} \cdot x + a_{yv} \cdot y + a_{zv} \cdot z + c_{1v} \cdot \eta \zeta + c_{2v} \cdot \xi \zeta + c_{3v} \cdot \xi \eta + c_{4v} \cdot \xi \eta \zeta \\ w = a_{0w} + a_{xw} \cdot x + a_{yw} \cdot y + a_{zw} \cdot z + c_{1w} \cdot \eta \zeta + c_{2w} \cdot \xi \zeta + c_{3w} \cdot \xi \eta + c_{4w} \cdot \xi \eta \zeta \end{cases} \quad (\text{CVI-23})$$

En considérant ces translations aux 8 nœuds (i, j, k, l, m, n, o, p) de l'élément, on obtient :

$$\begin{cases} \{\mathbf{U}_x^e\} = a_{0u} \cdot \{\mathbf{S}\} + a_{xu} \cdot \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yu} \cdot \{\mathbf{Y}_L^e\} + a_{zu} \cdot \{\mathbf{Z}_L^e\} + c_{1u} \cdot \{\mathbf{h}_1\} + c_{2u} \cdot \{\mathbf{h}_2\} + c_{3u} \cdot \{\mathbf{h}_3\} + c_{4u} \cdot \{\mathbf{h}_4\} \\ \{\mathbf{U}_y^e\} = a_{0v} \cdot \{\mathbf{S}\} + a_{xv} \cdot \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yv} \cdot \{\mathbf{Y}_L^e\} + a_{zv} \cdot \{\mathbf{Z}_L^e\} + c_{1v} \cdot \{\mathbf{h}_1\} + c_{2v} \cdot \{\mathbf{h}_2\} + c_{3v} \cdot \{\mathbf{h}_3\} + c_{4v} \cdot \{\mathbf{h}_4\} \\ \{\mathbf{U}_z^e\} = a_{0w} \cdot \{\mathbf{S}\} + a_{xw} \cdot \{\mathbf{X}_L^e\} + a_{yw} \cdot \{\mathbf{Y}_L^e\} + a_{zw} \cdot \{\mathbf{Z}_L^e\} + c_{1w} \cdot \{\mathbf{h}_1\} + c_{2w} \cdot \{\mathbf{h}_2\} + c_{3w} \cdot \{\mathbf{h}_3\} + c_{4w} \cdot \{\mathbf{h}_4\} \end{cases} \quad (\text{CVI-24})$$

Les coefficients  $a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}$  ( $i = u, v, w$ ) sont facilement déterminés à partir du produit des vecteurs  $\langle \mathbf{b}_x \rangle, \langle \mathbf{b}_y \rangle, \langle \mathbf{b}_z \rangle$  par les translations (CVI-24) en considérant les propriétés précisées précédemment (relations (CVI-15) à (CVI-22)) :

$$\begin{aligned} a_{xu} &= \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} & a_{yu} &= \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} & a_{zu} &= \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ a_{xv} &= \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} & ; & & a_{yv} &= \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} & ; & & a_{zv} &= \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ a_{xw} &= \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} & a_{yw} &= \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} & a_{zw} &= \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \end{aligned} \quad (\text{CVI-25})$$

Ces mêmes translations multipliées par les vecteurs  $\langle \gamma_1 \rangle, \langle \gamma_2 \rangle, \langle \gamma_3 \rangle, \langle \gamma_4 \rangle$  permettent d'avoir les coefficients  $c_{\alpha i}$  ( $i = u, v, w$ ), avec  $\alpha$  variant de 1 à 4 :

$$\begin{aligned} c_{\alpha u} &= \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ c_{\alpha v} &= \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ c_{\alpha w} &= \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \end{aligned} \quad (\text{CVI-26})$$

$$\text{où : } \{\gamma_\alpha\} = \frac{1}{8} (\{\mathbf{h}_\alpha\} - (\langle \mathbf{h}_\alpha \rangle \cdot \{\mathbf{X}_L^e\}) \langle \mathbf{b}_x \rangle - (\langle \mathbf{h}_\alpha \rangle \cdot \{\mathbf{Y}_L^e\}) \langle \mathbf{b}_y \rangle - (\langle \mathbf{h}_\alpha \rangle \cdot \{\mathbf{Z}_L^e\}) \langle \mathbf{b}_z \rangle)$$

Le champ de déplacement devient en intégrant les termes des coefficients sus déterminés dans l'expression (CVI-23) :

$$\begin{cases} u = a_{0u} + \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot z + \langle \gamma_1 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot \eta \zeta \\ \quad + \langle \gamma_2 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot \xi \zeta + \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot \xi \eta + \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \cdot \xi \eta \zeta \\ v = a_{0v} + \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot z + \langle \gamma_1 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot \eta \zeta \\ \quad + \langle \gamma_2 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot \xi \zeta + \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot \xi \eta + \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \cdot \xi \eta \zeta \\ w = a_{0w} + \langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot z + \langle \gamma_1 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot \eta \zeta \\ \quad + \langle \gamma_2 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot \xi \zeta + \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot \xi \eta + \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \cdot \xi \eta \zeta \end{cases}$$

En notant :  $h_1 = \eta \zeta$  ;  $h_2 = \xi \zeta$  ;  $h_3 = \xi \eta$  ;  $h_4 = \xi \eta \zeta$  , on a finalement :

$$\begin{cases} u = a_{0u} + (\langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot z + \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \mathbf{h}_\alpha) \cdot \{\mathbf{U}_x^e\} \\ v = a_{0v} + (\langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot z + \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \mathbf{h}_\alpha) \cdot \{\mathbf{U}_y^e\} \\ w = a_{0w} + (\langle \mathbf{b}_x \rangle \cdot x + \langle \mathbf{b}_y \rangle \cdot y + \langle \mathbf{b}_z \rangle \cdot z + \langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \mathbf{h}_\alpha) \cdot \{\mathbf{U}_z^e\} \end{cases} \quad \text{avec } \underline{\alpha = 1 \text{ à } 4}. \quad (\text{CVI-27})$$



## VI.C.4. Déformations

Les déformations étant dépendantes des dérivées des déplacements locaux établis précédemment en (CVI-27), on a alors :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2}(u,x + u,x) = u,x = \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} \{ \mathbf{U}_x^e \} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2}(v,y + v,y) = v,y = \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} \{ \mathbf{U}_y^e \} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{2}(w,z + w,z) = w,z = \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} \{ \mathbf{U}_z^e \} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u,y + v,x) = \frac{1}{2} [ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} \{ \mathbf{U}_x^e \} + \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} \{ \mathbf{U}_y^e \} ] \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u,z + w,x) = \frac{1}{2} [ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} \{ \mathbf{U}_x^e \} + \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} \{ \mathbf{U}_z^e \} ] \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v,z + w,y) = \frac{1}{2} [ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} \{ \mathbf{U}_y^e \} + \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} \{ \mathbf{U}_z^e \} ]\end{aligned}$$

