N˚d'ordre 2006-ISAL–XXXX Année 2006

THÈSE

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA PROPAGATION DE FISSURE EN FATIGUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS ÉTENDUS : PRISE EN COMPTE DE LA PLASTICITÉ ET DU CONTACT-FROTTEMENT

Présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale :

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

par

Thomas ELGUEDJ
Agrégé de Mécanique

Thèse soutenue le XX septembre 2006 devant la Commission d'examen

Jury

POMMIER SYLVIE	Professeur	Rapporteur
MOËS NICOLAS	Professeur	Rapporteur
VENTURA GIULIO	Assistant Professeur	Examinateur
BEGUE JEAN-FRED	Ingénieur	Examinateur
LIEURADE HENRI-PAUL	Docteur es Science	Examinateur
COMBESCURE ALAIN	Professeur	Directeur de thèse
GRAVOUIL ANTHONY	Maître de Conférence	Invité

LaMCoS - UMR CNRS 5514 - INSA de Lyon
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (FRANCE)

Résumé

La mécanique de la rupture et l'étude du phénomène de fatigue sont des sciences assez récente qui ont vu la majeure partie de leurs développements au $XX^{ème}$ siècle. La problématique de ces deux domaines de la mécanique est identique : il s'agit pour l'ingénieur de prévoir le comportement des structures jusqu'à leur ruine. La mécanique élastique linéaire de la rupture, très largement utilisée par les ingénieurs, ne permet pas de représenter un des phénomènes physiques importants dans la propagation en fatigue : le concept de refermeture de fissure découvert par Elber dans les années 70. On a alors recourt à des modèles plus ou moins complexes permettant d'intégrer ce phénomène dans les simulations élastique linéaires.

Du point de vue numérique, la propagation de fissure est un problème complexe puisqu'il nécessite de suivre la géométrie de la fissure au cours du temps. On a alors recourt à des procédés de type remaillage et projection de champs, coûteux en temps de calcul, et dont la validité théorique pose un certain nombre de questions. On a vu ces dernières années se développer des méthodes permettant de prendre en compte implicitement des discontinuités ; un exemple étant la méthode des éléments finis étendus. Grâce à des fonctions d'interpolation enrichies, on peut alors représenter implicitement une discontinuité mobile - comme une fissure - sans remaillage.

On propose d'utiliser la méthode des éléments finis étendus pour simuler la propagation de fissure en fatigue en modélisant le phénomène de refermeture de fissure. Il est alors nécessaire de prendre en compte à la fois la plasticité en pointe de fissure et le contact-frottement le long des lèvres de la fissure. Une nouvelle base d'enrichissement élasto-plastique capable de représenter la singularité plastique a dans un premier temps été développée. On a ensuite mis en place une formulation originale de type Lagrangien augmenté adaptée au formalisme éléments finis étendus. Des stratégies permettant de traiter des questions clés - dans une problématique ou la notion d'histoire est essentielle - telles que l'intégration numérique et la stratégie d'enrichissement pendant la propagation ont été proposées. On dispose alors d'un modèle numérique permettant de simuler la propagation de fissure en fatigue en intégrant le phénomène de refermeture. Des essais expérimentaux en mode I et en mode mixte, ont été effectués et exploités grâce à une technique de mesure de champs par corrélation d'image numérique. La comparaison des résultats de simulations numériques et d'essais montre les potentialités de la méthode.

MOTS CLÉS: fatigue, rupture, éléments finis étendus, plasticité, contact, propagation de fissure.

Table des matières

Table des matières i

Table des figures iii

Introduction 1

1 La propagation de fissure en fatigue : aspects expérimentaux et état de l'art 5
1.1 Aspects historiques du phénomène de fissuration par fatigue 6
1.2 Aspects expérimentaux 7
1.2.1 Résultats d'essais de propagation en fatigue en mode I et mixte . 7
1.2.2 Analyse des résultats par corrélation d'images numériques 8
1.3 État de l'art de la simulation de propagation de fissure par fatigue 13
1.3.1 Méthodes numériques : aspects généraux 13
1.3.2 Méthode des éléments finis 20
1.3.3 Méthode des éléments de frontière et méthode sans maillage . . . 21
1.3.4 Méthodes basées sur la partition de l'unité 22
1.3.5 Méthodes numériques de traitement du contact 22

2 Mécanique de la rupture : aspects non-linéaires et champs asymptotiques 25
2.1 Introduction 26
2.2 Mécanique linéaire de la rupture 26
2.2.1 Généralités en élasticité linéaire 27
2.2.2 Analyse expérimentale des champs de déplacement 31
2.3 Mécanique élasto-plastique de la rupture 33
2.3.1 Champs asymptotiques élasto-plastiques en pointe de fissure . . . 33
2.3.2 Obtention des paramètres de fissuration en plasticité confinée . . 43
2.4 Formulation variationnelle continue de la fissuration par fatigue 47
2.4.1 Formulation du problème global 47
2.4.2 Formulation itérative continue 49

3 Modélisation de non-linéarités par la méthode des éléments finis étendus 51
3.1 Introduction - Méthode des éléments finis étendus 52
3.1.1 Introduction 52
3.1.2 Discrétisation spatiale : méthode des éléments finis étendus 52

3.2 Prise en compte de non-linéarités comportementales 55
3.2.1 Base d'enrichissement EP : analyse des solutions asymptotiques . 55
3.2.2 Intégration numérique : une vision à deux échelles 59
3.2.3 Étude de plusieurs bases et critère de choix 62
3.3 Prise en compte des refermetures : contact et frottement 64
3.4 Résolution discrète du problème non-linéaire 64
3.4.1 Formulation discrétisée 64
3.4.2 Mise à jour des variables non-linéaires 68
3.5 Calcul numérique des paramètres de fissuration 68
3.6 Exemples numériques 69
3.6.1 Comparaison avec un calcul éléments finis 69
3.6.2 Comparaison avec un calcul X-FEM purement élastique 74
3.6.3 Calcul à fissure fixe avec refermeture 77

4 Simulation de propagation de fissure en fatigue 81
4.1 Introduction 82
4.2 Problème de référence et choix de la stratégie d'enrichissement 82
4.3 Gestion de plusieurs non-linéarités au cours de la propagation 84
4.3.1 Intégration numérique : extension de la vision à deux échelles . . 84
4.3.2 Traitement du contact et couplage avec l'enrichissement 86
4.4 Implémentation numérique 89
4.5 Exemples numériques 91
4.5.1 Éprouvette CT sollicitée en mode I 91
4.5.2 Éprouvette CTS : effet d'une surcharge 97
4.6 Comparaisons expérimentales 102
4.6.1 Obtention des FIC à partir des résultats expérimentaux 102
4.6.2 Éprouvette CT en mode I : étude de la procédure de calcul des FIC 103
4.6.3 Éprouvette cylindrique à fissure inclinée 109

Conclusions et perspectives 117

Annexe A 121

Annexe B 125

Annexe C 129

Annexe D 133

Annexe E 137

Annexe F 153

Bibliographie 157

Table des figures

1.1 Géométrie en mm de l'éprouvette CT B40W80 7
1.2 Paramétrage du chargement pour l'essai CT B40W80 à $R = 0.1$ 7
1.3 Géométrie en mm de l'éprouvette CCT B5W100 9
1.4 Géométrie de l'éprouvette cylindrique 9
1.5 Essais en cours et éprouvettes post-mortem 11
1.6 Pattern initial et pattern final représentés sur le même repère. 12
1.7 Calcul du champ de déplacement sur un pattern. 12
1.8 Trajet de fissuration pour l'essai CT B40W80 $R = 0.1$ 14
1.9 Champs de déformations corrélés pour l'essai CT B40W80 $R = 0.1$ . . . 15
1.10 Trajet de fissuration pour l'essai CCT B5W100 $R = 0.1$ 16
1.11 Norme du champ de déplacement corrélés essai CCT B5W100 $R = 0.1$. 17
1.12 Trajet de fissuration pour l'essai mode mixte cylindrique $R = 0.1$ à 45° . . 18
1.13 Norme du champ u corrélés essai mode mixte cylindrique $R = 0.1$ à 45° . 19

2.1 Modes de rupture 26
2.2 Paramétrage de la pointe de fissure 27
2.3 Notations pour le problème de référence 28
2.4 Déplacement vertical normalisé par $\sqrt{r}$ 31
2.5 Déplacement vertical et approximation en loi puissance 32
2.6 Zones de dominance en élasticité et en plasticité 33
2.7 $\tilde{\sigma}_{rr}$ en mode I en fonction de θ pour différents n 37
2.8 $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ en mode I en fonction de θ pour différents n 37
2.9 $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ en mode I en fonction de θ pour différents n 37
2.10 $\tilde{\sigma}_{rr}$ en mode II en fonction de θ pour différents n 38
2.11 $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ en mode II en fonction de θ pour différents n 38
2.12 $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ en mode II en fonction de θ pour différents n 38
2.13 Composante u_1 du champ asymptotique des déplacements en mode I . . . 41
2.14 Composante u_2 du champ asymptotique des déplacements en mode I . . . 41
2.15 Composante u_1 du champ asymptotique des déplacements en mode II . . 42
2.16 Composante u_2 du champ asymptotique des déplacements en mode II . . 42
2.17 Conventions pour l'intégrale de domaine et champ q en mode I 45

3.1 Une fissure quelconque placée sur un maillage - stratégie d'enrichissement 55

3.2 Approximations des champs HRR en mode I 57
3.3 Approximations des champs HRR en mode II 58
3.4 Sous triangles au cours de la propagation 60
3.5 Support nodal tranché et sous quadrangles associés 60
3.6 Sous-découpages pour le calcul des matrices de raideurs et de la plasticité 61
3.7 Construction des éléments d'interface sur les lèvres de la fissure. 64
3.8 Définition des couples (w,t) associés aux points de Gauss sur l'interface . 65
3.9 Fonction poids pour une fissure droite et pour une fissure courbe 69
3.10 Géométrie du spécimen SE(T) (a) - Maillage X-FEM (b) et CAST3M(c) . 70
3.11 Comparaison du saut de déplacement pour $n = 3.7$ et $n = 30$ en mode I . 71
3.12 Comparaison de l'intégrale J pour $n = 3.7$ et $n = 30$ en mode I 72
3.13 Comparaison de l'intégrale J sans enrichissement plastique en mode I . . 73
3.14 Géométrie du spécimen SE(T) (a) - Maillage X-FEM (b) et CAST3M(c) . 74
3.15 Comparaison du saut de déplacement pour $n = 3.7$ et 30 en mode mixte . 75
3.16 Comparaison de l'intégrale J pour $n = 3.7$ et $n = 30$ en mode mixte . . . 76
3.17 Comparaison des SIFs entre les cas élastique et plastique 78
3.18 Champ de déplacement et saut de déplacement à l'interface 79

4.1 Stratégie de calcul 82
4.2 Stratégie d'enrichissement au cours de la propagation 83
4.3 Sous découpage géométrique 85
4.4 Évolution de l'ensemble des sous éléments au cours de la propagation . . 85
4.5 Stratégie pour les éléments d'interface au cours de la propagation 87
4.6 Stratégie de couplage lorsque la fissure propage 88
4.7 (a) Géométrie en mm et (b) maillage de l'éprouvette CT 91
4.8 Champs de déplacement successifs à $F = F_{min}$ sur le maillage déformé . . 93
4.9 Déformation plastique cumulée à $F = F_{min}$ avant chaque propagation. . . 94
4.10 Efforts d'interface sur la déformée d'interface à $F = F_{min}$ 95
4.11 Composante σ_{yy} avant la $4^{ème}$ propagation sur différentes déformées . . . 96
4.12 σ_{yy} en fonction de ε_{yy} en un point de Gauss au cours de la propagation . . 96
4.13 (a) Géométrie en mm et (b) Conditions aux limites pour l'éprouvette CTS 97
4.14 Maillage de l'éprouvette CTS utilisé dans [SAN 05] 98
4.15 Maillage X-FEM de l'éprouvette CTS 99
4.16 Comparaison des déplacements verticaux sur l'interface pour a=50mm . . 100
4.17 Comparaison des déplacements verticaux sur l'interface pour a=50.5mm . 101
4.18 Champ q pour la corrélation d'image et zone de calcul 102
4.19 Longueur de fissure et K_I expérimentaux 104
4.20 Maillage de l'éprouvette CTB40W80 104
4.21 Répartition des pas de chargement entre deux propagations 105
4.22 Comparaison des FIC à $F = F_{max}$ pour la simulation à Δa imposé 105
4.23 EÉvolutionde K_I au cours du calcul et zones de refermeture 106
4.24 EÉvolutionde K_I au cours du calcul et zones de refermeture 107
4.25 Comparaison de la position de la fissure au cours du calcul et de l'essai . 108

4.26 paramètres du modèle d'Elber obtenus avec X-FEM et PREFFAS 108
4.27 Modèle et conditions aux limites pour l'éprouvette cylindrique 110
4.28 Comparaison du trajet de fissure expérimental et numérique 110
4.29 K_I et K_{II} obtenus par corrélation d'images numérique 111
4.30 Maillage de l'éprouvette Cylindrique 112
4.31 Déformation plastique cumulée finale et trajet de fissure 113
4.32 Efforts d'interface à $F = F_{min}$ et contrainte σ_{yy} 113
4.33 Configurations déformées amplifiées de l'interface aux efforts minimums 114
4.34 Déformation plastique cumulée, efforts d'interface et contraintes à $F = F_{min}$ 116

Introduction

La mécanique de la rupture est une science assez récente qui a vu la majeure partie de ses développements théoriques au cours du $XX^{ème}$ siècle. En parallèle, le phénomène de fatigue a intéressé la communauté scientifique une centaine d'années plus tôt, dès le début du $XIX^{ème}$ siècle. La problématique de ces deux domaines de la mécanique est identique : il s'agit pour l'ingénieur de prévoir le comportement des structures jusqu'à leur ruine. Les avancées scientifiques dans la prévision du comportement des structures et le besoin de réduire les coûts rendent ces problématiques de plus en plus importantes dans le processus de conception au sein de l'industrie mécanique, par exemple en aéronautique.

En mécanique de la rupture, on fait généralement la différence entre rupture fragile et rupture ductile (on parle même d'ailleurs plutôt de déchirure dans ce cas). Si les hypothèses de la rupture fragile sont bien adaptées aux matériaux fragiles tels que le PMMA, elle a d'abord intéressé les scientifiques du fait de ses hypothèses "simples". En effet, on considère pour le matériau un comportement élastique linéaire et on suppose que la plasticité ne peut se développer qu'en pointe de fissure dans une zone de taille réduite par rapport aux dimensions caractéristiques de la structure. On parle alors des hypothèses de *Small Scale Yielding* et la zone plastique est entièrement négligée dans cette modélisation dite *LEFM* (Linear Elastic Fracture Mechanics) [BUI 78]. Dans le cas de la rupture ductile, la zone plastique n'est plus négligeable et peut s'étendre bien au delà de la pointe de fissure ; on parle alors de conditions *EPFM* (Elastic Plastic Fracture Mechanics) [PLU 89]. Le champ d'application de la mécanique élasto-plastique de la rupture est relativement vaste puisqu'il va de la plasticité peu étendue autour de la pointe de fissure jusqu'à la déchirure ductile, dans laquelle le matériau peut supporter d'importantes déformations plastiques avant de rompre. On peut alors appliquer la mécanique de la rupture adaptée à ce type de problèmes [MAR 99] ou utiliser les théories de l'endommagement qui permettent d'une part de traiter des problèmes sans défaut initial et d'autre part de s'affranchir du problème de critère de propagation [SUF 04].

Dans le cas de la rupture par fatigue, la mécanique élastique linéaire de la rupture est très largement utilisée par les ingénieurs car elle permet l'utilisation de critères énergétiques globaux tels que les facteurs d'intensité des contraintes. Pour les matériaux métalliques et les alliages d'aluminium, la zone plastique, bien qu'elle soit de taille réduite, a une influence importante sur les phénomènes physiques associés à la propagation [ELB 70]. Les ingénieurs utilisent alors des modèles [DAV 85, NEW 81, NAS 02] permettant de prendre en compte ces phénomènes avec des hypothèses LEFM. On

s'intéressera donc dans cette thèse à la prise en compte de ces phénomènes physiques directement dans un cadre EPFM.

L'importance croissante de la simulation numérique dans le processus de conception industriel a entraîné une augmentation importante du nombre de problèmes accessibles par les méthodes numériques modernes. Que ce soit en simulation du phénomène de rupture ou dans d'autres domaines de la mécanique, la méthode des Éléments Finis a été largement développée et utilisée. Elle est désormais capable d'aller bien au-delà des simulations statiques élastiques linéaires, et de traiter le cas des non linéarités matérielles ou comportementales ainsi que les problèmes de dynamique rapide. Un certain nombre de problèmes sont cependant plus difficilement accessibles à la méthode des éléments finis ; c'est notamment le cas pour les problèmes à discontinuités mobiles. La difficulté vient alors du fait que l'on doit représenter explicitement la discontinuité à l'aide du maillage et ce quelque soit sa nature (interface entre deux matériaux, changement de phase, fissure, interaction fluide-structure...). Un pré-traitement fastidieux du problème s'impose alors et est d'autant plus délicat que la topologie de la discontinuité est complexe. Cette opération est encore plus complexe lorsque la discontinuité est mobile, puisqu'il est pratiquement indispensable de procéder à des opérations de remaillage dans ce cas. Bien qu'on puisse envisager des opérations automatiques de remaillage pour les problèmes bi-dimensionnels, le coût numérique devient vite prohibitif dans le cas de problèmes tridimensionnels à géométries complexes. Au delà de ces aspects purement géométriques, il faut également envisager le problème du transfert d'information lors de la procédure de remaillage. Cette opération peut alors, en plus du coût numérique non négligeable, entraîner des problèmes théoriques fondamentaux tels que la non conservation de l'énergie et des variables non-linéaires entre les deux discrétisations.

C'est dans cette optique que de nouvelles méthodes numériques permettant de s'affranchir d'une description explicite des discontinuités ont été récemment développées. Parmi celles-ci, celle qui nous intéresse dans ce mémoire est la méthode des Éléments Finis Étendus. Il s'agit d'une extension de la méthode des éléments finis qui exploite la propriété de partition de l'unité des fonctions de formes afin d'enrichir l'approximation. On utilise alors des fonctions d'enrichissement permettant de prendre en compte la solution quasi-exacte du problème voulu et ainsi de représenter implicitement la discontinuité associée. Grâce à cela, il n'est plus nécessaire de conformer maillage et discontinuité. L'autre avantage principal de cette méthode est que l'on peut modéliser la propagation de la discontinuité en adaptant les fonctions d'enrichissement tout en conservant un maillage identique, on s'affranchit alors du remaillage.

Un des objectifs de cette thèse est de représenter le phénomène de refermeture de fissure dans un modèle capable de simuler une propagation de fissure en fatigue sans remaillage. Il est donc nécessaire de modéliser d'une part la plasticité en pointe de fissure et d'autre part le contact et le frottement entre les lèvres de la fissure. Le problème théorique se décompose en trois parties. Dans un premier temps on cherchera à modéliser la présence de la fissure et pour cela déterminer la singularité des champs de déplacement

et de contraintes autour de la pointe de fissure en plasticité. On s'appuie alors sur les champs théoriques en pointe de fissure pour construire une nouvelle base d'enrichissement X-FEM capable de capturer la singularité plastique. Il est également nécessaire de construire une stratégie d'intégration numérique permettant d'intégrer correctement cette base (qui plus riche que celle utilisée en LEFM) et permettant d'avoir une description fine de l'état de contraintes autour de la pointe de fissure. La seconde phase consiste en la mise en place d'une formulation mécanique du problème couplé *fissure-plasticité-contact* ainsi que l'estimation des paramètres de fissuration nécessaires à l'écriture d'un critère de propagation. Enfin, il s'agit de représenter la propagation à proprement parler, et notamment de gérer l'évolution des non-linéarités au cours de celle-ci. On doit alors développer une stratégie sans projection des variables non-linéaires et permettant d'avoir une description fine de la plasticité et du contact.

Le plan de ce mémoire va découler de ce découpage du problème et présentera, après une description des techniques existantes, les développements numériques apportés. Le premier chapitre dresse un aperçu d'un point de vue théorique et numérique des techniques existantes en ce qui concerne la propagation de fissure en fatigue. Le second chapitre est concentré sur les aspects théoriques du problème. Après avoir introduit les concepts de mécanique de la rupture LEFM puis EPFM, on s'intéresse à l'étude de la singularité et des champs asymptotiques élasto-plastiques en pointe de fissure. Enfin on propose une formulation faible originale de type Lagrangien augmenté du problème considéré. Le troisième chapitre présente les développements de la méthode des éléments finis étendus dans un cadre non-linéaire. On introduit un nouvel enrichissement singulier permettant de représenter la plasticité autour de la pointe de fissure. Les aspects d'intégration numérique et de traitement du contact sont également présentés ainsi que la formulation discrète du problème. Enfin on s'intéresse dans le dernier chapitre au problème de la propagation ; les aspects numériques liés à l'évolution des non-linéarités, tels que l'intégration numérique, la stratégie d'enrichissementet le le couplage enrichissement sont étudiés.

Comme dans tout problème de simulation numérique, il nous paraît essentiel de pouvoir nous appuyer sur des résultats expérimentaux qui nous permettront d'évaluer la pertinence du modèle et sa capacité à rendre compte des phénomènes physiques en jeu. La méthode développée permettant de traiter a priori des géométrie de fissure quelconque, il est intéressant de disposer de résultats expérimentaux variés. Les bases de données d'essais de propagation de fissure en fatigue disponibles au sein de nos partenaires dans cette étude que sont la Délégation Générale pour l'Armement et le Centre Technique des Industries Mécaniques regroupant principalement des cas de fissure droite en mode 1, nous avons souhaité réaliser des essais avec propagation non droite en mode mixte. Un essai spécifique a pu être développé et expérimenté au sein du Centre d'Étude Aéronautique de Toulouse de la DGA. La relative difficulté d'employer les techniques habituelles de mesure des paramètres de fissuration sur ce type d'essai nous a conduit à utiliser une technique de mesure de champ de déplacement par corrélation d'images numériques développée au sein du laboratoire.

Chapitre 1

La propagation de fissure en fatigue : aspects expérimentaux et état de l'art

Sommaire

1.1 Aspects historiques du phénomène de fissuration par fatigue 6
1.2 Aspects expérimentaux 7
1.2.1 Résultats d'essais de propagation en fatigue en mode I et mixte . . 7
1.2.2 Analyse des résultats par corrélation d'images numériques 8
1.3 État de l'art de la simulation de propagation de fissure par fatigue . . . 13
1.3.1 Méthodes numériques : aspects généraux 13
1.3.2 Méthode des éléments finis 20
1.3.3 Méthode des éléments de frontière et méthode sans maillage 21
1.3.4 Méthodes basées sur la partition de l'unité 22
1.3.5 Méthodes numériques de traitement du contact 22

1.1 Aspects historiques du phénomène de fissuration par fatigue

Les débuts de la recherche sur le phénomène de la fatigue remontent aux débuts du $XIX^{ème}$ siècle. La première étude publiée sur ce phénomène est due à un ingénieur des mines allemand du nom d'Albert [ALB 38] ; mais c'est Poncelet [PON 39] qui fut le premier en 1839 à introduire le terme *fatigue* à propos de rupture de matériaux métalliques. Au milieu du $XIX^{ème}$ siècle, les recherches se sont sensiblement développées avec l'industrialisation croissante et notamment grâce à l'essors du transport ferroviaire. Les premiers investissements importants en terme de recherches ont été déclenchés par un accident de train sur la ligne Paris-Versailles survenu le 8 mai 1842 où la rupture d'un essieu a entraîné la mort de plusieurs dizaines de personnes.

En 1860, Wölher - ingénieur des chemins de fer allemands - a publié ses résultats d'essais systématiques de rupture par fatigue sur essieux de locomotive [WÖH 60]. Il a alors observé que la charge limite supportée en fatigue était bien inférieure à celle supportée en statique. Il est également à l'origine de la caractérisation de la fatigue par l'approche des courbes dites S-N (amplitude de contrainte - nombre de cycles à rupture), qui est encore couramment employée aujourd'hui. Enfin, il est le premier à avoir parlé du concept d'endurance limite. Dans la continuité de ces travaux, Goodman [GOO 99] a proposé en 1899 une approche prenant en compte les contraintes non purement alternées. En 1910, Basquin [BAS 10] a pu proposer un modèle empirique permettant de caractériser la limite d'endurance des matériaux.

Plus récemment, depuis le milieu du $XX^{ème}$ siècle, Palmgren [PAL 24] puis Miner [MIN 45] ont proposé des règles de cumul de l'endommagement dû à la fatigue pour les sollicitations à amplitude variable. Enfin, Manson [MAN 54] et Coffin [COF 54] furent les premiers à s'intéresser à l'influence de l'amplitude de déformation plastique sur la durée de vie.

En ce qui concerne la fissuration, il a fallu attendre le milieu du $XX^{ème}$ siècle pour disposer des outils et concepts théoriques pour décrire le problème physique associé à la présence d'une fissure macroscopique. Les travaux de Griffith [GRI 21] puis ceux d'Irwin [IRW 57] ont donné naissance à la mécanique linéaire de la rupture (Linear Elastic Fracture Mechanics LEFM) et à la notion de facteur d'intensité des contraintes. C'est Paris [PAR 61, PAR 63], qui fut le premier à relier mécanique de la rupture et fatigue en suggérant que le taux de croissance d'une fissure par nombre de cycle da/dN pouvait être relié à l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK pour un chargement cyclique à amplitude constante. Enfin, Elber [ELB 70] a observé qu'une fissure de fatigue pouvait se refermer sous un chargement de traction cyclique. Il a alors proposé de relier da/dN à une amplitude de facteur d'intensité des contraintes effective ΔK_{eff} et non plus ΔK. Il a également montré l'influence de la plasticité en pointe de fissure sur ce phénomène de refermeture, appelé *plasticity induced crack closure*.

1.2 Aspects expérimentaux

1.2.1 Résultats d'essais de propagation en fatigue en mode I et mixte

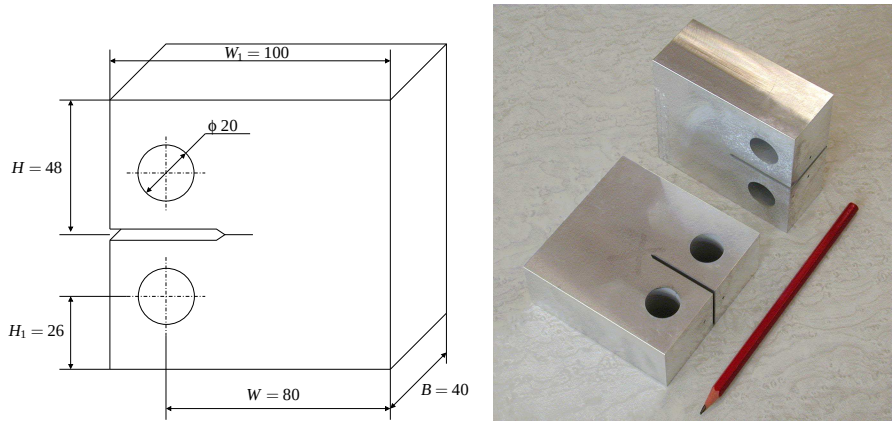


FIG. 1.1: Géométrie en mm de l'éprouvette CT B40W80

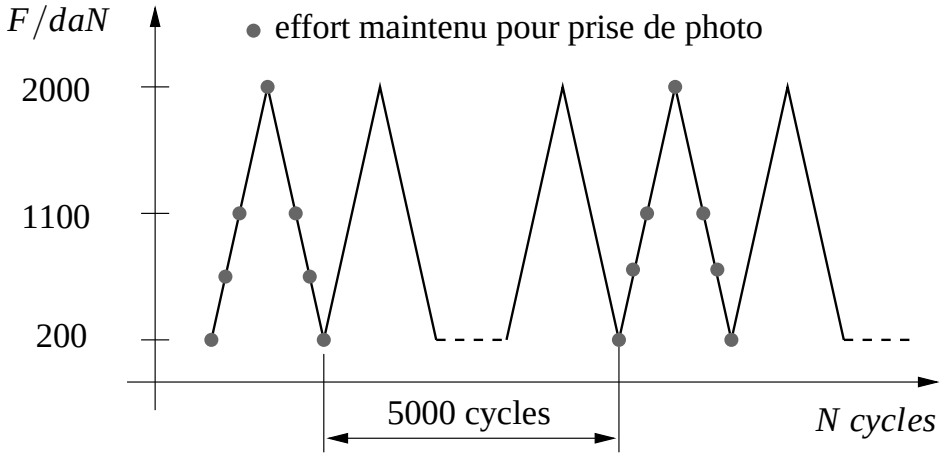


FIG. 1.2: Paramétrage du chargement pour l'essai CT B40W80 à $R = 0.1$

Au cours de cette thèse, plusieurs essais expérimentaux de propagation de fissure par fatigue ont été effectués. Ils ont été réalisés d'une part sur éprouvettes CT (Compact Tension) et CCT (Center Crack Tension), et d'autre part sur des éprouvettes non standards en mode mixte. La réalisation de ces essais a été faite par la DGA/CEAT pour les essais en mode I ainsi que l'essai en mode mixte sur éprouvette cylindrique.

Les différentes informations relatives aux essais sont regroupées dans le tableau 1.1. La géométrie et des photos des éprouvettes sont présentées sur la figure 1.1 pour l'éprouvette CT, sur la figure 1.3 pour l'éprouvette CCT et sur la figure 1.4 pour l'éprouvette cylindrique (la géométrie des éprouvettes cylindriques est présentée en détail en annexe

Éprouvette	type	ratio R	machine	fréquence	nc à rupture
CT B40W80	DP	0.1	SCHENCK 20t	10 Hz	70 000
CT B40W80	DP	0.5	SCHENCK 20t	10 Hz	350 000
CCT B5W100	CP	0.1	SCHENCK 20t	10 Hz	90 000
CCT B5W100	CP	0.1 + s.	SCHENCK 20t	10 Hz	2 700 000
Cylindrique 45°	DP	0.1	SCHENCK 100t	5 Hz	240 000
Cylindrique 30°	DP	0.1	SCHENCK 100t	5 Hz	240 000
Cylindrique 45°	DP	0.5	SCHENCK 100t	5 Hz	1 500 000

TAB. 1.1: Paramètres principaux des différents essais réalisés au CEAT

A). Le matériau utilisé pour tous ces essais est un alliage d'aluminium 2024-T351, ses propriétés mécaniques sont présentées dans le tableau 1.2. On peut observer sur la figure 1.5 un essai en cours sur une éprouvette (a) cylindrique et (b) CT où on distingue le système d'éclairage ainsi que la caméra numérique utilisée pour les prises de vues. On peut également observer sur la figure 1.5 des images des éprouvettes CT, CCT et cylindrique en fin d'essai. Un exemple de paramétrage de chargement pour l'essai CT B40W80 à $R = 0.1$ est présenté sur la figure 1.2, où on peut observer les instants choisis pour les prises des photos qui seront utilisées pour la corrélation d'images numériques (les paramétrages pour les autres essais sont présentés en annexe A figure A.2). Les instants de prises de vues sont définis dans le programme de la machine d'essai qui maintient l'effort et envoie un signal "trigger" à la caméra afin de prendre la photo. La caméra numérique qui a été utilisée pour les prises de vues est une caméra CCD 10 bits ayant une résolution de 1024x1024 pixels, habituellement utilisée pour les essais dits de "choc à l'oiseau".

1.2.2 Analyse des résultats par corrélation d'images numériques

1.2.2.1 Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images

Méthode de corrélation La technique de corrélation d'images numériques, qui date d'une vingtaine d'années, a été principalement développée par Sutton *et al.* [SUT 83, SUT 86]. La structure à étudier est recouverte d'un motif aléatoire. On suppose disposer d'une image numérique initiale et d'une image numérique finale déformée. Une image numérique se présente comme une fonction discrète de niveaux de gris répartis sur les pixels formant une grille régulière. En corrélant les informations provenant des deux images on peut estimer le déplacement de différents points de l'image initiale vers l'image finale.

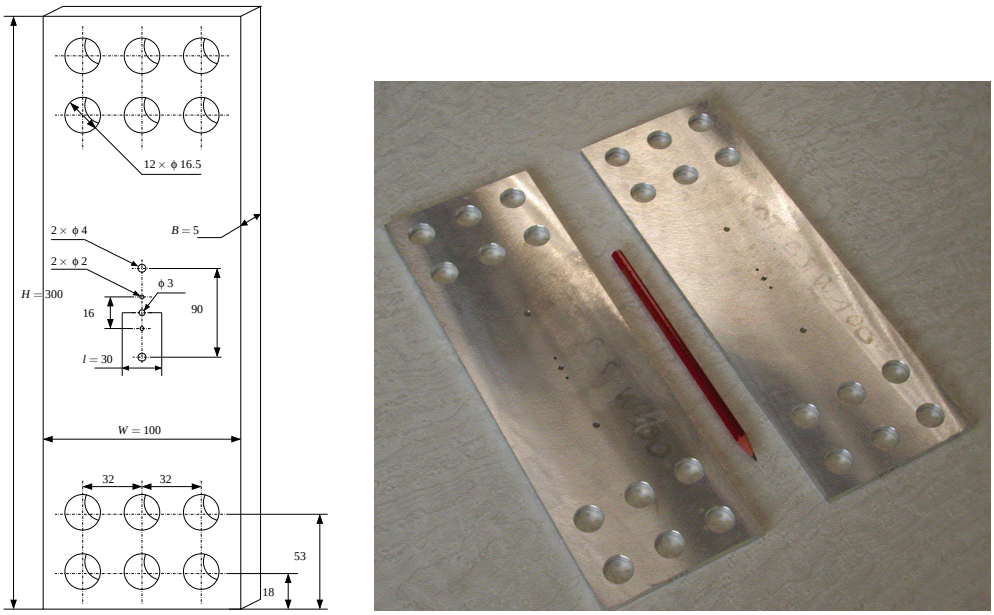


FIG. 1.3: Géométrie en mm de l'éprouvette CCT B5W100

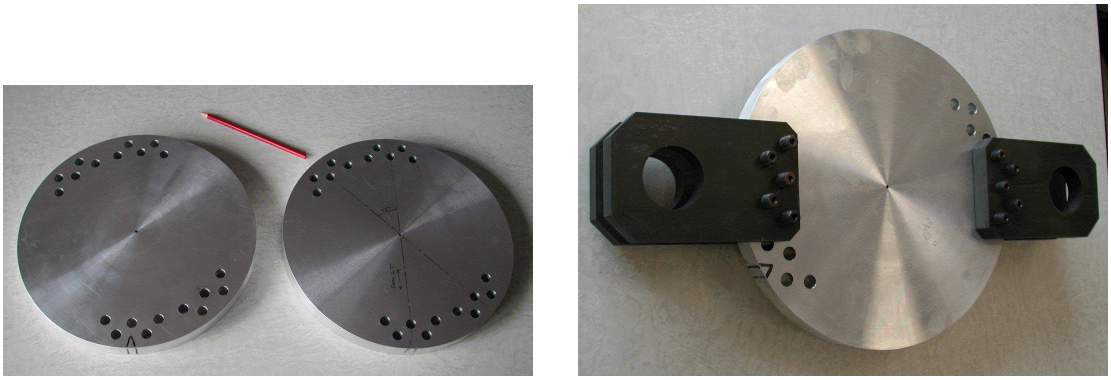


FIG. 1.4: Géométrie de l'éprouvette cylindrique

Afin d'obtenir une précision sub-pixel, les niveaux de gris des images sont interpolés par une fonction bilinéaire ou spline cubique, ce qui permet d'obtenir une fonction continue de niveaux de gris sur toute l'image. Le calcul de corrélation s'effectue sur des ensembles de pixels appelés pattern dont les centres sont disposés régulièrement aux centres des éléments de la grille formée par les pixels de l'image initiale.

Soient $f(x,y)$ et $f^*(x^*,y^*)$ les fonctions discrètes représentant le niveau de gris d'un pattern sur l'image initiale et finale. (x,y) et (x^*,y^*) représentent les coordonnées du centre d'un pattern de l'image initiale et de l'image finale (cf. figure 1.6). La corrélation détermine alors un champ de déplacement (u,v) de l'image initiale qui satisfait au mieux la relation :

$$f^*(x^*,y^*) - f(x+u(x,y),y+v(x,y)) = 0 \tag{1.1}$$

Module de Young, E	71900 MPa
Coefficient de Poisson, ν	0.3
Limite élastique, σ_Y	359 MPa
Coefficient d'écrouissage, K	438 MPa
Exposant d'écrouissage, n	30.3
Coefficient de la droite de Paris, C(R=0.1)	3.25 E-8
Exposant de la droite de Paris, m	3.42

TAB. 1.2: Paramètres matériau pour l'alliage d'aluminium 2024-T351

Dans un premier temps, le champ de déplacement est supposé homogène bilinéaire à l'intérieur du pattern :

$$\begin{cases} u(x,y) = a_u.x + b_u.y + c_u.x.y + d_u \\ v(x,y) = a_v.x + b_v.y + c_v.x.y + d_v \end{cases} \tag{1.2}$$

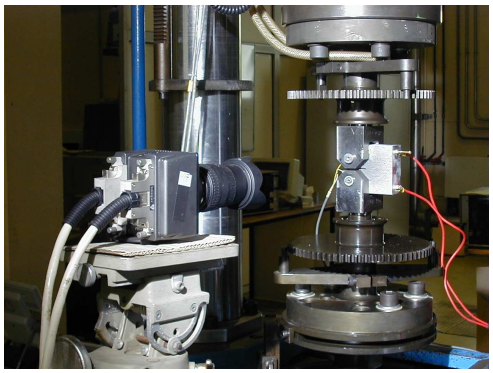
Cette approximation permet de mesurer les déplacements de corps rigides et les déformations linéaires. L'utilisation d'un coefficient de corrélation croisé permet alors d'obtenir le champ de déplacement (u,v) :

$$C = 1 - \frac{\int_{S_p} f(x,y)\, f^*(x^*,y^*)dxdy}{\sqrt{\int_{S_p}(f(x,y))^2 dxdy \int_{S_p}(f^*(x^*,y^*))^2 dxdy}} \tag{1.3}$$

Algorithme de corrélation sur la zone d'étude. Lors de l'initialisation de l'algorithme, on définit la position d'un pattern "de référence" sur les images initiales et finales, ce qui permet d'avoir une solution approximative du champ de déplacement (u,v) pour le pattern considéré. Les composantes du champ de déplacement pour ce pattern (centré en *m*) sont déterminées par un processus itératif comme présenté sur la figure 1.7. La corrélation est effectuée sur les quatre carrés centrés en *A*, *B*, *C* et *D*, sommets du pattern centré en *m* (figure 1.7 (a)).

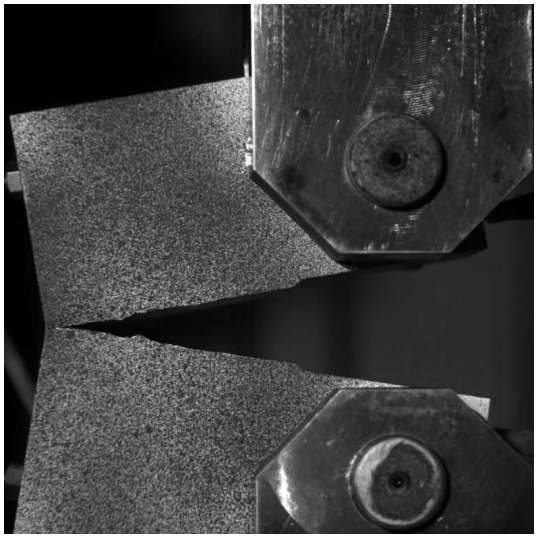
Les carrés sont balayés sur l'image finale. Leur position est obtenue pour la meilleure corrélation et un premier champ de déplacement est évalué pour le pattern central (figure 1.7 (b)). Les carrés sont adaptés selon le champ de déplacement obtenu à l'itération précédente. Le balayage est réitéré et on obtient un nouveau champ de déplacement pour le pattern (figure 1.7 (c)). On a atteint la convergence lorsque la précision souhaitée est atteinte entre deux itérations (figure 1.7 (d)). La solution calculée pour le premier pattern est utilisée comme solution initiale pour les patterns voisins, la corrélation est ainsi réalisée de proche en proche sur l'ensemble du domaine voulu. On obtient ainsi grâce à la corrélation d'image un champ de déplacement discrétisé sur la grille de corrélation avec une précision de l'ordre de 1/100 de pixel [TOU 97].

(a)

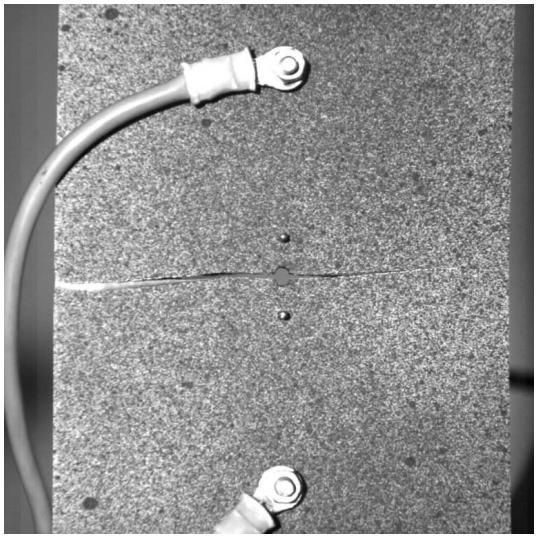


(b)

(c)



(d)



(e)

FIG. 1.5: Essai en cours sur (a) éprouvette cylindrique, (b) CT. (c) Éprouvette cylindrique reconstituée après rupture. Éprouvette (d) CT, (e) CCT à la fin d'un essai.

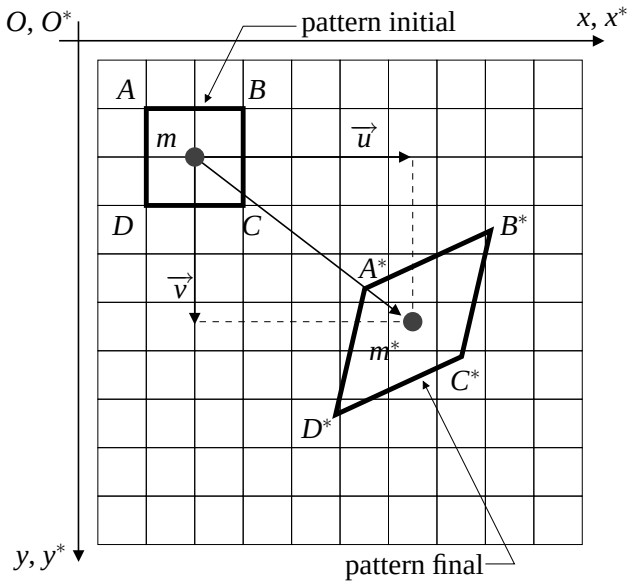
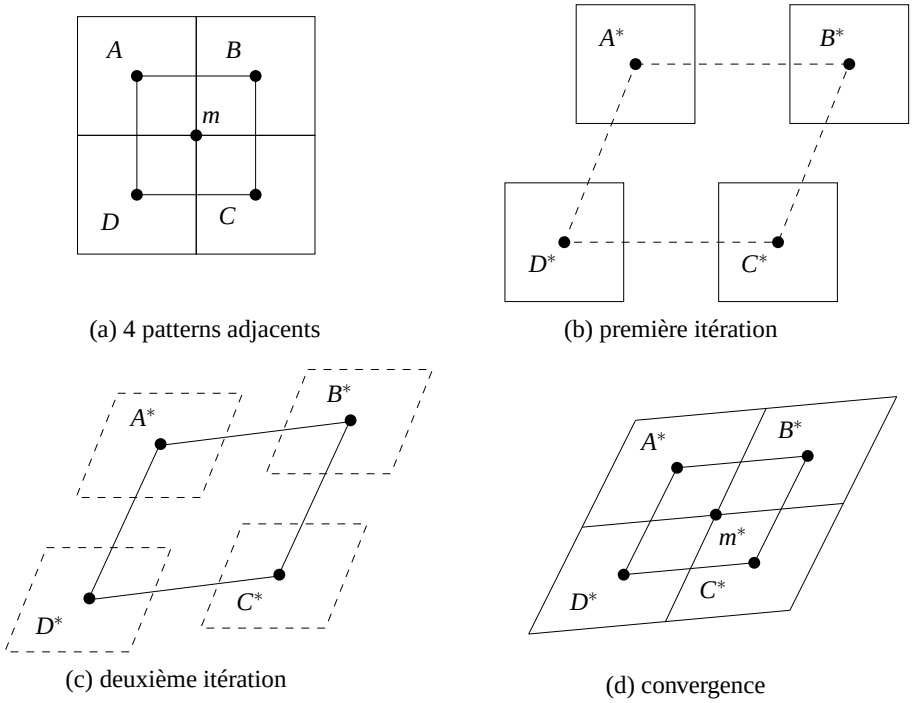


FIG. 1.6: Pattern initial (*ABCD* centré en *m*) et pattern final ($A^*B^*C^*D^*$ centré en m^*) représentés sur le même repère.



(a) 4 patterns adjacents

(b) première itération

(c) deuxième itération

(d) convergence

FIG. 1.7: Calcul du champ de déplacement sur un pattern.

1.2.2.2 Analyse des résultats

Les photos obtenues au cours des essais ont été corrélées afin d'obtenir les champs de déplacement et de déformations. On peut observer sur la figure 1.8 des photos de

l'essai CT B40W80 $R = 0.1$ prises à différents instants à $F = F_{max}$ et sur la figure 1.9 une composante du champ de déformations aux mêmes instants. On peut constater sur les photos que la résolution ne permet pas d'observer la fissure à l'oeil nu sauf à la fin de l'essai. On peut cependant voir la trace de la fissure sur le champ de déformations grâce à la précision de la corrélation d'images numériques.

On peut observer sur les figures 1.10 et 1.11, respectivement 1.12 et 1.13, les photos et la norme du champ de déplacement pour l'essai CCT B5W100 $R = 0.1$, respectivement pour l'essai mode mixte cylindrique $R = 0.1$ à 45°, à différents instants à $F = F_{max}$.

Pour les essais en mode I (éprouvettes CT et CCT), la corrélation sous sa forme actuelle permet d'estimer la position de la pointe de fissure "en peau" à comparer avec la moyenne dans l'épaisseur donnée par les méthodes de potentiel. Ceci est d'autant plus visible à mesure que la fissure grandit comme on peut l'observer sur les figures 1.9. Sur l'essai en mode mixte c'est le seul moyen d'obtenir cette information, la méthode du potentiel n'étant pas applicable (la seule autre possibilité étant l'observation par un opérateur).

L'essai sur éprouvette cylindrique en mode mixte étant un essai non normalisé, et les essais en fatigue en mode mixte étant plus rares, il est intéressant d'analyser qualitativement les résultats obtenus. En observant les figures 1.13, on peut constater que la fissure tourne assez rapidement pour se positionner perpendiculairement à la charge, que ce soit pour une fissure initiale à 45°ou 30°. Par ailleurs on a pu constater au cours de l'essai un bruit assez important émanant de l'éprouvette. L'observation post-mortem des faciès de rupture suggère que ces bruits sont dus à des frottements entre les lèvres de la fissure au niveau de la zone de préfissuration en mode I et des premiers millimètres de propagation en mode mixte. On peut observer sur cet essai que la rupture semble se faire par clivage, l'angle de propagation étant semblable à ce qu'on peut obtenir dans un essai statique en élasticité linéaire [RÉT 05a, RÉT 05c]. On peut alors supposer, comme proposé dans la littérature [MA 05], que la direction de propagation en mode mixte en fatigue peut être déterminée par des critères classiques élastiques de type contrainte circonférentielle maximale [BUI 78].

1.3 État de l'art de la simulation de propagation de fissure par fatigue

1.3.1 Méthodes numériques : aspects généraux

De nombreuses méthodes numériques sont appliquées à la propagation de fissure en fatigue. Pour toutes ces méthodes, il est nécessaire de pouvoir définir correctement les conditions aux limites en terme de chargement afin d'obtenir des résultats fidèles à la réalité. Le cas le plus répandu consiste en un chargement cyclique à amplitude constante qui permet d'étudier un certain nombre de phénomènes. Cependant les structures réelles sont soumises à des chargements aléatoires bien souvent difficiles à représenter. En effet, la prise en compte de ce type de sollicitation impose de calculer chaque cycle, ce qui

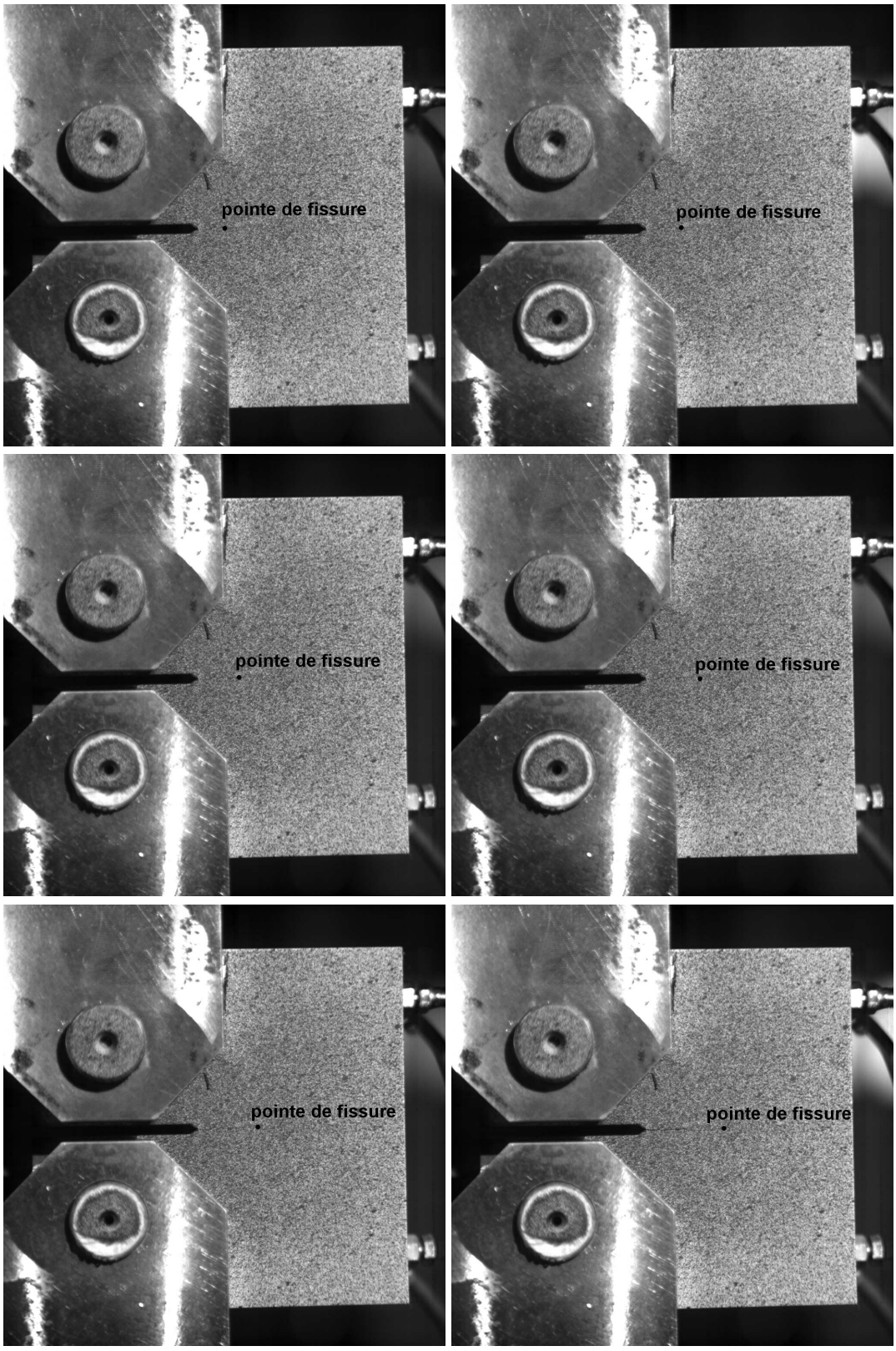


FIG. 1.8: Trajet de fissuration à différents efforts maximums pour l'essai CT B40W80 $R = 0.1$

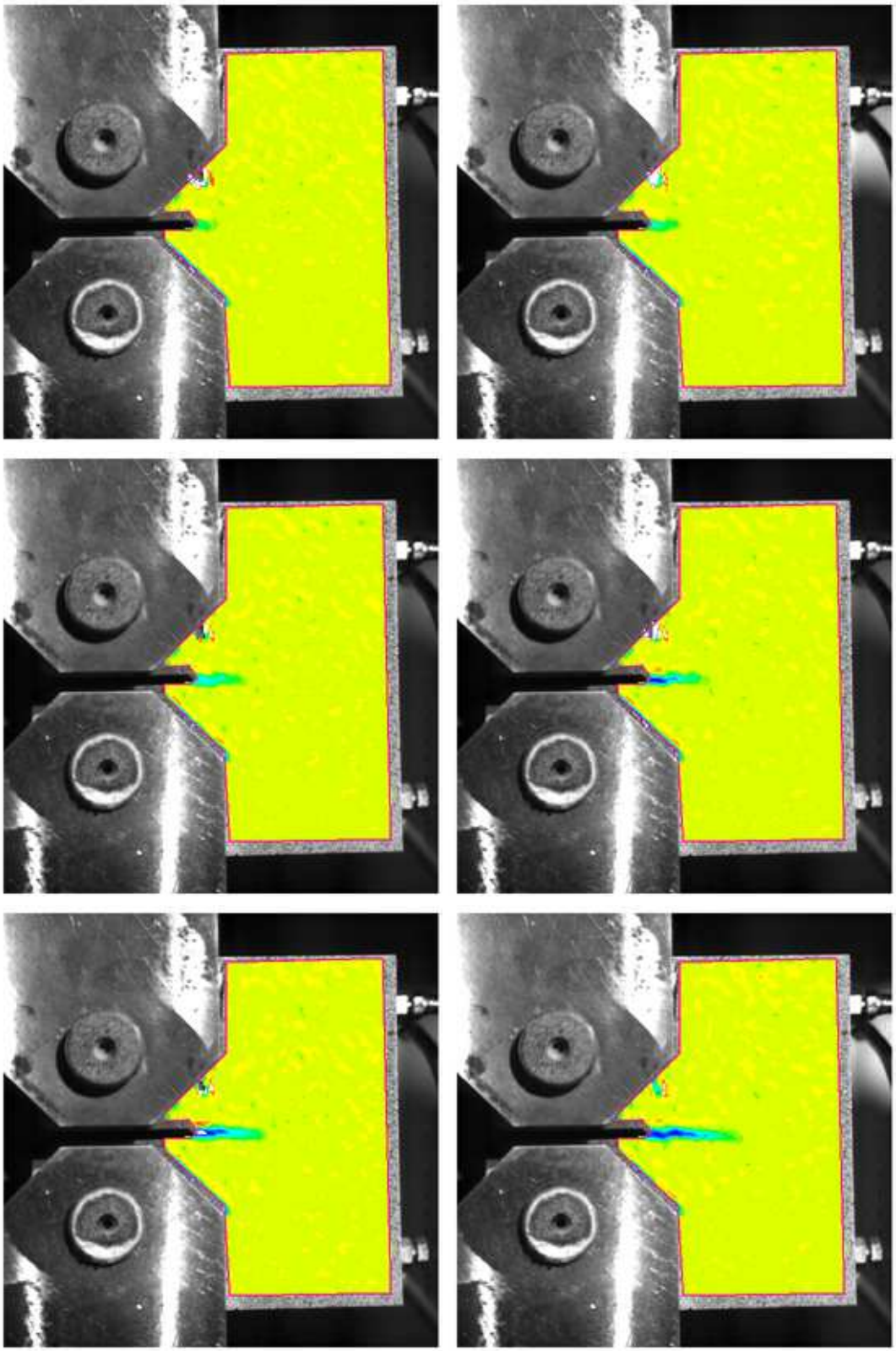


FIG. 1.9: Champs de déformations corrélés à différents efforts maximums pour l'essai CT B40W80 $R = 0.1$

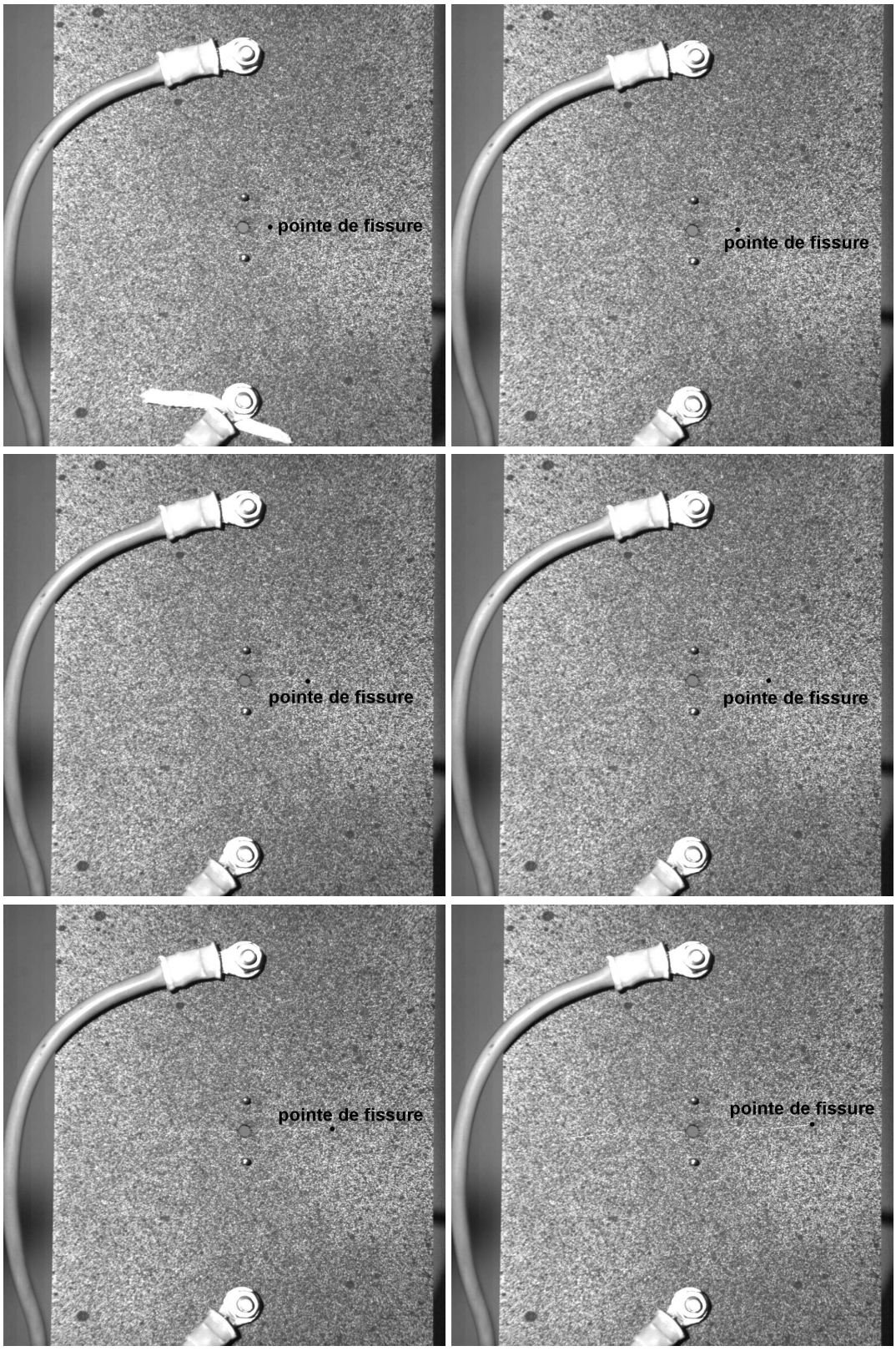


FIG. 1.10: Trajet de fissuration à différents efforts maximums pour l'essai CCT B5W100 $R = 0.1$

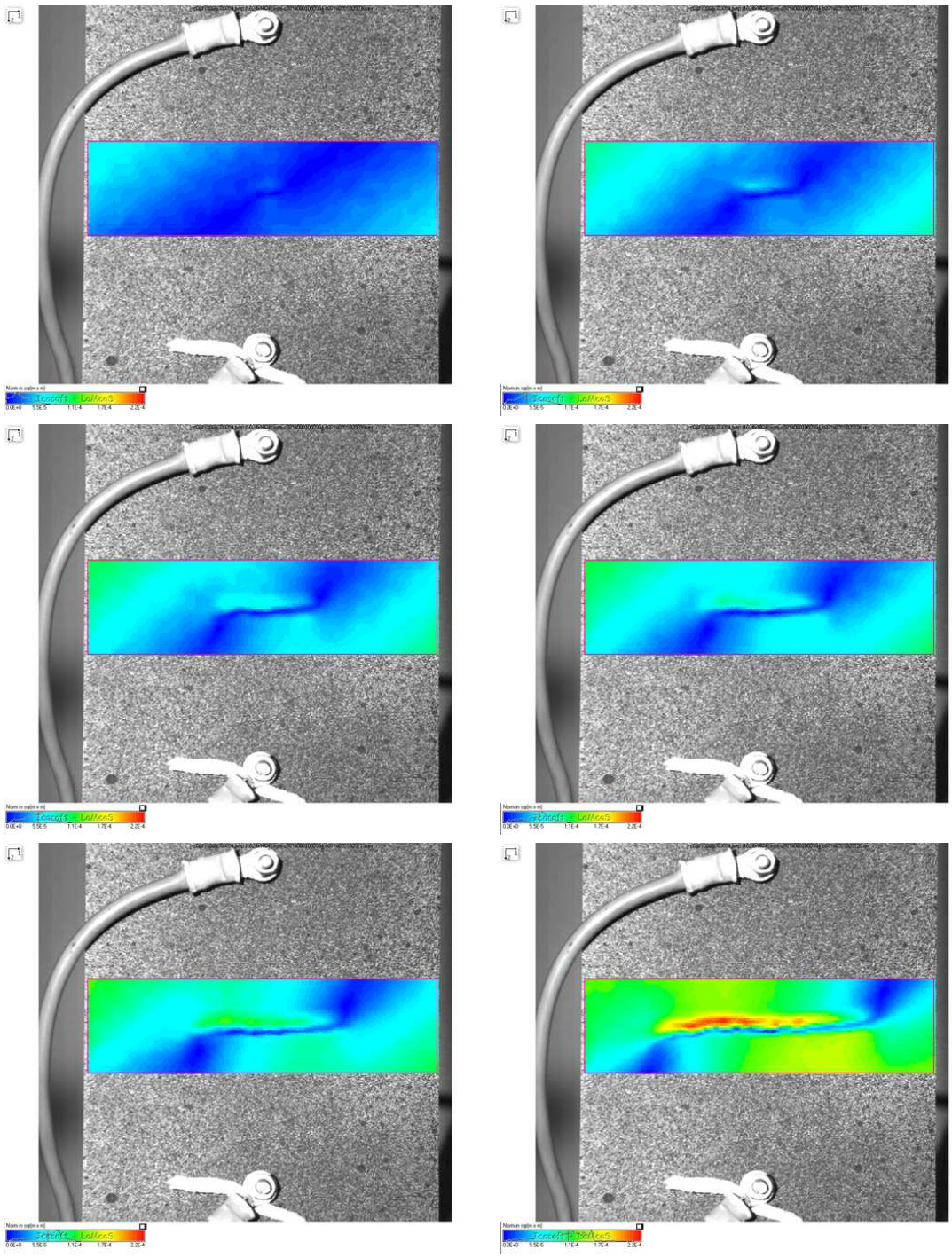


FIG. 1.11: Norme du champ de déplacement corrélés à différents efforts maximums pour l'essai CCT B5W100 $R = 0.1$

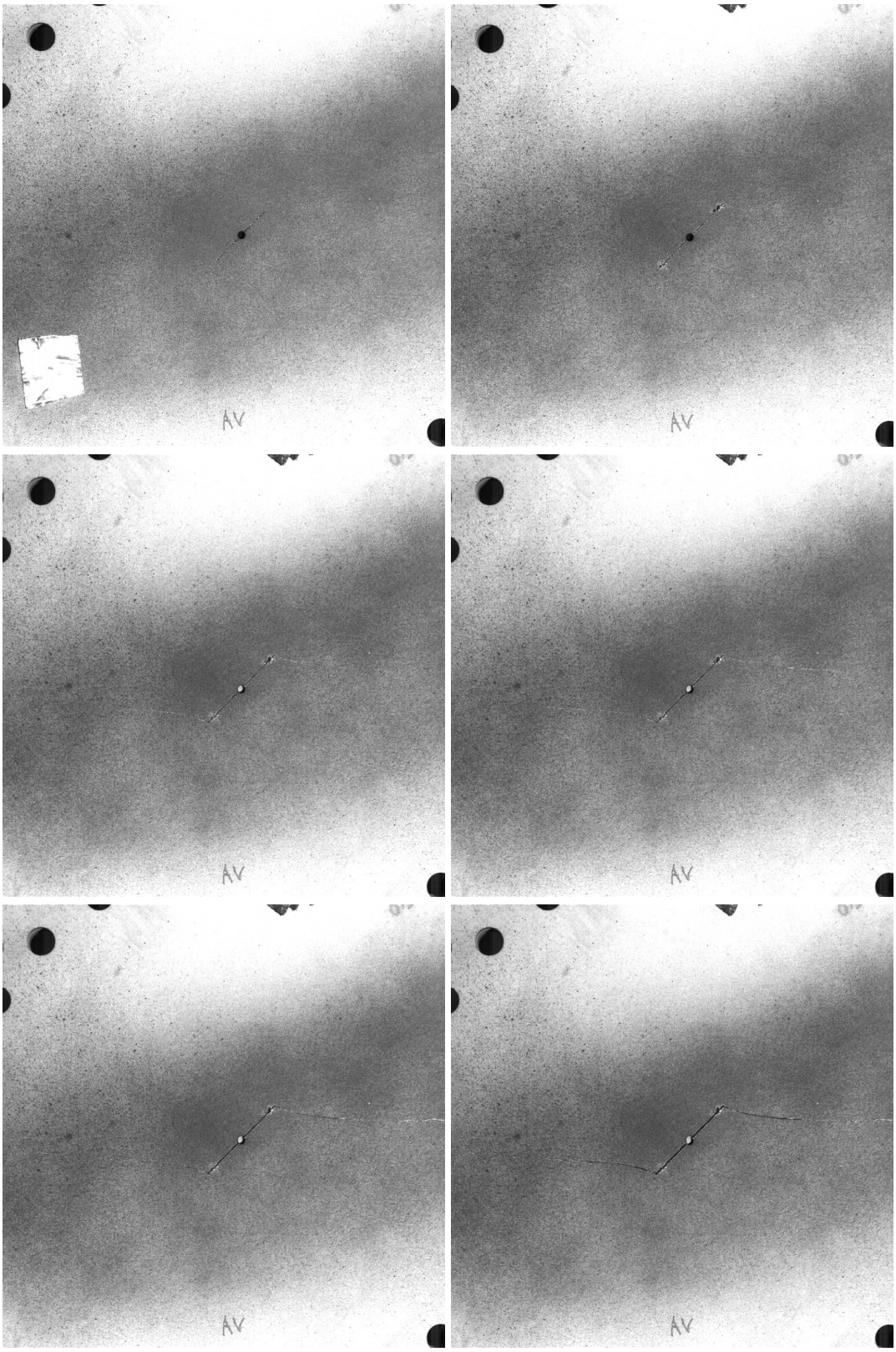


FIG. 1.12: Trajet de fissuration à différents efforts maximums pour l'essai mode mixte cylindrique $R = 0.1$ à 45°

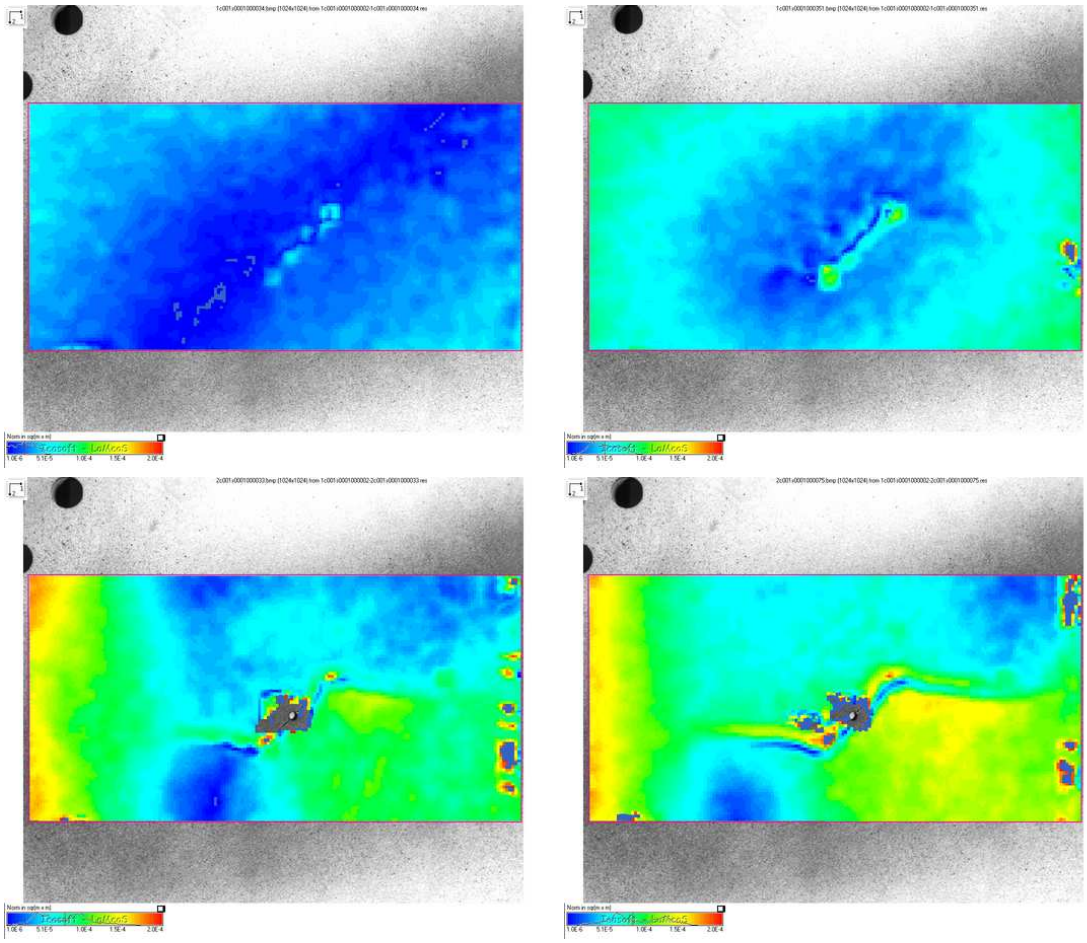


FIG. 1.13: Norme du champ de déplacement corrélés à différents efforts maximums pour l'essai mode mixte cylindrique $R = 0.1$ à 45°

conduit dans la plupart des cas à des calculs beaucoup trop longs, voir irréalisables. Le travail des ingénieurs consiste alors à définir des spectres de chargement plus simples mais représentatifs des sollicitations vues par un composant en service (on pourra citer comme exemples les spectres "*TWIST*", "*MINI-TWIST*", et "*FALSTAFF*" utilisés dans l'aéronautique [NAS 02]).

