



N° d'ordre NNT : 2022ISAL0104

**THESE de DOCTORAT DE L'INSA LYON,
membre de l'Université de Lyon**

**Ecole Doctorale ED 162 MEGA
Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique**

**Spécialité de doctorat :
Génie Mécanique**

Soutenue publiquement le 30/11/2022, par :
Nathanaël THIBAULT

**Prédire par la modélisation la réponse
d'une transmission endommagée :
manifestations et nouvelles voies de
transfert**

Devant le jury composé de :

Dion, Jean-Luc	Professeur	ISAE-SUPMECA	Examineur
Serra, Roger	Maître de Conférences – HDR	INSA CVL	Rapporteur
Chimentin, Xavier	Maître de Conférences – HDR	Université de Reims	Rapporteur
Nélias, Daniel	Professeur	INSA de Lyon	Examineur
Rémond, Didier	Professeur	INSA de Lyon	Directeur de thèse
Bourdon, Adeline	Maître de Conférences	INSA de Lyon	Co-directrice de thèse
Lecouvreur, Damien	Ingénieur	SAFRAN Helicopter Engines	Tuteur industriel
Neveux, Nicolas	Ingénieur	Alstom	Invité

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON https://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr	M. Stéphane DANIELE C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE https://edeea.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr	M. Philippe DELACHARTRE INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 philippe.delachartre@insa-lyon.fr
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	Mme Sandrine CHARLES Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne CEDEX sandrine.charles@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://ediss.universite-lyon.fr Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie RICARD-BLUM Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Hamamache KHEDDOUCI Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr
Matériaux	MATÉRIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr	M. Stéphane BENAYOUN Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 stephane.benayoun@ec-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon mega@insa-lyon.fr	M. Jocelyn BONJOUR INSA Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* https://edsciencesociales.universite-lyon.fr Sec. : Mélina FAVETON INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.77.79 melina.faveton@univ-lyon2.fr	M. Bruno MILLY Université Lumière Lyon 2 86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07 bruno.milly@univ-lyon2.fr

* ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

En premier lieu, je souhaite exprimer toute ma gratitude envers Monsieur Didier Rémond, professeur, et Madame Adeline Bourdon, maître de conférences, pour avoir dirigé mes travaux. Leur disponibilité, leur écoute et leur bienveillance ont rendu nos échanges agréables et productifs. Ils ont su, par leurs connaissances et leurs conseils, me guider tout au long de cette aventure et ont été pour moi de véritables soutiens.

Cette thèse a été effectuée dans le cadre du Consortium Industrie Recherche sur les Transmissions (CIRTrans) et résulte d'une collaboration entre Safran Helicopter Engines et le Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS, UMR 5259, INSA Lyon). J'adresse mes remerciements à Messieurs Benjamin Fulleringer, chef de l'équipe TRM chez Safran et Daniel Nélías, directeur du LaMCoS, pour leur accueil et les excellentes conditions de travail qui m'ont été offertes permettant de mener à bien ces travaux.

Je remercie également Messieurs Xavier Chiementin de l'Université de Reims Champagne-Ardenne et Roger Serra de l'INSA Centre Val de Loire pour avoir accepté de rapporter ma thèse ainsi que les professeurs Daniel Nélías de l'INSA Lyon et Jean-Luc Dion de l'ISAE SUPMECA qui m'ont fait l'honneur d'examiner mes travaux et de présider mon jury.

Une partie de mes travaux ont été menés au sein de l'équipe TRM de la direction technique de Safran HE et je suis reconnaissant envers tous ses membres pour la chaleur avec laquelle ils m'ont accueilli et l'aide qu'ils m'ont fournie. Je pense notamment à Monsieur Damien Lecouvreur qui a été mon tuteur au cours de cette thèse et qui a suivi de près mes travaux. Son implication, son expertise et ses conseils ont été d'une grande aide pour mener à bien ce projet.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres du CIRTrans et en particulier Messieurs Nicolas Neveux et Lionel Valette pour l'attention qu'ils ont apporté à mes travaux et pour leurs remarques constructives.

Je remercie du fond du cœur toute l'équipe DCS du LaMCoS au sein de laquelle j'ai passé la majeure partie de ces trois années pour les discussions scientifiques ainsi que pour tous les moments de convivialité dans et en dehors du laboratoire malgré des conditions sanitaires difficiles. Merci à Yvon, Florian L., Afaf, Guillaume et Xiaowen qui m'ont accueilli ainsi qu'à Florian T., Antoine C., Martin, Louis, Maryne, Antoine L., Floriane, Gaël et Mojtaba qui nous ont rejoint ensuite.

Pour finir, ma gratitude va à ma famille. L'aboutissement de ce projet de recherche est dû en grande partie au soutien de mes parents qui m'ont épaulé dans les moments difficiles. Mon frère m'a également aidé à me changer les idées et à prendre du recul lorsque c'était nécessaire et je lui souhaite une grande réussite dans sa propre thèse.

Résumé

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit ont été réalisés au Laboratoire de Mécanique des Contact et des Structures (LaMCoS) à l'INSA de Lyon en partenariat avec Safran Helicopter Engines. Ils se sont déroulés dans le cadre du Consortium Industrie Recherche sur les Transmissions (CIRTrans) et ont été suivis de près par Alstom. Ils se concentrent sur la dynamique d'une transmission de puissance en présence de dégradations des engrenages et roulements qui la composent. Les endommagements de ces composants peuvent s'avérer critiques pour l'intégrité d'un moteur d'hélicoptère et doivent par conséquent être détectés le plus tôt possible afin d'éviter les interruptions de mission et d'optimiser le planning de maintenance de l'appareil. Cette thèse propose un modèle dynamique d'une transmission et entre dans le détail du comportement des différents éléments. La modélisation est réalisée selon une approche phénoménologique de sorte qu'aucun phénomène n'est introduit sous la forme d'une excitation arbitraire et que tous trouvent leur source dans les interactions mécaniques des différents solides entre eux. Le modèle d'arbre se base sur une discrétisation éléments finis à une dimension sous la forme d'éléments de poutre de Timoshenko dont les six degrés de liberté de chaque nœud sont conservés. En particulier, la position angulaire comprend à la fois la rotation de corps rigide et les effets de torsion, ce qui permet d'obtenir la vitesse instantanée réelle de l'arbre et la relation angle-temps. Les roulements et engrenages sont quant à eux introduits comme des torseurs de liaison reliant entre eux deux nœuds du système discrétisé. Ceci permet un couplage fort entre ces deux types d'éléments et évite de devoir recourir à tout type de linéarisation. Les modèles implémentés permettent la prise en compte de plusieurs types d'endommagements et leur validation a été effectuée sur la base d'outils numériques certifiés. En outre, une attention particulière est accordée aux phénomènes locaux susceptibles d'influencer les variations de vitesse de rotation instantanée. Dans ce but, des modèles originaux ont été développés pour les contacts hors ligne d'action et les effets convectifs de flexion à l'engrènement ainsi que pour les contacts partiels des éléments roulants sur un écaillage dans un roulement.

Plusieurs simulations du comportement dynamique d'une transmission complète ont été effectuées afin de permettre l'étude des différents composants dans des conditions de fonctionnement variées. L'étude de la transmission est réalisée à travers la vitesse instantanée de rotation plutôt que sur la base des signaux vibratoires classiques explorant ainsi de nouvelles voies de transfert. De plus, l'observation est faite dans le domaine angulaire plutôt que temporel afin de tirer profit des régimes transitoires dans l'étude des éléments à périodicité cyclique. Il apparaît que l'étude de phases d'accélération ou de décélération constituent des conditions idéales afin d'isoler les signatures de roulement et engrenage de la réponse impulsionnelle du système. Elles se substituent donc aux méthodes de déconvolution classiques. L'influence du régime nominal et des chargements sur la signature des roulements et des engrenages est analysée. De plus les interactions existantes entre ces deux types d'éléments sont mises en évidence et l'intérêt de leur modélisation et de leur étude est discuté. Pour finir les signatures des différents endommagements envisageables sur la transmission sont caractérisées afin de permettre la détection de ceux-ci sur des signaux issus de transmissions en conditions de fonctionnement réelles. Ces travaux proposent donc d'une part un modèle phénoménologique d'une transmission capable de fournir des signaux réalistes et utilisables afin de tester des méthodes de traitement de signal et d'autre part de bonnes pratiques de surveillance complémentaires ou alternatives aux méthodes utilisées dans la littérature.

Mots clés : Vitesse instantanée, simulation, surveillance, diagnostic, roulements, engrenages, approche angulaire, non-stationnaire

Abstract

This PhD thesis was carried out in the Contact and structural Mechanic Laboratory (LaMCoS) at INSA Lyon with the support of Safran Helicopter Engines. They were initiated in the framework of the Industry Research Consortium on Transmissions (CIRTrans) and have been closely followed by Alstom. The research work focusses on the dynamics of a power transmission in the presence of damaged gears and bearings. Wear and fault of these components are often critical regarding the safety of a helicopter engine and must therefore be detected as early as possible in order to avoid mission interruptions and optimize the maintenance schedule. A dynamic model of a transmission is proposed that goes into the details of the mechanical behavior of the components. This model is based on a phenomenological approach so that all considered phenomena find their sources in mechanical interactions between the solids and none is introduced as an arbitrary excitation. The shaft model is based on a one-dimension discretization using Timoshenko beam theory with six degrees of freedom per node. In particular, the angular position includes both the rigid mode rotation and the torsion effects what provides the real instantaneous angular speed of the shaft and the angle-time relation. Bearings and gears are introduced as force vectors connecting two nodes of the discretized system allowing strong coupling between them and avoiding any kind of linearization. The implemented models account for several kind of damages and have been validated using certified numerical tools. Moreover, special attention is paid to local phenomena likely to influence the instantaneous angular speed variations. For this purpose, original models have been developed for off-line-of-action contacts and flexion convective effects existing at the mesh interface as well as for partial contact of rolling element on spalls in bearings.

Several simulations of the dynamic behavior of a complete transmission were carried out in order to observe the components in various operating conditions. The transmission monitoring is performed through the Instantaneous Angular Speed (IAS) instead of the classical acceleration signals exploring new fault manifestations. Furthermore, the observations are realized in the angular domain instead of the time domain to benefit from non-stationary operating conditions for the study of angular-periodic elements. It appears that conditions of acceleration or deceleration are ideal to isolate bearings and gears signature from the global systems response. They replace in this way the classical signal processing demodulation tools. Thus, the impact on the gears and bearings signature of the nominal rotating speed and of the loads applied on the system is analyzed. The interactions existing between these elements are also pointed out and the interest of their modeling and study is discussed. Finally, the signature of different faults is characterized in order to be able to recognize it in signals from real engines. The presented work therefore proposes both a phenomenological model of a power transmission providing one with realistic signals and relevant monitoring techniques that can be used as complement or alternative to classical monitoring methods.

Key words: Instantaneous angular speed, simulation, health monitoring, diagnostic, bearings, gears, angular domain, non-stationary conditions

Table des matières

Remerciements	5
Résumé	7
Abstract	9
Table des matières	11
Table des figures	15
Liste des tableaux	19
Introduction générale	21
Contexte industriel	21
Structure du mémoire	24
Chapitre I – Méthode de surveillance des transmissions et simulations	25
Introduction	26
I.1 – Etat de l’art	26
<i>I.1.1 – Modélisation des machines tournantes</i>	26
<i>I.1.2 – Détection d’endommagement et diagnostic</i>	27
<i>I.1.3 – L’IAS comme vecteur d’information</i>	29
<i>I.1.4 – Positionnement de la thèse</i>	32
I.2 – Mesure et traitement de l’IAS	32
<i>I.2.1 – Principe de la mesure</i>	33
<i>I.2.2 – Erreurs commises et restrictions</i>	34
<i>I.2.3 – Techniques de traitement du signal utilisées dans la thèse</i>	42
I.3 – Simulation du signal vitesse de rotation.....	43
<i>I.3.1 – Source de perturbation de la vitesse de rotation</i>	43
<i>I.3.2 – Méthode de modélisation et hypothèses retenues</i>	45
<i>I.3.3 – Construction du système différentiel</i>	47
I.4 – Intégration numérique.....	48
<i>I.4.1 – Vers un système du premier ordre</i>	48
<i>I.4.2 – Intégration angulaire</i>	49
<i>I.4.3 – Implémentation</i>	51
Conclusion partielle	52
Chapitre II – Modélisation des roulements	55
Nomenclature	56
Introduction	58
II.1 – Etat de l’art	58
<i>II.1.1 – Modèles quasi statiques</i>	59
<i>II.1.2 – Modèles dynamiques</i>	60
<i>II.1.3 – Modèles de roulements endommagés</i>	61
<i>II.1.4 – Positionnement de la thèse</i>	62
II.2 – Fonctionnement et Hypothèses	63

II.2.1 – Intégration dans le modèle de transmission	63
II.2.2 – Paramètres du modèle et définition du roulement	64
II.2.3 – Hypothèses adoptées.....	66
II.2.4 – Fonctionnement global du modèle.....	68
II.3 – Position d'équilibre et efforts de contact sur une bille	69
II.3.1 – Méthode de Newton.....	69
II.3.2 – Ecrasements et angles de contact	70
II.3.3 – Efforts dans le plan radial.....	71
II.3.4 – Efforts tangentiels	74
II.3.5 – Torseurs globaux	76
II.4 – Extension au cas des roulements à rouleaux cylindriques.....	77
II.4.1 – Particularités des rouleaux	77
II.4.2 – Discrétisation et écrasements aux contacts	78
II.4.3 – Efforts dans le plan radial.....	79
II.4.4 – Efforts tangentiels	80
II.5 – Endommagements.....	82
II.6 – Validation numérique en quasi-statique	84
II.6.1 – Cas des roulements à billes.....	85
II.6.2 – Cas des roulements à rouleaux cylindriques.....	87
II.6.3 – Décision.....	91
II.7 – Etude de comportement	92
II.6.1 – Présentation du système d'étude	92
II.6.2 - Influence de la vitesse de rotation.....	95
II.6.3 - Influence de la charge axiale.....	97
II.6.4 - Influence d'un endommagement	97
Conclusion partielle	99
Chapitre III - Modélisation des engrenages hélicoïdaux	101
Nomenclature.....	102
Introduction.....	104
III.1 – Etat de l'art	104
III.1.1 – Avant-propos	104
III.1.2 – Modèles à paramètres concentrés	105
III.1.3 – Calcul des variations de raideur d'engrènement.....	106
III.1.4 – Extension du calcul d'écrasement.....	108
III.1.5 – Endommagement des engrenages.....	110
III.1.6 – Positionnement de la thèse sur ces modèles	111
III.2 – Conventions et hypothèses	112
III.2.1 – Intégration dans le modèle de transmission	112
III.2.2 – Paramètres du modèle et définition de l'engrenage	113
III.2.3 – Hypothèses adoptées et fonctionnement du modèle.....	115
III.2.4 – Calculs préliminaires.....	116
III.3 – Calcul de l'écrasement au contact.....	119
III.3.1 – Ecrasement sur la ligne d'action.....	119
III.3.2 – Contacts hors plan d'action	120
III.3.3 – Congés de raccordement en tête.....	122

III.3.4 – Correction de denture	125
III.4 – Loi de contact, raideur et calcul d’effort	126
III.4.1 – Déformation de contact.....	127
III.4.2 – Déformation de denture	127
III.4.3 – Déformation de corps de roue.....	128
III.4.4 – Efforts normaux et tangentiels.....	130
III.5 – Effets convectifs de flexion	131
III.6 – Validation quasi statique et recalage	132
III.6.1 – Géométrie et modèle éléments finis.....	132
III.6.1 – Comparaison et recalage.....	134
III.7 – Ecaillage et fissure	136
III.7.1 – Ecaillages	136
III.7.2 – Fissures	136
Conclusion partielle	139
Chapitre IV – Etude d’une transmission complète.....	141
Introduction	142
IV.1 – Présentation du système	142
IV.2 – Etude d’un signal type de vitesse instantanée	146
IV.2.1 – Engrenages.....	146
IV.2.2 – Roulements.....	150
IV.2.3 – Modulations	152
IV.2.4 – Surveillance d’éléments distants	154
IV.3 – Intérêt des approches angulaires et des régimes non stationnaires	156
IV.3.1 – Approches angulaires et conditions non-stationnaires.....	156
IV.3.2 – Apport des régimes transitoires	158
IV.4 – Influence d’endommagements	163
IV.4.1 – Ecaillage de roulements	163
IV.4.2 – Endommagements d’engrenages.....	167
Conclusion partielle	172
Conclusion générale.....	175
Bilan des travaux.....	175
Perspectives.....	177
Bibliographie	179
Annexe A – Développement du calcul des matrices jacobiennes pour les roulements	185
A.1 – Roulements à billes	185
A.2 – Roulements à rouleaux.....	186
Annexe B – Cas de validation quasi-statique pour les roulements.....	191
Annexe C – Calcul de l’angle de changement de configuration pour l’engrènement	195
C.1 – Notations et méthode	195
C.2 – Calcul de θ_{prof}	196
C.3 – Calcul de θ_{conf}	197

Annexe D – Développement du calcul de la distance à vide pour l’engrènement.....	199
D.1 – Cas d’un profil non modifié	199
D.2 – Cas d’un congé en tête de denture	202
Annexe E – Expressions des matrices de masse et de raideur des éléments de poutre	205

Table des figures

Figure 1 : Schéma d'un moteur d'hélicoptère	22
Figure 2 : Détail de la transmission étudiée	22
Figure 3 : Kurtogramme d'un signal vibratoire issu d'un système comportant un roulement endommagé [23]	28
Figure 4 : Exemple d'application du Cepstre dans la détection d'écaillage d'engrenage [28]	29
Figure 5 : Modèle à une dimension d'arbre utilisé par Desbazeille & al. [35]	30
Figure 6 : Spectre de la vitesse de rotation d'une boîte de vitesse [40]	31
Figure 7 : Principe de mesure de la vitesse de rotation [1].....	33
Figure 8 : Simulation de mesure, $R = 200$	35
Figure 9 : Simulation de mesure, $R = 1000$	35
Figure 10 : Seuils de quantification en forme simple et en différence finie pour plusieurs niveaux de probabilité [42].....	37
Figure 11 : Simulation de mesure $F_c=8$ MHz	37
Figure 12 : Simulation de mesure $F_c=80$ MHz	38
Figure 13 : Simulation de mesure $F_c=80$ MHz, domaine physique	38
Figure 14 : Erreur de gravure sur une roue phonique.....	40
Figure 15 : Vitesse de rotation mesurée sur banc.....	40
Figure 16 : Erreur de pas estimée sur une roue phonique.....	41
Figure 17 : Signal issu de capteur optique sur roue phonique en zone huileuse.....	41
Figure 18 : Vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et dans le domaine spectral sans (b) et avec fenêtrage (c).....	43
Figure 19 : Evolution de la répartition des charges sur les éléments roulants	44
Figure 20 : Evolution angulaire dynamique de la raideur d'un engrenage droit	45
Figure 21 : Schéma des approches de régulation de vitesse. (a) Imposition brutale, (b) Imposition à travers un accouplement souple et (c) méthode retenue de régulation par le couple moteur.....	46
Figure 22 : Introduction des éléments de liaison dans le modèle d'arbre à paramètres concentrés ..	47
Figure 23 : Fonctionnement global du code.....	51
Figure 24 : Efforts appliqués sur une bille [53].....	59
Figure 25 : Discrétisation éléments finis d'une bague extérieure déformable [67]	60
Figure 26 : Forme des impulsion produites par un endommagement de bague intérieure sous charge radiale. (a) évolutions temporelles ; (b) Spectres [69].....	61
Figure 27 : Forme de retrait de matière sur la bague intérieure du roulement selon Sopanen & al. [74]	62
Figure 28 : Détails de la géométrie des rouleaux cylindriques	65
Figure 29 : Géométrie des roulements à billes et à rouleaux cylindrique	65
Figure 30 : Schéma de définition d'un écaillage.....	66
Figure 31 : Diagramme par blocs du modèle	68
Figure 32 : Repérage d'un élément roulant [19].....	69
Figure 33 : Positions des centres de courbure et efforts sur la bille.....	70
Figure 34 : Distance des centres des corps	71
Figure 35 : Orientation et géométrie des solides en contact [76]	72
Figure 36 : Phénomène de résistance au roulement	74
Figure 37 : Equilibre dynamique d'une bille et efforts tangentiels de contact.....	75
Figure 38 : Efforts appliqués sur un rouleau et positions des solides.....	77
Figure 39 : Discrétisation axiale du rouleau	78

Figure 40 : Equilibre dynamique d'un rouleau et efforts tangentiels de contact	81
Figure 41 : Exemple d'assemblage de pressions pour un contact partiel sur écaillage.	84
Figure 42 : Evolution des efforts et des angles de contact pour un déplacement complexe	87
Figure 43 : Efforts de contact sur les chemins de roulement pour plusieurs déplacements radial (a) 15 μm ; (b) 25 μm ; (c) 30 μm	89
Figure 44 : Efforts de contact et angles d'inclinaison des rouleaux pour plusieurs basculements. (a) 0.35° ; (b) 0.5° ; (c) 0.7°.....	90
Figure 45 : Efforts de contact et angles d'inclinaison des rouleaux pour un déplacement composé ..	91
Figure 46 : Schéma du système académique minimaliste utilisé.....	92
Figure 47 : IAS dans le domaine physique (a) et dans le domaine spectral (b).....	93
Figure 48 : Evolution des efforts normaux sur bague intérieure pour (a) le roulement chargé radialement et (b) le roulement au chargement mixte	94
Figure 49 : Variations de vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et le domaine spectral (b) pour les cas test 1 et 2.....	96
Figure 50 : Mise en évidence de la modification de la BPFO à haute vitesse	96
Figure 51 : Comparaison des efforts de contact BI pour les deux roulements à haute et basse vitesse	96
Figure 52 : Variations de vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et le domaine spectral (b) pour les cas test 1 et 3.....	97
Figure 53 : Variations de vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et le domaine spectral (b) pour les cas test 1 et 4.....	98
Figure 54 : Comparaison des efforts de contact BI pour roulements endommagés à différentes vitesses	99
Figure 55 : Exemple d'erreur de transmission à vide selon Munro [82]	105
Figure 56 : Modèle équivalent à un degré de liberté de Tuplin [90].....	106
Figure 57 : Evolution du nombre de dents en contact au cours de la rotation [94]	107
Figure 58 : Evolution de l'erreur de transmission et des efforts de contact selon Harris.....	107
Figure 59 : Erreur de transmission statique sous charge en l'absence d'écart de géométrie [103]...	108
Figure 60 : Modifications de profil. (a) bombé de profil ; (b) retrait de tête et de pied ; (c) bombé dans la direction d'hélice ; (d) retraits d'extrémités [113]	109
Figure 61 : Modélisation éléments finis de dents d'engrenage comportant une fissure, Howard [123]	111
Figure 62 : Rayons de définition de la géométrie	113
Figure 63 : Définition des endommagements d'un engrenage.....	114
Figure 64 : Illustration des effets convectifs élastiques [17].....	115
Figure 65 : Discrétisation axiale des dents en tranches minces.....	116
Figure 66 : Points d'intérêt et repère d'engrènement : (a) configuration 1 ; (b) configuration 2	117
Figure 67 : Méthode de détection du flanc en contact.....	118
Figure 68 : Cas de déplacement engendrant un contact sur les deux flancs de denture	118
Figure 69 : Contact hors plan d'action	120
Figure 70 : Effort de contact sur une tranche de dent sans (gauche) et avec (droite) prise en compte des contacts hors ligne d'action.....	120
Figure 71 : Zone potentielle de charge et trajectoire du point de contact.....	121
Figure 72 : Exemple de distance à vide et d'orientation de la normale au contact.....	122
Figure 73 : Impact des contacts hors ligne d'action sur l'erreur de transmission statique	122
Figure 74 : Géométrie d'une tête de denture	123
Figure 75 : Contact sur congés de raccordement : (a) zone 1 ; (b) zone 2.....	124
Figure 76 : Trajectoire qualitative du point de contact en présence de congés de raccordement	124

Figure 77 : Comparaison des distances à vide calculées avec et sans congés de raccordement	125
Figure 78 : Définition des corrections de denture	125
Figure 79 : Impact des modifications de profils sur l'erreur de transmission statique.....	126
Figure 80 : Modélisation de la tranche [126]	127
Figure 81 : (a) Déformation axiale de la roue sous l'effet de l'effort axial à la denture. Maximum de déplacement en bleu. (b) Erreur de transmission avec et sans blocage axial	129
Figure 82 : Paramètres du calcul de raideur de fondation.....	129
Figure 83 : Longueur caractéristique des effets convectifs.....	132
Figure 84 : Tranches prises en compte dans le calcul de raideur.....	132
Figure 85 : Maillage – Aperçu.....	133
Figure 86 : Maillage – Zoom	134
Figure 87 : Comparaison des efforts normaux (a) et de l'erreur de transmission (b) pour un engrenage droit	134
Figure 88 : Erreur de transmission pour un engrenage hélicoïdal sans recalage.....	135
Figure 89 : Comparaison des efforts normaux (a) et de l'erreur de transmission (b) pour un engrenage hélicoïdal après recalage	135
Figure 90 : Définition d'une zone morte pour une dent fissurée.....	137
Figure 91 : Erreur de transmission statique en présence d'écaillage total (a) et partiel (b).....	138
Figure 92 : Erreur de transmission en présence d'une dent fissurée	138
Figure 93 : Réducteur académique modélisé.....	143
Figure 94 : Harmoniques des fréquences d'engrènement sur l'arbre intermédiaire	147
Figure 95 : Erreur de Transmission statique (a) et raideur équivalente d'engrènement (b) pour des engrenages droits et hélicoïdaux	148
Figure 96 : Analyse angulaire spectrale des erreurs de transmission quasi-statiques	149
Figure 97 : Erreur de transmission statique (a) et dynamique (b) pour des engrenages droits et hélicoïdaux	149
Figure 98 : BPFO roulements et harmoniques pour l'arbre lent.....	150
Figure 99 : BPFO roulements et harmoniques pour l'arbre rapide.....	151
Figure 100 : Répartition des charges sur les billes pour les roulements de l'arbre lent (chargement radial pur) et de l'arbre rapide (chargement mixte)	152
Figure 101 : Modulations des fréquences de roulements à billes (a) et à rouleaux (b) de l'arbre lent ainsi que du roulement à bille de l'arbre rapide (c) autour des fréquences d'engrènement.....	153
Figure 102 : Détection des composants distants sur arbre lent	155
Figure 103 : Détection des composants distants sur arbre rapide	155
Figure 104 : profil de vitesse quasi-stabilisée pour comparaison des approches angulaire et temporelle	157
Figure 105 : Spectre angulaire de la vitesse de rotation pour un régime stationnaire.....	157
Figure 106 : Spectre temporel de la vitesse de rotation pour un régime stationnaire.....	158
Figure 107 : Spectre de vitesse de rotation à vitesse moyenne quasi-constante.....	159
Figure 108 : Profil de vitesse utilisée pour établir le spectrogramme de la Figure 109.....	160
Figure 109 : Spectrogramme d'une montée en vitesse	160
Figure 110 : Etude des modes d'intérêt	161
Figure 111 : Spectre de vitesse de rotation pour une large et lente augmentation de vitesse moyenne	162
Figure 112 : Schéma de l'écaillage implémentée.....	164
Figure 113 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage sur le roulement à billes de l'arbre lent.....	164
Figure 114 : Elargissement des spectres présentés sur la figure précédente.....	165

