



N° d'ordre NNT : 2023ISAL0061

**THÈSE de DOCTORAT de L'INSA DE LYON**  
**Membre de l'Université de Lyon**

**École Doctorale MEGA (ED 162)**  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité de Doctorat  
**Mécanique**

Soutenue publiquement le 25/09/2023 par

**Julie Triclot**  
Ingénieure

---

**Étude numérique et expérimentale de  
l'effet de zones architecturées sur la  
propagation de fissure**

---

Devant le jury composé de

NOM, Prénom	Grade/Qualité	Établissement	Rôle
BONAMY, Daniel	Ingénieur HDR	CEA Paris-Saclay	Rapporteur
RÉTHORÉ, Julien	Directeur de recherche	Centrale Nantes	Rapporteur
ESTEVEZ, Rafael	Professeur	Université Grenoble Alpes	Président du jury
KONDO, Djimedo	Professeur	Université Sorbonne	Examineur
GRAVOUIL, Anthony	Professeur	INSA Lyon	Directeur de thèse
LAZARUS, Véronique	Professeure	ENSTA Paris	Co-directrice de thèse
CORRE, Thomas	Ingénieur de recherche	Centrale Nantes	Invité et encadrant

Référence : TH0999\_Julie TRICLOT

L'INSA Lyon a mis en place une procédure de contrôle systématique via un outil de détection de similitudes (logiciel Compilatio). Après le dépôt du manuscrit de thèse, celui-ci est analysé par l'outil. Pour tout taux de similarité supérieur à 10%, le manuscrit est vérifié par l'équipe de FEDORA. Il s'agit notamment d'exclure les auto-citations, à condition qu'elles soient correctement référencées avec citation expresse dans le manuscrit.

Par ce document, il est attesté que ce manuscrit, dans la forme communiquée par la personne doctorante à l'INSA Lyon, satisfait aux exigences de l'Établissement concernant le taux maximal de similitude admissible.

## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr	<b>M. Stéphane DANIELE</b> C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr	<b>M. Philippe DELACHARTRE</b> INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sandrine CHARLES</b> Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:sandrine.charles@univ-lyon1.fr">sandrine.charles@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</b> <a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr">hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr	<b>M. Stéphane BENAYOUN</b> Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon mega@insa-lyon.fr	<b>M. Jocelyn BONJOUR</b> INSA Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b> <a href="https://edsciencessociales.universite-lyon.fr">https://edsciencessociales.universite-lyon.fr</a> Sec. : Mélina FAVETON INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.77.79 melina.faveton@univ-lyon2.fr	<b>M. Bruno MILLY</b> Université Lumière Lyon 2 86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:bruno.milly@univ-lyon2.fr">bruno.milly@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



*Chaque réponse apportée soulève dix nouvelles questions. Ce jeu sans fin est à la fois accablant et jubilatoire. Il faut dire que s'il nous était possible de tout savoir, la joie qui en résulterait serait immédiatement obscurcie par le désespoir bien plus grand de n'avoir plus rien à découvrir.*

---

Mickaël Launey



# Remerciements

Ce manuscrit représente l'aboutissement de trois ans de travail et il est temps pour moi de remercier les personnes qui m'ont accompagnée dans ce projet et sans qui il ne serait certainement pas ce qu'il est.

J'ai eu la chance d'être encadrée par des personnes issues de communautés scientifiques différentes et les discussions tous ensemble ont été très formatrices en plus d'être dans une ambiance détendue et agréable. Merci tout d'abord à mon directeur de thèse Anthony Gravouil pour sa passion communicative lors de nos réunions et réflexions autour d'un tableau blanc, et pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ma thèse. Je remercie également ma co-directrice de thèse Véronique Lazarus d'avoir souvent pris le temps dans son emploi du temps chargé pour avoir de longues discussions qui m'ont poussée à aller le plus loin possible dans la compréhension des phénomènes étudiés. Elle m'a également accueilli chaleureusement sur le site de l'ENSTA Paris à chacun de mes déplacements. Thomas Corre a complété cette équipe, il m'a formé sur le banc expérimental et a été un support très important pour tous les essais réalisés pendant cette thèse. Merci également à lui pour tous ses conseils délivrés avec bienveillance.

Je suis reconnaissante envers les membres du jury qui ont permis d'apporter des discussions intéressantes lors de la soutenance. Merci en particulier aux rapporteurs Daniel Bonamy et Julien Réthoré d'avoir pris le temps de lire et d'évaluer en détail ce manuscrit.

Je souhaiterais remercier toutes les personnes qui m'ont aidé dans mes recherches : Gergely Molnár pour ses conseils sur les modèles d'endommagement par champs de phase, le pôle S.mart RAO (Christine Billon Lanfray, Nadine Noël, Nicolas Tardiff et Jérôme Cavoret) pour les impressions 3D et les membres de l'ENSTA (David Roucou et Nicolas Thurieau) pour le support sur les essais de fissuration. J'aimerais également remercier celles qui se sont occupées des aspects l'administratif et qui nous permettent de nous concentrer sur le travail scientifique : Isabelle Comby, Carine Bruscella et Sophie De Oliveira.

J'ai également eu la chance d'intégrer une équipe d'enseignement pendant deux ans, celle de la mécanique des systèmes. Un grand merci à toute l'équipe, et en particulier à Arnaud Sandel, Aurélien Saulot et Christophe Bard pour leur accueil et leurs conseils.

Pour finir, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont soutenue durant ces trois années. Merci aux membres du LaMCoS, doctorants ou permanents, qui ont contribué à une ambiance de travail agréable et conviviale. Enfin, merci à ma famille et mes amis de m'avoir soutenu, de près ou de loin, dans cette aventure.



# Résumé

Grâce au récent développement des technologies de fabrication additive, il est devenu possible de fabriquer des composants multi-échelles, où l'on contrôle complètement la microstructure. Il se pose aujourd'hui la question de la tenue en service de tels matériaux, notamment dans la perspective de diminuer les marges de sécurité en contrôlant mieux la résistance mécanique. Dans cette thèse, on se propose d'étudier la propagation de fissure sous chargement quasi-statique en présence de zones architecturées. On se concentre ici sur le cas où la fissure ne traverse pas les zones architecturées. Ces zones produisent donc un effet à distance.

Cette question est étudiée à travers des approches numériques et expérimentales. Le modèle numérique est basé sur des calculs éléments finis et une propagation de fissure représentée par un algorithme par longueur d'arc. Le dispositif expérimental est constitué d'éprouvettes *Compact Tension* (CT) ou *Tapered Double Cantilever Beam* (TDCB) issues de l'impression 3D, la fissuration est faite par chargement lent avec suivi de la fissure grâce aux méthodes de corrélation d'images. La comparaison des approches numériques et expérimentales sur des éprouvettes non-architecturées permet de faire des hypothèses physiquement fondées pour la suite du travail.

La prospection numérique permet de mettre en avant deux effets intéressants : une augmentation locale de la résistance à la propagation et l'apparition d'une instabilité *snap-back*. Une validation expérimentale est ensuite recherchée. Les outils de calculs sont utilisés pour affiner les choix de géométries afin de faire face aux problématiques expérimentales. Les deux phénomènes observés dans la phase de prospection numérique sont retrouvés expérimentalement. Une étude paramétrique permet de vérifier que les tendances obtenues numériquement sont retrouvées dans les résultats expérimentaux. Enfin, l'analyse des phénomènes observés mène à une discussion sur la notion de ténacité effective.

**Mots clés:** Propagation de Fissure, Matériaux Architecturés, Corrélation d'image, Analyse par Éléments Finis, Homogénéisation



# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xi
Introduction	1
<b>I État de l'art</b>	<b>7</b>
<b>1 État de l'art sur la rupture et les matériaux architecturés</b>	<b>9</b>
1.1 Mécanique de la rupture fragile . . . . .	10
1.1.1 Théorie . . . . .	10
1.1.1.1 Mécanique élastique linéaire de la rupture . . . . .	10
1.1.1.2 Approche énergétique . . . . .	11
1.1.1.3 Approche locale . . . . .	13
1.1.2 Méthodes numériques . . . . .	15
1.1.2.1 Représentation d'une fissure dans un calcul éléments finis . . . . .	16
1.1.2.2 Modélisation de la propagation . . . . .	18
1.1.2.3 Calcul des Facteurs d'Intensité des Contraintes . . . . .	20
1.1.3 Méthodes expérimentales . . . . .	21
1.1.3.1 Géométries d'éprouvettes . . . . .	21
1.1.3.2 Mesure de la longueur de fissure . . . . .	22
1.1.3.3 Mesure des Facteurs d'Intensité des Contraintes . . . . .	24
1.2 Matériaux architecturés . . . . .	24
1.2.1 Définition . . . . .	24
1.2.2 Utilisation . . . . .	26
1.2.3 Fabrication . . . . .	26
1.2.4 Modélisation . . . . .	27
1.2.4.1 Homogénéisation . . . . .	27
1.2.4.2 Séparabilité des échelles . . . . .	29
1.3 Rupture de matériaux multi-échelles . . . . .	29
1.3.1 Études existantes . . . . .	29
1.3.2 La question de la ténacité effective . . . . .	30
1.4 Bilan sur l'état de l'art . . . . .	32

<b>II</b>	<b>Études préliminaires</b>	<b>35</b>
<b>2</b>	<b>Étude de la fissuration d'une éprouvette issue de l'impression 3D</b>	<b>37</b>
2.1	Propagation de fissure dans une éprouvette CT . . . . .	38
2.1.1	Présentation de l'essai . . . . .	38
2.1.2	Paramétrisation du problème . . . . .	38
2.2	Méthodes numériques . . . . .	40
2.2.1	Algorithme par longueur d'arc . . . . .	40
2.2.2	Maillage . . . . .	40
2.2.3	Conditions aux limites . . . . .	41
2.3	Méthodes expérimentales . . . . .	42
2.3.1	Impression 3D . . . . .	43
2.3.2	Dispositif expérimental . . . . .	43
2.3.3	Corrélation d'image . . . . .	44
2.4	Corrélation Essais-Calculs . . . . .	48
2.4.1	Identification des données matériaux . . . . .	48
2.4.1.1	Coefficients élastiques . . . . .	48
2.4.1.2	Énergie de rupture . . . . .	50
2.4.2	Hypothèses 2D . . . . .	51
2.4.2.1	Raideur de l'éprouvette . . . . .	52
2.4.2.2	Champ de déplacement en pointe de fissure . . . . .	52
2.4.2.3	Énergie de rupture . . . . .	53
2.4.2.4	Discussion . . . . .	54
2.4.3	Influence des conditions aux limites . . . . .	55
2.4.3.1	Conditions aux limites en déplacement imposé . . . . .	55
2.4.3.2	Conditions aux limites en force imposée . . . . .	56
2.4.3.3	Discussion . . . . .	56
2.5	Bilan sur le problème de référence . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Homogénéisation par éléments finis</b>	<b>61</b>
3.1	Modèle d'homogénéisation asymptotique par éléments finis . . . . .	62
3.1.1	Problème à deux échelles . . . . .	62
3.1.1.1	Définition des échelles . . . . .	62
3.1.1.2	Condition de Hill-Mandel . . . . .	62
3.1.1.3	Identification de la loi de comportement macroscopique . . . . .	63
3.1.2	Approche en déformation . . . . .	64
3.1.2.1	Déformation moyenne . . . . .	64
3.1.2.2	Définition de la contrainte macroscopique . . . . .	65
3.1.3	Approche en contrainte . . . . .	66
3.1.3.1	Contrainte moyenne . . . . .	66
3.1.3.2	Définition de la déformation macroscopique . . . . .	67
3.2	Implémentation . . . . .	67
3.3	Application à des motifs hexagonaux . . . . .	69
3.3.1	Description des motifs . . . . .	69
3.3.2	Comparaison des méthodes . . . . .	70
3.3.3	Calcul des coefficients équivalents . . . . .	72

3.4	Bilan sur l'homogénéisation linéaire élastique . . . . .	74
<b>III Influence de la présence de zones architecturées hors du chemin de fissure</b>		<b>75</b>
<b>4</b>	<b>Étude numérique de l'effet des zones architecturées</b>	<b>77</b>
4.1	Problème étudié . . . . .	78
4.2	Résultats . . . . .	79
4.2.1	Fonction de raideur . . . . .	79
4.2.2	Conséquence sur une expérience en déplacement imposé . . . . .	80
4.2.3	Calculs d'énergies . . . . .	81
4.3	Analyse de l'effet des zones architecturées . . . . .	82
4.3.1	Effet dans la phase linéaire . . . . .	82
4.3.2	Effet en amont des zones . . . . .	84
4.3.3	Effet entre les zones . . . . .	85
4.3.4	Effet en aval des zones . . . . .	88
4.3.5	Bilan énergétique en quasi-statique . . . . .	88
4.3.6	Le cas particulier du snap-back . . . . .	89
4.3.7	Synthèse . . . . .	92
4.4	Études paramétriques . . . . .	92
4.4.1	Influence de la densité . . . . .	93
4.4.2	Influence du comportement mécanique de la zone . . . . .	94
4.5	Bilan de l'effet des zones architecturées sur la fissuration . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Étude expérimentale de l'effet des zones architecturées</b>	<b>99</b>
5.1	Présentation de l'essai . . . . .	100
5.2	Stabilisation du chemin de fissure . . . . .	101
5.2.1	Modification de la géométrie . . . . .	101
5.2.2	Préparation d'éprouvette . . . . .	102
5.3	Résultats expérimentaux . . . . .	104
5.3.1	Courbe de charge et instabilité . . . . .	104
5.3.2	Mesure des longueurs de fissure . . . . .	107
5.3.3	Identification de l'énergie de rupture . . . . .	108
5.3.4	Effet des zones architecturées . . . . .	110
5.4	Comparaison avec les résultats numériques . . . . .	112
5.4.1	Sur une éprouvette . . . . .	112
5.4.2	Étude paramétrique . . . . .	113
5.5	Bilan sur la validation expérimentale . . . . .	115
<b>IV Vers une définition de ténacité effective</b>		<b>117</b>
<b>6</b>	<b>Comparaison de définitions de la ténacité effective</b>	<b>119</b>
6.1	Intérêt de la définition de ténacité effective . . . . .	120
6.2	Définitions considérées . . . . .	120
6.2.1	Définitions basées sur le chargement . . . . .	120

6.2.2	Définition basée sur l'intégrale J . . . . .	122
6.3	Méthodes pour la comparaison des ténacités effectives . . . . .	123
6.3.1	Surfing Boundary Conditions . . . . .	123
6.3.2	Procédure de calcul . . . . .	124
6.3.3	Calcul des ténacités effectives . . . . .	125
6.3.4	Zones architecturées testées . . . . .	127
6.4	Résultats de comparaisons de ténacités effectives . . . . .	128
6.4.1	Résultat pour une simulation . . . . .	128
6.4.2	Résultats pour un grand nombre de simulations . . . . .	129
6.4.3	Discussions . . . . .	130
6.5	Bilan sur la question de la ténacité effective . . . . .	133
<b>V</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Adimensionnement du problème de fissuration d'une éprouvette CT</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Algorithme par longueur d'arc</b>	<b>145</b>
<b>C</b>	<b>Codes d'homogénéisation linéaire élastique avec conditions aux limites périodiques</b>	<b>149</b>
<b>D</b>	<b>Calcul des dimensions de la cellule hexagonale</b>	<b>155</b>
<b>E</b>	<b>Effet des hypothèses 2D et du coefficient de Poisson sur les simulations de propagation en présence de zones architecturées</b>	<b>157</b>
<b>F</b>	<b>Sensibilité des grandeurs issues de la projection sur les séries de Williams aux dimensions de la zone de projection</b>	<b>161</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>

# Table des figures

1	Composite sandwich avec cellules en nid d'abeille utilisé dans l'aéronautique. Source : [CAS 20]. . . . .	1
2	Image de l'avion de ligne Boeing 787 Dreamliner. Les zones en bleu représentent l'utilisation de composites sandwich. Source : <a href="https://www.boeing.com/commercial/787/by-design">https://www.boeing.com/commercial/787/by-design</a> , consulté le 30/06/2023. . . . .	2
3	Configuration étudiée dans cette thèse : zones architecturées hors du chemin de fissure. . . . .	3
1.1	Présentation du problème étudié en mécanique de la rupture. . . . .	10
1.2	Schéma représentant les trois modes de fissuration : l'ouverture de fissure (mode I), le cisaillement dans le plan (mode II) et le cisaillement hors plan ou déchirement (mode III). . . . .	13
1.3	Comparaison des méthodes de représentation d'une fissure dans un maillage éléments finis, appliqué à un exemple simple d'ouverture d'une fissure en mode I. . . . .	19
1.4	Schéma représentant la zone de calcul de l'intégrale J avec l'extension en intégrale surfacique. . . . .	21
1.5	Géométrie des éprouvettes utilisées en mécanique de la rupture. . . . .	23
1.6	Divers exemples de matériaux architecturés selon la définition $A + B +$ échelle + forme. Source : [ASH 13]. . . . .	25
1.7	Échelles considérées dans le cadre des matériaux architecturés. Adapté à partir de [BAR 15]. . . . .	26
1.8	Carte d'Ashby représentant les matériaux en fonction de leur module de Young et de leur masse volumique. Matériaux classiques comparés avec une famille de zone architecturée. Adapté à partir de [FAU 18], sur des résultats de [FLE 10]. . . . .	27
1.9	Contour pour le calcul de l'intégrale J extérieure dans le cas d'une fissure qui traverse une zone hétérogène. Stratégie de Hossain <i>et al.</i> [HOS 14] pour calculer la ténacité effective. . . . .	31
2.1	Dimensions en millimètres de l'éprouvette CT considérée dans ce chapitre. . . . .	38
2.2	Schémas comparant l'algorithme de propagation standard avec un algorithme par longueur d'arc. . . . .	41
2.3	Maillage utilisé pour le calcul des FIC et de la raideur sur les éprouvettes CT. . . . .	41

---

2.4	Schéma représentant les différentes conditions aux limites testées. (a) Mouvement de corps rigide, (b) Contact sans frottement, (c) Force uniforme / Déplacement moyen, (d) Chargement ponctuel, (e) Sous-domaine utilisé pour le modèle avec conditions aux limites issues de la DIC. . . . .	43
2.5	Image du montage expérimental pour la traction avec corrélation d'image. . . . .	44
2.6	Schéma présentant le calcul des déplacements par DIC appliqué à la dernière image d'un des tests. Les images de référence et déformée sont analysées pour en déduire un champ de déplacement en pixel. . . . .	45
2.7	Schéma de la zone <i>Pacman</i> sur laquelle les champs expérimentaux sont projetés sur les séries de Williams. . . . .	46
2.8	Choix de $r_{int}$ à partir d'un critère sur la déformation $\varepsilon_{22}$ . La déformation est donnée en % au moment du début de la propagation. . . . .	47
2.9	Identification de $r_{ext}$ à partir d'un critère sur la K-dominance. . . . .	47
2.10	Courbes de charge obtenues pour les trois éprouvettes. (a) Force en fonction du déplacement machine, (b) Force en fonction de l'ouverture de fissure. . . . .	48
2.11	Schéma représentant les points de mesure de l'ouverture de fissure (COD). . . . .	49
2.12	Fonctions de raideur en fonction du type de conditions aux limites. Les raideurs sont évaluées sur un calcul 3D, en faisant varier la longueur de fissure. (a) Raideur calculée en fonction du déplacement machine, (b) Raideur calculée en fonction de l'ouverture de fissure. . . . .	50
2.13	Identification du taux de restitution d'énergie. (a) Schéma représentant les calculs d'énergie à un instant donné de la propagation. (b) Énergie dissipée en fonction de la longueur de fissure. . . . .	51
2.14	Modules de Young identifiés en 2D avec hypothèses de contraintes planes et déformations planes comparées avec la valeur identifiée en 3D. . . . .	52
2.15	Erreur relative de projection moyennée sur toute la zone en fonction de l'avancée de la goupille mobile pour chaque éprouvette. . . . .	53
2.16	Comparaison des énergies de rupture identifiées en 2D avec hypothèses de contraintes planes et déformations planes, comparées avec la valeur identifiée en 3D. (a) Identification de $K_{IC}$ en CP. (b) Comparaison DP/CP avec le 3D. . . . .	54
2.17	Conditions aux limites en déplacement imposé comparées aux résultats expérimentaux. (a-b) : éprouvette CT 1, (c-d) : éprouvette CT 2, (e-f) : éprouvette CT 3. La première colonne (a, c et e) montre la comparaison des CL sur les goupilles. La seconde colonne (b, d et f) montre la comparaison avec les CL issues de la DIC. . . . .	57
2.18	Conditions aux limites en force. (a) : Comparaison des différents modèles sur l'exemple de la CT 1. (b-d) Comparaison du modèle éléments finis avec les données expérimentales et la formule donnée dans les normes ASTM E1820-09 et ASTM D5045-14. (b) éprouvette CT 1, (c) éprouvette CT 2, (d) éprouvette CT 3. . . . .	58
3.1	Schéma représentant les conditions aux limites périodiques : la décomposition de la frontière en une partie $\Gamma^+$ et une partie $\Gamma^-$ et la périodicité de la fluctuation de déplacement $\mathbf{u}'$ . . . . .	65

3.2	Schéma représentant la méthode de calcul du comportement élastique équivalent. Illustré sur un cas de chargement en déformation homogène avec $E = 1$ GPa et $\nu = 0.49$ . . . . .	68
3.3	Dimensions du pavage hexagonal paramétrisé étudié. . . . .	70
3.4	Géométries obtenues en imposant une porosité constante $p = 0.55$ , une taille de cellule constante et un angle $\theta$ variant entre $-40$ et $60$ °. . . . .	70
3.5	Déformées pour les différentes conditions aux limites pour les trois chargements nécessaires à l'homogénéisation en 2D. . . . .	71
3.6	Norme du tenseur d'élasticité obtenu par les différentes méthodes en fonction de la taille du domaine étudié. . . . .	72
3.7	Coefficients équivalents obtenus. $E$ et $\mu$ représentent les modules d'élasticité du matériau constitutif. . . . .	73
3.8	Illustration du comportement auxétyque sur un matériau contenant le pavage hexagonal avec $\theta = -40$ °. . . . .	74
4.1	Géométrie globale du problème étudié dans ce chapitre : éprouvette CT avec zones architecturées de part et d'autre de la fissure. Le problème étudié dans ce chapitre est indépendant de l'épaisseur. . . . .	78
4.2	Géométrie des motifs utilisés dans ce chapitre. (a) Rappel des géométries des cellules hexagonales paramétrées à porosité constante $p = 0.55$ . (b) Motif circulaire ajouté pour cette étude, $p = 0.41$ . . . . .	78
4.3	Fonctions régissant la propagation de fissure identifiées numériquement sur différentes géométries d'éprouvettes, pleines et architecturées avec différents motifs. . . . .	80
4.4	Courbes représentant la propagation de fissure pour différentes géométries d'éprouvettes, pleines et architecturées avec différents motifs. . . . .	81
4.5	Énergies calculée avec un chargement ajusté pour obtenir une propagation quasi-statique ( $K_I = K_{IC}$ ) pendant toute la propagation. . . . .	83
4.6	Résultats numériques en amont des zones architecturées. Identification de deux parties à comportements différents : (a) et (b). . . . .	84
4.7	Résultats numériques entre les zones architecturées. Identification de quatre parties à comportement différents : (a), (b), (c) et (d). . . . .	85
4.8	Résultats numériques en aval des zones architecturées. Identification de deux parties à comportements différents : (a) et (b). . . . .	88
4.9	Courbes de charge (a) et de longueur de fissure (b) pour le motif hexagonal réentrant ( $\theta = -40$ °), présentant une instabilité snap-back. Représentation du chemin où le chargement est adapté pour rester dans des conditions quasi-statiques et du chemin à déplacement imposé croissant présentant une phase dynamique. . . . .	90
4.10	Mise en évidence de l'augmentation de l'énergie nécessaire à la fissuration dans le cas du snap-through. On voit apparaître une contribution supplémentaire $\bar{E}^k$ . . . . .	91
4.11	Comparaison des modèles avec différentes densités de motifs avec le modèle présentant un comportement orthotrope équivalent à la place des zones architecturées. Calculs réalisés pour le motif hexagonal $\theta = -40$ °. . . . .	93
4.12	Effet de l'angle des hexagones sur les différents phénomènes renforçants. . . . .	95

4.13	Effet des coefficients élastiques équivalents de la zone architecturées sur les trois effets renforçants. Les paramètres non-étudiés sont fixés à $E_1/E = 0.2$ , $E_2/E = 0.2$ , $\nu_{12} = 0$ et $\mu_{12}/\mu = 0.1$ . . . . .	96
5.1	Chemin de fissure obtenu sur une éprouvette architecturée. Chemin observé sur les champs de norme de la déformation en %, seuil placé à 20 %. . . . .	100
5.2	Présentation du problème sur les éprouvettes TDCB. (a) Géométrie de l'éprouvette TDCB, (b) Résultats numériques, obtenus par l'algorithme par longueur d'arc pour ce problème. . . . .	101
5.3	Comparaison des chemins de fissures obtenus numériquement et expérimentalement. (a) Pour une éprouvette CT à motif auxétique. (b) Pour une éprouvette TDCB avec le même motif. . . . .	103
5.4	Chemins de fissure identifiés sur les champs d'endommagement obtenus numériquement par champ de phase sur les différentes géométries testées. . . . .	104
5.5	Résultat obtenu par champ de phase pour une géométrie d'éprouvette où la fissure a très peu bifurqué et une instabilité a été observée. Courbe de charge et champs d'endommagement obtenus avant et après le saut de force. . . . .	105
5.6	Schéma représentant les rainures introduites pour stabiliser le chemin de fissure, sur vue de face des éprouvettes et de côté (zoom sur la partie où on observe la rainure). . . . .	105
5.7	Courbes de charges obtenues expérimentalement des motifs hexagonaux d'angle $0^\circ$ et $40^\circ$ . . . . .	106
5.8	Photographies, prises au microscope optique HIROX MXB-5000REZ, des faciès de rupture obtenus. Mise en évidence de deux zones correspondantes à deux régimes distincts de la propagation. Régime quasi-statique à droite et dynamique à gauche. . . . .	106
5.9	Zone de projection sur les séries de Williams pour les éprouvettes architecturées. Norme du déplacement en pixels ( $1 \text{ px} \approx 0.02 \text{ mm}$ ). . . . .	107
5.10	Identification des longueurs de fissure sur les faciès de rupture. Exemple de l'identification de la longueur de fissure finale, avant la phase dynamique. . . . .	108
5.11	Comparaison des méthodes de mesure de fissure pour une éprouvette avec $\theta = 0^\circ$ . La longueur initiale et le point juste avant la phase dynamique sont mesurés sur les faciès de rupture. . . . .	109
5.12	Identification du taux de restitution d'énergie sur une éprouvette avec zones architecturées. . . . .	109
5.13	Effet des zones architecturées sur les résultats expérimentaux. Comparaison d'un résultat sur une éprouvette TDCB pleine avec une TDCB avec zones architecturées ( $\theta = 0^\circ$ ). . . . .	111
5.14	Effet des zones architecturées sur les énergies calculées expérimentalement. Comparaison d'un résultat sur une éprouvette TDCB pleine avec une TDCB avec zones architecturées ( $\theta = 0^\circ$ ). . . . .	112
5.15	Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour une éprouvette avec $\theta = 0^\circ$ . . . . .	113
5.16	Effet de la longueur de zone sur les courbes de charges numériques (obtenues par longueur d'arc) et expérimentaux. . . . .	114

5.17	Effet de la longueur de zone architecturée sur les données à l’initiation de la phase dynamique. Comparaison des tendances numériques et expérimentales.	115
6.1	Schéma représentant différents contours (incluant ou non les zones architecturées) permettant d’expliquer la méthode basée sur l’intégrale J.	123
6.2	Présentation du problème de <i>Surfing Boundary Conditions</i> . (a) Géométrie du problème étudié. Dimensions en millimètres. (b) Champs de déformation verticale dans la configuration déformée (amplification x900) pour un chargement de $K_{test} = 1 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ , le module de Young utilisé ici est $E = 1 \text{ GPa}$ .	125
6.3	Schéma illustrant la procédure de calcul pour le problème en <i>Surfing Boundary Conditions</i> .	126
6.4	Répartition des propriétés matériaux pour les 400 simulations à comportement aléatoire de la zone. (a) Modules de Young dans les deux directions, (b) Coefficient de Poisson dans de plan et (c) Module de cisaillement.	128
6.5	Comparaison des ténacités équivalentes en fonction de la longueur de fissure pour une simulation.	129
6.6	Étude des valeurs maximales de ténacités équivalentes, comparaison entre les définitions basées sur le chargement et la définition basée sur l’intégrale J.	129
6.7	Répartition des valeurs obtenues pour les 400 comportements de zone testés en prenant la moyenne pendant la propagation des différentes ténacités équivalentes.	131
6.8	Comparaison des ténacités effectives calculées à partir du maximum de la définition basée sur l’intégrale J et de la moyenne de la définition sur le chargement en déplacement.	132
A.1	Éprouvette CT étudiée ici.	143
D.1	Dimensions du pavage hexagonal paramétrisé.	155
E.1	Géométrie du problème étudié dans cette partie. (a) Dimensions globales de l’éprouvette. (b) Illustration du motif utilisé.	157
E.2	Effet de l’hypothèse 2D sur les courbes de charges et de longueur de fissure obtenues pour l’éprouvette pleine et celle avec le motif hexagonal.	158
E.3	Effet du coefficient de Poisson sur les courbes de charges et de longueur de fissure obtenues pour l’éprouvette pleine et celle avec le motif hexagonal.	159
F.1	Grandeurs identifiées par DIC pour l’éprouvette CT 1. Faisceaux de courbes obtenus en faisant varier les dimensions de la zone de projection. (a) Longueur de fissure. (b) Facteur d’intensité des contraintes.	162



# Liste des tableaux

2.1	Écart du FIC mesuré par différents modèles par rapport à la valeur expérimentale au dernier point de mesure effectué. . . . .	56
2.2	Coefficients matériau identifiés lors de la corrélation essai-calcul du problème de référence. . . . .	59
5.1	Valeur des énergies de Griffith identifiées sur les éprouvettes architecturées comparées aux $G_c$ identifiées sur les éprouvettes de référence. . . . .	110
D.1	Dimensions en mm pour $l_x = 1$ mm, $l_y = 1$ mm et $p = 0.55$ . . . . .	156



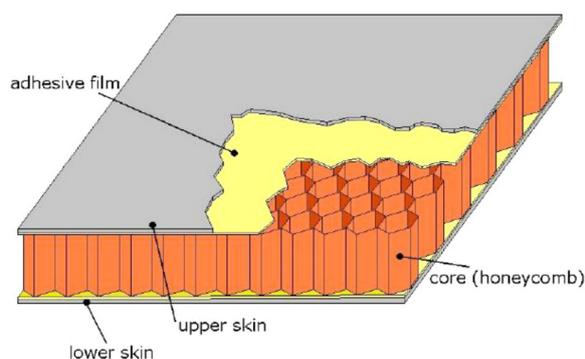
# Introduction

La mécanique de la rupture s'attache à décrire dans quelles conditions et comment des fissures s'initient et se propagent. Face au développement de nouveaux matériaux de structures, qui répondent à des problématiques industrielles, ce champ de recherche fait face à des défis inédits. Dans ce travail, on s'intéresse à une classe de ces nouveaux matériaux, les matériaux architecturés, et on se pose la question de comment leur introduction hors du chemin de fissure peut modifier le phénomène de propagation de la fissure. Cette thèse est financée dans le cadre d'un contrat doctoral du ministère de la recherche et de l'innovation. Elle a été effectuée au laboratoire LaMCoS de l'INSA Lyon en partenariat avec le laboratoire IMSIA de l'ENSTA Paris.

Dans cette introduction générale, des éléments de contexte sur les matériaux architecturés et les enjeux qui mènent à l'étude de la fissuration sont donnés. Puis le sujet précis et les objectifs de cette thèse sont détaillés, pour finir sur une explication de l'organisation du manuscrit.

## Matériaux architecturés

Les matériaux architecturés représentent une large classe de matériaux, où la microstructure a été modifiée, optimisée, afin d'obtenir des propriétés intéressantes à l'échelle effective. Un exemple est donné en Figure 1. Ces matériaux connaissent un très fort développement car ils répondent à des problématiques de poids en gardant des propriétés mécaniques intéressantes. Cela les rend particulièrement adaptés aux problématiques de l'industrie du transport où la recherche de l'allègement des structures tout en gardant la fiabilité est un enjeu prépondérant. C'est pourquoi certains matériaux architecturés sont déjà utilisés dans le domaine de l'aéronautique. C'est le cas par exemple des composites *sandwich* qui sont présents dans plusieurs parties des avions modernes, comme présenté en Figure 2.



**FIGURE 1** – Composite sandwich avec cellules en nid d'abeille utilisé dans l'aéronautique. Source : [CAS 20].



**FIGURE 2** – Image de l’avion de ligne Boeing 787 Dreamliner. Les zones en bleu représentent l’utilisation de composites sandwich. Source : <https://www.boeing.com/commercial/787/by-design>, consulté le 30/06/2023.

Le développement grandissant de ces matériaux et leur application dans l’industrie sont rendus possibles grâce au développement des techniques de fabrication, comme par exemple les technologies de fabrication additive. Face à l’intérêt grandissant de l’industrie, notamment du transport, pour les matériaux architecturés, la recherche en mécanique doit fournir des outils pour déterminer leur tenue en service.

## Enjeux de la mécanique de la rupture

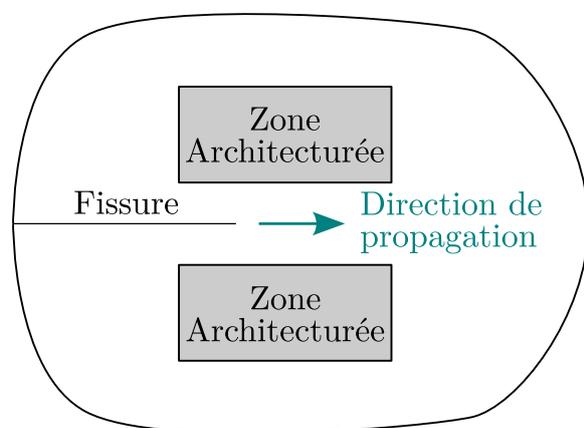
Parmi les outils qui permettent d’évaluer la tenue en service d’une structure, ceux de la mécanique de la rupture présentent un intérêt particulier. Dans le contexte où l’on souhaite allonger la durée de vie des équipements, il est important de prédire comment les fissures vont s’initier, si elles vont se propager et, le cas échéant, en combien de temps elles mèneront vers une défaillance globale du système.

Comme le matériau parfait n’existe pas, des défauts propices à l’apparition de microfissures existent dans toutes les applications. Dans des domaines où la sécurité est un enjeu essentiel comme par exemple dans l’aéronautique, le nucléaire ou le bâtiment, la fissuration doit obligatoirement être prise en compte avec des outils robustes.

Le fait de mieux comprendre les fissures et leur risque de propagation permet également de diminuer les marges de sécurité. La mécanique de la rupture a permis de montrer qu’une structure fissurée peut encore avoir une durée de vie relativement longue. Cela permet donc d’augmenter les durées de vie des équipements, ce qui rejoint les enjeux de durabilité auxquels font face de nombreuses industries. Le fait de diminuer les marges de sécurité permet également de moins sur-dimensionner et donc d’alléger les structures, ce qui dans le domaine du transport équivaut à une économie de carburant.

## Problème étudié dans cette thèse

Dans cette thèse, on se place à la croisée des domaines de la mécanique de la rupture et de l'étude des matériaux architecturés. On se pose la question de l'existence de phénomènes de rupture spécifiques dans ces matériaux. En particulier, la question à laquelle on souhaite répondre est : comment utiliser les matériaux architecturés pour améliorer la résistance à la propagation de fissure d'une structure ? Cette question est très vaste et peut être étudiée sous plusieurs aspects. Dans le travail présenté ici, on se concentre sur la configuration suivante : une fissure se propage dans un milieu homogène et des zones architecturées sont ajoutées de part et d'autre du chemin de fissure. Cette configuration est illustrée en Figure 3. On se placera dans le cas où la fissure se propage en ligne droite, la propagation à l'intérieur des zones architecturées n'est donc pas envisagée. De plus, l'étude des matériaux architecturés est restreinte aux configurations bidimensionnelles monophasiques poreuses.



**FIGURE 3** – Configuration étudiée dans cette thèse : zones architecturées hors du chemin de fissure.

L'objectif est de déterminer quels sont les effets possibles de l'ajout de zones architecturées dans cette configuration. Pour cela, des outils robustes pour caractériser ce problème ont dû être mis en place. Le sujet est étudié à la fois du point de vue numérique et expérimental. La simulation numérique offre la possibilité de réaliser un grand nombre de tests virtuels à un prix très faible par rapport aux expériences. Elle est donc utilisée pour prospecter les comportements potentiellement intéressants. L'aspect expérimental, de son côté, est utilisé car il permet de vérifier que les phénomènes identifiés apparaissent en réalité et ne sont pas issus de biais du modèle.

Le sujet de thèse permet d'explorer de nouveaux comportements en propagation de fissure. Il présente l'intérêt académique d'approfondir la compréhension de phénomènes complexes lors de la propagation de fissure. De plus, les configurations présentées permettent d'ouvrir le champ des possibles quant à l'augmentation de la résistance de structures sensibles à la propagation de fissure.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est organisé en cinq parties dont on donne ici les principaux axes.

### Partie I : État de l'art

Cette partie contient un unique chapitre, le Chapitre 1, et présente un tour d'horizon de la littérature disponible pour traiter le sujet de thèse. Cet état de l'art est construit autour des deux thèmes principaux : la mécanique de la rupture et les milieux architecturés. Les méthodes disponibles pour traiter les problèmes de propagation de fissure et pour modéliser les matériaux architecturés sont présentés. Enfin, un catalogue des études mêlant ces deux domaines est dressé.

### Partie II : Études préliminaires

Dans cette deuxième partie, les études préliminaires nécessaires à l'étude de l'effet des zones architecturés sur la fissuration sont présentées. Un travail est nécessaire sur les deux grands thèmes de la thèse : la mécanique de la rupture (Chapitre 2) et les milieux architecturés (Chapitre 3).

Le Chapitre 2 présente l'étude de la fissuration d'une éprouvette imprimée en 3D sans porosité. Cette étude permet de mettre en place les outils numériques et expérimentaux pour étudier la propagation de fissure. En particulier, la comparaison des résultats numériques et expérimentaux sur ce cas de référence permet de faire des hypothèses physiquement fondées qui seront ensuite utilisées pour traiter de l'effet des zones architecturées. Dans ce chapitre, le rôle essentiel des conditions aux limites dans la modélisation de la phase de propagation est mis en évidence. Cet aspect a donné lieu à une publication.

Le Chapitre 3 présente le modèle qui permet de calculer le comportement élastique équivalent des zones architecturées : l'homogénéisation linéaire par éléments finis. Ce modèle est implémenté et appliqué sur des exemples de milieux architecturés. Le calcul de coefficients élastiques équivalents sera utilisé par la suite pour remplacer la description précise de la zone architecturée. Cela sera utile pour limiter le temps de calcul, mais aussi pour discriminer les effets de chaque composante du comportement effectif.

### Partie III : Influence de la présence de zones architecturées hors du chemin de fissure

Cette troisième partie constitue le cœur du travail réalisé lors de cette thèse. Il s'agit de l'étude de l'effet de l'ajout de zones architecturées hors du chemin de fissure sur les phénomènes de propagation. Ce problème est étudié à la fois du point de vue numérique (Chapitre 4) et du point de vue expérimental (Chapitre 5).

Le Chapitre 4 présente les résultats de la prospection numérique. La simulation pour quelques exemples intéressants est présentée. Une analyse des phénomènes est réalisée en distinguant les différentes phases de la propagation. Des effets renforçants pour la fissuration sont mis en lumière. Puis, des études paramétriques sont présentées, elles permettent d'approfondir la compréhension des phénomènes en discriminant les paramètres influents.

Le Chapitre 5 s'attache à la validation expérimentale de l'apparition des phénomènes renforçants décrits au Chapitre 4. La mise en place de l'essai pour les éprouvettes avec zones architecturées est détaillée. En particulier, le dialogue avec le calcul éléments finis est utilisé pour diminuer les risques de problèmes expérimentaux. Les résultats expéri-

mentaux, ainsi que leur comparaison avec le modèle numérique, sont présentés.

#### **Partie IV : Vers une définition de ténacité effective**

Cette quatrième partie est constituée d'un unique chapitre (6). Il présente la réflexion autour de la définition d'une ténacité effective qui représenterait les effets observés dans cette thèse. Cette notion est envisagée comme la mesure de la performance de la zone architecturée par rapport au comportement en propagation de fissure. Différentes définitions sont comparées numériquement et le lien entre celles-ci est discuté.

#### **Partie V : Conclusion et perspectives**

Cette dernière partie présente une synthèse des enseignements tirés des recherches effectuées pendant cette thèse. Quelques perspectives et questions ouvertes sont également présentées.



# Première partie

## État de l'art



# Chapitre 1

## État de l'art sur la rupture et les matériaux architecturés

*Ce chapitre a pour objectif de présenter les bases bibliographiques sur lesquelles le travail de thèse s'appuie. L'état de l'art est dressé autour des deux thèmes principaux de la thèse : la mécanique de la rupture fragile et les matériaux architecturés. Ces deux domaines sont présentés séparément, puis la rupture des matériaux multi-échelles (dont font partie les matériaux architecturés) est évoquée. L'état de l'art sur ce point présente des études récentes et une question en suspens : celle de la ténacité effective.*

### Sommaire

---

<b>1.1 Mécanique de la rupture fragile</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1.1 Théorie . . . . .	10
1.1.2 Méthodes numériques . . . . .	15
1.1.3 Méthodes expérimentales . . . . .	21
<b>1.2 Matériaux architecturés</b> . . . . .	<b>24</b>
1.2.1 Définition . . . . .	24
1.2.2 Utilisation . . . . .	26
1.2.3 Fabrication . . . . .	26
1.2.4 Modélisation . . . . .	27
<b>1.3 Rupture de matériaux multi-échelles</b> . . . . .	<b>29</b>
1.3.1 Études existantes . . . . .	29
1.3.2 La question de la ténacité effective . . . . .	30
<b>1.4 Bilan sur l'état de l'art</b> . . . . .	<b>32</b>

---

## 1.1 Mécanique de la rupture fragile

### 1.1.1 Théorie

On s'intéresse à la mécanique d'un solide  $\Omega$  en présence d'une fissure  $\Gamma$ , comme représenté en Figure 1.1. Ce solide est soumis à un champ de déplacement imposé  $u_D$  sur une partie de sa frontière  $\partial\Omega_D$ , un effort surfacique imposé  $t_N$  sur une autre partie  $\partial\Omega_N$ . On a  $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D \cup \Gamma$ . On ne considère pas de force volumique. Les champs de déplacements, contraintes et déformations obtenus sont notés respectivement  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Le problème mécanique s'écrit alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ sur } \Omega_D \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N \text{ sur } \Omega_N \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

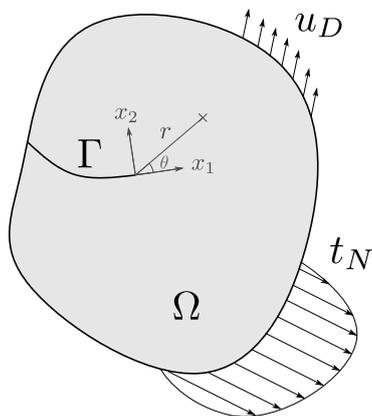


FIGURE 1.1 – Présentation du problème étudié en mécanique de la rupture.

#### 1.1.1.1 Mécanique élastique linéaire de la rupture

Dans cette thèse, on s'intéresse à la Mécanique Élastique Linéaire de la Rupture (MELR). Ce cadre théorique a été la première approche utilisée pour décrire la rupture des matériaux. Cela est dû à ses hypothèses simplificatrices qui ont rendu le problème plus accessible. Cependant, les solutions issues de la MELR sont loin d'être simplistes. D'autre part, elles s'appliquent à un très grand nombre de problèmes industriels. En effet, ce cadre théorique a été utilisé dans la résolution de problèmes à différentes échelles : du génie civil [LEA 16] aux composants micro-électroniques [EVA 18], et pour des matériaux très divers : métaux [MAH 07], céramiques [JAU 12], polymères [MAT 76].

Dans le cadre de la MELR, plusieurs hypothèses sont considérées comme satisfaites. En particulier, le matériau est supposé élastique linéaire. La pointe de fissure étant une zone très fortement sollicitée du fait des effets de concentration de contrainte, cette hypothèse n'est pas valable dans cette zone. Cependant, il a été montré que si les effets non-linéaires liés à des contraintes élevées sont cantonnés à une petite zone en pointe de fissure, cela n'a pas d'influence sur le comportement global [BUI 76]. Cette hypothèse, appelée *hypothèse de plasticité confinée*, est caractéristique des matériaux dits *fragiles*,

pour lesquels la rupture intervient avant la plasticité à grande échelle. Dans ce cadre, la loi de comportement peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.2)$$

où  $\mathbb{C}$  est le tenseur de Hooke, ou tenseur d'élasticité. La déformation dans l'hypothèse des petites perturbations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} \right). \quad (1.3)$$

La MELR s'appuie également sur d'autres hypothèses. La première est que les fissures n'interagissent pas, la plupart des études se restreignent à une fissure unique. De plus, une restriction d'échelle doit être mise en place : la fissure doit être relativement grande par rapport aux dimensions caractéristiques de la structure et du matériau, afin de caractériser un problème de propagation de fissure et non d'initiation. En effet, un effet de taille a été mis en évidence [BAZ 98], qui prouve qu'il existe un comportement différent lorsque la fissure est petite. Cette hypothèse permet également, dans la plupart des cas, de s'affranchir de la dépendance à la micro-structure et ainsi de considérer des lois de comportement homogène.

En plus de ces hypothèses, on se restreindra dans cette thèse à l'étude de solides sous chargement quasi-statique. Cela veut dire que les problèmes d'impacts ne seront pas évoqués. Cependant, cela n'exclut pas, *a priori*, l'étude de la propagation de fissure dynamique, qui peut avoir lieu sous chargement lent dans le cas de fissures qui accélèrent.

### 1.1.1.2 Approche énergétique

Historiquement, la première approche de mécanique de la rupture est une approche énergétique, proposée par Griffith en 1920 [GRI 20]. Il propose le principe suivant : la fissure se propage quand l'énergie mécanique qui serait relâchée par la propagation est suffisante pour créer les deux surfaces libres de l'extension de la fissure.

Cette théorie permet de décrire le bilan d'énergie lors de la propagation de fissure. Pour commencer, ce bilan est écrit comme la variation d'énergie potentielle et cinétique qui sont compensées par les dissipations du système. Il s'agit du premier principe de la thermodynamique, écrit en termes de puissances :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} + \frac{dE^k}{dt} = - \frac{dE^{diss}}{dt}. \quad (1.4)$$

L'énergie potentielle  $\mathcal{P}$  est définie comme l'énergie élastique stockée dans le solide moins le travail des forces extérieures, soit :

$$\mathcal{P} = E^{el} - W^{ext}. \quad (1.5)$$

L'énergie élastique stockée est définie en fonction de la densité volumique d'énergie de déformation  $\psi$ , et s'écrit de la façon suivante dans le cadre de la loi de comportement élastique :

$$E^{el} = \int_{\Omega} \psi \, dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV. \quad (1.6)$$

La puissance développée par les forces extérieures s'écrit :

$$P^{ext} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dS. \quad (1.7)$$

Au final, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_0^t \left[ \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dS \right] dt. \quad (1.8)$$

Dans le cadre de la MELR, on considère les dissipations plastiques et visco-plastiques comme négligeables. La seule dissipation écrite dans ce modèle est donc celle issue du processus de fissuration. Cette dissipation a été décrite par Griffith [GRI 20]. L'énergie dissipée lors de l'avance de fissure d'une surface  $dA/dt$  est l'énergie nécessaire à créer les deux surfaces libres :

$$\frac{dE^{diss}}{dt} = 2\gamma \frac{dA}{dt} = G_c \frac{dA}{dt}, \quad (1.9)$$

$G_c$  est l'énergie de surface multipliée par deux, aussi appelée énergie de Griffith. Cette grandeur ne dépend que du matériau considéré.

En intégrant les définitions des énergies potentielles et dissipées au bilan d'énergie, on obtient :

$$\frac{dE^{el}}{dt} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} dS + \frac{dE^k}{dt} = -G_c \frac{dA}{dt}, \quad (1.10)$$

soit, en réécrivant les dérivées en passant par la surface de fissure et en isolant le terme cinétique :

$$\left( \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dS - \frac{\partial E^{el}}{\partial A} - G_c \right) \frac{dA}{dt} = \frac{dE^k}{dt}. \quad (1.11)$$

On introduit ici la notion de taux de restitution d'énergie, définie comme :

$$G = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial A} dS - \frac{\partial E^{el}}{\partial A}, \quad (1.12)$$

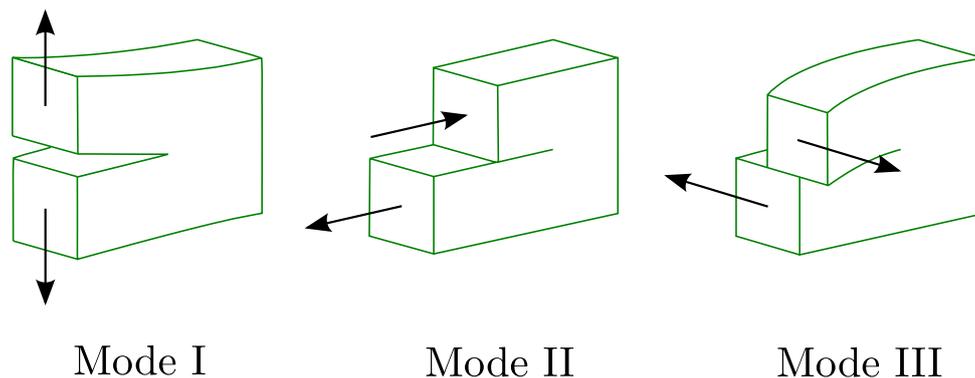
on remarque également qu'il s'agit de l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la surface de fissure, à chargement fixé :

$$G = - \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial A} \right|_{\text{chargement fixé}}. \quad (1.13)$$

Le bilan s'écrit alors :

$$(G - G_c) \frac{dA}{dt} = \frac{dE^k}{dt}. \quad (1.14)$$

L'irréversibilité du processus de fissuration s'écrit  $\frac{dA}{dt} \geq 0$ . D'autre part, si l'on considère que l'état initial est un état d'équilibre, on a, au moins pendant une période,  $\frac{dE^k}{dt} \geq 0$ . À partir de ces deux inégalités et du bilan (1.14), on peut distinguer trois cas :



**FIGURE 1.2** – Schéma représentant les trois modes de fissuration : l'ouverture de fissure (mode I), le cisaillement dans le plan (mode II) et le cisaillement hors plan ou déchirement (mode III).

- Lorsque  $G < G_c$ , la seule manière de respecter le bilan (1.14) et les inégalités est que  $\frac{dA}{dt} = 0$ . Cela signifie que la fissure ne se propage pas.
- Lorsque la fissure se propage de manière stable, c'est-à-dire que le solide est à l'état d'équilibre à chaque instant de la propagation, on a des conditions quasi-statiques, donc  $\frac{dE^k}{dt} = 0$ . Cela implique  $G = G_c$ .
- Lors d'une propagation dynamique, instable, avec une fissure qui accélère, la puissance des quantités d'accélération est strictement positive, donc on a forcément  $G > G_c$  pour respecter le bilan d'énergie.

Au final, le critère de Griffith s'écrit de la manière suivante :

Critère de propagation

$$\begin{cases} G < G_c & \Leftrightarrow \text{Pas de propagation} \\ G = G_c & \Leftrightarrow \text{Propagation stable} \\ G > G_c & \Leftrightarrow \text{Propagation rapide} \end{cases} \quad (1.15)$$

### Cas d'un problème à un paramètre de chargement

Dans le cas où le chargement extérieur peut être réduit à un unique déplacement imposé  $u$  et sa force de réaction  $F$ , le travail des forces extérieures peut s'écrire :

$$W^{ext} = \int_0^u F \, du. \quad (1.16)$$

L'énergie élastique, de son côté, peut être calculée sur les bords du domaine en utilisant les équations d'équilibre :

$$E^{el} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dS = \frac{1}{2} Fu. \quad (1.17)$$

#### 1.1.1.3 Approche locale

En parallèle de l'approche énergétique de Griffith, de nombreux scientifiques se sont intéressés à la recherche du comportement mécanique en pointe de fissure. Irwin [IRW 57]

présente une solution pour les champs de déplacement et de contrainte à proximité de la pointe de fissure, en se basant sur les solutions de Westergaard [WES 39] :

Solution asymptotique - Déplacement

$$\begin{cases} u_1(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_2(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{\kappa-1}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_3(r, \theta) = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (1.18)$$

Solution asymptotique - Contrainte

$$\begin{cases} \sigma_{11}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{23}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{13}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (1.19)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement du matériau,  $\kappa$  est la constante de Kolosov du matériau, qui s'exprime en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$  :  $\kappa = 3 - 4\nu$  dans l'hypothèse des déformations planes et  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  dans l'hypothèse des contraintes planes. Les directions 1 et 2, ainsi que les coordonnées cylindriques  $r$  et  $\theta$  sont définies sur la Figure 1.1. Les solutions sont décomposées en trois modes, représentés par les trois Facteurs d'Intensité des Contraintes (FIC)  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Ces modes correspondent aux directions possibles de sollicitation de la fissure : l'ouverture de fissure, le cisaillement dans le plan et le cisaillement hors plan (ou déchirement). Ils sont représentés en Figure 1.2. La particularité de ces solutions est que la contrainte est infinie en pointe de fissure : on parle alors de singularité des champs de contrainte et de déformation.

**Remarque 1 :** *En réalité, la contrainte ne peut pas être infinie en pointe de fissure. La solution asymptotique se base sur une loi de comportement linéaire élastique. Or, en pointe de fissure, les effets non-linéaires ne peuvent pas être négligés. Les équations (1.18) et (1.19) sont donc valables uniquement en dehors de la zone de non-linéarité, qui est très petite dans le cadre de la MELR.*

**Remarque 2 :** *La solution présentée est exacte dans le cas d'une fissure dans un milieu infini. Elle est également une bonne approximation de ce qui se passe dans des situations*

réelles, à condition d'être loin des conditions aux limites (chargements et bords libres). La zone dans laquelle la solution (1.18) et (1.19) prévaut sur les termes d'effet de bord est appelée zone de K-dominance.

**Remarque 3 :** Lorsque  $K_{III} = 0$  et que la géométrie est invariante dans l'épaisseur, on est en présence d'un problème en deux dimensions. Deux hypothèses sont alors possibles : les déformations planes et les contraintes planes. La solution présentée est exacte dans le cas des déformations planes, mais pas dans le cas des contraintes planes [BUI 06]. En effet, dans ce cas, elle mène à une déformation hors plan  $\varepsilon_{33}$  proportionnelle à  $1/\sqrt{r}$ . Or, les équations de compatibilité imposent  $\varepsilon_{33,11}(x_1, x_2) = \varepsilon_{33,22}(x_1, x_2) = \varepsilon_{33,12}(x_1, x_2) = 0^1$ , ce qui veut dire que  $\varepsilon_{33}$  est une fonction affine de  $x_1$  et  $x_2$ . On a donc une contradiction et la solution asymptotique est fautive en contrainte plane. Cependant, elle reste une bonne approximation si l'on se place assez loin du front de fissure.

L'intensité de la singularité est représentée par les FIC. Ils sont donc une mesure de la sollicitation de la fissure, au même titre que le taux de restitution d'énergie  $G$ . Irwin [IRW 57] montre que dans le cas d'un matériau isotrope, on peut écrire :

$$G = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E'} K_{III}^2, \quad (1.20)$$

où  $E$  est le module de Young.  $E'$  est le module de Young équivalent qui vaut  $E$  dans l'hypothèse des contraintes planes et  $E/(1-\nu)$  dans l'hypothèse des déformations planes. L'équation (1.20) est connue sous le nom de *formule d'Irwin*. Elle montre l'équivalence entre l'approche énergétique de Griffith et l'approche locale. Lorsqu'une fissure est sollicitée uniquement en mode I, on peut alors définir un critère de propagation équivalent au critère énergétique (1.15) :

Critère de propagation en mode I

$$\begin{cases} K_I < K_{IC} & \Leftrightarrow \text{Pas de propagation} \\ K_I = K_{IC} & \Leftrightarrow \text{Propagation stable} \\ K_I > K_{IC} & \Leftrightarrow \text{Propagation rapide} \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $K_{IC} = \sqrt{E'G_c}$  est la ténacité du matériau considéré.

## 1.1.2 Méthodes numériques

Les solutions analytiques présentées dans les équations (1.18) et (1.19) font apparaître les FIC, qui dépendent du chargement appliqué. Se pose alors la question du lien entre ces deux grandeurs. Quelques solutions analytiques existent pour des géométries simples, mais dans la plupart des cas de structures plus complexes, ce lien n'est pas connu. Il est donc nécessaire d'avoir accès à des méthodes numériques pour déterminer les champs en pointe de fissure. De plus, comme évoqué au paragraphe précédent, les solutions asymptotiques ne sont valables que dans la zone de K-dominance, et ne sont pas capables de représenter les effets de bord. Le recours aux méthodes numériques est donc indispensable pour calculer précisément les champs mécaniques dans toute la structure. Les méthodes présentées ici se

1. La notation  $,_i$  représente la dérivée partielle par rapport à  $x_i$

basent sur la méthode des éléments finis, ou *Finite Element Methods* (FEM). Celle-ci est très largement utilisée en mécanique des milieux continus, car elle permet de représenter un très grand nombre de problèmes physiques sur des géométries complexes pour un coût raisonnable. Inclure l'analyse de la fissuration dans un cadre éléments finis permet de bénéficier de ces avantages et de développer des méthodes de calcul qui s'intègrent plus facilement dans les routines de calcul industrielles. Il existe cependant des approches en mécanique de la rupture qui n'utilisent pas les éléments finis, comme les méthodes perturbatives [LAZ 11].

### 1.1.2.1 Représentation d'une fissure dans un calcul éléments finis

La première question qui se pose est celle de la représentation géométrique d'une fissure dans un maillage éléments finis. En effet, les formes de fissures, notamment en trois dimensions, peuvent être complexes et non adaptées aux algorithmes de maillage classiques. L'autre difficulté majeure est la présence de champs singuliers en pointe de fissure. La recherche de méthodes numériques s'est largement concentrée sur la façon de représenter au mieux ces champs.

#### Fissure représentée dans le maillage

La première famille de méthodes est celle qui représente la fissure explicitement dans le maillage. La fissure est représentée par une entaille très fine ou une ligne de nœuds initialement coïncidents, mais sans aucune raideur les liant entre eux. Les éléments de Barsoum [BAR 74] sont utilisés en pointe de fissure. Ils présentent un nœud supplémentaire qui permet de mieux capturer les champs singuliers (Figure 1.3a). Dans ces modèles, une nouvelle géométrie doit être définie à chaque fois que la fissure se propage, ce qui peut mener à de lourds algorithmes de remaillage.

Une autre méthode est celle des zones cohésives [BAR 59, DUG 60]. Dans cette approche, la fissure est remplacée par des éléments avec un comportement spécifique qui, lorsque la condition de fissuration est respectée, n'ont plus aucune raideur. Dans ce cas, la fissure est explicitement représentée dans le maillage, mais la propagation peut être implémentée sans remaillage, à condition de connaître *a priori* le chemin que va prendre la fissure.

#### Méthodes enrichies

Une seconde famille de méthodes est celle où la fissure est définie explicitement, mais incluse implicitement dans le maillage élément finis. Cela est rendu possible par les méthodes enrichies, c'est-à-dire où de nouveaux degrés de liberté sont ajoutés. C'est le cas notamment de la méthode des éléments finis étendus ou *eXtended Finite Element Method* (XFEM) [BEL 99, MOË 99, MOË 02, GRA 02]. Dans cette approche, la fissure est incluse implicitement dans le modèle en dotant les éléments traversés par la fissure d'un degré de liberté en saut de déplacement. C'est l'*enrichissement discontinu*, présenté en Figure 1.3b. La fissure n'a donc pas à être maillée explicitement, ce qui permet de représenter des fissures à géométries complexes, notamment en 3D, et d'utiliser un même maillage pour plusieurs longueurs de fissure différentes, ce qui évite d'avoir à faire appel à des algorithmes de remaillage. Le principe d'enrichissement des nœuds avec de nouveaux degrés de liberté est également utilisé pour améliorer la représentation des champs singuliers. Un degré de liberté correspondant au comportement asymptotique au premier

ordre (proportionnel à  $\sqrt{r}$ ) est ajouté aux nœuds à proximité de la pointe de fissure, c'est l'*enrichissement singulier*, présenté en Figure 1.3b.