Malgré la relative simplification que permet l'utilisation de ces spectres "complexes", le calcul de chaque cycle reste encore fastidieux. Il faut alors utiliser des règles permettant de traduire ce chargement complexe en une sollicitation à amplitude constante équivalente. On peut citer plusieurs méthodes dites de "comptage des cycles" : comptage des pics (peak counting), dépassements de niveaux (level crossing) ou rainflow. Dans le cas des chargements à amplitude variable déterministe on pourra alors utiliser des règles de cumul de dommage, la plus couramment utilisée étant la loi de cumul linéaire proposée par Palmgren [PAL 24] puis Miner [MIN 45]. L'utilisation de ces différentes méthodes permet ainsi d'obtenir une sollicitation à amplitude constante équivalente et ainsi d'utiliser entre autre la loi de propagation proposée par Paris [PAR 61].

Plusieurs alternatives aux méthodes numériques évitant de calculer chaque cycle sont utilisées couramment par les ingénieurs. Il s'agit alors de modèles semi-analytiques permettant par exemple d'obtenir l'amplitude effective du facteur d'intensité des contraintes [SOL 04a, SOL 04b]. On peut également citer le modèle "*PRÉFFAS*" (PRÉvision de la Fissuration en Fatigue AéroSpatiale) [DAV 85] utilisé dans l'aéronautique, qui intègre d'une part le modèle d'Elber et d'autre part un calcul d'efficacité de séquence de chargement ainsi que la détermination du chargement monotone équivalent. Enfin, le modèle "*STRIP-YIELD*" [NEW 81, NAS 02], basé sur le modèle de Dugdale [DUG 60], permet de s'affranchir du coût numérique d'un calcul cycle à cycle dans le cas de chargements complexes tout en prenant en compte les effets de refermeture.

Les méthodes numériques présentées dans les paragraphes suivants supposent un traitement préalable dans le cas d'un chargement aléatoire afin d'obtenir soit un chargement à amplitude constante soit un chargement à amplitude variable déterministe.

1.3.2 Méthode des éléments finis

La méthode des Éléments Finis est très largement utilisée pour simuler la propagation de fissure. Avec cette méthode la fissure est par principe décrite explicitement. Par conséquent, deux difficultés majeures se posent avec la méthode des éléments finis. Tout d'abord la nature physique singulière du champ de déplacement impose un maillage très fin autour de la pointe de fissure afin de représenter correctement celui-ci. La représentation du champ singulier autour de la pointe de fissure peut être améliorée par l'emploi d'éléments singuliers dits de Barsoum [BAR 74]. Ces éléments munis de noeuds supplémentaires aux quarts des côtés permettent d'intégrer exactement la singularité élastique et ainsi obtenir de meilleurs résultats. Cependant, l'utilisation de tels éléments avec un comportement non-linéaire semble à proscrire étant donné la nature différente de la singularité, bien qu'ils permettent d'améliorer les résultats par rapport à des éléments finis classiques [BOU 00].

Enfin, la représentation explicite de la fissure pose le problème du trajet de fissuration lors de la simulation de propagation. En effet, soit le maillage est construit avec une connaissance *a priori* du trajet, soit celui-ci est changé à chaque fois que la fissure avance, le problème de la projection des champs de l'ancien maillage sur le nouveau se pose alors. On distinguera deux grandes familles de méthodes : celles s'intéressant aux problèmes de fissure droite en mode I, et celles traitant des fissures courbes en mode mixte.

1.3.2.1 Fissure sollicitée en mode I

Dans le cas des fissures sollicitées en mode I, le trajet de fissure est entièrement connu puisque rectiligne. La discrétisation du trajet est alors entièrement dépendante de la taille de maille utilisée le long de celui-ci. La technique employée couramment est celle dite du déboutonnage ou relâchement de noeuds [MCC 89a, MCC 89b, SOL 03, SAN 05, SAN 06]. Deux difficultés majeures se posent avec ce type de méthode : le relâchement progressif (ou non) des noeuds en appliquant des forces nodales, et le choix de "l'instant"

de propagation. A ce sujet, différents auteurs proposent de relâcher les noeuds à l'effort minimum [SOL 03], à l'effort maximum [FLE 86, SOL 03, SAN 05] ou après le maximum de l'effort [MCC 89a]. D'autres techniques sont présentées dans une publication de Solanki *et al.* présentant un état de l'art de la simulation par éléments finis du phénomène de refermeture de fissure [SOL 04a], il en ressort que la plupart des auteurs ne sont toujours pas d'accord sur la stratégie à adopter, bien que la propagation au maximum de l'effort soit la plus utilisée. Enfin, une certaine dépendance à la taille des éléments utilisés le long du trajet de fissure peut intervenir dans le cas de maillages trop grossiers [SOL 04a].

1.3.2.2 Propagation en mode mixte - fissure courbe

Dans le cas d'une fissure sollicitée en mode mixte le trajet est quelconque et la plupart du temps complexe. La connaissance du trajet de fissure *a priori* soit à partir de données expérimentales, soit de résultats de calculs précédents permet de traiter le problème de la même façon qu'en mode I. Dans le cas général où le trajet est inconnu, deux méthodes sont classiquement utilisées : les méthodes de remaillage [BIT 96, TRÄ 98, BOU 00, BOU 03, TVE 04] et les méthodes utilisant des éléments d'interface à zones cohésives [NGU 01, YAN 05]. La question primordiale que posent les méthodes avec remaillage est le transfert des champs d'un maillage sur l'autre, ceci ayant d'autant plus d'importance avec la prise en compte de non-linéarités matérielles. Dans les cas des méthodes à éléments d'interfaces, le trajet de fissure est imposé par la discrétisation, les éléments d'interface étant placés à la frontière des éléments finis. Le choix de la loi de décohésion de l'interface est également un facteur influençant les résultats.

1.3.3 Méthode des éléments de frontière et méthode sans maillage

1.3.3.1 Méthode des éléments de frontière

On trouve dans la littérature un certain nombre de développements de méthodes par éléments de frontière [YAN 95, LEI 95, TUH 97, LEI 00]. La représentation des fissures comme des frontières du domaine d'étude est le grand avantage de ce type de méthode. Ceci permet également, en plus de la simplicité de représentation, de faire évoluer la fissure aisément. La gestion des non-linéarités "volumiques" telles que la plasticité mais également de contact, ainsi que l'intégration en espace des solutions fondamentales pose un certain nombre de problèmes numériques, notamment la nécessité de calculs volumiques intermédiaires ce qui entraine la perte de l'intérêt principal de la méthode.

1.3.3.2 Méthode sans maillage

La méthode sans maillage la plus couramment utilisée en mécanique de la rupture est la méthode dite EFG (Element Free Galerkin) proposée par Belytshko [BEL 94]. L'avantage principal de ces méthodes sans maillage est l'absence de discrétisation de la fissure, la

structure étant représentée par des particules (ou noeuds) ayant des domaines d'influence, remplaçant ainsi la notion d'éléments des méthodes éléments finis. Les développements récents en mécanique linéaire et non-linéaire de la rupture proposent des résultats intéressants [FLE 97, XU 98, RAO 04a, DUF 04]. Cependant, comme toute méthode numérique, elle possède un certain nombre d'inconvénients, tels que la lourdeur du calcul des voisins et la taille du domaine d'influence et surtout la difficulté d'imposition de conditions aux limites cinématiques.

1.3.4 Méthodes basées sur la partition de l'unité

Le concept de partition de l'unité (PUM), proposé par Melenk et Babuška [BAB 97], consiste à enrichir l'approximation de la méthode des éléments finis à l'aide de fonctions permettant de mieux décrire le champ de déplacement d'un problème considéré. Cette méthode, appliquée à la mécanique de la rupture, permet d'intégrer à l'approximation de la solution la singularité du champ de déplacement. L'avantage principal de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire de représenter explicitement la fissure par le maillage. En effet, l'utilisation d'éléments géométriques en 2D ou de fonctions de niveaux en 2D-3D [MOË 02, GRA 02], couplés à l'enrichissement de l'approximation permet de représenter la discontinuité. Cette méthode ainsi que ses applications seront présentées de manière plus détaillée au chapitre 3. On peut dans un premier temps citer son application aux non-linéarités dans la méthode des éléments finis étendus X-FEM (développée par Belytschko, Moës *et al.* [MOË 99]) pour traiter les problèmes de rupture élastique avec contact et frottement [DOL 01b] et de rupture des polymères en grandes transformations [LEG 05b], ainsi que les travaux de de Borst *et al.* notamment pour le cas de matériaux viscoplastiques [WEL 02b].

1.3.5 Méthodes numériques de traitement du contact

Le traitement du contact entre deux solides introduit dans les équations classiques de la mécanique des conditions statiques et cinématiques sur la zone en contact. Le point clé est la condition de non pénétration des deux corps en contact. Cette condition, qui s'écrit sous forme d'une inéquation, conduit à un problème de minimisation sous contrainte exprimé sous forme d'une inégalité variationnelle. Il existe un nombre important de méthodes permettant de traiter ce type de problème, on peut classer celles-ci en deux grandes catégories [RAO 04b] : les méthodes sans régularisation et avec régularisation.

Pour les méthodes sans régularisation, on peut citer les méthodes de projection et de programmation mathématique [CHA 03, RAO 04b]. Dans le cas avec régularisation, on trouve les méthodes avec pénalisation, à multiplicateurs de Lagrange, de Lagrangien perturbé [BEL 02] et enfin de Lagrangien augmenté [BEL 02, RAO 04b]. Le traitement du problème par pénalisation revient physiquement à accepter une légère pénétration d'un corps dans l'autre (sauf dans le cas d'un terme de pénalité infini). Malgré cela, cette méthode est relativement utilisée du fait de son implémentation réputée assez simple. L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange consiste à transférer le problème unilatéral sur les

efforts par dualisation. Ces deux techniques ramènent le problème à une égalité variationnelle, qui est alors plus facile à résoudre par la méthode des éléments finis. L'utilisation de la pénalisation dans le cas des problèmes avec frottement est assez attirante puisque les équations suggèrent alors une loi de comportement de l'interface analogue à celles utilisées traditionnellement en plasticité [HIT 82, WRI 89, RAO 04b].

Enfin, la dernière méthode de régularisation est celle dite de Lagrangien augmenté, qui combine à la fois la pénalisation et les multiplicateurs de Lagrange [ALA 91, SIM 92, BEL 02]. Cette méthode a pour principaux avantages, notamment par rapport à la méthode de pénalisation, l'amélioration du conditionnement du problème et la satisfaction exacte de la condition d'impénétrabilité avec un coefficient de pénalité fini. On pourra également citer la méthode LATIN dont l'application au problème de contact est très proche du Lagrangien augmenté [CHA 96].

Dans un cadre très général, la difficulté du traitement d'un problème de contact par une méthode de type éléments finis consiste en la détermination des zones en contact. Il existe plusieurs techniques permettant de détecter les points en contact telles que l'approche hiérarchique et l'approche par voisinage [RAO 04b]. Cet aspect est moins important dans la problématique fixée dans cette étude, puisque le contact est pris en compte uniquement le long des lèvres de la fissure : la zone de traitement du contact est parfaitement déterminée à chaque instant.

Chapitre 2

Mécanique de la rupture : aspects non-linéaires et champs asymptotiques

Sommaire

2.1 Introduction 26
2.2 Mécanique linéaire de la rupture 26
2.2.1 Généralités en élasticité linéaire 27
2.2.2 Analyse expérimentale des champs de déplacement 31
2.3 Mécanique élasto-plastique de la rupture 33
2.3.1 Champs asymptotiques élasto-plastiques en pointe de fissure 33
2.3.2 Obtention des paramètres de fissuration en plasticité confinée . . . 43
2.4 Formulation variationnelle continue de la fissuration par fatigue 47
2.4.1 Formulation du problème global 47
2.4.2 Formulation itérative continue 49

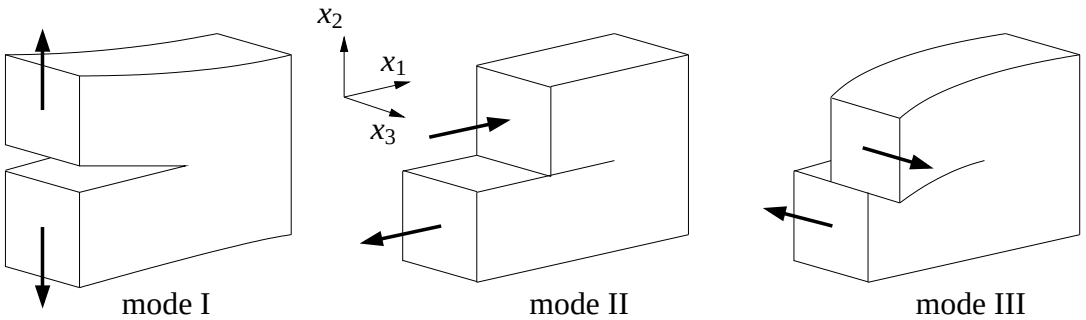
2.1 Introduction

Ce deuxième chapitre a pour objectif de présenter les aspects continus du problème de rupture en présence de non-linéarités comportementales et de type contact/frottement. Après avoir rappelé brièvement les points clé de la théorie de la mécanique élastique linéaire de la rupture (LEFM), l'aspect non-linéaire comportemental est présenté sous la forme de l'étude des champs asymptotiques des déplacements ainsi que l'obtention des paramètres clé de fissuration. Enfin la formulation continue du problème avec prise en compte de multiples non-linéarités en présence d'une surface de discontinuité est présentée.

2.2 Mécanique linéaire de la rupture

La rupture d'un milieu continu est caractérisée par la séparation irréversible d'une partie de celui-ci de part et d'autre d'une surface géométrique S. On appelle *fissure* la coupure ainsi créée et représentée par la surface S. Elle représente une surface de discontinuité du champ de déplacement $[\![u_i]\!] = u_i^+ - u_i^-$. D'un point de vue purement cinématique, on peut définir trois modes de rupture comme présenté sur la figure 2.1.

- mode I ou mode d'ouverture : le déplacement est perpendiculaire au plan de la fissure.
- mode II ou mode de cisaillement plan : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et normal au front.
- mode III ou mode de cisaillement antiplan : le déplacement est parallèle au plan de la fissure et au front.



mode I	mode II	mode III
$[\![u_1]\!] = 0$	$[\![u_1]\!] \neq 0$	$[\![u_1]\!] = 0$
$[\![u_2]\!] \neq 0$	$[\![u_2]\!] = 0$	$[\![u_2]\!] = 0$
$[\![u_3]\!] = 0$	$[\![u_3]\!] = 0$	$[\![u_3]\!] \neq 0$

FIG. 2.1: Modes de rupture

2.2.1 Généralités en élasticité linéaire

2.2.1.1 Analyse asymptotique

Si on effectue une analyse locale des solutions en déplacement et en contrainte en pointe de fissure, on obtient en élasticité linéaire une solution non triviale où les contraintes sont infinies au fond de la fissure (cf. [BUI 78]). Irwin a alors proposé de définir des facteurs quantifiant l'intensité de la singularité des contraintes [IRW 57]. Sous une sollicitation statique (ou quasi-statique) ces facteurs définissent aussi bien l'intensité de la singularité en terme de déplacements qu'en terme de contraintes. Ces facteurs sont appelés *facteurs d'intensité des contraintes* et sont définis pour chaque mode élémentaire de rupture :

$$K_I = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\,\sigma_{22}(\theta=0) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu}{k+1}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,[\![u_2(\theta=\pi)]\!] \tag{2.1}$$

$$K_{II} = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\,\sigma_{12}(\theta=0) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu}{k+1}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,[\![u_1(\theta=\pi)]\!] \tag{2.2}$$

$$K_{III} = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\,\sigma_{23}(\theta=0) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,[\![u_3(\theta=\pi)]\!] \tag{2.3}$$

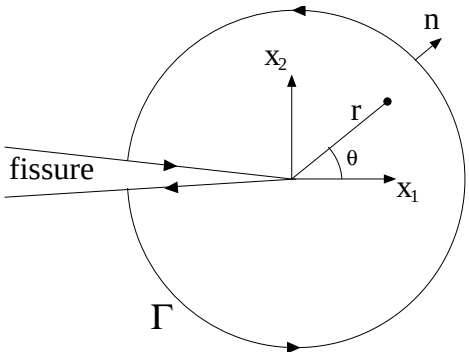


FIG. 2.2: Paramétrage de la pointe de fissure

Où (r,θ) représente les coordonnées dans un repère cylindrique centré sur la pointe de fissure (cf. figure 2.2), $[\![u_i(\theta=\pi)]\!] = u_i(\theta=+\pi) - u_i(\theta=-\pi)$ est le saut de déplacement au passage de la discontinuité, et k est la constante de Kolosov :

$$k = \begin{cases} 3-4\nu & \text{en déformations planes} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

On peut également introduire ces facteurs dans l'expression des solutions analytiques en pointe de fissure. Les solutions asymptotiques de Westergaard [BUI 78] peuvent alors

s'écrire en terme de déplacements :

$$u_1(r,\theta) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(K_I\cos\frac{\theta}{2}\,(k-\cos\theta)+K_{II}\sin\frac{\theta}{2}(k+\cos\,\theta\,+2)\right) \quad (2.4)$$

$$u_2(r,\theta) = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(K_I\sin\frac{\theta}{2}\,(k-\cos\theta)-K_{II}\cos\frac{\theta}{2}\,(k+\cos\theta\,-2)\right) \quad (2.5)$$

$$u_3(r,\theta) = \frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\;K_{III}\sin\frac{\theta}{2} \quad (2.6)$$

2.2.1.2 Approche énergétique

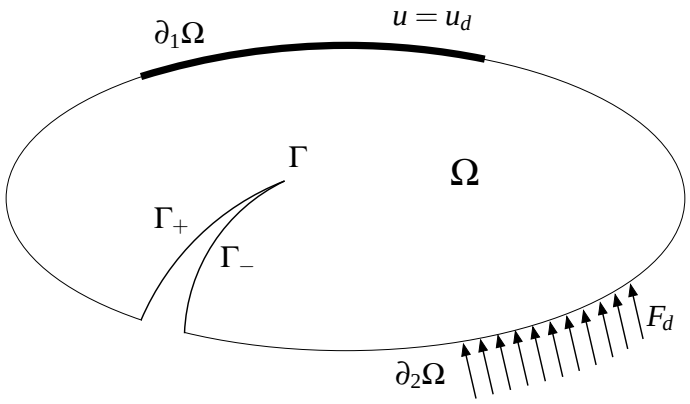


FIG. 2.3: Notations pour le problème de référence

Les premiers travaux en mécanique de la rupture sont généralement attribués à Griffith [GRI 21]. Griffith a proposé de relier la variation d'énergie nécessaire à l'accroissement d'une fissure à la variation d'aire ainsi créée dA et à une énergie superficielle caractéristique du matériau γ :

$$dW_{fis} = 2\,\gamma\,dA \quad (2.7)$$

En introduisant cette hypothèse dans le premier principe de la thermodynamique écrit sur le domaine défini par la figure 2.3, il vient [LEM 96] :

$$\frac{\partial E_i}{\partial t}+\frac{\partial K}{\partial t} = P_{ext}+Q-2\gamma\frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.8)$$

où E_i est l'énergie interne, K l'énergie cinétique, P_{ext} la puissance des efforts extérieurs et Q le taux de chaleur reçue, et $\frac{\partial}{\partial t}$ représente la dérivée temporelle. La variation d'énergie interne peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = Q+\frac{\partial W_{elas}}{\partial t} \quad avec \quad \frac{\partial W_{elas}}{\partial t} = \int_\Omega \sigma : \mathbf{D}\; d\Omega \quad (2.9)$$

où W_{elas} représente l'énergie élastique, σ le tenseur des contraintes de Cauchy et $\mathbf{D}$ le tenseur des taux de déformation. En l'absence de forces volumiques, la puissance des efforts extérieurs peut s'écrire :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega_2} F_d . \frac{\partial u}{\partial t} dS \tag{2.10}$$

où F_{ext} représente les efforts extérieurs surfaciques et u le champ de déplacement. Le premier principe peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial W_{elas}}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t} = \int_{\partial\Omega_2} F_d . \frac{\partial u}{\partial t} dS - 2\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \tag{2.11}$$

La condition de stabilité du processus étant que l'énergie cinétique ne s'accroisse pas, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega_2} F_d . \frac{\partial u}{\partial t} dS - \frac{\partial W_{elas}}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \leq 0 \tag{2.12}$$

Si on considère A comme la seule variable de ce bilan, on peut réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$\left(\int_{\partial\Omega_2} F_d . \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} - 2\gamma \right) \frac{\partial A}{\partial t} \leq 0 \tag{2.13}$$

Le phénomène de propagation étant irréversible, il vient alors :

$$\frac{\partial A}{\partial t} \geq O \tag{2.14}$$

On en déduit finalement l'inéquation suivante :

$$\int_{\partial\Omega_2} F_d . \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} \leq 2\gamma \tag{2.15}$$

On définit alors le taux de restitution d'énergie G de la façon suivante :

$$G = \int_{\partial\Omega} F_d . \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{\partial W_{elas}}{\partial A} \tag{2.16}$$

On a alors les trois situations suivantes d'après le critère de propagation de Griffith :

$G < 2\gamma$ absence de propagation.
$G = 2\gamma$ initiation ou propagation *stable*.
$G > 2\gamma$ propagation *instable*.

En réécrivant G sous forme d'une intégrale de contour, on peut obtenir la formule d'Irwin [IRW 57] qui relie taux de restitution de l'énergie et facteurs d'intensité des contraintes. En négligeant les forces volumiques ainsi que les effets d'inertie, Le principe des travaux virtuels peut s'écrire :

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega_2} F_d . u^* dS \quad \forall\, u^* \in \mathcal{U}_{ca0} \tag{2.17}$$

où $\mathcal{U}_{ca0} = \left\{ u \in \mathcal{U} \ : \ u\,|_{\partial_1\Omega} = 0 \right\}$ est l'espace des champs cinématiquement admissibles à zéro. En faisant le choix du champ solution u comme champ virtuel, et en remarquant que

$$\forall \omega \in \Omega, \ \int_\omega \sigma : \varepsilon \, d\omega = \int_{\partial\omega} F.u dS \tag{2.18}$$

On peut écrire :

$$\frac{\partial W_{elas}}{\partial A} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A} \int_{\partial\Omega} F.u \, dS \tag{2.19}$$

avec $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \Gamma = \mathcal{S} \cup \Gamma$. La fissure étant libre d'effort, il vient alors :

$$\frac{\partial W_{elas}}{\partial A} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial F}{\partial A} . u \, dS + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} F . \frac{\partial u}{\partial A} dS \tag{2.20}$$

En introduisant cette équation dans la définition de G (2.16) on trouve :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} F . \frac{\partial u}{\partial A} dS - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial F}{\partial A} . u \, dS \tag{2.21}$$

En utilisant le théorème de réciprocité de Betti, on peut démontrer que cette intégrale est indépendante du contour. Le taux de restitution de l'énergie G peut alors s'écrire :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} F . \frac{\partial u}{\partial A} - \frac{\partial F}{\partial A} . u \, dS \quad \forall \mathcal{C} \tag{2.22}$$

En introduisant les champs asymptotiques dans cette expression et en écrivant G comme étant la limite de cette formule lorsque le contour $\mathcal{C}$ tend vers la pointe de fissure, on obtient la formule d'Irwin :

$$G = \frac{k+1}{8\mu} \left({K_I}^2 + {K_{II}}^2 \right) \tag{2.23}$$

En 1968, Rice [RIC 68b] a introduit le concept d'intégrale indépendante du contour J. On parle alors d'intégrale de Rice J, définie de la façon suivante si on considère une fissure dans la direction x_1 :

$$J = \int_\Gamma (W n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) \, ds \tag{2.24}$$

où Γ est un contour orienté dans le sens anti-horaire autour de la pointe de fissure, n la normale unitaire sortante à Γ (cf. figure 2.2), $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}$ l'énergie de de déformation où σ_{ij} et ε_{ij} sont les tenseurs des contraintes et des déformations et u_i la i-ème composante du champ de déplacement. Rice a alors montré l'égalité entre taux de restitution de l'énergie G et intégrale J.

On a alors la relation entre intégrale J, taux de restitution de l'énergie G et facteurs d'intensité des contraintes K_i :

$$J = G = \left({K_I}^2 + {K_{II}}^2 \right) \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} & \text{en déformations planes} \\ \frac{1}{E} & \text{en contraintes planes} \end{cases} \tag{2.25}$$

2.2.2 Analyse expérimentale des champs de déplacement

A partir des résultats de corrélation d'images numériques, il est possible d'obtenir de manière assez précise des informations sur la singularité du champ de déplacement autour de la pointe de fissure. Dans [RÉT 05a, RÉT 05c], ceci a été réalisé à partir d'essais sur éprouvettes CT en acier pour une fissure horizontale. Le déplacement vertical v a été extrait sur un rayon faisant un angle de 45° avec les lèvres de la fissure. On s'intéresse alors à son évolution en fonction du rapport r/a (distance au front / longueur de fissure). Cette analyse est effectuée pour trois niveaux de chargement. On peut observer sur la figure 2.4 le déplacement vertical normalisé par $\sqrt{r}$ en fonction de r/a, et sur la figure 2.5 le déplacement vertical en fonction de r/a en échelles logarithmiques afin de pouvoir déterminer facilement son évolution en puissance de r.

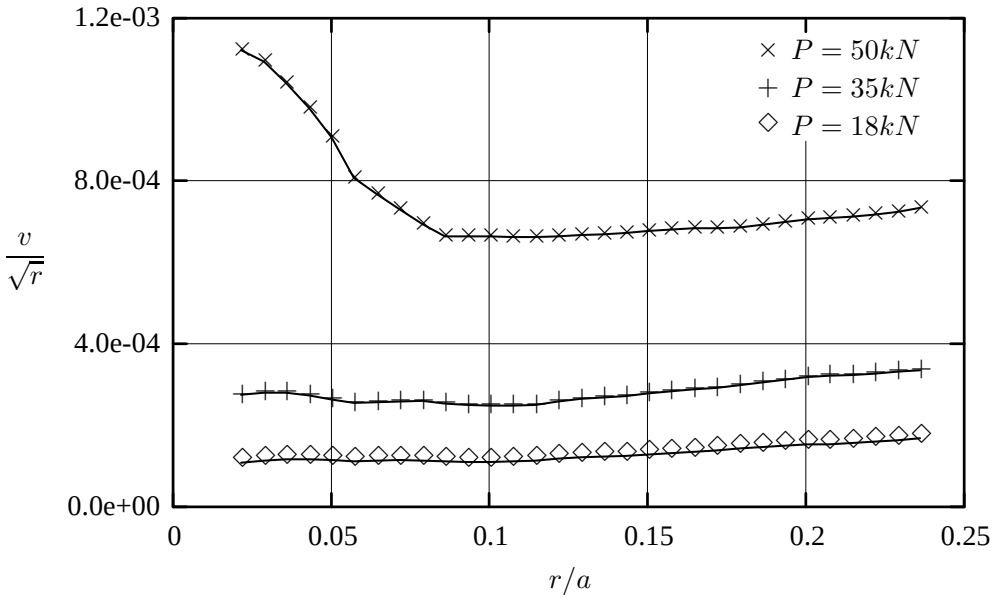


FIG. 2.4: Déplacement vertical normalisé par $\sqrt{r}$

Pour la première valeur d'effort $P = 18kN$, $v/\sqrt{r}$ reste constant à proximité de la pointe de fissure ($r/a \leq 0.1$). Plus loin du front on note une légère augmentation de $v/\sqrt{r}$ avec r : la singularité ne domine plus le champ de déplacement à cette distance. Pour la seconde valeur d'effort, $P = 35kN$, on peut distinguer trois zones : $r/a \leq 0.06$, $0.06 \leq r/a \leq 0.125$ et $r/a \geq 0.125$. La deuxième et la troisième zones correspondent à celles décrites pour $P = 18kN$. Dans la première zone, la singularité en $\sqrt{r}$ ne semble pas dominer le champ de déplacement. Pour le dernier essai à $P = 50kN$, on distingue plus clairement ces trois zones pour : $r/a \leq 0.08$, $0.08 \leq r/a \leq 0.18$ et $r/a \geq 0.18$. La première zone est relativement plus étendue que pour le second essai, et on peut distinguer que l'exposant de la singularité est inférieur à $1/2$. On constate également qu'à une distance suffisante du front, la singularité en $\sqrt{r}$ ne domine plus.

Cette analyse est confirmée sur la figure 2.5 par l'utilisation d'échelles logarithmiques. Dans les zones éloignées du front, le déplacement présente une dépendance en r assez

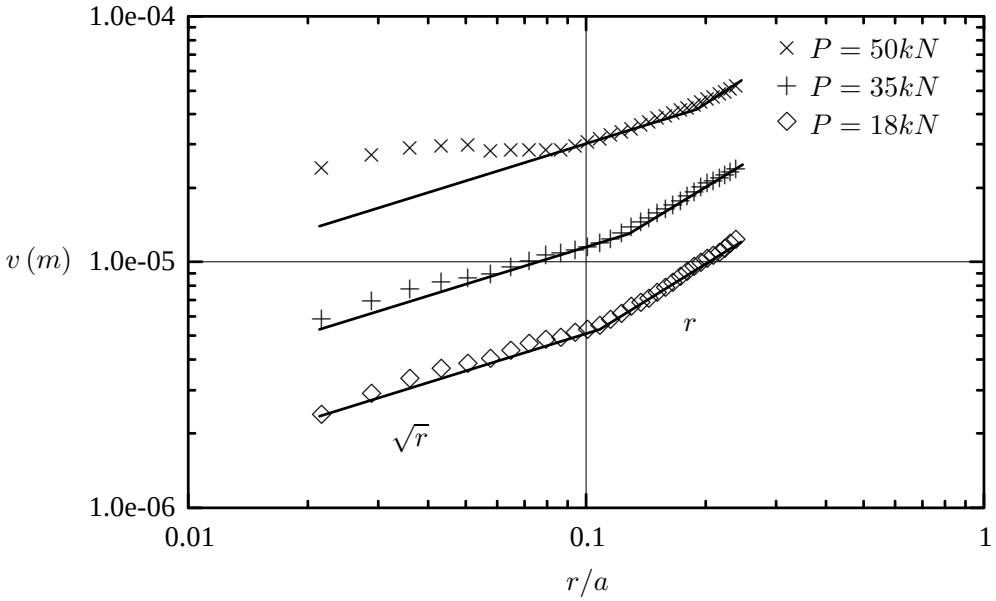


FIG. 2.5: Déplacement vertical et approximation en loi puissance

nette. Celle-ci est due au champ de déplacement de rotation de corps rigide caractéristique d'un essai en mode I sur géométrie de type éprouvette CT. On peut également estimer la taille de la zone de dominance des champs asymptotiques élastiques dites zone de *K-dominance*. Pour $P = 18kN$ on la retrouve à proximité du front ($r/a \leq 0.1$). Pour $P = 35kN$, on devine une baisse de la singularité à proximité de la pointe de fissure, et pour $P = 50kN$ on observe clairement une zone dont l'exposant de la singularité est inférieur à $1/2$ autour de la pointe ($r/a \lesssim 0.08$). On peut ainsi majorer le rayon de la zone plastique par $r_p/a \approx 0.08$. Pour des valeurs de r inférieures, on se trouve alors dans une zone de singularité élasto-plastique : les hypothèses LEFM ne sont plus valides. Cette analyse peut être schématisée par la figure 2.6.

On peut observer sur la figure 2.6 (a), que pour les hypothèses LEFM + *Small Scale Yielding* la taille de zone plastique "réelle" r_p/a a une valeur limite de l'ordre de 3 à 5 % d'après la littérature. Dans ces conditions, cette zone plastique est négligée, ce qu'on observe expérimentalement pour $P = 18kN$. Sur la figure 2.6 (b), dans le cadre des hypothèses EPFM (Elastic Plastic Fracture Mechanics), la zone plastique est toujours confinée autour de la pointe de fissure, mais elle n'est plus négligeable : la taille de zone plastique r_p/a se situe entre 3-5 % et environ 10 % d'après la littérature (on néglige en revanche la "process zone" fortement endommagée qui se trouve très près de la pointe de fissure). On observe ceci pour les résultats expérimentaux à $P = 35kN$ et surtout $P = 50kN$. Une zone où l'exposant de la singularité est inférieur à 1/2 apparaît entre la pointe de fissure et la zone de *K-dominance* : la zone plastique reste confinée autour de la pointe de fissure mais n'est plus négligeable à une échelle macroscopique. L'étude de la singularité et des champs asymptotiques dans cette zone est présentée dans le paragraphe suivant.

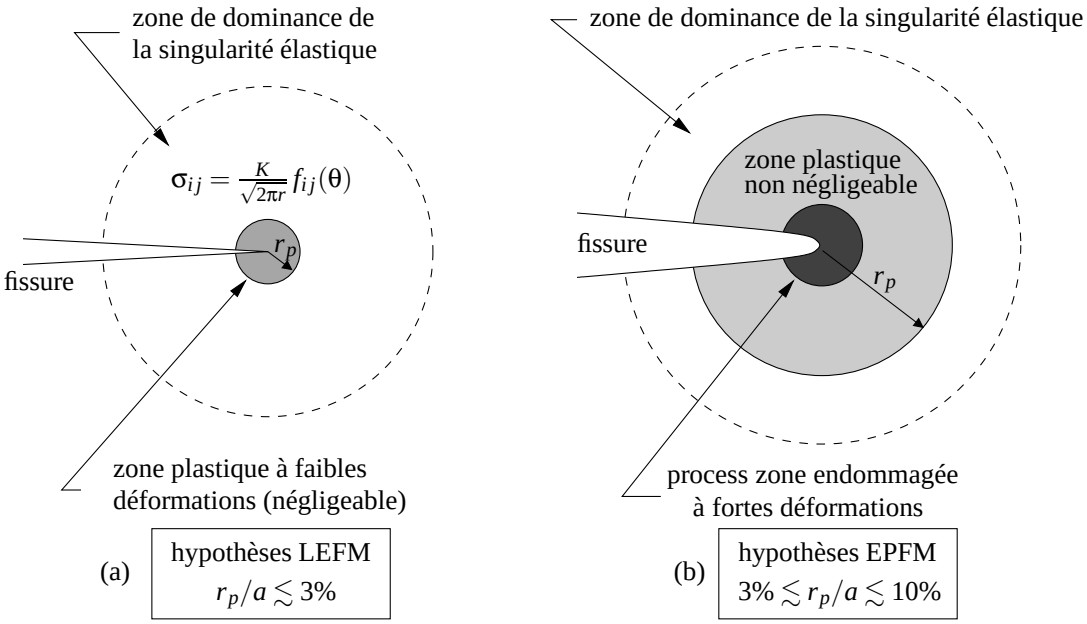


FIG. 2.6: Zones de dominance en élasticité et en plasticité

2.3 Mécanique élasto-plastique de la rupture

2.3.1 Champs asymptotiques élasto-plastiques en pointe de fissure

Considérons un matériau élasto-plastique suivant une loi de comportement en puissance dont l'expression uniaxiale est donnée par :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \tag{2.26}$$

où σ_0 est la contrainte de référence, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ la déformation de référence, E le module d'Young, α une constante matériau et n l'exposant d'écrouissage. Lorsque n vaut 1 (respectivement ∞) l'équation (2.26) représente la loi de comportement d'un matériau élastique linéaire (respectivement plastique parfait). Pour un état multiaxial de contraintes, la loi de Ramberg-Osgood précédente peut être généralisée en respectant la partition du taux de déformation :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{2.27}$$

où

$$\dot{\varepsilon}^e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{pp} \delta_{ij} \tag{2.28}$$

et

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{3}{2E} \alpha \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \dot{s}_{ij} \tag{2.29}$$

sont les taux de déformation élastiques et plastiques, ν le coefficient de Poisson, $\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{pp}\delta_{ij}/3$ le déviateur des contraintes, $\sigma_e = \sqrt{3 s_{ij} s_{ij}/2}$ la contrainte équivalente de

Von Mises et δ_{ij} le symbole de Kronecker. Dans la zone plastique à proximité de la pointe de fissure le taux de déformation élastique est négligeable devant le taux de déformation plastique, *i.e.* $\dot{\varepsilon}_{ij} \simeq \dot{\varepsilon}^p_{ij}$ et les champs asymptotiques sont donnés par les équations (2.30) à (2.32) [HUT 68, RIC 68c] :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \tag{2.30}$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \tag{2.31}$$

$$u_i = \alpha \varepsilon_0 r \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \tag{2.32}$$

où I_n est une constante sans dimension dépendante de n ; $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ et $\tilde{u}_i$ sont des fonctions sans dimension de θ et n et J est l'intégrale de Rice donnée par l'équation (2.24)

Les champs asymptotiques donnés dans les équations (2.30) à (2.32), aussi appelés champs Hutchinson-Rice-Rosengren (HRR), sont dus à Hutchinson [HUT 68] d'une part et Rice et Rosengren [RIC 68c] d'autre part. Ces champs représentent, de même que les solutions asymptotiques de Westergaard en élasticité linéaire, une approximation au premier ordre de la solution des champs réels et décrivent ainsi la nature de la singularité dominante. Ces champs représentent la solution asymptotique dans la zone plastique présentée schématiquement sur la figure 2.6 (b). Le paramètre déterminant dans leur amplitude étant l'intégrale *J*, on appelle couramment dans la littérature l'anneau ainsi formé zone de *J-dominance* en comparaison avec la zone de *K-dominance* élastique présentée sur la figure 2.6 (a).

Remarque 1 *Plusieurs auteurs [LI 86, O'D 91, O'D 92] ont montré que les termes d'ordre supérieur pouvaient avoir une importance significative notamment très près de la pointe de fissure. Cependant, ils devraient être négligeables dans le cas de la plasticité confinée en pointe de fissure.*

2.3.1.1 Résolution du problème en contrainte

L'approche pour obtenir les champs de contrainte, à savoir la singularités et leur variation angulaire, est différente selon les auteurs. Dans [HUT 68], les inconnues du problème permettant d'aboutir à une équation différentielle sont à la fois les fonctions angulaires de θ et le degré de la singularité (la puissance de r). Dans [RIC 68c], les auteurs obtiennent le degré de la singularité par des considérations énergétiques basées sur l'intégrale J, puis introduisent une équation différentielle dépendant uniquement de θ. Cette technique, qui peut paraître plus simple au premier abord, conduit à une équation différentielle dont les coefficients varient de manière importante avec le paramètre matériau n. En revanche, la formulation proposée dans [HUT 68], donne des coefficients stables pour une grande gamme de valeurs de n, ce qui permet une implémentation plus aisée d'un algorithme de résolution systématique.

La méthode que nous avons choisi d'utiliser est donc celle décrite dans [HUT 68], [PAN 90] et [PAN 92], qui utilise deux fonctions $\phi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$ pour représenter les contraintes. La première représente les modes plans I et II, la deuxième le mode hors plan III. L'équation (2.30) montre que l'on peut écrire :

$$\phi(r,\theta) = r^{\frac{-1}{n+1}}\tilde{\phi}(\theta) \; et \; \psi(r,\theta) = r^{\frac{-1}{n+1}}\tilde{\psi}(\theta) \tag{2.33}$$

En se plaçant dans l'hypothèse des déformations planes, on a les expressions suivantes pour les contraintes dans un repère cylindrique centré sur la pointe de fissure ($()^{\bullet}$représente $\frac{\partial()}{\partial\theta}$) :

$$\tilde{\sigma}_{rr} = s\tilde{\phi} + \tilde{\phi}^{\bullet\bullet} \tag{2.34}$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = s(s-1)\tilde{\phi} \tag{2.35}$$

$$\tilde{\sigma}_{r\theta} = (1-s)\tilde{\phi}^{\bullet} \tag{2.36}$$

$$\tilde{\sigma}_{rz} = \tilde{\psi}^{\bullet} \tag{2.37}$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta z} = (1-t)\tilde{\psi} \tag{2.38}$$

Comme démontré dans [HUT 68, RIC 68c] on a pour les modes plans purs (modes I et II) et le mode hors-plan pur (mode III) :

$$s = t = \frac{2n+1}{n+1} \tag{2.39}$$

Remarque 2 *Dans [PAN 90] il est démontré que l'équation précédente n'est pas vérifiée dans le cas de modes mixtes dans le plan et hors plan - c'est à dire dans les cas (I+III) et (II+III) - mais compte tenu de l'utilisation que nous désirons faire des champs ceci n'a à priori pas d'importance pour une analyse bi-dimensionnelle.*

Mode I pur On obtient, d'après [HUT 68], pour les modes I et II (purs ou mixtes) , l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}[\tilde{\sigma}_e^{n-1}(s(2-s)\tilde{\phi}+\tilde{\phi}^{\bullet\bullet})]^{\bullet\bullet} - [n(s-2)(n(s-2)+2)].[\tilde{\sigma}_e^{n-1}(s(2-s)\tilde{\phi}+\tilde{\phi}^{\bullet\bullet})] \\ +4(s-1)(n(s-2)+1)(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{\phi}^{\bullet})^{\bullet} = 0\end{aligned} \tag{2.40}$$

avec $\tilde{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{4}(\tilde{\sigma}_{rr}-\tilde{\sigma}_{\theta\theta})^2 + 3\tilde{\sigma}_{r\theta}^2}$. Les conditions aux limites mécaniques pour le mode I nous donnent comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(0) = 1 & \text{(condition arbitraire)} \\ \tilde{\phi} =^{\bullet} (0) = \tilde{\phi}^{\bullet\bullet\bullet}(0) = 0 & \text{(symétrie du mode I)} \\ \tilde{\phi}(\pi) = \tilde{\phi}^{\bullet}(\pi) = 0 & \text{(lèvres de la fissure libres d'effort)} \end{cases} \tag{2.41}$$

On a donc une condition initiale de trop pour une résolution directe de l'équation différentielle. Cependant, ceci peut se résoudre par la propriété d'indépendance du contour

de l'intégrale *J* (voir [RIC 68c]). En revanche, on constate qu'il s'agit d'un problème dit "à deux points" qui ne peut pas être résolu par des méthodes classiques telles que la méthode de Runge-Kutta.

La technique utilisée pour pouvoir résoudre cette équation est la suivante :

1. choix d'une des conditions en $\theta = \pi$ par exemple $\tilde{\phi}^{\bullet}(\pi) = 0$.
2. choix d'une valeur arbitraire de $\tilde{\phi}^{\bullet\bullet}(0)$ telle que $\tilde{\phi}^{\bullet}(\pi) > 0$.
3. choix d'une valeur arbitraire de $\tilde{\phi}^{\bullet\bullet}(0)$ telle que $\tilde{\phi}^{\bullet}(\pi) < 0$.
4. régression linéaire afin d'obtenir la valeur de $\tilde{\phi}^{\bullet\bullet}$ telle que $\tilde{\phi}^{\bullet}(\pi) = 0$.
5. résolution de l'équation avec les conditions initiales ainsi obtenues.

En utilisant cette méthode pour différentes valeurs de n, on a pu constater que la valeur de $\tilde{\phi}^{\bullet\bullet}(0)$ à imposer était toujours située entre -0.6 et -0.8 avec l'équation employée dans [HUT 68] alors qu'elle est relativement variable pour celle utilisée dans [RIC 68c] (ce qui justifie le choix de cette méthode dans une optique de simplicité de programmation de l'algorithme de résolution).

On a donc les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(0) = 1 \\ \tilde{\phi}^{\bullet}(0) = \tilde{\phi}^{\bullet\bullet\bullet}(0) = 0 \\ \tilde{\phi}^{\bullet\bullet}(0) \text{ tel que } \tilde{\phi}^{\bullet}(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

On peut ainsi déterminer la fonction $\tilde{\phi}(\theta)$ et les contraintes par les équations (2.34) à (2.36). On peut observer sur les figures 2.7 à 2.9 les fonctions sans dimension $\tilde{\sigma}(\theta)$, pour différents *n* (variant de 1 à 2000), pour le mode I pur.

Mode II pur D'après [HUT 68] et [PAN 90] l'équation différentielle à résoudre pour le mode II pur est la même que pour le mode I pur. On doit donc résoudre l'équation (2.40), mais avec des conditions initiales différentes puisque les conditions mécaniques le sont.

$$\begin{cases} \phi^{\bullet}(0) = -1 & \text{(condition arbitraire)} \\ \phi(0) = \phi^{\bullet\bullet}(0) = 0 & \text{(antisymétrie du mode II)} \\ \phi(\pi) = \phi^{\bullet}(\pi) = 0 & \text{(lèvres de la fissure libres d'effort)} \end{cases} \tag{2.43}$$

On a, là aussi, trop de conditions et un problème à deux points. Comme pour le mode I pur la propriété d'indépendance du contour nous permet de supprimer une des conditions en π. La méthode de résolution est la même que celle utilisée précédemment, mais on cherchera cette fois à ajuster la valeur $\tilde{\phi}^{\bullet\bullet\bullet}(0)$. On obtient finalement les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}^{\bullet}(0) = -1 \\ \tilde{\phi}(0) = \tilde{\phi}^{\bullet\bullet}(0) = 0 \\ \tilde{\phi}^{\bullet\bullet\bullet}(0) \text{ tel que } \tilde{\phi}(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

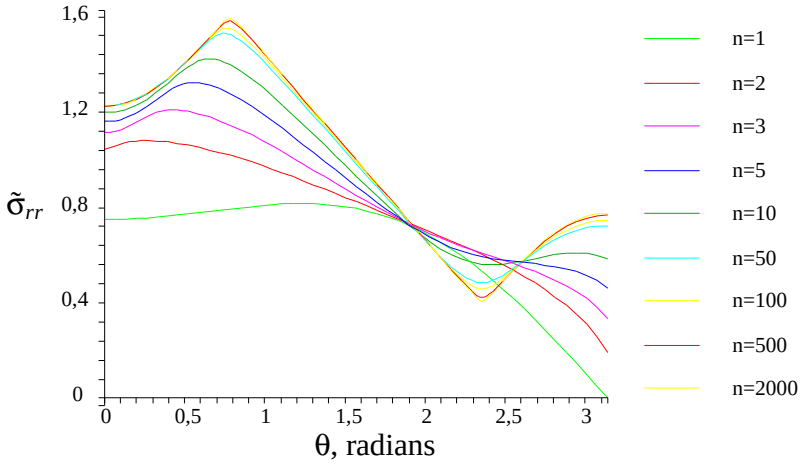


FIG. 2.7: $\tilde{\sigma}_{rr}$ en mode I en fonction de θ pour différents *n*

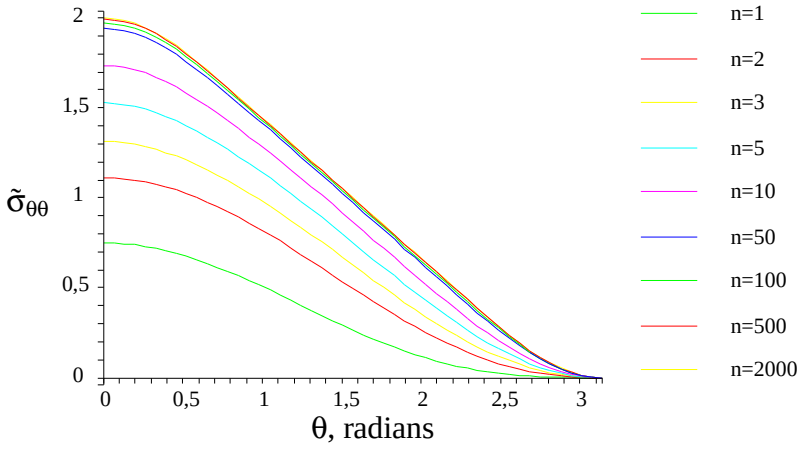


FIG. 2.8: $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ en mode I en fonction de θ pour différents *n*

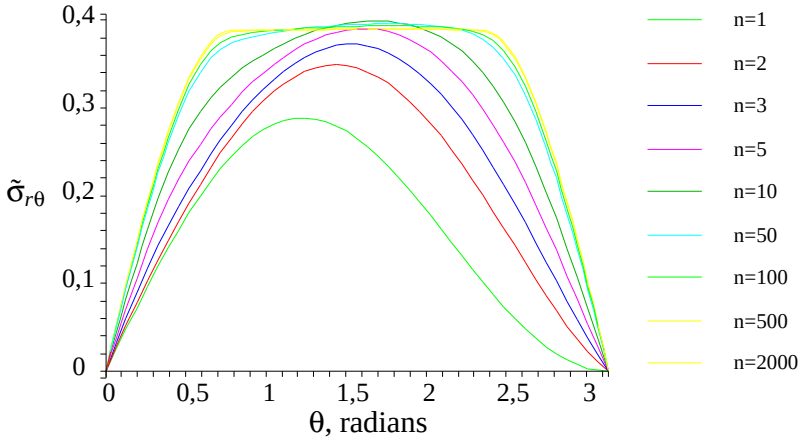


FIG. 2.9: $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ en mode I en fonction de θ pour différents *n*

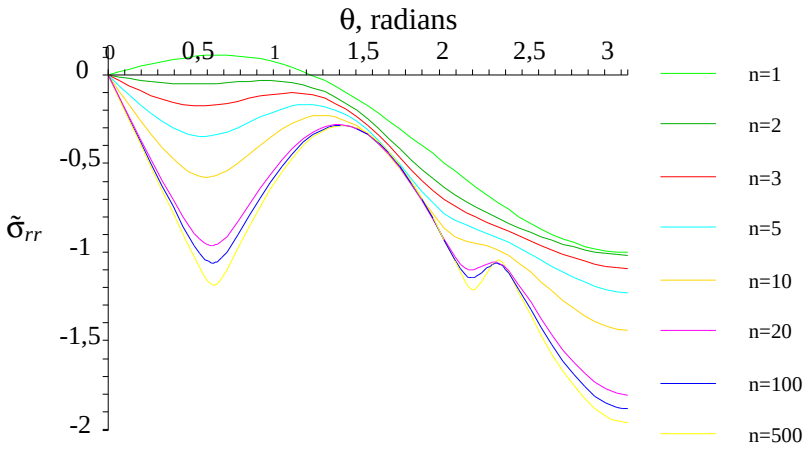


FIG. 2.10: $\tilde{\sigma}_{rr}$ en mode II en fonction de θ pour différents *n*

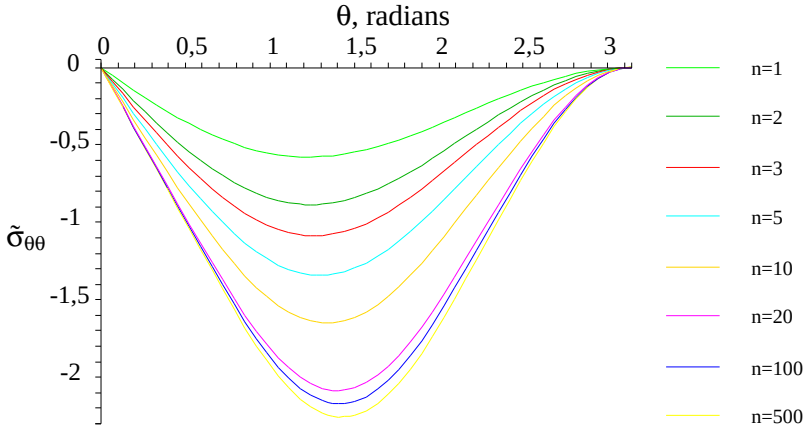


FIG. 2.11: $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ en mode II en fonction de θ pour différents *n*

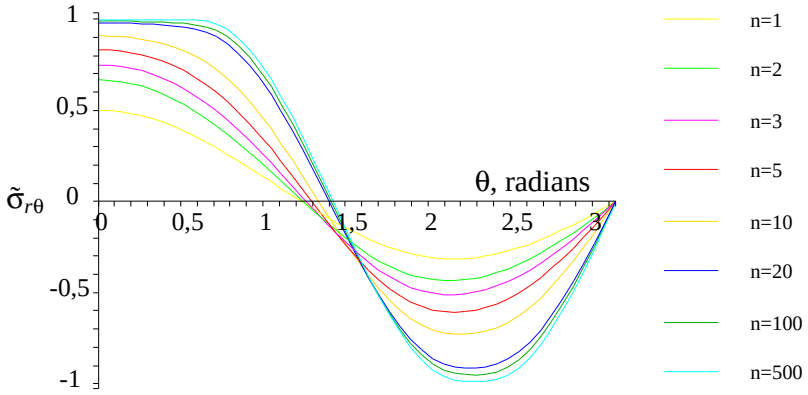


FIG. 2.12: $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ en mode II en fonction de θ pour différents *n*

On peut observer sur les figures 2.10 à 2.12 les fonctions sans dimension $\tilde{\sigma}(\theta)$, pour différents *n* (variant de 1 à 500), pour le mode II pur.

Mode III pur L'équation différentielle à résoudre est différente de celle obtenue pour les modes plans I et II (son obtention est présentée en Annexe B). D'après [PAN 90], en remarquant que (2.39) est toujours vérifiée, on trouve :

$$(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{\psi}^{\bullet})^{\bullet} + t(t+(n-1)(t-2))\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{\psi} = 0 \tag{2.45}$$

avec $\tilde{\sigma}_e = \sqrt{3\tilde{\sigma}_{rz}^2 + 3\tilde{\sigma}_{r\theta}^2}$. Les conditions mécaniques (antisymétrie et absence d'effort sur les lèvres de la fissure) nous donnent les deux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}^{\bullet}(0) = 0 & \text{(antisymétrie du mode III)} \\ \tilde{\psi}(\pi) = 0 & \text{(lèvres de la fissure libres d'effort)} \end{cases} \tag{2.46}$$

Remarque 3 *La résolution de cette équation différentielle ne peut se faire avec la méthode présentée précédemment. On peut trouver plusieurs propositions de champs asymptotiques en mode III dans la littérature, soit à partir de l'équation différentielle ci-dessus [RIC 68a], soit par d'autres formulations analytiques du problème [AMA 74, WEE 05].*

2.3.1.2 Obtention des champs de déplacement

Les résultats précédents ont permis d'obtenir pour un matériau donné les fonctions $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$. Connaissant la relation de comportement généralisée en déformations planes, définie par l'équation (2.47) (cf. [HUT 68]), on peut obtenir les fonctions $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$.

