

THESE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE LYON :
MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (M.E.G.A.)
SPECIALITE : MECANIQUE

par

Pauline CAVIN

Ingénieur I.N.S.A. de Lyon

**METHODE ELEMENTS FINIS AVEC RAFFINEMENT SPATIAL ET
TEMPOREL ADAPTATIF ET AUTOMATIQUE : "STAR-METHOD"
(SPACE TIME AUTOMATIC REFINEMENT)**

Soutenue le 23 juin 2006 devant la commission d'examen :

Jury :	Pr. M. Bonnet	Rapporteur
	Pr. A. Combescure	Directeur
	Pr. D. Dureisseix	Rapporteur
	Pr. B. Gay	Président
	Dr. A. Suffis	

Invité :	Pr. A.A. Lubrecht	Co-directeur
	Dr. A. Gravouil	Co-directeur

SIGLE	ECOLE DOCTORALE 2005	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
	<u>CHIMIE DE LYON</u> Responsable : M. Denis SINOU	M. Denis SINOU Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2 ^{ème} étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 sinou@univ-lyon1.fr
E2MC	<u>ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS</u> Responsable : M. Alain BONNAFOUS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH M. Alain BONNAFOUS Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Alain.bonnafous@ish-lyon.cnrs.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 Daniel.Barbier@insa-lyon.fr
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROISp	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 E2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u> http://www.insa-lyon.fr/ediis M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 ediis@insa-lyon.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> http://www.ibcp.fr/ediss M. Alain Jean COZZONE	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 cozzone@ibcp.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> http://www.ec-lyon.fr/sites/edml M. Jacques JOSEPH	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 Jacques.Joseph@ec-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u> http://www.ens-lyon.fr/MathIS M. Franck WAGNER	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Braconnier Bureau 101 Bis, 1 ^{er} étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 wagner@desargues.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html M. François SIDOROFF	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systèmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr

Résumé

La dynamique non linéaire des structures conduit à des modèles numériques qui nécessitent des moyens de calcul très importants voire prohibitifs. La méthode numérique développée, basée sur la méthode des éléments finis, est proposée dans le but de réaliser de telles simulations.

Le principe repose sur l'optimisation du maillage spatial et temporel tout en contrôlant la qualité de la solution. Ainsi, une méthode de résolution avec plusieurs échelles d'espace et de temps, la "STAR-method", est mise en place (Space Time Automatic Refinement). La stratégie adoptée permet d'identifier automatiquement, au moyen d'indicateurs d'erreurs, les zones où les discrétisations spatiale et temporelle ne sont pas suffisamment fines pour satisfaire le critère de précision requis.

L'apport d'une stratégie de type "STAR-method" est multiple. L'utilisateur n'intervient plus pour définir le maillage adapté à une précision donnée. Le raffinement local de maillage permet de concentrer l'effort de résolution uniquement dans les zones spatiales et temporelles de la structure qui le nécessitent. Le nombre de degrés de liberté et le nombre de piquets de temps sont réduits par rapport à une méthode classique. Enfin, la précision de la solution est contrôlée au cours de la résolution.

MOTS-CLES : "STAR-method", raffinement de maillage, indicateur d'erreur, méthode multigrille, précision contrôlée, domaine espace temps, méthode éléments finis, dynamique rapide, stratégie multiechelle

Abstract

Complex numerical simulations of non linear dynamic systems require large computational efforts. The developed method, based on finite element techniques, aims to reduce the computing time.

The idea is to optimize the spatial and temporal mesh controlling the solution quality. So, the proposed method solves the problem on different spatial and temporal grids. The method is named "STAR-method" for Space Time Automatic Refinement. With the "STAR-method", an error indicator detects the areas where spatial and temporal discretisations are insufficient to obtain the required precision. The "STAR-method" then automatically refines the meshes in these domains.

Results show several advantages of the "STAR-method". The final spatial and temporal meshes become user independent. The local space time mesh refinement focuses the calculational effort only there where it is necessary. With the "STAR-method" the number of degrees of freedom and the number of the time steps are reduced compared to classical FEM. Finally, the solution precision is controlled during the calculation. At the end of calculation, the user obtains the solution with constant precision over the entire calculational domain and the spatial and temporal mesh associated.

KEY WORDS : "STAR-method", mesh refinement, error indicator, multigrid method, controlled precision, space time domain, finite element method, dynamic, multiscale strategy

Avant propos

Je remercie Alain Combescure de m'avoir accueilli au sein du LaMCoS pour ces trois années enrichissantes.

Merci à Marc Bonnet et David Dureisseix de s'être acquitté avec soin de la tâche de rapporteur. Je remercie également Alain Combescure, Bernard Gay, Anthony Gravouil, Ton Lubrecht et Arnaud Suffis pour leur participation à mon jury.

J'ai une infinie reconnaissance envers le trio des directeurs Alain Combescure, Anthony Gravouil et Ton Lubrecht. La confiance et la liberté qu'ils m'ont accordées, le temps qu'ils m'ont consacré, les nombreux échanges ont attisé ma motivation tout au long de ces trois ans. Encore merci pour leur soutien.

Je remercie la Snecma et plus particulièrement Stéphane Guisti et Arnaud Suffis pour leur collaboration.

Je dois une fière chandelle à mon comité de soutien informatique et logistique : Nans B., Atanas C., Anne-Marie C., Isabelle C., Michel C., Christelle et Jean-Michel D., Thomas E., Anthony G., Thomas M., Julien R. qui m'ont été d'un grand secours à maintes reprises.

Un immense merci à mon comité de relecture : Dédé C., Alain Co., Bruno D., Anthony G., Ton L., Nelly V.

Merci à ceux qui m'ont aidé à user un peu plus mes baskets de course : Bruno D., Jarir M., Julien R., Stéphane V. et Benoit W.

Merci à mes nombreux collègues de bureau qui m'ont toujours témoigné leur sympathie.

Je ne saurais oublier les franches rigolades partagées avec Vincent B., Atanas C., Mathilde M., Manue Q., Phiphi S., Fabrice V. et Benoit W.

Merci à Fabrice V. pour son soutien permanent.

Je dédie ce travail à ma Famille.

Table des matières

Table des figures	IX
Liste des tableaux	XV
Notations	XVII
1 Introduction	1
1.1 Motivations	1
1.2 Etat de l'art	3
1.2.1 Mesure d'erreur	3
1.2.2 Technique de remaillage spatial	5
1.2.3 Technique de raffinement spatial de maillage	7
1.2.4 Technique multigrilles	8
1.2.5 Adaptabilité temporelle	9
1.2.6 Technique de décomposition en sous-domaines	10
1.2.7 Couplage de l'adaptabilité spatiale et temporelle	11
1.2.8 Alternatives à la méthode des éléments finis	11
1.3 Objectifs	12
2 Outils numériques	15
2.1 Problème de référence	15
2.1.1 Modélisation d'un matériau linéaire	17
2.1.2 Modélisation d'un matériau non linéaire	17
2.2 Discrétisation de l'espace et du temps	18
2.2.1 Discrétisation de l'espace	18
2.2.2 Discrétisation du temps	19
2.3 Méthode de résolution des équations d'équilibre - Cas linéaire	20
2.3.1 Méthode de Crout	21
2.3.2 Méthode multigrille	21
2.4 Méthode de résolution des équations d'équilibre - Cas non linéaire	24
2.4.1 Méthode de Newton	25
2.4.2 Méthode multigrille : FAS	25
2.5 Schéma d'intégration temporelle	28
2.5.1 Schéma de Newmark	28
2.5.2 Etude classique de la stabilité d'un schéma	29
2.5.3 Stabilité du schéma de Newmark	30
2.5.4 Stabilité du schéma de Newmark par la méthode énergétique	30
2.5.5 Algorithmes de Newmark	31
2.6 Bilan énergétique numérique dans le cadre des schémas de Newmark	33
2.7 Synthèse	34

3	Raffinement spatial local : cas linéaire	37
3.1	Principe de la “S(T)AR-method”	37
3.1.1	Principe du raffinement spatial local	37
3.1.2	Gestion des conditions aux limites sur $\partial_{1*}\Omega^j$	41
3.1.3	Mise en équation	42
3.1.4	Mesure d’erreur	43
3.2	Etudes numériques	45
3.2.1	Cas tests	46
3.2.2	Influence de l’indicateur d’erreur	48
3.2.3	Influence du maillage du premier niveau	53
3.2.4	Précision des résultats	53
3.2.5	Efficacité	56
3.2.6	Echelle d’analyse, ordre de convergence et singularité	58
3.3	Synthèse	59
4	Raffinement spatial et temporel local : cas linéaire	63
4.1	Principe de la “STAR-method”	63
4.1.1	Domaine espace temps élémentaire	63
4.1.2	Principe de construction d’un maillage spatial et temporel de niveau $j + 1$ hiérarchique au niveau j	64
4.1.3	Principe de raffinement de maillage spatial et temporel local	66
4.1.4	Stabilité de l’algorithme	68
4.1.5	Gestion des conditions aux limites et initiales	72
4.1.6	Mise en équation	76
4.1.7	Mesure d’erreur	78
4.2	Etude numérique unidimensionnelle	79
4.2.1	Cas test	79
4.2.2	Analyse unidimensionnelle	80
4.2.3	Convergence et précision	81
4.2.4	Bilan énergétique numérique	83
4.3	Etude numérique bidimensionnelle	86
4.3.1	Cas test	86
4.3.2	Analyse bidimensionnelle	86
4.4	Synthèse	88
5	Raffinement spatial local : cas non linéaire	95
5.1	Modélisation des solides élastoplastiques	95
5.1.1	Eléments de thermodynamiques pour un matériau élastoplastique	95
5.1.2	Algorithme de plasticité	97
5.2	Principe de la “S(T)AR-method” non linéaire	98
5.2.1	Stratégie des V cycles	98
5.2.2	Mesure d’erreur	101
5.3	Etude numérique	101
5.3.1	Cas test	101
5.3.2	Etude numérique	102
5.4	Synthèse	105
6	Bilan - Perspectives	109

A	Méthode du gradient conjugué pour la résolution d'un système linéaire	115
A.1	Méthode générale	115
A.2	Conditionnement	117
A.3	Algorithme	118
A.4	Gradient conjugué par bloc	118
B	Autre schéma d'intégration temporelle : Galerkin Discontinu en temps	121
B.1	Principe	121
B.2	Comparaison succincte avec le schéma de Newmark	124
C	Mesure d'erreur	127
D	Démonstration de stabilité de la "STAR-method" dans le cas général	129
E	Structure de données	133
E.1	Structure de données pour la statique linéaire et la quasi-statique non linéaire . .	133
E.2	Structure de données pour la dynamique linéaire	134
F	Organigrammes	139
F.1	Statique linéaire	139
F.2	Dynamique linéaire	139
F.3	Quasi-statique non linéaire	139
	Bibliographie	143

Table des figures

1.1	<i>Exemple de maillage par éléments finis d'une aube de compresseur seule (à gauche), d'une aube et d'un projectile (à droite). Images fournies par la SNECMA.</i>	2
1.2	<i>Les différentes solutions et sources d'erreurs liées à une modélisation numérique.</i>	4
1.3	<i>Procédure de remaillage [70].</i>	5
1.4	<i>Les différentes méthodes de remaillage [70].</i>	6
1.5	<i>Exemple de maillages hiérarchiques et non hiérarchiques</i>	7
1.6	<i>Illustration du principe de résolution la méthode multigrilles.</i>	8
1.7	<i>Exemple de modélisation d'une structure par la technique de sous-domaines [52].</i>	10
1.8	<i>Exemple de maillage d'une plaque trouée fissurée par la méthode X-FEM.</i>	12
2.1	<i>Modélisation du problème de référence en admettant l'hypothèse des petites perturbations.</i>	16
2.2	<i>Exemple de discrétisation spatiale du problème de référence avec des éléments triangulaires.</i>	19
2.3	<i>Discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en r pas de temps constants.</i>	20
2.4	<i>Représentation d'un V cycle sur quatre niveaux</i>	24
2.5	<i>Représentation du FMG avec quatre niveaux</i>	24
3.1	<i>Principe de l'algorithme de résolution de la "S(T)AR-method" pour un problème bidimensionnel. Les parties grisées représentent la part de chaque domaine où la solution a atteint la précision ϵ requise. La flèche située à gauche matérialise le sens de lecture du graphique.</i>	38
3.2	<i>Raffinement hiérarchique unidimensionnel d'un élément fini parent barre ou poutre en deux éléments finis enfants de même type.</i>	39
3.3	<i>Raffinement hiérarchique bidimensionnel d'un élément fini triangulaire et d'un élément fini quadrangulaire parents en quatre éléments finis triangulaires et quadrangulaires enfants.</i>	39
3.4	<i>Raffinement hiérarchique tridimensionnel d'un élément fini cubique parent en 8 éléments finis cubiques enfants.</i>	39
3.5	<i>Raffinement hiérarchique tridimensionnel d'un élément fini tétraédrique parent en 8 éléments finis tétraédriques enfants.</i>	40
3.6	<i>Exemple, pour des problèmes bidimensionnels, des conditions de liaison appliquées au bord $\partial_{1*}\Omega^j$ d'un domaine local j.</i>	41
3.7	<i>Définition du domaine Ω^{j*} et Ω^{j+}.</i>	43
3.8	<i>Restriction de quantités nodales et de quantités situées aux points d'intégration d'un élément du niveau $j + 1$ vers le niveau j.</i>	44
3.9	<i>Première version de la plaque trouée sollicitée en traction.</i>	46
3.10	<i>Maillage de niveau 1 choisi pour la première version de la plaque trouée.</i>	47
3.11	<i>Deuxième version de la plaque trouée sollicitée en traction.</i>	47
3.12	<i>Maillage de niveau 1 choisi pour la deuxième version de la plaque trouée.</i>	47
3.13	<i>Plaque fissurée sollicitée en traction</i>	48

3.14	<i>Poutre tridimensionnelle sollicitée en flexion</i>	48
3.15	<i>Maillage de niveau 1 de la poutre tridimensionnelle sollicitée en flexion</i>	49
3.16	<i>Maillages fins obtenus pour le cas A avec les quatre indicateurs d'erreurs.</i>	50
3.17	<i>Contrainte de Von Mises dans une région proche du trou. Le rouge représente les zones de plus fortes contraintes et le bleu celle des plus faibles.</i>	51
3.18	<i>Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau pour le cas A pour les quatre critères d'erreurs.</i>	51
3.19	<i>Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau pour le cas test C pour les quatre indicateurs d'erreurs.</i>	52
3.20	<i>Distance d d'un point P à la pointe de fissure.</i>	52
3.21	<i>Maillages de niveau 1 choisis pour la plaque fissurée (Cas C).</i>	54
3.22	<i>Maillages fins obtenus pour la plaque fissurée (Cas C).</i>	55
3.23	<i>Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau pour les cinq maillages de la plaque fissurée avec l'indicateur d'erreur défini en énergie.</i>	56
3.24	<i>Raffinement de maillage tridimensionnel d'une poutre en I encastrée à une extrémité et sollicitée en flexion à l'autre</i>	58
3.25	<i>Evolution du maximum de l'erreur pour le cas B avec un indicateur d'erreur en déplacement et une précision de $\epsilon = 0.0001$.</i>	59
3.26	<i>Maillages des niveaux 1 à 6 pour la plaque trouée obtenus avec un indicateur basé sur les déplacements pour une précision $\epsilon = 0.0001$.</i>	60
3.27	<i>Maillages des niveaux 7 à 9 pour la plaque trouée obtenus avec un indicateur basé sur les déplacements pour une précision $\epsilon = 0.0001$.</i>	61
4.1	<i>Domaine espace temps élémentaire $\Omega_{t_m e_i}$.</i>	64
4.2	<i>Définition des échelles spatiale et temporelle hiérarchiques pour deux niveaux successifs j et $j + 1$ correspondant aux domaines espace temps de la figure 4.3.</i>	65
4.3	<i>Diagramme espace temps élémentaire parent sur le niveau j et les quatre domaines espace temps élémentaires enfants du niveau $j + 1$.</i>	65
4.4	<i>Principe de l'algorithme de résolution de la "STAR-method" pour un problème unidimensionnel. Les parties "grisées" représentent la part de chaque domaine où la solution a atteint la précision ϵ requise (i.e. où la solution finale est connue). La flèche située à gauche matérialise le sens de lecture du graphique.</i>	66
4.5	<i>Domaine espace temps élémentaire parent sur le niveau j et les quatre domaines espace temps élémentaires enfants du niveau $j + 1$.</i>	69
4.6	<i>Représentation d'un domaine espace temps sur deux niveaux successifs j et $j + 1$ pour un problème bidimensionnel.</i>	73
4.7	<i>Décomposition des maillages spatiaux Ω_2^{j+1} et Ω_4^{j+1} définis aux instants t_2^{j+1} et t_4^{j+1} de la figure 4.6.</i>	74
4.8	<i>Décomposition du maillage spatial Ω_6^{j+1} défini à l'instant t_6^{j+1} de la figure 4.6.</i>	75
4.9	<i>Représentation des conditions aux limites espace temps sur un niveau local $j + 1$ pour un problème unidimensionnel.</i>	77
4.10	<i>Poutre unidimensionnelle soumise à un effort de traction.</i>	80
4.11	<i>Chargement transitoire de la poutre.</i>	80
4.12	<i>Domaine espace temps de la poutre sur le niveau 1.</i>	81
4.13	<i>Evolution des maillages spatiaux fins obtenus avec l'indicateur d'erreur \mathcal{I}_e pour t variant de 0 à $1.54 \cdot 10^{-3}$ s avec un pas de temps de représentation $\Delta t = 9.64 \cdot 10^{-4}$ s</i>	82
4.14	<i>Domaines espace temps fins obtenus avec l'indicateur d'erreur \mathcal{I}_u (à gauche, $\max \mathcal{I}_u \leq 5.10^{-3}$) et \mathcal{I}_e (à droite, $\max \mathcal{I}_e \leq 10^{-4}$).</i>	83
4.15	<i>Convergence de la "STAR-method" en utilisant des indicateurs d'erreurs basés sur l'énergie et le champ de déplacement.</i>	84

4.16	<i>Evolution de la variation d'énergie cinétique, de la variation d'énergie de déformation et de la variation du travail des efforts extérieurs pour chaque intervalle de temps de niveau 2.</i>	85
4.17	<i>Exemple de domaines espace temps finaux pris entre trois instants de niveau 2 : t_m^2, t_{m+1}^2 et t_{m+2}^2 sur lesquels sont calculées les variations d'énergie.</i>	85
4.18	<i>Evolution du bilan énergétique pour chaque intervalle de temps de niveau 2.</i>	86
4.19	<i>Plaque trouée fissurée sollicitée en compression dynamique.</i>	87
4.20	<i>Maillage du niveau 1 pour un instant donné.</i>	87
4.21	<i>Domaine espace temps Ωt^1 de niveau 1 pour la plaque trouée fissurée.</i>	88
4.22	<i>Maillages finaux représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastrée. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.</i>	90
4.23	<i>Maillages finaux représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastrée. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.</i>	91
4.24	<i>Maillages finaux représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastrée. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.</i>	92
4.25	<i>Maillages finaux représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastrée. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.</i>	93
4.26	<i>Maillages finaux représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastrée. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.</i>	94
5.1	<i>Schématisme de l'algorithme FMG adapté à la plasticité.</i>	100
5.2	<i>Plaque trouée sollicitée en traction.</i>	102
5.3	<i>Représentation de la loi de comportement du matériau.</i>	102
5.4	<i>Maillage de niveau 1 de la plaque trouée.</i>	103
5.5	<i>Maillages finaux de la plaque trouée pour le premier incrément de chargement.</i>	103
5.6	<i>Déformation du maillage final pour le premier incrément de chargement.</i>	103
5.7	<i>Maillages correspondant aux niveaux de références.</i>	104
5.8	<i>Champ de déplacement pour le premier incrément de chargement.</i>	105
5.9	<i>Champ de déplacement de référence pour le premier incrément de chargement.</i>	105
5.10	<i>Champ de déformation totale pour le premier incrément de chargement.</i>	106
5.11	<i>Champ de déformation totale de référence pour le premier incrément de chargement.</i>	106
5.12	<i>Champ de déformation plastique pour le premier incrément de chargement.</i>	107
5.13	<i>Champ de déformation plastique de référence pour le premier incrément de chargement.</i>	107
5.14	<i>Champ de contrainte de Von Mises pour le premier incrément de chargement.</i>	108
5.15	<i>Champ de contrainte de référence pour le premier incrément de chargement.</i>	108
B.1	<i>Définition des variables associées aux champs de vitesse et de déplacement pour le schéma de Galerkin Discontinu.</i>	122
B.2	<i>Définition des différents efforts dans le schéma de Galerkin Discontinu.</i>	123

B.3	<i>à gauche : poutre encastrée à une extrémité et sollicitée en compression à l'autre et à droite : allure de l'effort en fonction du temps.</i>	124
B.4	<i>Vitesse du noeud libre en bout de poutre au cours du temps.</i>	126
B.5	<i>Contraintes de traction le long de la poutre à l'instant $t = 7.7$ ms.</i>	126
D.1	<i>Domaine espace temps élémentaire Ω^j parent de niveau j et les domaines espace temps enfants engendrés sur le niveau $j + 1$.</i>	129
E.1	<i>Structure de données FILIA établissant la relation de filiation logique et géométrique entre les éléments finis parents et enfants en statique et quasi-statique. Dans cet exemple les éléments sont des quadrangles (2D). Une flèche représente un pointeur.</i>	134
E.2	<i>Extraction de l'élément fini quadrangulaire numéro 6 du niveau 4 : Fila.4.6. . .</i>	135
E.3	<i>Structure de données de la Table MAIL. Une flèche représente un pointeur. . . .</i>	135
E.4	<i>Structure de données FILIA pour la filiation entre les éléments finis parents et fils de type quadrangle en dynamique linéaire. Une flèche représente un pointeur.</i>	136
E.5	<i>Structure de données ELE des éléments finis créés pour la dynamique linéaire. Une flèche représente un pointeur.</i>	137
F.1	<i>Structure générale de l'algorithme de la "S(T)AR-method" linéaire.</i>	140
F.2	<i>Structure générale de l'algorithme de la "STAR-method".</i>	141
F.3	<i>Structure générale de l'algorithme de la "S(T)AR-method" non linéaire.</i>	142

Liste des tableaux

2.1	<i>Algorithme multigrille linéaire de référence à deux niveaux.</i>	23
2.2	<i>Algorithme de Newton de référence pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires.</i>	26
2.3	<i>Algorithme multigrille non linéaire FAS de référence à deux niveaux.</i>	27
2.4	<i>Récapitulatif des schémas numériques de la famille de Newmark.</i>	32
2.5	<i>Récapitulatif des différentes résolutions possibles par le schéma de Newmark.</i>	32
2.6	<i>Algorithme de Newmark avec une résolution en accélération.</i>	33
3.1	<i>Les différents types d'indicateurs d'erreurs analysés en statique.</i>	45
3.2	<i>Récapitulatif des différents cas analysés.</i>	49
3.3	<i>Comparaison de la contrainte de Von Mises maximale (10^8 Pa) obtenue suivant la précision ϵ demandée avec la "S(T)AR-method" à la valeur de référence.</i>	56
3.4	<i>Comparaison du nombre de degrés de liberté des modèles obtenus pour différentes précisions avec un indicateur d'erreur basé sur l'énergie pour le cas test A.</i>	57
3.5	<i>Comparaison du nombre de degrés de liberté des différents niveaux du cas test D obtenus avec un indicateur d'erreur en déplacement.</i>	57
4.1	<i>Les différents types d'indicateurs d'erreurs analysés en dynamique.</i>	79
5.1	<i>Algorithme de Newton appliqué à un problème élastoplastique.</i>	97
5.2	<i>Algorithme des V cycles adaptés à la résolution de problème d'élastoplasticité.</i>	99
5.3	<i>Comparaison de \mathbf{u}, $\boldsymbol{\epsilon}_t$, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ et $VM(\boldsymbol{\sigma})$ maximum sur différents niveaux et sur différents maillages de référence.</i>	104
A.1	<i>Algorithme du gradient conjugué pré-conditionné de référence pour résoudre un système d'équations linéaires.</i>	119
A.2	<i>Algorithme du gradient conjugué pré-conditionné par bloc de référence pour résoudre un système d'équations linéaires.</i>	120
B.1	<i>Algorithme de Galerkin Discontinu de référence pour résoudre un système d'équations linéaires.</i>	125

Notations

Principe de notation

a	Variable scalaire
\dot{a}	Dérivée première par rapport au temps
\ddot{a}	Dérivée seconde par rapport au temps
\tilde{a}	Quantité transférée du niveau fin vers le niveau grossier évoluant sur le niveau grossier
\hat{a}	Quantité transférée du niveau fin vers le niveau grossier constante sur le niveau grossier
\underline{a}	Champ de vecteur continu
\underline{a}^*	Champ de vecteur virtuel continu
$\underline{\underline{a}}$	Tenseur du second ordre continu
$\underline{\underline{\underline{a}}}$	Tenseur du quatrième ordre continu
\mathbf{a}	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé
$\mathbf{a}^{(k)}$	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé à une itération k
\mathbf{a}^j	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé de niveau j
\mathbf{a}_m	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé à l'instant t_m
\mathbf{a}^*	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé défini sur le domaine Ω^*
\mathbf{a}^+	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé défini sur le domaine Ω^+
\mathbf{a}_m^{j*}	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé de niveau j à l'instant t_m défini sur le domaine Ω^*
\mathbf{a}_m^{j+}	Vecteur ou matrice associé à un problème discrétisé de niveau j à l'instant t_m défini sur le domaine Ω^+
Δa	Incrément de la quantité a
a^T	Transposition de la grandeur a
$[a_m]$	Désigne $a_{m+1} - a_m$
$\langle a_m \rangle$	Désigne $1/2(a_{m+1} + a_m)$
Tr	Trace d'un tenseur $[.]$

Symboles grecs

α	Pas dans l'algorithme du gradient	$[.]$
$\underline{\alpha}$	Variable interne d'un modèle d'élastoplasticité	$[.]$
β	Paramètre du schéma de Newmark	$[.]$
γ	Paramètre du schéma de Newmark	$[.]$
Δt	Pas de temps	$[s]$
Δt_{crit}	Pas de temps critique	$[s]$
ϵ	Critère d'arrêt ou Précision	$[.]$ $[.]$
ε	Tenseur des déformations en petites perturbations	$[.]$
ε_e	Partie élastique du tenseur des déformations en petites perturbations	$[.]$

ε_p	Partie anélastique du tenseur des déformations en petites perturbations	[.]
θ	Coefficient de réduction de l'erreur dans l'algorithme du gradient	[.]
Λ	Multiplicateur de Lagrange	[N]
ν	Coefficient de Poisson	[.]
ν_i	Nombre de relaxations dans un algorithme multigrille avec $i \in \{0, 1, 2\}$	[.]
ρ	Masse volumique	[Kg.m ⁻³]
σ	Tenseur des contraintes en petites perturbations	[Pa]
σ_Y	Limite élastique d'un matériau	[Pa]
$\underline{\underline{\sigma}}^D$	Partie déviatorique du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$	[Pa]
ϕ	Paramètre dans l'algorithme du gradient	[.]
φ	Fonction de forme	[.]
ψ^*	Pseudo-potential de dissipation convexe	[.]
Ψ	Potential d'état	[.]
Ψ_e	Partie élastique du potential d'état	[.]
Ψ_p	Partie anélastique du potential d'état	[.]
ω	Fréquence propre du système	[s ⁻¹]
ω_{max}	Plus grande fréquence propre du système	[s ⁻¹]
Ω	Domaine spatial occupé par la structure étudiée	[.]
Ω^*	Domaine spatial occupé par la structure étudiée où la solution a atteint la précision requise	[.]
Ω^+	Domaine spatial occupé par la structure étudiée où la solution n'a pas atteint la précision requise	[.]
Ωt	Domaine espace temps	[.]
$\Omega t_m e_i$	Domaine espace temps élémentaire défini entre t_m et t_{m+1} avec l'élément fini e_i	[.]
$\partial\Omega$	Bord du domaine spatial de la structure étudiée	[.]
$\partial_1\Omega$	Bord du domaine spatial à déplacements imposés	[.]
$\partial_2\Omega$	Bord du domaine spatial à efforts imposés	[.]
$\partial_{1*}\Omega$	Bord du domaine spatial à conditions cinématiques imposées	[.]
$\partial\Omega t$	Bord du domaine spatio-temporel de la structure étudiée	[.]

Symboles latins

a	Dimension d'une éprouvette	[m]
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Vecteur de dimension n dépendant des inconnues \mathbf{x}	[.]
A_i	Force thermodynamique associée aux variable interne v_i	[.]
\mathbf{A}	Matrice de dimension n	[.]
$\bar{\mathbf{A}}$	Matrice de dimension supérieure à n	[.]
b	Dimension d'une éprouvette	[m]
\mathbf{b}	Vecteur second membre de dimension n	[.]
$\bar{\mathbf{b}}$	Vecteur second membre de dimension supérieure à n	[.]
B	Opérateur non linéaire	[.]
\mathbf{B}	Matrice des dérivées des fonctions de forme	[.]
c	Dimension d'une éprouvette	[m]
C	Constante	[.]
\mathbf{C}	Matrice injective composée de 0 et de 1	[.]
d	Distance d'un point à une pointe de fissure	[m]
d_p	Paramètre de la partie plastique du potential d'état Ψ_p	[.]
\underline{d}_0	Champ de déplacements imposés continu à $t = 0$	[m]
$d\mathbf{e}$	Densité d'énergie	[J.m ⁻²] (en 2D)
\mathbf{D}	Matrice diagonale	[.]

e	Dimension d'une éprouvette	[m]
err	Erreur	[.]
e	Energie de la structure	[J]
E	Module d'Young	[Pa]
E_{fl}	Terme lié aux forces de liaison (ou d'interface)	[N.m.s ⁻²]
E_r	Fonctionnelle d'erreur dans l'algorithme du gradient	[.]
f	Convexe d'élasticité	[.]
\underline{f}	Vecteur des forces généralisées	[N]
\underline{f}_d	Vecteur de la densité volumique d'effort extérieurs	[N.m ⁻³]
\mathbf{f}	Vecteur des efforts extérieurs	[N]
$\mathbf{f}e$	Vecteur du facteur de participation à un mode	[m.s ⁻²]
\mathbf{f}_{int}	Vecteur des efforts intérieurs	[N]
\mathbf{fl}	Vecteur des efforts de liaison	[N]
F	Valeur d'une densité d'effort	[N.m ⁻²] (en 2D)
\underline{F}_d	Vecteur de la densité surfacique d'efforts extérieurs	[N.m ⁻²]
h	Dimension caractéristique d'un élément fini	[m]
	ou finesse d'un maillage	[.]
$\underline{\underline{H}}$	Opérateur de Hooke pour le comportement linéaire d'un matériau	[Pa]
i	Indice muet	[.]
\mathbf{I}	Opérateur d'interpolation spatiale linéaire	[N.m ⁻¹]
\mathcal{I}_{de}	Indicateur d'erreur basé sur le champ de densité d'énergie	[.]
\mathcal{I}_u	Indicateur d'erreur basé sur le champ de déplacement	[.]
\mathcal{I}_e	Indicateur d'erreur basé sur l'énergie	[.]
\mathcal{I}_σ	Indicateur d'erreur basé sur le champ de contrainte	[.]
j	Indice indiquant le niveau	[.]
J	Energie totale du système	[J]
k	Indice indiquant le numéro de l'itération	[.]
K	Fonctionnelle associée à un système linéaire	[.]
\mathbf{K}	Matrice de raideur	[N.m ⁻¹]
\mathbf{K}_T	Matrice de raideur tangente	[N.m ⁻¹]
l	Paramètre de la partie plastique du potentiel d'état Ψ_p	[.]
\mathbf{L}	Matrice triangulaire inférieure	[.]
m	Indice temporel	[m]
\mathbf{M}	Matrice de masse	[kg]
\mathbf{M}_{diag}	Matrice de masse diagonalisée	[kg]
n	Nombre de noeuds du domaine discrétisé en espace	[.]
nb	Nombre de niveau nécessaire pour atteindre la précision souhaitée	[.]
ne	Nombre d'éléments finis contenu dans un modèle	[.]
p	Nombre entier	[.]
p_c	Variable interne d'un modèle d'élastoplasticité	[.]
\mathbf{p}	Direction de recherche dans l'algorithme du gradient	[.]
\underline{P}	Un point de l'espace	([m],[m],[m])
\mathbf{P}_r	Opérateur de prolongement	[.]
\mathbf{P}_s	Opérateur de prolongement spatial	[.]
q	Ordre de convergence	[.]
\mathbf{q}	Vecteur discret quelconque	[.]
\mathbf{Q}	Matrice de conditionnement	[.]
r	Nombre de pas de temps	[.]
	ou Rayon d'un trou	[m]
\mathbf{R}	Vecteur résidu	[.]
\mathbf{R}_e	Opérateur de restriction	[.]

s	Section d'une éprouvette	[m]
S	Espace de dimension infinie des champs S. A. à 0	[.]
S_n	Espace de dimension n des champs S. A. à 0	[.]
\mathbf{S}	Matrice d'amplification	[.]
t	Variable temporelle	[s]
T	Dimension Temporelle	[s]
T_c	Energie cinétique du système	[J]
$\mathbf{T}s$	Opérateur de restriction spatial	[.]
$\mathbf{T}t$	Opérateur de restriction temporel	[.]
u	Champ de déplacement	[m]
\dot{u}	Champ de vitesse	[m.s ⁻¹]
\ddot{u}	Champ d'accélération	[m.s ⁻²]
\underline{u}_d	Champ de déplacements imposés continu	[m]
\underline{ul}	Condition de liaison en déplacement	[m]
\underline{up}	Premier prédicteur du schéma de Newmark	[m]
$\underline{\dot{u}p}$	Second prédicteur du schéma de Newmark	[m.s ⁻¹]
U	Espace de dimension infinie des champs C. A. à 0	[.]
U_n	Espace de dimension n des champs C. A. à 0	[.]
U_0	Espace de dimension infinie des champs virtuels C. A. à 0	[.]
U_{0n}	Espace de dimension n des champs virtuels C. A. à 0	[.]
\mathbf{U}	Vecteur d'état discret $\mathbf{U} = \{\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}\}$	([m.s ⁻²],[m.s ⁻¹],[m])
$\delta\mathbf{U}$	Perturbation du vecteur d'état	([m.s ⁻²],[m.s ⁻¹],[m])
v_i	Variable interne	[.]
$\mathbf{v} =$	Vecteur d'erreur	[.]
V	Energie potentielle du système	[J]
VM	Opérateur de Von Mises	[.]
\mathbf{x}	Vecteur solution de dimension n discret	[.]
$\bar{\mathbf{x}}$	Vecteur solution de dimension supérieure à n discret	[.]
X	Dimension spatiale	[m]
$\underline{\underline{X}}$	Ecrouissage cinématique	[Pa]
\mathbf{y}	Vecteur solution de dimension n discret	[.]
Y	Dimension spatiale	[m]
\mathbf{z}	Vecteur solution de dimension n discret	[.]
Z	Ecrouissage isotrope	[Pa]
$\mathbf{0}$	Matrice nulle	[.]

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations

Le cas d'un moteur d'avion est un exemple remarquable pour illustrer le propos ci-dessous. Un tel moteur, destiné à propulser un aéronef civil, n'est mis en service que si sa certification est acquise ; il satisfait alors aux exigences d'un règlement établi par les Autorités de Navigabilité. Pour répondre à l'une des contraintes réglementaires, le moteur est soumis à l'ingestion d'un oiseau. Lorsque cet événement se produit, le moteur doit continuer à fonctionner en fournissant une puissance minimale pendant une durée donnée. Dans ce cas précis, le respect des exigences de navigabilité est démontré par un essai. Un projectile est lancé suivant un protocole précis dans l'entrée d'air du moteur en fonctionnement. La réussite de l'essai valide la conception et la fabrication du moteur. Un échec se traduit par des études supplémentaires. Les ingénieurs développent alors de nouvelles maquettes numériques entraînant la modification de certaines pièces mécaniques et/ou la création de nouvelles. La phase d'analyse engagée aboutit à la mise au point d'un nouvel essai.

Les campagnes d'essais mobilisent des budgets très importants. En raison des contraintes économiques, les simulations numériques prennent une part grandissante de l'activité des ingénieurs en charge de la conception et la fabrication d'un moteur d'avion. Une partie importante des développements reposant sur des essais se voit progressivement détrônée par les simulations numériques. Bien que les outils informatiques offrent des capacités de calcul toujours plus grandes, les ingénieurs requièrent des méthodes de calcul toujours plus performantes. En effet, la complexité des modèles croît avec la performance des moyens de calcul.

Ce constat fait dans le domaine de l'aéronautique se généralise à tous les secteurs où la mécanique joue un rôle important (l'automobile, le transport ferroviaire, les constructions de génie civil...). La simulation numérique est devenue un outil de travail indispensable pour l'ingénieur. Le domaine le plus adapté pour rechercher les solutions mécaniques est celui de la Mécanique des Milieux Continus (MMC). La Méthode des Eléments Finis (MEF) [57, 122] s'inscrit dans ce cadre. C'est la méthode numérique de simulation la plus répandue. Elle sert de base au travail présenté dans ce mémoire.

Le challenge actuel consiste à remplacer autant que possible les essais par la simulation de maquettes numériques. La modélisation ne se contente plus de reproduire et analyser a posteriori un essai. Elle cherche à prédire le comportement a priori d'une structure. Pour relever ce défi, les ingénieurs sont confrontés à la complexité de la conception de mécanismes tels qu'un moteur. Pour représenter fidèlement la réponse du système à une sollicitation, les modèles deviennent de plus en plus complets et complexes. Ils tiennent compte simultanément des caractères transitoires et non linéaires (liés au matériau, à la géométrie ou à l'existence de contacts) des phénomènes

physiques mis en jeu. Ils peuvent contenir jusqu'à dix millions de degrés de liberté. Les temps de calculs des simulations de ces modèles sont très importants. Ils atteignent couramment quelques semaines bien que la capacité des ordinateurs ne cesse d'augmenter.

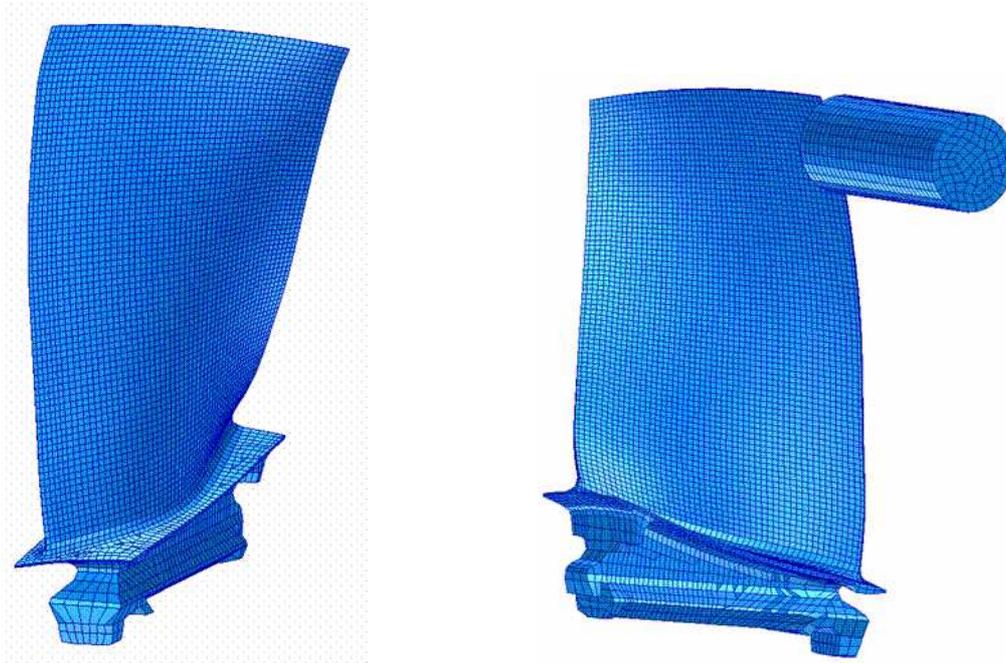


FIG. 1.1 – Exemple de maillage par éléments finis d'une aube de compresseur seule (à gauche), d'une aube et d'un projectile (à droite). Images fournies par la SNECMA.

Dans le cadre de la MEF, les modèles numériques reposent sur le maillage par éléments finis de la géométrie des pièces. La figure 1.1 est un exemple de maillage par éléments finis d'une aube de compresseur seule et d'une aube impactée par un projectile. Les ingénieurs réalisent le maillage dont la finesse accrue au voisinage des zones à risque dépend de leur savoir-faire. Le suivi des mécanismes *in vivo* montre que les zones véritablement critiques ne sont pas toujours anticipées correctement. Dans le cas d'une perte d'aube de compresseur, il est difficile de localiser précisément les zones d'impact et de prédire l'évolution des ondes engendrées. La densité du maillage est donc modifiée *a posteriori* et des études supplémentaires sont menées afin d'améliorer la qualité des résultats issus des premiers modèles.

Si la pièce mécanique est soumise à des sollicitations extérieures évoluant avec le temps, son maillage par éléments finis peut varier d'un instant à un autre. Pour un calcul quasi-statique ou dynamique, le questionnement sur le choix et la gestion des pas de temps est similaire à celui sur la densité du maillage par éléments finis. Il est d'autant plus difficile de prédire correctement les points sensibles d'une structure que les phénomènes à modéliser évoluent à des échelles de temps différentes. La durée d'un impact sur une structure se mesure à l'échelle de la microseconde alors que son ébranlement est de l'ordre de la dizaine de secondes. Pour ce type d'études, la simulation est effectuée à l'aide d'une méthode d'intégration temporelle directe. Les méthodes d'analyse fréquentielle, efficaces lorsque les modes fondamentaux de la structure sont dominants, ne sont pas envisagées dans ce travail.

La création du maillage spatial (discrétisation spatiale d'une structure) et temporelle (discrétisation de l'intervalle de temps) est une étape délicate dans la modélisation d'un composant mécanique. Le maillage doit représenter toutes les échelles spatiales et temporelles de la structure. Les modèles résultants sont dits multiéchelles. L'utilisation de ce vocabulaire est ambigu

car il englobe deux significations très différentes.

Une vision multiéchelle peut être adoptée pour le matériau. Un modèle macroscopique considère généralement le milieu comme continu et homogène. Dans le cas des métaux, un modèle microscopique représente la microstructure composée de grains et de joints de grains. Le comportement du matériau est différent suivant l'échelle considérée. Cette approche conduit habituellement à des techniques d'homogénéisation.

Une vision multiéchelle peut aussi être adoptée pour la structure. La simulation d'un galet roulant sur une piste semi-infinie contenant des microfissures en surface en est un exemple typique. La longueur caractéristique de la piste se distingue d'un ordre de grandeur de cent de celle du galet et d'un ordre de grandeur de mille de celle de la fissure. Le maillage restituant ces trois échelles est difficile à construire.

Ce mémoire est consacré aux modèles multiéchelles utilisés pour la résolution de problèmes de structure.

Le maillage spatio-temporel est confronté à la difficulté suivante. Plus il est fin, c'est-à-dire plus le nombre de degrés de liberté et de pas de temps est important, plus les champs calculés sont précis. En revanche, la simulation est plus coûteuse en temps de calcul et en place mémoire utilisée. La précision des résultats obtenus est dépendante du maillage choisi. L'objet de ce travail est présenté sous forme de questions.

- Quelles sont les zones où le maillage spatio-temporel doit être fin ?
- Quelle finesse de maille doit être choisie dans ces zones ?
- Comment s'assurer que les mailles les plus petites ne le soient pas plus que nécessaire ?
- Quelle est la précision de la solution correspondant à un maillage ?
- Comment réaliser un calcul efficace ?

Le maillage "idéal", s'il existe, doit assurer une précision identique en tout point de la structure et limiter les nombres de degrés de liberté et de pas de temps. La taille des mailles spatiales et temporelles doit donc évoluer et s'adapter à la pièce mécanique modélisée et aux sollicitations extérieures considérées.

1.2 Etat de l'art

L'optimisation du rapport temps de calcul/précision est une préoccupation actuelle majeure. Elle repose essentiellement sur le développement de méthodes de discrétisation adaptatives permettant de contrôler la qualité des résultats. Les deux outils indispensables pour créer des maillages évolutifs sont un générateur de maillage et des critères robustes mesurant la précision de la solution numérique. Bien que ces deux outils soient difficilement dissociables, cet état de l'art s'intéresse dans un premier temps aux mesures d'erreurs. Il développe ensuite les différents concepts utilisés pour faire évoluer la discrétisation initiale du maillage au cours du calcul.

1.2.1 Mesure d'erreur

Plusieurs étapes sont nécessaires pour passer d'un problème réel à sa résolution numérique. Les solutions (composées du champ de déplacement désigné par la lettre u et de contrainte désigné par la lettre σ) et les erreurs associées à chaque modèle sont représentées sur la figure 1.2. Le champ de déplacement \underline{u}_{ex} et le champ de contrainte $\underline{\sigma}_{ex}$ sont les solutions exactes du problème de référence continu.

L'erreur est mesurée à l'aide de normes. Elle définit localement ou globalement les zones où le maillage doit évoluer afin de satisfaire une précision donnée. Elle peut être mesurée soit par un indicateur d'erreur soit par un estimateur d'erreur. Les premiers comparent les solutions

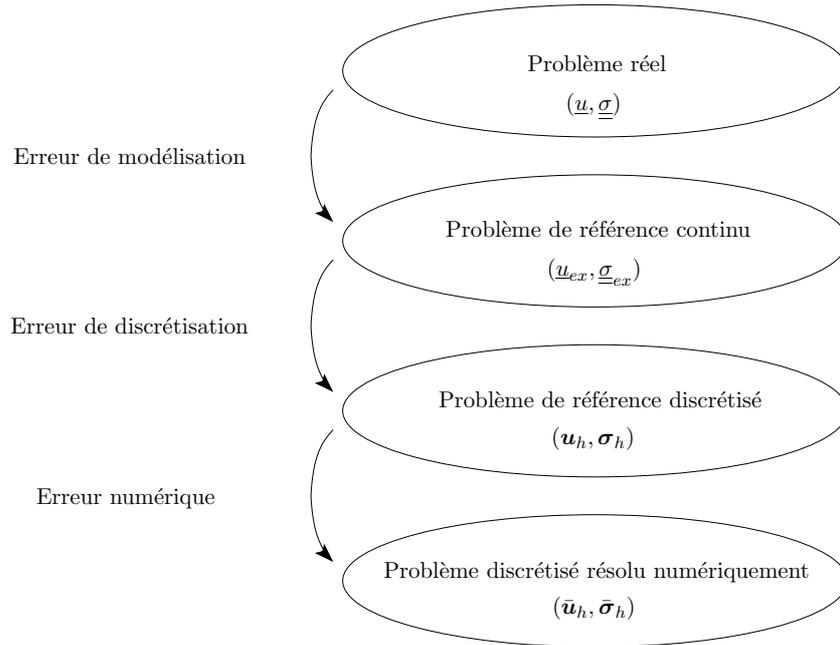


FIG. 1.2 – Les différentes solutions et sources d’erreurs liées à une modélisation numérique.

numériques obtenues sur deux maillages (ou grilles) différents. Ils sont simples de construction et d’utilisation.

Les seconds estiment l’écart entre la solution numérique obtenue sur une grille ($\bar{\underline{u}}_h, \bar{\underline{\sigma}}_h$) et la solution exacte inconnue ($\underline{u}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex}$) du problème de référence continu. Ils sont efficaces pour majorer l’erreur “absolue” $\|\underline{u}_{ex} - \bar{\underline{u}}_h\|$ (ou $\|\underline{\sigma}_{ex} - \bar{\underline{\sigma}}_h\|$) mais coûtent plus cher d’un point de vue numérique. \underline{u}_{ex} (ou $\underline{\sigma}_{ex}$) est la représentation de la solution continue exacte \underline{u}_{ex} (ou $\underline{\sigma}_{ex}$) discrétisée sur le maillage de finesse h . L’estimation d’erreur peut se faire soit a priori (avant le calcul de la solution associée à une grille) soit a posteriori (après le calcul). Ces derniers sont les plus utilisés.

Trois grandes classes d’estimateurs d’erreurs a posteriori existent. Babùska et al. [8, 105] proposent de mesurer la précision des résultats en utilisant le résidu des équations d’équilibre. L’erreur commise par l’intermédiaire de la loi de comportement est exploitée par Ladevèze et al. [70] pour former une nouvelle catégorie. Enfin, le plus employé actuellement est celui introduit par Zienkiewicz et Zhu [117] noté estimateur ZZ . Il est construit sur le lissage de la non régularité de la solution obtenue par la méthode des éléments finis. Ces travaux sont prolongés par le développement de la technique dite de patch de recouvrement [119, 120, 121].

Ces trois classes permettent d’étudier une grande variété de problèmes. Elles servent de base au développement de nouveaux estimateurs. Pour les problèmes d’impact dynamique, Combe [22, 21] adapte l’estimateur d’erreur basé sur l’erreur en relation de comportement. Pour répondre à la diversité des applications envisagées, de très nombreuses techniques sont développées. Prudhomme et al. [92] développent un estimateur d’erreur pour des modélisations tridimensionnelles linéaires. Ils cherchent à obtenir de bonnes approximations des quantités mécaniques locales (de type déplacement ou contrainte). La référence [115] propose un cadre mathématique pour définir d’autres estimateurs d’erreurs pour des problèmes linéaires et non linéaires évoluant avec le temps. Gabaldon et Goicolea [44] établissent un estimateur à partir d’un champ de déformation particulier. La déformation élastique est enrichie avec un champ de déformation choisi en fonction de la non linéarité du phénomène étudié. Les références [45, 69] donnent deux exemples de traitement des problèmes d’élastoplasticité. Les matériaux perforés font également

l'objet d'études spécifiques [107]. Enfin, les mesures d'erreurs peuvent être vues comme un outil permettant de détecter les erreurs de discrétisation [74].

Ce recensement des estimateurs d'erreurs est loin d'être exhaustif. Il témoigne néanmoins de la diversité des études menées sur ce thème.

1.2.2 Technique de remaillage spatial

Quelle que soit la mesure d'erreur choisie, elle est associée à une stratégie d'adaptation de la discrétisation de la structure. Les premiers concepts de remaillage spatial associés à la méthode des éléments finis sont appelés les h-, les p- et les r-méthodes [70]. La procédure d'adaptation de maillage d'un code de calcul standard est illustrée par le diagramme de la figure 1.3.

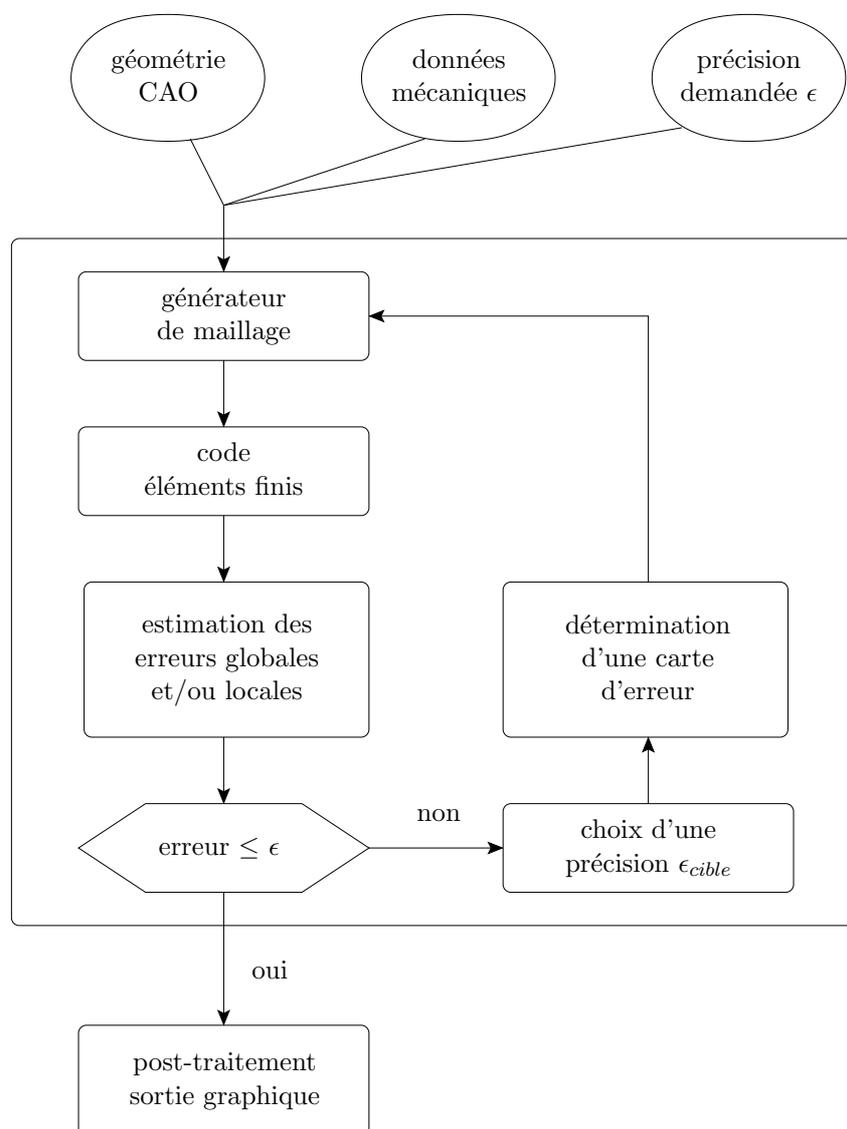


FIG. 1.3 – Procédure de remaillage [70].

La h-méthode [112, 25] consiste à changer la taille et le nombre d'éléments finis créés initialement. La densité d'éléments change à chaque remaillage. Ce procédé est aussi bien employé pour la mécanique de la rupture [82] que pour la mécanique vibratoire [43] ou encore la mécanique des fluides [30, 84, 97]. La référence [79] présente un exemple d'application tridimensionnel. Cette

méthode sert également d'outil pour modéliser le comportement non linéaire des matériaux élastoplastiques [53].

La p-méthode [10] repose sur l'enrichissement du degré des fonctions d'interpolation des éléments finis.

Enfin, la r-méthode [9] déplace les noeuds du maillage sans changer le nombre initial d'éléments finis. Le critère associé à cette technique est généralement un indicateur de distorsion des éléments. La précision des résultats n'est pas contrôlée et reste limitée car le nombre de degrés de liberté est constant durant la simulation.

Huerta et al. [56] établit une comparaison intéressante de ces trois procédés et des différents critères associés. La figure 1.4 schématise les différentes méthodes de remaillage évoquées précédemment.

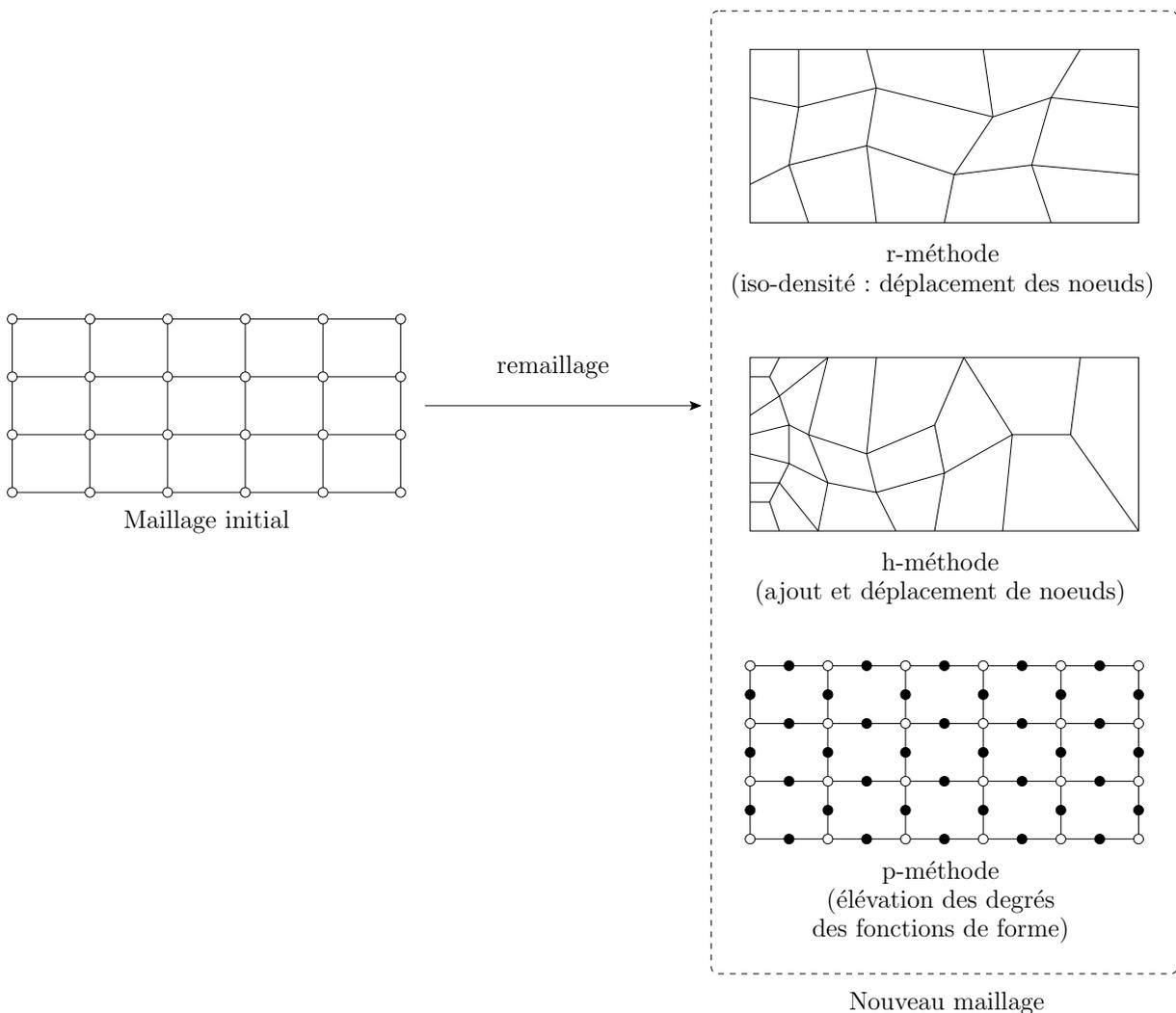


FIG. 1.4 – Les différentes méthodes de remaillage [70].

Pour tirer profit des avantages de chacune d'elles, ces méthodes sont combinées et aboutissent à de nouvelles procédures. Ainsi les hp-méthodes [118, 25, 4] et les rh-méthodes [87] font leur apparition. Des développements récents [106] s'inspirent des travaux de Zienkiewicz pour construire des estimateurs d'erreurs spécifiques pour les p- et hp-méthodes. La s-version [41, 42] propose, quant à elle, d'enrichir localement le degré des fonctions d'interpolation des éléments finis uniquement dans les zones de forts gradients. Le découpage des éléments peut également se faire de manière anisotrope [6]. Un élément quadrangle bidimensionnel par exemple, peut générer deux

éléments résultant d'un découpage soit vertical soit horizontal, ou donner plus classiquement quatre éléments.

Ces techniques constituent les premières contributions à l'amélioration des simulations numériques par la méthode des éléments finis. Elles permettent de maîtriser la qualité des résultats. Elles ont le mérite d'adapter le maillage aux sollicitations qu'une structure subit. A partir d'un premier calcul, les mesures d'erreurs construisent des cartes d'erreurs indiquant la finesse relative de maille spatiale à utiliser pour atteindre l'erreur souhaitée (figure 1.3). La structure complète est affectée par ce remaillage. Le cycle de création de cartes d'erreurs et de remaillage est répété jusqu'à la satisfaction du critère. Pour transférer la solution d'une discrétisation à une autre, des opérateurs de projection sont développés. Pour des problèmes non linéaires, la projection des quantités définies aux points de Gauss d'un éléments est d'autant plus problématique que les différents maillages spatiaux considérés ne sont pas hiérarchiques. Des maillages sont dits hiérarchiques si leurs éléments peuvent s'"emboîter" (figure 1.5). Avec ces méthodes le domaine de calcul est remaillé entièrement à chaque itération. L'opération de remaillage et l'estimation de l'erreur représentent une fraction significative du temps de résolution, dégradant l'efficacité de la méthode.

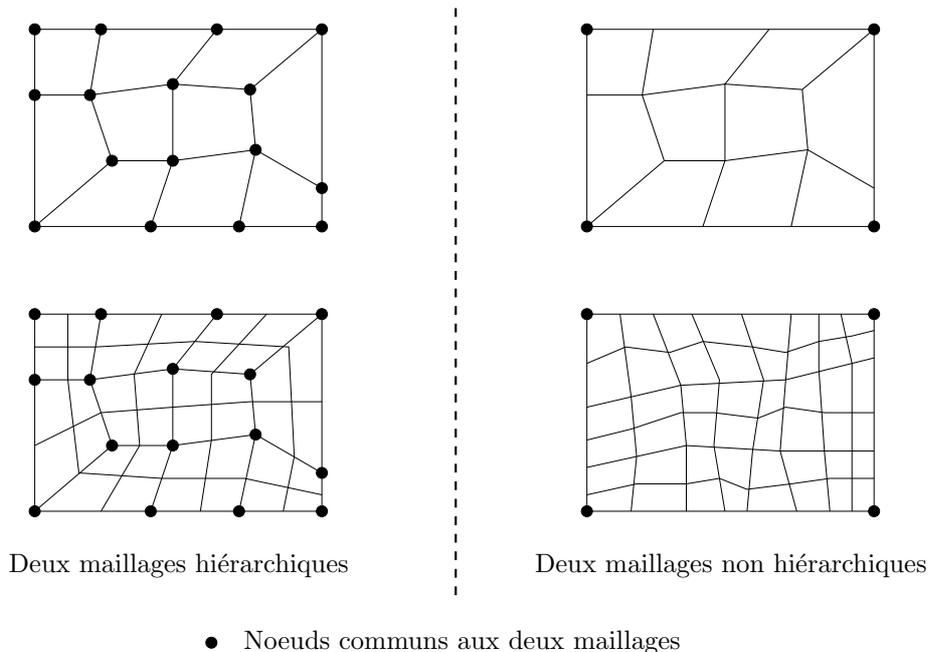


FIG. 1.5 – Exemple de maillages hiérarchiques et non hiérarchiques

1.2.3 Technique de raffinement spatial de maillage

L'efficacité du calcul est améliorée en utilisant des procédés d'adaptation de discrétisation spatiale locaux. Les méthodes précédentes de remaillage (globales) se distinguent des méthodes de raffinement (locales). La principale difficulté réside dans la manière de raccorder la zone raffinée (domaine fin) au maillage initial (domaine grossier). L'interface des deux domaines présente généralement une incompatibilité. Un noeud du contour du maillage fin ne peut avoir aucun noeud du maillage grossier en vis-à-vis. Plusieurs techniques permettent d'y remédier [19]. L'incompatibilité peut être conservée et traitée avec des méthodes spécifiques utilisant les multiplicateurs de Lagrange ou des méthodes de pénalité [68]. Si la compatibilité est exigée, une zone de transition est construite pour adapter les deux densités de maillage.

Pour des problèmes linéaires, la proposition de Park et al. [88] adopte un point de vue similaire à celui développé dans le chapitre 3. Elle met en place une technique de superposition locale de maillage basée sur un raffinement hiérarchique. Pour assembler un maillage issu d'un raffinement local au maillage plus grossier, l'incompatibilité de l'interface est maintenue. Trois précautions particulières sont prises. Les degrés de liberté du maillage local sont supprimés complètement sur l'interface avec le maillage global. La compatibilité du champ de déplacement est ainsi assurée. Ensuite, les degrés de liberté des noeuds du maillage local coïncidents avec le maillage global sont éliminés. Les mouvements de corps rigide sont évités. Enfin, les conditions aux limites sont appliquées sur le maillage ainsi assemblé. Pour ces stratégies, le raffinement est local mais la résolution est effectuée sur le maillage complet.

Les méthodes adaptatives sont très en vogue pour effectuer des simulations numériques lorsque le matériau présente un comportement non linéaire. L'adaptabilité permet de concentrer le maillage spatial sur l'endommagement de la structure [29, 55, 104, 15]. Aubry et al. [7] utilise une méthode adaptative pour enrichir le modèle initial seulement où le phénomène non linéaire se déroule. La localisation se passe dans les zones de forts gradients d'endommagement. D'autres approches s'intéressent à des non linéarités transitoires [80, 35]. Cependant l'adaptabilité concerne uniquement le maillage spatial. La dimension temporelle est traitée de façon classique c'est-à-dire sans flexibilité. Le point délicat des travaux modélisant des problèmes non linéaires est la manière dont sont transmises les variables internes d'une discrétisation à une autre.

1.2.4 Technique multigrilles

Pour maîtriser la précision des résultats et accélérer la convergence des calculs, Brandt [16, 17] propose un point de vue différent connu sous le nom de méthode multigrilles. Les méthodes multigrilles peuvent être vues comme des méthodes de résolution à part entière, pour résoudre aussi bien un système linéaire que non linéaire. La résolution des équations s'effectue sur plusieurs maillages spatiaux, appelés aussi grilles ou niveaux, de finesse différente. Le lien entre les échelles est régi par des opérateurs de transfert. Ces méthodes, utilisées par la suite, sont détaillées au chapitre suivant. Le principe général est présenté sur la figure 1.6.

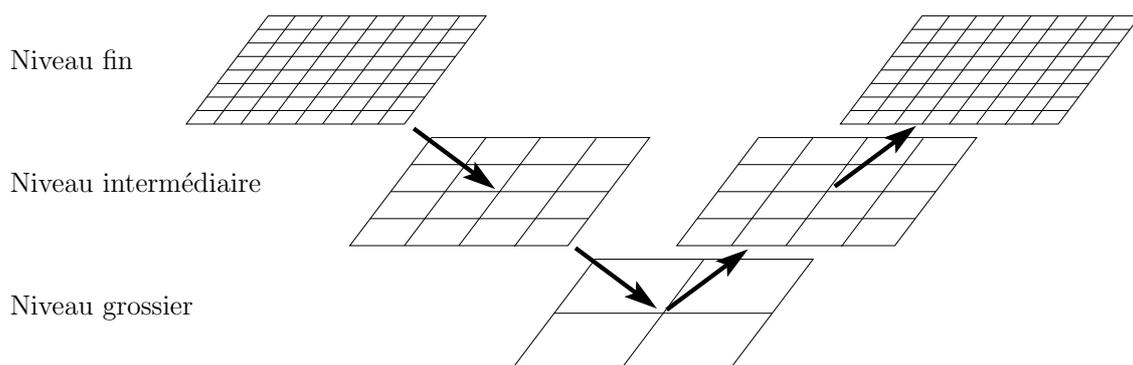


FIG. 1.6 – Illustration du principe de résolution la méthode multigrilles.