### Méthodes à représentation diffuse de la rupture

Enfin, il existe une famille de méthode où la fissure n'est pas définie explicitement, mais remplacée par un champ d'endommagement [KAC 58]. Il s'agit d'une description diffuse de la rupture. Pour présenter plus en détail cette méthode, on part de l'approche variationnelle de la rupture. Francfort et Marigo [FRA 98] ont montré que le problème de mécanique de la rupture peut être vu comme une minimisation globale de l'énergie totale :

#### Approche variationnelle de la rupture

Le déplacement et la surface de fissure sont des minimiseurs de l'énergie totale :

$$(u, \Gamma) = \arg \min_{\substack{u_t \in \mathcal{U} \\ \Gamma_t \in \mathcal{G}}} E^{tot}(u_t, \Gamma_t), \quad (1.22)$$

avec :

$$E^{tot}(\mathbf{u}, \Gamma) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{u}, \Gamma) dV + G_c \chi^{n-1}(\Gamma) - W^{ext}, \quad (1.23)$$

où  $\chi^{n-1}(\Gamma)$  est la mesure de Hausdorff de dimension  $n - 1$  de la fissure, c'est-à-dire sa surface dans un calcul 3D et sa longueur dans un calcul 2D. L'avantage de cette formulation est qu'elle intègre la propagation et l'initiation de fissure dans le calcul des champs mécaniques. Ce problème peut être régularisé grâce à l'introduction d'un champ d'endommagement  $d$  :

$$E^{tot}(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} (\psi(\mathbf{u}, d) + G_c \gamma(d)) dV - W^{ext}. \quad (1.24)$$

Plutôt que devoir tester des configurations de fissures différentes, il suffit donc de faire varier le champ scalaire  $d$ . Malheureusement, l'intégration de ce problème à un code éléments finis mène à une dépendance au maillage. Cela est dû à une perte d'ellipticité du problème lorsque la courbe contrainte-déformation devient décroissante. L'endommagement devient alors localisé et la zone de localisation correspond à un élément du maillage. Pour faire face à cette problématique, plusieurs solutions ont été proposées. On peut citer l'idée des modèles d'endommagement non locaux [STE 04], ou les modèles à effet retard [ALL 97]. Dans les deux cas, une longueur interne est introduite *a posteriori* pour limiter la localisation de l'endommagement. De nombreux modèles à longueurs internes ont été proposés, jusqu'à parvenir à une formulation où cette longueur est introduite *a priori* dans le calcul. Il s'agit des modèles d'endommagement par champ de phase [BOU 00]. Ces derniers ont été justifiés par la démonstration de la  $\Gamma$ -convergence [BRA 98], qui indique que lorsque la longueur interne tend vers 0, le cadre théorique de la MELR est retrouvé.

Dans le cas des modèles d'endommagement par champ de phase, la forme de l'énergie totale est :

$$E(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} g(d) \psi(\mathbf{u}) dV + \frac{G_c}{4c_s} \int_{\Omega} \left( \frac{s(d)}{l_c} + l_c \nabla d \cdot \nabla d \right) dV - W^{ext}, \quad (1.25)$$

$g(d)$  est la fonction de dégradation de la raideur,  $s(d)$  est la fonction qui donne l'ordre du modèle champs de phase,  $l_c$  est la longueur caractéristique introduite dans le modèle et  $c_s = \int_0^1 \sqrt{1-s(z)} dz$  est un paramètre de normalisation. Plusieurs options pour les fonctions  $s$  et  $g$  ont été proposés dans la littérature. Il y a donc une grande variabilité des modèles de champ de phase. L'influence des fonctions de dégradation a été étudié par Kuhn *et al.* [KUH 15]. Concernant la fonction  $s$ , on peut citer les modèles AT2 qui respectent  $s(d) = d^2$  [BOU 00, BOU 08, MIE 10] et les modèles AT1 qui respectent  $s(d) = d$  [PHA 11]. La formulation peut également inclure un découplage de l'énergie de traction et de compression afin d'endommager uniquement le comportement en traction [MIE 10].

Pour résoudre numériquement ce problème, l'introduction d'une variable histoire permet d'imposer l'irréversibilité du phénomène de propagation de fissure. La résolution est ensuite découplée entre les problèmes d'élasticité et d'endommagement pour accélérer la convergence [MIE 10, MOL 17].

Au final, les méthodes d'endommagement par champ de phase sont nombreuses. Certaines donnent des résultats qui corrént très bien avec les expériences [PHA 17]. Cependant, il subsiste une question importante : celle de la définition de la longueur caractéristique. D'abord pensé comme un paramètre numérique amené à tendre vers 0, des études récentes se penchent sur l'interprétation physique de cette grandeur [MOL 20, DOI 23].

### Synthèse

Au final, il existe une grande variété de méthodes pour représenter une fissure dans un calcul éléments finis. Afin de synthétiser cette liste, les méthodes FEM avec fissure représentée explicitement, XFEM et Champs de phases (AT2) sont illustrées en Figure 1.3 sur un problème simple. On voit que les champs de déplacement et contrainte calculés sont relativement similaires.

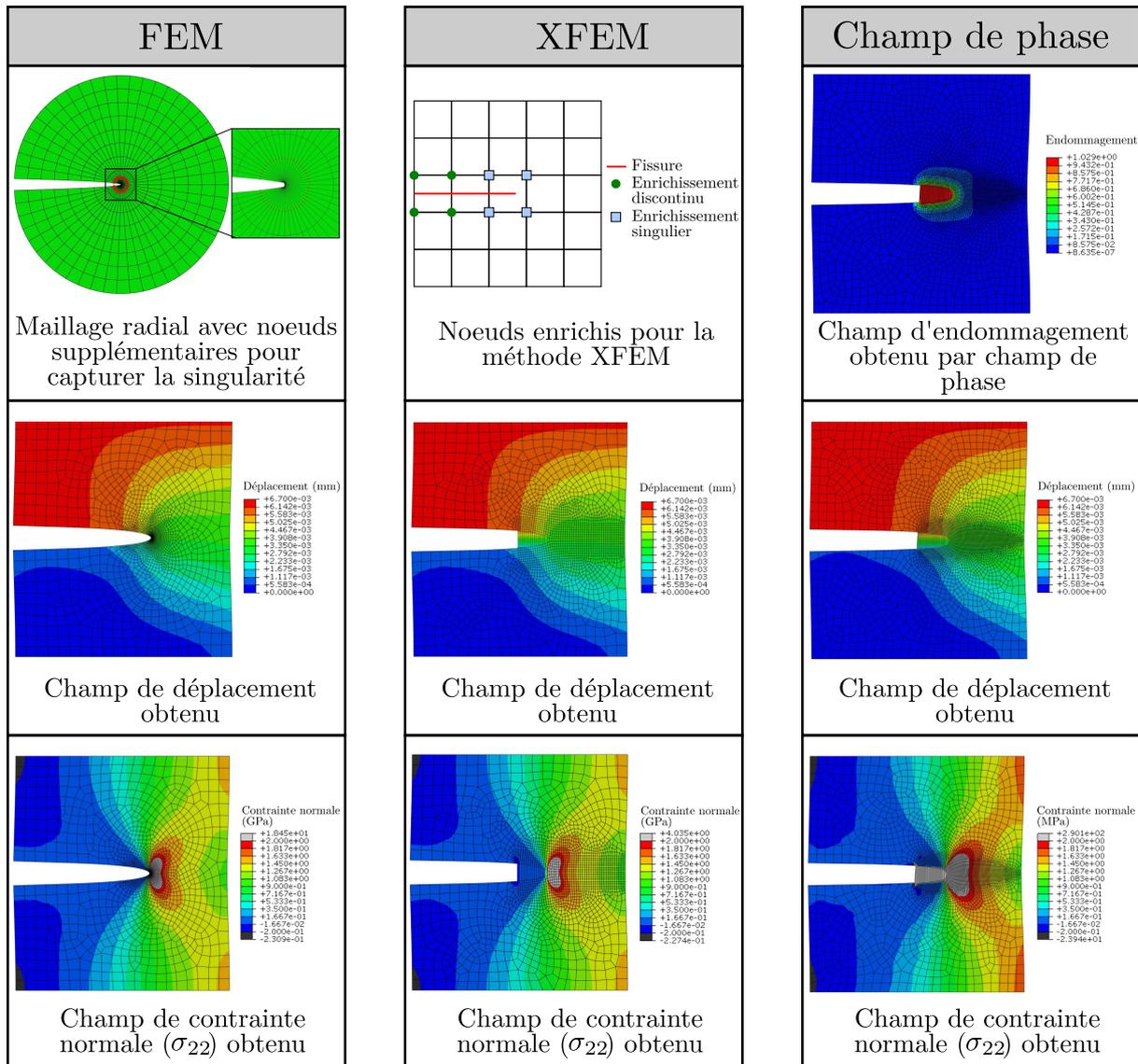
#### 1.1.2.2 Modélisation de la propagation

Une fois que la fissure est représentée dans le modèle éléments finis, il faut mettre en place un algorithme de propagation qui fait avancer la fissure lorsque les conditions de chargement sont remplies. La façon d'appréhender cette propagation dépend de la famille de méthode utilisée.

Dans le cas des méthodes d'endommagement par champ de phase, la propagation se base sur la formulation variationnelle du problème. L'endommagement est un degré de liberté, au même titre que les déplacements nodaux. La propagation est donc incluse dans la résolution du problème mécanique et l'endommagement évolue avec le chargement afin de minimiser l'énergie globale.

Dans le cas des méthodes à zone cohésive, la propagation est représentée par une loi de traction-séparation. La loi de comportement des éléments cohésifs est définie comme la contrainte de traction en fonction de l'ouverture de la fissure représentée par l'élément. Cette loi a une partie croissante pour des ouvertures faibles, puis une partie décroissante et enfin, à partir d'une certaine ouverture, l'élément n'a plus aucune raideur.

Les autres méthodes, FEM avec fissure explicitement représentée dans le maillage et XFEM, ont besoin d'être complétées par un critère de propagation. Il faut pouvoir déterminer si la fissure se propage et dans le cas échéant, dans quelle direction. Le critère



(a) Modèle éléments finis avec fissure explicitement représentée dans le maillage

(b) Modèle éléments finis étendu (XFEM)

(c) Modèle champ de phase

**FIGURE 1.3** – Comparaison des méthodes de représentation d'une fissure dans un maillage éléments finis, appliqué à un exemple simple d'ouverture d'une fissure en mode I.

de propagation en quasi-statique est  $G = G_c$ . Le critère le plus utilisé est  $K_I = K_{IC}$  en mode I. En présence de mode I et II, la direction de propagation peut être déterminée par le critère de taux de restitution de l'énergie maximale [ERD 63] ou le principe de symétrie locale [GOL 74]. En présence de mode III, les critères de propagation sont complexes à définir, car on observe une segmentation de la fissure [LAZ 20]. Une fois que la direction de propagation a été définie, un algorithme de propagation peut être construit en augmentant la longueur de fissure à chaque fois que le critère de propagation est rempli. Pour cela, il faut être capable d'évaluer précisément les FIC.

### 1.1.2.3 Calcul des Facteurs d'Intensité des Contraintes

Dans cette partie, les méthodes permettant d'obtenir les FIC à partir de champs mécaniques sont présentées.

La première méthode, la plus intuitive, se base sur l'observation de la singularité en pointe de fissure, car c'est là qu'interviennent explicitement les FIC. En projetant les champs calculés sur la solution asymptotique (*cf.* (1.18) et (1.19)), il est possible d'obtenir les FIC qui correspondent le mieux aux champs de déplacement obtenus. Cette méthode présente un inconvénient majeur : elle s'appuie sur les champs mécaniques en pointe de fissure, exactement là où le calcul éléments finis est le moins précis.

Il existe également des méthodes intégrales. La première à avoir été présentée est l'intégrale  $J$  introduite par Rice [RIC 68]. Il montre que, pour n'importe quel contour fermé  $\mathcal{C}$  incluant la pointe de fissure, la quantité suivante est égale au taux de restitution d'énergie :

$$J = \int_{\mathcal{C}} \left( \psi \delta_{j1} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j ds = G, \quad (1.26)$$

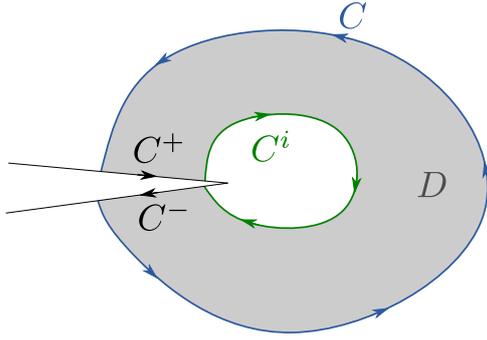
où  $s$  est l'abscisse curviligne le long du contour et  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au contour. Il est possible, grâce à l'introduction de champs d'extension virtuelle de la fissure [MOR 87] de transformer cette intégrale en intégrale de domaine. Cette méthode est équivalente à la méthode  $G - \theta$  [SUO 92]. Le champ d'extension virtuelle est noté  $\mathbf{q}$ , l'intégrale de domaine s'écrit alors :

$$J = - \int_{\Omega} \left( \psi \delta_{ij} - \sigma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} dV. \quad (1.27)$$

Cette intégrale est calculée sur tout le solide  $\Omega$ . Cependant, pour limiter les points de calcul et pouvoir se concentrer sur ce qui se passe dans la zone proche de la fissure, il est souhaitable d'effectuer le calcul sur un domaine plus petit. De plus, pour augmenter la précision, on aimerait exclure la pointe de la fissure. Pour cela, on travaille sur un domaine représenté en Figure 1.4, et on définit un champ d'extension virtuelle nul à l'extérieur du contour externe  $C$ , et constant à l'intérieur du contour interne  $C^i$ . L'intégrale peut donc s'écrire sur un domaine  $D \subset \Omega$  :

$$J = - \int_D \left( \psi \delta_{ij} - \sigma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_i} dV. \quad (1.28)$$

Cette méthode permet de calculer avec une bonne précision le taux de restitution de l'énergie. Cependant, il est impossible de distinguer les modes de rupture. Pour cela,



**FIGURE 1.4** – Schéma représentant la zone de calcul de l'intégrale J avec l'extension en intégrale surfacique.

l'intégrale d'interaction peut être utilisée. Cette méthode a été proposée par Stern *et al.* [STE 76] et Yau *et al.* [YAU 80], puis développée en 3D [GOS 98]. Le principe est d'étudier un état total (*tot*) composé de l'état réel (*r*) et d'un champ auxiliaire (*a*). En développant à partir de l'équation (1.28), on obtient l'intégrale J comme la somme de l'intégrale J des deux états et d'une intégrale d'interaction  $I^{r,a}$  :

$$J^{tot} = J^a + J^r + I^{r,a}, \quad (1.29)$$

avec :

$$I^{r,a} = - \int_D \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ml}^r \varepsilon_{ml}^a + \sigma_{ml}^a \varepsilon_{ml}^r) \delta_{ij} - \left( \sigma_{ik}^r \frac{\partial u_k^a}{\partial x_j} + \sigma_{ik}^a \frac{\partial u_k^r}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial q_j}{\partial x_i} dV. \quad (1.30)$$

D'autre part, en appliquant la même superposition à la formule d'Irwin (1.20), on obtient :

$$J^{tot} = J^a + J^r + 2 \left[ \frac{1}{E'} (K_I^r K_I^a + K_{II}^r K_{II}^a) + \frac{1+\nu}{E} (K_{III}^r K_{III}^a) \right], \quad (1.31)$$

donc :

$$I^{r,a} = 2 \left[ \frac{1}{E'} (K_I^r K_I^a + K_{II}^r K_{II}^a) + \frac{1+\nu}{E} (K_{III}^r K_{III}^a) \right]. \quad (1.32)$$

En choisissant des champs auxiliaires spécifiques, il est possible d'isoler chaque mode. Par exemple, pour isoler le mode II, il suffit de prendre un champ qui respecte  $K_I^a = K_{III}^a = 0$  et  $K_{II}^a = 1$ .

### 1.1.3 Méthodes expérimentales

Les expériences en mécanique de la rupture ont deux objectifs principaux : identifier les paramètres matériaux spécifiques à la mécanique de la rupture (donc la ténacité  $K_{IC}$  dans la plupart des cas) et servir de référence pour la validation des modèles. Dans cette partie, les essais les plus utilisés sont présentés.

#### 1.1.3.1 Géométries d'éprouvettes

Pour mesurer des grandeurs relatives au régime de propagation stable, c'est-à-dire à  $K_I = K_{IC}$ , il faut travailler en configuration stable. Cela veut dire qu'il faut trouver des configurations où le chargement a besoin d'être augmenté pour faire avancer la fissure. Outre la caractérisation d'un régime de propagation intéressant, cela permet de contrôler

l'avancée de fissure lors des expériences pour avoir le temps de réaliser des mesures. En pratique, une configuration est stable si, à chargement constant, l'avancée de fissure implique une diminution du FIC :

$$\frac{\partial K_I}{\partial a} \Big|_{\text{chargement constant}} < 0. \quad (1.33)$$

Cette définition dépend donc du chargement considéré. Il existe des configurations stables en déplacement imposé et instables en force imposée. Cependant, les configurations stables en force imposée le sont forcément en déplacement imposé aussi [MAR 16]. La stabilité en déplacement imposé est donc plus facile à atteindre, et les essais de mécanique de la rupture sont ainsi souvent pilotés en déplacement.

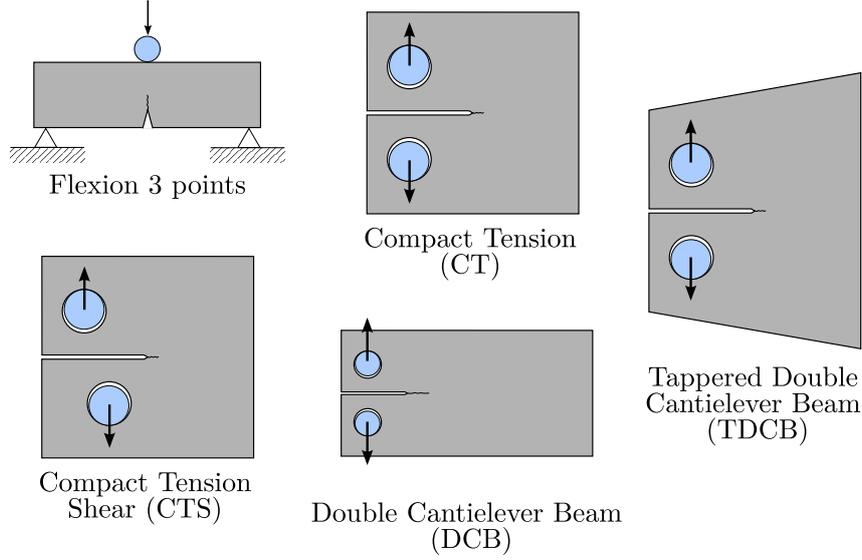
Les différentes éprouvettes utilisées en mécanique de la rupture sont illustrées en Figure 1.5. Parmi les essais classiques de la mécanique des milieux continus, la flexion trois points présente une configuration stable pour certaines longueurs de fissures, elle est donc utilisée pour caractériser la propagation de fissure [XU 99a]. Des essais spécifiques à la mécanique de la rupture ont également été créés. C'est le cas notamment de l'essai *Compact Tension* (CT). À l'origine conçu pour mesurer les grandeurs à l'initiation de la propagation, il est aujourd'hui largement utilisé pour caractériser la propagation de fissure [PHA 17, COR 21, XU 99b]. En plus d'être une configuration stable, l'essai CT se distingue par la simplicité de son système de chargement : des goupilles sont insérées dans les trous de l'éprouvette et on impose un déplacement à ces goupilles. D'autres éprouvettes partagent le même système de chargement. C'est le cas des éprouvettes DCB pour *Double Cantilever Beam*. Il s'agit d'une éprouvette CT dont la dimension perpendiculaire à la charge est plus longue. Elles sont notamment utilisées pour étudier des problèmes de dé-cohésion de couches minces [DAG 22]. Les éprouvettes TDCB (*Tapered Double Cantilever Beam*) ont la particularité de stabiliser encore plus la propagation de fissure, et sont donc utilisées dans le cas de matériaux très fragiles [WAN 96]. Enfin, des éprouvettes *Compact Tension Shear* (CTS) sont utilisées pour caractériser le mode I + II. Dans toutes les autres éprouvettes présentées, les fissures sont sollicitées en mode I pur.

### 1.1.3.2 Mesure de la longueur de fissure

La mesure de la longueur de fissure pendant un essai a deux objectifs principaux : détecter le moment où la fissure commence à avancer et suivre la propagation.

Une des premières méthodes qui a été utilisée pour mesurer la longueur de fissure est la méthode de la chute de potentiel ou *Potential Drop Technique* [BAR 57]. Cette méthode s'appuie sur la diminution de conductivité électrique de l'éprouvette lorsque la fissure croît.

Une seconde famille de mesure s'appuie sur la mesure de champ de déplacement. La corrélation d'image ou *Digital Image Correlation* (DIC) [SUT 83] est une méthode qui, à partir d'une photographie dans la configuration initiale et une dans la configuration finale, permet de trouver le champ de déplacement. Le déplacement est recherché parmi une famille de fonctions que l'on considère physiquement admissible, en se restreignant habituellement à des fonctions continues. Dans ce cas, le saut de déplacement caractéristique d'une fissure ne peut pas être représenté précisément par cette méthode. Il est



**FIGURE 1.5** – Géométrie des éprouvettes utilisées en mécanique de la rupture.

donc possible de détecter la présence de fissure grâce à l'accumulation d'erreur de corrélation. Cette méthode est relativement robuste car elle ne nécessite pas d'hypothèses, mais elle présente un défaut : l'utilisateur doit mettre en place un seuil qui peut paraître arbitraire. Une autre méthode pour mesurer la longueur de fissure à partir des données de DIC consiste à utiliser les champs asymptotiques pour trouver leur origine. Pour cela, on s'appuie sur une solution asymptotique plus détaillée que celle présentée dans l'équation (1.18), les séries de Williams [WIL 57] :

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I, II} \left( \sum_{n=n_{min}}^{-1} b_i^n \phi_i^n(\theta) r^{n/2} + b_i^0 \phi_i^0 + b_i^1 \phi_i^1(\theta) \sqrt{r} + \sum_{n=2}^{n_{max}} b_i^n \phi_i^n(\theta) r^{n/2} \right), \quad (1.34)$$

où  $\phi_i^n(\theta)$  sont des fonctions connues, sans dimension qui dépendent de la constante de Kolosov, et  $b_i^n$  sont des coefficients qui dépendent du chargement et des caractéristiques matériaux. On distingue quatre types de termes dans cette expression :

- Les termes à  $n < 0$ , ou termes super-singuliers. Ils sont utilisés pour capturer la non-linéarité à proximité de la pointe de fissure [ROU 09, HUI 85]. C'est eux qui seront utilisés pour déterminer la position du front de fissure.
- Le terme à  $n = 0$  qui représente le mouvement de corps rigide.
- Le terme à  $n = 1$ , ou terme singulier. C'est le terme qui a été donné pour la solution approchée (1.18).
- Les termes à  $n > 1$ , ou termes sub-singuliers. Ils permettent de capturer les effets des conditions aux limites à distance [HAM 07], ainsi que le terme relatif au  $T$  – stress qui représente la traction ou la compression parallèle à la direction de propagation de fissure.

La position du front de fissure est celle qui annule le premier terme super-singulier  $b_I^{-1}$ . Dans le cas d'une solution linéaire élastique, ce terme est censé être nul, car sinon il mènerait à une énergie infinie. En l'annulant, on trouve donc le front de fissure élastique

équivalent. En pratique, la projection sur les séries de Williams est réalisée à une position de fissure arbitraire, puis on itère cette position d'une distance [HAM 07] :

$$\Delta a = \frac{2b_I^{-1}}{b_I^1}. \quad (1.35)$$

La procédure s'arrête lorsque l'incrément  $\Delta a$  devient suffisamment petit.

### 1.1.3.3 Mesure des Facteurs d'Intensité des Contraintes

La mesure des facteurs d'intensité des contraintes est très importante pour pouvoir identifier la grandeur clé des lois de propagation :  $K_{IC}$  ou, de manière équivalente,  $G_c$ .

Pour certaines éprouvettes normalisées comme la CT, il existe des formules qui permettent de déterminer le FIC en mode I en fonction de la longueur de fissure et la force appliquée [TAD 10] :

$$K_I = \frac{F}{e\sqrt{W}} f_g \left( \frac{a}{W} \right), \quad (1.36)$$

où  $e$  est l'épaisseur de l'éprouvette,  $W$  une dimension caractéristique et  $f_g$  est une fonction sans dimension qui dépend de la géométrie de l'éprouvette. Cette fonction a été identifiée numériquement sur des modèles éléments finis.

La DIC peut également être mise à profit pour mesurer les FIC. Les méthodes pour déterminer les FIC à partir des champs mécaniques ont été exposées dans la partie numérique 1.1.2.3 : il est possible d'utiliser des méthodes intégrales [RÉT 05] ou de projeter sur les séries de Williams [ROU 06, ROU 09]. Si, pour les méthodes numériques, les méthodes intégrales sont les plus précises, ce n'est pas le cas lorsque les champs sont issus de la corrélation d'image. En effet, la méthode par projection sur les séries de Williams permet de travailler uniquement sur les champs de déplacement et non les champs de contrainte et déformation. On s'affranchit ainsi de la dérivée spatiale des champs mesurés qui est source d'imprécision [RÉT 08, RÉT 11].

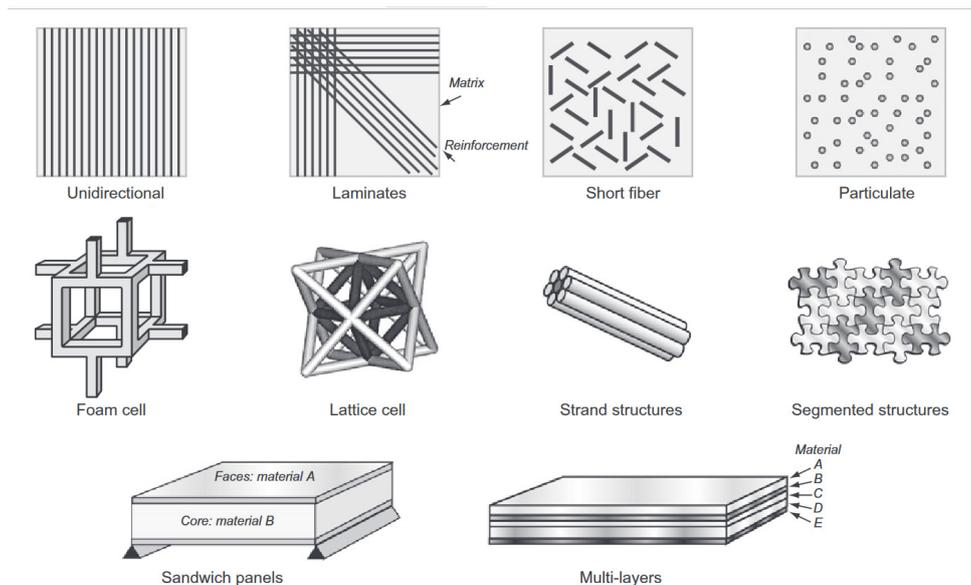
Enfin, il est également possible de mesurer  $K_I$  par l'intermédiaire du taux de restitution de l'énergie  $G$  en utilisant sa définition  $-\partial\mathcal{P}/\partial A$ . L'énergie potentielle est calculée à partir des courbes de charge.

## 1.2 Matériaux architecturés

Dans cette partie, des généralités sur les matériaux architecturés sont présentées. La première étape est de donner une définition de ce que ce terme représente. Les utilisations et l'intérêt de tels matériaux sont ensuite expliqués. Enfin, les méthodes pour leur fabrication et leur modélisation sont présentées.

### 1.2.1 Définition

Pour commencer, il convient de donner une définition du terme *matériau architecturé*. Aucune définition consensuelle n'existe dans la littérature. Tout d'abord, ce qu'on



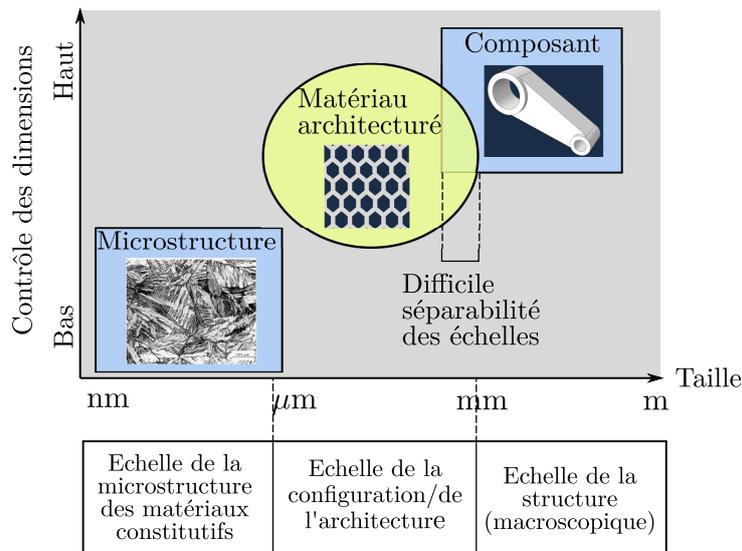
**FIGURE 1.6** – Divers exemples de matériaux architecturés selon la définition A + B + échelle + forme. Source : [ASH 13].

appelle ici matériaux architecturés peut être nommé par différents termes : matériaux hybrides, architecturés ou micro-architecturés, méta-matériaux. En anglais, cette diversité est encore plus élevée avec les termes *architected* et *architected*, qui sont tous les deux utilisés.

Ashby et Bréchet [ASH 03] définissent les matériaux hybrides comme le mélange A + B + échelle + forme, A et B étant deux matériaux différents, dont l'un peut être le vide. Ashby donne des exemples de ces matériaux en Figure 1.6. En suivant cette définition, les matériaux composites et certains alliages peuvent être considérés comme des matériaux hybrides. La définition que l'on prendra ici est un peu plus restrictive et s'appuie sur deux caractéristiques principales :

- Les matériaux architecturés présentent une difficile séparabilité des échelles, ou une ambiguïté entre matériau et structure. On pourrait argumenter que cette ambiguïté existe dans tous les matériaux, car tous les mécanismes de déformations peuvent s'expliquer par une description du matériau à une échelle plus faible. Cependant, les matériaux architecturés se détachent car les échelles considérées sont si proches que l'on utilise la même théorie pour les décrire. Cette difficile séparabilité des échelles est proche de ce qu'Alexis Faure appelle dans sa thèse [FAU 18] « une cinématique complexe à l'échelle de sa configuration ».
- Les matériaux architecturés ont une configuration contrôlée. Lors de la fabrication de ces matériaux, on doit être capable de fabriquer leur architecture avec un haut niveau de contrôle des dimensions. Cela exclut les composites à répartition aléatoire et les mousses, où les pores ne sont généralement pas dimensionnés avec une grande précision.

La Figure 1.7 résume la définition énoncée. Dans les matériaux architecturés, il existe une échelle intermédiaire qui est celle de sa configuration ou de son architecture. Dans la suite de ce travail, on appellera cette configuration *micro-structure* par abus de langage.



**FIGURE 1.7** – Échelles considérées dans le cadre des matériaux architecturés. Adapté à partir de [BAR 15].

Bien que la définition donnée ici puisse décrire un très grand nombre de matériaux différents, dans cette thèse, on se restreindra à l'étude des matériaux poreux, monophasiques, à configuration bidimensionnelle et périodique.

## 1.2.2 Utilisation

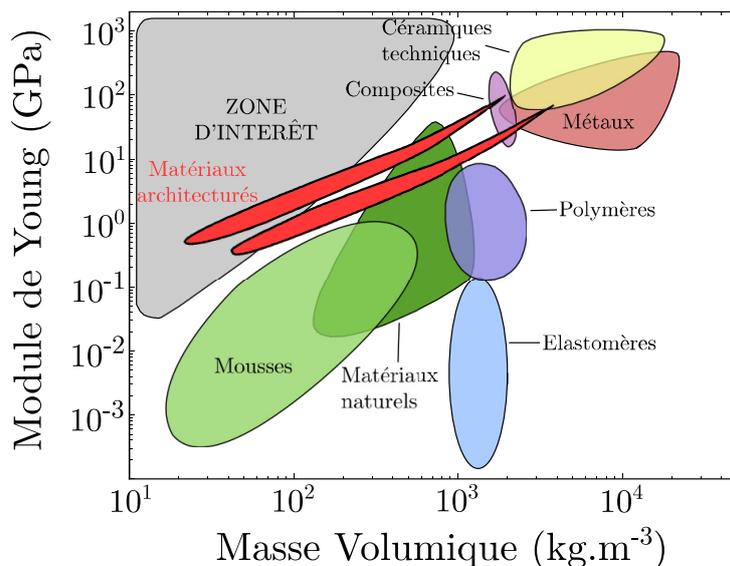
Le développement important des matériaux architecturés est motivé par le grand intérêt que ces matériaux peuvent présenter. Un premier effet recherché est la capacité à allier des comportements que différents matériaux peuvent présenter séparément mais qui, habituellement, n'existent pas ensemble. Pour illustrer cet aspect, une carte d'Ashby [ASH 03] est tracée en Figure 1.8. Dans les matériaux de structure classiques, il existe une certaine corrélation entre module de Young et densité. Il n'existe pas de matériau à haut module de Young mais léger. Or, cet alliance de propriétés est intéressante pour l'industrie, notamment dans le domaine du transport où les problématiques de poids sont très importantes. Comme illustré sur la Figure 1.8, l'utilisation de matériaux architecturés permet d'atteindre cette zone d'intérêt.

Le second effet recherché est l'apparition de propriétés inédites. Par exemple, il est possible d'obtenir un coefficient de Poisson négatif. Cet effet, observé pour la première fois par Love [LOV 92] a ensuite été expliqué par Gibson [GIB 82]. Ces matériaux sont appelés *auxétiques* [LAK 87] et présentent à la fois un intérêt théorique et applicatif [PRA 12].

## 1.2.3 Fabrication

Dans le cas des matériaux poreux bidimensionnels, la technologie de fabrication la plus utilisée est l'impression 3D. Il existe plusieurs technologies de fabrication additive :

- La plus courante des technologies est la fabrication par dépôt de fil fondu ou *Fused Deposition Modeling* (FDM). Des fils de matériau sont fondus, extrudés à travers



**FIGURE 1.8** – Carte d’Ashby représentant les matériaux en fonction de leur module de Young et de leur masse volumique. Matériaux classiques comparés avec une famille de zone architecturée. Adapté à partir de [FAU 18], sur des résultats de [FLE 10].

une buse et déposés couche par couche. Originellement développée pour les matériaux polymères, cette technologie a été étendue aux matériaux métalliques et composites [CEV 20]. Elle présente ainsi une versatilité intéressante, amplifiée par la possibilité de réaliser des impressions avec plusieurs matériaux [ESP 14]. Bien que le matériau obtenu puisse souvent être considéré comme élastiquement homogène et isotrope, il présente des anisotropies pour certaines physiques, notamment pour le comportement en rupture [COR 21].

- Une autre technologie de fabrication additive est la stéréolithographie (SLA). Cette méthode consiste à polymériser une résine liquide par laser ou autre source lumineuse, pour créer des couches solides [HUA 20]. Le choix de matériau est alors restreint aux résines photosensibles. L’avantage de cette technique est l’état de surface et l’homogénéité du matériau obtenu.
- Enfin, il existe une famille de méthode d’impression 3D qui se repose sur des lits de poudres comme par exemple les méthodes de *Selective Laser Sintering* (SLS). Le matériau est déposé sous forme de poudre et est fondu ou fritté grâce à une source laser. Cette méthode présente l’avantage de pouvoir s’appliquer à des matériaux polymères, céramiques ou métalliques [KRU 05].

## 1.2.4 Modélisation

### 1.2.4.1 Homogénéisation

Comme indiqué au paragraphe 1.2.1, la configuration des matériaux architecturés a un effet direct sur leur comportement. Elle doit donc être incluse dans l’analyse du comportement mécanique d’une structure constituée de ce matériau, c’est-à-dire que la microstructure doit être maillée précisément. Dans le cas de structures de grande taille, le temps de calcul devient alors prohibitif. C’est pour cette raison qu’a été introduite la notion

d'homogénéisation, qui permet de proposer, à partir de l'analyse de la micro-structure, un comportement homogène équivalent.

Il existe un très grand nombre de méthodes d'homogénéisation. On les classera ici en deux catégories : les méthodes directes et les méthodes descriptives. Ce que l'on appelle ici méthodes directes sont des approches où l'on cherche à définir directement les coefficients matériaux équivalents en fonction des fractions volumiques et des coefficients matériaux des phases présentes. Ce que l'on appelle ici méthodes descriptives est l'ensemble des méthodes où l'on prend en compte la structure exacte de la répartition des phases et on étudie en détail le comportement à l'échelle de la micro-structure du matériau.

La façon la plus intuitive de proposer un comportement équivalent d'un matériau hétérogène est la loi des mélanges. Il s'agit de la méthode directe la plus simple. La propriété effective est alors la moyenne des propriétés de chaque phase, pondérée par leur fraction volumique. En élasticité, la loi des mélanges en raideur [VOI 87] constitue une borne supérieure (borne de Voigt) et celle en souplesse [REU 29] une borne inférieure (borne de Reuss) de la raideur effective réelle. Ce résultat a été démontré par Hill [HIL 52, HIL 63]. Dans le cas de matériaux poreux, une des phases présente une souplesse infinie. La borne de Reuss donne alors une souplesse infinie, donc une raideur nulle. Les méthodes directes peuvent également donner des solutions plus précises. Dans le cas où une phase est en quantité négligeable devant l'autre, l'approximation d'Eshelby [ESH 57] peut être utilisée. Le matériau est approximé par une matrice avec une inclusion sphérique. La solution analytique d'Eshelby est alors utilisée pour définir les coefficients élastiques équivalents. Lorsque l'hypothèse de fort contraste de fraction volumique de phase n'est pas respectée, il faut définir une approximation à l'ordre supérieur. En effet, dans ce cas, les inclusions ne sont pas assez espacées pour être considérées comme indépendantes. Le schéma de Mori-Tanaka [MOR 73] permet de calculer les coefficients équivalents en prenant en compte les interactions entre les inclusions. Pour cela, la solution d'Eshelby est modifiée en changeant les conditions aux limites. Cette méthode atteint sa limite lorsque les inclusions ne sont pas séparées, par exemple dans le cas de matériaux à pores ouverts, où tous les pores sont inter-connectés. Pour répondre à cette problématique, l'approche auto-cohérente a été proposée [HIL 65]. Cela consiste à appliquer l'approche de Mori-Tanaka en remplaçant la matrice par un matériau équivalent.

Les méthodes descriptives, de leur côté, s'intéressent en détail à la cinématique locale. Ces méthodes sont parfois appelées *homogénéisation asymptotique* car elles se basent sur un développement de Taylor du déplacement en un déplacement moyen et de petites fluctuations à l'échelle de l'architecture. Pour cela, de nombreuses méthodes utilisent la méthode des éléments finis. Le problème d'homogénéisation par éléments finis a été développé dans les années 60 [HAS 62, HIL 63] et est résumé dans les ouvrages de Yvonnet [YVO 19] et de Bornert [BOR 01]. Récemment, de nouvelles méthodes ont été développées pour gagner en efficacité. Il s'agit par exemple d'algorithmes utilisant la transformée de Fourier rapide [MIC 99] ou des méthodes FE2 [FEY 99] qui permettent de limiter le nombre de problèmes éléments finis à résoudre. En parallèle de ces méthodes numériques, des solutions analytiques ont été développées pour certains matériaux architecturés particuliers. C'est le cas par exemple des nids d'abeille [GIB 97], où le tenseur d'élasticité équivalent est calculé en considérant, en 2D, que les parois du nid d'abeille sont des poutres.

Dans le cas des structures périodiques contrôlées, la géométrie de la micro-structure est connue avec un haut niveau de précision. Pour valoriser cette connaissance, les méthodes asymptotiques par éléments finis semblent convenir au mieux. C'est donc cette approche qui sera détaillée et implémentée au Chapitre 3.

#### 1.2.4.2 Séparabilité des échelles

Les méthodes d'homogénéisation s'appuient sur l'hypothèse de séparabilité des échelles. Cette hypothèse assure que l'on peut remplacer la description détaillée de la micro-structure par un comportement homogène équivalent. Pour expliciter cette hypothèse, il convient de définir les longueurs caractéristiques en jeu. La taille caractéristique de la structure étudiée est notée  $l_S$ . Cette structure est constituée d'hétérogénéités dont la taille caractéristique est  $l_h$ . Les problématiques de temps de calcul apparaissent si  $l_S \gg l_h$ . Dans ce cas, on introduit une échelle intermédiaire qui représente le volume sur lequel on va proposer un comportement équivalent. On note sa taille caractéristique  $l_m$ . L'hypothèse de séparabilité des échelles s'exprime alors comme :

$$l_h \ll l_m \ll l_S. \quad (1.37)$$

Le choix du volume sur lequel les propriétés équivalentes sont définies est un point important de la mise en place des méthodes d'homogénéisation. La séparabilité des échelles donne une première indication. Cependant, il est difficile de définir avec certitude des grandeurs limites pour que cette hypothèse soit validée. On définit le Volume Élémentaire Représentatif (ou VER) comme le volume de taille caractéristique *idéale*. Il s'agit du plus petit échantillon permettant de représenter l'ensemble du matériau. En pratique, on augmente progressivement la taille du domaine d'homogénéisation, et le VER est défini comme le volume à partir duquel on a atteint un critère de convergence. Cependant, cette définition peut être discutable car le VER dépend alors de la méthode d'homogénéisation. Par exemple, un modèle prenant en compte la périodicité d'une structure aura besoin de moins d'informations pour représenter toute la structure.

## 1.3 Rupture de matériaux multi-échelles

On s'intéresse à présent à l'étude de la rupture de matériaux architecturés et autres matériaux multi-échelles qui partagent les mêmes problématiques.

### 1.3.1 Études existantes

La question de la rupture dans des milieux hétérogènes existe depuis bien avant que l'utilisation de matériaux composites ou architecturés aient pris une grande ampleur. La rupture de matériaux naturels comme le bois [BIG 11], les os [GOD 15] ou la nacre [KUM 05] a été étudiée et leur caractère multi-échelle a dû être pris en considération. D'autre part, bien que la fissuration de matériaux métalliques soit souvent étudiée à l'échelle où ces matériaux sont considérés homogènes, l'étude de l'initiation de macro-fissures peut être abordée à travers la coalescence ou la propagation de micro-fissures à l'échelle des grains. Des études de propagation de fissure à travers les grains [HER 11] ont

donc permis de développer les méthodes pour la propagation de fissure en milieux hétérogène. D'autre part, des études de la rupture de matériaux composites ont été réalisées, qu'il s'agisse de problèmes de dé-cohésion de plis [DAG 22] ou de propagation de fissure dans des milieux avec une matrice et des inclusions [LEB 20, LEB 21, BRO 20]. Enfin, des études sur les matériaux architecturés poreux existent [GIB 89, RÉT 17, CAR 20].

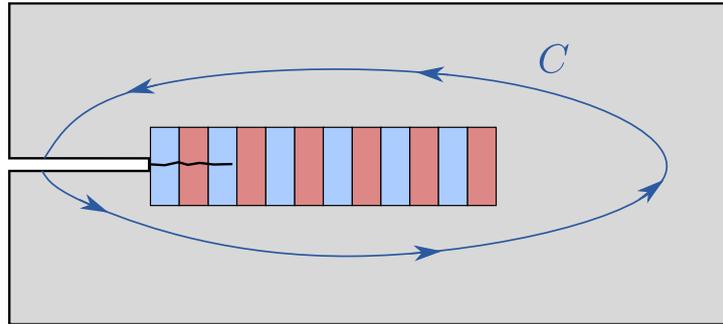
Dans cette grande diversité d'études de la rupture de matériaux hétérogènes et multi-échelles, plusieurs méthodes sont utilisées. Numériquement, un grand nombre d'auteurs ont choisi la méthode d'endommagement par champ de phase [HOS 14, BRO 20, NGU 19, CAR 20]. L'avantage principal de cette méthode dans ce contexte est qu'elle permet de travailler avec des fissures à topologie complexe, car celles-ci n'ont pas à être représentées explicitement dans le modèle. Cependant, les problématiques liées au temps de calcul sont exacerbées dans ce cas par la nécessité de mailler finement la géométrie à l'échelle de la micro-structure. D'autres études s'appuient sur des approches perturbatives [GAO 89, GAO 91, LEB 20, LEB 21], cohésives [MOR 18, MOR 20], éléments discrets [ABI 19], ou XFEM [KUM 15]. Au niveau des méthodes expérimentales, les méthodes utilisées sont l'observation des faciès de rupture pour identifier les différentes phases de propagation [MES 20], la tomographie pour suivre le front de fissure [LAC 14] et la DIC [RÉT 17]. Les difficultés expérimentales sont la difficile répétabilité des essais, et la résolution des appareils de mesure nécessaire pour observer des phénomènes à des tailles parfois microscopiques.

Dans les études citées, les comportements observés sont divers. Des comportements anisotropes ont pu être observés avec une direction préférentielle de propagation de fissure [RÉT 17]. Les changements de direction de la fissure peuvent entraîner une augmentation de la résistance à la propagation équivalente par tortuosité du chemin de fissure [CAR 16, HOS 14]. Les études sur matériaux hétérogènes montrent également une augmentation de la résistance à la propagation de fissure grâce au contraste de propriétés élastiques entre les phases [HOS 14]. Enfin, certaines études existent sur ce que l'on veut étudier dans cette thèse : les effets à distance d'hétérogénéités [MOR 18, MOR 20].

### 1.3.2 La question de la ténacité effective

La modélisation de la propagation de fissure n'échappe pas aux problématiques de calcul propres aux matériaux multi-échelles. Pour gagner en temps de calcul, il serait souhaitable de pouvoir procéder à une homogénéisation du comportement en fissuration. Cela veut dire être capable de définir un matériau homogène équivalent doté d'une loi de propagation de fissure, et donc en particulier d'une ténacité. Cependant, l'homogénéisation en mécanique de la rupture pose plus de problèmes que l'élasticité ou la thermique. En effet, le comportement global de la structure est très affecté par les phénomènes ayant lieu en pointe de fissure. Cela rend discutable l'hypothèse de séparabilité des échelles, nécessaire à la définition d'un comportement homogène équivalent. Malgré cette incertitude, des définitions de ténacité effective ont été proposées dans la littérature.

Dans le cas d'un matériau constitué de deux phases de différentes ténacités, mais de comportements élastique identiques, Gao et Rice [GAO 89] ont proposé une méthode par perturbation pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes. Roux *et al.* [ROU 03] en ont tiré une définition de la ténacité effective. Cependant, avec cette même approche,



**FIGURE 1.9** – Contour pour le calcul de l’intégrale  $J$  extérieure dans le cas d’une fissure qui traverse une zone hétérogène. Stratégie de Hossain *et al.* [HOS 14] pour calculer la ténacité effective.

Gao [GAO 91] a montré que la présence de propriétés élastiques hétérogènes perturbait également les FIC. La définition de la ténacité effective doit donc prendre en compte les ténacités des phases en présence, mais aussi leurs lois de comportement élastique.

D’autres études se sont consacrées au calibrage de paramètres propres à des méthodes numériques spécifiques sur des calculs à plusieurs échelles. C’est le cas notamment de Ngyuen *et al.* [NGU 12] qui, à l’aide d’un modèle cohésif, ont proposé une procédure pour définir une loi de traction-séparation à l’échelle macroscopique. Ils ont également montré l’existence d’un VER dans le cas de matériaux hétérogènes à distribution aléatoire. On peut également citer l’approche de Nguyen *et al.* [NGU 19] qui, à partir de calculs d’endommagement par champ de phase à deux échelles, ont ajusté les paramètres du modèle ( $G_c$  et  $l_c$ ) à l’échelle macroscopique pour faire correspondre les courbes de charge de la structure.

Il existe également une famille de méthodes qui définit le taux de restitution d’énergie équivalent à chaque instant de la propagation. Pour cela, une stratégie possible est de se concentrer sur le chargement nécessaire à faire propager la fissure [VAS 16]. La ténacité équivalente à l’instant  $t$  est celle qui, appliquée à un matériau homogène, donnerait le même chargement à la propagation. Une autre stratégie est celle proposée par Hossain *et al.* [HOS 14], justifiée analytiquement par Hsueh et Bhattacharya [HSU 16] et reprise ensuite dans d’autres études [KUH 16]. Cette stratégie s’appuie sur l’intégrale  $J$ . Les auteurs proposent d’évaluer le taux de restitution d’énergie équivalent en évaluant l’intégrale  $J$  en dehors de la zone d’hétérogénéité ou, dans le cas d’un matériau entièrement hétérogène, très loin de la pointe de fissure. Cette stratégie est illustrée en Figure 1.9.

Une fois que le taux de restitution d’énergie équivalent est défini à chaque instant, il faut déterminer une valeur unique à retenir pour la ténacité effective. Les études évoquées ci-dessus ([HOS 14, VAS 16]) proposent de prendre la valeur maximale pendant toute la propagation. Cette approche est adaptée à une situation de dimensionnement, où l’on souhaite évaluer les valeurs de chargement à ne pas dépasser pour se mettre à l’abri des phénomènes de rupture. Néanmoins, il existe d’autres études qui optent pour le choix de la valeur moyenne pendant la propagation [PAT 13, LI 13]. Cette approche présente l’avantage de prendre en compte toutes les phases de la propagation de fissure et non juste la plus critique. De plus, Lebihain *et al.* [LEB 21] ont montré qu’elle coïncide pour certains modèles à l’énergie dissipée pendant tout le processus de fissuration. Les approches en

moyenne et en maximal sont fondamentalement différentes mais Lebihain *et al.* [LEB 21] ont montré que les résultats devenaient proches si l'on respecte une certaine condition de séparabilité des échelles.

Récemment, Schneider [SCH 20] a proposé une autre définition de la ténacité effective. Cette définition s'appuie sur une approche variationnelle et a l'avantage de ne pas supposer *a priori* de l'isotropie du comportement en rupture, et de ne pas avoir besoin de définir de fissure initiale, ce qui peut, dans d'autres modèles, affecter le résultat. Cette stratégie a été analysée par Michel et Suquet [MIC 22] qui montrent en particulier qu'elle échoue à représenter l'influence de l'hétérogénéité élastique sur la ténacité effective.

Enfin, on peut citer les méthodes qui s'appuient sur le *coarse-graining*. Cette méthode est une méthode très utilisée en dynamique moléculaire. Eid *et al.* [EID 21] ont appliqué cette approche à la propagation de fissure en milieux poreux pour définir une ténacité effective. Le principal avantage de cette approche est qu'il n'est pas nécessaire de définir de VER, dont l'existence même en mécanique de la rupture n'est pas évidente.

Différentes définitions de la ténacité effective existent dans la littérature. Elles ne sont pas directement liées les unes aux autres. Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition qui permet de représenter tous les effets observés et qui s'applique à toutes les configurations.

### 1.4 Bilan sur l'état de l'art

Ce chapitre a servi à présenter l'état de l'art autour de deux grands domaines : la mécanique de la rupture et les matériaux architecturés.

La mécanique de la rupture est un domaine plutôt récent à l'échelle de l'histoire de la mécanique, l'article fondateur datant de 1920 et les théories principales ayant été développées dans les années 60. Il connaît encore des bouleversements, comme l'arrivée des méthodes d'endommagement par champ de phase dans les années 2000, et des questions non résolues, comme les critères de propagation en présence de mode III. Numériquement, les méthodes d'endommagement par champ de phase ont pris de l'ampleur ces dix dernières années, mais elles souffrent de temps de calcul parfois prohibitifs, et de la question non résolue du choix de la longueur caractéristique. C'est pourquoi aujourd'hui coexistent les approches éléments finis avec fissure représentée explicitement, XFEM, champ de phase, et zone cohésive, sans qu'une méthode ne s'impose comme étant la plus adaptée en toutes circonstances. Expérimentalement, les essais sont difficiles à contrôler car les phénomènes sont dictés par ce qui se passe en pointe de fissure, donc le moindre défaut localisé à cet endroit peut influencer le comportement global. La problématique du suivi de front de fissure est également un point critique de la mise en place d'un banc d'essai sur la fissuration. À cause de toutes ces difficultés, la corrélation entre essais et simulation de propagation de fissure reste, encore aujourd'hui, un sujet de recherche important.

De son côté, l'étude des matériaux architecturés est un domaine qui s'est énormément développé avec le progrès des méthodes de fabrication additive. Certaines méthodes de modélisation comme les méthodes d'homogénéisation se sont développées avant que les matériaux architecturés prennent de l'ampleur, car elles sont utiles pour d'autres matériaux, dont les matériaux naturels et les composites. L'arrivée des matériaux architecturés ouvre encore plus de possibilités de propriétés matériaux. De nouvelles configurations in-

téressantes sont encore proposées régulièrement. Cela indique qu'il reste probablement des propriétés matériaux à explorer dans ce très large champs des possibles.

Les deux domaines de cette thèse se rencontrent autour des problématiques de rupture multi-échelle. Ce sujet est en développement, comme l'indique les nombreuses publications ces cinq dernières années. Il semble que les phénomènes observés soient encourageants quant à l'utilisation des matériaux multi-échelles, et en particulier les matériaux architecturés, pour augmenter la résistance à la propagation de fissure des structures. Tous les comportements possibles n'ont pas été explorés ; en particulier, il existe très peu d'études sur les effets à distance de zones architecturées sur la propagation de fissure. C'est ce qui sera exploré dans la suite de cette thèse.

La rencontre entre les problématiques de propagation de fissure et celles des matériaux architecturés s'est beaucoup focalisée sur la question de la ténacité effective. Les tentatives de définition se heurtent à un choix difficile de VER, car l'existence même de cette notion n'a pas été prouvée pour la mécanique de la rupture. La seconde difficulté est la nécessité qu'une définition unique de la ténacité effective, si elle existe, doit pouvoir être capable de rendre compte de la très grande diversité des effets observés. Au final, il existe aujourd'hui plusieurs définitions qui ne sont pas clairement liées entre elles. Cette question sera abordée au chapitre 6, à travers la comparaison de plusieurs définitions dans le cas de l'effet à distance des zones architecturées.



# Deuxième partie

## Études préliminaires



# Chapitre 2

## Étude de la fissuration d'une éprouvette issue de l'impression 3D

*Ce chapitre porte sur le problème de fissuration d'une éprouvette CT issue de l'impression 3D. L'étude de ce problème permet de présenter les méthodes expérimentales et numériques utilisées ici pour étudier la propagation de fissure. La comparaison entre le calcul et les résultats expérimentaux permet également de faire des hypothèses physiquement fondées pour la suite du travail.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Propagation de fissure dans une éprouvette CT</b>	<b>38</b>
2.1.1	Présentation de l'essai	38
2.1.2	Paramétrisation du problème	38
<b>2.2</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>40</b>
2.2.1	Algorithme par longueur d'arc	40
2.2.2	Maillage	40
2.2.3	Conditions aux limites	41
<b>2.3</b>	<b>Méthodes expérimentales</b>	<b>42</b>
2.3.1	Impression 3D	43
2.3.2	Dispositif expérimental	43
2.3.3	Corrélation d'image	44
<b>2.4</b>	<b>Corrélation Essais-Calculs</b>	<b>48</b>
2.4.1	Identification des données matériaux	48
2.4.2	Hypothèses 2D	51
2.4.3	Influence des conditions aux limites	55
<b>2.5</b>	<b>Bilan sur le problème de référence</b>	<b>59</b>

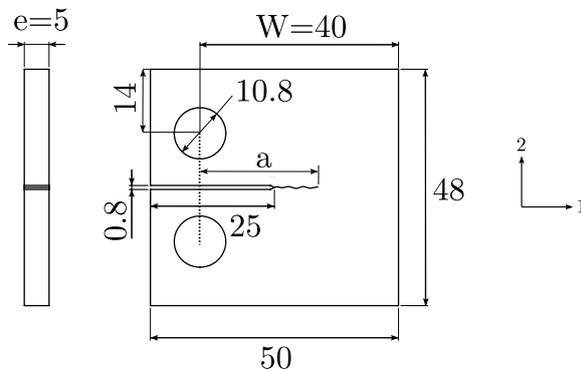
---

## 2.1 Propagation de fissure dans une éprouvette CT

### 2.1.1 Présentation de l'essai

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un essai Compact Tension (CT). L'essai CT a été originellement pensé pour mesurer le facteur d'intensité des contraintes au moment où la fissure commence à se propager, ce qui est considéré comme la ténacité. Les nombreux standards (ASTM E1820-09<sup>1</sup>, ASTM D5045-14<sup>2</sup>, [TAD 10]) caractérisant cet essai sont calibrés sur la partie de l'essai où la fissure n'avance pas. Cependant, comme cet essai présente une configuration stable, il a beaucoup été utilisé pour observer la phase suivante : celle de la propagation de fissure [PHA 17, COR 21, XU 99b]. Les choix de modélisation, qui ont été validés sur la première phase, doivent donc être questionnés au regard de la comparaison avec l'expérience pendant la phase de propagation.

Les dimensions de l'éprouvette étudiée sont données en Figure 2.1. En particulier, l'épaisseur est fixée à  $e = 5$  mm et la longueur caractéristique à  $W = 40$  mm. Pour des raisons pratiques relatives à la fabrication des éprouvettes, l'épaisseur utilisée ici est plus faible que celle recommandée par les normes. Cela aura surtout une influence sur le choix de l'hypothèse 2D à adopter. Le chargement se fait par l'intermédiaire de goupilles en acier, insérées dans les trous de l'éprouvette. La goupille du bas est maintenue immobile et un déplacement croissant à vitesse constante est imposé à celle du haut. Il s'agit d'une configuration stable en déplacement imposé, mais instable en force imposée. Comme la géométrie et le chargement sont invariants dans l'épaisseur, l'essai CT est étudié dans le cadre d'analyses 2D.



**FIGURE 2.1** – Dimensions en millimètres de l'éprouvette CT considérée dans ce chapitre.

### 2.1.2 Paramétrisation du problème

Un des éléments clé permettant de simuler la propagation de fissure est le calcul du facteur d'intensité des contraintes correspondant à un chargement donné. Ce problème peut être adimensionné en utilisant le théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème II). Le détail de cet adimensionnement est détaillé en annexe A. Les fonctions qui décrivent ce problème sont :

1. ASTM E1820-09 standard test method for measurement of fracture toughness. West Conshohocken, PA : ASTM International ; 2009

2. ASTM D5045-14 standard test methods for plane-strain fracture toughness and strain energy release rate of plastic materials. West Conshohocken, PA : ASTM International ; 2009

$$\frac{F}{Eue} = S\left(\nu, \frac{a}{W}\right), \quad (2.1)$$

$$\frac{K_I\sqrt{W}}{Eu} = k\left(\nu, \frac{a}{W}\right). \quad (2.2)$$

$F$  est la force sur la goupille,  $u$  son déplacement,  $E$  et  $\nu$  sont des modules de Young et coefficients de Poisson du matériau,  $K_I$  est le facteur d'intensité des contraintes,  $a$  la longueur de fissure,  $e$  et  $W$  sont des dimensions, données en Figure 2.6. Dans l'annexe A, le lien entre ces deux fonctions est obtenu à partir de la formule d'Irwin :

$$k^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \bar{a}}, \quad (2.3)$$

où  $\bar{a} = a/W$  est la longueur de fissure adimensionnée. En utilisant ce formalisme, le déplacement  $u_c$  et la force  $F_c$  respectant la condition de propagation  $K_I = K_{IC}$  peuvent être facilement calculés :

$$u_c = \frac{K_{IC}\sqrt{W}}{E} \frac{1}{k\left(\nu, \frac{a}{W}\right)}, \quad (2.4)$$

$$F_c = K_{IC}\sqrt{W}e \frac{S\left(\nu, \frac{a}{W}\right)}{k\left(\nu, \frac{a}{W}\right)}. \quad (2.5)$$

On définit alors le déplacement et la force adimensionnés, correspondant à la condition  $K_I = K_{IC}$  :

$$\bar{u} \equiv \frac{u_c E}{K_{IC}\sqrt{W}} = \frac{1}{k(\nu, \bar{a})}, \quad (2.6)$$

$$\bar{F} \equiv \frac{F_c}{K_{IC}e\sqrt{W}} = \frac{S(\nu, \bar{a})}{k(\nu, \bar{a})}. \quad (2.7)$$

Cet adimensionnement permet de mettre en évidence deux aspects du problème intéressants pour la suite. Premièrement, toutes les grandeurs du système peuvent être identifiées grâce à la connaissance précise de la fonction  $S$ . Cette fonction correspond à la raideur de l'éprouvette, donc tous les phénomènes qui seront observés par la suite peuvent être liés à des effets de raideur et de la dérivée de la raideur. Deuxièmement, cette fonction ne dépend ni du module de Young, ni de l'épaisseur de l'éprouvette, ni de la ténacité  $K_{IC}$ . Tous les résultats présentés sous forme adimensionnée ne dépendent donc pas de ces paramètres. La seule valeur matériau qui a *a priori* une influence sur les grandeurs adimensionnées calculées est le coefficient de Poisson. Dans le cas d'un matériau unique,  $S$  et  $k$  sont notées comme des fonctions de  $\bar{a}$  uniquement, et les notations  $S'$  et  $S''$  sont introduites pour signifier les dérivées de  $S$  par rapport à  $\bar{a}$ .