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu)s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3}\sigma_{pp}\delta_{ij} + \frac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}s_{ij} \tag{2.47}$$

avec

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{2.48}$$

$$\sigma_e = \frac{3}{2}\sqrt{s_{ij}s_{ij}} \tag{2.49}$$

On peut ainsi déterminer les termes ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$ du tenseur des déformations. On peut ainsi calculer les champs de déplacement u_r et u_θ par intégration en utilisant la formule du gradient en coordonnées cylindriques en déformations planes (équation (2.50)).

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

En développant l'équation (2.47) on obtient :

$$\varepsilon_{rr} = \sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) + \alpha\sigma_e^{n-1}\left(\sigma_{rr} - \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right) \tag{2.51}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) + \alpha\sigma_e^{n-1}\left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right) \tag{2.52}$$

La résolution de l'équation différentielle sur $\phi(r,\theta)$ aboutit à l'obtention de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$. Cependant, il est nécessaire de déterminer également σ_{zz} pour pouvoir remplacer totalement les expressions des contraintes dans (2.51) et (2.52). En utilisant la condition de déformations planes $\varepsilon_{zz} = 0$, on peut alors exprimer σ_{zz} en fonction de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$. On obtient après calculs :

$$\sigma_{zz} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})\left(\frac{\nu + \frac{\alpha}{2}\sigma_e^{n-1}}{1 + \alpha\sigma_e^{n-1}}\right) \tag{2.53}$$

En remplaçant l'équation (2.53) dans l'équation (2.51) on peut écrire :

$$\varepsilon_{rr} = A\sigma_{rr} + B\sigma_{\theta\theta} + \alpha\sigma_e^{n-1}(C\sigma_{rr} + D\sigma_{\theta\theta}) \tag{2.54}$$

En utilisant le fait que $\sigma(r,\theta) = Kr^{-\frac{1}{n+1}}\tilde{\sigma}(\theta)$, on peut simplifier les termes A,B,C et D pour obtenir :

$$\varepsilon_{rr} \approx Kr^{-\frac{1}{n+1}}\left(\tilde{\sigma}_{rr}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - \frac{3}{2}\nu\tilde{\sigma}_{\theta\theta}\right) + \frac{3}{4}\alpha K^n\tilde{\sigma}_e^{n-1}r^{-\frac{n}{n+1}}(\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}) \tag{2.55}$$

Le premier terme de cette expression est d'ordre $-\frac{1}{n+1}$ en r et est négligeable devant le second, qui est d'ordre $-\frac{n}{n+1}$, puisque $n > 1$. On peut alors écrire :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{3}{4}\alpha K^n\tilde{\sigma}_e^{n-1}r^{-\frac{n}{n+1}}(\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}) \tag{2.56}$$

Cette expression, dans laquelle on peut remplacer les termes $\tilde{\sigma}_{ij}$ par leur expression en fonction de $\tilde{\phi}$ et de ses dérivées par rapport à θ, devient, une fois intégrée par rapport à r (avec $s = \frac{2n+1}{n+1}$) :

$$\tilde{u}_r(\theta) = \frac{3}{4(s-2)}\left(s(2-s)\tilde{\phi} + \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial\theta^2}\right) \tag{2.57}$$

De la même manière en utilisant l'équation (2.52) on obtient après calculs :

$$\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}(\theta) = (s-3)\tilde{u}_r \tag{2.58}$$

On peut alors exprimer $\tilde{u}_\theta$ en fonction de $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{u}_\theta(\theta) = \tilde{\sigma}_e^{n-1}\left(\frac{3s(s-3)}{4}\int_0^\theta\tilde{\phi}(x)dx + \frac{3(s-3)}{4(2-s)}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta}\right) \tag{2.59}$$

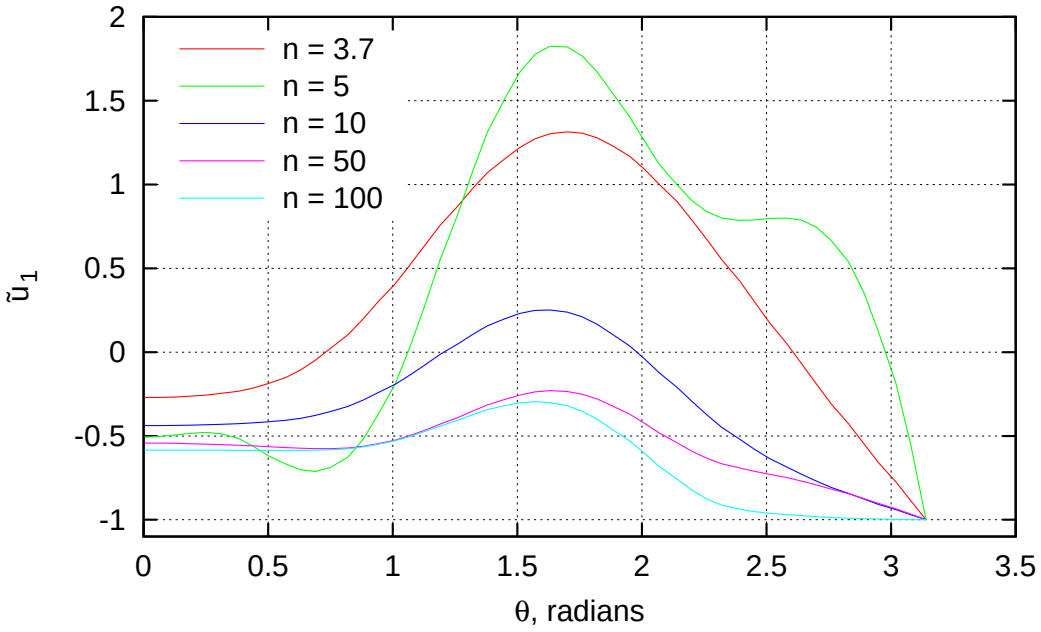


FIG. 2.13: Composante u1 du champs asymptotique des déplacements en mode I pour différents n

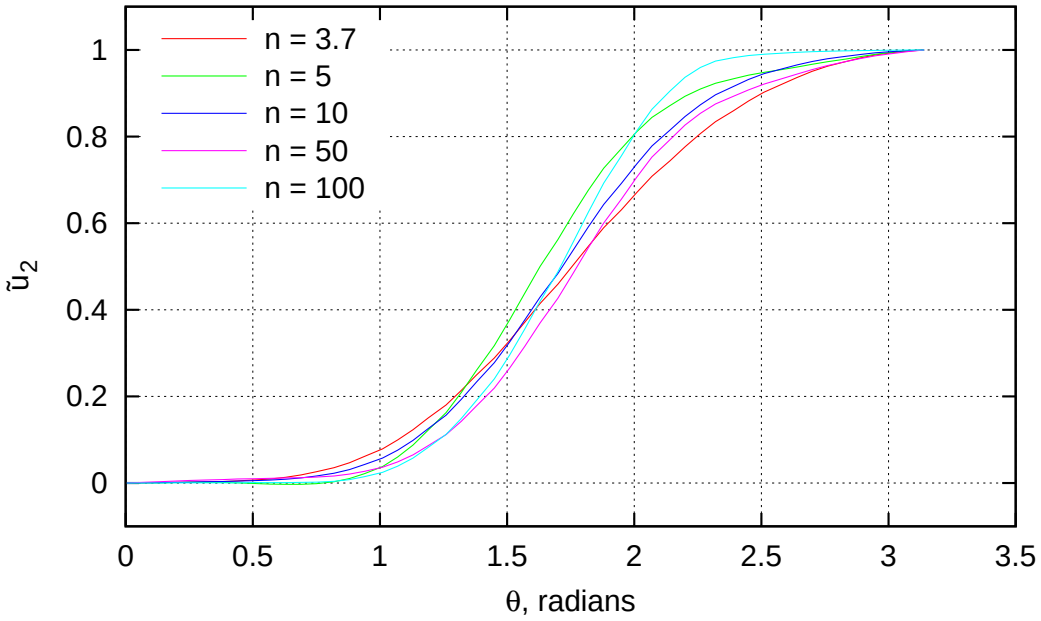


FIG. 2.14: Composante u2 du champs asymptotique des déplacements en mode I pour différents n

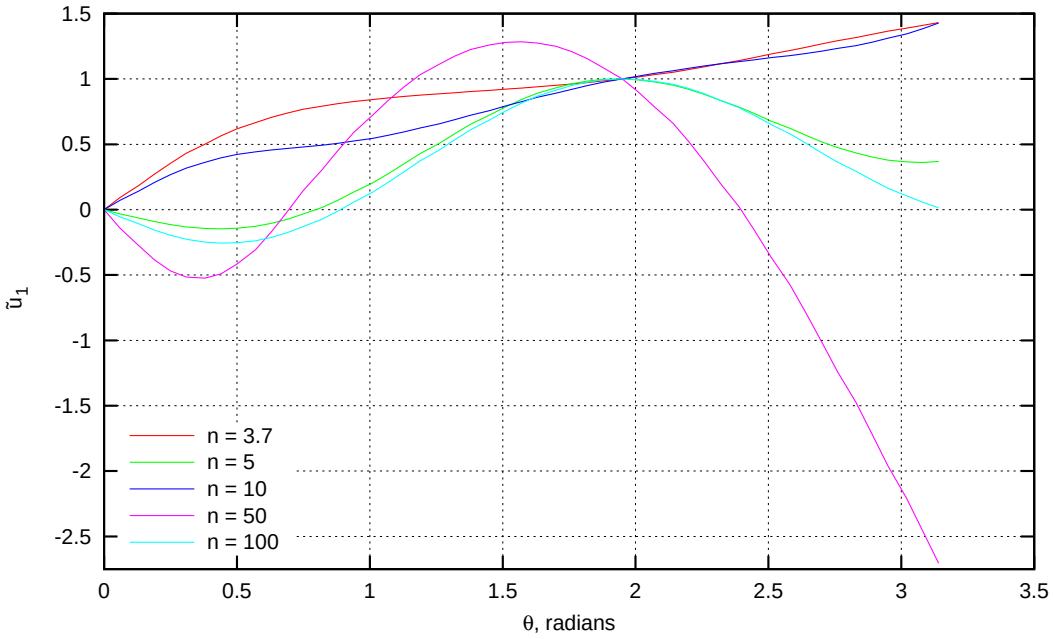


FIG. 2.15: Composante u1 du champs asymptotique des déplacements en mode II pour différents n

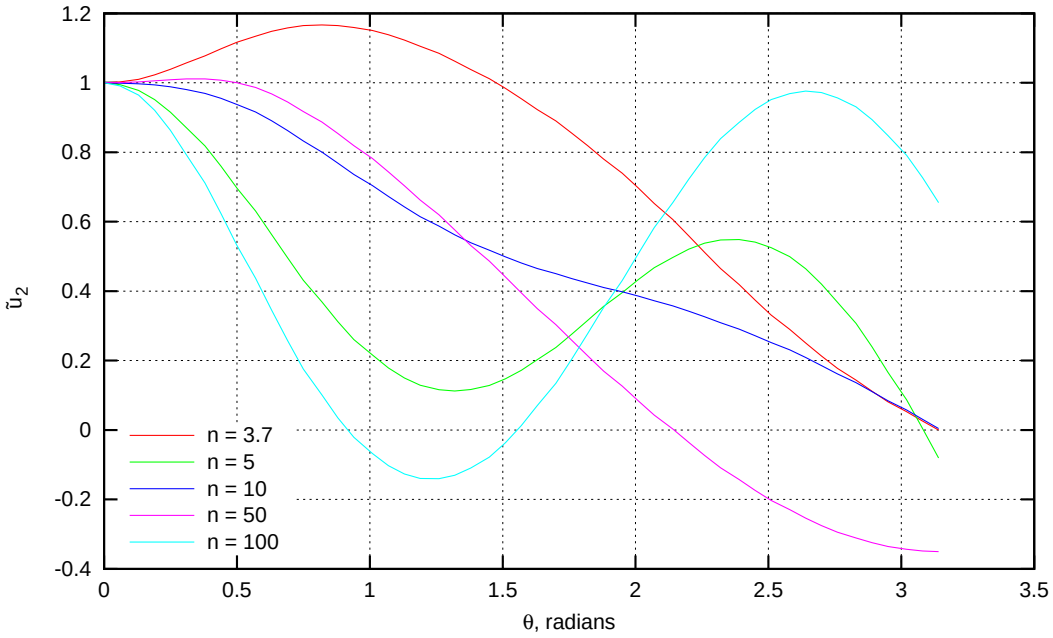


FIG. 2.16: Composante u2 du champs asymptotique des déplacements en mode II pour différents n

On peut observer sur les figures 2.13 à 2.14 les composantes des champs asymptotiques des déplacements en mode I et II pour différentes valeur de n (les résultats ont été normalisés).

2.3.2 Obtention des paramètres de fissuration en plasticité confinée

L'objectif de ce paragraphe est de présenter d'un point de vue continue, les méthodes d'obtention des paramètres de fissuration que sont l'intégrale J et les facteurs d'intensité des contraintes. Il s'agit tout d'abord de vérifier la validité des propriétés de l'intégral J, puis de proposer une technique d'obtention des FIC.

2.3.2.1 Intégrale J et taux de restitution de l'énergie G en élasto-plasticité

Une autre approche générale pour formuler le taux de restitution de l'énergie G est celle proposée dans [BUI 93]. On considère un matériau élasto-plastique défini par la donnée de son énergie libre volumique $W(\varepsilon-\varepsilon^p,\alpha,\theta)$, où θ désigne la température et α les variables internes. La dissipation locale peut s'exprimer comme suit :

$$D=\sigma.\dot{\varepsilon}^p-\frac{\partial W}{\partial\alpha}.\dot{\alpha} \tag{2.60}$$

La dissipation globale s'écrit :

$$\mathcal{D}=\int_\Omega D d\Omega+(G-2\gamma)\dot{a} \tag{2.61}$$

Le taux de restitution de l'énergie est alors donné par l'équation suivante :

$$G=\lim_{\Gamma\to 0}\int_\Gamma\left[\left(W(\varepsilon-\varepsilon^p,\alpha,\theta)+\frac{1}{2}\rho v.v\right)n_1-n.\sigma.\partial_1 u\right]ds \tag{2.62}$$

Avec Γ un contour entourant la pointe de fissure comme sur la figure 2.2.

On obtient ainsi dans le cas élasto-plastique la solution paradoxale et sans intérêt $G=0$ lorsque le contour Γ tend vers la pointe de fissure : c'est le *paradoxe de Bui en plasticité*.

L'intégrale J de Rice pour un matériau élastique linéaire est donnée par l'équation (2.24). Son expression[1] pour un comportement non-linéaire est donnée par [BUI 78, PLU 89]

$$J_p=\int_\Gamma(W_p n_1-\sigma_{ik}n_k\frac{\partial u_i}{\partial x_1})\,ds \tag{2.63}$$

Cette définition est valable dans la mesure où la contrainte dérive d'un potentiel :

$$W_p=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}\quad\text{ou}\quad\sigma_{ij}=\frac{\partial W_p}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{2.64}$$

On peut alors démontrer aisément la propriété d'indépendance vis à vis du contour de la même manière qu'en élasticité [PLU 89].

[1] les notations sont identiques à celles utilisées pour l'équation (2.24)

Remarque 4 *Cette définition est applicable à un comportement élasto-plastique uniquement dans le cas de chargement proportionnel (i.e. monotone croissant) afin de vérifier l'équation* (2.64) *et ainsi conserver la propriété d'indépendance vis à vis du contour. On conserve également dans ce cas l'égalité entre intégrale J et taux de restitution de l'énergie G [PLU 89].*

On peut trouver dans la littérature plusieurs modifications de cette intégrale permettant de prendre en compte un comportement élasto-plastique incrémental et ainsi traiter le cas des décharges élastiques et de chargements non proportionnels. Une première approche [SCH 89] consiste à réécrire la densité d'énergie de déformation W_p comme une densité de travail des efforts internes. Une autre possibilité [LEI 05] consiste à traiter l'aspect incrémental comme un problème à déformations initiales. Dans les deux cas, ceci rajoute à l'intégrale de contour une intégrale de domaine dont la forme varie selon les auteurs.

Remarque 5 *Si la plasticité est peu étendue et que le contour utilisé pour calculer l'intégrale J est bien choisi (c'est à dire englobant la zone plastique), il apparaît en pratique [PLU 89, SCH 89] que l'intégrale de domaine est négligeable devant l'intégrale de contour et que la propriété d'indépendance vis à vis du contour est pratiquement vérifiée.*

Plus récemment, plusieurs auteurs sous l'impulsion notamment des travaux théoriques de Maugin [MAU 95], ont proposé d'utiliser le concept de force matérielle ou configurationnelle afin de déterminer un critère de rupture. On pourra citer l'utilisation de ces techniques conjointement avec un formalisme numérique de type partition de l'unité dans [LAR 05, HEI 06]. Plus récemment certains auteurs [NGU 05] ont proposé des résultats intéressants quand à l'utilisation de ces méthodes pour des comportements dissipatifs (matériaux élasto-plastiques et visco-élastiques). On obtient dans ce cas que la force matérielle est la soustraction d'une force matérielle globale exprimée à l'aide du tenseur d'Eshelby et d'une force dissipative exprimée à l'aide des différents paramètres du modèle plastique.

$$F^{mat} = \int_{cont} \Sigma.ndS - F^{dissip} \text{ et } F^{dissip} = \int_{vol} -(\sigma : \nabla\varepsilon^p + q : \nabla\alpha)dV \tag{2.65}$$

où Σ est le tenseur d'Eshelby, α représente le tenseur du modèle plastique représentant l'écrouissage et q le tenseur dual de celui-ci. On pourra noter que dans le cas élastique linéaire la force dissipative est nulle, on retrouve alors l'expression vectorielle de l'intégrale J proposée entre autres par Bui [BUI 78].

L'ensemble de ces éléments montre que la question du taux de restitution de l'énergie en plasticité est loin d'avoir trouvée une réponse claire, on pourra d'ailleurs noter que Bui dit à ce sujet [BUI 93] "L'étude de la rupture en plasticité est très difficile".

2.3.2.2 Intégrale de domaine et intégrale d'interaction

Afin de pouvoir prendre en compte une propagation quelconque de fissure, il est intéressant de déterminer en plus de l'intégrale J les facteurs d'intensité des contraintes.

Ces facteurs n'ont pas de sens si on considère le cas de la déchirure ductile, puisqu'ils sont défini à partir de la singularité élastique difficilement identifiable avec une plasticité étendue. L'hypothèse principale est donc celle donnée par la figure 2.6 (b) d'une zone plastique de petite taille mais non négligeable entourée par une zone de dominance des champs élastiques linéaires. Cette zone de *K-dominance* nous permet de continuer à définir les facteurs d'intensité des contraintes tel que l'a fait Irwin, le champ de déplacement élastique dans cette zone étant rééquilibré par la prise en compte de la plasticité près de la pointe de fissure. On définit alors des facteurs d'intensité des contraintes qu'on pourrait appeler abusivement *élasto-plastiques*.

La technique que nous avons choisi d'utiliser pour découpler les modes de rupture est celle de l'intégrale d'interaction [YAU 80] qui est relativement utilisée dans la littérature que ce soit en élasticité linéaire 2D [MOË 99] et 3D [GOS 98, GRA 02], en dynamique [RÉT 05a] ainsi que pour les matériaux à propriétés mécaniques variables dans l'espace [MEN 06a]. En vue d'une évaluation numérique à partir de résultats éléments finis, il est possible de transformer les intégrales de contour que sont l'intégrale J et l'intégrale d'interaction en intégrales de domaine à l'aide de la technique du champ d'extension virtuelle de fissure [MOR 87, SUO 92a]. On introduit alors un champ q dit champ d'extension vir-

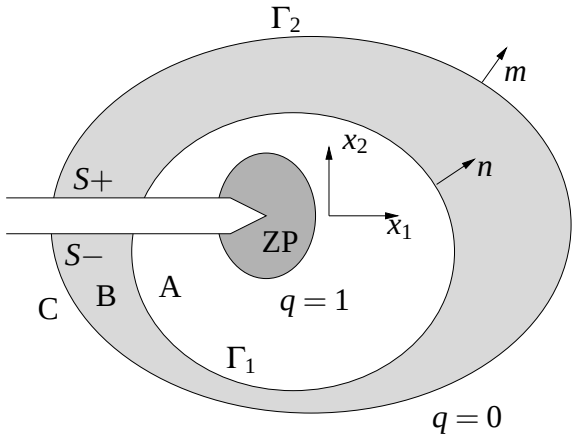


FIG. 2.17: Conventions pour l'intégrale de domaine et champ d'extension virtuelle en mode I

tuelle de fissure, parallèle aux lèvres de la fissure en mode I, et l'expression de l'intégrale J devient :

$$J_p = \int_\Omega \left(W_p n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_1} \, d\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = A \cup B \cup C \tag{2.66}$$

On peut observer sur la figure 2.17 une fissure dont la direction est donnée par le vecteur x_1. Le champ q est constant et égal 1 dans le domaine A délimité par le contour Γ_1, il est nul dans le domaine C situé à l'extérieur du contour Γ_2. Enfin le champ q varie continûment entre les contours Γ_1 et Γ_2. Étant donné que les seuls termes non nuls dans l'expression (2.66) sont ceux exprimés dans la région B (en effet on a $\frac{\partial q}{\partial x_1} = 0$ dans les

région A et C), l'intégrale J peut alors s'écrire :

$$J_p = \int_B \left(W_p n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_1} \, dB \tag{2.67}$$

On peut ensuite démontrer [SUO 92a] que cette intégrale est exactement égale à l'expression sur le contour Γ_1 donnée par l'équation (2.63) et est indépendante de ce contour. On observe sur la figure 2.17 que le premier contour Γ_1 est choisi de manière à englober la zone plastique entièrement. On obtient dans ce cas pour l'intégrale J la même valeur que ce soit par l'expression élastique (2.24) ou l'expression élasto-plastique (2.63).

On peut alors envisager d'utiliser l'intégrale d'interaction définie en élasticité dans [GOS 98, MOË 99, GRA 02] sous sa forme d'intégrale de domaine avec une telle stratégie de choix du contour. La plasticité étant totalement englobée par le contour Γ_1 les termes non nuls de l'intégrale d'interaction de domaine se trouvent dans la zone de *K-dominance*.

On considère deux états pour la structure fissurée : l'état réel (sol) représenté par $\sigma_{ij}^{(sol)}$, $\varepsilon_{ij}^{(sol)}$, $u_i^{(sol)}$ et l'état auxiliaire représenté par $\sigma_{ij}^{(aux)}$, $\varepsilon_{ij}^{(aux)}$, $u_i^{(aux)}$. L'intégrale d'interaction peut s'exprimer en terme de facteurs d'intensité des contraintes pour les états (sol) et (aux) sous la forme[MOË 99] :

$$I^{(sol,\, aux)} = \frac{2}{E^*} \left(K_I^{(sol)} K_I^{(aux)} + K_{II}^{(sol)} K_{II}^{(aux)} \right) \tag{2.68}$$

avec

$$E^* = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \\ E & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

En choisissant l'état (aux) comme solution asymptotique du mode I pur avec $K_I^{(aux)} = 1$ et $K_{II}^{(aux)} = 0$, on obtient le facteur d'intensité des contraintes en mode I pour la structure considérée par :

$$K_I^{(sol)} = \frac{2}{E^*} I^{(sol,\, modeI)} \tag{2.69}$$

On obtiendra $K_{II}^{(sol)}$ en prenant pour l'état auxiliaire la solution asymptotique en mode II.

L'intégrale d'interaction s'écrit sous sa forme d'intégrale de domaine de la façon suivante :

$$I^{(sol,\, aux)} = \int_B \left[\sigma_{ij}^{(sol)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(sol)}}{\partial x_1} - W^{(sol,\, aux)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dB \tag{2.70}$$

avec $W^{(sol,\, aux)} = \sigma_{ij}^{(aux)} \varepsilon_{ij}^{(sol)} = \sigma_{ij}^{(sol)} \varepsilon_{ij}^{(aux)}$. Dans le cas où les lèvres de la fissure sont en contact, un terme de contour qui s'exprime sur la partie des lèvres de la fissure reliant Γ_1

et Γ_2 (cf. figure 2.17) doit être rajouté à cette expression [LEB 00, DOL 01b] :

$$I^{(sol,\,aux)} = \int_B \left[\sigma_{ij}^{(sol)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(sol)}}{\partial x_1} - W^{(sol,\,aux)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dB \qquad (2.71)$$
$$- \int_{S_+ \cup S_-} \left[\sigma_{i2}^{(sol)} \frac{\partial u_i^{(aux)}}{\partial x_1} + \sigma_{i2}^{(aux)} \frac{\partial u_i^{(sol)}}{\partial x_1} \right] q.x_2 dS$$

2.4 Formulation variationnelle continue de la fissuration par fatigue

2.4.1 Formulation du problème global

Considérons le corps $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant une interface interne représentant une fissure comme présenté sur la Figure 2.3. Les lèvres de la fissure sont notées Γ^+ pour la lèvre supérieure et Γ^- pour la lèvre inférieure de telle sorte que $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ représente l'ensemble de la surface de la fissure. La frontière du corps Ω est notée $\partial\Omega$ et peut être séparée en deux parties : $\partial_1\Omega$ sur laquelle des conditions aux limites en déplacement u_d sont imposées (conditions de Dirichlet) et $\partial_2\Omega$ sur laquelle des conditions aux limites en efforts de surface F_d sont imposées (conditions de Neumann). On suppose un chargement de type quasi-statique, les effets d'inertie sont donc négligés, ainsi que l'absence de forces volumiques.

Les champs de contrainte et déplacement sont notés respectivement σ et u. Les quantités équivalentes sur l'interface sont également introduites : les efforts t et déplacements w, qui seront notés respectivement $+$ sur Γ^+ (t^+,w^+) et $-$ sur Γ^- (t^-,w^-). Pour simplifier l'écriture, on utilisera la notation w (respectivement t) pour faire référence à la fois à w^+ et w^- (respectivement t^+ et t^-). Dans le but d'introduire des éléments d'interface couplés à la méthode X-FEM, nous distinguerons explicitement dans la suite les champs volumiques (u, σ) des champs d'interface (w, t). Dans ce cadre, une formulation faible originale est proposée.

A cet instant, aucune hypothèse concernant la loi de comportement du matériau n'est faite, celle-ci peut donc être non-linéaire (élasto-plastique par exemple). La loi de comportement d'interface est écrite en terme de déplacements et efforts sur les lèvres de la fissure :

$$\mathcal{C}(t^+, t^-, w^+, w^-) = 0 \qquad (2.72)$$

Comme présenté dans [DOL 01b], la forme de l'opérateur $\mathcal{C}$ dépend de la nature de la loi de comportement d'interface considérée et peut également être non-linéaire dans le cas du contact unilatéral avec frottement. Cet opérateur $\mathcal{C}$ inclut les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c}(w^- - w^+).n \geq 0 \\ t^+.n \leq 0 \quad t^-.n \geq 0 \\ t^+.n = -t^-.n \\ P_T t^+ = -P_T t^- \\ t^+.n(w^- - w^+).n = 0\end{array}\right. \tag{2.73}$$

Où n est le vecteur normal extérieure à Γ^+ et P_T l'opérateur de projection tangentiel défini tel que tout vecteur v exprimé sur les lèvres de la fissure peut être décomposé en sa partie normale (portée par n) et sa partie tangentielle : $v = (v.n)n + P_T v$.

Pour un comportement sans frottement, la condition suivante est ajoutée :

$$P_T t^+ = -P_T t^- = 0 \tag{2.74}$$

L'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ est défini par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{(u,w) \in \mathcal{U} \ : \ u\,|_{\partial_1\Omega} = u_d,\ u\,|_{\Gamma^+} = w^+,\ u\,|_{\Gamma^-} = w^-\right\} \tag{2.75}$$

où l'ensemble $\mathcal{U}$ définit les propriétés de régularités des champs de déplacements. L'espace $\mathcal{U}_0$ des champs de déplacement cinématiquement admissibles à zéro est défini par :

$$\mathcal{U}_0 = \left\{(u,w) \in \mathcal{U} \ : \ u\,|_{\partial_1\Omega} = 0,\ u\,|_{\Gamma^+} = w^+,\ u\,|_{\Gamma^-} = w^-\right\} \tag{2.76}$$

En considérant un chargement de type quasi-statique, ainsi que l'absence de forces volumiques, l'ensemble des champs statiquement admissibles à l'instant n, $\mathcal{T}_{ad}$ est défini d'après le principe des puissances virtuelles [GER 80] :

$$\mathcal{T}_{ad} = \left\{(\sigma_n, t_n) \in \mathcal{T} \ : \ \sigma_n^T = \sigma_n \ \text{ vérifiant } \ \int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(u^\star) d\Omega = \right.$$
$$\left. \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u^\star dS + \int_{\Gamma^+} t_n^+.{w^\star}^+ dS + \int_{\Gamma^-} t_n^-.{w^\star}^- dS \quad \forall (u^\star, w^\star) \in \mathcal{U}_0 \right\} \tag{2.77}$$

Où $\mathcal{T}$ définit les propriétés de régularités des champs statiques, $u^\star$ et $w^\star$ sont les champs de déplacement virtuel cinématiquement admissibles à zéro.

En tenant compte de la notation simplifiée présentée plus haut, les deux dernières intégrales du principe des puissances virtuelles de l'équation (2.77) peuvent être réécrites :

$$\int_\Gamma t_n.w^\star dS = \int_{\Gamma^+} t_n^+.{w^\star}^+ dS + \int_{\Gamma^-} t_n^-.{w^\star}^- dS \tag{2.78}$$

L'équation (2.77) devient alors :

$$\int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(u^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u^\star dS + \int_\Gamma t_n.w^\star dS \quad \forall (u^\star, w^\star) \in \mathcal{U}_0 \tag{2.79}$$

Considérons l'équation de continuité dans Ω des champs cinématiques donnée par la relation entre u et w :

$$u\,|_{\Gamma^+} = w^+ \ et \ u\,|_{\Gamma^-} = w^- \tag{2.80}$$

Cette équation est imposée en introduisant un multiplicateur de Lagrange Λ défini sur l'interface Γ. L'espace auquel Λ appartient est défini par (cf. [ALA 91, SIM 92, BEL 02] pour plus de détails) :

$$\mathcal{L}_0 = \{\Lambda \in \mathcal{L}\} \tag{2.81}$$

L'équation (2.79) devient alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(u^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u^\star dS + \int_\Gamma t_n.w^\star dS + \int_\Gamma \Lambda^\star.(u_n\,|_\Gamma - w_n) dS \\ + \int_\Gamma \Lambda_n.(u^\star\,|_\Gamma - w^\star) dS \quad \forall (u^\star, w^\star) \in \mathcal{U}_0^*,\ \forall \Lambda^\star \in \mathcal{L}_0\end{aligned} \tag{2.82}$$

L'espace $\mathcal{U}_0^*$ est défini comme $\mathcal{U}_0$ sans la condition de compatibilité des déplacements formulée par l'équation (2.80) étant donné que le multiplicateur de Lagrange Λ est introduit pour imposer celle-ci.

Dans cette équation les inconnues "principales" sont u_n, w_n et Λ_n, les inconnues "secondaires" sont σ_n et t_n. Elles peuvent être obtenues à partir des inconnues principales en utilisant la loi de comportement volumique pour σ_n et la loi de comportement d'interface pour t_n.

2.4.2 Formulation itérative continue

Compte tenu de la prise en compte du contact dans l'équation précédente, celle-ci est non-linéaire. De plus, la loi de comportement volumique du matériau pouvant également être non-linéaire, une stratégie de résolution itérative est nécessaire pour résoudre le problème global [RAO 04b]. L'équation (2.82) est donc réécrite en utilisant les notations suivantes : u est remplacé par $u_n^{(i)}$ où l'exposant (i) correspond à la i-ième itération et l'indice n correspond au n-ième pas de temps.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma_n^{(i)} : \varepsilon(u^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u^\star dS + \int_\Gamma t_n^{(i)}.w^\star dS + \int_\Gamma \Lambda^\star.(u_n^{(i)}\,|_\Gamma - w_n^{(i)}) dS \\ + \int_\Gamma \Lambda_n^{(i)}.(u^\star\,|_\Gamma - w^\star) dS \quad \forall (u^\star, w^\star) \in \mathcal{U}_0,\ \forall \Lambda^\star \in \mathcal{L}_0\end{aligned} \tag{2.83}$$

Cette équation peut être reformulée en regroupant les termes dépendants de $u^\star$, $w^\star$ et $\Lambda^\star$.

$$\begin{aligned}0 \;=\; & -\int_\Omega \sigma_n^{(i)} : \varepsilon(u^\star) d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u^\star dS + \int_\Gamma \Lambda_n^{(i)}.u^\star\,|_\Gamma\, dS \\ & + \int_\Gamma t_n^{(i)}.w^\star dS - \int_\Gamma \Lambda_n^{(i)}.w^\star dS \\ & + \int_\Gamma \Lambda^\star.(u_n^{(i)}\,|_\Gamma - w_n^{(i)}) dS \quad \forall (u^\star, w^\star) \in \mathcal{U}_0,\ \forall \Lambda^\star \in \mathcal{L}_0\end{aligned} \tag{2.84}$$

En observant la seconde partie de cette équation, on peut remarquer que lorsque la convergence est atteinte on obtient $\Lambda = t$. Ce résultat est assez logique puisque l'équation imposée en introduisant le multiplicateur de Lagrange Λ est équivalente à une condition aux limites en déplacement de type Dirichlet : le multiplicateur de Lagrange est donc censé être égal à la force développée sur la frontière considérée, qui est l'effort d'interface t dans le cas présent.

En s'inspirant des travaux présentés dans [SIM 92, BEL 02], une régularisation du problème de contact par pénalité est faite. Deux paramètres de pénalité sont introduits, l'un portant sur les quantités normales α^n et l'autre portant sur les quantités tangentielles α^t. En exprimant toutes les quantités d'interface dans le repère normal, on peut définir une matrice de pénalité diagonale α comme présenté dans l'équation suivante :

$$\alpha.w_n^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha^n \times (w_n^{(i)}.n) \\ \alpha^t \times (P_T w_n^{(i)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^n \times (w_n^{(i)})_n \\ \alpha^t \times (w_n^{(i)})_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \alpha^t \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} (w_n^{(i)})_n \\ (w_n^{(i)})_t \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

L'équation (2.84) peut alors être remplacée par :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & -\int_\Omega \sigma_n^{(i)} : \varepsilon(u^\star) d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u^\star dS + \int_\Gamma \Lambda_n^{(i)}.u^\star \mid_\Gamma dS \\ & + \int_\Gamma (t_n^{(i-1)} + \alpha w_n^{(i-1)}).w^\star dS - \int_\Gamma (\Lambda_n^{(i)} + \alpha w_n^{(i)}).w^\star dS \\ & + \int_\Gamma \Lambda^\star.(u_n^{(i)} \mid_\Gamma - w_n^{(i)}) dS \quad \forall (u^\star, w^\star) \in \mathcal{U}_0,\ \forall \Lambda^\star \in \mathcal{L}_0 \end{aligned} \tag{2.86}$$

L'équation (2.86) représente une formulation du type Lagrangien augmenté du problème considéré. On peut observer que lorsque la convergence est atteinte l'énergie de pénalité est nulle étant donné que le terme $\int_\Gamma \alpha(w_n^{(i-1)} - w_n^{(i)}).w^\star dS$ est égal à zéro : ceci montre que d'un point de vue théorique le choix du coefficient de pénalité n'a pas d'influence sur la convergence de la méthode.

Chapitre 3

Modélisation de non-linéarités par la méthode des éléments finis étendus

Sommaire

3.1 Introduction - Méthode des éléments finis étendus 52
3.1.1 Introduction 52
3.1.2 Discrétisation spatiale : méthode des éléments finis étendus 52
3.2 Prise en compte de non-linéarités comportementales 55
3.2.1 Base d'enrichissement EP : analyse des solutions asymptotiques . . 55
3.2.2 Intégration numérique : une vision à deux échelles 59
3.2.3 Étude de plusieurs bases et critère de choix 62
3.3 Prise en compte des refermetures : contact et frottement 64
3.4 Résolution discrète du problème non-linéaire 64
3.4.1 Formulation discrétisée 64
3.4.2 Mise à jour des variables non-linéaires 68
3.5 Calcul numérique des paramètres de fissuration 68
3.6 Exemples numériques 69
3.6.1 Comparaison avec un calcul éléments finis 69
3.6.2 Comparaison avec un calcul X-FEM purement élastique 74
3.6.3 Calcul à fissure fixe avec refermeture 77

3.1 Introduction - Méthode des éléments finis étendus

3.1.1 Introduction

Ce troisième chapitre aborde les aspects numériques et plus particulièrement les méthodes de discrétisation qui ont été choisies. On présentera dans un premier temps la technique de discrétisation spatiale qu'est la méthode des éléments finis étendus ainsi que le concept de partition de l'unité sur lequel elle est basée. On s'intéressera ensuite aux différents développements proposés pour étendre cette méthode aux non-linéarités de comportement dans un premier temps, puis de contact frottement dans un second temps. Enfin, après avoir présenté la formulation discrétisée du problème global, on s'intéresse à la technique de calcul numérique des paramètres de fissuration et des premiers résultats à fissure fixe sont proposés.

3.1.2 Discrétisation spatiale : méthode des éléments finis étendus

3.1.2.1 La méthode de partition de l'unité

La méthode de partition de l'unité a été développée par Babuška et Melenk [BAB 97] et conjointement par Duarte et Oden [DUA 96]. Elle a été depuis appliquée à un grand nombre de problèmes dont voici une liste non exhaustive : la mécanique des fluides [WAG 01, WAG 03, CHE 03a, CHE 03b], les interactions fluide-structure [LEG 06a], la modélisation de trous et inclusions [SUK 00a, LEG 05a], de transformation de phase [DOL 01a, JI 02, CHE 02] et enfin la mécanique de la rupture. Pour cette dernière application, on peut citer la méthode des éléments finis étendus X-FEM développée par Belytschko, Moës *et al.* [BLA 99, MOË 99, DOL 00], la méthode des éléments finis généralisés proposée par Strouboulis *et al.* [STR 00a, STR 00b, DUA 00b] ansi que les travaux de de Borst *et al.* [WEL 01, WEL 02a, WEL 02b, REM 03, BOR 04, BOR 06] qui utilisent toutes une partition de l'unité locale.

Soit un domaine Ω maillé par un ensemble d'éléments $\mathcal{E}$ et discrétisé par un ensemble de noeuds $\mathcal{N}$. Un ensemble de fonctions de formes N_i s'appuie sur ces ensembles. On peut alors représenter une approximation éléments finis $\bar{u}$ d'un champ u de la façon suivante :

$$\bar{u} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i \tag{3.1}$$

On peut démontrer [BAB 97] que si les fonctions de forme N_i constituent une partition de l'unité dans le domaine : Ω

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{3.2}$$

on peut enrichir l'approximation de u avec une fonction d'enrichissement $\phi(\mathbf{x})$ de la façon suivante :

$$\tilde{u} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_e} N_i(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) U_i^e \tag{3.3}$$

où $\mathcal{N}_e$ représente l'ensemble des noeuds auxquels on choisit de placer des degrés de liberté enrichis U_i^e. On peut illustrer assez simplement ce concept en considérant d'une part qu'on enrichit tous les noeuds de Ω, c'est à dire que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_e$, ensuite en considérant égaux à zéro tous les degrés de liberté non enrichis ($U_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}$) et enfin en considérant tous les degrés de liberté enrichis égaux à un ($U_i^e = 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}_e$). Sous ces hypothèses l'approximation $\tilde{u}$ reproduit alors la fonction $\phi(\mathbf{x})$ dans tout le domaine Ω.

$$\tilde{u} = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \tag{3.4}$$

La fonction d'enrichissement peut être choisie de manière à capturer plus efficacement la solution du problème considéré [STR 00a, STR 00b]. On peut ainsi introduire des discontinuités dans les champs de déplacement et déformations. L'ensemble des noeuds enrichis $\mathcal{N}_e$ est alors lié au support géométrique de la discontinuité considérée. Selon le problème traité, on peut également introduire plusieurs fonctions d'enrichissement si une unique fonction ne permet pas de capturer totalement la discontinuité. Les principaux intérêts de cette méthode sur les éléments finis classiques sont l'amélioration de l'ordre de convergence, le découplage discontinuité-maillage, la description implicite de la géométrie des discontinuités et enfin l'absence de remaillage lors de la propagation d'une discontinuité.

Remarque 6 *Dans le cas d'un enrichissement local, pour des raisons de coût de calcul principalement, seule une partie des noeuds du domaine sont enrichis. On a alors existence d'une couche d'éléments partiellement enrichis entre les éléments enrichis et les éléments non enrichis. Ces éléments ne vérifient pas la propriété de partition de l'unité étant donné que seule une partie de leurs noeuds sont enrichis. On peut alors montrer [CHE 03c] que la présence de cette zone et la façon dont elle est traitée peut avoir une influence sur l'ordre de convergence de la méthode. Il existe plusieurs solutions pour palier à ce problème, la première étant de changer les fonctions d'enrichissement de telle sorte qu'elles soient nulles dans les éléments intermédiaires [ZI 03]. Dans le cas d'enrichissement de type saut de déformation [CHE 03c], une autre solution consiste à introduire dans ces éléments un champ de déformation augmenté qui permet d'éliminer les termes dus à l'enrichissement, on peut également modifier partiellement le degré de ces éléments pour l'interpolation éléments finis classiques. Dans cette étude, aucun traitement particulier de ces éléments n'est effectué, l'ordre de convergence ainsi atteint étant jugé satisfaisant.*

3.1.2.2 La méthode des éléments finis étendus appliquée à la mécanique linéaire de la rupture

Dans une problématique orientée mécanique de la rupture, la discontinuité que l'on souhaite représenter grâce à l'enrichissement est la fissure elle-même. On doit alors prendre en compte d'une part la discontinuité du champ de déplacement au passage de la fissure loin de la pointe, et d'autre part la singularité du champ de déplacement autour de la pointe.

Discontinuité en espace Afin de prendre en compte des discontinuités du champ de déplacement, on introduit une fonction *saut* $\mathcal{H}$ (aussi appelée *Heaviside step function* dans la littérature) définie comme suit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au dessus de } \Gamma \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ est au dessous de } \Gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

où Γ est l'entité géométrique représentant la discontinuité et $\mathbf{x}$ le vecteur position d'un point de Ω. On peut alors définir l'ensemble $\mathcal{N}_e$ des noeuds enrichis par :

$$\mathcal{N}_e = \left\{ n_i \in \mathcal{N},\ \omega_i \cap \Gamma \neq \emptyset \right\} \tag{3.6}$$

où $\omega_i = supp(N_i)$ représente le support de la fonction de forme N_i. On peut alors écrire de la même façon que dans l'équation (3.3) l'approximation Éléments Finis Étendus du champ de déplacement :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_e} N_i(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}) U_i^e \tag{3.7}$$

Modélisation des singularités La prise en compte de la singularité du champ de déplacement en $\sqrt{r}$ à l'aide de la technique d'enrichissement permet d'améliorer très sensiblement les résultats éléments finis classiques même avec un maillage grossier. On utilise pour cela des fonctions d'enrichissement qui permettent de représenter exactement les champs asymptotiques donnés par les équations (2.4) à (2.6). De nombreux travaux [FLE 97, BLA 99, MOË 99, SUK 00b, DUA 00b, MOË 02] ont montré que la base de fonctions d'enrichissement suivante est la plus adéquate en élasticité linéaire 2D et 3D :

$$[B_\alpha] = \sqrt{r} \left[\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \right] \tag{3.8}$$

Le choix de cette base plutôt que l'utilisation directe des solutions asymptotiques ou d'un développement en série de Fourier est motivé par plusieurs arguments. Tout d'abord, en plus de la représentation de la singularité, elle doit permettre de capturer le saut de déplacement en arrière de la fissure dans l'élément ainsi enrichi, puisque celui-ci ne contient pas d'enrichissement de type saut $\mathcal{H}$. Elle doit donc contenir une fonction discontinue au passage de la fissure en arrière de la pointe. Ceci est réalisé par la fonction $\sin\theta/2$. La présence de plusieurs fonctions discontinues dégradant le conditionnement de la matrice de raideur, les autres fonctions de la base doivent être continues dans tout l'élément enrichi. D'autre part, l'évaluation de ces fonctions par une intégration discrète de type Gauss pour le calcul de la matrice de raideur doit être maîtrisé "au mieux", on doit donc limiter au maximum la variation de ces fonctions dans l'élément considéré afin de limiter le nombre de points d'intégration.

Le champ de déplacement est alors décrit par l'approximation éléments finis étendus suivante :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) a_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{front}} \sum_{\alpha} N_i(\mathbf{x}) B_\alpha(\mathbf{x}) b_{i,\alpha} \tag{3.9}$$

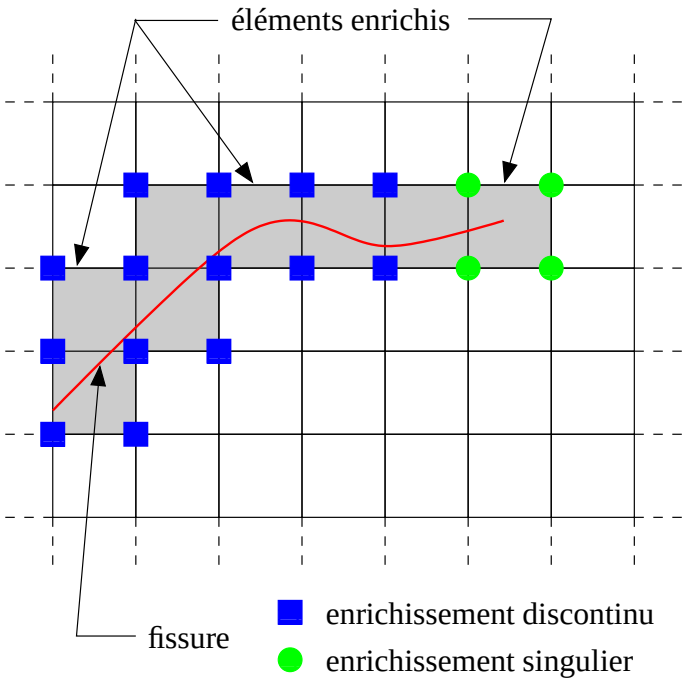


FIG. 3.1: Une fissure quelconque placée sur un maillage - stratégie d'enrichissement

où $\mathcal{N}_{front}$ est l'ensemble des noeuds dont le support contient le front de fissure (représentés par des cercles sur la figure 3.1), et $\mathcal{N}_{cut}$ est l'ensemble des noeuds dont le support est entièrement tranché par la fissure (représenté par des carrés sur la figure 3.1).

Remarque 7 *Récemment, certains auteurs [BÉC 05, LAB 05] ont proposé de définir une zone enrichie singulière indépendamment de la finesse du maillage. On parle alors d'enrichissement géométrique, en opposition à l'enrichissement topologique présenté à la figure 3.1. Nous nous contenterons dans cette étude de l'enrichissement topologique classiquement utilisé dans la littérature.*

3.2 Prise en compte de non-linéarités comportementales

3.2.1 Base d'enrichissement élasto-plastique : analyse des solutions asymptotiques

Dans le cas de la mécanique élasto-plastique de la rupture, on a pu montrer au chapitre précédent que les champs asymptotiques élasto-plastiques en pointe de fissure sont différents de ceux obtenus en élasticité. La base d'enrichissement en pointe de fissure, présentée à l'équation (3.8), utilisée classiquement en élasticité n'est plus adéquate.

En ce qui concerne les champs élastoplastiques, ce type de base n'est pas flagrant puisque la singularité et les fonctions $\tilde{u}_i(\theta)$ dépendent du matériau par le biais du coefficient n de la loi de comportement. Cependant en s'inspirant de la base précédente, on peut

envisager de déterminer une décomposition en série de Fourier des champs asymptotiques dans le cas d'un matériau élasto-plastique. Afin de calculer correctement les coefficients de Fourier (on ne connaît la fonction ϕ et ses dérivées qu'entre 0 et π), les propriétés de symétrie et antisymétrie des champs élastiques sont conservées, on peut alors représenter les champs plastiques entre 0 et 4π (la variable étant $\theta/2$, les fonctions ont pour période 4π). Les propriétés classiques des coefficients de Fourier concernant la symétrie/antisymétrie sont alors utilisées afin de les calculer numériquement.

3.2.1.1 Calcul des coefficients de Fourier

Afin de calculer ces coefficients, il est nécessaire avant toute chose de modifier les champs asymptotiques obtenus au chapitre précédent pour que ceux-ci vérifient les propriétés des fonctions développables en série de Fourier.

On doit pour cela étendre ces fonctions de l'intervalle $[0;\pi]$ à l'intervalle $[0;4\pi]$ avec comme variable $\theta/2$. Ceci peut être démontré aisément dans le cas de l'élasticité en mode I par exemple (comme au chapitre précédent, k désigne la constante de Kolosov) :

$$u_1(r,\theta) = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta) \tag{3.10}$$

Ceci peut s'écrire

$$u_1(r,\theta) = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,\tilde{u}_1(\theta) \tag{3.11}$$

La décomposition ainsi obtenue est une fonction 4π périodique de θ ayant les propriétés suivantes :

- $\tilde{u}_1(\theta) = \tilde{u}_1(\pi-\theta)$ sur l'intervalle $[\pi;2\pi]$
- $\tilde{u}_1(\theta)$ est symétrique par rapport à l'axe $y = 2\pi$.

En observant les propriétés de symétrie/antisymétrie des champs asymptotiques en élasticité linéaire, on peut "périodiser" les champs de déplacement élasto-plastiques obtenus précédemment. On peut ensuite calculer les coefficients des développements en série de Fourier pour chaque cas, avec les propriétés suivantes : en mode I, u_1 est paire et u_2 est impaire ; en mode II, u_1 est impaire et u_2 est paire.

Les coefficients sont calculés numériquement, après avoir périodisé les fonctions, en utilisant les formules suivantes :

$$f(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos(m\omega t) + b_m\sin(m\omega t)\right) \tag{3.12}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \tag{3.13}$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(m\omega t)dt \tag{3.14}$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(m\omega t)dt \tag{3.15}$$

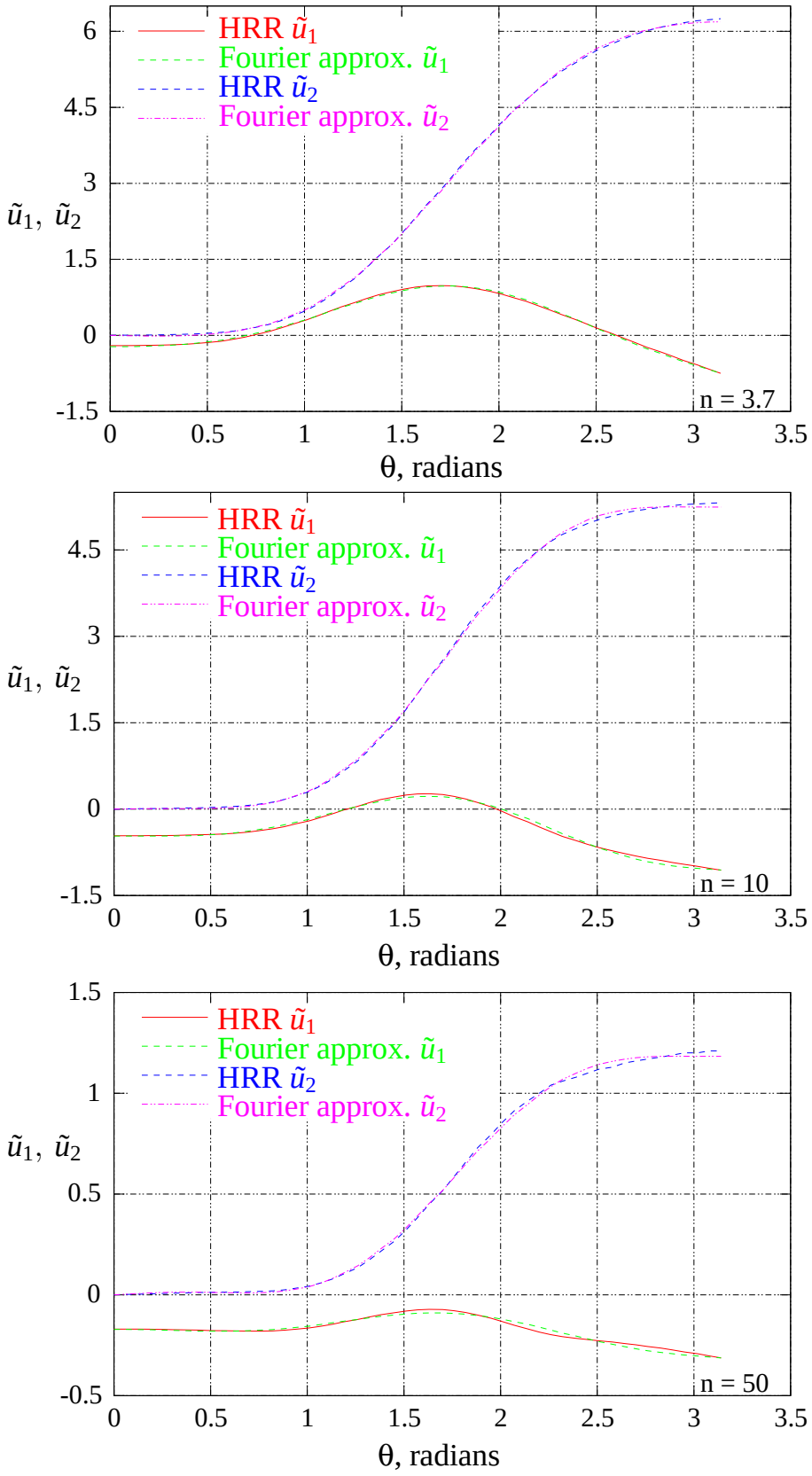


FIG. 3.2: Approximations des champs HRR en mode I

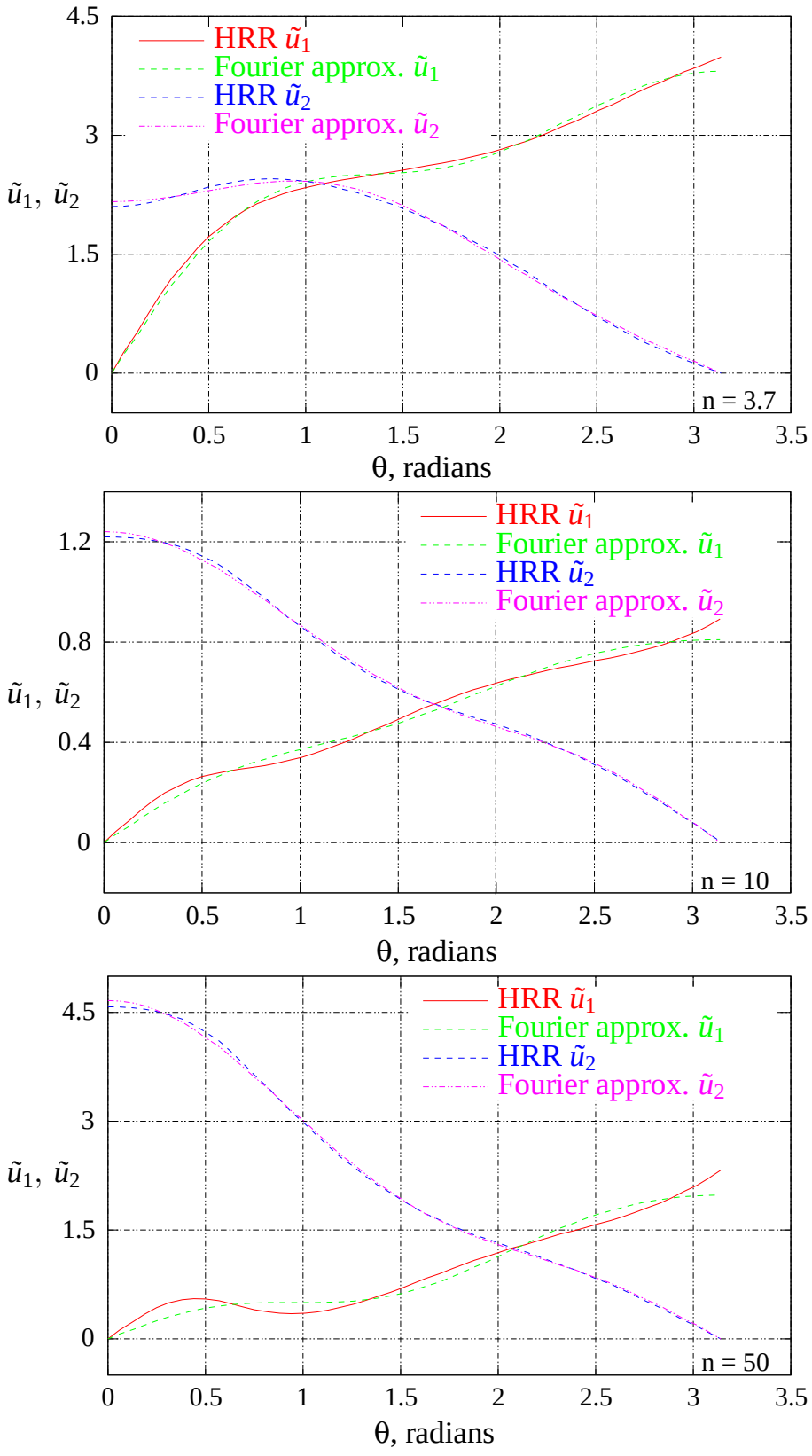


FIG. 3.3: Approximations des champs HRR en mode II

où T est la période de la fonction f, α un réel quelconque et k un entier naturel.

On peut constater dans tous les cas que seuls les termes correspondant aux fonctions $\cos(k\theta/2)$ et $\sin(k\theta/2)$ sont non nuls.

3.2.1.2 Extraction d'une base de développement

La décomposition de Fourier des fonctions obtenues précédemment montre que l'on peut représenter correctement les champs HRR en utilisant une décomposition sur les quatre premières harmoniques non nulles pour chaque fonction. On peut observer sur les figures 3.2 et 3.3 les solutions exactes et les décompositions de Fourier en mode I et mode II en déformations planes pour trois types de matériau (écrouissage élevé $n = 3.7$, écrouissage moyen $n = 10$ et écrouissage faible $n = 50$). On peut observer que pour des valeurs faibles de n la décomposition de Fourier décrit très bien les champs HRR. Dans le cas de valeurs plus importantes de n on a pu constater que les champs sont plus complexes, la base de développement décrit donc moins bien ceux-ci, mais les résultats restent bons même pour $n = 50$.

Ceci montre que l'on peut donc représenter le champ de déplacement en mode I pur et mode II pur en développant les champs HRR sur la base suivante :

$$r^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \left(\cos \frac{k\theta}{2}, \sin \frac{k\theta}{2} \right) ; k \in [1,3,5,7] \right\} \tag{3.16}$$

3.2.2 Intégration numérique : une vision à deux échelles

L'intégration numérique proposée pour les calculs élastiques linéaires doit être améliorée du fait de la présence d'harmoniques plus élevées dans la base d'enrichissement plastique. La technique proposée dans [MOË 99], qui consiste à sous-découper les éléments tranchés par la fissure en sous triangles contenant chacun trois points d'intégration n'est pas suffisante.

Le nombre de points de Gauss contenus dans chaque sous triangle pourrait être augmenté afin d'améliorer l'intégration des harmoniques élevées, mais il est nécessaire avant cela d'évaluer la pertinence de cette stratégie du point de vue de la propagation. Lorsque la fissure propage dans une nouvelle direction, les sous triangles associés à la position de la fissure au pas 1 doivent être également sous-découpés en sous triangles afin d'être compatibles avec la nouvelle position des lèvres de la fissure (figure 3.4). Avec cette technique, la projection des contraintes et variables internes est inévitable à mesure que la fissure avance, ce qui peut entraîner des problèmes tels que la non conservation de l'énergie. Une nouvelle stratégie d'intégration qui contournerait ce problème ne s'appuierait pas sur un nouveau sous-découpage lors de la propagation.