Figure 115 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage sur le roulement à billes de l'arbre rapide	166
Figure 116 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage BI sur le roulement à billes de l'arbre lent.....	166
Figure 117 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage BE sur le roulement à rouleaux de l'arbre lent.....	167
Figure 118 : Profils d'endommagements implémentés	168
Figure 119 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans fissure sur la roue de l'arbre lent.....	168
Figure 120 : Cepstre de vitesse de rotation avec et sans fissure sur la roue de l'arbre lent	169
Figure 121 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage sur la roue de l'arbre lent	169
Figure 122 : Comparaison de spectre pour un écaillage et une fissure	170
Figure 123 : Comparaison de cepstres pour un écaillage et une fissure.....	170
Figure 124 : Différence de vitesse de rotation entre le cas sain et les cas d'endommagement	171
Figure 125 : Répartition des charges pour un déplacement radial pur	191
Figure 126 : Evolution des angles et des efforts de contact pour un déplacement en basculement pur	192
Figure 127 : Evolution des efforts et des angles de contact pour un déplacement axial et radial	193
Figure 128 : Décalage de l'entrée dans la zone de contact pour les deux configurations.....	195
Figure 129 : (a) angle entre les points d'entrée en contact sur le profil, (b) points d'entrée des zones d'engrènement, (c) schéma équivalent	196
Figure 130 : Paramétrage du profil en développante de cercle [104]	197
Figure 131 : Point de contact en zone 3 et angles de repérage	200
Figure 132 : (a) distance à vide et (b) position relative en ϕ_1	201
Figure 133 : Position relative des points C_1 et C_2 sur le profil d'une dent	201
Figure 134 : Géométrie d'un congé de raccordement et paramètres associés	202
Figure 135 : Introduction des points intermédiaires (a) distance à vide et (b) position relative en γ_1	203

Liste des tableaux

Tableau 1 : Loi effort-déplacement de Palmgren pour des roulements à billes et à rouleaux.....	59
Tableau 2 : Paramètres géométriques de définition des roulements à billes à gorges profondes	64
Tableau 3 : Paramètres de définition d'un écaillage.....	66
Tableau 4 : Paramètres matériaux	66
Tableau 5 : Paramètres géométriques et matériaux pour validation du modèle de roulement à billes	85
Tableau 6 : Cas de validation quasi-statique pour les roulements à billes	86
Tableau 7 : Conditions de contact pour un déplacement axial.....	86
Tableau 8 : Efforts transmis en déplacement axial pur.....	86
Tableau 9 : Efforts transmis en déplacement complexe	87
Tableau 10 : Paramètres géométriques et matériaux du roulement à rouleaux utilisé en validation .	88
Tableau 11 : Cas de validation quasi-statique pour les roulements à rouleaux	88
Tableau 12 : Comparaison des efforts radiaux transmis.....	88
Tableau 13 : Comparaison des moments de résistance au basculement	89
Tableau 14 : Comparaison des torseurs transmis pour un déplacement composé.....	91
Tableau 15 : Paramètres de simulation.....	93
Tableau 16 : Cas tests	93
Tableau 17 : Paramètres géométriques de définition des engrenages	113
Tableau 18 : Paramètres de définition d'un écaillage sur un flanc de denture	114
Tableau 19 : Paramètres de définition d'une fissure en pied de denture	114
Tableau 20 : Paramètres matériaux des engrenages.....	114
Tableau 21 : Coefficients pour le calcul de L^* , M^* , P^* et Q^* [108].....	130
Tableau 22 : Paramètres géométriques pour validation.....	133
Tableau 23 : Paramètres de définition des arbres	143
Tableau 24 : Position en millimètres des différents nœuds du maillage	143
Tableau 25 : Paramètres géométriques et matériaux des roulements à billes	144
Tableau 26 : Paramètres géométriques et matériaux des roulements à rouleaux.....	144
Tableau 27 : Paramètres de définition des engrenages.....	145
Tableau 28 : Torseur d'effort sur la bague intérieur pour un déplacement radial pur.....	192
Tableau 29 : Torseur d'effort sur la bague intérieure pour un déplacement en basculement pur	192
Tableau 30 : Torseur d'effort sur la bague intérieure pour un déplacement en axial et radial.....	193

Introduction générale

Contexte industriel

L'aéronautique représente en France une grande part de l'industrie et emploie des milliers de personnes. Son dynamisme économique très élevé s'illustre par la création de nombreuses start-ups et par d'importants fonds alloués à la recherche publique, civile et militaire. Les innovations des dernières années portent en majeure partie sur la réduction de la consommation des appareils, la réduction des coûts de fabrication et de maintenance et l'amélioration de la sécurité des biens et des personnes. Il s'agit de l'un des secteurs d'activité dans lequel la concurrence est la plus forte à travers le monde et des progrès constants sont indispensables afin de maintenir la compétitivité des différents acteurs. Le cas des hélicoptères et de leur motorisation ne fait pas exception et Safran Helicopter Engines, leader mondial dans ce domaine, alloue des moyens significatifs au développement de nouvelles technologies et protocoles de maintenance. Dans ce contexte, l'émergence de la maintenance préventive est de première importance. Celle-ci consiste en la détection précoce d'endommagements en fonctionnement permettant un diagnostic rapide des appareils et une adaptation de leurs plannings de maintenance. Elle est rendue possible par le perfectionnement des technologies et des méthodes de surveillance. En limitant les interventions inutiles elle contribue à réduire les dépenses associées et à maximiser la disponibilité des aéronefs. De plus, elle permet de limiter au strict minimum les interruptions de missions pouvant s'avérer critiques dans le cas de certaines opérations, telles que les missions militaires ou de sauvetage par exemple. Enfin, elle permet d'assurer la sécurité des personnes en vol et d'étendre la durée de vie des systèmes en permettant de réagir rapidement et de manière adéquate en cas de dégradation du matériel, évitant ainsi autant que possible la ruine complète de la structure.

Bien qu'étudiées depuis plusieurs dizaines d'années, les transmissions de puissances restent sujettes à de régulières innovations, tant dans leur conception que dans leur surveillance. En effet, elles constituent en général un élément clef des systèmes dont elles font partie en assurant la réduction de vitesse et le transfert de puissance du moteur vers le dispositif à entraîner. Afin de collaborer et partager des connaissances dans ce domaine, un Consortium Industrie Recherche sur les Transmission (CIRTrans) a vu le jour en 2017. Il regroupe huit industriels (Alstom, Arquus, Gima, REDEX, REEL, Safran, Texelis et Volvo) et trois laboratoires universitaires (LabECAM, LaMCoS et LTDS) sur ce thème. Avec l'objectif de faire progresser les compétences françaises, ses membres sont à l'origine de plusieurs projets de recherche dont cette thèse fait partie. Ainsi, bien qu'encadrée en premier lieu par Safran et le LaMCoS, elle s'est déroulée sous la surveillance de plusieurs acteurs parmi lesquels Alstom a assuré un suivi constant.

La Figure 1 propose un schéma simplifié du moteur Arriel développé par Safran Helicopter Engines. Celui-ci comporte deux arbres distincts dont les rotations sont indépendantes. Le premier, colorié en jaune, comporte les deux étages de compression ainsi que la turbine haute pression qui les entraîne en détendant une première fois le gaz après son passage dans la chambre de combustion. La prise de puissance à destination de la boîte à accessoires est également effectuée sur ce rotor, entre les deux compresseurs. Le second ensemble tournant, colorié en orange, porte la turbine libre qui constitue un second étage de détente permettant la récupération de puissance utile du moteur. Elle est accouplée à un réducteur par l'intermédiaire d'une liaison cannelée.

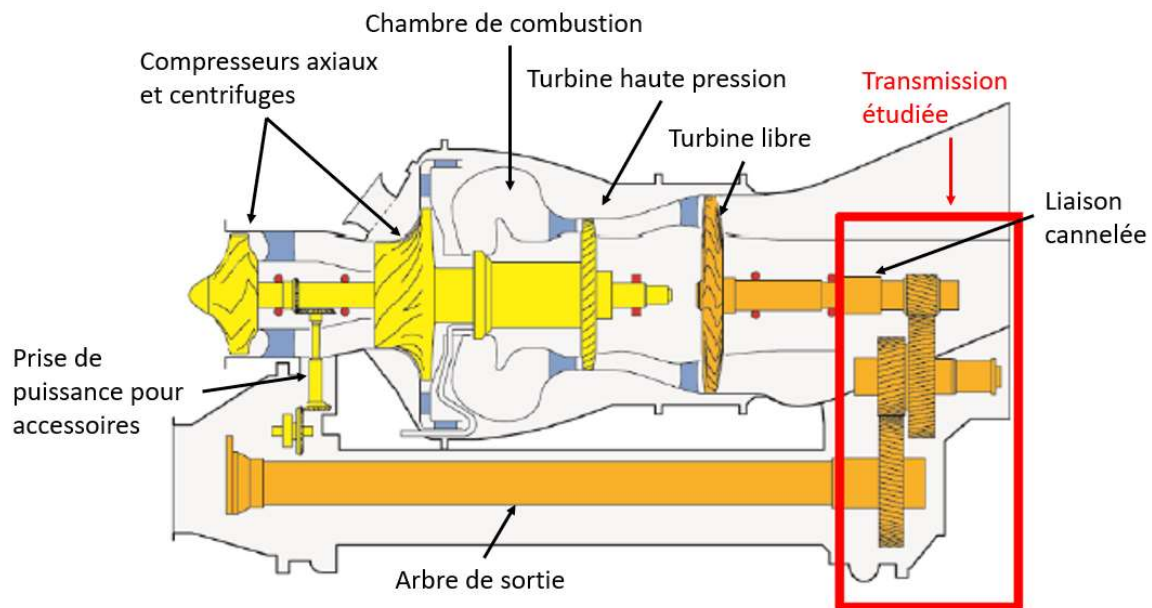


Figure 1 : Schéma d'un moteur d'hélicoptère

La transmission de ce moteur est encadrée en rouge sur la Figure 1. Elle est constituée de trois arbres parallèles et coplanaires supportés par des roulements à billes et à rouleaux cylindriques et reliés entre eux par des engrenages hélicoïdaux cylindriques extérieurs. Le détail de celle-ci est visible sur la Figure 2. Il s'agit d'un système rapide puisque l'arbre lié à la turbine libre dépasse 40 000 tours par minute, générant des efforts dynamiques conséquents dans les roulements. Il fonctionne en général en régime non stationnaire tant en termes de charges qu'en terme de vitesse de rotation.

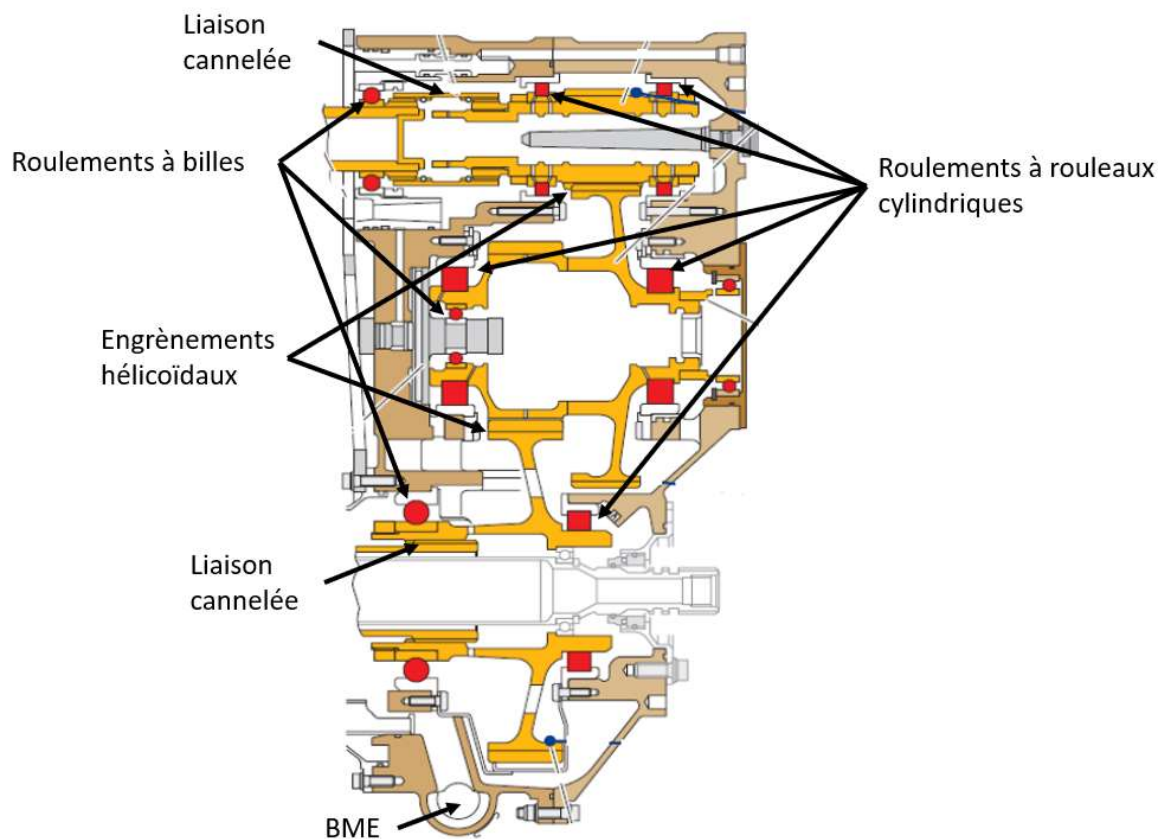


Figure 2 : Détail de la transmission étudiée

En l'état actuel, seul un bouchon magnétique (BME), repéré sur la Figure 2, permet de capturer les particules métalliques portées par le flux d'huile et de déclencher une alerte une fois un certain seuil atteint. La présence de celles-ci est souvent révélatrice d'un endommagement de la transmission. Cependant, les informations ainsi délivrées sont partielles et assez peu fiables. En effet, la période de rodage de la machine voit l'apparition d'un grand nombre de petits débris métalliques pouvant mener à de faux positifs. De plus, certaines dégradations, telles que les fissures des dents d'engrenages n'émettent pas ou peu de particules et sont donc difficiles à déceler. Pour finir, lorsqu'un endommagement est correctement détecté, le diagnostic est délicat puisqu'aucune information n'est fournie sur la provenance des particules capturées. Ainsi, il est impossible d'estimer la gravité de l'endommagement et l'urgence d'une opération de maintenance.

Ce type de système s'avère difficile à instrumenter en raison de la compacité requise en aéronautique et du brouillard d'huile présent dans le carter assurant la lubrification des différents éléments. L'utilisation d'accéléromètres est envisagée mais est sujette à plusieurs contraintes. D'une part, ceux-ci ne peuvent être placés qu'à l'extérieur du carter et seraient relativement distants des éléments à surveiller. De plus, de nombreux capteurs seraient requis pour surveiller chaque roulement et certains devraient être positionnés dans des zones difficiles d'accès, surtout côté moteur. Pour ces différentes raisons, la vitesse de rotation instantanée constitue une alternative prometteuse dont la pertinence dans cette application mérite d'être étudiée. L'implémentation de codeurs angulaires sur des transmissions d'éoliennes [1], [2] a pu mettre en évidence la capacité de cette voie de transfert à transmettre les informations liées aux différents composants d'une transmission et à leurs endommagements éventuels. Elle présente l'avantage de pouvoir assurer la surveillance d'une transmission complète à l'aide d'un seul capteur.

La présente thèse a pour objectif de proposer un modèle dynamique d'une transmission de puissance permettant l'étude de celle-ci dans le but de générer des connaissances et de bonnes pratiques utiles dans le cadre de la maintenance préventive, notamment dans la détection d'endommagement et dans le diagnostic. Il doit par conséquent répondre à plusieurs exigences.

- Il doit permettre l'étude du comportement des différents éléments qui constituent la transmission dans des conditions de fonctionnement variées et non stationnaires.
- La simulation du signal vitesse de rotation instantanée doit être aussi précise que possible. Une attention particulière est apportée aux variations de cette grandeur introduites par les roulements et les engrenages afin de pouvoir caractériser leurs signatures.
- Le modèle doit être compatible avec une transmission aéronautique et donc valable pour des vitesses élevées. Il doit cependant rester flexible et utilisable dans le cas de systèmes aux architectures éloignées tels que les transmissions ferroviaires.
- Enfin, il doit permettre l'implémentation d'endommagement de roulements et de dentures afin d'étudier l'impact de leurs présences et de leurs dimensions sur le signal de vitesse instantanée et de statuer sur leur détectabilité.

Ainsi, la transmission modélisée et étudiée dans ce manuscrit est proche dans son architecture et sa géométrie du réducteur aéronautique présenté ci-dessus. Elle reste néanmoins un système académique sur lequel certaines libertés ont été prises afin de permettre une étude complète des différents composants et la mise en place de méthodes d'analyse pertinentes pour toute transmission de conception similaire. Une approche modulaire a été adoptée de sorte que les arbres, roulements et engrenages correspondent à des « briques » facilement modifiables interchangeables. Par conséquent, l'adaptation du modèle à des géométries différentes et la génération de résultats correspondant à un système réel peuvent être effectuées sans effort.

Structure du mémoire

Le chapitre 1 des quatre chapitres introduit les méthodes générales utilisées au cours de la thèse. Après une première section dédiée à l'état de l'art de la modélisation des machines tournantes et des méthodes de surveillance de celles-ci. Le principe de mesure de la vitesse instantanée de rotation et les erreurs qui lui sont intrinsèques sont présentés. Les sources de perturbations de ce signal sont présentées et l'accent est mis sur les causes de variations de couple transmis dans les roulements et les engrenages. Les méthodes de modélisation utilisées sont ensuite abordées afin d'aboutir à un système différentiel général décrivant le comportement dynamique d'une transmission. Une dernière section est dédiée à la mise en forme de ce système en vue d'une intégration numérique.

Le chapitre 2 détaille les modèles de roulements à billes et à rouleaux cylindriques mis en place au cours de la thèse. Une rapide revue de la très vaste littérature sur ce sujet est présentée puis les hypothèses adoptées dans ces travaux sont introduites. Les modèles proposés se démarquent des outils précédemment utilisés dans la simulation de la vitesse de rotation par l'ajout de la prise en compte des efforts axiaux transmis ainsi que des efforts centrifuges sur les éléments roulants. De plus, une méthode originale est proposée pour calculer l'effort de contact d'une bille sur un écaillage. Le calcul des efforts transmis est réalisé pour chaque élément roulant et passe par la détermination de sa position d'équilibre en fonction des déplacements des deux bagues et du train d'éléments roulants. Une fois les efforts normaux de contact obtenus, l'introduction de la résistance au roulement permet le calcul des efforts tangentiels, véritable source du couple résistant dans le roulement. Les écaillages sont introduits comme des diminutions locales d'écrasement et une méthode originale de calcul approché de contact sur une bague endommagée est présentée. La validation en quasi-statique de ces modèles est réalisée sur la base du code RBSDYN du CNES. Pour finir, une étude paramétrique du comportement des roulements à billes est présentée et met en évidence les influences respectives de la vitesse de rotation nominale, de la charge axiale et d'un écaillage.

Le chapitre 3 décrit la modélisation élaborée pour les engrenages et présente dans un premier temps l'état de l'art associé. Les différentes hypothèses retenues sont ensuite présentées. La méthode de calcul du torseur de restitution est beaucoup plus précise que celle utilisée précédemment. Elle est basée sur le calcul d'un écrasement au contact variable tenant compte de la micro géométrie des profils de denture ainsi que des contacts hors plan d'action. Les efforts transmis sont déterminés sur la base d'une loi de contact non linéaire intégrant la flexibilité des dents et du corps de roue. Une correction de la raideur équivalente d'engrènement est proposée à travers l'introduction des effets convectifs de flexion et l'importance de ceux-ci est discutée. Des endommagements sont également introduits sous forme de fissures et d'écaillages. La validation en quasi-statique du modèle ainsi obtenu est réalisée sur la base de calcul d'erreur de transmission par des méthodes éléments finis.

Le chapitre 4 profite des développements présentés dans les chapitres précédents afin de construire un modèle de transmission académique. Elle comporte un étage de réduction droit et un étage hélicoïdal, configuration peu courante en réalité, afin d'assurer des conditions de fonctionnement différentes aux roulements à billes des différents arbres. De nombreuses simulations ont été réalisées afin d'étudier le comportement dynamique des différents composants. Ainsi, les signatures des roulements et des engrenages dans le spectre de la vitesse de rotation sont caractérisées. La présence d'interactions entre ces deux types de composants est mise en évidence et leur intérêt dans la surveillance des machines tournantes est discuté. Plusieurs bonnes pratiques de surveillances adaptées aux composants à périodicité angulaire sont présentées et l'apport des régimes non stationnaires est souligné. Enfin, une caractérisation des symptômes des différents endommagements est réalisée.

Chapitre I – Méthode de surveillance des transmissions et simulations

Introduction	26
I.1 – Etat de l’art	26
<i>I.1.1 – Modélisation des machines tournantes.....</i>	<i>26</i>
<i>I.1.2 – Détection d’endommagement et diagnostic.....</i>	<i>27</i>
<i>I.1.3 – L’IAS comme vecteur d’information</i>	<i>29</i>
<i>I.1.4 – Positionnement de la thèse</i>	<i>32</i>
I.2 – Mesure et traitement de l’IAS	32
<i>I.2.1 – Principe de la mesure.....</i>	<i>33</i>
<i>I.2.2 – Erreurs commises et restrictions.....</i>	<i>34</i>
<i>I.2.3 – Techniques de traitement du signal utilisées dans la thèse</i>	<i>42</i>
I.3 – Simulation du signal vitesse de rotation.....	43
<i>I.3.1 – Source de perturbation de la vitesse de rotation</i>	<i>43</i>
<i>I.3.2 – Méthode de modélisation et hypothèses retenues</i>	<i>45</i>
<i>I.3.3 – Construction du système différentiel.....</i>	<i>47</i>
I.4 – Intégration numérique.....	48
<i>I.4.1 – Vers un système du premier ordre.....</i>	<i>48</i>
<i>I.4.2 – Intégration angulaire.....</i>	<i>49</i>
<i>I.4.3 – Implémentation</i>	<i>51</i>
Conclusion partielle	52

Introduction

La maintenance prédictive nécessite de pouvoir détecter la présence d'endommagements au plus tôt et de prédire aussi précisément que possible leurs sévérités et l'échéance à laquelle une intervention s'impose afin de garantir l'intégrité du système. Ainsi, la modélisation des systèmes, de leurs endommagements et des modes d'apparition et de propagations de ces derniers s'avère profitable. Elle permet de comprendre les phénomènes mécaniques en présence et de mettre en place des indicateurs pertinents. Les travaux réalisés au cours de cette thèse se focalisent sur la modélisation du comportement dynamique d'une transmission saine et endommagée sous différentes conditions de fonctionnement afin de caractériser la signature des différentes dégradations. Par conséquent, les phénomènes menant à la naissance de dommages ne sont pas étudiés. De même, les modèles mis en place ne visent pas à estimer la durée de vie résiduelle.

Ce premier chapitre s'attache à la description de la méthode de surveillance des machines tournantes utilisée au cours de la thèse. Contrairement à la majorité des travaux publiés ces dernières dizaines d'années et basés sur les signaux vibratoires, il a été décidé d'étudier la vitesse de rotation instantanée. Cette voie de transfert nouvelle est très peu utilisée à ce jour. La méthode la plus prometteuse d'acquisition de celle-ci est détaillée ainsi que les erreurs et bruits qu'elle peut engendrer. Par la suite, le principe général de modélisation du signal vitesse de rotation est abordé et les différentes sources d'excitation sont décrites. Le modèle des arbres de la transmission repose sur la théorie des poutres de Timoshenko et les éléments technologiques de liaison sont introduits comme des torseurs de restitution selon une approche peu répandue dans la littérature. Un système d'équations différentielles représentatif de la dynamique du système est introduit ainsi que les méthodes numériques d'intégrations utilisées.

I.1 – Etat de l'art

La maintenance prédictive est aujourd'hui au cœur de la recherche sur les machines tournantes de sorte que de très nombreux articles sont publiés chaque année sur ce sujet. Les approches utilisées reposent sur des méthodes de modélisation, de détection et de diagnostic variées. La plupart des travaux se concentrent essentiellement sur l'un de ces trois aspects. Cette première section propose un état de l'art rapide des différents volets de la maintenance prédictive. Toutefois, ceux-ci couvrant un spectre trop large, l'étude se centrera surtout autour des choix retenus dans cette thèse. Par conséquent une attention particulière est apportée à la vitesse de rotation instantanée. De plus, le sujet de la modélisation des éléments de liaison tels que les roulements et les engrenages a été réservés aux chapitres qui leurs sont dédiés.

I.1.1 – Modélisation des machines tournantes

Une première étape de la maintenance préventive est de déterminer la signature dynamique d'un élément endommagé afin d'être capable de la reconnaître et de l'isoler dans un signal issu d'un système réel. Dans ce but, des modèles de machines tournantes sont utilisés. Ils permettent l'étude et la comparaison de différentes conditions de fonctionnement. Ces modèles, de complexités diverses, se doivent de tenir compte au minimum des arbres en rotation et des éléments sur lesquelles les détériorations peuvent apparaître.

