



N°d'ordre NNT : 2024ISAL0004

**THESE de DOCTORAT DE L'INSA LYON,**  
préparée au sein de  
**L'INSA LYON**

**Ecole Doctorale ED 162 MEGA**  
**Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

**Spécialité de doctorat :**  
**GÉNIE MÉCANIQUE**

Soutenue publiquement le 09/01/2024, par :  
**Louis MESNY**

---

**Compréhension et optimisation du  
pompage énergétique multiphysique  
dans les absorbeurs de vibrations non-  
linéaires hybrides**

---

Devant le jury composé de

COLLET Manuel  
MICHON Guilhem

Directeur de recherche, HDR, ECL  
Professeur des Universités, ISAE-  
SUPAERO

Président du jury  
Rapporteur

SADOULET-REBOUL Émeline  
COLLETTE Christophe  
CHESNÉ Simon  
BAGUET Sébastien

Maître de conférences HDR, UBFC  
Professeur des Universités, ULiège  
Professeur des Universités, INSA Lyon  
Maître de conférences, INSA Lyon

Rapporteuse  
Examineur  
Directeur de thèse  
Codirecteur de thèse

LaMCoS - UMR CNRS 5259 - INSA de Lyon  
20, avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex (France)



## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
ED 206 CHIMIE	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>	<b>M. Stéphane DANIELE</b> C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
ED 341 E2M2	<b>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sandrine CHARLES</b> Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:e2m2.codir@listes.univ-lyon1.fr">e2m2.codir@listes.univ-lyon1.fr</a>
ED 205 EDISS	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</b> <a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Laboratoire ICBMS - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
ED 34 EDML	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 <a href="mailto:yann.de-ordenana@ec-lyon.fr">yann.de-ordenana@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Stéphane BENAYOUN</b> Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a>
ED 160 EEA	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a> Sec. : Philomène TRE COURT Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 <a href="mailto:secretariat.edeea@insa-lyon.fr">secretariat.edeea@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe DELACHARTRE</b> INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a>
ED 512 INFOMATHS	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:direction.infomaths@listes.univ-lyon1.fr">direction.infomaths@listes.univ-lyon1.fr</a>
ED 162 MEGA	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Philomène TRE COURT Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Etienne PARIZET</b> INSA Lyon Laboratoire LVA Bâtiment St. Exupéry 25 bis av. Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:etienne.parizet@insa-lyon.fr">etienne.parizet@insa-lyon.fr</a>
ED 483 ScSo	<b>ScSo<sup>1</sup></b> <a href="https://edsciencesociales.universite-lyon.fr">https://edsciencesociales.universite-lyon.fr</a> Sec. : Mélina FAVETON Tél : 04.78.69.77.79 <a href="mailto:melina.faveton@univ-lyon2.fr">melina.faveton@univ-lyon2.fr</a>	<b>M. Bruno MILLY</b> (INSA : J.Y. TOUSSAINT) Univ. Lyon 2 Campus Berges du Rhône 18, quai Claude Bernard 69365 LYON CEDEX 07 Bureau BEL 319 <a href="mailto:bruno.milly@univ-lyon2.fr">bruno.milly@univ-lyon2.fr</a>



# Résumé

Les absorbeurs passifs, également connus sous le nom de Tuned Mass Dampers (TMD), sont couramment utilisés pour réduire les vibrations. Leur principal avantage réside dans leur facilité de mise en œuvre. Cependant, leur plage d'efficacité est limitée, car ils sont conçus pour fonctionner à une fréquence spécifique. Au cours des dernières décennies, deux nouvelles voies ont émergé. Premièrement, l'hybridation qui combine des techniques de contrôle actif impliquant des actionneurs, des capteurs et des lois de contrôle avec un contrôle passif. Ce système combiné apporte une caractéristique "fail safe", ce qui signifie qu'il est robuste face aux défaillances des composants actifs et présente généralement des performances supérieures par rapport aux systèmes purement passifs. Deuxièmement, la fonctionnalisation des non-linéarités dans les absorbeurs de vibrations, on parle alors d'absorbeurs non-linéaires. Ces derniers peuvent être purement non linéaires, tels que le Nonlinear Energy Sink (NES), ou disposer en plus d'une partie linéaire, comme le Nonlinear Tuned Vibration Absorber (NLTVA). L'introduction de ces non-linéarités élargit la gamme d'applications des absorbeurs. Cependant, les non-linéarités peuvent également entraîner des phénomènes indésirables, tels que des solutions isolées ou des points de bifurcation, qui doivent être identifiés pour assurer un fonctionnement sûr et efficace. Par conséquent, l'objectif de cette thèse est de combiner ces approches afin de surmonter leurs limitations individuelles. Le manuscrit fournira un aperçu détaillé des outils utilisés pour analyser les systèmes à dynamique non-linéaire couplés à un contrôle actif. Ces outils serviront ensuite de base pour la compréhension et la validation d'un absorbeur non-linéaire hybride expérimental.

**Mots clés :** Pompage énergétique, Transfert énergétique, Absorbeurs de vibrations, Dynamique non-linéaire, Hybridation, Contrôle actif des structures, Méthode de l'équilibrage harmonique, Méthode des échelles multiples, Méthodes de continuation



# Abstract

Passive absorbers, also known as Tuned Mass Dampers (TMD), are commonly used to reduce vibrations. Their main advantage is that they are easy to install. However, their range of effectiveness is limited, as they are designed to operate at a specific frequency. Over the last few decades, two new approaches have emerged. Firstly, hybridisation, which combines active control techniques involving actuators, sensors and control laws with passive control. This combined system provides a 'fail-safe' characteristic, meaning that it is robust to failures of active components and generally offers superior performance compared with purely passive systems. Secondly, the functionalisation of non-linearities in vibration absorbers, referred to as non-linear absorbers. These can be purely non-linear, such as the Nonlinear Energy Sink (NES), or also have a linear component, such as the Nonlinear Tuned Vibration Absorber (NLTVA). The introduction of these non-linearities extends the range of applications for absorbers. However, non-linearities can also lead to undesirable phenomena, such as isolated solutions or bifurcation points, which need to be identified to ensure safe and efficient operation. Therefore, the objective of this thesis is to combine these approaches in order to overcome their individual limitations. The manuscript will provide a detailed overview of the tools used to analyse non-linear dynamic systems coupled with active control. These tools will then be used as a basis for understanding and validating an experimental hybrid non-linear absorber.

**Keywords** : Energy pumping, Energy transfert, Vibration absorbers, Nonlinear dynamics, Hybridisation, Active control of structures, Harmonic balance method, Method of multiple scales, Methods of continuation





# Préface

“If you don’t make mistakes, you’re not working on hard enough problems.  
And that’s a mistake.”  
Frank Wilczek, Prix Nobel de Physique.

Ce manuscrit retrace un condensé de mes connaissances acquises sur les absorbeurs de vibrations hybrides non-linéaires et présente les contributions de mes travaux durant ces trois dernières années. Les absorbeurs passifs linéaires étant étudiés depuis les années 1900 avec les travaux de Den Hartog, il est tout à fait judicieux de se demander quel est l'intérêt de continuer les recherches sur un sujet aussi ancien. En effet, la résolution des équations de la dynamique linéaire et non-linéaire ne pose presque plus de problème de nos jours. De plus, les temps de calcul pour des systèmes généralement ramenés à deux degrés de liberté et des machines portatives toujours plus performantes sont assez faibles. Alors pourquoi ? Tout d'abord, l'apport d'un nouveau domaine de recherche. Le terme "hybride" introduit le contrôle actif dans les absorbeurs passifs non-linéaires.

Malgré des chercheurs de plus en plus connectés, l'introduction d'un nouveau domaine de recherche dans ses propres travaux peut être assez compliquée. Le chercheur évolue tout au long de sa carrière dans la même communauté et n'a que très peu d'interaction avec celles des autres. Ceci peut-être dû à la difficulté du domaine ou aux faibles perspectives d'exploitation des systèmes résultants. Par exemple, l'expérimentation en dynamique non-linéaire reste encore, pour beaucoup une utopie irréalisable. Il est donc important d'expérimenter pour montrer que les phénomènes induits par les non-linéarités ne sont pas que le fruit de l'imagination du chercheur. Avec la connexion de ces deux domaines de recherche que sont la dynamique non-linéaire et le contrôle actif des structures, j'apporte une première pierre à je l'espère, un cairn bien plus grand.

# Remerciements

À ma maman

...

L'écriture des remerciements du manuscrit de thèse est à mon sens la partie la plus importante. Elle marque la fin de trois merveilleuses années passées aux LaMCoS et permet de remercier les personnes ayant contribué à l'obtention du grade de docteur.

En premier lieu, je tiens à remercier l'ensemble des membres de mon jury. Merci à Émeline Sadoulet-Reboul et Guilhem Michon d'avoir rapporté cette thèse, à Christophe Collette d'avoir examiné ces travaux et à Manuel Collet de m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance. Les interactions que j'ai pu avoir avec chacun d'entre vous tout long de ma thèse et en particulier le jour de la soutenance ont été très enrichissantes pour moi.

Ensuite, je veux remercier l'équipe DCS pour cet accueil très chaleureux et jovial qui n'a cessé durant ces trois années. Merci à Zahia, Éric, Régis, Didier et Clarisse pour leurs expériences et compétences qui m'ont beaucoup aidé. Les travaux scientifiques et les échanges que j'ai pu mener en parallèle de ma thèse avec Jonathan ont été d'une grande richesse, merci pour ça. Merci à Roberto que ce soit pour tous les moments passés en répétitions à faire des JAM jusqu'au bout de la nuit ou tous les moments scientifiques passés. Je tiens aussi à remercier David P pour m'avoir permis d'enseigner à l'INSA de Lyon et de m'avoir laissé quelques libertés pour explorer le métier d'enseignant. Enfin, merci aux doctorants, anciens doctorants et collègues Yvon, Martin et Guillaume P pour tout ce temps passé à rigoler dans le bureau 324325X ; Élias, Paul et Antoine pour la gestion "millimétré" du bar du laboratoire ; Arif pour tous tes super conseils ; Thibault pour notre belle collocation à Toulouse et l'aide pour la vidéo ; Jessè ou Jessé selon les jours pour toutes nos discussions scientifiques ; Pau pour ce séjour à Rome et toutes ces glaces ; Valentin M et Mathieu D pour toutes les discussions jusqu'à tard dans la nuit pour les JJCAB et tous les bons moments au bar ; Florian L pour tes magnifiques roulades à Compiègne ; Florian T, Nathanaël, Floriane, Maryne, Arthur, Moji pour tous les bons moments passés dans le patio et en salle de pauses. Vous êtes au top ! Un merci tout particulier à Antoine pour ces trois années côte à côte à rigoler avec tellement de

bons souvenirs qui resteront gravés !

Un grand merci à Martin, Anna, Guillaume S, Laury, Camille et tous les copains de m'avoir supporté toutes ces années à Besançon. On a énormément rigolé, et ce, quelles que soient les circonstances, ne changez rien !

Je tiens à remercier tout particulièrement Émeline Sadoulet-Reboul et Gaël Chevallier pour tout d'abord leurs inconditionnels investissements dans une formation de qualité, qui m'a permis d'obtenir un bagage important pour la thèse (c'est d'ailleurs là que m'est venue l'envie de faire une thèse). Mais surtout un grand merci à vous deux pour m'avoir transmis la passion qui vous anime aussi bien en recherche qu'en cours et d'avoir créé ma vocation pour le métier d'enseignant-chercheur.

Je tiens évidemment à remercier mes directeurs de thèse Simon et Sébastien pour m'avoir fait confiance durant ces trois années et pour tous ces moments passés aussi bien humains, professionnels. Je suis très fier d'avoir obtenu mon doctorat à vos côtés et ne vous remercierai jamais assez de tout l'enrichissement personnel et professionnel que vous m'avez apporté sur ces trois années.

Merci à ma famille qui a toujours été derrière moi, je suis conscient de la chance que j'ai de vous avoir. Un grand merci à Rachel pour toutes ces années de cours qui m'ont beaucoup aidé. Merci à ma maman pour son soutien durant toutes ces années. Merci de m'avoir laissé faire mes propres choix et de m'avoir permis d'en arriver là aujourd'hui.

Pour terminer, merci à toutes les personnes que je n'ai pu citer et qui m'ont accompagné durant toutes ces années.

# Sommaire

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Préface</b>	<b>v</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Sommaire</b>	<b>ix</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>3</b>
1.1 Dynamique non-linéaire . . . . .	5
1.1.1 Stabilité des systèmes non-linéaires et théorie des bifurcations . .	7
1.1.2 Les modes non-linéaires . . . . .	13
1.2 Méthodes de résolution numériques et analytiques pour la dynamique non-linéaire . . . . .	15
1.2.1 Calcul du régime transitoire . . . . .	16
1.2.2 Calcul du régime permanent . . . . .	17
1.2.3 Procédure de continuations . . . . .	21
1.2.4 Calcul des bifurcations . . . . .	24
1.2.5 Techniques Perturbations : Calcul du Slow Invariant Manifold . .	27
1.3 Contrôle actif des structures . . . . .	31
1.3.1 Représentation d'un système avec boucle de contrôle . . . . .	31
1.3.2 Analyse de stabilité des systèmes contrôlés . . . . .	32
1.3.3 Le contrôle par retour d'états . . . . .	35
1.3.4 Loi de contrôle non-linéaire : Sliding Modes Control (SMC) . . .	37
1.3.5 Observateurs . . . . .	42
1.3.6 Indicateurs de performances . . . . .	44
1.4 Synthèse bibliographique des absorbeurs de vibrations . . . . .	45
1.4.1 Absorbeurs linéaires . . . . .	45
1.4.2 Absorbeurs hybrides . . . . .	47
1.4.3 Absorbeurs non-linéaires . . . . .	50
1.5 Conclusion . . . . .	54
Références du chapitre . . . . .	55

<b>2</b>	<b>Analyses du comportement d'un absorbeur de vibrations non-linéaire hybride</b>	<b>69</b>
2.1	Structure non-linéaire contrôlée par la méthode des modes glissants . . . .	70
2.1.1	Système d'étude : oscillateur de Duffing . . . . .	70
2.1.2	Calcul de la réponse en fréquence d'un système contrôlé par SMC par la méthode de l'équilibrage harmonique . . . . .	74
2.1.3	Calcul de la force active dans le domaine fréquentiel . . . . .	75
2.1.4	Validation numérique des outils proposés . . . . .	81
2.1.5	Conclusion . . . . .	84
2.2	Absorbeurs de vibrations hybrides . . . . .	84
2.2.1	Équations de la dynamique d'un absorbeur de vibrations hybride	85
2.2.2	Le NLTVA . . . . .	86
2.2.3	Le HNLTVL-LQR . . . . .	88
2.2.4	Le HNLTVL- $\alpha$ -controller . . . . .	89
2.2.5	Le HNLTVL-SMC . . . . .	91
2.2.6	Comparaison des performances : amortissement vibratoire . . . .	93
2.2.7	Comparaison des performances : débattement de l'absorbeur . . .	94
2.2.8	Comparaison des performances : consommation énergétique . . . .	96
2.2.9	Comparaison des performances : robustesse . . . . .	97
2.2.10	Comportement d'une solution isolée sous l'effet du contrôle . . . .	100
2.2.11	Conclusion . . . . .	101
2.3	Un absorbeur non-linéaire adaptatif . . . . .	101
2.3.1	Système d'étude . . . . .	103
2.3.2	Calcul du Slow Invariant Manifold pour le contrôle hybride des structures . . . . .	104
2.3.3	Le NES : un absorbeur passif . . . . .	107
2.3.4	Le HNES : loi polynomiale . . . . .	113
2.3.5	Conclusion . . . . .	127
2.4	Conclusion générale . . . . .	127
	Références du chapitre . . . . .	128
<b>3</b>	<b>Conception d'un absorbeur de vibrations non-linéaire hybride</b>	<b>131</b>
3.1	Introduction . . . . .	132
3.2	Présentation du banc d'essai : partie passive . . . . .	132
3.3	Présentation du banc d'essai : partie active . . . . .	136
3.4	Identification non-linéaire : restoring force surface method . . . . .	138
3.5	Considérations pratiques . . . . .	140
3.5.1	Générer des non-linéarité de façon artificielle par des bobines électrodynamiques . . . . .	140
3.5.2	Gestion expérimentale du retard et du filtrage . . . . .	141
3.6	Conclusion . . . . .	142
	Références du chapitre . . . . .	142
<b>4</b>	<b>Validation expérimentale d'un absorbeur de vibrations non-linéaire hybride</b>	<b>145</b>
4.1	Introduction . . . . .	146
4.2	Partie 1 : Contrôle par sliding mode d'une structure non-linéaire . . . .	146
4.2.1	Identification de l'oscillateur de Duffing . . . . .	147
4.2.2	Résultats expérimentaux et comparaison numérique . . . . .	150
4.2.3	Conclusion . . . . .	151

4.3	Partie 2 : Contrôle semi-actif d'un absorbeur non-linéaire (HNES) . . . .	151
4.3.1	introduction . . . . .	151
4.3.2	Identification des paramètres du NES . . . . .	153
4.3.3	Résultats expérimentaux pour l'absorbeur non-linéaire adaptatif . . . . .	155
4.3.4	Conclusion . . . . .	160
4.4	Conclusion du chapitre . . . . .	160
	Références du chapitre . . . . .	160
	<b>Conclusion générale et perspectives</b> . . . . .	<b>161</b>
4.5	Conclusion générale . . . . .	161
4.6	Perspectives et améliorations . . . . .	162
4.7	Un regard vers l'avenir. . . . .	163
	Références du chapitre . . . . .	163
	<b>Table des annexes</b> . . . . .	<b>165</b>
A	Méthode du Shooting . . . . .	167
B	Suivi des points de bifurcations . . . . .	169
B.1	Point limite : LP . . . . .	169
B.2	Point de branchement : BP . . . . .	169
B.3	Neimark-Sacker : NS . . . . .	171
B.4	Doublement de période : PD . . . . .	172
C	Code Matlab pour le calcul des coefficients de la sliding surface . . . . .	173
D	Filtre de Kalman : EKF . . . . .	174
E	Algorithme pour la procédure de continuation : PAC . . . . .	175
F	Étude de la dynamique rapide : calcul du SIM et de sa stabilité . . . . .	176
	<b>Liste des publications personnelles</b> . . . . .	<b>181</b>





# Table des figures

1.1	Synthèse non exhaustive des éléments fondamentaux pour la représentation de modèles complexes . . . . .	3
1.2	Fonction de réponse en fréquence d'un oscillateur linéaire . . . . .	4
1.3	Oscillateur non-linéaire à raideur non-linéaire . . . . .	5
1.4	Fonction de réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing . . . . .	6
1.5	Modèle phénoménologique d'un absorbeur de vibration non-linéaire avec une structure primaire non-linéaire . . . . .	7
1.6	Expérience de pensée : stabilité . . . . .	7
1.7	Mécanisme de perte de stabilité pour une solution périodique - multiplieurs de Floquet . . . . .	10
1.8	Schéma représentatif de la quasi-périodicité . . . . .	12
1.9	Bifurcations usuelles des solutions périodiques . . . . .	12
1.10	Mécanisme de perte de stabilité pour une solution périodique - multiplieurs de Floquet . . . . .	12
1.11	Résumé non exhaustif des bifurcations en dynamique non-linéaire [8] . . . . .	13
1.12	Illustration de modes linéaires (à gauche) et non-linéaires (à droite) tiré de [13] . . . . .	15
1.13	Réponse temporelle de l'oscillateur non-linéaire : Eq.(1.17) pour $\omega = 1.2$ . . . . .	16
1.14	Réponse en fréquence de l'oscillateur non-linéaire : Eq.(1.17) . . . . .	17
1.15	Méthode de l'alternance temps fréquence (AFT) . . . . .	20
1.16	Réponse en fréquence de l'oscillateur non-linéaire par HBM : Eq.(1.17)-NHBM=5 . . . . .	23
1.17	Technique de continuation par pseudo-longueur d'arc . . . . .	23
1.18	Phase de l'oscillateur non-linéaire par HBM : Eq.(1.17)-NHBM=5 . . . . .	24
1.19	Réponse en fréquence de l'oscillateur non-linéaire par HBM : Eq.(1.17) avec calcul de la stabilité avec Hill- HBM=15 . . . . .	25
1.20	Suivi de LP : en vert courbe de suivi, en rouge les branches instables et en bleu les branches stables . . . . .	26
1.21	Projection de la courbe de suivi . . . . .	27
1.22	Slow Invariant manifold périodique . . . . .	28
1.23	Slow Invariant manifold quasi-périodique . . . . .	29
1.24	Slow Invariant manifold quasi-périodique . . . . .	29
1.25	Illustration du contrôle actif des structures . . . . .	31
1.26	Modèle phénoménologique de l'oscillateur contrôlé . . . . .	32
1.27	Schéma-bloc : boucle de contrôle (boucle fermée) . . . . .	32
1.28	Schéma-bloc : boucle ouverte . . . . .	33
1.29	Root-locus : stable à gauche et instable à droite . . . . .	33
1.30	Simulation temporelle de la réponse d'un oscillateur linéaire contrôlé par un retour en vitesse : stable à gauche et instable à droite . . . . .	34

1.31	FrF linéaire : comparaison d'un retour en déplacement en bleu et d'un retour en vitesse en rouge pour gain $g = 0.5$ . . . . .	35
1.32	Plan de phase d'un système contrôlé par SMC . . . . .	39
1.33	Réponse temporelle d'un système contrôlé par SMC exemple d'un oscillateur . . . . .	41
1.34	Schéma bloc avec un observateur . . . . .	43
1.35	Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (en noir) et d'une structure accompagnée de son TMD pour différent rapport de masse $\mu = \frac{m_{\text{absorbeur}}}{m_{\text{structure}}}$ . . . . .	46
1.36	Présentation de quelques travaux sur les absorbeurs de vibration linéaire : (rouge) absorbeur pendulaire dans la tour de Taipei à Taïwan, (bleu) MTDM en rotation tiré des travaux de [136], (jaune) TMD magnétique tiré des travaux de [134]. . . . .	47
1.37	Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (noir), d'une structure accompagnée de son TMD (bleu) et d'une structure avec HMD (magenta) : loi de contrôle le " $\alpha$ -controller" tiré des travaux de Billon et al. [179] . . . . .	49
1.38	Présentation de quelques travaux sur les absorbeurs de vibration hybrides linéaires et du contrôle actif : (rouge) HMD pour l'aéronautique [181], (vert) Modification des paramètres d'un absorbeur [182], (bleu) application d'un HMD sur une poutre [177] . . . . .	50
1.39	Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (noir), d'une structure accompagnée de son NES (bleu) . . . . .	51
1.40	Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (noir), d'une structure accompagnée de son NTLTVA pour plusieurs niveaux de forçage . . . . .	52
1.41	Réponse fréquentielle d'une structure non-linéaire avec son TMD pour plusieurs niveaux d'excitation. Les pointillés représentent la partie instable et les points jaunes les points de bifurcations (point limite). . . . .	53
1.42	Présentation de quelques travaux sur les absorbeurs non-linéaires : (Jaune) Absorbeur à vibro-impact [211], (bleu) Absorbeur non-linéaire à cordes pour la récupération d'énergie [207], (Orange) Absorbeur de vibration magnétique [209] . . . . .	54
2.1	Schéma de principe du système étudié . . . . .	71
2.2	Portrait de phase et diagramme des différentes phases du SMC . . . . .	72
2.3	Représentation des différents signes de la force active dans le portrait de phase . . . . .	75
2.4	Fonction signe : évolution de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques pour $\rho = -0.2$ : (gauche) Force active non-linéaire, (droite) Plan de phase. . . . .	77
2.5	Loi (2.31) : évolution de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques pour $\rho = -0.2$ et $\epsilon = 10^{-2}$ . (gauche) Force active non-linéaire, (droite) Plan de phase. . . . .	77
2.6	Loi (2.32) : évolution de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques pour $\rho = -0.2$ et $\epsilon = 10^{-5}$ . (gauche) Force active non-linéaire, (droite) Plan de phase. . . . .	77
2.7	Algorithme : calcul de la partie active non-linéaire . . . . .	78
2.8	Illustration des notions de stabilité et de performance pour une sliding surface dans le plan de caractéristiques $(x, \dot{x})$ . . . . .	82

2.9	Comparaison temporelle : (à gauche) partie active linéaire uniquement (à droite) partie active non-linéaire et linéaire pour $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ . . . . .	82
2.10	Réponse fréquentielle - 30 Harmoniques : (gauche) Comparaison du système sans contrôle (noir), d'un système avec contrôle non-linéaire uniquement (bleu) $\rho = 0.5$ , et d'un système avec contrôle non linéaire et linéaire (rouge) pour $\rho = 0.5$ , (droite). Comparaison des réponses calculées avec l'algorithme proposé (ligne rouge) et par intégration temporelle avec ODE45 (étoiles noires) . . . . .	83
2.11	(a) Suivi de points limité avec le paramètre de gain $\sqrt{ \sigma }\rho$ et (b) Projection de la courbe de suivi. . . . .	84
2.12	Modèle phénoménologique général d'un absorbeur non-linéaire hybride couplé à une structure primaire non-linéaire . . . . .	85
2.13	NLTVA courbe de réponse en fréquence pour $F = 0.11$ . . . . .	86
2.14	NLTVA courbe de réponse en fréquence pour $F = 0.15$ . . . . .	87
2.15	NLTVA courbe de réponse en fréquence pour $F = 0.19$ . . . . .	87
2.16	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison du NLTVA et du <i>HNLTV A - LQR</i> pour différents gains - cas $F = 0.11$ . . . . .	88
2.17	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison du NLTVA et du <i>HNLTV A-<math>\alpha</math> controller</i> pour différents gains - cas $F = 0.11$ . . . . .	90
2.18	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison du <i>HNLTV A-<math>\alpha</math>-controller</i> pour le paramètre $\alpha \approx 1.6$ - cas $F = 0.11$ . . . . .	91
2.19	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison du NLTVA et du <i>HNLTV A-SMC</i> pour $\rho = 1$ - cas $F = 0.11$ . . . . .	93
2.20	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison de l'amortissement vibratoire du NLTVA et des <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ . . . . .	94
2.21	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison de l'amortissement vibratoire du NLTVA et des <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.19$ . . . . .	95
2.22	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_2 - x_1\ $ : Comparaison du débattement de l'absorbeur entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ . . . . .	95
2.23	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_2 - x_1\ $ : Comparaison du débattement de l'absorbeur entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.19$ . . . . .	96
2.24	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_2 - x_1\ $ : Comparaison du coût énergétique entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ . . . . .	97
2.25	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_2 - x_1\ $ : Comparaison du coût énergétique entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.19$ . . . . .	97
2.26	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ , $m1 = m1 - 10\%$ . . . . .	98
2.27	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ , $m1 = m1 + 10\%$ . . . . .	98
2.28	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ , $m1 = m1 + 20\%$ . . . . .	99
2.29	Courbe de réponse en fréquence de $\ x_1\ $ : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les <i>HNLTV A</i> - cas $F = 0.15$ , $m1 = m1 + 30\%$ . . . . .	99
2.30	Suivi de points limites du <i>HNLTV A</i> en fonction de l'effort de forçage (gauche) et courbe de suivi projetée (droite) . . . . .	100
2.31	SIM à forme particulière extrait de [11] . . . . .	102
2.32	SIM d'un absorbeur non-linéaire passif . . . . .	108
2.33	Points fixes : courbe de réponse du système pour $F = 0.025N$ et $k_{nl1} = 0$ . . . . .	109
2.34	Points fixes : courbe de réponse du système pour $F = 0.05N$ et $k_{nl1} = 0$ . . . . .	109

2.35	Figure présentant l'évolution des modes : d'un NES sur une structure linéaire (gauche) et d'un NLTVA sur une structure non-linéaire (droite)	110
2.36	Analyse du transfert énergétique à la résonance 1 : 1 - sans contrôle : condition initiale à basse amplitude $U = 0.4$	111
2.37	Analyse du transfert énergétique à la résonance 1 : 1 - sans contrôle : condition initiale à amplitude moyenne $U = 0.8$	112
2.38	Spectrogramme du NES passif pour différentes conditions initiales $U$	112
2.39	Analyse du transfert énergétique à la résonance 1 : 1 - sans contrôle : condition initiale à amplitude élevée $U = 1.5$	113
2.40	Évolution de la forme du SIM en fonction de $f_0$	114
2.41	Évolution de la forme du SIM en fonction de $K_c$	115
2.42	Évolution de l'énergie totale instantanée dans le NES en fonction de l'augmentation de $K_c$	115
2.43	Évolution de la forme du SIM en fonction de $C_c$	116
2.44	Évolution de la forme du SIM en fonction de $K_{nlc}$	116
2.45	Évolution de la forme du SIM : contrôleur multiparamétrique	117
2.46	Évolution de la raideur non-linéaire $k_{nl2}$ en fonction de la pulsation propre de la structure primaire	117
2.47	Évolution de la forme du SIM en fonction $C_c$ : contrôleur basé sur la vitesse de la structure primaire	119
2.48	Évolution de la forme du SIM en fonction $K_c$ : contrôleur linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire	119
2.49	Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire - $K_{nlc} = 0.002$	120
2.50	Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire - $K_{nlc} = 0.03$ - Conditions initiales dans la zone descendante	120
2.51	Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire - $K_{nlc} = 0.03$ - Conditions initiales dans la zone montante	121
2.52	Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire - $K_{nlc} = 0.1$	122
2.53	Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire - $K_{nlc} = 0.1$ - stabilité de l'isola	122
2.54	SIM : modification de l'isola avec les paramètres suivants - $K_{nlc} = 0.1$ , $C_c = 0.01$ et $K_c = 0$	123
2.55	SIM : modification de l'isola avec les paramètres suivants - $K_{nlc} = 0.03$ , $C_c = 0.006$ et $K_c = 0$	123
2.56	SIM : modification de l'isola en fonction de la raideur linéaire $K_c$ avec les paramètres suivants - $K_{nlc} = 0.03$ et $C_c = 0.006$	124
2.57	SIM : modification de l'isola en fonction de la raideur linéaire $C_c$ avec les paramètres suivants - $K_{nlc} = 0.03$ et $K_c = 0.007$	124
2.58	SIM : loi de contrôle polynomiale à ordre élevée	125
2.59	SIM : simple retour en vitesse	126
2.60	Régime libre : loi de contrôle continue	126
2.61	Régime transitoire : loi de contrôle discontinue	127
3.1	À gauche structure primaire et son absorbeur, à droite zoom sur l'absorbeur	133
3.2	Banc d'essai : Schéma de principe du banc d'essai	133

3.3	Banc d'essai : absorbeur hybride non-linéaire . . . . .	134
3.4	Schéma de principe de l'absorbeur . . . . .	135
3.5	Schéma bloc intégration partie passive et active . . . . .	137
3.6	Coefficient de couplage des bobines électrodynamiques en fonction du débattement, d'après [13]. . . . .	141
4.1	Dispositif expérimental - cercle bleu : laser, cercle vert : accéléromètre, cercle orange : capteur de force, cercle magenta : pot vibrant électrodynamique, et en jaune le massif sismique. . . . .	146
4.2	Schéma fonctionnel : rétroaction et contrôle non linéaire sur une structure linéaire couplée à un observateur . . . . .	147
4.3	Fonction de transfert de 5 à 40 Hz. . . . .	148
4.4	Identification des paramètres à partir de la restoring force $k$ , $k_{nl}$ et $c$ . . . . .	149
4.5	Résultats expérimentaux - réponse sans contrôle : (gauche) Réponse linéaire sans non-linéarité artificielle. (droite) Réponse non-linéaire avec non-linéarité artificielle raidissante. La validation numérique est en noire . . . . .	150
4.6	Résultats expérimentaux - réponse avec contrôle (balayage vers le haut en bleu et balayage vers le bas en orange), étalonnage du modèle en noir et points limites en jaune : (a) $\rho = 1$ et la partie linéaire telle que $0.2 \times \eta$ , (b) $\rho = 4$ et la partie linéaire telle que $0.2 \times \eta$ , (c) $\rho = 7$ et la partie linéaire telle que $0.2 \times \eta$ . . . . .	151
4.7	Fonction de transfert $ H_1(s) $ de la structure réalisée avec une excitation de type bruit blanc . . . . .	152
4.8	Courbe de réponse en fréquence pour du NES pour un effort relatif . . . . .	153
4.9	Restoring force surface expérimentale de l'absorbeur pour un effort externe relatif . . . . .	154
4.10	(a) Évolution de la MSE en fonction de l'exposant de la non-linéarité $\alpha$ pour le monôme $k_{nl}x^\alpha$ , (b) Restoring force surface de l'absorbeur pour un effort externe relatif : $f(x_2 - x_1, 0)$ . . . . .	154
4.11	Évolution de la MSE en fonction de l'exposant de la non-linéarité $\alpha$ pour le monôme $c_2x^\alpha$ . . . . .	155
4.12	Signal temporelle de l'accélération du NES - mesuré (bleu) et numérique en noir . . . . .	156
4.13	Réponses en fréquence : expérimentale du NES (bleu) et numérique de la structure (noire) pour un effort moyen $F = 2.9N$ . . . . .	156
4.14	Réponses en fréquence : expérimentale du NES (bleu) et numérique de la structure (noire) pour un effort important $F = 6.1N$ . . . . .	157
4.15	SIM sans contrôle : expérimental (noir) et numérique (bleu) . . . . .	158
4.16	Comparaison SIM sans contrôle (noir) et des SIM avec contrôle en fonction de $N_2$ (couleur) . . . . .	159
4.17	Évaluation des puissances mises en jeu . . . . .	159



# Liste des tableaux

1.1	Synthèse non exhaustives des non-linéarités . . . . .	5
1.2	Résumé de la stabilité au sens de Liapunov . . . . .	8
1.3	Méthode du résidu pondéré : problème variationnel . . . . .	18
1.4	Normes pour le suivi de performances . . . . .	45
2.1	Paramètres utilisés pour la simulation numérique. . . . .	81
2.2	Table des paramètres du NLTVA . . . . .	86
2.3	Table des paramètres de la sliding surface basée sur la méthode LQR . . . . .	92
2.4	Table des paramètres des gains pour l'étude comparative . . . . .	93
2.5	Table des paramètres pour l'application numérique du SIM . . . . .	107
3.1	Données géométriques de la structure primaire . . . . .	132
3.2	Données dynamiques de la structure primaire . . . . .	134
3.3	Données géométriques de l'absorbeur . . . . .	136
3.4	Paramètres des bobines électrodynamiques, d'après [13] . . . . .	137
4.1	Paramètres identifiés . . . . .	149
4.2	Paramètres de la surface de glissement : $\sigma$ . . . . .	150
4.3	Table des paramètres de la structure primaire et du NES . . . . .	155





# Introduction générale

La mondialisation et la course aux performances, tendent à repousser les limites mécaniques des systèmes. De nos jours, l'aspect coût impose aux industriels une réduction de la quantité de matière et pousse les ingénieurs à optimiser la topologie des pièces pour tenir les sollicitations mécaniques. De plus, les anciens matériaux sont peu à peu remplacés par des matériaux recyclés ou composites. Par exemple, le monde de l'automobile subit un profond bouleversement depuis quelques années dues à la réglementation, de plus en plus sévère, en matière de matière de  $CO_2$ . Les voitures de série sont composées à 75% de matériaux métalliques et à plus 20% de matériaux plastiques. Les innovations sur les matériaux composites et polymères sont l'une des pistes envisagées pour réduire l'empreinte carbone des véhicules et réduire à terme, leurs masses à quelques centaines de kilogrammes.

Cependant, l'allègement ou la modification topologique d'une structure n'est pas sans conséquences, car elles augmentent généralement l'amplitude de sa réponse vibratoire lors d'une sollicitation dynamique. Cette augmentation apporte deux problèmes majeurs. Tout d'abord, l'altération de la durée de vie de la structure. Avec le temps, les sollicitations successives peuvent mener à une possible ruine de la structure due à la fatigue interne du matériau. Ensuite, l'inconfort vibratoire et acoustique. Ce critère est pris en compte par de plus en plus d'industriels pour améliorer le confort des passagers ou diminuer le rayonnement acoustique d'une structure. Par exemple, dans le milieu automobile, et ce, depuis les années 70, le bruit maximal émis par les véhicules est réglementé. L'intérêt de réduire les vibrations est donc de pallier tous ces problèmes quel que soit le domaine d'application.

La réduction de l'énergie vibratoire peut se faire de plusieurs façons :

- L'amortissement structurel grâce à l'utilisation de patch ou de liaisons amortissantes.
- L'absorbeur passif linéaire. Simple à mettre en place, ses performances restent limitées en termes de réactivité, d'efficacité et d'adaptabilité. Cependant, lorsque le comportement de la structure sur lequel il est posé est linéaire, il reste le dispositif le plus efficace.
- Le contrôle purement actif permet la modification temps réel de la réponse d'une structure en se basant sur des capteurs et actionneurs. Bien sûr, cette technologie permet s'affranchir des principaux problèmes des absorbeurs de vibrations linéaires, mais nécessite un apport constant d'énergie extérieure et peut souffrir de problèmes de stabilité.
- Le contrôle hybride linéaire se positionne dans la combinaison du contrôle actif et passif. Il permet de combler les désavantages des absorbeurs linéaires et les problèmes de stabilité du contrôle actif. De plus, il offre une caractéristique sécurisante "fail-safe" c.-à-d que la partie passive continue d'absorber l'énergie vibratoire

si une défaillance de partie active devait survenir. Néanmoins, l'augmentation des performances par rapport à un système passif n'est pas sans conséquence et donne souvent lieu à des débattements de l'absorbeur plus important et à une consommation énergétique conséquente.

- Les absorbeurs passifs non-linéaires apparaissent à la fin du 20e siècle. Ici, la non-linéarité permet d'améliorer la robustesse en fréquence et en amplitude par rapport à des absorbeurs de vibrations linéaires classiques. Qui plus est, il évite un retour de l'énergie vibratoire de l'absorbeur vers la structure qu'il protège. En revanche, plusieurs désavantages liés à la dynamique non-linéaire peuvent survenir comme des solutions isolées ou des points de bifurcations.

Dans ces travaux de thèse, nous avons choisi de nous focaliser sur la combinaison d'absorbeurs passifs non-linéaires et du contrôle actif des structures. Cette approche vise à développer des absorbeurs dynamiques hybrides non-linéaires, qui bénéficient des avantages des systèmes passifs non-linéaires et des systèmes actifs pour dépasser leurs limitations. L'enjeu est donc de combiner la dynamique non-linéaire et le contrôle actif. Il est apparu que cette combinaison ne permettait pas une synergie parfaite entre ces deux domaines. Deux voies sont alors choisies, qui utilisent respectivement la loi de contrôle pour amortir les vibrations ou pour modifier les paramètres de l'absorbeur.

L'objectif et les contributions de cette thèse portent sur plusieurs points :

- analyse des absorbeurs hybrides non-linéaires
- prise en compte du contrôle actif dans les outils de dynamique non-linéaire
- choix et conception de contrôleurs pertinents
- expérimentation et validation sur une structure académique

Ce mémoire se compose de 4 chapitres :

- Le premier chapitre présentera un état de l'art recontextualisé. Il posera les bases théoriques et méthodologiques en dynamique non-linéaire, et en contrôle actif des structures. Une attention particulière sera accordée aux différents absorbeurs de vibrations. Ce chapitre permettra aussi de lister un vocabulaire commun pour les chapitres suivants.
- Le deuxième chapitre sera consacré à l'application des outils numériques et concepts vus au chapitre 1. Un algorithme de résolution fréquentielle pour une loi de contrôle robuste et non-linéaire ainsi qu'un calcul de stabilité des solutions périodiques seront présentés en début de chapitre. Ils seront tous deux appliqués à un oscillateur de Duffing. La deuxième partie du chapitre sera consacrée à l'application de cette loi de contrôle et l'analyse des flux de puissance dans les absorbeurs de vibrations non-linéaires. La fin du chapitre sera dédiée au pilotage des non-linéarités par le contrôle actif et à l'analyse de ces nouveaux absorbeurs "adaptatif" par des méthodes de perturbation.
- La construction du banc d'essai sera présentée au troisième chapitre. Nous parlerons plus en détail dans ce chapitre de l'identification des systèmes dynamiques.
- Le chapitre 4 portera sur la comparaison des résultats expérimentaux des cas académiques vus au chapitre 2.

Enfin, la conclusion, les perspectives ainsi que les pistes d'améliorations du système étudié viendront clôturer ce manuscrit.

# Chapitre 1

## État de l'art

### Introduction

Les problèmes vibratoires sont souvent complexes et sont généralement traités numériquement. Afin de modéliser ces derniers, une discrétisation du système en un nombre fini de petits éléments est réalisée. C'est cette généralité qui est à la base de tous nos calculs en mécanique du solide. On modélise le comportement du système discret par des éléments fondamentaux que l'on répertorie dans la figure 1.1 .

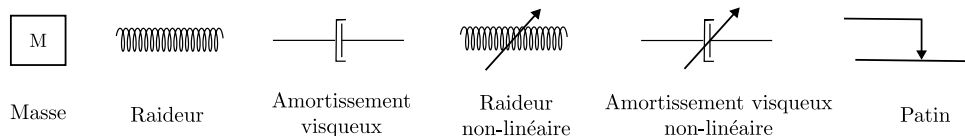


FIGURE 1.1: Synthèse non exhaustive des éléments fondamentaux pour la représentation de modèles complexes

Tous ces éléments sont combinables entre eux pour représenter des modèles plus ou moins complexes aussi bien en dynamique linéaire qu'en dynamique non-linéaire. Ces combinaisons d'éléments sont appelées des modèles phénoménologiques. La dynamique des systèmes discrets consiste donc en l'analyse dynamique de ces modèles phénoménologiques.

Lorsque l'on souhaite réduire l'énergie vibratoire à l'aide d'un absorbeur, on règle la fréquence propre de ce dernier au voisinage du mode que l'on cherche à amortir. Les propriétés de la dynamique nous permettent d'approximer le comportement de la structure sur chaque mode via les éléments présentés en figure 1.1. L'absorbeur et la structure deviennent alors un système à deux degrés de liberté. Dans ces travaux, notre intérêt s'est porté sur l'amortissement du premier mode des structures. Un exemple de réponse en fréquence pour différente valeur du coefficient d'amortissement est donnée sur la figure.1.2). Cette représentation simplifiée est plutôt pertinente, car elle permet de se concentrer sur le comportement global d'une structure dans la direction souhaitée.

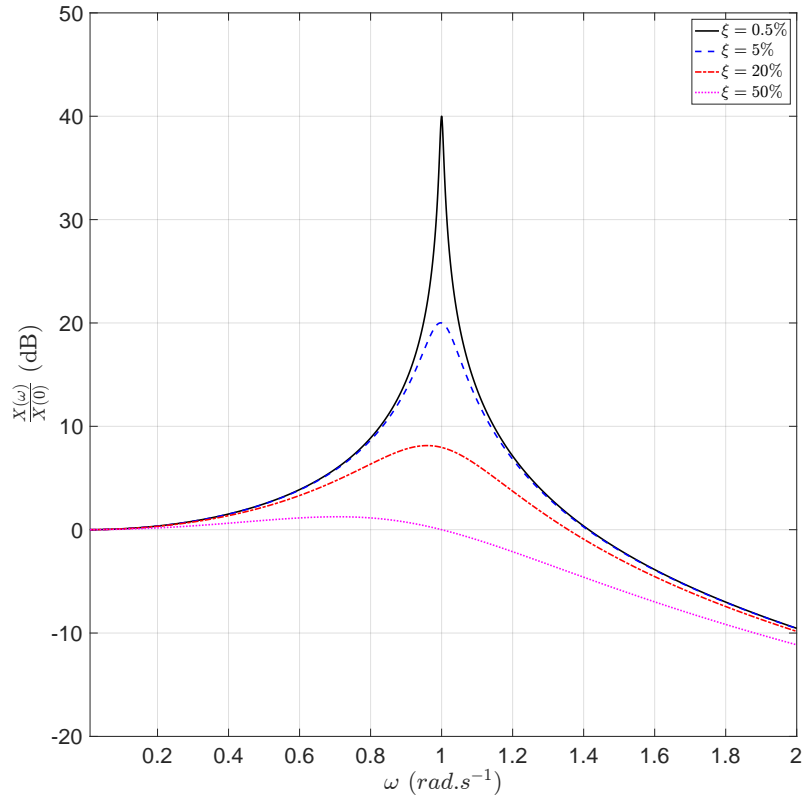


FIGURE 1.2: Fonction de réponse en fréquence d'un oscillateur linéaire

Les systèmes non-linéaires, à deux degrés de liberté, contrôlés activement peuvent être déjà assez complexes en termes de formalisme et de résolution. C'est dans ce contexte que s'inscrit ce premier chapitre. Il permet de créer un vocabulaire commun tout en donnant les clés et les outils pour mieux comprendre la définition d'un absorbeur non-linéaire hybride. La première partie du chapitre sera consacrée à la théorie de la dynamique non-linéaire. Puis, les méthodes numériques utilisées dans ce manuscrit seront présentées. Ensuite, la théorie du contrôle actif des structures sera présentée. Une attention particulière sera portée à la commande par mode glissant qui sera très utilisée dans cette thèse. Enfin, la littérature sur les absorbeurs de vibrations sera exposée. Il ne s'agira pas d'une revue exhaustive de toute la littérature, mais plutôt la présentation de quelques articles marquants et qui ont contribué de façon significative à l'avancée de cette thèse.

**Sommaire**

1.1	Dynamique non-linéaire . . . . .	5
1.1.1	Stabilité des systèmes non-linéaires et théorie des bifurcations . . . . .	7
1.1.2	Les modes non-linéaires . . . . .	13
1.2	Méthodes de résolution numériques et analytiques pour la dynamique non-linéaire . . . . .	15
1.2.1	Calcul du régime transitoire . . . . .	16
1.2.2	Calcul du régime permanent . . . . .	17
1.2.3	Procédure de continuations . . . . .	21
1.2.4	Calcul des bifurcations . . . . .	24
1.2.5	Techniques Perturbations : Calcul du Slow Invariant Manifold . . . . .	27
1.3	Contrôle actif des structures . . . . .	31

1.3.1	Représentation d'un système avec boucle de contrôle . . . . .	31
1.3.2	Analyse de stabilité des systèmes contrôlés . . . . .	32
1.3.3	Le contrôle par retour d'états . . . . .	35
1.3.4	Loi de contrôle non-linéaire : Sliding Modes Control (SMC) . . . . .	37
1.3.5	Observateurs . . . . .	42
1.3.6	Indicateurs de performances . . . . .	44
1.4	Synthèse bibliographique des absorbeurs de vibrations . . . . .	45
1.4.1	Absorbeurs linéaires . . . . .	45
1.4.2	Absorbeurs hybrides . . . . .	47
1.4.3	Absorbeurs non-linéaires . . . . .	50
1.5	Conclusion . . . . .	54
	Références du chapitre . . . . .	55

## 1.1 Dynamique non-linéaire

La dynamique non-linéaire consiste à la prise en compte d'une ou plusieurs non-linéarités dans la dynamique des systèmes. Le terme non-linéarité étant assez vague, le tableau 1.1 synthétise les principales non-linéarités et un exemple de système correspondant.

Type de non-linéarité	Ordre de la non-linéarité / Équation	Nom de système/ Comportement
Géométrique	$\pm\beta x^3$	raideur de Duffing
Électrostatique	$-\beta x^3$ or $\beta \dot{x}x^2$	résonateur MEMS
Magnétique	ordre élevé de non-linéarité	lévitation magnétique
Matériaux	$\sigma = f_{nl}(\epsilon)$	plasticité, viscoélasticité, ...
Contact	$x^{\frac{3}{2}}$	contact entre deux sphères solides
Excitation	$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h \cos(\omega t))\sin(\theta) = 0$	excitation paramétrique

TABLE 1.1: Synthèse non exhaustive des non-linéarités

L'ajout de non-linéarité apporte une dimension supplémentaire par rapport à la dynamique linéaire. L'oscillateur non-linéaire classique ou oscillateur de Duffing [1] se définit par la prise en compte d'une raideur non-linéaire de type grands déplacements ( $\pm x^3$ ) par rapport à l'oscillateur linéaire comme on peut le voir sur la Fig.1.3.

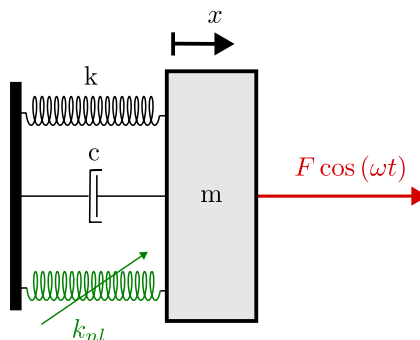


FIGURE 1.3: Oscillateur non-linéaire à raideur non-linéaire

En utilisant la mécanique hamiltonienne, on peut écrire l'équation de mouvement d'un oscillateur non-linéaire avec une non-linéarité cubique :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \pm k_{nl}x^3 = F \cos \omega t \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) nous permet de comprendre une des particularités des réponses non-linéaires : la dépendance énergie-fréquence. En fonction du signe du coefficient de la raideur non-linéaire  $k_{nl}$ , la fréquence du mouvement croît ou décroît avec l'amplitude. On parle alors de caractéristique raidissante ( $k_{nl} > 0$ ) ou assouplissante ( $k_{nl} < 0$ ) (voir figure 1.4).

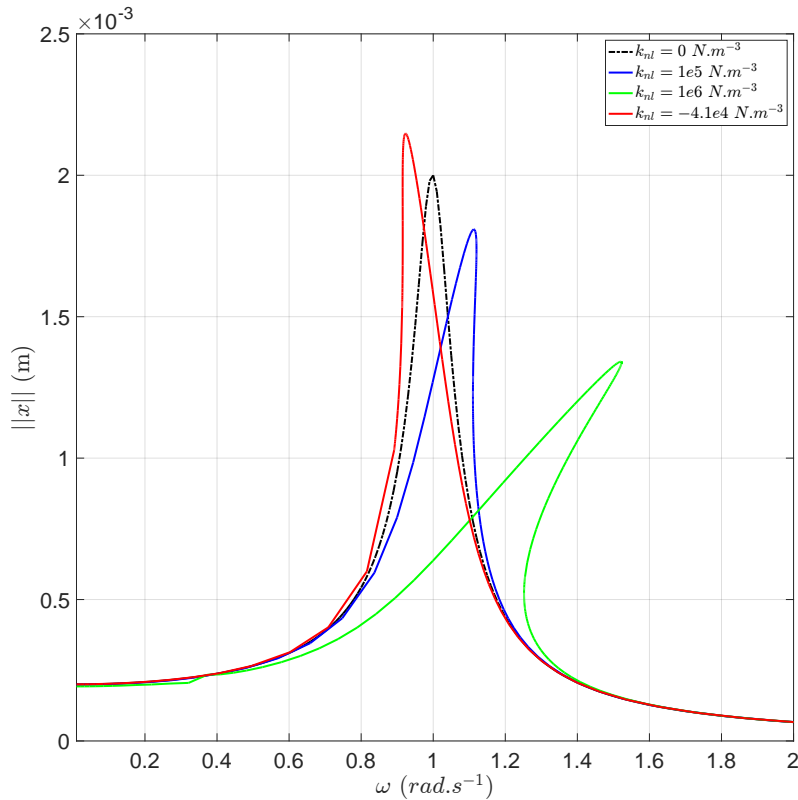


FIGURE 1.4: Fonction de réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing

En étendant l'équation (1.1) à deux degrés de liberté, le modèle phénoménologique (1.5) et les équations de mouvements (Eq. (1.2)) sont obtenus. Ce modèle représente alors un absorbeur non-linéaire (la masse  $m_2$  est supposé plus petite que la masse  $m_1$ ) et prend en compte la raideur non-linéaire de l'absorbeur et celle de la structure primaire (si elle en possède une).

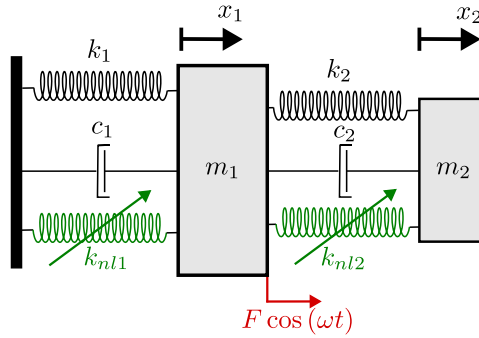


FIGURE 1.5: Modèle phénoménologique d'un absorbeur de vibration non-linéaire avec une structure primaire non-linéaire

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 = F \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Afin de développer plus en détail les caractéristiques des systèmes non-linéaires comme la notion de multiples points d'équilibres, il est nécessaire d'introduire certaines notions de stabilités.

### 1.1.1 Stabilité des systèmes non-linéaires et théorie des bifurcations

Une courbe de réponse représente le régime permanent ou régime stabilisé du système en fonction de la fréquence de la force d'excitation. On peut remarquer sur la Fig.1.2 que pour chaque valeur de  $\omega$ , le système ne possède qu'une position d'équilibre. Cependant, si l'on regarde la Fig. 1.4, on peut voir que pour certaines valeurs de  $\omega$ , le système non-linéaire répond avec plusieurs amplitudes jusqu'à 3 ici (courbe verte). Cette particularité est propre aux systèmes non-linéaires.

Un système linéaire est un système sans surprises! En effet, si l'on excite un système à une fréquence donnée, il répondra à cette fréquence avec une seule amplitude. Cependant, que dire de la stabilité de cette solution? Un système linéaire est-il toujours stable? Une réponse est apportée par deux théories majeures en stabilité. La première plutôt globale est celle de Liapunov. La seconde, plutôt locale est celle de Floquet.

#### Stabilité au sens de Liapunov

La stabilité au sens de Liapunov permet de définir le comportement d'un système dynamique au bout d'un certain temps (théoriquement infiniment long). Avant de définir cette stabilité de façon mathématique, une expérience de pensée est proposée sur la Fig.1.6.

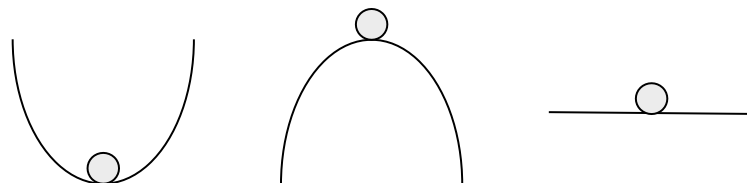


FIGURE 1.6: Expérience de pensée : stabilité

La figure 1.6 représente une bille dans différentes positions d'équilibre. Si l'on s'intéresse au schéma de gauche, et que l'on déplace la bille de sa position d'équilibre (application d'une vitesse ou d'un déplacement initial), la bille peut soit revenir à sa position d'équilibre, s'il y a présence de frottement, soit osciller indéfiniment autour du point d'équilibre en cas d'absence de frottement. On appelle cela la stabilité asymptotique. Le point d'équilibre agit comme un attracteur ou un puits de potentiel. Le schéma de gauche représente donc une stabilité de la bille.

Sur le schéma du milieu, si l'on décale la bille de sa position d'équilibre, elle s'éloignera de sa position d'équilibre en chutant, quelles que soient les forces de frottement. On parle ici d'instabilité dynamique. Le point d'équilibre agit comme un répulsif pour la bille.

Enfin, si l'on décale la bille sur le schéma de droite, elle changera de position d'équilibre ou roulera sans s'arrêter en s'éloignant indéfiniment du point d'équilibre. On parle ici aussi d'instabilité, car dans tous les cas, la bille ne reviendra pas à sa position d'équilibre.

Cette stabilité asymptotique peut être écrite de façon plus mathématique. L'Eq. (1.3) indique que pour toutes conditions initiales proches d'un point d'équilibre, le système finira par converger vers ce point avec un temps suffisamment long.

$$\forall \epsilon, \exists \beta > 0, (\|X(t=0) - X_e\| < \beta) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} (\|X(t) - X_e\| = 0) \quad (1.3)$$

Avec ces définitions, on peut maintenant définir la stabilité au sens de Liapunov. Cette méthode d'analyse se base sur l'énergie du système en utilisant une fonction candidate souvent notée  $V$  et permet de trouver la stabilité d'un point d'équilibre sans avoir à résoudre une équation différentielle. Afin de pouvoir étudier la stabilité et utiliser le terme de "fonction de Liapunov", il faut apporter quelques conditions à  $V$  :

$$\begin{cases} V > 0 \\ V(x_e) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

La fonction candidate de Liapunov doit s'annuler aux points d'équilibres  $x_e$  en zéros et être positive pour pouvoir être appelée "fonction de Liapunov". Pour les systèmes dynamiques hamiltoniens, on peut prendre  $V = \mathcal{H}$  comme fonctionnelle de Liapunov. Une fois la fonctionnelle choisie, la stabilité du système dépendra alors du signe de la quantité  $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ . Les différentes stabilités sont regroupées dans le tableau 1.2.

Stabilité	Conditions à vérifier
Stable	$\dot{V} \leq 0$
Stabilité asymptotique	$\dot{V} < 0$
Instabilité	$\dot{V} \geq 0$

TABLE 1.2: Résumé de la stabilité au sens de Liapunov

Dans le cas de l'oscillateur linéaire, le nombre de points d'équilibres est limité à  $x_e = 0$ . Avec  $V = \mathcal{H}$ , le système est asymptotiquement stable si  $\dot{V} \leq 0$  c.-à-d.  $-c\dot{x}^2 \leq 0$ . Pour un système linéaire à raideur positive, le seul moyen d'obtenir une instabilité est d'avoir un amortissement négatif ( $c < 0$ ). Si la raideur est négative, le choix d'une autre fonction de Liapunov permet de montrer l'instabilité qu'il en résulte.



Pour le cas de l'oscillateur non-linéaire (Eq. (1.1)), le système à 3 points d'équilibres ( $x_{e1} = 0, x_{e2,3} = \pm \sqrt{\frac{-k}{k_{nl}}}$ ). La stabilité dépend donc du signe des paramètres  $k$  et  $k_{nl}$ .

Nous verrons par la suite que cette stabilité nous sera très utile en contrôle des systèmes pour concevoir les contrôleurs. Cependant, lors de l'analyse des réponses en fréquence non-linéaires, on utilise une autre stabilité.

### Stabilité au sens de Floquet

La stabilité précédente parlait de stabilité au sens large et la forme de la solution était supposée inconnue. Ici, on se propose d'étudier la stabilité des solutions périodiques. Ces dernière peuvent être calculées très facilement par des méthodes comme l'équilibrage harmonique que nous verrons dans la section 1.2.2. Considérons un système dynamique non autonome (forcé par un terme harmonique) sous forme d'états :

$$\dot{q}(t) = \Gamma(q(t), t) \quad (1.5)$$

Avec  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $\Gamma(q(t), t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si on admet que le système est régulier et forcé de façon harmonique, la solution  $q(t)$  est périodique de période  $T$  c.-à-d. :

$$q(t + T) = q(t) \quad (1.6)$$

La stabilité de Floquet étudie les solutions périodiques du système (1.5) par l'application d'une perturbation. La solution  $q(t)$  peut donc se voir comme une solution périodique  $q_0(t)$  plus une perturbation  $\lambda(t)$  telle que :

$$q(t) = q_0(t) + \lambda(t) \quad (1.7)$$

En introduisant l'Eq. (1.7) dans l'Eq. (1.5) il vient :

$$\dot{q}_0(t) + \dot{\lambda}(t) = \Gamma(q_0(t) + \lambda(t), t) = \Gamma(q_0(t), t) + \frac{\partial \Gamma(q_0(t), t)}{\partial q(t)} \Big|_{q(t)=q_0(t)} \lambda(t) \quad (1.8)$$

Le système (1.8) est réécrit en ne gardant que les termes portant sur la perturbation  $\lambda(t)$ . On obtient alors le système linéarisé (1.9).

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial \Gamma(q_0(t), t)}{\partial q(t)} \Big|_{q(t)=q_0(t)} \lambda(t) \quad (1.9)$$

Pour une solution périodique, l'équation (1.9) présente l'écart de la trajectoire espace temporellement d'une période  $T$ . La connexion entre la solution à  $t = 0$  et la solution à  $t = T$  passe par la définition d'une matrice  $M_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  à  $t = T$  où  $n$  correspond au nombre de ddl(s) du système. Cependant,  $M_z$  n'est valable que si l'on intègre l'équation (1.9) sur une période telle que :

$$M_z = M_z(T) = \frac{\partial \Gamma(q_0, t = T)}{\partial q_0} \quad (1.10)$$

Généralement, cette matrice est appelée "matrice de monodromie". La stabilité des solutions est donc obtenue par l'étude des fréquences propres  $\mu_i \in \mathbb{C} \forall i \dots n$  de  $M_z$ . Les fréquences de cette dernière sont appelées multiplicateurs de Floquet. La stabilité du système 1.5 est régie par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|\mu_i\| < 1 \text{ la solution est stable} \\ \|\mu_i\| \geq 1 \text{ la solution est instable} \end{cases} \quad (1.11)$$

Dans la suite du manuscrit, le terme d'exposants de Floquet  $\theta_i$  (notamment lors du calcul de stabilité dans le domaine fréquentiel) sera employé. Ces exposants sont obtenus en supposant la forme de la perturbation  $\lambda(t) = p(t)e^{\theta t}$ . Les  $\theta_i$  sont liés au  $\mu_i$  par la formule (1.12).

$$\theta_i = e^{\mu_i T} \tag{1.12}$$

Cependant, à la différence des  $\mu_i$ , les  $\theta_i$  sont réels. On définit alors nouveau critère de stabilité :

$$\begin{cases} \|\theta_i\| < 0 \text{ la solution est stable} \\ \|\theta_i\| \geq 0 \text{ la solution est instable} \end{cases} \tag{1.13}$$

Le calcul de stabilité des solutions périodiques peut être directement réalisé dans le domaine fréquentiel par la matrice de Hill. L'obtention de cette dernière sera explicitée dans la Sect. 1.2.4.

La matrice de monodromie comme explicitée dans l'équation (1.10) dépend de la dérivée de la matrice d'états  $\Gamma(q(t), t)$ . Lorsque le système est linéaire,  $M_z$  ne dépend pas des états du système. Il peut donc être dit qu'un système linéaire avec une stabilité asymptotique au sens de Liapunov est toujours stable au sens de Floquet. En revanche, pour un système non-linéaire, la matrice de connectivité des états dépend des états du système. Cette dépendance peut amener un système à changer de stabilité en fonction de la fréquence du terme de perturbation extérieure.

Il est important de comprendre que la stabilité au sens de Floquet ne fait pas diverger le système comme le ferait une instabilité au sens d'amortissement négatif proposé par Liapunov. Ces solutions instables restent périodiques, mais ne sont accessibles que pour certaines conditions initiales et sont très sensibles aux perturbations extérieures.

### Les bifurcations

La présente section introduit le concept de bifurcation. Un système non-linéaire, à l'inverse d'un système linéaire, est un système plein de surprise. Ceci est souvent due aux différentes bifurcations qu'il est possible de rencontrer. La section précédente montrait que la stabilité (au sens de Floquet) d'un système non-linéaire pouvait évoluer en fonction de la pulsation de forçage du terme d'excitation. Lorsque ce changement opère, différentes configurations peuvent arriver à la solution. Les bifurcations sont là pour traduire ce changement et nous annoncer ce qu'il va advenir à la solution en fonction d'un ou plusieurs paramètre(s) appelé(s) paramètre(s) de bifurcation.

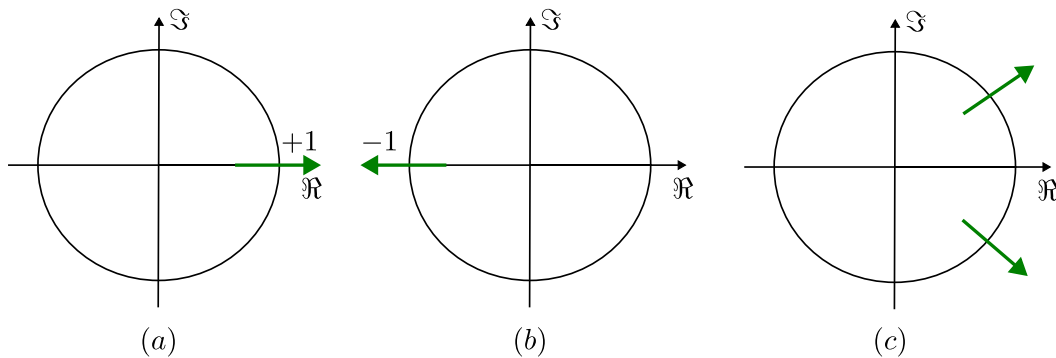


FIGURE 1.7: Mécanisme de perte de stabilité pour une solution périodique - multiplicateurs de Floquet

En représentant dans l'espace complexe le cercle unitaire (de norme 1), la figure 1.7 nous montre comment les valeurs propres  $\mu_i$  de la matrice de monodromie peuvent perdre leurs stabilités. On dénote 3 cas :

- (a)  $\mu$  traverse le cercle unité à partie imaginaire nulle et par l'axe des réels positifs
- (b)  $\mu$  traverse le cercle unité à partie imaginaire nulle et par l'axe des réels négatifs
- (c)  $\mu, \mu^*$  paire de valeurs propres conjuguées traversent le cercle unité

Tous ces cas donnent lieu à des bifurcations différentes pour un paramètre de bifurcation (en général la fréquence d'excitation) :

**Point limite** (saddle-node, fold bifurcation, turning point) : Ce point de bifurcation représente un changement de direction du paramètre de bifurcation. Lorsque ce point de bifurcation apparaît, il change la stabilité de la solution, mais pas la forme de la solution qui reste périodique. Le point limite correspond au cas (a).

**Point de branchement** (saddle-node, fold bifurcation) : Le point de branchement est assez proche du point limite. Il permet aussi la coalescence de deux cycles limites (un stable et l'autre instable). Cependant, il ne représente pas un changement de direction de la courbe de réponse, mais l'initiation d'une nouvelle branche périodique. Le point de branchement correspond aussi au cas (a).

**Doublement de période** (flip bifurcation) : Il correspond au changement de période d'un cycle, limite de période  $T$  à un cycle limite de période  $2T$ . On compte 2 types de doublements de période (DP). Les DP surcritiques et sous critiques qui conduisent à une stabilité et à une instabilité de la solution résultante respectivement. La commuté a commencé à s'intéresser à ces bifurcations après la découverte d'une nouvelle route vers le chaos par MYRBERG [2] dans les années 60. On note les travaux récents de ALCORTA et al. [3] qui utilise un formalisme fréquentiel et ceux de MIAO et al. [4] qui présentent l'apparition du doublement de période dans les problèmes de contact roue-rail. La bifurcation de type DP correspond au cas (b).

**Bifurcation de Neimark-Sacker** (Hopf secondaire) : La bifurcation de Neimark-Sacker (NS) apporte un changement de stabilité de la branche périodique stable et l'apparition d'une branche quasi-périodique stable [5], [6]. La quasi-périodicité peut se traduire par l'apparition d'une fréquence supplémentaire  $\omega_2$  dans la réponse fréquentielle d'un système forcé à  $\omega_1$ . Cette nouvelle fréquence a la particularité de ne pas être un multiple entier ou rationnel de  $\omega_1$ . On parle alors de fréquences incommensurables<sup>1</sup>. Depuis les travaux des 3 chercheurs Kolmogorov, Arnold et Moser qui a conduit à la théorie de KAM dans le 20e siècle [7], on représente la quasi-périodicité par un tore invariant de dimension finie comme on peut le voir sur la fig. 1.8. Comme pour le doublement de période, on distingue les cas surcritique et sous-critique. La bifurcation NS correspond au cas (c). Cette bifurcation est assez importante pour la suite du manuscrit, car elle sera à l'origine principale du fonctionnement des absorbeurs non-linéaires et sera explicitée plus tard dans ce document.

---

1. Des fréquences incommensurables imposent :  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q}'$

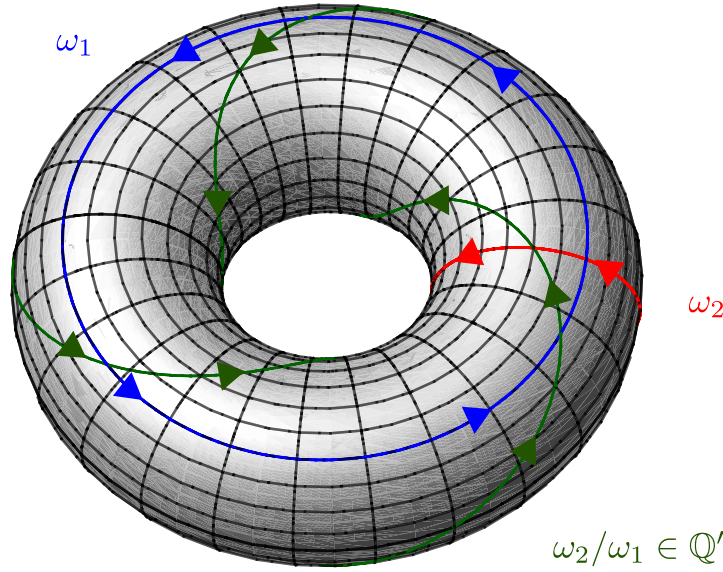


FIGURE 1.8: Schéma représentatif de la quasi-périodicité

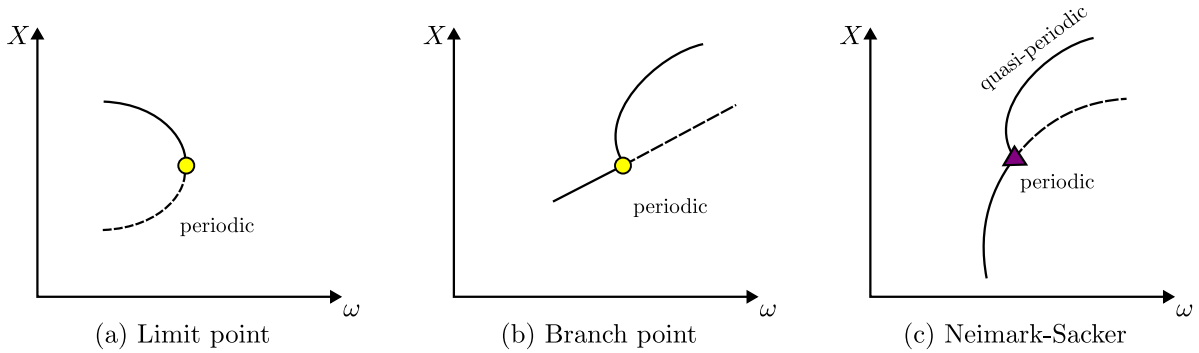


FIGURE 1.9: Bifurcations usuelles des solutions périodiques

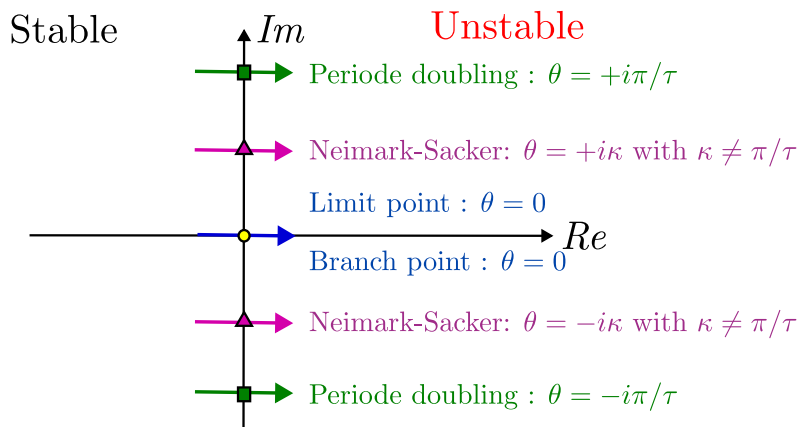


FIGURE 1.10: Mécanisme de perte de stabilité pour une solution périodique - multipliateurs de Floquet

La figure 1.9 présente un résumé des bifurcations usuelles des solutions périodiques. Bien évidemment, la stabilité peut-être analysée avec les exposants de Floquet (voir

Fig.1.10). Dans la littérature, on trouve beaucoup de noms différents pour une même bifurcation qui perd parfois les lecteurs et dénote d'un manque d'uniformité. Cependant, nous venons de voir les bifurcations pour 1 paramètre de bifurcation qu'on appelle aussi bifurcations de co-dimension 1. Si on s'intéresse aux travaux de GOVAERTS et al. [8] on peut voir que lorsque le nombre de paramètres de bifurcations augmente, des bifurcations de co-dimensions supérieures apparaissent. La figure 1.11 présente un aperçu des différentes bifurcations de co-dimensions supérieures en fonction du nombre de paramètres de bifurcation.