Dans la mesure où l'on souhaite également représenter les contraintes et variables internes du modèle plastique sur ces points d'intégration, il est intéressant d'y disposer d'une information assez fine. En comparaison avec l'échelle "grossière" représentée par le maillage éléments finis étendus, on propose de mettre en place une échelle fine afin de

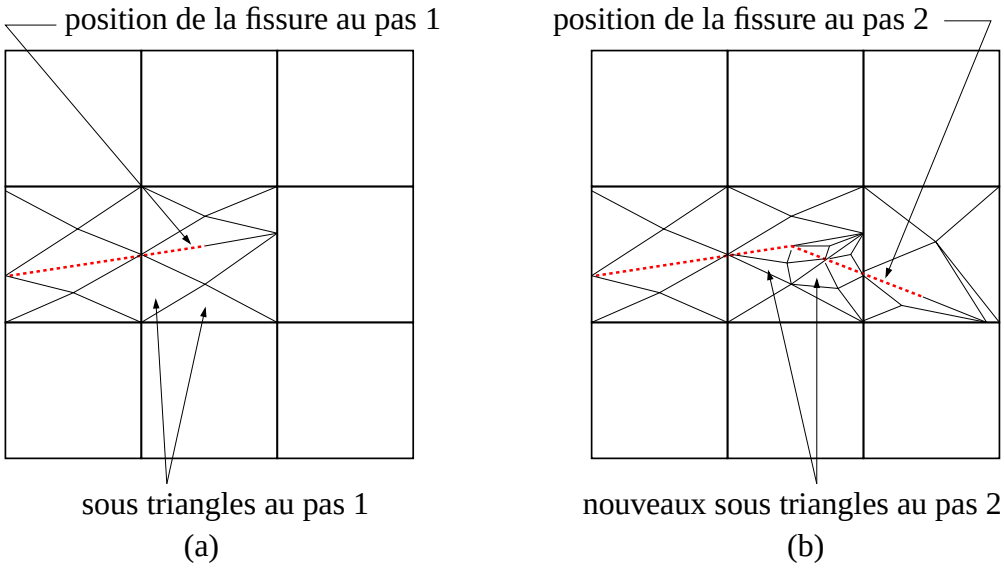


FIG. 3.4: (a) Sous triangles avant propagation - (b) sous triangles après propagation

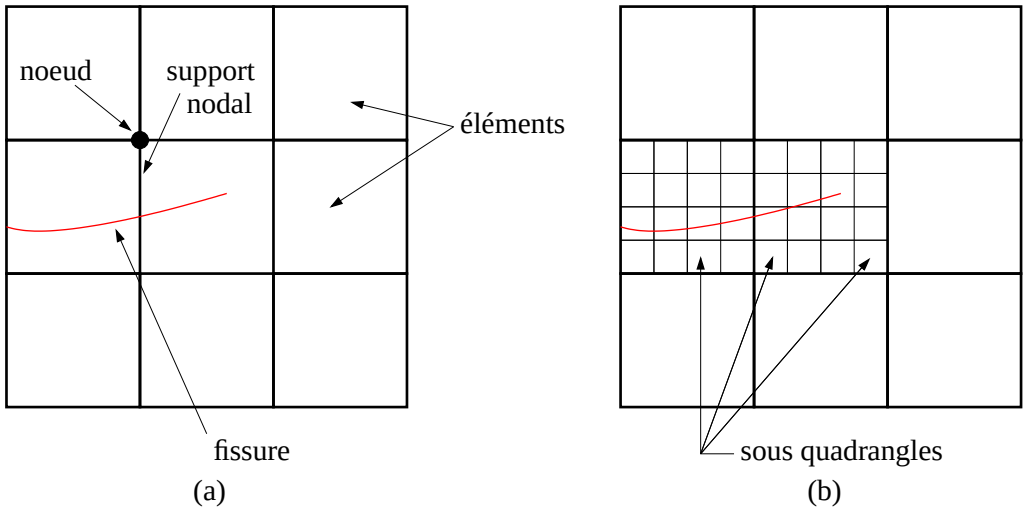


FIG. 3.5: (a) Support nodal tranché par la fissure - (b) sous quadrangles associés aux éléments tranchés par la fissure

représenter avec précision le comportement non-linéaire du matériau autour de la pointe de fissure.

Dans cette optique, une stratégie de sous découpage en quadrangles, équivalente à celle présentée dans [JI 02] est adoptée. Les éléments tranchés par la fissure sont sous-découpés en 16 sous quadrangles contenant chacun 16 points de Gauss (cf. figure 3.5). Avec cette technique, les bords des sous-éléments ne sont pas compatibles avec les lèvres de la fissure, et des erreurs d'intégration numérique peuvent apparaître pour les fonctions d'enrichissement discontinues au passage de la fissure (*i.e.* la fonction saut $\mathcal{H}$ et la fonc-

tion singulière $\sin(\theta/2)$).

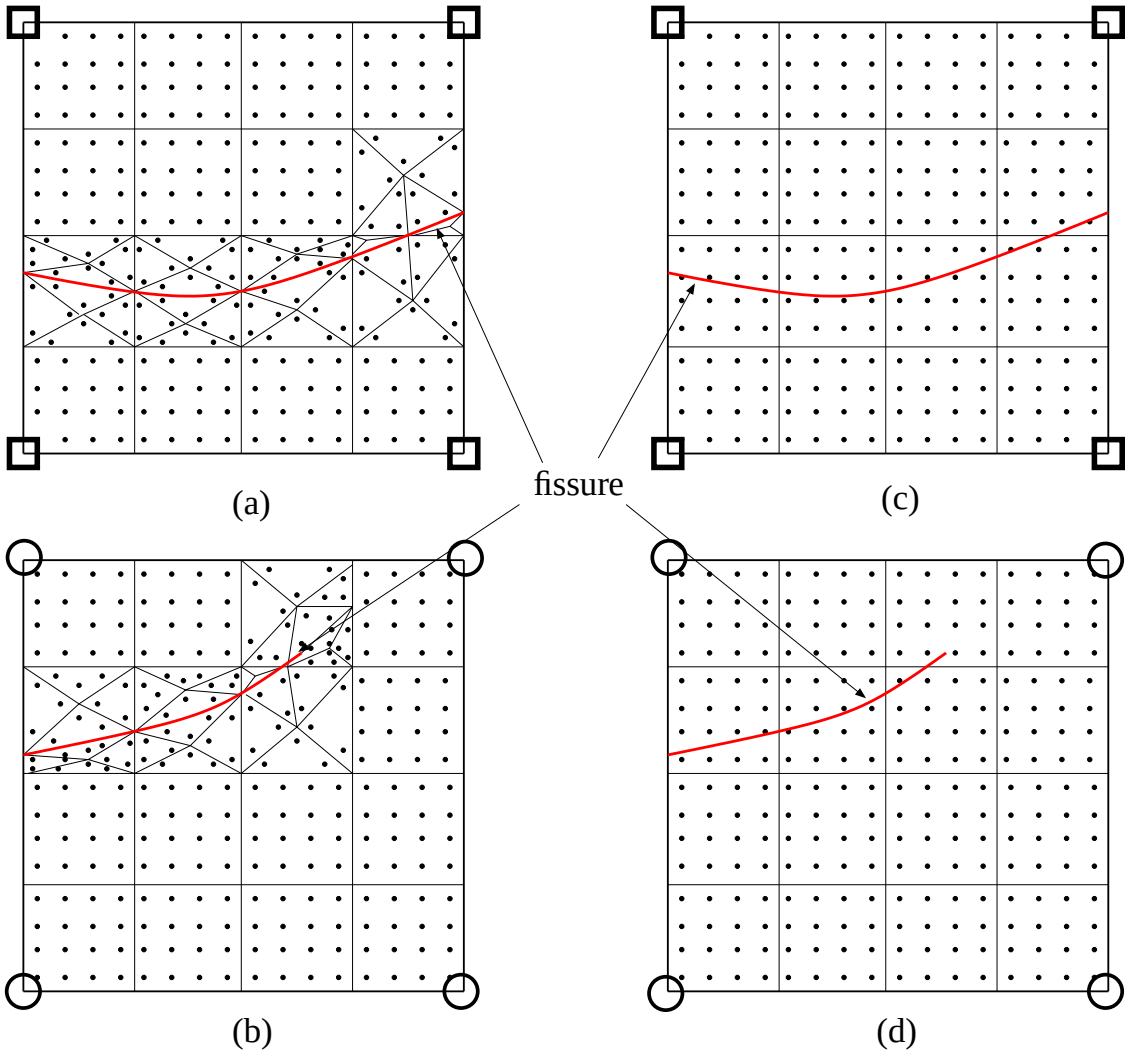


FIG. 3.6: Sous-découpage pour l'évaluation de (a) la matrice de raideur discontinue, (b) la matrice de raideur singulière. Sous-découpage pour l'écoulement plastique pour (c) un élément entièrement tranché, (d) un élément contenant une pointe de fissure.

Pour contourner ce problème, on peut proposer de créer deux jeux de sous éléments basés sur la grille de sous quadrangles (cf. figure 3.6) : un jeu (noté (a) et (b) sur la figure 3.6), qui est compatible avec les lèvres de la fissure (les sous quadrangles eux-mêmes tranchés par la fissure sont remplacés par des sous triangles obtenus avec la stratégie de sous découpage élastique), pour calculer la matrice de raideur pour (a) les éléments entièrement tranchés par la fissure (c'est à dire enrichis avec la fonction saut H) et (b) les éléments contenant un front de fissure ; et un autre jeu (noté (c) et (d) sur la figure 3.6), qui est indépendant de la position de la fissure dans l'élément, pour calculer l'écoulement plastique (dans les éléments (c) entièrement tranchés par la fissure et (d) contenant une pointe de fissure).

Remarque 8 *Dans le cas de calculs en mode I pur, on peut n'utiliser qu'un seul jeu de sous éléments en faisant en sorte que la fissure soit compatible avec les sous-éléments : on ne commet alors plus d'erreur d'intégration vis à vis de la discontinuité. Dans le cas d'interface non compatible, on peut limiter les erreurs d'intégration en utilisant un nombre plus important de sous éléments [JI 02].*

Remarque 9 *Dans le cas des éléments entièrement tranchés par la fissure, c'est à dire enrichis par la fonction saut $\mathcal{H}$, il est possible de se passer des sous éléments pour intégrer la matrice de raideur [VEN 06]. Ceci est réalisé en décomposant les intégrales par morceaux. Cependant nous n'utiliserons pas une telle technique ici, dans la mesure où elle ne serait pas applicable à tous les éléments au cours de la propagation.*

3.2.3 Étude de plusieurs bases et critère de choix

La stratégie à deux échelles développée précédemment nous permettant de disposer d'une intégration suffisante, trois bases d'enrichissement plastiques sont proposées à partir de la base de Fourier obtenue à l'équation (3.16). Ces trois bases sont présentées dans les équations (3.17) à (3.19). La base *(c)* est une reformulation trigonométrique de la base de Fourier et les deux autres bases sont des bases tronquées, mais grâce à la manipulation trigonométrique, elle contiennent une partie des harmoniques élevées nécessaires à la représentation correcte des singularités HRR.

$$(a)\ \ r^{\frac{1}{n+1}}\left\{\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\right\} \tag{3.17}$$

$$(b)\ \ r^{\frac{1}{n+1}}\left\{\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \sin\frac{\theta}{2}\sin 3\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin 3\theta\right\} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}(c)\ \ r^{\frac{1}{n+1}}\Bigg\{&\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\ \theta,\\ &\sin\frac{\theta}{2}\sin\ 2\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin 2\theta,\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\ 3\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\sin 3\theta\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.19}$$

Une comparaison du "rang numérique" de la matrice de raideur de l'élément fini contenant la pointe de fissure a été faite pour ces trois bases ainsi que pour la base élastique. Le "rang numérique" est défini de la manière suivante :

Définition 1 *Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice de raideur élémentaire $\mathbb{K}_{el}$, $\mathcal{A}$ peut être divisé en trois sous-ensembles (avec $E \sim 10^{11} Pa$ et $\nu \sim 0.3$) :*

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \mathcal{A}_{rig} = \left[a \in \mathcal{A}; \mid a \mid \backsim 10^{-14}\right] \\ \mathcal{A}_{nul} = \left[a \in \mathcal{A}; \mid a \mid \backsim 10^{-4}\right] \\ \mathcal{A}_{norm} = \left[a \in \mathcal{A}; \mid a \mid \backsim 10^{8}\right] \end{cases} \tag{3.20}$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres appartenant à $\mathcal{A}_{rig}$ (respectivement $\mathcal{A}_{norm}$) correspondent aux mouvements de corps rigides (respectivement aux modes transmissibles). Ceux associés aux valeurs propres appartenant à $\mathcal{A}_{nul}$ sont associés à des modes à énergie nulle "parasites" non transmissibles, et le rang numérique est défini comme la dimension de $\mathcal{A}_{nul}$.

$$\mathcal{R}_{num} = \dim \mathcal{A}_{nul} \tag{3.21}$$

La comparaison du rang numérique pour les différentes bases est récapitulée dans le tableau suivant :

Base d'enrichissement		Rang numérique de $\mathcal{K}_{el}$
élastique linéaire (3.8)		**4**
plastique (a)	(3.17)	8
plastique (b)	(3.18)	**4**
plastique (c)	(3.19)	12

TAB. 3.1: Comparaison du rang numérique pour différentes bases d'enrichissement

Les résultats donnés dans le tableau 3.2.3 indiquent qu'avec les bases *(a)* et *(c)* la matrice de raideur a huit ou douze modes "parasites". Ce comportement est également présent pour la base *(b)* mais seuls quatre modes non transmissibles sont présents comme dans le cas de la base élastique linéaire.

Remarque 10 *La présence de ces modes parasites a été montrée dans le cas de l'enrichissement discontinu utilisé avec des éléments cohésifs [MAR 03], et également dans le cas de l'enrichissement élastique singulier [LAB 05]. Dans un cadre général de la méthode des éléments finis généralisés [DUA 00a, STR 00a, STR 00b] et dans une application mécanique de la rupture de la méthode des éléments finis étendus [BÉC 05, LAB 05], plusieurs auteurs ont proposé l'utilisation de techniques d'intégration singulières afin de supprimer ces modes parasites. Bien que ces techniques permettent un gain important, leur application dans un cadre non-linéaire avec propagation n'est pas immédiate dans la mesure où elles se basent sur des sous éléments compatibles avec la géométrie de la fissure.*

La base d'enrichissement la plus efficace est donc la base *(b)* donnée dans l'équation (3.18), qui apparaît être la même que celle proposée dans [RAO 04a] dans le contexte de la méthode Meshless EFG.

Remarque 11 *Bien que la totalité de cette étude ait été réalisée sous les hypothèses de déformations planes, la structure générale des équations permettant d'obtenir les champs asymptotiques HRR est relativement similaire dans le cas d'hypothèses de type contraintes planes. Ceci nous permet de supposer que la base d'enrichissement développée en déformations planes est également valable en contraintes planes comme c'est le cas avec la méthode Meshless [RAO 04a].*

3.3 Prise en compte des refermetures : contact et frottement

Afin de construire les intégrales sur les lèvres de la fissure, il est nécessaire de discrétiser l'interface Γ. De la même manière que pour construire les points de discrétisation des contraintes et variables internes, on propose d'utiliser l'échelle "fine" pour représenter les termes de contact (déplacements, efforts et multiplicateurs de Lagrange) sur l'interface.

La fissure n'étant pas a priori compatible avec le maillage éléments finis, on choisit de la discrétiser en éléments unidimensionnels en s'inspirant de ce qui est proposé dans [DOL 01b]. La courbe Γ est représentée par un ensemble de segments géométriques. Comme on souhaite utiliser l'échelle fine pour décrire le comportement sur l'interface, on discrétise Γ en éléments unidimensionnels (appelés éléments d'interface) créés par l'intersection des segments géométriques avec la grille de sous éléments, comme présenté sur les figures 3.7 et 3.8 (a).

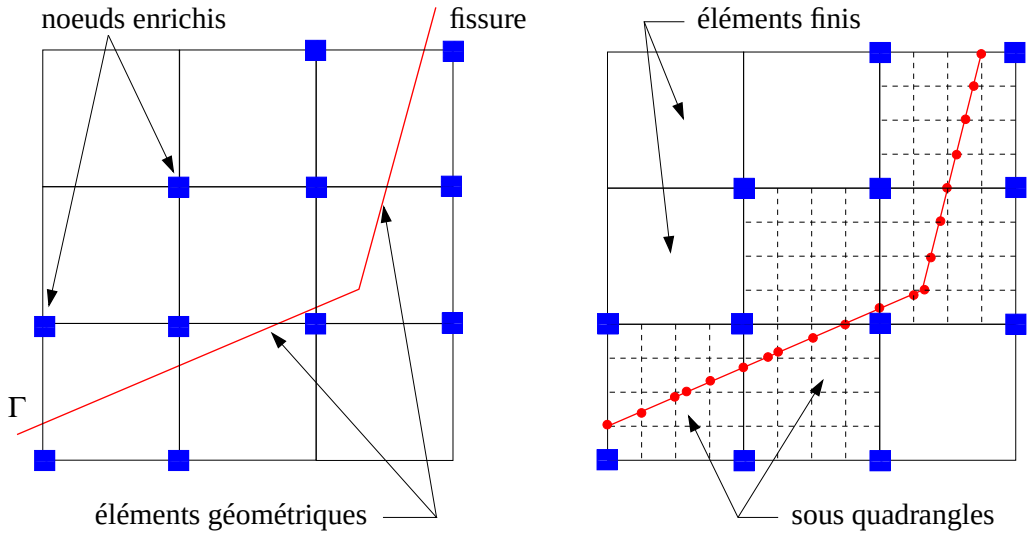


FIG. 3.7: Construction des éléments d'interface sur les lèvres de la fissure.

Afin d'effectuer l'intégration numérique des termes sur Γ dans l'équation (2.86), des points de Gauss sont utilisés le long des éléments d'interface. Les champs w, t et Λ sont interpolés de manière discrète sur chaque lèvre de la fissure Γ^+ et Γ^- (cf. figure 3.8(b)).

3.4 Résolution discrète du problème non-linéaire

3.4.1 Formulation discrétisée

3.4.1.1 Système linéaire

L'introduction du champ de déplacement enrichi et des quantités discrètes sur les lèvres de la fissure dans l'équation (2.86) permet d'obtenir l'ensemble d'équations al-

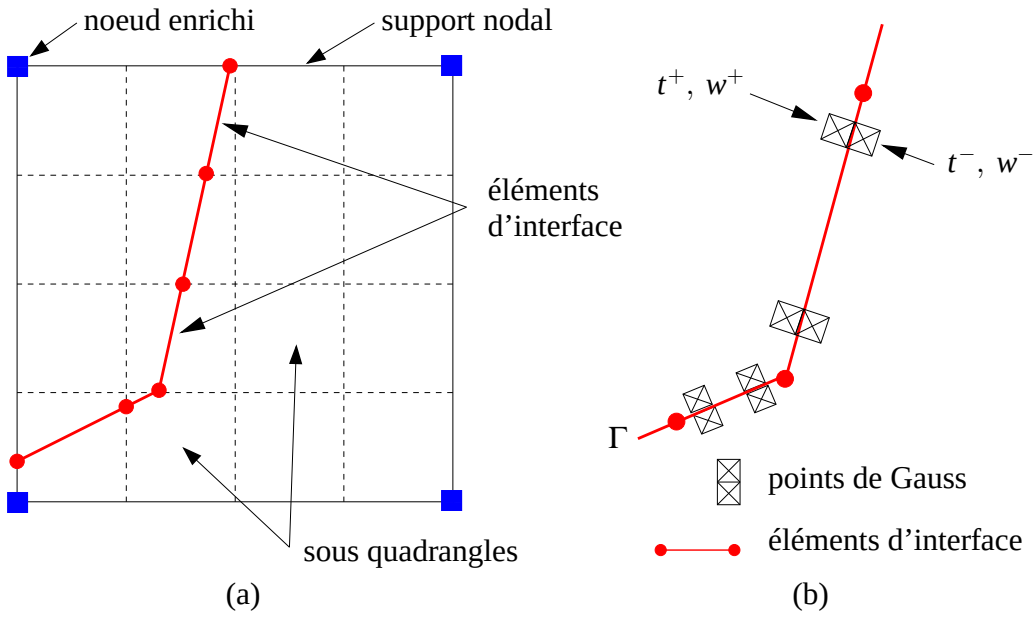


FIG. 3.8: (a) Zoom d'un élément fini contenant des éléments d'interface (b) couples (t^+,w^+), (t^-,w^-) associés aux points de Gauss sur chaque lèvre de la fissure (Γ^+ et Γ^-).

gébriques suivant :

$$Fint_n^{(i)} - K_c\Lambda_n^{(i)} = Fext_n \tag{3.22}$$

$$K_\alpha w_n^{(i)} + K_I\Lambda_n^{(i)} = K_\alpha w_n^{(i-1)} + K_I(t_n^{(i-1)} - \Lambda_n^{(i-1)}) \tag{3.23}$$

$$K_I^T w_n^{(i)} - K_c^T u_n^{(i)} = 0 \tag{3.24}$$

Où $Fint_n^{(i)}$ sont les forces internes exprimées aux noeuds éléments finis à la i-ième itération du n-ième pas de temps, K_c est une matrice de couplage entre les quantités éléments finis exprimées aux noeuds et les quantités d'interface exprimées aux points de Gauss des éléments d'interface. $\Lambda_n^{(i)}$ représente les multiplicateurs de Lagrange discrets exprimés aux points de Gauss des éléments d'interface à la i-ième itération du n-ième pas de temps. $w_n^{(i-1)}$ et $t_n^{(i-1)}$ sont les déplacements et efforts d'interface interpolés aux points de Gauss des éléments d'interface, K_I est une matrice de couplage entre les déplacements d'interface et les efforts d'interface / multiplicateurs de Lagrange discrets, et K_α est la matrice résultant de l'intégration du terme de pénalité dans l'équation (2.86).

Le problème quasi-statique non-linéaire est résolu par une procédure incrémentale couplée à un solveur itératif de type Newton-Raphson. Les équations précédentes sont donc linéarisées en considérant la loi de comportement élasto-plastique du matériau, et ce

en utilisant les notations suivantes :

$$\begin{cases} u_n^{(i)} = \Delta\Delta u_n^{(i)} + u_n^{(i-1)} \\ \tilde{w}_n^{(i)} = \Delta\Delta w_n^{(i)} + w_n^{(i-1)} \\ \Lambda_n^{(i)} = \Delta\Delta\Lambda_n^{(i)} + \Lambda_n^{(i-1)} \end{cases} \tag{3.25}$$

Le système linéaire peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K & 0 & -K_c \\ 0 & K_\alpha & K_I \\ -K_c^T & K_I^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Delta u_n^{(i)} \\ \Delta\Delta w_n^{(i)} \\ \Delta\Delta\Lambda_n^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fext_n - Fint_n^{(i-1)} + K_c\Lambda_n^{(i-1)} \\ K_I(t_n^{(i-1)} - \Lambda_n^{(i-1)}) \\ K_c^T u_n^{(i-1)} - K_I^T w_n^{(i-1)} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

3.4.1.2 Convergence et critère d'arrêt

La formulation utilisée pour résoudre le problème étant de type Lagrangien augmenté, la convergence de celle-ci est supposée indépendante de la valeur des coefficients de pénalité introduits précédemment. Ces paramètres, qui ont la dimension d'un module d'Young sur une longueur, influencent uniquement la vitesse de convergence de l'algorithme itératif proposé.

L'indicateur de convergence est composé de deux critères. Le premier est un critère "global" basé sur le vecteur résidu de l'algorithme de Newton-Raphson défini par le système linéaire (équation (3.26)). Le vecteur résidu à la i-ième itération du n-ième pas de temps est défini comme suit :

$$\mathcal{R}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} Fext_n - Fint_n^{(i)} + K_c\Lambda_n^{(i)} \\ K_I(t_n^{(i)} - \Lambda_n^{(i)}) \\ K_c^T u_n^{(i)} - K_I^T w_n^{(i)} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

On peut faire le choix d'un grand nombre de critères d'arrêt à partir du calcul d'une norme du résidu. Compte tenu de l'écriture de celui-ci dans la formulation proposée, il nous est apparu plus judicieux de traiter séparément les trois parties du résidu, et de prendre en compte le terme le plus pénalisant dans chacune de ces parties.

Le critère "global" à l'itération *i* au pas de temps *n* est donc défini comme suit :

Définition 2 *Soient les trois indicateurs err^*_u, err^*_w, err^*_Λ définis par :*

$$(err_u^*)_n^{(i)} = \frac{\max_{k\in\mathbb{N}} \left\| [Fext_n]_k - [Fint_n^{(i)}]_k + [K_c\Lambda_n^{(i)}]_k \right\|}{\max\left(\max_{l\in\mathbb{N}} \|[Fext_n]_l\| ; \max_{l\in\mathbb{N}} \left\| [Fint_n^{(i)}]_l \right\| ; \max_{l\in\mathbb{N}} \left\| [K_c\Lambda_n^{(i)}]]_l \right\| \right)} \quad (3.28)$$

$$(err_w^*)_n^{(i)} = \frac{\max_{k\in\mathbb{N}} \left\| [K_I t_n^{(i)}]_k - [K_I\Lambda_n^{(i)}]_k \right\|}{\max\left(\max_{l\in\mathbb{N}} \left\| [K_I t_n^{(i)}]_l \right\| ; \max_{l\in\mathbb{N}} \left\| [K_I\Lambda_n^{(i)}]_l \right\| \right)} \quad (3.29)$$

$$(err_\Lambda^*)_n^{(i)} = \frac{\max_{k\in\mathbb{N}} \left\| [K_c^T u_n^{(i)}]_k - [K_I^T w_n^{(i)}]_k \right\|}{\max\left(\max_{l\in\mathbb{N}} \left\| [_c^T u_n^{(i)}]_l \right\| ; \max_{l\in\mathbb{N}} \left\| [K_I^T w_n^{(i)}]_l \right\| \right)} \quad (3.30)$$

Où $[F]_k$ représente la k-ième composante du vecteur F et $\|.\|$ représente la norme Euclidienne habituelle.

Le critère d'arrêt "global" est :

$$(Err_glob)_n^{(i)} = \max\left((err_u^*)_n^{(i)} ; (err_w^*)_n^{(i)} ; (err_\Lambda^*)_n^{(i)} \right) \quad (3.31)$$

Le second critère est basé sur les quantités locales d'interface et la matrice de pénalité [DOL 01b], dans le même esprit que pour le critère sur le résidu, le critère local prend en compte l'élément d'interface le plus pénalisant.

Définition 3

$$(Err_loc)_n^{(i)} = \sqrt{\frac{\max_{m\in\mathcal{N}_{interf}} \left(\mathcal{N}_{elt} \left\{ w_n^{(i)} - w_n^{(i-1)}, t_n^{(i)} - t_n^{(i-1)} \right\} \right)}{\max_{m\in\mathcal{N}_{interf}} \left(\mathcal{N}_{elt} \left\{ w_n^{(i)}, t_n^{(i)} \right\} \right)}} \quad (3.32)$$

Où $\mathcal{N}_{interf}$ est l'ensemble des éléments d'interfaces et $\mathcal{N}_{elt}$ est défini sur un élément d'interface par l'équation (3.33) :

$$\mathcal{N}_{elt}\{w,t\} = w^T . \left[K_\alpha^{elt}\right] . w + t^T . \left[K_\alpha^{elt}\right]^{-1} . t \quad (3.33)$$

Remarque 12 *Que ce soit pour le critère sur le résidu ou le critère local, le fait de choisir comme critère l'erreur maximum par composante ou par élément d'interface se justifie compte tenu du type de problème qu'on souhaite traiter : les termes d'erreur prépondérants sont associés aux éléments d'interface "fermés", donc très localisés. Le choix de critère sur l'ensemble du vecteur / de l'interface peut alors entraîner une mauvaise convergence locale au niveau de ces éléments.*

3.4.2 Mise à jour des variables non-linéaires

3.4.2.1 Variables de contact - frottement

Pour la mise à jour des quantités locales d'interface w et t (en utilisant la loi de comportement d'interface) une approche similaire à celle proposée dans [DOL 01b] est utilisée :

$$\left(\tilde{w}_n^{(i)},\, w_n^{(i-1)},\, t_n^{(i-1)}\right) \implies \left(w_n^{(i)},\, t_n^{(i)}\right) \tag{3.34}$$

Cependant, afin de pouvoir traiter correctement le cas des chargements non-proportionnels en présence de frottement, l'approche incrémentale proposée dans [RIB 04, RIB 05] est utilisée.

3.4.2.2 Plasticité

Le modèle de comportement plastique choisi est de type écrouissage isotrope [LEM 96]. L'algorithme d'écoulement utilisé est du type retour radial [BEL 02], son principe est présenté en Annexe C. Il s'agit alors de faire les mises à jour suivantes :

$$\left(\sigma_n^{(0)},\, var_n^{(0)},\, \Delta u_n^{(i)} = u_n^{(i)} - u_n^{(0)}\right) \implies \left(\sigma_n^{(i)},\, var_n^{(i)}\right) \tag{3.35}$$

3.5 Calcul numérique des paramètres de fissuration

Pour calculer numériquement les facteurs d'intensité des contraintes à l'aide de l'intégrale d'interaction (2.71), on utilise un champ d'extension virtuel classiquement proposé dans la littérature. Dans le cas d'une fissure droite [SUO 92a, SUO 92b, SUO 96], celui-ci est représenté sous forme scalaire, sa direction étant définie par le repère local de la fissure :

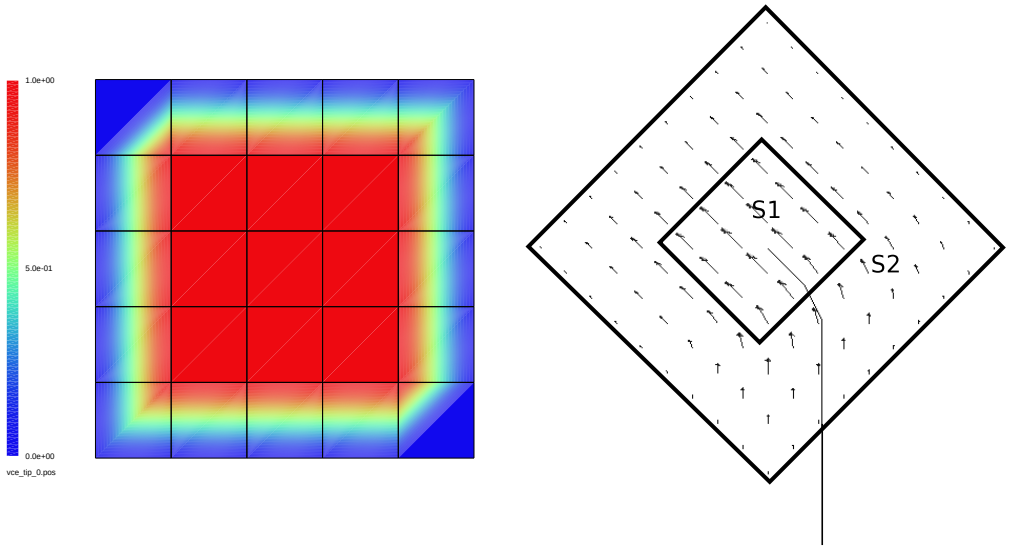
$$\mathbf{q} = q\mathbf{x_1} \tag{3.36}$$

Une illustration est présentée sur la figure 3.9 (a). Dans le cas d'une fissure courbe, le champ $\mathbf{q}$ doit être rendu compatible avec la géométrie de la fissure. On utilise alors un champ courbé [RÉT 05a, MEN 06b] qui respecte la géométrie de la fissure comme présenté sur la figure 3.9 (b). Dans tous les cas le champ $\mathbf{q}$ est défini comme suit :

$$\begin{cases} \|\mathbf{q}\| = 1 \text{ dans la surface S1} \\ \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{à l'extérieur de la surface S2} \\ \mathbf{q} \text{ est tangent aux lèvres de la fissure en tout point} \\ \mathbf{q} \text{ décroit linéairement entre S1 et S2} \end{cases} \tag{3.37}$$

Remarque 13 *Il est important de préciser ici que l'on fait la distinction entre la base servant d'enrichissement en pointe de fissure et celle servant pour le découplage des modes de ruptures, contrairement à ce qu'on peut observer classiquement dans la littérature avec X-FEM. La base d'enrichissement permet de capturer la solution physique*

du problème afin d'obtenir une bonne précision. La base de découplage n'a de sens que dans la mesure où elle définit les facteurs d'intensité des contraintes élastiques. On peut faire le parallèle entre la stratégie utilisée ici - base d'enrichissement plastique et base de découplage élastique linéaire - et celle proposée dans [MEN 06a] qui s'intéresse aux matériaux à propriétés mécaniques variables dans l'espace : l'approximation EF est enrichie avec la solution élastique linéaire et le découplage est effectué avec les solutions asymptotiques exactes pour ce type de matériau (ce qui permet de conserver les propriétés d'indépendance vis à vis du contour d'intégration).



(a) (b)

FIG. 3.9: Fonction poids (a) scalaire pour une fissure droite, (b) vectorielle pour une fissure courbe

3.6 Exemples numériques

3.6.1 Comparaison avec un calcul éléments finis

Différentes comparaisons sont effectuées entre la méthode des éléments finis étendus et la méthode des éléments finis (on utilise pour cela le code CAST3M) dans le cas de la plasticité confinée sans contact afin de valider la base d'enrichissement plastique proposée. On s'intéresse à des cas en mode I pur et en mode mixte pour deux matériaux, l'un à faible écrouissage ($n = 30$), l'autre à fort écrouissage ($n = 3.7$). Tous les calculs sont effectués sous l'hypothèse des déformations planes. On s'est attaché dans ces exemples à la comparaison de quantités locales et globales. Il s'agit donc de déterminer le saut de déplacement entre les lèvres de la fissure et l'intégrale J.

3.6.1.1 Mode I pur

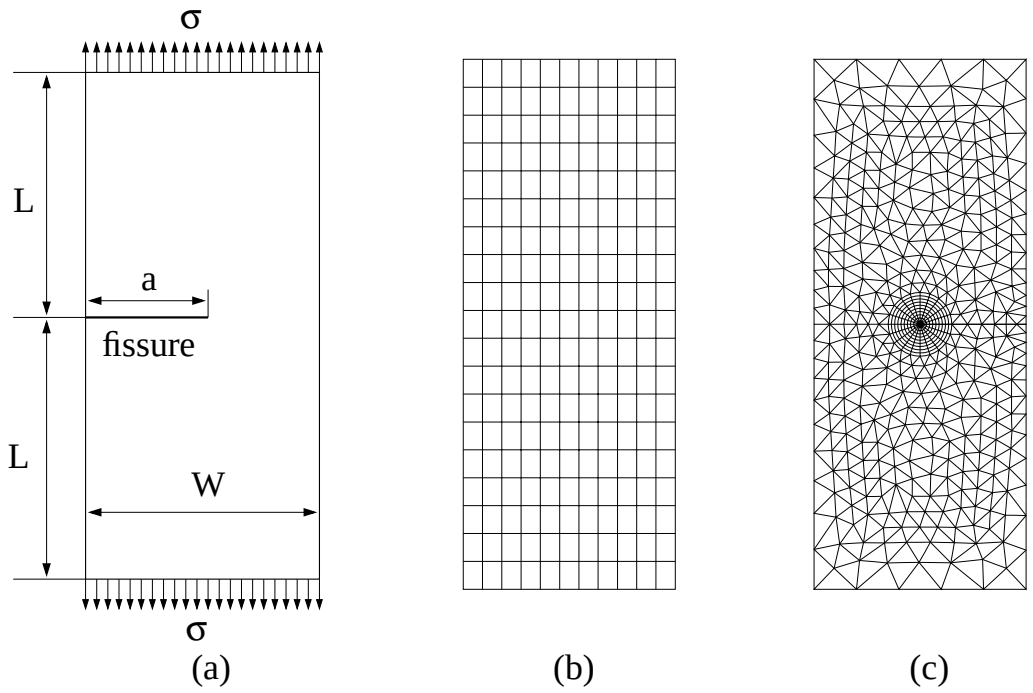


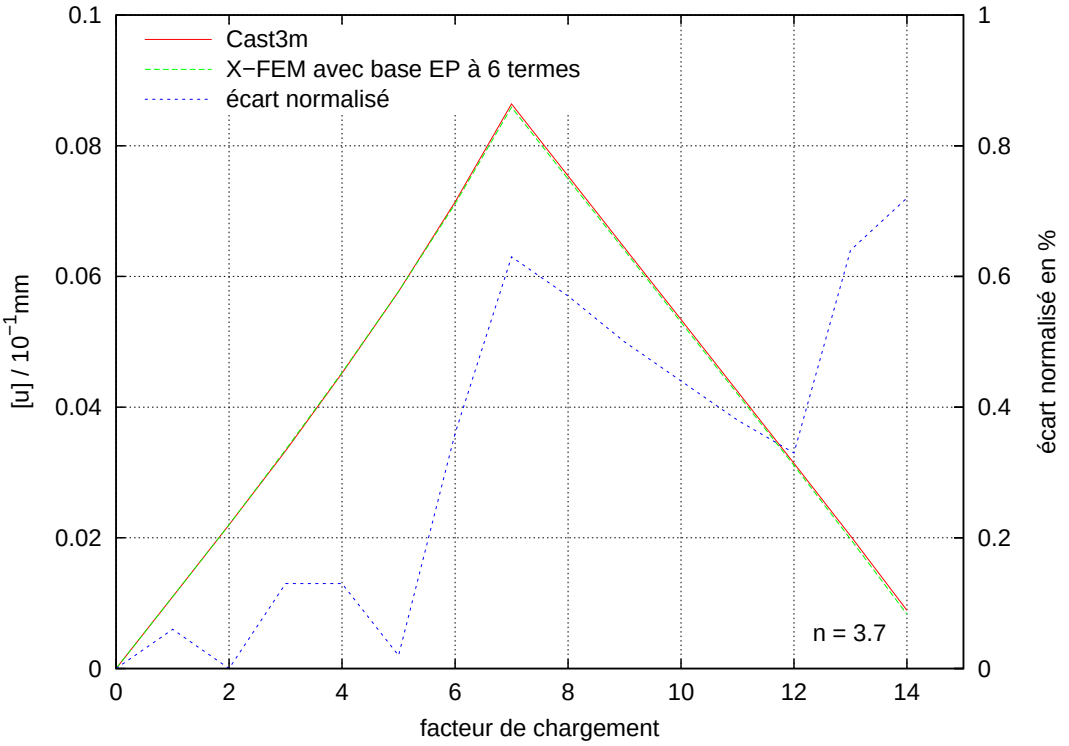
FIG. 3.10: Géométrie du spécimen SE(T) (a) - Maillage X-FEM (b) et CAST3M(c)

Le spécimen est de type Single Edge Tension (SET) en mode I pur, les comparaisons sont effectuées entre un maillage CAST3M constitué de 892 éléments triangulaires à six noeuds soit 4106 degrés de liberté et un maillage X-FEM constitué de 380 éléments quadrangulaires à quatre noeuds soit 548 degrés de liberté. La géométrie et les maillages sont présentés sur la figure 3.10 avec les valeurs suivantes : $W = 20cm$, $L = 25cm$ et $a = 10cm$. Le spécimen est soumis à un chargement de traction monotone croissant jusqu'à une valeur maximale, puis à un chargement monotone décroissant jusqu'à un effort nul.

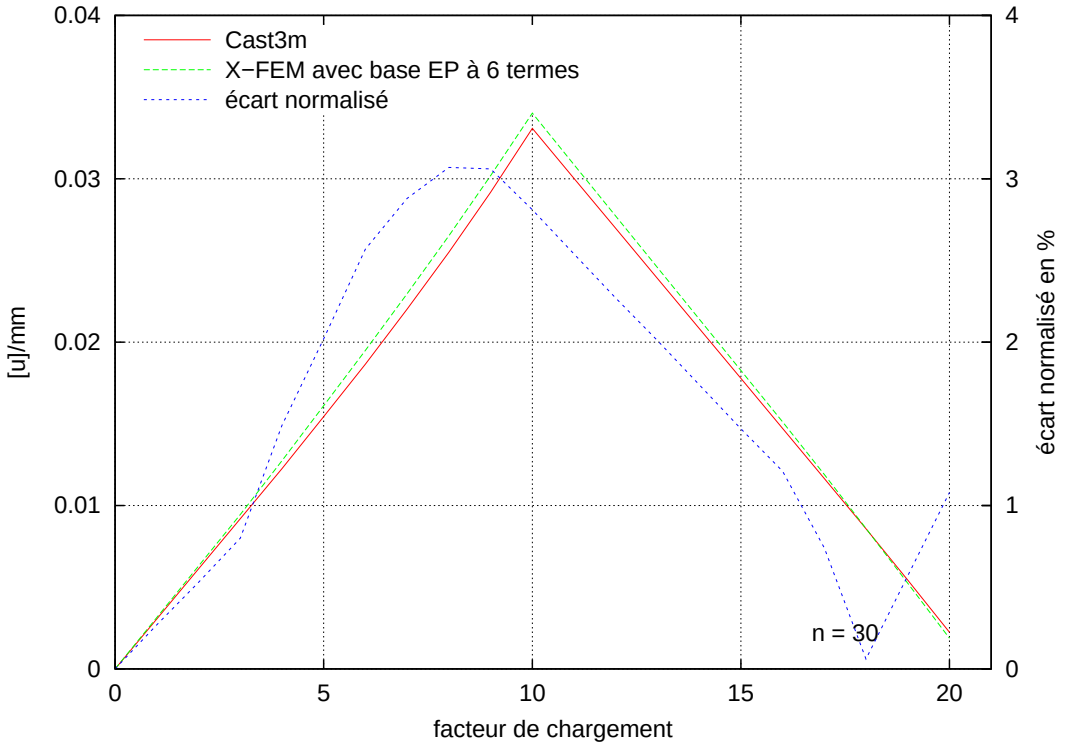
La comparaison est effectuée sur le saut de déplacement (noté $[\![u]\!]$) entre les lèvres de la fissure, évalué à l'intersection de celles-ci avec la frontière de l'élément fini contenant la pointe de fissure dans la direction normale à la fissure ; et l'intégrale J. Les résultats sont présentés sur les figures 3.11 pour le saut de déplacement $[\![u]\!]$ et les figures 3.12 pour l'intégrale J. Les graphes représentent l'évolution de $[\![u]\!]$ et J en fonction du facteur de chargement ainsi que l'écart normalisé en pourcent en fonction de ce même facteur.

Les résultats sont très proches pour $[\![u]\!]$ et l'intégrale J même lors de la décharge. Le saut de déplacement $[\![u]\!]$ est légèrement surestimé par X-FEM par rapport au calcul CAST3M éléments finis. On peut noter l'ouverture résiduelle de la fissure due aux déformations plastiques lorsque l'effort appliqué devient nul sur la figure 3.11.

La même comparaison est effectuée sans la nouvelle base d'enrichissement plastique (c'est à dire avec uniquement des fonctions saut H). Les résultats pour l'intégrale J sont représentés sur la figure 3.13. Ces résultats (environ 50% d'écart à l'effort maximum)

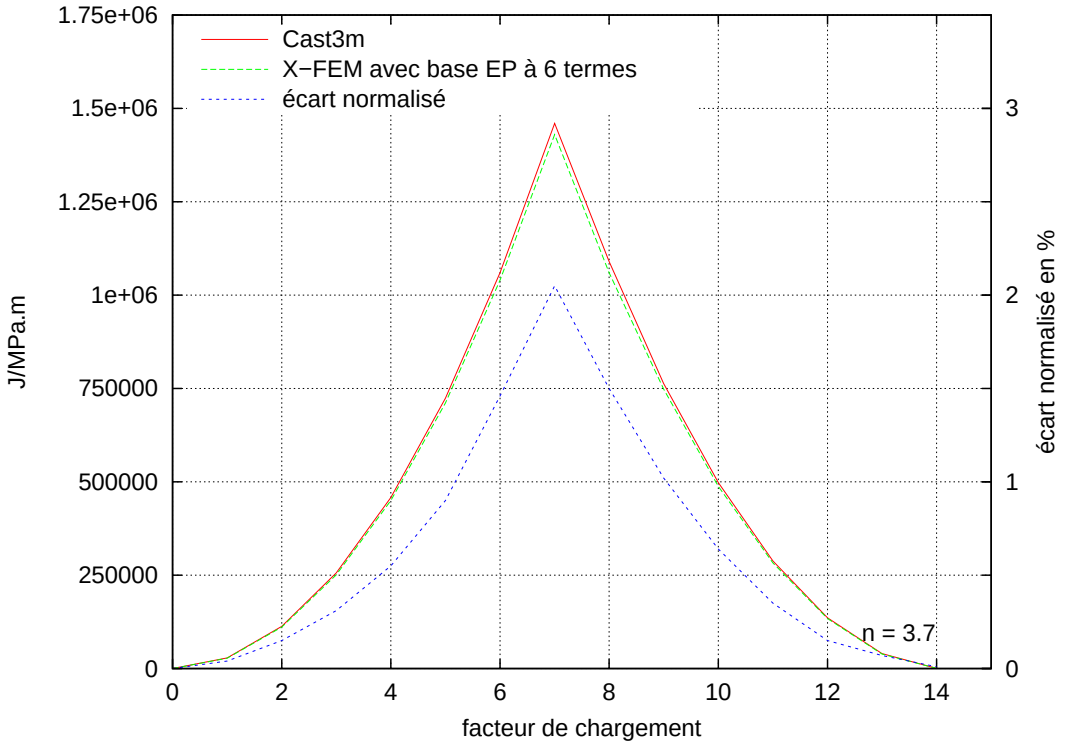


(a)

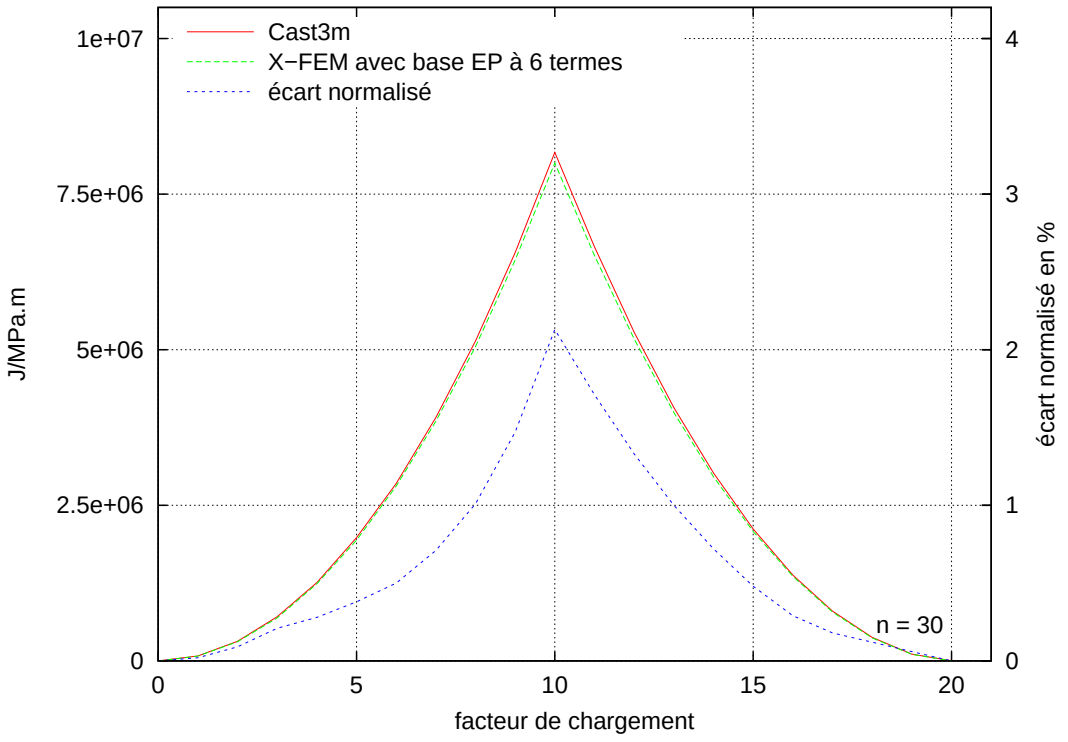


(b)

FIG. 3.11: Comparaison du saut de déplacement pour $n = 3.7$ (a) et $n = 30$ (b) en mode I

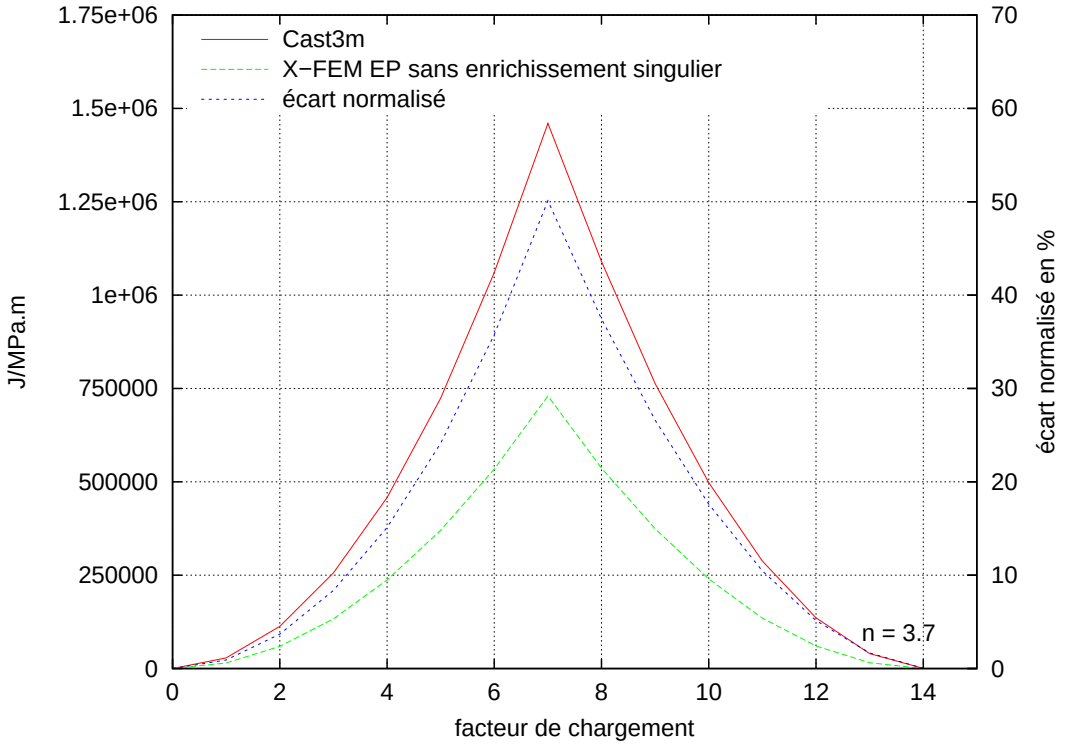


(a)

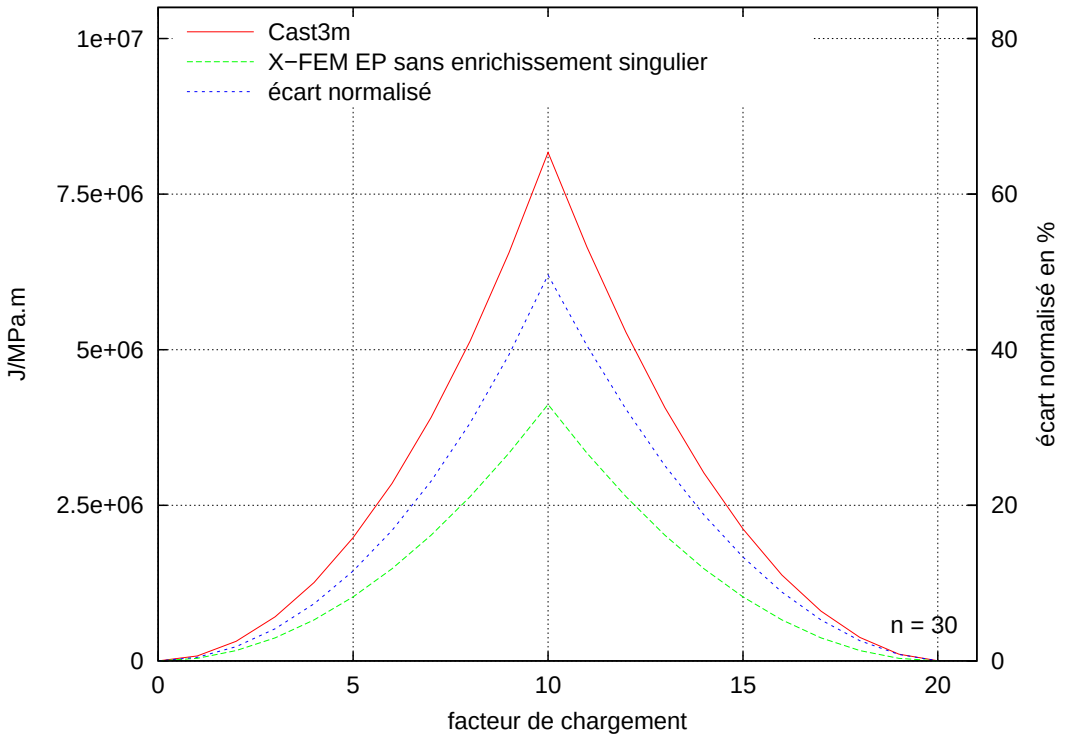


(b)

FIG. 3.12: Comparaison de l'intégrale J pour $n = 3.7$ (a) et $n = 30$ (b) en mode I



(a)



(b)

FIG. 3.13: Comparaison de l'intégrale J sans enrichissement plastique pour $n = 3.7$ (a) et $n = 30$ (b) en mode I

montrent que la nouvelle base plastique est indispensable pour traiter le cas des non-linéarités de type matériau en pointe de fissure.

3.6.1.2 Mode mixte

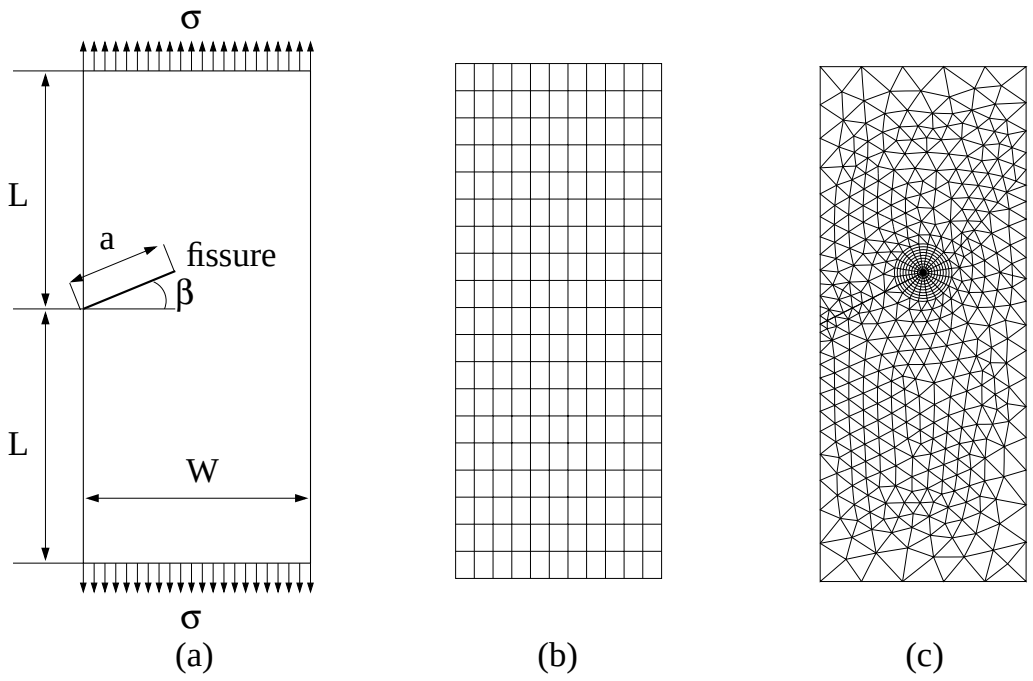
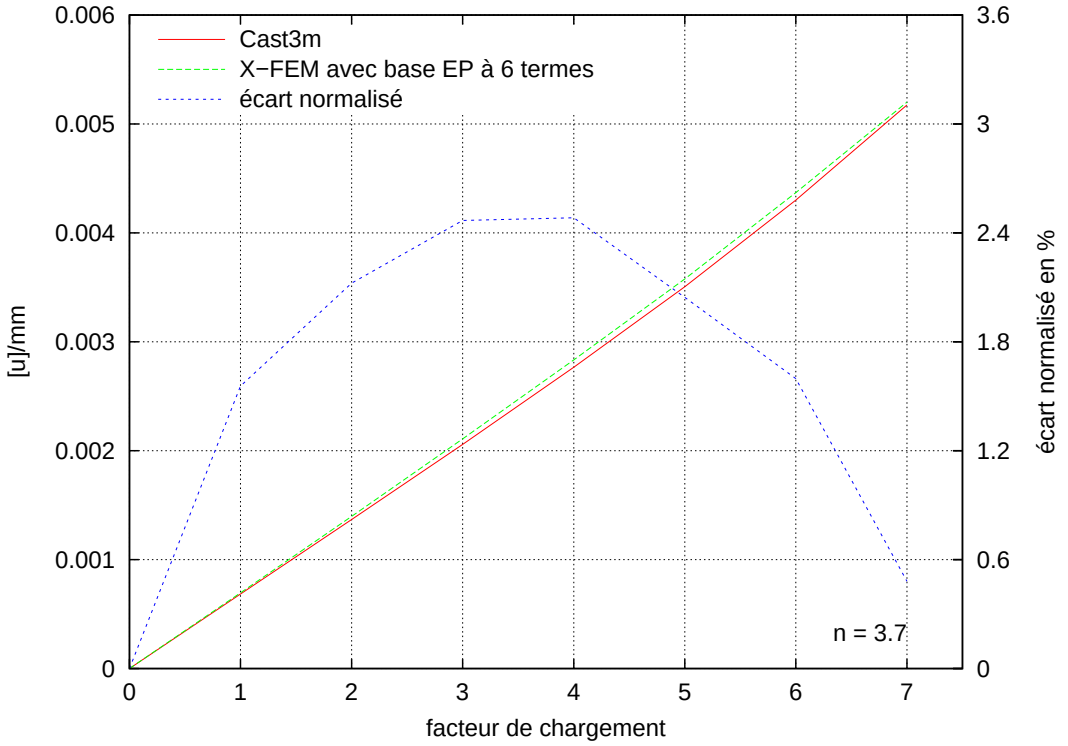


FIG. 3.14: Géométrie du spécimen SE(T) (a) - Maillage X-FEM (b) et CAST3M(c)

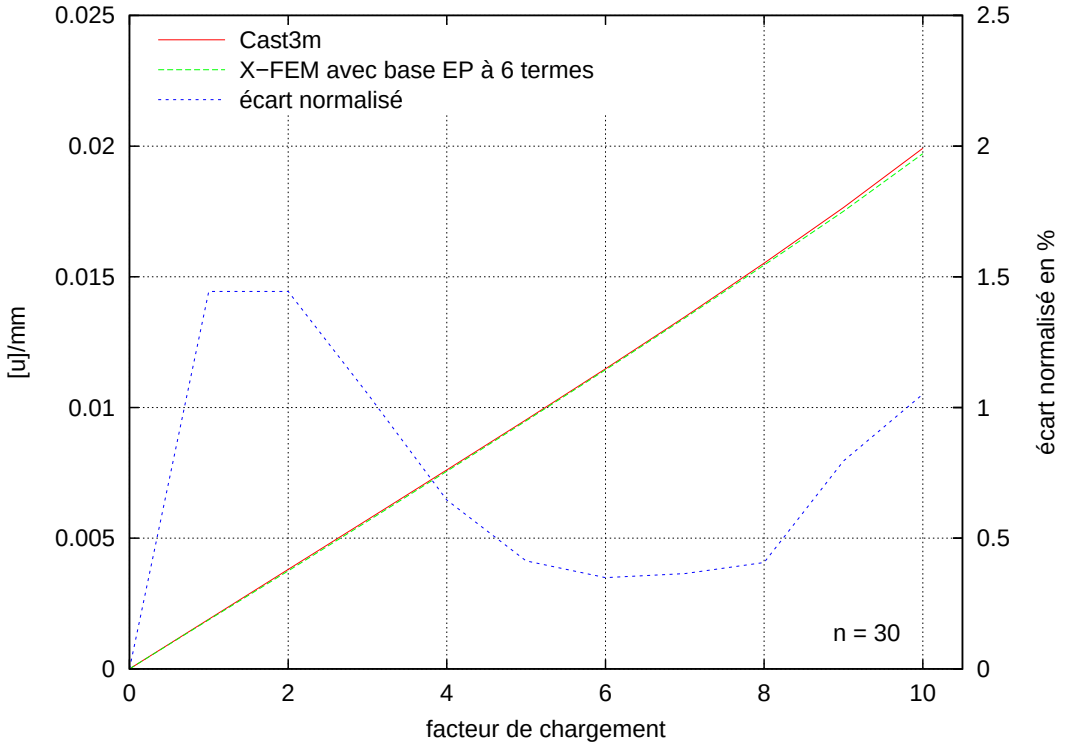
La seconde comparaison est effectuée pour un spécimen SE(T) en mode mixte avec une fissure inclinée. La géométrie et les maillages sont donnés sur la figure 3.14 avec les valeurs suivantes : $W = 20cm$, $L = 25cm$ et $a = 11.18cm$ $\beta = 26.5^{\circ}$. Le spécimen est soumis à un chargement de traction monotone croissant, le saut de déplacement $[\![u]\!]$ et l'intégrale J sont étudiés. Les quantités $[\![u]\!]$ et J sont tracées en fonction du facteur de chargement ainsi que l'écart en pourcent en fonction du même facteur. Les résultats sont présentés sur les figures 3.15 et 3.16. Les deux calculs sont quasiment identiques : l'écart est inférieur à 2.5% dans tous les cas.