Ecrites sous forme matricielle, ces déformations donnent la matrice des déformations  $\{ \varepsilon_e \}$  :

$$\{ \varepsilon_e \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xy} \\ 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & & & & & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & & & & \\ & & & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & & & & \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & & & & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & \\ & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_x^e \\ \mathbf{U}_y^e \\ \mathbf{U}_z^e \end{Bmatrix}$$

où :  $\langle \gamma_\alpha \rangle \cdot h_\alpha$  est telle que la **sommation sur  $\alpha$  varie de 1 à 4**.

$$\text{On pose } [\mathbf{B}_\gamma] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & & & & & \\ & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & & & & \\ & & & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & \\ \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & & & & \\ \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & & & & \langle \mathbf{b}_x \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,x} & \\ & & \langle \mathbf{b}_z \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,z} & & \langle \mathbf{b}_y \rangle + \langle \gamma_\alpha \rangle h_{\alpha,y} & \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-28})$$

La nécessité d'exprimer la matrice gradient de déformations pour qu'elle puisse être multipliée par les translations nodales dans le repère global nous conduit à la matrice gradient de déformations  $[\tilde{\mathbf{B}}]$  telle que :

$$[\tilde{\mathbf{B}}] = [\mathbf{B}_\gamma] [\mathbf{R}_e] \quad (\text{CVI-29})$$

On rappelle ici que les constituants de la matrice  $[\mathbf{R}_e]$  sont établis en (CVI-4)

## VI.C.5. Matrice de raideur

Pour 'npi' points d'intégration en  $\zeta$  dans l'épaisseur, la matrice de raideur obtenue avec  $[\tilde{\mathbf{B}}]$  (CIV-29) est la même que celle obtenue classiquement avec  $[\mathbf{B}]$  (CIV-12) :

$$[\mathbf{K}_e] = \left[ \iiint_e [\tilde{\mathbf{B}}]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\tilde{\mathbf{B}}] dv \right] = \sum_{q=1}^{npi} [\tilde{\mathbf{B}}(0,0,\zeta_q)]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\tilde{\mathbf{B}}(0,0,\zeta_q)] \det[\mathbf{J}(0,0,\zeta_q)] \cdot 4 \cdot \omega_q \quad (\text{CIV-30})$$

- Bien que  $\langle \mathbf{b}_x \rangle, \langle \mathbf{b}_y \rangle, \langle \mathbf{b}_z \rangle$  soient calculés en  $\xi=\eta=\zeta=0$ , la matrice  $[\tilde{\mathbf{B}}]$  dépend de  $\zeta$  car  $\{\mathbf{X}_L^e\}, \{\mathbf{Y}_L^e\}, \{\mathbf{Z}_L^e\}$  dans  $\{\gamma_\alpha\}$  dépendent de  $\zeta$  et il en va de même pour  $[\mathbf{R}_e]$ .

- Etant donné que tous les calculs se font en  $\xi=\eta=0$ , les vecteurs  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  sont nuls et n'interviennent donc pas dans la matrice gradient de déformations  $[\tilde{\mathbf{B}}]$ . Ils n'ont donc aucun effet sur les déformations.

En effet :

$$\begin{Bmatrix} h_{3,x} \\ h_{3,y} \\ h_{3,z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} h_{3,\xi} \\ h_{3,\eta} \\ h_{3,\zeta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{Bmatrix} h_{3,x}(0,0,\zeta) \\ h_{3,y}(0,0,\zeta) \\ h_{3,z}(0,0,\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{en} \quad \xi = \eta = 0$$

$$\begin{Bmatrix} h_{4,x} \\ h_{4,y} \\ h_{4,z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} h_{4,\xi} \\ h_{4,\eta} \\ h_{4,\zeta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{-1}] \begin{Bmatrix} \eta\zeta \\ \xi\zeta \\ \xi\eta \end{Bmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{Bmatrix} h_{4,x}(0,0,\zeta) \\ h_{4,y}(0,0,\zeta) \\ h_{4,z}(0,0,\zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{en} \quad \xi = \eta = 0$$

- De ce fait, la matrice  $[\tilde{\mathbf{B}}]$  n'est calculée que sur  $\alpha$  allant de 1 à 2 ( $[\tilde{\mathbf{B}}] = [\mathbf{B}_{12}]$ ) bien qu'il y ait deux autres modes sabliers (un dans les modes  $\{\mathbf{h}_1\}$  et un autre dans les modes  $\{\mathbf{h}_2\}$ ). Il faut alors, non seulement chercher à stabiliser les modes  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$  dans les déformations mais aussi les deux autres évoqués : plus précisément, une combinaison de  $\{\mathbf{h}_1\}$  et  $\{\mathbf{h}_2\}$ .

- Que ce soit avec  $[\tilde{\mathbf{B}}]$  ou  $[\mathbf{B}]$ , le volume (V) n'est pas calculé exactement avec une intégration en  $\zeta$  tout en gardant  $\xi=0$  et  $\eta=0$ . Il est possible d'utiliser des fonctions d'interpolation de la forme préalablement intégrée sur le volume (Voir Annexe de ce Complément) mais les conditions d'orthogonalité (CIV-15 à CIV-22) ne sont pas tout à fait respectées.

L'autre possibilité utilisée ici est de calculer le volume exact puis de corriger le volume trouvé lors de l'intégration. Par exemple :

$$[\mathbf{K}_c] = \left[ \iiint_e [\tilde{\mathbf{B}}]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\tilde{\mathbf{B}}] dv \right] = \frac{V_{\text{exact}}}{V_{\text{num}}} \sum_{q=1}^{npi} [\tilde{\mathbf{B}}(0,0,\zeta_q)]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\tilde{\mathbf{B}}(0,0,\zeta_q)] \det[\mathbf{J}(0,0,\zeta_q)] \cdot 4 \cdot \omega_q ; \quad (\text{CIV-31})$$

où :  $V_{\text{num}} = \sum_{q=1}^{npi} \det[\mathbf{J}(0,0,\zeta_q)] \cdot 4 \cdot \omega_q$  et  $V_{\text{exact}}$  est donné dans le listing (Pascal) joint en Annexe de ce Complément VI.

## VI.C.6. Mise en évidence des vecteurs $\{\gamma_\alpha\}$

Ces vecteurs  $\{\gamma_\alpha\}$  servent à construire les "déformations" généralisées associées aux modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$  sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{q}_{3x} = \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_x^e\} \\ \bar{q}_{3y} = \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_y^e\} \\ \bar{q}_{3z} = \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_z^e\} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \bar{q}_{4x} = \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_x^e\} \\ \bar{q}_{4y} = \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_y^e\} \\ \bar{q}_{4z} = \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_z^e\} \end{cases} \quad (\text{CVI-32})$$

Lesquelles déformations sont nécessaires au développement de la stabilisation des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$ .