La méthode multigrilles a été inventée pour la mécanique des fluides. Elle est notamment développée dans le domaine de la lubrification par Lubrecht et Venner [108]. Ces auteurs ont ensuite étendu le concept de résolution sur plusieurs niveaux à l'intégration numérique.

Parsons et Hall [89, 90] adaptent la méthode multigrilles pour la mécanique des solides dans le cadre de la MEF. Les multigrilles sont d'abord éprouvées sur des problèmes linéaires simples. Puis elles sont modifiées pour des applications non linéaires plus complexes. Des non linéarités

aussi bien géométriques [40] que liées au matériau [3] sont traitées en utilisant parfois le calcul parallèle sur plusieurs processeurs [66, 2]. Shaidurov propose un ouvrage complet sur la méthode multigrilles pour la MEF [98]. Pour traiter les comportements non linéaires transitoires, l'algorithme multigrilles FAS (Full Approximation Scheme) [108, 42] est utilisé. L'algorithme est développé dans le chapitre suivant puis utilisé dans le chapitre 5.

1.2.5 Adaptabilité temporelle

Les approches présentées jusqu'à présent se focalisent sur la flexibilité de la discrétisation spatiale. Beaucoup d'efforts sont également faits pour améliorer l'efficacité des simulations numériques de problèmes dynamiques. Pour les phénomènes transitoires, le temps devient une variable très importante. La stabilité d'un schéma d'intégration temporelle est indispensable. Elle est l'objet de nombreux travaux [58]. La valeur du pas de temps critique, conditionnée par la taille du plus petit élément fini du maillage spatial, définit la limite de stabilité pour des schémas dits explicites. La dimension caractéristique des plus petits éléments impose une valeur de pas de temps plus restrictive que celle tolérée par les plus grands éléments.

Si le pas de temps critique est petit ou l'intervalle de temps simulé est important, le nombre de pas de temps nécessaire pour une simulation dynamique classique devient très important et parfois prohibitif. Ainsi, il paraît souhaitable de modifier l'échelle de temps en fonction du domaine fréquentiel sollicité dans les différentes régions de la structure. L'adaptation du pas de temps à la discrétisation spatiale est donc nécessaire.

Les principes de raffinement spatial sont repris et adaptés pour les problèmes transitoires. Belytschko et Tabbara [13] établissent une h-méthode pour des problèmes dynamiques. Une approche basée sur la rh-méthode est abordée dans [73]. Plus tard, Campbell et Robinson [18] présentent une p-adaptativité pour la dimension temporelle pour les équations de diffusion. La robustesse et la stabilité de l'algorithme figurent parmi les cinq règles qu'ils se fixent pour construire leur méthode.

L'adaptation spatiale de la valeur du pas de temps est nommée méthode de sous-cyclage [99, 27, 103]. Elle consiste à définir des pas de temps différents pour intégrer les différents degrés de liberté de la structure. Cette adaptation se conçoit aisément pour des problèmes de couplage de modèles présents par exemple lors d'interactions acoustique/structure ou fluide/structure. Elle est également utilisée lorsqu'il n'existe aucune interface physique. Pour pallier certaines difficultés de stabilité, Smolinski et al. [114] et Daniel [28] proposent des algorithmes de sous-cyclage qui conservent l'énergie. L'étude de la stabilité de ces méthodes est une préoccupation constante [102, 101, 26]. Généralement le pas de temps le plus grand est un multiple entier du pas de temps le plus petit. Les travaux décrits en [83, 100] s'intéressent à des multiples de pas de temps non entiers.

Les méthodes de sous-cyclage sont fréquemment associées au couplage de schémas d'intégration temporelle de type différent. Belytschko et Mullen [11, 12] sont les premiers à proposer une méthode mixte en temps explicite-implicite. Les sous-domaines sur lesquels s'applique ce type de schéma sont composés par des ensembles de noeuds. Hughes et Liu [58, 59] proposent un sous-découpage de la structure en groupe d'éléments. Chaque sous-domaine partage avec ses voisins une interface constituée de noeuds. Cette approche est développée par la suite pour des problèmes non linéaires [60]. La convergence des méthodes mixtes d'intégration en temps fait aussi l'objet de travaux spécifiques [61].

1.2.6 Technique de décomposition en sous-domaines

La recherche d'efficacité pour la résolution numérique de problèmes discrétisés par éléments finis conduit Farhat et Roux à créer la méthode FETI [36, 37]. La subdivision préalable de la structure en sous-domaines et les multiplicateurs de Lagrange sont utilisés afin de calculer la solution de chaque domaine séparément (figure 1.7). Cette technique est adaptée pour utiliser les ordinateurs à architecture parallèle [71, 38]. Farhat et Dureisseix baptisent FETI-C [31] la décomposition en sous-domaines pour modéliser des problèmes de contact.

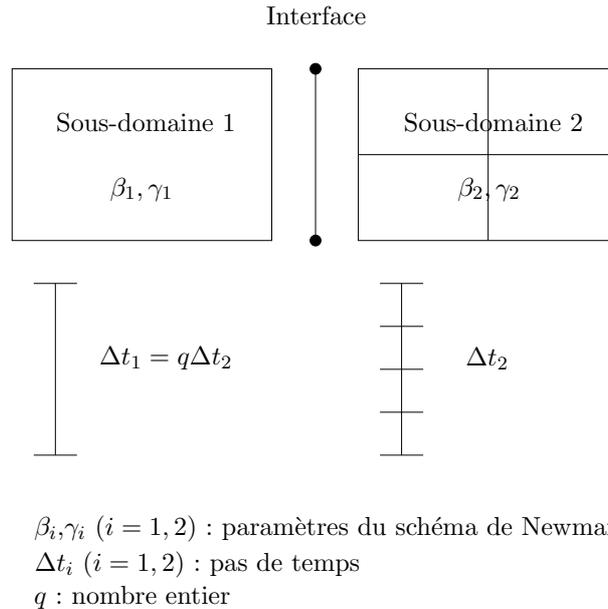


FIG. 1.7 – Exemple de modélisation d'une structure par la technique de sous-domaines [52].

Gravouil reprend le principe de la méthode FETI et l'adapte pour la dynamique non linéaire des structures. La méthode d'intégration temporelle utilise les schémas classiques de Newmark déclinés sous leur forme explicite et implicite. Chaque sous-domaine de la structure possède ses propres caractéristiques de maillage spatio-temporel et ses propres paramètres du schéma d'intégration temporelle comme l'illustre la figure 1.7 [52, 50, 51, 24]. Les sous-domaines communiquent entre eux par l'intermédiaire de leur interface. Les informations échangées sont les quantités cinématiques. Ce transfert est réalisé en utilisant les multiplicateurs de Lagrange [23]. Gravouil et Combescure montrent que leur algorithme est stable si la continuité du champ de vitesse est respectée au niveau des interfaces. Cependant leur schéma est dissipatif si les pas de temps entre deux sous-domaines sont différents. Prakash et Hjelmstad [91] poursuivent ces travaux. Ils proposent une version non dissipative en imposant en plus de la continuité des vitesses aux interfaces des sous-domaines, celle des déplacements et des accélérations.

Herry [54] présente une application de la méthode de décomposition en sous-domaines pour la simulation de crash automobile. Enfin Faucher et al. [39] propose une autre manière d'utiliser les sous-domaines pour le calcul dynamique explicite non linéaire.

En utilisant la décomposition en sous-domaines, le calcul devient plus efficace car le maillage spatial et temporel respecte les spécificités de la structure et de son chargement. La décomposition en sous-domaine permet de choisir l'échelle spatiale et temporelle la plus pertinente pour chaque zone de la structure étudiée. La faiblesse de cette approche est l'intervention de l'utilisateur pour choisir le nombre, la répartition et les caractéristiques de chaque sous-domaine.

1.2.7 Couplage de l'adaptabilité spatiale et temporelle

D'autres approches existent pour coupler la dimension d'espace à celle du temps. Dans la MEF classique des hypothèses sont émises uniquement sur l'interpolation spatiale des quantités cinématiques telles que les déplacements. La dimension temporelle est traitée séparément par des schémas d'intégration. Des formulations espace-temps pour la méthode des éléments finis sont introduites par Hughes et Hulbert [62, 65, 64]. Elles établissent des hypothèses aussi bien sur l'interpolation spatiale que temporelle des variables. Sous certaines conditions, elles permettent de retrouver les schémas d'intégration de Newmark. En ce sens, elles généralisent la MEF classique.

Wiberg et ses associés [113, 33] proposent de coupler l'adaptabilité spatiale à celle temporelle pour simuler la propagation d'ondes linéaire et non linéaire. Dans cette méthode la dimension spatiale est gérée par la méthode des éléments finis et la dimension temporelle par le schéma de Galerkin Discontinu en temps [34] (décrit dans l'annexe B). Comme son nom le laisse supposer, la formulation de Galerkin Discontinue en temps utilise des fonctions de forme temporelles discontinues en temps. Les variables basiques sont les déplacements et les vitesses. Puisqu'une discontinuité est autorisée pour la dimension temporelle, chaque champ se décompose à chaque instant en deux inconnues lorsqu'une interpolation linéaire est choisie. Par exemple le champ de déplacement \mathbf{u} à l'instant t_m est défini à \mathbf{u}_m^- et \mathbf{u}_m^+ . Le champ de vitesse se décompose de la même manière. Ainsi, coexistent quatre variables à chaque pas de temps m . Les équations sont couplées et le système à résoudre est deux fois plus grand que celui obtenu avec des schémas d'intégration classiques. Néanmoins, l'algorithme présente des avantages significatifs. Le schéma est implicite inconditionnellement stable. Il est d'ordre trois alors que les schémas couramment employés sont du deuxième ordre. De plus, cet algorithme filtre efficacement les hautes fréquences parasites liées à une résolution numérique. En outre, il offre la possibilité d'être couplé à des stratégies adaptatives linéaires [76, 1] et non linéaires [5]. Ce schéma fait partie d'une famille plus générale étudiée par Réthoré et al. [96].

Il existe d'autres schémas intéressants, notamment celui de Krenk [67] qui est du quatrième ordre.

Les travaux récents de Yue et Robbins [116] couplent les variables d'espace et de temps de manière très proche de celle présentée dans le chapitre 4. Ils proposent une s-méthode [41, 42] (technique de superposition de maillage) pour des analyses transitoires. L'erreur locale liée au temps est contrôlée en appliquant la technique de Wiberg et Li [111]. L'erreur locale liée à l'espace est estimée par l'estimateur ZZ. Les résultats montrent que le maillage fin suit la propagation des ondes dans la structure au cours du temps.

La mise en place de calcul adaptatif pour la dimension temporelle nécessite l'utilisation de critères mesurant l'erreur liée à l'intégration numérique. Les travaux [111, 85, 86, 93] étudient en particulier cet aspect pour la modélisation de phénomènes non linéaires.

1.2.8 Alternatives à la méthode des éléments finis

L'état de l'art proposé dans cette partie révèle l'essor récent des méthodes de résolution multiéchelle [77]. Ces techniques s'imposent non seulement pour la MEF mais se développent de plus en plus pour des méthodes alternatives sans maillage [78].

La méthode X-FEM [81, 20] connaît actuellement un fort développement. Les discontinuités de structure comme des trous ou des fissures ne sont pas maillées explicitement (figure 1.8). Les fonctions de forme classiques de la MEF sont enrichies par de nouvelles fonctions. Les préoccupations d'efficacité et d'adaptabilité du maillage apparaissent également pour ces nouvelles générations de méthodes [94, 95]. L'enrichissement des noeuds du maillage initial ne suffit pas si l'ordre de

grandeur de la longueur caractéristique de la discontinuité est inférieur à celui d'une maille.

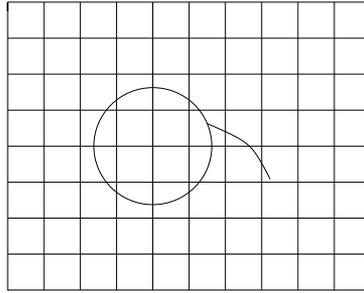


FIG. 1.8 – Exemple de maillage d'une plaque trouée fissurée par la méthode X-FEM.

1.3 Objectifs

Ce travail est motivé par la préoccupation suivante : comment réduire le temps de calcul d'une simulation tout en contrôlant la qualité de la solution ? L'objectif est de mettre en place une méthode de résolution numérique efficace, fondée sur la méthode des éléments finis, pour résoudre les équations de la mécanique (équation d'équilibre, équation de liaisons, conservation de la masse...). L'originalité réside dans la proposition d'un raffinement de maillage spatial et temporel automatique et simultané. Cette méthode est baptisée "STAR-method" pour "Space Time Automatic Refinement". Elle s'apparente à une h-méthode locale aussi bien pour la dimension spatiale que temporelle. Elle permet de construire au fur et à mesure du calcul, un maillage final adapté à la précision de la solution souhaitée par l'utilisateur. Les maillages générés successivement au cours du calcul, aussi appelés grilles ou niveaux, sont hiérarchiques. La précision des résultats est contrôlée par un indicateur d'erreur qui définit localement les zones spatiales et temporelles à raffiner. Le processus est initialisé avec un maillage spatio-temporel grossier. Ainsi, le maillage devient indépendant de l'utilisateur. Le gain d'efficacité est obtenu par un raffinement de maillage local uniquement dans les zones sollicitées.

Cette méthode est implémentée dans le logiciel Cast3m [109, 110].

Le chapitre suivant établit le cadre de travail ainsi que les différents outils utilisés. Il définit les hypothèses relatives au choix de la méthode des éléments finis pour passer d'un problème mécanique continu à discret. Il détermine les méthodes de résolution des équations d'équilibre discrètes utilisées par la suite pour des problèmes linéaires et non linéaires. Il présente également les méthodes d'intégration temporelle nécessaires pour traiter des problèmes de dynamique. Enfin, le bilan énergétique de la formulation discrétisée est détaillé.

Le chapitre 3 développe le principe de la "STAR-method" dans le cas de la statique linéaire. Le raffinement de maillage étant réalisé uniquement pour la dimension spatiale, la méthode est appelée "S(T)AR-method" linéaire. Les indicateurs d'erreurs employés sont définis. Des études numériques sur des cas tests simples permettent d'analyser l'influence du choix de l'indicateur d'erreur ainsi que celle du choix du maillage initial. La convergence et la précision des solutions obtenues par la méthode sont aussi étudiées.

Le quatrième chapitre généralise la méthode présentée au chapitre 3 pour des problèmes de dynamique linéaire. La méthode est désignée par : "STAR-method". L'étude de la stabilité de la méthode est un point indispensable. Lorsque le raffinement de maillage spatial et temporel se localise, les conditions aux limites et initiales à appliquer au nouveau domaine doivent être choisies

avec précaution. Elles sont donc analysées minutieusement. Des études numériques unidimensionnelles et bidimensionnelles sont menées. Elles permettent de dégager les caractéristiques principales de la méthode en dynamique.

Le chapitre 5 évoque le principe de la “S(T)AR-method” dans le cas de la statique non linéaire. Le raffinement de maillage étant réalisé uniquement pour la dimension spatiale, la méthode est appelée “S(T)AR-method” non linéaire. Ce chapitre rappelle la modélisation des solides élastoplastiques dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Il présente ensuite la stratégie choisie pour raffiner automatiquement le maillage spatial et temporel pour traiter un comportement non linéaire du matériau. L’algorithme proposé est construit en utilisant la méthode multigrilles FAS.

Le dernier chapitre est consacré au bilan et aux perspectives de ce travail.

Chapitre 2

Outils numériques

La compréhension d'un phénomène physique ou l'analyse du comportement d'une structure soumise à des sollicitations passe par une modélisation de la réalité. La résolution analytique des équations qui en résultent reste limitée à des problèmes simples ou académiques. Or les ingénieurs s'intéressent à des structures ou des mécanismes complexes du point de vue de leur géométrie, de leur chargement, de leurs conditions aux limites. Ils ont besoin de résoudre des problèmes réels n'admettant généralement pas de solution analytique. Un certain nombre de méthodes existe afin de passer d'un problème réel à un modèle discret approché (figure 1.2). La discrétisation permet d'utiliser une résolution numérique. Le travail présenté dans ce mémoire s'appuie sur la méthode des éléments finis (MEF) [57, 122]. C'est la méthode numérique la plus communément employée pour les simulations numériques en mécanique dans les laboratoires de recherche et les industries.

Le premier objectif de ce chapitre est de présenter les hypothèses relatives à l'utilisation de la MEF pour passer d'un modèle de référence continu à sa formulation discrète. L'utilisation de cette méthode conduit à la résolution d'un système matriciel dont la nature peut être linéaire ou non linéaire. Les techniques numériques pour résoudre ces systèmes sont détaillées dans les parties qui suivent. La variable temporelle étant elle aussi discrétisée, les schémas d'intégration de la famille de Newmark [49, 48] sont analysés. Leur domaine de stabilité est particulièrement étudié. Enfin, le bilan énergétique de la formulation discrète, utile pour vérifier la conservation de l'énergie du système, est donné.

2.1 Problème de référence

La mécanique des milieux continus [46, 47] permet d'établir l'ensemble des relations nécessaires pour décrire le comportement d'une structure. Les équations du système sont écrites pour un problème de référence. Celui-ci représente une structure dont la matière occupe, à l'instant t (appartenant à l'intervalle de temps étudié $[0, T]$), un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Le système, considéré comme galiléen, est soumis à :

- une densité volumique d'effort \underline{f}_d sur le domaine Ω ,
- une densité surfacique d'effort \underline{F}_d sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$,
- un déplacement \underline{u}_d sur la partie $\partial_1\Omega$ complémentaire de $\partial_2\Omega$ telle que $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$.

Cette modélisation est basée sur l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacements et petites déformations). Ainsi, les différentes configurations de la structure au cours du temps sont confondues avec la configuration initiale prise comme référence et représentée sur la figure 2.1.

Les inconnues du problème sont le champ de déplacement $\underline{u}(\underline{P}, t)$ et le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{P}, t)$ définis en tout point \underline{P} du domaine Ω et à tout instant t appartenant à $[0, T]$.

Le couple $(\underline{u}(\underline{P}, t), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{P}, t))$ est solution :

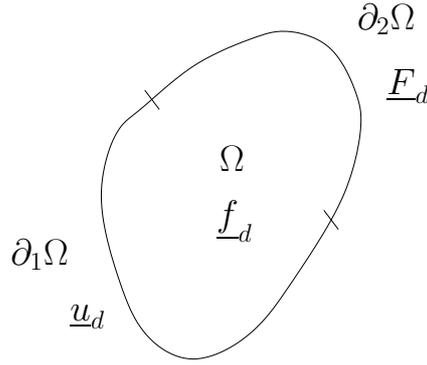


FIG. 2.1 – Modélisation du problème de référence en admettant l'hypothèse des petites perturbations.

- des équations de liaison :

$$\forall \underline{P} \in \partial_1 \Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{avec} \quad \underline{u} \in U \quad \underline{u}(\underline{P}, t) = \underline{u}_d(\underline{P}, t) \quad (2.1)$$

- des conditions initiales :

$$\forall \underline{P} \in \Omega \quad \underline{u}(\underline{P}, t = 0) = \underline{d}_0(\underline{P}) \quad (2.2)$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{d\underline{u}}{dt} \right) (\underline{P}, t = 0) = \underline{v}_0(\underline{P})$$

- de l'équation d'équilibre établie à partir du Principe des Puissances Virtuelles (PPV) [46, 47] :

$$\forall \underline{P} \in \Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \underline{u}^* \in U_0 \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} \in S \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \underline{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega} Tr[\underline{\sigma} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \underline{u}^* dS \quad (2.4)$$

- de la loi de comportement linéaire ou non linéaire du matériau reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations.

Dans ces équations les variables sont définies de la manière suivante :

- ρ représente la densité volumique du matériau considéré,
- \underline{u} est le vecteur du champ de déplacement,
- $\underline{\sigma}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ définissent les tenseurs symétriques des contraintes et des déformations,
- \underline{u}_d est un champ de déplacement imposé connu,
- \underline{d}_0 est un champ de déplacement initial connu,
- \underline{v}_0 est un champ de vitesse initiale connu,
- U et S sont les espaces associés au problème considéré c'est-à-dire des espaces à énergie finie qui assurent de bonnes conditions de régularité. U est l'espace des champs cinématiquement admissibles à zéro (CA à 0). S est l'espace des champs statiquement admissibles à zéro (SA à 0),
- U_0 est l'espace des champs de déplacements virtuels \underline{u}^* défini par :

$$U_0 = \{ \underline{u}^* \mid \forall \underline{P} \in \partial_1 \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad \underline{u}^*(\underline{P}, t) = 0 + \text{régularité} \} \quad (2.5)$$

Remarque : l'équilibre du système (2.4) est établi en ne considérant aucun amortissement de la structure. Une démarche similaire à celle présentée dans cette partie peut être menée en prenant en compte cet amortissement.

2.1.1 Modélisation d'un matériau linéaire

Le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est défini par l'équation (2.6).

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{P}} \right) + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{P}} \right)^T \right) \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire et homogène du matériau, la relation entre les contraintes et les déformations est décrite par l'équation (2.7) où $\underline{\underline{H}}$ est l'opérateur de Hooke.

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \underline{P} \in \Omega \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \quad (2.7)$$

2.1.2 Modélisation d'un matériau non linéaire

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, la relation liant les contraintes aux déformations est plus complexe [75]. Le cas de la plasticité est traité au chapitre 5.

Du point de vue de la thermodynamique et dans le cadre de la méthode de l'état local [75, 72, 14], la connaissance de l'état d'un milieu matériel à un instant donné dépend de la valeur à cet instant d'un certain nombre de variables. L'état du milieu matériel dépend de l'histoire de variables appelées variables internes et de variables observables telles que la température T (négligée ici) et la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ se décompose en une partie anélastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ et une partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$. D'une façon générale, les variables internes sont désignées par v_i avec i un entier. Les forces thermodynamiques associées aux variables internes v_i sont notées A_i .

Le comportement du matériau est décrit par des lois d'état définies à partir d'un potentiel d'état Ψ et des lois d'évolution exprimées à partir d'un opérateur non linéaire B . Le potentiel d'état Ψ dépend des variables observables et des variables internes.

$$\Psi = \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}_e, v_i) \quad (2.8)$$

Les lois d'état sont données par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_e} \quad (2.9)$$

$$A_i = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} \quad (2.10)$$

ρ désigne la masse volumique du matériau. Les lois d'évolution sont décrites via un opérateur non linéaire B par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p \\ -\dot{v}_i \end{bmatrix} = B \left(\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \\ A_i \end{bmatrix} \right) \quad (2.11)$$

La déformation du matériau $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est supposée découpée en une partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$ et une partie inélastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ telles que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_p \quad (2.12)$$

Le découplage de la déformation du matériau permet de décomposer le potentiel d'état en une partie élastique Ψ_e et une partie plastique Ψ_p .

$$\rho \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}_e, v_i) = \rho \Psi_e(\underline{\underline{\varepsilon}}_e) + \rho \Psi_p(v_i) \quad (2.13)$$

L'hypothèse d'élasticité linéaire permet d'expliciter la partie du potentiel d'état linéaire $\Psi_e(\underline{\underline{\varepsilon}}_e)$. En développant le terme $\Psi_e(\underline{\underline{\varepsilon}}_e)$, le potentiel d'état devient :

$$\rho\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}_e, v_i) = \frac{1}{2}Tr[\underline{\underline{\varepsilon}}_e \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}_e] + \rho\Psi_p(v_i) \quad (2.14)$$

Lorsque l'opérateur B dérive d'un pseudo-potential de dissipation convexe $\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, A_i)$, le modèle de matériau est dit standard [75]. L'opérateur B s'écrit alors à partir du sous-différentiel de ψ^* . Si le pseudo-potential de dissipation convexe ψ^* est dérivable, les dérivées par rapport au temps des déformations plastiques $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p$ et des variables internes \dot{v}_i s'expriment par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p = \frac{\partial\psi^*}{\partial\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2.15)$$

$$- \dot{v}_i = \frac{\partial\psi^*}{\partial A_i} \quad (2.16)$$

2.2 Discrétisation de l'espace et du temps

Les équations (2.1) à (2.7) décrivent l'équilibre et le comportement d'une structure linéaire élastique de manière continue. Les inconnues $\underline{u}(\underline{P}, t)$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{P}, t)$ sont définies en tout point \underline{P} du domaine Ω et pour tout instant t appartenant à $[0, T]$. Dans la majorité des problèmes posés en ingénierie, l'obtention de $\underline{u}(\underline{P}, t)$ et de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{P}, t)$ de manière analytique n'est pas possible. La recherche d'une solution approchée s'impose. L'approximation est réalisée en utilisant la méthode des éléments finis [57, 122] et un schéma d'intégration temporelle si la modélisation dépend du temps. L'utilisation de ces méthodes nécessite une discrétisation spatiale et temporelle respectivement du domaine Ω et de l'intervalle de temps $[0, T]$.

2.2.1 Discrétisation de l'espace

L'approximation de la solution du problème de référence n'est pas cherchée dans des espaces U , S et U_0 de dimension infinie mais dans des espaces U_n , S_n et U_{0n} de dimension n finie. La structure occupe alors le domaine discrétisé Ω_n de frontière $\partial\Omega_n$. Le modèle discret contient alors ne éléments et n degrés de liberté. La figure 2.2 propose un exemple de discrétisation spatiale du problème de référence avec des éléments triangulaires.

La méthode des éléments finis permet de calculer les déplacements uniquement en chaque degré de liberté i du maillage spatial. En tout point \underline{P} du système, les déplacements approchés \underline{u}_{appr} sont interpolés par l'expression (2.17) à partir des déplacements nodaux $u_i(t)$ et des fonctions de forme $\varphi_i(\underline{P})$ associées à chaque degré de liberté i .

$$\underline{u}_{appr}(\underline{P}, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \varphi_i(\underline{P}) \quad (2.17)$$

Pour alléger l'écriture, la solution approchée \underline{u}_{appr} sera désormais notée \underline{u} .

Afin d'obtenir l'équation d'équilibre sous la forme discrète, l'hypothèse (2.17) est injectée dans l'équation (2.4). En utilisant la relation de comportement (2.7) linéaire et en tenant compte de l'hypothèse des petites perturbations, la discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre devient (2.18).

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.18)$$

Les conditions aux limites (2.19) et initiales (2.20) associées au problème discrétisé s'écrivent :

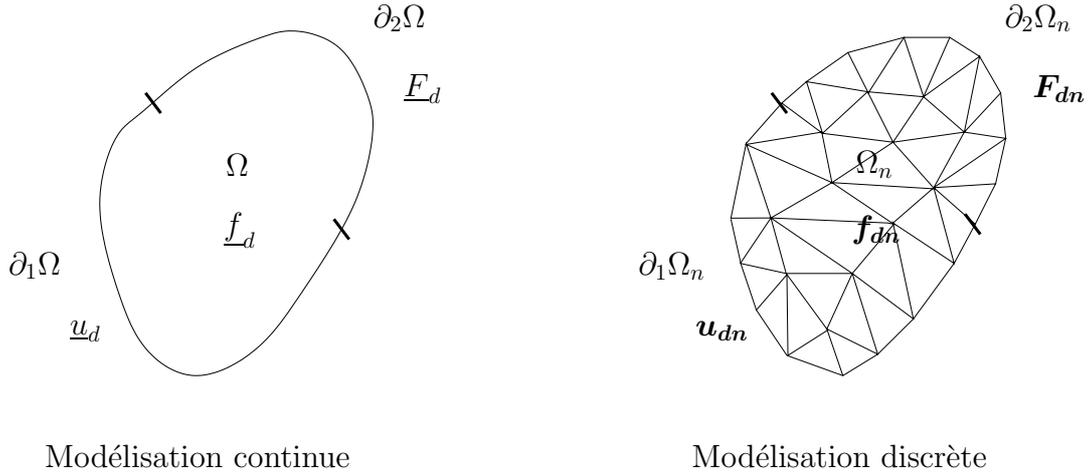


FIG. 2.2 – Exemple de discrétisation spatiale du problème de référence avec des éléments triangulaires.

$$\forall t \in [0, T] \text{ et } \mathbf{u} \in U_n \quad \mathbf{u}(t) \Big|_{\partial_1 \Omega_n} = \mathbf{u}_d(t) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{d}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \mathbf{v}_0 \quad (2.20)$$

La matrice de masse \mathbf{M} , la matrice de raideur \mathbf{K} et le vecteur des efforts généralisés \mathbf{f} sont construits par assemblage sur les éléments finis.

La matrice de masse est définie par :

$$\mathbf{M}_{ij} = \sum_E \int_{\Omega_E} \rho^E \varphi_i^E(\underline{P}) \varphi_j^E(\underline{P}) d\Omega \quad (2.21)$$

La matrice de raideur est définie par :

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_E \int_{\Omega_E} Tr[\underline{\underline{H}}^E \underline{\underline{\varepsilon}}^E(\varphi_i^E(\underline{P})) \underline{\underline{\varepsilon}}^E(\varphi_j^E(\underline{P}))] d\Omega \quad (2.22)$$

Le vecteur des efforts généralisés est défini par :

$$\mathbf{f}_i(t) = \sum_E \left(\int_{\Omega_E} \underline{f}_d(t) \varphi_i^E(\underline{P}) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega_E} \underline{F}_d(t) \varphi_i^E(\underline{P}) dS \right) \quad (2.23)$$

La lettre E désigne une quantité définie sur un élément fini et \sum_E représente la somme sur les éléments finis.

Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} et le vecteur \mathbf{f} sont calculés par intégration numérique.

2.2.2 Discrétisation du temps

L'équation (2.18) est discrétisée en espace mais continue en temps. La résolution de cette équation requiert l'utilisation de schémas d'intégration temporelle numérique, section 2.5. L'intervalle d'étude $[0, T]$ est alors divisé en r pas de temps, soit $r + 1$ instants :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots < t_{r-1} < t_r = T$$

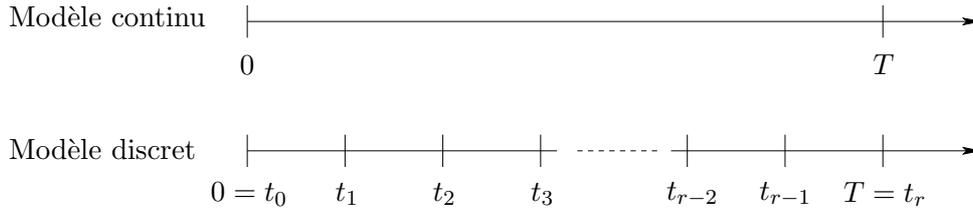


FIG. 2.3 – Discretisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en r pas de temps constants.

Cette discrétisation présentée sur la figure 2.3 définit le maillage du temps.

Le maillage du temps sera supposé à pas constant :

$$\forall m \in \{0, \dots, r-1\} \quad \Delta t = t_{m+1} - t_m = cste$$

La maille de temps correspond à un pas ou intervalle de temps Δt qui se distingue du piquet de temps ou instant t_m défini par $t_m = m\Delta t$.

La discrétisation spatiale et temporelle de l'équation d'équilibre linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations et les conditions aux limites et initiales associées sont présentées respectivement par les équations (2.24), (2.25) et (2.26).

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{K} \mathbf{u}_m = \mathbf{f}_m \quad \forall m \in \{0, \dots, r\} \quad (2.24)$$

$$\forall m \in \{0, \dots, r\} \text{ et } \mathbf{u} \in U_n \quad \mathbf{u}_m \Big|_{\partial_1 \Omega_n} = \mathbf{u}_d(t_m) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{d}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{v}_0 \quad (2.26)$$

2.3 Méthode de résolution des équations d'équilibre - Cas linéaire

La modélisation de problèmes mécaniques linéaires conduit à la résolution de l'équation (2.24). Que le problème soit défini en statique ou en dynamique, l'équation (2.24) peut toujours s'écrire sous la forme de l'équation (2.27).

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.27)$$

où \mathbf{x} désigne le vecteur des inconnues et \mathbf{b} le vecteur du second membre connu. \mathbf{A} est une matrice carrée creuse de type bande vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- \mathbf{A} est une matrice symétrique $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
- \mathbf{A} est une matrice positive $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$.
- \mathbf{A} est une matrice définie $\Leftrightarrow \{\forall \mathbf{x} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.
- \mathbf{A} est une matrice de dimension n finie $\Leftrightarrow \dim(\mathbf{A}) = n$.

Dans le cas de la statique linéaire, la matrice \mathbf{A} correspond à la matrice de raideur \mathbf{K} du système et le vecteur \mathbf{b} aux efforts extérieurs \mathbf{f} . Dans le cas de la dynamique, le système est résolu pour chaque instant t_m . Il prend la forme $\mathbf{A} \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_m$. La matrice \mathbf{A} correspond à une combinaison linéaire de la matrice de raideur \mathbf{K} et de la matrice de masse \mathbf{M} du système et le vecteur \mathbf{b} est une expression contenant les efforts extérieurs \mathbf{f} . La définition exacte de \mathbf{A} et \mathbf{b} dans ce cas est donnée dans la section 2.5.5.

Les deux parties suivantes présentent successivement la méthode de Crout et la méthode multigrille utilisées dans les chapitres 3 et 4 pour résoudre le système linéaire (2.27). L'annexe A

propose une troisième technique de résolution : la méthode du gradient conjugué préconditionné. Cette méthode est très utile pour résoudre un système linéaire par bloc.

2.3.1 Méthode de Crout

La méthode de Crout est une méthode de résolution directe. Elle est utilisée lorsque la matrice \mathbf{A} est symétrique définie positive. Elle consiste à décomposer cette matrice en un produit de trois matrices \mathbf{L} , \mathbf{D} et \mathbf{L}^T où \mathbf{L} est une matrice triangulaire inférieure à diagonale égale à un et \mathbf{D} une matrice diagonale (2.28).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{L} \mathbf{y} &= \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{z} \text{ et } \mathbf{z} = \mathbf{L}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.28)$$

La première étape consiste à résoudre $\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{b}$, la seconde $\mathbf{D} \mathbf{z} = \mathbf{y}$ et la troisième $\mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Cette méthode est avantageuse pour résoudre des systèmes de type $\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ de la forme :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b1} \\ \mathbf{b2} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

où \mathbf{A} est une matrice symétrique définie positive, \mathbf{C} une matrice injective composée de 0 et de 1, $\mathbf{b1}$ et $\mathbf{b2}$ deux vecteurs connus et enfin $\mathbf{0}$ la matrice nulle. La dimension de $\bar{\mathbf{A}}$ est supérieure à celle de \mathbf{A} . La décomposition de $\bar{\mathbf{A}}$ en trois matrices est unique bien qu'elle soit symétrique positive et non-définie (équation (2.29)). Cette situation se rencontre lors de l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange (lors de la prise en compte de déplacements imposés par exemple) pour résoudre les équations d'équilibre.

2.3.2 Méthode multigrille

La stratégie multigrille est utilisée pour ce travail pour la résolution des problèmes non linéaires. Afin de mieux comprendre son fonctionnement en non linéaire, elle est d'abord présentée dans le cadre de la résolution de systèmes linéaires.

La méthode multigrille évoquée dans la partie 1.2 du chapitre précédent permet d'accélérer la convergence d'un calcul. La résolution est effectuée en utilisant des maillages spatiaux de finesses différentes appelés niveaux ou grilles. Brandt [16, 17] a développé cette méthode en s'appuyant sur les observations suivantes :

- Les algorithmes classiques de type Gauss Seidel ou gradient conjugué résolvent rapidement les erreurs de haute fréquence de la solution et beaucoup plus lentement ses basses fréquences.
- Le transfert d'une solution d'un niveau fin vers un niveau plus grossier change ses erreurs de basse fréquence en erreurs de haute fréquence.

L'efficacité de la méthode vient du fait que les algorithmes classiques sont utilisés uniquement pour résoudre les erreurs de haute fréquence de la solution d'une grille. Ce procédé permet de profiter des avantages de chacune des discrétisations. Le calcul avec une grille grossière est bien plus rapide qu'avec une grille fine. Par contre, la précision de la solution est bien plus importante sur la discrétisation fine.

Le passage d'une grille à l'autre nécessite des opérateurs de changement d'échelle. Le transfert d'une grille grossière à une grille fine s'appelle le prolongement. Il est défini par l'opérateur \mathbf{P}_r . La transition d'une grille fine à une grille grossière est réalisée par l'opérateur de restriction \mathbf{R}_e . Les opérateurs \mathbf{P}_r et \mathbf{R}_e sont généralement choisis pour laisser invariant le travail des efforts

intérieurs [52]. Si tel est le cas, \mathbf{P}_r et \mathbf{R}_e respectent la relation $\mathbf{R}_e = \mathbf{P}_r^T$. Dureisseix et Baves-trello [32] étudient les spécificités de différents opérateurs de changement d'échelle dans le cadre de la MEF.

Par souci de clarté, la résolution du système (2.27) par la méthode multigrille est présentée en utilisant uniquement deux grilles. L'ouvrage de Lubrecht et Venner [108] décrit précisément le principe de cette méthode et nomme la résolution avec deux grilles "Correction Scheme". Par la suite, la grille fine est désignée par l'indice f et la grille grossière par l'indice G .

Pour obtenir la solution sur un maillage cible fin, seulement quelques itérations (appelées aussi relaxations) sont effectuées sur chacun des niveaux. La grille la plus fine donne une approximation de la solution recherchée et les grilles plus grossières apportent des corrections. La résolution exacte n'intervient que sur le maillage le plus grossier désigné comme le premier niveau.

L'objectif de la méthode est d'obtenir l'inconnue \mathbf{x}^f sur le maillage fin, solution de l'équation (2.30).

$$\mathbf{A}^f \mathbf{x}^f = \mathbf{b}^f \quad (2.30)$$

Après ν_1 relaxations sur le système à résoudre (2.30), une solution approchée $\tilde{\mathbf{x}}^f$ est obtenue. Le résidu \mathbf{R}^f se calcule par l'équation (2.31) qui permet de déduire la relation (2.32).

$$\mathbf{R}^f = \mathbf{b}^f - \mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f \quad (2.31)$$

$$\mathbf{b}^f = \mathbf{R}^f + \mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f \quad (2.32)$$

La relation (2.32) est introduite dans l'équation (2.30) qui devient (2.33).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^f \mathbf{x}^f &= \mathbf{R}^f + \mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}^f \mathbf{x}^f - \mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f &= \mathbf{R}^f \end{aligned} \quad (2.33)$$

En définissant l'erreur \mathbf{v}^f par (2.34) et sachant que le système à résoudre est linéaire, l'équation (2.33) se simplifie suivant (2.35).

$$\mathbf{v}^f = \mathbf{x}^f - \tilde{\mathbf{x}}^f \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^f \mathbf{x}^f - \mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f &= \mathbf{R}^f \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}^f (\mathbf{x}^f - \tilde{\mathbf{x}}^f) &= \mathbf{R}^f \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}^f \mathbf{v}^f &= \mathbf{R}^f \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'estimation de l'erreur \mathbf{v}^f est réalisée sur le maillage grossier G . Pour cela, le résidu \mathbf{R}^f est restreint du maillage fin f vers le maillage grossier G (2.36) via l'opérateur de restriction \mathbf{R}_e . L'erreur grossière \mathbf{v}^G est calculée par l'équation (2.37).

$$\hat{\mathbf{R}}^G = \mathbf{R}_e \mathbf{R}^f \quad (2.36)$$

$$\mathbf{A}^G \mathbf{v}^G = \hat{\mathbf{R}}^G \quad (2.37)$$

La matrice \mathbf{A}^G est reconstruite à partir du maillage grossier ou calculée en écrivant la conservation de l'énergie potentielle sur les deux niveaux fin et grossier qui donne $\mathbf{A}^G = \mathbf{R}_e^T \mathbf{A}^f \mathbf{R}_e$.

L'équation (2.37) est résolue jusqu'à la convergence de la solution \mathbf{v}^G . Le prolongement de \mathbf{v}^G du maillage grossier G vers le maillage fin f (2.38) via l'opérateur de prolongement \mathbf{P}_r permet de corriger $\tilde{\mathbf{x}}^f$ suivant l'équation (2.39).

$$\mathbf{v}^f = \mathbf{P}_r \mathbf{v}^G \quad (2.38)$$

$$\mathbf{x}^f = \tilde{\mathbf{x}}^f + \mathbf{v}^f \quad (2.39)$$

Le prolongement de l'erreur \mathbf{v}^G de la grille grossière vers la grille fine introduit dans la solution \mathbf{x}^f des erreurs de haute fréquence lissées par ν_2 relaxations sur le problème fin.

La table 2.1 présente l'algorithme multigrille linéaire à deux échelles de référence.

1 - ν_1 relaxations sur le problème de référence	$\mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f = \mathbf{b}^f$
2 - Calcul du résidu	$\mathbf{R}^f = \mathbf{b}^f - \mathbf{A}^f \tilde{\mathbf{x}}^f$
3 - Restriction du résidu du maillage fin vers le maillage grossier	$\hat{\mathbf{R}}^G = \mathbf{R}_e \mathbf{R}^f$
4 - Calcul de l'erreur sur le maillage grossier	$\mathbf{A}^G \mathbf{v}^G = \hat{\mathbf{R}}^G$
5 - Prolongement de l'erreur	$\mathbf{v}^f = \mathbf{P}_r \mathbf{v}^G$
6 - Correction de l'inconnue	$\mathbf{x}^f = \tilde{\mathbf{x}}^f + \mathbf{v}^f$
7 - ν_2 relaxations sur le problème fin pour lisser les erreurs de haute fréquence introduites par le prolongement de la correction	$\mathbf{A}^f \mathbf{x}^f = \mathbf{b}^f$
8 - Mesure d'une erreur err	
9 - Comparaison de l'erreur err au critère d'arrêt ϵ :	
	Si $err > \epsilon$ alors retour en 1
	Si $err \leq \epsilon$ le calcul est terminé

TAB. 2.1 – Algorithme multigrille linéaire de référence à deux niveaux.

Cet algorithme se généralise ensuite en utilisant un nombre de niveaux supérieur à deux. La stratégie de résolution s'appelle alors des V cycles. Elle est illustrée par la figure 2.4 dans le cas d'une résolution avec 4 niveaux.

Les paramètres définissant un cycle sont ν_1 pour le nombre de pré-relaxations, ν_2 pour le nombre de post-relaxations et ν_0 pour le nombre d'itérations effectuées sur la grille la plus grossière pour résoudre exactement le problème. ν_1 et ν_2 sont de l'ordre de 1 à 2 pour un problème de référence et de 3 à 5 pour un problème réel. Le coût de la résolution complète sur le niveau 1 est minime puisqu'elle est réalisée sur un maillage très grossier. Une flèche dirigée vers le haut symbolise l'étape de prolongement, une flèche vers le bas l'étape de restriction. Le nombre de V cycles est piloté par le critère d'arrêt ϵ . Une erreur err mesurée entre chaque cycle doit satisfaire le critère d'arrêt ϵ .

Pour améliorer encore la vitesse de convergence, une stratégie "Full MultiGrid" (FMG) est mise en place. Les V cycles sont associés récursivement selon le graphique 2.5. Le double cercle

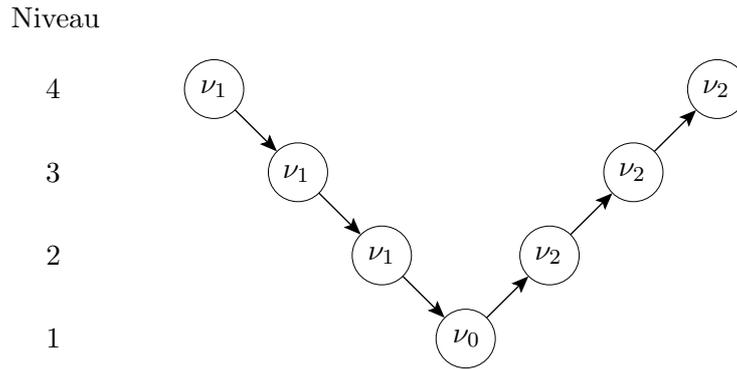


FIG. 2.4 – Représentation d'un V cycle sur quatre niveaux

matérialise la solution convergée sur un niveau. Généralement plusieurs V cycles sont nécessaires avant d'obtenir la solution convergée sur un niveau. L'interpolation de la solution convergée sert d'initialisation pour le niveau supérieur. La figure 2.5 ne représente qu'un seul V cycle avant la convergence de la solution pour une lecture plus simple du graphique.

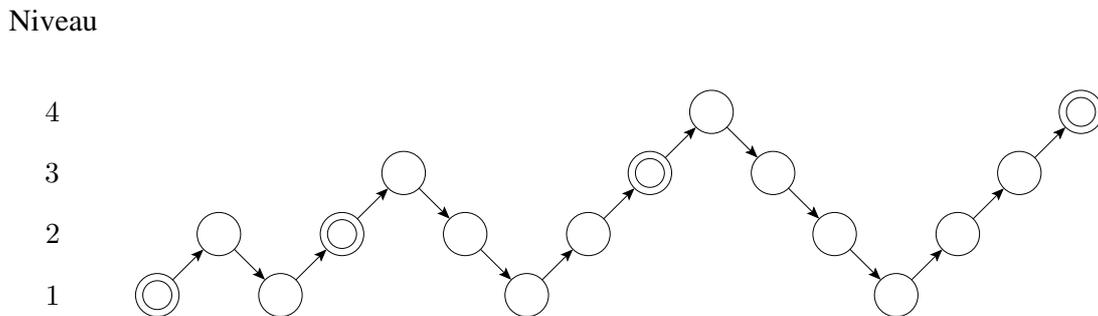


FIG. 2.5 – Représentation du FMG avec quatre niveaux

2.4 Méthode de résolution des équations d'équilibre - Cas non linéaire

Quel que soit le type des non linéarités prises en compte dans la modélisation par éléments finis (géométriques, matériau ou liées à la présence de pièces en contact), le système prend la forme (2.40). Le vecteur \mathbf{a} dépend du vecteur des inconnues \mathbf{x} , il peut éventuellement se mettre sous la forme $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ où \mathbf{A} est une matrice dépendante du vecteur des inconnues. Le second membre \mathbf{b} est un vecteur connu.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad (2.40)$$

Des méthodologies différentes de celles mentionnées précédemment sont mises en place pour résoudre de tels systèmes. Cette partie se focalise uniquement sur deux procédés de résolution bien qu'il en existe de nombreux. Le premier, classiquement utilisé, est la méthode de Newton. Le second, connu sous le nom de FAS ("Full Approximation Scheme"), correspond à l'adaptation de la méthode multigrille vue en 2.3.2 au cas non linéaire.

Lors d'une modélisation par la MEF, la quantité \mathbf{a} correspond au vecteur des forces internes \mathbf{f}_{int} dépendant du champ de déplacement \mathbf{u} , du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, des variables internes v_i .

2.4.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton est une résolution itérative. Elle consiste à construire, à chaque itération d'indice k , la solution \mathbf{x} comme une suite de vecteurs de la forme de (2.41).

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} \end{cases} \quad (2.41)$$

L'accroissement $\Delta\mathbf{x}^{(k+1)}$ est choisi de manière à annuler le développement limité au premier ordre du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k+1)})$ de l'équation (2.40). Le résidu à l'itération $k+1$ de l'équation (2.40) s'écrit suivant (2.42) et son développement limité au premier ordre suivant (2.43).

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k+1)}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{x}^{(k+1)}) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k+1)}) \\ &\approx \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}} \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} \\ &\approx \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)}) - \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}} \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Plusieurs stratégies sont possibles pour choisir la quantité $\partial\mathbf{a}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}$, appelée matrice tangente et notée \mathbf{K}_T . Elle peut être actualisée à chaque itération k . Le calcul converge alors en peu d'itérations mais le coût de chacune d'elles est important. Si elle est choisie constante, ce coût est considérablement réduit mais la convergence nécessite plus d'itérations.

Par la suite, la matrice \mathbf{K}_T est choisie constante et égale à la matrice de raideur \mathbf{K} obtenue si le problème initial (2.40) était linéaire. Ainsi l'incrément $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ est obtenu par la linéarisation décrite par (2.44) où $\mathbf{R}^{(k)}$ représente $\mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)})$ c'est-à-dire $\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{x}^{(k)})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)}) - \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}} \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}} \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \Leftrightarrow \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{R}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \Rightarrow \mathbf{K} \Delta\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{R}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Finalement, l'algorithme de Newton de référence est décrit par la table 2.2.

Le calcul de l'incrément $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ passe par la résolution du système linéaire $\mathbf{K} \Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k-1)}$ qui peut s'effectuer par l'une des techniques présentées dans la partie 2.3.

2.4.2 Méthode multigrille : FAS

La méthode FAS ("Full Approximation Scheme") est une autre alternative pour calculer la solution discrète de l'équation (2.40). Elle correspond à l'adaptation de la méthode multigrille présentée dans la section 2.3.2 pour des systèmes non linéaires. Cette stratégie sera utilisée dans le chapitre 5.

Le principe de la méthode est le même que dans le cas linéaire. La présentation de l'algorithme multigrille FAS suit donc la même démarche que la partie 2.3.2. L'explication est développée en utilisant uniquement deux niveaux. La grille fine est désignée par l'indice f et la grille grossière

1 - Initialisation de la résolution $k = 0$	$\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{x}^{(0)})$
2 - Passage à l'itération $k = k + 1$	
3 - Calcul de l'incrément $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$	$\mathbf{K} \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k-1)}$
4 - Correction de l'inconnue	$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$
5 - Calcul du vecteur $\mathbf{a}(\mathbf{x}^{(k)})$	
6 - Calcul du résidu $\mathbf{R}^{(k)}$	$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{x}^{(k)})$
7 - Calcul d'une erreur err	
8 - Comparaison de l'erreur err au critère d'arrêt ϵ	
	Si $err > \epsilon$ alors retour en 2.
	Si $err < \epsilon$ le calcul est terminé.

TAB. 2.2 – *Algorithme de Newton de référence pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires.*

par l'indice G .

L'objectif est d'obtenir la solution de l'équation d'équilibre discrète sur un maillage cible fin. Le système de référence (2.40) devient (2.45).

$$\mathbf{a}^f(\mathbf{x}^f) = \mathbf{b}^f \quad (2.45)$$

Après ν_1 itérations sur le problème non linéaire discret (2.45), une approximation $\tilde{\mathbf{x}}^f$ est obtenue. Ces itérations, appelées aussi relaxations, peuvent être réalisées par un algorithme de type Newton décrit par la table 2.2. Le résidu \mathbf{R}^f relatif à l'approximation $\tilde{\mathbf{x}}^f$ s'écrit suivant la relation (2.46).

$$\mathbf{R}^f = \mathbf{b}^f - \mathbf{a}^f(\tilde{\mathbf{x}}^f) \quad (2.46)$$

L'erreur \mathbf{v}^f commise par rapport à la solution exacte du problème discret \mathbf{x}^f est définie par l'équation (2.47).

$$\mathbf{v}^f = \mathbf{x}^f - \tilde{\mathbf{x}}^f \quad (2.47)$$

L'introduction de la définition de l'erreur dans l'équation (2.46) conduit à l'équation suivante :

$$\mathbf{R}^f = \mathbf{b}^f - \mathbf{a}^f(\tilde{\mathbf{x}}^f) = \mathbf{b}^f - \mathbf{a}^f(\mathbf{x}^f - \mathbf{v}^f) \quad (2.48)$$

Si le système est linéaire, l'erreur peut être découplée de la solution. Lorsque le système est non linéaire, ce découplage n'est plus possible. Le nom FAS vient du fait que l'erreur \mathbf{v}^f est estimée en considérant l'équation complète (2.48).

En substituant l'expression du second membre \mathbf{b}^f de l'équation (2.45) dans (2.48) et en utilisant la définition de l'erreur (2.47), l'erreur \mathbf{v}^f est obtenue à partir de (2.49).

$$\mathbf{a}^f(\tilde{\mathbf{x}}^f + \mathbf{v}^f) = \mathbf{a}^f(\tilde{\mathbf{x}}^f) + \mathbf{R}^f \quad (2.49)$$

Comme dans le cas linéaire, \mathbf{v}^f est calculée sur le maillage grossier G . Le résidu \mathbf{R}^f ainsi que la solution $\tilde{\mathbf{x}}^f$ sont restreints du niveau fin vers le niveau grossier en utilisant l'opérateur \mathbf{R}_e de restriction.

$$\hat{\mathbf{R}}^G = \mathbf{R}_e \mathbf{R}^f \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^G = \mathbf{R}_e \tilde{\mathbf{x}}^f \quad (2.51)$$

L'équation (2.49) transcrite sur le maillage grossier s'exprime par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^G(\tilde{\mathbf{x}}^G + \mathbf{v}^G) &= \mathbf{a}^G(\hat{\mathbf{x}}^G) + \hat{\mathbf{R}}^G \\ \Leftrightarrow \mathbf{a}^G(\mathbf{x}^G) &= \mathbf{a}^G(\hat{\mathbf{x}}^G) + \hat{\mathbf{R}}^G \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le vecteur \mathbf{a}^G est soit reconstruit à partir du maillage grossier, soit calculé en considérant la relation $\mathbf{a}^G = \mathbf{R}_e^T \mathbf{a}^f$ donnée par la conservation de l'énergie potentielle entre les deux niveaux f et G . Le vecteur $\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})$ est constant, il n'évolue pas au cours du calcul.

La résolution exacte de l'équation (2.52) donne \mathbf{x}^G . Ensuite, la solution $\tilde{\mathbf{x}}^f$ est corrigée en estimant l'erreur \mathbf{v}^f par la relation suivante où \mathbf{P}_r est l'opérateur de projection.

$$\mathbf{x}^f = \tilde{\mathbf{x}}^f + \mathbf{P}_r (\mathbf{x}^G - \hat{\mathbf{x}}^G) \quad (2.53)$$

Le prolongement de l'erreur $(\mathbf{x}^G - \hat{\mathbf{x}}^G)$ de la grille grossière vers la grille fine introduit dans la solution \mathbf{x}^f des erreurs de haute fréquence lissées par ν_2 relaxations sur le problème fin.

A partir des équations précédentes, l'algorithme multigrille non linéaire FAS de référence avec deux niveaux de maillage est résumé dans la table 2.3.

1 - ν_1 itérations sur le problème de référence

$$\mathbf{a}^f(\tilde{\mathbf{x}}^f) = \mathbf{b}^f$$

2 - Calcul du résidu

$$\mathbf{R}^f = \mathbf{b}^f - \mathbf{a}^f(\tilde{\mathbf{x}}^f)$$

3 - Restriction du résidu et de la solution du niveau fin au niveau grossier

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^G &= \mathbf{R}_e \mathbf{R}^f \\ \hat{\mathbf{x}}^G &= \mathbf{R}_e \tilde{\mathbf{x}}^f \end{aligned}$$

4 - ν_0 itérations sur le problème grossier

$$\mathbf{a}^G(\tilde{\mathbf{x}}^G) = \mathbf{a}^G(\hat{\mathbf{x}}^G) + \hat{\mathbf{R}}^G$$

5 - Correction de l'inconnue

$$\mathbf{x}^f = \tilde{\mathbf{x}}^f + \mathbf{P}_r (\tilde{\mathbf{x}}^G - \hat{\mathbf{x}}^G)$$

6 - ν_2 relaxations sur le problème fin pour lisser les erreurs de haute fréquence introduites par le prolongement de la correction

$$\mathbf{a}^f(\mathbf{x}^f) = \mathbf{b}^f$$

7 - Mesure d'une erreur err

8 - Comparaison de l'erreur err au critère d'arrêt ϵ :

Si $err > \epsilon$ alors retour en 1

Si $err \leq \epsilon$ le calcul est terminé

TAB. 2.3 – Algorithme multigrille non linéaire FAS de référence à deux niveaux.

Le nombre d'itérations ν_1 et ν_2 est généralement compris entre 3 et 10 alors que ν_0 correspond au nombre nécessaire pour résoudre "exactement" le problème grossier.

Comme dans le cas de la résolution multigrille de problèmes linéaires, l'algorithme FAS de référence se généralise avec un nombre de niveaux supérieur à deux, suivant une stratégie de

V cycles comme la figure 2.4. La vitesse de convergence de l'algorithme est encore améliorée en adoptant la stratégie FMG représentée sur la figure 2.5.

2.5 Schéma d'intégration temporelle

La résolution des équations de la dynamique des structures est possible par deux approches : la superposition modale et l'intégration temporelle directe [49, 48]. La superposition modale est efficace si les modes fondamentaux de la structure sont dominants. Dans le cas contraire, cette méthode est avantageusement remplacée par une méthode d'intégration temporelle directe. Cependant, les paramètres de ces schémas doivent être contrôlés pour maîtriser la précision, la stabilité et l'amortissement numérique de la réponse.

Il existe de nombreux schémas d'intégration temporelle différents. Les plus connus sont ceux de la famille de Newmark et les HHT [49]. Ils sont généralement d'ordre 2. Récemment, Krenk [67] propose un schéma du quatrième ordre. Le gain de précision est au prix de la résolution d'un système matriciel contenant quatre fois plus de degrés de liberté qu'une méthode classique. Le schéma de Galerkin Discontinu en temps [113, 33, 76, 1, 5] évoqué succinctement dans l'état de l'art est détaillé dans l'annexe B.

Cette partie se concentre sur les schémas à un pas de la famille de Newmark qui sont les plus répandus. La stabilité est étudiée au travers d'une démarche classique et d'une démarche basée sur la méthode énergétique.

2.5.1 Schéma de Newmark

Le schéma de Newmark permet de calculer le vecteur d'état $\mathbf{U}_m = \{\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}\}_m$ inconnu à chaque piquet de temps t_m . Il fournit les deux équations complémentaires (2.55) et (2.56) à l'équation d'équilibre (2.54), basées sur le développement de Taylor à l'ordre 2 de $\dot{\mathbf{u}}_m$ et \mathbf{u}_m . Les développements complets pour obtenir ces deux expressions se trouvent dans [49].

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{m+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{f}_{m+1} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}p_m + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m+1} \quad (2.55)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{m+1} = \dot{\mathbf{u}}p_m + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{m+1} \quad (2.56)$$

Les quantités $\mathbf{u}p_m$ et $\dot{\mathbf{u}}p_m$ représentent les prédicteurs du schéma. Ils sont définis par les équations (2.57) et (2.58). γ et β sont les paramètres du schéma.

$$\mathbf{u}p_m = \mathbf{u}_m + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_m + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_m \quad (2.57)$$

$$\dot{\mathbf{u}}p_m = \dot{\mathbf{u}}_m + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_m \quad (2.58)$$

Si $\beta = 0$, le schéma est dit explicite. Il est conditionnellement stable. Le pas de temps Δt ne doit pas dépasser le pas de temps critique Δt_{crit} . L'équilibre du système à un instant donné dépend uniquement de l'instant précédent. Il ne découle pas de l'inversion d'une matrice car la matrice de masse \mathbf{M} est diagonale. Ce schéma est généralement utilisé en dynamique rapide. Les pas de temps choisis sont petits mais le calcul de l'état d'équilibre à chaque piquet de temps t_m est peu coûteux en temps.

Si $\beta \neq 0$, le schéma est dit implicite. Suivant la valeur de γ , il est conditionnellement ou incondi-

est plus grand que celui d'un schéma explicite. Cependant, le calcul de l'état d'équilibre à chaque piquet de temps t_m est plus coûteux en temps car il nécessite l'inversion d'une matrice.

Un schéma d'intégration temporelle ne peut être utilisé sans connaître ses propriétés de convergence. La consistance et la stabilité sont deux conditions nécessaires et suffisantes à la convergence d'un schéma.

Un schéma d'intégration est consistant si la condition (2.59) est vérifiée. Ici $\mathbf{U}_m = \{\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}\}_m$ et les accélérations sont calculées en utilisant l'équation d'équilibre (2.54).

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m}{\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}(t_m) \quad (2.59)$$

La consistance du schéma de Newmark est évidente en utilisant les relations (2.55) et (2.56). En effet :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_m + (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_m + \beta \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{m+1} \\ (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_m + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_m \\ \ddot{\mathbf{u}}_m \end{bmatrix}$$

La stabilité du schéma est étudiée suivant deux démarches équivalentes. La première approche se base sur l'écriture de la matrice d'amplification. La seconde utilise la méthode énergétique.

2.5.2 Etude classique de la stabilité d'un schéma

La condition de stabilité s'énonce suivant la définition 2.5.1.

définition 2.5.1 *Un schéma d'intégration directe est dit stable s'il existe un pas d'intégration $\Delta t_0 > 0$ tel que pour tout Δt appartenant à $[0, \Delta t_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état \mathbf{U}_m à l'instant t_m n'entraîne qu'une modification bornée du vecteur d'état \mathbf{U}_{m+l} calculé à tout instant ultérieur t_{m+l} .*

La stabilité d'un schéma est analysée en étudiant les valeurs propres et le rayon spectral de la matrice d'amplification \mathbf{S} . La matrice \mathbf{S} est obtenue en considérant les équations du mouvement aux instants t_m et t_{m+1} et les équations de Newmark (2.55) et (2.56) pré-multipliées par la matrice de masse \mathbf{M} .

Le problème discret s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{S} \mathbf{U}_m + \mathbf{g}_{m+1} \quad (2.60)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{g}_{m+1} &= \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{h}_{m+1} \\ \mathbf{S}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \gamma \Delta t \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_0 &= - \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{K} \\ -\Delta t \mathbf{M} & \mathbf{M} + (1/2 - \beta) \Delta t^2 \mathbf{K} - \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}_{m+1} &= - \begin{bmatrix} (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{f}_m + \gamma \Delta t \mathbf{f}_{m+1} \\ (1/2 - \beta) \Delta t^2 \mathbf{f}_m + \beta \Delta t^2 \mathbf{f}_{m+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

L'évolution d'une perturbation $\delta \mathbf{U}_0$ au temps initial 0 est donnée par l'expression :

$$\delta U_{m+1} = \mathbf{S}^{m+1} \delta U_0 \quad (2.62)$$

L'équation (2.62) montre que le schéma est stable à deux conditions. D'une part les valeurs propres simples de \mathbf{S} doivent être de module inférieur ou égal à 1, d'autre part le module des valeurs propres de \mathbf{S} multiples doit être strictement inférieur à 1. Si cette deuxième condition n'est pas respectée, l'instabilité est dite faible.

2.5.3 Stabilité du schéma de Newmark

Pour obtenir les conditions de stabilité du schéma de Newmark, les équations du mouvement sont projetées dans la base des modes propres du problème de référence. L'équation matricielle du mouvement se transforme en un système d'équations découplées. Pour chaque mode, l'équation du mouvement s'écrit à chaque pas de temps t_m :

$$\ddot{\mathbf{u}}_m + \omega^2 \mathbf{u}_m = \mathbf{f} \mathbf{e}_m \quad (2.63)$$

Le vecteur $\mathbf{f} \mathbf{e}_m$ représente le facteur de participation du mode considéré à l'excitation et ω la fréquence propre du système.

En considérant l'équation (2.63), la matrice d'amplification \mathbf{S} (2.61) prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1 & \gamma \Delta t \omega^2 \\ 0 & 1 + \beta \Delta t^2 \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -(1-\gamma) \Delta t \omega^2 \\ \Delta t & \Delta t - (1/2 - \beta) \Delta t^2 \omega^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \gamma \omega \xi & -\omega^2 \Delta t (1 - \gamma \omega^2 \xi / 2) \\ \xi & 1 - \omega^2 \xi / 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\text{et } \xi = \Delta t^2 / (1 + \beta \omega^2 \Delta t^2)$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice \mathbf{S} permet de conclure sur les conditions de stabilité du schéma de Newmark (2.65).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta & \quad \text{schéma inconditionnellement stable} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma \quad \text{et} \quad \beta \leq \gamma & \quad \text{schéma stable si } \Delta t \geq 1 / (\omega_{max} \sqrt{\gamma/2 - \beta}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

ω_{max} est la plus grande fréquence propre du système.

2.5.4 Stabilité du schéma de Newmark par la méthode énergétique

Cette démonstration est initialement présentée par Hughes et Liu dans [58, 59]. En utilisant les notations de Hughes et Belytschko [63] définies sur un vecteur quelconque \mathbf{q}_m à l'instant t_m par les relations (2.66) et (2.67), le schéma de Newmark s'exprime par les expressions (2.68) et (2.69).

$$\langle \mathbf{q}_m \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{m+1} + \mathbf{q}_m) \quad (2.66)$$

$$[\mathbf{q}_m] = \mathbf{q}_{m+1} - \mathbf{q}_m \quad (2.67)$$

$$[\mathbf{u}_m] = \Delta t \langle \dot{\mathbf{u}}_m \rangle + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta - \gamma)[\ddot{\mathbf{u}}_m] \quad (2.68)$$

$$[\dot{\mathbf{u}}_m] = \Delta t \langle \ddot{\mathbf{u}}_m \rangle + \Delta t(\gamma - \frac{1}{2})[\ddot{\mathbf{u}}_m] \quad (2.69)$$

La différence des équations d'équilibre aux instants t_m et t_{m+1} pré-multipliées par $[\dot{\mathbf{u}}_m]^T$ donne la relation :

$$[\dot{\mathbf{u}}_m]^T (\mathbf{M} [\ddot{\mathbf{u}}_m] + \mathbf{K} [\mathbf{u}_m] - [\mathbf{f}_m]) = 0 \quad (2.70)$$

La combinaison de (2.70) avec les équations de Newmark (2.68) et (2.69) conduit à l'expression (2.71).

$$\frac{1}{2}[\ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{A} \ddot{\mathbf{u}}_m + \dot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}_m] = -(\gamma - \frac{1}{2})[\ddot{\mathbf{u}}_m^T] \mathbf{A} [\ddot{\mathbf{u}}_m] + \frac{1}{\Delta t}[\dot{\mathbf{u}}_m^T][\mathbf{f}_m] \quad (2.71)$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{2}(2\beta - \gamma)\mathbf{K} \quad (2.72)$$

D'après [58] les forces extérieures n'influencent pas la stabilité de l'algorithme. L'équation (2.71) est donc considérée sans les termes contenant les efforts extérieurs.

théorème 2.5.1 Si $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et \mathbf{A} est une matrice définie positive, les vecteurs $\ddot{\mathbf{u}}_{m+1}$ et $\dot{\mathbf{u}}_{m+1}$ sont bornés [63].

corollaire 2.5.1 Si le théorème 2.5.1 est vérifié et si la matrice \mathbf{K}^{-1} existe alors le vecteur \mathbf{u}_{m+1} est également borné.