3.6.2 Comparaison avec un calcul X-FEM purement élastique

Le calcul précédent en mode mixte a été également utilisé pour comparer l'évaluation des facteurs d'intensité des contraintes (FIC) avec un calcul X-FEM purement élastique. Les FIC sont calculés avec X-FEM de deux façons : avec un comportement et un base d'enrichissement purement élastique, avec un comportement élasto-plastique et un enrichissement plastique. Dans les deux cas les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés à l'aide de l'intégrale d'interaction présentée précédemment : les champs

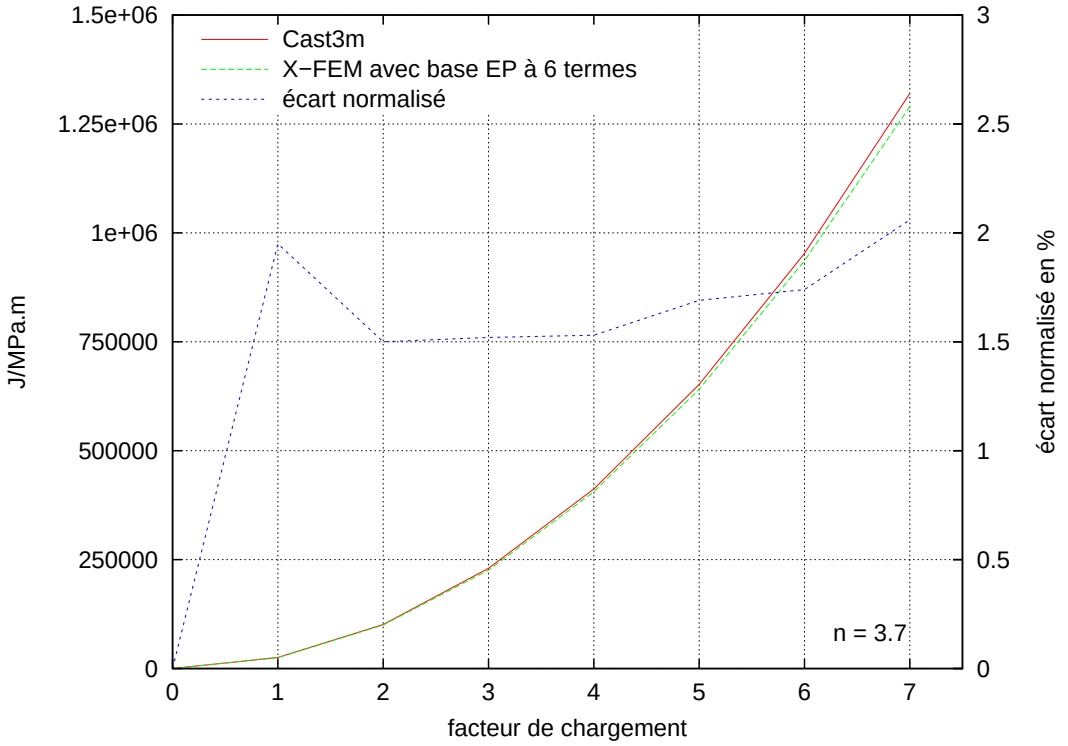


(a)

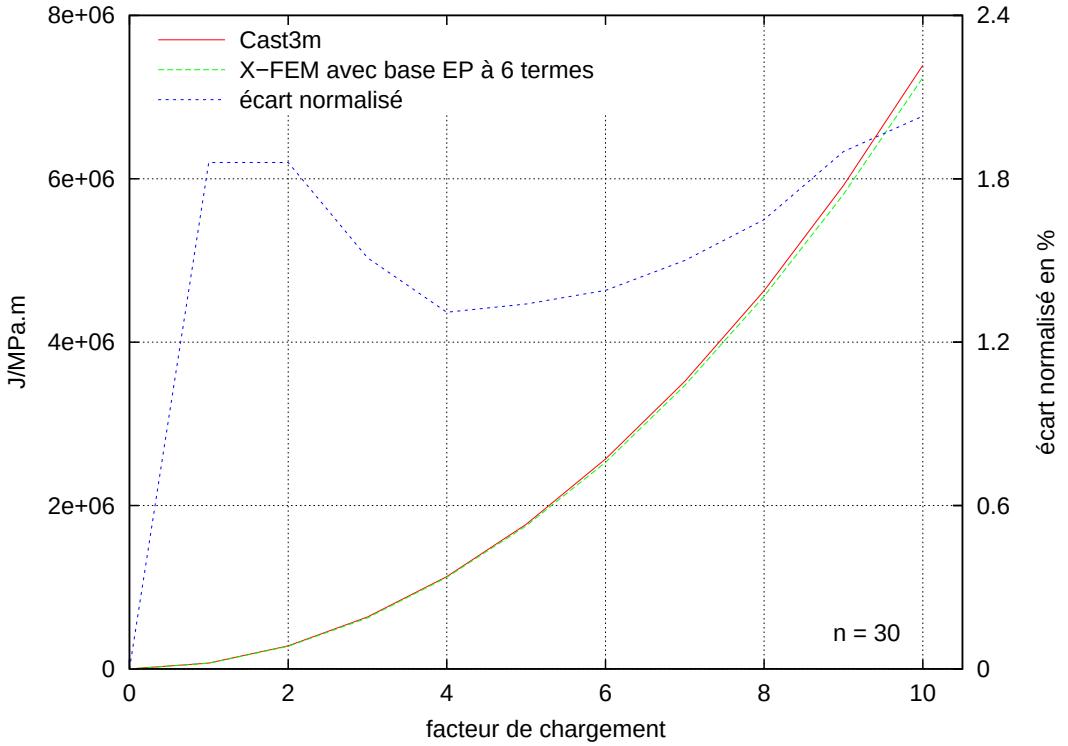


(b)

FIG. 3.15: Comparaison du saut de déplacement pour $n = 3.7$ (a) et $n = 30$ (b) en mode mixte



(a)



(b)

FIG. 3.16: Comparaison de l'intégrale J pour $n = 3.7$ (a) et $n = 30$ (b) en mode mixte

asymptotiques élastiques linéaires sont utilisés comme champs auxiliaires pour découpler les facteurs d'intensité des contraintes.

Les résultats sont présentés sur la figure 3.17. On peut observer une perte de linéarité dans le cas élasto-plastique après le pas de chargement numéro deux qui est celui pour lequel la plasticité apparaît. Étant donné que les différences entre les deux calculs ne sont pas considérables, on constate bien que l'hypothèse de plasticité confinée est vérifiée.

3.6.3 Calcul à fissure fixe avec refermeture

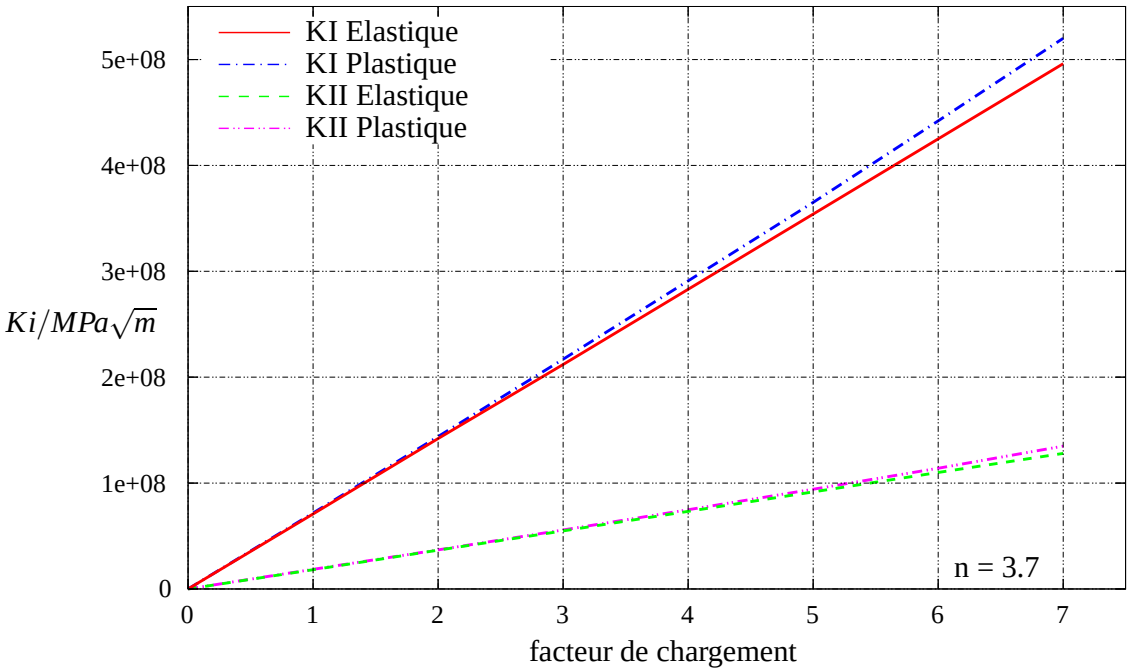
Le cas test en mode I est réutilisé ici pour étudier les possibilités de l'algorithme à fissure fixe. On s'intéressera principalement à l'effet de la plasticité en pointe de fissure sur le comportement en compression. La géométrie et le maillage utilisé sont identiques à ceux présentés sur la figure 3.10. Le spécimen est soumis à un chargement cyclique alterné de traction compression de $\sigma = -\sigma_{max}$ à $\sigma = +\sigma_{max}$ avec $\sigma_{max} = 50MPa$. La loi de comportement d'interface est choisie sans frottement pour cet exemple. Le matériau est un acier standard, les paramètres de celui-ci sont donnés dans le tableau 3.2. La loi de comportement contrainte-déformation définissant la courbe de traction est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \sigma = E \,.\, \varepsilon^e & si\ \sigma \leq \sigma_Y \\ \sigma = \sigma_Y + K \,.\, (\varepsilon^p)^{1/n} & sinon \end{cases} \tag{3.38}$$

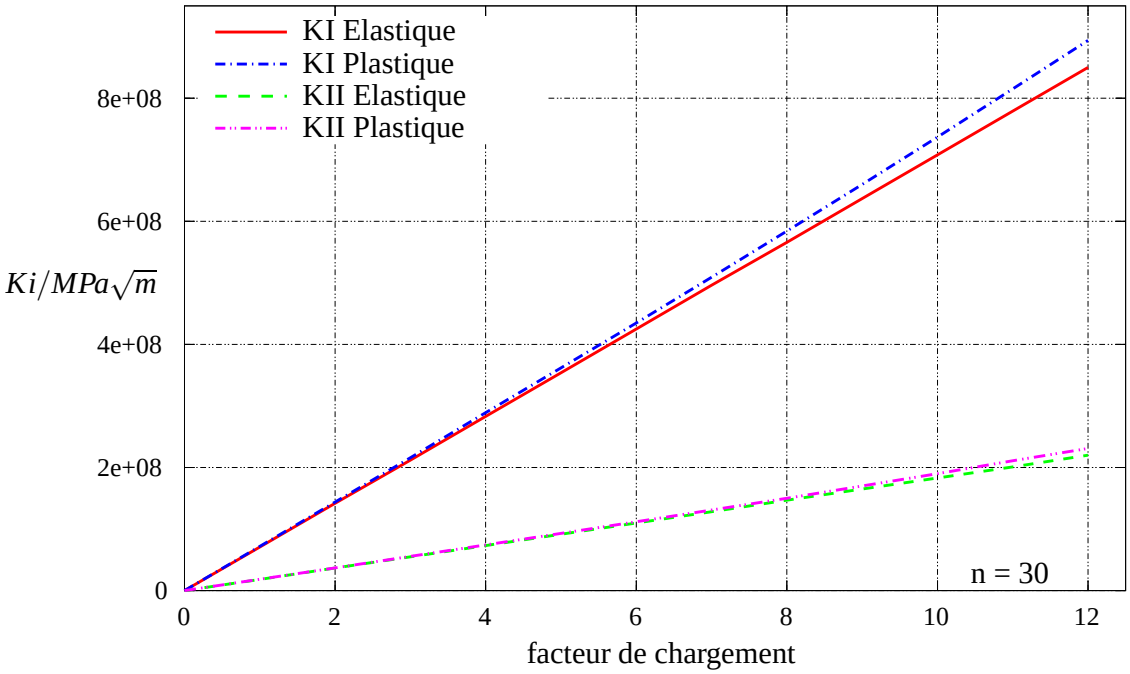
Module de Young, E	2.10^{11} Pa
Coefficient de Poisson, ν	0.3
Limite élastique, σ_Y	200 MPa
Coefficient d'écrouissage, K	435 MPa
Exposant d'écrouissage, n	3.7
Tenacité, K_{Ic}	90 MPa$\sqrt{m}$

TAB. 3.2: Paramètres de la loi de comportement du matériau

Les résultats sont présentés sur la figure 3.18. On trace la norme du champ de déplacement sur la configuration déformée amplifiée et le saut de déplacement le long des lèvres de la fissure obtenu à partir du champ de déplacement d'interface $[\![w]\!]_\Gamma = w_+ - w_-$. Le saut de déplacement a une valeur positive si l'élément d'interface considéré est ouvert et nulle si celui-ci est fermé. On peut remarquer sur la figure 3.18 (a) et (b) que sous un état global de compression suffisant, la fissure est fermée loin de la pointe et reste ouverte autour de celle-ci. Sur la figure 3.18 (a) au chargement minimum $\sigma = -\sigma_{max}$, les deux éléments d'interface les plus proches de la fissure sont ouverts et sur la figure 3.18 (b) à un niveau de chargement compressif moyen $\sigma = -0.4\,\sigma_{max}$, les cinq éléments d'interface les plus proches de la pointe sont ouverts. Sur les figures 3.18 (c) et (e) le chargement



(a)



(b)

FIG. 3.17: Comparaison des SIFs entre les cas élastique et plastique pour $n = 3.7$ (a) et $n = 30$ (b)

est tel que $\sigma > 0$, la fissure est alors totalement ouverte compte tenu de l'état global de traction. Sur le figure 3.18 (e) l'effort appliqué est nul $\sigma = 0$, et la fissure est entièrement ouverte à cause des déformations plastiques permanentes autour de la pointe.

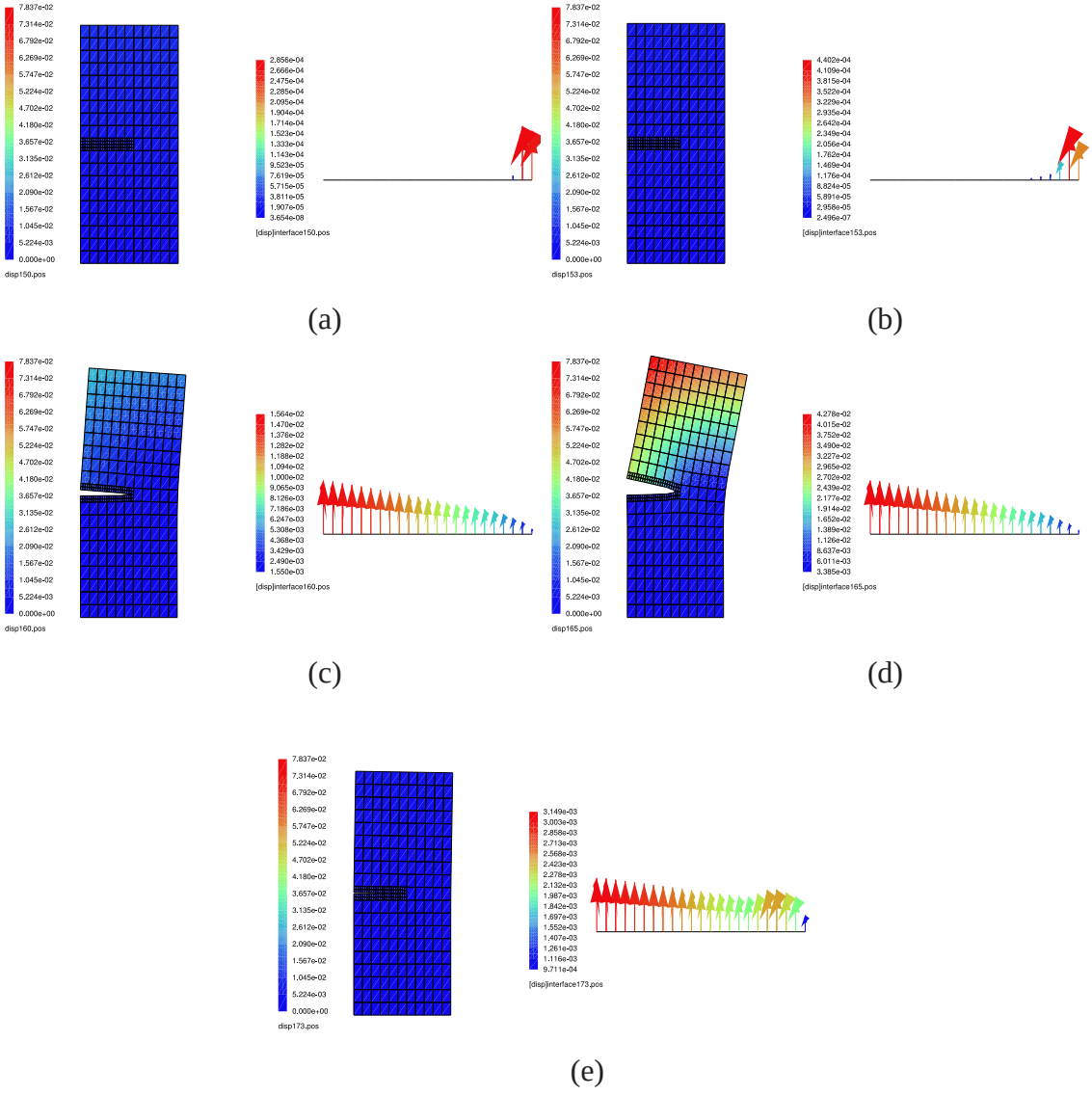


FIG. 3.18: Norme du champ de déplacement tracé sur la configuration déformée amplifiée et saut de déplacement le long de la fissure à (a) $\sigma = -\sigma_{max}$, (b) $\sigma = -0.4\ \sigma_{max}$, (c) $\sigma = 0.6\ \sigma_{max}$, (d) $\sigma = \sigma_{max}$, (e) $\sigma = 0$.

Chapitre 4

Simulation de propagation de fissure en fatigue

Sommaire

4.1 Introduction 82
4.2 Problème de référence et choix de la stratégie d'enrichissement 82
4.3 Gestion de plusieurs non-linéarités au cours de la propagation 84
4.3.1 Intégration numérique : extension de la vision à deux échelles . . . 84
4.3.2 Traitement du contact et couplage avec l'enrichissement 86
4.4 Implémentation numérique 89
4.5 Exemples numériques 91
4.5.1 Éprouvette CT sollicitée en mode I 91
4.5.2 Éprouvette CTS : effet d'une surcharge 97
4.6 Comparaisons expérimentales 102
4.6.1 Obtention des FIC à partir des résultats expérimentaux 102
4.6.2 Éprouvette CT en mode I : étude de la procédure de calcul des FIC . 103
4.6.3 Éprouvette cylindrique à fissure inclinée 109

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons mis en place une formulation quasi-statique permettant de prendre en compte la plasticité et le contact (avec ou sans frottement) pour un problème à fissure fixe. Nous avons pour cela utilisé une discrétisation en espace par la méthode des éléments finis étendus. Afin de modéliser un plus grand nombre de problèmes de mécanique de la rupture, il est indispensable de pouvoir simuler la propagation d'une ou plusieurs fissure, notamment afin de traiter un problème de fatigue. Ce chapitre étend donc la formulation précédente à la propagation en fatigue en prenant en compte la plasticité et le contact. On s'est notamment intéressé à une stratégie évitant les projections des variables non-linéaires. On présente également un certain nombre d'exemples, purement numériques dans un premier temps afin d'étudier les capacités de la méthode puis on proposera des premières comparaisons avec les résultats d'essais présentés dans le chapitre 1.

4.2 Problème de référence et choix de la stratégie d'enrichissement

Dans les références [BLA 99, MOË 99, DOL 01b, MOË 02, GRA 02], les auteurs utilisent X-FEM pour simuler la propagation de fissure en fatigue en élasticité linéaire. Dans ces conditions, chaque pas de calcul (c'est à dire chaque fois que la fissure avance) est un calcul indépendant des précédents. Dans la méthode proposée ici, la prise en compte des non-linéarités entraîne la nécessité de conserver l'histoire des variables non-linéaires (particulièrement les contraintes et variables internes) au cours de la simulation.

Ce constat a entraîné le choix d'une stratégie d'enrichissement comparable à celle présentée dans [RÉT 05a, RÉT 05b] dans le cadre de la simulation de propagation dynamique de fissure en élasticité linéaire. La séquence de passage entre deux "pseudo" pas de temps, du pas de calcul n à $n+1$ est décomposée comme suit :

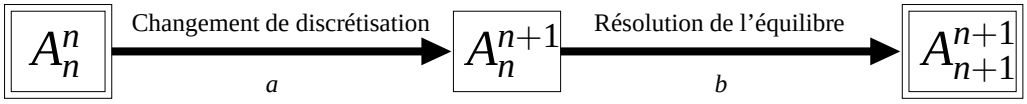


FIG. 4.1: Stratégie de calcul

Comme présenté sur la figure 4.1, cette séquence se compose de deux étapes : le changement de discrétisation (noté (a) sur la figure 4.1) et le calcul de l'équilibre (noté (b) sur la figure 4.1). Le changement de discrétisation (étape (a)) nécessite de déterminer A_n^{n+1}, le vecteur des inconnues au temps n sur l'ensemble des fonctions de formes / points de Gauss des sous éléments définis au pas de temps $n+1$; on suppose pour cela que les nouvelles inconnues sont telles que le nouveau segment de fissure est fermé à l'instant n. Lors de l'étape (b), l'équilibre est résolu afin d'obtenir le vecteur A_{n+1}^{n+1} avec la méthode présentée précédemment.

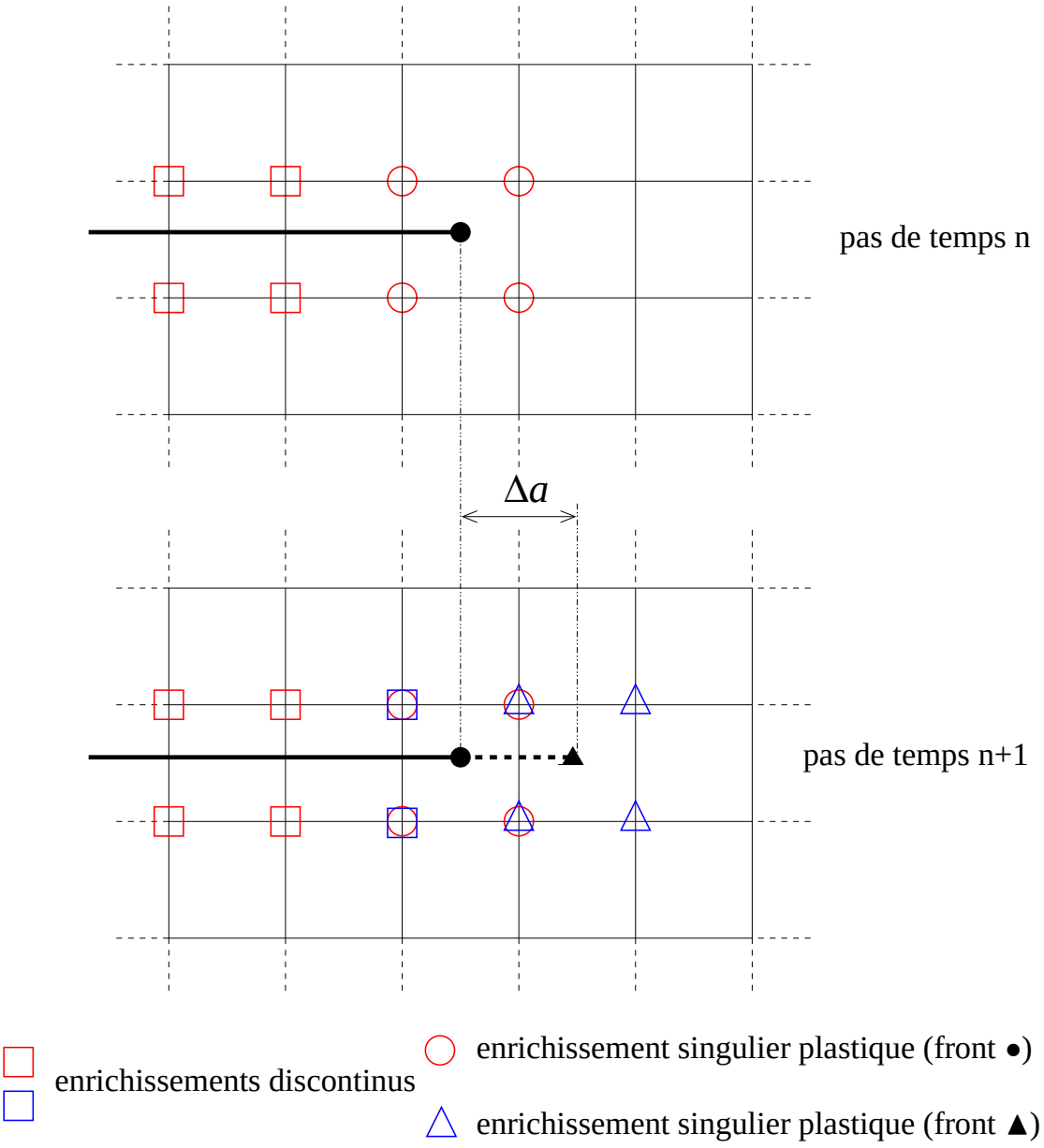


FIG. 4.2: Stratégie d'enrichissement au cours de la propagation

Avec la méthode des éléments finis étendus, le maillage élément fini n'évolue pas entre deux pas de temps n et $n+1$, mais de nouvelles fonctions de formes et de nouveaux sous éléments (avec la technique présentée dans le paragraphe 3.2) sont ajoutés pour simuler la propagation de la fissure. Le choix de conserver les anciens enrichissements singuliers entre les pas de temps n et $n+1$ (cf. figure 4.2), entraîne l'augmentation de la taille de la base des fonctions de formes entre ces deux pas de temps (elle est plus grande au pas $n+1$ qu'au pas n).

4.3 Gestion de plusieurs non-linéarités au cours de la propagation

4.3.1 Intégration numérique : extension de la vision à deux échelles

La méthode présentée prenant en compte la plasticité, la zone plastique est supposée se propager avec la pointe de fissure au cours de la simulation. Il apparaît donc opportun d'avoir une connaissance fine de l'état de contrainte dans un élément qui contiendra la pointe de fissure au pas de temps de calcul suivant. Jusqu'à maintenant, on peut observer sur la figure 3.5, que l'élément qui contient la pointe de fissure à l'instant $n+1$ n'est pas sous découpé à l'instant n. En s'inspirant de l'idée présentée dans [LEG 05b, BÉC 05] (concept d'enrichissement géométrique qui consiste à enrichir plusieurs couronnes de noeuds autour de la pointe de fissure), il est proposé de sous découper plusieurs couronnes d'éléments (qui ne sont pas encore tranchés par la fissure) autour de la pointe de fissure. Ce concept sera nommé sous découpage géométrique par la suite.

Dans le but de proposer une technique indépendante de la finesse du maillage, la taille de la zone de sous découpage géométrique doit être basée sur des considérations physiques. On peut observer sur la figure 4.3 que les éléments choisis (leur centre de gravité étant dans un disque centré sur la pointe de fissure) sont sous découpés avec la technique précédente. En s'appuyant sur l'hypothèse de plasticité confinée, le rayon R_{sub} du disque de sous découpage peut être défini à partir de l'estimation élastique de la taille de la zone plastique (cf. [LEM 96] par exemple). En utilisant la formule de Dugdale-Barenblatt pour le rayon de la zone plastique, R_{sub} est défini en mode I par l'équation suivante :

$$R_{sub} \propto \frac{\pi}{16} \frac{K_I^2}{\sigma_y^2} \tag{4.1}$$

Où K_I est le facteur d'intensité des contraintes en mode I et σ_y la limite élastique du matériau. Pour éviter que la fissure ne propage dans un élément qui ne soit pas encore sous découpé si K_I est faible, on propose de choisir comme valeur de rayon le maximum de l'expression précédente où K_I vaudrait le facteur d'intensité des contraintes calculé ou la ténacité K_{Ic} du matériau. De plus un coefficient de sécurité β est inséré dans l'expression de R_{sub}. L'équation devient alors :

$$R_{sub} = \beta \times max\left(\frac{\pi}{16} \frac{K_I^2}{\sigma_y^2}\ ,\ \frac{\pi}{16} \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_y^2}\right) \tag{4.2}$$

Avec cette stratégie, considérant un élément qui ne soit pas encore sous découpé au pas de temps n et qui soit sous découpé au pas de temps $n+1$, les contraintes et variables internes définies aux point de Gauss de ses sous quadrangles sont initialisées aisément sans projection (étant donné que celui-ci n'est pas encore plastique à l'instant n).

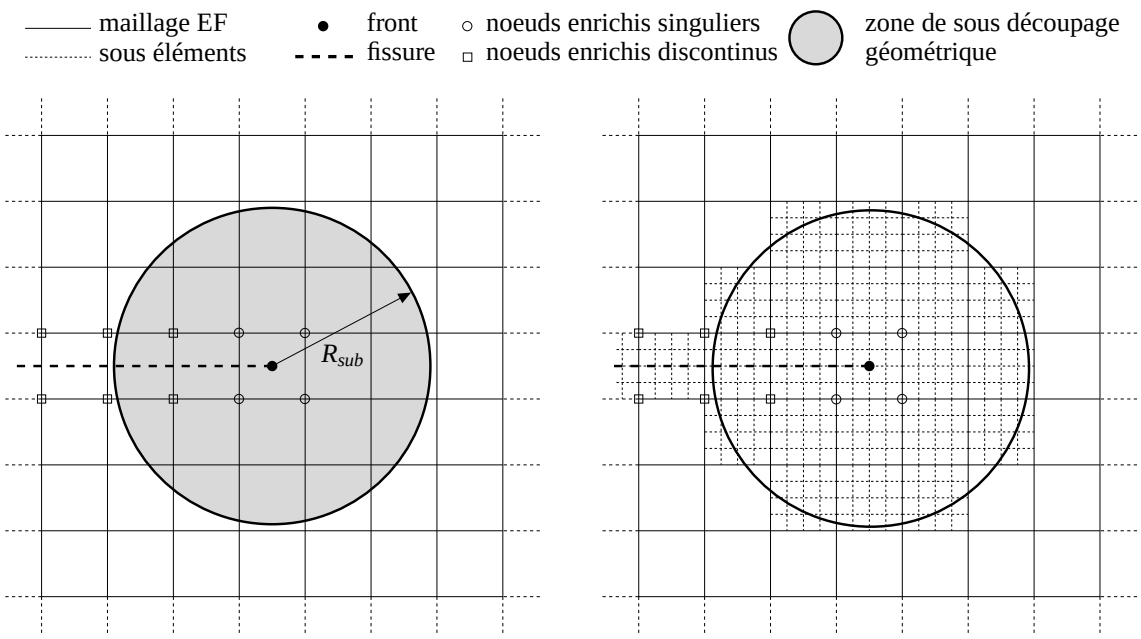


FIG. 4.3: Sous découpage géométrique des éléments autour de la pointe de fissure. Les éléments dont le centre de gravité est dans le disque sont sous découpés.

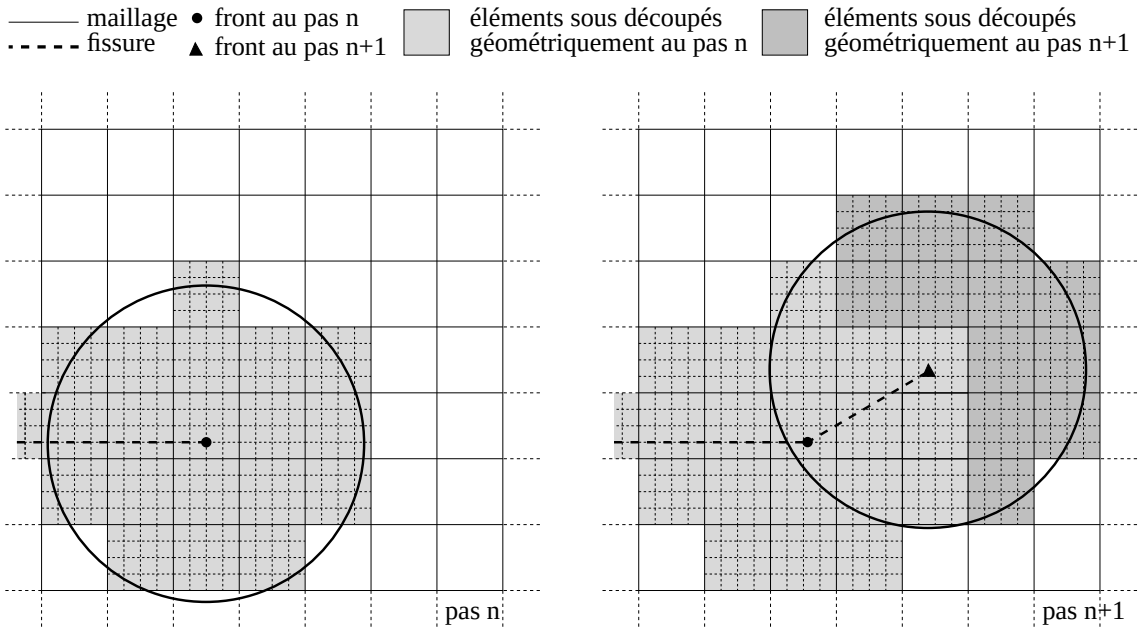


FIG. 4.4: Propagation d'une fissure dans les éléments sous découpés et évolution de l'ensemble des sous éléments entre les deux configurations.

4.3.2 Traitement du contact et couplage avec l'enrichissement

L'extension des lèvres de la fissure impose également de construire de nouveaux éléments d'interface pour traiter le problème de contact sur la nouvelle géométrie. Ces nouveaux éléments d'interface sont créés en utilisant la technique présentée dans le chapitre 3, en faisant l'intersection du nouveau segment de fissure avec la grille de sous éléments (cf. figure 4.5).

Le point clé dans cette stratégie est l'initialisation des ces nouvelles inconnues afin que l'équilibre à l'instant n sur la géométrie $n+1$ soit toujours vérifié (et reste identique). Comme dans le cas de la propagation dynamique [RÉT 05b], les nouveaux degrés de liberté sont choisis de telle sorte que le nouveau segment de fissure soit fermé à l'instant n. Les nouveaux degrés de liberté enrichis peuvent alors être choisis égaux à zéro :

$$[u]_n^{n+1} = \left[\begin{array}{c} u_n^n \\ \hline \overline{u}_n^{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u_n^n \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \tag{4.3}$$

En ce qui concerne les nouvelles quantités d'interface, celles-ci ne peuvent être choisies comme étant nulles : les nouveaux déplacements d'interface doivent être cohérents avec le champ de déplacement éléments finis et les nouveaux efforts d'interface doivent être compatibles avec la continuité du vecteur contrainte à travers les lèvres de la fissure. La procédure complète pour initialiser les nouvelles quantités d'interface $\overline{w}_n^{n+1}$, $\overline{t}_n^{n+1}$ et $\overline{\Lambda}_n^{n+1}$ au pas de temps n est présentée en Annexe D.

$$[w]_n^{n+1} = \left[\begin{array}{c} w_n^n \\ \hline \overline{w}_n^{n+1} \end{array}\right] \; and \; [\Lambda]_n^{n+1} = \left[\begin{array}{c} \Lambda_n^n \\ \hline \overline{\Lambda}_n^{n+1} \end{array}\right] \; and \; [t]_n^{n+1} = \left[\begin{array}{c} t_n^n \\ \hline \overline{t}_n^{n+1} \end{array}\right] \tag{4.4}$$

Pour les nouveaux multiplicateurs de Lagrange (équation (2.80)), on peut remarquer que les anciennes fonctions d'enrichissement singulières tendent à fermer le nouveau segment de fissure puisque celui-ci se trouve en avant de la pointe qui leur correspond. Ceci nous a amené à coupler (par la formulation faible, équation (2.86)) les nouvelles quantités d'interface avec tous les DDL éléments finis sauf les enrichissements créés aux pas de temps précédents. Cette stratégie est synthétisée dans la figure 4.6 où les symboles utilisés sont identiques à ceux de la figure 4.5.

Les matrices du système linéaire modifiées, associées à la nouvelle géométrie et aux nouvelles inconnues sont données dans les équation suivantes :

$$[K]_{n+1}^{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} [K]_n^n & [\tilde{K}]_n^{n+1} \\ \hline [\tilde{K}^T]_n^{n+1} & [K]_{n+1}^{n+1} \end{array}\right] \tag{4.5}$$

$$[K_c]_{n+1}^{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} [K_c]_n^n & [\widetilde{K_c}]_n^{n+1} \\ \hline [\widehat{K_c}]_n^{n+1} & [\overline{K_c}]_{n+1}^{n+1} \end{array}\right] \tag{4.6}$$

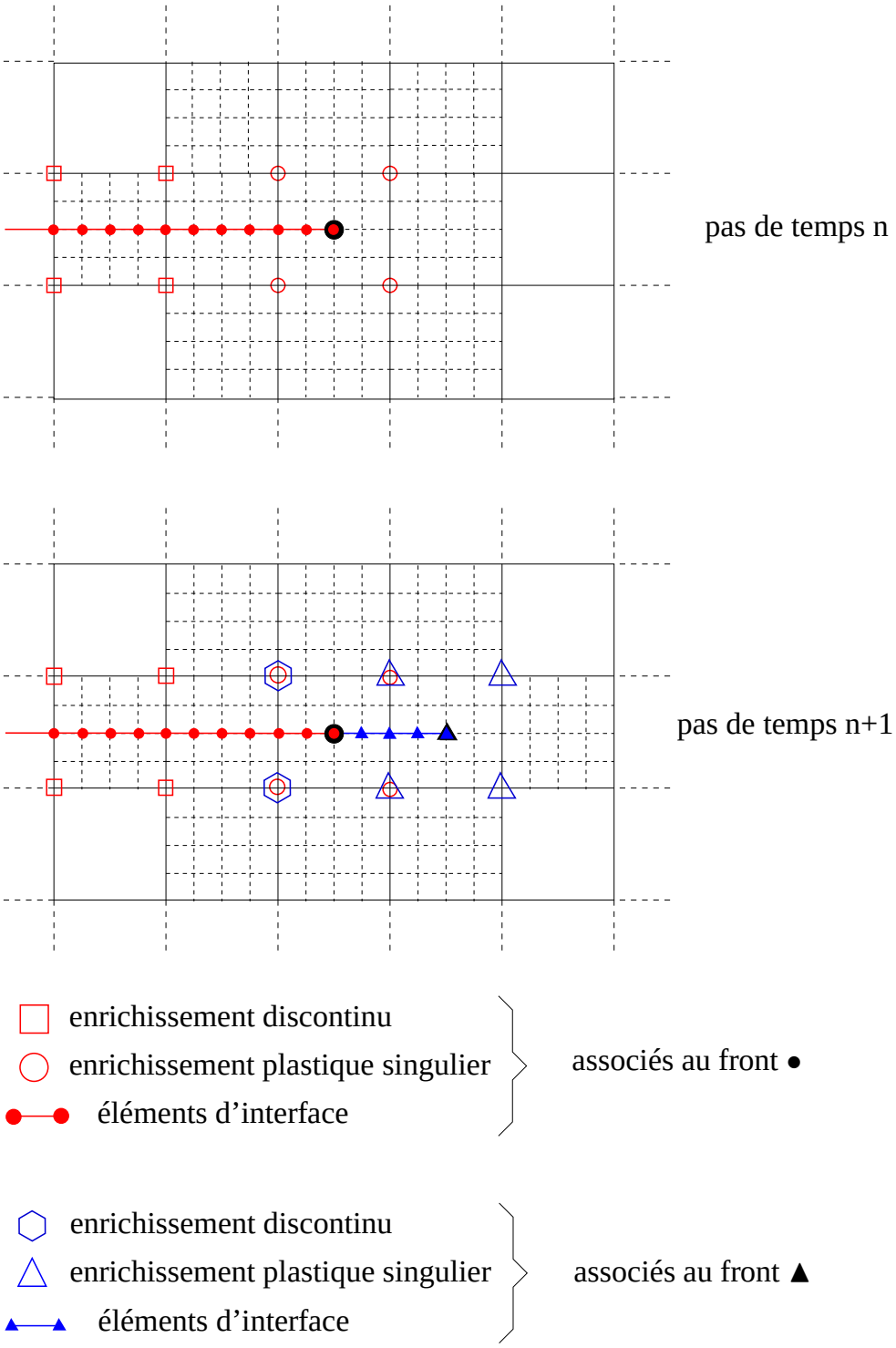


FIG. 4.5: Stratégie pour les éléments d'interface au cours de la propagation

DDLs EF+XFEM / DDLs d'interface	$(u_{EF})_n^n$	$(u_{cut})_n^n$	$(u_{tip})_n^n$	$(\bar{u}_{cut})_n^{n+1}$	$(\bar{u}_{tip})_n^{n+1}$
$(w)_n^n$	✓	✓	✓	✓	✓
$(\bar{w})_n^{n+1}$	✓	×	×	✓	✓

FIG. 4.6: Stratégie de couplage entre les DDL EF+X-FEM / DDL d'interface lorsque la fissure propage

$$[K_\alpha]_{n+1}^{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} [K_\alpha]_n^n & 0 \\ \hline 0 & [K_\alpha]_{n+1}^{n+1} \end{array}\right] \tag{4.7}$$

$$[K_I]_{n+1}^{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} [K_I]_n^n & 0 \\ \hline 0 & [K_I]_{n+1}^{n+1} \end{array}\right] \tag{4.8}$$

Où $[\tilde{K}]_n^{n+1}$ représente la matrice de raideur des nouveaux DDL enrichis travaillant sur les anciens DDL (enrichis et classiques), $[\bar{K}]_{n+1}^{n+1}$ représente la matrice de raideur des nouveaux DDL enrichis travaillant sur les nouveaux DDL enrichis, $[\widetilde{K_c}]_n^{n+1}$ représente la matrice de couplage entre les nouvelles quantités d'interface $(\bar{\Lambda})_n^{n+1}$ et les DDL éléments finis standards $(\tilde{u})_n^n$ (ce vecteur ne contient pas les anciens enrichissements), $[\widehat{K_c}]_n^{n+1}$ représente la matrice de couplage entre les anciennes quantités d'interface $(\Lambda)_n^n$ et les nouveaux DDL enrichis $(\bar{u})_n^{n+1}$, et $[\bar{K}_I]_{n+1}^{n+1}$ et $[\bar{K}_\alpha]_{n+1}^{n+1}$ sont respectivement les matrices de couplage et de pénalité entre les nouvelles quantités d'interface.

La croissance de l'ensemble des éléments finis sous découpés par la technique présentée au paragraphe 3.2 implique l'augmentation du nombre de points de Gauss. Comme présenté au paragraphe 3.2, les contraintes et variables internes sont connues aux points d'intégration de Gauss des éléments finis à la fin du n-ième de temps et doivent être exprimés sur les points de Gauss des nouveaux sous éléments avant le (n+1)-ème pas de temps. Étant donné que ces éléments sont dans des conditions élastiques au n-ième pas de temps, le calcul des contraintes et variables internes est très simple : les contraintes sont calculées élastiquement et les variables internes sont égales à leur valeur initiale.

4.4 Implémentation numérique

L'objectif de ce paragraphe est de présenter brièvement la façon dont les développements numériques proposés dans ce mémoire ont été implémentés dans le code de calcul *ELFE_3D*. Ce code est écrit en langage C++ orienté objet. Il a d'abord été développé sous le nom *xfem* à l'université de Northwestern depuis la fin des années 90 par Nicolas Moës, John Dolbow et N Sukumar entre autres. Ce code est actuellement développé au sein du LaMCoS à l'INSA de LYON sous le nom *ELFE_3D*, la gestion de celui-ci étant assurée par Anthony Gravouil depuis 2001. Le pré et le post-traitement sont effectués à l'aide du llogiciellibre GMSH [GEU] distribué sous licence GNU GPL. L'architecture du code permet des développements à plusieurs niveaux. Le code est organisé dans les différents répertoires suivants :

- **DofManager** : gestion des degrés de liberté, des assembleurs et de la structure des systèmes.
- **Forms** : calcul des quantités élémentaires associées aux formes linéaires et bilinéaires.
- **Formulations** : formulations mécaniques permettant de traiter les différents problèmes mécaniques (gestion des algorithmes ...).
- **Fracture** : calcul des intégrales J et d'interaction ainsi que des champs d'extension virtuelle.
- **Libgx** : interface avec le modeleur géométrique des supports des enrichissements, interactions maillage / géométrie de la fissure et sous-découpage.
- **Libix** : interface avec le mailleur, gestion des noeuds et connectivités.
- **Libplot** : interface pour le post-traitement.
- **LinearAlgebra** : calcul d'algèbre linéaire, interface avec les différents solveurs disponibles.
- **LSCRACK** : gestion et évolution des fissures décrites par des fonctions de niveaux.
- **LSET** : gestion des fonctions de niveaux.
- **Materials** : gestion des différents types de matériaux disponibles et de leur loi de comportement.
- **Numerics** : gestion des éléments finis, fonctions de formes et intégration numérique.
- **Solvers** : différents solveurs et pré-conditionneurs (gradient conjugué, résidus minimums généralisés ...).

Le répertoire **Formulations** représente le "coeur mécanique" du code. En effet, les différentes classes qui y sont codées correspondent aux différents problèmes mécaniques qui peuvent être traités par le code. Ces classes contiennent les algorithmes associés à ces formulations mécaniques ; on peut citer comme exemple : calcul statique (Mechanics), calcul thermique (Thermic), calcul de dynamique implicite (ImplicitDynamics) ou

explicite (ExplicitDynamics) etc... Les différentes formulations sont organisées selon l'arborescence suivante :

- MechanicsBase
  - Elasticity
  - Mechanics
    MechanicsContact
    MechanicsContact3D
    MechanicsCohesive
- CrackGrowth
  - CohesiveCrackGrowth
  - LevelsetCrackGrowth
  - CycleCrackGrowth
- Dynamics
  - ExplicitDynamics
  - ImplicitDynamics
  - MechanicsPlasticity
  - MechanicsPlasticityContact
  - MechanicsTimeContact
- DynamicCrackGrowth
  - ExplicitCrackGrowth
  - ImplicitCrackGrowth
  - ImplicitLevelSetCrackGrowth
  - DGCrackGrowth
  - MechanicsPCCrackGrowth
- Mitc4
- Stokes
- Thermic

On pourra également noter que les différentes formulations peuvent faire appel à une formulation auxiliaire (par exemple la formulation *CrackGrowth* utilise le calcul numérique de la formulation *Mechanics*).

Le fait d'introduire dans un code éléments finis la gestion de degrés de liberté enrichis nécessite une gestion avancée des DDL. En plus de la connaissance de la nature physique du DDL (déplacement, vitesse, effort dans une direction donnée, contrainte, température, pression ...), du type d'entité à laquelle il est rattaché (noeud, face, point de Gauss ...) et du numéro de celle-ci, il est nécessaire de cconnaîtrel'entité géométrique relative à l'enrichissement. Par ailleurs, la stratégie d'enrichissement utilisée ici impose d'associer aux enrichissements de type pointe de fissure le front auquel ils correspondent et dont ils représentent la singularité. On ajoute également une information quant à l'instant où le degré de liberté a été créé. On pourra trouver en Annexe E le code de la formulation *MechanicsPCCrackGrowth* qui permet d'effectuer un calcul quasi-statique de propagation de fissure en fatigue avec gestion de la plasticité et du contact-frottement.

Les données nécessaires à la réalisation d'un calcul sont présentées en Annexe F et sont contenues dans les fichiers suivants :

exemple.geo fichier de géométrie permettant de générer via GMSH un fichier maillage **exemple.UNV**.

exemple.DAT fichier gérant la mise en donnée : type de calcul, lien vers les fichiers de paramètre, de géométrie..., déclaration des conditions aux limites et des enrichissements.

exemple.GEF description géométrique des supports des enrichissements.

exemple.MAT paramètres matériaux.

exemple.PAR informations pour la formulation (précision utilisateur, incrément de temps...).

exemple_growth.PAR informations pour la propagation (type de critère pour l'avancée, la direction de propagation...).

4.5 Exemples numériques

4.5.1 Éprouvette CT sollicitée en mode I

Le premier exemple est composé d'une éprouvette Compact Tension (CT) en mode I sollicitée en fatigue avec un rapport de charge R de 0.1.

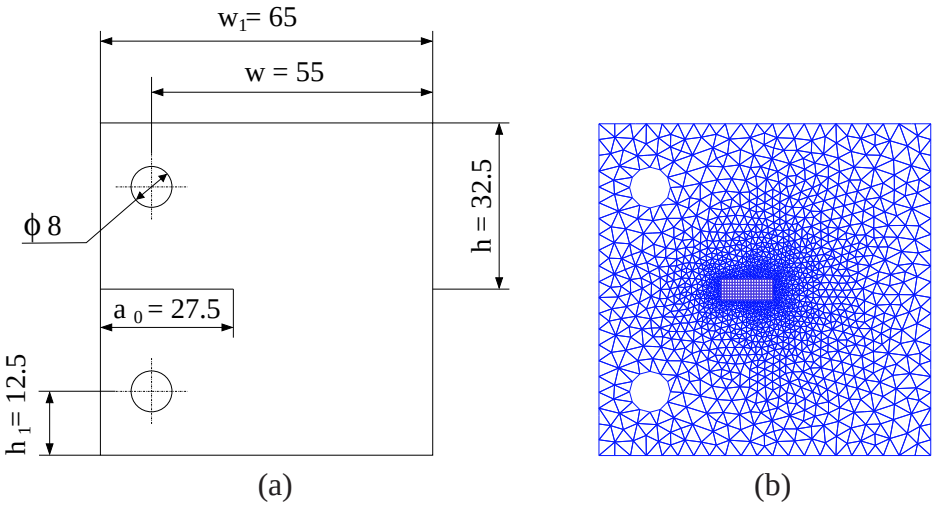


FIG. 4.7: (a) Géométrie en mm et (b) maillage de l'éprouvette CT

$$R = \frac{F_{min}}{F_{max}} = \frac{K_{I\ min}}{K_{I\ max}} = 0.1 \quad avec\ F_{max} = 10kN \tag{4.9}$$

La géométrie et les dimensions de l'éprouvette sont données sur la figure 4.7 (a), le maillage X-FEM est donné sur la figure 4.7 (b). Le matériau utilisé est le même que pour

l'exemple précédent : la loi contrainte-déformation qui définit la courbe de traction est donnée à l'équation (3.38) et les paramètres matériaux dans le tableau 3.2.

Le spécimen est soumis à 4 cycles de chargement de traction (de F_{min} à F_{max}) afin d'atteindre un état de contrainte stabilisé autour de la pointe de fissure, puis une avancée de fissure de $\Delta a = 0.5mm$ (qui correspond à la taille d'un élément fini autour de la pointe) est imposée. Cette avancée est suivie de 4 cycles de chargement puis d'une nouvelle avancée de Δa et ainsi de suite. L'ensemble constitué de ces 4 cycles de chargement plus l'étape de propagation est répété 11 fois.

Les résultats sont présentés sur les figure 4.8 à 4.11. Ils sont tous tracés à $F = F_{min}$ avant chaque propagation et zoomés autour de la pointe de fissure. Sur la figure 4.8, on trace la norme du champ de déplacement sur la configuration déformée amplifiée. Sur la figure 4.9, on trace la déformation plastique cumulée sur la configuration initiale. Sur la figure 4.10, on trace les efforts d'interface sur la configuration déformée amplifiée d'interface.

On peut observer sur la figure 4.9 que l'hypothèse de plasticité confinée est vérifiée, puisque la zone plastique reste dans les éléments qui contiennent les pointes de fissure successives. On peut également remarquer que la zone plastique globale n'est pas continue (contrairement à ce qu'on peut attendre dans la réalité), mais qu'elle est formée d'une succession de papillons plastiques. Ceci est dû à la méthode en elle même : le bloc de 4 cycles de chargement est équivalent à un calcul élastique dans une simulation de propagation de fissure élastique. Ainsi, puisque la propagation qui est imposée est basée sur une loi de Paris, une avancée de Δa représente en fait un certain nombre de cycles du chargement réel vu par la structure (lors d'un essai de fatigue par exemple) comme le font de nombreux auteurs dans la littérature avec la méthode des éléments finis [SOL 04a, SAN 05, SAN 06]. Dans cet exemple, chaque avancée de fissure "simule" de un à cinq milliers de cycles du chargement réel.

On peut remarquer sur les figures 4.8 et 4.10 les bosses sur les lèvres de la fissure là où se trouvent les anciennes pointes successives. Ces bosses sont dues à la redistribution de contraintes de compression plastiques en arrière de la fissure lors de la propagation. On peut observer ceci sur la figure 4.11, où on trace la deuxième composante diagonale du tenseur des contraintes avant la quatrième propagation à $F = F_{min}$ sur la configuration déformée amplifiée correspondante et sur la configuration déformée amplifiée avant la cinquième propagation. On peut remarquer sur cette figure qu'il y a une zone locale de compression autour de la pointe de fissure avant propagation et que la bosse suivante (qui apparaît donc après la propagation) se trouve dans la zone qui était précédemment dans un état de compression. On peut enfin noter sur la figure 4.10 que les bosses qui sont proches de la pointe de fissure courante sont fermées, puisque les efforts d'interface correspondants sont non nuls. Ceci prouve la capacité de la méthode à modéliser le phénomène de refermeture de fissure sous un chargement de traction [ELB 70, SOL 04a].

Sur la figure 4.12, les cycles contrainte déformation (σ_{yy} en fonction de ε_{yy}) sont tracés pour un point de Gauss situé dans la zone sous découpée au premier pas (la position exacte du point est précisée dans l'encart de la figure 4.12). Les cycles sont tracés avant la première propagation (le point est alors en avant de la pointe de fissure), entre la première

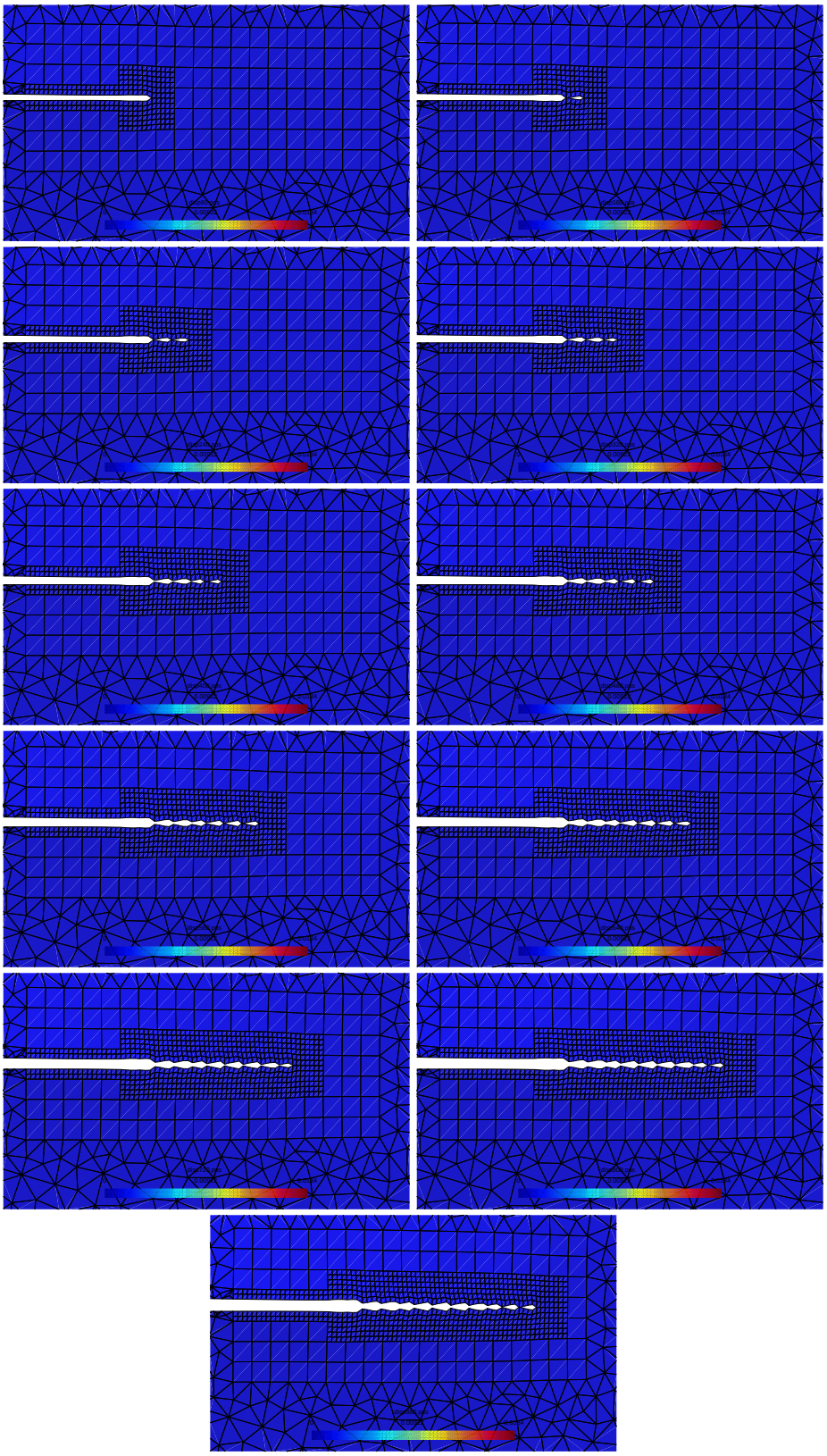


FIG. 4.8: Norme du champ de déplacement tracé sur la configuration déformée amplifiée à $F = F_{min}$ avant chaque propagation.

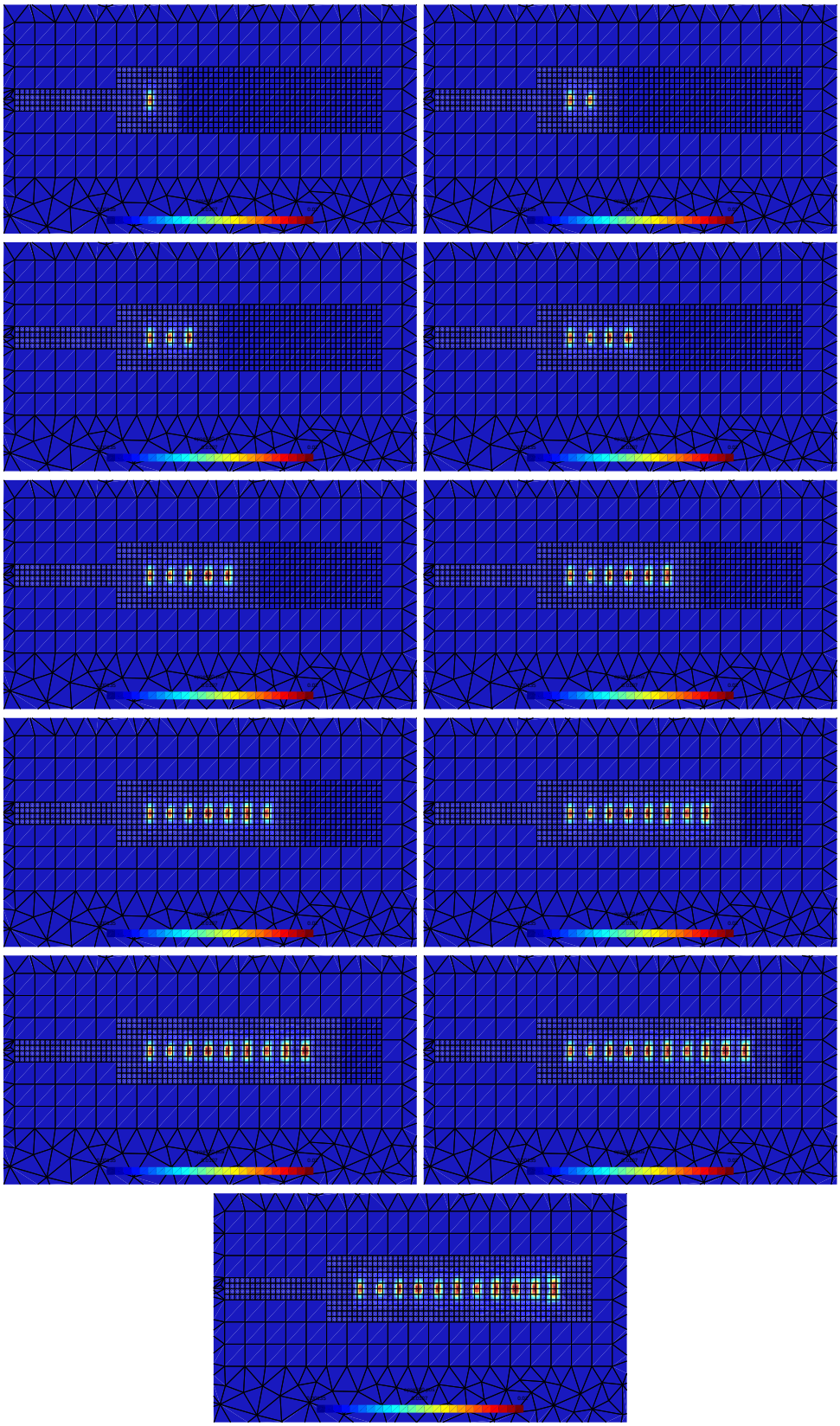


FIG. 4.9: Déformation plastique cumulée à $F = F_{min}$ avant chaque propagation.

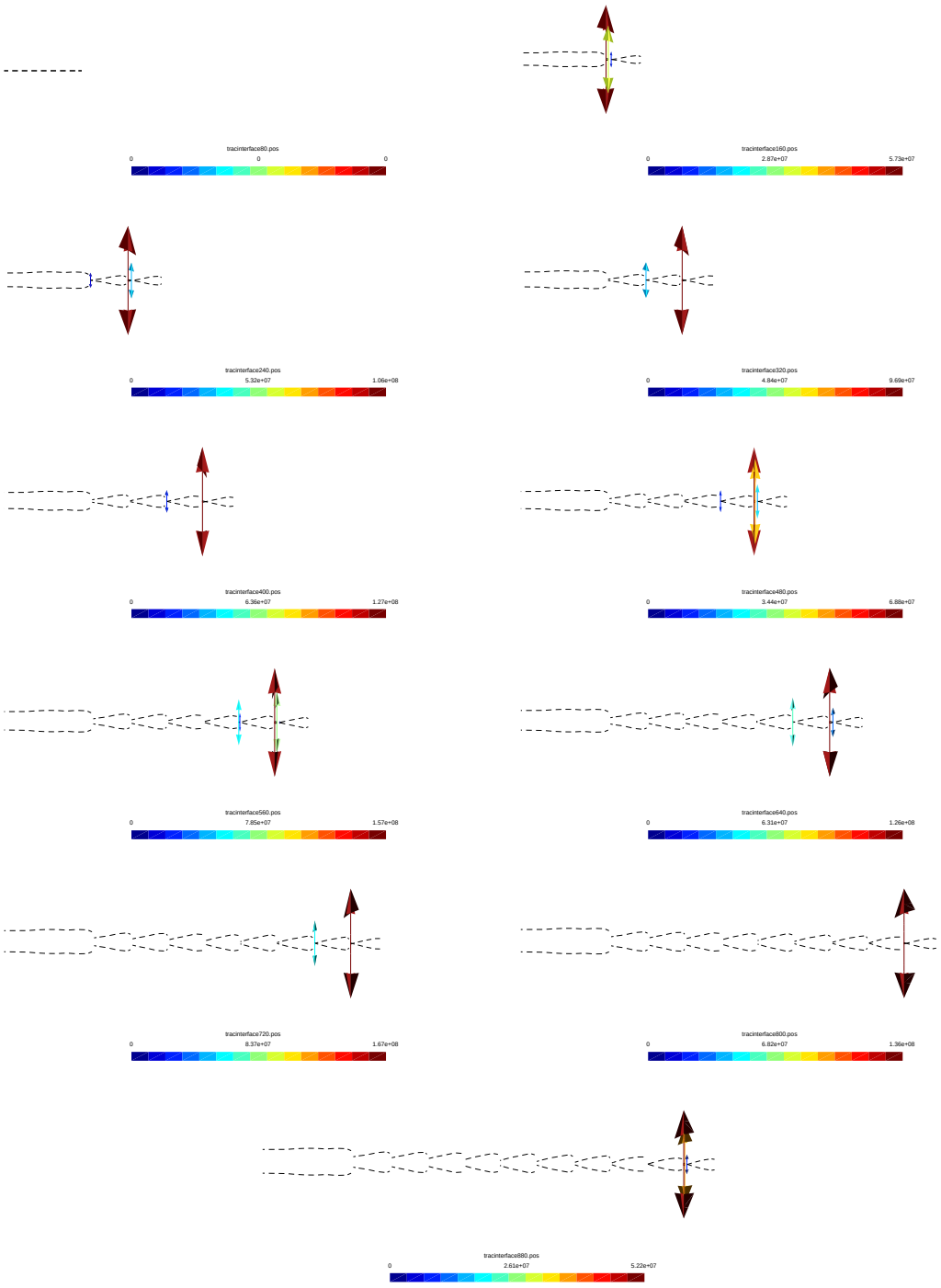
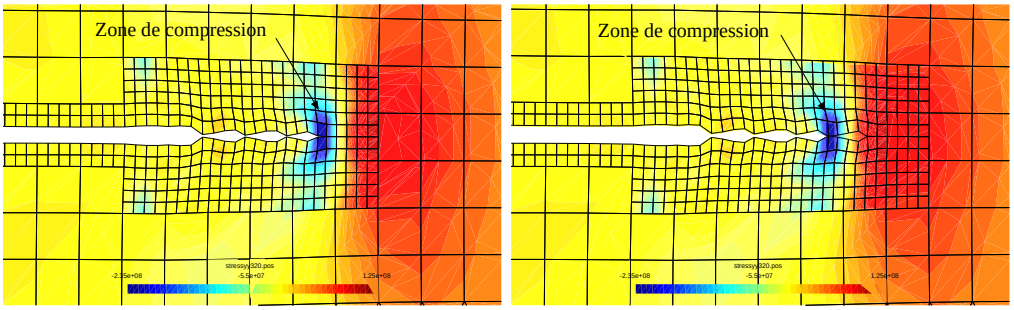


FIG. 4.10: Efforts d'interface tracés sur la configuration déformée amplifiée d'interface à $F = F_{min}$ avant chaque propagation.



