

Thèse¹

Nouvelle Formulation de la Dynamique du Choc : Application aux Accidents des Véhicules à Deux Roues

présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir
le grade de docteur

École doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique – M.E.G.A–

Spécialité : Génie Mécanique.

par

Ajmi HOUIDI

Soutenue le 05 juillet 2005 devant la Commission d'examen

Jury

MM.

F.Ben Oezdou	Professeur des Universités – U. Versailles saint-Quentin	Rapporteur.
R.Willinger	Professeur des Universités – U. L. Pasteur, Strasbourg	Rapporteur.
L.Maiffredy	Maître de conférences – INSA de Lyon	Examineur.
L.Romdhane	Professeur des Universités – ENIM, Monastir	Examineur.
J.P. Verriest	Directeur de recherche INRETS de Bron, Lyon	Président.
A.Dogui	Professeur des Universités – ENIM, Monastir	Directeur de thèse.
M.Fayet	Professeur des Universités – INSA de Lyon	Directeur de thèse.

1. Cette thèse s'est déroulée dans le cadre d'une cotutelle entre l'INSA de Lyon et l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir en Tunisie.

Écoles Doctorales

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNÉES DU RESPONSABLE
	<u>CHIMIE DE LYON</u> Responsable : M. Denis SINOÛ	M. Denis SINOÛ Université Claude Bernard Lyon 1 Lab Synthèse Asymétrique UMR UCB/CNRS 5622 Bât 308 2ème étage 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.81.83 Fax : 04 78 89 89 14 sinou@univ-lyon1.fr
E2MC	<u>ÉCONOMIE, ESPACE ET MODÉLISATION DES COMPORTEMENTS</u> Responsable : M. Alain BONNAFOUS	M. Alain BONNAFOUS Université Lyon 2 14 avenue Berthelot MRASH M. Alain BONNAFOUS Laboratoire d'Economie des Transports 69363 LYON Cedex 07 Tél:04.78.69.72.76 Alain.bonnafous@ish-lyon.cnrs.fr
E.E.A	<u>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> Responsable :M. Daniel BARBIER	M. Daniel BARBIER INSA DE LYON Laboratoire Physique de la Matière Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.64.43 Fax 04 72 43 60 82 Daniel.Barbier@insa-lyon.fr
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 Responsable :M. Jean-Pierre FLANDROIS	M. Jean-Pierre FLANDROIS UMR 5558 Biométrie et Biologie Evolutive Equipe Dynamique des Populations Bactériennes Faculté de Médecine Lyon-Sud Laboratoire de Bactériologie BP 1269600 OULLINS Tél : 04.78.86.31.50 Fax 04 72 43 13 88 E2m2 biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u> http://www.insa-lyon.fr/ediis Responsable :M. Lionel BRUNIE	M. Lionel BRUNIE INSA DE LYON EDIIS Bâtiment Blaise Pascal 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.60.55 Fax 04 72 43 60 71 ediis@insa-lyon.fr
EDIIS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> http://www.ibcp.fr/ediss Responsable :M. Alain Jean COZZONE	M. Alain Jean COZZONE IBCP (UCBL1) 7 passage du Vercors 69367 LYON Cedex 07 Tél : 04.72.72.26.75 Fax : 04 72 72 26 01 cozzone@ibcp.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> http://www.ec-lyon.fr/sites/edml Responsable :M. Jacques JOSEPH	M. Jacques JOSEPH Ecole Centrale de Lyon Bât F7 Lab. Sciences et Techniques des Matériaux et des Surfaces 36 Avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.51 Fax 04 72 18 60 90 Jacques.Joseph@ec-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u> http://www.ens-lyon.fr/MathIS Responsable :M. Franck WAGNER	M. Franck WAGNER Université Claude Bernard Lyon1 Institut Girard Desargues UMR 5028 MATHEMATIQUES Bâtiment Doyen Jean Bracconnier Bureau 101 Bis, 1er étage 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.27.86 Fax : 04 72 43 16 87 wagner@desargues.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> http://www.lmfa.ec-lyon.fr/autres/MEGA/index.html Responsable :M. François SIDOROFF	M. François SIDOROFF Ecole Centrale de Lyon Lab. Tribologie et Dynamique des Systèmes Bât G8 36 avenue Guy de Collongue BP 163 69131 ECULLY Cedex Tél : 04.72.18.62.14 Fax : 04 72 18 65 37 Francois.Sidoroff@ec-lyon.fr

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Directeur : A. STORCK.

Professeurs

S.	AUDISIO	physico-chimie industrielle
J.C.	BABOUX	GEMPMM ¹
B.	BALLAND	physique de la matière
D.	BARBIER	physique de la matière
G.	BAYADA	modélisation mathématique et calcul scientifique
C.	BERGER (Mlle)	physique de la matière
M.	BETEMPS	automatique industrielle
J.M.	BLANCHARD	LAEPSI ²
C.	BOISSON	vibrations acoustiques
M.	BOIVIN	mécanique des solides
H.	BOTTA	équipe développement urbain
G.	BOULAYE	informatique
J.	BRAU	centre de thermique
M.	BRISSAUD	génie électrique et ferroélectricité
M.	BRUNET	mécanique des solides
J.C.	BUREAU	thermodynamique appliquée
J.Y.	CAVILLE	GEMPMM ¹
J.P.	CHANTE	composants de puissance et applications
B.	CHOCAT	unité de recherche en génie civil
B.	CLAUDEL	LAEPSI ²
M.	COUSIN	unité de recherche en génie civil
M.	DIOT	thermodynamique appliquée
A.	DOUTHEAU	chimie organique
R.	DUFOUR	mécanique des structures
J.C.	DUPUY	physique de la matière
H.	EMPTOZ	reconnaissance des formes et vision
C.	ESNOUF	GEMPMM ¹
L.	EYRAUD (Prof. Émérite)	génie électrique et ferroélectricité
G.	FANTOZZI	GEMPMM ¹
M.	FAYET	mécanique des solides
J.	FAVREL	groupe de recherche en productique et informatique des systèmes manufacturiers
G.	FERRARIS-BESSO	mécanique des structures
Y.	FETIVEAU	génie électrique et ferroélectricité
L.	FLAMAND	mécanique des contacts
P.	FLEISCHMANN	GEMPMM ¹
A.	FLORY	ingénierie des systèmes d'information
R.	FOUGERES	GEMPMM ¹

F.	FOUQUET	GEMPMM ¹
L.	FRECON	informatique
R.	GAUTHIER	physique de la matière
M.	GERY	centre de thermique
G.	GIMENEZ	CREATIS ³
P.	GOBIN (Prof. émérite)	GEMPMM ¹
P.	GONNARD	génie électrique et ferroélectricité
M.	GONTRAND	composants de puissance et applications
R.	GOUTTE (Prof. Émérite)	CREATIS ³
G.	GRANGE	génie électrique et ferroélectricité
G.	GUENIN	GEMPMM ¹
M.	GUICHARDANT	biochimie et pharmacologie
G.	GUILLOT	physique de la matière
A.	GUINET	groupe de recherche en productique et informatique des systèmes manufacturiers
J.L.	GUYADER	vibrations acoustiques
J.P.	GUYOMAR	génie électrique et ferroélectricité
J.M.	JOLION	reconnaissance des formes et vision
J.F.	JULLIEN	unité de recherche en génie civil
A.	JUTARD	automatique industrielle
R.	KASTNER	unité de recherche en génie civil
H.	KLEIMANN	génie électrique et ferroélectricité
J.	KOULOUMDJIAN	ingénierie des systèmes d'information
M.	LAGARDE	biochimie et pharmacologie
M.	LALANNE	mécanique des structures
A.	LALLEMAND	centre de thermique
M.	LALLEMAND (Mme)	centre de thermique
P.	LAREAL	unité de recherche en génie civil
A.	LAUGIER	physique de la matière
Ch.	LAUGIER	biochimie et pharmacologie
P.	LEJEUNE	génétique moléculaire des microorganismes
A.	LUBRECHT	mécanique des contacts
Y.	MARTINEZ	ingénierie des systèmes d'information
H.	MAZILLE	physico-chimie industrielle
P.	MERLE	GEMPMM ¹
J.	MERLIN	GEMPMM ¹
J.P.	MILLET	physico-chimie industrielle
M.	MIRAMOND	unité de recherche en génie civil
N.	MONGEREAU(Prof. Émérite)	unité de recherche en génie civil
R.	MOREL	mécanique des fluides
P.	MOSZKOWICZ	LAEPSI ²
P.	NARDON	biologie appliquée

A.	NAVARRO	LAEPSI ²
A.	NOURI (Mme)	modélisation mathématique et calcul scientifique
M.	OTTERBEIN	LAEPSI ²
J.P.	PASCAULT	matériaux macromoléculaires
G.	PAVIC	vibrations acoustiques
J.	PERA	unité de recherche en génie civil
G.	PERRACHON	thermodynamique appliquée
J.	PEREZ (Prof. Émérite)	GEMPMM ¹
P.	PINARD	physique de la matière
J.M.	PINON	ingénierie des systèmes d'information
D.	PLAY	conception et analyse des systèmes mécaniques
J.	POUSIN	modélisation mathématique et calcul scientifique
P.	PREVOT	groupe de recherche en apprentissage, coopération et interfaces multimodales
R.	PROST	CREATIS ³
M.	RAYNAUD	centre de thermique
J.M.	REYNOUARD	unité de recherche en génie civil
E.	RIEUTORD (Prof. Émérite)	mécanique des fluides
J.	ROBERT-BAUDOUY (Mme)	génétique moléculaire des microorganismes
D.	ROUBY	GEMPMM ¹
P.	RUBEL	ingénierie des systèmes d'information
C.	RUMELHART	mécanique des solides
J.F.	SACADURA	centre de thermique
H.	SAUTEREAU	matériaux macromoléculaires
S.	SCARVARDA	automatique industrielle
D.	THOMASSET	automatique industrielle
M.	TROCCAZ	génie électrique et ferroélectricité
R.	UNTERREINER	CREATIS ³
J.	VERON	LAEPSI ²
G.	VIGIER	GEMPMM ¹
A.	VINCENT	GEMPMM ¹
P.	VUILLERMOZ	physique de la matière

Directeurs de recherche C.N.R.S.

Y.	BERTHIER	mécanique des contacts
P.	CLAUDY	thermodynamique appliquée
N.	COTTE-PATTAT (Mme)	génétique moléculaire des microorganismes
P.	FRANCIOSI	GEMPMM
J.F.	GERARD	matériaux macromoléculaires
M.A.	MANDRAND (Mme)	génétique moléculaire des microorganismes
J.F.	QUINSON	GEMPMM
A.	ROCHE	matériaux macromoléculaires

Directeurs de recherche I.N.R.A

G.	BONNOT	biologie appliquée
G.	FEBVAY	biologie appliquée
S.	GRENIER	biologie appliquée
Y.	MENEZO	biologie appliquée

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M.

A.F.	PRINGENT (Mme)	biochimie et pharmacologie
I.	MAGNIN (Mme)	CREATIS ³

-
1. Groupe d'étude métallurgie physique et physique des matériaux
 2. Laboratoire d'analyse environnementale des procédés et systèmes industriels
 3. Centre de recherche et d'applications en traitement de l'image et du signal
-

A mes parents : Abdelhamid et Selma,
A mes soeurs : Sonia et Samira
A Hanen,
A tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Ce travail sur la mécanique du choc a été effectué en collaboration entre le Laboratoire de Génie Mécanique (LGM) de l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCOS) de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Ce travail a pu être mené grâce à un financement de la Région Rhône-Alpes et aux moyens mis à notre disposition par le Laboratoire de Biomécanique et de Mécanique des Chocs (LBMC) de l'Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité (INRETS) de Bron et par la société Peugeot Motocycles.

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur Michel FAYET et Monsieur Abdelwaheb DOGUI pour m'avoir proposé ce sujet et pour en avoir assuré la direction scientifique.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance au professeur Rémy WILLINGER et au professeur Fethi BEN OEZDOU pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie Monsieur Jean-Pierre VERRIEST pour sa participation à ce jury et pour son aide pour la réalisation des essais de test-crash.

Je remercie vivement Monsieur Lionel MAIFFREDY et Monsieur Lotfi ROMDHANE, pour le dynamisme dont ils ont fait preuve tout au long de cette thèse et pour leurs nombreuses suggestions qui ont contribué à l'enrichissement de ce travail.

Je voudrais remercier ceux qui par leurs compétences et leur gentillesse m'ont permis de résoudre les problèmes numériques et expérimentaux de mon sujet. Je pense tout particulièrement à Monsieur Alain MAUPAS pour leur disponibilité et leur pédagogie expérimentale et à Monsieur Yves CAIRE pour son aide au dépouillement des essais de test-crash.

Sans les nommer individuellement, je remercie tous les amis du Laboratoire de Génie Mécanique (LGM) et ceux du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides (LaMCOS) pour leurs encouragements en décernant une mention spéciale aux membres du Centre d'Intérêts Dynamique du Locomotion (CIDL) pour leurs soutiens constants.

Je n'aurai jamais pu mener ce travail à bien sans l'affection, l'attention et le soutien indéfectibles de mes parents, de mes amis et de ma famille; cette thèse est aussi la leur.

Table des matières

1	Contexte de l'étude et problématique	25
1.1	Introduction	25
1.2	Accidentologie des véhicules à deux roues	26
1.2.1	Introduction	26
1.2.2	Statistique des accidents des véhicules à 2 roues	26
1.2.3	Conclusion	31
1.3	Présentation de l'étude	32
1.3.1	Problématique de l'étude	32
1.3.2	Démarche adoptée	33
1.4	Conclusion	34
2	Modélisation du cyclomotoriste et du cyclomoteur	35
2.1	Introduction	35
2.2	Modélisation du Corps Humain	35
2.2.1	Introduction	35
2.2.2	Modélisation géométrique du corps humain	36
2.2.3	Modélisation géométrique et inertielle du corps humain	37
2.2.4	Paramètres du cyclomotoriste	44
2.3	Présentation du modèle de cyclomoteur	45
2.3.1	Introduction	45
2.3.2	Modélisation du cyclomoteur	46
2.4	Présentation du scénario de collision à étudier	49
2.4.1	Présentation du système	49
2.4.2	Paramètres utilisés	51
2.4.3	Présentation des sollicitations dynamiques	51
2.5	Conclusion	51
3	Modèle analytique et simulation	53
3.1	Introduction	53
3.2	Modélisation tridimensionnelle d'une collision entre un cyclomoteur et un obstacle en mouvement	54
3.2.1	Schématisation et paramétrage	54
3.2.2	Rappel sur le formalisme de Lagrange	56

3.2.3	Équations des liaisons imposées au système	57
3.2.4	Calcul de l'énergie cinétique du système	59
3.2.5	Calcul des forces généralisées	59
3.3	Nouvelle formulation de la dynamique du choc	60
3.3.1	Étude bibliographique sur la mécanique des chocs	60
3.3.2	Particularités de la mécanique classique du choc	68
3.3.3	Adaptation des lois du choc au cas de plusieurs contacts unilatéraux	69
3.3.4	Modèle dynamique simplifié	70
3.3.5	Forme générale des équations du mouvement	71
3.4	Application au cas d'un pendule double	72
3.4.1	Mise en équations d'un pendule libre	73
3.4.2	Mise en équation du pendule sous contrainte	74
3.4.3	Validation de l'hypothèse $(a_{ij}\ddot{q}_j \gg \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k)$	75
3.4.4	Développement des équations du mouvement du système en utilisant la formulation simplifiée	76
3.4.5	Validation de la formulation simplifiée	78
3.5	Application de la nouvelle formulation au cas de la collision du cyclomoteur avec l'obstacle mobile	80
3.5.1	Inventaire des multiplicateurs de Lagrange	80
3.5.2	Présentation des différentes configurations possibles	81
3.6	Présentation de la modélisation numérique du système sous ADAMS	83
3.7	Conclusion	84
4	Expérimentation	87
4.1	Introduction	87
4.2	Détermination des éléments d'inertie du système	87
4.2.1	Démarches expérimentales	87
4.2.2	Étude de la roue avant	92
4.2.3	Étude de la fourche	94
4.2.4	Étude du cadre	97
4.3	Identification du modèle de contact frontal	100
4.3.1	Essais de flexion de la fourche	101
4.3.2	Essai de compression de la roue avant	103
4.4	Essais de test-crash	105
4.4.1	Description du protocole des essais	105
4.4.2	Analyse des différents essais	109
4.4.3	Reproductibilité des essais	109
4.4.4	Étude de la déformation du cadre	110
4.4.5	Étude de décollage de la roue arrière	111
4.4.6	Comportement dynamique de la fourche	112
4.4.7	Étude du mouvement de tangage	113
4.4.8	Glissement du cyclomotoriste	115

4.5	Conclusion	115
5	Confrontation essais et simulations	117
5.1	Introduction	117
5.2	Confrontation de la modélisation simplifiée avec la modélisation complète sous ADAMS	118
5.2.1	Présentation des modélisations utilisées	118
5.2.2	Caractéristiques de la scène à simuler	118
5.3	Confrontation de la modélisation simplifiée avec les essais de test-crash	121
5.3.1	Méthode de dépouillement des enregistrements vidéo	121
5.3.2	Interprétation des confrontations	123
5.3.3	Étude d'influence de la rigidité de la roue avant	124
5.3.4	Essais de calage avec l'essai n°7 et validation pour les autres essais	126
5.4	Conclusion	128
A	Calcul de l'énergie cinétique du système	143
A.1	Matrices de passage	143
A.2	Énergie cinétique de la barrière mobile (S_0)	144
A.3	Énergie cinétique de la roue avant (S_1)	144
A.4	Énergie cinétique de la fourche (S_2)	144
A.5	Énergie cinétique du cadre (S_3)	144
A.6	Énergie cinétique du cyclomotoriste (S_4)	145
A.7	Énergie cinétique du système	145
A.8	Expressions analytiques des éléments de la matrice d'inertie $[A]$	146
A.9	Constantes calculées de la puissance virtuelle des forces de pesanteur	149
B	Équations de mouvement des différentes configurations possibles	151
B.1	Équations de liaison du système	151
B.2	Mise en équations des différentes configurations	153
B.2.1	Mise en équation de la configuration n°1	153
B.2.2	Mise en équation de la configuration n°2 et n°3	156
B.2.3	Mise en équation de la configuration n°4	160
B.2.4	Mise en équation de la configuration n°5	162
B.2.5	Mise en équation de la configuration n°6 et n°8	164
B.2.6	Mise en équation de la configuration n°7	166

Liste des tableaux

1.1	Proportions des accidents impliquant les 2 roues à l'ensemble des accidents enregistrés durant l'année 1992 en Tunisie [Hela92]	26
1.2	Répartition, selon l'âge, des accidents qui ont eu lieu dans la région de Sousse durant l'année 1992 [Hela92]	27
1.3	Répartition, selon l'âge, des accidents qui ont eu lieu dans la région de Sousse durant l'année 1996 [Guac98]	27
1.4	Répartition des accidentés selon le sexe [Hela92]	28
1.5	Répartition des accidentés selon le type du siège occupé [Hela92]	28
1.6	Répartition des accidentés selon le type du siège occupé [Guac98]	28
1.7	Évolution 1994 – 1995 des cyclomotoristes tués et blessés selon la place occupée et le sexe (source ONISR) [Carr96]	29
1.8	Répartition des accidents selon le type de véhicule à deux roues impliqués	29
1.9	Répartition des cas d'accidents selon le type des véhicules adverses.	29
1.10	Types d'intersection et taille de la commune (Source:INRETS/DERA P.V. d'accidents 1/50 ^{ème} 1998)[Filo01]	30
1.11	Points du choc dans les accidents à deux véhicules (Cyclomoteur contre V.L.) (Source:INRETS/DERA P.V. d'accidents 1/50 ^{ème} 1998) [Filo01]	31
2.1	Longueurs des os mesurées sur des cadavres [Reyn78]. Les valeurs sont données en centimètres	39
2.2	Rapport de la longueur du segment par rapport à la longueur de l'os [Reyn78]	39
2.3	Équations qui définissent l'emplacement du centre de masse de chaque segment [Reyn78]	40
2.4	Équations de prévision des masses des différents segments du corps humain en Kg en fonction de la masse totale MT [Reyn78]	41
2.5	Proportions des masses des différents segments par rapport à la masse totale [Clau80]	41
2.6	Équations de régression des moments principaux d'inertie (Kg cm ²) pour différents segments. MT (Kg) : masse totale [Chan75]	42
2.7	Éléments de modélisation géométrique des différentes liaisons [Yang00]	44
4.1	Caractéristiques des différents essais	109

Table des figures

2.1	Plans anatomiques et orientations [Reyn78]	36
2.2	Anatomie du corps humain www.anatomie-humaine.com	38
2.3	Modèle polyarticulé du cyclomotoriste	43
2.4	Évolution du moment angulaire en fonction de l'angle	45
2.5	Modèle du cyclomoteur utilisé et graphe des liaisons correspondant	46
2.6	Modélisation tridimensionnelle d'un cyclomoteur	47
2.7	Paramètres d'orientation de la roue avant	47
2.8	Angle du tangage du cyclomoteur	48
2.9	Angle du braquage du cyclomoteur	48
2.10	Modélisation tridimensionnelle d'une collision entre un cyclomoteur et un obstacle mobile	49
2.11	Angle du tangage du cyclomotoriste	50
3.1	Graphe des liaisons du système formé par l'obstacle mobile, le cyclomoteur et le cyclomotoriste	54
3.2	Schéma cinématique modélisant le système formé par l'obstacle mobile, le cyclomoteur et le cyclomotoriste	55
3.3	Choc bidimensionnel d'un solide de centre de gravité G contre un plan avec la partie normale \mathbf{P}_N et la partie tangentielle \mathbf{P}_T de la percussion qui s'exerce au point de contact C . La cinématique du solide est donnée par la vitesse de son centre de gravité $(\mathbf{V}_{GT}, \mathbf{V}_{GN})$ et par sa vitesse de rotation ω	62
3.4	Région accessible dans l'espace des percussions.	67
3.5	Bloc concave en mouvement au dessus d'un plan en contact en une point A.	69
3.6	Schémas du montage à étudier	73
3.7	Système sous contrainte: le solide m_2 est solidaire du système ressort-amortisseur	74
3.8	Évolutions de $A_{ij} = a_{ij}\ddot{q}_j$ et de $b_{ijk} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ pour $K = 10^3 N/m$	76
3.9	Évolutions de $A_{ij} = a_{ij}\ddot{q}_j$ et de $b_{ijk} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ pour $K = 10^5 N/m$	76
3.10	Évolutions de $A_{ij} = a_{ij}\ddot{q}_j$ et de $b_{ijk} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ pour $K = 10^7 N/m$	77
3.11	Évolutions de la différence des composantes normales de la vitesse du point G_2 données par les formulations complète et simplifiée.	79
3.12	Modèle élastoplastique du comportement du contact frontal	80
3.13	Résumé des différentes configurations possibles durant la collision	82

3.14	Modélisation de la collision entre un obstacle mobile et un cyclomoteur implantée sous ADAMS	83
4.1	Les deux configurations utilisées pour la détermination du centre de masse . . .	88
4.2	Pendule simple	89
4.3	Plate-forme pendulaire [Bros94.1]	90
4.4	La roue avant	92
4.5	Les deux configurations utilisées pour la détermination des éléments d'inertie de la roue avant	93
4.6	Description de la fourche	94
4.7	Détermination du centre de masse de la fourche	94
4.8	Configuration pour la détermination de I_{XX}^*	95
4.9	Configuration pour la détermination de I_{YY}^*	95
4.10	Configuration pour la détermination de I_{ZZ}^*	96
4.11	Configuration pour la détermination de I_{XZ}^*	96
4.12	Description du cadre	97
4.13	Détermination de la position du centre de masse du cadre	98
4.14	Configuration pour la détermination de I_{XX}^*	98
4.15	Configuration pour la détermination de I_{YY}^*	99
4.16	Configuration pour la détermination de I_{ZZ}^*	99
4.17	Configuration pour la détermination de I_{XZ}^*	100
4.18	Montage et principe de l'essai de flexion d'une fourche	101
4.19	Construction géométrique illustrant les relations entre les différents angles . . .	102
4.20	Évolution de la charge en fonction du déplacement pour $\beta = 21^\circ$	103
4.21	Montage expérimental pour la détermination des raideurs de deux types de roue avant d'un cyclomoteur	104
4.22	Données expérimentales : Essais de compression de deux roues à rayons sans pneumatique d'un cyclomoteur.	104
4.23	Données expérimentales : Essais de compression d'une roue à bâtons avec pneumatique d'un cyclomoteur.	105
4.24	(a) Barrière mobile européenne équipée d'une planche en bois. (b) Le cadre du cyclomoteur utilisé pour les différents essais de test-crash	106
4.25	Plate-forme utilisée pour les essais de test-crash	107
4.26	Plate-forme utilisée pour les essais de test-crash	108
4.27	Évolution de l'abscisse de la mire 5 durant les trois essais 5,6 et 7	110
4.28	Évolution de l'abscisse de la mire 7 durant les trois essais 5,6 et 7	110
4.29	Évolution des différentes distances entre les mires du cadre durant la collision de l'essai n°7	111
4.30	Évolution des ordonnées des mires 6, 7 et 8 du cadre durant la collision de l'essai n°7	111
4.31	Évolution de projection de la distance qui sépare les mires 1 et 5 durant la collision de l'essai 7	112

4.32	Évolution de la distance qui sépare les mires 1 et 2 durant la collision de l'essai n°7	113
4.33	Évolution de la distance qui sépare les mires 1 de la chaussée durant la collision de l'essai n° 7	113
4.34	Évolution de l'angle de tangage du cyclomotoriste et du cyclomoteur durant la collision de l'essai n°7	114
4.35	Évolution des projections des distances qui séparent la mire 12 à la mire 6 et la mire 12 à la mire 7	114
5.1	Modélisation du système sous ADAMS	118
5.2	Modèle élastoplastique du comportement du contact frontal	119
5.3	Évolution des vitesses longitudinale et verticale du point P_1 durant une collision à 25 Km/h	120
5.4	Évolution des vitesses longitudinale et verticale du point P_2 durant une collision à 25 Km/h	120
5.5	Données relatives à la mire 8 de l'essai n°7 (25Km/h). (a) données numériques de l'évolution de l'abscisse de la mire 8 et leurs filtrage par l'application d'une moyenne mobile d'ordre 9. (b) résultats de la dérivation numérique des deux séries de données de (a)	122
5.6	Évolutions des vitesses, expérimentales et théoriques, longitudinales V_x et verticales V_z des mires 6 (courbe (a)) et 8 (courbe (b)) durant l'essai n°7.	123
5.7	Évolutions des vitesses, expérimentales et théoriques, longitudinales V_x et verticales V_z des mires 6 (courbe (a)) et 8 (courbe (b)) durant l'essai n°4.	124
5.8	Effet de la variation de la raideur de la roue avant sur la vitesse longitudinale de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).	125
5.9	Évolution pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$ des vitesses longitudinale et verticale selon l'essai n°7 de test-crash et la simulation de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).	126
5.10	Évolution, pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$, des vitesses longitudinale et verticale selon l'essai n°4 de test-crash et la simulation de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).	127
5.11	Évolution, pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$, des vitesses longitudinale et verticale selon l'essai n°3 de test-crash et la simulation de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).	128

Introduction générale

Les chocs sont des phénomènes courants, présents à toutes les échelles, des collisions entre atomes aux chocs d'astéroïdes en passant par des situations de la vie de tous les jours. Ce terme générique regroupe des situations extrêmement variées et complexes [Chol98]. Le problème du choc se rencontre dans des nombreux domaines de la recherche scientifique. La reconstitution des accidents de la circulation routière est l'un de ces domaines qui exploitent la mécanique du choc dans le but d'élaborer le scénario d'un accident de la circulation routière en se basant sur des données caractérisant l'état de la scène d'accident après collision.

L'application de la mécanique du choc pour la reconstitution des accidents de la circulation routière est faite pour les accidents impliquant des véhicules à quatre roues ou même supérieur à 4 roues. Pour ce type d'accidents, la mécanique classique du choc représente un outil mathématique efficace pour la reconstitution : d'une part, l'hypothèse d'une configuration géométrique figée de la scène d'accident durant la collision peut être admise et d'autre part, l'estimation de l'énergie dissipée durant la collision est faisable avec différentes méthodes. En plus, l'application de la mécanique du choc permet d'aboutir à des équations de mouvement simples dont la résolution est facile.

La reconstitution des accidents de la circulation routière impliquant des véhicules à deux roues reste encore un domaine à explorer. En effet, l'application de la mécanique classique du choc ne permet pas de reconstituer un accident impliquant un véhicule à deux roue et cela est dû aux caractéristiques du système formé par le cyclomotoriste et le cyclomoteur telles que :

- le système ne présente plus un mouvement dans le plan mais il s'agit d'un système tridimensionnel.
- la masse du cyclomotoriste est supérieure à celle du véhicule à deux roues à l'envers du cas des véhicules à 4 roues où les masses des occupants se trouvent incluses dans la masse du véhicule.
- Le cyclomotoriste présente des mobilités relativement au véhicule à deux roues ce que modifie la configuration inertielle de l'ensemble formé par le cyclomotoriste et le cyclomoteur.

Notre objectif, dans ce travail, est de développer un outil mathématique de reconstitution des accidents de la circulation routière impliquant des véhicules à deux roues. Il s'agit d'une nouvelle formulation de la dynamique du choc qui permet de modéliser le comportement dynamique d'un système présentant des contacts unilatéraux multiples durant une collision. Cette nouvelle modélisation sera appliquée pour étudier le comportement dynamique d'un cyclomotoriste lors d'une collision avec un obstacle mobile.

Ce mémoire s'articule en cinq parties :

Dans le premier chapitre, nous présentons une étude statistique sur l'accidentologie des véhicules à deux roues. Cette étude est faite en exploitant différentes sources de données qui présentent des statistiques faites dans le domaine de l'accidentologie des véhicules à deux roues en Tunisie et en France. A partir de cette étude des éléments caractéristiques des accidents les plus répandus seront présentées.

Dans une deuxième partie de ce chapitre une analyse des ces éléments caractéristiques sera présentée dans le but de faire apparaître la problématique et le contexte de l'étude de cette thèse.

L'objet du deuxième chapitre est de présenter, d'une façon détaillée, le modèle qui sera étudié tout au long de ce travail: un système formé par un cyclomotoriste installé sur un cyclomoteur qui entre en collision avec un obstacle mobile. Ce chapitre commence par introduire le modèle polyarticulé du corps humain (cyclomotoriste). A cet effet une étude bibliographique sera présentée concernant les approches théoriques et expérimentales utilisées dans le domaine de la modélisation dynamique du corps humain. A l'issue de cette étude les caractéristiques du modèle adopté ainsi que la démarche utilisée pour élaborer un modèle multicorps polyarticulé qui représente le corps humain seront présentés. Ce modèle numérique servira par la suite comme outil de détermination des caractéristiques géométriques et inertielles du cyclomotoriste. En second lieu, le modèle du cyclomoteur sera présenté par ses données géométriques, inertielles et les sollicitations auxquelles il se trouve soumis.

Dans le troisième chapitre nous présentons le paramétrage du modèle. Nous décrivons les choix des différentes liaisons et éventuellement, les justifications de ces choix ainsi que les coordonnées généralisées du système et les paramètres utilisés. Pour la modélisation dynamique, les équations de liaison ainsi que les sollicitations auxquelles le système se trouve soumis seront étudiées. A ce niveau le problème de modélisation d'un système dont la configuration des contacts unilatéraux est variable, sera exposé. La nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc sera présentée d'une façon générale ainsi que ses hypothèses simplificatrices. Afin de la valider, cette nouvelle formulation sera appliquée au cas d'un système mécanique simple: un double pendule qui entre en collision avec un plan horizontal. Les hypothèses simplificatrices seront validées ainsi que le comportement dynamique du système en utilisant des outils numériques de simulations.

La nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc est appliquée, par la suite, au cas du modèle du cyclomoteur qui entre en collision avec une barrière mobile sujet de cette thèse. Par conséquent, la démarche suivie ainsi que la mise en équations des différentes configurations rencontrées seront présentées. Afin de valider le comportement dynamique du système par cette nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc, une modélisation numérique équivalente sur un logiciel qui traite la dynamique des systèmes multicorps sera présentée.

Dans le quatrième chapitre sera présenté le volet expérimental de ce travail. Les données numériques obtenues des essais permettent d'accomplir des simulations et de visualiser, par la suite, des résultats. A cet effet, deux types d'essais expérimentaux sont réalisés. Le premier type d'essais vise la détermination des éléments inertiels qui caractérisent les différents éléments du système étudié. Le second type d'essais vise l'identification des paramètres du modèle du contact frontal. A ce niveau seront présentés les essais de flexion des deux fourches et la compression

de deux types de roues utilisées pour les cyclomoteurs avec et sans pneumatique. Les essais de test-crash seront présentés dans la deuxième partie de ce chapitre. Ces essais seront bien décrits du point de vue préparation, protocole adopté, démarche expérimentale et la méthodologie adoptée pour le dépouillement et le traitement des différentes données acquises. En analysant les différents enregistrements vidéo obtenues, des remarques sur le déroulement de ces types d'accidents sont faites.

Dans le cinquième chapitre deux confrontations sont présentées et analysées. La première confrontation est faite entre les résultats analytiques de la modélisation simplifiée obtenus de l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc élaborée dans le cadre de cette thèse et la modélisation numérique faite sur un logiciel de dynamique des systèmes multicorps (ADAMS) de la scène de collision d'un système formé par un cyclomoteur sur lequel est installé un mannequin à l'arrêt avec une barrière mobile. La deuxième confrontation compare les résultats obtenus de la modélisation simplifiée aux données numériques des essais de test-crash. A ce niveau des remarques et des critiques seront présentées.

Enfin, nous concluons cette étude et exprimerons les différentes voies à explorer pour poursuivre ce travail.

Chapitre 1

Contexte de l'étude et problématique

1.1 Introduction

De nos jours, les véhicules à deux roues représentent un moyen de locomotion très utilisé surtout en zones urbaines. La coexistence de ce type de véhicule, en nombre toujours croissant, avec un nombre grandissant de voitures et de véhicules utilitaires n'a fait qu'accroître la part prise par les véhicules à 2 roues dans les accidents de la circulation routière. Par ailleurs on note que, d'une part, les "2 Roues" sont dans un environnement hostile auquel ils sont plus sensibles que les "4Roues", d'autre part, ils sont en compétition avec des véhicules plus puissants et plus rapides qu'eux et sont souvent des victimes du manque d'attention des conducteurs des véhicules à "4Roues". Il est vrai aussi que de nombreux accidents surviennent alors que les "4Roues" sont immobilisés par le trafic et que les "2Roues" remontent les files des voitures. Tous ces faits font que les accidents impliquant les "2Roues" sont très fréquents et particulièrement graves pour leurs usagers.

Dans tous les pays de l'union européenne à l'exception du Royaume-Uni et depuis peu de l'Allemagne, le cyclomoteur demeure encore le type de deux roues à moteur le plus répandu représentant entre 55% et les trois quarts du parc total des deux roues à moteur [Carr96]. En France, malgré une forte diminution de parc depuis 1970, les cyclomoteurs sont toujours le type de deux roues le plus utilisé, surtout par les jeunes. Les cyclomotoristes constituent, avec les piétons et les cyclistes, la catégorie d'usagers de la route la plus vulnérable en cas d'accident.

En Tunisie, malgré les immenses efforts de l'État, durant ces dernières années, la situation demeure très grave, puisqu'on voit sur nos routes un accident toutes les 52 mn, un blessé toutes les 41 mn, et un tué toutes les 6 heures et 41 mn [Hela92].

Notre objectif dans ce travail est de modéliser des cas d'accidents de la circulation routière impliquant un véhicule à deux roues. Une telle modélisation servira pour faire des simulations et aborder le domaine de la reconstruction de ce type d'accidents. Dans une première phase une étude statistique sera présentée. Elle est faite en se basant sur des thèses de médecine, des travaux de recherche et des rapports publiés par des organismes de recherche sur la sécurité routière. Cette étude statistique servira pour mettre en cadre le travail envisagé. Elle permettra de présenter une description complète de la scène d'accident la plus rencontrée tel que les types

de véhicule à deux roues et de véhicule adverse, la configuration de la collision... A la fin de ce chapitre une présentation de la problématique posée ainsi que la démarche suivie pour la traiter sera faite.

1.2 Accidentologie des véhicules à deux roues

1.2.1 Introduction

Dans ce paragraphe est présentée une étude statistique ayant pour but de trouver les points communs et les plus fréquents rencontrés au niveau des accidents impliquant des véhicules à deux roues. Cette étude abordera trois directions :

- La première direction s'intéresse aux caractéristiques du cyclomotoriste. Elle a pour but de déterminer les caractéristiques physiques (taille, âge ...) du cyclomotoriste qu'on modélisera, par la suite, lors de la simulation.
- La seconde direction vise la détermination du type des véhicules à deux roues les plus impliqués dans ce genre d'accidents, dans le but de déduire leurs caractéristiques géométriques et inertielles.
- La troisième direction s'intéresse aux caractéristiques de l'environnement de l'accident (lieu, type et géométrie de la chaussée...) ainsi que le scénario selon lequel s'est déroulé l'accident (configuration géométrique, mouvements relatifs...). L'objectif est de choisir les scénarios les plus répandus de ces accidents.

Une conclusion sera présentée, dans laquelle seront décrits les paramètres principaux ainsi que les choix retenus pour les scènes d'accidents à modéliser.

1.2.2 Statistique des accidents des véhicules à 2 roues

Le tableau (1.1) [Hela92] présente une étude statistique sur une série d'accidents qui ont eu lieu, dans la région de Sousse en Tunisie, durant l'année 1992. On note que les usagers des véhicules à deux roues, sujets de cette étude, présentent 32.2% de la population des accidents de la voie publique dont les moyens de locomotion ont été identifiés.

	Usagers de 2 Roues		Tout type d'utilisateur		2 Roues/Tout usager
	Nb	%	Nb	%	%
<15 ans	13	4.5	140	16	9.3
15 – 25 ans	117	40.3	222	25.5	52.7
26 – 35 ans	78	26.9	230	26.3	33.9
36 – 45 ans	34	11.7	107	12.3	31.8
46 – 55 ans	19	6.6	70	8	27.1
56 – 65 ans	18	6.2	60	6.9	30
66 – 75 ans	8	2.8	35	4	22.8
>75 ans	3	1	9	1	33.3
	290	100	873	100	32.2

TAB. 1.1 – Proportions des accidents impliquant les 2 roues à l'ensemble des accidents enregistrés durant l'année 1992 en Tunisie [Hela92]

Caractéristiques du cyclomotoriste

Âge D'après les tableaux (1.1), (1.2) et (1.3), il est à noter que les adolescents et les jeunes adultes sont les plus impliqués dans les accidents des véhicules à deux roues. Cette constatation a été faite aussi par [Hadd99] dans une étude faite sur les accidents de la circulation routière impliquant un véhicule à deux roue dans le département du Rhône en France et trouve son explication, d'une part, dans l'utilisation importante de ce type de véhicule par les adolescents et les jeunes adultes et d'autre part, dans la législation qui interdit l'utilisation des bicyclettes chez les moins de 12 ans, des cyclomoteurs chez les moins de 16 ans, des vélomoteurs chez les moins de 17 ans et des motocyclettes chez les moins de 18 ans [Hela92]. Filou [Filo01] a trouvé, au niveau de 171 accidents de véhicules à deux roues étudiés et qui ont eu lieu en France, que l'âge le plus rencontré se situe entre 14 et 17 ans. Didoyan [Dido79] et Ramet [Rame87] ont trouvé que la fréquence élevée des accidents correspond à l'intervalle d'âge entre 15 et 20 ans. Kopjar [Kopj99] a montré, dans une étude statistique faite entre 1990 et 1996 sur les accidentés des véhicules à deux roues, que pour le cyclomotoriste, l'âge le plus rencontré se situe entre 15 et 18 ans.

	Bicyclette		Cyclomoteur		Vélomoteur	
	Nb	%	Nb	%	Nb	%
<15 ans	5	11.9	8	3.3	0	0
15 – 25 ans	10	23.9	102	42.5	5	62.5
26 – 35 ans	7	16.6	69	28.8	2	25
36 – 45 ans	5	11.9	28	11.7	1	12.5
46 – 55 ans	6	14.3	13	5.4	0	0
56 – 65 ans	5	11.9	13	5.4	0	0
66 – 75 ans	4	9.5	4	1.7	0	0
>75 ans	0	0	3	1.2	0	0
	42	100	240	100	8	100

TAB. 1.2 – Répartition, selon l'âge, des accidents qui ont eu lieu dans la région de Sousse durant l'année 1992 [Hela92]

	Bicyclette		Cyclomoteur		Vélomoteur	
	Nb	%	Nb	%	Nb	%
<15 ans	5	29.4	2	2.7	0	0
15–24ans	5	29.4	21	28.4	0	0
25–34 ans	1	5.9	15	20.3	1	100
35–44 ans	0	0	11	14.9	0	0
45–54ans	2	11.8	7	9.4	0	0
55–64 ans	1	5.9	9	12.2	0	0
65–74ans	1	5.9	4	5.4	0	0
>75 ans	2	11.8	5	6.7	0	0
	17	100	74	100	1	100

TAB. 1.3 – Répartition, selon l'âge, des accidents qui ont eu lieu dans la région de Sousse durant l'année 1996 [Guac98]

Sexe D'après les tableaux (1.4) et (1.7) on remarque que le sexe masculin est le plus sollicité par les accidents des véhicules à 2 roues. Guacem [Guac98] trouve qu'environ 98.9% des victimes

des accidents de 2 roues sont de sexe masculin contre environ 1.1% de sexe féminin. Cottin [Cott97] a trouvé, au niveau des 230 cas étudiés, que 86.5% des conducteurs sont de sexe masculin d'où un sexe ratio de (6.4).

	Usager de 2 Roues		Tout type d'usager		2 roues/ tout usager
	Nb	%	Nb	%	%
Masculin	281	94.6	691	77.6	40.7
Féminin	16	5.4	200	22.4	8
	297	100	891	100	33.3

TAB. 1.4 – Répartition des accidentés selon le sexe [Hela92]

Type de "2 Roues" et siège occupé Dans le travail de Helali [Hela92] (Tableau 1.5), les 297 accidentés ont été utilisateurs de 247 véhicules à "2 Roues" : 41 Bicyclettes, 200 cyclomoteurs et 6 Vélocycleurs. On note que la majorité des patients ont été des cyclomotoristes 82.5% dont 81.6% occupaient le siège du conducteur.

Dans le travail de Guacem [Guac98] (Tableau 1.6), 89.1% des victimes étaient des conducteurs (occupant le siège du conducteur), 9.8% des passagers (occupant le siège arrière) et 1.1% occupant un siège inadapté (sur le guidon, sur le réservoir, sur le porte bagage...).

Fattoum [Fatt01], dans son étude sur 234 cas d'accidents mortels des véhicules à deux roues, a montré que les cyclomoteurs présentent le type de véhicule à deux roues le plus impliqué (78.8%).

	Siège avant		Siège arrière		Siège inadapté		Total usagers	
	Nb	%	Nb	%	Nb	%	Nb	%
Bicyclette	41	13.8	2	0.7	1	0.3	44	14.8
Cyclomoteur	200	67.4	39	13.1	6	2	245	82.5
Vélocycleur	6	2	2	0.7	0	0	8	2.7
	247	83.2	43	14.5	7	2.3	297	100

TAB. 1.5 – Répartition des accidentés selon le type du siège occupé [Hela92]

	Siège avant		Siège arrière		Siège inadapté		Total usagers	
	Nb	%	Nb	%	Nb	%	Nb	%
Bicyclette	17	18.5	0	0	0	0	17	18.5
Cyclomoteur	64	69.6	9	9.8	1	1.1	74	80.5
Vélocycleur	1	1.1	0	0	0	0	1	1.1
	82	89.1	9	9.8	1	1.1	92	100

TAB. 1.6 – Répartition des accidentés selon le type du siège occupé [Guac98]

En analysant le tableau (1.7) on note que le conducteur est le plus touché en cas d'accident impliquant les véhicules à deux roues. Cottin [Cott97] mentionne qu'un motocycliste tué sur 8 et un blessé sur 7 était un passager. En plus, il trouve que le conducteur est le plus impliqué (84.3%).

D'une façon générale, en analysant ces tableaux on constate que les conducteurs sont les plus exposés aux risques et que les cyclomoteurs sont les plus impliqués.

Place occupée	Sexe	Cyclomotoristes tués		Cyclomotoristes blessés	
		1994	1995	1994	1995
Conducteurs	Masculin	405	404	14987	15910
	Féminin	41	42	3175	3341
	Total	446	446	18162	19451
Passager	Masculin	18	12	1042	1177
	Féminin	8	13	867	1059
	Total	26	25	–	2236
Total	Masculin	423	416	16030	17087
	Féminin	49	55	4042	4400
	Total	472	471	20072	21487

TAB. 1.7 – *Évolution 1994 – 1995 des cyclomotoristes tués et blessés selon la place occupée et le sexe (source ONISR) [Carr96]*

Type de véhicule à 2 Roues D'après le tableau (1.8) on note l'importance de la part prise par les cyclomoteurs dans le bilan d'accidents de la circulation routière des véhicules à deux roues en Tunisie.

	Étude de Guacem [Guac98] (92 victimes 1996)		Étude de Fattoum [Fatt01] (234 victimes 1998)	
Bicyclette	17	18.5%	47	20.1%
Cyclomoteur	74	80.4%	175	74.8%
Vélocycle	1	1.1%	12	5.1%

TAB. 1.8 – *Répartition des accidents selon le type de véhicule à deux roues impliqués*

Type de véhicule antagoniste Le tableau (1.9) montre les types des véhicules antagonistes les plus rencontrés dans les accidents des véhicules à deux roues en Tunisie et en France. On note que les véhicules légers sont les plus impliqués (taux d'implication 55%). Cette constatation apparaît aussi dans l'étude de Kopjar [Kopj99]. Il note qu'un véhicule léger se trouve impliqué dans 69.5% des cas.

Les collisions sont contre:	Helali [Hela92]	Guacem [Guac98]	Fattoum [Fatt01]	Filou [Filo01]	Didoyan [Dido79]
Véhicule léger	67,5%	56,7%	55,12	80,1%	64.7%
Véhicule deux roues	12,1%	28,9%	2,1%	9,4%	3.3%
Bus – Poids lourd	6,9%	5,6%	14,1%	2,9%	7.3%
Piéton	–	–	2,1%	5.8%	0.7%
Autres	10,4%	8,8%	6,2%	1,8%	24%

TAB. 1.9 – *Répartition des cas d'accidents selon le type des véhicules adverses.*

Circonstances de l'accident

Intersection Le tableau (1.10) montre que la majorité des accidents ont eu lieu hors intersection [Filo01]. Dans le travail de Guacem [Guac98], 67.8% d'accidents se sont déroulés en dehors d'une intersection.

Type d'intersection	Taille de la commune (nombre d'habitants)					
	0 – 2000	2001 – 20000	20001 – 10 ⁶	>10 ⁶	Ensemble	effectif
Hors intersection	62.5	38	30	39.3	40.9	70
En X	25	26.8	37.5	17.9	27.5	47
En T – Y	12.5	28.2	25	28.6	24.6	42
Giratoire	0	5.6	0	3.6	2.9	5
Autre intersection	0	1.4	7.5	10.7	4.1	7
Ensemble	100	100	100	100	100	171
Effectif	32	71	40	28	171	

TAB. 1.10 – *Types d'intersection et taille de la commune (Source :INRETS/DERA P.V. d'accidents 1/50^{ème} 1998)[Filo01]*

Localisation de l'accident Dans la thèse de Guacem on note que le premier choc est dans 90% des cas sur chaussée, hors chaussée dans 2.2% des cas et sur piste en terre dans 5.6% des cas [Guac98].

Caractéristique de la surface Dans 92.2% des cas la chaussée était sèche, dans 7.8% des cas elle était soit mouillée soit recouverte de sable [Guac98].

Profil en long et en travers En analysant le travail de Guacem [Guac98] on trouve que 13.3% des accidents des "2Roues" se sont déroulés sur une route sinueuse, alors que 86.7% de ces accidents se sont déroulés sur une route rectiligne. En plus, la majorité des accidents de "2Roues" se sont déroulés sur une route plate: 87.8% des cas, alors que 12.2% de ces accidents se sont déroulés sur une route descendante, en monté, en dos d'âne ou autre.

Analyse du point du premier contact Le tableau (1.11) montre l'emplacement du point d'impact, relativement au véhicule à deux roues et au véhicule adverse (véhicule léger) dans les différents cas d'accidents. On note que dans la majorité des cas, le cyclomoteur est touché au niveau de la roue avant. Ce qui prouve que le choc frontal, pour le cyclomoteur, est le plus fréquent dans ce type d'accident. En plus le véhicule léger est touché à son avant dans 74%, à son arrière dans 14.2% et sur les cotés, droit et gauche, dans 10.1% des cas. Ainsi, le scénario le plus répandu correspond à des chocs frontaux pour le cyclomoteur avec un angle d'incidence variable.

Cinématique de la collision Dans l'étude faite par Didoyan [Dido79] trois cinématiques possibles de l'accident entre un véhicule à deux roues et un véhicule léger peuvent être distinguées :

- Choc sans échappement : où le cyclomotoriste heurte directement le véhicule adverse, avec dissipation d'énergie brutale et accélération importante. C'est le cas le plus répandu dans les accidents entre cyclomoteur et véhicule léger. Ce type de choc représente 46.67% de l'échantillon étudiée.
- Choc avec éjection puis chute sur le sol. Ceci après choc du cyclomoteur contre un obstacle. Ce scénario est rencontré dans le travail de Cottin [Cott97] où il note que 6.9% de motocycliste ont eu une éjection totale de leurs motos.

Point de choc du véhicule léger	Point du choc du cyclomoteur					
	Avant	Côté Droit	Côté Gauche	Arrière	Ensemble	Effectifs
Avant	13.4%	1.6%	2.4%	2.4%	26%	33
Avant gauche	18.1%	–	3.1%	–	29.9%	38
Avant droit	29.9%	1.6%	0.8%	0.8%	18.1%	23
Côté droit	3.9%	–	–	–	3.9%	5
Côté gauche	3.9%	0.8%	1.6%	–	6.3%	8
Arrière	14.2%	–	–	–	14.2%	18
Non Renseigné	1.6%	–	–	–	1.6%	2
Ensemble	85%	3.9%	7.9%	3.1%	100%	127
Effectif	108	5	10	4	127	

TAB. 1.11 – Points du choc dans les accidents à deux véhicules (Cyclomoteur contre V.L.) (Source : INRETS/DERA P.V. d'accidents 1/50^{ème} 1998) [Filo01]

- Déséquilibre et “ side swipe ”. Ces deux cas sont confondus vue l'absence du phénomène de collision.

Mécanisme d'un accident Quelque soit le type de “2Roues” impliqué, l'explication classique en trois phases du mécanisme de l'accident de “2Roues” reste valable. Ce mécanisme est décrit selon les trois phases suivantes :

1. **Première phase** : C'est le choc primaire du véhicule à deux roues ou même du corps du cyclomotoriste. Au cours de cette phase, le plus souvent, il y a impact par le pare-chocs d'un véhicule léger, ou moins fréquemment, par des panneaux, arbres, piétons, animaux...
2. **Deuxième phase** : C'est le choc post – primaire, l'usager du “2Roues” est éjecté. Au cours de cette projection de brève durée, il peut heurter un autre obstacle (véhicule, arbre, panneau...).
3. **Troisième phase** : C'est le choc secondaire, où l'impact contre le sol varie selon plusieurs facteurs : angle d'attaque, vitesse, nature du sol et partie du corps qui subit la collision. C'est pendant cette phase que le véhicule à deux roues peut lui même blesser l'utilisateur.

Cependant, il faut noter que pour les motocyclettes ce mécanisme est moins souvent rencontré. Car, étant plus rapides et plus puissantes, elles engendrent souvent des accidents sans participation d'un tiers et dont le mécanisme se fait directement en deuxième, voire en troisième phase.

Les différences qui peuvent être constatées dans les accidents des véhicules à deux roues résident dans la vitesse et le poids de la machine impliquée. En effet, la vitesse est un facteur qui augmente la gravité du choc. Le poids de la machine peut compliquer l'accident dans la phase secondaire en écrasant ou en percutant le corps de l'usager éjecté.

1.2.3 Conclusion

Comme conclusion de cette étude statistique il est à retenir que le conducteur est un homme, jeune, d'âge compris entre 15 et 35 ans, de sexe masculin et occupant le siège du conducteur d'un véhicule à deux roues.

Par ailleurs les cyclomoteurs sont les plus utilisés et les plus impliqués dans les accidents de la circulation des véhicules à 2 roues en Tunisie. En plus, la majorité des accidents sont contre un véhicule léger.

La majorité des accidents ont lieu en agglomération sur une route sèche, plate, rectiligne. Le premier choc est frontal pour le cyclomoteur, dans la majorité des cas.

1.3 Présentation de l'étude

1.3.1 Problématique de l'étude

Dans ce paragraphe on se propose de citer les différents points qui seront traités tout au long de ce travail. L'objectif est de développer une modélisation simplifiée d'une collision entre un obstacle mobile et un cyclomoteur. L'étude statistique présentée précédemment permet de prendre les critères suivants pour cette modélisation :

- Le cyclomotoriste est présenté par un modèle qui représente un jeune adulte.
- Le véhicule à deux roues est un cyclomoteur car il s'agit du type le plus impliqué dans les accidents de la circulation routière en Tunisie.
- Les différentes collisions qui seront simulées sont du type fronto-frontal avec la possibilité de faire varier l'angle d'incidence, autrement dit, la direction de la vitesse relative ainsi que les différents paramètres cinématiques de pré-collision.

L'ensemble à modéliser est présenté par un système mécanique formé par trois sous-systèmes essentiels et qui sont : l'obstacle mobile, le cyclomoteur et le cyclomotoriste. Afin de faire apparaître les degrés de liberté qui ont une influence majeure sur le comportement dynamique du système durant la collision, une subdivision supplémentaire sera envisagée.

D'autre part, les sollicitations mécaniques auxquelles le système se trouve soumis durant la collision, doivent être minutieusement exprimées. En fait, la force de collision qui prend naissance au moment du contact entre la roue avant et l'obstacle mobile ainsi que les différentes forces de contact sont inconnues. Afin de résoudre ce problème d'indétermination des différentes forces de contact, deux approches existent dans la bibliographie de la reconstitution des accidents. La première approche consiste à utiliser la mécanique classique du choc. Autrement dit, l'énergie dissipée durant la collision est estimée par un coefficient dit de restitution. D'autres travaux modélisent les différents points qui représentent un contact influant sur le comportement dynamique de l'ensemble par des modèles rhéologiques à base de ressorts et d'amortisseurs. Une étude bibliographique a été présentée dans les travaux de Canaple [Cana01, Cana02]. Les deux approches présentent des avantages et des inconvénients et qui seront présentés dans le chapitre 3.

Le système à étudier présente des contacts unilatéraux tel que les contacts entre la chaussée et les deux roues et celui entre la selle et le cyclomotoriste. L'état de ces contacts est susceptible de varier durant la collision. Le changement d'état d'un contact modifie la configuration dynamique du système. Par la suite, les différentes configurations doivent être déterminées et modélisées. Ceci sera fait en utilisant une formulation de la mécanique analytique tel que la formulation de

Lagrange.

Disposant des équations de mouvement du système, pour les différentes configurations possibles du système sont établies, le problème qui se pose est de savoir comment les exploiter afin de déterminer la chronologie de l'apparition et la disparition des différentes configurations (différentes combinaisons des états des liaisons unilatérales effectives ou défaites).

Afin de pouvoir simuler le comportement dynamique du système durant la collision, un outil numérique de résolution est indispensable. Les solutions des équations du mouvement du système seront, dans ce cas, sous une forme numérique. Afin d'aboutir aux mêmes solutions, une autre démarche peut être envisageable. Elle consiste à l'utilisation d'un logiciel de simulation dynamique des systèmes multicorps. Dans ce cas ces données numériques peuvent être obtenues en implantant le système dans un logiciel de simulation dynamique. Dans ce cas, les solutions seront sous une forme numérique et on n'aura plus la possibilité d'aborder le domaine de la reconstitution de ces types de collision. En effet, dans le cas des simulations numériques sur ces logiciels on spécifie les conditions initiales et le calculateur se charge de trouver les lois d'évolution de tous les paramètres du système. Alors que le principe de la reconstitution d'un accident consiste à spécifier les conditions de fin de la collision et l'algorithme se charge de trouver les conditions de pré-collision.

La proposition qui est faite dans ce travail permet de simplifier la mise en équation en introduisant des hypothèses simplificatrices dont le but est de trouver les solutions du système sous une forme analytique. Le fait d'avoir ces solutions sous une telle forme nous permettra d'aborder le sujet de la reconstitution des accidents des véhicules à deux roues.

Enfin et afin de valider la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc il nous faut des simulations équivalentes faites sans simplifications ou même, des essais expérimentaux qui reproduisent la scène simulée. D'autre part, des données numériques qui nourrissent les différentes simulations sont indispensables tel que des données géométriques, inertielles... des différents éléments du système. A cet effet des essais d'identification expérimentale de ces paramètres seront faits dans le cadre de ce travail.

1.3.2 Démarche adoptée

La démarche suivie dans ce travail peut être résumée de la façon suivante :

Dans un premier temps nous modéliserons le système à étudier. En commençant par l'étude du cyclomotoriste, une étude bibliographique sur la modélisation du corps humain sera présentée. Cette étude servira par la suite pour la détermination des différents paramètres géométriques et inertiels que présentent les éléments du corps d'un jeune adulte de taille moyenne (50 percentile). A l'issue de cette étude un modèle multicorps polyarticulé sera défini. Ensuite, une description de véhicule à deux roues sera présentée ainsi que la description de la scène de collision à étudier.