D'une manière générale, tout vecteur  $\langle \gamma_\alpha \rangle$  doit vérifier  $\langle \gamma_\alpha \rangle \cdot \{U_R^e\}$  afin d'être "normal" à un champ de petits déplacements de corps rigide  $\{U_R^e\} = c_0 \{S\} + c_1 \{X_L^e\} + c_2 \{Y_L^e\} + c_3 \{Z_L^e\}$  et ne pas créer des déformations dans un tel cas quels que soient  $c_0, c_1, c_2, c_3$ .

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité et en recherchant  $\langle \gamma_\alpha \rangle$  sous la forme :

$\{\gamma_\alpha\} = 1/8 \{h_\alpha\} + a_x \{b_x\} + a_y \{b_y\} + a_z \{b_z\}$ , on retrouve l'expression de  $\langle \gamma_\alpha \rangle$  telle que :

$$\{\gamma_\alpha\} = 1/8 (\{h_\alpha\} - (\langle h_\alpha \rangle \cdot \{X_L^e\}) \{b_x\} - (\langle h_\alpha \rangle \cdot \{Y_L^e\}) \{b_y\} - (\langle h_\alpha \rangle \cdot \{Z_L^e\}) \{b_z\}) \quad (\text{CVI-33})$$

## VI.D. Stabilisation - développement

### VI.D.1. Déformations et contraintes généralisées

Pour établir la matrice de stabilisation recherchée, l'idée est d'ajouter des "déformations généralisées" associées aux deux modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$  qui n'apparaissent pas quand on intègre en plusieurs points en  $\zeta$  tout en se plaçant toujours en  $\xi = \eta = 0$ . Et, bien sûr, trouver aussi une possibilité pour stabiliser une combinaison des deux autres modes qu'on décide de nommer « modes12 » parce que leur traitement sera simultané.

#### VI.D.1.a) a – Déformations et contraintes pour la stabilisation des modes '3' et '4'

Les déformations qui suivent sont équivalentes à celles établies en (CVI-32) sauf qu'elles sont multipliées par les dérivées de  $h_3$  ( $h_3 = \xi\eta$ ) et de  $h_4$  ( $h_4 = \xi\eta\zeta$ ) :

$$\begin{cases} q_{3x} = (h_3, x) \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_x^e\} \\ q_{3y} = (h_3, y) \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_y^e\} \\ q_{3z} = (h_3, z) \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_z^e\} \end{cases} \text{ où } h_3 = \xi \cdot \eta \quad (\text{CVI-34})$$

$$\begin{cases} q_{4x} = (h_4, x) \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_x^e\} \\ q_{4y} = (h_4, y) \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_y^e\} \\ q_{4z} = (h_4, z) \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_z^e\} \end{cases} \text{ où } h_4 = \xi \cdot \eta \cdot \zeta \quad (\text{CVI-35})$$

Aux déformations « généralisées »  $\langle \bar{q}_{3x} \quad \bar{q}_{3y} \quad \bar{q}_{3z} \rangle$  et  $\langle \bar{q}_{4x} \quad \bar{q}_{4y} \quad \bar{q}_{4z} \rangle$  (CIV-32), vont correspondre respectivement les "contraintes"  $\bar{Q}_{3x}, \bar{Q}_{3y}, \bar{Q}_{3z}$  et  $\bar{Q}_{4x}, \bar{Q}_{4y}, \bar{Q}_{4z}$  comme exprimées ci-dessous avec une loi de "comportement" donnée où les  $D_{ij}$  proviennent de la matrice  $[D]$  en élasticité (relation CVI-13) ou de la matrice  $[D^{ep}]$  en élastoplasticité.

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{3x} \\ \bar{Q}_{3y} \\ \bar{Q}_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{3xx} \cdot D_{11} & H_{3xy} \cdot D_{12} & H_{3xz} \cdot D_{13} \\ H_{3xy} \cdot D_{12} & H_{3yy} \cdot D_{22} & H_{3yz} \cdot D_{23} \\ H_{3xz} \cdot D_{13} & H_{3yz} \cdot D_{23} & H_{3zz} \cdot D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_{3x} \\ \bar{q}_{3y} \\ \bar{q}_{3z} \end{Bmatrix} \quad (\text{CVI-36})$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{4x} \\ \bar{Q}_{4y} \\ \bar{Q}_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{4xx} \cdot D_{11} & H_{4xy} \cdot D_{12} & H_{4xz} \cdot D_{13} \\ H_{4xy} \cdot D_{12} & H_{4yy} \cdot D_{22} & H_{4yz} \cdot D_{23} \\ H_{4xz} \cdot D_{13} & H_{4yz} \cdot D_{23} & H_{4zz} \cdot D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{q}_{4x} \\ \bar{q}_{4y} \\ \bar{q}_{4z} \end{Bmatrix} \quad (\text{CVI-37})$$

En reprenant l'expression de  $\{N\}$  donnée en (CVI-1), ces déformations (CVI-32) devraient être :

$$q_{3x} = (h_3, x) \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_x^e\}; \quad q_{3y} = (h_3, y) \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_y^e\}; \quad q_{3z} = (h_3, z) \langle \gamma_3 \rangle \cdot \{U_z^e\} \quad \text{où } h_3 = \xi, \eta; \\ q_{4x} = (h_4, x) \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_x^e\}; \quad q_{4y} = (h_4, y) \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_y^e\}; \quad q_{4z} = (h_4, z) \langle \gamma_4 \rangle \cdot \{U_z^e\} \quad \text{où } h_4 = \xi, \eta, \zeta$$

A ces déformations correspondraient les contraintes :  $Q_{3x}, Q_{3y}, Q_{3z}$  et  $Q_{4x}, Q_{4y}, Q_{4z}$  :

$$\begin{Bmatrix} Q_{3x} \\ Q_{3y} \\ Q_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{3x} \\ q_{3y} \\ q_{3z} \end{Bmatrix} \quad (\text{CVI-38})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{4x} \\ Q_{4y} \\ Q_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{4x} \\ q_{4y} \\ q_{4z} \end{Bmatrix} \quad (\text{CVI-39})$$

On tire de l'équivalence énergétique  $\iiint \langle (q_{3x} \quad q_{3y} \quad q_{3z}) \cdot \begin{Bmatrix} Q_{3x} \\ Q_{3y} \\ Q_{3z} \end{Bmatrix} \rangle dv = \langle \bar{q}_{3x} \quad \bar{q}_{3y} \quad \bar{q}_{3z} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{3x} \\ \bar{Q}_{3y} \\ \bar{Q}_{3z} \end{Bmatrix}$

les facteurs suivants :

$$H_{3xx} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, x) \cdot dv; \quad H_{3yy} = \iiint (h_3, y) \cdot (h_3, y) \cdot dv; \quad H_{3zz} = \iiint (h_3, z) \cdot (h_3, z) \cdot dv;$$

$$H_{3xy} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, y) \cdot dv; \quad H_{3xz} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, z) \cdot dv; \quad H_{3yz} = \iiint (h_3, y) \cdot (h_3, z) \cdot dv$$

Le calcul des facteurs ( $H_{3xx}, H_{3yy}, H_{3zz}, H_{3xy}, H_{3xz}, H_{3yz}, H_{4xx}, H_{4yy}, H_{4zz}, H_{4xy}, H_{4xz}, H_{4yz}$ ) ne peut se faire en plusieurs points (npih) dans "l'épaisseur", c'est-à-dire en  $\zeta$  qu'après une intégration en 2x2 points en  $\xi$  et  $\eta$  car, comme nous l'avons montré à cause de la présence des modes  $\{h_3\}$  et  $\{h_4\}$ , il n'est pas possible de se placer en  $\xi = \eta = 0$  pour calculer ces intégrales.

