

THESE

Présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

FORMATION DOCTORALE: MECANIQUE

ECOLE DOCTORALE MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique)

PAR

Hélène WALTER
Ingénieur I.N.S.A.

**MODELISATION 3D PAR ELEMENTS FINIS DU CONTACT AVEC
FROTTEMENT ET DE L'ENDOMMAGEMENT DU BETON: APPLICATION A
L'ETUDE DE FIXATIONS ANCREES DANS UNE STRUCTURE EN BETON**

Soutenue le 27 octobre 1999 devant la Commission d'Examen:

Jury MM.

L. BAILLET	Examineur
J.P. BARTHOMEUF	Examineur
Y. BERTHAUD	Rapporteur
P. BOISSE	Rapporteur
J.C. BOYER	Examineur
M. BRUNET	Directeur de thèse
A. MILLARD	Examineur
J.M. REYNOUARD	Président du Jury

ECOLE DOCTORALES

➤ **MATERIAUX DE LYON**

INSAL – ECL -UCB. Lyon1 – Univ. De Chambéry – ENS

Responsable : Professeur A. HOAREAU, UCBL (Tél. : 04.72.44.85.66)

Formations doctorales associées :

- Génie des Matériaux (Pr. R. FOUGERES, Tél : 04. 72. 43. 81 .49)
- Matière condensée surfaces et interfaces (Pr. G. GUILLOT, Tél : 04.72.43.81.61)
- Matériaux polymères et composites (Pr. H. SAUTEREAU, Tél : 04.72.43.81.78)

➤ **MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (MEGA)°**

Responsable : Professeur J. BATAILLE, ECL (Tél : 04.72.43.8079)

Formations doctorales associées :

- Acoustique (Pr. J.L. GUYADER, Tél : 04.72.43.80.80)
- Génie Civil : Sols, matériaux, structures, physique du bâtiment (Pr. P. LAREAL, Tél : 04.72.43.82.16)
- Mécanique (Pr. G. DALMAZ, Tél : 04.72.43.83.03)
- Thermique et Energétique (Pr. M. LALLEMAND, Tél : 04.72.43.81.54)

➤ **ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE (EEA)**

INSAL - ECL – UCB. Lyon1 – Univ. de Saint-Etienne

Responsable : Professeur G. GIMENEZ, INSAL (Tél : 04.72.43.83.32)

Formations doctorales associées :

- Acoustique (Pr. J.L. GUYADER, Tél : 04.72.43.80.80)
- Automatique Industrielle (Pr. SCAVARDA, Tél : 04.72.43.83.41)
- Dispositifs de l'électronique intégrée (Pr. P. PINARD, Tél : 04.72.43.80.79)
- Génie biologique et médical (Pr. I MAGNIN, Tél : 04.72.43.85.63)
- Génie électrique (Pr. J.P. CHANTE, Tél : 04.72.43.87.26)
- Signal, Image, Parole (Pr. G. GIMENEZ, Tél : 04.72.43.83.32)

➤ **ECOLE DOCTORALE INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE (EDISS)**

INSAL – UCB Lyon1 – Univ. de Saint-Etienne – Univ. Aix-Marseille2

Responsable : Professeur A. COZZONE, CNRS-Lyon (Tél 04.72.72.26.75)

Formations doctorales associées :

- Biochimie (Pr. M. LAGARDE, Tél : 04.72.43.82.40)
- Génie biologique et médical (Pr. I. MAGNIN, Tél : 04.72.43.85.63)

AUTRES FORMATIONS DOCTORALES

➤ **ANALYSE ET MODELISATION DES SYSTEMES BIOLOGIQUE**

Responsable : Professeur S. GRENIER, INSAL
Tél : 04.72.43.83.56

➤ **CHIMIE INORGANIQUE**

Responsable : Professeur P. GONNARD, INSAL
Tél : 04.72.43.81.58

➤ **CONCEPTION EN BATIMENT ET TECHNIQUE URBAINES**

Responsable : Professeur M. MIRAMOND, INSAL
Tél : 04.72.43.82.09

➤ **DEA INFORMATIQUE DE LYON**

Responsable : Professeur J.M. JOLION, INSAL
Tél : 04.72.43.87.59

➤ **PRODUCTIQUE : ORGANISATION ECONOMIQUE ET GENIE INFORMATIQUE POUR L'ENTREPRISE**

Responsable : Professeur J. FAVREL, INSAL
Tél : 04.72.43.83.63

➤ **SCIENCES ET TECHNIQUES DU DECHET**

Responsable : Professeur P. MOSZKOWICZ, INSAL
Tél : 04.72.43.83.45

Janvier 1998

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Directeur : J. Rochat

Professeurs

S.	AUDISIO	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
J.C.	BABOUX	GEMPPM*
B.	BALLAND	PHYSIQUE DE LA MATIERE
D.	BARBIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
G.	BAYADA	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
C.	BERGER (Mlle)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	BETEMPS	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
J.M.	BLANCHARD	LAEPSI**
C.	BOISSON	VIBRATIONS ACOUSTIQUES
M.	BOIVIN	MECANIQUE DES SOLIDES
H.	BOTTA	EQUIPE DEVELOPPEMENT URBAIN
G.	BOULAYE	INFORMATIQUE
J.	BRAU	CENTRE DE THERMIQUE
M.	BRISAUD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
M.	BRUNET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.C.	BUREAU	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
J.Y.	CAVILLE	GEMPPM*
J.P.	CHANTE	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
B.	CHOCAT	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
B.	CLAUDEL	LAEPSI**
M.	COUSIN	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
M.	DIOT	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
A.	DOUTHEAU	CHIMIE ORGANIQUE
R.	DUFOUR	MECANIQUE DES STRUCTURES
J.C.	DUPUY	PHYSIQUE DE LA MATIERE
H.	EMPTOZ	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
C.	ESNOUF	GEMPPM*
L.	EYRAUD (Prof. Emérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	FANTOZZI	GEMPPM*
M.	FAYET	MECANIQUE DES SOLIDES
J.	FAVREL	GROUPE DE RECHERCHE EN PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
G.	FERRARIS-BESSO	MECANIQUE DES STRUCTURES
Y.	FETIVEAU	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
L.	FLAMAND	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	FLEISCHMANN	GEMPPM*
A.	FLORY	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
R.	FOUGERES	GEMPPM*
F.	FOUQUET	GEMPPM*
L.	FRECON	INFORMATIQUE
R.	GAUTHIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
M.	GERY	CENTRE DE THERMIQUE
G.	GIMENEZ	CREATIS***
P.	GOBIN (Prof. émérite)	GEMPPM*
P.	GONNARD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
M.	GONTRAND	COMPOSANTS DE PUISSANCE ET APPLICATIONS
R.	GOUTTE (Prof. Emérite)	CREATIS***
G.	GRANGE	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.	GUENIN	GEMPPM*
M.	GUICHARDANT	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
G.	GUILLOT	PHYSIQUE DE LA MATIERE
A.	GUINET	GROUPE DE RECHERCHE EN PRODUCTIQUE ET INFORMATIQUE DES SYSTEMES MANUFACTURIERS
J.L.	GUYADER	VIBRATIONS ACOUSTIQUES
J.P.	GUYOMAR	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.M.	JOLION	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
J.F.	JULLIEN	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
A.	JUTARD	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
R.	KASTNER	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
H.	KLEIMANN	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
J.	KOULOUMDJIAN	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
M.	LAGARDE	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
M.	LALANNE	MECANIQUE DES STRUCTURES
A.	LALLEMAND	CENTRE DE THERMIQUE
M.	LALLEMAND (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE
P.	LAREAL	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
A.	LAUGIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
Ch.	LAUGIER	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
P.	LEJEUNE	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES

A.	LUBRECHT	MECANIQUE DES CONTACTS
Y.	MARTINEZ	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
H.	MAZILLE	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
P.	MERLE	GEMPPM*
J.	MERLIN	GEMPPM*
J.P.	MILLET	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
M.	MIRAMOND	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
N.	MONGEREAU (Prof. Emérite)	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
R.	MOREL	MECANIQUE DES FLUIDES
P.	MOSZKOWICZ	LAEPSI**
P.	NARDON	BIOLOGIE APPLIQUEE
A.	NAVARRO	LAEPSI**
A.	NOURI (Mme)	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
M.	OTTERBEIN	LAEPSI**
J.P.	PASCAULT	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
G.	PAVIC	VIBRATIONS ACOUSTIQUES
J.	PERA	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
G.	PERRACHON	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
J.	PEREZ (Prof. Emérite)	GEMPPM*
P.	PINARD	PHYSIQUE DE LA MATIERE
J.M.	PINON	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
D.	PLAY	CONCEPTION ET ANALYSE DES SYSTEMES MECANIQUES
J.	POUSIN	MODELISATION MATHEMATIQUE ET CALCUL SCIENTIFIQUE
P.	PREVOT	GROUPE DE RECHERCHE EN APPRENTISSAGE, COOPERATION ET INTERFACES MULTIMODALES
R.	PROST	CREATIS***
M.	RAYNAUD	CENTRE DE THERMIQUE
J.M.	REYNOUARD	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL
E.	RIEUTORD (Prof. Emérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
J.	ROBERT-BAUDOY (Mme)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
D.	ROUBY	GEMPPM*
P.	RUBEL	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
C.	RUMELHART	MECANIQUE DES SOLIDES
J.F.	SACADURA	CENTRE DE THERMIQUE
H.	SAUTEREAU	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
S.	SCARVARDA	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
D.	THOMASSET	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
M.	TROCCAZ	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
R.	UNTERREINER	CREATIS***
J.	VERON	LAEPSI**
G.	VIGIER	GEMPPM*
A.	VINCENT	GEMPPM*
P.	VUILLERMOZ	PHYSIQUE DE LA MATIERE

Directeurs de recherche C.N.R.S.

Y.	BERTHIER	MECANIQUE DES CONTACTS
P.	CLAUDY	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
N.	COTTE-PATTAT (Mme)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
P.	FRANCIOSI	GEMPPM
J.F.	GERARD	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
M.A.	MANDRAND (Mme)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
J.F.	QUINSON	GEMPPM
A.	ROCHE	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES

Directeurs de recherche I.N.R.A.

G.	BONNOT	BIOLOGIE APPLIQUEE
G.	FEBVAY	BIOLOGIE APPLIQUEE
S.	GRENIER	BIOLOGIE APPLIQUEE
Y.	MENEZO	BIOLOGIE APPLIQUEE

Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M.

A.F.	PRINGENT (Mme)	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
I.	MAGNIN (Mme)	CREATIS***

GEMPPM* : Groupe d'étude métallurgie physique et physique des matériaux

LAEPSI** : Laboratoire d'analyse environnementale des procédés et systèmes industriels

CREATIS*** : Centre de recherche et d'applications en traitement de l'image et du signal

Remerciements

Je remercie les professeurs Maurice BOIVIN et Michel BRUNET pour m'avoir accueillie au sein du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'INSA de Lyon.

Je remercie mon directeur de thèse, le professeur Michel BRUNET, pour son aide et ses conseils, ainsi que pour la confiance qu'il m'a témoignée.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Laurent BAILLET, Maître de Conférence au Laboratoire de Mécanique des Contacts de l'INSA de Lyon, pour avoir également assuré l'encadrement de cette thèse, pour m'avoir fait partager ses connaissances et son expérience, ainsi que pour son soutien et sa disponibilité.

Je remercie la société SPIT de Bourg-lès-Valence et Monsieur Jean-Paul BARTHOMEUF pour avoir financé cette étude et pour leur collaboration.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux professeurs Yves BERTHAUD et Philippe BOISSE pour avoir accepté d'examiner et de juger ce travail. Je remercie également Messieurs Jean-Marie REYNOUARD, Alain MILLARD et Jean-Claude BOYER pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

J'aimerais également remercier Monsieur Jean-Claude CHKOUROPADSKY, responsable informatique du département Génie Mécanique Construction de l'INSA de Lyon, pour son aide précieuse sur le plan informatique ainsi que pour sa perpétuelle bonne humeur, sans oublier tous ceux qui ont contribué à créer une agréable ambiance pendant ces années de thèse et qui m'ont toujours apporté leur soutien: Bastien, David, Jean-Louis, Violaine, Ivan, Valérie...

Table des matières

Table des figures	13
Introduction générale	17
Chapitre I: Position du problème	21
I.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES CHEVILLES	23
I.1.1. CLASSIFICATION DES CHEVILLES	23
I.1.2. SOLLICITATIONS	24
I.1.3. MODES DE RUINES	24
I.2. MÉTHODES DE RÉOLUTION	25
I.2.1. TESTS EXPÉRIMENTAUX	25
I.2.2. FORMULES ANALYTIQUES	26
I.2.3. MODÉLISATIONS NUMÉRIQUES	26
I.3. CADRE ET HISTORIQUE DE L'ÉTUDE	28
I.4. STRATÉGIE DE RÉOLUTION ADOPTÉE	29
I.4.1. MISE EN DONNÉES ET VISUALISATION DES RÉSULTATS	30
I.4.2. FORMULATION GÉNÉRALE	30
I.4.3. GESTION DU CONTACT ET DU FROTTEMENT ENTRE PLUSIEURS CORPS DÉFORMABLES	30
I.4.4. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DU BÉTON	31
I.4.5. CONCLUSION	31
Chapitre II: Gestion du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables	33
II.1. GENERALITES	36
II.1.1. CONTACT UNILATÉRAL	36
II.1.2. LOIS DE FROTTEMENT	37
II.1.2.1. Loi de Coulomb	37
II.1.2.2. Loi de Tresca	37
II.1.2.3. Autres modèles	38
II.2. METHODES DE RESOLUTION DU CONTACT: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	38

II.2.1. MÉTHODE DE LA PÉNALISATION.....	39
II.2.2. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE.....	42
II.2.3. MÉTHODES MIXTES OU HYBRIDES.....	43
II.2.3.1. Méthode du Lagrangien perturbé.....	44
II.2.3.2. Méthode du Lagrangien augmenté.....	44
II.3. MODELE DEVELOPPE.....	45
II.3.1. DÉFINITION DE LA GÉOMÉTRIE DU CONTACT.....	45
II.3.2. ALGORITHME DE RECHERCHE DE LA ZONE DE CONTACT.....	46
II.3.3. FORMULATION DU PROBLÈME.....	48
II.3.3.1. Méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" en 3D.....	48
II.3.3.2. Projection d'un nœud esclave sur une surface triangulaire maîtresse.....	51
II.3.3.3. Projection d'un nœud esclave sur un segment maître.....	53
II.3.3.4. Projection d'un nœud esclave sur un nœud maître.....	54
II.3.4. VALIDATIONS ET EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES.....	55
II.3.4.1. Impact d'un cylindre sur une plaque.....	55
II.3.4.2. Etude du procédé d'étirage.....	58
II.3.5. CONCLUSION.....	63

Chapitre III: Modélisation du comportement du béton 65

III.1. COMPORTEMENT DU BETON: ASPECT PHENOMENOLOGIQUE.....	67
III.1.1. LE BÉTON, UN MATÉRIAU HÉTÉROGÈNE.....	67
III.1.2. COMPORTEMENT EN COMPRESSION UNIAXIALE.....	68
III.1.3. COMPORTEMENT EN TRACTION UNIAXIALE.....	69
III.1.4. COMPORTEMENT SOUS CONTRAINTES BIAxiaLES.....	70
III.2. MODELISATION DE LA FISSURATION DU BETON: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....	71
III.2.1. INTRODUCTION.....	71
III.2.2. CRITÈRE D'AMORÇAGE ET DE PROPAGATION DE FISSURE.....	72
III.2.3. MODÈLE DE LA FISSURE DISCRÈTE.....	74
III.2.4. MODÈLE DE LA FISSURE DIFFUSE.....	75
III.2.4.1. Principe général.....	75
III.2.4.2. Les différents concepts.....	75
III.2.4.2.1. Le concept de la fissure diffuse fixe.....	76
III.2.4.2.1.1. Formulation à partir de la déformation totale.....	76
III.2.4.2.1.2. Formulation à partir de la décomposition des déformations.....	79
III.2.4.2.2. Le concept de la fissure diffuse tournante.....	86
III.2.4.3. Description du comportement du matériau dans les concepts.....	88
III.2.4.3.1. Paramètres du mode I.....	88
III.2.4.3.2. Paramètres du mode II.....	91
III.2.4.3.3. Fermeture et réouverture de fissure.....	93
III.2.4.4. Critique des différents concepts.....	94
III.2.5. AUTRES MODÈLES.....	96
III.2.5.1 Modèles basés sur la théorie de la plasticité et de la viscoplasticité.....	96
III.2.5.2. Modèles basés sur la théorie de l'endommagement continu.....	97
III.2.5.3. Modèle "microplan".....	97
III.2.5.4. Modèles avec discontinuités ancrées dans les éléments.....	98
III.2.5.5. Limiteurs de localisation.....	98

III.2.5.5.1. Milieu de Cosserat.....	99
III.2.5.5.2. Régularisation viscoplastique.....	100
III.2.5.5.3. Modèle non local.....	100
III.2.5.5.4. Plasticité au gradient.....	101
III.2.5.6. <i>Modèle basé sur une méthode sans maillage</i>	101
III.3. MODELE DEVELOPPE	102
III.3.1. REMARQUES INTRODUCTIVES.....	102
III.3.2. MODÈLE DE FISSURATION.....	102
III.3.2.1. <i>Modèle développé en deux dimensions</i>	102
III.3.2.2. <i>Modèle développé en trois dimensions</i>	104
III.3.3. MODÈLE DE COMPORTEMENT EN COMPRESSION.....	109
III.3.3.1. <i>Critère de plastification</i>	110
III.3.3.2. <i>Loi d'écoulement</i>	112
III.3.3.3. <i>Loi d'écrouissage</i>	113
III.3.3.4. <i>Condition d'effondrement</i>	115
III.3.4. VALIDATIONS ET EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES.....	116
III.3.4.1. <i>Essai de traction directe d'une poutre entaillée en béton plein</i>	116
III.3.4.2. <i>Essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein</i>	119
III.3.5. CONCLUSION.....	123
Chapitre IV: Applications numériques	125
IV.1. ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU COMPORTEMENT À L'ARRACHEMENT DES CHEVILLES SPIT RING.....	127
IV.1.1. DESCRIPTION DE LA CHEVILLE.....	127
IV.1.2. MISE EN DONNÉES.....	127
IV.1.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES.....	129
IV.1.3.1. <i>Influence du graissage</i>	129
IV.1.3.2. <i>Influence des coefficients de frottement</i>	132
IV.1.3.2.1. <i>Influence du coefficient de frottement entre la cheville et la coquille</i>	132
IV.1.3.2.2. <i>Influence du coefficient de frottement entre la coquille et le béton</i>	134
IV.1.3.3. <i>Influence de la qualité du béton</i>	136
IV.1.4. CONCLUSION.....	136
IV.2. ETUDE TRIDIMENSIONNELLE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES CHEVILLES SPIT FIXFORM.....	137
IV.2.1. DESCRIPTION DE LA CHEVILLE.....	137
IV.2.2. COMPORTEMENT À L'ARRACHEMENT D'UNE FIXATION ANCRÉE DANS UNE DALLE DE BÉTON SANS EFFET DE BORD.....	138
IV.2.2.1. <i>Mise en données</i>	138
IV.2.2.2. <i>Résultats numériques</i>	139
IV.2.3. COMPORTEMENT AU CISAILLEMENT D'UNE FIXATION ANCRÉE DANS UNE DALLE DE BÉTON SANS EFFET DE BORD.....	141
IV.2.3.1. <i>Mise en données</i>	141
IV.2.3.2. <i>Résultats numériques</i>	143
IV.2.4. COMPORTEMENT AU CISAILLEMENT D'UNE FIXATION ANCRÉE DANS UNE DALLE DE BÉTON AVEC EFFET DE BORD.....	146
IV.2.4.1. <i>Mise en données</i>	146
IV.2.4.2. <i>Résultats numériques</i>	147

IV.2.5. COMPORTEMENT À L'ARRACHEMENT DE DEUX FIXATIONS ANCRÉES DANS UNE DALLE DE BÉTON: INFLUENCE DE L'ENTRAXE	148
IV.2.5.1. Mise en données	148
IV.2.5.2. Résultats numériques	149
IV.2.6. CONCLUSION	151
 Conclusions et perspectives	 153
 Références bibliographiques	 159
 Annexe I: Equation d'équilibre et lois de comportement élastoplastique en grandes déformations	 175
 A1.1. RAPPELS EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES DEFORMATIONS ..	 177
A1.1.1. TENSEUR GRADIENT DE DÉFORMATION	177
A1.1.2. MESURES DES DÉFORMATIONS	178
A1.1.3. DÉCOMPOSITION POLAIRE	179
A1.1.4. TENSEUR DES VITESSES DE DÉFORMATION	180
A1.1.5. TENSEURS DES CONTRAINTES	180
A1.2. EQUATION D'EQUILIBRE NON LINEAIRE.....	181
A1.2.1. DISCRÉTISATION SPATIALE	182
A1.2.2. INTÉGRATION TEMPORELLE	185
A1.2.3. STABILITÉ	186
A1.3. LOIS DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUES.....	187
A1.3.1. GÉNÉRALITÉS	187
A1.3.2. DÉCOMPOSITION DE LA DÉFORMATION	188
A1.3.3. CRITÈRE DE PLASTIFICATION	188
A1.3.4. LOI D'ÉCOULEMENT	189
A1.3.5. LOI D'ÉCROUISSAGE	190
A1.3.6. INTÉGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT	191
 Annexe II: Simulation 2D d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING: propagation des fissures	 193

Table des figures

Chapitre I: Position du problème	21
Figure I.1: Exemples de chevilles à expansion par effort (a) et par déplacement (b) contrôlé.....	23
Figure I.2: Définitions des sollicitations appliquées aux chevilles.....	24
Figure I.3: Modes de ruine des fixations en traction (a) et en cisaillement par effet de levier de la cheville (b) ..	25
Figure I.4: Ancrage positionné dans le béton avant que celui-ci ne soit coulé.....	27
Chapitre II: Gestion du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables	33
Figure II.1: Contact entre un corps déformable et un corps rigide (problème de Signorini).....	36
Figure II.2: Représentation bidimensionnelle de la pénétration d'un nœud dans le domaine délimité par un segment.....	39
Figure II.3: Surface maîtresse quadrilatérale décomposée en quatre facettes triangulaires.....	47
Figure II.4: Représentation d'un nœud esclave L appartenant à un segment maître 1-2.....	54
Figure II.5: Maillage 3D initial pour la simulation de l'impact d'un cylindre sur une plaque (dimensions en mm).....	55
Figure II.6: Forces de contact globales exercées sur le cylindre et maillage déformé en fonction du temps lors de l'impact sur une plaque ($v_y=316$ m/s et $v_z=158$ m/s).....	56
Figure II.7: Temps CPU utilisé par les différents sous-programmes du code PLAST3 dans le cas de la simulation de l'impact d'un cylindre sur une plaque.....	56
Figure II.8: Forces de contact globales exercées sur le cylindre lors de l'impact d'un cylindre pour deux valeurs du coefficient de frottement ($\mu=0$ et $\mu=0.4$) ($v_y=100$ m/s et $v_z=50$ m/s).....	57
Figure II.9: Déformation plastique équivalente pour deux valeurs du coefficient de frottement ($\mu=0$ et $\mu=0.4$) lors de l'impact d'un cylindre sur une plaque dans le plan $x=15$ mm à $t=19$ μ s.....	57
Figure II.10: Présentation du procédé d'étirage.....	59
Figure II.11: Maillage 3D initial pour la simulation du procédé d'étirage.....	59
Figure II.12: Forces globales de contact exercées par la matrice sur la tôle pour différents coefficients de frottement ($\mu=0$ et $\mu=0.2$) et un taux de réduction de 18 %.....	61
Figure II.13: Déformation plastique équivalente pour différents taux de réduction et différents coefficients de frottement (course de la matrice: 3 mm) dans le plan $z=0$	62
Figure II.14: Répartition de la contrainte équivalente de Von Mises dans la tôle pour un taux de réduction de 18% et un coefficient de frottement $\mu=0$ (course de la matrice: 3 mm).....	62

Chapitre III: Modélisation du comportement du béton

65

Figure III.1: Comportement du béton en compression uniaxiale.....	69
Figure III.2: Comportement du béton en traction uniaxiale	70
Figure III.3: Enveloppe limite biaxiale du béton déterminée par Kupfer & al. [Kup69].....	70
Figure III.4: Modes de sollicitation d'une fissure	72
Figure III.5: Définition du repère local lié à la fissure	77
Figure III.6: Axes locaux pour un point d'intégration avec deux fissures orthogonales (a) ou non orthogonales (b)	79
Figure III.7: Exemple de décomposition de la déformation normale à la fissure	80
Figure III.8: Modélisation d'une discontinuité topologique en la diffusant sur une longueur caractéristique l_c	90
Figure III.9: Courbe d'adoucissement en tension pour une fissure discrète: définition de G_f	90
Figure III.10: Déchargement élastique et sécant pour un modèle élastique – adoucissement en mode I: contrainte normale fonction de la déformation totale (a), de la déformation du béton entre les fissures (b) et de la déformation de fissure (c)	94
Figure III.11: Relation entre la contrainte et la déformation en traction uniaxiale pour le modèle bidimensionnel	103
Figure III.12: Relation entre la contrainte et la déformation de fissure en traction uniaxiale pour le modèle tridimensionnel	107
Figure III.13: Comparaison du critère de plastification développé avec les résultats expérimentaux obtenus par Kupfer & al. [Kup69].....	111
Figure III.14: Surfaces de charge pour les lois de comportement du béton dans l'espace à deux dimensions des contraintes.....	111
Figure III.15: Loi de comportement uniaxiale pour le béton en compression	115
Figure III.16: Maillage et données pour la simulation d'un test de traction directe d'une poutre entaillée en béton	117
Figure III.17: Contrainte nominale en fonction de la déformation moyenne lors d'un test de traction directe d'une poutre entaillée en béton	118
Figure III.18: Déformation de la poutre entaillée en traction (facteur d'agrandissement: 100).....	118
Figure III.19: Maillage et données pour la simulation d'un test de flexion d'une poutre entaillée en béton	119
Figure III.20: Flèche de la poutre en fonction de l'effort lors d'un essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein	120
Figure III.21: Déformée de la poutre en béton entaillée et soumise à essai de flexion pour une flèche de 1 mm (facteur d'agrandissement: 100)	120
Figure III.22: Endommagement du béton (nombre de fissures par point d'intégration) lors d'un essai de flexion d'une poutre entaillée pour une flèche de 1 mm.....	121
Figure III.23: Maillages par éléments finis utilisés pour l'étude de l'influence de la finesse du maillage sur la réponse d'une poutre en béton entaillée et soumise à un essai de flexion	121
Figure III.24: Flèche en fonction de l'effort lors d'un essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein: simulations avec PLAST3 pour trois maillages différents.....	122

Figure III.25: Déformées de la poutre en béton entaillée lors d'un essai de flexion obtenues avec PLAST3 et ABAQUS/Explicit [Hib98b] pour trois maillages différents pour une flèche de 1 mm (facteur d'agrandissement: 100) 123

Chapitre IV: Applications numériques 125

Figure IV.1: Présentation de la cheville SPIT RING..... 127

Figure IV.2: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 2D d'un arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton 128

Figure IV.3: Courbes force/déplacement pour différentes conditions de lubrification lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" 130

Figure IV.4: Courbes force/déplacement pour différentes conditions de lubrification lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "mou" 130

Figure IV.5: Fissuration lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" pour un déplacement de la cheville de 6.5 mm avec lubrifiant et en frottement sec 131

Figure IV.6: Fissuration lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" et "mou" pour un déplacement de la cheville de 7.9 mm en frottement sec ($\mu_{c/c}=\mu_{c/b}=0.3$) 132

Figure IV.7: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/c}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" avec $\mu_{c/b}=0.3$ 133

Figure IV.8: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/c}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "mou" avec $\mu_{c/b}=0.3$ 133

Figure IV.9: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/b}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" avec $\mu_{c/c}=0.3$ 134

Figure IV.10: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/b}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "mou" avec $\mu_{c/c}=0.3$ 135

Figure IV.11: Influence du coefficient de frottement $\mu_{c/b}$ sur la fissuration lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" pour un déplacement de la cheville de 5.4 mm et avec $\mu_{c/c}=0.3$ 136

Figure IV.12: Présentation de la cheville SPIT FIXFORM..... 137

Figure IV.13: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test d'arrachement de la cheville SPIT FIXFORM C18a ancrée dans une dalle de béton sans effet de bord 139

Figure IV.14: Endommagement (nombre de fissures par point d'intégration) lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT FIXFORM C12 ancrée dans une dalle de béton "dur" avec deux modèles de fissuration du béton 140

Figure IV.15: Déformation plastique équivalente de la douille de la fixation SPIT FIXFORM C12 lors d'un test d'arrachement de celle-ci ancrée dans une dalle en béton "dur" avec deux modèles de fissuration du béton 140

Figure IV.16: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton sans effet de bord 142

Figure IV.17: Maillage pour la simulation 3D d'un essai de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton (bloc de béton maillé entièrement)	143
Figure IV.18: Endommagement du béton après la simulation d'un essai de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b (bloc de béton maillé entièrement)	143
Figure IV.19: Courbes force/déplacement lors d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans ne dalle de béton "dur" avec deux modèles de fissuration	144
Figure IV.20: Déformation plastique équivalente de la fixation SPIT FIXFORM C18b lors d'un test de cisaillement de celle-ci ancrée dans une dalle de béton "dur" (modèle diffus à fissures tournantes; déplacement de 10 mm de la pièce fixée)	144
Figure IV.21: Endommagement lors d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton "dur" avec deux modèles de fissuration	145
Figure IV.22: Distorsion d'un élément du maillage du béton provoquant l'arrêt du calcul lors de la simulation d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b.....	146
Figure IV.23: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton avec prise en compte de l'effet de bord	146
Figure IV.24: Endommagement lors d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton "dur" avec prise en compte de l'effet de bord	148
Figure IV.25: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test d'arrachement d'une ou deux chevilles SPIT FIXFORM C12 ancrées dans une même dalle de béton (sans effet de bord)	149
Figure IV.26: Endommagement lors d'un test d'arrachement de deux chevilles SPIT FIXFORM C12 ancrées dans une même dalle de béton "dur"	150

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, l'industrie de la fixation a connu un essor considérable, non seulement dans le domaine du bâtiment mais également dans celui du Génie Civil avec des ouvrages tels que les tunnels, ponts, centrales nucléaires... Les éléments de fixation tels que les chevilles à expansion sont largement utilisés pour transférer localement des charges de la pièce fixée à la structure en béton et contribuent en grande partie à assurer la sécurité de ces constructions. Les fabricants de fixations doivent donc être en mesure de prédire de façon fiable la tenue de ces chevilles soumises à une sollicitation quelconque. L'erreur n'est pas permise et une mauvaise estimation du risque de ruine peut alors avoir des conséquences humaines et économiques graves.

La tenue à l'arrachement ou au cisaillement des éléments de fixation est principalement déterminée de manière expérimentale. De tels essais réalisés dans les centres de recherche sont difficiles à mettre en œuvre et souvent coûteux. Pour le développement de nouvelles chevilles aussi bien que pour l'amélioration de celles existantes, la compréhension du processus physique intervenant pendant la phase de chargement est d'une extrême importance. Dans cet axe de recherche, la méthode des éléments finis peut être considérée comme un outil efficace et pratique pour prédire et comprendre le comportement de chevilles ancrées dans une dalle de béton soumises à différents types de sollicitations. Elle permet de compléter les résultats expérimentaux et d'améliorer la connaissance des phénomènes physiques locaux, au niveau des zones de contact par exemple.

Cependant, aucun progiciel commercial basé sur la méthode des éléments finis n'est capable de répondre de façon satisfaisante aux problèmes spécifiques posés par la technologie des fixations. En effet, les non linéarités inhérentes à ce problème sont nombreuses et aucune d'entre elles ne peut être négligée: grandes déformations, non linéarités due au contact, non linéarités géométriques, non linéarités matérielles ...

Le but de cette étude a donc été de développer un code de calcul par éléments finis permettant de simuler des tests d'arrachement, de cisaillement ou de traction oblique d'une ou de plusieurs chevilles à expansion (comprenant généralement une douille) ancrées dans un bloc de béton. Pour traiter efficacement ce problème, le code développé en trois dimensions, appelé PLAST3 et basé sur une formulation dynamique explicite, inclut les grandes déformations, la gestion du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables et le comportement élastoplastique des matériaux avec un module spécifique de fissuration et d'endommagement du béton.

Ce projet a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Solides de L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Contacts et avec la société SPIT, fabricant de chevilles, qui a financé une partie de cette étude et réalisé les tests expérimentaux permettant la validation du logiciel développé.

Ce mémoire de thèse comprend quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, le problème à traiter est détaillé et les méthodes traditionnelles de résolution sont présentées avant d'exposer la stratégie adoptée.

Le second chapitre est consacré aux problèmes de contact unilatéral avec frottement entre plusieurs corps déformables. Après une revue bibliographique des principales méthodes de gestion du contact développées dans les codes de calcul par éléments finis, un nouvel algorithme tridimensionnel basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange est présenté.

Les tests expérimentaux ont mis en évidence le fait suivant: la charge de ruine d'une fixation est directement liée aux propriétés mécaniques du béton dans lequel elle est ancrée. C'est pourquoi la modélisation du comportement du béton est d'une extrême importance dans le problème étudié et fait l'objet du troisième chapitre. Dans un premier temps, les modèles existants dans la littérature sont répertoriés puis le modèle d'endommagement développé, basé sur une approche diffuse à fissures fixes ou tournantes en conjonction avec la mécanique de la rupture est exposé.

Enfin le dernier chapitre présente des exemples d'applications numériques en deux et trois dimensions en vue de valider le logiciel développé. En plus des simulations classiques de tests d'arrachement d'une cheville ancrée dans un bloc de béton, des simulations originales de tests de cisaillement avec prise en compte des effets de bord, de l'interaction entre deux chevilles fixées dans un même bloc sont réalisées.

Chapitre I:

Position du problème

I.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES CHEVILLES	23
I.1.1. CLASSIFICATION DES CHEVILLES.....	23
I.1.2. SOLLICITATIONS.....	24
I.1.3. MODES DE RUINES.....	24
I.2. MÉTHODES DE RÉOLUTION	25
I.2.1. TESTS EXPÉRIMENTAUX	25
I.2.2. FORMULES ANALYTIQUES	26
I.2.3. MODÉLISATIONS NUMÉRIQUES.....	26
I.3. CADRE ET HISTORIQUE DE L'ÉTUDE	28
I.4. STRATÉGIE DE RÉOLUTION ADOPTÉE.....	29
I.4.1. MISE EN DONNÉES ET VISUALISATION DES RÉSULTATS.....	30
I.4.2. FORMULATION GÉNÉRALE.....	30
I.4.3. GESTION DU CONTACT ET DU FROTTEMENT ENTRE PLUSIEURS CORPS DÉFORMABLES	30
I.4.4. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DU BÉTON	31
I.4.5. CONCLUSION	31

I.1. GENERALITES SUR LES CHEVILLES

I.1.1. Classification des chevilles

On distingue généralement deux grandes familles de chevilles: celles positionnées avant que le béton ne soit coulé et celles installées dans des structures en béton déjà existantes. Ce dernier type de cheville est largement utilisé non seulement pour des travaux de dépannage et de renforcement mais aussi dans de nouvelles constructions du fait de la flexibilité d'installation qu'elles offrent et grâce aux avancées technologiques dans le domaine du forage. Ce type de cheville peut être également divisé en plusieurs catégories: les chevilles à expansion (par effort ou déplacement contrôlé), les chevilles légères (à expansion par friction ou à tenue par verrouillage de forme) et les chevilles chimiques dont la tenue par adhérence est assurée grâce à un liant synthétique.

Dans ce mémoire, nous nous sommes particulièrement intéressé aux chevilles à expansion destinées à supporter des charges lourdes dans le béton. Ce type de fixation comprend une douille qui permet de réaliser son expansion. Pour les chevilles à expansion par effort contrôlé (type SPIT FIX, par exemple), l'expansion est obtenue par application d'un couple de serrage sur une vis ou un écrou (figure I.1a). Pour les chevilles à expansion par déplacement contrôlé (type SPIT FIXFORM, SPIT RING...), l'expansion est réalisée en poussant la douille par frappe sur un élément d'expansion (figure I.1b). Dans certains cas, un logement spécifique avec une forme conique en fond de trou est réalisé dans le béton, ce qui permet à la douille de venir en appui dans ce logement sans générer des contraintes dans le béton lors de son expansion (verrouillage de forme pour les SPIT FIXFORM, cf. figure I.1b).

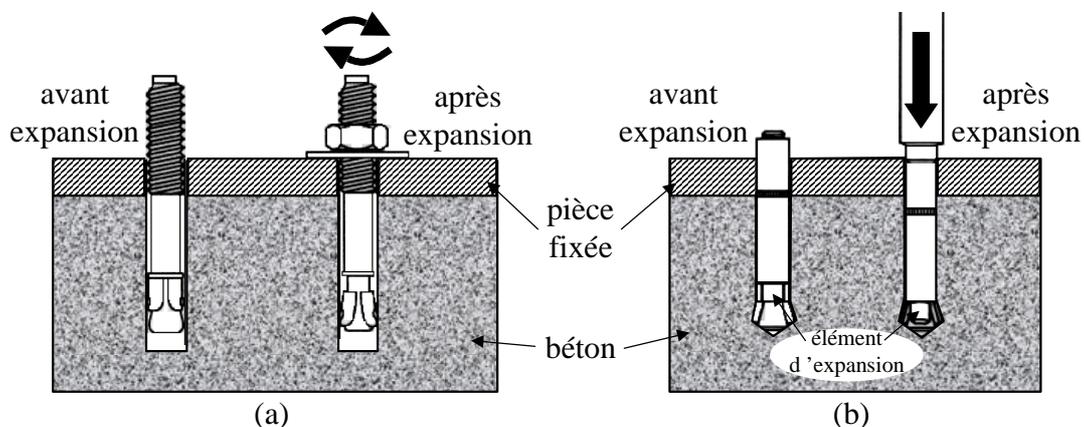


Figure I.1: Exemples de chevilles à expansion par effort (a) et par déplacement (b) contrôlé

I.1.2. Sollicitations

Les charges de ruine des chevilles sont généralement déterminées pour trois types de sollicitation: traction ou arrachement, cisaillement et traction oblique (figure I.2). Lorsqu'un fabricant de chevilles détermine les charges limites de ses fixations, celles-ci doivent être valables pour des cas de chargements statique et dynamique. De plus, il doit être en mesure de préciser l'influence de l'entraxe entre plusieurs chevilles ancrées dans une même dalle de béton et de la distance entre la cheville et le bord de la dalle.

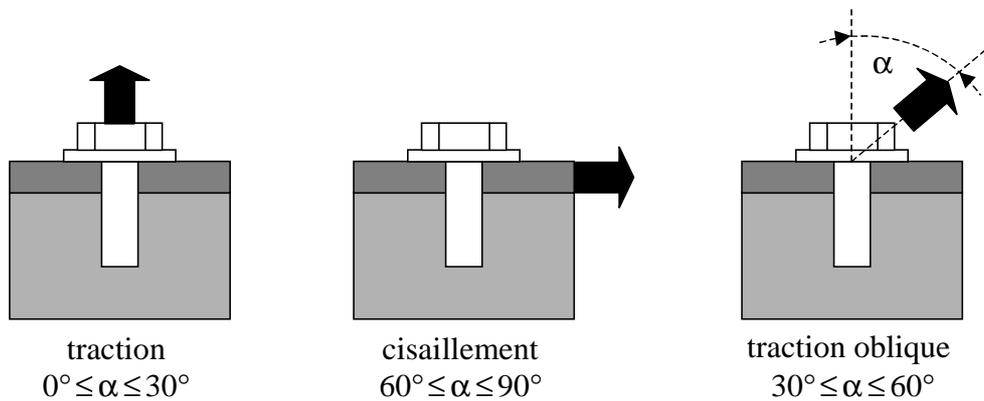


Figure I.2: Définitions des sollicitations appliquées aux chevilles

I.1.3. Modes de ruines

La ruine des chevilles correspond soit à la rupture du béton (arrachement d'un cône), soit à la rupture mécanique de la cheville. Dans le cas de tests d'arrachement, on distingue deux modes de ruine supplémentaires pour les chevilles à expansion (figure I.3a) lorsque la fixation sort entièrement de son logement ("pull-out") et lorsque la cheville sort de son logement en traversant la douille qui reste dans le béton ("pull-through"). Dans le cas de tests de cisaillement, la ruine de la fixation peut survenir soit par la rupture de l'acier de la cheville, soit par la rupture d'un cône de béton du côté de la direction de la charge ou du côté opposé à celle-ci par effet de levier de la cheville ("pryout") dans le cas de fixations courtes et rigides (figure I.3b).

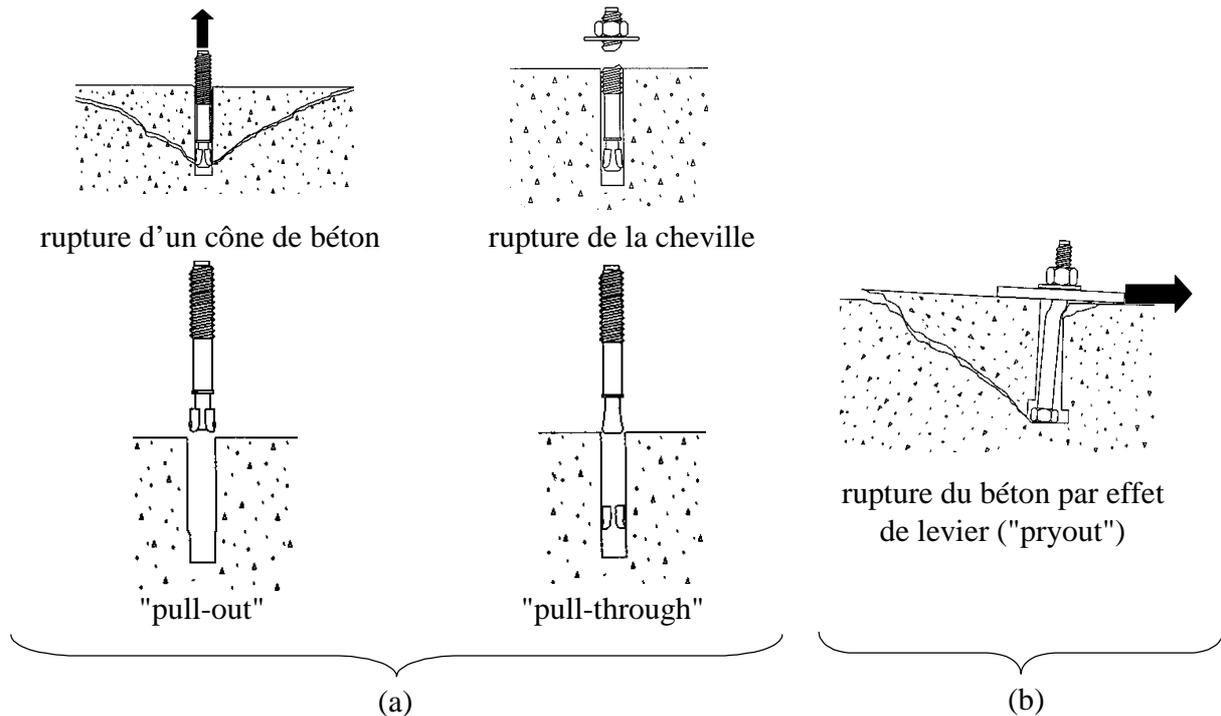


Figure I.3: Modes de ruine des fixations en traction (a) et en cisaillement par effet de levier de la cheville (b)

I.2. METHODES DE RESOLUTION

I.2.1. Tests expérimentaux

Les tests expérimentaux représentent le moyen le plus naturel pour déterminer le comportement mécanique d'une fixation. Les campagnes d'essais, réalisées en laboratoire, nécessitent la mise en œuvre de moyens importants. En effet, pour définir entièrement le niveau de performance d'une gamme de chevilles, les essais suivants doivent être réalisés:

- tests de toutes les chevilles de la gamme (plusieurs tailles possibles (variation du diamètre, de la longueur d'ancrage...), plusieurs matériaux possibles pour la douille et la cheville, etc.),
- tests dans les trois directions de sollicitation (arrachement, traction oblique et cisaillement),
- tests pour évaluer l'influence de l'entraxe entre deux chevilles ancrées dans une même dalle de béton pour chaque type de sollicitation,

- tests pour évaluer l'influence de la distance entre la cheville et le bord de la dalle de béton pour chaque type de sollicitation,
- tests avec différents type de béton: la qualité d'un béton est donnée par la valeur de la résistance limite en compression et varie suivant sa composition. La société SPIT effectue généralement des tests pour trois qualités de béton différentes.

La caractérisation d'une gamme de fixations nécessite donc l'exécution d'un nombre élevé d'essais en laboratoire. Néanmoins, il peut arriver que ces essais soient encore insuffisants dans certains contextes (propriétés mécaniques du matériau support trop éloignées de celles des bétons testés par exemple) et la réalisation de tests expérimentaux supplémentaires sur chantier peut s'avérer indispensable.

1.2.2. Formules analytiques

Dans le but de réduire les essais expérimentaux, des formules analytiques empiriques ont été développées ([Kli98], [Org98]). Ces formules prennent en compte différents paramètres liés aux dimensions de la cheville (longueur d'ancrage, diamètre...), à la dimension de la dalle de béton, aux caractéristiques de l'acier de la cheville (limite élastique et résistance ultime à la traction) et aux caractéristiques mécaniques du béton (résistance limite à la compression). Elles peuvent être appliquées à une cheville ou à un groupe de chevilles de même taille, de même longueur, de même type et soumises à la même sollicitation. Néanmoins ces formules ne prennent pas en compte tous les paramètres, tels que le frottement entre la cheville et la douille d'une part, et entre la douille et le béton d'autre part, caractérisé par le revêtement des éléments de fixation ou la présence de lubrifiant. De plus les formules proposées par le guide d'agrément technique européen sont trop complexes pour être directement utilisées sur le terrain et nécessitent un passage préliminaire en bureau d'étude [Org98].

1.2.3. Modélisations numériques

Les essais expérimentaux et les formules empiriques permettent essentiellement de prédire la tenue des chevilles ancrées dans une dalle de béton et soumises à une sollicitation quelconque mais ne permettent pas d'améliorer la connaissance du processus physique intervenant lors de la mise en charge. En effet, pour améliorer les chevilles existantes ou pour

en développer de nouvelles, une meilleure compréhension du comportement mécanique des éléments de fixation est nécessaire. Dans cet axe de recherche, la méthode des éléments finis semble être l'outil adéquat. En effet, elle est largement utilisée pour modéliser des cas industriels, tels que les procédés de mise en forme des métaux et connaît depuis ces vingt dernières années un essor considérable avec l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants. La modélisation par la méthode des éléments finis de chevilles à expansion ancrées dans une dalle de béton permettrait de compléter les résultats obtenus expérimentalement, voire éventuellement de réduire de tels essais. Cependant ce problème est très complexe car fortement non linéaire (grandes déformations, non linéarités géométriques, matérielles, dues au contact...) et aucun code de calcul commercial n'est capable de le modéliser de façon réaliste en tenant compte de toutes ces non linéarités. Des simulations de tests d'arrachement ont été effectuées avec la version implicite du logiciel ABAQUS mais aucun résultat probant n'a été obtenu à cause de problèmes de convergence [Lon96].

Les exemples présentés dans la littérature sont principalement des simulations bidimensionnelles par éléments finis (en contraintes planes, en déformations planes ou en symétrie de révolution) de tests d'arrachement de chevilles positionnées dans le béton avant qu'il ne soit coulé et de géométrie similaire à celle présentée figure I.4 ([Ott81], [Hel87], [Cer92], [Ozb96], [Ohl97], [Pea97], [Kli98]).

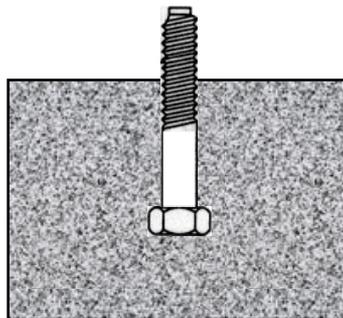


Figure I.4: Ancre positionné dans le béton avant que celui-ci ne soit coulé

Ce type d'ancrage est plus simple à modéliser que les chevilles à expansion car il ne comporte pas de douille ou d'éléments d'expansion. De plus, dans ces simulations de tests d'arrachement, le contact avec frottement n'est pas modélisé et une des deux hypothèses suivantes est adoptée: soit une adhérence parfaite entre le béton et la tête de la cheville est supposée ([Ott81], [Hel87], [Ohl97], [Kli98]), soit la cheville n'est pas modélisée mais remplacée par des conditions aux limites de type déplacements imposés [Pea97].

Pour analyser les contraintes d'origine thermique de structures réfractaires de centrales, Mamdy-Andrieux a effectué des simulations axisymétriques et tridimensionnelles d'essais de cyclage thermique et d'arrachement d'ancrages de forme "classique" (similaire à celle de la figure I.4) et de forme plus complexe (en V, par exemple) [Mam99]. Dans ce cas, le contact avec frottement ne peut pas être ignoré puisque l'endommagement du garnissage réfractaire est lié à la dilatation différentielle entre l'acier et le béton. Ce travail reste néanmoins très différent de celui présenté dans ce mémoire de part le type de fixation étudié et de part la nature des sollicitations qui lui sont appliquées.

En fait, peu de travaux ont été réalisés sur la modélisation par éléments finis de tests d'arrachement ou de cisaillement de *chevilles à expansion* ancrées dans une structure en béton. Jussel & al. ont effectué des analyses axisymétriques par éléments finis de ce type de fixation mais aucune information n'est donnée sur le contenu du code utilisé [Jus94]. Pulk & al. ont également réalisé des simulations axisymétriques et tridimensionnelles d'essais d'arrachement de chevilles à expansion en vue d'étudier l'influence de paramètres tels que l'épaisseur de la dalle, la longueur d'ancrage ou encore la distance de la cheville et le bord de la dalle [Pul94]. Toutefois le contact avec frottement n'est pas pris en compte et la cheville est remplacée par des conditions aux limites appropriées de type efforts imposés. Cette hypothèse est approximative dans le sens où le revêtement des éléments de fixation ainsi que certains modes de ruine, tels que la rupture de l'acier de la cheville ou le passage de la cheville à travers la douille ne sont pas pris en compte. Pour modéliser et comprendre le comportement mécanique de ce type de cheville de façon réaliste, aucun paramètre (contact avec frottement, comportement des matériaux constituant les éléments de fixation, etc.) ne doit être négligé.

I.3. CADRE ET HISTORIQUE DE L'ETUDE

La collaboration entre la société SPIT et le laboratoire de Mécanique des Solides de l'INSA de Lyon a débuté en 1994 dans la cadre d'un projet dont le but était de modéliser par la méthode des éléments finis des tests d'arrachement de chevilles à expansion ancrées dans une structure en béton. Pour atteindre cet objectif et examiner la faisabilité d'une telle étude, le code de calcul bidimensionnel PLAST2, développé par le professeur M. Brunet et L. Baillet, a été modifié dans le cadre de deux Diplômes d'Etudes Approfondies et d'un Projet de Fin d'Etude pour inclure notamment un module d'endommagement du béton ([Gin94], [Cha95], [Lon96]). Des simulations axisymétriques de divers types de chevilles fabriquées par la société SPIT ont été réalisées et ces études ont montré la capacité du code PLAST2 à

modéliser de façon réaliste de tels tests d'arrachement. Mais elles ont également mis en évidence les limites de cette modélisation. La première limitation est de type géométrique puisque les fixations étudiées doivent obligatoirement être symétriques de révolution, ce qui est rarement le cas en réalité car les douilles possèdent des fentes qui servent à assurer l'expansion de la cheville dans le béton. Une autre limitation se situe au niveau de la sollicitation appliquée à la cheville: en axisymétrie, seul un test d'arrachement peut être modélisé. Par conséquent, il est impossible de caractériser complètement le comportement mécanique d'une fixation ancrée dans un bloc de béton puisque des tests de cisaillement ou de traction oblique ne peuvent pas être simulés en deux dimensions. De plus, l'influence de paramètres essentiels, tels que la distance entre l'ancrage et le bord de la dalle ou l'entraxe entre deux chevilles ancrées dans une même dalle, ne peut pas être étudiée en axisymétrie bidimensionnelle.

La conclusion qui s'impose d'après ces observations et d'après l'analyse bibliographique effectuée au paragraphe précédent est la nécessité de développer un code de calcul par éléments finis *en trois dimensions* PLAST3 capable de répondre aux exigences imposées par la technologie des fixations et plus précisément des chevilles à expansion, ce qui constitue l'objectif du travail présenté dans ce mémoire.

Néanmoins, l'étude axisymétrique bidimensionnelle n'a pas été abandonnée pendant ce travail de thèse. Dans un premier temps, le gestion du contact et du frottement entre plusieurs corps déformables a été améliorée par L. Baillet dans PLAST2. En effet, la méthode de la pénalisation a été remplacée par une méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange, méthode intrinsèque contrairement à la précédente (cf. chapitre II). Dans un deuxième temps, des études de cas industriels ont alors été réalisées à la demande de la société SPIT, dont l'une d'entre elles est présentée chapitre IV, en attendant que le code tridimensionnel PLAST3 soit totalement opérationnel ([Wal97a], [Wal97b], [Wal98]).

I.4. STRATEGIE DE RESOLUTION ADOPTEE

Aux vues des résultats satisfaisants obtenus lors de simulations de tests d'arrachement d'une cheville ancrée dans une dalle de béton effectuées avec le logiciel PLAST2, le code de calcul tridimensionnel PLAST3 basé sur une formulation similaire a été développé. Un résumé des principales caractéristiques de ces deux codes de calcul est donné dans les paragraphes suivants.

I.4.1. Mise en données et visualisation des résultats

Le logiciel PLAST2 inclut un pré-processeur pour la mise en données, un solveur et un post-processeur efficace qui permet une visualisation graphique des résultats en temps réel.

Développer un mailleur graphique 3D spécifique au code de calcul PLAST3 aurait été extrêmement coûteux en temps, d'autant plus qu'il existe des logiciels commerciaux très performants dans ce domaine. Le logiciel I-DEAS Master SeriesTM a été choisi pour effectuer la mise en données des analyses par éléments finis tridimensionnelles (maillage, conditions aux limites...) et pour visualiser les résultats. Une interface a été développée pour générer, à partir d'un maillage réalisé avec I-DEAS, un fichier de données spécifique au programme PLAST3. De plus, au cours de l'analyse, PLAST3 génère des fichiers de résultats dans un format spécifique à I-DEAS à intervalles réguliers définis par l'utilisateur.