La modélisation dynamique de la scène de collision sera présentée dans un deuxième temps. A ce niveau nous présenterons la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Cette formulation sera exposée, dans un premier temps, d'une façon générale. Elle sera, ensuite appliquée pour le cas d'un mécanisme simple afin de valider les différentes hypothèses simplificatrices. Puis, elle sera appliquée au cas du système étudié qui représente une collision entre

un obstacle mobile et un cyclomoteur à l'arrêt. Le fait de considérer le cas d'un cyclomotoriste assis sur un cyclomoteur à l'arrêt revient à des difficultés rencontrées au niveau de la mise en oeuvre des essais de test-crash (voir chapitre 4). La mise en équations des différentes configurations possibles sera faite en utilisant la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Les différentes équations du mouvement seront résolues selon une démarche analytique. D'autre part, et afin de valider l'application de la nouvelle formulation au cas du système étudié, une modélisation équivalente sur un logiciel de simulation dynamique des systèmes multicorps (ADAMS) sera présentée.

Des essais expérimentaux seront présentés. Ils ont été menés dans le but de déterminer les différentes données nécessaires aux simulations numériques. A ce niveau une première confrontation sera faite entre les comportements dynamiques du système donnés par la formulation simplifiée et par la modélisation équivalente sous ADAMS. A l'issue des résultats des ces confrontations, des essais de test-crash seront présentés. Ces essais serviront pour la validation expérimentale et l'analyse du comportement dynamique du système durant la collision.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude statistique ayant pour but la détermination des caractéristiques des accidents de la circulation routière impliquant un véhicule à deux roues. Cette étude a été orientée vers la détermination du type du cyclomoteur, du conducteur et le scénario de l'accident les plus répandus. Comme conclusion de cette étude statistique il est à noter que :

- Le véhicule à deux roues le plus impliqué dans ce type d'accidents est un cyclomoteur (49 cm³).
- Le conducteur est un homme, jeune, d'âge compris entre 15 et 35 ans, de sexe masculin et occupant le siège du conducteur.
- L'accident se fait généralement contre un véhicule léger selon une configuration de collision fronto-frontale.

A l'issue de cette étude la problématique de ce travail a été présentée d'une façon à faire apparaître les objectifs visés. Cette problématique est suivie par la présentation de la démarche adoptée durant ce travail.

Dans le chapitre suivant on se propose de présenter la démarche de modélisation les différents éléments du système à étudier : le cyclomotoriste, le véhicule à deux roue et l'obstacle mobile.

Chapitre 2

Modélisation du cyclomotoriste et du cyclomoteur

2.1 Introduction

On se propose dans ce chapitre de présenter les éléments caractéristiques du système à étudier. Il s'agit d'une collision frontale entre un obstacle en mouvement et un cyclomoteur sur lequel est installé un cyclomotoriste. Dans un premier temps ce chapitre présentera la démarche adoptée pour modéliser le cyclomotoriste, ensuite sera présenté le modèle du cyclomoteur. La scène de collision à modéliser sera décrite par la suite.

Afin de modéliser le corps du cyclomotoriste, une étude bibliographique sur la modélisation de corps humains sera présentée au début de ce chapitre. Cette étude permettra d'aboutir à un modèle paramétré du corps humain. Les données géométriques et inertielles du corps humain seront présentées sous la forme des équations de régression linéaires qui s'expriment en fonction de la masse et de la stature du cyclomotoriste. Afin de pouvoir calculer les propriétés inertielles globales du cyclomotoriste, les différentes expressions seront implantées dans une modélisation graphique sous un logiciel d'étude dynamique de systèmes multibody (ADAMS). Ceci permet de choisir la configuration que le cyclomotoriste présente, quand il est installé sur le cyclomoteur, juste avant la collision et de calculer le tenseur d'inertie ainsi que la position du centre de masse.

Dans une deuxième partie de ce chapitre une modélisation multibody sera adoptée pour le cyclomoteur. Les différents solides qui composent ce modèle et les paramètres utilisés seront introduits. La description de tout le système sera présentée au niveau de la troisième partie de ce chapitre.

2.2 Modélisation du Corps Humain

2.2.1 Introduction

Le corps humain peut être modélisé par un mécanisme en utilisant des hypothèses simplificatrices importantes : ainsi les différentes liaisons articulaires complexes sont remplacées par des

liaisons de la mécanique des corps rigides polyarticulés de type rotoïde ou sphérique. L'objet de cette partie est de présenter les caractéristiques géométriques du modèle du corps humain qui seront utilisées pour simuler le comportement dynamique d'un cyclomotoriste durant un accident de la circulation routière. Afin d'aboutir à une modélisation dynamique cohérente, un aperçu succinct sur le système d'axes utilisé en biomécanique sera introduit. Le modèle sera présenté par la description de ses différents éléments, des différentes liaisons qui le composent et de leurs caractéristiques. A l'issue de cette étude, les caractéristiques du modèle représentatif du cyclomotoriste seront présentées et définiront le modèle multicorps polyarticulé représentatif du cyclomotoriste.

2.2.2 Modélisation géométrique du corps humain

Système d'axes du corps humain

Dans l'étude de l'anatomie du corps humain trois plans (sagittal, frontal et transversal) sont considérés par hypothèse pour décrire les emplacements relatifs des différents segments corporels et les mécanismes fonctionnels de chaque articulation. Ces plans sont décrits par la figure (2.1). Le corps humain est pris dans une configuration debout. Les trois vecteurs sont définis comme

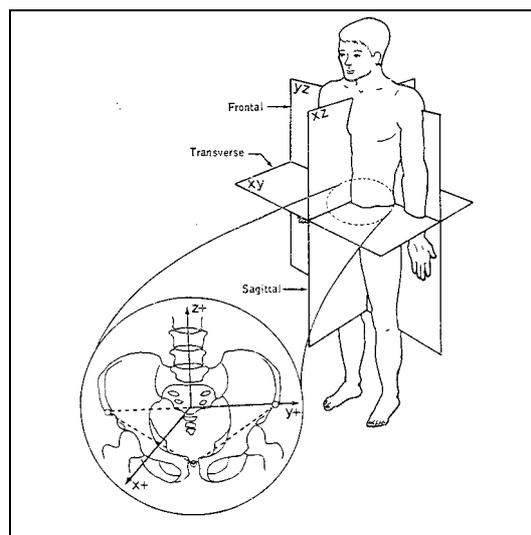


FIG. 2.1 – Plans anatomiques et orientations [Reyn78]

suit :

- Un vecteur \mathbf{x} dont la direction est portée par une droite traversant le corps humain de l'arrière vers l'avant (X^+)
- Un vecteur \mathbf{y} dont la direction est portée par une droite qui traverse latéralement le corps du côté droit vers le côté gauche (Y^+).
- Un vecteur \mathbf{z} dont la direction est portée par une droite traversant verticalement, dans un sens ascendant, le corps humain (Z^+).

Le plan sagittal est défini par les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{z} , le plan frontal est défini par les vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{z} et le plan transversal est défini par les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} . Pour les études en biomécanique, un système d'axes est défini en ajoutant aux trois vecteurs, (\mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z}), une origine de repère par laquelle passent les différents plans définis précédemment. Cette origine est choisie par convention au centre du bassin [Reyn78]. En effet, il y a plusieurs raisons pour faire ce choix. La première est que dans la plupart des configurations du corps humain, le centre de masse est situé au voisinage de ce point. La deuxième raison est que le bassin peut être considéré comme un corps rigide et la troisième raison est que le corps humain peut être schématisé par une structure polyarticulée en étoile dont le bassin est considéré comme l'élément central. Ces différents plans servent aussi pour la définition des mouvements des différentes articulations. Les mouvements de flexion – extension sont ceux effectués dans le plan sagittal. Les mouvements d'adduction – abduction sont ceux effectués dans le plan frontal.

2.2.3 Modélisation géométrique et inertielle du corps humain

Introduction

L'objectif de cette partie est d'estimer les différentes grandeurs géométriques et inertielles à partir des caractéristiques d'un jeune adulte : masse et stature. Des modèles existent dans la littérature de biomécanique. Différents travaux ont été menés dans le but d'élaborer des codes mathématiques ayant comme tâche la prévision de ces grandeurs. Ces travaux sont fondés sur de données statistiques concernant certaines populations humaines. Deux types de source des données ont été rencontrés : soit des mesures faites directement sur des segments des cadavres humains ([Erne64] [Clau69][Chan75][Clau80]) soit des mesures faites sur des personnes vivantes [Clau63]. Ces différentes mesures ont été utilisées pour trouver des lois mathématiques à base d'équations de régression linéaires. Généralement, les mesures faites sur des corps réels fournissent un modèle plus représentatif de la réalité du comportement inertiel du corps humain, mais malheureusement certaines mesures sont inaccessibles sur des corps vivants.

La distribution des masses est décrite selon l'ossature du squelette humain. Les systèmes d'axes, les masses, les volumes, les centres des masses et les différents moments d'inertie sont présentés pour les différents segments qui forment le modèle du corps humain présenté sur la figure (2.2). Les équations présentées dans ce travail dépendent de la masse totale ainsi que d'autres paramètres anthropométriques du jeune adulte.

Sources des données

Les différents travaux exploités durant cette étude bibliographique ont pour principe de prélever des mesures soit sur des cadavres en adoptant diverses méthodes statistiques d'échantillonnage et de mesure [Erne64][Clau69][Chan75][Clau80] soit sur des corps vivants en utilisant différentes techniques de mesure [Chen00, Baca96, Nort02, Erdm97]. Les mesures des caractéristiques des segments sur des corps vivants ont été, d'une façon générale, faites par des méthodes indirectes. L'emplacement du centre de masse d'un segment a été estimé par l'utilisation soit de la mesure de la variation de la réaction d'une planche suite à un mouvement du membre à étudier

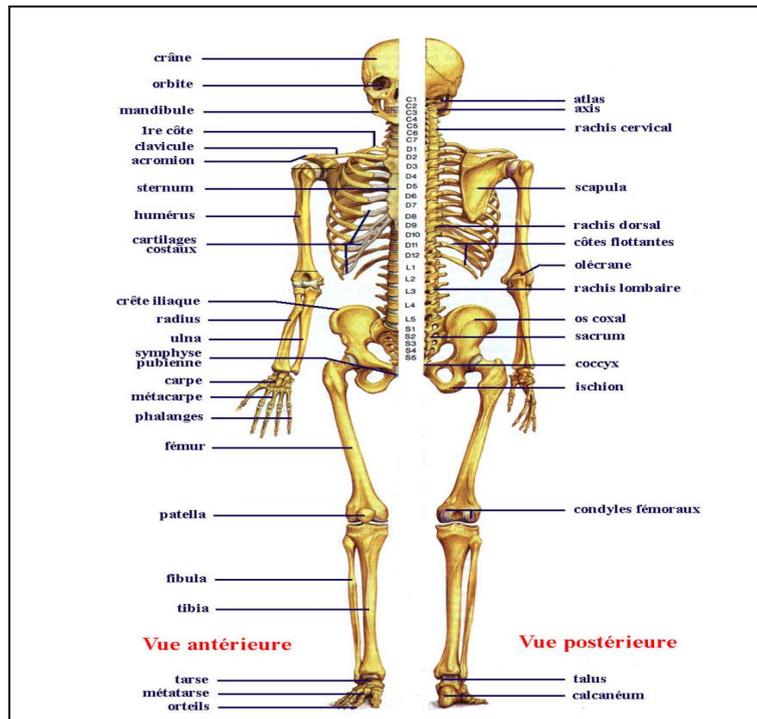


FIG. 2.2 – Anatomie du corps humain www.anatomie-humaine.com

[Clau69], soit des mesures des volumes et la déduction, par la suite, de la masse en utilisant la notion de la densité pour un corps homogène [Baca96, Nort02, Erdm97, Chen00].

D'une façon générale, l'existence d'un aspect relationnel entre la géométrie globale du corps humain ainsi que la géométrie spécifique à chaque segment est notée par divers travaux. Ainsi une augmentation de la hauteur du corps humain se reflète, sûrement, par une augmentation au niveau de la longueur des différents segments [Reyn78].

Les mesures des moments d'inertie ont été trouvées dans divers articles et selon différentes méthodes [Erne64, Chan75, Yang00].

Longueurs des segments membres supérieurs et membres inférieurs

Parmi les méthodes utilisées pour estimer les longueurs des différents segments des membres supérieurs et inférieurs il existe une qui consiste à estimer la longueur d'un segment en fonction de la longueur de l'os le plus long qu'il contient. La longueur de l'os est donnée en fonction de la stature de la personne. Ensuite, en utilisant un coefficient qui définit la proportionnalité entre la longueur de l'os à celle du segment, la longueur du segment sera déduite. Une description de cette procédure est présentée comme suit :

Les 4 segments des membres supérieurs et inférieurs ainsi que les os correspondants sont les suivants :

- Bras (humérus)
- Avant-bras (radius, cubitus)
- Cuisse (fémur)

– Jambe (Tibia, péroné)

L'équation de tendance qui fournit la valeur de la longueur d'os en fonction de la stature se présente sous la forme suivante :

$$\text{Longueur d'os} = A \times \text{stature} + B$$

Avec A et B sont deux constantes.

Les différentes équations de régression qui ont été établies pour l'estimation des longueurs des différents os, des membres inférieurs et supérieurs, sont données par le tableau (2.1) où Se_{set} est un coefficient de dispersion dont l'expression se trouve dans [Reyn78].

Races	L'os mesuré	Longueur	Se_{set}
Blanc	Humérus	0.185 stature + 1.338	± 1.17
	Radius	0.137 stature + 1.467	± 0.89
	Cubitus	0.140 stature + 2.688	± 0.93
	Fémur	0.281 stature - 1.902	± 1.44
	Tibia	0.268 stature - 8.369	± 1.33
	Péroné	0.257 stature - 6.490	± 1.22
Noir	Humérus	0.202 stature - 0.969	± 1.13
	Radius	0.157 stature - 0.599	± 1.02
	Cubitus	0.158 stature - 1.013	± 1.06
	Fémur	0.314 stature - 9.740	± 1.49
	Tibia	0.288 stature - 9.740	± 1.40
	Péroné	0.266 stature - 6.129	± 1.32
Oriental	Humérus	0.213 stature - 4.028	± 1.22
	Radius	0.160 stature - 2.364	± 0.98
	Cubitus	0.158 stature - 0.244	± 1.03
	Fémur	0.303 stature - 6.621	± 1.48
	Tibia	0.292 stature - 12.951	± 1.14
	Péroné	0.303 stature - 14.659	± 1.14

TAB. 2.1 – Longueurs des os mesurées sur des cadavres [Reyn78]. Les valeurs sont données en centimètres

Enfin, pour calculer les longueurs des segments correspondants les coefficients donnés dans le tableau (2.2) seront utilisés. Ces valeurs ont été introduites par Dempster, Sherr et Priest (1964).

Ratio des longueurs	Nombre d'échantillons	Moyenne	Écart-type
Longueur du bras/ Longueur de l'humérus	32	89.44%	1.59%
Longueur de l'avant bras / Longueur de cubitus	32	98.70%	2.66%
Longueur de l'avant bras / Longueur de radius	26	107.09%	3.53%
Longueur de cuisse/ Longueur de Fémur	32	90.34%	0.88%
Longueur de la jambe/Longueur de tibia	32	107.76%	1.81%

TAB. 2.2 – Rapport de la longueur du segment par rapport à la longueur de l'os [Reyn78]

La longueur du segments correspondant à la main est définie par la distance qui sépare le centre du poignet et le centre de masse de la main alors que pour le pied, la longueur du segment correspondant est donnée par la distance qui sépare le centre de la cheville et le centre de

masse du pied. Dempster(1955) fournit deux coefficients pour estimer les longueurs des segments équivalents à la main et au pied. Pour la main, le centre de masse est situé à une distance estimée à 20.6 % de la longueur de l'humérus par rapport au poignet, alors que pour le pied, le centre de masse se trouve à une distance estimée de 30.6 % de la longueur du pied par rapport au cheville [Reyn78].

Centre de masse

La majorité des données présentées dans les tableaux qui suivent sont obtenues à partir des mesures faites sur des cadavres humains [Clau69][Chan75][Reyn78]. Une hypothèse qui a été largement utilisée est celle d'une densité constante pour chaque segment d'où une superposition du centre de masse et du centre de volume. La position du centre de masse d'un segment a été, traditionnellement, exprimée en fonction de sa longueur totale [Reyn78]. En plus, ces données ne prennent pas en considération les variations des coordonnées du centre de masse lors du mouvement du segment étudié.

Le tableau (2.3) fournit l'emplacement de quelques segments par rapport à un marqueur lié à ce segment. Les définitions des différents marqueurs se trouvent dans le travail de [Chan75].

Segment	Position selon x	Position selon y	Position selon z
Tête	Distance entre tragion et plan de référence	0.5 largeur de la tête	0.17 tragion à la hauteur du vertex
Tronc	0.44 profondeur au rachis lombaire	0.5 largeur au rachis lombaire	0.42 suprasternale à trochantérite
Bras	Symétrie	symétrie	0.48 longueur du segment
Avant bras	Symétrie	symétrie	0.41 longueur du segment
Main	Symétrie de la main selon z	Symétrie de la main selon z	0.51 longueur de la main
Cuisse	Symétrie	Symétrie	0.41 longueur du segment
Jambe	Symétrie	Symétrie	0.44 longueur du segment
pied	Symétrie de la main selon z	Symétrie de la main selon z	0.44 longueur du pied (du talon)

TAB. 2.3 – *Équations qui définissent l'emplacement du centre de masse de chaque segment [Reyn78]*

Les coefficients pour l'axe x (pour la tête et le tronc) doivent être multipliés par une distance anthropométrique mesurée à partir du plan de base (plan d'arrière). Le coefficient pour l'axe y qui est généralement 0.5 suppose une symétrie de répartition de masse. Le coefficient pour l'axe z doit être multiplié par une distance anthropométrique mesurée entre les joints les plus proches du segment étudié, Supra sternale pour le tronc et hauteur tragion vertex pour la tête. Dans tous les cas, le système d'axes est supposé orthogonal et relatif à la forme géométrique du segment.

Masses des différents segments

Les masses des différents segments ont été estimées par différentes méthodes. En 1957 Barter a développé des équations de régression pour prévoir les masses des segments en utilisant la masse totale de la personne comme variable. Ces équations ont été développées dans le travail de [Reyn78] en utilisant la base de données de Barter et en ajoutant des données relatives à la

tête et au cou à partir du travail de Walker (1973) et pour la tête, le tronc, bras et jambe à partir du travail du Clauser [Clau69] et Chandler [Chan75]. D'où le tableau (2.4). Une autre méthode

Segment	Équation	R	Se _{set}
Tête	0.0306 MT + 2.46	0.626	±0.43
Tête et cou	0.0534 MT + 2.33	0.726	±0.60
Cou	0.0146 MT + 0.6	0.666	±0.21
Tête, cou et tronc	0.5940 MT - 2.2	0.949	±2.01
Cou et tronc	0.5582 MT - 4.26	0.958	±1.72
Bras entière	0.0505 MT + 0.01	0.829	±0.35
bras	0.0274 MT - 0.01	0.826	±0.19
Avant-bras et main	0.0233 MT - 0.01	0.762	±0.20
Avant-bras	0.0189 MT - 0.16	0.783	±0.15
Main	0.0055 MT + 0.07	0.605	±0.07
Jambe entière	0.1582 MT + 0.05	0.847	±1.02
Cuisse	0.1159 MT - 1.02	0.859	±0.71
Jambe et pied	0.0452 MT + 0.82	0.750	±0.41
Jambe	0.0375 MT + 0.38	0.763	±0.33
pied	0.0069 MT + 0.47	0.552	±0.11

TAB. 2.4 – Équations de prévision des masses des différents segments du corps humain en Kg en fonction de la masse totale MT [Reyn78]

(référéncée dans la littérature comme méthode des coefficients) utilise des pourcentages de la masse totale pour exprimer celles des différents segments. Ceci a été raffiné par [Clau80]. Les différents coefficients peuvent être résumés par le tableau (2.5)

Pourcentage des masses de groupement des segments par rapport à la masse totale de la personne		Pourcentage des masses des segments par rapport à la masse de groupe des segments	
Tête et cou	8.4%	Tête	73.8%
		Cou	26.2%
Tronc	50.0%	Thorax	43.8%
		Lombaire	29.4%
		Bassin	26.8%
Bras complet	5.1%	Bras	54.9%
		Avant bras	33.3%
		Main	11.8%
Jambe complet	15.7%	Cuisse	63.7%
		Jambe	27.4%
		Pied	8.9%

TAB. 2.5 – Proportions des masses des différents segments par rapport à la masse totale [Clau80]

Tenseurs d'inertie

Les moments d'inertie qui vont être présentés dans ce qui suit sont exprimés dans un référentiel lié au centre de masse de chaque segment. Ce référentiel présente les mêmes vecteurs de base que celui de la figure (2.1). Pour la modélisation inertielle des différents segments

du modèle équivalent du corps humain, trois approches peuvent être utilisées. La première approche consiste à déterminer le rayon de giration exprimé comme un pourcentage de la longueur totale du segment étudié [Clau63]. La deuxième approche consiste à utiliser des équations de régression basées soit sur les données des masses soit sur la connaissance des volumes des segments. Ces relations ont été déterminées dans le travail de Chlander [Chan75] et sont données dans le tableau (2.6). Une troisième approche consiste à utiliser une modélisation géométrique

Segment		R	Se _{set}	Segment		R	Se _{set}
Tête	$I_{xx} = 2.129 \text{ MT} + 32030$	0.72	33.217	Main	$I_{xx} = 0.106 \text{ MT} + 294$	0.77	1279
	$I_{yy} = 1.676 \text{ MT} + 54818$	0.64	32.598		$I_{yy} = 0.117 \text{ MT} - 1760$	0.86	1206
	$I_{zz} = 3.186 \text{ MT} + 6846$	0.75	45033		$I_{zz} = 0.056 \text{ MT} - 1703$	0.72	793
Tronc	$I_{xx} = 296.900 \text{ MT} - 3156034$	0.96	1379345	Cuisse	$I_{xx} = 22.206 \text{ MT} - 302878$	0.93	131640
	$I_{yy} = 284.493 \text{ MT} - 7664879$	0.94	1698612		$I_{yy} = 22.410 \text{ MT} - 270933$	0.88	176759
	$I_{zz} = 102.507 \text{ MT} - 2895524$	0.96	335637		$I_{zz} = 7.333 \text{ MT} - 259219$	0.86	63057
Bras	$I_{xx} = 1.315 \text{ MT} + 56859$	0.65	21962	Jambe	$I_{xx} = 5.934 \text{ MT} + 6359$	0.83	58521
	$I_{yy} = 1.006 \text{ MT} + 69616$	0.67	16355		$I_{yy} = 5.345 \text{ MT} + 49951$	0.84	49951
	$I_{zz} = 0.484 \text{ MT} - 9094$	0.91	3139		$I_{zz} = 0.955 \text{ MT} - 33393$	0.86	8078
Av-bras	$I_{xx} = 1.084 \text{ MT} - 4812$	0.84	9973	Pied	$I_{xx} = 0.432 \text{ MT} + 4481$	0.65	7229
	$I_{yy} = 1.062 \text{ MT} - 5444$	0.87	8652		$I_{yy} = 0.359 \text{ MT} + 7328$	0.72	5081
	$I_{zz} = 0.271 \text{ MT} - 9020$	0.96	1090		$I_{zz} = 0.141 \text{ MT} - 1915$	0.80	1542

TAB. 2.6 – Équations de régression des moments principaux d'inertie (Kg cm^2) pour différents segments. MT (Kg): masse totale [Chan75]

de volume du segment étudié pour déterminer ses éléments d'inertie. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle prend l'hypothèse de corps rigide indéformable et homogène.

Modèle multicorps du corps humain

Le modèle du corps humain qui sera utilisé dans ce travail est représenté par un système multicorps formé par des corps rigides. Cette approche de modélisation par des éléments géométriques simples a été rencontrée dans plusieurs travaux de recherche dans le domaine de la modélisation dynamique des accidents. J.K. YANG [Yang00] a utilisé, pour modéliser le comportement dynamique d'un piéton percuté latéralement par une voiture, un modèle comprenant 15 segments développé par MADYMO. Shawn [Shaw93] a exploité le modèle du corps humain développé sous ADAMS pour étudier le comportement en conduite d'un motard et Tetsuo [Maki00] a utilisé le modèle AM50 (American Male 50 percentile) pour étudier le comportement dynamique d'un cycliste lors d'une collision avec une voiture.

Hypothèses adoptées Afin de simplifier le modèle du cyclomotoriste on suppose que les mouvements relatifs de la main par rapport à l'avant-bras et du pied par rapport à la jambe n'ont pas un effet considérable sur le tenseur d'inertie global du cyclomotoriste. Pour la modélisation du tronc on a opté pour l'utilisation de deux segments dont l'un représente le thorax et l'autre représente l'ensemble formé par l'abdomen et le bassin. En prenant en considération ces simplifications, le modèle qui sera implanté pour simuler le comportement dynamique du

cyclomotoriste est donné par la figure (2.3). Il s'agit d'un système polyarticulé de corps rigides composés de 12 segments, représentés par des formes géométriques simples.

En se basant sur l'étude statistique faite sur les accidents des véhicules à deux roues en Tunisie et en France, un modèle d'un homme de stature moyenne et de sexe masculin a été choisi. Le modèle est composé de 12 segments présentés par des éléments rigides dont la description est la suivante :

- 1 tête
- 2 cou
- 3 thorax
- 4 abdomen et bassin
- 5–7 bras (gauche et droit)
- 6–8 avant-bras et main (gauche et droit)
- 9–11 cuisse (gauche et droit)
- 10–12 jambe et pied (gauche et droit)

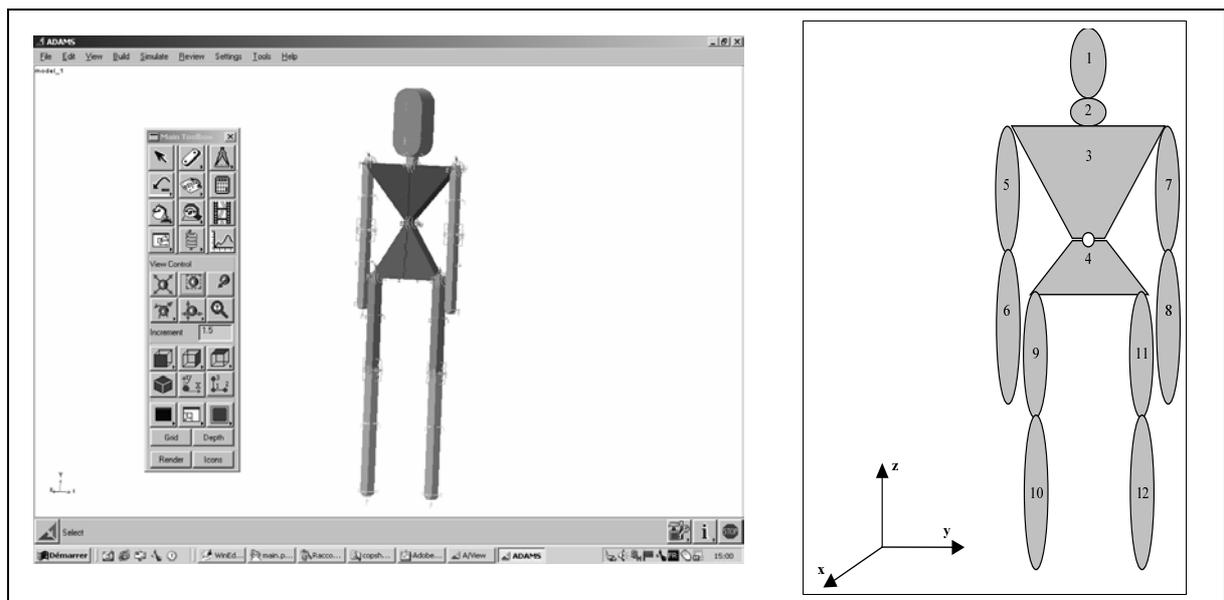


FIG. 2.3 – *Modèle polyarticulé du cyclomotoriste*

Les segments 6 ainsi que le segment 8 représentent l'avant bras et la main. De même pour les segments 10 et 12 qui représentent la jambe et le pied. Ainsi les effets inertiels des mouvements de la main relativement à l'avant-bras et du pied relativement à la jambe ont été négligés.

Description des liaisons Le tableau (2.7) permet de présenter les données nécessaires pour la description des différentes liaisons du modèle de la figure (2.3). Au niveau de ce tableau sont présentées les liaisons équivalentes pour chaque articulation biomécanique du corps humain ainsi que les limites angulaires qui les caractérisent. La description est faite dans la configuration de la figure (2.3). Étant donné les différents espaces de mouvement libre de chacune des liaisons du

Liaisons	Type de liaison	Axe de rotation	Limite min.(deg)	Limite max.(deg)	Rigidité L min.(Nm/deg)	Rigidité L max.(Nm/deg)
1 – 2	Sphérique	x	-10	10	8.7	8.7
		y	-10	15	6	5.4
		z	-10	10	10	10
2 – 3	Sphérique	x	-40	40	4.1	4.5
		y	-30	60	4.4	3.1
		z	-35	35	6.8	7
3 – 4	Sphérique	x	-40	40	9.55	9.55
		y	-60	105	12.74	12.74
		z	-40	40	16.7	16.7
3 – 5	Sphérique	x	-30	180	-	5.8
		y	-50	180	5.7	7.3
		z	-30	180	7.5	7.5
5 – 6	Rotöïde	y	0	150	10.52	8.5
3 – 7	Sphérique	x	-30	180	-	5.8
		y	-50	180	5.7	7.3
		z	-30	180	7.5	7.5
7 – 8	Rotöïde	y	0	150	10.52	8.5
4 – 9	Sphérique	x	-30	45	8.2	7.5
		Y	-30	160	8.2	10
		z	-60	30	8	7.5
9 – 10	Rotöïde	y	0	140	10.52	8.5
4 – 11	Sphérique	x	-30	45	8.2	7.5
		y	-30	160	8.2	10
		z	-60	30	8	7.5
11 – 12	Rotöïde	y	0	140	10.52	8.5

TAB. 2.7 – *Éléments de modélisation géométrique des différentes liaisons [Yang00]*

corps humain, la rigidité de liaison est modélisée par des fonctions non linéaires disponibles dans la bibliographie [Yang00]. Ces raideurs angulaires sont des fonctions continues. Elles présentent l'allure donnée par la figure (2.4). Les deux segments A et B représentent le comportement dynamique de la liaison au voisinage des deux points limites. Au niveau du tableau (2.7) sont mentionnées, pour chaque liaison, les rigidités correspondantes à son comportement au voisinage des angles limites.

2.2.4 Paramètres du cyclomotoriste

Les données présentées dans l'étude sur la modélisation du corps humain ont été exploitées dans le développement d'un code de calcul sous ADAMS. Cette modélisation sous ADAMS est présentée par la figure (2.3). Ce modèle est paramétré en stature et en masse. Autrement dit, l'utilisateur spécifie ces deux paramètres ainsi que les configurations angulaires des différentes articulations et le modèle calcule les données suivantes :

- les masses et les longueurs des différents segments
- les nouvelles positions des centres de masse de chaque segment,
- le tenseur d'inertie de chaque segment,
- la position du centre de masse du cyclomotoriste,
- le tenseur d'inertie global exprimé en son centre de masse et dans le repère R_0 de la figure

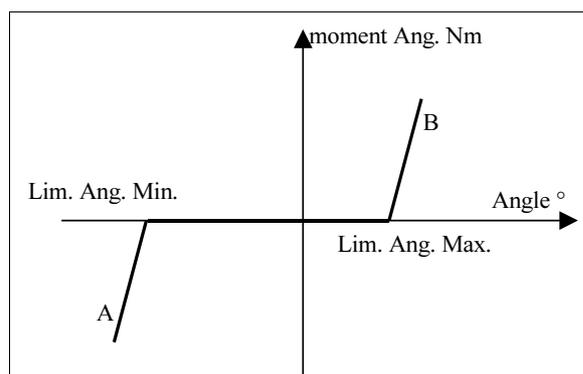


FIG. 2.4 – Évolution du moment angulaire en fonction de l'angle

(2.1).

Ainsi, pour une stature de 1.76 m et une masse de 72.04 Kg les données trouvées sont :

$$[\mathbf{I}_{S_4}] = \left[\begin{array}{ccc} 7.057 & 0 & 0 \\ 0 & 7.804 & 0 \\ 0 & 0 & 3.631 \end{array} \right]_{(G_4, R_0)} \quad Kg.m^2$$

et

$$\mathbf{CG}_4 = [-0.099, 0, -0.159]_{R_0}^T \quad (m)$$

où C est le point de contact entre la selle et le cyclomotoriste et G_4 est le centre de masse du cyclomotoriste lorsqu'il se trouve dans une configuration de conduite d'un cyclomoteur.

2.3 Présentation du modèle de cyclomoteur

2.3.1 Introduction

Ce paragraphe a pour but de présenter les caractéristiques du cyclomoteur choisi dans cette modélisation ainsi que le paramétrage adopté. En se basant sur la conclusion de l'étude statistique présentée précédemment, il est à rappeler que le cyclomoteur le plus impliqué dans les accidents de la circulation routière des véhicules à deux roues est un $49cm^3$. On se propose de donner une schématisation simplifiée du modèle. A cet effet, une description du modèle sera présentée en premier lieu. Ensuite, les simplifications faites au niveau du modèle seront introduites.

Dans cette modélisation, le modèle multicorps proposé est constitué par des corps rigides. Les contacts unilatéraux qui se présentent au niveau du système seront modélisés par des contacts rigides (contraintes unilatérales) ou élastiques (modèle rhéologique de contact). Ces contacts apparaissent entre la chaussée et les deux roues, entre la selle et le cyclomotoriste et entre l'obstacle mobile et la roue avant.

Le modèle présente aussi des liaisons mécaniques simples qui font apparaître les différents degrés de liberté que présente le cyclomoteur.

2.3.2 Modélisation du cyclomoteur

Description du cyclomoteur

Le cyclomoteur étudié ainsi que le graphe simplifié des liaisons sont représentés par la figure (2.5). La roue avant ainsi que la roue arrière présentent des liaisons unilatérales L_1 et L_6 . Ces

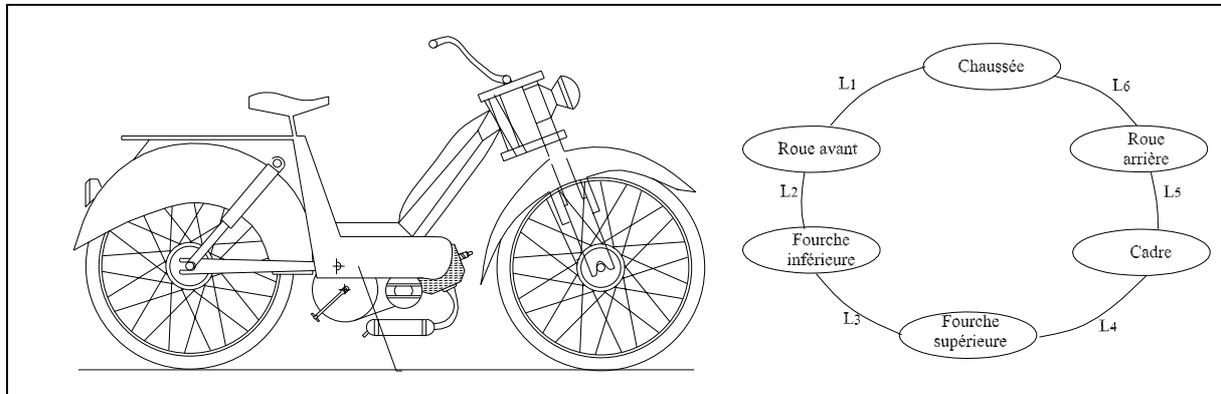


FIG. 2.5 – *Modèle du cyclomoteur utilisé et graphe des liaisons correspondant*

liaisons présentent un comportement du type élastique par la présence des pneumatiques. La liaison L_2 est du type rotoïde, elle présente le mouvement de rotation de la partie inférieure de la fourche relativement à la roue avant. La fourche présente deux parties ayant une liaison prismatique L_3 entre elles. C'est au niveau de cette liaison qu'agit la suspension avant. La partie supérieure de la fourche est liée au cadre par la liaison rotoïde L_4 . La roue arrière est liée au cadre par un montage à bras oscillant L_5 . C'est au niveau de cette liaison se trouve la suspension arrière. La selle présente aussi un caractère élastique puisqu'elle présente une nappe formée par des ressorts métalliques.

Hypothèses simplificatrices du modèle de cyclomoteur

Afin de simplifier le modèle de cyclomoteur présenté précédemment, les points suivants seront pris en compte :

- Les mouvements de rotation des deux roues autour de leurs axes ne seront pas considérés.
- La suspension avant est négligée de sorte que la liaison L_3 devient une liaison complète. La fourche sera considérée comme un seul solide rigide.
- La suspension arrière est négligée de sorte que la roue arrière sera considérée comme solidaire au cadre. Par la suite la liaison L_5 est considérée comme une liaison complète.
- Les contacts entre les deux roues et la chaussée sont du type rigide. Autrement dit, le comportement élastique du pneumatique sera négligé.
- La selle fait parti du cadre et elle sera considérée comme un plan horizontal rigide.

La modélisation par un système multicorps polyarticulé du cyclomoteur est faite en décomposant la structure en trois corps rigides. Cette partition en trois solides est choisie en raison de l'influence de chacun d'eux sur le comportement dynamique du cyclomoteur et du cyclomotoriste

dans le cas d'une collision. Les différents éléments sont les suivants :

- la roue avant,
- la fourche y compris le guidon,
- le cadre y compris la roue arrière et la selle.

Degrés de liberté et paramétrage du système

Le modèle à étudier est tridimensionnel. De ce fait, un paramétrage du cyclomoteur qui peut se résumer par la figure (2.6) a été adopté. La roue avant est représentée par le solide

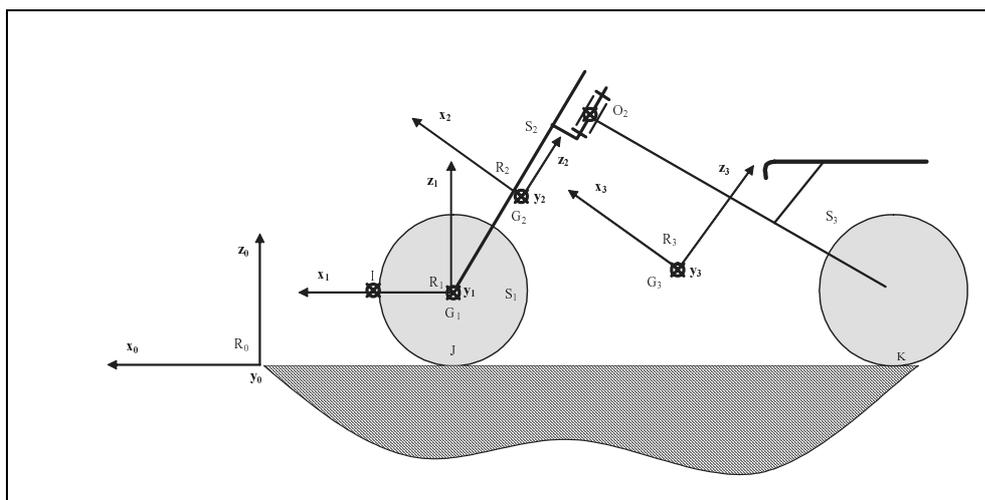


FIG. 2.6 – Modélisation tridimensionnelle d'un cyclomoteur

S_1 . Afin de paramétrer sa configuration géométrique par rapport au référentiel absolu, deux rotations successives sont utilisées comme le montre la figure (2.7). La rotation ψ autour de l'axe (I, z_0) de R_0 représente le mouvement de lacet de la roue avant. La rotation θ de la roue avant autour de l'axe (I, x_1) de R_1 représente le mouvement de roulis de la roue avant. Comme

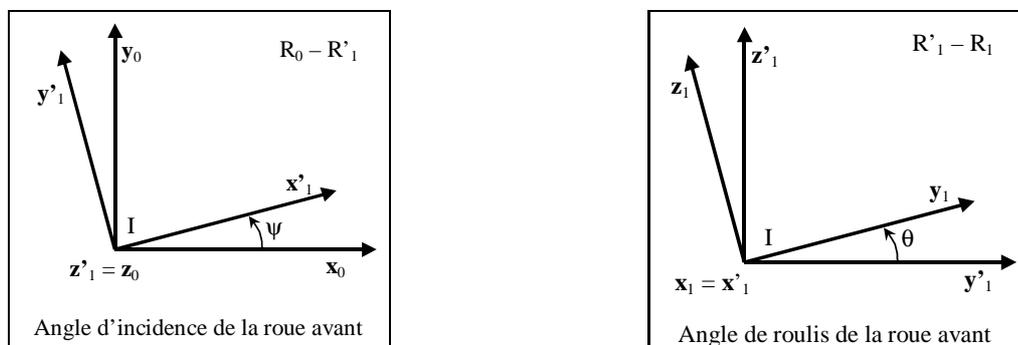


FIG. 2.7 – Paramètres d'orientation de la roue avant

caractéristiques inertielles, la roue avant possède une masse M_1 et une matrice d'inertie, exprimée

dans le référentiel $R_1 (G_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ lié à la roue, donnée par :

$$[\mathbf{I}_{S_1}] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix}_{(G_1, R_1)}$$

G_1 étant le centre de masse de la roue avant.

La fourche, le guidon ainsi que la suspension avant forment le solide S_2 . A ce solide est lié le référentiel $R_2 (G_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ où G_2 est son centre de masse. L'angle ϕ représente la rotation de la fourche par rapport à la roue avant. Elle se fait autour de l'axe (G_1, \mathbf{y}_1) de R_1 comme la montre la figure (2.8). Le solide S_2 présente une masse M_2 et une matrice d'inertie $[\mathbf{I}_{S_2}]$ exprimée au

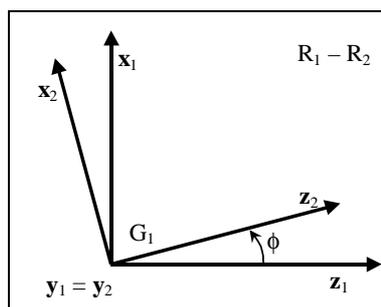


FIG. 2.8 – Angle du tangage du cyclomoteur

point G_2 dans le référentiel $R_2 (G_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ lié à la fourche.

$$[\mathbf{I}_{S_2}] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(G_2, R_2)}$$

Le solide S_3 est constitué par le cadre du cyclomoteur y compris la roue arrière et la selle. A S_3 est lié le référentiel $R_3 (G_3, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_3)$. Une rotation d'angle β autour de l'axe (O_2, \mathbf{z}_2) de R_2 permet de modéliser le mouvement de braquage de guidon comme le montre la figure (2.9). Le

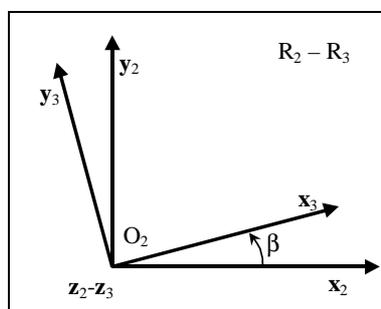


FIG. 2.9 – Angle du braquage du cyclomoteur

solide S_3 présente une masse M_3 et une matrice d'inertie $[\mathbf{I}_{S_3}]$ exprimée au point G_3 , son centre

de masse, dans le référentiel $R_3 (G_3, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_3)$ lié au cadre.

$$[\mathbf{I}_{S_3}] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & -E_3 \\ 0 & B_3 & 0 \\ -E_3 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(G_3, R_3)}$$

2.4 Présentation du scénario de collision à étudier

Cette modélisation servira à étudier les cas d'accidents impliquant un véhicule à deux roues. Les configurations à modéliser sont celles choisies en se basant sur l'étude statistique présentée au début du premier chapitre : la collision est fronto-frontale. Le système formé par le cyclomotoriste assis sur la selle de son cyclomoteur en mouvement sera heurté par un obstacle mobile. La modélisation de l'ensemble du système peut se présenter par la figure (2.10).

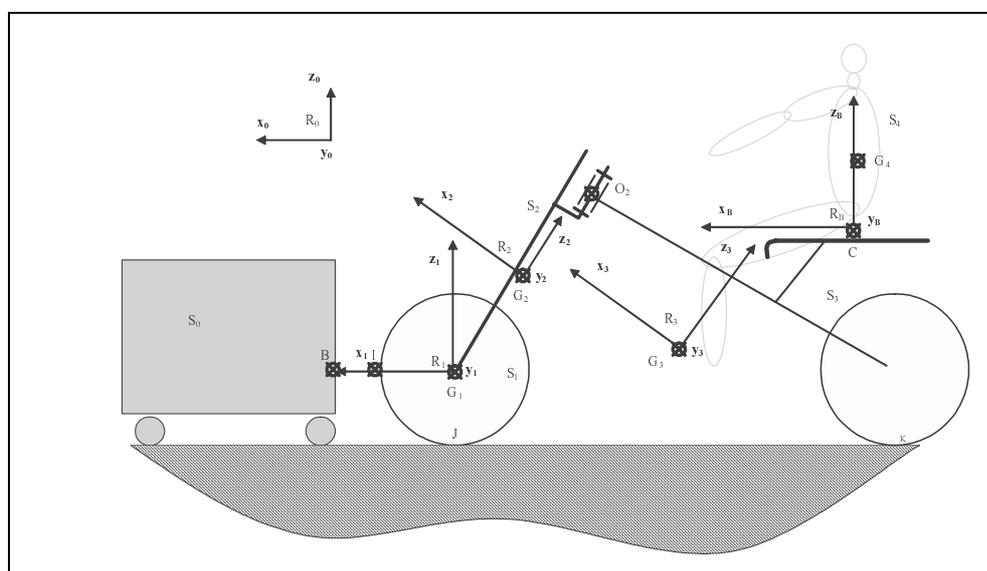


FIG. 2.10 – Modélisation tridimensionnelle d'une collision entre un cyclomoteur et un obstacle mobile

2.4.1 Présentation du système

Le système à étudier est composé de cinq corps rigides. Les différents éléments sont décrits comme suit :

Un obstacle mobile qui simule un véhicule à quatre roues est représenté par le solide S_0 . Il présente un mouvement de translation rectiligne dont la direction est portée par \mathbf{x}_0 . Le point B qui se trouve sur la face avant de l'obstacle mobile est paramétré par le vecteur position :

$$\mathbf{OB} = \begin{bmatrix} x_B(t) & 0 & R \end{bmatrix}_{R_0}^T$$

où R est le rayon de la roue avant.

Les solides (S_1) , (S_2) et (S_3) forment le modèle du cyclomoteur. Ils ont été présentés précédemment dans le paragraphe (2.3.2). Le point I lié à la roue avant est paramétré relativement au point B par ses coordonnées dans le référentiel R_1 . Ces coordonnées sont données par le vecteur :

$$\mathbf{BI} = \left[\begin{array}{ccc} x_r(t) & y_r(t) & z_r(t) \end{array} \right]_{R_1}^T$$

Le solide S_4 représente le cyclomotoriste. A ce solide est lié le repère $R_B (C, \mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{z}_B)$ où C est le point de contact entre la selle et le cyclomoteur. Une rotation d'angle δ autour de l'axe (C, \mathbf{y}_B) permet de modéliser, lors de la collision, le mouvement de tangage du cyclomotoriste relativement à la selle du cyclomoteur (figure 2.11). Le solide S_4 possède une masse M_4 . Il sera

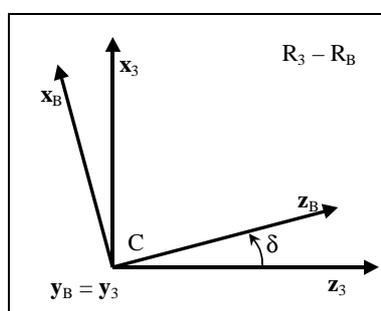


FIG. 2.11 – Angle du tangage du cyclomotoriste

considéré, durant la phase de collision, comme un système polyarticulé de corps rigides dont les articulations biomécaniques sont figées. Sa matrice d'inertie $[\mathbf{I}_{S_4}]$, pour une telle configuration, est exprimée dans le référentiel $R_B (G_4, \mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{z}_B)$ lié au cyclomotoriste où G_4 est son centre de masse. Cette matrice est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{I}_{S_4} = \left[\begin{array}{ccc} A_4 & 0 & -E_4 \\ 0 & B_4 & 0 \\ -E_4 & 0 & C_4 \end{array} \right]_{(G_4, R_B)}$$

Les paramètres inertiels qui caractérisent le corps de cyclomotoriste ont été identifiés au niveau du paragraphe modélisation du corps humain (2.2.3).

Les degrés de liberté que présente le cyclomotoriste relativement à la selle sont les trois translations et une rotation (δ). Les trois translations se présentent par le vecteur $\mathbf{G}_3 \mathbf{C}$ tel que

$$\mathbf{G}_3 \mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc} x_C(t) & y_C(t) & z_C(t) \end{array} \right]_{R_3}^T$$

2.4.2 Paramètres utilisés

Afin de paramétrer le système de la figure (2.10) les grandeurs symboliques citées par la suite seront déterminées expérimentalement au niveau du quatrième chapitre :

- $\mathbf{IG}_1 = \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_1}^T$: position de centre de la roue avant relativement au point I de contact frontal. R est le rayon de la roue avant.
- $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} a_{G_2} & 0 & c_{G_2} \end{bmatrix}_{R_2}^T$: Position du centre de masse de la fourche relativement au centre de masse de la roue avant.
- $\mathbf{G}_1\mathbf{O}_2 = \begin{bmatrix} a_{O_2} & 0 & c_{O_2} \end{bmatrix}_{R_2}^T$: Position du centre de la liaison rotoïde L_4 qui se trouve entre le cadre et la fourche par rapport au centre de masse de la roue avant.
- $\mathbf{O}_2\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} a_{G_3} & 0 & c_{G_3} \end{bmatrix}_{R_3}^T$: Position du centre de masse du cadre relativement au centre de la liaison rotoïde L_4 .
- $\mathbf{CG}_4 = \begin{bmatrix} a_C & 0 & c_C \end{bmatrix}_{R_B}^T$: Position du centre de masse du cyclomotoriste par rapport au point de son contact avec la selle.
- ϕ_0 : Angle de chasse: C'est l'angle entre la verticale qui passe au niveau de l'axe de la roue avant et l'axe de la colonne de direction.
- $dist_0$: La distance qui sépare la roue avant du bloc moteur.

2.4.3 Présentation des sollicitations dynamiques

Outre les actions de pesanteur le système de la figure (2.10) est sollicité par les actions de contact. Durant la collision une force frontale aura lieu entre le point I de la roue avant et le point B de l'obstacle mobile. L'étude de modélisation de cette force sera présentée dans le chapitre suivant.

Le système à étudier possède des contacts unilatéraux multiples qui se présentent entre les deux roues et la chaussée, d'une part et entre la selle et le cyclomotoriste, d'autre part. Ces contacts peuvent présenter un phénomène de glissement avec ou sans frottement. Pour les contacts présentant du frottement, la loi de Coulomb sera utilisée pour exprimer la composante tangentielle de la réaction.

Ces contacts unilatéraux sont susceptibles de changer d'état durant la collision. Il suffit qu'un de ces contacts change d'état pour que le comportement dynamique de l'ensemble change. A ce niveau nous sommes en face d'un problème qui présente des configurations multiples dont la différence entre elles est l'état des différents contacts unilatéraux. La démarche adoptée pour traiter le problème de succession de ces différentes configurations sera présentée au niveau du chapitre suivant.

2.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de décrire le modèle de la collision à étudier. Une modélisation du corps humain a été présentée. Celle-ci résulte d'une étude bibliographique. Les différentes

données ont été relevées à partir des rapports des services médicaux de l'armée de l'air américaine, ce qui montre la restriction de ces données pour les jeunes adultes dont la stature est >1.70 m. L'avantage de la présentation de ces données sous forme d'équations de régression est de permettre la création d'un modèle paramétré du corps humain. Ce modèle est implanté sous un logiciel de simulation dynamique des systèmes multicorps ADAMS afin, d'une part, de simuler le comportement du cyclomotoriste durant un accident de la circulation routière et d'autre part, exploiter le modèle pour avoir des données inertielles qui serviront pour la mise en équation et la simulation par la suite.

Le modèle de l'accident à modéliser a été présenté dans ce chapitre. Il s'agit d'une collision fronto-frontale entre un obstacle mobile et un système formé par un cyclomotoriste assis sur la selle d'un cyclomoteur en mouvement. Dans un premier temps le modèle du cyclomoteur ainsi que les paramètres ont été présentés. Les différentes données qui caractérisent la géométrie et l'inertie du cyclomoteur seront déterminées expérimentalement au quatrième chapitre. Ensuite, nous avons ajouté, au modèle, l'obstacle mobile ainsi que le modèle du cyclomotoriste. Une description du modèle obtenu est présentée en décrivant les liaisons qui existent, les degrés de liberté que présente le système global ainsi que les sollicitations auxquelles il se trouve soumis.

Dans le chapitre suivant les équation de mouvement du système durant la collision seront développées. Cette mise en équation sera faite en utilisant les équations de Lagrange. Une nouvelle formulation de la dynamique du choc sera présentée et appliquée au cas du système sujet de cette étude.

Chapitre 3

Modèle analytique et simulation

3.1 Introduction

On se propose dans ce chapitre d'établir les équations du mouvement d'un système formé par un cyclomotoriste assis sur son cyclomoteur qui entre en collision avec un obstacle en mouvement. Cette modélisation sera faite en appliquant un outil classique de mise en équations des systèmes dynamiques basé sur le formalisme de Lagrange. Dans une première phase les principes de cet outil de mise en équations pour un système dynamique paramétré par des coordonnées généralisées indépendantes seront rappelés. Ensuite, la notion de contrainte pour un système dynamique sera introduite. Les contraintes seront modélisées par des équations de liaison. Comme le système à étudier présente des contraintes unilatérales multiples on adoptera cette démarche pour traiter l'évolution de sa dynamique. Le système présente aussi une force due à la collision entre l'obstacle en mouvement et la roue avant du cyclomoteur. Cette force a la particularité d'avoir une amplitude importante et une durée éphémère. A cet effet et dans un objectif d'aborder le domaine de reconstruction des accidents de la circulation routière impliquant des véhicules à deux roues, une nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc sera présentée. Cette approche simplificatrice nous permettra d'aborder ce type de problème en donnant la possibilité d'avoir une solution analytique aux équations de mouvement. Cette approche sera présentée dans le cas général et appliquée, dans un premier temps, à un système dynamique simple (pendule double) afin de valider les hypothèses simplificatrices adoptées. Dans un deuxième temps cette nouvelle approche sera appliquée au modèle présenté dans le chapitre précédent : un cyclomoteur qui entre en collision avec un obstacle en mouvement. Pour ce système la méthodologie adoptée pour traiter la présence des *contacts unilatéraux multiples* sera exposée.

3.2 Modélisation tridimensionnelle d'une collision entre un cyclomoteur et un obstacle en mouvement

3.2.1 Schématisation et paramétrage

Il s'agit d'un système dynamique formé par un cyclomoteur et son conducteur lors d'une collision frontale avec un obstacle en mouvement. La collision peut avoir lieu avec un angle d'incidence différent de 0° . En appelant angle d'incidence l'angle entre le plan vertical orthogonal au plan de l'obstacle et le plan de la roue avant du cyclomoteur. On suppose que les effets des suspensions, avant et arrière, sur le comportement dynamique du système durant la collision sont négligeables. Le modèle proposé est constitué par des corps rigides. Les contacts qui existent entre les deux roues et la chaussée ainsi que celui entre le cyclomotoriste et la selle sont des contacts unilatéraux. Le contact frontal, entre la roue avant et l'obstacle mobile, est un contact unilatéral et il présente une force de percussion : une grande amplitude et une faible durée d'application. Des liaisons mécaniques simples existent pour mettre en évidence les différents degrés de liberté du système. Le graphe des liaisons du système peut se résumer par la figure (3.1).

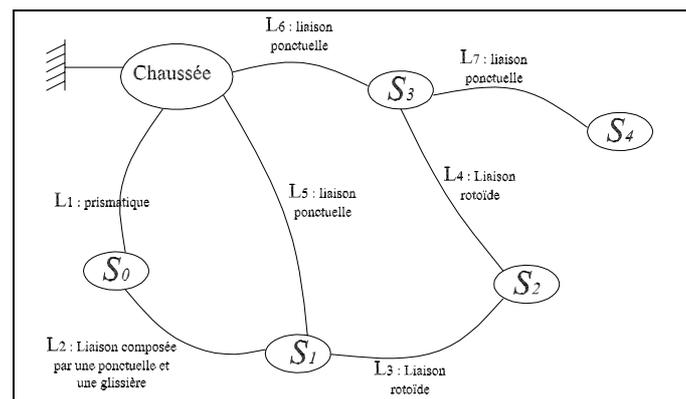


FIG. 3.1 – Graphe des liaisons du système formé par l'obstacle mobile, le cyclomoteur et le cyclomotoriste

Le schéma cinématique du système est donné par la figure (3.2). Sur cette figure on note la présence des cinq solides constitutifs du système ainsi que les degrés de liberté permis. Dans ce qui suit une description de ce schéma cinématique sera faite en indiquant le paramétrage adopté ainsi que les hypothèses prises en considération.