De nombreux ouvrages de très bonne qualité traitant de la dynamique des rotors de manière approfondie sont disponibles. Parmi d'autre, on peut citer ceux de Lalanne [3], Genta [4] et Tiwari [5]. Dans cette thèse, l'accent est principalement mis sur la modélisation des éléments de liaison et un

modèle simple de Timoshenko [6] pour les arbres a été retenu. Il présente l'intérêt d'être beaucoup plus léger que des modèles éléments finis tout en gardant une très bonne précision. Il est largement maîtrisé et très présent dans la littérature sur la modélisation des systèmes tournants aussi bien dans le passé que dernièrement. Ainsi, on le retrouve dans les travaux de Nelson [7] qui montre la précision d'un tel modèle et son intérêt en dynamique des rotors. Plus tard, Kim & al. [8] s'en sont servi dans l'étude de la stabilité d'un arbre composite en rotation sous excitation forcée. De même, Mirtalaie & al. [9] l'utilisent pour l'études des vibrations libres d'un système tournant. Ce modèle d'arbre est aussi largement utilisé dans l'étude du comportement dynamique des engrenages dont un exemple se retrouve dans les modèles de Pigé & al. [10] qui s'intéresse aux conditions de contact en dynamique pour des engrenements coniques. Le modèle de poutre de Timoshenko est proche de celui d'Euler-Bernoulli à ceci près qu'il tient compte du cisaillement. Il s'appuie sur les hypothèses suivantes.

- Les sections droites restent planes après déformation.
- La forme des sections droites reste constante de sorte qu'il n'y a pas de variation d'épaisseur pour une position axiale donnée.
- Les déplacements des sections droites ne dépendent que de la position axiale sur l'arbre.

Plusieurs auteurs ont proposé des élargissements de ce modèle d'arbre. A titre d'exemple, Lin & al [11] ont initié l'ajout de termes permettant de tenir compte des excitations par la base pour les rotors embarqués. Cette piste a été développée par une part de la communauté de la dynamique des rotors jusqu'à aujourd'hui avec les travaux de Briend & al. [12], [13] qui s'intéressent à des sollicitations multi axiales non harmoniques par le support. Un autre exemple d'approfondissement est l'application de la méthode utilisée à des arbres fonctionnant à haute vitesse et à régime non stabilisé réalisée par Sghaier [14]. Celle-ci fait apparaître des termes de couplage entre les différents degrés de liberté dépendants de la vitesse de rotation et de l'accélération angulaire. De tels développement peuvent toutefois se montrer complexes et couteux en temps de calcul.

L'ajout des roulements et des engrenages au système différentiel obtenu est classiquement réalisé à travers des matrices de masse, d'amortissement et de raideurs additionnelles. La littérature regorge d'exemples de telles modélisations. A titre d'exemple, on peut citer Noel & al. [15] qui proposent une méthode analytique complexe pour le calcul de la matrice de raideur associée à un roulement à bille. De même, Bourdon [16], ou encore Ajmi & al. [17] ramènent les engrenages à des matrices de masse et de raideur équivalentes. Cette approche reste limitée car elle suppose un comportement linéaire des différents éléments. Elle peut toutefois être étendue à des éléments non linéaires à condition de constamment recalculer les matrices de masse et de raideur. Bien que cette option permette de tenir compte des non linéarités issues des lois de contact par exemple, cela reste insuffisant lors de l'introduction de frottement secs. Pour cette raison, plusieurs auteurs tels que Chen & al. [18], Gomez & al. [19] ou encore Thibault & al. [20] proposent de reléguer les termes associés aux éléments de liaison au second membre sous la forme de vecteurs d'efforts, permettant l'implémentation de fonction complexe pour le calcul de ceux-ci.

I.1.2 – Détection d'endommagement et diagnostic

La détection d'endommagement sur les roulements et engrenages est souvent réalisée à travers l'étude vibratoire du système. Les données accélérométriques étant très simples à obtenir lors d'essais, elles sont largement privilégiées. La présence de détériorations introduit des composantes aléatoires et périodiques dans les accélérations pouvant résulter par exemple de l'entrée et de la sortie des éléments roulants dans un écaillage [21]. La difficulté réside dans la détection de celles-ci et dans leur observation. En effet, ces perturbations restent de très faible amplitude et sont souvent noyées

dans le bruit résultant du fonctionnement de la machine. De nombreux outils ont été développés au cours du temps afin d'extraire ces composantes et de les rendre exploitables en vue d'établir un diagnostic. Le plus basique d'entre eux est la transformée de Fourier permettant l'observation du signal dans le domaine spectral plutôt que physique. Cependant, des traitements préalables sont souvent nécessaires. Parmi ceux-ci, on retrouve le fenêtrage qui permet d'éliminer la composante large bande générée par la non périodicité du signal. Le retrait d'une moyenne synchrone permet quant à lui d'éliminer du spectre les composantes dont la période n'est pas un sous-multiple de la durée des fenêtres de moyennage permettant ainsi de se focaliser sur un type de phénomène particulier. De plus, dans le cas de régimes non stationnaires, l'utilisation de spectrogrammes s'est répandue afin d'observer l'évolution dans le temps des fréquences d'excitation souvent liées aux endommagements et de mettre ceux-ci en évidence.

On retrouve également les techniques de démodulation utiles lorsque le signal à observer est multiplié dans le domaine physique par un second, dit porteur, issu de comportement d'autres éléments du système. La démodulation peut être opérée de manière naïve, en observant simplement le spectre du signal ou en utilisant un mode propre du système afin d'amplifier une plage de fréquences. Antoni [23], [24] met en avant le kurtosis spectral et le kurtogramme permettant de trouver automatiquement les bandes de démodulation optimales, se substituant à des méthodes empiriques. Cet outil est basé sur le kurtosis qui mesure l'impulsivité d'un signal. Il s'agit d'un outil récent d'analyse spectrale à l'ordre quatre focalisé sur la détection de structures non stationnaires. Il s'appuie pour cela sur l'observation que pour chaque phénomène transitoire, il existe un couple {fréquence ; résolution fréquentielle} maximisant son kurtosis. A titre d'exemple, la Figure 3 présente le kurtogramme d'un signal vibratoire [23] obtenu sur un système comportant un écaillage de roulement. Cette figure est tracée par analyse descendante et met en évidence dans le cas de ce signal que le couple de fréquence normalisée et de largeur fréquentiel {0.3 ; 0.1}, en noir sur la figure, présente un Kurtosis maximal et constitue une plage de démodulation optimale.

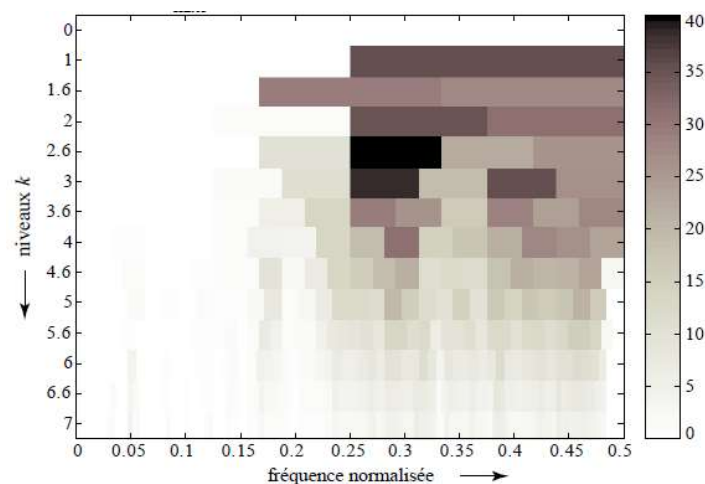


Figure 3 : Kurtogramme d'un signal vibratoire issu d'un système comportant un roulement endommagé [23]

Afin de séparer les excitations de la réponse en fréquence du système, des méthodes de déconvolution ont été mises en place. Lorsque la dynamique du système étudié et les voies de manifestation d'endommagement sont mal connues, des outils tels que la déconvolution par minimum d'entropie [22] peuvent s'avérer utiles en détectant automatiquement les bandes de fréquences d'intérêt. Un autre outil permettant de faire ressortir les événements périodiques est le cepstre introduit en premier lieu par Bogert & al. [25] et toujours sujet d'étude aujourd'hui [26]. Il correspond

à la transformée de Fourier inverse du logarithme de la transformée de Fourier du signal. Les pics ainsi obtenus indiquent les périodes fondamentales contenues dans le signal. Le cepstre s'avère particulièrement utile lorsque les phénomènes recherchés dans le spectre ne correspondent pas à une seule fréquence d'intérêt mais plutôt à des harmoniques et à des modulations [27]. Il permet également de transformer un produit de convolution en une addition. Par conséquent il peut dans certains cas dissocier une force d'excitation de la fonction de transfert qui caractérise le système (déconvolution). Un exemple est fourni sur la Figure 4. Elle présente un signal vibratoire d'un réducteur dont un engrenage comporte une dent écaillée. Il s'agit d'un évènement périodique générant de nombreuses harmoniques dans le domaine spectral et qui donne donc lieu à une série de harmoniques repérées par des flèches dans le cepstre.

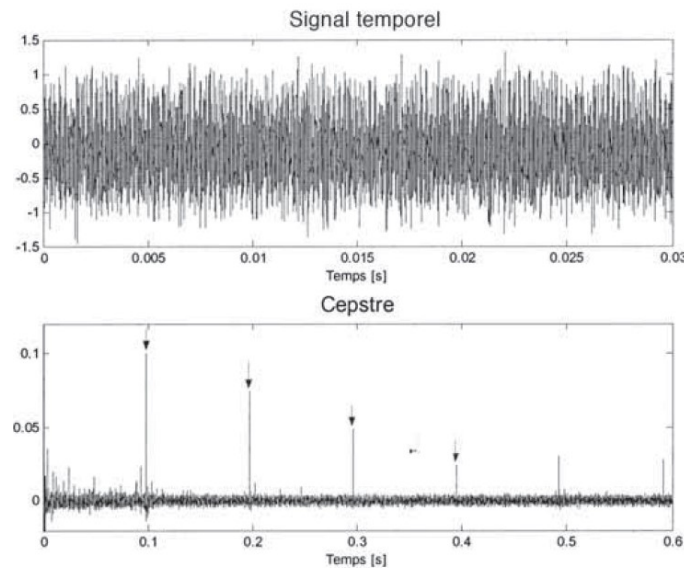


Figure 4 : Exemple d'application du Cepstre dans la détection d'écaillage d'engrenage [28]

Pour finir, le concept de cyclostationarité peut être exploité. Un signal est dit cyclo-stationnaire à l'ordre n si son moment statistique d'ordre n peut être calculé et est périodique. L'étude des périodes associées aux différents moments du signal peut donner des informations sur les phénomènes en présences. Les défauts de roulement ou d'engrenages sont par essence des phénomènes périodiques en angle et qui se caractérisent par certains types de cyclostationarité. A titre d'exemple, Baudin [29], [30] applique ces méthodes à la détection de bruit de grenaille dans les boites de vitesse automobiles. En parallèle, Abboud & al. [31], [32] étendent ces outils à des vitesses de rotation variables.

I.1.3 – L'IAS comme vecteur d'information

La surveillance des machines tournantes sur la base de signaux vibratoires montre cependant certaines limites. D'une part, ces signaux sont naturellement échantillonnés à pas de temps constants. Par conséquent, ils s'avèrent difficiles à utiliser dans le cas de régimes non stationnaires puisque les roulements et les engrenages ont alors des fréquences caractéristiques fluctuantes. De plus, la surveillance d'un élément requiert un capteur relativement proche de celui-ci. L'étude d'une transmission complète peut donc nécessiter un grand nombre de capteurs ce qui est difficilement implémentable hors banc d'essais. Afin de pallier ces problèmes, de nouvelles voies de transferts sont explorées parmi lesquelles figure la vitesse de rotation instantanée ou Instantaneous Angular Speed (IAS).

En comparaison de la très grande quantité de papiers basés sur l'utilisation des signaux accélérométriques, peu de travaux ont été menés en se focalisant sur l'IAS. L'un des premiers, réalisé par Rizzoni [33], concernait la détection de ratés dans un moteur à explosion. Ceux-ci ont été repris par quelques auteurs par la suite comme Yang & al. [34]. Toujours dans le même domaine, ceux-ci ont pu établir une corrélation entre la pression du fluide dans les cylindres et les variations de vitesse, permettant ainsi la détection de mauvaises conditions d'explosion et de fuites de carburant. Plus récemment, Desbazeille & al. [35] ont proposé une détection de défaut dans d'imposants moteurs à explosion basée sur un modèle en torsion plus précis, visible sur la Figure 5, permettant l'entraînement de réseaux de neurones. L'utilisation des outils mis en place sur des résultats expérimentaux a permis la détection d'une fuite de carburant et l'identification du cylindre concerné. Ce modèle est toutefois limité à l'étude des phénomènes de torsion en raison de l'imposition d'une condition limite à son extrémité gauche. Classique en dynamique des rotors, la pertinence de cette condition sera remise en cause dans la modélisation proposée dans la suite de ce chapitre.

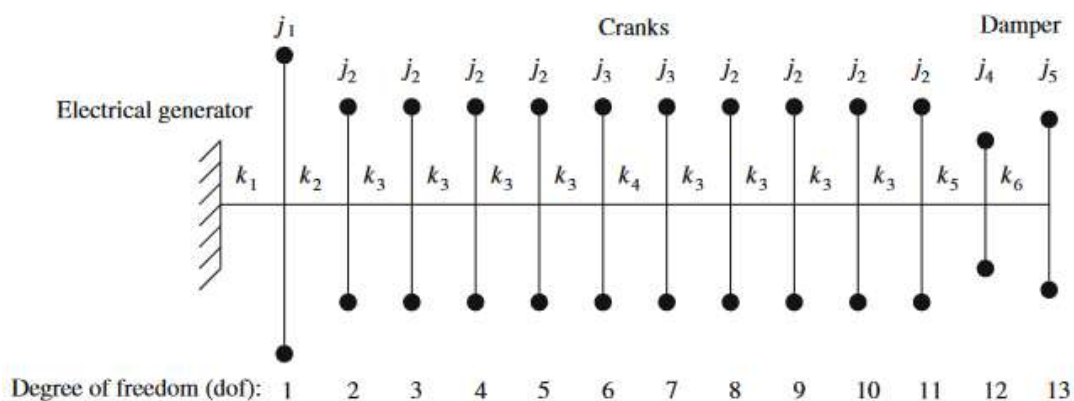


Figure 5 : Modèle à une dimension d'arbre utilisé par Desbazeille & al. [35]

L'utilisation de l'IAS dans le diagnostic des transmissions est plus récent et trouve sa source dans la mesure des erreurs de transmission d'engrenages [36]. Plus tard, Stander & al. [37] étudient la pertinence de l'IAS dans la surveillance d'engrenages droits à travers un modèle simple. L'endommagement est modélisé par une diminution de raideur au cours d'un intervalle angulaire donné, tous deux étant arbitraires. Ils distinguent les phénomènes angulairement périodiques des phénomènes temporellement périodiques et montrent ainsi que le domaine angulaire s'avère plus adapté à l'étude du premier groupe. De leur côté, Zeng & al. [38] utilisent l'IAS dans le diagnostic de trains planétaires. Bien que leur modèle se limite aux phénomènes de torsion et que les défauts soient implémentés sous la forme de modification arbitraire de la raideur d'engrènement, ils obtiennent des corrélations significatives avec des résultats expérimentaux. Enfin, Roy & al. [39] s'intéressent à la détection d'endommagements sévères (perte de dents) sur des boîtes de vitesses multi-étages. Leur analyse est purement basée sur des données expérimentales.

Renaudin & al. [40] montrent à travers des résultats expérimentaux sur banc d'essais et en conditions de fonctionnement réelles qu'un défaut naturel sur un roulement génère des perturbations de vitesse de rotation et peut donc être détecté dans son spectre comme on peut le voir sur la Figure 6. Cette figure montre également de nombreux pics associés à d'autres phénomènes et souligne la capacité de la vitesse de rotation à permettre la surveillance complète d'une transmission à l'aide d'une seule mesure. De plus, les auteurs établissent qu'un échantillonnage angulaire de la vitesse de rotation permet une meilleure analyse des régimes non stationnaires. Ce travail constitue la base de la surveillance des roulements par la vitesse de rotation instantanée et a été largement poursuivi et

approfondi par André [41], [42] au cours de sa thèse. Une méthode de traitement de signal et de diagnostic spécifique à cette application a été développée par Bourdon & al. [43].

Le premier travail de modélisation des roulements et des perturbations de la vitesse de rotation qu'ils engendrent a été mené par les mêmes auteurs [44] et des comparaisons à des résultats expérimentaux ont été faites. Le couple perturbateur modélisé restait arbitraire et ne reposait pas sur le comportement réel du roulement. Dans la prolongation de ce travail, une approche phénoménologique a été adoptée par Gomez & al. [19] qui proposent de faire le lien entre efforts radiaux et couple résistant à travers des efforts tangentiels aux contacts billes-bagues générés par le phénomène de résistance au roulement.

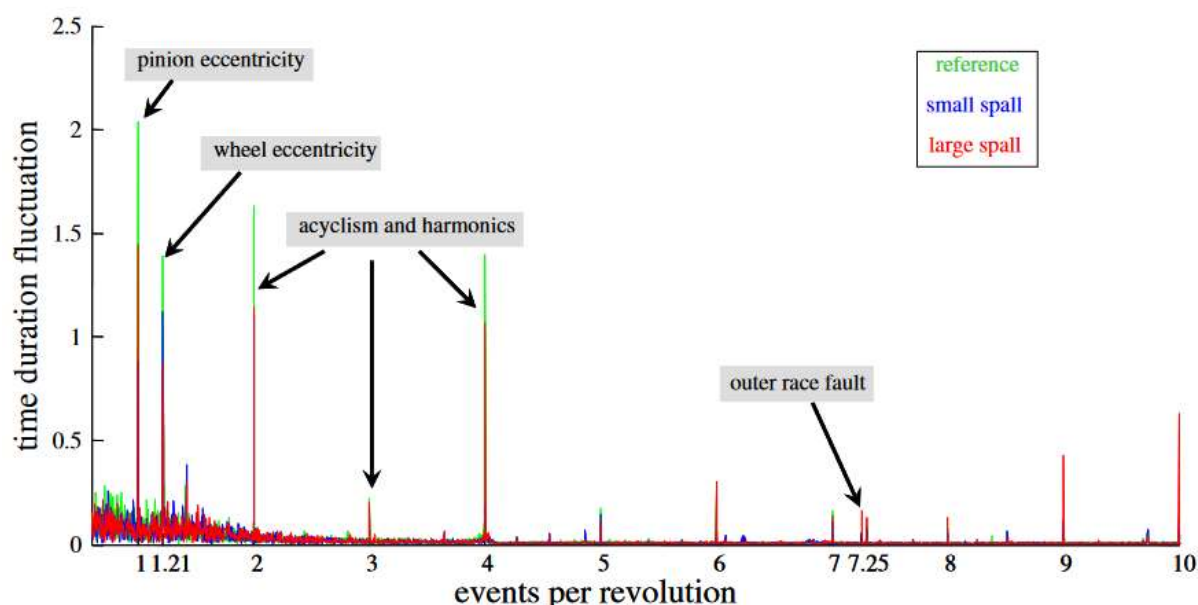


Figure 6 : Spectre de la vitesse de rotation d'une boîte de vitesse [40]

La vitesse de rotation instantanée peut être mesurée de différentes façons. Li & al. [45] opposent les techniques consistant à mesurer le temps séparant le passage de deux tops d'un codeur angulaire, dites « Elapse Time », aux méthodes visant à compter le nombre de passages de tops codeur sur un intervalle de temps donné. Le premier genre de techniques mène à un échantillonnage à plus haute fréquence à pas d'angle constant. Celui-ci est propice à l'observation des éléments à périodicité cyclique, comme cela sera discuté dans la suite de ce manuscrit. Le second type de mesure mène quant à lui à un échantillonnage à pas de temps constant. La connaissance précise de la vitesse instantanée de rotation dans le domaine angulaire ou temporel permet toutefois de rééchantillonner n'importe quel signal et de réaliser la transition de l'un à l'autre. D'autres méthodes de mesure existent par ailleurs avec des précisions variables. Ainsi, Bonnardot & al. [46] utilisent les signaux vibratoires mesurés sur une boîte de vitesse afin d'obtenir la relation angle-temps et d'effectuer des rééchantillonnages dans le domaine angulaire. Leurs travaux se limitent néanmoins à de faibles variations de vitesse. De leur côté, Gryllias & al. [47] exploitent la capacité de la transformée en ondelettes à fournir la fréquence instantanée d'un signal dans le but de déterminer la vitesse de rotation d'une machine. Enfin, Rodopoulos & al. [48] proposent une méthode paramétrique d'estimation de l'IAS basée sur les valeurs propres. Les avantages principaux de celle-ci par rapport aux analyses fréquentielles et aux transformées de Fourier à court terme résident dans le temps de calcul réduit qu'elle nécessite et dans sa robustesse accrue face au bruit.

I.1.4 – Positionnement de la thèse

Les études expérimentales présentées ci-dessus ont montré l'intérêt de la vitesse de rotation. Ces dernières années, un effort conséquent a été fourni afin de proposer une modélisation phénoménologique des composants d'une transmission permettant la compréhension des phénomènes mécaniques responsables des variations de vitesse de rotation. L'objectif est de prévoir le comportement dynamique et en particulier les variations de vitesse de rotation d'un système tournant afin de proposer des pratiques de surveillance adaptées et de faciliter la détection d'endommagements. Cette thèse s'inscrit dans la lignée de ces travaux et a pour objectif d'améliorer les modèles de roulements existants au LaMCoS et de proposer des modèles d'engrènement pertinent dans l'étude de la vitesse instantanée de rotation. Elle se situe donc au carrefour des modèles quasi-statiques de roulements et engrènement et des méthodes de diagnostic.

Il a été choisi de se limiter à un modèle d'arbre relativement simple et maîtrisé et la théorie des poutres de Timoshenko est toute indiquée. Il a été décidé de ne pas modéliser les carters ou supports dans lesquels sont fixés les bagues des roulements. Les déformations dynamiques de ceux-ci peuvent avoir plusieurs impacts sur la vitesse de rotation. Elles peuvent modifier la répartition des charges sur les éléments roulants d'un roulement ou introduire des fréquences de résonances particulières par exemple. Cependant, leur prise en compte aurait nécessité un travail trop important pour cette thèse dont la durée n'est pas extensible. La majeure partie de la thèse et de ses apports se concentrent donc sur la modélisation des roulements et des engrenages. Le détail des modèles mis en place et les éléments de bibliographie associés sont donnés dans les chapitres II et III de ce document.

Une attention particulière est apportée à la conservation de la vitesse de rotation réelle lors de la modélisation. Pour cela, la totalité des degrés de liberté de chaque nœud du système est conservée. De plus, aucune vitesse de rotation n'est imposée directement au cours des simulations. Le régime nominal est régulé à l'aide de couples moteurs et résistants et l'étude se limite aux phases de fonctionnement sur lesquelles la vitesse ne s'annule pas. Les analyses présentées seront en général effectuées dans le domaine angulaire afin de faire ressortir au mieux les composantes du spectre de l'IAS associées aux roulements et engrenages. Contrairement à la majeure partie des travaux de modélisation dynamique des machines tournantes, l'objectif ici n'est pas de proposer une étude des modes propres d'une transmission ou de sa fonction de réponse en fréquence.

I.2 – Mesure et traitement de l'IAS

La vitesse de rotation d'un système présente deux types de variations. Les premières, macroscopiques, correspondent à l'évolution des conditions de fonctionnement et sont le reflet de l'équilibre entre la puissance fournie par le moteur et la puissance dissipée ou transmise. Elles sont de grande amplitude et ont des temps caractéristiques d'évolution relativement longs. Puisqu'elles ne portent pas d'information sur le comportement interne des différents éléments d'une transmission, elles ne seront pas étudiées par la suite. Les variations de second type sont de beaucoup plus faibles amplitudes et ne sont en général pas détectables lors d'une observation du signal dans le domaine physique. Cependant, une transformée de fourrier réalisée dans des conditions appropriées peut suffire à les étudier. Leurs fréquences fondamentales varient de quelques événements par tour dans le cas des roulements à quelques dizaines d'évènements par tours pour les engrenages. Elles sont représentatives des variations microscopiques de couple inhérente au fonctionnement des éléments de liaison et des moteurs par exemple. En particulier, un endommagement de ces composants engendre une perturbation de ce second type de variations qui sera donc le centre de l'étude présentée dans ce manuscrit.

De manière générale, au cours de cette thèse, une approche angulaire est adoptée dans l'observation des différents signaux. Elle repose sur le constat que les différents éléments de la transmission, sources de perturbations de la vitesse de rotation, ont des comportements angulairement périodiques. Par conséquent, l'observation de la vitesse de rotation et des autres signaux en utilisant la position angulaire comme référence permet de s'affranchir des variations de fréquences dues à des changements de vitesse de rotation. Sauf cas particulier, les axes des abscisses seront donc gradués en fonction de la position angulaire d'un nœud dit « maître » exprimée en tours. De même, lors du passage dans le domaine spectral, les fréquences temporelles, en Hertz, seront remplacées par les fréquences angulaires exprimées en événements par révolution (ev/rev). Cette approche permet de s'affranchir de la restriction classique à des régimes stationnaires et de tirer parti de vitesses largement variables dans le diagnostic de la transmission. L'intérêt complet de cette approche est discuté dans le dernier chapitre sur la base de simulations réalisées au cours de la thèse.

I.2.1 – Principe de la mesure

Au vu de l'état de l'art présenté précédemment et des objectifs de la thèse, il apparaît que la stratégie de mesure de l'IAS la plus indiquée dans notre cas est la méthode « Elapse Time ». Elle nécessite un codeur angulaire monté sur l'arbre en rotation couplé à une horloge haute fréquence. Il existe plusieurs types de dispositifs : avec et sans contact, magnétiques, optiques, montés en extrémité d'arbre ou au milieu de celui-ci. La résolution du codeur, notée R , correspond au nombre de tops par tour et ne doit pas être confondue avec sa précision. Cette dernière reflète quant à elle la qualité des gravures et le respect d'un intervalle angulaire constant les séparant. La méthode Elapse Time, dont le principe est schématisé sur la Figure 7, consiste à déterminer l'écart temporel séparant les tops successifs du codeur.