I.4.2. Formulation générale

Les codes de calcul par éléments finis PLAST2 et PLAST3 sont basés sur une méthode dynamique explicite qui permet de gérer efficacement les nombreuses non linéarités inhérentes au problème étudié. Ils incluent également les grandes transformations géométriques en conjonction avec une formulation Lagrangienne réactualisée et des lois de comportement élastoplastique pour les métaux. Les éléments implantés sont des quadrilatères à quatre nœuds et des briques à huit nœuds en deux et trois dimensions respectivement.

La formulation générale des codes de calcul PLAST2 et PLAST3 est détaillée en annexe I.

I.4.3. Gestion du contact et du frottement entre plusieurs corps déformables

Le contact avec frottement est prépondérant dans le problème étudié car, au minimum, trois corps déformables doivent être modélisés: la cheville, l'élément d'expansion et le béton. Contrairement à la méthode de la pénalisation largement utilisée dans les codes de calcul par éléments finis dynamiques explicites, la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de satisfaire exactement les conditions de contact mais n'est pas compatible avec les opérateurs d'intégration explicites. C'est pourquoi un nouvel algorithme de contact tridimensionnel, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" a été développé en

conjonction avec un modèle de frottement de type Coulomb. Cet algorithme de gestion du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables est détaillé dans le chapitre II.

I.4.4. Modélisation du comportement du béton

De part sa composition, le béton est un matériau hétérogène et présente donc un comportement mécanique très complexe avec une réponse différente en traction et en compression. De plus, la formation de fissures dans le matériau est indéniablement le phénomène qui gouverne la réponse d'une structure en béton.

Un module spécifique a donc été développé dans les codes PLAST2 et PLAST3 pour prendre en compte le comportement du béton, supposé élastoplastique en compression et incluant la fissuration en tension. Le modèle d'endommagement implanté est basé sur une approche diffuse avec fissures fixes ou tournantes en conjonction avec la mécanique de la rupture utilisée pour contrôler la propagation des fissures.

La synthèse bibliographique nécessaire à la modélisation du comportement du béton et les modèles programmés dans PLAST2 et PLAST3 sont exposés dans le chapitre III.

I.4.5. Conclusion

Pour analyser de façon réaliste le comportement de chevilles à expansion ancrées dans une dalle de béton, un code de calcul par éléments finis tridimensionnel PLAST3 a été développé et ses caractéristiques sont exposées dans ce mémoire. Pour valider ce travail, des exemples d'applications numériques sont présentés dans le chapitre IV.

Chapitre II:

**Gestion du contact avec frottement
entre plusieurs corps déformables**

II.1. GENERALITES	36
II.1.1. CONTACT UNILATÉRAL	36
II.1.2. LOIS DE FROTTEMENT	37
II.1.2.1. Loi de Coulomb	37
II.1.2.2. Loi de Tresca	37
II.1.2.3. Autres modèles	38
II.2. METHODES DE RESOLUTION DU CONTACT: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....	38
II.2.1. MÉTHODE DE LA PÉNALISATION.....	39
II.2.2. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE.....	42
II.2.3. MÉTHODES MIXTES OU HYBRIDES.....	43
II.2.3.1. Méthode du Lagrangien perturbé.....	44
II.2.3.2. Méthode du Lagrangien augmenté.....	44
II.3. MODELE DEVELOPPE.....	45
II.3.1. DÉFINITION DE LA GÉOMÉTRIE DU CONTACT.....	45
II.3.2. ALGORITHME DE RECHERCHE DE LA ZONE DE CONTACT	46
II.3.3. FORMULATION DU PROBLÈME.....	48
II.3.3.1. Méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" en 3D.....	48
II.3.3.2. Projection d'un nœud esclave sur une surface triangulaire maîtresse	51
II.3.3.3. Projection d'un nœud esclave sur un segment maître	53
II.3.3.4. Projection d'un nœud esclave sur un nœud maître.....	54
II.3.4. VALIDATIONS ET EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES.....	55
II.3.4.1. Impact d'un cylindre sur une plaque	55
II.3.4.2. Etude du procédé d'étirage.....	58
II.3.5. CONCLUSION.....	63

En mécanique des solides, les applications dans lesquelles interviennent des problèmes de contact avec frottement sont nombreuses, les plus connues étant les procédés de mise en forme des métaux, les problèmes d'impact, de fretting... Ces dernières années, des efforts considérables ont été accomplis en vue d'améliorer la compréhension de ces problèmes, du fait de leur importance et de leur complexité, ce qui a donné lieu à un nombre élevé de contributions sur le sujet dont la plus part ont été répertoriées par Zhong & Mackerle [ZHO92]. La non linéarité inhérente des conditions aux limites de contact, provenant de leur nature unilatérale, limite le nombre de problèmes qui peuvent être traités analytiquement à des cas où les corps considérés sont de formes géométriques simples. Avec les récents développements de la méthode des éléments finis, les solutions numériques représentent un outil puissant dans l'analyse et la résolution des problèmes de contact faisant intervenir des corps de géométrie complexe et de comportement mécanique non linéaire en grandes déformations.

Les problèmes de contact sont généralement définis comme des problèmes de conditions aux limites dans lesquels deux corps déformables interagissent selon les principes de la mécanique des milieux continus. Contrairement aux conditions aux limites classiques, de type déplacements imposés ou forces imposées, les surfaces de contact et les intensités des contraintes sont des inconnues du problème. La stratégie de résolution des problèmes de contact communément adoptée est la suivante: tout d'abord les surfaces de contact sont déterminées, puis la condition d'impénétrabilité (deux corps ne peuvent pas occuper le même espace au même instant) est vérifiée et les conditions de contact sont satisfaites.

Après quelques généralités à propos des lois de contact et de frottement, une revue des principales méthodes de résolution des problèmes de contact existant dans la littérature sera présentée. Le modèle de contact-impact développé en trois dimensions, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" présentée en deux dimensions par Carpenter & al. [Car91], sera exposé en détail ainsi que l'algorithme de recherche des surfaces de contact utilisé. Finalement des exemples d'applications numériques où le contact joue un rôle prépondérant seront présentés afin de valider le modèle utilisé et de montrer son efficacité.

II.1. GENERALITES

II.1.1. Contact unilatéral

En simulation numérique, la loi de contact unilatéral utilisée est illustrée par le problème de Signorini. Considérons un corps déformable en contact avec un corps rigide (figure II.1), les conditions de contact unilatéral de type Signorini devant être respectées en tous points du corps déformable situés sur l'aire de contact sont:

$$g \leq 0 \quad (\text{II.1a})$$

$$F_{\bar{n}} \leq 0 \quad (\text{II.1b})$$

$$g \cdot F_{\bar{n}} = 0 \quad (\text{II.1c})$$

avec g l'interstice ou le déplacement d'un point du contact dans la direction de la normale au contact \bar{n} et $F_{\bar{n}}$ la composante de l'effort normal. L'équation (II.1a) traduit la condition d'impénétrabilité, l'équation (II.1b) le fait que la force normale de contact est de compression et l'équation (II.1c) représente la condition de complémentarité (si le point est en contact alors $g=0$ et $F_{\bar{n}} \leq 0$; si le point quitte le contact alors $g < 0$ et $F_{\bar{n}} = 0$).

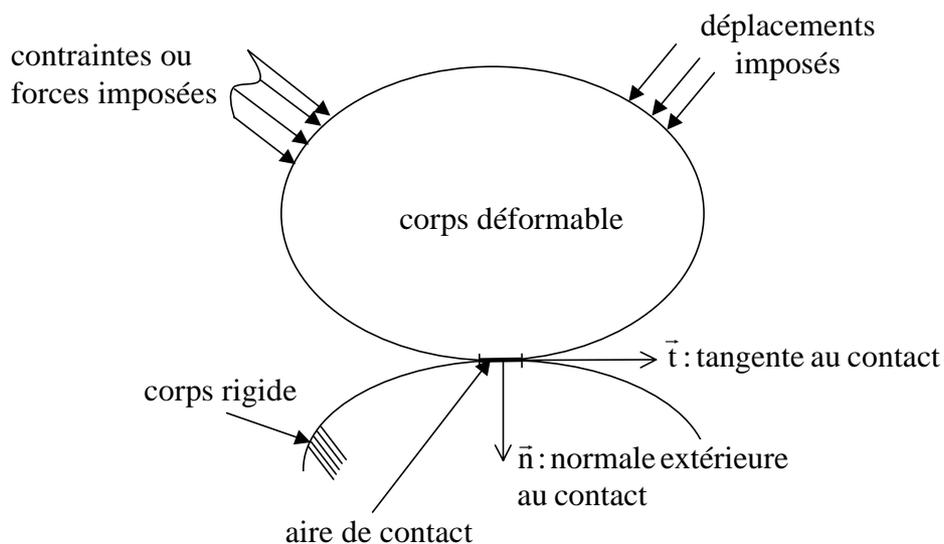


Figure II.1: Contact entre un corps déformable et un corps rigide (problème de Signorini)

II.1.2. Lois de frottement

II.1.2.1. Loi de Coulomb

La force \vec{F} au point de contact peut se décomposer en une force normale F_n et une force tangentielle F_t ($\vec{F} = F_n \cdot \vec{n} + F_t \cdot \vec{t}$). Le modèle de Coulomb s'écrit de la façon suivante:

$$|F_t| \leq \mu \cdot |F_n| \quad (\text{II.2a})$$

$$|F_t| < \mu \cdot |F_n| \Rightarrow v_t = 0 \text{ (adhérence)} \quad (\text{II.2b})$$

$$F_t = -\mu \cdot |F_n| \cdot \frac{v_t}{|v_t|} \text{ (glissement)} \quad (\text{II.2c})$$

avec v_t la vitesse relative tangentielle entre les deux corps et μ le coefficient de frottement de Coulomb qui inclut tous les paramètres locaux, tels que la rugosité entre les deux corps, la température à l'interface, etc...

II.1.2.2. Loi de Tresca

Dans le modèle de Tresca, la contrainte de frottement τ est proportionnelle à la contrainte d'écoulement du matériau σ_y :

$$\tau \leq m \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.3a})$$

$$\tau < m \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_t = 0 \text{ (adhérence)} \quad (\text{II.3b})$$

$$\tau = -m \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v_t}{|v_t|} \text{ (glissement)} \quad (\text{II.3c})$$

avec m le coefficient de frottement de type Tresca qui inclut également les paramètres locaux.

II.1.2.3. Autres modèles

Les deux premiers modèles sont les plus couramment implantés dans les codes de calcul par éléments finis. Il existe d'autres lois de frottement, telles que la loi de Coulomb à seuil, appelée également loi de Coulomb-Orowan, qui peut être formulée de la manière suivante:

$$\tau \leq \min \left(\mu \cdot |\sigma_n|, m \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \right) \quad (\text{II.4})$$

avec σ_n la contrainte normale de contact.

Ces modèles de frottement n'incluent ni la variation de la surface réelle de contact lorsque la pression augmente, ni la rugosité des pièces en contact. Pour pallier ces manques, des modèles microscopiques ont été développés à partir de la modélisation des déformations des aspérités au contact entre les corps, comme par exemple le modèle de la vague plastique ([Bay90], [Avi92], [Bai94]).

II.2. METHODES DE RESOLUTION DU CONTACT: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Il existe différentes méthodes permettant d'inclure les conditions de contact dans la modélisation par éléments finis. La méthode de la pénalisation ([Che85], [Hal85], [Sim86], [Bru87], [Bru88], [Bru89], [Kul89], [Kan90], [Bel91], [Sch91], [Sch92], [Per92], [Pap93], [Bou94], [Sta98]), la méthode des multiplicateurs de Lagrange ([Hug76], [Bat85], [Cha86], [Che86], [Bel91], [Car91], [Lin97]), les méthodes mixtes ou méthodes hybrides qui sont des combinaisons des deux méthodes précédemment citées ([Ces93], [Ces94], [Sim85], [Wri85], [Cha87], [Pie97], [Sim92]) et la méthode par formulation du problème de complémentarité ([Kwa91], [Kim96], [Kwa97]) sont les plus couramment utilisées. Le principe des trois premières méthodes est présenté dans les paragraphes suivants.

II.2.1. Méthode de la pénalisation

Cette méthode a été initialement programmée en deux dimensions dans le code de calcul PLAST2. Comme toutes les méthodes présentées dans ce chapitre, elle gère le contact entre un nœud et une surface et n'est pas limitée au contact nœud à nœud. De plus, elle ne nécessite pas la définition de surfaces esclave et maîtresse car la procédure est la même pour tous les nœuds des corps déformables en contact.

Soit L un point de coordonnées x_t^L à l'instant t appartenant à la frontière d'un corps déformable. Soit g_t^L l'interstice associé au point L à l'instant t (figure II.2) défini en deux dimensions par:

$$g_t^L = (x_t^L - x_t^P) \cdot \vec{n} \quad (\text{II.5})$$

avec x_t^P les coordonnées du point P, projection orthogonale du nœud L sur le segment 1-2 à l'instant t et \vec{n} la normale au segment 1-2 dirigée vers l'extérieur du corps.

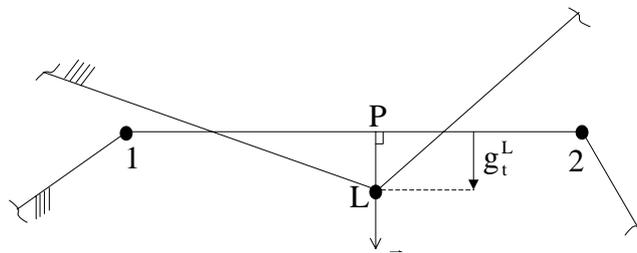


Figure II.2: Représentation bidimensionnelle de la pénétration d'un nœud dans le domaine délimité par un segment

Le point L pénètre le domaine délimité par le segment 1-2 si:

$$g_t^L \geq 0 \quad (\text{II.6})$$

La méthode de la pénalisation consiste à introduire cette condition dans la fonctionnelle de l'énergie totale sous la forme suivante:

$$\bar{\pi}(u_t) = \pi(u_t) + \frac{\chi}{2} \cdot g_t^t \cdot g_t \quad (\text{II.7})$$

avec u_t le vecteur des déplacements nodaux à l'instant t , g_t le vecteur des interstices nodaux à l'instant t , χ le coefficient de pénalisation et $\pi(u_t)$ la fonctionnelle de l'énergie totale associée aux corps en contact. En minimisant la fonctionnelle (II.7), l'équation variationnelle discrète qui lui est associée est:

$$\delta\pi(u_t) + \chi \cdot g_t^t \cdot \delta g_t = 0 \quad (\text{II.8})$$

L'équation de mouvement semi-discrétisée à l'instant t (cf. annexe I, paragraphe A1.2.) s'écrit alors:

$$M \cdot \ddot{u}_t + C \cdot \dot{u}_t + F_t^{\text{int}} - F_t^{\text{ext}} - F_t^c = 0 \quad (\text{II.9})$$

avec M la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, F_t^{int} le vecteur des forces nodales internes, F_t^{ext} le vecteur des forces nodales extérieures, F_t^c le vecteur des forces nodales de contact, \ddot{u}_t le vecteur des accélérations nodales et \dot{u}_t le vecteur des vitesses nodales. Généralement deux coefficients de pénalisation sont considérés, le premier $\chi_{\bar{n}}$ dans la direction normale, le second χ_t dans la direction tangentielle. Pour un pas de temps Δt , la procédure de calcul est incrémentale et les forces de contact normale $F_{\bar{n}t+\Delta t}^L$ et tangentielle $F_{tt+\Delta t}^L$ au point L à l'instant $t+\Delta t$ sont calculées de la manière suivante:

$$F_{\bar{n}t+\Delta t}^L = F_{\bar{n}t}^L - \chi_{\bar{n}} \cdot (\Delta u_{\bar{n}}^L - \Delta u_{\bar{n}}^p) \quad (\text{II.10a})$$

$$F_{tt+\Delta t}^L = F_{tt}^L - \chi_t \cdot (\Delta u_t^L - \Delta u_t^p) \quad (\text{II.10b})$$

avec $\Delta u_{\bar{n}}$ et Δu_t les incréments de déplacement des points considérés dans les directions normale et tangentielle respectivement. Si la force normale de contact $F_{\bar{n}t+\Delta t}^L$ est positive alors

le point L n'est plus en contact à l'instant $t+\Delta t$ et les forces de contact sont annulées. Dans le cas contraire où le point L est en contact, la loi de frottement utilisée est appliquée et la force tangentielle est réactualisée en cas de glissement. D'un point de vue physique, cela revient à considérer des ressorts de raideurs élevées $\chi_{\bar{n}}$ et $\chi_{\bar{t}}$ agissant dans des directions privilégiées afin d'empêcher le point L de pénétrer le domaine délimité par le segment 1-2.

La méthode de la pénalisation a été implantée dans de nombreux codes de calcul par éléments finis, que l'intégration temporelle de l'équation de mouvement soit réalisée avec une méthode implicite ([Che85], [Hal85], [Per92], [Bou94], [Sta98]...) ou explicite ([Kul89], [Bel91], [Sch91], [Sch91]...). En effet, elle possède deux principaux avantages: elle est simple à mettre en œuvre et ne nécessite pas l'addition de variables supplémentaires. Cette méthode s'adapte correctement à l'intégration temporelle explicite puisqu'elle ne nécessite pas la résolution de systèmes d'équations. Cependant avec la méthode de la pénalisation, les conditions de contact de type Signorini ne sont pas satisfaites car la pénétration d'un corps dans un autre est possible. Un autre problème inhérent à cette méthode est le choix des coefficients de pénalisation qui ont une influence directe sur les résultats ([Bai96], [Wal97a]) ce qui fait que cette méthode n'est pas totalement intrinsèque. La pénétration d'un point matériel dans un autre corps dépend des valeurs des coefficients de pénalisation choisies. Si des valeurs trop faibles sont utilisées, la pénétration est trop importante pour être acceptable d'un point de vue physique. L'utilisation de valeurs élevées des coefficients de pénalisation permet de satisfaire précisément les conditions de contact mais peut introduire de hautes fréquences dans le système et affecter la stabilité d'une analyse explicite conditionnellement stable et donc entraîner une diminution importante du pas de temps critique ([Bel91], [Sch91]). Le choix de ces coefficients apparaît donc délicat même si certains auteurs ([Hal85], [Bel91], [Sch91]) ont proposé de les déterminer en fonction de paramètres tel que:

$$\chi_{\bar{n}} = \chi_{\bar{t}} = \alpha \cdot \frac{A^2 \cdot K}{V} \quad (\text{II.11})$$

avec A l'aire de la surface de l'élément en contact, V le volume de cet élément, K le module de flambage et α un facteur d'échelle à régler et pris généralement égal à 0.1.

II.2.2. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'éviter les problèmes liés au choix des coefficients de pénalisation. La fonctionnelle de l'énergie totale de la structure est modifiée de la façon suivante:

$$\bar{\pi}(\mathbf{u}_t) = \pi(\mathbf{u}_t) + \lambda_t^t \cdot \mathbf{g}_t \quad (\text{II.12})$$

avec λ_t^t le vecteur ligne des multiplicateurs de Lagrange associés à chaque nœud en contact, \mathbf{u}_t le vecteur des déplacements nodaux et \mathbf{g}_t celui des interstices nodaux à l'instant t . Les forces de contact sont données par les valeurs des multiplicateurs de Lagrange.

En minimisant la fonctionnelle (II.12), les deux équations suivantes sont obtenues:

$$\delta\pi(\mathbf{u}_t) + \lambda_t^t \cdot \delta\mathbf{g}_t = 0 \quad (\text{II.13a})$$

$$\delta\lambda_t^t \cdot \mathbf{g}_t = 0 \quad (\text{II.13b})$$

La formulation matricielle de l'équation semi-discrétisée de mouvement (cf. annexe I) peut s'écrire de la manière suivante à l'instant $t+\Delta t$:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{int}} + \mathbf{G}_{t+\Delta t}^t \cdot \lambda_{t+\Delta t}^t - \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} = 0 \quad (\text{II.14a})$$

$$\mathbf{G}_{t+\Delta t} \cdot \{\mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t\} = 0 \quad (\text{II.14b})$$

avec $\mathbf{G}_{t+\Delta t}$ la matrice des contraintes en déplacement des surfaces de contact et \mathbf{X}_t le vecteur des coordonnées des nœuds à l'instant t . Une surface maîtresse et une surface esclave sont généralement définies dans ce type de méthode. Les contraintes en déplacement (II.14b) sont imposées aux nœuds esclaves pour les empêcher de pénétrer dans le domaine délimité par la surface maîtresse et pour contrôler leur glissement tangentiel le long de ces surfaces. Cette équation traduit donc la condition d'imperméabilité.

Cette méthode présente l'avantage de satisfaire exactement les conditions de contact sans ajout de coefficients réglables et de ne pas diminuer le pas de temps critique dans un schéma explicite, contrairement à la méthode de la pénalisation [Bel91]. Mais un des inconvénients de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est l'augmentation du nombre

d'inconnues du problème (multiplicateurs de Lagrange en plus des déplacements nodaux). D'autre part, le principal avantage d'une intégration temporelle de l'équation de mouvement avec une méthode explicite est le découplage des équations. Or la méthode des multiplicateurs de Lagrange nécessite la résolution d'un système d'équations et fait donc perdre cet avantage. De plus, Carpenter & al. ont mis en évidence que cette méthode formulée avec les équations (II.14) n'est pas compatible avec les opérateurs d'intégration explicites [Car91]. Par conséquent, la méthode des multiplicateurs de Lagrange a été principalement développée en conjonction avec un schéma d'intégration temporelle implicite. Néanmoins, aux vues des avantages qu'elle présente par rapport à la méthode de la pénalisation (satisfaction exacte des conditions de contact, pas de coefficients de pénalisation à déterminer), certains auteurs ont cherché à la modifier pour l'utiliser dans une analyse explicite. Ainsi Zhong & Nilsson ont proposé une méthode approchée des multiplicateurs de Lagrange incluant un algorithme d'interface dans lequel un "nœud de défense" est créé pour empêcher un "nœud attaquant" de pénétrer une surface de contact "cible" [Zho94b]. La définition de ces nœuds supplémentaires permet l'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Carpenter & al. ont développé avec une intégration temporelle explicite la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" dans laquelle les conditions de contact et les équations d'équilibre sont satisfaites aux instants $t+\Delta t$ et t respectivement [Car91]. Comme les pas de temps sont très petits dans un schéma d'intégration temporelle explicite, l'erreur commise avec cet algorithme est négligeable devant l'erreur de discrétisation spatiale. Cette méthode, initialement développée en deux dimensions par Carpenter & al. [Car91] a été étendue en trois dimensions et implantée dans le code de calcul PLAST3 [Bai99]. Ce nouvel algorithme est donc détaillé dans le paragraphe II.3.

II.2.3. Méthodes mixtes ou hybrides

Les méthodes mixtes, ou méthodes hybrides, sont apparues à la suite de problèmes numériques inhérents à la méthode des multiplicateurs de Lagrange implantée avec un schéma d'intégration temporelle implicite, à savoir la singularité éventuelle de la matrice de raideur et l'accroissement de la taille du problème. Elles ont pour vocation de combiner les avantages de la méthode de la pénalisation et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir une efficacité et une précision optimales. Comme l'intégration temporelle est réalisée avec un schéma explicite dans les codes PLAST2 et PLAST3 et que ces méthodes mixtes ont été développées essentiellement pour des schémas implicites, nous nous contenterons de donner

les principes de base des deux méthodes les plus utilisées: la méthode du Lagrangien perturbé ([Sim85], [Wri85], [Cha87]) et celle du Lagrangien augmenté ([Sim92], [Pie97]).

II.2.3.1. Méthode du Lagrangien perturbé

La fonctionnelle de l'énergie totale du Lagrangien perturbé est obtenue en régularisant celle développée pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec un terme quadratique:

$$\bar{\pi}(\mathbf{u}_t) = \pi(\mathbf{u}_t) + \lambda_t^t \cdot \mathbf{g}_t - \frac{1}{\chi} \cdot \lambda_t^t \cdot \lambda_t^t \quad (\text{II.15})$$

Lorsque le coefficient de pénalisation χ tend vers l'infini, la solution obtenue à partir de la fonctionnelle (II.15) convergera vers la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange. Les équations variationnelles associées à (II.15) sont de la forme:

$$\delta\pi(\mathbf{u}_t) + \lambda_t^t \cdot \delta\mathbf{g}_t = 0 \quad (\text{II.16a})$$

$$\delta\lambda_t^t \cdot \left(-\frac{1}{\chi} \cdot \lambda_t^t + \mathbf{g}_t \right) = 0 \quad (\text{II.16b})$$

Si l'équation (II.16b) est résolue pour λ_t^t et substituée dans l'équation (II.16a), la méthode de la pénalisation est obtenue (cf. équation (II.8)).

Cette méthode conserve cependant les défauts liés à la méthode de la pénalisation, notamment le choix du coefficient de pénalisation, même si elle permet d'évaluer les forces de contact plus précisément.

II.2.3.2. Méthode du Lagrangien augmenté

La régularisation de la fonctionnelle de l'énergie totale avec la méthode du Lagrangien augmenté est la suivante:

$$\bar{\pi}(\mathbf{u}_t) = \pi(\mathbf{u}_t) + \lambda_t^t \cdot \mathbf{g}_t + \frac{\chi}{2} \cdot \mathbf{g}_t^t \cdot \mathbf{g}_t \quad (\text{II.17})$$

La minimisation de cette fonctionnelle permet d'obtenir deux équations:

$$\delta\pi(\mathbf{u}_t) + \lambda_t^t \cdot \delta\mathbf{g}_t + \chi \cdot \mathbf{g}_t^t \cdot \delta\mathbf{g}_t = 0 \quad (\text{II.18a})$$

$$\delta\lambda_t^t \cdot \mathbf{g}_t = 0 \quad (\text{II.18b})$$

La résolution itérative de ces équations fournit les valeurs des multiplicateurs de Lagrange et la solution en déplacement. L'avantage de cette méthode par rapport à la précédente réside dans le fait que la taille du problème n'est pas augmentée et que le coefficient de pénalisation χ n'a pas une influence importante sur la solution.

II.3. MODELE DEVELOPPE

Le modèle développé pour traiter le problème du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables est basé sur l'interaction entre des surfaces maîtresses et des nœuds esclaves. Une méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" [Car91], qui garantit la compatibilité entre les déplacements des nœuds esclaves et des surfaces maîtresses dans la région du contact, est utilisée pour évaluer les forces de contact normales et tangentielles et l'adhésion ou le décollement des surfaces de contact. Ce modèle a été implanté dans les codes de calcul par éléments finis dynamiques explicites PLAST2 et PLAST3 et sa formulation en trois dimensions est exposée dans ce paragraphe [Bai99].

II.3.1. Définition de la géométrie du contact

Un couple de surfaces esclave et maîtresse, appartenant aux frontières de chaque corps susceptible d'être en contact au cours de l'analyse, est défini par l'utilisateur dans le pré-processeur. L'algorithme de contact nécessite la définition de tous les nœuds des surfaces esclaves et des surfaces maîtresses qui sont décrites par des éléments quadrilatéraux puisque l'élément implanté dans le code PLAST3 est une brique à huit nœuds (cf. annexe 1). Chaque surface maîtresse est divisée en quatre facettes triangulaires possédant l'isobarycentre G de l'élément quadrilatéral comme sommet en commun. Deux vecteurs unitaires, l'un normal dirigé vers l'intérieur du corps et l'autre tangentiel, sont associés à chaque facette triangulaire. Chaque surface maîtresse quadrilatérale est donc définie par quatre normales.

Dans le cas d'un contact entre une surface rigide et un corps déformable, Schweizerhof & Hallquist utilisent des surfaces de contact quadrilatérales avec une représentation paramétrique bilinéaire et traitent la projection des nœuds esclaves sur des surfaces maîtresses avec un schéma de Newton-Raphson [Sch91]. Cependant, dans le cas du contact entre plusieurs corps déformables, l'évaluation des vecteurs normal et tangentiel associés à chaque nœud esclave doit être réalisée à chaque itération du calcul de la solution de contact, ce qui peut devenir extrêmement coûteux en terme de temps de calcul.

Les surfaces frontières des corps ne sont pas lisses car elles sont modélisées par un assemblage de facettes. Ces irrégularités peuvent entraîner des problèmes de convergence dans le cas de frottement accompagné d'un glissement important en formulation implicite. Pour remédier à ce problème, les surfaces de contact peuvent être lissées avec une interpolation de Bézier ou avec des fonctions splines [Pie97]. Néanmoins la formulation présentée ici est capable de pallier ces problèmes sans avoir recours à un lissage.

II.3.2. Algorithme de recherche de la zone de contact

L'algorithme de recherche de la zone de contact développé est simple et fiable. En prenant les forces de contact nulles à l'instant t , les surfaces de contact sont identifier à un instant noté t^* en laissant pénétrer les surfaces maîtresse et esclave l'une dans l'autre pendant un pas de temps fixe Δt . Un premier tri des nœuds esclaves susceptibles d'être en contact à l'instant $t+\Delta t$ est effectué en construisant une "boîte" fictive autour de chaque surface maîtresse quadrilatérale et en sélectionnant les nœuds esclaves appartenant à cette boîte à l'instant t^* .

Chaque nœud esclave sélectionné L est alors projeté sur les quatre facettes triangulaires de la surface maîtresse quadrilatérale définie précédemment. Pour chaque élément triangulaire, noté e et défini par deux nœuds et le point G (figure II.3), la procédure suivante de projection du nœud esclave L est appliquée. Les trois fonctions de forme $N_i(\xi, \eta)$ et la normale unitaire \bar{n} au triangle e dirigée vers l'intérieur du corps sont utilisées pour déterminer la position du point P , projection orthogonale du nœud L sur la surface e . Les coordonnées cartésiennes X_c d'un point arbitraire $C(\xi_c, \eta_c)$ appartenant au triangle e sont les suivantes:

$$X_c = \sum_{i=1}^3 X_i \cdot N_i(\xi_c, \eta_c) \quad (\text{II.19})$$

avec X_i les coordonnées des trois points définissant le triangle e .

La position relative d_L du nœud esclave L et les coordonnées de sa projection orthogonale P sur la surface e sont données par:

$$d_L = \overrightarrow{CL} \cdot \vec{n} \begin{cases} \text{si } (d_L > 0 \text{ et } d_L < d_{\max}) \Rightarrow \text{pénétration} \\ \text{sinon} \Rightarrow \text{non pénétration} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{PL} = d_L \cdot \vec{n} \quad (\text{II.21})$$

où d_{\max} est une distance de contrôle de pénétration maximale imposée.

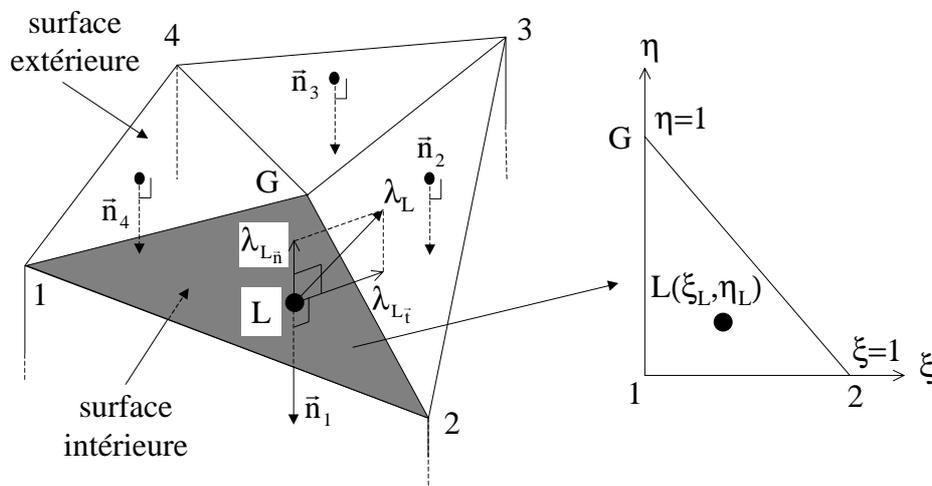


Figure II.3: Surface maîtresse quadrilatérale décomposée en quatre facettes triangulaires

La dernière étape de cette procédure de recherche de contact consiste à vérifier si le point P appartient au triangle e . Si le point L a été détecté à l'intérieur de domaines délimitant plusieurs surfaces maîtresses mais sans que le point P ne soit défini comme appartenant à une facette triangulaire de ces surfaces, alors le nœud esclave est d'abord projeté sur les huit segments de chaque surface quadrilatérale qui définissent les quatre facettes triangulaires puis sur les cinq nœuds de cette surface.

Pour des applications industrielles où le nombre de nœuds en contact peut devenir très important et la procédure de recherche de la zone de contact coûteuse en terme de temps de calcul, Zhong & Nilsson ont développé, dans le cadre d'une analyse explicite dynamique, un algorithme de recherche de contact basé sur les concepts de hiérarchie et de territoire [Zho94a]. Belytschko & Neal ont, quant à eux, proposé un algorithme de recherche de contact

appelé "pinball algorithm" dans lequel la condition d'impénétrabilité est appliquée à des sphères ancrées dans les éléments situés à la périphérie des corps en contact plutôt qu'aux éléments eux-mêmes [Bel91]. Le temps nécessaire à la recherche de la zone de contact se trouve alors réduit puisque la pénétration est détectée par le simple calcul de la distance entre deux sphères. Néanmoins un tel algorithme nécessite un effort dans la réalisation du maillage en trois dimensions, notamment pour les éléments situés aux frontières qui doivent être cubiques et de même taille, ce qui peut devenir délicat à réaliser dans le cas de corps à géométrie complexe.

II.3.3. Formulation du problème

Les caractéristiques de la méthode des éléments finis développée dans les codes de calcul PLAST2 et PLAST3 sont détaillées dans l'annexe I. Rappelons simplement que l'intégration temporelle de l'équation de mouvement est réalisée avec une méthode explicite basée sur les différences finies centrées:

$$M \cdot \ddot{u}_t + C \cdot \dot{u}_t + F_t^{\text{int}} = F_t^{\text{ext}} \quad (\text{II.22a})$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \dot{u}_t &= \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2 \cdot \Delta t} \\ \ddot{u}_t &= \frac{u_{t+\Delta t} - 2 \cdot u_t + u_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.22b})$$

II.3.3.1. Méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" en 3D

La méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" en deux dimensions développée par Carpenter & al. [Car91] a été implantée dans le code PLAST2 ([Wal97a], [Wal97b], [Wal98]). Les contraintes en déplacement, appliquées aux nœuds esclaves afin d'éviter qu'ils pénètrent le domaine défini par les surfaces maîtresses à l'instant $t+\Delta t$, permettent d'obtenir des multiplicateurs de Lagrange homogènes à des forces de contact à l'instant t . Une telle formulation permet d'obtenir une méthode des multiplicateurs de Lagrange compatible avec les opérateurs d'intégration explicites.

Le coefficient de frottement et les conditions de contact adhérent, glissant ou décollant sont appliqués et gérés aux nœuds esclaves. La loi de frottement utilisée est un modèle de Coulomb sans régularisation de la force tangentielle de contact en fonction de la vitesse

relative tangentielle (cf. équations (II.2)). D'autres modèles de frottement pourraient facilement être inclus dans cet algorithme si cela s'avérait nécessaire.

Le système d'équations de la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" est construit à partir de l'équation (II.22a) augmentée par les contraintes en déplacement agissant sur les surfaces esclaves à l'instant $t+\Delta t$:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{F}_t^{\text{int}} + \mathbf{G}_{t+\Delta t}^t \cdot \boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{F}_t^{\text{ext}} \\ \mathbf{G}_{t+\Delta t} \cdot \{\mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t\} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

avec: $\boldsymbol{\lambda}_t$ le vecteur des forces de contact agissant sur les nœuds de la surface esclave;

$\mathbf{G}_{t+\Delta t}$ la matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires de contraintes en déplacement;

$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t$ le vecteur des coordonnées à l'instant $t+\Delta t$.

Le but de cette méthode est de déterminer les valeurs des forces de contact normales et tangentielles à l'instant t afin d'empêcher les nœuds esclaves de pénétrer à $t+\Delta t$ le domaine maître. Pour déterminer les nœuds esclaves susceptibles de rester ou d'arriver en contact à $t+\Delta t$, les déplacements de tous les nœuds frontières au temps t^* sont calculés avec des forces de contact nulles à l'instant t . Si $\dot{\mathbf{u}}_t$ est remplacé par $\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t/2}$, il en résulte une force visqueuse légèrement différente [Sch91] et les déplacements nodaux à t^* sont obtenus à partir de:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t}^* = \Delta t^2 \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{F}_t^{\text{ext}} - \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t/2} - \mathbf{F}_t^{\text{int}} \right\} + 2 \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t} \quad (\text{II.24})$$

Les surfaces de contact à l'instant $t+\Delta t$ étant définies par le recouvrement des corps lorsque les forces de contact sont nulles, les nœuds esclaves pénétrant les surfaces maîtresses sont donc identifiés sans itération pendant un pas de temps Δt .

Une matrice élémentaire de contrainte en déplacement est créée pour chaque nœud esclave qui a été détecté à l'intérieur du domaine maître. Cette matrice exprime les contraintes en déplacement à l'instant $t+\Delta t$ (équation (II.32)). La matrice globale assemblée $\mathbf{G}_{t+\Delta t}$ permet le calcul des forces de contact $\boldsymbol{\lambda}_t$ (équation (II.25)), du déplacement nodal incrémental supplémentaire $\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c$ associé aux forces de contact calculées (équation (II.26)) et des coordonnées à l'instant $t+\Delta t$ (équation (II.27)):

$$\lambda_t = \left\{ \Delta t^2 \cdot \mathbf{G}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{t+\Delta t}^t \right\}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{t+\Delta t} \cdot \left\{ \mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}^* - \mathbf{u}_t \right\} \quad (\text{II.25})$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c = -\Delta t^2 \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{t+\Delta t}^t \cdot \lambda_t \quad (\text{II.26})$$

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \left\{ \mathbf{u}_{t+\Delta t}^* + \mathbf{u}_{t+\Delta t}^c - \mathbf{u}_t \right\} \quad (\text{II.27})$$

Carpenter & al. ont développé une stratégie efficace de résolution d'équations en deux dimensions basée sur une méthode de Gauss-Seidel pour résoudre les équations (II.25) et (II.26) afin d'éviter d'assembler la matrice $\mathbf{G}_{t+\Delta t}$ [Car91]. Pendant l'itération de Gauss-Seidel de k à $k+1$, l'algorithme nécessaire pour une résolution en trois dimensions est le suivant:

Pour $L=1, \dots, N$

$${}^{k,k+1} p_L = \sum_{j=1}^{3 \cdot \text{NPOIN}} (\mathbf{G}_{t+\Delta t})_{Lj} \cdot \left(\mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}^* + {}^{k,k+1} \mathbf{u}_{t+\Delta t}^c - \mathbf{u}_t \right)_j \quad (\text{II.28a})$$

$$\Delta \lambda_L = \left[\Delta t^2 \cdot \sum_{j=1}^{3 \cdot \text{NPOIN}} (\mathbf{G}_{t+\Delta t})_{Lj} \cdot \frac{1}{m_{jj}} \cdot (\mathbf{G}_{t+\Delta t}^t)_{jL} \right]^{-1} \cdot {}^{k,k+1} p_L \quad (\text{II.28b})$$

$${}^{k,k+1} \lambda_L = {}^k \lambda_L + \Delta \lambda_L \quad (\text{II.28c})$$

Pour $I=1, \dots, 3 \cdot \text{NPOIN}$

$${}^{k,k+1} (\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c)_I = {}^{k,k+1} (\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c)_I - \frac{\Delta t^2}{m_{II}} \cdot (\mathbf{G}_{t+\Delta t}^t)_{IL} \cdot \Delta \lambda_L \quad (\text{II.28d})$$

où: N est le nombre de nœuds esclaves trouvés en contact entre les instants t et t^* ,
 NPOIN est le nombre de nœuds dans le modèle,
l'index L des vecteurs p , λ et de la matrice $\mathbf{G}_{t+\Delta t}$ correspond aux rangs $3L-2$, $3L-1$ et $3L$ qui donnent les valeurs dans les directions x , y et z respectivement.

La vérification de la convergence de l'algorithme est effectuée à la fin de chaque $k^{\text{ième}}$ itération par:

$$\sum_{L=1}^N \sqrt{\Delta \lambda_{L/x}^2 + \Delta \lambda_{L/y}^2 + \Delta \lambda_{L/z}^2} < \text{EPS} \cdot \sum_{L=1}^N \sqrt{{}^k \lambda_{L/x}^2 + {}^k \lambda_{L/y}^2 + {}^k \lambda_{L/z}^2} \quad (\text{II.29})$$

avec EPS une valeur fixée par l'utilisateur égale à $1.E-15$ par exemple.

II.3.3.2. Projection d'un nœud esclave sur une surface triangulaire maîtresse

La surface maîtresse définie par quatre nœuds I est décomposée en quatre facettes triangulaires ayant pour point commun l'isobarycentre G (figure II.3). Considérons à présent le cas d'un nœud esclave ayant pénétré un plan maître défini par les nœuds (1,2,G) entre les instants t et t* (forces de contact nulles: $\lambda_t=0$) (figure II.3). Si le nœud L est en contact à l'instant t alors (ξ_L, η_L) représentent la position de ce nœud sur la surface triangulaire de référence à l'instant t. Si le nœud L n'est pas en contact à l'instant t, en faisant l'hypothèse que les déplacements nodaux sont linéaires en fonction du temps pendant le pas de temps Δt , la solution d'une équation du troisième degré détermine le couple (ξ_L, η_L) . La pénétration est éliminée à l'instant t+ Δt en imposant au nœud L d'appartenir à la surface triangulaire (1,2,G). Cette condition s'écrit de la manière suivante:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t_L}(\xi_L, \eta_L) = \mathbf{X}_{t+\Delta t_1} \cdot N_1(\xi_L, \eta_L) + \mathbf{X}_{t+\Delta t_2} \cdot N_2(\xi_L, \eta_L) + \mathbf{X}_{t+\Delta t_G} \cdot N_3(\xi_L, \eta_L) \quad (\text{II.30})$$

où les fonctions de forme N_i sont les suivantes: $N_1(\xi_L, \eta_L) = 1 - \xi_L - \eta_L$, $N_2(\xi_L, \eta_L) = \xi_L$ et

$$N_3(\xi_L, \eta_L) = \eta_L; \quad \mathbf{X}_{t+\Delta t_i} \text{ est le vecteur des coordonnées du point } i: \quad \mathbf{X}_{t+\Delta t_i} = \begin{pmatrix} x_{t+\Delta t_i} \\ y_{t+\Delta t_i} \\ z_{t+\Delta t_i} \end{pmatrix}.$$

G étant l'isobarycentre des nœuds 1, 2, 3 et 4, le but est donc d'exprimer les coordonnées du nœud L en fonction de celles de ces nœuds définissant la surface maîtresse:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t_L}(\xi_L, \eta_L) = \sum_{i=1}^4 a_i \cdot \mathbf{X}_{t+\Delta t_i} \quad (\text{II.31})$$

$$\text{avec } a_1 = N_1(\xi_L, \eta_L) + a_3; \quad a_2 = N_2(\xi_L, \eta_L) + a_3; \quad a_3 = a_4 = \frac{N_3(\xi_L, \eta_L)}{4}.$$

La matrice de contrainte élémentaire associée au nœud esclave L est:

$$(\mathbf{G}_{t+\Delta t})_L \cdot \mathbf{X}_{t+\Delta t} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \mathbf{a}_1 & 0 & 0 & \mathbf{a}_2 & 0 & 0 & \mathbf{a}_3 & 0 & 0 & \mathbf{a}_4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_1 & 0 & 0 & \mathbf{a}_2 & 0 & 0 & \mathbf{a}_3 & 0 & 0 & \mathbf{a}_4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_1 & 0 & 0 & \mathbf{a}_2 & 0 & 0 & \mathbf{a}_3 & 0 & 0 & \mathbf{a}_4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}_{t+\Delta t_1} \\ \mathbf{X}_{t+\Delta t_2} \\ \mathbf{X}_{t+\Delta t_3} \\ \mathbf{X}_{t+\Delta t_4} \\ \mathbf{X}_{t+\Delta t_L} \end{array} \right\} \quad (\text{II.32})$$

L'algorithme de Gauss-Seidel peut à présent être exprimé sous une forme simple:

Pour $L=1, \dots, N$

Pour $I=1, \dots, 4$

$$\Lambda_I = (\mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}^* + {}^{k,k+1}\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c - \mathbf{u}_t)_I \quad (\text{II.33a})$$

$$\Lambda_L = (\mathbf{X}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}^* + {}^{k,k+1}\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c - \mathbf{u}_t)_L \quad (\text{II.33b})$$

$${}^{k,k+1}\mathbf{p}_L = \mathbf{a}_1 \cdot \Lambda_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \Lambda_2 + \mathbf{a}_3 \cdot (\Lambda_3 + \Lambda_4) - \Lambda_L \quad (\text{II.33c})$$

$$\Theta_L = \Delta t^2 \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_1^2}{m_1} + \frac{\mathbf{a}_2^2}{m_2} + \mathbf{a}_3^2 \cdot \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) + \frac{1}{m_L} \right) \quad (\text{II.33d})$$

$$\Delta \lambda_L = \frac{{}^{k,k+1}\mathbf{p}_L}{\Theta_L} \quad (\text{II.33e})$$

$${}^{k+1}\lambda_L = {}^k\lambda_L + \Delta \lambda_L \quad (\text{II.33f})$$

Pour $I=1, \dots, 4$

$${}^{k,k+1}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c)_I = {}^{k,k+1}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c)_I - \frac{\Delta t^2}{m_I} \cdot \mathbf{a}_I \cdot \Delta \lambda_L \quad (\text{II.33g})$$

$${}^{k,k+1}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c)_L = {}^{k,k+1}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^c)_L + \frac{\Delta t^2}{m_L} \cdot \Delta \lambda_L \quad (\text{II.33h})$$

Pendant l'itération de Gauss-Seidel, si le nœud esclave L appartient à la facette triangulaire définie par les nœuds 1, 2 et G , deux conditions sur les forces de contact en L doivent être satisfaites. Après le calcul des forces de contact ${}^{k+1}\lambda_L$ (équation (II.33f)) dans les trois directions x , y et z , la normale unitaire dirigée vers l'intérieur \vec{n} est calculée avec les

coordonnées réactualisée Λ_I , $I=1,2,G$. Les forces de contact normale et tangentielle agissant au point L, notées respectivement $\lambda_{L\bar{n}}$ et $\lambda_{L\bar{t}}$, sont calculées. Comme le frottement est pris en compte par une loi de Coulomb classique, les deux conditions que doivent vérifier les forces de contact sont:

$$\begin{cases} \lambda_{L\bar{n}} \leq 0 \\ |\lambda_{L\bar{t}}| \leq \mu \cdot |\lambda_{L\bar{n}}| \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Si la première condition n'est pas respectée, des modifications doivent être réalisées avant le calcul des équations (II.33g) et (II.33h):

$$\Delta\lambda_L = -^k\lambda_L \quad \text{et} \quad {}^{k+1}\lambda_L = 0 \quad (\text{II.35})$$

Si la seconde condition liée à la loi de frottement n'est pas respectée, les corrections à effectuer avant le calcul des équations (II.33g) et (II.33h) sont les suivantes:

$$\bar{t} = \frac{{}^{k+1}\lambda_L - \lambda_{L\bar{n}} \cdot \bar{n}}{\|{}^{k+1}\lambda_L - \lambda_{L\bar{n}} \cdot \bar{n}\|} ; \quad {}^{k+1}\lambda_L = \lambda_{L\bar{n}} \cdot \bar{n} + \mu \cdot |\lambda_{L\bar{n}}| \cdot \bar{t} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda_L = {}^{k+1}\lambda_L - {}^k\lambda_L \quad (\text{II.36})$$

II.3.3.3. Projection d'un nœud esclave sur un segment maître

Si le nœud esclave se projette sur un segment défini par les nœuds 1 et 2 (figure II.4), deux cas doivent être considérés.

Le premier cas est rencontré lorsque les nœuds 1 et 2 sont différents de l'isobarycentre G. Le segment considéré est dans ce cas la frontière entre deux surfaces maîtresses quadrilatérales. La condition similaire à l'équation (II.31) s'écrit alors de la manière suivante:

$$X_{t+\Delta t_L}(\xi_L) = \sum_{i=1}^2 a_i \cdot X_{t+\Delta t_i} \quad \text{avec} \quad a_1 = N_1(\xi_L) \quad \text{et} \quad a_2 = N_2(\xi_L) \quad (\text{II.37})$$

Le second cas se présente lorsque le nœud 1 ou le nœud 2 est identique à l'isobarycentre G. Le segment appartient alors à la surface maîtresse définie par les quatre nœuds I. Si le nœud 2 est confondu avec G, la condition similaire à l'équation (II.31) s'écrit:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t_L}(\xi_L) = \sum_{i=1}^4 a_i \cdot \mathbf{X}_{t+\Delta t_i} \quad \text{avec } a_1 = N_1(\xi_L) + a_2 \text{ et } a_2 = a_3 = a_4 = \frac{N_2(\xi_L)}{4} \quad (\text{II.38})$$

L'algorithme de Gauss-Seidel donné par les équations (II.33) étant très simple à réécrire dans le cas où un nœud esclave appartient à un segment maître, il ne sera donc pas détaillé ici.

Pendant le pas de temps Δt , le nœud esclave L peut glisser ou décoller du segment 1-2. La normale actualisée $\bar{\mathbf{n}}$ du segment est calculée à chaque itération de Gauss-Seidel comme étant la moyenne des vecteurs normaux des deux facettes triangulaires voisines. Les deux conditions de contact (équations (II.34)) sont donc réécrites de la même manière que les équations (II.35) et (II.36).

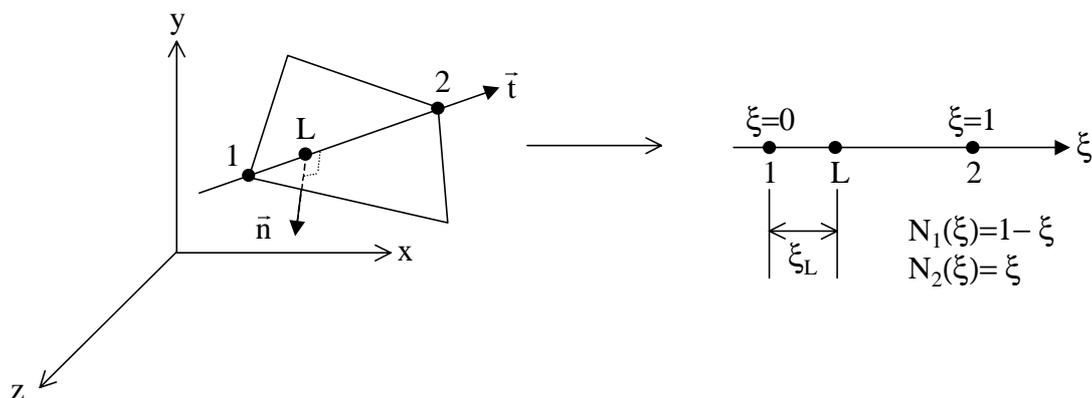


Figure II.4: Représentation d'un nœud esclave L appartenant à un segment maître 1-2

II.3.3.4. Projection d'un nœud esclave sur un nœud maître

Si le nœud esclave L se projette sur un nœud maître I à l'instant t^* , le nœud L reste confondu avec le nœud maître ($\mathbf{X}_{t+\Delta t_L} = \mathbf{X}_{t+\Delta t_I}$) ou se décolle de celui-ci pendant les itérations de Gauss-Seidel. Le vecteur normal unitaire est dans ce cas défini comme la moyenne des vecteurs normaux de toutes les facettes triangulaires voisines.

II.3.4. Validations et exemples d'applications numériques

II.3.4.1. Impact d'un cylindre sur une plaque

Pour valider la méthode de gestion du contact et de frottement entre plusieurs corps déformables, un premier exemple d'impact est présenté. Un cylindre vient percuter une plaque avec une vitesse initiale de 316 m/s et de 158 m/s dans les directions y et z respectivement et un coefficient de frottement μ de 0.2 est introduit à l'interface. Le maillage et les conditions aux limites sont définis figure II.5. Les deux corps ont un même comportement élastoplastique défini table II.1 et le pas de temps Δt utilisé lors de cette simulation est égal à $3.16 \cdot 10^{-3} \mu s$. Les nœuds esclaves sont définis sur la base du cylindre et les surfaces maîtresses sur la plaque.

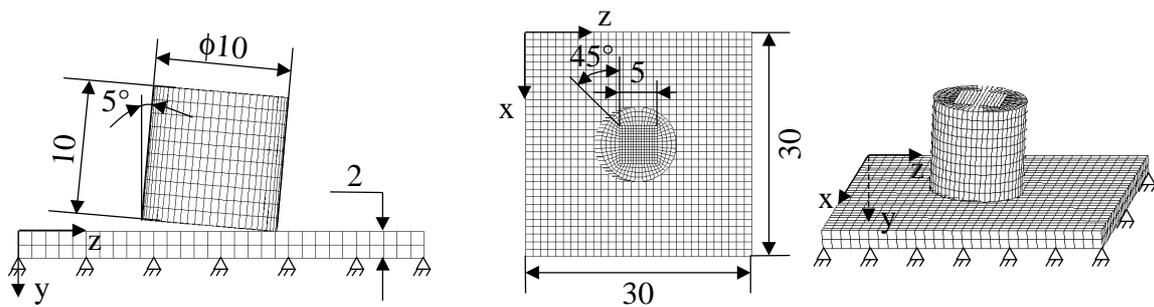


Figure II.5: Maillage 3D initial pour la simulation de l'impact d'un cylindre sur une plaque (dimensions en mm)

masse volumique	module d'Young	coefficient de Poisson	loi d'écrouissage
10000 kg/m ³	200000 MPa	0.3	$\sigma_{eq} = 300 \cdot (\epsilon^p + 0.002)^{0.03}$

Table II.1: Propriétés mécaniques du cylindre et de la plaque

Lors de cette simulation, le nombre maximum de nœuds en contact est de 500. Les forces globales de contact exercées sur le cylindre en fonction du temps sont représentées figure II.6 ainsi que le maillage déformé à différentes étapes du calcul. Ces résultats montrent l'efficacité de l'algorithme de gestion du contact développé et présenté dans ce mémoire. Il est souvent reproché à la méthode des multiplicateurs de Lagrange d'être coûteuse en temps de

calcul du fait de la nécessité de résoudre un système d'équations supplémentaire. Cette critique n'est pas justifiée pour cet algorithme. En effet, lors de la simulation de l'impact d'un cylindre sur une plaque présentée ici, la résolution du problème de contact prend seulement 6 à 7% du temps CPU total (figure II.7). La majorité de ce temps (environ 80%) est utilisé pour le calcul des contraintes et des forces internes.