La liaison L_1 qui existe entre la chaussée et l'obstacle mobile est du type prismatique. Elle modélise le mouvement de translation que présente l'obstacle mobile relativement à la chaussée. Cette liaison est caractérisée par le paramètre $x_b(t)$.

La liaison L_2 lie la roue avant du cyclomoteur à l'obstacle mobile. Cette liaison est modélisée par la mise en série de deux liaisons :

- Une liaison ponctuelle entre la roue et l'obstacle mobile dont les degrés de liberté sont :
 - Un mouvement de roulis ($\psi(t)$),

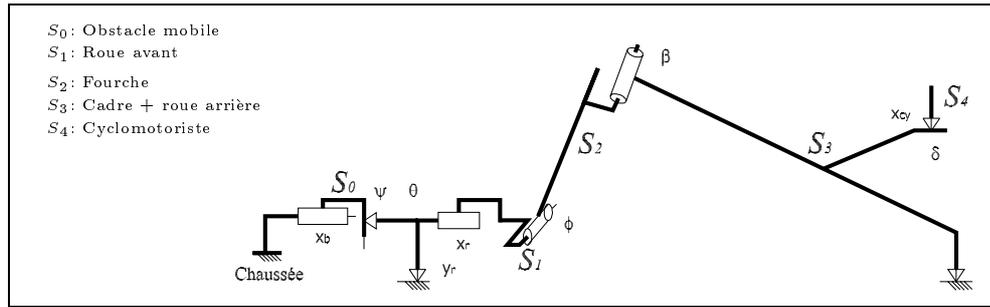


FIG. 3.2 – Schéma cinématique modélisant le système formé par l'obstacle mobile, le cyclomoteur et le cyclomotoriste

- Un mouvement de lacet ($\theta(t)$),
- Un mouvement de translation transversale ($y_r(t)$),
- Un mouvement de translation verticale ($z_r(t)$). A ce paramètre est associé un multiplicateur de Lagrange λ_1 qui représente la composante normale de l'action de la chaussée sur la roue avant.

Une liaison prismatique qui modélise le mouvement relatif d'approche entre l'obstacle mobile et la roue avant ($x_r(t)$). Le paramètre ($x_r(t)$) servira, par la suite, pour calculer la force de collision frontale.

La liaison L_3 lie la fourche à la roue avant. Elle est de type rotoïde. Elle modélise la rotation relative de la fourche par rapport à la roue avant autour de l'axe de cette dernière. Elle est paramétrée par l'angle ($\phi(t)$).

La liaison L_4 lie le cadre du cyclomoteur (S_3) à la fourche. Cette liaison est du type rotoïde. Elle est paramétrée par l'angle de rotation ($\beta(t)$) qui sert, dans ce système, pour modéliser le mouvement de braquage du guidon.

La liaison L_7 lie le cyclomotoriste (S_4) au cadre (S_3). Il s'agit d'une liaison ponctuelle avec frottement. Afin de paramétrer cette liaison, considérons un référentiel $R_\gamma(C, \mathbf{x}_\gamma, \mathbf{y}_\gamma, \mathbf{z}_\gamma)$. C est le point de contact entre le cyclomotoriste et la selle. Ce référentiel est choisi de sorte que le plan de la selle soit le plan $(C, \mathbf{x}_\gamma, \mathbf{y}_\gamma)$. A Cette liaison, les paramètres suivants sont associés :

- une translation $x_{C\gamma}(t)$ qui modélise le mouvement de glissement longitudinal relatif du point C du cyclomotoriste par rapport au centre de masse du cadre G_3 . A ce paramètre est associé un multiplicateur de Lagrange λ_x qui représente la composante tangentielle de l'action de la selle sur le cyclomotoriste.
- une translation $z_{C\gamma}(t)$ qui modélise le mouvement de glissement vertical relatif du point C du cyclomotoriste par rapport au centre de masse du cadre G_3 . A ce paramètre est associé un multiplicateur de Lagrange λ_z qui représente la composante normale de la réaction de la selle.
- un angle $\delta(t)$ qui représente le paramètre du tangage relatif du cyclomotoriste par rapport à la selle.

Les liaisons L_5 et L_6 sont de type ponctuel. Elles servent à modéliser les contacts rigides qui existent entre les deux roues (avant et arrière) et la chaussée. Il s'agit de deux liaisons sans

frottement. A la liaison L_5 est associé le multiplicateur de Lagrange λ_1 introduit précédemment. A la liaison L_6 est associé un multiplicateur de Lagrange λ_2 qui représente la réaction normale de la chaussée sur la roue arrière.

Le système à étudier est paramétré par l'ensemble de coordonnées généralisées suivantes :

$$\mathbf{q} = [x_b(t), x_r(t), y_r(t), \psi(t), \theta(t), \phi(t), \beta(t), \delta(t), z_r(t), x_{C\gamma}(t), z_{C\gamma}(t)]^T$$

D'autre part ce système présente quatre équations des liaisons auxquelles sont associés les multiplicateurs de Lagrange λ_1 , λ_2 , λ_x et λ_z . Ces équations des liaisons seront développées ultérieurement.

3.2.2 Rappel sur le formalisme de Lagrange

Soit un système multicorps Σ paramétré par n coordonnées généralisées indépendantes $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)$. En supposant que les corps sont rigides et que les liaisons sont parfaites, les équations du mouvement du système peuvent être établies en utilisant les équations de Lagrange qui se présentent sous la forme suivantes [Vibe95] :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.1)$$

où T est l'énergie cinétique du système et Q_i est la force généralisée relative à q_i . En effet, les Q_i sont les coefficients de la puissance virtuelle \mathcal{P}^* des actions mécaniques appliquées au système et qui se traduit par :

$$\mathcal{P}^* = \sum_i^n Q_i \dot{q}_i^*$$

L'énergie cinétique du système, T , s'écrit sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.2)$$

avec a_{ij} sont les composants de la matrice d'inertie généralisée.

La forme générale des équations de Lagrange est donnée par le système d'équations différentielles de second ordre suivant :

$$\sum_j a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k = Q_i \quad (3.3)$$

où le symbole de Christoffel Γ_{jk}^i est défini par l'expression suivante :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left(a_{ij}^k - a_{jk}^i + a_{ki}^j \right) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

avec $a_{jk}^i = \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}$

Dans le cas où les coordonnées généralisées sont dépendantes, c'est-à-dire qu'il existe des équations de liaison qui donnent des relations entre les coordonnées généralisées du système, les

équations de Lagrange changent de forme. En effet, ces équations de liaison se présentent sous la forme suivante [Meir88] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{11}\dot{q}_1^* + \dots + \Delta_{1i}\dot{q}_i^* + \dots + \Delta_{1n}\dot{q}_n^* = 0 \\ \vdots \\ \Delta_{j1}\dot{q}_1^* + \dots + \Delta_{ji}\dot{q}_i^* + \dots + \Delta_{jn}\dot{q}_n^* = 0 \\ \vdots \\ \Delta_{k1}\dot{q}_1^* + \dots + \Delta_{ki}\dot{q}_i^* + \dots + \Delta_{kn}\dot{q}_n^* = 0 \end{array} \right. \equiv [\Delta(q_i)] \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un système dynamique qui présente des liaisons de ce type, les équations de Lagrange se mettent sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^* + \sum_{j=1}^k \lambda_j \Delta_{ji} \quad (3.5)$$

Comme bilan, nous disposons de n équations de Lagrange et k équations des liaisons contre n inconnues du système (q_i) et k multiplicateurs de Lagrange λ_i qui représentent les inconnues dynamiques des différentes liaisons exprimées par les équations du système (3.4).

Afin de pouvoir appliquer le formalisme de Lagrange, les éléments suivants doivent être calculés :

- les équations de liaison (Δ_{ij}),
- l'énergie cinétique du système (T),
- les forces généralisées (Q_i).

Ces différents éléments seront développés dans la partie qui suit.

3.2.3 Équations des liaisons imposées au système

Étude du contact au niveau de la selle

Au niveau de la selle du cyclomoteur nous avons un contact avec frottement. Par la suite différents cas peuvent être distingués durant l'évolution dynamique de l'état du contact. Comme il a été mentionné précédemment, nous supposons, dans cette modélisation, que le cyclomotoriste possède un mouvement dans le plan ($C, \mathbf{x}_\gamma, \mathbf{z}_\gamma$) de paramètres $x_{C\gamma}$ et $z_{C\gamma}$. Dans le cas où le contact selon la direction portée par \mathbf{z}_γ est maintenu, l'équation de liaison correspondante se présente sous la forme suivante :

$$\dot{z}_{C\gamma}^* = \sin(\gamma)\dot{x}_C^* + \cos(\gamma)\dot{z}_C^* = 0 \quad (3.6)$$

Cette équation correspond à un multiplicateur de Lagrange qui représente, physiquement, la force de réaction normale à la selle, λ_z , au niveau du point de contact C entre le cyclomotoriste et la selle.

Pour modéliser le phénomène de frottement au niveau de la selle, la loi de Coulomb sera utilisée. Soit μ le coefficient de frottement ($\mu = \mu_{statique} = \mu_{dynamique}$). La composante tangentielle

λ_x de la force de contact selon \mathbf{x}_γ est gérée par la loi suivante¹ :

- Si $|\lambda_x| < \mu \lambda_z$: un phénomène de collage du conducteur sur la selle se présente. Ce collage est décrit par une équation de liaison qui se traduit par :

$$\dot{x}_{C\gamma}^* = \cos(\gamma)x_C^* - \sin(\gamma)\dot{z}_C^* = 0 \quad (3.7)$$

à laquelle correspond le multiplicateur de Lagrange λ_x .

- Si $|\lambda_x| \geq \mu \lambda_z$: Un phénomène de glissement du conducteur relativement à la selle se présente. Dans cette circonstance, la composante λ_x garde la valeur $(-\mu \lambda_z)$ et l'équation de liaison (3.7) n'est plus valable. La mise en équation du système diffère du cas précédent par la prise en compte de la puissance virtuelle développée par la force tangentielle de contact au niveau de la selle. Cette puissance est donnée par l'expression suivante :

$$P_{\lambda_x}^* = -\mu \lambda_z (\cos(\gamma)x_C^* - \sin(\gamma)\dot{z}_C^*) \quad (3.8)$$

Par ailleurs, la selle présente une longueur finie l qui limite la plage pour laquelle l'équation de liaison (3.6) reste valable. Ainsi on considère que le contact est défait dans l'une des deux circonstances suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_z = 0 \\ \text{ou} \\ x_{C\gamma} \geq l \end{cases}$$

Étude du contact au niveau de la roue avant

On suppose que durant la collision la roue avant reste en contact avec la chaussée. Cette hypothèse a été prouvée par l'analyse des différents essais de test-crash développés par DEKRA [Scha86, Berg98]. Soit J le point de contact entre la roue avant et la chaussée. La position de ce point peut être exprimée par la relation vectorielle suivante :

$$\mathbf{OJ} = \mathbf{OB} + \mathbf{BI} + \mathbf{IG}_1 + \mathbf{G}_1\mathbf{J} \quad (3.9)$$

L'expression du vecteur \mathbf{OJ} dans le référentiel $R_0(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{OJ} = \begin{bmatrix} (x_r - R) \cos(\psi) + (z_r - R) \sin(\psi) \sin(\theta) \\ (x_r - R) \sin(\psi) + (R - z_r) \cos(\psi) \sin(\theta) \\ R + (z_r - R) \cos(\theta) \end{bmatrix}_{R_0} \quad (3.10)$$

Ainsi l'équation de liaison à laquelle correspond le multiplicateur de Lagrange λ_1 est :

$$\dot{z}_r^* \cos(\theta) - (z_r - R) \sin(\theta) \dot{\theta}^* = 0 \quad (3.11)$$

Pour $(\theta = 0)$ l'équation de liaison se réduit à la forme suivante :

$$\dot{z}_r^* = 0 \quad (3.12)$$

1. La contrainte imposée par le multiplicateur de Lagrange λ_z est unilatérale. Par conséquent, λ_z ne peut prendre que des valeurs positives.

Étude du contact au niveau de la roue arrière

Le contact de la roue arrière avec la chaussée est représenté au niveau de la figure (3.2) par le point K . La vitesse virtuelle du point K est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{v}_K^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{OK}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

Or, pour $\theta = \beta = 0$ la composante du vecteur \mathbf{OK} selon l'axe (O, \mathbf{z}_0) est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{OK} \cdot \mathbf{z}_0 = \left((-\sin(\phi)a_K) + (c_{O_2} + c_K) \cos(\phi) + z_r + R - \sin(\phi)a_{O_2} \right)$$

Par la suite, l'équation de la liaison au niveau du point K se présente sous la forme suivante :

$$\dot{z}_r^* + (\cos(\phi)(-a_{O_2} - a_K) - \sin(\phi)(c_{O_2} + c_K)) \dot{\phi}^* = 0 \longrightarrow \lambda_2 \quad (3.13)$$

Dans une configuration où le cyclomotoriste ne présente pas des mouvements de translation relativement à la selle (pas de glissement) et les deux roues sont en contact avec la chaussée et pour un vecteur coordonnées généralisées :

$$\mathbf{q} = [x_b(t), x_r(t), y_r(t), \psi(t), \theta(t), \phi(t), \beta(t), \delta(t), z_r(t), x_C(t), z_C(t)]^T$$

en prenant en considération les équations de liaison (3.6), (3.7), (3.11) et (3.13), la matrice Δ aura la forme suivante :

$$[\Delta] \lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -\cos(\phi)(a_{O_2} + a_K) + \\ \sin(\phi)(c_{O_2} + c_K) \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) \\ 0 & 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_x \\ \lambda_z \end{bmatrix}$$

3.2.4 Calcul de l'énergie cinétique du système

Le développement du calcul de l'énergie cinétique est présenté dans l'annexe (A). L'expression analytique de l'énergie cinétique de tout le système nous permet de calculer les différentes quantités d'accélération généralisée $A_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$. Par la suite les éléments de la matrice d'inertie généralisée sont présentés dans la même annexe sous une forme symbolique.

3.2.5 Calcul des forces généralisées

Les forces prises en compte dans ce calcul sont les forces de pesanteur et la force de collision entre la roue avant et l'obstacle mobile.

Puissance virtuelle des forces de pesanteur

Le système est formé par cinq sous-systèmes dont les masses ne sont pas négligeables. La puissance virtuelle de la force de pesanteur est donnée par la forme généralisée suivante :

$$P_{poids}^* = \sum_{i=1}^5 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i^* \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}_i^* = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{OG}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j^*$$

n est le nombre de coordonnées généralisées du système. \mathbf{v}_i^* est la vitesse virtuelle du centre de masse G_i du solide S_i . \mathbf{p}_i est la force de pesanteur agissant sur le solide S_i en son centre de masse. Après un développement on trouve :

$$P_{poids}^* = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^5 \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{OG}_i}{\partial q_j} \right)}_{C_{q_j}} \dot{q}_j^* \quad (3.14)$$

Puissance virtuelle de la force de collision

La force de collision prend naissance entre les points B et I . La position relative de ces points est définie par leurs coordonnées généralisées données par le vecteur \mathbf{BI}

$$\mathbf{BI} = \begin{bmatrix} x_r(t) & y_r(t) & z_r(t) \end{bmatrix}_{R_1}$$

La détermination de la puissance virtuelle de la force de contact présente un problème. En effet, cette force a une nature impulsionnelle: une amplitude importante et une courte durée d'existence. Cette force peut être considérée comme une grandeur continue qui s'exprime en fonction du déplacement BI et de la vitesse de déplacement \dot{BI} . Autrement dit, nous supposons que le contact entre la roue avant et l'obstacle mobile présente un modèle rhéologique du type élastoplastique ou viscoélastique dont les paramètres peuvent être déterminés expérimentalement. L'utilisation de ce type de modèles rhéologiques permettra par la suite de restituer la notion du temps.

3.3 Nouvelle formulation de la dynamique du choc

3.3.1 Étude bibliographique sur la mécanique des chocs

Une collision entre solides se définit par l'établissement brutal d'une liaison de contact entre deux solides dont les vitesses sont incompatibles avec ce contact.

Dans certaines situations, il est acceptable de considérer que les corps sont rigides : à l'échelle de temps du mouvement, la collision a une durée extrêmement brève et à l'échelle d'espace, les déformations restent localisées dans la zone de collision [Pérès53]. Pendant un intervalle de temps très bref, il y a création de forces de liaison de très grande intensité qui conduisent à des déformations localisées de la zone de contact. Les percussions sont définies comme les intégrales de ces forces de contact de très grande intensité sur le très courte durée du choc

[Pérè53, Bros94.2, More71].

$$\mathbf{P} = \int_{t^-}^{t^+} \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (3.15)$$

où \mathbf{P} est le vecteur percussion associé aux forces \mathbf{f} pendant la durée du choc $[t^-, t^+]$. Les équations classiques du mouvement lors d'un choc sont obtenues par intégration des équations résultant de conservation de la quantité de mouvement sur la durée du choc. Dans le cas d'un point matériel de masse m , l'accroissement de la quantité de mouvement au cours du choc est relié à la percussion par la relation :

$$m (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) = \mathbf{P} \quad (3.16)$$

où \mathbf{V}^+ et \mathbf{V}^- sont respectivement les vitesses au début (t^-) et à la fin (t^+) du choc. Des telles variations de la quantité de mouvement peuvent également être obtenues en appliquant au système des percussions données qui représentent l'action des forces de très grande intensité appliquées pendant un intervalle de temps très petit mais qui ne sont pas des inconnues du problème (telle que l'impulsion initiant le mouvement d'un boulet de canon ou d'une bille dans un billard électrique). La relation (3.16) est insuffisante pour déterminer l'évolution du système après la collision. La résolution du problème nécessite l'utilisation d'une relation supplémentaire qui nous est fournie par une loi de comportement parfois appelée loi de choc qui relie percussion et vitesse. Cette loi de comportement traduit une double nécessité. Tout d'abord une nécessité mécanique : comme le souligne [Pérè53], un contact actif pendant la durée du choc $[t^-, t^+]$ peut cesser à l'instant t^+ : la loi de choc introduit une condition de fin de choc qui permet de lever l'indétermination sur le problème. Elle répond également à une nécessité physique puisqu'elle permet de rendre compte de ce qui se passe physiquement au moment du choc en condensant l'information portée par les forces de contact \mathbf{f} a priori inconnues : la loi de choc offre une description simplifiée de la collision, sans restriction sur la nature des efforts de contact (différentes hypothèses conduisant à des modèles de choc différents). Elle peut être déduite à partir d'une analyse plus fine de ce qui se passe au niveau du choc (en étudiant par exemple les déformations de la zone de contact) ou expérimentalement.

Dans ce paragraphe, nous nous efforcerons d'exposer les éléments essentiels des principales modélisations du choc existantes.

Les lois de chocs simples

Pour le choc de deux corps rigides avec un seul point de contact (comme schématisé figure (3.3) par la collision d'un solide rigide quelconque avec un plan massif), la loi de choc la plus couramment utilisée est la loi de restitution, qui permet de décrire le comportement dans la direction normale au plan du contact entre les solides au cours d'un choc². Les modélisations pour la partie tangentielle sont plus variées. Nous dressons ici un bilan non exhaustif des différents modèles existants.

2. On suppose que le plan de contact entre les deux solides est bien défini avec un seul vecteur normal ; en particulier, le cas du choc de deux pointes est exclu.

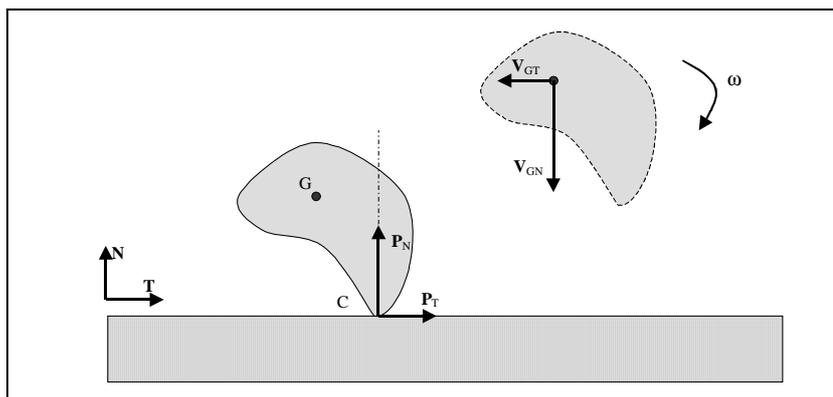


FIG. 3.3 – *Choc bidimensionnel d'un solide de centre de gravité G contre un plan avec la partie normale \mathbf{P}_N et la partie tangentielle \mathbf{P}_T de la percussion qui s'exerce au point de contact C . La cinématique du solide est donnée par la vitesse de son centre de gravité $(\mathbf{V}_{GT}, \mathbf{V}_{GN})$ et par sa vitesse de rotation ω .*

Loi de restitution La loi de restitution introduit le coefficient de restitution duquel trois définitions sont possibles en utilisant des variable différentes : vitesses ou percussions.

Coefficient de restitution de Newton Une première approche cinématique des chocs, attribuée à Newton, relie la vitesse normale après impact au point de contact V_{CN}^+ à la même quantité avant la collision V_{CN}^- [Péré53, More71].

$$e_N = -\frac{V_{CN}^+}{V_{CN}^-} \text{ avec } 0 \leq e_N \leq 1$$

Les deux dernières définitions du coefficient de restitution reposent sur une hypothèse intuitive du déroulement de la collision et postulent une histoire des déformations en se plaçant à l'échelle de temps du choc (hypothèse de rigidité n'est pas incompatible avec l'idée de petites déformations localisées dans la zone de contact). On suppose que la collision se décompose en deux périodes : une première période de compression et une période de restitution. A partir de l'instant où les solides entrent en contact, ils se déforment au voisinage du point d'impact, leurs centres de masse se rapprochent jusqu'à une distance de compression maximale, la vitesse relative au point de contact est alors nulle. L'instant de compression maximale sépare les phases de compression et de restitution [Mass00].

Coefficient de restitution de Poisson La percussion normale est décomposée en deux termes qui correspondent aux percussions accumulées pendant chacune des deux phases.

$$e_N = -\frac{P_{Nr}}{P_{Nc}} \text{ avec } 0 \leq e_N \leq 1$$

où P_{Nc} est la percussion normale pendant la phase de compression et P_{Nr} , la percussion normale pendant la phase de restitution [Cata00, Gila02].

Coefficient de restitution énergétique Stronge introduit une hypothèse pour modéliser les collisions avec frottement qu'il nomme hypothèse de dissipation de l'énergie interne [Stro94]. Il y a perte d'énergie cinétique au cours de la collision en raison du frottement et des déformations. L'énergie W dissipée au cours d'un choc est évaluée à partir du travail des forces de contact.

$$W = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$$

La dissipation pour les différentes phases est séparée en sa partie tangentielle et sa partie normale. Le coefficient de restitution est défini comme la racine carrée du rapport de l'énergie restituée W_{N_r} pendant la phase de restitution et de l'énergie stockée pendant la phase de compression W_{N_c} pour la partie normale en l'absence de déformation tangentielle.

Comparaison entre les définitions du coefficient de restitution A part ces définitions des lois de restitution d'autres travaux ont été développés dans le but de trouver d'autres lois de choc [Rubi98, Cata00]. Il y a équivalence de ces lois lorsque le frottement est nul ou lorsque le choc est central: le point de contact et les centres de gravité des solides sont alignés (la partie normale est alors découplée de la partie tangentielle, comme dans le cas du choc des sphères).

En présence de frottement, la loi de restitution de Newton peut conduire à un gain d'énergie cinétique au cours du choc [Chat97.1, Smit91]. Brach montre que ce bilan inconsistant de l'énergie se produit pour des grandes valeurs du coefficient de restitution et lorsqu'il y a changement dans l'orientation de la vitesse tangentielle au point de contact au cours de la collision [Chol98]. Des mesures expérimentales de ce coefficient de restitution et une étude précise des facteurs qui influencent la collision ont été effectuées pour des disques, des sphères [Stro94, Chat97.1] et des poutres [Stoi96].

Chocs avec frottement Les effets tangentiels dus au frottement ne peuvent être négligés au cours d'une collision: les surfaces des corps en contact ne sont en effet jamais parfaitement lisses. En dimension deux, la vitesse tangentielle au point de contact peut changer de sens du fait des forces de frottement associées aux conditions d'inertie [Stro94]. De plus [Bhat95.1, Bhat95.2] ont montré dans le cas de disques que la restitution, au cours de l'impact, d'une partie de l'énergie élastique stockée au cours des déformations tangentielles pouvait également conduire à un changement de signe de la vitesse relative tangentielle au point de contact. Les modélisations tentent de rendre compte de ce problème (les différentes modélisations seront présentées ici dans le cas à deux dimensions).

Loi de Coulomb Au cours de l'impact, il y a frottement dans la zone d'impact. On fait l'hypothèse qu'à tout instant de la collision les forces de contact tangentielles sont reliées aux forces normales par l'inégalité de Coulomb, soit à tout instant τ de la collision (dans le cas à deux dimensions)

$$\mathbf{R}_T(\tau) \in [-\mu\mathbf{R}_N(\tau), \mu\mathbf{R}_N(\tau)]$$

où $\mathbf{R}_T(\tau)$ et $\mathbf{R}_N(\tau)$ sont respectivement les composantes tangentielle et normale des forces de contact (à un instant τ) et μ le coefficient de frottement³.

En intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue (mesure positive) sur la durée de la collision, on obtient une relation analogue sur les percussions : $\mathbf{P}_T(\tau) \in [-\mu\mathbf{P}_N(\tau), \mu\mathbf{P}_N(\tau)]$. soit

$$|\mathbf{P}_T| \leq \mu|\mathbf{P}_N| \quad (3.17)$$

où \mathbf{P}_T et \mathbf{P}_N sont respectivement les composantes tangentielle et normale⁴.

La plupart des modélisations existantes reposent sur cette hypothèse coulombienne de chocs [Chat98.1, Faik00, Pfei01, Gila02]. S'il y a glissement pendant toute la durée de la collision, les forces de contact sont à la limite de frottement pendant toute la durée du choc : on a alors $|\mathbf{P}_T| \leq \mu\mathbf{P}_N$, la vitesse de glissement au point de contact garde le même sens (en dimension deux) et ne s'annule pas pendant toute la durée du choc. Les modélisations diffèrent dans le traitement de la partie tangentielle lorsque la vitesse de glissement s'annule au cours du contact et éventuellement change de signe. Ceci n'est pas attribué aux mêmes effets : frottement ou bien déformation tangentielles ou bien couplage des deux phénomènes.

Les modélisations se répartissent en deux grandes catégories : les approches qui analysent le déroulement du choc en se plaçant à l'échelle de la collision (méthodes à échelle de temps multiple) [More83, More88, Pfei96] et celle qui se repose sur la formulation de la percussions tangentielle [Smit91, Ahme99].

Modèle à échelle de temps multiple Dans ce type de méthode, le choc est analysé en se plaçant localement à l'échelle de temps de la collision : l'objectif restant de déterminer les vitesses après le choc ainsi que les percussions.

Pérès [Pérès53] souligne en effet que la vitesse de glissement varie de façon a priori inconnue pendant le choc. Il analyse le déroulement du choc en examinant successivement les deux hypothèses suivantes : La vitesse garde le même sens pendant la collision ou bien devient nulle. Ces types de modélisation ne permettent pas de décrire des collisions avec changement de sens de la vitesse de glissement.

La méthode de Routh (Routh 1860) est une méthode graphique simple qui permet d'analyser de contacts avec frottement dans le plan. Masson et Chatterjee [Mass00, Chat98.1] utilisent cette méthode pour résoudre des chocs de solides rigides. Le comportement normal au cours de la collision est traité en utilisant les lois de restitution de Newton ou de Poisson. La collision se déroule en deux temps : une phase de compression et une phase de restitution. Le choc est analysé phase par phase en envisageant toutes les évolutions possibles : il peut y avoir glissement pendant la phase de compression ou de restitution. A ce stade, il peut y avoir adhésion (c'est à dire que la vitesse de glissement reste nulle) ou bien changement dans l'orientation du glissement. Les différents modes de contact sont ainsi déterminés pour une collision simple (avec l'expression

3. Il arrive qu'on différencie le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique, mais pour simplifier les formulations, les deux coefficients sont choisis égaux.

4. En dimension trois, on écrit la loi de Coulomb $\mathbf{R}_T(\tau) \in -\mu\mathbf{R}_N(\tau)\mathcal{C}$ où \mathcal{C} est le disque de rayon 1 centré à l'origine. Le vecteur $\mathbf{R}_N(\tau)$ est défini par une condition convexe. En intégrant par rapport à la mesure de Lebesgue, on obtient l'inégalité(3.17)[Chol98].

des percussions normale et tangentielle dans les différents cas); quelques calculs pourront être trouvés dans [Chat97.1, Chat98.1].

Stronge adopte une démarche similaire pour traiter les collisions en utilisant sa définition énergétique du coefficient de restitution [Stro94].

Une autre approche multi-échelle [Zhao99] détermine les équations différentielles régissant l'évolution de la vitesse tangentielle en éliminant les efforts normaux (les efforts normaux varient au cours du contact et sont des inconnues du problème). Cette analyse plus générale peut être en particulier étendue à des collisions tridimensionnelles.

Dans ces différentes approches, il n'y a pas, par hypothèse, de déformations tangentielles. Les effets dissipatifs tangentiels de la collision sont, par hypothèse, dus uniquement au frottement. Dans le cas d'un choc normal, par exemple le choc d'une sphère (en appliquant les calculs de [Stro94] au choc d'une sphère), il n'y aura pas de changement de signe de la vitesse tangentielle au point de contact : il y a glissement pendant toute la durée du choc ou adhésion. On ne peut donc pas rendre compte à travers ces modèles des phénomènes élastiques observés par [Bhat95.1] ou bien du cas extrême du rebond d'une superballe [Pfei96].

Percussion tangentielle

Modèle de Brach Pour décrire les collisions de solides rigides avec frottement, Brach utilise deux coefficients : le coefficient de restitution de Newton pour déterminer la vitesse dans la direction normale au choc et un paramètre f défini comme le rapport des percussions tangentielle et normale $f = \frac{\mathbf{P}_T}{\mathbf{P}_N}$. Brach met en évidence l'existence d'une valeur critique f_c de ce rapport définie comme étant le minimum entre les trois coefficients suivants :

- μ , le coefficient de frottement de Coulomb,
- la valeur critique du rapport des percussions tangentielle et normale f_0 à partir de laquelle la vitesse relative au point de contact devient nulle,
- la valeur critique f_T pour laquelle l'énergie cinétique perdue au cours de la collision est nulle (pour des valeurs de f supérieures, il y a gain d'énergie au cours de la collision, ce qui est irréaliste).

Le rapport des percussions f doit alors vérifier l'inégalité

$$|f| \leq f_c = \min(\mu, |f_0|, |f_T|).$$

Les paramètres f_0 et f_T dépendent du coefficient de restitution de Newton et de la configuration du système au moment du choc et ne peuvent pas être déterminés a priori. Dans certaines configurations, f_c coïncide avec le coefficient de frottement de Coulomb mais dans le cas général l'interprétation physique de ce coefficient reste difficile. Néanmoins, cette valeur critique permet de prendre en compte toutes les difficultés intrinsèques au problème du choc telles que la dissipation d'énergie au cours de la collision, le changement de signe de la vitesse de glissement et la loi de Coulomb.

Modèle de Smith Dans le modèle proposé par Smith [Smit91], le comportement normal au cours du choc est régi par le coefficient de restitution de Newton et les percussions tangentielle et normale obéissent à la loi de Coulomb (équation 3.17). Pour répondre au problème de changement de signe de la vitesse au point de contact, Smith utilise une moyenne pondérée des vitesses avant et après le choc pour définir la percussion tangentielle.

$$\mathbf{P}_T = -\mu \mathbf{P}_N \frac{|\mathbf{V}_{CT}^-| \mathbf{V}_{CT}^- + |\mathbf{V}_{CT}^+| \mathbf{V}_{CT}^+}{|\mathbf{V}_{CT}^-|^2 + |\mathbf{V}_{CT}^+|^2}$$

Pour cette définition de la percussion tangentielle, Smith démontre qu'il y a perte d'énergie cinétique au cours du choc. Chatterjee [Chat98.1] démontre également qu'il y a existence (mais pas unicité) d'une solution pour le modèle dans le cas d'un choc simple. Mais il remarque également que si ce modèle permet de décrire des comportement tels que celui d'une superballe (la vitesse de glissement s'inverse pendant la collision et il y a conservation de l'énergie cinétique totale au cours du choc), il ne permet pas de décrire le choc de sphères de comportement tangentiel moins élastique. La restitution tangentielle n'est pas un facteur indépendant dans la loi de choc.

Glocker et Pfeiffer [Pfei96] proposent un autre modèle basé sur l'hypothèse de Poisson et la relation de Coulomb. Ce modèle a été exploité pour étudier la dynamique d'un système présentant des contacts unilatéraux multiple entrant en collision.

Région accessible de l'espace des percussions Pour définir de nouvelles lois de choc dans le cas de chocs simples (en dimension de deux ou trois), Chatterjee [Chat97.1, Chat98.1] introduit la notion de région accessible dans l'espace des percussions pour des lois de choc de solides rigides, ce qui permet d'exprimer géométriquement les conditions sur les percussions.

On se place dans l'espace des percussions $(\mathbf{P}_N, \mathbf{P}_T)$ (voir figure (3.4) pour le cas de deux dimensions). Les principaux éléments de la construction de la région accessible sont résumés ici :

- Les percussions normale et tangentielle sont reliées par la relation de Coulomb ; les percussions doivent donc se trouver à l'intérieur du cône de frottement.
- La loi fondamentale du choc est donnée par l'expression du torseur cinétique en fonction du torseur des percussions. Pour un choc simple, cette relation peut s'écrire sous la forme $\mathbf{M}(\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) = \mathbf{P}$ où \mathbf{M} est la matrice de masse (symétrique définie positive), \mathbf{V} et \mathbf{P} respectivement les torseurs cinétique et de percussion. Il y a perte d'énergie cinétique pendant la collision, ce qui s'exprime par :

$$\mathbf{V}^{+T} \mathbf{M} \mathbf{V}^+ = (\mathbf{M} \mathbf{V}^- + \mathbf{P})^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M} \mathbf{V}^- + \mathbf{P}) \leq (\mathbf{V}^-)^T \mathbf{M} \mathbf{V}^-$$

Cette relation définit l'intérieur d'une ellipse (en dimension deux) dans l'espace des percussions centrée en $\mathbf{P} = -\mathbf{M} \mathbf{V}^-$.

- La ligne de compression maximale est la ligne qui joint toutes les percussions pour lesquelles la vitesse normale après le choc est nulle. Géométriquement, en dimension deux (figure 3.4), cette ligne joint les deux points sur l'ellipse pour lesquels la tangente à la courbe est verticale. La ligne de compression maximale délimite ainsi deux demi-plans.

Quand la dissipation est maximale, la percussion est au minimum; toutes les percussions qui sont produites par des chocs moins dissipatifs se trouvent donc dans la partie supérieure.

La région accessible pour les percussions se trouve à l'intersection des différentes zones ainsi définies. Elle est schématisée dans la figure (3.4) par une surface grise.

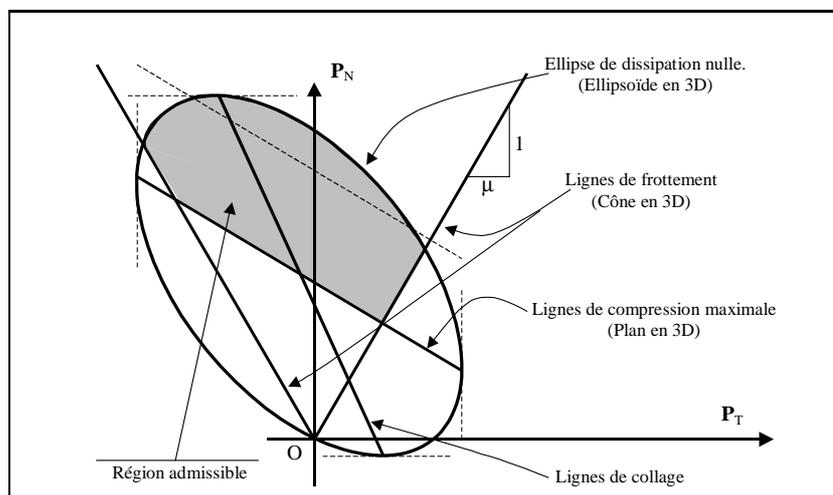


FIG. 3.4 – Région accessible dans l'espace des percussions.

Chatterjee propose aussi différentes lois pour les chocs simples de géométrie quelconque, pour lesquelles les percussions se trouvent dans la région admissible. Ces lois ne sont pas formulées explicitement mais de manière algorithmique et sont difficilement généralisables aux chocs multiples. Néanmoins, la méthode géométrique proposée permet de comparer les différents modèles en regardant l'ensemble de leurs prédictions. Une constatation importante est que pour obtenir des lois de choc les plus générales possibles, il faut pouvoir se déplacer dans toute la région admissible (indépendamment dans les directions tangentielle et normale).

Modèle à trois coefficients

Cas du disque Bhatt [Bhat95.2] ainsi que Cataldo [Cata00] proposent un modèle simplifié de collision oblique de disques ou sphères basé sur trois coefficients. Un coefficient de restitution normale de Newton e_N qui relie les vitesses normales au point de contact \mathcal{C} avant et après impact permet de modéliser la dissipation normale.

$$\mathbf{V}_{CN}^+ = -e_N \mathbf{V}_{CN}^- \quad (3.18)$$

Les forces tangentielle et normale, au cours des déformations microscopiques, sont liées par une relation de type Coulomb avec un coefficient de frottement constant μ . Une relation analogue sur les percussions est obtenue par intégration des forces sur la durée de la collision (équation 3.17).

$$|\mathbf{P}_T| \leq \mu |\mathbf{P}_N| \quad (3.19)$$

Un coefficient de restitution tangentiel e_T permet de modéliser les chocs avec changement de signe de la vitesse tangentielle.

$$\mathbf{V}_{CT}^+ = -e_T \mathbf{V}_{CT}^- \quad (3.20)$$

où \mathbf{V}_{CT}^- et \mathbf{V}_{CT}^+ sont respectivement les vitesses tangentielles au point de contact avant et après le choc et $-1 \leq e_T \leq 1$.

3.3.2 Particularités de la mécanique classique du choc

Le système de la figure (3.2) présente des contacts unilatéraux entre les deux roues et la chaussée et entre la selle et le cyclomotoriste. La détermination des équations de liaison a permis d'écrire les équations du mouvement du système pour une configuration bien définie. En effet, les multiplicateurs de Lagrange modélisent l'action de contact dans une liaison unilatérale tant que celle-ci existe réellement. D'autre part les équations du mouvement obtenues ne peuvent être résolues que par le biais d'un outil numérique.

Les solutions obtenues ne permettent pas d'aborder le domaine de reconstruction de ces collisions car elles ne permettent pas de remonter la chronologie des événements. Une approche qui a été largement utilisée dans le domaine de la reconstruction des accidents de la circulation routière est la mécanique classique du choc. Cette mécanique permet de résoudre le problème sans connaître exactement la valeur ou l'expression de la force de percussion. Elle consiste à ajouter une relation supplémentaire dite de restitution pour enlever l'indétermination du problème. Les équations de Lagrange s'appliquent aussi pour la mécanique discrète du choc. Elles se présentent sous la forme suivante :

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \hat{Q}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

où \hat{Q}_i est la percussion généralisée relative à q_i . Cette expression peut être mise sous la forme suivante :

$$\hat{Q}_i = \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta \dot{q}_j \quad \text{où } \Delta \dot{q}_j = \dot{q}_j^+ - \dot{q}_j^- \quad (3.22)$$

\dot{q}_j^+ et \dot{q}_j^- sont les vitesses généralisées aux instants t^+ et t^- qui désignent, respectivement, la fin et le début du choc. Il est à noter, à ce niveau, que ces équations ne tiennent compte que des états cinématiques avant et après le choc et qu'on ne dispose pas d'informations sur l'évolution dynamique du système durant le choc. En effet, la mécanique discrète du choc présente les particularités suivantes :

1. La notion du temps disparaît pendant le choc. Plus exactement tout ce qui s'y déroule est ignoré et on ne tient compte que des états cinématiques de pré collision et de post collision.
2. La notion de force disparaît et se trouve remplacée par la notion de percussion.
3. L'avantage de cette théorie réside dans le fait que le comportement dynamique durant le choc est modélisé par un système d'équations linéaires extrêmement facile à résoudre.

3.3.3 Adaptation des lois du choc au cas de plusieurs contacts unilatéraux

Le paragraphe précédent met en évidence les avantages et les inconvénients de la modélisation du choc en utilisant la mécanique classique du choc. Nous allons maintenant nous intéresser aux collisions avec des contacts unilatéraux multiples.

Prenons l'exemple d'un bloc concave en mouvement au dessus d'un plan (figure 3.5). Une des pointes, A , du bloc est en contact avec le plan. Une autre pointe vient heurter le plan : il y a un phénomène de choc. Au moment du choc le plan et le bloc ont deux points de contact.

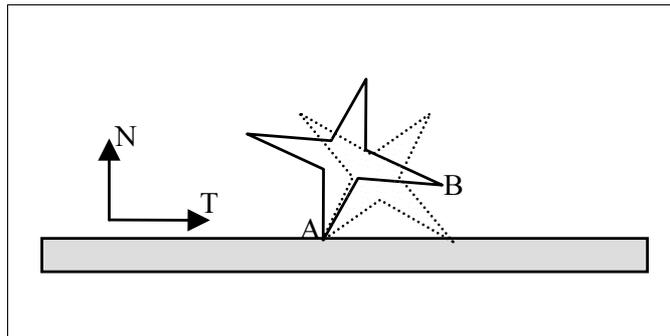


FIG. 3.5 – Bloc concave en mouvement au dessus d'un plan en contact en une point A .

Si on applique la loi de restitution de Newton en chacune des deux pointes, la pointe déjà en contact au moment du choc ne peut pas décoller ($V_{AN}^+ = -e_N V_{AN}^- = 0$) où e_N est le coefficient de restitution de Newton. V_{AN}^+ et V_{AN}^- sont, respectivement, les vitesses normales du point A après et avant le choc.

Des situations physiquement admissibles telles que le roulement du bloc en contact avec le plan sont alors exclues. Cet exemple simple illustre bien une des difficultés liées à la modélisation de collision d'un système présentant des contacts unilatéraux multiples : des liaisons unilatérales actives au moment d'un choc peuvent être amenées à se rompre sous l'effet du choc.

Les premières tentatives de résolution des collisions avec contacts unilatéraux multiples sont relativement anciennes et sont basées sur des collisions binaires : une discussion de ces différentes méthodes pourra être trouvée dans le travail de Ivanov [Ivan95]. Han et Gilmore [Han93] adoptent une démarche similaire basée sur une méthodologie de résolution des contacts multiples en considérant les chocs multiples comme une succession de chocs simples. Morreau [More71, More83, More88] adopte une description du contact unilatéral basée sur des contraintes sur les vitesses (les conditions de non pénétration entre les éléments du système sont ainsi directement intégrées dans la loi de comportement). Une démarche similaire est utilisée par Glocker et Pfeiffer [Pfei96, Pfei01]. D'autres modélisations existent aussi dans la littérature sur la mécanique des multi-chocs, telle celle de Frémond [Frém95].

La percussion a nécessairement lieu sur une liaison unilatérale qui n'a de réalité physique que durant le choc. Il peut se faire qu'en dehors de cette liaison, d'autres liaisons unilatérales préexistent au choc. Par exemple, dans le cas d'un cyclomoteur venant en percussion avec un

véhicule léger, en dehors de la liaison unilatérale (roue avant – pare-chocs) où se produit l’impact, l’existence d’autres liaisons unilatérales peut être notée : roues – sol et selle – cyclomotoriste. Ces dernières liaisons préexistent au choc.

Dans un tel cas la mécanique classique du choc ne peut pas répondre à ces problèmes puisqu’elle comprime le temps de l’impact en un instant unique. La question se pose, en effet, de savoir si les autres liaisons unilatérales (autre que celle où a lieu le choc) sont défaites (perte de contact). Or on ne peut répondre à cette question qu’en analysant la force de contact devenant nulle au moment de la désolidarisation ou en étudiant la cinématique relative au niveau des points de contact étudiés. De plus, il faut savoir dans quel ordre se produisent les pertes et les apparitions des contacts. Car dès qu’un contact disparaît, la force correspondante disparaît, ce qui modifie la configuration dynamique du système.

La proposition qui est faite dans ce paragraphe essaie de préserver les avantages de la théorie du choc discrète (simplicité des équations) tout en restituant les notions de temps et de force.

Pour garder la simplicité, on garde deux hypothèses simplificatrices qui sont déjà utilisées dans la théorie classique du choc :

Hypothèse cinématique On considère que la configuration du système est figée durant la collision. Autrement dit, les coordonnées généralisées du système auront des valeurs constantes. Ces valeurs sont données par le vecteur \mathbf{q}^- qui représente la configuration de pré collision du système. Pour pouvoir étudier l’évolution du système durant la collision on suppose qu’il y a des petits déplacements au niveau des coordonnées généralisées. Ces déplacements faibles ainsi que leurs vitesses sont ceux que le système dynamique Σ peut engendrer dans sa configuration de pré-collision. Les petites variations des coordonnées généralisées qui engendrent ces déplacements sont notées par \bar{q} et leurs dérivées premières et secondes seront notées respectivement par $\dot{\bar{q}}$ et $\ddot{\bar{q}}$. En résumé, les coordonnées généralisées sont supposées bloquées à \mathbf{q}^- , sur lesquelles se superposent, comme des mouvements virtuels compatibles les petites variations, les vitesses et les accélérations \bar{q} , $\dot{\bar{q}}$, $\ddot{\bar{q}}$ respectivement compatibles avec la position \mathbf{q}^- .

Hypothèse dynamique Afin de restituer la notion du temps, un modèle rhéologique au niveau du contact où il y a percussion sera utilisé. Pour les autres contacts unilatéraux on peut utiliser soit un modèle rhéologique, soit un multiplicateur de Lagrange. En plus, en exploitant le fait que durant une collision les dérivées secondes des paramètres présentent des amplitudes très importantes en regard des dérivées premières, les quantités d’accélération de Coriolis et centrifuges seront considérées négligeables devant les termes de types $a_{ij}\ddot{\bar{q}}_j$.

3.3.4 Modèle dynamique simplifié

Considérons le système multicorps Σ soumis à une percussion : force d’amplitude importante et de durée réduite. Les quantités d’accélérations classiques exprimées en fonction des vitesses et des accélérations généralisées données par le premier membre de l’équation (3.5), se présentent

sous la forme suivante :

$$A_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right)}_{\Gamma_{jk}^i : \text{symbole de Christoffel}} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.23)$$

Implicitement, dans la théorie du choc, dans l'expression (3.22), les vitesses sont négligeables devant les accélérations qui, lorsque la durée de la percussion est réduite à zéro, deviennent même théoriquement infinies. Il en est donc fait de même dans cette proposition⁵. Sous cette hypothèse, dans l'expression (3.23) on ne gardera donc que la partie suivante :

$$A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j \quad (3.24)$$

qui remplacera l'expression (3.22) au second membre des équations du mouvement durant la collision.

Remarque : On notera que (3.24) intégrée entre t^- et t^+ , compte tenu de l'hypothèse $a_{ij} = \text{constante}$ donne l'expression (3.22) de la mécanique du choc discrète.

D'autre part, les contacts où a lieu le choc sont modélisés par des lois rhéologiques dont les points de contact C_k suivent des petits mouvements compatibles avec les liaisons de Σ telles qu'elles existent au moment de la collision. Soit le point O origine d'un référentiel absolu, ces déplacements s'expriment par :

$$\delta \mathbf{OC}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{OC}_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \quad (3.25)$$

et leurs vitesses s'expriment par :

$$\dot{\mathbf{OC}}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{OC}_k}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (3.26)$$

Un modèle de ces forces peut être donné sous la forme d'une fonction implicite \mathcal{F} qui dépend des coordonnées généralisées du système et des paramètres qui caractérisent la zone du contact :

$$= \mathcal{F} \left(\mathbf{F}_{\text{contact}}, \dot{\mathbf{F}}_{\text{contact}}, \dots, \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, \dots \right)$$

Afin de calculer les forces généralisées Q_i , on peut utiliser l'expression de la puissance virtuelle des différentes forces de contact. Cette puissance est donnée par l'expression suivante :

$$P_{F \text{ contact}}^* = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{\bar{q}}_i^* \quad (3.27)$$

3.3.5 Forme générale des équations du mouvement

Compte tenu du développement présenté dans le paragraphe (3.3.4), les équations du mouvement, durant le choc, se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + [\mathbf{B}] \dot{\bar{\mathbf{q}}} + [\mathbf{K}] \bar{\mathbf{q}} &= [\mathbf{\Delta}] \lambda + \mathbf{C} \\ [\mathbf{\Delta}]^T \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

5. On pourra objecter qu'au début et à la fin de l'impact les vitesses ne seront pas faibles devant les accélérations. Mais on postule que ces périodes sont très courtes devant la durée de l'impact.

où :

- $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n]^T$: vecteur des variations des coordonnées généralisées caractérisant l'évolution du système durant la collision et se superposent à la configuration considérée comme figée.
- $[\mathbf{A}]$: matrice symétrique d'inertie généralisée. On pourra calculer ses coefficients en utilisant la démarche suivante :

$$A_i = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_{\rightarrow \ddot{q}_i} \quad (3.29)$$

qui signifie que dans l'expression de $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ les \dot{q}_j sont remplacés par \ddot{q}_j .

- $[\mathbf{B}]$: matrice symétrique d'amortissement,
- $[\mathbf{K}]$: matrice symétrique de rigidité.
- $[\mathbf{\Delta}]$: matrice des coefficients des équations de liaisons.
- λ : vecteur des multiplicateurs de Lagrange.
- \mathbf{C} : vecteur des constantes.

Les matrices $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{K}]$ et $[\mathbf{\Delta}]$ ainsi que le vecteur des constantes \mathbf{C} sont constants tant qu'une liaison unilatérale n'a pas changé d'état. La disparition d'un contact k se produit lorsque la force de contact en C_k revient à la valeur 0 ou la valeur du multiplicateur de Lagrange correspondant à la liaison en C_k redevient nulle.

La disparition d'un contact modifie les éléments de $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{\Delta}]$ et le vecteur \mathbf{C} qui restent constants jusqu'à ce qu'un nouveau contact change d'état.

La solution du système (3.28) est classique. Elle se présente sous la forme suivante :

$$\bar{q}_i = \sum_{i=1}^n e^{\alpha_i t} (h_{1i} \sin(\omega_i t) + h_{2i} \cos(\omega_i t)) + h_{3i} \quad (3.30)$$

si toutes les racines de l'équation caractéristique sont distinctes. Avec h_{1i} , h_{2i} et h_{3i} sont des constantes. Elles sont déterminées en utilisant les conditions initiales. Les α_i et ω_i dépendent des éléments des matrices $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ et $[\mathbf{K}]$. Ainsi, pour la solution (3.30), les α_i et les ω_i seront exprimés en fonction des b_k et k_k lorsque tous les C_k sont des points de contact réels (actifs). Les expressions des α_i et des ω_i évolueront au fur et à mesure des disparitions et des apparitions des contacts C_k . C'est selon ces changements de la configuration du système qu'on fixe les valeurs des b_k et k_k pour les points concernés afin de pouvoir, par la suite, poursuivre la simulation du mouvement du système.

3.4 Application au cas d'un pendule double

Afin de valider l'hypothèse $(a_{ij}\ddot{q}_j \gg \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k)$ on se propose de simuler le comportement dynamique d'un pendule double en mouvement libre entrant en collision avec un plan horizontal. La simulation comporte deux phases.

1. Une phase de mouvement libre qui simule l'évolution de la dynamique du double pendule sous l'action du champ de pesanteur.
2. Une phase de collision où il y a présence d'un contact unilatéral.

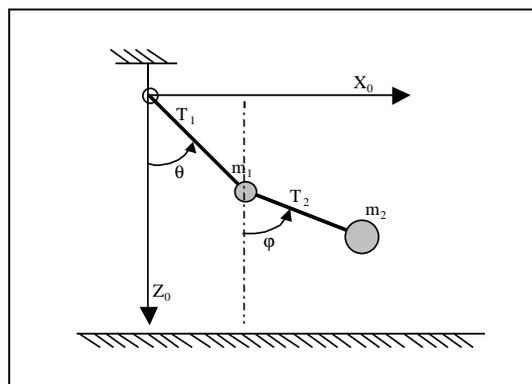


FIG. 3.6 – Schémas du montage à étudier

Le schéma du système est donné par la figure (3.6). Les deux tiges T_1 et T_2 sont rigides, indéformables, de masses négligeables et de longueurs respectives l_1 et l_2 . La tige T_1 est en liaison rotoïde avec le bâti et présente une autre liaison rotoïde avec la tige T_2 à l'autre extrémité. Les deux masses m_1 et m_2 sont considérées comme des points matériels et sont liées, respectivement, à T_1 en G_1 et à T_2 en G_2 . Le système est paramétré par deux coordonnées généralisées θ et ϕ comme le montre la figure (3.6). \mathbf{z}_0 est la verticale descendante.

3.4.1 Mise en équations d'un pendule libre

Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique globale du système est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} T_T &= \frac{1}{2}m_1 (V_{G_1}^0)^2 + \frac{1}{2}m_2 (V_{G_2}^0)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 (\dot{\theta}(t))^2 + m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi(t) - \theta(t)) (\dot{\varphi}(t)) (\dot{\theta}(t)) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 (\dot{\varphi}(t))^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Calcul de la fonction de force U

La fonction de force est donnée par l'énergie potentielle de champ de pesanteur. d'où

$$U = g l_1 (m_1 + m_2) \cos(\theta(t)) + g m_2 l_2 \cos(\varphi(t))$$

Équations de Lagrange

Elles sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \ell(\theta) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\ \ell(\varphi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

C'est qui donne :

$$\begin{bmatrix} l_1^2 (m_1 + m_2) & m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi(t) - \theta(t)) \\ m_2 l_2 l_1 \cos(\phi(t) - \theta(t)) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -m_2 l_2 l_1 \sin(\varphi(t) - \theta(t)) (\dot{\varphi}(t))^2 \\ m_2 l_2 l_1 \sin(\varphi(t) - \theta(t)) (\dot{\theta}(t))^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(m_1 + m_2) l_1 \sin(\theta(t)) \\ g m_2 l_2 \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

3.4.2 Mise en équation du pendule sous contrainte

Le système à étudier est donné par la figure (3.7). Le modèle dynamique au niveau du point de contact est simulé par l'association en parallèle d'un ressort qui présente la rigidité de la zone de contact et d'un amortisseur qui simule la dissipation durant la collision. Dans le montage de la figure (3.7) le système ressort-amortisseur est rigidement lié à la tige T_2 en G_2 centre de la masse m_2 . Dans ces conditions l'énergie cinétique garde la même expression que celle du pendule libre (3.31). z_0 est la distance entre l'articulation de la tige T_1 avec le bâti et le plan horizontal.

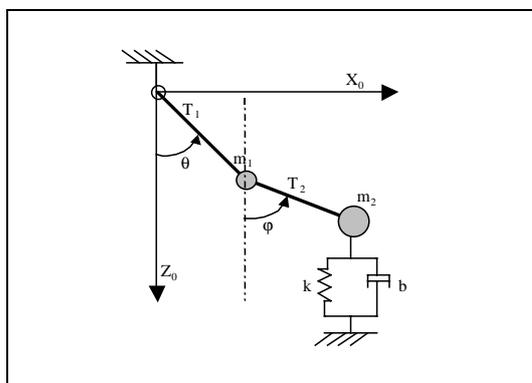


FIG. 3.7 – *Système sous contrainte: le solide m_2 est solidaire du système ressort-amortisseur*

Calcul de la fonction de force U

$$U = -\frac{1}{2} k l_1^2 (\cos^2(\theta(t))) + (g l_1 (m_1 + m_2) - k (l_2 \cos(\varphi(t)) - z_0) l_1) \cos(\theta(t)) + g m_2 l_2 \cos(\varphi(t)) - \frac{1}{2} k (l_2 \cos(\varphi(t)) - z_0)^2 \quad (3.33)$$

Calcul de la fonction de dissipation Φ

$$\Phi = \frac{1}{2} b \left(-l_1 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - l_2 \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \right)^2 \quad (3.34)$$

Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \ell(\theta) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\ \ell(\varphi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l_1^2 (m_1 + m_2) & m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi(t) - \theta(t)) \\ m_2 l_2 l_1 \cos(\phi(t) - \theta(t)) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -m_2 l_2 l_1 \sin(\varphi(t) - \theta(t)) (\dot{\varphi}(t))^2 \\ m_2 l_2 l_1 \sin(\varphi(t) - \theta(t)) (\dot{\theta}(t))^2 \end{pmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} (b l_1^2 (\sin(\theta(t)))^2) & b l_1 l_2 \sin(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ b l_2 l_1 \sin(\varphi(t)) \sin(\theta(t)) & (b l_2^2 (\sin(\varphi(t)))^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} g(m_1 + m_2) l_1 \sin(\theta(t)) \\ g m_2 l_2 \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} -k l_2 l_1 \sin(\theta(t)) \cos(\varphi(t)) - \frac{1}{2} k l_1^2 \sin(2\theta(t)) + l_1 k z_0 \sin(\theta(t)) \\ -l_1 k l_2 \cos(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) - \frac{1}{2} k l_2^2 \sin(2\varphi(t)) + k l_2 \sin(\varphi(t)) z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.4.3 Validation de l'hypothèse ($a_{ij}\ddot{q}_j \gg \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$)

Dans cette partie nous présentons la résolution des équations du mouvement du double pendule. Ces équations du mouvement sont données par les expressions (3.32) pour le cas du mouvement libre et par les équations (3.35) pour le cas du mouvement du pendule sous contrainte. Pour réaliser cette tâche la boîte à outils SIMULINK de MATLAB a été utilisée.