La stabilité du schéma de Newmark peut être étudiée directement à partir de la matrice \mathbf{A} . Si les modes propres sont utilisés pour diagonaliser la matrice \mathbf{A} , ses valeurs propres ω vérifient la condition :

$$1 + (\beta - \frac{\gamma}{2})(\omega_{max}\Delta t)^2 \geq 0 \quad (2.73)$$

La vérification de la relation (2.73) conduit aux mêmes conditions de stabilité précédentes (2.65).

2.5.5 Algorithmes de Newmark

Le tableau 2.4 présente un récapitulatif des différents schémas numériques de la famille de Newmark. Le schéma utilisé dans ce travail est celui de l'accélération moyenne. Il s'agit d'un schéma implicite, inconditionnellement stable et du second ordre.

La mise en place d'un schéma explicite nécessite de diagonaliser ou de "lumper" la matrice masse et d'estimer la plus grande valeur propre du système afin de déterminer le pas de temps critique Δt_{crit} .

En pratique, la plus grande valeur propre du système n'est pas calculée. Sachant qu'elle est majorée par le maximum des plus grandes valeurs propres de chaque élément de la structure, le pas de temps critique est évalué par la plus haute fréquence propre associée au plus petit

Algorithme	Type	β	γ	Limite de stabilité $\omega_{max}\Delta t_{crit}$	ordre
purement explicite	explicite	0	0	0	1
différence centrée	explicite	0	1/2	2	2
Fox - Goodwin	implicite	1/12	1/2	$\sqrt{6}$	2
accélération linéaire	implicite	1/6	1/2	$2\sqrt{3}$	2
accélération moyenne	implicite	1/2	1/2	∞	2
accélération moyenne schéma modifié	implicite	$(1 + \alpha)^2/4$	$1/2 + \alpha$	∞	2

TAB. 2.4 – Récapitulatif des schémas numériques de la famille de Newmark.

élément. La démonstration complète de ce résultat pratique est proposée dans [52]. Pour un problème unidimensionnel, le plus petit élément est celui de plus petite longueur. Dans le cas bidimensionnel, il correspond à l'élément de plus petit cercle inscrit. Enfin, en trois dimensions, il s'agit de l'élément de plus petite sphère inscrite.

Plusieurs techniques existent pour diagonaliser la matrice de masse. La plus simple consiste à diagonaliser la matrice par sommation des termes de chaque ligne de la matrice considérée. A partir d'une matrice de masse \mathbf{M} consistante de dimension n , la matrice de masse diagonalisée \mathbf{M}_{diag} est déterminée par la relation (2.74).

$$\mathbf{M}_{diag_{ij}} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_{ik} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.74)$$

En substituant (2.55) et (2.56) différemment dans (2.54), la résolution peut se faire en déplacement, en vitesse ou en accélération. Pour chaque instant t_m , elle est du type $\mathbf{A} \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_m$. Le tableau 2.5 récapitule les trois combinaisons possibles. En parcourant ce tableau, il est évident que la résolution en déplacement ne peut se faire si β vaut zéro c'est-à-dire si le schéma est explicite. Une fois la résolution choisie, les deux autres variables du vecteur d'état \mathbf{U}_m à l'instant t_m sont calculées par l'intermédiaire des deux équations (2.55) et (2.56). Un exemple complet de l'utilisation de l'algorithme de Newmark est présenté dans la table 2.6 en choisissant une résolution en accélération. Le calcul de l'accélération est réalisé en utilisant l'une des méthodes présentées dans la partie 2.3.

$\mathbf{A} \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_m$			
Résolution en	\mathbf{x}_m	\mathbf{A}	\mathbf{b}_m
Déplacement	\mathbf{u}_m	$\frac{\mathbf{M} + \beta\Delta t^2 \mathbf{K}}{\beta\Delta t^2}$	$\mathbf{f}_m + \frac{\mathbf{M} \mathbf{u}_{p_{m-1}}}{\beta\Delta t^2}$
Vitesse	$\dot{\mathbf{u}}_m$	$\frac{\mathbf{M} + \beta\Delta t^2 \mathbf{K}}{\gamma\Delta t}$	$\mathbf{f}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_{p_{m-1}} + \frac{\mathbf{M} + \beta\Delta t^2 \mathbf{K}}{\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{p_{m-1}}$
Accélération	$\ddot{\mathbf{u}}_m$	$\mathbf{M} + \beta\Delta t^2 \mathbf{K}$	$\mathbf{f}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_{p_{m-1}}$

TAB. 2.5 – Récapitulatif des différentes résolutions possibles par le schéma de Newmark.

1 - Calcul de l'accélération initiale $m = 0$ à partir des conditions initiales \mathbf{u}_0 et $\dot{\mathbf{u}}_0$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{K} \mathbf{u}_0$$

2 - Incrémentation du pas de temps

$$m = m + 1$$

3 - Calcul des prédicteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{u}p_m &= \mathbf{u}_m + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_m + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_m \\ \dot{\mathbf{u}}p_m &= \dot{\mathbf{u}}_m + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_m \end{aligned}$$

4 - Résolution de l'accélération

$$(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \ddot{\mathbf{u}}_m = \mathbf{f}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}p_m$$

5 - Actualisation des déplacements et des vitesses

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &= \mathbf{u}p_m + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_m \\ \dot{\mathbf{u}}_m &= \dot{\mathbf{u}}p_m + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_m \end{aligned}$$

6 - Si $m = r$ le calcul est terminé sinon retour en 2

TAB. 2.6 – *Algorithme de Newmark avec une résolution en accélération.*

2.6 Bilan énergétique numérique dans le cadre des schémas de Newmark

Une caractéristique importante des schémas d'intégration temporelle est la conservation de l'énergie du système au cours de la résolution. Elle se mesure numériquement par le bilan énergétique de la formulation discrète du problème. L'énergie totale du système $J(\dot{\mathbf{u}}_m, \mathbf{u}_m)$ à l'instant t_m dépend du champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}_m$ et du champ de déplacement \mathbf{u}_m . Elle est définie par les relations suivantes :

$$J(\dot{\mathbf{u}}_m, \mathbf{u}_m) = T_c(\dot{\mathbf{u}}_m) + V(\mathbf{u}_m) \quad (2.75)$$

$$T_c(\dot{\mathbf{u}}_m) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_m \quad (2.76)$$

$$V(\mathbf{u}_m) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m^T \mathbf{K} \mathbf{u}_m \quad (2.77)$$

$T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)$ représente l'énergie cinétique du système à l'instant t_m et $V(\mathbf{u}_m)$ son énergie potentielle au même instant. \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse et de raideur du système discrétisé.

Pour établir le bilan énergétique, les équations d'équilibre linéaires prises aux instants successifs t_m et t_{m+1} sont considérées puis combinées linéairement pour donner les relations (2.78) et (2.79) où les notations (2.66) et (2.67) sont utilisées.

$$\mathbf{M} \langle \ddot{\mathbf{u}}_m \rangle + \mathbf{K} \langle \mathbf{u}_m \rangle = \langle \mathbf{f}_m \rangle \quad (2.78)$$

$$\mathbf{M} [\ddot{\mathbf{u}}_m] + \mathbf{K} [\mathbf{u}_m] = [\mathbf{f}_m] \quad (2.79)$$

En utilisant la propriété $\langle \mathbf{q}_m \rangle [\mathbf{q}_m] = \left[\frac{1}{2} \mathbf{q}_m^2 \right]$, la variation d'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)] = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{u}}_m^T] \mathbf{M} \langle \dot{\mathbf{u}}_m^T \rangle \quad (2.80)$$

La combinaison des relations (2.68), (2.69), (2.78) et (2.79) donne l'expression (2.81) du bilan énergétique de la formulation discrétisée.

$$\begin{aligned}
[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)] + [V(\mathbf{u}_m)] + \Delta t^2(\beta - \frac{\gamma}{2})[T_c(\ddot{\mathbf{u}}_m)] &= -2(\gamma - \frac{1}{2})V([\mathbf{u}_m]) \\
&\quad - \Delta t^2(\gamma - \frac{1}{2})(2\beta - \gamma)T_c([\ddot{\mathbf{u}}_m]) \quad (2.81) \\
&\quad + \langle \mathbf{f}_m \rangle^T [\mathbf{u}_m] + (\gamma - \frac{1}{2})[\mathbf{f}_m]^T [\mathbf{u}_m]
\end{aligned}$$

Pour le schéma de l'accélération moyenne avec $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, il vient :

$$[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)] + [V(\mathbf{u}_m)] = \langle \mathbf{f}_m \rangle^T [\mathbf{u}_m] \quad (2.82)$$

Pour le schéma de la différence centrée avec $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$, tous les termes dissipatifs s'annulent (termes du second membre) et il vient :

$$[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)] + [V(\mathbf{u}_m)] - \frac{\gamma}{2}\Delta t^2[T_c(\ddot{\mathbf{u}}_m)] = \langle \mathbf{f}_m \rangle^T [\mathbf{u}_m] \quad (2.83)$$

$\frac{\gamma}{2}\Delta t^2[T_c(\ddot{\mathbf{u}}_m)]$ est un terme numérique conservatif.

2.7 Synthèse

Les étapes pour passer d'un modèle continu de référence à un modèle discret aussi bien pour les variables spatiales que temporelles sont présentées via les hypothèses de la méthode des éléments finis (formulation en déplacement) et l'emploi d'un schéma d'intégration temporelle. Ainsi sont présentées les équations discrètes d'équilibre, de liaison et les conditions initiales (équations (2.24) à (2.26)) à résoudre pour un problème de mécanique. Ces équations prennent la forme de systèmes matriciels.

La suite du chapitre propose des outils numériques basiques, bien connus dans la littérature, pour résoudre ce type de système qu'il soit linéaire ou non linéaire. Les différentes méthodes développées sont :

- pour la résolution de systèmes linéaires :
 - la méthode de Crout (résolution directe, équation (2.28)),
 - la méthode multigrille (résolution itérative, tableau 2.1),
- pour la résolution de systèmes non linéaires :
 - la méthode de Newton (résolution itérative, tableau 2.2),
 - la méthode FAS (multigrille, tableau 2.3),
- pour la résolution de systèmes dépendant du temps :
 - schémas d'intégration de la famille de Newmark (tableau 2.6) avec étude du domaine de stabilité selon deux approches (matrice d'amplification, méthode énergétique).

Ce chapitre se termine par le bilan énergétique de la formulation discrète (équation (2.81)).

Il existe beaucoup d'autres méthodes numériques possibles pour résoudre les équations (2.24) à (2.26). La méthode du gradient conjugué et le schéma d'intégration temporelle de Galerkin Discontinue en temps sont développées respectivement dans les annexes A et B. La liste des méthodes présentées dans ce chapitre est loin d'être exhaustive. Les outils numériques détaillés ici se limitent à ceux utilisés pour établir une méthode à raffinement de maillage automatique

et local.

Le chapitre suivant détaille la première étape du travail proposé. Il s'agit de la "S(T)AR-method" linéaire (méthode de raffinement automatique de maillage spatial pour des problèmes de statique linéaire).

Chapitre 3

Raffinement spatial local : cas linéaire

La “STAR-method” est développée par étapes. Le présent chapitre expose la première de celle-ci. Il définit une stratégie de sous-découpage local des éléments finis pour des problèmes de statique linéaire. Au cours du processus de raffinement de maillage automatique, des niveaux de maillage (ou de grilles) de plus en plus fins sont définis. Le principe exposé dans cette partie sera repris et intégré aux autres étapes présentées dans les chapitres suivants. Puisque la variable temporelle n’apparaît pas, la méthode est désignée par “S(T)AR-method”.

La première partie de ce chapitre est consacrée au principe de la méthode. Elle détaille la stratégie de raffinement adoptée ainsi que sa mise en équation. Lorsque le maillage spatial est raffiné, un nouveau domaine est créé. Le calcul du champ de déplacement et de contrainte de ce nouveau domaine nécessite la définition de conditions aux limites sur sa frontière. La gestion de ces conditions est donc présentée. La définition des différentes mesures d’erreurs utilisées conclut cette partie.

La deuxième partie analyse les différentes caractéristiques de la méthode via une étude numérique. L’influence de l’indicateur d’erreur ainsi que celle du maillage du premier niveau sont examinées. Les sections suivantes s’intéressent au contrôle de la précision des résultats puis à l’efficacité de la “S(T)AR-method” par rapport à une méthode classique. La dernière section met en évidence l’action de la taille des mailles par rapport à la géométrie d’une pièce mécanique.

La dernière partie établit une synthèse des différents résultats présentés dans ce chapitre.

3.1 Principe de la “S(T)AR-method”

3.1.1 Principe du raffinement spatial local

Le principe général du fonctionnement de la “S(T)AR-method” est présenté par la figure 3.1. Sur cette figure, le maillage final provisoire devient définitif si aucun niveau supplémentaire n’est créé. L’implémentation dans Cast3m de l’algorithme correspondant à ce principe est détaillée dans l’annexe F.

La méthode est initialisée en créant un modèle grossier de la structure étudiée par la méthode des éléments finis. Le maillage spatial réalisé est appelé niveau 1. Il délimite le domaine Ω^1 . Puisque la méthode des éléments finis est utilisée, la solution approchée est cherchée dans l’espace de dimension n fini. Le domaine occupé par la structure devrait être désigné par Ω_n^1 . Par souci de clarté, la dimension de l’espace solution est implicite. Seul le niveau du domaine est donné. L’écriture Ω_n^1 est simplifiée en Ω^1 . L’exposant 1 indique qu’il s’agit d’un domaine discret de niveau 1. La matrice de raideur \mathbf{K}^1 associée à ce maillage, le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}^1

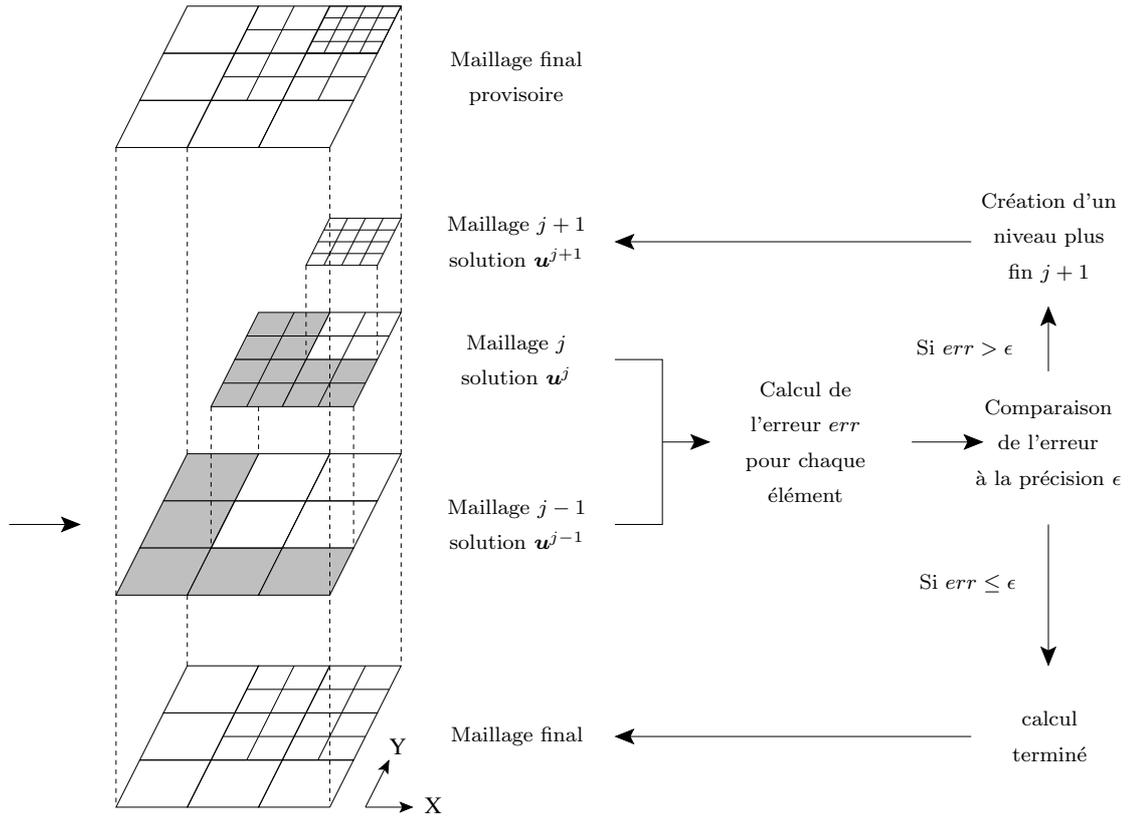


FIG. 3.1 – Principe de l’algorithme de résolution de la “S(T)AR-method” pour un problème bidimensionnel. Les parties grisées représentent la part de chaque domaine où la solution a atteint la précision ϵ requise. La flèche située à gauche matérialise le sens de lecture du graphique.

sur $\partial_2\Omega^1$ et les conditions aux limites cinématiques sur $\partial_1\Omega^1$ sont définis de manière analogue à une méthode par éléments finis standard. La solution \mathbf{u}_h^1 sur ce premier niveau est donc calculée de manière classique. Désormais, la solution discrète \mathbf{u}_h^1 calculée numériquement sera notée \mathbf{u}^1 où l’indice h est omis. Dans le cas de la statique linéaire, les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^1$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ sont obtenus par un post-traitement du champ de déplacement \mathbf{u}^1 .

La seconde étape consiste à construire un maillage hiérarchique (figure 1.5) par rapport au maillage de niveau 1 pour la structure complète. La réalisation d’un maillage hiérarchique se fait de la manière suivante. Les éléments finis unidimensionnels poutre ou barre sont divisés en deux éléments finis du même type (figure 3.2). Un élément fini parent engendre deux éléments finis enfants. En deux dimensions, un élément quadrangulaire parent est divisé en quatre éléments quadrangulaires enfants et un élément triangulaire parent en quatre éléments triangulaires enfants (figure 3.3). En trois dimensions, un élément cubique parent est divisé en huit éléments cubiques enfants (figure 3.5) et un élément tétraédrique parent est divisé en huit éléments tétraédriques enfants (figure 3.4). Les noeuds supplémentaires nécessaires à la construction des éléments enfants sont ajoutés au milieu du segment joignant les noeuds de l’élément parent. La structure de données établissant la filiation entre les éléments finis parents et enfants est présentée dans l’annexe E.

Le maillage hiérarchique créé à partir du maillage de niveau 1 est appelé niveau 2. Il occupe le domaine Ω^2 . La matrice de raideur \mathbf{K}^2 associée à ce maillage, le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}^2 sur $\partial_2\Omega^2$ et les conditions aux limites cinématiques sur $\partial_1\Omega^2$ sont également définis de manière analogue à une méthode éléments finis standard. La solution \mathbf{u}^2 sur ce deuxième niveau est aussi



FIG. 3.2 – Raffinement hiérarchique unidimensionnel d’un élément fini parent barre ou poutre en deux éléments finis enfants de même type.

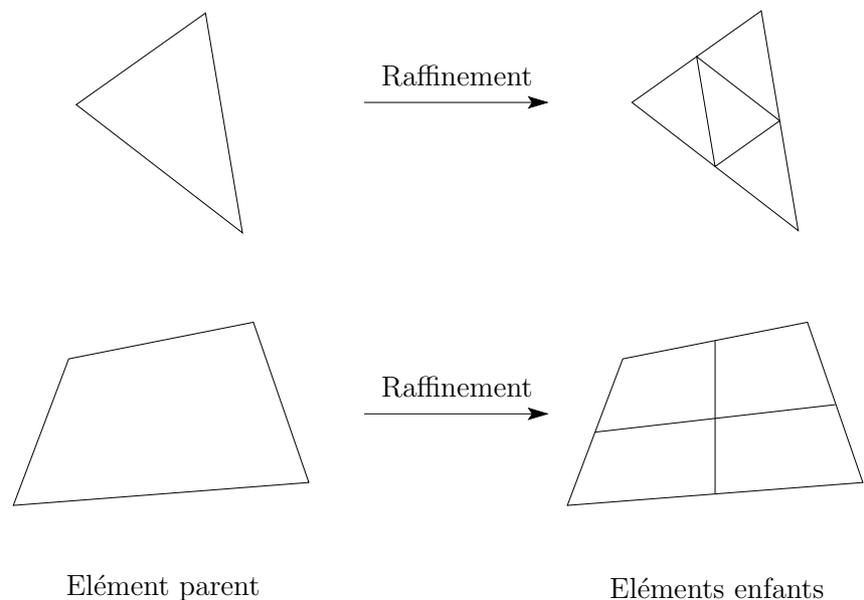


FIG. 3.3 – Raffinement hiérarchique bidimensionnel d’un élément fini triangulaire et d’un élément fini quadrangulaire parents en quatre éléments finis triangulaires et quadrangulaires enfants.

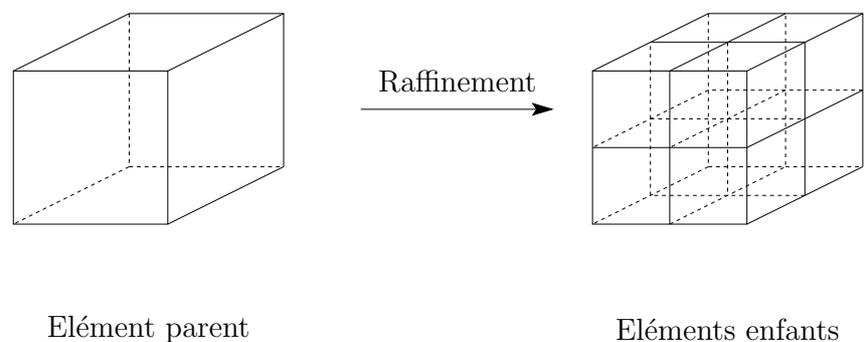


FIG. 3.4 – Raffinement hiérarchique tridimensionnel d’un élément fini cubique parent en 8 éléments finis cubiques enfants.

calculée de manière classique.

Pour ces deux premiers modèles, les domaines occupés par la structure sont tels que $\Omega = \Omega^1 = \Omega^2$ à l’erreur de discrétisation géométrique près.

A partir d’un indicateur d’erreur, l’écart relatif entre les solutions \mathbf{u}^1 et \mathbf{u}^2 , appelé aussi erreur, est calculé. L’indicateur d’erreur peut être construit à partir de différentes quantités mécaniques. L’ensemble des mesures d’erreurs envisagées est détaillé dans la section 3.1.4. L’erreur est établie localement pour chaque élément fini parent en comparant sa solution avec celle de ses enfants. Ensuite, l’erreur est comparée élément par élément à la précision ϵ requise par l’utilisateur.

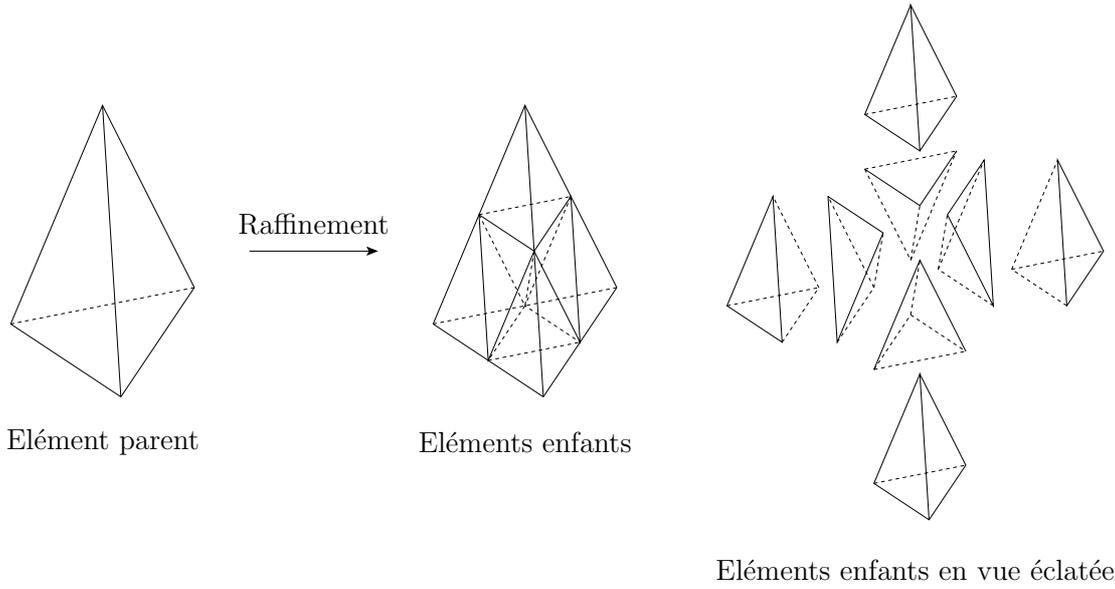


FIG. 3.5 – Raffinement hiérarchique tridimensionnel d'un élément fini tétraédrique parent en 8 éléments finis tétraédriques enfants.

Chaque élément fini enfant des éléments du niveau 1 dont l'indicateur d'erreur est supérieur à la précision demandée est subdivisé selon les figures 3.2, 3.3, 3.4 ou 3.5 pour former le niveau 3. Si les éléments choisis sont quadrangulaires, un élément du niveau 1 est découpé en 16 éléments si nécessaire. Par ce procédé, le niveau 3 est créé automatiquement. Le domaine Ω^3 peut n'être défini que localement et constitué de parties non connexes. A partir du maillage de niveau 3, la matrice de raideur \mathbf{K}^3 est assemblée. Le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}^3 est construit sur la frontière $\partial_2\Omega^3$. Il en est de même pour les conditions aux limites cinématiques construites sur $\partial_1\Omega^3$.

Si le domaine Ω^3 est local alors $\partial_2\Omega^3 \cup \partial_1\Omega^3 \neq \partial\Omega^3$. La frontière $\partial_{1*}\Omega^3$ existe, elle est définie par $\partial_2\Omega^3 \cup \partial_1\Omega^3 \cup \partial_{1*}\Omega^3 = \partial\Omega^3$.

Pour calculer \mathbf{u}^3 , des conditions cinématiques particulières sont appliquées sur la frontière $\partial_{1*}\Omega^3$. Le choix de ces conditions aux limites appelées conditions de liaison est expliqué dans la section 3.1.2. La prise en compte de ces conditions aux limites particulières est réalisée par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange.

Ce processus automatique de création de maillage se poursuit en comparant localement les solutions \mathbf{u}^2 et \mathbf{u}^3 pour créer éventuellement un niveau 4.

D'une façon générale, les solutions \mathbf{u}^{j-1} et \mathbf{u}^j des niveaux $j-1$ et j sont comparées pour chaque élément parent du niveau $j-1$. Si l'écart entre ces deux solutions est supérieur à l'erreur souhaitée ϵ , le niveau $j+1$ est construit. Le lien entre l'erreur mesurée par l'indicateur d'erreur et la précision des résultats se trouve dans l'annexe C.

La matrice de raideur \mathbf{K}^{j+1} peut être assemblée. La définition des bords $\partial_2\Omega^{j+1}$, $\partial_1\Omega^{j+1}$ et $\partial_{1*}\Omega^{j+1}$ permet de définir \mathbf{f}^{j+1} et les conditions aux limites cinématiques et de liaison associées à ce niveau. La solution \mathbf{u}^{j+1} peut être calculée.

Le raffinement automatique de maillage s'arrête dès que la précision ϵ requise est obtenue pour tous les éléments finis de la structure modélisée. Au cours du calcul, les domaines créés sont définis tels que $\Omega^{nb} \subset \dots \subset \Omega^j \subset \dots \subset \Omega^1 \subset \Omega$, si le nombre final de niveaux nécessaires est de nb .

Remarque 1 : les calculs sur les niveaux 1 et 2 sont systématiquement réalisés sur le domaine de calcul complet afin d’amorcer la procédure de raffinement automatique. Ces deux niveaux étant grossiers, le coût de calcul engendré n’est pas significatif.

Remarque 2 : le choix du sous-découpage des éléments finis est arbitraire. Il est possible de les découper de manière différente.

3.1.2 Gestion des conditions aux limites sur $\partial_{1*}\Omega^j$

Si le raffinement de maillage se localise à un niveau j , le bord $\partial_{1*}\Omega^j$ existe. Il est défini par :

$$\partial_{1*}\Omega^j = \partial\Omega^j \cap \overline{\partial_1\Omega^j \cup \partial_2\Omega^j}$$

Les efforts imposés sur $\partial_2\Omega^j$ ainsi que les conditions cinématiques imposées sur $\partial_1\Omega^j$ sont définis par la modélisation du problème réel. Ces deux conditions aux limites sont donc connues pour le niveau j . Le calcul de la solution \mathbf{u}^j ne peut alors se faire sans choisir une hypothèse sur la frontière $\partial_{1*}\Omega^j$. Les conditions aux limites choisies sont de type cinématiques : ce sont des déplacements imposés. Elles sont appelées conditions de liaison. Les déplacements connus sur le niveau $j - 1$ sont utilisés pour définir les déplacements imposés \mathbf{ul} sur la frontière $\partial_{1*}\Omega^j$.

Pour des problèmes unidimensionnels la frontière $\partial_{1*}\Omega^j$ représente un noeud, en deux dimensions une ligne et en trois dimensions une surface. Quelle que soit la dimension du problème, deux règles seront toujours respectées. Les déplacements imposés sur les noeuds de $\partial_{1*}\Omega^j$, coïncidents avec le maillage $j - 1$, sont égaux à ceux du niveau $j - 1$. Les déplacements imposés sur les noeuds intermédiaires sont obtenus par interpolation linéaire des déplacements définis aux noeuds coïncidents. Ces deux règles sont illustrées dans le cas de problèmes bidimensionnels par la figure 3.6.

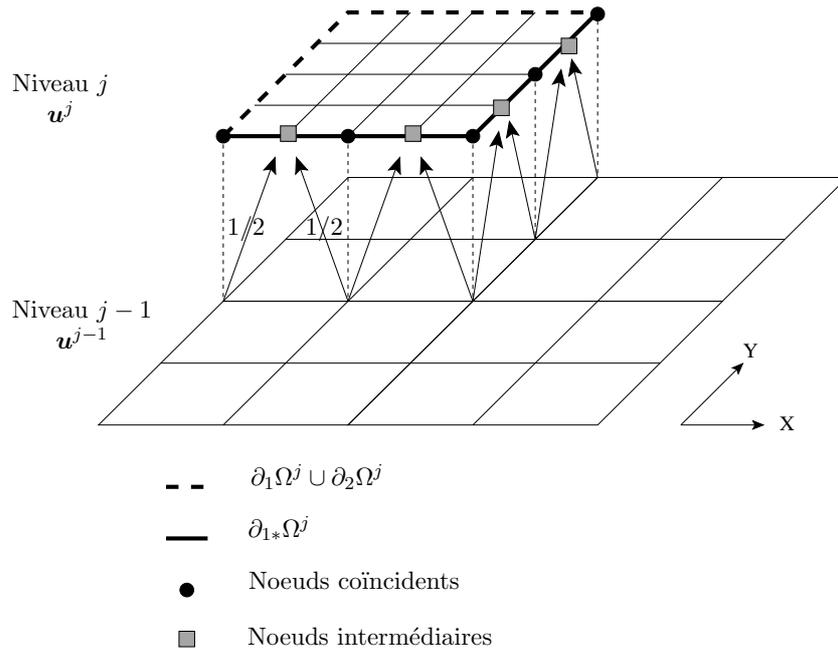


FIG. 3.6 – Exemple, pour des problèmes bidimensionnels, des conditions de liaison appliquées au bord $\partial_{1*}\Omega^j$ d’un domaine local j .

Les conditions de liaison \mathbf{ul} (condition de déplacement sur le bord $\partial_{1*}\Omega^j$) sont déterminées à partir de la relation (3.1).

$$\mathbf{ul}^j = \mathbf{u}^j \Big|_{\partial_{1*}\Omega^j} = (\mathbf{I} \mathbf{u}^{j-1}) \Big|_{\partial_{1*}\Omega^j} \quad (3.1)$$

\mathbf{I} est un opérateur réalisant une interpolation linéaire.

Remarque : lorsque le raffinement automatique de maillage crée un nouveau domaine, la solution définie sur le bord de ce domaine $\partial\Omega$ contient forcément une erreur inférieure à la précision souhaitée ϵ .

3.1.3 Mise en équation

Les niveaux 1 et 2 sont définis sur le domaine de calcul complet. Les solutions \mathbf{u}^1 et \mathbf{u}^2 sont obtenues par la résolution classique du système (3.2).

$$\forall j \in \{1, 2\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}^j \mathbf{u}^j = \mathbf{f}^j \\ \mathbf{u}^j \Big|_{\partial_1\Omega^j} = \mathbf{u}_d \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Lorsque le raffinement est local, les conditions aux limites cinématiques appliquées sur le bord $\partial_{1*}\Omega^j$ présentées dans la section 3.1.2 sont prises en compte par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange $\mathbf{\Lambda}$. Dans ce cas, la solution \mathbf{u}^j sur le niveau j résolue par la méthode des éléments finis est solution du système (3.3). Ce système peut être résolu par une méthode de Crout 2.3.1.

$$\forall j \geq 3 \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}^j & -\mathbf{C}^{jT} \\ -\mathbf{C}^j & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}^j \\ \mathbf{\Lambda}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^j \\ \mathbf{ul}^j \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}^j \Big|_{\partial_1\Omega^j} = \mathbf{u}_d \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La matrice \mathbf{C}^j est composée de 0 sauf pour les degrés de liberté situés sur la frontière $\partial_{1*}\Omega^j$ où elle contient des 1. $\mathbf{0}$ est une matrice nulle. La première équation du système (3.3) permet de définir, pour un niveau j , les efforts de liaison \mathbf{fl}^j selon l'équation (3.4).

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^j \mathbf{u}^j &= \mathbf{f}^j + \mathbf{C}^{jT} \mathbf{\Lambda}^j \\ &= \mathbf{f}^j + \mathbf{fl}^j \end{aligned} \quad (3.4)$$

D'une façon plus générale, la solution recherchée (\mathbf{u}_{final}) est calculée en résolvant successivement sur chaque niveau le système matriciel (3.5). Le nombre nb de niveaux nécessaires pour que l'ensemble de la solution atteigne la précision requise n'est pas connu avant la fin du calcul.

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_{final} \quad \mathbf{u}_{final} = \quad \mathbf{f}_{final} \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{cccc} [\mathbf{K}^1] & & & \\ & [\mathbf{K}^2] & & \\ & & [\mathbf{K}^3] & \\ & & & \ddots \\ & & & & [\mathbf{K}^{nb}] \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{nb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 + \mathbf{fl}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{nb} + \mathbf{fl}^{nb} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le champ de déplacement final \mathbf{u}_{final} (équation (3.6)) est composé de la réunion des contributions des champs de déplacement de chacun des niveaux. La contribution \mathbf{u}^{j*} correspond à la partie de \mathbf{u}^j définie sur Ω^{j*} . Le domaine Ω^{j*} est la zone de Ω^j où la solution a atteint l'erreur

souhaitée. Le domaine Ω^{j+} est la zone de Ω^j où la solution n’a pas atteint l’erreur souhaitée. La figure 3.7 définit Ω^{j*} et Ω^{j+} .

$$\mathbf{u}_{final} = \mathbf{u}^{nb} \cup \mathbf{u}^{nb-1*} \cup \dots \cup \mathbf{u}^{j*} \cup \dots \cup \mathbf{u}^{2*} \quad (3.6)$$

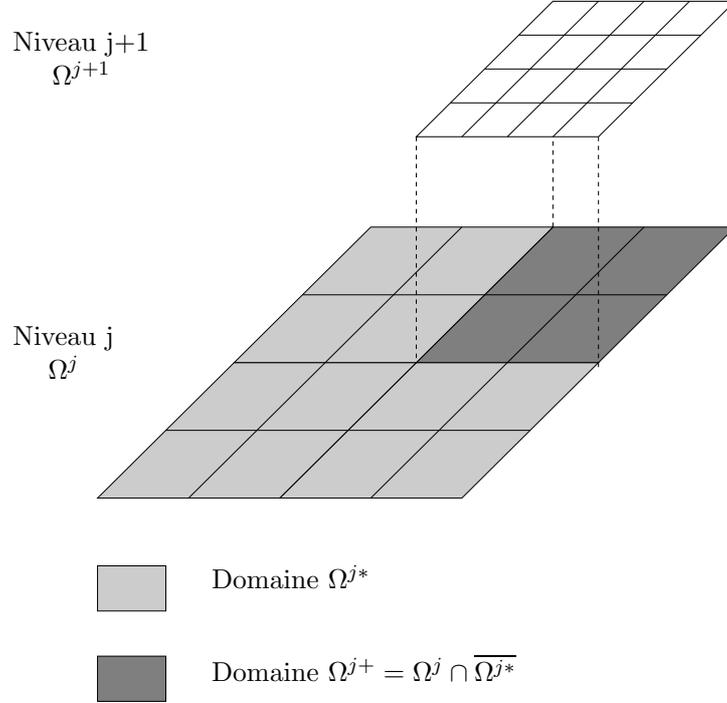


FIG. 3.7 – Définition du domaine Ω^{j*} et Ω^{j+} .

Le déplacement \mathbf{u}^1 ne participe pas à \mathbf{u}_{final} car le niveau 2 recouvre intégralement le domaine de calcul complet. La solution du niveau 2 est donc plus précise que celle du niveau 1. Si le raffinement de maillage du niveau j affecte l’intégralité de son domaine, alors la contribution de \mathbf{u}^{j*} est nulle. Enfin, toute la solution du niveau le plus fin \mathbf{u}^{nb} est utile pour construire \mathbf{u}_{final} .

La stratégie de calcul proposée permet d’obtenir la solution sur un maillage final présentant des incompatibilités.

Le vecteur \mathbf{u}_{final} est calculé en post-traitant les résultats bruts obtenus à la sortie du calcul. La gestion des déplacements à la limite entre deux domaines constitue le point sensible de ce post-traitement. Sur cette frontière, il faut éviter la redondance des données. Ainsi, les déplacements du niveau le plus grossier sont écartés au profit de ceux du niveau le plus fin.

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{final}$ et le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{final}$ sont calculés également par post-traitement directement à partir de \mathbf{u}_{final} , de la relation de comportement (2.7) et de la définition des déformations (2.6). Cette démarche est possible car la modélisation est linéaire.

3.1.4 Mesure d’erreur

La mesure de l’erreur est réalisée au moyen d’indicateurs d’erreurs. L’indicateur d’erreur est une norme qui permet de comparer relativement deux champs de même type (déplacement, contrainte...) calculés sur deux maillages successifs j et $j + 1$ à une norme de référence. La comparaison nécessite un opérateur de changement d’échelle pour travailler avec deux champs de même dimension. Les champs calculés sur le maillage fin $j + 1$ sont transférés sur le maillage

plus grossier j par l'intermédiaire d'un opérateur de restriction T_s . Sa définition dépend de la nature des quantités transférées (nodales ou situées aux points d'intégration de l'élément)(figure 3.8).

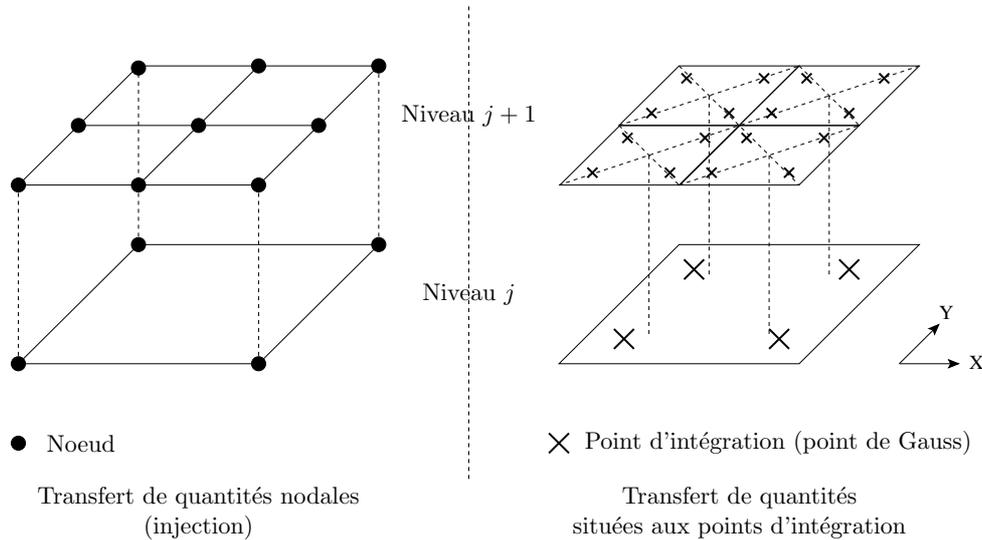


FIG. 3.8 – Restriction de quantités nodales et de quantités situées aux points d'intégration d'un élément du niveau $j + 1$ vers le niveau j .

D'après la figure 3.8, le transfert des quantités nodales du niveau fin $j + 1$ vers le niveau plus grossier j ne présente aucune difficulté. La quantité connue sur les noeuds coïncidents est injectée du niveau $j + 1$ vers le niveau j .

D'une façon générale, en ce qui concerne les champs issus des points d'intégration (par exemple le champ de contrainte), une moyenne des quantités fines définies aux points d'intégration ne suffit pas. En effet, le centre de gravité d'un élément fin ne coïncide pas avec la position d'un point d'intégration de l'élément grossier correspondant (figure 3.8). Pour contourner cette difficulté, il est possible de sous-intégrer les éléments. Un élément bidimensionnel de type quadrangle contient alors un unique point de Gauss (au lieu de quatre) situé en son centre de gravité. Cette approche n'est pas envisagée car d'autres problèmes liés à la sous-intégration apparaissent, comme les modes "sablier" dits de "hourglass" à énergie nulle. La sous-intégration est plus utile lorsque la modélisation est non linéaire afin de réduire le coût de calcul lié à l'intégration de la loi de comportement.

L'opérateur de restriction pour les quantités situées aux points d'intégration interpole linéairement les valeurs fines.

L'indicateur d'erreur est calculé pour chaque élément fini par différence entre le champ de l'élément parent et celui issu de la restriction des éléments enfants.

Les grandeurs significatives en mécanique sont variées suivant les problèmes traités. Les ingénieurs ne s'intéressent pas seulement au champ de déplacement, ils étudient aussi le champ de contrainte σ , le champ de déformation ε ou encore l'énergie e de la structure. Dans ce travail, quatre types d'indicateurs d'erreurs sont analysés. Ils sont construits respectivement sur le champ de déplacement, le champ de contrainte, le champ de densité d'énergie et enfin le champ d'énergie d'un élément fini de la structure. Les quatre indicateurs d'erreurs choisis sont répertoriés dans le tableau 3.1.

type d'indicateur	grandeur d'intérêt	grandeur de référence	indicateur
déplacement	\mathbf{u}	\mathbf{u}^1	$\mathcal{I}_u^j = \frac{\ \tilde{\mathbf{u}}^j - \mathbf{u}^j\ }{\max\ \mathbf{u}^1\ }$
contrainte	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma}^1$	$\mathcal{I}_\sigma^j = \frac{VM(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j - \boldsymbol{\sigma}^j)}{\max(VM(\boldsymbol{\sigma}^1))}$
densité d'énergie	$d\mathbf{e} = Tr[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}]$	$d\mathbf{e}^1 = Tr[\boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\varepsilon}^1]$	$\mathcal{I}_{de}^j = \sqrt{\frac{ \tilde{d\mathbf{e}}^j - d\mathbf{e}^j }{\max(d\mathbf{e}^1)}}$
énergie	$\mathbf{e} = \int_\Omega d\mathbf{e} d\Omega$	$\mathbf{e}^1 = \int_{\Omega^1} d\mathbf{e}^1 d\Omega$	$\mathcal{I}_e^j = \sqrt{\frac{ \tilde{\mathbf{e}}^j - \mathbf{e}^j }{\mathbf{e}^1}}$

TAB. 3.1 – Les différents types d'indicateurs d'erreurs analysés en statique.

Dans le tableau 3.1, la norme $\|\cdot\|_k$ est définie pour le vecteur \mathbf{q} de composantes $\{qx, qy, qz\}$ en un de ses points support k par la relation :

$$\|\mathbf{q}_k\| = \sqrt{(qx_k)^2 + (qy_k)^2 + (qz_k)^2}$$

VM représente l'opérateur de Von Mises. Appliqué au tenseur de contrainte symétrique $\boldsymbol{\sigma}$ de composantes $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$, cet opérateur s'exprime en chaque point d'intégration k sous la forme :

$$VM(\boldsymbol{\sigma})_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_{xx_k} - \sigma_{yy_k})^2 + (\sigma_{xx_k} - \sigma_{zz_k})^2 + (\sigma_{yy_k} - \sigma_{zz_k})^2 + 6((\sigma_{xy_k})^2 + (\sigma_{xz_k})^2 + (\sigma_{yz_k})^2) \right)^{1/2}$$

Le symbole $\tilde{\cdot}$ signifie que ce champ calculé sur le niveau $j + 1$ est restreint de la grille $j + 1$ vers la grille j par l'intermédiaire d'un opérateur de restriction spatial $\mathbf{T}\mathbf{s}$. Par exemple pour un champ \mathbf{q} , le vecteur $\tilde{\mathbf{q}}^j$ est défini sur la discrétisation de niveau j , il est de même dimension que le vecteur \mathbf{q}^j .

$$\tilde{\mathbf{q}}^j = \mathbf{T}\mathbf{s} \mathbf{q}^{j+1}$$

Enfin, Tr correspond à la trace d'un tenseur.

3.2 Etudes numériques

Les caractéristiques principales de la "S(T)AR-method" sont identifiées au moyen d'études numériques. Trois cas tests bidimensionnels et un cas tridimensionnel sont analysés. Une plaque trouée selon deux versions et une plaque fissurée sont modélisées en deux dimensions sous des sollicitations de traction. Le dernier cas est une poutre tridimensionnelle sollicitée en flexion. Les paramètres d'entrée de la "S(T)AR-method" (cf. annexe F figure F.1) sont le maillage du premier niveau constituant le niveau 1, l'indicateur d'erreur (tableau 3.1) et la précision souhaitée sur les résultats. L'influence de ces trois entrées imposées par l'utilisateur est évaluée

dans cette partie. L'étude des indicateurs d'erreurs est suivie par celle du choix du maillage du premier niveau. Enfin, l'accord entre la précision des résultats souhaitée et obtenue est vérifié. L'efficacité de la méthode proposée est évaluée en comparant le nombre de degrés de liberté créé à celui obtenu avec un raffinement de maillage uniforme. Le lien entre la taille de maille utilisée et la géométrie de la pièce étudiée est également discuté.

3.2.1 Cas tests

Le matériau choisi pour les quatre cas tests présentés est élastique, linéaire, homogène et isotrope et ses caractéristiques sont :

- un module d'Young $E = 211$ GPa,
- une masse volumique $\rho = 7850$ kg.m⁻³,
- un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

Pour les modélisations bidimensionnelles, les simulations sont menées sous l'hypothèse des contraintes planes.

Cas A : plaque trouée sollicitée en traction (première version)

La géométrie de la plaque trouée étudiée est donnée par la figure 3.9. La plaque est choisie de forme carrée. Le trou circulaire de rayon r est placé au centre de la plaque. La dimension caractéristique de la plaque est $r/c = 0.06$. La sollicitation est exercée sous la forme d'une pression linéique F de 5.10^7 N.m⁻¹.

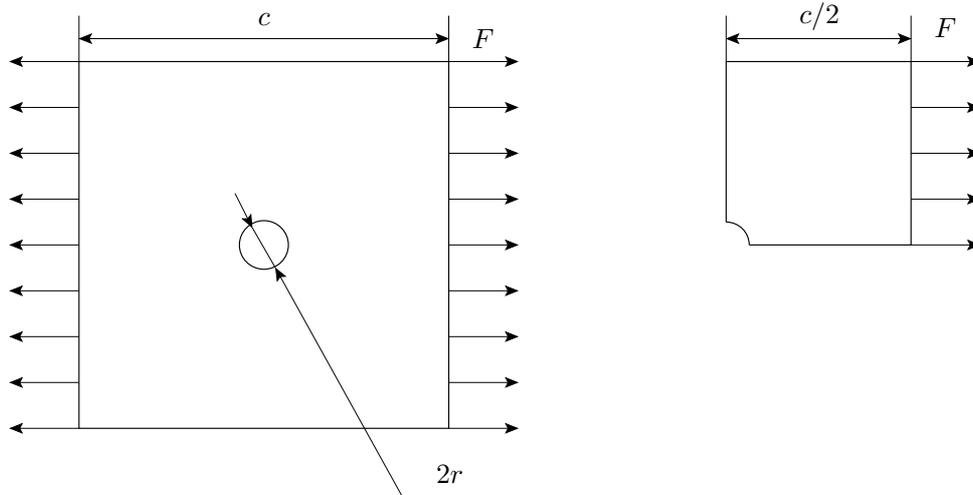


FIG. 3.9 – Première version de la plaque trouée sollicitée en traction.

Pour des raisons de symétrie, uniquement un quart de la structure est modélisé. Les éléments choisis sont des quadrangles à quatre noeuds linéaires (nommés QUA4 dans Cast3m). La figure 3.10 représente le maillage de niveau 1 grossier, constituant le premier niveau.

Cas B : plaque trouée sollicitée en traction (deuxième version)

La configuration géométrique générale et les sollicitations extérieures de la plaque sont les mêmes que précédemment. Seule la forme du trou évolue suivant la figure 3.11. Le trou précédent circulaire devient oblong. Ces caractéristiques sont $a/c = 0.06$ et $r/a = 0.25$.

Pour les mêmes raisons de symétrie que précédemment, seul un quart de la structure est modélisé. Les éléments choisis sont également des quadrangles à quatre noeuds linéaires (nommés QUA4 dans Cast3m). La figure 3.12 représente le maillage de niveau 1 grossier, constituant le premier niveau.

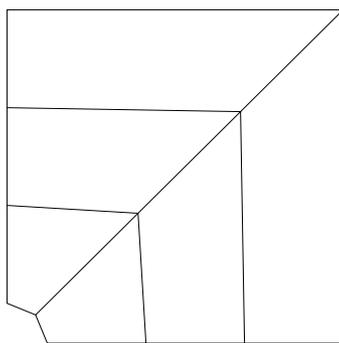


FIG. 3.10 – Maillage de niveau 1 choisi pour la première version de la plaque trouée.

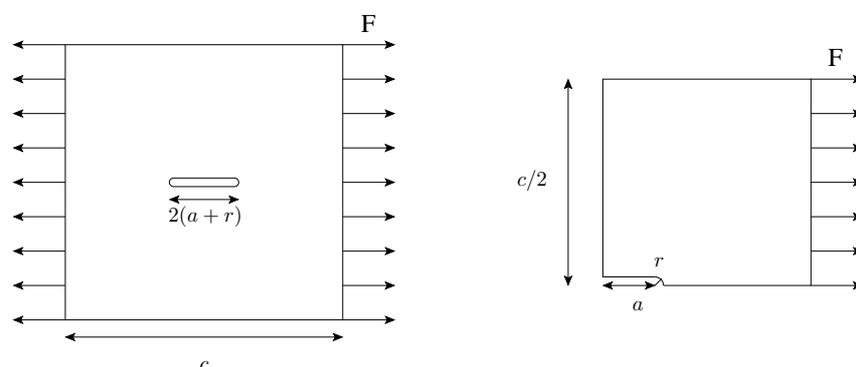


FIG. 3.11 – Deuxième version de la plaque trouée sollicitée en traction.

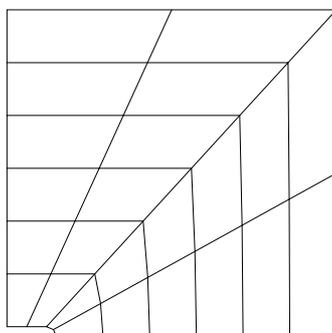


FIG. 3.12 – Maillage de niveau 1 choisi pour la deuxième version de la plaque trouée.

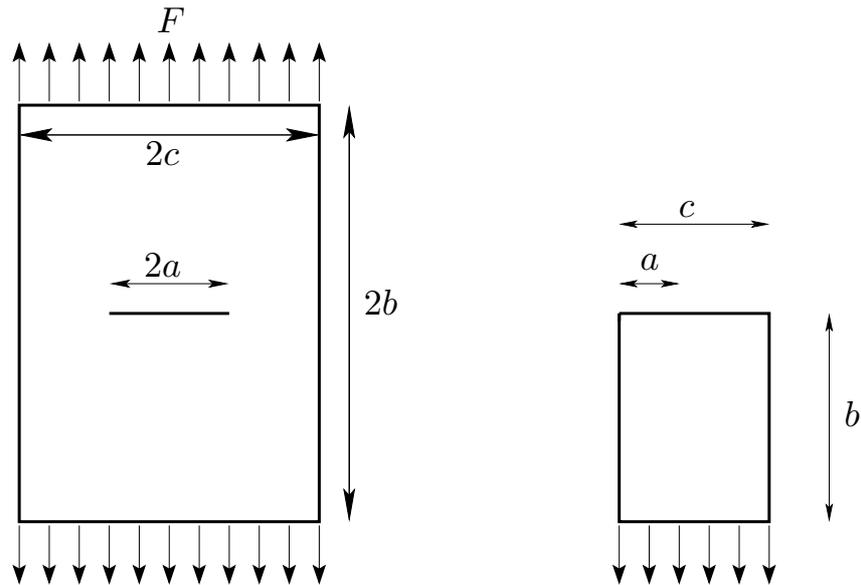
Cas C : plaque fissurée sollicitée en traction

La géométrie de la plaque fissurée est présentée sur la figure 3.13. Les dimensions caractéristiques sont $c/a = 3$ et $b/a = 5$. La sollicitation est exercée sous la forme d'une pression linéique F de 2.10^8 N.m^{-1} .

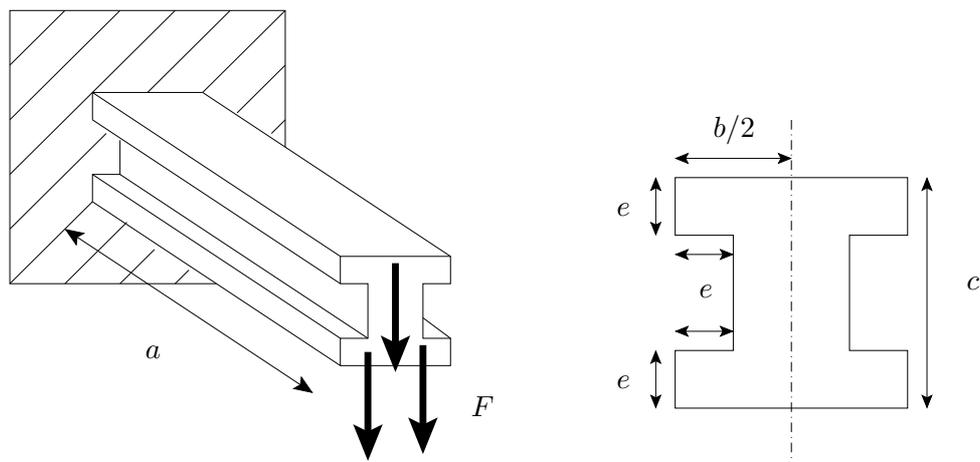
Pour des raisons de symétrie, seul un quart de la structure est modélisé. Plusieurs maillages spatiaux de niveau 1 sont testés, leur influence est analysée dans la section 3.2.3.

Cas D : poutre en flexion

La géométrie tridimensionnelle de la poutre étudiée est présentée par la figure 3.14. Sa section est en I. Ses dimensions sont la longueur $a = 0.5 \text{ m}$, la hauteur $c = 0.1 \text{ m}$, la largeur $b = 0.1 \text{ m}$ et le paramètre $e = 0.025 \text{ m}$. La poutre est encastree à une extrémité et sollicitée en flexion à

FIG. 3.13 – *Plaque fissurée sollicitée en traction*

l'autre. La sollicitation est exercée sous la forme d'une pression surfacique F de 10^8 N.m^{-2} .

FIG. 3.14 – *Poutre tridimensionnelle sollicitée en flexion*

Les éléments choisis pour constituer le maillage de niveau 1 (figure 3.15) sont des cubes à huit noeuds linéaires (appelés CUB8 dans Cast3m).

Récapitulatif

Un récapitulatif des quatre cas A, B, C et D traités est présenté dans la table 3.2.

3.2.2 Influence de l'indicateur d'erreur

Les quatre types d'indicateurs d'erreurs définis dans le tableau 3.1 sont étudiés dans un premier temps avec le cas test A (tableau 3.2).

Après avoir défini le maillage de niveau 1 (figure 3.10), choisi l'indicateur d'erreur et la précision souhaitée, le maillage final obtenu avec chacun des indicateurs d'erreurs est représenté sur la

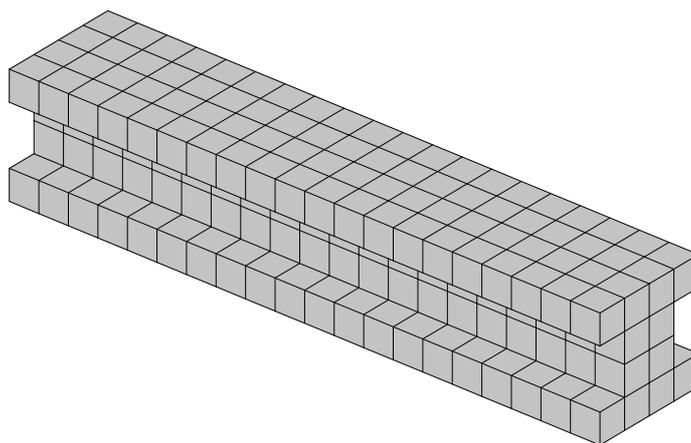


FIG. 3.15 – Maillage de niveau 1 de la poutre tridimensionnelle sollicitée en flexion

Cas	Dimension	Géométrie	Type de sollicitation
A	2D	plaque carrée trouée trou circulaire	traction
B	2D	plaque carrée trouée trou oblong	traction
C	2D	plaque rectangulaire fissurée	traction
D	3D	poutre section I	flexion

TAB. 3.2 – Récapitulatif des différents cas analysés.

figure 3.16. La précision ϵ demandée avec l'utilisation de l'indicateur basé sur le champ :

- de déplacement est $\epsilon = 0.001$,
- de contrainte est $\epsilon = 0.01$,
- de densité d'énergie est $\epsilon = 0.15$,
- d'énergie est $\epsilon = 0.001$.

Remarque : la figure 3.16 est constituée de la superposition de tous les maillages créés au cours du calcul. Les deux segments représentant le trou correspondent au maillage de niveau 1.

Les quatre maillages finaux obtenus sont différents suivant l'indicateur d'erreur choisi. Cependant, dans chacun des cas, le maillage se raffine au voisinage du trou et sur la diagonale du carré. Il ne s'agit pas de la zone de contrainte maximale. La figure 3.17 permet de visualiser la contrainte de Von Mises dans une zone proche du trou. La couleur rouge représente les zones de contrainte maximale et la couleur bleu les zones de contrainte minimale. Le raffinement de maillage a lieu dans la zone de transition du maximum vers le minimum de contrainte.

La figure 3.17 montre que quel que soit l'indicateur d'erreur choisi, la localisation de la zone de raffinement est sensiblement la même.

La figure 3.18 trace l'évolution du maximum de l'erreur en fonction des niveaux pour chacun des indicateurs d'erreurs pour le cas A. Cette figure permet d'analyser l'ordre de convergence des différents critères.

Pour le cas A, les quatre indicateurs d'erreurs convergent avec des ordres différents :

- proche de 2 pour celui basé sur le champ de déplacement,
- proche de 1 pour celui basé sur le champ de contrainte,
- proche de 0.5 pour celui basé sur le champ de densité d'énergie,

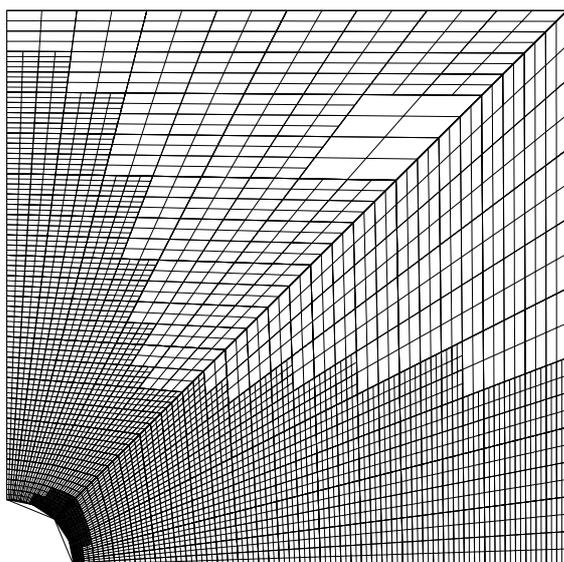
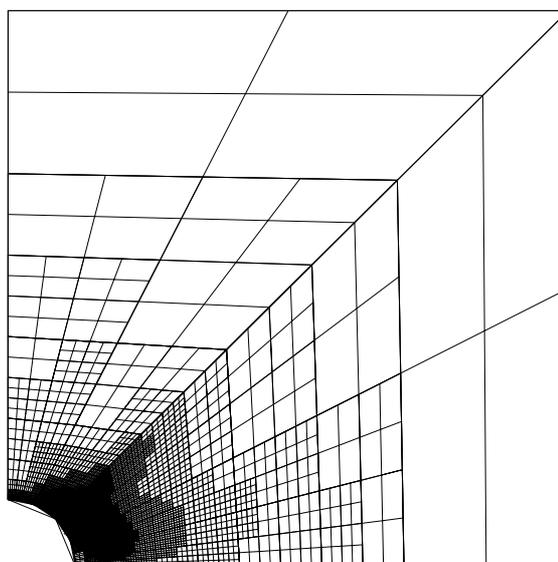
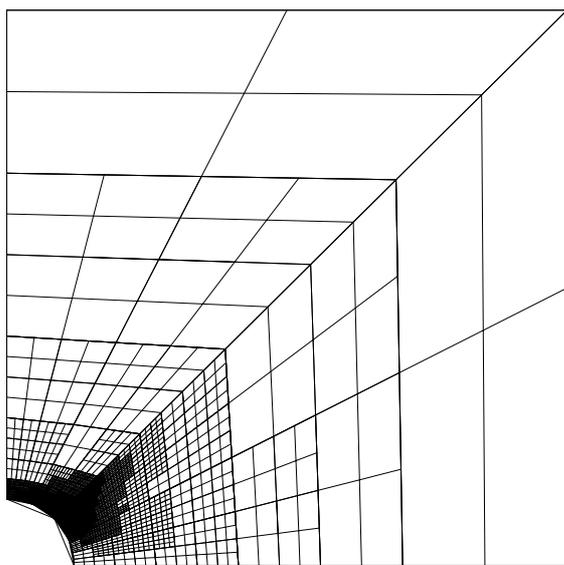
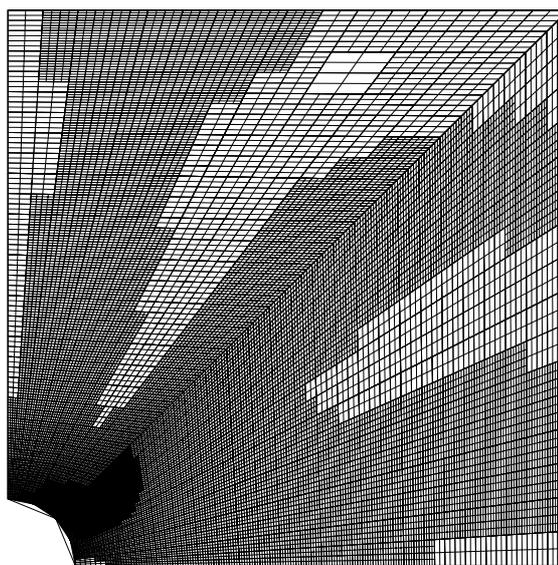
Déplacement $\epsilon = 0.001$ Contrainte $\epsilon = 0.01$ Densité d'énergie $\epsilon = 0.15$ Energie $\epsilon = 0.001$

FIG. 3.16 – Maillages finaux obtenus pour le cas A avec les quatre indicateurs d'erreurs.

- proche de 1.5 pour celui basé sur le champ d'énergie.

Les ordres de convergence trouvés correspondent à la convergence classique d'un calcul par la méthode des éléments finis.

Quel que soit l'indicateur d'erreur choisi, le calcul converge mais la solution obtenue avec une précision de 1 % avec un indicateur d'erreur basé sur le champ de contrainte est différente de la solution obtenue avec une précision de 1 % avec un indicateur d'erreur basé sur l'énergie. La qualité de la solution d'un problème régulier dépend du type de solution considérée (déplacement, contrainte...) et du choix de l'indicateur d'erreur. Cependant, puisque tous les indicateurs convergent, une précision identique sur un champ donné peut être obtenue avec n'importe lequel si

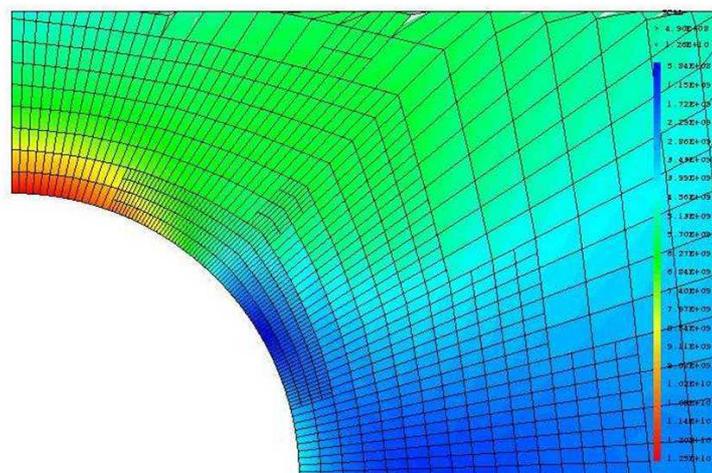


FIG. 3.17 – Contrainte de Von Mises dans une région proche du trou. Le rouge représente les zones de plus fortes contraintes et le bleu celle des plus faibles.