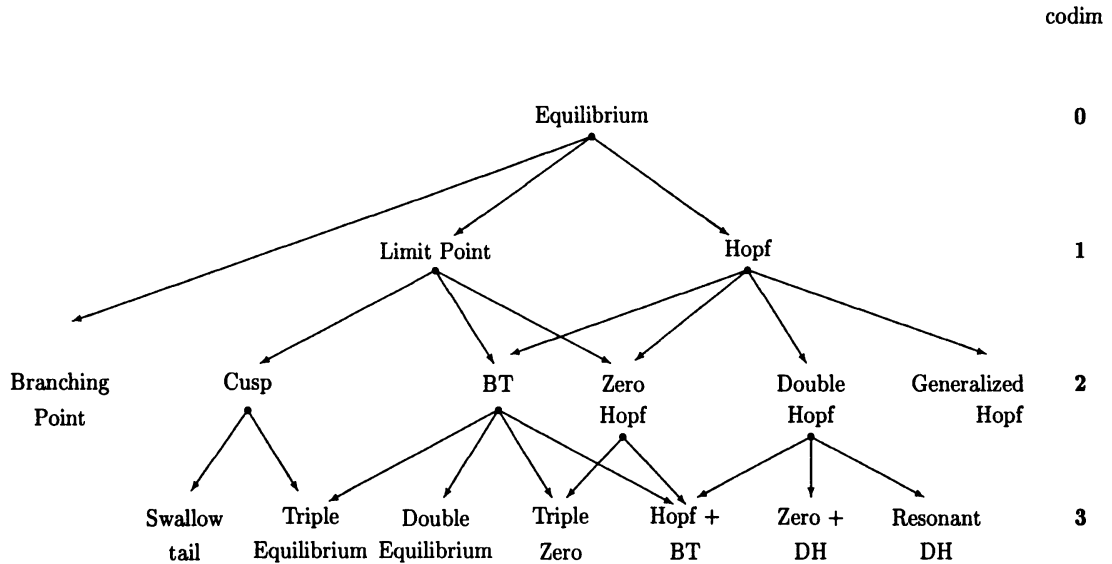


FIGURE 1.11: Résumé non exhaustif des bifurcations en dynamique non-linéaire [8]

Ces dernières peuvent être étudiées lors du suivi de point bifurcation (continuation multi-paramétrique) que nous verrons en Sect. 1.2.4.

### 1.1.2 Les modes non-linéaires

Le dernier grand pan de la dynamique non-linéaire concerne les modes non-linéaires. Pour bien comprendre ce qu'est un mode non-linéaire, commençons déjà par définir ce qu'est un mode linéaire. L'analyse modale en dynamique linéaire revient à récupérer les raideurs, amortissement et masses modales. Ces quantités sont à récupérer pour chaque mode du système. Pour un système à  $n$  degrés de liberté, les modes linéaires conservatifs  $X_i$  correspondent à la résolution du problème aux valeurs propres :

$$[K - \lambda_i M]X = 0 \tag{1.14}$$

Où  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice de masse,  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice de raideur et où les  $\lambda_i = \omega_i^2$  sont les fréquences propres de chaque mode du problème (1.14). Ces modes linéaires, qui forment une base orthonormée sont généralement utilisés pour réduire les modèles. Au vu de l'équation ci-dessus, on peut donc conclure que pour 1 fréquence  $\omega_i$ , il existe un unique mode propre  $X_i$ .

Lorsque l'on étudie les modes linéaires non-conservatifs (amortissement non nul), on utilise souvent la proportionnalité de Rayleigh de la matrice d'amortissement  $C$  par la

matrice de masse  $M$  et de raideur  $K$  telle que :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.15)$$

Cette forme de  $C$  est l'une des conditions suffisantes, mais non-nécessaire pour que la base des modes réels diagonalise l'amortissement (hypothèse de Basile). Cependant, lorsqu'un fort couplage par l'amortissement apparaît, c.-à-d. que la base des modes propres réels ne diagonalise pas la matrice d'amortissement, l'hypothèse de Basile n'est plus vérifiée. On parle alors de mode complexe<sup>2</sup>.

La question est maintenant de savoir si l'on peut étendre la théorie des modes linéaires en prenant en compte les non-linéarités de la structure? Cette réponse a été donnée dans les années 60 par ROSENBERG [9]-[11]. Ce dernier, introduit d'abord le concept de "modal line" dont il donne les solutions analytiques (obsolètes aujourd'hui). Il finira par nommer ces dernières "mode".

**Définition d'un mode non-linéaire** : les modes non-linéaires sont définis comme des vibrations à l'unisson. Des oscillations périodiques synchrones ou les masses du système atteignent leurs zéros et leurs extremums en même temps.

Ce premier concept de mode non-linéaire peut à première vue être assez difficile à saisir. Afin de mieux comprendre, ajoutons dans l'eq. (1.14) les efforts non-linéaire  $F_{nl}(X)$  :

$$[K + F_{nl}(X) - \lambda_i M]X = 0 \quad (1.16)$$

La prise en compte des efforts non-linéaires dans le nouveau problème aux valeurs propres conservatif (1.16) ne permet plus d'affirmer l'unicité des modes par fréquences. La figure 1.12 montre la différence de comportement entre des modes linéaire et non-linéaire. On peut voir sur la figure 1.12 (droite) que pour de faibles énergies, les deux modes se comportent comme des modes linéaires. Cependant, lorsque l'énergie augmente, les non-linéarités s'expriment et donnent lieu à des familles de solutions périodiques qui ne sont pas uniques. On peut voir sur cette même figure l'évolution de la déformée modale du mode. Ces solutions sont des droites à faible énergie et deviennent peu à peu des courbes. Les graphiques fréquence-énergie sont très utiles pour voir les interactions modales et expliquées des comportements non-linéaires complexes comme le transfert irréversible d'énergie [12].

---

2. La complexité d'un mode signifie qu'il existe des déphasages entre les ddls de la structure

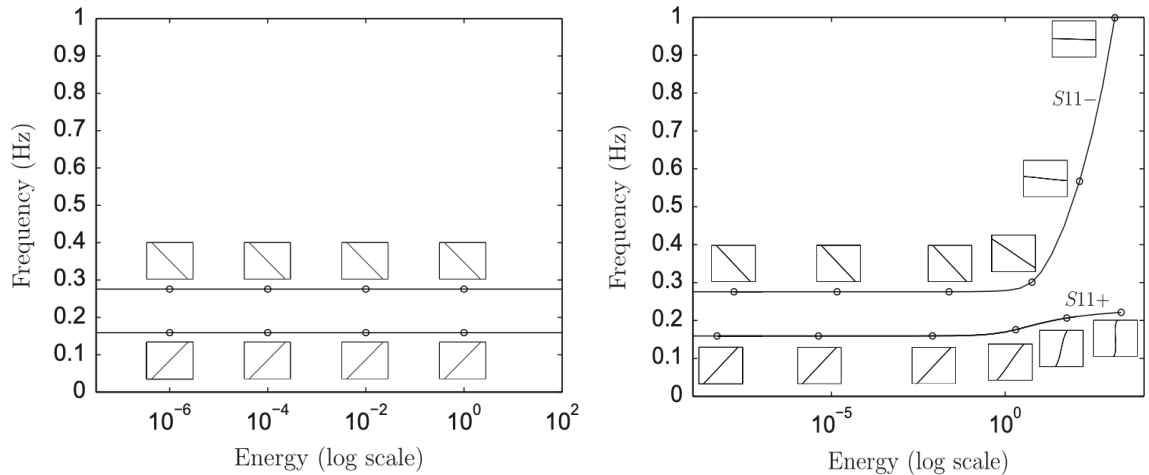


FIGURE 1.12: Illustration de modes linéaires (à gauche) et non-linéaires (à droite) tiré de [13]

Pour résumer, la déformée modale d'un mode non-linéaire évolue perpétuellement et la fréquence de leurs oscillations change avec l'amplitude. Un mode non-linéaire est donc l'ensemble de ces déformées modales.

Cette première théorie de Rosenberg bien que très bien formulée, pose encore des questions sur la vraie signification d'un mode non-linéaire. En effet, lors de résonances internes, la définition d'un mode normal non-linéaire<sup>3</sup> (NNM) devient incorrect dans l'espace des configurations (espace des phases), mais reste valable dans un espace modal défini [14], [15]. D'autres travaux ont d'ailleurs tenté d'apporter une nouvelle définition ou des améliorations de compréhension [16], [17]. La plus connue est celles de SHAW et al. [18] qui présente les modes non-linéaires comme des variétés invariantes de dimension deux de l'espace des phases. Les travaux de NAYFEH et al. [19] propose la même définition.

**Remarque** : on a parlé plus tôt dans le document du principe de superposition modale utilisée pour réduire les modèles. En non-linéaire, le principe de superposition n'étant pas vérifié la somme de deux solutions non-linéaires n'est plus une solution du système. Effectuer une réduction de modèle sur une base de plus d'un mode non-linéaire est donc impossible si l'on souhaite uniquement étudier le système. En effet, les conséquences d'une projection sur une base modale non-linéaire peuvent provoquer la perte ou la création d'informations.

## 1.2 Méthodes de résolution numériques et analytiques pour la dynamique non-linéaire

La résolution d'équations peut s'avérer complexe lorsque les problèmes deviennent non-linéaires. Cette présente présente section a pour but de présenter les différentes méthodes de résolutions utilisées dans cette thèse. La résolution des EDO (Équation différentielle ordinaire) se découpe en deux grandes familles :

- méthodes numériques

---

3. extension au non-linéaire du mode normal (propre). Il est ici défini comme des vibrations à l'unisson

— méthodes analytiques

Les méthodes numériques permettent d'obtenir le régime transitoire ou directement le régime permanent par des techniques d'intégration temporelle ou de décomposition en série de Fourier. Couplées à des techniques de continuation et de détection des bifurcations, ces méthodes sont très utilisées pour comprendre toute la dynamique d'un système. Les méthodes analytiques permettent de faire sensiblement la même chose, mais avec une expression analytique de la solution et donc un gain de temps. Afin d'illustrer au mieux ces méthodes, le fil rouge de l'oscillateur non-linéaire sera utilisé et défini par :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + K_{nl1}x^2 + K_{nl2}x^3 = \xi \sin(\omega t) \quad (1.17)$$

Pour l'application numérique, on prendra :  $M = 1$ ,  $C = 0.1$ ,  $K = 3$ ,  $\xi = 1$ ,  $K_{nl1} = -0.84$  et  $K_{nl2} = 0.1$

### 1.2.1 Calcul du régime transitoire

Le calcul transitoire permet d'avoir accès à toute la réponse du système dans le temps avec ou sans terme de forçage. Ce type de réponse s'obtient avec des algorithmes de calcul temporel comme les méthodes de Runge-Kutta [20] ou NEWMARK [21]. Ces méthodes ne seront pas détaillées ici, mais j'invite les lecteurs intéressés à regarder les deux références suivantes pour plus d'information sur l'intégration temporelle [22], [23] ainsi que les références de MATLAB sur le sujet. Si l'on regarde la réponse de l'Eq. (1.17) pour  $\omega = 1$  (c.-à-d. à la fréquence propre de la partie linéaire de l'oscillateur non-linéaire) pour des conditions initiales nulles, la figure 1.13 nous donne deux informations.

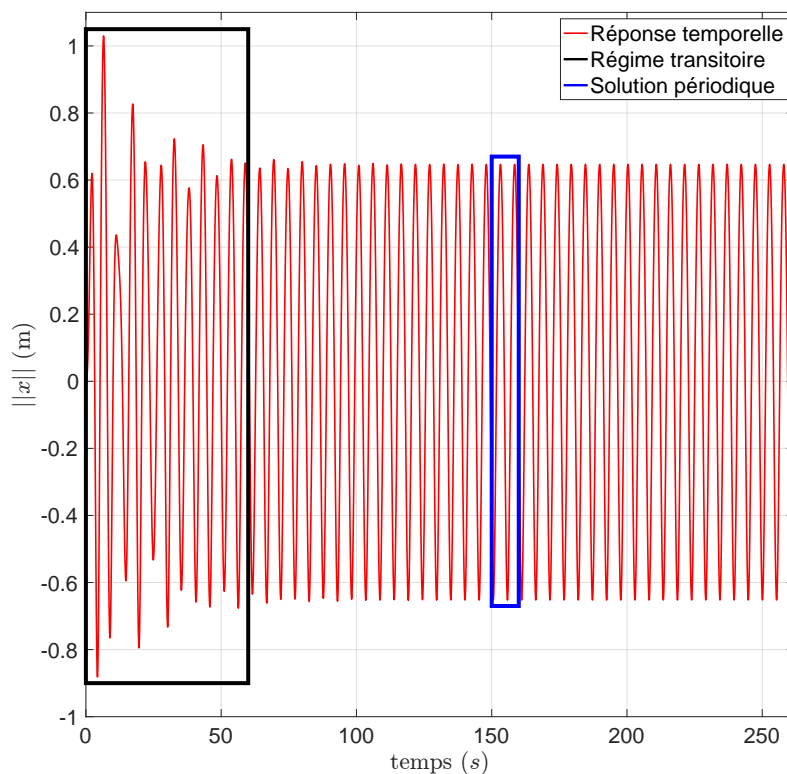


FIGURE 1.13: Réponse temporelle de l'oscillateur non-linéaire : Eq.(1.17) pour  $\omega = 1.2$

La première concerne le temps et l'amplitude maximale du régime transitoire. La deuxième nous informe sur l'amplitude du régime permanent ou stationnaire. Ce dernier



étant un invariant en temps (voir Sect. 1.1.1), il peut être utilisé pour tracer des courbes de réponse en fréquence [24].

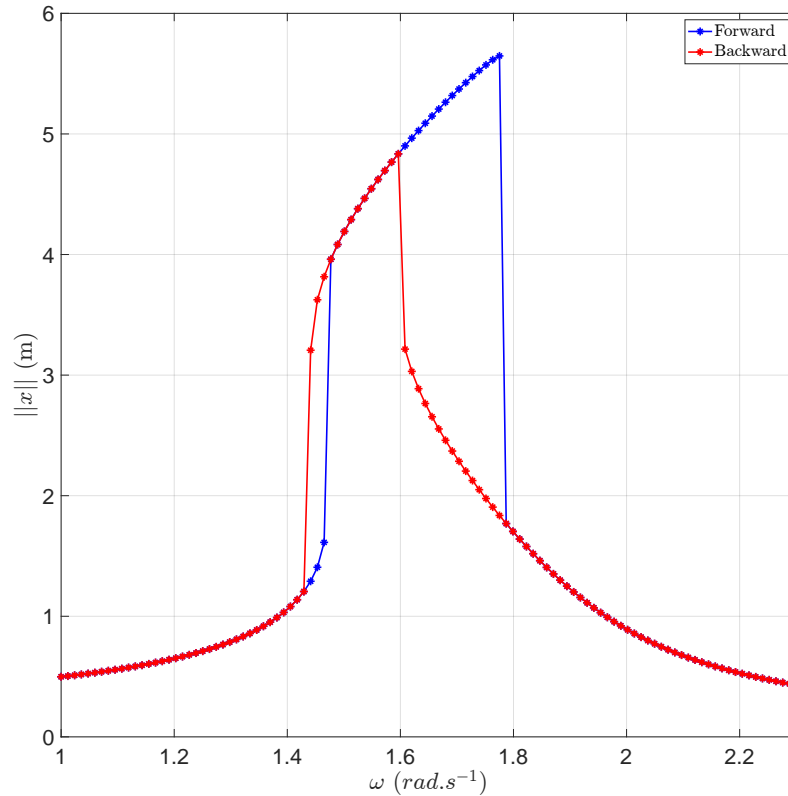


FIGURE 1.14: Réponse en fréquence de l'oscillateur non-linéaire : Eq.(1.17)

La figure 1.14 montre l'évolution du régime permanent en fonction de la pulsation d'excitation. On remarque une différence entre la montée et la descente en fréquence qui crée des discontinuités. Ces dernières sont directement liées à la stabilité expliquée dans la section 1.1.1. Les solutions instables, plus difficilement atteignables, ne sont pas calculées par le solveur temporel. On peut alors se demander comment obtenir directement le régime permanent afin de gagner du temps? Et comment obtenir les solutions instables au sens de Floquet?

### 1.2.2 Calcul du régime permanent

Afin de gagner du temps dans la construction de la courbe de réponse (voir Fig. 1.14), des méthodes de résolutions calculant directement le régime permanent sont utilisées. Le calcul des solutions périodiques peut être réalisé par :

- **L'intégration temporelle** : On peut citer la méthode du Shooting [24], [25]. Cette méthode consiste à trouver les conditions initiales qui permettent une convergence (par itération successive) vers le régime périodique. La méthode du Shooting est détaillée en Annexe. A. De façon plus globale, la méthode des Global Orbit Finding [26] (GOF) peut être considérée. C'est une amélioration de la méthode du Shooting. En effet, la convergence des GOF se fait par l'utilisation de tous les points de l'intégration temporelle comme inconnus. On cherche alors l'orbite périodique de façon globale.

- **Les méthodes de résidus pondérés** : Cette méthode se base sur l'écriture variationnelle du problème [27]. Soit le problème dynamique  $\mathbb{Z}$  tel que :

$$\mathbb{Z} = \dot{X} - f(X, \omega) = 0 \quad (1.18)$$

L'écriture variationnelle du problème (1.18) s'écrit alors :

$$\int_0^T \mathbb{Z} \delta X dt = \int_0^T (\dot{X} - f(X, \omega)) \delta X dt = 0 \quad (1.19)$$

où  $\delta X(t)$  est une fonction test de classe  $C^\infty$  à support compact. Introduisons  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_i^*$  les bases de décomposition des variables  $X$  et  $\delta X(t)$  respectivement :

$$X(t) = \Lambda_i X_i, \text{ et } \delta X(t) = \Lambda_i^* \delta X_i \quad (1.20)$$

En fonction des bases de décomposition choisies, une sélection parmi la famille de méthode présentée dans le tableau 1.3 peut être réalisée.

Méthode	$\Lambda_i$	$\Lambda_i^*$
Équilibrage harmonique (HBM)	Fourier	Fourier
Colocalisation orthogonale [28]	Polynômes par morceaux	Dirac au point de Gauss
Colocalisation trigonométrique	Fourier	Dirac
Alternance temps fréquence (AFT)	Fourier/Temps	Fourier/Temps

TABLE 1.3: Méthode du résidu pondéré : problème variationnel

- **Le calcul d'un sous-espace invariant** : Cette nouvelle méthode propose le calcul d'un sous-espace invariant de dimension 2 [29].

De toutes ces méthodes, nous ne détaillerons que la HBM et l'AFT. Couplées ensemble, ces méthodes, largement utilisées dans cette thèse, ont pour avantage de donner de très bonnes vitesses de convergence [30].

### Méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)

La méthode de l'équilibrage harmonique [31], [32] est une méthode de résolution des équations de mouvement dans le domaine fréquentiel. Cette méthode permet de transformer un système ou une équation différentielle en un système ou équation algébrique portant sur les coefficients de Fourier. Cela revient à chercher la solution périodique sous forme de série de Fourier tronquée à l'ordre  $H$  (où  $H$  est le nombre d'harmoniques). En transformant l'Eq.(1.17) pour faire apparaître le résidu d'équilibre en effort  $r(x, \omega, t)$ , on peut écrire :

$$r(x, \omega, t) = M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + f_{nl}(x) - \xi p(\omega, t) = 0 \quad (1.21)$$

avec

$$p(\omega, t) = \sin(\omega t) \quad (1.22)$$

$$f_{nl}(x) = K_{nl1}x^2 + K_{nl2}x^3 \quad (1.23)$$

La décomposition en série de Fourier des grandeurs ci-dessus donne alors :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^H A_n^c \cos(n\omega t) + A_n^s \sin(n\omega t) \quad (1.24)$$

$$p(\omega, t) = P_0 + \sum_{n=1}^H P_n^c \cos(n\omega t) + P_n^s \sin(n\omega t) \quad (1.25)$$

$$f_{nl}(x) = F_0 + \sum_{n=1}^H F_n^c \cos(n\omega t) + F_n^s \sin(n\omega t) \quad (1.26)$$

Les vecteurs des coefficients de Fourier  $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{nddl \times (2H+1)}$  où  $nddl$  est le nombre de degrés de liberté du système (ici égale à 1) sont donnés tels que :

$$A = [A_0, A_1^c, A_1^s, \dots, A_H^c, A_H^s]^T \quad (1.27)$$

$$P = [P_0, P_1^c, P_1^s, \dots, P_H^c, P_H^s]^T \quad (1.28)$$

$$F_{nl} = [F_0, F_1^c, F_1^s, \dots, F_H^c, F_H^s]^T \quad (1.29)$$

on définit la transformée de Fourier inverse par l'opérateur  $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{nddl \times (2H+1)}$ .

$$\mathbb{T}(\omega t) = [1 \quad \cos(\omega t), \quad \sin(\omega t), \quad \dots, \quad \cos(H\omega t), \quad \sin(H\omega t)]^T \quad (1.30)$$

L'opérateur  $\mathbb{T}(\omega t)$  n'est composé que des termes trigonométriques. L'écriture sous forme tensorielle de la série de Fourier de  $x(t)$ ,  $p(\omega t)$ ,  $f_{nl}(x)$  s'écrivent alors :

$$x(t) = (\mathbb{T}(\omega t) \otimes I_n)A \quad (1.31)$$

$$p(\omega t) = (\mathbb{T}(\omega t) \otimes I_n)P \quad (1.32)$$

$$f_{nl}(x) = (\mathbb{T}(\omega t) \otimes I_n)F_{nl} \quad (1.33)$$

avec  $\otimes$  le produit de Kronecker et  $I_n \in \mathbb{R}^{nddl \times nddl}$  la matrice identité. En introduisant l'opérateur de dérivation  $\nabla \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times (2H+1)}$  tel que :

$$\nabla = \text{diag}(0, \nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_H) \text{ avec } \nabla_i = i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

on peut alors exprimer la vitesse  $\dot{x}$  et l'accélération  $\ddot{x}$  :

$$\dot{x}(t) = \omega(\mathbb{T}(\omega t) \otimes I_n)(\nabla \otimes I_n)A = \omega(\mathbb{T}(\omega t)\nabla \otimes I_n)A \quad (1.35)$$

$$\ddot{x}(t) = \omega^2(\mathbb{T}(\omega t) \otimes I_n)(\nabla^2 \otimes I_n)A = \omega^2(\mathbb{T}(\omega t)\nabla^2 \otimes I_n)A \quad (1.36)$$

En projetant l'équation (1.21) sur la base  $\mathbb{T}$  (procédure de Galerkin [33]) et en réarrangeant l'équation de mouvement, on peut écrire le nouveau résidu d'équilibre dans le domaine fréquence sans dépendance en temps (système algébrique) :

$$R(\omega, A) = Z(\omega)A + F_{nl}(A) - P = 0 \quad (1.37)$$

avec  $Z(\omega)$  la matrice de raideur dynamique telle que :

$$Z(\omega) = \omega^2(\nabla^2 \otimes M) + \omega(\nabla \otimes C) + (I_{2H+1} \otimes K) = \text{diag}(K, Z_1(\omega), \dots, Z_l(\omega), \dots, Z_H(\omega)) \quad (1.38)$$

$$Z_l(\omega) = \begin{bmatrix} K - l^2\omega^2 M & \omega C \\ -\omega C & K - l^2\omega^2 M \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

où  $I_{2H+1}$  la matrice identité de taille  $(2H + 1)$ . Le système d'équations (1.37) est résolu par une méthode itérative de type Newton-Raphson en posant pour l'itération  $k$  :

$$R_A^k \delta A = -R^k(\omega, A) \quad (1.40)$$

$$A^{k+1} = A^k + \delta A \quad (1.41)$$

où  $R_A$  la dérivée de  $R$  par rapport à  $A$ .

La HBM est une méthode très connue que l'on trouve dans plusieurs codes de calcul commerciaux [34], [35]. Elle trouve cependant ses principales limitations lorsque les non-linéarités sont non régulières. Il devient alors nécessaire d'augmenter drastiquement le nombre d'harmoniques pour avoir convergence de la solution.

### Alternance Temps Fréquence (AFT)

Le calcul des termes non-linéaires dans le domaine fréquentiel est souvent compliqué dû à l'apparition du produit de convolution qui découle d'une multiplication dans le domaine temporel [36]. La méthode de l'alternance temps fréquence permet de calculer les forces non-linéaires dans le domaine temporel pour faciliter leur calcul. Ce changement de domaine se fait par le biais de deux opérateurs de la transformé de Fourier discrète :  $\Psi$  et  $\Psi^{-1}$  donné ci-dessous.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & \cdots & \cos(H\theta_1) & \sin(H\theta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\theta_N) & \sin(\theta_N) & \cdots & \cos(H\theta_N) & \sin(H\theta_N) \end{bmatrix}; \Psi^{-1} = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cos(\theta_1) & \cdots & \cos(\theta_N) \\ \sin(\theta_1) & \cdots & \sin(\theta_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(H\theta_1) & \cdots & \cos(H\theta_N) \\ \sin(H\theta_1) & \cdots & \sin(H\theta_N) \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

avec  $N > 2H + 1$  le pas de temps. La figure 1.15 ci-dessous représente la méthode à suivre pour réaliser l'AFT.

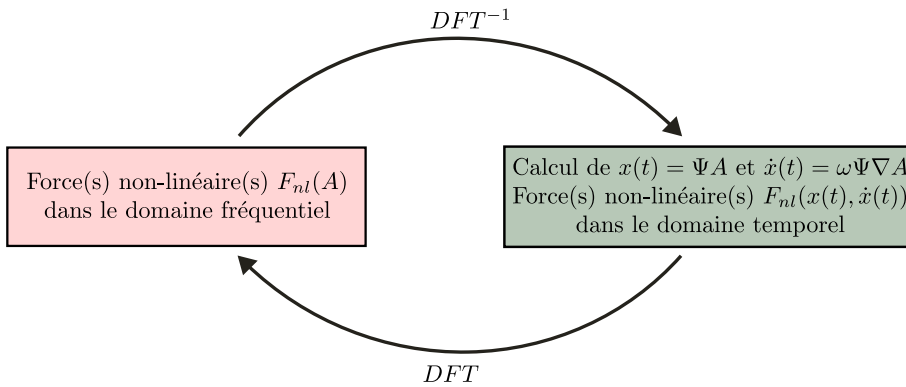


FIGURE 1.15: Méthode de l'alternance temps fréquence (AFT)

L'ajout de  $\Psi$  et  $\Psi^{-1}$  permet d'exprimer le déplacement  $x(t)$  et ses dérivées de façon discrète comme dans [37] :

$$\bar{x}(t) = \Psi A = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)]^T \quad (1.43)$$

$$\bar{\dot{x}}(t) = \omega \Psi \nabla A = [\dot{x}(t_1), \dot{x}(t_2), \dots, \dot{x}(t_N)]^T \quad (1.44)$$

$$\bar{\ddot{x}}(t) = \omega^2 \Psi \nabla^2 A = [\ddot{x}(t_1), \ddot{x}(t_2), \dots, \ddot{x}(t_N)]^T \quad (1.45)$$

Puis d'exprimer (dans le cas général de forces non-linéaires pouvant dépendre de la vitesse) les efforts non-linéaires discrets et leurs dérivées :

$$F_{nl}(A) = \Psi^{-1} \bar{f}_{nl}(x, \dot{x}) \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_{nl}(A)}{dA} &= \frac{\partial F_{nl}(A)}{\partial \bar{f}_{nl}} \frac{\partial \bar{f}_{nl}(A)}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial A} + \frac{\partial F_{nl}(A)}{\partial \bar{f}_{nl}} \frac{\partial \bar{f}_{nl}(A)}{\partial \bar{\dot{x}}} \frac{\partial \bar{\dot{x}}}{\partial A} \\ &= \Psi^{-1} \frac{\partial \bar{f}_{nl}(x, \dot{x})}{\partial x} \Psi + \Psi^{-1} \frac{\partial \bar{f}_{nl}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \omega \Psi \nabla \end{aligned} \quad (1.47)$$

avec

$$\bar{f}_{nl}(x, \dot{x}) = [f_{nl}(x(t_1), \dot{x}(t_1)) \quad f_{nl}(x(t_2), \dot{x}(t_2)) \quad \dots \quad f_{nl}(x(t_N), \dot{x}(t_N))] \quad (1.48)$$

**Remarque :** Dans le cas du fil rouge, les efforts non-linéaires ne dépendent pas de la vitesse, les dérivées par rapport  $\dot{x}$  sont nulles.

La méthode de l'AFT sera utilisée dans la suite du manuscrit pour des raisons de praticité et de simplicité de mise en oeuvre.

### 1.2.3 Procédure de continuations

La richesse de la dynamique non-linéaire vient des multiples positions d'équilibre parfois stable ou instable. Comme on l'a vu sur la figure 1.14 il peut être assez compliqué de voir les parties instables sans avoir les bonnes conditions initiales. La procédure de continuation permet l'obtention de ces parties instables. La continuation est une méthode de calcul déterministe qui permet d'explorer la variété des solutions d'un système d'équations. Cette exploration est réalisée grâce à un paramètre appelé paramètre de continuation. Cette continuation se décompose en deux grandes familles de continuation, les Méthodes Asymptotiques Numérique (MAN) [38] qui sont basées sur des développements asymptotiques [39] et les méthodes de prédiction-corrrection [24], [40] utilisées dans cette thèse. Le choix de la procédure de continuation (si elle n'est pas implicitement imposée) dépend de la taille du système (du nombre d'équations) et du type de non-linéarité. En effet, les méthodes asymptotiques nécessitent l'utilisation du formalisme quadratique qui alourdit la notation, augmente la taille du système et peut rendre l'écriture de certaines non-linéarités compliquée. Cependant, il est vrai que la précision de la méthode est supérieure à celle utilisée dans cette thèse, ce qui, dans certains cas permet de diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour l'étape de correction [41]. Grâce à cette méthode de continuation, les zones instables de la figure 1.14 seront désormais accessibles.

### Prédiction de la solution périodique

Si l'on considère un couple initiale  $(A^0, \omega^0)$ , l'étape de prédiction consiste à prédire le futur couple de paramètres  $(A^1, \omega^1)$ . Pour se faire, on cherche une solution tangente à la courbe d'équation en définissant un vecteur tangent  $\vec{t}$  au point  $(A^0, \omega^0)$ .

$$\vec{t} = [\Delta A, \Delta \omega]^T \quad (1.49)$$

Si l'on considère l'Eq. (1.37), et que l'on exprime la différentielle totale en fonction de  $A^0$  et  $\omega^0$  on obtient :

$$\Delta R(A^0, \omega^0) = \frac{\partial R}{\partial A} \Big|_{(A^0, \omega^0)} \Delta A^1 + \frac{\partial R}{\partial \omega} \Big|_{(A^0, \omega^0)} \Delta \omega^1 = 0 \quad (1.50)$$

La norme de  $\|\vec{t}\|$  est fixée en ajoutant l'équation (pseudo-longueur d'arc) :

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{(\Delta A^1)^T \Delta A^1 + (\Delta \omega^1)^2} = \Delta s \quad (1.51)$$

avec  $\Delta s$  la longueur du pas qui peut être fixée par l'utilisateur ou adaptatif [40, Chapitre 4]. La prédiction s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} A^1 \\ \Delta \omega^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A^0 \\ \Delta \omega^0 \end{bmatrix} + \vec{t} \quad (1.52)$$

Le calcul du vecteur tangent se fait en résolvant le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} R_A^0 & R_\omega^0 \\ \Delta A^T & \Delta \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta s^2 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Lors de la prédiction, des erreurs sont commises sur la solution. Ils est donc nécessaire de les corriger.

### Correction de la solution périodique

L'étape de correction permet d'annuler le résidu d'équilibre  $R(A, \omega)$  à la tolérance  $\epsilon$  choisie tel que :  $\|R(A, \omega)\| < \epsilon$ . Cette annulation se fait de façon orthogonale à  $\vec{t}$  par un algorithme de Newton-Raphson et corrige l'erreur commise par la prédiction. À chaque itération  $k$ , le système à résoudre est donné ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} R_A^{1(k)} & R_\omega^{1(k)} \\ \Delta A^T & \Delta \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A \\ \delta \omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^{1(k)}(A, \omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

La figure 1.16 montre la réponse en fréquence de l'équation (1.17) par HBM avec la procédure de continuation. Un résumé visuel de la procédure et l'algorithme correspondant sont donnés en Fig. 1.17 et sur l'algorithme disponible en Annexe. E.

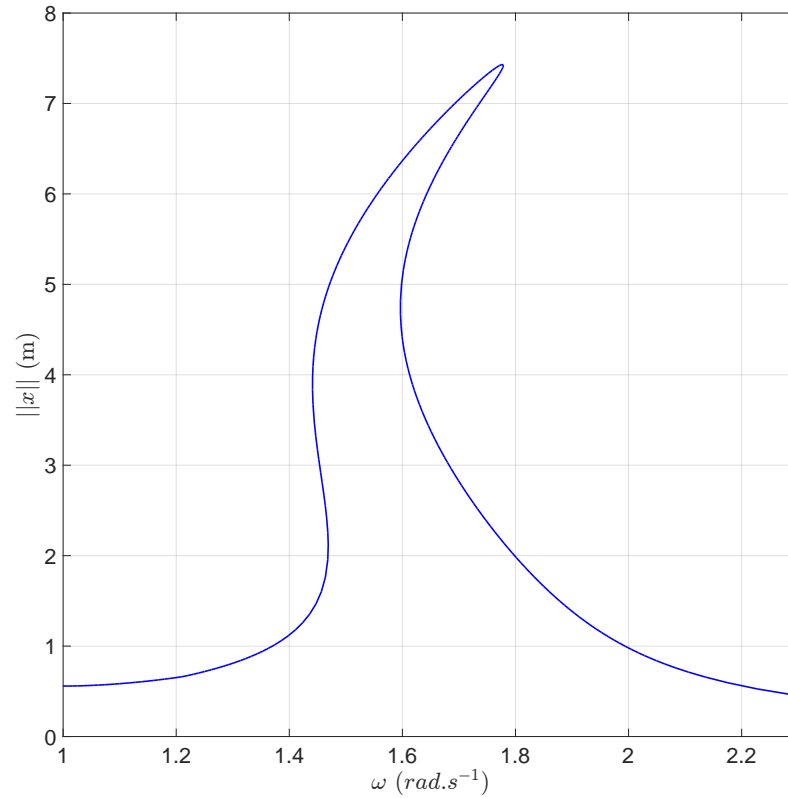


FIGURE 1.16: Réponse en fréquence de l'oscillateur non-linéaire par HBM : Eq.(1.17)-NHBM=5

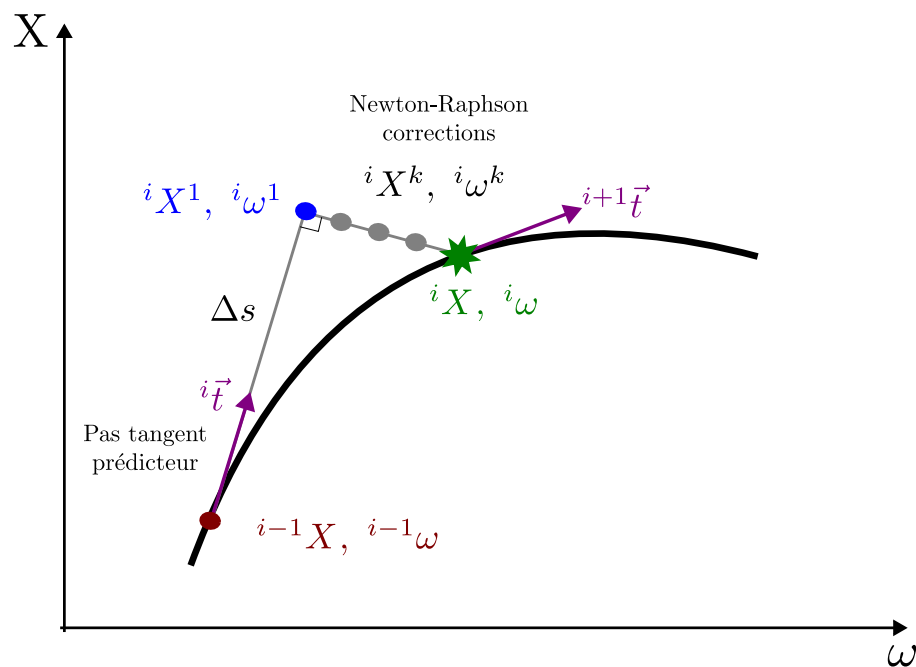


FIGURE 1.17: Technique de continuation par pseudo-longueur d'arc

La phase non-linéaire (voir Fig. 1.18) peut être tracée en approximant celle-ci grâce aux coefficients de Fourier du premier harmonique.

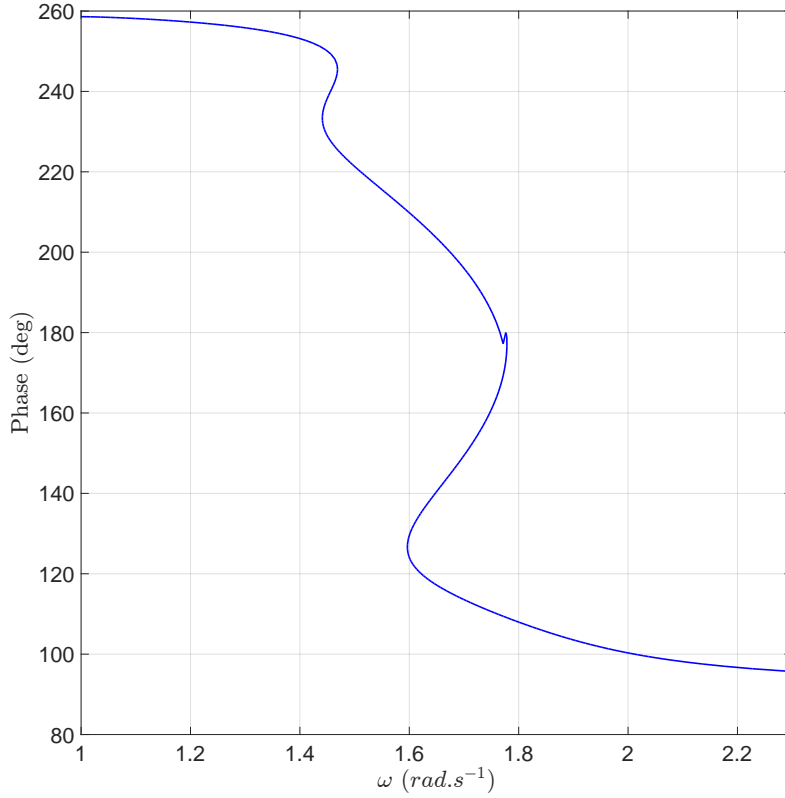


FIGURE 1.18: Phase de l'oscillateur non-linéaire par HBM : Eq.(1.17)-NHBM=5

### 1.2.4 Calcul des bifurcations

Bien que le calcul des bifurcations soit réalisable dans le domaine temporel par la matrice de monodromie (voir Sect : 1.1.1), il est tout à fait possible de les calculer directement dans le domaine fréquentiel par la méthode de Hill [42]. Cette dernière se base sur la résolution d'un problème quadratique exprimé ci-dessous :

$$[R_A + D_1\lambda + D_2\lambda^2]\phi = 0 \quad (1.55)$$

avec en posant  $V = \omega \nabla A$

$$D_1 = 2\omega \nabla \otimes M + I_{(2H+1)} \otimes C + \frac{\partial F_{nl}}{\partial V} \quad (1.56)$$

et

$$D_2 = I_{(2H+1)} \otimes M \quad (1.57)$$

où les  $\lambda$  sont les exposants de Floquet et  $\phi$  les vecteurs propres associés. En écrivant le problème aux valeurs propres sous forme matricielle, il vient :

$$(\Xi - \lambda I_{2T})\hat{\phi} = 0 \quad (1.58)$$

avec  $\Xi$  la matrice de Hill calculée à chaque pas de continuation telle que :

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0_T & I_T \\ -D_2^{-1}R_A & -D_2^{-1}D_1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$



et  $\hat{\phi}$

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda\phi \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

où  $T = nddl \times (2H + 1)$ . Le problème (1.58) est donc 2 fois plus grand que la taille du système à résoudre. Par conséquent, toutes les valeurs propres n'ont pas de sens physiques [43]. Afin de s'assurer que les valeurs propres de la matrice  $\Xi$  correspondent bien aux exposants de Floquet, les  $\lambda$  sont triés et seulement les  $2 \times nddl$  valeurs propres à la partie imaginaire la plus petite sont gardées [44]. Le calcul des bifurcations est alors combiné à la procédure de continuation établie plus haut. La figure 1.19 nous montre les zones stables correspondent aux zones tracées avec la continuation séquentielle (voir la figure 1.14) et les zones instables délimitées par les points de bifurcation.

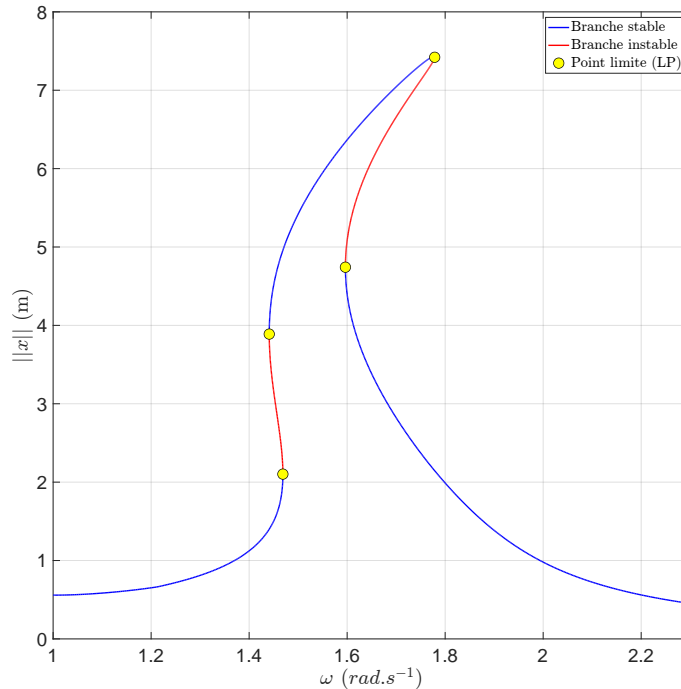


FIGURE 1.19: Réponse en fréquence de l'oscillateur non-linéaire par HBM : Eq.(1.17) avec calcul de la stabilité avec Hill- HBM=15

La méthode de Hill permet de s'affranchir du calcul temporel sur une période. En contrepartie, la convergence des exposants de Floquet peut nécessiter plus d'harmoniques qu'il n'est nécessaire pour la convergence de la solution périodique. En effet, la matrice de Hill n'est qu'une approximation de la matrice de monodromie. La concaténation de la continuation, la méthode de l'équilibrage harmonique et le calcul de stabilité permet d'en apprendre beaucoup sur un système non-linéaire. Beaucoup de travaux se basent sur ces méthodes et permettent de calculer des régimes plus complexes comme des régimes quasi-périodiques [45]-[47].

**Remarque :** lors de la présentation de la méthodologie (HBM et continuation) les systèmes étaient solvables c.-à-d. que le déterminant de la matrice jacobienne était non nul. Il peut arriver que ce ne soit pas le cas et que la convergence de la solution soit impossible. Lorsque les dérivées sont compliquées à calculer les méthodes comme du quasi-Newton [48] peuvent être appliquées. Pour des problèmes où, l'utilisateur à vrai-

ment peut d'information, la méthode de BROYDEN [49] peut être utilisée. Les systèmes singuliers seront abordés dès le prochain chapitre lors de l'étude d'un système par sliding mode (voir Sect. 2.1).

### Continuation des points de bifurcations

La continuation des points de bifurcations<sup>4</sup> permet de suivre l'évolution d'un point de bifurcation dans un espace de dimensions  $r$  avec  $r > 2$ . Un paramètre supplémentaire  $\gamma$  est ajouté aux variables  $(X, \omega)$ . Ce dernier correspond à un paramètre du système et permet le suivi de points de bifurcations en 3 dimensions qui se fait en deux étapes :

- localisation précise du point de bifurcation désiré en résolvant par itération successive de système d'équations (ou système réduit [50] ) qui caractérise le point de bifurcation.
- Continuation du point de bifurcation pour un paramètre donné.

L'Annexe. B présente les systèmes à résoudre pour mener à bien le suivi de points de bifurcation. Cette méthode est tirée des travaux de thèse de XIE [51] et DETROUX [50]. La figure 1.20 présente le suivi des points limites dans le cas de notre fil rouge lorsque le paramètre de bifurcation est la raideur non-linéaire  $K_{nl1}$ . La figure 1.21 présente la projection de cette courbe dans le plan  $(K_{nl1}, \|x\|)$ .

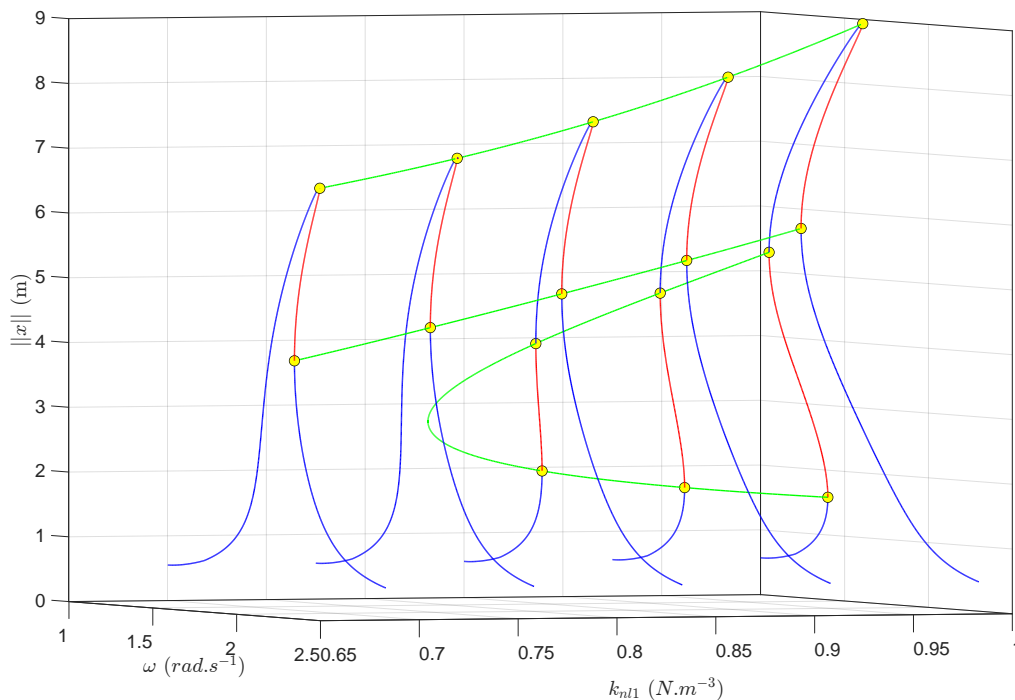


FIGURE 1.20: Suivi de LP : en vert courbe de suivi, en rouge les branches instables et en bleu les branches stables

4. Le suivi de point de bifurcation peut aussi s'appliquer aux résonances ou anti-résonances. Leur suivi est d'ailleurs assez similaire

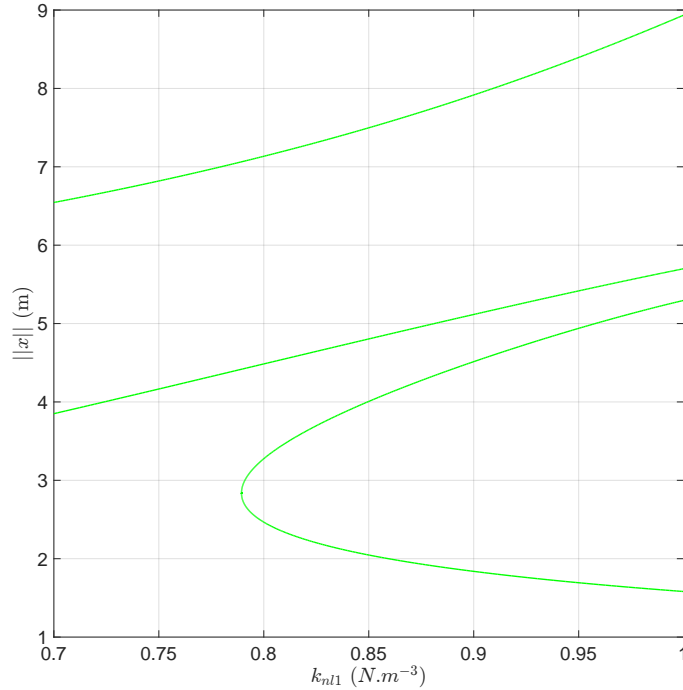


FIGURE 1.21: Projection de la courbe de suivi

### 1.2.5 Techniques Perturbations : Calcul du Slow Invariant Manifold

Cette dernière section présente un nouveau type de méthode : les méthodes dites de perturbations [52]. Contrairement aux méthodes numériques (intégration temporelle) ou semi-analytiques comme la HBM, les méthodes analytiques permettent d'obtenir l'expression de la solution de façon analytique. Dans cette thèse, ces méthodes ne nous serviront pas à calculer des courbes de réponse en fréquence (obtenue par HBM), mais plutôt des variétés invariantes lentes ou SIM (Slow Invariant Manifold) en anglais. Ces notions étant moins répandues dans la communauté du non-linéaire et quasiment inconnues du domaine du contrôle actif, une mise en contexte est nécessaire.

#### Définition du SIM

Lors de l'introduction des absorbeurs non-linéaire et plus particulièrement des non-linear energy sink (NES) (voir Sect. 1.4.3), nous avons employé le terme "d'absorbeur à seuil". Le régime périodique de l'absorbeur devient quasi-périodique à partir d'une certaine amplitude. On sait maintenant que ce changement intervient entre deux bifurcations de Neimark-Sacker(NS) qui génèrent une branche stable quasi-périodique et une branche instable périodique. L'apparition de ce point de bifurcation ou de ce seuil d'activation est donc un élément important à maîtriser pour concevoir des NES de manière efficace et répondre à un cahier des charges donné. C'est exactement là qu'intervient le SIM. Il permet de connaître le seuil d'activation sans même tracer la réponse en fréquence. En revanche, il ne donne pas directement accès au point de bifurcations NS. Ce seuil d'activation dépend donc des paramètres internes de l'absorbeur, mais aussi de l'effort d'excitation. Si cet effort n'est pas suffisant, alors le régime résultant reste périodique et l'absorbeur n'absorbe pas les vibrations. On peut donc donner la définition suivante :

**Slow invariant Manifold** : représentation dans un espace fini de l'évolution des solutions périodiques pour plusieurs niveaux de forçage donné.

Dans le cas d'un absorbeur de vibrations (modèle réduit à deux ddl) on représente le SIM dans l'espace  $N_1$  et  $N_2$  respectivement l'image du déplacement de la structure à contrôler et le déplacement relatif du deuxième ddl. Cette variété invariante est calculée selon l'hypothèse de la résonance 1 : 1 c.-à-d. le mode pour lequel les deux masses bougent en phase. La figure. 1.22 représente dans l'espace  $N_1, N_2$  le slow invariant manifold avec, superposé le régime périodique correspondant au cas où l'amplitude des conditions initiales n'est pas suffisante (ou l'amplitude de l'excitation trop faible pour activer le NES). On peut donc constater que la solution se déplace le long de la branche du SIM, l'absorbeur n'est pas activé et la solution est périodique. La figure. 1.23 représente le SIM lorsque l'amplitude des conditions initiales est suffisante (ou l'effort extérieur est suffisant). Pour un cas de lâcher (pas d'effort extérieur), lorsque la solution atteint le point de désactivation (en vert), elle saute sur une autre branche du SIM. Dans le cas d'une force harmonique, la solution saute entre les deux points singuliers (vert et rouge) et crée une boucle d'hystérésis caractéristique de la quasi-périodicité (voir Fig. 1.24). Ces sauts représentent l'enveloppe de la solution temporelle quasi-périodique.

**Remarque** : Sur la figure 1.23, le saut ne se produit pas exactement au niveau du seuil de désactivation. En effet, le SIM reste une approximation à une harmonique. Afin d'obtenir plus de précision, il est nécessaire d'ajouter des harmoniques dans sa construction.

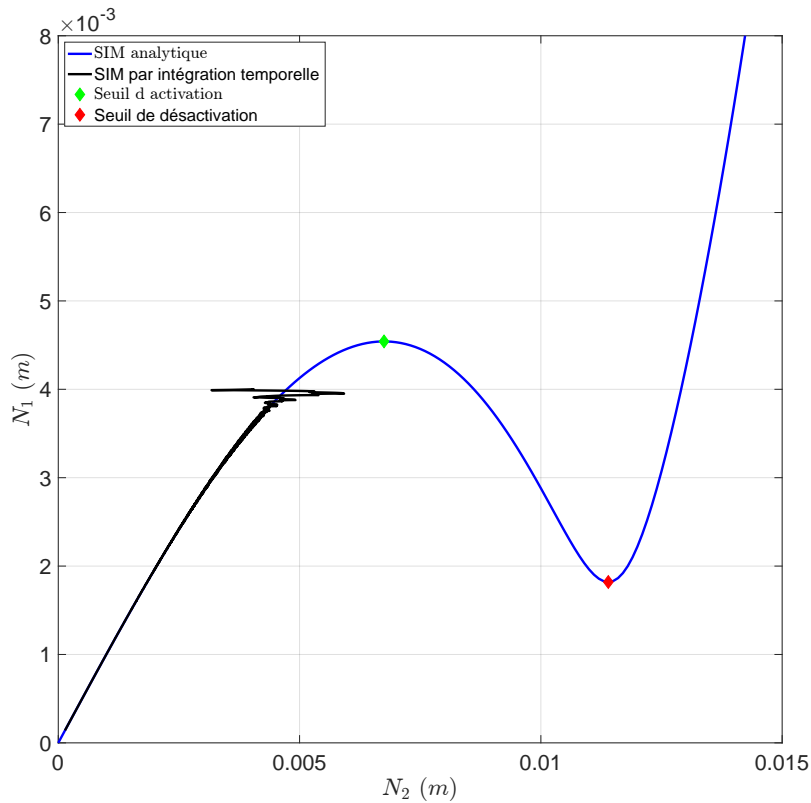


FIGURE 1.22: Slow Invariant manifold périodique

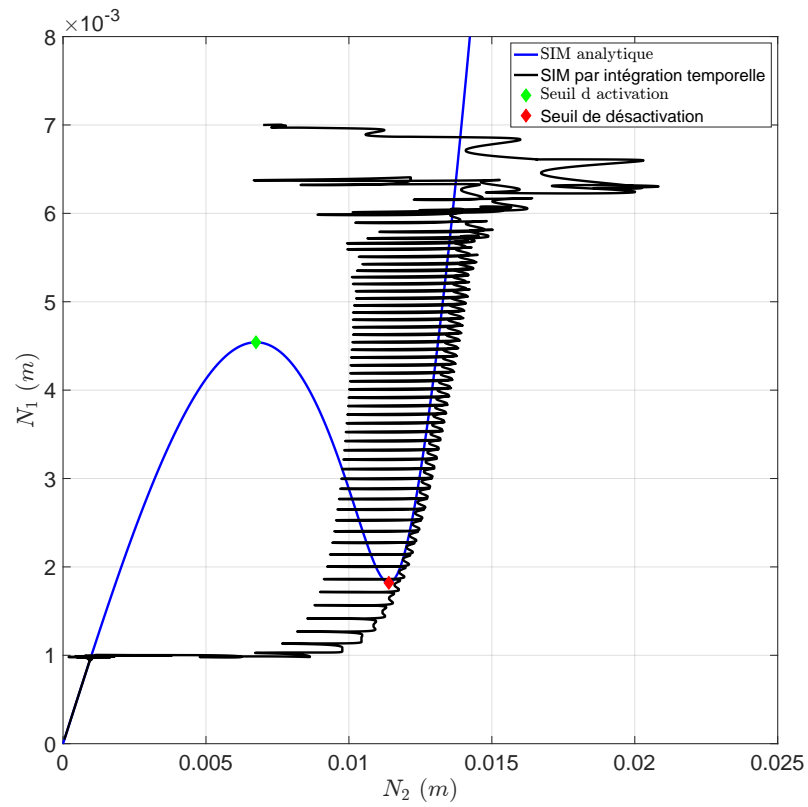


FIGURE 1.23: Slow Invariant manifold quasi-périodique

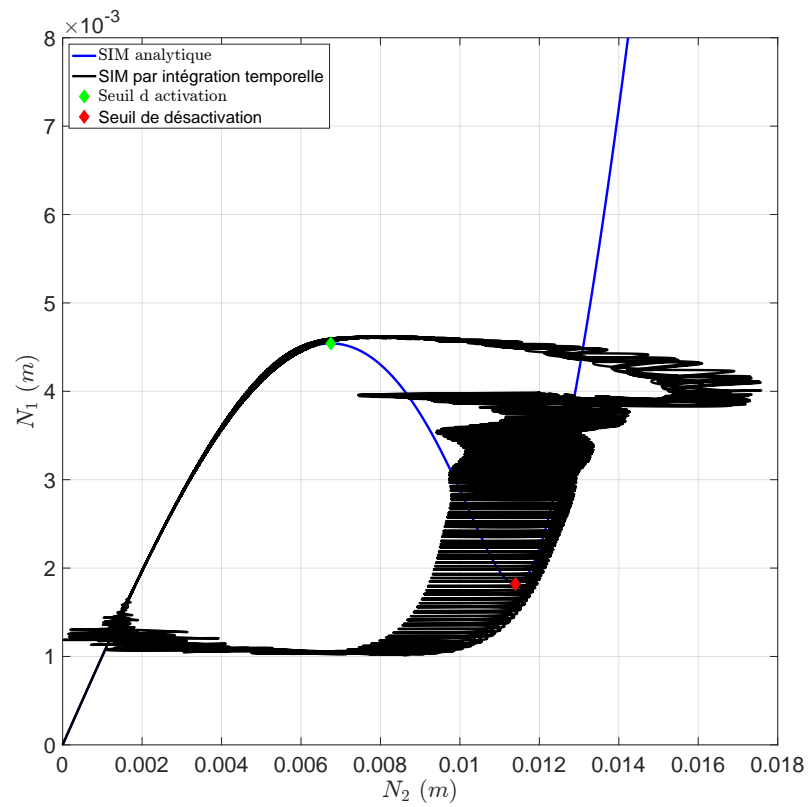


FIGURE 1.24: Slow Invariant manifold quasi-périodique

## Calcul du SIM

Dans ces travaux de thèse, le calcul du SIM est réalisé à partir de l'article de MANEVITCH [53] sorti au début des années 2000. L'auteur de ce dernier a eu l'idée d'introduire un changement de variable, dans les équations de mouvement, sous la forme d'exponentielles complexes. Les étapes de cette méthode, dans le cas d'un système à deux degrés de liberté, sont présentées ci-dessous :

À partir d'un système d'équations, la première étape consiste en l'adimensionnalisation des équations de mouvement et du temps. On définit alors le temps propre  $\tau_0$  tel que :

$$\tau_0 = \omega_0 t \quad (1.61)$$

Avec  $\omega_0$  la pulsation propre de la structure primaire. Ensuite, les coordonnées barycentriques sont introduites. La formulation de ces coordonnées est assez libre. Néanmoins, on trouve souvent dans la littérature (pour le cas des NES) la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} V = x_1 + \epsilon x_2 \\ Y = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1.62)$$

Où  $x_1$  est le déplacement de la structure primaire,  $x_2$  celui de l'absorbeur et  $0 < \epsilon \ll 1$  le rapport de la masse de l'absorbeur par la masse de la structure primaire. Ces coordonnées permettent de nous affranchir du déplacement absolu de l'absorbeur et de réduire le système d'équations. On remplace alors ces variables par la transformation suivante (application des variables de Manevitch) :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \phi_1(\tau)e^{i\Omega\tau} = \dot{V} + i\Omega V \\ \Delta_2 = \phi_2(\tau)e^{i\Omega\tau} = \dot{Y} + i\Omega Y \end{cases} \quad (1.63)$$

Où  $i^2 = -1$  et  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ . S'en suit alors une étude asymptotique. On divise le temps rapide  $t$  en sous-échelles de temps de plus en plus lentes pondérées par le paramètre  $\epsilon$  :

$$t = \epsilon^0 \tau_0, \tau_1 = \epsilon^1 \tau_0, \tau_2 = \epsilon^2 \tau_0, \dots \quad (1.64)$$

la dérivation par rapport à  $t$  donne alors :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \quad (1.65)$$

L'accès à la dynamique lente c.-à-d. l'étude du temps rapide (ordre  $\epsilon^0$ ) nous permet d'obtenir une équation algébrique en  $N_1, N_2$  qui représente le SIM.

Dans la communauté, les études des NES avec cette méthode sont très nombreuses. Certains chercheurs utilisent cette méthode pour concevoir et tenter d'appliquer les NES dans des applications diverses et variées. On peut citer les travaux de thèse de CADIOU [54] et GOURC [55] dans le domaine de l'aérospatial ou encore les travaux de GEBAI et al. [56] appliqué au domaine du biomédical. Enfin, on trouve dans la littérature une recherche plus fondamentale [57], [58]. Lors de l'étude des absorbeurs hybrides adaptatifs, nous utiliserons cette méthode pour une analyse plus locale<sup>5</sup> de la dynamique des

5. c.-à-d. une approche focalisée autour de la résonance 1 :1 qui s'oppose à une approche globale comme la HBM qui permet une étude sur une plage de fréquence

absorbent.

**Remarque :** le bref descriptif de la méthode ne mentionne pas la stabilité du SIM. Il est bien sûr possible de calculer cette stabilité. Elle sera détaillée plus tard dans ce manuscrit.

### 1.3 Contrôle actif des structures

On va maintenant s'intéresser à l'autre grand axe de cette thèse : le contrôle actif des structures. Ce dernier peut être défini comme la modification de la fonction de transfert du système par l'ajout d'une fonction de transfert extérieure (électronique). Ce type de contrôle correspond au contrôle par rétroaction (feedback) qui sera utilisé dans cette thèse<sup>6</sup>. Le contrôle actif permet d'améliorer ou de modifier les propriétés d'un système afin de lui permettre d'atteindre de nouvelles fonctionnalités. La figure 1.25 montre comment contrôler un domaine continu ou discontinu par le biais de capteurs et d'actionneurs. Le contrôle actif a aussi ses codes et ses notations (notamment dans le domaine fréquentiel) que nous verrons dans cette section.

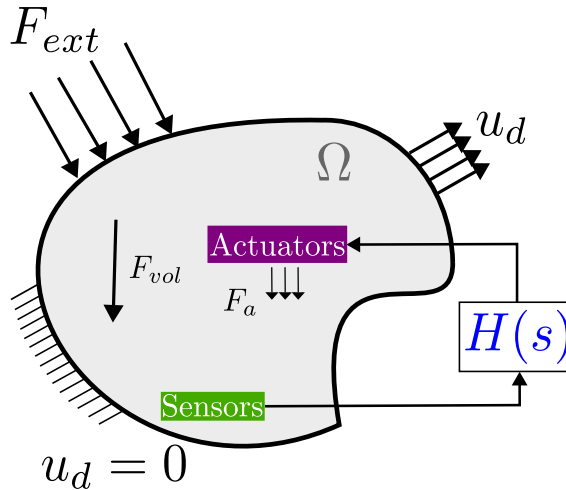


FIGURE 1.25: Illustration du contrôle actif des structures

#### 1.3.1 Représentation d'un système avec boucle de contrôle

Reprenons notre fil rouge d'un système masse ressort dans le cas linéaire. Si l'on souhaite contrôler l'oscillateur harmonique à partir d'un ou plusieurs états du système, on transforme son équation de mouvement en ajoutant l'effort  $F_a(t)$ . Cet effort est généré par l'actionneur tel que :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\omega t) + F_a(t) \quad (1.66)$$

avec

$$F_a(t) = -CX = C \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

6. On peut néanmoins notifier l'existence du contrôle par anticipation (feedforward) qui se base sur la perturbation extérieure plutôt que la réponse du système. Comme pour la boucle de feedback, une modification de la fonction de transfert du système est nécessaire.

où  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  et  $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  le vecteur d'états de taille  $n$ . La figure 1.26 présente le modèle phénoménologique d'un oscillateur contrôlé.

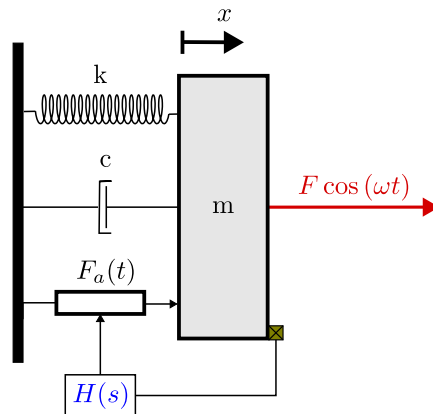


FIGURE 1.26: Modèle phénoménologique de l'oscillateur contrôlé

En règle générale, on utilise une représentation simplifiée pour visualiser la boucle de contrôle.

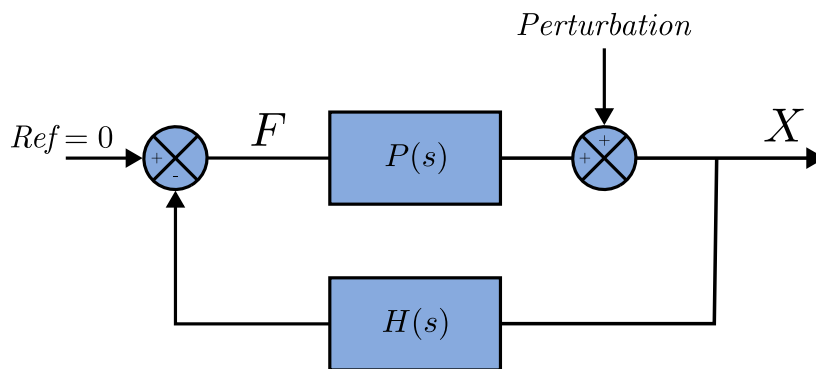


FIGURE 1.27: Schéma-bloc : boucle de contrôle (boucle fermée)

Avec  $F$  l'entrée,  $X$  l'état de sortie,  $H(s)$  le contrôleur et  $P(s)$  le système d'étude (souvent appelé "Plant" en anglais). La loi de contrôle à utiliser dans  $H(s)$  est choisie par l'utilisateur et dépend du régime désiré. Elle représente l'écriture fréquentielle de la loi de contrôle. La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$\frac{X}{F} = \frac{P(s)}{1 + H(s)P(s)} \quad (1.68)$$

On peut maintenant se demander quid de la stabilité d'un système contrôlé ?

### 1.3.2 Analyse de stabilité des systèmes contrôlés

Lorsque l'on étudie la stabilité d'un système contrôlé par une boucle de contrôle, on "ouvre la boucle" c.-à-d. que l'on étudie la fonction de transfert de la boucle ouverte. Cette dernière correspond donc au produit de la fonction de transfert du système par celle de l'actionneur.



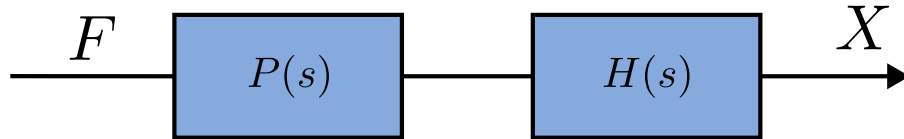


FIGURE 1.28: Schéma-bloc : boucle ouverte

Un outil très utilisé pour représenter la stabilité d'un système contrôlé est le root-locus [59]. Il représente le déplacement des pôles et des zéros de la fonction de transfert dans le plan complexe en fonction du gain du contrôleur. La stabilité du système en boucle ouverte est obtenue lorsque tous les pôles et zéros sont dans le plan gauche du root-locus. La figure 1.29 représente l'analyse de stabilité de l'oscillateur linéaire contrôlé par un simple retour en vitesse. D'après la théorie de Liapunov énoncé dans la Sect. 1.1.1, on sait que le seul moyen de rendre un oscillateur linéaire instable est d'introduire un amortissement négatif dans le système. Cet amortissement négatif peut être introduit artificiellement par le contrôle. La figure 1.29 gauche représente une stabilité asymptotique de l'oscillateur avec le contrôle tandis que la figure 1.29 droite représente une instabilité du système. On peut voir sur la Fig.1.30 que l'amplitude de la réponse temporelle de l'oscillateur instable tend vers l'infini. C'est typiquement le genre de réponse à éviter. La théorie du contrôle et ses outils ne sont pas (ou peu) prévus pour les études en

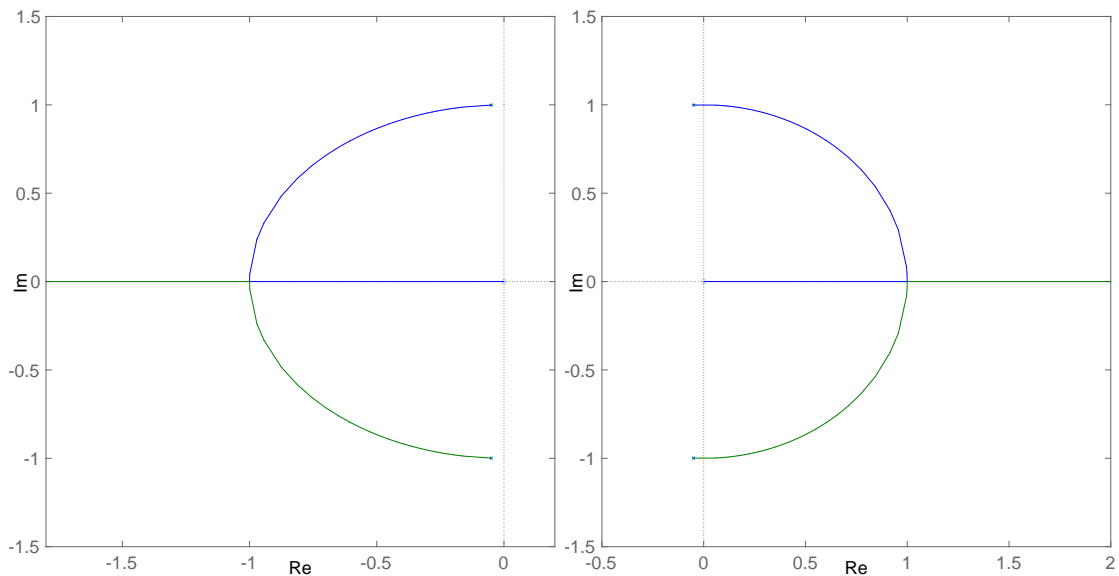


FIGURE 1.29: Root-locus : stable à gauche et instable à droite

dynamique non-linéaire. On trouve quelques méthodes d'analyse comme le root-locus non-linéaire [60], ou des méthodes par linéarisation comme les "Describing Function" [61], [62]. Cependant, il est assez difficile de trouver quelque chose de convaincant et de simple qui permette d'analyser complètement un système non-linéaire contrôlé. On note des approches plus énergétiques qui nous viennent du théorème de Lejeune-Dirichlet (voir [63] pour plus d'informations). Ce théorème permet d'obtenir la stabilité d'un système dynamique sans avoir recours à l'étude des valeurs propres. Cependant, il reste encore limité aux modes conservatifs et ne peut pas être utilisé dans tous les cas. Cette stabilité a fait l'objet de beaucoup de questionnement durant cette thèse et il en sera discuté plus loin dans le manuscrit.

Si l'analyse de stabilité est assez subtile à réaliser, il n'en existe pas moins des lois de

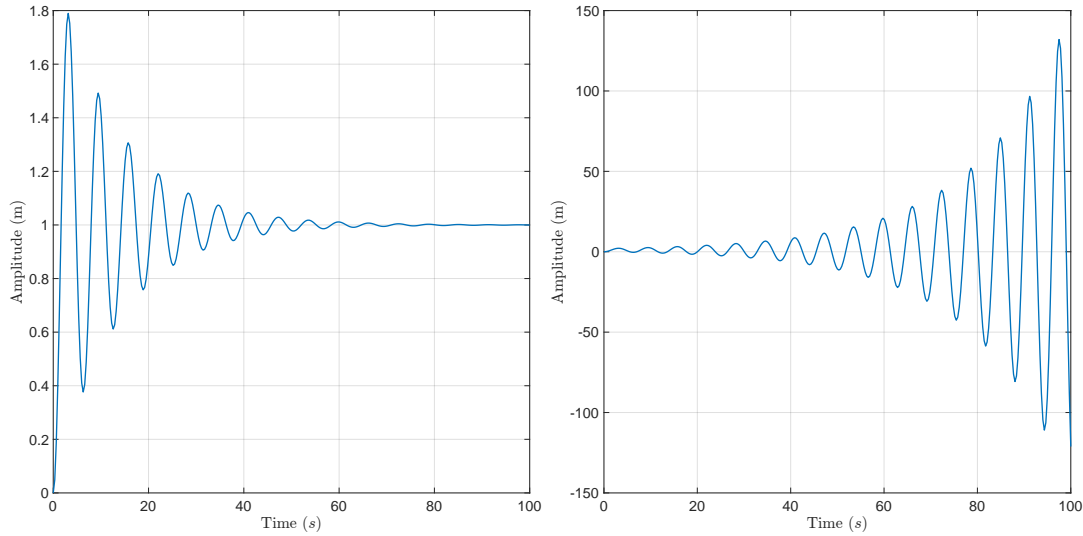


FIGURE 1.30: Simulation temporelle de la réponse d'un oscillateur linéaire contrôlé par un retour en vitesse : stable à gauche et instable à droite

contrôle non-linéaires. La stabilité de l'ensemble est souvent vérifiée de façon globale par les méthodes directes de Liapunov.