Le but visé, via ces différentes simulations, est l'étude de la validité de l'hypothèse simplificatrice qui consiste à négliger les termes $\Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ devant les termes $a_{ij}\ddot{q}_j$ dans le cas d'un choc (durée réduite). A cet effet, différentes simulations sont faites en variant les caractéristiques mécaniques de la zone de contact (k et b). Il est à signaler que la collision considérée dans cette partie est sans frottement et que le critère de début de la collision est $\langle (z - z_0) = 0 \rangle$ (z est l'altitude de point G_2 et z_0 est l'altitude du plan tangent de collision) alors que le critère de fin de la collision est la nullité de la force de contact pour la première fois après le début de la collision.

Afin de valider la dite hypothèse trois simulations, en variant à chaque fois la valeur de la raideur au niveau du contact avec le plan horizontal, seront présentées. Les conditions initiales pour ces simulations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{\pi}{2}; \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \\ \dot{\theta}(0) &= 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \\ m_1 &= 1 \text{ kg}; \quad m_2 = 0.2 \text{ kg} \\ l_1 &= 0.2 \text{ m}; \quad l_2 = 0.4 \text{ m} \\ b &= 10 \text{ N s/m} \end{aligned}$$

Pour des faibles rigidités (figure 3.8) on remarque que l'hypothèse ($a_{ij}\ddot{q}_j \gg \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$) n'est pas vérifiée. En plus, on note que la durée de la collision ne peut pas être négligée. En effet, pour cette valeur de la raideur nous remarquons que la configuration du système change considérablement durant la collision, ce qui ne respecte pas l'hypothèse mentionnant l'invariance de la configuration du système durant la collision.

Pour des valeurs importantes de k (figures 3.9 et 3.10) la dite hypothèse ($a_{ij}\ddot{q}_j \gg \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$) est vérifiée. En plus, on note que la durée de la collision est de plus en plus faible.

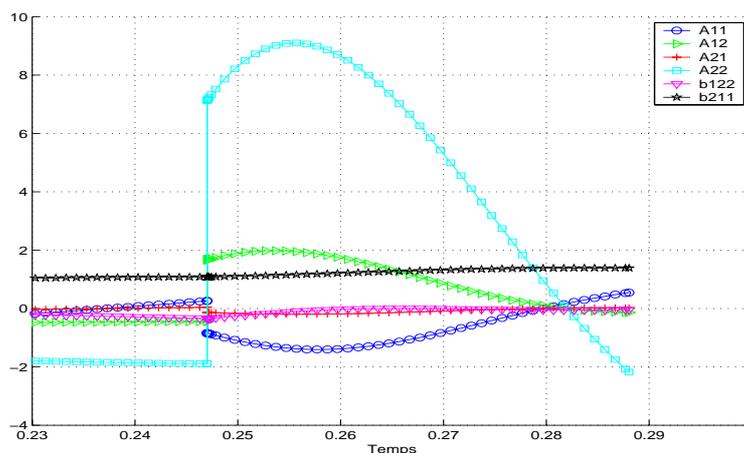


FIG. 3.8 – Évolutions de $A_{ij} = a_{ij}\ddot{q}_j$ et de $b_{ijk} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ pour $K = 10^3 \text{ N/m}$.

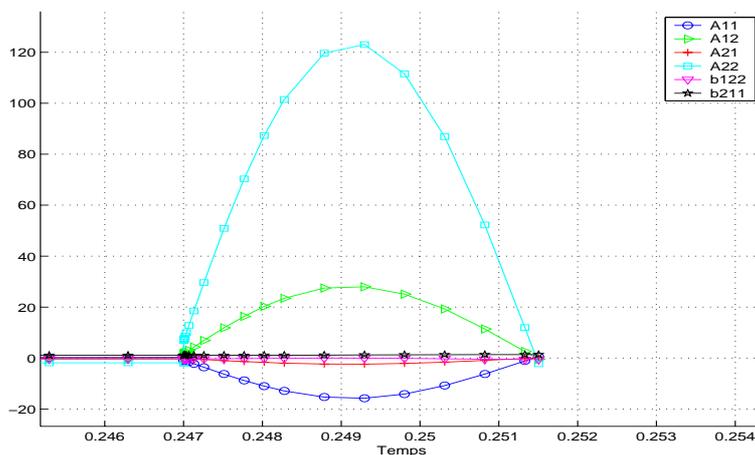


FIG. 3.9 – Évolutions de $A_{ij} = a_{ij}\ddot{q}_j$ et de $b_{ijk} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ pour $K = 10^5 \text{ N/m}$.

3.4.4 Développement des équations du mouvement du système en utilisant la formulation simplifiée

On se propose dans cette partie d'utiliser la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc pour étudier le comportement dynamique du double pendule durant la phase de collision. Les simulations faites selon cette formulation vont être comparées aux mêmes scénarios de simulation présentés précédemment.

Selon la formulation simplifiée de la mécanique du choc et qui présente les hypothèses simplificatrices suivantes :

- La configuration géométrique est inchangée durant la collision
- Les termes en vitesses sont négligeables par rapport au termes en accélérations

L'évolution du système durant la collision est donnée par la solution du système d'équations

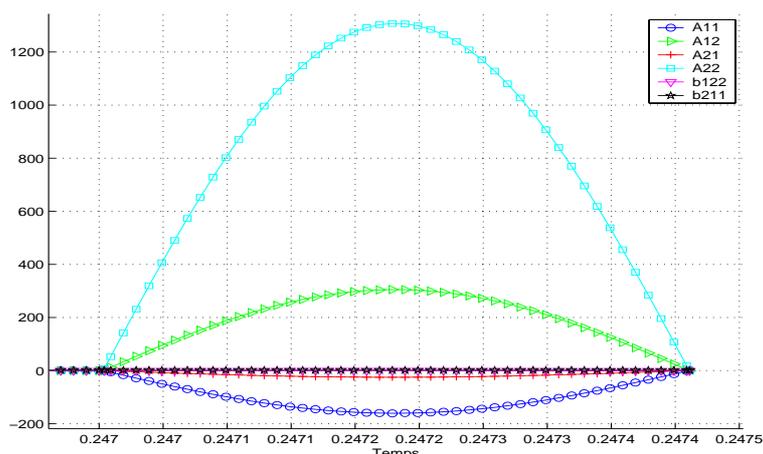


FIG. 3.10 – Évolutions de $A_{ij} = a_{ij}\ddot{q}_j$ et de $b_{ijk} = \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ pour $K = 10^7 \text{ N/m}$.

suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Les différents coefficients a_{ij} , b_{ij} et k_{ij} sont, en réalité, fonction des coordonnées généralisées $(\theta(t), \varphi(t))$ ainsi que de leurs dérivées. Dans le contexte actuel nous supposons que ces différents coefficients gardent des valeurs figées, calculées en fonction de la configuration de pré-collision (θ^-, φ^-) .

L'énergie cinétique est donnée par l'expression (3.31). En calculant les variations de l'énergie cinétique par rapport aux vitesses généralisées $\frac{\partial T_T}{\partial \dot{q}}$ on trouve :

$$\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta} + m_2 l_2 l_1 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi} + m_2 l_2 l_1 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \quad (3.38)$$

Pour aboutir aux éléments de la matrice $[\mathbf{A}]$, l'expression (3.29) sera appliquée. Autrement dit, on remplace, dans les expressions des dérivées de l'énergie cinétique données par les relations (3.37) et (3.38), tous les \dot{q}_j par \ddot{q}_j et les variables q_j avec les valeurs qu'ils possèdent juste avant la collision. Ainsi on trouve :

$$\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\theta}} \equiv (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta} + m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi^- - \theta^-) \ddot{\varphi} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial T_T}{\partial \dot{\varphi}} \equiv m_2 l_2^2 \ddot{\varphi} + m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi^- - \theta^-) \ddot{\theta} \quad (3.40)$$

Par identification, les éléments de la matrice $[\mathbf{A}]$ sont les suivants :

$$\begin{cases} a_{11} = l_1^2 (m_1 + m_2) \\ a_{12} = m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi^- - \theta^-) \\ a_{21} = m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi^- - \theta^-) \\ a_{22} = m_2 l_2^2 \end{cases}$$

Le comportement dynamique du point de contact est modélisé par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement b . La force normale de contact, durant la collision, est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{F} = - \sum_{j=1}^2 (k\bar{q}_j + b\dot{\bar{q}}_j) \left(\frac{\partial \mathbf{O}\mathbf{G}_2}{\partial q_j} \cdot \mathbf{n}_{G_2} \right) \mathbf{n}_{G_2}$$

où \mathbf{n}_{G_2} est le vecteur normal au plan de collision.

La puissance virtuelle de la force de contact en G_2 est donnée par l'expression suivante :

$$P_{G_2}^* = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{O}\mathbf{G}_2}{\partial q_i} \underbrace{\sum_{j=1}^2 (k\bar{q}_j + b\dot{\bar{q}}_j) \left(\frac{\partial \mathbf{O}\mathbf{G}_2}{\partial q_j} \cdot \mathbf{n}_{G_2} \right) \mathbf{n}_{G_2}}_{S_j} \dot{q}_i^* \quad (3.41)$$

La somme S_j est donnée par l'expression suivante :

$$S_j = \left(k\bar{\theta} + b\dot{\bar{\theta}} \right) l_1 \sin(\theta) + l_2 \sin(\varphi) \left(k\bar{\varphi} + b\dot{\bar{\varphi}} \right) \quad (3.42)$$

ainsi

$$P_{G_2}^* = - \left(l_1 \sin(\theta) S_j \dot{\theta}^* + l_2 \sin(\varphi) S_j \dot{\varphi}^* \right). \quad (3.43)$$

En utilisant le théorème d'Alembert qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\sum Q_i \dot{q}_i^* = \sum A_i \dot{q}_i^* \quad \forall \dot{q}_i^*, \quad (3.44)$$

les deux équations du mouvement peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\bar{\theta}} + m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi^- - \theta^-) \ddot{\bar{\varphi}} = -l_1 \sin(\theta^-) k \left(l_1 \sin(\theta^-) \bar{\theta} + l_2 \sin(\varphi^-) \bar{\varphi} \right) - l_1 \sin(\theta^-) b \left(l_1 \sin(\theta^-) \dot{\bar{\theta}} + l_2 \sin(\varphi^-) \dot{\bar{\varphi}} \right) \quad (3.45)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\bar{\varphi}} + m_2 l_2 l_1 \cos(\varphi^- - \theta^-) \ddot{\bar{\theta}} = -l_2 \sin(\varphi^-) k \left(l_1 \sin(\theta^-) \bar{\theta} + l_2 \sin(\varphi^-) \bar{\varphi} \right) - l_2 \sin(\varphi^-) b \left(l_1 \sin(\theta^-) \dot{\bar{\theta}} + l_2 \sin(\varphi^-) \dot{\bar{\varphi}} \right) \quad (3.46)$$

3.4.5 Validation de la formulation simplifiée

Dans cette partie nous comparons, par des simulations numériques, les résultats du modèle simplifié à ceux du modèle non simplifié. Pour ce faire on dispose de deux modèles numériques de simulation dont le premier est présenté dans le paragraphe (3.4.3). Il permet de simuler le comportement dynamique du système sans tenir compte des hypothèses simplificatrices. Le deuxième modèle permet de simuler la dynamique du modèle en utilisant la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Elle consiste à résoudre les équations du mouvement (3.45) et (3.46) dont les inconnues sont $\bar{\theta}$ et $\bar{\varphi}$.

La première simulation consiste à trouver les conditions de pré-collision. Elle est faite en utilisant les conditions initiales déjà données et avec $z_0 = 0.3 \text{ m}$.

Par simulation on trouve l'état de pré-collision suivant :

$$\begin{aligned}\theta^- &= 0.221 \text{ rd} \\ \dot{\theta}^- &= -8.656 \text{ rd/s} \\ \varphi^- &= 1.306 \text{ rd} \\ \dot{\varphi}^- &= -4.901 \text{ rd/s}\end{aligned}\tag{3.47}$$

Différentes simulations ont été faites dans le but de voir les différences qui existent entre les comportements dynamiques donnés par les deux modèles (simplifié et complet). Le principe de ces simulations consiste à étudier la différence qui existe entre les vitesses normales de décollage données par les deux modèles $|(V_{\text{complet}} - V_{\text{simplifié}})|$.

Afin de récapituler les différents comportements, plusieurs simulations, en changeant à chaque fois les caractéristiques du modèle de contact, ont été réalisées. Les résultats de ces simulations sont résumés par le graphe de la figure (3.11). Il est à noter que les écarts qui

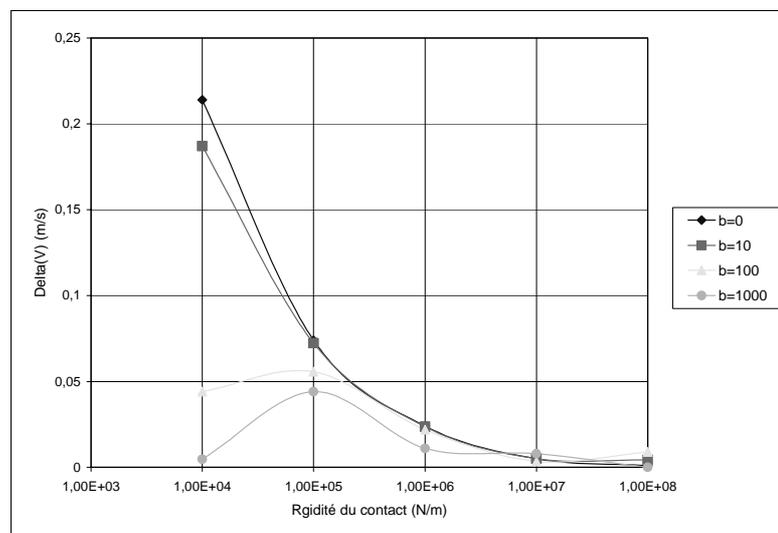


FIG. 3.11 – Évolutions de la différence des composantes normales de la vitesse du point G_2 données par les formulations complète et simplifiée.

existent entre les vitesses données par la formulation complète et celles de la nouvelle formulation simplifiée sont de l'ordre de quelques centièmes pour une raideur de 10^5 N/m . Au delà de cette raideur les écarts sont négligeables par rapport à l'ordre de grandeur des vitesses de décollage. En plus, ces écarts convergent vers zéro quand la rigidité augmente.

3.5 Application de la nouvelle formulation au cas de la collision du cyclomoteur avec l'obstacle mobile

La loi de comportement du contact frontal qui se manifeste entre les points I de la roue avant et le point B de l'obstacle mobile est modélisée par une loi élastoplastique comme le montre la figure (3.12). Le choix de cette loi de comportement est fait en se basant sur une

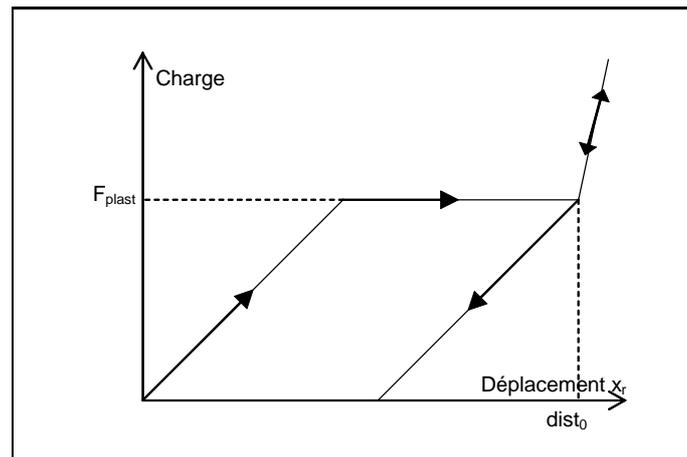


FIG. 3.12 – *Modèle élastoplastique du comportement du contact frontal*

analyse des vidéo des essais de test-crash des véhicules à deux roues qui ont été mis à notre disposition par TRL, DEKRA et l'INRETS. Le scénario d'une collision du type modélisé dans ce travail peut être décrit comme suit : la collision commence par une phase de compression élastique suivie d'une phase de déformation plastique de la fourche. La phase de déformation de la fourche commence dès l'instant du contact entre l'obstacle mobile et la roue avant. Elle se termine à l'instant où la roue avant touche le bloc moteur ($x_r = dist_0$). A cet instant, la roue avant entame une phase de déformation élastique (compression et restitution). A la fin de cette dernière phase, une phase de restitution élastique de la fourche sera entamée.

3.5.1 Inventaire des multiplicateurs de Lagrange

Le système formé, par le cyclomoteur et le cyclomotoriste, qui entre en collision avec un obstacle mobile présente des contacts unilatéraux. Afin de résoudre les équations du mouvement et trouver la chronologie selon laquelle se passe la collision on adoptera un algorithme qui permet l'aiguillage entre les différentes configurations possibles du système. Cet aiguillage se fait selon les valeurs des multiplicateurs de Lagrange qui servent dans ce cas comme indicateur d'état des contacts unilatéraux correspondants et selon l'effort au niveau du contact frontal entre la roue avant et l'obstacle mobile. Les différents multiplicateurs utilisés dans le modèle sont les suivants :

- λ_1 : multiplicateur de Lagrange qui représente l'action de la chaussée sur la roue avant,
- λ_2 : multiplicateur de Lagrange qui représente l'action de la chaussée sur la roue arrière,

- λ_z : multiplicateur de Lagrange qui représente la composante normale de l'action de la selle du cyclomoteur sur le cyclomotoriste,
- λ_x : multiplicateur de Lagrange qui représente la composante tangentielle de l'action de la selle du cyclomoteur sur le cyclomotoriste,

3.5.2 Présentation des différentes configurations possibles

Les différentes configurations que peut présenter le système durant la collision sont résumées ci-dessous. Il n'y a pas nécessairement d'enchaînement temporel entre ces configurations :

Configuration 1

- Le conducteur ne glisse pas par rapport à la selle : $|\lambda_x| < \mu |\lambda_z|$.
- Les deux roues sont en contact avec la chaussée : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$,
- Le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche.

Configuration 2

- Le conducteur glisse par rapport à la selle : $|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$.
- Les deux roues sont en contact avec la chaussée : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
- Le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche

Configuration 3

- Le conducteur glisse par rapport à la selle : $|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$.
- Les deux roues sont en contact avec la chaussée : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
- Le contact frontal présente une déformation élastique de la roue avant

Configuration 4

- Le conducteur glisse par rapport à la selle : $|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$.
- Les deux roues sont en contact avec la chaussée : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
- Le contact frontal présente une déformation plastique de la fourche

Configuration 5

- Le conducteur ne glisse pas par rapport à la selle : $|\lambda_x| < \mu |\lambda_z|$.
- La roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$.
- Le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche.

Configuration 6

- Le conducteur glisse par rapport à la selle : $|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$.
- La roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$.
- Le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche.

Configuration 7

- Le conducteur glisse par rapport à la selle: $|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$.
- La roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$.
- Le contact frontal présente une déformation plastique de la fourche.

Configuration 8

- Le conducteur glisse par rapport à la selle: $|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$.
- La roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$.
- Le contact frontal présente une déformation élastique de la roue avant.

Les différentes configurations présentées précédemment sont résumées dans la figure(3.13). On y distingue deux tests d'aiguillage. Le premier test se fait selon l'état du contact de la selle avec le cyclomotoriste. Comme il s'agit d'un contact avec frottement, deux cas sont possibles si ce contact est actif ($\lambda_z > 0$): collage ($|\lambda_x| < \mu |\lambda_z|$) ou glissement ($|\lambda_x| = \mu |\lambda_z|$). Le deuxième test se fait selon l'état du contact de la roue arrière avec la chaussée. Pour ce contact deux cas sont possibles: le contact est actif ($\lambda_2 > 0$) ou le contact est passif ($\lambda_2 = 0$). D'autres tests d'aiguillage sont imposés par la loi de comportement dynamique qui caractérise le contact frontal. Les trois phases suivantes peuvent être rencontrées :

- Déformation élastique de la fourche,
- Déformation plastique de la fourche,
- Déformation élastique de la roue avant.

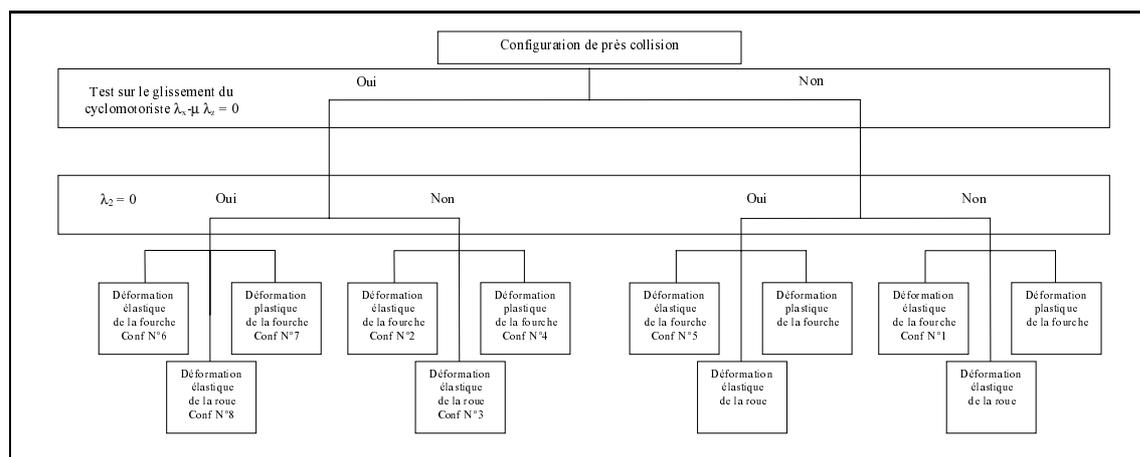


FIG. 3.13 – Résumé des différentes configurations possibles durant la collision

Au niveau de la figure (3.13) certaines configurations qui n'apparaissent pas durant la collision n'ont pas été numérotées. La mise en équation de ces différentes configurations est présentée en annexe.

3.6 Présentation de la modélisation numérique du système sous ADAMS

Dans le but de valider l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc au cas d'un cyclomoteur qui entre en collision frontale avec un obstacle mobile une modélisation est faite sur un logiciel de simulation des systèmes multicorps (ADAMS). Cette modélisation reproduit la même scène de collision que celle développée précédemment mais sans prendre en compte des hypothèses simplificatrices introduites par la nouvelle formulation de la dynamique du choc. Le système multicorps implanté sous ADAMS est formé par 5 solides liés entre eux par des liaisons mécaniques. Les différents corps rigides qui constituent le système sont les suivants :

- L'obstacle mobile,
- la roue avant,
- la fourche,
- le cadre y compris la roue arrière et
- le cyclomotoriste

Cette modélisation est donnée par la figure (3.14).

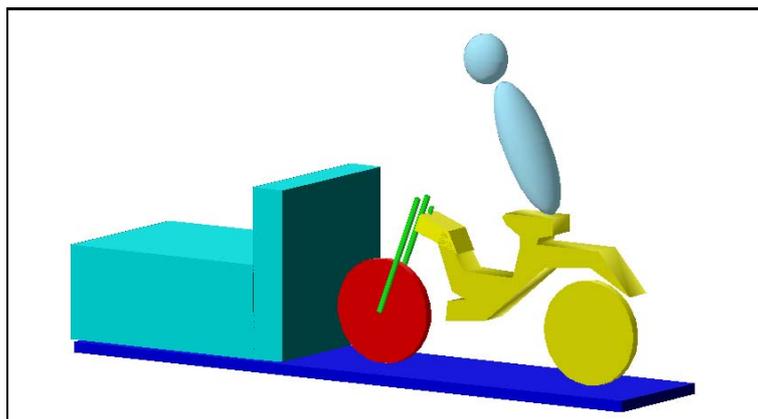


FIG. 3.14 – *Modélisation de la collision entre un obstacle mobile et un cyclomoteur implantée sous ADAMS*

La liaison entre l'obstacle mobile et le bâti est du type prismatique dont le mouvement se trouve porté par l'axe (G_0, \mathbf{x}) . G_0 est le centre de masse de l'obstacle mobile. Les liaisons entre la roue avant et la fourche, d'une part, et, entre la fourche et le cadre du cyclomoteur d'autre part, sont du type rotoïde. La liaison entre la roue avant et la chaussée ainsi que celle de la roue arrière et la chaussée sont du type linéique. La liaison entre le cyclomotoriste et la selle et du type linéaire annulaire. Pour cette liaison, les rotations selon les axes passant par le point de contact C entre le cyclomotoriste et la selle et portés par les vecteurs \mathbf{x} (direction longitudinale) et \mathbf{z} (direction verticale) sont bloquées. Pour les différents contacts unilatéraux l'utilisation de ces différentes liaisons permet, sous ADAMS, de déterminer l'évolution des multiplicateurs de Lagrange qui représentent les inconnus dynamiques de ces liaisons. La connaissance des ces

inconnues dynamiques, d'une part, et la possibilité d'activer ou de désactiver des liaisons durant la simulation sous ADAMS d'autre part, permettent d'étudier l'évolution des états des différents contacts unilatéraux et par la suite, d'étudier l'évolution de la dynamique du système.

Le modèle de contact frontal est celui représenté par la figure (3.12). Ce modèle est programmé au niveau de l'expression de la force qui s'exerce entre l'obstacle mobile et la roue avant.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la démarche suivie pour établir les équations du mouvement du système cas d'une collision entre un cyclomoteur et un obstacle mobile. Nous avons mis en lumière les difficultés de modélisation des chocs des solides rigides. Le traitement des collisions avec contacts unilatéraux multiples (plusieurs points de contact au moment du choc) est également délicat : sur un exemple nous avons vu que le coefficient de restitution seul n'est pas adapté à la description des chocs avec contacts unilatéraux multiples. Pour y remédier, une nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc a été présentée. Cette formulation suppose que durant la collision la configuration reste inchangée et qu'il y a des petites variations au niveau des coordonnées généralisées du système. Ces variations causent la naissance des efforts importants de collision. Cette formulation est présentée d'une façon généralisée.

Dans le but de valider cette nouvelle démarche, des simulations numériques d'un système mécanique simple ont été présentées. Ce système est formé par un double pendule entrant en collision avec un plan horizontal. Le comportement dynamique au niveau du point de contact est du type viscoélastique. Le premier type des simulations est fait en utilisant la boîte à outils Simulink de Matlab. Le modèle de contact implanté permet de modéliser l'effort de contact par une fonction des différents paramètres du système. Le second modèle, qui présente l'application de la nouvelle formulation simplifiée au double pendule donne naissance à un système d'équations différentielles de second ordre à coefficients constants. Ce système est résolu en utilisant la même boîte à outils numérique.

Les différentes simulations faites ainsi que les résultats trouvés nous permettent de valider, d'une part, l'hypothèse qui consiste à négliger les termes $\Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ devant les termes $a_{ij} \ddot{q}_j$ et d'autre part, l'approche simplificatrice pour la mise en équations des systèmes présentant des contacts unilatéraux multiples tout en *prenant l'hypothèse d'une configuration figée durant la collision*.

Cette nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc a été appliquée à notre système mécanique en trois dimensions : cyclomoteur, cyclomotoriste et obstacle mobile. Comme ce système présente plusieurs contacts unilatéraux, les configurations qui peuvent être rencontrées durant la collision ont été étudiées. Pour chaque configuration les équations des liaisons ainsi que celles de mouvement ont été établies.

La validation numérique de l'application de la nouvelle formulation de la dynamique du choc au système étudié a nécessité une modélisation équivalente sous un logiciel de simulation dynamique des systèmes multicorps (ADAMS). Cette modélisation reproduit la même scène de

collision mais sans tenir compte des hypothèses simplificatrices. Elle servira pour une première confrontation au niveau du cinquième chapitre.

Afin de pouvoir préparer les simulations numérique du modèle nous avons réalisé des essais ayant pour but la détermination des paramètres géométriques et inertiels du cyclomoteur ainsi que l'identification des paramètres de la loi de comportement dynamique du contact frontal. Ces essais seront présentés dans le chapitre qui suit.

Chapitre 4

Expérimentation

4.1 Introduction

Afin de pouvoir simuler numériquement le comportement dynamique du système formé par le cyclomoteur et le cyclomotoriste qui entre en collision avec un obstacle mobile, des données numériques sont indispensables. Ces données sont celles qui caractérisent les éléments constitutifs du modèle (données inertielles, géométriques...) et la force de collision frontale qui prend naissance durant la collision entre la roue avant et l'obstacle mobile. On se propose de présenter dans ce chapitre la démarche expérimentale suivie pour déterminer ces différents éléments.

D'autre part, dans l'objectif de valider l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc au cas de la collision étudiée : un cyclomoteur et un cyclomotoriste qui entrent en collision frontale avec un obstacle mobile, des essais de test-crash qui reproduisent la même scène seront présentés dans ce chapitre.

Les essais expérimentaux qui seront présentés dans ce chapitre sont les suivants :

- La détermination des éléments d'inertie des trois solides formant le cyclomoteur : la roue avant, la fourche y compris le guidon et le cadre y compris la roue arrière et la selle,
- Identification des paramètres du modèle rhéologique qui caractérisent le comportement dynamique du contact frontal entre le cyclomoteur et l'obstacle en mouvement,
- Réalisation des essais de test-crash caractérisant le comportement cinématique de l'ensemble cyclomoteur – cyclomotoriste lors de la collision.

4.2 Détermination des éléments d'inertie du système

4.2.1 Démarches expérimentales

Détermination des centres de masse

La méthode adoptée pour la détermination des éléments d'inertie des différents éléments du modèle est celle présentée dans le cours "dynamique du véhicule" (J.P. Brossard L. Maiffredy session mars 2003)[Bros03]. Le principe de la méthode est le suivant :

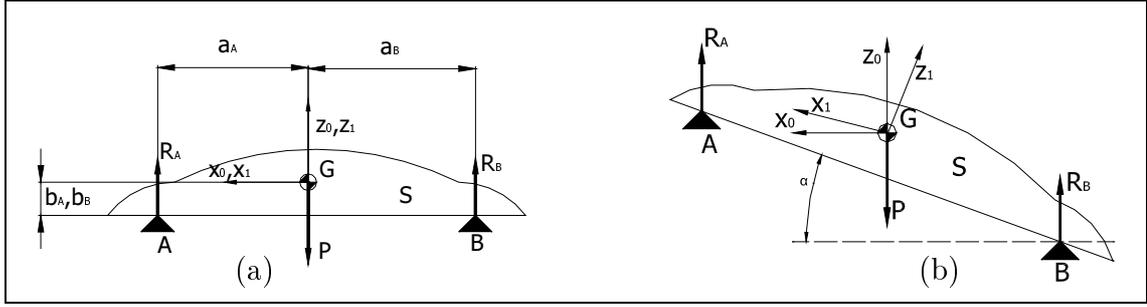


FIG. 4.1 – Les deux configurations utilisées pour la détermination du centre de masse

Soit un solide rigide S de masse M_S ayant la forme donnée par la figure (4.1(a)). Soit $R_0 \left(O \quad \mathbf{X}_0 \quad \mathbf{Y}_0 \quad \mathbf{Z}_0 \right)$ un référentiel absolu et $R_1 \left(O \quad \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Z}_1 \right)$ un référentiel lié au solide S . Le solide S possède le plan $(G, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ comme plan de symétrie. Dans la configuration de la figure (4.1(a)) le repère R_1 coïncide avec le repère R_0 . Les points A et B sont situés sur le même plan horizontal. La mise en place des deux balances en A et B permet de déterminer la valeur de la réaction en chacun de ces points. L'application du principe fondamental de la dynamique au corps S permet d'écrire la relation torsorielle suivante :

$$\{\tau_{R_A}\}_G + \{\tau_{R_B}\}_G + \{\tau_P\}_G = \{\mathbf{0}\}$$

avec $\{\tau\}_G = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \eta \end{Bmatrix}_G$ est le torseur des actions mécaniques exprimé au point G . Par projection, cette relation peut se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + \mathbf{P} = \mathbf{0} \\ \eta_{R_A/G} + \eta_{R_B/G} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Sachant que

$$\mathbf{GA} = \begin{bmatrix} a_A \\ 0 \\ -b_A \end{bmatrix}_{R_1} ; \quad \mathbf{GB} = \begin{bmatrix} -a_B \\ 0 \\ -b_B \end{bmatrix}_{R_1} \quad \text{et} \quad a_A + a_B = L,$$

nous trouvons :

$$\begin{cases} R_A + R_B = M_S g \\ -a_A R_A + a_B R_B = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Les grandeurs R_A , R_B , M_S , g et L étant connues, la position longitudinale du centre de masse G peut être déduite. La position verticale du centre de masse est obtenue de la même manière mais en inclinant le solide S en tangage d'un angle α . La nouvelle configuration obtenue est donnée par la figure (4.1(b)). En écrivant les théorèmes généraux pour cette configuration, le système d'équations se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} R'_A + R'_B = M_S g \\ -R'_A (a_A \cos(\alpha) + b_A \sin(\alpha)) - R'_B (-a_B \cos(\alpha) + b_B \sin(\alpha)) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Comme $b_A = b_B = b$ et les grandeurs R'_A, R'_B, a_A, a_B, L et α sont connues, nous pouvons déduire b_A . Enfin, la prise en compte de deux systèmes d'équations (4.1) et (4.2) permet de

déterminer les trois grandeurs qui positionnent le centre de masse du solide S relativement aux deux points: A et B . Ainsi, d'après (4.1) on trouve:

$$a_A = \frac{L R'_B}{R'_A + R'_B} \text{ et } a_B = \frac{L R'_A}{R'_A + R'_B}$$

Et d'après (4.2) on trouve:

$$b = \frac{R'_B a_B \cos \alpha - R'_A a_A \cos \alpha}{M_s g \sin \alpha}$$

Détermination des éléments d'inertie

Soit un solide rigide S et soit P un point de ce solide de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ exprimées dans un référentiel absolu R_0 . À ce solide est associée une matrice, dite, d'inertie présentant la forme suivante:

$$[\mathbf{I}_O]_{R_0} = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{XY} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{XZ} & I_{YZ} & I_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Les moments d'inertie seront mesurés par la variation de la période d'oscillation dans différentes configurations. Cette approche est utilisée dans différentes références bibliographiques [Bros94.1, Ring01, Bogd02, Bros03].

Détermination des moments d'inertie Pour déterminer un moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, un montage pendulaire simple peut être utilisé. Le principe de ce montage peut être illustré par la figure (4.2). On désigne par :

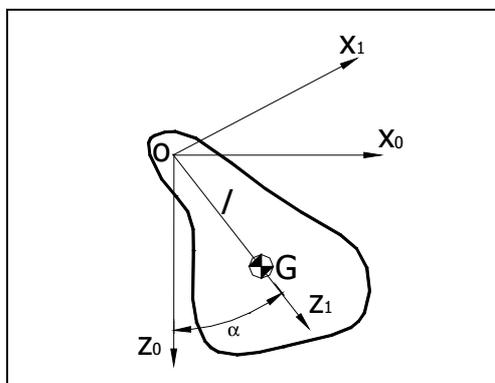


FIG. 4.2 – Pendule simple

- I le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (O, \mathbf{Y}_0) ,
- I^* le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G, \mathbf{Y}_0) .
- m la masse du solide et $\mathbf{OG} = l \mathbf{Z}_1$.

En supposant qu'il s'agit de petits mouvements d'oscillation, la dynamique de ce pendule est donnée par l'équation différentielle suivante:

$$I \ddot{\theta} + m g l \theta = 0$$

La solution de cette équation se présente sous la forme d'un mouvement périodique de période T dont l'expression est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

ainsi l'expression du moment d'inertie est donnée par :

$$I = \frac{mgl}{4\pi^2}T^2$$

La détermination de I^* se fait en utilisant la formule de Huyghens. D'où :

$$\begin{aligned} I^* &= I - ml^2 \\ &= mgl \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{l}{g} \right) \end{aligned}$$

Dans la pratique cette méthode présente plusieurs difficultés pour sa mise en oeuvre. Ces difficultés sont dues essentiellement, d'une part, au problème de frottement qui se manifeste au niveau des deux paliers de guidage de la plate-forme. D'autre part, il faut que le moment d'inertie à déterminer ne soit pas négligeable devant le terme de changement d'axe introduit par la formule de Huyghens.

Pour appliquer cette démarche une plate-forme pendulaire sera utilisée et sur laquelle sera fixé le corps dont on veut déterminer le moment d'inertie. Une schématisation de l'expérience est donnée par la figure (4.3).

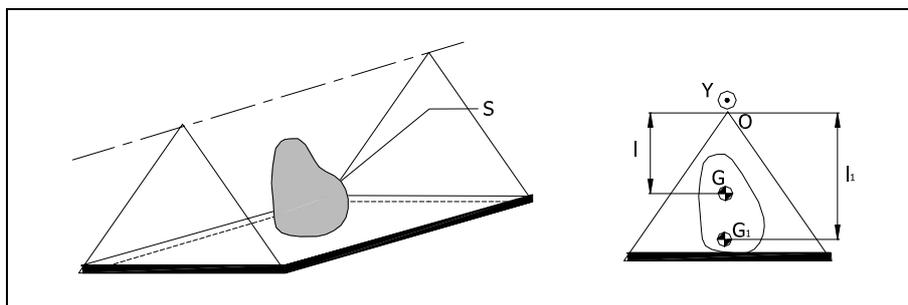


FIG. 4.3 – Plate-forme pendulaire [Bros94.1]

1. En premier lieu on fait osciller la plate-forme à vide : Désignons par I_1 son moment d'inertie par rapport à son axe d'oscillation (O, \mathbf{Y}) , par m_1 sa masse et par l_1 la distance qui sépare son centre d'inertie G_1 par rapport à l'axe (O, \mathbf{Y}) . La période d'oscillation est donnée par :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{m_1 g l_1}}$$

2. En second lieu, la plate-forme sera chargée par le solide à étudier et on la fait osciller autour de son axe (O, \mathbf{Y}) : Désignons par L la distance du centre d'inertie de l'ensemble (plate-forme et solide à étudier) par rapport à l'axe de rotation (O, \mathbf{Y}) . La période d'oscillation de l'ensemble est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1 + I}{(m_1 + m) g L}}$$

Mais d'après la théorie du centre de masse on a :

$$(m_1 + m) L = m_1 l_1 + ml$$

d'où

$$L = \frac{m_1 l_1 + ml}{m_1 + m} \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 + I}{(m_1 l_1 + ml) g}}$$

A partir des valeurs de 2 périodes on peut écrire :

$$I_1 = \frac{m_1 g l_1}{4\pi^2} T_1^2$$

$$I = \frac{g(m_1 l_1 + ml)}{4\pi^2} T^2 - I_1$$

Par la suite

$$I = \frac{m_1 g l_1}{4\pi^2} (T^2 - T_1^2) + \frac{mgl}{4\pi^2} T^2$$

En utilisant la formule de Huyghens on trouve :

$$I^* = I - ml^2 = \frac{m_1 g l_1}{4\pi^2} (T^2 - T_1^2) + \frac{mgl}{4\pi^2} \left(T^2 - 4\pi^2 \frac{l}{g} \right)$$

Détermination des produits d'inertie Les moments d'inertie selon les axes principaux I_{XX}, I_{YY} et I_{ZZ} sont déterminés en utilisant les méthodes présentées précédemment. Il reste à déterminer les produits d'inertie. Par ailleurs, il existe toujours un référentiel $R_1^* = [G, \mathbf{X}_1^*, \mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Z}_1^*]$ dit repère principal d'inertie où le tenseur d'inertie s'écrit sous la forme suivante :

$$[\mathbf{I}_G]_{R_1^*} = \begin{bmatrix} I_{XX}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ}^* \end{bmatrix}$$

Pour déterminer le système d'axes principaux par rapport à un système d'axes quelconque il faut trois paramètres. Mais puisque le système considéré admet le plan $(G, \mathbf{X}, \mathbf{Z})$ comme plan de symétrie il reste à déterminer un seul produit d'inertie I_{XZ} . Il est important de savoir comment sont situés les axes principaux par rapport au référentiel $R_1 = [G, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1]$. La relation entre les matrices qui représentent le tenseur d'inertie dans les deux bases R_1^* et R_1 est :

$$[\mathbf{I}_G]_{R_1^*} = [\mathbf{P}]^{-1} [\mathbf{I}_G]_{R_1} [\mathbf{P}]$$

où $[\mathbf{P}]$ est la matrice de changement de base. Elle est définie par :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{R_1} = [\mathbf{P}] \begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \\ z_1^* \end{bmatrix}_{R_1^*} \quad [\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

La démarche expérimentale pour la détermination du produit d'inertie consiste à incliner le système d'un angle α dans le plan $(G, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Par oscillation de la configuration obtenue, un nouveau moment d'inertie $(I_{ZZ})_\alpha$ par rapport au nouvel axe d'oscillation du système (G, \mathbf{Z}_α) sera obtenu. D'autre part, cette valeur peut être trouvée par calcul en utilisant les grandeurs

$(I_{XX})_1, (I_{YY})_1, (I_{ZZ})_1$ déterminées par des essais pendulaires. Il s'agit d'utiliser l'expression suivante :

$$(I_{ZZ})_\alpha = \mathbf{Z}_\alpha [\mathbf{I}_G]_{R_1} \mathbf{Z}_\alpha$$

d'où :

$$\begin{aligned} (I_{ZZ})_\alpha &= \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & I_{XZ} \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ I_{XZ} & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}_1 \\ &= (I_{XX})_1 \sin^2(\alpha) + (I_{ZZ})_1 \cos^2(\alpha) - 2(I_{XZ})_1 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Comme $(I_{ZZ})_\alpha, (I_{XX})_1, (I_{ZZ})_1$ et α sont connus, la valeur de $(I_{XZ})_1$ peut être calculée facilement. D'où :

$$(I_{XZ})_1 = \frac{(I_{ZZ})_\alpha - (I_{XX})_1 \sin^2(\alpha) - (I_{ZZ})_1 \cos^2(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Nous mettons en oeuvre cette démarche sur le cyclomoteur que l'on décomposera en trois solides rigides : roue avant, fourche et cadre.

4.2.2 Étude de la roue avant

Caractéristiques

La description de la roue avant est donnée par la figure (4.4). Par symétrie matérielle le

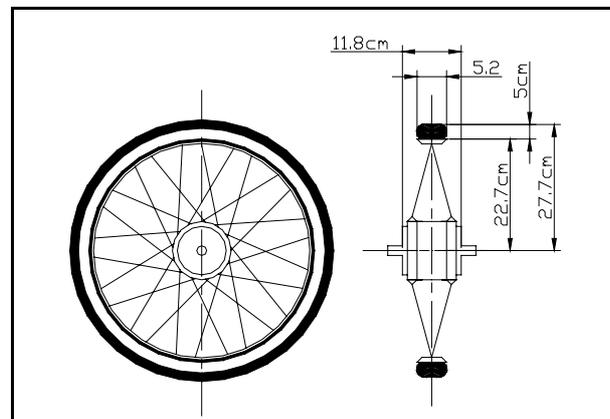


FIG. 4.4 – La roue avant

centre de masse de la roue se trouve sur son axe. La masse de la roue est mesurée à l'aide d'une balance électronique CPS : CC-100 présentant une erreur de 10g pour une température d'utilisation de 25°C. D'où :

$$m_r = 3.9Kg \quad \text{et} \quad \Delta m_r = \frac{0.01}{3.9} = 0.26\%$$

Détermination du tenseur d'inertie

Mesure de I_{XX}^* Pour déterminer le moment d'inertie de la roue on mesure la période d'oscillation avec des faibles angles d'un pendule oscillant. On a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{XX}}{g m l}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_r + I_0}{g (m_0 l_0 + m_r l_r)}}$$

avec

- T est la période d'oscillation de tout le système.
- I_{XX} moment d'inertie de l'ensemble (pendule + roue) par rapport à l'axe d'oscillation du pendule.
- I_r moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe d'oscillation du pendule.
- I_0 moment d'inertie du pendule par rapport à son axe d'oscillation.
- g constante de gravité
- m_r et m_0 sont, respectivement, les masses de la roue et du pendule.
- l_0 distance entre le centre de masse du pendule et son axe d'oscillation.
- l_r distance entre le centre de masse de la roue et l'axe d'oscillation du pendule.

La distance l_0 étant nulle par la suite on a :

$$I_r = \frac{T^2}{4\pi^2} g (m_r l_r) - I_0$$

Enfin le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe passant par son centre de masse et parallèle à l'axe d'oscillation du pendule est :

$$I_r^* = \frac{T^2}{4\pi^2} g (m_r l_r) - I_0 - m_r l_r^2 \quad (4.3)$$

Mesures et applications numériques Le principe de la mesure de I_{XX} est donné par la figure (4.5(a)).

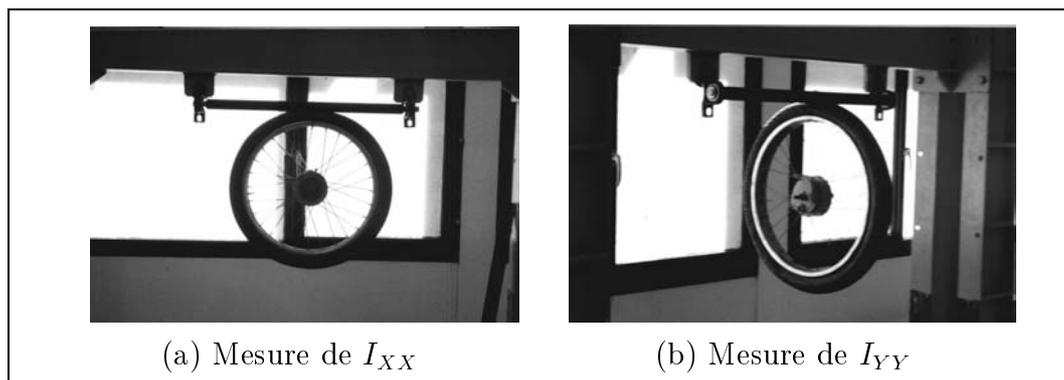


FIG. 4.5 – Les deux configurations utilisées pour la détermination des éléments d'inertie de la roue avant

Les résultats trouvés sont résumés par le tableau suivant :

Nb de mesures	\bar{I}_{XX}^* (Kg m ²)	$\sigma_{I_{XX}}$
20	0.09	$7.8 \cdot 10^{-3}$

Mesure de I_{YY}^* La même démarche présentée précédemment est appliquée mais le mouvement d'oscillation se fait selon un axe parallèle à l'axe passant par le centre de la roue comme le montre la figure (4.5(b)).

Les résultats de cet essai sont résumés par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{YY}^*(Kg\ m^2)$	$\sigma_{I_{YY}}$
20	0.165	$13\ 10^{-3}$

4.2.3 Étude de la fourche

Caractéristiques

Du point de vue de la forme géométrique, la fourche est complexe mais elle présente un plan de symétrie: $(G, \mathbf{X}, \mathbf{Z})$ où G est son centre de masse. Une description géométrique de la fourche est donnée par la figure (4.6). La masse de la fourche est de $7\ Kg$ avec une précision de 6.3%.

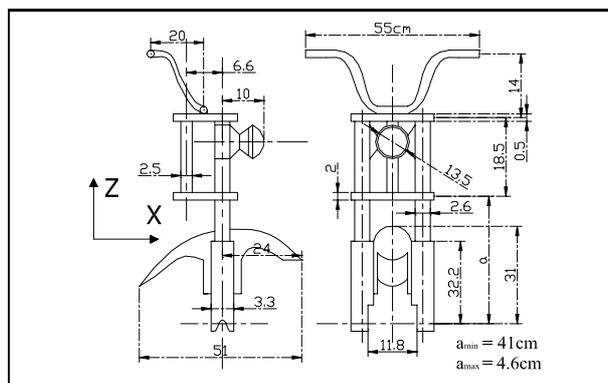


FIG. 4.6 – Description de la fourche

La détermination du centre de masse est faite par la méthode de double pesée qui a été présentée précédemment. Les configurations de deux pesées sont données par la figure (4.7).

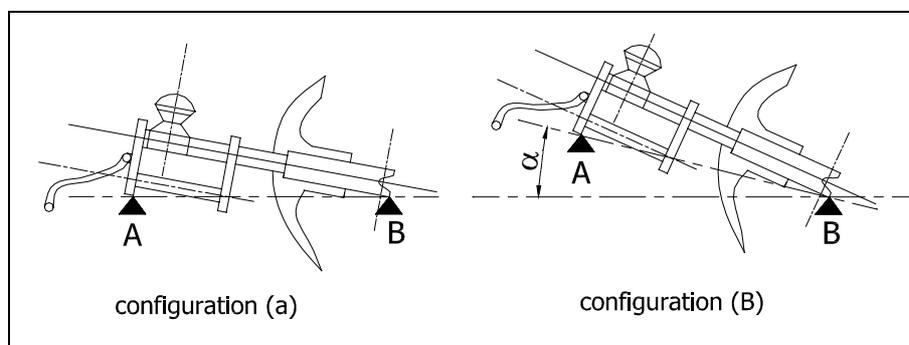


FIG. 4.7 – Détermination du centre de masse de la fourche

La résolution des systèmes d'équations (4.1) et (4.2) donne les grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} a_A = 0.2202 \text{ m} \\ a_B = 0.4347 \text{ m} \\ b = -0.052 \text{ m} \end{cases}$$

Détermination du tenseur d'inertie

Détermination de I_{XX}^* Pour mesurer cette grandeur, le montage de la figure (4.8) est utilisé. Deux choix pour la distance l_r qui sépare le centre de masse de la fourche à l'axe d'oscillation

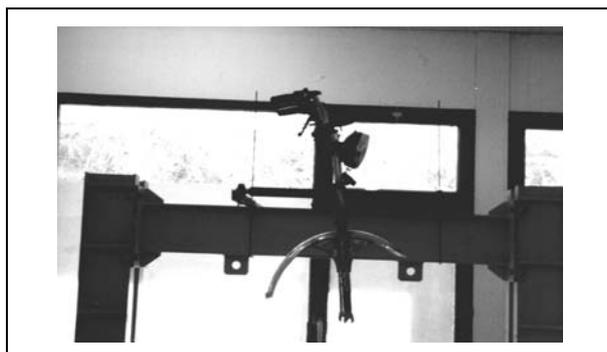


FIG. 4.8 – Configuration pour la détermination de I_{XX}^*

du pendule ont été retenus pour cette mesure. En appliquant la même démarche que celle utilisée pour la détermination des caractéristiques inertielles de la roue avant, les différentes mesures peuvent être résumées par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{XX}^* (Kg \ m^2)$	$\sigma_{I_{XX}}$
20	0.438	$18 \cdot 10^{-3}$

Détermination de I_{YY}^* Pour effectuer cette mesure le montage de la figure (4.9) est utilisé. Pour cette configuration deux séries de mesures ont été faites en changeant la distance l_r . Le

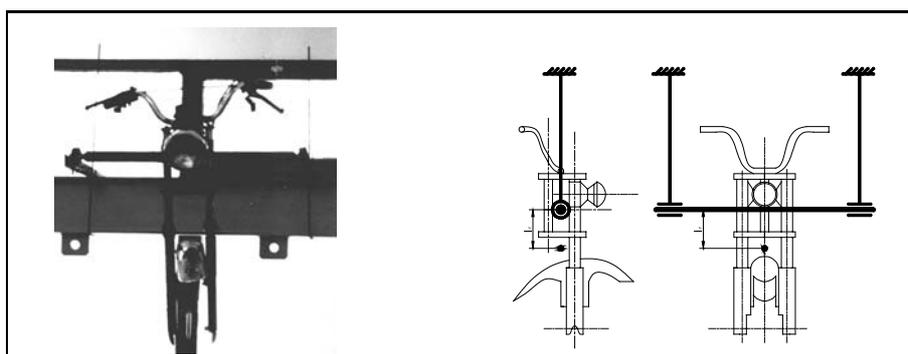


FIG. 4.9 – Configuration pour la détermination de I_{YY}^*

tableau suivant résume les résultats numériques trouvés :

Nb de mesures	$\bar{I}_{YY}^* (Kg \ m^2)$	$\sigma_{I_{YY}}$
20	0.414	$12 \cdot 10^{-3}$

Détermination de I_{ZZ}^* Pour réaliser cette opération la fourche a été montée dans la configuration de la figure (4.10). Pour assurer le maintien de la fourche dans une telle position, une

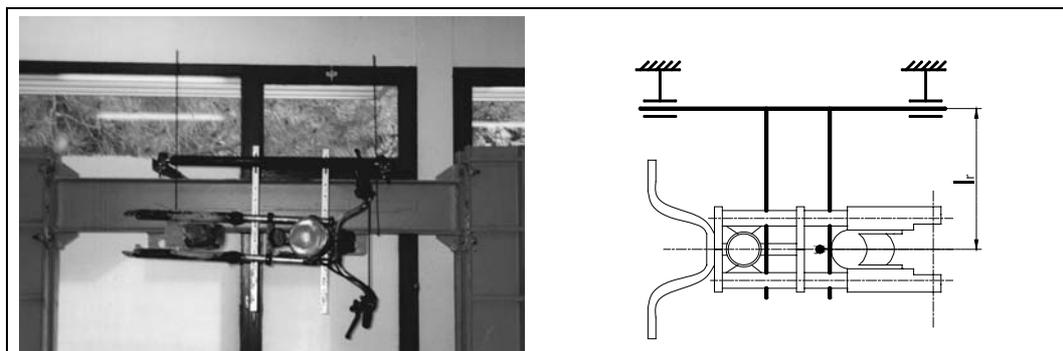


FIG. 4.10 – Configuration pour la détermination de I_{ZZ}^*

modification géométrique est faite au niveau de la conception du pendule. En effet, deux tiges de faible inertie ont été ajoutées dont l'objectif est de permettre le réglage de la distance l_r , qui sépare l'axe de la fourche à celui du pendule (figure(4.10)). Les deux tiges sont en aluminium. La longueur de chacune de deux tiges est de ($a = 0.54 m$) et la masse est de $m_t = 0.1 Kg$. Les deux tiges ont le profil d'une cornière d'épaisseur ($c = 1 mm$) et de largeur ($b = 20 mm$). La distance entre le centre de masse de chaque tige et l'axe du pendule est de $d_t = 0.215 m$. Le moment d'inertie d'une de deux tiges par rapport à l'axe du pendule est donné par la formule suivante:

$$I_T = \frac{1}{12} m_t (2 a^2 + c^2 + b^2) + \frac{1}{2} m_t d_t^2 = 7.17 \cdot 10^{-3}$$

Différentes configurations ont été montées afin de mesurer le moment I_{ZZ}^* . Les résultats des mesures peuvent être résumés par le tableau suivant:

Nb de mesures	$\bar{I}_{ZZ}^* (Kg m^2)$	$\sigma_{I_{ZZ}^*}$
40	0.089	$14 \cdot 10^{-3}$

Détermination du produit d'inertie I_{XZ}^* Pour déterminer le produit d'inertie par rapport aux axes \mathbf{X} et \mathbf{Z} le montage de la figure (4.11) est utilisé. La fourche a été inclinée d'un

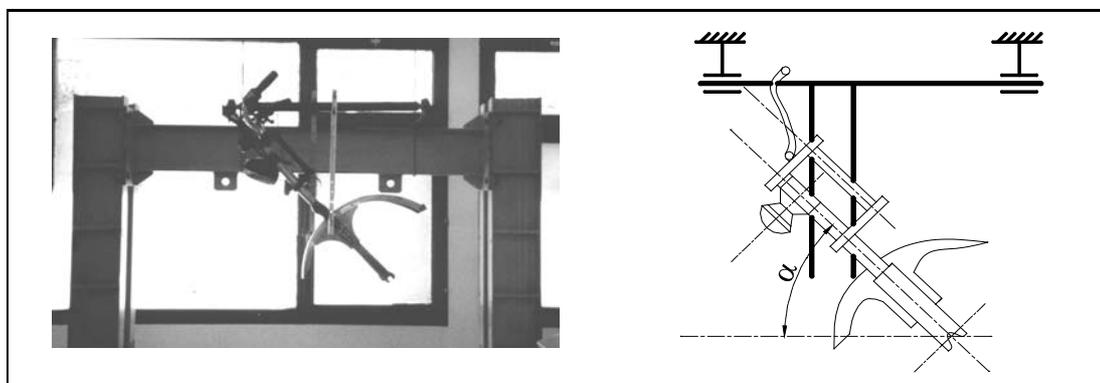


FIG. 4.11 – Configuration pour la détermination de I_{XZ}^*

angle α autour de la direction portée par le vecteur \mathbf{Y} . On désigne par $R_1(G, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1)$ le repère lié à la fourche. Le moment d'inertie mesuré par le pendule pour une telle configuration est donné par l'expression suivante :

$$I_{XX_1}^* = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{XX}^* & 0 & I_{XZ}^* \\ 0 & I_{YY}^* & 0 \\ I_{XZ}^* & 0 & I_{ZZ}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Le développement du calcul nous permet d'avoir l'expression suivante de I_{XZ}^* :

$$I_{XZ}^* = \frac{I_{XX_1}^* - I_{XX}^* \sin^2(\alpha) - I_{ZZ}^* \cos^2(\alpha)}{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}$$

La distance entre le centre de masse et l'axe de rotation du pendule est déduite des mesures des distances qui séparent les points A et B du même axe. Ainsi les résultats des essais pendulaires sont résumés par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{XZ}^* (Kg m^2)$	$\sigma_{I_{XZ}}$
10	-0.226	$8 \cdot 10^{-3}$

4.2.4 Étude du cadre

Caractéristiques

Le cadre représente l'élément le plus influant sur le comportement dynamique du cyclo-moteur. Il présente le plan $(G, \mathbf{X}, \mathbf{Z})$ comme plan de symétrie. Une description du cadre peut être donnée par la figure (4.12). La détermination du centre de masse est faite en utilisant la

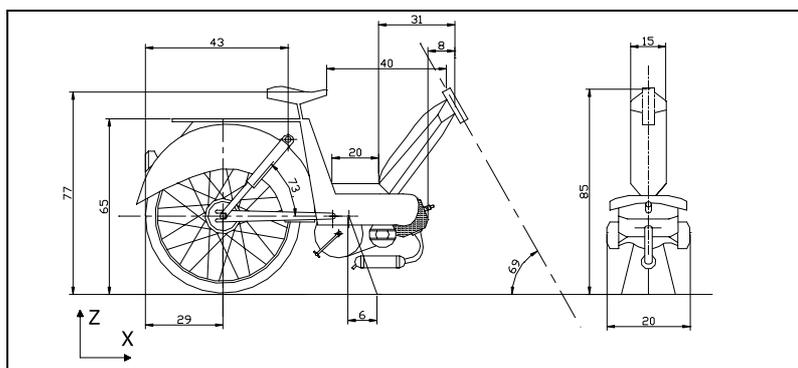


FIG. 4.12 – Description du cadre

méthode de double pesée. Les deux configurations des pesées sont données par la figure (4.13). La résolution des systèmes d'équations (4.1) et (4.2) donne les grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} a_A = 0.147 \text{ m} \\ a_B = 0.3529 \text{ m} \\ b = 0.3195 \text{ m} \end{cases}$$

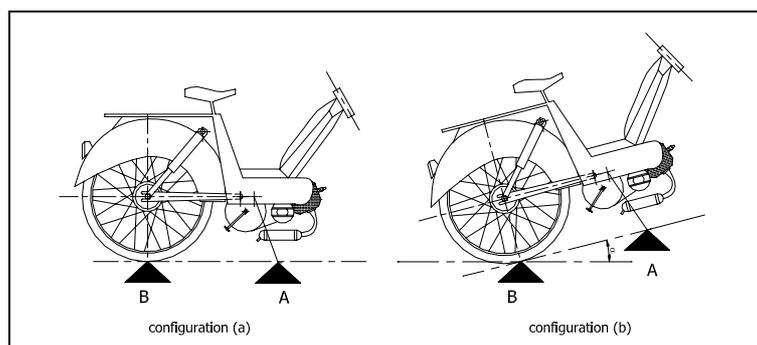


FIG. 4.13 – Détermination de la position du centre de masse du cadre

Détermination des éléments d'inertie

Détermination de I_{XX}^* Pour déterminer expérimentalement I_{XX}^* le montage de la figure (4.14) a été utilisé. Le cadre étant attaché par des fils métalliques, de masse et inertie négligeables, à l'axe d'oscillation du pendule.