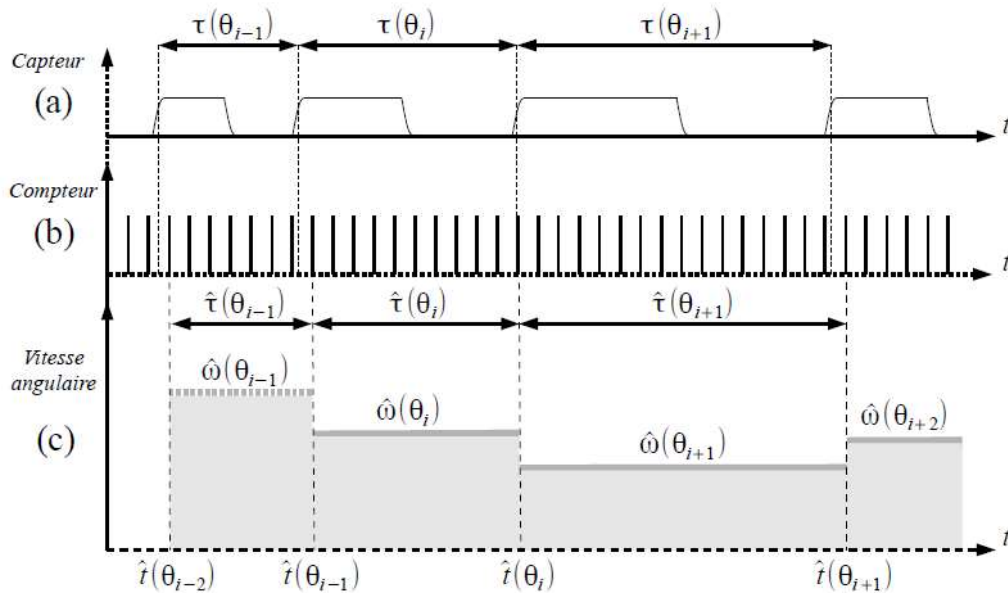


Figure 7 : Principe de mesure de la vitesse de rotation [1]

La vitesse de rotation est alors calculée comme le rapport de l'angle séparant deux gravures et du temps écoulé comme suit.

$$\hat{\omega}(\theta_i) = \frac{\Delta\theta}{\hat{\tau}(\theta_i)} = \frac{2\pi}{R \cdot N_i \cdot T_c} \quad (1)$$

Il est important de noter que la mesure du temps écoulé ne peut être qu'un nombre entier de périodes d'horloge, notée T_c . Par conséquent, la vitesse de rotation calculée est discrétisée. Celle-ci permet de faire la distinction entre le temps réel τ écoulé entre deux fronts montants du signal fourni par le capteur du temps mesuré $\hat{\tau}$ correspondant à un nombre entier de périodes d'horloge. La vitesse de rotation ainsi calculée est alors intrinsèquement échantillonnée à pas d'angle constant. En effet, une nouvelle valeur est calculée à chaque fois qu'un top du codeur angulaire est détecté. Néanmoins, cette méthode d'acquisition fournit aussi la relation angle-temps, c'est-à-dire l'évolution du temps en fonction de la position angulaire. Par conséquent, un rééchantillonnage est possible pour utiliser le temps comme référence.

Dans la suite de ce manuscrit, les différentes études présentées seront réalisées sur la base de résultats de simulation. Par conséquent la vitesse de rotation dite « réelle » ou « de référence » sera toujours obtenue de manière numérique. Il s'agit donc d'un signal échantillonné lors de l'intégration numérique. Une attention particulière a été apportée au choix du pas d'échantillonnage afin de ne pas dénaturer le signal. Ce pas est déterminé empiriquement par diminutions successives de sorte que les résultats obtenus aient convergé. La simulation d'une mesure de cette vitesse de rotation « réelle » est très simple à implémenter. Elle nécessite de disposer des vecteurs position angulaire θ_s et temps t_s simulés afin de pouvoir exprimer le second en fonction de la première et donc d'obtenir la loi $t_s(\theta_s)$. Ce signal est ensuite rééchantillonné à pas d'angle constants et égaux à la résolution R du codeur que l'on souhaite simuler. La simulation de la mesure des temps $\hat{t}_s(\theta_s)$ de passage des tops codeurs est ensuite réalisée en prenant le nombre entier de période d'horloge inférieur.

$$\hat{t}_s(\theta_{si}) = \left\lfloor \frac{t_s(\theta_{si})}{T_c} \right\rfloor \cdot T_c \quad (2)$$

La vitesse de rotation est alors calculée comme dans le cas d'une mesure réelle.

$$\hat{\omega}(\theta_i) = \frac{\Delta\theta}{\hat{t}_s(\theta_i)} = \frac{2\pi}{R \cdot (\hat{t}_s(\theta_i) - \hat{t}_s(\theta_{i-1}))} \quad (3)$$

1.2.2 – Erreurs commises et restrictions

Plusieurs types d'erreurs peuvent être introduites au cours de la mesure. Certaines sont intrinsèques à la méthode utilisée tandis que d'autres sont les conséquences d'imperfections apparaissant lors de la fabrication des différentes pièces ou résultent d'erreur de montage. Une étude approfondie des différentes sources d'erreur a été menée par André lors de ses travaux de thèse [1].

Repliement de spectre et critère de Shannon

La première limite de la mesure, évidente, est le critère de Shannon. L'utilisation d'un codeur angulaire disposant de R tops par tour introduit une fréquence angulaire d'échantillonnage de R ev/tr. Par conséquent, cela limite la plage fréquentielle des phénomènes observables à $R/2$ ev/tr. En fonction de la forme du spectre réel de la vitesse de rotation, une fréquence d'échantillonnage trop basse peut conduire à du repliement de spectre, phénomène largement maîtrisé en traitement du signal. A titre d'exemple, la Figure 8 compare les spectres de variations de vitesses de rotation réelle et mesurée à l'aide d'un capteur disposant de 200 tops par tour pour le système présenté dans le dernier chapitre. Le spectre de la vitesse mesurée est limité à 100 ev/tr et de nombreux pics caractéristiques du repliement de spectre sont visibles et repérés par des points rouges. Ils correspondent aux fréquences plus hautes portant des pics significatifs tels que la seconde harmonique d'engrènement à 110 ev/tr. La Figure 9 présente la même comparaison de spectre en utilisant cette fois un codeur à 1 000 ev/tr et met en évidence la suffisance de celui-ci.

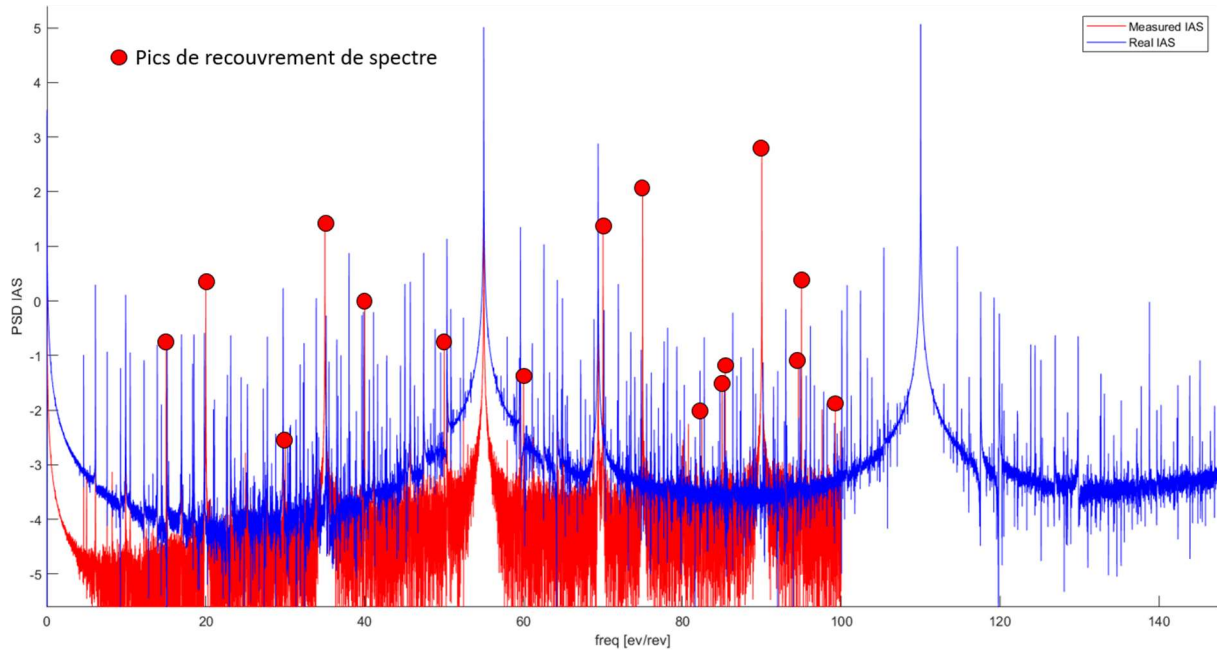


Figure 8 : Simulation de mesure, $R = 200$

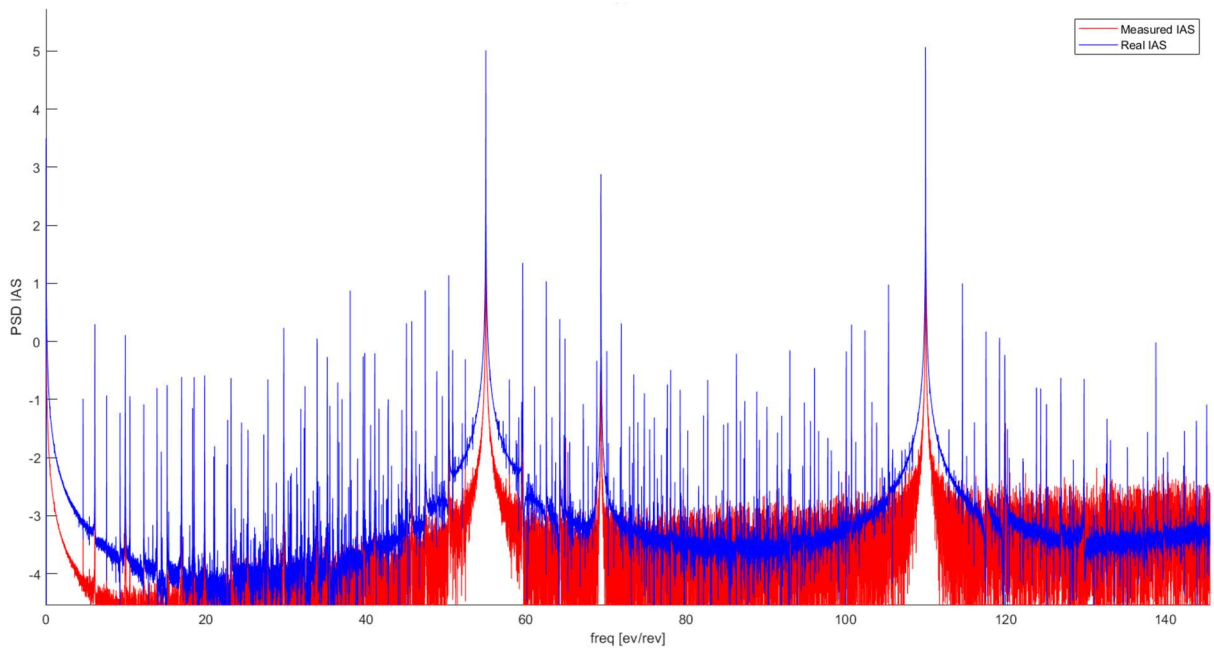


Figure 9 : Simulation de mesure, $R = 1000$

Dans le cas où l'utilisation d'un codeur de résolution suffisamment grande est impossible en raison des technologies implémentables et d'une trop grande richesse du spectre à haute fréquence, il est toujours possible de déterminer *a priori* les fréquences auxquelles doivent apparaître des artefacts générés par le repliement de spectre. Ceci permet d'étudier un spectre plus large que le critère de Shannon ne le prévoit. Cependant, cela requiert une grande maîtrise de la dynamique du système et des fréquences des phénomènes dominants afin de pouvoir séparer les pics « repliés » des pics naturels. De manière générale, il est donc préférable de prévoir un capteur avec un nombre R suffisant de tops par tour pour permettre l'étude d'une transmission. Il est alors tentant d'instrumenter l'arbre le plus rapide. En effet, sur cet arbre, la périodicité angulaire des événements est plus faible. Par exemple, dans le système académique étudié ici, le premier étage de réduction

transmettant la puissance de l'arbre intermédiaire vers l'arbre lent a une fréquence angulaire $Z_1=55$ ev/tr sur ce dernier et une fréquence angulaire $Z_1/r_1r_2=24.57$ ev/tr sur l'arbre rapide. Par conséquent, pour l'observation des mêmes phénomènes, un capteur positionné sur l'arbre rapide nécessitera une précision angulaire moindre.

Il convient de remarquer que le respect du critère de Shannon n'est pas une condition suffisante à l'observation de phénomènes périodique quasi-ponctuels tels que le passage d'élément roulant sur un écaillage ou l'entrée en contact d'une paire de dent. En effet, il est nécessaire que plusieurs points de mesure permettent de décrire ces phénomènes de courte durée sans quoi ils ne sont pas correctement détectables. Ceci constitue en général une condition plus restrictive que le critère de Shannon.

Erreur de quantification

Cette seconde source d'écart entre la vitesse réelle et la vitesse mesurée est en général la plus importante. Comme le repliement de spectre, il s'agit d'une erreur intrinsèque, c'est-à-dire d'une erreur existante même dans le cas d'un système de mesure idéal. Elle est engendrée par la quantification de la mesure du temps. Comme expliqué plus tôt, lorsque les instants de passage des différents tops codeur sont observés, ils ne peuvent correspondre qu'à un nombre entier de périodes d'horloge. Par conséquent, la vitesse de rotation calculée ne peut prendre que des valeurs discrètes dépendantes des caractéristiques des instruments de mesure. Il convient de remarquer que même dans le cas hypothétique d'un régime constant, l'erreur de quantification introduit donc des variations de la vitesse de rotation mesurée, celle-ci oscillant entre les deux niveaux encadrant la vitesse de rotation réelle. De manière générale, l'impact de la quantification augmente lorsque le nombre de périodes d'horloge entre deux tops codeur diminue.

Il est possible d'introduire un seuil de quantification théorique constituant une frontière entre le signal réel, porteur d'informations mécaniques, et le bruit de quantification. Le calcul de ce seuil est détaillé par André [1] et repose sur l'hypothèse que l'erreur ε_i commise au moment de relever l'instant correspondant à une position angulaire θ_i suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; T_c]$. On introduit alors le seuil $\eta_{\varepsilon\alpha}$ de quantification simple à la probabilité α exprimé comme suit, où N est la taille de l'échantillon du signal ε .

$$\eta_{\varepsilon\alpha} = -\frac{T_c^2}{12N} \ln(\alpha) \quad (4)$$

On montre alors que la proportion de composantes fréquentielles dans la densité spectrale de puissance de ε dépassant le seuil $\eta_{\varepsilon\alpha}$ tend vers α quand N tend vers l'infini. De manière analogue, on introduit un seuil de quantification $\eta_{\Delta\varepsilon\alpha}$ en différences finies associé à l'erreur $\Delta\varepsilon$ effectuée sur l'estimation de l'intervalle de temps τ_i écoulé entre les positions angulaires θ_i et θ_{i-1} et dont l'expression est donnée ci-dessous. On note que ce second seuil n'est pas constant dans le domaine spectral et dépend donc de la fréquence angulaire f_θ considérée.

$$\eta_{\Delta\varepsilon\alpha}(f_\theta) = -\ln(\alpha) \frac{T_c^2}{3} \sin\left(\frac{f_\theta\pi}{R}\right)^2 \quad (5)$$

Pour finir il est possible d'introduire un seuil similaire pour le signal ω de vitesse de rotation exprimé en fonction du seuil de quantification en différences finies et de la moyenne statistique m_τ du signal τ .

$$\eta_{\omega\alpha}(f_\theta) = \frac{4\pi^2\eta_{\Delta\varepsilon\alpha}(f_\theta)}{R^2 \left(m_\tau^2 - \frac{1}{N} \eta_{\Delta\varepsilon\alpha}(f_\theta) \right)^2} \quad (6)$$

Une illustration de la signification des seuils de quantification simple et en différences finies est fournie sur la Figure 10. Ces estimations permettent en pratique de déterminer avec une faible marge d'erreur quelles composantes observées dans la densité spectrale de la vitesse de rotation correspondent à de véritables phénomènes mécaniques et non à des parasites issus de la mesure. Elles seront utilisées dans le dernier chapitre. Notamment, elles permettent de dimensionner a priori le système de mesure à condition de disposer d'une estimation des amplitudes des variations de vitesse de rotation que l'on souhaite observer. On peut remarquer que le seuil de quantification à basse fréquence est plus faible. Ainsi, ce phénomène n'est pas aussi contraignant qu'on pourrait le penser pour l'étude des roulements dont les fréquences angulaires caractéristiques sont basses.

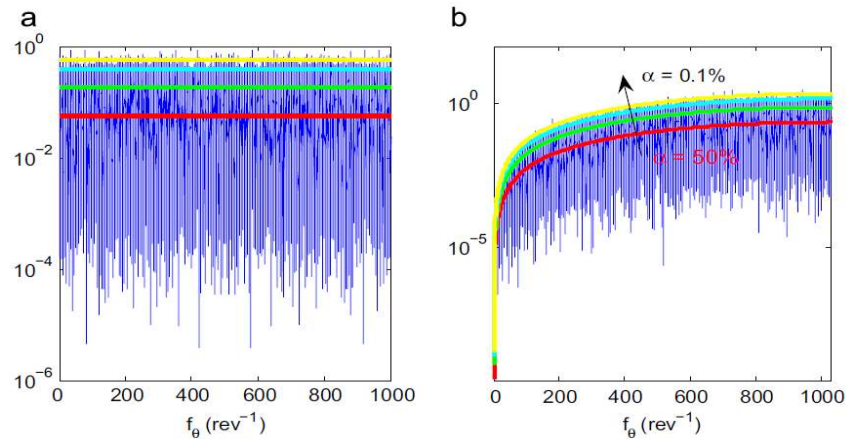


Figure 10 : Seuils de quantification en forme simple et en différence finie pour plusieurs niveaux de probabilité [42]

La Figure 11 présente une comparaison des signaux vitesse réelle et mesurée avec une fréquence d'horloge $F_c=8$ MHz. Le seuil de quantification introduit plus tôt est tracé en noir. Bien que le spectre soit exploitable à ce stade, de nombreux pics secondaires, porteurs d'informations, sont noyés dans le bruit.

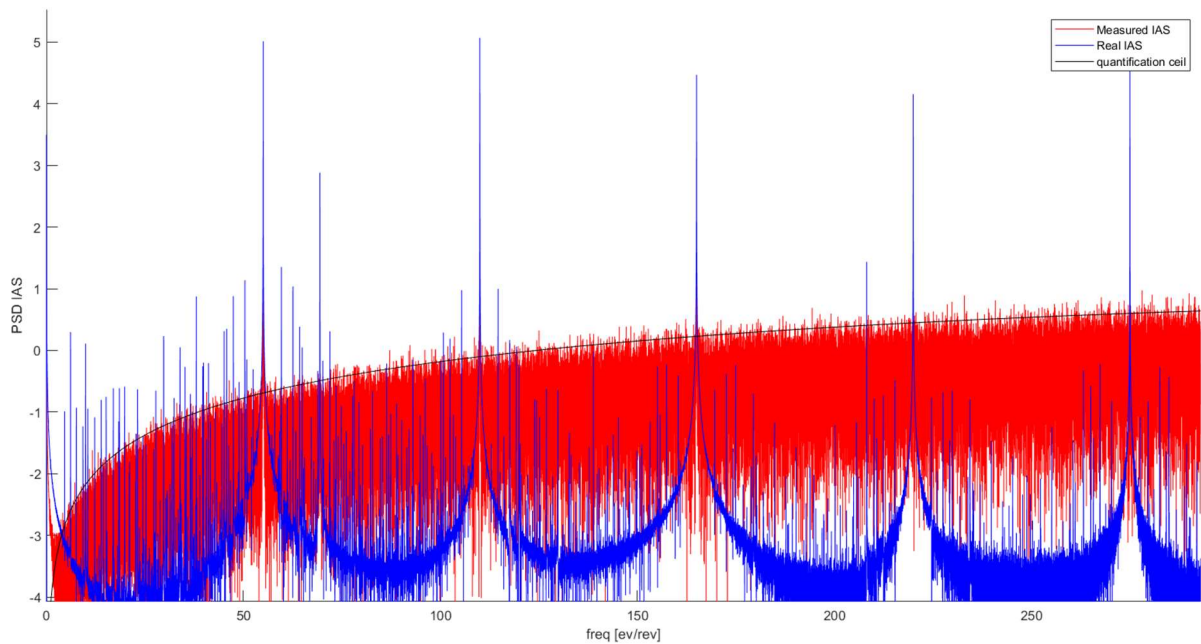


Figure 11 : Simulation de mesure $F_c=8$ MHz

L'augmentation de la fréquence d'horloge permet de limiter ce problème, comme le montre la Figure 12. Il est toutefois important de noter que même si les basses fréquences sont peu affectées par la mesure, ce qui permet une étude du spectre dans de bonnes conditions, la partie hautes fréquences du spectre est quant à elle largement modifiée. Il en va de même pour la vitesse de rotation dans le domaine physique, comme le montre la Figure 13. Ceci ne gêne en rien l'exploitation des résultats car la partie basses fréquences du spectre est la plus riche en information sur le comportement et l'état des différents composants technologiques.

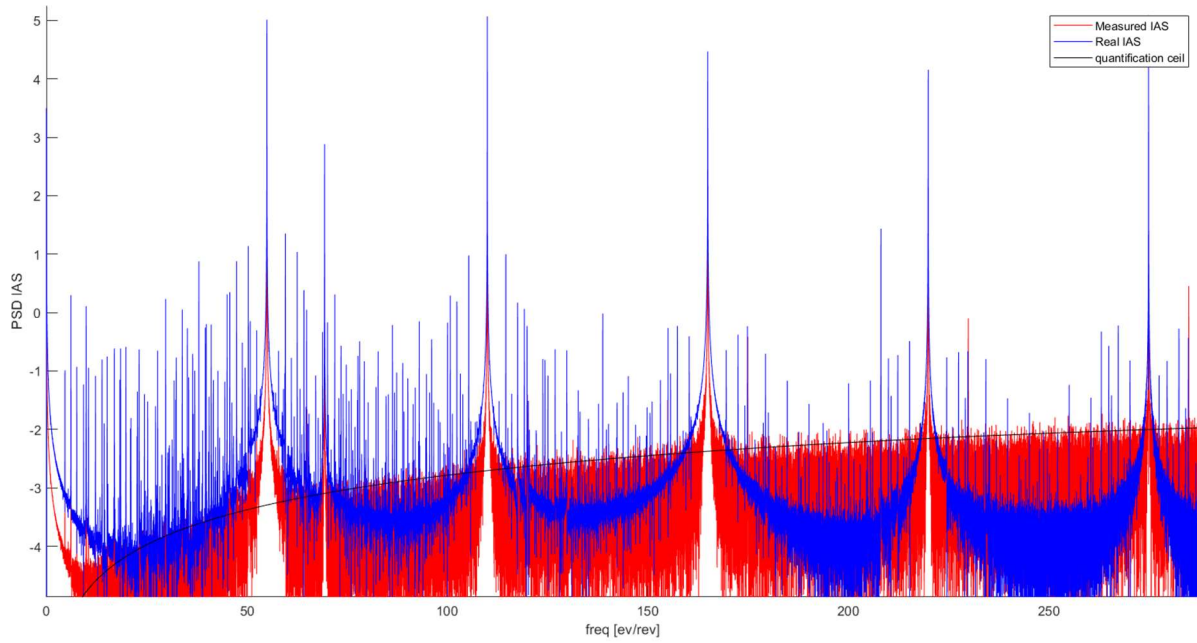


Figure 12 : Simulation de mesure $F_c=80$ MHz

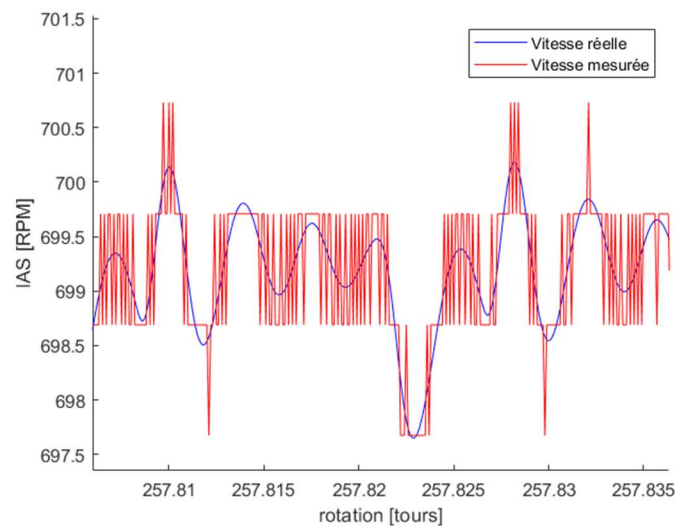


Figure 13 : Simulation de mesure $F_c=80$ MHz, domaine physique

Afin de limiter le bruit de quantification, il est préférable de maximiser le nombre de top horloges compris entre deux tops du codeur angulaire. Pour cela, trois options sont disponibles. Il est possible d'une part de choisir une horloge haute fréquence. Cette option est cependant limitée par le coût et la faisabilité des technologies de mesure. De plus, une horloge très haute fréquence peut se montrer instable. D'autre part, le nombre R de tops du codeur angulaire sur un tour peut être réduit,

entraînant les conséquences sur la plage fréquentielle observable discutées précédemment. Enfin, il est possible de limiter la vitesse de rotation de l'arbre instrumenté, ce qui pousse à choisir l'arbre le plus lent ou à effectuer des tests à basse vitesse.