### Hyper stabilité et Passivité

Nous allons maintenant introduire deux notions importantes pour la suite du manuscrit qui permettra de mieux comprendre l'aspect amortissement des vibrations par le contrôle actif. La première notion est l'hyper stabilité [64]. Lors de l'application d'une commande par retour d'état linéaire, une modification du système est créée par l'ajout de pôles et de zéros. L'hyper stabilité permet (en théorie) d'appliquer un gain infini au contrôleur sans crainte de perte de stabilité (pôles et zéros à gauche dans le root-locus). En théorie du contrôle, on parle de marge de phase et de gain infini. De façon plus pragmatique, cette hyper stabilité revient à montrer que l'énergie du produit d'une loi de contrôle  $H(s)$  par une mesure  $y$  au carré est positive lors d'un feedback négatif. La deuxième notion est la passivité. Elle correspond à la définition d'un système dissipatif. Dans le livre de SLOTINE et al. [62], l'auteur définit la passivité (ou un système dissipatif) comme :

$$\int_0^{+\infty} [E_{cinétique} + E_{potentiel}] dt \neq 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} [-F_{amortissement} + F_{active}] \dot{x} dt > 0 \quad (1.69)$$

Cette notion donne une condition sur la force active (la force induite par le contrôleur à ajouter dans le système) afin d'obtenir l'amortissement désiré.

Une bonne partie des contrôleurs cherchent à minimiser l'erreur entre la solution réelle du système dynamique et la solution désirée. En dynamique vibratoire dans l'optique d'amortir les vibrations, cette position désirée (ou ce nouveau point d'équilibre) vaut 0. La dissipation d'énergie revient donc souvent à une histoire de signe de la loi de contrôle. Les deux sections suivantes ne font pas un bilan exhaustif des lois de contrôle, mais donnent les clés de compréhensions de la commande par retour d'états et du contrôleur par sliding modes (commande par modes glissants), tous deux, largement utilisés dans cette thèse.

### 1.3.3 Le contrôle par retour d'états

Le principe du retour d'états est assez simple et revient à modifier les matrices d'amortissement et de raideur afin de déplacer les pôles de la fonction de transfert du système [65]. La stabilité du contrôleur ne dépend donc que du signe de la loi de contrôle. Les résultats des différents retours d'états montrés en Fig.1.31 sont aujourd'hui bien connus dans la communauté et permettent de modifier la nature du système. Bien que cette loi de contrôle soit très basique, elle n'en reste pas moins intéressante. En effet, elle peut être utilisée pour amortir les vibrations ou comme outil pour modifier les paramètres d'un absorbeur par exemple. Nous l'utiliserons d'ailleurs de cette manière plus tard dans le manuscrit. On peut bien sûr étendre le retour d'états linéaire à la théorie non-linéaire. Cette extension permet, par exemple, de rendre une structure non-linéaire [66]. La création de non-linéaire est une des possibilités du contrôle actif et sera explicitée au chapitre 3.

En combinant différents états du système, on obtient les fameux PI (proportionnel, intégral), PD (proportionnel, dérivé) et PID (proportionnel, intégral, dérivé) encore très utilisés aujourd'hui pour l'asservissement [67], [68]. Enfin, un feedback moins connu est le retour en accélération ou inertance [69], [70] qui, couplé avec des retours plus conventionnels, permet aussi l'amortissement des vibrations

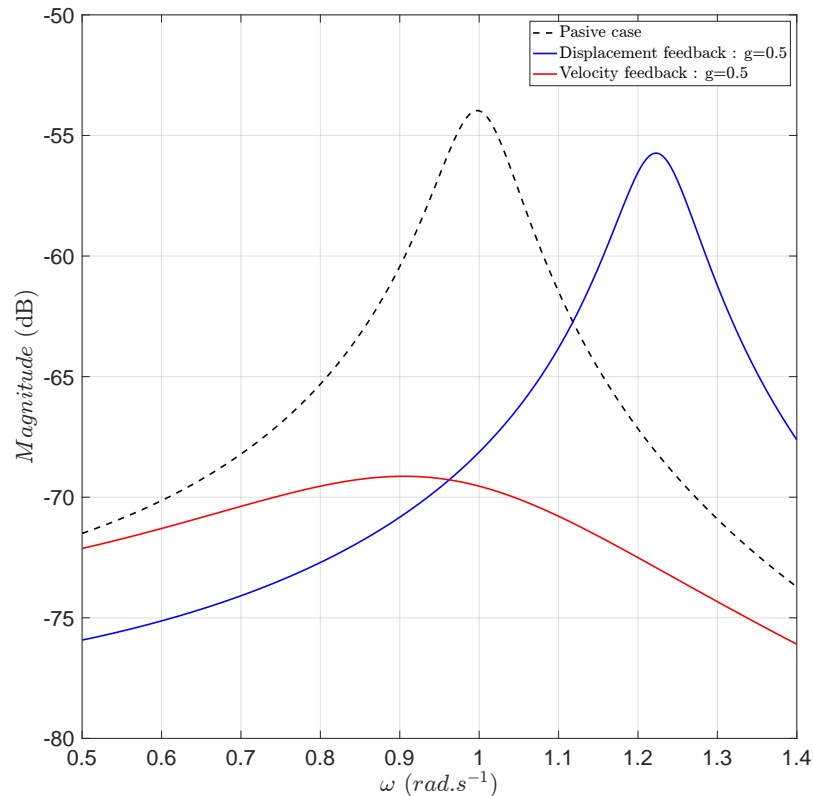


FIGURE 1.31: FrF linéaire : comparaison d'un retour en déplacement en bleu et d'un retour en vitesse en rouge pour gain  $g = 0.5$

On pourrait ajouter à cette liste des commandes IFF (Intégral Force Feedback) [71], [72] utilisée récemment dans l'amortissement des robots à câble [73] ou par réseaux de neurones qui sont de plus en plus à la mode [74], [75]... Dans leurs travaux, NISHIMURA

et al. [76] recense plusieurs lois qu'il applique sur des TMD.

Les performances du contrôle actif sont directement liées au gain du contrôleur. Le choix du gain est donc un sujet primordial, mais dépend de la loi contrôle. En effet, le gain déplace les pôles et les zéros dans le root-locus. Ces déplacements peuvent conduire à l'instabilité du système. Pour éviter ce désagrément, deux voies sont à considérer. Premièrement, trouver les gains de façon optimale par la méthode LQR [77] (Linéaire-Quadratique-régulator) ou le placement de pôle [78]. Deuxièmement, construire une loi hyper stable.

### Gain optimal : méthode LQR

Afin de choisir correctement le gain des contrôleurs (différents retours d'états) et d'assurer la stabilité du contrôleur, la méthode LQR peut être utilisée. Ce petit détour par cette méthode permettra de mieux comprendre le calcul des coefficients par sliding mode (cette méthode sera discutée en Sect. 1.3.4). La commande LQR se base sur la minimisation d'une fonctionnelle (une fonction coût instantané) souvent notée  $J$  et définit comme suit :

$$J(u) = \int_0^{+\infty} x^T Q x + u^T R u dt \quad (1.70)$$

Où  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrice de pondération des états symétrique et semi-définie positive,  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'états,  $u \in \mathbb{R}^m$  la commande et  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrice de pondération du contrôleur symétrique et défini positive. Le terme  $x^T Q x$  indique la priorité d'un état sur un autre à atteindre le comportement désiré et le terme  $u^T R u$  indique le coût total du contrôleur (au sens énergétique).

Considérons l'équation de mouvement suivante :

$$\ddot{x} + x + \gamma \dot{x} = \sin(\omega t) \quad (1.71)$$

Cette équation peut être réécrite dans l'espace d'état en supposant la connaissance de tous les états telle que :

$$\dot{x} = Ax + B(u + \sin(\omega t)) \quad (1.72)$$

avec

$$u = -K^T Y \quad (1.73)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

Où  $K$  est la matrice des gains du contrôleur cherché sous la forme :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (1.75)$$

La constante  $P \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  avec  $n$  le nombre d'états est trouvé par la résolution de l'équation algébrique de Riccati :

$$PA + A^T - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (1.76)$$

Le gain  $K$  ne dépend donc que de  $Q$  et de  $R$ . Plusieurs méthodes existent dans la littérature pour choisir ces deux matrices. La plus simple est l'utilisation de matrices identités pondérée ou non. Les pondérations sont généralement choisies sur la base d'essai-erreur

ou en fonction de l'erreur maximale acceptable. Malgré des résultats non optimaux, cette première approche reste la plus utilisée. Les travaux de Chen et al. [79] s'inscrivent dans ce contexte de "recherche d'optimalité". Il permet de mieux comprendre la relation entre les poids de  $Q$  et la performance du contrôle. De plus, on retrouve beaucoup d'algorithmes basés sur l'optimisation comme les travaux de MARCO et al. [80], NAGARKAR et al. [81] et de WANG et al. [82] basés sur les algorithmes de Colonie d'abeilles artificielles et ceux de ASSAHUBULKAHFI et al. [83] sur les essaims particuliers pour ne citer qu'eux. Enfin, quelques méthodes qui s'appuient sur les données pour la conception du contrôleur [84], [85] sont aussi à mentionner.

#### Gain infini : les contrôleurs hyperstables

La théorie de l'hyper stabilité énoncée plus haut peut être utilisée pour créer des contrôleurs dits hyper stables. Dans la littérature, on trouve assez peu de travaux sur la conception de lois basées sur l'hyper stabilité. On peut néanmoins citer les travaux de COLLETTE et al. [86] dans lesquelles l'auteur propose une loi hyperstable dans le contexte du contrôle des vibrations et plus particulièrement dans les absorbeurs hybrides. Les lecteurs intéressés pourront se tourner vers les références [87]-[89] ou sur les travaux de [90] orienté contrôle semi-actif.

**Remarque :** Plusieurs hypothèses implicites sont faites lors de l'énoncé du contrôle actif. La première concerne la colocalisation<sup>7</sup> du couple capteur/actionneur. Cette notion de colocalisation est très importante en contrôle actif. En effet, l'alternance quasi parfaite des pôles et des zéros provoquée par la positivité du numérateur du résidu d'expansion permet le redressement de la phase et garantit une stabilité asymptotique [91]. La seconde hypothèse est la non-considération du retard dans la boucle de contrôle (même si ses deux hypothèses sont assez liées). Lorsque l'on passe d'un temps continu à un temps discret, on introduit un déphasage dans le système. Ce déphasage, dû à l'échantillonnage, est amplifié par les filtres passe-bas dans les conditionneurs et amplificateurs de la chaîne de mesure. Par conséquent, l'écriture dogmatique de la variable de mesure qui sort de la boucle de contrôle  $x(t)$ , serait  $x(t + \tau)$ . Si  $\tau$  est petit (en contrôle, on considère un déphasage peut impactant lorsque ce dernier est inférieur à 10%) alors l'approximation  $x(t + \tau) \approx x(t)$  est cohérente. Cependant, ce  $\tau$  est fortement lié au pas de discrétisation choisie. Dans ses travaux, HALE [92] montre que le délai peut induire des divergences même lorsque le pas de temps est réduit. La complexité des systèmes à retard ne sera pas traitée dans ce manuscrit, mais une attention particulière à ces notions a été faite.

#### 1.3.4 Loi de contrôle non-linéaire : Sliding Modes Control (SMC)

Les premières études sur la méthode des modes glissants (Sliding Modes Control (SMC)) datent des années 60/70. Les SMC ont été développés pour des besoins de robustesses face aux perturbations extérieures et aux incertitudes sur les modèles [93] et aux incertitudes sur les modèles. Facile à implémenter, la loi peut s'appliquer aussi bien à un système linéaire qu'à un système non-linéaire. Cependant, ces concepts de sliding mode ne sont pas (ou très peu) appliqués à la dynamique vibratoire, mais plutôt à des applications très basses fréquences pour le contrôle d'altitude des drones [94] ou le suivi de trajectoire des bateaux [95]. Les travaux de ZUO et al. [96] présente l'une des

---

7. La colocalisation impose que le l'actionneur et le capteur soit de même nature et se trouve sur le même degré de liberté.

premières applications des sliding modes à la dynamique vibratoire. On citera aussi, plus récemment, les travaux de RODRIGUEZ et al. [97] pour du contrôle multimodal linéaire.

### Principes de la méthode

L'idée principale de cette commande consiste en deux étapes :

- (1) Amener les états dynamiques du système sur un hyperplan de commutation stable  $\sigma(t)$  (surface de glissement).
- (2) Converger sur la surface de glissement vers le point d'équilibre désiré (point fixe ou cycle limite).

Les performances, le coût énergétique du contrôleur ainsi que le temps de convergence du système vers le comportement désiré, dépendent de la conception de la surface de glissement (ou sliding manifold)  $\sigma(t)$  qui résulte d'une combinaison linéaire ou non-linéaire des états du système.

### Construction et Stabilité de la loi de contrôle

Afin d'illustrer la construction et l'étude du contrôleur, considérons un système à 1 ddl autonome<sup>8</sup> soumis à un contrôleur  $u$  tel que :

$$m_1\ddot{x} + k_1x + c_1\dot{x} = u \quad (1.77)$$

Considérons un système d'état pour un oscillateur linéaire autonome de déplacement  $x_1 = x$  soumis à un contrôleur  $u$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} u = Ax + Bu \quad (1.78)$$

La première étape consiste à définir la sliding surface. Soit  $e(t) = x_1 - x_d$  avec  $x_d$  le point d'équilibre désiré. Dans les applications dynamique vibratoire on prendra toujours (ou souvent)  $x_d = \dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0$ . La sliding surface  $\sigma(t)$  s'écrit :

$$\sigma(t) = \alpha_1 e(t) + \alpha_2 \dot{e}(t) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad (1.79)$$

Cette équation différentielle d'ordre 1 s'annule lorsque la dynamique du système est sur  $\sigma$ . L'enjeu ici est de choisir les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sous la contrainte de stabilité dynamique<sup>9</sup> de  $x_1$  telle que :

$$x_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1 \text{ avec } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0 \quad (1.80)$$

Le contrôleur  $u$  est construit directement à partir de  $\sigma$  sous la contrainte de la stabilité au sens de Liapunov [98] :

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3) \\ \dot{V} \leq -\nu|\sigma| \end{cases} \quad (1.81)$$

8. Cette méthode est bien entendu applicable lorsque le système est non autonome et sur plus de 1 ddl.

9. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 : stabilité pour une exponentielle décroissante

Avec :

$$x_3(t) = m_1^{-1} (-c_1 \dot{x}(t) - k_1 x(t) + u(t)) = m_1^{-1} (-f(x, \dot{x}) + u(t)) \quad (1.82)$$

La vitesse de convergence de la trajectoire vers la surface de glissement est déterminée par une constante réelle strictement positive, notée  $\nu$  [62]. En combinant (1.81) et (2.7) on peut écrire :

$$\sigma[\alpha_1 x_2 + \alpha_2 m^{-1} (-f(x, \dot{x}) + u(t))] \leq -\nu |\sigma| \quad (1.83)$$

il vient alors :

$$u(t) \leq -\frac{m_1 \alpha_1}{\alpha_2} x_2 + f(x, \dot{x}) - \frac{m_1 \nu}{\alpha_2} \frac{|\sigma|}{\sigma} \quad (1.84)$$

On remarque que la loi se compose en deux parties, une partie continue :

$$\eta(t) = -\frac{m_1 \alpha_1}{\alpha_2} x_2 + f(x, \dot{x}) \quad (1.85)$$

et une partie discontinue  $f_{anl}(t)$  qui fait intervenir la fonction signe notée "sgn" :

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma(t) > 0 \\ 0 & \text{if } \sigma(t) = 0 \\ -1 & \text{if } \sigma(t) < 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

$$f_{anl}(t) = \frac{m_1 \nu}{\alpha_2} \frac{|\sigma|}{\sigma} = \frac{m_1 \nu}{\alpha_2} \text{sign}(\sigma) = \rho \text{sign}(\sigma) \quad (1.87)$$

Avec  $\rho = \frac{m_1 \nu}{\alpha_2} > 0$  le gain de la partie non-linéaire, on peut écrire la forme générale du contrôle par sliding mode :

$$u(t) = \eta(t) - f_{anl}(t) \quad (1.88)$$

La partie linéaire permet de se maintenir (sliding phase) sur la surface de glissement tandis que la partie non-linéaire permet de ne pas trop s'en éloigner (reaching phase). La figure 1.32 présente ce qu'il se passe idéalement dans le plan de phase lorsqu'un système est soumis à un contrôleur de type SMC.

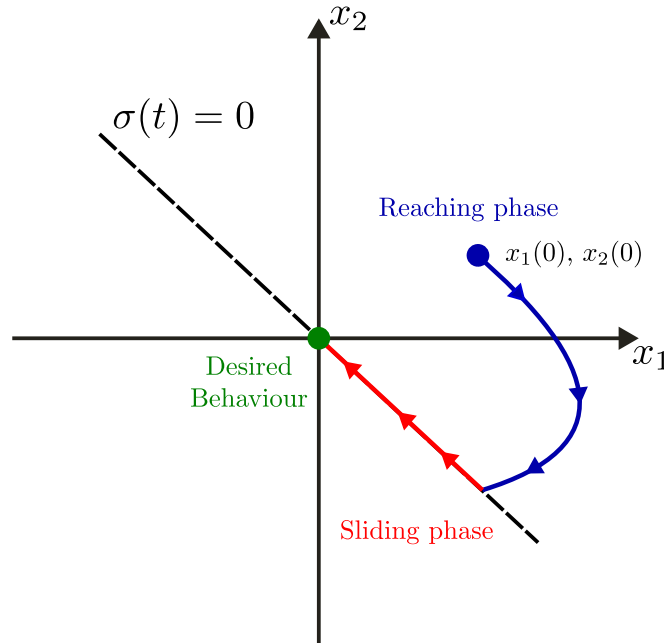


FIGURE 1.32: Plan de phase d'un système contrôlé par SMC

Le comportement global du système dépend de la forme de la sliding surface, mais surtout de ses coefficients. On note plusieurs méthodes pour choisir les paramètres de  $\sigma(t)$  [99].

La première est le placement de pôle [100]. Considérons  $\lambda$  les valeurs propres du polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  du système (1.78) tel que :

$$P(\lambda) = \det(I_n\lambda - A) = \lambda^2 + \lambda \frac{c_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_1} \quad (1.89)$$

où  $n$  et  $I_n$  représente le nombre d'états et la matrice d'identité respectivement. La méthode de placement pôle consiste à chercher les coefficients de la sliding surface en considérant :

$$P_\sigma(\lambda = \alpha_2\lambda + \alpha_1 = 0) \quad (1.90)$$

Afin d'assurer la stabilité du polynôme caractéristique de la sliding surface  $P_\sigma(\lambda)$ , les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont choisis sous respect du critère de Hurwitz.

La seconde, assez peu représentée dans la littérature, concerne l'utilisation de la passivité [101]. Définissons le vecteur  $E = [\alpha_1, \alpha_2]$  contenant les coefficients de la sliding surface et  $H_k(s)$  un problème linéaire tel que :

$$H_k = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \sigma = Ex \end{cases} \quad (1.91)$$

Dans le cas de la passivité, la conception l'opérateur  $E$  se base sur le Lemme de Kalman-Yakubovitch-Popov (KYP) pour un contrôleur  $u$  de la forme :

$$u = K_p \text{sign}(\sigma) \quad (1.92)$$

La fonction signe étant impaire et située dans le 1er et 3e quadrant du plan  $(u, \sigma)$ , la stabilité de la boucle fermée est garantie si la fonction de transfert  $H_k$  est réelle :

**Lemme 1.3.1.** *Soit  $H_k = E(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice de fonctions de transfert où  $(A, B)$  est contrôlable et  $(A, E)$  est observable. Alors  $H(s)$  est réel et strictement positive si et seulement s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$  et  $G$  telles que :*

$$PA + A^T P = -G^T G \quad (1.93)$$

$$PB = E^T \quad (1.94)$$

De façon générale et par souci de simplicité, on prendra  $G = I_n$  et la matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  déduit par l'eq (1.93). Pour  $K_p > 0$ , le système en boucle fermée sera stable [102].

Enfin, la méthode LQR vue à la Sect. 1.3.3 peut aussi être utilisée. Posons  $X = [x_1 \ x_2]^T$  la fonction coût  $J$  s'écrit alors :

$$J = \int_{t_s}^{+\infty} X^T Q X dt \quad (1.95)$$



avec  $t_s$  le moment où commencent les sliding modes<sup>10</sup> et  $Q$  avec les mêmes propriétés que dans la Sect. 1.3.3. On peut remarquer ici que le problème de minimisation ne comporte pas de terme de pénalité sur le contrôleur  $u$ . C'est là, la principale différence avec la méthode LQR classique. Dans le cas des SMC, on peut considérer le problème comme un "cost-free control problem". L'algorithme du calcul des coefficients étant assez peu détaillé dans [99] une synthèse est présentée dans l'Annexe. C.

Si on applique le contrôleur pour des paramètres de  $\sigma$  pour  $Q$  égal à la matrice identité, on trouve les résultats suivants [ $m_1 = 2$ ,  $c_1 = 0.5$ ,  $k_1 = 1$ ,  $\rho = 5$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ] :

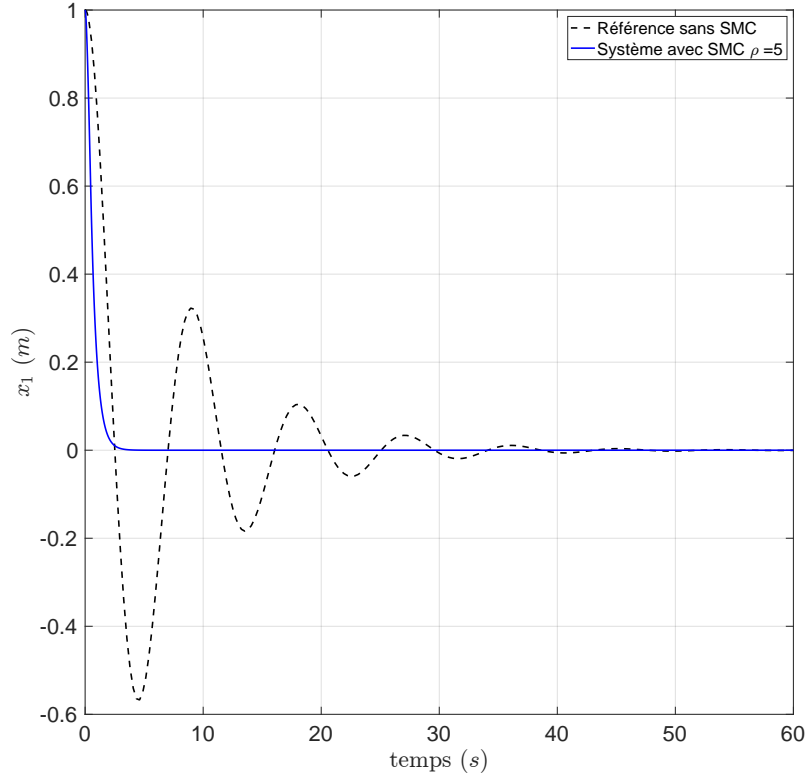


FIGURE 1.33: Réponse temporelle d'un système contrôlé par SMC exemple d'un oscillateur

Cette méthode assez performante présente néanmoins quelques subtilités :

- Le premier problème concerne la fonction signe. En effet, cette fonction discontinue a tendance à détériorer les actionneurs. De plus, cette discontinuité génère beaucoup d'harmoniques hautes fréquences que l'on appelle réticences ou "chattering" pour les Anglo-saxons [103]. Un moyen de résoudre ce problème est d'utiliser des fonctions régularisées comme la sigmoïde, le demi-sinus, .... Cependant, ces fonctions seront toujours moins performantes qu'une fonction signe. En effet, la stabilité de Liapunov doit être vérifiée à chaque pas de temps par la fonction signe. La vitesse de changement de signe joue donc un rôle important dans les performances du contrôleur. Un autre moyen de réduire le chattering est de passer sur un contrôleur SMC d'ordre plus élevé comme l'algorithme du super-twisting [99], [104] qui sera utilisé dans la section suivante comme observateur. Ce contrôleur  $u$

10. Un sliding mode commence lorsque tous les états du système sont sur la sliding surface ( $\sigma = 0$ ).

est constitué de partie  $u_1$  et  $u_2$  tel que :

$$\begin{cases} u(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ \dot{u}_1 = -\gamma \text{sign}(\sigma) \\ u_2 = \begin{cases} -\lambda |\sigma|^p \text{sign}(\sigma), & \text{if } |\sigma| \leq s_0 \\ -\lambda |s_0|^p \text{sign}(\sigma), & \text{if } |\sigma| > s_0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.96)$$

Avec  $\gamma > 0$ ,  $\lambda > 0$  et  $0.5 \leq p < 1$  des constantes. Ce qui est intéressant de noter, c'est que la fonction  $u_1$  est obtenu par l'intégration de la fonction signe. L'introduction de l'intégrateur de la fonction  $u_2$  permet de rendre le contrôle plus lisse, de diminuer l'amplitude des réticences et d'augmenter les performances [105]. Enfin, le couplage des SMC à d'autres méthodes de contrôle le contrôle logique [106] permet aussi de réduire ces effets de réticences.

- Le deuxième problème vient de la sliding surface et son amélioration. La littérature, beaucoup de travaux sur des améliorations de  $\sigma(t)$  sont proposés. Le fait de la rendre adaptative [107], [108] ou même non-linéaire [109]-[111] en sont quelques exemples. Ici, le problème principal est le coût énergétique du contrôleur. Comme le gain de la partie non-linéaire est fixe, l'effort résultant ne dépend que de  $\rho$ . L'algorithme du super twisting (1.96) pallie en partie ce problème. C'est pourquoi une variation sera proposée dans le Chapitre 3.
- Enfin le dernier problème concerne l'accessibilité des états. En effet, en fonction du nombre de degrés de liberté que l'on cherche à contrôler, un observateur peut être nécessaire afin de pouvoir remonter à tous les états du système en temps réel (cette notion sera abordée en Sect. 1.3.5).

**Remarque :** Après les modes non-linéaires introduits plus haut, on est en droit de se demander de quel mode parle-t-on lorsque l'on évoque les sliding mode? Est-ce un mode du système? La réponse est non. C'est à mode défini par la sliding surface.

### 1.3.5 Observateurs

Les lois de contrôle complexe ont souvent besoin d'une connaissance précise de tous les états du système. Afin d'utiliser un nombre réduit de capteurs et de reconstruire la réponse temporelle en temps réel, on peut utiliser des observateurs modaux. Ces observateurs répondent à un critère d'observabilité défini par la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$ . Cette dernière ne dépendent que de la matrice d'observation  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et d'états  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ AC^2 \\ \vdots \\ AC^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

Il faut que le  $\det(\mathcal{O})$  soit non nul et que  $\text{Rang}(\mathcal{O}) = n$ . pour garantir l'observabilité du système. Les observateurs peuvent être linéaire [112] ou non-linéaire. Du fait de l'aspect non-linéaire des structures étudiées, nous nous concentrerons sur les observateurs non-linéaires et plus particulièrement sur les filtres de Kalman étendue [113] et les observateurs par sliding mode [99]. La figure 1.34 montre l'implémentation en schéma bloc de l'observateur par rapport au système d'étude. Il met en relation la sortie  $y(t)$  obtenu par un capteur et le ou les état(s) estimé(s)  $w(t)$ .

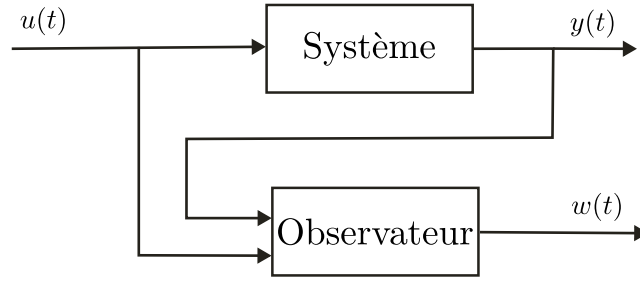


FIGURE 1.34: Schéma bloc avec un observateur

### Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le principe de fonctionnement d'un EKF consiste en une minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre l'état estimé et l'état réel par des méthodes de prédiction-correction. Pour ce faire, une linéarisation locale du problème (par des séries de Taylor) est nécessaire ce qui impose de calculer une matrice jacobienne. En effet, les filtres de Kalman sont régis par des équations linéaires [114]. Afin d'obtenir une bonne estimation de l'état réel, le filtre s'autocorrige grâce au gain de Kalman  $K$ . Pour ce faire, il utilise les états connus et les informations provenant des deux matrices diagonales et définies positives de covariances ( $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). La matrice  $Q$  représente l'incertitude sur le modèle et décrit si les trajectoires sont "lisses" <sup>11</sup> ou non. La matrice  $R$  représente le bruit sur la mesure. Un algorithme de la méthode est donné dans l'Annexe. D. Le filtre de Kalman est donc capable d'estimer l'état, mais aussi l'incertitude  $P$  sur cet état.

### Observation par sliding mode : super-twisting observer

Le super-twisting observe se base sur le calcul des dérivées du vecteur d'états des équations de mouvement [99]. Cet algorithme d'ordre deux <sup>12</sup> permet une convergence en temps fini. Si on considère un système dynamique linéaire ou non, représenté par la fonction  $f_s(t, x_1, x_2, u)$  avec  $x_1$  le déplacement mesuré,  $x_2$  la vitesse l'inconnue du problème) et  $u$  la commande alors le système sur les états observés s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= x_2 + z_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_s(t, x_1, \hat{x}_2, u) + z_2 \end{cases} \quad (1.98)$$

où le terme " $\hat{\cdot}$ " désigne l'état estimé et  $z_1, z_2$  représente l'erreur sur la mesure telle que :

$$\begin{cases} z_1 &= a_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ z_2 &= a_2 \text{sign}(e_1) \\ e_1 &= x_1 - \hat{x}_1 \end{cases} \quad (1.99)$$

Les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  sont les paramètres d'observations défini par l'utilisateur. Sous l'hypothèse d'une accélération bornée, introduisons la constante  $\Delta_0$ . Cette dernière est le double de l'accélération maximale possible du système. Pour assurer une convergence

11. Une trajectoire lisse signifie que la variation de trajectoire entre l'instant discret  $t$  et l'instant  $t+1$  est négligeable

12. Les sliding mode d'ordre supérieur ( $>1$ ) généralisent l'idée de base du mode glissant en agissant sur les dérivées temporelles d'ordre supérieur de la surface de glissement tout en gardant les avantages des SMC d'ordre 1. Pour un SMC d'ordre 2 on a  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ .

de l'observateur en temps fini, les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$a_2 > \Delta_0 \quad (1.100)$$

$$a_1 > \sqrt{\frac{2}{a_2 - \Delta_0} \frac{(a_2 + \Delta_0)(1 + p)}{(1 - p)}} \quad (1.101)$$

avec la constante  $0 < p < 1$  à choisir. Pour les lecteurs intéressés, la preuve de convergence a été réalisée dans [115]. De manière pratique, on réglera les coefficients sur la base des travaux de LEVANT [116], approuvés et réutilisés par la communauté [99], [117] :

$$a_1 = 1.5\sqrt{\Delta_0}, \quad a_2 = 1.1\Delta_0 \quad (1.102)$$

En combinant (1.99) avec (1.98), l'observateur super-twisting s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= x_2 + a_1|e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_s(t, x_1, \hat{x}_2, u) + a_2 \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (1.103)$$

Le principe de cet observateur consiste donc toujours à minimiser l'erreur entre la mesure et l'estimation, mais par le contrôle. L'intérêt ici est de pouvoir intégrer directement le système d'équations (1.103) sans avoir recours à un filtre passe-haut pour supprimer la composante continue.

**Remarque :** Les observateurs peuvent (c'est souvent le cas) engendrer un retard et de petites erreurs. Il est souvent nécessaire de prendre en compte le système avec son observateur pour étudier la stabilité d'un système.

### 1.3.6 Indicateurs de performances

Les systèmes dynamiques et le contrôle actif étant mis en place, on est en droit de se demander comment mesurer la performance d'un système dynamique contrôlé ?

**Remarque :** les performances d'un système contrôle peuvent se mesurer dans le domaine temporel ou fréquentiel.

#### Performances mesurables sur le système

Les deux régimes du domaine temporel sont le régime transitoire et permanent. La première performance que l'on peut considérer est le temps que met que le système contrôlé à atteindre le régime permanent (périodique) ou le point d'équilibre choisi. L'indicateur de performance est alors la durée du régime transitoire. Plus un système met du temps à atteindre le régime permanent moins le contrôleur est performant et vice versa. Pour ce qui est du cas du régime permanent, l'écart d'amplitude entre le système avec et sans contrôle semble être un bon indicateur de performance. À l'ingénieur de sélectionner le ou les degré(s) de liberté impactés par cette diminution (on pourra alors prendre un écart relatif pour mesurer des débattements par exemple).

Dans le domaine fréquentiel, seul le régime permanent est observé, les indicateurs de performances sont donc les normes sur la plage de fréquence choisie. Le tableau 1.4 présente les normes les plus connues, le moyen de les calculer et leurs significations pour une fonction de transfert  $\Gamma(\omega)$  en déplacement.

Norme	Signification	Calcul
$\ \cdot\ _\infty$	maximum de la FrF	$\max( \Gamma(\omega) )$
$\ \cdot\ _2$	intégrale de la FrF (vision énergétique plus large bande)	$\sqrt{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}  \Gamma(\omega)  d\omega}$

TABLE 1.4: Normes pour le suivi de performances

### Performance du contrôleur

La mesure des performances du contrôleur dans le cas d'absorbeur hybride peut se faire par le calcul :

- du débattement de la masse de l'absorbeur
- de la stabilité du contrôleur
- du coût énergétique : Ce coût énergétique se mesure assez simplement. Si l'on considère un contrôleur qui applique une force active  $F_a$ . Le coût énergétique instantané en Watt <sup>13</sup>  $J_t(t)$  vaut :

$$J_t(t) = Fa(t)\dot{x}(t) \quad (1.104)$$

avec son écriture pour  $F_a$  dans le domaine fréquentiel :

$$J_w(\omega) = Re(conj(Fa(\omega))j\omega\Gamma(\omega)) \quad (1.105)$$

où  $j^2 = -1$ . Ici on parle de coût énergétique, mais le terme le plus courant est : puissance active  $P_a$  en opposition à la puissance réactive qui serait la partie imaginaire de l'équation (1.105).

## 1.4 Synthèse bibliographique des absorbeurs de vibrations

Il n'est plus à prouver que les oscillations ou vibrations sont néfastes pour le système. En effet, la fatigue provoquée par les vibrations peut mener à la ruine du système. De plus, ces vibrations peuvent se transmettre par plusieurs types de voies et venir gêner le confort vibratoire et acoustique des utilisateurs. Plusieurs recherches se sont alors penchées sur comment les réduire ou les utiliser à des fins de récupération d'énergie. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la réduction des vibrations par les absorbeurs de vibrations non-linéaires hybrides pour des sollicitations dynamiques extérieures sinusoïdales. La présente section permet de donner un état de l'art des différentes parties de ce nouvel absorbeur.

### 1.4.1 Absorbeurs linéaires

L'absorbeur linéaire est le plus simple et le plus connu des absorbeurs de vibrations [118]. Aussi appelé étouffeur linéaire ou Tuned Mass Damper (TMD) en anglais, cet absorbeur se dit passif et linéaire. Ces deux adjectifs qualificatifs viennent du fait que nous n'introduisons pas d'énergie extérieure dans le système (absorbeur passif) et que l'absorbeur est régi par la dynamique linéaire (absorbeur linéaire). Cet étouffeur est positionné sur la structure à contrôler et est réglé par des règles de conception formulées

13. Pour les plus pragmatiques, le coût peut être transformé en € en sachant que le prix du Kwh vaut 0.27€ en heures pleines...

initialement par FRAHM en 1911, repris et adapté par DEN HARTOG et al. [120]. Dans les années 80 et 90, plusieurs travaux s'intéressent à l'excitation aléatoire [121], [122]. Plus récemment des formulations analytiques des fonctions de transfert  $H_2$  et  $H_\infty$  pour un TMD ont été posées dans les travaux de ASAMI et al. [123]. Cependant, bien que ces règles soient les plus connues, il existe beaucoup de manières différentes pour régler une TMD. Les approches par algorithme d'optimisation [124]-[127], par intelligence artificielle [128], [129] ou énergétique [130] en sont quelques exemples. Ces règles permettent de dissiper l'énergie de la structure primaire en positionnant l'anti-résonance du système à deux degrés de liberté (ou modèle phénoménologique) au voisinage de la résonance du système primaire comme on peut le voir sur la figure 1.35. De façon plus pragmatique, cela revient à régler la fréquence propre de l'absorbeur au plus proche de la résonance de la structure primaire. Beaucoup de TMD sont utilisés dans le génie civil. La figure

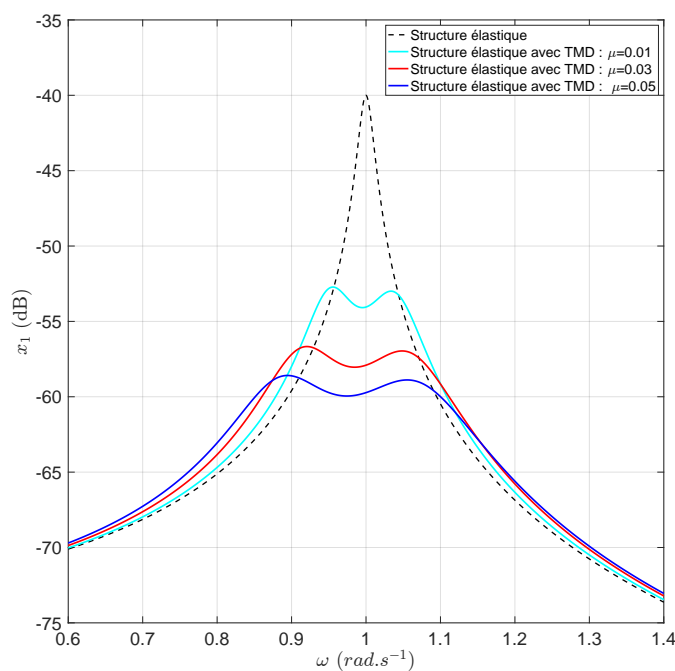


FIGURE 1.35: Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (en noir) et d'une structure accompagnée de son TMD pour différent rapport de masse  $\mu = \frac{m_{\text{absorbeur}}}{m_{\text{structure}}}$ .

1.36 (rouge) présente le TMD qui se trouve dans la tour de Taipei à Taïwan [131]. Les travaux de MCNAMARA [132] analysent la réponse d'un TMD lorsque la source d'excitation est le vent. Pour les lecteurs qui veulent en savoir plus, les différents TMD et leurs caractéristiques à travers le monde sont présentés dans le travail de SOTO et al. [133]. La figure 1.36 (jaune) montre l'intégration de composants magnétiques pour la conception d'un TMD et est tirée des travaux de BAE et al. [134]. Le réglage de plusieurs TMD a été montré avec les travaux de ABÉ et al. [135] et plus récemment et dans le domaine des machines tournantes avec les travaux de JABOVISTE et al. [136] comme on peut le voir dans la figure 1.36 (bleu). Des absorbeurs pendulaires sont aussi un grand sujet de recherche avec les travaux de MANCHI et al. [137]. L'avancée sur les métamatériaux à permis d'introduire cette dimension dans les absorbeurs comme dans les travaux de [138].

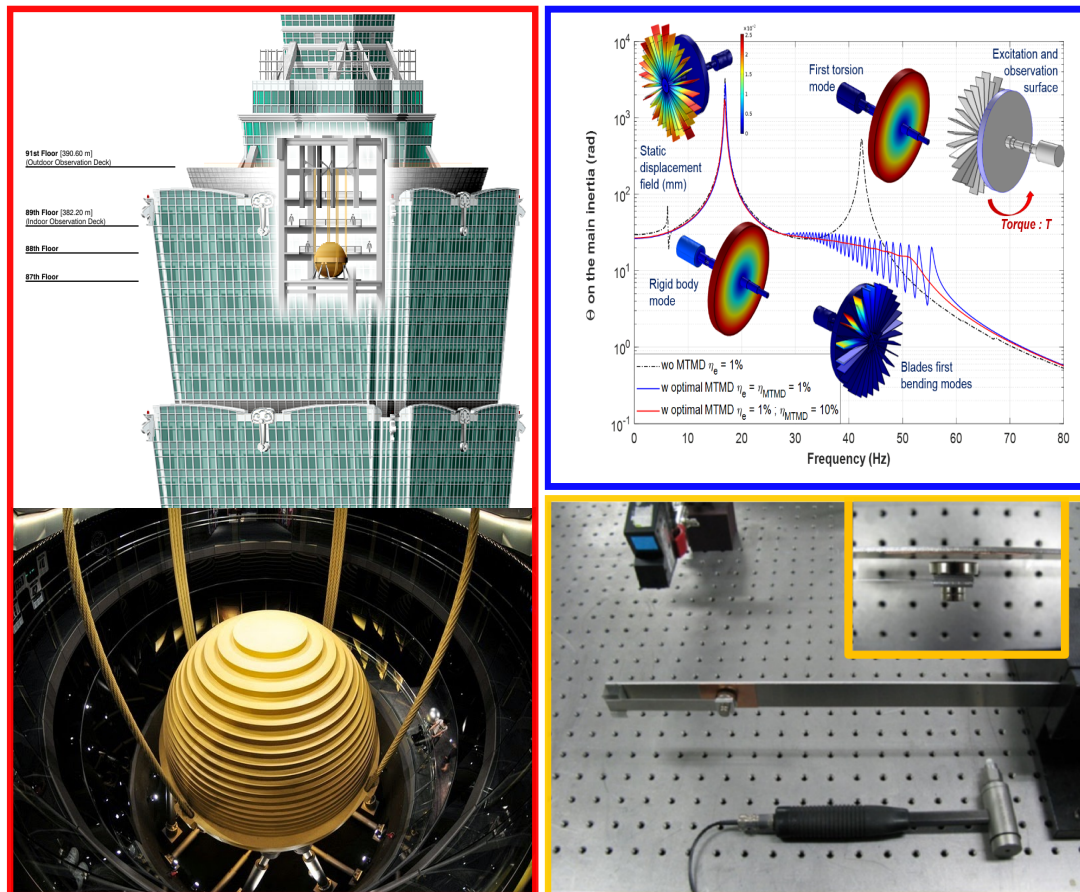


FIGURE 1.36: Présentation de quelques travaux sur les absorbeurs de vibration linéaire : (rouge) absorbeur pendulaire dans la tour de Taipei à Taïwan, (bleu) MTDM en rotation tiré des travaux de [136], (jaune) TMD magnétique tiré des travaux de [134].

### 1.4.2 Absorbeurs hybrides

L'état de l'art sur les absorbeurs hybrides étant assez récent, il a été choisi de scinder cette section en deux parties. La première partie retrace et recontextualise le contrôle actif des structures. Elle montre comment, avec le temps, les besoins en termes de contrôleurs ont évolué pour tendre vers du contrôle robuste et performant. La deuxième partie, indépendante de la première, concerne l'hybridation.

#### Le contrôle actif

Jusqu'aux années 70, les premières contributions dans le domaine du contrôle actif restent majoritairement théoriques. Les travaux de ZUK [139], [140] sur la cinématique appliquée au génie civil permettent de mieux appréhender le mouvement des structures. Ils proposent en plus un aperçu d'éléments mécaniques utilisés pour le contrôle des déplacements structuraux. Immédiatement, NORDELL [141] proposera d'utiliser des éléments actifs "activables" pour éviter des efforts trop importants sur les structures. Dans les années 70, le nombre de travaux dans le domaine contrôle actif pour l'amortissement vibratoire n'a cessé de croître. C'est YAO [142] qui, en 1972, posera la rigueur et les bases du contrôle moderne comme le concept de boucle ouverte et boucle fermée. L'article de YAO et le livre de BRYSON [143] sorti quelques années, plus tard, sont d'ailleurs

d'assez bons repères temporels qui permettent de marquer le début de l'accélération des contributions dans le domaine du contrôle actif. Des années 70 à la fin des années 80, on trouve énormément d'articles sur le contrôle et dans une grande diversité de domaine. La plupart sont liés de près ou de loin à la guerre froide. On y trouve d'ailleurs les articles et livres fondateurs de MEIROVITCH et al. [144]-[146]. Le génie civil s'empare du reste des contributions [147], [148] avec néanmoins un aspect de contrôle face aux incertitudes qui commence à la fin des années 80 [149], [150]. Les années 90 démarrent avec le lancement du télescope Hubble [151] et l'avènement des transports publics. Ceci étant, la recherche se poursuit autour de la problématique des contrôleurs robuste. Les premiers articles influents de UTKIN [152], [153] sur les sliding modes font leurs apparitions et l'application d'un contrôleur non-linéaire sur le premier mode d'une poutre est réalisée dans les travaux de KHAJEPOUR et al. [154]. Le nombre de contributions s'est intensifié au passage à l'an 2000. Les travaux de DATTA [155] synthétisent les grandes méthodes et les applications basées des lois de contrôles linéaires ou non-linéaires. La complexité des contrôleurs s'intensifie et l'intelligence artificielle commence à être utilisée dans le contrôle actif pour les vibrations [156]. Le contrôle tend de plus en plus à répondre à un réel besoin de performance comme on peut le voir dans les travaux de TSENG et al. [157] sur les suspensions semi-actives et actives, la réduction de vibrations d'un pont [158] ou dans les robots à câbles [159]. Plus récemment, les travaux de RODRIGUEZ et al. [160] s'inscrivent dans ce contexte et viennent contribuer au contrôle actif non-linéaire multimodal et robuste dont une partie de ces travaux de thèse s'inspirent.

## L'hybridation

Dans le domaine du génie civil, l'absence de source d'énergie est un problème connu. On trouve dans la littérature des systèmes autosuffisants basés sur le principe de la récupération d'énergie comme dans les travaux de NAKANO, SUDA et NAKADAI [161], [162]. Cependant, ce n'est pas encore une majorité due aux lois de contrôle souvent complexe et aux performances attendues toujours plus grandes. En cas de tsunamis, de séismes ou de catastrophe naturelle, il est nécessaire de protéger autant que faire ce peu les structures [163]. En conséquence, il apparaît au début des années 2000 des systèmes combinant du contrôle actif et des TMDs qui répondent à ce besoin de sécurité supplémentaire par l'aspect "fail-safe" (c.-à-d. une partie passive fonctionnelle lors de l'arrêt de la partie active). Ces nouveaux absorbeurs sont répartis en deux grandes familles : les absorbeurs semi-actifs (SATMD) et les absorbeurs actifs (ATMD). Les absorbeurs semi-actifs utilisent le contrôle actif pour modifier les paramètres d'un absorbeur passif [164]. On trouve dans la littérature tout type d'algorithme pour y parvenir. Les travaux de RICCIARDELLI et al. [165] proposent un algorithme empirique basé sur la mesure de la réponse du système. Ce dernier permet d'améliorer l'amortissement vibratoire et la robustesse de l'absorbeur. En 2003, XU et al. [166] utilisent l'intelligence artificielle pour modifier les paramètres de son absorbeur magnétorhéologique. Un peu plus tard, LEE et al. [167] comparent expérimentalement les performances de quatre lois de contrôle semi-active dans des applications liées au génie civil. Il utilisera de vraies données sismiques. Dans le même domaine, CHUNG et al. [168] proposeront du contrôle de phase en fonction de la fréquence qu'il appliquera sur un modèle simplifié de la tour Taipei 101. MIAH et al. [169] proposent d'étudier le contrôleur LQG couplé à un filtre UKF (Unscented Kalman Filter) qui est une approche plus déterministe que les EKF. Bien que la méthode LQG-EKF n'ait pas été utilisée dans cette thèse, cette combinaison a été jugée plutôt prometteuse par l'auteur. L'adaptabilité du contrôle semi-actif a orienté les travaux de cette thèse dans l'étude de ce type de contrôleur.



Les absorbeurs actifs sont souvent appelés absorbeurs hybrides (HMD) dans la littérature. Cette différence d'appellation est surtout culturelle [170]. Dans ces travaux de thèse, on favorisera le mot hybride qui englobe les absorbeurs actifs et semi-actifs. Dans les premiers travaux du domaine, SUZUKI et al. [171] ont présenté, dès 1994, un contrôleur basé sur la théorie du contrôle optimal et l'on appliqué sur une tour de 33 étages à Tokyo. L'originalité du contrôleur proposé était sur l'ajout d'un gain variable qui s'adaptait en fonction du débattement de la structure pour obtenir le contrôle le plus efficace possible. Puis, KUMAR et al. [172] ont démontré que les contrôleurs à paramètres fixes n'étaient pas moins performants que ceux à paramètres variables. L'article présente des études sur la conception de contrôleurs par des méthodes de placement de pôles et de bonnes performances en termes de robustesse et d'amortissement vibratoire y sont présentées. Par la suite, les travaux de YANG et al. [173] proposent en 2011 un article très intéressant sur le contrôle prédictif dans le but de réduire le nombre de capteurs. Afin d'améliorer les performances des ATMD classiques, LI et al. [174] proposera d'utiliser du contrôle par sliding mode dans un ATMD. Il couplera les SMC à une méthode de commande floue (Fuzzy contrôle) pour éviter le phénomène de réticences (chattering). Un meilleur contrôle de la réponse par apport à un ATMD classique et un TMD à été démontré. Enfin, on trouve dans la littérature les travaux plus récents de CHESNE et COLLETTE [175]-[177] qui ont beaucoup contribué à l'avancée des absorbeurs hybrides. On peut citer tout particulièrement le " $\alpha$ -controller" [178] qui sera utilisé dans cette thèse. La figure 1.37 montre la comparaison de la réponse en fréquence d'un HMD avec la loi le " $\alpha$ -controller" et d'un TMD. Les performances accrues du HMD par rapport au TMD y sont visibles.

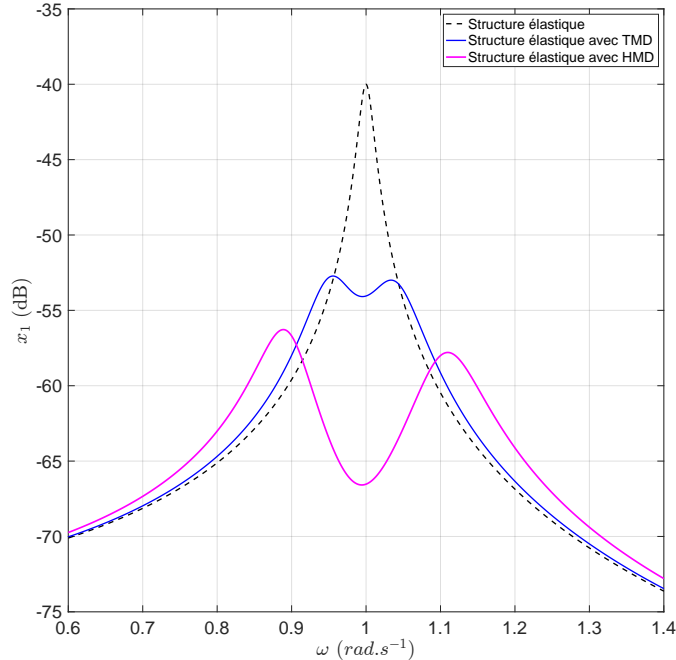


FIGURE 1.37: Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (noir), d'une structure accompagnée de son TMD (bleu) et d'une structure avec HMD (magenta) : loi de contrôle le " $\alpha$ -controller" tiré des travaux de Billon et al. [179]

La figure 1.38 résume quelques applications dans le domaine des absorbeurs hybrides. Le cadre rouge représente un absorbeur hybride le "Hybrid-TSAR" développé en par-

tenariat avec Airbus Hélicoptère et l'INSA-Lyon [180]. On souligne tout de même une localisation parfaite, car une bobine gère la mesure et l'autre l'actionnement. Le cadre vert correspond à la modification paramétrique d'un absorbeur comme énoncé plus haut [164]. Ces modifications sont réalisées à l'aide de circuits électroniques appelés shunt. Enfin, le cadre bleu représente l'utilisation d'un absorbeur hybride sur une poutre [177]. L'intérêt est la simulation d'un comportement amortisseur "skyhook" en parallèle d'un TMD passif.

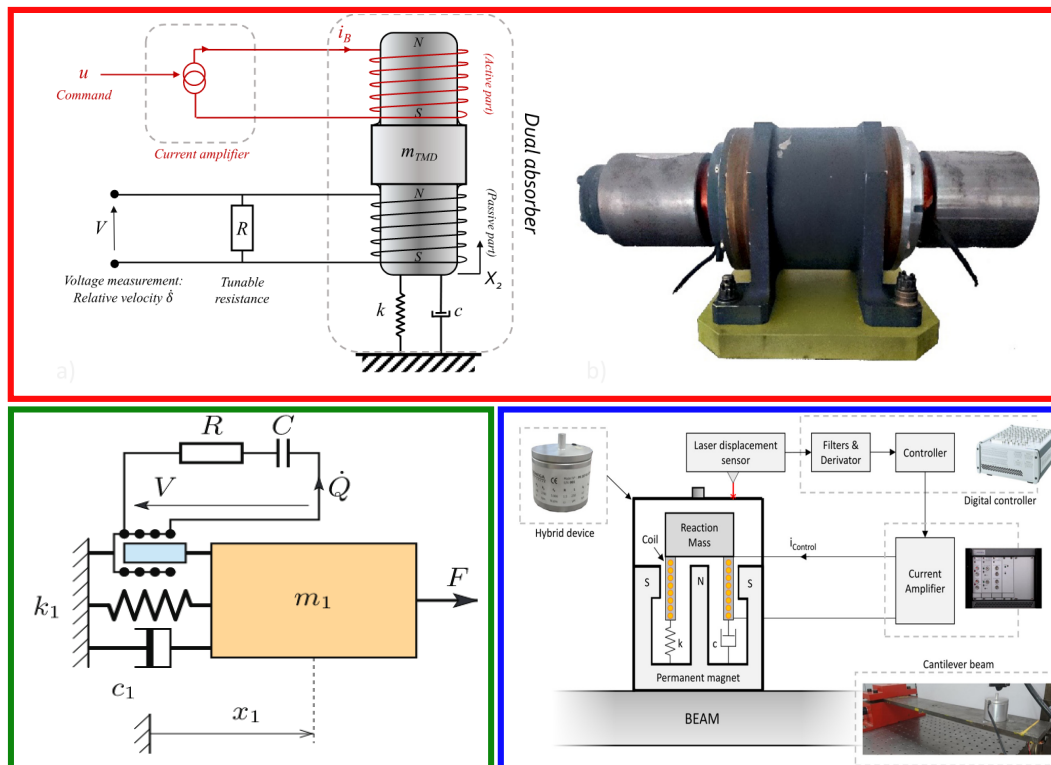


FIGURE 1.38: Présentation de quelques travaux sur les absorbeurs de vibration hybrides linéaires et du contrôle actif : (rouge) HMD pour l'aéronautique [181], (vert) Modification des paramètres d'un absorbeur [182], (bleu) application d'un HMD sur une poutre [177]

### 1.4.3 Absorbeurs non-linéaires

La littérature sur les absorbeurs de vibrations non-linéaires est bien moins conséquente que celle sur les absorbeurs linéaires et hybrides car, bien plus récente. Toutefois, l'utilisation de non-linéarités dans les absorbeurs remonte aux années 50 avec les travaux de ROBERSON [183]. Dans ces derniers, l'auteur considère un absorbeur avec une raideur linéaire et une raideur non-linéaire cubique. Il cherche alors à trouver les meilleurs paramètres pour amortir au mieux l'énergie vibratoire. Cet article est intéressant, car, pour la première fois, on cherche à exploiter les non-linéarités. Une dizaine d'années plus tard, BAUER [184] continue les travaux de ROBERSON en analysant l'impact de la combinaison de deux perturbations harmoniques sur l'amplitude d'un système non-linéaire à 2 ddls. Les années 70 et 80 ont permis de mieux comprendre les absorbeurs non-linéaires de deux manières. D'abord, grâce aux avancées dans le domaine de la dynamique non-linéaire avec notamment l'article de MANEVICH et al. [185] qui est un des premiers articles sur l'extension des modes normales au domaine du non-linéaire ou encore les premières contributions de NAYFEH [186], [187]. Puis, grâce aux nombreux travaux concernant les

méthodes de réglages de ces absorbeurs comme dans [188] et [189] pour ne citer qu'eux. Durant les années 90, les études se sont poursuivies et la théorie s'est consolidé jusqu'à l'année 2001 avec l'article de MANEVITCH [53]. Ce dernier a permis de pousser l'analyse des systèmes non-linéaires grâce à un changement de variable. S'en suit alors une littérature conséquente et très intéressante sur les absorbeurs de vibrations non-linéaires. Dans ce manuscrit nous ferons la distinction entre le nonlinear energy sink (NES) et le nonlinear tuned vibration absorber (NLTV) qui sont présentés ci-dessous dans l'ordre chronologique de leurs apparitions.

Le NES, comme étudié dans les années 2000 par VAKAKIS [190] et GENDELMAN [191] est composé d'une raideur non-linéaire cubique et d'un amortissement linéaire. Cette non-linéarité permet trois particularités étroitement liées. Premièrement, une meilleure robustesse en fréquence. En effet, le NES ne disposant pas de raideur linéaire, il ne dispose pas de fréquence à proprement parler. Il est alors capable de s'adapter de façon plus robuste à la variation de fréquence d'une structure. La deuxième particularité est le transfert irréversible d'énergie ou targeted energy transfer (TET) en anglais. Ce dernier évite le retour de l'énergie vibratoire du NES vers la structure grâce à la localisation modale comme formulés dans les articles de KERSCHEN et al. [192], LEE et al. [193] et MCFARLAND et al. [194]. Il est important de différencier le phénomène de battement et le TET. Le phénomène de battement peut être vu comme l'échange d'énergie entre deux systèmes vibratoire dû à la proximité de leurs fréquences naturelles ou à un fort couplage par l'amortissement. Cet échange est donc par définition réversible. En revanche, le battement permet d'accéder au TET [195]. Pour finir, la dernière propriété est celle du seuil d'activation. Effectivement, l'énergie du système doit être suffisamment élevée pour que déclencher le TET. La figure 1.39 présente la courbe de réponse d'une structure sans NES (courbe noire) et avec NES (courbe bleu). Les deux bifurcations de Neimark-Sacker délimitent la zone dans laquelle TET est efficace.

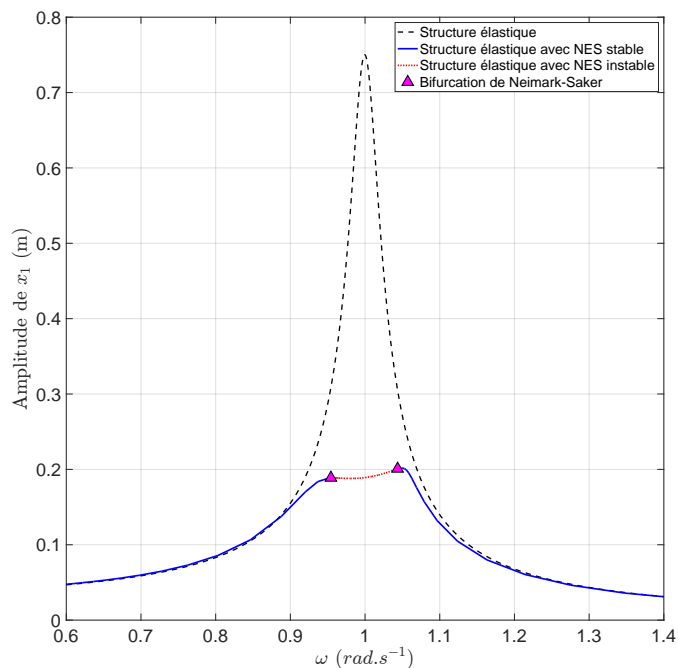


FIGURE 1.39: Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (noir), d'une structure accompagnée de son NES (bleu)

Le NLTV arrive beaucoup plus tard dans les travaux de Habib et al. [196] en 2015.

La robustesse et les performances cet absorbeur ont été démontrés numériquement [197] et expérimentalement [198]. Sa grande particularité est qu'il répond au principe de similarité énoncé par HABIB et al. [199] dont on donne la définition ci-dessous :

**Principe de similarité** : Le NLTVA doit être régi par des équations similaires à celles du système primaire.

De ce fait, il est, somme toute, assez différent du NES. En effet, le principe énoncé ci-dessus impose une non-linéarité à la structure primaire. De plus, les coefficients de l'absorbeur sont réglés par une méthode de Den Hartog adaptée pour la dynamique non-linéaire [196]. Ceci étant, il ne dispose pas de seuil d'activation, mais possède une zone où, le TET est actif. En revanche, le pompage énergétique résultant est moins efficace que sur un NES dû à la présence d'une linéarité. La figure 1.40 montre la courbe de réponse d'un NLTVA. On peut y voir une solution isolée.

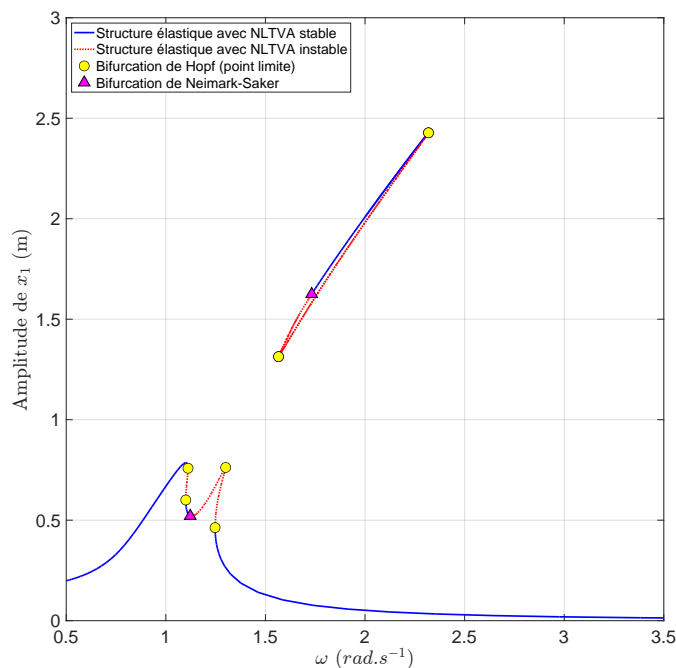


FIGURE 1.40: Réponse fréquentielle d'une structure élastique seule (noir), d'une structure accompagnée de son NTLTVA pour plusieurs niveaux de forçage

**Remarque** : la figure 1.41 présente la tentative de contrôle d'une structure non-linéaire par un TMD (ce qui ne respecte pas le principe de similarité). Lorsque l'effort d'excitation augmente (à partir de  $F = 1.8e3N$ ), on peut voir le comportement typique d'une non-linéarité cubique raidissant sur le système résultant.

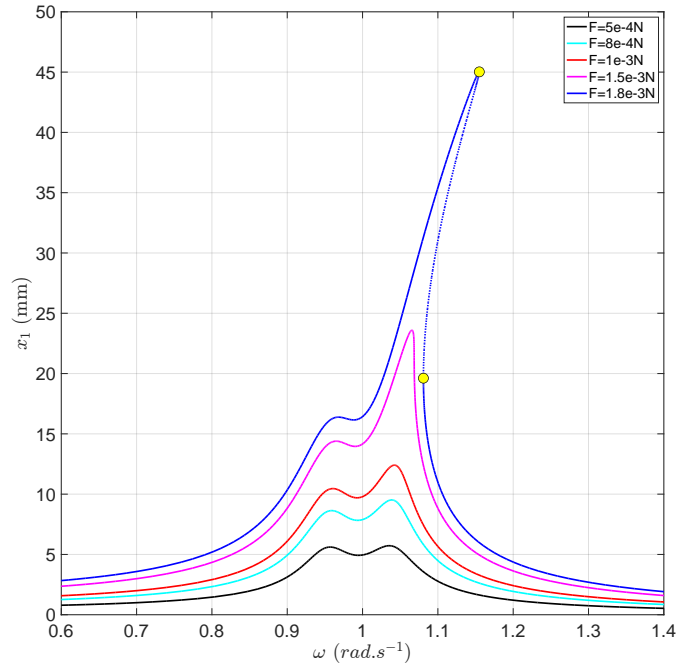


FIGURE 1.41: Réponse fréquentielle d'une structure non-linéaire avec son TMD pour plusieurs niveaux d'excitation. Les pointillés représentent la partie instable et les points jaunes les points de bifurcation (point limite).

En parallèle des travaux théoriques sur les absorbeurs non-linéaires, la recherche s'est aussi orientée vers leurs réalisations. Ici, il ne s'agira pas de présenter tous ces travaux expérimentaux. Néanmoins, on peut citer quelques travaux majeurs qui ont inspiré cette thèse.

Lorsque l'on s'intéresse à la génération de non-linéarité cubique pour les absorbeurs, on trouve majoritairement deux catégories : les ressorts [200]-[203] et les cordes [204]-[207]. Ces dernières étant utilisées dans cette thèse, la génération de non-linéarité avec des cordes sera détaillée dans la partie expérimentale. Dans le contexte de cette thèse, une attention particulière est portée aux travaux de CADIOU et al. [203]. Dans ces derniers, l'auteur montre un NES dont la non-linéarité est générée par des ressorts. Ce qui est intéressant, c'est la gestion de l'amortissement. En effet, l'auteur peut modifier l'amortissement de l'absorbeur par un jeu de bobine et aimant. Cependant, ces modifications ne sont pas en temps réel. Dans la continuité, on peut citer les travaux de DEKEMELE et al. [208] qui, pour augmenter la plage d'efficacité d'un NES, proposent raideur non-linéaire non lisse dont la force de rappel élastique est périodiquement répétée. Même si la génération de non-linéarités par le magnétisme n'a pas été considérée dans cette thèse, on peut tout de même citer les travaux de BENACCHIO et al. [209] qui en proposent une preuve de concept. Enfin, de façon plus général, on trouve dans la littérature beaucoup de travaux sur les absorbeurs à impacts initiés théoriquement par GENDELMAN [210]. Sur la base de ces derniers, PENNISI et al. [211] ont proposé un prototype expérimental et quelques années plus tard, YOUSSEF et al. [212] en ont formalisé des règles de conceptions. Ce type d'absorbeur est assez intéressant, car il permet d'absorber des vibrations non-régulières induites par des impacts à l'inverse des absorbeurs basés sur la phase. Si un choc survient sur la structure porteuse d'un TMD, ce dernier n'absorbera que très peu le choc et subira une variation d'amplitude à l'inverse

de l'absorbeur à impact. Ce qui absorbe le mieux les impacts, c'est un autre impact. Cependant, ces absorbeurs posent des problèmes de confort acoustique et n'ont pas été considérés dans cette thèse.

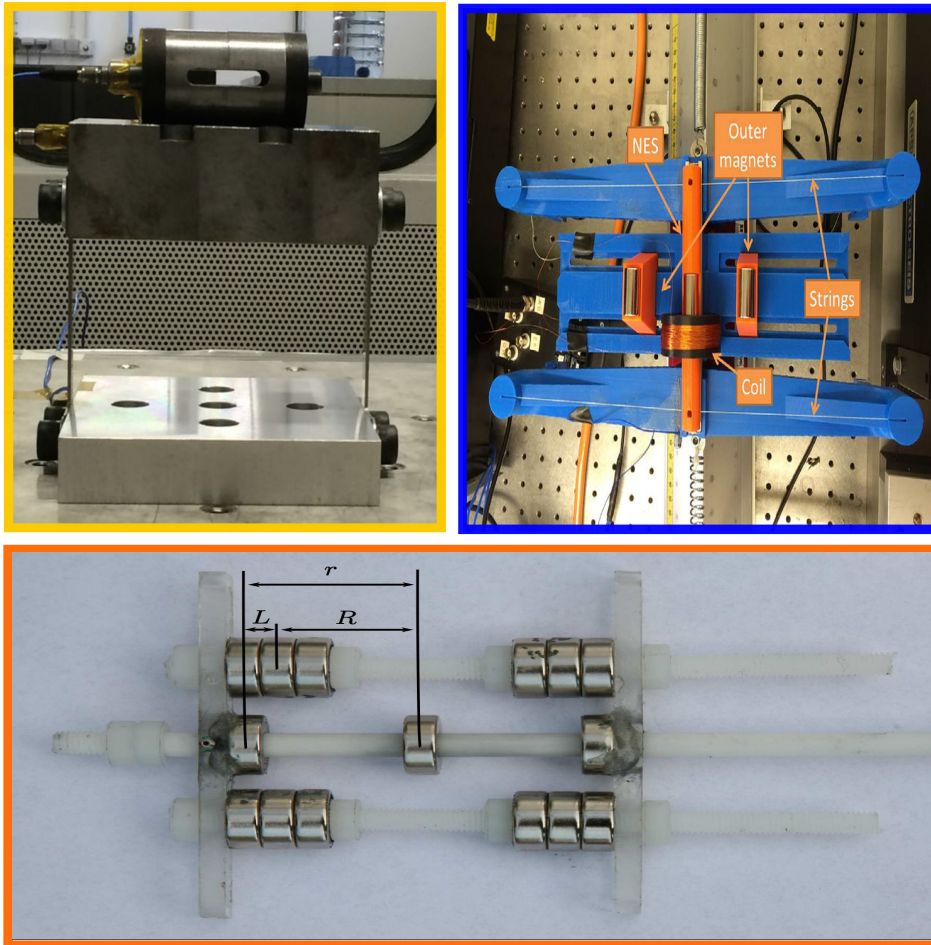


FIGURE 1.42: Présentation de quelques travaux sur les absorbeurs non-linéaires : (Jaune) Absorbeur à vibro-impact [211], (bleu) Absorbeur non-linéaire à cordes pour la récupération d'énergie [207], (Orange) Absorbeur de vibration magnétique [209]

La figure 1.42 résume et illustre quelques travaux sur les absorbeurs non-linéaires présentés plus haut. Le cadre jaune montre un absorbeur à impact tiré des travaux de PENNISI et al. [211]. Le cadre bleu présente le NES utilisé pour la récupération d'énergie de PENNISI et al. [207]. Enfin, le cadre orange expose un l'absorbeur magnétique de [209].

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, au travers d'un fil rouge, défini des notions fondamentales et créé un vocabulaire sur la dynamique non-linéaire et le contrôle actif/hybride des structures. Puis, des méthodes de résolution ont été présentées. La dynamique non-linéaire étant plus complexe que la dynamique linéaire, l'obtention des courbes de réponse peut être délicate si l'on ne dispose pas des bons outils. C'est dans ce contexte que la méthode de l'équilibrage harmonique, la procédure de continuation et le calcul de

stabilité des solutions périodiques ont été introduits. Ces courbes de réponse sont très importantes, car elles permettent de mesurer les performances du contrôleur ou induites par celui-ci. De plus, elles permettent de mieux comprendre l'impact de certains paramètres sur la dynamique globale du système (suivi de bifurcation). Afin de mieux cerner le comportement local des absorbeurs non-linéaires, les méthodes de perturbations ont été explicitées. Le changement de variable proposé par Manevitch permet le calcul du Slow Invariant Manifold qui est un très bon outil de conception. En fin de chapitre, un aperçu de trois types absorbeurs de vibrations a été présenté. Ces derniers sont à la base du nouvel absorbeur non-linéaire hybride présenté dans cette thèse.

## References

- [1] I. Kovacic and M. J. Brennan, *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] P. Myrberg, « Sur l'itération des polynômes réels quadratiques », *J. Math. Pures Appl.*(9), vol. 41, pp. 339–351, 1962.
- [3] R. Alcorta, S. Baguet, B. Prabel, P. Piteau, and G. Jacquet-Richardet, « Period doubling bifurcation analysis and isolated sub-harmonic resonances in an oscillator with asymmetric clearances », en, *Nonlinear Dynamics*, vol. 98, no. 4, pp. 2939–2960, 2019.
- [4] P. Miao, D. Li, S. Yin, J. Xie, C. Grebogi, and Y. Yue, « Double grazing bifurcations of the non-smooth railway wheelset systems », *Nonlinear Dynamics*, vol. 111, no. 3, pp. 2093–2110, 2023.
- [5] J. Neimark, « On some cases of periodic motions depending on parameters », in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 129, 1959, pp. 736–739.
- [6] R. J. Sacker, *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations*. New York University, 1964.
- [7] H. S. Dumas, *Kam Story, The: A Friendly Introduction To The Content, History, And Significance Of Classical Kolmogorov-arnold-moser Theory*. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [8] W. Govaerts, Y. A. Kuznetsov, and B. Sijnave, « Continuation of codimension-2 equilibrium bifurcations in CONTENT », in *Numerical methods for bifurcation problems and large-scale dynamical systems*, Springer, 2000, pp. 163–184.
- [9] R. M. Rosenberg, « The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems », 1962.
- [10] R. M. Rosenberg and J. K. Kuo, « Nonsimilar Normal Mode Vibrations of Nonlinear Systems Having Two Degrees of Freedom », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, no. 2, pp. 283–290, 1964.
- [11] R. M. Rosenberg, « On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom », en, in, G. G. Chernyi, H. L. Dryden, P. Germain, L. Howarth, W. Olszak, W. Prager, R. F. Probst, and H. Ziegler, Eds., vol. 9, Elsevier, 1966, pp. 155–242.
- [12] G. Kerschen, O. Gendelman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, and D. M. McFarland, « Impulsive periodic and quasi-periodic orbits of coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity », en, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, no. 5, pp. 959–978, 2008.