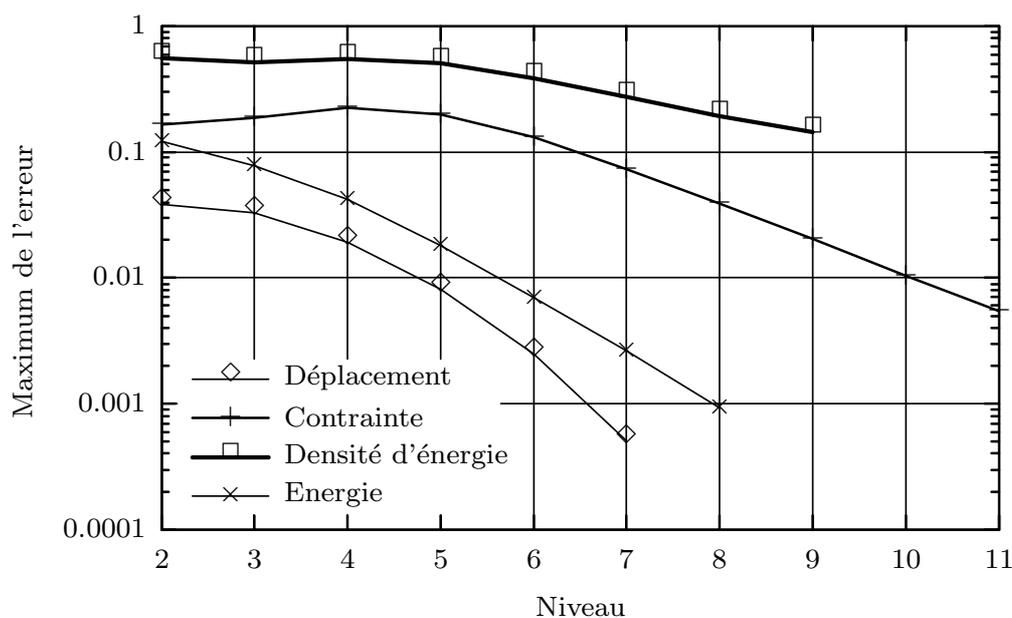


FIG. 3.18 – Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau pour le cas A pour les quatre critères d'erreurs.

une correspondance est établie entre chacun d'eux.

Dans le cas d'un problème singulier tel que celui d'une plaque fissurée sollicitée en traction (cas test C), les conclusions précédentes ne s'appliquent pas. Les évolutions du maximum de l'erreur en fonction des indicateurs d'erreurs, présentées sur la figure 3.19, montrent que tous les indicateurs d'erreurs ne convergent pas. Les indicateurs d'erreurs en déplacement et en énergie convergent avec un ordre proche de 0.5, ceux basés sur les contraintes et la densité d'énergie divergent suivant un ordre de 0.5.

L'explication de l'ordre de convergence de chacun des indicateurs d'erreurs pour le cas C est

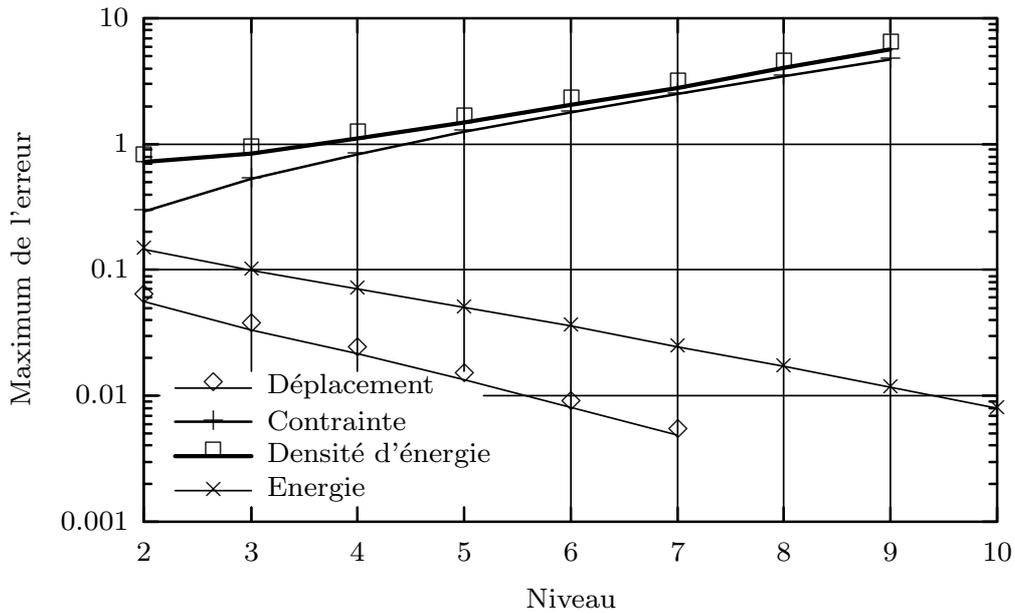


FIG. 3.19 – Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau pour le cas test C pour les quatre indicateurs d'erreurs.

donnée par la théorie de la mécanique de la rupture linéaire [75]. La fissure introduit une singularité dans le champ de contrainte en $1/\sqrt{d} = d^{-0.5}$, si d est la distance à la pointe de la fissure (figure 3.20). Ainsi, en pointe de fissure le champ de contrainte n'est pas défini et l'indicateur d'erreur associé à cette quantité diverge avec un ordre 0.5. Le champ de déplacement évolue en $\sqrt{d} = d^{0.5}$ en pointe de fissure. L'ordre de convergence de l'indicateur basé sur le champ de déplacement de 0.5 est bien retrouvé. Le champ de déformation correspondant à la dérivée du champ de déplacement est donc proportionnel à $1/\sqrt{d} = d^{-0.5}$ en pointe de fissure. La densité d'énergie (tableau 3.1) définie par la trace du produit des tenseurs de contrainte et de déformation est proportionnelle à $1/\sqrt{d} * 1/\sqrt{d} = d^{-1}$. Les critères d'erreurs étant construits comme une norme, la racine carrée utilisée dans la définition de l'indicateur d'erreur en densité d'énergie le rend proportionnel à $\sqrt{1/d} = d^{-0.5}$. L'ordre de divergence de cet indicateur constaté numériquement est donc cohérent. Enfin, l'énergie, correspondant à l'intégrale sur une surface de la densité d'énergie, est proportionnelle à $1/d * d^2 = d$. Ainsi, l'indicateur d'erreur basé sur l'énergie défini avec une racine carrée varie suivant $d^{0.5}$ expliquant l'ordre de convergence de 0.5 sur la figure 3.19.

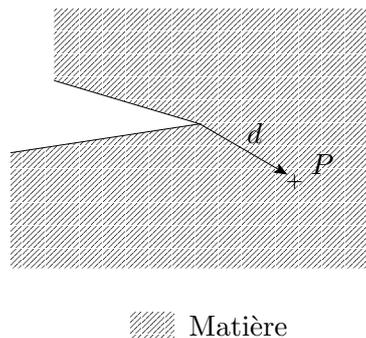


FIG. 3.20 – Distance d d'un point P à la pointe de fissure.

Pour un cas singulier, les indicateurs d'erreurs ne sont pas tous équivalents. Suivant la grandeur considérée, ils peuvent ne pas converger. L'indicateur d'erreur basé sur l'énergie apparaît comme le plus adapté à des problèmes de mécanique puisqu'il s'appuie sur une quantité toujours finie.

3.2.3 Influence du maillage du premier niveau

L'influence du maillage de niveau 1 est discuté à partir du cas de la plaque fissurée (cas C). Différents maillages de niveau 1, figure 3.21, sont testés avec des éléments quadrangulaires linéaires à quatre noeuds et des éléments triangulaires linéaires à trois noeuds. Les cinq maillages sont repérés par les lettres allant de (a) à (e). L'indicateur d'erreur basé sur l'énergie est adopté pour les raisons indiquées dans la section précédente. Cet indicateur associé à une précision requise $\epsilon = 3.10^{-4}$ conduit aux maillages fins tracés sur la figure 3.22. Ces maillages obtenus à la fin de chaque calcul sont différents les uns des autres mais dans chacun des cas, le raffinement de maillage se localise au niveau de la pointe de fissure. La singularité en pointe de fissure est perçue par l'indicateur d'erreur et l'algorithme de la "S(T)AR-method" concentre le raffinement de maillage dans cette zone.

La convergence de l'indicateur d'erreur pour chacun des cas (a) à (e) est indiquée sur la figure 3.23. Le même ordre de convergence de 0.5 est obtenu avec chacun des maillages de niveau 1 testés. Cependant le nombre de niveaux nécessaires pour obtenir la même précision n'est pas identique. Pour les maillages (b), (c) et (e), l'évolution du maximum de l'erreur est très proche et 9 niveaux sont nécessaires. Le calcul réalisé avec le maillage (a) converge en 7 niveaux alors que celui réalisé avec le maillage (d) converge en 10 niveaux. Le maillage (a) converge en deux niveaux plus tôt que le maillage (b) puisque son maillage de niveau 1 en pointe de fissure est déjà deux fois plus fin. Ainsi, le choix du maillage du premier niveau n'a pas d'influence sur la précision des résultats. Il impacte seulement le nombre de niveaux nécessaires pour atteindre la précision exigée. Quelle que soit la taille des mailles de niveau 1, la taille des mailles finales permettant d'atteindre une précision donnée est toujours la même.

3.2.4 Précision des résultats

La vérification de l'adéquation entre la précision des résultats et la précision demandée est effectuée a posteriori avec le cas A. Le maximum de la contrainte de Von Mises obtenu avec la "S(T)AR-method" est comparé à la valeur de référence par le tableau 3.3 pour différentes précisions requises ϵ . La valeur de référence correspond à celle obtenue avec la méthode des éléments finis classique avec un maillage de finesse constante égale au niveau correspondant pour la structure complète. L'indicateur d'erreur choisi pour effectuer cette validation est basé sur le champ de contrainte.

L'étoile contenue dans une case signifie que le maillage correspondant à ce niveau ne contient pas la zone du maximum de contrainte. Autrement dit, à partir du niveau marqué par une étoile, la contrainte de Von Mises maximale n'évolue plus. Cependant, un calcul sur le niveau correspondant à cette étoile a été effectué afin que la solution du domaine de calcul complet atteigne la précision requise initialement. La figure 3.17 montre un raffinement de maillage hors de la zone du maximum de contrainte à partir d'un certain niveau.

La valeur de référence ∞ est calculée par extrapolation basée sur l'ordre de convergence et sur les valeurs de référence obtenues sur les niveaux 8 et 9. Les deux premières décimales peuvent être données sans hésitation contrairement aux suivantes. Cette valeur de référence est considérée comme la valeur exacte du maximum de la contrainte de Von Mises pour ce cas test.

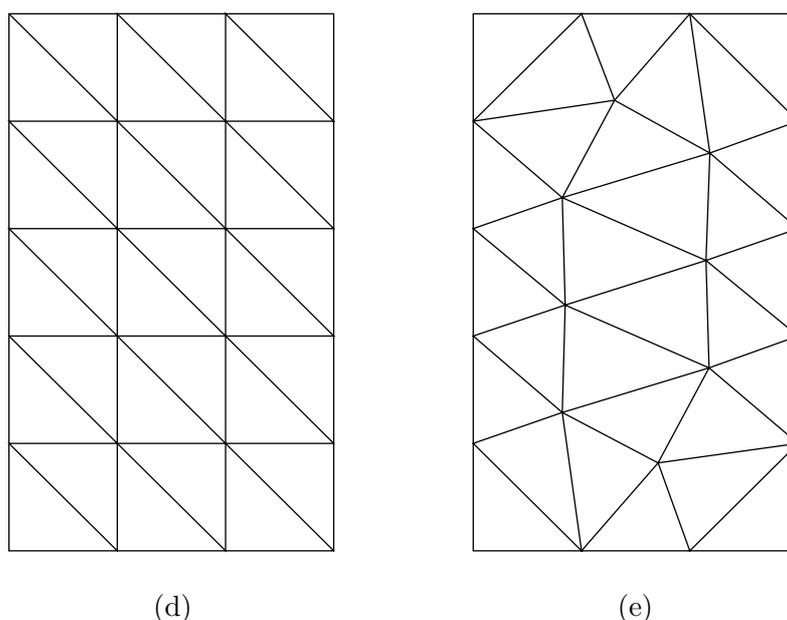
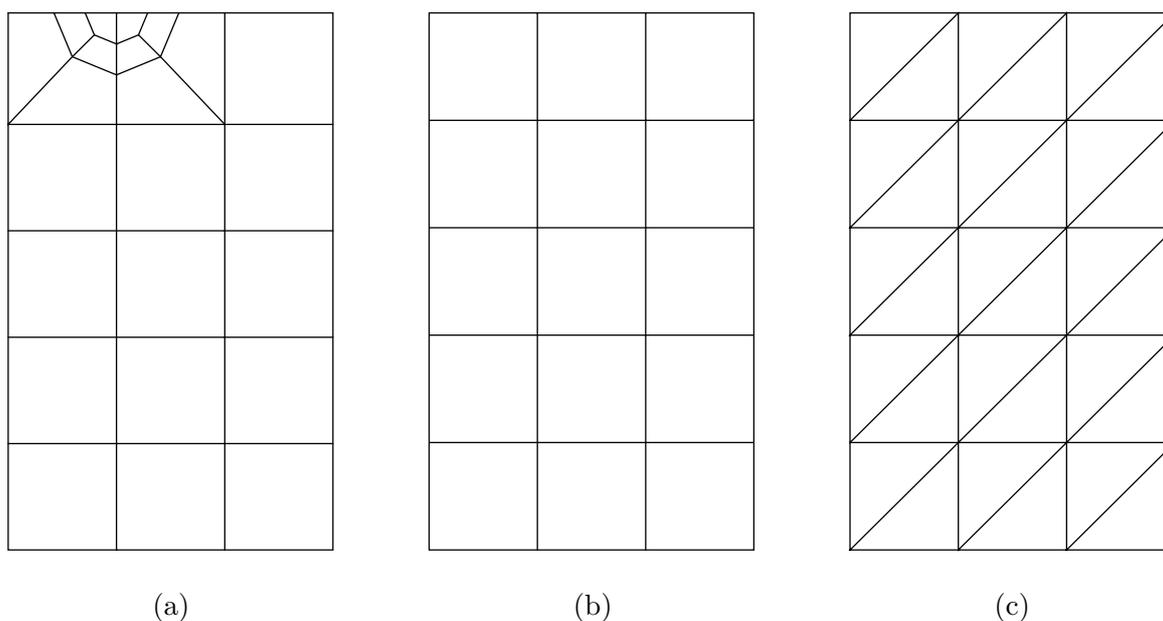


FIG. 3.21 – Maillages de niveau 1 choisis pour la plaque fissurée (Cas C).

En parcourant le tableau 3.3 par une ligne horizontale de gauche à droite, plus la précision requise est grande (c'est-à-dire plus ϵ est petit) plus la valeur maximale de la contrainte de Von Mises tend vers sa valeur de référence.

Le parcours vertical du tableau pour une précision donnée, par exemple $\epsilon = 0.1$, montre que plus le niveau est fin (élevé), plus le maximum de la contrainte de Von Mises tend vers la valeur de référence du niveau ∞ . Du point de vue numérique en comparant la valeur du maximum de contrainte obtenu pour une précision $\epsilon = 0.2$ à la valeur exacte de référence, l'écart constaté est de $(1.56 - 1.31765)/1.56 * 100 \simeq 15,5$ soit inférieur à 20%. Ceci est en parfait accord avec la précision demandée. Cette opération peut être répétée pour vérifier l'écart entre le maximum de la contrainte de Von Mises par rapport à la valeur exacte de référence pour chaque précision

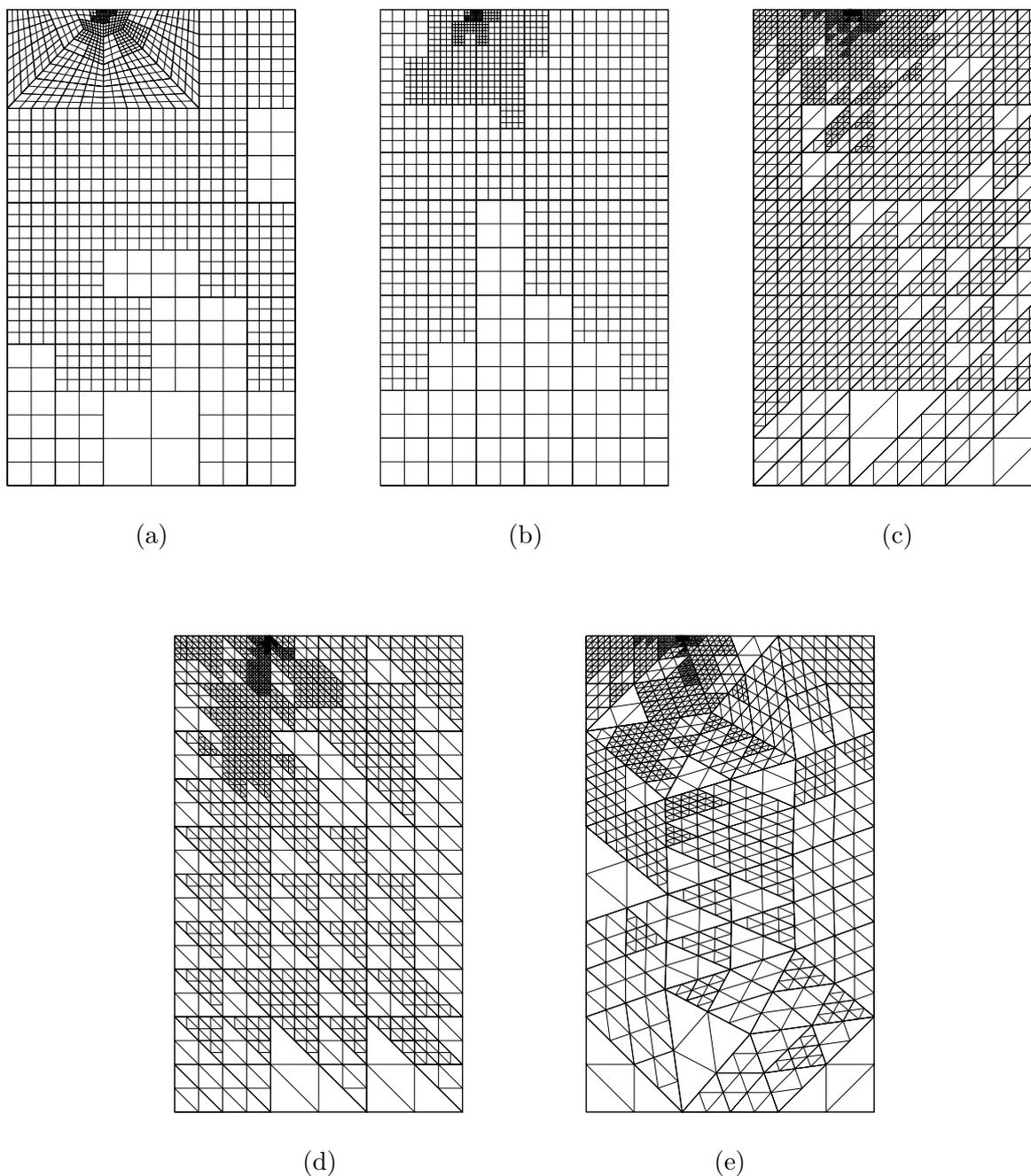


FIG. 3.22 – Maillages fins obtenus pour la plaque fissurée (Cas C).

testée (voir le tableau 3.3).

Cet exemple numérique illustre la cohérence entre la précision des résultats demandée et la précision effective des résultats obtenus avec la méthode de raffinement automatique de maillage. Par ce procédé, il est certain que la finesse du maillage sera toujours adaptée à la qualité de la solution souhaitée. Ce procédé garantit la précision du calcul au niveau ϵ souhaité pour l'ensemble de la solution, tout en limitant le nombre de degrés de liberté du maillage.

L'annexe C discute du lien entre la précision de la solution et la mesure de l'erreur par un indicateur.

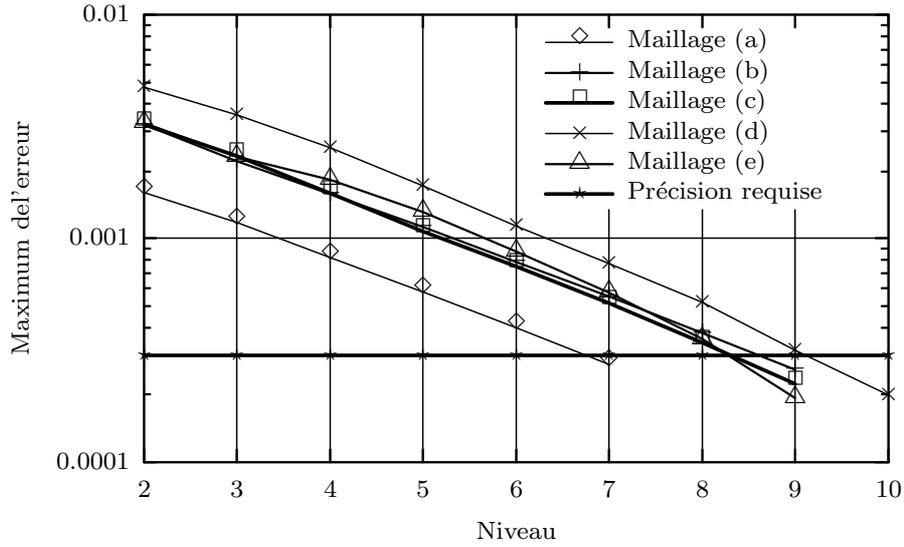


FIG. 3.23 – Evolution du maximum de l'erreur en fonction du niveau pour les cinq maillages de la plaque fissurée avec l'indicateur d'erreur défini en énergie.

Niveau	Valeur de référence	$\epsilon = 0.2$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.02$	$\epsilon = 0.01$
2	0.93741	0.93656	0.93656	0.93656	0.93656	0.93656
3	1.14288	1.14931	1.14931	1.14931	1.14931	1.14931
4	1.31469	1.31765	1.31765	1.31765	1.31765	1.31278
5	1.42273	*	1.41067	1.41233	1.41670	1.41895
6	1.48630		1.46859	1.47138	1.47687	1.47996
7	1.52233		*	1.50594	1.51185	1.51519
8	1.54178			1.52491	1.53101	1.53443
9	1.55193			*	1.54105	1.54452
10					*	1.54968
⋮						
∞	1.56...					
écart en %		15,5%	5,9%	2,2%	1,2%	0,7%

TAB. 3.3 – Comparaison de la contrainte de Von Mises maximale (10^8 Pa) obtenue suivant la précision ϵ demandée avec la “S(T)AR-method” à la valeur de référence.

3.2.5 Efficacité

L'efficacité de la méthode est étudiée en comparant le nombre de degrés de liberté d'un modèle de référence à celui du modèle créé par la méthode de raffinement automatique. La valeur de référence correspond au nombre de degrés de liberté d'un maillage défini pour toute la structure sur un niveau donné. Elle correspond à un calcul effectué avec une précision ϵ égale à zéro. Le nombre de degrés de liberté de chacun des modèles est répertorié dans le tableau 3.4 pour le cas test A. Le nombre de degrés de liberté est représentatif de l'efficacité de la méthode. En effet, plus ce nombre est élevé plus le temps passé pour résoudre les équations d'équilibre est important. La limitation de ce nombre améliore, sans dégrader la précision, l'efficacité d'une méthode numérique.

Pour le cas A, si l'indicateur d'erreur en énergie est utilisé avec une précision $\epsilon = 0.01$, le nombre

Niveau	Nombre de degrés de liberté				
	Référence	$\epsilon = 0.05$	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.005$	$\epsilon = 0.001$
1	24	24	24	24	24
2	70	70	70	70	70
3	234	202	234	234	234
4	850	130	826	850	850
5	3224		1716	3144	3224
6	12610		530	2610	12568
7	49794			482	38322
8	197890				12266
total	-	426	3400	7414	67558
gain	-	49,9 %	73,0 %	85,0 %	65,9 %

TAB. 3.4 – Comparaison du nombre de degrés de liberté des modèles obtenus pour différentes précisions avec un indicateur d’erreur basé sur l’énergie pour le cas test A.

de niveaux nécessaires pour l’atteindre est de 6. La somme du nombre de degrés de liberté des modèles créés sur chacun des niveaux est de 3400 (tableau 3.4). Le nombre de degrés de liberté de référence contenu dans le maillage complet de la structure correspondant au niveau 6 est de 12610. Ainsi, le gain en nombre de degrés de liberté réalisé en utilisant la “S(T)AR-method” est de 73 %. La méthode de raffinement local est d’autant plus efficace que la zone de localisation est petite par rapport à la structure globale. Lorsque $\epsilon = 0.001$ l’efficacité est réduite par rapport au cas où $\epsilon = 0.005$ car la zone de raffinement s’étend sur la structure pour satisfaire la précision souhaitée.

Le deuxième exemple concerne le cas D. En choisissant un indicateur d’erreur en déplacement et en prenant une précision de $\epsilon = 0.0015$, la “S(T)AR-method” donne les maillages successifs de la figure 3.24. Le nombre de degrés de liberté pour le calcul de référence et le calcul avec raffinement de maillage automatique est donné dans le tableau 3.5. Le gain de degrés de liberté réalisé pour ce cas est encore plus significatif que précédemment car il est de 98,5 %.

Niveau	Nombre de degrés de liberté	
	Référence	$\epsilon = 0.015$
1	966	966
2	5658	5658
3	37746	9338
4	273378	5202
5	2075586	10712
total	-	31876
gain	-	98,5 %

TAB. 3.5 – Comparaison du nombre de degrés de liberté des différents niveaux du cas test D obtenus avec un indicateur d’erreur en déplacement.

Le calcul de référence correspondant au niveau 5 est impossible sur un ordinateur de capacité moyenne avec Cast3m en 2006. Le maillage contient trop de degrés de liberté. Il est donc évident que la méthode proposée dans ce travail permet d’envisager des calculs pour des modèles contenant un grand nombre de degrés de liberté.

Remarque : ces résultats enthousiasmants sont à nuancer. En effet, les maillages de référence

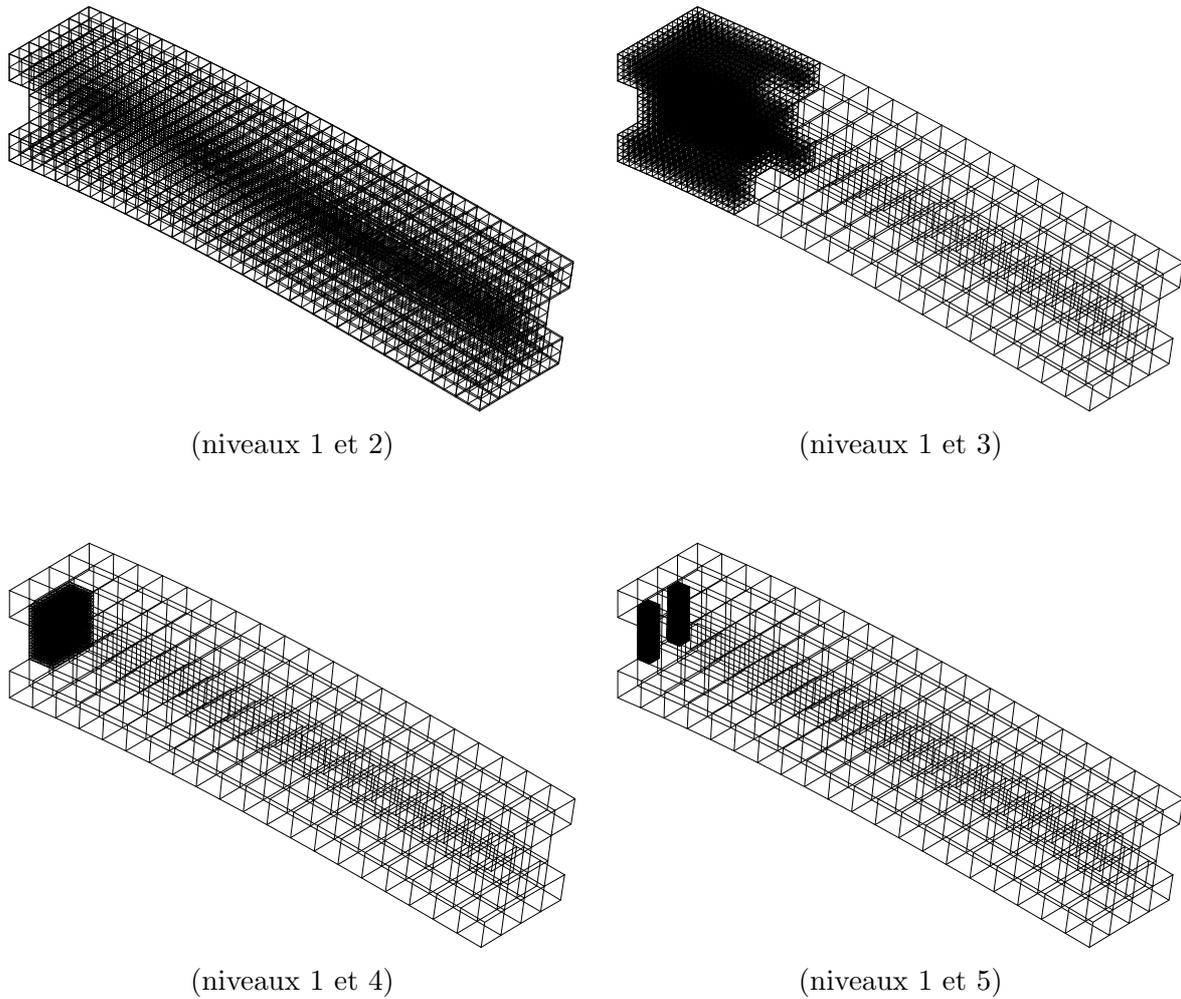


FIG. 3.24 – Raffinement de maillage tridimensionnel d'une poutre en I encastrée à une extrémité et sollicitée en flexion à l'autre

obtenus pour une précision $\epsilon = 0$ sur chacun des niveaux ne sont pas les maillages qui auraient été créés naturellement pour calculer la solution du problème initial. Les cas tests choisis sont académiques et le choix de leur maillage ne présente pas de difficulté majeure. Ces cas sont considérés afin d'analyser la méthode mise en place. Pour un problème complexe la définition d'un maillage adapté au besoin de l'étude n'est pas triviale. Les résultats présentés dans cette partie permettent d'estimer les gains potentiels de la méthode.

3.2.6 Echelle d'analyse, ordre de convergence et singularité

Les deux cas tests bidimensionnels précédents A et C traitent respectivement un exemple sans et avec une singularité de type fissure. L'ordre de convergence des différents indicateurs testés est influencé par la présence d'une singularité. Par exemple, l'indicateur d'erreur basé sur le champ de déplacement converge avec un ordre 2 lorsque le problème ne présente pas de singularité. Il converge avec un ordre 0.5 dans le cas contraire (si la singularité est de type fissure). Cependant, l'influence de la singularité sur la convergence dépend de l'échelle à laquelle elle est considérée.

Le calcul du cas test B, avec un indicateur basé sur le champ de déplacement et une précision de $\epsilon = 0.0001$, conduit aux maillages successifs présentés sur les figures 3.26 et 3.27. L'évolution du maximum de l'indicateur d'erreur est tracée sur la figure 3.25. Deux comportements différents apparaissent. Le premier correspond à une convergence d'ordre 0.5. Le second à une conver-

gence d'ordre 2. Jusqu'au niveau 5 le trou de la plaque agit comme une fissure. La dimension caractéristique d'un élément fini est plus grande que celle du cercle. Si r représente le rayon du trou et h la longueur caractéristique d'un élément proche du trou alors sur le niveau 1 le rapport de ces deux grandeurs est de $r/h = 0.1875$ (ou $h/r = 5.33$). Pour chaque niveau plus fin r reste constant tandis que h est divisé par deux. Au niveau 5, lorsque le comportement du maximum de l'erreur commence à changer, le rapport r/h vaut 3. Au niveau 6, il vaut 6. A partir des niveaux 5 et 6, le trou n'agit plus comme une singularité de type fissure mais comme un trou circulaire n'apportant plus de singularité. L'adaptation de la taille des éléments finis à celle du rayon du trou régularise le problème en basculant du cas test C vers le A.

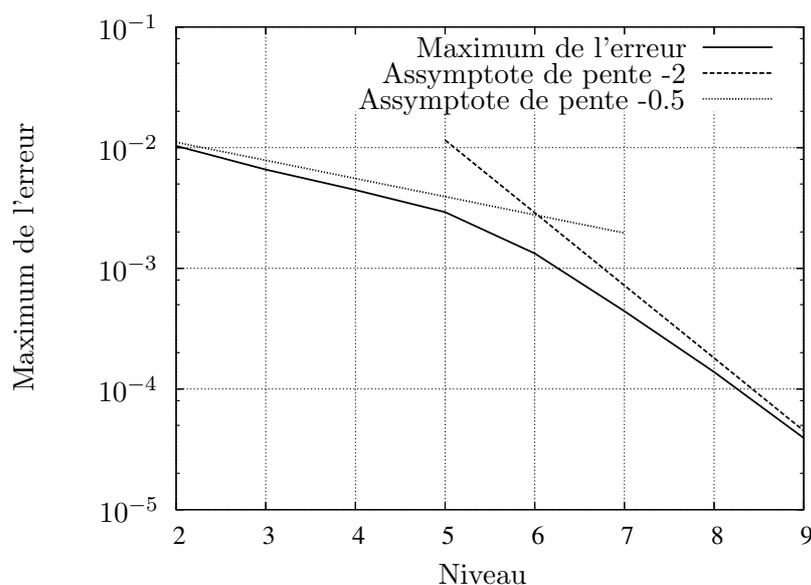


FIG. 3.25 – Evolution du maximum de l'erreur pour le cas B avec un indicateur d'erreur en déplacement et une précision de $\epsilon = 0.0001$.

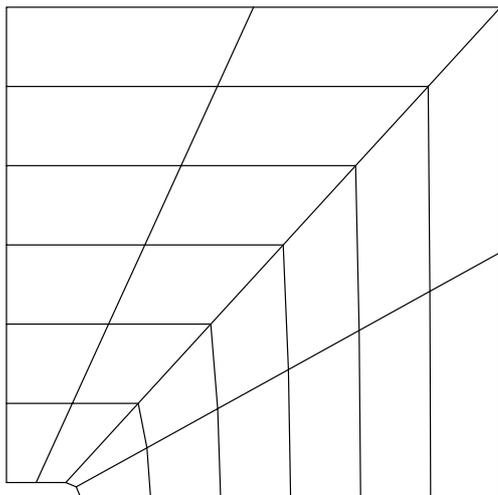
La singularité influence la convergence d'un indicateur d'erreur suivant l'échelle (ou le niveau) à laquelle elle est considérée. Elle dépend du rapport de la taille des éléments finis et de la dimension caractéristique de la géométrie étudiée.

3.3 Synthèse

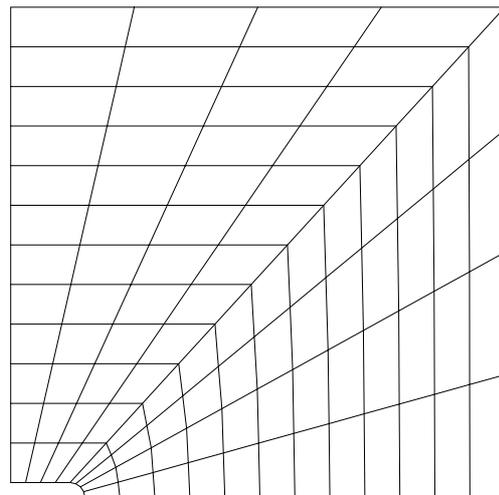
Une stratégie adaptative locale est proposée via la "S(T)AR-method". Elle repose sur un critère d'erreur évalué pour chaque élément fini d'un niveau. La comparaison de l'erreur à la précision demandée ϵ permet de définir ou non un niveau supplémentaire. La résolution d'un problème local conduit à imposer des conditions cinématiques de liaison et à utiliser des multiplicateurs de Lagrange.

Les paramètres d'entrée d'un calcul (le maillage du premier niveau, le choix de l'indicateur d'erreur et la précision requise) répertoriés sur la figure F.1 de l'annexe F sont étudiés. Les résultats principaux sont énumérés ci-dessous.

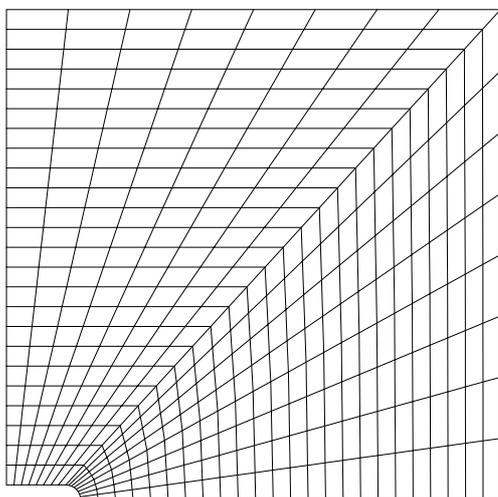
- La vitesse de convergence du calcul est indépendante du maillage de niveau 1 proposé. La finesse de maille finale nécessaire pour atteindre une précision donnée n'est pas influencée par la taille des mailles initiales.



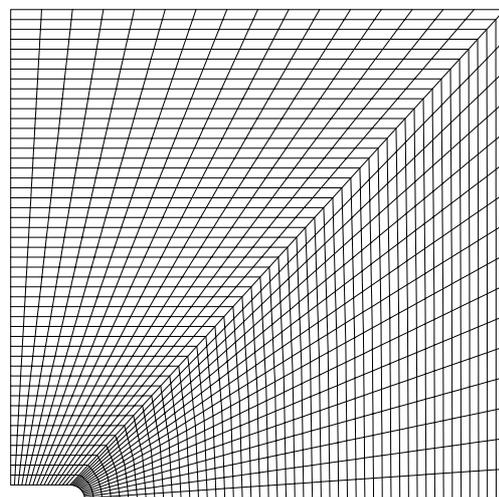
Niveau 1



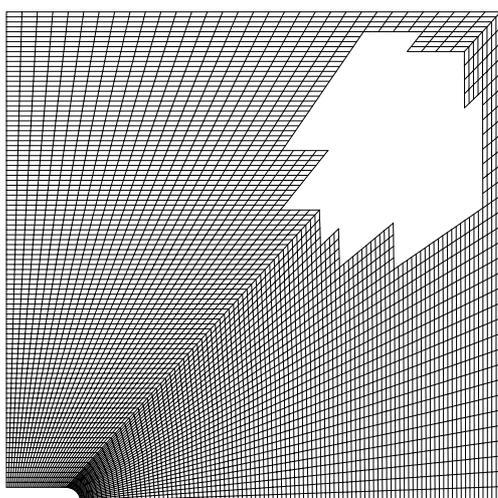
Niveau 2



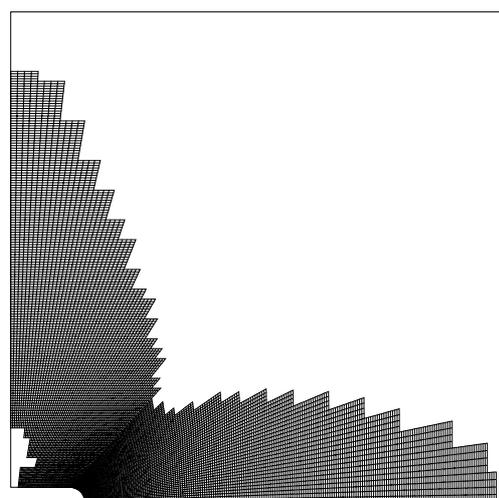
Niveau 3



Niveau 4



Niveau 5



Niveau 6

FIG. 3.26 – Maillages des niveaux 1 à 6 pour la plaque trouée obtenus avec un indicateur basé sur les déplacements pour une précision $\epsilon = 0.0001$.

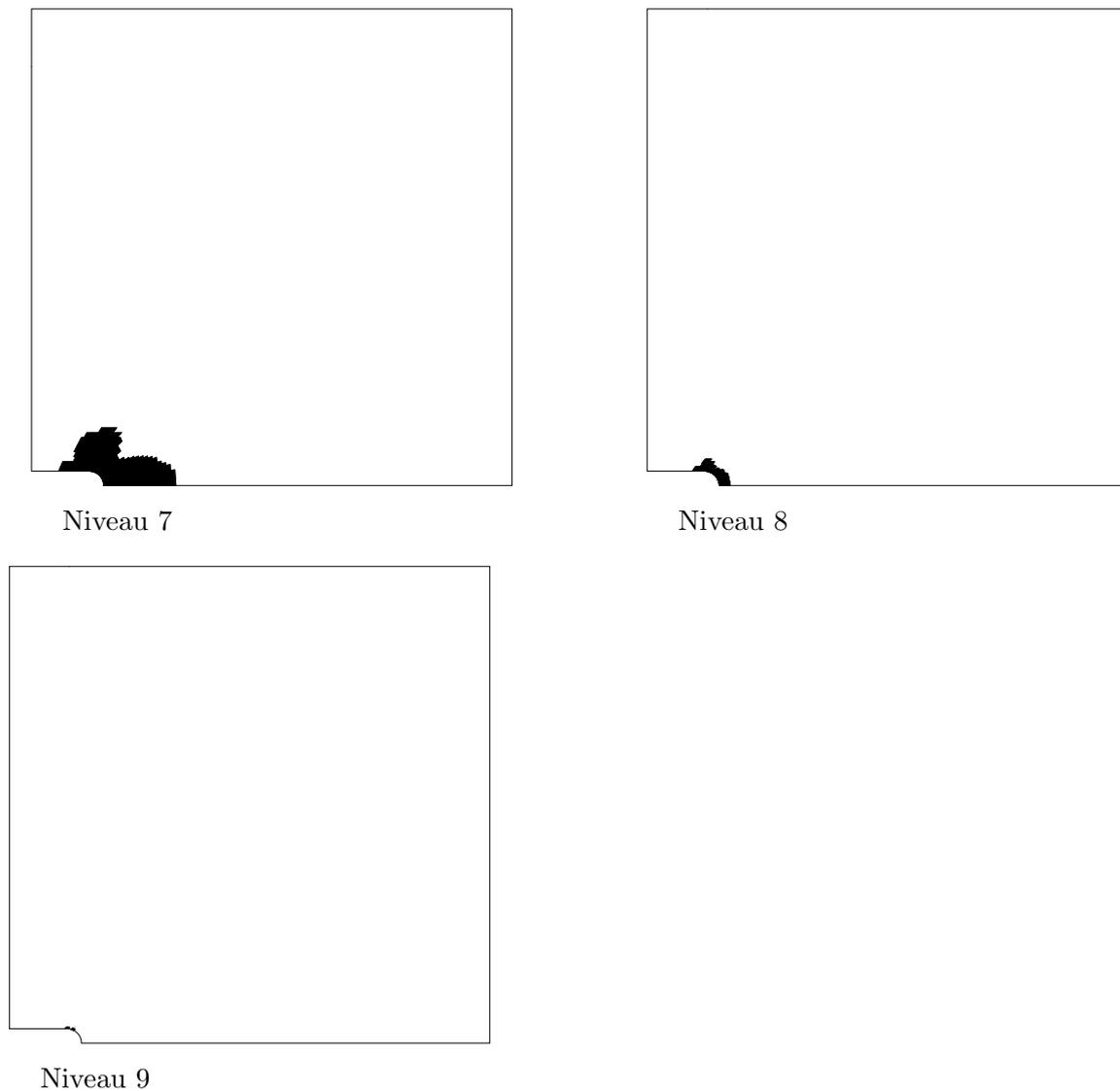


FIG. 3.27 – Maillages des niveaux 7 à 9 pour la plaque trouée obtenus avec un indicateur basé sur les déplacements pour une précision $\epsilon = 0.0001$.

- Pour un problème régulier, tous les indicateurs d'erreurs convergent.
- Pour un problème contenant une singularité de type fissure, la singularité modifie l'ordre de convergence des indicateurs d'erreurs. Ceux basés sur les champs de contrainte et de densité d'énergie ne convergent pas. Ceux basés sur les champs de déplacement et d'énergie convergent avec des ordres inférieurs à ceux d'un problème régulier.
- L'efficacité de la méthode est discutée en comparant le nombre de degrés de liberté des modèles classiques à celui des modèles avec raffinement automatique de maillage. La réduction du nombre de noeuds avec la "S(T)AR-method" est importante, elle peut atteindre plus de 90 %.
- La précision des résultats calculés correspond bien à celle demandée initialement.
- Une singularité agit en tant que telle suivant le rapport entre sa dimension caractéristique et la dimension caractéristique des éléments fins qui l'entourent. Son influence sur l'ordre de convergence dépend donc de l'échelle à laquelle elle est représentée.

Chapitre 4

Raffinement spatial et temporel local : cas linéaire

Ce chapitre généralise la méthode de raffinement de maillage spatial en l'étendant aux problèmes linéaires dépendant du temps. Le T de "STAR-method" ("Space Time Automatic Refinement") prend alors tout son sens. Les schémas numériques de la famille de Newmark (décrits dans la section 2.5) sont utilisés pour intégrer la variable temporelle. Dans ce chapitre, le raffinement du maillage est réalisé simultanément pour les discrétisations spatiale et temporelle. Ces deux discrétisations sont désormais couplées. Au cours du processus de raffinement automatique de maillage spatial et temporel, des niveaux (ou grilles) de plus en plus fins sont créés.

La première partie de ce chapitre introduit le concept de domaine espace temps élémentaire sur lequel se base la "STAR-method". Ce concept couple les discrétisations spatiale et temporelle. Après avoir présenté le principe de raffinement local du maillage spatial et temporel, la démonstration de la stabilité de l'algorithme créé est établie. Cette analyse de stabilité permet de définir les conditions aux limites à appliquer aux bords d'un domaine espace temps local afin de garantir la convergence de la méthode. Comme dans le chapitre précédent, les indicateurs d'erreurs mis en place pour les problèmes de dynamique linéaire sont étudiés.

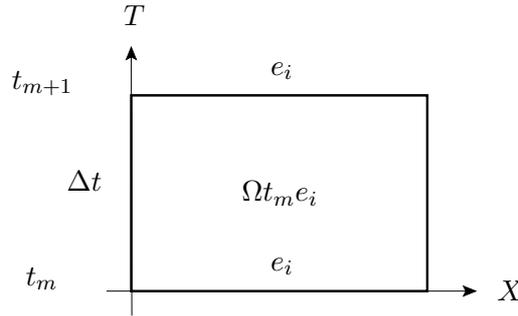
La seconde et la troisième partie de ce chapitre présentent les résultats obtenus pour des simulations numériques unidimensionnelle et bidimensionnelle. Les principales caractéristiques de la "STAR-method" sont déduites des études numériques.

Enfin, la dernière partie synthétise les résultats présentés dans ce chapitre.

4.1 Principe de la "STAR-method"

4.1.1 Domaine espace temps élémentaire

Le principe de la "STAR-method" repose sur la notion de domaine espace temps élémentaire illustré par la figure 4.1. Ce domaine élémentaire est matérialisé par une échelle spatiale X sur l'axe horizontal et par une échelle temporelle T sur l'axe vertical. Un élément de temps est composé de deux instants successifs t_m et t_{m+1} séparés par un pas de temps Δt tel que $t_{m+1} = t_m + \Delta t \quad \forall m \in \{0, \dots, r-1\}$. La discrétisation temporelle respecte les règles énoncées dans la section 2.2.2. L'espace élémentaire est constitué d'un élément fini e_i défini aux deux instants t_m et t_{m+1} . Cet élément fini n'est créé qu'une seule fois quel que soit le nombre de domaines espace temps élémentaires qui l'utilisent. D'une façon générale, l'élément fini e_i peut être uni-, bi- ou tridimensionnel. Quelle que soit la dimension considérée (1D, 2D ou 3D), la représentation d'un domaine espace temps élémentaire sera toujours semblable. Un domaine espace temps élémentaire est désigné par $\Omega t_m e_i$. Ωt symbolise le domaine espace temps. L'indice m indique l'intervalle de temps considéré $[t_m, t_m + 1]$. La lettre i désigne le i^{ieme} élément fini.

FIG. 4.1 – *Domaine espace temps élémentaire $\Omega t_m e_i$.*

Le maillage spatial et temporel complet Ωt de la structure correspond à l’union spatiale et temporelle de tous les domaines espace temps élémentaires. Si le nombre de domaines espace temps élémentaires entre chaque intervalle de temps $[m, m + 1]$ est n_m , le domaine espace temps Ωt est défini par :

$$\Omega t = \bigcup_{m=0}^{r-1} \bigcup_{i=1}^{n_m} \Omega t_m e_i \quad (4.1)$$

Cette représentation permet de coupler la discrétisation spatiale à la discrétisation temporelle. Le domaine espace temps élémentaire sert de base à la construction de la stratégie de raffinement spatial et temporel local.

4.1.2 Principe de construction d’un maillage spatial et temporel de niveau $j + 1$ hiérarchique au niveau j

Dans le cadre de la “STAR-method”, le maillage de niveau $j + 1$ est hiérarchique au niveau j tant pour sa discrétisation spatiale que temporelle. La définition d’un maillage spatial hiérarchique est illustrée dans le chapitre 1 par la figure 1.5. La construction d’un maillage spatial hiérarchique est identique à celle réalisée pour la “S(T)AR-method” dans la partie 3.1.1. La construction d’un maillage temporel hiérarchique est similaire à celle d’un maillage unidimensionnel (figure 3.2). La figure 4.2 présente les niveaux j et $j + 1$ de deux maillages spatiaux et temporels hiérarchiques.

L’échelle de temps du niveau $j + 1$ hiérarchique par rapport au niveau j est définie par :

$$t_{2m}^{j+1} = t_m^j \quad (4.2)$$

$$t_{2m+2}^{j+1} = t_{m+1}^j \quad (4.3)$$

$$t_{2m+1}^{j+1} = \frac{t_{m+1}^j + t_m^j}{2} \quad (4.4)$$

$$t_{2m+2}^{j+1} - t_{2m+1}^{j+1} = t_{2m+1}^{j+1} - t_{2m}^{j+1} = \frac{\Delta t_j}{2} \quad (4.5)$$

Un instant intermédiaire se situe au milieu de deux instants coïncidents. Ainsi, l’intervalle de temps Δt_j du niveau j peut être calculé par rapport au pas de temps initial Δt_1 par la relation :

$$\Delta t_j = \frac{\Delta t_1}{2^{j-1}} \quad (4.6)$$

La construction d’un domaine espace temps de niveau $j + 1$ hiérarchique par rapport au niveau j est présentée sur la figure 4.3 à partir d’un domaine espace temps élémentaire. Un domaine

Remarque 1 : la stratégie de construction des maillages hiérarchiques implique que tous les maillages créés sont hiérarchiques entre eux.

Remarque 2 : le sous-découpage en divisant par deux les pas de maillage dans chaque direction (spatiale et temporelle) est arbitraire. D’une façon générale, il est possible de les diviser par un nombre entier p quelconque. Cependant, le choix $p = 2$ présente des avantages.

4.1.3 Principe de raffinement de maillage spatial et temporel local

Le principe général de raffinement de maillage spatial et temporel pour un problème unidimensionnel (figure 4.4) est calqué sur le raffinement de maillage spatial d’un problème bidimensionnel présenté dans le chapitre précédent 3.1.1 en substituant l’axe du temps T à l’axe spatial Y . Cette transformation permet de représenter les domaines espace temps élémentaires. Sur la figure 4.4, le maillage final provisoire devient définitif si aucun niveau supplémentaire n’est créé. L’implémentation dans Cast3m de l’algorithme de la “STAR-method” est détaillée dans l’annexe F.

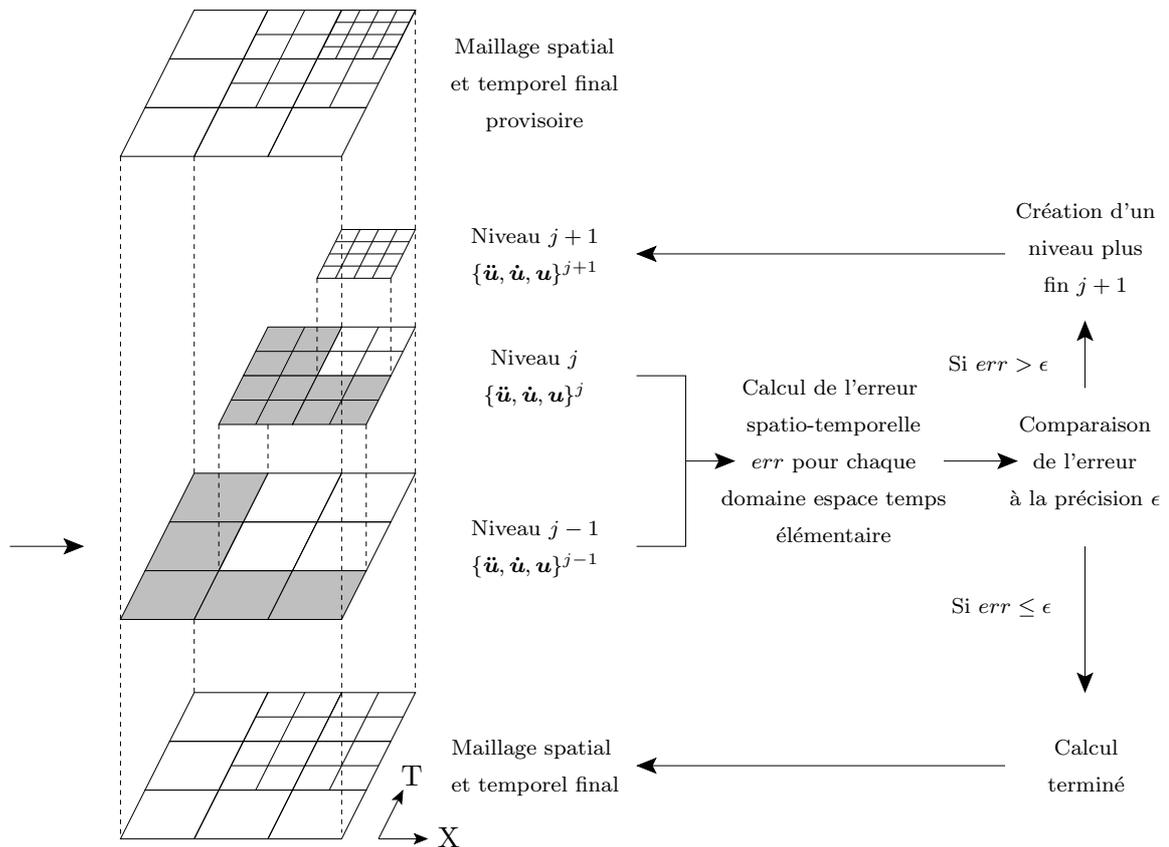


FIG. 4.4 – Principe de l’algorithme de résolution de la “STAR-method” pour un problème unidimensionnel. Les parties “grisées” représentent la part de chaque domaine où la solution a atteint la précision ϵ requise (i.e. où la solution finale est connue). La flèche située à gauche matérialise le sens de lecture du graphique.

La méthode est initialisée en créant un premier modèle spatio-temporel grossier de la structure étudiée. La discrétisation spatiale est réalisée par la méthode des éléments finis. Le maillage (spatial et temporel) réalisé est appelé niveau 1. Il délimite le domaine Ωt^1 où Ω fait référence à la discrétisation spatiale, t à la discrétisation temporelle et 1 au numéro du niveau. Sa frontière est

notée $\partial\Omega t^1$. Comme dans le cas de la statique linéaire, la dimension n de l'espace dans lequel est cherchée la solution est omise dans l'écriture du domaine espace temps Ωt^j . Le domaine espace temps Ωt^1 est composé des maillages spatiaux Ω_m^1 définis aux instants t_m^1 où $m \in \{0, \dots, r_1\}$. Le pas de temps choisi pour le niveau 1 est noté Δt_1 . Les discrétisations spatiale et temporelle respectent les règles énoncées dans la partie 2.2.

Les matrices de masse \mathbf{M}_m^1 et de raideur \mathbf{K}_m^1 sont assemblées sur le domaine Ωt_m^1 pour chaque instant t_m^1 . Le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}_m^1 défini sur $\partial_2\Omega_m^1$ et les conditions aux limites cinématiques sur $\partial_1\Omega_m^1$ sont également construits pour chaque maillage spatial Ω_m^1 défini à l'instant t_m^1 . Le vecteur d'état $\mathbf{U}^1 = \{\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}\}^1$ constitue la solution associée à ce premier niveau où $\ddot{\mathbf{u}}$ est le champ d'accélération, $\dot{\mathbf{u}}$ le champ de vitesse, \mathbf{u} le champ de déplacement. Il désigne l'ensemble des vecteurs d'état calculés pour chaque instant t_m ainsi $\mathbf{U}^1 = \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_m, \dots, \mathbf{U}_{r_1}\}^1$. Dans la définition du vecteur d'état \mathbf{U}^j , l'indice j indique qu'il s'agit de la solution discrète calculée numériquement sur un niveau j . L'indice h précisant le pas de maillage est volontairement omis afin de simplifier la notation.

La solution \mathbf{U}^1 est calculée de manière classique sur ce premier niveau. Comme dans le cas de la statique linéaire, les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^1$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ sont obtenus par un post-traitement du champ de déplacement \mathbf{u}^1 .

La seconde étape consiste à construire le niveau 2 constitué par un maillage spatial et temporel hiérarchique par rapport au maillage de niveau 1 pour la structure complète. L'établissement d'un maillage spatial et temporel hiérarchique est décrit dans la section précédente 4.1.2. Le niveau 2 délimite le domaine espace temps Ωt^2 de frontière $\partial\Omega t^2$. Le maillage temporel est caractérisé par un pas de temps Δt_2 tel que $\Delta t_2 = \Delta t_1/2$. Les instants t_m varient pour $m \in \{0, \dots, r_2\}$. Le nombre de piquets de temps du niveau 2 dépend de celui du niveau 1 et $r_2 = 2 r_1$.

Les matrices de masse \mathbf{M}_m^2 et de raideur \mathbf{K}_m^2 associées au maillage spatial Ω_m^2 , le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}_m^2 sur $\partial_2\Omega_m^2$ et les conditions aux limites cinématiques sur $\partial_1\Omega_m^2$ sont également définis de manière analogue à une méthode par éléments finis standard pour chaque piquet de temps t_m^2 . Le vecteur d'état \mathbf{U}^2 sur ce deuxième niveau est aussi calculé de manière classique pour tous les instants.

Pour ces deux premiers niveaux, les domaines spatiaux occupés par la structure maillée sont tels que $\forall m, \Omega_m^1 = \Omega$ et $\forall m, \Omega_m^2 = \Omega$ à l'erreur de discrétisation géométrique près.

A partir d'un indicateur d'erreur spatio-temporel, l'écart relatif entre les vecteurs d'état solutions \mathbf{U}^1 et \mathbf{U}^2 , appelé aussi erreur, est calculé pour chaque domaine espace temps élémentaire. L'indicateur d'erreur peut être de plusieurs types. Les mesures d'erreurs envisagées sont proches de celles décrites dans le cas de la statique. Ils sont détaillés dans la section 4.1.7. L'erreur est établie localement pour chaque domaine espace temps élémentaire parent en comparant sa solution avec celle de ses enfants. Ensuite, l'erreur associée à chaque domaine espace temps élémentaire est comparée à la précision ϵ requise par l'utilisateur afin de déterminer si la création d'un niveau supérieur est nécessaire.

Chaque domaine élémentaire du niveau 1 dont l'indicateur d'erreur est supérieur à la précision demandée est subdivisé selon la figure 4.3 pour former le niveau 3. Par ce procédé, le niveau 3 est créé automatiquement. Le domaine espace temps Ωt^3 peut être défini seulement localement et constitué de parties non connexes. A partir du maillage spatial Ω_m^3 du niveau 3 pris à l'instant m , les matrices de masse \mathbf{M}_m^3 et de raideur \mathbf{K}_m^3 sont assemblées. Le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}_m^3 est construit sur la frontière $\partial_2\Omega_m^3$. Les conditions aux limites cinématiques sont

appliquées sur $\partial_1\Omega_m^3$. Si, à l'instant t_m , le raffinement du maillage spatial et temporel est local alors $\partial\Omega_m^3 \neq (\partial_1\Omega_m^3 \cup \partial_2\Omega_m^3)$ et la frontière $\partial_{1*}\Omega_m^3$ existe. Le bord $\partial_{1*}\Omega_m^3$ est défini pour le pas de temps t_m de façon identique au bord $\partial_{1*}\Omega^j$ de la figure 3.6 si $j = 3$. Cette frontière est telle que :

$$(\partial_1\Omega_m^3 \cup \partial_2\Omega_m^3) \cup \partial_{1*}\Omega_m^3 = \partial\Omega_m^3$$

Pour obtenir le vecteur d'état \mathbf{U}^3 solution sur le niveau 3, des conditions aux limites supplémentaires sont appliquées sur la frontière $\partial_{1*}\Omega_m^3$. Ces conditions traduisant la continuité des vitesses à l'interface de deux domaines espace temps sont définies pour préserver la stabilité de l'algorithme. Elles sont appelées conditions de liaison. Elles sont déterminées dans l'étude de la stabilité développée dans la section 4.1.4 et explicitées dans la section suivante 4.1.5. La continuité du champ des vitesses est appliquée en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Ce processus automatique de raffinement de maillage se poursuit en comparant localement les solutions \mathbf{U}^2 et \mathbf{U}^3 associées aux domaines Ωt^2 et Ωt^3 , pour créer éventuellement le domaine espace temps Ωt^4 .

D'une façon générale, les vecteurs d'état solutions \mathbf{U}^{j-1} et \mathbf{U}^j associés aux domaines Ωt^{j-1} et Ωt^j sont comparés localement sur chaque domaine espace temps élémentaire $\Omega t_m e_i^{j-1}$. L'écart entre ces deux solutions est appelé erreur. Si l'erreur associée à un domaine espace temps élémentaire du niveau $j - 1$ est supérieure à la précision souhaitée ϵ , les domaines espace temps élémentaires enfants de niveau j sont créés pour former le domaine Ωt^{j+1} . Pour chaque instant t_m du nouveau domaine espace temps Ωt^{j+1} , les matrices de masse \mathbf{M}_m^{j+1} et de raideur \mathbf{K}_m^{j+1} sont assemblées. La définition des bords $\partial_2\Omega_m^{j+1}$, $\partial_1\Omega_m^{j+1}$ et $\partial_{1*}\Omega_m^{j+1}$ permet de déterminer \mathbf{f}_m^{j+1} et les conditions aux limites cinématiques et de liaison associées à ce niveau pour chaque instant t_m^{j+1} . Le vecteur d'état solution \mathbf{U}^{j+1} peut être calculé.

Le raffinement de maillage spatial et temporel automatique s'arrête dès que la précision ϵ requise est satisfaite pour tous les domaines espace temps élémentaires de la structure modélisée. Au cours du calcul, les domaines espace temps créés sont définis tels que :

$$\Omega t^{nb} \subset \dots \subset \Omega t^k \subset \dots \subset \Omega t^1 \subset \Omega$$

si le nombre final de niveaux nécessaires est nb .

Remarque 1 : comme dans le cas de la statique linéaire, les calculs sur les niveaux 1 et 2 sont systématiquement réalisés sur le domaine de calcul complet afin d'amorcer la procédure de raffinement automatique. Ces deux niveaux étant grossiers, le coût de calcul engendré n'est pas significatif.

Remarque 2 : le principe de la "STAR-method" n'est pas modifié si la modélisation du problème tient compte d'un amortissement. Une matrice d'amortissement est alors introduite.

4.1.4 Stabilité de l'algorithme

La démonstration de la stabilité de l'algorithme de la "STAR-method" s'appuie sur celle de l'algorithme de Newmark par la méthode énergétique 2.5.4.

Le développement s'inspire des travaux de Hughes et Liu [58] étendus par Gravouil [52] puis Prakash et Hjelmstad [91].

Si aucun sous-découpage local ne se produit au cours du calcul, la résolution est classique et la stabilité de l'algorithme n'est pas modifiée.

Lorsqu’un sous-découpage local intervient au cours du calcul, le niveau créé est défini sur une partie seulement du niveau inférieur. L’influence du domaine espace temps non reconduit sur ce nouveau niveau est prise en compte par l’intermédiaire de conditions aux limites espace temps à l’interface de deux niveaux successifs. Ces conditions s’expriment sous forme de forces de liaison notées \mathbf{fl} . Ce vecteur est non nul uniquement à l’interface de deux niveaux successifs.

En isolant un domaine espace temps élémentaire du niveau j défini entre les instants t_m^j et t_{m+1}^j comme sur l’illustration 4.5, l’équation énergétique exprimée suivant (2.71) s’écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\ddot{\mathbf{u}}_m^{jT} \mathbf{A}_m^j \ddot{\mathbf{u}}_m^j + \dot{\mathbf{u}}_m^{jT} \mathbf{K}_m^j \dot{\mathbf{u}}_m^j] &= -(\gamma - \frac{1}{2})[\ddot{\mathbf{u}}_m^j]^T \mathbf{A}_m^j [\ddot{\mathbf{u}}_m^j] \\ &+ \frac{1}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_m^j]^T [\mathbf{f}_m^j] \\ &+ \frac{1}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_m^j]^T [\mathbf{fl}_m^j] \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec

$$\mathbf{A}_m^j = \mathbf{M}_m^j + \frac{\Delta t_j^2}{2} (2\beta - \gamma) \mathbf{K}_m^j \quad (4.8)$$

La notation des grandeurs entre crochets correspond à celle définie par la relation (2.67).