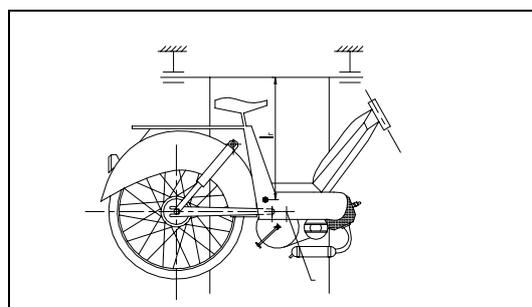


FIG. 4.14 – Configuration pour la détermination de I_{XX}^*

L'expression théorique du moment d'inertie I_{XX}^* du cadre est la suivante :

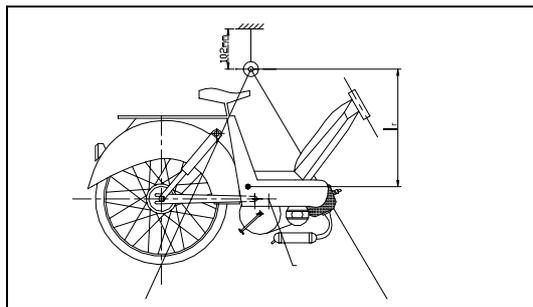
$$I_{XX}^* = \frac{g(m_f l_r) T^2}{4\pi^2} - I_0 - m_f l_r^2$$

En appliquant la même démarche que celle appliquée précédemment, Les résultats peuvent être résumés par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{XX}^* (Kg m^2)$	$\sigma_{I_{XX}}$
20	1.172	0.171

Détermination de I_{YY}^* Pour effectuer cette mesure le montage de la figure (4.15) a été utilisé. Vue la forme que présente le cadre on a utilisé deux tiges métalliques pour assurer un bon positionnement durant le mouvement d'oscillation. L'utilisation de ces deux tiges métalliques modifie le moment d'inertie à vide du pendule I_0 .

Moment d'inertie à vide I_0 Le système à vide est formé de l'axe du pendule et de deux cornières de 40 mm dont chacune présente une longueur de 1.3 m et une masse $m_c = 2.620 kg$. Les centres de masse de deux cornières sont situés à une distance $l_c = 0.588 m$. En faisant osciller

FIG. 4.15 – Configuration pour la détermination de I_{YY}^*

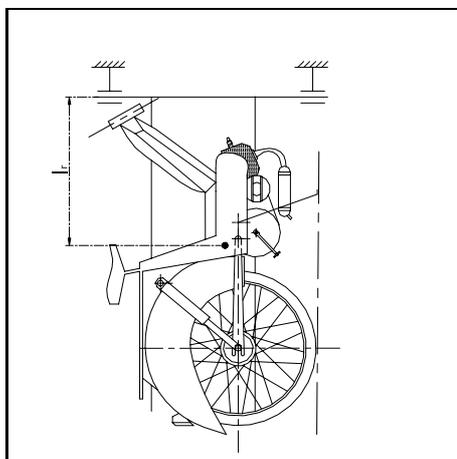
le pendule à vide, la période mesurée est de $T = 1.86 \text{ s}$. Le moment d'inertie à vide est calculé par le biais de l'expression suivante :

$$I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} g(2m_c l_c) = 2.6488 \text{ kg m}^2$$

Les mesures de \bar{I}_{YY}^* sont résumées par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{YY}^* (\text{kg m}^2)$	$\sigma_{I_{YY}}$
20	3.443	0.34

Détermination de I_{ZZ}^* La mesure de I_{ZZ}^* est faite en utilisant le montage de la figure (4.16). La démarche utilisée pour cette mesure est identique à la précédente. Les résultats de

FIG. 4.16 – Configuration pour la détermination de I_{ZZ}^*

ces essais peuvent être résumés par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{ZZ}^* (\text{kg m}^2)$	$\sigma_{I_{ZZ}}$
20	2.741	0.15

Détermination du produit d'inertie I_{XZ}^* Pour déterminer le produit d'inertie par rapport aux axes **X** et **Z** le montage de la figure(4.17) a été utilisé. En fait, le cadre se trouve incliné

autour de la direction portée par le vecteur \mathbf{Y} d'un angle α . En appliquant la même démarche que celle utilisée pour la détermination du produit d'inertie de la fourche on trouve :

$$I_{XZ}^* = -\frac{I_{XX_1}^* - I_{XX}^* \cos^2(\alpha) - I_{ZZ}^* \sin^2(\alpha)}{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}$$

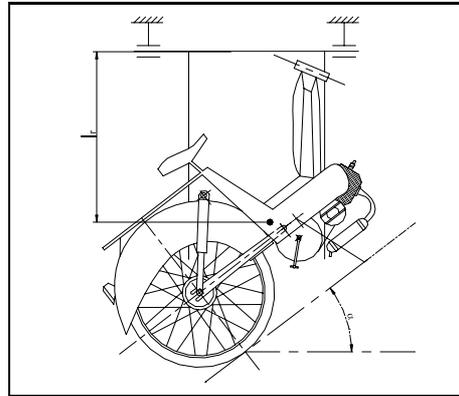


FIG. 4.17 – Configuration pour la détermination de I_{XZ}^*

La distance entre le centre de masse du cadre et l'axe d'oscillation du pendule est déduite à partir des mesures des distances qui séparent les points A et B utilisés pour la détermination du centre de masse, du même axe. Les essais faits pour la détermination de la valeur de I_{XZ}^* peuvent être résumés par le tableau suivant :

Nb de mesures	$\bar{I}_{XZ}^* (Kg m^2)$	$\sigma_{I_{XZ}}$
20	-0.49	0.178

4.3 Identification du modèle de contact frontal

La loi de comportement dynamique adoptée pour simuler la force de percussion au niveau du contact frontal est du type élastoplastique. Le choix de cette loi est présenté au paragraphe (3.5). Ce contact se présente durant la collision entre l'obstacle mobile et la roue avant. Durant l'évolution de la déformation frontale à ce contact on constate d'abord une phase de déformation élastique de la fourche. Cette phase commence dès le début de la collision et se termine lorsque la fourche entame une phase de déformation plastique. La phase de déformation plastique se termine quand la roue avant se trouve comprimée entre l'obstacle mobile et le bloc moteur. A cet instant une phase de déformation élastique de la roue avant sera entamée.

Afin de définir cette loi de comportement dynamique trois paramètres seront identifiés :

- la raideur équivalente de la fourche,
- la force de déformation plastique de la fourche et
- la raideur de la roue avant.

Afin d'identifier ces différents paramètres de la loi de comportement dynamique du contact frontal nous avons réalisé deux types d'essais qui seront présentés par la suite.

4.3.1 Essais de flexion de la fourche

L'objectif de ces essais est de déterminer la raideur équivalente de la fourche ainsi que la valeur de la force de déformation plastique. Ce sont des essais de flexion sur deux fourches d'un cyclomoteur. A cet effet, nous avons conçu le montage expérimental de la figure (4.18(a)). Sur la figure (4.18(c)) se trouve une schématisation de l'essai.

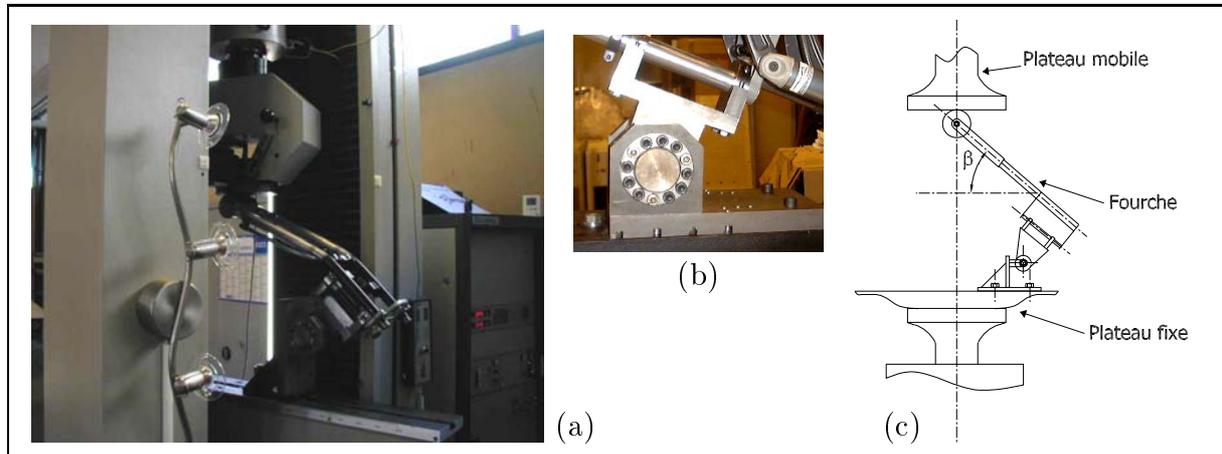


FIG. 4.18 – Montage et principe de l'essai de flexion d'une fourche

Il s'agit d'un essai de flexion simple d'une fourche montée à 45° sur une machine de compression hydraulique. Vu le type de la presse et par la suite l'espace de travail alloué ainsi que la longueur et la forme géométrique complexe de la fourche, l'utilisation d'un montage spécial a été inévitable pour effectuer ces essais de flexion. Le montage utilisé pour ces essais est un dispositif qui a été conçu à l'INSA de Lyon pour des essais de même type mais effectués sur des fourches de vélo tous terrains (V.T.T.). Ce montage est formé par deux parties liées entre elles par une frette de serrage comme le montre la figure(4.18(b)).

La presse hydraulique utilisée permet d'avoir, via une chaîne d'acquisition et un ordinateur, les valeurs du déplacement (déplacement du mors mobile de la presse) et de la charge appliquée au niveau du point inférieur de la fourche pour chaque instant durant l'évolution de l'essai. Afin de vérifier la reproductibilité de l'essai deux fourches identiques ont été utilisées. La mesure consiste à appliquer, pour chaque fourche, une phase de chargement et une phase de déchargement en atteignant à chaque fois la zone de déformation plastique.

Ces essais ont permis d'avoir deux courbes quasi identiques de chargement déchargement $F = f(d)$ où F est la charge appliquée par le plateau supérieur de la presse sur la fourche et d est le déplacement du plateau supérieur.

Les paramètres qui caractérisent le comportement dynamique de la fourche lorsqu'elle est montée sur un cyclomoteur sont obtenus par le biais d'une transformation géométrique. Ce calcul est fait en exploitant la représentation géométrique de la figure (4.19). En analysant cette construction géométrique, le déplacement du mors mobile de la presse peut être exprimé en fonction des différents paramètres comme suit :

$$d = 2l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

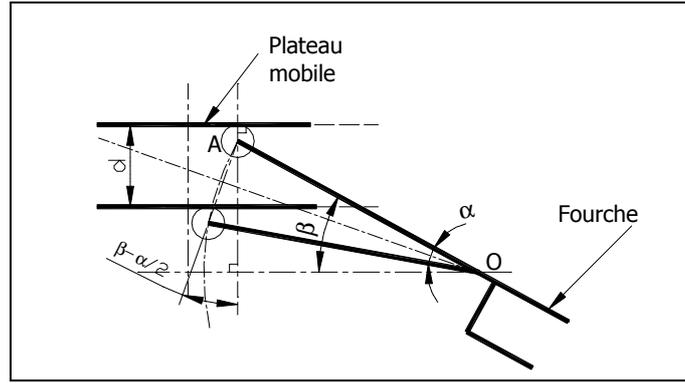


FIG. 4.19 – Construction géométrique illustrant les relations entre les différents angles

$$= l(\sin(\beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

avec :

- d : distance de déplacement du plateau supérieur de la presse,
- l : longueur en porte-à-faux de la fourche ($|\mathbf{OA}|$)
- β : angle qui caractérise la disposition initiale de la fourche sur la machine avant déformation (45°).
- α : angle de déformation de la fourche durant l'essai.

L'angle α peut être exprimé par l'expression suivante :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{d}{l} - \sin(\beta)\right) + \beta \quad (4.4)$$

Dans la configuration de l'essai, le moment de la force appliquée par la presse sur la fourche par rapport au centre de mouvement de déformation est donné par :

$$C = Fl \cos(\beta - \alpha) \quad (4.5)$$

avec

- F est la charge appliquée par le plateau supérieur sur la fourche.
- C est le moment de la force F par rapport au point centre de rotation O ,

Le fait de disposer de la loi d'évolution du couple C en fonction de l'angle α permet de déduire la loi d'évolution de la charge F en fonction de déplacement du plateau supérieur de la machine pour le cas où la fourche a été montée avec un angle égale à l'angle de chasse qu'on retrouve sur un cyclomoteur réel ($\beta = 21^\circ = \frac{\pi}{8.57} \text{rad}$). Ainsi, la charge équivalente est donnée par l'expression suivante :

$$F = \frac{C}{l \cos\left(\frac{\pi}{8.57} - \alpha\right)} \quad (4.6)$$

Les relations (4.4, 4.5 et 4.6) permettent de tracer l'évolution de la charge en fonction du déplacement vertical du point A pour une configuration où la fourche présentait un angle $\beta = \frac{\pi}{8.57} = 21^\circ$. L'évolution de la charge en fonction de déplacement pour une telle configuration

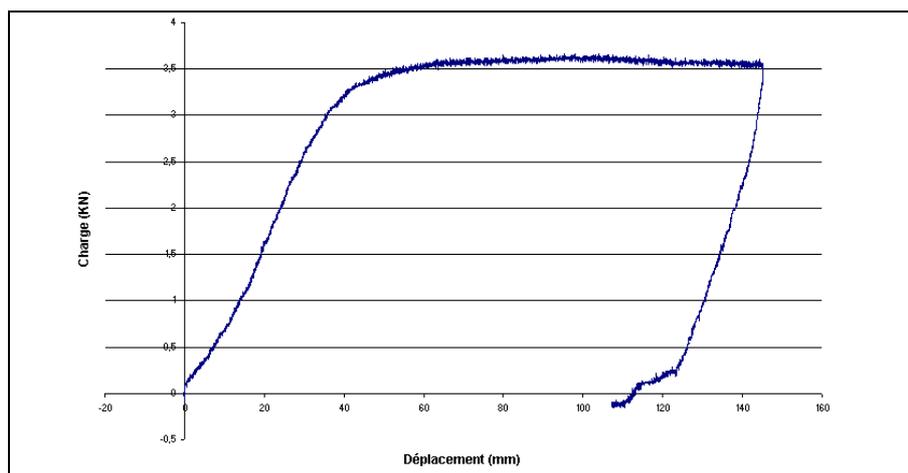


FIG. 4.20 – Évolution de la charge en fonction du déplacement pour $\beta = 21^\circ$

est donnée par la figure (4.20). Ce graphique nous permet de conclure que la fourche présente un comportement élastoplastique. Cette loi de comportement présente deux paramètres : la raideur, qui caractérise la phase de compression élastique de la fourche et la valeur de la force de déformation plastique, qui caractérise la phase plastique. La figure (4.20) permet de calculer les grandeurs suivantes :

- Raideur = $9.0210^4 N/m$
- Force de déformation plastique: $3600N$

4.3.2 Essai de compression de la roue avant

Le deuxième type d'essai consiste à déterminer la rigidité en compression de la roue avant. En effet, dès que la roue avant se trouve coincée entre le bloc moteur d'une part et l'obstacle en mouvement d'autre part, elle sera sollicitée en compression. Ces essais de compression sont réalisés avec deux roues à rayons sans pneumatique et une roue à bâtons avec pneumatique. Les essais sont faits sur une machine de traction-compression équipée d'un système d'acquisition en temps réel. Le schéma du montage expérimental est présenté par la figure (4.21). La roue se trouve comprimée entre un plateau supérieur mobile et un plateau inférieur fixe.

Le graphe de la figure (4.22) montre les évolutions de la charge en fonction de la déformation qui caractérisent deux roues à rayons testées séparément. Il est à noter que les deux roues ne présentent pas pratiquement le même comportement dynamique. En fait, l'assemblage de deux roues est fait manuellement. Par la suite les rayons de deux roues utilisées ne présentent pas le même état de pré charge. En exploitant les données de déformation élastique, montrées sur la figure (4.22) on trouve une raideur de l'ordre de :

$$\text{Raideur moyenne de la roue} = 2.310^6 N/m$$

Le graphe de la figure (4.23) montre les résultats des essais de compression d'une roue à bâtons avec pneumatique. L'objet de ces essais est de déterminer la raideur du pneumatique

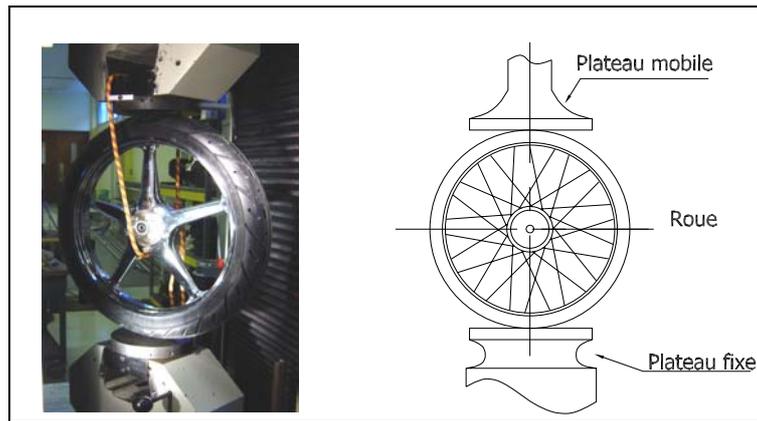


FIG. 4.21 – Montage expérimental pour la détermination des raideurs de deux types de roue avant d'un cyclomoteur

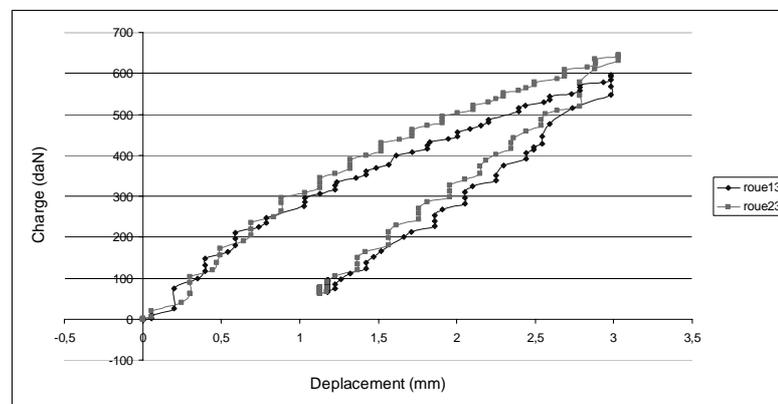


FIG. 4.22 – Données expérimentales : Essais de compression de deux roues à rayons sans pneumatique d'un cyclomoteur.

quand il est gonflé et la raideur de la jante. D'après cette figure les données numériques suivantes ont été calculées :

$$\text{Raideur du pneumatique} = 24800 \text{ N/m}$$

$$\text{Raideur de la jante} = 592200 \text{ N/m}$$

Ces essais sont faits en utilisant une seule roue à bâtons avec le pneumatique. En fait, le premier essai consiste à déformer uniquement le pneumatique. Le deuxième essai consiste à déformer le pneu et entamer une déformation de la jante tout en restant dans la zone de déformation élastique. Enfin, le troisième essai consiste à déformer la roue jusqu'au domaine de déformation plastique.

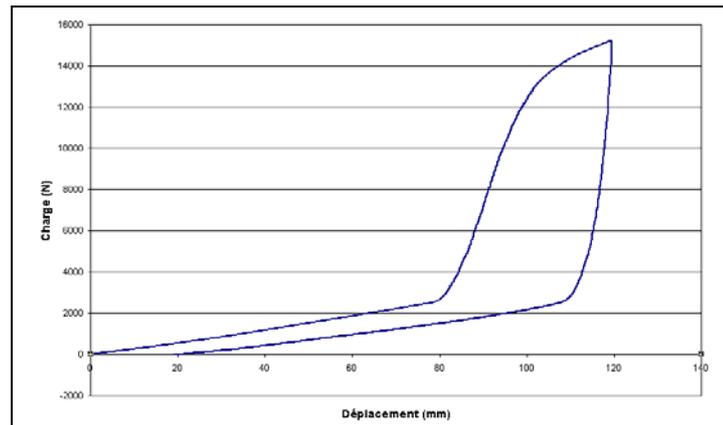


FIG. 4.23 – *Données expérimentales : Essais de compression d'une roue à bâtons avec pneumatique d'un cyclomoteur.*

4.4 Essais de test–crash

4.4.1 Description du protocole des essais

L'objet de cette partie est de présenter la démarche suivie pour la réalisation des essais de test–crash. Ces essais ont été faits dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire de Biomécanique et de Mécanique des Chocs (LBMC) à l'INRETS de Bron en Juin 2003. Les essais de test–crash consistent à faire percuter un système formé par le cyclomoteur sur lequel est installé un mannequin, à l'arrêt, par une barrière européenne mobile. Cette barrière est entraînée par une catapulte hydraulique. Elle peut avoir différentes vitesses.

La conception du scénario du test–crash est inspirée des travaux réalisés par des laboratoires spécialisés dans le domaine. En fait, dans le cadre d'une étude bibliographique faite sur le sujet des test–crash, nous avons analysé des enregistrements vidéo qui ont été livrés par DEKRA, TRL et l'INRETS. Les différents tests–crash ont été réalisés avec des motocyclettes qui entrent, selon différentes configurations, en collision avec des véhicules légers soit en mouvement soit à l'arrêt. Généralement, dans les essais effectués par DEKRA et TRL sur les véhicules à deux roues du type motocyclette, l'ensemble formé par la moto et le mannequin est embarqué sur un chariot. Ce dernier est entraîné avec la vitesse de collision. Quand le chariot se trouve à une distance proche de la zone de collision, il s'arrête et l'ensemble mannequin – motocyclette se libère pour continuer son mouvement d'approche sous l'effet de l'inertie qu'il possède. Cette démarche ne peut pas être applicable à notre cas pour les raisons suivantes :

- Dans le cas de test–crash d'un cyclomoteur, le mannequin présente une masse double que celle du véhicule à deux roues ce qui est l'inverse pour le cas de test–crash de motocyclette.
- L'appui que présentent les pieds du mannequin sur les pédales du cyclomoteur, la forme de la selle ainsi que l'absence du réservoir ne permettent pas un positionnement stable du mannequin sur le cyclomoteur durant le mouvement.
- Dans le cas où on adopte une démarche similaire à celle utilisée pour les tests–crash des motocyclettes, la maintien de la stabilité du système une fois qu'il est éjecté du chariot ne

peut pas être garantie vu que la masse du mannequin est supérieure à celle du cyclomoteur.

- Les vitesses à utiliser pour les essais de test–crash des cyclomoteurs sont faibles relativement à celles utilisées pour les tests–crash des motocyclettes. Pour des raisons financières, nous ne pouvions risquer d’endommager le mannequin, ni l’unique cadre de cyclomoteur en notre possession, alors que nous souhaitions effectuer plusieurs essais. De plus ces engins n’atteignent pas les vitesses des motocyclettes.

L’enregistrement vidéo de l’INRETS présente un test–crash d’un cyclomoteur contre un véhicule léger. Il s’agit d’un véhicule léger en mouvement qui entre en collision frontale avec un mannequin installé sur un cyclomoteur à l’arrêt. Le cyclomoteur se trouve placé sur ses béquilles pour garder l’équilibre de l’ensemble cyclomoteur–mannequin. Lors de la collision nous nous sommes rendu compte que le fait de laisser les béquilles en contact avec la chaussée influe sur le comportement dynamique de l’ensemble. En effet, la réaction de la chaussée sur les béquilles induit des mouvements qui donnent au système un comportement qui ne reproduit pas celui d’un accident réel de la circulation routière, similaire à ce test–crash.

Toutes ces considérations nous ont poussé à penser autrement le protocole du test–crash. On se propose dans ce qui suit de présenter les différents éléments constitutifs de ces essais.

La barrière mobile Le véhicule à quatre roues est représenté par une barrière mobile. Il s’agit d’un chariot métallique construit par des éléments soudés et présentant 4 roues pneumatiques. Il est équipé d’un système de freinage hydraulique qui peut être enclenché à distance. Sa masse est de 926 kg. Afin d’éviter que le mannequin ou le cyclomoteur soient écrasés par la barrière mobile durant la collision, une planche a été mise en place sur sa face frontale. Une description de la barrière est donnée par la figure (4.24(a)).



FIG. 4.24 – (a) Barrière mobile européenne équipée d’une planche en bois. (b) Le cadre du cyclomoteur utilisé pour les différents essais de test–crash

Le mannequin Le mannequin utilisé dans ces essais de test–crash est un hybride II de masse 74 kg. Il a été choisi parmi les mannequins disponibles à l’INRETS de Bron. Comme il s’agit des

mannequins utilisés pour des test-crash des véhicules à quatre roues, nous avons choisi celui qui représente mieux du point de vue des mouvements permis, un cyclomotoriste.

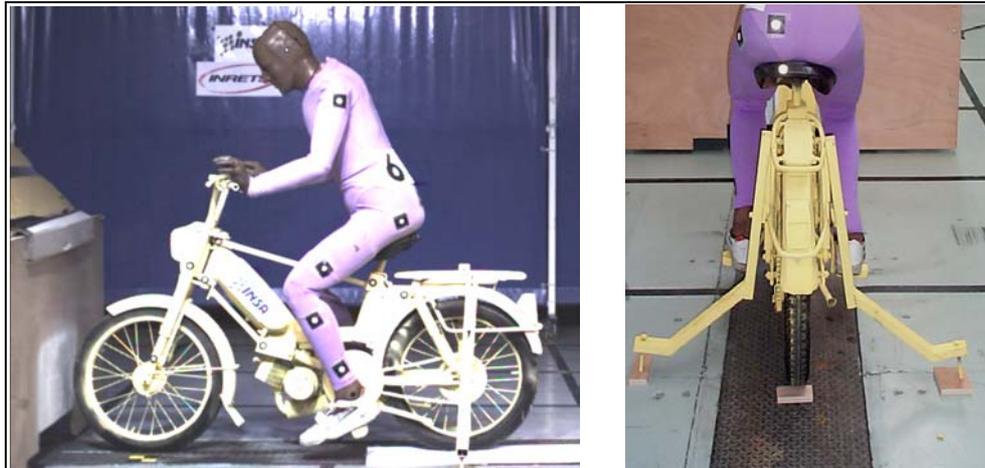


FIG. 4.25 – Plate-forme utilisée pour les essais de test-crash

Le cyclomoteur Un seul cadre de cyclomoteur du type le plus répandu dans les accidents de la circulation routière en Tunisie a été utilisé pour les différents essais de test-crash. Ce cadre est présenté par la figure (4.24(b)). Pour la roue avant, la fourche et le guidon, comme ils sont des éléments sollicités durant l'essai, une série de dix de chacun d'eux nous a été livrée par le fabricant de ce cyclomoteur. Afin de protéger le cadre contre des éventuelles déformations, il a été renforcé au niveau du réservoir comme le montre la figure (4.25).

Les essais de test-crash sont réalisés en utilisant les moyens existants à l'INRETS de Bron. La configuration de la scène de test-crash est donnée par les images de la figure (4.25). Comme le montre cette figure, l'ensemble formé par le cyclomoteur et le mannequin est mis dans une position d'équilibre à l'aide de deux supports. Ces deux supports s'éjectent automatiquement dès qu'il y a mouvement du cyclomoteur. Cette solution a été utilisée pour éviter les effets des béquilles constatés sur l'enregistrement vidéo de l'INRETS. Pour maintenir le mannequin dans une position de conduite en équilibre, les articulations des membres supérieurs et inférieurs ont été légèrement serrées. En plus il présente trois liaisons avec le cyclomoteur : Il est installé sur la selle du cyclomoteur, ses pieds sont posés sur les pédales et ses mains sont posées sur le guidon.

Afin d'étudier l'évolution du système durant la collision nous avons placé des mires sur le cyclomoteur ainsi que sur le mannequin comme le montre la figure (4.26). Les mires liées au cyclomoteur ont les numéros allant de 1 à 8 alors que les mires liées au cyclomotoriste ont les numéros allant de 9 à 14.

L'analyse d'un essai consiste à enregistrer l'évolution spatiale des différentes mires afin de pouvoir conclure sur le scénario exacte de la collision. Le suivi et l'enregistrement de l'évolution du système sont faits en utilisant trois caméras rapides connectées à une station de traitement. La fréquence d'acquisition est de 500 images/s. L'enregistrement des images des trois caméras est lancé par un capteur tactile mis devant le cyclomoteur de sorte qu'il sera enclenché avant la collision quand la roue avant de la barrière mobile passe dessus.

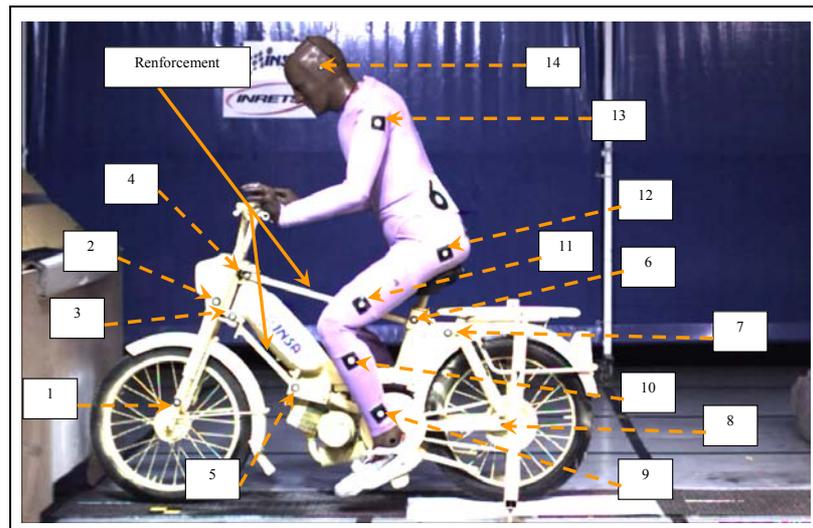


FIG. 4.26 – Plate-forme utilisée pour les essais de test-crash

Les trois caméras ont été placées d'une façon à assurer une couverture complète de la scène de collision. En effet, la difficulté rencontrée au niveau de ces essais de test-crash est que le plan de la collision est en mouvement à l'envers des essais de test-crash contre un obstacle fixe où le plan de collision est figé ce qui permet d'avoir un cadrage restreint et par la suite une précision meilleure lors du dépouillement des essais.

Les trois caméras sont disposées comme suit : le caméra grand cadrage permet de visualiser le maximum de l'espace de l'essai. Elle est placée dans un plan orthogonal au plan de mouvement de la barrière mobile. La caméra petit cadrage est placée comme le caméra grand cadrage. Elle permet de visualiser le comportement du système au voisinage de la selle. Elle a été utilisée pour assurer une meilleure précision pour le dépouillement des essais par la suite. La troisième caméra est placée à 45° à l'arrière de l'ensemble cyclomoteur – mannequin. Elle est focalisée sur le contact entre le mannequin et la selle.

Les enregistrements vidéo ont été traités par le logiciel Photospot au laboratoire LBMC de l'INRETS de Bron. Ce software permet le suivi des différentes mires du système dans le but de déterminer l'évolution des leurs coordonnées durant la collision en fonction du temps. Les données extraites se présentent sous la forme de tableaux de valeurs. Les images acquises par les caméras numériques rapides présentent une résolution de 1500 pixels selon la direction horizontale par 1000 pixels selon la direction verticale.

Afin d'étudier certains comportements des éléments du système durant la collision nous avons utilisé les mires suivantes :

- Vérification de l'hypothèse du corps rigide pour le cadre du cyclomoteur : mire 3, mire 5, mire 7 et mire 8,
- Décollage de la roue arrière : mire 8 et mire 7,
- Mouvement de translation du cyclomotoriste relativement au cyclomoteur : mire 6, mire 7 et mire 12.

- Compression de la suspension avant : mire 1 et mire 2,
- Compression du pneumatique avant : mire 1,
- Comportement en tangage du cyclomoteur : mire 4 et 6.
- Comportement en tangage du cyclomotoriste : mire 12 et 14.
- Compression dynamique de la fourche : mire 1 et mire 5

4.4.2 Analyse des différents essais

Les différents essais de test-crash présentent le même scénario : une barrière mobile entraînée avec un catapulte hydraulique à différentes vitesses entre en collision avec un cyclomoteur sur lequel est installé un mannequin. La configuration de collision a été présentée par la figure (4.26). Au début de chaque essai le mannequin est positionné sur le cyclomoteur dans une configuration similaire pour les différents essais. Les caractéristiques des ces essais sont résumées par le tableau (4.1).

item	N° d'essai	vitesse de collision	image de départ
01	Essai 1	06.13 Km/h	44
02	Essai 2	09.72 Km/h	36
03	Essai 3	14.70 Km/h	26
04	Essai 4	19.72 Km/h	30
05	Essai 5	24.88 Km/h	29
06	Essai 6	25.04 Km/h	25
07	Essai 7	24.98 Km/h	23

TAB. 4.1 – *Caractéristiques des différents essais*

L'essai n°1 est un essai de test. La barrière a été poussée à la main. L'objet de cet essai est de voir s'il y a des problèmes au cours de l'essai. Pour cet essai nous avons constaté que le fait de laisser la chaîne de transmission entre les pédales et la roue libre de la roue arrière a entraîné un mouvement de rotation des pédales ce qui a perturbé le mouvement du mannequin. Afin d'éviter cette interaction nous avons éliminé cette chaîne pour les autres essais.

Afin de voir les effets des renforcements montés sur le cadre, nous avons réalisé l'essai n°7 en enlevant ces protections. Nous constatons que pour cet essai le cadre ne présente pas des déformations dues à la collision.

4.4.3 Reproductibilité des essais

Les trois derniers essais 5, 6 et 7 présentent pratiquement la même vitesse de collision. Au niveau de l'essai n°5 nous avons utilisé une roue avant à rayons et le cyclomoteur est équipé par tous ses accessoires, en particulier le garde-boue. Afin de tester la reproductibilité des comportements dynamiques durant ces essais nous avons étudié l'évolution des coordonnées des mires 5 et 7 durant les collisions des essais 5, 6 et 7.

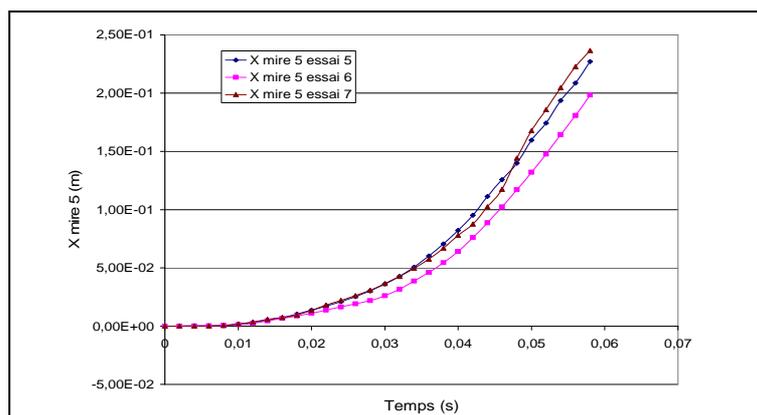


FIG. 4.27 – Évolution de l'abscisse de la mire 5 durant les trois essais 5,6 et 7

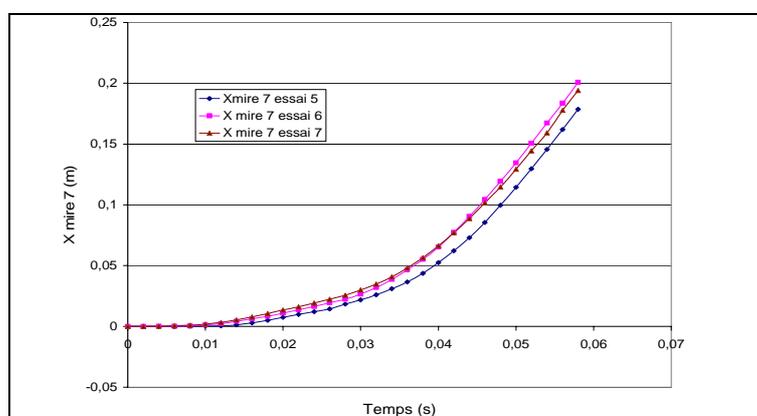


FIG. 4.28 – Évolution de l'abscisse de la mire 7 durant les trois essais 5,6 et 7

Les données qu'on dispose nous permettent d'étudier l'évolution des coordonnées de ces mires selon les directions longitudinale et verticale.

En regardant les courbes des figures (4.27) et (4.28) nous pouvons facilement conclure qu'il y a une reproductibilité des essais pour la même vitesse de collision qui est d'environ 25 km/h.

4.4.4 Étude de la déformation du cadre

Dans cette partie on se propose de vérifier que le cadre ne subit pas de déformations durant la collision. A cet effet nous avons étudié l'évolution, durant la collision, des différentes distances suivantes :

- distance entre mires 8 et 3,
- distance entre mires 7 et 5,
- distance entre mires 7 et 6,
- distance entre mires 6 et 4,
- distance entre mires 7 et 8,

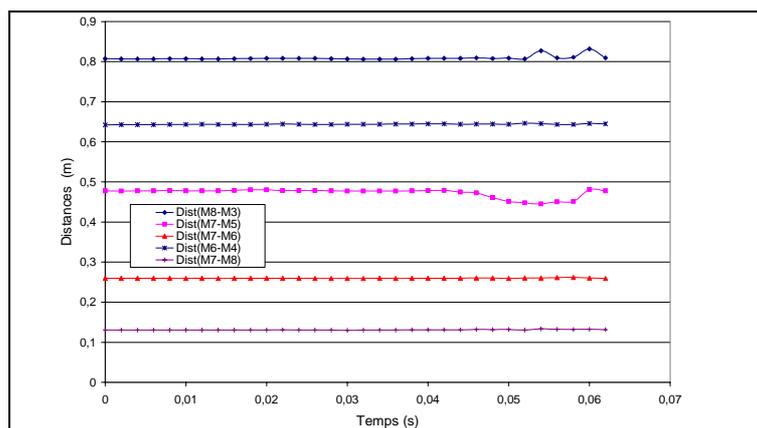


FIG. 4.29 – Évolution des différentes distances entre les mires du cadre durant la collision de l'essai n°7

Les évolutions des différentes distances sont données par la figure (4.29). En analysant les différentes courbes de cette figure nous pouvons conclure que le cadre ne subit pas de déformations perceptibles durant la collision. Cette constatation est confirmée par l'essai n°7 où on a éliminé les différents renforcements utilisés afin d'éviter une détérioration du cadre du cyclomoteur.

4.4.5 Étude de décollage de la roue arrière

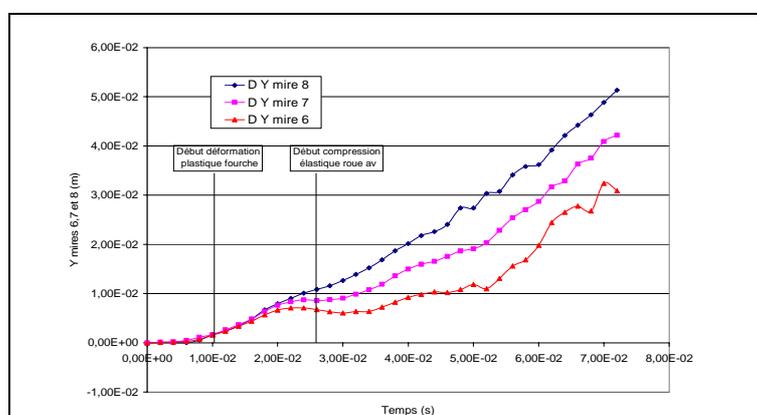


FIG. 4.30 – Évolution des ordonnées des mires 6, 7 et 8 du cadre durant la collision de l'essai n°7

Afin de pouvoir étudier le décollage de la roue arrière nous avons exploité les données relatives aux mires 6, 7 et 8. L'évolution de leurs différentes ordonnées est donnée par la figure (4.30). En ne tenant pas compte de la présence du pneumatique et du système de suspension arrière on pourrait facilement dire que la roue arrière décolle de la chaussée juste avant que la fourche entame la zone de déformation plastique. En fait la visualisation de l'essai n°7 permet de

constater que la roue arrière ne décolle de la chaussée que vers la fin de la zone de déformation plastique de la fourche. La différence qui existe entre les lois d'évolution des différentes mires est due d'une part à la présence de la suspension arrière qui se trouve dans une phase de détente durant la collision et d'autre part au fait que le système présente un mouvement de tangage.

4.4.6 Comportement dynamique de la fourche

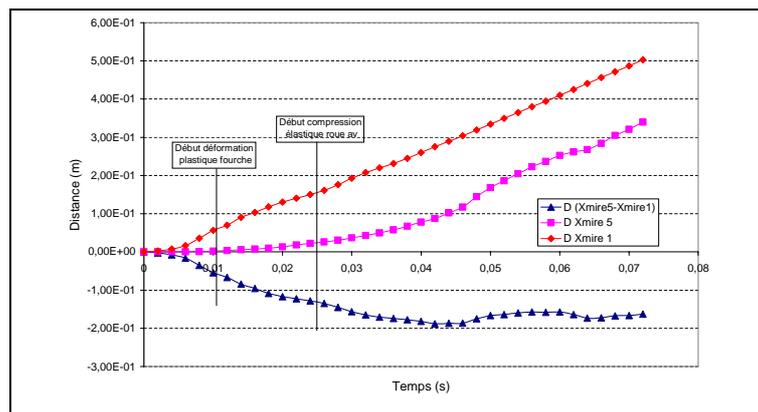


FIG. 4.31 – Évolution de projection de la distance qui sépare les mires 1 et 5 durant la collision de l'essai 7

Afin de pouvoir étudier le comportement dynamique du contact frontal nous avons étudié l'évolution de la différence d'abscisses qui sépare la mire 1, liée au centre de la roue avant par rapport à la mire 5, liée au cadre du cyclomoteur. Cette évolution est donnée par la figure (4.31). Le scénario de la collision au niveau de la roue avant peut être déduit. En effet, on note que la mire 5 commence à bouger avec une vitesse croissante durant la période où la fourche subit une déformation plastique alors que la mire 1 commence à bouger dès le début de la collision.

Sur la figure (4.31) on peut remarquer le mouvement de restitution qui aura lieu durant la déformation élastique de la roue avant. Cette phase de restitution se traduit par une légère augmentation de vitesse de la mire 5.

Afin de voir l'influence de la suspension avant nous avons tracé l'évolution de la distance qui sépare les mires 1 et 2 durant la collision de l'essai 7. Cette évolution est donnée par la figure (4.32). On note que la suspension avant du cyclomoteur se comprime durant la phase de déformation élastique de la fourche et elle reste à un état constant de déformation jusqu'à la fin de la collision.

Le pneumatique de la roue avant participe aussi au comportement de la dynamique du contact frontal. En traçant l'évolution de l'ordonnée de la mire 1 (figure (4.33)) nous pouvons remarquer que la déformation maximale du pneumatique est atteinte durant la compression élastique de la roue. Une constatation qui peut être faite aussi est que la roue avant est bloquée en rotation durant la collision puisqu'elle se trouve coincée entre la chaussée et la barrière mobile.

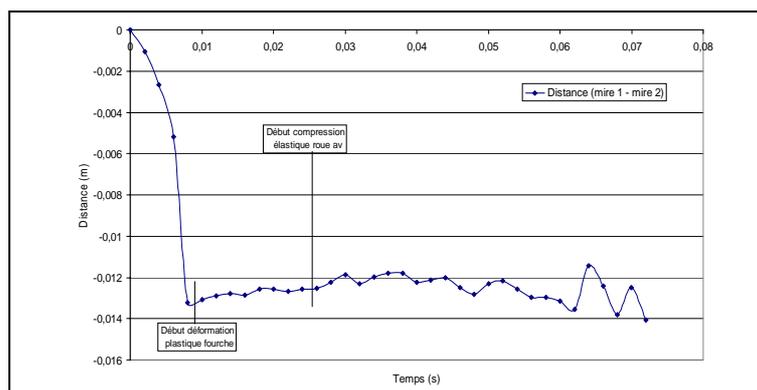


FIG. 4.32 – Évolution de la distance qui sépare les mires 1 et 2 durant la collision de l'essai n°7

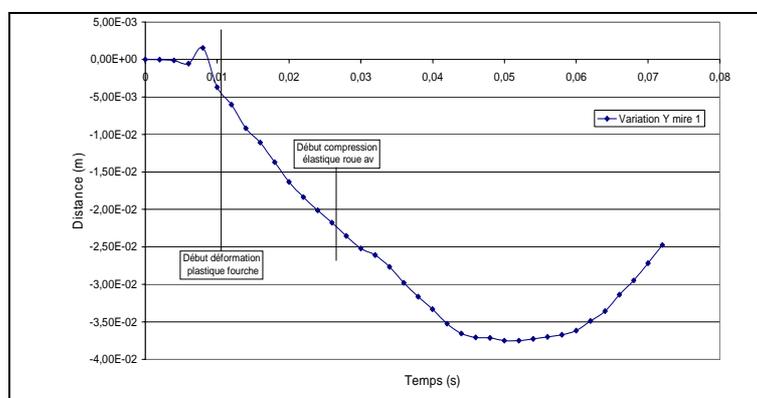


FIG. 4.33 – Évolution de la distance qui sépare les mires 1 de la chaussée durant la collision de l'essai n° 7

4.4.7 Étude du mouvement de tangage

Le mouvement de tangage du cyclomoteur est une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de mouvement. Comme ce mouvement présente une grande influence sur l'état cinématique post collision, on se propose, dans ce qui suit, d'étudier le mouvement de tangage du cyclomoteur ainsi que celui du cyclomotoriste.

Tangage du cyclomoteur

Pour l'étude de l'angle de tangage du cyclomoteur nous avons pris en considération les mires 4 et 6. L'angle de tangage est calculé en utilisant l'expression suivante :

$$\theta_{cyclomoteur} = \arctan\left(\frac{Y_4 - Y_6}{X_4 - X_6}\right)$$

L'évolution de l'angle de tangage du cyclomoteur est donnée par la figure (4.34)

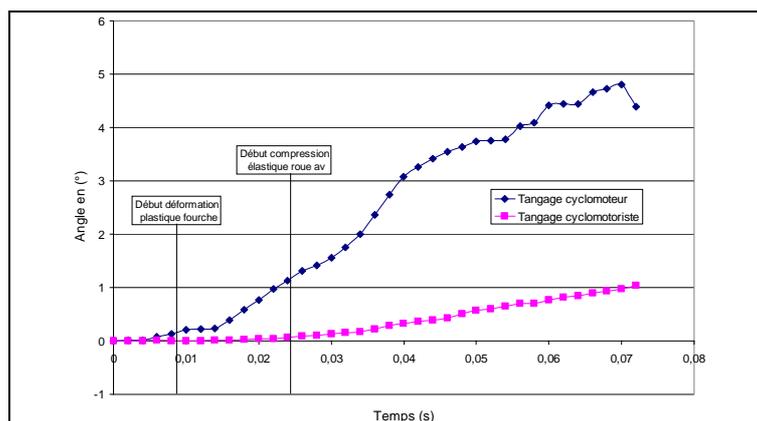


FIG. 4.34 – Évolution de l'angle de tangage du cyclomoteur et du cyclomotoriste durant la collision de l'essai n° 7

Tangage du cyclomotoriste

Pour étudier le mouvement de tangage du cyclomotoriste nous avons considéré le couple de mires formé par la mire 14 et la mire 12. En effet ce couple de mires permet d'étudier le tangage du cyclomoteur car dans les différents essais la tête du mannequin a été bloquée par rapport à son tronc. L'évolution de l'angle de tangage est donnée par l'expression suivante :

$$\theta_{cyclomotoriste} = \arctan\left(\frac{Y_{14} - Y_{12}}{X_{14} - X_{12}}\right)$$

L'évolution de l'angle de tangage du cyclomotoriste est donnée par la figure (4.34). On note que l'évolution de l'angle de tangage du cyclomoteur est relativement plus importante que celle du cyclomotoriste et cela est dû à la présence d'une déformation au niveau de la suspension et du pneumatique avant, ce qui favorise le tangage du cyclomoteur.

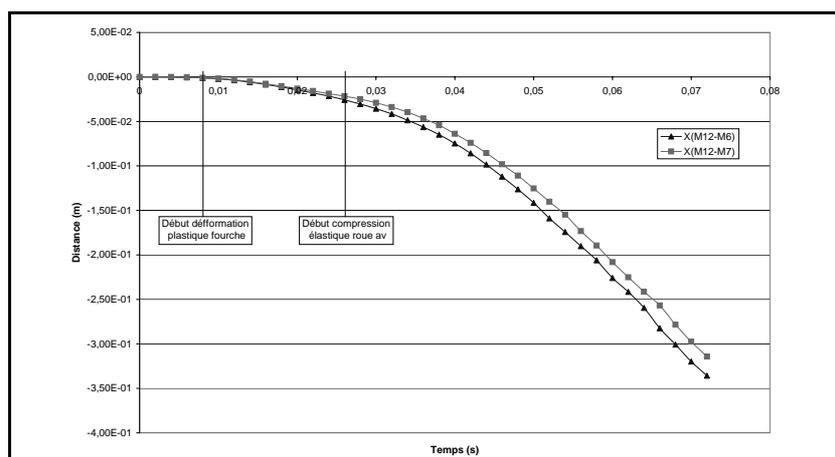


FIG. 4.35 – Évolution des projections des distances qui séparent la mire 12 à la mire 6 et la mire 12 à la mire 7

4.4.8 Glissement du cyclomotoriste

En analysant la figure (4.35) nous remarquons que le cyclomotoriste commence à glisser quand la fourche entame la phase de déformation plastique. Le glissement du cyclomotoriste relativement à la selle continue jusqu'à la fin de la collision.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la partie expérimentale faite durant notre travail. Il s'agit de trois types d'expérimentation. En premier lieu on a identifié les éléments d'inertie nécessaires pour pouvoir résoudre les équations de mouvement du système. La méthode utilisée pour déterminer le centre de masse des différents solides est la double pesée alors que celle utilisée pour identifier les éléments des tenseurs d'inertie des différents éléments du cyclomoteur est celle du pendule simple.

Dans un second temps l'identification des paramètres de la loi de comportement du contact frontal a été visée. Nous avons supposé que ce contact est du type élastoplastique caractérisé par la rigidité de la fourche et celle de la roue avant et par la force de limite plastique de la fourche. Afin de déterminer ces différents paramètres nous avons réalisé des essais mécaniques. Les essais de flexion de deux fourches ont permis la détermination de la raideur ainsi que la force de limite plastique. Pour la roue avant nous avons réalisé des essais de compression de deux roues à rayon et une roue à bâton avec pneumatique. Ces essais ont permis la détermination expérimentale de la rigidité de chaque type de roue ainsi que celle du pneumatique.

Le troisième type d'essais consiste à élaborer des tests-crash en coopération avec l'INRETS de Bron en France. Le scénario de ces essais consiste à percuter un ensemble formé par un mannequin du type hybride II installé sur un cyclomoteur par une barrière mobile à différentes vitesses. Le protocole de ces essais a été présenté ainsi qu'une analyse des différentes données obtenues. Ainsi par une exploitation des données caractérisant l'évolution des différentes mires nous avons pu tirer des indices sur le déroulement de la collision. Dans le chapitre qui suit on se propose de confronter les résultats des essais de test-crash avec les résultats des simulations numériques basées sur la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc.

Chapitre 5

Confrontation essais et simulations

5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de valider l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Cette validation sera faite en utilisant, en premier lieu, la modélisation développée sous ADAMS et en second lieu les essais expérimentaux de test-crash présentés dans le chapitre 4. La modélisation qui consiste à l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc ainsi que la modélisation équivalente sous ADAMS ont été présentées au chapitre 3. Ces deux modélisations permettent d'établir les équations du mouvement, la modélisation ADAMS ne donne pas les équations du mouvement durant la collision, d'un système formé par un mannequin installé sur la selle d'un cyclomoteur à l'arrêt avec une barrière mobile entraînée à différentes vitesses.

La première modélisation est faite sous le logiciel MAPLE car il permet la résolution symbolique des équations de mouvement du système et par la suite d'avoir la solution sous une forme analytique. Ces équations sont obtenues par l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc.

La deuxième modélisation est faite sous un logiciel de simulation dynamique des systèmes multicorps (ADAMS). Sur l'interface graphique de ce logiciel est conçue une modélisation équivalente qui reproduit la même scène de collision que celle modélisée sous MAPLE sans tenir compte des hypothèses simplificatrices de la formulation simplifiée de la dynamique du choc.

On se propose, dans un premier temps, de présenter une confrontation entre les comportements dynamiques donnés par les deux modélisations présentées précédemment. Les comparaisons seront faites en utilisant les vitesses des certains points du système. En second lieu, seront exploitées les données expérimentales de dépouillement des essais de test-crash. Ces essais ont été décrits au chapitre 4. La démarche adoptée pour le dépouillement des enregistrements vidéo ainsi que les outils utilisés seront présentés. Les données expérimentales de différents essais seront, ensuite, exploitées pour une confrontation avec les résultats de la modélisation simplifiée de la dynamique du choc présentée précédemment. A l'issue de cette confrontation une analyse d'influence de certains paramètres du modèle sera présentée.

5.2 Confrontation de la modélisation simplifiée avec la modélisation complète sous ADAMS

Dans ce paragraphe sera présentée une confrontation entre deux types de modélisation. Les deux modélisations étudient le comportement dynamique durant une collision frontale entre une barrière mobile entraînée à une vitesse déterminée d'une part, et un système à l'arrêt formé par un mannequin installé sur la selle d'un cyclomoteur.

5.2.1 Présentation des modélisations utilisées

La première modélisation est faite en utilisant la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc introduite au chapitre 3. Afin de résoudre les équations de mouvement obtenues avec cette formulation le logiciel de développement MAPLE a été utilisé. La démarche suivie pour la simplification et la résolution des équations du mouvement obtenues est présentée dans l'annexe. Les solutions obtenues permettent de trouver les lois d'évolution des positions des différents points du système durant la collision. Comme ces solutions se présentent sous une forme analytique, les vitesses ainsi que les accélérations peuvent être calculées par une simple dérivation.