- 
- [13] G. Kerschen, M. Peeters, J. C. Golinval, and A. F. Vakakis, « Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist », en, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Special Issue: Non-linear Structural Dynamics, vol. 23, no. 1, pp. 170–194, 2009.
- [14] M. E. King and A. F. Vakakis, « An Energy-Based Approach to Computing Resonant Nonlinear Normal Modes », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 63, no. 3, pp. 810–819, 1996.
- [15] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk, and A. A. Zevin, *Normal modes and localization in nonlinear systems*. Springer, 2001.
- [16] L. Jézéquel and C. Lamarque, « Analysis of nonlinear structural vibrations by normal form theory », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 149, no. 3, pp. 429–459, 1991.
- [17] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne, « Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 273, no. 1-2, pp. 77–101, 2004.
- [18] S. W. Shaw and C. Pierre, « Normal modes for non-linear vibratory systems », *Journal of sound and vibration*, vol. 164, no. 1, pp. 85–124, 1993.
- [19] A. Nayfeh and S. Nayfeh, « On nonlinear modes of continuous systems », 1994.
- [20] J. Butcher, « A history of Runge-Kutta methods », *Applied Numerical Mathematics*, vol. 20, no. 3, pp. 247–260, 1996.
- [21] N. M. Newmark, « A method of computation for structural dynamics », *Journal of the engineering mechanics division*, vol. 85, no. 3, pp. 67–94, 1959.
- [22] J. R. Dormand, *Numerical methods for differential equations: a computational approach*. CRC press, 2018.
- [23] M. H. Holmes, *Introduction to numerical methods in differential equations*. Springer, 2007.
- [24] A. H. Nayfeh and B. Balachandran, *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [25] P. Heider, « Rating the performance of shooting methods for the computation of periodic orbits », *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 16, no. 01, pp. 199–206, 2006.
- [26] E. J. Doedel, « Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations », *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path following and boundary value problems*, pp. 1–49, 2007.
- [27] R. N. Jazar, *Perturbation methods in science and engineering*. Springer, 2021.
- [28] H. Dankowicz and F. Schilder, *Recipes for continuation*. SIAM, 2013.
- [29] S. Jain and G. Haller, « How to compute invariant manifolds and their reduced dynamics in high-dimensional finite element models », en, *Nonlinear Dynamics*, vol. 107, no. 2, pp. 1417–1450, 2022.
- [30] S. Karkar, B. Cochelin, and C. Vergez, « A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 12, pp. 2554–2567, 2014.



- [31] R. J. Gilmore and M. B. Steer, « Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance—A review of the art. Part I. Introductory concepts », *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, vol. 1, no. 1, pp. 22–37, 1991.
- [32] R. J. Gilmore and M. B. Steer, « Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance—a review of the art. II. Advanced concepts », *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, vol. 1, no. 2, pp. 159–180, 1991.
- [33] M. Urabe, « Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems », *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 20, no. 2, pp. 120–152, 1965.
- [34] R. Arquier, B. Cochelin, and C. Vergez, « Manlab-logiciel de continuation interactif », in *7ème colloque national en calcul des structures (France, Giens)*, 2005, p. xx.
- [35] M. Krack and J. Gross, « The Harmonic Balance Method and its application to nonlinear vibrations: Introduction and current state of the art », *Mech. Syst. Sig. Process*, 2018.
- [36] M. Krack and J. Gross, *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer International Publishing, 2019.
- [37] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour, « Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 88, pp. 445–461, 2017.
- [38] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry, *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoissier, 2007.
- [39] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry, « A critical review of asymptotic numerical methods », *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 5, pp. 31–50, 1998.
- [40] R. Seydel, « Practical bifurcation and stability analysis », in Springer Science & Business Media, 2009, vol. 5.
- [41] L. Guillot, « De l’intérêt d’un formalisme quadratique pour la continuation des solutions d’un système dynamique et de leurs bifurcations: applications aux instruments à anche », Ph.D. dissertation, Aix-Marseille, 2020.
- [42] G. Von Groll and D. J. Ewins, « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems », *Journal of sound and vibration*, vol. 241, no. 2, pp. 223–233, 2001.
- [43] G. Moore, « Floquet theory as a computational tool », *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 42, no. 6, pp. 2522–2568, 2005.
- [44] J. Wu, L. Hong, and J. Jiang, « A robust and efficient stability analysis of periodic solutions based on harmonic balance method and Floquet-Hill formulation », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 173, p. 109 057, 2022.
- [45] H. Liao, Q. Zhao, and D. Fang, « The continuation and stability analysis methods for quasi-periodic solutions of nonlinear systems », *Nonlinear Dynamics*, vol. 100, pp. 1469–1496, 2020.
- [46] L. Peletan, S. Baguet, M. Torkhani, and G. Jacquet-Richardet, « Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics », *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, pp. 2501–2515, 2014.

- [47] Z. Zheng, Z. Lu, G. Liu, and Y. Chen, « Twice harmonic balance method for stability and bifurcation analysis of quasi-periodic responses », *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 17, no. 12, p. 121 006, 2022.
- [48] J. Nocedal and S. J. Wright, « Quasi-newton methods », *Numerical optimization*, pp. 135–163, 2006.
- [49] C. G. Broyden, « A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations », *Mathematics of computation*, vol. 19, no. 92, pp. 577–593, 1965.
- [50] T. Detroux, « Performance and robustness of nonlinear systems using bifurcation analysis », Ph.D. dissertation, 2016.
- [51] L. Xie, « Suivi numérique des bifurcations pour l'analyse paramétrique de la dynamique non-linéaire des rotors », Ph.D. dissertation, Université de Lyon, 2016.
- [52] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2011.
- [53] L. Manevitch, « The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables », *Nonlinear Dynamics*, vol. 25, pp. 95–109, 2001.
- [54] B. Cadiou, « Protection de structures soumises à des sollicitations dynamiques à l'aide d'un absorbeur non-linéaire », Ph.D. dissertation, Toulouse, ISAE, 2021.
- [55] E. Gourc, « Etude du contrôle passif par pompage énergétique sous sollicitation harmonique: Analyses théoriques et expérimentales », Ph.D. dissertation, Toulouse, INSA, 2013.
- [56] S. Gebai, A. T. Savadkoohi, and C.-H. Lamarque, « A passive nonlinear absorber for controlling pathological tremors of human arm », in *Surveillance, Vibrations, Shock and Noise*, 2023.
- [57] C.-H. Lamarque, A. T. Savadkoohi, E. Etcheverria, and Z. Dimitrijevic, « Multi-scale dynamics of two coupled nonsmooth systems », *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, no. 12, p. 1 250 295, 2012.
- [58] O. V. Gendelman, « Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 3, pp. 732–745, 2008.
- [59] W. R. Evans, « Control System Synthesis by Root Locus Method », *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 69, no. 1, pp. 66–69, 1950.
- [60] H. H., « The application of root-locus technique to non-linear control systems with multiple steady states† », *International Journal of Control*, vol. 27, no. 1, pp. 143–161, 1978.
- [61] W. E. Vander Velde *et al.*, « Multiple-input describing functions and nonlinear system design », *McGraw Hill*, 1968.
- [62] J.-J. E. Slotine, W. Li, *et al.*, *Applied nonlinear control*, 1. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991, vol. 199.
- [63] N. Rouche, « Théorie de la stabilité dans les équations différentielles ordinaires », in *Stability Problems*, Springer, 2011, pp. 112–194.
- [64] V. Popov, « Hyperstability of automatic control systems with several nonlinear elements », *Rev. Roumaine Sci. Tech.*, vol. 1, 1964.
- [65] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures*. Springer Netherlands, 2011, vol. 246.

- [66] G. Zhao, A. Paknejad, G. Raze, A. Deraemaeker, G. Kerschen, and C. Collette, « Nonlinear positive position feedback control for mitigation of nonlinear vibrations », en, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 132, pp. 457–470, 2019.
- [67] M. Moradi, « Self-tuning PID controller to three-axis stabilization of a satellite with unknown parameters », en, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 49, pp. 50–56, 2013.
- [68] Y. Li, X. Wang, R. Huang, and Z. Qiu, « Active vibration and noise control of vibro-acoustic system by using PID controller », en, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 348, pp. 57–70, 2015.
- [69] M. Z. Q. Chen and Y. Hu, *Inerter and Its Application in Vibration Control Systems*. Springer Singapore, 2019.
- [70] Y. Hu, « Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers », en, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015.
- [71] F. Lacaze, A. Paknejad, D. Remond, and S. Chesne, « Improved integral force feedback controllers for lightweight flexible structures », en, *Journal of Vibration and Control*, vol. 28, no. 1-2, pp. 169–181, 2022.
- [72] S. Chesné, A. Milhomem, and C. Collette, « Enhanced damping of flexible structures using force feedback », *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, no. 7, pp. 1654–1658, 2016.
- [73] F. Lacaze, « Conception et contrôle vibratoire d’un robot parallèle à câbles pour l’impression 3D », Ph.D. dissertation, INSA LYON, 2021.
- [74] S. D. Snyder and N. Tanaka, « Active control of vibration using a neural network », *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 6, no. 4, pp. 819–828, 1995.
- [75] J. Ghaboussi and A. Joghataie, « Active control of structures using neural networks », *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, no. 4, pp. 555–567, 1995.
- [76] I. Nishimura, T. Kobori, M. Sakamoto, N. Koshika, K. Sasaki, and S. Ohrui, « Active tuned mass damper », *Smart Materials and Structures*, vol. 1, no. 4, pp. 306–311, 1992.
- [77] L. B. Prasad, B. Tyagi, and H. O. Gupta, « Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input », en, *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, no. 6, pp. 661–670, 2014.
- [78] M. Ghandchi-Tehrani, L. I. Wilmshurst, and S. J. Elliott, « Bifurcation control of a Duffing oscillator using pole placement », en, *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, no. 14, pp. 2838–2851, 2015.
- [79] J. Chen and C. Zhang, « Control of triple inverted pendulum based on LQR coefficients optimization », *Computer Engineering and Applications*, vol. 5, no. 29, pp. 245–248, 2009.
- [80] A. Marco, P. Hennig, J. Bohg, S. Schaal, and S. Trimpe, « Automatic LQR tuning based on Gaussian process global optimization », in *2016 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*, IEEE, 2016, pp. 270–277.
- [81] M. P. Nagarkar, Y. J. Bhalerao, G. V. Patil, and R. Z. Patil, « Multi-objective optimization of nonlinear quarter car suspension system—PID and LQR control », *Procedia manufacturing*, vol. 20, pp. 420–427, 2018.

- [82] H. Wang, H. Zhou, D. Wang, and S. Wen, « Optimization of LQR controller for inverted pendulum system with artificial bee colony algorithm », in *Proceedings of the 2013 International Conference on Advanced Mechatronic Systems*, 2013, pp. 158–162.
- [83] M. Assahubulkahfi, Y. M. Sam, A. Maselena, and M. Huda, « LQR tuning by particle swarm optimization of full car suspension system », *International Journal of Engineering & Technology*, vol. 7, no. 2.13, pp. 328–331, 2018.
- [84] G. R. G. da Silva, A. S. Bazanella, C. Lorenzini, and L. Campestrini, « Data-driven LQR control design », *IEEE control systems letters*, vol. 3, no. 1, pp. 180–185, 2018.
- [85] S. K. Jha, S. B. Roy, and S. Bhasin, « Data-driven adaptive LQR for completely unknown LTI systems », *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 4156–4161, 2017.
- [86] C. Collette and S. Chesné, « Robust hybrid mass damper », en, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 375, pp. 19–27, 2016.
- [87] K. Billon, G. Zhao, C. Collette, and S. Chesné, « Hybrid Mass Damper: Theoretical and Experimental Power Flow Analysis », en, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 144, no. 4, p. 041 003, 2022.
- [88] S. Chesné and C. Collette, « Experimental validation of fail-safe hybrid mass damper », *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 19, pp. 4395–4406, 2017.
- [89] S. Chesne and C. Collette, « Absorbeurs de vibrations hybrides hyperstables », in *CFA/VISHNO 2016*, 2016.
- [90] D. Demetris and N. Nikolaos, « Hybrid semi-zctive mass dampers in structures; Assessing and optimising their damping capacity », *Procedia Engineering*, vol. 199, pp. 3103–3108, 2017.
- [91] A. Preumont, « Collocated versus Non-collocated Control », pp. 117–130, 2011.
- [92] J. K. Hale, « Stability, control and small delays », en, *IFAC Proceedings Volumes*, 3rd IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS 2001), Santa Fe, NM, USA, 8-10 December 2001, vol. 34, no. 23, pp. 37–42, 2001.
- [93] V. Utkin, « Variable structure systems with sliding modes », *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 22, no. 2, pp. 212–222, 1977.
- [94] K. Runcharoon and V. Srichatrapimuk, « Sliding mode control of quadrotor », in *2013 The International Conference on Technological Advances in Electrical, Electronics and Computer Engineering (TAECE)*, IEEE, 2013, pp. 552–557.
- [95] H. Abrougui and S. Nejim, « Sliding mode control of an autonomous sailboat », in *5th International Conference on Green Energy and Environmental Engineering GEEE*, 2018, pp. 19–24.
- [96] L. Zuo and J.-J. E. Slotine, « Robust vibration isolation via frequency-shaped sliding control and modal decomposition », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 285, no. 4-5, pp. 1123–1149, 2005.
- [97] J. Rodriguez, M. Collet, and S. Chesné, « Active Vibration Control on a Smart Composite Structure Using Modal-Shaped Sliding Mode Control », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 144, no. 2, 2022.
- [98] S. Tokat, M. S. Fadali, and O. Eray, « A classification and overview of sliding mode controller sliding surface design methods », *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, pp. 417–439, 2015.

## REFERENCES

---

- [99] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A. Levant, *et al.*, *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014, vol. 10.
- [100] j. Kautsky, n. k. Nichols, and p. Van Dooren, « Robust pole assignment in linear state feedback », *International Journal of Control*, vol. 41, no. 5, pp. 1129–1155, 1985.
- [101] H. Khalil, *Nonlinear Control, Global Edition*. Pearson Education, 2015.
- [102] K. S. Narendra, *Frequency domain criteria for absolute stability*. Elsevier, 2014.
- [103] H. Lee and V. I. Utkin, « Chattering suppression methods in sliding mode control systems », *Annual Reviews in Control*, vol. 31, no. 2, pp. 179–188, 2007.
- [104] C. Mu, C. Sun, C. Qian, and R. Zhang, « Super-twisting sliding mode control based on Lyapunov analysis for the cursing flight of hypersonic vehicles », in *2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, IEEE, 2013.
- [105] Í. Eker, « Second-order sliding mode control with experimental application », *ISA Transactions*, vol. 49, no. 3, pp. 394–405, 2010.
- [106] R.-J. Wai, « Fuzzy sliding-mode control using adaptive tuning technique », *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, no. 1, pp. 586–594, 2007.
- [107] P. Hušek, « Adaptive sliding mode control with moving sliding surface », en, *Applied Soft Computing*, vol. 42, pp. 178–183, 2016.
- [108] R. Ghosh Roy and N. Olgac, « Robust nonlinear control via moving sliding surfaces-n-th order case », in *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, 1997, 943–948 vol.2.
- [109] B. Bandyopadhyay, F. Deepak, and K.-S. Kim, *Sliding mode control using novel sliding surfaces*. Springer, 2009, vol. 392.
- [110] B. Sumantri, N. Uchiyama, S. Sano, and Y. Kawabata, « Robust tracking control of a Quad-Rotor helicopter utilizing sliding mode control with a nonlinear sliding surface », *Journal of System Design and Dynamics*, vol. 7, no. 2, pp. 226–241, 2013.
- [111] V. K. Chu and M. Tomizuka, « Sliding Mode Control with Nonlinear Sliding Surfaces », en, *IFAC Proceedings Volumes*, 13th World Congress of IFAC, 1996, San Francisco USA, 30 June - 5 July, vol. 29, no. 1, pp. 2877–2882, 1996.
- [112] D. G. Luenberger, « Observing the state of a linear system », *IEEE transactions on military electronics*, vol. 8, no. 2, pp. 74–80, 1964.
- [113] M. I. Ribeiro, « Kalman and extended kalman filters: Concept, derivation and properties », *Institute for Systems and Robotics*, vol. 43, no. 46, pp. 3736–3741, 2004.
- [114] R. E. Kalman, « A new approach to linear filtering and prediction problems », 1960.
- [115] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, « Second-order sliding-mode observer for mechanical systems », *IEEE transactions on automatic control*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, 2005.
- [116] A. Levant, « Robust exact differentiation via sliding mode technique », *automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.

- [117] A. Chalanga, S. Kamal, L. M. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J. A. Moreno, « Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches », *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 6, pp. 3677–3685, 2016.
- [118] A. Preumont, *Twelve lectures on structural dynamics*, ser. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, 2013.
- [119] H. Frahm, *Device for damping vibrations of bodies*. 1911.
- [120] J. Den Hartog and J. Ormondroyd, « Theory of the dynamic vibration absorber », *ASME J. Appl. Mech*, vol. 50, no. 7, pp. 11–22, 1928.
- [121] G. B. Warburton, « Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters », *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 10, no. 3, pp. 381–401, 1982.
- [122] H.-C. Tsai and G.-C. Lin, « Optimum tuned-mass dampers for minimizing steady-state response of support-excited and damped systems », *Earthquake engineering & structural dynamics*, vol. 22, no. 11, pp. 957–973, 1993.
- [123] T. Asami, O. Nishihara, and A. M. Baz, « Analytical Solutions to  $H_\infty$  and  $H_2$  Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, no. 2, pp. 284–295, 2002.
- [124] W. Shi, L. Wang, Z. Lu, and Q. Zhang, « Application of an Artificial Fish Swarm Algorithm in an Optimum Tuned Mass Damper Design for a Pedestrian Bridge », *Applied Sciences*, vol. 8, no. 2, p. 175, 2018.
- [125] C.-L. Lee, Y.-T. Chen, L.-L. Chung, and Y.-P. Wang, « Optimal design theories and applications of tuned mass dampers », *Engineering Structures*, vol. 28, no. 1, pp. 43–53, 2006.
- [126] S. Pourzeynali, S. Salimi, and H. Eimani Kalesar, « Robust multi-objective optimization design of TMD control device to reduce tall building responses against earthquake excitations using genetic algorithms », *Scientia Iranica*, vol. 20, no. 2, pp. 207–221, 2013.
- [127] M. Mohebbi, K. Shakeri, Y. Ghanbarpour, and H. Majzoub, « Designing optimal multiple tuned mass dampers using genetic algorithms (GAs) for mitigating the seismic response of structures », en, *Journal of Vibration and Control*, vol. 19, no. 4, pp. 605–625, 2013.
- [128] M. Yucel, G. Bekdaş, S. M. Nigdeli, and S. Sevgen, « Estimation of optimum tuned mass damper parameters via machine learning », *Journal of Building Engineering*, vol. 26, p. 100847, 2019.
- [129] G. Bekdaş, S. M. Nigdeli, and X.-S. Yang, « Metaheuristic based optimization for tuned mass dampers using frequency domain responses », in *Harmony Search Algorithm: Proceedings of the 3rd International Conference on Harmony Search Algorithm (ICHSA 2017) 3*, Springer, 2017, pp. 271–279.
- [130] E. Mrabet, M. Guedri, S. Ghanmi, M. Ichchou, and O. Bareille, « A new optimization strategy for tuned mass damper parameters », en, 2014.
- [131] A. Y. Tuan and G. Q. Shang, « Vibration control in a 101-storey building using a tuned mass damper », *Journal of Applied Science and Engineering*, vol. 17, pp. 141–156, 2014.

## REFERENCES

---

- [132] R. J. McNamara, « Tuned mass dampers for buildings », *Journal of the Structural Division*, vol. 103, no. 9, pp. 1785–1798, 1977.
- [133] M. G. Soto and H. Adeli, « Tuned mass dampers », *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 20, no. 4, pp. 419–431, 2013.
- [134] J.-S. Bae, J.-H. Hwang, J.-H. Roh, J.-H. Kim, M.-S. Yi, and J. H. Lim, « Vibration suppression of a cantilever beam using magnetically tuned-mass-damper », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 26, pp. 5669–5684, 2012.
- [135] M. Abé and Y. Fujino, « Dynamic characterization of multiple tuned mass dampers and some design formulas », *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 23, no. 8, pp. 813–835, 1994.
- [136] K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, O. Sauvage, and G. Chevallier, « A framework for the design of rotating multiple tuned mass damper », in *Topics in Modal Analysis & Testing, Volume 8*, B. Dilworth and M. Mains, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2021, pp. 393–397.
- [137] V. Manchi and C. Sujatha, « Torsional vibration reduction of rotating shafts for multiple orders using centrifugal double pendulum vibration absorber », *Applied Acoustics*, vol. 174, p. 107768, 2021.
- [138] E. Bachy, K. Jaboviste, E. Sadoulet-Reboul, N. Peyret, G. Chevallier, C. Arnould, and E. Collard, « Investigations on the performance and the robustness of a metabsorber designed for structural vibration mitigation », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 170, p. 108830, 2022.
- [139] W. Zuk, « Kinetic structures, civil engineering », in *ASCE*, vol. 39, 1968, pp. 62–64.
- [140] W. Zuk and R. Clark, *Kinetic Architecture*. Van Nostrand Reinhold, 1970.
- [141] W. Nordell, *Active systems for blast-resistant structures*. Naval Civil Engineering Laboratory, 1969.
- [142] J. T. Yao, « Concept of structural control », *Journal of the Structural Division*, vol. 98, no. 7, pp. 1567–1574, 1972.
- [143] A. E. Bryson, *Applied optimal control*, Anglais, Revised édition, Routledge, Ed. Cambridge, 1975, p. 481.
- [144] L. Meirovitch and H. Oz, « Modal-space control of distributed gyroscopic systems », *Journal of Guidance and Control*, vol. 3, no. 2, pp. 140–150, 1980.
- [145] L. Meirovitch and H. Baruh, « Control of Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems », *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 5, no. 1, pp. 60–66, 1982.
- [146] L. Meirovitch, *Computational methods in structural dynamics*. Springer Science & Business Media, 1980, vol. 5.
- [147] R. Lund, « Active damping of large structures in winds », in *ASCE, Convention and Exposition*, Boston, 1979.
- [148] S. Masri, G. Bekey, and T. Caughey, « On-line control of nonlinear flexible structures », 1982.
- [149] R. Lin, T. Soong, and A. Reinhorn, « Active stochastic control of seismic structures », in *Stochastic Approaches in Earthquake Engineering: US-Japan Joint Seminar, May 6–7, 1987, Boca Raton, Florida, USA*, Springer, 1987, pp. 157–173.

- [150] J. Kelly, G. Leitmann, and A. Soldatos, « Robust control of base-isolated structures under earthquake excitation », *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 53, pp. 159–180, 1987.
- [151] D. Énard, A. Maréchal, and J. Espiard, « Progress in ground-based optical telescopes », *Reports on Progress in Physics*, vol. 59, no. 5, p. 601, 1996.
- [152] V. I. Utkin, « Sliding mode control design principles and applications to electric drives », *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 23–36, 1993.
- [153] V. Utkin and J. Shi, « Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions », in *Proceedings of 35th IEEE conference on decision and control*, IEEE, vol. 4, 1996, pp. 4591–4596.
- [154] A. Khajepour and M. F. Golnaraghi, « Experimental control of flexible structures using nonlinear modal coupling: forced and free vibration », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 8, no. 8, pp. 697–710, 1997.
- [155] T. Datta, « A state-of-the-art review on active control of structures », *ISET Journal of earthquake technology*, vol. 40, no. 1, pp. 1–17, 2003.
- [156] I. Ursu, F. Ursu, T. Sireteanu, and C. Stammers, « Artificial intelligence based synthesis of semiactive suspension systems », *Shock and Vibration Digest*, vol. 32, no. 1, pp. 3–10, 2000.
- [157] H. E. Tseng and D. Hrovat, « State of the art survey: active and semi-active suspension control », *Vehicle System Dynamics*, vol. 53, no. 7, pp. 1034–1062, 2015.
- [158] L. Wang, S. Nagarajaiah, W. Shi, and Y. Zhou, « Semi-active control of walking-induced vibrations in bridges using adaptive tuned mass damper considering human-structure-interaction », *Engineering Structures*, vol. 244, p. 112743, 2021.
- [159] F. Lacaze, A. Paknejad, D. Remond, and S. Chesne, « Improved integral force feedback controllers for lightweight flexible structures », *Journal of Vibration and Control*, vol. 28, no. 1-2, pp. 169–181, 2020.
- [160] J. Rodriguez, M. Collet, and S. Chesné, « Active vibration control on a smart composite structure using modal-shaped sliding mode control », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 144, no. 2, 2022.
- [161] K. Nakano, Y. Suda, and S. Nakadai, « Self-powered active vibration control using a single electric actuator », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 260, no. 2, pp. 213–235, 2003.
- [162] K. Nakano, « Combined Type Self-Powered Active Vibration Control of Truck Cabins », *Vehicle System Dynamics*, vol. 41, no. 6, pp. 449–473, 2004.
- [163] S. Thenozhi and W. Yu, « Advances in modeling and vibration control of building structures », *Annual Reviews in Control*, vol. 37, no. 2, pp. 346–364, 2013.
- [164] N. Alujević, I. Tomac, and P. Gardonio, « Tuneable vibration absorber using acceleration and displacement feedback », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 12, pp. 2713–2728, 2012.
- [165] F. Ricciardelli, A. Occhiuzzi, and P. Clemente, « Semi-active Tuned Mass Damper control strategy for wind-excited structures », *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 88, no. 1, pp. 57–74, 2000.



- [166] Z.-D. Xu, Y.-P. Shen, and Y.-Q. Guo, « Semi-active control of structures incorporated with magnetorheological dampers using neural networks », en, *Smart Materials and Structures*, vol. 12, no. 1, p. 80, 2003.
- [167] H.-J. Lee, H.-J. Jung, S.-J. Moon, S.-K. Lee, E.-C. Park, and K.-W. Min, « Experimental Investigation of MR Damper-based Semiactive Control Algorithms for Full-scale Five-story Steel Frame Building », en, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 21, no. 10, pp. 1025–1037, 2010.
- [168] L.-L. Chung, Y.-A. Lai, C.-S. Walter Yang, K.-H. Lien, and L.-Y. Wu, « Semi-active tuned mass dampers with phase control », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, no. 15, pp. 3610–3625, 2013.
- [169] M. S. Miah, E. N. Chatzi, and F. Weber, « Semi-active control for vibration mitigation of structural systems incorporating uncertainties », en, *Smart Materials and Structures*, vol. 24, no. 5, p. 055 016, 2015.
- [170] L. Koutsoloukas, N. Nikitas, and P. Aristidou, « Passive, semi-active, active and hybrid mass dampers: A literature review with associated applications on building-like structures », *Developments in the Built Environment*, p. 100 094, 2022.
- [171] T. Suzuki, M. Kageyama, A. Nobata, S. Inaba, and O. Yoshida, « Active vibration control system installed in a high-rise building », in *Proc. 1st World Conf. on Struct. Control*, 1994, pp. 3–11.
- [172] R. Kumar and M. Khan, « Pole Placement Techniques for Active Vibration Control of Smart Structures: A Feasibility Study », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 129, no. 5, pp. 601–615, 2007.
- [173] C.-S. W. Yang, L.-L. Chung, L.-Y. Wu, and N.-H. Chung, « Modified predictive control of structures with direct output feedback », *Structural Control and Health Monitoring*, vol. 18, no. 8, pp. 922–940, 2011.
- [174] Z. Li, S. Zuo, and Y. Liu, « Fuzzy sliding mode control for smart structure with ATMD », in *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, 2014, pp. 21–25.
- [175] S. Chesne and C. Collette, « Absorbeurs de vibrations hybrides hyperstables », in *CFA/VISHNO 2016*, 2016.
- [176] S. Chesné and C. Collette, « Experimental validation of fail-safe hybrid mass damper », *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 19, pp. 4395–4406, 2017.
- [177] S. Chesné, « Hybrid skyhook mass damper », *Mechanics & Industry*, vol. 22, p. 49, 2021.
- [178] C. Collette and S. Chesné, « Robust hybrid mass damper », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 375, pp. 19–27, 2016.
- [179] S. Chesne, K. Billon, C. Collette, and G. Zhao, « Power flow analysis for hybrid mass damper design », in *30th Conference on Mechanical Vibration and Noise*, vol. 8, Quebec City, Quebec, Canada: American Society of Mechanical Engineers, 2018.
- [180] G. Inquiere, P. Cranga, and S. Chesne, *Resonator, and an aircraft fitted with the resonator*, 2019.

- 
- [181] S. Chesné, G. Inquieté, P. Cranga, F. Legrand, and B. Petitjean, « Innovative hybrid mass damper for dual-loop controller », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 115, pp. 514–523, 2019.
- [182] M. Auleley, O. Thomas, C. Giraud-Audine, and H. Mahé, « Enhancement of a dynamic vibration absorber by means of an electromagnetic shunt », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 32, no. 3, pp. 331–354, 2021.
- [183] R. E. Roberson, « Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber », *Journal of the Franklin Institute*, vol. 254, no. 3, pp. 205–220, 1952.
- [184] H. F. Bauer, « Steady-State Harmonic and Combination Response of a Nonlinear Dynamic Vibration Absorber », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, no. 1, pp. 213–216, 1966.
- [185] L. Manevich and M. Pinski, « Normal modes in nonlinear systems with two degrees of freedom », *Soviet Applied Mechanics*, vol. 8, no. 9, pp. 1005–1010, 1972.
- [186] A. H. Nayfeh, « The response of single degree of freedom systems with quadratic and cubic non-linearities to a subharmonic excitation », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 89, no. 4, pp. 457–470, 1983.
- [187] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, and D. W. Lobitz, « Numerical-perturbation method for the nonlinear analysis of structural vibrations », *AIAA Journal*, vol. 12, no. 9, pp. 1222–1228, 1974.
- [188] H. M. Miller and J. R. Gartner, *Tunable, non-linear vibration absorber*. 1975.
- [189] I. N. Jordanov and B. I. Cheshankov, « Optimal design of linear and non-linear dynamic vibration absorbers », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 123, no. 1, pp. 157–170, 1988.
- [190] A. F. Vakakis, « Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems », *J. Vib. Acoust.*, vol. 123, no. 3, pp. 324–332, 2001.
- [191] O. V. Gendelman, « Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators », *Nonlinear Dynamics*, vol. 25, no. 1/3, pp. 237–253, 2001.
- [192] G. Kerschen, O. Gendelman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, and D. M. McFarland, « Impulsive periodic and quasi-periodic orbits of coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity », *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 13, no. 5, pp. 959–978, 2008.
- [193] Y. S. Lee, G. Kerschen, A. F. Vakakis, P. Panagopoulos, L. Bergman, and D. M. McFarland, « Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment », *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 204, no. 1–2, pp. 41–69, 2005.
- [194] D. M. McFarland, G. Kerschen, J. J. Kowtko, Y. S. Lee, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis, « Experimental investigation of targeted energy transfers in strongly and nonlinearly coupled oscillators », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, no. 2, pp. 791–799, 2005.
- [195] E. Gourdon, « Contrôle passif de vibrations par pompage énergétique », Ph.D. dissertation, 2006.

- [196] G. Habib, T. Detroux, R. Vigi  , and G. Kerschen, « Nonlinear generalization of Den Hartog’s equal-peak method », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 52-53, pp. 17–28, 2015.
- [197] T. Detroux, G. Habib, L. Masset, and G. Kerschen, « Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 60, pp. 799–809, 2015.
- [198] C. Grappasonni, G. Habib, T. Detroux, and G. Kerschen, « Experimental demonstration of a 3D-printed nonlinear tuned vibration absorber », in *Nonlinear Dynamics, Volume 1: Proceedings of the 33rd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics, 2015*, Springer, 2016, pp. 173–183.
- [199] G. Habib and G. Kerschen, « A principle of similarity for nonlinear vibration absorbers », *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 332, pp. 1–8, 2016.
- [200] E. Gourdon, N. Alexander, C. Taylor, C. Lamarque, and S. Pernet, « Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 300, pp. 522–551, 2007.
- [201] D. Qiu, S. Seguy, and M. Paredes, « Tuned Nonlinear Energy Sink With Conical Spring: Design Theory and Sensitivity Analysis », *Journal of Mechanical Design*, vol. 140, no. 1, 2017.
- [202] Z.-Q. Lu, G.-S. Hu, H. Ding, and L.-Q. Chen, « Jump-based estimation for nonlinear stiffness and damping parameters », *Journal of Vibration and Control*, vol. 25, no. 2, pp. 325–335, 2018.
- [203] B. Cadiou, C. Stephan, A. Renoult, and G. Michon, « Damping adjustment of a nonlinear vibration absorber using an electro–magnetomechanical coupling », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 518, p. 116 508, 2022.
- [204] D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis, « Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency », *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, no. 6, pp. 891–899, 2005.
- [205] Y. S. Lee, G. Kerschen, D. M. McFarland, W. J. Hill, C. Nickkawde, T. W. Strganac, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis, « Suppressing Aeroelastic Instability Using Broadband Passive Targeted Energy Transfers, Part 2: Experiments », *AIAA Journal*, vol. 45, no. 10, pp. 2391–2400, 2007.
- [206] X. Wang, X.-F. Geng, X.-Y. Mao, H. Ding, X.-J. Jing, and L.-Q. Chen, « Theoretical and experimental analysis of vibration reduction for piecewise linear system by nonlinear energy sink », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 172, p. 109 001, 2022.
- [207] G. Pennisi, B. Mann, N. Naclerio, C. Stephan, and G. Michon, « Design and experimental study of a Nonlinear Energy Sink coupled to an electromagnetic energy harvester », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 437, pp. 340–357, 2018.
- [208] K. Dekemele, G. Habib, and M. Loccufer, « The periodically extended stiffness nonlinear energy sink », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 169, p. 108 706, 2022.
- [209] S. Benacchio, A. Malher, J. Boisson, and C. Touz  , « Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses », *Nonlinear Dynamics*, vol. 85, no. 2, pp. 893–911, 2016.

- [210] O. Gendelman, « Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 21, pp. 4599–4608, 2012.
- [211] G. Pennisi, C. Stephan, E. Gourc, and G. Michon, « Experimental investigation and analytical description of a vibro-impact NES coupled to a single-degree-of-freedom linear oscillator harmonically forced », *Nonlinear Dynamics*, vol. 88, no. 3, pp. 1769–1784, 2017.
- [212] B. Youssef and R. I. Leine, « A complete set of design rules for a vibro-impact NES based on a multiple scales approximation of a nonlinear mode », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 501, p. 116 043, 2021.

## Chapitre 2

# Analyses du comportement d'un absorbeur de vibrations non-linéaire hybride

### Introduction

Ce chapitre présente les contributions numériques et théoriques de cette thèse. Les notions explicitées au chapitre 1 seront appliquées à travers plusieurs cas d'études. Au début de ce chapitre, le contrôle par mode glissant (SMC) sera appliqué à un oscillateur de type Duffing. Un algorithme de résolution fréquentiel pour le calcul de système non-linéaire contrôlé par SMC ainsi que le calcul de la stabilité associée seront présentés. Les outils développés lors de cette première partie seront appliqués à un absorbeur de vibrations hybride non-linéaire dans la deuxième partie de ce chapitre. L'application de ce dernier à différentes lois de contrôle permettra de répondre à la question : peut-on tirer pleinement et simultanément partie des avantages de l'hybridation et de la dynamique non-linéaire ? Enfin, la troisième et dernière partie de ce chapitre développera le contrôle semi-actif pour le pilotage des non-linéarités. Le contrôle est utilisé pour modifier des paramètres intrinsèques de l'absorbeur en temps réel et permettre une meilleure adaptabilité.

---

### Sommaire

2.1	Structure non-linéaire contrôlée par la méthode des modes glissants . . .	70
2.1.1	Système d'étude : oscillateur de Duffing . . . . .	70
2.1.2	Calcul de la réponse en fréquence d'un système contrôlé par SMC par la méthode de l'équilibrage harmonique . . . . .	74
2.1.3	Calcul de la force active dans le domaine fréquentiel . . . . .	75
2.1.4	Validation numérique des outils proposés . . . . .	81
2.1.5	Conclusion . . . . .	84
2.2	Absorbeurs de vibrations hybrides . . . . .	84
2.2.1	Équations de la dynamique d'un absorbeur de vibrations hybride . . . . .	85
2.2.2	Le NLTVA . . . . .	86
2.2.3	Le HNLTVL-QR . . . . .	88
2.2.4	Le HNLTVL- $\alpha$ -controller . . . . .	89
2.2.5	Le HNLTVL-SMC . . . . .	91
2.2.6	Comparaison des performances : amortissement vibratoire . . . . .	93

2.2.7	Comparaison des performances : débattement de l'absorbeur . . .	94
2.2.8	Comparaison des performances : consommation énergétique . . .	96
2.2.9	Comparaison des performances : robustesse . . . . .	97
2.2.10	Comportement d'une solution isolée sous l'effet du contrôle . . .	100
2.2.11	Conclusion . . . . .	101
2.3	Un absorbeur non-linéaire adaptatif . . . . .	101
2.3.1	Système d'étude . . . . .	103
2.3.2	Calcul du Slow Invariant Manifold pour le contrôle hybride des structures . . . . .	104
2.3.3	Le NES : un absorbeur passif . . . . .	107
2.3.4	Le HNES : loi polynomiale . . . . .	113
2.3.5	Conclusion . . . . .	127
2.4	Conclusion générale . . . . .	127
	Références du chapitre . . . . .	128

---

## 2.1 Structure non-linéaire contrôlée par la méthode des modes glissants

Le contrôle par mode glissant (SMC) est un contrôleur robuste non-linéaire (voir Sec. 2.1). L'idée principale derrière cette commande est de conduire les états du système sur un régime prédéterminé comme un point fixe ou un cycle limite [1]. Cette convergence se fait par l'intermédiaire d'une sliding surface (surface de glissement) qui représente une combinaison linéaire ou non-linéaire des états du système. La loi de contrôle par SMC est composée de deux parties. Une partie continue maintient la dynamique du système sur la sliding surface et une partie non-linéaire (fonction signe) permet de ne pas trop s'en éloigner. Dans la communauté du contrôle actif, le calcul de réponse en fréquence de système soumis à un contrôle de type SMC se fait classiquement par l'intégration temporelle du fait de la présence de la non-linéarité.

Dans cette première partie de chapitre, un algorithme de calcul de la fonction de réponse en fréquence d'un système non-linéaire contrôlé par SMC est proposé. Ce dernier est basé sur la compréhension de la loi de contrôle. L'algorithme s'articule autour de la méthode d'équilibrage harmonique et d'une méthode de continuation. De plus, le calcul de stabilité fréquentielle par la méthode de Hill (voir Sec. 1.2.4) est adapté à la particularité du contrôleur. L'objectif est de fournir les outils nécessaires pour un calcul fréquentiel de cette loi.

Après une présentation du système considéré, la méthode de contrôle par mode glissant et la méthode d'équilibrage harmonique associées à l'algorithme proposé seront présentées. La fin de cette partie sera consacrée à la validation numérique de l'algorithme proposé.

### 2.1.1 Système d'étude : oscillateur de Duffing

Considérons un oscillateur de Duffing avec une non-linéarité cubique, un contrôle actif  $F_a(t)$  tel que :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + f_{nl}(x) = f_{ext} + F_a(t) \quad (2.1)$$

avec  $x(t)$  le déplacement et

$$f_{nl}(x) = K_{nl}x(t)^3 \quad (2.2)$$

$$f_{ext} = F \sin(\omega t) \quad (2.3)$$

où  $M$ ,  $C$ ,  $K$ , et  $K_{nl} \in \mathbb{R}^1$  représentent respectivement les coefficients de la masse, de l'amortissement, de la rigidité linéaire et non-linéaire du système. Le terme  $F$  correspond à l'amplitude de la perturbation extérieure et  $\omega$  à la fréquence angulaire. Enfin, la force active  $F_a(t)$  sera explicitée dans la section suivante. Une représentation visuelle de l'ensemble du système est donnée en figure 2.1.

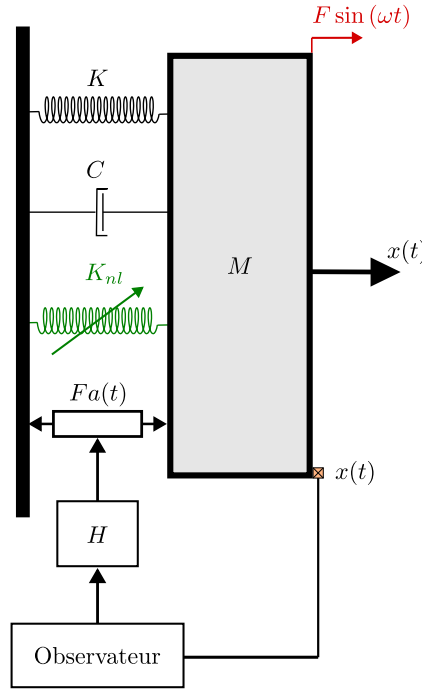


FIGURE 2.1: Schéma de principe du système étudié

### Construction de la sliding surface

La présente section décrit la conception de la méthode de contrôle par mode glissant, qui s'articule autour de l'utilisation de la surface de glissement. Considérons l'erreur de suivi de la position de l'oscillateur  $x(t)$  comme  $e(t) = x(t) - x_d(t)$ , où  $x_d(t)$  représente le comportement désiré. Dans le contexte des applications vibratoires, nous supposons que  $x_d(t) = 0$ , ce qui indique que le comportement souhaité du système tend vers zéro. Dans cette étude on utilise une sliding surface  $\sigma(t)$  dite "intégrale" définie par :

$$\sigma(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 \dot{x}(t) + \alpha_3 \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

avec

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0 \text{ et } \frac{\alpha_3}{\alpha_2} > 0 \quad (2.5)$$

où  $\int_0^t x(\tau) d\tau$  représente l'intégrale du déplacement de la structure qui améliore les performances de suivi [2], [3]. La figure 2.2 illustre les différentes phases de la commande par mode glissant dans le portrait de phase tridimensionnel. L'étape initiale, connue sous

le nom de phase d'approche (reaching phase), vise à amener la dynamique du système sur la surface de glissement (sliding surface). Lorsque l'équation  $\sigma(t) = 0$  est satisfaite, cela indique que la dynamique du système se trouve précisément sur  $\sigma(t)$ . Par la suite, la phase de glissement vise à aligner la dynamique du système sur le comportement souhaité, tel que les cycles limites pour le système forcé spécifique étudié. La sliding surface joue un rôle crucial dans l'approche de la commande par mode glissant (SMC), car elle régit le comportement du système. Comme énoncé dans le chapitre. 1.3.4, les paramètres de  $\sigma(t)$  peuvent être trouvés de plusieurs manières (méthode LQR modifiée, passivité, ...).

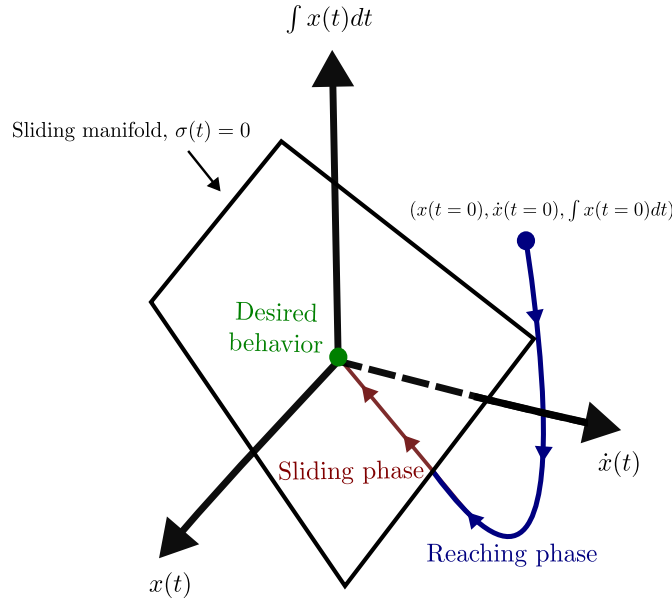


FIGURE 2.2: Portrait de phase et diagramme des différentes phases du SMC

### Construction de la loi de contrôle

Pour assurer la stabilité du système résultant et la convergence de  $\sigma$ , le contrôleur est conçu en considérant la fonction de Liapunov  $V$  et sa dérivée  $\dot{V}$  [4] :

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma(\alpha_1\dot{x}(t) + \alpha_2\ddot{x}(t) + \alpha_3x(t)) \\ \dot{V} \leq -\nu|\sigma| \end{cases} \quad (2.6)$$

avec

$$\ddot{x}(t) = M^{-1}(-C\dot{x}(t) - Kx(t) - f_{nl}(x) + f_a(t)) = M^{-1}(-f(x, \dot{x}) + f_a(t)) \quad (2.7)$$

La vitesse de convergence de la trajectoire vers la surface de glissement est déterminée par une constante réelle strictement positive, notée  $\nu$  [5]. Ici, le contrôleur par mode glissant est spécifiquement utilisé pour sa robustesse face aux perturbations externes (représenté par la perturbation harmonique  $f_{ext}$ ). Par conséquent, le contrôleur est conçu pour le système non forcé (autonome). De ce fait,  $V$  est choisi pour satisfaire les conditions suivantes :

- a)  $\dot{V} < 0$  for  $\sigma \neq 0$
- b)  $\lim_{|\sigma| \rightarrow +\infty} V = \infty$



D'après les Eqs.(2.6) et (2.7), le terme  $f_a(t)$  est cherché tel que :

$$\sigma\left(\alpha_1\dot{x}(t) + \alpha_2M^{-1}(-f(x, \dot{x}) + f_a(t)) + \alpha_3x(t)\right) \leq -\nu|\sigma| \quad (2.8)$$

Cette condition est satisfaite pour :

$$f_a(t) = \left[-M\left(\frac{\alpha_3x + \alpha_1\dot{x}}{\alpha_2}\right) + f(x, \dot{x})\right] - \frac{M\nu}{\alpha_2} \text{sign}(\sigma(t)) = \eta(t) + f_{anl}(t) \quad (2.9)$$

avec

$$f(x, \dot{x}) = C\dot{x}(t) + Kx(t) + f_{nl}(x) \quad (2.10)$$

$$\eta(t) = -M\left(\frac{\alpha_3x + \alpha_1\dot{x}}{\alpha_2}\right) + f(x, \dot{x}) \quad (2.11)$$

$$f_{anl}(t) = -\rho \text{sign}(\sigma(t)) \quad (2.12)$$

où  $\rho = \frac{M\nu}{\alpha_2} > 0$  est le gain de la force active non-linéaire  $f_{anl}(t)$  et "sign" est la fonction signe telle que :

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma(t) > 0 \\ 0 & \text{if } \sigma(t) = 0 \\ -1 & \text{if } \sigma(t) < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

L'inclusion d'un terme non-linéaire contenant la fonction signe dans le système assure la stabilité au sens de Liapunov de la composante linéaire et contribue à la robustesse du système global. L'efficacité de la loi de commande dépend du niveau de régularisation de la force active. Dans ce contexte, la fonction signe est considérée comme étant théoriquement la plus efficace. Cependant, en raison de considérations pratiques telles que la longévité de l'actionneur et la génération indésirable d'harmoniques à haute fréquence connue sous le nom de phénomène de réticence (chattering), des versions plus "lisses" de cette fonction sont employées. Ces versions alternatives comprennent la fonction de saturation, la fonction sigmoïde, la fonction demi-sinusoïdale ou la fonction qui utilisée dans cette étude :

$$\text{sign}(\sigma(t)) \approx \frac{\sigma(t)}{\sqrt{\sigma(t)^2 + \epsilon}} \quad (2.14)$$

où  $\epsilon \ll 1$ . En outre, afin d'améliorer les performances (réduction de l'amplitude maximale du système dans une plage de fréquence spécifique), de minimiser l'effort de contrôle et de réduire le chattering, la partie non-linéaire de la loi de contrôle par mode glissant est pondérée par la racine carrée de la valeur absolue de la surface de glissement, désignée par  $\sqrt{|\sigma|}$  :

$$f_a(t) = \eta(t) + \sqrt{|\sigma|}f_{anl}(t) \quad (2.15)$$

Enfin, le système complet d'équations régularisées du système considéré est :

$$\begin{cases} \Gamma(x, y, \omega, t) &= M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + f_{nl}(x) - f_{ext} + f_a(x, y, t) \\ f_a(x, y, t) &= -M\left(\frac{\alpha_3x + \alpha_1\dot{x}}{\alpha_2}\right) + f(x, \dot{x}) - \rho\sqrt{|\sigma(t)|} \times \frac{\sigma(t)}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \\ \sigma(x, y, t) &= \alpha_1x(t) + \alpha_2\dot{x}(t) + \alpha_3y(t) \\ h(x, y, \omega, t) &= \dot{y}(t) - x(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

Afin de déterminer l'amplitude du régime permanent à différentes fréquences, le système décrit par l'équation (2.16) peut être résolu en utilisant l'intégration temporelle pour

chaque valeur de fréquence dans la gamme spécifiée. L'introduction de  $h(x, y, \omega, t)$  dans le système d'équations (2.16) permet de calculer l'intégrale du déplacement (terme intégral  $\int_0^t x(\tau) d\tau$ ) et de garantir l'unicité de la solution. Cependant, dans l'optique de construire une courbe de réponse en fréquence, l'intégration temporelle s'avère coûteuse en temps. Pour surmonter ce problème, la section suivante présente une méthode basée sur la méthode de l'équilibrage harmonique, qui permet le calcul direct de solutions périodiques (régime permanent).

### 2.1.2 Calcul de la réponse en fréquence d'un système contrôlé par SMC par la méthode de l'équilibrage harmonique

Comme détaillé dans la section. 1.2.2, la méthode HBM consiste à décomposer  $x(t)$  en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^H a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt) \quad (2.17)$$

où  $a_0$ ,  $a_k$  et  $b_k$  sont respectivement des coefficients de Fourier constants, pairs et impairs qu'il s'agit de déterminer. L'équation (2.17) est réécrite comme suit :

$$x(t) = T_H(\omega t)X \quad (2.18)$$

où  $X$  représente les coefficients de Fourier et

$$T_H(\omega t) = [1 \quad \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \dots \quad \cos(H\omega t) \quad \sin(H\omega t)] \quad (2.19)$$

de taille  $(2H+1)$ , correspond à la base de Fourier composée de termes trigonométriques.

En appliquant la méthodologie vue dans la section 1.2.2 au système formé par l'introduction de (2.18) dans la première et la dernière équation de (2.16), les deux résidus d'équilibre  $R(X, Y, \omega)$  et  $H(X, Y, \omega)$  sont obtenus :

$$\begin{cases} R(X, Y, \omega) = Z(\omega)X + F_{nl}(X) - P - F_a(X, Y, \omega) \\ H(X, Y, \omega) = Y - \zeta(\omega)X \end{cases} \quad (2.20)$$

où

$$Z(\omega) = \omega^2 \nabla^2 M + \omega \nabla C + I_{(2H+1)} K \quad (2.21)$$

$$\zeta(\omega) = \frac{1}{\omega} \tilde{\nabla} \quad (2.22)$$

avec  $M$ ,  $C$ ,  $K$  définis dans l'Eq. (2.1) et où  $P$ ,  $F_{nl}(X, Y, \omega)$  et  $F_a(X, Y, \omega)$  sont les vecteurs des coefficients de Fourier de la perturbation externe  $f_{ext}$ , des forces non linéaires  $f_{nl}$  et de la force active  $f_a(x, y, t)$  respectivement. Le terme  $I_{(2H+1)} \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times (2H+1)}$  est la matrice identité;  $\nabla \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times (2H+1)}$  est l'opérateur de dérivation et  $\tilde{\nabla} \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times (2H+1)}$  l'opérateur intégral qui représente la pseudo-inverse de  $\nabla$  de telle sorte que :

$$\nabla = \text{diag}(0, \nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_i, \dots, \nabla_H) \text{ avec } \nabla_i = i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\tilde{\nabla} = \text{diag}(0, \tilde{\nabla}_1, \tilde{\nabla}_2, \dots, \tilde{\nabla}_2, \dots, \tilde{\nabla}_H) \text{ avec } \tilde{\nabla}_i = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La condition d'unicité (représenté par  $h(x, y, \omega, t)$  dans (2.16)), expliquée précédemment dans l'équation (2.16), est représentée par la deuxième équation de (2.20). Le calcul des forces non-linéaires  $F_{nl}(X)$  par la méthode AFT (Alternance-Temps-Fréquence) et de la force active  $F_a(X, Y, \omega)$  sera formulé dans la section suivante.

**Remarque** La position statique de l'absorbeur peut être modifiée par le contrôleur. Le produit de  $\tilde{\nabla}$  par  $\nabla$  ne donne pas une matrice identité parfaite. En effet, la première composante du produit matriciel résultant contient un zéro. De ce fait, aucun mode de corps rigide n'est introduit via le terme intégrale.

### 2.1.3 Calcul de la force active dans le domaine fréquentiel

Dans cette section, l'algorithme de calcul est détaillé. Introduisons la variable  $\theta = \omega t$  dans l'équation (2.17) pour obtenir l'expression suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{H}} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \quad (2.25)$$

L'essence fondamentale de cet algorithme réside dans une compréhension claire du contrôle par mode glissant. Nous pouvons introduire  $\theta^*$  pour représenter le moment où la dynamique du système, représentée par les coordonnées d'état  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ , intersecte la surface de glissement.  $\theta^*$  est donc défini par :

$$\sigma(\theta^*) = \sigma(\omega t^*) = 0 \quad (2.26)$$

Dans le cas d'un système forcé (non autonome), lorsque la dynamique du système atteint un état stable, elle coupe deux fois la surface de glissement en  $\theta^*$  et  $\theta^* + \pi$ . Par conséquent, la composante non-linéaire de la force active subit un changement de signe en fonction du secteur dans lequel elle se trouve. Ces deux secteurs sont représentés par les symboles '+' et '-' dans la Figure 2.3.

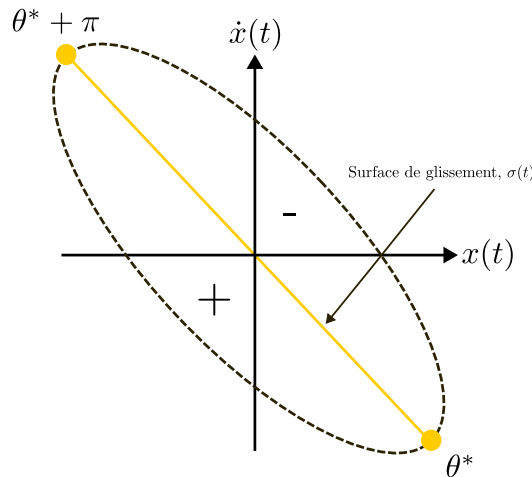


FIGURE 2.3: Représentation des différents signes de la force active dans le portrait de phase

Le paramètre  $\theta^*$  est obtenu en résolvant l'équation non-linéaire (2.26) avec une procédure itérative de Newton-Raphson (plus de détails dans l'algorithme 1).

**Algorithm 1** Algorithme proposé pour calculer  $\theta^*$

---

```

i ← 1
 $\theta^* \leftarrow \theta_0 = \omega t_0$ 
 $\sigma(\theta^*) \leftarrow \alpha_1 x(t_0) + \alpha_2 \dot{x}(t_0) + \alpha_3 \int_0^{t_0} x(\tau) d\tau$ 
while  $\|\sigma\| \leq \epsilon$  &  $i \leq i_{max}$  do
    Compute  $J = \dot{\sigma}(\theta^*) = \alpha_1 \dot{x}(t_i) + \alpha_2 \ddot{x}(t_i) + \alpha_3 x(t_i)$ 
     $\delta_\theta \leftarrow -J^{-1} \sigma(\theta^*)$ 
     $\theta^* \leftarrow \theta^* + \delta_\theta$ 
    i ← i + 1
     $\sigma(\theta^*) \leftarrow \alpha_1 x(t_{i+1}) + \alpha_2 \dot{x}(t_{i+1}) + \alpha_3 \int_0^{t_{i+1}} x(\tau) d\tau$ 

```

---

La deuxième partie de l'algorithme concerne le calcul des coefficients de Fourier de l'équation (2.12). La partie non-linéaire de la force active  $F_{aNL}$  n'est pas calculée par la méthode AFT. Dans cette section, nous utiliserons le paramètre  $\theta^*$  pour calculer analytiquement les coefficients de Fourier lorsque cela est possible. En raison de la forme analytique simple de la partie non linéaire de l'équation (2.9), ses coefficients de Fourier peuvent être calculés très efficacement à l'aide de la formule analytique :

$$f_{aNL}(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\mathbf{H}} C_k e^{jk\theta} \quad (2.27)$$

$$C_k(\theta) = \frac{1}{T} \int_T f_{aNL}(t) e^{-jk\theta} d\theta \quad (2.28)$$

Avec  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  la période. Dans le cas où  $f_{aNL}(t)$  est remplacée par la fonction signe :

$$f_{aNL}(t) = \rho \operatorname{sign}(\sigma(t)) \quad (2.29)$$

les coefficients de Fourier de  $f_{aNL}(t)$  peuvent être calculés analytiquement entre  $\theta^*$  et  $\theta^* + \pi$ , en tenant compte du caractère impair de la fonction. On a donc :

$$C_k(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta^*}^{\theta^* + \pi} f_{aNL}(t) e^{-jk\theta} d\theta = \rho \frac{2j}{k\pi} e^{-jk\theta^*} (e^{-jk\pi} - 1) \quad (2.30)$$

Cette technique permet de gagner du temps par rapport à la méthode temporelle. Toutefois, en raison de la non-régularisation de la fonction, un grand nombre d'harmoniques est nécessaire pour atténuer les effets du phénomène de Gibbs, comme l'illustre la figure 2.4. L'introduction d'une régularisation de la fonction signe réduit le nombre d'harmoniques, mais le calcul analytique des coefficients de la fonction régularisée peut être complexe. Dans ce cas, le calcul des coefficients  $C_k(\theta)$  de l'équation (2.28) est effectué par intégration numérique et non plus analytique. La figure 2.5 montre le nombre d'harmoniques nécessaires pour atteindre la convergence avec la régularisation de la fonction signe par :

$$f_{aNL}(t) = \rho \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \quad (2.31)$$

Pour les raisons données dans la Section. 2.1.1, le terme  $\sqrt{\sigma}$  sera ajouté devant la partie active non linéaire (voir Eq. (2.32)) dans les sections suivantes de ce manuscrit. La figure 2.6 montre la représentation temporelle de la loi utilisée. Dans ce cas, seulement une vingtaine d'harmoniques sont nécessaires pour la convergence de la solution périodique. L'algorithme de calcul des forces actives non linéaires est résumé dans la figure 2.7.

$$f_{aNL}(t) = \rho \sqrt{|\sigma|} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \quad (2.32)$$

## 2.1. STRUCTURE NON-LINÉAIRE CONTRÔLÉE PAR LA MÉTHODE DES MODES GLISSANTS

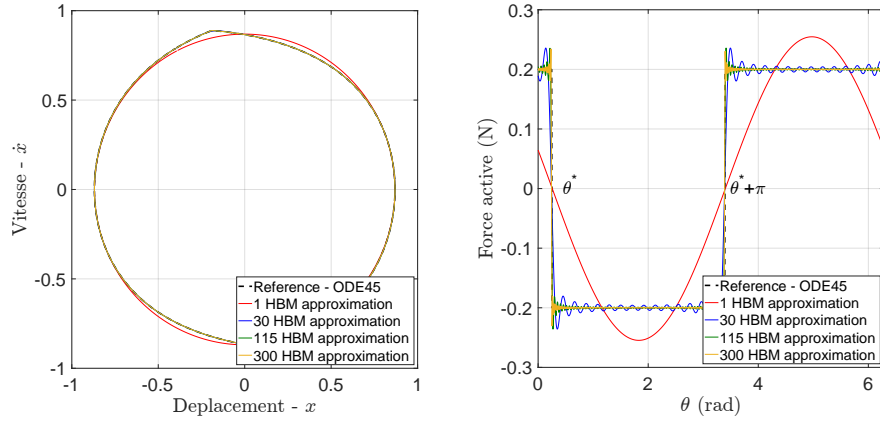


FIGURE 2.4: Fonction signe : évolution de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques pour  $\rho = -0.2$  : (gauche) Force active non-linéaire, (droite) Plan de phase.

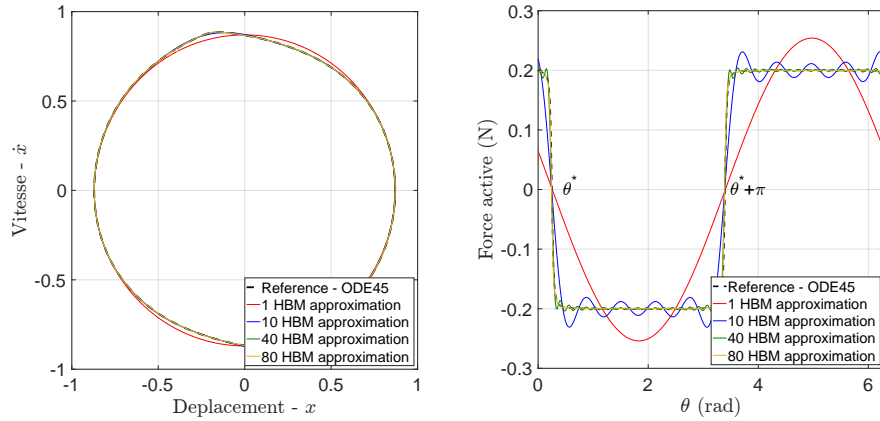


FIGURE 2.5: Loi (2.31) : évolution de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques pour  $\rho = -0.2$  et  $\epsilon = 10^{-2}$ . (gauche) Force active non-linéaire, (droite) Plan de phase.

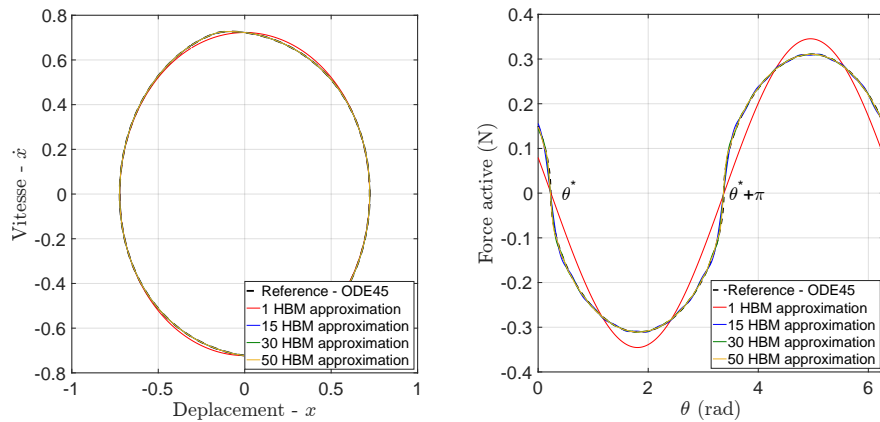


FIGURE 2.6: Loi (2.32) : évolution de la convergence en fonction du nombre d'harmoniques pour  $\rho = -0.2$  et  $\epsilon = 10^{-5}$ . (gauche) Force active non-linéaire, (droite) Plan de phase.

Voir algorithme 1

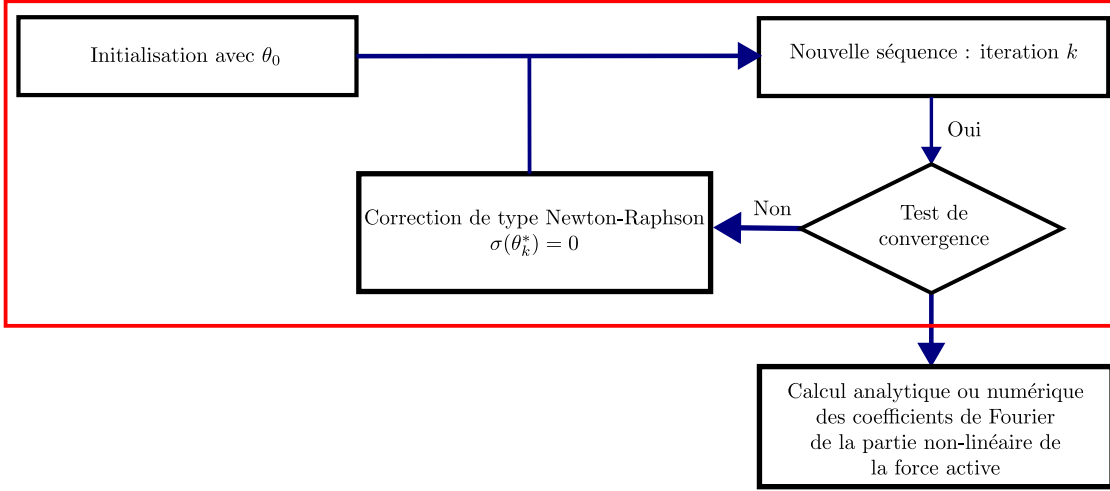


FIGURE 2.7: Algorithme : calcul de la partie active non-linéaire

### Procédure de continuation

La procédure de continuation est un outil connu et a été détaillé dans la section 1.2.3. L'introduction de la variable supplémentaire  $Y$  modifie cette procédure et change la forme du système à résoudre. Considérons  $R_X$ ,  $R_Y$ ,  $R_\omega$  les matrices jacobiennes de  $R(X, Y, \Omega)$ , telles que :

$$R_X = \frac{\partial R(X, Y, \omega)}{\partial X} = Z(\omega) + \frac{dF_{nl}(X)}{dX} + \frac{\partial F_a(X, Y, \omega)}{\partial X} \quad (2.33)$$

$$R_Y = \frac{\partial R(X, Y, \omega)}{\partial Y} = \frac{\partial F_a(X, Y, \omega)}{\partial Y} \quad (2.34)$$

$$R_\omega = \frac{\partial R(X, Y, \omega)}{\partial \omega} = \frac{\partial Z(\omega)}{\partial \omega} X + \frac{\partial F_a(X, Y, \omega)}{\partial \omega} + \frac{dF_{nl}(X)}{d\omega} \quad (2.35)$$

et  $H_X$ ,  $H_Y$ ,  $H_\omega$  les matrices Jacobiennes de  $H(X, Y, \Omega)$ , telles que :

$$H_X = -\frac{1}{\omega} \tilde{\nabla} \quad (2.36)$$

$$H_Y = I_{2H+1} \quad (2.37)$$

$$H_\omega = \frac{1}{\omega^2} \tilde{\nabla} X \quad (2.38)$$

La méthode de continuation par pseudo-longueur d'arc débute avec des solutions initiales  $(X_0, Y_0, \omega_0)$ . La première étape consiste à prédire une solution approchée à l'aide d'un vecteur tangent  $t$  comprenant la variable supplémentaire :

$$t = [\Delta X^T \ \Delta Y^T \ \Delta \omega]^T \quad (2.39)$$

obtenu en résolvant :

$$\begin{bmatrix} R_X & R_Y & R_\omega \\ H_X & H_Y & H_\omega \\ \Delta X^T & \Delta Y^T & \Delta \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2H+1,1} \\ 0_{2H+1,1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

toujours sous la condition d'unicité suivante :

$$\Delta_s^2 = \|t\| = \Delta X^T \Delta X + \Delta Y^T \Delta Y + \Delta \omega^2 \quad (2.41)$$

Le calcul de la prédiction et de correction est réalisé en résolvant les équations (2.42) et (2.43) respectivement à chaque itération " $k \geq 1$ " d'un algorithme de Newton-Raphson.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} R_X^k & R_Y^k & R_\omega^k \\ H_X^k & H_Y^k & H_\omega^k \\ \Delta X^T & \Delta Y^T & \Delta \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta Y^k \\ \delta \omega^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^k(X, Y, \omega) \\ H^k(X, Y, \omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Tous ces outils permettent de tracer la courbe de réponse en fréquence. Cependant, pour pouvoir obtenir toutes les informations dynamiques du système, la prise en compte de la stabilité au sens de Floquet est nécessaire.

### Calcul de stabilité d'un système à singularité

Dans cette sous-partie, la méthode de Hill est modifiée pour prendre en compte le terme intégral  $Y = \frac{1}{\omega} \tilde{\nabla} X$ . Comme dit précédemment, ce dernier introduit une nouvelle variable dans le système et rend le problème de Hill singulier. Tout d'abord, définissons :

$$x(t) = x_p(t) + s(t), \quad y(t) = y_p(t) + r(t) \quad (2.44)$$

où  $r(t), s(t)$  sont les perturbations et  $y_p(t), x_p(t)$  les solutions périodiques. En supposant  $s(t)$  et  $r(t)$  tels que :

$$s(t) = p(t)e^{\Lambda t}, \quad r(t) = q(t)e^{\Lambda t} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= (\dot{p}(t) + p(t)\Lambda)e^{\Lambda t} & \dot{r}(t) &= (\dot{q}(t) + q(t)\Lambda)e^{\Lambda t} \\ \ddot{s}(t) &= (\ddot{p}(t) + 2\Lambda\dot{p}(t) + p(t)\Lambda^2)e^{\Lambda t} & \ddot{r}(t) &= (\ddot{q}(t) + 2\Lambda\dot{q}(t) + q(t)\Lambda^2)e^{\Lambda t} \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec  $\Lambda$  étant les exposants de Floquet et  $p(t), q(t)$  les solutions périodiques. De même, nous définissons les forces perturbées non linéaires et actives :

$$\begin{cases} F_{nl}(x_p(t) + s(t)) \approx F_{nl}(x_p(t)) + \frac{\partial F_{nl}}{\partial x} s(t) \\ F_a(x_p(t) + s(t)) \approx F_a(x_p(t)) + \frac{\partial F_a}{\partial x} s(t) \\ F_a(y_r(t) + r(t)) \approx F_a(y_p(t)) + \frac{\partial F_a}{\partial y} r(t) \\ F_a(\dot{x}_p(t) + \dot{s}(t)) \approx F_a(\dot{x}_p(t)) + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}} \dot{s}(t) \end{cases} \quad (2.47)$$

Après introduction des Eqs.(2.44), (2.47) dans le système (2.16), le système temporel perturbé s'écrit :

$$\begin{cases} M\ddot{s}(t) + (C + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}})\dot{s}(t) + (K + \frac{\partial F_{nl}}{\partial x} + \frac{\partial F_a}{\partial x})s(t) + \frac{\partial F_a}{\partial y}r(t) = 0 \\ \dot{r} = s \end{cases} \quad (2.48)$$

ce qui, développé, donne :

$$\begin{cases} M(\ddot{p}(t) + 2\Lambda\dot{p}(t) + p(t)\Lambda^2) + (C + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}})(\dot{p}(t) + p(t)\Lambda) + \left(K + \frac{\partial F_{nl}}{\partial x} + \frac{\partial F_a}{\partial x}\right)p(t) + \frac{\partial F_a}{\partial y}q(t) = 0 \\ (\dot{q}(t) + q(t)\Lambda) = p(t) \end{cases} \quad (2.49)$$

Soient  $\phi$  et  $\psi$  les coefficients de Fourier de  $p(t)$  et  $q(t)$ , respectivement, tels que :

$$p(t) = T_H(\omega t)\phi, \quad q(t) = T_H(\omega t)\psi \quad (2.50)$$

En introduisant (2.50) dans (2.49) et en appliquant la procédure habituelle de résolution par HBM, le problème aux valeurs propres quadratique suivant est obtenu :

$$\begin{cases} (\Lambda^2\Delta_2 + \Lambda\Delta_1 + R_X)\phi + R_Y\psi = 0 \\ (P_Y + \Lambda I_{2H+1})\psi = \phi \end{cases} \quad (2.51)$$

où

$$\begin{cases} \Delta_2 = I_{(2H+1)}M \\ \Delta_1 = 2\omega\nabla M + I_{2H+1}C + \left(\frac{dF_a(X,Y,\omega)}{dX}\right) \\ R_X = Z(\omega) + \left(\frac{dF_{nl}(X)}{dX}\right) + \left(\frac{dF_a(X,Y,\omega)}{dX}\right) \\ R_Y = \frac{\partial F_a(X,Y,\omega)}{\partial Y} \\ P_Y = \omega\nabla \end{cases} \quad (2.52)$$

Après introduction d'une nouvelle variable  $\theta = \Lambda\phi$  le système quadratique (2.51) peut être réécrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres linéaires classique :

$$(B_1 - \Lambda B_2) \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

où

$$B_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1 & R_\kappa & R_y \\ -I_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} \\ 0_{(2H+1)} & -I_{(2H+1)} & P_y \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\Delta_2 & 0_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} \\ 0_{(2H+1)} & -I_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} \\ 0_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} & -I_{(2H+1)} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Les exposants de Floquet sont les valeurs propres de la matrice  $B$  :

$$B = B_2^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} -\Delta_2^{-1}\Delta_1 & -\Delta_2^{-1}R_\kappa & -\Delta_2^{-1}R_y \\ I_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} & 0_{(2H+1)} \\ 0_{(2H+1)} & I_{(2H+1)} & -P_y \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Ici  $B$  est singulière en raison de l'ajout de la variable  $y(t)$  et possède une valeur propre nulle. Afin d'évaluer la stabilité, il est impératif d'éliminer la valeur propre nulle et de ne considérer que les deux valeurs propres avec plus petite partie imaginaire.