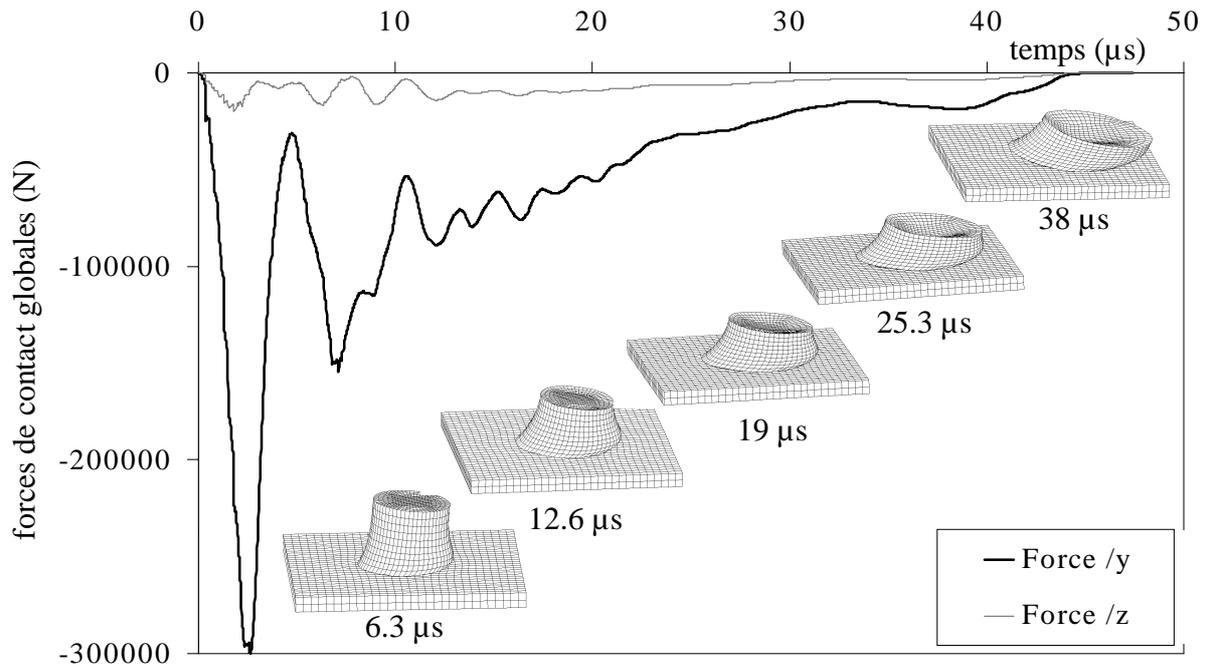


Figure II.6: Forces de contact globales exercées sur le cylindre et maillage déformé en fonction du temps lors de l'impact sur une plaque ($v_y=316$ m/s et $v_z=158$ m/s)

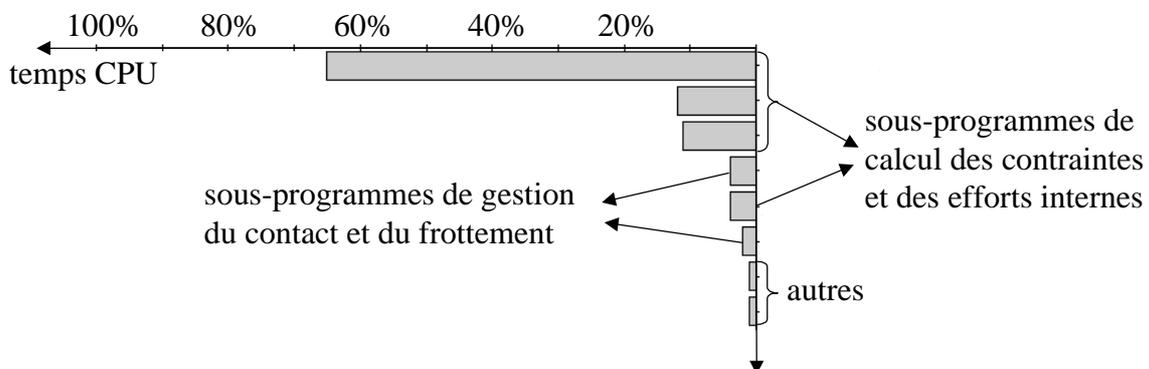


Figure II.7: Temps CPU utilisé par les différents sous-programmes du code PLAST3 dans le cas de la simulation de l'impact d'un cylindre sur une plaque

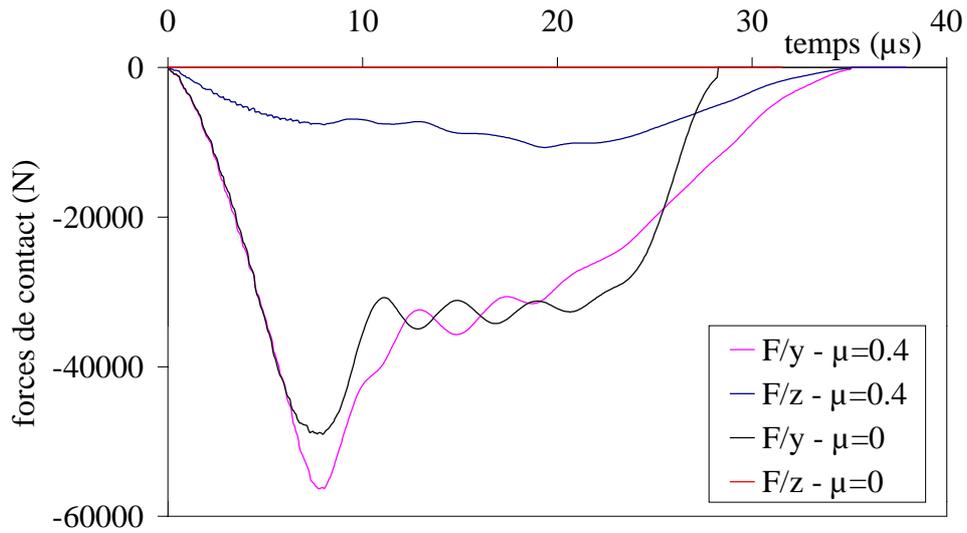


Figure II.8: Forces de contact globales exercées sur le cylindre lors de l'impact d'un cylindre pour deux valeurs du coefficient de frottement ($\mu=0$ et $\mu=0.4$) ($v_y=100$ m/s et $v_z=50$ m/s)

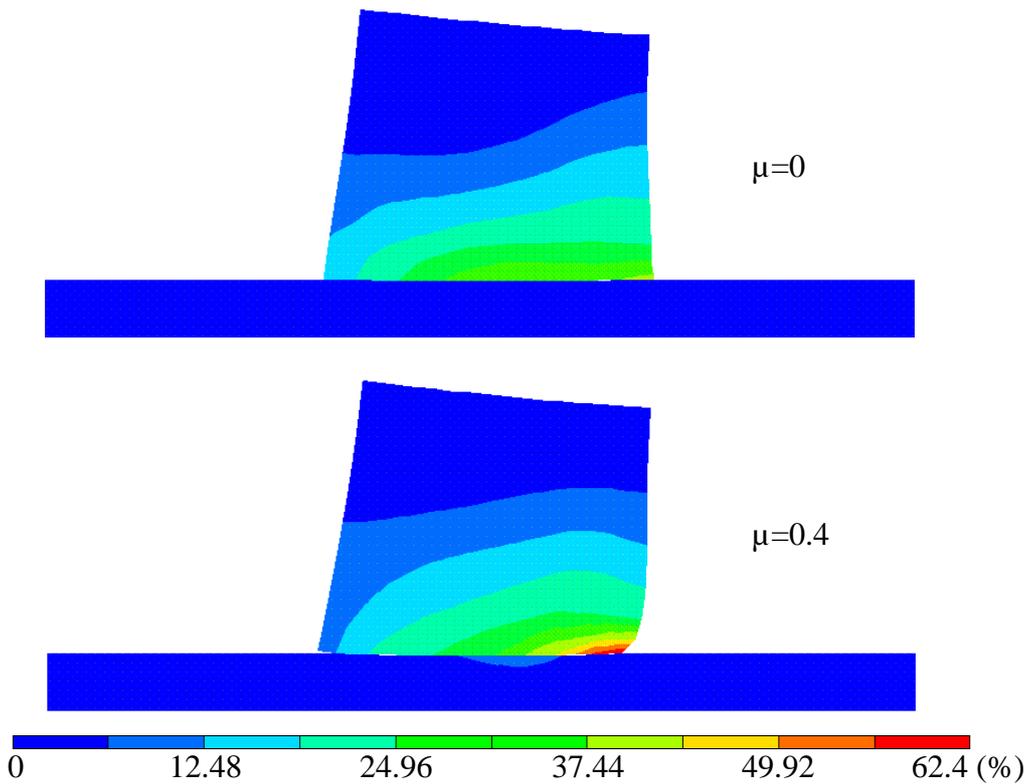


Figure II.9: Déformation plastique équivalente pour deux valeurs du coefficient de frottement ($\mu=0$ et $\mu=0.4$) lors de l'impact d'un cylindre sur une plaque dans le plan $x=15$ mm à $t=19$ μs

Deux simulations supplémentaires de cet impact ont été effectuées avec une vitesse initiale de 100 m/s et 50 m/s dans les directions y et z respectivement pour deux coefficients de frottement différents, $\mu=0$ et $\mu=0.4$. La figure II.8 représente les efforts de contact exercés sur le cylindre pour ces deux coefficients de frottement en fonction du temps. On constate que la durée du contact entre les deux corps est plus importante pour un coefficient de frottement élevé. De plus la déformée dans le plan $x=15$ mm et la répartition de la déformation plastique équivalente varient selon la valeur de ce coefficient (figure II.9).

II.3.4.2. Etude du procédé d'étirage

Un exemple qui se rapproche le plus des conditions de contact de l'ensemble {cheville-douille-béton} est la mise en forme par étirage. Pour fabriquer une boîte de boisson en aluminium, deux opérations d'emboutissage suivies de trois passes successives d'étirage sont nécessaires. L'épaisseur de la tôle passe de 0.33 mm à 0.16 mm pendant la phase d'étirage. L'intérêt de modéliser ce type de procédé de mise en forme des matériaux réside dans la possibilité de réaliser des études paramétriques trop lourdes à gérer expérimentalement: influence du coefficient de frottement, influence du taux de réduction de l'épaisseur de la tôle, influence de la vitesse du poinçon...([Bai96], [Bai99]). Pour de telles simulations, le contact entre l'outil et la pièce est prépondérant et doit être modélisé de façon précise. Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'algorithme de contact développé dans PLAST3 est fiable et peut être utilisé pour étudier et modéliser des cas industriels. Dans le procédé d'étirage modélisé et illustré figure II.10, la tôle est déformée lors de son passage entre la matrice et le poinçon. Le maillage et les conditions aux limites sont définis figure II.11. Il est à noter d'une part que pour cette simulation, c'est le poinçon qui reste fixe et la matrice qui se déplace et d'autre part que l'on simule l'étirage d'une tôle plane et non celui d'une boîte de boisson. Une vitesse constante de $V_x=10$ m/s est imposée à la matrice. Le poinçon est considéré comme étant une surface rigide (corps indéformable), condition vérifiée en imposant une masse infinie à tous ses nœuds. Les propriétés mécaniques de la tôle et de la matrice sont données table II.2. Des simulations avec différents taux de réduction de l'épaisseur de la tôle (9 % et 18 %) et avec différents coefficients de frottement appliqués à tous les nœuds de la tôle ($\mu=0$ et $\mu=0.2$) sont effectuées.

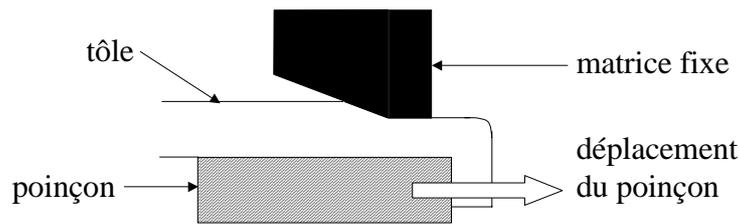


Figure II.10: Présentation du procédé d'étirage

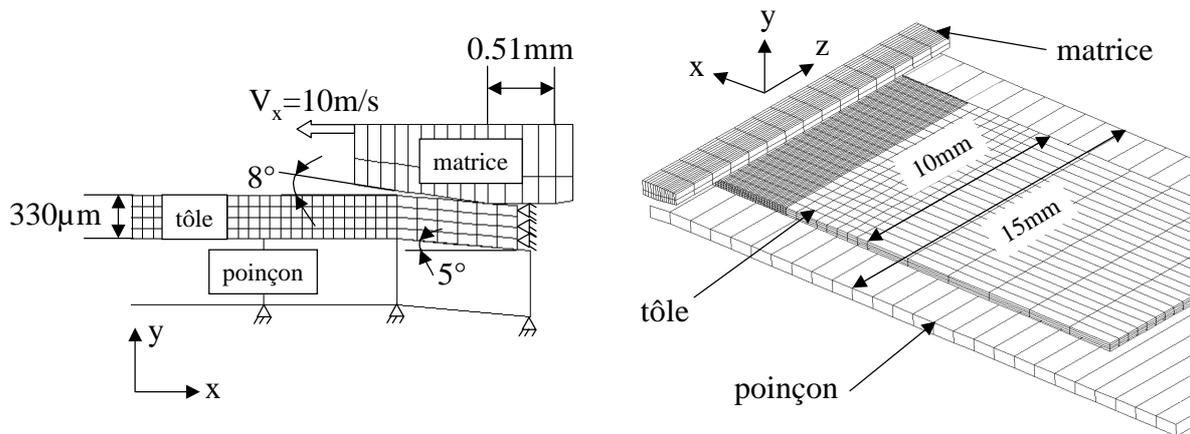


Figure II.11: Maillage 3D initial pour la simulation du procédé d'étirage

	masse volumique	module d'Young	coefficient Poisson	loi d'écroutissage
tôle	10000 kg/m ³	70000 MPa	0.3	$\sigma_{eq} = 348 \cdot (\epsilon^p + 0.002)^{0.03}$
matrice	10000 kg/m ³	200000 MPa	0.3	(corps élastique)

Table II.2: Propriétés mécaniques de la tôle et de la matrice

Influence du taux de réduction de l'épaisseur: plus le taux de réduction est élevé, plus les forces exercées par la matrice et la déformation plastique équivalente maximale de la tôle augmentent (table II.3 et figure II.13).

Influence du coefficient de frottement: l'augmentation du coefficient de frottement entraîne une augmentation de la déformation plastique équivalente en surface de la tôle (côté de la matrice), une augmentation de la force exercée par la matrice dans la direction x et une légère diminution de celle-ci dans la direction y (table II.3 et figures II.12 et II.13).

taux de réduction	coefficient de frottement	déformation plastique équivalente maximale	norme de la force totale exercée par la matrice F/x	norme de la force totale exercée par la matrice F/y
9 %	$\mu=0$	20 %	150 N	1800 N
9 %	$\mu=0.2$	24 %	450 N	1500 N
18 %	$\mu=0$	29.9 %	250 N	2500 N
18 %	$\mu=0.2$	34.6 %	700 N	2200 N

Table II.3. Résultats des différentes simulations du procédé d'étirage

Comparaison avec les résultats expérimentaux: des essais expérimentaux du procédé d'étirage d'une tôle plane ont été réalisés avec une tôle de largeur 30 mm (égale à 10 mm pour les simulations présentées dans ce mémoire) pour un taux de réduction de l'épaisseur de la tôle de 18%. En supposant que les efforts appliqués sont proportionnels à la largeur de la tôle, les résultats numériques sont comparés à ceux obtenus expérimentalement (table II.4).

	norme de la force totale exercée par la matrice F/x	norme de la force totale exercée par la matrice F/y
expérience	333 N	2700 N
simulation ($\mu=0$)	250 N	2500 N
simulation ($\mu=0.2$)	700 N	2200 N

Table II.4: Comparaison des forces numériques et expérimentales exercées par la matrice lors du procédé d'étirage pour un taux de réduction de 18% de l'épaisseur de la tôle

La simulation numérique effectuée avec un coefficient de frottement nul donne les résultats les plus proches de ceux obtenus expérimentalement, ce qui semble naturel du fait de la présence importante de lubrifiant lors de l'étirage. Les résultats obtenus sont satisfaisants malgré un léger écart entre les efforts numériques et expérimentaux. Plusieurs raisons peuvent expliquer cet écart. La première est liée au fait que les conditions de frottement au contact entre l'outil et la tôle, c'est-à-dire le régime de lubrification à l'interface tôle/matrice sont méconnues. Dans ce cas, le modèle de frottement de Coulomb représente donc une hypothèse

simplificatrice et un modèle plus sophistiqué serait nécessaire. D'autre part, l'épaisseur initiale de la tôle testée expérimentalement n'est pas constante mais varie entre 0.31 et 0.33 mm. Enfin les propriétés du matériau constituant la tôle ont été déterminées à partir d'un essai de traction et peuvent différer par rapport aux caractéristiques réelles de la tôle étirée. La simulation numérique permet donc d'obtenir une estimation réaliste des forces intervenant dans le procédé d'étirage, ainsi que des états de contrainte et de déformation dans chaque pièce (figures II.13 et II.14).

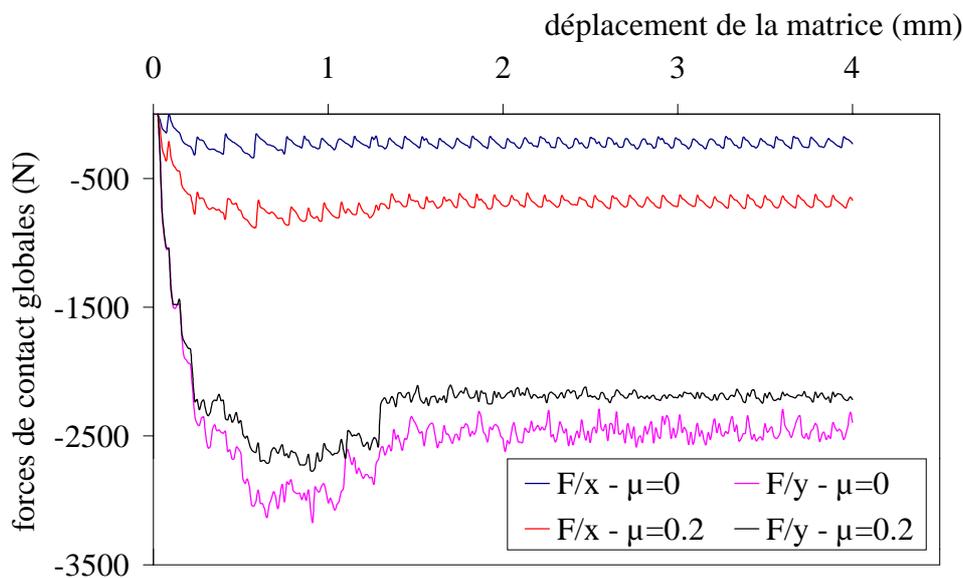


Figure II.12: Forces globales de contact exercées par la matrice sur la tôle pour différents coefficients de frottement ($\mu=0$ et $\mu=0.2$) et un taux de réduction de 18 %

Pour cette simulation, le nombre de nœuds en contact pendant chaque pas de temps est d'environ 500 et le nombre maximum d'itérations de Gauss-Seidel est de 10 pour atteindre une convergence de 10^{-16} .

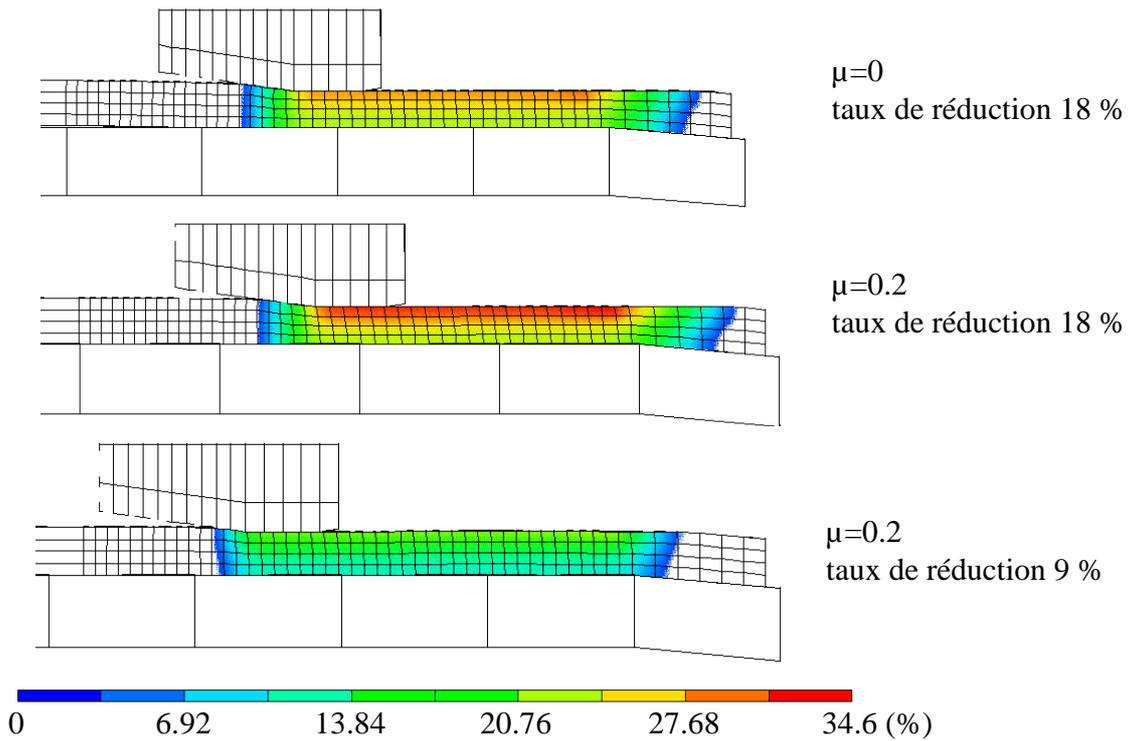


Figure II.13: Déformation plastique équivalente pour différents taux de réduction et différents coefficients de frottement (course de la matrice: 3 mm) dans le plan $z=0$

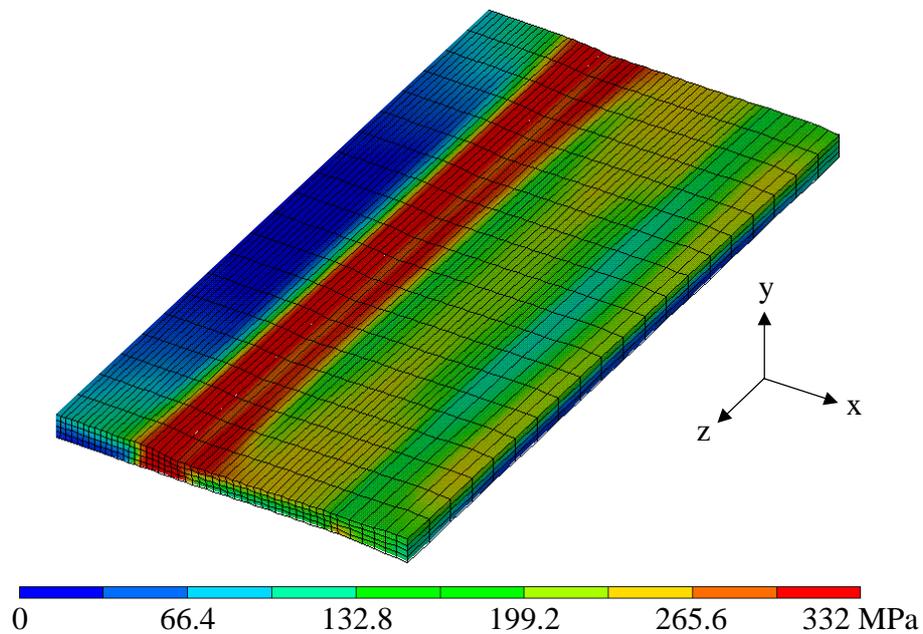


Figure II.14: Répartition de la contrainte équivalente de Von Mises dans la tôle pour un taux de réduction de 18% et un coefficient de frottement $\mu=0$ (course de la matrice: 3 mm)

II.3.5. Conclusion

Dans de nombreux cas, tels que l'étude des procédés de mise en forme des matériaux ou de chevilles ancrées dans une dalle de béton soumises à une sollicitation quelconque, le contact avec frottement entre plusieurs corps déformables est fondamental et, par conséquent, doit être modélisé avec précision. Les simulations présentées ci-dessus ont montré que l'algorithme tridimensionnel développé dans ce mémoire est efficace, robuste et intrinsèque. En outre il possède de nombreux avantages tels que la précision, la stabilité ainsi qu'une convergence excellente et rapide à chaque pas de temps Δt . Contrairement à la méthode de la pénalisation souvent privilégiée dans les codes explicites, avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange proposée les conditions de contact sont exactement satisfaites (aucune pénétration, même faible, n'est permise), le pas de temps critique n'est pas diminué et aucun coefficient supplémentaire n'est à définir.

Chapitre III:

Modélisation du comportement du béton

III.1. COMPORTEMENT DU BETON: ASPECT PHENOMENOLOGIQUE.....	67
III.1.1. LE BÉTON, UN MATÉRIAU HÉTÉROGÈNE.....	67
III.1.2. COMPORTEMENT EN COMPRESSION UNIAXIALE	68
III.1.3. COMPORTEMENT EN TRACTION UNIAXIALE	69
III.1.4. COMPORTEMENT SOUS CONTRAINTES BIAXIALES	70
III.2. MODELISATION DE LA FISSURATION DU BETON: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....	71
III.2.1. INTRODUCTION	71
III.2.2. CRITÈRE D'AMORÇAGE ET DE PROPAGATION DE FISSURE.....	72
III.2.3. MODÈLE DE LA FISSURE DISCRÈTE.....	74
III.2.4. MODÈLE DE LA FISSURE DIFFUSE	75
III.2.4.1. Principe général	75
III.2.4.2. Les différents concepts.....	75
III.2.4.2.1. Le concept de la fissure diffuse fixe.....	76
III.2.4.2.1.1. Formulation à partir de la déformation totale.....	76
III.2.4.2.1.2. Formulation à partir de la décomposition des déformations	79
III.2.4.2.2. Le concept de la fissure diffuse tournante	86
III.2.4.3. Description du comportement du matériau dans les concepts.....	88
III.2.4.3.1. Paramètres du mode I.....	88
III.2.4.3.2. Paramètres du mode II	91
III.2.4.3.3. Fermeture et réouverture de fissure.....	93
III.2.4.4. Critique des différents concepts.....	94
III.2.5. AUTRES MODÈLES	96
III.2.5.1 Modèles basés sur la théorie de la plasticité et de la viscoplasticité.....	96
III.2.5.2. Modèles basés sur la théorie de l'endommagement continu	97
III.2.5.3. Modèle "microplan".....	97
III.2.5.4. Modèles avec discontinuités ancrées dans les éléments	98
III.2.5.5. Limiteurs de localisation.....	98
III.2.5.5.1. Milieu de Cosserat	99
III.2.5.5.2. Régularisation viscoplastique.....	100
III.2.5.5.3. Modèle non local.....	100
III.2.5.5.4. Plasticité au gradient.....	101
III.2.5.6. Modèle basé sur une méthode sans maillage.....	101
III.3. MODELE DEVELOPPE	102
III.3.1. REMARQUES INTRODUCTIVES	102
III.3.2. MODÈLE DE FISSURATION.....	102
III.3.2.1. Modèle développé en deux dimensions	102
III.3.2.2. Modèle développé en trois dimensions	104
III.3.3. MODÈLE DE COMPORTEMENT EN COMPRESSION	109
III.3.3.1. Critère de plastification	110
III.3.3.2. Loi d'écoulement	112
III.3.3.3. Loi d'écrouissage	113
III.3.3.4. Condition d'effondrement.....	115
III.3.4. VALIDATIONS ET EXEMPLES D'APPLICATIONS NUMÉRIQUES	116
III.3.4.1. Essai de traction directe d'une poutre entaillée en béton plein	116
III.3.4.2. Essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein.....	119
III.3.5. CONCLUSION	123

Les ouvrages réalisés en béton, tels que les ponts, barrages, tunnels, centrales nucléaires... étant de plus en plus ambitieux, il est nécessaire d'assurer leur sécurité et de prédire de façon fiable leur tenue, une défaillance pouvant avoir des conséquences humaines et économiques graves. Des tests expérimentaux à une telle échelle étant totalement irréalisables, de nombreuses recherches ont été effectuées, notamment depuis ces trente dernières années, en vue de modéliser le béton de façon la plus réaliste possible. En effet, une modélisation précise permet non seulement d'évaluer le risque de ruine mais aussi d'acquérir une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Cependant, de part sa nature hétérogène, le béton présente un comportement mécanique très complexe (un résumé est proposé dans la première partie de ce chapitre) et la formation de fissures dans le matériau est indéniablement le phénomène qui gouverne la réponse d'une structure en béton. De nombreux modèles sont donc proposés dans la littérature mais bien souvent ces modèles ont été développés pour être appliqués à une étude de cas précise. En conséquence, choisir un modèle spécifique devient difficile d'autant plus que l'application à laquelle il est destiné, à savoir l'étude de chevilles ancrées dans une dalle de béton, est elle-même un problème relativement complexe. Après une revue bibliographique des principaux modèles existants, le modèle développé avec ses limites et ses avantages est exposé.

III.1. COMPORTEMENT DU BETON: ASPECT PHENOMENOLOGIQUE

III.1.1. Le béton, un matériau hétérogène

Le béton est un matériau composite constitué d'une matrice en ciment et d'inclusions de granulats ou agrégats (sables, graviers, cailloux) dont la répartition et la géométrie ne sont pas connues à priori et présentent souvent une dispersion importante. A cette hétérogénéité de composition vient s'ajouter une hétérogénéité dite structurelle. Elle consiste en l'existence de défauts initiaux (microfissures) au sein de la microstructure. La plupart de ces défauts se situent à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette interface constituant le lien le plus faible du matériau. Des microfissures peuvent également être générées dans le ciment par différents facteurs, tels que le retrait (diminution du volume apparent de la matière) hydraulique engendré par une évaporation d'eau, le retrait thermique engendré par une variation de température ou une consolidation incomplète du ciment entraînant la formation de microcavités. Lorsque cette structure est soumise à une sollicitation, des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées

dues à des déformations incompatibles entre les granulats et le ciment. Lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent et se connectent éventuellement entre elles pour former une macrofissure entraînant la rupture du matériau, ce qui se traduit à l'échelle macrostructurale par une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations. Ce comportement dit *adoucissant* ou *quasi-fragile* est associé à un phénomène de *localisation des déformations*. En effet, le mode de déformation est non homogène, c'est-à-dire que les déformations se concentrent dans des zones localisées de faible dimension (le long des macrofissures dans le cas du béton) alors que tout le reste du matériau a tendance à se décharger. De part sa nature hétérogène, le béton présente donc un comportement mécanique très complexe englobant un comportement fortement non linéaire sous un état de contrainte multiaxial, une fissuration progressive induite par des contraintes ou des déformations de tension conjuguée à un adoucissement en déformation, et un comportement dépendant du temps tel que le fluage et le retrait.

Dans les paragraphes suivants, les principales caractéristiques du comportement mécanique du béton sont exposées au niveau macrostructural. En effet, malgré cette forte hétérogénéité, le béton peut être considéré comme un matériau homogène et continu si l'échelle d'observation est suffisamment grande (plusieurs fois la taille de la plus grande hétérogénéité), ce qui sera le cas dans les études numériques réalisées.

III.1.2. Comportement en compression uniaxiale

La courbe caractéristique reliant les contraintes aux déformations obtenue lors d'un essai de compression uniaxiale d'un cylindre en béton est présentée figure III.1. Elle présente un comportement quasiment linéaire élastique jusqu'à environ 40% de sa résistance limite en compression f_c et devient ensuite non linéaire. Après le pic, la partie décroissante de la courbe caractérise le régime d'adoucissement du béton jusqu'à ce que la ruine en effondrement apparaisse. La partie croissante de la courbe est indépendante de l'élançement du cylindre testé (rapport du diamètre sur la hauteur), ce qui n'est pas le cas pour le régime d'adoucissement où une augmentation de la ductilité (en terme de contrainte et déformation) est observée expérimentalement avec une augmentation de l'élançement (effet d'échelle) [Van97].

Le comportement du béton en compression uniaxiale peut être divisé en deux zones: la partie ascendante de la courbe contrainte-déformation décrit le comportement du béton *non fissuré* (présence uniquement de microfissures non visibles à l'œil nu) alors que la partie

d'adoucissement est associée au comportement du béton *fissuré* (les fissures sont observables à l'œil nu).

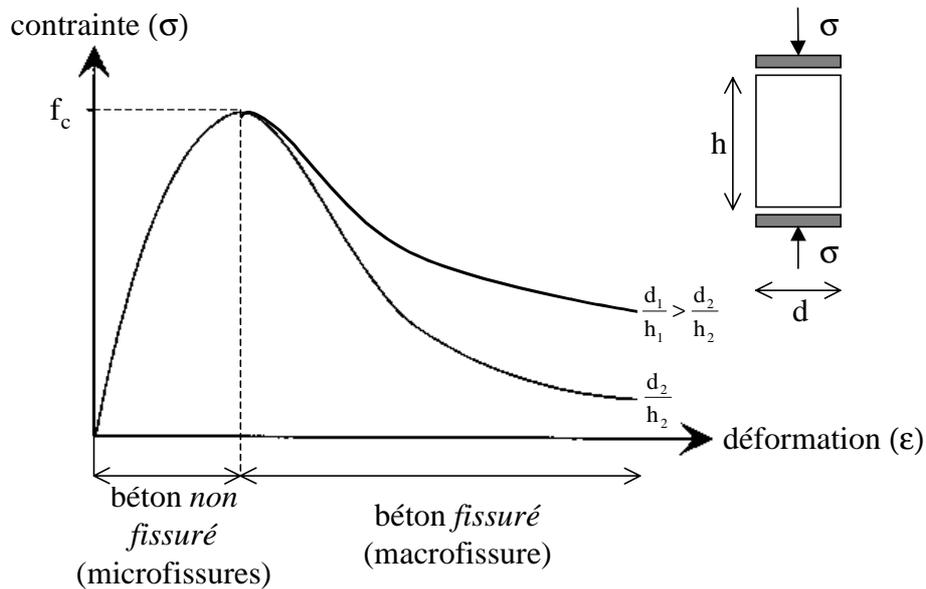


Figure III.1: Comportement du béton en compression uniaxiale

III.1.3. Comportement en traction uniaxiale

La courbe contrainte-déformation du béton obtenue en traction uniaxiale (figure III.2) est similaire à celle décrite pour la compression, mis à part le fait que la résistance limite en traction f_t est nettement plus faible que celle en compression ($f_t \approx 0.1f_c$). La courbe est linéaire jusqu'à environ 75% de f_t . Les microfissures commencent à se développer dans la région précédant le pic mais s'agrandissent plus rapidement que lors d'un test de compression et donc la rupture survient plus tôt.

Des tests expérimentaux de traction directe d'éprouvettes en béton ont montré que, juste avant le pic, une décohésion des granulats les plus importants apparaissait et que les fissures nées de cette décohésion coalescent ensuite avec les microfissures existantes pour former une macrofissure continue [Van91]. De plus, les résultats révèlent la présence de nombreux grains reliant les surfaces de la fissure, ce qui explique la branche d'adoucissement de la courbe contrainte-déformation. La ruine des éprouvettes apparaît lors de la rupture de ces grains.

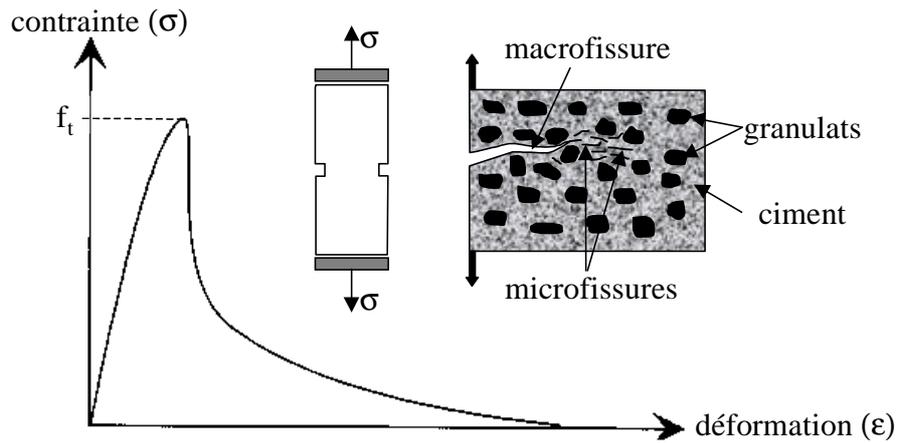


Figure III.2: Comportement du béton en traction uniaxiale

III.1.4. Comportement sous contraintes biaxiales

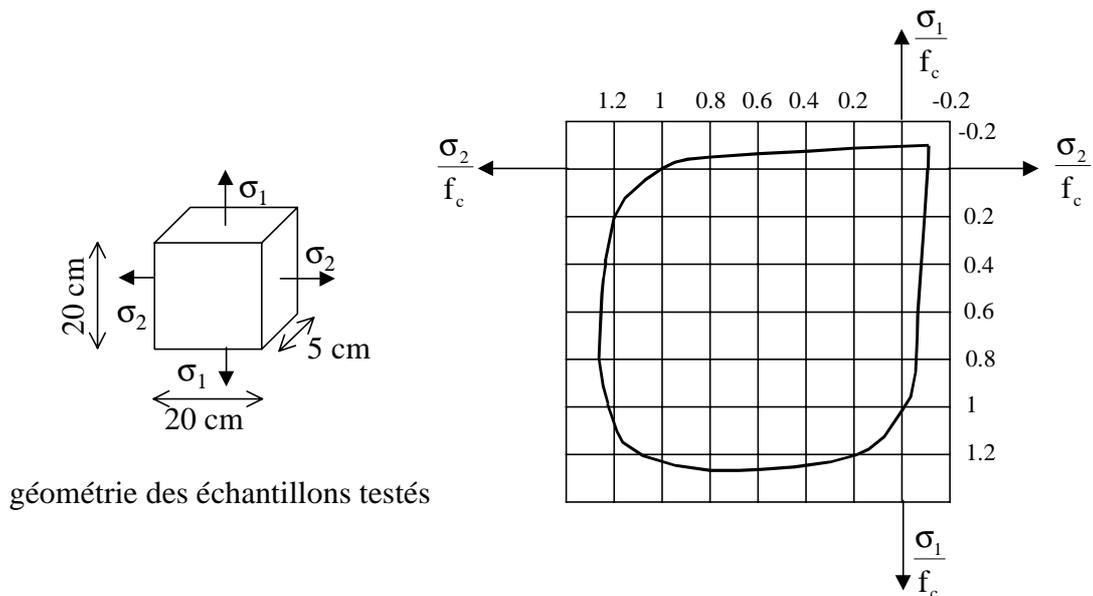


Figure III.3: Enveloppe limite biaxiale du béton déterminée par Kupfer & al. [Kup69]

Les données sur le comportement du béton sous un état de contrainte multiaxial sont plus rares car les tests expérimentaux sont plus difficiles à mettre en œuvre.

Kupfer & al. ([Kup69], ([Kup73]) ont étudié le comportement du béton soumis à des contraintes biaxiales et ont ainsi établi des relations entre les contraintes et les déformations en compression biaxiale, en tension biaxiale et en tension et compression combinées. De plus,

les enveloppes à la limite d'élasticité et à la rupture ont été établies dans l'espace à deux dimensions des contraintes (figure III.3). Ces résultats ont été largement exploités pour établir des critères limites et des lois de comportement du béton utilisables dans des codes de calcul par éléments finis.

III.2. MODELISATION DE LA FISSURATION DU BETON: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

III.2.1. Introduction

Les modèles présentés dans cette partie considèrent que le béton est un matériau homogène puisque l'échelle des applications numériques est en général suffisamment élevée pour permettre cette hypothèse. Néanmoins, on peut noter l'existence de modèles d'éléments finis où la microstructure du béton est représentée par une matrice (ciment), des inclusions (granulats) et éventuellement des microfissures initiales introduites dans la matrice autour des inclusions. La position des granulats est alors déterminée soit par une procédure aléatoire [Wan97], soit par une reconstruction tridimensionnelle d'images digitales réelles [Nag98]. Ce type de modèle doit également inclure un modèle de fissuration pour le ciment (similaire à un de ceux exposés dans les paragraphes suivants) et un modèle pour l'interface ciment-granat mais permet seulement d'étudier l'évolution de la microstructure du béton soumis à une sollicitation. Une autre façon de prendre en compte l'hétérogénéité du béton est de distribuer de façon aléatoire sur les éléments du maillage le module d'Young et la résistance limite de traction du béton en fonction de leur valeur moyenne et de leur écart type obtenus expérimentalement [Ros97]. En général, l'hétérogénéité du béton est rarement prise en compte directement, la modélisation de la fissuration par éléments finis étant déjà relativement complexe à mettre en œuvre.

La principale difficulté de la modélisation de la fissuration du béton par éléments finis est engendrée par la nature même de la fissure. En effet, une fissure est une discontinuité géométrique qui divise le matériau alors que la méthode des éléments finis est une technique basée essentiellement sur la mécanique des milieux continus. Cette incompatibilité apparente entre le problème posé et l'outil de modélisation nécessite le développement de schémas spécifiques qui, tout en conservant la notion générale de continuité dans la solution, entraîne des changements drastiques dans le matériau à l'endroit de la fissure. Les travaux pionniers en matière de modélisation de fissuration ont été ceux de Ngo & Scordelis en 1967 [Ngo67] qui

ont introduit le concept de la fissuration *discrète* et ceux de Rashid en 1968 [Ras68] qui a introduit le concept de la fissuration *diffuse*. La première approche modélise la fissure en insérant une discontinuité géométrique réelle dans le maillage et la seconde simule la fissuration en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure. Bien que ces deux modèles aient évolué et été améliorés au cours des dernières années, d'autres modèles, de nature différente, ont été également développés (modèles basés sur la théorie de la plasticité, de la viscoplasticité, sur la mécanique de l'endommagement continu, modèle microplan...) et sont brièvement présentés dans ce chapitre. Ces modèles qui décrivent le comportement du béton en *tension* sont en général couplés avec un autre modèle de type linéaire élastique, élastoplastique ou viscoplastique pour le comportement du béton en compression.

III.2.2. Critère d'amorçage et de propagation de fissure

On distingue en général trois modes de sollicitation susceptibles d'ouvrir une fissure: le mode I (mode d'ouverture) où les contraintes normales ouvrent la fissure, les modes II (mode de cisaillement plan) et III (mode de cisaillement antiplan) où ce sont les contraintes tangentielles qui ouvrent la fissure (figure III.4).

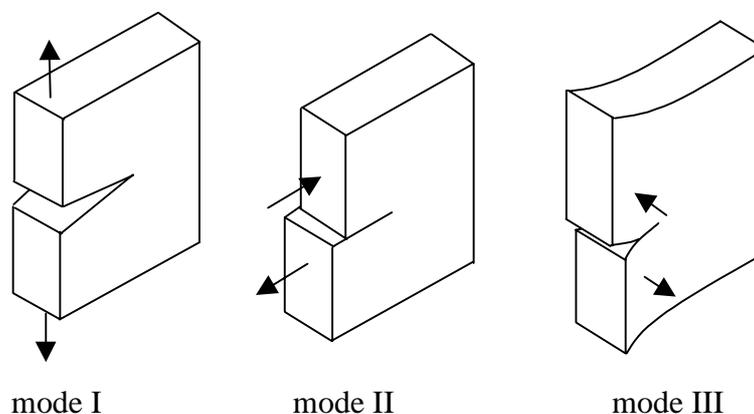


Figure III.4: Modes de sollicitation d'une fissure

Les critères principalement utilisés pour la modélisation de la fissuration du béton sont développés à partir des deux constats suivants:

- la non linéarité de la partie croissante de la courbe uniaxiale liant les contraintes aux déformations de traction peut être négligée;

- la principale caractéristique du comportement du béton est probablement sa faible résistance limite en traction qui provoque une fissuration en tension à des niveaux de contrainte faibles comparés à la résistance limite en compression.

Par conséquent, dans la majorité des modèles de fissuration, le béton non fissuré est considéré comme linéaire élastique isotrope en tension et un simple critère de Rankine est utilisé pour détecter l'apparition d'une fissure. L'amorçage d'une fissure s'effectue dans ce cas uniquement en mode I. Ces hypothèses sont justifiées en l'absence de compression latérale significative [Kup69]. Pratiquement, les contraintes principales et leurs directions sont calculées en un point d'intégration et si une de ces contraintes, positive, excède une valeur limite alors une fissure perpendiculaire à la direction de cette contrainte apparaît au point considéré. Selon les modèles, cette valeur limite est égale à la résistance limite en traction f_t ([Sui73], [Hil76], [Baz83a], [Gup84], [Owe83], [Owe84], [Cer85], [Ona85], [Hel87], [Rot89a], [Dah90], [Mos97], [Kli98], [Jir98b]...) ou est fonction de celle-ci, de la résistance limite en compression et des contraintes de compression si l'état de contrainte en ce point est un état de tension-compression combiné ([Bat79], [Buy85], [Cer87]). Bhattacharjee & Leger [Bha93] ont proposé un critère d'amorçage de fissure en mode I, légèrement différent de celui de Rankine. En effet, ils prennent en compte la non linéarité de la partie croissante de la courbe de traction uniaxiale du béton ainsi que la non proportionnalité, due à l'effet de Poisson, de la contrainte principale maximale σ_{nn} et de la déformation correspondante ϵ_{nn} qui sont utilisées comme indicateurs dans les analyses. Dans leur modèle, une fissure s'amorce si le produit $\frac{1}{2} \cdot \sigma_{nn} \cdot \epsilon_{nn}$ est supérieur ou égal à l'aire sous la courbe de tension uniaxiale avant le pic (aire égale à $\frac{1}{2} \cdot f_t \cdot \epsilon_t$ dans le cas où le béton non fissuré est supposé linéaire élastique, avec ϵ_t la déformation correspondant à f_t).

Le critère de Rankine permet l'amorçage d'une fissure uniquement en mode I. Bien que l'utilisation de ce critère semble justifiée et que de ce fait celui-ci soit abondamment employé dans des modèles de fissuration, il peut paraître restrictif. C'est pourquoi, certains modèles utilisent, en plus du critère de Rankine, un critère d'ouverture de fissure en cisaillement [Ros97] et d'autres emploient une enveloppe de rupture tridimensionnelle avec amorçage d'une fissure si le critère est transgressé avec au moins une contrainte principale de tension ([Ott77], [Ott81], [Tor87], [Dvo89], [Gon91], [Kot95], [Gru97]). Tous ces modèles conservent le critère de propagation précédent avec un plan de fissure qui se propage perpendiculairement à la contrainte principale maximale. Il existe également des modèles où le critère d'amorçage de fissure et le critère de propagation de fissure dépendent tous les deux

de l'état de contrainte au point considéré [Ohl97]. Récemment, Weihe & al. ont proposé un critère bidimensionnel d'amorçage et de propagation de fissure applicable à tout type de matériau prenant en compte la rupture en mode I, mode II et mode mixte mais ils s'accordent sur le fait qu'une fissure apparaît en mode I si le matériau, tel le béton, est suffisamment fragile ([Wei98], [Wei97], [Kro97]).

III.2.3. Modèle de la fissure discrète

Le concept de la fissuration discrète se distingue de tous les autres modèles de fissuration et d'endommagement du béton car, dans cette approche, une discontinuité géométrique *réelle* est introduite dans le maillage d'éléments finis à l'endroit de la fissure. Cette approche a été initialement développée par Ngo & Scordelis [Ngo67] qui ont modélisé la fissure en séparant par dédoublement des nœuds deux éléments ayant un côté en commun. Ce modèle possède deux inconvénients majeurs. Premièrement, il implique un changement continu de la connexion des nœuds et de la topologie du maillage. Deuxièmement, le chemin de propagation de fissure doit nécessairement suivre les côtés des éléments, ce qui rend la solution fortement dépendante du maillage. Pour pallier cette difficulté, l'approche a été affinée en utilisant des méthodes de remaillage adaptatif de façon à ce que des nouveaux éléments soient introduits avec leurs côtés orientés dans la direction de la fissure ([Ing84], [Hel87]). On peut noter également que l'approche de la fissure discrète ne semble pas avoir été développée en trois dimensions. De plus, cette technique semble plus performante si elle est appliquée à une classe de problèmes pour lesquels l'orientation de la fissure est connue par avance puisque les inconvénients liés à la dépendance vis à vis du maillage disparaissent d'eux-mêmes ([Rot89a], [Rot91]).

L'approche proposée par Ngo & Scordelis [Ngo67] a donc été améliorée et les fissures discrètes sont à présent généralement modélisées par des éléments d'interface interdisant le recouvrement des faces de la fissure mais permettant leur ouverture et glissement relatifs ([Ing84], [Hel87], [Rot89a], [Rot91]). Bien que la fissure soit ouverte, des contraintes normale et tangentielle peuvent être transmises à travers celle-ci du fait de la présence d'aspérités et sont fonction des déplacements relatifs normal et tangentiel de la fissure.

Le concept de la fissuration discrète se présente comme étant l'approche qui reflète le mieux l'état d'endommagement final d'une structure en béton car elle se rapproche de notre conception naturelle de la fissuration. Mais dans le cas de chevilles ancrées dans une dalle de béton et soumises à divers types de sollicitations, l'orientation des fissures est une inconnue

du problème. Pour une telle structure, une technique de remaillage adaptatif pour modéliser les fissures individuellement serait trop lourde à gérer et extrêmement chère en temps de calcul, notamment en trois dimensions où cela semble être quasiment impossible à mettre en œuvre.

III.2.4. Modèle de la fissure diffuse

Ce modèle et les nombreuses possibilités qu'il offre sont exposés en détail car le modèle développé dans PLAST3 est basé sur cette approche.

III.2.4.1. Principe général

Le concept de la fissuration diffuse (*smearred crack approach*) n'introduit pas de discontinuité dans le maillage. Le béton est considéré comme un milieu continu et la fissuration est introduite en modifiant les propriétés du matériau à l'endroit de la fissure. Cette approche, développée initialement par Rashid [Ras68], permet donc une description de l'endommagement du béton du à la fissuration en terme de relation entre les contraintes et les déformations. La loi initiale et isotrope du béton intact liant les contraintes aux déformations est transformée en une loi orthotrope après fissuration, les axes d'orthotropie étant alignés avec la direction de la fissure. Comme les contraintes et les déformations sont évaluées aux points d'intégration, l'altération des propriétés du matériau affecte la région entourant ces points et *diffuse* les effets de la fissure dans cette région. Cette procédure est très attractive, non seulement parce qu'elle préserve la topologie originale du maillage d'éléments finis pendant toute l'analyse, mais aussi parce que seule la relation entre les contraintes et les déformations doit être actualisée après l'apparition d'une fissure.

III.2.4.2. Les différents concepts

Le modèle de la fissuration diffuse peut être divisé en deux catégories: le concept de la fissure fixe et celui de la fissure tournante. Dans le premier cas, l'orientation de la fissure dès son apparition est fixée pendant toute la durée du calcul alors que dans le second cas, les axes de la fissure tournent constamment afin de rester alignés avec ceux des déformations principales. Dans ce paragraphe, ces deux concepts sont exposés sans expliciter les lois de comportement du béton fissuré. Les matrices traduisant ce comportement, basées sur les

propriétés du matériau et citées dans ce paragraphe, seront détaillées dans le paragraphe III.2.4.3.

III.2.4.2.1. Le concept de la fissure diffuse fixe

III.2.4.2.1.1. Formulation à partir de la déformation totale

Traditionnellement, avec cette formulation, le béton non fissuré présente un comportement linéaire élastique. Si le critère d'amorçage de fissure est transgressé pour la première fois en un point d'intégration, une fissure apparaît dans le plan perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale de tension en ce point. Le béton devient alors anisotrope et les axes principaux du matériau sont alignés avec ceux de la fissure. La loi de comportement pour la fissuration diffuse est exprimée dans le repère formé par les axes d'orthotropie, alignés avec ceux de la fissure, et relie les contraintes aux déformations dans le cas général de la façon suivante:

$$\Delta s = D \cdot \Delta e \text{ et } D = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ns} & E_{ss} & E_{st} & 0 & 0 & 0 \\ E_{nt} & E_{st} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

avec: $\Delta s = [\Delta\sigma_{nn} \quad \Delta\sigma_{ss} \quad \Delta\sigma_{tt} \quad \Delta\sigma_{ns} \quad \Delta\sigma_{st} \quad \Delta\sigma_{nt}]^t$ le vecteur des contraintes locales,

$\Delta e = [\Delta\varepsilon_{nn} \quad \Delta\varepsilon_{ss} \quad \Delta\varepsilon_{tt} \quad \Delta\gamma_{ns} \quad \Delta\gamma_{st} \quad \Delta\gamma_{nt}]^t$ le vecteur des déformations locales,

n la direction normale à la fissure (mode I) et s et t les directions tangentielles à la fissure (mode II et III) définies sur la figure III.5,

D la matrice du béton endommagé reliant les contraintes aux déformations totales dans le repère de la fissure et définie par neuf modules indépendants.