Chacun de ces facteurs se calcule comme pour le cas qui suit :

$$\bar{H}_{3xx} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, x) \cdot dv, \text{ soit } \bar{H}_{3xx} = \sum_{q=1}^{np} \sum_{r=1}^4 (\eta_r \cdot J_{11}^{-1} + \xi_r \cdot J_{12}^{-1}) \cdot \det \mathbf{J}(\xi_r, \eta_r, \zeta_q) \cdot \omega_r \cdot \omega_q$$

où :  $\xi_1 = \xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\xi_2 = \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\eta_1 = \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\eta_3 = \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  sont les points d'intégrations de Gauss et  $\omega_r = 1$  est le poids.

$$[\mathbf{J}^{-1}(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} \\ J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} \end{bmatrix} \text{ est l'inverse de la matrice jacobienne.}$$

## VI.D.2. Matrice de stabilisation

Les facteurs  $H_{3xx}$ ,  $H_{3yy}$ ,  $H_{3zz}$ ,  $H_{3xy}$ ,  $H_{3xz}$ ,  $H_{3yz}$ ,  $H_{4xx}$ ,  $H_{4yy}$ ,  $H_{4zz}$ ,  $H_{4xy}$ ,  $H_{4xz}$ ,  $H_{4yz}$ , étant supposés calculés, on s'intéresse à la matrice de stabilisation  $[\mathbf{K}^s]$  qui est la somme de deux matrices  $[\mathbf{K}_3^s]$  et  $[\mathbf{K}_4^s]$  : l'une associée au mode '3' et l'autre associée au mode '4'. Ces matrices de raideur pour la stabilisation sont obtenues en partant d'une équivalence énergétique sans couplage comme c'est le cas ci-après pour la détermination de  $[\mathbf{K}_3^s]$ .

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}_{3x} \quad \bar{q}_{3y} \quad \bar{q}_{3z} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{3x} \\ \bar{Q}_{3y} \\ \bar{Q}_{3z} \end{Bmatrix} &= \langle \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \langle \gamma_3 \rangle \quad \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \langle \gamma_3 \rangle \quad \langle \mathbf{U}_z^e \rangle \langle \gamma_3 \rangle \rangle \begin{bmatrix} H_{3xx} \cdot D_{11} & H_{3xy} \cdot D_{12} & H_{3xz} \cdot D_{13} \\ H_{3xy} \cdot D_{12} & H_{3yy} \cdot D_{22} & H_{3yz} \cdot D_{23} \\ H_{3xz} \cdot D_{13} & H_{3yz} \cdot D_{23} & H_{3zz} \cdot D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \gamma_3 \rangle \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \\ \langle \gamma_3 \rangle \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \\ \langle \gamma_3 \rangle \langle \mathbf{U}_z^e \rangle \end{Bmatrix} \\ &= \langle \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \quad \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \quad \langle \mathbf{U}_z^e \rangle \rangle \begin{bmatrix} H_{3xx} \cdot D_{11} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3xy} \cdot D_{12} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3xz} \cdot D_{13} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \\ H_{3xy} \cdot D_{12} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yy} \cdot D_{22} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yz} \cdot D_{23} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \\ H_{3xz} \cdot D_{13} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yz} \cdot D_{23} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3zz} \cdot D_{33} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{U}_x^e \rangle \\ \langle \mathbf{U}_y^e \rangle \\ \langle \mathbf{U}_z^e \rangle \end{Bmatrix} \\ \langle \bar{q}_{3x} \quad \bar{q}_{3y} \quad \bar{q}_{3z} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{3x} \\ \bar{Q}_{3y} \\ \bar{Q}_{3z} \end{Bmatrix} &= \langle \mathbf{U}_L^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_3^s] \cdot \langle \mathbf{U}_L^e \rangle \end{aligned} \quad (\text{CVI-40})$$

Pour stabiliser les modes  $\{\mathbf{h}_3\}$  et  $\{\mathbf{h}_4\}$ , les matrices de raideur se présentent ainsi :

$$[\mathbf{K}_3^s] = \begin{bmatrix} H_{3xx} D_{11} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3xy} D_{12} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3xz} D_{13} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \\ H_{3xy} D_{12} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yy} D_{22} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yz} D_{23} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \\ H_{3xz} D_{13} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yz} D_{23} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3zz} D_{33} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-41})$$

$$[\mathbf{K}_4^s] = \begin{bmatrix} H_{4xx} D_{11} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle & H_{4xy} D_{12} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle & H_{4xz} D_{13} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle \\ H_{4xy} D_{12} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle & H_{4yy} D_{22} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle & H_{4yz} D_{23} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle \\ H_{4xz} D_{13} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle & H_{4yz} D_{23} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle & H_{4zz} D_{33} \langle \gamma_4 \rangle \langle \gamma_4 \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{CVI-41})$$

Ces deux matrices sont obtenues dans le repère local de l'élément. Leur passage dans le repère global grâce à la matrice de passage  $[\mathbf{R}_e]$  (CVI-4) donne  $[\mathbf{K}_3^s]$  et  $[\mathbf{K}_4^s]$ .