Filtrage

De par le moyennage sur une période angulaire qu'elle implique, la mesure joue également le rôle d'un filtre passe bas. En réalité, il a été montré analytiquement et expérimentalement que le signal de vitesse de rotation mesuré est atténué par rapport au signal vitesse réel par un sinus cardinal [42]. Afin de mettre ce point en évidence, un régime quasi-stationnaire est considéré de sorte que la vitesse de rotation peut s'approcher au premier ordre sous la forme suivante :

$$\omega(\theta) = \omega_0 + \delta\omega(\theta) \quad \text{avec} \quad \forall \theta, \frac{\delta\omega(\theta)}{\omega_0} \ll 1 \quad (7)$$

Il convient de remarquer que cette hypothèse n'est que faiblement restrictive. En effet elle reste valable au premier ordre pour tout régime transitoire pour lequel les variations macroscopiques de vitesse de rotation s'effectuent avec un temps caractéristique beaucoup plus long que les périodes des variations microscopiques. On montre alors, en reprenant les notations de la Figure 7 que la vitesse de rotation mesurée $\bar{\omega}$ sans considérer l'erreur de quantification (c'est-à-dire avec une estimation des temps de passages des tops codeur infiniment précise) vérifie les équations ci-dessous.

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\tau(\theta)} \approx 2\omega_0 - \frac{\omega_0^2}{\Delta\theta} \tau(\theta) \quad (8)$$

Le passage dans le domaine spectral donne l'expression de la transformée de Fourier de la vitesse mesurée en fonction de la fonction Dirac $\delta(f_\theta)$.

$$\bar{\Omega}(f_\theta) = 2\omega_0\delta(f_\theta) - \frac{\omega_0^2}{\Delta\theta} T(f_\theta) \quad (9)$$

Le remplacement de $\tau(\theta) = t(\theta) - t(\theta - \Delta\theta)$ par son expression en fonction des temps de passage des tops codeur et l'approximation à l'ordre 1 de ceux-ci permettent d'exprimer la transformée de Fourier de la vitesse en fonction de la fréquence angulaire.

$$\bar{\Omega}(f_\theta) = 2\omega_0\delta(f_\theta) - \frac{\omega_0^2}{\Delta\theta} T(f_\theta)(1 - e^{-j2\pi f_\theta \Delta\theta}) \quad (10)$$

$$\text{Or } \frac{dt}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{\omega(\theta)} = \frac{1}{\omega_0} \left(2 - \frac{\omega(\theta)}{\omega_0} \right) \quad \text{donc} \quad T(f_\theta) = \frac{1}{j2\pi f_\theta \omega_0^2} (2\omega_0\delta(f_\theta) - \bar{\Omega}(f_\theta)) \quad (11)$$

Par conséquent,

$$\bar{\Omega}(f_\theta) = 2\omega_0 \delta(f_\theta) - (2\omega_0\delta(f_\theta) - \bar{\Omega}(f_\theta)) e^{-j\pi f_\theta \Delta\theta} \frac{e^{j\pi f_\theta \Delta\theta} - e^{-j\pi f_\theta \Delta\theta}}{2j\pi f_\theta \Delta\theta} \quad (12)$$

Enfin, cette expression qui peut se réécrire sous la forme finale suivante.

$$\forall f_\theta > 0, \quad \bar{\Omega}(f_\theta) = \bar{\Omega}(f_\theta) e^{-j\pi f_\theta \Delta\theta} \text{sinc}_\pi(f_\theta \Delta\theta) \quad (13)$$

Le module de la transformée de Fourier de la vitesse mesurée sans erreur de quantification vérifie donc :

$$\forall f_\theta > 0, \quad |\bar{\Omega}(f_\theta)| = |\bar{\Omega}(f_\theta)| \cdot |\text{sinc}_\pi(f_\theta \Delta\theta)| \quad (14)$$

Ceci prouve que pour une vitesse de rotation quasi-stabilisée, c'est-à-dire dont les variations sont faibles devant sa valeur moyenne sur l'intervalle d'angle considéré, la méthode de mesure se comporte

comme un filtre passe bas ayant la forme d'un sinus cardinal dont la période est déterminée par la résolution R du codeur angulaire.

Erreur de gravure

En plus des erreurs précédentes, les imperfections de montage et de fabrication introduisent de nouveaux artefacts dans le spectre de la vitesse mesurée. Le plus impactant de ces phénomènes est lié aux erreurs de gravure. Celles-ci sont de deux types. D'une part, l'écart angulaire séparant deux raies sur la cible du codeur ne peut pas être parfait et d'autre part, la forme de ces raies est également différente de la théorie. Une illustration de ce phénomène est disponible sur la Figure 14 présentant une photo des gravures d'une roue phonique expertisée à la suite d'essais sur banc partiel et un schéma de l'erreur commise sur l'intervalle angulaire séparant deux tops codeurs combinant les deux sources d'approximation. Ce type d'erreur mène à l'apparition d'un peigne de raies aux ordres entier dans le spectre de la vitesse de rotation.

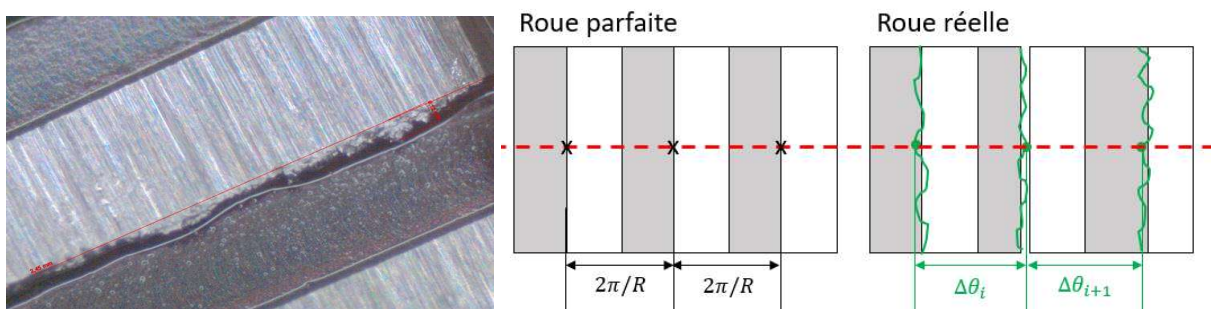


Figure 14 : Erreur de gravure sur une roue phonique

Les erreurs de gravure peuvent mener à des variations de vitesse de rotation mesurées physiquement impossibles cela peut être vu sur la Figure 15 montrant la vitesse de rotation mesurée avec la roue phonique présentée ci-dessus. Cependant, ces parasites sont déterministes et une connaissance précise de la cible utilisée permet de traiter le signal de sorte à le rendre exploitable.

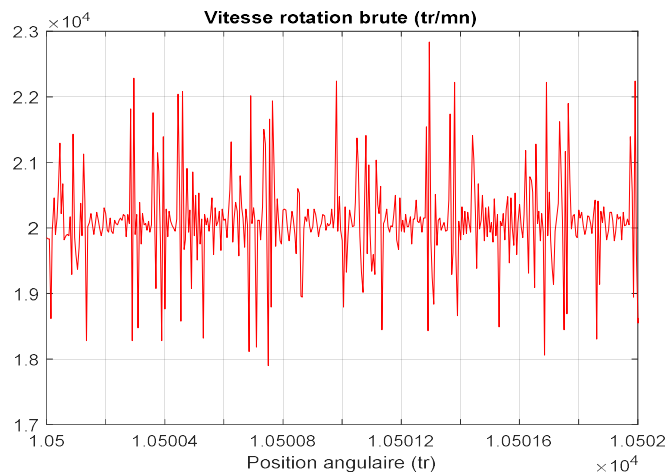


Figure 15 : Vitesse de rotation mesurée sur banc

Puisque l'écart angulaire entre deux tops codeurs reste constant dans le temps, le retrait d'un moyennage synchrone de la vitesse de rotation peut permettre de supprimer toutes les composantes dont la fréquence n'est pas un ordre entier. Cela reste dangereux car elle ne fait pas de distinction entre les artefacts liés au matériel utilisé et les composantes spectrales représentatives de phénomènes mécaniques cycliques ayant les mêmes fréquences caractéristiques tels que le balourd,

les dégradations d'engrenages, etc... Lorsque la valeur macroscopique de la vitesse de rotation est constante ou quasi-constante, il est également possible d'estimer numériquement au premier ordre les intervalles angulaires réels séparant les raies de la cible et de corriger a posteriori le calcul de la vitesse de rotation en tenant compte de ces modifications. A titre d'exemple, la Figure 16 présente une estimation de l'erreur de pas commise lors de la fabrication de la roue phonique introduite ci-dessus. Cependant, cette méthode reste approximative. L'un des intérêts de disposer d'un modèle numérique de transmission est la possibilité d'implémenter une simulation de la mesure à l'aide d'une roue phonique imparfaite en introduisant des variations de pas angulaire entre les raies de celle-ci et donc de prévoir l'impact d'une telle mesure sur le signal obtenu.

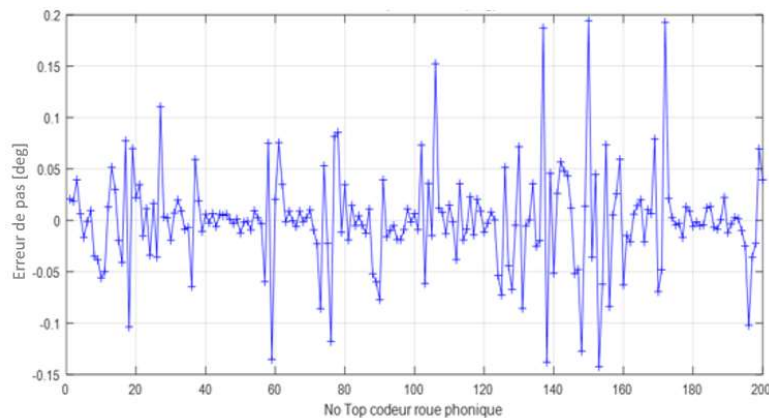


Figure 16 : Erreur de pas estimée sur une roue phonique

Détection de fronts

Pour finir, même en l'absence d'erreur physique de pas, les instants de passage des tops du codeur angulaire peuvent être mal estimés en raison d'une mauvaise qualité du signal électrique fourni par le capteur. En effet, à cause des conditions non idéales dans lesquelles celui-ci travaille et en fonction du principe physique utilisé pour la détection des raies sur la cible, le signal sortant du capteur n'est pas un signal en créneaux parfait. Le motif fourni peut être plus complexe et présenter des variations. Les instants de transitions peuvent alors devenir flous. De plus, la détection de front montant peut être rendue plus difficile dans le cas d'un signal largement variable comme présenté sur la Figure 17. Celui-ci est issu d'un capteur optique pointé sur une roue phonique dans un carter aéronautique. Le fonctionnement en zone huileuse parasite la mesure et, bien que des créneaux soit toujours discernables, leurs formes sont largement détériorées et le traitement requis pour la détection de fronts montants introduit des erreurs supplémentaires. Ces phénomènes perturbateurs externes au principe de mesure sont difficilement modélisables et doivent donc constituer un point de vigilance particulière en pratique.

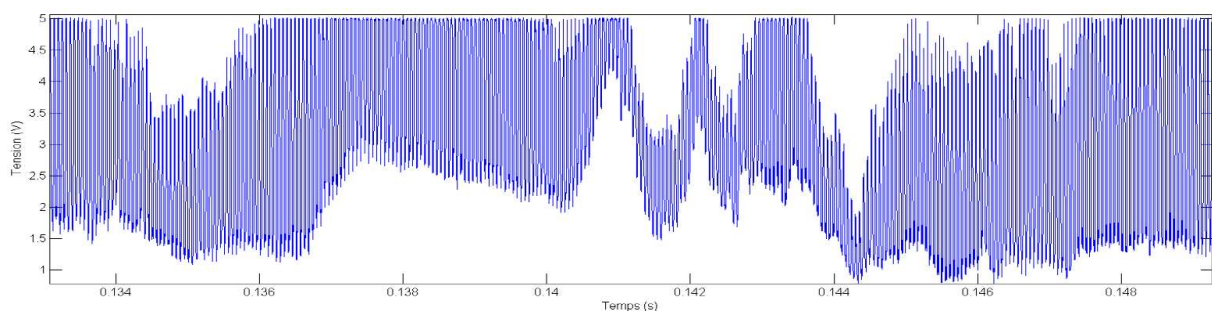


Figure 17 : Signal issu de capteur optique sur roue phonique en zone huileuse

I.2.3 – Techniques de traitement du signal utilisées dans la thèse

Une fois le signal vitesse obtenu et corrigé en tenant compte des éventuelles erreurs introduites lors de la mesure, un certain nombre de traitements peuvent s'avérer nécessaires afin de faciliter l'analyse. Ceux-ci restent néanmoins basiques dans les travaux présentés ici. En effet, les signaux étudiés par la suite sont issus de simulations et sont par conséquent très peu perturbés par le bruit environnant constaté dans des transmissions réelles.

L'observation de l'IAS dans le domaine physique, en temps ou en angle peut apporter un certain nombre d'informations. Sur un signal peu pollué, il est possible de d'observer le passage des dents dans l'engrènement et de repérer une dent endommagée. De même, après un moyennage synchrone adapté, il est possible en revenant dans le domaine physique de mesurer la taille d'un écaillage de roulement. Cependant, dans les travaux présentés ici, il a été préféré de manière générale d'étudier le signal dans le domaine spectral. En effet, la plupart des manifestations recherchées sont de très faibles amplitudes et, même sur des résultats de simulation, ne sont pas discernables directement. Le caractère intégrateur de la transformée de Fourier et l'utilisation de la position angulaire comme référence permettent de concentrer l'énergie des variations de vitesse dues aux roulements et aux engrenages sur des canaux fréquentiels étroits et de les faire émerger du pied de spectre. Ce point est mis en évidence sur la base de résultats numériques dans le dernier chapitre. Il est alors possible de d'étudier séparément les différents phénomènes en présence et de proposer un diagnostic de la transmission.

Dans le cas de régimes non stationnaires, la tendance macroscopique de la vitesse de rotation introduit une composante spectrale large bande qui peut rapidement devenir limitante en absorbant les pics associés aux phénomènes d'intérêt. Un exemple est donné dans le domaine physique sur la Figure 18. Celle-ci montre la montée en régime d'une transmission. Les spectres obtenus après une transformée de Fourier sans et avec fenêtrage sont comparés soulignant l'importance de celui-ci. Dans le premier cas, seule la composante principale correspondant à la fréquence d'engrènement est observable. La fenêtre de Hann utilisée permet de supprimer la composante large bande et de faire apparaître les pics secondaires associés aux fréquences de roulements. Ce type de traitement comporte toutefois des inconvénients. En effet, l'utilisation d'une fenêtre revient à diminuer la participation dans le spectre d'une partie du signal et l'information qu'elle contient. Par conséquent, dans le cas de simulation à régime variable, il est parfois préférable de s'en passer comme cela sera mis en évidence dans le dernier chapitre. La suppression de la composante macroscopique de la vitesse reste néanmoins indispensable et peut alors être effectuée en retirant une moyenne glissante du signal ou une interpolation polynomiale de celui-ci. Toutefois, ces méthodes ne fonctionnent que si les temps caractéristiques de variations de la tendance macroscopique restent importants devant les périodes d'oscillations de petite amplitude.

Le dernier type de traitement considéré est l'analyse angle-fréquence. L'utilisation de spectrogrammes basés sur des transformées de Fourier à court terme en angle permet de suivre l'évolution du spectre de la vitesse en fonction de la position angulaire. Dans le cas de régimes non stationnaires comme des montées en vitesse par exemple, les fréquences des phénomènes à dépendances angulaires, tels que les excitations issues des roulements et engrenages, restent constantes tandis que les phénomènes à dépendance temporelle, telle que la réponse libre du système, voient leurs fréquences modifiées. Il est alors facile de distinguer ces deux types de manifestation et d'étudier leurs interactions.

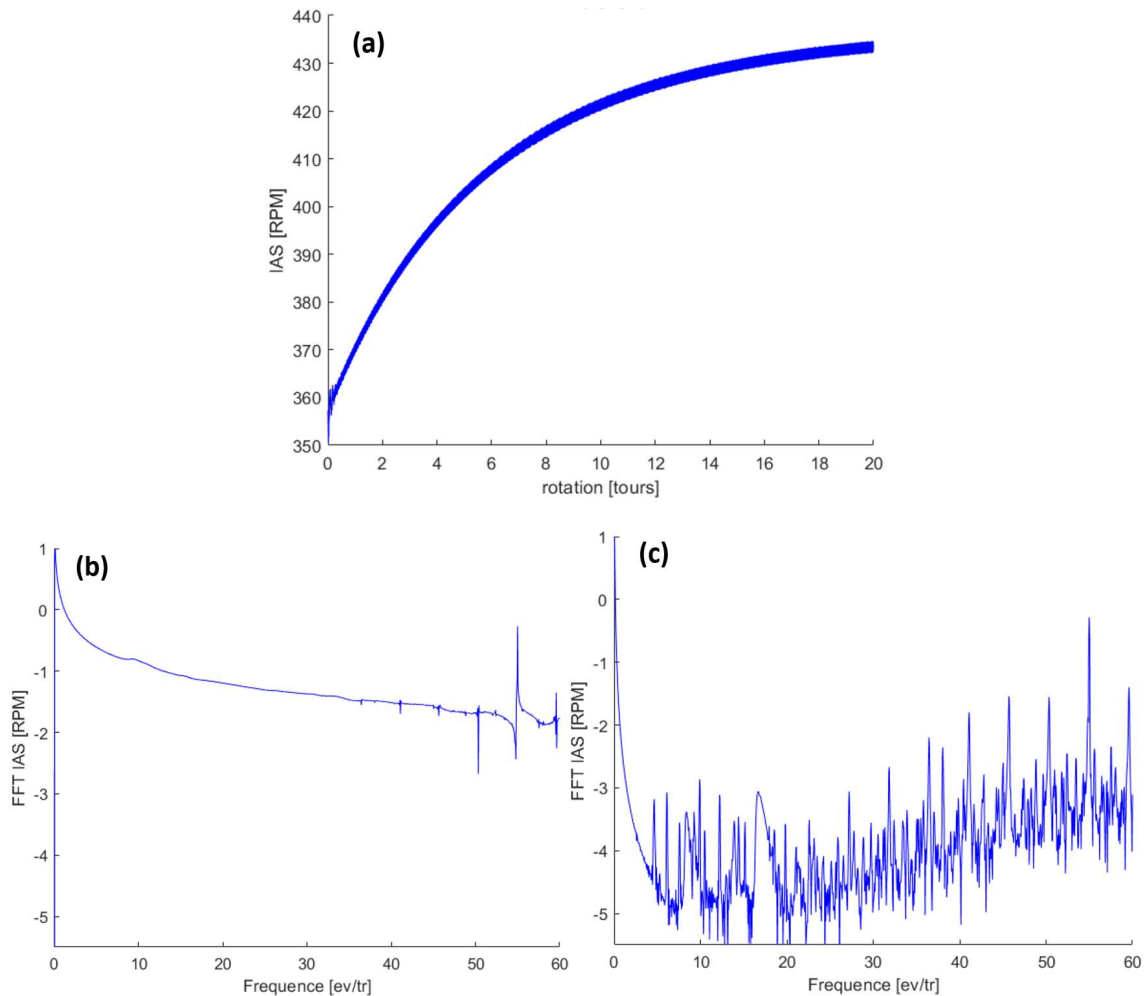


Figure 18 : Vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et dans le domaine spectral sans (b) et avec fenêtrage (c)

I.3 – Simulation du signal vitesse de rotation

I.3.1 – Source de perturbation de la vitesse de rotation

Des simulations ont été utilisées afin d'étudier la vitesse de rotation d'une transmission saine ou endommagée sous différentes conditions de fonctionnement. Pour cela, un modèle d'arbre a été mis en place et des roulements et engrenages ont été ajoutés afin de lier ces derniers entre eux. Dans un modèle faisant abstraction de l'environnement dans lequel est supposé fonctionner une transmission, ces éléments de liaison constituent les principales sources de perturbation de la vitesse de rotation. A ceux-ci s'ajouteraient en réalité les éventuels balourds et erreur de fabrications ou de montage.

Le couple résistant produit par les roulements sur l'arbre en rotation est complexe. Il est composé d'une partie constante ou quasi-constante d'une part et d'une partie fluctuante d'autre part. La première est majoritairement due au brassage du lubrifiant et bien qu'elle dépende de la vitesse de rotation, elle n'affecte que sa valeur macroscopique avec un temps caractéristique très long. Par conséquent son intérêt est de second ordre et l'attention portée à sa modélisation est minimale. La composante variable du couple, entraînant des variations de vitesse à l'échelle microscopique, est

engendrée par l'évolution des conditions de contact entre les éléments roulants et les bagues et existe même dans le cas d'un roulement sain. Elle évolue avec la répartition des charges sur les éléments roulants et de nombreux phénomènes sont à l'œuvre parmi lesquels on retrouve la résistance au roulement et les frottements. En dehors des cas de chargement particuliers, les efforts supportés par le roulement, qu'ils soient fixes ou tournants, sont source d'une répartition non homogène des efforts entre les éléments roulants. Lors de la rotation, cette répartition évolue inévitablement et, par conséquent, le couple résistant total dans le roulement aussi. En effet, celui-ci est lié à la somme des efforts normaux de contact sur les bagues. Les endommagements tels que les écaillages constituent une modification supplémentaire de répartition de charge et donc de variations de vitesse de rotation. La Figure 19 illustre ce phénomène en schématisant de manière qualitative la répartition des efforts de contact sur la bague intérieure dans le cas où une force radiale fixe est appliquée sur celle-ci. Elle met en évidence l'évolution au cours de la rotation et en présence d'écaillage de la charge supportée par un élément roulant d'une part et de la somme des efforts de contact d'autre part. La relation permettant de faire le lien entre efforts supportés et couple transmis est détaillée dans le chapitre II dédié à la modélisation des roulements.

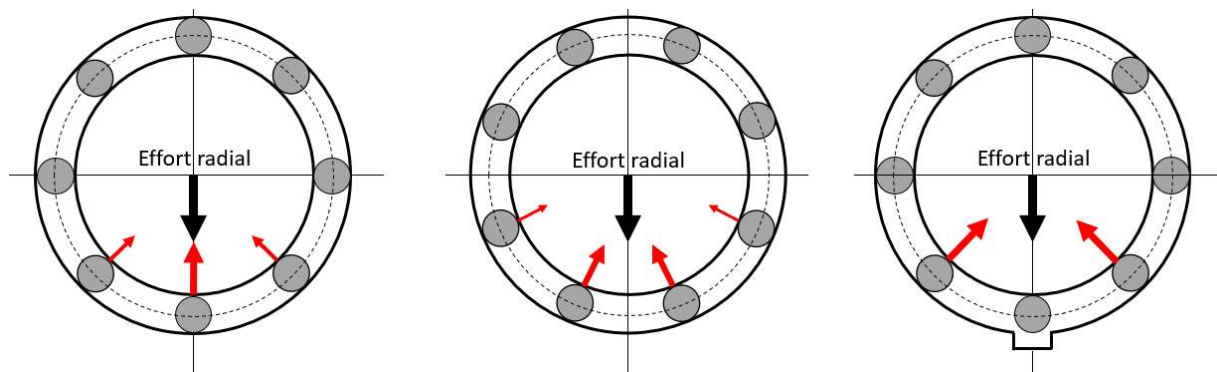


Figure 19 : Evolution de la répartition des charges sur les éléments roulants

Pour les engrenages, la source principale de variations du couple transmis est l'évolution du nombre de dents en contact, ce qui peut être traduit par une fluctuation de la raideur d'engrènement. Un exemple des fluctuations de celle-ci est donné Figure 20. Elles dépendent majoritairement du nombre de dents en prise et de la largeur de la zone de contact sur celles-ci. Cependant, la position du point de contact sur le profil des dentures entre également en ligne de compte. De plus, les modifications de profils et la présence de contact hors ligne d'action modifient l'écrasement au contact et donc l'effort transmis sur certains intervalles angulaires. De la même manière que pour les roulements, les endommagements d'un engrenage introduisent des modifications de la raideur ou de l'écrasement sur la dent détériorée et donc des perturbations de la vitesse de rotation. Dans le cas d'un engrenage hélicoïdal, les calculs s'avèrent plus complexes en raison du chargement progressif des dentures au cours de la rotation. Ces différents phénomènes sont abordés dans le chapitre III adressé à la modélisation des engrènements.

De nombreuses autres sources d'excitations « secondaires » peuvent influencer la vitesse de rotation instantanée. A titre d'exemple, la présence de balourd complexifie grandement le spectre en y faisant apparaître de nombreuses raies supplémentaires. En effet, de par la périodicité de ce phénomène, des raies supplémentaires apparaissent aux ordres entiers. De plus, la présence d'une charge radiale tournante fait ressortir les BPFOs des roulements ainsi que leurs harmoniques et les modulations de celles-ci autour des fréquences d'engrènement. Afin de limiter la complexité des spectres présentés dans la suite du document, les excitations considérées se limitent aux roulements et engrenages. Cependant, bien que les résultats ne soient pas montrés, d'autres phénomènes ont été

implémentés ou sont facilement implémentables grâce à l'approche modulaire adoptée lors de la modélisation.

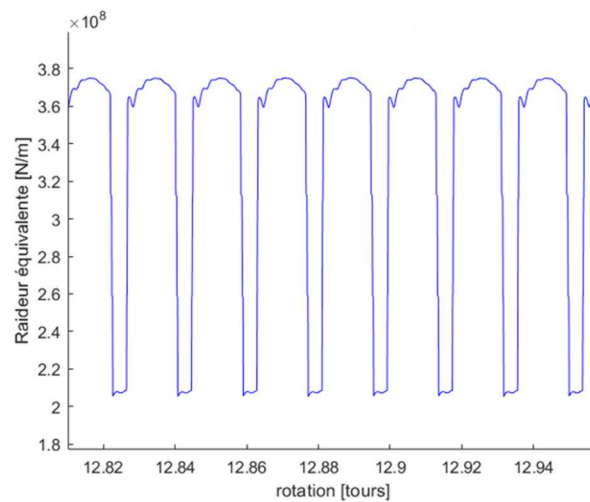


Figure 20 : Evolution angulaire dynamique de la raideur d'un engrenage droit

I.3.2 – Méthode de modélisation et hypothèses retenues

Degrés de liberté

Afin de rendre compte au mieux des variations de vitesse de rotation à travers la simulation, il est important de conserver tous les degrés de liberté dans le système différentiel décrivant le comportement dynamique de la transmission. En effet, les différents couplages introduits par les roulements et les engrenages imposent, pour des raisons de précision, de ne pas limiter les modèles au seul degré de liberté de la rotation principale comme cela a pu être choisi dans une part significative de la littérature. L'importance de la prise en compte de tous les degrés de liberté de chaque nœud est mise en évidence dans le dernier chapitre. En particulier le déplacement total en rotation autour de l'axe principal des différents nœuds est entièrement conservé. Le degré de liberté correspondant ne se limite donc pas aux effets de torsion mais inclut le mouvement de corps rigide pour obtenir la relation angle-temps.