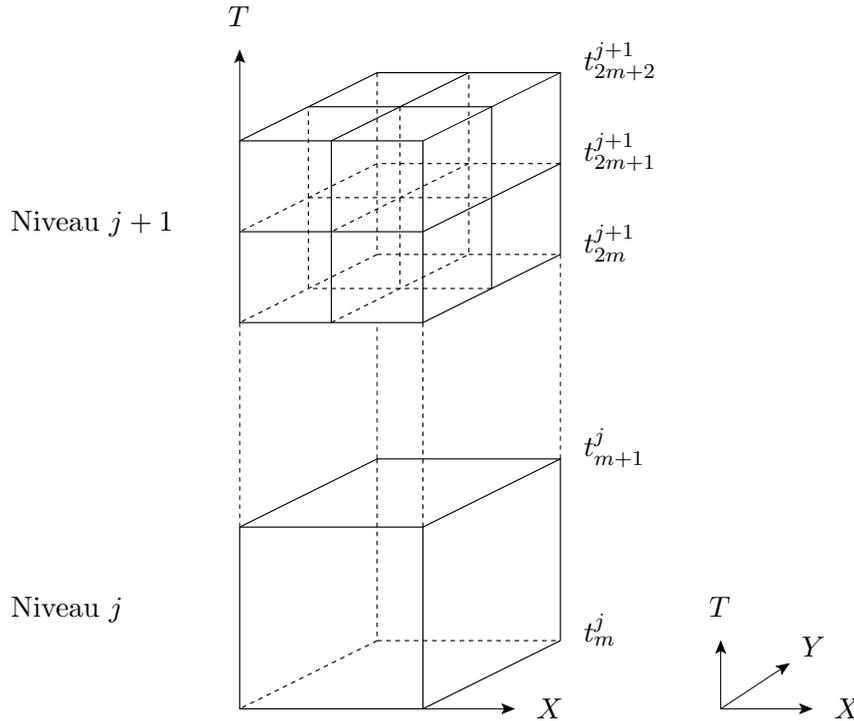


FIG. 4.5 – *Domaine espace temps élémentaire parent sur le niveau j et les quatre domaines espace temps élémentaires enfants du niveau $j+1$.*

Les conditions de stabilité pour le domaine espace temps élémentaire de niveau j sont celles énoncées dans la partie 2.5.4.

En considérant les domaines espace temps enfants du niveau $j+1$ engendrés par le domaine espace temps parent du niveau j (figure 4.5), l’équation (4.7) entre les instants t_{2m}^{j+1} et t_{2m+2}^{j+1} devient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1T} \mathbf{A}_{2m+i-1}^{j+1} \dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1} + \dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1T} \mathbf{K}_{2m+i-1}^{j+1} \dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}] = \\
& - \sum_{i=1}^2 (\gamma - \frac{1}{2}) [\ddot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T \mathbf{A}_{2m+i-1}^{j+1} [\ddot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}] \\
& + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Delta t_{j+1}} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{f}_{2m+i-1}^{j+1}] \\
& + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Delta t_{j+1}} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

avec

$$\mathbf{A}_m^{j+1} = \mathbf{M}_m^{j+1} + \frac{\Delta t_{j+1}^2}{2} (2\beta - \gamma) \mathbf{K}_m^{j+1} \tag{4.10}$$

En considérant un schéma de Newmark où $\gamma = 1/2$, les termes dissipatifs $(\gamma - \frac{1}{2})[\ddot{\mathbf{u}}_m^j]^T \mathbf{A}_m^j [\ddot{\mathbf{u}}_m^j]$ et $\sum_{i=1}^2 (\gamma - \frac{1}{2})[\ddot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T \mathbf{A}_{2m+i-1}^{j+1} [\ddot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]$ des équations (4.7) et (4.9) s'annulent. De plus, d'après Hughes et Liu [58] les efforts extérieurs n'interviennent pas dans l'étude de la stabilité du schéma. Puisque le premier membre de l'équation (4.9) est conservatif, le schéma sera stable sur le domaine espace temps fin de la figure 4.5 si le terme lié aux efforts de liaison $\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Delta t_{j+1}} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}]$ est conservatif. Les termes associés aux forces de liaison des domaines espace temps des niveaux j et $j+1$ de la figure 4.5 s'écrivent respectivement (4.11) et (4.12).

$$E_{fl}^j = \frac{1}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_m^j]^T [\mathbf{fl}_m^j] \tag{4.11}$$

$$E_{fl}^{j+1} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Delta t_{j+1}} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}] = \sum_{i=1}^2 \frac{2}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}] \tag{4.12}$$

La conservation des termes liés aux forces d'interface E_{fl}^{j+1} et E_{fl}^j repose sur l'interpolation linéaire des vitesses à l'interface entre le domaine espace temps parent Ωt^j et le domaine enfant Ωt^{j+1} . Cette hypothèse est décrite par l'équation (4.13).

$$\dot{\mathbf{u}}_{2m+i}^{j+1} = \frac{i}{2} \dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} + \left(1 - \frac{i}{2}\right) \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1} \quad \text{pour } i = \{0, 1, 2\} \tag{4.13}$$

En introduisant (4.13) dans le premier terme de l'expression de E_{fl}^{j+1} , la quantité $[\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]$ devient (4.14).

$$\begin{aligned}
[\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}] &= (\dot{\mathbf{u}}_{2m+i}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}) \quad \text{pour } i = \{1, 2\} \\
&= \frac{i}{2} \dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} + \left(1 - \frac{i}{2}\right) \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1} - \frac{i-1}{2} \dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \left(1 - \frac{i-1}{2}\right) \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1} \\
&= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1})
\end{aligned} \tag{4.14}$$

En utilisant la relation (4.14), le terme associé aux forces de liaison de niveau $j + 1$ se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
E_{fl}^{j+1} &= \sum_{i=1}^2 \frac{2}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_{2m+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}] \\
&= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{2m+i}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1})^T \sum_{i=1}^2 (\mathbf{fl}_{2m+i}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m+i-1}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1})^T \left((\mathbf{fl}_{2m+1}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m}^{j+1}) + (\mathbf{fl}_{2m+2}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m+1}^{j+1}) \right) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{2m+2}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m}^{j+1})
\end{aligned} \tag{4.15}$$

La relation (4.15) traduit le collage de maillage temporel entre les domaines espace temps élémentaires parent de niveau j et enfants de niveau $j+1$. Les développements suivants présentent le collage de maillage spatial.

Les instants t_{2m}^{j+1} ($\forall m \in \{0, \dots, r_j\}$) sont les piquets de temps du niveau $j + 1$ qui coïncident avec les instants t_m^j du niveau j . A ces instants donnés et sur la frontière commune aux niveaux j et $j + 1$, le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est imposé de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1} \Big|_{\partial\Omega t_{2m}^{j+1}} = (\mathbf{Ps} \dot{\mathbf{u}}_m^j) \Big|_{\partial\Omega t_m^j} \quad \forall m \in \{0, \dots, r_j\} \tag{4.16}$$

où \mathbf{Ps} est un opérateur de prolongement spatial linéaire entre les niveaux j et $j + 1$.

L’opérateur \mathbf{Ps} étant choisi pour être compatible avec l’assemblage des matrices par la méthode des éléments finis, la relation entre les efforts de liaison des niveaux j et $j + 1$ s’écrit :

$$\mathbf{fl}_m^j = \mathbf{Ps}^T \mathbf{fl}_{2m}^{j+1} \tag{4.17}$$

La compatibilité de l’opérateur \mathbf{Ps} avec l’assemblage des matrices par la méthode des éléments finis signifie que les matrices de masse et de raideur définies sur deux niveaux successifs sont liées par l’opérateur \mathbf{Ps} telles que :

$$\mathbf{M}_m^j = \mathbf{Ps}^T \mathbf{M}_{2m}^{j+1} \mathbf{Ps} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{K}_m^j = \mathbf{Ps}^T \mathbf{K}_{2m}^{j+1} \mathbf{Ps} \tag{4.19}$$

L’introduction de la relation (4.16) dans (4.15) et l’utilisation de la définition (4.17) conduisent au développement (4.20). Sous les hypothèses énoncées dans cette section, le développement (4.15) montre que le terme associé aux forces de liaison se conserve entre deux niveaux successifs. Il n’y a ni dissipation, ni création d’“énergie” au cours du processus de raffinement de maillage spatial et temporel dans le cadre des schémas de Newmark pour $\gamma = 1/2$.

$$\begin{aligned}
E_{fl}^{j+1} &= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{2m+2}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{2m}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{2m+2}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\mathbf{Ps} (\dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j - \dot{\mathbf{u}}_m^j))^T (\mathbf{fl}_{2m+2}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j - \dot{\mathbf{u}}_m^j)^T \mathbf{Ps}^T (\mathbf{fl}_{2m+2}^{j+1} - \mathbf{fl}_{2m}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j - \dot{\mathbf{u}}_m^j)^T (\mathbf{fl}_{m+1}^j - \mathbf{fl}_m^j) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_m^j]^T [\mathbf{fl}_m^j] \\
&= E_{fl}^j
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Les conditions aux limites (spatiales et temporelles) appliquées aux frontières des domaines sous-découpés entre deux niveaux successifs doivent vérifier la continuité des vitesses pour assurer la stabilité de l'algorithme. Le collage temporel à l'interface de deux niveaux j et $j + 1$ est assuré par l'interpolation linéaire du champ de vitesse du niveau j vers le niveau $j + 1$. Le collage spatial est réalisé grâce à l'opérateur \mathbf{Ps} , choisi linéaire, compatible avec l'assemblage des matrices éléments finis.

Cette démonstration peut être étendue à un cadre encore plus général où le raffinement d'un domaine espace temps élémentaire est obtenu en sous-découpant chacune des dimensions spatiale et temporelle en p , avec p un entier quelconque différent de 2. La démonstration se trouve dans l'annexe D.

Remarque : la nécessité d'assurer la continuité des vitesses à l'interface de deux domaines a déjà été mise en évidence. Dans la technique de résolution par sous-domaine, Gravouil [52] démontre que cette condition assure la stabilité de l'algorithme. Cependant, cette hypothèse ajoute un amortissement virtuel au schéma si les pas de temps de deux domaines adjacents sont différents. Prakash et Hjelmstad [91] montrent qu'en ajoutant à cette condition la continuité des déplacements et des accélérations, la technique de résolution par sous-domaine est stable. Quel que soit la différence de la taille des pas de temps de deux sous-domaines adjacents, leur méthode ne crée ni ne dissipe d'énergie au cours du calcul.

4.1.5 Gestion des conditions aux limites et initiales

Lorsque le raffinement de maillage est local à l'instant t_m , la solution associée au domaine Ωt_m (local) ne peut être calculée sans définir de conditions aux limites supplémentaires sur la frontière $\partial_{1*}\Omega_m$ ($\partial_{1*}\Omega_m$ est le bord tel que $\partial_1\Omega_m \cup \partial_2\Omega_m \cup \partial_{1*}\Omega_m = \partial\Omega_m$). Ces conditions particulières sont choisies avec précaution puisqu'elles conditionnent la stabilité de l'algorithme. Elles sont définies par l'étude de la stabilité de l'algorithme présentée dans la section précédente. Cette section développe la mise en oeuvre des conditions aux limites à appliquer au cours d'un calcul avec un raffinement spatial et temporel local.

La figure 4.6 représente un domaine espace temps pour deux niveaux successifs j et $j + 1$ pour un problème bidimensionnel. Le vecteur d'état solution sur le niveau j est connu tandis que celui sur le niveau $j + 1$ reste à déterminer.

Sur la figure 4.6, le niveau $j + 1$ n'existe qu'à partir de l'instant t_2^{j+1} sur le maillage spatial Ω_2^{j+1} . Le maillage Ω_2^{j+1} à l'instant t_2^{j+1} constitue le premier maillage spatial du niveau $j + 1$. Les

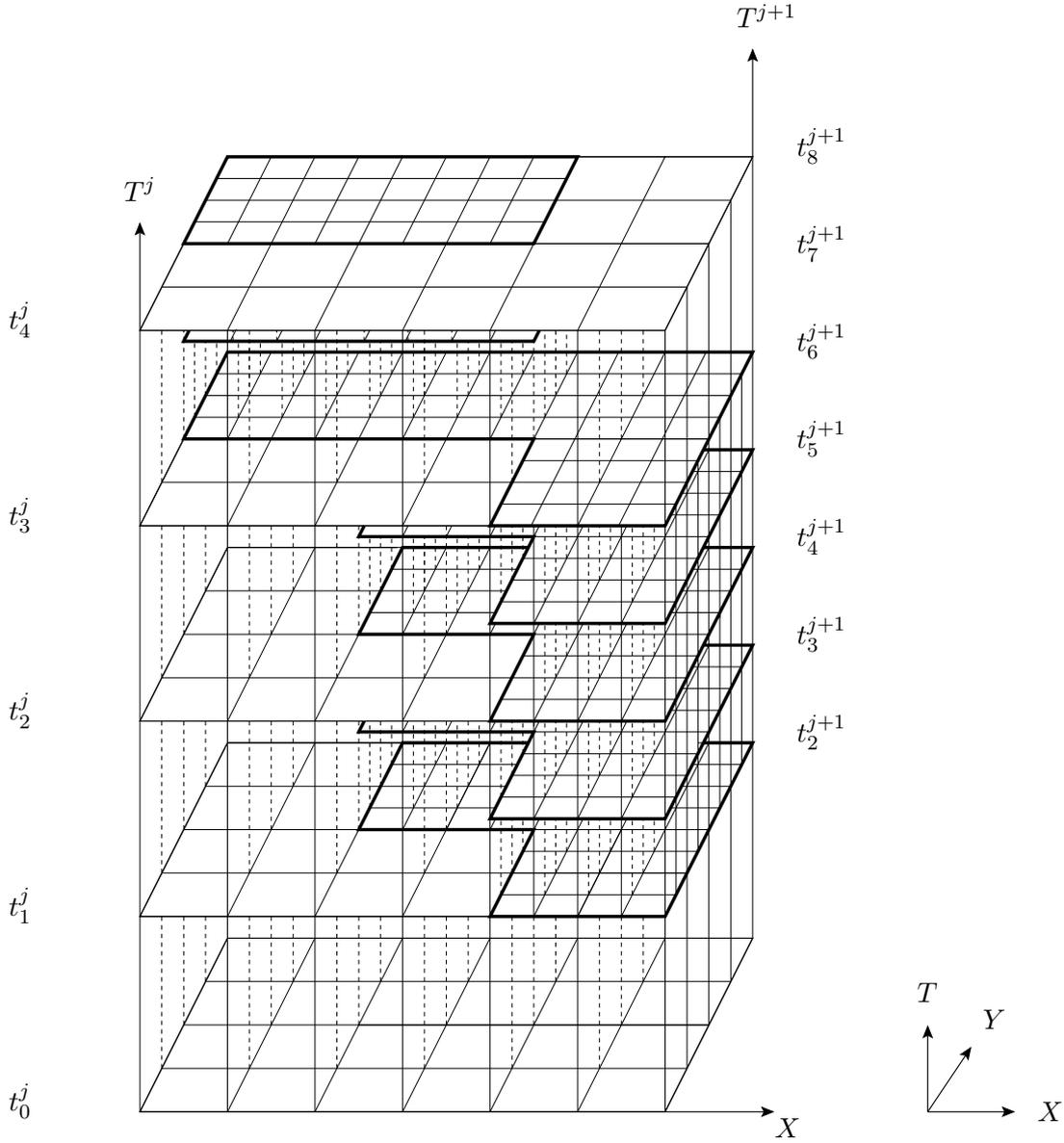


FIG. 4.6 – Représentation d’un domaine espace temps sur deux niveaux successifs j et $j+1$ pour un problème bidimensionnel.

champs de déplacement \mathbf{u}_2^{j+1} et de vitesse $\dot{\mathbf{u}}_2^{j+1}$ sont obtenus par interpolation spatiale linéaire à partir des champs \mathbf{u}_1^j et $\dot{\mathbf{u}}_1^j$ sur le domaine réduit Ω_1^{j+} . Le domaine Ω_1^{j+} défini sur la figure 3.7 correspond à la partie du domaine Ω_1^j recouverte par Ω_2^{j+1} ou encore il correspond à la partie du domaine Ω_1^j où la solution n’a pas atteint la précision demandée.

Les accélérations $\ddot{\mathbf{u}}_2^{j+1}$ sont calculées à partir de l’équation d’équilibre :

$$\mathbf{M}_2^{j+1} \ddot{\mathbf{u}}_2^{j+1} + \mathbf{K}_2^{j+1} \mathbf{u}_2^{j+1} = \mathbf{f}_2^{j+1} \quad (4.21)$$

Toutes les composantes du vecteur d’état \mathbf{U}_2^{j+1} sont désormais déterminées à l’instant t_2^{j+1} .

La solution est ensuite calculée au pas de temps suivant t_3^{j+1} . Le maillage spatial Ω_3^{j+1} n’a pas de maillage spatial correspondant avec le niveau j . Si $\partial_2\Omega_3^{j+1}$ existe, les efforts extérieurs \mathbf{f}_3^{j+1} sont appliqués classiquement sur ce bord. De même, si $\partial_1\Omega_3^{j+1}$ existe, les déplacements connus sont imposés sur cette frontière. Enfin, si $\partial_1\Omega_3^{j+1} \cup \partial_2\Omega_3^{j+1} \neq \partial\Omega_3^{j+1}$ alors $\partial_{1*}\Omega_3^{j+1}$ existe et

des conditions cinématiques supplémentaires sont appliquées sur cette frontière. Les solutions U_1^j et U_2^j des maillages spatiaux Ω_1^j et Ω_2^j sont connues sur les noeuds coïncidents avec le bord $\partial_{1*}\Omega_3^{j+1}$. Puisque la stabilité de l'algorithme préconise la continuité des vitesses à l'interface temporelle, les conditions cinématiques imposées sur $\partial_{1*}\Omega_3^{j+1}$ correspondent à une interpolation linéaire spatiale et temporelle des vitesses connues aux temps t_1^j et t_2^j . Les conditions aux limites sont alors connues sur toute la frontière $\partial\Omega_3^{j+1}$. Un calcul classique par éléments finis (utilisant les multiplicateurs de Lagrange pour tenir compte des conditions cinématiques non nulles) est réalisé afin d'obtenir U_3^{j+1} .

L'étape suivante est le calcul de la solution U_4^{j+1} . Le maillage spatial correspondant à ce niveau est illustré par la figure 4.7. La vue éclatée du maillage au temps t_4^{j+1} met en évidence la frontière $\partial_{1*}\Omega_4^{j+1}$ en trait noir fort. Sur cette frontière, les conditions cinématiques supplémentaires sont constituées par une interpolation spatiale du champ de vitesse \dot{u}_2^j . Sur le reste de la frontière du domaine Ω_4^{j+1} , des conditions classiques en effort ou cinématiques sont imposées si les bords respectifs $\partial_2\Omega_4^{j+1}$ ou $\partial_1\Omega_4^{j+1}$ existent. La solution U_4^{j+1} peut alors être calculée.

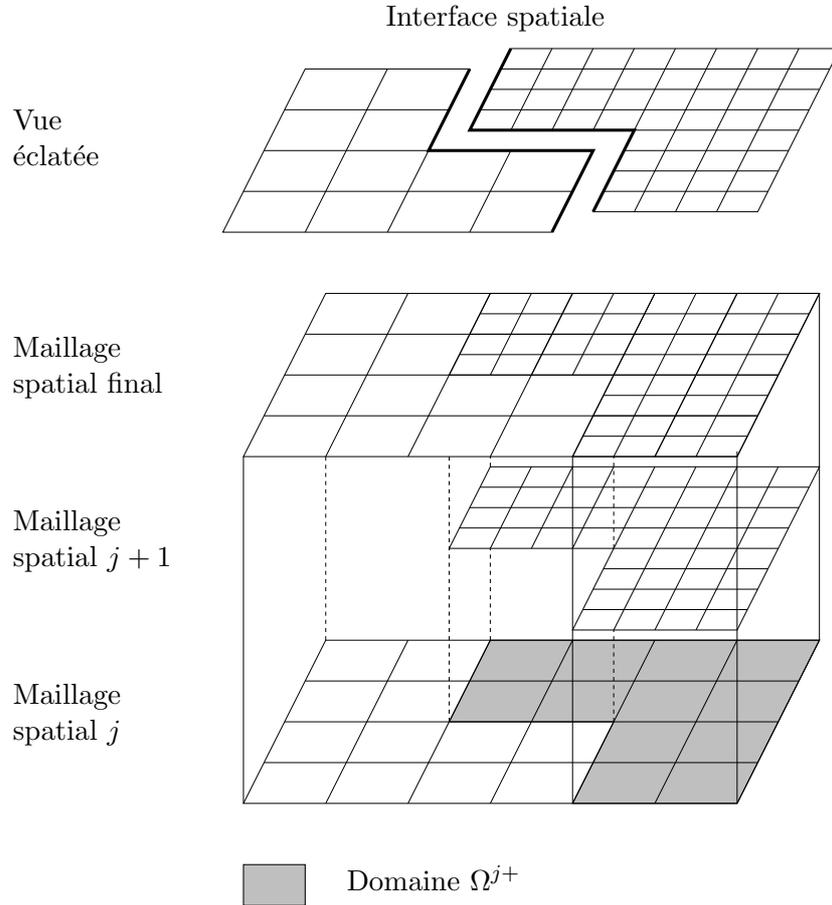


FIG. 4.7 – Décomposition des maillages spatiaux Ω_2^{j+1} et Ω_4^{j+1} définis aux instants t_2^{j+1} et t_4^{j+1} de la figure 4.6.

Les conditions aux limites sur le domaine Ω_5^{j+1} sont construites de manière identique à celles imposées sur le domaine Ω_3^{j+1} .

La figure 4.8 illustre un point délicat. Il s'agit du calcul du vecteur d'état dans une configuration similaire à celle du pas de temps t_6^{j+1} . Le maillage spatial Ω_6^{j+1} recouvre une partie plus im-

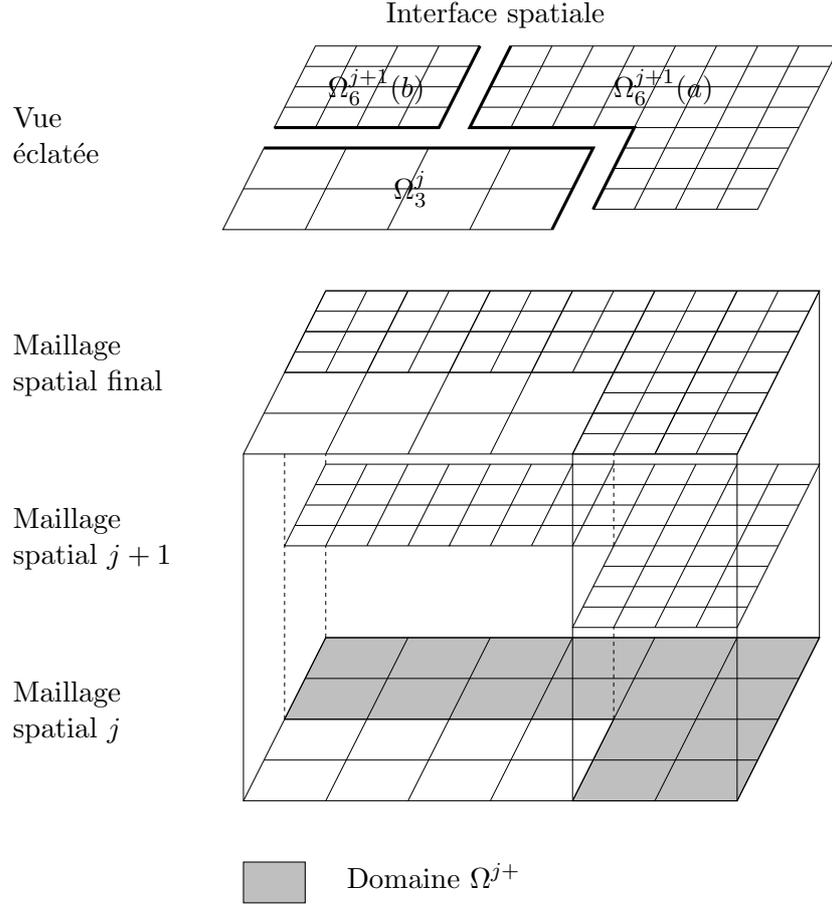


FIG. 4.8 – Décomposition du maillage spatial Ω_6^{j+1} défini à l’instant t_6^{j+1} de la figure 4.6.

portante de Ω^j que le maillage spatial précédent Ω_5^{j+1} ou Ω_4^{j+1} . Comme l’indique la vue éclatée de la figure 4.8 à l’instant t_6^{j+1} , la partie supplémentaire $\Omega_6^{j+1}(b)$ s’ajoute à la partie $\Omega_6^{j+1}(a)$ qui est commune avec le maillage Ω_5^{j+1} . Mis à part les degrés de liberté communs des domaines $\Omega_6^{j+1}(a)$ et $\Omega_6^{j+1}(b)$, les degrés de liberté du maillage $\Omega_6^{j+1}(b)$ n’ont pas d’antécédents à l’instant t_5^{j+1} sur le niveau $j+1$. Ils seront donc traités séparément de ceux de $\Omega_6^{j+1}(a)$.

La solution $\mathbf{U}_6^{j+1}(a)$ du domaine $\Omega_6^{j+1}(a)$ est calculée de manière identique à la solution \mathbf{U}_4^{j+1} . Si la frontière $\partial_{1*}\Omega_6^{j+1}(a)$ existe, le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}_3^j$ est interpolé linéairement et spatialement sur ce bord. Sur les autres bords, les conditions classiques spécifiques au type du bord sont appliquées normalement.

La solution $\mathbf{U}_6^{j+1}(b)$ n’a pas d’antécédent à l’instant t_5^{j+1} . Les vecteurs $\dot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b)$ et $\ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b)$ sont obtenus par interpolation spatiale linéaire des solutions $\dot{\mathbf{u}}_3^j$ et $\ddot{\mathbf{u}}_3^j$ connues à l’instant t_3^j . Une précaution est nécessaire pour les degrés de liberté communs de la frontière des domaines $\Omega_6^{j+1}(a)$ et $\Omega_6^{j+1}(b)$. Ces degrés de liberté sont rattachés au domaine $\Omega_6^{j+1}(a)$ et non au domaine $\Omega_6^{j+1}(b)$. Le champ de déplacement du domaine $\Omega_6^{j+1}(b)$ est calculé en considérant l’équation d’équilibre sur le domaine complet $\Omega_6^{j+1} = \Omega_6^{j+1}(a) \cup \Omega_6^{j+1}(b)$.

$$\begin{cases}
 \mathbf{M}_6^{j+1} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(a) \\ \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_6^{j+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_6^{j+1}(a) \\ \mathbf{u}_6^{j+1}(b) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_6^{j+1}(a) \\ \mathbf{f}_6^{j+1}(b) \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{u}_6^{j+1} \Big|_{\partial_1 \Omega_6^{j+1}} = \mathbf{u}_d(t_6^{j+1})
 \end{cases} \quad (4.22)$$

Puisque l'inconnue est le champ de déplacement $\mathbf{u}_6^j(b)$, la résolution de ce système est réalisée en déplacement. Des conditions cinématiques en déplacements sont donc ajoutées à cette équation d'équilibre.

Sur le domaine Ω_6^{j+1} , les matrices de masse et de raideur se décomposent de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_6^{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_6^{j+1}(aa) & \mathbf{M}_6^{j+1}(ab) \\ \mathbf{M}_6^{j+1}(ab)^T & \mathbf{M}_6^{j+1}(bb) \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_6^{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_6^{j+1}(aa) & \mathbf{K}_6^{j+1}(ab) \\ \mathbf{K}_6^{j+1}(ab)^T & \mathbf{K}_6^{j+1}(bb) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Le vecteur $\mathbf{u}_6^{j+1}(b)$ est calculé à partir de l'équation (4.24) établissant un couplage entre les parties (a) et (b) du domaine Ω_6^{j+1} .

$$\mathbf{K}_6^{j+1} \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \mathbf{u}_6^{j+1}(b) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_6^{j+1}(a) \\ \mathbf{f}_6^{j+1}(b) \end{Bmatrix} - \mathbf{M}_6^{j+1} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(a) \\ \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b) \end{Bmatrix} - \mathbf{K}_6^{j+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_6^{j+1}(a) \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Les deux équations du système (4.24) s'écrivent séparément :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_6^{j+1}(ab) \mathbf{u}_6^{j+1}(b) &= \mathbf{f}_6^{j+1}(a) \\ &- \mathbf{M}_6^{j+1}(aa) \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(a) - \mathbf{M}_6^{j+1}(ab) \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b) \\ &- \mathbf{K}_6^{j+1}(aa) \mathbf{u}_6^{j+1}(a) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_6^{j+1}(bb) \mathbf{u}_6^{j+1}(b) &= \mathbf{f}_6^{j+1}(b) \\ &- \mathbf{M}_6^{j+1}(ab)^T \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(a) - \mathbf{M}_6^{j+1}(bb) \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b) \\ &- \mathbf{K}_6^{j+1}(ab)^T \mathbf{u}_6^{j+1}(a) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Puisque le domaine spatial $\Omega_6^{j+1}(a)$ est en équilibre alors :

$$\mathbf{M}_6^{j+1}(aa) \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(a) + \mathbf{K}_6^{j+1}(aa) \mathbf{u}_6^{j+1}(a) = \mathbf{f}_6^{j+1}(a) \quad (4.27)$$

Ainsi, l'équation (4.25) devient :

$$\mathbf{M}_6^{j+1}(ab) \ddot{\mathbf{u}}_6^{j+1}(b) + \mathbf{K}_6^{j+1}(ab) \mathbf{u}_6^{j+1}(b) = 0 \quad (4.28)$$

Cette équation traduit l'équilibre des degrés de liberté de la frontière commune des domaines $\Omega_6^{j+1}(a)$ et $\Omega_6^{j+1}(b)$. En considérant l'équation (4.26), la symétrie des matrices de masse et de raideur ainsi que l'équilibre du domaine spatial $\Omega_6^{j+1}(a)$, il est possible de retrouver l'équation (4.24).

Le vecteur $\mathbf{u}_6^{j+1}(b)$ est alors déterminé à partir de l'équation (4.26) et de conditions aux limites en déplacements. Les déplacements imposés sont ceux déjà connus à la frontière du domaine $\Omega_6^{j+1}(b)$ ou ceux interpolés du niveau j au niveau $j+1$ si aucun déplacement de niveau $j+1$ n'est encore connu. La relation (4.26) exprime un couplage entre les domaines $\Omega_6^{j+1}(a)$ et $\Omega_6^{j+1}(b)$.

Les conditions aux limites (spatiales et temporelles) sont schématisées pour un problème unidimensionnel sur la figure 4.9.

4.1.6 Mise en équation

Les niveaux 1 et 2 sont définis sur le domaine de calcul complet. Les vecteurs d'état \mathbf{U}^j sont obtenus par la résolution des systèmes (4.29) et (4.30) associés aux conditions aux limites (4.31) pour chaque instant t_m^j appartenant respectivement à $\{0, \dots, r_j\}$. Le nombre de niveaux réalisés nb n'est connu qu'à la fin du calcul.

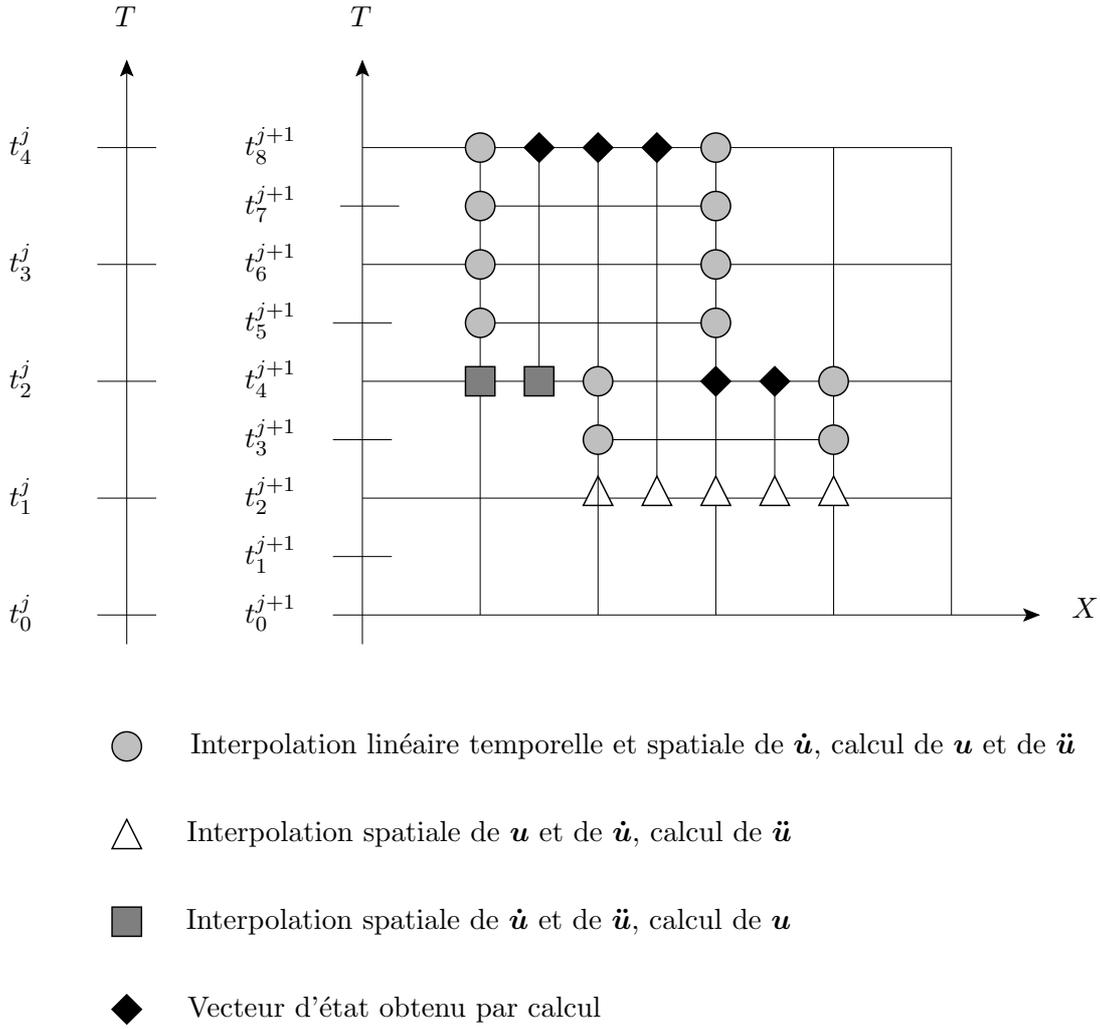


FIG. 4.9 – Représentation des conditions aux limites espace temps sur un niveau local $j+1$ pour un problème unidimensionnel.

$$\forall j \in \{1, \dots, nb\} \quad \begin{cases} \mathbf{M}^j \ddot{\mathbf{u}}_{m+1}^j + \mathbf{K}^j \mathbf{u}_{m+1}^j = \mathbf{f}_{m+1}^j \\ \mathbf{u}_{m+1}^j = \mathbf{u}\mathbf{p}_m^j + \beta \Delta t_j^2 \ddot{\mathbf{u}}_{m+1}^j \\ \dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j = \dot{\mathbf{u}}\mathbf{p}_m^j + \gamma \Delta t_j \ddot{\mathbf{u}}_{m+1}^j \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, nb\} \quad \begin{cases} \mathbf{u}\mathbf{p}_m = \mathbf{u}_m + \Delta t_j \dot{\mathbf{u}}_m + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t_j^2 \ddot{\mathbf{u}}_m \\ \dot{\mathbf{u}}\mathbf{p}_m = \dot{\mathbf{u}}_m + (1 - \gamma) \Delta t_j \ddot{\mathbf{u}}_m \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, nb\} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_m^j \Big|_{\partial_1 \Omega^j} = \mathbf{u}_d(t_m) \\ \mathbf{u}_0^j = \mathbf{d}_0 \text{ et } \dot{\mathbf{u}}_0^j = \mathbf{v}_0 \\ \text{Si } \partial_{1^*} \Omega^j \text{ existe, alors } \partial_{1^*} \Omega^j \quad \dot{\mathbf{u}}_m^j \Big|_{\partial_{1^*} \Omega^j} = (\mathbf{P}\mathbf{s} \dot{\mathbf{u}}_m^{j-1}) \Big|_{\partial_{1^*} \Omega^j} \end{cases} \quad (4.31)$$

Les maillages des niveaux 1 et 2, définis sur la structure complète, sont indépendants du temps. Ainsi, les matrices de masse \mathbf{M}_m^j et de raideur \mathbf{K}_m^j le sont également.

$$\forall j \in \{1, 2\} \quad \begin{cases} \mathbf{M}^j = \mathbf{M}_0^j = \mathbf{M}_1^j = \dots = \mathbf{M}_{m_j}^j = \dots = \mathbf{M}_{r_j}^j \\ \mathbf{K}^j = \mathbf{K}_0^j = \mathbf{K}_1^j = \dots = \mathbf{K}_{m_j}^j = \dots = \mathbf{K}_{r_j}^j \end{cases} \quad (4.32)$$

L'équation finale d'équilibre dynamique peut se présenter sous la forme du système (4.33), où nb est le nombre de niveaux nécessaires pour atteindre la précision souhaitée sur l'ensemble du domaine de calcul. Ce nombre n'est connu qu'à la fin du calcul.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}_{final} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{final} + \quad \mathbf{K}_{final} \quad \mathbf{u}_{final} = \quad \mathbf{f}_{final} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & & & & \\ & \mathbf{M}^2 & & & \\ & & \mathbf{M}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{M}^{nb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^1 \\ \ddot{\mathbf{u}}^2 \\ \ddot{\mathbf{u}}^3 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{u}}^{nb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & & \\ & & \mathbf{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}^{nb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 + \mathbf{C}^{3T} \underline{\lambda}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{nb} + \mathbf{C}^{nbT} \underline{\lambda}^{nb} \end{bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (4.33)
 \end{aligned}$$

Les matrices \mathbf{C}^j contiennent uniquement des 0 et des 1 sur les degrés de liberté où les multiplicateurs de Lagrange Λ^j sont définis. L'équation finale (4.33) n'est pas complète. Il faut lui ajouter les deux équations complémentaires de Newmark définies à chaque instant pour chacun des niveaux. Ces équations ne présentent pas de difficulté. Elles ne seront pas rappelées ici. La continuité des vitesses est nécessaire sur le bord $\partial_{1*}\Omega^j$. Ainsi, la résolution du système (4.33) complété par les équations complémentaires de Newmark repose sur son expression en vitesse (voir partie 2.5.5).

Remarque : dans l'équation (4.33) \mathbf{M}^j et \mathbf{K}^j (avec $j \in \{1, \dots, nb\}$) représentent des matrices définies au niveau j pour chaque pas de temps t_m^j avec $m \in \{0, \dots, r_j\}$. Par exemple la matrice \mathbf{K}^j est définie par l'expression (4.34).

$$\mathbf{K}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^j & & & & \\ & \mathbf{K}_1^j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}_{r_j}^j \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Le vecteur d'état solution \mathbf{U}_{final} est obtenu de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_{final} = \mathbf{U}^{nb} \cup \mathbf{U}^{nb-1*} \cup \dots \cup \mathbf{U}^{j*} \cup \dots \cup \mathbf{U}^{2*} \quad (4.35)$$

où la solution \mathbf{U}^{j*} est la partie de \mathbf{U}^j définie sur le domaine Ω^{j*} de manière identique à la figure 3.7. Il faut noter que $\mathbf{U}^{nb*} = \mathbf{U}^{nb}$ puisque le niveau nb n'est pas sous-découpé. La contribution du niveau 1 n'intervient pas puisque la solution \mathbf{U}^2 connue sur le domaine de calcul complet est plus précise que \mathbf{U}^1 . Si \mathbf{U}^j est connue pour le domaine de calcul complet alors les contributions des solutions des niveaux plus grossiers ne sont pas considérées.

4.1.7 Mesure d'erreur

Comme dans le cas de la statique linéaire, l'erreur est calculée au moyen d'un indicateur d'erreur. Cet indicateur peut être défini à partir de différentes grandeurs mécaniques. L'étude des indicateurs d'erreurs du chapitre précédent (section 3.2.2) a montré que le plus adapté en mécanique est celui basé sur le champ d'énergie de la structure. Celui basé sur le champ de déplacement étant simple de construction, l'étude en dynamique repose uniquement sur ces deux indicateurs d'erreurs. Pour la dynamique, l'énergie de la structure est composée de la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique.

Pour créer le domaine espace temps Ωt^{j+1} , les solutions des domaines espace temps Ωt^{j-1} et Ωt^j sont comparées sur le domaine espace temps Ωt^{j-1} . Cette comparaison nécessite la restriction des champs définis sur le domaine $j+1$ vers le domaine j . Cette opération est réalisée au moyen d'un opérateur de restriction spatiale $\mathbf{T}s$ et d'un opérateur de restriction temporelle $\mathbf{T}t$. L'opérateur de transfert spatial $\mathbf{T}s$ choisi est identique à celui décrit dans le cas de la statique linéaire.

Le calcul de l'erreur s'effectue pour chaque domaine espace temps élémentaire $\Omega t_m e_i^j$ défini par la figure 4.3. Les deux opérateurs de transfert, spatial $\mathbf{T}s$ et temporel $\mathbf{T}t$, sont des opérateurs d'injection. Ils permettent de restreindre les quantités d'intérêt en transférant uniquement les valeurs des noeuds coïncidents du niveau $j+1$ des instants t_{2m}^{j+1} et t_{2m+2}^{j+1} vers les noeuds correspondants du niveau j aux instants t_m^j et t_{m+1}^j . Ce transfert est traduit par l'équation (4.36). La restriction est signalée par le symbole $\tilde{\cdot}$.

$$\tilde{\mathbf{q}}^j = \mathbf{T}s \Big|_{j+1}^j \mathbf{T}t \Big|_{2m, 2m+2}^{m, m+1} \mathbf{q}^{j+1} \quad (4.36)$$

Le tableau 4.1 présente les deux indicateurs utilisés pour l'étude de la dynamique linéaire des structures.

type d'indicateur	grandeur d'intérêt	grandeur de référence	indicateur
déplacement	\mathbf{u}	\mathbf{u}^1	$\mathcal{I}_u^j = \frac{\ \tilde{\mathbf{u}}^j - \mathbf{u}^j\ }{\max_{\Omega t} \ \mathbf{u}^1\ }$
énergie	$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$	\mathbf{e}^1	$\mathcal{I}_e^j = \sqrt{\frac{ \tilde{\mathbf{e}}^j - \mathbf{e}^j }{\max_{\Omega t} e_{tot}^1}}$

TAB. 4.1 – Les différents types d'indicateurs d'erreurs analysés en dynamique.

La projection de l'énergie \mathbf{e}^{j+1} du niveau $j+1$ au niveau j se fait de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{e}}^j = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^{jT} \mathbf{M}^j \tilde{\mathbf{u}}^j + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^{jT} \mathbf{K}^j \tilde{\mathbf{u}}^j$$

La norme utilisée est identique à celle définie dans la section 3.1.4. La quantité $\max_{\Omega t} \|\mathbf{u}^1\|$ représente le maximum de la norme du champ de déplacement de la structure pris sur le niveau 1 et recherché sur l'ensemble des instants t_m^1 considérés ($m \in \{1, \dots, r_1\}$). La valeur $\max_{\Omega t} e_{tot}^1$ est le maximum de l'énergie de la structure complète pris sur le niveau 1 et recherché sur l'ensemble des instants t_m^1 considérés ($m \in \{1, \dots, r_1\}$).

L'erreur associée à chaque domaine espace temps élémentaire $\Omega t_m e_i^j$ correspond au maximum du champ d'erreur aux instants t_m^j et t_{m+1}^j pris sur ce même domaine espace temps élémentaire.

4.2 Etude numérique unidimensionnelle

4.2.1 Cas test

La simulation numérique proposée est une poutre unidimensionnelle encastree à une extrémité et sollicitée en traction à l'autre (figure 4.10). La poutre est de longueur $a = 2m$. Sa section est

$s = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. La sollicitation illustrée par la figure 4.11 est exercée sous la forme d'une force F dépendante du temps. Le matériau présente les caractéristiques suivantes :

- module d'Young E de 211 GPa,
- coefficient de Poisson ν de 0.3,
- masse volumique ρ de $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

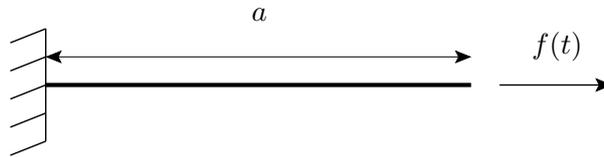


FIG. 4.10 – Poutre unidimensionnelle soumise à un effort de traction.

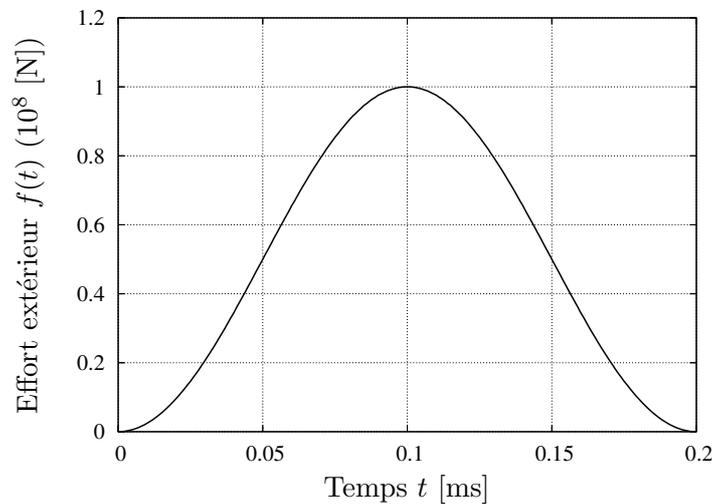


FIG. 4.11 – Chargement transitoire de la poutre.

Les éléments finis choisis sont des éléments barre à un degré de liberté par noeud appelés SEG2 dans Cast3m. Le domaine espace temps de niveau 1 contient 256 domaines espace temps élémentaires (figure 4.12). Il contient 8 éléments finis par instant et 33 instants. Chacun des huit éléments finis n'est créé qu'une seule fois (lors de l'initialisation à l'instant $t = 0$). Le schéma numérique choisi dans la famille de Newmark est celui de l'accélération moyenne ($\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$).

4.2.2 Analyse unidimensionnelle

Les données d'entrée d'un calcul par la "STAR-method" sont le domaine espace temps de niveau 1, la précision demandée et le type d'indicateur d'erreur (\mathcal{I}_u ou \mathcal{I}_e). Les résultats sont le domaine espace temps adapté à la précision requise et le vecteur d'état associé au domaine espace temps solution. La figure 4.13 présente les maillages spatiaux fins obtenus à différents instants de calcul. L'indicateur d'erreur utilisé est basé sur l'énergie \mathcal{I}_e (tableau 4.1) pour une précision demandée ϵ de 10^{-4} . Pour une meilleure visualisation du maillage, seuls les noeuds du maillage sont représentés. Sur cette figure le temps s'écoule du bas vers le haut. L'encastrement est appliqué au noeud situé à l'extrémité de gauche et le chargement sur celui situé à l'extrémité de droite.

Après le choc, l'onde mécanique se propage et se réfléchit dans la barre. Le raffinement du maillage spatial suit ce phénomène physique. Le maillage est fin au voisinage du front de l'onde

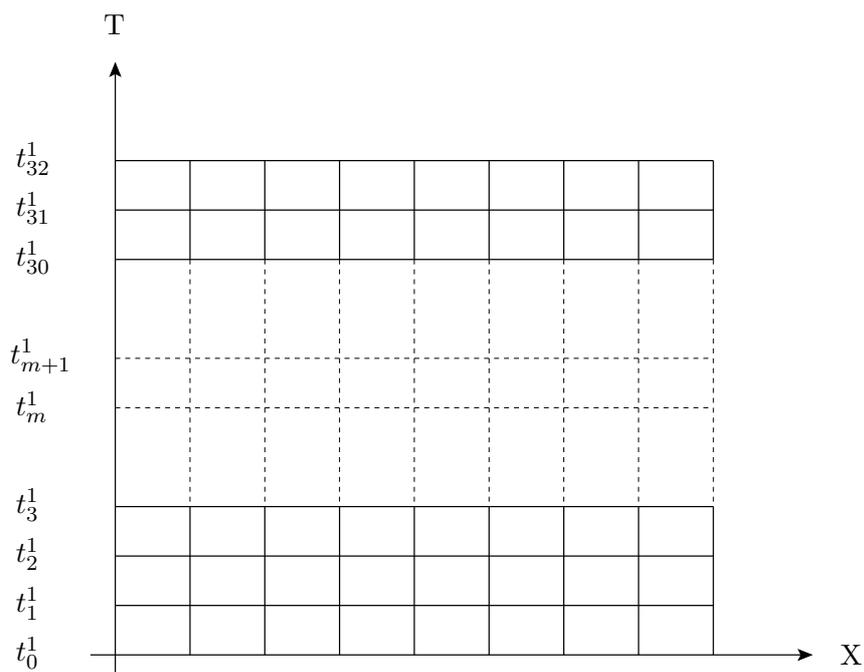


FIG. 4.12 – *Domaine espace temps de la poutre sur le niveau 1.*

et plus grossier sur le reste de la structure.

Les résultats peuvent aussi être visualisés au travers du domaine espace temps final correspondant à la précision demandée. La figure 4.14 présente les domaines espace temps finaux obtenus pour le cas test avec les deux indicateurs d’erreurs \mathcal{I}_u et \mathcal{I}_e . L’erreur requise ϵ pour l’indicateur basé sur le champ de déplacement est de $5 \cdot 10^{-3}$ et pour celui basé sur l’énergie de 10^{-4} . La figure 4.14 montre le raffinement simultané des discrétisations spatiale et temporelle. Les domaines espace temps de chaque niveau créé apparaissent sur ces deux graphiques. Il est possible d’associer à chaque niveau de gris un niveau de raffinement. Le domaine espace temps final est différent selon l’indicateur utilisé. Le raffinement est plus local (c’est-à-dire que les domaines espace temps créés sont moins larges) lorsque l’indicateur basé sur l’énergie est utilisé. Le raffinement de maillage est influencé par la forme du champ sur lequel l’indicateur d’erreur est construit.

Au cours du temps la zone de raffinement d’un niveau croît spatialement. Le schéma d’intégration temporelle est un schéma incrémental de Newmark. L’erreur liée à l’utilisation de ce schéma croît avec le temps. Pour éviter ce phénomène, il faudrait utiliser, s’il existe, un schéma d’intégration qui ne cumule pas l’erreur au cours du temps.

Au cours de la résolution, le calcul progresse toujours des domaines espace temps plus grossiers vers les plus fins. Toutefois les maillages spatiaux de la figure 4.14 montrent que leur densité d’éléments finis évolue (croît et décroît) au cours du temps. Or aucune technique permettant “d’enlever” des éléments finis n’est utilisée. Cet effet est le résultat du raisonnement basé sur les domaines espace temps. Ce constat souligne un point fort de la “STAR-method”.

4.2.3 Convergence et précision

Le processus de raffinement automatique de maillage spatial et temporel est piloté par un indicateur d’erreur et une précision (ou une erreur) à atteindre sur les résultats. L’indicateur d’erreur



FIG. 4.13 – Evolution des maillages spatiaux finaux obtenus avec l'indicateur d'erreur \mathcal{I}_e pour t variant de 0 à $1.54 * 10^{-3}$ s avec un pas de temps de représentation $\Delta t = 9.64 * 10^{-4}$ s

compare les solutions de niveaux successifs. L'indicateur d'erreur mesure l'écart entre la solution discrète d'un niveau et la solution exacte continue inconnue (voir annexe C). En l'absence de singularité, la méthode des éléments finis est convergente d'ordre 2 en déplacement et d'ordre 1 en énergie si les fonctions d'interpolation des éléments finis sont linéaires. Si ces ordres de convergence sont vérifiés, les indicateurs d'erreurs mis en place garantissent la précision souhaitée sur les résultats finaux.

L'évolution du maximum de l'erreur en fonction des niveaux est tracée sur la figure 4.15 pour les deux indicateurs d'erreurs \mathcal{I}_u et \mathcal{I}_e . Pour chaque indicateur d'erreur, deux types de courbes sont présentés. La convergence d'un calcul avec raffinement automatique du maillage spatial et tem-

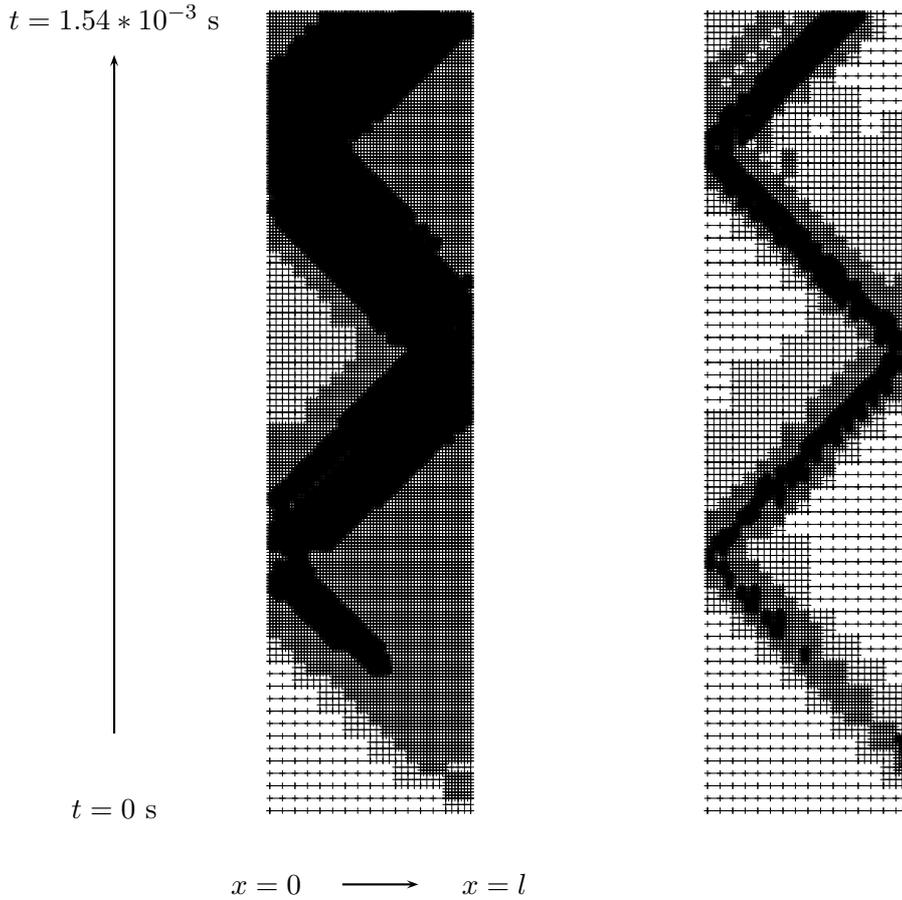


FIG. 4.14 – Domaines espace temps finaux obtenus avec l'indicateur d'erreur \mathcal{I}_u (à gauche, $\max \mathcal{I}_u \leq 5.10^{-3}$) et \mathcal{I}_e (à droite, $\max \mathcal{I}_e \leq 10^{-4}$).

porel (représentée par des points) est comparée à celle d'un calcul de référence (représentée par un trait continu). Le calcul de référence est effectué pour une erreur requise nulle. Le raffinement se produit alors pour chaque niveau sur le domaine espace temps complet. L'ordre de convergence pour les deux indicateurs d'erreurs est différent. Celui basé sur le champ de déplacement est proche de 2 alors que celui basé sur l'énergie est proche de 1. Les ordres de convergence ne sont pas affectés par le raffinement local espace temps. Avec ces ordres de convergence, la précision des résultats est contrôlée au cours du calcul grâce à la stratégie de raffinement de domaines espace temps. Les résultats finaux sont donc obtenus avec une précision homogène en tout point du domaine d'étude.

Le décalage entre les courbes obtenues pour chaque type d'indicateur est dû à la différence d'ordre de grandeur entre les dénominateurs choisis pour normer les deux indicateurs d'erreurs.

4.2.4 Bilan énergétique numérique

Le bilan énergétique numérique établi dans la section 2.6 pour une méthode éléments finis classique est calculé pour la poutre encastree libre avec la méthode de raffinement de maillage automatique. Pour le schéma de l'accélération moyenne ($\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$), le bilan énergétique s'écrit entre deux instants t_m et t_{m+1} :

$$[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)] + [V(\mathbf{u}_m)] = \langle \mathbf{f}_m \rangle^T [\mathbf{u}_m] \quad (4.37)$$

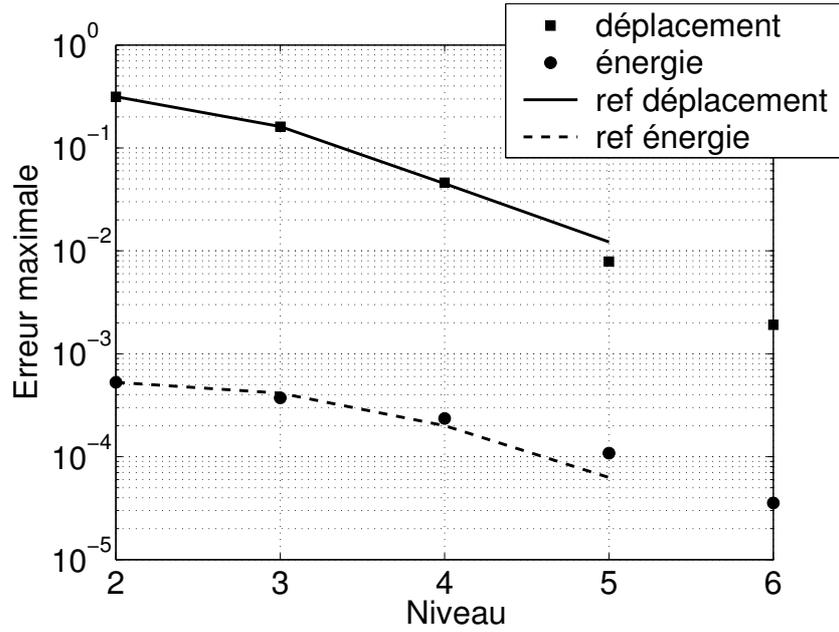


FIG. 4.15 – Convergence de la “STAR-method” en utilisant des indicateurs d’erreurs basés sur l’énergie et le champ de déplacement.

$[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)]$ représente la variation d’énergie cinétique entre les instants t_{m+1} et t_m , $[V(\mathbf{u}_m)]$ la variation d’énergie potentielle entre les mêmes instants et $\langle \mathbf{f}_m \rangle^T [\mathbf{u}_m]$ le travail des efforts extérieurs toujours entre les instants t_{m+1} et t_m . La signification des notations $[-]$ et $\langle - \rangle$ est donnée par les expressions (2.66) et (2.67).

La figure 4.16 trace l’évolution de ces trois variations au cours du temps lorsqu’un indicateur d’erreur basé sur l’énergie est utilisé avec une précision à atteindre $\epsilon = 10^{-4}$.

Le bilan énergétique est calculé lorsque le domaine espace temps final est connu. Le maillage complet de la structure le plus fin étant celui de niveau 2, la variation d’énergie est déterminée pour chaque intervalle de temps de ce niveau. La figure 4.17 présente un maillage espace temps final sur deux pas de temps de niveau 2. Sur cette figure, la discrétisation (spatiale et temporelle) la plus grossière correspond donc au niveau 2. Sachant que le maillage de niveau 1 est composé de 8 éléments finis pour tout instant t_m^1 (avec $m \in \{0, \dots, r_1\}$), le maillage de niveau 2 en contient 16 pour tout instant t_m^2 (avec $m \in \{0, \dots, r_2\}$). Chaque terme de variation d’énergie de la relation (4.37) est calculé carré par carré (voir figure 4.17). Chaque carré représente un domaine espace temps élémentaire. Si un domaine élémentaire est sous-découpé, sa variation d’énergie est remplacée par la somme des variations d’énergie des quatre domaines espace temps enfants.

L’étude de la stabilité de la “STAR-method” montre qu’en imposant la continuité des vitesses à l’interface de deux domaines espace temps, l’énergie de la structure est conservée. Cette conclusion est vérifiée numériquement pour le schéma de l’accélération moyenne ($\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$) si pour chaque indice $m \in \{0, 1, \dots, r_2 - 1\}$:

$$[T_c(\dot{\mathbf{u}}_m)] + [V(\mathbf{u}_m)] - \langle \mathbf{f}_m \rangle^T [\mathbf{u}_m] = 0 \quad (4.38)$$

L’équation (4.38) traduit le bilan énergétique. La valeur de l’équation (4.38) pour chaque pas de temps de niveau 2 est tracée sur la figure 4.18 en fonction du temps. L’ordre de grandeur de ce bilan est de 10^{-9} J. Celui des différentes composantes énergétiques de ce bilan est d’environ

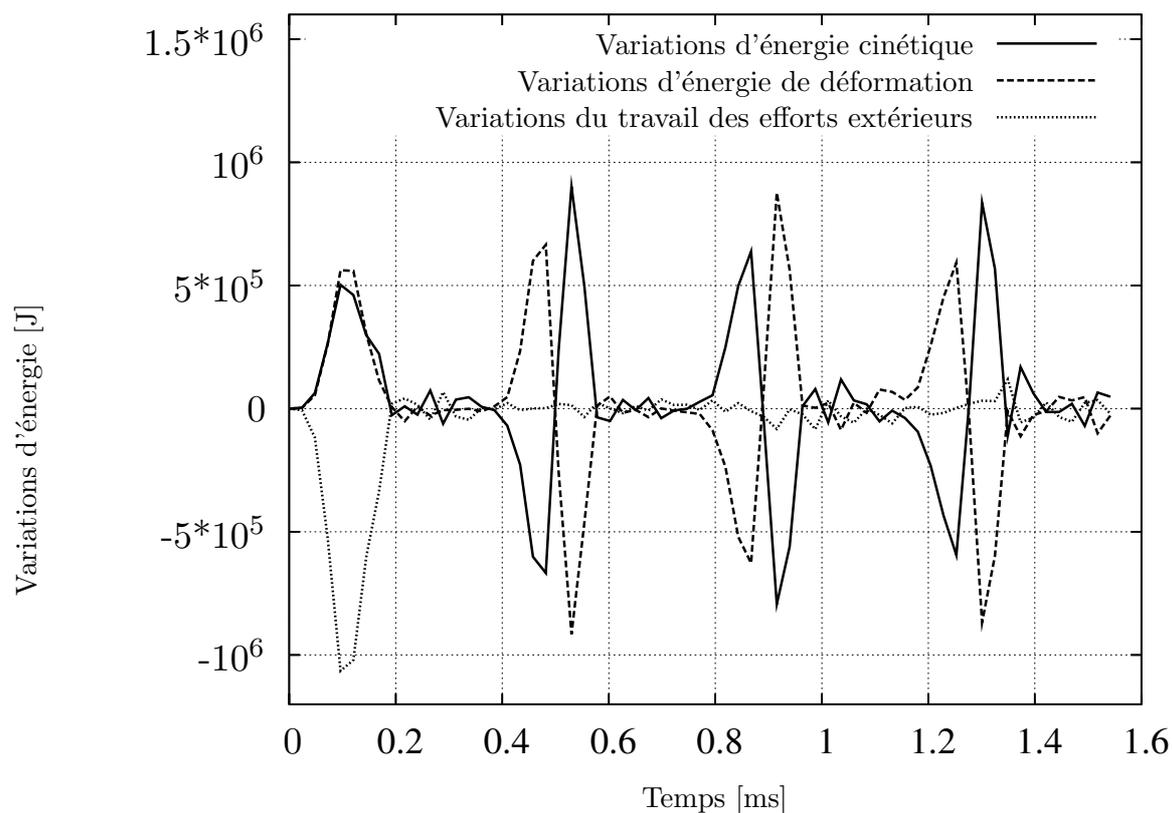


FIG. 4.16 – Evolution de la variation d'énergie cinétique, de la variation d'énergie de déformation et de la variation du travail des efforts extérieurs pour chaque intervalle de temps de niveau 2.

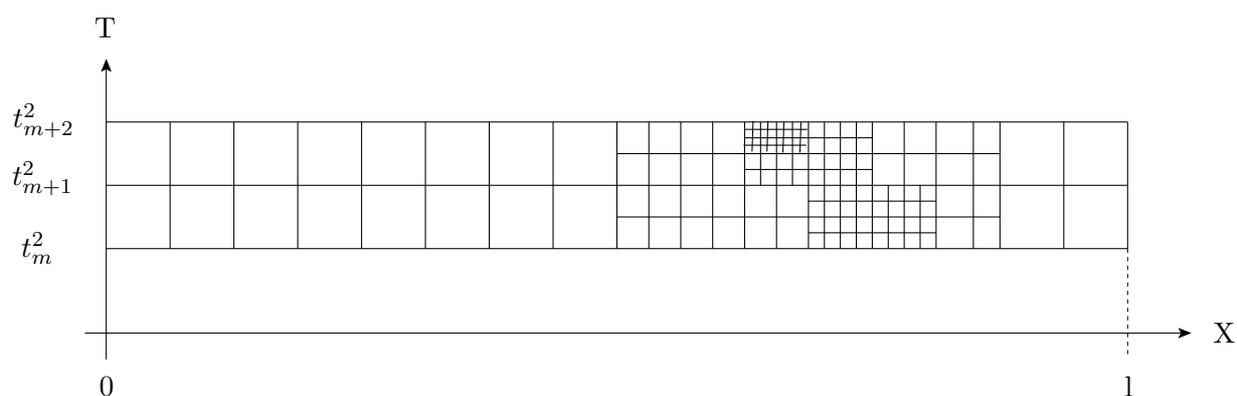


FIG. 4.17 – Exemple de domaines espace temps finaux pris entre trois instants de niveau 2 : t_m^2 , t_{m+1}^2 et t_{m+2}^2 sur lesquels sont calculées les variations d'énergie.

10^6 J (figure 4.16). Le rapport de ces deux ordres de grandeur est de 10^{-15} . Il correspond à la précision des machines de calcul. Le bilan énergétique numérique peut être considéré comme nul numériquement. Ainsi, l'énergie totale du système est bien conservée au cours d'un calcul avec un raffinement de maillage espace temps local.

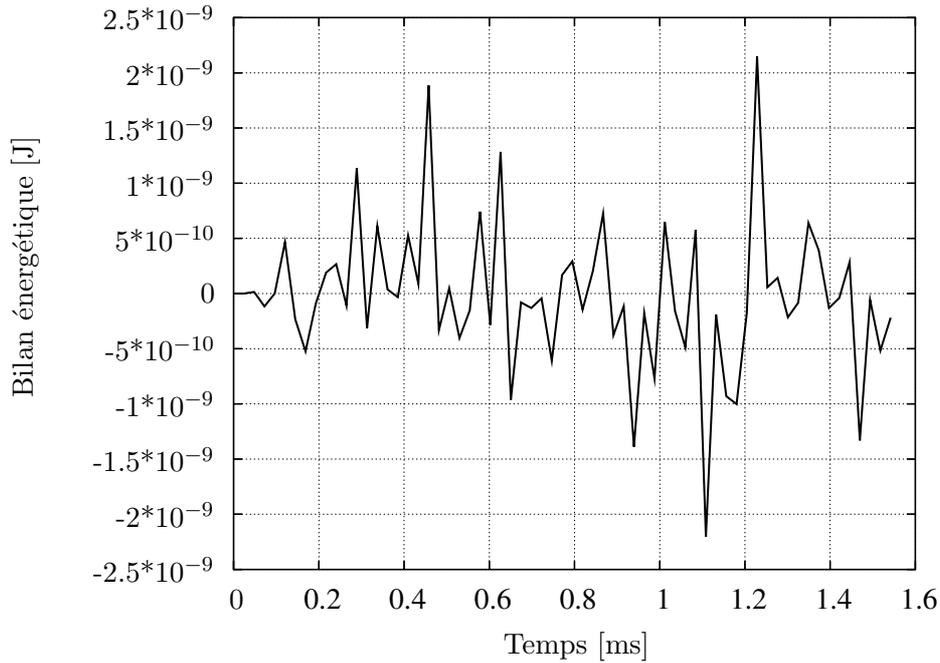


FIG. 4.18 – Evolution du bilan énergétique pour chaque intervalle de temps de niveau 2.