## 2.2 Méthodes numériques

### 2.2.1 Algorithme par longueur d'arc

La phase de propagation, dans le cadre d'un critère  $K_I = K_{IC}$ , peut être déterminée par la connaissance de la fonction  $S$ . L'objectif des simulations éléments finis est donc d'estimer cette fonction. En pratique, même si les fonctions  $S$  et  $k$  sont liées, on estime les deux pour augmenter la précision des calculs. En effet, la présence de la dérivée dans l'équation (2.3) est source d'erreur numérique. Le fait d'estimer  $k$  directement permet d'avoir une mesure précise de  $S'$ . La mesure de  $k$  est rendue possible par les méthodes de calcul de facteur d'intensité des contraintes, présentées au chapitre 1 (1.1.2.3). Ici, l'intégrale d'interaction est utilisée pour obtenir  $K_I$ .

Les fonctions  $S$  et  $k$  ont comme paramètre la longueur de fissure. L'approche qui consiste à les déterminer numériquement est appelée *algorithme par longueur d'arc*. Elle est différente de l'approche *classique* de propagation où le chargement est imposé, puis la longueur de fissure est itérée pour obtenir la condition  $K_I = K_{IC}$ . Les deux algorithmes sont présentés en Figure 2.2. L'algorithme par longueur d'arc présente deux avantages principaux :

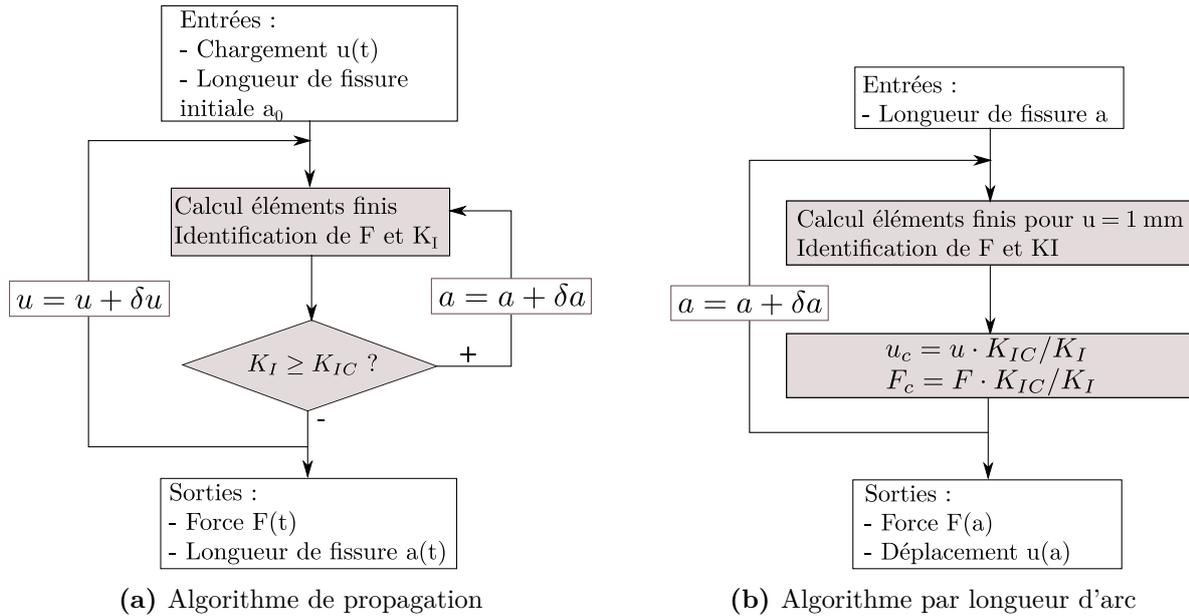
1. Il présente une simplification de l'algorithme et une accélération du temps de calcul par rapport à un algorithme standard. Dans l'algorithme standard de propagation 2.2a, l'itération est réalisée sur le chargement, directement lié au temps, et la longueur de fissure est augmentée progressivement tant que la condition de propagation  $K_I \geq K_{IC}$  est vérifiée. L'algorithme par longueur d'arc 2.2b, permet de calculer directement les paramètres de chargement vérifiant la condition de propagation  $K_I = K_{IC}$  avec un unique calcul éléments finis par valeur de  $a$ . Cela permet donc de diminuer fortement le nombre de calculs éléments finis par rapport à un algorithme de propagation.
2. Comme on itère sur un paramètre qui ne dépend pas explicitement du temps, l'algorithme par longueur d'arc est très performant pour détecter des phénomènes d'instabilité [CRI 81].

Les calculs éléments finis sont réalisés avec le logiciel commercial Abaqus. L'algorithme par longueur d'arc avec remaillage est codé avec un ensemble de scripts Matlab et Python qui interagissent avec Abaqus. Le post-traitement et l'analyse des données sont réalisés avec Matlab. Les codes associés à cette méthode sont donnés en Annexe B.

### 2.2.2 Maillage

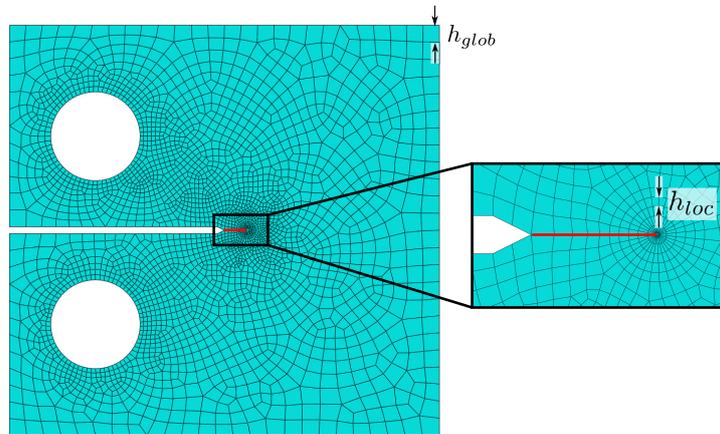
Dans les modèles numériques présentés dans ce chapitre, la fissure est représentée explicitement dans le maillage. Des éléments de Barsoum [BAR 74] sont utilisés en pointe de fissure pour aider à capturer la singularité. Le maillage est représenté en Figure 2.3. Il est constitué d'éléments finis quadrangles bilinéaires de taille maximale  $h_{glob}$ . Le maillage est raffiné dans les zones d'application des conditions aux limites, et en pointe de fissure où un maillage radial est défini. La taille des éléments dans cette zone est  $h_{loc}$ .

La convergence du modèle est vérifiée en observant l'influence des paramètres  $h_{glob}$  et  $h_{loc}$  sur les fonctions de raideur et de FIC. La taille du maillage global influence peu les



**FIGURE 2.2** – Schémas comparant l'algorithme de propagation standard avec un algorithme par longueur d'arc.

résultats, car pour  $h_{glob} \in [0.1, 2]$  mm, la différence maximale observée sur la raideur et le FIC est de 0.03 %. Au niveau du maillage local, la convergence est considérée atteinte lorsque  $h_{loc} = 0.1$  mm. En effet, quand on passe d'une taille de maille de 0.1 mm à 0.01 mm, la différence observée n'est que de 0.03 % sur le FIC et 0.1 % sur la raideur.



**FIGURE 2.3** – Maillage utilisé pour le calcul des FIC et de la raideur sur les éprouvettes CT.

### 2.2.3 Conditions aux limites

Afin de simuler le comportement de l'éprouvette sous chargement, il faut transformer le contact réel entre les goupilles et les trous en un ensemble de conditions aux limites compatibles avec les éléments finis, c'est-à-dire des déplacements ou forces imposés sur un ensemble de nœuds. La modélisation réaliste du contact n'est pas envisagée, car cela

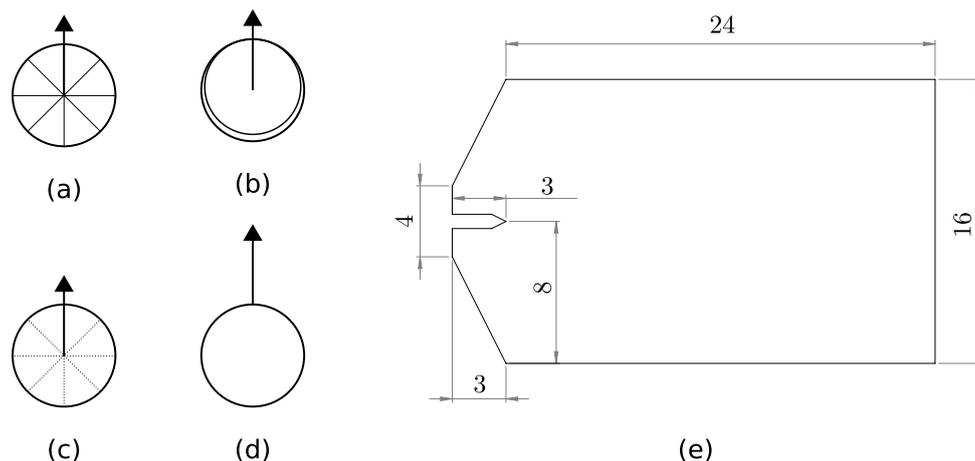
augmentait grandement la complexité du modèle. En particulier, il faudrait être capable de caractériser le coefficient de frottement, la surface de contact et le caractère glissant ou non du contact. De plus, il est possible qu'il existe plusieurs régimes pendant un même essai. Il existe plusieurs façons de simplifier la modélisation du chargement pour l'essai CT, et la littérature ne permet pas de trancher pour définir une condition aux limites qui serait adaptée en toute circonstance. C'est pourquoi plusieurs modélisations sont testées ici :

- *Mouvement de corps rigide*, Figure 2.4(a) : dans cette modélisation, un mouvement de corps rigide est appliqué au cercle représentant le trou [FAR 17, FAR 18]. Ce mouvement est composé d'une translation imposée et d'une rotation libre. Lorsque ce modèle est utilisé en force imposée, le déplacement imposé est ajusté pour obtenir la force voulue.
- *Contact sans frottement*, Figure 2.4(b) : la goupille est représentée mais est considérée comme rigide à la vue des différences de module de Young entre l'acier et le polymère issu de l'impression 3D (module de Young environ 200 fois plus élevé). Un déplacement est imposé aux goupilles et le contact avec les trous est modélisé sans frottement [PRI 99, IVA 15]. Ce modèle n'est pas utilisé en force imposée.
- *Force uniforme/Déplacement moyen*, Figure 2.4(c) : une force est distribuée uniformément sur le trou. Cela permet au trou de pouvoir se déformer. Le déplacement de référence est défini comme la moyenne des déplacements des nœuds sur la surface du trou. Lorsque ce modèle est utilisé en déplacement imposé, la force est ajustée pour obtenir le déplacement moyen voulu. Ce modèle est proche de l'approche qui consiste à mailler l'intérieur des nœuds et imposer un chargement au nœud central [SAX 07].
- *Chargement ponctuel*, Figure 2.4(d) : un déplacement ou une force est appliqué sur le nœud du haut pour la goupille du haut et sur le nœud du bas pour celle du bas [RIT 79, LAR 86, PHA 17].

En plus de cet ensemble de conditions aux limites au niveau des goupilles, on ajoute une approche hybride entre expérimental et numérique. Seule une partie de l'éprouvette est modélisée, ce domaine est illustré en Figure 2.4(e). Les conditions aux limites aux bords du domaine sont les déplacements mesurés au même endroit par corrélation d'image [ROU 15], hormis au niveau de l'entaille, qui est constituée de surfaces libres. Ce modèle sera par la suite appelé *conditions aux limites issues de la DIC*. En pratique, les déplacements des nœuds aux bords du domaine sont imposés à partir des données mesurées en DIC. Comme les maillages de la DIC et du modèle numérique sont différents, cela a nécessité une interpolation préalable. Ce modèle sera considéré comme représentant les conditions aux limites *réelles* car elles représentent le chargement vu par la fissure, en s'affranchissant des difficultés liées au système de chargement, et en particulier le contact entre les goupilles et l'éprouvette.

### 2.3 Méthodes expérimentales

Dans cette section, le dispositif expérimental ainsi que les méthodes de post-traitement sont présentés. Dans ce chapitre, 3 éprouvettes sont testées. Elles sont nommées *CT 1*, *CT 2* et *CT 3*.



**FIGURE 2.4** – Schéma représentant les différentes conditions aux limites testées. (a) Mouvement de corps rigide, (b) Contact sans frottement, (c) Force uniforme / Déplacement moyen, (d) Chargement ponctuel, (e) Sous-domaine utilisé pour le modèle avec conditions aux limites issues de la DIC.

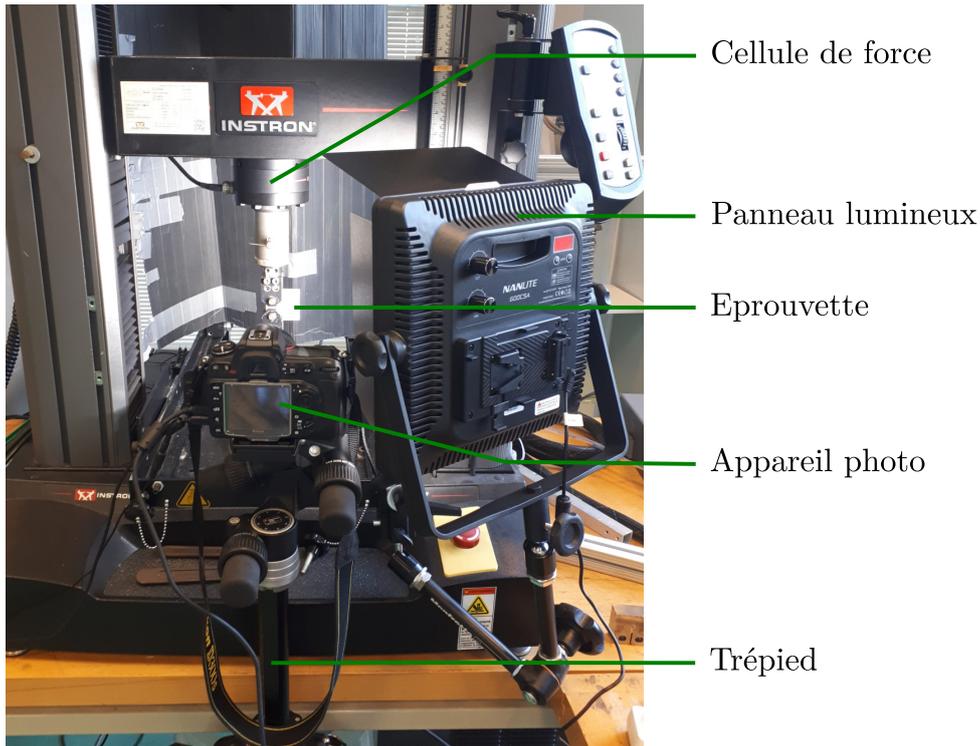
### 2.3.1 Impression 3D

Les éprouvettes étudiées dans cette thèse ont été produites par fabrication additive. Cela permettra dans un second temps, au Chapitre 5, d'introduire des zones architecturées dans les pièces. L'imprimante utilisée est la ProJet 3510HD de 3DSystems. Le procédé s'appelle *multijet modelling* : des micro-gouttelettes de résine sont projetées puis polymérisées à l'aide d'une lumière UV. Les épaisseurs de couches obtenues sont très faibles : il est possible de descendre jusqu'à  $19 \mu\text{m}$ . Ici, l'épaisseur de couche est fixée à  $32 \mu\text{m}$ . Cela permet d'obtenir un matériau globalement homogène et isotrope. La résine utilisée est la VisiJet M3 Crystal qui permet un rendu relativement translucide.

Lors de l'impression 3D, des supports en cire sont également fabriqués. Pour les retirer, un traitement thermique à  $65^\circ\text{C}$  doit être réalisé. Cette étape est également mise à profit pour relaxer les contraintes résiduelles, qui ont tendance à courber les échantillons de faible épaisseur comme les éprouvettes CT étudiées ici. Pour cela, la pièce est placée entre deux plaques d'acier pendant toute la durée du traitement thermique. La procédure consiste à placer les éprouvettes 40 minutes à  $65^\circ\text{C}$  puis les faire refroidir lentement pendant trois heures jusqu'à la température ambiante.

### 2.3.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est celui mis en place par Corre et Lazarus [COR 21]. Une première phase de pré-fissuration en fatigue est utilisée pour obtenir une fissure. Cela permet par la suite de s'affranchir de la phase d'amorçage et de n'étudier que la propagation stable de la fissure. Cette étape est réalisée sur une machine de traction Instron ElectroPulse. Une force sinusoïdale de fréquence 4 Hz et de charge  $40 \pm 20 \text{ N}$  est imposée, et le critère d'arrêt est défini comme le moment où la raideur de l'éprouvette a diminué de 25 %. Dans le cas des éprouvettes CT utilisées ici, il faut environ 50 000 cycles pour obtenir une fissure de 2-3 mm. Un mouchetis est ensuite appliqué sur l'éprouvette pour permettre des mesures par corrélation d'images. Les éprouvettes sont peintes en blanc,



**FIGURE 2.5** – Image du montage expérimental pour la traction avec corrélation d'image.

puis une bombe de peinture noire est utilisée pour déposer des taches de taille variable pouvant aller de 0.05 à 0.6 mm. Des images du mouchetis sont données en Figure 2.6.

Les tests de fissuration sont réalisés sur une machine de traction Instron 3342 avec un capteur d'effort de 30kN. Le montage complet avec le dispositif de prise de vues pour la corrélation d'image est présenté en Figure 2.5. Le chargement est un déplacement imposé à vitesse constante de 0.1 mm/min. Pour la corrélation d'image, un appareil Nikon D300s avec une lentille AF-S Micro NIKKOR 60mm sont utilisés. Les photos sont prises à intervalle régulier de 20 secondes (soit environ 50 photos par essai) et les données de force et de déplacement sont récupérées à chaque prise de vue. La taille physique d'un pixel est environ 18  $\mu m$ .

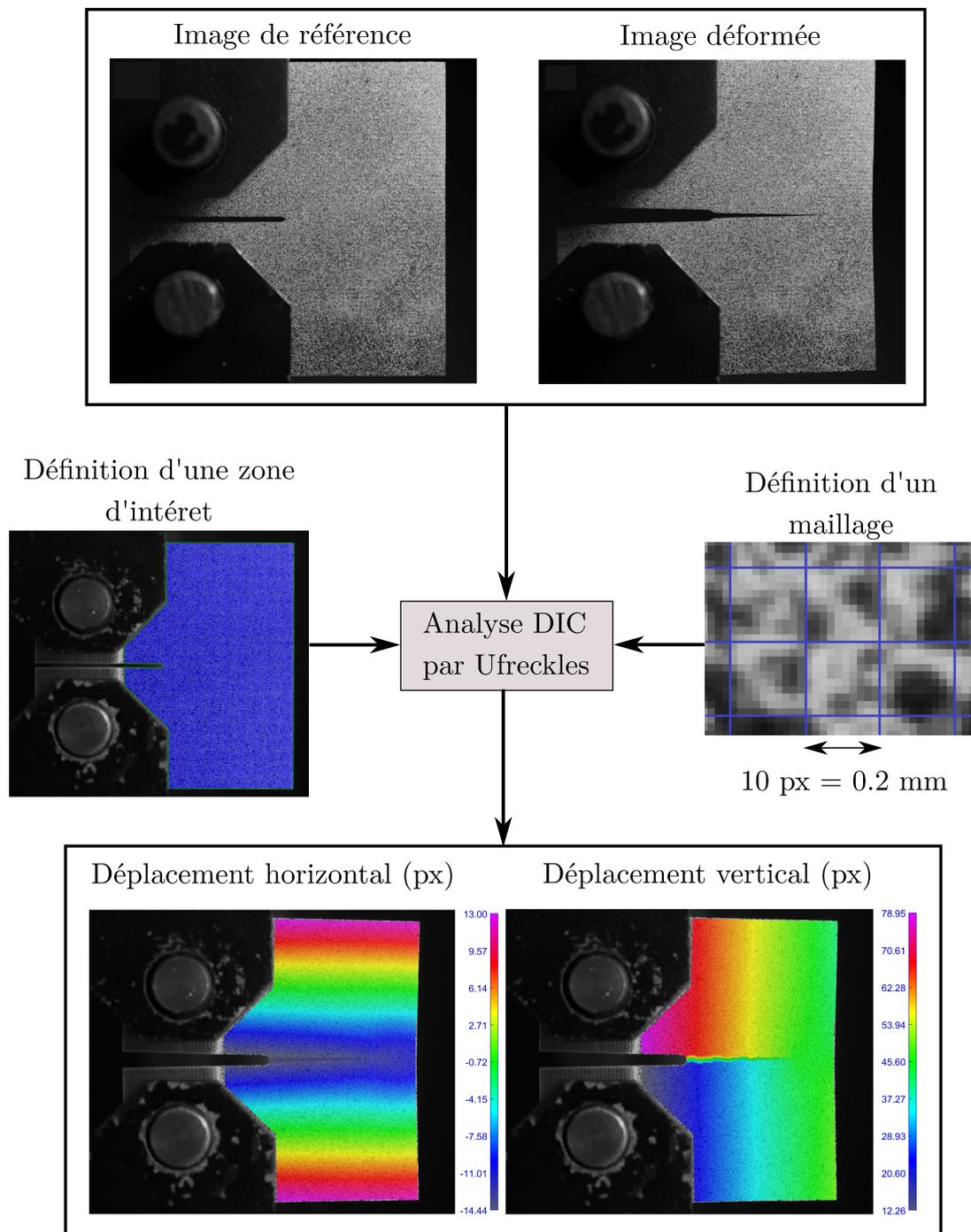
### 2.3.3 Corrélation d'image

Pour réaliser les analyses de corrélation d'image, le logiciel Ufreckles [RÉT 18] est utilisé. Cette analyse consiste à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  tel que :

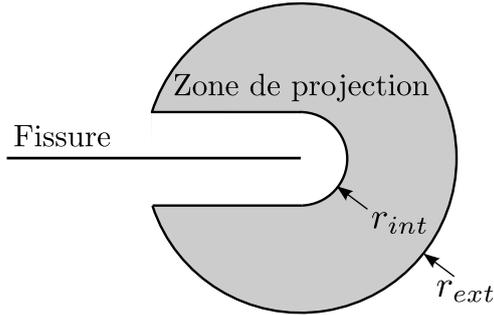
$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad (2.8)$$

où  $f$  est l'image de référence, et  $g$  l'image déformée, représentées ici par des niveaux de gris fonction des coordonnées des pixels. Les images sont données en Figure 2.6. Cette équation est résolue en utilisant un algorithme des moindres carrés non-linéaire, où la fonction coût suivante est minimisée :

$$e^2 = \sum_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})))^2. \quad (2.9)$$



**FIGURE 2.6** – Schéma présentant le calcul des déplacements par DIC appliqué à la dernière image d'un des tests. Les images de référence et déformée sont analysées pour en déduire un champ de déplacement en pixel.



**FIGURE 2.7** – Schéma de la zone *Pacman* sur laquelle les champs expérimentaux sont projetés sur les séries de Williams.

Le déplacement  $\mathbf{u}$  est cherché parmi une famille de fonctions projetées sur une base [BES 06]. Dans le cas étudié ici, cette base est constituée des fonctions de forme utilisées en éléments finis. Par conséquent, un maillage doit être défini. Dans le cadre de cette étude, le maillage est structuré et composé de quadrangles bilinéaires de 10 pixels de côté (Figure 2.6). Théoriquement, cette méthode permet d'obtenir des champs de déplacement avec une précision sub-pixel [TOU 97]. Les champs de déplacements pour la dernière image d'un essai sont donnés en Figure 2.6.

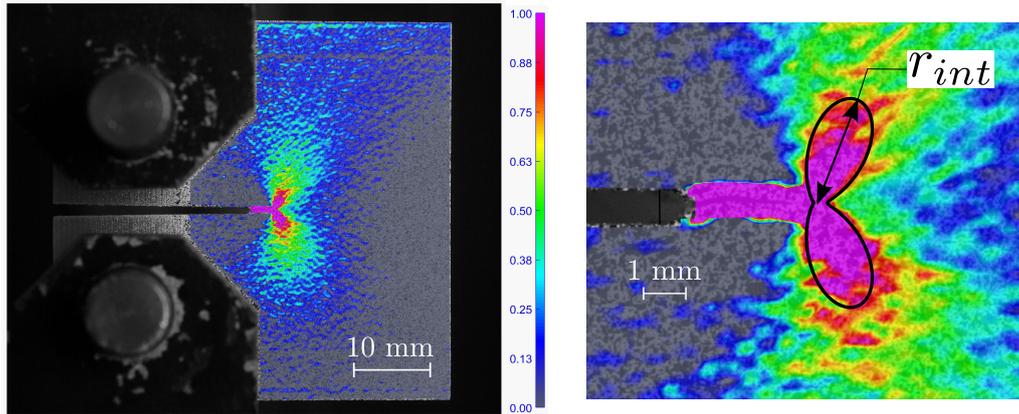
Afin de calculer la longueur de fissure et les FIC à partir des champs expérimentaux, la projection sur les séries de Williams est utilisée. On rappelle ici l'expression des séries de Williams, qui ont été définies au paragraphe 1.1.3.2 :

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{i=I,II} \left( \sum_{n=n_{min}}^{-1} b_i^n \phi_i^n(\theta) r^{n/2} + b_i^0 \phi_i^0 + b_i^1 \phi_i^1(\theta) \sqrt{r} + \sum_{n=2}^{n_{max}} b_i^n \phi_i^n(\theta) r^{n/2} \right). \quad (2.10)$$

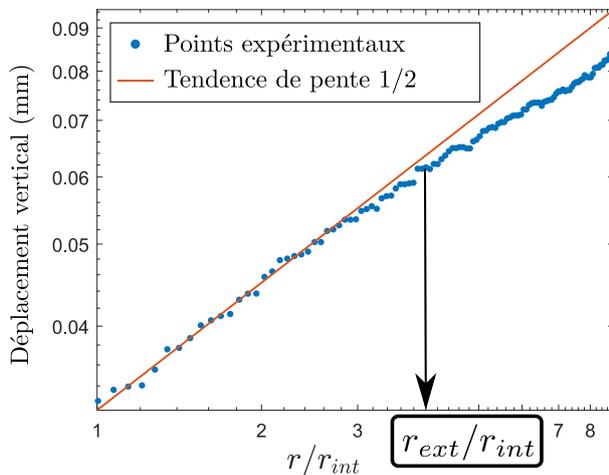
En pratique, la méthode décrite au paragraphe 1.1.3.2 est appliquée ici, c'est-à-dire que la position de fissure est testée sur une ligne rectiligne et on cherche la position qui respecte  $b_I^{-1} = 0$ . Les études de Henniger et al. [HEN 10] et Mathieu et al. [MAT 12] suggèrent que la troncature de la série en utilisant  $n_{min} = -3$  et  $n_{max} = 7$  mène à une bonne estimation des paramètres de rupture. C'est donc cette base qui est utilisée ici.

Cette projection des champs de déplacement est réalisée sur une zone qu'il faut définir. Le choix doit se porter sur une zone où la mesure du déplacement est précise et où les séries de Williams sont valides. La première restriction exclut tout point trop proche des lèvres de la fissure. En effet, la discontinuité n'est pas introduite dans les fonctions de formes utilisées pour rechercher les champs de déplacements, donc le saut de déplacement ne peut être représenté précisément. La seconde restriction s'applique en pointe de fissure, où la loi de comportement linéaire élastique n'est pas valide, et loin de la fissure où les séries de Williams ne sont plus pertinentes. Avec ces deux critères la zone sur laquelle la projection est réalisée a une forme de *Pacman*, avec un rayon extérieur  $r_{ext}$  et en excluant une zone de rayon  $r_{int}$ . Le domaine de projection est illustré en Figure 2.7.

Afin d'identifier la taille de la zone à exclure  $r_{int}$ , les déformations mesurées par DIC sont analysées (Figure 2.8). On considère que l'hypothèse de linéarité est valable pour une déformation inférieure à 1%. L'identification de  $r_{int}$  est illustrée sur la Figure 2.8. La ligne tracée en noir correspond à la forme théorique d'une ligne d'isodéformation, dont on a adapté la taille pour qu'elle corresponde à la limite de déformation à 1% sur les données expérimentales. La valeur identifiée de  $r_{int}$  est le rayon maximal de la forme obtenue. Cette méthode donne un rayon intérieur de 150 pixels soit environ 2.7 mm. On



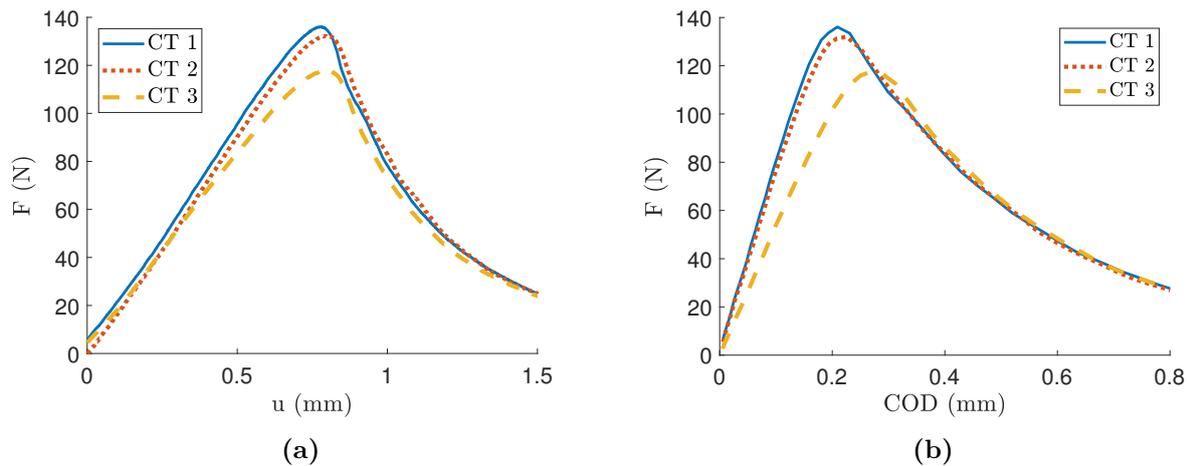
**FIGURE 2.8** – Choix de  $r_{int}$  à partir d'un critère sur la déformation  $\varepsilon_{22}$ . La déformation est donnée en % au moment du début de la propagation.



**FIGURE 2.9** – Identification de  $r_{ext}$  à partir d'un critère sur la K-dominance.

remarque que cette valeur est très grande, le critère de déformation à 1% est probablement excessivement restrictif. Cette valeur est toutefois utilisée dans ce chapitre.

Le rayon extérieur est introduit afin d'exclure les zones où les effets de bord peuvent être prédominants. Ces effets peuvent être représentés dans les séries de Williams par les termes subsinguliers. Néanmoins, comme le but de la projection sur cette solution est de déterminer les FIC, il est intéressant de se placer dans une zone où le terme qui dépend des FIC est important. On cherche donc à caractériser la zone de K-dominance. Pour cela, le déplacement vertical est tracé en fonction de la distance au front de fissure sur une ligne perpendiculaire au chemin de fissure (Figure 2.9). Le déplacement de corps rigide, c'est-à-dire le terme d'ordre 0, est soustrait au déplacement obtenu par corrélation d'image. La zone de K-dominance est définie comme la plage de valeur de  $r$  sur laquelle il est possible d'identifier une loi linéaire de pente 1/2 sur les courbes logarithmiques avec un écart inférieur à 0.5 %. Cette méthode est illustrée pour un exemple en Figure 2.9 et donne  $r_{ext} = 600$  px pour le point considéré. Cette même méthode est appliquée aux trois éprouvettes testées et à différents stades de la propagation, pour trouver une valeur minimale de 300 px. C'est cette valeur qui sera retenue pour réaliser la projection sur les séries de Williams.



**FIGURE 2.10** – Courbes de charge obtenues pour les trois éprouvettes. (a) Force en fonction du déplacement machine, (b) Force en fonction de l'ouverture de fissure.

## 2.4 Corrélation Essais-Calculs

Cette section est consacrée à la comparaison entre essais et calculs, qui permet d'identifier les paramètres matériaux et de tester des hypothèses de calcul. Les conclusions présentées ici sont également valables pour d'autres matériaux comme cela a été présenté dans l'article écrit dans le cadre de cette thèse [TRI 23]. Dans ce manuscrit, seuls les résultats correspondant à la résine Visijet M3 Crystal, qui est le matériau utilisé dans les chapitres suivants, sont présentés.

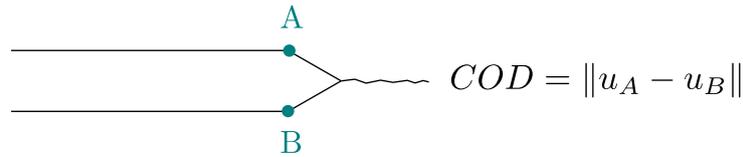
### 2.4.1 Identification des données matériaux

Dans le cadre de la MELR, le matériau est considéré comme linéaire élastique. Afin de justifier cette hypothèse, les courbes de charge expérimentales sont données en Figure 2.10a. Elles présentent une phase linéaire avant la propagation, ce qui indique que les conditions de l'essai permettent de considérer un matériau linéaire élastique. De plus, on ne prend pas en compte les potentiels effets de la viscosité. Bien que des phénomènes de relaxation puissent avoir lieu au sein de ce matériau, ils ne seront pas pris en compte car la vitesse de chargement est fixée identiquement pour tous les essais et aucune phase de décharge n'est étudiée. Enfin, le matériau est considéré comme homogène et isotrope.

L'identification des paramètres matériaux est faite à partir des données expérimentales et des comparaisons avec des calculs. Afin de pouvoir discuter des hypothèses 2D et du choix de conditions aux limites, l'identification des coefficients élastiques et de l'énergie de rupture ne doit pas s'appuyer sur un modèle qui dépendrait de ces hypothèses.

#### 2.4.1.1 Coefficients élastiques

Les coefficients élastiques sont généralement identifiés à partir de tests de traction. Cependant, en raison de la viscosité du matériau, les résultats de tests de traction ne sont valables que sur une plage restreinte de vitesse de déformation. Comme les éprouvettes CT présentent un champ de déformation hétérogène, il n'est pas évident de choisir une vitesse



**FIGURE 2.11** – Schéma représentant les points de mesure de l'ouverture de fissure (COD).

de sollicitation pour les tests de traction qui mèneraient à un comportement élastique équivalent. Afin d'évaluer l'impact des effets de viscosité sur les coefficients élastiques, des essais de traction ont été réalisés avec plusieurs vitesses de sollicitation. Un impact élevé a été observé sur le module de Young :  $E = 0.97$  GPa pour  $\dot{\epsilon}_{22} = 10^{-4} s^{-1}$  et  $E = 1.19$  GPa pour  $\dot{\epsilon}_{22} = 10^{-3} s^{-1}$ . Il est donc préférable d'identifier le module de Young directement sur les essais CT. En revanche, le coefficient de Poisson mesuré ne dépend pas de la vitesse de sollicitation. Le coefficient de Poisson est donc issu des essais de traction :

$$\nu = 0.49 \pm 0.02. \quad (2.11)$$

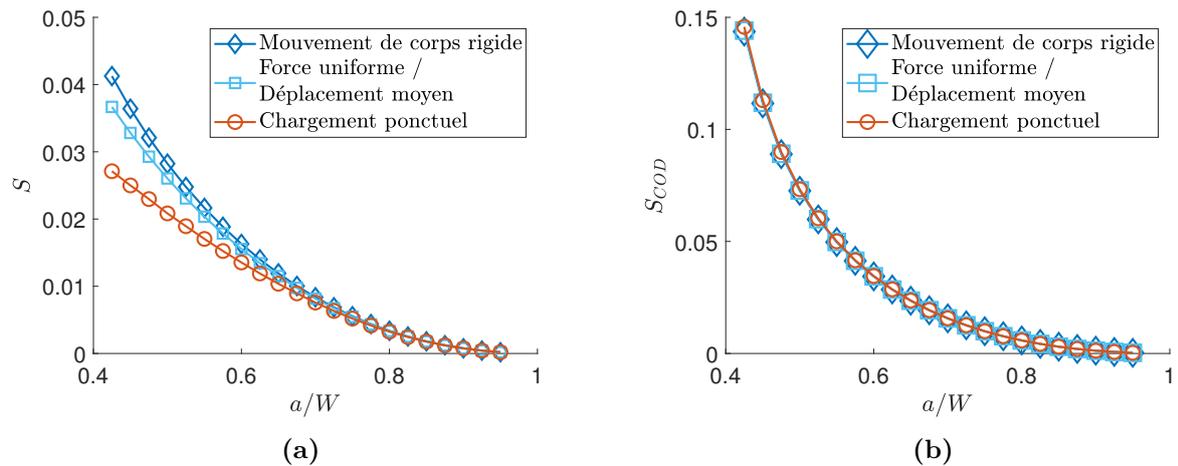
On a donc un matériau proche de l'incompressibilité. Par la suite, les modèles 3D et déformations planes seront donc dotés d'éléments finis hybrides permettant de représenter les déformations isochores.

Pour identifier le module de Young sur les essais CT, un recalage des raideurs initiales numériques et expérimentales est effectué. Deux possibilités correspondantes à deux fonctions de raideurs distinctes sont explorées. La première fonction de raideur est  $S$ , présentée en section 2.1.2, proportionnelle à  $F/U$ . La seconde raideur proposée est appelée  $S_{COD}$  :

$$S_{COD} = \frac{F}{E \cdot e \cdot (COD)}, \quad (2.12)$$

où  $COD$  (*Crack Opening Displacement*) est le déplacement d'ouverture de fissure, c'est-à-dire la différence de déplacement entre un point de la partie supérieure de l'entaille et celui du point symétrique par rapport à la fissure. Ici, les points de mesure du  $COD$  sont les points à l'angle de l'entaille, comme illustrés sur la Figure 2.11. Du point de vue expérimental, cette grandeur est évaluée grâce à la corrélation d'image. Les courbes de force en fonction de l'ouverture de fissure obtenues sont données en Figure 2.10b.

Comme indiqué précédemment, il est préférable de faire des identifications de paramètres matériau qui ne dépendent pas des hypothèses que l'on souhaite discuter. En particulier, pour que le calcul ne dépende pas de l'hypothèse 2D choisie, la raideur numérique est identifiée à partir de calculs 3D. Le maillage présenté en Figure 2.3 est extrudé en introduisant 25 éléments dans la demi-épaisseur. La valeur du  $COD$  considérée est la moyenne des ouvertures de fissure le long de l'épaisseur. Il est également souhaitable que l'identification du module de Young ne dépende pas du choix de conditions aux limites définies au paragraphe 2.2.3. L'influence de celles-ci sur les fonctions de raideur est alors étudiée et les résultats sont présentés en Figure 2.12. Ils montrent que le type de modélisation des conditions aux limites a une influence non-négligeable sur la raideur  $S$ , mais n'a pas d'influence sur  $S_{COD}$ . C'est donc cette deuxième fonction qui est utilisée pour



**FIGURE 2.12** – Fonctions de raideur en fonction du type de conditions aux limites. Les raideurs sont évaluées sur un calcul 3D, en faisant varier la longueur de fissure. (a) Raideur calculée en fonction du déplacement machine, (b) Raideur calculée en fonction de l'ouverture de fissure.

l'identification du module de Young.

**Remarque :** Sur les deux types de courbes de charges données (Figures 2.10a et 2.10b), on observe une dispersion relativement élevée de la raideur initiale d'une éprouvette à l'autre. Cette dispersion est à attribuer en majorité à des longueurs de fissure initiales différentes et non à une diversité de comportement du matériau.

En pratique, la fonction de raideur initiale est identifiée numériquement en imposant la longueur de fissure initiale mesurée par DIC avec un module de Young unitaire. La pente de la fonction  $F = f(COD)$  expérimentale (Figure 2.10b) est estimée et le module de Young correspondant est calculé à partir de l'équation (2.12). Cela mène à une mesure de  $E$  par éprouvette testée. La valeur retenue est la moyenne des trois mesures et l'incertitude est l'écart maximal à la moyenne :

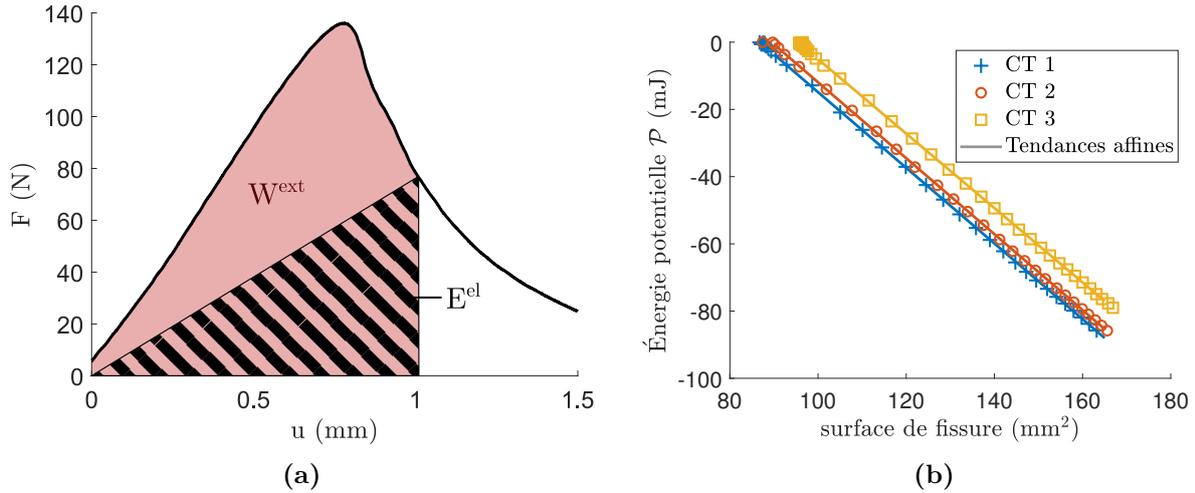
$$E = 1.28 \pm 0.09 \text{ GPa.} \quad (2.13)$$

### 2.4.1.2 Énergie de rupture

L'énergie de rupture  $G_c$  est identifiée en estimant l'énergie dissipée lors de la propagation de fissure. Pour cela, on fait l'hypothèse que la seule dissipation non nulle est issue de la propagation de fissure à  $G = G_c$ . D'après la définition du taux de restitution de l'énergie (Équation (1.13)), on a :

$$G_c = -\frac{1}{e} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a}. \quad (2.14)$$

L'énergie potentielle est calculée à partir des courbes expérimentales (Figure 2.10a). À chaque instant de la propagation, représenté par une force  $F_i$  et un déplacement  $u_i$ , l'énergie potentielle est l'énergie élastique moins le travail des forces extérieures :



**FIGURE 2.13** – Identification du taux de restitution d'énergie. (a) Schéma représentant les calculs d'énergie à un instant donné de la propagation. (b) Énergie dissipée en fonction de la longueur de fissure.

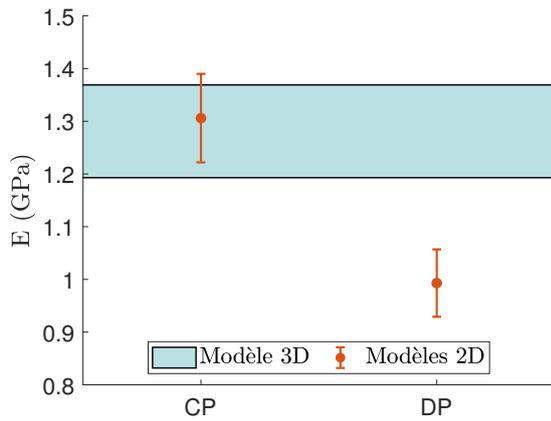
$$\mathcal{P}_i = E_i^{el} - W_i^{ext} = \frac{1}{2} F_i u_i - \int_0^{u_i} F du. \quad (2.15)$$

Les énergies associées sont schématisées en Figure 2.13a. Les énergies ainsi calculées pour les trois éprouvettes sont tracées en fonction des longueurs de fissure mesurées par DIC en Figure 2.13b. L'énergie potentielle a bien une évolution affine par rapport à la longueur de fissure, ce qui confirme l'hypothèse d'une propagation à  $G$  constant. La valeur de  $G_c$  est identifiée en utilisant la pente de la courbe pour chaque éprouvette. La valeur retenue est la moyenne des trois valeurs obtenues et l'incertitude est l'écart maximal à cette moyenne :

$$G_c = 1.15 \pm 0.02 \text{ kJ/m}^2. \quad (2.16)$$

## 2.4.2 Hypothèses 2D

Comme la géométrie est invariante dans l'épaisseur si l'on considère que le front de fissure est droit, il est intéressant de faire des modèles 2D afin de gagner en temps de calcul. De plus, la DIC est une méthode intrinsèquement plane car les mesures sont faites en surface. Pour ces deux raisons, se pose la question du formalisme 2D qui, en mécanique, offre deux possibilités distinctes : les Contraintes Planes (CP) et Déformations Planes (DP). En élasticité, le choix entre CP et DP se fait habituellement en comparant l'épaisseur aux autres dimensions. En mécanique de la rupture, la présence de champs asymptotiques complique cette question. Afin de faire le choix le plus pertinent possible, trois grandeurs d'intérêt sont étudiées : la raideur de l'éprouvette, les champs de déplacement locaux et l'énergie de rupture.



**FIGURE 2.14** – Modules de Young identifiés en 2D avec hypothèses de contraintes planes et déformations planes comparées avec la valeur identifiée en 3D.

### 2.4.2.1 Raideur de l'éprouvette

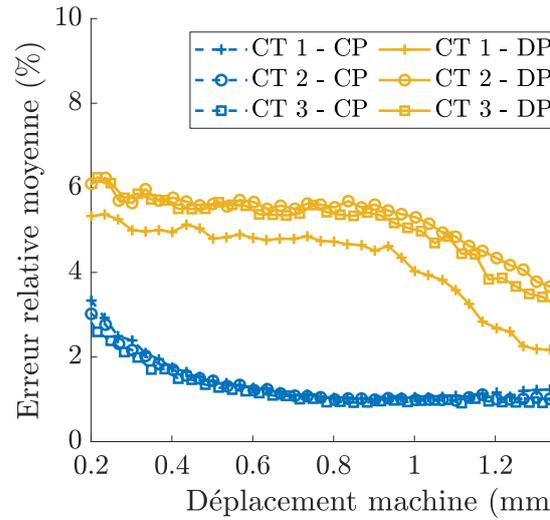
Le premier critère de décision s'appuie sur la raideur de l'éprouvette. On cherche à comparer les raideurs 3D, CP et DP. Pour cela, l'identification du module de Young, présentée au paragraphe 2.4.1.1, est réalisée à nouveau sur des modèles DP et CP. Les modules de Young ainsi identifiés sont comparés à la valeur obtenue à partir d'un modèle 3D. Ces résultats sont donnés en Figure 2.14. Les intervalles de tolérance des modèles 3D et CP se chevauchent grandement, tandis que les intervalles 3D et DP sont complètement distincts. Par conséquent, le modèle de contraintes planes est plus apte à représenter la raideur de l'éprouvette, ce qui est en accord avec le fait que l'épaisseur de l'éprouvette soit relativement faible devant les autres dimensions.

### 2.4.2.2 Champ de déplacement en pointe de fissure

Dans le cas où l'on s'intéresse à des grandeurs locales comme les FIC, l'information sur la raideur globale de l'éprouvette n'est pas suffisante : il faut également que les champs asymptotiques en pointe de fissure soient bien représentés par l'hypothèse 2D choisie. Lors de l'analyse par DIC, des champs de déplacements, *a priori* tridimensionnels, sont projetés sur une solution 2D qui dépend du choix entre CP et DP. La comparaison des champs asymptotiques en CP et DP avec les champs mesurés donne les éléments nécessaires pour faire ce choix.

En pratique, la projection sur les séries de Williams est réalisée parallèlement en DP et CP, et les champs projetés sont comparés avec les déplacements expérimentaux initiaux. Ensuite, la moyenne spatiale de cette différence est calculée sur toute la zone de projection. Les erreurs relatives ainsi obtenues sont tracées en fonction du déplacement machine, pour les trois éprouvettes testées en Figure 2.15. L'algorithme de projection sur les séries de Williams en DP présente une difficile convergence pour les coefficients de Poisson s'approchant de 0.5. Ainsi, à titre d'exception pour le calcul qui suit, le coefficient de Poisson utilisé sera de 0,48 (et non pas de 0.49 comme identifié au paragraphe 2.4.1.1).

La différence entre les champs mesurés et leur projection sur les séries de Williams est plus élevée pour l'hypothèse des déformations planes pour les trois éprouvettes, et tout au long de l'essai. Par conséquent, les champs mesurés localement sont plus proches de la solution en CP que de la solution en DP. De plus, on peut noter que l'erreur de



**FIGURE 2.15** – Erreur relative de projection moyennée sur toute la zone en fonction de l’avancée de la goupille mobile pour chaque éprouvette.

projection obtenue semble très répétable d’un essai à l’autre. Cela renforce l’idée que cet écart mesuré peut servir de critère pour évaluer la pertinence de la solution asymptotique.

### 2.4.2.3 Énergie de rupture

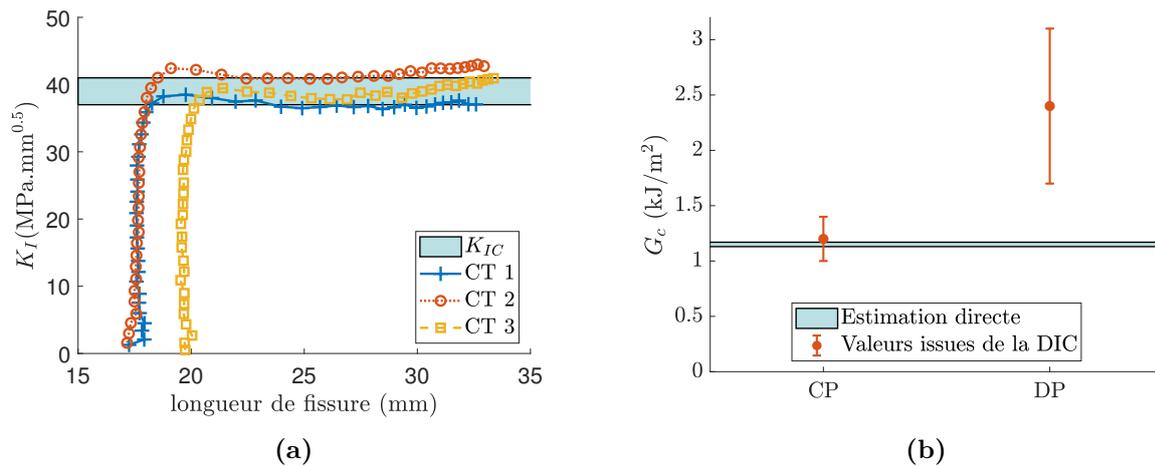
Le dernier critère de choix d’hypothèse 2D pose la question de quelle hypothèse permet de représenter le processus de rupture dans son ensemble. Il s’appuie sur l’énergie de rupture. Cette valeur a été identifiée au paragraphe 2.4.1.2 de façon indépendante de l’hypothèse 2D. Il est également possible de faire une mesure qui dépend de cette hypothèse en identifiant le FIC pendant la propagation et en déduisant l’énergie de rupture associée grâce à la formule d’Irwin (1.20).

Le FIC en mode I est identifié par DIC en utilisant la projection sur les séries de Williams. La valeur  $K_I$  est liée au coefficient d’ordre un identifié par la projection par :

$$K_I = b_I^1 \mu \sqrt{8\pi}. \quad (2.17)$$

Les FIC calculés en CP sont donnés en Figure 2.16a. La valeur de  $K_{IC}$  est calculée comme la moyenne de toutes les valeurs de  $K_I$  mesurées après le début de la propagation. On considère que la propagation a commencé lorsque la raideur a diminué de 5 % par rapport à la raideur initiale. La dépendance de l’énergie de rupture obtenue au choix entre CP et DP est alors double : la projection sur les séries de Williams donne des résultats différents selon la solution choisie, et la formule d’Irwin s’exprime différemment. Les résultats obtenus sont donnés en Figure 2.16b. L’incertitude des valeurs issues de la DIC est calculée par propagation d’incertitudes sur  $K_{IC}$ ,  $E$ , et  $\nu$  dans le cas DP.

Le domaine d’incertitude de la valeur identifiée en CP inclut la valeur de référence, tandis que la valeur identifiée en DP est très éloignée : on constate un écart entre les moyennes de plus de 100 %. L’hypothèse des contraintes planes est donc plus adaptée pour représenter le phénomène de fissuration dans son ensemble.



**FIGURE 2.16** – Comparaison des énergies de rupture identifiées en 2D avec hypothèses de contraintes planes et déformations planes, comparées avec la valeur identifiée en 3D. (a) Identification de  $K_{IC}$  en CP. (b) Comparaison DP/CP avec le 3D.

#### 2.4.2.4 Discussion

Dans cette partie, trois méthodes pour discriminer entre les hypothèses 2D ont été présentées en se basant sur la raideur, les champs de déplacement sur la surface libre à proximité de la pointe de fissure, et l'énergie de rupture globale.

En mécanique des milieux continus, il est connu que les zones proches des surfaces libres peuvent être représentées par un modèle de contraintes planes. Au cœur de l'éprouvette, à l'inverse, c'est l'hypothèse de déformations planes qui est plus pertinente. Selon l'épaisseur de la pièce étudiée, la zone proche du bord a une importance plus ou moins dominante, ce qui mène à considérer un modèle CP pour les éprouvettes très fines et DP pour les éprouvettes très épaisses. Cependant, l'épaisseur limite entre ces deux cas n'est pas définie quantitativement. La première méthode de choix entre CP et DP présentée permet de donner une réponse, car elle prend en compte l'épaisseur de la pièce et permet d'analyser quantitativement les différences de raideur des modèles 3D, CP et DP.

L'utilisation de la DIC signifie que certains paramètres sont mesurés sur une surface libre. À cet endroit, l'état de contrainte devrait *a priori* être plus proche des contraintes planes que des déformations planes. Néanmoins, la présence de champs asymptotiques complique cette question. En effet, il a été démontré par Bui [BUI 06] que cette solution n'est pas exacte en contraintes planes, bien que tout de même adaptée dans certaines situations. De plus, comme le montrent Bazant et Estenssoro [BAZ 78], l'ordre de la singularité peut dépendre de la forme du front de fissure, et donc perturber l'état 2D. La seconde méthode de choix entre CP et DP fournit un outil auto-cohérent pour évaluer quelle hypothèse est la plus adaptée pour représenter les champs mesurés par DIC à proximité de la pointe. L'hypothèse choisie mène ainsi à l'évaluation la plus précise du FIC sur la surface libre. Cependant, il est possible que le FIC varie dans l'épaisseur. La dernière méthode présentée permet de s'assurer que le FIC mesuré en surface est représentatif du phénomène global de rupture.

Pour conclure sur le choix des hypothèses 2D, il s'agit d'un problème qui n'est pas

trivial car la mécanique de la rupture s'appuie à la fois sur des valeurs locales et globales ; or les valeurs locales ne sont disponibles qu'en surface. C'est pour cela qu'il faut vérifier plusieurs aspects avant de prendre une décision. Si, pour des éprouvettes plus épaisses, les trois critères ne pointent pas dans la même direction, cela signifie que le problème ne peut pas être modélisé en 2D. Cependant, dans le cas présenté ici, tous les critères mènent à la conclusion que l'hypothèse de contraintes planes est la plus adaptée. C'est donc celle-ci qui sera utilisée par la suite.

### 2.4.3 Influence des conditions aux limites

Dans cette partie, la comparaison essai-calcul est réalisée en se concentrant sur la mesure de  $K_I$  dans une situation donnée. Le but est de déterminer quelle modélisation du chargement est capable de reproduire les résultats expérimentaux. C'est pourquoi on prend le FIC identifié par projection sur les séries de Williams des champs issus de la DIC comme référence. Comme motivé dans la section précédente, on choisit l'hypothèse des contraintes planes.

Au niveau de la simulation, on se place dans une configuration similaire à celle des mesures expérimentales : les longueurs de fissures testées sont celles issues de la DIC et le chargement est celui mesuré par la machine de traction au moment de la prise de photo. Des conditions aux limites en force imposée et déplacement imposé sont testées.

#### 2.4.3.1 Conditions aux limites en déplacement imposé

L'effet des Conditions aux Limites (CL) en déplacement imposé est présenté en Figure 2.17. Les quatre CL sur les goupilles présentées au paragraphe 2.2.3, ainsi que les CL réelles issues de la DIC sont testées. L'évolution du FIC obtenu est comparée avec les valeurs expérimentales, obtenues par projection sur les séries de Williams des champs de DIC. Dans la première colonne (Figure 2.17a, 2.17c et 2.17e), on se concentre sur les CL sur les goupilles. La seconde colonne (Figure 2.17b, 2.17d et 2.17f) met en évidence la comparaison avec les CL issues de la DIC.

On s'intéresse dans un premier temps aux résultats de la première colonne. Les différents types de CL testées mènent à des résultats très différents les uns des autres, et aucun modèle ne permet de reproduire parfaitement la valeur expérimentale durant l'intégralité de la propagation. Lors de la phase linéaire, avant le début de la propagation, le modèle de contact sans frottement donne un résultat proche de la valeur expérimentale. Les modèles avec mouvement de corps rigide et déplacement ponctuel représentent respectivement une borne supérieure et inférieure des résultats obtenus. Cependant, pendant la phase de propagation, le modèle de contact sans frottement ne permet plus de représenter les évolutions du FIC obtenu par DIC. La valeur expérimentale sort également des bornes définies par les CL de mouvement de corps rigide et de déplacement ponctuel.

Dans la seconde colonne, les quatre conditions aux limites sont remplacées par la plage de valeur couverte par les bornes (mouvement de corps rigide et déplacement ponctuel) pour mettre en avant la comparaison avec le modèle utilisant les CL issues de la DIC. Dans les trois cas présentés, ce dernier modèle permet de reproduire les résultats expérimentaux avec une très grande précision, y compris à la fin de la propagation. Les écarts des différents modèles aux valeurs expérimentales au dernier point de mesure sont

donnés dans le Tableau 2.1. Le modèle avec les conditions aux limites issues de la DIC présente une imprecision inférieure à 5 % tandis qu'une erreur de 9 % a été observée pour le modèle avec CL sur la goupille.

Éprouvette	Écart entre les valeurs expérimentales et le modèle avec les CL sur les goupilles	Écart entre les valeurs expérimentales et le modèle avec les CL issues de la DIC
CT 1	1 %	1 %
CT 2	9 %	4%
CT 3	6 %	4%

**TABLEAU 2.1** – Écarts du FIC mesuré par différents modèles par rapport à la valeur expérimentale au dernier point de mesure effectué.

### 2.4.3.2 Conditions aux limites en force imposée

Il a été noté au paragraphe 2.4.1.1 (Figure 2.12a), que la raideur dépendait grandement du type de conditions aux limites utilisé. Pour s'affranchir de cette dispersion, des modèles à force imposée sont testés. Par ailleurs, dans ce cas, on s'affranchit également de l'hypothèse 2D choisie, car le facteur d'intensité des contraintes en fonction de la force est indépendant du choix entre CP et DP. Les trois conditions aux limites testées sont comparées en Figure 2.18a. Ce graphique montre que tous les modèles mènent à la même valeur du FIC. Dans la suite de l'analyse, une seule modélisation est conservée, celle du mouvement de corps rigide.