Les valeurs propres de  $B$  sont scrutées à chaque pas de continuation pour définir la stabilité de la courbe de réponse et les bifurcations associées (voir Sec. 1.1.1).



### 2.1.4 Validation numérique des outils proposés

Dans cette section, les notions vues précédemment sont testées sur un système non-linéaire de type Duffing. Considérons à nouveau le système vu dans la section (2.1) suivant :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{nl}x^3 = \Gamma \sin(\omega t) + F_a(t) \quad (2.57)$$

avec la force active  $F_a(t)$  donnée par :

$$F_a(t) = -m \left( \frac{\alpha_3 x + \alpha_1 \dot{x}}{\alpha_2} \right) + (kx + c\dot{x} + k_{nl}x^3) - \rho \sqrt{|\sigma|} \times \frac{\sigma(t)}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \quad (2.58)$$

$m$	$c$	$k$	$k_{knl}$	$\Gamma$	$\omega$	$\rho$	$\epsilon$
1	0.2	1	0.4	0.5	1	-2	$10^{-5}$

TABLE 2.1: Paramètres utilisés pour la simulation numérique.

Les paramètres de la surface de glissement sont calculés par la méthode LQR (voir Sec. 1.3.3). La matrice  $Q$  est choisie telle que :

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Le choix de la forme de  $Q$  mérite un élément supplémentaire de compréhension. La mise en avant de  $x_1$  par rapport aux autres variables d'états reste liée à des questions de symétrie (comme pour la matrice  $G$ ). L'état 1 ( $x(t)$ ) est mis en avant améliorer l'amortissement vibratoire de la structure par le biais de la partie linéaire des SMC (le contrôle équivalent). Cependant, une pondération est aussi effectuée sur la variable représentant la vitesse  $\dot{x}$ . Ici, son objectif n'est pas l'amélioration du contrôle équivalent même si, de fait, il contribue. Son intérêt est d'améliorer les performances de la fonction signe. Les performances maximales de cette dernière sont atteintes pour une surface de glissement ne dépendant que de la vitesse de l'état que l'on cherche à contrôler. Sur la figure 2.8, un récapitulatif des différentes formes de sliding surface possibles est présenté. La sliding surface optimale est donc un compromis entre performances, stabilité et robustesse. **Remarque :** Les paramètres de  $Q$  peuvent être trouvés par une optimisation multi-objectifs :

$$\begin{cases} \min F_1 = \|x_1\|_\infty, F_2 = \|x_2 - x_1\|_\infty \\ \text{Contraintes } Q_{i,i} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (2.60)$$

Néanmoins, dans le contexte d'amortissement vibratoire par les absorbeurs hybrides, les résultats obtenus ont la même tendance que dans (2.81).

Pour cette forme de  $Q$  et les paramètres du tableau 2.1, les paramètres de la sliding surface donnent :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha_1 = 3.261 & \alpha_2 = 1 & \alpha_3 = 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \int x_1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

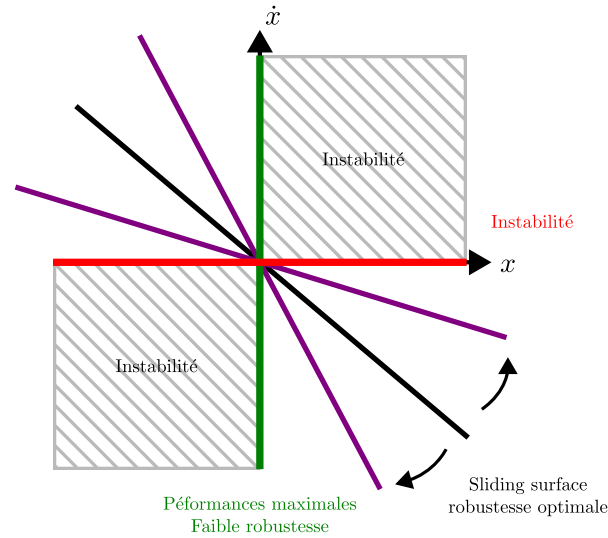


FIGURE 2.8: Illustration des notions de stabilité et de performance pour une sliding surface dans le plan de caractéristiques  $(x, \dot{x})$

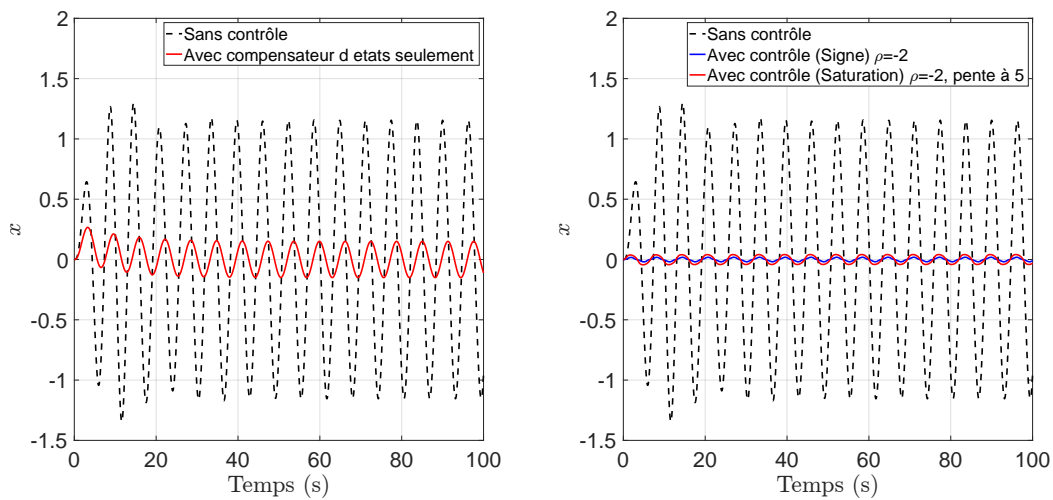


FIGURE 2.9: Comparaison temporelle : (à gauche) partie active linéaire uniquement (à droite) partie active non-linéaire et linéaire pour  $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

La figure 2.9 (à gauche) montre les performances de la partie linéaire de la loi de contrôle  $\eta(t)$  (le premier terme de l'Eq. (2.58)). La figure 2.9 (à droite) montre la différence entre le système sans contrôle, la fonction présentée dans l'Eq. (2.58) et une forme régularisée de la fonction signe par la fonction de saturation (pente linéaire de la fonction à 5) pour les paramètres donnés par la table 2.1. Comme on l'a montré à la section 2.1.1, la fonction signe fonctionne légèrement mieux que la fonction régularisée. La Fig.2.9 (gauche) montre la réponse temporelle du système avec contrôle sans la partie non linéaire de la force active. On constate que l'amplitude est déjà réduite par rapport au système sans contrôle. Cependant, comme on le voit dans Sect.2.1.1, la stabilité d'un tel contrôleur n'est pas garantie et peut diverger avec le temps. La Fig.2.10 (droite) montre la différence entre la réponse en fréquence du système non contrôlé et du système contrôlé avec la loi de l'Eq.(2.58). La réponse dynamique du système avec contrôle actif est bien amortie par rapport au système sans contrôle. Le coefficient  $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$  amène un

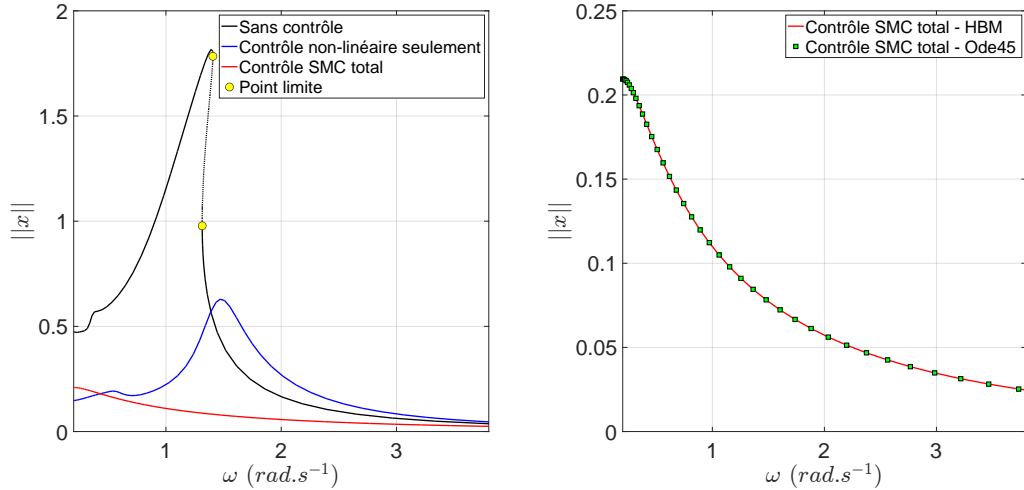


FIGURE 2.10: Réponse fréquentielle - 30 Harmoniques : (gauche) Comparaison du système sans contrôle (noir), d'un système avec contrôle non-linéaire uniquement (bleu)  $\rho = 0.5$ , et d'un système avec contrôle non linéaire et linéaire (rouge) pour  $\rho = 0.5$ , (droite). Comparaison des réponses calculées avec l'algorithme proposé (ligne rouge) et par intégration temporelle avec ODE45 (étoiles noires)

décalage de la fréquence propre du système contrôlé<sup>1</sup> induit par la partie continue de la loi de commande. La nouvelle fréquence de résonance du système contrôlé est donnée par :

$$\omega_{cont} = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \quad (2.62)$$

Cependant, le système contrôlé n'a pas de réponse statique égale à 0 à  $\omega = 0 \text{ rad.s}^{-1}$  en raison de l'ajout d'un terme intégral dans la loi de contrôle. La figure 2.10 (à droite) montre la comparaison entre la réponse du système calculée dans le domaine fréquentiel et celle calculée dans le domaine temporel par le solveur ODE45 de Matlab (avec une précision de tolérance relative de  $10^{-9}$ ). La bonne cohérence des méthodes proposées est vérifiée.

La partie qui dépend explicitement des états du système ( $\eta(t)$ ) permet la linéarisation théorique du système. Pour obtenir un véritable système non-linéaire (sans compensation des termes non-linéaires du système par  $\eta(t)$ ), la partie linéaire du contrôleur est supprimée. Sur la figure 2.11, l'évolution du point de bifurcation (point limite) en fonction du gain du contrôleur est présentée. La branche des points limites (en bleu) obtenue avec l'algorithme de suivi de bifurcation (voir Sect. 1.2.4) est tracée avec plusieurs fonctions de réponse en fréquence (FRF) pour faciliter l'interprétation des résultats. Pour de petites valeurs du gain  $\rho$ , les FRF sont fortement non-linéaires et leur partie instable est délimitée par deux points limites. En regardant la branche des points limites, on peut observer que ces derniers se rapprochent pour des valeurs croissantes de  $\rho$  et finissent par fusionner pour  $\rho \approx 0,14$ . Pour des valeurs de gain  $\rho$  plus élevées, il n'y a plus de point limite et la FRF est linéaire et toujours stable.

1. Dans ce cas particulier, la valeur de l'amortissement généré par le contrôle ( $\alpha_1$ ) ne permet pas de lire graphiquement la nouvelle fréquence propre du système contrôlé. Le système est fortement amorti.

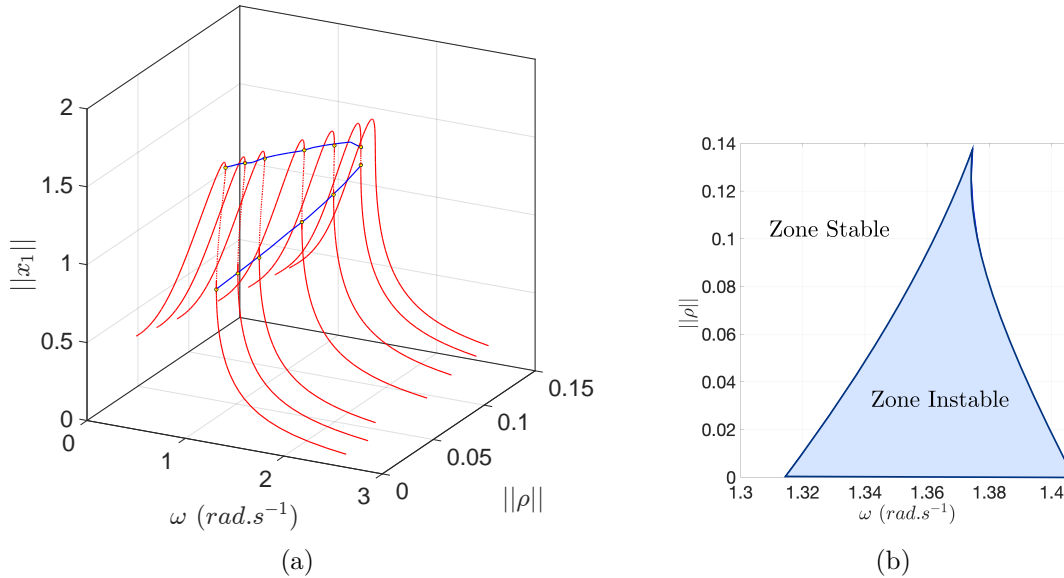


FIGURE 2.11: (a) Suivi de points limité avec le paramètre de gain  $\sqrt{|\sigma|}\rho$  et (b) Projection de la courbe de suivi.

### 2.1.5 Conclusion

Cette étude s'est concentrée sur une loi de commande par mode glissant qui intègre une non-linéarité (via la fonction signe) et une surface de glissement intégrale. Deux contributions ont été présentées :

- le développement d'un algorithme de continuation basé sur la méthode de l'équilibrage harmonique pour calculer la réponse en fréquence d'une structure contrôlée par SMC
- le calcul de stabilité dans le domaine fréquentiel prenant en compte la variable supplémentaire représentant l'intégrale du déplacement.

Ces deux outils ont été validés numériquement et ont permis une compréhension plus globale de la dynamique du système. Enfin, le contrôle par SMC sur un oscillateur de Duffing s'est montré particulièrement performant. Du fait de ces bonnes performances, son implémentation couplée à un absorbeur non-linéaire sera étudiée dans la partie suivante.

## 2.2 Absorbeurs de vibrations hybrides

Cette partie est consacrée à l'absorbeur de vibrations non-linéaire hybride. Elle a pour but d'étudier le mariage de la partie active avec la partie passive. Afin de se rapprocher le plus possible de la configuration d'un TMD, le NLTVA est considéré. L'ajout du contrôle à l'interface des deux masses contribue à l'hybridation du système (voir le modèle phénoménologique donné en figure 2.12) que l'on appellera HNLTV (Hybrid NonLinear Tuned Vibration Absorber) dans la suite du manuscrit. L'étude portera sur la confrontation de trois contrôleurs :

- Le LQR (HNLTV-LQ) : contrôleur linéaire
- Le alpha-contrôleur (HNLTV- $\alpha$  - controller) : contrôleur linéaire
- Les Sliding Mode Contrôle (HNLTV-SMC) : contrôleur non-linéaire

L'objectif de cette comparaison est de mettre en exergue les changements de comportement de l'absorbeur induit par le contrôle. Le but étant de répondre à la question : **Peut-on tirer pleinement parti et simultanément des avantages apportés par la dynamique non-linéaire et le contrôle actif ?**

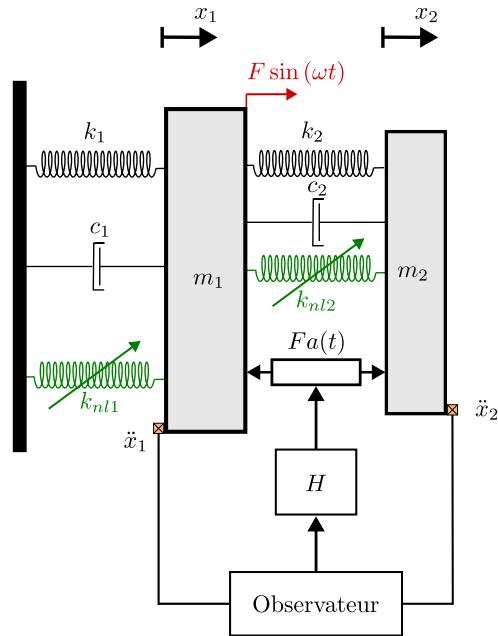


FIGURE 2.12: Modèle phénoménologique général d'un absorbeur non-linéaire hybride couplé à une structure primaire non-linéaire

Après une présentation du système d'étude, la conception des contrôleurs sera détaillée. Ces derniers sont assez différents et permettent de représenter les types de contrôle les plus communs (contrôle linéaire, contrôle non-linéaire, contrôle robuste). Cette partie se clôturera par l'étude comparative de deux de ces contrôleurs.

### 2.2.1 Équations de la dynamique d'un absorbeur de vibrations hybride

Le système d'équations de mouvement correspondant au modèle de la figure 2.12 s'écrit

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_{nl1} x_1^3 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 \\ \qquad \qquad \qquad = F \sin(\omega t) + F_a(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = -F_a(t) \end{cases} \quad (2.63)$$

où  $\forall i = 1, 2$  :

- $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$  : représente le déplacement, la vitesse et l'accélération de la masse  $i$  respectivement
- $c_i$  : représente le coefficient d'amortissement
- $k_i$  : représente le coefficient de raideur linéaire
- $k_{nli}$  : représente le coefficient de raideur non-linéaire
- $F$  : représente l'amplitude de la force externe
- $F_a(t)$  : représente la force active alimentée par l'un des quatre contrôleurs étudiés

Les paramètres optimaux du NLTVA définis dans [6] sont repris ici pour le HNLTV :

$$k_2 = \frac{8\epsilon k_1 [16 + 23\epsilon + 9\epsilon^2 + 2(2 + \epsilon)\sqrt{4 + 3\epsilon}]}{(3(1 + \epsilon)^2(64 + 80\epsilon + 27\epsilon^2))} \quad (2.64)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{k_2 m_2 (8 + 9\epsilon - 4\sqrt{4 + 3\epsilon})}{4(1 + \epsilon)}} \quad (2.65)$$

$$k_{nl2} = \frac{2\epsilon^2 k_{nl1}}{(1 + 4\epsilon)} \quad (2.66)$$

où  $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ . La table ci-dessous recense les valeurs numériques utilisées dans cette étude.

$m_1$	$\epsilon$	$k_1$	$k_2$	$c_1$	$c_2$	$k_{nl1}$	$k_{nl2}$
$kg$	1	$N/m$	$N/m$	$N.s/m$	$N.s/m$	$N/m^3$	$N/m^3$
1	0.05	1	0.0454	0.002	0.0128	1	0.0042

TABLE 2.2: Table des paramètres du NLTVA

### 2.2.2 Le NLTVA

Afin de mesurer le gain de performances apporté par l'hybridation, le NLTVA est d'abord étudié. Il se veut comme l'absorbeur passif de référence de cette deuxième partie. Pour ce faire, trois cas, qui sont représentatifs de nombreux problèmes en dynamique non-linéaire, seront analysés. Ces cas sont directement liés à l'effort de forçage  $F$  :

- **Cas 1**  $F = 0.11$  : Avec ce niveau de forçage, la courbe de réponse de la structure couplée au NLTVA est non-linéaire et présente des points de bifurcations ( 2.13).

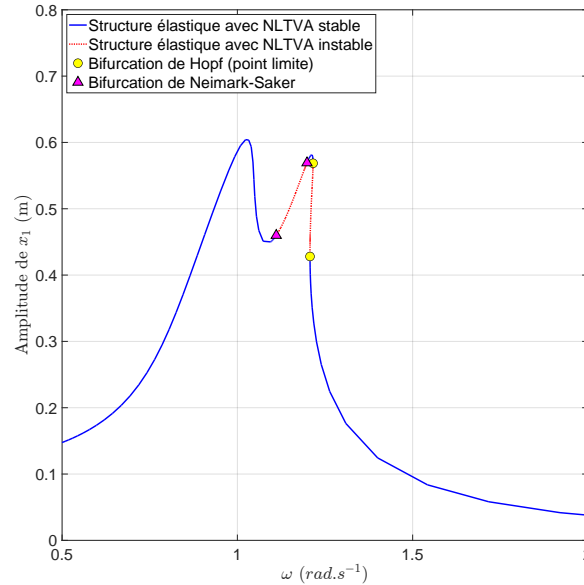


FIGURE 2.13: NLTVA courbe de réponse en fréquence pour  $F = 0.11$

- **Cas 2**  $F = 0.15$  : Ce niveau d'effort donne lieu à une solution isolée (voir figure 2.14). Par l'ajout du contrôle, le mouvement ou la disparition de l'isola est étudié.

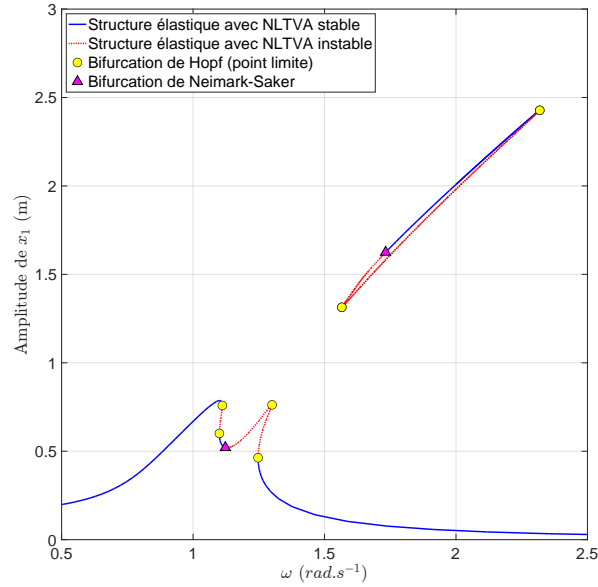


FIGURE 2.14: NLTVA courbe de réponse en fréquence pour  $F = 0.15$

- **Cas 3**  $F = 0.19$  : La figure 2.15 montre que pour ce niveau d'excitation, la solution isolée vient s'attacher au reste de la courbe de réponse en fréquence. L'incorporation du contrôleur dans ce contexte extrême permet d'étudier les limites du contrôleur lors de sollicitations importantes.

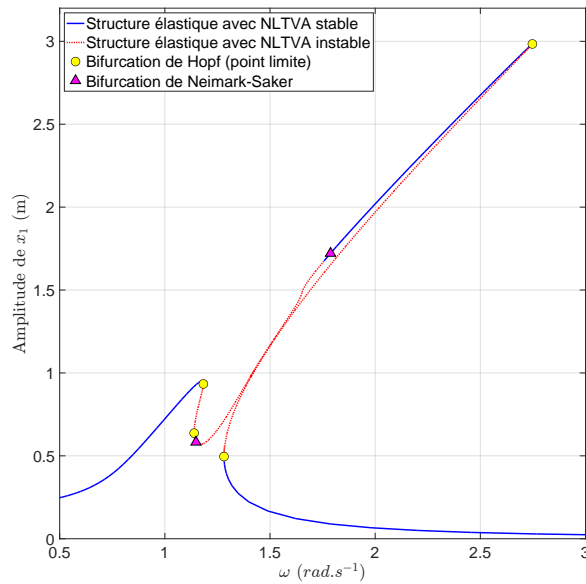


FIGURE 2.15: NLTVA courbe de réponse en fréquence pour  $F = 0.19$

L'objectif du contrôle actif est donc d'améliorer autant que faire se peut la partie passif (NLTVA). Le cas 1 sera utilisé dans la présentation des contrôleurs tandis que les cas 2 et 3 serviront l'étude comparative.

**Remarque** : dans cette partie, toutes les courbes seront tracées par la méthode de l'équilibrage harmonique.

### 2.2.3 Le HNLTV A-LQR

#### Construction du contrôleur

Considérons le système matriciel de l'Eq. (2.63) :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX + F_{nl}(X) = F_{ext} + Fa \quad (2.67)$$

où

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, F_{nl}(X) = \begin{bmatrix} k_{nl1}x_1^3 + k_{nl2}(x_1 - x_2)^3 \\ k_{nl2}(x_2 - x_1)^3 \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, F_{ext} = \begin{bmatrix} F \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}, F_a = C_c \dot{X} + K_c X$$

avec  $C_c$  et  $K_c \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  obtenue par la méthode LQR vue à la Sect. 1.3.3. Le contrôleur est utilisé pour suivre et atteindre un régime dynamique désiré (zéro en contrôle vibratoire). La forme de  $F_a(t)$  est donc choisie de façon à utiliser tous les états du système (retour d'états) pour augmenter les performances de ce suivi. De façon pratique, la connaissance de tous les états nécessite un observateur (non représenté ici). On prendra la matrice de pondération  $G \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  telle que :

$$G = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Ce choix est pertinent, car il privilégie l'état correspondant au déplacement de la structure à contrôler. Le terme  $R$  comme défini dans la Section. 1.3.3, représente la contrainte sur le coût du contrôleur (un  $R$  faible autorise un effort de contrôle important).

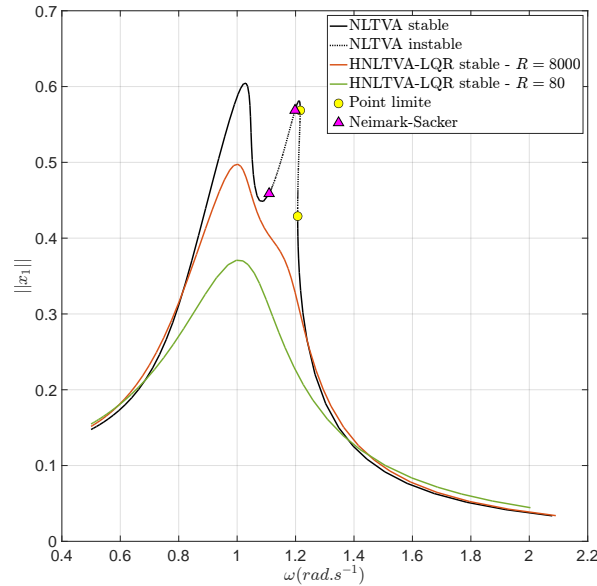


FIGURE 2.16: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison du NLTVA et du HNLTV A – LQR pour différents gains - cas  $F = 0.11$



La figure 2.16 présente la comparaison des réponses en fréquence du NLTVA et du HNLTVVA pour différentes valeurs de  $R$ . Il est constaté une amélioration de l'amortissement vibratoire et un comportement qui se rapproche d'un oscillateur à 1 ddl du à l'amortissement important du deuxième mode. Ce dernier s'explique par l'utilisation de tous les états du système et de la pondération choisie (l'état  $x_1$  est privilégié). Malheureusement, dans les deux cas, le gain de performance passe par la suppression des points singuliers et linéarise le système.

#### 2.2.4 Le HNLTVVA- $\alpha$ -controller

Intéressons nous maintenant à loi de contrôle  $\alpha$ -controller [7]. Ce simple retour d'état, dit hyperstable (voir Sect. 1.3.2), a une construction assez différente de la commande LQR. La loi de contrôle  $F_\alpha(s)$  s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$F_\alpha(s) = g_g \frac{(s + \alpha)^2}{s^2} \times s x_1 \quad (2.69)$$

avec  $g_g$  le gain global du contrôleur et  $\alpha \in \mathbb{R}$  basé sur la fréquence propre de l'absorbeur linéaire qui conditionne l'hyperstabilité du système :

$$\omega_1 < \alpha = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} < \omega_2 \quad (2.70)$$

Où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les fréquences propres du système d'étude. L'équation (2.69) ne dépend que de la vitesse de la structure primaire. Cependant, cette conception favorise l'échange d'énergie sur les autres états du système. Cela conduit, on le verra par la suite, à une augmentation du débattement de l'absorbeur.

En exprimant cette loi de contrôle dans le domaine temporel, il vient :

$$F_\alpha(t) = \dot{x}_1(t) + 2\alpha x_1(t) + \alpha^2 \int x_1(\tau) d\tau \quad (2.71)$$

Pour résoudre un système soumis à l'eq (2.71) dans le domaine temporel, il est commode d'ajouter une variable supplémentaire  $y$  dans l'espace d'état tel que :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_{nl1} x_1^3 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 \\ \quad = F \sin(\omega t) + (\dot{x}_1 + 2\alpha x_1 + \alpha^2 y) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = -(\dot{x}_1 + 2\alpha x_1 + \alpha^2 y) \\ \dot{y} = x_1 \end{cases} \quad (2.72)$$

La résolution dans l'espace des fréquences utilise le même procédé et impose la modification du calcul de stabilité (voir Sec.2.1.2).

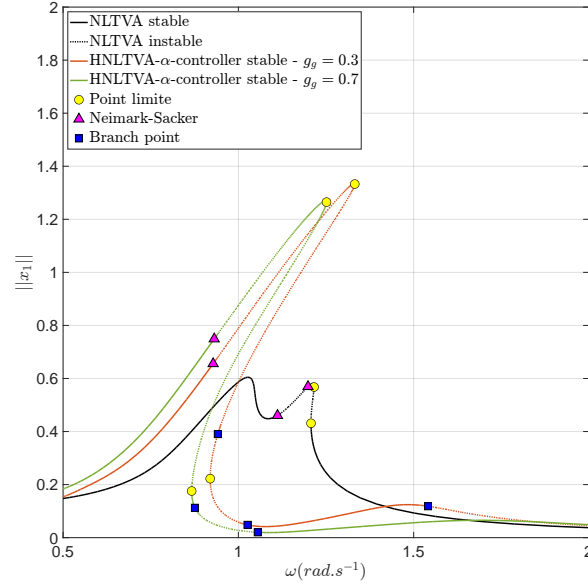


FIGURE 2.17: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison du NLTVA et du HNLTVΑ-α controller pour différents gains - cas  $F = 0.11$

Dans le cas du HNLTVΑ-α-controller, une dissymétrie du comportement fréquentiel de l'absorbeur est observable sur la figure 2.17. Pour les valeurs de  $\omega \geq 1$ , un amortissement vibratoire significatif est constaté. Néanmoins, une baisse notable des performances est visible pour  $\omega < 1$ . De plus, il est constaté l'apparition de points de bifurcations de type branch point et Neimark-Sacker qui changent fortement la stabilité de la courbe de réponse. Le fait de ne considérer que les états de la structure primaire explique en partie l'inefficacité de l'absorbeur sur cette plage de fréquence :

- D'abord, le HNLTVΑ est conçu sur le principe de similarité. Le non-respect de ce principe par l'introduction de la loi (2.71) (basé uniquement sur les états de la structure primaire) amplifie la dissymétrie de la courbe de réponse causée par la forte non-linéarité du système.
- Pour terminer, lorsque les deux masses sont en phase, le comportement non-linéaire de la structure primaire prend l'avantage. Cette non-linéarité empêche l'unicité de la phase entre la force de contrôle et la vitesse relative de l'absorbeur. La considération d'un paramètre  $\alpha$  variable basé sur le mode non-linéaire de l'absorbeur ou fixé à une valeur différente (voir figure 2.18) provoque une perte importante de la stabilité de la courbe de réponse. En effet, sur cette même figure, on peut voir qu'une grande majorité des solutions périodiques à basse amplitude et sur la solution isolée sont instables. Ces instabilités donnent naissance à une ou plusieurs branches de solutions périodiques stables d'amplitude très élevée  $\|x\| \approx 75$  non représentées ici. Une divergence de l'effort de contrôle et une instabilité générale du système résultant sont donc conclues ici.

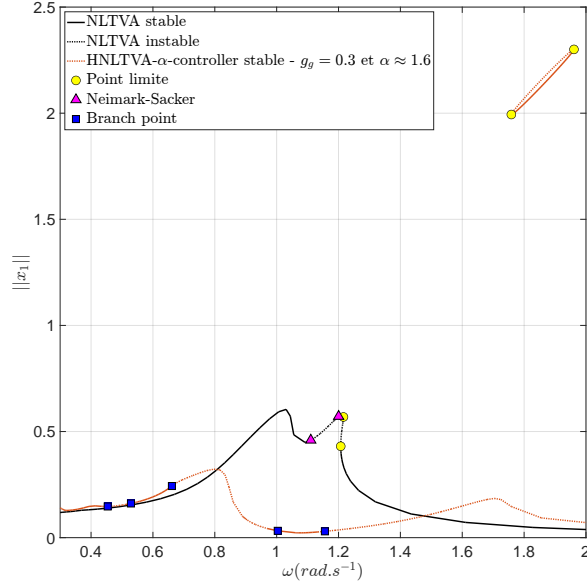


FIGURE 2.18: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison du HNLTVΑ- $\alpha$ -controller pour le paramètre  $\alpha \approx 1.6$  - cas  $F = 0.11$

La modification du paramètre  $\alpha$  provoque un transfert d'énergie non-négligeable vers le premier mode de la structure. Pour des valeurs importantes de ce dernier, une solution isolée apparaît et une perte générale de la stabilité du système en résulte. Tous ces points attestent de l'inefficacité du HNLTVΑ- $\alpha$ -controller présenté.

### 2.2.5 Le HNLTVΑ-SMC

Le HNLTVΑ-SMC comprend la totalité de la loi de contrôle par sliding mode (partie linéaire et non-linéaire). En posant  $E = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$ , le vecteur contenant les paramètres de la sliding surface et  $X_{etat} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^T$ , l'expression de la sliding surface  $\sigma(t)$  à deux ddls s'écrit :

$$\sigma(t) = EX_{etat} = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 \dot{x}_1(t) + \alpha_4 \dot{x}_2(t) = 0 \quad (2.73)$$

ce qui implique :

$$\dot{\sigma} = E\dot{X}_{etat} = 0 \quad (2.74)$$

Les paramètres de  $\sigma$  sont trouvés par la méthode LQR (voir Annexe. C et section 1.3.4). La conception du contrôleur est réalisée sur le système d'états linéarisé, soit :

$$\dot{X}_{etat} = AX_{etat} + Bu \quad (2.75)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matrice d'état,  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  la matrice de contrôle,  $I_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $0_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  les matrices identités et nulles respectivement et  $u$  est le contrôleur. L'équation

(2.75) permet d'écrire l'égalité suivante :

$$E\dot{X}_{etat} = EAX_{etat} + EBu = 0 \quad (2.77)$$

avec

$$u = U_l + U_{nl}$$

Le contrôle équivalent  $U_l$  de la loi de contrôle a alors pour expression :

$$U_l = -(EB)^{-1}EAX_{etat} = -G_{eq}X_{etat} \quad (2.78)$$

En concevant  $E$  par la méthode LQR, on s'assure de l'existence de  $(EB)^{-1}$  [1]. Pour respecter la stabilité au sens de Liapunov, le contrôle non-linéaire  $U_{nl}$  s'écrit sous la forme :

$$U_{nl} = -\rho(EB)^{-1}\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} = -G_{nl}\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \quad (2.79)$$

avec  $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$  le gain de la partie non-linéaire. Finalement, la loi de contrôle par sliding mode s'écrit :

$$F_a(t) = -U_l - U_{nl} = -G_{eq}X_{etat} - G_{nl}\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \quad (2.80)$$

Dans le cas des SMC, on prendra la matrice de pondération  $Q$  égale à :

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

La matrice  $Q$  est choisie de la même façon et pour les mêmes raisons que dans la section 2.1.4. Les paramètres de  $E$  sont donnés dans la table 2.3.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\epsilon$
0.3975	-0.0494	-0.3489	-0.0674	1e-2

TABLE 2.3: Table des paramètres de la sliding surface basée sur la méthode LQR

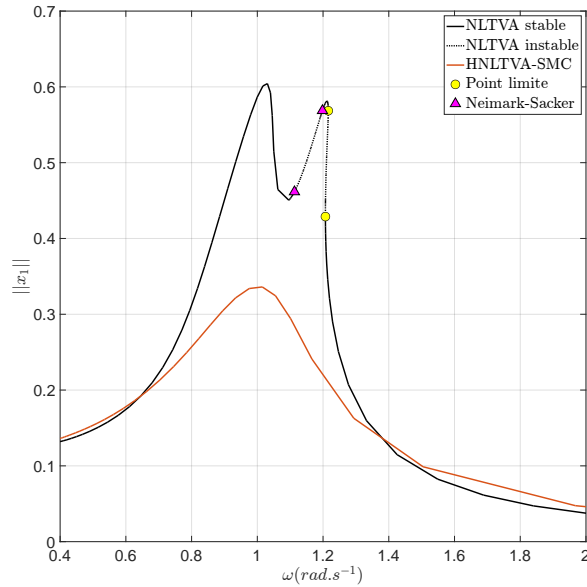


FIGURE 2.19: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison du NLTVA et du HNLTV-SCM pour  $\rho = 1$  - cas  $F = 0.11$

L'application de la loi de commande par sliding mode change le comportement du système comme le montrent les courbes de réponse de la figure 2.19. En effet, un seul mode est visible dans la réponse du système avec HNLTV-SCM contre deux pour les autres contrôleurs. La commande équivalente couplée à la fonction signe crée une forte "rigidité" entre la masse de la structure et celle de l'absorbeur. De plus, on peut constater une linéarisation du mode pour ce niveau d'effort.

Afin de pouvoir conclure sur l'efficacité d'un contrôle actif couplé à la dynamique non-linéaire ainsi que sur les aspects mis en avant au début de cette partie (débattement de l'absorbeur, coût énergétique, suppression des solutions isolées), une comparaison est réalisée dans les parties suivantes. Les gains de chaque contrôleur sont choisis pour avoir le même effort maximal de contrôle ( $F_{aMax} = 0.04N$ ) lorsque le système est soumis à un échelon. Au vu du comportement du mauvais HNLTV- $\alpha$ -controller, l'étude se concentrera sur 2 commandes (HNLTV-LQR, HNLTV-SCM) pour 2 niveaux d'effort de perturbation extérieure  $F = 0.15N$  et  $F = 0.19N$ . Les matrices de pondérations ne changeant pas, les valeurs des gains pour les deux contrôleurs sont présentées ci-dessous :

R LQR	$\rho$ SMC
80	0.9

TABLE 2.4: Table des paramètres des gains pour l'étude comparative

### 2.2.6 Comparaison des performances : amortissement vibratoire

Dans cette section les performances vibratoires des contrôleurs sont analysées. La figure 2.20 présente les courbes de réponse en fréquence du NLTVA, HNLTV-SCM et du HNLTV-LQR. Dans les deux cas, les deux lois de contrôle présentent des performances assez similaires et permettent de réduire l'amplitude vibratoire. De plus, il est constaté une linéarisation du système et une disparition du second mode (fort amortissement). Toutes ces conclusions sont observables à un niveau d'effort extrême sur la figure 2.21.

Pour celui-ci, le comportement du NLTVA devient très dangereux, car la solution isolée se retrouve attachée à la courbe de réponse en fréquence à basse énergie. Ceci étant, l'amplitude de la masse 1 peut devenir très importante en fonction de la fréquence et des conditions initiales. Ici, le contrôle actif permet d'éviter cette situation.

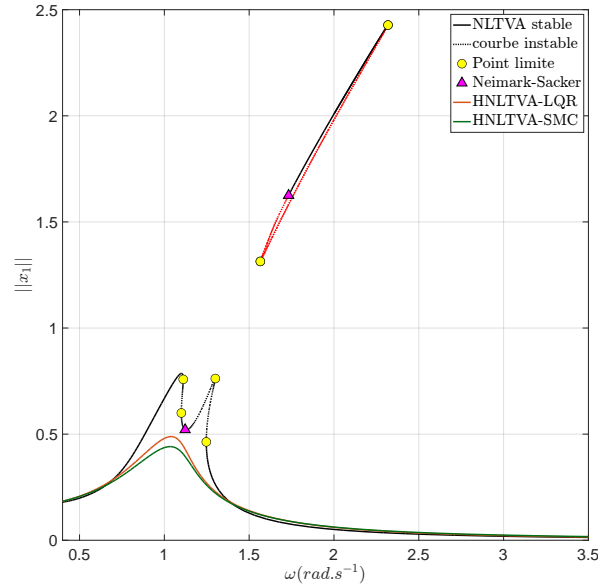


FIGURE 2.20: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison de l'amortissement vibratoire du NLTVA et des HNLTV - cas  $F = 0.15$

### 2.2.7 Comparaison des performances : débattement de l'absorbeur

L'écart relatif étudié ici correspond au déplacement relatif  $\|x_2 - x_1\|$ . Pour un effort modéré (voir figure 2.22), on peut voir que les débattements du système avec et sans contrôle sont du même ordre de grandeur. Cependant, pour  $\omega \geq 1.3$ , le débattement des systèmes contrôlés est supérieur à celui du système passif. Ceci est dû au transfert d'énergie engendré par le contrôleur, afin d'amortir les vibrations, redirige l'énergie vers l'absorbeur. La figure 2.23 présente le débattement pour un niveau d'effort élevé. Dans cette configuration, le système passif (pour  $\omega \geq 1.3$ ) possède une branche à haute amplitude correspondant à la solution isolée qui s'est rattachée à la courbe de réponse principale. Dans ce cas, le contrôle permet d'éviter des débattements trop importants à l'absorbeur.

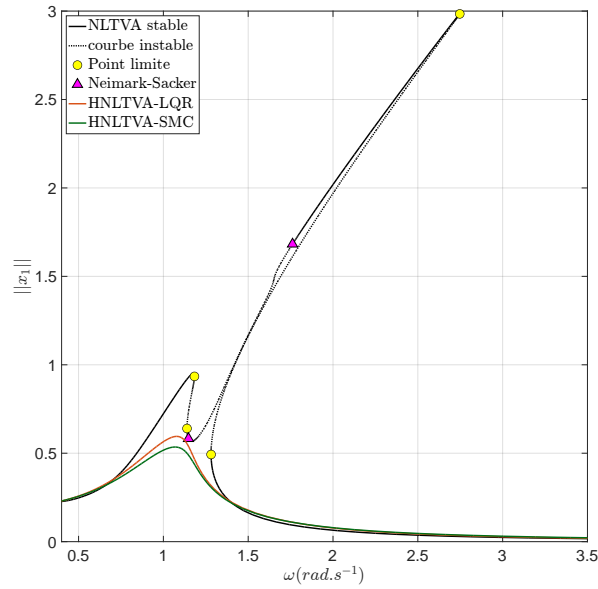


FIGURE 2.21: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison de l'amortissement vibratoire du NLTVA et des HNLTV - cas  $F = 0.19$

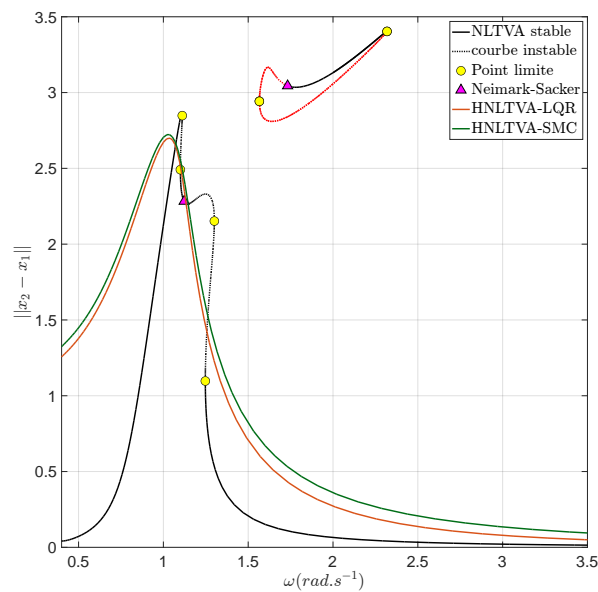


FIGURE 2.22: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_2 - x_1\|$  : Comparaison du débattement de l'absorbeur entre le NLTVA et les HNLTV - cas  $F = 0.15$

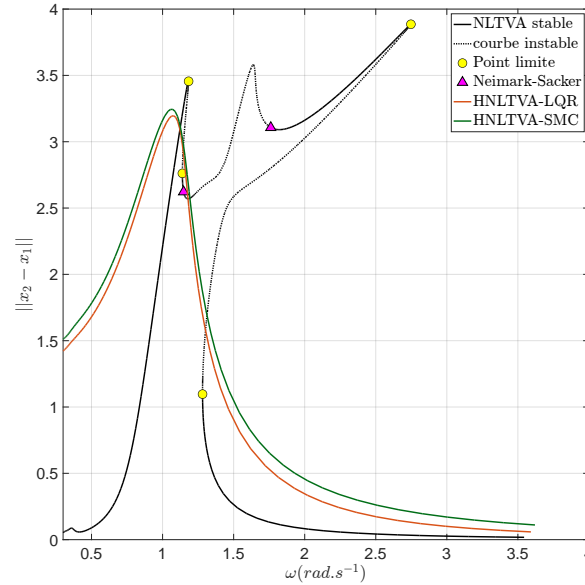


FIGURE 2.23: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_2 - x_1\|$  : Comparaison du débattement de l'absorbeur entre le NLTVA et les HNLTVAs - cas  $F = 0.19$

### 2.2.8 Comparaison des performances : consommation énergétique

Malgré des performances de dissipation vibratoire assez similaires, les figures 2.24 et 2.25 montrent la puissance active comme défini dans la Section 1.3.6. Celle-ci est légèrement supérieure pour le contrôleur SMC mais reste du même ordre de grandeur. En effet, la construction des deux lois est assez similaire. Si l'on compare la puissance maximum dissipée par l'amortisseur  $c_2$  du NLTVA sur la plage de fréquence<sup>2</sup>, on peut voir que les puissances des deux contrôleurs sont 2 à trois fois plus faibles. Dans ce contexte, il y a donc un fort gain de performance par rapport à l'énergie dépensée.

2. Ici, le NLTVA ne consomme bien évidemment pas d'énergie. Cependant, la puissance dissipée par l'amortisseur de ce dernier est utilisée comme référence et permet de donner un ordre de grandeur des flux de puissances mis en jeu.



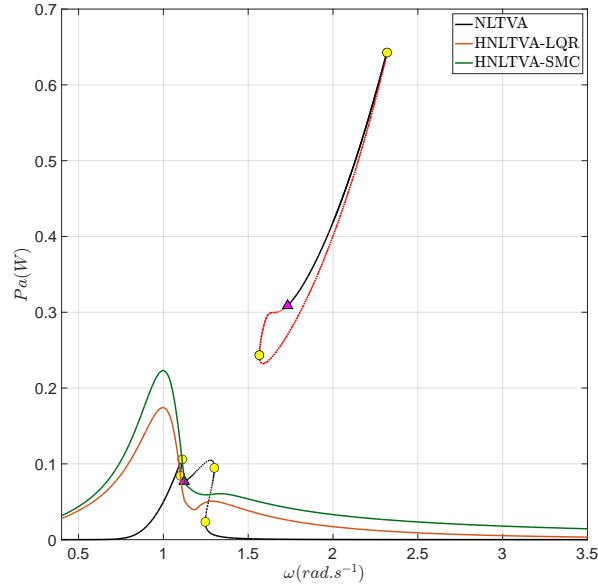


FIGURE 2.24: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_2 - x_1\|$  : Comparaison du coût énergétique entre le NLTVA et les HNLTV - cas  $F = 0.15$

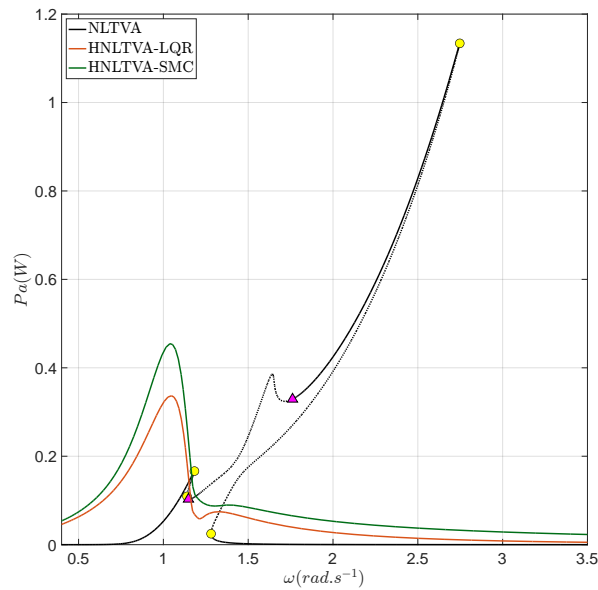


FIGURE 2.25: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_2 - x_1\|$  : Comparaison du coût énergétique entre le NLTVA et les HNLTV - cas  $F = 0.19$

### 2.2.9 Comparaison des performances : robustesse

L'étude de robustesse se concentre sur la modification de la masse de la structure primaire sans changement de sa raideur. L'objectif est de vérifier la robustesse des contrôleurs et mettre en évidence l'intérêt du contrôle dans ces situations bien précises. Le cas  $F = 0.15$  (voir figure 2.14) est exploité pour une modification de la masse de la structure à -10%, 10%, 20% et 30%.

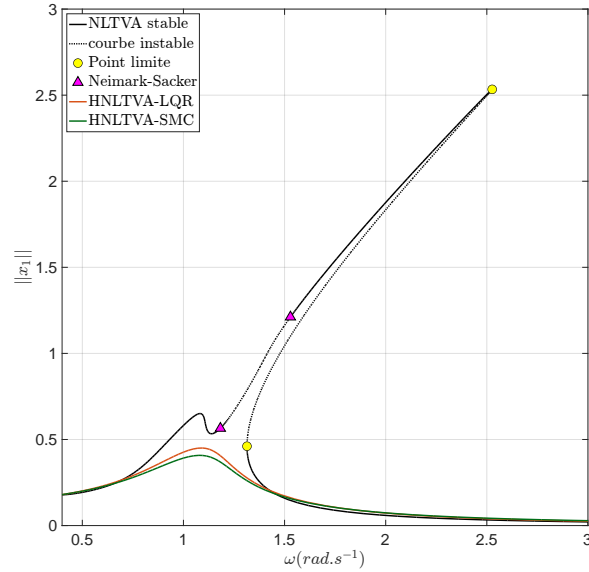


FIGURE 2.26: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les HNLTVAs - cas  $F = 0.15$ ,  $m_1 = m_1 - 10\%$

Pour une modification de  $-10\%$  (figure. 2.26), l'amplitude du deuxième mode devient très important dû au désaccordage des paramètres optimaux du NLTVA. Cependant, les systèmes contrôlés sont peu sensibles à cette variation.

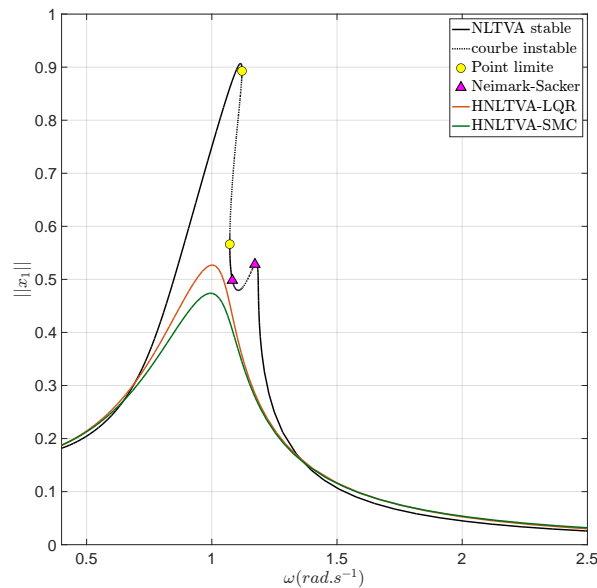


FIGURE 2.27: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les HNLTVAs - cas  $F = 0.15$ ,  $m_1 = m_1 + 10\%$

Avec une modification de  $+10\%$  (figure. 2.27), le comportement du NLTVA change radicalement. Il présente une dissymétrie due à la forte non-linéarité de la structure primaire : figure 2.27. Les deux systèmes contrôlés ne sont presque pas impactés par cette variation, on note simplement une légère augmentation de l'amplitude de vibration  $\|x_1\|$ .

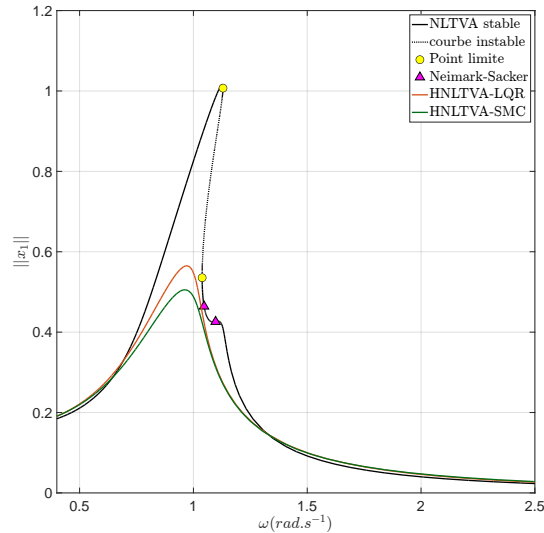


FIGURE 2.28: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les HNLTVAs - cas  $F = 0.15$ ,  $m_1 = m_1 + 20\%$

Dans le cas des variations de  $+20\%$  et  $+30\%$ , la perte de symétrie du NLTVA s'accroît (voir figure 2.28). Le comportement du NLTVA tend vers celui d'un Duffing (voir figure 2.29). Les deux systèmes contrôlés, malgré une augmentation d'amplitude, ne changent pas de comportement, et restent assez robustes face aux variations de la masse de la structure.

**Remarque :** Dans cette étude, les données de l'observateur est considéré est mis à jour c-à-d. que l'impact d'un observateur mal réglé n'est pas analysé.

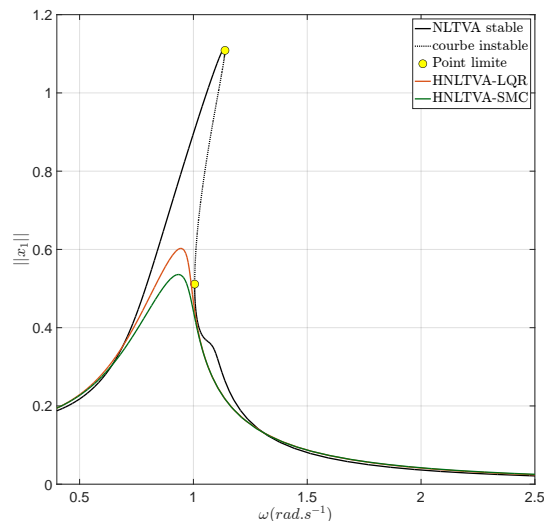


FIGURE 2.29: Courbe de réponse en fréquence de  $\|x_1\|$  : Comparaison de la robustesse entre le NLTVA et les HNLTVAs - cas  $F = 0.15$ ,  $m_1 = m_1 + 30\%$

Cette étude a permis de comparer deux contrôleurs : par SMC et LQR. Ces derniers ont montré un comportement fréquentiel similaire. Dans tous les cas, les contrôleurs permettent d'améliorer l'amortissement vibratoire en linéarisant le système résultant. Cependant, cette étude a deux limites principales :

- La première est la limitation due au nombre de contrôleur utilisé. Ces deux contrô-

leurs ont été choisis pour leur utilisation significative dans cette thèse. Cependant, il aurait été intéressant d'utiliser des contrôleurs avec des formulations différentes (réseaux de neurones, logique floue, ...) pour mettre en évidence les performances d'un contrôleur.

- La deuxième limitation est forme choisie pour la partie linéaire des SMC. En effet, les termes non-linéaires n'ont pas été considérés dans la construction des SMC. Ce choix est justifié par la tendance de contrôleur à abaisser l'ordre du système résultant (amortissement du deuxième mode).

Enfin, l'étude est restée focalisée sur la courbe de réponse à basse amplitude. On peut se demander si les solutions isolées n'apparaissent pas pour des niveaux d'efforts plus élevés.

### 2.2.10 Comportement d'une solution isolée sous l'effet du contrôle

Le HNLTV-AMC et HNLTV-LQR ont un comportement dynamique similaire. La présente section se restreint au comportement du HNLTV-AMC. Pour réaliser cette étude paramétrique, un suivi de points limites en fonction de l'effort de perturbation extérieure  $F$  est utilisé (voir Annexe B).

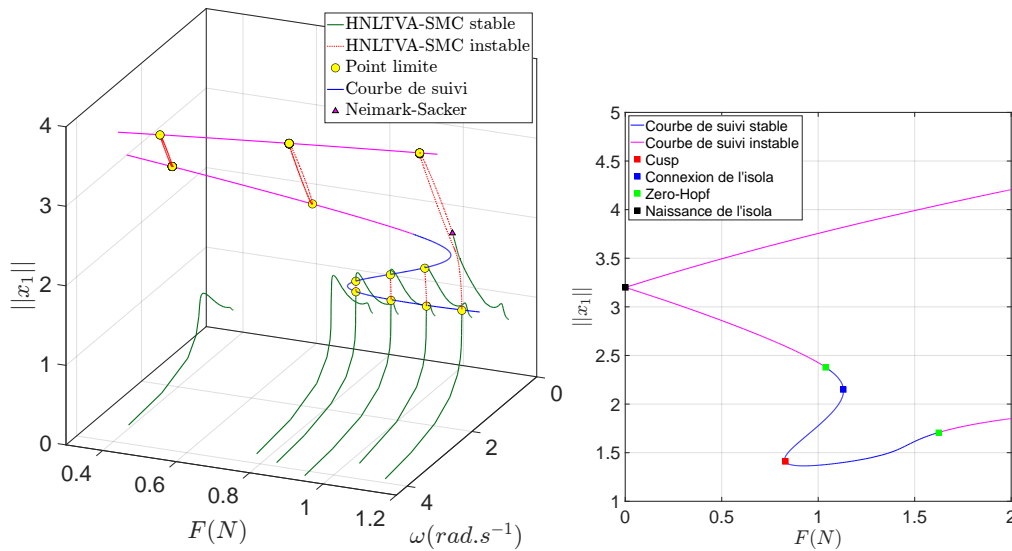


FIGURE 2.30: Suivi de points limites du HNLTV-AMC en fonction de l'effort de forçage (gauche) et courbe de suivi projetée (droite)

La figure 2.30 présente le suivi de points limites. Il est constaté que pour  $F \approx 0.83$ , des points limites (LP) apparaissent sur les courbes de réponse au niveau du point de bifurcation de co-dimension 2 dénommé Cusp (carré rouge sur 2.30 (droite)). La continuation des LP nous apprend plusieurs choses sur ces solutions isolées. Tout d'abord, le carré noir (voir 2.30 (droite) indique la naissance de ces dernières [8]. On peut voir que la solution isolée est présente quel que soit le niveau d'effort de la perturbation extérieure et finit par s'attacher à la courbe de réponse à plus basse amplitude au niveau du carré bleu. Ensuite, sur cette même figure, les deux carrés verts représentent un autre point de bifurcation de co-dimension supérieure, le Zéro-Hopf (ZH). À partir de ce point, la courbe de suivi périodique devient instable et une autre branche quasi-périodique stable fait son apparition (non représentée ici). La quasi-périodicité est aussi attestée

par le point de bifurcation de type Neimark-Sacker pour  $F = 1.15N$  sur la figure 2.30 (gauche). Le tracé des solutions isolées sur la même figure montre une totale instabilité des solutions périodiques. En effet, ici, les branches stables sont quasi-périodiques et un saut pour une condition initiale particulière, peut amener le système à ces niveaux d'amplitude.

L'ajout du contrôle (SMC ou LQR) rend le comportement de l'absorbeur similaire à celui de la structure sur laquelle il est posé. De plus, lors de l'activation du contrôle, des solutions isolées périodiques instables ainsi que des solutions quasi-périodiques stables toutes deux persistantes apparaissent. Cependant, l'amplitude extrême de ces solutions isolées est souvent signe d'instabilités du contrôleur (au sens de Lyapunov) et n'est en pratique pas atteignable.

### 2.2.11 Conclusion

À travers l'utilisation de 3 contrôleurs, nous avons pu voir comment se comportaient les absorbeurs non-linéaires hybrides. Le contrôle par SMC et LQR ont un comportement assez similaire et sont assez robustes aux éventuelles modifications ou dégradations du système. De plus, ils présentent de bonnes performances en ce qui concerne l'amortissement vibratoire. En revanche, ces dernières sont dues uniquement au contrôleur actif et non aux non-linéarités du système passif. Le cas du HNLTV $\alpha$ -controller apporte un élément de compréhension afin de mieux concevoir les contrôleurs pour les absorbeurs hybrides non-linéaires avec notamment l'utilisation d'états liés à l'absorbeur.

De manière, plus générale, le mariage d'une loi de contrôle qui a pour objectif de dissiper l'énergie avec un absorbeur non-linéaire passif s'avère, pour les cas testés, contre-productif. En effet, la diminution ou limitation du débattement de l'absorbeur minimise la contribution de la non-linéarité. Cette conclusion permet d'envisager une autre forme de contrôle, le contrôle semi-actif. Afin d'optimiser la partie passive, on se propose de modifier ou de réajuster les paramètres de l'absorbeur en temps réel en fonction des variations de son environnement ou de la plage de fonctionnement. Ce type de contrôle moins coûteux que le contrôle purement actif permet un contrôle plus local de dynamique du système pour améliorer l'amortissement vibratoire ou la durée du régime transitoire.

## 2.3 Un absorbeur non-linéaire adaptatif

Pendant de nombreuses années, la recherche en dynamique non-linéaire s'est concentrée sur l'exploitation des non-linéarités. C'est cette "fonctionnalisation" qui est à l'origine des études sur les absorbeurs de vibrations. Contrairement à la section précédente, où le contrôle était utilisé pour dissiper l'énergie, cette partie se concentre sur le pilotage des non-linéarités. Ici, l'association du contrôle actif et de la dynamique non-linéaire contribue à apporter deux caractéristiques notables : la possibilité de modifier en temps réel des paramètres de l'absorbeur et la création de systèmes à non-linéarités complexes [9]. Par exemple, dans le cas des NES passifs, cette adaptabilité permettrait de maintenir des performances sur une plus large bande de fréquence, de compenser les difficultés de réglages. Dans cette étude, nous proposons de modifier les paramètres de l'absorbeur par le contrôle actif et d'en analyser l'impact sur le transfert irréversible d'énergie (TET) (voir Sect. 1.4.3). Le TET est un phénomène localisé autour de la résonance 1 : 1. L'analyse du Slow Invariant Manifold<sup>3</sup> (qui est la représentation du système à l'échelle

---

3. Le SIM est une représentation géométrique de tous les états asymptotiques possibles du système (quand l'échelle de temps rapide  $\tau_0 \rightarrow \infty$ ).

de temps lente sous l'hypothèse de cette résonance 1 : 1) permet de voir l'impact du contrôle actif sur le TET.

La littérature sur les NES nous apprend que la modification des paramètres de l'absorbeur peut entraîner un fort changement de comportement dynamique [10]. Dans [11], les auteurs présentent un système académique (entièrement mécanique) composé de deux fonctions par morceau portant sur le déplacement relatif de l'absorbeur  $N_2$  et le déplacement de la structure primaire  $N_1$ . Ces deux fonctions permettent de donner une forme particulière au SIM. Ces différences topologiques sont visibles entre le SIM classique pour une non-linéarité cubique (figure 2.31 gauche) et celui proposé par LAMARQUE et al. (figure 2.31 droite). Le SIM n'est plus seulement non-linéaire selon  $N_2$  (flèche rouge), mais aussi selon  $N_1$  (flèche orange). Ce seuil supplémentaire peut être un atout, si l'on cherche à absorber plus rapidement l'énergie vibratoire d'un système autonome (sans excitation externe) et donc de diminuer la durée du régime transitoire. En effet le saut peut se faire suivant  $N_2$  de droite à gauche ou de haut en bas suivant  $N_1$ . Nonobstant, ce principal avantage peut vite devenir un défaut pour un système forcé (non-autonome). De fait, un saut sur une branche avec un niveau d'énergie plus important est possible<sup>4</sup>. L'hybridation permet donc de générer des SIM non-linéaires en fonction de  $N_1$  et  $N_2$  et d'améliorer l'absorption d'énergie vibratoire.

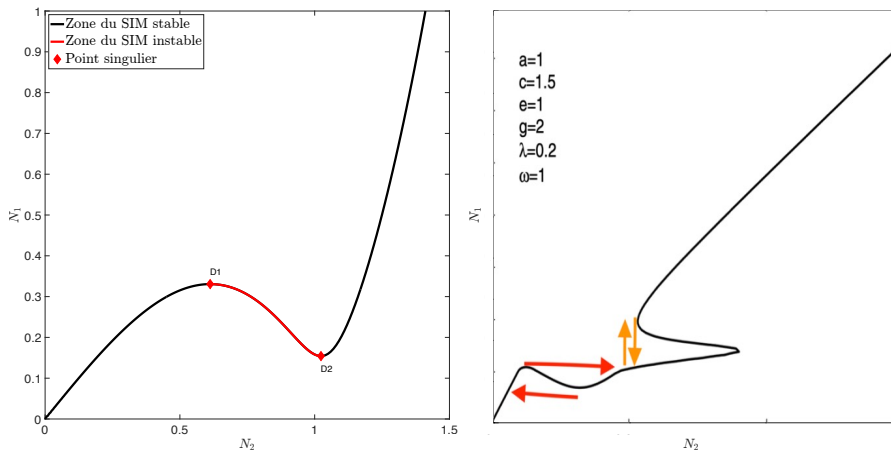


FIGURE 2.31: SIM à forme particulière extrait de [11]

Après cette mise en contexte, la présentation du modèle d'étude puis l'obtention du SIM avec prise en compte de la loi de contrôle seront détaillées. Enfin, des simulations numériques avec et sans contrôle permettront de mettre en évidence les apports de l'hybridation.

4. Il est important de noter que le saut vertical n'est pas forcément dû à l'instabilité de la branche, mais plutôt à la vitesse du régime transitoire et/ou aux conditions initiales

### 2.3.1 Système d'étude

Considérons le système phénoménologique présenté à la section précédente (voir Fig. 2.12). Les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_{nl1} x_1^3 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 \\ \hspace{15em} = F \sin(\omega t) + F_a(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = -F_a(t) \end{cases} \quad (2.82)$$

avec toujours  $\forall i = 1, 2$  :

- $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$  : déplacement, vitesse et accélération de la masse  $i$  respectivement
- $c_i$  : le coefficient d'amortissement
- $k_i$  : le coefficient de raideur linéaire
- $k_{nli}$  : le coefficient de raideur non-linéaire
- $F$  : L'amplitude de la force de perturbation externe

où  $F_a(t) = F_a(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$  est la force active qui dépend des états du système et que l'on détaillera par la suite.

Introduisons maintenant les variables sans dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{m_2}{m_1}, & K_2 &= \frac{k_2}{m_2 \omega_0^2}, & K_{nl1} &= \frac{k_{nl1}}{m_2 \omega_0^2}, & K_{nl2} &= \frac{k_{nl2}}{m_2 \omega_0^2}, & \alpha &= \frac{1}{m_2 \omega_0^2}, \\ \Gamma &= \frac{F}{m_2 \omega_0^2}, & \lambda_1 &= \frac{c_1}{m_2 \omega_0}, & \lambda_2 &= \frac{c_2}{m_2 \omega_0}, & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, & \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0} \end{aligned} \quad (2.83)$$

ainsi que le temps propre (sans dimension)  $\tau_0$  comme dans [12], [13] :

$$\tau_0 = \omega_0 t \quad (2.84)$$

Afin de prendre en compte la dérivée par rapport à  $\tau_0$ , les dérivées par rapport à  $t$  donnent :

$$\frac{d(\cdot)^n}{d^n t} = \omega_0^n \frac{d(\cdot)^n}{d^n \tau_0} \quad (2.85)$$

On peut alors réécrire le système d'équations (2.82) sans dimensions :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \epsilon \lambda_1 \dot{x}_1 + \epsilon K_{nl1} x_1^3 + \epsilon K_2 (x_1 - x_2) + \epsilon \lambda_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \epsilon K_{nl2} (x_1 - x_2)^3 \\ \hspace{15em} = \epsilon \Gamma \sin(\Omega \tau) + \epsilon \alpha F_a(\tau) \\ \ddot{x}_2 + K_2 (x_2 - x_1) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = -\alpha F_a(\tau) \end{cases} \quad (2.86)$$

L'introduction des coordonnées barycentriques se fait par le changement de variables suivant :

$$\begin{bmatrix} V(\tau) \\ W(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

où  $V(\tau)$  correspond au déplacement de la masse principale et  $w(\tau)$  au déplacement relatif des deux masses. Le système d'équations (2.86) devient alors :

$$\begin{cases} \ddot{V} + V + \epsilon \lambda_1 \dot{V} + \epsilon K_{nl} V^3 + \epsilon (K_2 W + K_{nl2} W^3 + \lambda_2 \dot{W}) = \epsilon (\Gamma \sin(\Omega \tau) + \alpha F_a(\tau)) \\ \ddot{W} + [V + \epsilon \lambda_1 \dot{V} + \epsilon K_{nl} V^3] + (1 + \epsilon) (K_2 W + K_{nl2} W^3 + \lambda_2 \dot{W}) = \epsilon \Gamma \sin(\Omega \tau) \\ \hspace{15em} + (1 + \epsilon) \alpha F_a(\tau) \end{cases} \quad (2.88)$$

### Forme de la loi de contrôle

À ce stade du développement, on peut se demander quelles formes donner au terme de force active  $F_a(\tau)$  et quels impacts cela aura sur le SIM. Deux formes sont distinguées :

- polynomiale
- discontinue, mais composé de fonctions polynomiales

Néanmoins, dans chacun de ces cas, la force active  $F_a(\tau) = F_a(\tau, (V, W))$  vérifiera les propriétés de symétrie et sera supposée impaire telle que :

$$F_a(\tau, -(V, W)) = -F_a(\tau, (V, W)) \quad (2.89)$$

Dans le cas d'une force polynomiale, le principe de similarité à la partie active est appliqué<sup>5</sup>. La force active s'exprime alors sous la forme d'un polynôme non-linéaire :

$$F_a(t) = C_c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_c(x_1 - x_2) + K_{nlc}(x_1 - x_2)^3 \quad (2.90)$$

Grâce à cette fonction simple, la modification des paramètres d'amortissement par le gain  $C_c$ , de raideur linéaire par  $K_c$  et de raideur non-linéaire par  $K_{nlc}$  sont désormais possibles. En fonction de l'évolution de ces paramètres au cours du temps, le SIM peut être modulé. Cette modification peut être faite de façon manuelle ou autonome en suivant l'évolution de l'amplitude du système. On peut citer les travaux de LAMARQUE et al. [14] où les auteurs proposent une modification de  $K_{nl}$  qui suit l'évolution du déplacement de la masse de la structure à contrôler. L'intérêt ici est la diminution de la variation d'amplitude de  $x_1$  en formant un "plateau"<sup>6</sup> dans le SIM. Cependant, la fonction proposée dans [14] est continue par morceaux. Elle nécessite donc un traitement différent d'un cas polynomial classique.

Le SIM étant construit de façon générale, la loi de contrôle sera découpée en une partie continue  $F_{ac}$  et une discontinue  $F_{ad}$  :

$$F_a(t) = F_{ac}(t) + F_{ad}(t) \quad (2.91)$$

La force  $F_{ad}$  peut représenter un changement brutal du contrôle comme l'activation ou la désactivation du contrôle en fonction d'une valeur d'entrée. L'arrêt du contrôle peut être utile dans le cas de faible déplacement de la structure pour des raisons évidentes de coût énergétique. L'équation (2.91) sera détaillée dans la suite du raisonnement.

### 2.3.2 Calcul du Slow Invariant Manifold pour le contrôle hybride des structures

Nous allons maintenant utiliser la représentation complexe des équations de mouvement (2.88) en introduisant les variables de MANEVITCH [15] introduites dans la section 1.2.5.