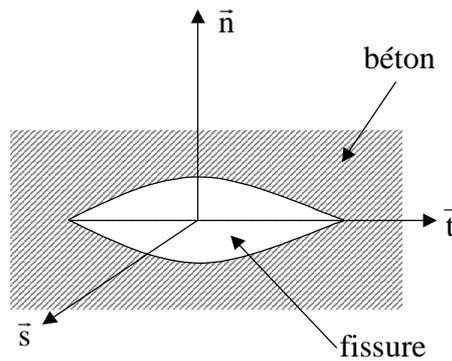


Figure III.5: Définition du repère local lié à la fissure

En général, la contrainte normale σ_{nn} et les contraintes tangentielles σ_{ns} et σ_{nt} à la fissure sont réduites suivant une loi d'adoucissement en tension et une loi de transfert de cisaillement respectivement et l'effet de Poisson est négligé ($E_{ns}=E_{nt}=0$). Les modules restants E_{ss} , E_{tt} , E_{st} et G_{st} qui ne sont pas affectés par la fissure sont les modules élastiques donnés par les lois de Hooke définies par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν du matériau. Dans les premiers modèles de fissuration diffuse développés, seule une fissure pouvait se propager en un point d'intégration et, une fois apparue, sa direction était alors définitivement fixée pour toute la durée de l'analyse ([Ras68], [Sui73], [Ott81], [Baz83a], [Buy85], [Cer85]). Mais si le chargement de la structure étudiée évolue, les directions principales des contraintes ne restent pas forcément alignées avec ceux de la fissure. De plus, l'enveloppe limite de rupture peut être atteinte une seconde fois, dans une direction différente de la première, surtout si le transfert de cisaillement à travers la fissure est permis. Ce phénomène peut alors entraîner une prédiction incorrecte du comportement global de la structure étudiée. Un remède à ce problème est de permettre la formation de plusieurs plans de fissure, orthogonaux ou non orthogonaux, en un point d'intégration:

a) si c'est la solution des fissures orthogonales qui est retenue, la procédure de calcul qui en découle est relativement simple, notamment pour les modèles bidimensionnels où seuls deux plans de fissure peuvent se former en un point d'intégration. Dans ce cas, les axes d'orthotropie sont définitivement fixés dès l'amorçage de la première fissure et aucun autre changement de repère n'est nécessaire ([Owe83], [Owe84]). Dans le cas tridimensionnel, deux alternatives sont possibles pour déterminer la direction du second plan de fissure:

- les axes n , s et t du matériau sont définitivement fixés dès la formation de la première fissure (comme en deux dimensions) et le second plan de fissure sera normal soit à l'axe t , soit à l'axe s selon la contrainte qui transgressera en premier le critère d'amorçage, sans respecter une rotation possible des contraintes dans le plan de la fissure existante.
- la direction perpendiculaire n au premier plan de fissure est conservée et une recherche est effectuée pour déterminer la contrainte maximale de direction s' dans le plan parallèle à la fissure existante. Pour ce calcul, seules les contraintes normales et tangentielles agissant dans le plan de la première fissure sont nécessaires (σ_{ss} , σ_{tt} , σ_{st}). Si cette valeur maximale atteint le critère limite alors un nouveau plan de fissure se forme perpendiculairement à la direction s' de cette contrainte (et perpendiculaire au premier) et les axes locaux du matériau n , s' et t' sont alors totalement déterminés (figure III.6a). C'est généralement cette alternative qui est utilisée ([Bat79], [Cer87], [Cer88], [Dah90]).

b) si c'est la solution des fissures non orthogonales qui est retenue, la procédure de calcul qui en découle devient alors plus complexe. Après apparition du premier plan de fissure défini par les axes s et t et de normal n , les contraintes principales tournent et ne coïncident plus avec les axes de la fissure. Elles sont donc recalculées à chaque pas de calcul. Si l'enveloppe de rupture est atteinte une seconde fois, un deuxième plan de fissure se forme au point d'intégration considéré perpendiculairement à la direction de la contrainte principale maximale de tension *actuelle* n' . Les axes n' , s' et t' forment alors le repère du second plan de fissure avec s' et t' les directions tangentielles à la fissure. Cette méthode nécessite la définition d'un angle seuil entre les axes n et n' en dessous duquel le second plan de fissure n'est pas autorisé à s'amorcer car il est considéré trop proche du premier. Avec la méthode des fissures non orthogonales, la détermination des contraintes après apparition du second plan de fissure est plus délicate que dans le cas où les fissures sont orthogonales. Onate & al. ont proposé une méthode de calcul pour le cas bidimensionnel [Ona85] et Kotsovos & Pavlovic pour le cas tridimensionnel [Kot95]. La procédure de calcul développée par ces derniers est simplifiée par le fait que la contrainte normale à un plan de fissure est annulée immédiatement après l'apparition de cette fissure: $E_{nn}=E_{ns}=E_{nt}=0$ (ce point sera discuté en détail au paragraphe III.2.4.3.). Ensuite, lorsqu'un second plan de fissure de normal n' se forme en un point d'intégration, l'axe s' n'est pas choisi de façon aléatoire mais est défini comme étant

l'intersection des deux plans de fissure existants (figure III.6b). Par conséquent, dans le repère (n',s',t') , seule la contrainte normale $\sigma_{s's'}$ et les contraintes tangentielles $\sigma_{s'n'}$ et $\sigma_{s't'}$ à la fissure ne sont pas nulles. Un seul changement de repère suffit alors à évaluer les contraintes dans le repère global.

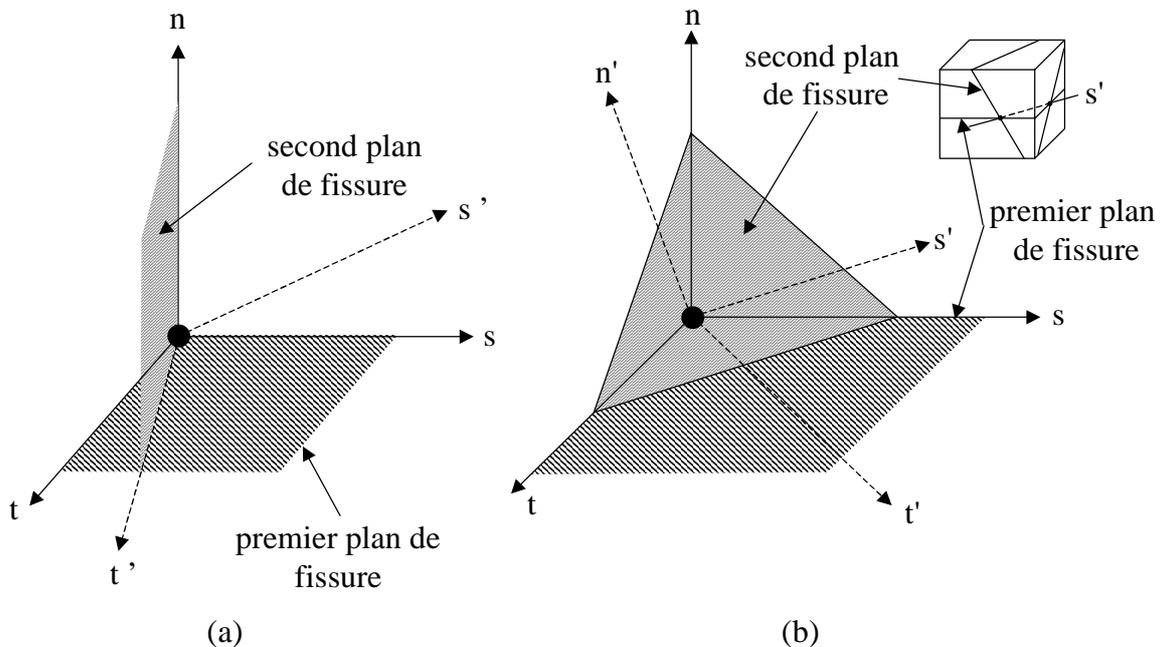


Figure III.6: Axes locaux pour un point d'intégration avec deux fissures orthogonales (a) ou non orthogonales (b)

III.2.4.2.1.2. Formulation à partir de la décomposition des déformations

Le modèle est d'abord exposé pour une fissure en un point d'intégration et sera ensuite généralisé à plusieurs fissures.

Le vecteur des déformations de l'équation (III.1) représente la déformation totale du solide fissuré, incluant la déformation induite par la fissure et la déformation du matériau entre les fissures. La loi résultante entre les contraintes et les déformations correspond donc à une loi diffuse pour le solide fissuré sans distinction entre les fissures et le matériau intact. Un désavantage de cette formulation est l'impossibilité d'incorporer de manière transparente des lois de fissuration particulières qui sont exprimées à partir de la notion de déformation de fissure plutôt que de la déformation totale. Un remède à cette déficience est de décomposer la

déformation totale du matériau fissuré en une déformation de fissure $\Delta\epsilon^{cr}$ et en une déformation du matériau solide entre les fissures $\Delta\epsilon^{co}$ ("co" pour *concrete* et "cr" pour *crack*):

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^{co} + \Delta\epsilon^{cr} \quad (III.2)$$

Une telle décomposition, illustrée figure III.7 a été utilisée par de nombreux chercheurs ([Baz80], [Deb85], [Deb87], [Rot85], [Rot87], [Rot89a], [Rot89b], [Rot91], [Bha93], [Mos97], [Jir98b],...) car ses avantages sont multiples. Elle permet de traiter le comportement de la fissure séparément des lois de comportement du béton entre les fissures. Une conséquence directe est que la fissuration peut être combinée avec d'autres comportements non linéaires du matériau. La déformation du béton intact $\Delta\epsilon^{co}$ peut être composée d'une déformation élastique, plastique, viscoélastique, thermique ou de fluage [Deb87], ce qui est impossible si le problème est formulé en déformation totale. Dans ce cas, le comportement du béton intact est systématiquement pris comme étant linéaire élastique en traction ([Ras68], [Sui73], [Bat79], [Baz83a], [Owe83], [Owe84], [Buy85], [Cer85], [Cer87], [Cer88], [Dah90], [Cer92], [Cer96], [Gon91], [Kot95], [Gru97],...). La décomposition de la déformation totale peut apparaître comme une tentative pour s'approcher du concept de la fissure discrète où le matériau solide est complètement dissocié de la fissure.

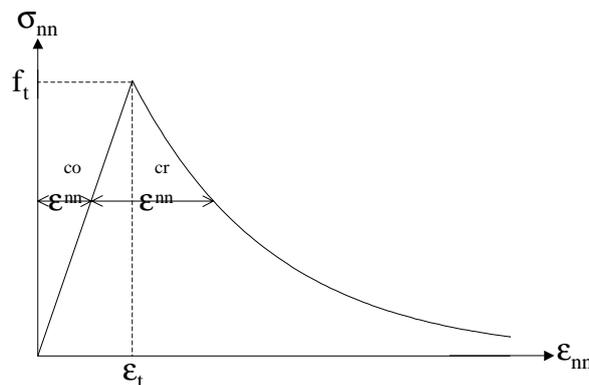


Figure III.7: Exemple de décomposition de la déformation normale à la fissure

Si la loi de comportement pour le béton fissuré est de forme simple avec la formulation en déformation totale (équation III.1), elle devient plus complexe lorsque la déformation est décomposée. Le vecteur des déformations de fissure en (III.2) est de la forme:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \left[\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}_{yz}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}_{zx}^{cr} \right]^t \quad (\text{III.3})$$

où x, y et z sont les axes qui forment le repère global. Dans le repère local de la fissure formé par les axes d'orthotropie n, s et t, la déformation locale de la fissure est définie par:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \left[\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{nn}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ss}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{tt}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}_{ns}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}_{st}^{cr} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma}_{nt}^{cr} \right]^t \quad (\text{III.4})$$

La relation entre les déformations de fissure locales et globales est la suivante:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = \mathbf{N} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \quad (\text{III.5})$$

où N est la matrice de transformation reflétant l'orientation de la fissure:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_y^2 & l_z^2 & l_x l_y & l_y l_z & l_z l_x \\ m_x^2 & m_y^2 & m_z^2 & m_x m_y & m_y m_z & m_z m_x \\ n_x^2 & n_y^2 & n_z^2 & n_x n_y & n_y n_z & n_z n_x \\ 2l_x m_x & 2l_y m_y & 2l_z m_z & l_x m_y + l_y m_x & l_y m_z + l_z m_y & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & 2m_y n_y & 2m_z n_z & m_x n_y + m_y n_x & m_y n_z + m_z n_y & m_z n_x + m_x n_z \\ 2n_x l_x & 2n_y l_y & 2n_z l_z & n_x l_y + n_y l_x & n_y l_z + n_z l_y & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

où l_x, m_x, n_x , forment le vecteur qui indique l'orientation de l'axe local n dans les coordonnées globales, l_y, m_y, n_y , celui de l'axe local s et l_z, m_z, n_z , celui de l'axe local t.

De la même façon, les vecteurs des contraintes $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ et Δs sont exprimés dans le repère global et dans le repère local respectivement:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma} &= \left[\Delta \boldsymbol{\sigma}_{xx} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{yy} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{zz} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{xy} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{yz} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{zx} \right]^t \\ \Delta s &= \left[\Delta \boldsymbol{\sigma}_{nn} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{ss} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{tt} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{ns} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{st} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{nt} \right]^t \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Ces deux vecteurs sont également reliés par la matrice de passage N:

$$\Delta s = \mathbf{N}^t \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{III.8})$$

Pour compléter cette formulation, il est nécessaire de définir une loi de comportement pour le béton intact et une relation entre les contraintes et les déformations de fissure exprimée dans les axes d'orthotropie:

$$\Delta\sigma = D^{co} \cdot \Delta\varepsilon^{co} \quad (III.9)$$

$$\Delta s = D^{cr} \cdot \Delta e^{cr} \quad (III.10)$$

La matrice D^{co} traduit la loi de comportement du matériau non fissuré. Dans le cas où le béton intact est considéré comme étant linéaire élastique, la matrice D^{co} est la matrice élastique usuelle obtenue à partir des lois de Hooke.

La matrice D^{cr} relie les contraintes aux déformations de fissure, incluant les propriétés de la fissure en modes I, II, III et en mode mixte. Si on conserve uniquement les composantes des contraintes et des déformations locales de fissure qui ont une signification physique, c'est-à-dire la déformation et la contrainte normale à la fissure, ε_{nn}^{cr} et σ_{nn} en mode I, les déformations et les contraintes tangentielles à la fissure, γ_{ns}^{cr} , γ_{nt}^{cr} , σ_{ns} et σ_{nt} en mode II et III respectivement, alors les vecteurs et la matrice de transformation se réduisent à:

$$\begin{aligned} \Delta e^{cr} &= [\Delta\varepsilon_{nn}^{cr} \quad \Delta\gamma_{ns}^{cr} \quad \Delta\gamma_{nt}^{cr}]^t \\ \Delta s &= [\Delta\sigma_{nn} \quad \Delta\sigma_{ns} \quad \Delta\sigma_{nt}]^t \end{aligned} \quad (III.11)$$

$$N = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ m_x^2 & m_x m_y & m_z m_x \\ n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & m_x n_y + m_y n_x & m_z n_x + m_x n_z \\ 2n_x l_x & n_x l_y + n_y l_x & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix}$$

Les autres composantes des vecteurs des contraintes et déformations n'ayant pas de significations physiques, elles peuvent être omises [ROT89a].

La matrice D^{cr} est alors supposée être de la forme suivante:

$$\mathbf{D}^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{\text{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{\text{II}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}^{\text{III}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

L'hypothèse des termes non diagonaux nuls dans (III.12) est utilisée dans la majorité des modèles diffus. Elle implique que le couplage direct tangentiell-normal est ignoré, c'est-à-dire que la contrainte normale à la fissure est seulement fonction de la déformation normale et ne dépend pas des déformations tangentielles. De façon similaire, les contraintes tangentielles à la fissure ne sont fonction que des déformations tangentielles. Cela provient du fait que peu de données expérimentales sont disponibles sur ce sujet. De plus, la plupart des applications sont restreintes à des petites déformations et donc les termes non diagonaux de la matrice \mathbf{D}^{cr} sont moins importants. On peut cependant noter que des théories de couplage avec des matrices non symétriques ont été proposées ([Baz80], [Dah90]), car il existe des cas où l'importance de ce couplage a été mis en évidence expérimentalement (cas du glissement confiné le long d'une macrofissure existante).

En combinant correctement les équations (III.2), (III.5), (III.8), (III.9) et (III.10), la relation exprimée dans le repère global entre les contraintes et les déformations pour le béton fissuré, développée initialement en 1985 par De Borst & Nauta [Deb85] et Rots & al. [Rot85], est:

$$\Delta\sigma = \left[\mathbf{D}^{\text{co}} - \mathbf{D}^{\text{co}}\mathbf{N} \left[\mathbf{D}^{\text{cr}} + \mathbf{N}^t \mathbf{D}^{\text{co}} \mathbf{N} \right]^{-1} \mathbf{N}^t \mathbf{D}^{\text{co}} \right] \cdot \Delta\epsilon \quad (\text{III.13})$$

Un avantage supplémentaire de la décomposition de la déformation totale est la possibilité de décomposer la déformation de fissure $\Delta\epsilon^{\text{cr}}$ en contributions séparées d'un nombre de fissures individuelles qui apparaissent simultanément en un point d'intégration:

$$\Delta\epsilon^{\text{cr}} = \Delta\epsilon_1^{\text{cr}} + \Delta\epsilon_2^{\text{cr}} + \dots \quad (\text{III.14})$$

où $\Delta\epsilon_1^{\text{cr}}$ est la déformation de la première fissure, $\Delta\epsilon_2^{\text{cr}}$ la déformation de la seconde fissure et ainsi de suite. Dans cette approche développée initialement par De Borst & Nauta [Deb85], chaque fissure (fixe) possède son propre vecteur de déformations locales $\Delta\epsilon_i^{\text{cr}}$, son propre vecteur de contraintes locales $\Delta\sigma_i$ et sa propre matrice de transformation \mathbf{N}_i , d'après les

équations (III.11). De plus, ils ont démontré qu'il était efficace d'assembler ces vecteurs et matrices associés à une fissure unique en:

$$\begin{aligned}\Delta \hat{\mathbf{e}}^{\text{cr}} &= [\Delta \mathbf{e}_1^{\text{cr}} \quad \Delta \mathbf{e}_2^{\text{cr}} \quad \dots]^t \\ \Delta \hat{\mathbf{s}}^{\text{cr}} &= [\Delta s_1 \quad \Delta s_2 \quad \dots]^t \\ \hat{\mathbf{N}} &= [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \dots]\end{aligned}\tag{III.15}$$

dans lesquels $\hat{\mathbf{e}}^{\text{cr}}$ dénote un assemblage de fissures multidirectionnelles. Des substitutions répétées de (III.5) dans (III.14) conduisent à la relation suivante:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{cr}} = \hat{\mathbf{N}} \cdot \Delta \hat{\mathbf{e}}^{\text{cr}}\tag{III.16}$$

qui est l'équivalent de (III.5) en multi-fissures. De façon similaire, la relation locale liant les contraintes aux déformations de fissure (III.10) exprimée pour une seule fissure peut être généralisée au cas de multiples fissures:

$$\Delta \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{D}}^{\text{cr}} \cdot \Delta \hat{\mathbf{e}}^{\text{cr}} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \Delta s_1^{\text{cr}} \\ \Delta s_2^{\text{cr}} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^{\text{cr}} & \mathbf{D}_{12}^{\text{cr}} & \dots \\ \mathbf{D}_{21}^{\text{cr}} & \mathbf{D}_{22}^{\text{cr}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}_1^{\text{cr}} \\ \Delta \mathbf{e}_2^{\text{cr}} \\ \dots \end{bmatrix}\tag{III.17}$$

Cette relation est très générale car elle permet une interaction entre les différentes fissures présentes en un point d'intégration, via les sous-matrices situées hors de la diagonale. En général, les interactions entre les fissures sont ignorées et ces sous-matrices sont nulles. En effet, d'une part ces matrices ne sont pas évidentes à déterminer et d'autre part leur inclusion n'augmenterait pas le niveau de sophistication du modèle suffisamment pour justifier une diminution de l'utilité pratique du concept [Rot89a]. La matrice $\hat{\mathbf{D}}^{\text{cr}}$ se réduit alors à:

$$\hat{\mathbf{D}}^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{\text{cr}} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{D}_2^{\text{cr}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}\tag{III.18}$$

où les matrices D_i^{cr} sont diagonales et de la forme de celle présentée (III.12). La matrice \hat{D}^{cr} est par conséquent diagonale. Finalement, on obtient la relation liant les contraintes aux déformations globales pour le béton fissuré multidirectionnellement, similaire à (III.13):

$$\Delta\sigma = \left[D^{co} - D^{co} \hat{N} \left[\hat{D}^{cr} + \hat{N}^t D^{co} \hat{N} \right]^{-1} \hat{N}^t D^{co} \right] \cdot \Delta\varepsilon \quad (III.19)$$

Cette formulation permet donc la formation de plusieurs fissures non orthogonales en un même point d'intégration, ce qui n'est pas possible avec la formulation à partir de la déformation totale où le nombre de fissures est limité à trois quelque soit l'alternative choisie. Les fissures étant fixes, les axes principaux des contraintes peuvent tourner après la formation d'une fissure et un problème inhérent au modèle des fissures multidirectionnelles est de déterminer la condition d'amorçage d'une nouvelle fissure. A cette fin, quatre critères peuvent être distingués:

- a) la contrainte maximale principale de tension actuelle transgresse le critère d'amorçage,
- b) l'angle d'inclinaison entre la contrainte maximale principale de tension et la ou les fissures excède une valeur seuil,
- c) les deux conditions a) et b) sont transgressées,
- d) soit la condition a), soit la condition b) est transgressée.

Le problème de la condition a) est qu'elle ne limite pas le nombre de fissures par point d'intégration, ce qui est compliqué à gérer sur le plan numérique. Le problème de la condition b), c'est que le critère d'amorçage peut être transgressé avant que la valeur de l'angle seuil soit atteinte. Il faut donc trouver un juste compromis (cf. [Rot89a]), ce qui peut devenir un choix relativement arbitraire.

Néanmoins un avantage majeur du modèle de la fissuration fixe multidirectionnelle est sa grande flexibilité. En effet, en fixant l'angle seuil à 90° et en utilisant le critère d'amorçage c), on retrouve le modèle à fissures fixes orthogonales présenté précédemment. En outre, en utilisant uniquement le critère b) avec un angle seuil nul, le modèle se réduit au modèle de la fissure tournante, exposé dans le paragraphe suivant, pourvu que les fissures précédentes soient rendues inactives de façon à n'avoir qu'une seule fissure active par point d'intégration et que la mémoire des défauts précédents soit prise en compte dans la loi de comportement (III.10) [Rot89a].

III.2.4.2.2. Le concept de la fissure diffuse tournante

Un inconvénient du modèle de la fissuration fixe est que les directions des déformations principales peuvent tourner après l'apparition d'une fissure et qu'elles ne coïncident plus avec les directions de cette fissure. Le critère d'amorçage peut alors être violé dans une direction différente de celle correspondant à la fissure existante sans qu'un plan de fissure ne se forme au point d'intégration considéré. Par conséquent, les modèles de fissuration orthotropes ne sont pas invariants du point de vue tensoriel, ce qui peut devenir une source d'erreur [Baz83b]. Une solution à cette déficience est d'actualiser les directions de la fissure à chaque pas de calcul afin qu'elles ne cessent jamais de coïncider avec les directions des déformations principales.

Le modèle de la fissure tournante peut être formulé à partir de la déformation totale ([Gup84], [Cri89], [Cer92], [Cer96]) ou de la décomposition de la déformation ([Rot89a], [Rot91], [Bha93], [Jir98b]) de façon similaire aux équations développées pour la fissuration fixe (équations (III.1) et (III.13) respectivement). Cependant, la formulation du problème se simplifie par rapport à celle de la fissure fixe dans le sens où la question de la formation d'une fissure secondaire, de son critère d'amorçage et de sa direction de propagation ne se pose plus. Une approche possible de ce modèle est de permettre aux axes d'orthotropie de tourner seulement si l'angle entre ces axes et les directions des déformations principales dépasse une valeur seuil (de l'ordre du degré) [Bha93].

Bazant a formulé un certain nombre d'objections aux premières versions du concept de la fissure tournante [Baz83b]. La première est liée au fait que l'hypothèse de l'orthotropie du matériau implique généralement une rotation des contraintes principales différente de celle des déformations principales. Conséquemment, si les axes d'orthotropie du matériau tournent avec ceux des déformations principales, alors ils cessent de coïncider avec ceux des contraintes principales. L'utilisation directe des relations entre les contraintes et les déformations principales devient incohérente dans ces conditions. Suite à cette constatation, Bazant a énoncé une condition importante qui assure la coaxialité entre les contraintes et les déformations principales [Baz83b]. Pour l'établir, on se place dans une configuration bidimensionnelle avec une coaxialité initiale, c'est-à-dire que les directions 1 et 2 des axes principaux des déformations, des contraintes et d'orthotropie sont alignées. D'après le cercle de Mohr des déformations, un petit incrément de distorsion $\Delta\gamma_{12}$ entraîne une rotation des

directions des déformations principales ε_1 et ε_2 d'un angle $\Delta\theta_\varepsilon$ (les déformations deviennent alors ε_{11} et ε_{22} car elles ne sont plus les déformations principales):

$$\tan 2\Delta\theta_\varepsilon = \frac{\Delta\gamma_{12}}{2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})} \text{ si } |\Delta\gamma_{12}| \ll |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}| \quad (\text{III.20})$$

De façon similaire, le cercle de Mohr des contraintes montre qu'un petit incrément de contrainte tangentielle $\Delta\sigma_{12}$ provoque une rotation des directions des contraintes principales σ_1 et σ_2 (qui deviennent alors σ_{11} et σ_{22}) d'un angle $\Delta\theta_\sigma$:

$$\tan 2\Delta\theta_\sigma = \frac{\Delta\sigma_{12}}{\sigma_{11} + \sigma_{22}} \text{ si } |\Delta\sigma_{12}| \ll |\sigma_{11} - \sigma_{22}| \quad (\text{III.21})$$

Si $\Delta\theta_\varepsilon$ est égal à $\Delta\theta_\sigma$ alors la coaxialité entre les contraintes et les déformations principales est préservée. Si une loi orthotrope du type de celle énoncée dans l'équation (III.1) est utilisée pour le béton fissuré, cette condition est satisfaite si et seulement si les modules de cisaillement G_{ns} , G_{st} et G_{nt} sont déterminés de la façon suivante:

$$G_{ns} = \frac{\sigma_{nn} - \sigma_{ss}}{2(\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{ss})} ; G_{st} = \frac{\sigma_{ss} - \sigma_{tt}}{2(\varepsilon_{ss} - \varepsilon_{tt})} \text{ et } G_{nt} = \frac{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}}{2(\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{tt})} \quad (\text{III.22})$$

Plusieurs plans de fissures peuvent s'amorcer en un point d'intégration suivant le chargement auquel est soumis la structure étudiée (traction multiaxiale, par exemple). Si la coaxialité est préservée, par définition ils sont orthogonaux entre eux et sont au maximum trois par point d'intégration puisque les directions des fissures suivent celles des déformations principales.

Une autre objection émise par Bazant est que la rotation des axes d'orthotropie entraîne une rotation des défauts microstructuraux dans le matériau, ce qui est inacceptable d'un point de vue physique [Baz83b]. Pour éliminer cette objection, le changement de direction d'une fissure au cours d'un pas de calcul peut être interprété de façon différente. On peut considérer qu'en un point d'intégration, une fissure se ferme pendant qu'une autre se forme dans une direction différente de la précédente. Cette interprétation reste tout de même une idéalisation de la réalité mais elle permet de considérer le modèle comme étant physiquement admissible.

De plus, le concept de la fissure diffuse tournante semble donner des résultats proches de ceux issus de l'expérience, pourvu que la condition de coaxialité soit satisfaite [Rot89a].

III.2.4.3. Description du comportement du matériau dans les concepts

Dans la majorité des modèles de fissuration du béton, la rupture s'amorce en mode I alors que les effets du cisaillement en mode II ou III sont pris en compte seulement après la rotation des contraintes principales. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement excepté pour des chargements dynamiques et des cas particuliers de chargements statiques avec des intensités de contrainte élevées en mode II ou III [Rot89a]. Cette caractéristique implique que la distinction entre le mode II et le mode III n'est plus pertinente et la notation sera donc restreinte au mode II dans la suite de ce chapitre.

III.2.4.3.1. Paramètres du mode I

Dans les premières versions du concept diffus, le béton était supposé présenter un comportement parfaitement fragile en tension, c'est-à-dire que la contrainte normale à la fissure σ_{nn} devenait nulle immédiatement après l'amorçage de cette fissure (ou $E_{nn}=0$ dans l'équation (III.1)) ([Ras68], [Sui73], [Buy85]). Non seulement une telle procédure entraîne des difficultés d'ordre numérique (problèmes de convergence), mais les résultats obtenus dépendent fortement de la taille des éléments finis utilisés dans l'analyse. De plus, l'expérience a montré que des contraintes normales de mode I pouvaient être transférées à travers la fissure du fait de la présence d'aspérités et de grains entre ses surfaces [Van91]. Pourtant, certains modèles présentent toujours le béton comme un matériau parfaitement fragile car ils se basent sur l'hypothèse que la partie d'adoucissement de la courbe liant les contraintes aux déformations obtenue expérimentalement lors d'un test de traction ou de compression uniaxiale est générée par les interactions de frottement entre l'éprouvette testée et le système de mise en charge ([Gon91], [Kot95], [Gru97]). Néanmoins la majorité des modèles s'accordent sur le fait que le béton en tension uniaxiale présente un comportement d'adoucissement des déformations et le prennent en compte. Le problème qui en découle est la détermination de la forme de la courbe d'adoucissement et des propriétés du matériau qui la définissent.

Si la courbe d'adoucissement utilisée pour calculer les contraintes normales à travers la fissure, c'est-à-dire pour évaluer les modules E_{nn} ou D^I dans les équations (III.1) et (III.10)

respectivement, est une translation directe de courbes expérimentales alors les résultats numériques ne sont pas objectifs vis à vis du maillage d'éléments finis choisi ([Baz83a], [Rot85]). Ces difficultés peuvent être évitées en utilisant la mécanique de la rupture dont le paramètre fondamental de contrôle de propagation de fissure est l'énergie de rupture G_f qui est définie comme la somme d'énergie nécessaire pour créer une surface unitaire de fissure. Cette théorie a été introduite initialement par Hillerborg en 1976 sous le nom du modèle de la "fissure fictive" [Hil76] puis par Bazant & Oh en 1983 sous le nom du modèle de la "bande de fissure" [Baz83a]. Ces modèles sont basés sur l'hypothèse que l'énergie de rupture G_f , et non la courbe locale d'adoucissement, est une propriété du matériau. L'implémentation du concept " $G_f=constante$ " conduit à la conclusion importante que la loi locale d'adoucissement en tension dépend d'une longueur caractéristique l_c , appelée également largeur de bande de fissure et dépendant du maillage. Si la courbe d'adoucissement est liée à l'énergie de rupture G_f alors les résultats obtenus sont objectifs par rapport à la taille des éléments finis. En supposant que la contrainte normale σ_{nn} à travers une fissure est fonction de la largeur de fissure w l'énergie de rupture est définie par:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma_{nn}(w) dw \quad (\text{III.23})$$

et G_f varie entre 50 et 200 J/m² suivant la qualité du béton.

L'approche par fissuration diffuse ne représentant pas les fissures individuellement, la rupture est distribuée sur la largeur de la bande de fissure l_c où l'énergie est libérée (figure III.8). En général, une distribution constante des déformations sur la bande de fissure est admise, ce qui conduit à la relation suivante:

$$w = l_c \cdot \epsilon_{nn}^{cr} \quad (\text{III.24})$$

L'énergie de rupture G_f représente l'aire sous la courbe d'adoucissement pour une fissure discrète (figure III.9). La déformation ultime normale à la fissure, $\epsilon_u^{cr} = l_c \cdot w_u$ avec w_u la largeur de la fissure à partir de laquelle il n'y a plus de transfert de contrainte, n'est alors plus considérée comme une propriété du matériau séparée mais est fonction de l'énergie de rupture G_f , de la résistance limite en tension du béton f_t , de la longueur caractéristique l_c et de la forme de la courbe d'adoucissement en tension.

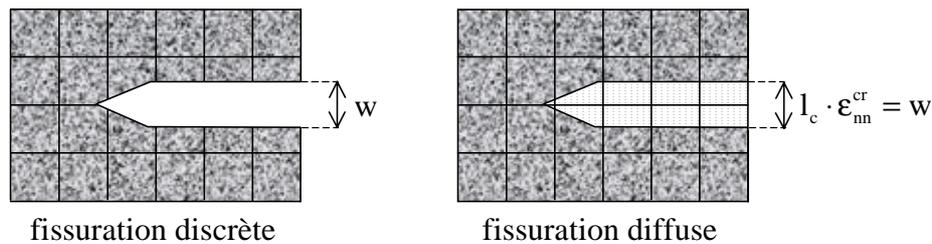


Figure III.8: Modélisation d'une discontinuité topologique en la diffusant sur une longueur caractéristique l_c

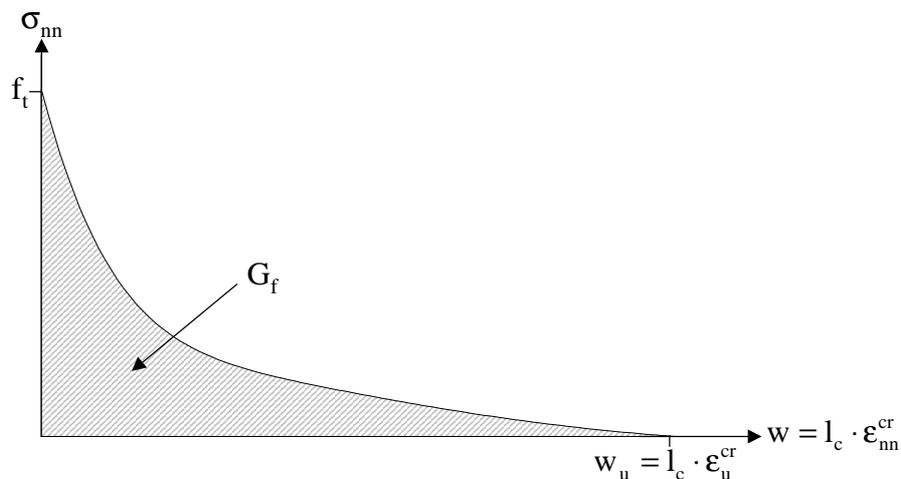


Figure III.9: Courbe d'adoucissement en tension pour une fissure discrète: définition de G_f

Pour obtenir des résultats indépendants du maillage d'éléments finis utilisé, la longueur caractéristique, ou largeur de bande de fissure l_c , doit correspondre à une dimension représentative de la taille de ces éléments. Une approximation utilisée dans de nombreux modèles est de déterminer l_c comme la racine carrée de l'aire ou comme la racine cubique du volume associé à un point d'intégration dans le cas bidimensionnel ou tridimensionnel respectivement ([Cer87], [Cer88], [Cer92], [Bha93]). Cependant cette façon d'évaluer la longueur caractéristique peut sembler restrictive car elle ne prend en compte ni la direction de la fissure, ni la distorsion de l'élément. C'est pourquoi d'autres modèles ont été développés dans lesquels l_c est fonction de la taille et de la forme des éléments, voire des fonctions de forme associées aux éléments, ainsi que de la direction de la fissure ([Baz83a], [Rot85], [Oli89], [Dah90], [Cer96], [Jir98b]). Certains modèles de calcul de l_c s'appliquent uniquement à des éléments carrés ([Baz83a], [Rot85]).

Pour compléter la définition des paramètres en mode I, la forme de la courbe d'adoucissement considérée comme une propriété du matériau doit être déterminée. Bien que les résultats expérimentaux présentent une uniformité dans l'identification d'une courbe concave avec une brusque diminution juste après le pic, les diagrammes d'adoucissement employés couramment sont linéaires ([Hil76], [Baz83a], [Deb85], [Dvo89], [Dah90], [Cer92], [Bha93]), bilinéaires ([Rot85], [Kli98]), non linéaires du type exponentiel ([Cer87], [Cer88], [Deb87], [Rot87], [Rot89a], [Cer96]) ou non linéaires du type hyperbolique ([Mes97], [Mes98]). Rots & De Borst ont montré à partir d'un travail expérimental et numérique sur des tests de traction "directe" qu'une loi d'adoucissement non linéaire donne les résultats numériques les plus proches de ceux obtenus expérimentalement [Rot89b].

A partir de l'énergie de rupture G_f , de la forme de la courbe d'adoucissement et de la largeur de bande de fissure l_c , les paramètres en mode I, c'est-à-dire le module E_{nn} pour la formulation à partir de la déformation totale et D^I pour la formulation à partir de la décomposition des déformations sont totalement définis, que ce soit pour le concept de la fissure fixe ou celui de la fissure tournante.

III.2.4.3.2. Paramètres du mode II

Négliger le transfert des contraintes tangentielles à travers la fissure ([Ras68], [Baz83a]), c'est-à-dire considérer les modules G_{ns} et G_{nt} nuls dans l'équation (III.1) avec n l'axe normal à la fissure, est apparu rapidement comme une déficience du concept de la fissuration diffuse. Non seulement une telle hypothèse peut engendrer des difficultés d'ordre numérique, mais l'expérience a montré que des contraintes tangentielles peuvent apparaître dans le plan de rupture et qu'elles sont dues au contact d'aspérités entre les deux surfaces rugueuses opposées de la fissure.

Pour remédier à cela, Suidan & Schnobrich ont réinséré les modules G_{ns} et G_{nt} comme un pourcentage du module de cisaillement initial linéaire élastique G [Sui73]. Le facteur de réduction correspondant est appelé facteur de rétention de cisaillement, noté β pour le concept de la fissuration *fixe* développé à partir de *la formulation en déformation totale*:

$$G_{ns} = G_{nt} = \beta \cdot G \quad (\text{III.25})$$

et noté ρ pour le concept de la fissuration *fixe* développé à partir de la formulation en décomposition de la déformation totale:

$$D^{\text{II}} = \rho \cdot G \quad (\text{III.26})$$

Une relation peut être établie entre β et ρ , basée sur la décomposition de la déformation totale donnée par l'équation (III.2):

$$\Delta\gamma_{\text{ns}} = \Delta\gamma_{\text{ns}}^{\text{co}} + \Delta\gamma_{\text{ns}}^{\text{cr}} \quad (\text{III.27a})$$

et
$$\Delta\sigma_{\text{ns}} = \beta \cdot G \cdot \Delta\gamma_{\text{ns}} = \rho \cdot G \cdot \Delta\gamma_{\text{ns}}^{\text{cr}} = G \cdot \Delta\gamma_{\text{ns}}^{\text{co}} \quad (\text{III.27b})$$

D'où:
$$\frac{1}{\beta \cdot G} = \frac{1}{G} + \frac{1}{\rho \cdot G} \quad (\text{III.27c})$$

$$\beta = \frac{\rho}{1+\rho} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{\beta}{1-\beta} \quad (\text{III.27d})$$

Du fait de la décomposition de la déformation totale, la fissure et le béton non fissuré agissent comme des ressorts connectés en série, ce qui est justifiée par la relation liant les raideurs et donnée par l'équation (III.27c).

Dans de nombreux modèles, le facteur de rétention de cisaillement β est constant et compris entre 0 et 1 ([Bat79], [Ott81], [Buy85], [Deb85], [Deb87], [Dvo89], [Gon91], [Kot95], [Gru97]). Non seulement, le facteur de rétention de cisaillement influence les résultats [Rot85] mais cette hypothèse est non réaliste car elle permet aux contraintes tangentielles d'augmenter indéfiniment, ce qui n'est pas concevable puisque lorsque les faces de la fissure sont totalement séparées (plus d'aspérités ni de ligaments) le transfert de contrainte n'est plus possible. Une amélioration partielle est obtenue en employant un facteur de rétention de cisaillement qui diminue lorsque la déformation normale à la fissure $\epsilon_{\text{nn}}^{\text{cr}}$ ou ϵ_{nn} augmente ([Owe83], [Owe84], [Cer85], [Cer87], [Cer88], [Rot89a], [Dah90], [Rot91], [Cer92]). Dans ce cas, les contraintes tangentielles à la fissure n'augmentent plus indéfiniment mais atteignent un plateau, du fait de la formulation incrémentale des lois de comportement. Rots & De Borst ont proposé une amélioration supplémentaire en introduisant un adoucissement de cisaillement, similaire à celui de tension et basé sur une énergie de rupture en mode II [Rot87].

Dans le concept de la fissuration *tournante*, la détermination du facteur de rétention de cisaillement est immédiate puisqu'il est défini de façon à assurer la condition de coaxialité définie par l'équation (III.22):

$$G_{ns} = \beta \cdot G = \frac{\sigma_{nn} - \sigma_{ss}}{2 \cdot (\epsilon_{nn} - \epsilon_{ss})} \quad (III.28a)$$

et d'après (III.27c)
$$D^II = \rho \cdot G = \frac{(\sigma_{nn} - \sigma_{ss}) \cdot G}{2 \cdot (\epsilon_{nn} - \epsilon_{ss}) \cdot G - (\sigma_{nn} - \sigma_{ss})} \quad (III.28b)$$

Les modules G_{nt} , G_{st} et D^{III} sont calculés de façon similaire aux équations (III.28).

Les concepts de la fissuration fixe permettent donc d'incorporer des effets de cisaillement car ils se réfèrent à un plan de fissure fixe. Leur nature s'adapte à ce genre de modèle mais l'utilisation d'un facteur de rétention de cisaillement est responsable d'une rotation incontrôlée des axes principaux des contraintes qui cessent alors de coïncider avec les axes principaux des déformations. A l'inverse, le concept de la fissuration tournante utilise un terme de cisaillement unique qui assure la coaxialité entre les contraintes et les déformations principales mais abandonne de façon inhérente la possibilité d'incorporer des modèles de cisaillement de fissure car celle-ci apparaît toujours dans une direction principale, c'est-à-dire en mode I.

III.2.4.3.3. Fermeture et réouverture de fissure

La redistribution des contraintes due à la fissuration en d'autres points d'intégration ou à un chargement supplémentaire peut forcer certaines fissures ouvertes précédemment à se fermer partiellement ou totalement. Généralement, ce comportement est pris en compte soit par un déchargement élastique, soit par un déchargement sécant (figure III.10). Pour le déchargement élastique, la fissure se ferme immédiatement après un renversement de la déformation et un retour rigoureux au comportement élastique est réalisé. Dans ce cas, le terme "fermeture" au sens strict ne s'applique pas car la déformation de fissure est irréversible. Il est plus pertinent de parler de fissure inactive ou arrêtée. Dans le cas du déchargement sécant, la déformation normale à la fissure est réversible et une fois l'origine du diagramme atteinte la fissure est réellement fermée et le comportement élastique recouvré. Ces deux types de déchargement ne sont que des approximations de la réalité car les tests cycliques ont révélé l'hystérésis [Rei86]. Néanmoins le déchargement sécant est l'option la plus fréquemment

utilisée à cause peut-être de sa simplicité et du fait qu'elle prenne en compte la diminution du module d'Young lorsque la déformation d'ouverture de fissure augmente, phénomène observé expérimentalement [Rei86].

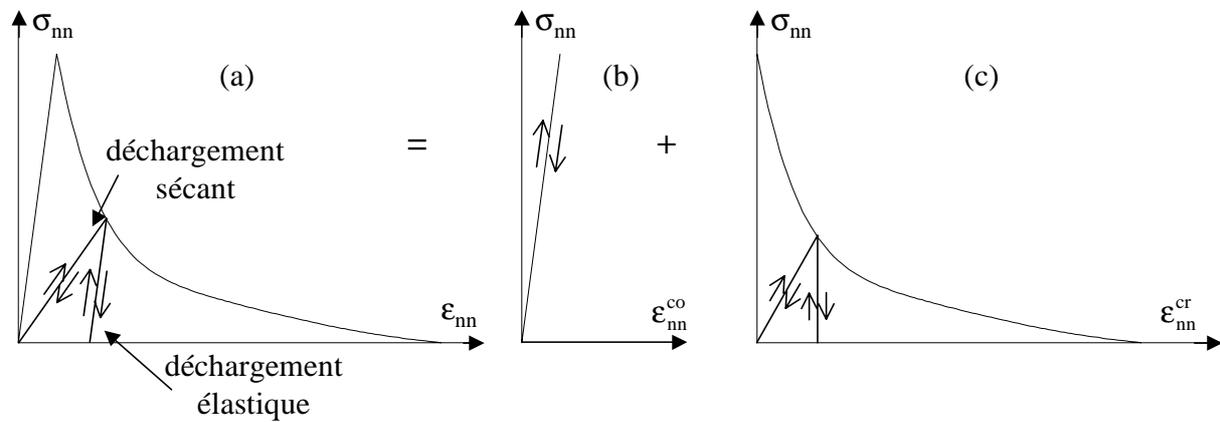


Figure III.10: Déchargement élastique et sécant pour un modèle élastique – adoucissement en mode I: contrainte normale fonction de la déformation totale (a), de la déformation du béton entre les fissures (b) et de la déformation de fissure (c)

Afin de modéliser le chargement cyclique d'une fissure, Dahlblom & Ottosen ont proposé un déchargement paramétré [Dah90]. Le paramètre qui contrôle le déchargement est compris entre 0 (déchargement sécant) et 1 (déchargement élastique) et, choisi correctement, il permet d'obtenir des résultats numériques pour la modélisation de tests cycliques proches de ceux obtenus expérimentalement. Tout comme l'amorçage et la propagation, la fermeture et la réouverture de fissure sont généralement contrôlées en mode I uniquement.

III.2.4.4. Critique des différents concepts

Rots & Blaauwendraad ont effectué une comparaison des différentes approches: modèle de la fissure discrète, modèle de la fissure diffuse fixe unique, modèle de la fissure diffuse fixe multidirectionnelle et modèle de la fissure diffuse tournante [Rot89a]. Le concept de la fissuration diffuse fixe unique produit une réponse trop raide par rapport aux résultats expérimentaux à cause d'une rotation excessive des contraintes si le facteur de rétention de cisaillement utilisé est non nul et c'est le concept de la fissure diffuse tournante qui donne les meilleurs résultats ([Rot89a], [Cris89]). Un avantage des concepts diffus est que d'autres

phénomènes non linéaires, tels que le fluage, le retrait ou le chargement thermique, peuvent facilement être pris en compte. Mais une déficience inhérente à tous les concepts diffus est le danger de verrouillage de contraintes, c'est-à-dire un transfert erroné de contrainte à travers une fissure largement ouverte et donc à une surestimation de la charge de ruine de la structure. Ce problème apparaît si des lois d'adoucissement diffuses sont utilisées pour simuler la localisation des déformations et est due au fait qu'une *discontinuité* géométrique est évaluée à partir de l'hypothèse de *continuité* des déplacements.

Dans les modèles diffus à fissures fixes avec un facteur de rétention de cisaillement non nul, le verrouillage des contraintes est principalement engendré par les contraintes de cisaillement générées par la rotation des axes principaux des déformations après l'amorçage de la fissure. Pourtant ce verrouillage peut être également observé avec le modèle à fissures tournantes bien que les directions principales des contraintes et des déformations restent constamment alignées de façon à ce qu'aucune contrainte tangentielle à la fissure n'apparaisse. L'origine de ce phénomène est la représentation cinématique pauvre du champ des déplacements discontinus autour de la fissure macroscopique. En effet, la direction de la fissure microscopique (déterminée à partir de la déformation principale maximale en un point d'intégration) n'est pas toujours alignée avec la direction de la fissure macroscopique se propageant à travers le corps. Par conséquent, à moins que la direction de la macrofissure ne soit parallèle aux côtés des éléments, des contraintes seront transférées à travers la fissure largement ouverte à un certain stade du processus de fissuration [Jir98b].

Le modèle de fissuration discret ne souffre donc pas du verrouillage des contraintes et conduit à une distribution correcte des contraintes de chaque côté de la fissure. C'est pourquoi Rots & Blaauwendraad ont proposé une méthode de prédiction – correction: une prédiction de l'orientation de la fissure est effectuée avec le concept de la fissuration diffuse, tournante ou fixe multidirectionnelle puis après remaillage une correction est réalisée avec le concept de la fissuration discrète [Rot89a]. Néanmoins, cette méthode a été développée uniquement en deux dimensions, comme toutes les méthodes de fissuration discrète.

D'autres reproches formulés à l'encontre des modèles diffus sont la nécessité de définir un comportement sans couplage le long de chaque direction de contrainte (ou déformation) principale, l'utilisation d'un facteur de rétention relativement arbitraire pour les modèles fixes et la difficulté de définir des chemins de contrainte pour la fermeture et la réouverture de fissure sous des conditions de chargement cyclique ([Ona88], [Lub89]).

Le concept de la fissure diffuse tournante, bien que produisant les meilleurs résultats, présente certaines déficiences liées à la condition de coaxialité donnée équation (III.22) ([Jir97], [Jir98a], [Jir98b]). Le cas où en un point d'intégration deux ou trois déformations principales sont égales, représente un point faible du modèle puisque dans ce cas le module de cisaillement assurant la coaxialité est indéterminé (division par zéro). Jirasek & Zimmermann ont proposé un traitement du cas où deux directions principales ont des déformations et des histoires des déformations identiques [Jir98b]. Un second problème est que le module de cisaillement qui assure la coaxialité peut devenir négatif au cours de l'analyse. Ce n'est pas surprenant lors de la phase d'adoucissement mais lorsque cela se produit lors de la phase de déchargement élastique du matériau, ce phénomène est physiquement inadmissible et cela conduit à une instabilité matérielle ainsi qu'à une perte de convergence ([Jir97], [Jir98a]).

III.2.5. Autres modèles

Tous les modèles présentés dans ce paragraphe pourraient également être qualifiés d'approches diffuses dans le sens où la discontinuité induite par la fissure est modélisée par un modèle continu. Ces modèles n'ayant pas été développés et programmés dans le cadre de cette thèse, ils sont simplement cités avec les références appropriées.

III.2.5.1 Modèles basés sur la théorie de la plasticité et de la viscoplasticité

Les modèles basés sur la théorie de la plasticité ont été développés pour résoudre les problèmes induits par les modèles diffus, notamment la surestimation de la charge de ruine d'une structure et les difficultés d'ordre numérique. Les modèles existants prennent généralement en compte l'écrouissage et/ou l'adoucissement et les différences se situent au niveau du type de surface de charge utilisé, du type d'écrouissage/adoucissement (isotrope ou cinématique) ou de la règle d'écoulement associée ou non (des modèles sont exposés dans les références suivantes: [Ona88], [Lub89], [Bic94], [Fee94], [Fee95], [Pea97], [Mes97], [Mes98]). Des surfaces de charge différentes sont utilisées pour un état de contrainte en tension-tension et pour des états de contrainte en compression. Néanmoins, il apparaît que la surface de Rankine est fréquemment employée en tension-tension ([Fee94], [Fee95], [Pea97], [Mes97], [Mes98]) et l'adoucissement est modélisé via la mécanique de la rupture, c'est-à-dire que la courbe d'adoucissement est définie par l'énergie de rupture G_f et la longueur

caractéristique l_c . Un tel modèle possède un comportement similaire à celui du concept diffus avec fissures tournantes ([Fee94], [Fee95]).

De façon similaire, des modèles basés sur la théorie de la viscoplasticité ont été développés principalement pour étudier une structure en béton soumise à un chargement dynamique, comme par exemple un tremblement de terre [Bic83].

III.2.5.2. Modèles basés sur la théorie de l'endommagement continu

La mécanique continue de l'endommagement traite la microfissuration progressive en réduisant la raideur avec un paramètre multiplicatif et, dans ce sens, cette approche est similaire au modèle de la fissuration diffuse ([Baz88c], [Sao89], [Sao92], [Alg98]). Si la variable d'endommagement est un scalaire alors le caractère anisotrope de la fissuration n'est pas pris en compte dans la modélisation. Par ailleurs, dans le modèle diffus, le concept d'endommagement est considéré inséparable de la largeur de la bande de fissure ou d'un critère d'énergie de rupture. Donc, si aucun limiteur de localisation (cf. paragraphe III.2.5.5.) n'est utilisé en conjonction avec la mécanique de l'endommagement, les résultats présenteront une dépendance pathologique au maillage d'éléments finis.

Contrairement aux modèles de fissuration diffus, le modèle basé sur l'endommagement scalaire ne présente pas de verrouillage des contraintes car toutes les composantes des contraintes tendent vers zéro lorsque la fissure est largement ouverte. En se basant sur cette observation et sur le fait que le verrouillage des contraintes pour le modèle diffus à fissures tournantes apparaît seulement à une phase tardive du processus d'endommagement, Jirasek et Zimmermann ont proposé un modèle combiné de fissuration diffuse tournante avec transition à un endommagement scalaire ([Jir97], [Jir98a]). Le modèle démarre avec une approche qui capture l'anisotropie induite par la fissuration et bascule à une formulation d'endommagement scalaire lorsque l'ouverture de la fissure atteint une valeur critique pour laquelle les problèmes inhérents au modèle de la fissure tournante apparaissent (verrouillage des contraintes, instabilité matérielle).

III.2.5.3. Modèle "microplan"

Le modèle microplan est né de l'interprétation du comportement macroscopique complexe de métaux polycristallins comme l'interaction de plans de glissement distincts qui sont dus à la structure moléculaire interne du matériau. Bazant et al. ont ensuite transféré cette

perception de milieu non homogène microscopiquement au contexte du modèle microplan ([Baz84b], [Baz90], [Ozb92], [Ozb96]). Dans ce modèle, les propriétés du matériau sont caractérisées séparément en un nombre fini de microplans, plans d'orientation différente à l'intérieur du matériau. Le comportement macroscopique du matériau est une réponse intégrale de tous les microplans. Pour chaque microplan, les relations liant les contraintes aux déformations, incluant les relations d'adoucissement, sont définies par des fonctions exponentielles.

III.2.5.4. Modèles avec discontinuités ancrées dans les éléments

Le verrouillage des contraintes observé avec les modèles diffus de fissuration, notamment celui observé avec le modèle à fissures tournantes, peut être évité en améliorant la représentation cinématique de la rupture fortement localisée. Des techniques basées sur cette idée ont été présentées sous des noms différents, comme par exemple les éléments avec bandes d'adoucissement interne (*Inner Softening Bands*) ([Olo94], [Ohl97]) ou les éléments avec fissures ancrées (*elements with embedded cracks*) [Jir98c], dont une revue bibliographique détaillée et complète sur le sujet a été effectuée par Jirasek [Jir98c].

On peut noter cependant que ce type d'élément a été développé en deux dimensions uniquement et principalement avec des éléments triangulaires.

III.2.5.5. Limiteurs de localisation

Les modèles continus de fissuration standard conduisent à une dépendance pathologique vis à vis du maillage d'éléments finis. La formulation mathématique de tels modèles implique la description d'états de déformation fortement non homogènes liés à la localisation car l'essentiel de la déformation se produit dans la zone localisée. La représentation du milieu comme homogène devient alors moins légitime que pendant la phase de déformation homogène. L'objectif des limiteurs de localisation, appelés également techniques de régularisation, est d'enrichir la description mécanique du milieu de manière à pouvoir décrire des états non homogènes de déformation afin d'éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase d'adoucissement. Cette régularisation est effectuée en introduisant dans la loi de comportement une longueur caractéristique afin de distinguer deux échelles de longueur: une longueur associée au comportement macroscopique de la structure (taille de la structure) et une longueur à l'échelle microscopique associée à la zone de

localisation. Dans ce sens, l'approche basée sur l'énergie de rupture G_f présentée au paragraphe III.2.4.3.1. est un limiteur de localisation utilisé dans les modèles de fissuration diffuse ainsi que dans les modèles basés sur la théorie de la plasticité. Cependant cette théorie est généralement considérée comme une solution intermédiaire entre le modèle continu standard et l'ajout d'un terme d'ordre supérieur car, dans certains cas, la déformation continue à se localiser dans des zones de taille réduite [Deb94]. De Borst & al. ont présenté et comparé les principales techniques de régularisation utilisées dans les modèles éléments finis et sont citées succinctement dans ce paragraphe [Deb93]. Si ces techniques sont plus ou moins efficaces selon le type d'analyse effectuée, elles possèdent néanmoins la caractéristique commune de nécessiter l'utilisation de maillages très fins pour capturer le processus de localisation correctement. Pour cela, la largeur des éléments doit être inférieure à la longueur caractéristique généralement fonction de la taille des granulats. Mais il n'est pas toujours possible d'employer de tels maillages pour des raisons de coûts en temps de calcul. Il faut alors combiner l'utilisation des limiteurs de localisation avec des techniques de remaillage adaptatif, techniques dont le problème est le développement d'un critère correct de remaillage pour un milieu continu non standard et inélastique [Deb93].