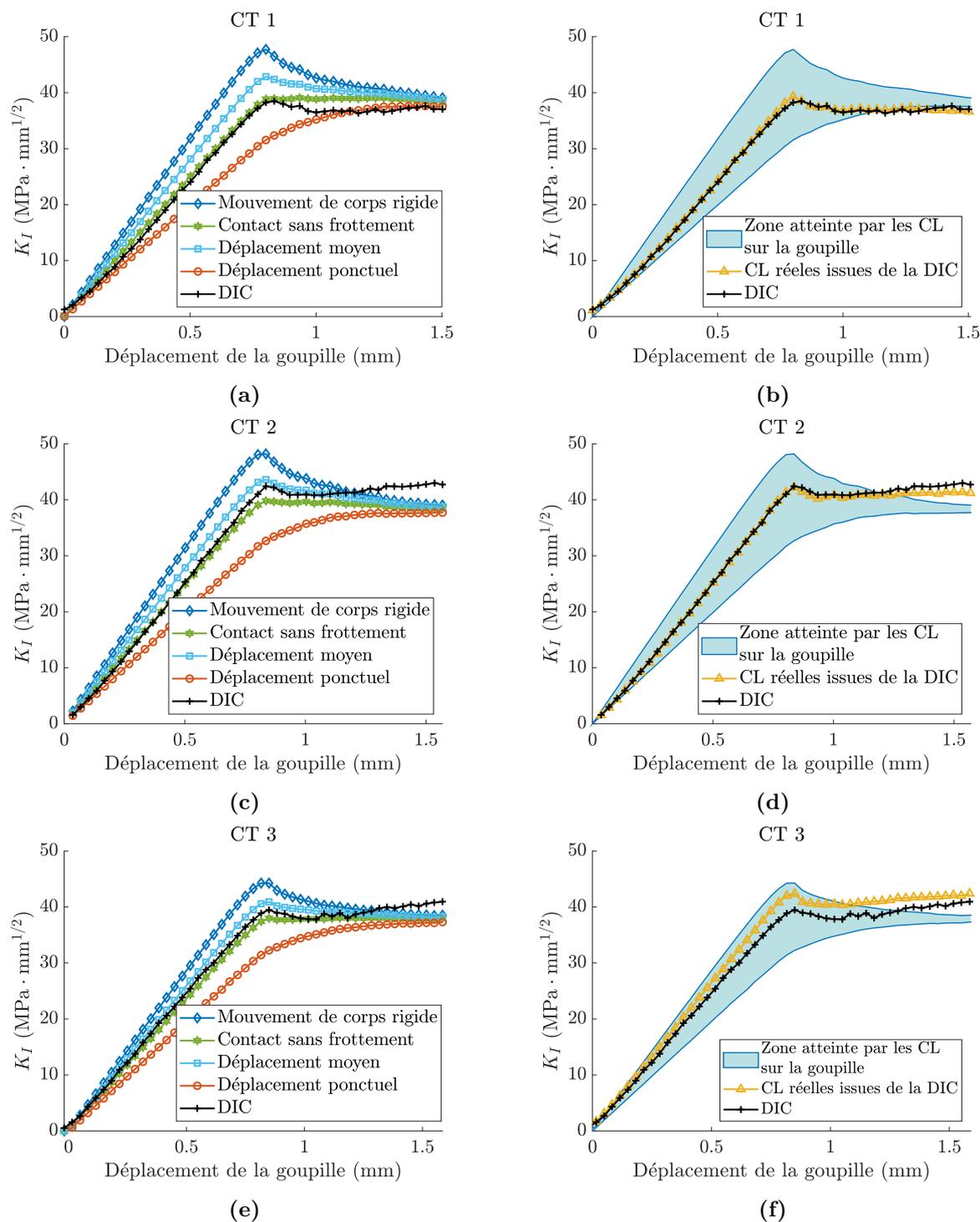
Les trois autres graphiques de la Figure 2.18 présentent la comparaison entre le modèle éléments finis avec force imposé, la valeur expérimentale issue de la DIC et la formule donnée dans les normes ASTM E1820-09 et ASTM D5045-14, et par Tada *et al.* [TAD 10] :

$$K_I = \frac{F}{e\sqrt{W}} \frac{(2 + \frac{a}{W})(0.886 + 4.64\frac{a}{W} - 13.32(\frac{a}{W})^2 + 14.72(\frac{a}{W})^3 - 5.6(\frac{a}{W})^4)}{(1 - \frac{a}{W})^{3/2}}. \quad (2.18)$$

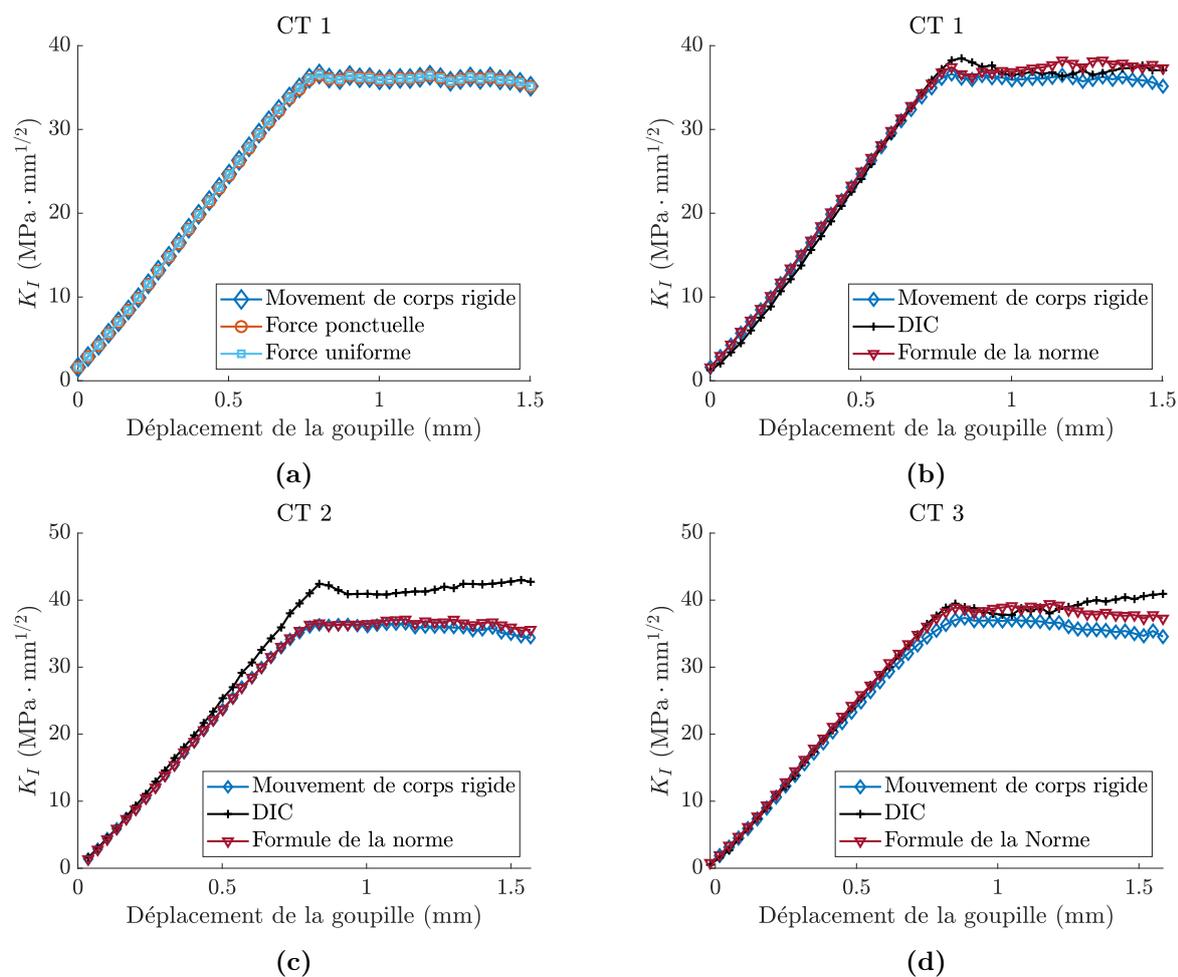
Le modèle à force imposée est compatible avec les résultats expérimentaux dans la phase linéaire, mais pas dans la phase de propagation. Les écarts mesurés au dernier point de mesure sont de 5 % pour CT 1, 20 % pour CT 2 et 16 % CT3. La formule donne des résultats sensiblement similaires au modèle éléments finis, c'est-à-dire proche de l'expérimental dans la phase linéaire, mais pas durant la propagation.

### 2.4.3.3 Discussion

Dans cette étude, les résultats expérimentaux ont été retrouvés avec un haut niveau de précision par le modèle avec conditions aux limites issues de la DIC. Cela valide la pertinence du modèle éléments finis, notamment l'hypothèse du comportement matériau linéaire élastique, homogène et isotrope. Les écarts observés entre les résultats expérimentaux et les autres modèles sont donc uniquement dus à la modélisation des conditions aux limites.



**FIGURE 2.17** – Conditions aux limites en déplacement imposé comparées aux résultats expérimentaux. (a-b) : éprouvette CT 1, (c-d) : éprouvette CT 2, (e-f) : éprouvette CT 3. La première colonne (a, c et e) montre la comparaison des CL sur les goupilles. La seconde colonne (b, d et f) montre la comparaison avec les CL issues de la DIC.



**FIGURE 2.18** – Conditions aux limites en force. (a) : Comparaison des différents modèles sur l'exemple de la CT 1. (b-d) Comparaison du modèle éléments finis avec les données expérimentales et la formule donnée dans les normes ASTM E1820-09 et ASTM D5045-14. (b) éprouvette CT 1, (c) éprouvette CT 2, (d) éprouvette CT 3.

Module de Young ( $E$ )	$1.28 \pm 0.09$ GPa
Coefficient de Poisson ( $\nu$ )	$0.49 \pm 0.02$
Énergie de rupture ( $G_c$ )	$1.15 \pm 0.02$ kJ/m <sup>2</sup>

**TABLEAU 2.2** – Coefficients matériau identifiés lors de la corrélation essai-calcul du problème de référence.

Lors de la phase linéaire, le résultat obtenu dépend du type de conditions aux limites lorsqu'un déplacement est imposé, mais pas lorsqu'une force est appliquée. Ce résultat est en adéquation avec le principe de Saint Venant [SAI 55]. Les modèles à force imposée permettent de retrouver les résultats expérimentaux dans la phase linéaire, ce qui valide le module de Young identifié.

Pendant la propagation, seules les conditions aux limites issues de la DIC permettent de reproduire les résultats expérimentaux. Le principe de Saint Venant est ici mis en défaut car des écarts entre des conditions aux limites simplifiées et réelles sont observées. Cette observation souligne que le problème de propagation de fissure est fondamentalement différent du problème d'élasticité avec une fissure stationnaire.

## 2.5 Bilan sur le problème de référence

Dans ce chapitre, les méthodes relatives à la propagation de fissure sont présentées. Ces méthodes seront utilisées dans la suite de la thèse. Numériquement, l'algorithme par longueur d'arc sera utilisé au Chapitre 4 pour étudier l'effet de zones architecturées. Le montage expérimental présenté sera également réutilisé au Chapitre 5 pour valider les résultats numériques.

L'étude du problème de référence a permis d'identifier des paramètres matériau. Les lois de comportements utilisées dans le reste de ce manuscrit seront donc basées sur ces valeurs, récapitulées dans le Tableau 2.2.

Le choix de l'hypothèse 2D a été fait à la lumière de trois comparaisons, qui permettent de s'assurer que tout le phénomène de fissuration est bien pris en compte. Pour l'épaisseur choisie, les conditions de contraintes planes sont ici les plus pertinentes. C'est donc cette hypothèse qui sera utilisée par la suite, que ce soit dans les calculs éléments finis ou dans l'analyse des données expérimentales.

L'étude de l'influence des conditions aux limites a permis de mettre en avant une sensibilité du modèle de propagation à celles-ci, qui n'existe pas dans la phase linéaire. Les conditions aux limites simplifiées mènent à des résultats parfois erronés lors de la propagation. Cet aspect n'est pas reproductible d'un essai à l'autre. Il est donc difficile à prévoir. Cette étude sert ici d'avertissement sur l'utilisation de systèmes de chargement à base de gouppille. Bien que très adapté à créer des configurations stables, ce système présente une variabilité des conditions exactes de contact qui se traduisent par une difficile modélisation des conditions aux limites. Dans le cadre de cette thèse, on est amené à faire de la prospection numérique. Pour cela, le choix de conditions aux limites ne peut s'appuyer sur les champs issus de la DIC, car ce modèle nécessite des données expérimentales. Les conditions aux limites simplifiées seront donc utilisées en gardant en mémoire

## 2. Étude de la fissuration d'une éprouvette issue de l'impression 3D

---

que cela peut mener à des erreurs dans certains cas. La validation expérimentale reste donc obligatoire pour s'assurer que la prédiction réalisée est proche de la réalité.

# Chapitre 3

## Homogénéisation par éléments finis

*Ce chapitre présente le modèle et l'implémentation d'un algorithme d'homogénéisation linéaire élastique. La méthode présentée ici permet en trois calculs éléments finis d'identifier la loi de comportement effective à l'échelle macroscopique. Trois types de chargement sont testés et le choix des conditions aux limites périodiques est justifié. La méthode est appliquée à des matériaux architecturés à architecture hexagonale bidimensionnelle pour en extraire les paramètres matériaux à l'échelle effective.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèle d'homogénéisation asymptotique par éléments finis . . .</b>	<b>62</b>
3.1.1	Problème à deux échelles . . . . .	62
3.1.2	Approche en déformation . . . . .	64
3.1.3	Approche en contrainte . . . . .	66
<b>3.2</b>	<b>Implémentation . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>3.3</b>	<b>Application à des motifs hexagonaux . . . . .</b>	<b>69</b>
3.3.1	Description des motifs . . . . .	69
3.3.2	Comparaison des méthodes . . . . .	70
3.3.3	Calcul des coefficients équivalents . . . . .	72
<b>3.4</b>	<b>Bilan sur l'homogénéisation linéaire élastique . . . . .</b>	<b>74</b>

---

## 3.1 Modèle d'homogénéisation asymptotique par éléments finis

Dans ce chapitre, le modèle permettant le calcul de la loi de comportement équivalente à l'échelle macroscopique d'un matériau architecturé est décrit. Au chapitre 1 (1.2.4.1), de nombreuses familles de méthodes d'homogénéisation ont été présentées. La méthode choisie ici est l'approche asymptotique linéaire avec résolution par éléments finis. Cette approche a été détaillée par exemple dans les ouvrages de Yvonnet [YVO 19] et Bornert [BOR 01]. La raison de ce choix est la possibilité de représenter le comportement exact de la zone. Un des avantages recherchés est qu'on ne suppose pas *a priori* l'isotropie de la loi de comportement équivalente. L'approche linéaire d'ordre un est utilisée car elle permet d'avoir des résultats assez précis avec un nombre raisonnable de calculs éléments finis et un formalisme relativement simple.

On s'intéresse ici au comportement élastique des matériaux architecturés. En lien avec les hypothèses utilisées dans cette thèse, le comportement en plasticité et la viscosité ne sont pas étudiés. D'autre part, les phénomènes de flambages des matériaux architecturés sont beaucoup étudiés dans la littérature [COM 16], mais cet effet sera négligé ici, car l'on considère que les chargements sont uniquement de la tension et non de la compression.

### 3.1.1 Problème à deux échelles

#### 3.1.1.1 Définition des échelles

Afin de présenter le modèle d'homogénéisation, on se place sur l'étude d'un VER  $\Omega$ . Ce domaine est constitué d'un matériau hétérogène connu. La frontière de ce domaine sera notée  $\partial\Omega$ . La contrainte à l'échelle microscopique est notée  $\boldsymbol{\sigma}$  et la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Ces grandeurs sont liées par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$\mathbb{C}(\mathbf{x})$  est le tenseur d'élasticité, qui dépend de la position dans le cas d'un matériau hétérogène. Il est considéré connu.

L'homogénéisation consiste à définir des grandeurs macroscopiques  $\boldsymbol{\sigma}^M$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$ , constantes dans le domaine d'étude. L'objectif est de déterminer le tenseur d'élasticité homogénéisé  $\mathbb{C}^H$  tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}^M = \mathbb{C}^H : \boldsymbol{\varepsilon}^M \quad (3.2)$$

#### 3.1.1.2 Condition de Hill-Mandel

Afin de définir des relations de changement d'échelle cohérentes avec les lois de la thermodynamique, le bilan énergétique doit être conservé. L'énergie totale de déformation du VER étudié s'écrit de la manière suivante :

$$E^{tot} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (3.3)$$

Il est également possible d'identifier l'énergie totale à partir des données macroscopiques :

$$E^{tot} = \frac{|\Omega|}{2} \boldsymbol{\sigma}^M : \boldsymbol{\varepsilon}^M \quad (3.4)$$

où  $|\Omega|$  représente le volume du solide. La conservation d'énergie lors du changement d'échelle mène au lemme de Hill-Mandel [HIL 63]. Celui-ci s'écrit, en introduisant l'opérateur moyenne sur  $\Omega$  comme  $\langle \cdot \rangle_\Omega = 1/|\Omega| \int_\Omega \cdot dV$ , de la manière suivante :

Lemme de Hill-Mandel

$$\boldsymbol{\sigma}^M : \boldsymbol{\varepsilon}^M = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_\Omega \quad (3.5)$$

Cette équation représente la conservation d'énergie lors du changement d'échelle. Elle doit être respectée lors de la définition de grandeurs macroscopiques.

### 3.1.1.3 Identification de la loi de comportement macroscopique

Afin d'identifier  $\mathbb{C}^H$ , un modèle d'homogénéisation doit contenir les ingrédients suivants :

- Une définition de la contrainte macroscopique en fonction de la contrainte à l'échelle microscopique.
- Une définition de la déformation macroscopique en fonction de la déformation à l'échelle microscopique.
- La définition d'un ensemble de problèmes éléments finis permettant d'identifier toutes les composantes de  $\mathbb{C}^H$ .

Le dernier élément mérite une discussion particulière. Pour définir ces problèmes éléments finis, il faut déterminer les conditions aux limites à appliquer à  $\Omega$ , c'est-à-dire un ensemble de force ou déplacement imposé sur la frontière de ce domaine. Afin de définir le nombre de calcul à réaliser, il faut étudier les dimensions du problème.  $\mathbb{C}^H$  est un tenseur d'ordre quatre et de dimension trois, ce qui veut dire qu'il contient 81 composantes. Cependant, l'équilibre en moment à l'échelle macroscopique impose  $\sigma_{ij}^M = \sigma_{ji}^M$ . On en déduit la symétrie suivante pour le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}^H = C_{jikl}^H$ . D'autre part, si la définition du tenseur de déformation macroscopique conserve la propriété de symétrie de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on a également  $C_{ijkl}^H = C_{ijlk}^H$ . Cela permet de réduire le nombre de composantes indépendantes à 36. Enfin, il existe une symétrie mineure qui impose  $C_{ijkl}^H = C_{klij}^H$  ce qui mène au final à 21 composantes indépendantes. Ce nombre peut encore être réduit en faisant des hypothèses sur les symétries du milieu architecturé, mais il est possible de créer un modèle d'homogénéisation avec ces seules hypothèses. En pratique, les 36 composantes sont évaluées et la symétrie mineure est vérifiée *a posteriori*. L'équation (3.2) correspond à six équations scalaires indépendantes. Il faut donc réaliser six calculs éléments finis pour avoir les 36 composantes. Lors de la description des problèmes élastiques à résoudre, il faut s'assurer que cela mène à 36 équations linéairement indépendantes.

Par la suite, on définit deux approches, une en déformation et une en contrainte, contenant les trois ingrédients évoqués pour définir le problème d'homogénéisation.

### 3.1.2 Approche en déformation

#### 3.1.2.1 Déformation moyenne

Dans cette première approche, la déformation macroscopique est définie comme la moyenne des déformations locales. La déformation microscopique peut alors s'écrire comme une décomposition en terme moyen et une fluctuation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

Le déplacement correspondant s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^M \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

Le fait d'avoir  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} = \boldsymbol{\varepsilon}^M$  impose que la moyenne des fluctuations de déformation est nulle, ce qui peut être développé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_{\Omega} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}' + \nabla^T \mathbf{u}') dV = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}') dS = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

La dernière équation présente la condition sous laquelle la déformation macroscopique peut être calculée comme la moyenne des déformations. Il s'agit d'une condition sur les bords du domaine, cela permet donc de définir quelles conditions aux limites utiliser pour les calculs éléments finis. La façon la plus simple de respecter cette condition est de définir que la fluctuation du déplacement  $\mathbf{u}'$  est nulle sur les bords du domaine. Cette condition aux limites est appelée *Déformation Homogène* (DH) et s'écrit de la manière suivante :

#### Conditions aux limites de Déformation Homogène (DH)

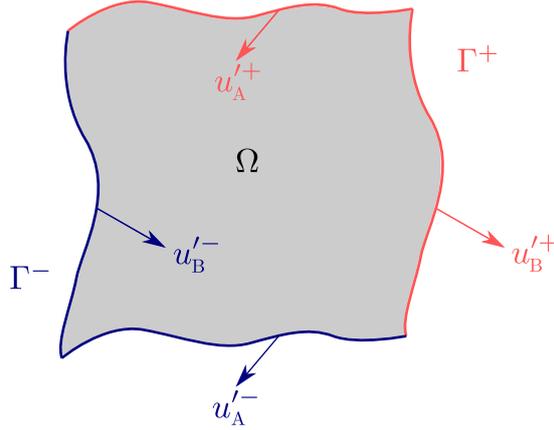
Le déplacement est imposé sur tous les bords du domaine et respecte :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\varepsilon}^M \cdot \mathbf{x} \quad (3.9)$$

Il faut alors tester six valeurs de  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$ . Pour s'assurer d'obtenir des équations linéairement indépendantes, il faut que les valeurs choisies constitue une base de l'espace correspondant aux tenseurs d'ordre deux symétriques en trois dimensions. La base utilisée ici est :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_1^M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\varepsilon}_2^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\varepsilon}_3^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_4^M &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\varepsilon}_5^M &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\varepsilon}_6^M &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Une seconde façon de respecter la condition (3.8) est d'imposer les déplacements périodiques sur la frontière du domaine. Cela veut dire que l'on peut décomposer  $\partial\Omega$  en une partie  $\Gamma^+$  et une partie  $\Gamma^-$  contenant un ensemble de surfaces identiques deux à deux comme illustré en Figure 3.1. Ce cas est appelé *Déformation Périodique* (DPer) et s'écrit :



**FIGURE 3.1** – Schéma représentant les conditions aux limites périodiques : la décomposition de la frontière en une partie  $\Gamma^+$  et une partie  $\Gamma^-$  et la périodicité de la fluctuation de déplacement  $\mathbf{u}'$ .

#### Conditions aux limites de Déformation Périodique (DPer)

A chaque point du bord  $\Gamma^+$  est associé un point de  $\Gamma^-$ . Les fluctuations de déplacement s'écrivent :

$$\mathbf{u}'^+ = \mathbf{u}'^- \quad (3.11)$$

La condition à imposer à ces nœuds est donc que les déplacements vérifient :

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \varepsilon^M \cdot (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \quad (3.12)$$

Les déformations macroscopiques imposées sont les mêmes que dans le cas DH.

#### 3.1.2.2 Définition de la contrainte macroscopique

A partir de la définition de la déformation macroscopique et des conditions aux limites compatibles avec cette définition, on cherche à exprimer la contrainte macroscopique pour que la condition de Hill-Mandel (3.5) soit respectée. La somme des énergies de déformation à l'échelle microscopique s'écrit :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla^T \mathbf{u}) \, dV \quad (3.13)$$

On transforme cette expression en utilisant les équations d'équilibre à l'échelle microscopique, qui imposent que  $\boldsymbol{\sigma}$  soit symétrique et que  $\text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$ . Puis le théorème de la divergence est utilisé :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \, dV \\ &= \int_{\Omega} \text{div} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \, dV \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (3.14)$$

On écrit ensuite le déplacement en utilisant la décomposition (3.7) :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \\
 &= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^M \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}') \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \\
 &= \boldsymbol{\varepsilon}^M : \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Le second terme est nul dans le cas des conditions aux limites de DH. Dans le cas des conditions aux limites périodiques, ce terme est nul si le  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est anti-périodique, ce qui est le cas lorsque le milieu est réellement périodique. C'est ce que l'on considérera ici. L'énergie peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV &= \boldsymbol{\varepsilon}^M : \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{x}) \, dV \\
 &= \boldsymbol{\varepsilon}^M : \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \, dV
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

L'écriture du Lemme de Hill-Mandel permet alors de définir la contrainte équivalente :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^M : \boldsymbol{\varepsilon}^M &= \boldsymbol{\varepsilon}^M : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} \\
 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^M &= \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

### 3.1.3 Approche en contrainte

#### 3.1.3.1 Contrainte moyenne

Dans cette seconde approche, la contrainte macroscopique est définie *a priori* comme la moyenne des contraintes locales. La contrainte microscopique peut alors s'écrire comme une décomposition en terme moyen et une fluctuation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^M + \boldsymbol{\sigma}' \tag{3.18}$$

La moyenne des fluctuations est nulle si :

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}' \otimes \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dV = \mathbf{0} \tag{3.19}$$

Comme dans le cas de l'approche en déformation, on a une condition sur les bords du domaine qui sert à définir les conditions aux limites à utiliser. Une solution possible est d'imposer  $\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur la frontière du domaine. Cette condition aux limites est appelée *Contrainte Homogène* (CH) et s'écrit :

#### Conditions aux limites de Contrainte Homogène (CH)

L'effort est imposé sur les bord du domaine et respecte :

$$\mathbf{t}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{\sigma}^M \cdot \mathbf{n} \tag{3.20}$$

Pour rendre le problème bien posé, il faut au moins une condition aux limites en déplacement, on impose alors que le déplacement moyen de la frontière soit nul.

Les valeurs de  $\boldsymbol{\sigma}^M$  testées sont :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}_1^M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{\sigma}_4^M &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_5^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_6^M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

### 3.1.3.2 Définition de la déformation macroscopique

Comme pour l'approche précédente, on utilise la condition de Hill-Mandel pour définir la déformation macroscopique. L'énergie s'écrit toujours :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \, dS
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Les conditions aux limites de CH permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV &= \boldsymbol{\sigma}^M : \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \, dS \\
 &= \boldsymbol{\sigma}^M : \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

En écrivant la condition de Hill-Mandel, on en déduit que la déformation macroscopique compatible avec cette approche en contrainte est la moyenne des déformations :

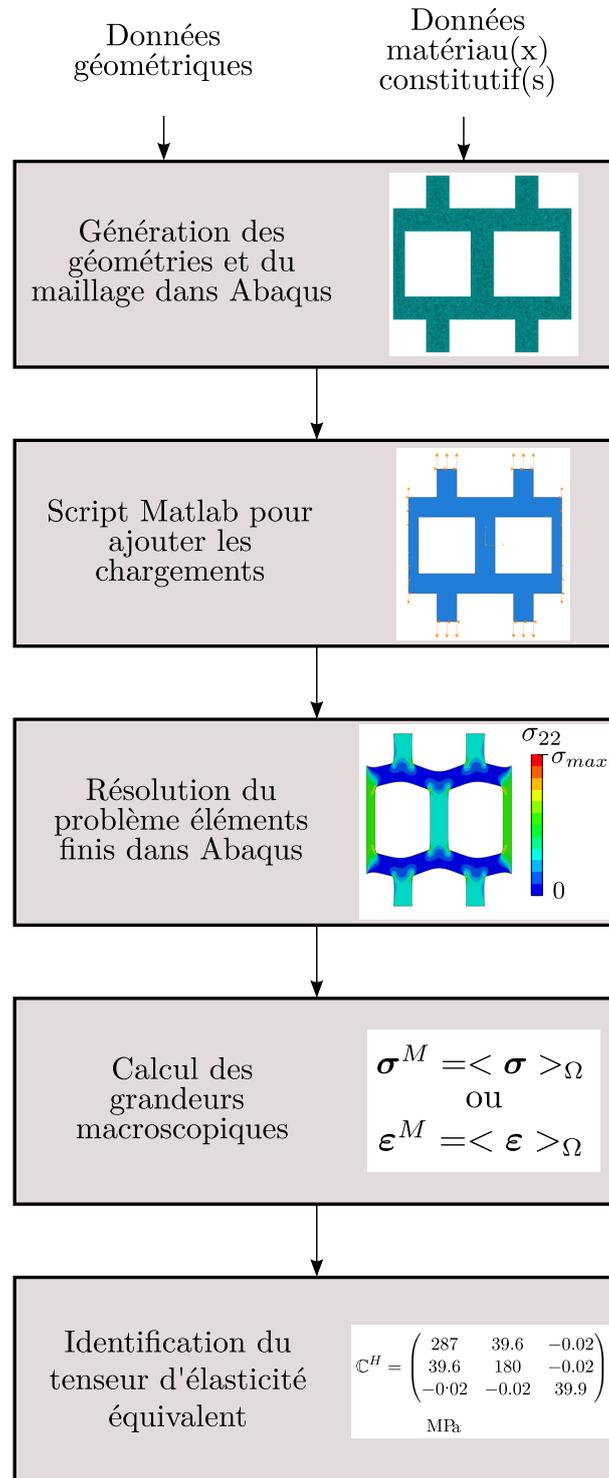
$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^M : \boldsymbol{\varepsilon}^M &= \boldsymbol{\sigma}^M : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} \\
 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^M &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

## 3.2 Implémentation

Aux vues des géométries que l'on souhaite étudier dans cette thèse, l'implémentation est réalisée en 2D. L'hypothèse des contraintes planes est choisie, en lien avec les conclusions du Chapitre 2. L'extension de ce code en 3D ne pose pas de difficulté spécifique. Le nombre de cas de chargement à tester est alors réduit au nombre de trois : traction dans les deux directions du plan et cisaillement dans le plan.

L'ensemble de la méthode est illustré en Figure 3.2. La programmation est réalisée dans Matlab et utilise le logiciel éléments finis Abaqus. Un premier fichier Abaqus est généré avec la géométrie du volume étudié, les données des matériaux constitutifs et un maillage. Ensuite, une fonction codée dans matlab identifie les bords du domaine et impose les conditions aux limites DH, DPer ou CH, et génère un fichier par chargement. Puis, les problèmes éléments finis sont résolus sur Abaqus, les moyennes spatiales des contraintes et déformations sont calculées et le tenseur élastique équivalent est identifié.

Dans le cas des matériaux poreux, quelques précisions sont nécessaires. Le milieu hétérogène est constitué de deux phases dont l'une a une souplesse infinie. Le vide fait donc intégralement partie du modèle : les moyennes des champs doivent prendre en compte



**FIGURE 3.2** – Schéma représentant la méthode de calcul du comportement élastique équivalent. Illustré sur un cas de chargement en déformation homogène avec  $E = 1$  GPa et  $\nu = 0.49$ .

cette phase également. Cela ne pose pas de problème pour le calcul de la contrainte macroscopique, car les zones poreuses peuvent être considérées comme des zones de raideur nulle. Pour le calcul de la déformation macroscopique, en revanche, cela est plus problématique. Une solution simple à ce problème est de mailler également le vide et d'y appliquer un module de Young très faible devant celui du matériau constitutif. L'autre problématique est la présence de vide sur la bordure du domaine. Cela pose notamment problème lors de l'application de conditions aux limites en contrainte, ce qui, appliqué à un milieu sans raideur mène à une déformation infinie. Pour remédier à cela, il est possible de redécouper la cellule élémentaire afin que celle-ci ait un contour homogène plein. Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de mailler le vide, car la déformation moyenne peut être calculée grâce au théorème de la divergence :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_{\Omega} = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS \quad (3.25)$$

Le second aspect qui mérite d'être discuté est l'application des conditions périodiques. Une précaution doit être prise sur le maillage des bords du domaine : un maillage régulier est imposé pour que l'on puisse associer les nœuds deux par deux. Les conditions aux limites périodiques sont définies par ensemble de deux nœuds ; pour lier ces nœuds la fonction *equation* d'Abaqus est utilisée. Malheureusement, il n'est pas possible avec cette méthode de définir une équation ayant un second membre : les équations doivent s'écrire sous la forme  $\sum_i \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$  avec  $\alpha_i$  des coefficients définis par l'utilisateur. La solution proposée ici est de définir un nœud de référence par paire de nœuds à joindre, pas attaché à la géométrie, auquel on applique comme déplacement le second membre de l'équation (3.12) :  $\boldsymbol{\varepsilon}^M(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-)$ . L'équation (3.12) peut ainsi être implémentée dans le formalisme d'Abaqus.

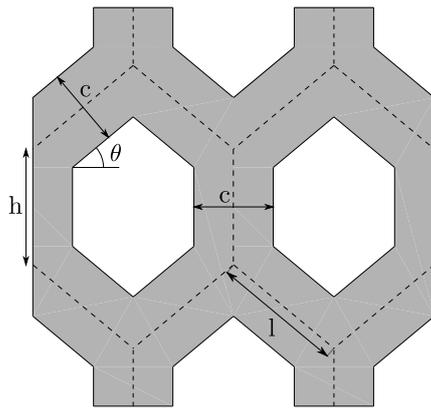
Les codes Matlab développés pour cette méthode sont donnés en Annexe C pour le cas des conditions aux limites périodiques.

### 3.3 Application à des motifs hexagonaux

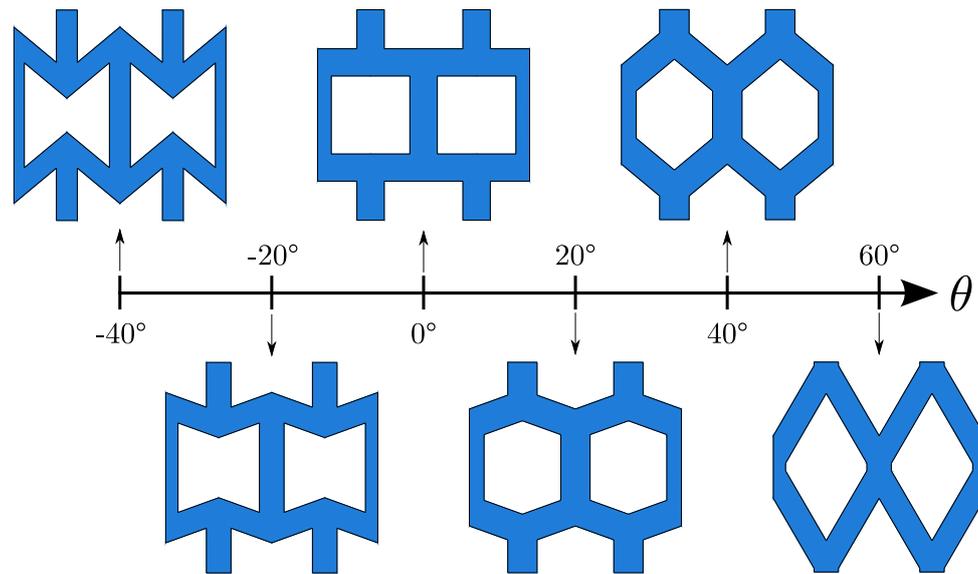
Dans cette partie, les trois méthodes (DH, DPer et CH) sont appliquées à une géométrie paramétrée et les résultats sont présentés. Les contraintes sont adimensionnées par le module de Young du matériau constitutif de telle sorte que les résultats présentés ne dépendent pas de cette grandeur. Le coefficient de Poisson choisi est  $\nu = 0.49$  en lien avec le matériau utilisé expérimentalement dans le reste de cette thèse.

#### 3.3.1 Description des motifs

Le motif choisi ici est un pavage hexagonal du fait de son utilisation fréquente dans la littérature [GIB 97]. Les paramètres définissant sa géométrie sont définis en Figure 3.3. Dans cette étude, il a été choisi de faire varier l'angle de l'hexagone tout en gardant la même taille de cellule élémentaire et la même porosité. Le calcul des dimensions correspondantes est donné en Annexe D. Les différentes géométries obtenues pour une porosité de  $p = 0.55$  pour un angle variant entre  $-40$  et  $60^\circ$  sont données en Figure 3.4.



**FIGURE 3.3** – Dimensions du pavage hexagonal paramétrisé étudié.

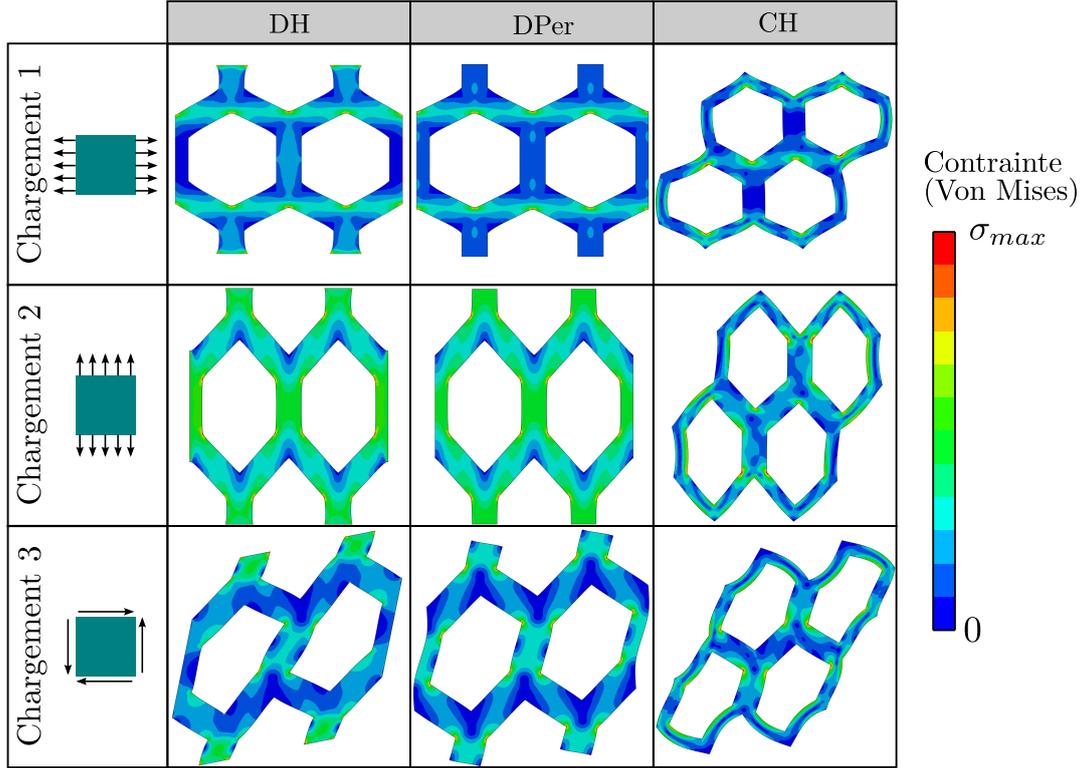


**FIGURE 3.4** – Géométries obtenues en imposant une porosité constante  $p = 0.55$ , une taille de cellule constante et un angle  $\theta$  variant entre  $-40$  et  $60$  °.

### 3.3.2 Comparaison des méthodes

Afin de comparer les modèles d'homogénéisation, on se concentre ici sur la géométrie  $\theta = 40^\circ$ . En lien avec ce qui a été dit au paragraphe 3.2, la cellule étudiée pour l'approche en contrainte est légèrement différente afin d'avoir un contour homogène. Les déformées obtenues pour les trois chargements pour les trois méthodes dans le cas d'une cellule contenant quatre hexagones est donnée en Figure 3.5. Les formes déformées observées sont relativement similaires pour les trois méthodes pour les chargements 1 et 2 (chargements de traction). Il existe tout de même des effets de bords qui diffèrent d'une méthode à l'autre. C'est particulièrement le cas du modèle CH où, par exemple, l'hexagone en bas à gauche pour le chargement 1 a une déformée différente de celle que l'on peut observer pour les autres méthodes. Au niveau du chargement de cisaillement, les trois méthodes donnent des formes très différentes et seule la méthode DPer donne une même déformation pour tous les hexagones de la cellule.

On étudie ensuite l'influence de la taille du domaine sur lequel on effectue l'homogénéisation. On garde une cellule carrée et l'on duplique le motif dans les deux directions.



**FIGURE 3.5** – Déformées pour les différentes conditions aux limites pour les trois chargements nécessaires à l’homogénéisation en 2D.

Afin d’observer une seule grandeur scalaire, la valeur étudiée est la norme du tenseur d’élasticité équivalent, définie pour la notation de Voigt comme :

$$\|\mathbf{C}\| = tr(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) \quad (3.26)$$

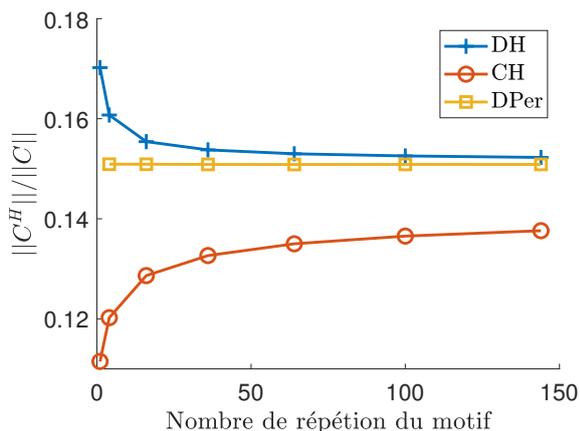
où  $tr$  représente l’opérateur trace. Les résultats, adimensionnés par la norme du matériau constitutif sont donnés en Figure 3.6.

Les trois méthodes donnent des résultats sensiblement différents, mais semblent tous converger, plus ou moins vite, vers une même valeur pour une taille de cellule très grande. Les tenseurs d’élasticité obtenus pour le cas DPer ne dépendent quasiment pas de la taille de cellule. Cela est dû au fait que les conditions aux limites périodiques représentent un milieu périodique infini, c’est donc la valeur la plus proche du  $\mathbf{C}^H$  que l’on cherche. D’autre part, sur la Figure 3.6, pour toutes les tailles de cellule testées, on observe l’ordre suivant :

$$\|\mathbf{C}_{CH}^H\| < \|\mathbf{C}_{DPer}^H\| < \|\mathbf{C}_{DH}^H\| \quad (3.27)$$

Ce résultat est en adéquation avec le fait, démontré par Huet [HUE 90], que le modèle CH représente une borne inférieure de la raideur et le modèle DH une borne supérieure.

Au final, le modèle avec les conditions aux limites périodiques semble le plus performant car il permet, avec une cellule élémentaire très petite de représenter le comportement effectif. En effet, avec seulement quatre hexagones dans la cellule, la valeur obtenue est dans l’intervalle représenté par les bornes des modèles CH et DH calculé pour 144 motifs.



**FIGURE 3.6** – Norme du tenseur d'élasticité obtenu par les différentes méthodes en fonction de la taille du domaine étudié.

Le fait de travailler avec quatre motifs au lieu de 144 diminue fortement la complexité du modèle et donc le temps de calcul.

### 3.3.3 Calcul des coefficients équivalents

Une fois le tenseur d'élasticité identifié, il est intéressant d'extraire des grandeurs relatives au comportement élastique et parlantes dans le monde des sciences de l'ingénieur comme les modules de Young, coefficients de Poisson et modules de cisaillement. Pour cela, il faut décider sur quelle loi de comportement on va projeter les résultats numériques, notamment au niveau des hypothèses d'anisotropie. Pour  $\theta = 40^\circ$ , l'homogénéisation donne le tenseur de raideur écrit en notation de Voigt suivant :

$$\mathbf{C}^H = E \begin{pmatrix} 0.138 & 0.115 & 2 \cdot 10^{-6} \\ 0.115 & 0.271 & 1 \cdot 10^{-5} \\ 2 \cdot 10^{-6} & 1 \cdot 10^{-5} & 0.0487 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

On obtient une matrice symétrique, ce qui vérifie la symétrie mineure, évoquée au paragraphe 3.1.1.3. De plus, aux vues des différences d'ordre de grandeurs avec les autres composantes on peut considérer que  $C_{13}^H = C_{23}^H = 0$ . La matrice a donc 4 composantes différentes, que l'on considère indépendantes. Cela correspond à une loi de comportement orthotrope, ce qui est cohérent avec les symétries du motif. Ce raisonnement est également valable pour les autres valeurs de  $\theta$ .

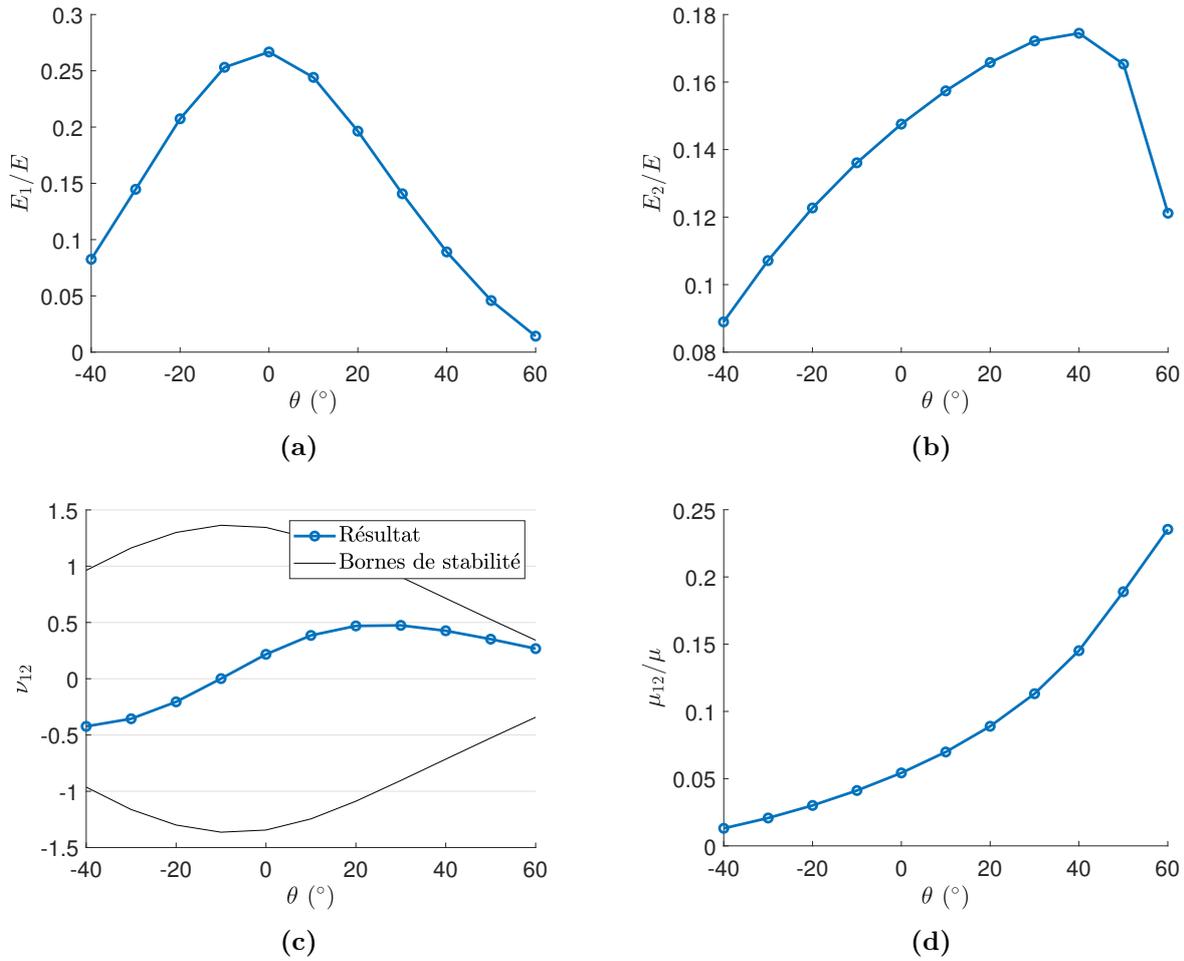
La loi de comportement élastique linéaire orthotrope s'écrit en contraintes planes :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^M \\ \varepsilon_{22}^M \\ 2\varepsilon_{12}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^M \\ \sigma_{22}^M \\ \sigma_{12}^M \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Cette loi fait intervenir deux modules de Young correspondant aux deux directions du plan  $E_1$  et  $E_2$ , un module de cisaillement  $\mu_{12}$  et deux coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$ . On a donc cinq paramètres matériaux. Cependant, la symétrie mineure impose :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad (3.30)$$

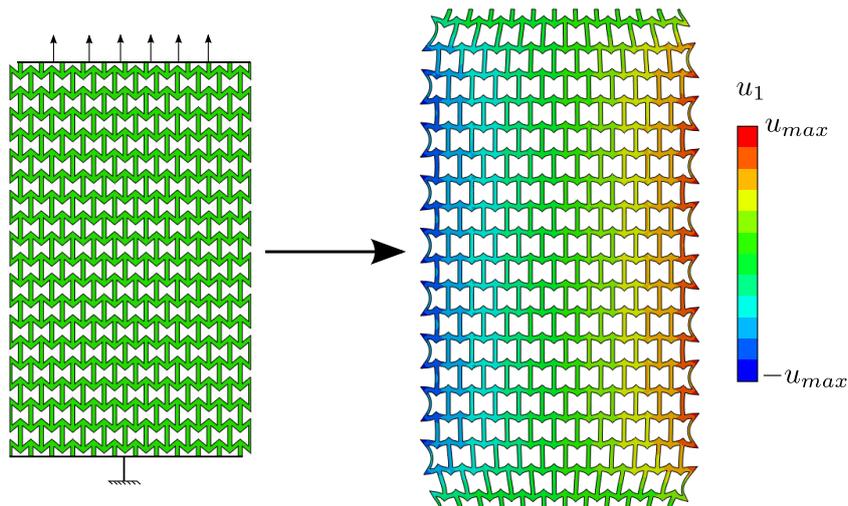
on a donc quatre coefficients indépendants :  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  et  $\mu_{12}$ .



**FIGURE 3.7** – Coefficients équivalents obtenus.  $E$  et  $\mu$  représentent les modules d'élasticité du matériau constitutif.

La loi (3.29) est écrite en souplesse donc, pour faire l'identification, on commence par inverser la matrice  $\mathbf{C}^H$  obtenue par homogénéisation. Puis, on résout le système à quatre équations et quatre inconnues pour trouver  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  et  $\mu_{12}$ . Cela ne serait pas possible en déformations planes car l'expression de la loi de comportement fait alors apparaître des coefficients hors plans  $E_3$ ,  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$ .

Les résultats des coefficients équivalents calculés pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$  sont données en Figure 3.7. Ces résultats respectent la borne de Voigt car  $E_1/E$ ,  $E_2/E$  et  $\mu_{12}/\mu$  sont inférieurs à  $1 - p = 0.45$ . Le coefficient de Poisson respecte la condition de stabilité qui stipule  $\nu_{12}^2 < E_1/E_2$ . On observe également des comportements qui varient grandement avec l'angle de l'hexagone, quand bien même ces matériaux présentent les mêmes phases en les mêmes proportions. Enfin, on remarque que pour  $\theta \leq 20^\circ$ , on a  $\nu_{12} < 0$ . Ce comportement est appelé auxétisme, il correspond à un matériau dont la section transversale augmente lorsqu'il est soumis à une traction. Une illustration de ce phénomène est donnée en Figure 3.8.



**FIGURE 3.8** – Illustration du comportement auxétiq sur un matériau contenant le pavage hexagonal avec  $\theta = -40^\circ$ .

### 3.4 Bilan sur l’homogénéisation linéaire élastique

La méthode d’homogénéisation présentée ici permet, en trois calculs éléments finis linéaires élastiques, de calculer le comportement effectif d’une zone architecturée bidimensionnelle. L’utilisation des conditions aux limites périodiques permet de limiter grandement la taille des problèmes numériques à résoudre.

L’application des méthodes d’homogénéisation a des structures hexagonales périodiques a permis de comparer les méthodes et de mettre en évidence les avantages du modèle utilisant les conditions aux limites périodiques. Cela a aussi permis d’illustrer la diversité des comportements effectifs possibles des matériaux architecturés. En effet, à partir d’un même matériau, réparti en une même densité moyenne sur tout le domaine, des comportements effectifs très différents ont été identifiés. En particulier, alors que le matériau constitutif a un coefficient de Poisson de 0.49, la valeur du coefficient de Poisson effectif varie énormément et peut même prendre des valeurs négatives. On montre ainsi qu’à partir d’un matériau homogène isotrope, on peut obtenir des comportement orthotropes très différents et originaux, grâce à l’architecture locale.

## Troisième partie

# Influence de la présence de zones architecturées hors du chemin de fissure



# Chapitre 4

## Étude numérique de l'effet des zones architecturées

*Dans ce chapitre, l'algorithme par longueur d'arc est utilisé pour prospecter les effets possibles de l'ajout de zones architecturées hors du chemin de fissure sur le phénomène de propagation. Des effets intéressants sont mis en évidence et analysés. Une étude paramétrique permet de distinguer les effets des caractéristiques mécaniques de la zone sur les phénomènes observés.*

### Sommaire

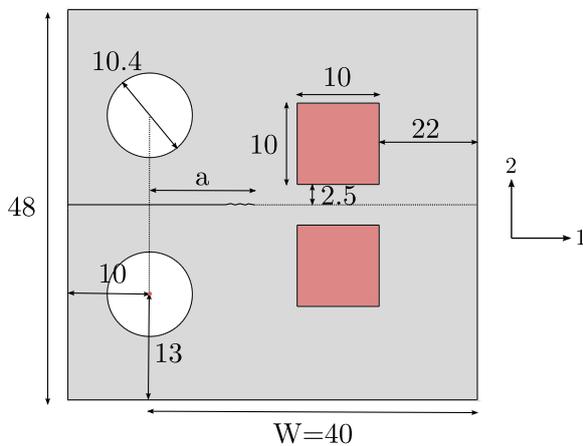
---

<b>4.1</b>	<b>Problème étudié</b>	<b>78</b>
<b>4.2</b>	<b>Résultats</b>	<b>79</b>
4.2.1	Fonction de raideur	79
4.2.2	Conséquence sur une expérience en déplacement imposé	80
4.2.3	Calculs d'énergies	81
<b>4.3</b>	<b>Analyse de l'effet des zones architecturées</b>	<b>82</b>
4.3.1	Effet dans la phase linéaire	82
4.3.2	Effet en amont des zones	84
4.3.3	Effet entre les zones	85
4.3.4	Effet en aval des zones	88
4.3.5	Bilan énergétique en quasi-statique	88
4.3.6	Le cas particulier du snap-back	89
4.3.7	Synthèse	92
<b>4.4</b>	<b>Études paramétriques</b>	<b>92</b>
4.4.1	Influence de la densité	93
4.4.2	Influence du comportement mécanique de la zone	94
<b>4.5</b>	<b>Bilan de l'effet des zones architecturées sur la fissuration</b>	<b>97</b>

---

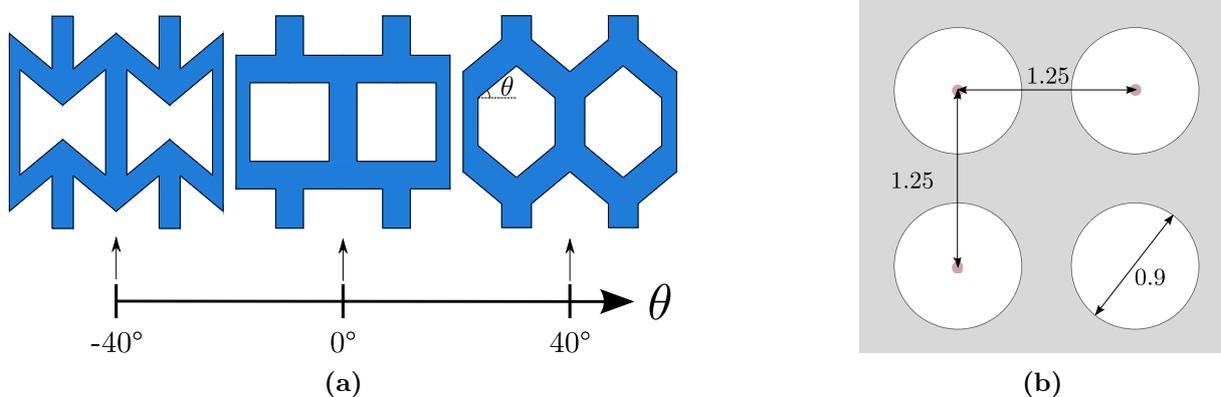
## 4.1 Problème étudié

Dans ce chapitre, on étudie une éprouvette CT à laquelle on ajoute des zones architecturées de part et d'autre de la fissure, comme illustré en Figure 4.1. La symétrie par rapport au plan  $x_2 = 0$  est conservée donc on considère que la fissure se propage en ligne droite, dans le plan de symétrie. Le but est d'étudier l'effet à distance des zones architecturées sur la propagation de fissure. La pointe de fissure se trouve toujours dans le matériau plein, mais les zones architecturées modifient les champs mécaniques et ont donc un impact sur la fissure. Afin d'avoir un élément de comparaison, les calculs sont également effectués sur une éprouvette pleine, qui servira de référence.



**FIGURE 4.1** – Géométrie globale du problème étudié dans ce chapitre : éprouvette CT avec zones architecturées de part et d'autre de la fissure. Le problème étudié dans ce chapitre est indépendant de l'épaisseur.

Les zones architecturées sont composées de motifs périodiques poreux. Les motifs hexagonaux présentés au Chapitre 3 sont utilisés. Ils sont illustrés à titre de rappel en Figure 4.2a. Les dimensions exactes ont été calculés en Annexe D. La taille de la cellule est adaptée pour que 36 hexagones soient positionnés dans la zone de 10 mm x 10 mm. En plus de ces motifs, un pavage de trous circulaires présentant une porosité plus faible est ajouté pour cette étude. Les dimensions de la cellule élémentaire pour ce motif sont données en Figure 4.2b.



**FIGURE 4.2** – Géométrie des motifs utilisés dans ce chapitre. (a) Rappel des géométries des cellules hexagonales paramétrées à porosité constante  $p = 0.55$ . (b) Motif circulaire ajouté pour cette étude,  $p = 0.41$ .

La méthode numérique utilisée est l'algorithme par longueur d'arc, présenté au Chapitre 2. La longueur de fissure est itérée et, à chaque valeur testée on évalue par éléments finis les fonctions de raideur  $S$  et de FIC  $k$ . Ces fonctions viennent du paramétrage du problème expliqué au paragraphe 2.1.2, qui s'appuie sur une analyse dimensionnelle effectuée en annexe A. On rappelle ici l'expression de ces fonctions :

$$S(\nu, \bar{a}) = \frac{F}{Eue} \text{ et } k(\nu, \bar{a}) = \frac{K_I \sqrt{W}}{Eu}. \quad (4.1)$$

On rappelle également la définition de la longueur de fissure adimensionnée  $\bar{a} = a/W$ . Le chargement correspondant à la condition  $K_I = K_{IC}$  peut s'écrire de manière adimensionnée :

$$\bar{u} = \frac{u_c E}{K_{IC} \sqrt{W}} = \frac{1}{k(\nu, \bar{a})} \text{ et } \bar{F} = \frac{F_c}{K_{IC} e \sqrt{W}} = \frac{S(\nu, \bar{a})}{k(\nu, \bar{a})}. \quad (4.2)$$

Tous les résultats dans ce chapitre seront présentés de manière adimensionnée et les phénomènes observés sont donc indépendants de la ténacité du matériau, de son module de Young et de l'épaisseur de l'éprouvette. Le seul paramètre matériau qui a *a priori* un effet est le coefficient de Poisson, qui sera fixé pour cette étude à  $\nu = 0.49$ . Il a été vérifié que cette valeur n'affecte pas les résultats commentés dans ce chapitre (*cf.* Annexe E).

En pratique, le modèle éléments finis est constitué de la moitié de l'éprouvette afin de profiter de la symétrie du problème pour diminuer le temps de calcul. La condition aux limites imposée au trou est le déplacement moyen imposé avec force uniformément répartie. Ce type de chargement a été défini et testé au Chapitre 2. Les calculs sont réalisés avec l'hypothèse de contrainte plane. Comme pour le coefficient de Poisson, il a été vérifié que les effets observés sont également visibles en déformations planes (*cf.* Annexe E). Enfin, les zones architecturées sont, dans un premier temps, représentées explicitement dans le maillage, c'est-à-dire que l'homogénéisation n'est pas envisagée.

## 4.2 Résultats

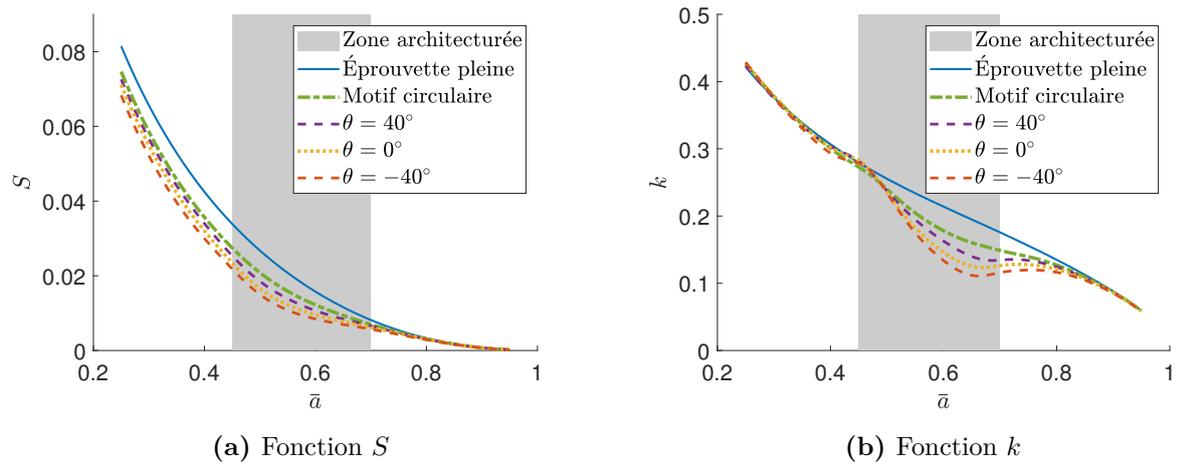
### 4.2.1 Fonction de raideur

Les fonctions  $k$  et  $S$  identifiées numériquement pour les différentes géométries testées sont données en Figure 4.3. La zone grisée représente la phase de propagation où la pointe de fissure est entre les zones architecturées, il ne s'agit pas de la zone d'influence de la zone architecturée, qui correspond à la zone où les fonctions  $S$  et  $k$  diffèrent d'un cas à l'autre, et qui est bien plus large.