(a) (b)

FIG. 4.11: Composante σ_{yy} du tenseur des contraintes à $F = F_{min}$ avant la $4^{ème}$ propagation (a) sur la configuration déformée amplifiée correspondante (b) sur la configuration déformée amplifiée après la $4^{ème}$ propagation.

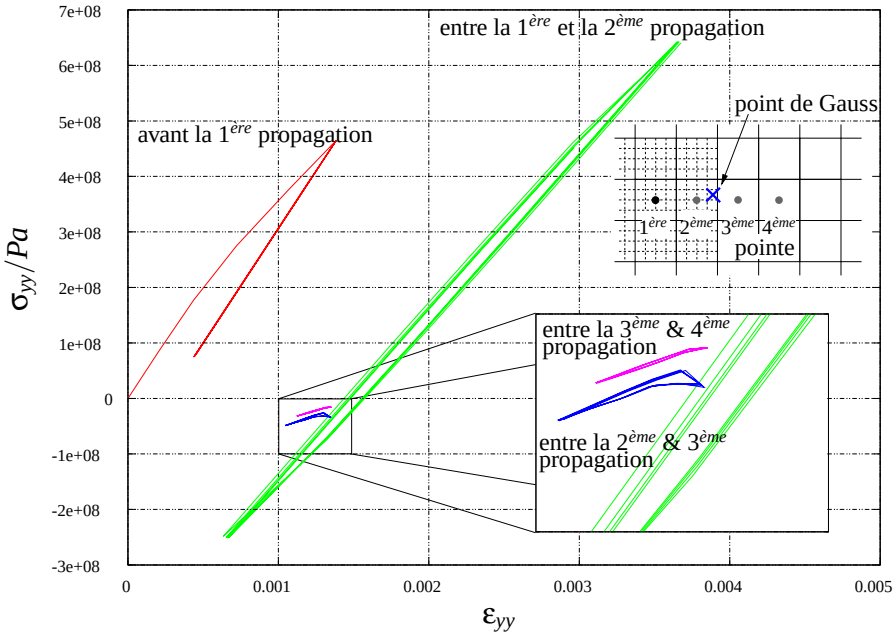


FIG. 4.12: σ_{yy} en fonction de ε_{yy} en un point de Gauss au cours de la propagation

et la deuxième propagation (le point est alors très proche de la pointe de fissure) et enfin entre la deuxième et la troisième et entre la troisième et la quatrième propagation (la pointe de fissure a alors dépassé le point de Gauss). Pour ne pas surcharger la figure, les différents cycles n'ont pas été reliés, bien qu'ils correspondent au même point de Gauss dont la position est indépendante de celle de la fissure grâce à l'absence de remaillage.

On peut constater sur l'ensemble des courbes que l'état stabilisé est atteint au cours des quatre cycles de chargement modélisés. On peut observer sur la première courbe que le point considéré est en traction comme on peut s'y attendre du fait de sa position "loin" en avant de la fissure. Sur la deuxième courbe, le point est très proche de la pointe de fissure, et l'état de contrainte passe de la traction à la compression au cours du cycle en

fonction du chargement extérieur. Enfin, sur les deux dernières courbes, les points sont désormais en arrière de la fissure. La taille très petite des cycles en comparaison avec la deuxième courbe montre que l'état de contrainte est relâché. On peut par ailleurs noter que sur ces deux courbes le point considéré est totalement en compression, avec une valeur moyenne qui diminue en valeur absolue à mesure que la pointe de fissure s'éloigne.

Cette figure montre qu'avec la méthode proposée, on obtient malgré un maillage "grossier" un état de contrainte assez fin autour de la pointe de fissure. On peut alors observer les phénomènes connus dans la littérature [ELB 70, BAT 97, SOL 04a]. Cette figure montre également un des principaux avantages de la méthode proposée sur les éléments finis classiques. Pour un problème en mode mixte, une simulation éléments finis ne permettrait pas de tracer ces courbes pour un même point de Gauss. En effet, l'obligation de remailler à mesure que la fissure avance entraîne le changement de discrétisation et ainsi la projection des contraintes. Au contraire, avec la méthode proposée ici, la discrétisation en terme de points de Gauss est indépendante de la position de la fissure (à l'intérieur de la zone de sous-découpage).

4.5.2 Éprouvette CTS : effet d'une surcharge

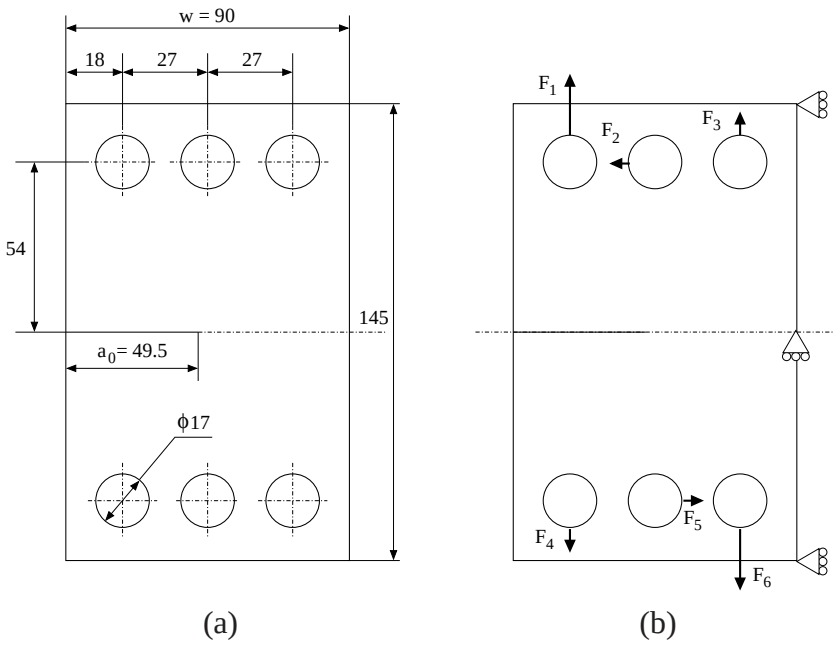


FIG. 4.13: (a) Géométrie en mm et (b) Conditions aux limites pour l'éprouvette CTS

L'exemple suivant consiste en une éprouvette Compact Tension Shear (CTS), soumise à une propagation en fatigue en mode I avec introduction d'une surcharge. Une étude numérique et expérimentale de ce spécimen est présentée dans les références [SAN 05, SAN 06]. Dans cet exemple, on veut comparer les résultats obtenus par des calculs éléments finis classiques très fins en pointe de fissure présentés dans [SAN 05]

avec la méthode proposée. On s'intéressera uniquement ici au cas de la propagation en mode I avec une surcharge. La géométrie, ainsi que les conditions aux limites sont identiques à celles utilisées dans [SAN 05]. On peut les observer sur la figure 4.13, ainsi que le maillage fin utilisé dans [SAN 05] pour les calculs par éléments finis sur la figure 4.14.

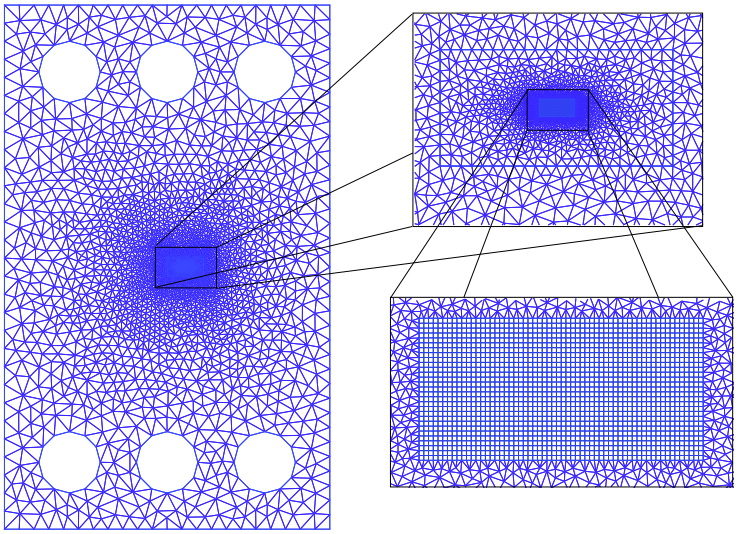


FIG. 4.14: Maillage de l'éprouvette CTS utilisé dans [SAN 05]

Avec ce type d'éprouvette, on peut réaliser des propagations en mode I pur, mode II pur et mode mixte. Les formules de facteurs d'intensité des contraintes (élastiques) pour ce type de géométrie sont données dans les équations suivantes (cf. [SAN 05]) :

$$K_I = \frac{F}{wt}\sqrt{\pi a}\frac{\cos\alpha}{1-a/w} \times \sqrt{\frac{0.26+2.65(a/(w-a))}{1+0.55(a/(w-a))-0.08(a/(w-a))^2}} \tag{4.10}$$

$$K_{II} = \frac{F}{wt}\sqrt{\pi a}\frac{\cos\alpha}{1-a/w} \times \sqrt{\frac{-0.23+1.40(a/(w-a))}{1+0.67(a/(w-a))+2.08(a/(w-a))^2}} \tag{4.11}$$

Où F est le paramètre de chargement, w et t sont respectivement la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette, a la longueur de fissure et α est l'angle de chargement. Étant donné qu'on ne s'intéresse ici qu'au cas du mode I pur, avec surcharge, l'angle de chargement est pris nul $\alpha = 0$ et les efforts présentés sur la figure 4.13 (b) sont donnés ici :

$$\begin{cases} F_2 = F_5 = 0 \\ F_1 = F_6 = F_3 = F_4 = 0.5 \times F \end{cases} \tag{4.12}$$

Les conditions de calcul utilisées dans [SAN 05] sont résumées dans ce qui suit. Premièrement, le spécimen est soumis à quatre cycles de chargement au niveau de référence avec un rapport de charge $R_{Bl} = 0.1$ constant, puis une propagation de $\Delta a = 0.025mm$ est

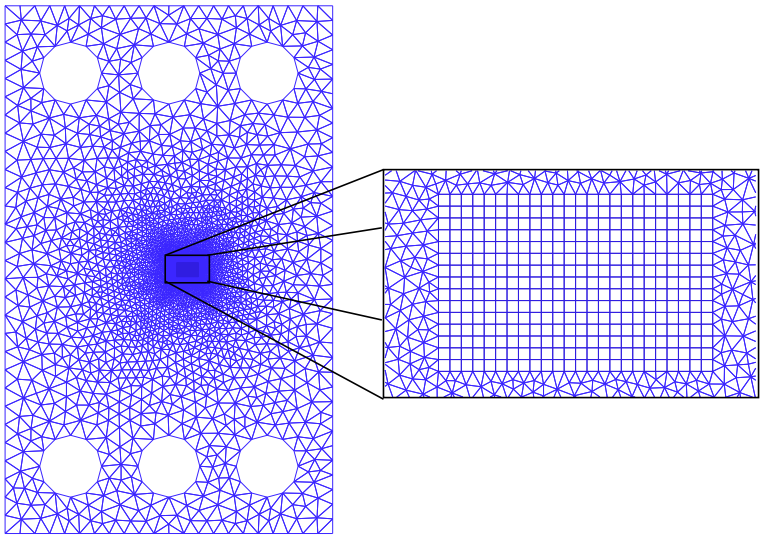


FIG. 4.15: Maillage X-FEM de l'éprouvette CTS

imposée à l'effort maximum. Ensuite, après la propagation, la charge est modifiée afin de maintenir un delta de facteur d'intensité des contraintes constant $\Delta K_{Bl} = K_{Bl,max} - K_{Bl,min}$ (où tous les FIC sont en mode I, et calculés avec l'équation (4.10)). Après une propagation totale de $0.5mm$, une surcharge en mode I avec un ratio de R_{ol} donné par l'équation (4.13) est appliquée puis une nouvelle propagation totale de $0.5mm$ au niveau de référence est appliquée.

$$R_{ol} = \frac{K_{ol}}{K_{Bl,max}} \tag{4.13}$$

Où K_{ol} et $K_{Bl,max}$ sont les FIC en mode I obtenus par l'équation (4.10) à la surcharge et à la charge maximum du niveau de référence.

Afin de tester la robustesse de la méthode, le maillage utilisé pour le calcul X-FEM est volontairement plus grossier. Celui-ci est présenté sur la figure 4.15. Le calcul est également simplifié : les propagations imposées sont de $\Delta a = 0.25mm$. Deux propagations sont donc effectuées avec réadaptation de l'effort pour maintenir ΔK_{Bl} constant, puis la surcharge est appliquée et enfin deux propagations de $\Delta a = 0.25mm$ au niveau de référence sont imposées.

L'intérêt de cet exemple consiste dans un premier temps en une comparaison qualitative des déformées au niveau des lèvres de la fissure. Les principaux résultats présentés dans [SAN 05] consistent en des calculs sous hypothèse de contraintes planes, les calculs effectués avec la méthode proposée sont réalisés sous les hypothèses de déformations planes d'une part puis de contraintes planes d'autre part [1].

On peut observer sur les figures 4.16 et 4.17 les déplacements verticaux le long de la fissure à K_{ol} et $K_{Bl,min}$ (figure 4.16) pour une longueur de fissure $a = 50mm$ et à et

[1] On notera qu'à l'heure où ces lignes sont écrites, les résultats X-FEM en contraintes planes sont provisoires.

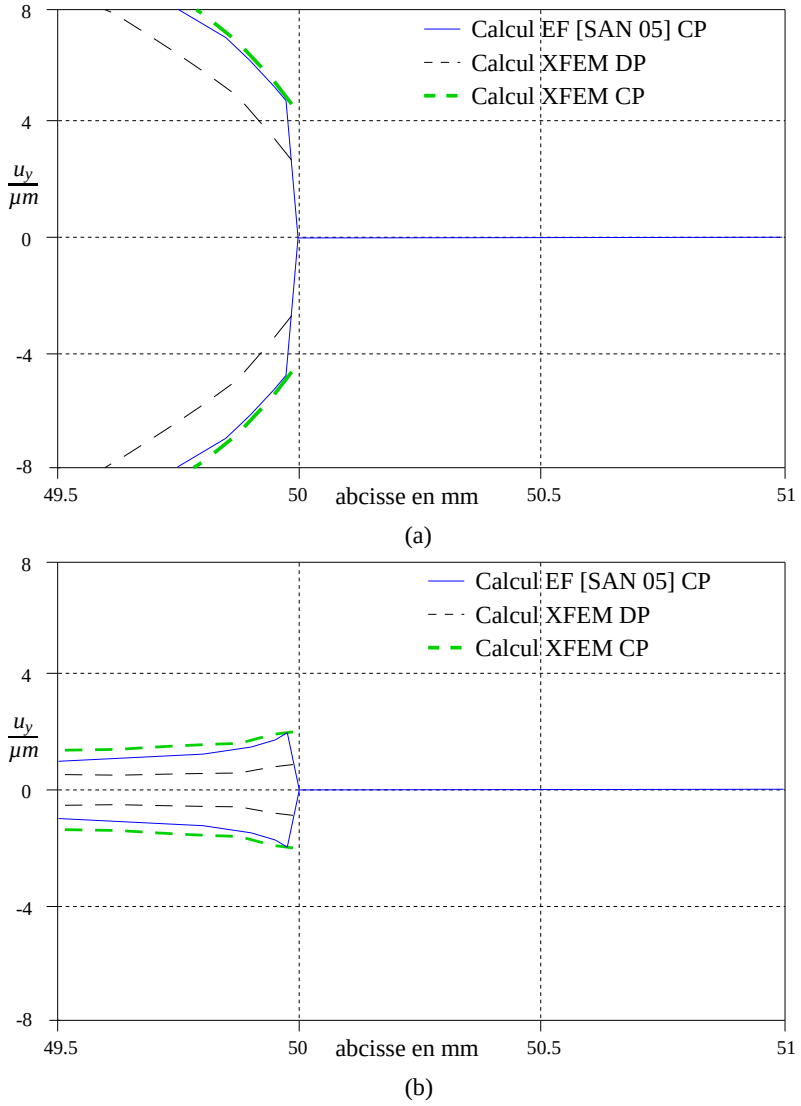


FIG. 4.16: Comparaison des déplacements verticaux sur l'interface pour une longueur de fissure a=50mm à (a) K_{ol} et (b) $K_{Bl,min}$

$K_{Bl,max}$ et $K_{Bl,min}$ (figure 4.17) pour une longueur de fissure $a = 50.5mm$. On peut noter que l'allure des déformées est similaire, mais que l'amplitude des résultats en déformations planes est relativement plus faible que pour les résultats en contraintes planes ; en revanche les résultats en contraintes planes sont relativement proches entre ceux obtenus dans [SAN 05] et avec la méthode proposée. Cet écart entre les résultats en contraintes planes et déformations planes est du à la différence de modélisation. Sous les hypothèses de déformations planes la zone plastique produite par la surcharge est sensiblement plus petite. Ceci influence donc relativement la déformée au niveau de la surcharge : le déplacement en déformations planes est plus faible, la zone plastique étant plus petite. De plus, cette différence dans la taille de la zone plastique influe également sur la refermeture due

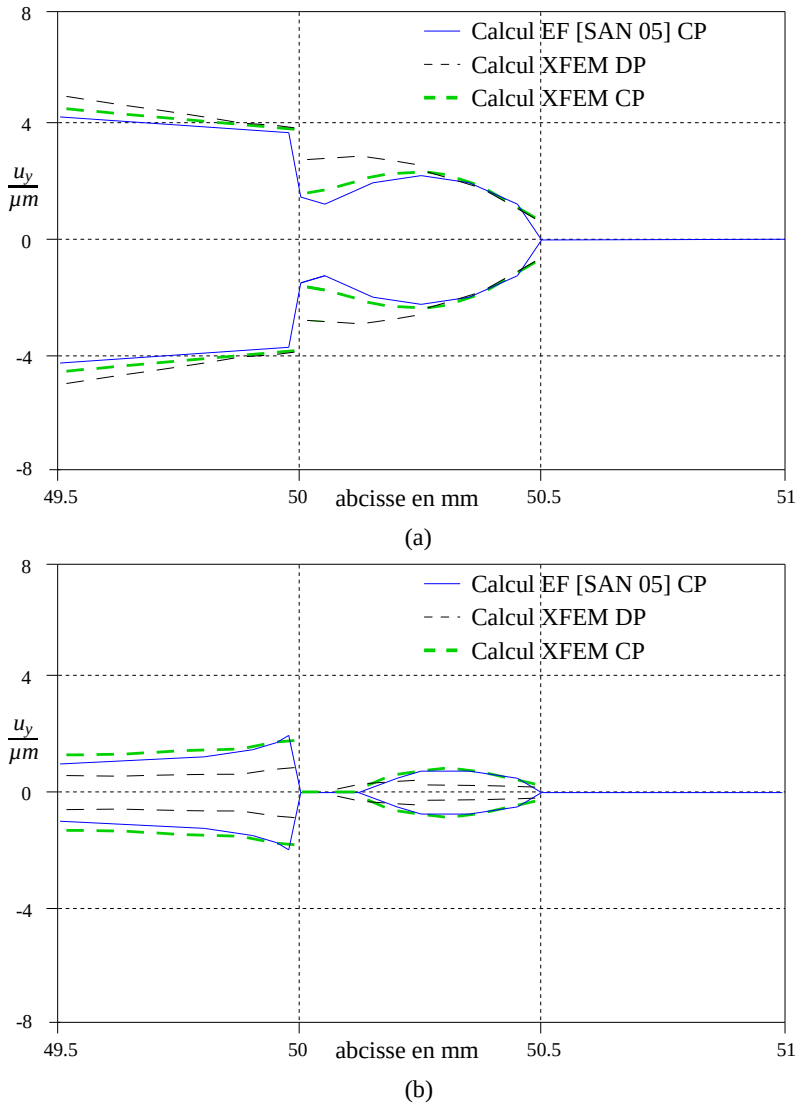


FIG. 4.17: Comparaison des déplacements verticaux sur l'interface pour une longueur de fissure a=50.5mm à (a) $K_{Bl,max}$ et (b) $K_{Bl,min}$

à la surcharge comme constaté sur la figure 4.17 et dans [SAN 05].

En ce qui concerne les résultats en contraintes planes, on peut observer que la méthode proposée surestime globalement légèrement les résultats par rapport à ceux obtenus en éléments finis. On peut cependant remarquer que les résultats sont très proches tant au niveau de la surcharge que de la refermeture (avec un maillage beaucoup plus grossier et un nombre de propagations beaucoup plus faible pour X-FEM comparativemetn aux résultats éléments finis). Ces résultats permettent donc de confirmer la validité de la base d'enrichissement sous les hypothèses de contraintes planes. De plus, on peut ainsi observer qu'avec un maillage relativement plus grossier et un nombre et un incrément de propagation plus faible qu'en éléments finis on peut obtenir de bons résultats sur la

solution locale, et notamment en terme de refermeture.

4.6 Comparaisons expérimentales

4.6.1 Obtention des facteurs d'intensité des contraintes à partir des résultats expérimentaux

La technique permettant d'obtenir les facteurs d'intensité des contraintes expérimentaux à partir des résultats de corrélation d'image est décrite dans [RÉT 05a, RÉT 05c]. Il s'agit en fait d'utiliser les résultats de corrélation d'image numérique avec les outils de post-traitement employés avec la méthode des éléments finis. La technique de l'intégrale

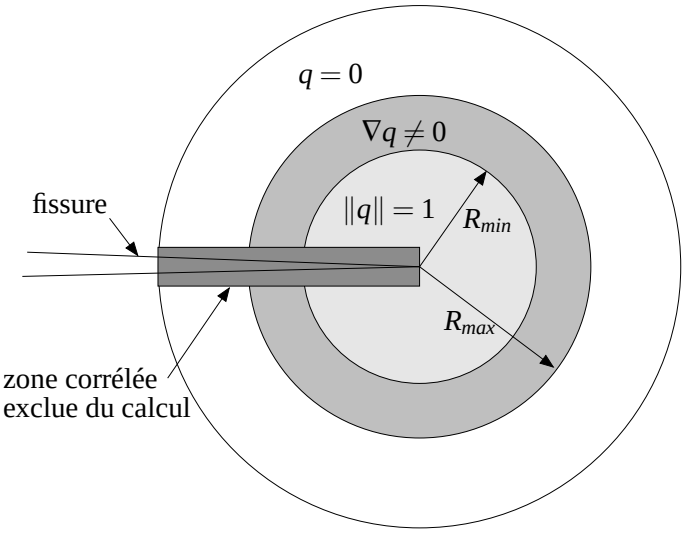


FIG. 4.18: Champ d'extension virtuelle utilisé pour la corrélation d'image et zone de calcul.

d'interaction présentée aux chapitres précédents est donc utilisée à partir du champ de déplacement obtenu par corrélation d'image. On utilise pour cela la formule donnée par l'équation (2.70).

Pour une fissure sollicitée en mode I, on choisit d'utiliser le champ d'extension virtuelle suivant :

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \mathbf{x_1} & \text{pour } r \leq R_{min} \\ (1 - \frac{R_{max} - r}{R_{max} - R_{min}})\mathbf{x_1} & \text{pour } R_{min} \leq r \leq R_{max} \\ \mathbf{0} & \text{pour } r \geq R_{max} \end{cases} \tag{4.14}$$

Les paramètres R_{max} et R_{min} sont les dimensions caractéristiques du domaine d'intégration comme présenté sur la figure 4.18.

Remarque 14 *On peut remarquer sur la figure 4.18 que la "bande" dans la zone de corrélation qui recouvre la fissure est exclue du calcul de l'intégrale d'interaction. En effet, la technique de corrélation utilisée à l'heure actuelle (celle présentée dans le chapitre 1) identifie un champ de déplacement continu dans la zone d'étude. Or au passage des lèvres de la fissure, le champ de déplacement réel est discontinu. Le champ de déplacement, et surtout les gradients utilisés dans le calcul de l'intégrale d'interaction, sont donc très mal identifiés dans les patterns recouvrant la fissure ; ils induisent alors des résultats aberrants dans le découplage, menant par exemple à des valeurs d'intégrale J négative. Ces patterns ne doivent donc pas être utilisés dans le découplage et sont retirés de la zone de découplage.*

4.6.2 Éprouvette CT en mode I : étude de la procédure de calcul des FIC

La géométrie de l'éprouvette CT B40W80 est présentée au chapitre 1 sur la figure 1.1. On dispose pour cette éprouvette en mode I d'une formule analytique donnant le facteurs d'intensité des contraintes K_I en fonction de la géométrie et du chargement.

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{10W}} \frac{2+a/W}{1-a/W} \left[0.886 + 4.64\left(\frac{a}{W}\right) - 13.32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.6\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (4.15)$$

Où P représente la charge en daN, a la longueur de fissure, B et W l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette en mm et K_I le facteur d'intensité des contraintes en mode I en $MPa\sqrt{m}$. On peut observer sur la figure 4.19 l'évolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles obtenue à partir d'une mesure par potentiel. On a également tracé sur cette courbe l'évolution du facteur d'intensité des contraintes en mode I en fonction du nombre de cycles, calculé à partir des longueurs de fissures expérimentales et de la formule analytique donnée par l'équation (4.15). Enfin, on a tracé le facteur d'intensité des contraintes obtenu à partir de la corrélation d'images numériques. On peut observer que la tendance de la courbe ainsi obtenue est semblable à la courbe théorique, malgré des différences importantes sur certains points. Ceci s'explique tout d'abord par le fait qu'un élément parasite a perturbé les photos et eentraînéune corrélation moins bonne dans une zone située au dessus de la pointe de fissure initiale. Ensuite, la difficulté d'identification de la position de la pointe de fissure eentraîneune incertitude assez importante sur le positionnement du contour d'intégration.

Nous nous sommes intéressés à deux points importants sur cet essai. Dans un premier temps, il nous parait nécessaire de valider la procédure de calcul des facteurs d'intensité des contraintes d'une part et de déterminer la finesse de maillage et l'avancée de fissure "optimale" à utiliser pour pouvoir effectuer dans un deuxième temps des calculs à partir d'un loi de Paris formulée en ΔK_{eff}.

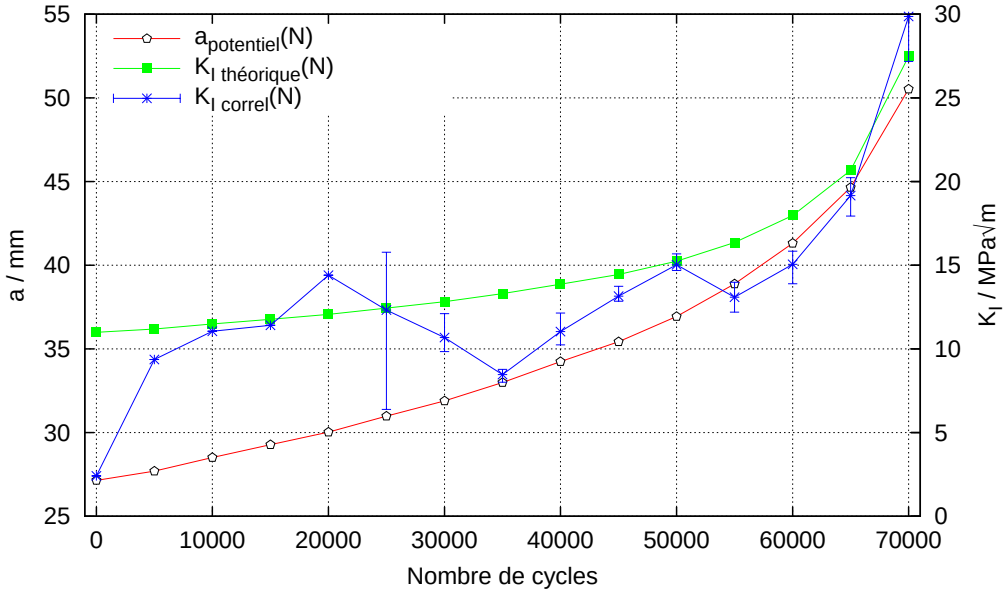


FIG. 4.19: Longueur de fissure mesurée par potentiel et K_I obtenu avec les longueurs expérimentales et la formule (4.15) et par corrélation d'images numériques

4.6.2.1 Simulation à Δa expérimental imposé

Nous avons donc choisit pour la première comparaison d'imposer les longueurs de fissure obtenues à l'aide des mesures par potentiel. On peut observer sur la figure 4.19 que la pente de la courbe a(N) varie peu entre 0 et 30000 cycles, ce qui nous permet d'estimer la position de la fissure entre deux points de mesure.

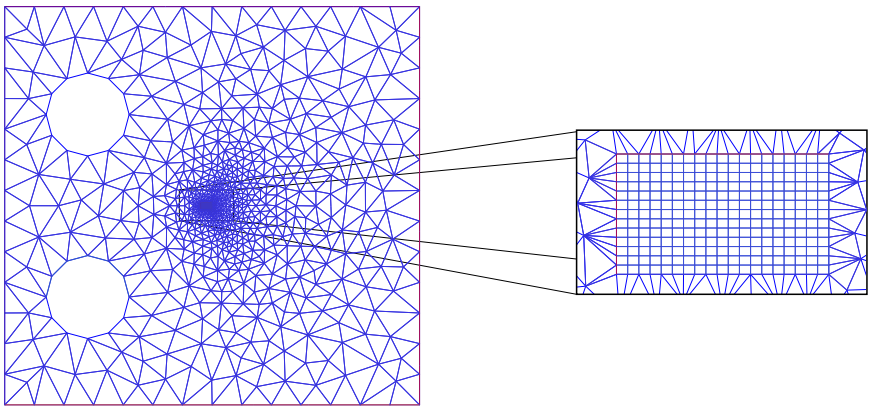


FIG. 4.20: Maillage de l'éprouvette CTB40W80

On effectue un calcul entre 5000 et 10000 cycles avec cinq propagations correspondant à une avancée de 1000 cycles chacune. On déduit de la courbe 4.19 qu'une avancée de 1000 cycles correspond à une propagation de $\Delta a = 0.162mm$. Le chargement est identique à l'essai, c'est à dire à $R = 0.1$ et la répartition des pas de calcul est choisie de telle sorte que l'on raffine entre F_{min} et F_{max} juste avant propagation (afin de capter l'instant

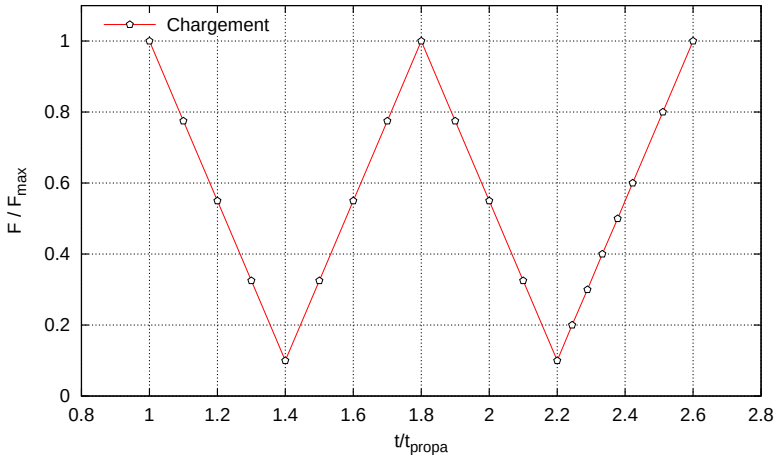


FIG. 4.21: Répartition des pas de chargement entre deux propagations

d'ouverture) comme on peut l'observer sur la figure 4.21. D'après les résultats qu'on a pu observer sur la figure 4.12, on constate que même pour un point d'intégration très proche de la fissure, l'état de contrainte est stabilisé rapidement. Ceci justifie le choix d'évolution du chargement entre deux propagations donné à la figure 4.21.

On peut observer sur la figure 4.22 les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes à $F = F_{max}$ obtenus au cours du calcul et comparés avec les valeurs théoriques et obtenues par corrélation d'image. On peut constater que les valeurs de K_I obtenues sont en bon accord avec la formule théorique, même si les valeurs numériques sont légèrement supérieures.

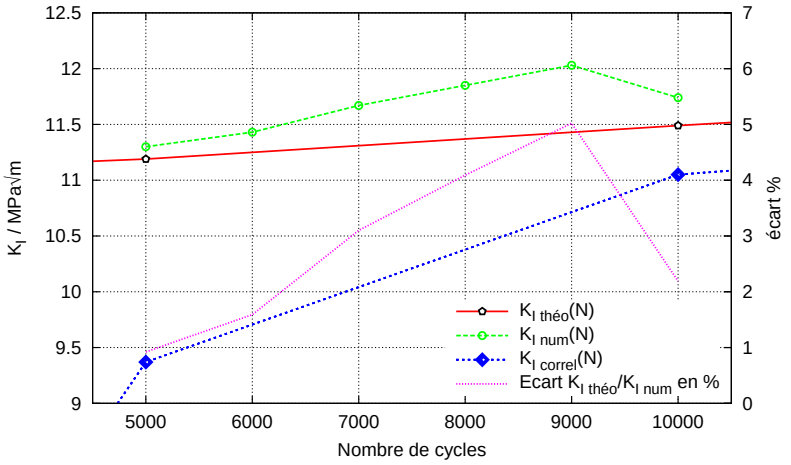


FIG. 4.22: Comparaison des FIC à $F = F_{max}$ entre les résultats d'essai et la simulation à Δa imposé

On peut observer sur la figure 4.23 ll'évolutionde K_I au cours du calcul, sur laquelle on a représenté en grisé les zones où la fissure est fermée. On peut observer que la zone

à pas de temps raffinée située juste avant la propagation nous permet de détecter l'instant ou la fissure s'ouvre et ainsi d'en déduire la valeur du facteur d'intensité des contraintes d'ouverture.

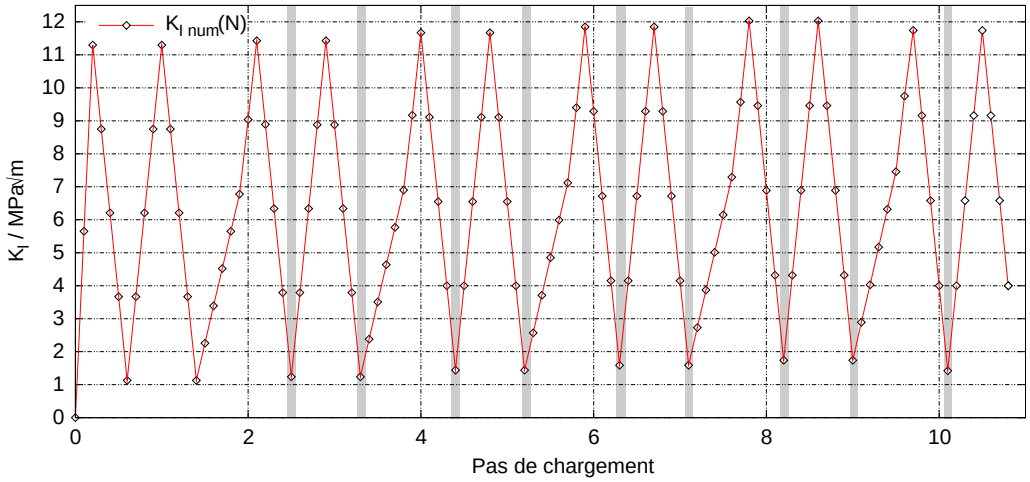


FIG. 4.23: EÉvolutionde K_I au cours du calcul et zones de refermeture

Remarque 15 *L'observation de ces résultats et de ceux présentés au paragraphes précédents suggère une dépendance des résultats, et notamment la détermination de K_{ouv} numérique, à la taille du maillage et au Δa choisi. En effet nous avons pu constater qu'une taille d'éléments finis autour de la pointe de fissure trop grossière implique que la zone plastique est trop petite comparée à celle-ci. Par ailleurs, comme on a pu l'observer au paragraphe 5.1, le fait que la zone plastique ne forme pas un sillage mais une succession de "papillons plastiques" impose un choix d'avancée de fissure comparable à la taille des éléments finis contenant la pointe de fissure, afin de représenter au mieux d'un sillage plastique.*

4.6.2.2 Simulation à partir d'une loi de Paris en ΔK_{eff}

Les résultats du calcul précédent montre que le calcul des facteurs d'intensité des contraintes est cohérent avec les résultats expérimentaux et que l'on arrive à détecter la refermeture. A partir de ces résultats, on peut simuler l'avancée à partir d'une loi de Paris formulée en ΔK_{eff}. On se sert pour cela de l'évolution du facteur d'intensité des contraintes au cours du calcul et on estime ΔK_{eff} à partir des instants ou l'on observe la fermeture et l'ouverture.

D'après le concept d'Elber [DAV 85], on a les équations suivantes à partir de la loi de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C(R).(\Delta K)^m = C_{eff}.(\Delta K_{eff})^m \quad \text{avec} \quad \Delta K_{eff} = K_{max} - K_{ouv} = U(R).\Delta K \quad (4.16)$$

Où $C(R)$ et m sont les coefficients habituels de la courbe de Paris et R le rapport de charge. On peut déduire de ces deux équations l'expression suivante :

$$C_{eff} = \frac{C(R)}{U(R)^m} \tag{4.17}$$

Les paramètres de la loi d'Elber A et B sont alors définis par

$$U(R) = A + B.R \tag{4.18}$$

$$A + B = 1 \tag{4.19}$$

Ceci montre que la connaissance des paramètres classiques de la loi de Paris C et m et l'obtention à partir du calcul X-FEM de K_{ouv} permet de formuler l'avancée avec une loi exprimée en ΔK_{eff}. On peut également obtenir les coefficients A et B afin de les comparer avec ceux donnés par un modèle tel que PREFFAS.

Le même calcul que celui présenté au paragraphe précédent est utilisé. On s'intéresse là encore à une fissure initiale donnée par la longueur expérimentale à 5000 cycles. On utilise les paramètres C et m (déterminés à partir d'essais sur éprouvette CT) donnés dans le tableau 1.2, le matériau utilisé pour cet essai étant un alliage d'aluminium 2024-T351. On simule des avancées représentant 1000 cycles du chargement réel, chaque avancée de fissure étant calculée à partir de ΔK_{eff} donné par le calcul et de la loi de Paris formulée en ΔK_{eff}.

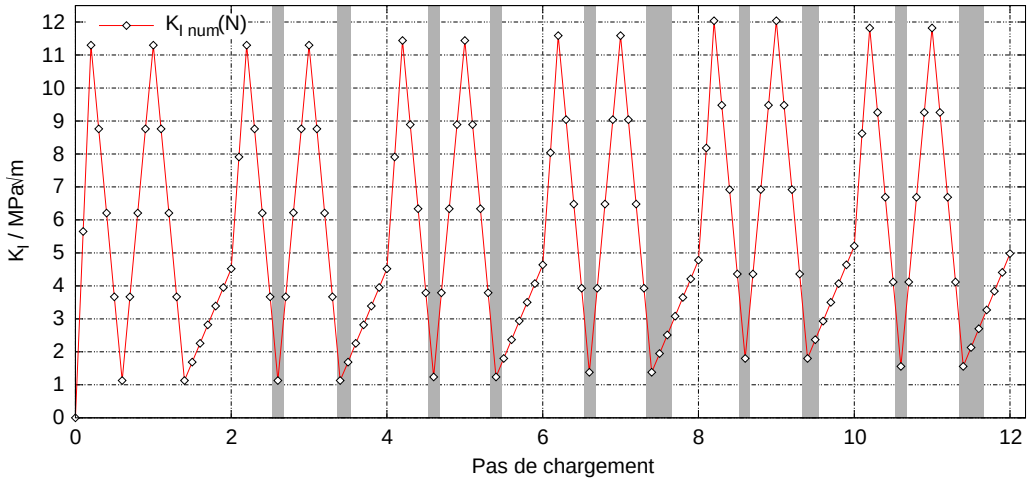


FIG. 4.24: EÉvolutionde K_I au cours du calcul et zones de refermeture permettant d'obtenir K_{ouv}

Les résultats sont présentés sur les figures 4.24 à 4.26. On peut observer sur la figure 4.24 l'évolution du facteur d'intensité des contraintes au cours du calcul ainsi que les zones où on observe la refermeture. On peut constater que, comme dans le calcul précédent, la refermeture est bien détectée dès la première propagation. On peut également oobserverque la refermeture ne se produit pas aussi longtemps à chaque position de fissure : on peut par exemple noter la refermeture au cours des trois pas dans la remontée

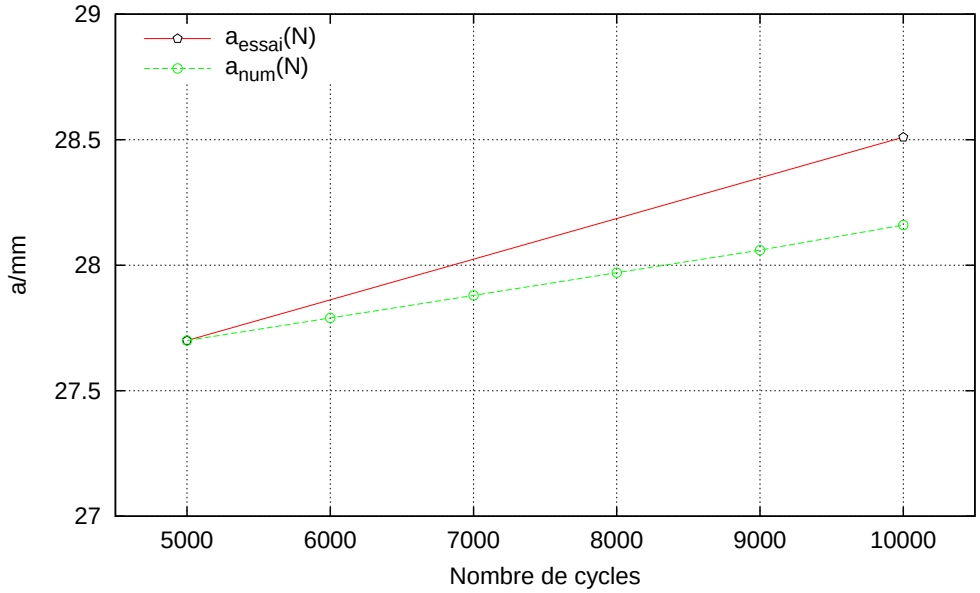


FIG. 4.25: Comparaison de la position de la fissure au cours du calcul et de l'essai

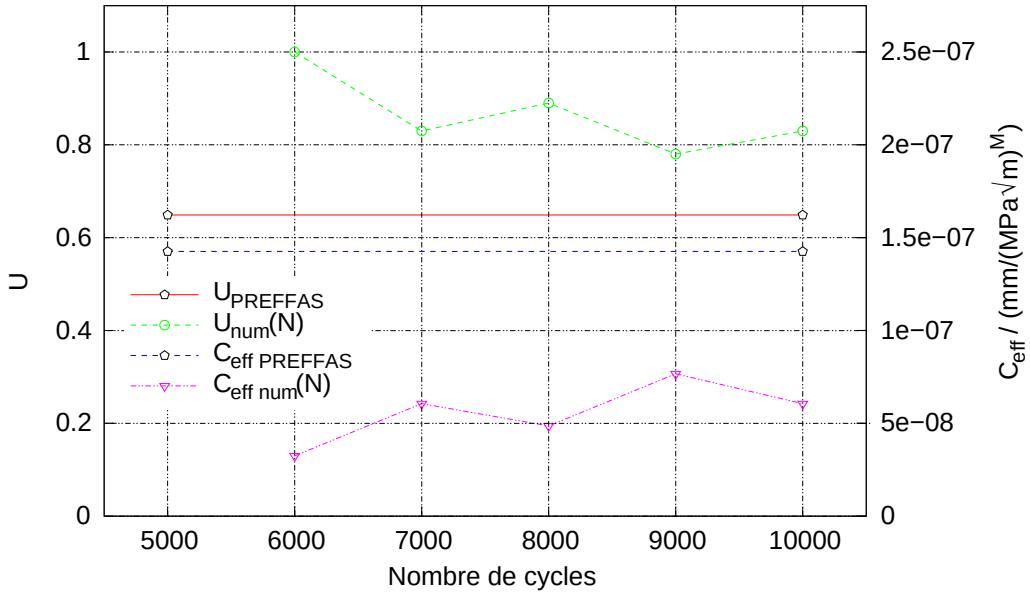


FIG. 4.26: Comparaison des paramètres du modèle d'Elber numériques et obtenus avec PREFFAS

après la troisième propagation alors qu'il n'y a refermeture qu'au cours du premier pas de la remontée après la deuxième propagation. Ceci peut également être observé sur la figure 4.26 où on a tracé le paramètre U du modèle d'Elber au cours du calcul en comparaison avec sa valeur donnée par le modèle PREFFAS. On constate que la valeur de ce paramètre varie au cours du calcul puisqu'elle est directement liée à l'instant ou se produit l'ouverture de fissure. On peut observer que plus l'ouverture est détectée à un niveau

d'effort éélevé plus la valeur de U est faible. Si on compare les valeurs obtenues au cours du calcul avec celle donnée par le modèle PREFFAS, on constate un écart important pouvant aller jusqu'à 30% (si on ne tient pas comp de la première valeur). Cette différence, compte tenu du modèle, se répercute directement sur l'incrément de fissure ainsi calculé. Ceci peut être observé sur la figure 4.25, où on compare l'évolution de longueur de fissure au cours du calcul aux résultats expérimentaux obtenus par mesure de potentiel. La tendance des résultats de calcul que l'on peut observer sur les courbes précédentes est vérifiée sur l'évolution de la longueur de fissure obtenue par le calcul, celle-ci étant plus fabile que les valeurs expérimentales. En effet, le fait de sous estimer U entraîne une propagation de fissure plus faible.

Remarque 16 *L'observation de ces résultats montre la relative ssensibilitéde ceux-ci, d'une part à la taille de maillage autour de la pointe de fissure et à l'incrément de propagation imposé comme suggéré au paragraphe précédent. En effet, on constate en comparant les courbes 4.23 et 4.24, que l'on détecte l'ouverture plus tard lors du second calcul, où les avancées de fissure sont pratiquement deux fois plus petites. Ces résultats, qui montrent malgré tout les capacités intéressantes de la méthode à représenter le phénomène de refermeture, doivent donc être considéré comme préliminaires. Compte tenu de ce qui a été présenté, il est raisonnable de penser qu'un étude poussée de la ssensibilitédes résultats aux paramètres de calcul tels que finesse de maillage, incrément de fissure/nombre de cycles de chargement rréelmodélisés est nécessaire pour se faire une idée définitive de la méthode. Cette étude étant un travail a part entière, elle n'a pu rentrer dans le cadre de cette thèse, essentiellement dédié au développement de la méthode numérique.*

4.6.3 Éprouvette cylindrique à fissure inclinée

4.6.3.1 Modélisation, critère de direction de propagation

La géométrie de l'éprouvette cylindrique ainsi que les conditions d'essai ont été présentées dans le chapitre 1. On se propose ici de s'intéresser d'une part au modèle géométrique utilisé et d'autre part au critère de direction de propagation.

Compte tenu des conditions de symétrie centrale de la géométrie de l'éprouvette, seule la moitié de celle-ci est modélisée comme présenté sur la figure 4.27. Le chargement est modélisé par une pression uniforme sur les disques d'attaches des mors, et les conditions en déplacements sont choisies de manière à imposer la symétrie centrale.

On s'intéresse dans un premier temps au choix d'un critère de direction de propagation. On peut trouver dans la littérature un grand nombre de critères, le plus courant étant celui de la contrainte circonférentielle maximale [BUI 78]. Dans le cas de la rupture en élasto-plasticité, on peut observer des ruptures par clivage ou par cisaillement qui conduisent à des directions de propagation différentes. Il a cependant été observé que dans le cas de la plasticité peu étendue, comme c'est le cas en fatigue, le critère élastique de la contrainte circonférentielle maximum permet la pluspart du temps d'obtenir la bonne

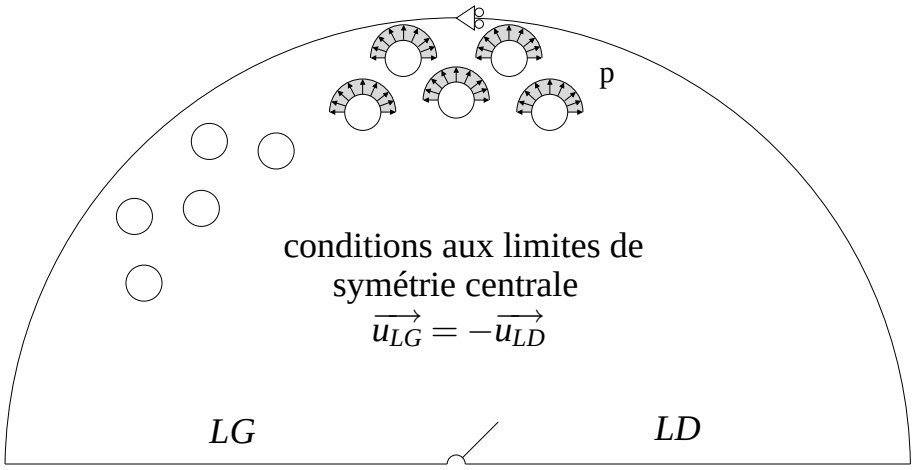


FIG. 4.27: Modèle géométrique et conditions aux limites pour l'éprouvette cylindrique

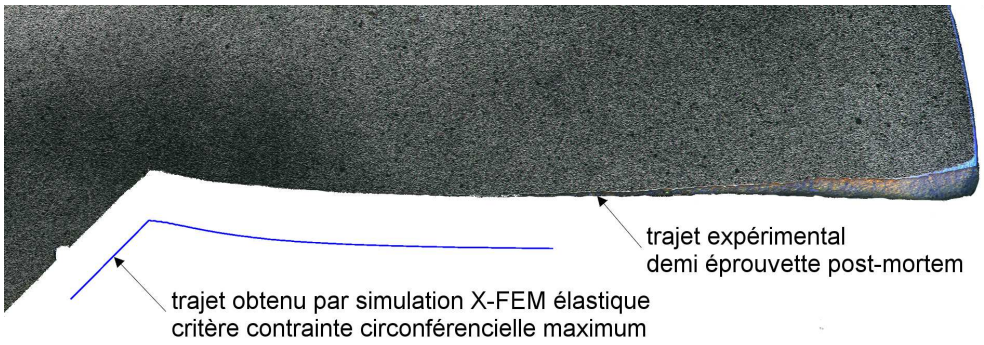


FIG. 4.28: Comparaison du trajet de fissure expérimental donné par une photographie d'éprouvette post-mortem et du trajet résultant du calcul X-FEM purement élastique.

direction de propagation [MA 05]. Ce critère définit l'angle de propagation critique θ_c en fonction des facteurs d'intensité des contraintes :

$$\theta_c = 2\arctan\left[\frac{1}{4}\left(\frac{K_I}{K_{II}} - signe(K_{II})\sqrt{8+\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2}\right)\right] \tag{4.20}$$

Afin de vérifier si le critère permet d'obtenir le bon trajet final de fissure, nous avons procédé à un calcul X-FEM élastique linéaire avec une succession de propagations imposées avec $\Delta a = 0.5mm$, le chargement étant maintenu constant. On peut observer sur la figure 4.28 la comparaison du trajet final de fissure ainsi obtenu avec la photographie d'une éprouvette post-mortem. On peut constater que les trajets sont très proches, principalement dans la zone de virage où la fissure change de direction. Ceci confirme que

l'utilisation du critère de direction de propagation proposé est adéquat.

4.6.3.2 Calcul en fatigue et résultats par corrélation d'image

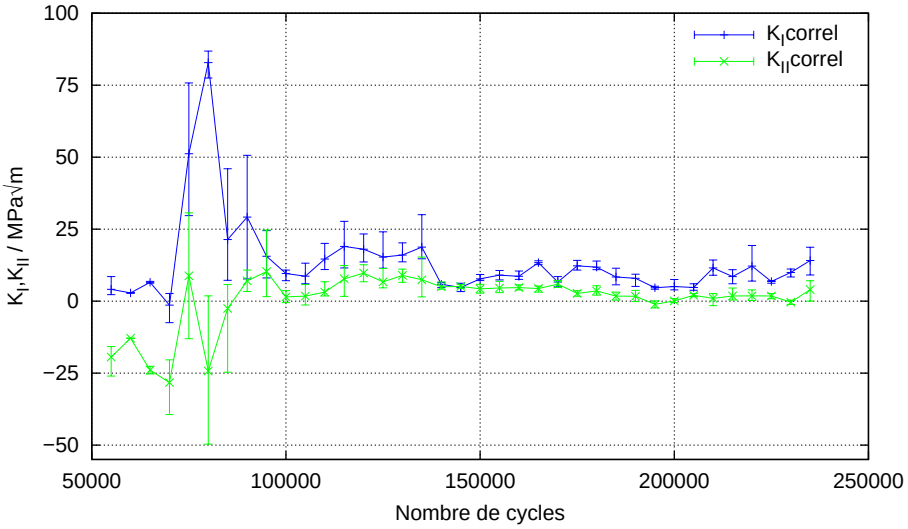


FIG. 4.29: K_I et K_{II} obtenus par corrélation d'images numériques pour l'éprouvette cylindrique 45°.

Corrélation d'image numérique Contrairement à l'essai sur éprouvette CT standardisé, on dispose pour l'essai de moins d'informations, il est notamment impossible de connaître la position de la fissure par une méthode de type potentiel. Les seules informations dont on dispose sont donc données par les photographies et la corrélation d'image numérique. On peut observer sur les pphotographiesprésentées figure 1.12 qu'on peut estimer la position de la pointe de fissure. Il est cependant assez difficile de placer celle-ci avec certitude, l'expérience prouvant que la pointe réelle est en général relativement plus loin que ce qu'on peut identifier comme tel sur les photographies.

On peut observer sur la figure 4.29 l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes en fonction du nombre de cycles de chargement obtenus par corrélation d'image numérique. Compte tenu de la difficulté de déterminer à la fois la position de la pointe de fissure et l'orientation de celle-ci, plusieurs mesures ont été effectuées pour chaque nombre de cycle (c'est à dire pour chaque photographie). On obtient ainsi une liste de valeurs, dont la moyenne nous permet de tracer la courbe de tendance et les valeurs minimales et maximales les barres d'incertitude. On peut observer que les ordres de grandeur obtenus sont corrects (de l'ordre de la dizaine de $MPa\sqrt{m}$), mais il est relativement difficile de conclure quand à la tendance générale des courbes. Plusieurs facteurs peuvent expliquer ces résultats, notamment du point de vue de la corrélation (et donc avant le calcul des FIC). On a pu constater que, d'une part, le motif aléatoire restait dans une faible gamme de niveau de gris, ce qui rend la corrélation plus difficile, et d'autre part, que le rapport d'échelle entre la largeur de la zone photographiée et la résolution de la caméra utilisé était élevé.

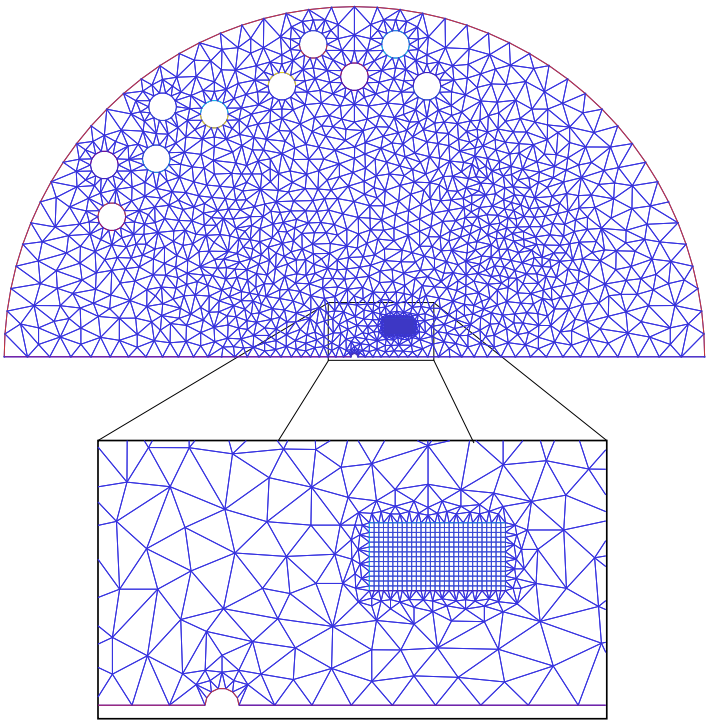


FIG. 4.30: Maillage de l'éprouvette Cylindrique

Ces deux facteurs rendent l'identification du champ de déformation dû à la présence de la fissure délicate, celui-ci étant relativement faible par rapport au bruit de mesure. Une fois la corrélation effectuée, nous avons pu observer, comme on peut le constater à la vue des barres d'incertitude, qu'une très légère différence dans la position de la pointe de fissure ou dans l'orientation de la fissure donne des résultats très différents en terme de FIC. La ssensibilitédu découplage à la position et à l'orientation de la fissure est d'autant plus importante dans ce cas par rapport à l'éprouvette CT puisque la position de la pointe détermine les coordonnées r et θ du repère cylindrique local utilisé pour les champs de découplage et l'orientation de la fissure définit la direction du champ d'extension virtuelle.

Simulation numérique La géométrie et les conditions aux limites sont celles présentées sur la figure 4.27 pour l'éprouvette cylindrique à 45°. Le rapport de chargement est de $R = 0.1$, avec un effort maximum de 150kN. Le maillage utilisé est présenté sur la figure 4.30. Le calcul est effectué avec cinq propagations imposées d'une longueur de $\Delta a = 0.35mm$ avec un comportement de l'interface sans frottement.

Les résultats peuvent être observés sur les figures 4.31 à 4.32. On a tracé sur la figure 4.31 le champ de déformation plastique cumulée au dernier effort maximum superposé avec le trajet de fissure final. On peut constater, en ce qui concerne le trajet de fissure que celui-ci a un aspect légèrement en dent de scie ; ce phénomène, qu'on peut également observer lors du calcul élastique, est du à la forte inclinaison de la fissure initiale par rapport à la direction de chargement : la direction de propagation prévue par le critère

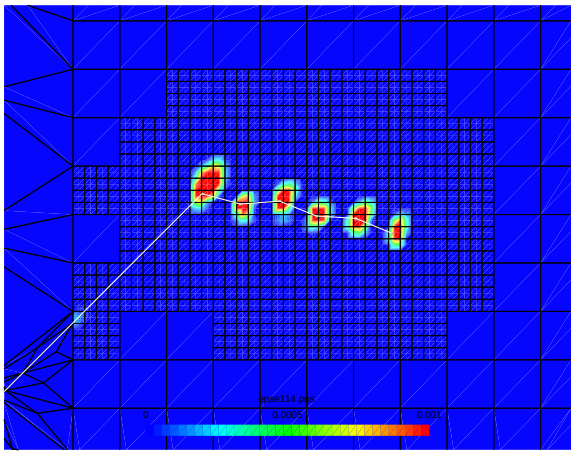
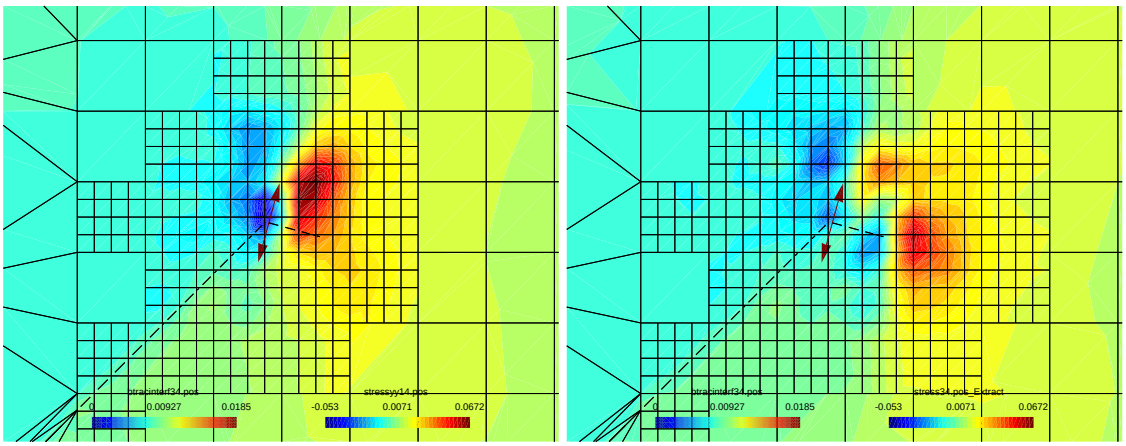


FIG. 4.31: Champ de déformation plastique cumulée à $F = F_{max}$ après cinq propagations et trajet de fissure final.