III.2.5.5.1. Milieu de Cosserat

Ces modèles, basés sur la théorie des milieux micropolaires de Cosserat, introduisent des couples de contraintes comme résultat de la rotation locale de la microstructure. La réciprocité des contraintes tangentielles n'est plus satisfaite et des degrés de liberté supplémentaires (micromoments et microrotations) apparaissent dans les lois de comportement. La proportionnalité entre les microcourbures dues à la microrotation est assurée par l'introduction d'une longueur caractéristique dans le modèle. Le modèle élastique de Cosserat a été étendu avec succès à la théorie de la plasticité pour l'analyse des phénomènes de localisation en mécanique des sols et en mécanique des roches. Néanmoins, De Borst a démontré que cette technique n'est plus valide pour des problèmes de localisation en mode I ([Deb91], [Deb93]). Cette constatation écarte l'utilisation de tels modèles pour l'analyse de structures en béton.

III.2.5.5.2. Régularisation viscoplastique

Après que la solution non visqueuse ait été obtenue avec un modèle de fissuration "classique" (basé sur la théorie de la plasticité, par exemple), une correction viscoplastique peut être appliquée. Cette correction est appliquée *a posteriori* et est donc indépendante du modèle non visqueux utilisé. Cette technique semble être le moyen le plus naturel à utiliser lorsque des sollicitations transitoires sont considérées. Ces modèles utilisent un paramètre de viscosité qui est dépendant de la vitesse de déformation. Les termes de viscosité peuvent être introduits dans ce modèle de différentes façons (loi linéaire dépendant de la vitesse de déformation, loi en puissance, modèle viscoplastique de Perzyna, de Duvaut-Lions...) ([Lor90], [Deb93], [Lop97]). D'un point de vue physique, cette solution semble très attractive. En effet, tous les processus se développent dans le temps et la zone de localisation n'est pas une singularité mathématique figée. Cette méthode donne donc de bons résultats dans le cas où elle est appliquée à une analyse avec des conditions de chargement transitoire. Cependant l'effet de régularisation décroît rapidement pour des vitesses de chargement faibles et une sensibilité de la solution au maillage est alors à nouveau observée.

III.2.5.5.3. Modèle non local

Un milieu non local est un milieu dans lequel au moins un champ de variable est sujet à une moyenne spatiale dans un certain voisinage fini d'un point [Baz84a]. L'avantage d'un tel concept est qu'il est applicable à tout type de modèle de fissuration: modèles diffus ([Baz88a], [Mos97], [Jir97], [Jir98a]), modèles d'endommagement ([Baz88c], [Sao89], [Sao92]), modèle microplan ([Baz90], [Ozb92], [Ozb96]) et modèles basés sur la théorie de la plasticité ([Baz88b], [Deb93]). Pour les modèles de fissuration, seules les variables responsables de l'adoucissement sont considérées comme non locales, c'est-à-dire, selon le modèle utilisé, l'endommagement, la déformation de fissure, la déformation plastique équivalente, etc.... Par conséquent, la contrainte en un point d'intégration ne dépend pas seulement de la déformation au même point mais également de la déformation dans un certain voisinage décrit par un volume représentatif du matériau défini par une longueur caractéristique. En général, une fonction de pondération de Gauss est choisie afin de représenter la distribution statistique à l'intérieur du volume représentatif et d'obtenir la convergence optimale [Baz88c].

III.2.5.5.4. Plasticité au gradient

Les méthodes de régularisation de type gradient peuvent être dérivées à partir des modèles non locaux en développant la fonction de pondération en série de Taylor au voisinage de zéro puis en l'intégrant [Deb93]. En restreignant ce traitement aux dérivées du second ordre, la fonction de charge dépendra non seulement de la contrainte et d'une mesure de déformation inélastique équivalente mais aussi du gradient de celle-ci, par exemple de son Laplacien. Cependant, l'introduction de gradients dans les lois de comportement peut également être motivée directement par des considérations micromécaniques sans faire de lien avec le modèle non local [Deb93]. De plus, le modèle basé sur la plasticité au gradient se limitant au gradient d'ordre deux et négligeant les termes d'ordre supérieur, il n'est alors plus équivalent à l'approche non locale.

Cette technique de régularisation associée à un modèle de fissuration basé sur la théorie de la plasticité permet de décrire de façon réaliste la localisation des déformations et a montré son efficacité que ce soit pour la rupture en mode I ou en mode II ([Deb93], [Deb94], [Deb96], [Mef97], [Pam94]). Un désavantage de cette méthode est qu'elle nécessite l'introduction d'une variable supplémentaire au niveau global en plus des degrés de liberté conventionnels liés aux déplacements.

III.2.5.6. Modèle basé sur une méthode sans maillage

Les méthodes sans maillage ont été développées en vue de simplifier certains problèmes traités avec la méthode des éléments finis, notamment ceux associés à la croissance de surfaces existant dans la propagation de fissures. En effet, certains modèles de fissuration nécessitent l'utilisation de maillage très fins pour capturer correctement l'endommagement ou de techniques de remaillage adaptatif, comme c'est le cas pour le modèle de la fissuration discrète. Malgré les récents développements en informatique et l'apparition de mailleurs automatiques performants, de telles méthodes restent onéreuses en temps de calcul. Pour pallier ces difficultés, Belytschko & al. ont développé une méthode sans maillage, appelée méthode de Galerkin sans éléments [Bel94], qu'ils ont appliquée avec succès à la croissance de fissures ([Bel95a], [Bel96]).

Néanmoins les capacités de compréhension et la maturité des progiciels basés sur une méthode d'éléments finis sont difficiles à reproduire, notamment pour l'étude de propagation de fissures dans une structure complexe. C'est pourquoi Belytschko & al. ont proposé de

combiner la méthode des éléments finis avec celle sans maillage appliquée uniquement à des domaines de la structure où ses avantages sont bénéfiques [Bel95b]. Cette méthode offre des perspectives intéressantes mais elle n'a pas encore été développée en trois dimensions.

III.3. MODELE DEVELOPPE

III.3.1. Remarques introductives

Le but de ce travail de thèse n'était pas de développer un nouveau modèle de fissuration du béton mais de développer un code de calcul tridimensionnel permettant l'étude numérique de chevilles ancrées dans une dalle de béton et soumises à différents types de sollicitations. Pour ce faire, la littérature propose de nombreux modèles de fissuration. Le choix qui se pose est alors délicat d'autant plus que ces modèles sont souvent destinés à des analyses bidimensionnelles et que ceux appliqués à des analyses tridimensionnelles sont généralement utilisés pour étudier des structures en béton armé ([Sui73], [Bat79], [Buy85], [Cer87], [Cer88], [Gon91], [Kot95], [Gru97]) alors que nous nous intéressons uniquement aux structures en béton plein.

Notre choix s'est donc porté sur un modèle de fissuration basé sur une approche diffuse car il possède l'avantage d'être très flexible et offre ainsi de nombreuses alternatives (fissures fixes ou tournantes...).

III.3.2. Modèle de fissuration

III.3.2.1. Modèle développé en deux dimensions

Le modèle mis en œuvre dans le code de calcul PLAST2 a été développé par le professeur Michel BRUNET ainsi que des étudiants dans le cadre de leur Projet de Fin d'Etude ou de leur Diplôme d'Etudes Approfondies ([Gin94], [Cha95], [Lon96]). Dans PLAST2, la fissuration du béton est prise en compte par un modèle diffus à fissures fixes orthogonales basé sur celui développé par Owen & al. ([Owe83], [Owe84]).

Le béton intact est supposé isotrope, linéaire élastique et le critère de Rankine est utilisé pour détecter l'amorçage d'une fissure. En un point d'intégration initialement non fissuré, les contraintes principales et leurs directions sont évaluées. Si la contrainte principale maximale excède la résistance limite en traction f_t , une fissure apparaît dans le plan

perpendiculaire à la direction de cette contrainte et le béton devient alors anisotrope. Deux fissures peuvent se former en un point d'intégration et leurs directions sont fixées pour le restant du calcul. Le modèle est formulé à partir de la déformation totale et, après la formation de la fissure, l'effet de Poisson est négligé. La technique de régularisation utilisée est basée sur le concept de l'énergie de rupture et la relation liant les contraintes et les déformations en traction uniaxiale (dans le repère de la fissure) est donnée figure III.11.

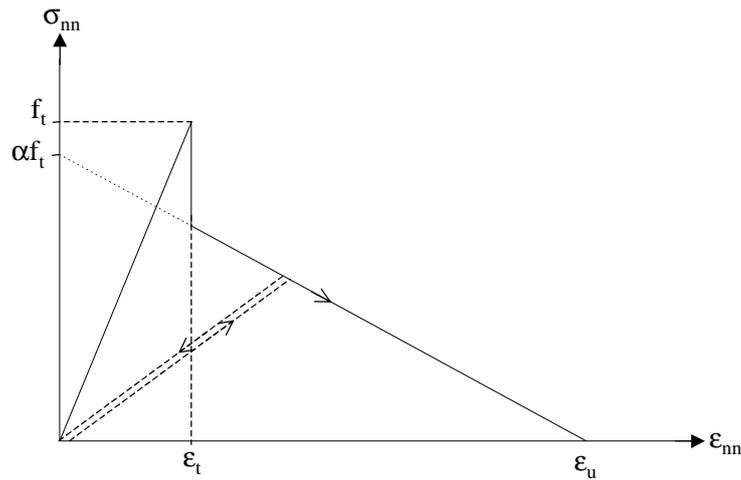


Figure III.11: Relation entre la contrainte et la déformation en traction uniaxiale pour le modèle bidimensionnel

La déformation ultime ϵ_u est alors déterminée par l'évaluation de l'intégrale (III.23) et en introduisant la relation entre l'ouverture de fissure w et la déformation normale au plan de fissure ϵ_{nn} ($w = l_c \cdot \epsilon_{nn}$). Dans PLAST2, une approximation de cette intégrale a été utilisée afin d'éviter de résoudre une équation du second degré en ϵ_u :

$$\epsilon_u = \frac{2 \cdot G_f}{\alpha \cdot f_t \cdot l_c} \quad (\text{III.29})$$

Le paramètre α défini figure III.11 est généralement pris égal à 0.7 et la longueur caractéristique l_c est choisie comme étant égale à la racine cubique de l'aire associée au point d'intégration considéré pour une modélisation axisymétrique (ou à la racine carrée pour une modélisation en déformations planes).

Le facteur de rétention de cisaillement (cf. paragraphe III.2.4.3.2.) utilisé est celui employé par Owen & al. ([Owe83], [Owe84]). Pour un point d'intégration fissuré une fois, ce facteur est égal à:

$$\beta = 0.25 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_{nn}}{0.004} \right) \quad \text{ou} \quad \beta=0 \text{ si } \varepsilon_{nn} \geq 0 \quad (\text{III.30a})$$

et à:

$$\beta = 0.125 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{\max}}{0.004} \right) \quad \text{ou} \quad \beta=0 \text{ si } \varepsilon_{nn}^{\max} \geq 0 \quad (\text{III.30b})$$

pour un point d'intégration fissuré deux fois, avec ε_{nn}^{\max} la déformation maximale normale à la fissure au point d'intégration considéré.

III.3.2.2. Modèle développé en trois dimensions

Si le modèle de fissuration développé en deux dimensions a donné des résultats satisfaisants dans la modélisation axisymétrique de chevilles ancrées dans une dalle de béton et soumises à des tests d'arrachement ([Wal97a], [Wal97b], [Wal98]), la synthèse bibliographique présentée précédemment a néanmoins montré les lacunes d'un tel modèle. Il a donc été décidé de développer un modèle basé sur un principe similaire mais avec quelques améliorations. Deux concepts ont été intégrés dans PLAST3: le concept de la fissure diffuse fixe et le concept de la fissure diffuse tournante, dont les principales caractéristiques sont les suivantes:

- *Béton intact*: le béton non fissuré est supposé isotrope linéaire élastique en tension.
- *Formulation du problème*: le problème est formulé à partir de la décomposition de la déformation totale donnée par l'équation (III.2). Une telle décomposition rend le modèle flexible dans le sens où d'éventuelles modifications des lois de comportement (comportement élastoplastique du béton intact, comportement thermique...) seront alors faciles à intégrer.
- *Critère d'amorçage des fissures*: le critère de Rankine avec la résistance limite en traction f_t est utilisé pour contrôler la formation des fissures.
- *Critère de propagation des fissures*: une fissure se propage dans le plan perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale. Trois fissures peuvent se former en un même point d'intégration. Dans le cas du concept de la fissure tournante, elles

sont obligatoirement orthogonales entre elles et leurs directions sont réactualisées à chaque pas de calcul afin de coïncider avec les directions principales des déformations. Dans le cas du concept de la fissure fixe, les plans de fissure sont également supposés orthogonaux entre eux mais restent fixes durant toute l'analyse. En un point d'intégration, lorsqu'une première fissure est détectée, la direction normale à ce plan de fissure est stockée. Ensuite, une recherche est effectuée pour déterminer la contrainte principale maximale dans le plan de la fissure. Lorsque celle-ci transgresse le critère d'amorçage, alors un second plan de fissure se forme, perpendiculaire au premier et perpendiculaire à la direction de cette contrainte. Le repère local de fissuration est alors entièrement et définitivement déterminé en ce point d'intégration. Deux principales raisons ont motivé le choix de cette alternative plutôt que celle de l'approche à fissures fixes multidirectionnelles. La première raison est la difficulté à fixer le critère d'amorçage d'une fissure supplémentaire. La seconde raison est liée au choix de la méthode à utiliser pour transférer l'endommagement accumulé par les fissures précédentes à la loi de comportement de la nouvelle fissure. En effet, si en un point d'intégration fissuré une première fois avec un adoucissement basé sur l'énergie de rupture G_f une seconde fissure apparaît et la même relation entre les contraintes et les déformations est utilisée, alors l'énergie de rupture sera consommée deux fois. Cette hypothèse n'est pas irréaliste pour deux fissures orthogonales mais est incorrecte pour un autre angle d'inclinaison. Puisque le couplage direct entre les fissures non orthogonales est ignoré (la matrice \hat{D}^{cr} est diagonale), il est nécessaire de définir un couplage implicite entre les fissures [Rot89a], ce qui complique la formulation du modèle.

- *Paramètres du mode I*: l'utilisation de techniques de régularisation sophistiquées, comme celles présentées au paragraphe III.2.5.5., nécessitent l'emploi d'un maillage très fin afin de capturer correctement le processus de localisation des déformations. Cependant une telle approche devient manifestement inadéquate pour des applications industrielles importantes, d'autant plus si l'analyse est réalisée en trois dimensions comme c'est le cas pour notre étude. L'utilisation d'un modèle d'adoucissement basé sur le concept de l'énergie de rupture G_f a donc le mérite d'être applicable à l'analyse de structures de toutes tailles. C'est pourquoi nous avons décidé de conserver ce concept dans le modèle de fissuration plutôt que d'introduire une autre technique de régularisation. Néanmoins, pour mettre en œuvre ce concept avec succès, il est nécessaire de déterminer convenablement les paramètres le définissant, notamment la forme de la courbe d'adoucissement. Rots & De Borst ont montré que le diagramme d'adoucissement non linéaire de forme exponentielle proposé par Reinhardt

& al. [Rei86] permet d'obtenir des résultats numériques proches de ceux expérimentaux [Rot89b]. Ce diagramme est défini de la façon suivante:

$$\sigma_{nn} = f_t \cdot \left\{ \left[1 + \left(c_1 \cdot \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_u^{cr}} \right)^3 \right] \cdot \exp \left(-c_2 \cdot \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_u^{cr}} \right) - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_u^{cr}} \cdot (1 + c_1)^3 \cdot \exp(-c_2) \right\} \quad (\text{III.31})$$

avec c_1 et c_2 , des paramètres matériaux à déterminer expérimentalement. Ne disposant pas de moyens expérimentaux pour déterminer ces constantes et la littérature ne les fournissant pas pour les types de béton utilisés dans notre étude, une courbe de forme plus simple a donc été choisie, basée sur celle proposée par Cervera & al. ([Cer87], [Cer88]) dont l'expression analytique est:

$$\sigma_{nn} = f_t \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon_{nn} - \varepsilon_t}{\alpha} \right) \quad (\text{III.32})$$

avec ε_t , la déformation lorsque σ_{nn} est égale à f_t et α , le paramètre d'adoucissement. Cette relation est exprimée pour une formulation à partir de la déformation totale alors que le modèle est développé avec une formulation à partir de la décomposition de la déformation. Une expression de la forme $\sigma_{nn} = f(\varepsilon_{nn}^{cr})$ est donc obtenue en décomposant ε_{nn} dans (III.32):

$$\sigma_{nn} = f_t \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon_{nn}^{co} + \varepsilon_{nn}^{cr} - \varepsilon_t}{\alpha} \right) \quad (\text{III.33a})$$

D'où:
$$\sigma_{nn} \cdot \exp \left(\frac{\sigma_{nn}}{E \cdot \alpha} \right) = f_t \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon_{nn}^{cr} - \varepsilon_t}{\alpha} \right) \quad (\text{car } \sigma_{nn} = E \cdot \varepsilon_{nn}^{co}) \quad (\text{III.33b})$$

En linéarisant l'équation (III.33b), la courbe d'adoucissement est définie par l'expression suivante (figure III.12):

$$\sigma_{nn} = f_t \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon_{nn}^{cr} - \varepsilon_t}{\alpha} \right) \quad (\text{III.34})$$

Le paramètre d'adoucissement α est déterminé en évaluant l'intégrale (III.23):

$$G_f = E \cdot \varepsilon_t \cdot l_c \cdot \alpha \cdot \exp\left(\frac{\varepsilon_t}{\alpha}\right) \quad (\text{III.35a})$$

Après linéarisation, on obtient:
$$\alpha = \frac{G_f}{l_c \cdot f_t} \quad (\text{III.35b})$$

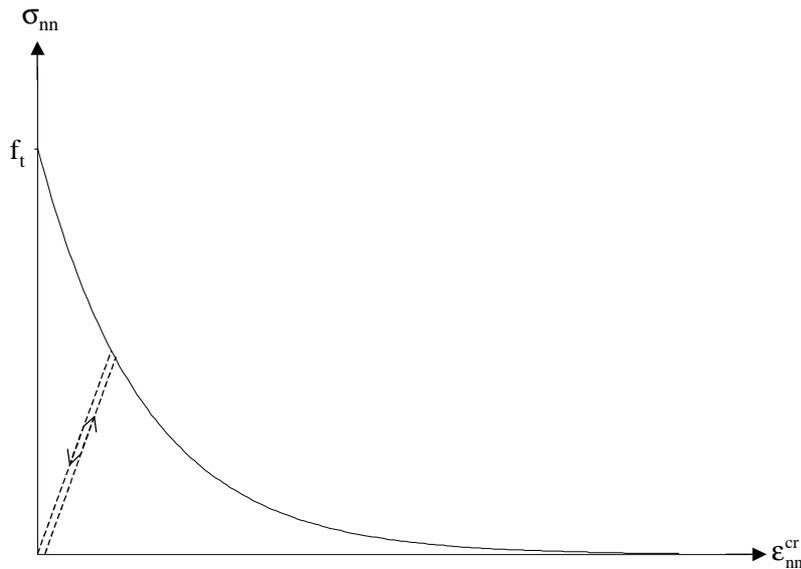


Figure III.12: Relation entre la contrainte et la déformation de fissure en traction uniaxiale pour le modèle tridimensionnel

La longueur caractéristique est prise égale à la racine cubique du volume associé à un point d'intégration. Cette définition ne prend en compte ni la direction de la fissure ni la distorsion de l'élément mais est utilisée comme une approximation, convenable si les éléments sont bien "formés", c'est-à-dire si les rapports entre les longueurs des différents côtés de l'élément ne sont pas trop grands. La fermeture et la réouverture de la fissure sont gouvernées par un déchargement sécant (figure III.12) car il prend en compte la diminution de la raideur avec l'augmentation de la déformation normale à la fissure comme cela a été montré expérimentalement [Rei86]. Un modèle plus sophistiqué n'est pas nécessaire ici car nous n'étudierons pas de structures soumises à des sollicitations cycliques mais il pourrait être intégré sans difficulté.

• *Paramètres du mode II*: pour le modèle diffus à fissures tournantes, le facteur de rétention de cisaillement est défini par l'équation (III.28b) de façon à assurer la condition de coaxialité entre les contraintes principales, les déformations principales et les directions des fissures. Pour le modèle diffus à fissures fixes, un traitement particulier des composantes de cisaillement est effectué. Le facteur de rétention de cisaillement intégré dans ce modèle, dont la formulation a été inspirée par le modèle développé par Cervera & al. ([Cer87], [Cer88]), est fonction de la déformation normale à la fissure:

$$\rho = \frac{1 - \left(\frac{\varepsilon_{\max}^{\text{cr}}}{\varepsilon_u^{\text{cr}}} \right)^p}{\left(\frac{\varepsilon_{\max}^{\text{cr}}}{\varepsilon_u^{\text{cr}}} \right)^p} \text{ ou } \beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_{\max}^{\text{cr}}}{\varepsilon_u^{\text{cr}}} \right)^p \text{ et } \rho = \beta = 0 \text{ si } \varepsilon_{\max}^{\text{cr}} \geq \varepsilon_u^{\text{cr}} \quad (\text{III.36})$$

avec $\varepsilon_{\max}^{\text{cr}}$ la déformation normale à la fissure et p un paramètre compris entre 0.3 et 1. Dans le cas où, au point d'intégration considéré, les deux directions relatives au module de cisaillement endommagé considéré sont fissurées, $\varepsilon_{\max}^{\text{cr}}$ correspond à la déformation normale maximale de fissure. Du fait de la formulation incrémentale des lois de comportement, avec un tel facteur de rétention de cisaillement, les contraintes tangentielles atteignent un plateau lorsque la déformation normale à la fissure est nulle mais ne s'annulent pas, ce qui est irréaliste puisque la fissure étant largement ouverte, il ne devrait plus y avoir de transfert de contrainte. C'est pourquoi, dans le modèle développé dans PLAST3, les composantes tangentielles sont traitées à part, non plus en formulation incrémentale mais en formulation totale. Ainsi, on aura par exemple:

$$\sigma_{\text{nt}} = \rho \cdot \gamma_{\text{nt}}^{\text{cr}} \quad (\text{III.37})$$

Avec cette formulation, lorsque la fissure est largement ouverte, les contraintes tangentielles sont nulles et le verrouillage des contraintes inhérent au modèle diffus à fissures fixes est partiellement éliminé. Un avantage de la définition du facteur de rétention de cisaillement donnée équation (III.36) est qu'elle est objective vis à vis du maillage car $\varepsilon_u^{\text{cr}}$ est évaluée à

partir de la largeur de la bande de fissure l_c . En effet, en supposant que la contrainte à travers la fissure est nulle lorsqu'elle est égale à $0.001f_t$, ε_u^{cr} est donnée par l'expression suivante:

$$\varepsilon_u^{cr} = \varepsilon_t + \alpha \cdot \ln(1000) = \varepsilon_t + \frac{G_f}{l_c \cdot f_t} \cdot \ln(1000) \quad (\text{III.38})$$

Le second avantage de cette formulation du facteur de rétention de cisaillement est qu'elle peut être perçue comme un couplage indirect entre les composantes des contraintes et des déformations tangentielles et normales alors qu'un tel couplage est ignoré de façon direct (c'est-à-dire que la matrice D^{cr} est diagonale). D'autre part, le modèle proposé par Rots & De Borst avec adoucissement en cisaillement basé sur l'énergie de rupture en mode II pour contrôler indépendamment la fissuration en mode I et la fissuration en mode II semble plus réaliste [Rot87]. Cependant un tel modèle nécessite la définition de deux paramètres matériau supplémentaires à déterminer expérimentalement, ce qui nous est impossible faute de moyens. C'est pourquoi nous avons préféré développer un modèle de transfert de cisaillement basé sur la notion de facteur de rétention de cisaillement en s'efforçant de l'améliorer au maximum.

III.3.3. Modèle de comportement en compression

Le modèle développé pour le comportement du béton en compression est le même en deux et trois dimensions.

Pour certaines applications, où les contraintes de compression sont faibles et où la fissuration en tension gouverne le comportement, le béton est considéré linéaire élastique en compression. Mais, dans le cas de chevilles ancrées dans une dalle de béton et soumises à différents types de sollicitations, rien ne permet d'utiliser une telle hypothèse. C'est pourquoi un modèle élastoplastique, basé sur celui développé par Owen & al. et Cervera & al., a été développé ([Owe83], [Owe84], [Cer87]). Il a été mis en évidence expérimentalement que les relations liant les contraintes aux déformations sous des états de contrainte de compression sont non linéaires, même pour des niveaux de contrainte faibles. La théorie de la plasticité semble adéquate pour décrire la déformation inélastique du béton en compression et nécessite la définition de peu de paramètres matériau. Un modèle d'élasticité linéaire est utilisé pour la partie réversible de la déformation et une approche basée sur la plasticité avec écrouissage isotrope est employée pour la partie irréversible de la déformation. Le taux de déformation

total $d\varepsilon$ est donc décomposé en un taux de déformation élastique $d\varepsilon^e$ et en un taux de déformation plastique $d\varepsilon_c^p$ associé à la compression:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon_c^p \quad (\text{III.39})$$

D'où:
$$d\sigma = D^e \cdot d\varepsilon^e = D^e \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon_c^p) \quad (\text{III.40})$$

avec D^e la matrice élastique définie par les lois de Hooke.

Le modèle nécessite la définition d'une surface de charge qui caractérise le critère de plastification, une loi d'écoulement plastique, une loi d'écrouissage et une condition d'effondrement.

III.3.3.1. Critère de plastification

La fonction de charge pour le béton sous un état de contrainte triaxial est généralement supposée dépendre de trois invariants du tenseur des contraintes [Ott77]. Néanmoins, les formulations utilisées en pratique sont développées soit avec un ([Sui73], [Deb85], [Fee94]...) ou deux ([Buy85], [Mes98]...) invariants seulement. Une fonction de charge de type Drucker-Prager modifiée dépendant du premier invariant du tenseur des contraintes I_1 et du second invariant du tenseur déviateur des contraintes J_2 a donc été adoptée:

$$Q(\sigma, \kappa) = f(\sigma) - \sigma_0(\kappa) = [\alpha_0 \cdot I_1 + 3 \cdot \beta_0 \cdot J_2]^{1/2} - \sigma_0(\kappa) = 0 \quad (\text{III.41})$$

avec α_0 et β_0 deux paramètres matériau et $\sigma_0(\kappa)$ la contrainte uniaxiale équivalente effective dépendant d'un paramètre scalaire κ représentant l'écrouissage. Notons que l'on retrouve la surface de charge de Von Mises si $\alpha_0=0$ et $\beta_0=1$. Ces deux paramètres peuvent être déterminés à partir de résultats expérimentaux biaxiaux ([Kuo69], [Kup73]) et les valeurs suivantes sont obtenues:

$$\alpha_0 = 0.355 \cdot \sigma_0(\kappa) \quad \text{et} \quad \beta_0 = 1.355 \quad (\text{III.42})$$

La surface de charge résultante est comparée (figure III.13) avec l'enveloppe de rupture expérimentale obtenue par Kupfer & al. [Kup69].

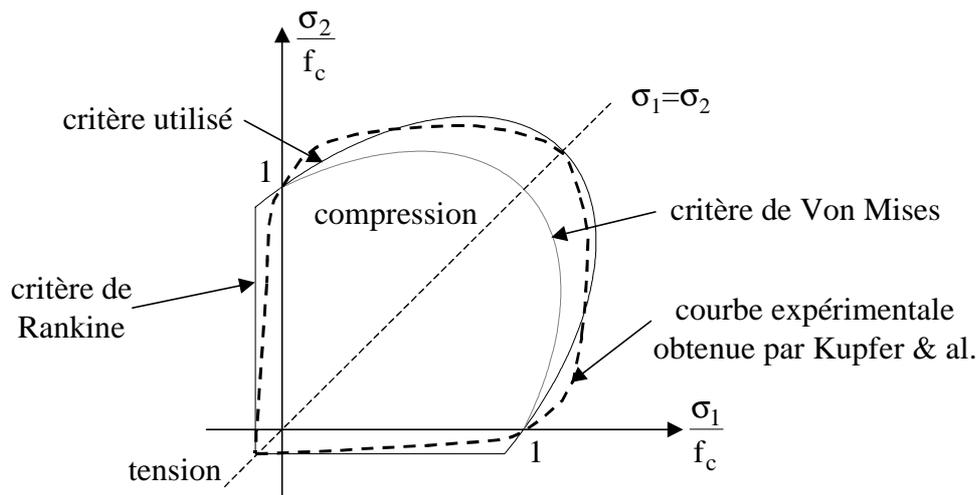


Figure III.13: Comparaison du critère de plastification développé avec les résultats expérimentaux obtenus par Kupfer & al. [Kup69]

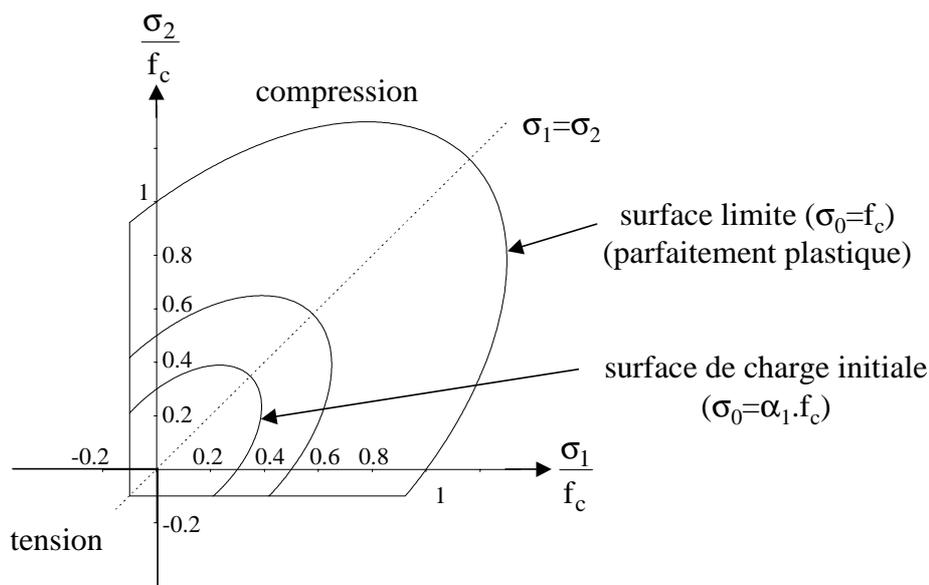


Figure III.14: Surfaces de charge pour les lois de comportement du béton dans l'espace à deux dimensions des contraintes

Cette fonction de charge peut être élastique et parfaitement plastique si la contrainte $\sigma_0(\kappa)$ est prise égale à la résistance limite uniaxiale en compression f_c . Dans un tel modèle, la réponse est élastique jusqu'à ce que la contrainte effective équivalente atteigne la valeur de f_c . Ensuite, le béton s'écoule jusqu'à ce que la surface d'effondrement soit atteinte dans l'espace des déformations. Il est nettement plus réaliste d'utiliser un modèle d'écrouissage dans lequel la

contrainte $\sigma_0(\kappa)$ n'est pas égale à une constante. La valeur $\sigma_0(\kappa) = \alpha_1 \cdot f_t$ définit la surface de charge initiale qui limite le comportement élastique. Lorsque cette surface est atteinte, la déformation inélastique apparaît et une loi d'écroûissage gouverne l'expansion de la surface de charge lors du chargement qui suit. Une famille de surfaces de charge est donc définie, comme cela est montré sur la figure III.14. Le déchargement à l'intérieur de la surface de charge courante est élastique. Pendant le chargement, la surface de charge se dilate uniformément, car l'écroûissage est isotrope, jusqu'à atteindre soit la surface de rupture ($\sigma_0(\kappa) = f_c$), soit la surface d'effondrement (dans l'espace des déformations).

III.3.3.2. Loi d'écoulement

L'écoulement plastique a lieu lorsque le point représentant l'état de contrainte est sur la surface de charge. Sauf s'il y a décharge élastique, ce point doit rester sur cette surface pendant l'écoulement plastique, ce qui conduit à la condition de cohérence:

$$dQ(\sigma, \kappa) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \frac{\partial Q}{\partial \kappa} \cdot d\kappa = 0 \quad (\text{III.43})$$

D'autre part, le taux de déformation plastique est donné par la règle de normalité:

$$d\varepsilon_c^p = d\lambda \cdot a = d\lambda \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \quad (\text{III.44})$$

avec g_p un potentiel plastique et $d\lambda$ un scalaire positif appelé multiplicateur plastique représentant l'amplitude de l'écoulement plastique. Le vecteur a , appelé vecteur d'écoulement plastique, est le gradient de la fonction potentiel plastique et représente la direction de l'écoulement plastique. Dans le modèle développé, une règle d'écoulement associée est utilisée. Cela signifie que d'une part le potentiel plastique est confondu avec la fonction de charge ($Q = g_p$) et que d'autre part le vecteur du taux de déformation plastique est supposé normal à la surface de charge. D'où:

$$d\varepsilon_c^p = d\lambda \cdot a = d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{III.45})$$

La condition de cohérence (III.43) peut s'écrire:

$$a^t \cdot d\sigma - h \cdot d\lambda = 0 \quad (\text{III.46})$$

en posant:
$$h = -\frac{d\kappa}{d\lambda} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \kappa} \quad (\text{III.47})$$

ou h représente le module d'écrouissage. Ainsi, une expression explicite de l'écoulement plastique peut être obtenue en multipliant la relation (III.40) par a^t puis en combinant les relations (III.45) et (III.46):

$$d\lambda = \frac{a^t \cdot D^e \cdot d\varepsilon}{h + a^t \cdot D^e \cdot a} \quad (\text{III.48})$$

La loi de comportement élastoplastique liant le taux de contrainte au taux de déformation peut être établie en substituant les équations (III.48) et (III.45) dans l'équation (III.40):

$$d\sigma = \left[D^e - \frac{a^t \cdot D^e \cdot a}{h + a^t \cdot D^e \cdot a} \cdot D^e \right] \cdot d\varepsilon = D^{ep} \cdot d\varepsilon \quad (\text{III.49})$$

La matrice D^{ep} est appelée matrice élastoplastique continue.

III.3.3.3. Loi d'écrouissage

Le paramètre d'écrouissage κ représente la mémoire du matériau et reflète son caractère irréversible. On supposera donc dans le modèle qu'il est égal à la déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . La loi d'écrouissage définit le mouvement des surfaces de charge pendant la déformation. Une relation entre la déformation plastique équivalente et la contrainte équivalente effective est donc utilisée. Cette relation est extrapolée de résultats obtenus à partir de tests expérimentaux en compression uniaxiale.

Afin de déterminer le module d'écrouissage h , exprimons le travail plastique dW^p :

$$dW^P = \sigma_0 \cdot d\varepsilon_{eq}^P \quad (III.50a)$$

et
$$dW^P = \sigma^t \cdot d\varepsilon_c^P = d\varepsilon_{eq}^P \cdot \sigma = d\lambda \cdot a^t \cdot \sigma \quad (III.50b)$$

Or on peut démontrer que:
$$a^t \cdot \sigma = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^t \cdot \sigma = f(\sigma) = \sigma_0 \quad (III.50c)$$

Par identification, on obtient:
$$d\lambda = d\varepsilon_{eq}^P \quad (III.50d)$$

D'où:
$$h = - \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon_{eq}^P} = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_{eq}^P} \quad (III.50e)$$

Le module d'écrouissage h porte également le nom de module tangent plastique. La relation liant la déformation plastique équivalente à la contrainte équivalente effective est obtenue à partir de la parabole définie de la façon suivante (cf. figure III.15):

$$\sigma_0 = E \cdot \varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{\varepsilon_c} \cdot \varepsilon^2 \quad (III.51)$$

avec E le module d'Young, ε la déformation totale courante et ε_c la déformation totale lorsque la contrainte est égale à la résistance limite en compression f_c . En décomposant la déformation totale et en remplaçant la contribution élastique par σ_0/E dans l'équation (III.51), la relation souhaitée est obtenue:

$$\sigma_0(\varepsilon_{eq}^P) = -E \cdot \varepsilon_{eq}^P + \left(2 \cdot E \cdot \varepsilon_c \cdot \varepsilon_{eq}^P \right)^{1/2} \quad \text{pour } \alpha_1 \cdot f_c \leq \sigma_0 \leq f_c \quad (III.52)$$

En dérivant l'équation (III.52), le module d'écrouissage peut être alors évalué par:

$$h = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_{eq}^P} = E \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon_c}{2 \cdot \varepsilon_{eq}^P} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (III.53)$$

En prenant α_1 égal à 0.3 et $\varepsilon_c = 2 \cdot f_c / E$, Cervera & al. [Cer87] ont montré que le modèle fournit des résultats proches de ceux obtenus expérimentalement par Kupfer & al. [Kup69].

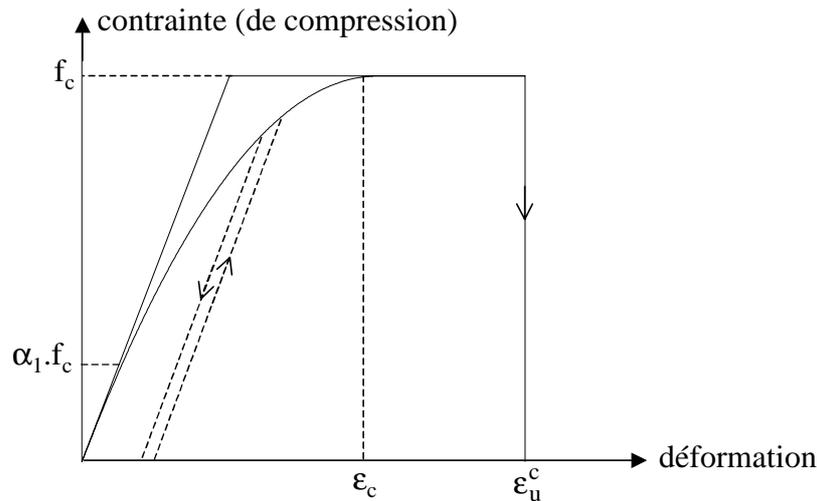


Figure III.15: Loi de comportement uniaxiale pour le béton en compression

III.3.3.4. Condition d'effondrement

Le modèle de plasticité avec écrouissage décrit précédemment gouverne l'augmentation de la déformation inélastique dans le béton soumis à des contraintes de compression. La déformation inélastique continue jusqu'à ce que l'effondrement apparaisse. L'effondrement de rupture est un phénomène contrôlé par les déformations. Une surface de rupture dans l'espace des déformations doit donc être définie de façon à ce que ce type de rupture puisse être pris en compte. Un moyen simple, malgré le manque de données expérimentales sur la capacité de déformation ultime du béton sous un chargement multiaxial, est de supposer que la taille de la surface d'effondrement dans l'espace des déformations est liée à une déformation équivalente maximale extrapolée à partir de tests expérimentaux uniaxiaux. Le critère de déformation utilisé est développé simplement en convertissant le critère de plastification décrit en terme de contraintes directement en terme de déformations:

$$\beta' \cdot (3 \cdot J_2') + \alpha' \cdot I_1' = \varepsilon_u^c{}^2 \quad (\text{III.54})$$

avec I_1' le premier invariant du tenseur des déformations, J_2' le second invariant du tenseur déviateur des déformations et ε_u^c la déformation totale ultime de compression. Les paramètres α' et β' sont déterminés à partir des résultats expérimentaux de Kupfer & al. [Kup69] et sont

égaux à $\alpha' = 0.355 \cdot \varepsilon_u^c$ et $\beta' = 1.355$. Lorsque la déformation ultime est atteinte, le matériau est supposé perdre toutes ses caractéristiques de résistance.

Il existe évidemment d'autres modèles de comportement du béton en compression, basés sur la théorie de la plasticité, similaires à celui présenté mais avec une surface de charge et/ou une règle d'écrouissage différentes ou plus sophistiquées (écoulement plastique non associé, prise en compte de l'adoucissement, ...) ([Tor87], [Ona88], [Lub89], [Dvo89], [Fee94], [Lop97]). D'après De Borst & Nauta, un modèle précis de modélisation du comportement du béton en compression doit comprendre la plasticité avec un écoulement non associé avec écrouissage puis adoucissement [Deb85]. Le modèle développé, même s'il ne possède pas toutes ces caractéristiques, permet néanmoins une représentation correcte de ce comportement.

III.3.4. Validations et exemples d'applications numériques

III.3.4.1. Essai de traction directe d'une poutre entaillée en béton plein

Les modèles de fissuration diffuse du béton développés en deux et trois dimensions sont appliqués à l'étude d'une poutre entaillée en béton plein soumise à un test de traction directe. Une analyse par éléments finis de cet exemple a déjà été réalisée en deux dimensions et en contraintes planes par Rots & De Borst avec un modèle diffus à multiples fissures fixes non orthogonales [Rot89b] et par De Borst & Pamin avec un modèle de plasticité au gradient ([Deb96], [Pam94]).

Les dimensions de la poutre, le maillage, les conditions aux limites et les propriétés du matériau sont définies figure III.16. En deux dimensions, les simulations ont été effectuées en déformations planes avec un maillage similaire à celui utilisé en trois dimensions. Dans ce dernier cas, l'épaisseur b de la poutre est maillée avec un seul élément afin de s'approcher au mieux des conditions de contraintes planes utilisées par Rots, De Borst & Pamin ([Rot89b], [Deb96], [Pam94]). Avec PLAST3, les simulations ont été effectuées avec le modèle diffus à fissures fixes et celui à fissures tournantes mais aucune distinction entre les deux ne sera faite lors de la présentation des résultats car ils sont identiques. La vitesse du chargement appliquée à la poutre est prise égale à 1.5 mm/s. PLAST2 et PLAST3 étant des codes dynamiques explicites, pour obtenir une solution "statique", la vitesse de chargement est choisie

suffisamment faible pour éliminer les effets d'inertie significatifs. En effet, pour les problèmes entraînant une rupture fragile, ce choix est d'autant plus important que la chute brutale de la charge qui accompagne normalement le comportement fragile conduit généralement à une augmentation de l'énergie cinétique contenue dans la solution.

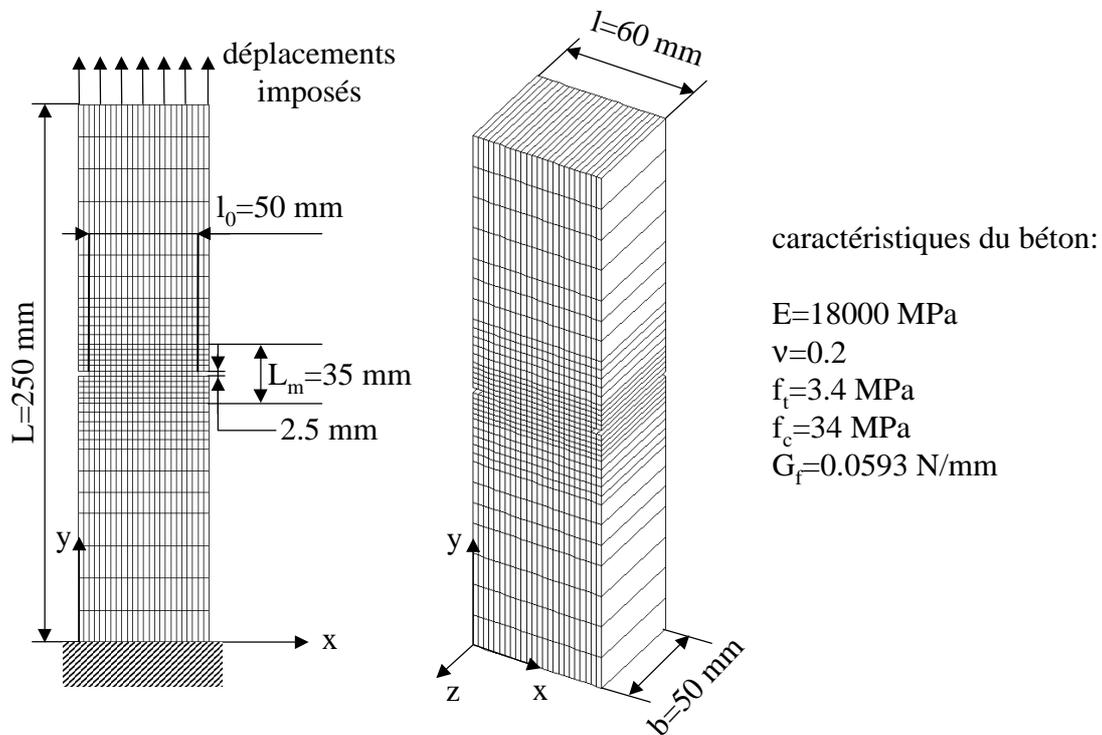


Figure III.16: Maillage et données pour la simulation d'un test de traction directe d'une poutre entaillée en béton

La figure III.17 montre la réponse de la barre obtenue avec PLAST2, PLAST3, par Rots & al. [Rot89b] et par De Borst & Pamin ([Deb96], [Pam94]) en terme de contrainte nominale ($\sigma_n=P/(l.b)$ avec P l'effort résultant appliqué à la barre) et de la déformation moyenne du centre de la barre (estimée sur la zone de taille L_m (figure III.16) qui représente la taille des jauges de déformation utilisées lors des essais expérimentaux [Rot89b]). Les courbes obtenues par Rots & al. [Rot89b] et par De Borst & Pamin ([Deb96], [Pam94]) sont très similaires aux courbes expérimentales. La solution obtenue en trois dimensions est meilleure que celle obtenue avec PLAST2 car, en deux dimensions, la contrainte nominale maximale est sous-estimée.

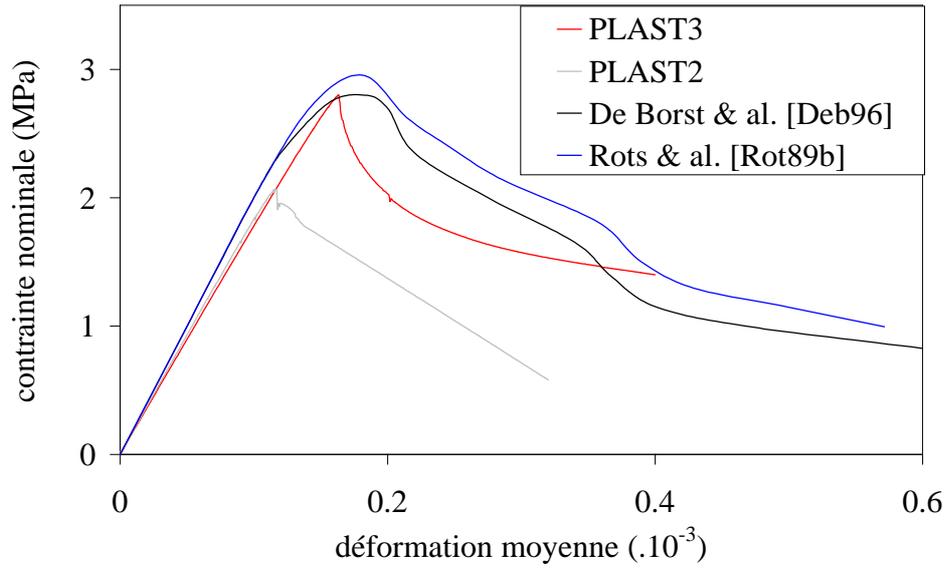


Figure III.17: Contrainte nominale en fonction de la déformation moyenne lors d'un test de traction directe d'une poutre entaillée en béton

Les tests expérimentaux ont montré que le mode de rupture est non symétrique du fait de l'hétérogénéité du béton bien que le problème soit symétrique [Rot89b]. Ce phénomène n'est pas reproduit par notre modèle (figure III.18) car il est basé sur l'hypothèse d'un milieu homogène.

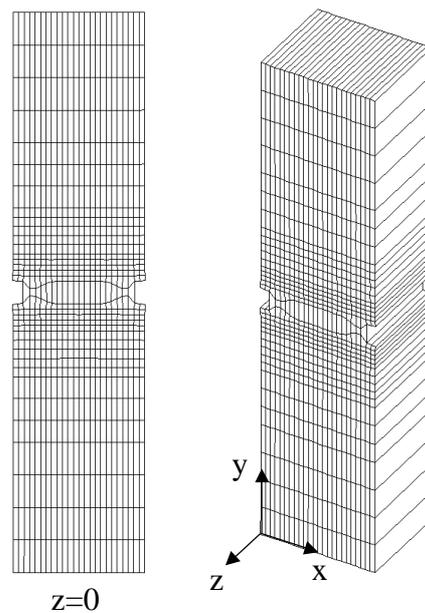


Figure III.18: Déformation de la poutre entaillée en traction (facteur d'agrandissement: 100)

III.3.4.2. Essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein

Une poutre de béton plein entaillée et soumise à un essai de flexion est étudiée. Cet exemple a été sélectionné car il a déjà fait l'objet de nombreuses études expérimentales et analytiques [Rot85]. De plus, ce cas est également traité dans le manuel d'exemples du logiciel commercial de calcul par éléments finis ABAQUS/Explicit en trois dimensions [Hib98b]. Le modèle de fissuration développé dans la version dynamique explicite de ce code est basé sur un modèle diffus à fissures orthogonales fixes [Hib98a]. Le maillage, les dimensions, les conditions aux limites et les propriétés du matériau sont donnés sur la figure III.19. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la poutre est modélisée. La vitesse de chargement afin d'obtenir une solution statique est de 10 mm/s. Des simulations de cet essai de flexion ont été réalisées avec les codes PLAST2 en déformations planes et PLAST3 en trois dimensions. Dans ce dernier cas, une comparaison est faite entre le modèle à fissures fixes et celui à fissures tournantes.

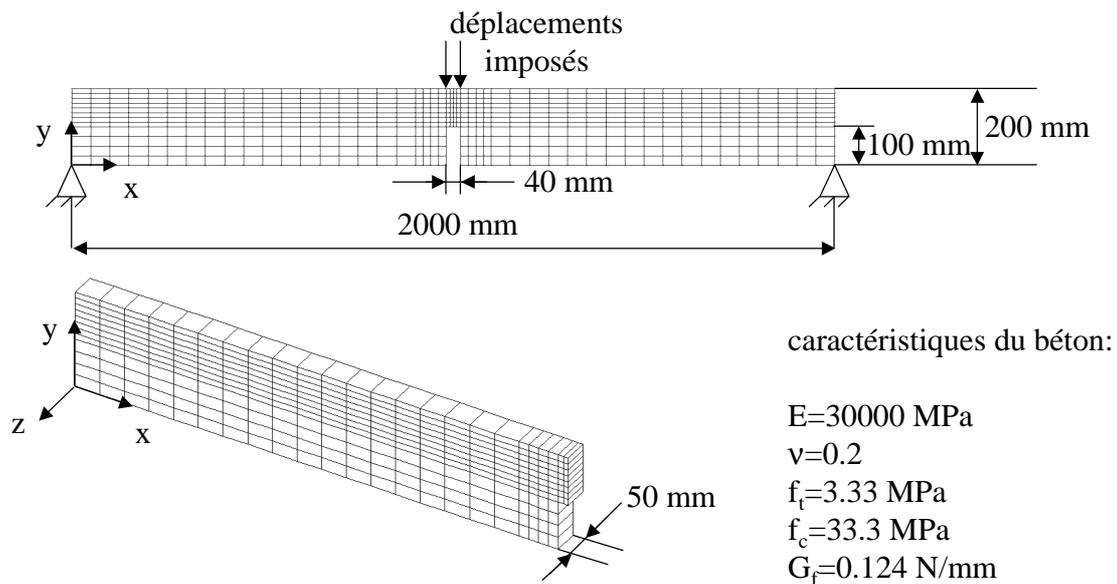


Figure III.19: Maillage et données pour la simulation d'un test de flexion d'une poutre entaillée en béton

La figure III.20 présente la réponse de la poutre en terme de diagramme liant la flèche de la poutre à l'effort appliqué et compare les résultats numériques aux résultats expérimentaux [Rot85]. Bien que la charge maximale expérimentale soit retrouvée, les simulations numériques prédisent une réponse de la partie adoucissante de la courbe trop ductile comparé

à celle des résultats expérimentaux. Ce phénomène est accentué avec le modèle diffus à fissures fixes. Les résultats obtenus avec le modèle à fissures tournantes sont plus réalistes que ceux obtenus avec le modèle à fissures fixes et ne sont pas soumis au verrouillage des contraintes. Cette observation est confirmée avec la localisation de l'endommagement qui est meilleure avec le modèle à fissures tournantes (figure III.22). La figure III.21 représente la déformée de la poutre obtenue avec ce dernier modèle qui est similaire à celle obtenue par Rots & al. avec un modèle diffus de fissuration en contraintes planes [Rot85].