Comme expliqué au paragraphe 2.1.2, toute la propagation de fissure est régie par la fonction  $S(\bar{a})$  et sa dérivée  $S'(\bar{a})$ , directement liée à  $k(\bar{a})$  par l'expression :

$$k^2(\bar{a}) = -\frac{1}{2} S'(\bar{a}). \quad (4.3)$$

La fonction  $S$  joue donc un rôle majeur dans la propagation de fissure. Ainsi, il est intéressant de commencer par décrire cette fonction pour le cas de l'éprouvette pleine  $S_{plein}$  et pour le cas des éprouvettes architecturées  $S_A$ . Toutes les fonctions de raideur



**FIGURE 4.3** – Fonctions régissant la propagation de fissure identifiées numériquement sur différentes géométries d'éprouvettes, pleines et architecturées avec différents motifs.

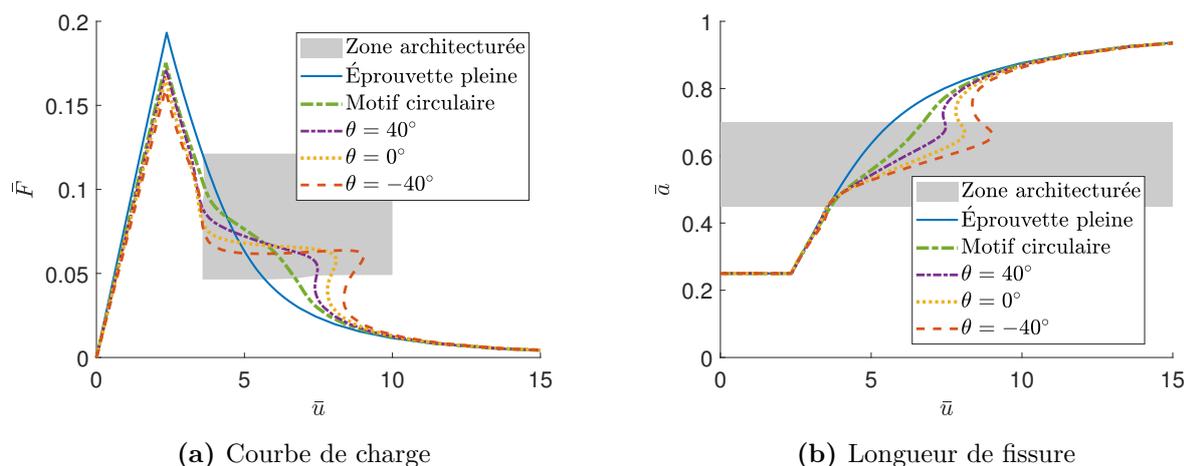
sont strictement décroissantes car l'avancée de fissure s'accompagne forcément d'une perte de raideur. Lorsque la fissure avance d'un incrément  $\delta a$ , une partie de la pièce n'est plus capable de supporter la charge, c'est ce qui fait diminuer la raideur.

Pendant toute la propagation, on a  $S_A \leq S_{plein}$ , ce qui vient du fait que l'on a rajouté des cavités dans l'éprouvette, la raideur obtenue est donc forcément inférieure (borne de Voigt [VOI 87]). Plus précisément, sur la Figure 4.3, on distingue quatre phases en fonction de la position de la fissure :

1. *En amont de la zone* : pour  $\bar{a} < 0.45$ , les éprouvettes architecturées présentent une raideur inférieure à l'éprouvette pleine  $S_A < S_{plein}$  mais une dérivée similaire :  $S'_A \approx S'_{plein}$  ou  $k_A \approx k_{plein}$ . Cela peut s'expliquer par le fait que, dans cette phase, la partie qui ne peut plus supporter la charge lors d'une avancée de fissure ne contient aucune cavité donc la différence de raideur est identique au cas plein ( $\delta S_{plein} = \delta S_A$ ).
2. *Entre les zones architecturées* : ensuite, a lieu une phase de transition, caractérisée par  $S_A < S_{plein}$  et  $S'_A > S'_{plein}$  ou  $k_A < k_{plein}$ . Lors de l'avancée de la fissure, la partie qui ne peut plus supporter la charge contient des cavités donc sa perte a moins d'effet que la perte de la même partie dans l'éprouvette pleine ( $|\delta S_{plein}| > |\delta S_A|$ ).
3. *En aval de la zone, à proximité de celle-ci* : la fissure est encore influencée par la zone architecturée. Le comportement en terme de raideur est ici assez similaire à la phase précédente.
4. *En aval de la zone, éloigné de celle-ci* : pour  $\bar{a} > 0.7$ , les fonctions  $S_{plein}$  et  $S_A$  deviennent très similaires :  $S_A \approx S_{plein}$  et  $S'_A \approx S'_{plein}$ . Dans cette phase, la zone architecturée n'est plus sollicitée mécaniquement donc elle n'a plus d'influence sur le problème étudié.

## 4.2.2 Conséquence sur une expérience en déplacement imposé

À partir des fonctions  $S$  et  $k$ , il est possible de calculer les paramètres de chargement  $\bar{u}$  et  $\bar{F}$  grâce aux équations (4.2). Les courbes de charge et de longueur de fissure en fonction



**FIGURE 4.4** – Courbes représentant la propagation de fissure pour différentes géométries d'éprouvettes, pleines et architecturées avec différents motifs.

du déplacement sont ainsi tracées en Figure 4.4. Ces courbes représentent une expérience en déplacement imposé. L'algorithme par longueur d'arc ne permet de calculer que la phase de propagation, à  $K_I = K_{IC}$ . Or, dans une expérience en déplacement imposé, cette phase est précédée d'une phase linéaire, jusqu'à l'initiation de la propagation. Pour représenter la partie linéaire dans les courbes de la Figure 4.4, une longueur initiale de fissure est choisie arbitrairement ( $a_0 = 10$  donc  $\bar{a}_0 = a_0/W = 0.25$ ) et un trait est tracé entre le point ( $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{F} = 0$  et  $\bar{a} = a_0/W$ ) et le premier point de la propagation, calculé pour  $a = a_0$ .

La première remarque que l'on peut faire sur ces courbes est qu'il est possible de modifier significativement le comportement en propagation de fissure par l'ajout de zones architecturées. En effet, les courbes représentant les éprouvettes architecturées sont différentes de la référence. L'effet des zones architecturées n'est pas trivial à expliquer. En particulier, pour les motifs hexagonaux, un phénomène spécifique apparaît : il existe une zone où plusieurs valeurs de  $\bar{a}$  et  $\bar{F}$  correspondent à une même valeur de  $\bar{u}$ . Il s'agit d'une instabilité *snap-back*, ce phénomène est discuté en détail dans la partie 4.3.6.

### 4.2.3 Calculs d'énergies

Afin d'analyser plus en détail les résultats, une analyse énergétique est également conduite. Les énergies du système peuvent être écrites de manière adimensionnée en divisant par une énergie de référence que l'on définit comme :  $G_c We$ . L'énergie dissipée par le processus de fissuration est  $G_c e(a - a_0)$ , donc s'écrit de manière adimensionnée :

$$\bar{E}^{diss} = \bar{a} - \bar{a}_0. \quad (4.4)$$

L'énergie élastique stockée s'écrit de la façon suivante pendant la propagation :

$$E^{el} = \frac{1}{2} u_c F_c = \frac{1}{2} \frac{K_{IC}^2 We S}{E k^2}. \quad (4.5)$$

En utilisant la formule d'Irwin en contraintes planes et le lien entre les fonctions  $k$  et  $S$  (Equation (4.3)), cette énergie s'écrit :

$$E^{el} = -G_c e W \frac{S}{S'}, \quad (4.6)$$

soit, sous forme adimensionnée :

$$\bar{E}^{el} = -\frac{S}{S'}. \quad (4.7)$$

Dans le cas d'une propagation stable, le bilan d'énergie s'écrit  $W^{ext} = E^{fiss} + E^{el}$ , ce qui permet d'écrire facilement le travail des forces extérieures en fonction de la raideur :

$$\bar{W}^{ext} = \bar{a} - \bar{a}_0 - \frac{S}{S'}. \quad (4.8)$$

Afin d'étudier les variations de l'énergie, les dérivées des fonctions d'énergie par rapport à la longueur de fissure adimensionnée sont également calculées. En pratique, cette dérivée est réalisée numériquement grâce à une méthode d'interpolation quadratique sur trois points. Les énergies et dérivées d'énergies sont données en Figure 4.5.

L'effet des zones architecturées est encore une fois significatif et difficile à décrire. On observe plusieurs phases : dans un premier temps, l'énergie élastique stockée et le travail des forces extérieures des cas architecturés sont inférieures au cas de référence, puis cette tendance s'inverse. Au niveau des dérivées la comparaison avec le cas de référence donne trois zones : au début les dérivées d'énergies sont inférieures à la référence, puis elles deviennent supérieures et enfin, elles redeviennent inférieures. Les phénomènes en jeu seront expliqués dans la partie suivante.

### 4.3 Analyse de l'effet des zones architecturées

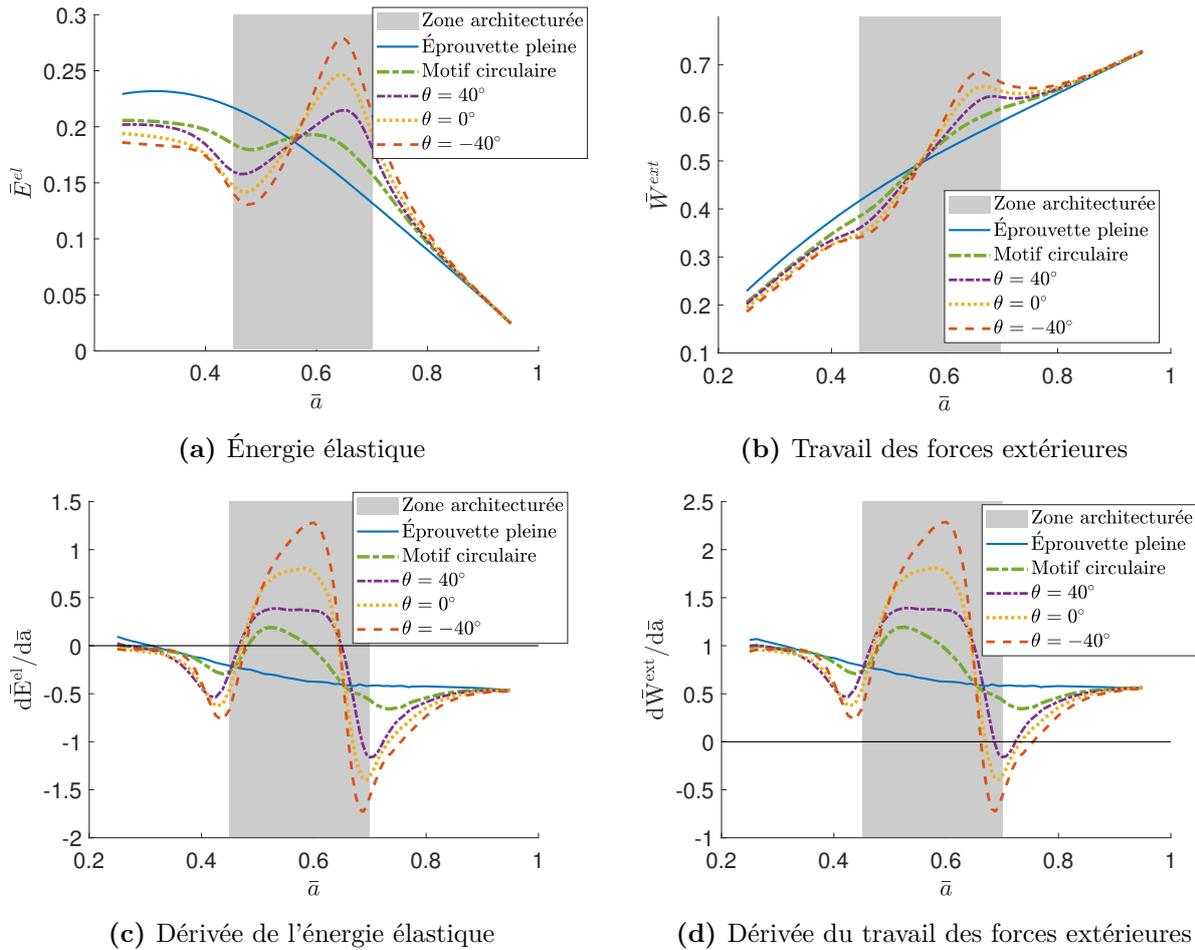
Dans cette partie, les résultats des Figures 4.4 et 4.5 sont commentés en détail, zone par zone, afin d'expliquer les phénomènes observés. Les effets sur les courbes de charge sont reliés aux grandeurs énergétiques et le caractère renforçant ou non des zones architecturées est discuté.

On définit la longueur de fissure à partir de laquelle la fissure est entre les zones architecturées comme  $\bar{a}_1 = 0.45$ , et celle à laquelle on sort de cette zone comme  $\bar{a}_2 = 0.7$ .

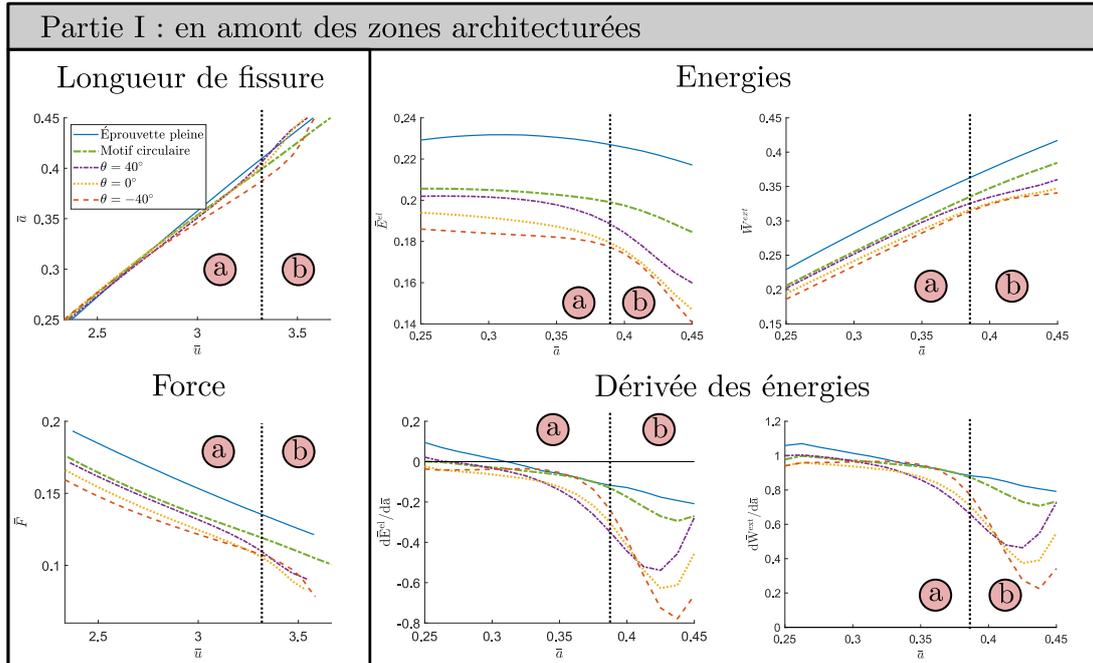
#### 4.3.1 Effet dans la phase linéaire

La partie linéaire de la courbe de charge est définie uniquement par l'état à  $\bar{a} = \bar{a}_0$ . Dans le cas étudié et tracé sur la Figure 4.4, la pointe de fissure est en amont de la zone. La raideur des éprouvettes architecturées est donc strictement inférieure à celle de l'éprouvette pleine, et cela se retrouve sur les courbes de charge. La seconde particularité de cette phase est que  $S'_A \approx S'_{plein}$ . On a donc un  $k$  similaire, c'est-à-dire un FIC similaire à même déplacement imposé. Cela se traduit par une initiation de la propagation à un même déplacement sur la Figure 4.4.

Au début de la propagation, la force appliquée par la machine de traction est plus faible dans le cas architecturé alors que le déplacement est le même. À ce stade, le travail



**FIGURE 4.5** – Énergies calculée avec un chargement ajusté pour obtenir une propagation quasi-statique ( $K_I = K_{IC}$ ) pendant toute la propagation.



**FIGURE 4.6** – Résultats numériques en amont des zones architecturées. Identification de deux parties à comportements différents : (a) et (b).

mécanique nécessaire à faire propager la fissure, ainsi que l'énergie élastique stockée, est plus faible dans le cas architecturé. À l'initiation, l'ajout des zones architecturées a donc un effet fragilisant en terme d'énergie et de force mais n'as pas d'effet en terme de déplacement. Il convient de rappeler que la longueur de fissure initiale est choisie arbitrairement. Les effets observés dans cette zone étant très dépendants de cette valeur, il est important de préciser que l'effet des zones architecturées dans la phase linéaire seraient différents si on choisissait une autre valeur de  $a_0$ .

### 4.3.2 Effet en amont des zones

Afin d'analyser ce qui se passe en amont des zones architecturées, on donne les différentes courbes de longueur de fissure, de charge et d'énergie, restreintes aux longueurs de fissures correspondantes ( $\bar{a} < \bar{a}_1$ ). Ces courbes sont données en Figure 4.6. On divise la partie en amont des zones architecturées (partie I) en deux phases (a) et (b). Les limites sont tracées de manière approximatives car, en toute rigueur, les limites entre les différents phénomènes ne sont pas strictement les mêmes pour tous les motifs testés.

Dans la partie I(a), les phénomènes sont très similaires à ceux de la phase linéaire : la raideur des éprouvettes architecturées est plus faible que celle des éprouvettes pleines mais la fonction  $k$  est similaire dans tous les cas. Cela se traduit par une courbe de longueur de fissure en fonction des déplacements similaires et une force à déplacement équivalent inférieure pour les cas architecturés. D'un point de vue énergétique, comme pour la phase linéaire, l'énergie stockée et le travail des forces extérieures est plus faible pour le cas architecturé. Au niveau de la propagation, on observe :

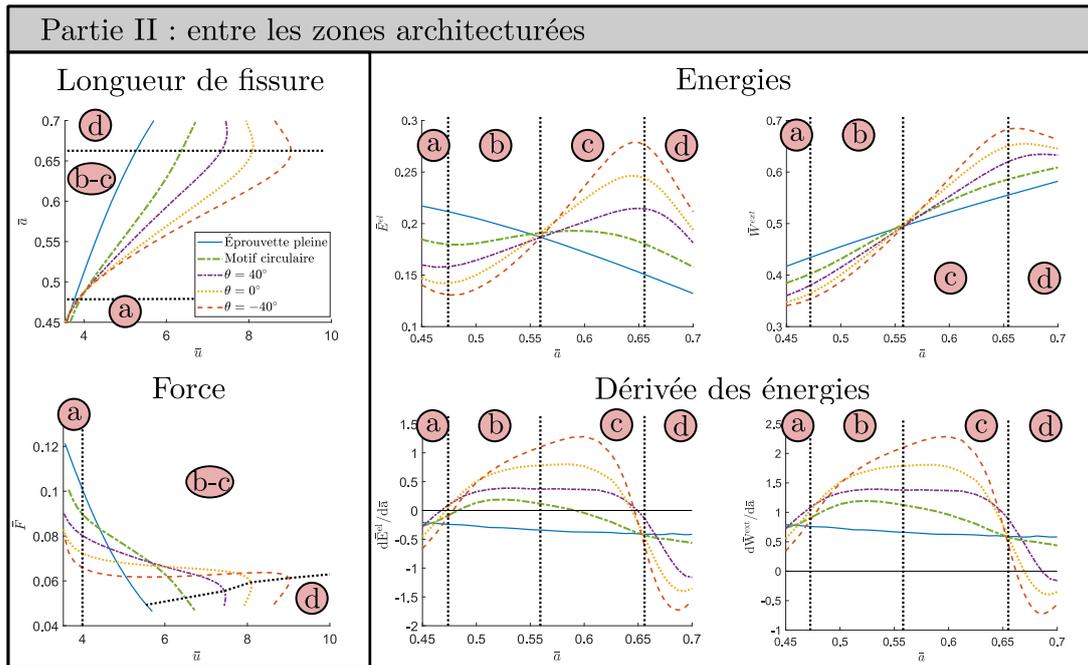
$$\frac{d\bar{E}_A^{el}}{d\bar{a}} \approx \frac{d\bar{E}_{plein}^{el}}{d\bar{a}} \approx 0. \quad (4.9)$$

L'avancée de fissure, dans tous les cas testés, ne relâche presque pas d'énergie élastique. L'apport d'énergie des forces extérieures est donc entièrement utilisé pour la propagation de fissure et est par conséquent le même pour l'éprouvette pleine et les éprouvettes architecturées. La phase I(a) est donc une phase où la raideur est plus faible dans les cas architecturés mais la résistance à la propagation en terme d'énergie dépensée est la même.

La phase I(b) se distingue de la I(a) au niveau des calculs d'énergie. Ici, l'avancée de fissure relâche plus d'énergie dans le cas des éprouvettes architecturées. La propagation se fait donc avec un apport d'énergie moindre de la machine de traction. Dans cette phase, l'ajout des zones architecturées a donc un effet fragilisant en énergie à fournir.

### 4.3.3 Effet entre les zones

Comme pour la partie précédente, les différentes courbes sont données en restreignant aux longueurs de fissures entre les zones architecturées ( $\bar{a}_1 < \bar{a} < \bar{a}_2$ ) en Figure 4.7. Afin d'analyser les phénomènes énergétiques, cette partie (II) est divisée en quatre phases (a), (b), (c) et (d).



**FIGURE 4.7** – Résultats numériques entre les zones architecturées. Identification de quatre parties à comportement différents : (a), (b), (c) et (d).

La partie II(a) est très similaire à celle d'avant (I(b)). L'énergie élastique stockée continue de diminuer lors de la propagation. Cependant, cette diminution est de moins en moins rapide pour les cas architecturés, jusqu'à un point où  $d\bar{E}_A^{el}/d\bar{a} = 0$ .

Dans la partie II(b), on observe un phénomène particulier : l'avancée de fissure, au lieu de libérer de l'énergie élastique stockée, permet de stocker encore plus d'énergie. Cela

se traduit par  $d\bar{E}_A^{el}/d\bar{a} > 0$ . Cet aspect n'existe pas dans le cas de référence, c'est donc un phénomène nouveau apporté par l'ajout des zones architecturées. Afin d'expliquer comment l'avancée de fissure peut s'accompagner d'une augmentation de l'énergie élastique stockée, on rappelle l'expression :

$$\bar{E}^{el} = \frac{S}{(-S')}. \quad (4.10)$$

Les fonctions  $S$  et  $-S'$  sont toutes les deux décroissantes donc la variation de  $\bar{E}^{el}$  vient de la compétition entre ces deux variations. La fonction  $S$  est la raideur et la fonction  $-S' = 2k^2$  représentent la fragilité en déplacement imposé. L'évolution de  $\bar{E}^{el}$  peut donc être interprétée comme la compétition entre la raideur et la fragilité. Pour que l'énergie accumulée dans la pièce augmente, il faut que la diminution de la raideur soit compensée par la diminution rapide de la fragilité.

La conséquence du fait que  $d\bar{E}_A^{el}/d\bar{a} > 0$  est que l'incrément de travail extérieur doit être bien plus élevé pour le cas architecturé que pour les éprouvettes pleines. En effet, le travail des forces extérieures couvre intégralement la dissipation de Griffith, et permet de stocker de l'énergie dans la pièce. Il en résulte que la résistance à la propagation en énergie des éprouvettes architecturées augmente progressivement. Il arrive un moment où, pour une même longueur de fissure, on a dépensé autant d'énergie pour les cas architecturés et le cas de référence :  $\bar{W}_A^{ext} = \bar{W}_{plein}^{ext}$ .

Dans la phase suivante (II(c)), l'avancée de fissure s'accompagne toujours d'une augmentation de l'énergie élastique stockée dans l'éprouvette architecturée. On est même arrivés à un point où l'énergie élastique stockée est plus importante pour les cas architecturés que pour le cas de référence. Par conséquent, le travail des forces extérieures est également plus élevé. Cela veut dire que pour arriver aux longueurs de fissures dans cette zone, on a consommé plus d'énergie pour les cas architecturés. L'ajout des zones architecturées a donc clairement un effet renforçant en énergie dans cette phase.

#### Effet renforçant : Augmentation du travail des forces

Il existe une plage de valeur de la longueur de fissure où le travail des forces nécessaires pour arriver à cette longueur de fissure est plus élevé dans le cas de l'éprouvette architecturée que dans le cas de référence. Ce phénomène est présent pour tous les motifs testés dans cette étude.

Pour l'éprouvette à motif hexagonal avec  $\theta = -40^\circ$ , au moment où  $\bar{W}_A^{ext}$  est maximal, il est environ 23 % supérieur à  $\bar{W}_{plein}^{ext}$  au même stade de la propagation.

Au niveau des courbes de charge et des longueurs de fissure en fonction du déplacement, les parties II(b) et II(c) sont relativement similaires. Le fait d'avoir une fonction  $k$  plus faible à même longueur de fissure pour les cas architecturés se traduit par un déplacement à imposer pour arriver à cette longueur plus élevé. Dans le cadre d'une expérience en déplacement imposé, la propagation de fissure est alors retardée. Il arrive un point où la courbe de charge des cas architecturés passe au-dessus de la courbe de référence. On a donc une raideur apparente  $\bar{F}/\bar{u}$  plus élevée pour le cas architecturé alors que la borne de Voigt impose toujours  $S_A < S_{plein}$  à même longueur de fissure. Cela s'explique par le fait que, à même  $\bar{u}$ , la longueur de fissure n'est pas la même. Le retard de la propagation

en déplacement imposé est un effet renforçant.

#### Effet renforçant : Retard en déplacement imposé

Il existe une large plage de valeur où la propagation de fissure est retardée en déplacement imposé par l'ajout de zones architecturées. En dehors de cette plage de valeur, la longueur de fissure atteinte à même niveau de chargement en déplacement est similaire pour les éprouvettes architecturées et pleines. Cet effet est observé pour toutes les éprouvettes. La conséquence est que, en ralentissant la propagation de fissure, la diminution de force est également ralentie.

Un phénomène particulier est observé sur les courbes de charge du motif hexagonal ré-entrant ( $\theta = -40^\circ$ ), la force augmente légèrement au cours de la propagation. On distingue donc deux types de motifs : ceux qui mènent à une réponse après le pic de force totalement adoucissante, c'est-à-dire avec une force décroissante et ceux qui mènent à une réponse partiellement durcissante, c'est-à-dire avec une phase où la force est croissante. En analysant les énergies en présence, on en déduit qu'une phase est durcissante si et seulement si :

$$\frac{d\bar{W}^{ext}}{d\bar{a}} < 2 \frac{d\bar{E}^{el}}{d\bar{a}}, \quad (4.11)$$

ou, en intégrant  $W^{ext} = E^{el} + E^{diss}$  :

$$\frac{d\bar{E}^{diss}}{d\bar{a}} < \frac{d\bar{E}^{el}}{d\bar{a}}. \quad (4.12)$$

Les cas où la force augmente sont donc caractérisés par une plus grande énergie accumulée dans la pièce que dissipée par le processus de fissuration. Dans ce cas, la plus grande partie de l'énergie apportée par le chargement est stockée dans l'éprouvette et non utilisée pour faire avancer la fissure.

Dans la partie II(d), l'avancée de fissure s'accompagne à nouveau d'une relaxation de l'énergie élastique dans le cas architecturé. Cette relaxation devient rapidement plus importante que celle du cas de référence :

$$0 > \frac{d\bar{E}_{plein}^{el}}{d\bar{a}} > \frac{d\bar{E}_A^{el}}{d\bar{a}}. \quad (4.13)$$

Par conséquent, l'incrément de travail des forces extérieures devient également inférieur au cas de référence. Pour les éprouvettes à motifs hexagonaux, on observe même une valeur négative :  $d\bar{W}_A^{ext}/d\bar{a} < 0$ . Cela veut dire que l'avancée de fissure se fait sans aucun apport d'énergie de la machine de traction, elle s'accompagne même d'une restitution d'énergie au milieu extérieur. Ce phénomène est caractéristique de l'instabilité snap-back et sera discuté plus en détail dans la partie 4.3.6. Au final, dans la partie II(d), on a toujours un travail des forces extérieur plus élevé pour le cas architecturé mais l'avancée de la fissure demande de moins en moins d'énergie.

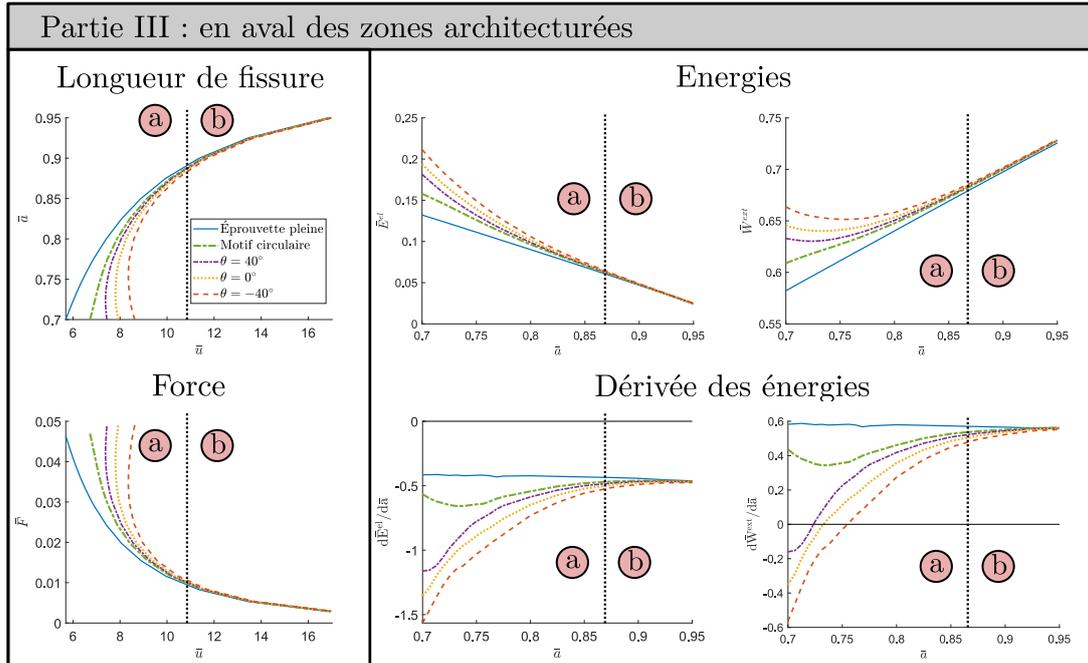


FIGURE 4.8 – Résultats numériques en aval des zones architecturées. Identification de deux parties à comportements différents : (a) et (b).

### 4.3.4 Effet en aval des zones

La dernière zone étudiée est celle où la fissure se trouve en aval des zones architecturées. Les courbes détaillées de cette partie (III) sont données en Figure 4.8 et sont divisées en deux phases : (a) et (b).

La phase III(a) est une transition entre la phase précédente (II(d)) et un retour à un état où toutes les éprouvettes se comportent de la même façon. Dans la phase III(b), l'ajout de la zone architecturée n'a plus aucun effet sur les courbes représentant une expérience en déplacement imposé et sur les énergies en jeux. Comme indiqué au paragraphe 4.2.1 cela s'explique par le fait que les zones ne sont quasiment plus sollicitées mécaniquement.

### 4.3.5 Bilan énergétique en quasi-statique

On s'intéresse au bilan des énergies impliquées dans la propagation de fissure lorsque l'on atteint la fin ( $\bar{a} = 1$ ). On se concentre ici sur le cas où l'expérience est réalisée en propagation quasi-statique du début à la fin. Le cas de l'instabilité est traité dans la partie suivante (4.3.6). Dans la dernière phase de propagation, la différence de raideur entre les éprouvettes architecturées et l'éprouvette pleine tend à disparaître. Pour  $\bar{a} > 0.87$ , toutes les courbes de la Figure 4.8 sont très proches. Cela veut dire que pour arriver à ce stade de propagation, le déplacement imposé est le même pour toutes les éprouvettes, l'énergie fournie par la machine de traction et l'énergie élastique stockée dans l'éprouvette sont également identiques. Les effets présentés précédemment n'ont donc pas de conséquences à long terme sur la fissuration. Le ralentissement de la fissure par rapport au déplacement imposé n'est que temporaire et la fissure finit par rattraper son retard à la sortie de la zone. Au niveau de l'énergie élastique accumulée, il existe une phase fragilisante au

début, suivie d'une phase renforçante qui fait plus que compenser la première et enfin une dernière phase fragilisante, ce qui fait que :

$$\bar{W}_{plein}^{ext}(\bar{a} = 1) = \bar{W}_A^{ext}(\bar{a} = 1) \quad (4.14)$$

Cette observation s'explique par le fait que, lorsque l'éprouvette a été totalement fissurée, il n'y a plus aucune énergie élastique stockée ( $F = 0$ ). Dans le cas d'une propagation quasi-statique, le bilan total s'écrit alors :

$$E^{diss}(a = W) = W^{ext}(a = W), \quad (4.15)$$

soit :

$$G_c(W - a_0)e = \int_0^{+\infty} F \, du. \quad (4.16)$$

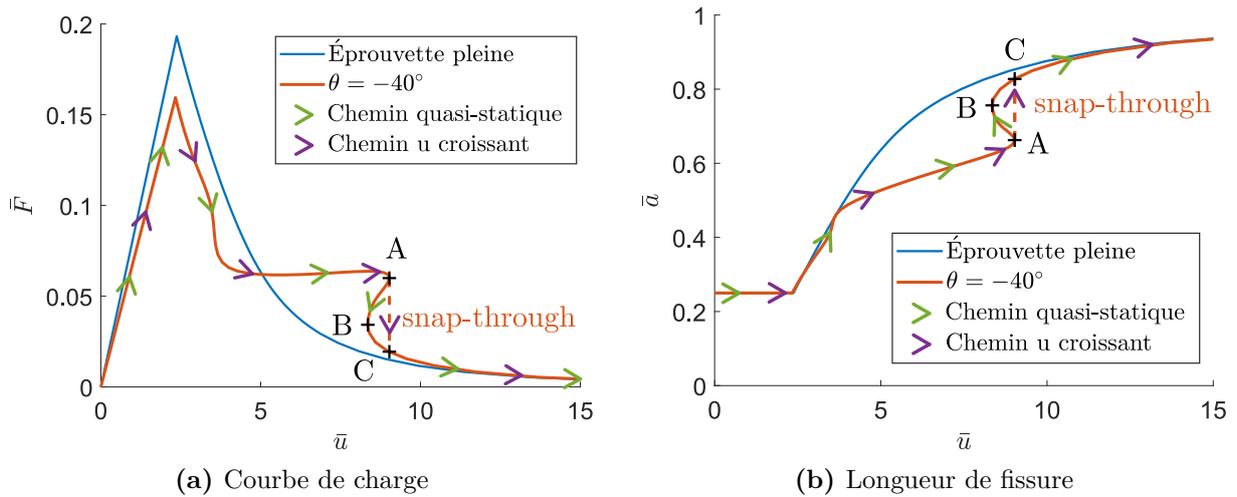
L'énergie dissipée par le processus de fissuration ne dépend donc que du matériau, de l'épaisseur et de la longueur de fissure parcourue. L'énergie nécessaire à casser la pièce est donc insensible à la fonction de raideur et donc à l'ajout de zone architecturée dans le cas d'une fissure stable.

### 4.3.6 Le cas particulier du snap-back

On s'intéresse ici à un phénomène particulier présent pour les éprouvettes à motifs hexagonaux : l'instabilité snap-back en sortie de zone. Pour illustrer ce phénomène, les courbes pour  $\theta = -40^\circ$  sont données en Figure 4.9. Trois points spécifiques sont identifiés (A, B et C) pour aider la compréhension. Le snap-back apparaît quand la condition  $K_I = K_{IC}$  mène un même déplacement pour plusieurs longueurs de fissure. On a donc non-unicité de la solution en déplacement imposé et instabilité. Cela vient d'une fonction  $k$  non monotone et donc d'une fonction  $S'$  non monotone. La condition nécessaire à l'apparition d'instabilité est qu'il existe  $\bar{a}$  tel que  $S''(\bar{a}) = 0$ .

On s'intéresse dans un premier temps au chemin quasi-statique, ou stable, qui suit les courbes tracées en traits pleins sur la Figure 4.9. Ce comportement ne peut pas être observé dans le cadre d'une expérience à déplacement imposé croissant. Il correspond à l'expérience de pensée suivante : arrivé au point A, on décharge l'éprouvette assez lentement pour conserver l'état d'équilibre, puis quand le point B est atteint, on peut reprendre le déplacement imposé croissant. Pendant la phase de décharge, on a alors un phénomène intéressant : la force et le déplacement diminuent, mais la fissure continue d'avancer. L'explication peut être faite en regardant les énergies en jeu. Le chemin (AB) se trouve dans les phases II(d) et III(a) identifiées précédemment. Les énergies respectent donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_{plein}^{ext}}{d\bar{a}} > 0 > \frac{d\bar{W}_A^{ext}}{d\bar{a}}, \\ 0 > \frac{d\bar{E}_{plein}^{el}}{d\bar{a}} > \frac{d\bar{E}_A^{el}}{d\bar{a}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$



**FIGURE 4.9** – Courbes de charge (a) et de longueur de fissure (b) pour le motif hexagonal réentrant ( $\theta = -40^\circ$ ), présentant une instabilité snap-back. Représentation du chemin où le chargement est adapté pour rester dans des conditions quasi-statiques et du chemin à déplacement imposé croissant présentant une phase dynamique.

Dans le cas des zones architecturées hexagonales, on diminue le travail des forces extérieures car on restitue de l'énergie à la machine en déchargeant la pièce. L'énergie élastique est relâchée plus vite que pour la solution de référence, elle est à la fois la seule source d'énergie qui permet de propager la fissure mais aussi ce qui permet de restituer de l'énergie à la machine. Pour résumer, cette phase est caractérisée par une force et un déplacement décroissants, mais une avancée de fissure permise par le relâchement de l'énergie élastique stockée.

Dans le cadre d'une expérience à déplacement imposé, le chemin pris n'est pas le chemin stable mais une propagation rapide, dynamique, que l'on considère instantanée, entre les points A et C. Ce chemin est généralement appelé *snap-through*. L'hypothèse utilisée ici est que la fissure commence à se propager et s'arrête à la même valeur du FIC. Pendant la phase dynamique, on a  $K_I > K_{IC}$  et donc les calculs d'énergie réalisés au paragraphe 4.2.3 ne sont plus valables ici. Pour des raisons de clarté, on effectue ici les calculs en gardant les dimensions<sup>1</sup>. Le bilan global s'écrit :

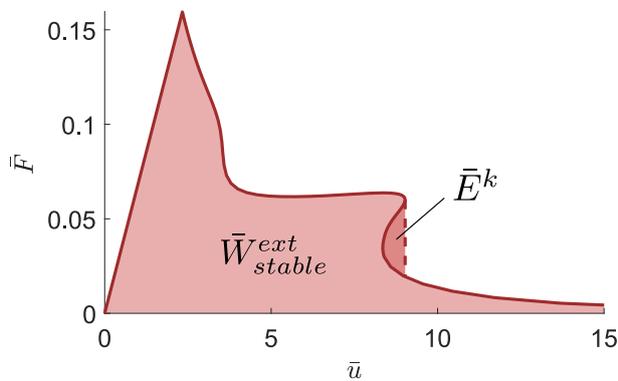
$$W_A^{ext} = E_A^{el} + E_A^{diss} + E^k, \quad (4.18)$$

où  $E^k$  est la contribution sous forme d'énergie cinétique. À la fin de la propagation, il n'y a plus d'énergie élastique stockée dans l'éprouvette, le travail des forces nécessaire à rompre l'intégralité de la pièce est donc déterminée par l'énergie dissipée par la fissuration stable et la contribution cinétique. L'énergie de fissuration correspond à la dissipation de Griffith. Elle est donc la même pour le chemin stable, le chemin instable et l'éprouvette de référence. Le bilan s'écrit donc :

1. L'adimensionnement des grandeurs  $F$  et  $u$  se base sur la condition  $K_I = K_{IC}$ , ce qui peut amener des confusions dans cette partie.

$$\begin{aligned}
W_{instable}^{ext}(a = W) &= E_A^{diss}(a = W) + E^k(a = W) \\
&= G_c e(W - a_0) + E^k(a = W) \\
&= W_{plein}^{ext}(a = W) + E^k(a = W) > W_{plein}^{ext}(a = W).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

L'apparition de l'instabilité s'accompagne donc d'une augmentation du travail des forces nécessaire à fissurer entièrement la pièce : cet aspect est illustré en Figure 4.10. Au final, l'apparition de l'instabilité est un phénomène renforçant au niveau de la résistance à la propagation de fissure.



**FIGURE 4.10** – Mise en évidence de l'augmentation de l'énergie nécessaire à la fissuration dans le cas du snap-through. On voit apparaître une contribution supplémentaire  $\bar{E}^k$ .

#### Effet renforçant : Instabilité snap-back

Lors de la propagation instable caractéristique de l'instabilité snap-back, de l'énergie est transférée sous forme d'énergie cinétique. Cette énergie était auparavant accumulée dans l'éprouvette. Au final, la rupture complète de l'éprouvette nécessite plus d'énergie que pour le cas de référence où tout autre cas où la fissure reste stable. Cet effet n'est pas observé pour toutes les architectures testées.

Le lien avec les courbes de charge illustré en Figure 4.10 permet de quantifier  $E^k$  et donc l'augmentation du travail des forces nécessaire à casser la pièce. Pour le cas tracé ici,  $E^k = 4.1$  mJ, cela représente une augmentation de l'énergie nécessaire à la fissuration de 2%. Cependant, la valeur de l'énergie totale est grandement dépendante de la longueur de fissure initiale. Si l'on prend  $a_0 = 20$  mm à la place de 10, l'augmentation de l'énergie nécessaire passe à 3.5%.

L'effet observé ici est analogue à ce qui a été observé par Roux *et al.* [ROU 03] dans leur étude sur la propagation de fissure en milieux hétérogènes. Ils distinguent les cas de *weak pinning*, où la fissure se propage tout le long en quasi-statique et de *strong pinning* lorsque la fissure reste bloquée puis se propage de manière dynamique. Les auteurs montrent alors que le cas de *strong pinning* s'accompagne d'une augmentation de la ténacité apparente. La nouveauté du travail présenté ici par rapport à cette référence est que le phénomène de snap-back a été observé alors que la pointe de fissure est dans un matériau homogène.

### 4.3.7 Synthèse

Dans cette section l'effet de l'ajout des zones architecturées a été analysé en détail. Il en ressort que l'influence des zones n'est pas trivial à expliquer et présente plusieurs phases où les comportements sont significativement différents. L'analyse de ces phases a permis d'extraire trois phénomènes intéressants pour augmenter la résistance à la fissuration : le retard de la propagation en déplacement imposé, l'augmentation du travail des forces extérieures dans les phases II(c) à III(a) et l'apparition du snap-back.

Le premier phénomène, le retard de la propagation en déplacement imposé, est une conséquence directe du fait que la fonction de fragilité en déplacement  $k$  est plus faible dans les zones II(b) à III(a). Le retard de propagation implique une diminution de force moins rapide que pour le cas de référence. Dans le cas d'une structure chargée en déplacement, cet effet permet de supporter la charge plus longtemps, au prix d'une résistance en force au départ légèrement diminuée.

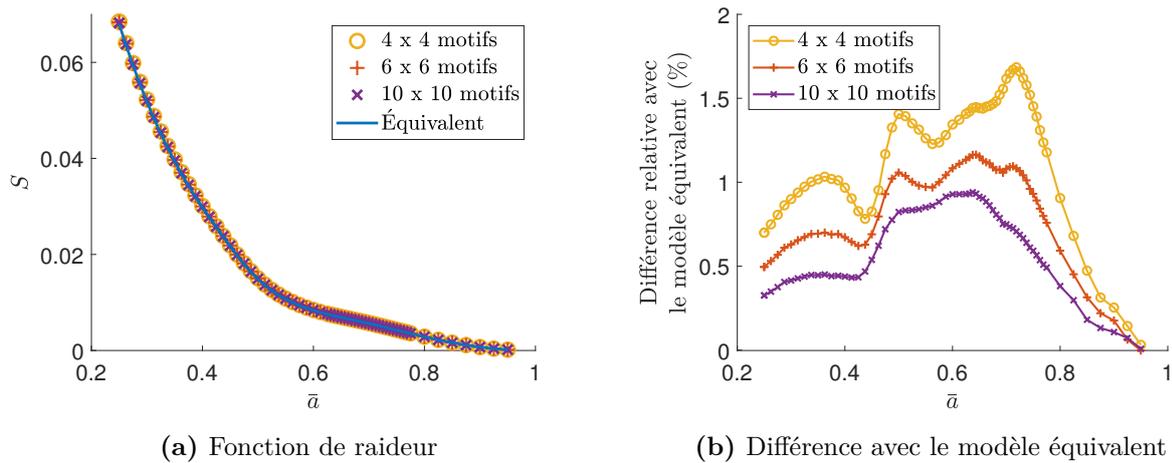
Le second phénomène vient de la comparaison des énergies à même longueur de fissure. Dans les parties II(c) à III(a), l'énergie apportée par les efforts extérieurs est plus élevée dans les cas avec zones architecturées. Ceci est la conséquence d'une compétition entre la raideur plus faible et la fragilité plus faible qui, à certains stades de la propagation, mène à une accumulation d'énergie élastique dans l'éprouvette plus importante. Cet effet peut être utilisé en plaçant les zones architecturées de sorte à ce que la longueur de fissure qu'on ne souhaite pas dépasser se trouve dans la zone II(c) à III(a). Ainsi, pour arriver à la longueur de fissure que l'on considère critique, l'éprouvette a supporté plus de sollicitation énergétique.

Ces deux premiers effets peuvent être qualifiés de temporaires, car ils sont compensés dans la dernière phase, à la sortie de la zone. À la fin de la propagation, l'énergie qui a été stockée dans l'éprouvette est de nouveau déchargée et le retard de la propagation à déplacement imposé est également compensé. Toutefois, ces effets restent intéressants car, lorsque des critères de conception sont définis, on fixe une longueur de fissure maximale admissible et on ne souhaite pas aller jusqu'à la rupture totale. Les effets présentés ici peuvent donc très bien s'ajuster pour répondre à ce type de contrainte.

Pour finir, il existe un phénomène qui a un effet permanent sur la résistance à la propagation de fissure : l'instabilité snap-back. Ce phénomène n'apparaît pas pour tous les motifs. Cette instabilité s'accompagne d'une nouvelle contribution sous forme d'énergie cinétique pendant le processus de fissuration, donc d'une augmentation de l'énergie nécessaire à briser la pièce.

## 4.4 Études paramétriques

Dans cette section, deux études paramétriques sont présentées afin d'approfondir la compréhension de l'effet des zones architecturées sur la fissuration. On s'intéresse d'une part à la densité du motif et d'autre part au choix du motif, et donc de son comportement élastique équivalent.



**FIGURE 4.11** – Comparaison des modèles avec différentes densités de motifs avec le modèle présentant un comportement orthotrope équivalent à la place des zones architecturées. Calculs réalisés pour le motif hexagonal  $\theta = -40^\circ$ .

#### 4.4.1 Influence de la densité

La première étude paramétrique présentée est l'influence de la densité du motif. Pour cette partie, seul le motif hexagonal présentant  $\theta = -40^\circ$  est étudié. La densité du motif est modifiée par homothétie en conservant la taille des zones architecturées. La porosité et les dimensions relatives de la cellule unitaire sont inchangées donc le comportement élastique équivalent devrait être le même, si l'hypothèse de séparabilité des échelles est respectée. En plus des différentes densités, un modèle avec le comportement équivalent calculé au Chapitre 3 est testé. Dans ce modèle, les zones architecturées sont remplacées par un maillage plein, sans porosité, auxquelles on associe le comportement orthotrope calculé par homogénéisation.

Les fonctions de raideurs pour les différentes densités et le modèle équivalent sont données en Figure 4.11a. Toutes les courbes représentant les différentes densités sont indissociables. Le modèle avec comportement équivalent donne également une fonction de raideur similaire. L'écart des fonctions de raideur avec le comportement équivalent est tracé en Figure 4.11b. Les différents écarts sont très faibles, et pour une densité de 6 x 6 motifs, il est strictement inférieur à 1.5 % durant toute la propagation.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de ces observations. Premièrement, cela valide numériquement le calcul d'homogénéisation. Deuxièmement, cela veut dire que, à partir de 6 x 6 motifs, la séparabilité des échelles peut être considérée comme atteinte, et il n'est pas nécessaire de densifier la zone au-delà de cette valeur. Enfin, il est possible de conclure que les effets des zones architecturées sur la fissuration sont bien exclusivement liés à la raideur et variation de raideur induite par l'architecture. Ces effets ne sont donc pas liés à la présence intrinsèque de cavité.

Le fait d'avoir des résultats similaires entre le modèle où la zone architecturée est représentée explicitement et le modèle utilisant le comportement équivalent permet d'utiliser ce dernier dans les simulations. Cette possibilité présente deux avantages. Le premier est le gain en temps de calcul. En effet, un maillage beaucoup moins fin peut être utilisé

lorsque l'on n'a pas à représenter chaque porosité : le nombre de degrés de liberté passe de 100 000 pour 10 x 10 motifs à 30 000 pour le modèle équivalent. Cela fait ainsi gagner du temps sur la résolution et sur l'algorithme de remaillage. Le second avantage d'utiliser le modèle de comportement équivalent est la possibilité de tester des comportements effectifs arbitraires, sans connaître *a priori* la forme de l'architecture à laquelle ils correspondent.

#### 4.4.2 Influence du comportement mécanique de la zone

On souhaite étudier l'influence du choix de la zone architecturée sur les trois phénomènes renforçants identifiés. On propose de chiffrer les phénomènes renforçants à l'aide d'un unique scalaire pour chacun des trois effets. Le choix de ces critères et le lien entre eux sera discuté plus en détail au Chapitre 6.

Pour le retardement en déplacement imposé, on regarde le rapport entre les déplacements à imposer pour atteindre la même longueur de fissure pour l'éprouvette architecturée testée et l'éprouvette de référence. On choisit de regarder le maximum de cette donnée, c'est-à-dire :

$$c_1 = \max_{\bar{a}} \left( \frac{\bar{u}_A}{\bar{u}_{plein}} \right). \quad (4.20)$$

Pour l'augmentation de l'énergie nécessaire à atteindre une certaine longueur de fissure, de façon assez similaire, on s'intéresse au rapport entre le travail nécessaire à atteindre la même longueur de fissure dans le cas de l'éprouvette architecturée testée et l'éprouvette de référence. On choisit également le maximum de cette valeur :

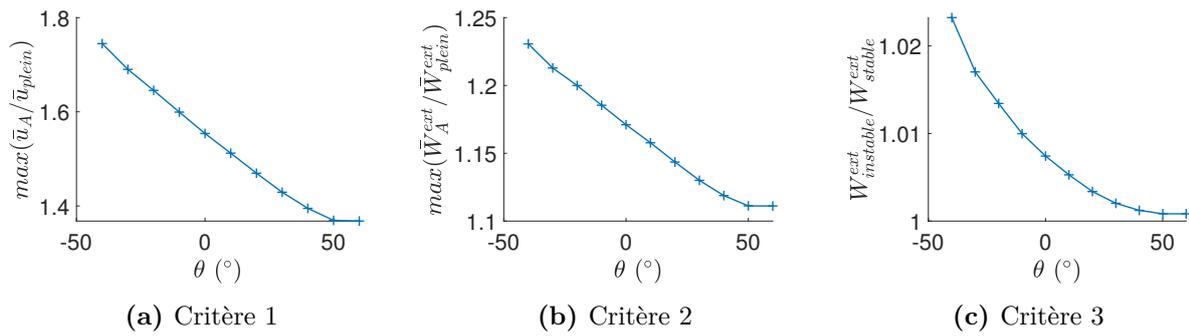
$$c_2 = \max_{\bar{a}} \left( \frac{\bar{W}_A^{ext}}{\bar{W}_{plein}^{ext}} \right). \quad (4.21)$$

Enfin, pour l'instabilité snap-back, on s'intéresse à l'augmentation de l'énergie totale nécessaire pour rompre l'éprouvette :

$$c_3 = \frac{W_A^{ext}(a = W)}{W_{plein}^{ext}(a = W)} \quad (4.22)$$

Dans un premier temps, on s'intéresse aux motifs hexagonaux. On fait varier l'angle des hexagones et on observe la variation des trois critères. Les résultats sont donnés en Figure 4.12. Une première observation est que les trois critères ont des évolutions avec l'angle des cellules hexagonales qui vont toutes dans le même sens. Les angles négatifs semblent favoriser les effets renforçants identifiés. Il se pose alors la question du lien avec les propriétés élastiques équivalentes. En effet, les valeurs de  $\theta$  négatives sont associées à un faible module de Young dans la direction verticale, un faible module de cisaillement dans le plan et un coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  négatif. Cette étude ne permet pas de déterminer lequel de ces effets domine.

Afin de déterminer quel paramètre matériau a le plus d'influence, on applique des comportements équivalents imposés. Chacun des quatre paramètres matériau est ainsi étudié séparément, en partant d'une base commune, constituée du matériau suivant :



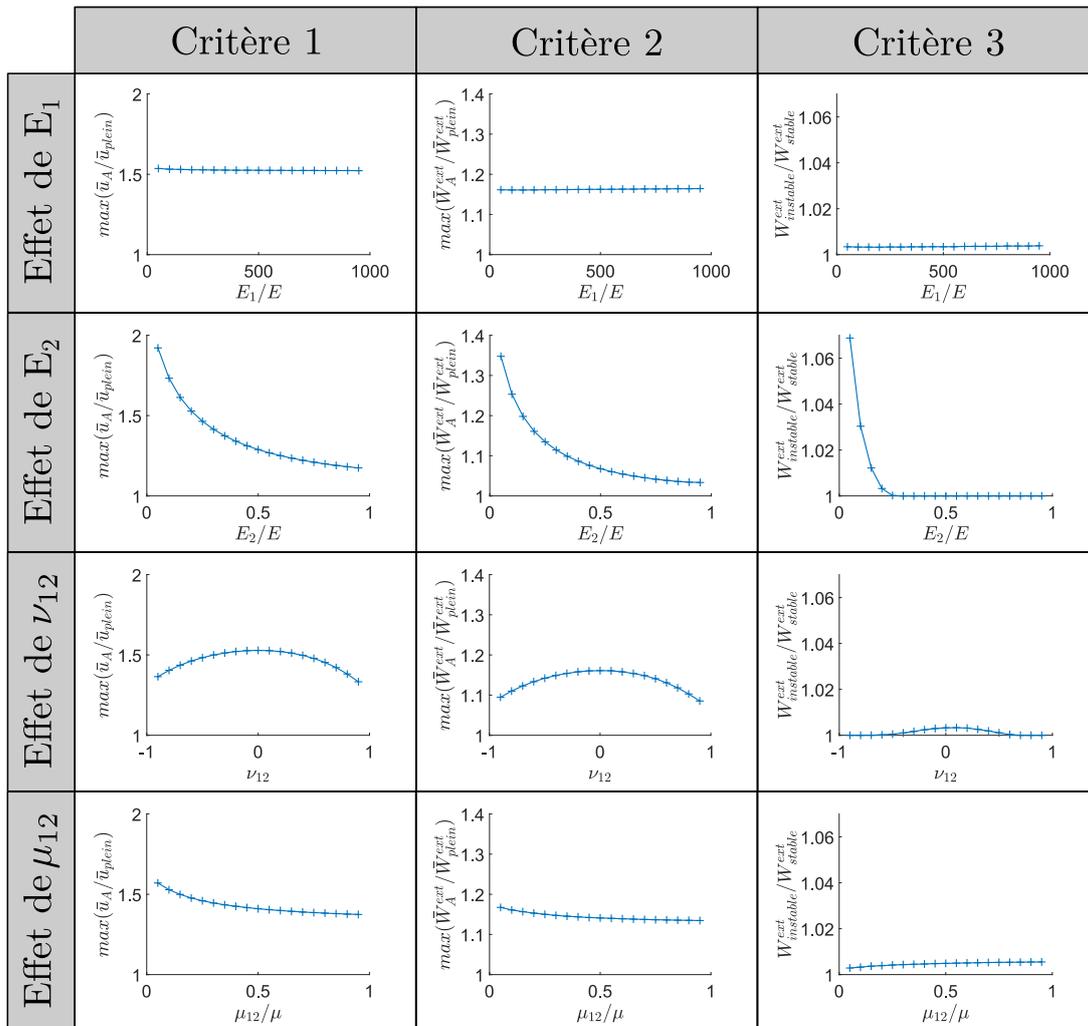
**FIGURE 4.12** – Effet de l’angle des hexagones sur les différents phénomènes renforçants.

$$\frac{E_1}{E} = 0.2, \quad \frac{E_2}{E} = 0.2, \quad \nu_{12} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\mu_{12}}{\mu} = 0.1. \quad (4.23)$$

L’effet des quatre paramètres ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$  et  $\mu_{12}$ ) est donné en Figure 4.13. Pour chaque critère, l’échelle de l’axe des ordonnées est identique pour les quatre études afin de comparer l’ordre de grandeur de chaque effet. L’effet du module de Young dans la direction horizontale ( $E_1$ ) est négligeable sur les trois critères. À l’inverse, l’effet du module de Young dans la direction verticale ( $E_2$ ) est très important. Plus cette valeur est petite, plus les effets renforçants sont significatifs. Pour le troisième critère, qui caractérise le snap-back, on observe que l’effet devient très rapidement nul lorsque  $E_2$  augmente. En réalité, il n’y a pas d’instabilité pour  $E_2/E \geq 0.25$ . Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  a un effet visible, mais moins important que  $E_2$ . Une valeur absolue faible de ce coefficient semble favoriser les effets renforçants. Le coefficient de Poisson, comme le module de Young dans la direction verticale, a un effet sur l’apparition du snap-back, que l’on observe uniquement sur la plage de valeur  $-0.8 < \nu_{12} < 0.7$ . Enfin, le module de cisaillement dans le plan ( $\mu_{12}$ ) semble avoir un effet plus important que le module de Young dans la direction horizontale ( $E_1$ ) mais moins important que le coefficient de Poisson. Ce coefficient est le seul dont l’étude n’est pas similaire pour les trois critères. En effet, alors qu’un module de cisaillement faible semble augmenter les deux premiers critères, c’est une valeur élevée qui favorise le troisième effet renforçant.

Cette étude permet de conclure sur l’effet du comportement équivalent sur les phénomènes observés. C’est le module de Young dans la direction verticale qui a un effet dominant. Les effets renforçants observés pour des cellules hexagonales à angle négatif sont donc à associer à leur faible module de Young dans cette direction. À l’inverse, le module de Young dans la direction horizontale n’a pas d’influence sur les comportements étudiés. Cette remarque est intéressante car cela veut dire que l’on peut placer des matériaux très raides dans la direction parallèle à la fissure, tout en gardant l’impact sur la fissuration. Cette option peut être intéressante dans des applications à chargement plus complexe où la zone peut être sollicitée horizontalement également. Cette forte anisotropie peut être présente dans les matériaux architecturés, et c’est ce qui les rend plus intéressants qu’une simple phase homogène plus souple.

En plus de permettre de conclure sur l’effet des paramètres matériaux représentant les zones architecturées, cette étude a permis de comparer les critères correspondant aux trois effets renforçants identifiés. Il en résulte que les deux premiers critères, qui représentent le



**FIGURE 4.13** – Effet des coefficients élastiques équivalents de la zone architecturées sur les trois effets renforçants. Les paramètres non-étudiés sont fixés à  $E_1/E = 0.2$ ,  $E_2/E = 0.2$ ,  $\nu_{12} = 0$  et  $\mu_{12}/\mu = 0.1$ .

retard en déplacement imposé et l'augmentation du travail des forces nécessaire à atteindre une certaine plage de valeur de la longueur de fissure, une évolution très similaire. Le critère lié au snap-back est de son côté légèrement différent. Cela n'est pas étonnant car il s'appuie sur une analyse hors de l'état d'équilibre, contrairement aux deux autres. La comparaison entre les critères d'évaluation de la performance des zones architecturées sera étudiée plus en détail au Chapitre 6.