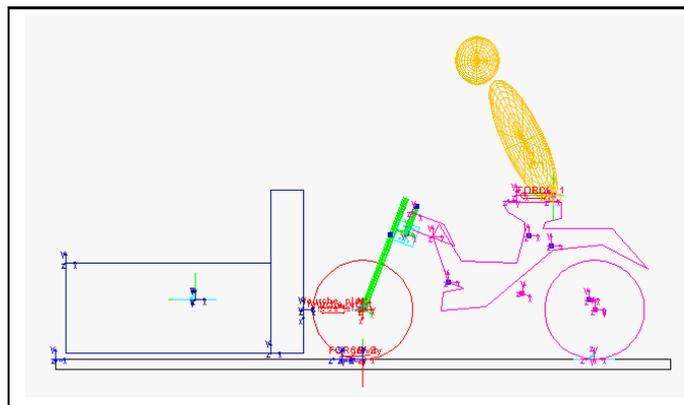


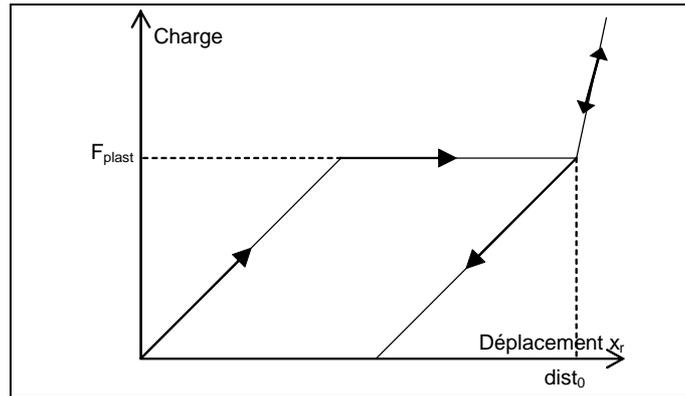
FIG. 5.1 – *Modélisation du système sous ADAMS*

La seconde modélisation a été faite sous ADAMS. Cette modélisation a été présentée à la fin du chapitre 3. Le logiciel utilisé permet de simuler numériquement le comportement dynamique de tout le système durant la collision.

Les deux modélisations sont équivalentes. Elles permettent de simuler le comportement dynamique du même système. La figure (5.1) représente la modélisation faite sous ADAMS.

5.2.2 Caractéristiques de la scène à simuler

La loi de comportement du contact frontal est du type élastoplastique. Ses caractéristiques sont données par la figure (5.2). La collision commence à l'instant où la barrière mobile touche la roue avant. En premier lieu une déformation élastique de la fourche se manifeste. Cette

FIG. 5.2 – *Modèle élastoplastique du comportement du contact frontal*

phase de déformation élastique persiste jusqu'à ce que la force atteigne la valeur de la limite de déformation plastique de la fourche. Ensuite, la force de contact devient une force plastique à valeur constante. La déformation frontale continue jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur égale à $dist_0$ qui correspond au contact entre la roue avant et le bloc moteur. Comme la roue avant est sollicitée en compression, sa rigidité sera prise en compte pour le calcul de la force de contact frontale. Cette force de contact est du type élastique. Elle persiste durant la compression et la restitution de la roue avant. A la fin de la restitution de la roue avant la force de contact frontale sera celle de la restitution élastique de la fourche.

Pour les différentes simulations le début de la collision est l'instant du contact entre la roue avant et la barrière mobile. La fin de la collision est choisie comme étant l'instant où le mannequin décolle de la selle. Autrement dit, soit la composante normale de la réaction de la selle sur le mannequin s'annule, soit le mannequin glisse relativement à la selle d'une distance qui dépasse sa longueur qui est estimée à 20 cm.

Pour les simulations qui seront présentées par la suite, le modèle élastoplastique qui sera utilisé pour le contact frontal présente les paramètres dont les valeurs ont été trouvées expérimentalement et qui sont résumées comme suit :

- Raideur de la fourche $9.0210^4 N/m$
- Limite plastique de la fourche = 3600 N
- Raideur de la roue avant = 592200 N/m
- La distance qui sépare la roue avant du bloc moteur : $dist_0 = 0.147 m$.
- Le coefficient de frottement au niveau de la selle est $\mu = 0.2$. Cette estimation est faite en prenant en compte l'état de la selle, ainsi que la géométrie du contact du mannequin avec la selle et le tissu de la combinaison que le mannequin portait durant les essais de test-crash.

Afin de comparer les deux modélisations nous avons pris deux points distincts du cadre. La comparaison consiste à étudier l'évolution de leurs vitesses longitudinales et verticales durant la collision. Le premier point P_1 est pris au voisinage du bloc moteur alors que le second point P_2 est pris au niveau de l'axe de la roue arrière. Les essais dont les résultats sont présentés par les

figures (5.3) et (5.4) montrent l'évolution des vitesses longitudinales et verticales de deux points P_1 et P_2 .

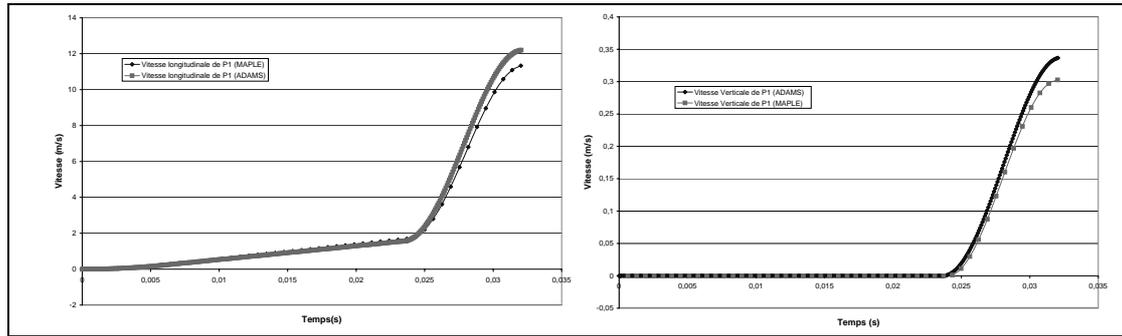


FIG. 5.3 – Évolution des vitesses longitudinale et verticale du point P_1 durant une collision à 25 Km/h

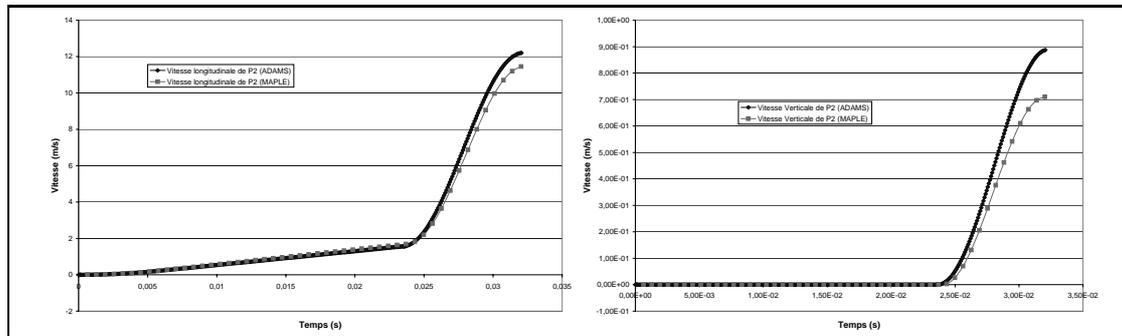


FIG. 5.4 – Évolution des vitesses longitudinale et verticale du point P_2 durant une collision à 25 Km/h

Les deux points P_1 et P_2 sont choisis sur le cadre parce qu'il présente l'élément qui bouge plus dans le système durant la collision. En analysant ces deux figures nous notons que les deux modélisations présentent pratiquement les mêmes valeurs des vitesses. Les faibles différences qui existent entre les vitesses prévues par les deux modélisations sont dues à l'hypothèse de la configuration figée durant la collision.

Comparons les résultats obtenus par la première modélisation sous MAPLE et qui représente le comportement dynamique du système durant la collision prévu par l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc et par la seconde modélisation qui est faite sous ADAMS. Nous constatons que du point de vue des évolutions des états des différents contacts unilatéraux, les deux modélisations prévoient la même scène de déroulement de la collision. Elle peut être décrite comme suit : la collision commence à $t = 0$, par une configuration telle que les deux roues sont en contact avec la chaussée et le cyclomotoriste est en contact avec la selle et ne présente pas de mouvements relatifs par rapport à la selle, à $t = 3.8 \cdot 10^{-4} s$ le cyclomotoriste commence à glisser relativement à la selle. Au niveau du contact frontal qui sollicite le système,

une déformation élastique de la fourche se présente. A $t = 0.0058s$ la fourche entame une phase de déformation plastique et le système continue à évoluer sans changement d'états des différents contacts unilatéraux. A $t = 0.023s$ la roue avant entre en contact avec le bloc moteur. C'est le début de la phase de compression élastique de la roue avant. A $t = 0.024s$ la roue arrière décolle de la chaussée. Le système garde cette configuration jusqu'à ce que le cyclomotoriste décolle de la selle à $t = 0.032s$. Son décollage est détecté par la nullité de la composante normale de la réaction au niveau de la selle.

Le torseur cinématique associé au mouvement du cyclomotoriste au moment de son décollage peut être exploité pour comparer les deux modélisations. Ce torseur est exprimé au centre de masse du mannequin comme suit :

- Selon la formulation simplifiée de la dynamique du choc :

$$\{\mathcal{V}_{G_4 \in S_4}\}_{R_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0.1 \text{ m/s} & 0^\circ/\text{s} \\ 0 \text{ m/s} & 50.55^\circ/\text{s} \\ 0.43 \text{ m/s} & 0^\circ/\text{s} \end{array} \right\}_{R_0}$$

- Selon la modélisation faite sous ADAMS :

$$\{\mathcal{V}_{G_4 \in S_4}\}_{R_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0.168 \text{ m/s} & 0^\circ/\text{s} \\ 0 \text{ m/s} & 58.98^\circ/\text{s} \\ 0.543 \text{ m/s} & 0^\circ/\text{s} \end{array} \right\}_{R_0}$$

5.3 Confrontation de la modélisation simplifiée avec les essais de test–crash

5.3.1 Méthode de dépouillement des enregistrements vidéo

Les enregistrements vidéo acquis par les trois caméras numériques rapides sont dépouillés par le logiciel Photospot à l'INRETS de Bron. Le dépouillement des ces essais consiste à déterminer graphiquement les coordonnées des différentes mires pour chaque image acquise par les caméras durant l'essai de test–crash. Le logiciel utilisé permet de trouver les données d'évolution des différentes mires collées sur le cyclomoteur et sur le mannequin soit d'une façon automatique en jouant sur la nuance de la couleur des mires soit d'une façon manuelle en utilisant un dispositif de pointage tel que la souris de l'ordinateur. Dans ce cas l'emplacement d'une mire est déterminé pour chaque image de l'enregistrement en cliquant dessus par le pointeur de la souris.

La résolution graphique assurée par les caméras numériques est de 1000 pixels selon la direction verticale par 1500 pixels selon la direction horizontale. Les mires utilisées présentent une forme cylindrique de diamètre 15 mm. En prenant en compte les dimensions d'une image, la détermination de l'emplacement vertical d'une mire se fait avec un intervalle de tolérance de 10 pixels. Cette incertitude engendrera des fluctuations au niveau des différentes données obtenues. Comme les données numériques obtenues représentent l'évolution de la position des différentes mires en fonction du temps, leurs vitesses seront obtenues par une dérivation numérique. La présence de ces fluctuations engendrera sur les courbes des vitesses, des bruits à cause de la

dérivation numérique. Afin de remédier à ce problème des perturbations nous avons appliqué aux données des positions des différentes mires un algorithme de lissage qui permet d'éliminer les variations brusques tout en conservant la loi d'évolution de la position.

L'algorithme de lissage ainsi que la dérivation numérique sont appliqués en utilisant la boîte à outils "cftool" de MATLAB. Il s'agit d'un utilitaire qui sert à l'analyse des données qui se présentent sous une forme numérique. L'algorithme de lissage utilisé est celui de la moyenne mobile. La moyenne mobile réalise l'opération de lissage en remplaçant chaque point calculé par une moyenne des points qui se situent au voisinage de ce point. Cette procédure est équivalente à un filtre passe bas dont les caractéristiques sont données par l'équation suivante :

$$y_s(i) = \frac{1}{2N+1} (y(i+N) + y(i+N-1) + \dots + y(i-N))$$

avec $y_s(i)$ est la valeur calculée du point d'indice i de la courbe filtrée et $(2N+1)$ est l'ordre du filtre. C'est le nombre de points utilisés pour calculer $y_s(i)$.

Une fois que les données sont filtrées, nous appliquons un algorithme d'interpolation dont l'objectif est de déterminer la loi d'évolution de la position de la mire étudiée par une fonction du type spline. En fait, l'application des splines consiste à approcher l'évolution réelle de la mire étudiée par une série des polynômes de degré égal à trois. Le fait de disposer de la fonction spline permet d'aborder sa dérivation et par la suite de déterminer la vitesse de la mire étudiée.

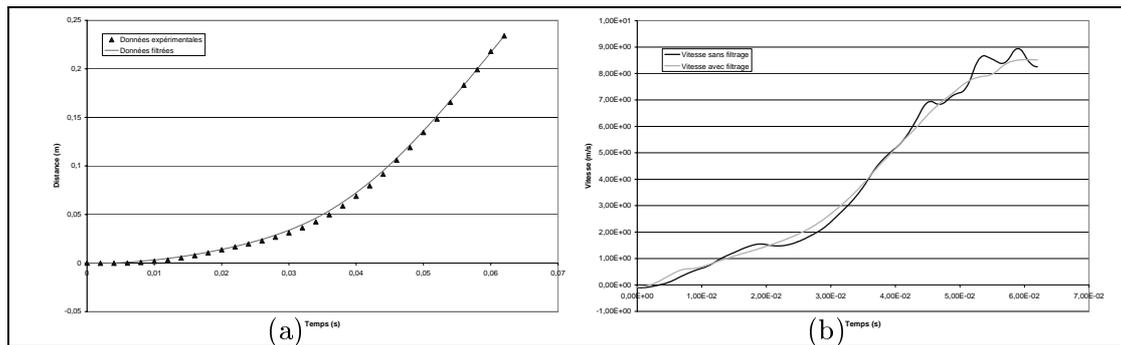


FIG. 5.5 – Données relatives à la mire 8 de l'essai n°7 (25Km/h). (a) données numériques de l'évolution de l'abscisse de la mire 8 et leurs filtrage par l'application d'une moyenne mobile d'ordre 9. (b) résultats de la dérivation numérique des deux séries de données de (a)

Afin de montrer l'utilité de cette démarche nous avons présenté sur la figure (5.5) le traitement d'un exemple. L'objectif est de tracer l'évolution de la vitesse longitudinale de la mire 8. Les données utilisées sont celles de l'essai n°7 (25Km/h). Les données de la mire considérée sont filtrées par l'application de la moyenne mobile d'ordre 9. Les données initiales ainsi que celles filtrées sont représentées par la figure (5.5(a)). Pour déterminer les vitesses correspondantes à chacune de deux courbes de la figure (5.5(a)), nous avons commencé par déterminer la fonction spline correspondante à chacune des deux courbes. Ensuite nous avons déterminé les vitesses par une simple dérivation numérique des fonctions splines correspondantes. L'évolution des vitesses

correspondantes est donnée par la figure (5.5(b)). Nous pouvons évidemment constater que la courbe qui découle des données filtrées présente moins de perturbations que celle obtenue à partir des données brutes.

5.3.2 Interprétation des confrontations

La démarche adoptée pour traiter les données obtenues de dépouillement des différents essais de test-crash est celle présentée dans le paragraphe précédent. Nous avons commencé par appliquer un filtre du type moyenne mobile pour toutes les données. Ensuite, nous avons déterminé la fonction de lissage (spline) correspondante à chaque série de données expérimentales. Ces fonctions ont été dérivées numériquement pour aboutir aux vitesses longitudinales et verticales des différentes mires du système.

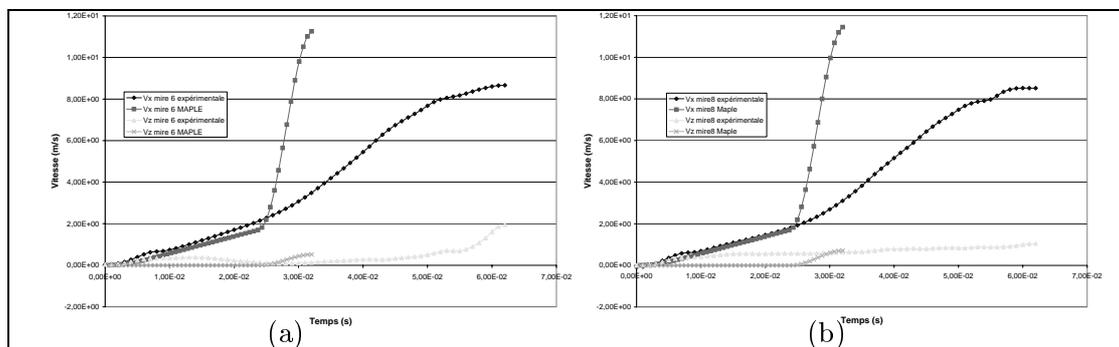


FIG. 5.6 – Évolutions des vitesses, expérimentales et théoriques, longitudinales V_x et verticales V_z des mires 6 (courbe (a)) et 8 (courbe (b)) durant l'essai n° 7.

Dans ce paragraphe on se propose de confronter les résultats des simulations faites en appliquant la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc dont la modélisation est faite sous MAPLE avec les résultats de dépouillement des essais expérimentaux de test-crash. Les simulations sont faites avec des paramètres identiques à ceux utilisés précédemment pour la confrontation de la modélisation simplifiée de la dynamique du choc (MAPLE) et la modélisation "complète" faite sous ADAMS. Les figures (5.6) et (5.7) présentent les résultats des confrontations pour les deux essais : l'essai 4 réalisé avec une vitesse de 20 Km/h et l'essai 7 réalisé avec une vitesse de 25 Km/h.

Nous remarquons qu'il y a de bonnes coïncidences entre les courbes expérimentales et théoriques durant l'intervalle de temps qui s'étend du début de la collision jusqu'à ce que la roue avant entre en collision avec le bloc moteur. Autrement dit, les deux modélisations ne présentent plus le même comportement quand le contact frontal se manifeste par la compression élastique de la roue avant dont la raideur a été trouvée expérimentalement par l'essai de compression d'une roue. Nous remarquons aussi que la durée de la collision trouvée par la modélisation théorique est plus courte que celle mesurée réellement sur l'essai de test-crash. Toutefois nous rappelons que la collision s'étend entre l'instant où la roue avant entre en contact avec la barrière mobile et l'instant de décollage du mannequin de la selle. Ce décollage se traduit, dans la modélisation

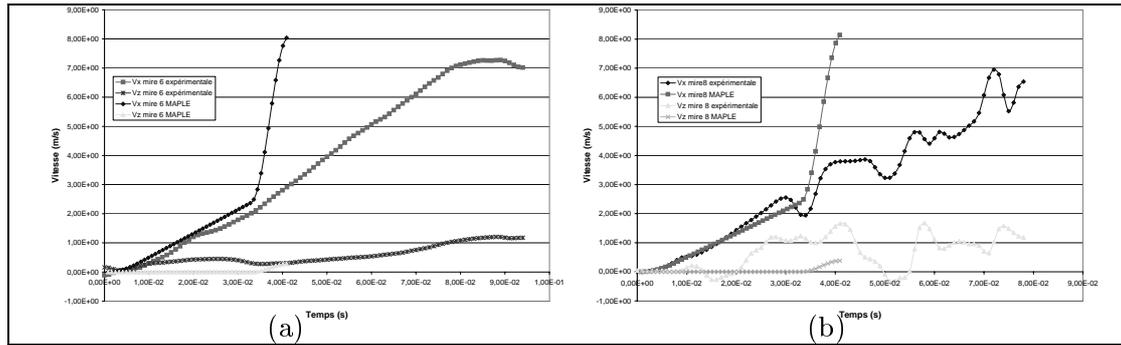


FIG. 5.7 – Évolutions des vitesses, expérimentales et théoriques, longitudinales V_x et verticales V_z des mires 6 (courbe (a)) et 8 (courbe (b)) durant l'essai n°4.

simplifiée, par le fait que soit la composante normale de la réaction de la selle sur le mannequin s'annule soit que le mannequin glisse d'une distance supérieure à la longueur de la selle, alors que pour les essais de test-crash la fin de la collision est décelée visuellement par l'analyse des enregistrements vidéo en cherchant à trouver approximativement l'instant de décollage du mannequin de la selle.

Les remarques précédemment citées sont maintenues pour l'analyse de la vitesse verticale de deux mires considérées dans cette comparaison (mire 6 et mire 8). En effet, les faibles déplacements selon la direction verticale des différentes mires du système, durant la collision, relativement à la résolution des images acquises par les caméras numériques (1000 pixels selon la direction verticale) ont introduit des fluctuations importantes dans l'allure de la composante verticale de la vitesse de chaque mire durant le dépouillement des essais. Ce phénomène apparaît aussi au niveau des vitesses longitudinales des certaines mires telle la mire 8 durant l'essai n°4 (figure (5.7(b))). Par contre dans ce cas la vitesse longitudinale présente une forme de tendance moyenne lisible.

A l'issue de toutes ces considérations nous pouvons conclure que durant l'intervalle du temps qui s'étend entre le début de collision et l'instant où la roue avant entre en contact avec le bloc moteur, le modèle reproduit le comportement cinématique trouvé par le dépouillement des essais de test-crash. Comme l'unique paramètre qui semble influencer sur les modèle simplifié de la collision durant l'intervalle de non coïncidence est la rigidité de la roue avant, on se propose dans la suite d'étudier son influence sur la vitesse d'une mire liée au cadre.

5.3.3 Étude d'influence de la rigidité de la roue avant

Afin d'étudier l'influence de la raideur de la roue avant sur le comportement cinématique du système nous avons réalisé plusieurs simulations en utilisant la modélisation simplifiée de la dynamique du choc développée sous MAPLE. Les données numériques utilisées pour ces simulations sont celles trouvées expérimentalement. Les mires étudiées sont : la mire 6 qui se trouve juste au dessous de la selle du cyclomoteur et la mire 8 qui se trouve au niveau de l'axe de la roue arrière. Les résultats des différentes simulations sont confrontés à ceux de l'essai de

test-crash n°7 dont la vitesse de collision est de 25Km/h et sont représentés par la figure (5.8).

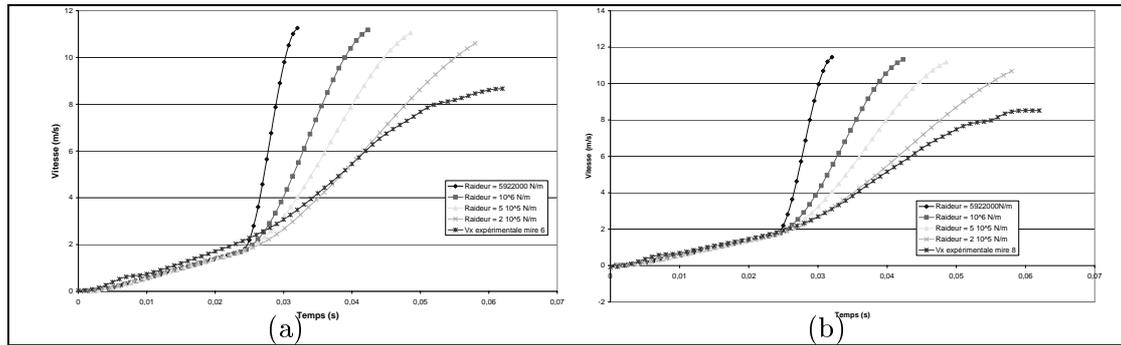


FIG. 5.8 – *Effet de la variation de la raideur de la roue avant sur la vitesse longitudinale de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).*

Pour la figure (5.8(a)) qui représente l'évolution de la vitesse longitudinale de la mire 6 ainsi que la figure (5.8(b)) qui représente l'évolution de la mire 8 pour différentes valeurs de la rigidité de la roue avant nous remarquons que pour les différentes valeurs prises de la rigidité de la roue avant les différentes courbes présentent les mêmes comportements dynamiques entre l'instant de début de collision et l'instant où la roue avant entre en collision avec le bloc moteur. A partir de cet instant l'influence de la rigidité de la roue avant est perceptible.

Il est à noter aussi que l'évolution de la vitesse longitudinale de deux mires étudiées prévue par la modélisation simplifiée de la dynamique du choc s'approche de plus en plus de l'évolution expérimentale en réduisant la valeur de la raideur de la roue avant. Les différences qui apparaissent à partir du moment où le contact entre la roue avant et le bloc moteur est établi, proviennent du fait que la déformation élastique de la roue avant ne représente pas tout ce qui se passe durant cette phase. En effet, certains phénomènes n'ont pas été pris en considération par cette modélisation tels que le comportement du bloc moteur et surtout de ses points d'attache au cadre qui se trouvent négligés durant cette modélisation : le contact qui prend lieu entre la roue avant et le bloc moteur engendre une force importante d'action de la roue avant sur le cadre. Cette action est modélisée, dans notre cas, par une force horizontale appliquée sur la roue avant au niveau de son axe alors que dans la réalité cette force présente en plus une composante selon la direction verticale. Le choix adopté pour l'application de la force frontale au niveau de l'axe de la roue avant est fait afin de simplifier la mise en équation du modèle : ce choix nous a permis d'avoir une forme simple pour la matrice de rigidité du système et par la suite un découplage entre les différentes variables.

En plus, un écart est noté à la fin de la simulation au niveau de la valeur finale de chaque vitesse longitudinale. Cet écart peut être expliqué par les simplifications adoptées pour la modélisation simplifiée de la collision étudiée tels que :

- Le phénomène de pliage de la fourche qui modifie considérablement la configuration géométrique du système durant la collision.

- Le coincement de la roue avant entre la barrière mobile et la chaussée qui entraîne une dissipation ainsi que la présence du pneumatique qui présente un modèle viscoélastique et qui a une grande influence surtout pour des vitesses de collision importantes.
- L'interaction entre le mannequin et le cyclomoteur. En fait, la modélisation de la selle est faite par un contact plan avec frottement dont le coefficient de frottement est de $\mu = 0.2$. En réalité, la selle présente une forme creuse dans laquelle la partie inférieure de la hanche du mannequin se trouve installée. En plus, la selle présente une nappe de ressorts qui donne au contact un caractère élastique.

5.3.4 Essais de calage avec l'essai n°7 et validation pour les autres essais

Dans les simulations du paragraphe précédent nous avons noté que le modèle ne reproduit pas exactement le cas réel d'une collision à partir de l'instant où la roue avant touche le bloc moteur. En effet le comportement dynamique de l'ensemble nécessite de ne pas tenir compte uniquement de la rigidité de la roue mais d'une rigidité structurelle causée par l'interaction entre les différents éléments du système. Pour vérifier cette notion de rigidité structurelle nous allons essayer, dans un premier temps, de déterminer la valeur de cette rigidité qui permet d'avoir une bonne corrélation entre les données de la simulation numérique et l'essai de test-crash n°7. La valeur de la rigidité trouvée sera, ensuite, utilisée dans des confrontations avec les autres essais de test-crash.

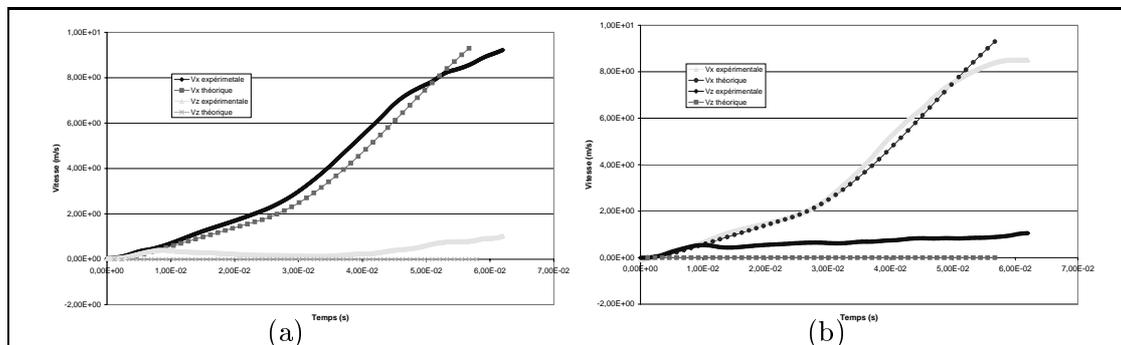


FIG. 5.9 – Évolution pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$ des vitesses longitudinale et verticale selon l'essai n°7 de test-crash et la simulation de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).

Afin de caler le modèle théorique sur les résultats expérimentaux nous avons traité la mire 8 de l'essai n°7. Nous avons constaté que pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$ nous trouvons une bonne corrélation. Ensuite nous avons vérifié, pour cette valeur de la rigidité de la roue avant, l'évolution des vitesses longitudinale et verticale d'une autre mire (mire 6). Les évolutions des vitesses de deux mires sont données par la figure (5.9). Pour cette figure nous notons que pour les deux mires 6 et 8 il y a une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et ceux de la simulation sous MAPLE pour la composante longitudinale de la

vitesse. Pour la composante verticale la corrélation est faible. Cette faible corrélation de la composante verticale est due à l'imprécision du dépouillement des essais. En effet nous avons mentionné au chapitre 4 que le cadrage adopté durant l'acquisition des images, d'une part, la résolution en pixels selon la direction verticale ainsi que le faible mouvement du système selon cette direction, d'autre part ont introduit des fluctuations importantes des données numériques. Ces fluctuations ont engendré des variations importantes de la composante verticale de la vitesse de chaque mire.

Dans la suite on se propose d'utiliser la raideur de $12 \cdot 10^4 N/m$ pour réaliser des confrontations avec des essais de test-crash à différentes vitesses. Nous allons considérer l'essai n°4 réalisé avec une vitesse de $20 Km/h$ et l'essai n°3 dont la vitesse est $15 Km/h$.

Sur la figure (5.10) nous présentons l'évolution, selon la formulation simplifiée et selon l'expérimentation, des composantes verticale et horizontale de la vitesse des mires 6 et 8. Il est à noter que l'évolution de la vitesse de la mire 8 donnée par la figure (5.10(b)) présente des fluctuations qui n'apparaissent pas au niveau de l'évolution des vitesses longitudinale et verticale de la mire 6 (5.10(a)). Ces fluctuations sont dues à un problème de suivi de la mire 8 durant le dépouillement.

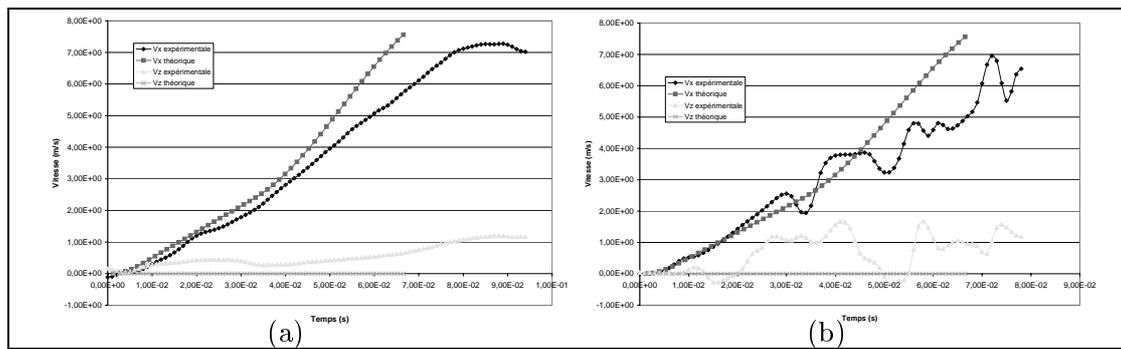


FIG. 5.10 – Évolution, pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$, des vitesses longitudinale et verticale selon l'essai n°4 de test-crash et la simulation de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).

D'autre part nous constatons que la durée de la collision prévue par la simulation est plus courte que celle donnée par l'expérimentation. Cette différence ne doit pas trop retenir notre attention car, nous avons vu que la fin de la collision pour les différents essais de test-crash est déterminée d'une manière visuelle approximative.

La figure (5.11) montre une confrontation entre une simulation numérique faite en utilisant la modélisation simplifiée de la dynamique du choc sous MAPLE pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 N/m$ d'une part et les résultats de l'essai de test-crash n°3 dont la vitesse de collision est de $15 Km/h$. Pour cette confrontation nous avons étudié l'évolution des vitesses longitudinales et verticales des mires 6 et 8.

Les remarques qui ont été faites pour la confrontation avec l'essai n°4 (figure 5.10) sont les mêmes pour cette confrontation. Ainsi nous pouvons conclure que le fait d'avoir la même tendance pour les trois essais de confrontation nous permet de dire que la raideur trouvée par

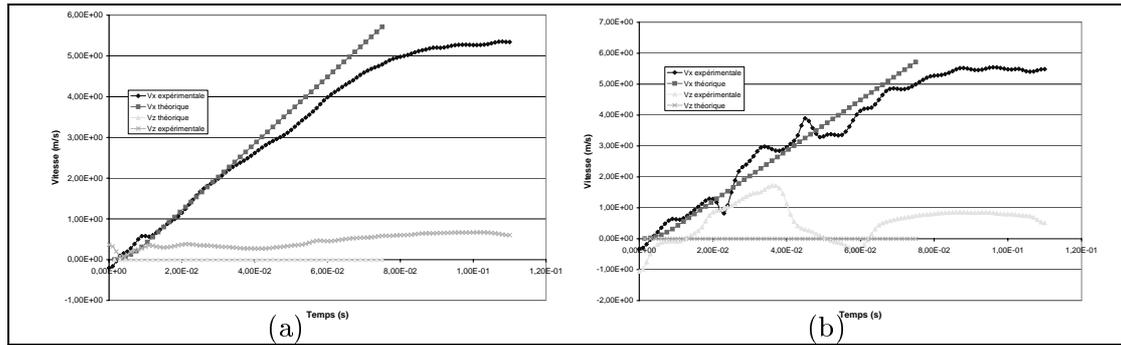


FIG. 5.11 – Évolution, pour une raideur de la roue avant de $12 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, des vitesses longitudinale et verticale selon l'essai n° 3 de test-crash et la simulation de la mire 6 (a) et de la mire 8 (b).

les essais de calage du modèle sur l'essai expérimental de test-crash n°7 et dont la valeur est de $12 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ permet de modéliser la rigidité du système durant la phase où la roue avant se trouve comprimée entre la barrière mobile et le bloc moteur.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté, dans un premier temps, une confrontation entre la modélisation simplifiée de la dynamique du choc et la modélisation complète (sans hypothèses simplificatrices) faite sous ADAMS d'une scène de test-crash. Ces tests-crash ont été présentés dans le chapitre 4. Ils consistent en une collision frontale entre un cyclomoteur sur lequel est installé un mannequin du type hybride II à l'arrêt avec une barrière mobile entraînée à différentes vitesses. L'objectif est de voir sur cet exemple de choc si la modélisation simplifiée permet de trouver les mêmes résultats que ceux obtenus par une modélisation équivalente développée sous ADAMS. Autrement dit, de voir si les hypothèses simplificatrices introduites par la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc n'ont pas un grand effet sur le comportement du système étudié durant la collision.

La confrontation entre les deux modélisations nous a permis de constater que la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc permet de reproduire les résultats trouvés par la modélisation complète sous ADAMS avec une très bonne précision, comme nous l'avons constaté au chapitre (3) dans le cas plus simple du double pendule venant heurter un mur. Cette constatation nous a encouragé à aborder la phase de la validation expérimentale de cette nouvelle formulation simplifiée.

A cet effet, les résultats des essais de test-crash ont été exploités. Les simulations numériques du comportement du système étudié basées sur la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc sont faites en utilisant les valeurs expérimentales caractérisant soit la géométrie soit l'inertie du système ainsi que les paramètres de la loi de comportement de la force de contact frontal. A l'issue de ces confrontations nous constatons que les résultats trouvés, par l'application de la modélisation simplifiée présentent des bonnes corrélations durant la période allant depuis

le début de la collision jusqu'à ce que la roue avant entre en collision avec le bloc moteur. A partir de cet instant l'évolution, selon la formulation simplifiée, diverge de celle déterminée à partir des essais de test-crash.

Afin de déceler la source de cette déviation nous avons réalisé une étude d'influence de la raideur de la roue avant sur le comportement dynamique du système. La rigidité de la roue avant est choisie pour cette étude d'influence car elle représente le paramètre le plus influant durant la phase de la compression de la roue avant. Nous avons constaté que la diminution de la rigidité de la roue avant permet d'approcher les deux courbes des vitesses (théorique et expérimentale). Ce résultat confirme l'hypothèse que nous avons émise sur l'origine des écarts entre simulation simplifiée et expérimentation : la prise en compte de la seule déformation de la roue est insuffisante. D'autres éléments déformables difficilement appréciables séparément sont à prendre en compte. En modifiant la raideur de la roue nous avons voulu concentrer dans cette grandeur un ensemble de phénomènes dispersés dans la structure.

La valeur de la raideur de la roue avant permettant de trouver une faible déviation entre les deux modélisations a été utilisée, par la suite, dans des confrontations avec d'autres données expérimentales obtenues à partir des essais de test-crash réalisés avec des vitesses différentes. Nous avons constaté que cette valeur de la raideur de la roue avant permet d'obtenir pratiquement la même déviation avec les données expérimentales des autres essais. Ainsi nous concluons que l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc permet d'obtenir des bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux des essais de test-crash. Dans notre cas la divergence obtenue entre les résultats des essais de test-crash et ceux des simulations numériques, en utilisant les valeurs expérimentales des différents paramètres, est due au choix de la modélisation adoptée pour le cyclomoteur.

Résumé et conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la reconstitution des accidents de la circulation routière impliquant un véhicule à deux roues. A cet effet une étude statistique ayant pour but la détermination des caractéristiques des accidents de la circulation routière impliquant un véhicule à deux roues a été présentée. Cette étude a été orientée vers la détermination du type du cyclomoteur, du conducteur et le scénario de l'accident les plus répandus. Comme conclusion de cette étude statistique nous constatons que :

- Le véhicule à deux roues le plus impliqué, en Tunisie, dans ce type d'accidents est un cyclomoteur (49 cm^3).
- Le conducteur est un homme, jeune, d'âge compris entre 15 et 35 ans, de sexe masculin et occupant le siège du conducteur.
- L'accident se fait généralement contre un véhicule léger selon une configuration de collision fronto-frontale.

A l'issue de cette étude une scène d'accident a été choisie. Il s'agit d'une collision fronto-frontale entre un obstacle mobile et un système formé par un cyclomotoriste assis sur la selle d'un cyclomoteur en mouvement.

Une modélisation du corps humain a été présentée. Celle-ci résulte d'une étude bibliographique. Les différentes grandeurs géométriques et inertielles que présente le corps humain ont été présentées sous la forme d'équations de régression linéaires. L'avantage d'adopter cette forme pour ces données nous a permis d'élaborer un modèle paramétré du corps humain. Ce modèle est implanté sous un logiciel de simulation dynamique des systèmes multibody ADAMS afin, d'une part, de simuler le comportement du cyclomotoriste durant un accident de la circulation routière et d'autre part, exploiter le modèle pour avoir des données inertielles qui serviront, par la suite, pour la mise en équation et la simulation.

Le système formé par le cyclomotoriste, cyclomoteur et l'obstacle mobile présente des contacts unilatéraux multiples. Les équations de mouvement du système durant la collision sont développées en utilisant la formulation de Lagrange. L'application de la mécanique classique du choc pour le traitement d'une collision de ce type est également délicate : sur un exemple nous avons montré que la mécanique classique du choc n'est pas adaptée à la description des chocs avec contacts unilatéraux multiples.

Notre contribution théorique apparaît dans le développement d'une nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Cette formulation suppose que durant la collision la configuration reste inchangée et qu'il y a des petites variations au niveau des coordonnées généralisées

du système. Ces variations causent la naissance des efforts importants de collision. Cette formulation est présentée sous la forme de forces et quantités d'accélération généralisées. Elle permet de modéliser l'évolution du système étudié, durant la collision, sous la forme d'expressions analytiques exprimées en fonction des conditions initiales et des certains paramètres du système.

Dans le but de valider cette nouvelle démarche, des simulations numériques d'un système mécanique simple ont été présentées. Ce système est formé par un double pendule entrant en collision avec un plan horizontal. Le comportement dynamique au point de contact est du type viscoélastique.

Les différentes simulations faites ainsi que les résultats trouvés nous permettent de valider, d'une part, l'hypothèse qui consiste à négliger les termes $\Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k$ devant les termes $a_{ij} \ddot{q}_j$ et d'autre part, l'approche simplificatrice pour la mise en équations des systèmes présentant des contacts unilatéraux multiples tout en *prenant l'hypothèse d'une configuration figée durant la collision*.

Cette nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc a été appliquée pour la modélisation d'une collision tridimensionnelle: Il s'agit d'une collision entre un système formé par un cyclomoteur sur lequel est installé un cyclomotoriste qui entre en collision avec un obstacle mobile. Comme ce système présente plusieurs contacts unilatéraux, les configurations qui peuvent être rencontrées durant la collision ont été étudiées. Pour chaque configuration les équations des liaisons ainsi que celles de mouvement ont été établies.

La validation numérique de l'application de la nouvelle formulation de la dynamique du choc au système étudié a nécessité une modélisation équivalente sous un logiciel de simulation dynamique des systèmes multicorps (ADAMS). Il s'agit d'une confrontation entre la modélisation simplifiée de la dynamique du choc et la modélisation complète (sans hypothèses simplificatrices) faite sous ADAMS d'une scène de test-crash qui consiste en une collision frontale entre un cyclomoteur sur lequel est installé un mannequin du type Hybrid II à l'arrêt avec une barrière mobile entraînée à différentes vitesses. L'objectif est de voir sur cet exemple de choc si la modélisation simplifiée permet de trouver les mêmes résultats que ceux obtenus par une modélisation équivalente développée sous ADAMS. Autrement dit, de voir si les hypothèses simplificatrices introduites par la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc n'ont pas un grand effet sur le comportement du système étudié durant la collision. La confrontation entre les deux modélisations nous a permis de constater que la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc permet de reproduire les résultats trouvés par la modélisation complète sous ADAMS avec une très bonne précision, comme nous l'avons constaté dans le cas du double pendule venant heurter un plan horizontal. Cette constatation nous a encouragé à aborder la phase de la validation expérimentale de cette nouvelle formulation simplifiée.

Afin de recueillir des données pour les simulations numériques du modèle nous avons conçu et réalisé des essais expérimentaux ayant pour but la détermination des paramètres géométriques et inertiels du cyclomoteur ainsi que l'identification des paramètres de la loi de comportement dynamique du contact frontal. Il s'agit de trois types d'expérimentation. En premier lieu nous avons identifié les éléments numériques d'inertie nécessaires pour résoudre les équations de mouvement du système. La méthode utilisée pour déterminer le centre de masse des différents solides

est la double pesés alors que celle utilisée pour identifier les éléments des tenseurs d'inertie des différents éléments du cyclomoteur est celle de pendule simple.

L'identification des paramètres de la loi de comportement du contact frontal a été réalisée. Nous avons supposé que ce contact présente un comportement du type élastoplastique caractérisé par la rigidité de la fourche et celle de la roue avant et par la force de limite plastique de la fourche. Afin de déterminer ces différents paramètres nous avons réalisé des essais mécaniques. Les essais de flexion de deux fourches ont permis la détermination de la raideur ainsi que la force de limite plastique. Pour la roue avant nous avons réalisé des essais de compression de deux roues à rayon et une roue à bâton avec pneumatique. Ces essais ont permis la détermination expérimentale de la rigidité de chaque type de roue ainsi que celle du pneumatique.

Le troisième type d'essais consiste en des tests-crash en coopération avec l'INRETS de Bron en France (Laboratoire de Biomécanique et Mécanique des Chocs -L.B.M.C.-). Le scénario de ces essais consiste à percuter un ensemble formé par un mannequin du type Hybrid II installé sur un cyclomoteur par une barrière mobile à différentes vitesses. Le protocole de ces essais a été présenté ainsi qu'une analyse des différentes données obtenues. Ainsi par une exploitation des données caractérisant l'évolution des différentes mires nous avons pu tirer des indices sur le déroulement de la collision.

Les résultats des essais de test-crash ont été exploités pour une confrontation avec les résultats des simulations numériques basées sur la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Ces simulations numériques sont faites en utilisant les valeurs expérimentales caractérisant soit la géométrie soit l'inertie du système ainsi que les paramètres de la loi de comportement de la force de contact frontal. A l'issue de ces confrontations nous constatons que les résultats trouvés, par l'application de la nouvelle modélisation simplifiée présentent de bonnes corrélations durant la période allant depuis le début de la collision jusqu'à ce que la roue avant entre en collision avec le bloc moteur. A partir de cet instant, l'évolution selon la formulation simplifiée, diverge de celle déterminée à partir des essais de test-crash.

Afin de déceler la source de cette déviation nous avons réalisé une étude d'influence de la raideur de la roue avant sur le comportement dynamique du système. La rigidité de la roue avant est choisie pour cette étude d'influence car elle représente le paramètre le plus influant durant la phase de la compression de la roue avant. Nous avons constaté que la diminution de la rigidité de la roue avant permet d'approcher les deux courbes des vitesses (théorique et expérimentale). Ce résultat confirme l'hypothèse que nous avons émise sur l'origine des écarts entre simulation simplifiée et expérimentation : la prise en compte de la seule déformation de la roue est insuffisante. D'autres éléments déformables difficilement appréciables séparément sont à prendre en compte. En modifiant la raideur de la roue nous avons voulu concentrer dans cette grandeur un ensemble de phénomènes dispersés dans la structure.

Notre apport expérimental a consisté à réaliser pour la première fois des essais de test-crash entre une barrière et un cyclomoteur. Les remarques que nous avons formulées à leur propos rendront certainement service à de nouvelles campagnes d'essais sur le même sujet.

La valeur de la raideur de la roue avant permettant de trouver une faible déviation entre les deux modélisations a été utilisée, par la suite, dans des confrontations avec d'autres données expérimentales obtenues à partir des essais de test-crash réalisés avec des vitesses différentes.

Nous avons constaté que cette valeur de la raideur de la roue avant permet d'obtenir pratiquement la même déviation avec les données expérimentales des autres essais. Ainsi nous concluons que l'application de la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc permet d'obtenir des bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux des essais de test-crash. Dans notre cas la divergence obtenue entre les résultats des essais de test-crash et ceux des simulations numériques, en utilisant les valeurs expérimentales des différents paramètres, est due au choix de la modélisation adoptée pour le cyclomoteur.

Cette nouvelle formulation de la dynamique du choc est appliquée dans ce travail pour modéliser le comportement du système formé par le cyclomotoriste et le cyclomoteur durant la première phase d'une collision fronto-frontale avec une barrière mobile. C'est la phase qui se déroule entre l'instant où la roue avant entre en contact avec l'obstacle mobile et l'instant où le cyclomotoriste quitte la selle. Nous avons montré, en utilisant des confrontations entre les résultats des essais expérimentaux de test-crash et ceux des simulations numériques, que cette formulation permet de modéliser le comportement dynamique du système sous une forme analytique. En plus, le fait de disposer du torseur cinématique du cyclomotoriste à la fin de la première collision nous permet de continuer l'étude de son mouvement jusqu'à sa collision avec le guidon du cyclomoteur où le deuxième choc aura lieu.

En analysant les différents enregistrements vidéo des essais de test-crash nous constatons que la troisième collision aura lieu entre le cyclomotoriste et la barrière mobile. A ce niveau une troisième modélisation permettra de trouver le torseur cinématique que présente le cyclomotoriste à l'issue de l'accident.

Comme perspective immédiate de ce travail notons les points suivants :

Le modèle du cyclomoteur est à modifier afin de prendre en compte certains phénomènes tels que le pliage de la fourche et l'influence de deux suspensions, avant et arrière, sur le comportement dynamique de l'ensemble: cyclomoteur – cyclomotoriste.

L'application de la nouvelle formulation de la dynamique du choc permet de trouver les lois d'évolution des différents paramètres du système sous une forme analytique. Par la suite trois types de développement peuvent être envisagés dans le cadre d'une continuité de ce travail :

- Les sollicitations dynamiques auxquelles le cyclomotoriste se trouve soumis durant la collision peuvent être déduites. La connaissance de ces efforts permettra d'aborder le domaine de conception et de dimensionnement des éléments de protection des utilisateurs des véhicules à deux roues tel que le casque.
- Cette nouvelle formulation peut être exploitée dans le domaine de la reconstitution des accidents des véhicules à deux roues en l'intégrant dans un outil informatique de reconstitution.
- Les différentes modélisations développées dans ce travail peuvent être explorées pour la création d'un simulateur numérique d'accidents de la circulation routière impliquant des véhicules à deux roues. Ce simulateur sera utilisé pour voir l'influence de certains paramètres sur la gravité de ce type d'accident.

D'autre part, cet outil mathématique de modélisation peut être utilisé dans le cadre plus large de l'étude dynamique des tous les systèmes présentant des contacts unilatéraux multiples

et soumis à des percussions.

Bibliographie

- [Ahme99] **AHMED S., LANKARANI H.M. et PEREIRA M.F.O.S.** *Frictional impact analysis in open-loop multibody mechanical systems*. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, Vol. 121, pp. 119 – 126.
- [Baca96] **BACA A.** *Precise determination of anthropometric dimension by means of image processing methods for estimating human body segment parameter values*. Journal of Biomechanics, 1996, Vol. 29, pp. 563 – 567.
- [Berg98] **BERG F.A., BÜRKLE H., SCHMIDTS F. et al.** *Analysis of the Passive Safety of Motorcycles Using accident Investigations and Crash Tests*. 16th International Technical Conference on the Enhanced Safety of Vehicles ESV, Windsor, Ontario, Canada, 31 Mai – 4 Juin, 1998. Paper number 98–S10–O–11.
- [Bhat95.1] **BHATT V. et KOECHLING J.** *Partitioning the parameter space according to different behaviors during three-dimensional impacts*. ASME Journal of applied Mechanics, 1995, Vol. 62, pp. 740 – 746.
- [Bhat95.2] **BHATT V. et KOECHLING J.** *Three-dimensional frictional rigid-body impact*. ASME Journal of applied Mechanics, 1995, Vol. 62, pp. 893 – 898.
- [Bogd02] **BOGDANOV V.V., VOLOBUEV V.S., KUDRYASHOV A.I. et al.** *MASS MEASUREMENTS: A suite for measuring mass, coordinates of the center of mass and moments of inertia of engineering components*. Measurement Techniques. 2002, Vol. 45, N°2.
- [Bros94.1] **BROSSARD J.P.** *Dynamique*. Fascicule du cours (6/16), réédition Avril 1994, INSA de Lyon.
- [Bros94.2] **BROSSARD J.P.** *Théorie du choc*. Fascicule du cours 16/16, réédition Avril 1994, INSA de Lyon.
- [Bros03] **BROSSARD J.P. et MAIFFREDY L.** *Cours dynamique des véhicules*. Lyon:INSA de Lyon (CIDL), session mars 2003.
- [Cana01] **CANAPLE B.** *Contribution au développement d'un outil de simulation prédictif des lésions crânio-encéphaliques par reconstruction d'accidents de la circulation*. Thèse de Génie Mécanique. Valenciennes: Université de Valenciennes Et du Hainaut Cambrésis, Janvier 2001.
- [Cana02] **CANAPLE B., RUNGEN G.P., MARKIEWICZ E. et al.** *Impact model development for the reconstruction of current motorcycle accidents*. International Journal of crash, 2002, Vol.7 N°3. pp.307 – 320.

- [Carr96] **CARRE J.R. et FILOU C.** *L'insécurité des cyclomotoristes : situation française et internationale*. Rapport INRETS N° 211, Novembre 1996.
- [Cata00] **CATALDO E. et SAMPAIO R.** *A Generalised model for collision between rigid bodies*, European congress on computational methods in applied sciences and engineering ECCOMAS 2000, Barcelona, 11 – 14 Septembre.
- [Chan75] **CHANDLER R.F. et al.** *Investigation of Inertial Properties of the human body*. PB-241 566, Aerospace Medical Research Laboratories. Mars 1975.
- [Chat97.1] **CHATTERJEE A.** *rigid body collisions : some general considerations, new collision laws and some experimental data* . PhD Thesis, Cornell University, 1997.
- [Chat97.2] **CHATTERJEE A. et RUINA A.** *Comments on "Y. HURMUZLU : A critical study of the applicability of rigid-body collision theory"*. ASME Journal of Applied Mechanics. Mars 1997. Vol. 64, pp. 247 – 248.
- [Chat98.1] **CHATTERJEE A. et RUINA A.** *A new algebraic rigid body collision law based on impulse space considerations*. ASME Journal of Applied Mechanics, 1998, Vol. 65, pp. 939 – 951.
- [Chat98.2] **CHATTERJEE A. et RUINA A.** *Two interpretations of rigidity in rigid body collision*. ASME Journal of Applied Mechanics. 1998, Vol. 65, pp. 894 – 900.
- [Chen00] **CHENG C.K., CHEN H., CHEN C. et al.** *Segment inertial properties of Chinese adults determined from magnetic resonance imagine*. Journal of Clinical Biomechanics, 2000, Vol. 15, pp.559 – 566.
- [Chol98] **CHOLET C.** *Chocs de solides rigides*. Thèse de doctorat en mathématique de l'université Paris VI. Mars 1998, 206p.
- [Clau63] **CLAUSER C.E.** *Moments of Inertia and Center of Gravity of the Living Human Body*. AMRL-TDR-63-36, Aerospace Medical Research Laboratories, Mai 1963.
- [Clau69] **CLAUSER C.E., McCONVILLE J.T., YOUNG W.** *Weight, Volume and Center of Mass of Segments of The human Body*. AMRL-TR-69-70, Aerospace Medical Research Laboratories. Aout 1969.
- [Clau80] **CLAUSER C.E., CUZZI J., McCONVILLE J.T. et al.** *Anthropometric Relationships of Body and Body Segment Moments of Inertia*. AFAMRL-TR-80-119, Air Force Aerospace Medical Research Laboratories. Decembre 1980.
- [Cott97] **COTTIN P.** *Accidents de Motocyclistes et Lésions Traumatiques : Etude de 230 Cas Survenus dans la Région Lyonnaise au cours de l'année 1995*. Thèse de médecine. Lyon : Université Claude Bernard – Lyon I, Avril 1997.
- [Depi75] **DEPINOY M.** *Les accidents de deux roues d'après une étude réalisée à l'hôpital de Tourcoing*. Thèse de médecine. Lille 1975.
- [Dido79] **DIDOYAN A.J.** *Etude Médicale et Technique d'Accidents Impliquant des Usagers de deux Roues à Moteur*. Thèse de médecine. Lyon : Université Claude Bernard – Lyon I, Novembre 1979.
- [Erdm97] **ERDMANN W.S.** *Geometric and inertial data of the trunk in adult males..* Journal of biomechanics, 1997, Vol.30, pp. 679 – 688.

- [Erne64] **ERNEST P. et HANAVANE JR.** *A Mathematical Model of the Human Body*. AMRL-TR-64-102, Aerospace Medical Research Laboratories. Octobre 1964.
- [Faik00] **FAIK S. et WITTERMAN H.** *Modeling of impact Dynamics : Literature survey*. International ADAMS User Conference, 2000.
- [Fatt01] **FATTOUM S.** *Etude des lésions provoquées par les accidents mortels des deux roues (A propos de 234 cas)*. Thèse de médecine. Tunis: Faculté de Médecine de Tunis, 15 Février 2001.
- [Filo01] **FILOU C. et JULIEN A.** *Accidentologie des jeunes cyclomotoristes en agglomération*. Rapport DERA 2001, 01 janvier 2001, Rapport intermédiaire sur convention CNRS/INRETS N°990026 SCHS.
- [Frém95] **FREMOND M.** *Rigid body collisions*, Physics letters A, 1995, Vol. 204, pp. 33 – 41.
- [Gent95] **GENTIL A., MANGIALARDI L., MANTRIOTA G. et al.** *Measurement of the inertia tensor: an experimental proposal*. Measurement, 1995, Vol. 16, pp. 241 – 254.
- [Gila02] **GILARDI G. et SHARF I.** *Literature survey of contact dynamics modeling*, Mechanism and Machine Theory, 2002, Vol. 37, pp. 1213 – 1239.
- [Guac98] **GUACEM A.** *Etude typologique et lésionnelle des usagers de 2 Roues décédés à la suite d'un accident de la voie publique sur le territoire Tunisien, durant l'année 1996*. Thèse de médecine N°1152. Sousse: Faculté de Médecine de Sousse, Février 1998.
- [Hadd99] **HADDAK M., SAÏDI A., LAUMON B. et al.** *Trauma Register Contribution to a better knowledge of motorcycle injury population*. Traffic Safety on two Continents 10th International Conference, 20 – 22 Septembre 1999, Malmö, Sweden.
- [Han93] **HAN I. et GILMORE B.J.** *Multi-body impact motion with friction-analysis, simulation and experimental validation*. ASME Journal of Mechanical Design , 1993, Vol. 115, pp. 412 – 422.
- [Happ90] **HAPPIAN-SMITH J., MACAULAY M.A. et CHINN B.P.** *Computer simulation of a simple motorcycle in glancing impacts with rigid barrier*. International Congress and Exposition (1990), Society of Automotive Engineers SAE, paper N°90754, pp. 149 – 163.
- [Hela92] **HELALI M.** *Les usagers de "2 Roues" accidentés de la circulation dans la région de Sousse en 1992. Typologie et bilan lésionnel*. Thèse de médecine N°837. Sousse: Faculté de Médecine de Sousse, Juin 1994.
- [Ivan95] **IVANOV A.P.** *On multiple impact*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1995, Vol.59, n°6, pp. 887 – 902.
- [kane85] **KANE T.R. et LEVINSON D.A.** *Dynamics : Theory and Applications*. New-York : McGraw-Hill 1985. ISBN 0-07-037846-0.
- [Kapa80] **KAPANDJI I.A.** *Physiologie articulaire..* Tome 1, 2 et 3. 5^{ème} édition. Paris: MALOINE 1980.
- [Khul87] **KHULIEF Y.A. et SHABANA A.A.** *A continuous force model for the impact analysis of flexible multibody systems*, Mechanism and Machine Theory, 1987, Vol. 22, pp. 213 – 224.