Précisément, en reprenant la relation (CVI-40) on peut traduire les déplacements du repère local dans le repère global afin de transformer  $[\bar{\mathbf{K}}_3^s]$  en  $[\mathbf{K}_3^s]$  comme suit :

$$\langle \mathbf{U}_L^e \rangle \cdot [\bar{\mathbf{K}}_3^s] \langle \mathbf{U}_L^e \rangle = \langle \mathbf{U}_e \rangle \cdot [\mathbf{K}_3^s] \langle \mathbf{U}_e \rangle \quad \text{soit alors} \quad \langle \mathbf{U}_e \rangle [\mathbf{R}_e]^T \cdot [\bar{\mathbf{K}}_3^s] [\mathbf{R}_e] \langle \mathbf{U}_e \rangle = \langle \mathbf{U}_e \rangle \cdot [\mathbf{K}_3^s] \langle \mathbf{U}_e \rangle$$

Avec  $\langle \mathbf{U}_e \rangle$  les déplacements dans le repère global (CVI-3) et  $\langle \mathbf{U}_L^e \rangle = \langle \mathbf{U}_x^e \quad \mathbf{U}_y^e \quad \mathbf{U}_z^e \rangle$  les déplacements dans le repère local (CVI-2)

Les matrices de raideur dans le repère global  $[\mathbf{K}_3^s]$  pour le mode '3' et  $[\mathbf{K}_4^s]$  pour le mode '4' ont les expressions suivantes :

$$[\mathbf{K}_3^s] = [\mathbf{R}_e^T] [\bar{\mathbf{K}}_3^s] [\mathbf{R}_e] \quad (\text{CVI-42})$$

$$[\mathbf{K}_4^s] = [\mathbf{R}_e^T] [\bar{\mathbf{K}}_4^s] [\mathbf{R}_e] \quad (\text{CVI-43})$$

Et la matrice globale de raideur pour la stabilisation dans le repère global est donc:

$$[\mathbf{K}^s] = [\mathbf{K}_3^s] + [\mathbf{K}_4^s] \quad (\text{CVI-44})$$

### VI.D.3. Efforts internes

En général, une sommation est faite entre les efforts internes dus aux contraintes  $\langle \sigma_e \rangle$  et ceux de stabilisation de telle sorte que :  $\langle \mathbf{F}_{int}^e \rangle = \langle \mathbf{F}_\sigma^e \rangle + \langle \mathbf{F}_{int}^s \rangle$

Du fait que  $\langle \varepsilon^e \rangle = [\bar{\mathbf{B}}] \langle \mathbf{U}^e \rangle$ , on calcule les efforts internes dus aux contraintes comme suit :

$$\langle \mathbf{F}_\sigma^e \rangle = \iiint [\bar{\mathbf{B}}]^T \cdot \langle \sigma_e \rangle \cdot dv \quad (\text{CVI-45})$$

Pour l'élément, les efforts internes de stabilisation proviennent de la somme des efforts internes de stabilisation des modes '3' et '4' ( $\langle \mathbf{F}_3^s \rangle$  et  $\langle \mathbf{F}_4^s \rangle$ ) directement en repère global :

$$\langle \mathbf{F}_{int}^s \rangle = \langle \mathbf{F}_3^s \rangle + \langle \mathbf{F}_4^s \rangle \quad (\text{CVI-46})$$

Dans les forces de stabilisation des modes '3' et '4', on fait apparaître les matrices gradient de stabilisation liées à chaque mode ;  $[\mathbf{B}_3^S]$  et  $[\mathbf{B}_4^S]$ . En effet, considérant le cas du mode '3', on part de la forme classique des efforts :

$$\langle \mathbf{F}_{3s}^e \rangle = \begin{Bmatrix} \langle \mathbf{F}_x^s \rangle \\ \langle \mathbf{F}_y^s \rangle \\ \langle \mathbf{F}_z^s \rangle \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_3^S] \langle \mathbf{U}^e \rangle \quad (\text{CVI-47})$$

La relation (CVI-41) sous la forme suivante permet de développer les efforts de stabilisation (CVI-47):

$$[\mathbf{K}_3^S] = \begin{bmatrix} \gamma_3 & & \\ & \gamma_3 & \\ & & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{3xx}D_{11} & H_{3xy}D_{12} & H_{3xz}D_{13} \\ H_{3xy}D_{12} & H_{3yy}D_{22} & H_{3yz}D_{23} \\ H_{3xz}D_{13} & H_{3yz}D_{23} & H_{3zz}D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_3 & & \\ & \gamma_3 & \\ & & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

où on pose :  $[\mathbf{B}_{\gamma_3}^S] = \begin{bmatrix} \gamma_3 & & \\ & \gamma_3 & \\ & & \gamma_3 \end{bmatrix}$  et  $[\mathbf{D}_3^S] = \begin{bmatrix} H_{3xx}D_{11} & H_{3xy}D_{12} & H_{3xz}D_{13} \\ H_{3xy}D_{12} & H_{3yy}D_{22} & H_{3yz}D_{23} \\ H_{3xz}D_{13} & H_{3yz}D_{23} & H_{3zz}D_{33} \end{bmatrix}$

Alors, la relation de l'effort de stabilisation du mode '3' (CVI-47) et celui du mode '4' devient :

$$\{\mathbf{F}_3^s\} = \int^T [\mathbf{B}_3^s] \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{3x} \\ \overline{Q}_{3y} \\ \overline{Q}_{3z} \end{Bmatrix} \cdot d\zeta = \sum_{q=1}^{npi} {}^T [\mathbf{B}_3^s] \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{3x} \\ \overline{Q}_{3y} \\ \overline{Q}_{3z} \end{Bmatrix} \cdot \varpi_q \quad \text{et} \quad \{\mathbf{F}_4^s\} = \int^T [\mathbf{B}_4^s] \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{4x} \\ \overline{Q}_{4y} \\ \overline{Q}_{4z} \end{Bmatrix} \cdot d\zeta = \sum_{q=1}^{npi} {}^T [\mathbf{B}_4^s] \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{4x} \\ \overline{Q}_{4y} \\ \overline{Q}_{4z} \end{Bmatrix} \cdot \varpi_q$$

Rappel : les « contraintes »  $\overline{Q}_{3x}, \overline{Q}_{3y}, \overline{Q}_{3z}$  et  $\overline{Q}_{4x}, \overline{Q}_{4y}, \overline{Q}_{4z}$  sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{3x} \\ \overline{Q}_{3y} \\ \overline{Q}_{3z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_3^S] \cdot [\mathbf{B}_{\gamma_3}^S] [\mathbf{R}_e] \{\mathbf{U}^e\} = [\mathbf{D}_3^S] \cdot [\mathbf{B}_3^S] \{\mathbf{U}^e\} = [\mathbf{D}_3^S] \cdot \begin{Bmatrix} \overline{q}_{3x} \\ \overline{q}_{3y} \\ \overline{q}_{3z} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{4x} \\ \overline{Q}_{4y} \\ \overline{Q}_{4z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_4^S] \cdot [\mathbf{B}_{\gamma_4}^S] [\mathbf{R}_e] \{\mathbf{U}^e\} = [\mathbf{D}_4^S] \cdot [\mathbf{B}_4^S] \{\mathbf{U}^e\} = [\mathbf{D}_4^S] \cdot \begin{Bmatrix} \overline{q}_{4x} \\ \overline{q}_{4y} \\ \overline{q}_{4z} \end{Bmatrix}$$

## VI.E. Stabilisation – Autre possibilité

Précédemment, les matrices de raideur de stabilisation des modes '3' et '4' ont été calculées par une intégration suivant  $\zeta$ . Cependant, ce calcul peut être effectué en  $\xi=\eta=0$  et  $\zeta=0$  moyennant un module particulier quand l'état du matériau est élastoplastique.