## 4.5 Bilan de l'effet des zones architecturées sur la fissuration

Dans ce chapitre, la prospection numérique des comportements possibles avec des zones architecturées de part et d'autre de la fissure a été présentée. Il en ressort que, d'après le modèle numérique, il est possible de modifier significativement le comportement en propagation de fissure. Les phénomènes alors observés sont relativement complexes et ont été analysés en détail.

Parmi les effets identifiés dans cette analyse, certains vont dans le sens d'une augmentation de la résistance à la fissuration. Ces effets sont un retard de la propagation en déplacement imposé, une augmentation du travail nécessaire pour atteindre une certaine plage de valeur de la longueur de fissure et une augmentation de l'énergie nécessaire à rompre entièrement l'éprouvette dans le cas d'une instabilité snap-back. Ces trois phénomènes renforçants peuvent être mis à profit dans une logique de conception.

Des études paramétriques ont permis d'affiner la compréhension des phénomènes. D'une part, la séparabilité des échelles a été vérifiée. Même pour un motif relativement grossier et avec peu de répétition, les résultats obtenus sont proches du modèle élastique équivalent. Cela veut dire que les effets observés sont bien le fait d'un matériau architecturé et non d'une porosité seule. D'autre part, une étude sur les propriétés effectives de la zone a permis d'identifier que le paramètre le plus influent sur les effets renforçants est le module de Young équivalent dans la direction verticale. Les effets renforçants sont liés à une valeur faible de ce paramètre.



# Chapitre 5

## Étude expérimentale de l'effet des zones architecturées

*Dans ce chapitre, la validation expérimentale des phénomènes observés au chapitre précédent est recherchée. La mise en place de l'essai se confronte à une bifurcation du chemin de fissure hors du plan médian. Le protocole est adapté afin de faire face à cette problématique. L'essai obtenu est analysé pour rechercher les effets renforçants identifiés précédemment et la comparaison quantitative avec les résultats numériques est présentée. Enfin, une étude paramétrique est réalisée pour comparer les évolutions du modèle numérique avec celles des essais réalisés.*

### Sommaire

---

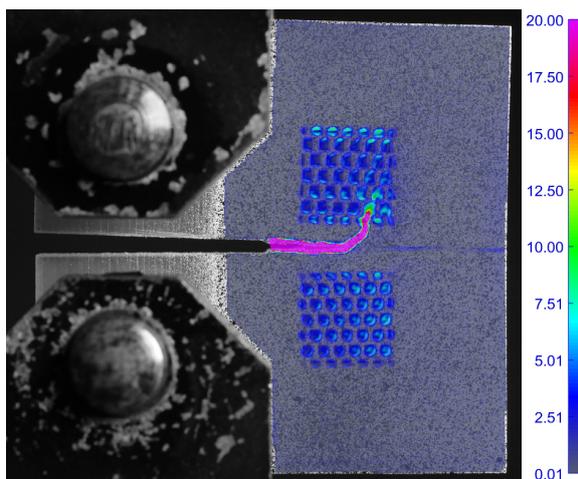
<b>5.1</b>	<b>Présentation de l'essai</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>Stabilisation du chemin de fissure</b>	<b>101</b>
5.2.1	Modification de la géométrie	101
5.2.2	Préparation d'éprouvette	102
<b>5.3</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>104</b>
5.3.1	Courbe de charge et instabilité	104
5.3.2	Mesure des longueurs de fissure	107
5.3.3	Identification de l'énergie de rupture	108
5.3.4	Effet des zones architecturées	110
<b>5.4</b>	<b>Comparaison avec les résultats numériques</b>	<b>112</b>
5.4.1	Sur une éprouvette	112
5.4.2	Étude paramétrique	113
<b>5.5</b>	<b>Bilan sur la validation expérimentale</b>	<b>115</b>

---

## 5.1 Présentation de l'essai

Dans ce chapitre, on souhaite réaliser des expériences de fissuration où la fissure passe entre les zones architecturées afin de reproduire les effets observés au Chapitre 4. Pour cela, les méthodes expérimentales présentées au Chapitre 2 sont appliquées à des éprouvettes présentant des zones architecturées. La géométrie globale est, dans un premier temps, la même qu'au Chapitre 4, et les zones sont constituées de 6 x 6 motifs en accord à la fois avec la séparabilité des échelles montrée numériquement au paragraphe 4.4.1 et avec la précision géométrique que l'on peut obtenir par impression 3D. Les motifs envisagés sont les pavages hexagonaux paramétriques présentés et étudiés au Chapitre 3.

Les premières expériences réalisées sur des éprouvettes architecturées présentent une bifurcation de fissure : à un moment, la fissure quitte le plan de symétrie de la pièce pour finir dans une des zones architecturées. Ce phénomène est illustré en Figure 5.1 pour une éprouvette présentant l'architecture hexagonale avec  $\theta = 0^\circ$ . Le chemin de fissure est observé sur les champs de norme de la déformation, obtenus par corrélation d'image : on considère qu'une déformation supérieure à 20 % est la marque du saut de déplacement caractéristique de la présence d'une fissure.



**FIGURE 5.1** – Chemin de fissure obtenu sur une éprouvette architecturée. Chemin observé sur les champs de norme de la déformation en %, seuil placé à 20 %.

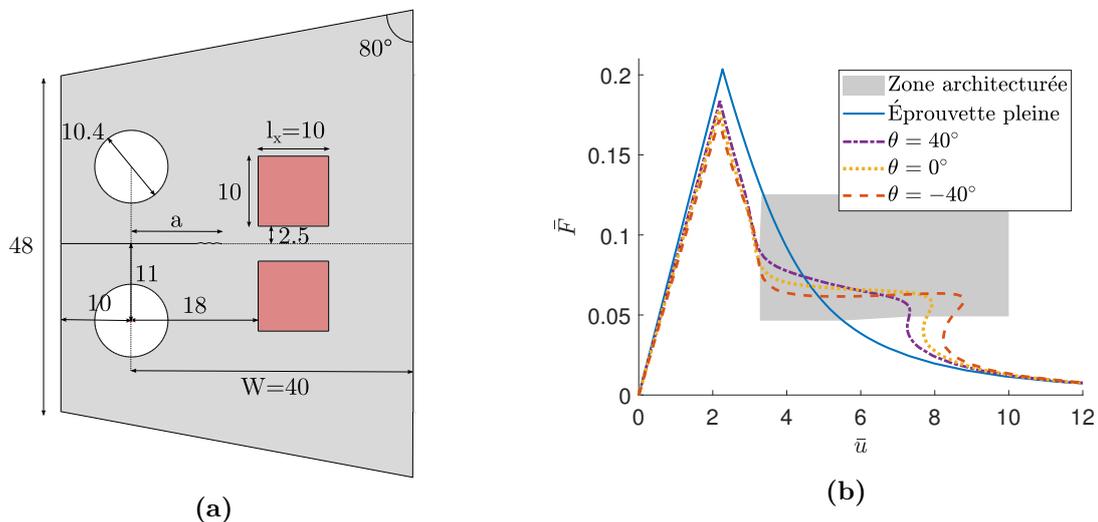
Cette bifurcation est due à une instabilité du chemin de fissure. Les porosités ont tendance à attirer les fissures, ce qui a été observé de nombreuses fois par le passé, par exemple dans les travaux de Bittencourt *et al.* [BIT 96] ou de Pham *et al.* [PHA 17]. La moindre perturbation de la symétrie de l'essai peut ainsi mener à une bifurcation complète de la fissure. Cette instabilité du chemin de fissure est associée à une valeur du T-stress négative [COT 80]. Expérimentalement, les perturbations de symétrie peuvent venir du montage : le fait d'avoir une goupille immobile et une goupille mobile entraîne une dissymétrie des conditions de contact et donc des conditions de limites effectives. Il a été montré au Chapitre 2 que les conditions de chargement ont un fort impact sur le régime de propagation. La rupture de symétrie peut également s'expliquer au niveau du matériau où des hétérogénéités de très petite taille en pointe de fissure, issues du procédé de fabrication, peuvent perturber le chemin de fissure.

## 5.2 Stabilisation du chemin de fissure

Dans cette partie, on présente les différentes stratégies utilisées pour limiter la bifurcation de fissure observée. En effet, cette bifurcation a lieu avant la sortie de la zone, ce qui empêche d'observer certains phénomènes liés à l'effet à distance de zones architecturées sur la fissuration, identifiés au Chapitre 4. On cherche ici à modifier l'essai pour obtenir un chemin de fissure droit, tout en restant dans une configuration proche de ce qui a été étudié au Chapitre 4.

### 5.2.1 Modification de la géométrie

La première stratégie consiste à utiliser les outils de la simulation numérique pour trouver des configurations qui minimisent le risque de bifurcation. Pour cela, un modèle d'endommagement par champ de phase est utilisé. L'avantage de cette méthode recherchée ici est que le chemin de fissure n'est pas connu *a priori* et peut être calculé par le modèle. Afin de varier la géométrie, différents motifs pour les zones architecturées sont testés. La modification de la géométrie globale de l'éprouvette est également envisagée. En plus de l'éprouvette CT définie au Chapitre 4, on envisage l'utilisation d'éprouvettes TDCB, dont les dimensions sont données en Figure 5.2a. Cette géométrie permet d'observer des effets très similaires à ceux étudiés au Chapitre 4, comme présenté en Figure 5.2b. Ce graphique présente les résultats numériques, obtenus par algorithme par longueur d'arc pour les éprouvettes TDCB. Les tendances observables sont très similaires à celles présentée au Chapitre 4 (Figure 4.4a). La géométrie TDCB peut donc être utilisée au même titre que la géométrie CT.



**FIGURE 5.2** – Présentation du problème sur les éprouvettes TDCB. (a) Géométrie de l'éprouvette TDCB, (b) Résultats numériques, obtenus par l'algorithme par longueur d'arc pour ce problème.

Pour réaliser les simulations avec la méthode d'endommagement par champ de phase, l'implémentation sur Abaqus de Molnár et Gravouil [MOL 17] est utilisée. Ce code utilise une formulation d'ordre 2 (AT2) et une fonction de dégradation quadratique. Dans ce

modèle, le pas de temps est adaptatif ce qui permet de détecter les phénomènes d'instabilité quand celui-ci se fixe à la valeur minimale autorisée par l'algorithme. Une longueur caractéristique de 1 mm est choisie. Le maillage est raffiné entre les zones architecturées avec des éléments de 0.1 mm de largeur à cet endroit. Ce modèle a été développé en déformations planes, c'est donc dans ces conditions qu'il est utilisé ici, en faisant l'hypothèse que cela ne change pas le chemin de fissure obtenu. Le module de Young et coefficient de Poisson et l'énergie de Griffith utilisés sont les valeurs identifiées au Chapitre 2 et que l'on rappelle ici :

$$E = 1.2 \text{ GPa}, \nu = 0.49, \text{ et } G_c = 1.15 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2} \quad (5.1)$$

Une fissure initiale est définie en ayant des nœuds initialement coïncidents sans aucune raideur les liant. La perturbation de la symétrie est introduite en définissant un maillage non structuré entre les zones architecturées. Afin de gagner en temps de calcul, seule la zone architecturée et la bande définissant le chemin de fissure que l'on souhaite obtenir sont dotés de degrés de liberté en endommagement.

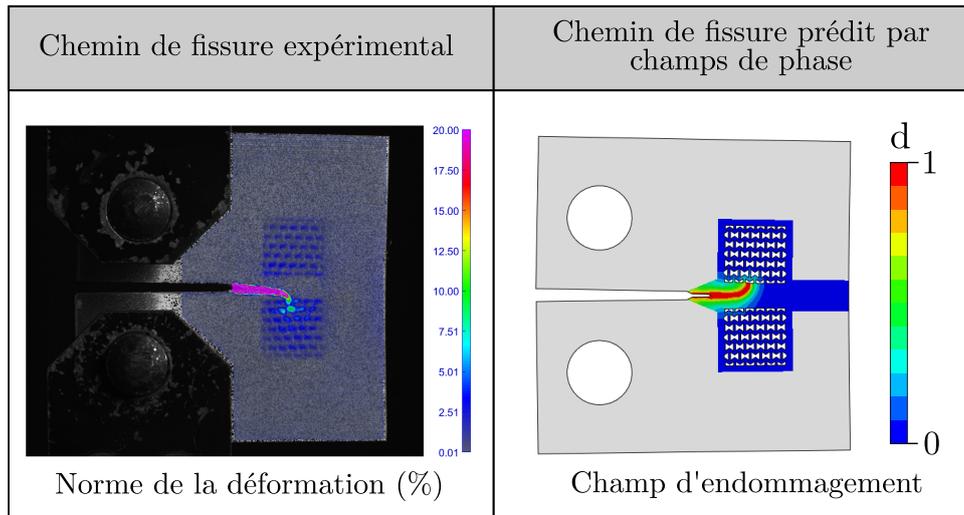
Dans un premier temps, on compare les chemins de fissure obtenus numériquement et expérimentalement pour vérifier la capacité du modèle d'endommagement par champ de phase à prédire les chemins de fissure. Une comparaison pour des essais préliminaires avec un motif auxétique est donnée en Figure 5.3. Les géométries CT et TDCB sont testées. Dans les deux cas, les chemins de fissures obtenus numériquement et expérimentalement sont similaires. Pour l'éprouvette CT, la bifurcation n'a pas lieu dans le même sens mais cela ne change pas l'analyse, car le sens de la bifurcation dépend de la perturbation de la symétrie, que l'on ne maîtrise pas. La comparaison de ces deux essais permet d'identifier que le changement de la géométrie globale a un impact sur le chemin de fissure et que cet impact est capturé par les simulations d'endommagement par champ de phase. La prospection des géométries d'éprouvette avec ce modèle est donc adaptée pour prédire à quel moment la fissure risque de bifurquer et pour chercher des configurations minimisant ce risque.

Les différentes géométries sont alors testées et les chemins de fissures obtenus sont donnés en Figure 5.4. On observe que, pour un même motif, la fissure bifurque plus tard pour les éprouvettes TDCB que pour les éprouvettes CT. La configuration TDCB a donc tendance à stabiliser le chemin de fissure. Au niveau de la comparaison entre les motifs, plus l'angle  $\theta$  est grand, plus la fissure bifurque tard. La configuration TDCB avec un motif  $\theta = 40^\circ$  présente une légère bifurcation de fissure, mais celle-ci ne va pas jusqu'à plonger dans la zone architecturée. Dans ce cas une instabilité snap-back est observée, cela est illustré à la Figure 5.5.

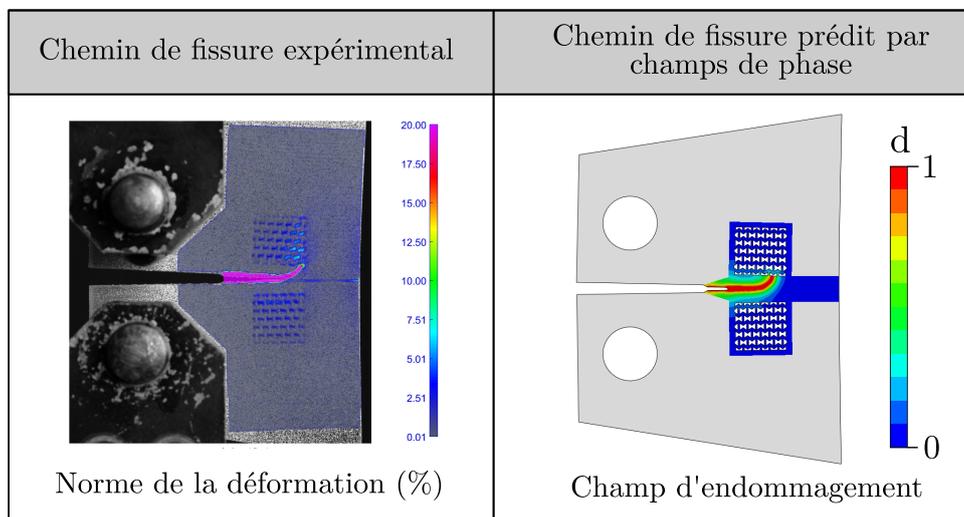
Au final, cette étude montre qu'il est possible de limiter le risque de bifurcation de la fissure en changeant la géométrie de l'éprouvette. La géométrie globale sélectionnée est l'éprouvette TDCB. On restreint l'analyse aux motifs hexagonaux à angle  $\theta = 0$  et  $40^\circ$ .

### 5.2.2 Préparation d'éprouvette

Malheureusement, même avec les géométries sélectionnées pour diminuer le risque de bifurcation, un essai répétable sans que la fissure ne plonge dans une zone architecturée n'est pas atteint. La seconde stratégie proposée pour stabiliser le chemin de fissure est d'in-



(a)



(b)

**FIGURE 5.3** – Comparaison des chemins de fissures obtenus numériquement et expérimentalement. (a) Pour une éprouvette CT à motif auxétique. (b) Pour une éprouvette TDCB avec le même motif.

roduire une rainure pour guider la fissure. L'idée est de fragiliser légèrement l'éprouvette dans le plan médian pour favoriser la propagation dans cette direction.

Une rainure est introduite de chaque côté de l'éprouvette afin de conserver la symétrie par rapport au plan de mi-épaisseur de l'éprouvette. Les positions des rainures sont illustrées en Figure 5.6. En pratique, une première rainure est directement imprimée en 3D. Pour avoir un fond d'entaille plus net, une lame de cutter est passée dans la rainure. Au final, les profondeurs obtenues sont d'environ 0.7 à 0.9 mm. On considérera, en première approximation, que cette rainure n'a pas d'autre effet que de guider la fissure. Elle n'est donc pas prise en compte dans le calcul.

*In fine*, l'introduction de cette rainure permet, pour les géométries choisies, d'obtenir un essai répétable où la fissure reste entre les zones architecturées.

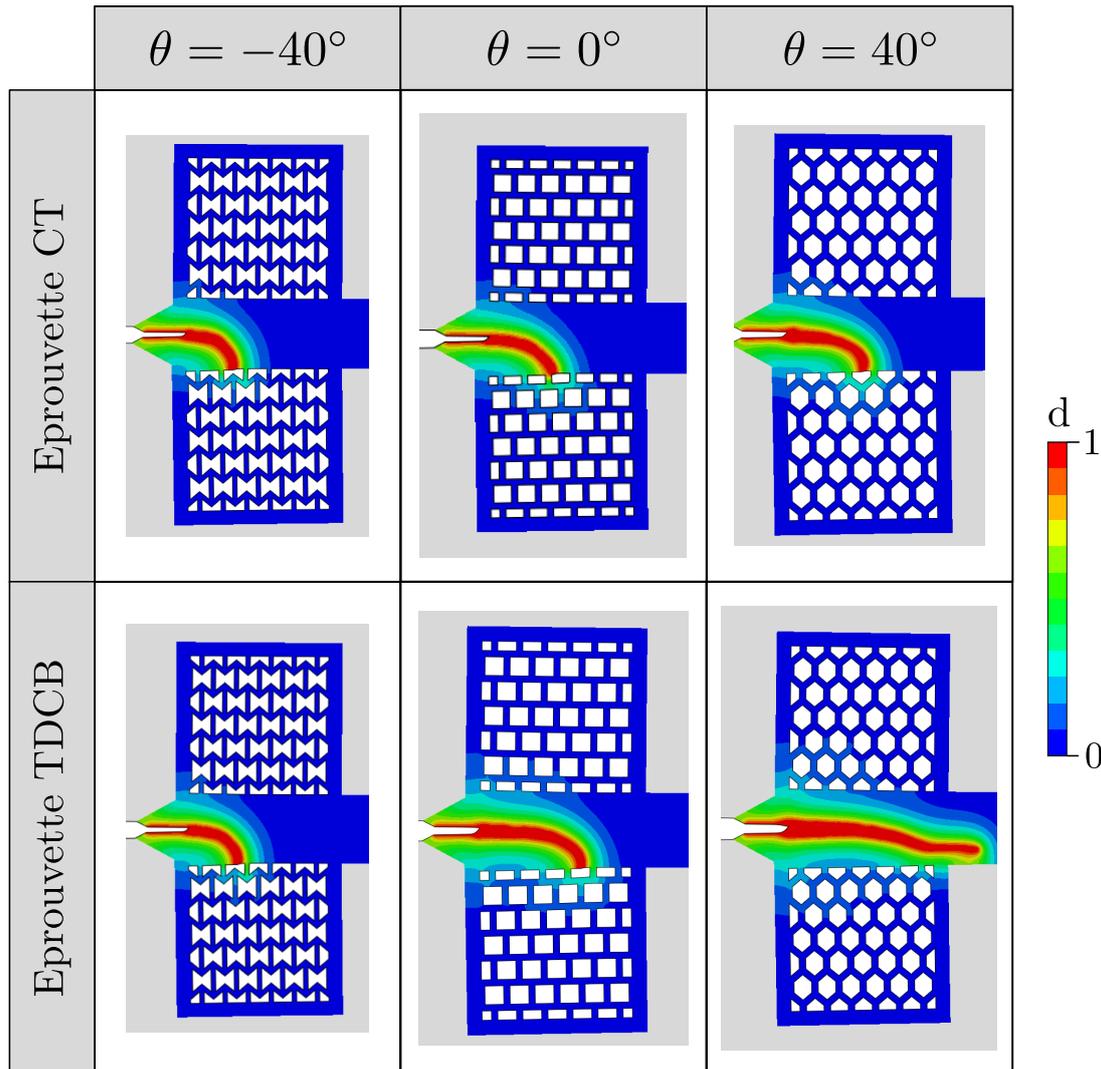


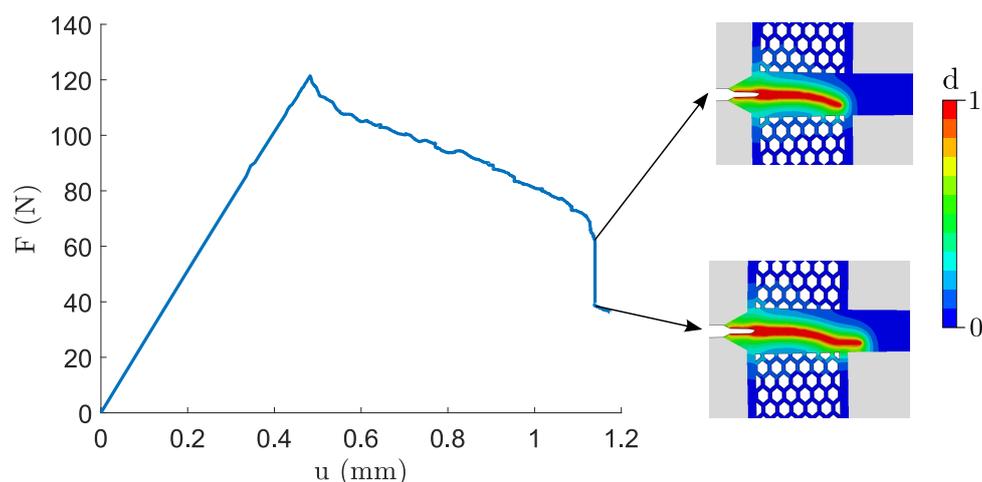
FIGURE 5.4 – Chemins de fissure identifiés sur les champs d'endommagement obtenus numériquement par champ de phase sur les différentes géométries testées.

### 5.3 Résultats expérimentaux

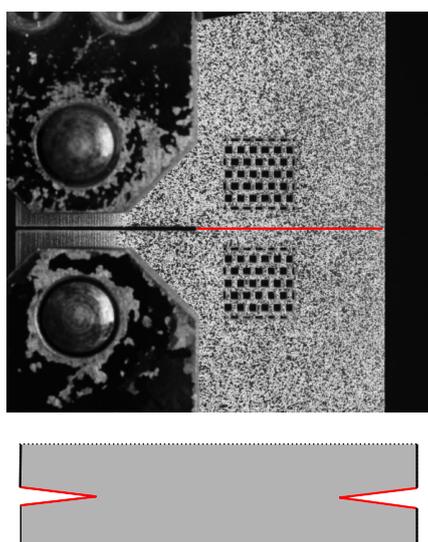
Dans cette partie, les résultats obtenus en utilisant le protocole avec des éprouvettes TDCB dotés de rainures sont présentés.

#### 5.3.1 Courbe de charge et instabilité

Les courbes de charge pour deux essais, correspondant à des éprouvettes TDCB avec zones architecturées à motif hexagonal, pour des angles respectifs de  $\theta = 0^\circ$  et  $40^\circ$ , sont données en Figure 5.7. Ces courbes présentent d'abord une phase linéaire. Les pentes des courbes correspondant aux deux éprouvettes sont très proches, mais ce n'est qu'une coïncidence. En effet, les raideurs des deux éprouvettes sont *a priori* légèrement différentes pour une longueur de fissure équivalente et cela est compensé par des longueurs de fissure initiales distinctes. À la suite de la phase linéaire, une courte phase où la force décroît rapidement a lieu. Ensuite, on observe une décroissance lente de la force. Pour le cas



**FIGURE 5.5** – Résultat obtenu par champ de phase pour une géométrie d'éprouvette où la fissure a très peu bifurqué et une instabilité a été observée. Courbe de charge et champs d'endommagement obtenus avant et après le saut de force.

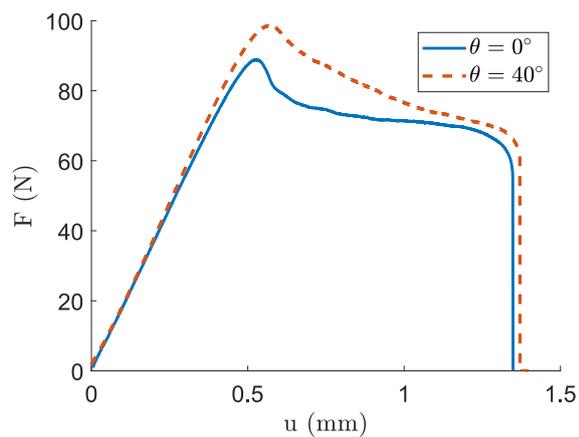


**FIGURE 5.6** – Schéma représentant les rainures introduites pour stabiliser le chemin de fissure, sur vue de face des éprouvettes et de côté (zoom sur la partie où on observe la rainure).

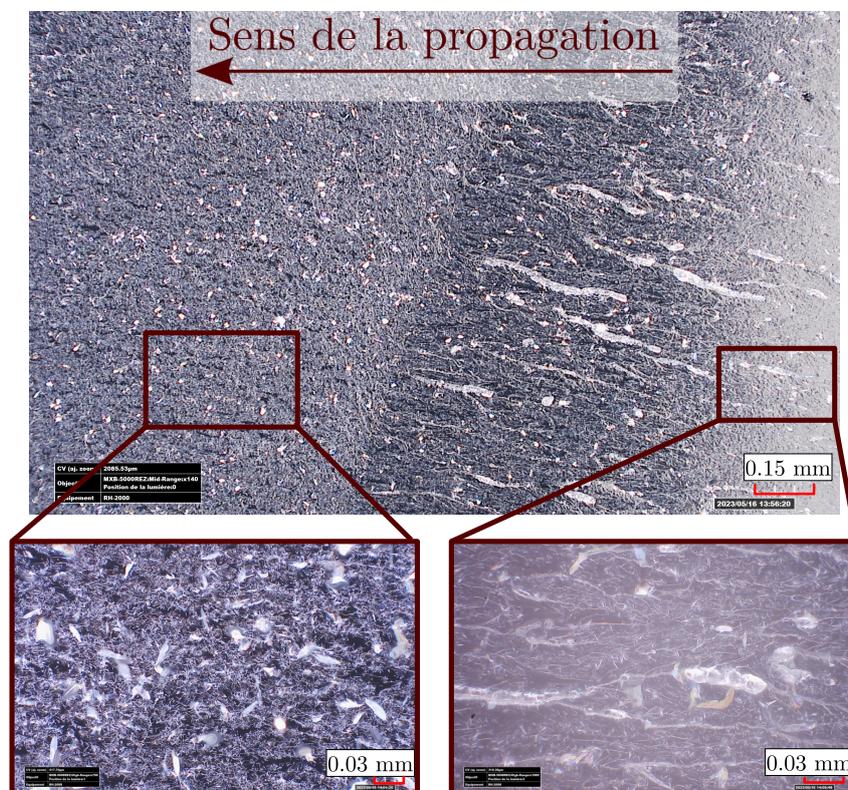
$\theta = 0^\circ$ , il s'agit presque d'un plateau de force. L'essai se termine par une chute de force brutale, correspondant à une phase de propagation de fissure dynamique. Cette phase dure moins de 0.1 s, ce qui est très rapide par rapport à la durée de l'essai qui est de 10 à 30 min.

Le changement de régime entre quasi-statique et dynamique est également visible sur les faciès de rupture, comme montré sur la Figure 5.8. On observe sur ces images une nette différence d'état de surface. Bien que le phénomène soit macroscopiquement proche d'une rupture fragile, on observe localement des marques d'endommagement qui témoignent d'une certaine ductilité sur la face quasi-statique (à droite sur la Figure 5.8). Ces marques sont absentes dans la phase dynamique où le faciès de rupture est beaucoup plus lisse et transparent. On observe alors des hétérogénéités qui sont dues au matériau, dont les plus grandes mesurent environ  $30 \mu\text{m}$ .

La phase de propagation dynamique ne s'arrête pas avant que la force soit nulle,



**FIGURE 5.7** – Courbes de charges obtenues expérimentalement des motifs hexagonaux d'angle  $0^\circ$  et  $40^\circ$ .



**FIGURE 5.8** – Photographies, prises au microscope optique HIROX MXB-5000REZ, des faciès de rupture obtenus. Mise en évidence de deux zones correspondantes à deux régimes distincts de la propagation. Régime quasi-statique à droite et dynamique à gauche.

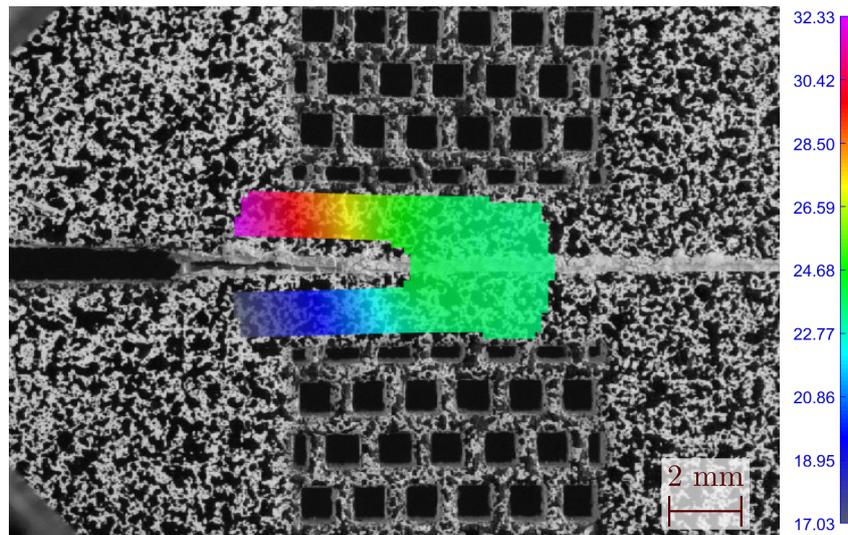
c'est-à-dire avant la rupture complète de l'éprouvette. Cela entre en contradiction avec les résultats numériques obtenus par longueur d'arc et fournis en Figure 5.2b. Les simulations s'appuient sur des méthodes quasi-statiques, les effets dynamiques sont donc négligés. Ce sont ces effets, comme l'inertie ou les phénomènes de réflexion d'ondes, qui peuvent expliquer la rupture totale dans le cas réel. Cela est d'autant plus probable que l'instabilité commence alors que la pointe de fissure est proche du bord droit (moins de 15 mm du bord).

### 5.3.2 Mesure des longueurs de fissure

Afin de comparer les résultats expérimentaux et numériques, il est intéressant d'avoir une mesure de la longueur de fissure. De plus, cette grandeur est nécessaire à l'identification du taux de restitution de l'énergie.

Le moyen déjà utilisé au Chapitre 2 de réaliser cette mesure est la corrélation d'image avec projection sur les séries de Williams. L'application de cette méthode à des éprouvettes à zones architecturées mérite quelques commentaires. Si l'on applique la zone de projection en forme de Pacman identifiée au Chapitre 2, les champs des zones architecturées vont être pris en compte. Cela pose deux problèmes majeurs. D'une part, la mesure des champs de déplacement dans cette zone est très peu précise, dû au grand nombre de surfaces libres dans cette zone. D'autre part, les séries de Williams ne sont *a priori* pas valides dans les milieux hétérogènes. Pour faire face à ce problème, on choisit une forme de zone de projection différente, illustrée en Figure 5.9. Cette forme permet d'inclure un grand nombre de points tout en excluant les zones architecturées.

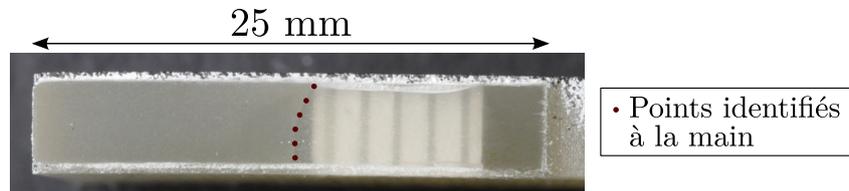
**Remarque :** Afin d'avoir un nombre suffisant de points, il a fallu diminuer la valeur de la zone à exclure en pointe de fissure. La valeur identifiée au Chapitre 2 était de 150 pixels, mais ici, une valeur de 40 pixels est utilisée. Ce changement a peu d'influence car les dimensions de la zones affectent très peu la longueur de fissure mesurée, comme cela est démontré en Annexe F.



**FIGURE 5.9** – Zone de projection sur les séries de Williams pour les éprouvettes architecturées. Norme du déplacement en pixels (1 px  $\approx$  0.02 mm).

Le problème de la mesure par DIC est la fréquence d'acquisition. La mesure n'est disponible qu'à l'instant où l'on prend la photo. Cela signifie que le point juste avant le départ de l'instabilité ne peut pas être mesuré précisément avec cette méthode. Une seconde méthode utilisée est d'observer les faciès de rupture, sur lesquels on observe deux changements de régimes : de la fatigue au quasi-statique, caractérisant la longueur initiale de fissure, et du quasi-statique au dynamique, caractérisant la longueur à l'apparition de l'instabilité. La mesure de la position de ces deux fronts est faite sur des photos des faciès de rupture, dont un exemple est donné en Figure 5.10. Des points sont placés

manuellement sur le front, la valeur retenue est la moyenne de la parabole ajustée sur ces points. Les deux faciès de rupture de chaque éprouvette sont étudiés et l'incertitude sur la longueur de fissure est définie comme la différence entre les valeurs issues des deux faces. Cette différence est très faible (de l'ordre de 0.3 mm) pour la longueur de fissure finale.



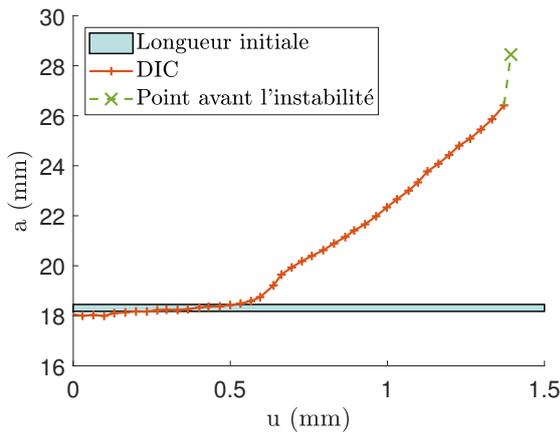
**FIGURE 5.10** – Identification des longueurs de fissure sur les faciès de rupture. Exemple de l'identification de la longueur de fissure finale, avant la phase dynamique.

Afin de comparer les deux méthodes de mesure de longueur de fissure, on donne les différents résultats en fonction du déplacement de la goupille en Figure 5.11 pour un essai. Le déplacement correspondant au point avant l'instabilité est identifié sur les courbes de charge, qui ont une grande fréquence d'acquisition, comme étant le dernier point avant la chute brutale de force. La longueur initiale mesurée sur les faciès de rupture et les longueurs issues de la DIC dans le régime où la fissure est stationnaire ( $u < 0.5$  mm) sont cohérentes. En effet, la plupart des points de mesure DIC sont dans l'intervalle de tolérance de la mesure faite sur les faciès de rupture. Seuls les trois premiers points de la DIC sont hors de cet intervalle. Les premières photos présentent un déplacement très faible donc les erreurs de mesure de la DIC pour celles-ci sont relativement importantes. Au niveau de la longueur de fissure finale, on ne peut pas comparer directement les mesures, car elles ne sont pas faites au même instant. On peut tout de même observer que la mesure de la longueur finale est significativement plus élevée que le dernier point issu de la DIC, et qu'elle n'est pas dans la continuité de l'évolution précédente. Il est possible que la propagation accélère entre le dernier point mesuré par la DIC et le début de la phase dynamique mais cet écart paraît élevé. Pour expliquer cette différence, on peut émettre l'hypothèse que les définitions du front de fissure utilisées pour les deux méthodes de mesure ne sont pas tout à fait équivalentes. Dans le cas de la DIC, le front de fissure élastique équivalent est mesuré alors que la mesure sur les faciès de rupture s'appuie sur la zone endommagée par la propagation quasi-statique. Cette seconde définition peut donc mener à une longueur de fissure plus élevée et la différence entre les deux mesures est alors de l'ordre de la taille de la process zone.

Pour conclure sur la mesure de longueur de fissure, la mesure par DIC semble adaptée pour le début de l'essai mais elle ne permet pas de mesurer la longueur au moment de l'apparition de l'instabilité. La mesure sur les faciès de rupture est utilisée pour cette valeur, en gardant à l'esprit que les deux mesures s'appuient sur des définitions différentes du front de fissure.

### 5.3.3 Identification de l'énergie de rupture

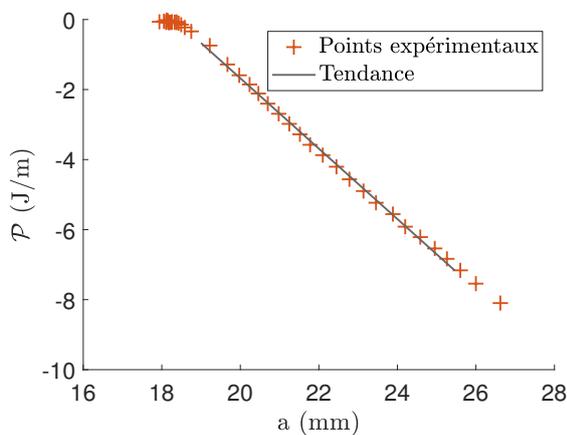
La mesure du taux de restitution de l'énergie permet de mesurer l'énergie de rupture pour les éprouvettes architecturées. L'idée est de vérifier que la propagation a lieu à



**FIGURE 5.11** – Comparaison des méthodes de mesure de fissure pour une éprouvette avec  $\theta = 0^\circ$ . La longueur initiale et le point juste avant la phase dynamique sont mesurés sur les faciès de rupture.

$G = G_c$ , et que le taux de restitution de l'énergie critique  $G_c$  est bien le même que celui mesuré sur les éprouvettes pleines.

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est identifié en traçant l'énergie potentielle, calculée à partir des courbes de charge, en fonction de la longueur de fissure, comme expliqué au Chapitre 2 (paragraphe 2.4.1.2). La courbe obtenue pour une des éprouvettes testées est donnée en Figure 5.12. Il existe une grande plage de valeurs où le comportement peut être approximé par une loi affine. Cela montre que la propagation a lieu à  $G$  constant et il est possible d'identifier une valeur de  $G_c$ . Cette valeur est obtenue en divisant la valeur de la pente par l'épaisseur de l'éprouvette. En réalité, la surface de fissure est légèrement plus faible que  $e \cdot a$  à cause de la rainure. Cependant, comme indiqué au paragraphe 5.2.2, on fait l'hypothèse que la rainure n'a pas d'influence sur le comportement global.



**FIGURE 5.12** – Identification du taux de restitution d'énergie sur une éprouvette avec zones architecturées.

L'identification de l'énergie de rupture est réalisée pour chacune des 20 éprouvettes testées dans le cadre de ce chapitre. Quelques données statistiques sur les valeurs identifiées sont données dans le Tableau 5.1. Les énergies de rupture identifiées sur les éprouvettes pleines sont également données à titre de comparaison. La première information qui peut être repérée sur ces données est que les valeurs mesurées sur les éprouvettes pleines se trouvent dans l'intervalle de confiance<sup>1</sup> constitué par les mesures sur les éprouvettes architecturées. Cela confirme que la propagation a bien lieu pour une valeur de  $G_c$  similaire

1. L'intervalle de confiance à 95% est calculé comme la moyenne plus ou moins deux fois l'écart-type

Éprouvettes avec zones architecturées		Éprouvettes de référence	
Nombre d'éprouvettes	20	$G_c$ mesuré sur CT1	1.16 kJ/m <sup>2</sup>
Moyenne des $G_c$ mesurés	1.15 kJ/m <sup>2</sup>	$G_c$ mesuré sur CT2	1.13 kJ/m <sup>2</sup>
Ecart-type	0.12 kJ/m <sup>2</sup>	$G_c$ mesuré sur CT3	1.17 kJ/m <sup>2</sup>
Intervalle de confiance à 95%	[0.91; 1.39] kJ/m <sup>2</sup>		

**TABLEAU 5.1** – Valeur des énergies de Griffith identifiées sur les éprouvettes architecturées comparées aux  $G_c$  identifiées sur les éprouvettes de référence.

au cas de référence. Le fait de ne pas prendre en compte la rainure ne mène pas à des résultats significativement différents sur cette mesure. La rainure est assez peu profonde pour que son effet soit négligeable devant la variabilité des propriétés matériaux. Une seconde remarque qui peut être faite est que la dispersion des valeurs mesurées sur les éprouvettes architecturées semble plus importante que pour les trois essais de référence. Cela peut s'expliquer par des variations du vieillissement du matériau et du procédé de traitement thermique. En effet, les éprouvettes architecturées étant plus nombreuses, elles ont été traitées en plusieurs fournées et ont vécu des vieillissements plus ou moins longs entre leur fabrication et les essais.

En conclusion, la mesure de l'énergie de rupture sur les éprouvettes a permis de valider que la propagation a bien lieu à  $G = G_c$  et que ce  $G_c$  est le même que le matériau constitutif. Cela veut dire que l'hétérogénéité introduite par les zones architecturées est suffisamment loin du front de fissure pour pouvoir considérer que la fissure se comporte bien comme étant dans des champs mécaniques homogènes.

### 5.3.4 Effet des zones architecturées

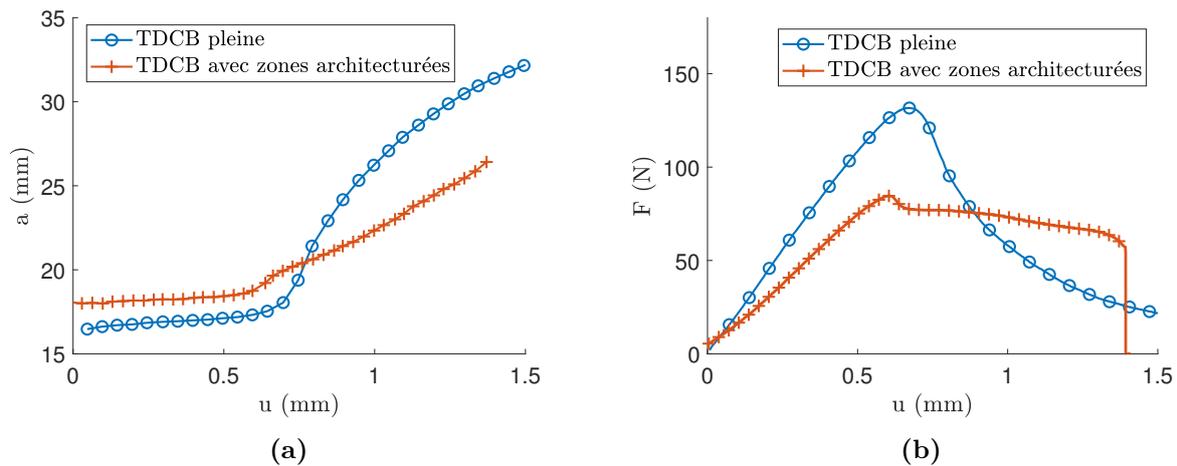
Au Chapitre 4, des effets renforçants de l'ajout des zones architecturées ont été identifiés. Ces effets sont rappelés ici :

1. *Retard de propagation en déplacement imposé* : la fissure se propage moins loin pour les éprouvettes architecturées à même niveau de chargement. Une des conséquences est une force qui décroît moins rapidement, voire qui présente un palier ou augmente. Ainsi, au bout d'un moment, la force est plus importante que pour l'éprouvette de référence.
2. *Augmentation du travail des force dans une certaine zone* : il existe un stade de la propagation, où, pour arriver à la même longueur de fissure, on a dépensé plus d'énergie dans le cas des éprouvettes architecturées.
3. *Instabilité snap-back* : l'instabilité s'accompagne d'une contribution supplémentaire sous forme d'énergie cinétique donc une augmentation de l'énergie nécessaire à casser entièrement la pièce.

L'idée est de voir si ces effets apparaissent effectivement dans les résultats expérimentaux obtenus.

Afin d'observer le premier effet, les courbes de charges et de longueur de fissure expérimentales doivent être tracées. La courbe de référence est obtenue en testant une éprouvette TDCB, sans zones architecturées. Cette éprouvette ne présente pas de rainure, ce qui va

permettre de vérifier que l'ajout de rainure n'empêche pas d'observer les effets renforçants. Les courbes sont données en Figure 5.13. Les deux essais présentés ici n'ont pas la même longueur de fissure initiale, la comparaison de la phase linéaire, avant la propagation, n'est donc pas pertinente. Sur ces courbes le ralentissement en déplacement imposé est observable. En effet, très rapidement après le début de la propagation, la longueur de fissure à chargement équivalent est bien plus faible pour le cas architectural. La conséquence sur les courbes de charges est également observée : la force diminue très lentement et, à partir de  $u \approx 0.9$  mm, la force est plus importante que pour le cas de référence, et ce jusqu'au début de l'instabilité.

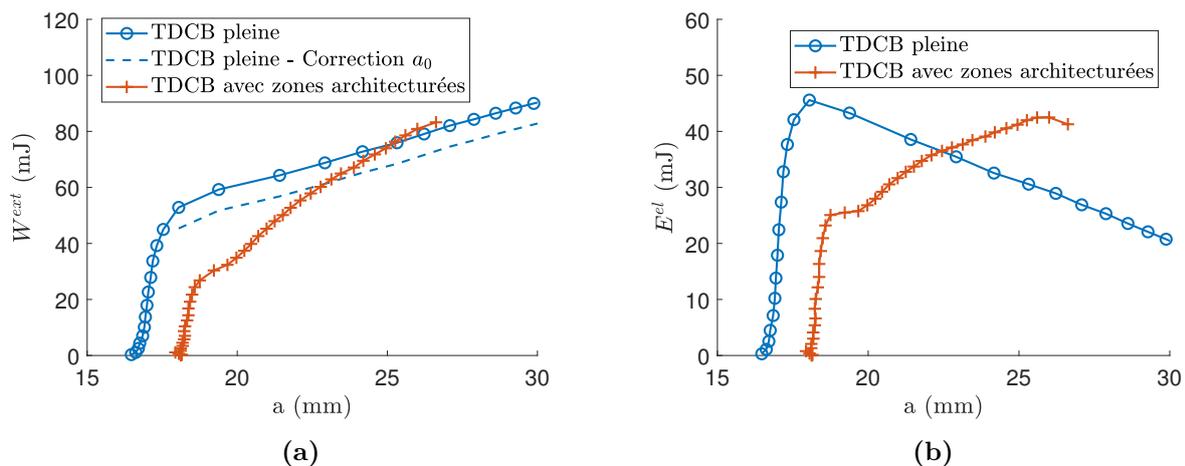


**FIGURE 5.13** – Effet des zones architecturées sur les résultats expérimentaux. Comparaison d'un résultat sur une éprouvette TDCB pleine avec une TDCB avec zones architecturées ( $\theta = 0^\circ$ ).

Pour espérer observer les deux autres effets renforçants, il faut tracer les grandeurs énergétiques (énergie élastique stockée et travail des forces extérieures) en fonction de la longueur de fissure. Les énergies calculées à partir des courbes de charge expérimentales sont données en Figure 5.14. La comparaison des courbes de travail des forces extérieures (Figure 5.14a) pose un problème qui mérite d'être discuté. Cette grandeur étant une grandeur intégrale, sa valeur à chaque point dépend de tous les états précédents, donc en particulier de l'état initial. La valeur de  $W^{ext}$  est ainsi grandement dépendante de la longueur de fissure initiale. Plus précisément, il y a une différence d'énergie de  $G_c e \Delta a_0$  qui est utilisée pour combler l'écart de longueur de fissure initiale  $\Delta a_0$ . On propose donc la correction, tracée en Figure 5.14a, qui consiste à retrancher cet écart d'énergie à la courbe représentant l'éprouvette pleine pendant la propagation.

L'augmentation du travail des forces dans une certaine zone est observé car la courbe du travail des forces extérieures du cas architectural dépasse la courbe de référence corrigée à partir de  $a \approx 23$  mm et reste au-dessus jusqu'à l'apparition de l'instabilité. Au dernier point de mesure, le travail des forces est 13 % plus élevé pour le cas architectural. On observe également, comme dans le cas numérique, que pour l'éprouvette architecturée, l'avancée de fissure s'accompagne d'une augmentation de l'énergie stockée.

Au niveau de l'instabilité snap-back, le fait que la propagation dynamique aille jusqu'à la rupture complète change les énergies en jeu. L'augmentation de l'énergie nécessaire à



**FIGURE 5.14** – Effet des zones architecturées sur les énergies calculées expérimentalement. Comparaison d'un résultat sur une éprouvette TDCB pleine avec une TDCB avec zones architecturées ( $\theta = 0^\circ$ ).

casser l'éprouvette n'est pas observés dans le cas présenté ici. En effet, à la fin de la propagation le travail des efforts dépensé est plus élevé pour le cas de référence.

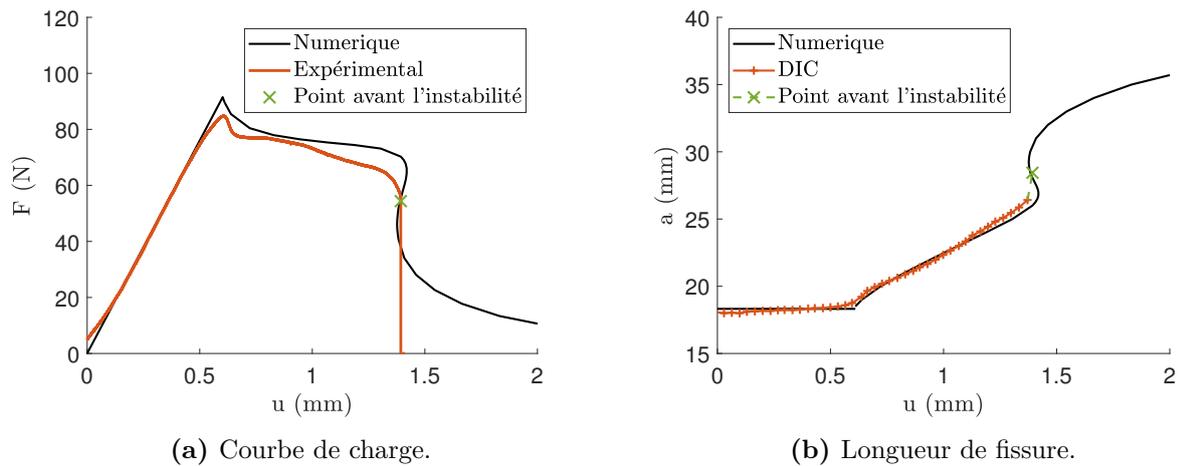
## 5.4 Comparaison avec les résultats numériques

Des effets similaires à l'étude numérique du Chapitre 4 ont été identifiés sur les essais. Dans cette partie, on présente une comparaison quantitative entre résultats expérimentaux et numériques.

### 5.4.1 Sur une éprouvette

On s'intéresse dans un premier temps à un unique essai. On présente les résultats pour un essai dont les zones architecturées sont constituées d'un motif hexagonal avec  $\theta = 0^\circ$ . Les courbes de charge et de longueur de fissure comparant les approches numériques et expérimentales sont données en Figure 5.15. Le calcul est légèrement adapté à l'expérience dans le sens où la longueur initiale est celle mesurée expérimentalement et la valeur de  $K_{IC}$  utilisée est celle obtenue à partir du  $G_c$  identifié dans le cadre de cet essai. Cela permet ne pas discuter des différences qui seraient issues de la variabilité du  $G_c$ , discutée au paragraphe 5.3.3.

Au niveau de la courbe de charge (Figure 5.15a), la corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux est excellente dans la phase linéaire. Cela indique qu'il y a très peu de variabilité des coefficients élastiques, et que le choix du type de condition aux limites est adapté à la modélisation de la phase linéaire. À l'initiation de la propagation, la courbe expérimentale est légèrement adoucie par rapport à la courbe numérique. Cela est dû à un comportement pas entièrement fragile. Néanmoins, le modèle élastique linéaire approxime bien le comportement car l'écart sur la force maximale n'est que de 7 %. Pendant la propagation quasi-statique, la corrélation entre numérique et expérimental n'est pas parfaite, mais peut être considérée comme très bonne à la vue de la complexité



**FIGURE 5.15** – Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour une éprouvette avec  $\theta = 0^\circ$ .

des phénomènes mis en jeu. L'initiation de l'instabilité a lieu à un déplacement imposé très similaire mais pour une force un peu plus faible que celle prédite numériquement. Cet écart peut venir de l'effet de la rainure, pas prise en compte dans le calcul. Une autre hypothèse pour expliquer cette différence vient des conditions aux limites. Il a en effet été montré au Chapitre 2 que même si les conditions aux limites sont adaptées à décrire la phase linéaire, elles peuvent mener à des écarts dans la phase de propagation.

Au niveau de la longueur de fissure, la corrélation entre les résultats numériques et issus de la DIC est excellente. Le point juste avant l'instabilité présente une longueur de fissure plus importante que la prédiction numérique. Cela appuie l'hypothèse, évoquée au paragraphe 5.3.2, que les deux types de repérage du front de fissure ne sont pas équivalents. Le calcul linéaire élastique est compatible avec la mesure par DIC, mais pas avec la mesure sur les faciès de rupture. Le front de fissure qui est compatible avec le calcul éléments finis linéaire élastique est celui défini comme l'origine du comportement asymptotique de la singularité. Il s'agit d'une définition *vue de loin* par opposition avec l'analyse des faciès de rupture, qui mesure une grandeur qui prend en compte la longueur de fissure plus une zone endommagée.

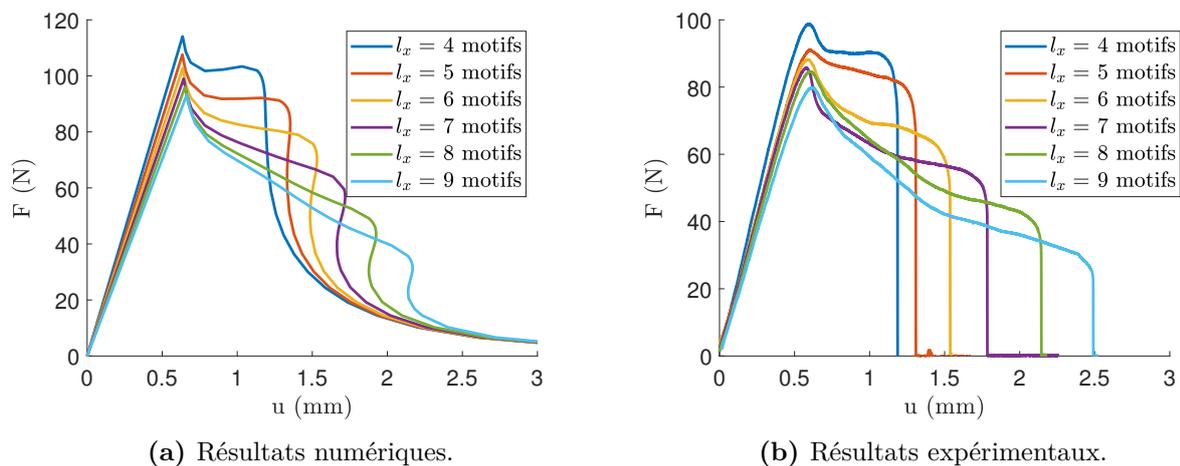
## 5.4.2 Étude paramétrique

Dans cette partie, une étude paramétrique est mise en place, à la fois numériquement et expérimentalement. L'idée est de tester la capacité du modèle numérique à représenter des tendances. Un second objectif est de porter un regard critique sur les écarts observés sur une éprouvette au paragraphe précédent. L'étude paramétrique permet en effet de déterminer si l'analyse faite sur cette éprouvette est généralisable à tous les essais.

Le choix du paramètre à faire varier s'est porté sur la longueur des zones architecturées, notée  $l_x$  sur la Figure 5.2a. Cette étude présente l'avantage d'avoir *a priori* une grande influence sur l'instabilité. En effet, si l'on considère que l'instabilité est liée à la sortie de la région entre les zones architecturées, en changeant la longueur de celles-ci, l'apparition de la phase dynamique devrait être décalée. On étudie donc l'effet de  $l_x$  dont on prendra

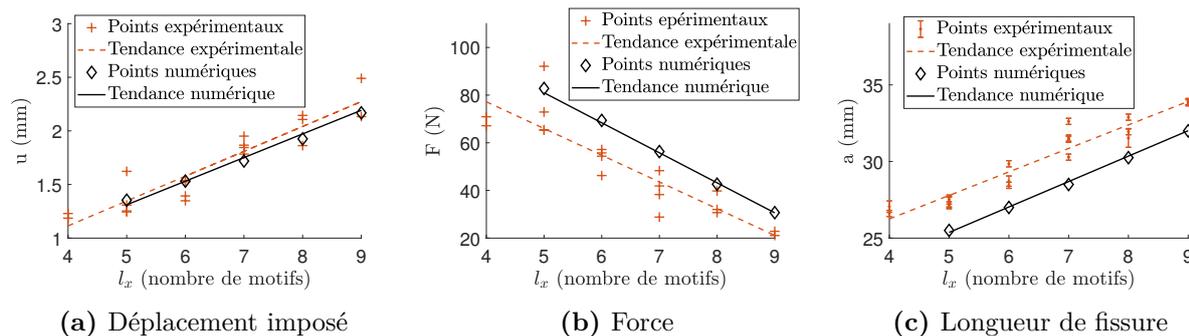
des valeurs en nombre de motifs, un motif ayant une taille de 10/6 mm. Des valeurs de quatre à neuf motifs sont testées, à la fois numériquement et expérimentalement. Seul le motif  $\theta = 0^\circ$  est considéré dans cette étude. Pour les essais, deux à quatre répétitions pour chaque valeur de  $l_x$  sont présentées, soit un total de 19 éprouvettes.

Les courbes de charges numériques et expérimentales sont données respectivement en Figure 5.16a et 5.16b. Les courbes numériques sont tracées en prenant la même longueur de fissure initiale pour toutes, et la ténacité identifiée au Chapitre 2. Pour les courbes expérimentales, un seul essai pour chaque longueur testée est présenté pour des raisons de clarté. À la fois du point de vue expérimental et numérique, on observe que le paramètre choisi a effectivement un effet sur le moment où l'instabilité apparaît. La longueur de la zone a également un effet sur le comportement en propagation quasi-statique : pour  $l_x = 4$  motifs, on observe un plateau de force, alors que lorsque  $l_x$  augmente, la force est de plus en plus décroissante dans cette même phase. Ce phénomène est visible à la fois sur les courbes numériques et expérimentales. Cette observation montre que, qualitativement, le modèle numérique est capable de prédire les tendances de comportements pendant le régime de propagation de fissure.



**FIGURE 5.16** – Effet de la longueur de zone sur les courbes de charges numériques (obtenues par longueur d'arc) et expérimentales.

Afin de réaliser une analyse quantitative, on s'intéresse aux données au moment où l'instabilité débute. Ce point est déterminé numériquement par  $k'(\bar{a}) = 0$  et expérimentalement par le dernier point de mesure avant la chute brutale de force. On s'intéresse à la fois à la force, le déplacement imposé et la longueur de fissure à cet instant. Ces trois grandeurs en fonction de la longueur de zone sont données en Figure 5.17. Des tendances affines sont identifiées sur les points expérimentaux et numériques. Lors de la simulation, aucune instabilité n'a été observée pour le cas  $l_x = 4$  motifs donc la courbe numérique n'est tracée que de 5 à 9 motifs. Sur ces trois graphiques les tendances numériques et expérimentales sont très proches. En particulier, la pente des courbes obtenues numériquement est retrouvée avec un haut niveau de précision dans les essais pour les trois grandeurs : l'écart des pentes identifiées est de 5 % pour le déplacement imposé, 11 % pour la force et 8 % pour la longueur de fissure. Au niveau des valeurs absolues, les écarts observés au paragraphe précédent semblent se généraliser : l'instabilité a lieu à un déplacement



**FIGURE 5.17** – Effet de la longueur de zone architecturée sur les données à l’initiation de la phase dynamique. Comparaison des tendances numériques et expérimentales.

imposé prédit par la simulation, mais à une force plus faible et une longueur de fissure plus élevée. Ces écarts entre numérique et expérimental semblent systématiques, ce qui va dans le sens des explications données au paragraphe précédent.