(a) (b)

FIG. 4.32: Efforts d'interface à $F = F_{min}$ après la $1^{ère}$ propagation superposé avec la composante σ_{yy} du tenseur des contraintes (a) avant la $1^{ère}$ propagation et (b) après la $1^{ère}$ propagation.

est légèrement sur/sous-estimé (selon qu'il s'agit d'un propagation paire ou impaire) par rapport au trajet réel. En ce qui concerne la déformation plastique cumulée, on observe comme sur les exemples précédents une succession de papillons plastiques.

On peut observer sur la figure 4.32 les efforts d'interface, représentés sous forme vectorielle, à $F = F_{min}$ après la $1^{ère}$ propagation superposés avec la composante σ_{yy} du tenseur des contraintes à $F = F_{min}$ avant et après la $1^{ère}$ propagation. On a également tracé sur la figure 4.33 les déformées d'interface amplifiées aux différents efforts minimums. On peut observer sur cette figure que la refermeture est détectée uniquement après la première propagation. En analysant la figure 4.32 (a) on peut constater que la zone où la refermeture est détectée, visible grâce à l'effort d'interface non nul, correspond (comme

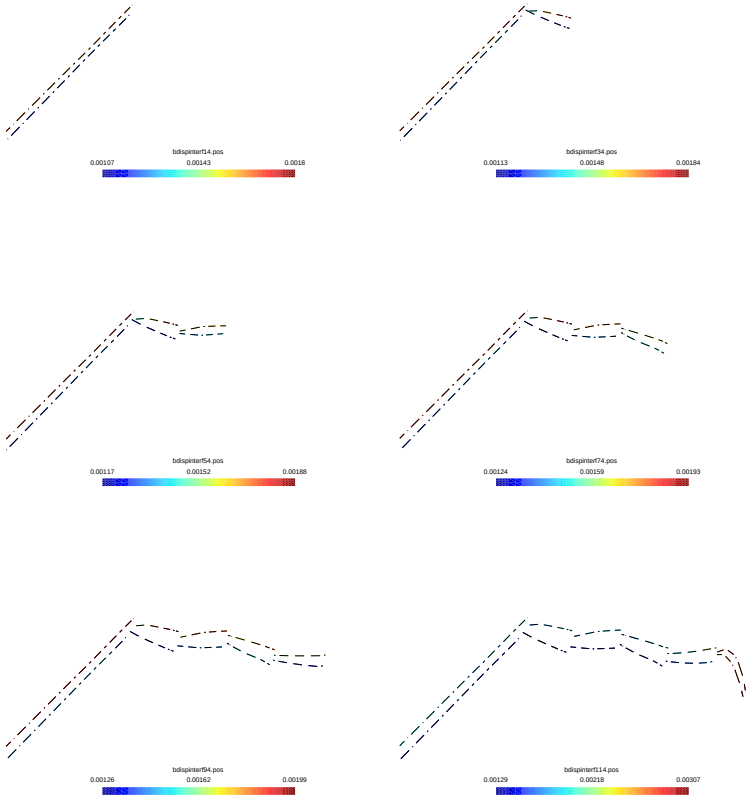


FIG. 4.33: Configurations déformées amplifiées de l'interface aux efforts minimums

observé sur la figure 4.11) à une zone de compression avant la propagation. En revanche, si on observe la figure 4.32 (b), on peut constater que les contraintes de compression autour de la pointe de fissure courante sont faibles, ce qui peut expliquer qu'on ne détecte pas de refermeture entre la deuxième et la troisième propagation comme on peut l'observer sur la figure 4.33.

Le même calcul a été effectué avec cinq propagations imposées d'une longueur de $\Delta a = 0.2mm$. Les résultats peuvent être observés sur les figures 4.34. On a tracé, comme précédemment, la déformation plastique cumulée finale, ainsi que les efforts d'interface, représentés sous forme vectorielle, à $F = F_{min}$ après la $i^{ème}$ propagation superposés avec la composante σ_{yy} du tenseur des contraintes à $F = F_{min}$ avant la $i^{ème}$ propagation pour les propagations 1 à 4. Les échelles en terme de contrainte et d'efforts d'interface sont identiques. On peut observer qu'il y a refermeture après les trois premières propagations et que la fissure reste ouverte après la quatrième propagation. On peut également constater que les efforts d'interfaces, les contraintes de compression et la taille de la zone plastique observés au cours du calcul diminuent à mesure que la fissure avance.

On peut ainsi observer, comme on a pu le voir en mode I, que la méthode proposée

permet de détecter la refermeture en mode mixte. La comparaison des résultats pour deux valeurs de Δa montre là encore l'influence du choix des paramètres sur l'identifier de la refermeture de fissure.

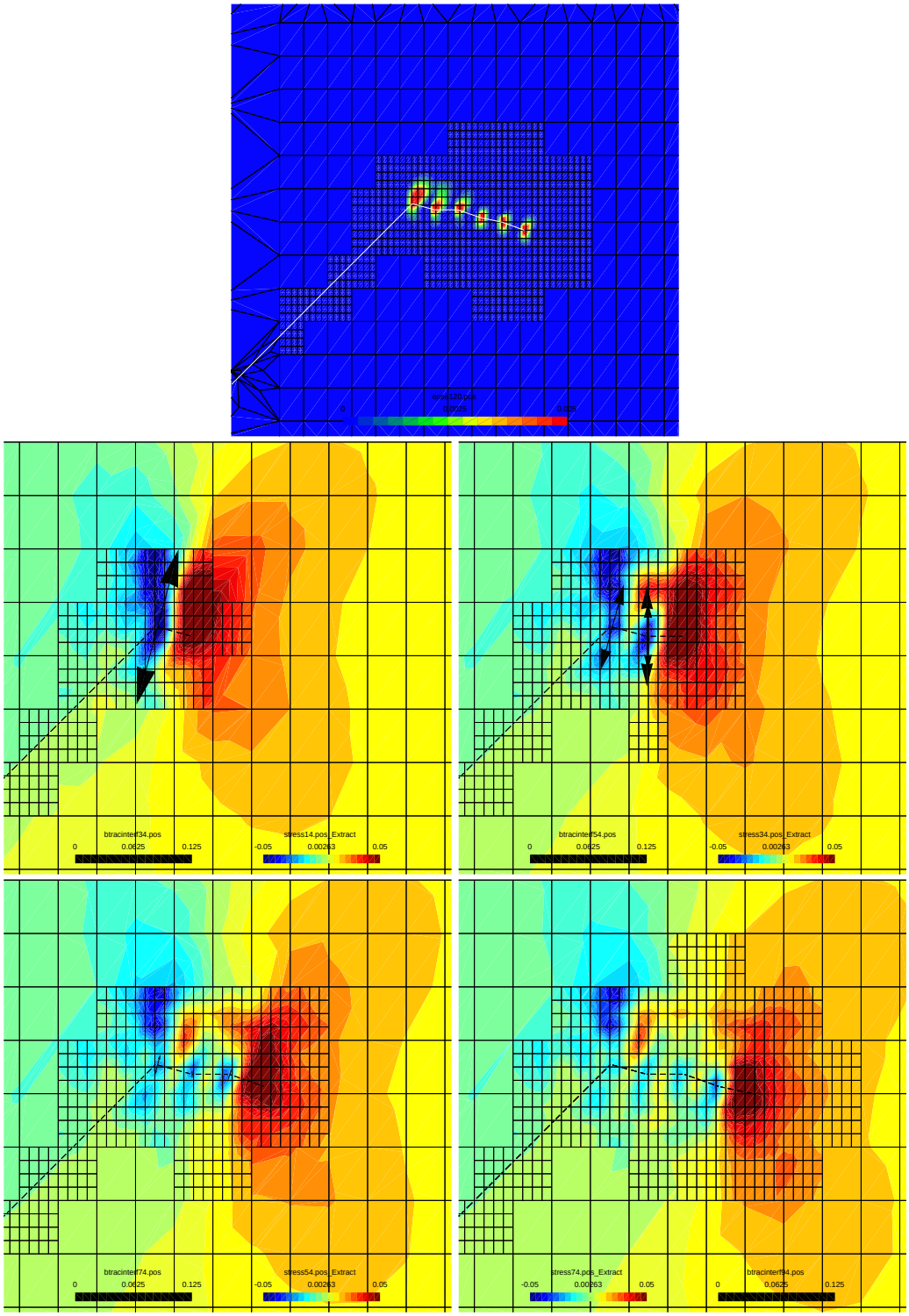


FIG. 4.34: Déformation plastique cumulée finale et efforts d'interface à $F = F_{min}$ après la $i^{ème}$ propagation superposé avec la composante σ_{yy} du tenseur des contraintes avant la $i^{ème}$ propagation (i allant de 1 à 4).

Conclusions et perspectives

Nous nous sommes intéressé dans cette étude à la simulation de propagation de fissure en fatigue en prenant en compte plusieurs non-linéarités. Un état de l'art de ce type de simulation par différentes méthodes numériques nous a permis d'évaluer les avantages et inconvénients propres à chacune. La méthode des éléments finis étendus a été choisie pour sa capacité à traiter le cas de propagation de fissure en mode mixte sans remaillage.

La prise en compte de la plasticité en pointe de fissure impose d'abandonner les hypothèses LEFM pour se placer dans un cadre EPFM. En conséquence, les solutions asymptotiques élastique linéaire de Westergaard ne permettent plus de représenter la singularité au sein de la zone plastique. Les solutions théoriques HRR permettent alors de quantifier la singularité dans la zone plastique et de définir les champs asymptotiques associés. Une analyse de Fourier de ces solutions permet ensuite de définir une base de développement capable de représenter la singularité plastique et l'évolution spatiale des champs pour plusieurs types de matériaux ductiles.

L'étape suivante consiste à adapter cette base de développement pour créer une nouvelle base d'enrichissement utilisable dans la méthode des éléments finis étendus. La question de l'intégration numérique, que ce soit pour calculer la matrice de raideur du système ou pour intégrer la loi de comportement élasto-plastique, se pose alors. On choisit de mettre en place une stratégie à deux échelles basée sur un sous-découpage régulier. Ceci permet de définir un nombre de points de Gauss permettant d'intégrer correctement la base d'enrichissement et de disposer d'une solution fine en terme de champ de contraintes autour de la pointe de fissure. Cette grille régulière permet également d'envisager la propagation sans changer de points d'intégration, ce qui aurait réduit significativement l'intérêt de la méthode par rapport aux éléments finis classiques. Une fois cette base d'enrichissement validée [ELG 06b], il s'agit ensuite de mettre en place une formulation faible permettant de prendre en compte à la fois la plasticité et le contact et le frottement entre les lèvres de la fissure. Une formulation à trois champs de type Lagrangien augmenté adaptée au formalisme X-FEM est développée dans un cadre quasi-statique. Couplée à un algorithme itératif de type Newton-Raphson, elle permet de résoudre le problème global non-linéaire *plasticité+contact*, l'utilisation conjointe des multiplicateurs de Lagrange et de la pénalité permettant de résoudre le problème de contact de manière exacte [ELG 06a, ELG 06c].

La méthode étant validée pour des problèmes à fissure fixe, l'étape suivante est l'adap-

tation de celle-ci à la propagation ainsi que la mise en place de techniques d'obtention des paramètres de fissuration. La loi de propagation utilisée étant celle de Paris formulée en $\Delta K_{effectif}$ il est nécessaire de calculer les facteurs d'intensité des contraintes ou l'intégrale J en mode I. Les problèmes d'évaluation de ces quantités en présence de plasticité se pose alors et notamment la question de la validité des intégrales indépendantes du contour. Le confinement de la plasticité autour de la pointe de fissure permet de rester dans des conditions satisfaisantes pour utiliser les approches classiques : la zone de K-dominance reste présente et permet de continuer à utiliser la notion de facteurs d'intensité des contraintes d'un part, et de définir des contours d'intégration englobant totalement la non-linéarité d'autre part. On peut ainsi découpler les facteurs d'intensité des contraintes grâce à la technique, désormais classique, de l'intégrale d'interaction.

En ce qui concerne la phase de propagation à proprement parler, la première étape consiste à choisir la stratégie d'enrichissement. On fait le choix de conserver les anciens enrichissements singuliers qui sont l'image des zones plastiques successives. On ajoute alors de nouvelles fonctions d'enrichissement qui permettent de représenter l'extension de fissure. Il faut ensuite choisir une stratégie d'initialisation des différents nouveaux degrés de liberté d'enrichissement et de contact. Le choix d'écrire l'équilibre de l'état précédent sur la nouvelle configuration permet de conserver l'énergie. Pour ce qui concerne les variables non linéaires, on propose d'étendre la zone où l'échelle fine est définie en utilisant une estimation du rayon de la zone plastique. Ceci permet également d'initialiser facilement les variables du modèle plastique lors de la propagation. On dispose alors d'une stratégie de propagation traitant correctement l'ensemble des variables non-linéaires [ELG 06c].

Les divers exemples présentés ont montré les capacités du modèle à représenter les phénomènes physiques en jeu dans la propagation en fatigue. Les premières comparaisons avec les résultats d'essai sont encourageants mais montrent qu'un certain nombre de paramètres interviennent pour retrouver les résultats de modèles tels que PREFFAS. Les difficultés sont liées à la taille de la zone plastique qui reste faible d'une part et au fait que le modèle ne crée pas de sillage plastique en arrière de la pointe de fissure mais une succession de "papillons" d'autre part. Une alternative simple consisterait en une diminution de l'incrément de propagation significative afin de former un véritable sillage ; cependant, au delà du coût numérique que cela représente, on se trouve alors confronté à une dégradation du conditionnement des matrices de raideur enrichies du fait de la superposition des enrichissement. Ce problème des modes parasites est bien identifié en élasticité et peut être résolu par des techniques d'intégration spécifiques [LAB 05, BÉC 05] dans ce cas. L'influence de ces modes parasites est d'autant plus importante avec la base d'enrichissement plastique proposée, du fait du nombre de fonction et des harmoniques d'ordre supérieur, et est d'autant plus pénalisante que les stratégies proposées en élasticité sont difficiles à mettre en place dans le cas non-linéaire. On pourrait également envisager de supprimer de l'information "loin" de la pointe de fissure : on a pu observer que l'état de contrainte est très vite stabilisé une fois que la fissure a traversé un élément enrichi ; la suppression de sous-éléments et d'enrichissements singuliers en arrière de la pointe de

fissure permettrait un gain en terme de coût numérique sans avoir d'influence significative sur la solution. En ce qui concerne la plasticité telle qu'elle a été abordée dans cette étude, on ne s'est pas intéressé au problème de l'incompressibilité plastique dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus comme cela a été traité récemment dans le cas des grandes transformations [LEG 06b]. Une autre alternative intéressante serait d'utiliser un modèle de comportement plastique plus adapté à la fatigue, tel qu'un modèle à écrouissage cinématique [LEM 96].

On peut voir aujourd'hui un certain nombre de travaux concernant la partition de l'unité où seul l'enrichissement discontinu est utilisé. Il est alors employé conjointement avec des modèles d'interface cohésifs ou des modèles d'endommagement volumiques [WEL 02b, WEL 02a, ZI 03, REM 03, BOR 04, ARE 05]. Il est alors nécessaire de raffiner le maillage afin de capturer correctement la nature singulière du champ de déplacement. Les avantages principaux de ces méthodes sont d'une part de pouvoir initier une macrofissure à partir d'un matériau sain et d'autre part d'utiliser la loi cohésive pour formuler un critère de propagation. L'application de ces modèles en fatigue est intéressante puisqu'elle permet a priori d'utiliser la loi cohésive afin de déterminer l'avancée de fissure, et ce sans passer par un calcul de facteurs d'intensités des contraintes et donc d'intégration d'une loi de Paris. On est alors obligé dans ce cas de calculer chaque cycle du chargement réel [NGU 01, BOU 05] afin que le modèle cohésif face avancer la fissure, ce qui rend le coût numérique de ces méthode très vite prohibitif. L'approche proposée par Pommier *et al.*, qui propose une formulation du problème en terme de dérivées par rapport au temps et non par rapport au nombre de cycles [POM 05b, POM 05a], est également intéressante puisqu'elle permet de prendre en compte directement le chargement réel sans avoir besoin de reconstruction d'un chargement cyclique équivalent. Cette approche permet également d'intégrer l'effet des développements d'ordre supérieur des champs asymptotiques, notamment de *T-stress* [HAM 05], sur la propagation en fatigue en utilisant un formalisme similaire à la plasticité ; ces techniques, bien que permettant de représenter un grand nombre de phénomènes observés dans la littérature, restent cependant limitées au mode I. Le couplage de ces techniques avec l'approche X-FEM proposée dans cette thèse permettrait certainement de traiter le cas de propagation en mode mixte.

Du point de vue expérimental, on a vu la difficulté d'appliquer la méthode de corrélation d'image lorsque la position de la fissure est inconnue. Il est cependant possible en utilisant le trajet de fissuration final de limiter le problème. Les avancées récentes dans ces techniques [YON 06] permettent désormais sur des cas statiques de déterminer à la fois la position de la fissure et les facteurs d'intensité des contraintes. L'application de celles-ci aux essais proposés dans cette thèse devrait permettre d'obtenir des résultats plus satisfaisants.

Enfin, l'extension récente de la prise en compte du contact à l'aide des fonctions de niveaux aux problèmes tridimensionnel [MAS 05, GEN 06], ainsi qu'au cas de chargements non-proportionnels et aux états de contact complexes le long de la fissure [RIB 05] suggère des avancées possibles pour la méthode proposée. Cette étude a montré l'intérêt de la méthode X-FEM pour la simulation de propagation de fissure en fatigue sans remaillage ni projection de champs. Cependant, on a pu observer qu'il est malgré tout

nécessaire d'avoir un modèle spatial suffisamment fin pour représenter correctement les phénomènes physiques en jeu à la bonne échelle. Une extension possible, permettant notamment de contourner la difficulté du passage de la grille d'intégration fine aux problèmes 3D, consisterait à coupler la méthode des éléments finis étendus avec des méthodes multi-échelles [GUI 05, RAN 06]. Par ailleurs, l'intérêt actuel pour les méthodes fiabilistes dans la prévision de la ruine des structures, récemment couplée à la méthode des éléments finis étendus élastique linéaire [NES 06], montre également des perspectives intéressantes.

Annexe A

Complément sur les essais expérimentaux

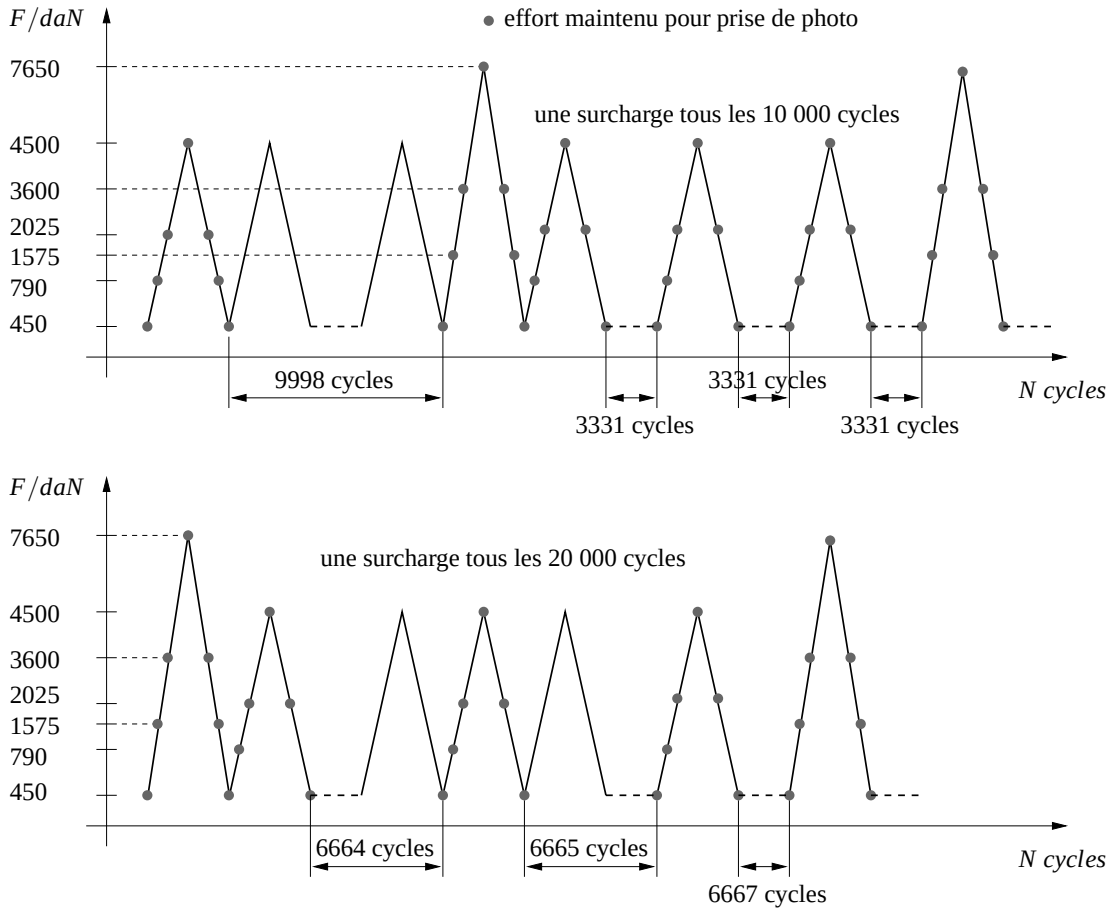


FIG. A.1 : Paramétrage du chargement pour l'essai CCT B5W100 à $R = 0.1$ avec surcharge

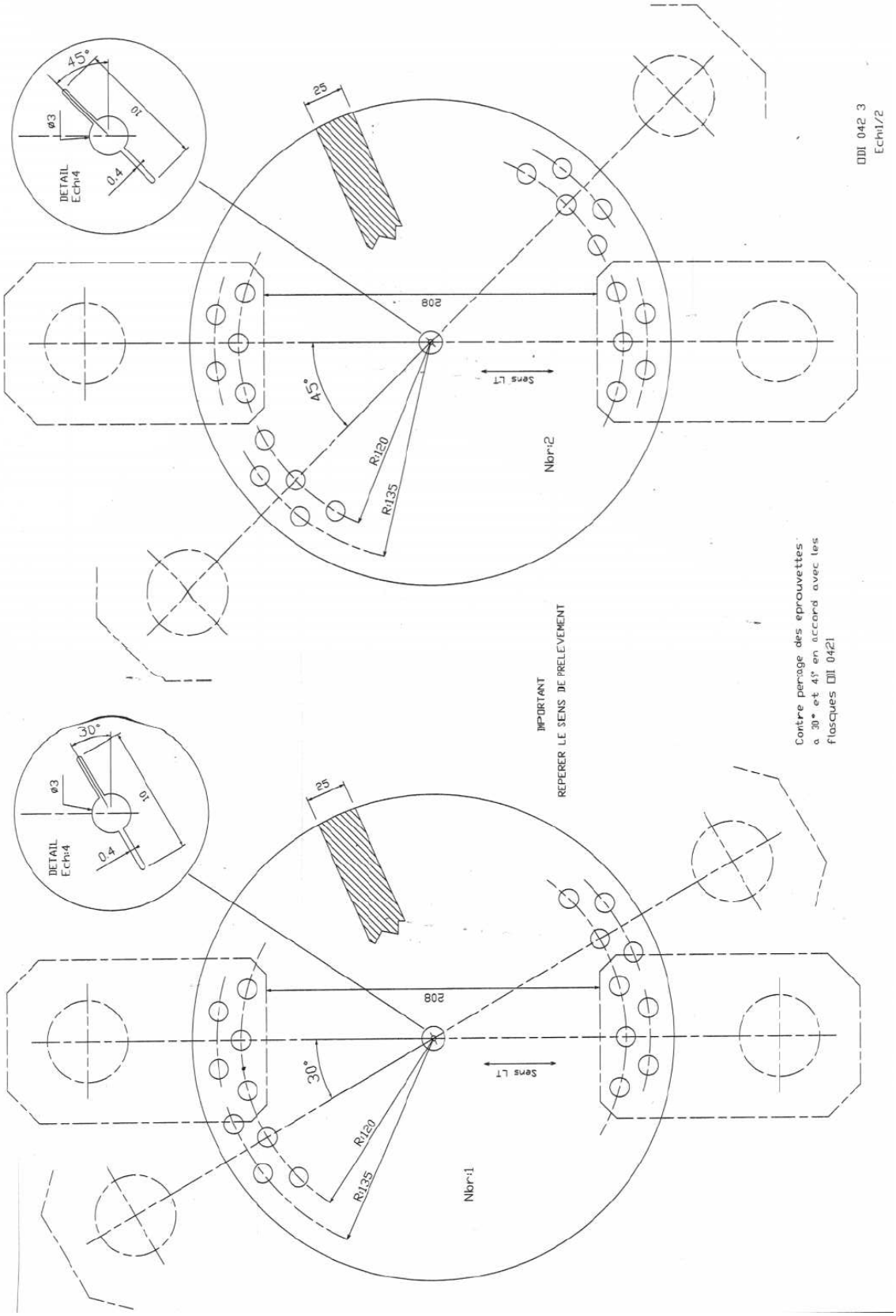


FIG. A.2 : Dimensions en mm des éprouvettes cylindriques 30 ˚et 45˚

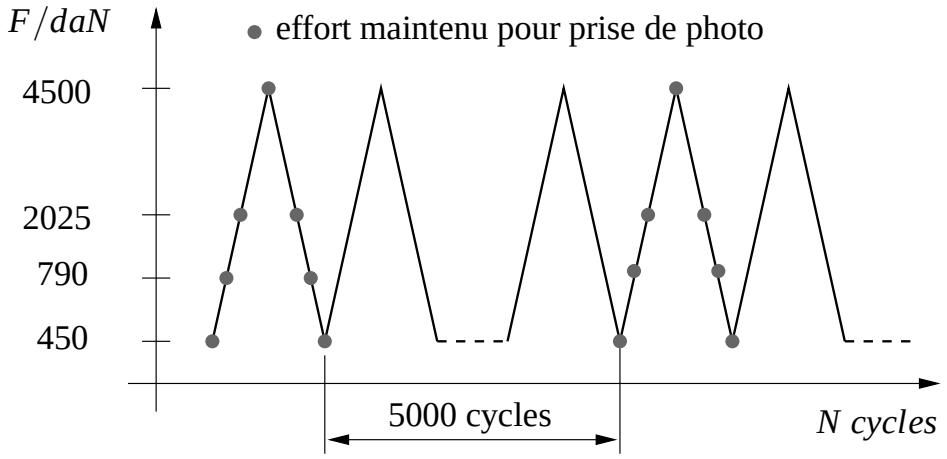


FIG. A.3 : Paramétrage du chargement pour l'essai CCT B5W100 à $R = 0.1$

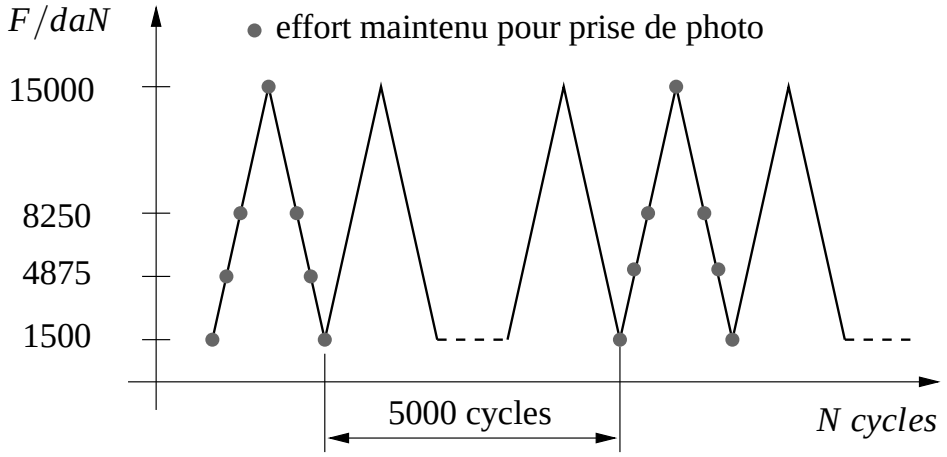


FIG. A.4 : Paramétrage du chargement pour l'essai mode mixte cylindrique $R = 0.1$

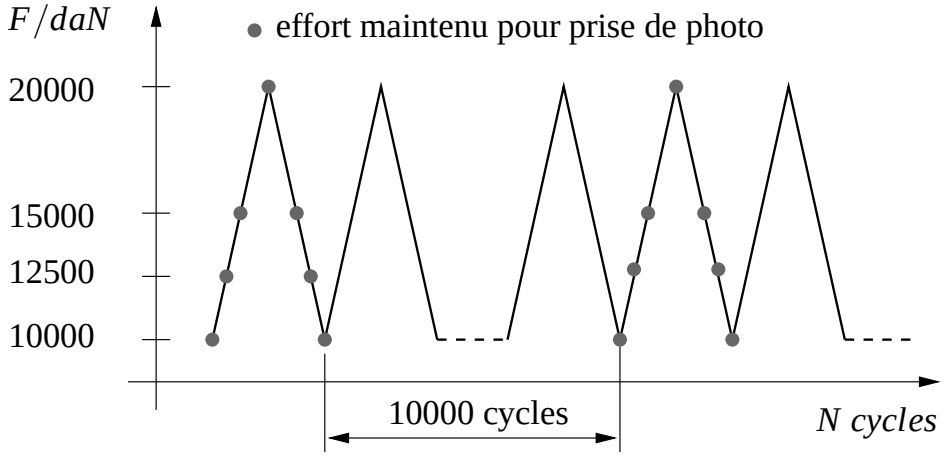


FIG. A.5 : Paramétrage du chargement pour l'essai mode mixte cylindrique $R = 0.5$

Annexe B

Détermination de l'équation différentielle pour le mode III

On a posé l'existence d'une fonction de contrainte $\psi(r,\theta)$ qui nous a permis d'écrire les contraintes anti-plane par les équations 2.37 et 2.38. Pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par ψ nous devons écrire d'une part la relation de comportement et d'autre part l'équation de compatibilité vérifiée par les composantes anti-planes du tenseur des déformations.

La relation de comportement $3D$ s'écrit en notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij} \tag{4.21}$$

avec la déformation élastique :

$$\varepsilon^e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{4.22}$$

et la déformation plastique

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}\frac{s_{ij}}{\sigma_0} \tag{4.23}$$

avec $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ la partie déviatorique du tenseur des contraintes et $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ la contrainte équivalente de Von Misès.

Ces équations donnent pour le mode III pur :

$$\varepsilon_{rz} = \left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_0 + \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}\right)\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_0} \tag{4.24}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \left(\frac{1+\nu}{E}\sigma_0 + \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)^{n-1}\right)\frac{\sigma_{\theta z}}{\sigma_0} \tag{4.25}$$

avec $\sigma_e = \sqrt{3\sigma^2_{rz} + 3\sigma^2_{\theta z}}$.

L'équation de compatibilité dans le repère cylindrique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\theta z}) - \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial \theta} = 0 \tag{4.26}$$

En remplaçant les équations (4.24) et (4.25) dans l'équation (4.26) on obtient (après calculs) :

$$\frac{1+\nu}{E}(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \psi}{\partial r})+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2})+\frac{3}{2}\alpha(\frac{\partial}{\partial r}(r(\frac{\sigma_e}{\sigma_0})^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}((\frac{\sigma_e}{\sigma_0})^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}))=0 \quad (4.27)$$

Le premier membre de l'équation (4.27) est du aux déformations élastiques ; or notre hypothèse de départ (implicite) est que l'on se trouve dans la zone en pointe de fissure où il y a plastification du matériau. On peut donc négliger ce terme élastique devant le deuxième qui est du aux déformations plastiques. En remplaçant ψ par son expression en fonction de r et θ ($\psi = Lr^t\tilde{\psi}(\theta)$) et en simplifiant, on obtient l'équation suivante :

$$r^{(n-1)(t-2)+t-1}t((n-1)(t-2)+t)\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{\psi}+r^{(n-1)(t-2)+t-1}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta})=0 \quad (4.28)$$

Les termes en puissance de r étant identiques on peut les simplifier (on travaille à r petit mais non nul), ce qui nous permet d'obtenir l'équation (4.29) :

$$(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{\psi}^\bullet)^\bullet+t(t+(n-1)(t-2))\tilde{\sigma}_e^{n-1}\tilde{\psi}=0 \quad (4.29)$$

Pour l'obtention des conditions aux limites, on doit d'une part écrire que les lèvres de la fissure sont libres d'effort et d'autre part l'antisymétrie du mode III.

La condition en effort s'écrit :

$$\underline{\sigma}(r,\theta=\pi).\underline{n}(\theta=\pi)=\underline{0}$$

C'est à dire

$$\sigma_{\theta z}(r,\theta=\pi)=0$$

d'où

$$\tilde{\psi}(\theta=\pi)=0$$

La condition d'antisymétrie (géométrique) du mode III s'écrit sur les déplacements :

$$u_z(r,\theta=0)=0$$
$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}(\theta=0)=0$$

Ceci implique une condition sur les déformations à partir de l'expression du gradient de u. On a :

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r}$$
$$\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}$$

En remarquant que les déplacements (donc u_z) sont le produit d'une fonction de r et de θ, on obtient que :

$$\varepsilon_{rz}(r,\theta=0)=0$$
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\theta z}}{\partial\theta^2}(r,\theta=0)=0$$

Ceci nous donne en utilisant la relation de comportement (équations (4.24) et (4.25)) que :

$$\sigma_{rz}(r,\theta=0)=0$$
$$\frac{\partial^2\sigma_{\theta z}}{\partial\theta^2}(r,\theta=0)=0$$

En utilisant les expression des contraintes en fonction de $\tilde{\psi}$ on obtient finalement :

$$\tilde{\psi}^{\bullet}(\theta=0)=0$$

Annexe C

Algorithme d'écoulement plastique

Paramètre et système plastique

Les variables utilisées sont les suivantes :

σ	=	tenseur des contraintes
σ_d	=	déviateur du tenseur des contraintes
σ_{vm}	=	contrainte de Von Misès
σ_y	=	limite d'élasticité initiale
ε	=	tenseur des déformations
ε_e	=	tenseur des déformations élastiques
ε_p	=	tenseur des déformations plastiques
p	=	déformation plastique cumulée
λ	=	multiplicateur plastique
f	=	expression de la surface de charge en cas d'écoulement plastique
$R(\lambda)$	=	limite d'élasticité écrouie définie par la courbe de traction
C	=	tenseur de Hooke

Les équations du système plastique sont :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{4.30}$$
$$\sigma = C\varepsilon_e \tag{4.31}$$
$$f = \sigma_{vm} - \sigma_y = 0 \tag{4.32}$$
$$\sigma_y = R(\lambda) \tag{4.33}$$
$$\varepsilon_p = \frac{3}{2}\lambda\frac{\sigma_d}{\sigma_{vm}} \tag{4.34}$$
$$p = \lambda \tag{4.35}$$

Calcul de la partie élastique d'un incrément de contrainte

Lorsqu'il y a plastification, il est nécessaire de calculer le multiplicateur plastique en ne prenant en compte que la partie de la contrainte en dehors de la surface de charge.

On peut observer sur la figure C.1 dans l'espace des contraintes principales, la décomposition d'un incrément de contrainte (calculé élastiquement à partir d'un incrément de déformation) en sa partie élastique et sa partie "plastique".

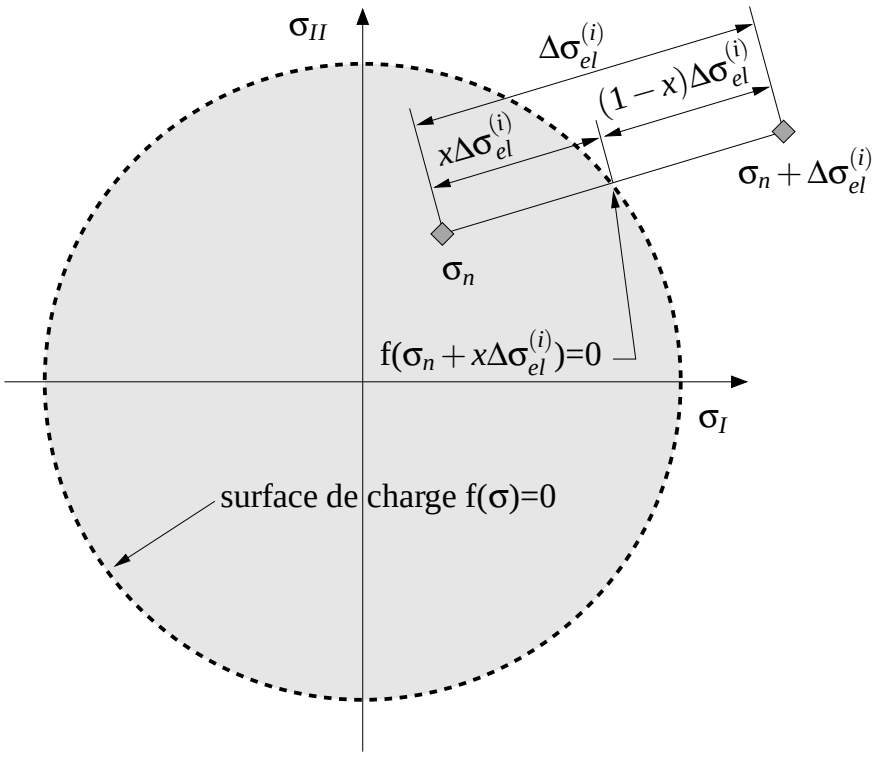


FIG. C.1 : Décomposition d'un incrément de contrainte pour le calcul du multiplicateur plastique

Pour déterminer la partie "plastique" il suffit de déterminer x puisqu'on connaît σ_n, $\Delta\sigma_{el}^{(i)}$ et la limite élastique courante atteinte au pas précédent notée R. Pour déterminer x il faut donc résoudre l'équation du second degré suivante :

$$VonMises\left(\sigma_n + x\Delta\sigma_{el}^{(i)}\right) = 0$$

Si on adopte la notation vectorielle des contraintes (tenseur symétrique) on peut aisément démontrer que la contrainte équivalente de Von Mises peut être obtenue par la formule suivante :

$$\left(VonMises\left(\sigma\right)\right)^2 = \left[\sigma^T\right]\mathbb{A}\left[\sigma\right]$$

$$\left[\sigma\right] = \begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

L'équation à résoudre s'écrit alors :

$$\left[\sigma_n + x\Delta\sigma_{el}^{(i)}\right]^T \mathbb{A} \left[\sigma_n + x\Delta\sigma_{el}^{(i)}\right] = R^2$$

Soit après développement :

$$\left[\Delta\sigma_{el}^{(i)}\right]^T \mathbb{A} \left[\Delta\sigma_{el}^{(i)}\right] x^2 + 2x[\sigma_n]^T \mathbb{A} \left[\Delta\sigma_{el}^{(i)}\right] + [\sigma_n]^T \mathbb{A} [\sigma_n] - R^2 = 0$$

Algorithme d'écoulement plastique

L'algorithme d'écoulement est décrit ci-après, la variable $a_n^{[k]\ (i)}$ représente la valeur de a au n-ième pas de temps, à la i-ième itération d'équilibre et à la k-ième itération plastique.

1. L'algorithme sur le résidu donne $\Delta\varepsilon_n^{(i)}$ donc $\varepsilon_n^{(i)}$

2. Estimations élastiques :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^{(i)} &= \varepsilon_{n-1} + \Delta\varepsilon_n^{(i)} \\
\varepsilon_{p\,n}^{(i)\ [0]} &= \varepsilon_{p\,n} \\
\lambda_n^{(i)\ [0]} &= \lambda_n \\
\varepsilon_{el\,n}^{(i)\ [0]} &= \varepsilon_n^{(i)} - \varepsilon_{p\,n}^{[0]\ (i)} \\
\Delta\sigma_{el}^{(i)} &= C\Delta\varepsilon^{(i)} \\
\sigma_n^{(i)\ [0]} &= \sigma_{n-1} + \Delta\sigma_{el}^{(i)}
\end{aligned}$$

3. Vérification du critère : $f_n^{(i)\ [0]} \leqslant 0$?
   Si oui :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{p\,n}^{(i)} &= \varepsilon_{p\,n}^{(i)\ [0]} \\
\lambda_n^{(i)} &= \lambda_n^{(i)\ [0]} \\
\varepsilon_{el\,n}^{(i)} &= \varepsilon_n^{(i)} - \varepsilon_{p\,n}^{(i)} \\
\sigma_n^{(i)} &= \sigma_{n+1}^{(i)\ [0]}
\end{aligned}$$

   et fin de l'itération plastique...

   Sinon : $k = 0$

4. Calcul du multiplicateur plastique :
   Si $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma} &= (1-x)\Delta\sigma^e \\
\Delta\lambda_n^{(i)\,[0]} &= \frac{f_n^{(i)\,[0]}}{\frac{9}{4}\frac{\widetilde{\sigma}_d:C:\widetilde{\sigma}_d}{\widetilde{\sigma}_{vm}^2} + R'(\lambda_n^{(i)\,[0]}} \\
\Delta\lambda^{sup} &= \Delta\lambda_n^{(i)\,[0]},\ \Delta\lambda^{inf} = 0,\ f^{inf} = f_n^{(i)\,[0]}
\end{aligned}$$

   Sinon :

$$\Delta\lambda_n^{(i)\,[k]} = \frac{\Delta\lambda^{sup} f^{inf} - \Delta\lambda^{inf} f^{sup}}{f^{inf} - f^{sup}}$$

5. Actualisation des variables

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{(i)\,[k+1]} &= \lambda_n^{(i)\,[0]} + \Delta\lambda_n^{(i)\,[k]} \\
\varepsilon_{p\,n}^{(i)\,[k+1]} &= \varepsilon_{p\,n}^{(i)\,[0]} + \frac{3}{2}\Delta\lambda_n^{(i)\,[k]}\frac{\left(\sigma_n^{(i)\,[0]}\right)_d}{\left(\sigma_n^{(i)\,[0]}\right)_{vm}} \\
\sigma_n^{(i)\,[k+1]} &= \sigma_n^{(i)\,[0]} - \frac{3}{2}\Delta\lambda_n^{(i)\,[k]}C\frac{\left(\sigma_n^{(i)\,[0]}\right)_d}{\left(\sigma_n^{(i)\,[0]}\right)_{vm}}
\end{aligned}$$

6. Test de convergence : $\frac{|f_n^{(i)\,[k+1]}|}{(\sigma_n^{(i)\,[k+1]})_y} \leqslant e$?
   Si oui :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{p\,n}^{(i)} &= \varepsilon_{p\,n}^{(i)\,[k+1]} \\
\lambda_n^{(i)} &= \lambda_n^{(i)\,[k+1]} \\
\varepsilon_{el\,n}^{(i)} &= \varepsilon_n^{(i)} - \varepsilon_{p\,n}^{(i)\,[k+1]} \\
\sigma_n^{(i)} &= \sigma_n^{(i)\,[k+1]}
\end{aligned}$$

   et fin de l'itération plastique...
   Sinon :
   – Pour $k = 0$:

$$f^{sup} = f_n^{(i)\,[1]}$$

   – Pour $k \geq 1$ et $\Delta\lambda_n^{(i)\,[k]} \geq \Delta\lambda^{sup}$

$$\Delta\lambda^{inf} = \Delta\lambda^{sup},\ \Delta\lambda^{sup} = \Delta\lambda_n^{(i)\,[k]},\ f^{inf} = f^{sup},\ f^{sup} = f_n^{(i)\,[k]}$$

   – Pour $k \geq 1$ et $\Delta\lambda^{sup} \geq \Delta\lambda_n^{(i)\,[k]} \geq \Delta\lambda^{inf}$

$$\Delta\lambda^{inf} = \Delta\lambda_n^{(i)\,[k]},\ f^{inf} = f_n^{(i)\,[k]}$$

   ... puis $k = k+1$ et retour au 4.

Annexe D

Résolution de l'équilibre au pas n sur la configuration $n+1$

Les équations discrètes d'équilibre au pas de temps n sur la géométrie n peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$(Fint)_n^n - [K_c]_n^n \, (\Lambda)_n^n = (Fext)_n^n \tag{4.36}$$

$$[K_I]_n^n \, (\Lambda)_n^n = [K_I]_n^n \, (t)_n^n \tag{4.37}$$

$$[K_I^T]_n^n \, (w)_n^n = [K_c^T]_n^n \, (u)_n^n \tag{4.38}$$

Les équations discrètes d'équilibre au pas de temps n sur la géométrie $(n+1)$ s'écrivent ainsi :

$$(Fint)_n^{n+1} - [K_c]_n^{n+1} \, (\Lambda)_n^{n+1} = (Fext)_n^{n+1} \tag{4.39}$$

$$[K_I]_n^{n+1} \, (\Lambda)_n^{n+1} = [K_I]_n^{n+1} \, (t)_n^{n+1} \tag{4.40}$$

$$[K_I^T]_n^{n+1} \, (w)_n^{n+1} = [K_c^T]_n^{n+1} \, (u)_n^{n+1} \tag{4.41}$$

L'équation (4.39) peut être développée comme suit :

$$\begin{pmatrix} (Fext)_n^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (Fint)_n^n \\ (\widehat{Fint})_n^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [K_c]_n^n & [\widetilde{K_c}]_n^{n+1} \\ [\widehat{K_c}]_n^{n+1} & [\overline{K_c}]_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\Lambda)_n^n \\ (\overline{\Lambda})_n^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

Avec

$(\widehat{Fint})_n^{n+1}$ les forces internes résultant de l'intégration du tenseur des contraintes σ_n sur les nouveaux DDL enrichis $(\overline{u})_n^{n+1}$.

$[\widetilde{K_c}]_n^{n+1}$ la matrice de couplage entre les nouvelles quantités d'interface $(\overline{\Lambda})_n^{n+1}$ et les anciens DDL éléments finis classiques $(\tilde{u})_n^n$ (qui ne contiennent pas les anciens DDL enrichis).

$[\widehat{K_c}]_n^{n+1}$ la matrice de couplage entre les anciennes quantités d'interface $(\overline{\Lambda})_n^{n+1}$ et les nouveaux DDL enrichis $(\overline{u})_n^{n+1}$.

$[\overline{K_c}]_{n+1}^{n+1}$ la matrice de couplage entre les nouvelles quantités d'interface $(\overline{\Lambda})_n^{n+1}$ et les nouveaux DDL enrichis $(\overline{u})_n^{n+1}$.

L'équation (4.40) peut se décomposer en :

$$\begin{bmatrix} [K_I]_n^n & 0 \\ 0 & [\bar{K_I}]_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\Lambda)_n^n - (t)_n^n \\ (\bar{\Lambda})_n^{n+1} - (\bar{t})_n^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Où $[\bar{K_I}]_{n+1}^{n+1}$ représente la matrice de couplage d'interface entre les nouvelles quantités d'interface $(\bar{\Lambda})_n^{n+1}$ ou $(\bar{t})_n^{n+1}$ et les nouvelles quantités d'interface $(\bar{w})_n^{n+1}$. En tenant compte du fait que les anciennes quantités d'interface vérifient déjàă l'équilibre au pas de temps *n*, l'équation (4.43) peut être ramenée à

$$[\bar{K_I}]_{n+1}^{n+1} \, (\bar{\Lambda})_n^{n+1} \; - \; [\bar{K_I}]_{n+1}^{n+1} (\bar{t})_n^{n+1} = 0 \tag{4.44}$$

Ce qui peut être interprété comme l'égalité des nouveaux multiplicateurs de Lagrange aux nouveaux efforts d'interface $(\bar{\Lambda})_n^{n+1} = (\bar{t})_n^{n+1}$.

L'équation (4.41) peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_I^T]_n^n & 0 \\ 0 & [\bar{K_I}^T]_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (w)_n^n \\ (\bar{w})_n^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [K_c^T]_n^n & [\widehat{K_c}^T]_n^{n+1} \\ [\widetilde{K_c}^T]_n^{n+1} & [\bar{K_c}^T]_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (u)_n^n \\ (\bar{u})_n^{n+1} \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

Étant donné que les quantités exprimées sur la configuration *n* satisfont déjàă l'équilibre au pas *n*, l'équation (4.45) se résume aisément àă :

$$[\bar{K_I}^T]_{n+1}^{n+1} \, (\bar{w})_n^{n+1} = [\widetilde{K_c}^T]_n^{n+1} \, (u)_n^n \tag{4.46}$$

Ce qui correspond àă l'équation de compatibilité entre *u* et *w* au pas de temps *n* sur la géométrie $n+1$ $(u)_n^n \, |_{\Gamma n+1} = (\bar{w})_n^{n+1}$

La simplification de l'équation (4.42) nous ramène àă :

$$[\widetilde{K_c}]_n^{n+1} \, (\bar{\Lambda})_n^{n+1} = 0 \tag{4.47}$$

$$-(\widehat{Fint})_n^{n+1} + [\widehat{K_c}]_n^{n+1} \, (\Lambda)_n^n + [\bar{K_c}]_{n+1}^{n+1} \, (\bar{\Lambda})_n^{n+1} = 0 \tag{4.48}$$

Ce qui, en gardant àă l'esprit le fait que $(\bar{\Lambda})_n^{n+1}$ et $(\bar{t})_n^{n+1}$ sont égaux, signifie :
- pas de contribution des nouveaux efforts d'interface $(\bar{\Lambda})_n^{n+1}$ aux forces nodales ramenées sur les DDL éléments finis classiques $(\tilde{u})_n^n$.
- équilibre de toutes les forces nodales ramenées sur les nouveaux DDL enrichis $(\bar{u})_n^{n+1}$.

Les équations d'équilibre locales au **n-ième pas de temps sur la (n+1)-ième géométrie sont** :

$$div(\sigma_n) = 0 \; in \; \Omega \tag{4.49}$$

$$\sigma_n.n = F_{dn} \; on \; \partial_2\Omega \tag{4.50}$$

$$\sigma_n.n = \Lambda \; on \; \Gamma = \Gamma_n \cup \Gamma_{n+1} \tag{4.51}$$

Soit $v^\star$ un champs de déplacements cinématiquement admissible àă zéro au n-ième pas de temps sur la (n+1)-ième géométrie. $v^\star$ se trouve dans l'espace définit comme suit :

$$\mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 = \left\{ v \in \mathcal{V} \; : \; v\,|_{\partial_1\Omega} = 0, \; v\,|_{\Gamma_n \cup \Gamma_{n+1}} = w \right\} \tag{4.52}$$

Où $\mathcal{V}$ est l'espace définissant la régularité des champs cinématiquement admissibles.

$$\int_\Omega div(\sigma_n).v^\star d\Omega = 0 \quad \forall v^\star \in \mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 \tag{4.53}$$

$$\int_\Omega div(\sigma_n.v^\star) - \sigma_n : \varepsilon(v^\star) d\Omega = 0 \quad \forall v^\star \in \mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 \tag{4.54}$$

$$\int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(v^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.v^\star dS + \int_{\Gamma=\Gamma_n\cup\Gamma_{n+1}} \sigma_n.n.v^\star dS \quad \forall v^\star \in \mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(v^\star) d\Omega &= \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.v^\star dS \\ &+ \int_{\Gamma_n} \sigma_n.n.v^\star dS + \int_{\Gamma_{n+1}} \sigma_n.n.v^\star dS \quad \forall v^\star \in \mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(v^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.v^\star dS + \int_{\Gamma_n} \Lambda.v^\star dS + \int_{\Gamma_{n+1}} \Lambda.v^\star dS \quad \forall v^\star \in \mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 \tag{4.57}$$

àL'tant donné que les équations considérées représentent l'équilibre au n-ième pas de temps sur la (n+1)-ième géométrie, on choisit de décomposer $v^\star$ de la façon suivante :

$$v^\star = u_n^\star + u_{n+1}^\star \tag{4.58}$$

où $u_n^\star$ est un champs cinématiquement admissible àă zéro au n-ième pas de temps sur la n-ième géométrie. $u_n^\star$ se trouve dans l'espace suivant :

$$\mathcal{V}_{n\,0}^{n} = \left\{ v \in \mathcal{V} \; : \; v\,|_{\partial_1\Omega} = 0, \; v\,|_{\Gamma n} = w \right\} \tag{4.59}$$

$u_{n+1}^\star$ se trouve dans l'espace $\mathcal{V}_{n+1\,0}$ qui est définit tel que

$$\mathcal{V}_n^{n+1}{}_0 = \mathcal{V}_{n\,0}^{n} \oplus \mathcal{V}_{n+1\,0} \tag{4.60}$$

L'équation (4.57) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(u_n^\star) d\Omega + \int_\Omega \sigma_n : \varepsilon(u_{n+1}^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u_n^\star dS + \int_{\Gamma_n} \Lambda_n.(u_n^\star + u_{n+1}^\star)\,|_{\Gamma_n}\, dS \\ &+ \int_{\Gamma_{n+1}} \Lambda_{n+1}.(u_n^\star + u_{n+1}^\star)\,|_{\Gamma_{n+1}}\, dS \quad \forall u_{n+1}^\star \in \mathcal{V}_{n+1\,0}, \; \forall u_n^\star \in \mathcal{V}_{n\,0}^{n} \end{aligned} \tag{4.61}$$

L'équilibre au n-ième pas de temps sur la n-ième géométrie étant vérifié, l'équation suivante est vérifiée :

$$\int_{\Omega} \sigma_n : \varepsilon(u_n^\star) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_{dn}.u_n^\star dS + \int_{\Gamma_n} \Lambda_n.u_n^\star \mid_{\Gamma_n} dS \quad \forall u_n^\star \in \mathcal{V}_{n\,0}^n \tag{4.62}$$

L'équation (4.61) peut être simplifiée et s'écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma_n : \varepsilon(u_{n+1}^\star) d\Omega = &\int_{\Gamma_n} \Lambda_n.u_{n+1}^\star \mid_{\Gamma_n} dS + \int_{\Gamma_{n+1}} \Lambda_{n+1}.u_n^\star \mid_{\Gamma_{n+1}} dS \\ &+ \int_{\Gamma_{n+1}} \Lambda_{n+1}.u_{n+1}^\star \mid_{\Gamma_{n+1}} dS \quad \forall u_{n+1}^\star \in \mathcal{V}_{n+10},\ \forall u_n^\star \in \mathcal{V}_{n\,0}^n\end{aligned} \tag{4.63}$$

Se qui nous ramène àă deux équations :

$$\int_{\Gamma_{n+1}} \Lambda_{n+1}.u_n^\star \mid_{\Gamma_{n+1}} dS = 0 \ \ \forall u_n^\star \in \mathcal{V}_{n\,0}^n \ wavecu_{n+1}^\star = 0 \tag{4.64}$$

Et

$$\int_{\Omega} \sigma_n : \varepsilon(u_{n+1}^\star) d\Omega = \int_{\Gamma_n} \Lambda_n.u_{n+1}^\star \mid_{\Gamma_n} dS + \tag{4.65}$$

$$\int_{\Gamma_{n+1}} \Lambda_{n+1}.u_{n+1}^\star \mid_{\Gamma_{n+1}} dS \ \ \forall u_{n+1}^\star \in \mathcal{V}_{n+10} \ \ wavecu_n^\star = 0 \tag{4.66}$$

A cet instant, on peut remarquer que ces deux équations sont la forme continue des deux équations discrètes suivantes :

$$[\widetilde{K_c}]_n^{n+1} \ (\bar{\Lambda})_n^{n+1} = 0 \tag{4.67}$$

$$-(\widehat{Fint})_n^{n+1} + [\widehat{K_c}]_n^{n+1} \ (\Lambda)_n^n + [\bar{K_c}]_{n+1}^{n+1} \ (\bar{\Lambda})_n^{n+1} = 0 \tag{4.68}$$

Ainsi, on peut conclure qu'imposer la continuité locale du vecteur contrainte ainsi que sa compatibilité avec les nouveaux efforts d'interface implique la validité des équations discrètes d'équilibre au n-ième pas de temps sur la (n+1)-ième géométrie