- [Kopj99] **KOPJAR B.** *Moped injuries among adolescent: a significant forgotten problem*, Accident Analysis & prevention, 1999, vol. 31, pp. 473 – 478.
- [Ma97] **MA D. et LANKARANI H.M.** *A multibody / finite element analysis approach for modeling of crash dynamic responses*. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, Vol. 119, pp. 382 – 387.
- [Maki00] **MAKI T., ASAI T., KAJZER J.** *The behavior of bicyclists in accidents with cars*. JSAE Review 21, 2000, pp.357 – 363.
- [Mass00] **MASSON M.T.** *Mechanics of robotic manipulation*, New-York: MIT press, 2001, 272p. ISBN 0262-133962.
- [Meir88] **MEIROVITCH L.** *Methods of Analytical Dynamics*. New-York: McGraw-Hill inc, 1988, ISBN 0-07-04155-6.
- [More71] **MOREAU J.J.** *Mécanique classique*. Tome II, Paris: Masson, 1971.
- [More83] **MOREAU J.J.** *Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints*. In : G. DEL PIERO, F. MACERI. Proceedings of the second meeting on unilateral problems in structural analysis RAVELLO, 22-24 Septembre , 1983, Edité par, pp. 175 – 246.
- [More88] **MOREAU J.J.** *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*. In : J.J. MOREAU, P. D. PANAGIOTOPOULOS. Nonsmooth mechanics and application. Wien: Springer, 1988, pp. 3 – 176.
- [Nort02] **NORTON J., DONALDSON N. et DEKKER L.** *3D whole body scanning to determine mass properties of legs*. Journal of Biomechanics, 2002, Vol.35, pp. 81 – 86.
- [Pérè53] **PÉRÈS J.** *Mécanique générale*. Paris: MASSON 1953.
- [Pfei96] **PFEIFFER F. et GLOCKER C.** *Multibody dynamics with unilateral contacts*. Wien: John Wiley, 1996, ISBN 0-471-15565-9
- [Pfei01] **PFEIFFER F.** *Multibody dynamics with unilateral contacts*. Journal of applied Mathematical Mechanics. 2001, Vol. 65 n°4, pp. 665 – 670.
- [Prad76] **PRADINES B.** *les problèmes des accidents de Moto. A propos de 263 cas observés au cours d'une année d'activité des SAMU de Toulouse et Mautauban*. Thèse médecine N°307. Toulouse, 1976.
- [Rame87] **RAMET M. et VALLET G.** *Typologie des Accidentés du Trafic Routier à Partir de 5459 Dossiers*. Rapport INRETS-LBC N°41.
- [Reyn78] **REYNOLDY H.M.** *Anthropometric Source Book, Volume I: Anthropometry for Designers*. U.S. Department of Commerce, National Technical Information Service. July 1978.
- [Ring01] **RINGEGNI P.L. et al.** *An experimental technique for determining mass inertial properties of irregular shape bodies and mechanical assemblies*. Measurement, 2001, Vol. 29, pp. 63 – 75.
- [Riga76] **RIGAU A., ACTIS M.D. et PATANELLA A.J.** *Epidémiologie des accidents de deux roues: Bilan statistique d'une année d'hospitalisation au CHU Rangueil 1976*. Thèse médecine N°171. Toulouse, Mars 1983.

- [Rubi98] **RUBIN M.B.** *Physical restrictions on the impulse acting during three-dimensional impact of two rigid bodies.* ASME Journal of applied Mechanics, 1998, Vol. 65, pp. 464 – 469.
- [Scha86] **SCHAPER D. et GRANDEL J.** *Motorcycle Collision with Passenger Cars– Analysis of Impact Mechanism, Kinematics, and effectiveness of Full Face Safety Helmets.* Society of Automotive Engineers SAE, 1986. Paper number 850094.
- [Smit91] **SMITH C.E.** *Prediction rebounds using rigid-body dynamics.* ASME Journal of applied Mechanics, 1991, Vol. 58, pp. 754 – 758.
- [Stoi96] **STOIANOVICI D. et HURMUZLU Y.** *A critical study of the applicability of rigid-body collision theory.* ASME Journal of applied Mechanics, 1996, Vol. 63, pp. 307 – 316.
- [Stro94] **STRONGE W.J.** *Swerve during three-dimensional impact of rough rigid bodies,* ASME Journal of applied Mechanics, 1994, Vol. 61, pp. 605 – 611.
- [Shaw93] **SHAWN P.M.** *Active Human surrogate Control of a Motorcycle: Stabilizing and Se-Stabilizing.* International Congress and exposition Detroit, Michigan (1993), Society of Automotive Engineers SAE, Technical paper series. N° 930226.
- [Vibe95] **VIBET C.** *Dynamics modeling of lagrangian mechanisms from inertial matrix elements,* 1995, Computer methode in applied mechanics and engineering, Vol. 123, pp. 317 – 326.
- [Yang00] **YANG J.K., LÖVSUND P., CAVALLERO C. et al.** *A Human-Body 3D Mathematical model for Simulation of Car – Pedestrian Impacts.* Journal of Crash Prevention and Injury Control, 2000, Vol.2 , pp. 131 – 149.
- [Zhao99] **ZHAO W.** *Kinetostatics and analysis methods for the impact problem.* European Journal of Mechanics: A/ Solids, 1999, Vol. 18, pp. 319 – 329.

Annexe A

Calcul de l'énergie cinétique du système

A.1 Matrices de passage

Afin de calculer les énergies cinétiques des différents sous-systèmes et par la suite de déduire l'énergie cinétique globale, les matrices de passage suivantes seront utilisées :

$$[\mathbf{R}_{01'}] = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{R}_{1'1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{R}_{12}] = \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \quad [\mathbf{R}_{23}] = \begin{bmatrix} C\beta & -S\beta & 0 \\ S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{R}_{3B}] = \begin{bmatrix} C\delta & 0 & S\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\delta & 0 & C\delta \end{bmatrix}$$

Avec

- $[\mathbf{R}_{ij}]$ indique une matrice de passage d'un repère R_j à un repère R_i ,
- $C\psi$ et $S\psi$ indiquent respectivement le cosinus et le sinus d'un angle (ψ dans ce cas)
- R_B étant un repère lié au conducteur. Il est pris d'une façon à avoir, initialement, le plan engendré par les deux vecteurs (\mathbf{x}_B et \mathbf{y}_B), parallèle au plan de la selle du cyclomoteur.

L'angle de roulis de la roue avant θ ainsi que celui de braquage du cyclomoteur β sont nuls. Le fait de prendre $\theta = 0$ permet de donner au point I une position simple à calculer. C'est le point de la roue avant qui se trouve sur le même niveau que l'axe de la roue avant. Le choix de ce point nous permettra par la suite d'avoir un découplage entre certaines variables dans les équations du mouvement et par la suite de faciliter leurs résolution. L'angle de braquage est pris nul dans le but de simplifier les équations. Dans ces conditions :

$$[\mathbf{R}_{1'1}] = [\mathbf{R}_{23}] = [\mathbf{I}_3]$$

avec $[\mathbf{I}_3]$ est la matrice identité de dimension 3×3 .

A.2 Énergie cinétique de la barrière mobile (S_0)

L'énergie cinétique de la barrière mobile est donnée par l'expression suivante :

$$T_0 = \frac{1}{2} M_0 (\mathbf{V}_{S_0}^0 (G_0))^2 = \frac{1}{2} M_0 \dot{x}_b^2$$

A.3 Énergie cinétique de la roue avant (S_1)

L'énergie cinétique de la roue avant est donnée par l'expression suivante :

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 (\mathbf{V}_{S_1}^0 (G_1))^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{S_1}^{0T} [\mathbf{I}_{S_1}] \boldsymbol{\Omega}_{S_1}^0$$

avec

$$\mathbf{V}_{S_1}^0 (G_1)_{R_1} = \mathbf{R}_{1'0} \mathbf{V}_{S_1}^0 (I)_{R_0} + (\boldsymbol{\Omega}_{S_1}^0)_{R_1} \times \mathbf{I} \mathbf{G}_1$$

et

$$(\boldsymbol{\Omega}_{S_1}^0)_{R_1} = \dot{\psi} \mathbf{z}_{1'} + \dot{\theta} \mathbf{x}_1 = [\dot{\theta}, 0, \dot{\psi}]^T$$

A.4 Énergie cinétique de la fourche (S_2)

L'énergie cinétique de la fourche est donnée par l'expression suivante :

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 (\mathbf{V}_{S_2}^0 (G_2))^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{S_2}^{0T} [\mathbf{I}_{S_2}] \boldsymbol{\Omega}_{S_2}^0$$

Or l'expression de la vitesse $\mathbf{V}_{S_2}^0 (G_2)_{R_2}$ est la suivante :

$$\mathbf{V}_{S_2}^0 (G_2)_{R_2} = \mathbf{R}_{21} \mathbf{V}_{S_1}^0 (G_1)_{R_1} + (\boldsymbol{\Omega}_{S_2}^0)_{R_2} \times \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2$$

et la vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{S_2}^0$ est donnée par :

$$(\boldsymbol{\Omega}_{S_2}^0)_{R_2} = \dot{\phi} \mathbf{y}_2 + \mathbf{R}_{21} (\boldsymbol{\Omega}_{S_1}^0)_{R_1} = \left[\begin{array}{c} \cos(\phi) \dot{\theta} - \sin(\phi) \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \sin(\phi) + \dot{\psi} \cos(\phi) \end{array} \right]_{R_2}$$

A.5 Énergie cinétique du cadre (S_3)

L'énergie cinétique du solide S_3 , formé par le cadre, la selle et la roue arrière, est donnée par l'expression suivante :

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 (\mathbf{V}_{S_3}^0 (G_3))^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{S_3}^{0T} [\mathbf{I}_{S_3}] \boldsymbol{\Omega}_{S_3}^0$$

La vitesse $\mathbf{V}_{S_3}^0 (G_3)_{R_3}$ est donnée par :

$$\mathbf{V}_{S_3}^0 (G_3)_{R_3} = \mathbf{V}_{S_3}^0 (O_2)_{R_3} + (\boldsymbol{\Omega}_{S_3}^0)_{R_3} \times \mathbf{O}_2 \mathbf{G}_3$$

La vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}_{S_3}^0$ est donnée par :

$$(\boldsymbol{\Omega}_{S_3}^0)_{R_3} = \dot{\beta} \mathbf{z}_3 + \mathbf{R}_{32} (\boldsymbol{\Omega}_{S_2}^0)_{R_2} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\psi} \sin(\phi) \\ \dot{\phi} \\ \dot{\beta} + \sin(\phi) \dot{\theta} + \dot{\psi} \cos(\phi) \end{bmatrix}_{R_3}$$

A.6 Énergie cinétique du cyclomotoriste (S_4)

Le corps du cyclomotoriste présente des degrés de liberté par rapport au cadre du cyclomoteur. Il s'agit de deux translations, la première selon la direction longitudinale et la seconde selon la direction verticale, par rapport à la selle et une rotation autour de l'axe (C, \mathbf{y}_4) qui modélise le mouvement de tangage. En décomposant la vitesse du cyclomotoriste par rapport au référentiel absolu, on trouve :

$$\mathbf{V}_{S_4}^0 (G_4)_{R_B} = \mathbf{V}_{S_4}^{S_3} (G_4)_{R_B} + \mathbf{V}_{S_3}^0 (G_4)_{R_B}$$

avec

$$\mathbf{V}_{S_3}^0 (G_4)_{R_B} = \mathbf{V}_{S_3}^0 (G_3)_{R_B} + (\mathbf{G}_4 \mathbf{G}_3)_{R_B} \times (\boldsymbol{\Omega}_{S_3}^0)_{R_B}$$

et

$$\mathbf{V}_{S_4}^{S_3} (G_4)_{R_B} = \mathbf{V}_{S_4}^{S_3} (C)_{R_B} + (\mathbf{G}_4 \mathbf{C})_{R_B} \times (\boldsymbol{\Omega}_{S_4}^{S_3})_{R_B}$$

C est le point de contact du cyclomotoriste avec la selle. Sa vitesse est donnée par :

$$\mathbf{V}_{S_4}^{S_3} (C)_{R_3} = \begin{bmatrix} \dot{x}_C & 0 & \dot{z}_C \end{bmatrix}_{R_3} \quad (\text{A.1})$$

La vitesse angulaire de rotation du solide S_4 par rapport au référentiel absolu exprimée dans le référentiel R_B est donnée par l'expression suivante :

$$(\boldsymbol{\Omega}_{S_4}^0) = \dot{\delta} \mathbf{y}_B + \mathbf{R}_{B3} (\boldsymbol{\Omega}_{S_3}^0)_{R_3} = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \cos(\delta) (\dot{\theta} \cos(\phi) - \dot{\psi} \sin(\phi)) \\ -\sin(\delta) (\dot{\beta} + \dot{\theta} \sin(\phi) + \dot{\psi} \cos(\phi)) \\ \dot{\phi} + \dot{\delta} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \sin(\delta) (\cos(\phi) \dot{\theta} - \dot{\psi} \sin(\phi)) + \\ \cos(\delta) (\dot{\beta} + \dot{\theta} \sin(\phi) + \dot{\psi} \cos(\phi)) \end{array} \right) \end{bmatrix}_{R_B}$$

Par la suite, l'énergie cinétique du cyclomotoriste est donnée par :

$$T_4 = \frac{1}{2} M_4 (\mathbf{V}_{S_4}^0 (G_4))^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{S_4}^{0T} [\mathbf{I}_{S_4}] \boldsymbol{\Omega}_{S_4}^0$$

A.7 Énergie cinétique du système

Une fois que les différentes énergies cinétiques sont calculées, celle de tout le système sera déduite par une simple sommation. Ainsi nous trouvons :

$$T = 0.5 M_4 ((\cos(\phi)(\cos(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)\dot{\psi}x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)\dot{\psi}y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \sin(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi}x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi}y_r + \cos(\psi)\dot{y}_r)) - \sin(\phi)\dot{z}_r + (\dot{\phi})c_{O_2} - \cos(\phi)(\dot{\psi})b_{O_2} + (\dot{\phi})c_{G_3} - \cos(\phi)(\dot{\psi})b_{G_3} + (\dot{\phi})(z_C - \sin(\delta)a_C$$

$$\begin{aligned}
& + \cos(\delta)c_C - \cos(\phi)(\dot{\psi})b_C + \dot{x}_C + (\dot{\delta})(-\sin(\delta)a_C + \cos(\delta)c_C)^2 + (-\sin(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r \\
& - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \cos(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r + \cos(\psi)\dot{y}_r - (\dot{\psi})R + \cos(\phi)(\dot{\psi})a_{O_2} + \sin(\phi)(\dot{\psi})c_{O_2} \\
& + \cos(\phi)(\dot{\psi})a_{G_3} + \sin(\phi)(\dot{\psi})c_{G_3} + \cos(\phi)(\dot{\psi})(x_C + \cos(\delta)a_C + \sin(\delta)c_C) + \sin(\phi)(\dot{\psi})(z_C - \sin(\delta)a_C + \cos(\delta)c_C))^2 \\
& + (\sin(\phi)(\cos(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \sin(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r \\
& + \cos(\psi)\dot{y}_r)) + \cos(\phi)\dot{z}_r - \sin(\phi)(\dot{\psi})b_{O_2} - (\dot{\phi})a_{O_2} - \sin(\phi)(\dot{\psi})b_{G_3} - (\dot{\phi})a_{G_3} - \sin(\phi)(\dot{\psi})b_C - (\dot{\phi})(x_C + \cos(\delta)a_C + \sin(\delta)c_C) \\
& + \dot{z}_C - (\dot{\delta})(\cos(\delta)a_C + \sin(\delta)c_C))^2) \\
& + 0.5 ((-\cos(\delta)\sin(\phi)\dot{\psi} - \sin(\delta)\cos(\phi)\dot{\psi})A_4 + (-\sin(\delta)\sin(\phi)\dot{\psi} + \cos(\delta)\cos(\phi)\dot{\psi})E_4)(-\cos(\delta)\sin(\phi)\dot{\psi} - \sin(\delta)\cos(\phi)\dot{\psi}) \\
& + 0.5 ((-\cos(\delta)\sin(\phi)\dot{\psi} - \sin(\delta)\cos(\phi)\dot{\psi})E_4 + (-\sin(\delta)\sin(\phi)\dot{\psi} + \cos(\delta)\cos(\phi)\dot{\psi})C_4)(-\sin(\delta)\sin(\phi)\dot{\psi} + \cos(\delta)\cos(\phi)\dot{\psi}) \\
& + 0.5 M_2((\cos(\phi)(\cos(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)x_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \sin(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r \\
& - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r + \cos(\psi)\dot{y}_r) - \sin(\phi)\dot{z}_r + (\dot{\phi})c_{G_2} - \cos(\phi)(\dot{\psi})b_{G_2})^2 + (-\sin(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r \\
& - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \cos(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r + \cos(\psi)\dot{y}_r - (\dot{\psi})R + \cos(\phi)(\dot{\psi})a_{G_2} + \sin(\phi)(\dot{\psi})c_{G_2})^2 \\
& + (\sin(\phi)(\cos(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \sin(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r \\
& + \cos(\psi)\dot{y}_r)) + \cos(\phi)\dot{z}_r - \sin(\phi)(\dot{\psi})b_{G_2} - (\dot{\phi})a_{G_2})^2) \\
& + 0.5 (\dot{\phi})^2 B_2 - M_1((\dot{\psi})y_r \dot{x}_r + (\dot{\psi})y_r \dot{x}_b \cos(\psi) - (\dot{\psi})x_r \dot{y}_r + (\dot{\psi})R \dot{y}_r + 0.5 (\dot{\phi} + \dot{\delta})^2 B_4 + 0.5 (\dot{\phi})^2 B_3 \\
& + 0.5 \dot{\psi}^2 (-\sin(\phi)(E_2 + E_3) + \cos(\phi)(C_2 + C_3)) \cos(\phi) - 0.5 \dot{\psi}^2 (-\sin(\phi)(A_2 + A_3) + \cos(\phi)(E_2 + E_3)) \sin(\phi) \\
& + 0.5 M_3((\cos(\phi)(\cos(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \sin(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r \\
& - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r + \cos(\psi)\dot{y}_r) - \sin(\phi)\dot{z}_r + (\dot{\phi})c_{O_2} - \cos(\phi)(\dot{\psi})b_{O_2} + (\dot{\phi})c_{G_3} - \cos(\phi)(\dot{\psi})b_{G_3})^2 \\
& + (-\sin(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \cos(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r \\
& + \cos(\psi)\dot{y}_r) - (\dot{\psi})R + \cos(\phi)(\dot{\psi})a_{O_2} + \sin(\phi)(\dot{\psi})c_{O_2} + \cos(\phi)(\dot{\psi})a_{G_3} + \sin(\phi)(\dot{\psi})c_{G_3})^2 + (\sin(\phi)(\cos(\psi)(\dot{x}_b - \sin(\psi)(\dot{\psi})x_r \\
& + \cos(\psi)\dot{x}_r - \cos(\psi)(\dot{\psi})y_r - \sin(\psi)\dot{y}_r) + \sin(\psi)(\cos(\psi)(\dot{\psi})x_r + \sin(\psi)\dot{x}_r - \sin(\psi)(\dot{\psi})y_r + \cos(\psi)\dot{y}_r)) + \cos(\phi)\dot{z}_r \\
& - \sin(\phi)(\dot{\psi})b_{O_2} - (\dot{\phi})a_{O_2} - \sin(\phi)(\dot{\psi})b_{G_3} - (\dot{\phi})a_{G_3})^2 + 0.5 (\dot{\psi})^2 A_1 + 0.5 M_0(\dot{x}_b)^2 \\
& + 0.5 M_1((\dot{\psi})^2 R^2 + (\dot{\psi})^2 (x_r)^2 + (\dot{\psi})^2 (y_r)^2 + (\dot{x}_r)^2 + (\dot{x}_b)^2 + (\dot{y}_r)^2 + (\dot{z}_r)^2) \\
& + M_1(-\dot{y}_r \dot{x}_b \sin(\psi) + \cos(\psi)\dot{x}_b \dot{x}_r - (\dot{\psi})^2 x_r R - \dot{\psi} x_r \dot{x}_b \sin(\psi) + \dot{\psi} R \dot{x}_b \sin(\psi))
\end{aligned}$$

A.8 Expressions analytiques des éléments de la matrice d'inertie $[A]$

Le vecteur accélérations généralisées s'écrit sous la forme suivante:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \left[\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, \ddot{\beta}, \ddot{\delta}, \ddot{x}_r, \ddot{y}_r, \ddot{z}_r, \ddot{x}_b, \ddot{x}_C, \ddot{z}_C \right]^T$$

Les expressions analytiques des coefficients $a_{i,j}$ de la matrice $[A]$ sont représentés par la suite. Comme cette matrice est symétrique, les coefficients $a_{i,j}$ avec $i \leq j$ seront présentés.

$$\begin{aligned}
a_{1,1} = & ((-c_{O_2})^2 + 2a_{G_3}a_{O_2} - c_{G_3}^2 - 2c_{G_3}c_{O_2} + a_{O_2}^2 + a_{G_3}^2)(\cos(\phi))^2 + ((2a_{O_2}c_{G_3} + 2a_{G_3}c_{G_3} + 2a_{O_2}c_{O_2} + 2a_{G_3}c_{O_2})\sin(\phi) + \\
& 2x_r a_{G_3} + 2x_r a_{O_2} - 2R a_{O_2} - 2R a_{G_3})\cos(\phi) + (2x_r c_{O_2} + 2c_{G_3}x_r - 2c_{G_3}R - 2c_{O_2}R)\sin(\phi) + (y_r)^2 + c_{G_3}^2 + 2y_r b_{G_3} + 2c_{G_3}c_{O_2} + \\
& b_{G_3}^2 + b_{O_2}^2 - 2x_r R + c_{O_2}^2 + 2y_r b_{O_2} + 2b_{O_2}b_{G_3} + (x_r)^2 + R^2)M_3 + ((-2c_{O_2} - 2z_C - 2c_{G_3})a_C \sin(\delta) + ((-2c_C^2 + 2a_C^2)(\cos(\delta))^2 + \\
& (4\sin(\delta)a_C c_C + (2x_C + 2a_{G_3} + 2a_{O_2})a_C + (-2c_{O_2} - 2z_C - 2c_{G_3})c_C)\cos(\delta) + ((2z_C + 2c_{G_3} + 2c_{O_2})a_C + (2x_C + 2a_{G_3} + 2a_{O_2})c_C)\sin(\delta) \\
& - 2c_{G_3}c_{O_2} + 2a_{O_2}x_C + 2a_{G_3}x_C - 2z_C c_{O_2} - a_C^2 + c_C^2 - c_{O_2}^2 + (x_C)^2 - (z_C)^2 - c_{G_3}^2 + 2a_{G_3}a_{O_2} - 2c_{G_3}z_C + a_{O_2}^2 + a_{G_3}^2)(\cos(\phi))^2 + \\
& (-2\sin(\delta)a_C c_C + (2z_C + 2c_{G_3} + 2c_{O_2})c_C)\cos(\delta) + ((2x_r - 2R)c_C \cos(\delta) + (-2x_r + 2R)a_C \sin(\delta) - 2z_C R - 2c_{G_3}R - 2c_{O_2}R + 2c_{G_3}x_r + \\
& 2x_r c_{O_2} + 2x_r z_C)\sin(\phi) + ((4(\cos(\delta))^2 c_C a_C + ((-2a_C^2 + 2c_C^2)\sin(\delta) + (2z_C + 2c_{G_3} + 2c_{O_2})a_C + (2x_C + 2a_{G_3} + 2a_{O_2})c_C)\cos(\delta) + \\
& ((-2x_C - 2a_{G_3} - 2a_{O_2})a_C + (2z_C + 2c_{G_3} + 2c_{O_2})c_C)\sin(\delta) - 2a_C c_C + 2a_{G_3}c_{O_2} + 2c_{G_3}x_C + 2z_C x_C + 2a_{O_2}c_{G_3} + 2a_{G_3}z_C + \\
& 2a_{G_3}c_{G_3} + 2c_{O_2}x_C + 2a_{O_2}z_C + 2a_{O_2}c_{O_2})\sin(\phi) + (2x_r - 2R)a_C \cos(\delta) + (2x_r - 2R)c_C \sin(\delta) + 2x_r a_{O_2} + 2x_r a_{G_3} - 2R a_{G_3} + \\
& 2x_r x_C - 2R x_C - 2R a_{O_2})\cos(\phi) + 2b_{O_2}b_{G_3} + 2b_{O_2}b_C + 2c_{G_3}c_{O_2} + 2b_{G_3}b_C - 2x_r R + 2c_{G_3}z_C + 2z_C c_{O_2} + 2y_r b_C + 2y_r b_{G_3} + \\
& (c_C^2 - a_C^2)(\cos(\delta))^2 + 2y_r b_{O_2} + a_C^2 + R^2 + (x_r)^2 + (y_r)^2 + (z_C)^2 + c_{O_2}^2 + c_{G_3}^2 + b_{G_3}^2 + b_{O_2}^2 + b_C^2)M_4 + ((a_{G_2}^2 - c_{G_2}^2)(\cos(\phi))^2 + \\
& (2\sin(\phi)a_{G_2}c_{G_2} - 2R a_{G_2} + 2x_r a_{G_2})\cos(\phi) + (2x_r c_{G_2} - 2R c_{G_2})\sin(\phi) + (y_r)^2 + (x_r)^2 + b_{G_2}^2 + R^2 + c_{G_2}^2 + 2y_r b_{G_2} - 2x_r R)M_2 + \\
& ((-2A_4 + 2C_4)(\cos(\delta))^2 - 4E_4 \sin(\delta)\cos(\delta) - A_3 + C_2 - C_4 + C_3 + A_4 - A_2)(\cos(\phi))^2 + (-4E_4(\cos(\delta))^2 + (-2C_4 + 2A_4)\sin(\delta)\cos(\delta) + \\
& 2E_4 - 2E_3 - 2E_2)\sin(\phi)\cos(\phi) + (A_4 - C_4)(\cos(\delta))^2 + 2E_4 \sin(\delta)\cos(\delta) + (-2x_r R + R^2 + (x_r)^2 + (y_r)^2)M_1 + A_3 + C_4 + A_1 + A_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1.2} &= ((-2a_{O_2}c_{O_2} - 2a_{O_2}c_{G_3} - 2a_{G_3}c_{G_3} - 2a_{G_3}c_{O_2})(\cos(\phi))^2 + (-c_{O_2}^2 + 2a_{G_3}a_{O_2} - c_{G_3}^2 - 2c_{G_3}c_{O_2} + a_{O_2}^2 + a_{G_3}^2) \sin(\phi) - \\
& c_{G_3}x_r - z_r a_{G_3} - z_r a_{O_2} - x_r c_{O_2} + c_{G_3}R + c_{O_2}R) \cos(\phi) + (-Ra_{G_3} + x_r a_{G_3} + x_r a_{O_2} - z_r c_{G_3} - Ra_{O_2} - z_r c_{O_2}) \sin(\phi) - z_r x_r \\
& + a_{O_2}c_{G_3} + z_r R + a_{O_2}c_{O_2} + a_{G_3}c_{O_2} + a_{G_3}c_{G_3})M_3 + ((-4.0(\cos(\delta))^2 c_C a_C + ((-2c_C^2 + 2a_C^2) \sin(\delta) + (-2c_{O_2} - 2z_C - 2c_{G_3})a_C + \\
& (-2x_C - 2a_{G_3} - 2a_{O_2})c_C) \cos(\delta) + ((2x_C + 2a_{G_3} + 2a_{O_2})a_C + (-2c_{O_2} - 2z_C - 2c_{G_3})c_C) \sin(\delta) - 2a_{G_3}c_{G_3} + 2a_C c_C - 2a_{O_2}z_C - \\
& 2a_{G_3}c_{O_2} - 2c_{O_2}x_C - 2a_{O_2}c_{O_2} - 2a_{O_2}c_{G_3} - 2z_C x_C - 2a_{G_3}z_C - 2c_{G_3}x_C)(\cos(\phi))^2 + (((-2c_C^2 + 2a_C^2)(\cos(\delta))^2 + \\
& (4 \sin(\delta)a_C c_C + (2x_C + 2a_{G_3} + 2a_{O_2})a_C + (-2c_{O_2} - 2z_C - 2c_{G_3})c_C) \cos(\delta) + ((2z_C + 2c_{G_3} + 2c_{O_2})a_C + (2x_C + 2a_{G_3} + 2a_{O_2})c_C) \sin(\delta) - \\
& 2c_{G_3}c_{O_2} + 2a_{O_2}x_C + 2a_{G_3}x_C - 2z_C c_{O_2} - a_C^2 + c_C^2 - c_{O_2}^2 + (x_C)^2 - (z_C)^2 - c_{G_3}^2 + 2a_{G_3}a_{O_2} - 2c_{G_3}z_C + a_{O_2}^2 + a_{G_3}^2) \sin(\phi) + \\
& (-z_r a_C + (R - x_r)c_C) \cos(\delta) + ((x_r - R)a_C - z_r c_C) \sin(\delta) + z_C R - c_{G_3}x_r - x_r c_{O_2} + c_{O_2}R - z_r x_C - x_r z_C - z_r a_{O_2} + c_{G_3}R \\
& - z_r a_{G_3}) \cos(\phi) + (((x_r - R)a_C - z_r c_C) \cos(\delta) + (z_r a_C + (x_r - R)c_C) \sin(\delta) - Ra_{G_3} + x_r a_{O_2} - z_r c_{G_3} - Ra_{O_2} + x_r a_{G_3} - z_r c_{O_2} - z_r z_C + \\
& x_r x_C - Rx_C) \sin(\phi) + 2(\cos(\delta))^2 c_C a_C + ((-a_C^2 + c_C^2) \sin(\delta) + (c_{G_3} + c_{O_2} + z_C)a_C + (a_{O_2} + a_{G_3} + x_C)c_C) \cos(\delta) + \\
& ((-a_{G_3} - a_{O_2} - x_C)a_C + (c_{G_3} + c_{O_2} + z_C)c_C) \sin(\delta) + c_{G_3}x_C - a_C c_C + a_{G_3}c_{G_3} + z_r R + a_{O_2}z_C + a_{G_3}c_{O_2} - z_r x_r + a_{O_2}c_{O_2} + a_{O_2}c_{G_3} + \\
& z_C x_C + a_{G_3}z_C + c_{O_2}x_C)M_4 + (-2(\cos(\phi))^2 c_{G_2} a_{G_2} + ((a_{G_2}^2 - c_{G_2}^2) \sin(\phi) - z_r a_{G_2} + Rc_{G_2} - x_r c_{G_2}) \cos(\phi) + \\
& (-Ra_{G_2} - z_r c_{G_2} + x_r a_{G_2}) \sin(\phi) + a_{G_2}c_{G_2} + z_r R - z_r x_r)M_2 + (4.0E_4(\cos(\delta))^2 + (-2A_4 + 2C_4) \sin(\delta) \cos(\delta) + 2E_2 - 2E_4 + 2E_3)(\cos(\phi))^2 + \\
& ((-2A_4 + 2C_4)(\cos(\delta))^2 - 4.0E_4 \sin(\delta) \cos(\delta) - A_3 + C_2 - C_4 + C_3 + A_4 - A_2) \sin(\phi) \cos(\phi) - 2E_4(\cos(\delta))^2 + \\
& (A_4 - C_4) \sin(\delta) \cos(\delta) + (z_r R - z_r x_r)M_1 - E_2 + E_4 - E_3 \\
a_{1.3} &= ((-c_{O_2}b_{O_2} - c_{G_3}b_{G_3} - c_{G_3}b_{O_2} - c_{O_2}b_{G_3} - c_{O_2}y_r - c_{G_3}y_r) \cos(\phi) + (b_{G_3}a_{G_3} + a_{O_2}y_r + a_{O_2}b_{G_3} + a_{G_3}y_r + a_{G_3}b_{O_2} + a_{O_2}b_{O_2}) \\
& \sin(\phi))M_3 + (((-b_C - b_{O_2} - y_r - b_{G_3})c_C \cos(\delta) + (b_{O_2} + b_C + b_{G_3} + y_r)a_C \sin(\delta) - c_{G_3}b_{G_3} - c_{G_3}b_C - c_{O_2}b_{G_3} - c_{G_3}b_{O_2} - c_{O_2}b_{O_2} - \\
& z_C b_C - z_C b_{O_2} - c_{O_2}b_C - z_C b_{G_3} - z_C y_r - c_{O_2}y_r - c_{G_3}y_r) \cos(\phi) + ((b_C + b_{O_2} + y_r + b_{G_3})a_C \cos(\delta) + \\
& (b_C + b_{O_2} + y_r + b_{G_3})c_C \sin(\delta) + a_{G_3}y_r + a_{O_2}y_r + a_{G_3}b_{O_2} + a_{O_2}b_{G_3} + a_{O_2}b_{O_2} + b_C x_C + b_C a_{G_3} + x_C b_{O_2} + b_{G_3}a_{G_3} + b_{G_3}x_C + \\
& x_C y_r + a_{O_2}b_C) \sin(\phi))M_4 + ((-c_{G_2}y_r - c_{G_2}b_{G_2}) \cos(\phi) + (a_{G_2}y_r + a_{G_2}b_{G_2}) \sin(\phi))M_2 \\
a_{1.4} &= ((y_r b_{G_3} + a_{G_3}a_{O_2} + a_{G_3}^2 + b_{O_2}b_{G_3} + b_{G_3}^2) \cos(\phi) + (a_{G_3}c_{O_2} + a_{G_3}c_{G_3}) \sin(\phi) - Ra_{G_3} + x_r a_{G_3})M_3 + (((-c_C^2 + a_C^2)(\cos(\delta))^2 + \\
& (2 \sin(\delta)a_C c_C + (2a_{G_3} + a_{O_2} + 2x_C)a_C) \cos(\delta) + (2a_{G_3} + a_{O_2} + 2x_C)c_C \sin(\delta) + 2b_{G_3}b_C + 2a_{G_3}x_C + a_{O_2}x_C(t) + c_C^2 + (x_C)^2 + \\
& y_r b_{G_3} + a_{G_3}a_{O_2} + a_{G_3}^2 + b_C^2 + y_r b_C + b_{G_3}^2 + b_{O_2}b_C + b_{O_2}b_{G_3}) \cos(\phi) + (2(\cos(\delta))^2 c_C a_C + ((-a_C^2 + c_C^2) \sin(\delta) + \\
& (c_{G_3} + c_{O_2} + z_C)a_C + (a_{G_3} + x_C)c_C) \cos(\delta) + ((-a_{G_3} - x_C)a_C + (c_{G_3} + c_{O_2} + z_C)c_C) \sin(\delta) + z_C x_C - a_C c_C + c_{O_2}x_C + a_{G_3}c_{G_3} + \\
& a_{G_3}z_C + c_{G_3}x_C(t) + a_{G_3}c_{O_2}) \sin(\phi) + (x_r - R)a_C \cos(\delta) + (x_r - R)c_C \sin(\delta) - Ra_{G_3} + x_r a_{G_3} + x_r(t)x_C - Rx_C(t))M_4 + \\
& ((C_4 - A_4)(\cos(\delta))^2 - 2E_4 \sin(\delta) \cos(\delta) + A_4 + C_3) \cos(\phi) + (-2E_4(\cos(\delta))^2 + (A_4 - C_4) \sin(\delta(t)) \cos(\delta) + E_4 - E_3) \sin(\phi) \\
a_{1.5} &= (((-b_C - b_{O_2} - y_r - b_{G_3})c_C \cos(\delta) + (b_{O_2} + b_C + b_{G_3} + y_r)a_C \sin(\delta)) \cos(\phi) + ((b_{O_2} + b_C + b_{G_3} + y_r)a_C \cos(\delta) + \\
& (b_{O_2} + b_C + b_{G_3} + y_r)c_C \sin(\delta)) \sin(\phi))M_4 \\
a_{1.6} &= (-b_{G_3} - y_r(t) - b_{O_2})M_3 + (-b_C - b_{O_2} - y_r - b_{G_3})M_4 + (-y_r - b_{G_2})M_2 - M_1 y_r \\
a_{1.7} &= ((a_{O_2} + a_{G_3}) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_{G_3}) \sin(\phi) + x_r - R)M_3 + ((a_{O_2} + a_{G_3} + x_C + \cos(\delta)a_C + \sin(\delta)c_C) \cos(\phi) + (c_{G_3} + z_C(t) + c_{O_2} - \\
& \sin(\delta)a_C + \cos(\delta)c_C) \sin(\phi) + x_r - R)M_4 + (\cos(\phi)a_{G_2} - R + x_r + \sin(\phi)c_{G_2})M_2 + (x_r - R)M_1 \\
a_{1.8} &= 0 \\
a_{1.9} &= ((-\sin(\psi)a_{O_2} - \sin(\psi)a_{G_3}) \cos(\phi) + (-\sin(\psi)c_{O_2} - \sin(\psi)c_{G_3}) \sin(\phi) - \cos(\psi)b_{G_3} - \cos(\psi)b_{O_2} - \sin(\psi)x_r + \sin(\psi)R - \cos(\psi)y_r)M_3 + \\
& ((-\sin(\psi) \cos(\delta)a_C - \sin(\psi)a_{G_3} - \sin(\psi)x_C - \sin(\psi)a_{O_2} - \sin(\psi) \sin(\delta)c_C) \cos(\phi) + (-\sin(\psi) \cos(\delta)c_C - \sin(\psi)c_{G_3} + \sin(\psi) \sin(\delta)a_C \\
& - \sin(\psi)c_{O_2} - \sin(\psi)z_C) \sin(\phi) - \sin(\psi)x_r(t) + \sin(\psi)R - \cos(\psi)b_{G_3} - \cos(\psi)b_C - \cos(\psi)b_{O_2} - \cos(\psi)y_r)M_4 + \\
& (-\cos(\phi) \sin(\psi)a_{G_2} - \sin(\phi) \sin(\psi)c_{G_2} - \cos(\psi)b_{G_2} - \cos(\psi)y_r + \sin(\psi)R - \sin(\psi)x_r)M_2 + (-\sin(\psi)x_r + \sin(\psi)R - \cos(\psi)y_r)M_1 \\
a_{1.10} &= (-b_C - b_{O_2} - y_r - b_{G_3}) \cos(\phi)M_4 \\
a_{1.11} &= (-b_C - b_{O_2} - y_r - b_{G_3}) \sin(\phi)M_4 \\
a_{2.2} &= ((-a_{G_2}^2 + c_{G_2}^2)(\cos(\phi))^2 + (2z_r c_{G_2} - 2 \sin(\phi)a_{G_2}c_{G_2}) \cos(\phi) + 2y_r b_{G_2} + (z_r)^2 + b_{G_2}^2 - 2 \sin(\phi)z_r a_{G_2} + (y_r)^2 + a_{G_2}^2)M_2 + \\
& ((-2a_{O_2}a_{G_3} + c_{G_3}^2 - a_{G_3}^2 - a_{O_2}^2 + 2c_{O_2}c_{G_3} + c_{O_2}^2)(\cos(\phi))^2 + ((-2a_{G_3}c_{G_3} - 2a_{O_2}c_{O_2} - 2a_{G_3}c_{O_2} - 2a_{O_2}c_{G_3}) \sin(\phi) + \\
& 2z_r c_{O_2} + 2z_r c_{G_3}) \cos(\phi) + (-2z_r a_{G_3} - 2z_r a_{O_2}) \sin(\phi) + 2y_r b_{O_2} + 2y_r b_{G_3} + b_{O_2}^2 + (z_r)^2 + a_{O_2}^2 + b_{G_3}^2 + a_{G_3}^2 + 2b_{O_2}b_{G_3} + \\
& (y_r)^2 + 2a_{O_2}a_{G_3})M_3 + (((2c_C^2 - 2a_C^2)(\cos(\delta))^2 + (-4 \sin(\delta)a_C c_C + (-2x_C - 2a_{G_3} - 2a_{O_2})a_C + (2c_{O_2} + 2c_{G_3} + 2z_C)c_C) \cos(\delta) + \\
& ((-2c_{G_3} - 2c_{O_2} - 2z_C)a_C + (-2x_C - 2a_{G_3} - 2a_{O_2})c_C) \sin(\delta) - a_{O_2}^2 - 2a_{G_3}x_C - 2a_{O_2}x_C + 2c_{O_2}z_C + 2c_{G_3}z_C - 2a_{O_2}a_{G_3} - \\
& c_C^2 - a_{G_3}^2 + (z_C)^2 - (x_C)^2 + 2c_{O_2}c_{G_3} + a_C^2 + c_{G_3}^2 + c_{O_2}^2)M_4 + (-2C_4 + 2A_4)(\cos(\delta))^2 + 4.0E_4 \cos(\delta) \sin(\delta) - C_2 - C_3 \\
& - A_4 + A_2 + C_4 + A_3)(\cos(\phi))^2 + (((-4.0(\cos(\delta))^2 a_C c_C + ((2a_C^2 - 2c_C^2) \sin(\delta) + (-2c_{G_3} - 2c_{O_2} - 2z_C)a_C + \\
& (-2x_C - 2a_{G_3} - 2a_{O_2})c_C) \cos(\delta) + ((2a_{O_2} + 2x_C + 2a_{G_3})a_C + (-2c_{G_3} - 2c_{O_2} - 2z_C)c_C) \sin(\delta) - 2a_{G_3}c_{G_3} - 2a_{G_3}c_{O_2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_{O_2}c_{O_2} - 2a_{O_2}c_{G_3} + 2c_C a_C - 2x_C c_{O_2} - 2a_{O_2}z_C - 2x_C z_C - 2a_{G_3}z_C - 2x_C c_{G_3})M_4 + 4.0E_4(\cos(\delta))^2 + \\
& (-2A_4 + 2C_4) \sin(\delta) \cos(\delta) - 2E_4 + 2E_3 + 2E_2) \sin(\phi) + (2z_r \cos(\delta)c_C + 2z_r c_{G_3} + 2z_r c_{O_2} + 2z_r(t)z_C - 2z_r \sin(\delta)a_C)M_4) \cos(\phi) + \\
& (-2z_r \cos(\delta)a_C - 2z_r a_{O_2} - 2z_r a_{G_3} - 2z_r \sin(\delta)c_C - 2z_r x_C)M_4 \sin(\phi) + ((a_C^2 - c_C^2)(\cos(\delta(t)))^2 + (2 \sin(\delta)a_C c_C + \\
& (2a_{O_2} + 2x_C + 2a_{G_3})a_C) \cos(\delta) + (2a_{O_2} + 2x_C + 2a_{G_3})c_C \sin(\delta) + 2b_{O_2}b_C + 2y_r b_C + 2b_{G_3}b_C + 2y_r b_{O_2} + 2a_{G_3}x_C + 2a_{O_2}x_C + \\
& (z_r)^2 + (y_r)^2 + (x_C)^2 + b_{O_2}^2 + 2a_{O_2}a_{G_3} + 2y_r b_{G_3} + b_C^2 + 2b_{O_2}b_{G_3} + a_{O_2}^2 + b_{G_3}^2 + a_{G_3}^2 + c_C^2)M_4 + (C_4 - A_4)(\cos(\delta))^2 - \\
& 2E_4 \cos(\delta) \sin(\delta) + ((z_r)^2 + (y_r)^2)M_1 + C_2 + A_4 + A_1 + C_3 \\
a_{2.3} &= ((-a_{G_2}y_r(t) - a_{G_2}b_{G_2}) \cos(\phi) + (-c_{G_2}b_{G_2} - c_{G_2}y_r) \sin(\phi))M_2 + ((-a_{G_3}b_{O_2} - a_{O_2}b_{G_3} - a_{O_2}y_r - a_{O_2}b_{O_2} - b_{G_3}a_{G_3} - a_{G_3}y_r) \cos(\phi) + \\
& (-c_{O_2}y_r - c_{G_3}b_{G_3} - c_{G_3}y_r(t) - c_{G_3}b_{O_2} - c_{O_2}b_{G_3} - c_{O_2}b_{O_2}) \sin(\phi))M_3 + ((-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r(t))a_C \cos(\delta) + \\
& (-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r)c_C \sin(\delta) - b_C x_C - a_{O_2}y_r - b_C a_{G_3} - b_{G_3}x_C - b_{G_3}a_{G_3} - a_{O_2}b_C - a_{O_2}b_{O_2} - x_C y_r - a_{O_2}b_{G_3} - x_C b_{O_2} - \\
& a_{G_3}b_{O_2} - a_{G_3}y_r)M_4 \cos(\phi) + ((-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r)c_C \cos(\delta) + (b_C + y_r + b_{O_2} + b_{G_3})a_C \sin(\delta) - z_C(t)y_r - c_{O_2}y_r - z_C b_{G_3} - \\
& c_{G_3}b_{G_3} - c_{O_2}b_C - c_{G_3}b_C - c_{O_2}b_{G_3} - z_C b_C - c_{O_2}b_{O_2} - c_{G_3}y_r - c_{G_3}b_{O_2} - z_C b_{O_2})M_4 \sin(\phi) \\
a_{2.4} &= ((-a_{G_3}c_{G_3} - a_{G_3}c_{O_2}) \cos(\phi) + (y_r b_{G_3} + a_{O_2}a_{G_3} + b_{G_3}^2 + b_{O_2}b_{G_3} + a_{G_3}^2) \sin(\phi) - z_r a_{G_3})M_3 + ((-2(\cos(\delta))^2 a_C c_C + ((a_C^2 - c_C^2) \sin(\delta) + \\
& (-c_{O_2} - c_{G_3} - z_C)a_C + (-a_{G_3} - x_C)c_C) \cos(\delta) + ((a_{G_3} + x_C)a_C + (-c_{O_2} - c_{G_3} - z_C)c_C) \sin(\delta) - a_{G_3}c_{O_2} - a_{G_3}z_C - \\
& x_C c_{G_3} - a_{G_3}c_{G_3} - x_C c_{O_2} + c_C a_C - x_C z_C(t))M_4 + 2E_4(\cos(\delta))^2 + (C_4 - A_4) \sin(\delta) \cos(\delta) - E_4 + E_3) \cos(\phi) + (((a_C^2 - c_C^2)(\cos(\delta))^2 + \\
& (2 \sin(\delta)a_C c_C + (a_{O_2} + 2a_{G_3} + 2x_C)a_C) \cos(\delta) + (a_{O_2} + 2a_{G_3} + 2x_C)c_C \sin(\delta) + (x_C)^2 + y_r b_C + a_{O_2}x_C + 2a_{G_3}x_C + 2b_{G_3}b_C + a_{O_2}a_{G_3} + \\
& a_{G_3}^2 + c_C^2 + b_{O_2}b_{G_3} + y_r b_{G_3} + b_{O_2}b_C + b_{G_3}^2 + b_C^2)M_4 + (C_4 - A_4)(\cos(\delta))^2 - 2E_4 \cos(\delta) \sin(\delta) + C_3 + A_4) \sin(\phi) + \\
& (-z_r \sin(\delta)c_C - z_r a_{G_3} - z_r x_C - z_r(t) \cos(\delta)a_C)M_4 \\
a_{2.5} &= ((-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r)a_C \cos(\delta) + (-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r)c_C \sin(\delta))M_4 \cos(\phi) + \\
& ((-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r)c_C \cos(\delta) + (b_C + y_r + b_{O_2} + b_{G_3})a_C \sin(\delta))M_4 \sin(\phi) \\
a_{2.6} &= 0 \\
a_{2.7} &= (-\cos(\phi)c_{G_2} - z_r + \sin(\phi)a_{G_2})M_2 + ((-c_{G_3} - c_{O_2}) \cos(\phi) + (a_{G_3} + a_{O_2}) \sin(\phi) - z_r)M_3 + \\
& (-c_{O_2} - c_{G_3} - \cos(\delta)c_C + \sin(\delta)a_C - z_C)M_4 \cos(\phi) + (\cos(\delta)a_C + \sin(\delta)c_C + x_C + a_{G_3} + a_{O_2})M_4 \sin(\phi) - M_1 z_r - M_4 z_r \\
a_{2.8} &= (y_r + b_{G_2})M_2 + (b_{G_3} + b_{O_2} + y_r)M_3 + (b_C + y_r + b_{O_2} + b_{G_3})M_4 + M_1 y_r \\
a_{2.9} &= (-\sin(\psi) \sin(\phi)a_{G_2} + \sin(\psi) \cos(\phi)c_{G_2} + \sin(\psi)z_r)M_2 + ((\sin(\psi)c_{O_2} + \sin(\psi)c_{G_3}) \cos(\phi) + (-\sin(\psi)a_{O_2} - \sin(\psi)a_{G_3}) \sin(\phi) + \sin(\psi)z_r)M_3 + \\
& (\sin(\psi) \cos(\delta)c_C - \sin(\psi) \sin(\delta)a_C + \sin(\psi)z_C + \sin(\psi)c_{O_2} + \sin(\psi)c_{G_3})M_4 \cos(\phi) + (-\sin(\psi)x_C - \sin(\psi) \cos(\delta)a_C - \sin(\psi)a_{O_2} - \sin(\psi)a_{G_3} - \\
& \sin(\psi) \sin(\delta)c_C)M_4 \sin(\phi) + M_1 z_r \sin(\psi) + M_4 \sin(\psi)z_r \\
a_{2.10} &= (-b_C - b_{G_3} - b_{O_2} - y_r)M_4 \sin(\phi) \\
a_{2.11} &= M_4 \cos(\phi)(b_C + y_r + b_{O_2} + b_{G_3}) \\
a_{3.3} &= (a_{G_2}^2 + c_{G_2}^2)M_2 + (a_{O_2}^2 + c_{O_2}^2 + c_{G_3}^2 + 2a_{O_2}a_{G_3} + a_{G_3}^2 + 2c_{O_2}c_{G_3})M_3 + \\
& ((2x_C + 2a_{O_2} + 2a_{G_3})M_4 a_C + (2c_{G_3} + 2c_{O_2} + 2z_C)M_4 c_C) \cos(\delta) + ((-2z_C - 2c_{O_2} - 2c_{G_3})M_4 a_C + (2x_C + 2a_{O_2} + 2a_{G_3})M_4 c_C) \sin(\delta) + \\
& M_4 a_C^2 + M_4 c_C^2 + (2c_{G_3}z_C(t) + 2a_{O_2}a_{G_3} + a_{G_3}^2 + a_{O_2}^2 + 2c_{O_2}c_{G_3} + (z_C)^2 + 2a_{G_3}x_C(t) + (x_C)^2) + \\
& 2c_{O_2}z_C + 2a_{O_2}x_C + c_{G_3}^2 + c_{O_2}^2)M_4 + B_3 + B_4 + B_2 \\
a_{3.4} &= (-c_{O_2}b_{G_3} - c_{G_3}b_{G_3})M_3 + (-b_{G_3} - b_C)M_4 c_C \cos(\delta) + (b_{G_3} + b_C)M_4 a_C \sin(\delta) + \\
& (-c_{G_3}b_{G_3} - c_{G_3}b_C - z_C(t)b_C - c_{O_2}b_{G_3} - c_{O_2}b_C - z_C b_{G_3})M_4 \\
a_{3.5} &= ((a_{O_2} + a_{G_3} + x_C)M_4 a_C + (c_{O_2} + c_{G_3} + z_C)M_4 c_C) \cos(\delta) + ((-c_{G_3} - c_{O_2} - z_C)M_4 a_C + (a_{O_2} + a_{G_3} + x_C)M_4 c_C) \sin(\delta) + \\
& B_4 + M_4 a_C^2 + M_4 c_C^2 \\
a_{3.6} &= (\cos(\phi)c_{G_2} - \sin(\phi)a_{G_2})M_2 + ((c_{G_3} + c_{O_2}) \cos(\phi) + (-a_{G_3} - a_{O_2}) \sin(\phi(t)))M_3 + \\
& (M_4 \cos(\delta)c_C - M_4 \sin(\delta)a_C + (c_{O_2} + c_{G_3} + z_C)M_4) \cos(\phi) + (-M_4 \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\delta)c_C + (-x_C - a_{G_3} - a_{O_2})M_4) \sin(\phi) \\
a_{3.7} &= 0.0 \\
a_{3.8} &= (-\sin(\phi)c_{G_2} - \cos(\phi)a_{G_2})M_2 + ((-a_{G_3} - a_{O_2}) \cos(\phi) + (-c_{G_3} - c_{O_2}) \sin(\phi))M_3 + \\
& (-M_4 \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\delta)c_C + (-x_C - a_{G_3} - a_{O_2})M_4) \cos(\phi) + (-M_4 \cos(\delta)c_C + M_4 \sin(\delta)a_C + (-c_{G_3} - c_{O_2} - z_C)M_4) \sin(\phi) \\
a_{3.9} &= (c_{G_2} \cos(\phi) \cos(\psi) - a_{G_2} \sin(\phi) \cos(\psi))M_2 + ((\cos(\psi)c_{O_2} + \cos(\psi(t))c_{G_3}) \cos(\phi(t)) + \\
& (-\cos(\psi)a_{O_2} - \cos(\psi)a_{G_3}) \sin(\phi))M_3 + (M_4 \cos(\psi(t)) \cos(\delta)c_C - M_4 \cos(\psi) \sin(\delta)a_C + \\
& (\cos(\psi)c_{O_2} + \cos(\psi(t))c_{G_3} + \cos(\psi)z_C)M_4) \cos(\phi) + (-M_4 \cos(\psi) \cos(\delta(t))a_C - M_4 \cos(\psi(t)) \sin(\delta)c_C + \\
& (-\cos(\psi)x_C - \cos(\psi)a_{O_2} - \cos(\psi)a_{G_3})M_4) \sin(\phi) \\
a_{3.10} &= M_4 \cos(\delta)c_C - M_4 \sin(\delta)a_C + (c_{O_2} + c_{G_3} + z_C)M_4 \\
a_{3.11} &= -M_4 \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\delta)c_C + (-x_C - a_{G_3} - a_{O_2})M_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{4.4} &= (a_{G_3}^2 + b_{G_3}^2)M_3 + (M_4 a_C^2 - M_4 c_C^2 + C_4 - A_4)(\cos(\delta))^2 + ((-2E_4 + 2M_4 a_C c_C) \sin(\delta) + (2a_{G_3} + 2x_C)M_4 a_C) \cos(\delta) + \\
&\quad (2a_{G_3} + 2x_C)M_4 c_C \sin(\delta) + M_4 c_C^2 + (b_{G_3}^2 + 2b_{G_3} b_C + 2a_{G_3} x_C + a_{G_3}^2 + b_C^2 + (x_C)^2)M_4 + A_4 + C_3 \\
a_{4.5} &= (-b_{G_3} - b_C)M_4 c_C \cos(\delta) + (b_{G_3} + b_C)M_4 a_C \sin(\delta) \\
a_{4.6} &= -\cos(\phi)b_{G_3}M_3 + (-b_{G_3} - b_C)M_4 \cos(\phi) \\
a_{4.7} &= M_3 a_{G_3} + M_4 \cos(\delta)a_C + M_4 \sin(\delta)c_C + (x_C + a_{G_3})M_4 \\
a_{4.8} &= M_3 b_{G_3} \sin(\phi) + (b_{G_3} + b_C)M_4 \sin(\phi) \\
a_{4.9} &= (-b_{G_3} \cos(\phi(t)) \cos(\psi) - a_{G_3} \sin(\psi))M_3 + (-b_{G_3} \cos(\psi) - \cos(\psi)b_C)M_4 \cos(\phi) - M_4 \sin(\psi) \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\psi) \sin(\delta)c_C + \\
&\quad (-a_{G_3} \sin(\psi) - \sin(\psi)x_C)M_4 \\
a_{4.10} &= (-b_{G_3} - b_C)M_4 \\
a_{4.11} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{5.5} &= B_4 + M_4 a_C^2 + M_4 c_C^2 \\
a_{5.6} &= (M_4 \cos(\delta)c_C - M_4 \sin(\delta)a_C) \cos(\phi) + (-M_4 \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\delta)c_C) \sin(\phi) \\
a_{5.7} &= 0 \\
a_{5.8} &= (-M_4 \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\delta)c_C) \cos(\phi) + (-M_4 \cos(\delta)c_C + M_4 \sin(\delta)a_C) \sin(\phi) \\
a_{5.9} &= (M_4 \cos(\psi) \cos(\delta)c_C - M_4 \cos(\psi) \sin(\delta)a_C) \cos(\phi(t)) + (-M_4 \cos(\psi(t)) \cos(\delta)a_C - M_4 \cos(\psi) \sin(\delta)c_C) \sin(\phi) \\
a_{5.10} &= M_4 \cos(\delta)c_C - M_4 \sin(\delta)a_C \\
a_{5.11} &= -M_4 \cos(\delta)a_C - M_4 \sin(\delta)c_C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{6.6} &= M_2 + M_3 + M_4 + M_1 \\
a_{6.7} &= 0 \\
a_{6.8} &= 0 \\
a_{6.9} &= M_1 \cos(\psi) + M_2 \cos(\psi) + M_4 \cos(\psi) + M_3 \cos(\psi) \\
a_{6.10} &= M_4 \cos(\phi) \\
a_{6.11} &= M_4 \sin(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{7.7} &= M_2 + M_3 + M_4 + M_1 \\
a_{7.8} &= 0 \\
a_{7.9} &= -M_1 \sin(\psi) - M_3 \sin(\psi) - M_4 \sin(\psi) - M_2 \sin(\psi) \\
a_{7.10} &= 0 \\
a_{7.11} &= 0 \\
a_{8.8} &= M_2 + M_3 + M_4 + M_1 \\
a_{8.9} &= 0 \\
a_{8.10} &= -M_4 \sin(\phi) \\
a_{8.11} &= M_4 \cos(\phi) \\
a_{9.9} &= M_0 + M_3 + M_4 + M_1 + M_2 \\
a_{9.10} &= M_4 \cos(\phi) \cos(\psi) \\
a_{9.11} &= M_4 \sin(\phi) \cos(\psi) \\
a_{10.10} &= M_4 \\
a_{10.11} &= 0 \\
a_{11.11} &= M_4
\end{aligned}$$

A.9 Constantes calculées de la puissance virtuelle des forces de pesanteur

Les coefficients cités ci-dessous ont été calculés en se basant sur l'expression de la puissance virtuelle des forces de pesanteur présentée dans le paragraphe (3.2.5).

$$C_\psi = 0$$

$$\begin{aligned}
C_\theta &= -M_1 g (\sin(\psi) x_r + \cos(\psi) y_r(t) + y_r) - M_2 g (\sin(\psi(t)) x_r(t) + \cos(\psi(t)) y_r + y_r + b_{G_2}) \\
&\quad - M_3 g (\sin(\psi) x_r + \cos(\psi) y_r + y_r + b_{O_2} + b_{G_3}) \\
&\quad - M_4 g (y_r + b_C + b_{G_3} + b_{O_2} + \sin(\psi) x_r + \cos(\psi) y_r) \\
C_\phi &= -M_2 g (-\cos(\phi) a_{G_2} - \sin(\phi) c_{G_2}) - M_3 g (-\cos(\phi) a_{O_2} - \sin(\phi) c_{O_2} - a_{G_3} \cos(\phi) - \sin(\phi) c_{G_3}) \\
&\quad - M_4 g (-a_{G_3} \cos(\phi) - \cos(\phi) a_{O_2} - \sin(\phi) c_{O_2} - \sin(\phi) c_{G_3} - \cos(\phi) \cos(\delta) a_C \\
&\quad - \cos(\phi) \sin(\delta) c_C + \sin(\phi) \sin(\delta) a_C - \cos(\phi) x_C - \sin(\phi) \cos(\delta) c_C - \sin(\phi) z_C) \\
C_\beta &= -M_3 g \sin(\phi) b_{G_3} - M_4 g (\sin(\phi) b_C + \sin(\phi) b_{G_3}) \\
C_\delta &= -M_4 g (\sin(\phi) \sin(\delta) a_C - \sin(\phi) \cos(\delta) c_C - \cos(\phi) \cos(\delta) a_C - \cos(\phi) \sin(\delta) c_C) \\
C_{x_r} &= 0 \\
C_{y_r} &= 0 \\
C_{z_r} &= -M_1 g - M_2 g - M_3 g - M_4 g \\
C_{x_b} &= 0 \\
C_{x_c} &= M_4 g \sin(\phi) \\
C_{z_c} &= -M_4 g \cos(\phi)
\end{aligned}$$

Annexe B

Équations de mouvement des différentes configurations possibles

La mise en équation des différentes configurations possibles qui peuvent avoir lieu durant la collision sera présentée dans cet annexe. Ces configurations ont été résumées par le graphe de la figure (3.13). La phase de collision est prise entre l'instant où la roue avant touche l'obstacle mobile et l'instant du décollage du cyclomotoriste qui se traduit soit par l'instant où la composante normale de la réaction de la selle sur le cyclomotoriste s'annule soit lorsque le cyclomotoriste glisse d'une distance qui dépasse la longueur de la selle. Au début de ce paragraphe une présentation des équations de liaison sera faite, ensuite les différentes configurations seront étudiées et mises en équations.