## 5.5 Bilan sur la validation expérimentale

Lors de la mise en place de la validation expérimentale, un problème a été rencontré : la bifurcation de la fissure qui se loge dans les zones architecturées. Cette problématique a été traitée en utilisant des outils de la simulation numérique pour limiter le risque de bifurcation et en introduisant une rainure pour aider à guider le chemin de fissure. Le protocole obtenu permet, de façon reproductible, d’observer l’effet de zones architecturées sur la fissuration.

Deux des trois effets renforçants identifiés au Chapitre 4 ont été reproduits expérimentalement et ce malgré l’introduction de la rainure qui fragilise l’éprouvette. Ces deux effets sont le ralentissement en déplacement imposé et l’augmentation de l’énergie à fournir pour atteindre une certaine plage de valeur de longueur de fissure.

L’instabilité qui avait été mise en lumière dans les résultats expérimentaux, est également retrouvée ici. La corrélation entre le début de la phase dynamique et la sortie de la région entre les zones architecturées a été confirmée. En effet, lors de l’étude paramétrique, l’allongement de la zone a mené à un retardement de l’instabilité de manière très reproductible. À cause d’effets dynamiques, qui n’avaient pas été pris en compte dans le modèle numérique, le régime instable mène à une rupture complète de l’échantillon. Cela empêche, pour le cas présenté ici, d’observer l’augmentation de l’énergie utilisée dans le processus de fissuration prédite au Chapitre 4.

La comparaison des courbes obtenues avec la simulation révèle une excellente adéquation entre les approches numériques et expérimentales. Cette très bonne corrélation est valable à la fois sur l’évolution des grandeurs pendant un essai, mais aussi lors de la comparaison de plusieurs géométries, ce qui a été mis en évidence dans l’étude paramétrique.

Pour conclure, ce chapitre a montré qu’il est possible de modifier expérimentalement le comportement en fissuration en ajoutant des zones architecturées de part et d’autre du chemin de fissure. Certains effets prédits numériquement ont été observés dans les essais. La comparaison avec les résultats de simulations permet d’affirmer que le modèle éléments

finis est capable de prédire les phénomènes avec une très bonne précision. L'influence des conditions aux limites, évoqué au Chapitre 2, n'est donc pas pénalisante dans ce cas. Il se peut que l'idéalisation de la modélisation des conditions aux limites soit à l'origine du léger écart sur la force mais cela n'empêche pas de représenter des tendances et d'être capable de comparer les géométries entre elles. Cela permet donc d'envisager des études numériques paramétriques pour optimiser le comportement en fissuration avec l'ajout de zones architecturées.

# Quatrième partie

## Vers une définition de ténacité effective



# Chapitre 6

## Comparaison de définitions de la ténacité effective

*Ce dernier chapitre pose la question de l'évaluation de la performance des zones architecturées en terme de résistance à la propagation de fissure. La ténacité effective est une grandeur qui, si on parvient à en donner une définition unique, pourrait servir de mesure objective de cette performance. Ici, quelques définitions issues de la littérature et adaptées pour le cas d'étude sont calculées. Ces définitions sont comparées sur un grand nombre de cas numériques afin de conclure sur le lien qu'elles ont les unes avec les autres.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Intérêt de la définition de ténacité effective . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>6.2</b>	<b>Définitions considérées . . . . .</b>	<b>120</b>
6.2.1	Définitions basées sur le chargement . . . . .	120
6.2.2	Définition basée sur l'intégrale J . . . . .	122
<b>6.3</b>	<b>Méthodes pour la comparaison des ténacités effectives . . . . .</b>	<b>123</b>
6.3.1	Surfing Boundary Conditions . . . . .	123
6.3.2	Procédure de calcul . . . . .	124
6.3.3	Calcul des ténacités effectives . . . . .	125
6.3.4	Zones architecturées testées . . . . .	127
<b>6.4</b>	<b>Résultats de comparaisons de ténacités effectives . . . . .</b>	<b>128</b>
6.4.1	Résultat pour une simulation . . . . .	128
6.4.2	Résultats pour un grand nombre de simulations . . . . .	129
6.4.3	Discussions . . . . .	130
<b>6.5</b>	<b>Bilan sur la question de la ténacité effective . . . . .</b>	<b>133</b>

---

## 6.1 Intérêt de la définition de ténacité effective

Dans ce chapitre on se pose la question de l'existence d'une ténacité effective permettant de décrire les phénomènes observés aux Chapitres 4 et 5. L'intérêt d'avoir un unique scalaire évaluant la performance de l'assemblage avec les zones architecturées est de simplifier la comparaison des géométries. Dans l'optique de réaliser de l'optimisation afin de trouver des configurations idéales, il faut d'abord définir un indicateur de la performance de la configuration étudiée. Or, les effets présentés précédemment sont très complexes donc l'évaluation par un unique scalaire n'est pas trivial. Ainsi, la notion de ténacité effective est abordée ici sous l'angle de l'évaluation de la performance et non dans une volonté d'homogénéisation en vue d'une simulation de propagation à l'échelle effective.

Au Chapitre 4 (paragraphe 4.4.2), trois critères d'évaluation de l'effet des zones architecturées ont été proposés à partir d'une analyse phénoménologique. On se pose ici la question du lien de ces critères avec les définitions existantes de ténacité effective.

Dans ce chapitre, on appellera ténacité l'énergie de rupture  $G_c$ , et non  $K_{IC}$ . L'idée est ainsi de se poser la question de l'existence et de l'unicité d'une ténacité effective  $G_c^{eff}$ .

## 6.2 Définitions considérées

Dans cette partie, on explicite les définitions de ténacités effectives qui seront comparées par la suite. Comme expliqué au Chapitre 1 (paragraphe 1.3.2), il existe un très grand nombre de propositions dans la littérature sans qu'aucune des approches ne s'impose comme étant adaptée à toute situation. Dans cette partie, on reprend des idées issues des études existantes pour les appliquer au cas de la propagation de fissure entre les zones architecturées. Le choix des définitions considérées s'est porté sur deux critères. Le premier est la facilité d'implémentation : il fallait que le calcul soit un simple post-traitement des calculs éléments fins. Le second critère est le fait que la définition soit capable de représenter l'effet du contraste de propriétés élastiques sur la résistance à la propagation. En effet, les phénomènes que l'on souhaite représenter sont issus de variations de la raideur.

### 6.2.1 Définitions basées sur le chargement

La première définition de ténacité effective qui est adaptée au problème étudié dans cette thèse est celle qui s'appuie sur le chargement nécessaire à faire propager la fissure. L'idée s'appuie sur les travaux de Vasoya *et al.* [VAS 16] et consiste à définir la ténacité qui, appliquée à une éprouvette homogène sans porosité, mènerait à un même chargement à rupture que l'éprouvette architecturée étudiée. Cela mène à une définition de ténacité équivalente pour chaque longueur de fissure testée. Pour avoir une valeur unique, on considère à la fois la moyenne et le maximum de cette grandeur. Ces deux approches seront discutées.

Pour expliciter cette ténacité effective, il faut choisir un paramètre de chargement. On peut alors définir une grandeur par paramètre de chargement considéré : le déplacement imposé, la force de réaction ou l'énergie fournie. D'après l'annexe A, le taux de restitution d'énergie s'écrit en fonction de la fragilité en déplacement imposé  $k$  de la façon suivante :

$$G = \frac{kEu^2}{W}. \quad (6.1)$$

Pendant la propagation, on a  $G = G_c$  pour le cas d'une éprouvette pleine (*plein*) et le cas d'une éprouvette architecturée (*A*). Les déplacements pendant la propagation pour chacun des cas s'écrivent :

$$u_A^2 = \frac{G_c W}{k_A E} \text{ et } u_{plein}^2 = \frac{G_c W}{k_{plein} E}. \quad (6.2)$$

$G_c^{eq-u}$  est définie comme la ténacité qu'il faudrait avoir pour obtenir  $u_A$  avec un matériau plein, c'est-à-dire une fonction  $k_{plein}$  :

$$u_A^2 = \frac{G_c^{eq-u} W}{k_{plein} E}, \quad (6.3)$$

soit :

$$G_c^{eq-u} = \frac{k_{plein}^2}{k_A^2} G_c = \frac{u_A^2}{u_{plein}^2} G_c. \quad (6.4)$$

On remarque que cette définition est liée au premier critère, identifié au chapitre 4 (Équation (4.20)) pour décrire le ralentissement de propagation de fissure en déplacement imposé. Ce lien s'écrit :

$$c_1 \equiv \max_a \left( \frac{u_A}{u_{plein}} \right) = \max_a \left( \sqrt{\frac{G_c^{eq-u}}{G_c}} \right) \quad (6.5)$$

Concernant le chargement en force, la force à rupture peut s'écrire en ajoutant la fonction de raideur  $S$  :

$$F_A = \frac{G_c W E e^2 S_A^2}{k_A^2} \text{ et } F_{plein} = \frac{G_c W E e^2 S_{plein}^2}{k_{plein}^2}. \quad (6.6)$$

On définit  $G_c^{eq-F}$  de manière analogue à  $G_c^{eq-u}$  :

$$G_c^{eq-F} = \frac{k_{plein}^2}{k_A^2} \frac{S_A^2}{S_{plein}^2} G_c = \frac{F_A^2}{F_{plein}^2} G_c \quad (6.7)$$

Enfin, concernant le chargement en énergie, on considère l'énergie élastique stockée dans le solide à un instant donné. Cette énergie est liée au taux de restitution d'énergie par :

$$E^{el} = \frac{1}{2} F u = \frac{1}{2} G W e \frac{S}{k^2}. \quad (6.8)$$

On définit  $G_c^{eq-E}$  de manière analogue aux deux définitions précédentes et on obtient :

$$G_c^{eq-E} = \frac{k_{plein}^2}{k_A^2} \frac{S_A}{S_{plein}} G_c = \frac{E_A^{el}}{E_{plein}^{el}} G_c. \quad (6.9)$$

Comme cette définition s'appuie sur l'énergie élastique stockée à un instant donné et non sur le travail des forces extérieures, il n'existe pas de lien trivial avec le critère en énergie défini au Chapitre 4 (Équation (4.21)).

Au final, cette approche donne trois définitions distinctes de la ténacité équivalente :

$$G_c^{eq-E} = \frac{E_A^{el}}{E_{plein}^{el}} G_c, \quad G_c^{eq-u} = \frac{u_A^2}{u_{plein}^2} G_c \quad \text{et} \quad G_c^{eq-F} = \frac{F_A^2}{F_{plein}^2} G_c. \quad (6.10)$$

## 6.2.2 Définition basée sur l'intégrale J

La seconde approche qui est étudiée est celle proposée par Hossain *et al.* [HOS 14], justifiée par Hsueh et Bhattacharya [HSU 16], et qui s'appuie sur l'intégrale J. L'idée est d'évaluer cette intégrale sur un contour externe aux hétérogénéités. Cette grandeur correspond à un taux de restitution d'énergie équivalent. Si les conditions de propagation sont réunies, cette grandeur est alors une ténacité effective. Ici, c'est l'intégrale de domaine (Équation (1.27)) et non celle de contour qui a été utilisée.

Afin d'expliquer cette méthode, un exemple avec plusieurs choix de contours est donné en Figure 6.1. L'intégrale J a été popularisée car elle est indépendante du contour [RIC 68]. Cependant, ce résultat n'est valable que pour les matériaux sans trous. Cela veut dire que les intégrales calculées sur les contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont identiques. Pendant la propagation, on a :

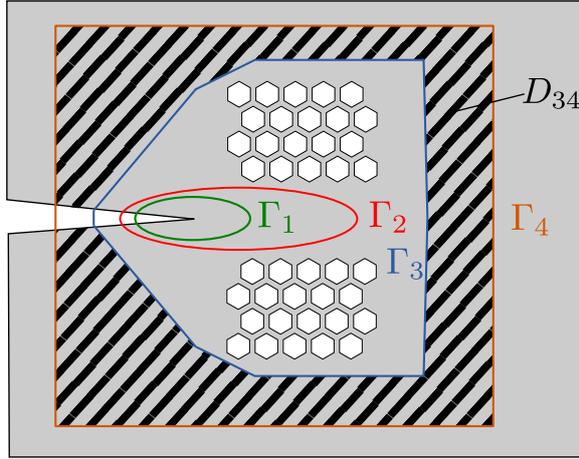
$$J(\Gamma_1) = J(\Gamma_2) = G_c. \quad (6.11)$$

Les contours  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ , de leur côté, entourent des porosités. L'indépendance du contour ne s'applique pas et donc l'intégrale sur ces domaines donne un résultat différent. Néanmoins, ces deux contours mènent à la même intégrale J, car la zone entre ces contours (appelée  $D_{34}$  sur la Figure 6.1) ne contient aucune porosité. On considère que l'intégrale sur ces contours externes est la ténacité équivalente :

$$J(\Gamma_3) = J(\Gamma_4) \equiv G_c^{eq-J}. \quad (6.12)$$

L'idée est que, dans tous les cas, il existe une échelle à laquelle le matériau contient des hétérogénéités. L'intégrale J utilisée dans le cadre des milieux continus et appliquée ici sur les contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est donc déjà une homogénéisation. La ténacité effective serait alors l'intégrale J calculée sur un contour assez loin pour que le matériau soit considéré comme homogène. Si les seules hétérogénéités présentes sont celles entre les contours  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , alors l'intégrale sur ce contour très lointain est égale à celle sur  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ .

Au final, cette définition permet d'évaluer une valeur de ténacité équivalente par longueur de fissure testée. Comme pour la définition précédente, les valeurs maximales et moyennes pendant la propagation sont retenues comme propositions de ténacité effective.



**FIGURE 6.1** – Schéma représentant différents contours (incluant ou non les zones architecturées) permettant d'expliquer la méthode basée sur l'intégrale  $J$ .

## 6.3 Méthodes pour la comparaison des ténacités effectives

Dans cette partie, les tests numériques pour comparer les évolutions des différentes définitions de la ténacité effective sont décrits.

### 6.3.1 Surfing Boundary Conditions

Dans ce chapitre, on souhaite avoir un regard le plus général possible sur la propagation de fissure entre les zones architecturées. L'idée est de discuter uniquement des effets intrinsèques de l'ajout de ces zones et non des effets qui seraient liés à une géométrie d'éprouvette spécifique comme les CT et TDCB. C'est pourquoi c'est l'approche de Hossein *et al.* [HOS 14], appelée *Surfing Boundary Conditions*, qui est mise en place. Cette approche consiste à appliquer sur le bord du domaine des déplacements correspondant à une fissure avançant à vitesse constante. Appliqué au cas de l'algorithme par longueur d'arc, cela veut dire que pour chaque longueur de fissure, on applique un déplacement imposé sur les bords du domaine correspondant à la solution asymptotique autour d'une fissure. L'idée est que, lorsqu'on se place assez loin de l'hétérogénéité, on devrait voir un champ homogène, donc respectant les solutions de la mécanique de la rupture en milieu homogène. En pratique, on applique la condition aux limites sur les bords du domaine en excluant les lèvres de la fissure ( $\partial\Omega \setminus \Gamma$ ). Le déplacement imposé est calculé à partir de la solution asymptotique en pointe de fissure d'ordre un en mode I, présentée au Chapitre 1 (Équation (1.18)). La condition aux limites s'exprime alors en fonction d'un paramètre de chargement  $K_{charge}$ , des coordonnées cylindriques dont l'origine est la pointe de fissure  $(r_a, \theta_a)$ , de la constante de Kolosov  $\kappa$  et du module de cisaillement  $\mu$  comme :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = \frac{K_{charge}}{2\mu} \sqrt{\frac{r_a}{2\pi}} (\kappa - \cos\theta_a) \begin{pmatrix} \cos(\theta_a/2) \\ \sin(\theta_a/2) \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Ce problème mécanique est un problème à un paramètre de chargement, et celui-ci est le facteur d'intensité des contraintes appliqué sur le bord :  $K_{charge}$ . Afin de définir les ténacités effectives qui s'appuient sur le chargement et décrites au paragraphe 6.2.1, il faut définir un chargement en déplacement, en force et en énergie élastique qui correspondent à ce chargement. Concernant l'énergie élastique, on considère l'énergie de déformation

dans le domaine d'étude. Celle-ci peut être calculée dans le volume ou sur les bords en utilisant le théorème de la divergence :

$$E^{el} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (6.14)$$

On cherche ensuite à définir une force et un déplacement généralisés notés respectivement  $Q$  et  $q$ . Concernant le paramètre de chargement en déplacement, on le construit pour qu'il soit directement lié au chargement  $K_{charge}$ , homogène à une longueur en utilisant la longueur caractéristique du domaine d'étude  $W$  et la pression caractéristique que l'on définit comme le module de cisaillement  $\mu$ . L'expression de  $q$  est donc :

$$q = \frac{K_{charge} \sqrt{W}}{\mu}. \quad (6.15)$$

Afin d'avoir des paramètres de chargement en déplacement, force et énergie cohérents, on souhaite que les déplacements et forces généralisés mènent à un bilan énergétique égal à l'énergie de déformation, soit :

$$E^{el} = \frac{1}{2} q Q. \quad (6.16)$$

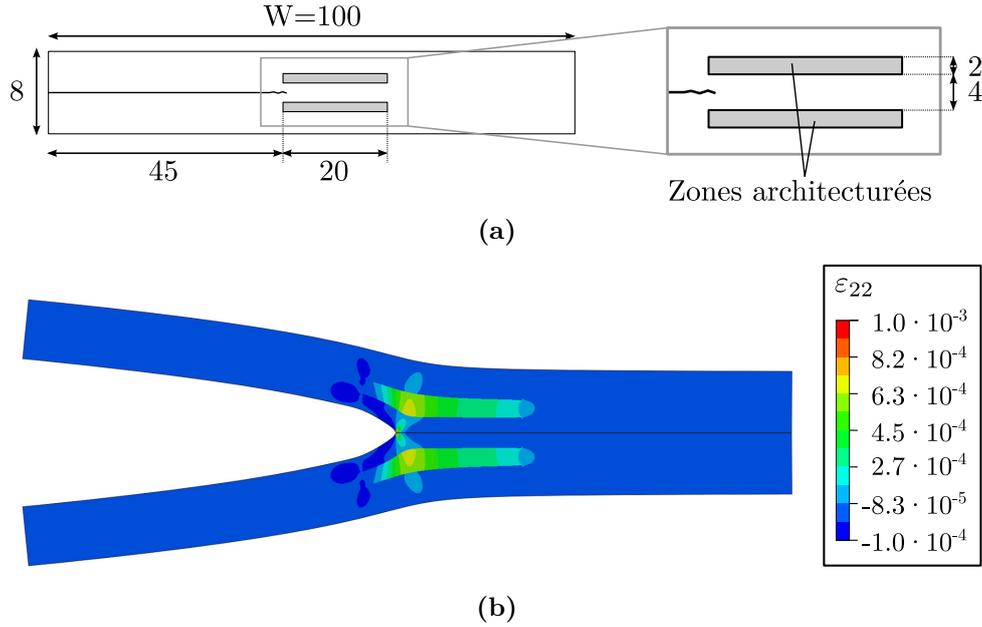
On définit donc la force généralisée en fonction de l'énergie et du déplacement afin de satisfaire l'équation (6.16). Le paramètre  $Q$  est ainsi lié aux champs de contraintes par :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2E^{el}}{q} \\ &= \frac{\mu}{K_{charge} \sqrt{W}} \cdot \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \sqrt{\frac{r_a}{2\pi}} (\kappa - \cos \theta_a) \begin{pmatrix} \cos(\theta_a/2) \\ \sin(\theta_a/2) \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (6.17)$$

### 6.3.2 Procédure de calcul

La géométrie étudiée dans ce chapitre est donnée en Figure 6.2a. Le choix d'une structure très longue s'explique par la volonté d'observer ce qui se passe à grande distance, à la fois en amont et en aval, des zones architecturées. Pour cette étude, on choisit une valeur du coefficient de Poisson du matériau constitutif de  $\nu = 0.3$ . Grâce à la linéarité du problème, les valeurs du module de Young et de la ténacité du matériau constitutif n'ont pas d'influence sur les résultats adimensionnés par ces valeurs.

La procédure de calcul est illustrée en Figure 6.3. L'itération est réalisée sur la longueur de fissure. Pour chaque valeur de la longueur de fissure, on commence par tester un chargement arbitraire  $K_{charge} = K_{test}$ . En pratique, une valeur de  $K_{test} = 1 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$  est utilisée ici. Un exemple de champ de déformation obtenu à cette étape est donné en Figure 6.2b. Le facteur d'intensité des contraintes est mesuré grâce à l'intégrale d'interaction sur un contour en pointe de fissure, n'incluant pas de partie architecturée. Cette grandeur, notée  $K_{mes}$ , est *a priori* différente de  $K_{test}$  car les zones architecturées ont un impact sur les champs mécaniques en pointe de fissure. À partir de cette mesure et de la linéarité de la relation entre  $K_{test}$  et  $K_{mes}$ , on en déduit le paramètre de chargement qu'il faudrait



**FIGURE 6.2** – Présentation du problème de *Surfing Boundary Conditions*. (a) Géométrie du problème étudié. Dimensions en millimètres. (b) Champs de déformation verticale dans la configuration déformée (amplification x900) pour un chargement de  $K_{test} = 1 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ , le module de Young utilisé ici est  $E = 1 \text{ GPa}$ .

appliquer vérifier le critère de propagation  $K_I = K_{IC}$  en pointe de fissure. Le chargement s'écrit :

$$K_{prop} = \frac{K_{mes}}{K_{IC}} K_{test}. \quad (6.18)$$

L'énergie de déformation qui correspond à ce chargement est obtenue à partir de la valeur mesurée sur le cas test et en remarquant que cette grandeur a une dépendance quadratique au paramètre de chargement :

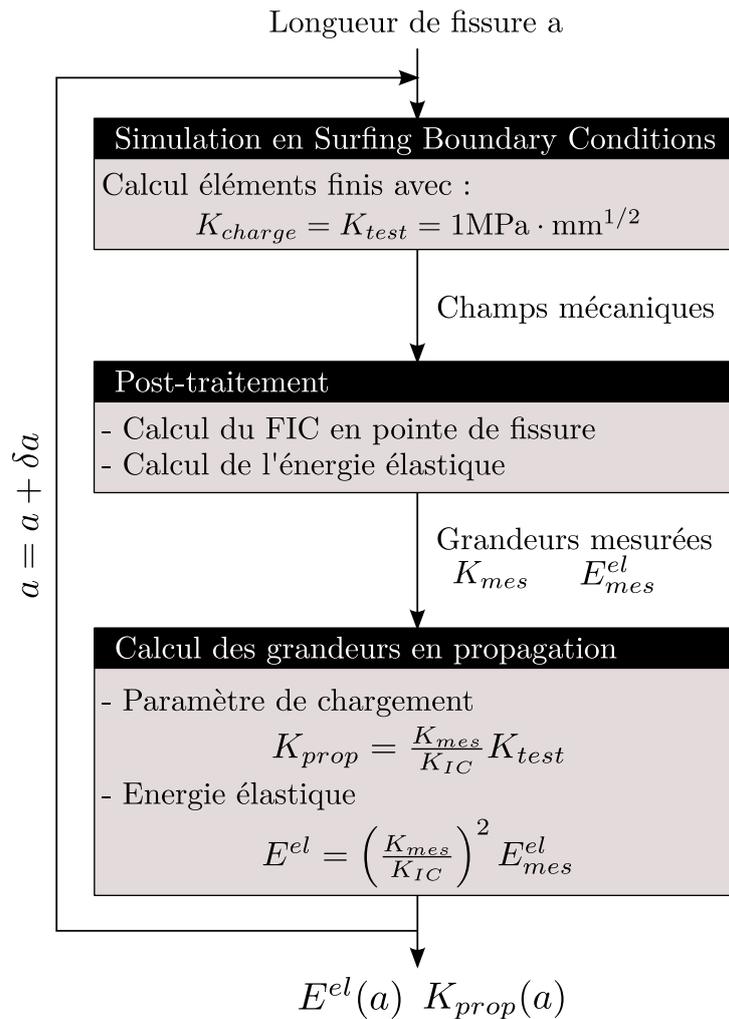
$$E^{el} = \left( \frac{K_{prop}}{K_{test}} \right)^2 E_{mes}^{el} = \left( \frac{K_{mes}}{K_{IC}} \right)^2 E_{mes}^{el} \quad (6.19)$$

### 6.3.3 Calcul des ténacités effectives

Pour évaluer la ténacité effective basée sur l'intégrale J, un post-traitement supplémentaire est ajouté à la phase de simulation éléments finis. L'intégrale  $J_{ext}$  est calculée sur un contour extérieur aux zones architecturées dans le cas  $K_{charge} = K_{test}$ . La valeur correspondant à la condition de propagation est calculée en utilisant la dépendance quadratique de l'intégrale J au chargement en déplacement, comme pour l'énergie élastique :

$$G_c^{eq-J} = \left( \frac{K_{mes}}{K_{IC}} \right)^2 J_{ext}. \quad (6.20)$$

Les ténacités effectives basées sur le chargement sont évaluées en adaptant les définitions données dans les équations (6.4), (6.7) et (6.9) au système de chargement en *Surfing Boundary Conditions* :



**FIGURE 6.3** – Schéma illustrant la procédure de calcul pour le problème en *Surfing Boundary Conditions*.

$$G_c^{eq-E} = \frac{E_A^{el}}{E_{plein}^{el}} G_c, G_c^{eq-u} = \frac{q_A^2}{q_{plein}^2} G_c \text{ et } G_c^{eq-F} = \frac{Q_A^2}{Q_{plein}^2} G_c. \quad (6.21)$$

Il faut alors identifier les paramètres de chargement pour le cas de référence d'un solide plein, sans zone architecturées. On pourrait appliquer la procédure expliquée au paragraphe 6.3.2, mais il est également possible de traiter ce cas de manière semi-analytique. En effet, dans ce cas, les solutions asymptotiques sont une bonne approximation dans tout le domaine d'étude. Le facteur d'intensité en pointe de fissure et celui appliqué sur les bords sont identiques :  $K_{mes} = K_{test}$ . Le chargement à appliquer pour respecter la condition de propagation est donc  $K_{IC}$ . Ainsi, le déplacement généralisé s'écrit :

$$q_{plein} = \frac{K_{IC}\sqrt{W}}{E} \quad (6.22)$$

L'énergie de déformation, de son côté, peut être calculée en utilisant la définition surfacique (6.14). Sur les bords du domaine, le déplacement est connu car imposé par les conditions aux limites. La contrainte peut être approximée par la solution asymptotique, donnée au Chapitre 1 (Équation (1.19)). L'énergie peut donc être calculée grâce à une intégrale numérique de fonctions connues.

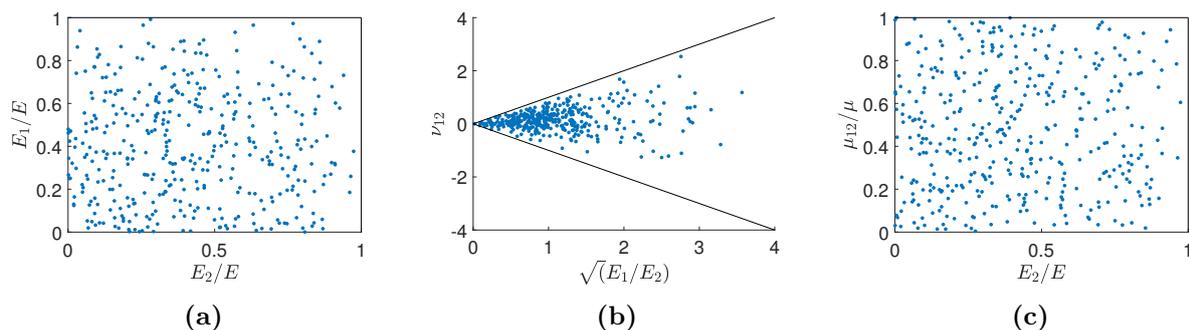
**Remarque :** *Dans le cas sans zone architecturée, on trouve un paramètre de chargement indépendant de  $a$  (6.22). Le cas de chargement étudié ici n'est donc pas assimilé à une expérience à déplacement imposé croissant. Il n'est donc pas possible, avec le formalisme choisi, de discuter de l'apparition potentielle d'instabilité. Le phénomène de snap-back ne sera donc pas étudié dans ce chapitre.*

### 6.3.4 Zones architecturées testées

Dans cette étude, les zones architecturées testées sont définies par leur loi de comportement orthotrope équivalente. On ne cherche pas à définir l'architecture correspondante. L'idée est de tester une vaste gamme de propriétés pour cette zone pour que les analyses faites dans ce chapitre puissent être considérées comme étant les plus générales possibles. Pour cela, 400 jeux de propriétés orthotropes sont testés. Les coefficients matériaux sont choisis de manière aléatoire mais doivent respecter les bornes de Reuss et Voigt. Pour cela, les modules de Young sont choisis entre 0 et  $E$ , le module de cisaillement entre 0 et  $\mu$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  entre  $-\sqrt{E_1/E_2}$  et  $\sqrt{E_1/E_2}$ . De plus, l'inéquation suivante est vérifiée :

$$0 < \|\mathbf{C}^H\| < \|\mathbf{C}\| \quad (6.23)$$

où  $\mathbf{C}^H$  est le tenseur d'ordre deux représentant la loi de comportement orthotrope équivalente de la zone architecturée sous forme de notation de Voigt et  $\mathbf{C}$  est celui du matériau isotrope constitutif. La norme utilisée est  $\|\mathbf{C}\| = tr(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})$ . La répartition des 400 jeux de paramètres est illustrée en Figure 6.4. L'étude proposée couvre un large spectre de propriétés matériau. Ce spectre est probablement plus large que ce qui est possible d'obtenir par des architectures périodiques poreuses à un seul matériau constitutif, comme le montre les travaux de Djourachkovitch *et al.* [DJO 23].



**FIGURE 6.4** – Répartition des propriétés matériaux pour les 400 simulations à comportement aléatoire de la zone. (a) Modules de Young dans les deux directions, (b) Coefficient de Poisson dans de plan et (c) Module de cisaillement.

## 6.4 Résultats de comparaisons de ténacités effectives

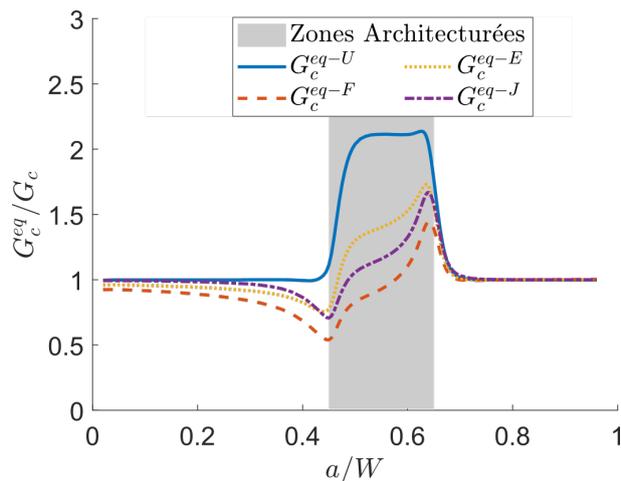
Dans cette section, les résultats du problème en *Surfing Boundary Conditions* sont exposés. Les différentes définitions de la ténacité effective sont comparées.

### 6.4.1 Résultat pour une simulation

Dans cette partie, les résultats de simulation pour un comportement orthotrope des zones architecturées unique sont présentés. Les propriétés élastiques de la zone sont :

$$\frac{E_1}{E} = 0.2, \quad \frac{E_2}{E} = 0.2, \quad \nu_{12} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\mu_{12}}{\mu} = 0.1. \quad (6.24)$$

On s'intéresse à la comparaison des définitions proposées pour la ténacité effective. En particulier, l'évolution de ces grandeurs avec la longueur de fissure est étudiée ici. Cette évolution est donnée en Figure 6.5. La première observation qui peut être faite est que les quatre définitions présentées sont différentes, il n'existe pas de couple de définitions qui soient équivalentes. Néanmoins, certaines similarités peuvent être observées. Premièrement, on observe que toutes les ténacités tendent rapidement vers  $G_c$  en aval des zones. En amont des zones, elles tendent également vers  $G_c$  mais plus lentement. Cette observation peut être corrélée avec les observations faites au Chapitre 4 où l'effet des zones architecturées était relativement marqué en amont des zones, mais disparaissait rapidement en aval. Le deuxième point commun qui peut être identifié est le fait que toutes les ténacités étudiées semblent être maximales pour la même longueur de fissure, environ  $a = 0.64W$ , soit juste avant la fin de la zone qui est positionnée à  $0.65W$ . Les maxima de toutes les grandeurs semblent donc décrire le même instant de la propagation, on peut émettre l'hypothèse que ces valeurs soient liées. Enfin, dans tous les cas, ces maxima sont supérieurs à  $G_c$ . Cela permet d'affirmer qu'il existe une plage de valeur de la longueur de fissure pour laquelle l'ajout des zones architecturées a un effet renforçant, peu importe le critère choisi. En particulier, cela veut dire que dans cette plage de valeur, il faut plus de déplacement, plus de force et plus d'énergie stockée dans l'éprouvette pour faire propager la fissure.

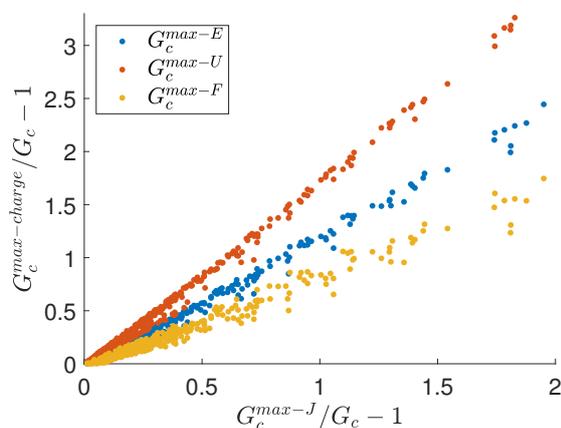


**FIGURE 6.5** – Comparaison des ténacités équivalentes en fonction de la longueur de fissure pour une simulation.

### 6.4.2 Résultats pour un grand nombre de simulations

Dans cette partie, les 400 simulations réalisées sont utilisées pour comparer les définitions de ténacités entre elles. On s'attache tout d'abord à la question de la valeur scalaire unique à retenir pour les définitions de ténacités effectives, qui dépendent de la longueur de fissure. Le maximum et la moyenne des ténacités équivalentes calculées sont considérées tour à tour.

Pour commencer, les maxima de ténacités équivalentes sont calculés pour chacune des quatre définitions qui dépendent de la longueur de fissure équivalente. Les résultats sont donnés en Figure 6.6 où les définitions basées sur le chargement sont comparées à celle qui s'appuie sur l'intégrale J. Ces résultats montrent que les différentes définitions mènent à des relations globalement monotones les unes envers les autres. Les maxima issus des définitions sont donc bien liés, comme cela avait été supposé au paragraphe précédent. Les relations observées sont linéaires et passent toutes par le point  $G_c^{eq} = G_c$ , ce qui montre la continuité entre le modèle avec éprouvette pleine et celui avec des zones architecturées. Cependant, aucune des pentes ne vaut 1, la plus proche étant la pente de  $G_c^{eq-E}/G_c = f(G_c^{eq-J}/G_c)$  avec un coefficient directeur de 1.16. Les définitions de ténacité effective basées sur la valeur maximale sont donc liées entre elles mais ne sont pas équivalentes. Elles permettent néanmoins de classer les zones architecturées testées en fonction de leur performance de façon similaire d'une définition à l'autre.



**FIGURE 6.6** – Étude des valeurs maximales de ténacités équivalentes, comparaison entre les définitions basées sur le chargement et la définition basée sur l'intégrale J.

La seconde façon de retenir une valeur unique de ténacité effective est de calculer la moyenne des grandeurs proposées pendant toute la propagation. Pour les moyennes, aucune relation monotone entre les définitions n'a été trouvée. C'est pourquoi on s'intéresse ici à la répartition des résultats obtenus pour les simulations. La dispersion des données de  $G_c^{moy}$  est donnée en Figure 6.7. Les deux grandeurs qui s'appuient sur une analyse énergétique ( $G_c^{eq-J}$  et  $G_c^{eq-E}$ ) mènent des valeurs moyennes proches de  $G_c$ . Cela est dû au fait que la moyenne des taux de restitution de l'énergie reste  $G_c$  car l'énergie totale dissipée reste  $G_c e a_{max}$ . La définition qui s'appuie sur le déplacement fournit des valeurs supérieures à  $G_c$  alors que la définition qui s'appuie sur la force donne des valeurs inférieures à  $G_c$ . Le fait de définir la ténacité effective comme la moyenne des ténacités équivalentes mène à la conclusion que l'ajout des zones architecturées a un effet renforçant en déplacement, un effet affaiblissant en force et pas d'effet significatif en énergie. La seule définition qui est en mesure de représenter l'effet renforçant des zones architecturées est donc celle basée sur le chargement en déplacement. La Figure 6.8 compare les données ainsi obtenues avec la ténacité effective calculée comme le maximum de l'intégrale J. Ici, les mêmes remarques que pour la Figure 6.6 peuvent être faites. En particulier, les deux définitions comparées présentent une relation monotone. Par conséquent, si l'on classe les zones architecturées (représentées par leur comportement mécanique) sur la base du critère  $G_c^{moy-u}$ , le classement est similaire à celui fait sur les  $G_c^{max}$ .

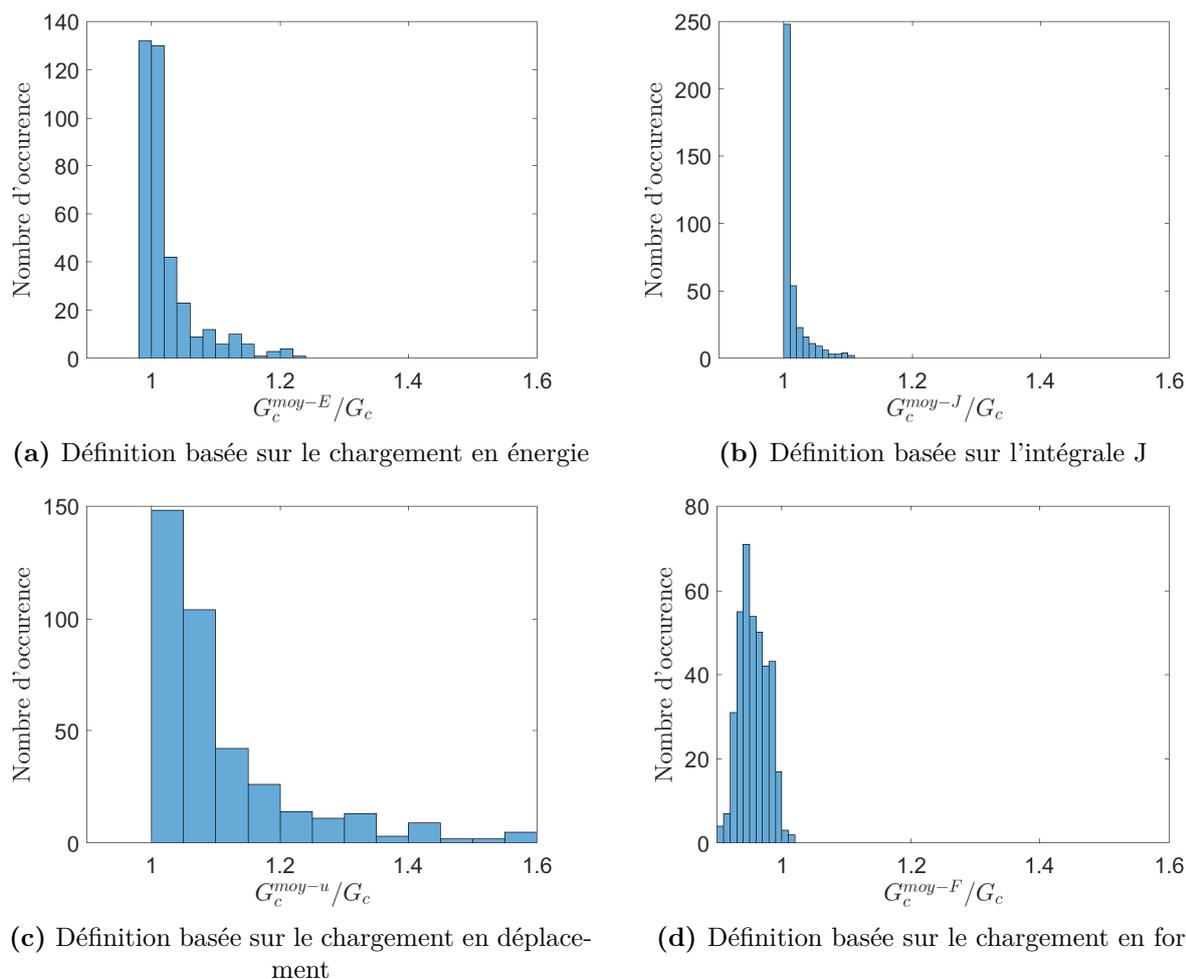
### 6.4.3 Discussions

Dans cette section on a comparé quatre définitions différentes du taux de restitution de l'énergie effectif en fonction de la longueur de fissure. Le calcul de la ténacité effective à partir de ces définitions est envisagé à travers la moyenne et le maximum pendant la propagation.

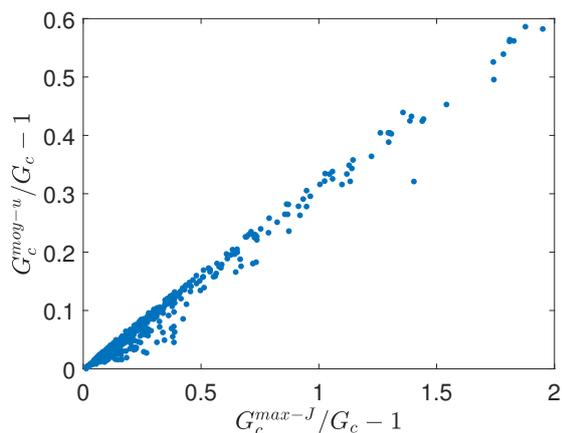
Les définitions s'appuyant sur la moyenne occultent certains effets intéressants de l'ajout de la zone architecturées. En particulier, cela donne l'impression que les zones architecturées n'ont aucun effet sur l'énergie nécessaire à faire propager la fissure. Or, il a été montré au Chapitre 4, vérifié expérimentalement au Chapitre 5, et observé sur la Figure 6.5, qu'il existe une plage de valeur de la longueur de fissure où l'ajout des zones architecturées a un effet renforçant en énergie. Les définitions basées sur la moyenne gomment les variations locales et ainsi ne peuvent pas représenter les effets locaux qui sont pourtant nombreux dans les phénomènes décrits dans cette thèse. Néanmoins, la définition  $G_c^{moy-u}$  permet de représenter que pendant toute la propagation l'ajout des zones architecturées a, en moyenne, un effet renforçant en déplacement imposé.

Les définitions basées sur le maximum, à l'inverse, sont pertinentes pour décrire les effets locaux, et ce pour les quatre définitions du taux de restitution de l'énergie équivalent. Ces quatre maxima représentent le même instant de la propagation : juste avant la fin de la zone. À cet instant, l'ajout des zones architecturées implique une augmentation de la force, du déplacement et de l'énergie à appliquer pour faire propager la fissure.

La comparaison entre la moyenne et le maximum pour la définition basée sur l'énergie mérite une discussion spécifique. On montre que le maximum permet de représenter les effets temporaires alors que la moyenne représente l'effet total qui est nul. Cette observation peut être mise en parallèle avec les résultats de Lebihain *et al.* [LEB 21] qui montrent



**FIGURE 6.7** – Répartition des valeurs obtenues pour les 400 comportements de zone testés en prenant la moyenne pendant la propagation des différentes ténacités équivalentes.



**FIGURE 6.8** – Comparaison des ténacités effectives calculées à partir du maximum de la définition basée sur l’intégrale J et de la moyenne de la définition sur le chargement en déplacement.

que le fait de prendre la moyenne et le maximum est équivalent lorsque la séparabilité des échelles est vérifiée. Plus la séparabilité des échelles est marquée<sup>1</sup>, moins on va observer de variation locale et donc les effets temporaires sont occultés. Dans le cas de l’effet de zones architecturées présenté dans cette thèse, on a intérêt à ne pas trop marquer la séparabilité des échelles pour pouvoir observer un effet renforçant en énergie.

Au final, on a identifié cinq définitions de ténacités effectives pour représenter les effets renforçants des zones architecturées sur la propagation de fissure. Ces cinq définitions sont composées des quatre maxima et de  $G_c^{moy-u}$ . Bien que donnant des valeurs différentes les unes des autres, ces grandeurs ont des relations monotones les unes avec les autres. Cela veut dire qu’elles permettent de classer les zones architecturées selon leur performance de manière similaire. Dans le cadre de la recherche d’optimisation de l’effet renforçant des zones, ces cinq définitions peuvent être utilisées de manière interchangeable.

La définition  $G_c^{max-u}$  est directement liée (Équation 6.5) au critère représentant le retard de la propagation en déplacement imposé, qui avait été proposé au Chapitre 4. Les cinq définitions de la ténacité effective proposées ici étant liées entre elles, elles sont également directement liées à ce critère. Cela signifie que l’effet du comportement matériau sur la ténacité effective est assimilable à celui présenté au paragraphe 4.4.2. En particulier, au premier ordre, la haute résistance à la fissuration est attribuée à une valeur faible du module de Young dans la direction verticale.

1. On parle ici de la séparabilité des échelles entre la taille de la zone architecturée et la taille caractéristique de la structure.

## 6.5 Bilan sur la question de la ténacité effective

Dans ce chapitre, plusieurs stratégies permettant de définir la ténacité effective d'une configuration avec zones architecturées hors du chemin de fissure ont été présentées. Certaines sont directement liées aux effets renforçants identifiés au Chapitre 4 et aux critères qui avaient été utilisés dans ce chapitre.

Afin de comparer les différentes définitions, des tests numériques ont été réalisés sur un problème en *Surfing Boundary Conditions*. Cette étude permet de généraliser les résultats à toute géométrie d'éprouvette ayant une fissure sollicitée en mode I par un chargement suffisamment lointain. Des effets similaires aux études sur les éprouvettes CT et TDCB ont été observés. Cela permet d'affirmer que les effets observés aux Chapitres 4 et 5 sont intrinsèquement liés à la présence de zones architecturées et non un effet de structure propre à ces éprouvettes. Seule l'instabilité snap-back n'a pas pu être observée, car le chargement étudié dans ce chapitre est indépendant de la longueur de fissure.

Parmi les huit stratégies proposées, cinq permettent de représenter l'effet renforçant des zones architecturées. Il s'agit surtout de définitions basées sur les grandeurs maximales pendant la propagation, car les valeurs moyennes ont tendance à occulter les effets locaux qui sont intéressants dans ce cas d'étude. On montre que ces cinq définitions sont équivalentes dans notre étude dans le sens où elles permettent de classer les zones architecturées testées dans un ordre très similaire. Ces cinq définitions peuvent donc être utilisées pour la mesure de performance de la configuration. Cependant, cela ne permet pas, *a priori*, de conclure sur la pertinence de ces définitions de ténacités effectives pour l'homogénéisation ou pour des comportements hors du spectre de cette thèse.

Le fait d'avoir une mesure de la performance de la configuration ouvre la possibilité de faire de l'optimisation paramétrique pour trouver le comportement de la zone architecturée *idéale*. Dans le cas étudié ici, il semble que les effets renforçants soient liés à une très faible raideur de la zone. Cela veut dire que si l'on effectue une optimisation ayant pour but de maximiser la ténacité effective, on obtiendra probablement une zone avec un module de Young vertical tendant vers zéros. Cependant, cela ne paraît pas forcément optimal pour des applications industrielles. Pour aller jusqu'à l'optimisation, il faut donc définir un compromis, ce qui devra être adapté à l'application recherchée.



# Cinquième partie

## Conclusions et perspectives



---

Cette dernière partie présente les conclusions du travail réalisé dans cette thèse en commençant par un résumé des différents résultats significatifs. Ensuite, on discute en quoi ces résultats répondent à la question originellement posée et en quoi ils contribuent à la connaissance dans le domaine d'étude. Les limitations sont également évoquées et quelques perspectives ouvertes par ce travail sont données.

## Synthèse des résultats

L'objectif fixé dans cette thèse était d'explorer la possibilité d'augmenter la résistance à la propagation de fissure, en ajoutant des zones architecturées. Pour cela, des outils pour l'étude de la fissuration d'éprouvettes issues de l'impression 3D ont été mis en place. Il s'agit à la fois d'un modèle numérique basé sur un algorithme par longueur d'arc, d'un montage expérimental, mais aussi d'un ensemble d'hypothèses qui forment un cadre adapté à représenter la physique de ce problème. Cela a permis de mettre en lumière les difficultés qui existent lors de la corrélation entre approches numériques et expérimentales en mécanique de la rupture. Elles viennent en particulier de la sensibilité accrue des phénomènes aux conditions aux limites, même lointaines. Les outils numériques et expérimentaux ainsi mis en place ont ensuite été appliqués au problème de propagation de fissure entre des zones architecturées. Un code d'homogénéisation a également été développé pour aider à la modélisation des zones architecturées et les décrire du point de vue de leur comportement mécanique.

L'analyse des résultats numériques révèle plusieurs effets renforçants de l'ajout des zones architecturées. Ces effets sont catégorisés en deux groupes : des effets locaux qui finissent par être compensés en fin de propagation et un effet permanent. Les effets locaux sont un retard de la propagation en déplacement imposé et une augmentation de l'énergie nécessaire à atteindre une certaine plage de valeur de la longueur de fissure. L'effet permanent est issu de l'instabilité *snap-back* qui entraîne l'apparition d'une contribution supplémentaire au bilan énergétique : l'énergie cinétique. Ainsi, l'énergie nécessaire à rompre entièrement la structure est augmentée. Les effets locaux sont retrouvés de façon très précise dans les expériences réalisées. L'instabilité *snap-back*, de son côté, est observée mais dû à des effets dynamiques non pris en compte dans le modèle, la fissure ne s'arrête pas. Cela empêche d'observer l'augmentation de l'énergie à fournir pour rompre l'éprouvette. Une très bonne corrélation entre les approches numériques et expérimentales a été observée. Cela confirme la robustesse des méthodes numériques utilisées ici pour représenter la problématique étudiée.

Enfin, le choix du critère pour évaluer la performance des zones architecturées a été discuté, à travers la comparaison de plusieurs définitions de la ténacité effective. Certaines définitions de cette grandeur issues de la littérature ont permis de caractériser les effets renforçants identifiés précédemment. Au final, les résultats de comparaison montrent qu'il est possible d'évaluer les phénomènes renforçants en terme de propagation par un unique scalaire.

---

## Contributions du travail de thèse

Les résultats issus des recherches effectuées dans le cadre de cette thèse permettent de répondre à la question initialement posée. Il est effectivement possible de modifier le phénomène de propagation de fissure en ajoutant des zones architecturées hors du chemin de fissure. De plus, cette modification peut être vue comme une amélioration de la résistance à la propagation de fissure, car plusieurs phénomènes renforçants ont été identifiés. Cela a permis d'explorer un nouveau champ de possibilités pour l'utilisation des matériaux architecturés.

Les effets observés peuvent être utilisés avantageusement. Appliqué à des problèmes industriels, l'ajout de zones architecturées peut retarder la propagation de fissure jusqu'à un certain seuil. Cela peut permettre de retarder la défaillance de la structure afin d'augmenter la durée de vie et donner le temps de réagir entre la détection de la fissure et cette défaillance. C'est surtout les effets locaux qui permettent cette application. L'instabilité *snap-back* est intéressante car elle arrive après un grand stockage d'énergie dans l'éprouvette. Cependant, dans la plupart des cas d'application, on ne souhaitera pas faire apparaître d'instabilité car cela mène à une perte de contrôle des phénomènes de fissuration. Ainsi, il paraît pertinent de placer les zones architecturées de telle sorte à ce que le début de l'instabilité, si elle existe, soit peu après la longueur de fissure que l'on considère comme critique et que l'on souhaite ne pas dépasser.

L'étude de ce problème a également permis d'aborder une question non résolue et qui suscite un vif intérêt dans la communauté de la mécanique de la rupture : celle de la ténacité effective. Un lien entre certaines définitions pour la configuration étudiée a été mis en évidence.

Au-delà des résultats eux-mêmes, quelques commentaires peuvent être faits sur la démarche adoptée pendant cette thèse, et en particulier sur la relation entre les approches numériques et expérimentales. Il existe un réel dialogue entre ces deux approches et les liens peuvent être détaillés en plusieurs aspects :

- *Les essais nourrissent le modèle.* Les essais servent à tester des hypothèses et à choisir laquelle est la plus adaptée. Cela a été particulièrement mis en lumière dans la discussion sur l'effet des conditions aux limites. Une approche mixte numérique et expérimentale est même utilisée pour discriminer les effets des conditions aux limites du reste des phénomènes. Les essais servent également à caractériser le matériau. La compréhension des phénomènes est alors essentielle pour ne pas simplement ajuster les paramètres matériaux afin de retrouver les données expérimentales, ce qui pourrait mener à un manque de reproductibilité des résultats.
- *Le calcul aide la mise en place des essais.* Les outils de simulations sont ensuite utilisés pour guider le choix des essais à réaliser. Ils permettent de tester un grand nombre de configurations à moindre coût et sont donc utilisés pour choisir la géométrie des éprouvettes à tester. La simulation s'est également avérée précieuse lors de la rencontre de difficultés expérimentales comme la bifurcation de fissure. Elle a permis dans ce cas de trouver des configurations plus favorables à ce que l'on souhaite observer.
- *Les essais valident les résultats numériques.* Cette dernière utilisation montre que le modèle, calibré sur un cas de référence, est toujours pertinent dans le cadre de son

---

utilisation finale, ici en présence de zones architecturées. Cela permet de discriminer entre les résultats numériques qui ont une réalité physique et ceux qui viennent d'un biais du modèle.

## Limites et perspectives

La question à l'origine de cette thèse, celle de l'utilisation de matériaux architecturés pour augmenter la résistance à la propagation de fissure, est très large. Afin de la traiter de manière rigoureuse, il a fallu restreindre l'étude à des configurations spécifiques, qui ne couvrent pas l'intégralité du champ des possibles. Quelques possibilités d'ouverture sont présentées ici.

### Effets non pris en compte

Une des hypothèses qui a été faite dans ce travail est que la fissure se propage en ligne droite, selon les conditions de symétrie. Or, il a été observé que la fissure a tendance à bifurquer et il a fallu *forcer* la propagation en ligne droite dans les expériences. On peut à présent se poser la question de l'existence de configurations où la fissure reste naturellement droite. Pour cela, une des méthodes qui peut être utilisée est de tester numériquement des configurations en cherchant à maximiser la valeur du T-stress, et trouver des cas où celle-ci est positive.

Le fait d'avoir une fissure qui change de direction peut, en soit, être intéressant. L'étude des cas où la fissure bifurque peut être envisagée. Ce qui se passe quand la pointe est dans la zone architecturée est également un domaine d'intérêt qui n'a pas été étudié pendant cette thèse.

D'autre part, l'étude réalisée ici se concentre sur des configurations invariantes dans l'épaisseur, de telle sorte que des hypothèses 2D puissent être utilisées. Cependant, certains effets tridimensionnels pourraient être intéressants à explorer. Toutefois, cette étude serait considérablement plus complexe, tant du point de vue expérimental que numérique.

Une des hypothèses qui a influé les résultats obtenus est celle des conditions quasi-statiques. Le fait de ne pas prendre en compte des effets dynamiques a empêché de décrire la fin de l'instabilité observée. De futures études pourraient se concentrer sur l'influence de l'inertie ou des phénomènes de réflexion d'ondes pour comprendre pourquoi la fissure dynamique ne s'arrête pas. En particulier, il serait intéressant de comprendre les énergies en jeux dans cette phase.

### Vers des applications réelles

Au terme de ce travail, on a évoqué la possibilité d'utiliser les phénomènes renforçants identifiés dans des cas d'application réels. Cependant, cette application n'est pas directe à partir des résultats présentés ici et quelques études supplémentaires seraient nécessaires.

Premièrement, dans ce travail, le chargement a été défini comme un pur mode I, avec des conditions quasi-statiques. Pour aller vers l'application à des cas industriels, des chargements plus complexes doivent être envisagés. Il s'agit par exemple de tester des propagations en mode II, mode III et en multi-mode. On peut aussi imaginer étendre l'étude réalisée ici aux cas de chargement en fatigue ou dynamique. Tout cela doit être réfléchi au regard de l'application choisie.

---

Les applications devront également se confronter à d'autres questions. En particulier, il faut être capable de caractériser les implications de la perte de raideur de la structure. Globalement, il est nécessaire d'évaluer la performance, pas seulement en terme de propagation de fissure, mais aussi sur les aspects fonctionnels de la structure étudiée. La définition de ce critère de performance plus généralisé que la ténacité effective définie ici pourrait être ensuite utilisé pour aller vers de l'optimisation pour trouver les configurations *idéales*.

### **La question de la ténacité effective**

Pour finir, lors de ce travail, la question de la ténacité effective a été évoquée. Elle a été traitée dans le cas restreint de la configuration choisie pour cette étude. Cependant, la comparaison montre qu'il est possible de représenter plusieurs phénomènes avec un unique scalaire. Il serait donc intéressant de voir si ce genre de résultat peut être trouvé pour d'autres configurations.

# Sixième partie

## Annexes



## Annexe A

# Adimensionnement du problème de fissuration d'une éprouvette CT

On présente ici l'adimensionnement du problème de propagation de fissure dans une éprouvette CT. Ce raisonnement est également valide pour une éprouvette TDCB. La première étape se porte sur la détermination du facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  dans une condition de chargement donnée. La géométrie de ce problème est illustrée en Figure A.1.

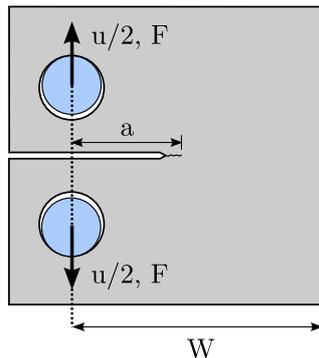


FIGURE A.1 – Éprouvette CT étudiée ici.

Les différentes grandeurs qui interviennent dans le problème d'identification du facteur d'intensité des contraintes sont :

- Les grandeurs géométriques : la taille de la fissure  $a$ , la largeur de l'éprouvette  $W$  (mesurée du centre du trou au bord droit dans le cas où la fissure se propage de gauche à droite) et l'épaisseur  $e$ . Le reste des dimensions seront considérées comme fixes et ne sont pas incluses dans la paramétrisation du problème.
- Les grandeurs matériaux : le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ .
- Les grandeurs relatives au chargement : le déplacement des goupilles  $u$ , la force de réaction  $F$  et le Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC)  $K_I$ .

Lorsqu'on envisage un problème en déplacement imposé, les grandeurs  $F$  et  $K_I$  sont les valeurs de sortie du problème et les autres sont des paramètres d'entrée. De par la linéarité du comportement du matériau, cette configuration est équivalente à celle en force imposée.

En prenant  $W$  comme longueur caractéristique et  $E$  comme pression caractéristique, on peut construire un nombre sans dimension par grandeur physique intervenant dans

le problème. Le théorème de Vachy-Buckingham, ou théorème II, permet de déduire que chaque valeur de sortie du problème peut être exprimé en fonction des autres nombres sans dimensions :

$$\frac{F}{EW^2} = f_1\left(\frac{a}{W}, \frac{e}{W}, \nu, \frac{u}{W}\right) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{K_I}{E\sqrt{W}} = f_2\left(\frac{a}{W}, \frac{e}{W}, \nu, \frac{u}{W}\right) \quad (\text{A.2})$$

Il est ensuite possible d'introduire des hypothèses liées à la connaissance physique des phénomènes. Ici on peut supposer que le FIC et la force évolue linéairement avec le déplacement. De plus, l'épaisseur n'impacte pas le FIC, alors qu'elle a un effet linéaire sur la force. Les équations peuvent alors être réécrites comme :

$$\frac{F}{Eue} = S\left(\frac{a}{W}, \nu\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{K_I\sqrt{W}}{Eu} = k\left(\frac{a}{W}, \nu\right) \quad (\text{A.4})$$

$S$  et  $k$  sont les fonctions qui décrivent le problème. Elles ne dépendent pas de  $E$ ,  $K_{IC}$  et  $e$ . Par conséquent, l'étude de propagation de fissure présentée sous forme adimensionnée ne dépend d'aucune de ces valeurs. Dans cette étude, on considère un coefficient de Poisson fixé, donc les fonctions dépendent uniquement de la longueur de fissure adimensionnée  $\bar{a} = a/W$ .