À partir des équations de MANEVITCH :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \phi_1(\tau)e^{i\Omega\tau} = \dot{V} + i\Omega V \\ \Delta_2 = \phi_2(\tau)e^{i\Omega\tau} = \dot{Y} + i\Omega Y \end{cases} \quad (2.92)$$

---

5. La forme de la loi de contrôle est de même nature que l'absorbeur

6. Ici le terme plateau signifie une absence de variation suivant  $N_1$



où  $i^2 = -1$  et  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on peut écrire la représentation complexe de  $V$  et  $W$  suivantes :

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2i\Omega} (\phi_1 e^{i\Omega\tau_0} - \phi_1^* e^{-i\Omega\tau_0}) = \frac{1}{2i\Omega} (\Delta_1 - \Delta_1^*) \\ \dot{V} = \frac{1}{2} (\phi_1 e^{i\Omega\tau_0} + \phi_1^* e^{-i\Omega\tau_0}) = \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_1^*) \\ \ddot{V} = \dot{\phi}_1 e^{i\Omega\tau_0} + \frac{i\Omega}{2} (\phi_1 e^{i\Omega\tau_0} - \phi_1^* e^{-i\Omega\tau_0}) = \dot{\Delta}_1 + \frac{i\Omega}{2} (\Delta_1 - \Delta_1^*) \end{cases} \quad (2.93)$$

et

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2i\Omega} (\phi_2 e^{i\Omega\tau_0} - \phi_2^* e^{-i\Omega\tau_0}) = \frac{1}{2i\Omega} (\Delta_2 - \Delta_2^*) \\ \dot{W} = \frac{1}{2} (\phi_2 e^{i\Omega\tau_0} + \phi_2^* e^{-i\Omega\tau_0}) = \frac{1}{2} (\Delta_2 + \Delta_2^*) \\ \ddot{W} = \dot{\phi}_2 e^{i\Omega\tau_0} + \frac{i\Omega}{2} (\phi_2 e^{i\Omega\tau_0} - \phi_2^* e^{-i\Omega\tau_0}) = \dot{\Delta}_2 + \frac{i\Omega}{2} (\Delta_2 - \Delta_2^*) \end{cases} \quad (2.94)$$

avec  $i^2 = -1$ , " \* " qui correspond au complexe conjugué et  $\phi_1, \phi_2$  des fonctions dépendant des échelles de temps plus lentes.

**Remarque :** Il est à noter que le temps  $t$ , comme expliqué dans le chapitre 1, est subdivisé en plusieurs échelles de temps plus lentes pondérées par un  $\epsilon$ .

$$\tau_0 = \omega_0 t, \tau_1 = \epsilon \tau_0, \tau_2 = \epsilon^2 \tau_0, \dots \quad (2.95)$$

En revanche, sous la considération de la résonance 1 : 1 les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , solutions de l'équation de mouvement, sont considérées comme des fonctions de temps dépendant des échelles de temps lentes. Leur développement en série entière s'écrit :

$$\phi_j(\tau_1, \tau_2, \dots) = \epsilon \phi_j(\tau_1) + \epsilon^2 \phi_j(\tau_2) + \dots \forall j \in 1, 2 \quad (2.96)$$

L'équation de mouvement est donc décomposée en plusieurs échelles temps par l'intermédiaire des  $\phi_j$ .

En introduisant les Eqs. (2.93) et (2.94) dans l'Eq. (2.88) on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \dot{\Delta}_1 + \frac{i}{2} \left( \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega} \right) (\Delta_1 - \Delta_1^*) + \epsilon \left( \frac{\lambda_1}{2} (\Delta_1 + \Delta_1^*) + \frac{K_{nl1}}{8i\Omega^3} (\Delta_1 - \Delta_1^*)^3 \right) \\ \quad + \epsilon \left( \frac{K_{nl2}}{8i\Omega^3} (\Delta_2 - \Delta_2^*)^3 + \frac{\lambda_2}{2} (\Delta_2 + \Delta_2^*) + \frac{K_2}{2i\Omega} (\Delta_2 - \Delta_2^*) \right) \\ \quad = \epsilon \left( \frac{\Gamma}{2i} + \alpha F_a((\Delta_1 - \Delta_1^*), (\Delta_2 - \Delta_2^*)) \right) \\ \frac{1}{2} \dot{\Delta}_2 + \frac{i\Omega}{2} (\Delta_2 - \Delta_2^*) + \left[ \epsilon \left( \frac{\lambda_1}{2} (\Delta_1 - \Delta_1^*) + \frac{K_{nl1}}{8i\Omega^3} (\Delta_1 - \Delta_1^*)^3 \right) - \frac{i}{2\Omega} (\Delta_1 - \Delta_1^*) \right] \\ \quad + (1 + \epsilon) \left( \frac{K_{nl2}}{8i\Omega^3} (\Delta_2 - \Delta_2^*)^3 + \frac{\lambda_2}{2} (\Delta_2 + \Delta_2^*) + \frac{K_2}{2i\Omega} (\Delta_2 - \Delta_2^*) \right) \\ \quad = \epsilon \frac{\Gamma}{2i} + (1 + \epsilon) \alpha F_a((\Delta_1 - \Delta_1^*), (\Delta_2 - \Delta_2^*)) \end{cases} \quad (2.97)$$

Dans cette étude, la dynamique rapide des équations de mouvement est étudiée (correspondant au temps rapide  $\tau_0$ ). Par conséquent, la moyenne du système (2.97) sur l'échelle de temps rapide revient à étudier le système dans la configuration de résonance 1 : 1 c.-à-d. le premier mode non-linéaire lorsque les deux masses du système oscillent en phase. L'introduction du système moyenné résultant ( qui correspond aux termes proportionnels à  $e^{i\Omega\tau_0}$ ) a deux utilités. D'abord, il permet de rendre le système ci-dessus plus



**Remarque :** Le calcul de stabilité s’obtient en perturbant le système d’équations (2.98) à l’ordre  $\epsilon^0$ . Après application de la méthodologie classique du calcul de stabilité [14], la condition de stabilité du SIM s’obtient pour :

$$\det(\mathbb{L}) \geq 0 \tag{2.102}$$

où  $\mathbb{L}$  est la matrice de stabilité donnée en Annexe. F qui prend en compte les termes du contrôle.

**Remarque :** Les informations obtenues à l’ordre  $\epsilon^0$  étant suffisantes, l’ordre  $\epsilon^1$  (Dynamique lente) ne sera pas étudié dans ce manuscrit.

Pour étudier l’impact du contrôle actif sur le SIM de façon plus illustrative, des paramètres d’un modèle académique sont utilisés :

$m_1$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$	$k_{nl2}$	$\epsilon$
1	1e-3	0.0075	1	0.01	0.05	0.05

TABLE 2.5: Table des paramètres pour l’application numérique du SIM

La considération d’un NES<sup>7</sup> plutôt qu’un NLTVA dans ce cas de figure est important, car elle permet d’étudier le phénomène de TET (Targeted Energy Transfert). En effet, on ne peut pas parler de ce dernier dans le cas d’un NLTVA de par son accordage particulier. La suite de cette sous-section est organisée et découpée en trois parties. Dans la première, le NES passif est analysé pour en montrer ses limitations. Dans la deuxième partie, l’implémentation d’une loi de contrôle polynomiale (continue) pour le pilotage des paramètres de l’absorbeur est étudiée. Enfin, la dernière partie se veut plus exploratoire. Elle contribue à la mise en exergue des capacités d’un contrôle portant uniquement sur les états de la masse principale et du contrôle dans le cas d’une force discontinue.

**Remarque :** Pour des raisons de lisibilité, le NES hybride sera dénommé HNES.

### 2.3.3 Le NES : un absorbeur passif

La figure 2.32 présente le SIM sans contrôle (voir Eq.(2.101)) pour les paramètres du tableau 2.5.

---

7. Les raideurs linéaires et non-linéaires ne sont pas accordées sur le système primaire linéaire.

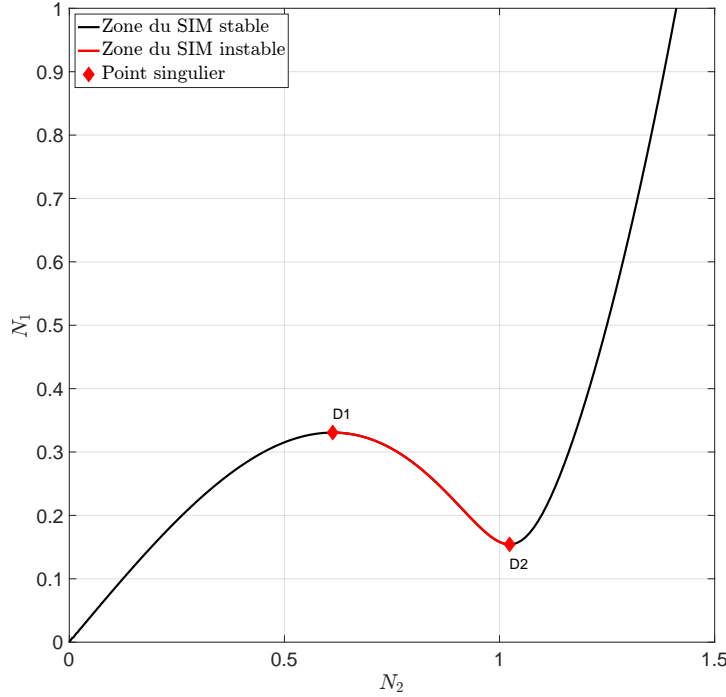


FIGURE 2.32: SIM d'un absorbeur non-linéaire passif

Cette forme de variété invariante est caractéristique des absorbeurs à non-linéarité cubique. La zone d'instabilité (en rouge sur la figure 2.32) est délimitée par des points singuliers  $D_1$  et  $D_2$  qui correspondent respectivement au seuil d'activation et de désactivation de l'absorbeur. De plus, l'écart entre ces derniers ( $|D_2 - D_1|$ ) informe sur l'amplitude de la réponse quasi-périodique. Les points singuliers sont obtenus en dérivant l'équation (2.101) par rapport à  $N_2$  puis en cherchant les racines de cette dérivée. Une expression analytique est donnée ci-dessous :

$$N_2^2(D_1, D_2) = \frac{4}{9K_{nl2}} \left( (-2(K_2 - 1) \pm \sqrt{K_2^2 - 3\lambda_2^2 - 2K_2 + 1}) \right) \quad (2.103)$$

Pour chaque valeur de  $N_2$ , la valeur de  $N_1$  correspondante est ensuite obtenue via l'Eq. 2.101. D'après l'Eq.(2.103), les points  $D_1$  et  $D_2$  sont sensibles aux paramètres de raideur linéaire  $K_2$ , de raideur non-linéaire  $K_{nl2}$  et d'amortissement  $\lambda_2$ . La modification de ces paramètres entraîne un changement de la forme du SIM par l'intermédiaire des points singuliers. Cette information est importante, car elle permet de valider l'utilisation du contrôleur sous la forme d'un polynôme non-linéaire.

Bien que les courbes de réponse en fréquence soient tracées par HBM, il est néanmoins possible d'en obtenir une formulation analytique. Les solutions périodiques correspondent aux points fixes de (2.98) qui sont obtenus en annulant les dérivées :

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0 \quad (2.104)$$

Le système algébrique résultant est alors résolu, toujours sous l'hypothèse de résonance 1 : 1, ce qui permet d'obtenir une expression analytique des courbes de réponse du système.

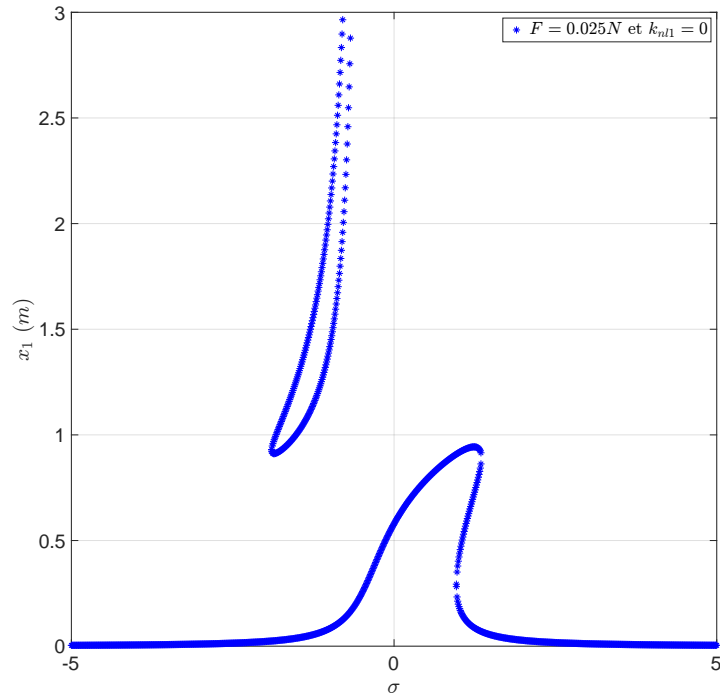


FIGURE 2.33: Points fixes : courbe de réponse du système pour  $F = 0.025N$  et  $k_{nl1} = 0$

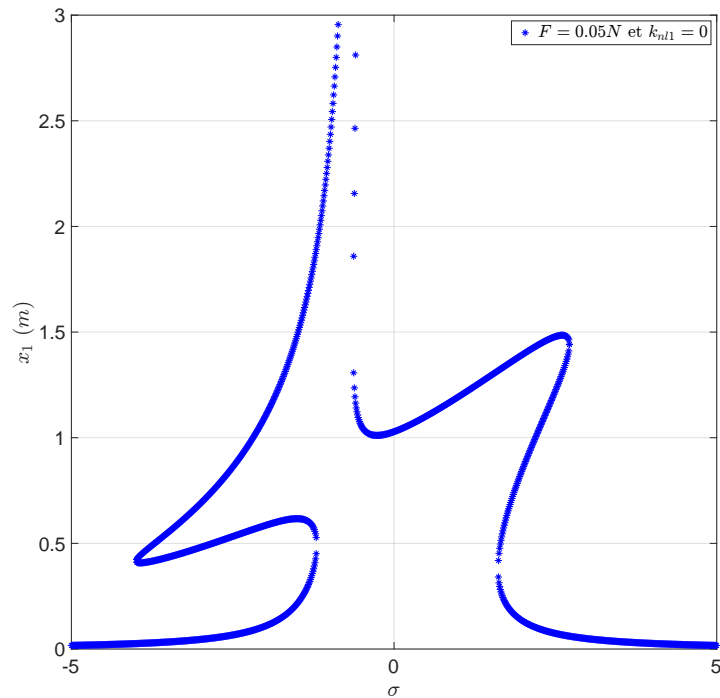


FIGURE 2.34: Points fixes : courbe de réponse du système pour  $F = 0.05N$  et  $k_{nl1} = 0$

Les figures 2.33 et 2.34 montrent l'évolution des points fixes en fonction de  $\sigma$  pour le coefficient de raideur non-linéaire  $k_{nl1} = 0$  et deux efforts différents. Pour un effort  $F = 0.025$  (Fig. 2.33), la présence d'une solution isolée est constatée. Lorsque l'effort d'excitation augmente ( $F = 0.05$ ), cette solution vient s'attacher à la courbe de réponse (Fig. 2.34). La modification des paramètres du SIM, peut permettre le pilotage ou la

suppression de cette solution isolée.

**Remarque :** Il est à noter que la solution isolée est située sur le mode le plus non-linéaire du système. La quantification du mode non-linéaire est réalisée en comparant les deux raideurs non-linéaires et peut être visible en traçant les modes non-linéaires du système [17]. Dans le cas d'un NES sur une structure linéaire (voir figure 2.35 gauche), la solution isolée se situera toujours sur le mode de l'absorbeur (placé avant le mode linéaire de la structure). C'est le même principe pour le NLTVA. En revanche, le mode le plus non-linéaire est le mode de la structure primaire (voir figure 2.35 droite). La solution isolée sera donc située sur le mode de la structure (placé après celui de l'absorbeur). Afin de mettre en évidence du transfert irréversible d'énergie, supposons que le système

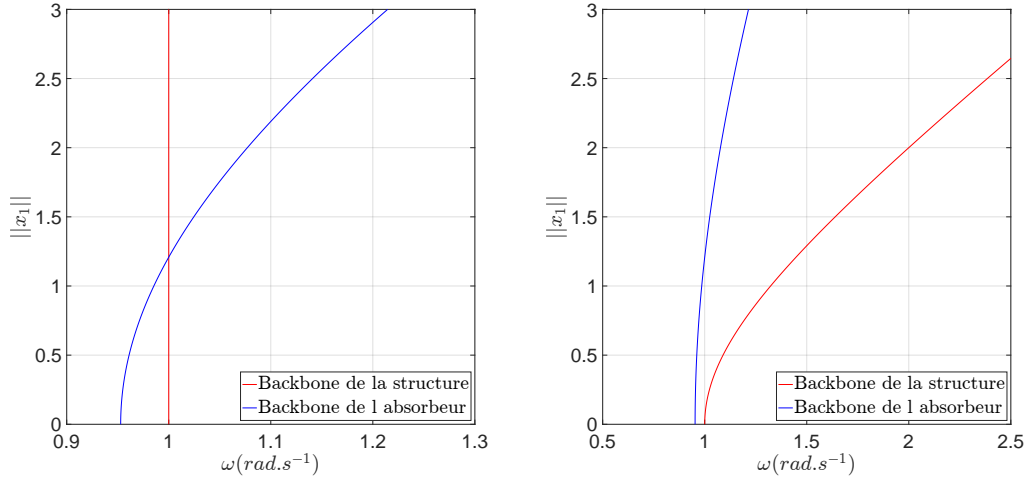


FIGURE 2.35: Figure présentant l'évolution des modes : d'un NES sur une structure linéaire (gauche) et d'un NLTVA sur une structure non-linéaire (droite)

d'équations de mouvement (2.63) soit excité avec une force d'impulsion,  $U\delta(t)$  et sans contrôle tel que :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + c_1\dot{x}_1 + k_{nl1}x_1^3 + k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{nl2}(x_1 - x_2)^3 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl2}(x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} = U\delta(t) \quad (2.105)$$

Où  $U$  est l'effort imposé et  $\delta(t)$  une masse de Dirac. Considérons  $E_{tot}$  l'énergie totale décomposée en :

$$E_{tot} = E_{str} + E_{NES} \quad (2.106)$$

Où  $E_{str}$  est l'énergie dans la structure :

$$E_{str} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{4}k_{nl1}x_1^4 \quad (2.107)$$

et  $E_{NES}$  représente l'énergie dans le NES :

$$E_{NES} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}k_{nl2}(x_2 - x_1)^4 \quad (2.108)$$

En vue de comprendre le transfert de l'énergie vibratoire dans le système, le pourcentage d'énergie dans le NES et la structure est scruté au cours du temps.

### 2.3. UN ABSORBEUR NON-LINÉAIRE ADAPTATIF

Dans le cas où  $U = 0.4$  (voir figure 2.36), le NES n'est pas (ou peu) activé. Deux arguments appuient ce propos. Tout d'abord, la forme en exponentielle décroissante du régime transitoire de la figure 2.36 (gauche). Cette forme est caractéristique d'un amortissement structurel (visqueux). Enfin, la figure de droite montre que l'essentiel de l'énergie se situe dans la structure.

Dans la figure 2.37, le cas  $U = 0.8$  est présenté. De  $t = 0s$  à  $t = 25s$  on peut voir un phénomène de battement. Ce dernier (transfert réversible) d'énergie permet d'amener les états du système sur la résonance 1 : 1. La capture de cette résonance donne lieu au transfert irréversible d'énergie. Le NES pompe presque 100% de l'énergie contenue dans le système (dépassement du seuil d'activation). De plus, la décroissance du régime transitoire de la structure se fait de façon linéaire (voir 2.37 (gauche)).

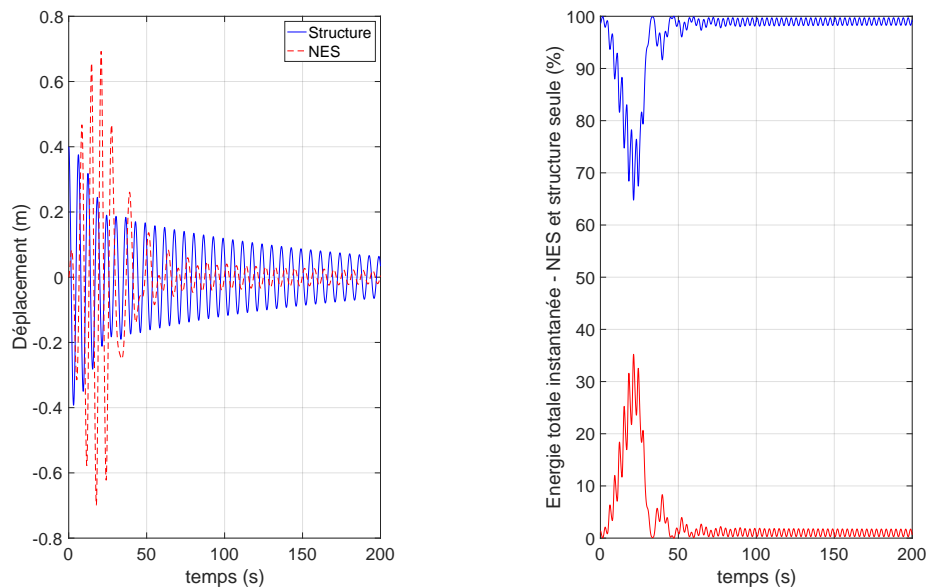


FIGURE 2.36: Analyse du transfert énergétique à la résonance 1 : 1 - sans contrôle : condition initiale à basse amplitude  $U = 0.4$

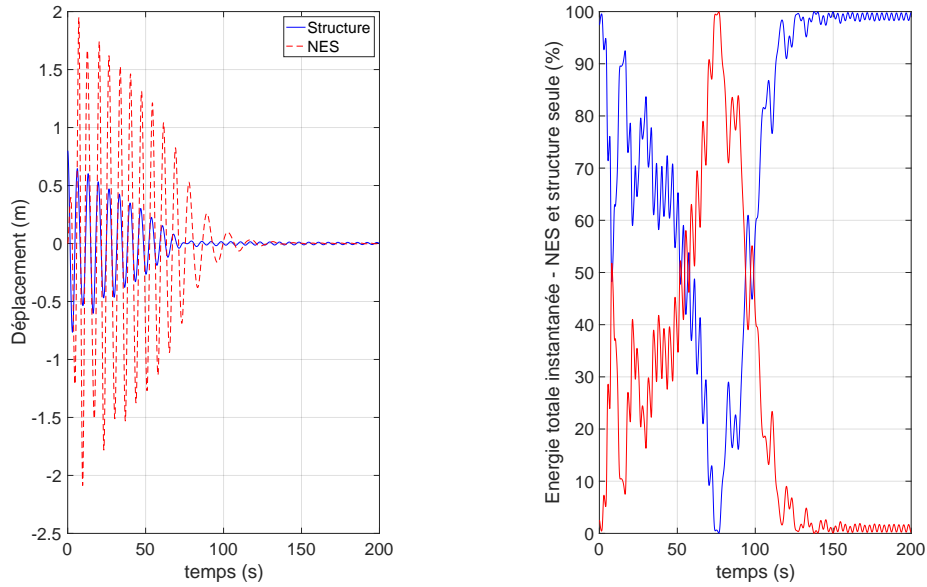


FIGURE 2.37: Analyse du transfert énergétique à la résonance 1 : 1 - sans contrôle : condition initiale à amplitude moyenne  $U = 0.8$

Afin d'analyser le contenu fréquentiel de la réponse temporelle non-stationnaire, la transformée en ondelettes est utilisée. Les figures 2.38a et 2.38b montrent une cartographie temps/fréquence du déplacement pour le cas où le NES travaille et ne travaille pas. Lorsque le seuil de ce dernier n'est pas atteint (voir figure 2.38a), on constate une raie constante centrée sur la fréquence du système (résonance 1 : 1). Il n'y a pas de changement de résonance et la décroissance vibratoire se fait par l'amortissement structural. Dans le cas où le NES travaille, l'amortissement vibratoire se fait par la résonance de l'absorbeur non-linéaire (voir figure 2.38b). De 0 à 25s, le phénomène de battement opère et permet un changement de résonance entre l'absorbeur et la structure. La capture de la résonance 1 : 1 se fait alors à  $\approx 70s$ . À partir de 70s, l'amplitude vibratoire est quasiment nulle dans la structure.

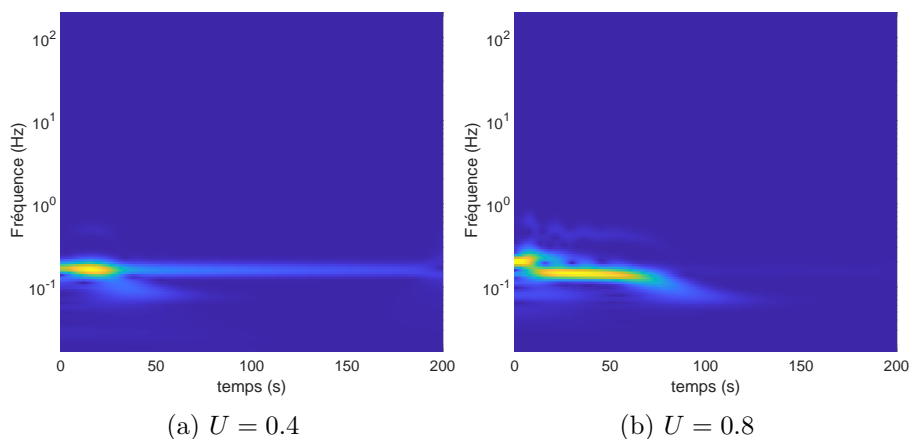


FIGURE 2.38: Spectrogramme du NES passif pour différentes conditions initiales  $U$

Enfin, dans le cas où  $U = 1.5$  (voir figure 2.39), on parle aussi de transfert irréversible d'énergie, malgré une plus faible efficacité.



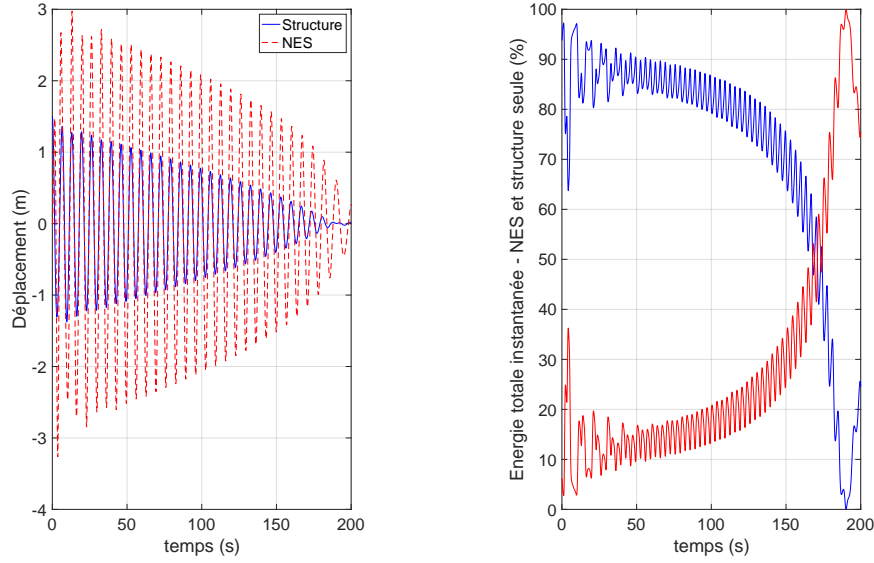


FIGURE 2.39: Analyse du transfert énergétique à la résonance 1 : 1 - sans contrôle : condition initiale à amplitude élevée  $U = 1.5$

L'étude du NES passif contribue à une meilleure compréhension de son fonctionnement et oriente le choix du contrôleur.

### 2.3.4 Le HNES : loi polynomiale

Dans cette section, le contrôle actif polynomial de (2.90) est considéré. Le SIM et les points singuliers pour cette loi de contrôle polynomiale sont donnés par les équations :

$$\left(\frac{(\lambda_2 - \alpha C_c)}{2} N_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} N_2 - \frac{3(K_{nl2} - \alpha K_{nlc}) N_2^2}{8} N_2 - \frac{(K_2 - \alpha K_c)}{2} N_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} N_1\right)^2 \quad (2.109)$$

$$N_2^2(D_1, D_2) = \frac{4}{9(K_{nl2} - \alpha K_{nlc})} \left( (-2((K_2 - \alpha K_c) - 1)) \pm \sqrt{(K_2 - \alpha K_c)^2 - 3(\lambda_2 - \alpha C_c)^2 - 2(K_2 - \alpha K_c) + 1} \right) \quad (2.110)$$

Le calcul analytique (2.110) des points singuliers permet de mettre en évidence les paramètres à modifier pour faire évoluer la forme du SIM. De plus, dans un souci de robustesse, il est nécessaire de considérer la fréquence propre  $f_0$  de la structure à contrôler. Afin de comprendre comment évoluent ces 4 paramètres ( $f_0$ ,  $K_c$ ,  $C_c$ ,  $K_{nlc}$ ), les résultats de thèse de CADIOU [10] sont utilisés. Dans ses travaux, l'auteur donne deux paramètres observables pour quantifier les performances, concevoir ou adapter (dans notre cas) l'absorbeur. Le premier est le seuil d'activation  $N_1(D_1)$  qui est à ajuster en fonction de l'amplitude vibratoire maximale désirée pour la structure à protéger. Le deuxième concerne l'écart  $|N_1^2(D_1) - N_1^2(D_2)|$  qui se doit d'être minimisé pour augmenter les performances de l'absorbeur. À travers le résumé illustré ci-dessous, le choix des paramètres de la loi de contrôle sera explicité :

- La fréquence propre de la structure  $f_0$  : Cette fréquence n'est pas incluse à proprement parler dans le contrôleur, mais permet de comprendre et d'illustrer l'intérêt de l'ajout du contrôle actif. Le NES n'ayant pas de fréquence propre, il peut s'adapter sur n'importe quelle structure. Sur la figure 2.40, il peut être constaté que plus la fréquence propre de la structure augmente, plus le seuil d'activation  $D_1$  et l'écart entre  $|N_1^2(D_1) - N_1^2(D_2)|$  augmentent. Dans l'optique de préserver les performances sur toute une plage de fréquence (seuil identique par exemple), il est nécessaire d'adapter les paramètres de l'absorbeur.

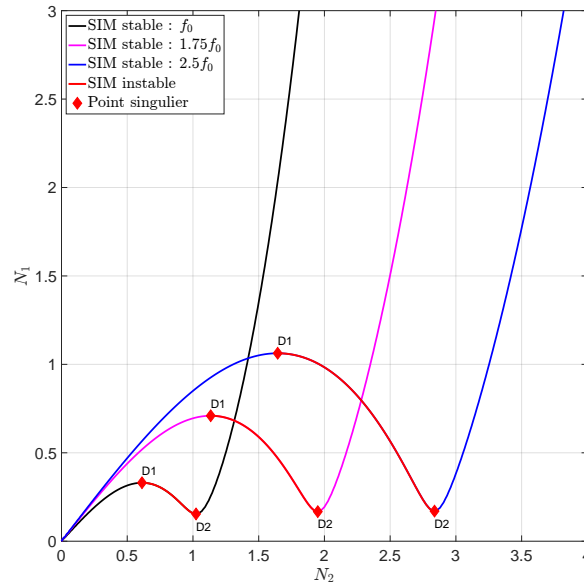
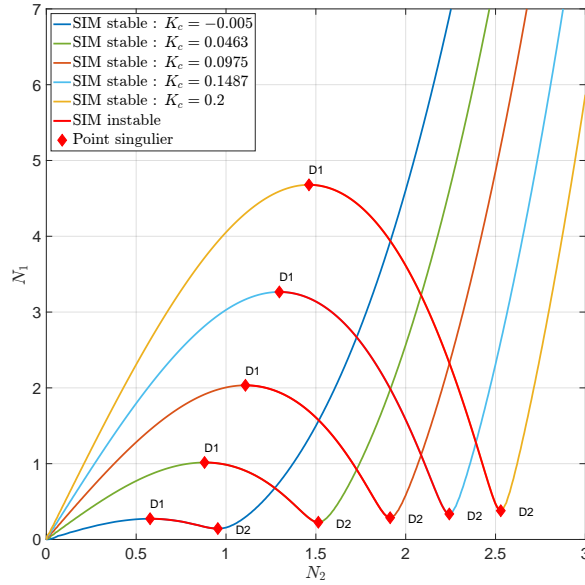
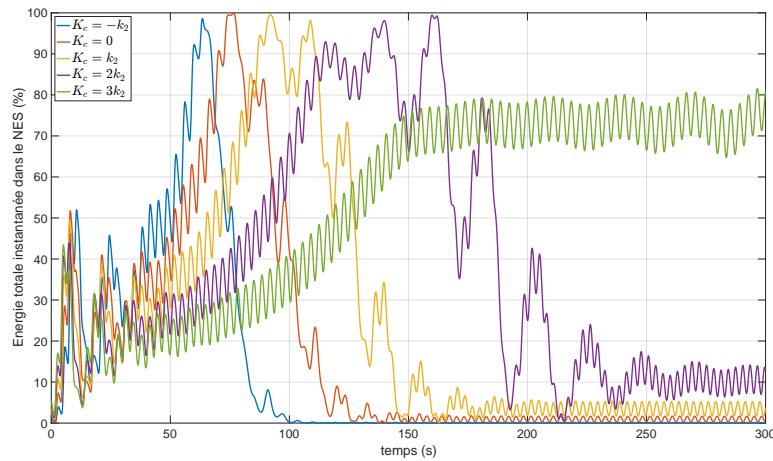


FIGURE 2.40: Évolution de la forme du SIM en fonction de  $f_0$

- Le paramètre de raideur linéaire  $K_c$  : Les premiers articles sur les NES ont été pensés avec des raideurs essentiellement non-linéaire (voir Section. 1.4.3). De façon pratique, il est assez difficile de réaliser une raideur purement cubique ce qui rend l'ajout d'une linéarité dans le modèle est pertinent. Cette raideur linéaire réduit l'écart  $|D_1 - D_2|$  et le seuil  $D_1$  (figure 2.41), mais elle présente deux contreparties notables. Tout d'abord, l'ajout d'un terme linéaire réduit la caractéristique d'adaptabilité du NES. Plus cette dernière augmente, plus l'absorbeur tend à devenir "mono-fréquentiel" et qui plus est à perdre son comportement non-linéaire. Dans ce cas, le contrôleur peut être utilisé pour compenser la linéarité ou la déplacer pour moduler le seuil d'activation. Le deuxième point concerne le transfert irréversible d'énergie. La figure 2.42 présente l'évolution de l'énergie instantanée dans le NES en fonction du temps pour plusieurs valeurs  $K_c$ . Pour  $K_c = -k_2$ ,  $K_c = 0$  et  $K_c = k_2$ , le transfert énergétique est très efficace. Cependant, plus la valeur du coefficient  $K_c$  est élevée, plus le maximum d'absorption arrive tardivement. De plus, lorsque  $K_c$  devient trop important (figure 2.42 courbe verte), le phénomène du TET disparaît au profit d'un phénomène de battement qui, lui, est réversible.


 FIGURE 2.41: Évolution de la forme du SIM en fonction de  $K_c$ 

 FIGURE 2.42: Évolution de l'énergie totale instantanée dans le NES en fonction de l'augmentation de  $K_c$ 

**Remarque :** Le phénomène de battement est visible sur la figure 2.42 pour  $t \leq 40s$ . Durant ce cours instant, l'énergie est répartie de façon quasiment égale entre le NES et la structure.

- Le paramètre d'amortissement  $C_c$  : L'amortissement visqueux de l'absorbeur est un paramètre important, car il conditionne l'existence de la réponse quasi-périodique. De façon générale, l'équation (2.109) nous donne une condition nécessaire sur l'amortissement interne du système pour obtenir un comportement quasi-périodique :

$$C_c \geq \frac{\lambda_2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - 2(K_2 - \alpha K_c) + (K_2 - \alpha K_c)^2}{3}} \quad (2.111)$$

Là encore, il peut être difficile de régler l'amortissement  $c_2$  du NES expérimentalement [18]. Par contre, il est très facile de faire varier l'amortissement  $C_c$  de la loi de contrôle. Ainsi, le contrôle de  $C_c$  est utilisé pour réduire l'écart  $|N_1^2(D_1) - N_1^2(D_2)|$

en fonction de l'évolution de l'amortissement ou de la fréquence propre de la structure comme on peut le voir sur la figure 2.43.

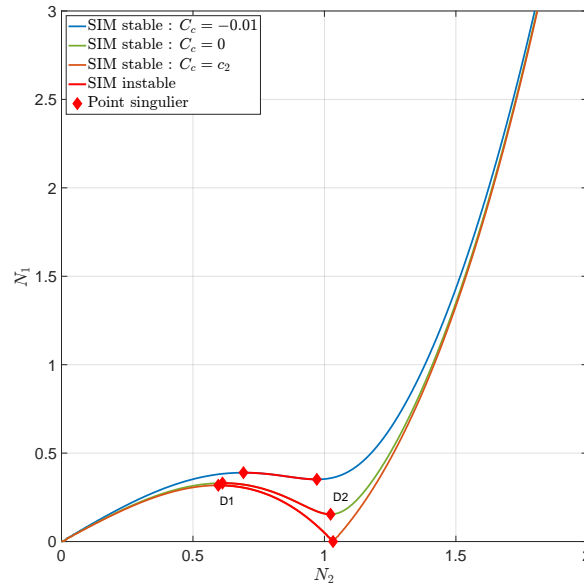


FIGURE 2.43: Évolution de la forme du SIM en fonction de  $C_c$

- Le paramètre de raideur non-linéaire  $K_{nlc}$  : La raideur non-linéaire joue sur le seuil d'activation. Plus  $K_{nlc}$  augmente, plus le mode non-linéaire de l'absorbeur coupe le mode linéaire de la structure à basse énergie. Ceci a pour but d'abaisser le seuil d'activation  $N_1(D_1)$  et de diminuer  $|N_1^2(D_1) - N_1^2(D_2)|$ . La figure 2.44 illustre ce propos.

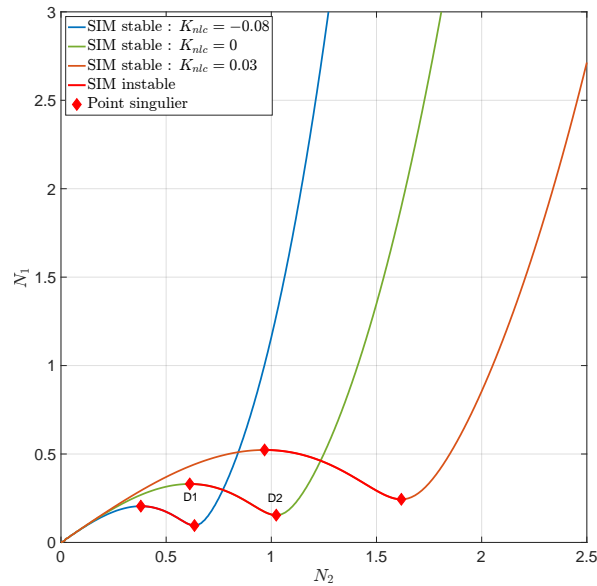


FIGURE 2.44: Évolution de la forme du SIM en fonction de  $K_{nlc}$

La combinaison de tous ces paramètres permet de façonner le SIM à la guise de l'utilisateur pour répondre à un besoin donné. Par exemple, augmenter le seuil d'activation tout en réduisant l'écart  $|N_1^2(D_1) - N_1^2(D_2)|$  (voir figure 2.45). Sur cette même figure, on

constate des oscillations parasites au début du régime transitoire. Elles correspondent aux excitations d'autres harmoniques<sup>8</sup> (non-visibles sur le SIM).

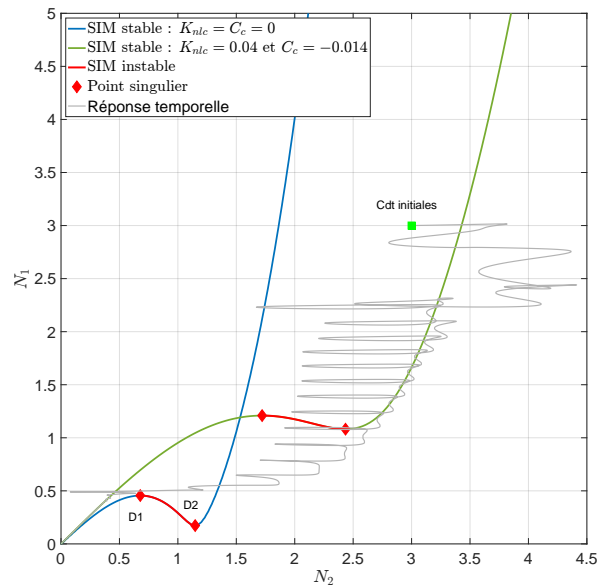


FIGURE 2.45: Évolution de la forme du SIM : contrôleur multiparamétrique

Cette analyse paramétrique nous informe sur la façon dont  $k_{nl2}$  devrait être modifié (par un contrôleur) pour maintenir un seuil d'activation constant malgré une évolution de la fréquence propre de la structure. En effet, dans ce cas, le paramètre  $K_{nl2}$  devient une fonction de cette fréquence propre. La figure 2.46 présente l'évolution de  $k_{nl2}$  pour maintenir un seuil d'activation  $N_1(D_1) \approx 0.6122$  (voir tableau des paramètres 2.5 et la figure 2.32). On peut voir que la valeur du paramètre de raideur non-linéaire augmente fortement. Dans une optique de conception de contrôleurs, la valeur maximale de la variation de fréquence acceptable est à prendre en compte.

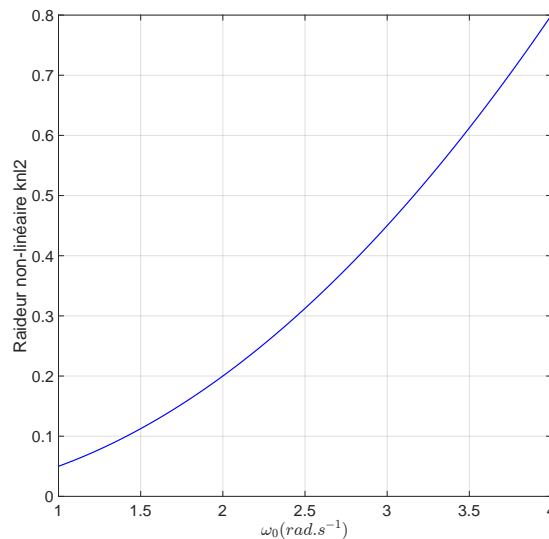


FIGURE 2.46: Évolution de la raideur non-linéaire  $k_{nl2}$  en fonction de la pulsation propre de la structure primaire

8. Un moyen de supprimer ces oscillations est l'utilisation d'un filtre

**Remarque pratique :** La courbe temporelle de la figure 2.45 est obtenue directement à partir des équations de mouvement (2.63). Les grandeurs  $N_1$  et  $N_2$  sont reconstruites telles que :

$$N_1 = \left| \frac{\dot{x}_1}{\omega} + j\Omega x_1 \right|, \quad N_2 = \left| \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\omega} + j\Omega(x_2 - x_1) \right| \quad (2.112)$$

où  $\omega$  est réglé sur la pulsation propre  $\omega_0$  dans le cas d'un système autonome et à la fréquence du terme excitation lorsque le système est non-autonome (forcé).

### Le HNES : loi de contrôle portant uniquement sur $N_1$

Dans le second membre de l'équation générale du SIM (2.100), on peut voir qu'il est possible d'introduire à l'interface des deux masses un effort qui dépend de  $N_1$  (du déplacement ou de la vitesse de la structure primaire). Afin d'illustrer ce propos, appliquons l'effort de contrôle suivant :

$$F_a(t, x_1) = C_c \dot{x}_1 + K_c x_1 + K_{nlc} x_1^3 \quad (2.113)$$

Dans ce cas la force active (polynomiale) ne dépend que des états de la structure principale, et le SIM (2.100) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} N_2 - \frac{3K_{nl2} N_2^2}{8} N_2 - \frac{K_2}{2} N_2 \right)^2 + \left( \frac{\lambda_2}{2} N_2 \right)^2 \\ & = \left( \alpha \frac{C_c}{2} N_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} N_1 - \alpha \left( \frac{3K_{nlc} N_1^2}{8} N_1 + \frac{K_c}{2} N_1 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.114)$$

Pour  $K_{nlc} = 0$ , l'équation 2.114 est linéaire en  $N_1$ . La modification du paramètre  $C_c$  diminue les seuils  $N_1(D_1)$  et  $N_1(D_2)$  (voir figure 2.47). Le paramètre  $K_c$  a la capacité de diminuer ou d'augmenter la valeur des points singuliers (voir 2.48). Cependant, dans le premier cas, la variation de  $|N_1^2(D_1) - N_1^2(D_2)|$  est presque négligeable tandis que dans le second, cette dernière peut être significative pour ces niveaux d'amplitude. Ce contrôleur linéaire basé uniquement sur  $N_1$  peut être une bonne alternative au contrôleur précédemment (basé sur  $N_2$ ). En revanche, il ne peut-être utilisé que pour des variations légères de la zone quasi-périodique.

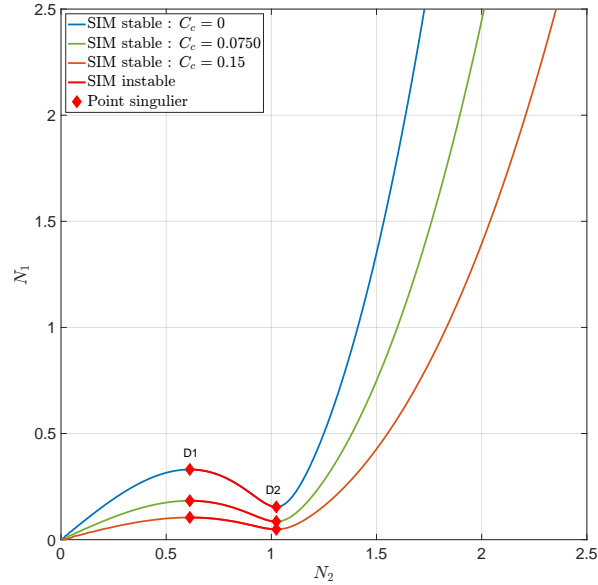


FIGURE 2.47: Évolution de la forme du SIM en fonction  $C_c$  : contrôleur basé sur la vitesse de la structure primaire

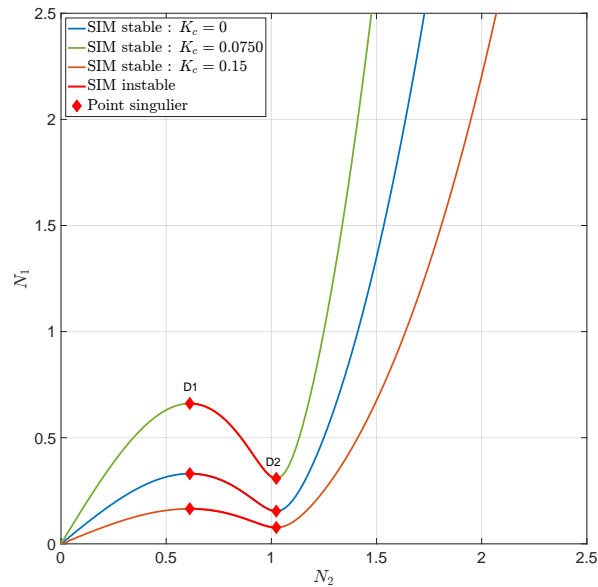


FIGURE 2.48: Évolution de la forme du SIM en fonction  $K_c$  : contrôleur linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire

On peut voir dans la figure 2.48 que la valeur des points  $D_1$  et  $D_2$  est plus élevée pour  $K_c = 0.075$  que pour  $K_c = 0.15$ . En effet, lors de l'ajout de cette forme du contrôle, le second membre de (2.114) devient :  $\left(\frac{1-\alpha K_c}{2}\right)^2 N_1^2 = \gamma N_1^2$ . Cette modification du second membre par le contrôleur implique une valeur plus faible de  $\gamma$  pour  $K_c = 0.075$  entraînant ce comportement peu intuitif.

Pour moduler le SIM dans la direction  $N_1$ , le paramètre  $K_{nlc}$  (avec  $C_c = K_c = 0$ ) est utilisé.

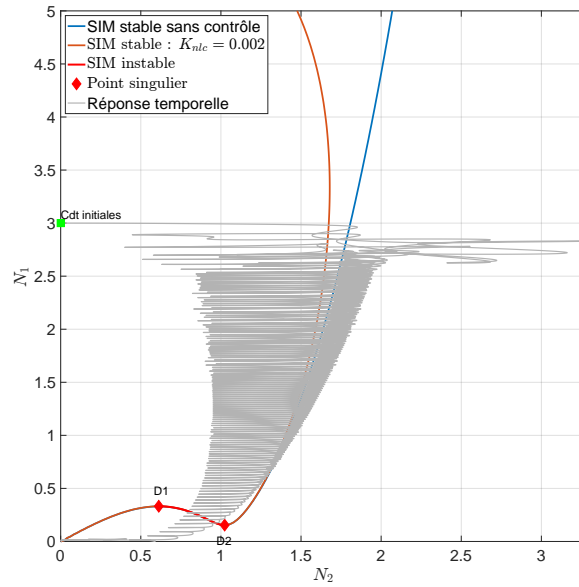


FIGURE 2.49: Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire -  $K_{nlc} = 0.002$

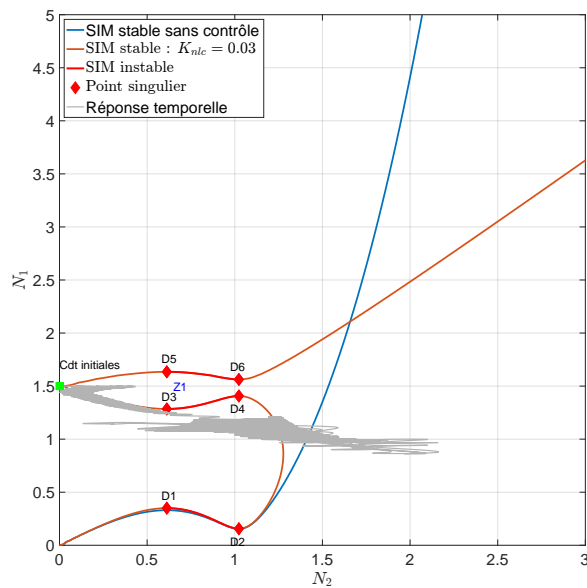


FIGURE 2.50: Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire -  $K_{nlc} = 0.03$  - Conditions initiales dans la zone descendante



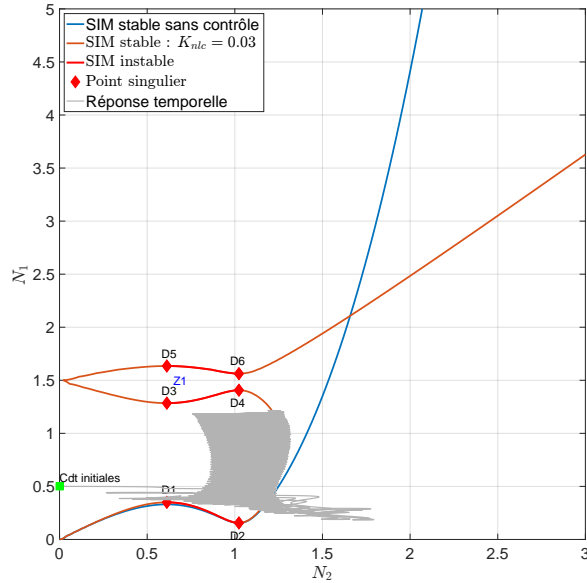


FIGURE 2.51: Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire -  $K_{nlc} = 0.03$  - Conditions initiales dans la zone montante

La figure 2.49 montre le SIM pour un gain de contrôleur faible ( $K_{nlc} = 0.002$ ). Cette non-linéarité rend le SIM plus abrupt dans la zone comprise entre  $N_1 = 0.5$  et  $N_1 = 5$ . L'intérêt, est la réduction du débattement de l'absorbeur à haut niveau d'énergie et la réduction de la durée du régime transitoire pour un essai de lâcher. En contrepartie, l'amplitude de la structure est plus importante pour un  $N_2$  donné. La figure 2.50 présente le SIM pour  $K_{nlc} = 0.03$ . Le contrôle contribue à l'apparition de nouvelles zones d'instabilités entre les points singuliers  $D_3$ ,  $D_4$  et  $D_5$ ,  $D_6$ . La zone  $Z1$  est composée de 2 parties : une zone "descendante" (au sud de  $Z1$ ) et une zone "montante" (au nord de  $Z1$ ). La zone descendante (voir figure 2.50) ne permet pas un chemin dissipatif, car elle est positionnée à côté d'une zone montante (voir figure 2.51). Dans cette dernière la loi de contrôle injecte de l'énergie et crée un régime auto-entretenu à haut niveau d'énergie ce qui démontre une instabilité du contrôle. De ce fait, il est impossible d'obtenir une réponse modulée entre  $D_3$ ,  $D_4$  et  $D_5$ ,  $D_6$ . Cette augmentation modérée de  $K_{nlc}$  introduit une instabilité sur la branche à haut niveau d'énergie ce qui entraîne l'inefficacité du contrôleur dans cette zone (avec ce type contrôleur).

La figure 2.52 montre le SIM pour  $K_{nlc} = 0.1$ . Ici, l'apparition d'une isola est constatée. Cette dernière possède une partie stable et instable (voir figure 2.53). Elle se situe dans la continuité des points singuliers du SIM sans contrôle. Dans ce dernier exemple, l'aspect dissipatif à faible niveau d'énergie n'existe plus et l'amplitude du seuil d'activation  $D_1$  est maintenant bien plus élevée. De plus, comme précédemment, la proximité des points  $D_1$  et  $D_2$  rend le contrôleur instable sur la portion de courbe ( $N_2 > 1$ ,  $N_1 > 1$ ).

La loi  $F_a(t) = K_{nlc}x_1^3$ , utilisée jusqu'à présent, modifie la forme du SIM. Cependant plusieurs zones d'instabilité du contrôleur sont à déplorer. Afin de pallier ce problème, on ajoute à cette  $F_a(t)$  les termes qui permettent le contrôle de l'amortissement et de la raideur linéaire. Cette loi (2.113) complète est utilisée pour piloter la forme de l'isola et améliorer la stabilité du contrôleur.

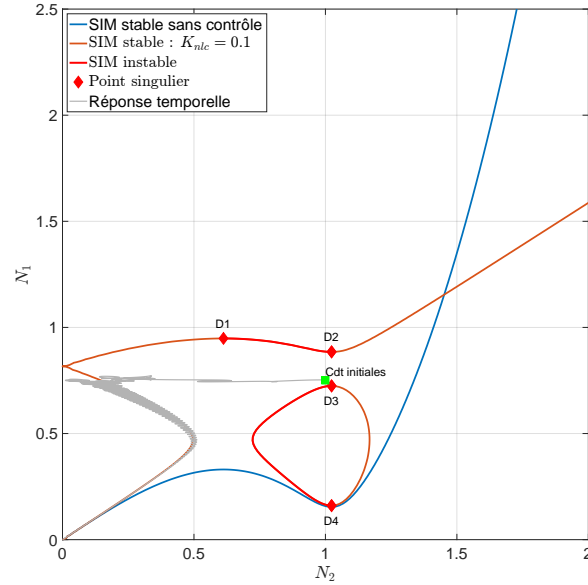


FIGURE 2.52: Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire -  $K_{nlc} = 0.1$

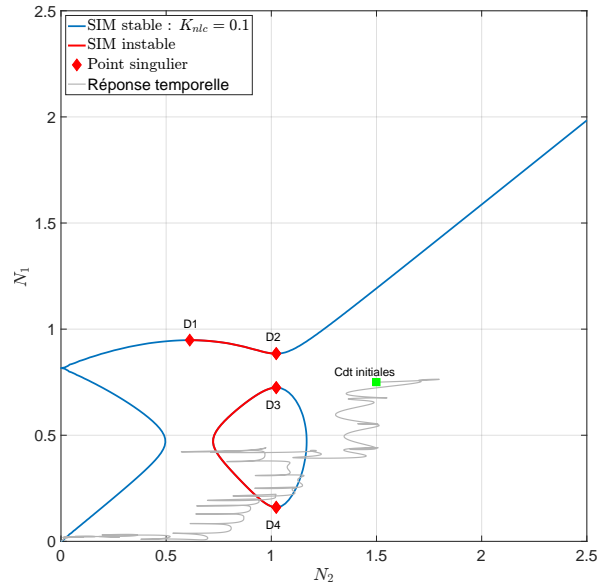


FIGURE 2.53: Évolution de la forme du SIM : contrôleur non-linéaire basé sur le déplacement de la structure primaire -  $K_{nlc} = 0.1$  - stabilité de l'isola

La figure 2.54 présente le SIM avec l'intégration de l'amortissement dans la loi de contrôle. Pour une forte non-linéarité artificielle ( $K_{nlc} = 0.1$ ), cet ajout permet d'attacher la solution isolée au reste du SIM et de supprimer les points  $D_3$  et  $D_4$  (voir figure 2.53). Dans cette configuration la faible valeur de  $C_c = 0.01$  ne permet pas de rendre la stabilité à la totalité de la courbe de réponse (elle reste instable pour  $N_2 \geq 1$  et  $N_1 \geq 0.8$ ). L'ajout d'un amortissement pour le cas modéré ( $K_{nlc}$ ) fait apparaître une solution isolée (voir figure 2.55). Cette dernière est aussi composée d'une zone montante et descendante. En effet, sur cette même figure, il est nettement visible que la solution temporelle remonte sur la branche de l'isola avant d'évoluer vers des niveaux d'énergie

### 2.3. UN ABSORBEUR NON-LINÉAIRE ADAPTATIF

plus faibles. Ici, la taille et la position de l'isola dues à l'amortissement permettent la stabilisation du contrôleur.

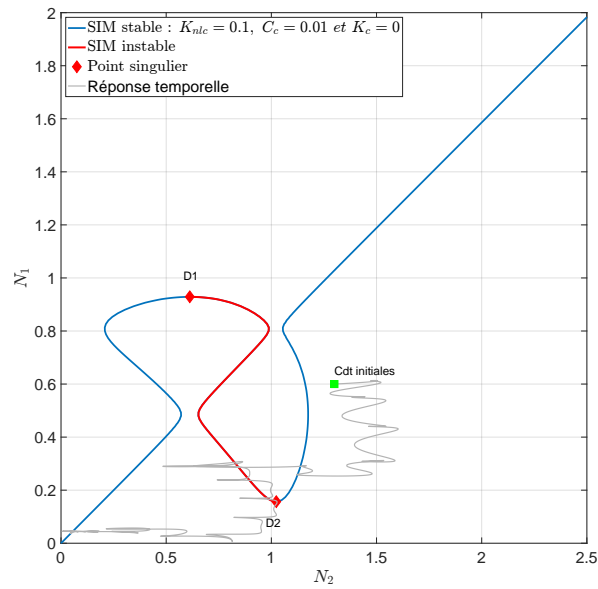


FIGURE 2.54: SIM : modification de l'isola avec les paramètres suivants -  $K_{nlc} = 0.1$ ,  $C_c = 0.01$  et  $K_c = 0$

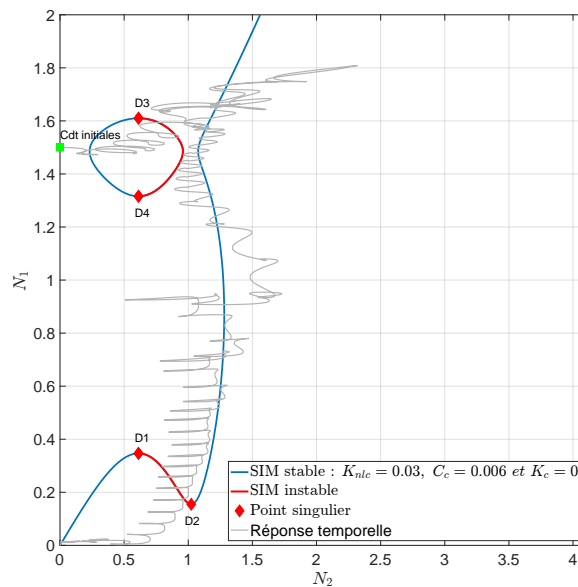


FIGURE 2.55: SIM : modification de l'isola avec les paramètres suivants -  $K_{nlc} = 0.03$ ,  $C_c = 0.006$  et  $K_c = 0$

L'introduction d'une raideur linéaire ( $K_c x_1$ ) dans le contrôleur permet de déplacer l'isola tout en modifiant sa taille (voir figure 2.56). Pour les valeurs de  $K_c > 0.03$ , la solution isolée disparaît totalement. La forme complète de la loi de contrôle (2.113) donne lieu à une liberté dans la conception du SIM. Par exemple, il est possible de diminuer la taille de l'isola sans changer sa position en modifiant la valeur de l'amortissement (figure 2.56) .

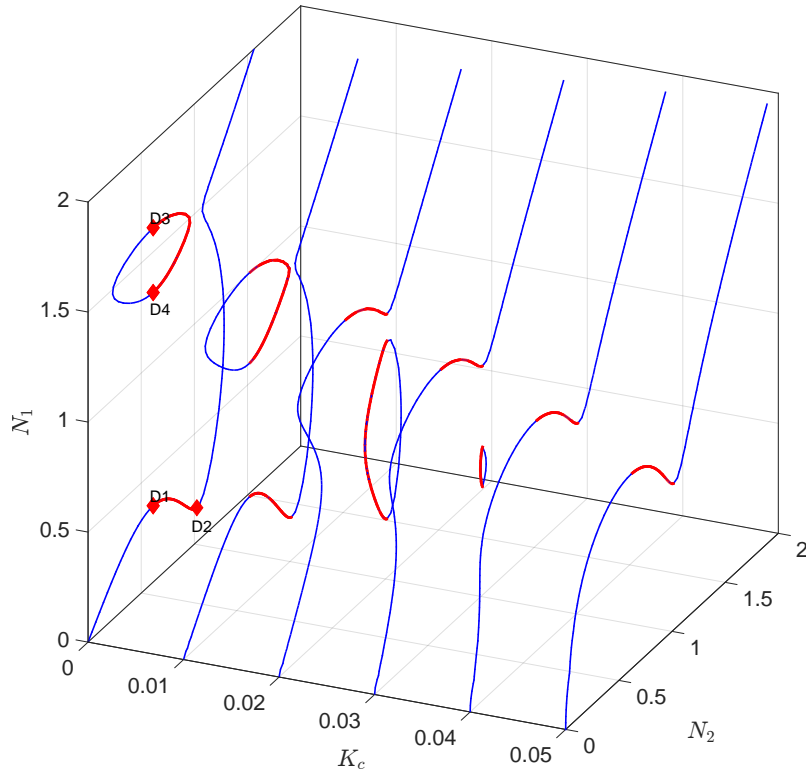


FIGURE 2.56: SIM : modification de l'isola en fonction de la raideur linéaire  $K_c$  avec les paramètres suivants -  $K_{nlc} = 0.03$  et  $C_c = 0.006$

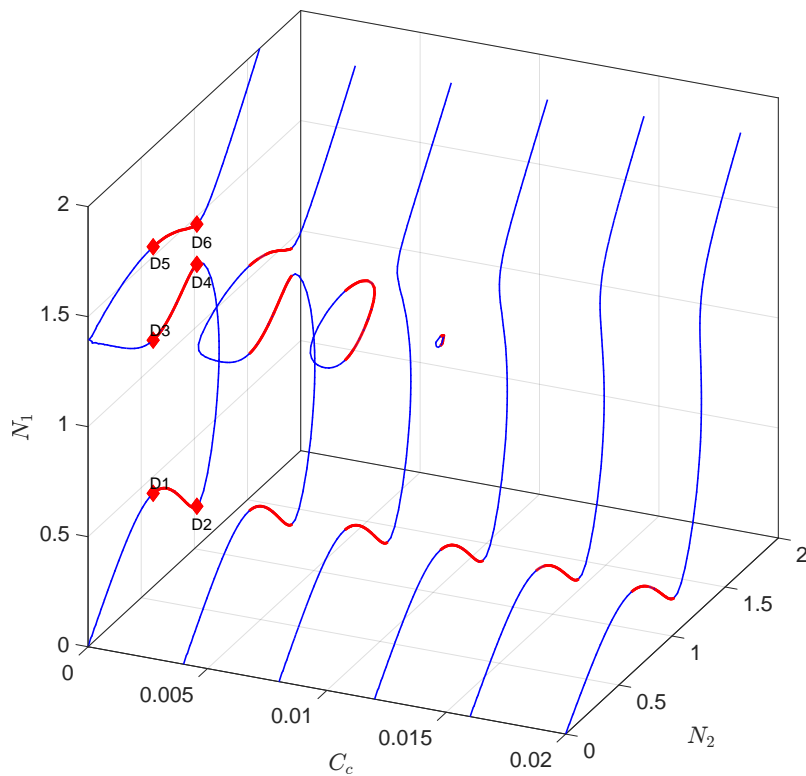


FIGURE 2.57: SIM : modification de l'isola en fonction de la raideur linéaire  $C_c$  avec les paramètres suivants -  $K_{nlc} = 0.03$  et  $K_c = 0.007$

**Remarque :** Il est possible de modifier la forme du SIM plus finement en introduisant une loi de contrôle polynomiale d'ordre élevé :

$$Fa(t) = a_1x_1^5 - a_2x_1^7 + a_32x_1^9 + a_4\dot{x}_1 = 0.0253x^5 - 0.015x^7 + 0.002x^9 + 0.02\dot{x} \quad (2.115)$$

Les paramètres  $a_i \forall i = 1, \dots, 4$  peuvent être trouvés par optimisation. L'augmentation de l'ordre du polynôme permet de modifier légèrement le SIM à haut niveau d'énergie sans trop le modifier à basse énergie comme illustré sur la figure 2.59.

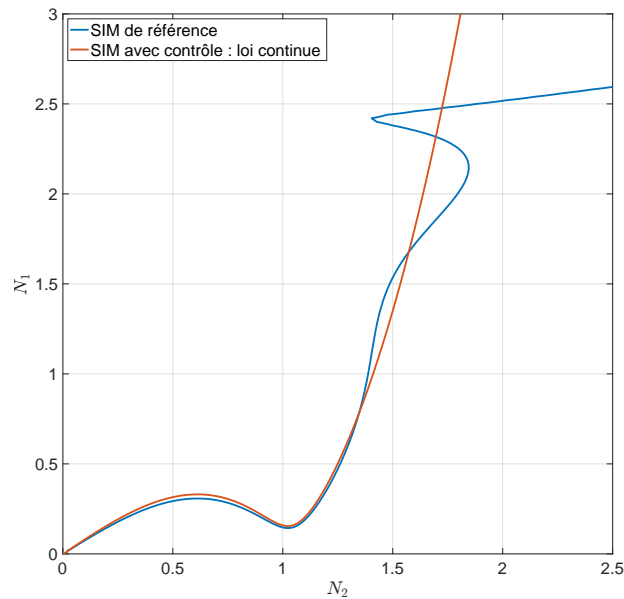


FIGURE 2.58: SIM : loi de contrôle polynomiale à ordre élevée

Dans les configurations proposées, l'utilisation de la forme complète de l'eq (2.113) ne permet pas de réduire l'amortissement vibratoire. Un  $K_{nlc}$  trop fort a tendance à desservir l'objectif visé. Lors de l'étude de l'absorbeur passif, on a vu que le transfert irréversible d'énergie était déjà très efficace ( $\approx 100\%$  d'absorption vibratoire). En revanche, le contrôle actif peut agir sur la rapidité du régime transitoire. Afin d'augmenter la vitesse, ce dernier introduit une loi de contrôle basée sur la vitesse de la structure primaire.

$$Fa(t) = 0.02\dot{x} \quad (2.116)$$

Ici, le paramètre a été choisi de façon itérative pour atteindre une diminution significative de la durée du régime transitoire tout en gardant la forme initiale du SIM à basse amplitude. Cependant, cette loi ne permet pas une absorption vibratoire sur toute la plage de fréquence, mais pour le cas d'un système sans perturbation extérieure.

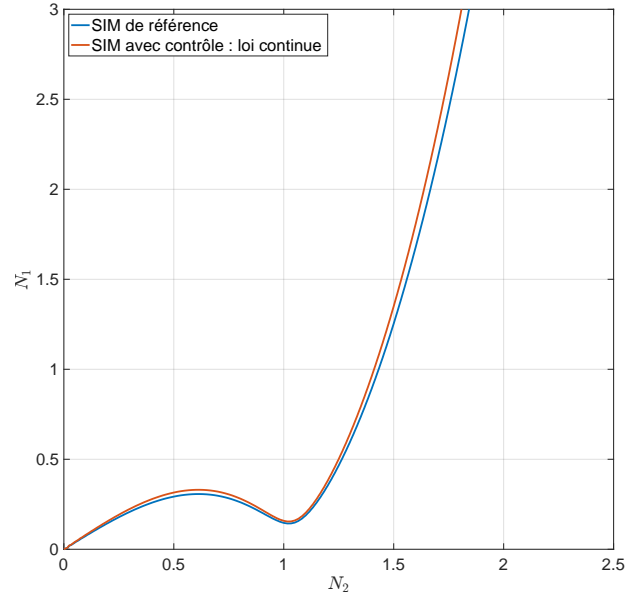


FIGURE 2.59: SIM : simple retour en vitesse

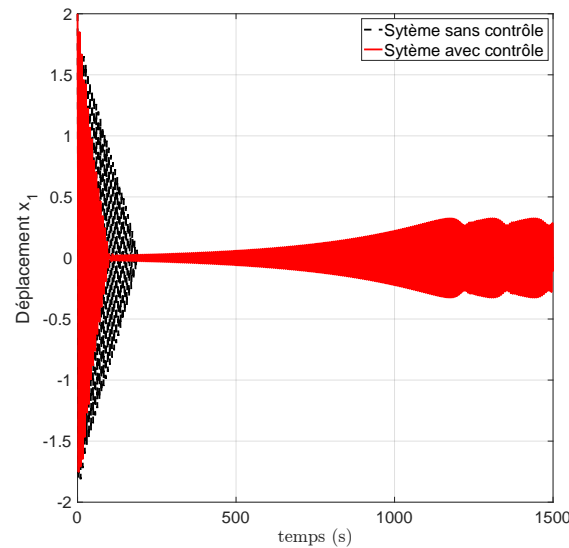


FIGURE 2.60: Régime libre : loi de contrôle continue

La figure 2.60 montre la comparaison du régime transitoire de la structure principale avec et sans contrôle. Une diminution de la durée du régime transitoire qui est due à l'ajout d'un simple retour en vitesse est constatée. Cependant, pour  $t \geq 150s$ , une augmentation d'amplitude et l'installation d'un régime auto-entretenu sont visibles. Ce dernier est dû à un couplage entre le contrôleur et l'hystérésis du SIM à basse amplitude. Un moyen d'éviter ce problème est d'activer et de désactiver le contrôleur en fonction de l'amplitude de la structure. Pour ce faire, une loi de contrôle discontinue peut être proposée tel que :

$$\begin{cases} Fa(t) = 0.02\dot{x} \text{ if } x_1 \leq 0.1 \\ Fa(t) = 0 \text{ if } x_1 < 0.1 \end{cases} \quad (2.117)$$

L'utilisation de (2.117) (qui n'est pas polynomiale), impose l'utilisation de la fonction

$G_1(N_1^2)$  du SIM (2.100). Dans la figure 2.61, le régime auto-entretenu a disparu et l'ajout du contrôleur permet une diminution significative de la durée du régime transitoire  $\approx 30\%$ .

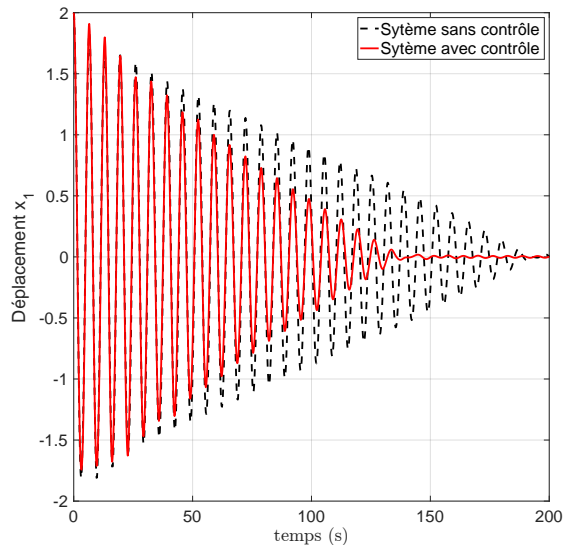


FIGURE 2.61: Régime transitoire : loi de contrôle discontinue

**Remarque :** La fonction  $G_2$  et sa dérivée  $H_2$  n'ont pas été utilisées dans ce manuscrit. Cependant, elle peut aussi être utilisée pour créer des SIM à formes complexes comme des cascades d'instabilités [19].