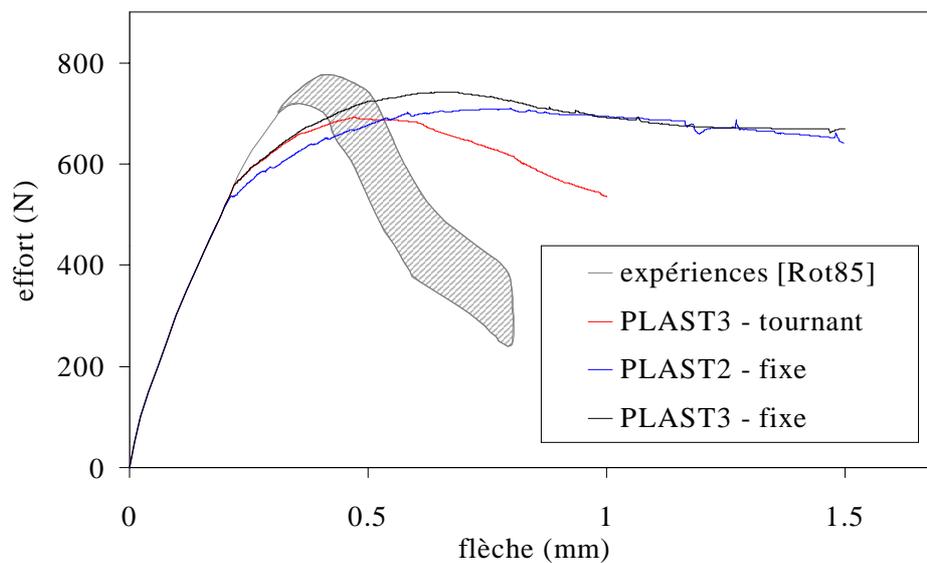


Figure III.20: Flèche de la poutre en fonction de l'effort lors d'un essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein

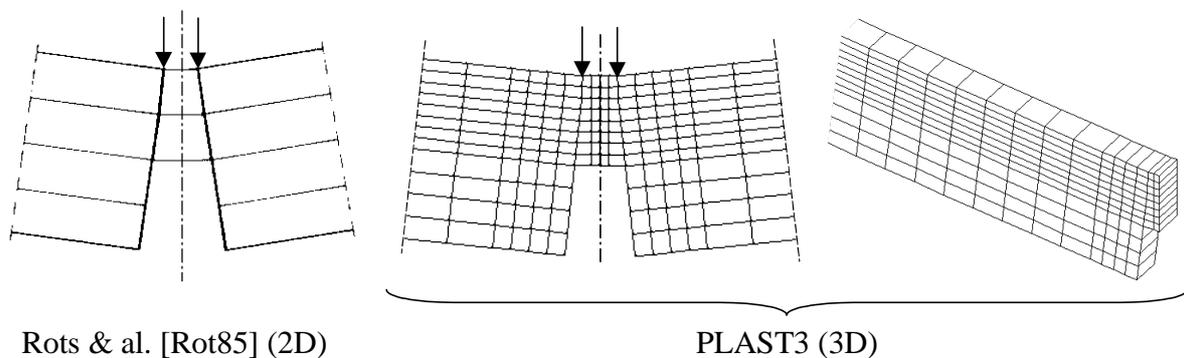


Figure III.21: Déformée de la poutre en béton entaillée et soumise à essai de flexion pour une flèche de 1 mm (facteur d'agrandissement: 100)

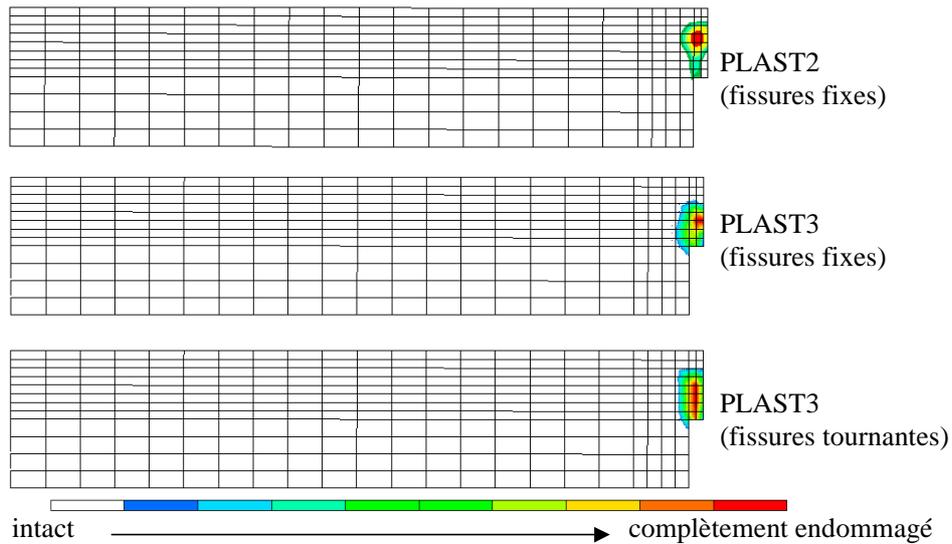


Figure III.22: Endommagement du béton (nombre de fissures par point d'intégration) lors d'un essai de flexion d'une poutre entaillée pour une flèche de 1 mm

Afin d'étudier l'influence de la finesse du maillage par éléments finis sur la solution, des simulations d'essais de flexion ont été effectuées avec trois maillages différents: maillages dits grossier, moyen et fin (figure III.23). Le maillage moyen a été utilisé lors des études précédentes. Aux vues des résultats obtenus précédemment, les analyses sont réalisées avec PLAST3 en utilisant le modèle diffus à fissures tournantes.

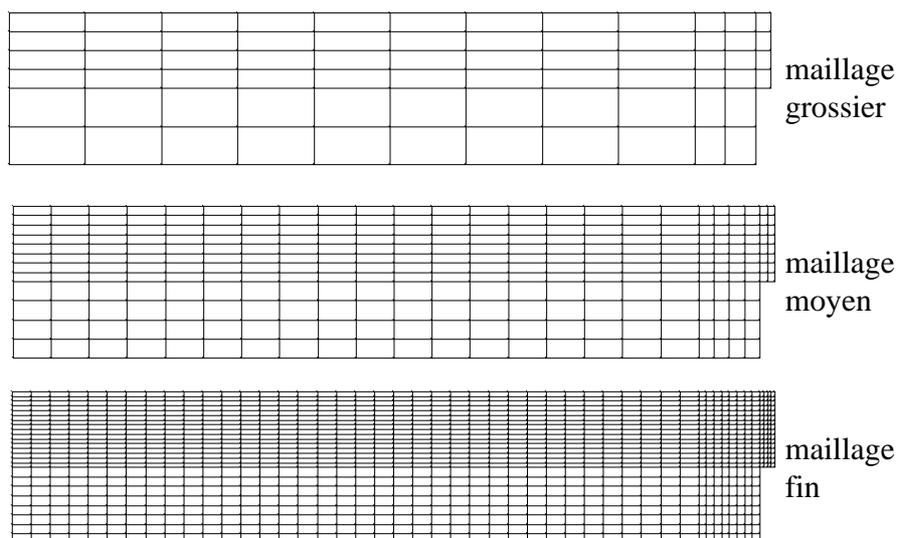


Figure III.23: Maillages par éléments finis utilisés pour l'étude de l'influence de la finesse du maillage sur la réponse d'une poutre en béton entaillée et soumise à un essai de flexion

Les courbes reliant l'effort à la flèche de la poutre entaillée obtenues pour les trois maillages sont présentées sur la figure III.24. Malgré l'intégration de la théorie de la bande de fissure basée sur l'énergie de rupture dans le modèle diffus développé, une légère sensibilité au maillage persiste entre le maillage grossier et les deux autres. Néanmoins les maillages moyen et fin donnent des résultats très similaires. On peut donc en conclure que pour capturer correctement le processus de fissuration du béton, l'utilisation d'un maillage relativement fin est nécessaire. De plus, les résultats numériques convergent vers une solution unique. Des résultats analogues, présentés dans le manuel d'exemples, ont été obtenus avec le logiciel ABAQUS/Explicit [Hib98b]. La comparaison des déformées des poutres en béton obtenues avec PLAST3 et avec ABAQUS/Explicit pour les trois maillages étudiés sont données sur la figure III.25. La réponse effort-déplacement obtenue avec ce logiciel est similaire à celle obtenue expérimentalement si la forme de la courbe d'adoucissement utilisée comme propriété du matériau est définie convenablement. En effet, c'est à l'utilisateur de la spécifier linéaire par morceaux.

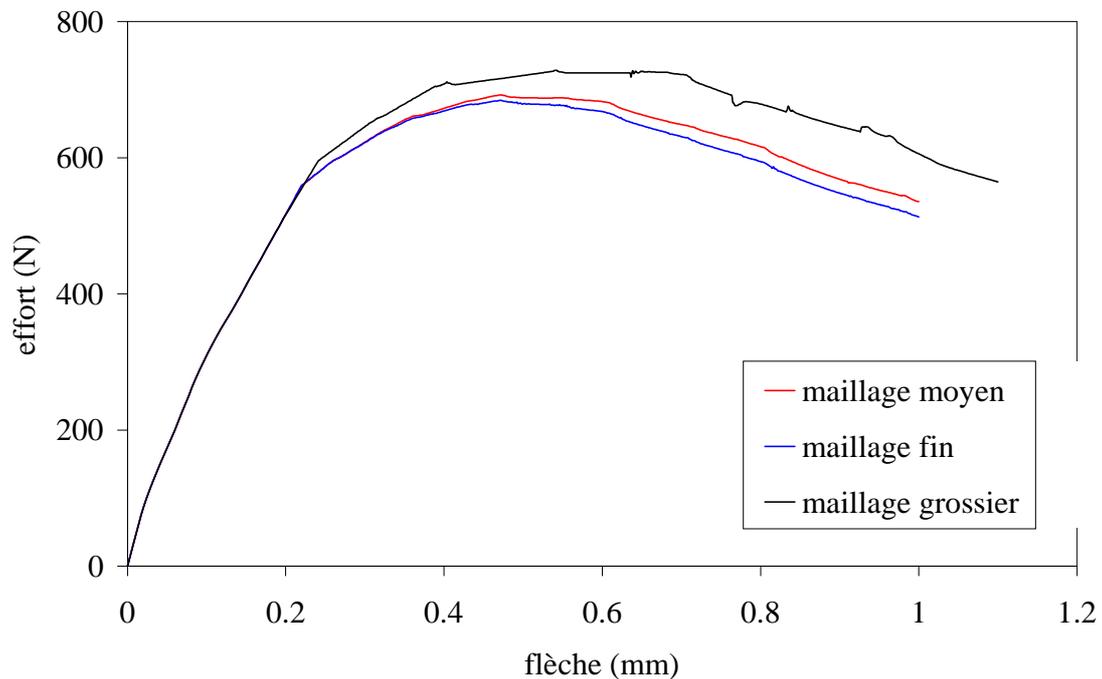


Figure III.24: Flèche en fonction de l'effort lors d'un essai de flexion d'une poutre entaillée en béton plein: simulations avec PLAST3 pour trois maillages différents

Chapitre IV:

Applications numériques

IV.1. ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU COMPORTEMENT À L'ARRACHEMENT DES CHEVILLES SPIT RING	127
IV.1.1. DESCRIPTION DE LA CHEVILLE	127
IV.1.2. MISE EN DONNÉES	127
IV.1.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES	129
IV.1.3.1. Influence du graissage	129
IV.1.3.2. Influence des coefficients de frottement	132
IV.1.3.2.1. Influence du coefficient de frottement entre la cheville et la coquille.....	132
IV.1.3.2.2. Influence du coefficient de frottement entre la coquille et le béton	134
IV.1.3.3. Influence de la qualité du béton	136
IV.1.4. CONCLUSION	136
IV.2. ETUDE TRIDIMENSIONNELLE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES CHEVILLES SPIT FIXFORM.....	137
IV.2.1. DESCRIPTION DE LA CHEVILLE	137
IV.2.2. COMPORTEMENT À L'ARRACHEMENT D'UNE FIXATION ANCRÉE DANS UNE DALLE DE BÉTON SANS EFFET DE BORD	138
IV.2.2.1. Mise en données.....	138
IV.2.2.2. Résultats numériques	139
IV.2.3. COMPORTEMENT AU CISAILLEMENT D'UNE FIXATION ANCRÉE DANS UNE DALLE DE BÉTON SANS EFFET DE BORD	141
IV.2.3.1. Mise en données	141
IV.2.3.2. Résultats numériques	143
IV.2.4. COMPORTEMENT AU CISAILLEMENT D'UNE FIXATION ANCRÉE DANS UNE DALLE DE BÉTON AVEC EFFET DE BORD	146
IV.2.4.1. Mise en données.....	146
IV.2.4.2. Résultats numériques	147
IV.2.5. COMPORTEMENT À L'ARRACHEMENT DE DEUX FIXATIONS ANCRÉES DANS UNE DALLE DE BÉTON: INFLUENCE DE L'ENTRAXE	148
IV.2.5.1. Mise en données.....	148
IV.2.5.2. Résultats numériques	149
IV.2.6. CONCLUSION	151

IV.1. ETUDE BIDIMENSIONNELLE DU COMPORTEMENT A L'ARRACHEMENT DES CHEVILLES SPIT RING

IV.1.1. Description de la cheville

La cheville SPIT RING est une fixation de très haute sécurité à expansion automatique dans un chambrage conique (figure IV.1). Elle est positionnée sans mise en contrainte du matériau support lors de son expansion et peut être démontée sans destruction de ce matériau (béton généralement). Ces chevilles peuvent être utilisées pour toutes les fixations du bâtiment et de l'industrie dans les zones tendues du béton où les risques de fissuration sont importants et où la sécurité de l'expansion et de la pose est une condition essentielle. On les retrouve notamment dans le tunnel sous la Manche et dans le tunnel sous Caluire qui fait partie du nouveau périphérique nord de la ville de LYON (TEO).

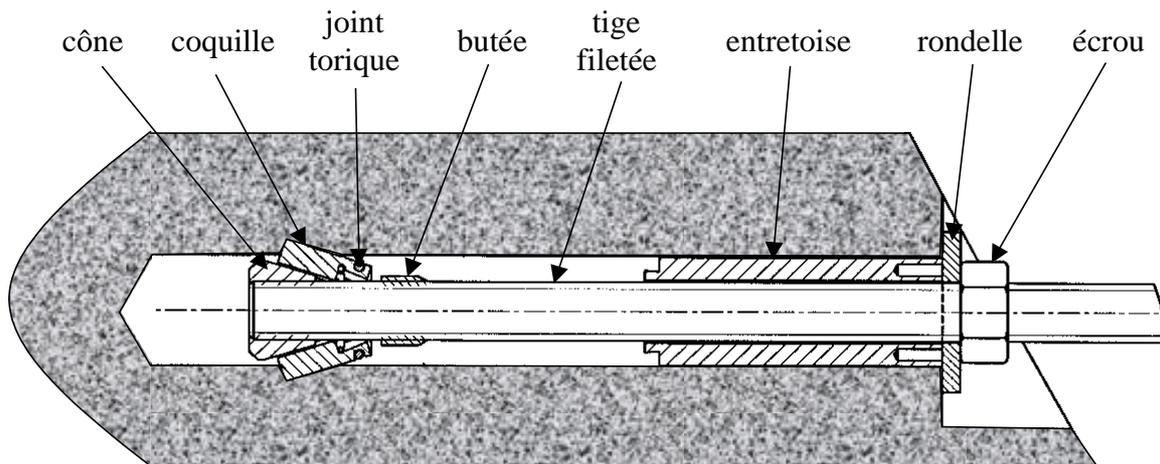


Figure IV.1: Présentation de la cheville SPIT RING

Les coquilles au nombre de quatre sont tenues entre elles par un joint torique et assurent l'expansion de la cheville dans le matériau support.

IV.1.2. Mise en données

Une analyse axisymétrique de la fixation SPIT RING est réalisée avec le code de calcul par éléments finis PLAST2. Le maillage et les conditions aux limites sont définis sur la figure IV.2. Trois corps déformables sont modélisés: la cheville, constituée de la tige filetée et

du cône, la coquille et le béton. Des tests d'arrachement de la cheville ancrée dans une dalle de béton sont simulés en imposant un déplacement à la tige filetée. Deux coefficients de frottement sont introduits: le premier $\mu_{c/c}$ entre la cheville et la coquille et le second $\mu_{c/b}$ entre la coquille et le béton.

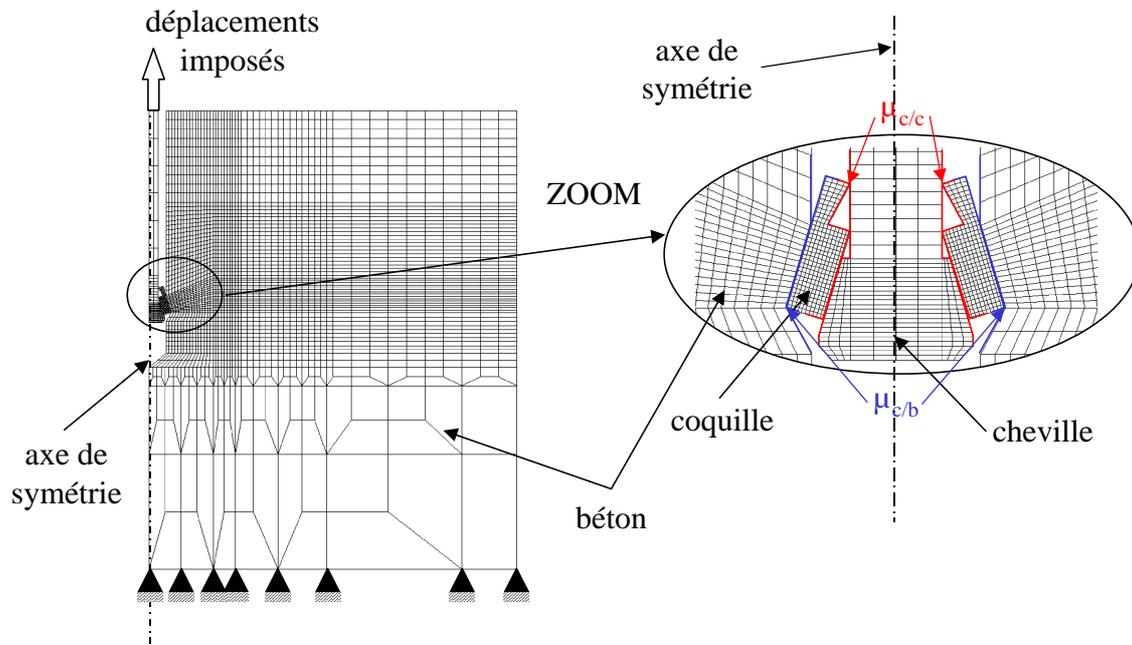


Figure IV.2: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 2D d'un arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton

Des essais d'arrachement ont été simulés pour deux types de béton, béton "mou" et béton "dur", dont les propriétés mécaniques sont données table IV.1.

	béton "mou"	béton "dur"
module d'Young E	27000 MPa	27000 MPa
coefficient de Poisson ν	0.2	0.2
résistance limite en compression f_c	23 MPa	45 MPa
résistance limite en traction f_t	2.3 MPa	4.5 MPa
énergie de rupture G_f	0.05 N/mm	0.1 N/mm

Table IV.1: Propriétés mécaniques des bétons testés

Pour caractériser le comportement mécanique des matériaux des différents composants de la cheville SPIT RING dans les domaines élastique et plastique, des essais de traction jusqu'à rupture ont été réalisés sur des éprouvettes cylindriques de ces matériaux au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'INSA de Lyon. A partir des courbes de traction obtenues expérimentalement, les données nécessaires à la modélisation élastoplastique des métaux dans PLAST2 ont été obtenues et sont données table I.2.

	module d'Young	coefficient Poisson	limite élastique	loi d'écrouissage
cheville	201000 MPa	0.3	760 MPa	$\sigma_{eq} = 760 + 677 \cdot (\epsilon^p)^{0.26}$
coquille	198000 MPa	0.3	830 MPa	$\sigma_{eq} = 830 + 705 \cdot (\epsilon^p)^{0.24}$

Table IV.2: Propriétés mécaniques des matériaux constituant la cheville et la coquille de la fixation SPIT RING

D'autre part, les coquilles sont au nombre de quatre par fixation, chacune séparée de sa voisine par une fente. Afin de prendre en compte cette fente et donc de réduire la résistance à l'écartement dans la direction tangentielle, le module tangent du matériau de la coquille est réduit et pris égal à 5000 MPa (ce module reste égal au module d'Young pour la cheville) introduisant une anisotropie dans la direction circonférentielle.

IV.1.3. Résultats numériques

IV.1.3.1. Influence du graissage

La cheville SPIT RING peut être graissée en vue de diminuer la corrosion des matériaux la constituant. Pour étudier l'influence de cette lubrification sur la tenue à l'arrachement de la fixation, deux simulations ont été réalisées: la première avec les coefficients de frottement $\mu_{c/c}$ et $\mu_{c/b}$ égaux à 0.3 pour modéliser le frottement sec et la seconde avec ces coefficients égaux à 0.1 pour modéliser la présence de lubrifiant. Des simulations d'essais d'arrachement d'une cheville ancrée dans une dalle de béton ont donc été effectuées pour les deux types de béton et les résultats obtenus sont donnés table IV.3 et figures IV.3 et IV.4.

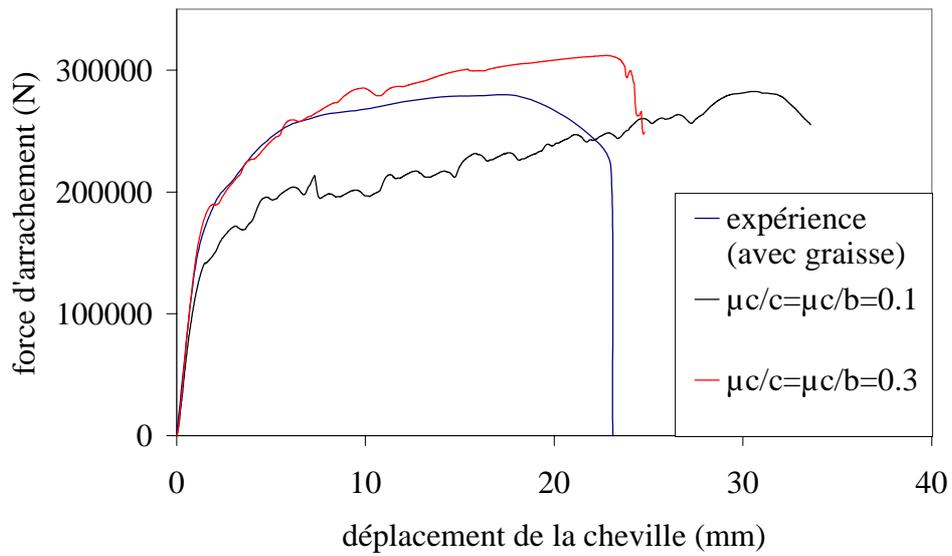


Figure IV.3: Courbes force/déplacement pour différentes conditions de lubrification lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur"

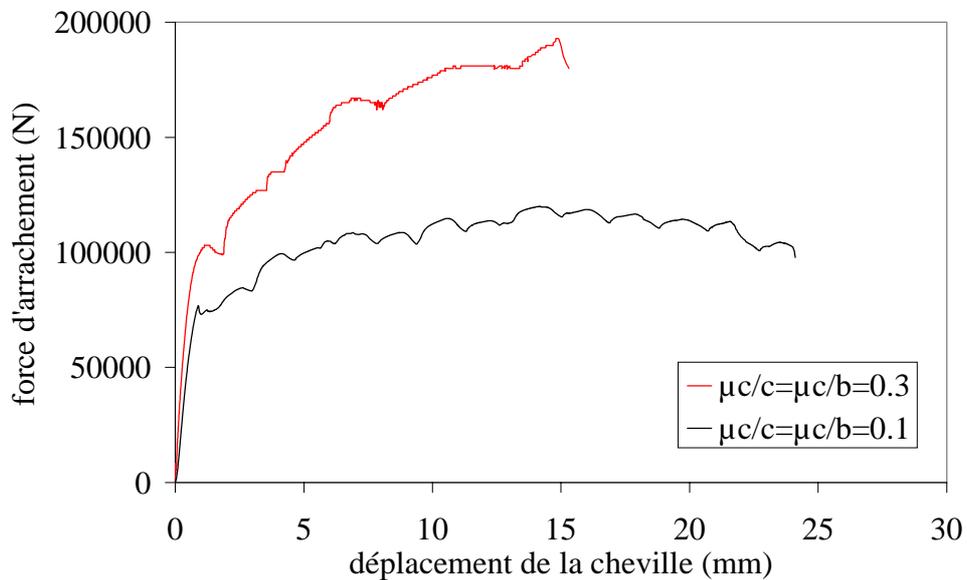


Figure IV.4: Courbes force/déplacement pour différentes conditions de lubrification lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "mou"

$\mu_{c/c}=\mu_{c/b}$	0.1	0.3	valeur expérimentale avec graisse
F_{ua} béton "dur"	282.8 kN	312.2 kN	262.65 kN
F_{ua} béton "mou"	120.1 kN	193 kN	—

Table IV.3: Force d'arrachement à la rupture F_{ua} des chevilles SPIT RING pour deux types de béton et des conditions de lubrification différentes

La présence de lubrifiant a une grande influence sur le comportement à l'arrachement des chevilles SPIT RING. Pour un même déplacement de la cheville, le glissement de la coquille le long du béton en présence de graisse est environ deux fois supérieur à celui obtenu en frottement sec, ce qui a pour effet de diminuer la force d'arrachement à la rupture de cette fixation.

La ruine expérimentale des fixations SPIT RING correspond à la rupture de l'acier de la tige filetée au niveau de l'écrou alors que le mode de ruine obtenu numériquement est la rupture d'un cône de béton car l'endommagement de l'acier n'est pas modélisé. Néanmoins les simulations permettent de "visualiser" l'endommagement et sa progression et de constater qu'en présence de lubrifiant, le béton s'endommage plus rapidement qu'en frottement sec (figure IV.5), ce qui explique également la différence entre les forces d'arrachement à la rupture.

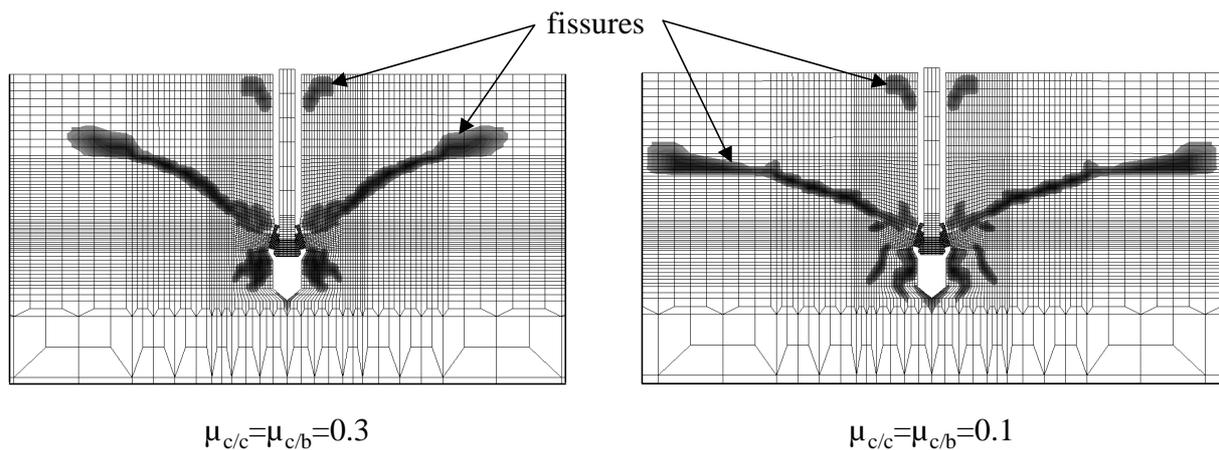


Figure IV.5: Fissuration lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" pour un déplacement de la cheville de 6.5 mm avec lubrifiant et en frottement sec

Un exemple de propagation des fissures pour différentes valeurs du déplacement de la cheville SPIT RING lors d'un essai d'arrachement est donné en annexe II dans le cas du béton "dur" et avec des coefficients de frottement égaux à 0.3.

D'autre part, la qualité du béton a une influence directe sur la tenue à l'arrachement des chevilles SPIT RING (table IV.3). La fissuration dans le béton "mou" progresse plus rapidement que dans le béton "dur" du fait de la résistance limite en traction inférieure (figure IV.6).

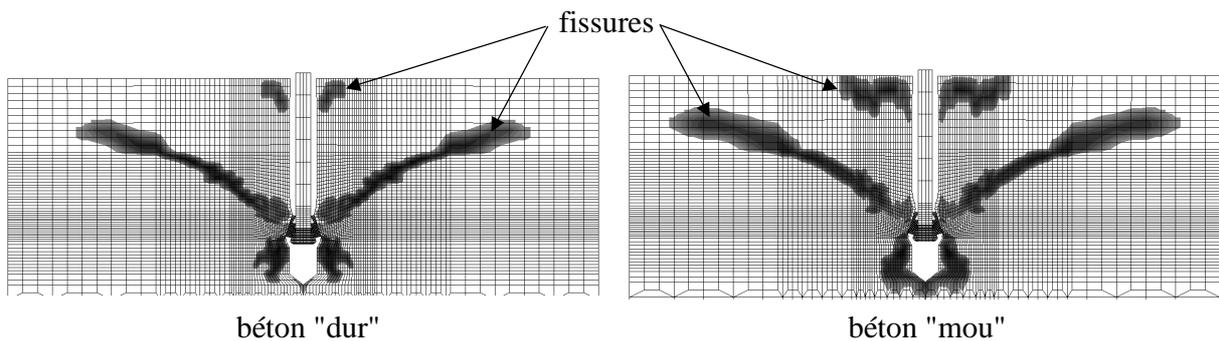


Figure IV.6: Fissuration lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" et "mou" pour un déplacement de la cheville de 7.9 mm en frottement sec ($\mu_{c/c}=\mu_{c/b}=0.3$)

IV.1.3.2. Influence des coefficients de frottement

D'après les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, il apparaît clairement que le frottement à l'interface des différents corps a une influence importante sur le comportement à l'arrachement des chevilles. Par conséquent une étude détaillée des coefficients de frottement est réalisée et présentée dans ce paragraphe.

IV.1.3.2.1. Influence du coefficient de frottement entre la cheville et la coquille

Le coefficient de frottement entre la coquille et le béton $\mu_{c/b}$ a été fixé arbitrairement à 0.3 et des simulations de tests d'arrachement de la fixation SPIT RING ont été effectuées pour différentes valeurs du coefficient de frottement entre la cheville et la coquille $\mu_{c/c}$ pour les deux types de béton. Les résultats sont donnés figures IV.7 et IV.8 et table IV.4.

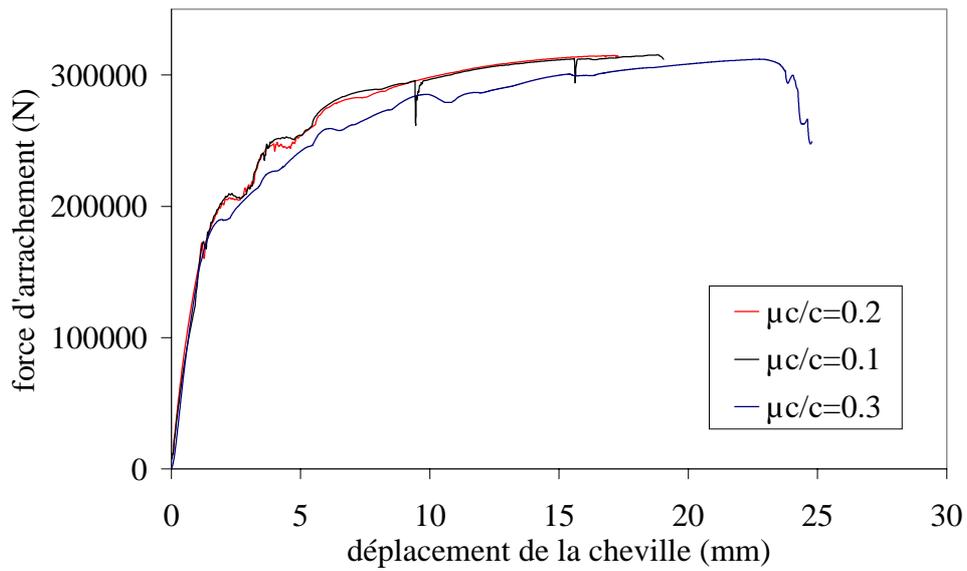


Figure IV.7: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/c}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" avec $\mu_{c/b}=0.3$

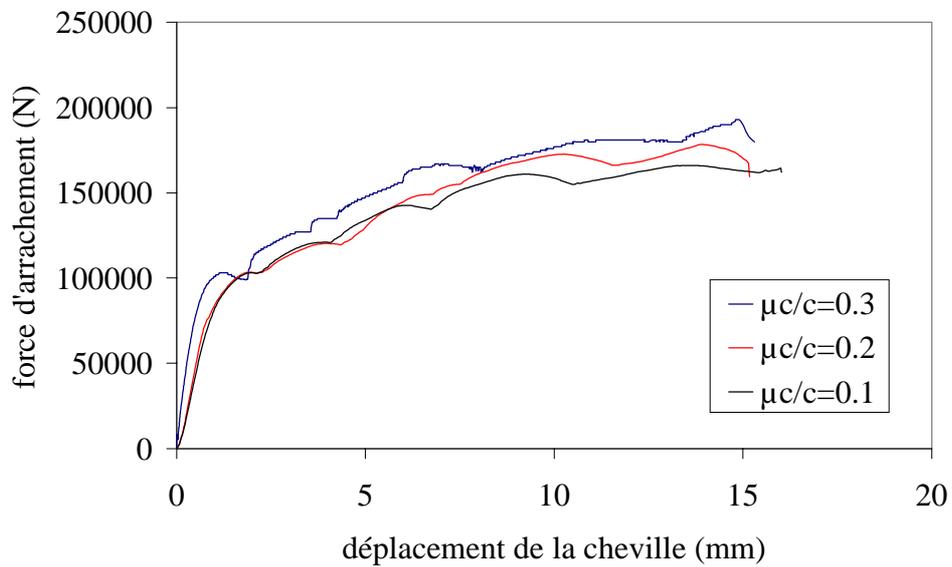


Figure IV.8: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/c}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "mou" avec $\mu_{c/b}=0.3$

	$\mu_{c/c}=0.1$	$\mu_{c/c}=0.2$	$\mu_{c/c}=0.3$
F_{ua} béton "dur"	315.4 kN	314.9 kN	312.2 kN
F_{ua} béton "mou"	167.2 kN	179.8 kN	193 kN

Table IV.4: Force d'arrachement à la rupture F_{ua} des chevilles SPIT RING pour deux types de béton et pour différentes valeurs de $\mu_{c/c}$ avec $\mu_{c/b}=0.3$

Le coefficient de frottement entre la cheville et la coquille n'a pas la même influence sur le comportement à l'arrachement de la cheville SPIT RING pour le béton "mou" et pour le béton "dur". Néanmoins aucune différence significative n'est observée entre les courbes liant la force d'arrachement au déplacement de la cheville pour chaque type de béton.

IV.1.3.2.2. Influence du coefficient de frottement entre la coquille et le béton

Le coefficient de frottement entre la cheville et la coquille $\mu_{c/c}$ a été fixé arbitrairement à 0.3 et des simulations de tests d'arrachement de la fixation SPIT RING ont été effectuées pour différentes valeurs du coefficient de frottement entre la coquille et le béton $\mu_{c/b}$ pour les deux types de béton. Les résultats sont donnés figures IV.9 et IV.10 et table IV.5.

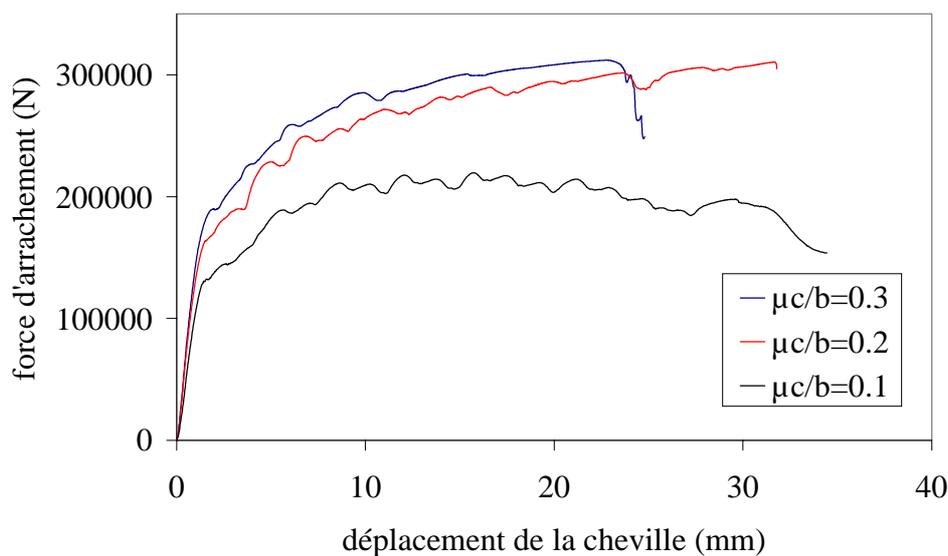


Figure IV.9: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/b}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" avec $\mu_{c/c}=0.3$

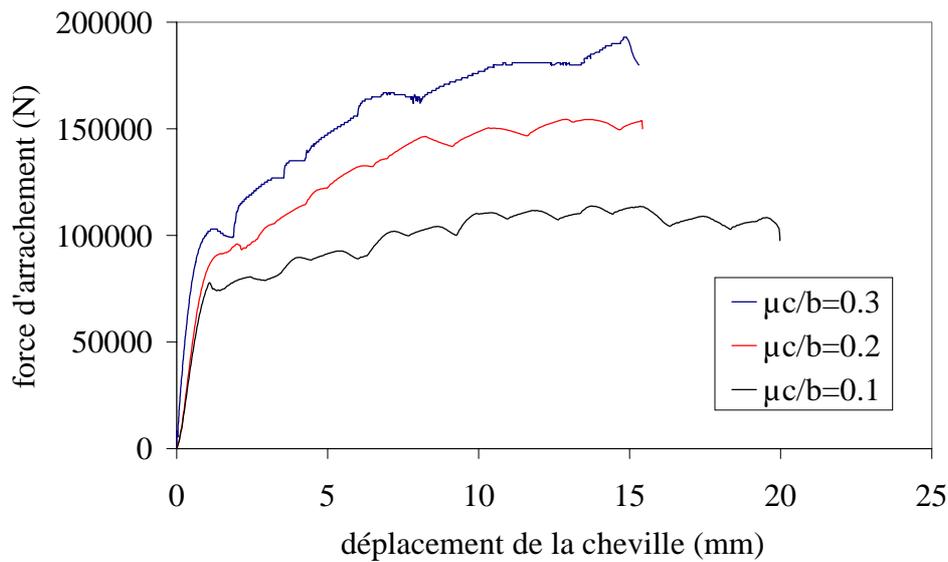


Figure IV.10: Courbes force/déplacement pour différentes valeurs de $\mu_{c/b}$ lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "mou" avec $\mu_{c/c}=0.3$

	$\mu_{c/b}=0.1$	$\mu_{c/b}=0.2$	$\mu_{c/b}=0.3$
F_{ua} béton "dur"	221.2 kN	310.7 kN	312.2 kN
F_{ua} béton "mou"	115.6 kN	155.3 kN	193 kN

Table IV.5: Force d'arrachement à la rupture F_{ua} des chevilles SPIT RING pour deux types de béton et pour différentes valeurs de $\mu_{c/b}$ avec $\mu_{c/c}=0.3$

Le coefficient de frottement entre la coquille et le béton influence le comportement à l'arrachement des chevilles SPIT RING et notamment la courbe reliant l'effort au déplacement de la cheville que ce soit avec du béton "dur" ou du béton "mou" (figures IV.9 et IV.10). En effet, dans le cas où $\mu_{c/c}=0.3$ et $\mu_{c/b}=0.1$, la coquille adhère à la cheville mais glisse le long du béton et ainsi la fixation résiste moins à l'arrachement, ce qui entraîne une diminution de la charge de ruine par rapport au cas où $\mu_{c/c}=0.3$ et $\mu_{c/b}=0.3$. Le coefficient $\mu_{c/c}$ agit également sur la forme des fissures (figure IV.11). Le mode de ruine de cette cheville obtenu numériquement est la rupture d'un cône de béton dont l'angle au sommet est d'environ 115° dans le cas $\mu_{c/c}=0.3$ et $\mu_{c/b}=0.3$ et d'environ 72° dans le cas $\mu_{c/c}=0.3$ et $\mu_{c/b}=0.1$. La différence entre ces deux angles peut aussi expliquer la différence entre les efforts de ruine de la fixation.

Le coefficient de frottement entre la coquille et le béton, c'est-à-dire le revêtement de la coquille, est donc un paramètre déterminant dans la tenue à l'arrachement de la cheville SPIT RING.

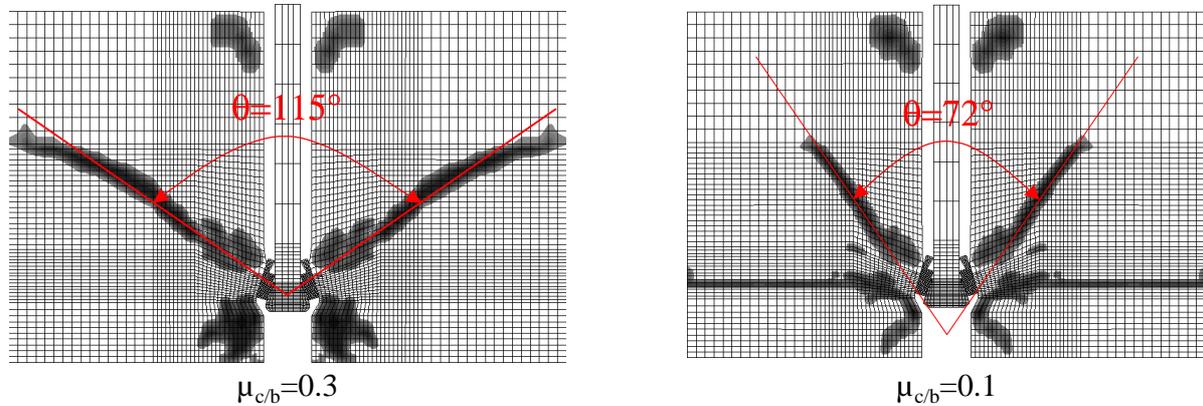


Figure IV.11: Influence du coefficient de frottement $\mu_{c/b}$ sur la fissuration lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" pour un déplacement de la cheville de 5.4 mm et avec $\mu_{c/c}=0.3$

IV.1.3.3. Influence de la qualité du béton

Les études présentées dans les paragraphes précédents ont été réalisées pour deux types de béton. Elles ont mis en évidence que la tenue à l'arrachement d'une fixation est directement liée au comportement mécanique du béton dans lequel elle est ancrée (tables IV.3, IV.4 et IV.5). La modélisation du comportement du béton est donc primordiale dans le problème étudié. Il apparaît que le logiciel PLAST2 est efficace et permet d'obtenir des résultats réalistes.

IV.1.4. Conclusion

Le comportement à l'arrachement des chevilles SPIT RING dépend non seulement du type de béton dans lequel elle est ancrée mais également des revêtements de la cheville et des coquilles et de la présence de lubrifiant. Il a été montré que l'influence des différents coefficients de frottement qui interviennent dans ce problème est importante. Ils déterminent l'allure des courbes liants les forces d'arrachement au déplacement de la cheville et la forme du cône de fissuration du béton. Le contact avec frottement entre plusieurs corps déformables

est donc significatif dans le problème étudié. Par conséquent, non seulement il ne peut pas être négligé mais il doit être modélisé avec une méthode puissante et intrinsèque telle que la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" qui prouve une fois encore son efficacité.

L'étude présentée a montré la capacité du code de calcul PLAST2 à prédire de façon réaliste le comportement mécanique d'une fixation ancrée dans une dalle de béton et soumise à un essai d'arrachement. Les simulations numériques ont permis d'améliorer la compréhension des différents phénomènes intervenant dans ce problème et de déterminer les paramètres influents.

IV.2. ETUDE TRIDIMENSIONNELLE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES CHEVILLES SPIT FIXFORM

IV.2.1. Description de la cheville

La cheville SPIT FIXFORM est une fixation de haute sécurité à logement conique dans le béton (figure IV.12). Le béton n'est pas mis sous contrainte lors de l'expansion de la douille car l'ancrage est assuré par un verrouillage de forme. Elle permet la fixation de charges lourdes dans le béton, y compris en zone tendue ou comprimée et celles où les risques de fissuration sont importants.

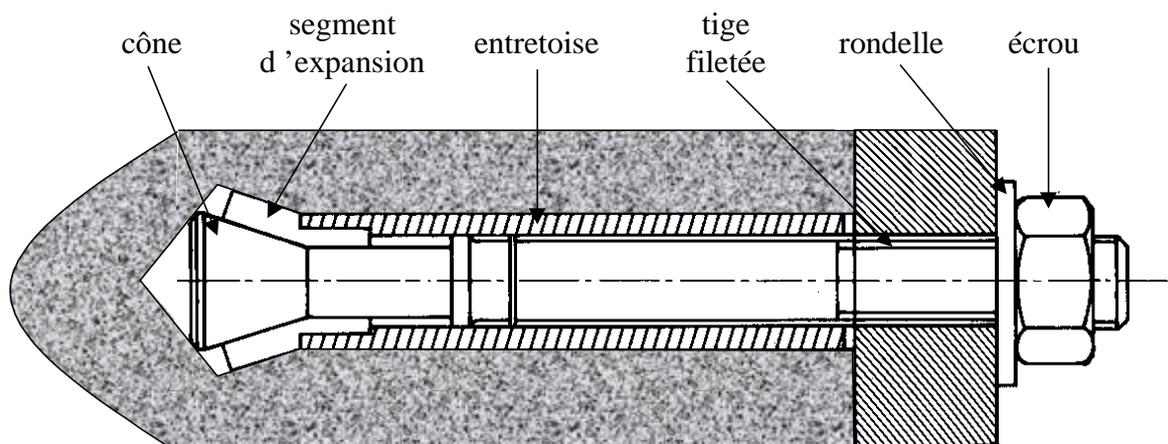


Figure IV.12: Présentation de la cheville SPIT FIXFORM

Les segments et l'entretoise constituent la douille d'expansion. Les segments sont au nombre de quatre et séparés par une fente.

Cette fixation a été choisie pour sa géométrie relativement simple afin de valider le code de calcul par éléments finis PLAST3. Son comportement est entièrement connu expérimentalement et, de plus, elle a été largement étudiée en axisymétrie avec PLAST2 ([Wal97a], [Wal97b]).

IV.2.2. Comportement à l'arrachement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton sans effet de bord

IV.2.2.1. Mise en données

Le maillage et les conditions aux limites sont définis sur la figure IV.13. Les effets de bord ne sont pas étudiés, ce qui signifie que la dalle de béton est prise suffisamment grande pour que les distances entre la fixation et les bords de la dalle n'aient aucune influence sur les résultats. Compte tenu de ce choix et de la géométrie de la fixation, seul un quart du bloc de béton avec la cheville au centre a été analysé, ce qui permet d'utiliser un maillage relativement fin tout en conservant des temps de calcul corrects. Un test d'arrachement de la cheville est simulé en imposant un déplacement à la cheville.

Deux coefficients de frottement sont définis: le premier $\mu_{c/d}$ entre la cheville et la douille et le second $\mu_{d/b}$ entre la douille et le béton. Les valeurs de ces coefficients ont été choisies d'après les résultats obtenus avec une étude paramétrique réalisée en axisymétrie avec PLAST2 ([Wal97a], [Wal97b]). Cette étude avait mis en évidence l'importance des coefficients de frottement dans le problème traité et donc l'importance des revêtements de la cheville et de la douille. Si le coefficient de frottement entre la douille et le béton est élevé et celui entre la cheville et la douille est faible alors la douille reste "collée" au béton tandis que la cheville passe au travers de celle-ci avec une résistance à l'arrachement relativement faible (phénomène de grippage). Par contre si le coefficient de frottement entre la douille et le béton est trop faible alors la douille glisse le long du béton et la charge de ruine en est diminuée. Le meilleur compromis obtenu numériquement en accord avec les résultats expérimentaux est le suivant: $\mu_{c/d}=0.2$ et $\mu_{d/b}=0.4$ ([Wal97a], [Wal97b]). Ces valeurs ont donc été utilisées dans l'étude présentée dans ce paragraphe.

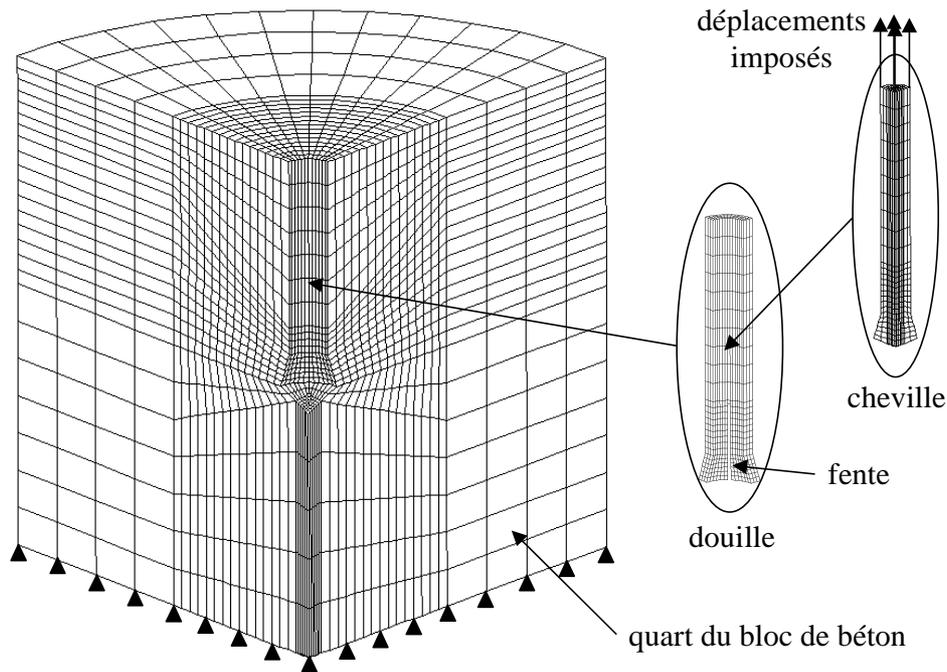


Figure IV.13: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test d'arrachement de la cheville SPIT FIXFORM C18a ancrée dans une dalle de béton sans effet de bord

Les simulations de tests d'arrachement ont été effectuées uniquement pour une cheville ancrée dans une dalle de béton "dur" dont les caractéristiques mécaniques sont données table IV.1. Les matériaux de la douille et de la cheville sont les mêmes que ceux de la cheville SPIT RING étudiée dans la partie précédente dont les propriétés sont données table IV.2.

Deux chevilles de la gamme SPIT FIXFORM ont été étudiées pour cette simulation: la 12x40M8/15V (notée C12 dans la suite) qui est la plus petite de la gamme du point de vue de la longueur d'ancrage et du diamètre et la 18x80M12/20V (notée C18a) qui est la plus grande. Les maillages utilisés pour ces deux fixations sont identiques, seules les dimensions changent.

IV.2.2.2. Résultats numériques

Des simulations de tests d'arrachement de ces deux chevilles ont été réalisées avec le modèle diffus à fissures fixes pour le béton et celui à fissures tournantes. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux table IV.6.

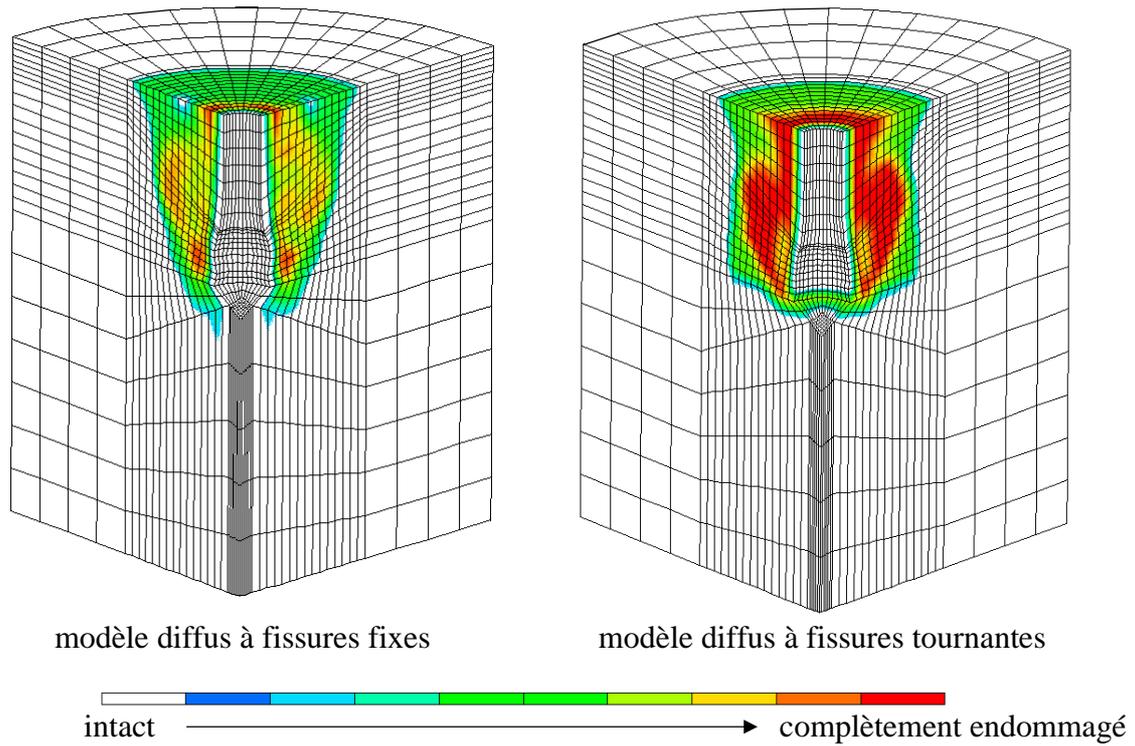


Figure IV.14: Endommagement (nombre de fissures par point d'intégration) lors d'un test d'arrachement de la cheville SPIT FIXFORM C12 ancrée dans une dalle de béton "dur" avec deux modèles de fissuration du béton

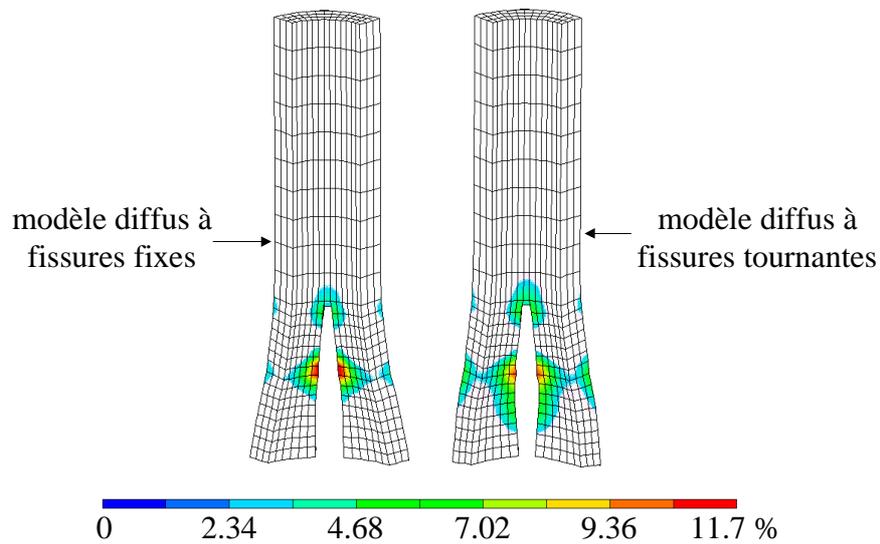


Figure IV.15: Déformation plastique équivalente de la douille de la fixation SPIT FIXFORM C12 lors d'un test d'arrachement de celle-ci ancrée dans une dalle en béton "dur" avec deux modèles de fissuration du béton

	simulation (fissures fixes)	simulation (fissures tournantes)	expérience
$F_{ua} - C12$	30000 N	27000 N	24800 N
$F_{ua} - C18a$	69000 N	69000 N	72000 N

Table IV.6: Force d'arrachement à la rupture F_{ua} des chevilles SPIT FIXFORM

Le mode de ruine obtenu par le calcul est la rupture d'un cône de béton (figure IV.14), ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux. Les résultats obtenus numériquement sont proches de ceux obtenus expérimentalement avec les deux modèles d'endommagement diffus. Le modèle à fissures tournantes semble cependant donner des résultats plus réalistes (figure IV.14 et table IV.6). Au cours d'un essai d'arrachement d'une fixation de la gamme SPIT FIXFORM ancrée dans une dalle en béton, la douille subit des déformations plastiques importantes, notamment au niveau de la fente (figure IV.15), phénomène qui n'avait pas pu être observé avec les simulations effectuées en deux dimensions avec PLAST2.