L'équivalence énergétique  $\iiint \langle \langle q_{3x} \quad q_{3y} \quad q_{3z} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} Q_{3x} \\ Q_{3y} \\ Q_{3z} \end{Bmatrix} \rangle dv = \langle \bar{q}_{3x} \quad \bar{q}_{3y} \quad \bar{q}_{3z} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{3x} \\ \bar{Q}_{3y} \\ \bar{Q}_{3z} \end{Bmatrix}$  donne :

$$H_{3xx} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, x) \cdot dv ; H_{3yy} = \iiint (h_3, y) \cdot (h_3, y) \cdot dv ; H_{3zz} = \iiint (h_3, z) \cdot (h_3, z) \cdot dv ;$$

$$H_{3xy} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, y) \cdot dv ; H_{3xz} = \iiint (h_3, x) \cdot (h_3, z) \cdot dv ; H_{3yz} = \iiint (h_3, y) \cdot (h_3, z) \cdot dv .$$

Pour calculer complètement ces intégrales ; il faut intégrer en  $2 \times 2 \times 2$  points en  $\xi, \eta, \zeta$  :

$$\xi_i = -\frac{1}{\sqrt{3}} : i = 1, 3, 5, 7 ; \quad \eta_i = -\frac{1}{\sqrt{3}} : i = 1, 2, 5, 6 ; \quad \zeta_i = -\frac{1}{\sqrt{3}} : i = 1, 2, 3, 4 ;$$

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{3}} : i = 2, 4, 6, 8 ; \quad \eta_i = \frac{1}{\sqrt{3}} : i = 3, 4, 7, 8 ; \quad \zeta_i = \frac{1}{\sqrt{3}} : i = 5, 6, 7, 8 ; \quad \omega_i = 1$$

Par exemple. :  $H_{3xx} = \sum_{i=1}^8 (\eta_i \cdot J_{11}^{-1} + \xi_i \cdot J_{12}^{-1})^2 \cdot \det[\mathbf{J}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]$  où  $[\mathbf{J}^{-1}(\xi, \eta, \zeta)_q] = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} \\ J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} \end{bmatrix}$ .

Les facteurs  $H_{3xx}, H_{3yy}, H_{3zz}, H_{3xy}, H_{3xz}, H_{3yz}, H_{4xx}, H_{4yy}, H_{4zz}, H_{4xy}, H_{4xz}, H_{4yz}$ , étant calculés, la matrice de stabilisation  $[\mathbf{K}^s]$  est la somme de deux matrices  $[\mathbf{K}_3^s]$  et  $[\mathbf{K}_4^s]$  telles qu'en partant de l'équivalence énergétique (CIV-40), on détermine :

$$[\mathbf{K}_3^s] = \begin{bmatrix} H_{3xx} D_{11} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3xy} D_{12} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3xz} D_{13} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \\ H_{3xy} D_{12} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yy} D_{22} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yz} D_{23} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \\ H_{3xz} D_{13} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3yz} D_{23} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle & H_{3zz} D_{33} \langle \gamma_3 \rangle \langle \gamma_3 \rangle \end{bmatrix} ; \text{ idem (indice 4) pour } [\mathbf{K}_4^s] .$$

Ces matrices sont calculées dans le repère local de l'élément défini en  $\xi=\eta=\zeta=0$ . Avant l'assemblage, il convient de les exprimer dans le repère global de telle sorte que :

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_L^e \rangle \cdot [\bar{\mathbf{K}}^s] \cdot \langle \mathbf{U}_L^e \rangle = \langle \hat{\mathbf{U}}_e \rangle \cdot [\mathbf{K}^s] \cdot \langle \mathbf{U}_e \rangle \text{ où : } [\bar{\mathbf{K}}^s] = [\bar{\mathbf{K}}_3^s] + [\bar{\mathbf{K}}_4^s] \Rightarrow [\mathbf{K}^s] = [\mathbf{R}_e^T] \cdot [\bar{\mathbf{K}}^s] \cdot [\mathbf{R}_e] .$$

Afin d'éviter une raideur trop importante en élastoplasticité, le module d'Young utilisé pour calculer les facteurs  $D_{ij}$  peut être remplacé par la moyenne des modules tangents pris dans l'épaisseur :

$$E_t = \left( \sum_{q=1}^{npi} E_q \right) / npi ; \quad d\sigma = E_q \cdot d\varepsilon ; \quad d\sigma = H' \cdot d\varepsilon_p ; \quad d\sigma = E \cdot d\varepsilon_e ; \quad d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \Rightarrow E_q = E \cdot H' / (E + H') .$$



## VI.F. Etude non-linéaire

### VI.F.1. Matrice de raideur géométrique

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_L^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_g^e] \cdot \{ \mathbf{U}_L^e \} = \iiint \hat{u}_k, j, \sigma_{ij} \cdot u_k, i, dv = \langle \hat{\mathbf{U}}_x^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_u^e] \cdot \{ \mathbf{U}_x^e \} + \langle \hat{\mathbf{U}}_y^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_v^e] \cdot \{ \mathbf{U}_y^e \} + \langle \hat{\mathbf{U}}_z^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_w^e] \cdot \{ \mathbf{U}_z^e \}$$

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_x^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_u^e] \cdot \{ \mathbf{U}_x^e \} = \iiint \langle \hat{u}, x \quad \hat{u}, y \quad \hat{u}, z \rangle \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ u, z \end{Bmatrix} dv ; \begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ u, z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, x(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, y(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, z(0,0,\zeta) \rangle \end{bmatrix} \cdot \{ \mathbf{U}_x^e \}$$

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_y^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_v^e] \cdot \{ \mathbf{U}_y^e \} = \iiint \langle \hat{v}, x \quad \hat{v}, y \quad \hat{v}, z \rangle \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v, x \\ v, y \\ v, z \end{Bmatrix} dv ; \begin{Bmatrix} v, x \\ v, y \\ v, z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, x(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, y(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, z(0,0,\zeta) \rangle \end{bmatrix} \cdot \{ \mathbf{U}_y^e \}$$

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_z^e \rangle \cdot [\mathbf{K}_w^e] \cdot \{ \mathbf{U}_z^e \} = \iiint \langle \hat{w}, x \quad \hat{w}, y \quad \hat{w}, z \rangle \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w, x \\ w, y \\ w, z \end{Bmatrix} dv ; \begin{Bmatrix} w, x \\ w, y \\ w, z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, x(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, y(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, z(0,0,\zeta) \rangle \end{bmatrix} \cdot \{ \mathbf{U}_z^e \}$$

En posant :  $[\mathbf{N}_d^e] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}, x(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, y(0,0,\zeta) \rangle \\ \langle \mathbf{N}, z(0,0,\zeta) \rangle \end{bmatrix}$  ; on peut écrire simplement les opérateurs gradients

de utiles au calcul de la matrice géométrique (dite encore « des contraintes initiales ») :

$$[\mathbf{B}_u] = [\mathbf{N}_d^e] \cdot [\mathbf{R}_x] ; [\mathbf{B}_v] = [\mathbf{N}_d^e] \cdot [\mathbf{R}_y] ; [\mathbf{B}_w] = [\mathbf{N}_d^e] \cdot [\mathbf{R}_z]$$