Régulation de la vitesse de rotation

Puisque la surveillance est effectuée à travers la vitesse de rotation instantanée, il est impossible d'imposer celle-ci comme une condition limite. En effet, ajouter une contrainte en vitesse sur un nœud du système limiterait l'étude aux phénomènes de torsion et ne rendrait pas compte des variations réelles de vitesse instantanée produites par les différents éléments de la transmission. Une première approche serait d'imposer la vitesse de rotation sur un nœud externe relié à un arbre par un accouplement très souple. Cette méthode, bien que très simple, reste intrusive et entraîne une aliénation, même faible, du signal vitesse simulé. De plus, elle aurait la signification physique d'une source de puissance infinie, ce qui représente mal les conditions réelles de fonctionnement d'une transmission. La valeur macroscopique de la vitesse de rotation est donc ajustée à travers des couples moteurs et résistants pour obtenir le régime nominal souhaité en simulation comme le montre la Figure 21. Sur celle-ci sont comparées les différentes approches de régulation de vitesse. Les encastresments correspondent à l'imposition de conditions aux limites sur la vitesse de rotation et donc sur la position angulaire. Les couples résistants et de dissipation sont schématisés par des flèches rouges et vertes respectivement.

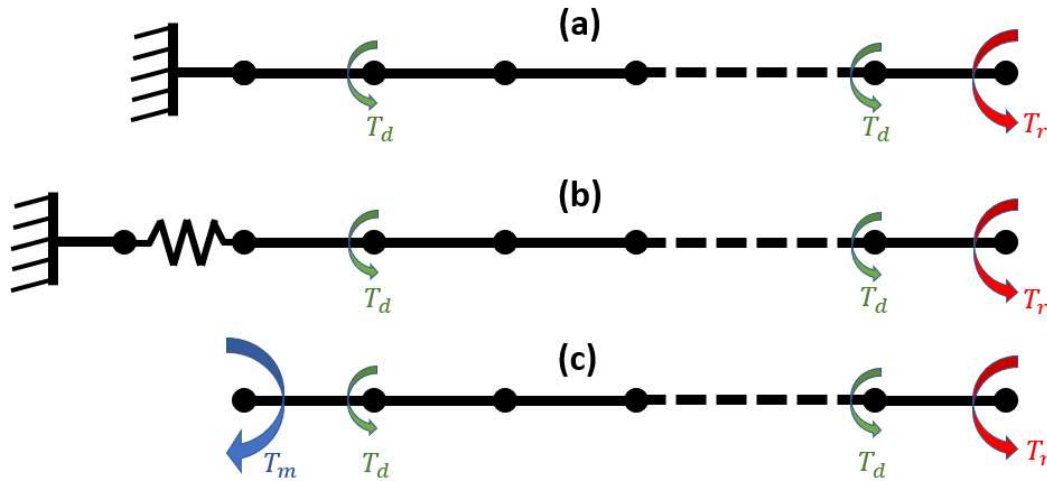


Figure 21 : Schéma des approches de régulation de vitesse. (a) Imposition brutale, (b) Imposition à travers un accouplement souple et (c) méthode retenue de régulation par le couple moteur

En choisissant correctement le couple moteur en fonction des dissipations présentes dans les roulements et à l'engrènement, la vitesse de rotation converge naturellement vers la valeur souhaitée. En effet, une part significative de la dissipation augmente avec la vitesse de rotation et permet de la stabiliser. Un exemple basique de calcul du couple moteur à imposer est fourni ci-dessous. Le système considéré est volontairement simpliste et correspond à un arbre rigide en rotation. Sur celui-ci sont imposés un couple moteur T_m et un couple résistant T_r constant et deux roulements introduisent des couples de dissipation T_d proportionnels à la vitesse de rotation. L'équilibre en moment, caractéristique du régime établi, fournit l'expression du couple moteur à imposer afin de converger vers la vitesse de rotation ω_{cible} désirée.

$$T_m = T_r + 2T_d \quad \text{avec} \quad T_d = \alpha\omega_{cible} \quad (15)$$

Dans un système plus complexe, une expression analytique est difficile voire impossible à obtenir en raison des phénomènes de frottement et d'amortissement visqueux dans les engrènements. Le principe de régulation de vitesse reste néanmoins identique bien que le couple moteur à imposer afin de converger vers une vitesse souhaitée soit déterminé de manière empirique et parfois itérative. Bien que ce travail n'ait pas été réalisé, une boucle d'asservissement pourrait être mise en place afin de faire converger la composante macroscopique de la vitesse de rotation vers une valeur souhaitée. Dans tous les cas, il est impossible de régler la vitesse de rotation totale sur une valeur donnée sans perdre tout l'intérêt de l'étude.

Introduction des éléments de liaison

Les roulements et les engrenages sont introduits sous forme d'efforts de liaison calculés en fonction des déplacements, vitesses et accélérations des nœuds sur lesquels ils s'appliquent, comme le schématise la Figure 22. Ces nœuds correspondent aux centres géométriques des bagues pour les roulements et des roues pour les engrenages. Cette approche a été préférée à une modélisation sous forme de matrices de masses et de raideur équivalentes en raison de sa simplicité. Elle permet la prise en compte de tous les phénomènes mécaniques internes sans se soucier de linéarisation autour d'un point de fonctionnement donné. De plus, elle permet une prise en compte simple des phénomènes non linéaires tels que les jeux et les frottements secs. Elle reste également robuste en cas de larges variations de vitesse de rotation et d'efforts transmis.

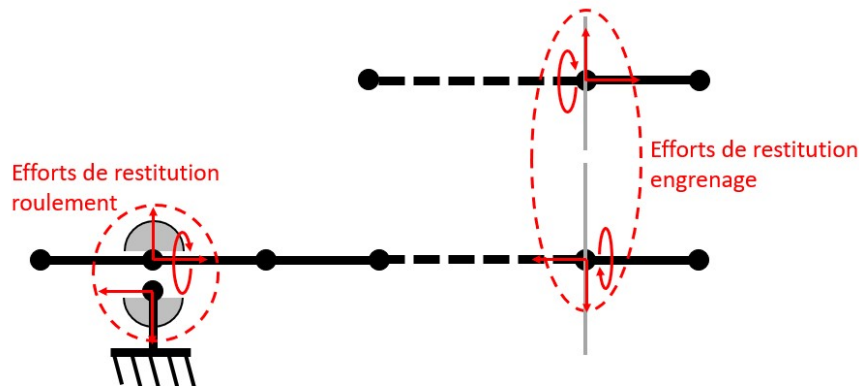


Figure 22 : Introduction des éléments de liaison dans le modèle d'arbre à paramètres concentrés

Amortissement

Plusieurs sources d'amortissement sont introduites. D'une part, un amortissement structural est imposé par une méthode modale classique. Celle-ci repose sur l'hypothèse que la matrice d'amortissement C_{mod} associée est diagonale dans la base modale et chaque mode propre se voit attribuer un amortissement proportionnel à la masse modale et à sa pulsation propre. Le calcul de ces derniers est toutefois rendu difficile par l'approche adoptée dans la modélisation des éléments de liaison comme cela sera montré dans la section suivante. Le coefficient d'amortissement modal est choisi identique pour tous les modes. D'autre part, un amortissement visqueux du mode de corps rigide est introduit dans les roulements. Celui-ci est le résultat du brassage du lubrifiant par la cage et les éléments roulants. Puisque ce type de dissipation n'entraîne pas de variation à haute fréquence de vitesse de rotation instantanée au premier ordre et n'affecte que la valeur moyenne de celle-ci, un modèle très simple a été adopté. Le couple résistant engendré est ainsi supposé proportionnel à la vitesse de rotation et le coefficient d'amortissement visqueux associé est choisi afin de refléter au mieux le rendement d'un réducteur à engrenage réel. Enfin, un amortissement visqueux supplémentaire est introduit au contact entre dentures en parallèle de la raideur d'engrènement. Celui-ci a pour effet principal d'atténuer les variations d'écrasement au contact au cours du fonctionnement.

1.3.3 – Construction du système différentiel

Comme mentionné plus tôt, tous les degrés de libertés de chaque nœud du système sont conservés. Par conséquent, les déplacements généralisés d'un nœud i correspondent à un vecteur à six composantes $X_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})^T$ dans lequel la dernière composante correspond à la rotation principale complète. Deux nœuds voisins sont reliés entre eux par un élément de poutre de Timoshenko dont les matrices de masse et de raideur sont carrées de taille 12 et fournies en annexe E. On appelle alors X le vecteur contenant tous les degrés de liberté du système.

$$X = (X_1^T \dots X_i^T \dots X_n^T)^T \quad (16)$$

Un assemblage et une réorganisation de ces matrices permet d'obtenir un système différentiel associé aux arbres en rotation de la forme suivante. Il convient de noter qu'ici, les matrices de masse et de raideur sont creuses. En effet, elle ne comporte des blocs non nuls que sur la diagonale et aux croisements de lignes et de colonnes associées à des nœuds adjacents. Lorsque que les nœuds ont des indices bien choisis, ces matrices sont tri-diagonales par blocs.

$$M_a \ddot{X} + C_{mod} \dot{X} + K_a X = F_{ext}(t) \quad (17)$$

Ici, la matrice C_{mod} permet la prise en compte de l'amortissement modal et ses composantes se déterminent comme indiqué ci-dessous en fonction de la matrice de masses modales M_{bm} , des pulsations propres ω_i et du coefficient d'amortissement modal α_{mod} .

$$C_{mod} = \Phi^{-1} C_{bm} \Phi \quad \text{avec} \quad \forall i, C_{bm}(i, i) = 2\alpha_{mod} M_{bm}(i, i) \omega_i \quad \text{et} \quad M_{bm} = \Phi M \Phi^{-1} \quad (18)$$

Où Φ est la matrice des vecteur propres.

Comme expliqué précédemment, les roulements et engrenages sont introduits comme des efforts de restitution sur certains nœuds du système. Le calcul de ceux-ci est détaillé dans les chapitres suivants. Ces efforts se distinguent des efforts extérieurs par leur dépendance vis-à-vis des déplacements, vitesses et accélérations des différents nœuds et non du temps. Ils sont ajoutés au second membre du système différentiel introduit ci-dessus.

$$M_a \ddot{X} + C_{mod} \dot{X} + K_a X = F_{ext}(t) + F_{roul}(X, \dot{X}, \ddot{X}) + F_{eng}(X, \dot{X}, \ddot{X}) \quad (19)$$

En raison de ce choix, l'évaluation des modes propres nécessaires au calcul de la matrice d'amortissement est délicate. En effet, les modes propres du système non amorti sont les solutions du problème aux valeurs propres, c'est-à-dire les couples (ω_i, φ_i) vérifiant l'équation suivante.

$$(K_a - \omega_i^2 M_a) \varphi_i = 0 \quad (20)$$

Cependant, les matrices M_a et K_a ne tiennent pas compte des roulements et engrenages puisque ceux-ci sont introduits au second membre. Par conséquent, les modes propres calculés sur la base de ces matrices seules sont ceux de poutres libres-libres non couplées entre elles. Afin de pallier ce problème, deux options se présentent. Une première, qui a été retenue pour les simulations présentées dans ce mémoire, consiste à ajouter temporairement des matrices additionnelles contenant des valeurs approximatives des masses et raideurs des éléments de liaison lors du calcul de l'amortissement. Une seconde méthode est d'ajouter manuellement des efforts d'amortissements dans les paliers et à l'engrènement.

I.4 – Intégration numérique

I.4.1 – Vers un système du premier ordre

L'intégration numérique du système différentiel est réalisée sous Matlab® à l'aide des fonctions d'intégration d'équations différentielles ordinaires disponibles et reposant sur la méthode de Runge-Kutta. Celles-ci ne permettent que l'intégration de systèmes d'ordre un et une réécriture du problème s'impose donc. Dans ce but, on introduit le vecteur d'état Q ainsi que les matrices A et B comme suit.

$$Q = \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ -M_a^{-1} K_a & -M_a^{-1} C_{mod} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_a^{-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

On montre que le système (19) peut se réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre un.

$$\dot{Q} = A Q + B (F_{ext}(t) + F_{roul}(Q, \dot{Q}) + F_{eng}(Q, \dot{Q})) \quad (22)$$

L'intégration numérique requiert de pouvoir formuler la dérivée du vecteur d'état comme une fonction de celui-ci et du temps : $\dot{Q} = \mathcal{F}(Q, t)$. Par conséquent, en raison de la dépendance en accélération des efforts transmis dans les roulements et engrenages, une réorganisation est requise. Le cas des engrenages est facile à traiter. En effet, les roues dentées sont assimilées à des disques et les efforts d'inerties associés peuvent se mettre sous la forme du produit d'une matrice de masse détaillée dans le second chapitre et du vecteur $\ddot{X}$. Une séparation des dépendances en déplacement et vitesse d'une part et en accélération d'autre part est possible.

$$F_{eng}(X, \dot{X}, \ddot{X}) = F_{eng}^s(X, \dot{X}) + F_{eng}^d(\ddot{X}) \quad \text{avec} \quad F_{eng}^d(\ddot{X}) = -M_{eng}\ddot{X} \quad (23)$$

Par conséquent, il suffit de déplacer le terme d'inertie au premier membre dans le système (19) et de modifier l'expression des matrices A et B comme suit.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -(M_a + M_{eng})^{-1}K_a & -(M_a + M_{eng})^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ (M_a + M_{eng})^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Le cas des roulements est plus délicat. En effet, il n'existe pas de formulation matricielle similaire. Cependant, comme cela est montré dans le second chapitre, les efforts de liaison dans les roulements peuvent s'exprimer comme de la somme d'une composante indépendante de la dérivée du vecteur d'état et d'une composante proportionnelle à l'accélération angulaire de la bague intérieure.

$$F_{roul}(Q, \dot{Q}) = \sum_{k=1}^{n_{roul}} F_{roul,k}^n(Q) + \gamma_k F_{roul,k}^d \quad (25)$$

Par conséquent, comme le propose Gomez [2], il est possible d'introduire un vecteur T_k qui isole l'accélération angulaire du roulement k dans le vecteur d'état. Il s'agit donc d'un vecteur dont une seule composante est unitaire, les autres étant nulles. Ainsi, T_k vérifie :

$$T_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad T_k \dot{Q} = \gamma_k \quad (26)$$

Ceci permet d'établir une forme matricielle alternative des efforts dans les roulements. Le système différentiel à intégrer peut donc se mettre sous la forme souhaitée $\dot{Q} = \mathcal{F}(Q, t)$.

$$F_{roul}(Q, \dot{Q}) = \sum_{k=1}^{n_{roul}} F_{roul,k}^n(Q) + F_{roul,k}^d T_k \dot{Q} \quad (27)$$

$$\text{Puis} \quad \dot{Q} = S^{-1} \left(A'Q + B' \left(F_{ext}(t) + F_{roul}(Q) + F_{eng}(Q) \right) \right) \quad (28)$$

$$\text{Avec} \quad S = I_d - B' \sum_{k=1}^{n_{roul}} F_{roul,k}^d T_k \quad (29)$$

1.4.2 – Intégration angulaire

Le système obtenu peut être intégré en l'état, c'est-à-dire en utilisant le temps comme variable d'intégration. Cette approche est largement utilisée et s'avère très efficace dans la simulation de système soumis à une excitation périodique en temps. Cependant, il est possible de réaliser une intégration dans le domaine angulaire qui présente plusieurs avantages. D'une part, l'utilisation de la position angulaire comme variable d'intégration permet d'imposer des pas d'intégration en angle ou de contrôler leur valeur maximum. Ainsi, quelle que soit la vitesse de rotation, il est possible de limiter ceux-ci afin de s'assurer de la prise en compte de phénomènes ponctuels tels que les passages des éléments roulants sur un écaillage par exemple. Cela permet également de s'assurer d'avoir

suffisamment de points d'intégration sur un tour pour permettre des études pertinentes dans le domaine spectral. D'autre part, dans les simulations effectuées au cours de cette thèse, les excitations envisagées sont pour la plupart à périodicité cyclique. Il a été constaté que dans ce cas, une intégration dans le domaine angulaire mène à des temps de calcul plus courts.

L'intégration dans le domaine angulaire n'est possible que s'il existe une relation bijective entre le temps et la position angulaire d'un nœud, dit maître. Pour cela, il suffit que l'évolution de cette dernière soit strictement monotone et donc que la vitesse de rotation ne s'annule pas. Il existe alors une fonction Ψ inversible, dite relation angle-temps, qui permet de passer d'un référentiel à l'autre.

$$\text{si } \forall t, \omega_m(t) = \frac{d\theta_m}{dt}(t) \neq 0 \text{ alors } \exists \Psi \mid t = \Psi(\theta_m) \text{ et } \theta_m = \Psi^{-1}(t) \quad (30)$$

On montre alors [49] que le système à intégrer dans le domaine angulaire est très similaire à celui obtenu plus tôt et s'exprime comme suit. Il faut en effet intervenir les mêmes matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Le calcul des efforts extérieurs et de liaison est lui aussi identique. Le passage dans le domaine angulaire revient en pratique à multiplier l'expression de la dérivée du vecteur d'état par l'inverse de la vitesse de rotation instantanée. Ici, la marque tilde indique la dépendance angulaire des différentes variables.

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Q}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\tilde{\omega}(\theta)} \left[S^{-1} \left(A' \tilde{Q}(\theta) + B' \left(F_{ext}(t) + F_{roul,n}(\tilde{Q}(\theta)) + F_{eng}(\tilde{Q}(\theta)) \right) \right) \right] \\ \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\tilde{\omega}(\theta)} \end{cases} \quad (31)$$

Avec

$$\tilde{Q}(\theta) = Q(\Psi(\theta)) \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}(\theta) = \omega(\Psi(\theta)) \quad (32)$$

Cette transformation constitue un point de détail. En effet, elle n'a qu'un intérêt numérique. Elle ne change en rien la physique du système modélisé ni son comportement et permet simplement une meilleure convergence et un meilleur contrôle lors de l'intégration. Dans le cas d'une intégration parfaite, c'est-à-dire à pas infiniment courts, elle n'aurait aucun effet. Elle garde néanmoins une certaine importance et permet de définir un pas d'intégration maximal à ne pas dépasser, ce qui est profitable pour plusieurs raisons. D'une part, cela assure que le pas d'échantillonnage obtenu après simulation soit suffisamment faible pour permettre l'étude dans le domaine spectral de tous les phénomènes mécaniques d'intérêt. D'autre part, cela permet de vérifier que les événements ponctuels soit correctement pris en compte. Pour cela, le pas d'intégration maximal doit être plus faible que la plus petite durée de tels phénomènes. Cette deuxième condition est en général plus restrictive que la première. De plus, l'intégration par la méthode de Runge-Kutta peut engendrer des bruits numériques lors de la résolution. En effet, lorsque les pas d'intégration sont choisis librement par l'algorithme, ils ne sont pas équidistants en général et l'intégration peut introduire des périodicités et des oscillations parasites. Afin d'éliminer ce phénomène il convient de choisir des précisions de résolution suffisamment faibles qui limitent le pas d'intégration automatique. Une autre solution est d'imposer arbitrairement un pas suffisamment faible. En pratique, les pas d'intégration automatiques dépendent des plus hautes fréquences propres du système modélisé. Lorsque celui-ci est complexe et fait intervenir de nombreux phénomènes dynamiques, l'expérience montre que les pas d'intégration déterminés automatiquement sont assez faibles pour assurer à la fois un échantillonnage suffisamment riche, la bonne prise en compte des phénomènes de courte durée et l'élimination des bruits d'intégrations. Un pas d'intégration maximal est toutefois imposé par sécurité mais n'est jamais atteint automatiquement lors de la simulation de systèmes complexes.

I.4.3 – Implémentation

Un outil numérique de simulation d'une transmission a été mis en place au cours de la thèse. Il permet la modélisation de tout type de transmission ainsi que la sauvegarde et le post-traitement des résultats. Une schéma bloc représentant l'organisation de ce code est fourni sur la Figure 23. Dans un premier temps, l'utilisateur est amené à fournir tous les paramètres géométriques et matériaux permettant de décrire les arbres, les roulements et les engrenages. Il est ensuite exigé de préciser les conditions aux limites et les conditions initiales permettant la stabilité du calcul. Les matrices de masses et de raideurs associées aux engrenages et aux arbres sont alors calculées et assemblées de sorte à obtenir les matrices A' et B' présentées plus tôt. Celles-ci sont constantes et ne dépendent ni du temps ni des déplacements du système. Elles peuvent donc être déterminées en avance de la résolution afin de gagner en temps de calcul. En revanche, la matrice S ainsi que les efforts extérieurs et de restitution dans les éléments de liaison évoluent au cours de la simulation. Ils doivent donc être recalculés à chaque pas d'intégration. Pour cela, un appel est fait aux fonctions correspondantes pour chaque engrenage et chaque roulement. Une fois l'intégration terminée, les résultats sont sauvegardés et peuvent être post-traités.

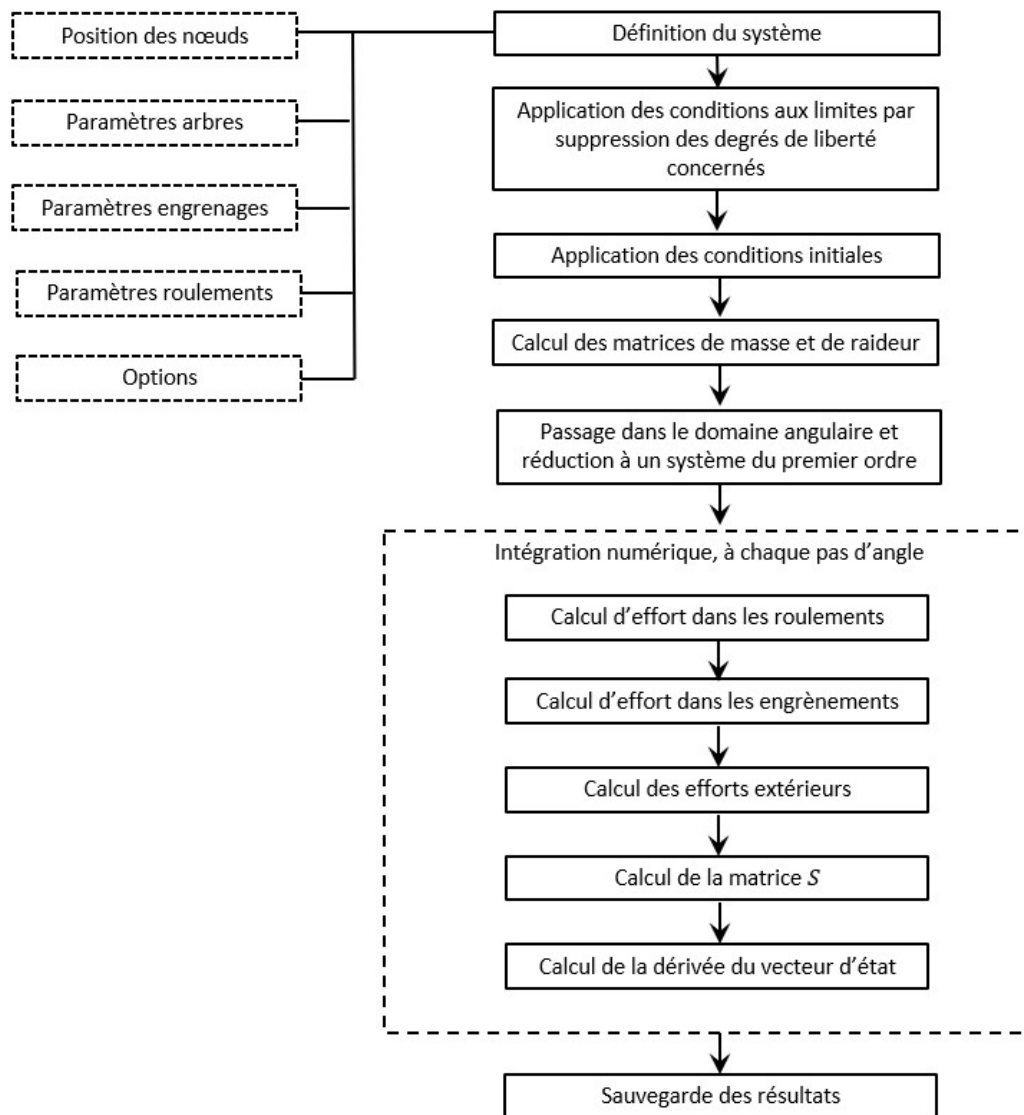


Figure 23 : Fonctionnement global du code

Le nombre de pas d'intégration et la complexité des fonctions de calcul d'effort peuvent mener à des temps de calculs relativement longs. Notamment, la présence de phénomènes non continus, tels que les pertes de contacts lors du passage d'un élément roulant sur un écaillage, peuvent induire une convergence plus lente. Par conséquent une attention particulière a dû être apportée à la mutualisation des calculs lorsqu'elle était possible. Le temps de calcul est proportionnel à la longueur de l'intervalle angulaire de simulation souhaité. Pour cette raison, il peut être difficile en fonction de la complexité du système modélisé d'obtenir des signaux vitesse très longs, ce qui peut limiter leur exploitation. Toutefois, les signaux simulés n'étant pas affectés par le bruit ambiant d'une transmission réelle, seule la précision fréquentielle souhaitée lors de l'utilisation de transformées de Fourier contraint la taille de l'échantillon à utiliser.