### 2.3.5 Conclusion

Les absorbeurs non-linéaires passifs permettent une très bonne dissipation de l'énergie vibratoire grâce au phénomène de transfert irréversible d'énergie. Dans cette étude, l'apport du contrôle actif dans ces absorbeurs a été explicité. À travers la présentation d'un SIM prenant en compte le contrôle actif, on a pu voir comment un contrôleur positionné à l'interface de la structure et de l'absorbeur pouvait modifier la forme du SIM. La modification temps réel des paramètres de l'absorbeur (contrôle semi-actif) favorise le maintien de l'efficacité du NES sur une plus large bande de fréquence. En injectant un effort non-linéaire portant sur les états de la structure primaire, le SIM prend une toute nouvelle dimension. Il devient alors un puissant outil de conception pour la partie passive, mais aussi pour le contrôleur. Le positionnement des points singuliers informe sur la stabilité du contrôleur le long des branches du SIM. Enfin, l'utilisation du contrôle actif pour la diminution de la durée du régime transitoire a été présentée en fin de partie. Toutes ces clés permettent de mieux comprendre le comportement à la résonance 1 : 1 d'un absorbeur non-linéaire.

## 2.4 Conclusion générale

Ce chapitre présente plusieurs contributions :

- Un algorithme capable de calculer la partie non-linéaire du contrôle par SMC
- La continuation et le calcul de stabilité des solutions périodiques d'un système singulier

- L'application d'un contrôleur robuste sur un absorbeur non-linéaire hybride
- Le calcul du Slow Invariant Manifold intégrant une loi de contrôle

Deux voies différentes ont été explorées dans le contrôle des absorbeurs de vibrations hybrides. La première concerne l'utilisation de la loi de contrôle pour dissiper l'énergie vibratoire. Nous avons pu voir que ce procédé, bien que très performant avec les lois choisies, ne permettait pas marier de façon équitable le contrôle actif et la dynamique non-linéaire. L'application d'un contrôle fort (basé sur les états du système) ignore presque complètement la dynamique tandis que cette dernière s'exprime fortement dans le cas d'un contrôle faible (basé sur les états de la structure à contrôler). Ce manque d'équité, comme dans tout mariage, ne peut fonctionner. Cette conclusion nous amène donc à la deuxième voie explorée : le contrôle semi-actif qui consiste à piloter les paramètres de l'absorbeur grâce au contrôleur. Dans ce cas, il a été montré que la modification des paramètres de l'absorbeur par le contrôle entraînait un profond changement topologique de l'image de la résonance 1 : 1 du système. À travers différentes lois de contrôle, nous avons vu qu'il était possible de modifier la forme de ce SIM pour compenser une défaillance de conception ou une évolution de la structure ou de son environnement. De plus, l'analyse du contrôle du TET a été réalisée. L'ajout du contrôle à ce phénomène déjà très performant permet d'améliorer la vitesse du transitoire résultant.

## References

- [1] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A. Levant, *et al.*, *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014, vol. 10.
- [2] K. Nonaka and H. Sugizaki, « Integral sliding mode altitude control for a small model helicopter with ground effect compensation », *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 2011.
- [3] B. Sumantri, N. Uchiyama, and S. Sano, « Least square based sliding mode control for a quad-rotor helicopter and energy saving by chattering reduction », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 66-67, pp. 769–784, 2016.
- [4] S. Tokat, M. S. Fadali, and O. Eray, « A classification and overview of sliding mode controller sliding surface design methods », *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, pp. 417–439, 2015.
- [5] J.-J. E. Slotine, W. Li, *et al.*, *Applied nonlinear control*, 1. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991, vol. 199.
- [6] G. Habib, T. Detroux, R. Vigié, and G. Kerschen, « Nonlinear generalization of Den Hartog's equal-peak method », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 52-53, pp. 17–28, 2015.
- [7] C. Collette and S. Chesné, « Robust hybrid mass damper », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 375, pp. 19–27, 2016.
- [8] C. Grenat, S. Baguet, C.-H. Lamarque, and R. Dufour, « A multi-parametric recursive continuation method for nonlinear dynamical systems », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 127, pp. 276–289, 2019.
- [9] C. da Silveira Zanin, A. Ture Savadkoohi, S. Baguet, R. Dufour, and G. Hurel, « Nonlinear vibratory energy exchanges in a meta-cell », *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 146, p. 104 148, 2022.



- [10] B. Cadiou, « Protection de structures soumises à des sollicitations dynamiques à l'aide d'un absorbeur non-linéaire », Ph.D. dissertation, Toulouse, ISAE, 2021.
- [11] C.-H. Lamarque, A. T. Savadkoohi, E. Etcheverria, and Z. Dimitrijevic, « Multi-scale dynamics of two coupled nonsmooth systems », *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, no. 12, p. 1 250 295, 2012.
- [12] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2011.
- [13] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.
- [14] C.-H. Lamarque, F. Thouverez, B. Rozier, and Z. Dimitrijevic, « Targeted energy transfer in a 2-DOF mechanical system coupled to a non-linear energy sink with varying stiffness », *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 16, pp. 2567–2577, 2015.
- [15] L. Manevitch, « The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables », *Nonlinear Dynamics*, vol. 25, pp. 95–109, 2001.
- [16] O. V. Gendelman, « Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 3, pp. 732–745, 2008.
- [17] T. Hill, A. Cammarano, S. Neild, and D. Wagg, « Interpreting the forced responses of a two-degree-of-freedom nonlinear oscillator using backbone curves », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 349, pp. 276–288, 2015.
- [18] B. Cadiou, C. Stephan, A. Renoult, and G. Michon, « Damping adjustment of a nonlinear vibration absorber using an electro-magnetomechanical coupling », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 518, p. 116 508, 2022.
- [19] G. R. G. da Silva, A. S. Bazanella, C. Lorenzini, and L. Campestrini, « Data-driven LQR control design », *IEEE control systems letters*, vol. 3, no. 1, pp. 180–185, 2018.



## Chapitre 3

# Conception d'un absorbeur de vibrations non-linéaire hybride

---

### Sommaire

3.1	Introduction . . . . .	132
3.2	Présentation du banc d'essai : partie passive . . . . .	132
3.3	Présentation du banc d'essai : partie active . . . . .	136
3.4	Identification non-linéaire : restoring force surface method . . . . .	138
3.5	Considérations pratiques . . . . .	140
3.5.1	Générer des non-linéarité de façon artificielle par des bobines électrodynamiques . . . . .	140
3.5.2	Gestion expérimentale du retard et du filtrage . . . . .	141
3.6	Conclusion . . . . .	142
	Références du chapitre . . . . .	142

---

### Résumé du chapitre

Le présent chapitre sert de préambule au suivant. Il présente la mise en œuvre expérimentale d'un absorbeur non-linéaire hybride. La théorie de l'identification des systèmes non-linéaires et quelques considérations pratiques y sont présentées.

### 3.1 Introduction

Bien que la littérature sur la mise en œuvre expérimentale des systèmes non-linéaires soit de plus en plus riche, la conception de non-linéarités reste délicate. Parmi toutes les démarches qui permettent la génération de non-linéarités pour les abordeurs de vibrations, deux émergent majoritairement de l'existant :

- l'utilisation de ressorts [1]-[4]
- l'utilisation de cordes [1], [5]-[10]

Ces deux technologies sont assez similaires. L'avantage des ressorts réside dans leurs robustesses sur le long terme tandis que les cordes sont plus simples d'utilisation. Dans la démarche de réalisation d'un prototype, les cordes ont été choisies pour la raison évoquée.

La littérature sur les absorbeurs non-linéaires hybrides est quasi-inexistante. Les travaux de CADIOU et al. [2] sont comparables au système final que l'on souhaite réaliser. L'auteur utilise un couplage électromagnétique pour ajuster l'amortissement de la structure. Cependant, il n'est pas question de contrôle actif dans ce cas. Plus récemment, les travaux de XU et al. [11] proposent de faire varier la raideur linéaire d'un NES avec une boucle contrôle (PID) grâce à l'utilisation de patches piézoélectriques. Notre positionnement par rapport à l'existant réside donc dans l'ajout d'une partie active modulable en temps réel comprenant un contrôleur non-linéaire. La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation du banc d'essai qui est composé de la partie passive et active. La seconde introduira les notions théoriques utilisées dans cette thèse pour l'identification des systèmes non-linéaires. En fin de chapitre, des considérations pratiques<sup>1</sup> pour l'expérimentation en dynamique non-linéaire seront présentées.

### 3.2 Présentation du banc d'essai : partie passive

Le système passif est composé d'une structure primaire à contrôler assimilable à un immeuble à un étage et de l'absorbeur non-linéaire sur lequel il est posé (voir Fig. 3.1). Dans cette étude, seul son premier mode est considéré. Il correspond à la flexion des plaques d'aciers latérales visibles sur la figure 3.1. Le premier étage, constitué d'une plaque d'acier renforcé par des profilés en aluminium, est considéré comme rigide. Des assemblages boulonnés contribuent au maintien des plaques d'acier entre elles. Les caractéristiques géométriques des plaques sont données dans le tableau 3.1.

Plaque(quantité)	Dimension $L \times l \times e$ (mm)
Plaque verticale ( $\times 2$ )	$500 \times 250 \times 5$
Plaque horizontale ( $\times 1$ )	$400 \times 250 \times 5$

TABLE 3.1: Données géométriques de la structure primaire

---

1. Cette partie n'est pas nécessaire pour la compréhension du manuscrit.

### 3.2. PRÉSENTATION DU BANC D'ESSAI : PARTIE PASSIVE

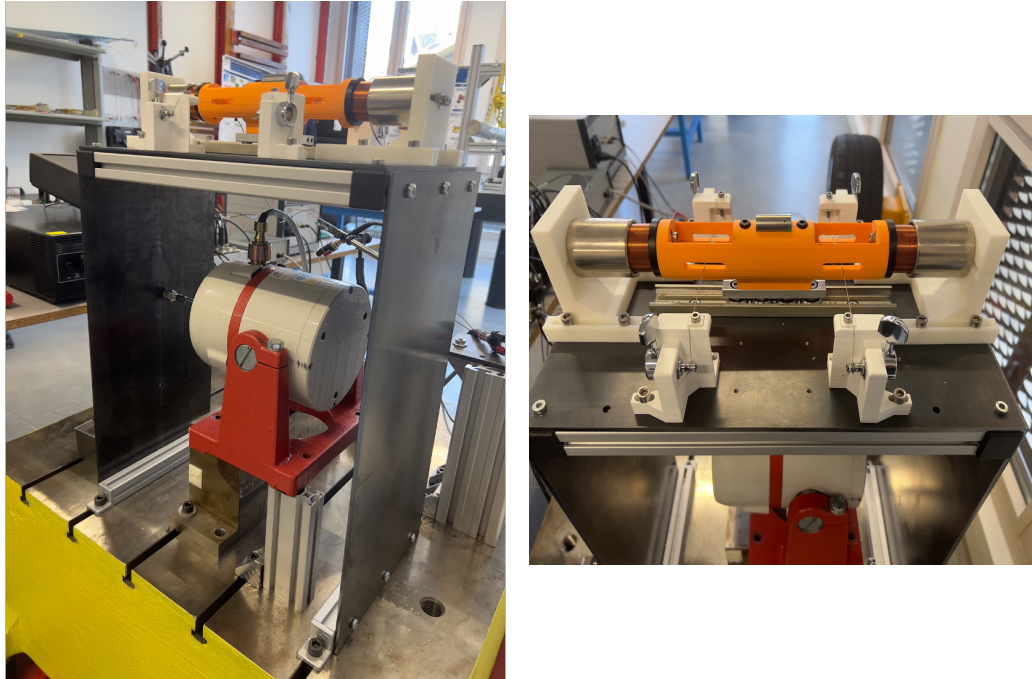


FIGURE 3.1: À gauche structure primaire et son absorber, à droite zoom sur l'absorbeur

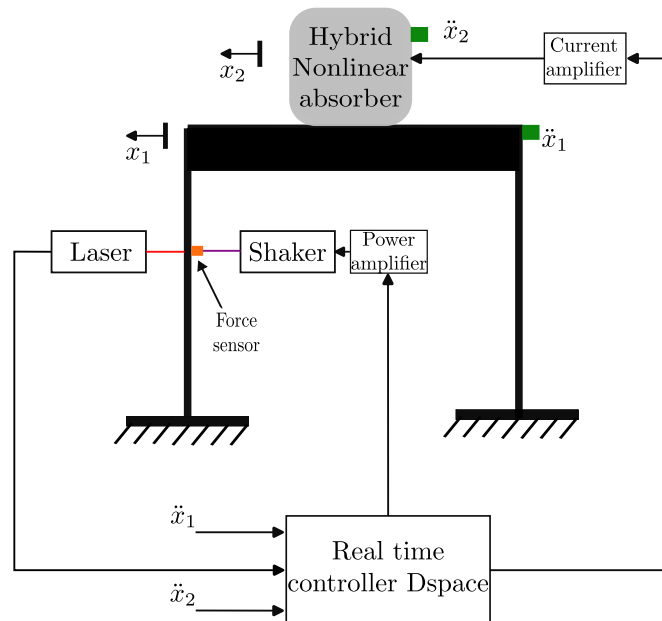


FIGURE 3.2: Banc d'essai : Schéma de principe du banc d'essai

Ici, la structure est supposée linéaire<sup>2</sup>. Le forçage se fait par un pot vibrant (positionné à 150mm de haut) comme schématisé dans la figure 3.2. Le positionnement en hauteur du pot vibrant permet d'obtenir des débattements suffisants pour atteindre le seuil de déclenchement de l'absorbeur tout en restant dans les limites de débattement du

2. En pratique, et comme sur beaucoup de structures, la linéarité parfaite d'un système mécanique est difficile à atteindre. Dans notre cas, la structure présente un comportement assouplissant pour des niveaux d'efforts importants dû en partie aux assemblages boulonnés et aux conditions aux limites.

pot vibrant. Afin d'obtenir une première estimation de la fréquence propre de la structure, un calcul par la méthode des éléments finis est réalisé sous Comsol. Le tableau 3.2 donne les paramètres matériaux et modaux.

Module d'Young (Gpa)	Masse modale effective	Fréquence propre (Hz)
210	$\approx 9.42$	13.272

TABLE 3.2: Données dynamiques de la structure primaire

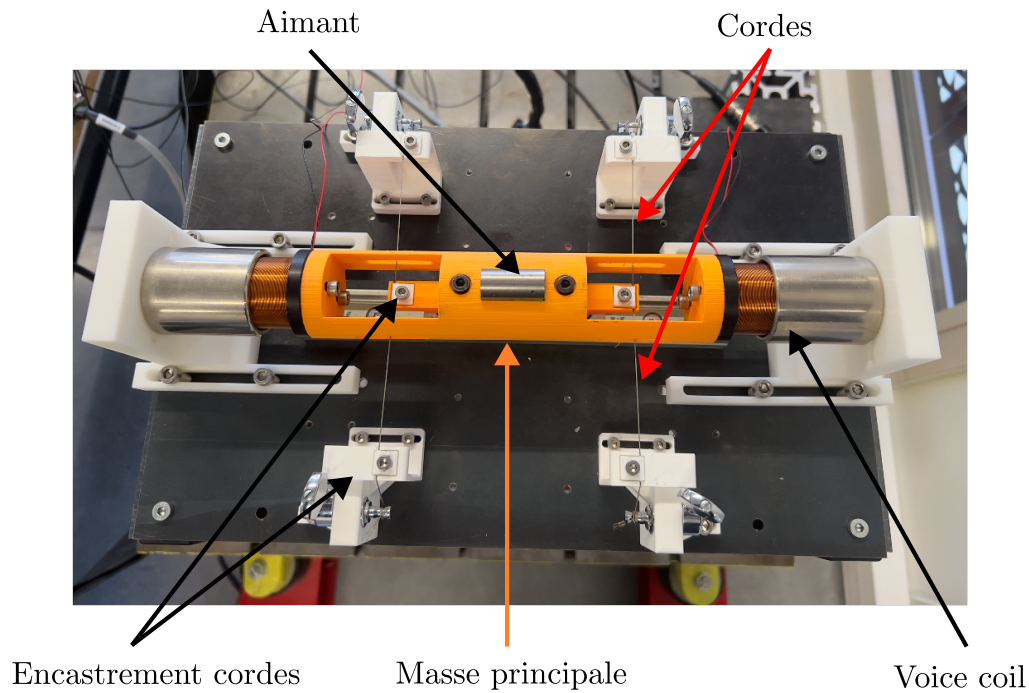


FIGURE 3.3: Banc d'essai : absorbeur hybride non-linéaire

La figure 3.3 présente l'absorbeur hybride non-linéaire. Il est composé d'une masse mobile réalisée en impression 3D (orange). À cette dernière est ajoutée la masse de deux bobines utilisées pour la gestion de la partie active. De plus, un aimant permanent est présent sur la masse principale. Ce dernier n'est pas utilisé dans cette étude et est conservé pour un éventuel ajustement du ratio des masses modales effectives de la structure primaire et de l'absorbeur. Le mouvement de l'absorbeur est guidé par un rail qui contribue à la compensation des défauts d'alignements et minimise les frottements grâce à des roues montées sur roulements à billes. Le couplage avec la structure primaire est assuré par quatre cordes métalliques encastrées au niveau de la masse principale et des éléments bloquants. Des mécaniques de guitare sont utilisées pour régler la pré-tension des cordes<sup>3</sup>. En plus de cela, des bloques-cordes sont utilisés pour assurer un bon maintien de la corde.

3. En effet, dans le cas d'un absorbeur accordé sur une structure (TMD ou NLTVA), la pré-tension n'est pas nulle et se doit d'être réglable

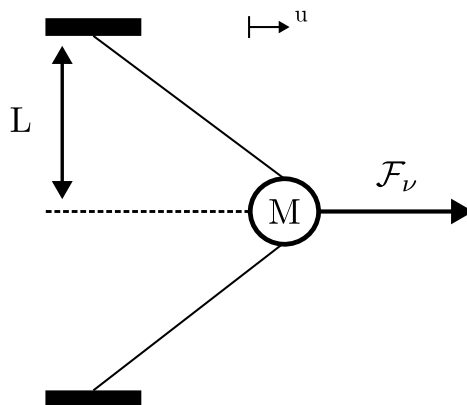


FIGURE 3.4: Schéma de principe de l'absorbeur

La figure 3.4 montre le mouvement des cordes dans la direction  $u$ . Si on considère une longueur de corde  $L$  en élasticité linéaire avec un module d'Young  $E$  et une section  $A$ , on peut écrire :

$$\mathcal{T} = EA\nu \quad (3.1)$$

où  $\nu$  correspond à l'allongement relatif tel que :

$$\nu = \frac{\sqrt{L^2 + u^2} - L}{L} \quad (3.2)$$

En posant  $T_0$ , la pré-tension dans la corde avant sa déformation, on peut exprimer l'équilibre de la corde :

$$\mathcal{F}_\nu(u) = 2(T_0 + \mathcal{T}) \sin(\gamma) \quad (3.3)$$

avec

$$\sin(\gamma) = \frac{u}{\sqrt{L^2 + u^2}} \quad (3.4)$$

En développant la série de Taylor autour de  $u = 0$  l'eq. (3.3) on obtient :

$$\mathcal{F}_\nu(u) \approx \frac{2T_0}{L}u + \frac{EA - T_0}{L^3}u^3 - \frac{3(EA - T_0)}{4L^5}u^5 + \mathcal{O}(u^7) \quad (3.5)$$

pour

$$(L^2 + u^2)^{-1/2} \approx \frac{1}{L} - \frac{u^2}{2L^3} + \frac{3u^4}{8L^5} + \mathcal{O}(u^6) \quad (3.6)$$

L'expression de la force de rappel élastique  $\mathcal{F}_\nu(u)$  s'écrit finalement :

$$\mathcal{F}_\nu(u) = \frac{2T_0}{L}u + \frac{EA - T_0}{L^3}u^3 + \mathcal{O}(u^5) \quad (3.7)$$

Dans l'équation (3.7), on peut voir une partie linéaire qui dépend de la pré-tension des cordes et une partie non-linéaire cubique. En pratique, du fait du désalignement des cordes et des défauts de conception, il est assez difficile d'obtenir une tension  $T_0$  nulle. Dans la littérature, on trouve différentes solutions pour pallier ce problème. Dans les travaux de PENNISI et al. [12], les auteurs proposent de supprimer cette pré-tension avec un jeu d'aimants qui contrebalance les efforts linéaires. MCFARLAND et al. [9] misent sur un alignement parfait de leur banc d'essai et appliquent la pré-tension suffisante pour que les cordes ne ploient pas sous leurs propres poids. Ces solutions sont à considérer dans le cas de fréquences propres assez basses (5–6 Hz dans les deux exemples présentés).

Pour amortir les vibrations de la structure primaire de cette étude, la fréquence propre de l'absorbeur doit être choisie pour que son mode non-linéaire coupe celui de la structure primaire au niveau d'énergie choisi. Il est important de comprendre que c'est par cette interaction modale que le NES obtient son phénomène primaire : le TET (voir section 2.3). Comme il a été explicité dans la section 2.3, si l'on considère une non-linéarité donnée, la fréquence propre de l'absorbeur peut influencer de façon positive ou négative sur le phénomène de TET. Dans ces travaux, les contraintes de débattement maximal de l'absorbeur et de rapport de masse sont à prendre en compte afin de pouvoir appliquer le contrôle actif. Les données géométriques des parties constitutives de l'absorbeur sont données dans le tableau 3.3.

Masse totale de l'absorbeur (Kg)	L (mm)	Rayon corde (mm)	Module d'Young corde (GPa)
0.690	70	0.27	69
Masse principale + chariot (Kg)	Masse 1 bobine (kg)	Masse aimant (Kg)	$T_0$ (N)
0.120 + 0.170	0.160	0.07	$\neq 0$

TABLE 3.3: Données géométriques de l'absorbeur

### 3.3 Présentation du banc d'essai : partie active

La partie active permet l'implémentation de loi de contrôle. La figure 3.2 expose le positionnement des actionneurs et des capteurs utilisés. Afin d'alimenter l'observateur d'états (voir Sect. 1.3.5), deux accéléromètres et un laser seront utilisés. De plus, une bobine électrodynamique peut être utilisée pour reconstruire directement les états relatifs. La partie actionneur est formée d'une bobine et d'un pot vibrant.

#### Le pot vibrant

Le pot vibrant applique la perturbation extérieure. Afin de rendre la structure primaire non-linéaire tout en gardant des débattements réduits, le pot vibrant est utilisé pour générer une non-linéarité cubique (raidissante) artificielle<sup>4</sup>. Pour ce faire, un retour d'état non-linéaire portant sur le déplacement de la structure est réalisé. Ce dernier est obtenu de façon directe par le laser. Comme il est visible sur la figure 3.2, le laser est positionné au point d'application de l'effort. Cette colocalisation permet de minimiser le retard présent dans la boucle de retour. Bien que locale, la non-linéarité agit de façon globale sur le système et contribue au raidissement de la structure. Pour générer la non-linéarité avec le pot vibrant, certaines considérations pratiques sont explicitées pour les lecteurs intéressés dans la section 3.5.

#### La bobine électrodynamique

La bobine électrodynamique (BE) est l'élément majeur du contrôle hybride. Couplée à un observateur d'état, elle permet de générer une grande variété d'efforts. Son principe de fonctionnement est similaire à celui d'un pot vibrant. Elle transforme un flux mécanique (vitesse de translation à l'interface de la BE) en un effort électrique.

4. Il est évidemment possible de générer d'autres types de non-linéarité avec cette méthode.



### 3.3. PRÉSENTATION DU BANC D'ESSAI : PARTIE ACTIVE

De façon plus mathématique, la force de Lorentz permet d'écrire l'effort injecté par la bobine électrodynamique  $f$  :

$$f = Ti \quad (3.8)$$

où  $T$  est une constante de transduction intrinsèque à la BE et  $i$  le courant dans la bobine. L'intérêt de la BE réside dans sa simplicité d'utilisation et d'implémentation. De plus, contrairement au patch piézoélectrique, elle ne nécessite pas de déformation. Les caractéristiques des bobines électrodynamiques utilisées sont données dans le tableau 3.4.

INTERMITTENT FORCE @10% DUTY CYCLE	68.4 N	15.4 LB
CONTINUOUS FORCE	21.6 N	4.9 LB
FORCE CONSTANT	10.3 N/A	2.3 LB/A
BACK EMF CONSTANT	10.3 v/m/s	0.26 v/m/s
STROKE	31.8 mm	1.25 IN
COIL CLEARANCE PER SIDE	0.38 mm	0.015 IN
COIL ASSY MASS	165 GR	5.8 OZ
BODY MASS	405 GR	14.3 OZ
COIL RESISTANCE	6.3 Ohms	
COIL INDUCTANCE @120 Hz	11.9 mH	
MAX CONTINUOUS POWER	28.0 W	

ALL VALUES AT 25°C

TABLE 3.4: Paramètres des bobines électrodynamiques, d'après [13]

Le système est constitué de plusieurs boucles de rétroaction formées autour du système passif. La sous-section suivante présente le détail de ces boucles.

#### Système hybride : visualisation des boucles de contrôle

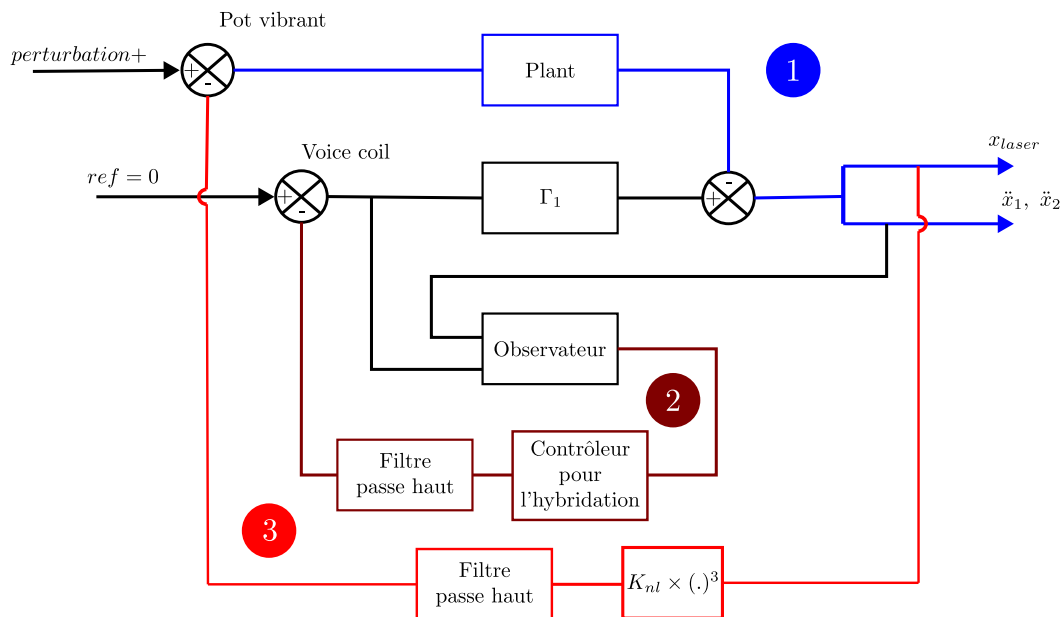


FIGURE 3.5: Schéma bloc intégration partie passive et active

Le schéma 3.5 montre l'incorporation de la partie active avec la partie passive. On observe trois systèmes principaux :

- 1 : la fonction de transfert entre la perturbation extérieure et la mesure, c'est une voie de transfert. Elle sert à mesurer (constater) la performance du contrôle sur le système<sup>5</sup>.
- 2 : Notre sujet d'étude. Elle correspond à la fonction de transfert  $\Gamma$  entre l'actionneur BE et la mesure passant par un observateur.
- 3 : génération de la non-linéarité artificielle par le pot vibrant dans la structure primaire avec  $K_{nl}$  le gain choisi par l'utilisateur.

### 3.4 Identification non-linéaire : restoring force surface method

La Restoring Force Surface méthode ou RFS est une méthode d'identification modale qui se base sur la seconde loi de Newton. Elle permet d'exprimer les efforts internes  $f_i(x, \dot{x})$  en fonction des forces extérieures et inertielles pour chaque ddl. À partir des équations de mouvement, une identification par moindres carrés est utilisée pour trouver les paramètres du modèle. Le processus de la méthode est explicité dans les deux articles de WORDEN [14], [15] avec une attention particulière à la partie 1 qui présente le post-traitement et l'intégration temporelle des data. Pour les plus curieux, l'article de KERSCHEN et al. [16] qui résume les différentes méthodes d'identification non-linéaire donne une approche plus pragmatique de la méthode et la thèse de WORDEN [17] lui apporte de bons compléments de compréhension.

L'identification nous sert à deux choses : d'abord valider et recalibrer le modèle numérique. Comme ce dernier représente la fonction de transfert entre la perturbation extérieure et la mesure, l'identification est réalisée sur la voie de transfert 1 (voir figure 3.5) en utilisant le pot vibrant comme actionneur. Ensuite, l'identification permet l'obtention des paramètres de l'observateur. Pour cela, la fonction de transfert entre les bobines électrodynamiques et la mesure c.-à-d la boucle 2 de la figure 3.5 est utilisée. Ces deux fonctions de transfert sont basées sur le même capteur, mais pas sur le même actionneur. L'écriture des équations dynamiques n'est donc pas la même. Si l'on considère l'équation de mouvement pour étudier la performance du système composée de la non-linéarité artificielle (voir 1 et 3 de 3.5) on peut écrire :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_{nl1} x_1^3 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) + k_{nl2} (x_1 - x_2)^3 \\ = -m_1 \ddot{x}_1 + F_{ext}(t) \\ f_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + k_{nl2} (x_2 - x_1)^3 = \\ -m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - m_2 (\ddot{x}_1) \end{cases} \quad (3.9)$$

La deuxième équation de (3.9) peut-être vue comme un oscillateur à 1 ddl pour lequel une accélération par la base était appliquée [18]. Si l'on s'intéresse à la fonction de transfert entre les bobines électrodynamiques et le capteur en considérant toujours l'ajout d'une

---

5. Le "plant" correspond à la voie de transfert principale

non-linéarité artificielle (voir 1 et 3 de 3.5) on obtient :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_{nl1} x_1^3 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) + k_{nl2}(x_1 - x_2)^3 \\ = -m_1 \ddot{x}_1 + F_a(t) \\ f_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_{nl2}(x_2 - x_1)^3 \\ = -m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - m_2(\ddot{x}_1) - F_a(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Plusieurs questions se posent alors, comment être sûr que les non-linéarités du modèle sont fidèles à la réalité ? Quel signal d'excitation appliquer au système ?

Lorsque l'on identifie par la méthode des moindres carrés des données temporelles de longueur  $n_t$ , on crée un polynôme  $P_x$  de degré  $N \in \mathbb{N}$  et on cherche ses coefficients  $\theta$  tels que :

$$P_x = \Xi_x \theta \quad (3.11)$$

avec  $\Xi_x \in \mathbb{R}^{n_t \times (N+1)^4}$

$$\Xi_x = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \sum_{p=0}^N x_1^i \dot{x}_1^k (x_1 - x_2)^l (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^p \quad (3.12)$$

et

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{(N+1)^4} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Sans certitude sur le modèle, on a tendance à choisir  $N$  assez grand. On obtient alors un long polynôme d'ordre élevé. Afin de ne garder que les termes représentatifs du système étudié, la méthode proposée dans le livre de WORDEN et al. [19] peut être appliquée. Elle consiste à calculer la variance  $\sigma_i^2$  de chaque monôme "i" du polynôme, à diviser chaque  $\sigma_i^2$  par la variance totale du polynôme  $\sigma_p^2$  et à fixer une valeur seuil en dessous de laquelle le monôme n'a que très peu d'influence sur le polynôme total. Ce ratio s'appelle le facteur d'importance noté  $I_i$ .

$$I_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_p^2} \quad (3.14)$$

Avec cette méthode, on est en mesure de dire quels monômes sont importants ou non dans le modèle et de répondre à la question souvent mise de côté : dois-je considérer un amortissement non-linéaire ? Cependant, la méthode présentée précédemment ne permet pas de s'assurer que la valeur des coefficients du modèle est la bonne. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer la MSE normalisée (Mean Squared Error) qui permet de mesurer l'écart entre un modèle réel <sup>6</sup>  $y$  et un modèle identifié  $\hat{y}$ . La définition de la MSE est alors :

$$MSE = \frac{100}{n_t \sigma_p^2} \sum_{i=1}^{n_t} (-\hat{y} - y)^2 \quad (3.15)$$

---

6. Le modèle réel correspond au membre de droite des systèmes d'équations de mouvement (3.9) et (3.10). Ce sont des grandeurs connues.

Dans la littérature [20], une identification est considérée comme bonne pour une  $MSE < 5\%$  et excellente pour  $MSE < 1\%$ .

**Remarque :** Afin de faciliter les calculs lors de l'identification, les non-linéarités sont écrites en faisant apparaître la fonction signe (voir Chap. 2) telle que :

$$\alpha_i x^3 = \alpha_i \text{sign}(x)|x|^3 \quad (3.16)$$

Enfin, en ce qui concerne le signal d'excitation, il y a deux possibilités. La première est d'utiliser le bruit blanc, ou plutôt le multi-sinus<sup>7</sup> [21]. L'inconvénient du bruit blanc réside dans le niveau d'énergie qu'il distribue à la structure, et ce même sur une faible bande de fréquence. En effet, la puissance du bruit nécessaire pour voir les hystérésis liées au phénomène non-linéaire ne serait pas raisonnable. Le bruit blanc est donc à privilégier lorsqu'il n'y a pas d'hystérésis en amplitude. Les travaux de NOËL et al. [22] sur les circuits thermo-électriques sont un bon exemple du type de comportement observable avec du bruit blanc.

Dans le cas où le phénomène de saut devrait être capturé, le sinus balayé est à mon sens, le plus pertinent. Il est vrai qu'il existe une différence entre une fréquence obtenue par bruit blanc et par sinus balayé [23] due à la dynamique du balayage. Cependant, ce décalage peut être limité avec une vitesse de balayage assez lente. Dans cette thèse, le profil d'excitation utilisé est celui tiré des travaux de LIU et al. [24]. Il consiste en une montée en fréquence de  $f_{min}$  à  $f_{max}$ , suivie d'une stabilisation à  $f_{max}$  puis d'une descente en fréquence.

Cette méthode d'identification sera mise en application dans le chapitre 4. La section suivante concerne les considérations pratiques pour la gestion expérimentale et l'identification des systèmes non-linéaires. Elle n'est pas nécessaire pour la compréhension de la suite du manuscrit.

## 3.5 Considérations pratiques

### 3.5.1 Générer des non-linéarité de façon artificielle par des bobines électrodynamiques

Générer une non-linéarité avec des actionneurs est en pratique assez simple. Cependant, certains points sont à prendre en compte :

- Le premier point concerne la linéarité de la fonction de transfert des actionneurs (effort généré/tension d'entrée) sur la plage de fréquence étudiée. Lorsqu'un actionneur est utilisé pour générer une perturbation, cette linéarité n'est pas nécessaire, mais fortement conseillée. En revanche, si l'actionneur est utilisé pour générer une non-linéarité, c'est obligatoire. En effet, les effets non-linéaires du pot vibrant (souvent à basse fréquence) se combinent à la non-linéarité injectée par la boucle de feedback pour en changer sa nature, générer des résonances internes ou des sous-harmoniques [25]. ABELOOS et al. [26] ont dû reconsidérer le mode d'intérêt pour éviter ce problème en prenant un mode à plus haute fréquence. Faisant cela, ils se placent dans la bande de fréquence pour laquelle la fonction de transfert du pot

---

7. L'excitation est composée d'une somme de sinus à fréquence et amplitude choisies sur une bande de fréquence fixée. Cette méthode rend les post-traitements et l'identification plus simple.

### 3.5. CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

vibrant est linéaire. Heureusement pour nous, ces effets n'ont jamais été constatés expérimentalement, car très dépendants du pot vibrant.

- Le deuxième point, lié au premier, concerne la course des actionneurs. Dans le cas des bobines, une hypothèse forte sur la constante de transduction est considérée. En effet, cette dernière n'est utilisable que pour des petits débattements de la bobine. La figure 3.6 présente l'évolution de la constante de transduction des actionneurs utilisée en fonction de la course de la bobine dans l'aimant permanent. On peut voir que cette dernière n'est pas linéaire sur toute la course de la bobine.

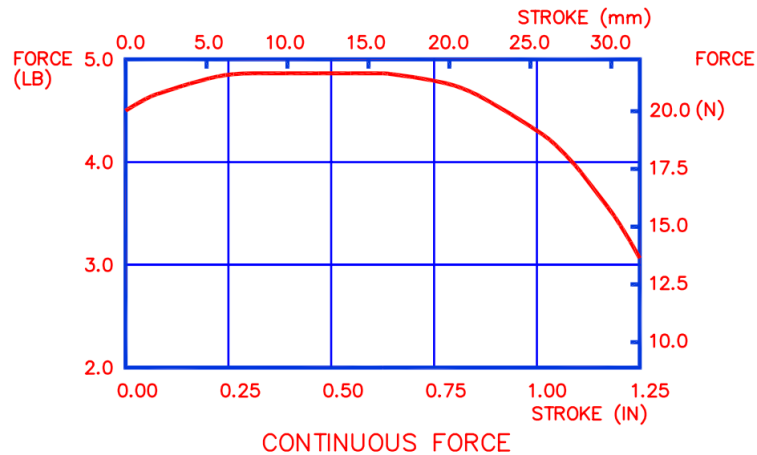


FIGURE 3.6: Coefficient de couplage des bobines électrodynamiques en fonction du débattement, d'après [13].

Dans notre cas, ce coefficient est considéré constant, car le débattement reste, en moyenne, localisé dans la bande linéaire<sup>8</sup>.

- Le troisième point concerne la configuration de montage des bobines et l'effort transmis. Celles-ci sont connectées à un amplificateur de courant afin de les piloter directement en effort. Cet amplificateur applique une impédance infinie ce qui impose une configuration de montage en boucle ouverte. Ceci étant, les bobines n'introduisent pas d'amortissement dans le système. De plus, il est à noter que toute la puissance dans ces dernières n'est pas convertie en effort. La puissance perdue est convertie en chaleur (perte par effet Joule). Ces pertes peuvent être négligées si elles sont inférieures à 5%.
- Enfin le dernier point concerne les interactions électromagnétiques entre les deux bobines qui peuvent entraîner des comportements non désirés. Celles-ci ne sont pas considérées dans cette étude, car les aimants permanents sont entourés par une cage de Faraday.

#### 3.5.2 Gestion expérimentale du retard et du filtrage

Dans le chapitre 2, on a abordé les problèmes provoqués par le système d'acquisition et de retard. Le matériel utilisé ici est une carte d'acquisition Dspace. L'échantillonnage temporel, pour nos applications à 15 Hz, est à 5 kHz. Afin de déterminer le retard de discrétisation, on peut directement mesurer une sortie grâce à une entrée de la carte. On trouve alors un déphasage d'environ 0.4 degré<sup>9</sup>. Ce déphasage est le retard minimum

8. On verra par la suite que cette hypothèse ne fonctionne pas pour tous les efforts

9. Attention sous Dspace les pas de temps ne sont pas exactement constants

auquel il faut ajouter le déphasage provoqué par la chaîne de mesure (filtres passe-bas dans les amplificateurs) et celui de filtres utilisés pour le contrôle actif. En effet, afin de protéger les actionneurs des composantes de courant continues, des filtres passe-haut d'ordre élevé sont utilisés. Dans cette thèse, la fréquence propre de la structure située dans les basses fréquences rend la gestion des filtres plus complexe. En effet, la fréquence de coupure des filtres se doit d'être suffisamment basse pour ne pas introduire un déphasage trop important, avec un ordre faible pour ne pas ralentir la carte d'acquisition. Afin de respecter ces critères, un filtre a été choisi sous sa forme elliptique (filtre de Cauer).

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu les caractéristiques et la mise en œuvre du banc d'essai. Il consiste en une structure primaire assimilable à un immeuble à 1 étage et d'un absorbeur hybride non-linéaire sur lequel il est posé. Cette structure peut devenir non-linéaire par ajout d'une non-linéarité artificielle. Lors de ces études, seules le premier mode de flexion est considéré. Les non-linéarités de l'absorbeur sont générées par des cordes et peuvent être ajustées en fonction des cas d'application par l'ajout ou la suppression de la pré-tension dans les cordes. La partie active de l'absorbeur est gérée par une bobine électrodynamique et un observateur qui permettent un contrôle basé sur plusieurs états de la structure. De plus, une méthode d'identification par la méthode de la restoring force surface a été présentée.

### References

- [1] K. Dekemele, P. Van Torre, and M. Loccufer, « Design, construction and experimental performance of a nonlinear energy sink in mitigating multi-modal vibrations », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 473, p. 115–243, 2020.
- [2] B. Cadiou, C. Stephan, A. Renoult, and G. Michon, « Damping adjustment of a nonlinear vibration absorber using an electro-magnetomechanical coupling », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 518, p. 116–508, 2022.
- [3] E. Gourdon, N. Alexander, C. Taylor, C. Lamarque, and S. Pernot, « Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: Theoretical and experimental results », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 300, pp. 522–551, 2007.
- [4] D. Qiu, S. Seguy, and M. Paredes, « Tuned Nonlinear Energy Sink With Conical Spring: Design Theory and Sensitivity Analysis », *Journal of Mechanical Design*, vol. 140, no. 1, 2017.
- [5] G. Pennisi, C. Stephan, E. Gourc, and G. Michon, « Experimental investigation and analytical description of a vibro-impact NES coupled to a single-degree-of-freedom linear oscillator harmonically forced », *Nonlinear Dynamics*, vol. 88, no. 3, pp. 1769–1784, 2017.
- [6] A. Lund, S. J. Dyke, W. Song, and I. Billionis, « Identification of an experimental nonlinear energy sink device using the unscented Kalman filter », en *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 136, p. 106–512, 2020.

- [7] X. Wang, X.-F. Geng, X.-Y. Mao, H. Ding, X.-J. Jing, and L.-Q. Chen, « Theoretical and experimental analysis of vibration reduction for piecewise linear system by nonlinear energy sink », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 172, p. 109 001, 2022.
- [8] S. A. Hubbard, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, and G. Andersen, « Targeted Energy Transfer Between a Swept Wing and Winglet-Housed Nonlinear Energy Sink », *AIAA Journal*, vol. 52, no. 12, pp. 2633–2651, 2014.
- [9] D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis, « Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency », *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, no. 6, pp. 891–899, 2005.
- [10] K. Dekemele, G. Habib, and M. Loccufer, « The periodically extended stiffness nonlinear energy sink », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 169, p. 108 706, 2022.
- [11] K.-F. Xu, M.-Q. Niu, Y.-W. Zhang, C.-Y. Meng, and L.-Q. Chen, « A nonlinear energy sink enhanced by active varying stiffness for spacecraft structure: theory, simulation, and experiment », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 204, p. 110 787, 2023.
- [12] G. Pennisi, B. Mann, N. Naclerio, C. Stephan, and G. Michon, « Design and experimental study of a Nonlinear Energy Sink coupled to an electromagnetic energy harvester », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 437, pp. 340–357, 2018.
- [13] Moticont, *Linear Voice Coil Motor : LVCM-044-051-01*.
- [14] K. Worden, « Data processing and experiment design for the restoring force surface method, part I: integration and differentiation of measured time data », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 4, no. 4, pp. 295–319, 1990.
- [15] K. Worden, « Data processing and experiment design for the restoring force surface method, part II: Choice of excitation signal », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 4, no. 4, pp. 321–344, 1990.
- [16] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, and J.-C. Golinval, « Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, no. 3, pp. 505–592, 2006.
- [17] K. Worden, « Parametric and Nonparametric Identification of Nonlinearity In Structural Dynamics », Ph.D. dissertation, Heriot-Watt University Department of Mechanical Engineering, 1989.
- [18] G. Kerschen, V. Lenaerts, and J.-C. Golinval, « Identification of wire rope isolators using the restoring force surface method », in *International Conference on Structural Systems Identification*, 2001.
- [19] K. Worden and G. R. Tomlinson, *Nonlinearity in Structural Dynamics, Detection, Identification and Modelling*, eng. London: Taylor & Francis, 2001.
- [20] G. Kerschen, J.-C. Golinval, and K. Worden, « Theoretical and experimental identification of a non-linear beam », *Journal of Sound and vibration*, vol. 244, no. 4, pp. 597–613, 2001.
- [21] J.-P. Noël and G. Kerschen, « Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, pp. 2–35, 2017.

- [22] J.-P. Noël, E. Evers, and T. Oomen, « Nonlinear Data-driven Identification of a Thermo-electric System », in *39th Benelux Meeting on Systems and Control*, University of Groningen, 2020, p. 100.
- [23] N. Roy, « Impact of residual modes in structural dynamics », 2012.
- [24] Q. Liu, Z. Hou, Y. Zhang, X. Jing, G. Kerschen, and J. Cao, « Nonlinear Restoring Force Identification of Strongly Nonlinear Structures by Displacement Measurement », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 144, no. 3, 2021.
- [25] S. Peter, F. Schreyer, P. Reuss, and L. Gaul, « Consideration of local stiffening and clearance nonlinearities in coupled systems using a generalized harmonic balance method », in *Proceedings of ISMA*, 2014, pp. 3097–3110.
- [26] G. Abeloos, L. Renson, C. Collette, and G. Kerschen, « Stepped and swept control-based continuation using adaptive filtering », *Nonlinear Dynamics*, vol. 104, no. 4, pp. 3793–3808, 2021.



## Chapitre 4

# Validation expérimentale d'un absorbeur de vibrations non-linéaire hybride

---

### Sommaire

4.1	Introduction . . . . .	146
4.2	Partie 1 : Contrôle par sliding mode d'une structure non-linéaire . . . . .	146
4.2.1	Identification de l'oscillateur de Duffing . . . . .	147
4.2.2	Résultats expérimentaux et comparaison numérique . . . . .	150
4.2.3	Conclusion . . . . .	151
4.3	Partie 2 : Contrôle semi-actif d'un absorbeur non-linéaire (HNES) . . . . .	151
4.3.1	introduction . . . . .	151
4.3.2	Identification des paramètres du NES . . . . .	153
4.3.3	Résultats expérimentaux pour l'absorbeur non-linéaire adaptatif . . . . .	155
4.3.4	Conclusion . . . . .	160
4.4	Conclusion du chapitre . . . . .	160
	Références du chapitre . . . . .	160

---

### Résumé du chapitre

Ce présent chapitre a pour objectif de valider expérimentalement les comportements analysés au chapitre 2. Deux parties seront abordées : la validation du comportement des sliding mode contrôle sur un système non-linéaire à 1 degré de liberté sera présenté en partie 1 ; puis, le contrôle semi-actif dans le but de modifier les paramètres de l'absorbeur en temps réel sera étudié en partie 2.

## 4.1 Introduction

Ce chapitre présente les contributions expérimentales de cette thèse. Elles sont dans la continuité des études réalisées au chapitre 2 et abordées en 2 parties distinctes :

- Partie 1 : contrôle par mode glissant (SMC) appliqué à une structure assimilable à un oscillateur de Duffing.
- Partie 2 : Modification en temps réel des paramètres d'un absorbeur non-linéaire.

Dans chacune de ces parties, vous trouverez un rappel du système étudié, son identification (réalisée par les méthodes présentées au chapitre 3), la présentation des résultats associés et une conclusion. La fin de ce chapitre sera ponctuée par une conclusion générale.

## 4.2 Partie 1 : Contrôle par sliding mode d'une structure non-linéaire

Cette partie concerne la validation expérimentale de l'algorithme proposé en section 2.1. Le système étudié est représenté dans la figure 4.1. Il s'agit d'une structure non-linéaire modélisée par un oscillateur de Duffing et contrôlée par SMC, dont l'équation de mouvement est la suivante :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_{nl}x^3 = \Gamma \sin(\omega t) + F_a(t) \quad (4.1)$$

avec la force active  $F_a(t)$  donnée comme suit :

$$F_a(t) = -m \left( \frac{\alpha_3 x + \alpha_1 \dot{x}}{\alpha_2} \right) + (kx + c\dot{x} + k_{nl}x^3) - \rho \sqrt{|\sigma|} \times \frac{\sigma(t)}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon}} \quad (4.2)$$

De plus, le terme non-linéaire est généré artificiellement (comme expliqué dans la section 3.3).

**Remarque :** il convient de noter qu'aucun absorbeur passif de vibration n'est considéré dans cette d'étude, contrairement à la partie suivante.

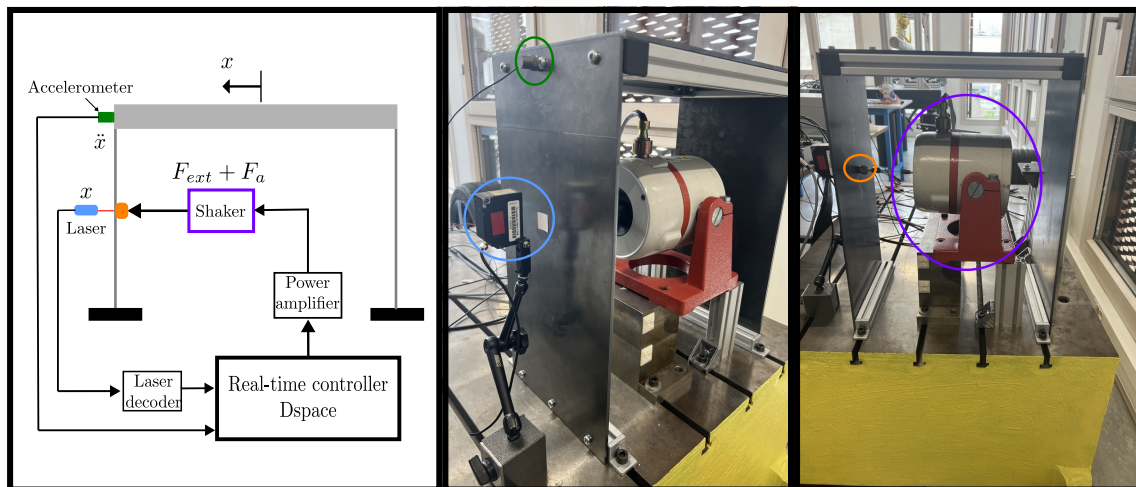


FIGURE 4.1: Dispositif expérimental - cercle bleu : laser, cercle vert : accéléromètre, cercle orange : capteur de force, cercle magenta : pot vibrant électrodynamique, et en jaune le massif sismique.

Les mesures sont effectuées par un accéléromètre (sensibilité 9,869 pC/g) positionné à 50 cm de hauteur, un laser (sensibilité 5e-3 m/V) placé à 30 cm de hauteur et un capteur de force (sensibilité 4,123 pC/N) placé entre la structure et le pot vibrant électrodynamique, comme le montre le diagramme de la Fig.4.1. Pour remonter à tous les états, un observateur par sliding mode est utilisé (voir section 1.3.5). Le schéma bloc qui représente les différentes boucles est donné en figure. 4.2.

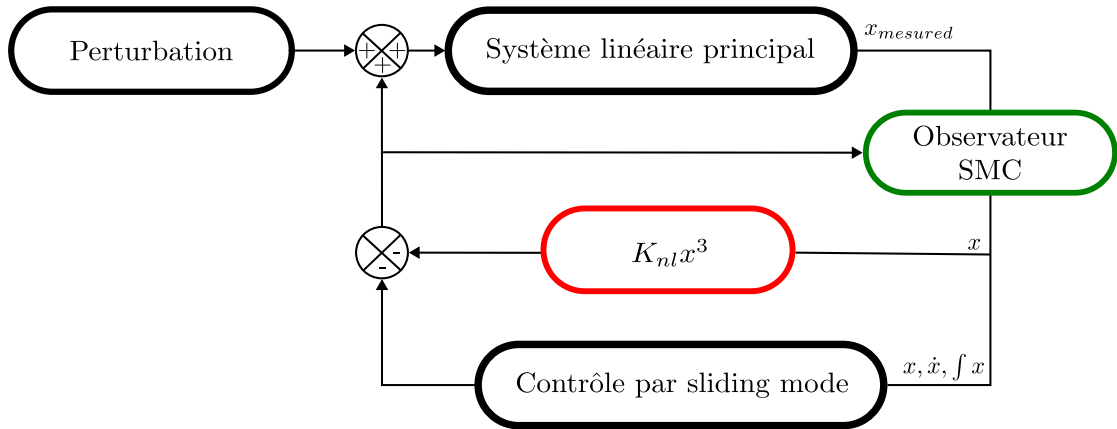


FIGURE 4.2: Schéma fonctionnel : rétroaction et contrôle non linéaire sur une structure linéaire couplée à un observateur

Toutes les données expérimentales sont obtenues avec dSpace MicroLabBox avec un échantillonnage temporel de  $\Delta_t = 10^{-4}s$ . Le diagramme présenté dans la Fig.4.2 a été implémenté dans Simulink.

#### 4.2.1 Identification de l'oscillateur de Duffing

L'identification est réalisée en deux temps. D'abord, une fonction de réponse en fréquence est réalisée pour vérifier les caractéristiques premières du système. La figure 4.3 présente la FRF réalisée entre le pot vibrant et l'accéléromètre en utilisant un bruit blanc, révélant la présence du mode primaire d'intérêt à une fréquence de 14.5Hz. En outre, un pic fortement amorti est observé autour de 19.4Hz, qui correspond au mode de tangage du massif sismique. Bien que ce pic modifie légèrement la phase, il a un impact minime sur la phase du mode primaire d'intérêt. La masse modale  $m$  est trouvée par l'ajout successif de petites masses  $\delta_m$  sur la structure. Le système résultant entre la masse modale, la rigidité modale et la pulsation appropriée (pour chaque  $\delta_m$ ) est ensuite résolu par la méthode des moindres carrés moyens. La masse modale effective de la structure sur le premier mode de flexion est de 8.3kg.

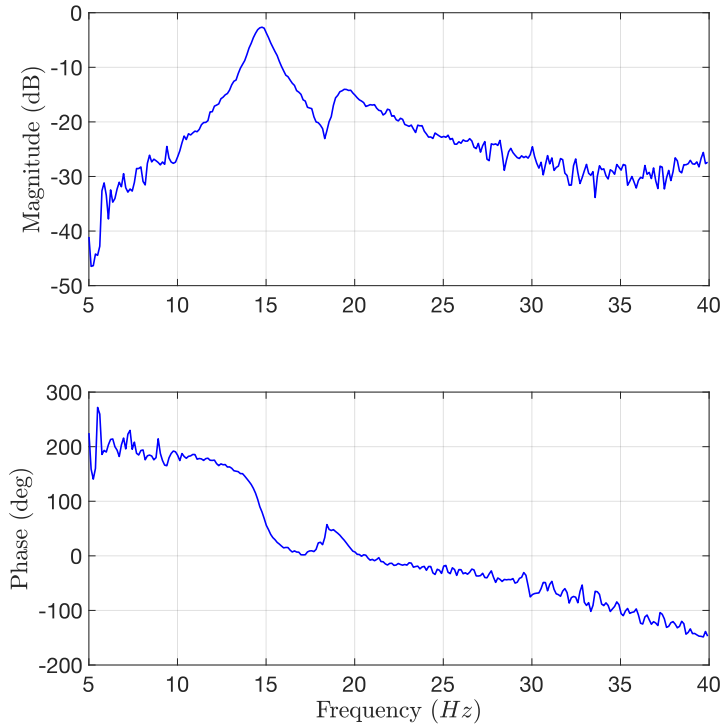


FIGURE 4.3: Fonction de transfert de 5 à 40 Hz.

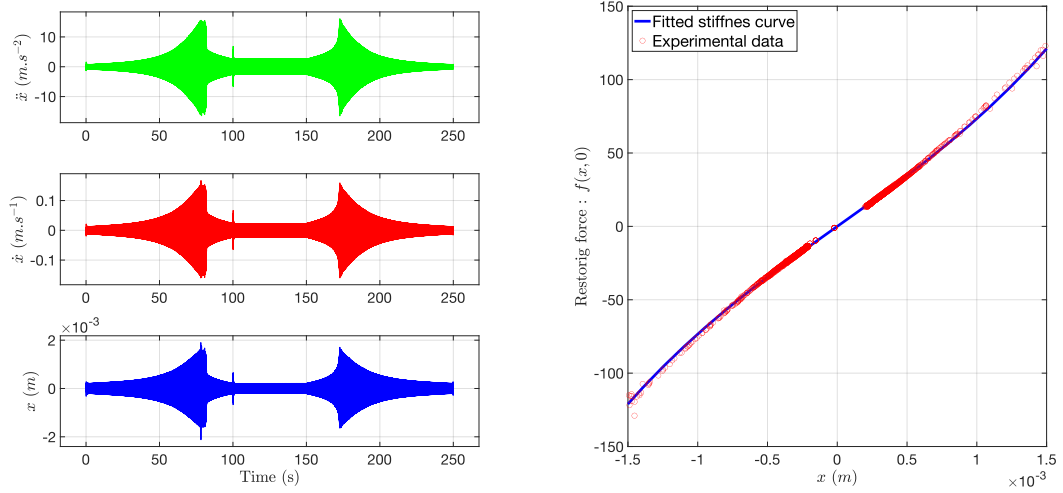
La deuxième partie de l'identification utilise la méthode de la restoring force surface (RFS) (voir section 3.4). Les efforts internes s'écrivent :

$$f(x, \dot{x}) = kx + knlx^3 + c\dot{x} = \lambda P \sin(\omega t) - m\ddot{x} \quad (4.3)$$

où  $\lambda$  est le paramètre de projection. C'est à partir de (4.3) que l'identification est réalisée. La méthode de la RFS est appliquée deux fois :

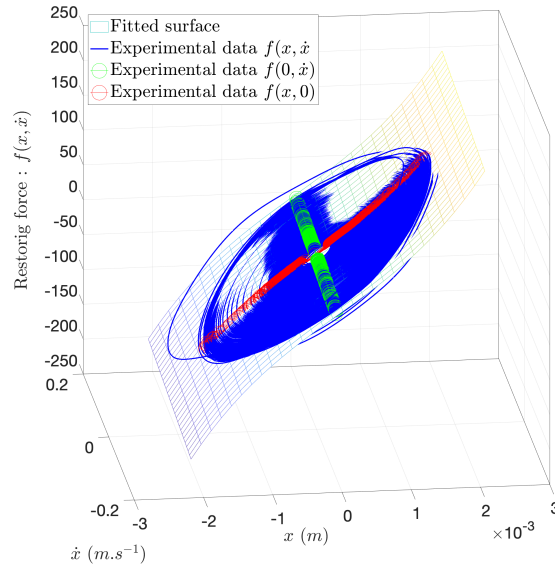
- entre le pot vibrant et l'accéléromètre pour obtenir le comportement global de la structure
- entre le pot vibrant et le laser pour alimenter l'observateur.

Seuls les résultats de la première identification sont présentés ici. En effet, ils correspondent à la voie de transfert qui sert de référence dans la suite de cette partie. La force externe utilisée pour la RFS est un balayage sinusoïdal avec une fréquence instantanée qui varie de 9,5 Hz à 17,5 Hz en 100 secondes, se stabilise à 17,5 Hz pendant 50 secondes et varie ensuite de 17,5 Hz à 9,5 Hz en 100 secondes, comme le montre la Fig.4.4(a).



(a) Accélérations temporelles et leurs dérivées

(b) Identification des raideurs



(c) Restoring force surface en 3D

FIGURE 4.4: Identification des paramètres à partir de la restoring force  $k$ ,  $k_{nl}$  et  $c$

Après avoir identifié les paramètres modaux<sup>1</sup> à l'aide des résultats de la figure 4.4, les paramètres identifiés et les coefficients de la surface de glissement (Pour une matrice de pondération  $Q$  de la même forme que dans la section 2.1.4) sont présentés dans les tableaux 4.1 et 4.2 respectivement. Ils seront utilisés dans la suite de cette partie.

Paramètres	m	c	k	$k_{nl}$	$\lambda$
Valeurs	8.3 kg	44.9 N.s.m <sup>-1</sup>	$6.8 \times 10^4$ N.m <sup>-1</sup>	$5.8 \times 10^9$ N.m <sup>-3</sup>	0.6

TABLE 4.1: Paramètres identifiés

1. La valeur du paramètre d'amortissement est ajusté manuellement à la FrF sans contrôle.

Paramètres	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
Valeurs	27.1	8.3	2.6

TABLE 4.2: Paramètres de la surface de glissement :  $\sigma$

## 4.2.2 Résultats expérimentaux et comparaison numérique

Dans cette section, les résultats numériques et expérimentaux sont comparés. L'excitation est fournie par un balayage sinusoïdal ascendant et descendant, comme décrit dans la section précédente.

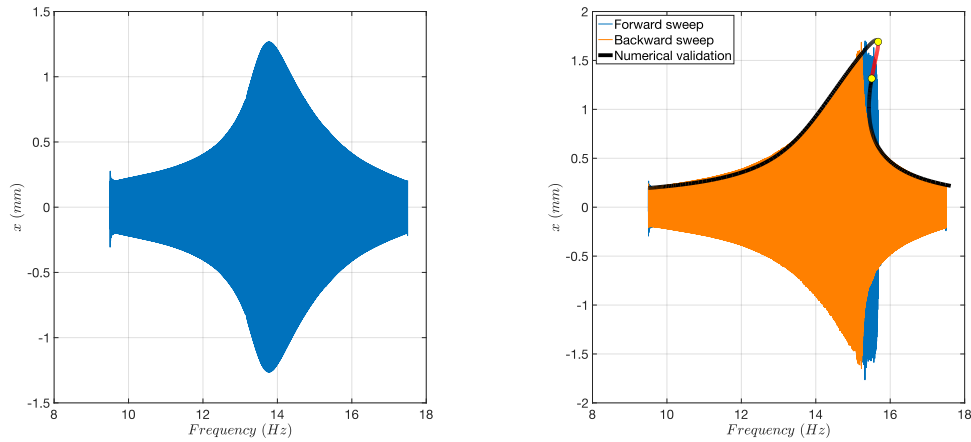


FIGURE 4.5: Résultats expérimentaux - réponse sans contrôle : (gauche) Réponse linéaire sans non-linéarité artificielle. (droite) Réponse non-linéaire avec non-linéarité artificielle raidissante. La validation numérique est en noir

La figure 4.5 présente la réponse de la structure avec et sans non-linéarité artificielle. Comme mentionné dans la section 4, une légère non-linéarité assouplissante est observée sur la figure 4.5 (à gauche). La comparaison avec le modèle numérique montre une bonne cohérence des résultats (voir Fig.4.5 (droite)) et confirme la bonne identification de l'amortissement linéaire.

Les figures 4.6 montrent les résultats pour trois gains<sup>2</sup>. L'amplitude diminue avec l'ajout de la commande. La réponse numérique après l'ajout de la commande active a une fréquence différente de la réponse expérimentale. Ce problème est dû au fait que les effets internes du pot vibrant, de l'amplificateur de puissance et du retard dans la boucle de rétroaction ne sont pas pris en compte dans le modèle. Une identification plus précise aurait pu être effectuée, mais elle n'est pas nécessaire ici. Les résultats expérimentaux montrent que la prédiction faite par le suivi des bifurcations dans la section 2.1.4 est vérifiée. La réponse non-linéaire devient progressivement linéaire à mesure que l'effort de contrôle non-linéaire augmente (valeur de  $\rho$  croissantes). Nous observons expérimentalement la disparition des points limites.

2. La partie linéaire du contrôle actif donnait des performances assez élevées. Un gain de 0.2 lui a été appliqué afin de pouvoir discuter de l'impact de la partie non-linéaire

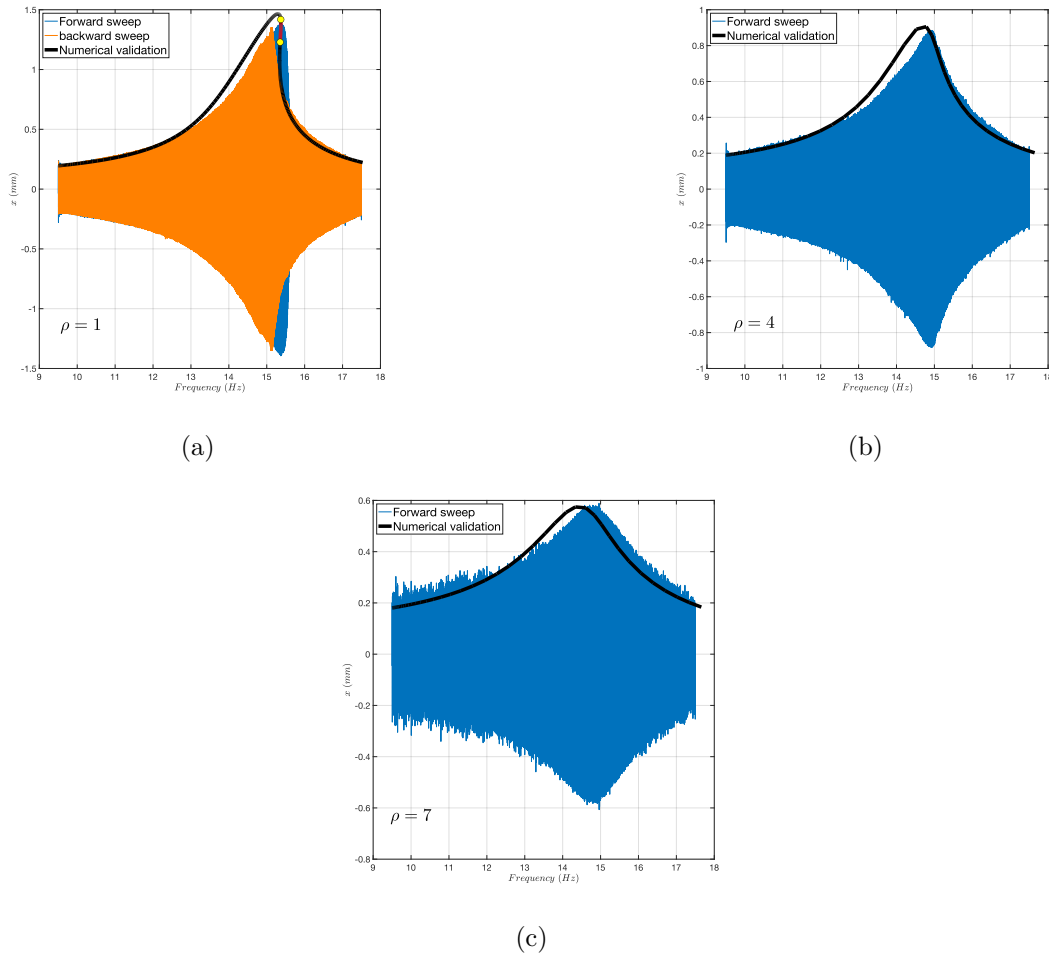


FIGURE 4.6: Résultats expérimentaux - réponse avec contrôle (balayage vers le haut en bleu et balayage vers le bas en orange), étalonnage du modèle en noir et points limites en jaune : (a)  $\rho = 1$  et la partie linéaire telle que  $0.2 \times \eta$ , (b)  $\rho = 4$  et la partie linéaire telle que  $0.2 \times \eta$ , (c)  $\rho = 7$  et la partie linéaire telle que  $0.2 \times \eta$ .

### 4.2.3 Conclusion

Ce travail a constitué une des contributions majeures de cette thèse. Les résultats ont démontré une très bonne corrélation entre les modèles numériques et expérimentaux, confirmant l'efficacité du contrôle par mode glissant pour les systèmes à dynamique non-linéaire. L'algorithme proposé permet de prédire le comportement d'une structure non-linéaire contrôlée par une loi de contrôle par mode glissant de manière précise. Les prévisions numériques de la section 2.1 ont été retrouvées de façon expérimentale.

## 4.3 Partie 2 : Contrôle semi-actif d'un absorbeur non-linéaire (HNES)

### 4.3.1 introduction

L'objectif de cette partie est d'apporter une preuve de concept de la théorie développée dans la section 2.3. Dans cette dernière, on se proposait de modifier les paramètres





### 4.3.2 Identification des paramètres du NES

#### Vérification de la nature de la non-linéarité du NES

Dans cette présente section, la nature de la non-linéarité est analysée. Pour ce faire, un sinus balayé de  $6.5Hz$  à  $11.5Hz$  en 70s est appliqué sur le NES par l'intermédiaire des bobines électrodynamiques. La figure 4.8 présente le résultat obtenu. On peut voir un phénomène d'hystérésis caractéristique des non-linéarités impaires entre  $10Hz$  et  $10.5Hz$ . Sur cette même figure, le mode entre  $8.5Hz$  et  $9Hz$  correspond au mode du bâti. Afin de qualifier la nature de la non-linéarité la méthode de la restoring force

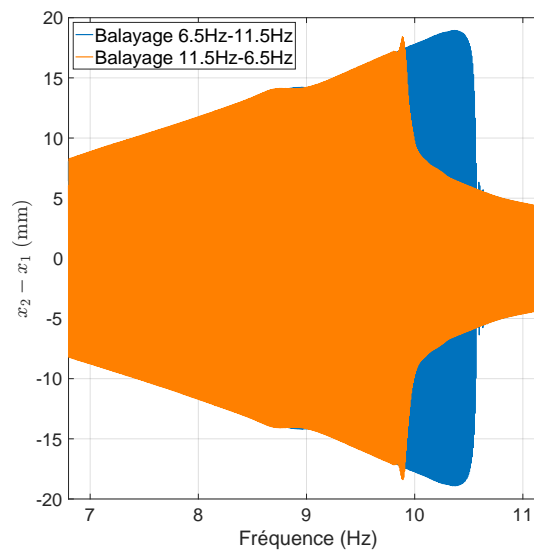


FIGURE 4.8: Courbe de réponse en fréquence pour du NES pour un effort relatif

est appliquée (voir section 4.8). La figure 4.9 montre le tracé en trois dimensions de la restoring force surface à partir des accélérations de la structure et du NES. Ces dernières sont intégrées pour obtenir les signaux de déplacement et de vitesse. Un calcul de la MSE normalisée (Mean Squared Error comme présenté à la section 3.4) est réalisée en fonction de l'exposant  $\alpha$  de la non-linéarité. La MSE est minimale pour une non-linéarité d'ordre 3 comme l'atteste la figure 4.10a. La projection de la restoring force surface dans le plan  $[f(x_2 - x_1, 0), x_2 - x_1]$  est réalisé sur la figure 4.10b.

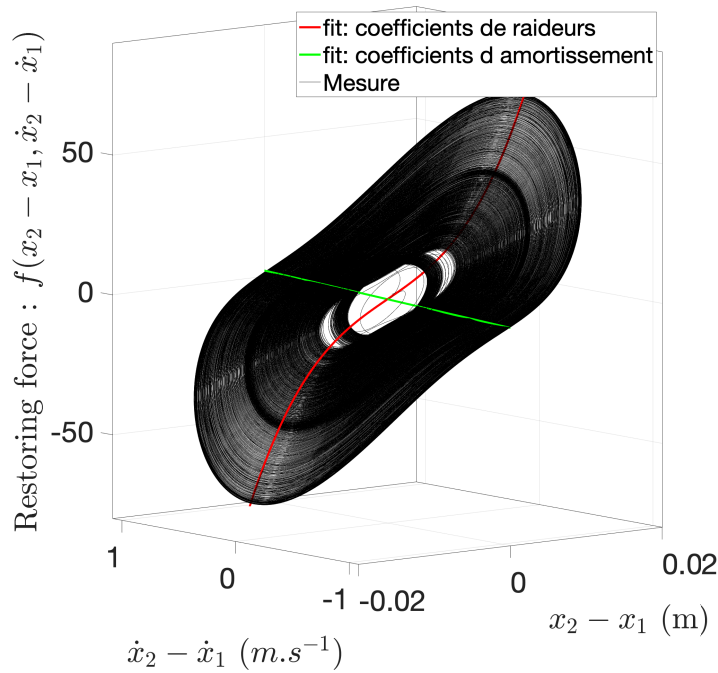


FIGURE 4.9: Restoring force surface expérimentale de l'absorbeur pour un effort externe relatif

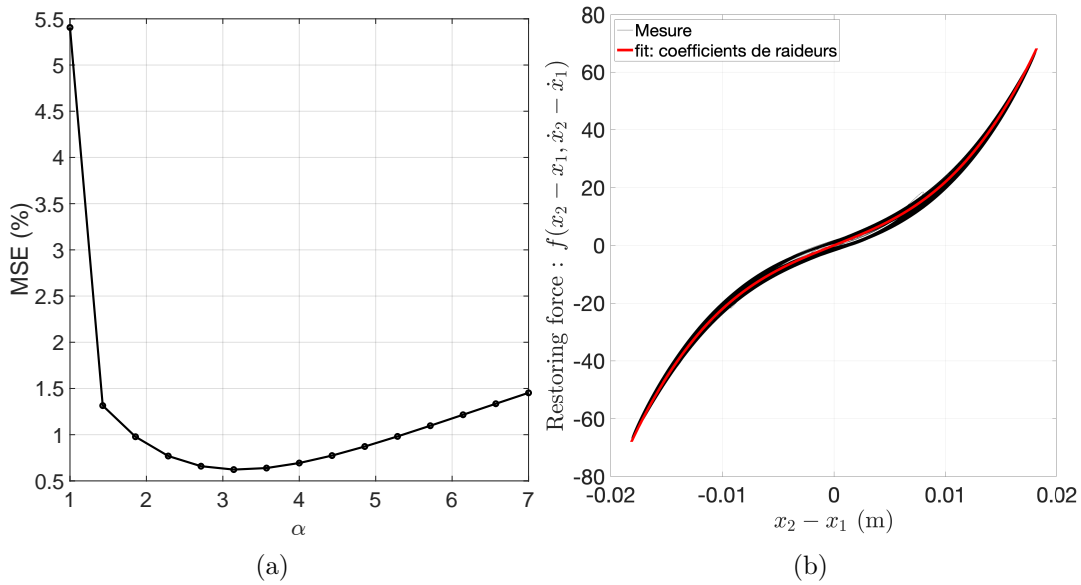


FIGURE 4.10: (a) Évolution de la MSE en fonction de l'exposant de la non-linéarité  $\alpha$  pour le monôme  $k_{nl2}x^\alpha$ , (b) Restoring force surface de l'absorbeur pour un effort externe relatif :  $f(x_2 - x_1, 0)$

La même méthode est utilisée pour caractériser la nature de l'amortissement. La linéarité de l'amortissement est attestée par la figure 4.11.