B.1 Équations de liaison du système

Étude du contact au niveau de la selle

Le contact entre la selle et le cyclomotoriste est avec frottement. Par la suite différents cas peuvent être distingués durant l'évolution dynamique de l'état du contact. Dans le cas où le contact selon la direction portée par \mathbf{z}_γ est maintenu, l'équation de liaison correspondante est donnée par l'expression (B.1) et qui se présente sous la forme suivante :

$$\dot{z}_{C\gamma}^* = \sin(\gamma)\dot{x}_C^* + \cos(\gamma)\dot{z}_C^* = 0 \quad (\text{B.1})$$

A cette équation est associé le multiplicateur de Lagrange λ_z . Il représente, physiquement, la force de réaction normale à la selle au niveau du point de contact C entre le cyclomotoriste et la selle.

La composante tangentielle λ_x de la force de contact selon \mathbf{x}_γ est gérée par la loi suivante :

- Si $|\lambda_x| < \mu \lambda_z$: un phénomène de collage du conducteur sur la selle se présente. Ce collage est décrit par l'équation de liaison (B.2) :

$$\dot{x}_{C\gamma}^* = \cos(\gamma)\dot{x}_C^* - \sin(\gamma)\dot{z}_C^* = 0 \quad (\text{B.2})$$

à laquelle est associé le multiplicateur de Lagrange λ_x .

- Si $|\lambda_x| \geq \mu \lambda_z$: Un phénomène de glissement du conducteur relativement à la selle se présente. Dans cette circonstance, la composante λ_x garde la valeur $(-\mu \lambda_z)$ et l'équation de liaison (B.2) n'est plus valable. La mise en équation du système diffère du cas précédent par la prise en compte de la puissance virtuelle développée par la force tangentielle de contact au niveau de la selle. Cette puissance est donnée par l'expression (B.3) :

$$P_{\lambda_x}^* = -\mu \lambda_z (\cos(\gamma) \dot{x}_C^* - \sin(\gamma) \dot{z}_C^*) \quad (\text{B.3})$$

Étude du contact au niveau de la roue avant

L'équation de liaison qui traduit le contact de la roue avant avec la chaussée est donnée par l'expression (3.11) :

$$\dot{z}_r \cos(\theta) - (z_r - R) \sin(\theta) \dot{\theta} = 0$$

A cette équation est associé le multiplicateur de Lagrange λ_1 . En dérivant cette relation par rapport au temps, l'équation de liaison se réduit aux formes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}_r^* = (z_r - R) \sin(\theta) \dot{\theta}^* \\ \ddot{z}_r^* \cos(\theta) = \dot{\theta}^* \dot{z}_r^* \sin(\theta) + \sin(\theta) \ddot{\theta} + (z_r - R) \dot{\theta}^{*2} \cos(\theta) + (z_r - R) \sin(\theta) \ddot{\theta} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Pour $\theta = 0$, la première équation du système (B.4) permet de dire que dans la configuration figée de la collision on a $\dot{z}_r^* = 0$. Au niveau de la deuxième équation, en négligeant le terme en $\dot{\theta}^{*2}$ devant celui en $\ddot{\theta}^*$ nous trouvons $\ddot{z}_r^* = 0$.

Étude du contact au niveau de la roue arrière

L'équation de liaison au niveau du point de contact K de la roue arrière avec la chaussée se présente sous la forme suivante :

$$\dot{z}_r^* + (\cos(\phi) (-a_{O_2} - a_K) - \sin(\phi) (c_{O_2} + c_K)) \dot{\phi}^* = 0 \longrightarrow \lambda_2 \quad (\text{B.5})$$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin dérivons cette équation par rapport au temps et prenons en compte de l'équation de liaison de la roue avant avec la chaussée ($\dot{z}_r^* = 0$), nous trouvons :

$$\begin{aligned} &+ (\cos(\phi) (-a_{O_2} - a_K) - \sin(\phi) (c_{O_2} + c_K)) \ddot{\phi} + \\ &(\sin(\phi) (a_{O_2} + a_K) - \cos(\phi) (c_{O_2} + c_K)) \dot{\phi}^2 = 0 \end{aligned}$$

En supposant que les termes en $\dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$ sont négligeables devant les termes en \ddot{q}_i , l'équation de liaison précédente aura la forme suivante :

$$- ((a_{O_2} + a_K) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_K) \sin(\phi)) \ddot{\phi} = 0 \quad (\text{B.6})$$

B.2 Mise en équations des différentes configurations

Pour les différentes configurations qui seront traitées dans la suite, les valeurs numériques des différents paramètres utilisés sont les suivantes :

- g : constante de la gravité = 9.8 m s^{-2} ,
- M_0 : masse de la barrière mobile = 926 Kg
- M_1 : masse de la roue avant = 3 Kg
- M_2 : masse de la fourche = 7 Kg
- M_3 : masse du cadre = 34.7 Kg
- M_4 : masse du cyclomotoriste = 72.04 Kg
- Tenseur d'inertie de la roue avant : $[I_{S_1}] = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}_{(G_1, R_1)} \quad (\text{Kg.m}^2)$
- Tenseur d'inertie de la fourche : $[I_{S_2}] = \begin{bmatrix} 0.43 & 0 & -0.124 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ -0.124 & 0 & 0.089 \end{bmatrix}_{(G_2, R_2)} \quad (\text{Kg.m}^2)$
- Tenseur d'inertie du cadre : $[I_{S_3}] = \begin{bmatrix} 1.196 & 0 & -0.48 \\ 0 & 3.314 & 0 \\ -0.48 & 0 & 2.724 \end{bmatrix}_{(G_3, R_3)} \quad (\text{Kg.m}^2)$
- Tenseur d'inertie du cyclomotoriste : $[I_{S_4}] = \begin{bmatrix} 7.057 & 0 & 0 \\ 0 & 7.804 & 0 \\ 0 & 0 & 3.631 \end{bmatrix}_{(G_4, R_0)} \quad (\text{Kg.m}^2)$
- $\mathbf{CG}_4 = \begin{bmatrix} -0.099 & 0 & -0.159 \end{bmatrix}_{R_0}^T \quad (m)$
- $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0.43 \end{bmatrix}_{R_2}^T \quad (m)$
- $\mathbf{G}_1\mathbf{O}_2 = \begin{bmatrix} -0.06 & 0 & 0.49 \end{bmatrix}_{R_2}^T \quad (m)$
- $\mathbf{O}_2\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} -0.63 & 0 & -0.14 \end{bmatrix}_{R_3}^T \quad (m)$
- $\mathbf{G}_3\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}_{R_3}^T \quad (m)$
- $\mathbf{O}_2\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1.08 & 0 & -0.29 \end{bmatrix}_{R_3}^T \quad (m)$

B.2.1 Mise en équation de la configuration n°1

Dans cette configuration, les deux roues sont en contact avec la chaussée. Le cyclomotoriste ne glisse pas relativement à la selle mais il présente un mouvement de rotation relative à la selle (tangage). Une déformation élastique de la fourche existe au niveau du contact frontal entre la roue avant et l'obstacle mobile.

Les équations de liaison qui permettent de prendre en considération le maintien des contacts entre les deux roues avec la chaussée sont données par : la relation (B.4) pour la roue avant et par la relation (B.5) pour la roue arrière. D'autre part, au niveau du contact entre la selle et le cyclomotoriste deux équations de liaison seront prises en considération. Ces équations sont celles données par les expressions : (B.2) pour le blocage du mouvement de translation longitudinale et (B.1) pour le blocage du mouvement de translation verticale.

La mise en équation du système formé par l'obstacle mobile, le cyclomoteur et le cyclomoteuriste durant la collision est donnée par le système suivant:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,11} & \cdots & a_{11,11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{z}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \\ \ddot{z}_C \end{bmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\phi} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \\ \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ \bar{z}_r \\ \bar{x}_b \\ \bar{x}_C \\ \bar{z}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ \left(C_\phi - \lambda_2((a_{O_2} + a_K) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_K) \sin(\phi)) \right) \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{z_r} + \lambda_1 + \lambda_2 \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} + \lambda_x \cos(\gamma) + \lambda_z \sin(\gamma) \\ C_{z_C} - \lambda_x \sin(\gamma) + \lambda_z \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Les constantes C_{q_i} sont données par l'expression de la puissance virtuelle des forces de pesanteur (A.9). Pour le cas qui nous occupe où \dot{x}_C, \dot{z}_C sont toujours nuls, de même que \dot{z}_r et $\dot{\phi}$ (équations (B.5) et (B.4)), on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} \\ a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,4} & a_{10,5} & a_{10,6} & a_{10,7} & a_{10,9} \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,4} & a_{11,5} & a_{11,6} & a_{11,7} & a_{11,9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots k_{66} \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \\ \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ \bar{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\phi - \lambda_2((a_{O_2} + a_K) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_K) \sin(\phi)) \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{z_r} + \lambda_1 + \lambda_2 \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} + \lambda_x \cos(\gamma) + \lambda_z \sin(\gamma) \\ C_{z_C} - \lambda_x \sin(\gamma) + \lambda_z \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \end{matrix} \right\} (\text{B.8})$$

Notons que la matrice $[\mathbf{K}]$ comporte comme seul élément non nul, celui d'indice (6.6), car seule la coordonnée généralisée \bar{x}_r sollicite le système ressort qui modélise la flexion de la fourche.

La première phase de résolution de ce système consiste à éliminer les différentes équations présentant des inconnues dynamiques. Le système prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}}_r \\ \ddot{\bar{y}}_r \\ \ddot{\bar{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & k_{66} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \\ \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ \bar{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{x_b} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (9) \end{array} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Les autres équations du système (B.8) permettent de déterminer les multiplicateurs λ_1 , λ_2 , λ_x et λ_z . C'est à dire les inconnues dynamiques du système.

Considérons maintenant le système (B.9) privé de l'équation (5) qui seule fait apparaître \bar{x}_r . En faisant passer les termes en $\ddot{\bar{x}}_r$ aux second membres des équations restantes (1), (2), (4), (6), (7) et (9), un système de 6 équations à 6 inconnues : $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\delta}$, $\ddot{\bar{y}}_r$ et $\ddot{\bar{x}}_b$, sera obtenu. Cette forme est obtenue suite au choix fait sur la position du point I d'application de la force de collision. Après les différentes transformations, le système aura la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{17} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{27} & a_{29} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{47} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{57} & a_{59} \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{77} & a_{79} \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{97} & a_{99} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\bar{y}}_r \\ \ddot{\bar{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi - a_{16} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\theta - a_{26} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\beta - a_{46} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\delta - a_{56} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_{y_r} - a_{76} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_{x_b} - a_{96} \ddot{\bar{x}}_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Nous arrivons ainsi, par inversion de la matrice \mathbf{M} , à exprimer les différentes variables $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\delta}$, $\ddot{\bar{y}}_r$, $\ddot{\bar{x}}_b$ en fonction de $\ddot{\bar{x}}_r$. Il suffit alors de reporter ces expressions dans l'équation (6) du système (B.9) pour obtenir une équation différentielle de second ordre à coefficients constants de la forme :

$$A \ddot{\bar{x}}_r + k \bar{x}_r = C \quad (\text{B.11})$$

Une solution de cette équation se présente sous la forme suivante :

$$\bar{x}_r(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{A}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{A}}t\right) + \frac{C}{k} \quad (\text{B.12})$$

dont les coefficients C_1 et C_2 dépendent des conditions initiales du système. k et A sont des constantes.

En trouvant l'expression de \bar{x}_r , les expressions des différentes variables du système ainsi que les expressions des différentes inconnues dynamiques peuvent être déduites en utilisant la démarche suivante :

- Pour obtenir les inconnues λ_x et λ_z il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_x \cos(\gamma) + \lambda_z \sin(\gamma) = a_{10.1}\ddot{\bar{\psi}} + a_{10.2}\ddot{\bar{\theta}} + a_{10.4}\ddot{\bar{\beta}} + a_{10.5}\ddot{\bar{\delta}} + a_{10.6}\ddot{\bar{x}}_r + a_{10.7}\ddot{\bar{y}}_r + a_{10.9}\ddot{\bar{x}}_b - C_{x_C} \\ -\lambda_x \sin(\gamma) + \lambda_z \cos(\gamma) = a_{11.1}\ddot{\bar{\psi}} + a_{11.2}\ddot{\bar{\theta}} + a_{11.4}\ddot{\bar{\beta}} + a_{11.5}\ddot{\bar{\delta}} + a_{11.6}\ddot{\bar{x}}_r + a_{11.7}\ddot{\bar{y}}_r + a_{11.9}\ddot{\bar{x}}_b - C_{z_C} \end{cases}$$

- L'inconnue dynamique λ_2 est donnée par :

$$\lambda_2 = -\frac{a_{31}\ddot{\bar{\psi}} + a_{32}\ddot{\bar{\theta}} + a_{34}\ddot{\bar{\beta}} + a_{35}\ddot{\bar{\delta}} + a_{36}\ddot{\bar{x}}_r + a_{37}\ddot{\bar{y}}_r + a_{39}\ddot{\bar{x}}_b - C_\phi}{((a_{O_2} + a_K) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_K) \sin(\phi))}$$

- La force de contact entre la chaussée et la roue avant est donnée par :

$$\lambda_1 = a_{81}\ddot{\bar{\psi}} + a_{82}\ddot{\bar{\theta}} + a_{84}\ddot{\bar{\beta}} + a_{85}\ddot{\bar{\delta}} + a_{86}\ddot{\bar{x}}_r + a_{87}\ddot{\bar{y}}_r + a_{86}\ddot{\bar{x}}_b - C_{z_r} - \lambda_2$$

Solutions analytiques de la configuration n°1

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) &= \dot{\bar{\psi}}(0)t + \bar{\psi}(0) \\ \bar{\theta}(t) &= \dot{\bar{\theta}}(0)t + \bar{\theta}(0) \\ \bar{\phi}(t) &= 0 \\ \bar{\beta}(t) &= \dot{\bar{\beta}}(0)t + \bar{\beta}(0) \\ \bar{\delta}(t) &= -9.668 \frac{\sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 69.362 \frac{\cos(0.103 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.996 \bar{x}_r(0) \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) + 3.427 t^2 + \\ &\quad 0.996 t \dot{\bar{x}}_r(0) + \bar{\delta}(0)t + 69.362 k_f^{-1} + 0.996 \bar{x}_r(0) + \bar{\delta}(0) \\ \bar{x}_r(t) &= 9.709 \frac{\sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 69.65 \frac{\cos(0.103 \sqrt{k_f t})}{k_f} + \bar{x}_r(t) \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) - 69.65 k_f^{-1} \\ \bar{y}_r(t) &= \dot{\bar{y}}_r(0)t + \bar{y}_r(0) \\ \bar{z}_r(t) &= 0 \\ \bar{x}_b(t) &= -0.988 \frac{\sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 7.09 \frac{\cos(0.103 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.102 \bar{x}_r(0) \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) - \\ &\quad 0.038 t^2 + 0.102 t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{x}}_b(0) + 7.09 k_f^{-1} + 0.102 \bar{x}_r(0) + \bar{x}_b(0) \\ \bar{x}_C(t) &= 0 \\ \bar{z}_C(t) &= 0 \\ \lambda_1(t) &= 287.942 + 3.026 \sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \bar{x}_r(0) + 21.709 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) + 0.312 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_2(t) &= 816.83 - 3.758 \sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \bar{x}_r(0) - 26.958 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) - 0.387 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_z(t) &= 657.591 - 0.732 \sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \bar{x}_r(0) - 5.248 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) - 0.075 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_x(t) &= 73.08 - 5.49 \sin(0.103 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \bar{x}_r(0) - 39.385 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) - 0.565 \cos(0.103 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_\delta(t) &= 0 \end{aligned}$$

B.2.2 Mise en équation de la configuration n°2 et n°3

Dans ces configurations les deux roues sont en contact avec la chaussée et le cyclomotoriste glisse relativement à la selle. Au niveau du contact frontal entre la roue avant et l'obstacle mobile, une déformation élastique soit de la fourche (configuration n°2) soit de la roue avant (configuration n°3) se présente.

L'équation de liaison qui permet de prendre en considération le maintien du contact de la roue avant avec la chaussée est donnée par la relation (B.4). L'équation de liaison qui prend en

considération le contact de la roue arrière avec la chaussée est donnée par la relation (B.5). En se basant sur la même démarche que celle présentée dans le paragraphe précédent, on a :

$$\begin{cases} \ddot{\bar{z}}_r = \dot{\bar{z}}_r = 0 \\ \ddot{\bar{\phi}} = \dot{\bar{\phi}} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, en considérant que le cyclomotoriste garde le contact avec la selle en glissant nous pouvons récrire l'équation de liaison (B.1) qui traduit que la vitesse normale à la selle est nulle :

$$\sin(\gamma)\dot{\bar{x}}_C + \cos(\gamma)\dot{\bar{z}}_C = 0 \longrightarrow \lambda_z$$

Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite de ce paragraphe, cet expression sera dérivée par rapport au temps. D'où :

$$\sin(\gamma)\ddot{\bar{x}}_C + \cos(\gamma)\ddot{\bar{z}}_C = 0 \Rightarrow \ddot{\bar{z}}_C = -\tan(\gamma)\ddot{\bar{x}}_C \quad (\text{B.13})$$

En utilisant la puissance virtuelle développée par la force de frottement au niveau de la selle dont l'expression est donnée par la relation (B.3) et la relation (B.13) qui lie les deux paramètres $\ddot{\bar{z}}_C$ et $\ddot{\bar{x}}_C$, les équations du mouvement du système se présentent par le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} & a_{1,10} - a_{1,11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} & a_{2,10} - a_{2,11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} & a_{3,10} - a_{3,11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} & a_{4,10} - a_{4,11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} & a_{5,10} - a_{5,11} \tan(\gamma) \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} & a_{6,10} - a_{6,11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} & a_{7,10} - a_{7,11} \tan(\gamma) \\ a_{81} & a_{82} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} & a_{8,10} - a_{8,11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} & a_{9,10} - a_{9,11} \tan(\gamma) \\ a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,4} & a_{10,5} & a_{10,6} & a_{10,7} & a_{10,9} & a_{10,10} - a_{10,11} \tan(\gamma) \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,4} & a_{11,5} & a_{11,6} & a_{11,7} & a_{11,9} & a_{11,10} - a_{11,11} \tan(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\psi}} \\ \ddot{\bar{\theta}} \\ \ddot{\bar{\beta}} \\ \ddot{\bar{\delta}} \\ \ddot{\bar{x}}_r \\ \ddot{\bar{y}}_r \\ \ddot{\bar{x}}_b \\ \ddot{\bar{x}}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & k_{66} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \\ \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ \bar{x}_b \\ \bar{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\phi - \lambda_2((a_{O_2} + a_K) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_K) \sin(\phi)) \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{z_r} + \lambda_1 + \lambda_2 \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} + (\sin(\gamma) - \mu \cos(\gamma))\lambda_z \\ C_{z_C} + (\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma))\lambda_z \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \end{matrix} \right\} (\text{B.14})$$

μ est le coefficient de frottement. A partir de l'équation (11) du système (B.14), on obtient l'expression de λ_z en fonction des accélérations généralisées $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\delta}$, \ddot{x}_r , \ddot{y}_r , \ddot{x}_b , \ddot{x}_C . D'où :

$$\lambda_z = \frac{a_{11.1}\ddot{\psi} + a_{11.2}\ddot{\theta} + a_{11.4}\ddot{\beta} + a_{11.5}\ddot{\delta} + a_{11.6}\ddot{x}_r + a_{11.7}\ddot{y}_r + a_{11.9}\ddot{x}_b + (a_{11.10} - a_{11.11} \tan(\gamma))\ddot{x}_C - C_{z_C}}{\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma)} \quad (\text{B.15})$$

Reportons cette expression dans l'équation (10) du même système (B.14) et éliminons les équations présentant des inconnues dynamiques, Le système d'équations aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} & a_{1.10} - a_{1.11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} & a_{2.10} - a_{2.11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} & a_{3.10} - a_{3.11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} & a_{4.10} - a_{4.11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} & a_{5.10} - a_{5.11} \tan(\gamma) \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} & a_{6.10} - a_{6.11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} & a_{7.10} - a_{7.11} \tan(\gamma) \\ a_{81} & a_{82} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} & a_{8.10} - a_{8.11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} & a_{9.10} - a_{9.11} \tan(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & k_{66} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} - D_1 C_{z_C} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{matrix} \right\} (\text{B.16})$$

avec

$$D_1 = \frac{\sin(\gamma) - \mu \cos(\gamma)}{\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma)}$$

Considérons maintenant le système d'équations (B.16) privé de l'équation (5) qui seule fait apparaître \ddot{x}_r . En faisant passer les terme en \ddot{x}_r au second membre des équations restantes (1, 2, 3, 4, 6, 7 et 8) du (B.16), un système de 7 équations à 7 inconnues : $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\delta}$, \ddot{y}_r , \ddot{x}_b et \ddot{x}_C sera obtenu.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{17} & a_{19} & a_{1.10} - a_{1.11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{27} & a_{29} & a_{2.10} - a_{2.11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} & a_{37} & a_{39} & a_{3.10} - a_{3.11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{47} & a_{49} & a_{4.10} - a_{4.11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{57} & a_{59} & a_{5.10} - a_{5.11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{77} & a_{79} & a_{7.10} - a_{7.11} \tan(\gamma) \\ a_{81} & a_{82} & a_{84} & a_{85} & a_{87} & a_{89} & a_{8.10} - a_{8.11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{97} & a_{99} & a_{9.10} - a_{9.11} \tan(\gamma) \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi - a_{16}\ddot{x}_r \\ C_\theta - a_{26}\ddot{x}_r \\ C_\beta - a_{46}\ddot{x}_r \\ C_\delta - a_{56}\ddot{x}_r \\ C_{y_r} - a_{76}\ddot{x}_r \\ C_{x_b} - a_{96}\ddot{x}_r \\ C_{x_C} - \left(a_{10.6} - D_1 a_{11.6} \right) \ddot{x}_r - D_1 C_{z_C} \end{bmatrix}$$

Par inversion de la matrice $[\mathbf{M}]$ les expressions des différentes variables peuvent être exprimées en fonction de $\ddot{\bar{x}}_r$. La substitution de ces expressions dans l'équation (5) du système (B.16) permet d'aboutir à une équation différentielle de second ordre à coefficients constants dont la solution se présente sous la forme indiquée par l'expression (B.12).

Une fois que les expressions des différents paramètres sont calculées, les inconnues dynamiques du système seront déterminées. En effet, l'équation (3) du système (B.14) permet de calculer l'expression du multiplicateur λ_2 . D'où :

$$\lambda_2 = D_3 \left(a_{31} \ddot{\bar{\psi}} + a_{32} \ddot{\bar{\theta}} + a_{34} \ddot{\bar{\beta}} + a_{35} \ddot{\bar{\delta}} + a_{36} \ddot{\bar{x}}_r + a_{37} \ddot{\bar{y}}_r + a_{39} \ddot{\bar{x}}_b + (a_{3,10} - a_{3,11} \tan(\gamma)) \ddot{\bar{x}}_C - C_\phi \right)$$

avec

$$D_3 = - \frac{1}{((a_{O_2} + a_K) \cos(\phi) + (c_{O_2} + c_K) \sin(\phi))}$$

La même démarche avec l'équation (8) du système (B.14) donne l'expression suivante de λ_1 :

$$\lambda_1 = a_{81} \ddot{\bar{\psi}} + a_{82} \ddot{\bar{\theta}} + a_{84} \ddot{\bar{\beta}} + a_{85} \ddot{\bar{\delta}} + a_{86} \ddot{\bar{x}}_r + a_{87} \ddot{\bar{y}}_r + a_{89} \ddot{\bar{x}}_b + (a_{8,10} - a_{8,11} \tan(\gamma)) \ddot{\bar{x}}_C - C_{z_r} - \lambda_2$$

Enfin, l'inconnue dynamique λ_z se calcule en utilisant l'expression (B.15).

Solutions analytiques des configurations n°2 et n°3

Les équations présentées ci-dessous représentent les solutions analytiques des équations de mouvement pour la configuration n°2 où le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche. Afin de trouver les solutions correspondantes à la configuration n°4, il suffit de remplacer la raideur k_f de la fourche par celle de la roue avant k_r .

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) &= \dot{\bar{\psi}}(0) t + \bar{\psi}(0) \\ \bar{\theta}(t) &= \dot{\bar{\theta}}(0) t + \bar{\theta}(0) \\ \bar{\phi}(t) &= 0 \\ \bar{\beta}(t) &= \dot{\bar{\beta}}(0) t + \bar{\beta}(0) \\ \bar{\delta}(t) &= 6.25 \times 10^{-9} \frac{\sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 2.138 \times 10^{-7} \frac{\cos(0.152 t \sqrt{k_f})}{k_f} + 9.49310^{-10} \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) + 6.3175 t^2 - \\ &\quad 9.49310^{-10} t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{\delta}}(0) + 2.138 \times 10^{-7} k_f^{-1} - 9.49310^{-10} \bar{x}_r(0) + \bar{\delta}(0) \\ \bar{x}_r(t) &= 6.593 \frac{\sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 225.275 \frac{\cos(0.152 t \sqrt{k_f})}{k_f} + \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) + 225.275 k_f^{-1} \\ \bar{y}_r(t) &= \dot{\bar{y}}_r(0) t + \bar{y}_r(0) \\ \bar{z}_r(t) &= 0 \\ \bar{x}_b(t) &= -0.309 \frac{\sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 10.573 \frac{\cos(0.152 t \sqrt{k_f})}{k_f} - 0.047 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) + \\ &\quad 0.122 t^2 + 0.047 t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{x}}_b(0) - 10.573 k_f^{-1} + 0.047 \bar{x}_r(0) + \bar{x}_r(0) \\ \bar{x}_C(t) &= -5.866 \frac{\sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 200.456 \frac{\cos(0.152 t \sqrt{k_f})}{k_f} - 0.89 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) - 2.583 t^2 + 0.89 t \dot{\bar{x}}_r(0) \\ &\quad + t \dot{\bar{x}}_C(0) - 200.455 k_f^{-1} + 0.89 \bar{x}_r(0) + \bar{x}_C(0) \\ \bar{z}_C(t) &= 2.25 \frac{\sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 76.9 \frac{\cos(0.152 t \sqrt{k_f})}{k_f} + 0.341 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) + 0.991 t^2 - 0.341 t \dot{\bar{x}}_r(0) - \\ &\quad 0.384 t \dot{\bar{x}}_C(0) + 76.905 k_f^{-1} - 0.342 \bar{x}_r(0) - 0.384 \bar{x}_C(0) \\ \lambda_1(t) &= 344.819 + 0.804 \sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) - 27.49 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) + 0.122 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_2(t) &= 718.72 - 0.804 \sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) + 27.49 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) - 0.122 \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_z(t) &= 656.653 + 6.558 \times 10^{-10} \sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) + 10^{-10} \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_x(t) &= -131.331 - 1.312 \times 10^{-10} \sin(0.152 t \sqrt{k_f}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) + 10^{-10} \cos(0.152 t \sqrt{k_f}) \bar{x}_r(0) k_f \\ \lambda_\delta(t) &= 0 \end{aligned}$$

B.2.3 Mise en équation de la configuration n°4

Dans cette configuration les deux roues sont en contact avec la chaussée et le cyclomotoriste glisse relativement à la selle. Au niveau du contact frontal entre la roue avant et l'obstacle mobile, une déformation plastique de la fourche se présente.

L'équation de liaison qui permet de prendre en considération le maintien du contact de la roue avant avec la chaussée est donnée par la relation (B.4). L'équation de liaison qui prend en considération le contact de la roue arrière avec la chaussée est donnée par la relation (B.5). En se basant sur la même démarche que celle présentée dans le paragraphe précédent, on a :

$$\begin{cases} \ddot{z}_r = \dot{z}_r = 0 \\ \ddot{\phi} = \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, en considérant que le cyclomotoriste garde le contact avec la selle en glissant nous pouvons récrire l'équation de liaison (B.1) qui traduit que la vitesse normale à la selle est nulle :

$$\sin(\gamma)\dot{x}_C + \cos(\gamma)\dot{z}_C = 0 \longrightarrow \lambda_z$$

Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite de ce paragraphe, cet expression sera dérivée par rapport au temps. D'où :

$$\sin(\gamma)\ddot{x}_C + \cos(\gamma)\ddot{z}_C = 0 \Rightarrow \ddot{z}_C = -\tan(\gamma)\ddot{x}_C \quad (\text{B.17})$$

En utilisant la puissance virtuelle développée par la force de frottement au niveau de la selle dont l'expression est donnée par la relation (B.3) et la relation (B.17) qui lie les deux paramètres \ddot{z}_C et \ddot{x}_C , les équations du mouvement du système se présentent par le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} & a_{1.10} - a_{1.11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} & a_{2.10} - a_{2.11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} & a_{3.10} - a_{3.11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} & a_{4.10} - a_{4.11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} & a_{5.10} - a_{5.11} \tan(\gamma) \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} & a_{6.10} - a_{6.11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} & a_{7.10} - a_{7.11} \tan(\gamma) \\ a_{81} & a_{82} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} & a_{8.10} - a_{8.11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} & a_{9.10} - a_{9.11} \tan(\gamma) \\ a_{10.1} & a_{10.2} & a_{10.4} & a_{10.5} & a_{10.6} & a_{10.7} & a_{10.9} & a_{10.10} - a_{10.11} \tan(\gamma) \\ a_{11.1} & a_{11.2} & a_{11.4} & a_{11.5} & a_{11.6} & a_{11.7} & a_{11.9} & a_{11.10} - a_{11.11} \tan(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix}$$

La même démarche avec l'équation (8) du système (B.18) donne l'expression suivante de λ_1 :

$$\lambda_1 = a_{81}\ddot{\psi} + a_{82}\ddot{\theta} + a_{84}\ddot{\beta} + a_{85}\ddot{\delta} + a_{86}\ddot{x}_r + a_{87}\ddot{y}_r + a_{89}\ddot{x}_b + (a_{8,10} - a_{8,11} \tan(\gamma))\ddot{x}_C - C_{z_r} - \lambda_2$$

Enfin l'inconnue dynamique λ_z se calcule en utilisant l'expression (B.19).

Solutions analytiques de la configuration n°4

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(t) &= \dot{\psi}(0)t + \overline{\psi}(0) \\ \overline{\theta}(t) &= \dot{\theta}(0)t + \overline{\theta}(0) \\ \overline{\phi}(t) &= 0 \\ \overline{\beta}(t) &= \dot{\beta}(0)t + \overline{\beta}(0) \\ \overline{\delta}(t) &= 6.846 t^2 - 0.001 t^2 F_{plast} + \dot{\delta}(0)t + \overline{\delta}(0) \\ \overline{x}_r(t) &= 3.212 t^2 - 0.013 t^2 F_{plast} + \dot{x}_r(0)t + \overline{x}_r(0) \\ \overline{y}_r(t) &= \dot{y}_r(0)t + \overline{y}_r(0) \\ \overline{z}_r(t) &= 0 \\ \overline{x}_b(t) &= 0.00054 t^2 F_{plast} + \dot{x}_b(0)t + \overline{x}_b(0) \\ \overline{x}_C(t) &= -5.913 t^2 + 0.0124 t^2 F_{plast} + \dot{x}_C(0)t + \overline{x}_C(0) \\ \overline{z}_C(t) &= 2.27 t^2 - 0.005 t^2 F_{plast} - 0.384 \dot{x}_C(0)t - 0.384 \overline{x}_C(0) \\ \lambda_1(t) &= 341.611 + 0.071 F_{plast} \\ \lambda_2(t) &= 714.39 - 0.055 F_{plast} \\ \lambda_z(t) &= 669.81 - 0.03 F_{plast} \\ \lambda_x(t) &= -133.962 + 0.006 F_{plast} \\ \lambda_\delta(t) &= 0 \end{aligned}$$

B.2.4 Mise en équation de la configuration n°5

Dans cette configuration la roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée. Le cyclomotoriste ne peut pas glisser sur la selle alors qu'il présente un degré de liberté en tangage relativement à la selle. Le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche. Les équations de liaison qui seront utilisées pour cette configuration sont les suivantes :

- L'équation qui traduit le maintien de contact de la roue avant avec la chaussée est donnée par la relation (B.4). Dans la configuration de collision qui est considérée comme figée cette équation permet d'écrire :

$$\dot{z}_r = \ddot{z}_r = 0$$

- Le maintien de contact au niveau de la selle se traduit par l'équation (B.1).
- Le non glissement du cyclomotoriste sur la selle selon la direction longitudinale s'exprime par la relation (B.2).

Les deux équations (B.1) et (B.2) permettent de dire que

$$\dot{x}_C = \dot{z}_C = 0$$

En tenant compte des ces différentes équations de liaison, les équations de mouvement du système auront la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} \\ a_{10.1} & a_{10.2} & a_{10.3} & a_{10.4} & a_{10.5} & a_{10.6} & a_{10.7} & a_{10.9} \\ a_{11.1} & a_{11.2} & a_{11.3} & a_{11.4} & a_{11.5} & a_{11.6} & a_{11.7} & a_{11.9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}}_r \\ \ddot{\bar{y}}_r \\ \ddot{\bar{x}}_b \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & k_{66} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\phi} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \\ \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ \bar{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\phi \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{z_r} + \lambda_1 \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} + \lambda_x \cos(\gamma) + \lambda_z \sin(\gamma) \\ C_{z_C} - \lambda_x \sin(\gamma) + \lambda_z \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

où le terme k_{66} représente la rigidité de la fourche k_f .

Pour résoudre ce système une démarche similaire à celles utilisées dans les paragraphes précédents sera appliquée. nous commençons par éliminer, du système (B.21), les équations de mouvement (7), (8) et (9) présentant des inconnues dynamiques et l'équation (5) qui seule fait apparaître \bar{x}_r . En faisant passer les termes en $\ddot{\bar{x}}_r$ aux seconds membres des équations restantes nous obtenons un système de 7 équations à 7 inconnues : $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\phi}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$, \bar{y}_r et \bar{x}_b et qui se présente sous la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{17} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{57} & a_{58} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{77} & a_{78} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{97} & a_{98} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\bar{y}}_r \\ \ddot{\bar{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi - a_{16} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\theta - a_{26} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\phi - a_{36} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\beta - a_{46} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_\delta - a_{56} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_{y_r} - a_{76} \ddot{\bar{x}}_r \\ C_{x_b} - a_{96} \ddot{\bar{x}}_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Par inversion de la matrice $[\mathbf{M}]$ nous arrivons à exprimer les paramètres $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\phi}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$, \bar{y}_r et \bar{x}_b en fonction de la variable \bar{x}_r . Il suffit alors de reporter ces expressions dans l'équation (6) du

système (B.21) pour obtenir une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Une solution de cette équation se présente sous la forme (B.12) dont les constantes dépendent des conditions initiales.

Une fois que les expressions des différents paramètres sont calculées, les différentes inconnues dynamiques λ_1 , λ_x et λ_z peuvent être calculées en utilisant les équations (8), (10) et (11) du système d'équations (B.21).

Solutions analytiques de la configuration n°5

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(t) &= \dot{\bar{\psi}}(0) t + \bar{\psi}(0) \\
\bar{\theta}(t) &= \dot{\bar{\theta}}(0) t + \bar{\theta}(0) \\
\bar{\phi}(t) &= -3.38 \frac{\sin(0.113 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 108.44 \frac{\cos(0.113 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.38 \bar{x}_r(0) \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) - 4.27 t^2 + \\
&\quad 0.38 t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{\phi}}(0) - 108.44 k_f^{-1} + 0.38 \bar{x}_r(0) + \bar{\phi}(0) \\
\bar{\beta}(t) &= \dot{\bar{\beta}}(0) t + \bar{\beta}(0) \\
\bar{\delta}(t) &= 0.5 k_f t^2 + \dot{\bar{\delta}}(0) t + \bar{\delta}(0) \\
\bar{x}_r(t) &= 8.857 \frac{\sin(0.113 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 284.43 \frac{\cos(0.113 \sqrt{k_f t})}{k_f} + \bar{x}_r(0) \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) + 284.43 k_f^{-1} \\
\bar{y}_r(t) &= \dot{\bar{y}}_r(0) t + \bar{y}_r(0) \\
\bar{z}_r(t) &= 0 \\
\bar{x}_b(t) &= -0.75 \frac{\sin(0.113 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 24.1 \frac{\cos(0.113 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.085 \bar{x}_r(0) \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) + 0.154 t^2 + 0.085 t \dot{\bar{x}}_r(0) + \\
&\quad t \dot{\bar{x}}_b(0) - 24.095 k_f^{-1} + 0.085 \bar{x}_r(0) + \bar{x}_b(0) \\
\bar{x}_C(t) &= 0 \\
\bar{z}_C(t) &= 0 \\
\lambda_1(t) &= 401.89 + 3.791 \sin(0.113 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) - 121.74 \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) + 0.43 \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f - 7.132 k_f \\
\lambda_2(t) &= 0 \\
\lambda_z(t) &= 196.21 + 2.573 \sin(0.113 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) - 82.632 \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) + 0.291 \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f - 7.132 k_f \\
\lambda_x(t) &= -420.455 - 5.213 \sin(0.113 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) + 167.409 \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) - 0.589 \cos(0.113 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f + 11.454 k_f \\
\lambda_\delta(t) &= 0
\end{aligned}$$

B.2.5 Mise en équation de la configuration n°6 et n°8

Dans ces configurations la roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée. Le cyclomotoriste glisse relativement à la selle. Au niveau du contact frontal entre la roue avant et l'obstacle mobile, une déformation élastique soit de la fourche (configuration n° 6) soit de la roue avant (configuration n° 8) se présente.

L'équation de liaison qui permet de prendre en considération le maintien du contact de la roue avant avec la chaussée est donnée par la relation (B.4). En se basant sur la même démarche que celle présentée dans le paragraphe précédent, on a :

$$\ddot{\bar{z}}_r = \dot{\bar{z}}_r = 0$$

Le maintien du contact au niveau de la selle se traduit par l'équation (B.1). En utilisant la relation (B.17) qui donne une relation entre le paramètre \bar{x}_C et \bar{z}_C et l'équation (B.3) de la puissance virtuelle de la force de frottement au niveau de la selle, les équations de mouvement

du système se présentent sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} & a_{1,10} - a_{1,11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} & a_{2,10} - a_{2,11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} & a_{3,10} - a_{3,11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} & a_{4,10} - a_{4,11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} & a_{5,10} - a_{5,11} \tan(\gamma) \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} & a_{6,10} - a_{6,11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} & a_{7,10} - a_{7,11} \tan(\gamma) \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} & a_{8,10} - a_{8,11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} & a_{9,10} - a_{9,11} \tan(\gamma) \\ a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,3} & a_{10,4} & a_{10,5} & a_{10,6} & a_{10,7} & a_{10,9} & a_{10,10} - a_{10,11} \tan(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\bar{x}}_r \\ \ddot{\bar{y}}_r \\ \ddot{\bar{x}}_b \\ \ddot{\bar{x}}_C \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots k_{66} \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\phi} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\delta} \\ \bar{x}_r \\ \bar{y}_r \\ \bar{x}_b \\ \bar{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\phi \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{z_r} + \lambda_1 \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} + (\sin(\gamma) - \mu \cos(\gamma))\lambda_z \\ C_{z_C} + (\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma))\lambda_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})
 \end{aligned}$$

avec k_{66} est soit la raideur de la fourche (k_f) si la configuration 6 est traitée soit la raideur de la roue avant (k_r) s'il s'agit de la configuration 8. Pour aboutir à la solution analytique, la même démarche que celle présentée pour traiter les configurations 2 et 3 peut être utilisée.

Solutions analytiques des configurations n°6 et n°8

Les équations présentées ci-dessous représentent les solutions analytiques des équations de mouvement pour la configuration n°6 où le contact frontal présente une déformation élastique de la fourche. Afin de trouver les solutions correspondantes à la configuration n°4, il suffit de remplacer la raideur k_f de la fourche par celle de la roue avant k_r .

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(t) &= \dot{\bar{\psi}}(0) t + \bar{\psi}(0) \\
\bar{\theta}(t) &= \dot{\bar{\theta}}(0) t + \bar{\theta}(0) \\
\bar{\phi}(t) &= -0.469 \frac{\sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 3.949 \frac{\cos(0.151 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.071 \bar{x}_r(0) \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) - 5.295 t^2 + \\
&\quad 0.071 t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{\phi}}(0) - 3.95 k_f^{-1} + 0.071 \bar{x}_r(0) + \bar{\phi}(0) \\
\bar{\beta}(t) &= \dot{\bar{\beta}}(0) t + \bar{\beta}(0) \\
\bar{\delta}(t) &= -0.0008 \frac{\sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 0.0067 \frac{\cos(0.151 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.0001 \bar{x}_r(0) \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) + 5.28 t^2 + \\
&\quad 0.0001 t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{\delta}}(0) - 0.0067 k_f^{-1} + 0.00012 \bar{x}_r(0) + \bar{\delta}(0) \\
\bar{x}_r(t) &= 6.625 \frac{\sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 55.798 \frac{\cos(0.151 \sqrt{k_f t})}{k_f} + \bar{x}_r(0) \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) + 55.8 k_f^{-1} \\
\bar{y}_r(t) &= \dot{\bar{y}}_r(0) t + \bar{y}_r(0) \\
\bar{z}_r(t) &= 0 \\
\bar{x}_b(t) &= -0.314 \frac{\sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 2.645 \frac{\cos(0.151 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.0474 \bar{x}_r(0) \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) + 0.03 t^2 + \\
&\quad 0.0474 t \dot{\bar{x}}_r(0) + t \dot{\bar{x}}_b(0) - 2.645 k_f^{-1} + 0.0474 \bar{x}_r(0) + \bar{x}_b(0) \\
\bar{x}_C(t) &= -5.504 \frac{\sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} + 46.36 \frac{\cos(0.151 \sqrt{k_f t})}{k_f} - 0.831 \bar{x}_r(0) \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) + \\
&\quad 2.749 t^2 + 0.831 t \bar{x}_r(0) + t \dot{\bar{x}}_C(0) - 46.36 k_f^{-1} + 0.831 \bar{x}_r(0) + \bar{x}_C(0) \\
\bar{z}_C(t) &= 2.11 \frac{\sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \dot{\bar{x}}_r(0)}{\sqrt{k_f}} - 17.786 \frac{\cos(0.151 \sqrt{k_f t})}{k_f} + 0.319 \bar{x}_r(0) \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) - 1.054 t^2 - \\
&\quad 0.319 t \dot{\bar{x}}_r(0) - 0.384 t \dot{\bar{z}}_C(0) + 17.786 k_f^{-1} - 0.319 \bar{x}_r(0) - 0.384 \bar{z}_C(0) \\
\lambda_1(t) &= 145.671 + 0.94 \sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) - 7.923 \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) + 0.142 \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\
\lambda_2(t) &= 0 \\
\lambda_z(t) &= -1.892 + 0.638 \sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) - 5.37732874 \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) + 0.096 \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\
\lambda_x(t) &= 0.378 - 0.128 \sin(0.151 \sqrt{k_f t}) \sqrt{k_f} \dot{\bar{x}}_r(0) + 1.075 \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) - 0.019 \cos(0.151 \sqrt{k_f t}) \bar{x}_r(0) k_f \\
\lambda_\delta(t) &= 0
\end{aligned}$$

B.2.6 Mise en équation de la configuration n°7

Dans cette configuration la roue avant est en contact avec la chaussée alors que la roue arrière s'en trouve décollée. Le cyclomotoriste glisse relativement à la selle. Au niveau du contact frontal entre la roue avant et l'obstacle mobile, une déformation plastique de la fourche se présente.

L'équation de liaison qui permet de prendre en considération le maintien du contact de la roue avant avec la chaussée est donnée par la relation (B.4). En se basant sur la même démarche que celle présentée au niveau de l'étude de la configuration n°4, on a :

$$\ddot{\bar{z}}_r = \dot{\bar{z}}_r = 0$$

D'autre part, en considérant que le cyclomotoriste garde le contact avec la selle en glissant nous pouvons récrire l'équation de liaison (B.1) qui traduit que la vitesse normale à la selle du cyclomoteur est nulle. Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite de ce paragraphe, cette expression sera dérivée, par rapport au temps. D'où l'expression (B.17) réécrite ci-dessous :

$$\sin(\gamma) \ddot{\bar{x}}_C + \cos(\gamma) \ddot{\bar{z}}_C = 0 \Rightarrow \ddot{\bar{z}}_C = -\tan(\gamma) \ddot{\bar{x}}_C$$

En utilisant la puissance virtuelle développée par la force de frottement au niveau de la selle dont l'expression est donnée par la relation (B.3) et la relation (B.17) qui lie les deux paramètres $\ddot{\bar{z}}_C$ et $\ddot{\bar{x}}_C$, les équations du mouvement du système se présentent par le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} & a_{1,10} - a_{1,11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} & a_{2,10} - a_{2,11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} & a_{3,10} - a_{3,11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} & a_{4,10} - a_{4,11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} & a_{5,10} - a_{5,11} \tan(\gamma) \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} & a_{6,10} - a_{6,11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} & a_{7,10} - a_{7,11} \tan(\gamma) \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{89} & a_{8,10} - a_{8,11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} & a_{9,10} - a_{9,11} \tan(\gamma) \\ a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,3} & a_{10,4} & a_{10,5} & a_{10,6} & a_{10,7} & a_{10,9} & a_{10,10} - a_{10,11} \tan(\gamma) \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,3} & a_{11,4} & a_{11,5} & a_{11,6} & a_{11,7} & a_{11,9} & a_{11,10} - a_{11,11} \tan(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix} + F_{plast} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\phi \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} \\ C_{y_r} \\ C_{z_r} + \lambda_1 \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} + (\sin(\gamma) - \mu \cos(\gamma))\lambda_z \\ C_{z_C} + (\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma))\lambda_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Où F_{plast} est l'amplitude de la force de déformation plastique de la fourche. A partir de l'équation (11) du système (B.24), l'expression de λ_z en fonction des accélérations généralisées $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\delta}$, \ddot{x}_r , \ddot{y}_r , \ddot{x}_b , \ddot{x}_C peut être obtenue. D'où :

$$\lambda_z = \frac{a_{11,1}\ddot{\psi} + a_{11,2}\ddot{\theta} + a_{11,3}\ddot{\phi} + a_{11,4}\ddot{\beta} + a_{11,5}\ddot{\delta} + a_{11,6}\ddot{x}_r + a_{11,7}\ddot{y}_r + a_{11,9}\ddot{x}_b + (a_{11,10} - a_{11,11} \tan(\gamma))\ddot{x}_C - C_{z_C}}{\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma)} \quad (\text{B.25})$$

Reportons cette expression dans l'équation (10) du même système (B.24) et éliminons les équations présentant des inconnues dynamiques, Le système d'équations aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{19} & a_{1,10} - a_{1,11} \tan(\gamma) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{29} & a_{2,10} - a_{2,11} \tan(\gamma) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{39} & a_{3,10} - a_{3,11} \tan(\gamma) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{49} & a_{4,10} - a_{4,11} \tan(\gamma) \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{59} & a_{5,10} - a_{5,11} \tan(\gamma) \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{69} & a_{6,10} - a_{6,11} \tan(\gamma) \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{79} & a_{7,10} - a_{7,11} \tan(\gamma) \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{99} & a_{9,10} - a_{9,11} \tan(\gamma) \\ \left(\begin{smallmatrix} a_{10,1} - \\ D_1 a_{11,1} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,2} - \\ D_1 a_{11,2} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,3} - \\ D_1 a_{11,3} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,4} - \\ D_1 a_{11,4} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,5} - \\ D_1 a_{11,5} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,6} - \\ D_1 a_{11,6} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,7} - \\ D_1 a_{11,7} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,9} - \\ D_1 a_{11,9} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} a_{10,10} - a_{10,11} \tan(\gamma) - \\ D_1 (a_{11,10} - a_{11,11} \tan(\gamma)) \end{smallmatrix} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{x}_r \\ \ddot{y}_r \\ \ddot{x}_b \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_\theta \\ C_\phi \\ C_\beta \\ C_\delta \\ C_{x_r} - F_{plast} \\ C_{y_r} \\ C_{x_b} \\ C_{x_C} - D_1 C_{z_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

avec

$$D_1 = \frac{\sin(\gamma) - \mu \cos(\gamma)}{\cos(\gamma) + \mu \sin(\gamma)}$$

Par inversion de la matrice $[\mathbf{M}]$ les différentes variables peuvent être calculées. Les inconnues dynamiques du système seront déterminées par la suite. En effet l'équation (8) du système (B.18) donne l'expression suivante de λ_1 :

$$\lambda_1 = a_{81} \ddot{\psi} + a_{82} \ddot{\theta} + a_{83} \ddot{\phi} + a_{84} \ddot{\beta} + a_{85} \ddot{\delta} + a_{86} \ddot{x}_r + a_{87} \ddot{y}_r + a_{89} \ddot{x}_b + (a_{8,10} - a_{8,11} \tan(\gamma)) \ddot{x}_C - C_{z_r}$$

Enfin, l'inconnue dynamique λ_z se calcule en utilisant l'expression (B.25).

Solutions analytiques de la configuration n°7

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) &= \dot{\bar{\psi}}(0) t + \bar{\psi}(0) \\ \bar{\theta}(t) &= \dot{\bar{\theta}}(0) t + \bar{\theta}(0) \\ \bar{\phi}(t) &= -5.340 t^2 + 0.0008 t^2 F_{plast} + \dot{\bar{\phi}}(0) t + \bar{\phi}(0) \\ \bar{\beta}(t) &= \dot{\bar{\beta}}(0) t + \bar{\beta}(0) \\ \bar{\delta}(t) &= 5.279 t^2 + 0.0000014 t^2 F_{plast} + \dot{\bar{\delta}}(0) t + \bar{\delta}(0) \\ \bar{x}_r(t) &= 0.636 t^2 - 0.0114 t^2 F_{plast} + \dot{\bar{x}}_r(0) t + \bar{x}_r(0) \\ \bar{y}_r(t) &= \dot{\bar{y}}_r(0) t + \bar{y}_r(0) \\ \bar{z}_r(t) &= 0 \\ \bar{x}_b(t) &= 10^{-9} t^2 + 0.00054 t^2 F_{plast} + \dot{\bar{x}}_b(0) t + \bar{x}_b(0) \\ \bar{x}_C(t) &= 2.22 t^2 + 0.009 t^2 F_{plast} + \dot{\bar{x}}_C(0) t + \bar{x}_C(0) \\ \bar{z}_C(t) &= -0.852 t^2 - 0.0036 t^2 F_{plast} - 0.384 \dot{\bar{x}}_C(0) t - 0.384 \bar{x}_C(0) \\ \lambda_1(t) &= 137.748 + 0.142 F_{plast} \\ \lambda_2(t) &= 0 \\ \lambda_z(t) &= -7.27 + 0.096 F_{plast} \\ \lambda_x(t) &= 1.454 - 0.02 F_{plast} \\ \lambda_\delta(t) &= 0 \end{aligned}$$

NOUVELLE FORMULATION DE LA DYNAMIQUE DU CHOC : APPLICATION AUX ACCIDENTS DES VÉHICULES À DEUX ROUES.

Une nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc a été présentée. Cette formulation permet de simplifier la modélisation dynamique d'un système présentant des contacts unilatéraux multiples et entrant en collision avec un obstacle mobile. En plus, cette formulation permet d'aboutir à un modèle analytique qui a été validé par des simulations numériques d'un système mécanique simple. Dans le cas des accidents des véhicules à deux roues, cette nouvelle formulation de la dynamique du choc permet d'avoir un modèle qui convient pour la reconstitution de ce type d'accidents. Le système étudié est formé par un cyclomoteur sur lequel est installé un cyclomotoriste qui entre en collision frontale avec un obstacle mobile. Cette scène d'accident des véhicules à deux roues est la plus répandue en Tunisie. Il s'agit d'un modèle tridimensionnel qui prend en considération la présence des contacts unilatéraux multiples. Les différentes configurations qui peuvent être rencontrées durant la collision ont été étudiées. Des essais expérimentaux ayant pour but la détermination des paramètres géométriques et inertiels du cyclomoteur ainsi que l'identification des paramètres de la loi de comportement dynamique du contact frontal ont été réalisés. Tous les résultats obtenus ont été utilisés pour les différentes simulations. Des essais de test-crash ont été élaborés en coopération avec l'INRETS de Bron en France. Les résultats expérimentaux des essais de test-crash ont été exploités pour une confrontation avec ceux du modèle analytique élaboré en utilisant la nouvelle formulation simplifiée de la dynamique du choc. Aussi, ces résultats expérimentaux ont été confrontés avec des simulations numériques faites en utilisant le logiciel ADAMS. Les résultats obtenus en utilisant notre modèle analytique ont montré que par un choix adéquat de la rigidité du système, notre modèle analytique peut prévoir le comportement dynamique du système durant la collision.

MOTS-CLÉS : Mécanique du Choc, contacts unilatéraux, véhicule à deux roues, reconstitution des accidents de la circulation routière.

NEW FORMULATION OF THE IMPULSE DYNAMICS : APPLICATION TO THE ACCIDENTS OF THE TWO-WHEELED VEHICLES.

A new simplified formulation of the impulse dynamics was presented. This formulation allows the simplification of the dynamic model of a system with multiple unilateral contacts entering in collision with a mobile obstacle. Moreover, this formulation yields an analytical model, which was validated by a numerical simulation of a simple mechanical system. In the case of two-wheeled vehicles, this formulation allowed us to have a suitable model for accidents reconstruction. The system is made of a two-wheeled vehicle with its driver entering in a frontal collision with a mobile obstacle. This scenario is the most frequent case of two-wheeled accidents in Tunisia. The model is three dimensional and takes into account the presence of multiple unilateral contacts. The different configurations of the system during the collision were studied. Experimental tests were carried out to measure the geometric and inertial characteristics of the different components of the moped. Also, the dynamic behaviour of the frontal contact was identified experimentally. All the obtained parameters were fed into the simulation model. Crash-tests were also carried out in co-operation with the INRETS of Bron in France. The experimental results of the crash-tests were confronted with the analytical ones obtained from our simulation model. These results were also confronted with the ones obtained from the software ADAMS. The results obtained using our model showed that, with an adequate choice of the rigidity of the system, we can have a realistic model that can reflect closely the dynamic behaviour of the system during the collision.

KEY WORDS : Impulse mechanics, unilateral constraints, two-wheeled vehicles, road traffic accidents reconstruction.