IV.2.3. Comportement au cisaillement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton sans effet de bord

IV.2.3.1. Mise en données

Les essais de cisaillement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton sont rarement modélisés numériquement. En effet, le chargement ne présentant pas de symétrie de révolution, il ne peut pas être modélisé en axisymétrie bidimensionnelle. Une analyse tridimensionnelle est donc nécessaire.

Un demi-bloc de béton avec la fixation au centre est étudié avec les conditions aux limites appropriées du fait de la symétrie de la direction de la sollicitation (figure IV.16). Pour cette simulation, les effets de bord ne sont pas étudiés.

La cheville de la gamme SPIT FIXFORM étudiée est la 18x80M12/20D notée C18b. La douille d'expansion n'est pas modélisée et la fixation est maillée avec un seul corps déformable (figure IV.16). En effet, pour l'étude de l'essai de cisaillement, des simulations ont été effectuées avec la fixation modélisée avec deux corps déformables, à savoir la cheville et la douille de façon similaire au maillage utilisé pour le test d'arrachement présenté dans le paragraphe précédent, et avec la fixation modélisée avec un seul corps comme c'est le cas dans ce paragraphe. Des résultats identiques ont été obtenus dans les deux cas que ce soit au

niveau des courbes reliant la force de cisaillement au déplacement de la pièce fixée ou au niveau de l'endommagement ([Wal99a], [Wal99b]). La pièce fixée n'est pas modélisée et l'essai de cisaillement est simulé en imposant un déplacement aux nœuds de la partie de la cheville située normalement dans cette pièce (figure IV.16).

Le coefficient de frottement μ entre la fixation et le béton est pris égal à 0.4 conformément aux résultats obtenus avec PLAST2 ([Wal97a], [Wal97b]). Les propriétés mécaniques du béton "dur" (table IV.1) et de la cheville (table IV.2) sont les mêmes que pour le test d'arrachement.

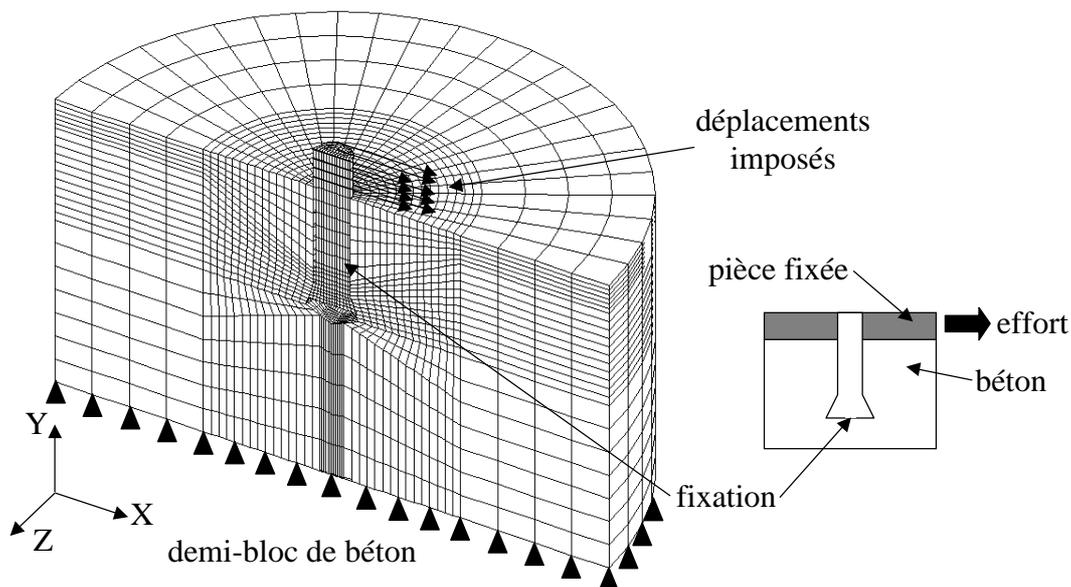


Figure IV.16: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton sans effet de bord

Validation de l'hypothèse de symétrie utilisée (étude d'un demi-bloc de béton):

Dans un premier temps, une simulation d'un essai de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b modélisée avec un seul corps déformable a été réalisée avec un bloc de béton entièrement maillé (figure IV.17). Il apparaît que l'endommagement du béton obtenu avec cette simulation est symétrique (figure IV.18). L'utilisation de l'hypothèse de symétrie (maillage d'un demi-bloc de béton et d'une demi-fixation) est donc justifiée et permet de réaliser un gain en temps de calcul.

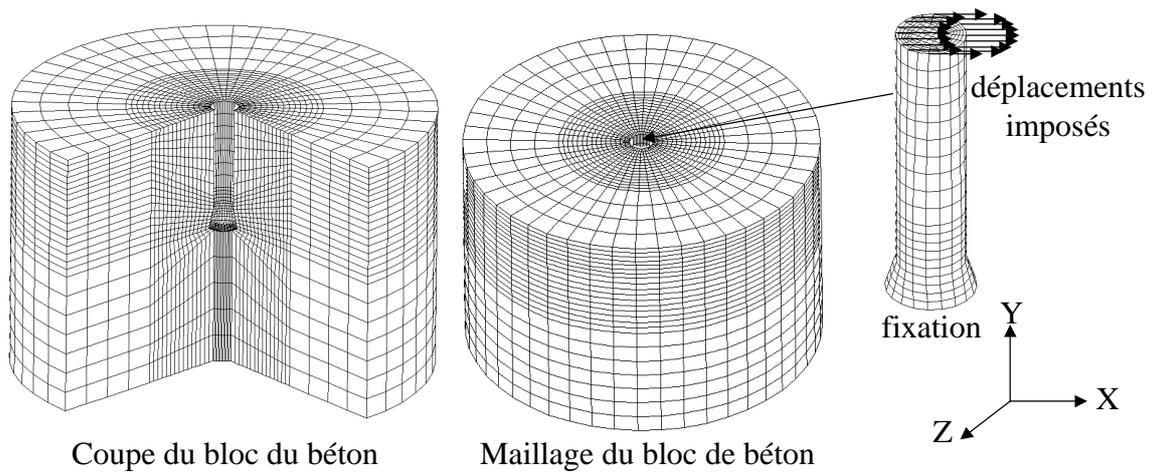


Figure IV.17: Maillage pour la simulation 3D d'un essai de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton (bloc de béton maillé entièrement)

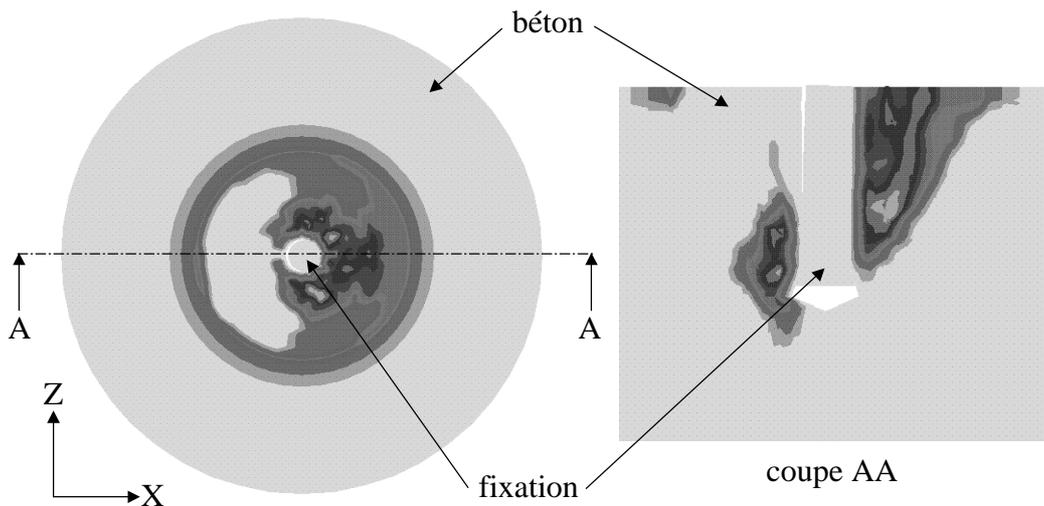


Figure IV.18: Endommagement du béton après la simulation d'un essai de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b (bloc de béton maillé entièrement)

IV.2.3.2. Résultats numériques

Des simulations de tests de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM 18x80M12/20D, notée C18b, ont été réalisées avec le modèle diffus à fissures fixes pour le béton et celui à fissures tournantes. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux table IV.7 et figure IV.19.

	simulation (fissures fixes)	simulation (fissures tournantes)	expérience
F_{uc}	61600 N	77000 N	80000 N

Table IV.7: Force de cisaillement à la rupture F_{uc} de la cheville SPIT FIXFORM C18b

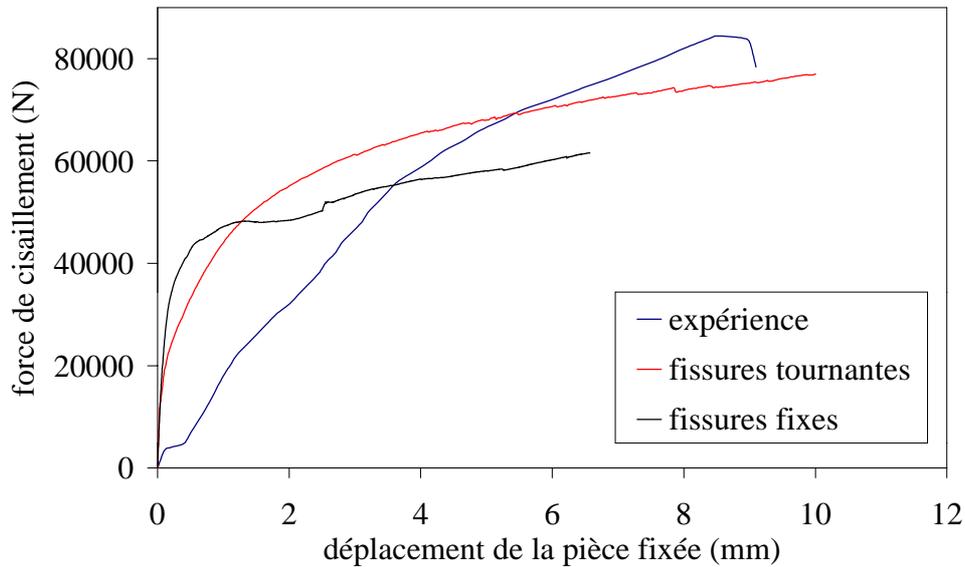


Figure IV.19: Courbes force/déplacement lors d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans ne dalle de béton "dur" avec deux modèles de fissuration

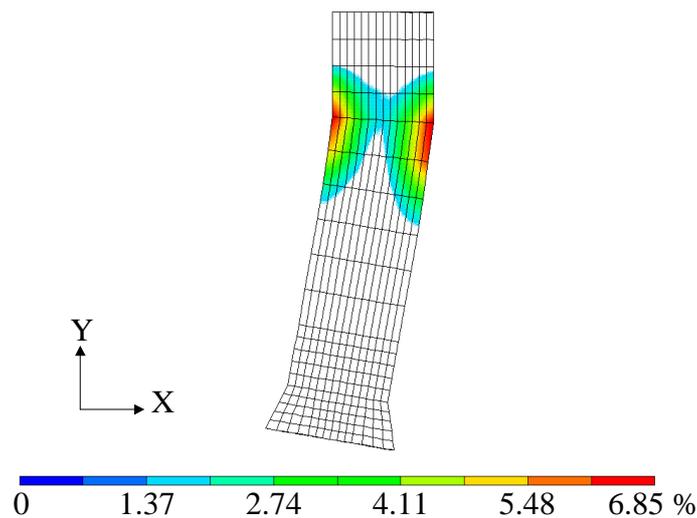


Figure IV.20: Déformation plastique équivalente de la fixation SPIT FIXFORM C18b lors d'un test de cisaillement de celle-ci ancrée dans une dalle de béton "dur" (modèle diffus à fissures tournantes; déplacement de 10 mm de la pièce fixée)

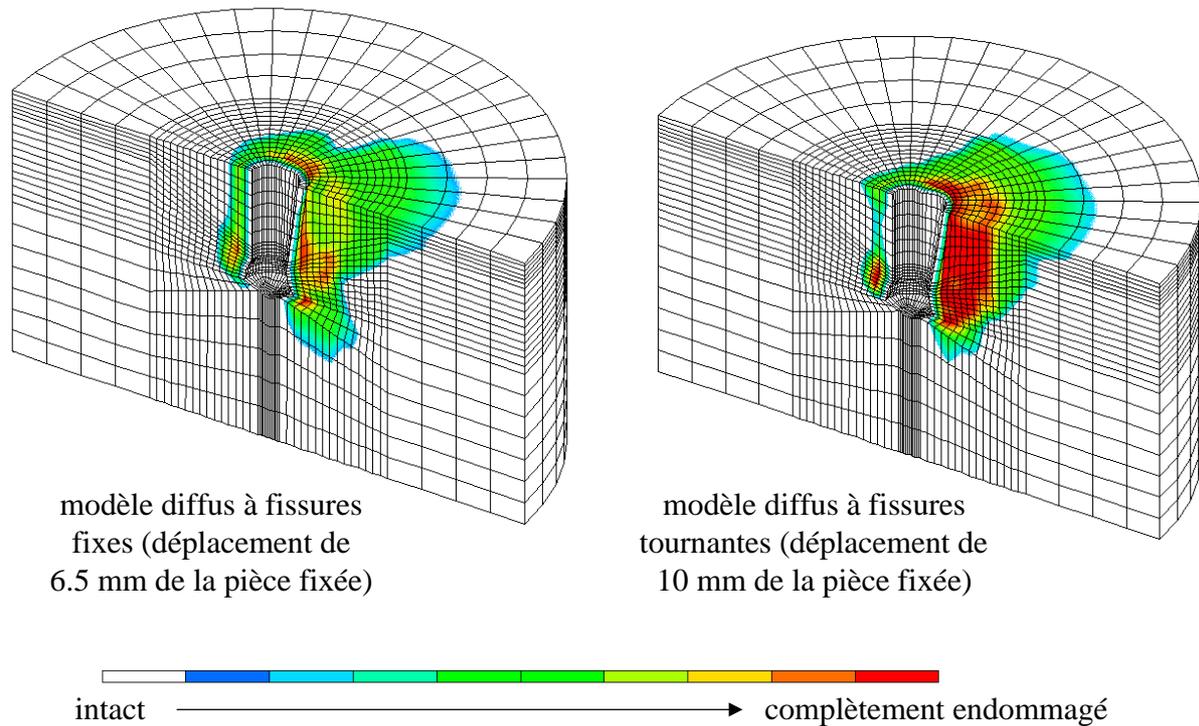


Figure IV.21: Endommagement lors d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton "dur" avec deux modèles de fissuration

Le modèle d'endommagement du béton diffus à fissures tournantes donne des résultats plus proches de ceux expérimentaux que le modèle à fissures fixes qui sous-estime nettement la force de cisaillement à la rupture (table IV.7 et figure IV.19). L'endommagement du béton observé numériquement avec les deux modèles de fissuration est similaire à celui observé expérimentalement (figure IV.21). Le mode de ruine expérimental de cette fixation est la rupture de l'acier de la cheville à la jonction entre la pièce fixée et le béton. En effet la fixation subit des déformations plastiques importantes au cours d'un tel essai de cisaillement (figure IV.20). Numériquement, le calcul s'arrête à cause de la distorsion d'un élément du béton situé à l'avant de la cheville qui est complètement écrasé par celle-ci (figure IV.22).

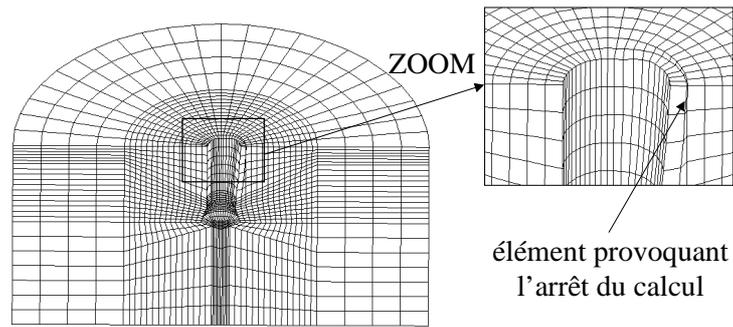


Figure IV.22: Distorsion d'un élément du maillage du béton provoquant l'arrêt du calcul lors de la simulation d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b

IV.2.4. Comportement au cisaillement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton avec effet de bord

IV.2.4.1. Mise en données

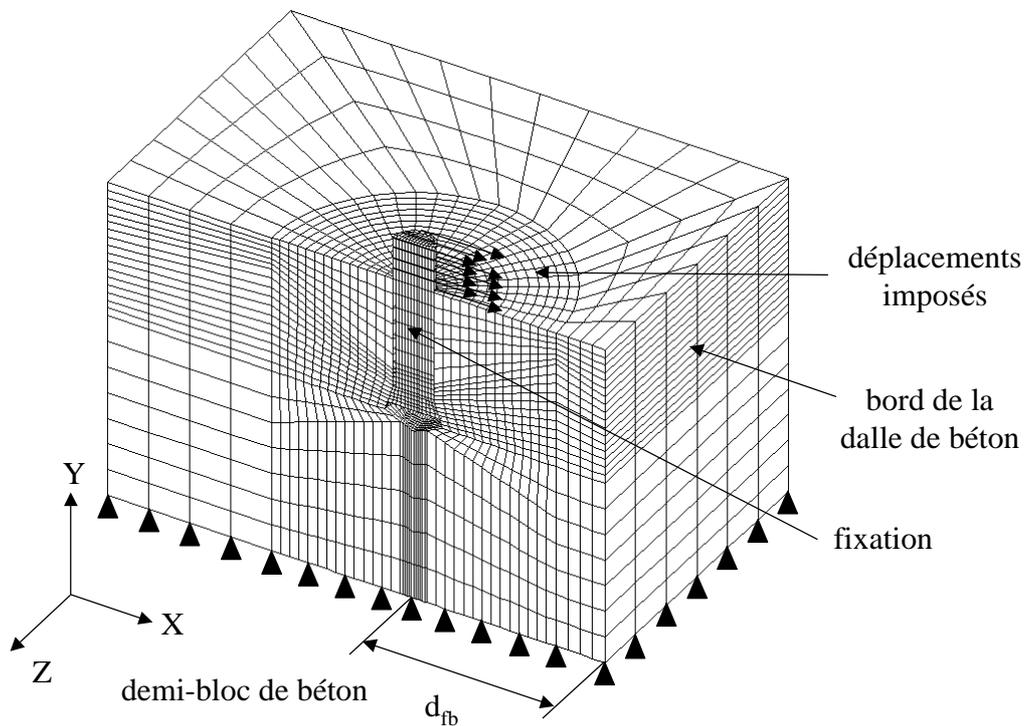


Figure IV.23: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton avec prise en compte de l'effet de bord

Pour cette simulation, l'effet de bord est pris en compte et la distance, notée d_{fb} , entre l'axe de la fixation et le bord de la dalle du côté de la direction de la charge correspond à la distance pour laquelle la force de cisaillement à la rupture est égale à 60% de la force mesurée dans le cas sans effet de bord (figure IV.23). La fixation étudiée correspond à celle analysée dans le paragraphe précédent IV.2.3., à savoir la SPIT FIXFORM 18x80M12/20D, notée C18b. La fixation est maillée avec un seul corps déformable et le coefficient de frottement μ entre la cheville et le béton est toujours égal à 0.4. Les propriétés mécaniques du béton et du matériau constituant la cheville restent inchangées.

IV.2.4.2. Résultats numériques

Aux vues des résultats obtenus dans le paragraphe précédent IV.2.3., la simulation de ce test de cisaillement a été effectuée avec le modèle d'endommagement du béton diffus à fissures tournantes et les résultats sont donnés table IV.8.

	simulation (fissures tournantes)	expérience
F_{uc} (sans effet de bord)	77000 N	80000 N
F_{uc} (avec effet de bord)	65000 N	48000 N

Table IV.8: Force de cisaillement à la rupture F_{uc} de la cheville SPIT FIXFORM C18b avec prise en compte de l'effet de bord.

La force de cisaillement à la rupture de la fixation SPIT FIXFORM C18b est diminuée par la proximité du bord de la dalle de béton (table IV.8). Cependant, dans le cas où l'effet de bord est pris en compte, la force à la rupture est surestimée numériquement. Cette différence est due au fait que l'endommagement dans le bloc de béton ne se propage pas aussi rapidement vers le bord que lors des essais expérimentaux. De plus, les courbes numérique et expérimentale (sans effet de bord) liant la force de cisaillement au déplacement de la pièce fixée ont des allures différentes (figure IV.19), notamment dans la première moitié où les forces réelles sont surestimées par le calcul. Ce phénomène explique également la différence entre les résultats expérimentaux et numériques. Le mode de ruine de la fixation SPIT FIXFORM C18b en cisaillement avec prise en compte de l'effet de bord est la rupture d'un cône de béton à l'avant de la cheville, phénomène également observé avec les simulations (figure IV.24).

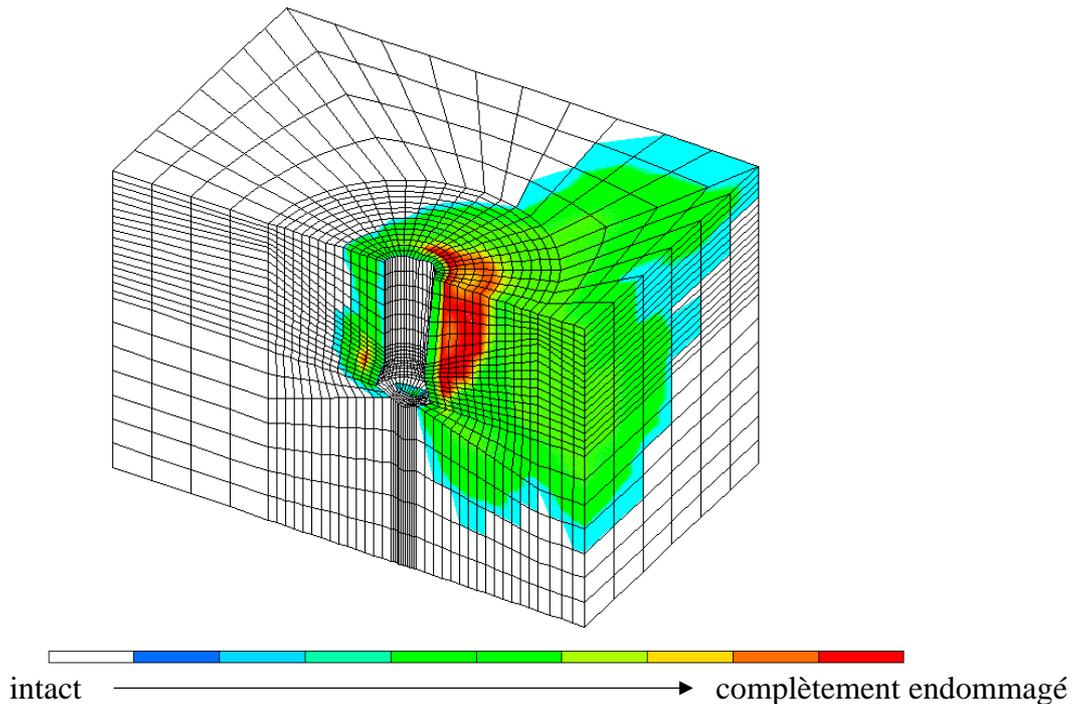


Figure IV.24: Endommagement lors d'un test de cisaillement de la cheville SPIT FIXFORM C18b ancrée dans une dalle de béton "dur" avec prise en compte de l'effet de bord

IV.2.5. Comportement à l'arrachement de deux fixations ancrées dans une dalle de béton: influence de l'entraxe

IV.2.5.1. Mise en données

Le but de l'étude présentée dans ce paragraphe est de montrer la faisabilité de la modélisation de deux chevilles ancrées dans une même dalle de béton et soumises à un test d'arrachement avec le code de calcul par éléments finis PLAST3.

La fixation modélisée est la cheville SPIT FIXFORM 12x40M8/15V (C12) étudiée au paragraphe IV.2.2. Deux chevilles C12 sont ancrées dans une même dalle de béton (sans prise en compte de l'effet de bord) et soumises à un essai d'arrachement simulé en imposant le même déplacement aux nœuds supérieurs de chaque cheville (figure IV.25). Chaque fixation est modélisée par un seul corps déformable et le coefficient de frottement μ entre la cheville et le béton est égal à 0.4. La valeur de l'entraxe entre les deux fixations d_c correspond à la distance pour laquelle la force d'arrachement à la rupture est égale à 70% de la force mesurée dans le cas où une seule cheville est ancrée dans la dalle.

Compte tenu de la symétrie présentée par la géométrie du problème et par la direction de la sollicitation, seul un demi-bloc de béton avec deux demi-fixations a été analysé avec les conditions aux limites appropriées. Le béton utilisé pour cette simulation est le béton "dur" (table IV.1) et le matériau de la fixation est celui de la cheville SPIT RING (table IV.2).

Afin d'étudier l'influence de l'entraxe, une simulation d'un test d'arrachement d'une seule cheville SPIT FIXFORM C12 ancrée dans une dalle de béton a été effectuée avec un maillage similaire pour le béton et la fixation à celui utilisé pour la simulation de deux fixations ancrées dans une même dalle (figure IV.25).

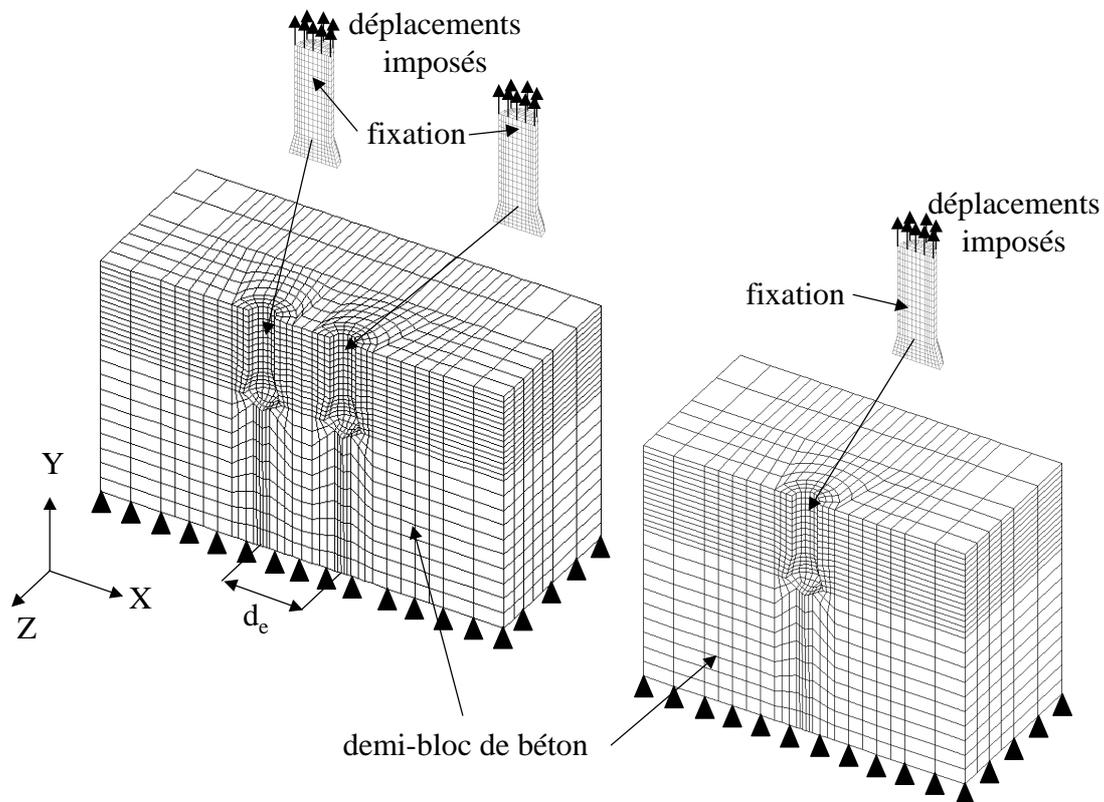


Figure IV.25: Maillage et conditions aux limites pour la simulation 3D d'un test d'arrachement d'une ou deux chevilles SPIT FIXFORM C12 ancrées dans une même dalle de béton (sans effet de bord)

IV.2.5.2. Résultats numériques

Les simulations de ces tests d'arrachement ont été effectuées avec le modèle d'endommagement du béton diffus à fissures tournantes et les résultats obtenus sont donnés table IV.9.

	simulation (fissures tournantes)	expérience
F_{ua} (une cheville)	30000 N	24800 N
F_{ua} (deux chevilles)	22000 N	17360 N

Table IV.9: Force d'arrachement à la rupture F_{ua} pour une cheville SPIT FIXFORM C12 avec une ou deux fixations ancrées dans une même dalle de béton

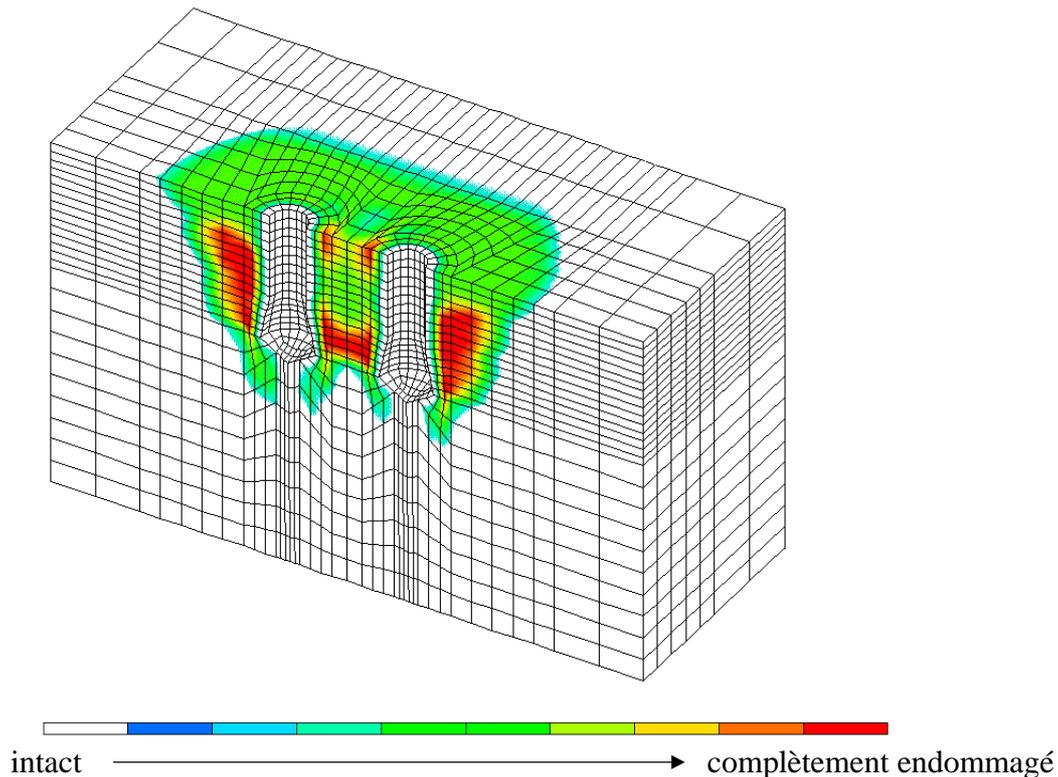


Figure IV.26: Endommagement lors d'un test d'arrachement de deux chevilles SPIT FIXFORM C12 ancrées dans une même dalle de béton "dur"

Lorsque deux chevilles SPIT FIXFORM C12 sont ancrées dans une même dalle de béton avec un entraxe égal à d_e , la force d'arrachement à la rupture par cheville est égale à 73% (70% expérimentalement) de celle calculée avec une seule fixation ancrée dans la dalle (table IV.9). Ce phénomène est engendré par la rencontre des deux cônes de fissuration du béton entre les deux chevilles (figure IV.26). Les cônes de fissuration ne peuvent pas se propager correctement et la ruine en est accélérée. Les forces d'arrachement à la rupture sont surestimées par cette modélisation dans tous les cas (que ce soit avec une ou deux chevilles ancrées dans une même dalle de béton). Cela provient des approximations faites lors des

simulations (maillage du bloc de béton relativement grossier, douilles non modélisées...). Cependant, l'analyse présentée avait pour objectif de montrer la *faisabilité* d'une telle étude et cet objectif a été atteint. Il faudrait à présent affiner la modélisation en utilisant un maillage plus fin pour le béton et en considérant que chaque fixation est constituée de deux corps déformables, à savoir la douille et la cheville.

IV.2.6. Conclusion

Des simulations de tests d'arrachement et de cisaillement de fixations de la gamme SPIT FIXFORM ont été réalisées en trois dimensions avec le code de calcul par éléments finis PLAST3 avec les modèles d'endommagement du béton diffus à fissures fixes et à fissures tournantes. Il apparaît que c'est ce dernier modèle qui permet d'obtenir les résultats numériques les plus proches de ceux expérimentaux, notamment dans le cas du cisaillement, ce qui confirme les conclusions tirées au chapitre III.

Les simulations de tests de cisaillement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton sont stoppées à cause de la distorsion d'un élément du maillage du bloc de béton. Ce phénomène est directement lié au limiteur de localisation, basé sur l'énergie de rupture, utilisé dans le modèle d'endommagement du béton. Ce limiteur n'est pas assez puissant et la déformation se localise dans quelques éléments seulement. Un remède à ce problème est soit d'utiliser une technique de remaillage adaptatif mais cela nécessite la définition d'un critère de remaillage et, de plus, la gestion d'un tel outil en trois dimensions est compliquée, soit d'enrichir la description mécanique du milieu en développant un limiteur de localisation qui introduit un terme d'ordre supérieur tel que la régularisation viscoplastique, le modèle non local, etc... (cf. chapitre III, paragraphe III.2.5.5.).

Les études de cas tridimensionnelles présentées dans cette partie ont montré la capacité du code de calcul par éléments finis PLAST3 à modéliser de façon réaliste l'ensemble {cheville – douille d'expansion} ancré dans une structure en béton et soumis à divers types de sollicitations. Les forces à la rupture d'arrachement ou de cisaillement, d'une ou de plusieurs fixations ancrées dans une même dalle de béton, avec prise en compte des effets de bord ou non, peuvent être prédites de façon fiable ainsi que l'endommagement et la fissuration du béton et la déformation plastique des éléments de la fixation. Cependant, un effort reste encore à fournir en vue d'améliorer les résultats obtenus dans le cas de la prise en compte de la distance entre la fixation et le bord de la dalle. Dans ce cas, les forces à la rupture de la cheville sont supérieures à celles obtenues expérimentales mais une telle

simulation a permis dans un premier temps d'observer et de comprendre le phénomène physique conduisant à la ruine de la fixation.

Conclusions et perspectives

Un code de calcul par éléments finis en trois dimensions, PLAST3, dédié à l'étude d'une ou plusieurs chevilles à expansion ancrées dans une dalle de béton et soumises à une sollicitation quelconque a été développé et ses caractéristiques sont exposées dans ce mémoire. Pour traiter efficacement le problème considéré, ce code, basé sur une formulation dynamique explicite, inclut les grandes déformations, le comportement élastoplastique des matériaux avec un module spécifique d'endommagement et de fissuration du béton ainsi que la gestion du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables.

Il a été montré que le contact avec frottement est prépondérant dans le problème étudié puisque, au minimum, trois corps déformables en contact doivent être modélisés: la cheville, la douille et le béton. Un nouvel algorithme de contact tridimensionnel compatible avec les opérateurs d'intégration explicites et basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" a été développé en conjonction avec le modèle de frottement de Coulomb sans régularisation de la force tangentielle de contact en fonction de la vitesse relative tangentielle. Outre son efficacité, cet algorithme possède de nombreux avantages tels que la précision, la stabilité et une convergence rapide.

Le comportement d'une fixation est directement lié aux propriétés mécaniques du béton dans lequel elle est ancrée. Il est donc nécessaire de modéliser ce comportement de façon précise en prenant en compte la fissuration. Deux modèles d'endommagement du béton en tension, basés sur une approche diffuse ("*smearred crack approach*") ont été développés: le modèle diffus à fissures fixes et le modèle diffus à fissures tournantes. Les différents exemples traités dans les chapitres III et IV ont montré que le second modèle donne les résultats numériques les plus proches des résultats expérimentaux. D'autre part, afin d'éviter une dépendance pathologique de la solution vis à vis du maillage, la mécanique de la rupture dont le paramètre fondamental de contrôle de propagation de fissure est l'énergie de rupture est introduite. Ce modèle est plus connu sous le nom de théorie de la bande de fissure et sert de limiteur de localisation des déformations. Le comportement du béton en compression est différent de celui en tension et est supposé élastoplastique avec une surface de charge de type Drucker-Prager modifiée.

L'originalité de ce travail de recherche réside dans la réalisation d'un code de calcul par éléments finis tridimensionnel qui inclut toutes les non linéarités nécessaires à la résolution du problème traité (grandes déformations, non linéarités matérielles, géométriques,

dues au contact...), ce qui n'est pas le cas des logiciels commerciaux. En effet, pour répondre de façon satisfaisante aux problèmes spécifiques posés par la technologie des fixations, aucun de ces aspects ne doit être négligé et c'est ce qui a été réalisé avec PLAST3. Ainsi, en plus des simulations classiques de tests d'arrachement d'une seule cheville ancrée dans un bloc de béton, des simulations originales de tests de cisaillement ou d'arrachement d'une ou plusieurs fixations ancrées dans une même dalle de béton avec prise en compte des effets de bords ont été effectuées. Ces exemples permettent de valider le logiciel PLAST3 et ont montré sa capacité à prédire de façon fiable et réaliste les forces d'arrachement ou de cisaillement à la rupture d'une fixation ainsi que l'endommagement du béton dans lequel elle est ancrée.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées à ce travail de recherche.

Au niveau du code de calcul par éléments finis PLAST3, il serait nécessaire de résoudre les problèmes liés à la distorsion d'éléments du maillage rencontrés lors des simulations de tests de cisaillement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton et provoquant l'arrêt du calcul. Une solution serait d'introduire une technique de remaillage adaptatif. Cependant, outre le fait que ces techniques sont lourdes à gérer en trois dimensions, la définition d'un critère correct de remaillage pour un milieu continu non standard et inélastique est un problème délicat et non résolu à l'heure actuelle. En fait, une solution efficace serait d'enrichir la description mécanique du milieu en introduisant un autre limiteur de localisation plus puissant que celui basé sur l'énergie de rupture contenu actuellement dans PLAST3. Par exemple, la technique de régularisation viscoplastique s'adapterait correctement au caractère dynamique transitoire du code et ne nécessiterait pas le développement complet d'un nouveau modèle.

Néanmoins, le code de calcul par éléments finis PLAST3 peut être exploité dans son état actuel de façon fiable. Il peut être utilisé pour étudier des gammes complètes de fixations à géométrie plus complexe que les chevilles SPIT FIXFORM analysées dans le chapitre IV ou être appliqué à d'autres chevilles que celles à expansion. Des études paramétriques des différents coefficients de frottement, des matériaux constituant les éléments de fixations, de la distance entre la fixation et le bord de la dalle ou encore de l'entraxe entre deux chevilles peuvent être réalisées suivant la demande des industriels. Des analyses préliminaires peuvent être effectuées en deux dimensions avec le code de calcul PLAST2 puis les résultats peuvent

être affinées en trois dimensions avec PLAST3. Les possibilités sont nombreuses et les codes de calculs par éléments finis PLAST2 et PLAST3 peuvent être utilisés pour améliorer les fixations existantes ainsi que pour en développer de nouvelles.

A plus long terme, les codes de calcul par éléments finis PLAST2 et PLAST3 pourraient être utilisés pour élaborer une théorie d'utilisation et de prédiction des charges et des modes de ruine des chevilles à expansion en tenant compte des paramètres tels que les distances aux bords de dalle, l'entraxe, le type de chargement, les propriétés mécaniques des différents matériaux, les dimensions de la cheville, etc. Le but serait de construire un modèle de calcul empirique, sur les bases théoriques de la mécanique de la rupture, et qui soit fiable et plus simple d'utilisation que les modèles déjà existants.

Références bibliographiques

- [Alg98] **AL-GADHIB, A.H., ASAD-UR-RAHMAN, K., BALUCH, M.H.** CDM based finite element code for concrete in 3-D. *Computers and Structures*, 1998, vol. 67, pp. 451-462.
- [Avi92] **AVITZUR, B.** The upper bound approach to the friction wave model. *Journal of Materials Processing Technology*, 1992, vol. 34, pp. 201-209.
- [Bai94] **BAILLET, L.** Modélisation du frottement pour les opérations de matricage. Thèse sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1994, 197p.
- [Bai96] **BAILLET, L., BRUNET, M., BERTHIER, Y.** Experimental and numerical dynamic modelling of ironing process. *Journal of Materials Processing Technology*, 1996, vol. 60, pp. 677-684.
- [Bai99] **BAILLET, L., WALTER, H., BRUNET, M.** A 3D contact algorithm using an explicit F.E.M. applied to ironing process. *Proceedings of the Fourth International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes (NUMISHEET' 99), Besançon - France, 13-17 septembre 1999*. Edité par J-C. Gelin et P. Picart, 1999. pp. 209-214.
- [Bat79] **BATHE, K.J., RAMASWAMY, S.** On three-dimensional nonlinear analysis of concrete structures. *Nuclear Engineering and Design*, 1979, vol. 52, pp. 385-409.
- [Bat85] **BATHE, K.J., CHAUDHARY, A.** A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985, vol. 21, pp. 65-88.
- [Bay90] **BAY, N., WANHEIM, T.** Contact phenomena under bulk plastic deformation conditions. *Advanced Technology of Plasticity*, 1990, vol. 4, pp. 1677-1691.
- [Baz80] **BAZANT, Z.P., GAMBAROVA, P.** Rough cracks in reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1980, vol. 106, n° 4, pp. 819-842.
- [Baz83a] **BAZANT, Z.P., OH, B.H.** Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 1983, vol. 16, n° 93, pp. 155-177.
- [Baz83b] **BAZANT, Z.P.** Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1983, vol. 109, n° 3, pp. 849-865.
- [Baz84a] **BAZANT, Z.P., BELYTSCHKO, T.B., CHANG, T.P.** Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1984, vol. 110, n° 12, pp. 1666-1692.
- [Baz84b] **BAZANT, Z.P.** Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1984, vol. 110, n°4, pp. 518-535.

- [Baz88a] **BAZANT, Z.P., LIN, F.P.** Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1988, vol. 114, n°11, pp. 2493-2510.
- [Baz88b] **BAZANT, Z.P., LIN, F.P.** Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, vol. 26, n°8, pp. 1805-1823.
- [Baz88c] **BAZANT, Z.P., PIJAUDIER-CABOT, G.** Non-local continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1988, vol. 55, pp. 287-293.
- [Baz90] **BAZANT, Z.P., OZBOLT, J.** Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1990, vol. 116, n°11, pp. 2485-2505.
- [Bel91] **BELYTSCHKO, T., NEAL, M.O.** Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 31, pp. 547-572.
- [Bel94] **BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y., GU, L.** Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, vol. 37, pp. 229-256.
- [Bel95a] **BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y., GU, L., TABBARA, M.** Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, vol. 32, n°17-18, pp. 2547-2570.
- [Bel95b] **BELYTSCHKO, T., ORGAN, D., KRONGAUZ, Y.** A coupled finite element-element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, vol. 17, n°3, pp. 185-195.
- [Bel96] **BELYTSCHKO, T., TABBARA, M.** Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, vol. 39, n°6, pp. 229-256.
- [Bha93] **BHATTACHARJEE, S.S., LEGER, P.** Finite element modelling of the tensile strain softening behaviour of plain concrete structures. *Engineering Computations*, 1993, vol. 10, n° 3, pp. 205-221.
- [Bic83] **BICANIC, N., ZIENKIEWICZ, O.C.** Constitutive model for concrete under dynamic loading. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1983, vol. 11, pp. 689-710.
- [Bic94] **BICANIC, N., PEARCE, C.J., OWEN, D.R.J.** Failure predictions of concrete like materials using softening Hoffman plasticity model. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994, pp. 185-198.

- [Bou94] **BOULMANE, L.** *Application des techniques implicites-explicites de la dynamique transitoire à la simulation numérique en mise en forme des métaux.* Thèse de doctorat en sciences pour l'ingénieur: Université de Franche-Comté, 1994, 174p.
- [Bru87] **BRUNET, M.** *Modélisation numérique des grandes déformations élastoplastiques avec contact et frottement: application à des problèmes spécifiques de la mise en forme des métaux.* Thèse de Doctorat d'Etat Es-sciences: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Université Claude Bernard Lyon I, 1987, 202p.
- [Bru88] **BRUNET, M.** A finite element method for unilateral contact and friction problem involving finite strain and large displacement. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Special Issue*, 1988, supplément n° 1 au vol. 7, pp. 209-220.
- [Bru89] **BRUNET, M.** A solution method for large strain of anisotropic material with contact and friction boundary conditions. *Proceedings of the fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, Lausanne-Switzerland, september 11-15 1989.* Edited by R. Gruber, J. Periaux and R.P. Shaw. Berlin: Springer Verlag, 1989. vol. 2, pp. 369-374.
- [Buy85] **BUYUKOZTURK, O., SHAREEF, S.S.** Constitutive modeling of concrete in finite element analysis. *Computers and Structures*, 1985, vol. 21, n° 3, pp. 581-609.
- [Car91] **CARPENTER, N.J., TAYLOR, R.L., KATONA, M.G.** Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, vol. 32, pp. 103-128.
- [Cer85] **CERVENKA, V.** Constitutive model for cracked reinforced concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, 1985, vol. 82, pp. 877-882.
- [Cer92] **CERVENKA, V., PULK, R.** Computer models of concrete structures. *Structural Engineering International 2/92, IABSE*, 1992, vol. 2, n° 2, pp. 103-107.
- [Cer96] **CERVENKA, V., CERVENKA, J.** Computer simulation as a design tool for concrete structures. *The second International Conference in Civil Engineering on Computer Applications, Bahrain, april 6-8 1996.*
- [Cer87] **CERVERA, M., HINTON, E., HASSAN, O.** Nonlinear analysis of reinforced concrete plate and shell structures using 20-noded isoparametric brick elements. *Computers and Structures*, 1987, vol. 25, n° 6, pp. 845-869.
- [Cer88] **CERVERA, M., HINTON, E., BONET, J., BICANIC, N.** Nonlinear transient dynamic analysis of three dimensional structures - a finite element program for steel and reinforced concrete materials. *Numerical methods and*

- software for dynamic analysis of plates and shells*. Edited by E. Hinton. Swansea: Pineridge Press, 1988, pp. 320-391.
- [Ces93] **CESCOTTO, S., CHARLIER, R.** Frictional contact finite elements based on mixed variational principles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, vol. 36, pp. 1681-1701.
- [Ces94] **CESCOTTO, S., ZHU, Y.Y.** Large strain dynamic analysis using solid and contact finite element based on a mixed formulation; application to metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 1994, vol. 45, pp. 657-663.
- [Cha87] **CHANG, T.Y., SALEEB, A.F., SHYU, S.C.** Finite element solutions of two-dimensional contact problems based on a consistent mixed formulation. *Computers and Structures*, 1987, vol. 27, n° 4, pp. 455-466.
- [Cha95] **CHARVIN S., ABDELLI, B.** *Faisabilité d'une modélisation par éléments finis en grandes déformations de l'ensemble "cheville-douille-béton"*. Lyon: Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Institut National des Sciences Appliquées, 1995. 63 p. Rapport de Projet de Fin d'Etude.
- [Cha86] **CHAUDHARY, A.B., BATHE, K.J.,** A solution method for static and dynamic analysis of three -dimensional contact problems with friction. *Computers and Structures*, 1986, vol. 24, n° 6, pp. 855-873.
- [Che86] **CHEN, W.H., TSAI, P.** Finite element analysis of elastodynamic sliding contact problems with friction. *Computers and Structures*, 1986, vol. 22, n° 6, pp. 925-938.
- [Che85] **CHENG, J.H., KIKUCHI, N.** An incremental constitutive relation of unilateral contact friction for large deformation analysis. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1985, vol. 52, pp; 639-648.
- [Cri89] **CRISFIELD, M.A., WILLS, J.** Analysis of R/C panels using different concrete models. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1989, vol. 115, n° 3, pp. 578-597.
- [Dah90] **DAHLBLOM, O., OTTOSEN, N.S.** Smearred crack analysis using generalized fictitious crack model. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1990, vol. 116, n° 1, pp. 55-76.
- [Deb85] **DE BORST, R., NAUTA, P.** Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 1985, vol. 2, n° 1, pp. 35-46.
- [Deb87] **DE BORST, R.** Smearred cracking, plasticity, creep, and thermal loading - a unified approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, vol. 62, pp. 89-110.
- [Deb91] **DE BORST, R.** Simulation of strain localisation: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, 1991, vol. 8, n° 4, pp. 317-332.

- [Deb93] **DE BORST, R., SLUYS, L.J., MUHLHAUS, H.B., PAMIN, J.** Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 1993, vol. 10, n° 2, pp. 99-121.
- [Deb94] **DE BORST, R., FEENSTRA, P.H., PAMIN, J., SLUYS, L.J.** Some current issues in computational mechanics of concrete structures. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994, pp. 283-302.
- [Deb96] **DE BORST, R., PAMIN, J.** Gradient plasticity in numerical simulation of concrete cracking. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 1996, vol. 15, n° 2, pp. 295-320.
- [Don89] **DONEA, J.** Finite strain plasticity in transient dynamic calculations. *Proceedings of the fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, Lausanne-Switzerland, september 11-15 1989*. Edited by R. Gruber, J. Periaux and R.P. Shaw. Berlin: Springer Verlag, 1989. vol. 1, pp. 147-154.
- [Dvo89] **DVORKIN, E.N., CUITINO, A.M., GIOIA, G.** A concrete material model based on non-associated plasticity and fracture. *Engineering Computations*, 1989, vol. 6, n° 4, pp. 281-294.
- [Fee94] **FEENSTRA, P.H., DE BORST, R., ROTS, J.G.** An energy-based composite plasticity model for concrete. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994, pp. 83-92.
- [Fee95] **FEENSTRA, P.H., DE BORST, R.** A plasticity model and algorithm for mode-I cracking in concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, vol. 38, pp. 2509-2529.
- [Gin94] **GINOUX, S.** *Faisabilité de la modélisation d'un ensemble cheville/douille/béton en prenant en compte l'endommagement du béton*. Diplôme d'Etudes Approfondies de Mécanique: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1994. 64 p.
- [Gon91] **GONZALEZ VIDOSA, F., KOTSOVOS, M.D., PAVLOVIC, M.N.** Nonlinear finite element analysis of concrete structures: performance of a fully three-dimensional brittle model. *Computers and Structures*, 1991, vol. 40, n° 5, pp. 1287-1306.
- [Gru97] **GRUJOVIC, N., ZIVKOVIC, M., KOTSOVOS, M., PAVLOVIC, M., KOJIC, M.** A numerical algorithm for elastic-plastic analysis of one-parameter concrete model. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 1469-1474.

- [Gup84] **GUPTA, A.K., AKBAR, H.** Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1984, vol. 110, n° 8, pp. 1735-1746.
- [Hal85] **HALLQUIST, J.O., GOUDREAU, G.L., BENSON, D.J.** Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 51, p 107-137.
- [Hel87] **HELLIER, A.K., SANSALONE, M., CARINO, N.J., STONE, W.C., INGRAFFEA, A.R.** Finite-element analysis of the pullout test using a nonlinear discrete cracking approach. *Cement, Concrete and Aggregates*, 1987, vol. 9, n° 1, pp. 20-29.
- [Hib98a] **HIBBIT, KARLSSON, SORENSEN.** ABAQUS Theory Manual, version 5.8, 1998.
- [Hib98b] **HIBBIT, KARLSSON, SORENSEN.** ABAQUS/Explicit Example Problems Manual, version 5.8, 1998.
- [Hil76] **HILLERBORG, A., MODEER, M., PETERSSON, P.E.** Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 1976, vol. 6, pp. 773-782.
- [Hug76] **HUGUES, T.J.R., TAYLOR, R.L., SACKMAN, J.L., CURNIER, A., KANOKNUKULCHAI, W.** A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1976, vol. 8, pp. 249-276.
- [Hug87] **HUGHES, T.J.R.** *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987. 803 p.
- [Ing84] **INGRAFFEA, A.R., GERSTLE, W.H., GERGELY, P., SAOUMA, V.** Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1984, vol. 110, n° 4, pp. 871-890.
- [Jir97] **JIRASEK, M., ZIMMERMANN, T.** Nonlocal rotating crack model with transition to scalar damage. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 1514-1521.
- [Jir98a] **JIRASEK, M., ZIMMERMANN, T.** Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1998, vol. 124, n° 3, pp. 277-284.
- [Jir98b] **JIRASEK, M., ZIMMERMANN, T.** Analysis of rotating crack model. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1998, vol. 124, n° 8, pp. 842-851.
- [Jir98c] **JIRASEK, M.** *Finite elements with embedded cracks*. Lausanne (Suisse): Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne - Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus, 1998, 79 p. LSC Internal Report 98/01.