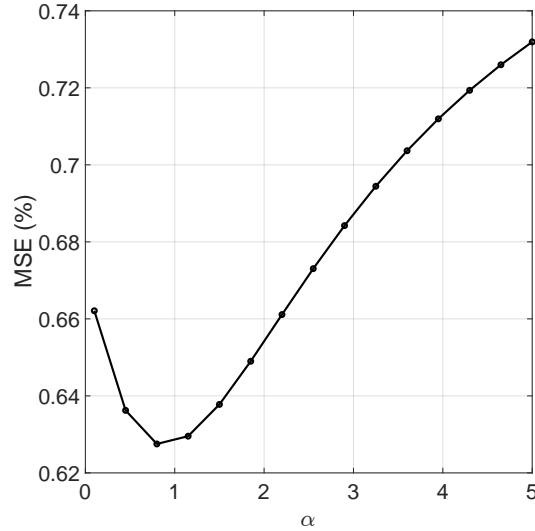


FIGURE 4.11: Évolution de la MSE en fonction de l'exposant de la non-linéarité  $\alpha$  pour le monôme  $c_2x^\alpha$

### Mesure en temps réel pour la loi de contrôle

La loi de contrôle proposé ne dépendant que de la vitesse et du déplacement relatifs, une des deux bobines sera utilisée pour la mesure. Elle permet d'obtenir directement la vitesse relative (voir section. 3.3). Le déplacement relatif est obtenu par intégration en temps réel de cette dernière.

### Identification des paramètres du système

Comme aucun observateur n'est utilisé dans cette partie, les paramètres du NES et de la structure sont identifié par la méthode de la restoring force et par méthode modale classique respectivement. Le tableau 4.3 présente les paramètres d'intérêts. La

Structure primaire	Absorbeur (NES)
$m_1 = 9.43 \text{ kg}$	$m_2 = 0.7 \text{ kg}$
$\omega_0 = 80.4248 \text{ rad.s}^{-1}$	$k_2 = 1.5e3 \text{ N/m}$
$\xi = 0.032$	$c_2 = 2 \text{ N.s/m}$
	$k_{nl2} = 6.7e6 \text{ N/m}^3$

TABLE 4.3: Table des paramètres de la structure primaire et du NES

masse modale de la structure primaire est obtenue par la méthode énoncée dans la section. 4.2.1. Après identification, l'accélération temporelle du modèle est comparée à l'accélération expérimentale sur la figure 4.12. On peut voir une bonne cohérence du modèle.

### 4.3.3 Résultats expérimentaux pour l'absorbeur non-linéaire adaptatif

#### Validation du comportement fréquentiel du NES

Pour valider le comportement fréquentiel de l'absorbeur passif, deux réponses en fréquence pour deux niveaux d'efforts différents sont analysées. La réponse fréquentielle

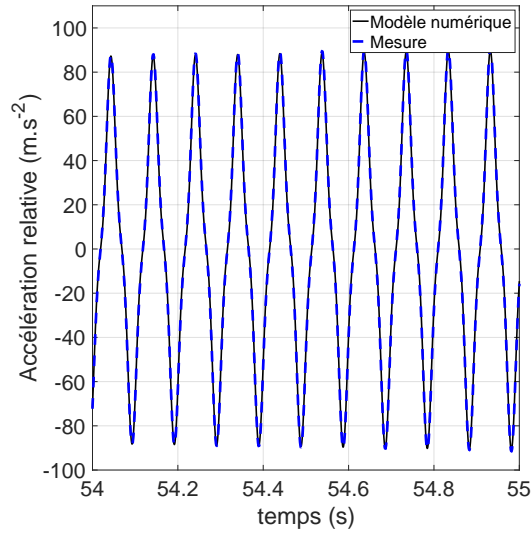


FIGURE 4.12: Signal temporelle de l'accélération du NES - mesuré (bleu) et numérique en noir

est obtenue par l'application d'un sinus balayé de  $9\text{Hz}$  à  $17\text{Hz}$  pendant  $70\text{s}$  à l'aide du pot vibrant (voir chapitre. 4). La figure 4.13 présente le cas d'un effort "faible" ( $F = 3\text{N}$ )<sup>4</sup>. Dans ce cas, le seuil de déclenchement du NES n'est pas atteint et l'ensemble possède le même comportement que la structure primaire seule.

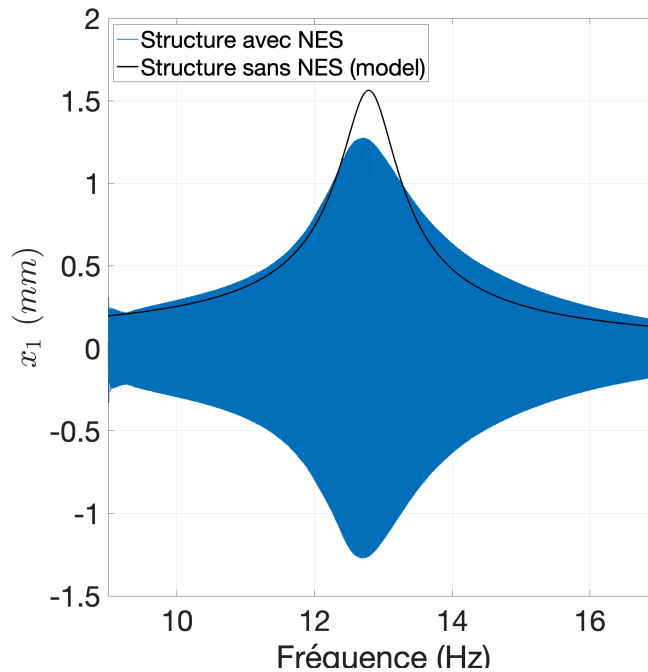


FIGURE 4.13: Réponses en fréquence : expérimentale du NES (bleu) et numérique de la structure (noire) pour un effort moyen  $F = 2.9\text{N}$

4. Ici, il est question de l'effort appliqué par le pot vibrant positionné comme vu dans le chapitre 4. Aucune projection n'a été appliquée.

Pour un effort "plus important" ( $F = 6.1N$ ), le NES absorbe l'énergie vibratoire autour de la résonance de la structure. Faisant cela, une zone quasi-périodique apparaît (voir figure 4.14). Un écart d'amplitude entre l'amplitude de la structure sans le NES et avec de  $\approx 35\%$  est constaté.

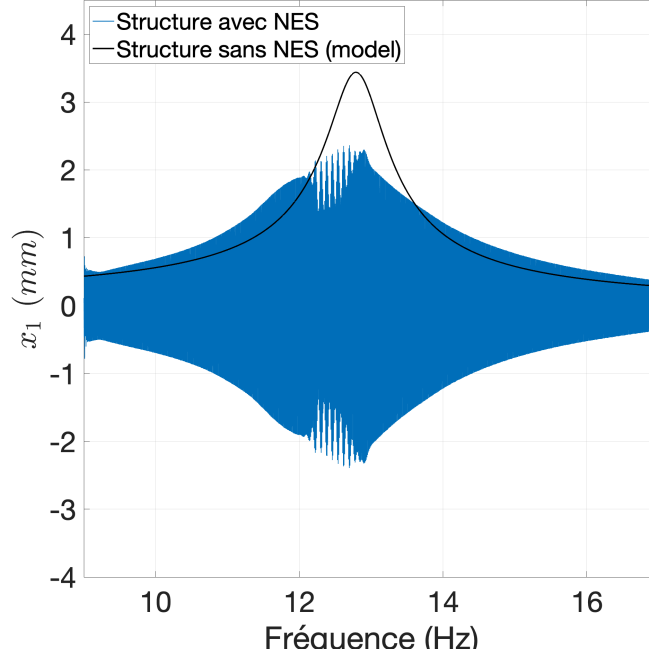


FIGURE 4.14: Réponses en fréquence : expérimentale du NES (bleu) et numérique de la structure (noire) pour un effort important  $F = 6.1N$

**Remarque :** Afin de réduire les débattements et l'amplitude du seuil de déclenchement de l'absorbeur, la tension dans les cordes a été augmentée pour la suite de cette partie. La raideur équivalente est de  $k_2 = 2.9e + 03 N/m$  et l'amortissement a été manuellement recalé pour être ajusté visuellement au SIM expérimental. Une identification non-linéaire plus précise n'a pas été jugée nécessaire pour la preuve de concept.

#### Validation du comportement dynamique à la résonance 1 : 1 du HNES

Dans cette partie, nous nous intéresserons à des sollicitations périodiques à amplitude fixe (qui permet l'obtention d'une réponse fortement modulée (SMR)) basée sur la fréquence propre de la structure primaire ( $12.7Hz$ ). Le SIM expérimental est reconstruit directement à partir des signaux temporels mesurés et de leurs dérivées. et les grandeurs  $N_1$  (déplacement de la structure) et  $N_2$  (déplacement relatif) sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\dot{x}_1}{\omega} + j \frac{\omega}{\omega_0} x_1 \\ N_2 = \frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{\omega} + j \frac{\omega}{\omega_0} (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $\omega$  correspond à la pulsation de l'excitation. La figure 4.15 présente la corrélation entre le SIM expérimental et numérique pour le cas d'un absorbeur passif (NES) et permet d'attester de la validité du modèle.

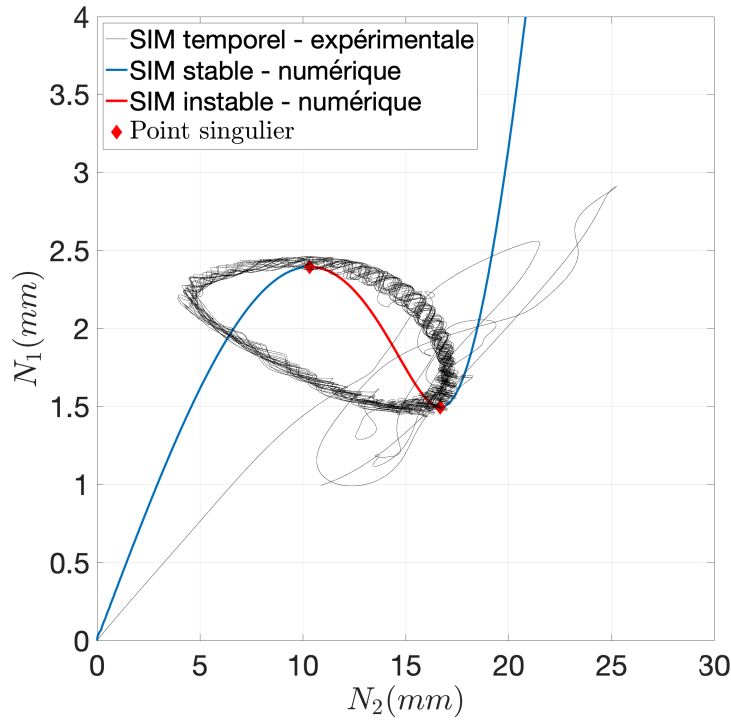


FIGURE 4.15: SIM sans contrôle : expérimental (noir) et numérique (bleu)

Afin de valider les conclusions avancées dans le chapitre 2, plusieurs cas tests sont réalisés et présentés sur la figure 4.16. La modification de l'amortissement est visible sur la figure 4.16a. En fonction du signe et de la valeur  $C_c$ , l'écart entre  $|N_1^2(D_2) - N_1^2(D_1)|$  augmente ou diminue. Une chose est à noter ici. Sur cette même figure, la courbe bleue présente deux boucles distinctes. La première correspond à la structure sans contrôle et la seconde à celle avec contrôle. Cette dernière est due à la non-linéarité du coefficient de transduction et elle se forme pour des déplacements très importants de la structure. La figure 4.16b montre l'évolution de la raideur linéaire. Cette dernière modifie l'écart entre  $|N_1^2(D_2) - N_1^2(D_1)|$  et modifie la position du seuil d'activation  $N_1^2(D_1)$ . La modification de la raideur non-linéaire entraîne le même genre de modification comme l'atteste la figure 4.16c. Dans ce cas, le seuil de déclenchement évolue en fonction du signe de la non-linéarité. Tous ces résultats sont cohérents avec les prédictions réalisées au chapitre 2. Enfin, si l'on combine tous ces paramètres, il est possible d'obtenir un comportement original (voir figure 4.16d) comme augmenter le seuil de déclenchement en réduisant l'écart  $|N_1^2(D_2) - N_1^2(D_1)|$  (courbe rouge).

Dans le cas de l'utilisation de la loi de contrôle complète, la consommation énergétique (puissance active) est comparée la puissance dissipée par le NES passif (voir figure 4.17a) avec le deuxième cas testé sur la figure 4.17b et un cas significativement différent (voir figure 4.17b). Ces deux figures permettent de donner un ordre de grandeur des flux de puissance mis en jeu. Il est à noter que l'importance de la consommation énergétique de la loi de contrôle dépend fortement du gain du coefficient devant le terme cubique. Cette consommation importante peut être une limitation dans le cas d'un système embarqué et est à prendre en compte à la conception.

### 4.3. PARTIE 2 : CONTRÔLE SEMI-ACTIF D'UN ABSORBEUR NON-LINÉAIRE (HNES)

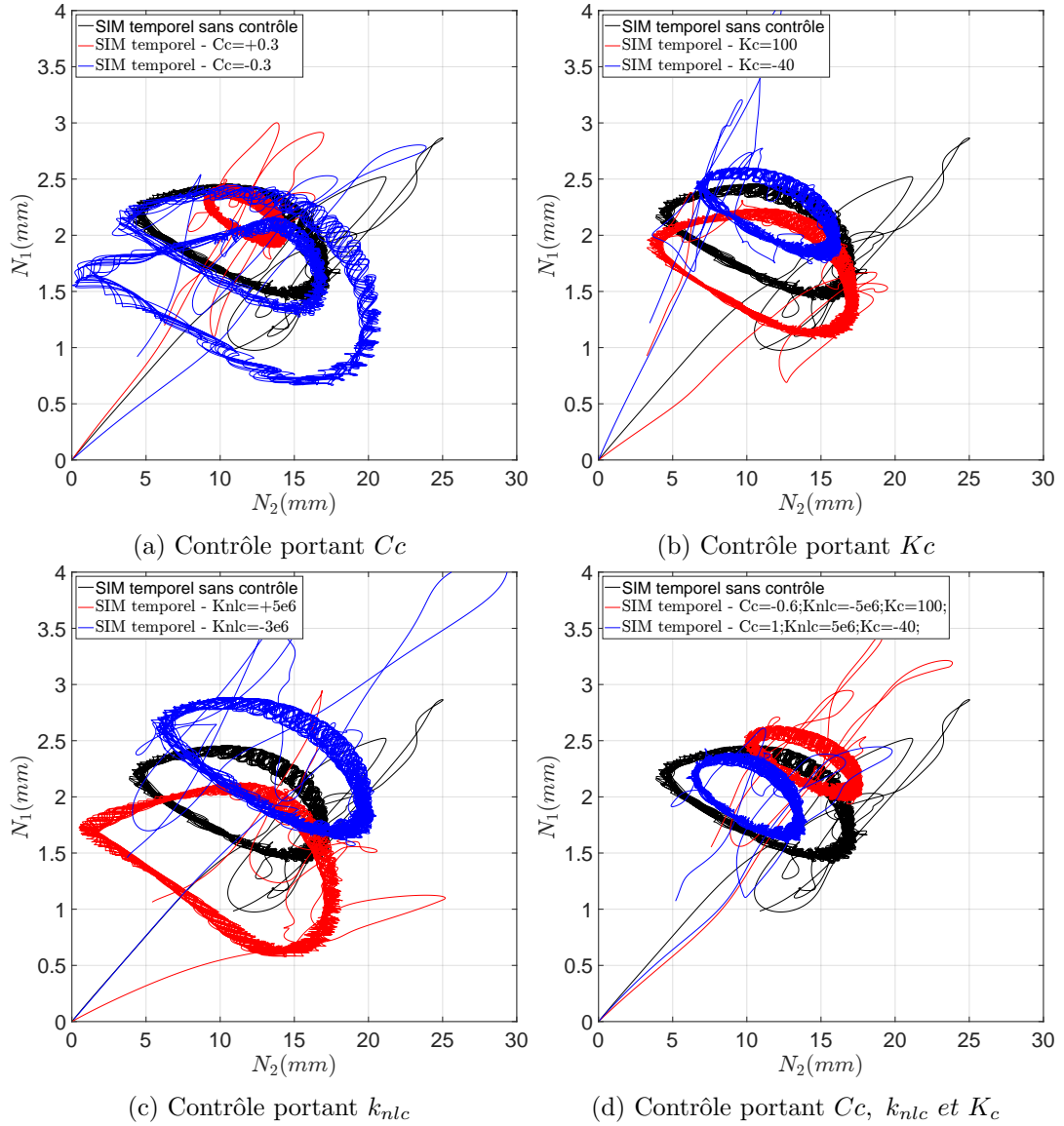
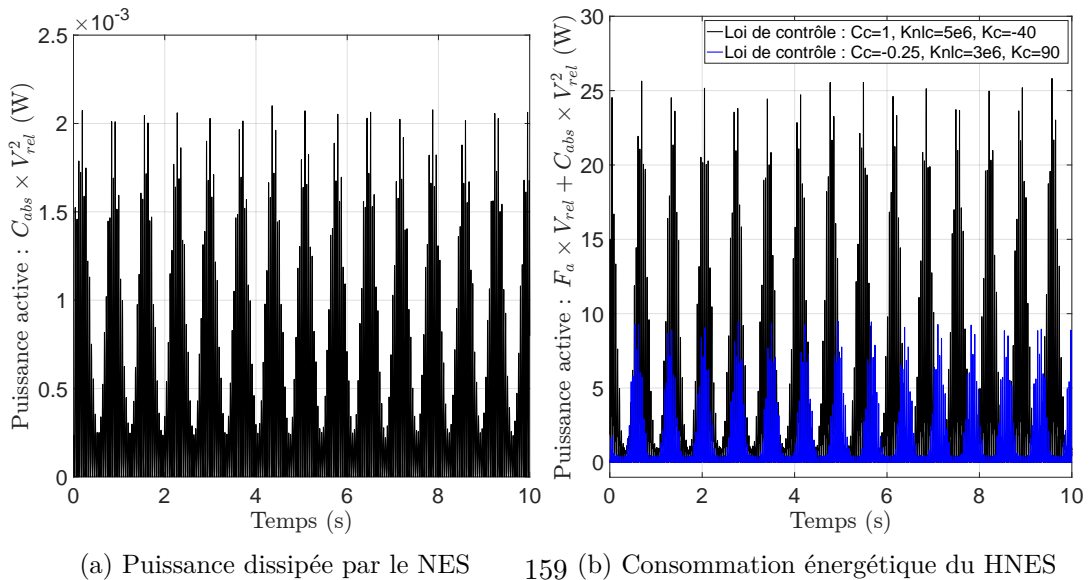


FIGURE 4.16: Comparaison SIM sans contrôle (noir) et des SIM avec contrôle en fonction de  $N_2$  (couleur)



(a) Puissance dissipée par le NES 159 (b) Consommation énergétique du HNES

FIGURE 4.17: Évaluation des puissances mises en jeu

#### 4.3.4 Conclusion

Le contrôle adaptatif proposé permet la modification du SIM en temps réel. Les prévisions annoncées en section 2.3 se montrent cohérentes avec les prédictions. On peut néanmoins noter une limitation concernant le coefficient de transduction des bobines. En effet, ce dernier n'est pas constant pour les grands débattements de l'absorbeur. De ce fait, le recalage du SIM contrôlé de façon précise s'avère délicat et n'a pas été réalisé dans ce document.

### 4.4 Conclusion du chapitre

La première étude concernait la loi de contrôle par sliding mode appliqué à une structure non-linéaire. La non-linéarité a été générée artificiellement par l'intermédiaire d'un pot vibrant. Les résultats obtenus se sont montrés cohérents avec les prédictions théoriques. En outre, l'étude de la conception de la loi de contrôle est une autre voie à explorer. Les paramètres actuels de la surface de glissement ont été conçus sur la base du critère de Hurwitz pour les systèmes linéaires, mais il serait intéressant de tenir compte de la non-linéarité du système et de résoudre l'équation de Riccati pour les systèmes non linéaires afin de déterminer ces paramètres. Enfin, la question de l'optimisation de la loi de commande se pose. Parmi les pistes potentielles à explorer figurent le gain variable en fonction de la fréquence et l'incorporation de l'intelligence artificielle, comme suggérée dans la littérature. Ces optimisations futures, basées sur la passivité, visent à améliorer les performances du contrôleur en termes d'efficacité énergétique et d'amortissement sur une large gamme de fréquences.

La deuxième étude était consacrée à la mise œuvre expérimentale de l'absorbeur hybride non-linéaire. La loi de contrôle utilisée a permis de modifier en temps réel les paramètres de l'absorbeur. Ces travaux ont permis de valider les comportements annoncés au chapitre 2 et démontrent l'intérêt du contrôle semi-actif pour les absorbeurs non-linéaires. Néanmoins, quelques points sont à noter. D'abord, les paramètres ne sont, bien évidemment pas modifiables à l'infini et les limitations sont principalement dû à des contraintes matérielles. On pourrait citer les cordes qui sont extrêmement sollicitées et ont tendance à fluer légèrement après de longs essais. De ce fait, la reproductibilité des essais est assez délicate. De plus, le choix de matériaux pour les supports des cordes (PLA), a tendance à entraîner une abrasion progressive des cordes ce qui ne les aide pas à garder leurs rigidités. Enfin, les dernières limitations, qui ont été plusieurs fois énoncées dans ce document sont dues aux coefficients de couplage et à la consommation énergétique des transducteurs électromagnétiques.



# Conclusion générale et perspectives

## 4.5 Conclusion générale

L'objectif principal de ces travaux est de mieux comprendre et d'optimiser le comportement des absorbeurs de vibrations non-linéaires hybrides qui sont à la frontière de la dynamique non-linéaire et du contrôle actif des structures. Par conséquent, leur analyse requiert des outils numériques adaptés. Les absorbeurs hybrides non-linéaires ont été idéalement pensés pour compenser les défauts principaux des absorbeurs passifs linéaires (aspect mono fréquentiel), non-linéaires (solutions isolées, points de bifurcations) et du contrôle actif/hybride (débattement et coût énergétique). La combinaison de ces trois notions devait permettre l'augmentation des performances, de la réactivité et d'une robustesse en fréquence. Cependant, ces travaux ont montré que l'association de la dynamique non-linéaire et du contrôle actif dans le but de réduire l'énergie vibratoire manque de synergie. En effet, les résultats du chapitre 2 montrent que les bonnes performances obtenues par les contrôleurs ont tendance à éclipser les phénomènes non-linéaires du système.

Cette conclusion est d'abord le fruit de plusieurs apports et contributions numériques et expérimentales :

- D'abord, la mise en œuvre d'un algorithme pour le calcul fréquentiel d'une loi de contrôle par mode glissant. Cette loi de contrôle est composée d'une partie linéaire et d'une partie non-linéaire conçue à partir d'une fonction non-régulière. Cette dernière peut être calculée grâce à l'application même de la définition d'un mode glissant. Cet algorithme a été validé en calculant la réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing contrôlé par mode glissant à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique et d'une procédure de prédiction/correction. Les travaux présentés se basent sur une forme régularisée de la loi de contrôle pour limiter le nombre d'harmoniques et surtout pour augmenter la durée de vie des actionneurs. De plus, cette régularisation réduit le phénomène de réticence et contribue à la réduction du rayonnement acoustique des actionneurs. L'utilisation d'une sliding surface intégrale pour diminuer la durée du régime transitoire du système contrôlé nous a amené à une reformulation du problème de stabilité pour prendre en compte la variable supplémentaire correspondant à l'intégrale du déplacement.
- Ensuite, la mise en œuvre sur un système à deux degrés de liberté de trois lois de contrôle ( le  $\alpha$ -controller, SMC et méthode LQR) a été réalisée. L'apport est la méthodologie de la construction du contrôleur et son utilisation dans un contexte de dynamique non-linéaire multimodale. Il a été montré que pour un système non-linéaire, le nombre d'états utilisés dans la loi de contrôle avait son importance et

que tous les états de la structure sont nécessaires pour améliorer les performances du contrôle. De plus, l'utilisation d'un contrôleur ne portant que sur les variables d'états de la structure principale contribue à une inefficacité du contrôleur. Ces résultats laissent présumer d'une possible application du principe de similarité appliqués aux absorbeurs hybrides non-linéaires énoncé par HABIB et al. [1] mais qui reste à démontrer.

- Enfin, la prise en compte du contrôle actif dans le calcul du Slow Invariant Manifold pour étudier à la résonance le comportement de l'absorbeur. Cette étude est divisée en deux parties. La première concerne les modifications des paramètres du NES (raideur, raideur non-linéaire, amortissement de l'absorbeur) par le contrôle actif. Ainsi, l'amplitude du régime quasi-périodique ou la position du seuil d'activation du NES peuvent être ajustées en temps réel. La deuxième partie est, à mon sens, plus exploratoire. Elle utilise le contrôle pour modifier la forme du SIM en introduisant un contrôle basé sur les variables d'états de la structure primaire. Ce type de contrôle a permis de montrer qu'en fonction de la conception du contrôleur il était possible de diminuer significativement la durée du régime transitoire.

Ces différentes contributions numériques ont donné lieu à plusieurs contributions expérimentales :

- L'application du contrôle par mode glissant sur une structure non-linéaire. La particularité de cette étude était la génération artificielle de la non-linéarité de la structure. Ces résultats ont permis la mise en exergue et la validation des performances du SMC.
- Le développement d'un absorbeur hybride non-linéaire qui a servi à valider une partie des résultats énoncés dans le chapitre 2. La non-linéarité cubique de ce dernier est générée par des cordes en déplacement transversales et la partie active se compose de deux bobines électrodynamiques. Ces dernières sont la principale contribution par rapport à l'existant et permettent l'implémentation de loi de contrôle pour améliorer le comportement dynamique de l'absorbeur.

De façon générale, ces travaux de thèse ont montré l'intérêt de l'association du contrôle actif et de la dynamique non-linéaire et ouvrent la voie à l'utilisation d'autres lois de contrôle.

## 4.6 Perspectives et améliorations

Cette thèse a donné lieu à plusieurs interrogations et perspectives de travail dont cette partie se veut être une liste non exhaustive. La première interrogation concerne la brisure du principe de similarité. Lors de la présentation des résultats, on a pu voir que la modification de la masse de la structure primaire entraînait le même genre de brisure de symétrie de la réponse en fréquence que le  $\alpha$ -controller. Cette constatation est intéressante, car elle indique une façon de réduire l'écart d'amplitude entre les deux pics d'un TMD ou NLTVA en jouant sur l'une ou l'autre masse. Le contrôle actif peut être utilisé dans ce cas précis pour synthétiser la ou les masses à ajouter, on parle d'inertance. À mon sens, cette perspective mérite d'être approfondie, car elle permettrait l'utilisation de loi de contrôle efficace en dynamique linéaire comme le  $\alpha$ -controller tout en conservant un écart d'amplitude entre les deux pics constants sans pour autant altérer la stabilité au sens de Floquet. Les courts essais réalisés numériquement de l'ajout d'une inertance pure sur NES vont dans ce sens. Je dois avouer que les perspectives concernant l'association entre la dynamique non-linéaire et le contrôle actif donnent de bonnes performances

mais manque de synergie. En effet, les performances du contrôle actif se mesurent sur l'amplitude de la structure à contrôler, le coût énergétique, mais surtout sur l'encombrement de l'absorbeur. Cette réduction d'encombrement se traduit forcément par la diminution des débattements de l'absorbeur ce qui s'oppose par nature au principe de non-linéarité géométrique. Il y a de vraies perspectives sur la construction de nouveau contrôleur. On a vu dans cette thèse que les outils de conception d'un contrôleur comme le root-locus étaient peu approprié pour la dynamique non-linéaire. L'utilisation de l'intelligence artificielle est peut-être l'une des solutions. Soyons honnêtes, ce n'est pas la panacée ! Son intérêt réside dans son principal défaut, l'effet « boîte noire ». Ce dernier permet de trouver des modèles mathématiquement complexes très compliqués à obtenir par la méthode essais erreurs. De plus, sa pertinence pour l'identification de système dynamique n'est plus à prouver. En ce qui concerne le contrôle semi-actif, il pourrait être intéressant d'approfondir la diminution de la durée du régime transitoire. La synthèse expérimentale d'autres types de non-linéarités par l'utilisation du « pumping time » [2] est aussi à étudier. Si l'on regarde encore plus loin, l'apport du contrôle passe aussi par la réalisation de systèmes non-linéaires à non-linéarités complexes et difficilement réalisables expérimentalement.

À la fin de cette thèse, si je devais reconcevoir le banc d'essai, il serait bien sûr très différent et prendrait en compte plusieurs points d'amélioration. Le premier concerne la corde métallique utilisée pour générer les non-linéarités. Ces dernières donnent de bons résultats, mais souffrent de différents problèmes. La première concerne le réglage des cordes métalliques. Il est assez difficile d'appliquer exactement la même tension sur les 4 cordes dans notre configuration. De plus, l'élasticité des cordes peut faire varier légèrement cette tension lors des essais. L'utilisation de ressort est, à mon sens, plus efficace pour un NES ou un NLTVA monté sur une structure qui dispose d'une fréquence propre supérieure à  $\approx 7Hz$ . Un autre point qui pourrait être amélioré est la prise en compte de la non-linéarité de couplage des bobines lors des débattements importants de l'absorbeur. En effet, pour des déplacements trop grands, le coefficient de transduction n'est plus constant et il peut être pertinent de le prendre en compte pour obtenir de meilleure corrélation entre le numérique et l'expérimentation. Enfin, l'utilisation du « self-sensing », très simple à synthétiser [3] permettrait l'utilisation de moins de capteurs.

## 4.7 Un regard vers l'avenir...

Pour terminer, je souhaiterais ouvrir sur un concept qui m'est venu suite à de nombreuses discussions au sein de la communauté et des conférences auxquelles j'ai assisté durant ces trois ans. Dans cette thèse, nous nous sommes focalisés sur les absorbeurs non-linéaire à non-linéarité cubique. Cependant, l'implémentation d'autres types de non-linéarités par le contrôle est une piste à explorer. Par exemple, les absorbeurs à impacts sont assez peu exploités, car ils souffrent d'un problème majeur : le bruit acoustique généré par l'impact. Ils émettent alors un fort rayonnement acoustique. Une loi de contrôle peut être utilisée pour diminuer ce dernier en modifiant la vitesse du projectile ou en synthétisant directement son comportement...

## References

- [1] G. Habib, T. Detroux, R. Viguié, and G. Kerschen, « Nonlinear generalization of Den Hartog's equal-peak method », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 52-53, pp. 17–28, 2015.
- [2] K. Dekemele, « Performance Measures for Nonlinear Energy Sinks in Mitigating Single and Multi-Mode Vibrations: Theory, Simulation and Implementation », en, Ph.D. dissertation, 2021.
- [3] M. Verma, V. Lafarga, and C. Collette, « Perfect collocation using self-sensing electromagnetic actuator: Application to vibration control of flexible structures », *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 313, p. 112 210, 2020.
- [4] R. Seydel, « Practical bifurcation and stability analysis », in. Springer Science & Business Media, 2009, vol. 5.
- [5] O. V. Gendelman, « Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 3, pp. 732–745, 2008.

---

# Annexes



## A Méthode du Shooting

La méthode du shooting ou de tire est une méthode qui permet le calcul des solutions périodiques à partir des équations temporelles. Dans cette sous-section la méthode du shooting est détaillée. Considérons le système d'état suivant :

$$\dot{z} = g(z, t, \omega) \quad (6)$$

Le principe du shooting consiste à trouver les conditions initiales  $z_0$  qui conduisent directement au régime permanent de  $g(z, t, \omega)$  pour une pulsation  $\omega$  donnée. Pour se faire, une condition de fermeture  $H(z_0, \omega)$  est ajoutée au système d'état (6) tel que :

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, t, \omega) \\ H(z_0, \omega) = z(z_0, t = T, \omega) - z_0 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Le système ci-dessus est calculé sur une période  $T$  par intégration temporelle. La condition  $H$  force l'égalité entre la valeur initiale et finale de  $g(z, t, \omega)$ . L'implémentation du shooting dans un algorithme de prédiction correction est décrite ci-dessous :

### Pas prédicteur

On commence par prédire une solution tangente à la courbe.

$$\begin{bmatrix} i z_0^1 \\ i \omega_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^{i-1} z_0^1 \\ i^{i-1} \omega_0^1 \end{bmatrix} + \Delta_s \vec{t} = \begin{bmatrix} i^{i-1} z_0^1 \\ i^{i-1} \omega_0^1 \end{bmatrix} + \Delta_s \begin{bmatrix} \Delta z_0^1 \\ \Delta \omega_0^1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La condition sur le vecteur tangent s'écrit :

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{(\Delta z_0^1)^T \Delta z_0^1 + (\Delta \omega_0^1)^2} = \Delta s \quad (9)$$

avec  $\Delta s$  la longueur du pas qui peut être fixée par l'utilisateur ou adaptatif.

### Pas correcteur

La solution prédite ne vérifie pas le système d'équations (7). La correction permet de respecter les équations de mouvement. Cette dernière est réalisée en résolvant (à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson) par itération successive  $k$  le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H^k}{\partial z_0} & \frac{\partial H^k}{\partial \omega} \\ (\Delta z_0^1)^T & \Delta \omega^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta z_0^{k+1} \\ \delta \omega^{k+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La mise à jour des variables  $z_0$  et  $\omega$  est réalisée par :

$$\begin{bmatrix} i z_0^{k+1} \\ i \omega_0^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i z_0^k \\ i \omega_0^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta z_0^{k+1} \\ \delta \omega^{k+1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

L'arrêt de l'algorithme de correction peut se faire lorsque le critère d'arrêt ci-dessous est inférieur à une tolérance  $\epsilon$ .

$$\frac{\|H\|}{\|i z_0^{k+1}\|} \leq \epsilon \quad (12)$$

---

## Calcul des Jacobiennes

$$\frac{\partial H^k}{\partial z_0} = \frac{\partial z^k}{\partial z_0} \Big|_{i, z_0^k, T^k, \omega^k} - I = M - I \quad (13)$$

Où  $M$  est la matrice de Monodromie et  $I$  la matrice identité.

$$\frac{\partial H^k}{\partial \omega} = \frac{\partial z^k}{\partial \omega} \Big|_{i, z_0^k, T^k, \omega^k} \quad (14)$$

Ces deux matrices Jacobiennes peuvent être calculées par la méthode des différences finies.



## B Suivi des points de bifurcations

Le suivi des points de bifurcations se passe en deux étapes pour chaque point de bifurcation

- Localisation précise du point de bifurcation.
- Résolution d'un système étendu pour le suivi.

Considérons un système d'équations fréquentielles à nddls classique :

$$R(\mathbf{X}, \omega) = [\omega^2(\nabla^2 \otimes \mathbf{M}) + \omega(\nabla \otimes \mathbf{C}) + (I_{2H+1} \otimes \mathbf{K})]\mathbf{X} + \hat{\mathbf{F}}_{nl}(\mathbf{X}) - \hat{\mathbf{P}} = 0 \quad (15)$$

Avec  $R(\mathbf{X}, \omega) \in \mathbb{R}^{nddl(2H+1) \times 1}$ , le résidu en effort,  $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{nddl(2H+1) \times 1}$  le vecteur des coefficients de Fourier représentant la perturbation extérieure,  $I_{2H+1} \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times (2H+1)}$  la matrice identité où  $H$  est le nombre d'harmoniques,  $\nabla \in \mathbb{R}^{(2H+1) \times (2H+1)}$  l'opérateur dérivé,  $\hat{\mathbf{F}}_{nl}(\mathbf{X})$  le vecteur des coefficients de Fourier représentant les efforts non-linéaires et  $X \in \mathbb{R}^{nddl(2H+1) \times 1}$  le vecteur des coefficients de Fourier représentant le déplacement des masses. Les matrices de masse  $M$ , d'amortissement  $C$  et de raideur  $K$  sont de taille  $nddl \times nddl$ . Pour la suite de cette annexe, on posera  $L = nddl \times (2H + 1)$

### B.1 Point limite : LP

Pour détecter un LP, le système algébrique suivant est résolu à chaque itération  $k$  avec un algorithme de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} R_X^k & R0_{(L \times L)} & R_\omega^k \\ (R_X^k \phi^k)_X & R_X^k & (R_X^k \phi^k)_\omega \\ 0_L^T & 2\phi_g^{kT} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta \phi^k \\ \delta \omega^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(\mathbf{X}, \omega)^k \\ R_X^{kT} \phi^k \\ \phi^{kT} \phi^k - 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Avec  $n_{tot}$  la dimension du système ( $nddl \times (2H + 1)$ ),  $L = n_{tot}$ . Ici,  $\phi$  représente le vecteur propre correspondant à la plus petite valeur propre du problème aux valeurs propres (PvP)

$$(R_X - \lambda I)\phi = 0$$

De façon générale,  $\phi$  est initialisé pour le PvP :  $(R_X^{k=0} - \lambda I)\phi^{k=0} = 0$ .  
Le calcul des Jacobiennes est détaillé dans la section B.2.

### B.2 Point de branchement : BP

Pour détecter un BP (ou branch point en anglais), le système algébrique suivant est résolu à chaque itération  $k$  avec un algorithme de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} R_X^k & \gamma^k I_{n_{tot}} & R_\omega^k & \phi_g^k \\ R_{XsX}^{kT} \phi_g^k & R_{Xs}^{kT} & R_{X\omega}^{kT} \phi_g^k & 0 \\ 0_L^T & 2\phi_g^{kT} & 0 & 0 \\ \phi_g^{kT} R_{\omega X}^k & R_\omega^{kT} & R_{\omega\omega}^{kT} \phi_g^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta \phi_g^k \\ \delta \omega^k \\ \delta \gamma^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(\mathbf{X}, \omega)^k + \gamma^k \phi_g^k \\ R_{Xs}^{kT} \phi_g^k \\ \phi_g^{kT} \phi_g^k - 1 \\ R_\omega^{kT} \phi_g^k \end{bmatrix} \quad (17)$$

Avec :

- $R_{Xs}$  la Jacobienne  $R_X$  shiftée
- $\phi_g$  Le vecteur propre gauche de la plus petite valeur propre de  $R_X^T$
- $\gamma$  est un terme qui permet de gérer la singularité du système à l'approche des points de branchement (terme de pénalité).

Le système (17) devient singulier à l'approche d'un point de branchement. La matrice  $R_X$  est (souvent) singulière. Il faut donc la shifter et réécrire le problème.

---

### Shift de la matrice Jacobienne $R_X$

Soit  $\mathbb{P}$  le vecteur correspondant à la valeur propre nulle de  $R_X$ , la nouvelle matrice  $R_{X_s}$  sera égale à :

$$R_{X_s} = R_X - \frac{\mathbb{P}^T \mathbb{P}}{\|\mathbb{P}\|}$$

Le vecteur  $\hat{\psi}$  correspondant à la valeur propre nulle à une forme analytique :

$$\hat{\psi} = (\nabla \otimes I_n) \mathbf{X} \text{ et } \psi = \frac{\hat{\psi}}{\|\psi\|}$$

### Vecteur propre gauche et vecteur propre droit

Une des particularités du système (17) est qu'il fait intervenir le vecteur propre gauche [4]. Pour la valeur propre 0 on a :

$$R_X \phi = 0 \text{ et } \phi_g^T R_X = 0^T$$

avec  $\phi$  le vecteur propre droit et  $\phi_g$  le vecteur propre gauche. L'utilisation de ce dernier est due à la singularité de  $R_X$  au point de bifurcation. Pour un branch point (ou simple stationary bifurcation), une des conditions est que

$$\text{rang}(R_w) \in \text{rang}(R_X)$$

L'équation  $R_X \mathbf{v} + R_w = 0$  avec  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  a plusieurs solutions, mais une seule permet d'avoir un  $v$  orthogonal à  $\phi_g$ . Il est trouvé en résolvant :  $\phi_g^T \mathbf{v} = 0$ . Pour initialiser le système proche d'un BP, on peut prendre :  $\gamma^0 = 0$  et  $\phi_g^0$  le vecteur propre gauche de la plus petite valeur propre de  $R_X^T$

### Calcul des Jacobiennes

Si les expressions de  $R_{\omega\omega}$ ;  $R_w$ ;  $R_X$ ;  $R_{\omega\omega}^T \phi_g$  peuvent s'obtenir facilement, le calcul des autres Jacobiennes est un peu plus subtile. Le terme  $R_{X_s X}^T \phi_g$  se calcule tel que :

$$R_{X_s X}^T \phi_g = (R_{X_s}^T \phi_g)_X = (R_X^T \phi_g)_X + \frac{1}{\|\mathbb{P}\|^2} \left[ (I_{n_{tot}} - \frac{2}{\|\mathbb{P}\|^2} \mathbb{P} \mathbb{P}^T) (\mathbb{P}^T \phi_g) + \mathbb{P} \phi_g^T \right] \psi X$$

Le calcul du terme  $(R_X^T \phi_g)_X$  peut se faire par la méthode des différences finies (forward) afin de généraliser le calcul :

$$R_{X X}^T \phi_g = (R_X^T \phi_g)_X \approx \frac{[R_X^T(X + \epsilon_X \phi_g, \omega) - R_X^T]}{\epsilon_X}$$

avec  $\epsilon_X = \eta(\frac{\|X\|}{\|\phi_g\|} + \eta)$  et  $\eta = 1e^{-6}$  pour obtenir une bonne convergence. Enfin, le terme  $R_{X\omega} \phi_g$  est calculé analytiquement :

$$R_{X\omega} \phi_g = (R_{X_\omega}) \phi_g$$

### B.3 Neimark-Sacker : NS

Pour détecter un NS, le système algébrique suivant est résolu à chaque itération  $k$  avec un algorithme de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} R_X^k & R_0 & R_0 & 0_L & R_\omega^k \\ N_{X1}^k & (C_0^k - C_2^k \kappa^{2k}) & (-C_1^k \kappa^k) & (-2 * C_2^k \kappa^k) \psi_1^k - (C_1^k) \psi_2^k & N_{\omega 1}^k \\ N_{X2}^k & (C_1^k \kappa^k) & (C_0^k - C_2^k \kappa^{2k}) & C_1^k \psi_1^k + (-2 * C_2^k \kappa^k) \psi_2^k & N_{\omega 2}^k \\ 0_L^T & q^{kT} & 0_L^T & 0 & 0 \\ 0_L^T & 2 * \psi_1^{Tk} & 0_L^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta \psi_1^k \\ \delta \psi_2^k \\ \delta \kappa^k \\ \delta \omega^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(\mathbf{X}, \omega)^k \\ (C_0^k - C_2^k \kappa^{2k}) \psi_1^k - (C_1^k \kappa^k) \psi_2^k \\ (C_1^k \kappa^k) \psi_1^k + (C_0^k - C_2^k \kappa^{2k}) \psi_2^k \\ q^{Tk} \psi_1^k \\ \psi_1^{Tk} \psi_1^k - 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Les variables  $C_0, C_1, C_2$  sont tirées du problème aux valeurs propres quadratique (méthode de Hill) :

$$\left( R_X + \Delta_1 \Lambda + \Delta_2 \Lambda^2 \right) \phi = 0 = \left( C_0 + C_1 \Lambda + C_2 \Lambda^2 \right) \phi \quad (19)$$

Le vecteur  $q$  est une projection (non nulle) dans le sous-espace vectoriel  $vect(\psi_1, \psi_2)$ . Il vient donc comme forme possible pour  $q$  :

$$q = \psi_1 - \psi_2 \frac{\psi_1 \cdot \psi_2}{\|\psi_2\|}$$

#### Calcul des Jacobiennes

Pour  $N_{X1}$  et  $N_{X2}$ , le calcul se fait par différentiation comme vu précédemment.

$$N_{X1} = \frac{1}{2\epsilon_{X1}} \omega \left[ \frac{\partial F(X + \epsilon_{X1} * \psi_1)}{\partial X} (\nabla \otimes I_n) - \frac{\partial F(X - \epsilon_{X1} * \psi_1)}{\partial X} (\nabla \otimes I_n) \right] - \frac{1}{2\epsilon_{X2}} \left[ \frac{\partial F(X + \epsilon_{X2} * \psi_2)}{\partial X} - \frac{\partial F(X - \epsilon_{X2} * \psi_2)}{\partial X} \right] \quad (20)$$

$$N_{X2} = \frac{1}{2\epsilon_{X1}} \left[ \frac{\partial F(X + \epsilon_{X1} * \psi_1)}{\partial X} - \frac{\partial F(X - \epsilon_{X1} * \psi_1)}{\partial X} \right] + \frac{1}{2\epsilon_{X2}} \omega \left[ \frac{\partial F(X + \epsilon_{X2} * \psi_2)}{\partial X} (\nabla \otimes I_n) - \frac{\partial F(X - \epsilon_{X2} * \psi_2)}{\partial X} (\nabla \otimes I_n) \right] \quad (21)$$

avec  $\epsilon_{X1} = \eta * \left( \frac{\|X\|}{\|\psi_1\|} + \eta \right)$  et  $\epsilon_{X2} = \eta * \left( \frac{\|X\|}{\|\psi_2\|} + \eta \right)$ .

Enfin,  $N_{\omega 1}$  et  $N_{\omega 2}$  sont obtenues analytiquement :

$$N_{\omega 1} = R_{X\omega} \psi_1 - \kappa (C_1 \psi_1)_\omega \quad (22)$$

$$N_{\omega 2} = R_{X\omega} \psi_2 + \kappa (C_2 \psi_2)_\omega \quad (23)$$

Avec :

$$R_{X\omega} = [2\omega(\nabla^2 \otimes \mathbf{M}) + (\nabla \otimes \mathbf{C})]$$

---

## B.4 Doublement de période : PD

Pour détecter un doublement de période, le système algébrique suivant est résolu à chaque itération  $k$  avec un algorithme de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} R_X^k & R_0 & R_0 & R_\omega^k \\ (R_{XX}^k)\phi & -(R_X - (\frac{\omega}{2})^2\Delta_2) & (\frac{\omega}{2})\Delta_1 & -(R_{X\omega} - \omega\Delta_2)\phi - (\frac{1}{2})\Delta_1\phi_g \\ (R_{XX}^k)^T\phi_g & -(\frac{\omega}{2})\Delta_1 & -(R_X^T - (\frac{\omega}{2})^2\Delta_2) & -(R_{X\omega}^T - \omega\Delta_2)\phi_g + (\frac{1}{2})\Delta_1\phi \\ 0_L^T & 2\phi^T & 0_L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X^k \\ \delta\phi^k \\ \delta\phi_g^k \\ \delta\omega^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(\mathbf{X}, \omega) \\ (R_X - (\frac{\omega}{2})^2\Delta_2)\phi - (\frac{\omega}{2})\Delta_1\phi_g \\ (R_X^T - (\frac{\omega}{2})^2\Delta_2)\phi_g + (\frac{\omega}{2})\Delta_1\phi \\ \phi^T\phi - 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

## C Code Matlab pour le calcul des coefficients de la sliding surface

```

1      function [Psigma] = OptimLQR_SMC(A,Bu,QQ)
2      % Cette fonction permet d'optimiser les
3      % parametres de la sliding surface
4      % par la methode LQR : Yuri Shtessel -
5      % Sliding Mode Control and Observation [p.
6      % 54]
7      % Entrees : A : Matrice d'etat
8      %           B : Matrice de sortie (
9      %           controle)
10     %           QQ : Matrice de ponderation
11     % Sortie : Psigma : Les parametres de la
12     % sliding surface.
13     % Auteur : MESNY Louis
14     % Annee : 2023
15
16     %% QR factorisation
17     [Q,R] = qr(Bu); m = rank(Bu);
18     Q1 = Q(:,1:m);
19     Q2 = Q(:,m+1:end);
20     Tr = [Q2 Q1]\eye(size(Q));
21     Bbar = Tr*Bu;
22
23     B2 = Bbar(end-m+1:end,:);
24     S2 = eye(size(B2,1))/B2;
25     Abar = Tr*A*Tr';
26
27     Qz = Tr*diag(QQ)*Tr';
28
29     A_11 = Abar(1:end-m,1:end-m);
30     A_22 = Abar(end-m+1:end,end-m+1:end);
31     A_12 = Abar(1:end-m,end-m+1:end);
32     A_21 = Abar(end-m+1:end,1:end-m);
33
34     Q_11 = Qz(1:end-m,1:end-m);
35     Q_22 = Qz(end-m+1:end,end-m+1:end);
36     Q_12 = Qz(1:end-m,end-m+1:end);
37     Q_21 = Qz(end-m+1:end,1:end-m);
38
39     A_hat = A_11 - A_12/Q_22*Q_12';
40     Q_hat = Q_11 - Q_12/Q_22*Q_12';
41
42     Ms = lqr(A_hat,A_12,Q_hat,Q_22); %
43     % Resolution de l'equation de Riccati
44     Psigma = S2*[Ms eye(m)]*Tr;
45     end

```

---

## D Filtre de Kalman : EKF

---

### Algorithm 2 Filtre de Kalman : EKF

---

- 1: **procedure** EKF
  - 2:  $\hat{x}(k+1|k) = f_s(\hat{x}(k), u(k))$  ▷ Système dynamique avec  $f_s$  fonction non-linéaire
  - 3:  $\Phi = \frac{df_s}{dx} |_{\hat{x}(k+1)}$  et  $\Gamma = \frac{df_s}{du} |_{\hat{x}(k+1)}$  ▷ Calcul des Jacobiennes
  - 4:  $P(k+1|k) = \Phi^T P(k) \Phi + \Gamma^T Q \Gamma$  ▷ Augmentation de la matrice de covariance
  - 5:  $\hat{g}(\hat{x}(k+1|k)) = h(\hat{x}(k+1|k))$  ▷ **Prédiction de l'observation  $h$  de la mesure future**
  - 6:  $S(k+1) = g(k+1) - \hat{g}(\hat{x}(k+1|k))$  ▷ Comparaison mesure et prédiction
  - 7:  $\Lambda^T = \frac{dh}{dx} |_{\hat{x}(k+1)}$  ▷ Jacobienne de mesure
  - 8:  $K(k+1) = P(k+1|k) \Lambda^T [\Lambda^T P(k+1|k) \Lambda + R(k+1)]^{-1}$  ▷ Gain de Kalman
  - 9:  $\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) S(k+1)$  ▷ **Correction grâce à la mesure**
  - 10:  $P(k+1) = (I_n - K(k+1) \Lambda) P(k+1|k)$  ▷ Mise à jour de la covariance
-

## E Algorithme pour la procédure de continuation : PAC

---

### Algorithm 3 Algorithme pour la procédure de continuation : PAC

---

1: **procédure** PAC  
2: Initialisation :  $(A^0, \omega^0)$  pour  $i = 0$  et  $k = 0$   
3: Calculer  $F_{nl}(A^{i(k)})$  par AFT pour la Jacobienne  $R_A^{i(k)}$   
4: Calcul de la Jacobienne  $R_\omega^{i(k)}$   
5: **while**  $\omega \geq \omega_{min}$  et  $\omega \leq \omega_{max}$  **do**  
6:      $k=0$   
7:      $A_{old} = A^{i(k)}$  et  $\omega_{old} = \omega^{i(k)}$  ▷ **Prédicteur : Vecteur tangent**  
8:     Résoudre  $\vec{t} = \begin{bmatrix} \Delta A^{i(k)} & \Delta \omega^{i(k)} \end{bmatrix}^T$  pour :  

$$\begin{bmatrix} R_A^{i(k)} & R_\omega^{i(k)} \\ \Delta A^T & \Delta \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A^{i(k)} \\ \Delta \omega^{i(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta s^2 \end{bmatrix}$$
  
9:     Mise à jour de  $\Delta s$  en fonction de la vitesse de convergence du pas précédent.  
10:      $i=i+1$   
11:     Calculer la prédiction :  $\begin{bmatrix} A^{i(k)} \\ \Delta \omega^{i(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A^{i-1(k)} \\ \Delta \omega^{i-1(k)} \end{bmatrix} + \vec{t}$   
12:      $R(A^{i(k)}, \omega^{i(k)}) = Z(\omega^{i(k)})A^{i(k)} + F_{nl}(A^{i(k)}) - P = 0$   
13:      $res = \|R(A^{i(k)}, \omega^{i(k)})\|_2$  ▷ **Correcteur : Itérations de Newton-Raphson**  
14:     **while**  $res \leq \epsilon$  et  $k \leq iter_{max}$  **do**  
15:         Calculer  $F_{nl}(A^{i(k)})$  par AFT pour la Jacobienne  $R_A^{i(k)}$   
16:         Calcul de la Jacobienne  $R_\omega^{i(k)}$   
17:         Résoudre :  

$$\begin{bmatrix} R_A^{i(k)} & R_\omega^{i(k)} \\ \Delta A^T & \Delta \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A \\ \delta \omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(A^{i(k)}, \omega^{i(k)}) \\ 0 \end{bmatrix}$$
  
18:          $R(A^{i(k)}, \omega^{i(k)}) = Z(\omega^{i(k)})A^{i(k)} + F_{nl}(A^{i(k)}) - P = 0$   
19:          $res = \|R(A^{i(k)}, \omega^{i(k)})\|_2$   
20:          $k=k+1$   
21:         Calcul de la mise à jour :  $A^{i(k)} = A^{i(k-1)} + \delta A$  et  $\omega^{i(k)} = \omega^{i(k-1)} + \delta \omega$   
22:         **if**  $res \leq \epsilon$  **then**  
23:             Calcul de stabilité par la matrice de Hill ou de Monodromie.  
24:             Stockage de la solution  
25:         **else**  
26:              $i=i-1$   
27:              $A = A_{old}$  et  $\omega = \omega_{old}$   
28:             Réduction du pas  $\Delta s$   
29:     Fin du calcul : Tracé de la courbe de réponse

---

---

## F Étude de la dynamique rapide : calcul du SIM et de sa stabilité

### Étude à l'ordre $\epsilon^0$ : Dynamique rapide

L'état asymptotique du système pour  $\tau_0 \rightarrow \infty$  est alors cherché. Les amplitudes complexes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ne dépendent pas de l'échelle de temps rapide :

$$\begin{cases} \frac{\phi_1}{\tau_0} = 0 \\ \frac{\phi_2}{\tau_0} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

À l'ordre  $\epsilon^0$ , l'équation (2.98) devient :

$$\begin{cases} \frac{i}{2} \left( \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega} \right) \phi_1 = \frac{i}{2} \phi_1 = 0 \implies \phi_1 = 0 \\ \frac{i}{2} \phi_2 - \frac{i}{2} \phi_1 + \left( \frac{3K_{nl2} |\phi_2|^2}{8i} \phi_2 + \frac{\lambda_2}{2} \phi_2 + \frac{K_2}{2i} \phi_2 \right) = \alpha F_a(\phi_1, \phi_2) \end{cases} \quad (26)$$

Il est intéressant de remarquer que le terme non-linéaire et le terme d'amortissement en  $\phi_1$  à disparu de la deuxième équation du système (26). **Le déclenchement de l'absorbeur non-linéaire est du uniquement à un niveau suffisant d'énergie. Et ce, indépendamment de la nature de la structure sur laquelle il est posé.**

### Traitement de la loi de contrôle

À la section 2.3.1, la loi de contrôle a été décomposée en une partie continue et une discontinue.

#### Force active continue

Dans ces travaux, cette partie de la force active prend la forme d'un polynôme. On peut remarquer dans le système d'équations moyennées (2.98) que les termes de raideurs sont purement imaginaires et que les termes d'amortissements sont réels. Ceci étant, il est nécessaire pour la suite du raisonnement de décomposer à nouveau cette force une partie réelle et une partie imaginaire. Il est à noter qu'aucun amortissement non-linéaire ne sera introduit dans cette étude.

#### Force active discontinue

Le calcul de la partie discontinue se base sur les travaux de GENDELMAN [5]. Dans ces derniers, l'auteur traite les efforts non-polynomiaux en appliquant une méthode de Galerkin tronquée en série de Fourier. Cette étape est obligatoire, car le système d'équation moyennée (2.98) est valable pour l'échelle de temps rapide que si et seulement si  $F_{ad}$  est présentée en série de Fourier. Le premier coefficient de Fourier  $f_{ad}(\phi_1, \phi_2, \phi_1^*, \phi_2^*)$  s'écrit :

$$f_{ad}(\phi_1, \phi_2, \phi_1^*, \phi_2^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{ad}(U_1, U_2) e^{-i\tau} d\tau_0 \quad (27)$$

$$U_1 = -\frac{i}{2} \left( \phi_1 e^{i\tau} - \phi_1^* e^{-i\tau} \right) \quad (28)$$

$$U_2 = -\frac{i}{2} \left( \phi_2 e^{i\tau} - \phi_2^* e^{-i\tau} \right) \quad (29)$$



L'intégrale présentée en (27) peut être calculée analytiquement ou numériquement. Cependant, dans la littérature [5], il est montré que :

$$f_{ad}(\phi_1, \phi_1^*) = -\frac{i\phi_1}{2}G_1(|\phi_1|^2) \text{ et } f_{ad}(\phi_2, \phi_2^*) = -\frac{i\phi_2}{2}G_2(|\phi_2|^2) \quad (30)$$

où  $G_1(|\phi_1|^2)$  et  $G_2(|\phi_2|^2)$  sont deux fonctions qui seront détaillées par la suite.

### Calcul du Slow Invariant Manifold du système contrôlé

Introduisons  $N_1 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\delta_1 \in \mathbb{R}$  le module et la phase de la forme polaire de  $\phi_1$  tels que :

$$\phi_1 = N_1 e^{i\delta_1} \quad (31)$$

La deuxième ligne de l'équation (26) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2}\phi_2 + \left( \frac{3K_{nl2}|\phi_2|^2}{8i}\phi_2 + \frac{\lambda_2}{2}\phi_2 + \frac{K_2}{2i}\phi_2 \right) + \frac{i\alpha}{2}G_2(|\phi_2|^2)\phi_2 \\ & \quad - \alpha \left( \Re(F_{ac}(\phi_2)) - i\Im(F_{ac}(\phi_2, |\phi_2|^2)) \right) \\ & = \left( \left( -\frac{i\alpha}{2}G_1(N_1^2) + \frac{i}{2} \right) N_1 + \alpha \left( \Re(F_{ac}(N_1)) - i\Im(F_{ac}(N_1, N_1^2)) \right) \right) e^{i\delta_1} \end{aligned} \quad (32)$$

Supposons que  $\phi_2 = \hat{\Phi} e^{\delta_1}$ , le système (32) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2}\hat{\Phi} + \left( \frac{3K_{nl2}|\hat{\Phi}|^2}{8i}\hat{\Phi} + \frac{\lambda_2}{2}\hat{\Phi} + \frac{K_2}{2i}\hat{\Phi} \right) + \frac{i\alpha}{2}G_2(|\hat{\Phi}|^2)\hat{\Phi} \\ & \quad - \alpha \left( \Re(F_{ac}(\hat{\Phi})) - i\Im(F_{ac}(\hat{\Phi}, |\hat{\Phi}|^2)) \right) \\ & = \left( \left( -\frac{i\alpha}{2}G_1(N_1^2) + \frac{i}{2} \right) N_1 + \alpha \left( \Re(F_{ac}(N_1)) - i\Im(F_{ac}(N_1, N_1^2)) \right) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Enfin, introduisons  $N_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\delta_2 \in \mathbb{R}$  le module et la phase de la forme polaire de  $\hat{\Phi}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2}N_2 + \left( \frac{3K_{nl2}N_2^2}{8i}N_2 + \frac{\lambda_2}{2}N_2 + \frac{K_2}{2i}N_2 \right) + \frac{i\alpha}{2}G_2(N_2^2)N_2 \\ & \quad - \alpha \left( \Re(F_{ac}(N_2)) - i\Im(F_{ac}(N_2, N_2^2)) \right) \\ & = \left( \left( -\frac{i\alpha}{2}G_1(N_1^2) + \frac{i}{2} \right) N_1 + \alpha \left( \Re(F_{ac}(N_1)) - i\Im(F_{ac}(N_1, N_1^2)) \right) \right) e^{-i\delta_2} \end{aligned} \quad (34)$$

Finalement, l'écriture du SIM réel avec une loi de contrôle est obtenue :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}N_2 - \frac{3K_{nl2}N_2^2}{8}N_2 - \frac{K_2}{2}N_2 + \frac{\alpha}{2}G_2(N_2^2)N_2 + \alpha\Im(F_{ac}(N_2, N_2^2)) \right)^2 \\ & \quad + \left( \frac{\lambda_2}{2}N_2 - \alpha\Re(F_{ac}(N_2)) \right)^2 \\ & = \alpha^2\Re(F_{ac}(N_1))^2 + \left( \frac{1}{2}N_1 - \alpha\Im(F_{ac}(N_1, N_1^2)) - \frac{\alpha}{2}G_1(N_1^2)N_1 \right)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Le SIM dans le domaine réel sans la présence du contrôleur est aussi donné :

$$\left( \frac{\lambda_2}{2}N_2 \right)^2 + \left( \frac{1}{2}N_2 - \frac{3K_{nl2}N_2^2}{8}N_2 - \frac{K_2}{2}N_2 \right)^2 = \left( \frac{1}{2}N_1 \right)^2 \quad (36)$$

---

## Analyse de stabilité de la variété invariante à $\epsilon^0$

L'étude de stabilité indique les zones de stabilité et d'instabilité du SIM. Comme la première équation du système (26) est nulle, l'étude de stabilité est faite sur la deuxième équation de ce système. Cette dernière, que l'on notera  $\mathcal{A}(\phi_1, \phi_2, \phi_1^*, \phi_2^*)$ , correspond à la représentation complexe du SIM telle que :

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \tau_0} = \mathcal{A}(\phi_1, \phi_2, \phi_1^*, \phi_2^*) = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\phi_1, \phi_2, \phi_1^*, \phi_2^*) = & -\frac{i}{2}\phi_2 + \frac{i}{2}\phi_1 - \left( \frac{3K_{nl2}|\phi_2|^2}{8i}\phi_2 + \frac{\lambda_2}{2}\phi_2 + \frac{K_2}{2i}\phi_2 \right) \\ & + \alpha (\Re(F_{ac}(\phi_1)) + \Re(F_{ac}(\phi_2))) \\ -i \left( \Im(F_{ac}(\phi_1, |\phi_1|^2)) + \Im(F_{ac}(\phi_2, |\phi_2|^2)) + \frac{\phi_1}{2}G_1(|\phi_1|^2) + \frac{\phi_2}{2}G_2(|\phi_2|^2) \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Considérons une perturbation linéaire sous la forme :

$$\begin{cases} \phi_2 = \phi_2 + \Delta\phi_2 \\ \phi_2^* = \phi_2^* + \Delta\phi_2^* \\ |\phi_2|^2 = \phi_2\phi_2^* \end{cases} \quad (39)$$

Avec  $|\phi_2| \gg |\Delta\phi_2|$ . Ici, seule la variable  $\phi_2$  est perturbée, car la composante en  $\phi_1$  est nulle (voir Eq. (26)). En introduisant (39) dans la deuxième équation de (26), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi_2 + \Delta_2)}{\partial \tau_0} = & -\frac{i}{2}(\phi_2 + \Delta_2) + \frac{i}{2}\phi_1 - \frac{3K_{nl2}(\phi_2^* + \Delta_2^*)(\phi_2 + \Delta_2)^2}{8i} - \frac{\lambda_2}{2}(\phi_2 + \Delta_2) \\ & - \frac{K_2}{2i}(\phi_2 + \Delta_2) - i\alpha \left( \frac{\phi_1}{2}G_1(|\phi_1|^2) + \frac{(\phi_2 + \Delta_2)}{2}G_2((\phi_2 + \Delta_2)(\phi_2^* + \Delta_2^*)) \right) \\ & + \alpha (\Re(F_{ac}(\phi_1)) + \Re(F_{ac}(\phi_2 + \Delta_2))) \\ & - i\alpha \left( \Im(F_{ac}(\phi_1, |\phi_1|^2)) + \Im(F_{ac}(\phi_2 + \Delta_2, (\phi_2^* + \Delta_2^*)(\phi_2 + \Delta_2))) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi_2^* + \Delta_2^*)}{\partial \tau_0} = & +\frac{i}{2}(\phi_2^* + \Delta_2^*) - \frac{i}{2}\phi_1 + \frac{3K_{nl2}(\phi_2^* + \Delta_2^*)^2(\phi_2 + \Delta_2)}{8i} - \frac{\lambda_2}{2}(\phi_2^* + \Delta_2^*) \\ & + \frac{K_2}{2i}(\phi_2^* + \Delta_2^*) - i\alpha \left( \frac{\phi_1}{2}G_1(|\phi_1|^2) - \frac{(\phi_2^* + \Delta_2^*)}{2}G_2((\phi_2 + \Delta_2)(\phi_2^* + \Delta_2^*)) \right) \\ & + \alpha (\Re(F_{ac}(\phi_1)) + \Re(F_{ac}(\phi_2^* + \Delta_2^*))) \\ & - i\alpha \left( \Im(F_{ac}(\phi_1, |\phi_1|^2)) - \Im(F_{ac}(\phi_2^* + \Delta_2^*, (\phi_2^* + \Delta_2^*)(\phi_2 + \Delta_2))) \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Le terme  $G_2((\phi_2 + \Delta_2)(\phi_2^* + \Delta_2^*))$  peut être développé en série de Taylor :

$$G_2((\phi_2 + \Delta_2)(\phi_2^* + \Delta_2^*)) = G_2(|\phi_2|^2) + (\phi_2^*\Delta\phi_2 + \phi_2\Delta\phi_2^*)H_2(|\phi_2|^2) + \mathcal{O}(|\Delta|^2) \quad (42)$$

Où  $H_2(|\phi_2|^2)$  est la dérivée de  $G_2(|\phi_2|^2)$  avec le respect de  $|\phi_2|^2$ .

Les équations (40) et (41) peuvent être mise sous la forme d'un système linéaire tel que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\Delta\phi_2)}{\partial\tau_0} \\ \frac{\partial(\Delta\phi_2^*)}{\partial\tau_0} \end{bmatrix} = \mathbb{L} \begin{bmatrix} \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_2^* \end{bmatrix} \quad (43)$$

où

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (44)$$

et

$$\begin{cases} L_{11} = -\frac{i}{2} - \frac{6K_{nl2}(\phi_2)^2}{8i} - \frac{K_2}{2i} - \frac{\lambda_2}{2} + \alpha \left( \Re(F_{ac}(\phi_2)) - i\Im(F_{ac}(\phi_2, |\phi_2|^2)) \right) \\ \quad \quad \quad - i\alpha \left( G_2(|\phi_2|^2) + (\phi_2^*)^2 H_2(|\phi_2|^2) \right) \\ L_{12} = -i\alpha(\phi_2)^2 H_2(|\phi_2|^2) - (i\Im(F_{ac}(|\phi_2|^2)) + \frac{3K_{nl2}}{8i} |\phi_2|^2) \\ L_{22} = \frac{i}{2} + \frac{6K_{nl2}(\phi_2)^2}{8i} + \frac{K_2}{2i} - \frac{\lambda_2}{2} + \alpha \left( \Re(F_{ac}(\phi_2)) - i\Im(F_{ac}(\phi_2, |\phi_2|^2)) \right) \\ \quad \quad \quad + i\alpha \left( G_2(|\phi_2|^2) + (\phi_2^*)^2 H_2(|\phi_2|^2) \right) \\ L_{21} = +i\alpha(\phi_2)^2 H_2(|\phi_2|^2) + (i\Im(F_{ac}(|\phi_2|^2)) + \frac{3K_{nl2}}{8i} |\phi_2|^2) \end{cases} \quad (45)$$

Les zones de stabilité du SIM sont alors définies par :

$$\det(\mathbb{L}) = L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = 0 \quad (46)$$

Il est dit qu'une zone du SIM est stable si et seulement si les valeurs propres de (44) sont à parties réelles négatives ou si :

$$\det(\mathbb{L}) \geq 0 \quad (47)$$



# Liste des publications personnelles

## Reuves internationales

- Louis Mesny, Sébastien Baguet, Simon Chesné. Nonlinear vibration of sliding-mode-controlled structure : simulation and experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*. (article publié le 31/01/2024)

## Publications en tant que coauteur

- Jonathan Rodriguez, Louis Mesny, Simon Chesné. Sliding Mode Control for Hybrid Mass Dampers : Experimental Analysis on Robustness. *Journal of Sound and Vibration*.

## Conférences avec actes

- Louis Mesny, Sébastien Baguet, Simon Chesné. Contrôle actif d'un système non-linéaire par modes glissants et équilibrage harmonique. 15ème colloque national en calcul des structures 2022, Mai 2022, Giens, France.
- Louis Mesny, Sébastien Baguet, Simon Chesné. An adaptive nonlinear hybrid vibration absorber. NODYCON 2023, Juin 2023, Rome, Italie.

## Conférences sans actes

- Louis Mesny, Sébastien Baguet, Simon Chesné. Absorbent de vibrations non-linéaire hybride. Journées Jeunes Chercheurs en vibration, Acoustique et Bruit 2021, Novembre 2021, Compiègne, France.
- Louis Mesny, Sébastien Baguet, Simon Chesné. Un absorbent de vibration hybride avec pilotage des non-linéarités. Les journées annuelles du GDR EX-MODELI, Novembre 2023, Besançon, France.





## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : MESNY

DATE de SOUTENANCE : 09/01/2024

Prénoms : Louis, Gabriel, Yoro

TITRE : Compréhension et optimisation du pompage énergétique multiphysique dans les absorbeurs de vibrations non-linéaires hybrides

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2024ISAL0004

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique – Génie Mécanique – Génie Civil

#### RESUME :

Les absorbeurs passifs, également connus sous le nom de Tuned Mass Dampers (TMD), sont couramment utilisés pour réduire les vibrations. Leur principal avantage réside dans leur facilité de mise en œuvre. Cependant, leur plage d'efficacité est limitée, car ils sont conçus pour fonctionner à une fréquence spécifique. Au cours des dernières décennies, deux nouvelles voies ont émergé. Premièrement, l'hybridation qui combine des techniques de contrôle actif impliquant des actionneurs, des capteurs et des lois de contrôle avec un contrôle passif. Ce système combiné apporte une caractéristique "fail safe", ce qui signifie qu'il est robuste face aux défaillances des composants actifs et présente généralement des performances supérieures par rapport aux systèmes purement passifs. Deuxièmement, la fonctionnalisation des non-linéarités dans les absorbeurs de vibrations, on parle alors d'absorbeurs non-linéaires. Ces derniers peuvent être purement non linéaires, tels que le Nonlinear Energy Sink (NES), ou disposer en plus d'une partie linéaire, comme le Nonlinear Tuned Vibration Absorber (NLTVA). L'introduction de ces non-linéarités élargit la gamme d'applications des absorbeurs. Cependant, les non-linéarités peuvent également entraîner des phénomènes indésirables, tels que des solutions isolées ou des points de bifurcation, qui doivent être identifiés pour assurer un fonctionnement sûr et efficace. Par conséquent, l'objectif de cette thèse est de combiner ces approches afin de surmonter leurs limitations individuelles. Le manuscrit fournira un aperçu détaillé des outils utilisés pour analyser les systèmes à dynamique non-linéaire couplés à un contrôle actif. Ces outils serviront ensuite de base pour la compréhension et la validation d'un absorbeur non-linéaire hybride expérimental.

MOTS-CLÉS : Pompage énergétique, Transfert énergétique, Absorbeurs de vibrations, Dynamique non-linéaire, Hybridation, Contrôle actif des structures, Méthode de l'équilibrage harmonique, Méthode des échelles multiples, Méthodes de continuation

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures  
UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon  
18-20 rue des Sciences  
69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse: CHESNÉ Simon

Président de jury : COLLET Manuel

Composition du jury : COLLET Manuel  
SADOULET-REBOUL Émeline  
CHESNÉ Simon  
MICHON Guilhem  
COLLETTE Christophe  
BAGUET Sébastien