4.3 Etude numérique bidimensionnelle

4.3.1 Cas test

La simulation numérique proposée est une plaque bidimensionnelle trouée et fissurée encadrée à une extrémité et sollicitée en compression à l'autre. La figure 4.19 présente la géométrie de la plaque. La sollicitation est exercée sous la forme d'une pression linéique F dépendante du temps illustrée par la figure 4.11. Le matériau possède les caractéristiques suivantes :

- module d'Young E de 4.25 GPa,
- coefficient de Poisson ν de 0.45,
- masse volumique ρ de 1180 kg.m⁻³.

La simulation est menée sous l'hypothèse des contraintes planes.

Les éléments finis choisis sont quadrangulaires à deux degrés de liberté par noeud appelés QUA4 dans Cast3m. Le maillage de niveau 1 de la plaque trouée fissurée est identique pour tous les instants t_m^1 du niveau 1 (avec $m \in \{0, \dots, r_1\}$). Ce maillage est présenté par la figure 4.20.

Le domaine espace temps initial choisi contient 420 domaines espace temps élémentaires (figure 4.21). Il contient 21 éléments finis et 21 instants. La durée de la simulation est de 0.288 ms (c'est-à-dire $r_1 = 0.288$ ms). Le pas de temps du modèle de niveau 1 est $\Delta t_1 = 12.10^{-3}$ ms. Le schéma numérique choisi dans la famille de Newmark est celui de l'accélération moyenne ($\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$).

4.3.2 Analyse bidimensionnelle

Les maillages finaux déformés obtenus avec un indicateur d'erreur basé sur l'énergie \mathcal{I}_e pour une précision $\epsilon = 5.10^{-3}$ sont présentés sur les figures 4.22, 4.23, 4.24, 4.25 et 4.26. Ces figures se lisent par colonne. Le temps s'écoule de haut en bas. Le pas de temps de représentation est celui du niveau 2 ($\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms). Au cours de la résolution, six niveaux de maillage sont créés. Ils sont tous visibles sur les représentations proposées. Les noeuds du maillage non déformé de niveau 1 sont également représentés. La frontière gauche de la structure est soumise au charge-

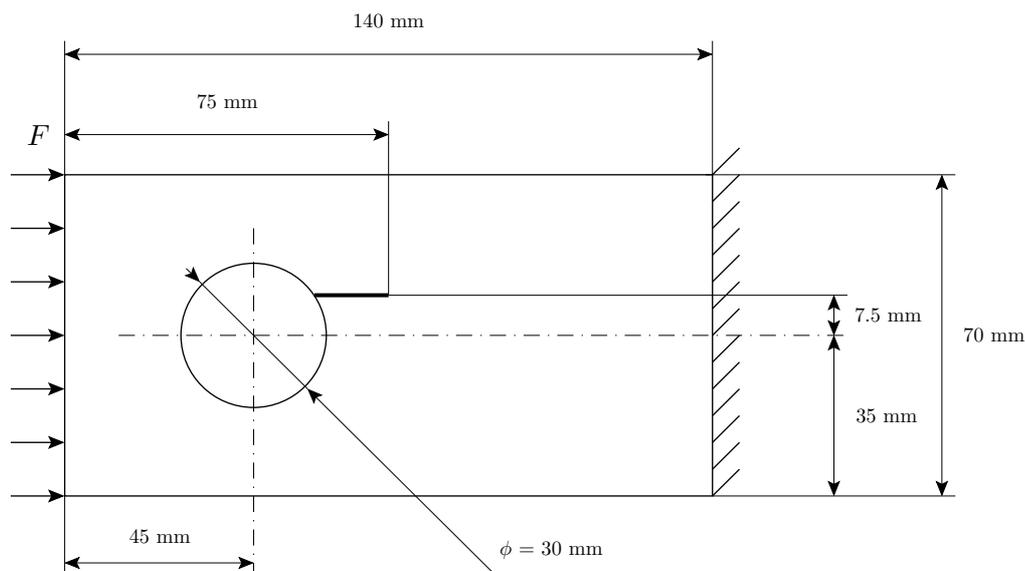


FIG. 4.19 – Plaque trouée fissurée sollicitée en compression dynamique.

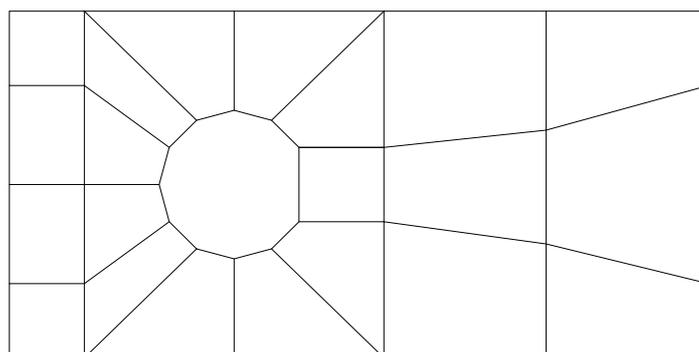


FIG. 4.20 – Maillage du niveau 1 pour un instant donné.

ment. La frontière droite de la structure est encastrée.

La déformation de la structure ainsi que l'évolution du raffinement du maillage spatial permettent de visualiser la propagation des ondes. Au cours du temps, la fissure s'ouvre et se referme sur le passage de l'onde. La structure étant complexe, l'analyse de la propagation des ondes n'est pas connue de manière analytique. Cependant, il est clair que plus l'onde avance dans la structure plus le maillage spatial devient fin dans une zone proche du front de l'onde. Tant que l'onde n'atteint pas la fissure le raffinement de maillage est symétrique (pour les 11 premiers maillages). Le raffinement de maillage se produit autour du trou de la structure.

Ensuite, la présence de la fissure se manifeste par un raffinement de maillage non symétrique au cours du temps et un raffinement de maillage en pointe de la fissure. La singularité en pointe de fissure est perçue par le raffinement de maillage.

Le point remarquable est visible sur les six derniers maillages où le maillage proche de l'encastrement devient de plus en plus grossier sans utiliser de procédure spécifique d'enlèvement d'éléments finis.

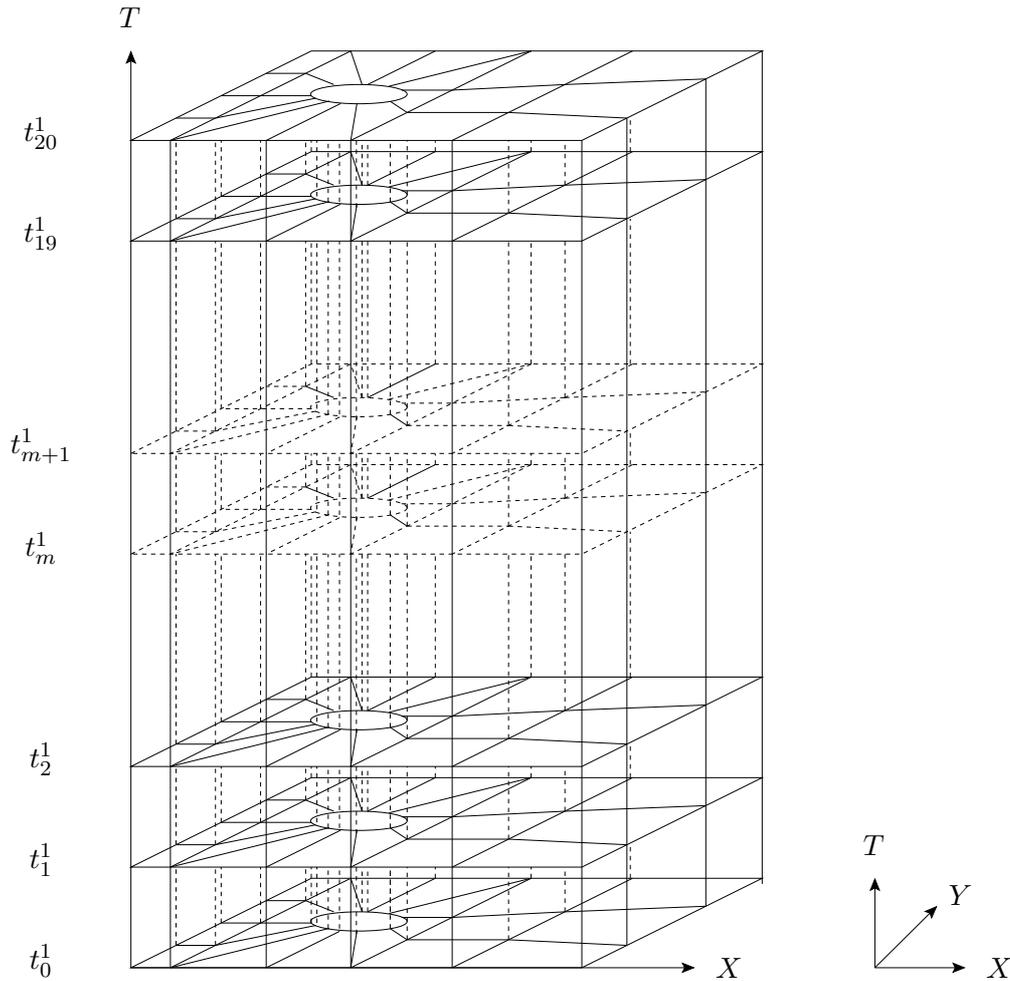


FIG. 4.21 – *Domaine espace temps Ωt^1 de niveau 1 pour la plaque trouée fissurée.*

4.4 Synthèse

Ce chapitre présente une généralisation de la méthode de raffinement de maillage spatial présentée dans le chapitre 3 pour des problèmes de dynamique linéaire. Le raffinement de maillage est réalisé simultanément sur la discrétisation spatiale et temporelle. Pour cela le concept de domaine espace temps élémentaire de la figure 4.1 est introduit. La représentation graphique du principe de raffinement de maillage est similaire à celle de la statique linéaire pour un cas bi-dimensionnel si l'axe Y est remplacé par l'axe T . Deux indicateurs d'erreurs sont utilisés. L'un est basé sur le champ de déplacement \mathcal{I}_u et l'autre sur l'énergie \mathcal{I}_e .

La recherche de la stabilité de l'algorithme avec raffinement de maillage spatial et temporel détermine les conditions aux limites (spatiales et temporelles) à appliquer aux interfaces de deux domaines espace temps successifs. A l'interface entre deux niveaux de maillage (spatial et temporel) successifs, la stabilité est obtenue en imposant la continuité des vitesses.

Les analyses uni- et bidimensionnelle montrent que le raffinement de maillage espace temps permet au maillage spatial de s'adapter automatiquement au voisinage des zones de la structure sollicitées. Le maillage spatial au cours du temps est fin uniquement dans une zone proche du front d'onde (figures 4.14, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25 et 4.26. L'évolution de la discrétisation spatiale au cours du temps (zone de la structure maillée successivement grossièrement puis finement puis grossièrement...) est réalisée en pratiquant un raffinement de maillage espace temps simultané.

L'absence de procédure spécifique de "démaillage" est un atout majeur de la méthode.

L'étude de la convergence de la "STAR-method" (figure 4.15) montre que l'utilisation des indicateurs d'erreurs permet de contrôler la précision des résultats (voir annexe C).

Enfin le calcul a posteriori du bilan énergétique confirme la conservation de l'énergie lors du raffinement de maillage automatique.

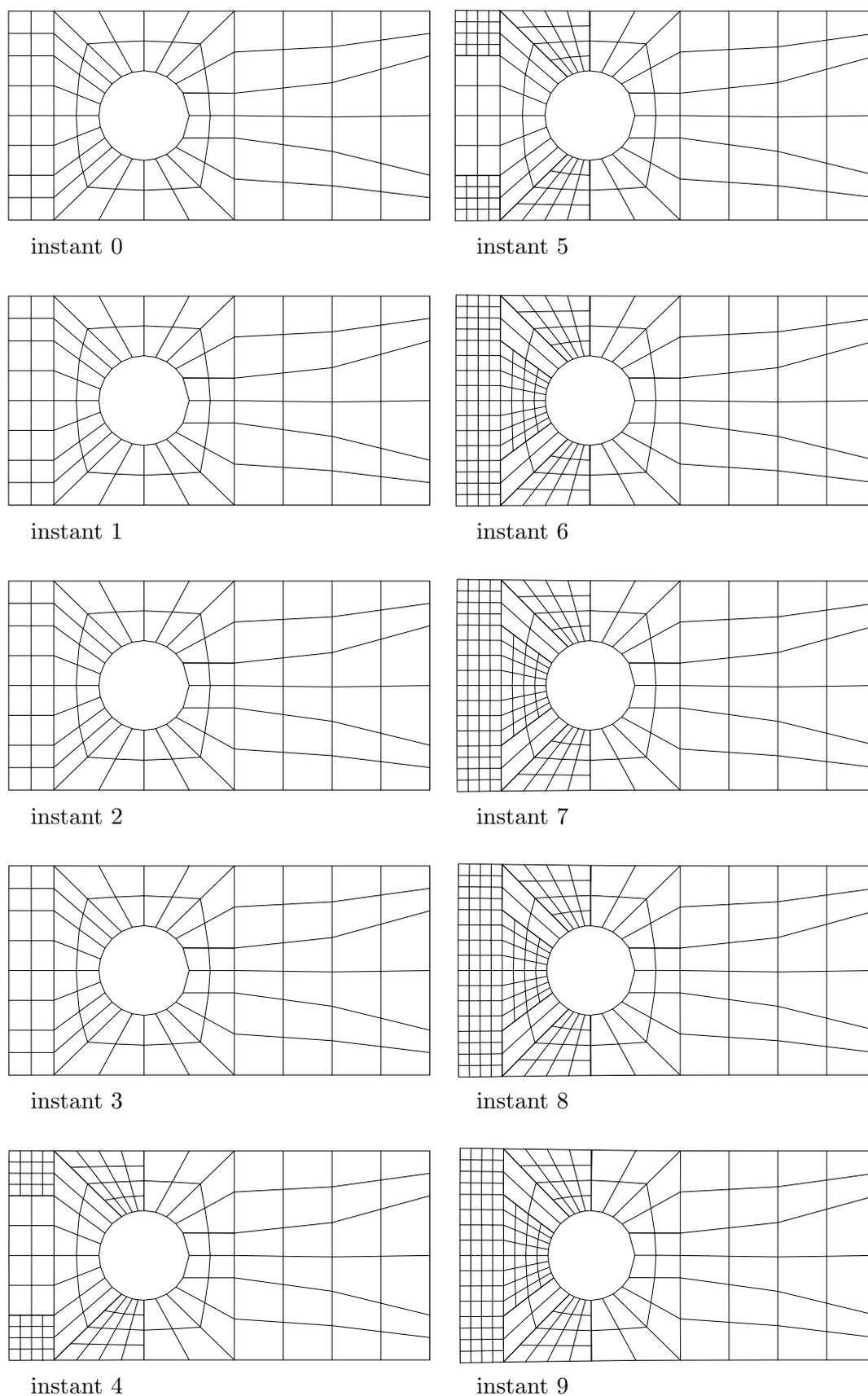


FIG. 4.22 – Maillages fins représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastré. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.

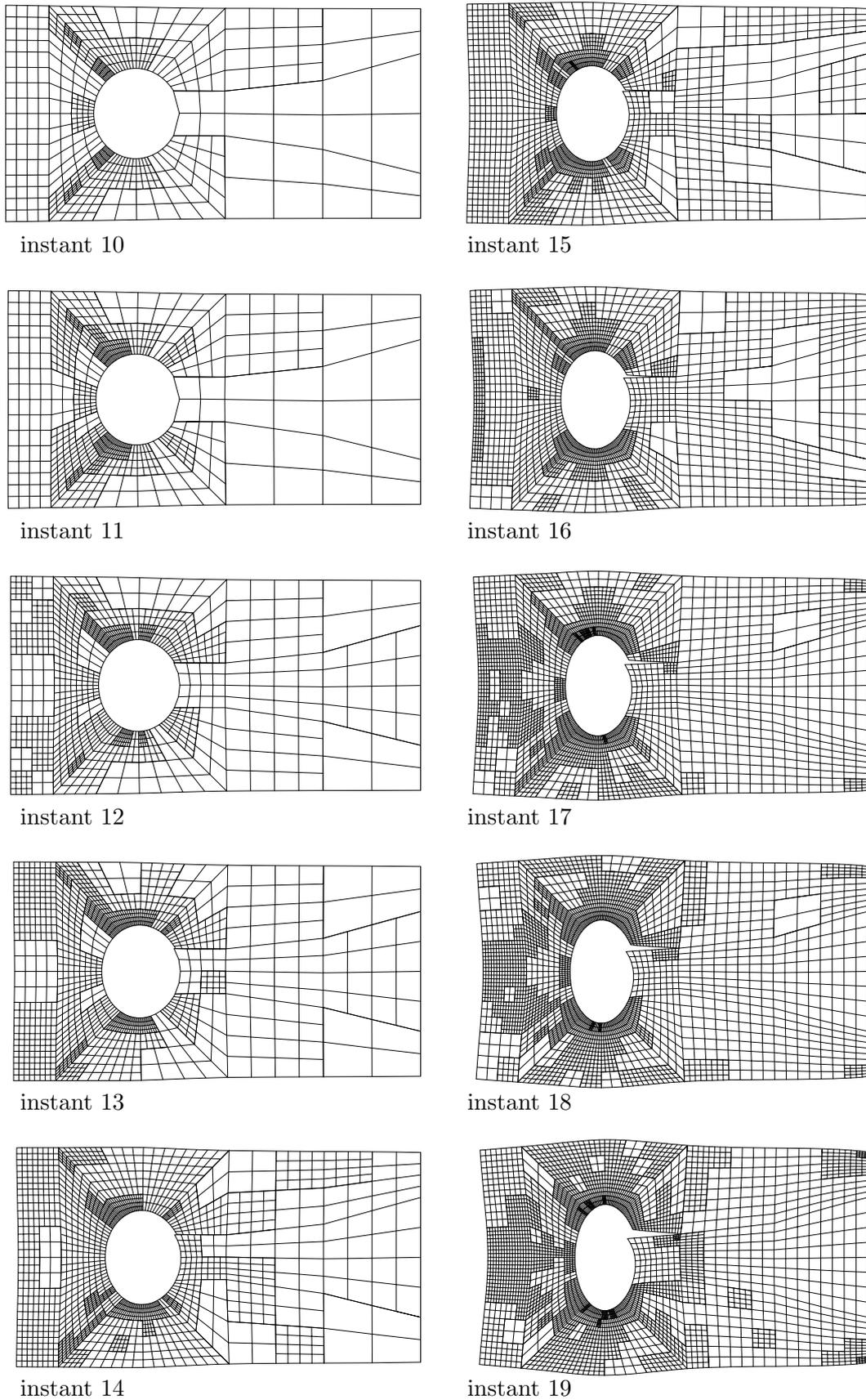


FIG. 4.23 – Maillages fins représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastré. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.

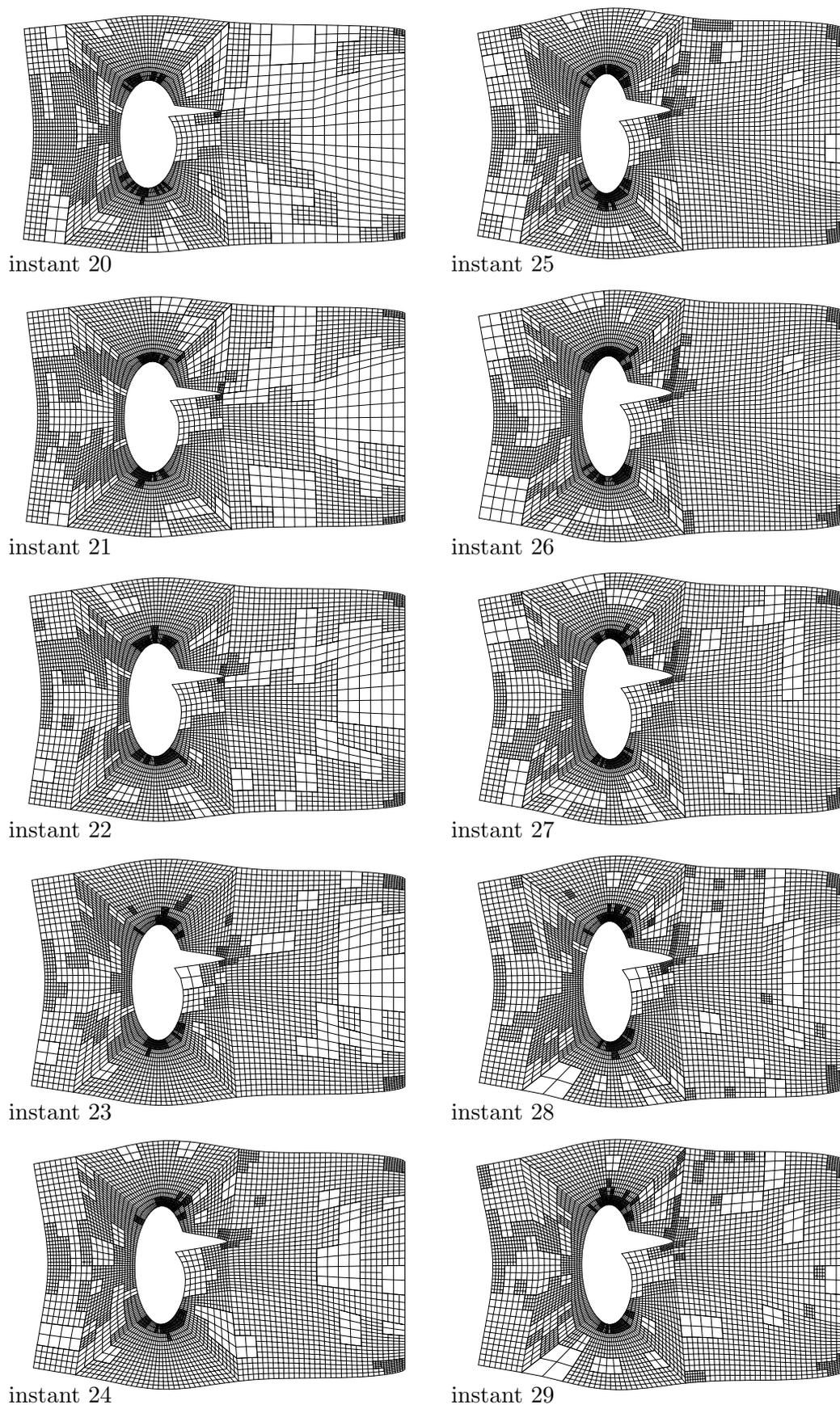


FIG. 4.24 – Maillages fins représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastrée. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.

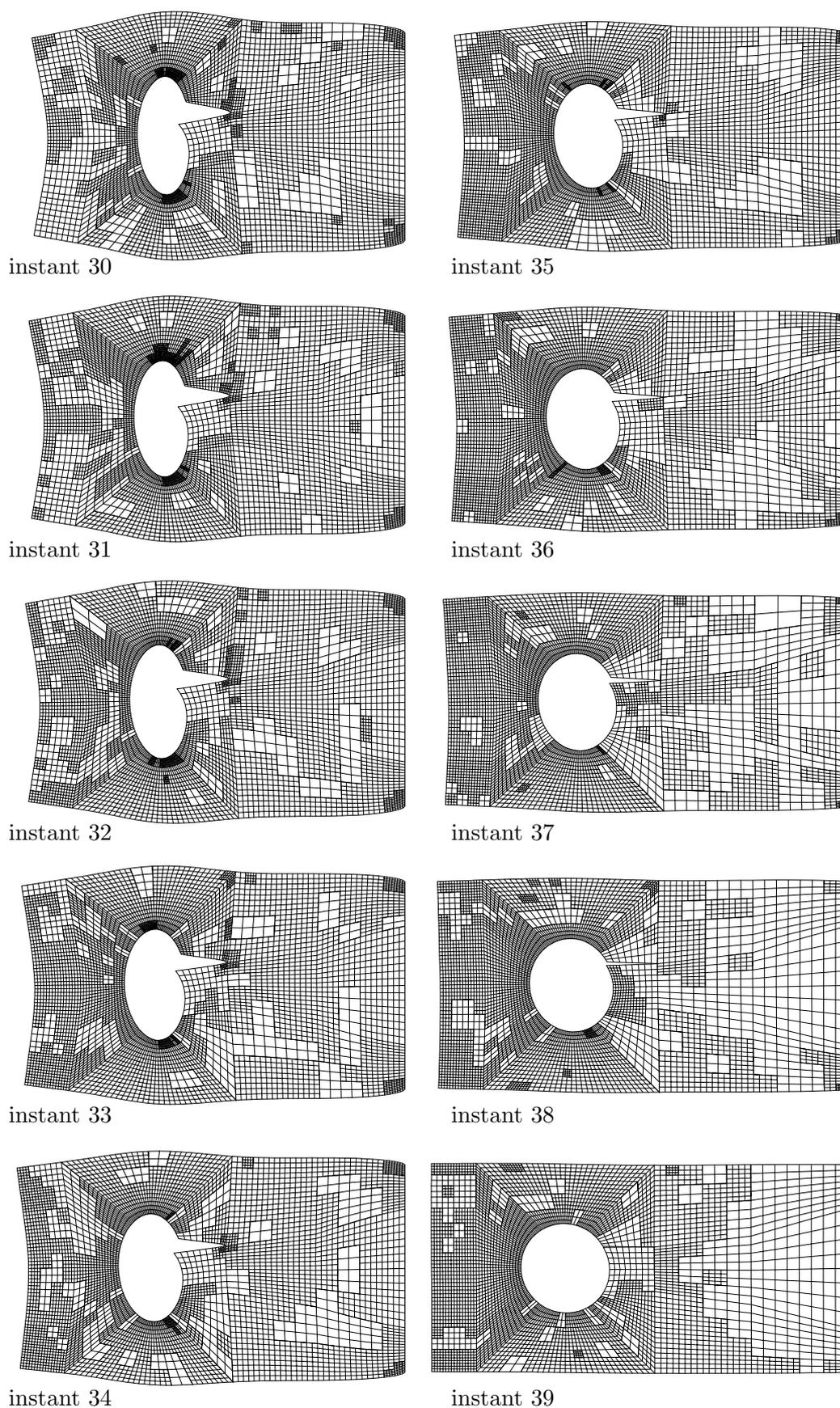
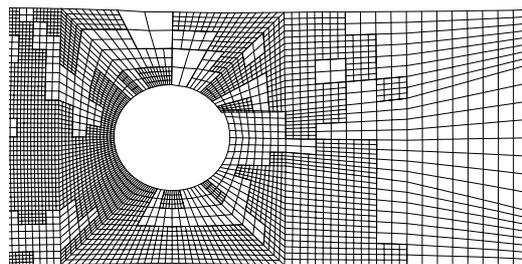


FIG. 4.25 – Maillages fins représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastré. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.



instant 40

FIG. 4.26 – Maillages fins représentés aux instants de niveau 2. La lecture des maillages se fait par colonne de haut en bas. Le bord gauche est soumis à une sollicitation en compression et le bord droit est encastré. Le pas de temps de représentation est $\Delta t_2 = 6.10^{-3}$ ms.

Chapitre 5

Raffinement spatial local : cas non linéaire

Si le système à modéliser comporte des non linéarités, la stratégie développée précédemment n'est plus adaptée. En effet, l'apparition locale d'une non linéarité peut avoir un effet global sur la structure. Une approche de raffinement uniquement d'un maillage (spatial ou spatio-temporel) grossier vers un maillage fin ne peut plus convenir. La résolution doit alors s'effectuer en utilisant des cycles c'est-à-dire en passant successivement des maillages (ou grilles ou encore niveaux) fins vers des maillages plus grossiers et vice versa. La mise en place d'une stratégie multigrille apparaît naturellement. Dans cette partie, les non linéarités envisagées sont des non linéarités matériau de type plasticité. La plasticité est étudiée en considérant le phénomène quasi-statique.

5.1 Modélisation des solides élastoplastiques

La théorie de la plasticité permet de modéliser des déformations irréversibles (ou permanentes) du matériau [75, 72, 14]. L'hypothèse des petites perturbations reste toujours valable. Les phénomènes thermiques sont également négligés devant les autres phénomènes mis en jeu.

5.1.1 Eléments de thermodynamiques pour un matériau élastoplastique

Cette partie présente une application au matériau élastoplastique de la théorie présentée dans la section 2.1.2.

Les variables internes nécessaires pour modéliser un matériau élastoplastique sont notées p_c et $\underline{\alpha}$. Elles sont associées respectivement à l'érouissage isotrope Z et à l'érouissage cinématique linéaire \underline{X} . En utilisant ces notations l'équation (2.14) s'écrit :

$$\rho\Psi(\underline{\varepsilon}_e, p_c, \underline{\alpha}) = \frac{1}{2}Tr[\underline{\varepsilon}_e \underline{K} \underline{\varepsilon}_e] + \rho\Psi_p(p_c, \underline{\alpha}) \quad (5.1)$$

La partie plastique du potentiel d'état $\Psi_p(p_c, \underline{\alpha})$ est définie par :

$$\Psi_p(p_c, \underline{\alpha}) = \frac{1}{2} d_p Tr[\underline{\alpha} \underline{\alpha}] + l(p_c) \quad (5.2)$$

où d_p et l dépendent des caractéristiques du matériau. L'érouissage isotrope Z et l'érouissage cinématique \underline{X} s'expriment en fonction du potentiel d'état Ψ par les relations suivantes :

$$Z = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p_c} \quad (5.3)$$

$$\underline{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \quad (5.4)$$

Le critère de plasticité utilisé est celui de Von Mises. Il est décrit par $f \leq 0$ où f est le convexe d'élasticité.

$$f = \|\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}\| - Z - \sigma_Y \quad (5.5)$$

$$= \sqrt{\text{Tr}((\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}})(\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}))} - Z - \sigma_Y \quad (5.6)$$

$\underline{\underline{\sigma}}^D$ correspond à la partie déviatorique du tenseur des contraintes et σ_Y à la limite élastique. Le potentiel de dissipation φ^* s'écrit comme la fonction indicatrice *ind* du convexe d'élasticité.

$$\varphi^*(\underline{\underline{\sigma}}^D, \underline{\underline{X}}, Z) = \text{ind}(f) \quad (5.7)$$

Ainsi, les variables internes sont définies par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (5.8)$$

$$\dot{p}_c = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial Z} \quad (5.9)$$

$$\underline{\underline{\dot{\alpha}}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}} \quad (5.10)$$

$\dot{\lambda}$ est tel que :

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} f < 0 \\ \text{ou} \\ f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

et

$$\dot{\lambda} > 0 \quad \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} = 0 \quad (5.12)$$

Enfin, les lois d'état et d'évolution d'un problème d'élastoplasticité avec écrouissage isotrope et cinématique sont respectivement (5.13) et (5.14).

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\varepsilon}}_e \\ \underline{\underline{X}} = d_p \underline{\underline{\alpha}} \\ Z = l(p_c) \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p \\ -\underline{\underline{\alpha}} \\ -p_c \end{pmatrix} = \dot{\lambda} \begin{pmatrix} (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}) / \|\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}\| \\ (\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}) / \|\underline{\underline{\sigma}}^D - \underline{\underline{X}}\| \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Remarque 1 : la variable interne p_c peut s'interpréter comme la déformation plastique cumulée $p_c = \int \|\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p\| dt$.

Remarque 2 : la modélisation prend en compte seulement un écrouissage cinématique linéaire si $l = 0$.

Remarque 3 : la modélisation prend en compte seulement un écrouissage isotrope si $d_p = 0$.

Remarque 4 : le modèle élastoplastique présenté vérifie la condition d'incompressibilité suivante $\text{Tr}[\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_p] = 0$.

5.1.2 Algorithme de plasticité

En plasticité, l'équation d'équilibre non linéaire à résoudre s'écrit :

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_i) = \mathbf{f} + \mathbf{fl} \quad (5.15)$$

où \mathbf{v}_i sont les variables internes, \mathbf{f}_{int} représente le vecteur des forces internes, \mathbf{f} le vecteur des forces extérieures et \mathbf{fl} le vecteur des forces de liaison. Il faut ajouter à cette équation l'état initial et la loi de comportement élastoplastique. Les conditions aux limites sont prises en compte par le vecteur des forces de liaison \mathbf{fl} . L'algorithme numérique de résolution utilisé pour résoudre l'équation (5.15) est celui de Newton décrit dans le tableau 2.2 en remplaçant la relation (2.40) par (5.15). L'intégration de la loi de comportement est réalisée par un algorithme spécifique de type retour radial [14]. Différents types d'algorithmes sont possibles pour intégrer la loi de comportement de matériau non linéaire. Ces algorithmes ne sont pas détaillés ici. L'algorithme d'intégration de la loi de comportement est désigné par les trois lettres *ILC* (Intégration de la Loi de Comportement).

L'algorithme de Newton appliqué à l'élastoplasticité est décrit pour une sollicitation donnée dans le tableau 5.1. Dans ce tableau, \mathbf{B} est la matrice des dérivées des fonctions de forme.

1 - Initialisation de la résolution, $k = 0$

$$\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \mathbf{v}_i^{(0)}, \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{f} + \mathbf{fl}^{(0)} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \mathbf{v}_i^{(0)})$$

2 - Passage à l'itération $k = k + 1$

3 - Calcul de l'incrément $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ (étape globale)

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k-1)} + \text{C.L.}$$

4 - Mise à jour des forces de liaison $\mathbf{fl}^{(k)}$

$$\mathbf{fl}^{(k)} = \mathbf{fl}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{fl}^{(k)}$$

5 - Calcul de l'incrément de déformation $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^{(k)}$$

6 - Calcul du nouvel état admissible $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}, \mathbf{v}_i^{(k)}$ (étape locale)

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)}, \mathbf{v}_i^{(k)} = ILC(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \boldsymbol{\sigma}^{(k-1)}, \mathbf{v}_i^{(k-1)})$$

7 - Calcul des forces internes $\mathbf{f}_{int}^{(k)}$

$$\mathbf{f}_{int}^{(k)} = Tr[\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}]$$

8 - Mise à jour du champ de déplacement

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)} &= \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \end{aligned}$$

9 - Calcul du résidu $\mathbf{R}^{(k)}$

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{f} + \mathbf{fl}^{(k)} - \mathbf{f}_{int}^{(k)}$$

10 - Calcul d'une erreur *err*

11 - Comparaison de l'erreur *err* au critère d'arrêt ϵ

Si *err* > ϵ alors retour en 2.

Si *err* < ϵ le calcul est terminé.

TAB. 5.1 – Algorithme de Newton appliqué à un problème élastoplastique.

Cet algorithme est inclus dans une boucle sur le chargement.

5.2 Principe de la “S(T)AR-method” non linéaire

La plasticité est modélisée avec une approche quasi-statique. La variable t représente ici la variable d'évolution. La stratégie choisie consiste à raffiner la discrétisation spatiale sans modifier la discrétisation de l'évolution quasi-statique du chargement. L'intervalle de temps étudié $[0, T]$ est discrétisé en r intervalle comme indiqué dans la section 2.2.2. La discrétisation temporelle reste invariante durant toute la simulation. Cette partie expose le principe de la “S(T)AR-method” non linéaire pour un niveau de sollicitation \mathbf{f}_m où m est fixé et $m \in \{0, 1, \dots, r\}$. Quel que soit le niveau j considéré $r_1 = r_2 = \dots = r_j = \dots = r$.

Le principe de sous-découpage spatial d'un élément fini est celui développé dans la partie 3.1.1 présentant la “S(T)AR-method” linéaire. Le principe général de raffinement local de maillage spatial pour modéliser la plasticité est similaire à celui employé jusqu'alors. Connaissant la solution convergée $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^{j-1}$ et $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^j$ pour deux niveaux successifs $j-1$ et j , l'erreur associée à chaque élément fini est estimée via un indicateur d'erreur. Chaque élément fini dont l'erreur est supérieure à la précision demandée est sous-découpé. La différence avec la méthode précédente réside dans la manière d'obtenir la solution convergée sur un niveau de maillage. La résolution utilise la technique multigrille de V cycles non linéaire (FAS). La section suivante décrit la résolution par l'algorithme FAS sur les différentes grilles.

5.2.1 Stratégie des V cycles

La stratégie d'aller retour choisie est celle décrite par l'algorithme multigrille non linéaire FAS du tableau 2.3. Dans cette algorithme de référence, l'équation de type (2.45) est remplacée par l'équation d'équilibre non linéaire (5.15). La résolution de l'équation d'équilibre non linéaire avec raffinement automatique spatial combine l'algorithme de Newton à l'algorithme multigrille FAS utilisé sous la forme FMG (figure 2.5).

Dans ce chapitre, les notations des domaines $*$ et des domaines $+$ correspondent à celles illustrées par la figure 3.7.

Comme dans les précédents chapitres, la méthode non linéaire est initialisée en créant un premier modèle grossier de la structure étudiée par la méthode des éléments finis pour l'instant considéré t_m . Il constitue le niveau 1, de domaine Ω_m^1 et de frontière $\partial\Omega_m^1$. En appliquant les conditions aux limites cinématiques sur $\partial_1\Omega_m^1$ et les efforts extérieurs sur $\partial_2\Omega_m^1$ de $\partial\Omega_m^1$, l'algorithme de Newton (tableau 5.1) est utilisé pour calculer la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^1$.

L'étape suivante consiste à créer le niveau 2 sur la structure complète pour le même instant t_m . Ω_m^2 désigne le domaine occupé par le niveau 2 et $\partial\Omega_m^2$ sa frontière. Le maillage spatial de niveau 2 est hiérarchique au premier niveau. L'élaboration du maillage hiérarchique est identique à celle utilisée dans le cas de la statique linéaire (section 3.1.1). Les efforts \mathbf{f}_m^2 et les conditions aux limites sont appliqués respectivement sur les bords $\partial_2\Omega_m^2$ et $\partial_1\Omega_m^2$. La solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^2$ est calculée en utilisant une stratégie de V cycle non linéaire adaptée à la plasticité (tableau 5.2). La résolution multigrille se fait sur les deux niveaux (1 et 2). Dans le tableau 5.2, l'indice de niveau j_{max} est donc égal à 2 et l'indice m indiquant l'instant considéré est omis afin d'alléger l'écriture de l'algorithme. \mathbf{P}_r est un opérateur de prolongement d'un niveau grossier vers un niveau fin. Le symbole $\tilde{\cdot}$ signifie qu'il s'agit d'une grandeur restreinte d'un niveau fin vers un niveau grossier qui évolue sur le niveau grossier. Enfin, le symbole $\hat{\cdot}$ signifie qu'il s'agit d'une grandeur restreinte d'un niveau fin vers un niveau grossier qui reste constante sur le niveau grossier.

Lorsque la solution convergée $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^2$ est obtenue, l'erreur associée à chaque élément fini parent de niveau 1 est calculée à partir des solutions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^1$ et $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^2$ et d'un indicateur d'erreur.

1 - Si $j = j_{max}$ alors

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^j &= \mathbf{f}_{int}^j(\tilde{\mathbf{u}}^j, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \tilde{\mathbf{v}}_i^j) \\ \mathbf{f}_2^j &= \mathbf{f}^j\end{aligned}$$

ROUTINE VCYLE(j)

2 - ν_1 itérations de Newton sur le problème de niveau j

$$\mathbf{f}_1^j = \mathbf{f}_2^j \quad (+ \text{C.L.})$$

3 - Calcul du résidu

$$\mathbf{R}^j = \mathbf{f}_2^j + \mathbf{f}l^j - \mathbf{f}_1^j$$

5 - Restriction du résidu, de la solution, des variables internes et des contraintes sur Ω^{j-1+}

$$\hat{\mathbf{u}}^{j-1+} = \mathbf{P}_r^T \tilde{\mathbf{u}}^j$$

$$\hat{\mathbf{R}}^{j-1+} = \mathbf{P}_r^T \mathbf{R}^j$$

$$\hat{\mathbf{f}}l^{j-1+} = \mathbf{P}_r^T \tilde{\mathbf{f}}l^j$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1+} = \mathbf{P}_r^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j$$

$$\hat{\mathbf{v}}_i^{j-1+} = \mathbf{P}_r^T \tilde{\mathbf{v}}_i^j$$

6 - Construction des grandeurs sur Ω^{j-1}

Si $\Omega^{j-1+} \neq \Omega^{j-1}$, alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}^{j-1} &= \mathbf{u}^{j-1*} + \hat{\mathbf{u}}^{j-1+} \\ \hat{\mathbf{R}}^{j-1} &= \mathbf{f}^{j-1*} + \mathbf{f}l^{j-1*} + \hat{\mathbf{R}}^{j-1+} \\ \hat{\mathbf{f}}l^{j-1} &= \mathbf{f}l^{j-1*} + \hat{\mathbf{f}}l^{j-1+} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1} &= \boldsymbol{\sigma}^{j-1*} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1+} \\ \hat{\mathbf{v}}_i^{j-1} &= \mathbf{v}_i^{j-1*} + \hat{\mathbf{v}}_i^{j-1+}\end{aligned}$$

Sinon

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}^{j-1} &= \hat{\mathbf{u}}^{j-1+} \\ \hat{\mathbf{R}}^{j-1} &= \hat{\mathbf{R}}^{j-1+} \\ \hat{\mathbf{f}}l^{j-1} &= \hat{\mathbf{f}}l^{j-1+} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1+} \\ \hat{\mathbf{v}}_i^{j-1} &= \hat{\mathbf{v}}_i^{j-1+}\end{aligned}$$

8 - Définition de \mathbf{f}_1^{j-1} et \mathbf{f}_2^{j-1}

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^{j-1} &= \mathbf{f}_{int}^{j-1}(\tilde{\mathbf{u}}^{j-1}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}, \tilde{\mathbf{v}}_i^{j-1}) \\ \mathbf{f}_2^{j-1} &= \hat{\mathbf{f}}_{int}^{j-1}(\hat{\mathbf{u}}^{j-1}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}, \hat{\mathbf{v}}_i^{j-1}) - \hat{\mathbf{f}}l^{j-1} + \hat{\mathbf{R}}^{j-1}\end{aligned}$$

9 - Si $j - 1 \neq 1$ alors $j = j - 1$ appel de la **ROUTINE VCYLE**($j - 1$)

Sinon résolution exacte de $\mathbf{f}_1^1 = \mathbf{f}_2^1 \quad (+ \text{C.L.})$

10 - Correction des différentes inconnues

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^j &= \tilde{\mathbf{u}}^j + \mathbf{P}_r(\tilde{\mathbf{u}}^{j-1} - \hat{\mathbf{u}}^{j-1}) \\ \mathbf{v}_i^j &= \tilde{\mathbf{v}}_i^j + \mathbf{P}_r(\tilde{\mathbf{v}}_i^{j-1} - \hat{\mathbf{v}}_i^{j-1}) \\ \boldsymbol{\sigma}_i^j &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^j + \mathbf{P}_r(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^{j-1} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{j-1})\end{aligned}$$

11 - Mise à jour de $\mathbf{f}l^j$

12 - ν_1 itérations sur le problème corrigé

FIN ROUTINE VCYLE

TAB. 5.2 – Algorithme des V cycles adaptés à la résolution de problème d'élastoplasticité.

L'erreur est ensuite comparée à la précision demandée. Pour chaque élément fini du niveau 1 dont l'erreur excède la précision demandée, les éléments finis enfants (du niveau 2) sont sous-découpés selon la technique vue précédemment dans la section 3.1.1. Les éléments finis créés constituent le niveau 3. Le domaine Ω_m^3 peut être constitué de parties non connexes. Si le niveau

3 est local (c'est-à-dire s'il ne recouvre pas la totalité du domaine 2), trois types de frontière permettent de définir $\partial\Omega_m^3$. Il s'agit des bords classiques $\partial_1\Omega_m^3$ et $\partial_2\Omega_m^3$ (à déplacement et effort imposés) et du bord $\partial_{1*}\Omega_m^3$ sur lequel des conditions cinématiques supplémentaires sont définies. Le bord $\partial_{1*}\Omega_m^3$ correspond à :

$$\partial_{1*}\Omega_m^3 = \partial\Omega_m^3 \cap \overline{(\partial_1\Omega_m^3 \cup \partial_2\Omega_m^3)} \quad (5.16)$$

Les conditions aux limites appliquées à $\partial_{1*}\Omega_m^3$ sont les mêmes que celles choisies dans le cas d'un calcul à raffinement de maillage spatial automatique pour des problèmes linéaires. Sur cette frontière, le champ de déplacement connu sur le niveau 2 est interpolé linéairement comme l'illustre la figure 3.6. Lorsque toutes les conditions de $\partial\Omega_m^3$ sont connues et appliquées, la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^3$ est calculée par l'intermédiaires de V cycles (tableau 5.2). Pour cette résolution, les V cycles descendent du niveau 3 au niveau 1 et remontent jusqu'au niveau le plus fin.

Pour résoudre les problèmes non linéaires une hypothèse est formulée sur la forme des maillages locaux au cours des V cycles. La frontière d'un domaine local ne change pas au cours des cycles.

Le transfert et la gestion des variables internes sont des points délicats de la mise en place de l'algorithme non linéaire. La stratégie choisie consiste à restreindre les variables internes successivement du niveau le plus fin vers le plus grossier uniquement lors du premier cycle. Cette étape constitue l'initialisation de ces variables sur chacun des niveaux. Lors du cycle suivant, les variables internes sont transmises à iso-niveau. La figure 5.1 schématise l'algorithme de la "S(T)AR-method" non linéaire de type plasticité. Le trajet spécifique des variables internes est mis en évidence par les flèches discontinues (en pointillés). La quantité ν_1 représente le nombre d'itérations constant réalisé sur un niveau, ν_0 est le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre exactement le problème sur le niveau grossier. ν_1 est choisi égal à 5. La figure 5.1 indique également les différentes erreurs mesurées au cours de la résolution. L'erreur entre deux niveaux est celle évaluée par l'indicateur d'erreur. La réduction d'erreur au cours d'un cycle est mesurée par err_{cycle} . Un double cercle signifie que la solution convergée est obtenue sur le niveau correspondant.

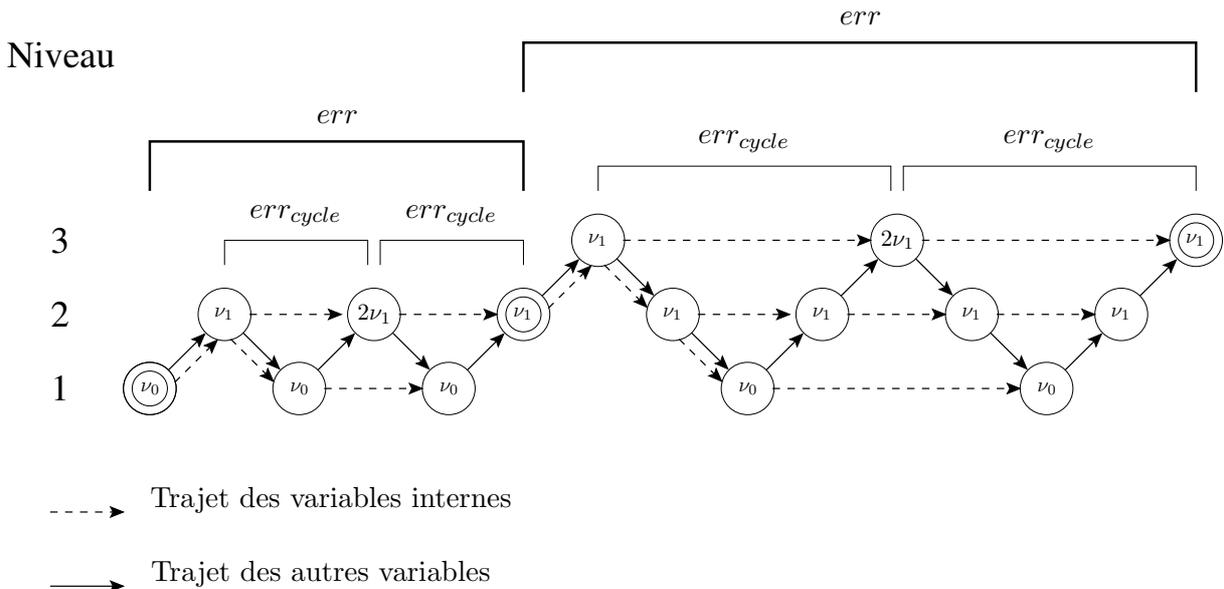


FIG. 5.1 – Schématisation de l'algorithme FMG adapté à la plasticité.

Lorsque la solution sur le niveau 3 est obtenue, les solutions $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^2$ et $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})^3$ sont comparées par l'intermédiaire de l'indicateur d'erreur. Cette comparaison est effectuée pour les éléments

finis du domaine Ω_m^2 ayant des éléments enfants sur le domaine Ω_m^3 . Le processus de création d'un éventuel niveau 4 est identique à celui du niveau 3.

Le processus de création de maillage se poursuit à l'image de la figure 5.1 jusqu'à ce que la solution atteigne la précision souhaitée sur le domaine de calcul complet.

Le processus est décrit dans cette section pour un niveau de chargement donné \mathbf{f}_m . Lorsque le chargement est quasi-statique, ce processus est répété pour chaque évolution du chargement. Lorsque l'effort évolue de l'instant t_m à l'instant t_{m+1} , le chargement passe de \mathbf{f}_m à \mathbf{f}_{m+1} . L'état initialisant le calcul pour le chargement \mathbf{f}_{m+1} correspond à la solution convergée obtenue pour le chargement précédent \mathbf{f}_m .

5.2.2 Mesure d'erreur

La mesure de l'erreur est toujours réalisée au moyen d'un indicateur d'erreur. L'indicateur d'erreur utilisé est basé sur l'énergie e de la structure. Il est noté \mathcal{I}_e^j . L'erreur est calculée pour chaque élément fini de niveau j en comparant les solutions des niveaux j et $j+1$. La construction de l'indicateur d'erreur nécessite de restreindre sur la partie de domaine Ω^{j+1} la solution de niveau $j+1$ via un opérateur de restriction spatiale \mathbf{T}_s^T . Une quantité restreinte par cet opérateur est identifiée par le symbole $\tilde{\cdot}$. Si \mathbf{q} est un vecteur quelconque, sa restriction du niveau $j+1$ vers le niveau j s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{q}}^j = \mathbf{T}_s^T \mathbf{q}^{j+1} \quad (5.17)$$

L'indicateur d'erreur est défini comme dans le cas de la statique linéaire par la relation :

$$\mathcal{I}_e^j = \sqrt{\frac{|\tilde{\mathbf{e}}^j - \mathbf{e}^j|}{e^1}} \quad (5.18)$$

L'énergie de la structure est définie par :

$$\mathbf{e}^j = \int_{\Omega^j} Tr[\boldsymbol{\sigma}^j \boldsymbol{\varepsilon}^j] d\Omega \quad (5.19)$$

5.3 Etude numérique

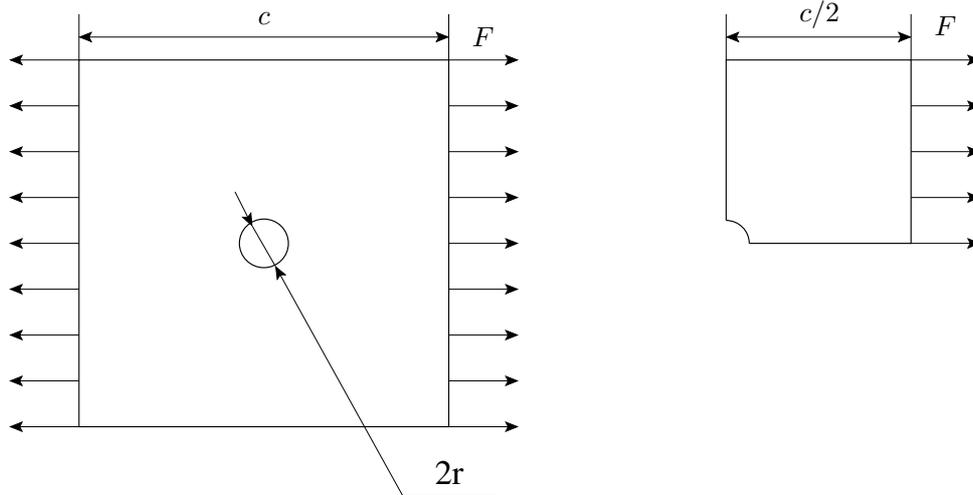
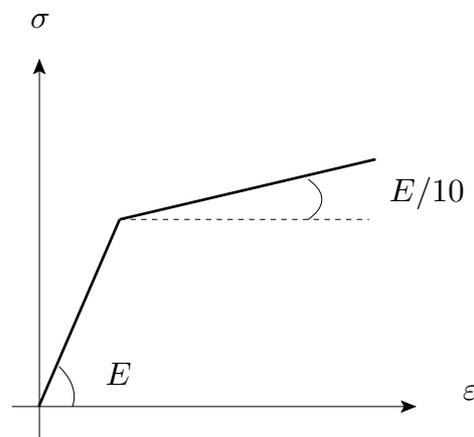
5.3.1 Cas test

Le cas test modélisé est celui de la plaque trouée (trou circulaire) soumise à une sollicitation de traction déjà vue en statique linéaire (cas test A). Les caractéristiques de la plaque ainsi que le chargement utilisé sont décrits à nouveau dans cette partie. La géométrie de la plaque trouée étudiée est donnée par la figure 5.2. La plaque est choisie de forme carrée. Le trou circulaire de rayon r est placé au centre de la plaque. La dimension caractéristique de la plaque est $r/c = 0.06$. La sollicitation est exercée sous la forme d'une pression linéique F de $2.5 \cdot 10^8$ N.m⁻¹. Ce chargement est appliqué en dix incréments successifs.

Les caractéristiques du matériau sont :

- un module d'Young $E = 211$ GPa,
- une masse volumique $\rho = 7850$ kg.m⁻³,
- un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$,
- une limite élastique du matériau est $\sigma_Y = 400$ MPa.

Le comportement du matériau est modélisé selon la figure 5.3. La loi d'érouissage du matériau est cinématique linéaire (c'est-à-dire que $l=0$ dans le modèle de comportement matériau présenté

FIG. 5.2 – *Plaque trouée sollicitée en traction.*FIG. 5.3 – *Représentation de la loi de comportement du matériau.*

dans la partie précédente) de pente $E/10$.

Pour des raisons de symétrie, uniquement un quart de la structure est modélisé. Les éléments choisis sont des quadrangles à quatre noeuds linéaires (nommés QUA4 dans Cast3m). La figure 5.4 représente le maillage constituant le premier niveau. La simulation est réalisée sous l'hypothèse des contraintes planes.

5.3.2 Etude numérique

En utilisant l'indicateur d'erreur basé sur l'énergie \mathcal{I}_e pour une précision requise de $\epsilon = 2.2 \cdot 10^{-2}$, les maillages obtenus sur les niveaux successifs pour le premier incrément de chargement sont donnés par la figure 5.5. Pour atteindre la précision souhaitée, seulement trois niveaux sont créés. Les niveaux 1 et 2 sont définis sur tout le domaine de calcul. Le niveau 3 est local. Le maillage de niveau 3 est concentré autour du trou. La déformation du maillage final est présentée sur la figure 5.6.

Les champs de déplacement, de déformation totale, de déformation plastique et de contrainte solutions sont présentés respectivement sur les figures 5.8, 5.10, 5.12 et 5.14. Les champs de déplacement, de déformation totale, de déformation plastique et de contrainte de référence sur

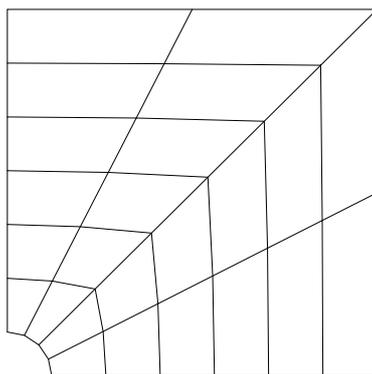


FIG. 5.4 – Maillage de niveau 1 de la plaque trouée.

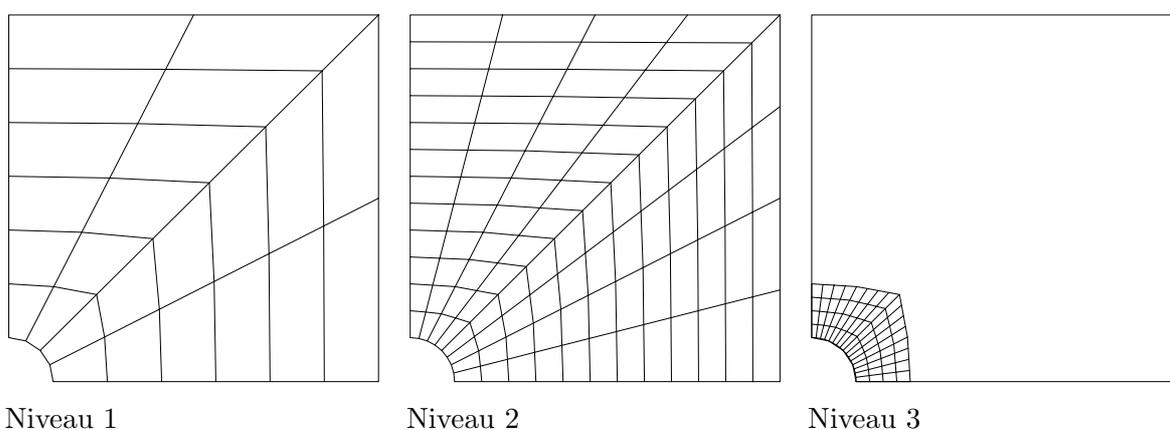


FIG. 5.5 – Maillages fins de la plaque trouée pour le premier incrément de chargement.

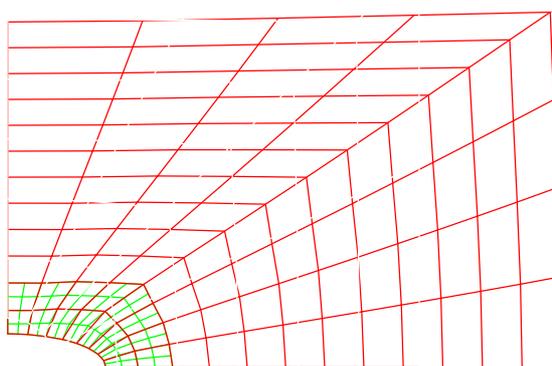


FIG. 5.6 – Déformation du maillage final pour le premier incrément de chargement.

les maillages de niveau 3, 5 et 6 sont présentés respectivement sur les figures 5.9, 5.11, 5.13 et 5.15. Pour une grandeur donnée, les échelles de représentation sont les mêmes pour chacun des maillages. L'ensemble de ces figures permet de comparer qualitativement les différentes solutions obtenues.

La plasticité (figure 5.12) apparaît au bord du trou dans la zone de contrainte maximale. Il faut noter que le maillage de niveau 1 ne permet pas de modéliser la plasticité au bord du trou car celui-ci est trop grossier.

A la fin d'un calcul et pour les niveaux 1 et 2, deux types de solutions sont connus. Les solutions

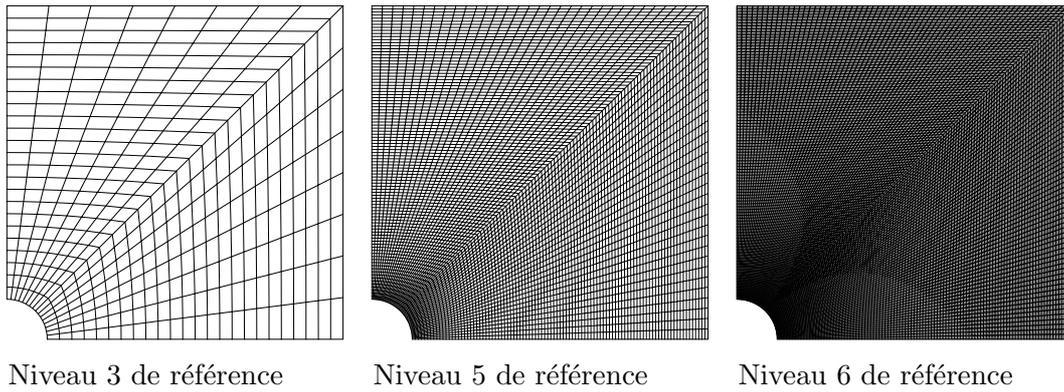


FIG. 5.7 – Maillages correspondant aux niveaux de références.

présentées sous les titres niveau 1 et niveau 2 correspondent à la solution convergée matérialisée par le double cercle de la figure 5.1. Ces solutions sont celles qui sont calculées classiquement par la méthode des éléments finis.

Les solutions sous les titres niveau 1 final et niveau 2 final correspondent aux solutions obtenues lors de la dernière remontée vers le niveau le plus fin du dernier V cycle effectué. La comparaison de la déformation plastique du niveau 1 à celle du niveau 1 final montre que les solutions sont très différentes. En effet, la solution de niveau 1 est élastique alors que celle du niveau 1 final est plastique. Or, la solution de référence sur un maillage plus fin (de niveau 5 ou 6) montre que la plasticité existe dans la zone de contrainte maximum. Ainsi, la résolution par une approche multigrille FAS permet de transmettre la plasticité à des grilles trop grossières pour la modéliser. Grâce à l'approche FAS, la solution des maillages les plus grossiers tend à se rapprocher de la solution physique (solution calculée sur un maillage fin).

Niveau	u_{max} 10^{-5} m	ϵ_{tmax} 10^{-3}	ϵ_t 10^{-3}	$VM(\sigma)_{max}$ 10^8 N
1	2.884	2.023	0	3.749
2	2.901	2.637	0.330	4.070
3	*	3.172	0.813	4.176
1 final	2.901	2.487	0.377	3.690
2 final	2.901	2.864	0.619	4.127
référence 3	2.916	3.280	0.911	4.196
référence 5	2.924	3.935	1.731	4.381
référence 6	2.924	4.010	1.852	4.410

TAB. 5.3 – Comparaison de u , ϵ_t , ϵ_t et $VM(\sigma)$ maximum sur différents niveaux et sur différents maillages de référence.

Le tableau 5.3 compare quantitativement les différentes solutions (en déplacement, en déformation totale, en déformation plastique et en contrainte) obtenues avec les solutions de référence. Le symbole VM représente l'opérateur de Von Mises. Dans ce tableau les solutions des niveaux 1 et 2 sont différentes des solutions des niveaux 1 final et 2 final (surtout au niveau de la modélisation de la plasticité). Ces deux dernières solutions tendent vers les solutions de référence. L'étoile * apparaissant dans le tableau signifie que la zone de déplacement maximale n'est pas contenue dans le maillage local de niveau 3.

Enfin, La localisation du maillage permet de limiter le nombre de degrés de liberté du modèle numérique pour des structures élastoplastiques.

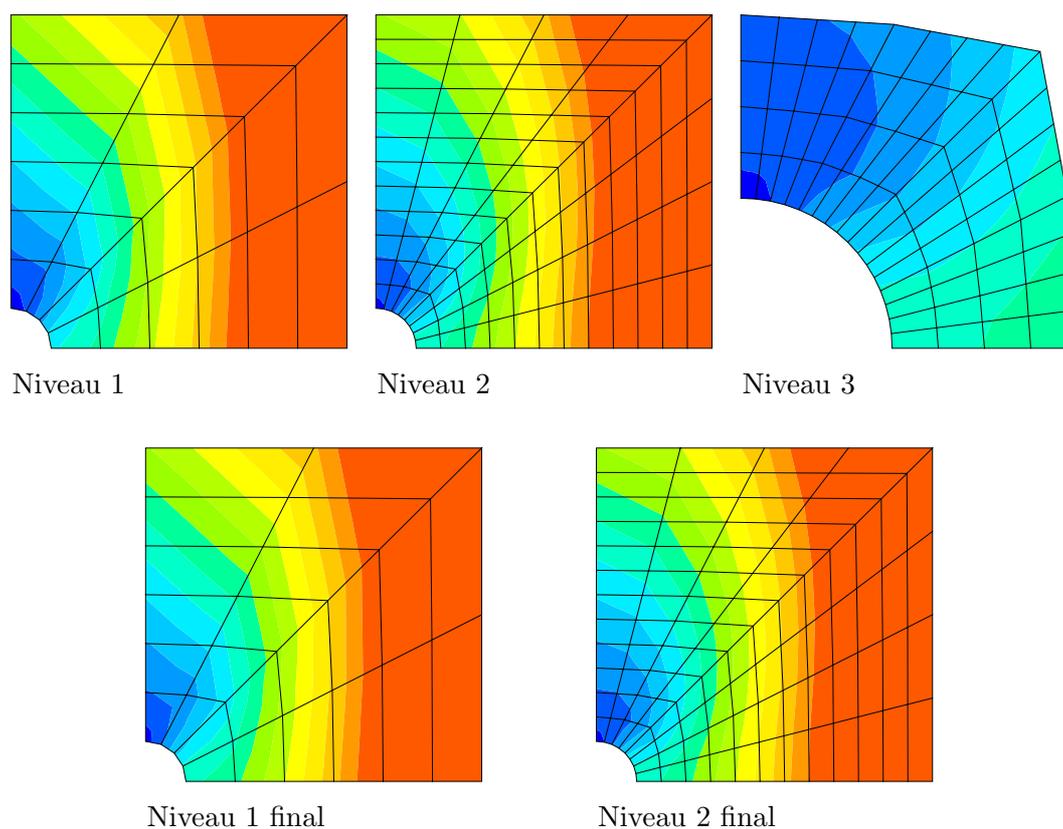


FIG. 5.8 – *Champ de déplacement pour le premier incrément de chargement.*

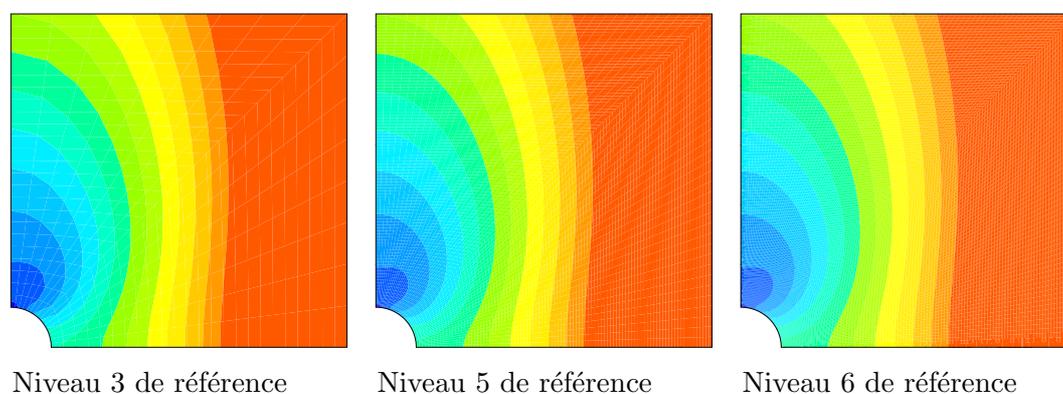


FIG. 5.9 – *Champ de déplacement de référence pour le premier incrément de chargement.*

5.4 Synthèse

Ce chapitre présente une adaptation de la “S(T)AR-method” pour modéliser des problèmes non linéaires. La non linéarité étudiée est liée au matériau. Il s’agit d’un matériau au comportement élastoplastique. Puisqu’une non linéarité même locale peut avoir une influence globale à l’échelle de la structure, la stratégie vue jusqu’alors (raffinement de maillage du grossier vers le fin) n’est plus adaptée. Il est nécessaire de mettre en place des cycles sur les niveaux créés. Cette technique est une méthode multigrille non linéaire appelée “FAS” (Full Approximation Scheme) utilisée suivant un schéma “FMG” (Full MultiGrid). La “S(T)AR-method” non linéaire propose un raffinement de maillage uniquement spatial. La discrétisation temporelle tenant compte de l’évolution quasi-statique du chargement reste constante.