Bien que les études présentées dans ce document soient majoritairement centrées sur la vitesse de rotation instantanée, le post-traitement de nombreuses autres grandeurs est possible. Des résultats intermédiaires de calcul tels que les efforts de contact sur les différents éléments roulants d'un roulement ou encore la raideur équivalente instantanée d'engrènement permettent de mieux appréhender les phénomènes dynamiques en présence et de produire une exploitation plus pertinente de la vitesse de rotation. De plus, le calcul des efforts transmis dans les éléments de liaison dans toutes les directions de l'espace peut aussi permettre de remonter aux accélérations des différents nœuds et donc aux signaux vibratoires classiques. L'approche phénoménologique adoptée dans les modèles mis en place ici, coûteuse en temps de calcul, permet donc de faire le lien entre les causes des perturbations et vitesse et leurs caractéristiques constatées. Cette compréhension est d'une grande utilité dans le diagnostic de la transmission.

Conclusion partielle

Ce premier chapitre a posé les bases de la méthode de surveillance étudiée dans cette thèse. Celle-ci repose sur l'examen de la vitesse de rotation instantanée, signal à ce jour très peu utilisé dans le domaine de la maintenance préventive. Les méthodes de mesure de ce signal sont variées. Cependant, l'approche « Elapse Time » semble s'imposer par sa simplicité d'implémentation et l'échantillonnage angulaire qu'elle implique. Plusieurs types d'erreurs sont introduits au cours de la mesure et sont souvent intrinsèques à la méthode utilisée. Cela signifie que même en présence d'un système et d'une instrumentation parfaits, exempts de toute erreur de fabrication ou de montage, la vitesse de rotation mesurée est polluée. Cependant, l'impact de la mesure sur le signal vitesse est en général prévisible et quantifiable, de sorte que les instruments peuvent être dimensionnés *a priori* afin d'assurer l'acquisition d'un signal exploitable. La modélisation de la mesure et l'étude des différentes erreurs engendrées permet également de mieux comprendre les spectres de vitesses obtenus lors d'expérimentations et d'être capable de différencier les composantes spectrales représentatives de phénomènes mécaniques réels des artefacts de mesure.

La simulation du signal vitesse en amont de toute mesure expérimentale présente de nombreux avantages. Elle permet d'estimer les niveaux d'influences des différents composants sur la vitesse de rotation et une meilleure compréhension des phénomènes physiques en présence. La modélisation des arbres en rotation est basée sur la théorie des poutres de Timoshenko et les composants technologiques de liaison que sont les roulements et les engrenages sont introduits sous forme de tenseurs de restitution, chacun reliant deux nœuds du système. Cette approche s'avère plus simple pour des modèles complexes introduisant des effets non linéaires tels que les jeux et le frottement sec. Elle permet également une conception modulaire facilitant l'ajout de nombreux autres éléments et assurant un couplage fort entre eux. Par exemple, la possibilité d'introduire des balourds

a été implémentée, bien qu'ils ne soient pas exploités par la suite en raison de la grande complexité spectrale qu'ils introduisent. Une approche angulaire de résolution du système différentiel obtenu est adoptée afin de maîtriser au mieux les paramètres d'intégration et d'assurer la bonne prise en compte de phénomènes ponctuels ou non continus tels qu'en introduisent les endommagements.

Les chapitres suivants entreront dans le détail des fonctions de calcul des efforts de restitution dans les roulements et les engrenages. Une approche phénoménologique sera adoptée afin de comprendre au mieux les sources de fluctuations de la vitesse de rotation et les principes physiques sous-jacents. Une attention particulière sera apportée à l'estimation des variations du couple transmis dans ces éléments ainsi qu'à l'introduction d'endommagements réalistes.

Chapitre II – Modélisation des roulements

Nomenclature.....	56
Introduction	58
II.1 – Etat de l’art	58
II.1.1 – Modèles quasi statiques	59
II.1.2 – Modèles dynamiques.....	60
II.1.3 – Modèles de roulements endommagés	61
II.1.4 – Positionnement de la thèse	62
II.2 – Fonctionnement et Hypothèses	63
II.2.1 – Intégration dans le modèle de transmission	63
II.2.2 – Paramètres du modèle et définition du roulement	64
II.2.3 – Hypothèses adoptées.....	66
II.2.4 – Fonctionnement global du modèle.....	68
II.3 – Position d’équilibre et efforts de contact sur une bille	69
II.3.1 – Méthode de Newton.....	69
II.3.2 – Ecrasements et angles de contact	70
II.3.3 – Efforts dans le plan radial.....	71
II.3.4 – Efforts tangentiels	74
II.3.5 – Torseurs globaux	76
II.4 – Extension au cas des roulements à rouleaux cylindriques.....	77
II.4.1 – Particularités des rouleaux	77
II.4.2 – Discrétisation et écrasements aux contacts	78
II.4.3 – Efforts dans le plan radial.....	79
II.4.4 – Efforts tangentiels	80
II.5 – Endommagements.....	82
II.6 – Validation numérique en quasi-statique	84
II.6.1 – Cas des roulements à billes.....	85
II.6.2 – Cas des roulements à rouleaux cylindriques.....	87
II.6.3 – Décision.....	91
II.7 – Etude de comportement	92
II.6.1 – Présentation du système d’étude	92
II.6.2 - Influence de la vitesse de rotation.....	95
II.6.3 - Influence de la charge axiale.....	97
II.6.4 - Influence d’un endommagement	97
Conclusion partielle	99

Nomenclature

Notations de ce chapitre	
M_a	Matrice de masse des arbres de la transmission
M_{eng}	Matrice de masse relative aux engrenages
K_a	Matrice de raideur des arbres de la transmission
C	Matrice d'amortissement de la transmission
X	Vecteur d'état du système, contient tous les degrés de liberté
F_{ext}	Vecteur des efforts extérieurs
F_{eng}	Vecteur des efforts de restitution dans les engrenages
F_{roul}	Vecteur des efforts de restitution dans les roulements
ϕ_c	Position angulaire de la cage
ω_c	Vitesse angulaire de la cage
ω_{BI}	Vitesse angulaire de la bague intérieure
γ_{BI}	Accélération angulaire de la bague intérieure
γ_c	Accélération angulaire de cage
γ_b	Accélération angulaire des billes autour de leur axe propre
ϕ_j	Position angulaire de l'élément roulant j
$x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Degrés de libertés d'un nœud (centre d'une bague)
R_i, D_i	Rayon et diamètre de la BI en fond de gorge
R_e, D_e	Rayon et diamètre de la BE en fond de gorge
R, D	Rayon et diamètre des éléments roulants
R_p, D_p	Rayon et diamètre primitif
J_r	Jeu radial total
Z	Nombre d'éléments roulants
R_{ci}	Rayon de courbure de la bande de roulement BI
R_{ce}	Rayon de courbure de la bande de roulement BE
J_a	Jeu axial
R_s	Rayon de congé
r_s	Position radiale du centre de congé
z_s	Position axiale du centre de congé
μ	Angle de dépouille des épaulements
R_d	Rayon de dépouille du rouleau
L	Largeur totale des rouleaux
L_u	Largeur utile des rouleaux
L_c	Largeur de la partie cylindrique des rouleaux
δ_{ec}	Profondeur de l'écaillage
$\Delta\phi_{ec}$	Longueur angulaire autour de l'axe de rotation principal
ϕ_{ec}	Position angulaire autour de l'axe de rotation principal
$\Delta\beta_{ec}$	Largeur angulaire dans la gorge (billes)
β_{ec}	Position angulaire dans la gorge (billes)
L_{ec}	Largeur sur le chemin de roulement (rouleaux)
z_{ec}	Position axiale sur le chemin de roulement (rouleaux)
E_e, E_i, E_b, E_r	Modules d'Young des bagues, des billes et des rouleaux
$\nu_e, \nu_i, \nu_b, \nu_r$	Coefficients de Poisson des bagues des billes et des rouleaux
ρ_b, ρ_r	Masse volumique des billes et des rouleaux
μ_r	Coefficient de résistance au roulement sur les bagues
μ_f	Coefficient de frottement sec sur les épaulements
ϕ_j	Angle de repérage de l'élément roulant j
(z_{bj}, r_{bj})	Position du centre l'élément roulant dans le plan radial
(z_{ij}, r_{ij})	Position du centre de courbure intérieure dans le plan radial

(z_{ej}, r_{ej})	Position du centre de courbure extérieure dans le plan radial
G_j	Somme des efforts sur l'élément roulant j
J_G	Matrice jacobienne de G_j
$\overrightarrow{N_{ij}}$	Effort normal de contact sur la bague intérieure
$\overrightarrow{N_{ej}}$	Effort normal de contact sur la bague extérieure
$\overrightarrow{T_{ij}}$	Effort tangentiel de contact sur la bague intérieure
$\overrightarrow{T_{ej}}$	Effort tangentiel de contact sur la bague extérieure
β_{ij}	Angle de contact sur la bague intérieure
β_{ej}	Angle de contact sur la bague extérieure
β_j	Angle de rotation de la bille j
β_m	Angle de rotation moyen
$\overrightarrow{C_{fj}}$	Effort centrifuge sur l'élément roulant j
σ	Orientation relative des solides en contact
κ	Facteur d'ellipticité
a	Demi grand axe d'ellipse de contact
b	Demi petit axe d'ellipse de contact
$\mathcal{F}$	Intégrale elliptique de premier type
ε	Intégrale elliptique de second type
E^*	Module d'Young réduit
$\Sigma\rho$	Somme des courbures
δ_{ij}	Ecrasement au contact bague intérieure pour la bille j
δ_{ej}	Ecrasement au contact bague extérieure pour la bille j
b_r	Décalage de l'effort normal de contact généré par la résistance au roulement
P_{ij}	Point de contact bague intérieure - élément roulant j
P_{ej}	Point de contact bague extérieure - élément roulant j
$\overrightarrow{F_{igj}}, \overrightarrow{F_{idj}}, \overrightarrow{F_{egj}}, \overrightarrow{F_{edj}}$	Efforts de contact sur les épaulements
θ_{ij}	Orientation de la bague intérieure dans le plan radial du rouleau j
θ_{ej}	Orientation de la bague extérieure dans le plan radial du rouleau j
θ_{rj}	Orientation du rouleau dans le plan radial du rouleau j
Acronymes	
BE	Bague extérieure
BI	Bague intérieure
$BPMI$	Ball Pass Frequency on Inner ring
$BPMO$	Ball Pass Frequency on Outer ring
BSF	Ball Spin Frequency
FTF	Fundamental Train Frequency

Introduction

L'étude numérique du comportement d'une transmission et la prédiction des variations de vitesses instantanées nécessitent une modélisation fine des différents éléments susceptibles de générer des couples de perturbation. Parmi ceux-ci, les roulements ont une place importante. En effet, comme cela a été introduit dans le chapitre précédent, ils génèrent un couple résistant à la rotation en raison de plusieurs phénomènes de dissipation lors de leur fonctionnement. De par leur géométrie à périodicité cyclique, ce couple varie légèrement au cours de la rotation et ce, en présence ou non d'endommagement. Ce chapitre s'attache à décrire des modèles de roulements à billes et à rouleaux cylindriques permettant d'établir un lien entre les efforts axiaux et radiaux qu'ils supportent et le couple s'opposant à la rotation qui en résulte. L'objectif est d'expliquer et de prévoir les variations de vitesse instantanée de rotation générées par les roulements. Les modèles mis en place se doivent de rester valides à haute vitesse afin d'être exploitables dans la modélisation de transmissions aéronautiques. De plus, ils prévoient l'introduction d'écaillages pour permettre de distinguer les caractéristiques des couples perturbateurs générés par des roulements sains et endommagés et donc pour être exploitables dans le cadre de la maintenance préventive. Ils ne sont toutefois pas adaptés au dimensionnement ou à l'étude de l'usure des roulements et de nombreuses données associées ne sont donc pas accessibles.

Dans un premier temps, une rapide revue de la littérature sur la modélisation des roulements est proposée. Elle s'oriente principalement sur des modèles analytiques ou semi analytiques nécessitant des temps de calcul plus courts et plus facilement utilisables dans le cadre de simulations dynamiques. De plus, elle concerne essentiellement les roulements à billes dont le fonctionnement est plus complexe que celui des roulements à rouleaux. Les modèles développés sont ensuite présentés en détails. Ils constituent une amélioration des modèles existants développés par Gomez en y ajoutant la prise en compte des efforts axiaux et centrifuges sur les éléments roulants ainsi qu'une méthode de calcul de l'effort de contact sur écaillage plus précise. Bien que similaires sur de nombreux points, les roulements à billes et à rouleaux cylindriques se distinguent l'un de l'autre lors du calcul des efforts sur les éléments roulants. En effet, l'équilibre d'un rouleau est plus difficile à déterminer et doit tenir compte de l'orientation de celui-ci ainsi que des contacts sur les épaulements. Une attention particulière est apportée à la prise en compte d'écaillages sur l'une ou l'autre des bagues afin de permettre la simulation du comportement de roulements endommagés et de comparer les résultats obtenus au cas d'un roulement sain. Une validation du modèle proposé est réalisée sur la base d'un outil numérique certifié et plusieurs études sont menées sur le comportement des roulements à billes. En particulier, les influences de la charge axiale, de la vitesse de rotation moyenne et d'un écaillage sur le couple de perturbation généré par le roulement sont analysées.

II.1 – Etat de l'art

La littérature concernant la modélisation des roulements est très riche et le sujet est étudié depuis plusieurs dizaines d'années. L'objectif général est d'établir la loi de comportement reliant les déplacements relatifs des deux bagues d'un roulement aux torseurs d'efforts s'appliquant sur chacune d'elles. L'un des premiers travaux dans ce domaine est mené par Palmgren [50] qui propose des relations simples ne tenant pas compte de la rotation de la cage et limitées aux cas de chargements purement axiaux ou radiaux. Dans celles-ci, rappelées dans le Tableau 1, F_r et F_a sont les efforts axiaux et radiaux, z et D_w sont respectivement le nombre et le diamètre des éléments roulants et α est l'angle de contact. Ces expressions sont utiles dans des études préliminaires de rotors afin de déterminer la répartition des charges, les principaux modes propres d'un système ou la précharge sur les roulements.

Elles permettent également l'étude dynamique d'autres composants des ensembles tournants tels que les arbres ou les engrenages. Cependant, elles ne rendent pas compte du comportement interne du roulement ni des interactions de celui-ci avec les autres éléments d'une transmission. Ces calculs ne prennent pas en considération de la position des éléments roulants et de la répartition des charges sur ceux-ci.

Type de roulement	Chargement radial	Chargement axial
Charge sur élément roulant	$Q = \frac{5F_r}{z \cdot \cos(\alpha)}$	$Q = \frac{F_a}{z \cdot \sin(\alpha)}$
Rotule sur bille	$\delta_r = \frac{0.0032}{\cos(\alpha)} \left(\frac{Q^2}{D_w} \right)^{\frac{1}{3}}$	
Roulement à bille à contact oblique	$\delta_r = \frac{0.002}{\cos(\alpha)} \left(\frac{Q^2}{D_w} \right)^{\frac{1}{3}}$	$\delta_a = \frac{0.002}{\sin(\alpha)} \left(\frac{Q^2}{D_w} \right)^{\frac{1}{3}}$
Roulements à rouleaux	$\delta_r = \frac{0.0006}{\cos(\alpha)} \frac{Q^{0.9}}{l_a^{0.8}}$	$\delta_a = \frac{0.0006}{\sin(\alpha)} \frac{Q^{0.9}}{l_a^{0.8}}$

Tableau 1 : Loi effort-déplacement de Palmgren pour des roulements à billes et à rouleaux

II.1.1 – Modèles quasi statiques

Pour les modèles plus avancés, il n'existe pas de relation analytique liant les déplacements des bagues aux efforts globaux. Cependant, il existe des expressions analytiques locales pour les contacts entre billes et bagues, en général basées sur la théorie du contact de Hertz [51]. Il est également possible de proposer une modélisation du roulement par éléments finis mais cette approche est souvent écartée en raison des temps de calcul trop importants pour des analyses dynamiques. L'un des premiers travaux de modélisation locale et quasi-statique est mené par Jones [52], [53], qui fournit pour un modèle à 5 ddl les expressions analytiques décrivant l'équilibre quasi-statique de chaque bille, introduit sur la Figure 24, en tenant compte de l'effort centrifuge et du moment gyroscopique. Le système ainsi obtenu est résolu numériquement.

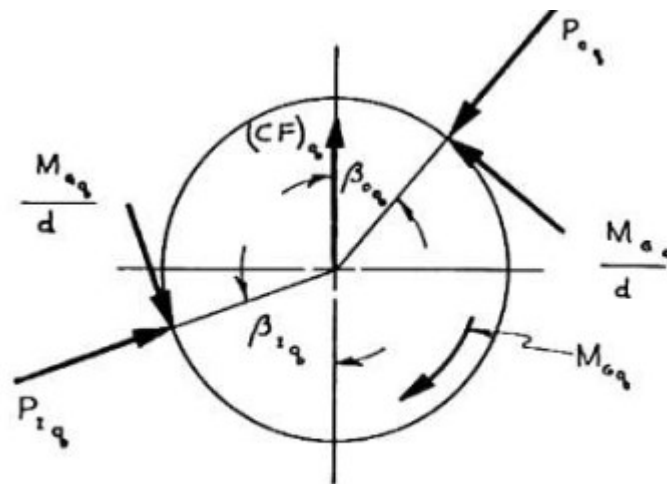


Fig. 7

Figure 24 : Efforts appliqués sur une bille [53]

Harris [54] propose une analyse complète des roulements à billes et à rouleaux et détaille le calcul des efforts de contact sur chaque bague en tenant compte des conditions de lubrification. De

plus, il présente une estimation précise des fréquences caractéristiques du roulement. Ces travaux sont repris par Gupta [55], [56], ajoutant une modélisation de la cage et des efforts de contact sur celle-ci ainsi que Hamrock & al. [57]–[59] travaillant sur les effets élasto-hydrodynamiques de la lubrification aux contact bille-bague et sur l’estimation des efforts de frottement et de la durée de vie. Parallèlement, Houpert & al. [60], [61] proposent une estimation des efforts normaux et tangentiel en présence de film d’huile dans les roulements.

II.1.2 – Modèles dynamiques

Des modèles dynamiques sont également élaborés dans le but d’étudier le comportement du roulement dans un ensemble tournant. L’un des premiers travaux complets sur le sujet a été mené par Fukata & al. [62] qui proposent un modèle à deux degrés de liberté et tiennent compte du jeu radial. L’influence du jeu dans les roulements sur la dynamique d’un rotor rigide est étudiée par Tiwari & al. [63], [64] montrant ainsi que la raideur équivalente d’un roulement diminue lorsque le jeu augmente tandis que la non linéarité du comportement du roulement augmente. Un exemple plus récent et plus complet peut être trouvé dans les travaux de Noel [15], [65] qui élabore un modèle à 5 ddl supposant les bagues indéformables en dehors des zones de contact. Celui-ci est adapté aux roulements à billes travaillant à haute vitesse dans les broches UGV et tient compte des efforts dynamiques s’appliquant sur les éléments roulants. Il introduit également plusieurs hypothèses sur le contrôle de la cage et sur la répartition du moment gyroscopique sur les contacts billes-bagues.

Plusieurs travaux ont été menés dans l’objectif de tenir compte des déformations des bagues en raison du chargement ainsi que des conditions de fonctionnement. Ainsi, Harris [54] calcule la modification du jeu radial dans le roulement généré par le fretage des bagues. De même, Jorgensen & al. [66] développent une méthode pour calculer la valeur du jeu en fonction de la température de fonctionnement. Enfin, plusieurs auteurs plus récents introduisent des modèles dynamiques à bagues déformables, plus adaptés aux cas de structures légères et plus précis pour le dimensionnement des roulements. Le travail de Wagner & al. [67] s’appuie sur une réduction de modèle classique de Craig-Bampton. La bague est modélisée en éléments finis 3D comme le montre la Figure 25. Le modèle proposé par Lacroix [68] met quant à lui en place une résolution semi analytique préalable supposant des bagues rigides dont les résultats sont ensuite couplés avec une résolution éléments finis afin de prendre en compte la souplesse des bagues.

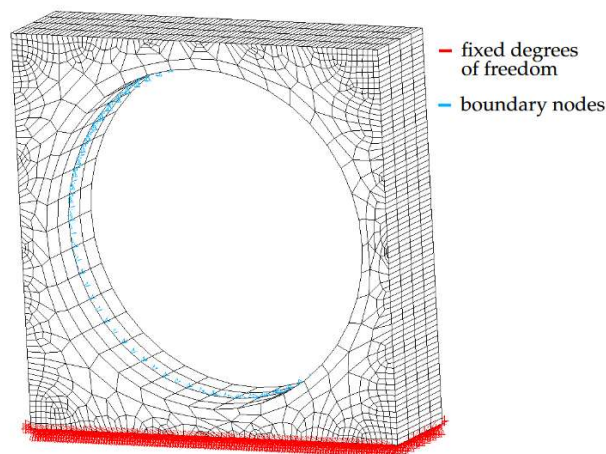


Figure 25 : Discretisation éléments finis d’une bague extérieure déformable [67]

II.1.3 – Modèles de roulements endommagés

L'introduction d'écaillages dans la modélisation s'est rapidement montrée utile en permettant d'anticiper le comportement dynamique de roulements endommagés et de détecter plus facilement les défauts en fonctionnement. Cela permet également de déterminer la gravité d'un endommagement et de statuer sur la nécessité d'une opération de maintenance. Deux types de modèles peuvent être proposés à cette fin. Le premier regroupe les modélisations mathématiques de la réponse des roulements mesurée expérimentalement. Ils permettent de générer des données utilisées dans la validation de méthodes de traitement de signal. Par exemple, Mc Fadden & al. [69] modélisent un endommagement ponctuel sur la bague intérieure d'un roulement par une série d'impulsions en effort. La forme de celles-ci dans le cas d'un endommagement de la bague intérieure est visible sur la Figure 26 et dépend de la charge d'une bille sur cette bague. Leurs fréquences sont calculées en se basant sur la géométrie du roulement et en supposant un effort purement radial. Leur travail tient compte de la vitesse de rotation, de la répartition des efforts dans le roulement, de l'amortissement des vibrations et de la fonction de transfert entre le roulement et l'accéléromètre. Une comparaison avec des résultats expérimentaux a montré une bonne prédiction des fréquences et des amplitudes relatives des différentes composantes du spectre associées au roulement. Un travail similaire a été mené par Brie [70]. Tandon & al. [71] proposent un modèle plus complet permettant également de traiter les cas de chargement axiaux ainsi que les écaillages sur la bague extérieure et les éléments roulants. De plus, ils soulignent l'importance de considérer des impulsions en effort de largeur (ou durée) non nulles. Enfin, Behzad & al. [72] associent un écaillage à une source de vibration stochastique dépendant de la sévérité du défaut en supposant que la zone écaillée présente une rugosité de surface plus importante.

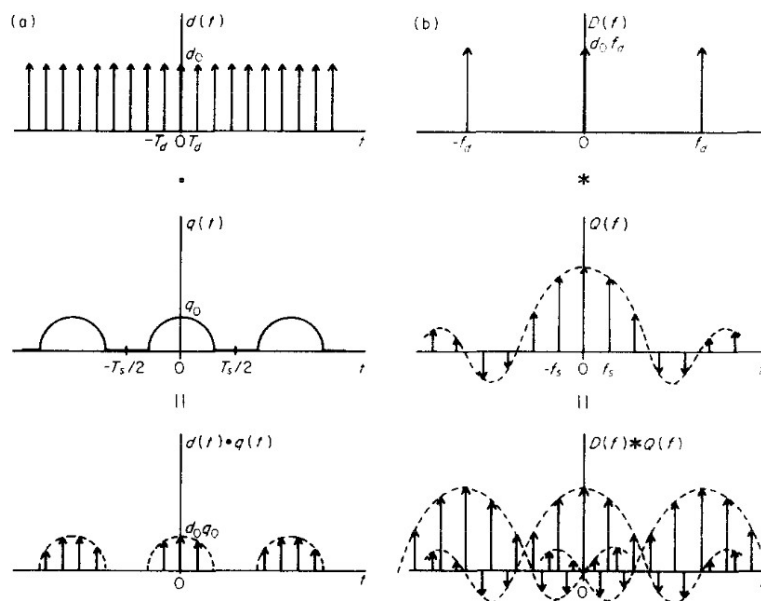


Figure 26 : Forme des impulsions produites par un endommagement de bague intérieure sous charge radiale. (a) évolutions temporelles ; (b) Spectres [69]

Le second type de modèle suit une approche phénoménologique dans laquelle les écaillages sont implémentés comme des réductions locales de l'écrasement au contact. La variation d'effort est alors obtenue via la théorie de Hertz et n'est pas imposée arbitrairement comme une excitation. Feng & al. [73] ont repris les travaux de Fukata & al. [62] et les ont poursuivis afin de prendre en compte des endommagements ponctuels sur les bagues intérieure et extérieure, l'existence de jeu en

fonctionnement ainsi que les effets de glissement de la cage et des éléments roulants. Un modèle plus complet est développé par Sopanen & al. [74] supposant les bagues indéformables et permettant la prise en compte des six degrés de liberté. Ce travail inclut également des défauts localisés (écaillages) tels que présentés sur la Figure 27 et des défauts distribués tels que le faux-rond des bagues. De plus, la présence d'un film d'huile est prise en compte dans le calcul des efforts de contact. Cependant, les auteurs ont supposé les efforts dynamiques négligeables sur les éléments roulants. Gomez & al. [19], [75] ont repris les travaux de Feng & al. et les ont adaptés à l'étude de la vitesse de rotation instantanée afin de prédire l'impact d'un endommagement sur les variations de celle-ci. Dans ce but, un couplage est introduit entre les efforts normaux aux contacts billes-bagues et le couple résistant généré dans le roulement par le biais de la résistance au roulement. De plus, la masse et l'inertie des billes sont prises en compte dans le calcul des efforts tangents au contact. Pour cela, le degré de liberté correspondant à la rotation principale des bagues est ajouté. Ces travaux se limitent toutefois à l'étude d'un roulement sous chargement purement radial et ne prennent pas en compte les efforts centrifuges et gyroscopiques sur les billes.