On a alors les matrices de raideur géométrique séparées suivant les déplacements :

$$[\mathbf{K}_u] = \iiint [\mathbf{B}_u]^T \cdot [\sigma_e] \cdot [\mathbf{B}_u] dv ; [\mathbf{K}_v] = \iiint [\mathbf{B}_v]^T \cdot [\sigma_e] \cdot [\mathbf{B}_v] dv ; [\mathbf{K}_w] = \iiint [\mathbf{B}_w]^T \cdot [\sigma_e] \cdot [\mathbf{B}_w] dv$$

Et donc la matrice de raideur géométrique élémentaire est :

$$[\mathbf{K}_g] = [\mathbf{K}_u] + [\mathbf{K}_v] + [\mathbf{K}_w]$$

### VI.F.2. Elastoplasticité

Comme précisé précédemment, si la matrice de raideur de stabilisation est calculée en un seul point ( $\xi=\eta=\zeta=0$ ), on peut remplacer le module de Young par la moyenne des modules tangents obtenus aux points d'intégration (5 points ou plus) suivant  $\zeta$  lors du calcul d'un état de contraintes plastiquement admissible.

Cependant comme la matrice de comportement élastoplastique est connue lors d'un schéma implicite, il semble préférable - du point de vue précision et non pas temps de calcul ! - de l'utiliser et de calculer la matrice de stabilisation par une intégration suivant  $\zeta$ .

### VI.F.3. Efforts internes

Lors d'un calcul incrémental, il y a deux possibilités pour gérer les efforts internes relatifs à la stabilisation :

- sommer les contraintes  $\{Q_3\}$  et  $\{Q_4\}$  à chaque itération avant de calculer  $\{F_s^e\}$  ;
- sommer les efforts internes à chaque itération :  $\{F_s^e\} \leftarrow \{F_s^e\} + \{dF_s^e\}$  où  $\{dF_s^e\}$  est calculé avec les accroissements  $\{dQ_3\}$  et  $\{dQ_4\}$  relatifs à l'itération considérée.

Dans le second cas, il est inutile de garder en mémoire les états de contraintes propres à la stabilisation mais il convient de garder l'histoire des efforts internes correspondants.

### VI.G. Remarque importante

Tout l'exposé précédent correspond aux notes de lecture relatives à la publication [2]. Mais d'autres publications d'Abed-Meraim et de Combescure ([3] et, surtout, [4]) ont permis de programmer ensuite des versions actualisées qui ont conduit à l'élaboration d'un élément solide-coque auquel a été ajouté un champ de cisaillement transversal assumé pour donner l'élément SB8 $\gamma$ 24 décrit dans le premier chapitre.

## VI.H. Annexe

```

PROCEDURE matrice_BFlanagan_en_zero(x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,
                                     x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8:DOUBLE;
                                     VAR B:mat_3_8; VAR volume:DOUBLE);

VAR i : INTEGER;

BEGIN
  (* <bx> *)
  B[1,1]:=y2*(z6-z3+z5-z4)+y3*(z2-z4)+
          y4*(z3-z8+z2-z5)+y5*(z8-z6+z4-z2)+
          y6*(z5-z2)+y8*(z4-z5);
  B[1,2]:=y3*(z7-z4+z6-z1)+y4*(z3-z1)+
          y1*(z4-z5+z3-z6)+y6*(z5-z7+z1-z3)+
          y7*(z6-z3)+y5*(z1-z6);
  B[1,3]:=y4*(z8-z1+z7-z2)+y1*(z4-z2)+
          y2*(z1-z6+z4-z7)+y7*(z6-z8+z2-z4)+
          y8*(z7-z4)+y6*(z2-z7);
  B[1,4]:=y1*(z5-z2+z8-z3)+y2*(z1-z3)+
          y3*(z2-z7+z1-z8)+y8*(z7-z5+z3-z1)+
          y5*(z8-z1)+y7*(z3-z8);
  B[1,5]:=y8*(z4-z7+z1-z6)+y7*(z8-z6)+
          y6*(z7-z2+z8-z1)+y1*(z2-z4+z6-z8)+
          y4*(z1-z8)+y2*(z6-z1);
  B[1,6]:=y5*(z1-z8+z2-z7)+y8*(z5-z7)+
          y7*(z8-z3+z5-z2)+y2*(z3-z1+z7-z5)+
          y1*(z2-z5)+y3*(z7-z2);
  B[1,7]:=y6*(z2-z5+z3-z8)+y5*(z6-z8)+
          y8*(z5-z4+z6-z3)+y3*(z4-z2+z8-z6)+
          y2*(z3-z6)+y4*(z8-z3);
  B[1,8]:=y7*(z3-z6+z4-z5)+y6*(z7-z5)+
          y5*(z6-z1+z7-z4)+y4*(z1-z3+z5-z7)+
          y3*(z4-z7)+y1*(z5-z4);

  (* <by> *)
  B[2,1]:=z2*(x6-x3+x5-x4)+z3*(x2-x4)+
          z4*(x3-x8+x2-x5)+z5*(x8-x6+x4-x2)+
          z6*(x5-x2)+z8*(x4-x5);
  B[2,2]:=z3*(x7-x4+x6-x1)+z4*(x3-x1)+
          z1*(x4-x5+x3-x6)+z6*(x5-x7+x1-x3)+
          z7*(x6-x3)+z5*(x1-x6);
  B[2,3]:=z4*(x8-x1+x7-x2)+z1*(x4-x2)+
          z2*(x1-x6+x4-x7)+z7*(x6-x8+x2-x4)+
          z8*(x7-x4)+z6*(x2-x7);
  B[2,4]:=z1*(x5-x2+x8-x3)+z2*(x1-x3)+
          z3*(x2-x7+x1-x8)+z8*(x7-x5+x3-x1)+
          z5*(x8-x1)+z7*(x3-x8);
  B[2,5]:=z8*(x4-x7+x1-x6)+z7*(x8-x6)+
          z6*(x7-x2+x8-x1)+z1*(x2-x4+x6-x8)+
          z4*(x1-x8)+z2*(x6-x1);
  B[2,6]:=z5*(x1-x8+x2-x7)+z8*(x5-x7)+
          z7*(x8-x3+x5-x2)+z2*(x3-x1+x7-x5)+
          z1*(x2-x5)+z3*(x7-x2);
  B[2,7]:=z6*(x2-x5+x3-x8)+z5*(x6-x8)+
          z8*(x5-x4+x6-x3)+z3*(x4-x2+x8-x6)+
          z2*(x3-x6)+z4*(x8-x3);
  B[2,8]:=z7*(x3-x6+x4-x5)+z6*(x7-x5)+
          z5*(x6-x1+x7-x4)+z4*(x1-x3+x5-x7)+
          z3*(x4-x7)+z1*(x5-x4);

  (* <bz> *)