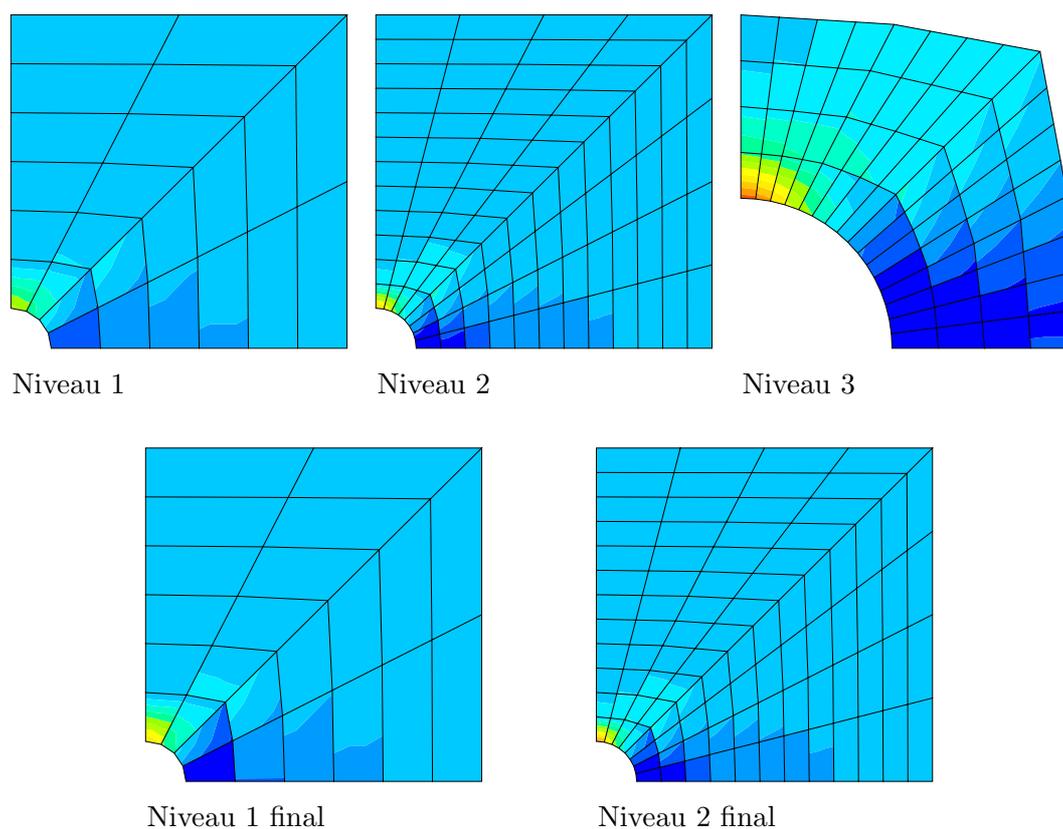


FIG. 5.10 – *Champ de déformation totale pour le premier incrément de chargement.*

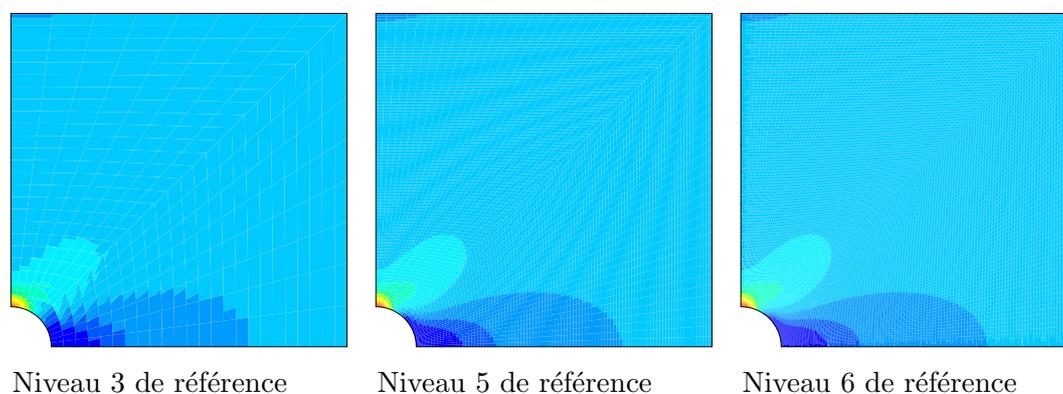


FIG. 5.11 – *Champ de déformation totale de référence pour le premier incrément de chargement.*

Ce chapitre présente préalablement la modélisation d'un matériau élastoplastique. L'algorithme de Newton adapté à la résolution de problèmes d'élastoplasticité est résumé sous la forme du tableau 5.1.

La partie suivante détaille la stratégie des V cycles non linéaire ("FAS") (tableau 5.2) utilisée sous la forme "FMG". La gestion des variables internes au cours des cycles est délicate. La stratégie "FMG" n'est pas utilisée pour ses capacités d'accélération de convergence de la résolution mais pour transmettre et propager l'état plastique de la structure d'un niveau à l'autre. La technique de raffinement de maillage spatial est identique à celle employée dans le chapitre consacré à la statique linéaire (partie 3.1.1).

Les résultats présentés sur les figures 5.8 à 5.15, et dans le tableau 5.3 montrent que l'utilisation

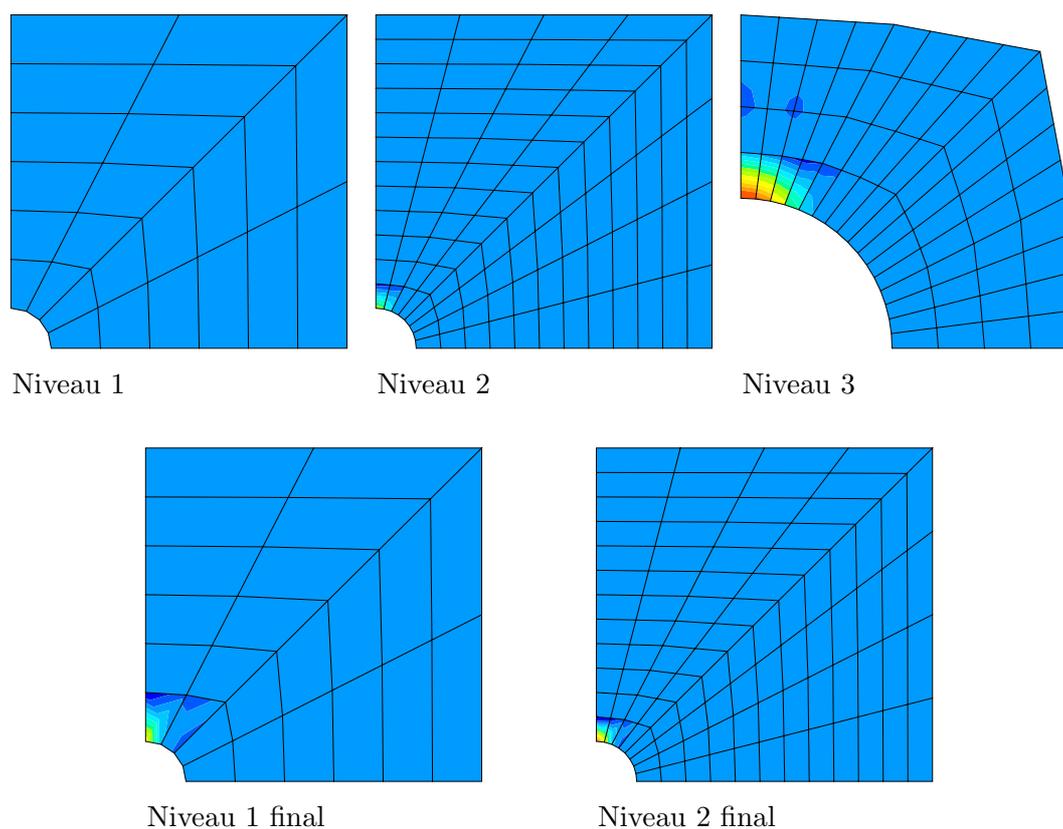


FIG. 5.12 – *Champ de déformation plastique pour le premier incrément de chargement.*

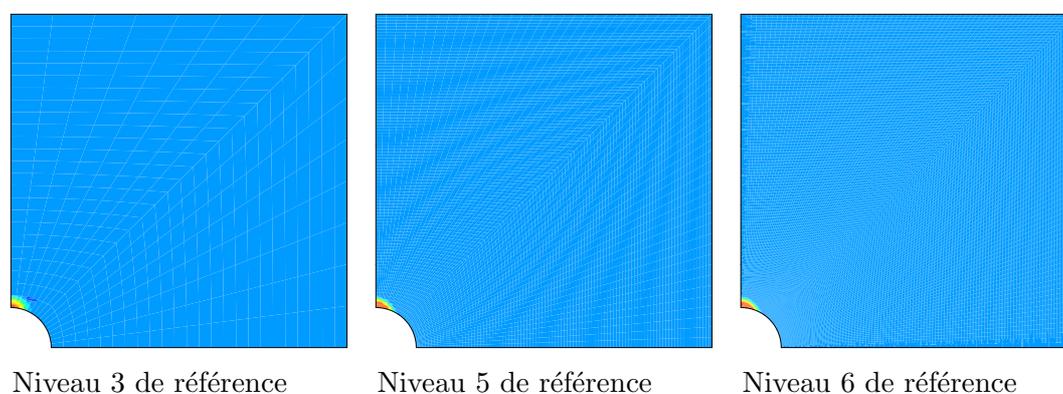


FIG. 5.13 – *Champ de déformation plastique de référence pour le premier incrément de chargement.*

du raffinement local de maillage identifie les zones plastifiées. Les cycles entre les grilles transmettent l'état plastique d'un niveau fin à un niveau grossier. Si la finesse des maillages est trop grossière pour modéliser fidèlement une zone plastique, la restriction de l'état plastique pendant les cycles permet aux niveaux grossiers de contenir une information (l'état plastique) qu'ils ne pourraient identifier par eux-mêmes. De plus la résolution multigrille permet d'anticiper la solution c'est-à-dire de prédire une solution de niveau plus fin sur un niveau grossier.

Finalement, une stratégie de calcul automatique à précision contrôlée est proposée pour des problèmes de structures quasi-statiques à comportement non linéaire. Cette approche a deux objectifs.

D'une part la stratégie développée doit être capable de maîtriser automatiquement la qualité

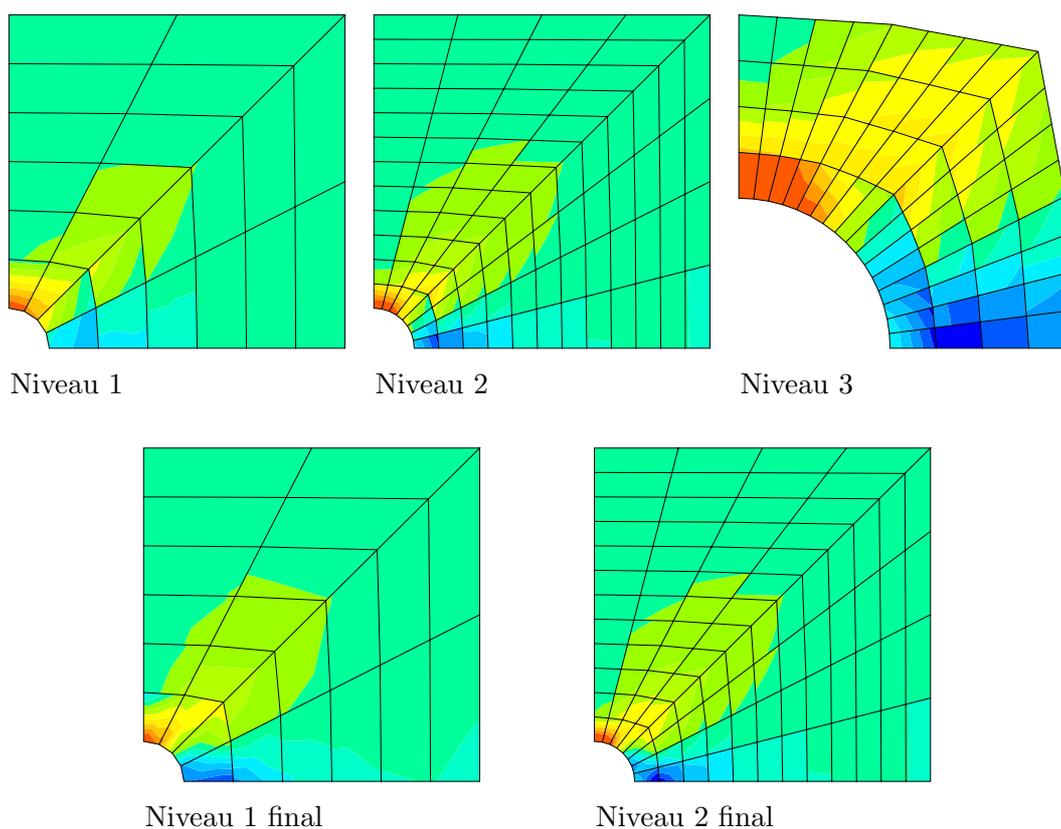


FIG. 5.14 – *Champ de contrainte de Von Mises pour le premier incrément de chargement.*

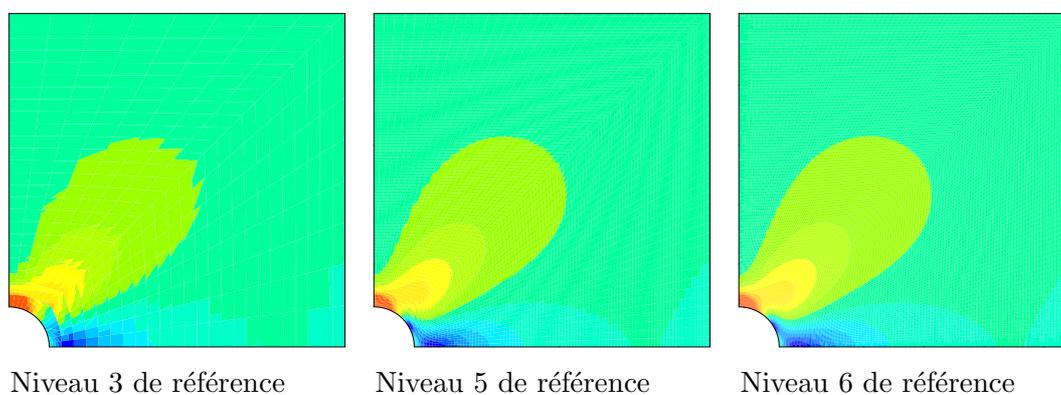


FIG. 5.15 – *Champ de contrainte de référence pour le premier incrément de chargement.*

des simulations non linéaires.

D'autre part elle doit apporter des outils à l'ingénieur pour pallier la difficulté de définir des modèles discrets adaptés à la résolution des problèmes non linéaires, tant sur la finesse des maillages (effet d'échelle) que sur la position au cours du temps des zones qui nécessitent un maillage fin.

Chapitre 6

Bilan - Perspectives

Bilan

La simulation numérique par la méthode des éléments finis fait partie des outils standards des ingénieurs mécaniciens. Elle permet à l'ingénieur de concevoir de nouveaux composants et/ou de prédire le comportement d'une structure existante. La complexité des structures étudiées (intégrant le comportement non linéaire du matériau et le chargement dynamique) engendre des maquettes numériques qui nécessitent des moyens de calcul très importants voire prohibitifs. Le développement de méthodes de simulation numérique performantes offrant la possibilité de réaliser de telles simulations est l'un des axes de recherche actuel dans le domaine de la dynamique non linéaire des structures. Une revue des différentes stratégies explorées pour répondre à cette problématique est proposée dans le chapitre 1. Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans cette lignée. Le chapitre 2 rappelle la modélisation d'un problème de référence par la méthode des éléments finis.

Le travail présenté dans ce mémoire a pour but d'optimiser le maillage spatial et temporel afin de répondre à une exigence de qualité concernant la solution donnant lieu à un effort de calcul minimal. Cet objectif se décline en deux volets. Le premier consiste à limiter le nombre de degrés de liberté d'un maillage spatial et le nombre de piquets de temps de la discrétisation temporelle d'un calcul. Le second consiste à maîtriser la précision de la solution numérique en tout point du domaine d'étude. Pour atteindre ces deux objectifs, une méthode de résolution avec plusieurs échelles d'espace et de temps, nommée "STAR-method", est mise en place. Il s'agit d'une méthode de raffinement de discrétisation spatiale et temporelle locale et automatique. Le sigle "STAR" correspond à l'expression anglaise : Space Time Automatic Refinement. Cette méthode propose une stratégie permettant d'identifier les zones où les discrétisations spatiale et temporelle ne sont pas suffisamment fines pour satisfaire le critère de précision requis. Elle s'appuie sur l'utilisation d'indicateurs d'erreurs comparant les solutions de deux grilles successives.

Les données d'entrée de la "STAR-method" sont la discrétisation spatiale et temporelle du premier niveau, le choix d'un indicateur d'erreur et la précision souhaitée sur les résultats. Le maillage final optimisé pour que la solution atteigne la précision requise n'est connu qu'à la fin du calcul.

L'apport d'une stratégie de type "STAR-method" est multiple. L'utilisateur n'intervient plus pour définir le maillage adapté à une précision donnée. La précision de la solution devient donc indépendante de son (in-) expérience. Le raffinement local de maillage permet de concentrer l'effort de résolution uniquement dans les zones spatiales et temporelles de la structure qui le nécessitent. La finesse du maillage s'adapte au cours de la résolution jusqu'à ce qu'elle atteigne une échelle pertinente. Le nombre de degrés de liberté et le nombre de piquets de temps sont réduits par rapport à une méthode classique. Enfin, la qualité de la solution est contrôlée au

cours de la résolution. La précision des résultats est connue et garantie à l'issue du calcul. La seule contrainte consiste à démarrer le processus par deux analyses spatio-temporelles grossières, nécessaires à l'évaluation de l'erreur pour le premier niveau. Cependant, lorsque le raffinement de maillage se produit sur le domaine de calcul complet, le surcroît en terme de coût de calcul ne peut excéder un tiers du coût total.

Pour adapter le maillage spatial et temporel d'une structure suivant la sollicitation à laquelle elle est soumise, une démarche automatique est indispensable. En effet, si le maillage adapté au calcul envisagé était connu au préalable, la description fine de la succession des maillages spatiaux et temporels prendrait beaucoup de temps. De plus, elle ne paraît pas réalisable bien qu'elle soit possible.

Au cours de ce mémoire, la "STAR-method" est développée en plusieurs étapes.

Première étape

La première étape consiste à développer la stratégie pour des problèmes de statique linéaire (chapitre 3). Dans ce type de modélisation le temps n'intervient pas. La méthode est alors désignée par "S(T)AR-method". La modélisation de problèmes statiques linéaires permet de présenter la stratégie de raffinement de la discrétisation spatiale. Le calcul est réalisé sur des maillages (appelés aussi niveaux ou grilles) de finesse croissante. Un indicateur d'erreur détermine l'erreur entre les solutions calculées sur deux grilles successives. La comparaison de l'erreur avec la précision souhaitée désigne les éléments finis à sous-découper. Les éléments finis créés constituent le niveau suivant. Si ce niveau est local (c'est-à-dire qu'il ne recouvre pas l'intégralité du niveau précédent), la frontière du maillage spatial $\partial\Omega$ se décompose en deux types de bords classiques $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$ et un nouveau type $\partial_{1*}\Omega$. Sur ce dernier bord, la continuité du champ de déplacement est imposée à la frontière entre deux niveaux.

Quatre indicateurs d'erreurs sont testés. Ils sont respectivement définis à partir des champs de déplacement, de contrainte, de densité d'énergie et d'énergie. L'utilisation de ces indicateurs d'erreurs sur différents cas tests montre qu'ils ne convergent pas tous avec le même ordre. L'ordre de convergence d'un indicateur d'erreur dépend de la grandeur sur laquelle il est construit. De plus, il dépend de la "régularité" du problème traité. Une plaque trouée bidimensionnelle sollicitée en traction est un cas régulier alors que celui d'une plaque fissurée bidimensionnelle ne l'est pas. Une singularité modifie l'ordre de convergence d'un indicateur d'erreur. Une singularité de type fissure conduit à la divergence des indicateurs d'erreurs basés sur les champs de contrainte et de densité d'énergie alors que ceux basés sur les champs de déplacement et d'énergie convergent. L'indicateur d'erreur le plus pertinent du point de vue mécanique est basé sur l'énergie car cette grandeur est toujours finie pour les problèmes traités. Le comportement d'une fissure dépend de l'échelle à laquelle elle est considérée. Un trou oblong de rayon r se comporte à l'échelle de la structure comme une fissure lorsque les éléments finis de longueur caractéristique h sont suffisamment grossiers (c'est-à-dire tant que $r/h < 3$). Il se comporte comme un trou circulaire "régulier" lorsque le rapport $r/h > 6$. Le changement de comportement se produit lorsque le rapport r/h évolue entre 3 et 6.

Les études numériques menées sur différents cas tests montrent que la précision des résultats obtenus avec la méthode de raffinement de maillage automatique correspond à celle requise. La qualité de la solution est contrôlée (voir annexe C). De plus, le gain réalisé en nombre de degrés de liberté sur le maillage final résultat du raffinement automatique par rapport au maillage de référence est au minimum de 50 % et peut atteindre plus de 90 %. En ce sens, la "S(T)AR-method" optimise le maillage de la structure étudiée par rapport à la précision souhaitée sur la solution. D'autres simulations montrent que l'influence du maillage de niveau 1 sur le calcul disparaît avec le raffinement. Le choix du maillage grossier n'a pas d'influence sur la qualité

de la solution lorsqu'elle a convergé. Pour atteindre une précision donnée, l'algorithme raffine automatiquement le maillage jusqu'à une taille de maille indépendante de la taille de maille initialement choisie.

Deuxième étape

La seconde étape développe la "STAR-method" pour des problèmes de dynamique linéaire (chapitre 4). Les discrétisations spatiales et temporelles sont couplées en introduisant le concept de domaine espace temps élémentaire. Un domaine espace temps élémentaire peut être représenté sous la forme d'un diagramme composé de la discrétisation spatiale sur l'axe horizontal et de la discrétisation temporelle sur l'axe vertical. Les maillages spatial et temporel de chaque niveau sont construits en utilisant ce concept. Le principe du raffinement du maillage spatial et temporel est semblable à celui utilisé pour les problèmes de statique linéaire. Des domaines espace temps de finesse croissante sont créés au cours du calcul. Les solutions obtenues sur deux domaines de niveaux successifs sont comparées pour évaluer l'erreur associée à chaque domaine espace temps élémentaire du niveau le plus grossier. Cette estimation est réalisée par l'intermédiaire d'un indicateur d'erreur basé soit sur le champ de déplacement soit sur l'énergie. La comparaison de l'erreur à la précision souhaitée désigne les domaines espace temps du niveau le plus fin à sous-découper. Les domaines ainsi créés constituent le niveau suivant. Si ce nouveau niveau est local, des conditions aux limites (spatiales et temporelles) supplémentaires sont nécessaires pour calculer le vecteur d'état associé à la nouvelle discrétisation. Le choix de ces conditions est guidé par la conservation des efforts de liaison à l'interface de deux niveaux successifs. L'étude de la stabilité du schéma montre que la continuité du champ de vitesse à l'interface de deux niveaux successifs est requise. Cette continuité garantit la conservation de l'énergie liée aux efforts de liaison.

Les données d'entrée et de sortie contiennent la valeur du pas de temps du niveau 1 en plus de celles de la méthode développée dans l'étape précédente (statique linéaire).

Les études numériques montrent que l'utilisation d'une telle stratégie permet d'obtenir un maillage spatial final dont la zone de plus forte densité suit la propagation et la réflexion des ondes dans la structure. Bien que le raffinement de domaine espace temps ne soit réalisé que d'un niveau grossier vers un niveau plus fin, le maillage spatial en un point fixe de l'espace passe successivement de grossier à fin et de fin à grossier et ainsi de suite. Les éléments fins deviennent successivement plus fins puis plus grossiers sans utiliser de procédure spécifique "d'enlèvement" d'éléments. C'est l'une des caractéristiques originales de la stratégie proposée.

Le contrôle de la qualité de la solution au cours du calcul est une autre caractéristique de la méthode. Si l'ordre de convergence de la méthode est suffisant (voir annexe C), les résultats satisfont la précision demandée.

Enfin, le bilan énergétique numérique calculé a posteriori pour un cas test confirme la conservation de l'énergie au cours de la résolution.

Troisième étape

La troisième et dernière étape développée dans ce travail adapte la stratégie présentée jusqu'à présent aux problèmes quasi-statiques non linéaires (chapitre 5). Cette analyse met en oeuvre la "S(T)AR-method" à chaque évolution du chargement. La non linéarité considérée est liée au comportement du matériau. Il s'agit d'un matériau élasto-plastique à écrouissage cinématique. Pour un chargement donné (ou pour un instant donné), le raffinement du maillage est uniquement spatial. Une non linéarité locale peut avoir une influence à l'échelle globale de la structure. La prise en compte du comportement non linéaire du matériau conduit à mettre en place des cycles sur les niveaux créés ("aller-retours" itératifs entre les grilles). Cette technique est une méthode multigrille non linéaire appelée "FAS" (Full Approximation Scheme) utilisée suivant un schéma "FMG" (Full MultiGrid). La gestion des variables internes au cours des cycles est

délicate. La stratégie FMG n'est pas utilisée pour ses capacités d'accélération de convergence de la résolution mais pour transmettre et propager l'état plastique de la structure d'un niveau à l'autre. La technique de raffinement de maillage spatial est identique à celle employée dans le chapitre consacré à la statique linéaire.

Les résultats présentés montrent que l'utilisation du raffinement de maillage local identifie les zones plastifiées. Les cycles entre les grilles transmettent l'état plastique d'un niveau fin à un niveau grossier. Si la finesse des maillages est trop grossière pour modéliser fidèlement une zone plastique, la transmission de l'état plastique pendant les cycles permet aux niveaux grossiers de contenir une information (l'état plastique) qu'ils ne pourraient identifier par eux-mêmes.

Le raffinement local de maillage concentre l'effort de résolution uniquement dans les régions de la structure qui le nécessitent.

Perspectives

Amélioration de la “S(T)AR-method” non linéaire

La vitesse de convergence de la “S(T)AR-method” non linéaire n'est pas améliorée par l'utilisation de la technique “FAS” en version “FMG”. L'une des difficultés dans la modélisation de problèmes non linéaires est de rendre compte d'un comportement plastique moyen lors du passage d'une grille fine à une grille grossière. Comment traduire l'état plastique d'un élément fini parent si seulement l'un des éléments finis enfants est plastique ? Quel modèle faut-il développer pour que l'élément parent ait le même comportement global que ses éléments enfants ?

De plus, les non linéarités envisagées jusqu'alors sont de type matériau. Comment adapter la méthode pour d'autres types de non linéarité (géométrique, liée à la présence de pièces en contact...) ?

Développement de la “STAR-method” non linéaire

Sur la base des étapes déjà mises en place, la stratégie de raffinement espace temps pour des problèmes de dynamique non linéaire reste à développer. Il paraît possible d'utiliser une stratégie “FMG” en raisonnant non plus avec les maillages spatiaux mais avec les domaines espace temps.

Choix de l'indicateur de raffinement de maillage

Dans ce travail, les indicateurs choisis pour sous-découper un élément fini ou un domaine espace temps élémentaire sont basés sur des indicateurs d'erreurs. Que se passe-t-il si d'autres mesures d'erreurs sont utilisées ? Quels seraient les sous-découpages obtenus si l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz et Ziu était utilisé ? Il est important de noter que l'utilisation de tels estimateurs d'erreurs coûte cher lors de l'évaluation de l'erreur. Si ce coût supplémentaire est trop important, le choix d'un tel indicateur peut être pénalisant pour la “STAR-method”.

Il serait également intéressant d'associer à une mesure d'erreur d'autres types de critères, par exemple des critères basés sur l'endommagement du matériau.

Une investigation pourrait être menée en vue de découpler la discrétisation spatiale de la discrétisation temporelle. Dans cette configuration, il est nécessaire de proposer un indicateur différent pour raffiner la discrétisation spatiale et la discrétisation temporelle.

Investigation sur les schémas d'intégration temporelle

Afin d'améliorer l'algorithme, il serait possible d'étudier et de tester différents schémas numériques avec la “STAR-method”. Comment se comporte la méthode de raffinement automatique de maillage si le schéma numérique utilisé est explicite ? Une étude succincte du schéma de la

différence centrée pour des problèmes unidimensionnels montre qu'aucune difficulté n'est à attendre, hormis l'évaluation du pas de temps critique pour des problèmes de dimension supérieure à un. Cependant, cette étude non présentée dans ce mémoire reste à développer de manière plus approfondie.

Les résultats présentés dans le chapitre 4 montrent que le cumul de l'erreur du schéma de l'accélération moyenne en fonction du temps conduit à l'élargissement des domaines espace temps au cours du temps sur chaque niveau. Il serait intéressant d'utiliser d'autres schémas d'intégration numérique afin de limiter cette dérive. Les schémas de Galerkin discontinu (annexe B) ainsi que ceux de Krenk [67] pourraient être testés car leur ordre de convergence est plus élevé que ceux de la famille de Newmark.

Noels et al. [85, 86] a étudié la bascule des schémas explicites vers implicites et vice versa pour des calculs dynamiques où la discrétisation spatiale reste constante au cours du temps. Son travail montre qu'il est possible de réaliser un gain considérable sur le temps des simulations numériques par rapport à une simulation classique sans bascule. Dans un premier temps, il serait intéressant de coupler cette stratégie de bascule de schémas d'intégration avec celle d'un calcul par sous-domaine. Chaque sous-domaine est défini avec sa propre discrétisation spatiale et temporelle et son propre schéma d'intégration temporelle. La bascule entre les différents types de schéma serait indépendante pour chaque sous-domaine. Dans un second temps, le couplage de la bascule de schéma peut être envisagé avec un raffinement de maillage automatique. Dans cette configuration, les régions où les discrétisations spatiale et temporelle évoluent ne sont pas connues à l'avance. Le type de schéma (explicite ou implicite) s'adapterait aux discrétisations spatiales et temporelles de chaque région.

Développement de stratégies adaptatives pour la méthode X-FEM

Le problème de l'adaptation de maillage se pose pour les méthodes alternatives à la méthode des éléments finis. Rannou et al. [95] développe actuellement ce type de stratégie avec la méthode X-FEM pour modéliser la propagation de fissure.

Applications

Les cas tests présentés sont académiques afin de tester et d'éprouver la méthode pour des simulations dont la solution s'appréhende aisément. Bien entendu, l'objectif de ce travail est de développer à plus long terme une méthode capable de répondre aux attentes des ingénieurs. Les applications envisageables pour cette stratégie de résolution sont multiples.

Pour suivre l'évolution de la propagation d'une fissure, les méthodes classiques consistent à remailler intégralement la structure afin de modéliser sa propagation. Un remaillage local de type "STAR-method" remplacerait avantageusement les efforts nécessaires au remaillage en captant automatiquement le front de la fissure. Le nombre de degrés de liberté serait ainsi limité et le remaillage intégral à chaque pas de temps serait supprimé.

La modélisation de l'assemblage de pièces par soudage nécessite d'adapter le maillage au fur et à mesure de la création du cordon de soudure. Pour cette application un raffinement de maillage automatique semble adapté.

L'enlèvement de matière et la formation de copeaux dans les opérations d'usinage est un phénomène dynamique non linéaire multiéchelle. Sa modélisation par la stratégie développée semble donc pertinente.

Enfin, la dernière application soulignée correspond à celle présentée dans l'introduction de ce mémoire. Il s'agit de modéliser un impact dans l'entrée d'air d'un réacteur d'avion. Les temps de calcul de telles simulations sont très longs car les modèles comptent des milliers de degrés de liberté. De plus, les simulations actuelles nécessitent la détermination a priori des zones d'impacts contrairement à des simulations réalisées avec la "STAR-method". Cette méthode propose

une stratégie possible pour améliorer le temps de ces simulations en limitant le nombre de degrés de liberté et de piquets de temps tout en contrôlant la qualité des résultats.

D'une façon générale, l'approche proposée dans ce travail peut s'appliquer à tout type de calcul de structure dont le contrôle de la précision est souhaité.

Annexe A

Méthode du gradient conjugué pour la résolution d'un système linéaire

Cette annexe est un prolongement de la section 2.3 pour la résolution d'un système linéaire du type :

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{A.1})$$

où la matrice \mathbf{A} est aussi une matrice symétrique, définie positive de dimension n . \mathbf{x} représente le vecteur des inconnues et \mathbf{b} le vecteur du second membre connu.

A.1 Méthode générale

La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative. Le vecteur des inconnues \mathbf{x} est construit à chaque itération d'indice k comme une suite de vecteurs de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où $\mathbf{p}^{(k)}$ est la direction de recherche et $\alpha^{(k)}$ le pas à l'itération k .

La minimisation de la fonctionnelle $K(\mathbf{x})$ (équation (A.3)) est équivalente à la résolution de l'équation (A.1).

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad (\text{A.3})$$

La fonctionnelle erreur E_r définie à partir du résidu \mathbf{R} de l'équation (A.1) est décrite par l'équation (A.4).

$$E_r(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A.4})$$

Lorsque le système (A.1) est résolu, l'erreur $E_r(\mathbf{R})$ est nulle.

En remplaçant \mathbf{R} par sa définition dans l'expression (A.4), $E_r(\mathbf{x})$ s'écrit suivant (A.5). La quantité $\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}$ étant constante, la minimisation de $K(\mathbf{x})$ équivaut à celle de $E_r(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned} E_r(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) - \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La relation (A.6) est obtenue en reportant dans (A.5) la définition du vecteur $\mathbf{x}^{(k+1)}$ défini à l'itération $k + 1$.

$$\begin{aligned}
E_r(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)}))^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)})) \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{R} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{R} - \alpha^{(k)} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}) \\
&= E_r(\mathbf{x}^{(k)}) - \alpha^{(k)} \mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)} + \frac{(\alpha^{(k)})^2}{2} \mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

La méthode du gradient conjugué est basée sur la minimisation de $E_r(\mathbf{x})$ par rapport à $\alpha^{(k)}$. $\alpha^{(k)}$ est défini tel que le minimum de $E_r(\mathbf{x}^{(k)})$ par rapport à $\alpha^{(k)}$ soit nul.

$$\min_{\alpha^{(k)}} (E_r(\mathbf{x}^{(k)})) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}} \tag{A.7}$$

Les différentes méthodes du gradient se distinguent par le choix de la direction de recherche $\mathbf{p}^{(k)}$. Si $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}$, la méthode est simplement appelée méthode du gradient et la solution $\mathbf{x}^{(k+1)}$ est incrémentée de la manière suivante :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}} \mathbf{R}^{(k)} \tag{A.8}$$

Le gradient conjugué est construit afin de rendre les quantités $\mathbf{p}^{(k-1)}$ et $\mathbf{R}^{(k)}$ orthogonales.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{R}^{(k)} &= \mathbf{p}^{(k-1)T} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}) \\
&= \mathbf{p}^{(k-1)T} (\mathbf{b} - \mathbf{A} (\mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha^{(k-1)} \mathbf{p}^{(k-1)})) \\
&= \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{R}^{(k-1)} - \frac{\mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{R}^{(k-1)}}{\mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k-1)}} \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k-1)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.9}$$

La direction de recherche $\mathbf{p}^{(k)}$ est alors déterminée par :

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)} + \phi^{(k)} \mathbf{p}^{(k-1)} \tag{A.10}$$

où la quantité $\phi^{(k)}$ est choisie de manière à rendre maximum le coefficient de réduction de l'erreur $\theta^{(k)}$.

Le coefficient $\theta^{(k)}$ est déterminé dans la relation (A.11) où l'erreur $E_r(\mathbf{x}^{(k)})$ est écrite en utilisant la définition de $\alpha^{(k)}$.

$$\begin{aligned}
E_r(\mathbf{x}^{(k+1)}) &= E_r(\mathbf{x}^{(k)}) - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)})^2}{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}} \\
&= E_r(\mathbf{x}^{(k)}) \left(1 - \frac{(\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)})^2}{(\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}) (\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}^{(k)})} \right) \\
&= E_r(\mathbf{x}^{(k)}) (1 - \theta^{(k)})
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Pour minimiser l'erreur $E_r(\mathbf{x}^{(k+1)})$, $\theta^{(k)}$ doit être maximal. En utilisant la définition de $\mathbf{p}^{(k)}$ (équation (A.10)), $\theta^{(k)}$ devient :

$$\begin{aligned}
\theta^{(k)} &= \frac{(\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)} + \phi^{(k)} \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{R}^{(k)})^2}{(\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}^{(k)}) (\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{R}^{(k)} + (\phi^{(k)})^2 \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} + 2(\phi^{(k)})^2 \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{R}^{(k)})} \\
&= \frac{(\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)})^2}{(\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}^{(k)}) (\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{R}^{(k)} + (\phi^{(k)})^2 \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)} + 2(\phi^{(k)})^2 \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{R}^{(k)})}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

La quantité $\phi^{(k)}$ est choisie afin de rendre $\theta^{(k)}$ maximal. Pour cela le dénominateur de $\theta^{(k)}$ doit être minimal.

$$\phi^{(k)} = -\frac{\mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k-1)}} \tag{A.13}$$

L'intérêt de choisir $\mathbf{p}^{(k)}$ tel que $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)} + \phi^{(k)} \mathbf{p}^{(k-1)}$ vient du fait que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k-1)} &= \mathbf{p}^{(k-1)T} \mathbf{A} (\mathbf{R}^{(k)} + \phi^{(k)} \mathbf{p}^{(k-1)}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Les vecteurs $\mathbf{p}^{(k)}$ sont dits A-conjugués. Ils forment une base de l'espace considéré. En théorie, la méthode du gradient conjugué est une résolution directe car la solution est obtenue en exactement n itérations.

Par commodité, la quantité $\phi^{(k)}$ est généralement exprimée uniquement en fonction des résidus.

$$\phi^{(k)} = \frac{\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{R}^{(k-1)T} \mathbf{R}^{(k-1)}} \tag{A.15}$$

Finalement, le gradient conjugué s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^{(k)} &= \mathbf{R}^{(k)} + \frac{\mathbf{R}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{R}^{(k-1)T} \mathbf{R}^{(k-1)}} \mathbf{p}^{(k-1)} \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}} \mathbf{p}^{(k)}
\end{aligned}$$

A.2 Conditionnement

La vitesse de convergence du gradient conjugué dépend fortement du conditionnement de la matrice \mathbf{A} . Si cette matrice est mal conditionnée, il est possible de transformer le système initial (A.1) en un système équivalent mieux conditionné du type :

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b} \tag{A.16}$$

La matrice \mathbf{A} est dite pré-conditionnée. Si le conditionneur \mathbf{Q} est symétrique défini positif, facile à inverser et "proche" de \mathbf{A} alors $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}$ est mieux conditionné.

Les choix extrêmes de \mathbf{Q} sont :

- $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ (\mathbf{Q} est la matrice identité). Dans ce cas la matrice \mathbf{Q} est facile à inverser mais le conditionnement de $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}$ est le même que celui de \mathbf{A} .
- $\mathbf{Q} = \mathbf{A}$. Dans ce cas $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}$ est bien conditionnée car $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{1}$, mais l'obtention de \mathbf{Q} est très coûteuse.

La difficulté est de rendre $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$ symétrique définie positive. Le système de référence (A.16) est donc transformé de la façon suivante :

$$\underbrace{\mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1/2}}_{\mathbf{A}_1} \underbrace{\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{x}}_{\mathbf{x}_1} = \underbrace{\mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}_1} \quad (\text{A.17})$$

La matrice $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1/2}$ est bien symétrique définie positive.

Les trois conditionneurs classiques sont :

- le conditionneur de Jacobi : $\mathbf{Q} = \mathbf{D}$,
- le conditionneur de Gauss Seidel : $\mathbf{Q} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{L}^T)$,
- le conditionneur SSOR : $\mathbf{Q} = \frac{\omega}{\omega(2-\omega)}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L}^T)$.

Les matrices \mathbf{D} et \mathbf{L} sont définies telles que $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{L}^T$.

\mathbf{D} contient uniquement les termes diagonaux de \mathbf{A} .

\mathbf{L} contient les termes de la partie triangulaire inférieure de \mathbf{A} , sa diagonale est composée de zéros.

En pratique, \mathbf{Q} n'est pas inversée. A chaque itération k , le système $\mathbf{Q}\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}$ est résolu.

A.3 Algorithme

L'algorithme du gradient conjugué pré-conditionné est présenté dans la table A.1. Le préconditionneur est la matrice \mathbf{A} diagonalisée suivant la méthode présentée par la relation (2.74).

A.4 Gradient conjugué par bloc

L'algorithme du gradient conjugué est constitué uniquement par des multiplications de matrices avec des vecteurs. Cet algorithme est donc adapté pour résoudre un système matriciel par bloc du type :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

où \mathbf{A} , \mathbf{V} , \mathbf{F} représentent des matrices. La méthode du gradient conjugué par bloc repose sur la même démonstration que celle du gradient conjugué classique présenté précédemment (section A.1). L'algorithme est détaillé dans le tableau A.2.

Dans le tableau A.2 les matrices \mathbf{N} et \mathbf{G} sont des matrices diagonalisées suivant la technique (2.74) telle que :

- la matrice \mathbf{N} correspond à la diagonalisation de la somme des matrices \mathbf{A} et \mathbf{V}^T ,
- la matrice \mathbf{G} correspond à la diagonalisation de la somme des matrices \mathbf{V} et \mathbf{F} .

1 - Initialisation de la résolution $k = 0$	$\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$
2 - Pré-conditionnement	$\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}^{(0)}$
3 - Calcul de la direction de recherche $\mathbf{p}^{(0)}$	$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$
4 - Passage à l'itération $k = k + 1$	
5 - Détermination de $\alpha^{(k)}$	$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{z}^{(k)T}\mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T}\mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)}}$
6 - Actualisation de l'inconnue $\mathbf{x}^{(k)}$	$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \alpha^{(k)}\mathbf{p}^{(k)}$
7 - Calcul du résidu $\mathbf{R}^{(k)}$	$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$
8 - Pré-conditionnement	$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}^{(k)}$
9 - Calcul du paramètre $\phi^{(k)}$	$\phi^{(k)} = \frac{\mathbf{z}^{(k)T}\mathbf{R}^{(k)}}{\mathbf{z}^{(k-1)T}\mathbf{R}^{(k-1)}}$
10 - Calcul de la direction de recherche $\mathbf{p}^{(k)}$	$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{z}^{(k)} + \phi^{(k)}\mathbf{p}^{(k-1)}$
11 - Calcul d'une erreur err	
12 - Comparaison de l'erreur err au critère d'arrêt ϵ	
	Si $err > \epsilon$ alors retour en 4.
	Si $err < \epsilon$ le calcul est terminé.

TAB. A.1 – *Algorithme du gradient conjugué pré-conditionné de référence pour résoudre un système d'équations linéaires.*

1 - Initialisation de la résolution $k = 0$

$$\mathbf{R}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^{(0)} \\ \mathbf{R}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{(0)} \\ \mathbf{x}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 - (\mathbf{A} \mathbf{x}_1^{(0)} + \mathbf{V}^T \mathbf{x}_2^{(0)}) \\ \mathbf{b}_2 - (\mathbf{V} \mathbf{x}_1^{(0)} + \mathbf{F} \mathbf{x}_2^{(0)}) \end{pmatrix}$$

2 - Pré-conditionnement

$$\mathbf{z}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^{(0)} \\ \mathbf{z}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R}_1^{(0)} \\ \mathbf{G}^{-1} \mathbf{R}_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

3 - Calcul de la direction de recherche $\mathbf{p}^{(0)}$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(0)} \\ \mathbf{p}_2^{(0)} \end{pmatrix} = \mathbf{z}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^{(0)} \\ \mathbf{z}_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

4 - Passage à l'itération $k = k + 1$

5 - Détermination de $\alpha^{(k)}$

$$\alpha^{(k)} = \frac{\mathbf{z}_1^{(k)T} \mathbf{R}_1^{(k)} + \mathbf{z}_2^{(k)T} \mathbf{R}_2^{(k)}}{\mathbf{p}_1^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}_1^{(k)} + 2\mathbf{p}_1^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}_2^{(k)} + \mathbf{p}_2^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{p}_2^{(k)}}$$

6 - Actualisation de l'inconnue $\mathbf{x}^{(k)}$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{(k-1)} \\ \mathbf{x}_2^{(k-1)} \end{pmatrix} + \alpha^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(k)} \\ \mathbf{p}_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

7 - Calcul du résidu $\mathbf{R}^{(k)}$

$$\mathbf{R}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^{(k)} \\ \mathbf{R}_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 - (\mathbf{A} \mathbf{x}_1^{(k)} + \mathbf{V}^T \mathbf{x}_2^{(k)}) \\ \mathbf{b}_2 - (\mathbf{V} \mathbf{x}_1^{(k)} + \mathbf{F} \mathbf{x}_2^{(k)}) \end{pmatrix}$$

8 - Pré-conditionnement

$$\mathbf{z}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^{(k)} \\ \mathbf{z}_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R}_1^{(k)} \\ \mathbf{G}^{-1} \mathbf{R}_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

9 - Calcul du paramètre $\phi^{(k)}$

$$\phi^{(k)} = \frac{\mathbf{z}_1^{(k)T} \mathbf{R}_1^{(k)} + \mathbf{z}_2^{(k)T} \mathbf{R}_2^{(k)}}{\mathbf{z}_1^{(k-1)T} \mathbf{R}_1^{(k-1)} + \mathbf{z}_2^{(k-1)T} \mathbf{R}_2^{(k-1)}}$$

10 - Calcul de la direction de recherche $\mathbf{p}^{(k)}$

$$\mathbf{p}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(k)} \\ \mathbf{p}_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^{(k)} \\ \mathbf{z}_2^{(k)} \end{pmatrix} + \phi^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(k-1)} \\ \mathbf{p}_2^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

11 - Calcul d'une erreur err

12 - Comparaison de l'erreur err au critère d'arrêt ϵ

Si $err > \epsilon$ alors retour en 4.

Si $err < \epsilon$ le calcul est terminé.

TAB. A.2 – Algorithme du gradient conjugué pré-conditionné par bloc de référence pour résoudre un système d'équations linéaires.

Annexe B

Autre schéma d'intégration temporelle : Galerkin Discontinu en temps

Mise en garde : les notations utilisées ici sont spécifiques à cette annexe.

B.1 Principe

Le schéma de Galerkin Discontinu (GD) [76, 33, 34] en temps est un schéma d'intégration temporelle. La discrétisation de la dimension spatiale par la méthode des éléments finis permet de définir classiquement les matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} associées au système. La discrétisation de l'intervalle de temps est identique à la section 2.2.2. L'intervalle de temps d'étude $[0, T]$ est divisé en r pas de temps soit $r + 1$ instants. Le pas de temps Δt est choisi constant. Les efforts extérieurs sont définis à tout instant t_m , ils sont désignés par le vecteur \mathbf{f}_m . Dans cette annexe, le champ de vitesse est noté exceptionnellement \mathbf{v} , le champ de déplacement reste noté \mathbf{u} . La notation $\dot{\mathbf{u}}$ désigne la dérivée du champ \mathbf{u} par rapport au temps. Cette annexe se limite à la description du schéma de Galerkin Discontinu pour des problèmes de dynamique linéaire. Les forces internes sont donc directement écrites sous la forme $\mathbf{K} \mathbf{u}$.

Le schéma de Galerkin Discontinu autorise des discontinuités (ou des sauts) dans le champ de déplacement \mathbf{u} et dans le champ de vitesse \mathbf{v} comme indiqué sur la figure B.1. Sur cette figure, le vecteur \mathbf{q} représente aussi bien le champ de déplacement \mathbf{u} que le champ de vitesse \mathbf{v} . A chaque instant t_m , la fonction \mathbf{q} n'est pas bijective et les deux valeurs \mathbf{q}_m^- et \mathbf{q}_m^+ existent. Ces notations correspondent à la définition suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_m^- &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \mathbf{q}(t_m + \varepsilon) \\ \mathbf{q}_m^+ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{q}(t_m + \varepsilon)\end{aligned}$$

Le saut du champ \mathbf{q} à l'instant t_m est noté $[\mathbf{q}_m] = \mathbf{q}_m^+ - \mathbf{q}_m^-$.

L'algorithme de Galerkin Discontinu est établi à partir de l'équation de mouvement classique (B.1) additionnée d'une équation supplémentaire en vitesse (B.2) [34].

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u} \tag{B.1}$$

$$\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v} = 0 \tag{B.2}$$

Les équations (B.1) et (B.2) sont reformulées à l'aide d'une formulation faible en temps en introduisant deux types de fonctions poids \mathbf{w}_2 et \mathbf{w}_1 selon l'équation (B.3) où I_m représente

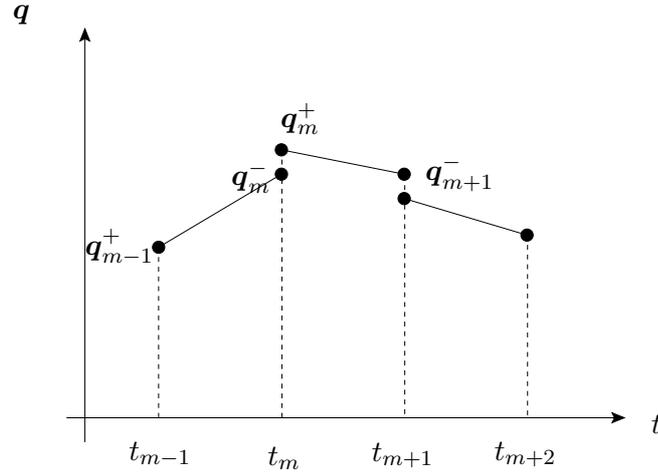


FIG. B.1 – Définition des variables associées aux champs de vitesse et de déplacement pour le schéma de Galerkin Discontinu.

l'intervalle $[t_m, t_{m+1}]$.

$$\int_{I_m} \mathbf{w}_1 (M \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}) dt + \int_{I_m} \mathbf{w}_2 \mathbf{K} (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) dt + \mathbf{w}_{2m} \mathbf{K} [\mathbf{u}_m] + \mathbf{w}_{1m} M [\mathbf{v}_m] = 0 \quad \forall \mathbf{w}_1, \forall \mathbf{w}_2 \quad (\text{B.3})$$

Les équations de l'algorithme de Galerkin Discontinu sont écrites en introduisant dans l'équation (B.3) une évolution linéaire des différentes quantités \mathbf{q} mises en jeu entre deux instants successifs t_m et t_{m+1} :

$$\mathbf{q} = \frac{t_{m+1} - t}{\Delta t} \mathbf{q}_m^+ + \frac{t - t_m}{\Delta t} \mathbf{q}_m^-$$

et en intégrant explicitement la relation ainsi obtenue.

En définissant les inconnues en déplacement et en vitesse suivant (B.4), le système à résoudre s'écrit sous la forme (B.5).

$$\begin{cases} \mathbf{v}_m^- = \mathbf{v}^- \\ \mathbf{u}_m^- = \mathbf{u}^- \\ \mathbf{u}_m^+ = \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}_{m+1}^- = \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{v}_m^+ = \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}_{m+1}^- = \mathbf{v}^2 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & -\frac{1}{6} \Delta t \mathbf{K} & -\frac{1}{6} \Delta t \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} & -\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{K} & -\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M^* & \frac{2}{3} M \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{3} \Delta t^2 M^* & M^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \mathbf{u}^- \\ \mathbf{K} \mathbf{u}^- \\ \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\begin{aligned} M^* &= M + \frac{2}{3}\Delta t^2 K \\ \mathbf{F1}^* &= \frac{5}{2} \mathbf{F1} + M \mathbf{v}^- - \frac{1}{3} \mathbf{F2} - \frac{2}{3}\Delta t K \mathbf{u}^- \\ \mathbf{F2}^* &= \mathbf{F1} + \mathbf{F2} + M \mathbf{v}^- - \Delta t K \mathbf{u}^- \end{aligned}$$

Les vecteurs $\mathbf{F1}$ et $\mathbf{F2}$ sont calculés en considérant une variation linéaire \mathbf{F} de l'effort extérieur \mathbf{f} entre les instants t_m et t_{m+1} (figure B.2).

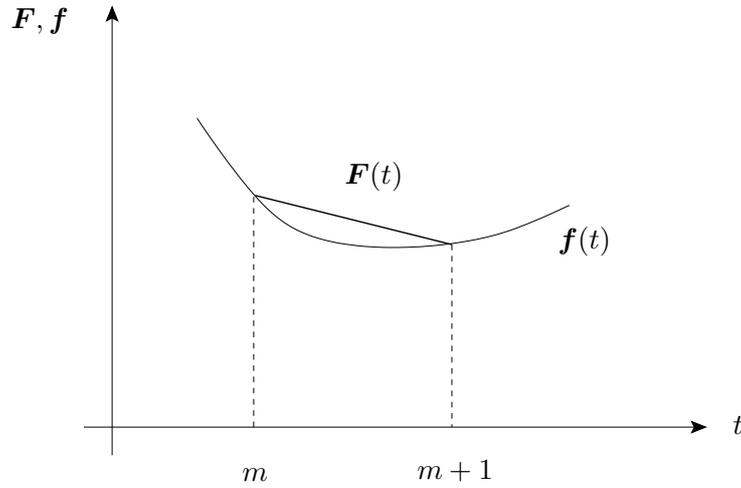


FIG. B.2 – Définition des différents efforts dans le schéma de Galerkin Discontinu.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \frac{(t_{m+1} - t)}{\Delta t} \mathbf{f}_m + \frac{(t - t_m)}{\Delta t} \mathbf{f}_{m+1} \\ \mathbf{F1} &= \int_{I_m} \frac{t_{m+1} - t}{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt \\ \mathbf{F2} &= \int_{I_m} \frac{t - t_m}{\Delta t} \mathbf{F}(t) dt \end{aligned}$$

L'expression finale des vecteurs $\mathbf{F1}$ et $\mathbf{F2}$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{F1} &= \Delta t \left(\frac{1}{3} \mathbf{f}_m + \frac{1}{6} \mathbf{f}_{m+1} \right) \\ \mathbf{F2} &= \Delta t \left(\frac{1}{6} \mathbf{f}_m + \frac{1}{3} \mathbf{f}_{m+1} \right) \end{aligned}$$

La première étape de résolution consiste à calculer \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 en extrayant de (B.5) le système :

$$\begin{bmatrix} M^* & \frac{2}{3} M \\ \frac{1}{3} \Delta t^2 M^* & M^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F1}^* \\ \mathbf{F2}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Or ce système n'est pas symétrique. Pour le rendre symétrique, il suffit d'invertir les deux lignes du système (B.6) qui devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\Delta t^2 M^* & M^* \\ M^* & \frac{2}{3}M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v2} \\ \mathbf{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F2}^* \\ \mathbf{F1}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Sous cette forme, ce système peut être résolu en utilisant la méthode du gradient conjugué par bloc présentée par le tableau A.2. Lorsque les vecteurs $\mathbf{v1}$ et $\mathbf{v2}$ sont connus, les vecteurs $\mathbf{u1}$ et $\mathbf{u2}$ sont calculés à partir des deux premières équations du système (B.5) simplifiées par \mathbf{K} .

$$\begin{aligned} \mathbf{u1} &= \mathbf{u}^- + \frac{1}{6}\Delta t \mathbf{v1} - \frac{1}{6}\Delta t \mathbf{v2} \\ \mathbf{u2} &= \mathbf{u}^- + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{v1} + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{v2} \end{aligned}$$

Les accélérations sont calculées a posteriori à partir du champ de vitesse.

Le schéma de Galerkin Discontinu définit deux fois plus d'inconnues qu'un schéma classique de type Newmark, la dimension du système à résoudre est donc deux fois plus grande.

L'algorithme de Galerkin Discontinu est synthétisé dans le tableau B.1.

B.2 Comparaison succincte avec le schéma de Newmark

Les caractéristiques du schéma d'intégration temporelle sont présentées en comparant, pour un cas test donné, les solutions calculées avec le schéma de Galerkin Discontinu avec celles obtenues avec un schéma de Newmark (schéma de l'accélération moyenne $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$).

Le cas test choisi modélise une poutre encastree à une extrémité et sollicitée en traction à l'autre. La géométrie de la poutre et l'évolution de l'effort appliqué en fonction du temps sont illustrés par la figure B.3. La longueur a de la poutre est de 8 m. L'effort F est de 10^8 N. Le matériau utilisé a un module d'Young de 211 GPa, une masse volumique de 7800 kg.m^{-3} et un coefficient de Poisson de 0.3. Le temps total de simulation est de 7.7 ms. Le pas de temps choisi est 1.5 fois le pas de temps critique. Les solutions comparées sont la vitesse en bout de poutre au cours du temps et l'évolution de la contrainte le long de la poutre à un instant donné.

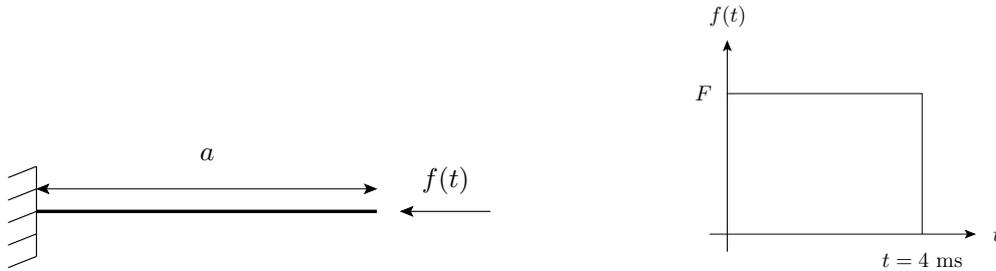


FIG. B.3 – à gauche : poutre encastree à une extrémité et sollicitée en traction à l'autre et à droite : allure de l'effort en fonction du temps.

La comparaison au cours du temps de la vitesse du noeud libre en bout de poutre est donnée sur la figure B.4.

1 - Calcul préalable

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \frac{2}{3}\Delta t^2 \mathbf{K}$$

2 - Initialisation de la résolution pour l'instant initial $m = 0$

$$\mathbf{u}_0^-, \quad \mathbf{u}_0^+, \quad \mathbf{u}_0^+, \quad \mathbf{v}_0^+$$

3 - Passage à l'itération $m = m + 1$

4 - Détermination des termes du second membre

$$\mathbf{F1}_m = \Delta t \left(\frac{1}{3} \mathbf{f}_m + \frac{1}{6} \mathbf{f}_{m+1} \right)$$

$$\mathbf{F2}_m = \Delta t \left(\frac{1}{6} \mathbf{f}_m + \frac{1}{3} \mathbf{f}_{m+1} \right)$$

$$\mathbf{F1}_m^* = \frac{5}{2} \mathbf{F1}_m + \mathbf{M} \mathbf{v}_{m-1}^- - \frac{1}{3} \mathbf{F2}_m - \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}_{m-1}^-$$

$$\mathbf{F2}_m^* = \mathbf{F1}_m + \mathbf{F2}_m + \mathbf{M} \mathbf{v}_{m-1}^- - \Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}_{m-1}^-$$

5 - Calcul des vitesses par la résolution du système par un gradient conjugué par bloc

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \Delta t^2 \mathbf{M}^* & \mathbf{M}^* \\ \mathbf{M}^* & \frac{2}{3} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v2}_m \\ \mathbf{v1}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F2}_m^* \\ \mathbf{F1}_m^* \end{pmatrix}$$

6 - Calcul des déplacements

$$\mathbf{u1}_m = \mathbf{u}_{m-1}^- + \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{v1}_m - \frac{1}{6} \Delta t \mathbf{v2}_m$$

$$\mathbf{u2}_m = \mathbf{u}_{m-1}^- + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{v1}_m + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{v2}_m$$

6 - Si $m = r$ le calcul est terminé sinon retour en 2

TAB. B.1 – *Algorithme de Galerkin Discontinu de référence pour résoudre un système d'équations linéaires.*

Les contraintes de compression calculées avec les deux schémas d'intégration temporelle sont représentées suivant la longueur de la poutre au temps $t = 7.7$ ms sur la figure B.5.

Sur ces graphiques, les améliorations apportées par le schéma de Galerkin Discontinu sont évidentes. Ce schéma filtre les hautes fréquences parasites d'origine numérique qui apparaissent en utilisant le schéma de Newmark aussi bien pour les vitesses que pour les contraintes.

Enfin, l'ordre de convergence de ce schéma (non montré ici) est de 3 alors qu'il est de 2 pour le schéma de Newmark [76].

Le schéma présenté dans cette annexe appartient à une famille de schémas beaucoup plus générale étudiée par Réthoré et al. [96].

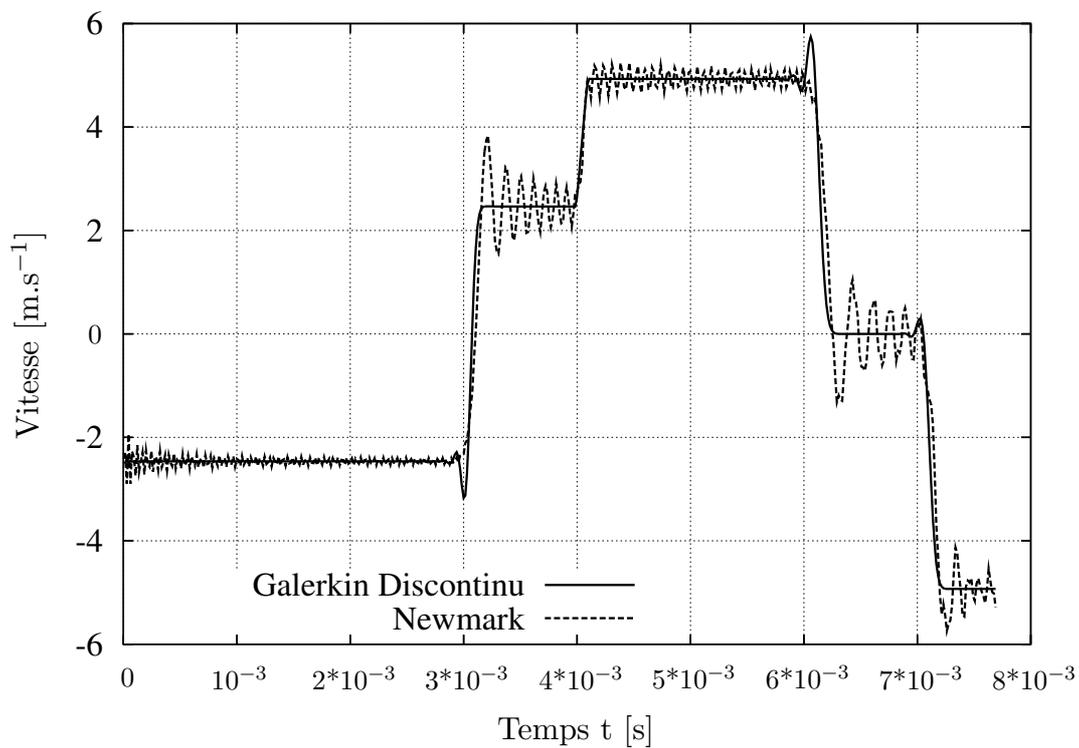
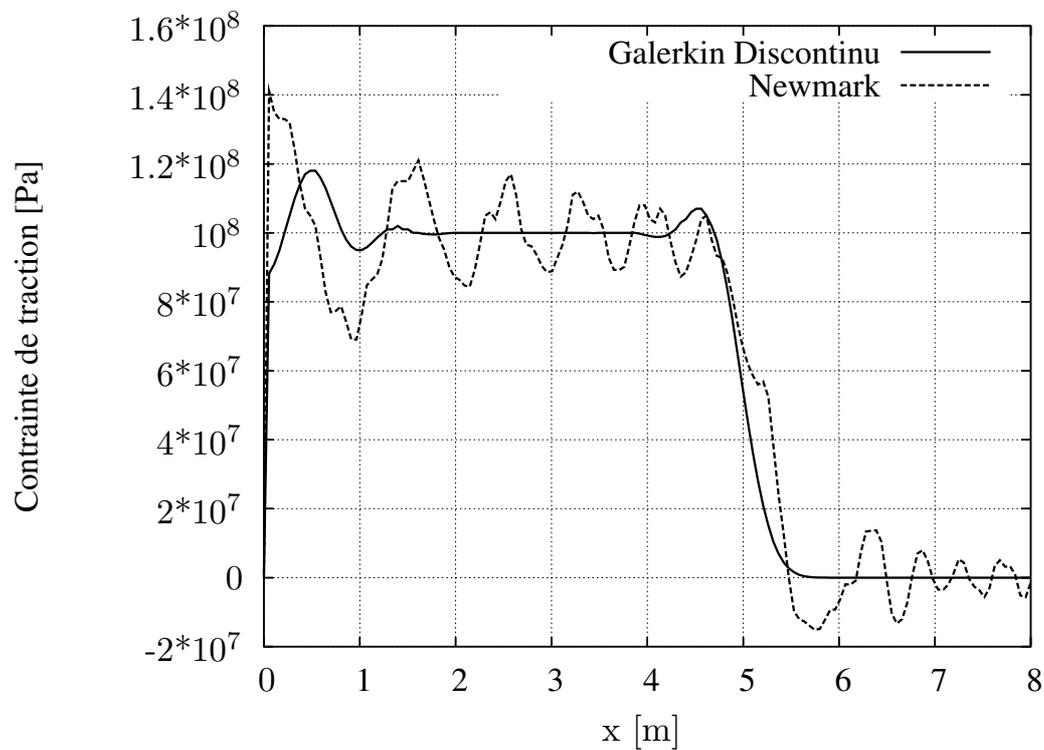


FIG. B.4 – Vitesse du noeud libre en bout de poutre au cours du temps.