$S$  et  $k$  peuvent ensuite être liées en utilisant la définition du taux de restitution d'énergie. La variation d'énergie potentielle peut s'écrire :

$$d\mathcal{P} = dE^{el} - dW^{ext} = \frac{1}{2}(Fdu + udF) - Fdu = \frac{1}{2}(udF - Fdu) \quad (\text{A.5})$$

On en déduit le taux de restitution de l'énergie :

$$G = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial A}\Big|_{u=cste} = -\frac{1}{2}u\frac{\partial F}{\partial A}\Big|_{u=cste} = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a}Eu^2 = -\frac{1}{2W}\frac{\partial S}{\partial \bar{a}}Eu^2 \quad (\text{A.6})$$

Le taux de restitution de l'énergie peut également être écrit en utilisant la formule d'Irwin :

$$G = \frac{K_I^2}{E} = \frac{k^2(\bar{a})Eu^2}{W} \quad (\text{A.7})$$

En utilisant (A.6) et (A.7), on en déduit :

$$k^2(\bar{a}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \bar{a}} \quad (\text{A.8})$$

Pour traiter la propagation de fissure, on écrit la condition de propagation  $K_I = K_{IC}$ . Cela permet de trouver le chargement critique pour chaque longueur de fissure :

$$u_c = \frac{K_{IC}\sqrt{W}}{E} \frac{1}{k(\bar{a})}, \quad (\text{A.9})$$

$$F_c = K_{IC}\sqrt{W}e \frac{S(\bar{a})}{k(\bar{a})}. \quad (\text{A.10})$$

# Annexe B

## Algorithme par longueur d'arc

Dans cette partie les codes nécessaires à la simulation de propagation de fissure par longueur d'arc sont donnés. La procédure est divisée en plusieurs étapes :

1. Les fichiers de calculs pour chaque longueur de fissure sont générés. Cette étape nécessite un remaillage du domaine d'étude.
2. Les problèmes éléments finis sont résolus dans Abaqus
3. Un post-traitement permet d'identifier les fonctions  $S$  et  $k$ .

### Algorithme de remaillage

L'algorithme de remaillage est codé sous forme de script python utilisant des fonctions propres à Abaqus. Ce script génère un fichier de mise en donné (en *.inp*) par longueur de fissure testée. Le pas de longueur de fissure n'est pas constant pour raffiner les calculs dans les zones à fort gradients de comportement, notamment en début et fin de zone architecturée. Pour chaque longueur de fissure, la géométrie est modifiée, la pièce est maillée puis les fichiers de calcul sont générés. La phase de modification de la géométrie dépend fortement de la paramétrisation de celle-ci dans le modèle Abaqus. Ainsi, elle doit être modifiée pour être réutilisée sur un autre modèle. L'algorithme de remaillage consiste à diminuer progressivement la taille des mailles jusqu'à ce que l'algorithme d'Abaqus parvienne à mailler la pièce entièrement et sans erreur.

```
from abaqus import *
from abaqusConstants import *
from caeModules import *
from driverUtils import executeOnCaeStartup
import numpy as np

# Nom du modèle dans Abaqus
modelinit='model'

openMdb('geom.cae')

# Definition des longueurs de fissure à tester
```

```
A=np.concatenate((np.arange(1,10,1),np.arange(10,25,0.5),
                 np.arange(25,31,0.25),np.arange(31,39,1)))

for i in range(0,len(A),1):
    # Nom du fichier
    str1=str(A[i])
    str1 = str1.replace(".", ",")
    str1 = str1.replace(",0", "")
    if A[i]<10 :
        modelname='a0{nb}'.format(nb=str1)
    else :
        modelname='a{nb}'.format(nb=str1)
    mdb.Model(name=modelname, objectToCopy=mdb.models[modelinit])

    # Modification de la géométrie pour appliquer la longueur de
    # fissure.
    p=mdb.models[modelname].parts['Part-1']
    s = p.features['Partition face-2'].sketch
    mdb.models[modelname].ConstrainedSketch(name='__edit__',
        objectToCopy=s)
    s2 = mdb.models[modelname].sketches['__edit__']
    g, v, d, c = s2.geometry, s2.vertices, s2.dimensions,
        s2.constraints
    s2.setPrimaryObject(option=SUPERIMPOSE)
    d[1].setValues(value=A[i], )
    s2.unsetPrimaryObject()
    p.features['Partition face-2'].setValues(sketch=s2)
    del mdb.models[modelname].sketches['__edit__']
    p.regenerate()
    p.regenerate()
    a = mdb.models[modelname].rootAssembly
    a.regenerate()

    # Algorithme de remaillage
    partInstances =(a.instances['Part-1-1'], )
    a.generateMesh(regions=partInstances)
    V=a.verifyMeshQuality(criterion=ANALYSIS_CHECKS)
    region=a.getUnmeshedRegions()
    cnt=0
    while V['failedElements'] or region!=None :
        cnt=cnt+1
        e1 = a.instances['Part-1-1'].edges
        a.seedPartInstance(regions=partInstances, size=1.0-cnt/500.0,
            deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1)
        a.generateMesh(regions=partInstances)
        V=a.verifyMeshQuality(criterion=ANALYSIS_CHECKS)
```

---

```

region=a.getUnmeshedRegions()
print('Remeshed, mesh size = {nb}').format(nb=1.0+cnt/500.0)

# Création des fichiers de calculs
mdb.Job(name=modelname, model=modelname, description='',
        type=ANALYSIS, atTime=None, waitMinutes=0, waitHours=0,
        queue=None, memory=90, memoryUnits=PERCENTAGE,
        getMemoryFromAnalysis=True, explicitPrecision=SINGLE,
        nodalOutputPrecision=SINGLE, echoPrint=OFF,
        modelPrint=OFF, contactPrint=OFF, historyPrint=OFF,
        userSubroutine='', scratch='', resultsFormat=ODB,
        multiprocessingMode=DEFAULT, numCpus=1, numGPUs=0)
mdb.jobs[modelname].writeInput(consistencyChecking=OFF)

```

## Post-traitement dans Matlab

Cette fonction permet d'identifier les fonctions  $S$  et  $k$  pour une valeur de la longueur de fissure. Afin d'utiliser cette fonction, il faut au préalable définir les mots clés suivants dans les fichiers de mise en donné Abaqus :

```
*Node print, nset=RP, frequency=9999
U2, RF2
```

Cette commande permet que le déplacement et la force du point d'application des conditions aux limites soient écrites dans le fichier `.dat` lors de la résolution du problème par Abaqus.

```

function [S, k]=pst(filename)

% Constantes : Module de Young, épaisseur et longueur caractéristique
E=1281;
e=5;
W=40;

fid=fopen([filename '.dat'],'r');
a=fgets(fid);
while ischar(a)
    if strfind(a,'U2'), break, end
    a=fgets(fid);
end
a=fgets(fid);
a=fgets(fid);
a=fgets(fid);
Anum=str2num(a);
U=Anum(2);

```

```
F=Anum(3);  
while ischar(a)  
    if strfind(a,'K1'), break, end  
    a=fgets(fid);  
end  
K=str2num(a(32:end));  
fclose all;  
  
S=F/E/U/e;  
k=K*sqrt(W)/E/U;
```

## Annexe C

# Codes d'homogénéisation linéaire élastique avec conditions aux limites périodiques

Dans cette partie, l'implémentation de l'homogénéisation linéaire élastique est détaillée. Cette méthode permet, à partir d'un fichier Abaqus contenant la géométrie maillée d'une cellule élémentaire, de calculer le tenseur d'élasticité effectif. La méthode présentée ici est celle qui utilise les conditions aux limites périodiques. Cette procédure est entièrement codée dans Matlab et s'organise en plusieurs étapes :

1. Les fichiers de mise en données sont créés pour chaque cas de chargement. En particulier, les conditions aux limites périodiques sont ajoutées.
2. Les trois problèmes éléments finis, correspondant aux trois cas de chargement en 2D, sont résolus.
3. Un post-traitement est réalisé pour mesurer les moyennes des contraintes dans la cellule.
4. Le calcul du tenseur d'élasticité est identifié à partir des contraintes moyennes et des déformations macroscopiques imposées correspondantes.

## Génération des fichiers de calcul avec les conditions aux limites périodiques

La fonction qui permet d'écrire le fichier de calcul avec les conditions aux limites est détaillée ici. Elle prend en entrée le nom du fichier contenant le maillage de la cellule élémentaire et un entier correspondant au chargement (1 = traction horizontale, 2 = traction verticale, et 3 = cisaillement) . En plus d'écrire le fichier de mise en données éléments finis, cette fonction mesure la taille globale de la cellule, ce qui sera ensuite utile pour le calcul des contraintes moyennes.

L'idée dans ce code est de créer des sets nœuds ordonnés correspondant aux différents bords de la cellule, afin de pouvoir définir des équations liant les nœuds deux à deux. Le chargement est appliqué sur un nœud *RP* qui n'est pas rattaché à la géométrie, mais inclus dans les équations. Des fichiers textes *INPUTA.txt* et *INPUTB.txt* sont utilisés

pour écrire les commandes Abaqus qui ne changent pas d'un cas à l'autre. En particulier, il est indiqué dans le premier fichier texte un couplage entre un nœud au centre (appelé *CENTRE* et non relié à la géométrie) et l'intégralité de la bordure de la cellule (*BC*). L'idée est d'imposer un déplacement moyen nul du solide en fixant le nœud central et en lui faisant correspondre le déplacement moyen de la bordure.

Le code est donné ci-après :

```
function [Lx,Ly]=geninput(filename,chgmt)

fin=fopen(filename,'r');
fout=fopen([filename(1:end-4) '_chgmt' num2str(chgmt) '.inp'],'w');

a=fgets(fin);

% Recuperation du maillage
while ischar(a)
    if strfind(a,'*Node'), break, end
    fprintf(fout,a);
    a=fgets(fin);
end
fprintf(fout,a);
a=fgets(fin);
while ischar(a)
    if strfind(a,'*Element'), break, end
    Anum=str2num(a);
    Nodes(Anum(1),1)=Anum(2);
    Nodes(Anum(1),2)=Anum(3);
    fprintf(fout,a);
    a=fgets(fin);
end

Lx=max(Nodes(:,1))-min(Nodes(:,1));
Ly=max(Nodes(:,2))-min(Nodes(:,2));

while ischar(a)
    if strfind(a,'*End Assembly'), break, end
    fprintf(fout,a);
    a=fgets(fin);
end

%% Creation de noeuds de référence
fprintf(fout,['**\n *Node\n 1,1., 0. , 0.\n']);
fprintf(fout,['**\n *Node\n 2,0., 0. , 0.\n']);
fprintf(fout,['*Nset, nset=RP\n 1,\n']);
fprintf(fout,['*Nset, nset=CENTRE\n 2,\n']);
```

---

```

%% Creation des sets
% Recherche des noeuds sur la bordure
TOP=find((abs(Nodes(:,2)-Ly/2)<1e-5));
TOP_SANSBORD=find(all([(abs(Nodes(:,2)-Ly/2)<1e-5),abs(Nodes(:,1))~=Lx/2],2));
BTM=find((abs(Nodes(:,2)+Ly/2)<1e-5));
BTM_SANSBORD=find(all([(abs(Nodes(:,2)+Ly/2)<1e-5),abs(Nodes(:,1))~=Lx/2],2));
LEFT=find((Nodes(:,1)==-Lx/2));
LEFT_SANSBORD=find(all([Nodes(:,1)==-Lx/2,(abs(Nodes(:,2))<Ly/2)],2));
RIGHT=find((Nodes(:,1)==Lx/2));
RIGHT_SANSBORD=find(all([Nodes(:,1)==Lx/2,(abs(Nodes(:,2))<Ly/2)],2));
BC=[TOP;BTM;RIGHT_SANSBORD;LEFT_SANSBORD];

% Ranger les set par ordre de coordonnées (x ou y) croissantes
A=[Nodes(TOP,1), TOP]; A=sortrows(A); TOP=A(:,2);
A=[Nodes(TOP_SANSBORD,1), TOP_SANSBORD]; A=sortrows(A); TOP_SANSBORD=A(:,2);
A=[Nodes(BTM,1), BTM]; A=sortrows(A); BTM=A(:,2);
A=[Nodes(BTM_SANSBORD,1), BTM_SANSBORD]; A=sortrows(A); BTM_SANSBORD=A(:,2);
A=[Nodes(RIGHT,2), RIGHT]; A=sortrows(A); RIGHT=A(:,2);
A=[Nodes(RIGHT_SANSBORD,2), RIGHT_SANSBORD]; A=sortrows(A); RIGHT_SANSBORD=A(:,2);
A=[Nodes(LEFT,2), LEFT]; A=sortrows(A); LEFT=A(:,2);
A=[Nodes(LEFT_SANSBORD,2), LEFT_SANSBORD]; A=sortrows(A); LEFT_SANSBORD=A(:,2);

% Ecriture des sets
fprintf(fout, '*Nset, nset=TOP, instance=Part-1-1, unsorted\n');
id=1;
while id<length(TOP+1)
    for i=id:id+9
        if(i>length(TOP+1)), break, end
        fprintf(fout, [num2str(TOP(i)) ', ']);
    end
    id=id+10;
    fprintf(fout, '\n');
end

-----
Tous les autres sets sont écrits de la même façon
-----

%% Génération des équations
if chgmt==1
    for i=1:length(RIGHT)
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(RIGHT(i)) ', 2, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(LEFT(i)) ', 2, -1.\n']);
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n3\n');
    end

```

---

```
fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(RIGHT(i)) ', 1, 1.\n']);
fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(LEFT(i)) ', 1, -1.\n']);
fprintf(fout, ['RP, 1, -1.\n']);
end
for i=1:length(TOP_SANSBORD)
    fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(TOP_SANSBORD(i)) ', 1, 1.\n']);
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(BTM_SANSBORD(i)) ', 1, -1.\n']);
    fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(TOP_SANSBORD(i)) ', 2, 1.\n']);
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(BTM_SANSBORD(i)) ', 2, -1.\n']);
end
end

if chgmt==2
    for i=1:length(TOP)
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(TOP(i)) ', 1, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(BTM(i)) ', 1, -1.\n']);
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n3\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(TOP(i)) ', 2, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(BTM(i)) ', 2, -1.\n']);
        fprintf(fout, ['RP, 2, -1.\n']);
    end
    for i=1:length(LEFT_SANSBORD)
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(RIGHT_SANSBORD(i)) ', 1, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(LEFT_SANSBORD(i)) ', 1, -1.\n']);
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(RIGHT_SANSBORD(i)) ', 2, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(LEFT_SANSBORD(i)) ', 2, -1.\n']);
    end
end

if chgmt==3
    for i=1:length(LEFT_SANSBORD)
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(RIGHT_SANSBORD(i)) ', 1, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(LEFT_SANSBORD(i)) ', 1, -1.\n']);
    end
    for i=1:length(LEFT)
        fprintf(fout, '**\n*Equation\n3\n');
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(RIGHT(i)) ', 2, 1.\n']);
        fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(LEFT(i)) ', 2, -1.\n']);
        fprintf(fout, ['RP, 2, -1.\n']);
    end
end
```

---

```

end
for i=1:length(TOP)
    fprintf(fout, '**\n*Equation\n3\n');
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(TOP(i)) ', 1, 1.\n']);
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(BTM(i)) ', 1, -1.\n']);
    fprintf(fout, ['RP, 1, -1.\n']);
end
for i=1:length(TOP_SANSBORD)
    fprintf(fout, '**\n*Equation\n2\n');
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(TOP_SANSBORD(i)) ', 2, 1.\n']);
    fprintf(fout, ['Part-1-1.' num2str(BTM_SANSBORD(i)) ', 2, -1.\n']);
end
end

fprintf(fout, '**\n')

%% Materiaux et debut du step
fchar=fopen(['INPUTA.txt'],'r');
a=fgets(fchar);
while ischar(a), fprintf(fout,a), a=fgets(fchar), end
fprintf(fout, '\n');

%% Chargement
if chgmt==1
    fprintf(fout, ['RP, 1, 1, ' num2str(Lx) '\n']);
end
if chgmt==2
    fprintf(fout, ['RP, 2, 2, ' num2str(Ly) '\n']);
end
if chgmt==3
    fprintf(fout, ['RP, 2, 2, ' num2str(Ly/2) '\n']);
    fprintf(fout, ['RP, 1, 1, ' num2str(Lx/2) '\n']);
end

%% Fin du step
fchar=fopen(['INPUTB.txt'],'r');
a=fgets(fchar);
while ischar(a), fprintf(fout,a), a=fgets(fchar), end

fclose all;

```

## Post-traitement : calcul des contraintes moyennes

L'étape de post-traitement est détaillée ici. La commande suivante doit au préalable être indiquée dans la mise en donnée Abaqus :

```
*El print, elset=ALL, frequency=9999
IVOL, S11, S22, S12
```

Cette commande permet d'écrire, pour chaque point d'intégration du modèle élément fini, le volume associé et les composantes du tenseur de contraintes obtenues. La contrainte moyenne est calculée en pondérant les contributions par leur volume associées et le volume total est calculé avec les dimensions  $Lx$  et  $Ly$  afin de prendre en compte les phases de vide.

```
function [S11moy,S12moy,S22moy]=pst(Filename,Lx,Ly)
```

```
Vtot=Lx*Ly;
```

```
fid=fopen(Filename,'rt');
a=fgets(fid);
cnt=1;
```

```
while ischar(a)
    if strfind(a,'IVOL'), break, end
    a=fgets(fid);
end
```

```
a=fgets(fid);
a=fgets(fid);
a=fgets(fid);
```

```
while ischar(a)
    if strfind(a,'MAXIMUM'), break, end
    if ~isempty(~any(str2num(a),1))
        Anum=str2num(a);
        dV(cnt)=Anum(3);
        S11(cnt)=Anum(4);
        S22(cnt)=Anum(5);
        S12(cnt)=Anum(6);
        cnt=cnt+1;
    end
    a=fgets(fid);
end
```

```
S11moy=S11'*dV/Vtot
S22moy=S22'*dV/Vtot
S12moy=S12'*dV/Vtot
```

```
fclose all;
```

## Annexe D

# Calcul des dimensions de la cellule hexagonale

Dans cette annexe, les dimensions de la cellule hexagonale sont calculées. La géométrie globale est donnée en Figure D.1. L'idée est de faire varier l'angle  $\theta$  et d'adapter les valeurs de  $l$ ,  $h$  et  $c$  afin de garder une dimension de cellule et une porosité constante.

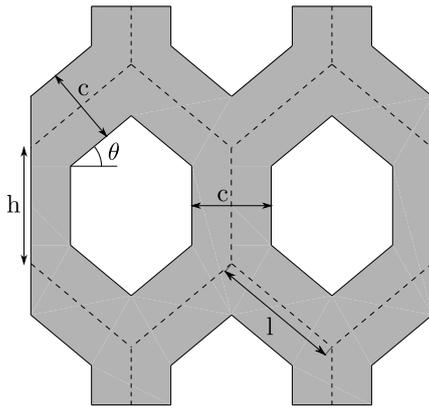


FIGURE D.1 – Dimensions du pavage hexagonal paramétrisé.

Pour garder les dimensions de la cellule ( $l_x$  et  $l_y$ ), les dimensions doivent être :

$$l = \frac{l_x}{2 \cos \theta} \quad (\text{D.1})$$

$$h = l_y - l \sin \theta \quad (\text{D.2})$$

Ensuite, la valeur de  $c$  doit être ajustée pour retrouver la porosité imposée. Pour exprimer cette dernière valeur, les dimensions du petit hexagone, celui qui définit le trou, doivent être exprimées :

$$l_2 = l - \frac{c}{2 \cos \theta} \quad (\text{D.3})$$

$$h_2 = h + 2 \sin \theta (l - l_2) - \frac{c}{\cos \theta} \quad (\text{D.4})$$

La porosité peut alors être exprimée :

$$p = 1 - \frac{2h_2 - l_2 \sin \theta}{2h - l \sin \theta} \quad (\text{D.5})$$

où  $h_2$  et  $l_2$  dépendent de  $c$ . Pour trouver la valeur de  $c$  qui donne la porosité voulue, cette dernière équation est résolue en utilisant un algorithme de Newton-Raphson. Les dimensions obtenues pour  $l_x = 1$  mm,  $l_y = 1$  mm,  $p = 0.55$  sont données dans le Tableau D.1.

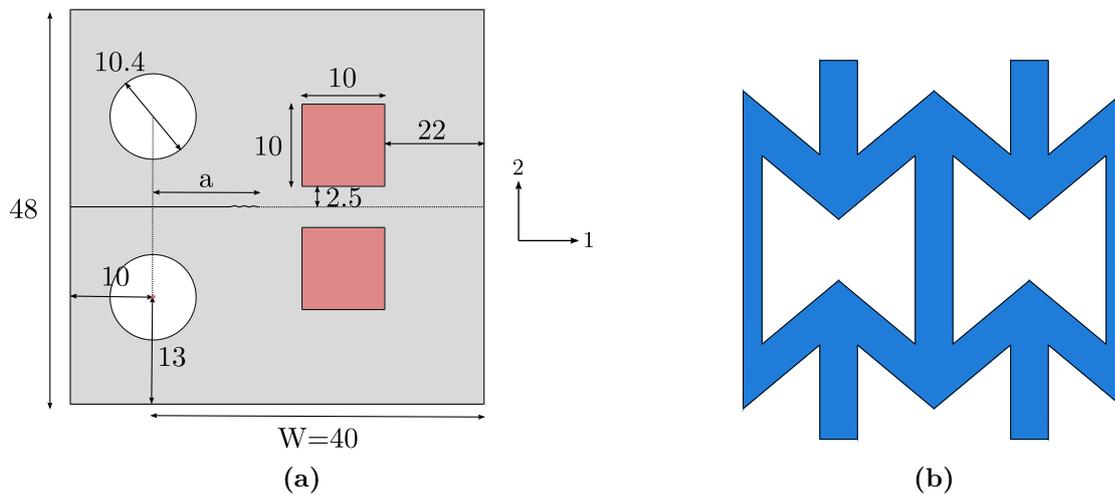
angle	$h$	$l$	$c$
-40°	1.42	0.65	0.197
-30°	1.29	0.58	0.216
-20°	1.18	0.53	0.232
-10°	1.09	0.51	0.246
0°	1	0.5	0.258
10°	0.91	0.51	0.269
20°	0.82	0.53	0.276
30°	0.71	0.58	0.280
40°	0.58	0.65	0.278
50°	0.40	0.78	0.266
60°	0.13	1	0.231

**TABLEAU D.1** – Dimensions en mm pour  $l_x = 1$  mm,  $l_y = 1$  mm et  $p = 0.55$

## Annexe E

# Effet des hypothèses 2D et du coefficient de Poisson sur les simulations de propagation en présence de zones architecturées

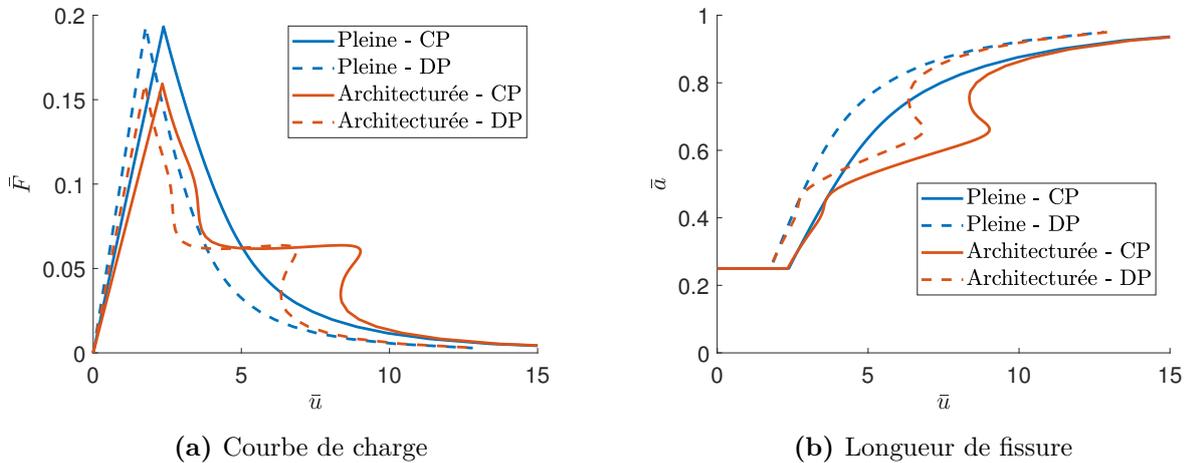
Dans cette annexe, on s'intéresse à l'effet du coefficient de Poisson du matériau constitutif, ainsi que du choix de l'hypothèse 2D sur les calculs réalisés au Chapitre 4. La géométrie globale du problème est rappelée en Figure E.1a. On se concentre ici sur un unique motif pour la zone architecturée : la cellule hexagonale dont l'angle est  $\theta = -40^\circ$ . La géométrie de ce motif est rappelée en Figure E.1b.



**FIGURE E.1** – Géométrie du problème étudié dans cette partie. (a) Dimensions globales de l'éprouvette. (b) Illustration du motif utilisé.

## Effet de l'hypothèse 2D

Les courbes de longueur de fissure et de force en fonction du déplacement pour les hypothèses de contraintes planes et déformations planes sont données en Figure E.2. Cette étude est réalisée à un coefficient de Poisson de  $\nu = 0.49$ .



**FIGURE E.2** – Effet de l'hypothèse 2D sur les courbes de charges et de longueur de fissure obtenues pour l'éprouvette pleine et celle avec le motif hexagonal.

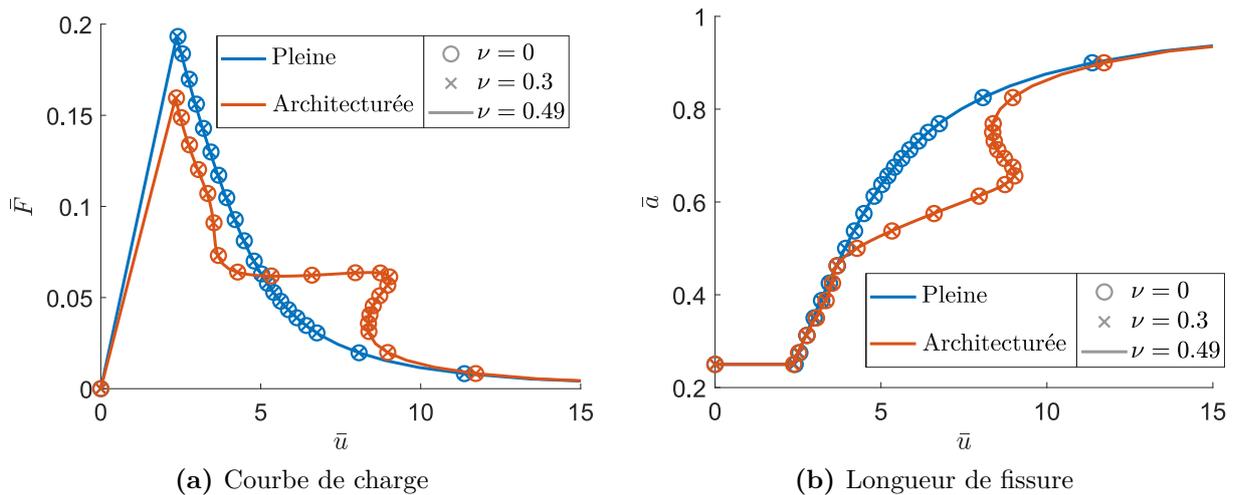
On observe un effet similaire tout au long de l'essai et d'une éprouvette à l'autre. Cet effet se caractérise par une modification de la grandeur  $\bar{u}$ . A même longueur de fissure, le déplacement qui mène à la propagation est plus élevé pour le cas des contraintes planes que pour les déformations planes. La force en fonction de la longueur de fissure semble peu affectée par l'hypothèse 2D. Le choix entre CP et DP semble agir comme un coefficient multiplicatif sur la valeur de  $\bar{u}$ . Ce coefficient est constant pendant la propagation et constant d'une éprouvette à l'autre.

L'hypothèse 2D utilisée a un effet significatif sur les grandeurs calculées pendant la propagation. Cependant, cet effet est un effet constant qui ne change pas les analyses qualitatives faites au Chapitre 4. Ainsi, il est possible de conclure que les phénomènes identifiés dans ce chapitre apparaissent également si l'hypothèse de déformations planes est choisie au lieu des contraintes planes.

---

## Effet du coefficient de Poisson

L'effet du coefficient de Poisson est testé dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes. Les courbes de charge et de longueur de fissure pour différents coefficients de Poisson sont données en Figure E.3. Que ce soit pour l'éprouvette pleine ou l'éprouvette architecturée, le coefficient de Poisson a un effet négligeable sur le comportement global. On peut ainsi conclure que l'étude réalisée au Chapitre 4 pour un coefficient de  $\nu = 0.49$  est généralisable à tous les coefficients de Poissons entre 0 et 0.49.



**FIGURE E.3** – Effet du coefficient de Poisson sur les courbes de charges et de longueur de fissure obtenues pour l'éprouvette pleine et celle avec le motif hexagonal.



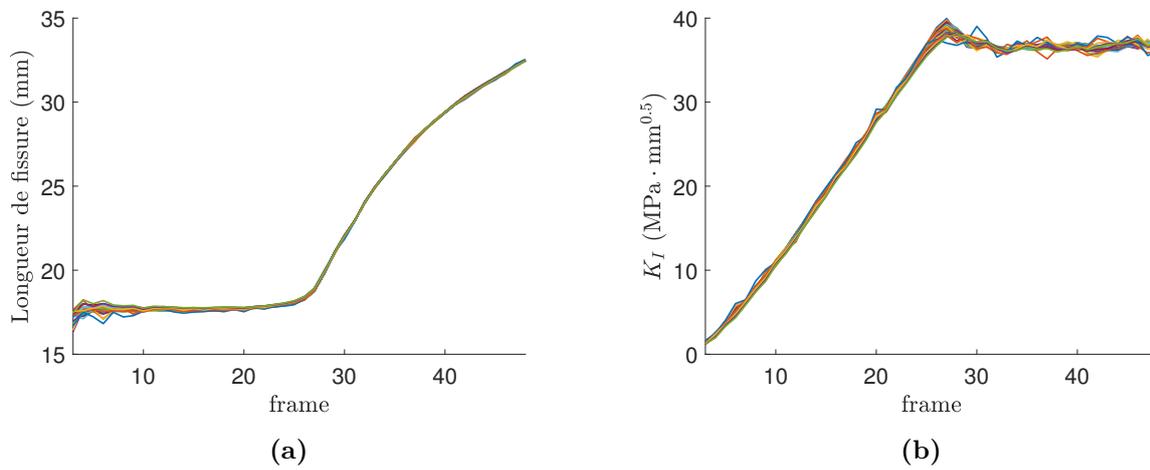
## Annexe F

# Sensibilité des grandeurs issues de la projection sur les séries de Williams aux dimensions de la zone de projection

Dans cette thèse, on a été amené à identifier la zone sur laquelle il est le plus pertinent d'effectuer la projection sur les séries de Williams pour identifier les paramètres relatifs à la rupture. Cette étude a été réalisée au paragraphe 2.3.3 et donne une zone avec  $r_{int} = 150$  px et  $r_{ext} = 300$  px. Cependant, au Chapitre 5, on a été amenés à utiliser une zone différente, avec en particulier une zone exclue en pointe de fissure (dont la taille est  $r_{int}$ ) plus petite. On propose d'étudier ici la sensibilité de des mesures par projection sur les séries de Williams aux dimensions de la zone dans le cas de référence, c'est-à-dire le cas d'une éprouvette sans zones architecturées.

Dans cette étude, on fait varier  $r_{int}$  entre 40 et 150 pixels, et  $r_{ext}$  entre 200 et 300 pixels. Les tests sont réalisés sur l'éprouvette de référence CT 1, et l'hypothèse de contraintes planes est utilisée. On obtient une quarantaine de mesures qui sont toutes tracées en Figure F.1. Les courbes sont quasiment toutes superposées, que ce soit pour la mesure de la longueur de fissure ou celle du facteur d'intensité des contraintes.

Cette étude permet de montrer que les dimensions de la zone ont très peu d'effet sur les grandeurs mesurées. La méthode de mesure des facteurs d'intensité des contraintes et de la longueur de fissure est très robuste, même en dehors de la zone identifiée comme idéale au paragraphe 2.3.3. Les critères alors utilisés sont probablement trop restrictifs et le  $r_{int}$  minimum utilisable est inférieur à 40 px. Lors de l'application de cette méthode à des éprouvettes avec des zones architecturées, une valeur de  $r_{int} = 40$  px peut donc être utilisée sans que cela n'ait d'influence sur la longueur de fissure mesurée.



**FIGURE F.1** – Grandeurs identifiées par DIC pour l'éprouvette CT 1. Faisceaux de courbes obtenus en faisant varier les dimensions de la zone de projection. (a) Longueur de fissure. (b) Facteur d'intensité des contraintes.

# Bibliographie

- [ABI 19] ABID N., PRO J. W., BARTHELAT F.  
Fracture mechanics of nacre-like materials using discrete-element models : Effects of microstructure, interfaces and randomness. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 124, 2019, p. 350–365, Elsevier Ltd.
- [ALL 97] ALLIX O., DEÛ J.-F.  
Delayed-Damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Eng. Trans.*, vol. 45, n° 1, 1997, p. 29–46.
- [ASH 03] ASHBY M. F., BRÉCHET Y. J.  
Designing hybrid materials. *Acta Mater.*, vol. 51, n° 19, 2003, p. 5801–5821.
- [ASH 13] ASHBY M.  
Designing architected materials. *Scr. Mater.*, vol. 68, n° 1, 2013, p. 4–7, Acta Materialia Inc.
- [BAR 57] BARNETT W., TROIANO A.  
Crack propagation in the hydrogen-induced brittle fracture of steel. *JOM*, vol. 9, 1957, p. 486–494.
- [BAR 59] BARENBLATT G. I.  
The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 23, n° 3, 1959, p. 622–636.
- [BAR 74] BARSOUM R. S.  
On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 10, n° 1, 1974, p. 25–37.
- [BAR 15] BARTHELAT F.  
Architected materials in engineering and biology : Fabrication, structure, mechanics and performance. *Int. Mater. Rev.*, vol. 60, n° 8, 2015, p. 413–430.
- [BAZ 78] BAZANT Z., ESTENSSORO L.  
Surface singularity. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 15, 1978, p. 405–426.
- [BAZ 98] BAZANT Z., PLANAS J.  
*Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, London, 1998.
- [BEL 99] BELYTSCHKO T., BLACK T.  
Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 45, n° 5, 1999, p. 601–620.
- [BES 06] BESNARD G., HILD F., ROUX S.  
"Finite-element" displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-Le Châtelier bands. *Exp. Mech.*, vol. 46, n° 6, 2006, p. 789–803.

- [BIG 11] BIGORGNE L.  
Mécanique et mécanismes de rupture dans le plan transverse du bois résineux. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2011.
- [BIT 96] BITTENCOURT T. N., WAWRZYNEK P. A., INGRAFFEA A. R., SOUSA J. L.  
Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D lefm problems. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 55, n° 2, 1996, p. 321–334.
- [BOR 01] BORNERT M., BRETHEAU T., GILORMINI P.  
*Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Paris : Hermès Science Publications, 2001.
- [BOU 00] BOURDIN B., FRANCFORT G. A., MARIGO J. J.  
Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n° 4, 2000, p. 797–826.
- [BOU 08] BOURDIN B., FRANCFORT G. A., MARIGO J. J.  
*The variational approach to fracture*, vol. 91. 2008.
- [BRA 98] BRAIDES A.  
*Approximation of Free-Discontinuity Problems*. Springer Berlin, Heidelberg, lecture no édition, 1998.
- [BRO 20] BRODNIK N. R., HSUEH C. J., FABER K. T., BOURDIN B., RAVICHANDRAN G., BHATTACHARYA K.  
Guiding and Trapping Cracks with Compliant Inclusions for Enhancing Toughness of Brittle Composite Materials. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 87, n° 3, 2020, p. 1–10.
- [BUI 76] BUI H. D.  
*Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1976.
- [BUI 06] BUI H. D.  
*Fracture Mechanics, Inverse Problems and Solutions*. Springer Dordrecht, 2006.
- [CAR 16] CARPINTERI A., LACIDOGNA G., CORRADO M., DI BATTISTA E.  
Cracking and crackling in concrete-like materials : A dynamic energy balance. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 155, 2016, p. 130–144, Elsevier Ltd.
- [CAR 20] CARLSSON J., ISAKSSON P.  
A statistical geometry approach to length scales in phase field modelling of fracture and strength of porous microstructures. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 200-201, 2020, p. 83–93.
- [CAS 20] CASTANIE B., BOUVET C., GINOT M.  
Review of composite sandwich structure in aeronautic applications. *Compos. Part C Open Access*, vol. 1, n° July, 2020, Elsevier B.V.
- [ÇEV 20] ÇEVİK Ü., KAM M.  
A Review Study on Mechanical Properties of Obtained Products by FDM Method and Metal/Polymer Composite Filament Production. *J. Nanomater.*, , 2020, page 6187149.
- [COM 16] COMBESCURE C., HENRY P., ELLIOTT R. S.  
Post-bifurcation and stability of a finitely strained hexagonal honeycomb subjected to equi-biaxial in-plane loading. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 88-89, 2016, p. 296–318, Elsevier Ltd.
- [COR 21] CORRE T., LAZARUS V.  
Kinked crack paths in polycarbonate samples printed by fused deposition modelling

- using criss-cross patterns. *Int. J. Fract.*, vol. 230, n° 1-2, 2021, p. 19–31, Springer Netherlands.
- [COT 80] COTTERELL B., RICE J.  
Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. Fract.*, vol. 16, n° 2, 1980, p. 155–169.
- [CRI 81] CRISFIELD M. A.  
A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-through". *Comput. Struct.*, vol. 13, 1981, p. 55–62.
- [DAG 22] DAGHIA F., FOUQUET V., MABILEAU L.  
Improving the crack propagation response of layered and bonded structures through dissipation mechanisms at different length scales. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 254-255, n° June, 2022, page 111910, Elsevier Ltd.
- [DJO 23] DJOURACHKOVITCH T., BLAL N., HAMILA N., GRAVOUIL A.  
Data assisted framework for topology design of micro-architected compliant mechanisms. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 265-266, n° December 2022, 2023, page 112116, Elsevier Ltd.
- [DOI 23] DOITRAND A., MOLNÁR G., ESTEVEZ R., GRAVOUIL A.  
Strength-based regularization length in phase field fracture. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 124, n° January, 2023, page 103728, Elsevier Ltd.
- [DUG 60] DUGDALE D. S.  
Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 8, 1960, p. 100–104.
- [EID 21] EID E., SEGHIR R., JULIEN R.  
Journal of the Mechanics and Physics of Solids Multiscale analysis of brittle failure in heterogeneous materials. vol. 146, n° September 2020, 2021.
- [ERD 63] ERDOGAN F., SIH G. C.  
On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Eng.*, vol. 85, n° 4, 1963, p. 519–525.
- [ESH 57] ESHELBY J. D.  
The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 241, 1957, p. 376–396.
- [ESP 14] ESPALIN D., RAMIREZ J. A., MEDINA F., WICKER R.  
Multi-material, multi-technology FDM : Exploring build process variations. *Rapid Prototyp. J.*, vol. 20, n° 3, 2014, p. 236–244.
- [EVA 18] EVANS J. W., SINHA K.  
Applications of fracture mechanics to quantitative accelerated life testing of plastic encapsulated microelectronics. *Microelectron. Reliab.*, vol. 80, n° November 2017, 2018, p. 317–327, Elsevier.
- [FAR 17] FARAHANI B. V., TAVARES P. J., BELINHA J., MOREIRA P. M.  
A Fracture Mechanics Study of a Compact Tension Specimen : Digital Image Correlation, Finite Element and Meshless Methods. *Procedia Struct. Integr.*, vol. 5, 2017, p. 920–927, Elsevier B.V.
- [FAR 18] FARAHANI B. V., TAVARES P. J., BELINHA J., MOREIRA P. M.  
Compact tension fracture specimen : Experimental and computational implementations on stress intensity factor. *J. Strain Anal. Eng. Des.*, vol. 53, n° 8, 2018, p. 630–647.

- [FAU 18] FAURE A.  
Optimisation de forme de matériaux et structures architecturés par la méthode des lignes de niveaux avec prise en compte des interfaces graduées. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2018.
- [FEY 99] FEYEL F.  
Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. *Comput. Mater. Sci.*, vol. 16, n° 1-4, 1999, p. 344–354.
- [FLE 10] FLECK N. A., DESHPANDE V. S., ASHBY M. F.  
Micro-architected materials : Past, present and future. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 466, n° 2121, 2010, p. 2495–2516.
- [FRA 98] FRANCFORT G. A., MARIGO J. J.  
Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n° 8, 1998, p. 1319–1342.
- [GAO 89] GAO H., RICE J. R.  
A first-order perturbation analysis of crack trapping by arrays of obstacles. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 56, n° 4, 1989, p. 828–836.
- [GAO 91] GAO H.  
Fracture analysis of nonhomogeneous materials via a moduli-perturbation approach. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 27, n° 13, 1991, p. 1663–1682, Pergamon Press plc.
- [GIB 82] GIBSON L. J., ASHBY M. F., SCHAJER G., ROBERTSON C.  
The mechanics of two-dimensional cellular materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 382, 1982, p. 25–42.
- [GIB 89] GIBSON L. J., ASHBY M. F., ZHANG J., TRIANTAFILLOU T. C.  
Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads-I. Modelling. *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 31, n° 9, 1989, p. 635–663.
- [GIB 97] GIBSON L. J., ASHBY M. F.  
*Cellular Solids : Structure and Properties*. Cambridge University Press, 1997.
- [GOD 15] GODA I., GANGHOFFER J. F.  
3D plastic collapse and brittle fracture surface models of trabecular bone from asymptotic homogenization method. *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 87, 2015, p. 58–82, Elsevier Ltd.
- [GOL 74] GOL'DSTEIN R. V., SALGANIK R. L.  
Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *Int. J. Fract.*, vol. 10, n° 4, 1974, p. 507–523.
- [GOS 98] GOSZ M., DOLBOW J., MORAN B.  
Domain Integral Formulation for Stress Intensity Factor Computation Along Curved 3 D Interface Cracks. *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, n° 15, 1998, p. 1763–1783.
- [GRA 02] GRAVOUIL A., MOËS N., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II : Level set update. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 53, n° 11, 2002, p. 2569–2586.
- [GRI 20] GRIFFITH A.  
The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. Trans. R. Soc. London*, vol. 221, 1920, p. 163–198.

- [HAM 07] HAMAM R., HILD F., ROUX S.  
Stress intensity factor gauging by digital image correlation : Application in cyclic fatigue. *Strain*, vol. 43, n° 3, 2007, p. 181–192.
- [HAS 62] HASHIN Z., SHTRIKMAN S.  
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 10, n° 4, 1962, p. 343–352.
- [HEN 10] HENNINGER C., ROUX S., HILD F.  
Enriched kinematic fields of cracked structures. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 47, n° 24, 2010, p. 3305–3316, Elsevier Ltd.
- [HER 11] HERBIG M., KING A., REISCHIG P., PROUDHON H., LAURIDSEN E. M., MARROW J., BUFFIRE J. Y., LUDWIG W.  
3-D growth of a short fatigue crack within a polycrystalline microstructure studied using combined diffraction and phase-contrast X-ray tomography. *Acta Mater.*, vol. 59, n° 2, 2011, p. 590–601.
- [HIL 52] HILL R.  
The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc. Sect. A*, vol. 65, n° 5, 1952, p. 349–354.
- [HIL 63] HILL R.  
Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, n° 5, 1963, p. 357–372.
- [HIL 65] HILL R.  
A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 13, n° 4, 1965, p. 213–222.
- [HOS 14] HOSSAIN M. Z., HSUEH C. J., BOURDIN B., BHATTACHARYA K.  
Effective toughness of heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 71, n° 1, 2014, p. 15–32, Elsevier.
- [HSU 16] HSUEH C. J., BHATTACHARYA K.  
Homogenization and Path Independence of the J-Integral in Heterogeneous Materials. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 83, n° 10, 2016, p. 1–3.
- [HUA 20] HUANG J., QIN Q., WANG J.  
A review of stereolithography : Processes and systems. *Processes*, vol. 8, n° 9, 2020, page 1138.
- [HUE 90] HUET C.  
Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 38, n° 6, 1990, p. 813–841.
- [HUI 85] HUI C. Y., RUINA A.  
Why K? High order singularities and small scale yielding. *Int. J. Fract.*, vol. 72, n° 2, 1985, p. 97–120.
- [IRW 57] IRWIN G.  
Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 24, 1957, p. 361–364.
- [IVA 15] IVASHOV I. V., SEMENOV A. S.  
Fracture Analysis of Piezoceramic CT-Specimen for Different Types of Crack Face

- Boundary Conditions. *Innov. Technol. Dev. Constr. Ind.*, vol. 725 de *Applied Mechanics and Materials* Trans Tech Publications Ltd, 2015, p. 949–954.
- [JAU 12] JAUFFRÈS D., MARTIN C. L., LICHTNER A., BORDIA R. K.  
Simulation of the toughness of partially sintered ceramics with realistic microstructures. *Acta Mater.*, vol. 60, n° 12, 2012, p. 4685–4694.
- [KAC 58] KACHANOV L.  
Time to the rupture process under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. SSR, Old. Tekh. Nauk.*, vol. 8, 1958, p. 26–31.
- [KRU 05] KRUTH J.-P., VANDENBROUCKE B., VAN VAERENBERGH J., MERCELIS P.  
Benchmarkin of different SLS/SLM processes as rapid manufacturing techniques. *PMI*, 2005, p. 177–181.
- [KUH 15] KUHN C., SCHLÜTER A., MÜLLER R.  
On degradation functions in phase field fracture models. *Comput. Mater. Sci.*, vol. 108, 2015, p. 374–384, Elsevier B.V.
- [KUH 16] KUHN C., MÜLLER R.  
A discussion of fracture mechanisms in heterogeneous materials by means of configurational forces in a phase field fracture model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 312, 2016, p. 95–116.
- [KUM 05] KUMAR P., NUKALA V. V., ŠIMUNOVIĆ S.  
Statistical physics models for nacre fracture simulation. *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 72, n° 4, 2005, p. 1–9.
- [KUM 15] KUMAR S., SINGH I. V., MISHRA B. K.  
A homogenized XFEM approach to simulate fatigue crack growth problems. *Comput. Struct.*, vol. 150, 2015, p. 1–22, Elsevier Ltd.
- [LAC 14] LACHAMBRE J.  
Développement d’une méthode de caractérisation 3D des fissures de fatigue à l’aide de la corrélation d’images numériques obtenues par tomographie X. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2014.
- [LAK 87] LAKES R.  
Foam Structures with a Negative Poisson’s Ratio. *Science (80-. )*, vol. 235, 1987, p. 1038–1040.
- [LAR 86] LARSEN G. C.  
*Elastic-Plastic Fracture Mechanics Analysis of a CT-Specimen - a Two-Dimensional Approach*. Approach. édition, 1986.
- [LAZ 11] LAZARUS V.  
Perturbation approaches of a planar crack in linear elastic fracture mechanics : A review. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 59, n° 2, 2011, p. 121–144.
- [LAZ 20] LAZARUS V., PRABEL B., CAMBONIE T., LEBLOND J. B.  
Mode I+III multiscale cohesive zone model with facet coarsening and overlap : Solutions and applications to facet orientation and toughening. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 141, 2020, page 104007, Elsevier Ltd.
- [LEA 16] LEANDER J., AL-EMRANI M.  
Reliability-based fatigue assessment of steel bridges using LEFM – A sensitivity analysis. *Int. J. Fatigue*, vol. 93, 2016, p. 82–91, Elsevier Ltd.

- [LEB 20] LEBIHAIN M., LEBLOND J. B., PONSON L.  
Effective toughness of periodic heterogeneous materials : the effect of out-of-plane excursions of cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 137, 2020, p. 6–8, Elsevier Ltd.
- [LEB 21] LEBIHAIN M., PONSON L., KONDO D., LEBLOND J. B.  
Effective toughness of disordered brittle solids : A homogenization framework. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 153, n° March, 2021, page 104463, Elsevier Ltd.
- [LI 13] LI Y., ZHOU M.  
Prediction of fracture toughness of ceramic composites as function of microstructure : I. Numerical simulations. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 61, n° 2, 2013, p. 472–488, Elsevier.
- [LOV 92] LOVE A. E. H.  
*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1892.
- [MAH 07] MAHMOUD K. M.  
Fracture strength for a high strength steel bridge cable wire with a surface crack. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 48, n° 2, 2007, p. 152–160.
- [MAR 16] MARIGO J.-J.  
Plasticité et Rupture. 2016.
- [MAT 76] MATSUSHIGE K., RADCLIFFE S. V., BAER E.  
The pressure and temperature effects on brittle-to-ductile transition in PS and PMMA. *J. Appl. Polym. Sci.*, vol. 20, n° 7, 1976, p. 1853–1866.
- [MAT 12] MATHIEU F., HILD F., ROUX S.  
Identification of a crack propagation law by digital image correlation. *Int. J. Fatigue*, vol. 36, n° 1, 2012, p. 146–154, Elsevier Ltd.
- [MES 20] MESGARNEJAD A., PAN C., ERB R. M., SHEFELBINE S. J., KARMA A.  
Crack path selection in orientationally ordered composites. *Phys. Rev. E*, vol. 102, n° 1, 2020, p. 1–21.
- [MIC 99] MICHEL J. C., MOULINEC H., SUQUET P.  
Effective properties of composite materials with periodic microstructure : A computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 172, n° 1-4, 1999, p. 109–143.
- [MIC 22] MICHEL J.-C., SUQUET P.  
Merits and limits of a variational definition of the effective toughness of heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 164, n° April, 2022, page 104889, Elsevier Ltd.
- [MIE 10] MIEHE C., WELSCHINGER F., HOFACKER M.  
Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 83, 2010, p. 1273–1311.
- [MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T.  
A Finite Element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 46, 1999, p. 131–150.
- [MOË 02] MOËS N., GRAVOUIL A., BELYTSCHKO T.  
Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I : Mechanical model. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 53, n° 11, 2002, p. 2549–2568.

- [MOL 17] MOLNÁR G., GRAVOUIL A.  
2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture. *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 130, n° February, 2017, p. 27–38, Elsevier B.V.
- [MOL 20] MOLNÁR G., DOITRAND A., ESTEVEZ R., GRAVOUIL A.  
Toughness or strength? Regularization in phase-field fracture explained by the coupled criterion. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 109, n° June, 2020, page 102736, Elsevier.
- [MOR 73] MORI T., TANAKA K.  
Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, vol. 21, n° 5, 1973, p. 571–574.
- [MOR 87] MORAN B., SHIH C.  
Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 27, n° 6, 1987, p. 615–642.
- [MOR 18] MORANO C., BRUNO L., PAGNOTTA L., ALFANO M.  
Analysis of crack trapping in 3D printed bio-inspired structural interfaces. *Procedia Struct. Integr.*, vol. 12, 2018, p. 561–566, Elsevier B.V.
- [MOR 20] MORANO C., ZAVATTIERI P., ALFANO M.  
Tuning energy dissipation in damage tolerant bio-inspired interfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 141, 2020, page 103965, Elsevier Ltd.
- [NGU 12] NGUYEN V. P.  
Homogenization-based multiscale crack modelling : from micro diffusive damage to macro cracks. , 2012, p. 1–35.
- [NGU 19] NGUYEN N., YVONNET J., RÉTHORÉ J., TRAN A. B.  
Identification of fracture models based on phase field for crack propagation in heterogeneous lattices in a context of non-separated scales. *Comput. Mech.*, vol. 63, n° 5, 2019, p. 1047–1068, Springer Berlin Heidelberg.
- [PAT 13] PATINET S., VANDEMBROUCQ D., ROUX S.  
Quantitative prediction of effective toughness at random heterogeneous interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, n° 16, 2013, p. 1–5.
- [PHA 11] PHAM K. H., AMOR H., MARIGO J. J., MAURINI C.  
Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *Int. J. Damage Mech.*, vol. 20, n° 618-652, 2011.
- [PHA 17] PHAM K. H., RAVI-CHANDAR K., LANDIS C. M.  
Experimental validation of a phase-field model for fracture. *Int. J. Fract.*, vol. 205, n° 1, 2017, p. 83–101.
- [PRA 12] PRAWOTO Y.  
Seeing auxetic materials from the mechanics point of view : A structural review on the negative Poisson’s ratio. *Comput. Mater. Sci.*, vol. 58, 2012, p. 140–153, Elsevier B.V.
- [PRI 99] PRIME M. B.  
Measuring Residual Stress and the Resulting Stress Intensity Factor in Compact Tension Specimen. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 22, n° 3, 1999, p. 195–204.
- [RÉT 05] RÉTHORÉ J., GRAVOUIL A., MORESTIN F., COMBESURE A.  
Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral. *Int. J. Fract.*, vol. 132, n° 1, 2005, p. 65–79.

- [RÉT 08] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.  
Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 75, n° 13, 2008, p. 3763–3781.
- [RÉT 11] RÉTHORÉ J., ROUX S., HILD F.  
Optimal and noise-robust extraction of Fracture Mechanics parameters from kinematic measurements. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 78, n° 9, 2011, p. 1827–1845.
- [RÉT 17] RÉTHORÉ J., DANG T. B. T., KALTENBRUNNER C.  
Anisotropic failure and size effects in periodic honeycomb materials : A gradient-elasticity approach. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 99, n° December 2015, 2017, p. 35–49.
- [RÉT 18] RÉTHORÉ J.  
. « Ufreckles », 2018.
- [REU 29] REUSS A.  
Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Ztschr. f. angew. Math und Mech.*, vol. 9, 1929, p. 49–58.
- [RIC 68] RICE J.  
A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, vol. 35, 1968, p. 379–386.
- [RIT 79] RITCHIE R. O., BATHE K. J.  
On the calibration of the electrical potential technique for monitoring crack growth using finite element methods. *Int. J. Fract.*, vol. 15, n° 1, 1979, p. 47–55.
- [ROU 03] ROUX S., VANDEMBROUCQ D., HILD F.  
Effective toughness of heterogeneous brittle materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 22, n° 5, 2003, p. 743–749.
- [ROU 06] ROUX S., HILD F.  
Stress intensity factor measurements from digital image correlation : Post-processing and integrated approaches. *Int. J. Fract.*, vol. 140, n° 1-4, 2006, p. 141–157.
- [ROU 09] ROUX S., RÉTHORÉ J., HILD F.  
Digital image correlation and fracture : An advanced technique for estimating stress intensity factors of 2D and 3D cracks. *J. Phys. D. Appl. Phys.*, vol. 42, n° 21, 2009.
- [ROU 15] ROUX-LANGLOIS C., GRAVOUIL A., BAIETTO M. C., RÉTHORÉ J., MATHIEU F., HILD F., ROUX S.  
DIC identification and X-FEM simulation of fatigue crack growth based on the Williams' series. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 53, 2015, p. 38–47, Elsevier Ltd.
- [SAI 55] SAINT-VENANT B.  
*Mém. savants étrangers*. 1855.
- [SAX 07] SAXENA S., RAMAKRISHNAN N.  
A comparison of micro, meso and macroscale FEM analysis of ductile fracture in a CT specimen (mode I). *Comput. Mater. Sci.*, vol. 39, n° 1 SPEC. ISS., 2007, p. 1–7.
- [SCH 20] SCHNEIDER M.  
An FFT-based method for computing weighted minimal surfaces in microstructures with applications to the computational homogenization of brittle fracture. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 121, n° 7, 2020, p. 1367–1387.

- [STE 76] STERN M., BECKER E. B., DUNHAM R. S.  
A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *Int. J. Fract.*, vol. 12, n° 3, 1976, p. 359–368.
- [STE 04] STEIN E., DE BORST R., HUGHES T. J.  
*Encyclopedia of computational mechanics*. Wiley, 2004.
- [SUO 92] SUO X. Z., COMBESCURE A.  
On the application of  $G(\Theta)$  method and its comparison with De Lorenzi's approach. *Nucl. Eng. Des.*, vol. 135, n° 2, 1992, p. 207–224.
- [SUT 83] SUTTON M., WOLTERS W., PETERS W., RANSON W., MCNEILL S.  
Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image Vis. Comput.*, vol. 1, n° 3, 1983, p. 133–139.
- [TAD 10] TADA H., PARIS P. C., IRWIN G. R.  
*The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition*. 2010.
- [TOU 97] TOUCHAL-MGUIL S.  
Une technique de corrélation d'images numériques : application à la détermination de courbes limites de formages et proposition d'un critère de striction. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1997.
- [TRI 23] TRICLOT J., CORRE T., GRAVOUIL A., LAZARUS V.  
Key role of boundary conditions for the 2D modeling of crack propagation in linear elastic Compact Tension tests. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 277, n° December 2022, 2023, page 109012, Elsevier Ltd.
- [VAS 16] VASOYA M., LAZARUS V., PONSON L.  
Bridging micro to macroscale fracture properties in highly heterogeneous brittle solids : weak pinning versus fingering. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 95, 2016, p. 755–773, Elsevier.
- [VOI 87] VOIGT W.  
Ueber das Doppler'sche Princip. *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften*, , n° 2, 1887, p. 41–51.
- [WAN 96] WANG Y., WILLIAMS J. G.  
Dynamic crack growth in tdcB specimens. *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 38, n° 10, 1996, p. 1073–1088.
- [WES 39] WESTERGAARD H. M.  
Bearing Pressures and Cracks : Bearing Pressures Through a Slightly Waved Surface or Through a Nearly Flat Part of a Cylinder, and Related Problems of Cracks. *J. Appl. Mech.*, vol. 6, n° 2, 1939, p. A49–A53.
- [WIL 57] WILLIAMS M. L.  
On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, vol. 24, 1957, p. 109–114.
- [XU 99a] XU S., REINHARDT H. W.  
Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture, Part II : Analytical evaluating and practical measuring methods for three-point bending notched beams. *Int. J. Fract.*, vol. 98, n° 2, 1999, p. 151–177.

- [XU 99b] XU S., REINHARDT H. W.  
Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture, Part III : Compact tension specimens and wedge splitting specimens. *Int. J. Fract.*, vol. 98, n° 2, 1999, p. 179–193.
- [YAU 80] YAU J. F., WANG S. S., CORTEN H. T.  
A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *J. Appl. Mech.*, vol. 47, n° 2, 1980, p. 335–341.
- [YVO 19] YVONNET J.  
*Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements*. Springer Cham, 2019.



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON.

NOM : TRICLOT

DATE de SOUTENANCE : 25/09/2023

Prénoms : Julie

TITRE : Ingénieure

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2023ISAL0061

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique (ED162)

Spécialité : Mécanique

#### RESUME :

Grâce au récent développement des technologies de fabrication additive, il est devenu possible de fabriquer des composants multi-échelles, où l'on contrôle complètement la microstructure. Il se pose aujourd'hui la question de la tenue en service de tels matériaux, notamment dans la perspective de diminuer les marges de sécurité en contrôlant mieux la résistance mécanique. Dans cette thèse, on se propose d'étudier la propagation de fissure sous chargement quasi-statique en présence de zones architecturées. On se concentre ici sur le cas où la fissure ne traverse pas les zones architecturées. Ces zones produisent donc un effet à distance. Cette question est étudiée à travers des approches numériques et expérimentales. Le modèle numérique est basé sur des calculs éléments finis et une propagation de fissure représentée par un algorithme par longueur d'arc. Le dispositif expérimental est constitué d'éprouvettes *Compact Tension* (CT) ou *Tapered Double Cantilever Beam* (TDCB) issues de l'impression 3D, la fissuration est faite par chargement lent avec suivi de la fissure grâce aux méthodes de corrélation d'images. La comparaison des approches numériques et expérimentales sur des éprouvettes non-architecturées permet de faire des hypothèses physiquement fondées pour la suite du travail. La prospection numérique permet de mettre en avant des effets intéressants : une augmentation locale de la résistance à la propagation et l'apparition d'une instabilité *snap-back*. Une validation expérimentale est ensuite recherchée. Les outils de calculs sont utilisés pour affiner les choix de géométries afin de faire face aux problématiques expérimentales. Les deux phénomènes observés dans la phase de prospection numérique sont retrouvés expérimentalement. Une étude paramétrique permet de vérifier que les tendances obtenues numériquement sont retrouvées dans les résultats expérimentaux. Enfin, l'analyse des phénomènes observés mène à une discussion sur la notion de ténacité effective.

MOTS-CLÉS : Propagation de Fissure, Matériaux Architecturés, Corrélation d'image, Analyse par Eléments Finis, Homogénéisation

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)

Directeur de thèse : Anthony Gravouil

Président de jury : Rafael Estevez

Composition du jury :  
Julien Réthoré  
Daniel Bonamy  
Rafael Estevez  
Djimeddo Kondo  
Anthony Gravouil  
Véronique Lazarus