- [Jus94] **JUSSEL, P., WALL, F.J., BOURGUND, U.** Application of axisymmetric finite element analysis for anchor in concrete. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994, pp. 1047-1056.
- [Kan90] **KANTO, Y., YAGAWA, G.** A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, vol. 29, pp. 755-774.
- [Kim96] **KIM, J.O., KWAK, B.M.** Dynamic analysis of two-dimensional frictional contact by linear complementarity problem formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, vol. 33, n° 30, pp. 4605-4624.
- [Kli98] **KLINGNER, R.E., HALLOWELL, J.M., LOTZE, D., PARK, H-G., RODRIGUEZ, M. ZHANG, Y-G.** *Anchor bolt behavior and strength during Earthquakes*. Division of Engineering Technology, Office of Nuclear Regulatory Research, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, DC: 1998. 358p. Technical Report number NUREG/CR-5434.
- [Kot95] **KOTSOVOS, M.D., PAVLOVIC, M.N.** *Structural concrete. Finite-element analysis for limit-state design*. London: Thomas Telford Publications, 1995, 550 p. ISBN 0 7277 2027 9.
- [Kro97] **KROPLIN, B., WEIHE, S.** Constitutive and geometrical aspects of fracture induced anisotropy. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 255-279.
- [Kul89] **KULAK, R.F.** Adaptive contact elements for three-dimensional explicit transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, vol. 72, pp. 125-151.
- [Kup69] **KUPFER, H., HILSDORF, H.K., RUSCH, H.** Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of American Concrete Institute*, 1969, vol. 66, n° 8, pp. 656-666.
- [Kup73] **KUPFER, H.B., GERSTLE, K.H.** Behaviour of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1973, vol. 99, n° 4, pp. 853-866.
- [Kwa91] **KWAK, B.M.** Complementarity problem formulation of three-dimensional frictional contact. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 1991, vol. 58, pp. 134-140.
- [Kwa97] **KWAK, B.M.** Nonlinear complementarity problem formulation of three-dimensional frictional contact and its numerical implementations. *Computational Methods in Contact Mechanics III, Madrid - Espagne, 1-3*

- juillet 1997. Edité par M.H. Aliabadi et A. Samartin. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997. pp. 159-169.
- [Lin97] **LING, W., STOLARSKI, H.K.** On elasto-plastic finite element analysis of some frictional problems with large sliding. *Engineering Computations*, 1997, vol. 14, n° 5, pp. 558-580.
- [Lon96] **LONG, S.** *Validation de la modélisation par éléments finis en grandes déformations de l'ensemble 'cheville-douille-béton'*. Diplôme d'Etudes Approfondies de Mécanique: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1996. 95 p.
- [Lop97] **LOPEZ CELA, J.J., PEGON, P., CASADEI, F.** Fast transient analysis of reinforced concrete structures with Drucker-Prager model and viscoplastic regularization. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 1537-1542.
- [Lor90] **LORET, B., PREVOST, J.H.** Dynamic strain localization in elasto-(visco-) plastic solids. Part 1: general formulation and one-dimensional examples. Part 2: plane strain examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, vol 83, pp. 247-273 et 275-294.
- [Lub89] **LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S., ONATE, E.** A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, vol. 25, n° 3, pp. 299-326.
- [Mam99] **MAMDY-ANDRIEUX C.** *Analyse et simulation des contraintes d'origine thermique sur des structures réfractaires de centrales LFC*. Thèse sci.: Université d'Orléans, 1999, 217 p.
- [Mar84] **MARQUES, J.M.M.C.** Stress computation in elastoplasticity. *Engineering Computations*, 1984, vol. 1, n° 1, pp. 42-51.
- [Mef97] **MEFTA, F.** *Contribution à l'étude numérique des modes localisés de rupture dans les structures en béton de type poutres: approche multicouches par la plasticité au gradient*. Thèse sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1997, 217 p.
- [Mes97] **MESCHKE, G., LACKNER, R.** Anisotropic modelling of cracked concrete based on plasticity-damage theory. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 1543-1550.
- [Mes98] **MESCHKE, G., LACKNER, R., MANG, H.A.** An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, vol. 42, pp. 703-727.

- [Mic93] **MICHEL, B.** Modélisation thermo-élasto-visco-plastique de procédés de formage des métaux. . Thèse sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993, 173p.
- [Mos97] **MOSALAM, K.M., PAULINO, G.H.,** Evolutionary characteristic length method for smeared cracking finite element models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997, vol. 27, pp. 99-108.
- [Nag98] **NAGAI, G., YAMADA, T., WADA, A.** Finite element analysis of concrete material based on the 3-dimensional real image data. *Computational Mechanics - New Trends and Applications, Proceedings of WCCM IV, Buenos-Aires-Argentina, june 29 - july 2 1998*. [CD-ROM] Edited by S.R. Idelsohn, E. Onate and E.N. Dvorkin. Barcelona: CIMNE, 1998.
- [Ngo67] **NGO, D., SCORDELIS, A.C.** Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal of the American Concrete Institute*, 1967, vol. 64, n° 3, pp. 152-163.
- [Ohl97] **OHLSSON, U., OLOFSSON, T.** Mixed-mode fracture and anchor bolts in concrete analysis with inner softening bands. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1997, vol. 123, n° 10, pp. 1027-1033.
- [Oli89] **OLIVER, J.** A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, vol. 28, pp. 464-474.
- [Olo94] **OLOFSSON, T., KLISINSKI, M., NEDAR, P.** Inner softening bands: a new approach to localization in finite elements. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994. pp. 373-382.
- [Ona85] **ONATE, E., OLIVER, J., BUGEDA, G.** Finite element analysis of the non linear response of concrete dams subjected to internal loads. *Finite Element Methods for Nonlinear Problems, Trondheim-Norway, august 12-16 1985*. Edited by P.G. Bergan, K.J. Bathe and W. Wunderlich. Berlin: Springer Verlag, 1985. pp. 653-671.
- [Ona88] **ONATE, E., OLLER, S., OLIVER, J., LUBLINER, J.** A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity. *Engineering Computations*, 1988, vol. 5, n° 4, pp. 309-319.
- [Org98] **ORGANISATION EUROPEENNE POUR L'AGREMENT TECHNIQUE** *Guide d'agrément technique européen sur les chevilles métalliques pour béton*. France, Cahiers du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment. Mai 1998, n°3046, 102 p.
- [Ott77] **OTTOSEN, N.S.** A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1977, vol. 103, n° 4, pp. 527-535.

- [Ott81] **OTTOSEN, N.S.** Nonlinear finite element analysis of pull-out test. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1981, vol. 107, n° 4, pp. 591-603.
- [Owe80] **OWEN, D.R.J., HINTON, E.** *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea: Pineridge Press, 1980. 594 p. ISBN 0-906674-05-2.
- [Owe83] **OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., DAMJANIC, F.** Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1983, vol. 41, pp. 323-366.
- [Owe84] **OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A.,** Ultimate load analysis of reinforced concrete plates and shells including geometric nonlinear effects. *Finite element software for plates and shells*. Edited by E. Hinton and D.R.J. Owen. Swansea: Pineridge Press, 1984. pp. 327-388.
- [Ozb92] **OZBOLT, J., BAZANT, Z.P.** Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1992, vol. 118, n° 7, pp. 1365-1386.
- [Ozb96] **OZBOLT, J., BAZANT, Z.P.** Numerical smeared fracture analysis: nonlocal microcrack interaction approach. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1996, vol. 39, pp. 635-661.
- [Pam94] **PAMIN, J., DE BORST, R.** Gradient plasticity and finite elements in the simulation of concrete fracture. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994. pp. 393-402.
- [Pap93] **PAPADOPOULOS, P., TAYLOR, R.L.** A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems. *Computers and Structures*, 1993, vol. 46, n° 6, pp. 1107-1118.
- [Pea97] **PEARCE, C.J., BICANIC, N.** On multi-surface plasticity and Rankine model. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997. pp. 957-964.
- [Per92] **PERIC, D., OWEN, D.R.J.** Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, vol. 35, pp. 1289-1309.
- [Pie97] **PIETRZAK, G., CURNIER, A.** Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997. pp. 878-883.

- [Pul94] **PULK, R., OZBOLT, J., SCHLOTTKE, B.M., ELIGEHAUSEN, R.** Computer simulation of steel expansion anchors embedded into small concrete members. *Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings of EURO-C International Conference, Innsbruck-Austria, march 22-25 1994*. Edited by H. Mang, N. Bicanic and R. De Borst. Swansea: Pineridge Press, 1994. pp. 915-924.
- [Ras68] **RASHID, Y.R.** Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 1968, vol. 7, n° 4, pp. 334-344.
- [Rei86] **REINHARDT, H.W., CORNELISSEN, H.A.W., HORDIJK, D.A.** Tensile tests and failure analysis of concrete. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1986, vol. 112, n° 11, pp. 2462-2477.
- [Ros97] **ROSSI, P., ULM, F.J.** Size effects in the biaxial tensile-compressive behaviour of concrete: physical mechanisms and modelling. *Materials and Structures*, 1997, vol. 30, pp. 210-216.
- [Rot85] **ROTS, J.G., NAUTA, P., KUSTERS, G.M.A., BLAAUWENDRAAD, J.** Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, 1985, vol. 30, n° 1, pp. 1-48.
- [Rot87] **ROTS, J.G., DE BORST, R.** Analysis of mixed-mode fracture in concrete. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1987, vol. 113, n° 11, pp. 1739-1758.
- [Rot89a] **ROTS, J.G., BLAAUWENDRAAD, J.** Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? *Heron*, 1989, vol. 34, n° 1, pp. 1-59.
- [Rot89b] **ROTS, J.G., DE BORST, R.** Analysis of concrete fracture in "direct" tension. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, vol. 25, n° 12, pp. 1381-1394.
- [Rot91] **ROTS, J.G.** Smeared and discrete representations of localized fracture. *International Journal of Fracture*, 1991, vol. 51, pp. 45-59.
- [Sab94] **SABOURIN, F.** *Contribution à l'étude d'éléments finis triangulaires à trois nœuds de type coque: proposition d'un élément simplifié et application à l'emboutissage*. Thèse sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1994, 350 p.
- [Sao89] **SAOURIDIS, C., MAZARS, J.** Analysis of concrete structures by a multiscale damage approach. *Proceedings of the fifth International Symposium on Numerical Methods in Engineering, Lausanne-Switzerland, september 11-15 1989*. Edited by R. Gruber, J. Periaux and R.P. Shaw. Berlin: Springer Verlag, 1989. vol. 1, pp. 377-382.

- [Saos92] **SAOURIDIS, C., MAZARS, J.** Prediction of the failure and size effect in concrete via a bi-scale damage approach. *Engineering Computations*, 1992, vol. 9, n° 3, pp. 329-344.
- [Sch91] **SCHWEIZERHOF, K., HALLQUIST, J.O.**, Explicit integration schemes and contact formulations for thin metal forming. *FE-simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry, VDI Berichte 894, Zürich-Switzerland, may 14-16 1991*. Dusseldorf: VDI Verlag, 1991. pp. 405-439.
- [Sch92] **SCHWEIZERHOF, K., HALLQUIST, J.O., WAINSCOTT, B.** Improvements in contact algorithms for the simulation of thin sheet metal forming with explicit finite element programs. *Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Proceedings of NUMIFORM 92, Valbonne-France, september 14-18 1992*. Edited by J.L. Chenot, R.D. Wood and O.C. Zienkiewicz. Rotterdam: Balkema, 1992. pp. 535-542.
- [Sim85] **SIMO, J.C., WRIGGERS, P., TAYLOR, R.L.** A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 50, pp. 163-180.
- [Sim92] **SIMO, J.C., LAURSEN, T.A.** An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 1992, vol. 42, n° 1, pp. 97-116.
- [Sim86] **SIMONS, J.W., BERGAN, P.G.** A finite element formulation of three-dimensional contact problems with slip and friction. *Computational Mechanics*, 1986, vol. 1, pp. 153-164.
- [Sta98] **STAUB, C.** Modélisation dynamique des procédés de forgeage. Thèse sci.: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1998, 244 p.
- [Sui73] **SUIDAN, M., SCHNOBRICH, W.C.** Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1973, vol. 99, n° 10, pp. 2109-2122.
- [Tor87] **TORRENT, R.J., DVORKIN, E.N., ALVAREDO, A.M.** A model for work-hardening plasticity and failure of concrete under multiaxial stresses. *Cement and Concrete Research*, 1987, vol. 17, pp. 939-950.
- [Van91] **VAN MIER, J.G.M.** Mode I fracture of concrete: discontinuous crack growth and crack interface grain bridging. *Cement and Concrete Research*, vol. 21, n° 1, pp. 1-15.
- [Van97] **VAN MIER, J.G.M., SHAH, S.P., ARNAUD, M., et al.** Strain softening of concrete in uniaxial compression. *Materials and Structures*, 1997, vol. 30, pp. 195-209.
- [Wal97a] **WALTER, H., BAILLET, L., BRUNET, M.** Contact analysis for the modelling of anchors in concrete structures. *Computational Methods in Contact Mechanics III, Madrid - Espagne, 1-3 juillet 1997*. Edité par M.H.

- Aliabadi et A. Samartin. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997. pp. 341-349.
- [Wal97b] **WALTER, H., BAILLET, L., BRUNET, M.** Numerical modelling of the dynamic pull-out failure loads of anchors in concrete structures. *Structural Mechanics In Reactor Technology, Lyon - France, 17-22 août 1997*. Edité par M. Livolant, 1997. vol. 5, pp. 259-266.
- [Wal98] **WALTER, H., BAILLET, L., BRUNET, M.** Modelling of anchors in concrete structures with different contact and friction behaviours. *Computational Mechanics - New Trends and Applications, Proceedings of WCCM IV, Buenos-Aires - Argentine, 29 juin – 2 juillet 1998*. [CD-ROM] Edité par S.R. Idelsohn, E. Onate and E.N. Dvorkin. Barcelona: CIMNE, 1998.
- [Wal99a] **WALTER, H., BAILLET, L., BRUNET, M.** 3D finite element modelling of crack propagation in concrete during pull-out and shear tests of anchors. *Fracture and Damage Mechanics, Londres - Angleterre, 27-29 juillet 1999*. Edité par M.H. Aliabadi, 1999. pp. 403-411.
- [Wal99b] **WALTER, H., BAILLET, L., BRUNET, M.** 3D finite element modelling of anchors in concrete structures. *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics (ECCM), Munich - Allemagne, 31 août–3 septembre 1999*. [CD-ROM] Edité par W. Wunderlich, 1999.
- [Wan97] **WANG, J., NAVI, P., HUET, C.** Numerical analysis of crack propagation in tension specimens of concrete considered as a 2D multicroacked granular composite. *Materials and Structures*, 1997, vol. 30, pp. 11-21.
- [Wei97] **WEIHE, S.** Failure induced anisotropy in the framework of multi-surface plasticity. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997*. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E. Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997, pp. 1049-1056.
- [Wei98] **WEIHE, S., KRÖPLIN, B., DE BORST, R.** Classification of smeared crack models based on material and structural properties. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, n° 12, pp. 1289-1308.
- [Wis83] **WISSMANN, J.W., HAUCK, C.** Efficient elastic-plastic finite element analysis with higher order stress-point algorithms. *Computers and Structures*, 1983, vol. 17, n° 1, pp. 89-95.
- [Wri85] **WRIGGERS, P., SIMO, J.C.** A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1985, vol. 1, pp. 199-203.
- [Zho92] **ZHONG, Z.H., MACKERLE, J.** Static contact problems - a review. *Engineering Computations*, 1992, vol. 9, n° 1, pp. 3-37.

- [Zho94a] **ZHONG, Z.H., NILSSON, L.** Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis. *Computers and Structures*, 1994, vol. 52, n° 2, pp. 187-197.
- [Zho94b] **ZHONG, Z.H., NILSSON, L.** Lagrange multiplier approach for evaluation of friction in explicit finite-element analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1994, vol. 10, pp. 249-255.
- [Zie79] **ZIENKIEWICZ, O.C.** *La méthode des éléments finis* (traduit de la troisième édition anglaise). Paris: McGraw-Hill, 1979. 851 p. ISBN 2-7042-1007-1.

Annexe I:

**Equation d'équilibre et lois de
comportement élastoplastique
en grandes déformations**

A1.1. RAPPELS EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES DEFORMATIONS ..	177
A1.1.1. TENSEUR GRADIENT DE DÉFORMATION.....	177
A1.1.2. MESURES DES DÉFORMATIONS.....	178
A1.1.3. DÉCOMPOSITION POLAIRE.....	179
A1.1.4. TENSEUR DES VITESSES DE DÉFORMATION.....	180
A1.1.5. TENSEURS DES CONTRAINTES	180
A1.2. EQUATION D'EQUILIBRE NON LINEAIRE.....	181
A1.2.1. DISCRÉTISATION SPATIALE	182
A1.2.2. INTÉGRATION TEMPORELLE	185
A1.2.3. STABILITÉ.....	186
A1.3. LOIS DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUES.....	187
A1.3.1. GÉNÉRALITÉS	187
A1.3.2. DÉCOMPOSITION DE LA DÉFORMATION.....	188
A1.3.3. CRITÈRE DE PLASTIFICATION	188
A1.3.4. LOI D'ÉCOULEMENT	189
A1.3.5. LOI D'ÉCROUISSAGE.....	190
A1.3.6. INTÉGRATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT	191

Lors d'un test d'arrachement ou de cisaillement d'une fixation ancrée dans une dalle de béton, les corps intervenant dans ce problème peuvent subir des modifications importantes de leur géométrie, c'est-à-dire des grandes transformations géométriques (écrasement de la douille, par exemple). L'hypothèse des petites déformations ne s'applique donc pas dans ce cas et le problème doit être formulé en grandes déformations.

Nous exposons dans cette annexe les principales caractéristiques à partir desquelles ont été développés les programmes de calcul par éléments finis présentés dans ce mémoire, PLAST2 et PLAST3, en deux et trois dimensions respectivement. Ces codes sont basés sur une méthode *dynamique explicite en grandes transformations* avec des *lois de comportement élastoplastiques* utilisées pour les métaux. De telles méthodes ont été développées dans de nombreux ouvrages et thèses et ne seront donc pas détaillées ici ([Zie79], [Owe80], [Bru87], [Hug87], [Mic93], [Bou94], [Sab94], [Sta98]).

A1.1. RAPPELS EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES DEFORMATIONS

A1.1.1. Tenseur gradient de déformation

Considérons un solide déformable dans une configuration de référence C_0 à l'instant t_0 et dans une configuration actuelle C_t à l'instant t (figure A1.1). Un point matériel M de ce solide a pour coordonnées X à l'instant t_0 et x à l'instant t dans le repère cartésien (X_1, X_2, X_3) .

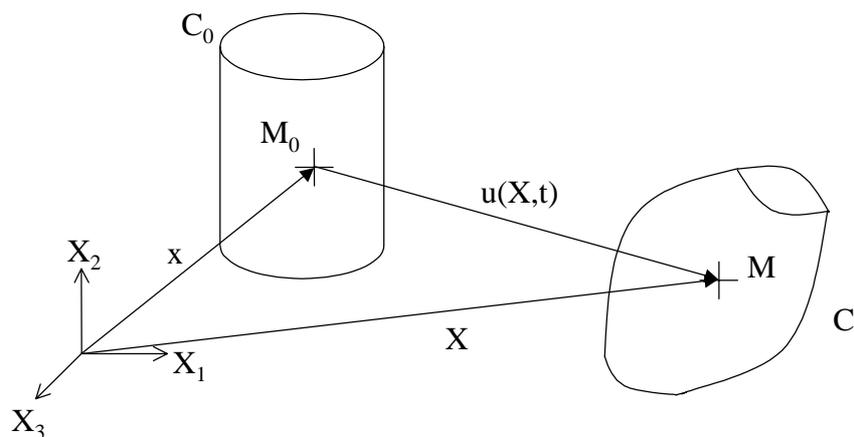


Figure A1.1: Déformation d'un solide, coordonnées spatiales

Le mouvement du point matériel M est décrit par:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{X} \quad (\text{A1.1})$$

avec $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, le vecteur déplacement.

Pour analyser le mouvement du solide au voisinage du point M, le tenseur gradient de la déformation F est défini tel que:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A1.2})$$

Si la masse est conservée pendant la déformation, on démontre facilement que:

$$\det \mathbf{F} = \frac{\rho_0}{\rho} > 0 \quad (\text{A1.3})$$

avec ρ_0 la masse volumique à C_0 et ρ la masse volumique à C_t .

Remarque: on peut distinguer deux possibilités pour repérer une particule:

- description Eulérienne: la particule est repérée par sa position \mathbf{x} à l'instant t ;
- description Lagrangienne: la particule est repérée par sa position \mathbf{X} à l'instant t_0 .

A1.1.2. Mesures des déformations

La mesure des déformations d'un solide déformable revient à définir ses changements de forme qui sont caractérisés par les variations de longueurs et d'angles, c'est-à-dire la variation des produits scalaires. Soit un vecteur infinitésimal $d\mathbf{X}$ autour du point M_0 , ce vecteur se transforme par F en un vecteur $d\mathbf{x}$ autour du point M. En considérant le produit scalaire du vecteur $d\mathbf{x}$ par son transposé, on obtient:

$$d\mathbf{x}^t \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})^t \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{A1.4})$$

où $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}$, appelé tenseur de Cauchy-Green droit, permet de décrire les déformations dans la configuration C_0 .

De la même façon, dans la configuration actuelle C_t , le tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche $B=F \cdot F^t$ est défini par:

$$dX^t \cdot dX = (F^{-1} \cdot dx)^t \cdot F^{-1} \cdot dx = dx^t \cdot F^{-t} \cdot F^{-1} \cdot dx = dx^t \cdot B^{-1} \cdot dx \quad (A1.5)$$

Pour mesurer les déformations subies par le solide entre les configurations C_0 et C_t , le tenseur des déformations de Green-Lagrange E défini sur C_0 est introduit:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (C - I) = \frac{1}{2} \cdot (F^t \cdot F - I) \quad (A1.6)$$

avec I la matrice identité. Le tenseur des déformations d'Euler-Almansi A est défini sur C_t par:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (I - B^{-1}) = F^{-t} \cdot E \cdot F^{-1} \quad (A1.7)$$

A1.1.3. Décomposition polaire

Le tenseur F ayant un déterminant strictement positif, il peut être décomposé:

$$F = V \cdot R = R \cdot U \quad (A1.8)$$

avec R , un tenseur orthogonal appelé tenseur de rotation matérielle, U , un tenseur symétrique défini positif appelé tenseur de déformation pure droit et V , un tenseur symétrique défini positif appelé tenseur de déformation pure gauche. De plus, on constate que:

$$C = F^t \cdot F = U^2 \text{ et } B = F \cdot F^t = V^2 \quad (A1.9)$$

Les tenseurs C et U décrivent les déformations dans C_0 alors que les tenseurs B et V les décrivent dans C_t .

A1.1.4. Tenseur des vitesses de déformation

Soit x la position d'une particule à l'instant t et v sa vitesse définie par:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \quad (\text{A1.10})$$

Le tenseur des vitesses de déformation L est alors donné par la relation suivante:

$$L = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v \cdot \partial X}{\partial X \cdot \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right) \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = \dot{F} \cdot F^{-1} \quad (\text{A1.11})$$

Le tenseur L peut se décomposer en un tenseur symétrique $\dot{\epsilon}$, appelé tenseur des taux de déformation et en un tenseur antisymétrique w , appelé tenseur des taux de rotation:

$$\begin{aligned} L &= \dot{\epsilon} + w \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2} \cdot (L + L^t) \\ w &= \frac{1}{2} \cdot (L - L^t) \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

Remarque: En dérivant le tenseur de Green-Lagrange par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{F}^t \cdot F + F^t \cdot \dot{F}) = F^t \cdot \dot{\epsilon} \cdot F \quad (\text{A1.13})$$

Il en résulte que \dot{E} est une mesure Lagrangienne de la vitesse de déformation.

A1.1.5. Tenseurs des contraintes

Soit df l'effort interne exercé sur un élément d'aire dS dans la configuration C_t . Le tenseur des contraintes de Cauchy σ est défini par:

$$df = \sigma \cdot n \cdot dS \quad (\text{A1.14})$$

avec n le vecteur normal à l'élément d'aire dS . En exprimant df sur la configuration initiale C_0 , le premier tenseur de Piola-Kirchhoff T est défini par:

$$df = T \cdot n_0 \cdot dS_0 \text{ avec } T = \det F \cdot \sigma \cdot F^{-t} \quad (\text{A1.15})$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff S est obtenu en transportant df dans la configuration initiale C_0 avec $df_0 = F^{-1} \cdot df$:

$$df_0 = S \cdot n_0 \cdot dS_0 \text{ avec } S = \det F \cdot F^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-t} \quad (\text{A1.16})$$

Le tenseur des contraintes de Kirchhoff τ peut également être introduit:

$$\tau = \det F \cdot \sigma = F \cdot S \cdot F^t = T \cdot F^t \quad (\text{A1.17})$$

A1.2. EQUATION D'EQUILIBRE NON LINEAIRE

Remarque introductive: deux descriptions ont été distinguées dans le paragraphe précédent: la description Lagrangienne définie par les tenseurs C , E , U , et la description Eulérienne définie par les tenseurs B , A , V . Les codes de calculs par éléments finis PLAST2 et PLAST3 sont basés sur une configuration Lagrangienne *réactualisée*, du fait des grandes déformations. Cela signifie que la configuration initiale à l'instant t_0 n'est plus la configuration de référence mais c'est la configuration à l'incrément de temps précédent l'instant considéré qui sera utilisée comme telle. En effet, une fois la configuration à l'instant t connue, elle peut être employée comme nouvel état de référence pour évaluer les contraintes et les déformations à l'instant $t+dt$. Ainsi les nœuds du maillage coïncideront avec les points matériels à chaque instant. De plus, en configuration Lagrangienne réactualisée, la configuration initiale et la configuration actuelle coïncident (comme en petites déformations) et il en découle que $\det F = 1$ et que les tenseurs des contraintes sont égaux $\sigma = S = T = \tau$ à l'instant t .

Soit un solide de volume V et de surface frontière S en configuration Lagrangienne réactualisée à l'instant t soumis à des forces surfaciques sur une surface S_t et à des conditions aux limites en vitesse sur une surface S_v . Les équations non linéaires de mouvement sont développées via le principe des travaux virtuels conduisant à la formulation faible des équations différentielles [Bru87]:

$$\int_V \rho \cdot (\ddot{u} - b) \cdot \delta \dot{u} \cdot dV + \int_V c \cdot \dot{u} \cdot \delta \dot{u} \cdot dV - \int_V \sigma : \delta \dot{\epsilon} \cdot dV - \int_{S_t} t \cdot \delta \dot{u} \cdot dS_t = 0 \quad (A1.18)$$

avec: $\delta \dot{u}$: vecteur vitesse virtuel arbitraire tel que $\delta \dot{u} = 0$ sur S_u ;

u : vecteur déplacement;

$\dot{u} = \frac{d}{dt}(u)$: vecteur vitesse;

$\ddot{u} = \frac{d}{dt}(\dot{u})$: vecteur accélération;

ρ : masse volumique;

b : actions volumiques par unité de masse;

t : actions extérieures par unité de surface agissant sur S_t ;

c : coefficient d'amortissement;

σ : tenseur des contraintes de Cauchy;

$\delta \dot{\epsilon}$: tenseur taux de déformation associée à la vitesse virtuelle $\delta \dot{u}$.

A1.2.1. Discrétisation spatiale

Dans la méthode des éléments finis, le domaine occupé par le milieu solide est discrétisé en éléments finis. Chaque élément est défini par des nœuds associés à des fonctions de forme. Les éléments utilisés pour cette discrétisation sont des éléments quadrilatères à quatre nœuds en deux dimensions et des briques à huit nœuds en trois dimensions. Les composantes des déplacements et des accélérations sont connues à partir de leurs valeurs aux nœuds du maillage via les fonctions de forme N_k :

$$u = \sum_{k=1}^n N_k \cdot u_k, \quad \ddot{u} = \sum_{k=1}^n N_k \cdot \ddot{u}_k \quad \text{et} \quad \delta \dot{u} = \sum_{k=1}^n N_k \cdot \delta \dot{u}_k \quad (A1.19)$$

avec n le nombre de nœuds, u_k et \ddot{u}_k les vecteurs des déplacements nodaux et des accélérations nodales respectivement. La forme discrétisée de la formulation faible de l'équation d'équilibre (A1.18) est ainsi obtenue à l'instant t :

$$M \cdot \ddot{u}_t + C \cdot \dot{u}_t + F_t^{\text{int}} = F_t^{\text{ext}} \quad (A1.20)$$

avec: \ddot{u}_t et \dot{u}_t les vecteurs des accélérations et des vitesses nodales à l'instant t ;

$M = \mathbf{A}_e \int_{V_e} \rho \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^t \cdot dV_e$ la matrice de masse cohérente et \mathbf{N} la matrice des fonctions

de forme;

\mathbf{C} la matrice d'amortissement de type Rayleigh simplifiée (proportionnelle à la matrice de masse: $\mathbf{C}=\alpha \cdot \mathbf{M}$);

$\mathbf{F}_t^{\text{int}} = \mathbf{A}_e \int_{V_e} \mathbf{B}^t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV_e$ le vecteur des forces internes avec \mathbf{B} la matrice gradient des

fonctions de forme;

$\mathbf{F}_t^{\text{ext}} = \mathbf{A}_e \int_{S_e} \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} \cdot dS_e + \mathbf{A}_e \int_{V_e} \rho \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} \cdot dV_e$ le vecteur des forces extérieures.

\mathbf{A}_e symbolise le passage des intégrales élémentaires aux intégrales sur l'ensemble du maillage.

Dans un cadre plus général, un terme représentant les efforts engendrés par le contact et le frottement, noté \mathbf{F}_t^c , est ajouté à l'équation (A1.20) qui devient:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{u}_t + \mathbf{C} \cdot \dot{u}_t + \mathbf{F}_t^{\text{int}} - \mathbf{F}_t^{\text{ext}} - \mathbf{F}_t^c = 0 \quad (\text{A1.21})$$

Remarque: les fonctions de forme N_k , propres à chaque type d'élément, sont exprimées dans le repère naturel lié à l'élément (figure A1.2).

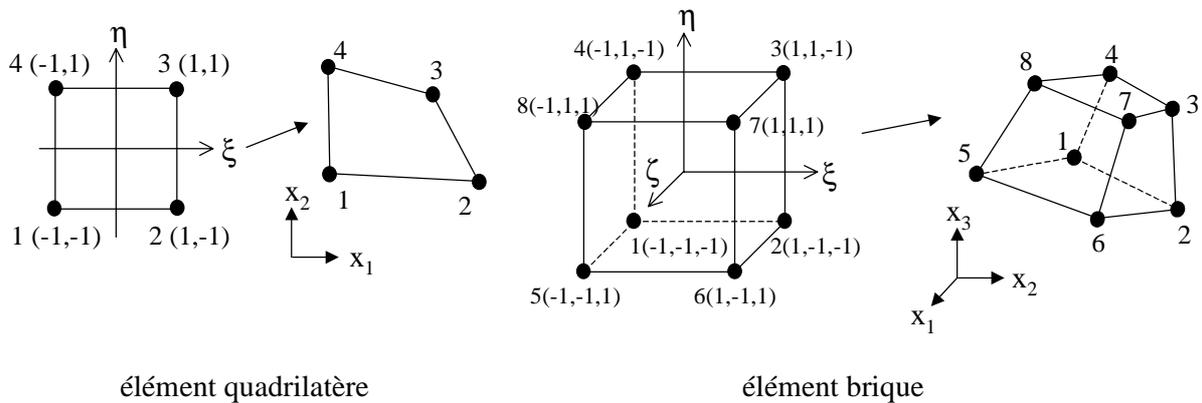


Figure A1.2: Passage du repère naturel lié à un élément au repère réel

Les éléments sont isoparamétrés si $x = \sum_{k=1}^n N_k \cdot x_k$ comme $u = \sum_{k=1}^n N_k \cdot u_k$ avec x_k le vecteur des coordonnées nodales.

Les fonctions de forme pour l'élément quadrilatère à quatre nœuds sont les suivantes:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{aligned} \quad (A1.22a)$$

La matrice des fonctions de forme a pour dimension le nombre de degrés de liberté de l'élément par la dimension de l'espace discrétisé. Ainsi, on aura:

$$N^t = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (A1.22b)$$

La matrice gradient des fonctions de forme n'est pas donnée explicitement pour les éléments quadrilatères mais elle peut être facilement déduite de celle des éléments briques donnée équation (A1.23c) par simple analogie.

Les fonctions de forme de l'élément brique à huit nœuds sont définies par:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \zeta) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \zeta) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \zeta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \zeta) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \zeta) \end{aligned} \quad (A1.23a)$$

et

$$N^t = \begin{bmatrix} \dots & N_i & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_i & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_i & \dots \end{bmatrix} \quad i=1, \dots, 8 \quad (A1.23b)$$

(Remarque: dimension de la matrice N: 24x3)

De plus, la matrice gradient des fonctions de forme B permettant d'évaluer l'incrément de déformation s'exprime de la manière suivante (dimension de B: 6x24):

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^t &= \left[\Delta \varepsilon_{xx} \quad \Delta \varepsilon_{yy} \quad \Delta \varepsilon_{zz} \quad \Delta \gamma_{xy} \quad \Delta \gamma_{yz} \quad \Delta \gamma_{zx} \right]^t \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \\ \Delta \mathbf{u}^t &= \left[\dots \quad \Delta u_{xi} \quad \Delta u_{yi} \quad \Delta u_{zi} \quad \dots \right]^t \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{A1.23c})$$

A1.2.2. Intégration temporelle

L'intégration temporelle de l'équation d'équilibre (A1.21) est basée sur la méthode des différences finies centrées. Cette méthode est dite explicite car les déplacements et les vitesses sont calculés à l'instant $t+\Delta t$ en fonction des quantités connues aux instants t , $t-\Delta t$, avec Δt le pas de temps:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_t &= \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{2 \cdot \Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_t &= \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2 \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (\text{A1.24})$$

$$\text{D'où:} \quad \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{M}^{-1} \cdot \Delta t^2 \cdot (\mathbf{F}_t^{\text{ext}} + \mathbf{F}_t^c - \mathbf{F}_t^{\text{int}}) + 2 \cdot \mathbf{u}_t + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} - 1 \right) \cdot \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{\frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} + 1} \quad (\text{A1.25})$$

Pour résoudre le système d'équations (A1.25), il est nécessaire d'inverser la matrice de masse \mathbf{M} à chaque incrément de temps. Cependant une telle procédure est coûteuse en terme de temps de calcul. C'est pourquoi la matrice de masse est rendue diagonale (matrice de masse concentrée à opposer à la matrice de masse cohérente non diagonale). La méthode de diagonalisation utilisée est celle proposée par Owen & Hinton [Owe80]:

$$M_{ii} = \frac{\int_V \rho \cdot dV}{\sum_k \int_V N_k \cdot \rho \cdot N_k \cdot dV} \cdot \int_V N_i \cdot \rho \cdot N_i \cdot dV \quad (A1.26)$$

Ainsi la solution de l'équation (A1.25) est obtenue sans résoudre de système d'équations, c'est-à-dire sans inverser de matrice, ce qui représente un des principaux avantages de la méthode explicite.

A1.2.3. Stabilité

L'inconvénient majeur des méthodes explicites est le pas de temps Δt qui doit être suffisamment petit pour que la condition de stabilité du schéma d'intégration temporelle soit satisfaite. Cette condition de stabilité peut être obtenue par l'estimation de la plus grande valeur propre du système modal équivalent ([Owe80], [Bel91], [Sch91]), sous la forme:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega} \cdot (\sqrt{\xi + 1} - \xi) \quad (A1.27)$$

avec ξ le coefficient d'amortissement et ω la fréquence maximale de la structure. Néanmoins une telle approche serait coûteuse en temps de calcul puisqu'elle nécessite la détermination des matrices de masse et de rigidité associées à chaque élément ainsi que le calcul des valeurs propres associées au problème modal. C'est pourquoi le pas de temps critique Δt_{crit} est généralement évalué à partir du temps nécessaire pour que l'onde de pression puisse parcourir dans un milieu élastique une longueur caractéristique l_{min} égale à la taille du plus petit élément du maillage:

$$\Delta t_{crit} = l_{min} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (A1.28)$$

avec ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau ($c = \sqrt{E/\rho}$ est la vitesse de propagation de l'onde de pression dans le milieu élastique).

Bien que la méthode d'intégration temporelle explicite soit conditionnellement stable, ce qui représente un inconvénient majeur, elle apparaît comme étant plus efficace pour traiter les

problèmes fortement non linéaires que les méthodes implicites qui sont inconditionnellement stables. D'autre part, les méthodes implicites nécessitent de calculer et d'inverser la matrice de raideur, matrice dont la taille est directement liée à la taille du problème. Pour une étude tridimensionnelle où le nombre d'éléments est forcément élevé, un tel calcul serait extrêmement coûteux en temps. C'est pourquoi la méthode explicite a été préférée à une méthode implicite, d'autant plus que les non linéarités sont nombreuses dans le problème étudié (gestion du contact avec frottement, fissuration du béton, grandes déformations élastoplastiques des éléments de fixation...).

A1.3. LOIS DE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUES

Le but de ce paragraphe est de décrire les lois de comportement élastoplastiques développées dans les codes PLAST2 et PLAST3 pour les métaux. L'approche utilisée est basée sur la théorie de la *plasticité* avec une loi *d'écoulement associée* et un *écrouissage isotrope*. Or une approche similaire a été développée en détail au paragraphe III.3.3. de ce mémoire en vue de modéliser le comportement du béton sous un état de contrainte de compression. Les principales différences entre ces deux approches se situent au niveau de la fonction de charge et des lois d'écrouissage utilisées. C'est pourquoi seules les principales caractéristiques du modèle utilisé sont présentées, les détails de la théorie se situant au paragraphe III.3.3.

A1.3.1. Généralités

Le problème étant formulé en grandes transformations, les déformations sont évaluées en utilisant une configuration de l'incrément au milieu du pas de temps, ce qui permet d'obtenir une meilleure approximation des déformations logarithmiques ([Bru87], [Don89]). De plus, les équations de comportement doivent être établies de façon à ce que la réponse du matériau soit indépendante du repère d'observation. Cette condition d'indifférence matérielle est également appelée principe d'objectivité. Or la dérivée par rapport au temps du tenseur des contraintes de Cauchy n'est pas objective. Pour pallier ce problème, il existe de nombreuses dérivées permettant d'assurer l'objectivité de ce tenseur, telles que celles de Jaumann, Lie ou Truesdell. Une dérivée souvent utilisée dans le cas isotrope avec de petites déformations élastiques et de grandes déformations plastiques et employée dans les codes PLAST2 et PLAST3, est la dérivée corotationnelle, ou de Jaumann, dont l'expression à l'instant t est:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - w \cdot \sigma + \sigma \cdot w \quad (\text{A1.29})$$

avec σ le tenseur des contraintes de Cauchy, $\dot{\sigma}$ sa dérivée par rapport au temps, $\overset{\nabla}{\sigma}$ sa dérivée corotationnelle et w le tenseur des taux de rotation défini dans l'équation (A1.12).

D'une manière générale, la loi de comportement peut s'écrire:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = D^c \cdot \dot{\varepsilon} \quad (\text{A1.30})$$

avec $\dot{\varepsilon}$ le tenseur des taux de déformation et D^c la matrice de comportement qui peut être la matrice élastique D^e définie à partir des lois de Hooke ou la matrice élastoplastique D^{ep} définie dans le paragraphe suivant (ou la matrice de comportement du béton, cf. chapitre III).

Dans la suite, pour des raisons de cohérence avec le paragraphe III.3.3. $\dot{\varepsilon}$ sera noté $d\varepsilon$ (où ε représente la déformation logarithmique) et $\overset{\nabla}{\sigma}$ noté $d\sigma$.

A1.3.2. Décomposition de la déformation

Le tenseur des taux de déformation totale $d\varepsilon$ peut se décomposer de la manière suivante:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (\text{A1.31})$$

d'où:
$$d\sigma = D^e \cdot d\varepsilon^e = D^e \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (\text{A1.32})$$

avec $d\varepsilon^e$ la partie élastique et $d\varepsilon^p$ la partie plastique du tenseur taux de déformation, D^e la matrice élastique définie par les lois de Hooke.

A1.3.3. Critère de plastification

La fonction de charge utilisée pour les métaux est celle de Von Mises:

$$f(\sigma, \kappa) = \sigma_{eq} - \sigma_y(\kappa) = 0 \quad (\text{A1.33})$$

$$\text{avec: } \sigma_{eq} = \sqrt{3 \cdot J_2} \quad (\text{A1.34})$$

avec σ_{eq} la contrainte équivalente de Von Mises, J_2 le second invariant du tenseur déviateur des contraintes s ($J_2 = \frac{1}{2} \cdot s : s$) et $\sigma_y(\kappa)$ la contrainte d'écoulement du matériau dépendant d'un paramètre scalaire κ représentant l'écrouissage.

A1.3.4. Loi d'écoulement

Une loi d'écoulement associée est utilisée, ce qui signifie que le vecteur du taux de déformation plastique est supposé normal à la surface de charge:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (A1.35)$$

avec $d\lambda$ un scalaire positif appelé multiplicateur plastique représentant l'amplitude de l'écoulement plastique. En exprimant le travail plastique dW^p par l'équivalence:

$$dW^p = \sigma^t \cdot d\varepsilon^p = \sigma_{eq} \cdot d\varepsilon_p^{eq} \quad (A1.36)$$

on démontre que:

$$d\lambda = d\varepsilon_{eq}^p \quad (A1.37)$$

avec ε_{eq}^p la déformation plastique équivalente. La loi de comportement liant le taux de contrainte au taux de déformation s'écrit de la manière suivante (avec $h = -\frac{d\kappa}{d\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \kappa}$ le module d'écrouissage):

$$d\sigma = \left[\begin{array}{c} D^e - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^t \cdot D^e \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}}{h + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^t \cdot D^e \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \cdot D^e \end{array} \right] \cdot d\varepsilon = D^{ep} \cdot d\varepsilon \quad (A1.38)$$

La matrice D^{ep} est appelée matrice élastoplastique continue.

A1.3.5. Loi d'écrouissage

La loi d'écrouissage définit le mouvement des surfaces de charge pendant la déformation. La loi utilisée est isotrope, ce qui signifie que la surface de charge se dilate uniformément (à opposer à une loi cinématique pour laquelle la surface de charge subit une translation). Si la contrainte d'écoulement σ_y est constante, le matériau est élastique parfaitement plastique. Cependant il est généralement plus réaliste d'utiliser une loi d'écrouissage dans laquelle la contrainte d'écoulement varie en fonction du paramètre d'écrouissage κ . La surface de charge initiale qui limite le comportement élastique est alors définie par la contrainte d'écoulement égale à la limite élastique du matériau. Lorsque cette surface est atteinte, la déformation inélastique apparaît et la loi d'écrouissage gouverne l'expansion de la surface de charge. Le déchargement à l'intérieur de la surface de charge courante est élastique. Le paramètre d'écrouissage κ , qui représente la mémoire du matériau et reflète son caractère irréversible, est supposé égal à la déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Le module d'écrouissage h appelé également module tangent plastique a la forme suivante:

$$h = \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_{eq}^p} \quad (A1.39)$$

La loi d'écrouissage liant la contrainte d'écoulement à la déformation plastique équivalente est extrapolée à partir de tests expérimentaux uniaxiaux, de compression ou de traction, et est prise en compte par différentes formes dans les codes PLAST2 et PLAST3:

$$\sigma_y = \sigma_e + h \cdot \varepsilon_{eq}^p \quad (\text{linéaire}) \quad (A1.40a)$$

$$\sigma_y = \sigma_e + A \cdot (\varepsilon_{eq}^p)^n \quad (\text{Ludwick}) \quad (A1.40b)$$

$$\sigma_y = B \cdot (C + \varepsilon_{eq}^p)^n \quad (\text{Swift}) \quad (A1.40c)$$

avec σ_e la limite élastique du matériau et A, B, C, n, des paramètres matériau.

A1.3.6. Intégration de la loi de comportement

La méthode d'intégration de la loi de comportement élastoplastique employée dans les codes PLAST2 et PLAST3 est une méthode de prédiction élastique avec correction radiale. Dans un premier temps, l'incrément de déformation totale $\Delta \epsilon$ est calculée via la matrice gradient des fonctions de forme. Cette déformation est supposée élastique et le tenseur des contraintes est calculé à partir des lois de Hooke. La contrainte équivalente associée à cet état de contrainte est évaluée puis comparée à la contrainte d'écoulement du matériau:

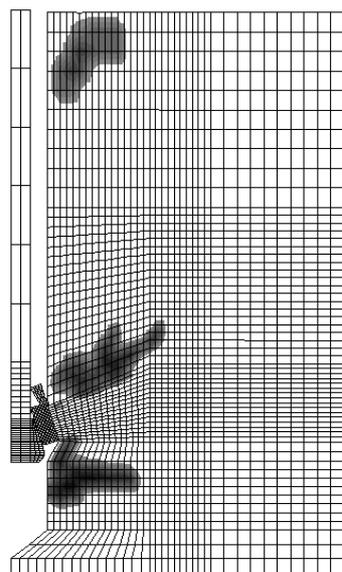
- si $\sigma_{eq} \leq \sigma_y$ alors le point est dans le domaine élastique (en charge ou en décharge) et l'état de contrainte et de déformation en ce point est entièrement défini;
- si $\sigma_{eq} > \sigma_y$ alors le point est dans le domaine plastique et il faut déterminer la partie plastique du tenseur de déformation puis réactualiser le tenseur des contraintes.

Deux algorithmes de correction radiale ont été développés pour traiter ce dernier cas: l'un explicite avec correction et le second implicite ([Owe80], [Bru87], [Mar84]). Dans PLAST2, un troisième algorithme a été mis en œuvre dans lequel une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre quatre est utilisée [Wis83].

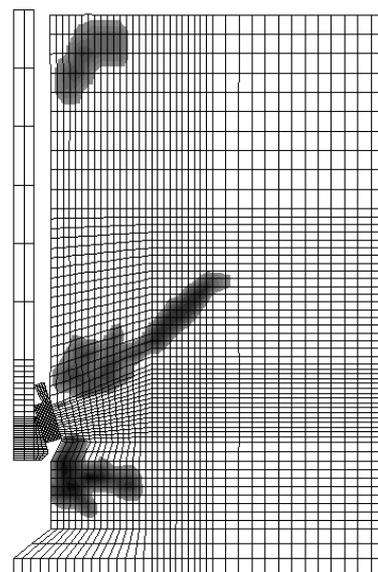
Annexe II:

**Simulation 2D d'un test d'arrachement
de la cheville SPIT RING: propagation
des fissures**

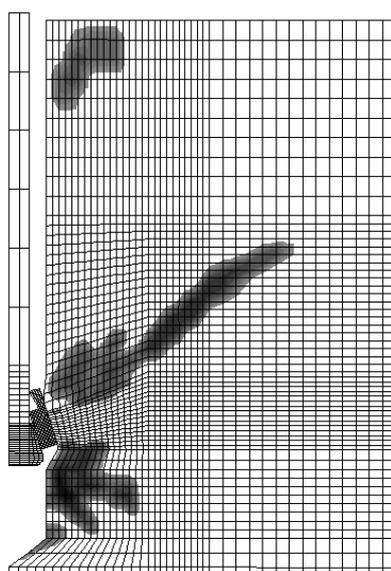
Cette annexe présente l'évolution de la fissuration lors d'un test d'arrachement d'une cheville SPIT RING ancrée dans une dalle de béton "dur" en fonction du déplacement d de la cheville. Cette simulation a été réalisée avec le code de calcul par éléments finis PLAST2 et la mise en données est décrite dans le chapitre IV au paragraphe IV.1.2. Les coefficients de frottement entre la cheville et la coquille et entre la coquille et le béton sont égaux tous les deux à 0.3 dans l'exemple présenté.



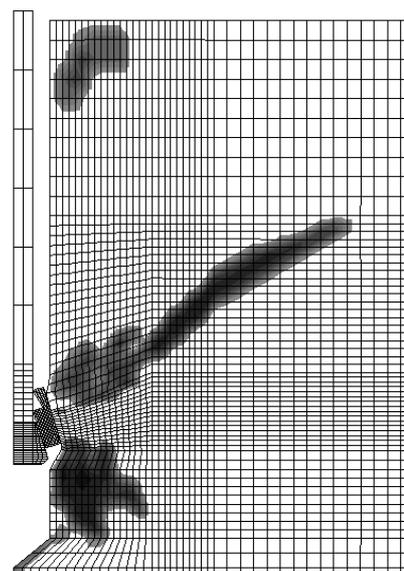
$d=1.4$ mm



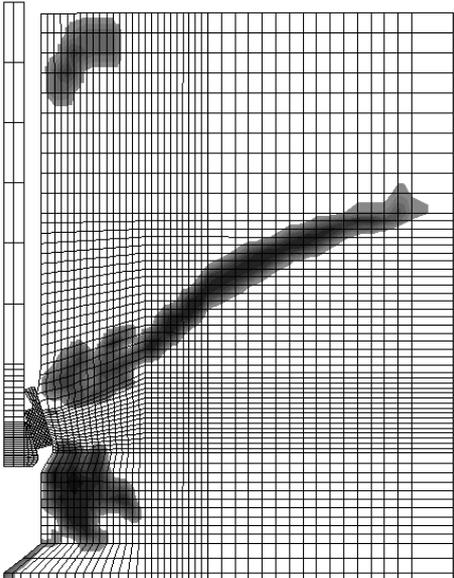
$d=2.6$ mm



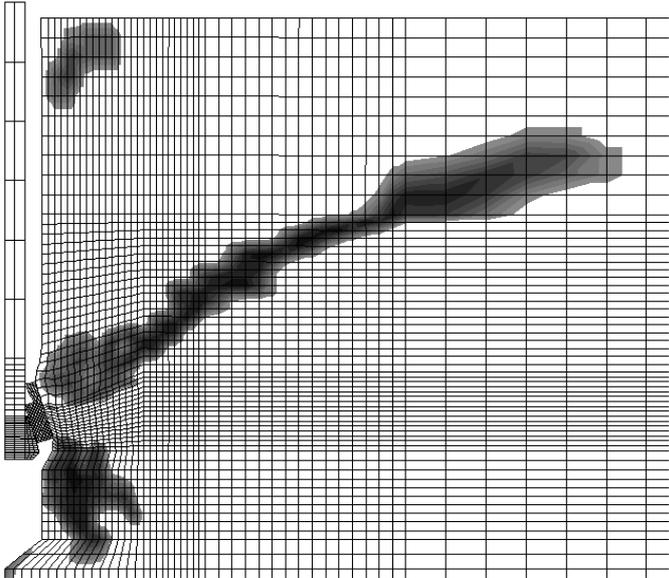
$d=3.9$ mm



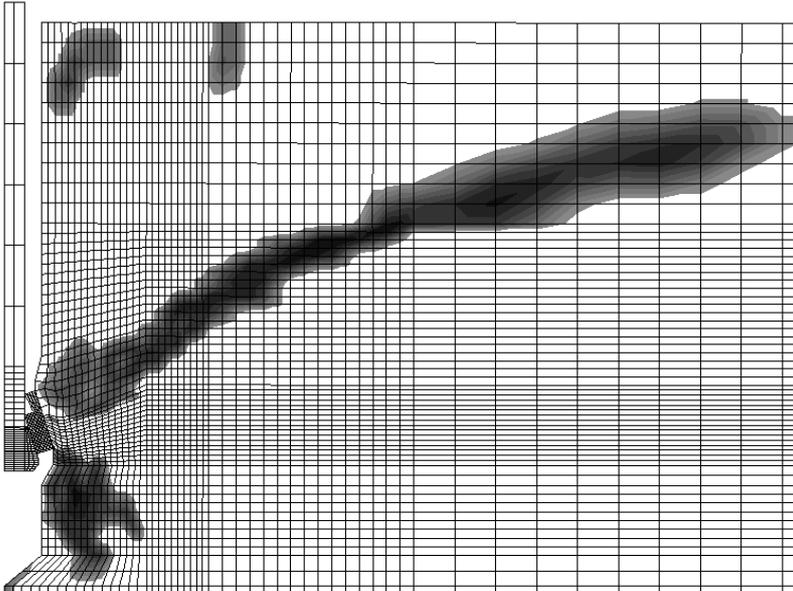
$d=4.6$ mm



d=5.4 mm



d=7.9 mm



d=10.3 mm

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM: WALTER (avec précision du nom de jeune fille le cas échéant) Prénoms: Hélène, Janine, Juliette	DATE de SOUTENANCE le 27 octobre 1999
TITRE: MODELISATION 3D PAR ELEMENTS FINIS DU CONTACT AVEC FROTTEMENT ET DE L'ENDOMMAGEMENT DU BETON: APPLICATION A L'ETUDE DE FIXATIONS ANCREES DANS UNE STRUCTURE EN BETON	
NATURE: Doctorat Formation doctorale: Mécanique	Numéro d'ordre: 99 ISAL 0078
Cote B.I.U. – Lyon: T 50/210/19 / et bis	CLASSE:
RESUME: <p>Un code de calcul par éléments finis en trois dimensions dédié à l'étude d'une ou plusieurs chevilles de fixation à expansion ancrées dans une dalle de béton et soumises à une sollicitation quelconque a été développé. Pour traiter efficacement le problème considéré, ce code, basé sur une formulation dynamique explicite, inclut les grandes déformations, le comportement élastoplastique des matériaux avec un module spécifique de fissuration du béton ainsi que la gestion du contact avec frottement entre plusieurs corps déformables.</p> <p>Un nouvel algorithme de contact tridimensionnel compatible avec les opérateurs d'intégration explicites et basé sur une méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément "avant" a été développé en conjonction avec le modèle standard de frottement de Coulomb. Cet algorithme est efficace et intrinsèque et possède de nombreux avantages tels que la précision, la stabilité et une convergence rapide.</p> <p>Le comportement du béton en compression est supposé élastoplastique avec une surface de charge de type Drucker-Prager modifiée. Deux modèles d'endommagement du béton en tension basés sur une approche diffuse ("smeared crack approach") à fissures fixes et à fissures tournantes ont été développés. Afin d'éviter une dépendance pathologique de la solution vis à vis du maillage, la théorie de la bande de fissure, basée sur la mécanique de la rupture dont le paramètre fondamental de contrôle de propagation de fissure est l'énergie de rupture, est introduite.</p> <p>En plus des simulations classiques d'une cheville ancrée dans un bloc de béton, des simulations originales de tests de cisaillement ou d'arrachement d'une ou deux fixations ancrées dans une même dalle de béton avec prise en compte des effets de bord ont été effectuées et ont permis de valider le logiciel développé.</p>	
MOTS-CLES: béton, cheville expansion, élément fini, trois dimensions, contact, frottement, fissuration, grande déformation, plasticité, ancrage.	
Laboratoire (s) de recherche: Laboratoire de Mécanique des Solides (LMSO) de l'Institut National des Sciences Appliquées de LYON, bat. 304, 69621 Villeurbanne Cedex	
Directeur de thèse: Monsieur le Professeur Michel BRUNET	
Président de jury: Monsieur le Professeur Jean-Marie REYNOUARD	
Composition du jury: L. BAILLET, J.P. BARTHOMEUF, Y. BERTHAUD, P. BOISSE, J.C. BOYER, M. BRUNET, A. MILLARD, J.M. REYNOUARD	