FIG. B.5 – Contraintes de traction le long de la poutre à l'instant $t = 7.7$ ms.

Annexe C

Mesure d'erreur

La méthode des éléments finis mise en oeuvre dans ce mémoire correspond à une formulation en déplacement des équations d'équilibre. C'est une méthode convergente. Son ordre de convergence est noté d'ordre q . Si $\bar{\mathbf{u}}_h$ désigne la solution numérique en déplacement calculée sur un maillage de finesse h et \mathbf{u}_{ex} la solution continue exacte, la propriété de convergence s'écrit :

$$\exists h_0 > 0, \quad \forall h < h_0 \quad \|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\| \simeq C h^q \quad (\text{C.1})$$

\mathbf{u}_{ex} est la représentation de la solution continue exacte $\underline{\mathbf{u}}_{ex}$ discrétisée sur le maillage de finesse h . Sans cette discrétisation, la comparaison des solutions $\bar{\mathbf{u}}_h$ et $\underline{\mathbf{u}}_{ex}$ n'est pas envisageable. La figure 1.2 établit le lien entre les solutions $\underline{\mathbf{u}}_{ex}$ et $\bar{\mathbf{u}}_h$ en présentant les solutions associées à chaque modèle permettant de passer d'une description continue à une résolution discrète.

L'équation (C.1) contient trois inconnues.

- C représente une constante qui dépend entre autre du chargement et des conditions aux limites.
- \mathbf{u}_{ex} est la solution en déplacement exacte.
- q est l'ordre de convergence. Pour la méthode des éléments finis, l'ordre est supposé connu et égal à deux ($q = 2$). Il reste donc deux inconnues C et \mathbf{u}_{ex} .

En considérant une discrétisation spatiale deux fois plus grossière $2h$ par rapport à h , une deuxième équation est écrite. Le maillage de finesse $2h$ correspond au maillage grossier et celui de finesse h au maillage fin. Les relations de convergence pour les solutions calculées sur les maillages de finesesses h et $2h$ sont :

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\| &\simeq C (2h)^q \\ \|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\| &\simeq C h^q \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

A partir des deux relations (C.2) et connaissant la valeur de q ($q = 2$ pour la méthode des éléments finis), la constante C peut être déterminée. Si q n'est pas connu, il est nécessaire d'effectuer trois calculs sur des maillages de finesesses $2h$, h et $h/2$, pour estimer les valeurs de C et de q .

D'après (C.2), les quantités $\|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\|$ et $\|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\|$ sont liées par :

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\| &\simeq C (2h)^q \\ \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\| &\simeq 2^q C h^q \\ \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\| &\simeq 2^q \|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\| \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\| &= \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex} + \mathbf{u}_{ex} - \bar{\mathbf{u}}_h\| \\ &= \|(\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}) - (\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex})\| \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire, il est possible d'encadrer la quantité $\|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\|$ suivant l'équation (C.5). Cette relation permet de majorer la norme de l'erreur contenue dans la solution discrète $\bar{\mathbf{u}}_h$ par la norme de la différence des solutions numériques calculées sur les maillages $2h$ et h . Il est également possible d'encadrer la norme de l'erreur réalisée sur la solution discrète $\bar{\mathbf{u}}_{2h}$ par la norme de la différence des solutions numériques calculées sur les maillages $2h$ et h .

$$\begin{aligned} \left| \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\| - \|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\| \right| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\| \leq \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \mathbf{u}_{ex}\| + \|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\| \\ |C (2h)^q - C h^q| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\| \\ |C h^q(2^q - 1)| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\| \\ (2^q - 1) \|\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_{ex}\| &\leq \|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\| \end{aligned} \tag{C.5}$$

Remarque : l'inégalité (C.5) n'est pas stricte du fait de l'utilisation des approximations précédentes (C.2).

Les relations (C.5) permettent également d'estimer la constante C :

$$C \leq \frac{\|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\|}{|(2^q - 1)h^q|} \tag{C.6}$$

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, lorsque le problème traité est régulier, la solution en déplacement converge avec un ordre $q = 2$ si les fonctions d'interpolation des éléments finis sont linéaires. Donc la quantité $(2^q - 1)$ vaut 3. La mesure de $\|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\|$ est une limite supérieure de l'erreur exacte.

Lorsque le problème traité comporte localement une singularité (par exemple une fissure), la convergence de la méthode des éléments finis peut être affectée localement (proche de la singularité). Lorsque le problème contient une fissure, la convergence de la solution en déplacement obtenue avec la méthode à raffinement de maillage spatial local passe de 2 à 0.5 (voir sections 3.2.2 et 3.2.6). Proche de la singularité, la mesure de $\|\bar{\mathbf{u}}_{2h} - \bar{\mathbf{u}}_h\|$ n'est pas représentative de l'erreur exacte. De plus, les quantités calculées proches d'une singularité ne sont pas toujours fiables. Loin de la singularité, la convergence de la solution n'est pas affectée par celle-ci et l'ordre classique de convergence est toujours valable. Ainsi, loin d'une singularité, l'erreur exacte peut être estimée.

En conclusion, les mesures d'erreurs choisies sont basées sur la comparaison de quantités calculées par la méthode des éléments finis sur un maillage de finesse $2h$ (maillage grossier) et sur un maillage de finesse h (maillage fin). En se plaçant loin d'une singularité ils mesurent l'erreur exacte. La méthode de raffinement automatique de maillage permet donc de contrôler la qualité de la solution.

Annexe D

Démonstration de stabilité de la “STAR-method” dans le cas général

D’une façon générale, un domaine espace temps élémentaire n’est pas divisé en deux suivant chacune de ses dimensions X et T mais en p intervalles constants comme l’indique la figure D.1.

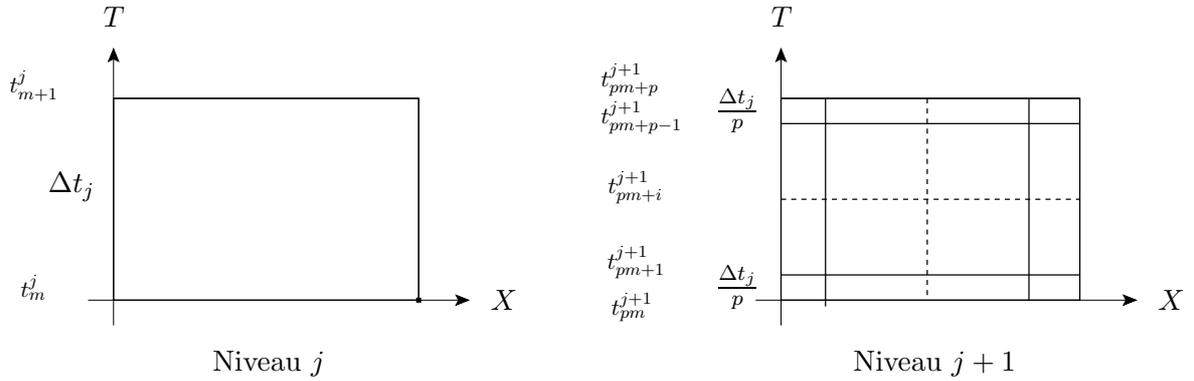


FIG. D.1 – *Domaine espace temps élémentaire Ω^j parent de niveau j et les domaines espace temps enfants engendrés sur le niveau $j + 1$.*

La démonstration présentée dans cette annexe suit la même démarche que celle de la partie 4.1.4 où $p = 2$.

La conservation du terme lié aux forces de liaison est écrite sur un domaine espace temps élémentaire parent de niveau j et les domaines espace temps enfants de niveau $j + 1$ engendrés par le sous-découpage du domaine parent. Les termes associés aux forces de liaison des niveaux j et $j + 1$ s’écrivent selon (D.1) et (D.2).

$$E_{fl}^j = \frac{1}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_m^j]^T [\mathbf{f} \mathbf{t}_m^j] \quad (\text{D.1})$$

$$E_{fl}^{j+1} = \sum_{i=1}^p \frac{p}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_{pm+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{f} \mathbf{t}_{pm+i-1}^{j+1}] \quad (\text{D.2})$$

La conservation des termes E_{fl}^j et E_{fl}^{j+1} liés aux forces d’interface repose sur l’interpolation linéaire des vitesses à l’interface entre le domaine parent Ω^j et le domaine enfant Ω^{j+1} . Cette hypothèse est décrite par l’équation (D.3).

$$\dot{\mathbf{u}}_{pm+i}^{j+1} = \frac{i}{p} \dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} + \left(1 - \frac{i}{p}\right) \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1} \quad \text{pour } i = \{0, 1, \dots, p\} \quad (\text{D.3})$$

En introduisant (D.3) dans le premier terme de E_{fl}^{j+1} , la quantité $[\dot{\mathbf{u}}_{pm+i-1}^{j+1}]$ devient (D.4).

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{u}}_{pm+i-1}^{j+1}] &= (\dot{\mathbf{u}}_{pm+i}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm+i-1}^{j+1}) \\ &= \frac{i}{p} \dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} + \left(1 - \frac{i}{p}\right) \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1} - \frac{i-1}{p} \dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \left(1 - \frac{i-1}{p}\right) \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1} \\ &= \frac{1}{p} (\dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1}) \end{aligned} \quad (D.4)$$

En utilisant la relation (D.4), le terme associé aux forces de liaison de niveau $j+1$ se développe de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{fl}^{j+1} &= \sum_{i=1}^p \frac{p}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_{pm+i-1}^{j+1}]^T [\mathbf{fl}_{pm+i-1}^{j+1}] \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{pm+i}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm+i-1}^{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1})^T \sum_{i=1}^p (\mathbf{fl}_{pm+i}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm+i-1}^{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1})^T \left((\mathbf{fl}_{pm+1}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm}^{j+1}) + (\mathbf{fl}_{pm+2}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm+1}^{j+1}) \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\mathbf{fl}_{pm+(p-1)}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm+(p-2)}^{j+1}) + (\mathbf{fl}_{pm+p}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm+(p-1)}^{j+1}) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{pm+p}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm}^{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{p(m+1)}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{p(m+1)}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm}^{j+1}) \end{aligned} \quad (D.5)$$

La relation (D.5) traduit le collage de maillage temporel entre les domaines espace temps élémentaires parents de niveau j et ceux enfants de niveau $j+1$. Les développements suivants présentent le collage de maillage spatial.

Les instants t_{pm}^{j+1} ($\forall m \in \{0, \dots, r_j\}$) sont les piquets de temps du niveau $j+1$ qui coïncident avec les instants t_m^j du niveau j . A ces instants donnés et sur la frontière commune aux niveaux j et $j+1$, le champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ est imposé de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1} \Big|_{\partial\Omega t_{pm}^{j+1}} = (\mathbf{Ps} \dot{\mathbf{u}}_m^j) \Big|_{\partial\Omega t_m^j} \quad \forall m \in \{0, \dots, r_j\} \quad (D.6)$$

où \mathbf{Ps} est un opérateur de prolongement spatial entre les niveaux j et $j+1$. L'opérateur \mathbf{Ps} étant choisi pour être compatible avec l'assemblage des matrices par la méthode des éléments finis, la relation entre les efforts de liaison des niveaux j et $j+1$ s'écrit :

$$\mathbf{fl}_m^j = \mathbf{Ps}^T \mathbf{fl}_{pm}^{j+1} \quad (D.7)$$

La compatibilité de l'opérateur \mathbf{Ps} avec l'assemblage des matrices par la méthode des éléments finis signifie que les matrices de masse et de raideur définies sur deux niveaux successifs sont liées par l'opérateur \mathbf{Ps} telles que :

$$\mathbf{M}_m^j = \mathbf{Ps}^T \mathbf{M}_{pm}^{j+1} \mathbf{Ps} \quad (D.8)$$

$$\mathbf{K}_m^j = \mathbf{Ps}^T \mathbf{K}_{pm}^{j+1} \mathbf{Ps} \quad (D.9)$$

L'introduction de la relation (D.6) dans (D.5) et l'utilisation de la définition (D.7) conduisent au développement (D.10). Sous les hypothèses énoncées dans cette section, le développement (D.10) montre que le terme associé aux forces de liaison se conserve entre deux niveaux successifs. Il n'y a ni dissipation, ni création d'“énergie” au cours du processus de raffinement de maillage spatial et temporel dans le cadre des schémas de Newmark pour $\gamma = 1/2$.

$$\begin{aligned}
E_{fl}^{j+1} &= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{pm+p}^{j+1} - \dot{\mathbf{u}}_{pm}^{j+1})^T (\mathbf{fl}_{pm+p}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\mathbf{Ps} (\dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j - \dot{\mathbf{u}}_m^j))^T (\mathbf{fl}_{pm+p}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j - \dot{\mathbf{u}}_m^j)^T \mathbf{Ps}^T (\mathbf{fl}_{pm+p}^{j+1} - \mathbf{fl}_{pm}^{j+1}) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} (\dot{\mathbf{u}}_{m+1}^j - \dot{\mathbf{u}}_m^j)^T (\mathbf{fl}_{m+1}^j - \mathbf{fl}_m^j) \\
&= \frac{1}{\Delta t_j} [\dot{\mathbf{u}}_m^j]^T [\mathbf{fl}_m^j] \\
&= E_{fl}^j
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Les conditions aux limites (spatiales et temporelles) appliquées aux frontières des domaines sous-découpés entre deux niveaux successifs doivent vérifier la continuité des vitesses pour assurer la stabilité de l'algorithme quelle que soit la valeur de p . Le collage temporel à l'interface de deux niveaux j et $j + 1$ est assuré par l'interpolation linéaire du champ de vitesse du niveau j vers le niveau $j + 1$. Le collage spatial est réalisé grâce à l'opérateur \mathbf{Ps} , choisi linéaire, compatible avec l'assemblage des matrices éléments finis.

Annexe E

Structure de données

E.1 Structure de données pour la statique linéaire et la quasi-statique non linéaire

La structure de données détaillée dans cette section est utilisée aussi bien pour modéliser des problèmes statiques linéaires que des problèmes quasi-statiques non linéaires.

La gestion de la filiation logique et géométrique entre les éléments finis parents et les éléments finis enfants nécessite la création d'une structure de données adaptée. Les informations reliant les éléments parents aux enfants reposent sur l'utilisation de pointeurs. Dans l'environnement Cast3m, la structure mise en oeuvre repose sur une Table. La Table des filiations parent-enfants s'appelle FILIA. Sa structure pour des éléments quadrangulaires ainsi que les informations qu'elle contient sont décrites par la figure E.1 où une flèche représente un pointeur. La dimension de la Table n'est pas figée à son initialisation. Elle s'adapte et s'agrandit au fur et à mesure du calcul. Elle ne diminue jamais car aucune procédure permettant d'enlever des éléments n'est nécessaire.

Voici un exemple d'utilisation de la Table FILIA. Si le maillage créé correspond à la figure E.2, l'élément mis en évidence appartient au niveau 4.

L'accès à la forme du second côté de l'élément 6 du niveau 3 se fait par la commande formalisée par *filia.4.6.2.forme.1*. Le nom de l'étiquette "1" contenu dans "forme" est arbitraire. Il pourrait prendre une autre appellation. Si *filia.4.6.2.forme.1* = 1 alors ce côté est un segment et les étiquettes "Xc", "Yc" et "R" n'existent pas. Si *filia.4.6.2.forme.1* = 2 alors ce côté appartient à un cercle dont le centre et le rayon sont donnés par les étiquettes "Xc", "Yc" et "R". L'orientation du cercle est donnée par les éléments parents le formant.

L'étiquette "enfant" donnant le numéro du premier enfant n'existe que si l'élément parent est sous-découpé. Dans le cas d'éléments bidimensionnels quadrangles, un élément parent a quatre enfants. Si la numérotation des éléments est ordonnée, le numéro du premier enfant *nf* permet de déduire les numéros des trois autres (*nf* + 1, *nf* + 2 et *nf* + 3). Les informations géométriques sur les éléments enfants se trouvent dans la même Table en incrémentant de un le numéro du niveau. Les conditions aux limites appliquées à chaque côté d'un élément sont définies par le code contenu dans l'étiquette "bc" suivant :

- 1 : définit un bord libre,
- 21 : définit un bord à déplacement U_x imposé,
- 22 : définit un bord à déplacement U_y imposé,
- 23 : définit un bord à déplacements U_x et U_y imposés,
- 3 : définit un bord à effort imposé.

Suivant la dimension spatiale (1D, 2D, 3D) du problème traité, la Table FILIA est adaptée. Un

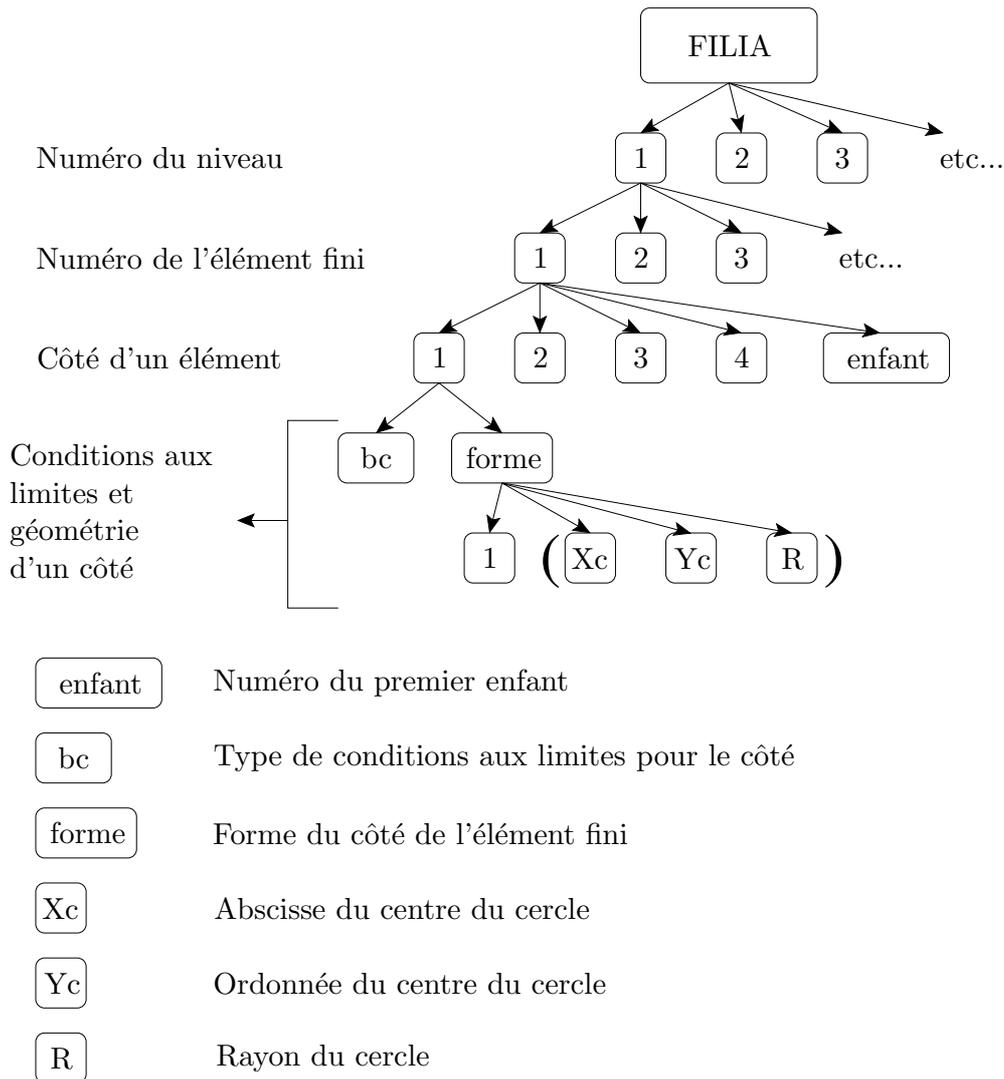


FIG. E.1 – Structure de données *FILIA* établissant la relation de filiation logique et géométrique entre les éléments finis parents et enfants en statique et quasi-statique. Dans cet exemple les éléments sont des quadrangles (2D). Une flèche représente un pointeur.

élément poutre ou barre (1D) possède deux noeuds extrémités, un élément triangulaire (2D) trois côtés, un élément quadrangulaire (2D) quatre côtés, un élément cubique (3D) huit faces et un élément tétraédrique (3D) quatre faces.

La Table *FILIA* contient le lien logique et géométrique entre les éléments finis des différents niveaux. Les maillages éléments finis sont rangés dans la Table appelée *MAIL* détaillée par la figure E.3. Le nombre *nb* de niveaux à réaliser n'étant pas connu avant la fin du calcul, la dimension de cette Table évolue au cours de la résolution.

E.2 Structure de données pour la dynamique linéaire

Pour traiter des problèmes de dynamique linéaire, la Table *FILIA* est modifiée. Elle est schématisée sur la figure E.4. Puisque la “STAR-method” repose sur le concept de domaines espace temps élémentaires, la structure de données utilisée doit permettre de les décrire. Les informa-

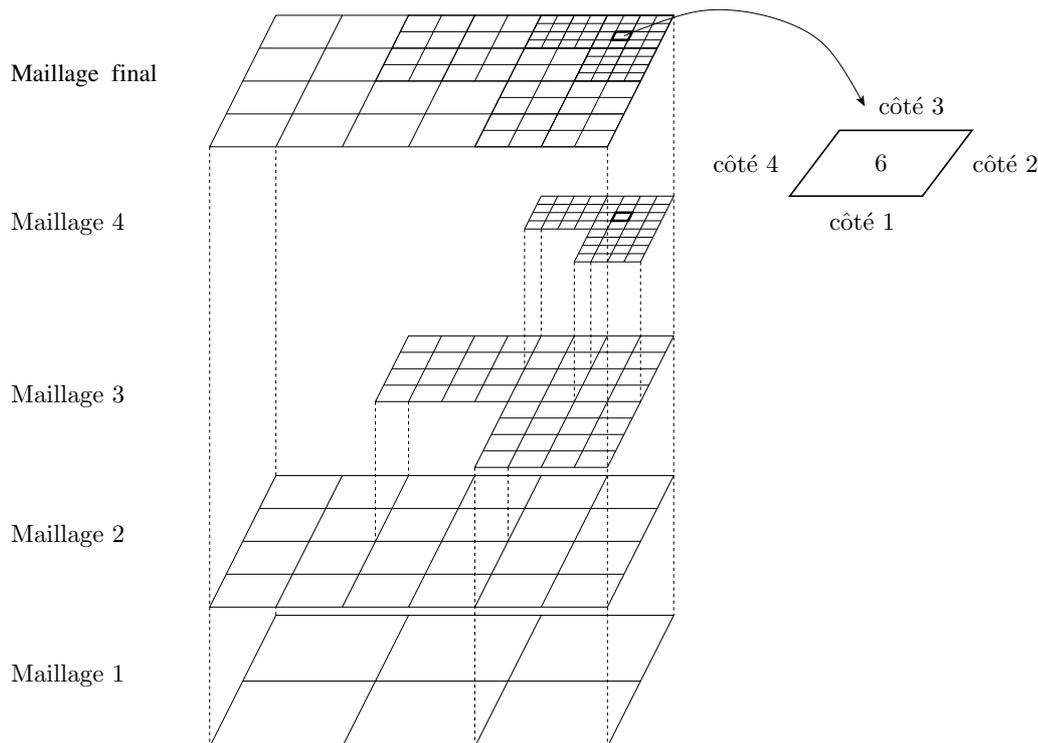


FIG. E.2 – Extraction de l'élément fini quadrangulaire numéro 6 du niveau 4 : *Filia.4.6*.

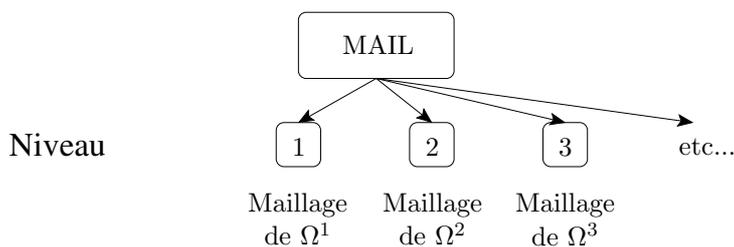


FIG. E.3 – Structure de données de la Table MAIL. Une flèche représente un pointeur.

tions établissant la filiation entre les domaines espace temps élémentaires parents et enfants sont reliées par des pointeurs.

Pour chaque niveau (figure E.4), la liste des domaines espace temps élémentaires est repérée par un numéro. Les caractéristiques de chaque domaine espace temps élémentaire sont :

- le numéro de l'élément fini e qui constitue le domaine élémentaire,
- le numéro du premier instant te sur lequel est défini le domaine élémentaire,
- le numéro de son premier enfant *enfant* s'il est sous-découpé,
- l'erreur *erreur* associée à ce domaine élémentaire.

L'erreur associée à un domaine élémentaire est celle calculée en comparant la solution de ce domaine élémentaire avec celle de ses enfants. L'étiquette *enfant* n'existe que si l'erreur *erreur* ne respecte pas le critère de précision demandée.

Le nombre de niveaux nécessaires pour satisfaire la précision requise sur l'ensemble du domaine de calcul n'est connu qu'à la fin du calcul. Ainsi, la dimension de la Table FILIA n'est pas figée à son initialisation. Le nombre de domaines espace temps élémentaires définis pour chaque niveau n'est également connu qu'à la fin du calcul. La dimension de la Table associée à ce nombre n'est

donc pas figée.

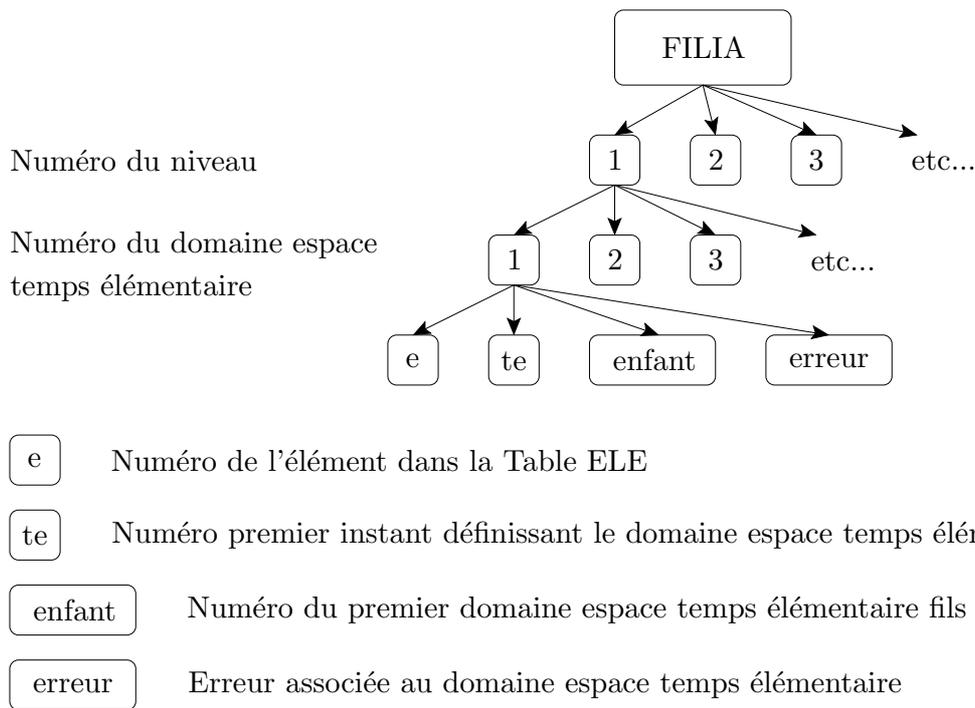


FIG. E.4 – Structure de données *FILIA* pour la filiation entre les éléments finis parents et fils de type quadrangle en dynamique linéaire. Une flèche représente un pointeur.

Pour accéder à l'élément fini désigné par le numéro e dans la Table *FILIA*, une nouvelle Table *ELE* est créée (figure E.5). Cette table contient toutes les informations relatives à un élément fini. Pour chaque numéro d'élément fini correspondant à l'étiquette e de la Table *FILIA*, la table *ELE* contient les informations sur :

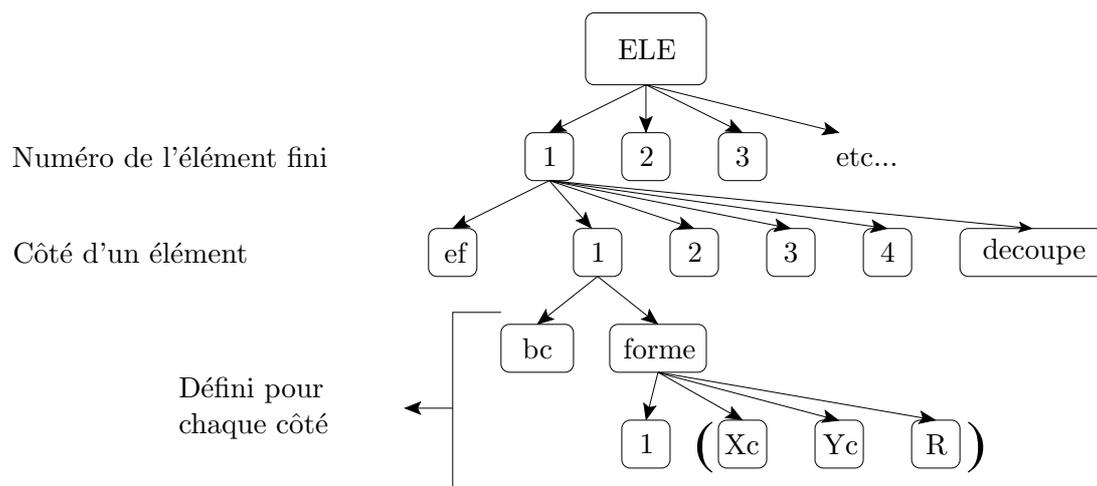
- l'élément fini ef proprement dit (c'est-à-dire la position des noeuds),
- les caractéristiques de chacun des côtés de l'élément fini sous les étiquettes 1, 2, 3, 4 (si les éléments utilisés sont quadrangulaires),
- le numéro de l'élément fini enfant *decoupe* dans la Table *ELE*.

Si les éléments utilisés sont des éléments unidimensionnels (éléments de barre ou de poutre), ils ne possèdent que deux numéros de côtés. Ils représentent le numéro de chacun des noeuds extrémités d'un élément fini. Si les éléments finis sont tridimensionnels les numéros des côtés correspondent aux numéros des faces des éléments.

Les caractéristiques associées à chacun des côtés sont identiques à celles utilisées pour définir des problèmes de statique ou de quasi-statique. Elles ne seront pas détaillées à nouveau. Le type de conditions aux limites appliquées à un noeud, un côté ou une face suivant la dimension de l'élément fini (1D, 2D ou 3D) est régi par le même code que celui présenté dans la section E.1.

La dimension de la Table *ELE* n'est pas connue avant la fin du calcul. Ainsi sa dimension n'est pas figée à l'initialisation de la Table.

Voici un exemple d'utilisation des Tables *FILIA* et *ELE*. L'accès à l'élément fini constituant le domaine espace temps élémentaire numéro 5 du niveau 3 se fait en deux étapes. La première consiste à récupérer dans la variable a , par exemple, le numéro de l'élément fini de la Table *FILIA* : $a = filia.3.5.e$. La deuxième étape consiste à récupérer l'élément fini proprement dit se



ef	Elément fini
decoupe	Numéro du premier fils
bc	Type de conditions aux limites pour le côté
forme	Forme de l'élément fini
Xc	Abscisse du centre du cercle
Yc	Ordonnée du centre du cercle
R	Rayon du cercle

FIG. E.5 – Structure de données *ELE* des éléments finis créés pour la dynamique linéaire. Une flèche représente un pointeur.

trouvant dans la Table *ELE* dans la variable b , par exemple : $b = ele.a.ef$. L'accès au type de conditions aux limites appliquées au quatrième côté de cet élément fini se fait par la commande $ele.a.4.bc$. Enfin, $ele.a.4.forme$ désigne la forme de ce même côté.

Annexe F

Organigrammes

F.1 Statique linéaire

La figure F.1 schématise la structure générale de l'algorithme "S(T)AR-method" linéaire correspondant au chapitre 3. Le tri des bords est l'étape permettant de distinguer les frontières $\partial_1\Omega^j$, $\partial_2\Omega^j$ et $\partial_{1*}\Omega^j$ de $\partial\Omega^j$ de niveau j .

F.2 Dynamique linéaire

La figure F.2 schématise la structure générale de l'algorithme "STAR-method" linéaire correspondant au chapitre 4. Le tri des bords est l'étape permettant de distinguer les frontières $\partial_1\Omega_m^j$, $\partial_2\Omega_m^j$ et $\partial_{1*}\Omega_m^j$ de $\partial\Omega_m^j$ à l'instant t_m^j de niveau j .

F.3 Quasi-statique non linéaire

La figure F.3 schématise la structure générale de l'algorithme "S(T)AR-method" non linéaire correspondant au chapitre 5. Le tri des bords est l'étape permettant de distinguer les frontières $\partial_1\Omega^j$, $\partial_2\Omega^j$ et $\partial_{1*}\Omega^j$ de $\partial\Omega^j$ de niveau j .

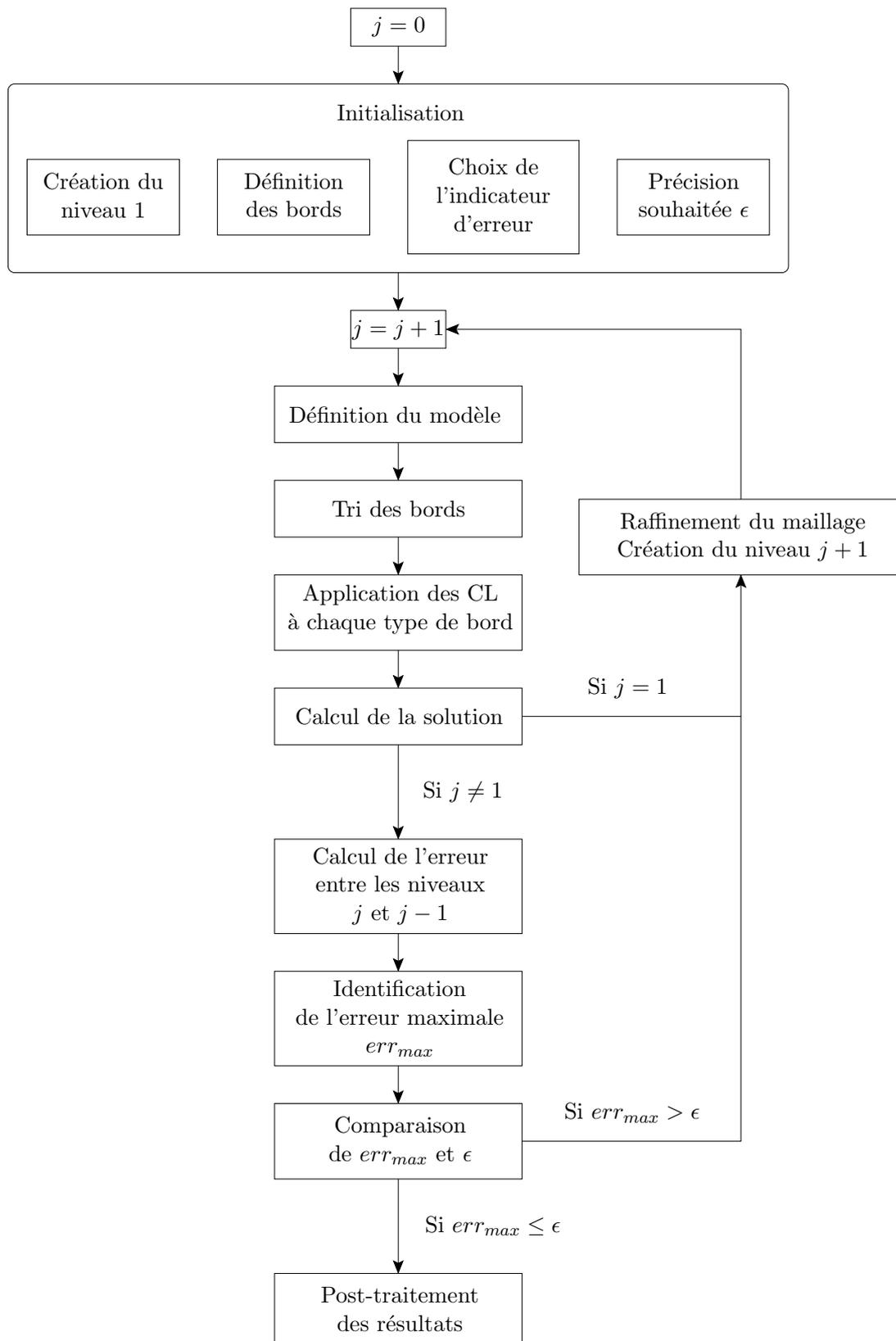


FIG. F.1 – Structure générale de l'algorithme de la "S(T)AR-method" linéaire.

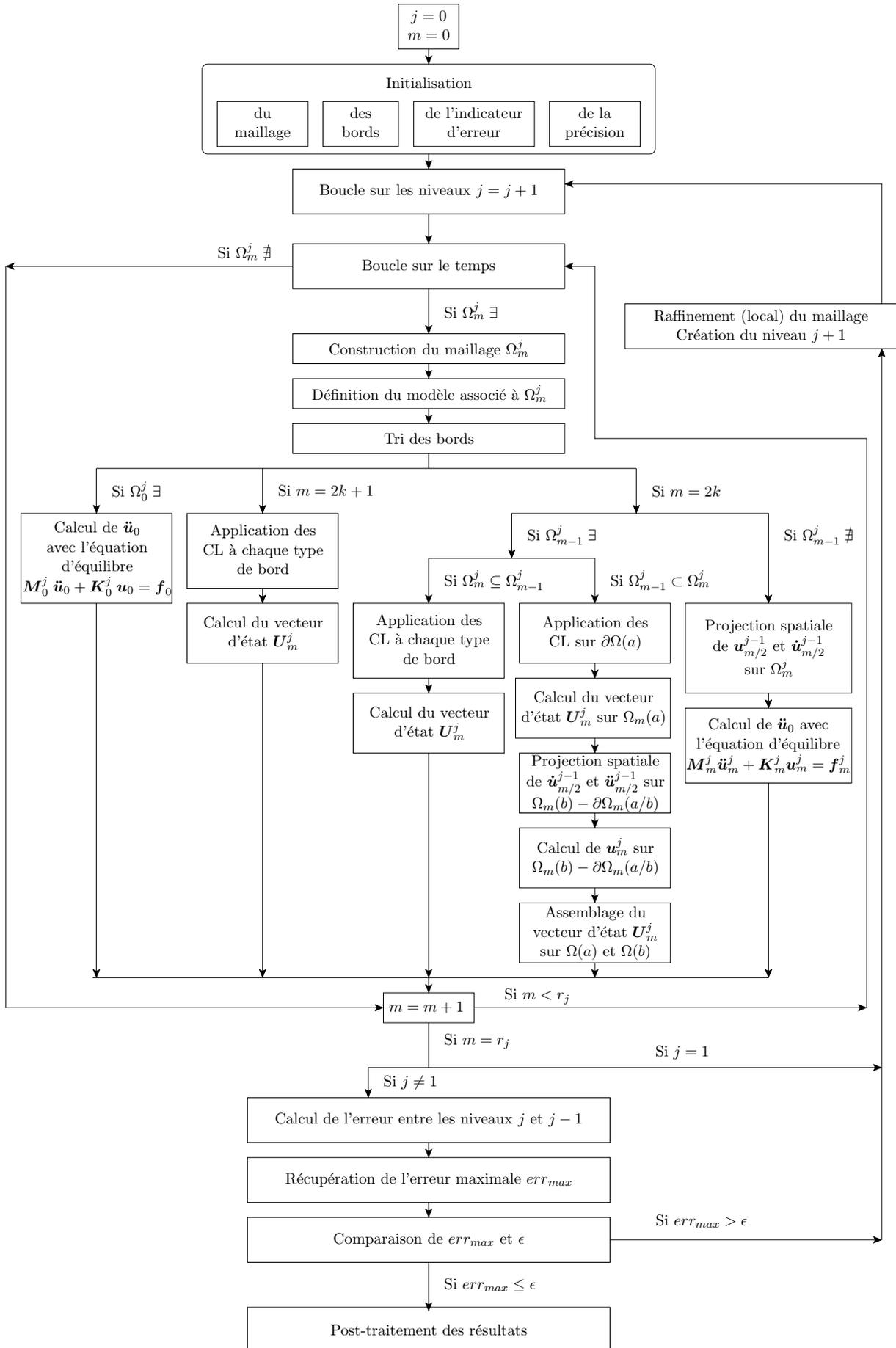


FIG. F.2 – Structure générale de l’algorithme de la “STAR-method”.

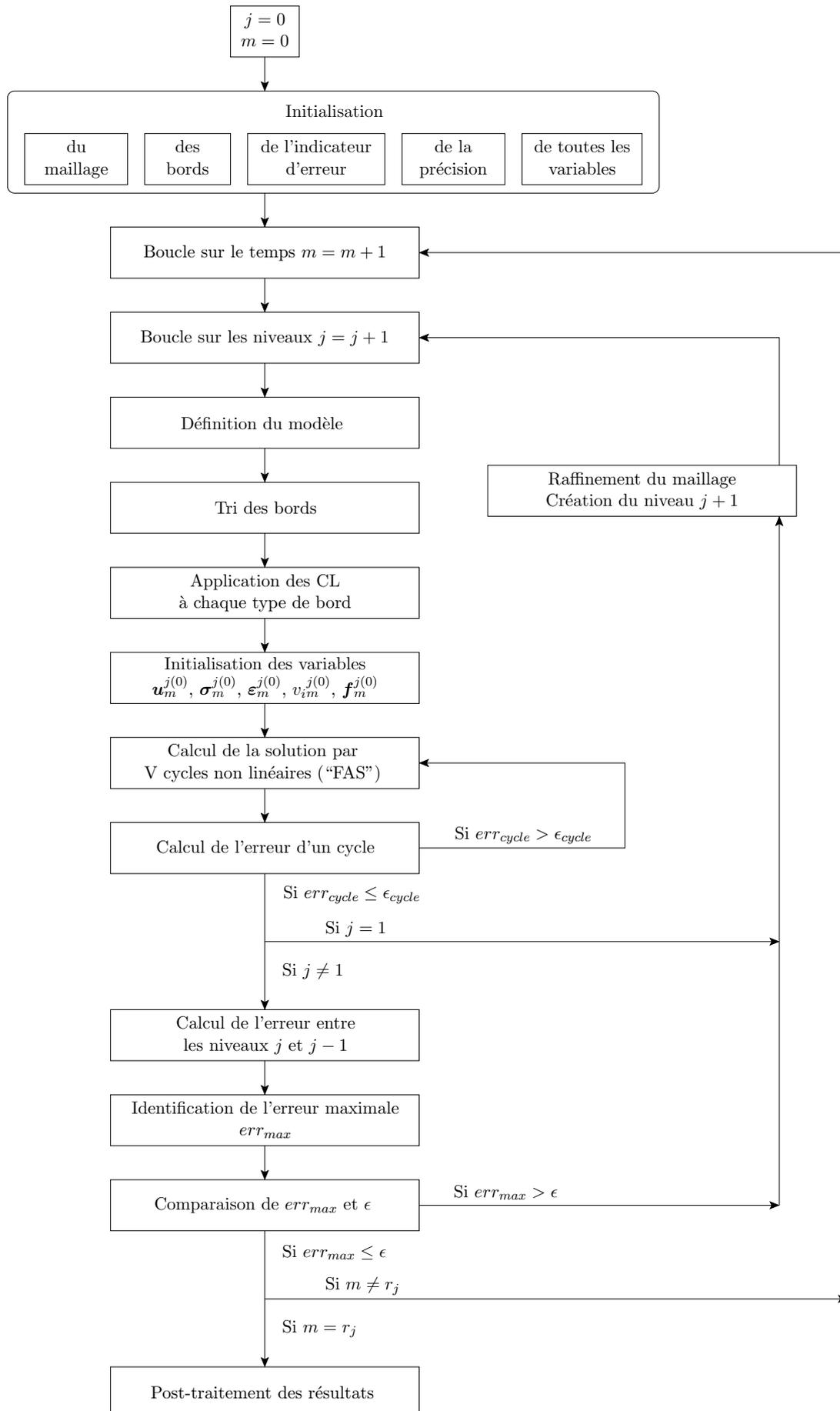


FIG. F.3 – Structure générale de l’algorithme de la “S(T)AR-method” non linéaire.

Bibliographie

- [1] ABEDY R., HABER R. B., THITE S. et ERICKSON J. An h-adaptive Spacetime-Discontinuous Galerkin Method for Linearized Elastodynamics. *Revue européenne des éléments finis*, 2006, vol soumis.
- [2] ADAMS M. et TAYLOR R. L. Parallel multigrid solvers for 3d-unstructured large deformation elasticity and plasticity finite element problems. *Finite Element in Analysis and Design*, 2000, vol 36, p 197–214.
- [3] ADAMS M. Evaluation of three unstructured multigrid methods on 3d finite element problems in solids mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol 55, p 519–534.
- [4] AINSWORTH M. et ODEN J. T. A procedure for a posteriori error estimation for h-p finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, vol 101, p 73–96.
- [5] AINSWORTH M. et ODEN J. T. Discontinuous galerkin time discretization in elastoplasticity : motivation, numerical algorithms and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, vol 191, p 4949–4968.
- [6] APEL T., GROSMAN S., JIMACK P. K. et MEYER A. A new methodology for anisotropic mesh refinement based upon error gradients. *Applied Numerical Mathematics*, 2004, vol 50, p 329–341.
- [7] AUBRY D., JAY G., TIE B. et MUZZOLINI R. A combined mesh and model adaptative strategy for the scaling issue in the numerical modelling of the ductile damage in thin panels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, vol 192, p 3285–3300.
- [8] BABŮSKA I. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, vol 12, p 1597–1613.
- [9] BAINES M. J. *Moving Finite Elements*. Claredon Press : Oxford, 1994.
- [10] BASU P. K. et PEANO A. G. Adaptivity in p-version finite element analysis. *Journal of Structural Engineering*, 1983, vol 109, p 2310–2324.
- [11] BELYTSCHKO T. et MULLEN R. Mesh partitions of explicit-implicit time integration. in : *US Germany Symposium on Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*. Cambridge, MA : MIT, 1976, p 673–680.
- [12] BELYTSCHKO T., YEN H.-J. et MULLEN R. Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1979, vol 17/18, p 259–275.
- [13] BELYTSCHKO T. et TABBARA M. H-adaptive finite element method for dynamic problems. *Computers and Structures*, 1991, vol 55, p 237–247.
- [14] BELYTSCHKO T., LIU W. K. et MORAN B. *Non-linear finite elements for continua and structures*. Chichester : Wiley, 2000, 650 p.

- [15] BOROUCHAKI H., LAUG P., CHEROUAT A. et K. SAANOUNI. Adaptive remeshing in large plastic strain with damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol 63, p 1–36.
- [16] BRANDT A. Multi-Level adaptive solution to boundary value problems. *Mathematics of Computation*, 1977, vol 31, p 333–390.
- [17] BRANDT A. Multigrid techniques : 1984 guide with applications to fluid dynamics. *GMD-Studien*, 1984, vol 85.
- [18] CAMPBELL J. S. et ROBINSON J. C. p-adaptativity in the time domain using mvpq multivalued time-marching integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, vol 40, p 2343–2367.
- [19] CAREY G. F. *Computational Grids : Generation, Adaptation and Solution Strategies*. Washington : Taylor and Francis, 1997, 496 p.
- [20] CHESA J. et BELYTSCHKO T. Arbitrary discontinuities in space-time elements by levels sets and x-fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol 61, p 2595–2614.
- [21] COMBE J. P., LADEVÈZE P. et PELLE J. P. Discretization error estimator for transient dynamic simulations. *Advances in Engineering Software*, 2002, vol 33, p 553–563.
- [22] COMBE J. P. *Sur le contrôle des calculs en dynamique rapide, Application aux problèmes d'impact*. Thèse : Thèse. Cachan : Ecole Normale Supérieure, 2000, 192 p.
- [23] COMBESURE A., (DE) GAYFFIER A., GRAVOUIL A. et GREFFET N. A Lagrange Multiplier based domain decomposition method for time dependent problems involving several time scales. *IV World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentine*, 1998.
- [24] COMBESURE A. et GRAVOUIL A. A time-space multi-scale algorithm for transient structural nonlinear problems. *Mec. Ind.*, 2001, vol 2, p 43–55.
- [25] CRAIG A. W., AINSWORTH M., ZHU J. Z. et ZIENKIEWICZ O. C. h and h-p version error estimation and adaptive procedures from theory to practice. *Engineering with Computers*, 1989, vol 5, p 221–234.
- [26] DANIEL W.J.T. A study of the stability of subcycling algorithms in structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, vol 156, p 1–13.
- [27] DANIEL W.J.T. Subcycling first- and second-order generalizations of the trapezoidal rule. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, vol 42, p 1091–1119.
- [28] DANIEL W.J.T. A partial velocity approach to subcycling structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, vol 192, p 375–394.
- [29] DIEZ P., ARROYO M. et HUERTA A. Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2000, vol 5, p 87–112.
- [30] DURBIN P. A. et IACCARINO G. An approach to local refinement of structured grids. *Journal of Computational Physics*, 2002, vol 181, p 639–653.
- [31] DUREISSEIX D. et FARHAT C. A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol 50, p 2643–2666.

- [32] DUREISSEIX D. et BAVESTRELLO H. Information transfert between incompatible finite element : application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, in press.
- [33] EKEVID T., LI M. X. D. et WIBERG N.-E. Adaptative FEA of wave propagation induced by high-speed trains. *Computers and Structures*, 2001, vol 79, p 2693–2704.
- [34] EKEVID T. et WIBERG N.-E. A comparison of parallel implementation of explicit dg and central difference method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol 18, p 585–597.
- [35] ERHART T., WALL W. A. et RAMM E. Robust adaptive remeshing strategy for large deformation transient impact simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, vol 65, p 2139–2166.
- [36] FARHAT C. et ROUX F.-X. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol 32, p 1205–1227.
- [37] FARHAT C. et ROUX F.-X. Implicit parallel processing in structural mechanics solution algorithm. in : J. T. Oden editor, *Computational Mechanics Advances*, 1994, vol 2, p 1205–1227.
- [38] FARHAT C. et CHANDESRIIS M. Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol 58, p 1397–1434.
- [39] FAUCHER V. et COMBESURE A. A time and space mortar method for coupling linear modal subdomains and non-linear subdomains in explicit structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, vol 192, p 509–533.
- [40] FENG Y. T. et PERIC D. Coarse mesh evolution strategies in galerkin multigrid method with adaptive remeshing for geometrically non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, vol 49, p 547–571.
- [41] FISH J. The s-version of the finite element method. *Computers and Structures*, 1990, vol 43, p 593–647.
- [42] FISH J., PANDHEERADI M. et BELSKY V. An efficient multilevel solution scheme for large scale non-linear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, vol 38, p 1597–1610.
- [43] FUENMAYOR F. J., DENIA F. D., ALBELDIA J. et GINER E. H-adaptative refinement strategy for acoustics problems with a set of natural frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, vol 255, p 457–479.
- [44] GABALDON F. et GOICOLEA J. M. Linear and non linear finite element error estimation based on assumed strain fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol 55, p 413–429.
- [45] GALLIMARD L., LADEVÈZE P. et PELLE J. P. Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol 39, p 189–217.
- [46] GERMAIN P. *Cours de Mécanique des milieux continus*. Tome 1. Paris : Masson, 1973, 417 p.
- [47] GERMAIN P. et MULLER P. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Paris : Masson, 1980, 344 p.

- [48] GIBERT R.-J. *Vibrations des structures - Interaction avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires*. Paris : Eyrolles Editions, 1988, 676 p.
- [49] GÉRADIN M. et RIXEN D. *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*. Paris : Masson Editions, 1983, 415 p.
- [50] GRAVOUIL A. et COMBESCURE A. Multi-time-step explicit-implicit method for non linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol 50, p 199–225.
- [51] GRAVOUIL A. et COMBESCURE A. Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol 58, p 1545–1569.
- [52] GRAVOUIL A. *Méthode multi-échelles en temps et en espace avec décomposition de domaines pour la dynamique non-linéaire des structures*. Thèse : Thèse. Cachan : Ecole Normale Supérieure, 2000, 229 p.
- [53] HAN C.-S. et WRIGGERS P. An h-adaptive method for elasto-plastic shell problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol 189, p 651–671.
- [54] HERRY B. *Développement d'une approche multiéchelle parallèle pour la simulation de crash automobile*. Thèse : Thèse. Cachan : Ecole Normale Supérieure, 2002, 157 p.
- [55] HICKS M. A. Coupled computations for an elastic-perfectly plastic soil using adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2000, vol 24, p 453–476.
- [56] HUERTA A., RODRIGUEZ-FERRAN A., DIEZ P. et SARRATE J. Adaptive finite element strategy based on error assessment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol 46, p 1803–1818.
- [57] HUGHES T. J. R. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall International Editions, 1987, 803 p.
- [58] HUGHES T. J. R. et LIU W. K. Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, vol 45, p 371–374.
- [59] HUGHES T. J. R. et LIU W. K. Implicit-explicit finite elements in transient analysis : implementation and numerical example. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, vol 45, p 375–378.
- [60] HUGHES T. J. R., PISTER K. S. et TAYLOR R. L. Implicit-explicit finite elements in non linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1979, vol 17/18, p 159–182.
- [61] HUGHES T. J. R. et STEPHENSON R. A. Convergence of implicit-explicit algorithms in non linear transient analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, vol 19, p 295–302.
- [62] HUGHES T. J. R. et HULBERT G. M. Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, vol 67, p 339–363.
- [63] HUGHES T. J. R. et BELYTSCHKO T. *Non-linear finite element analysis. A short course*. Lausanne : ZACE Services LTD, 1995.
- [64] HUGHES T. J. R. et STEWART J. R. A space-time formulation for multiscale phenomena. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1996, vol 74, p 217–229.

- [65] HULBERT G. M. et HUGHES T. J. R. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, vol 84, p 327–348.
- [66] KACOU S. et PARSONS I. D. A parallel multigrid method for history-dependent elastoplasticity computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, vol 108, p 1–21.
- [67] KRENK S. State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear dynamic systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, vol 65, p 595–619.
- [68] KRYSL P., GRINSPUN E. et SCHRÖDER P. Natural hierarchical refinement for finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol 56, p 1109–1124.
- [69] LACKNER R. et MANG H. A. A posteriori error estimation in non-linear fe analyses of shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol 53, p 2329–2355.
- [70] LADEVÈZE P. et PELLE J-P. *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*. Paris : Hermès Sciences, 2001, 408 p.
- [71] LADEVÈZE P., LOISEAU O. et DUREISSEIX D. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, vol 52, p 121–138.
- [72] LADEVÈZE P. *Mécanique non linéaire des structures, nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Paris : Hermès Sciences, 1996, 280 p.
- [73] LANG J., CAO W., HUANG W. et RUSSELL R. D. A two-dimensional moving finite element method with local refinement based on a posteriori error estimates. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, vol 46, p 75–94.
- [74] LAPENTA G. A recipe to detect the error in discretization schemes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol 59, p 2065–2087.
- [75] LEMAITRE J. et CHABOCHE J-L. *Mécanique des matériaux solides*. Paris : Dunod Editions, 1985, 532 p.
- [76] LI X.D. et WIBERG N.-E. Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, vol 156, p 211–229.
- [77] LIU W. K., ZHANG Y. et RAMIREZ M. R. Multiple scale finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol 32, p 969–990.
- [78] LIU W. K., HAO S., BELYTSCHKO T, LI S. et CHANG C. T. Multi-scale methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol 47, p 1343–1361.
- [79] MERROUCHE A., SELMAN A. et KNOPF-LENOIR C. 3d adaptive mesh refinement. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1998, vol 14, p 397–407.
- [80] MOLINARI J. F. et ORTIZ M. Three-dimensional adaptive meshing by subdivision and edge collapse in finite deformation dynamic-plasticity problems with application to adiabatic shear banding. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol 53, p 1101–1126.
- [81] MOËS N., DOLBOW J. et BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol 46, p 131–150.

- [82] MURTHY K. S. R. K. et MUKHOPADHYAY M. Adaptive finite element analysis of mixed-mode crack problems with automatic mesh generator. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, vol 49, p 1087–1100.
- [83] NEAL M. O. et BELYTSCHKO T. Explicit-explicit subcycling with non integer time step ratios for structural dynamics systems. *Computers and Structures*, 1989, vol 31, p 871–880.
- [84] NITHIARASU P. et ZIENKIEWICZ O. C. Adaptative mesh generation for fluid mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, vol 47, p 629–662.
- [85] NOELS L., STAINER L. et PONTHOT J. Self adapting time integration strategies for non linear structural dynamics. in : *S. Valliappan, N. Khalili (Eds). First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics, - New Frontiers for New Millenium, Sydney, NSA, Austalia, 20-23 november 2001. Amsterdam : Elsevier, 2001.*
- [86] NOELS L. *Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures.* Thèse : Thèse. Liège : Université de Liège, 2004, 380 p.
- [87] OH H.-S., LIM J.-K. et HAN S.-Y. An rh-method for efficient adaptive finite element analysis. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 1998, vol 14, p 549–558.
- [88] PARK J. W., HWANG J. W. et KIM Y. H. Efficient finite element analysis using mesh superposition technique. *Finite Element in Analysis and Design*, 2003, vol 39, p 619–638.
- [89] PARSONS I. D. et HALL J. F. The multigrid method in solid mechanics : Part i-algorithm description and behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, vol 29, p 719–737.
- [90] PARSONS I. D. et HALL J. F. The multigrid method in solid mechanics : Part ii-practical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, vol 29, p 739–753.
- [91] PRAKASH A. et HJELMSTAD K. D. A feti based multi-step coupling method for newmark schemes in structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol 61, p 2183–2204.
- [92] PRUDHOMME S., ODEN J. T., WESTERMANN T., BASS J. et BOTKIN M. E. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, vol 56, p 1193–1224.
- [93] RADOVITZKY R. et ORTIZ M. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol 172, p 203–240.
- [94] RANNOU J. Approche multi-échelle de la mécanique de la rupture par la méthode des éléments finis étendus. *Master. Lyon : LaMCoS - INSA de Lyon, 2005.*
- [95] RANNOU J., GRAVOUIL A. et COMBESURE A. A multi-grid eXtended Finite Element Method for elastic crack growth simulation. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 2006, vol submitted.
- [96] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A. et COMBESURE A. A combined space-time extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol 64, p 260–284.

- [97] SCALABRIN L. C. et AZEVEDO J. L. F. Adaptive mesh refinement and coarsening for aerodynamic flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol 45, p 1107–1122.
- [98] SHAIUROV V. V. *Multigrid Methods for Finite Element*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1995, 331 p.
- [99] SMOLINSKI P., BELYTSCHKO T. et NEAL M. Multi-time-step integration using nodal partitioning. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, vol 26, p 349–359.
- [100] SMOLINSKI P. Subcycling integration with non-integer time steps for structural dynamics problems. *Computers and Structures*, 1995, vol 59, p 236–244.
- [101] SMOLINSKI P., SLEITH S. et BELYTSCHKO T. Stability of an explicit multi-step integration algorithm for linear structural dynamics equations. *Computer in Mechanics*, 1996, vol 18, p 236–244.
- [102] SMOLINSKI P. et WU Y.-S. Stability of explicit subcycling time integration with linear interpolation for first-order finite element semidiscretizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, vol 151, p 311–324.
- [103] SMOLINSKI P. et PALMER T. Procedures for multi-time step integration of element free galerkin methods for diffusion problems. *Computers and Structures*, 2000, vol 77, p 171–183.
- [104] SOLANKI K., DANIEWICZ S. R. et NEWMAN JR. J. C. Finite element modelling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, vol 70, p 1475–1489.
- [105] STROUBOULIS T., BABŮSKA I., DATTA D. K., COPPS K. et GANRARAJ S. K. A posteriori estimation and adaptative control of the error in the quantity of interest. part i : A posteriori estimation of the error in the von mises stress intensity factor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol 181, p 261–294.
- [106] TARACON J. E., FUENMAYOR F. J. et BAEZA L. An a posteriori error estimator for the p- and hp-versions of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol 62, p 1–18.
- [107] VEMAGANTI K. Modelling error estimation and adaptive modelling of perforated materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol 59, p 1587–1604.
- [108] VENNER C. H. et LUBRECHT A. A. *MultiLevel Methods in Lubrication*. Amsterdam : Elsevier Editions, 2000, 379 p.
- [109] VERPEAUX P., CHARRAS T. et MILLARD A. Castem 2000 une approche moderne du calcul des structures. in : Fouet J.M., Ladevèze P., Ohayon R. (Eds), Saint-Etienne : Pluralis, 1988, p 261–271.
- [110] VERPEAUX P. et MILLARD A. Castem 2000 guide du développement. *Commissariat à l’Energie Atomique Rapport DMT*, 1991.
- [111] WIBERG N.-E. et LI X. A post-processing technique and a posteriori error estimate for the Newmark method in dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, vol 22, p 465–489.
- [112] WIBERG N.-E. et LI X. Error estimation and adaptivity for h-version eigenfrequency analysis. in : Ladevèze P., Oden J. T. (Eds), *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Amsterdam : Elsevier, 1998, p 461–476.

-
- [113] WIBERG N.-E. et LI X. Adaptive finite element procedures for linear and non linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol 46, p 1781–1802.
- [114] WU Y.S. et SMOLINSKI P. A multi-time step integration algorithm for structural dynamics based on the modified trapezoidal rule. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol 187, p 641–660.
- [115] YANG D. Improved error estimation of dynamic finite element methods for second-order parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol 126, p 319–338.
- [116] YUE Z. et ROBBINS JR D. H. Adaptive superposition of finite element meshes in elastodynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol 63, p 1604–1635.
- [117] ZIENKIEWICZ O. C. et ZHU J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, vol 24, p 337–357.
- [118] ZIENKIEWICZ O. C., ZHU J. Z. et GONG G. Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, vol 28, p 879–891.
- [119] ZIENKIEWICZ O. C. et ZHU J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimate. part 1 : the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol 33, p 1331–1364.
- [120] ZIENKIEWICZ O. C. et ZHU J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimate. part 2 : error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol 33, p 1365–1382.
- [121] ZIENKIEWICZ O. C., BOROOMAND B. et ZHU J. Z. Recovery procedures in error estimation and adaptivity part i : Adaptivity in linear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol 176, p 111–125.
- [122] ZIENKIEWICZ O. C. et TAYLOR R. L. *The finite element method, vol 1*. vol 1. 4th Edition. New York : Mc Graw-Hill, 1989, 648 p.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : CAVIN	DATE de SOUTENANCE : 23/06/06
Prénoms : Pauline	
TITRE : METHODE ELEMENTS FINIS AVEC RAFFINEMENT SPATIAL ET TEMPOREL ADAPTATIF ET AUTOMATIQUE : « STAR-METHOD » (SPACE TIME AUTOMATIC REFINEMENT)	
NATURE : Doctorat	Numéro d'ordre : 2006-ISAL-0034
Ecole doctorale : M.E.G.A.	
Spécialité : MECANIQUE	
Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis	CLASSE :
RESUME : <p>La complexité des mécanismes étudiés (intégrant le comportement non linéaire du matériau et le chargement dynamique) engendre des maquettes numériques qui nécessitent des moyens de calcul très importants voire prohibitifs. La méthode numérique développée, basée sur la méthode des éléments finis, est proposée dans le but de réaliser de telles simulations.</p> <p>L'idée est d'optimiser le maillage spatial et temporel tout en contrôlant la qualité de la solution. Ainsi, une méthode de résolution avec plusieurs échelles d'espace et de temps, la « STAR-method », est mise en place (Space Time Automatic Refinement). La stratégie adoptée permet d'identifier automatiquement, au moyen d'indicateurs d'erreurs, les zones où les discrétisations spatiale et temporelle ne sont pas suffisamment fines pour satisfaire le critère de précision requis.</p> <p>L'apport d'une stratégie de type « STAR-method » est multiple. L'utilisateur n'intervient plus pour définir le maillage adapté à une précision donnée. Le raffinement local de maillage permet de concentrer l'effort de résolution uniquement dans les zones spatiales et temporelles de la structure qui le nécessitent. Le nombre de degrés de liberté et le nombre de piquets de temps sont réduits par rapport à une méthode classique. Enfin, la précision de la solution est contrôlée au cours de la résolution.</p>	
MOTS-CLES : Raffinement de maillage, indicateur d'erreur, méthode multigrille, précision contrôlée, domaine espace temps, dynamique rapide, méthode éléments finis	
Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCoS) de l'I.N.S.A. de Lyon	
Directeur de thèse:	Pr. A. Combescure
Président de jury :	Pr. B. Gay
Composition du jury :	Pr. M. Bonnet Rapporteur Pr. A. Combescure Directeur Pr. D. Dureisseix Rapporteur Pr. B. Gay Président Pr. A. Gravouil Co-directeur Pr. A.A. Lubrecht Co-directeur Dr. A. Suffis