Annexe E

Classe MechanicsPCCrackGrowth.C

```
#include <assert.h>
#include <map>
#include <vector>
#include "MechanicsPCCrackGrowth.H"
#include "AssemblerBase.H"
#include "BilinearFormsDerived.H"
#include "DofTokens.H"
#include "CoefficientsOnElt.H"
#include "Coefficient.H"
#include "CSR_Matrix.H"
#include "CSR_Vector.H"
#include "Export.H"
#include "ExportOwner.H"
#include "FormsIntegrationDerived.H"
#include "GaussIntegration.H"
#include "Geometry.H"
#include "gxgeo.H"
#include "LinearFormsDerived.H"
#include "LinearSystem.H"
#include "LinearSystemSolverIML.H"
#include "LinearSystemSolverJF.H"
#include "Loading.H"
#include "PhysicalEnv.H"
#include "State.H"
#include "stlext.h"
#include "TensorialCalculus.H"
#include "Zone.H"
#include "Interface.H"
#include "FracturePostpro.H"
#include "SystemStructure.H"
#include "GeometryMemento.H"
#include "DofManager.H"
#include "AssembledData.H"

// cette formulation permet d'effectuer un calcul quasi-statique de fatigue
// avec propagation et prise en compte de la plasticité et du contact frottement

void MechanicsPCCrackGrowth_c :: TreatmentOfFormulation (Data_c *data) {

  assert(data->Dimension == 2);
  // Déclaration diverses
  int    Iter,Step, nb_no_conv, nb_conv,old_numdof;
  int prev_step = 0;
  int prev_iter = 0;
  double Error_p = 1.;
  double error_in_interface = 1.;
  double norm_r = 1.;
  double norm_f = 1.;
```

```
double coeff = -1.;
bool conv = false;
double dt, dto, itourc, maxtourc, itracce, itrslow, maxiter;
double endtime;
int accel ;
bool no_ext_force = true;
double max_norm_fext, max_norm_local;
double max_norm_local2, error_in_interface2;
int iter_moins_10;
double eii_m_10;
bool saturation = false;
double PError;
bool cracksaregrowing = false;
bool cracksweregrowing = false;
Region_c voidreg;
SystemStructure_c STR_step;
std::string exp;
char idchar[5];
strcpy(idchar, "_0");

// Création des zones à enrichir
fprintf(stderr, "Before SetMeshGeometryInteraction\n");
data->SetMeshGeometryInteraction();
fprintf(stderr, "Passed SetMeshGeometryInteraction\n");
fprintf(stderr, "Before PlotGeometricalEntities\n");
data->PlotGeometricalEntities(file_name_extension);
fprintf(stderr, "Passed PlotGeometricalEntities\n");
// Sauvegarde de la géométrie
fprintf(stderr, "Before Storing Front Coord and Map\n");
data->GEO->StoringGeometryHistory(0);
fprintf(stderr, "Passed Storing Front Coord and Map\n");

// Déclaration des déplacements EF standard
FunctionSpace_c dispx(DISPLACEMENT_X, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpace_c dispy(DISPLACEMENT_Y, INTERP_LAGRANGE, DEGREE_ONE, data->allElements);
FunctionSpaceData_c dispcla_l(dispx, dispy);
FunctionSpaceData_c disp_l;
FunctionSpaceData_c disp_f;

// Création des déplacements enrichis
FunctionSpaceData_c dispenrich_l;
TreatmentOfEnrichment(dispcla_l, dispenrich_l, data);
disp_l.insert(dispcla_l);
disp_l.insert(dispenrich_l);

// Creation des déplacements,efforts et multiplicateurs de Lagrange d'interface
FunctionSpaceData_c tracinterface_l, dispinterface_l;
FunctionSpaceData_c newtracinterface_l, newdispinterface_l;
FunctionSpaceData_c lagrinterface_l, newlagrinterface_l;
TreatmentOfInterface(dispinterface_l, tracinterface_l, lagrinterface_l, data, data->Dimension);

// Création de l'espace des sous éléments
Region_c allSubElements;
Region_c NewSubElements;
data->GMF->getRegionPhysPartition(data->allElements, allSubElements);

// Création des contraintes
FunctionSpace_c stressxx(STRESS_XX,     INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressyy(STRESS_YY,     INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressxy(STRESS_XY_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stresszz(STRESS_ZZ    , INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressxz(STRESS_XZ_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpace_c stressyz(STRESS_YZ_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS, DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, allSubElements);
FunctionSpaceData_c stress_l(stressxx, stressxy, stressyy);
FunctionSpaceData_c newstress_l;
```

```
stress_l.insert(stresszz);
stress_l.insert(stressxz);
stress_l.insert(stressyz);
DiffusiveVectorBilinearForm_c diffusive(disp_l, disp_l);
stress_l.SetInfo(GetIntegrationInformations(diffusive, data, data->allElements));

// Création des variables internes
FunctionSpaceData_c inte_l;FunctionSpaceData_c newinte_l;
CreateInternalVariablesSpace(inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements);
inte_l.SetInfo(GetIntegrationInformations(diffusive, data, data->allElements));

// Déclaration des vecteurs et matrices du système
CSR_Vector_c RHS_EXT_NEW, RHS_EXT_OLD, RHS_INT, RESIDUAL;
CSR_Vector_c RHS_CONTACT;
CSR_Vector_c RHS_T,RHS_U,RHS_W;
CSR_Matrix_c K;
CSR_Vector_c SOLUTION;
CSR_Vector_c RHS_L;
AssembledDataFullStorage_c Kdata;
CSR_Vector_c RHS_LL, RHS_LT;

// Déclaration du Système linéaire, du solveur et de l'assembleur
LinearSystemSolverJF_c solver("lpar_solver_jf/MECHANICSCONTACT.PAR");
LinearSystem_c system(&K, &RESIDUAL, &solver);
Assembler_c assembler(K, RESIDUAL, DofData);
SetCurrentAssembler(&assembler);

// Initialisation du temps
DofData.SetStorageType(TIME_STORAGE);
Step = DofData.SetTime(0, 0.0);

// Traitement des enrichissements
ResolveDependencies(dispenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);

// Mises à zéro
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, stress_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, 0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION,   inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, 0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);

// Conditions aux limites en déplacement
DofData.SetStorageType(INCREMENT_STORAGE);
TreatmentOfEssEnv(disp_l, data);

// Conditions aux limites en déplacement de type symmétrie ou symmétrie centrale
TreatmentOfSymEssEnv(disp_l, data);

// Mises à zéro
DofData.SetStorageType(TIME_STORAGE);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, disp_l, data->GMF,data->zones,data->allElements, 0.0);
DofData.SetStorageType(INCREMENT_STORAGE);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, stress_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, 0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION,   inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, 0.0);

// Déclaration des inconnues du système linéaire et suavegarde de l'état
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispcla_l, data->GMF, data->zones, data->allElements);
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispenrich_l, data->GMF, data->zones, data->allElements);
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
DofData.StoreSystemStructure(STR_step);

// Allocation des tailles de matrices et vecteurs
DofData.SetStorageType(TIME_STORAGE);
RHS_EXT_NEW.SetSize(DofData.GetNbrDof());
```

```
RHS_EXT_OLD.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_INT.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RESIDUAL.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_CONTACT.SetSize(DofData.GetNbrDof());
K.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_T.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_U.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_W.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_L.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_LL.SetSize(DofData.GetNbrDof());
RHS_LT.SetSize(DofData.GetNbrDof());

// Assemblage de la matrice de raideur EF + XFEM
AssembleBilinearTermWithLaw (&Kdata, diffusive, data, data->allElements, data->allElements);

// Conditions limites en effort / chargement
TreatmentOfNatEnv (disp_l, data, data->allGroups);

// Assemblage des matrices d'interface et de couplage
RobinTermInterface(&Kdata, dispinterface_l, tracinterface_l, data, data->allInterfaceElements, 0);
WorkCouplingTermVectorInterface(&Kdata, disp_l, lagrinterface_l, data, data->allElements,voidreg,
                                data->allInterfaceElements, -1.0);
WorkBndTermVectorInterface(&Kdata,dispinterface_l, lagrinterface_l, data, data->allInterfaceElements );

// Valeurs pour le pilotage des pas de temps
maxtourc = 5;
maxiter = Pilot.GetMaxIter();
itracce = maxiter / 3;
itrslow = 2 * itracce;
itourc = 0;
nb_conv = 0;

////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//                                                                    //
// Début de la boucle sur les pas de temps (on est en quasi statique) //
//                                                                    //
////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// On fait le premier piquet de temps (t=0) en dehors de la boucle
Step = DofData.SetTime(0, 0.0);
fprintf(stderr,"\n");
fprintf(stderr,"----------------------------------------\n");
fprintf(stderr,"Starting the step %d, time = %12.5e \n", Step, DofData.GetCurrentTime());
fprintf(stderr,"----------------------------------------\n");
fprintf(stderr,"\n");
DofData.SetStorageType(ITERATION_STORAGE);

// RAZ
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, disp_l, data->GMF,data->zones,data->allElements,0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, stress_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, 0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION,   inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, 0.0);
DofData.SetStorageType(INCREMENT_STORAGE);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, disp_l, data->GMF,data->zones,data->allElements,0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 0.);
DofData.SetStorageType(ITERATION_STORAGE);

// Sauvegarde du second membre
RHS_EXT_NEW = RESIDUAL;
RHS_EXT_OLD = RESIDUAL;
max_norm_fext = RESIDUAL.Norm();
max_norm_local = 0.;
```

```
//-------------------------//
//  ITERATIONS D'EQUILIBRE //
//-------------------------//
Iter = 0;
DofData.SetActualIterId(0);
// Début de la boucle
while (Pilot.DoubleNonLinearItersNotCompleted(Step, Iter, Error_p, error_in_interface, conv,saturation)) {
  Iter = DofData.IterStep();
  printf("\n");
  if (Iter == 1) printf("Starting iterations on residual\n");
  fprintf(stderr, "----- Starting iteration number %d -----\n", Iter);
  printf("\n");
  if (Iter == 1) {
    // Initialisatino des quantités d'interface
    InitializeOnInterface (dispinterface_l, lagrinterface_l, data);
    RESIDUAL = RHS_EXT_NEW;
  }
  else {
    // Traitement du problème local de contact
    LocalStepOnInterface (dispinterface_l, tracinterface_l, data);

    // Calcul du résidu
    RESIDUAL.ZeroArray();
    AssembleRHSInternalForce(stress_l, diffusive, data, data->allElements);
    RHS_INT = RESIDUAL;
    RHS_INT.MultipliedBy(coeff);
    RESIDUAL.ZeroArray();
    AssembleRHSTracForce(disp_l, tracinterface_l, lagrinterface_l, data, data->allElements);
    RHS_T=RESIDUAL;
    RHS_CONTACT = RESIDUAL;
    RESIDUAL.ZeroArray();
    AssembleRHSLocalLagrOnWStar(dispinterface_l, lagrinterface_l, data);
    RHS_LL=RESIDUAL;
    RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
    RESIDUAL.ZeroArray();
    AssembleRHSLocalTracOnWStar(dispinterface_l, tracinterface_l, data);
    RHS_LT=RESIDUAL;
    RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
    RESIDUAL.ZeroArray();
    AssembleRHSGlobalOnTStar(disp_l,lagrinterface_l, data, data->allElements);
    RHS_U = RESIDUAL;
    RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
    RESIDUAL.ZeroArray();
    AssembleRHSLocalOnTStar(dispinterface_l, lagrinterface_l, data);
    RHS_W = RESIDUAL;
    RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
    RESIDUAL = RHS_EXT_NEW;
    RESIDUAL.AddVec(RHS_INT);
    RESIDUAL.AddVec(RHS_CONTACT);
  }

  // Résolution du système linéaire
  DofData.SetStorageType(INCREMENT_STORAGE);
  system.Solve(SOLUTION);

  // Sauvegarde de la solution
  DofData.StoreResult(SOLUTION.GetArray());
  // Affectation de la solution dans le cas de conditions
  // aux limites en déplacement de type symmétrie ou symmétrie centrale
  TreatmentOfSymEssEnv(disp_l, data);

  // Mises à jour
  DofData.SetStorageType(ITERATION_STORAGE);
  ActionOnElements(ADD_INCREMENT_DOF_VAL_ACTION, disp_l,
```

```
                  data->GMF, data->zones, data->allElements, 1.0);
  ActionOnElements(ADD_INTERFACE_INCREM_DOF_VAL_ACTION, dispinterface_l,
                  data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 1.0);
     ActionOnElements(ADD_INTERFACE_INCREM_DOF_VAL_ACTION, lagrinterface_l,
                  data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 1.0);

  if (Iter == 1) {
    // Initialisation des variables internes
    InitInternalVariablesOnSubElt(disp_l, inte_l, data, data->allElements);
  }
  // Ecoulement plastique
  printf("Before UpdatePlasticState\n");
  UpdateInternalStateOnSubElt(disp_l, stress_l, inte_l, data, data->allElements);
  printf("Passed UpdatePlasticState\n");

  // Critères d arret
  norm_r = RESIDUAL.Norm();
  norm_f = max(RHS_EXT_NEW.Norm(),RHS_INT.Norm());
  if (norm_f==0.) {
    Error_p = 0.;
  }
  else {
    Error_p = (norm_r/norm_f);
  }
  ComputeLatinError (dispinterface_l, tracinterface_l, data, error_in_interface,no_ext_force, max_norm_local);

  printf("\n");
  fprintf(stderr,"At iteration %d error on residual is = %12.5e local error is %12.5e \n",
          Iter,Error_p,error_in_interface );
  printf("At iteration %d error on residual is = %12.5e local error is %12.5e\n",
         Iter,Error_p, error_in_interface);
}

//
// Fin des iterations sur le residu
//

fprintf(stderr,"\n");
fprintf(stderr,"----- Converged in %d iterations at Step %d -----\n", Iter, Step);
fprintf(stderr,"\n");

// Mises à jour
ActionOnElements(STODOF_ACTION, disp_l, data->GMF, data->zones, data->allElements);
ActionOnElements(STODOF_ACTION, stress_l,data->GMF, data->zones, allSubElements);
ActionOnElements(STODOF_ACTION, inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements);
ActionOnElements(STODOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
ActionOnElements(STODOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
ActionOnElements(STODOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);

// Post-traitement si nécéssaire
DofData.SetStorageType(TIME_STORAGE);
if (Pilot.ExportRequested(Step)) {
  fprintf(stderr,"Before Export\n");
  ExportResults(Step, data, disp_l, stress_l,inte_l,dispinterface_l,tracinterface_l, diffusive);
  fprintf(stderr,"Passed Export\n");
  fprintf(stderr,"Before Export Groups\n");
  ExportGroups(data);
  fprintf(stderr,"Passed Export Groups\n");
}
// Calcul des facteurs d’intensité des contraintes si nécéssaire
if (data->do_postpro && Pilot.PostproRequested(Step)) {
  data->FillPostproInfo();
  sprintf(idchar, "_%d", Step );
  stlext::strcat3(exp,"fracture_postpro", idchar, ".txt");
  fprintf(stderr,"Before Compute SIF\n");
```

```
  TreatmentOfPostpro(disp_l,tracinterface_l, exp, data, stress_l, inte_l);
  fprintf(stderr,"Passed Compute SIF\n");
}

// Sauvegarde et remises à zéro
Error_p = 1.0;
error_in_interface = 1.0;
RHS_EXT_OLD = RHS_EXT_NEW;
RESIDUAL.ZeroArray();
RHS_EXT_NEW.ZeroArray();
RHS_INT.ZeroArray();
RHS_CONTACT.ZeroArray();
disp_f.insert(dispcla_l);
disp_f.insert(dispenrich_l);
DofData.StoreSystemStructure(STR_step);
DofData.DofClearValues(ITERATION_STORAGE);
Iter = DofData.SetActualIterId(0);


//
// Pour les pas de temps suivants, on entre dans la boucle
//

while ( Pilot.StepsNotCompleted(Step) ) {
  if (Step == 0) dt = Pilot.GetInitialTimeStep();
  // On a calcule l'increment de temps
  Step = DofData.TimeStep(dt);
  if (Step == 1) {
    GetLastComputationnalTime(endtime,data, data->allGroups);
  }
  if (DofData.GetCurrentTime() > endtime) {
    dto = endtime - DofData.GetPreviousTime();
    dt = endtime - DofData.GetCurrentTime();
    DofData.SetActualTimeId(Step-1);
    Step = DofData.TimeStep(dt);
    dt = dto;
  }
  fprintf(stderr,"\n");
  fprintf(stderr,"----------------------------------------\n");
  fprintf(stderr,"Starting the step %d, time = %12.5e \n", Step, DofData.GetCurrentTime());
  fprintf(stderr,"----------------------------------------\n");
  fprintf(stderr,"\n");
  printf("Starting the step %d, time = %12.5e \n", Step, DofData.GetCurrentTime());

  // Gestion des enrichissement en cas de propagation
  UpdateEnrichedRegions(data);

  // Calcul du critère de propagation et propagation si nécéssaire
  if (Pilotc.GrowthRequested(DofData.GetCurrentTime())) {
    fprintf(stderr, "Start Growing the cracks!!!!!!!\n");
    PError = ParisGrowCracks(data);
    cracksaregrowing = ParisCracksAreGrowing(data);
    fprintf(stderr, "End   Growing the cracks!!!!!!!\n");
  }
  else {
    fprintf(stderr, "cracks are NOT growing!!!\n");
    cracksaregrowing = false;
  }

  // RAZ des inconnues
  DofData.ResetSystemDof();

  // Restauration de l'état sauvegardé précédent et RAZ
  DofData.RestoreSystemStructure(STR_step);
  disp_l.clear();
```

```
disp_l.insert(disp_f);
dispenrich_l.clear();
newstress_l.clear();
newinte_l.clear();
newdispinterface_l.clear();
newtracinterface_l.clear();
newlagrinterface_l.clear();

if (cracksaregrowing) {
  fprintf(stderr, "Before Updating Enrichment\n");
  //Reactualisation des zones d'enrichissement, des sous éléments et des éléments d'interface
  ClearNewSubAndInterfaceEltsInfos(data);
  printf("Before SetMeshGeometryInteraction\n");
  data->SetMeshGeometryInteraction();
  printf("Passed SetMeshGeometryInteraction\n");
  printf("Before PlotGeometricalEntities\n");
  data->PlotGeometricalEntities(idchar);
  printf("Passed PlotGeometricalEntities\n");
  printf("Before Storing Front Coord and Map\n");
  data->GEO->StoringGeometryHistory(Step);
  printf("Passed Storing Front Coord and Map\n");

  // Création des nouveaux enrichissements
  TreatmentOfEnrichment(dispcla_l, dispenrich_l, data);
  ResolveDependencies(dispenrich_l, data, data->GMF, data->zones, data->allElements);
  printf("Passed Updating Enrichment\n");

  // Création de  l'ensemble des nouveaux sous elts
  allSubElements.clear();
  data->GMF->getRegionPhysPartition(data->allElements, allSubElements);
  data->GMF->getRegionPhysPartition(data->allNewSubdividedElements, NewSubElements);

  // Nouvelles contraintes et variables internes
  FunctionSpace_c newstressxx(STRESS_XX,     INTERP_DISCRETE_GAUSS,
                              DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, NewSubElements);
  FunctionSpace_c newstressyy(STRESS_YY,     INTERP_DISCRETE_GAUSS,
                              DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, NewSubElements);
  FunctionSpace_c newstressxy(STRESS_XY_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS,
                              DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, NewSubElements);
  FunctionSpace_c newstresszz(STRESS_ZZ    , INTERP_DISCRETE_GAUSS,
                              DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, NewSubElements);
  FunctionSpace_c newstressxz(STRESS_XZ_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS,
                              DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, NewSubElements);
  FunctionSpace_c newstressyz(STRESS_YZ_SYM, INTERP_DISCRETE_GAUSS,
                              DEGREE_ELEMENT_DEPENDENT, NewSubElements);
  newstressxx.SetFirstStep(DofData.GetActualTimeId());
  newstressyy.SetFirstStep(DofData.GetActualTimeId());
  newstressxy.SetFirstStep(DofData.GetActualTimeId());
  newstresszz.SetFirstStep(DofData.GetActualTimeId());
  newstressxz.SetFirstStep(DofData.GetActualTimeId());
  newstressyz.SetFirstStep(DofData.GetActualTimeId());
  newstress_l.insert(newstressxx);
  newstress_l.insert(newstressxy);
  newstress_l.insert(newstressyy);
  newstress_l.insert(newstresszz);
  newstress_l.insert(newstressxz);
  newstress_l.insert(newstressyz);
  CreateInternalVariablesSpace(newinte_l, data->GMF, data->zones, NewSubElements);

  // Nouveaux termes d'interface
  printf("Before TreatmentOfNewInterface & InitializeOnNewInterface\n");
  TreatmentOfNewInterface(newdispinterface_l, newtracinterface_l,
                          newlagrinterface_l,data, data->Dimension);
  InitializeOnNewInterface(newdispinterface_l, newtracinterface_l, data);
  InitializeOnNewInterface(newdispinterface_l, newlagrinterface_l, data);
```

```
  printf("Passed TreatmentOfNewInterface & InitializeOnNewInterface\n");

}
else {
  // RAZ
  printf("clearing new subelts and new interface elts\n");
  data->allNewSubdividedElements.clear();
  data->allNewInterfaceElements.clear();
}

// Conditions aux limites en deplacement
printf("before treatmentofessenv\n");
TreatmentOfEssEnv(disp_l, data);
printf("passed treatlmentofessenv\n");
// Conditions aux limites en déplacement de type symmétrie ou symmétrie centrale
TreatmentOfSymEssEnv(disp_l, data);

// Déclaration des inconnues du système linéaire et suavegarde de l'état
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, disp_l, data->GMF,data->zones,data->allElements);
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
if (cracksaregrowing) {
  ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, dispenrich_l, data->GMF,data->zones,data->allElements);
  ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, newdispinterface_l, data->GMF,
                   data->zones, data->allNewInterfaceElements);
  ActionOnElements(DEFDOF_ACTION, newlagrinterface_l, data->GMF,
                   data->zones, data->allNewInterfaceElements);
  // Initialisation des nouveaux enrichissements à partir de l'état précédent
  ProjectingFields(dispenrich_l,data->allElements,data);
}

DofData.StoreSystemStructure(STR_step);
// Ajout des nouveaux ddls
disp_l.insert(dispenrich_l);
dispinterface_l.insert(newdispinterface_l);
tracinterface_l.insert(newtracinterface_l);
lagrinterface_l.insert(newlagrinterface_l);

// Redéclaration de la forme bilinéaire
DiffusiveVectorBilinearForm_c diffusive(disp_l, disp_l);

if (cracksaregrowing) {
  //Initialisation des nouvelles contraintes et variables internes
  newstress_l.SetInfo(GetIntegrationInformations(diffusive, data, data->allElements));
  newinte_l.SetInfo(GetIntegrationInformations(diffusive, data, data->allElements));
  InitInternalVariablesOnNewSubElt(disp_l, newinte_l, data, data->allNewSubdividedElements);
  UpdateInternalStateOnNewSubElt(disp_l, newstress_l, newinte_l, data,
                                 data->allNewSubdividedElements);

  //Initialisation des nouveaux w
  ProjectDispOnNewInterfaceElements(disp_l, dispinterface_l, data,
                                    data->allElements,data->allNewInterfaceElements);

  //RAZ et reallocation des vecteurs et matrices
  RHS_EXT_NEW.ClearPub();RHS_EXT_NEW.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_EXT_OLD.ClearPub();RHS_EXT_OLD.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_INT.ClearPub();RHS_INT.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RESIDUAL.ClearPub();RESIDUAL.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_CONTACT.ClearPub();RHS_CONTACT.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  K.ClearPub();K.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_T.ClearPub();RHS_T.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_U.ClearPub();RHS_U.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_W.ClearPub();RHS_W.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_L.ClearPub();RHS_L.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  RHS_LL.ClearPub();RHS_LL.SetSize(DofData.GetNbrDof());
```

```
  RHS_LT.ClearPub();RHS_LT.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  SOLUTION.ClearPub();SOLUTION.SetSize(DofData.GetNbrDof());

  // Assemblage des matrices
  AssembleBilinearTermWithLaw (&Kdata, diffusive, data, data->allElements,
                               data->allNewEnrichedElements);
  RobinTermInterface(&Kdata, dispinterface_l, tracinterface_l, data,
                     data->allNewInterfaceElements, 0);
  WorkCouplingTermVectorInterface(&Kdata, disp_l, lagrinterface_l, data, data->allElements,
                                  data->allNewEnrichedElements, data->allNewInterfaceElements, -1.0);
  WorkBndTermVectorInterface(&Kdata,dispinterface_l, lagrinterface_l, data,
                             data->allNewInterfaceElements);

  // Redéclaration du système
  solver.Clear();
  LinearSystem_c system(&K, &RESIDUAL, &solver);

  //Initialisation des nouveaux efforts d'interface
  ProjectInternalForcesOnNewInterfaceElements(newlagrinterface_l, newtracinterface_l,stress_l, data,
                                              data->allElements,data->allNewInterfaceElements);
}
stress_l.insert(newstress_l);
inte_l.insert(newinte_l);
stress_l.SetInfo(GetIntegrationInformations(diffusive, data, data->allElements));
inte_l.SetInfo(GetIntegrationInformations(diffusive, data, data->allElements));

//Conditions aux limites en effort / chargement
if (Step != 1) {
  printf("calculating old external load for time %12.5e\n",DofData.GetPreviousTime());
  // on recupere l'effort ext au pas de temps precedente
  TreatmentOfNatEnv (disp_l, data, data->allGroups,DofData.GetPreviousTime());
  RHS_EXT_OLD = RESIDUAL;
  RESIDUAL.ZeroArray();
}
// on recupere l'effort ext au pas de temps courant
TreatmentOfNatEnv (disp_l, data, data->allGroups);
RHS_EXT_NEW = RESIDUAL;
if (RHS_EXT_NEW.Norm() > max_norm_fext) {
  max_norm_fext = RHS_EXT_NEW.Norm();
}
if (RHS_EXT_NEW.Norm() < 1.E-05) {
  no_ext_force = true;
}
else {
  no_ext_force = false;
}
// Le nouveau second membre est l'incrément d'effort pour la premiere iteration
RHS_EXT_OLD.MultipliedBy(coeff);
RESIDUAL.AddVec(RHS_EXT_OLD);
DofData.SetStorageType(ITERATION_STORAGE);

//-------------------------//
//  ITERATIONS D'EQUILIBRE //
//-------------------------//
Iter = 0;
DofData.SetActualIterId(0);
saturation = false;

// Initialisations
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, disp_l, data->GMF,data->zones,data->allElements,0.0);
ActionOnElements(INIDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones,
                 data->allInterfaceElements);
ActionOnElements(INIDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones,
                 data->allInterfaceElements);
ActionOnElements(INIDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones,
```

```
                data->allInterfaceElements);
DofData.SetStorageType(INCREMENT_STORAGE);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, disp_l, data->GMF,data->zones,data->allElements,0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones,
                data->allInterfaceElements, 0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones,
                data->allInterfaceElements, 0.0);
ActionOnElements(VALDOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones,
                data->allInterfaceElements, 0.0);
DofData.SetStorageType(ITERATION_STORAGE);

// debut de la boucle
while (Pilot.DoubleNonLinearItersNotCompleted(Step, Iter, Error_p, error_in_interface, conv,saturation)) {
  Iter = DofData.IterStep();
  printf("\n");
  if (Iter == 1) printf("Starting iterations on residual\n");
  fprintf(stderr, "----- Starting iteration number %d -----\n", Iter);
  printf("\n");
  // Réallocation
  if (Iter == 1) {RESIDUAL.ClearPub();RESIDUAL.SetSize(DofData.GetNbrDof());}
  K.ClearPub();K.SetSize(DofData.GetNbrDof());
  SOLUTION.ClearPub();SOLUTION.SetSize(DofData.GetNbrDof());

  // Assemblage des matrices et redéclaration du système
  DiffusiveVectorBilinearForm_c diffusive(disp_l, disp_l);
  AssembleBilinearTermWithLaw (&Kdata, diffusive, data, data->allElements, voidreg);
  RobinTermInterface(&Kdata, dispinterface_l, tracinterface_l, data, voidreg, Step);
  WorkCouplingTermVectorInterface(&Kdata, disp_l, lagrinterface_l, data, data->allElements,
                                  voidreg, voidreg, -1.0);
  WorkBndTermVectorInterface(&Kdata,dispinterface_l, lagrinterface_l, data, voidreg);
  solver.SetJFMatrixSizewasDefinedTrue();
  LinearSystem_c system(&K, &RESIDUAL, &solver);

  if (Iter == 1) {
    // Recalcul du résidu initial s'il y a propagation
    if (cracksaregrowing) {
      fprintf(stderr, "----- il ya propa on recalcule le residu initial -----\n");
      RESIDUAL.ZeroArray();
      AssembleRHSInternalForceOnAllNewSubElt(stress_l, diffusive, data, data->allElements);
      RHS_INT = RESIDUAL;
      RHS_INT.MultipliedBy(coeff);
      RESIDUAL.ZeroArray();
      AssembleRHSTracForceOnAllInterfaceElts(disp_l, lagrinterface_l, data, data->allElements);
      RHS_T=RESIDUAL;
      RHS_CONTACT = RESIDUAL;
      RESIDUAL.ZeroArray();
      AssembleRHSLocalOnWStarOnAllInterfaceElts(dispinterface_l,tracinterface_l, lagrinterface_l, data);
      RHS_L=RESIDUAL;
      RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
      RESIDUAL.ZeroArray();
      AssembleRHSGlobalOnTStarOnAllInterfaceElts(disp_l,lagrinterface_l, data, data->allElements);
      RHS_U = RESIDUAL;
      RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
      RESIDUAL.ZeroArray();
      AssembleRHSLocalOnTStarOnAllInterfaceElts(dispinterface_l, lagrinterface_l, data);
      RHS_W = RESIDUAL;
      RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
      RESIDUAL = RHS_EXT_NEW;
      RESIDUAL.AddVec(RHS_INT);
      RESIDUAL.AddVec(RHS_CONTACT);
    }
    else {
      fprintf(stderr, "----- pas de propa on fait Fn+1 - Fn -----\n");
      RESIDUAL = RHS_EXT_NEW ;
      RESIDUAL.AddVec(RHS_EXT_OLD);
```

```
  }
}

DofData.SetStorageType(INCREMENT_STORAGE);

// Résolution du système linéaire
system.Solve(SOLUTION);
// Sauvegarde de la solution
DofData.StoreResult(SOLUTION.GetArray());
// Affectation de la solution dans le cas de
// conditions aux limites en déplacement de type symmétrie ou symmétrie centrale
TreatmentOfSymEssEnv(disp_l, data);

// Mises à jour
DofData.SetStorageType(ITERATION_STORAGE);
ActionOnElements(ADD_INCREMENT_DOF_VAL_ACTION, disp_l,
                 data->GMF, data->zones, data->allElements, 1.0);
ActionOnElements(ADD_INTERFACE_INCREM_DOF_VAL_ACTION, dispinterface_l,
                 data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 1.0);
ActionOnElements(ADD_INTERFACE_INCREM_DOF_VAL_ACTION, lagrinterface_l,
                 data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements, 1.0);

// Ecoulement plastique
printf("Before UpdatePlasticState\n");
UpdateInternalStateOnSubElt(disp_l, stress_l, inte_l, data, data->allElements);
printf("Passed UpdatePlasticState\n");

// Traitement du problème local de contact
printf("Before LocalStepOnInterface\n");
NewLocalStepOnInterface (dispinterface_l, tracinterface_l, data);
printf("Passed LocalStepOnInterface\n");

// Calcul du Résidu
RESIDUAL.ZeroArray();
AssembleRHSInternalForce(stress_l, diffusive, data, data->allElements);
RHS_INT = RESIDUAL;
RHS_INT.MultipliedBy(coeff);
RESIDUAL.ZeroArray();
AssembleRHSTracForce(disp_l, tracinterface_l, lagrinterface_l, data, data->allElements);
RHS_T=RESIDUAL;
RHS_CONTACT = RESIDUAL;
RESIDUAL.ZeroArray();
AssembleRHSLocalLagrOnWStar(dispinterface_l, lagrinterface_l, data);
RHS_LL=RESIDUAL;
RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
RESIDUAL.ZeroArray();
AssembleRHSLocalTracOnWStar(dispinterface_l, tracinterface_l, data);
RHS_LT=RESIDUAL;
RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
RESIDUAL.ZeroArray();
AssembleRHSGlobalOnTStar(disp_l,lagrinterface_l, data, data->allElements);
RHS_U = RESIDUAL;
RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
RESIDUAL.ZeroArray();
AssembleRHSLocalOnTStar(dispinterface_l, lagrinterface_l, data);
RHS_W = RESIDUAL;
RHS_CONTACT.AddVec(RESIDUAL);
RESIDUAL = RHS_EXT_NEW;
RESIDUAL.AddVec(RHS_INT);
RESIDUAL.AddVec(RHS_CONTACT);


//
// Citeres d arret
//
```

```
norm_r = RESIDUAL.Norm();
if (no_ext_force) {
  norm_f = max_norm_fext;
  if (norm_f == 0.) Error_p = 0.;
  else Error_p = (norm_r/norm_f);
}
else {
  norm_f = RHS_EXT_NEW.Norm();
  Error_p = (norm_r/norm_f);
}
// Critère sur l'état local de contact
ComputeMaxLocalContactError(dispinterface_l, tracinterface_l, data, error_in_interface,
                            no_ext_force, max_norm_local);
// Critère sur le résidu
double max_norm_fint, max_norm_fext, max_norm_kctl, max_norm_kcu;
double max_norm_kiw, max_norm_kil,max_norm_kit;
double max_norm_sup, max_norm_mid, max_norm_inf;
RHS_INT.MaxNorm(max_norm_fint);
RHS_EXT_NEW.MaxNorm(max_norm_fext);
RHS_T.MaxNorm(max_norm_kctl);
RHS_U.MaxNorm(max_norm_kcu);
RHS_W.MaxNorm(max_norm_kiw);
RHS_LL.MaxNorm(max_norm_kil);
RHS_LT.MaxNorm(max_norm_kit);
RHS_EXT_NEW.MaxMultNorm(RHS_INT,RHS_T,max_norm_sup);
RHS_LL.MaxMultNorm(RHS_LT,max_norm_mid);
RHS_U.MaxMultNorm( RHS_W,max_norm_inf);
double maxsup1, maxsup2,maxmid, maxinf, err_sup, err_mid, err_inf;
maxsup1= max(max_norm_fint,max_norm_fext);
maxsup2=max(maxsup1,max_norm_kctl);
err_sup = (max_norm_sup/maxsup2);
if (maxsup2 == 0.) err_sup=0.;
maxmid=max(max_norm_kil,max_norm_kit);
err_mid = (max_norm_mid/maxmid);
if (err_mid == 1.) err_mid=0.;
if (maxmid == 0.) err_mid=0.;
maxinf=max(max_norm_kcu,max_norm_kiw);
err_inf = (max_norm_inf/maxinf);
if (err_inf == 1.) err_inf=0.;
if (maxinf == 0.) err_inf=0.;
double err_sup_mid, err_tot;
err_sup_mid = max(err_sup,err_mid);
err_tot= max(err_sup_mid,err_inf);
Error_p =err_tot;

// Test si saturation du critère local
if (Iter == 10) {
  eii_m_10 = error_in_interface;
  iter_moins_10 = 10;
}
if ((Iter - iter_moins_10) == 10) {
  iter_moins_10 = Iter;
  if ((eii_m_10 - error_in_interface) < 1.E-6) saturation = true;
  else {
    eii_m_10 = error_in_interface;
    saturation = false;
  }
}
printf("\n");
fprintf(stderr,"At iteration %d  error on residual is = %12.5e local error is %12.5e \n",
        Iter,Error_p,error_in_interface );
printf("At iteration %d error on residual is = %12.5e local error is %12.5e\n",
       Iter,Error_p, error_in_interface);

// Ménage
```

```
  prev_iter = Iter - 1;
  if (prev_iter > 0){
    ActionOnElements(DELDOF_ACTION, disp_l, data->GMF, data->zones, data->allElements, prev_iter);
    ActionOnElements(DELDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones,
                     data->allInterfaceElements, prev_iter);
    ActionOnElements(DELDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones,
                     data->allInterfaceElements, prev_iter);
    ActionOnElements(DELDOF_ACTION, stress_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, prev_iter);
    ActionOnElements(DELDOF_ACTION, inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, prev_iter);
  }
}

//
// Fin des iterations d'équilibre
//

// Si convergence
if (conv == true) {
  fprintf(stderr,"\n");
  fprintf(stderr,"----- Converged in %d iterations at Step %d -----\n", Iter, Step);
  fprintf(stderr,"\n");
  printf("----- Converged in %d iterations at Step %d -----\n", Iter, Step);
  // Mises à jour
  ActionOnElements(STOADDDOF_ACTION, disp_l, data->GMF, data->zones, data->allElements);
  ActionOnElements(STODOF_ACTION, stress_l,data->GMF, data->zones, allSubElements);
  ActionOnElements(STODOF_ACTION, inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements);
  ActionOnElements(STODOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
  ActionOnElements(STODOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);
  ActionOnElements(STODOF_ACTION, lagrinterface_l, data->GMF, data->zones, data->allInterfaceElements);

  // Post-traitement si nécéssaire
  DofData.SetStorageType(TIME_STORAGE);
  if (Pilot.ExportRequested(Step)) {
    fprintf(stderr,"Before Export\n");
    ExportResults(Step, data, disp_l, stress_l,inte_l,dispinterface_l,tracinterface_l, diffusive);
    fprintf(stderr,"Passed Export\n");
    fprintf(stderr,"Before Export Groups\n");
    ExportGroups(data);
    fprintf(stderr,"Passed Export Groups\n");
  }

  // RAZ
  disp_f.insert(dispenrich_l);
  if (cracksaregrowing){
    cracksweregrowing=true;
  }
  else {
    cracksweregrowing=false;
  }
  cracksaregrowing=false;

  // Calcul des facteurs d'intensité des contraintes si nécéssaire
  if (data->do_postpro && Pilot.PostproRequested(Step)) {
    data->FillPostproInfo();
    sprintf(idchar, "_%d", Step );
    stlext::strcat3(exp,"fracture_postpro", idchar, ".txt");
    fprintf(stderr,"Before Compute SIF\n");
    TreatmentOfPostpro(disp_l,tracinterface_l, exp, data, stress_l, inte_l);
    fprintf(stderr,"Passed Compute SIF\n");
  }

  RHS_EXT_OLD = RHS_EXT_NEW;
  prev_step = Step - 1;
  if (DofData.GetCurrentTime() >= endtime) {
    Step = Pilot.GetMaxStep();
```

```
      }
    }
    // Si non convergence
    else {
      printf("\n");
      fprintf(stderr,"----- Failure to converge at Step %d within %d iterations -----\n", Step, Iter);
      printf("\n");
    }

    //Sauvegarde et remises à zéro
    Error_p = 1.0;
    error_in_interface = 1.0;
    RESIDUAL.ZeroArray();
    RHS_EXT_NEW.ZeroArray();
    RHS_CONTACT.ZeroArray();

    // Ménage
    DofData.DofClearValues(ITERATION_STORAGE);
    DofData.DofClearValues(INCREMENT_STORAGE);
    DofData.SetStorageType(TIME_STORAGE);
    if (prev_step > 0){
      ActionOnElements(DELDOF_ACTION, disp_l, data->GMF, data->zones, data->allElements, prev_step);
      ActionOnElements(DELDOF_ACTION, dispinterface_l, data->GMF, data->zones,
                       data->allInterfaceElements, prev_step);
      ActionOnElements(DELDOF_ACTION, tracinterface_l, data->GMF, data->zones,
                       data->allInterfaceElements, prev_step);
      ActionOnElements(DELDOF_ACTION, stress_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, prev_step);
      ActionOnElements(DELDOF_ACTION, inte_l, data->GMF, data->zones, allSubElements, prev_step);
    }
    Iter = 0;
    DofData.SetActualIterId(0);
  }

  //
  // Fin de la boucle sur les pas de temps
  //

  fprintf(stderr, "\n");
  fprintf(stderr, "** ------------------------------- **\n");
  fprintf(stderr, "           Ending the Steps\n");
  fprintf(stderr, "** ------------------------------- **\n");
  fprintf(stderr, "\n");
  fprintf(stderr,"Before Export Groups History\n");
  ExportGroupsHistory(data);
  fprintf(stderr,"Passed Export Groups History\n");
  printf("Hello before return in treatment of formulation\n");
  return;
}
```

Annexe F

Exemple de jeu de données ELFE_3D

Fichier *exemple.geo* permettant d'obtenir un fichier maillage *exemple.UNV* à partir du logicel GMSH

```
//
//            Maillage d'une éprouvette CT
//
//             _____________________
//           |   __                  |
//           |  |  |                 |
//           |   --  ________        |
//           |      |        |       |
//           |______________ |       |
//           |      |        |       |
//           |   __  --------        |
//           |  |  |                 |
//           |   --                  |
//           |_______________________|
//
// Origine
x0 = 0.;
y0 = 0.;
z0 = 0.;
// Paramètres géométriques de l'éprouvette
a = 1.;
b = 6.5 * a;
w1 = 6.5 * a;
w = 5.5 * a;
d = 0.8 * a;
h = 0.5 * b;
h2 = 2. * a;
h1 = h - h2;
l1 = 1.4;
l2 = 1.;
hh = 0.2;
// Densités
dens = 0.3;
dens2 = 0.05;
// Points
Point(1) = {w-w1,0.-h,z0,dens};   Point(2) = {w,0.-h,z0,dens};
Point(3) = {w,h,z0,dens};         Point(4) = {w-w1,h,z0,dens};
Point(5) = {0,h1-h,z0,dens};      Point(6) = {0.5*d,h1-h,z0,dens};
Point(7) = {-0.5*d,h1-h,z0,dens}; Point(8) = {0,h-h1,z0,dens};
Point(9) = {0.5*d,h-h1,z0,dens};  Point(10) = {-0.5*d,h-h1,z0,dens};
Point(101) = {l1,0.-hh,z0,dens2}; Point(102) = {l1+l2,0.-hh,z0,dens2};
Point(103) = {l1+l2,hh,z0,dens2}; Point(104) = {l1,hh,z0,dens2};
// Lignes
Line(5)  = {1,2};      Line(6)  = {2,3};
Line(7)  = {3,4};      Line(8)  = {4,1};
```

```
Line(50)  = {101,102}; Line(60)  = {102,103};
Line(70)  = {103,104}; Line(80)  = {104,101};
// Cercles
Circle(31) = {6,5,7};  Circle(32) = {7,5,6};
Circle(33) = {9,8,10}; Circle(34) = {10,8,9};
// Contours
Line Loop(567) = {31,32};  Line Loop(8910) = {33,34};
Line Loop(90) = {5,6,7,8}; Line Loop(900) = {50,60,70,80};
// Surfaces
Plane Surface(10) = {90,567,8910,900};
Plane Surface(11) = {900};
// Impositions du nombres de noeuds sur certaines lignes
Transfinite Line{50,70} = 20;
Transfinite Line{60,80} = 8;
// Maillage structuré
Transfinite Surface{11} = {101,102,103,104};
// Maillage quadrangle
Recombine Surface{11};
// Définition des LOADSETS pour imposer des conditions aux limites
Physical Line(310) = {31}; Physical Line(320) = {32};
Physical Line(330) = {33}; Physical Line(340) = {34};
Physical Line(505) = {5};  Physical Line(561) = {6};
```

Fichier principal *exemple.DAT*

```
#####################################################
#                                                   #
#    Eprouvette CT: propagation à da imposé         #
#                                                   #
#####################################################

# Maillage
MESH_FILE_TYPE   = unv
MESH_FILE        = lunv/exemple.UNV

# Géométrie de la fissure
GEOM_FILE        = lgef/exemple.GEF
GEOM_TYPE        = classical

# Stratégie d'intégration numérique
INTEGRATION_TYPE = geometrical_subdividing

# Format de post-traitement
EXPORT_FORMAT    = gmsh

# Type de calcul et d'analyse
REGIME           = static
ANALYSIS         = mechanics_pc_crack_growth

# Paramètres de l'agorithme de Newton-Raphson quasi-statique
FORMULATION_PARAM_FILE = lpar_form/exemple.PAR
# Paramètres pour la propagation
PROCEDURE_PARAM_FILE = lpar_proc/exemple_growth.PAR

# Matériau pour les différents surfaces du maillage
ZONE 10  = {MAT_CLASS = plastic MAT_PARAM = lmat/exemple.MAT}
ZONE 11  = {MAT_CLASS = plastic MAT_PARAM = lmat/exemple.MAT}

# Conditions aux limites en effort: chargement de type pression normale
EXACT_SOLUTION_NAME = uniform_hydrostatic_pressure
GROUP 330 = { GROUP_ENV  STRESS  NB_CYCLES=54 ENDTIME=108.
              NB_EVO = 3 EVO (0. , 0.) (1. , 1.) (2. , 0.1)  FIX =  125000000.}
GROUP 320 = { GROUP_ENV  STRESS  NB_CYCLES=54 ENDTIME=108.
              NB_EVO = 3 EVO (0. , 0.) (1. , 1.) (2. , 0.1)  FIX =  125000000.}

# Conditions aux limites en déplacement: blocage des mouvements de solide rigide
```

```
GROUP 561 = { GROUP_ORI DISPLACEMENT_X  FIX = 0.0
                        DISPLACEMENT_Y  FIX = 0.0 }
GROUP 505 = { GROUP_ORI DISPLACEMENT_Y  FIX = 0.0 }

# Définition de l'enrichissement
DO_ENRICH_AUTOMATIC
CRACK  1 = {  DISPLACEMENT_X CRACK_DIS
              DISPLACEMENT_Y CRACK_DIS
              DISPLACEMENT_X PLAS_NEAR_TIP
              DISPLACEMENT_Y PLAS_NEAR_TIP
           }

# Déclaration de l'interface pour la gestion du contact et coefficient de pénalité
INTERFACE  1 ={ LAW = UNILATERAL
                LATIN_K = 1.13636e+11
                BOTH_SIDE_INTERFACE }

# Calcul des facteurs d'intensité des contraintes
DO_POSTPRO_AUTOMATIC
```

Fichier géométrie de la fissure *exemple.GEF*

```
# Paramètres
VECTOR 1 ={ POS_X =   -1.0e+00   POS_Y =  0.e+00 POS_Z =  0.e+00 }
VECTOR 2 ={ POS_X =   1.75e+00   POS_Y =  0.e+00 POS_Z =  0.e+00 }

# Eléments
POINT  1  = { BY_PARAM      NB =  1 LIST =  1 }
POINT  2  = { BY_PARAM      NB =  1 LIST =  2 }
SEGMENT 3 = { BY_POINTS     NB =  2 LIST =  1 2 }

# Interface
INTERFACE 1 = { NB = 1 INTERIOR_LIST =  3  }

# Fissure
CRACK 1 = { NB = 1  FRONT_LIST = 2   NB = 1 INTERIOR_LIST =  3 }
```

Fichier des paramètres de l'algorithme de Newton-Raphson quasi-statique *exemple.PAR*

```
# NB d'iterations d'équilibre maxi
MAX_ITERS  = 2000

# Tolérance pour les critères d'arrêt
ERROR_TOL  = 1.E-04

# Pas de temps
INITIAL_TIME_STEP_LENGHT = 0.1

# Fréquence de post-traitement et de calcul des FIC
EXPORT_FREQUENCY    = 1
POSTPRO_FREQUENCY   = 1
```

Fichier de paramètres pour la propagation *exemple_growth.PAR*

```
# Loi de propagation en da et valeur
CRACK_GROWTH_DELTA_LAW = cyclic_fixed
DELTA_A = 0.05

# Nombre de propagations et instants correspondants
CRACK_GROWTH_NUMBER = 12
CRACK_GROWTH_TIMES = ( 9. 17. 25. 33. 41. 49. 57. 65. 73. 81. 89. 97.)

# Critère de direction de propagation
CRACK_GROWTH_ANGLE_LAW = ahead
```

Fichier matériau *exemple.MAT*

```
# nom du matériau
NAME             = acier

# module de Young, coefficent de Poisson
YOUNG_MODULUS    = 2.0e11
POISSON_RATIO    = 0.3

# précision pour l'algorithme d'écoulement plastique
PLASTIC_PREC     = 0.0001

# paramètres du modèle plastique
NB_PLASTIC_POINT = 100
PLASTIC_CURVE_TYPE = 1
PLASCOEF_A       = 435.0e6
PLASCOEF_M       = 0.27
PLASCOEF_R       = 200.0e6
```

Bibliographie

[ALA 91] ALART P., CURNIER A.
A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, n° 3, 1991, p. 353-375.

[ALB 38] ALBERT W.
Über treibseile am Harz. *Archive für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde*, vol. 10, 1838, p. 215-234.

[AMA 74] AMAZIGO J.
Fully plastic crack in an infinite body under anti-plane shear. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 10, 1974, p. 1003-1015.

[ARE 05] AREIAS P., BELYTSCHKO T.
Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, 2005, p. 760-788.

[BAB 97] BABUŠKA I., MELENK J.
The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 727-758.

[BAR 74] BARSOUM R. S.
On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, n° 1, 1974, p. 25-37.

[BAS 10] BASQUIN O.
The exponential law of endurance tests. *Proceedings of the American Society For Testing and Materials*, vol. 10, 1910, p. 625-630.

[BAT 97] BATHIAS C., BAILON J.
La fatigue des matériaux et des structures. Hermès, Paris, 2ème édition, 1997. 684 p.

[BÉC 05] BÉCHET E., MINNEBO H., MOËS N., BURGARDT B.
Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, 2005, p. 1033-1056.

[BEL 94] BELYTSCHKO T., LU Y., GU L.
Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, 1994, p. 229-256.

[BEL 02] BELYTSCHKO T., LIU W. K., MORAN B.
Nonlinear finite element for continua and structures. Wiley, Chichester, Chichester, 1ère édition, 2002. 650 p.

[BIT 96] BITTENCOUR T., WAWRZYNEK P. A., INGRAFFEA A. R., SOUSA J. L.
Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, n^o 2, 1996, p. 321-334.

[BLA 99] BLACK T., BELYTSCHKO T.
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, 1999, p. 601-620.

[BOR 04] DE BORST R., GUTIÉRREZ M., WELLS G., REMMERS J., ASKES H.
Cohesive-zone models, high-order continuum theories and reliability methods for computational failure anlysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, 2004, p. 289-315.

[BOR 06] DE BORST R., REMMERS J., NEEDLEMAN A.
Mesh independant discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Engineering fracture mechanics*, vol. 73, n^o 2, 2006, p. 160-177.

[BOU 00] BOUCHARD P. O., BAY F., CHASTEL Y., TOVENA I.
Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189, 2000, p. 723-742.

[BOU 03] BOUCHARD P. O., BAY F., CHASTEL Y.
Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, 2003, p. 3887-3908.

[BOU 05] BOUVARD J., CHABOCHE J., FEYEL F., GALLERNEAU F.
Simulation numérique de la propagation de fissure dans les aubes de turbine. 17ème *Congrès Français de Mécanique, Troyes*, 2005.

[BUI 78] BUI H.
Mécanique de la rupture fragile. Masson, Paris, 1ère édition, 1978. 215 p.

[BUI 93] BUI H.
Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux. Eyrolles, Paris, 1993. 236 p. (Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France).

[CHA 96] CHAMPANEY L.
Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1996. 111p.

[CHA 03] CHAMPANEY L.
Contact entre solides élastiques. Notes de cours de DESS Dynamique des Structures Modernes dans leur Environnement, Université de Versailles / Saint-Quentin en Yvelines, 2003.

[CHE 02] CHESSA J., SMOLINSKI P., BELYTSCHKO T.
The extended finite element method for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 1959–1977.

[CHE 03a] CHESSA J., BELYTSCHKO T.
An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, 2003, p. 2041-2064.

[CHE 03b] CHESSA J., BELYTSCHKO T.
An enriched finite element method for axisymmetric two-phase fluids. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 70, n° 1, 2003, p. 10-17.

[CHE 03c] CHESSA J., WANG H., BELYTSCHKO T.
On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, 2003, p. 1015-1038.

[COF 54] COFFIN L.
A study of the effect of cyclic thermal stresses on a ductile material. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 76, 1954, p. 931-950.

[DAV 85] DAVY A.
Modélisation de la fissuration en fatigue sous chargements d'amplitude variable. Application aux spectres d'avions civils. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1985.

[DOL 00] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.
Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 36, n° 3, 2000, p. 235-260.

[DOL 01a] DOLBOW J., MERLE R.
Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method. *Computational Mechanics*, vol. 28, n° 5, 2001, p. 339-350.

[DOL 01b] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T.
An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2001, p. 6825–6846.

[DUA 96] DUARTE C., ODEN J.
An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, 1996, p. 237-262.

[DUA 00a] DUARTE C., BABUŠKA I., ODEN J.
Generalized finite element methods for three-dimensionnal structural mechanics problems. *Computers and Structure*, vol. 77, 2000, p. 215–232.

[DUA 00b] DUARTE C., HAMZEH O., LISZKA T., TWORZYDLO W.
A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2000, p. 2227–2262.

[DUF 04] DUFLOT M., NGUYEN-DANG H.
A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, 2004, p. 1945–1961.

[DUG 60] DUGDALE D.
Yielding of Stell Sheets Containing Slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, 1960, p. 100-104.

[ELB 70] ELBER W.
Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2, 1970, p. 37–45.

[ELG 06a] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.
Appropriate extended functions for X-FEM simulation of elastic-plastic crack growth with frictional contact. *European Journal of Computational Mechanic*, vol. 15, n° 1-2-3, 2006, p. 155-166.

[ELG 06b] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.
Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006, p. 501–515.

[ELG 06c] ELGUEDJ T., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.
A mixed Augmented Lagrangian - eXtended Finite Element Method for modeling elastic-plastic fatigue crack growth with frictional contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, accepted, ,* 2006.

[FLE 86] FLECK N.
Finite element analysis of plasticity-induced crack closure under plane-strain conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 25, n° 4, 1986, p. 441-449.

[FLE 97] FLEMING M., CHU Y. A., MORAN B., BELYTSCHKO T.
Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 1483-1504.

[GEN 06] GENIAUT S., MASSIN P., MOËS N.
X-FEM for 3D crack simulation with frictional contact. *Proceedings of the 16th European Conference on Fracture, Alexandroupolis, Greece*, 2006.

[GER 80] GERMAIN P., MULLER P.
Mécanique des milieux continus. Masson, Paris, 1980. 344 p.

[GEU] GEUZAINE C., REMACLE J.
. « Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities ». http ://www.gueuze.org/gmsh (consulté le 4/07/2006).

[GOO 99] GOODMAN J.
Mechanics applied to engineering. Longmas-Green, London, 1899. 605 p.

[GOS 98] GOSZ M., DOLBOW J., MORAN B.
Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensionnal interface cracks. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 15, 1998, p. 1763-1783.

[GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T.
Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets - Part 2 : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, 2002, p. 2569–2586.

[GRI 21] GRIFFITH A.
The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, vol. A221, 1921, p. 163-197.

[GUI 05] GUIDAULT P.
Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2005.

[HAM 05] HAMAM R., POMMIER S., BUMBIELER F.
Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, 2005, p. 1342-1346.

[HEI 06] HEINTZ H.
On the numerical modelling of quasi-static crack growth in linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 65, 2006, p. 174-189.

[HIT 82] HITTINGER M., COMBESCURE A.
Introduction d'éléments joints dans le programme INCA. Rapport DEMT SMTS LAMS n^o 82-31, 1982, CEA Saclay.

[HUT 68] HUTCHINSON J.
Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, p. 13-31.

[IRW 57] IRWIN G.
Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, 1957, p. 361-364.

[JI 02] JI H., CHOPP D., DOLBOW J.
A hybrid finite element/level set method for modelling phase transformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, 2002, p. 1209–1233.

[LAB 05] LABORDE P., POMMIER J., RENARD Y., SALAÜN M.
High order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, 2005, p. 354-381.

[LAR 05] LARSSON R., FAGERSTRÖM M.
A framework for fracture modelling based on the material forces concept with XFEM kinematics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, 2005, p. 1763-1788.

[LEB 00] LEBLOND J.
Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips. *European Journal of Mechanics -A/Solids*, vol. 19, 2000, p. 633-647.

[LEG 05a] LEGAY A., WANG H., BELYTSCHKO T.
Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, 2005, p. 991-1008.

[LEG 05b] LEGRAIN G., MOËS N., VERRON E.
Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, 2005, p. 290–314.

[LEG 06a] LEGAY A., CHESSA J., BELYTSCHKO T.
An Eulerian-Lagrangian method for fluid-strcture interaction based on leve sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006, p. 2070-2087.

[LEG 06b] LEGRAIN G., MOËS N., HUERTA A.
Etude de la stabilité d'une formulation incompressible traitée par X-FEM. *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 15, 2006, p. 257-268.

[LEI 95] LEITAO V., ALIABADI M., ROOKE D.
Elastoplastic simulation of fatigue crack growth - Dual boundary element formulation. *International Journal of Fatigue*, vol. 17, n^o 5, 1995, p. 353-363.

[LEI 00] LEITAO V., ALIABADI M.
Boundary element methods for the analysis of crack growth in non-linear fracture. *International Journal of Materials and Product Technology*, vol. 16, n^o 1-2, 2000, p. 104-116.

[LEI 05] LEI Y.
J-integral evaluation for cases involving non-proportional stressing. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, 2005, p. 577-596.

[LEM 96] LEMAITRE J., CHABOCHE J.
Mécanique des matériaux solides. Dunos, Paris, 2ème édition, 1996. 544 p.

[LI 86] LI Y., WANG T.
Higher-order asymptotic field of tensile plane-strain nonlinear crack problem. *Scientia Sinica (Series A)*, vol. 29, 1986, p. 941-955.

[MA 05] MA S.
Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élasto-plastique avec prise en compte des contraintes résiduelles. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2005. 171 p.

[MAN 54] MANSON S.
Behaviour of materials under conditions of thermal stress. National advisory commission on aeronautics : Report n^o 1170, 1954, Lewis Flight Propulsion Laboratory, Cleveland.

[MAR 99] MARIE S.
Approche énergétique de la rupture ductile. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1999. 277 p.

[MAR 03] MARIANI S., PEREGO U.
Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, 2003, p. 103–126.

[MAS 05] MASSIN P., GENIAUT S., MOËS N.
Fissuration avec X-FEM et contact. *Actes du septième colloque national en Calcul de structure.*, vol. 2, Hermès-Science, Paris, 2005, p. 623-628.

[MAU 95] MAUGIN G.
Material forces : concepts and application. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 48, 1995, p. 213-245.

[MCC 89a] MCCLUNG R., SEHITOGLU H.
On the finite element analysis of fatigue crack closure - 1. Basic modeling issues. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 33, n^o 2, 1989, p. 237-252.

[MCC 89b] MCCLUNG R., SEHITOGLU H.
On the finite element analysis of fatigue crack closure - 2. Numerical results. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 33, n^o 2, 1989, p. 253-272.

[MEN 06a] MENOUILLARD T., ELGUEDJ T., COMBESCURE A.
Mixed-mode stress intensity factors for graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, 2006, p. 1946-1959.

[MEN 06b] MENOUILLARD T., RÉTHORÉ J., COMBESCURE A., BUNG H.
Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering, in press, ,* 2006.

[MIN 45] MINER M.
Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, 1945, p. 359-365.

[MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.
A Finite Element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131–150.

[MOË 02] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T.
Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets - Part 1 : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 2549–2568.

[MOR 87] MORAN B., SHIH C.
Crack tip and associated domain integral from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 27, 1987, p. 615-642.

[NAS 02] NASA
Fatigue Crack Growth Computer Program "NASGRO" Version 3.0. National Aeronautics and Space Administration, 2002.

[NES 06] NESPUREK L., BOURINET J., GRAVOUIL A., LEMAIRE M.
Some approaches to improve the computational efficiency of the reliability analysis of complex crack propagation problems. *Third International ASRANet Colloquium*, Glasgow, UK, July 10-12, 2006.

[NEW 81] NEWMAN JR J.
A crack closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading. *ASTM STP*, vol. 748, 1981, p. 53-84.

[NGU 01] NGUYEN O., REPETTO E., ORTIZ N., RADOVOTZKY R.
A cohesive model for fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, vol. 110, 2001, p. 351-369.

[NGU 05] NGUYEN T., GOVINDJEE S., KLEIN P., GAO H.
A material force method for inelastic fracture mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53, 2005, p. 91-121.

[O'D 91] O'DOWD N., SHIH C.
Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter : Part I - Structure of fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 39, n° 8, 1991, p. 989–1015.

[O'D 92] O'DOWD N., SHIH C.
Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter : Part II - Fracture applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 40, n° 5, 1992, p. 939–963.

[PAL 24] PALMGREN A.
Die lebensdauer von kugellagern. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, vol. 68, 1924, p. 339-341.

[PAN 90] PAN J.
Asymptotic analysis of a crack in a power-law material under combined in-plane and out-of-plane shear loading conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38, n° 2, 1990, p. 133-159.

[PAN 92] PAN J., SHIH C.
Elastic-plastic analysis of combined mode I, II and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, n° 22, 1992, p. 2795-2814.

[PAR 61] PARIS P., GOMEZ M., ANDERSON W.
A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, vol. 13, 1961, p. 9-14.

[PAR 63] PARIS P., ERDOGAN F.
A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 528–534.

[PLU 89] PLUVINAGE G.
Mécanique élasto-plastique de la rupture, critères d'amorçage. Cépaduès, Toulouse, 1ère édition, 1989. 501 p.

[POM 05a] POMMIER S., RISBET S.
Time derivative equations for fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fracture*, vol. 131, 2005, p. 79-106.

[POM 05b] POMMIER S., RISBET S.
Time derivative equations for mode I fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, 2005, p. 1297-1306.

[PON 39] PONCELET J.
Introduction à la mécanique industrielle physique ou expérimentale. Mme Thiel, Metz, 2ème édition, 1839. 719 p.

[RAN 06] RANNOU J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.
A multi-grid eXtended Finite Element Method for elastic crack growth simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, , accepted, 2006.

[RAO 04a] RAO B., RAHMAN S.
An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, 2004, p. 197-223.

[RAO 04b] RAOUS M., CESCOTTO S., CURNIER A., DUBOIS F., MILLARD A.
Contact, frottement, adhésion : bases avancées récentes en modélisation et simulation numérique. Cours de l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, 2004.

[REM 03] REMMERS J., DE BORST R., NEEDLEMAN A.
A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, vol. 31, 2003, p. 69-77.

[RÉT 05a] RÉTHORÉ J.
Méthode éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique de fissures. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005. 143 p.

[RÉT 05b] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., COMBESCURE A.
An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, 2005, p. 631–659.

[RÉT 05c] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., MORESTIN F., COMBESCURE A.
Estimation of mixed mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral. *International Journal of Fracture*, vol. 132, 2005, p. 65-79.

[RIB 04] RIBEAUCOURT R., BAIETTO-DUBOURG M., GRAVOUIL A.
A mixed mode fatigue crack model with the coupled X-FEM/LATIN method. Application to RCF. *Proceedings of the 31st Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 2004.

[RIB 05] RIBEAUCOURT R., BAIETTO-DUBOURG M., GRAVOUIL A.
A mixed mode fatigue crack growth model applied to rolling contact fatigue. *Third World Tribology Congress*, Washington DC, USA, september 12-16 2005.

[RIC 68a] RICE J.
Mathematical analysis in the mechanics of fracture. LIEBOWITZ H., Ed., *Fracture, An Advanced Treatise*, vol. II, p. 191-311 Academic Press, New-York, 1968.

[RIC 68b] RICE J.
A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, 1968, p. 379-386.

[RIC 68c] RICE J., ROSENGREN G.
Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, p. 1-12.

[SAN 05] SANDER M., RICHARD H.
Finite element analysis of fatigue crack growth with interspersed mode I and mixed mode overloads. *International Journal of Fatigue*, vol. 27, 2005, p. 905–913.

[SAN 06] SANDER M., RICHARD H.
Experimental and numerical investigations on the influence of the loading direction on the fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, vol. 28, 2006, p. 583–591.

[SCH 89] SCHMITT W., KIENZLER R.
The J-Integral concept for elastic-plastic material behavior. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 32, n° 3, 1989, p. 409-418.

[SIM 92] SIMO J. C., LAURSEN T. A.
An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, vol. 42, n° 1, 1992, p. 97–116.

[SOL 03] SOLANKI K., DANIEWICZ S., NEWMAN J. J.
Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 12, 2003, p. 1475-1489.

[SOL 04a] SOLANKI K., DANIEWICZ S., NEWMAN J. J.
Finite element analysis of plasticity-induced fatigue crack closure : an overview. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n° 2, 2004, p. 149–171.

[SOL 04b] SOLANKI K., DANIEWICZ S., NEWMAN J. J.
A new methodology for computing crack opening values from finite element analyses. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n° 7-8, 2004, p. 1165-1175.

[STR 00a] STROUBOULIS T., BABUŠKA I., COPPS K.
The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181, 2000, p. 43–69.

[STR 00b] STROUBOULIS T., COPPS K., BABUŠKA I.
The Generalized Finite Element Method : an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, 2000, p. 1401-1417.

[SUF 04] SUFFIS A.
Dévloppement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impact. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2004. 170 p.

[SUK 00a] SUKUMAR N., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T.
Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2000, p. 6183-6200.

[SUK 00b] SUKUMAR N., MOËS N., MORAN B., BELYTSCHKO T.
Extended finite element method ofr three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, p. 1549-1570.

[SUO 92a] SUO X. Z., COMBESCURE A.
On the application of G(θ) method and its comparison with De Lorenzi's approach. *Nuclear engineering and design*, vol. 135, 1992, p. 207-224.

[SUO 92b] SUO X., COMBESCURE A.
Double virtual crack extension method for crack growth stability and assessment. *International Journal of Fracture*, vol. 57, 1992, p. 127-150.

[SUO 96] SUO X. Z., VALETA M. P.
Quelques remarques sur l'utilisation de la méthode G(θ) pour les éléments de coques implantés dans CASTEM 2000. Rapport DMT n° 96-305, 1996, CEA Saclay.

[SUT 83] SUTTON M., WOLTERS W., PETERS W., RANSON W., MCNEILL S.
Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image Vision Computing*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 133-139.

[SUT 86] SUTTON M., CHENG M., PETERS W., CHAO Y., MCNEILL S.
Application of an optimized digital image correlation method to planar deromation analysis. *Image Vision Computing*, vol. 4, n° 3, 1986, p. 143-150.

[TOU 97] TOUCHAL-MGUIL S.
Une technique de corrélation d'images numériques : application à la détermination de courbes limites de formages et proposition d'un critère de striction. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1997. 194 p.

[TRÄ 98] TRÄDEGÅRD A., NILSSON F., ÖSTLUND S.
FEM-remeshing technique applied to crack growth problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 160, 1998, p. 115-131.

[TUH 97] TUHKURI J.
Dual boundary element analysis of closed cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 2995-3014.

[TVE 04] TVERGAARD V.
On fatigue crack growth in ductile materials by crack tip blunting. *Journal of the Mechanics ands Physics of Solids*, vol. 52, 2004, p. 2149-2166.

[VEN 06] VENTURA G.
On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 66, 2006, p. 761-795.

[WAG 01] WAGNER G., MOËS N., LIU W., BELYTSCHKO T.
The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, 2001, p. 293–313.

[WAG 03] WAGNER G., GHOSAL S., LIU W.
Particule flow simulations using lubrication theory solution enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, 2003, p. 1261-1289.

[WEE 05] WEERTMAN J.
Mode III crack in power law hardening solid. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, 2005, p. 2011-2032.

[WEL 01] WELLS G., SLUYS L.
A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, 2001, p. 2667-2682.

[WEL 02a] WELLS G., DE BORST R., SLUYS L.
A consistent geometrically non-linear approach for delamination. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, 2002, p. 1333-1355.

[WEL 02b] WELLS G., SLUYS L., DE BORST R.
Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, 2002, p. 1235-1256.

[WÖH 60] WÖHLER A.
Versuche über die festigkeit der eisenbahnwagenachsen. *Zeitschrift für Bauwesen*, vol. 10, 1860.

[WRI 89] WRIGGERS P., VU VAN T., STEIN E.
Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers and Structures*, vol. 37, n° 3, 1989, p. 319-331.

[XU 98] XU Y., SAIGAL S.
Element-free Galerkin study of steady quasi-static crack growth in plane strain tension in elastic-plastic materials. *Computational Mechanics*, vol. 22, 1998, p. 255-265.

[YAN 95] YAN A., NGUYEN-DANG H.
Multiple-cracked fatigue crack growth by BEM. *Computational Mechanics*, vol. 16, 1995, p. 273–280.

[YAN 05] YANG Z.
An energy-based crack growth criterion for modelling elastic-plastic ductile failure. *Mechanics Research Communications*, vol. 32, 2005, p. 514-524.

[YAU 80] YAU J., WANG S., CORTEN H.
A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, 1980, p. 335-341.

[YON 06] YONEYAMA S., MORITOMO Y., TAKASHI M.
Automatic evaluation of mixed-mode stress intenisty factors utilizing digital image correlation. *Strain*, vol. 42, 2006, p. 21–29.

[ZI 03] ZI G., BELYTSCHKO T.
New crack-tip elements for X-FEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, 2003, p. 2221-2240.