```

```

B[3,1]:=x2*(y6-y3+y5-y4)+x3*(y2-y4)+
        x4*(y3-y8+y2-y5)+x5*(y8-y6+y4-y2)+
        x6*(y5-y2)+x8*(y4-y5);
B[3,2]:=x3*(y7-y4+y6-y1)+x4*(y3-y1)+
        x1*(y4-y5+y3-y6)+x6*(y5-y7+y1-y3)+
        x7*(y6-y3)+x5*(y1-y6);
B[3,3]:=x4*(y8-y1+y7-y2)+x1*(y4-y2)+
        x2*(y1-y6+y4-y7)+x7*(y6-y8+y2-y4)+
        x8*(y7-y4)+x6*(y2-y7);
B[3,4]:=x1*(y5-y2+y8-y3)+x2*(y1-y3)+
        x3*(y2-y7+y1-y8)+x8*(y7-y5+y3-y1)+
        x5*(y8-y1)+x7*(y3-y8);
B[3,5]:=x8*(y4-y7+y1-y6)+x7*(y8-y6)+
        x6*(y7-y2+y8-y1)+x1*(y2-y4+y6-y8)+
        x4*(y1-y8)+x2*(y6-y1);
B[3,6]:=x5*(y1-y8+y2-y7)+x8*(y5-y7)+
        x7*(y8-y3+y5-y2)+x2*(y3-y1+y7-y5)+
        x1*(y2-y5)+x3*(y7-y2);
B[3,7]:=x6*(y2-y5+y3-y8)+x5*(y6-y8)+
        x8*(y5-y4+y6-y3)+x3*(y4-y2+y8-y6)+
        x2*(y3-y6)+x4*(y8-y3);
B[3,8]:=x7*(y3-y6+y4-y5)+x6*(y7-y5)+
        x5*(y6-y1+y7-y4)+x4*(y1-y3+y5-y7)+
        x3*(y4-y7)+x1*(y5-y4);

```

```

{trois possibilites}
volume:=(B[1,1]*x1+B[1,2]*x2+B[1,3]*x3+B[1,4]*x4+
        B[1,5]*x5+B[1,6]*x6+B[1,7]*x7+B[1,8]*x8)/12.0;
{
Volume:=(B[2,1]*y1+B[2,2]*y2+B[2,3]*y3+B[2,4]*y4+
        B[2,5]*y5+B[2,6]*y6+B[2,7]*y7+B[2,8]*y8)/12.0;
Volume:=(B[3,1]*z1+B[3,2]*z2+B[3,3]*z3+B[3,4]*z4+
        B[3,5]*z5+B[3,6]*z6+B[3,7]*z7+B[3,8]*z8)/12.0;
}
FOR i:=1 TO 8 DO
    BEGIN
        B[1,i]:=B[1,i]/(12.0*volume);
        B[2,i]:=B[2,i]/(12.0*volume);
        B[3,i]:=B[3,i]/(12.0*volume);
    END;
END;

```

## VI.I.Référence

- [1] T. Belytschko, J. S-J. Ong, W. K. Liu, J. M. Kennedy; *Hourglass control in linear and nonlinear problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 43 (1984) p. 251-276
- [2] F. Abed-Meraim.; A. Combescure ; *SHB8PS – a new adaptative, assumed-strain, continuum mechanics shell element for impact analysis*, Computers and Structures 80 (2002) p. 791-803
- [3] Abed-Meraim F. Combescure A. *A new adaptative assumed strain-continuummechanics shell element for impact analysis*. Computers and Structures, 2002; **80**:791-803.
- [4] Abed-Meraim F., Combescure A., *An improved assumed strain solid-shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elastic-plastic stability analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009; **80**:1640-1686.



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : BASSA

DATE de SOUTENANCE : 17 novembre 2011

Prénoms : Bruno

TITRE :

Contribution à l'étude d'éléments finis de type coque sans degrés de liberté en rotation ou à formulation solide pour des simulations numériques de l'emboutissage et du retour élastique

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2011-ISAL-0113

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : Mécanique

RESUME :

La thèse présente une méthodologie pour construire des éléments finis de type « solide-coque » avec intégration réduite en vue des applications à la simulation de la mise en forme tel que l'emboutissage des tôles où ces éléments finis doivent présenter de bonnes aptitudes à modéliser la flexion mais également les situations de laminage de la tôle.

A partir des éléments volumiques à 8 nœuds et 3 degrés de liberté par nœud (les 3 composantes du déplacement), un neuvième nœud est rajouté au centre de l'élément. Ce neuvième nœud n'est pourvu que d'un seul degré de liberté, le déplacement le long de la direction de l'épaisseur. Cette direction privilégiée a un nombre de points d'intégration supérieur ou égal à 3 mais l'intégration est réduite au centre de l'élément diminuant très sensiblement les temps CPU par rapport à une intégration complète. Un soin particulier a été pris pour contrôler tous les modes à énergie nulle dus à l'intégration réduite. Ce nœud supplémentaire permet une distribution linéaire de la déformation normale. Avec les lois de comportement complètement 3D ces nouveaux éléments solide-coque donnent des résultats similaires en flexion à ceux obtenus avec des éléments coques et état plan de contrainte. Le neuvième nœud joue le rôle d'un paramètre supplémentaire pour l'interpolation quadratique du déplacement dans la direction de l'épaisseur. Ce degré de liberté a une signification physique et un effort équivalent à une pression normale peut être prescrit. Dans les situations de pression normale et dans le cas du contact, la contrainte normale obtenue est physique ce qui n'est pas le cas de nombreux éléments solide-coque de la littérature. Le pincement ou le laminage des tôles est correctement modélisé. Pour valider ces éléments, un module d'emboutissage en U avec passage et laminage de la bande de tôle sur des rouleaux a été construit au laboratoire. La comparaison entre les efforts d'emboutissage calculés et mesurés est très bonne ainsi que la géométrie des bandes de tôle obtenue après retour élastique.

MOTS-CLES : éléments-finis, coque, solide-coque, loi de comportement, mise en forme, plasticité, grandes déformations, retour élastique

Laboratoire (s) de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
INSA de Lyon, LaMCoS UMR 5259, 69621 Villeurbanne

Directeurs de thèse:

Michel Brunet	Professeur	Co-directeur de thèse
Francis Sabourin	Maître de conférences	Co-directeur de thèse

Président de jury :

Alain Combescure      Professeur

Composition du jury :

Alain Combescure	Professeur	Président du Jury
Sandrine Thuillier	Professeur	Rapporteur
Khémis. Saanouni	Professeur	Rapporteur
Daniel Vieilledent	Docteur Ingénieur	Examineur
Francis Sabourin	Maître de conférences	Co-directeur de thèse
Michel Brunet	Professeur	Co-directeur de thèse