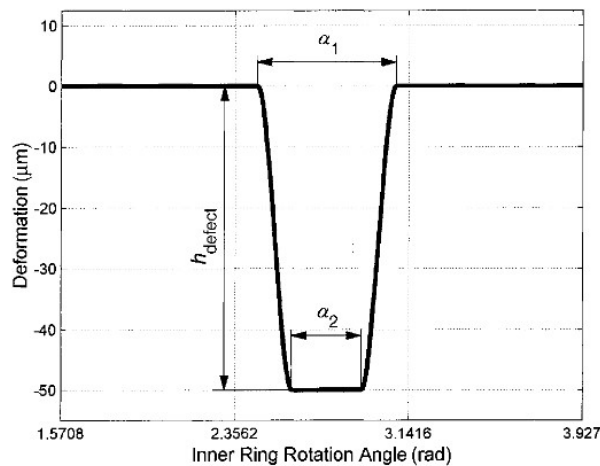


Figure 27 : Forme de retrait de matière sur la bague intérieure du roulement selon Sopanen & al. [74]

II.1.4 – Positionnement de la thèse

Les modèles de roulements élaborés au cours de cette thèse et détaillés dans la suite de ce chapitre ont pour objectif d'estimer les efforts s'appliquant sur les bagues en fonction des déplacements et vitesses de celles-ci. Une attention particulière est apportée aux variations de couple résistant afin de faire apparaître le couplage entre le fonctionnement du roulement et la vitesse instantanée de rotation. Il est également exigé de pouvoir simuler des conditions de fonctionnement variées et non stationnaires. De plus, ces modèles doivent garder une certaine simplicité afin de limiter au maximum les temps de calculs pour permettre la simulation dynamique d'une transmission complète sur de longs intervalles de temps, profitables à l'analyse précise des variations de vitesse instantanée. Par conséquent, les calculs par éléments finis ainsi que les modèles faisant intervenir une résolution complexe des contacts ou une déformation globale des bagues sont à proscrire. Il a été choisi de travailler à partir des travaux de Gomez en apportant toutefois plusieurs modifications et améliorations significatives. En effet, les roulements à billes présents dans le réducteur aéronautique étudié ont pour vocation de supporter les efforts axiaux générés par les engrenages hélicoïdaux. De plus, les arbres étant aussi allégés que possible, leur flexion ne peut être négligée. Par conséquent la prise en compte des six degrés de liberté de chaque bague est indispensable. Les vitesses de rotation en sortie de moteur sont élevées et peuvent atteindre 40 000 tr/min ce qui implique des efforts

centrifuges non négligeables qui seront donc ajoutés à la modélisation. Enfin, les variations de conditions de fonctionnement mènent à des variations d'angles de contact. Par conséquent, il n'est plus possible de supposer que le contact sur un écaillage est toujours total et une amélioration du calcul de l'effort de normal sur un endommagement est apportée afin de traiter les cas de contact mixtes apparaissant lors d'une intersection partielle entre l'ellipse de contact et la zone écaillée. La présence de film d'huile n'est pas prise en compte dans ce travail afin de garder un modèle simple. La déformation des bagues sous l'effet de la température et du fretage n'est pas considérée et le jeu réel en fonctionnement est supposé connu lors de la simulation et imposé comme un paramètre d'entrée.

II.2 – Fonctionnement et Hypothèses

Cette section est dédiée à la description de la structure du modèle de roulement mis en place. Elle introduit les hypothèses principales retenues ainsi que les paramètres permettant de décrire un roulement. De plus elle détaille le fonctionnement du modèle et les méthodes de calcul utilisées.

II.2.1 – Intégration dans le modèle de transmission

Comme introduit précédemment, il est possible d'écrire les équations de comportement des arbres sous forme matricielle comme suit :

$$M_a \ddot{X} + C \dot{X} + K_a X = F_{ext}(t) + F_{roul}(X, \dot{X}, \ddot{X}) + F_{eng}(X, \dot{X}, \ddot{X}) \quad (33)$$

L'objectif de la suite de ce chapitre est de détailler le calcul du terme d'effort associé aux roulements à billes et à rouleaux cylindriques inclus dans F_{roul} en fonction des déplacements, des vitesses angulaires et des accélérations angulaires de celles-ci. Notamment, les données d'entrée du modèle sont extraites du vecteur d'état du système et correspondent à deux vecteurs $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \omega, \gamma)_{BI, BE}$ et un scalaire ϕ_c contenant respectivement les degrés de libertés des deux bagues, les dérivées temporelles de leurs positions angulaires et la position orbitale de la cage.

Il convient de noter qu'en raison des hypothèses adoptées lors de la modélisation globale, le degré de liberté associé à la rotation de la BI n'est pas contraint. Par conséquent la position angulaire θ_{zBI} ainsi que ses dérivées temporelles ne sont pas imposées et correspondent à des sorties du modèle. De plus, dans le réducteur étudié, les bagues extérieures des roulements sont bloquées en rotation. Le ddl associé et ses dérivées sont donc nuls. Dans le cas des roulements à billes, les variations de fréquences caractéristiques du roulement au cours de la rotation forcent à l'ajout du degré du liberté ϕ_c dans le vecteur d'état afin d'obtenir son évolution par intégration de la vitesse de la cage. En effet, il est possible d'exprimer la vitesse angulaire de la cage en fonction de celle de la BI et de la FTF (Fundamental Train Frequency) : $\omega_c = FTF \cdot \omega_{BI}$. Le calcul de la FTF n'est pas trivial et est discuté dans la suite de cette section. Cependant, cette relation ne peut pas s'étendre à la position angulaire de la cage. Rigoureusement, celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$\phi_c(t) = \phi_c(0) + \int_0^t FTF(t') \cdot \omega_{BI}(t') \cdot dt' \quad (34)$$

En raison de la dépendance temporelle de la FTF, celle-ci ne peut être sortie de l'intégrale et il n'est pas possible d'obtenir une relation simple entre la position angulaire de la BI et la position angulaire de la cage. Cette dernière ne peut être obtenue que par intégration temporelle de sa vitesse, justifiant son ajout dans le vecteur d'état. Le cas des roulements à rouleaux cylindriques est toutefois plus simple. En effet, en l'absence d'angles de contact variable, la FTF reste constante et la position de la cage peut

s'obtenir directement à partir de celle de la BI : $\phi_c = FTF \cdot \theta_{BI}$. L'ajout d'un degré de liberté supplémentaire au vecteur d'état n'est donc pas nécessaire.

II.2.2 – Paramètres du modèle et définition du roulement

La modélisation mise en place ici des roulements à billes à gorges profondes peut s'étendre facilement aux roulements à 3 ou 4 points de contact sous réserve que les conditions de fonctionnement se limitent toujours à un unique contact sur la bague intérieure (BI) et un unique contact sur la bague extérieure (BE). C'est-à-dire que la charge axiale soit suffisante et que les décalages axiaux des centres de courbure soient faibles. Le Tableau 2 et la Figure 29 introduisent les différents paramètres définissant la géométrie des roulements modélisés. Un détail de la géométrie des rouleaux est donné Figure 28. Sur celle-ci, les proportions réelles ne sont pas respectées afin de simplifier la lecture. On peut toutefois noter que les diamètres de fond de gorge correspondent à des données redondantes puisqu'ils peuvent être déduits des autres paramètres. Comme les bagues sont supposées indéformables, le jeu radial fourni doit se rapprocher au maximum du jeu réel en fonctionnement qui est en réalité difficilement mesurable. Selon les conditions de fonctionnement, il peut être préférable de le calculer à l'aide d'un outil extérieur à partir du jeu à vide et en tenant compte de la dilatation centrifuge et thermique des bagues ainsi que de leur montage.

Paramètre	Description
Paramètres communs	
D_i	Diamètre de la BI en fond de gorge
D_e	Diamètre de la BE en fond de gorge
D	Diamètre des éléments roulants
D_p	Diamètre primitif
J_r	Jeu radial total
Z	Nombre d'éléments roulants
Cas des roulements à billes	
R_{ci}	Rayon de courbure de la bande de roulement BI
R_{ce}	Rayon de courbure de la bande de roulement BE
Cas des roulements à rouleaux cylindriques	
J_a	Jeu axial
R_s	Rayon de congé
r_s	Position radiale du centre de congé
z_s	Position axiale du centre de congé
μ	Angle de dépouille de l'épaule
R_d	Rayon de dépouille du rouleau
L	Longueur totale du rouleau
L_u	Longueur utile du rouleau
L_c	Longueur de la partie cylindrique du rouleau

Tableau 2 : Paramètres géométriques de définition des roulements à billes à gorges profondes

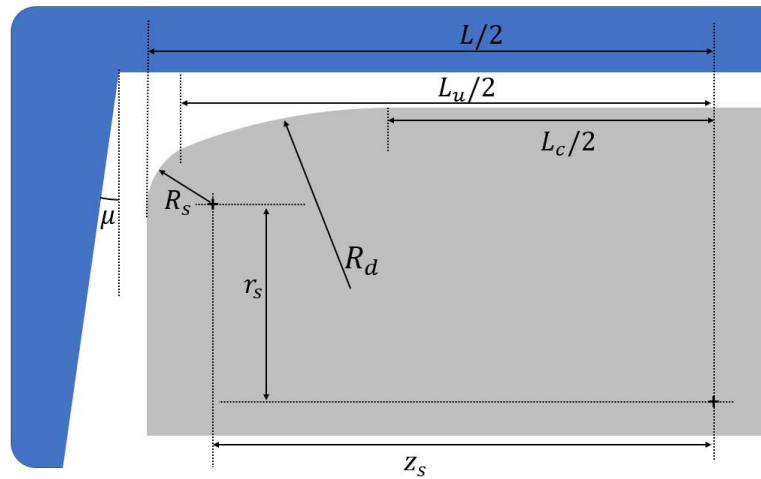


Figure 28 : Détails de la géométrie des rouleaux cylindriques

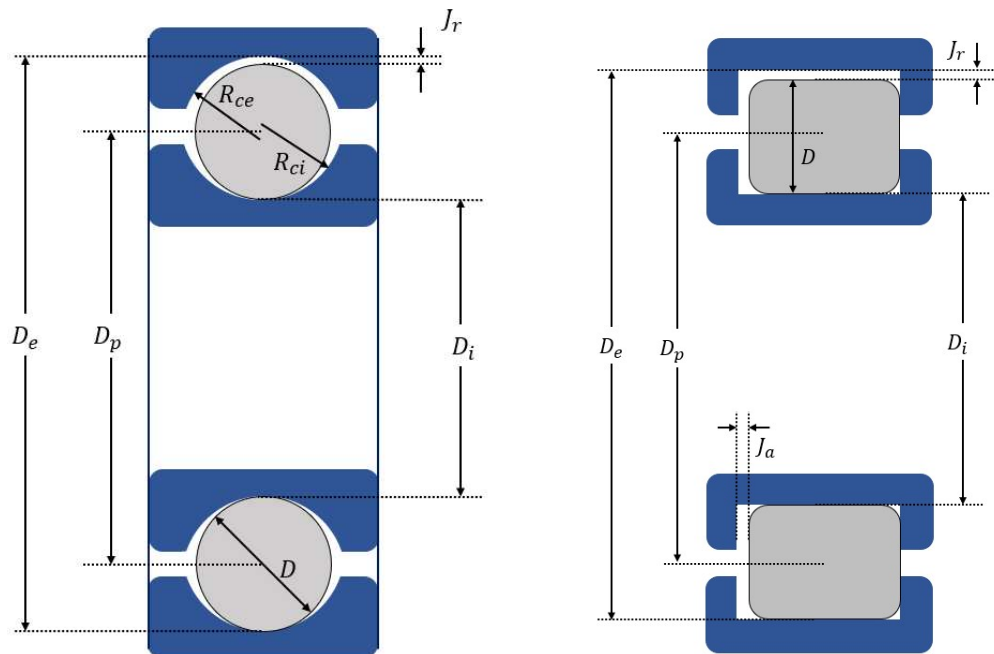


Figure 29 : Géométrie des roulements à billes et à rouleaux cylindrique

D'autres paramètres géométriques sont indispensables à l'implémentation d'un écaillage et sont introduits dans la Figure 30 et le Tableau 3. Les endommagements envisagés dans cette étude sont toujours de forme rectangulaire de sorte que cinq paramètres suffisent à les décrire complètement. Ils correspondent à leur profondeur, leur position et leur longueur autour de l'axe de rotation principal ainsi que leur position et largeur dans la direction axiale. Dans le cas des roulements à billes, ces deux dernières sont données sous forme d'angles. On peut noter que la profondeur typique des écaillages observés sur les roulements de réducteurs aéronautiques est de l'ordre de 100 μm . Pour les roulements à billes, leur position dans la gorge correspond en général à la direction moyenne de la charge au cours de la rotation ou, de manière équivalente, à l'angle de contact moyen observé lorsque la charge sur la bille est maximale. Finalement la longueur de l'écaillage est variable avec le temps puisqu'ils se propagent au cours du fonctionnement.

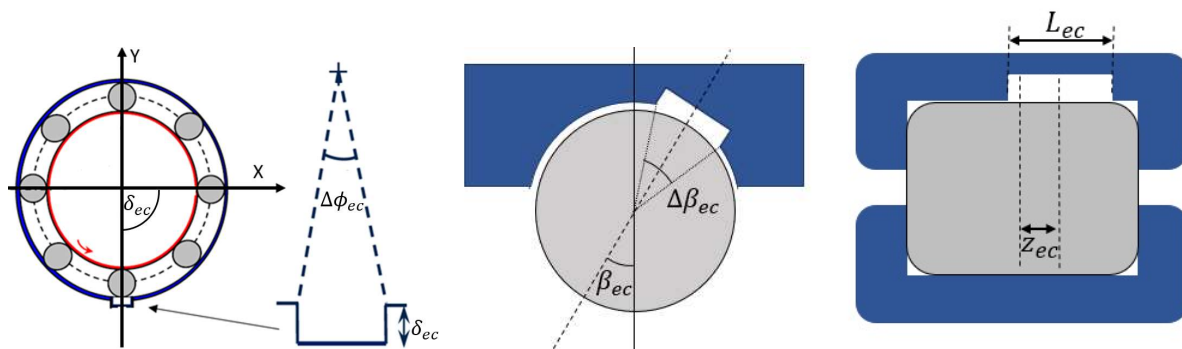


Figure 30 : Schéma de définition d'un écaillage

Paramètre	Description
δ_{ec}	Profondeur de l'écaillage
$\Delta\phi_{ec}$	Longueur angulaire autour de l'axe de rotation principal
ϕ_{ec}	Position angulaire autour de l'axe de rotation principal
$\Delta\beta_{ec}$	Largeur angulaire dans la gorge (billes)
β_{ec}	Position angulaire dans la gorge (billes)
L_{ec}	Largeur sur le chemin de roulement (rouleaux)
z_{ec}	Position axiale sur le chemin de roulement (rouleaux)

Tableau 3 : Paramètres de définition d'un écaillage

Pour finir, des paramètres matériaux sont nécessaires à la description des comportements au contact et au calcul des masses et inerties. Ils regroupent les modules d'Young et coefficients de Poisson des différents composants ainsi que la masse volumique des billes et les coefficients de résistance au roulement pour les contacts sur chaque bague. Le Tableau 4 récapitule ces différents paramètres.

Paramètre	Description
E_e, E_i, E_b, E_r	Modules d'Young des bagues, des billes et des rouleaux
$\nu_e, \nu_i, \nu_b, \nu_r$	Coefficients de Poisson des bagues des billes et des rouleaux
ρ_b, ρ_r	Masse volumique des billes et des rouleaux
μ_r	Coefficient de résistance au roulement sur les bagues
μ_f	Coefficient de frottement sec sur les épaulements

Tableau 4 : Paramètres matériaux

II.2.3 – Hypothèses adoptées

En raison du nombre de roulements et des étapes intermédiaires de convergence inhérentes à l'intégration numérique, de nombreux appels à ces fonctions roulement sont réalisés à chaque pas d'intégration du modèle dynamique. Il est donc primordial de limiter la complexité du modèle et les temps de calcul associés. Dans ce but, plusieurs hypothèses ont été faites et sont résumées ci-dessous.

H1 : La cage est supposée maintenir les éléments roulants à espacement angulaire constant et régulier.

H2 : Il est supposé qu'aux contacts sur le chemin de roulement entre les éléments roulants et les bagues on observe du roulement sans glissement.

H3 : Chaque élément roulant est supposé en équilibre quasi-statique à tout instant dans le plan radial qui lui est associé.

H4 : Les efforts de contact des éléments roulants sur la cage sont supposés négligeables devant les efforts de contact sur les bagues.

H5 : Les éléments roulants et les bagues sont supposés indéformables en dehors des zones très localisées de contact.

H6 : Dans le cas des roulements à billes, les angles de contact sont supposés suffisamment faibles et les bagues suffisamment profondes pour que l'ellipse de contact ne déborde pas de la gorge.

Plusieurs remarques peuvent être faites sur les hypothèses retenues. Les hypothèses **H1** et **H4** permettent de se passer de la modélisation de la cage. L'hypothèse **H1** revient à négliger l'excursion alvéolaire et a plusieurs conséquences sur la dynamique des éléments roulants. En effet, elle implique que la connaissance de la position orbitale de la cage est suffisante pour déterminer la position de chaque élément roulant. De plus, ceux-ci se déplacent tous à la même vitesse autour de l'axe de rotation principal et tournent tous à la même vitesse autour de leur axe de rotation propre. Bien qu'égaux pour tous les éléments roulants, ces deux vitesses de rotation peuvent varier dans le temps dans le cas des roulements à billes en fonction de la répartition des efforts et des variations de conditions de fonctionnement. Cela implique également que l'effort centrifuge est identique sur tous les éléments roulants à un instant donné.

L'hypothèse **H2** n'est pas vérifiable en général pour les roulements à billes. En effet, en raison des efforts centrifuges, les angles de contact sur les deux bagues ne sont égaux que s'ils sont nuls, donc si les efforts appliqués sur le roulement sont purement radiaux. Dans les autres cas de chargement, on observe pour chaque bille du pivotement au contact de l'une au moins des bagues. Les conséquences de celui-ci sont négligées dans cette étude. De plus, dans le cas où les angles de contact sur les deux bagues ne sont pas identiques, une hypothèse supplémentaire est requise afin de déterminer l'axe de rotation propre de la bille. Différentes possibilités sont discutées dans la suite de cette section. En fonction du modèle retenu, du glissement apparaît sur la BI et/ou la BE. Négliger ces glissements permet d'établir des relations simples reliant les angles de contact et la géométrie du roulement aux fréquences caractéristiques de celui-ci. Ces relations sont données et discutées dans la section dédiée.

L'hypothèse **H3** suppose que les efforts d'inertie dans le plan radial associé à chaque élément roulant sont négligeables devant les efforts normaux de contact ou la force centrifuge. Elle permet de déterminer simplement la position d'équilibre des éléments roulants pour laquelle la somme des efforts de contact et centrifuge est nulle.

L'hypothèse **H5** permet de déterminer simplement la position des centres de courbure des bagues dans le plan radial associé à chaque élément roulant. Il s'agit toutefois d'une hypothèse forte et restrictive car comme le montre la littérature [54], [66]–[68], l'ovalisation des bagues, leur dilatation thermique et centrifuge ainsi que les effets de fretage influent en réalité sur le jeu en fonctionnement et sur la répartition des charges sur les éléments roulants. Cependant, la prise en compte de ces déformations mène en général à une complexification significative du modèle et ne semble pas indispensable dans le cadre de cette étude.

Pour finir, l'hypothèse **H6** permet d'assurer que les efforts au contact puissent être calculés avec la théorie de Hertz. On remarque par conséquent que le rayon intérieur de la BE et extérieur de la BI ne sont pas des paramètres du modèle, celles-ci étant associées mathématiquement à des cercles fermés.

II.2.4 – Fonctionnement global du modèle

Le calcul des torseurs d'effort est complexe et ne peut pas être réalisé analytiquement directement. La Figure 31 présente un diagramme par bloc du modèle schématisant son fonctionnement.

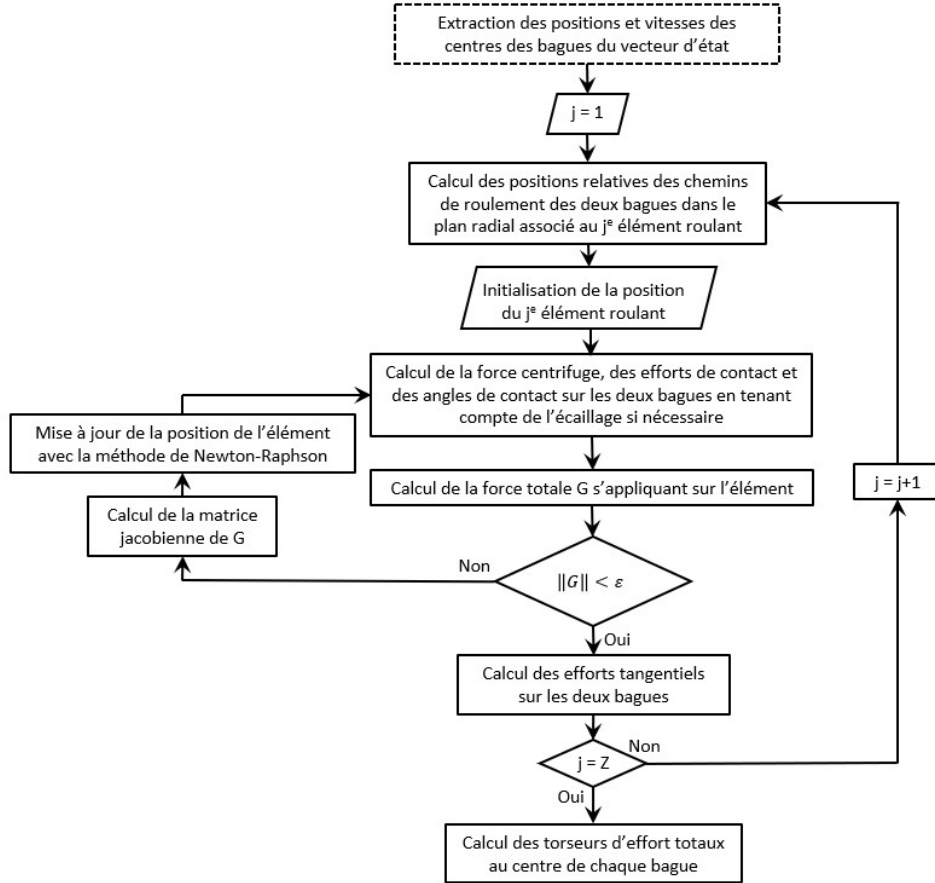


Figure 31 : Diagramme par blocs du modèle

Dans un premier temps, les efforts transmis par le biais de chaque élément roulant doivent être déterminés. Ainsi, chacun d'entre eux est repéré par un indice noté j dans cette section. La position angulaire ϕ_j du j^e élément roulant autour de l'axe de rotation principal peut être calculée grâce à l'hypothèse **H1** à partir de la position de la cage ϕ_c comme suit. La Figure 32 schématise le repérage d'une bille.

$$\phi_j = \phi_c + \frac{j-1}{Z} 2\pi \quad (35)$$

La position relative des bagues dans le plan radial associé à chaque élément roulant est ensuite calculé. La position d'équilibre de l'élément roulant dans ce plan est déterminée par une méthode de Newton Raphson. Pour cela, elle est initialisée arbitrairement puis les écrasements sur les deux bagues sont calculé géométriquement. Les efforts sur l'élément et leurs dérivées spatiales sont obtenus grâce aux lois de contact. La position est alors actualisée jusqu'à ce que la somme des forces qui s'y appliquent soit suffisamment faible, ce qui indique que la position d'équilibre est atteinte. Les efforts de contact réels sont alors connus et il suffit de remonter par sommation au torseur total appliqué sur chaque bague. Ces différentes étapes sont détaillées dans la suite de cette section.

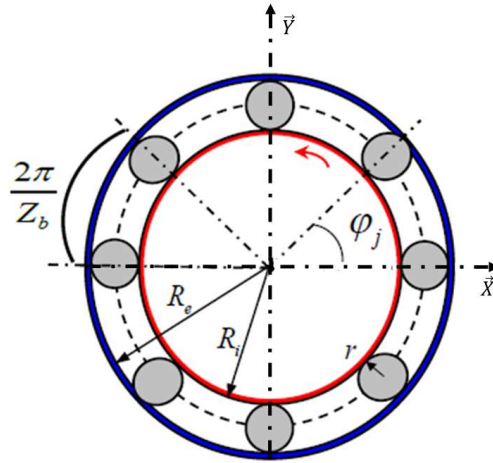


Figure 32 : Repérage d'un élément roulant [19]

II.3 – Position d'équilibre et efforts de contact sur une bille

Cette section s'attache à la description du calcul des efforts de contact sur l'élément roulant. Cela passe par le calcul des angles de contact et des écrasements puis des efforts normaux ainsi que leurs dérivées spatiales. Les efforts tangentiels sont ensuite ajoutés. Par la suite, on notera $\vec{V}$ un vecteur, et V sa norme.

II.3.1 – Méthode de Newton

Vu les hypothèses **H1**, **H2** et **H3**, les seuls efforts s'appliquant sur une bille dans le plan radial sont les efforts normaux de contact $\vec{N}_{ij}$ et $\vec{N}_{ej}$ ainsi que la force centrifuge $\vec{C}_{fj}$. En raison de cette dernière, les efforts de contact ne sont en général pas colinéaires. En réalité, ils ne le sont que lorsque la vitesse de rotation est nulle ou que le chargement est radial. En général, deux angles de contact β_{ij} et β_{ej} sont donc à calculer. Les positions (z_{ij}, r_{ij}) et (z_{ej}, r_{ej}) dans le plan radial des centres de courbure sont déduits des degrés de liberté associés aux centres de la BI et de la BE, extraits du vecteur d'état du système ainsi que de l'angle ϕ_j repérant la bille. Déterminer la position d'équilibre de la bille revient à trouver un couple de réel $(z_{bj,eq}, r_{bj,eq})$ définissant les déplacements de la bille dans les directions axiale et radiale pour lesquels la somme des efforts est nulle. La Figure 33 introduit les différents efforts et les positions des trois corps. En raison de la complexité des expressions de ces efforts, il est impossible de déterminer la position d'équilibre analytiquement. C'est pourquoi, comme expliqué plus tôt, il est décidé d'utiliser une méthode numérique de recherche de minimum : la méthode de Newton-Raphson. Soit G_j la fonction de somme des efforts suivante :

$$G_j = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_{bj}, r_{bj}) \rightarrow \vec{N}_{ij} + \vec{N}_{ej} + \vec{C}_{fj} \end{array} \right. \quad (36)$$

L'expression de G_j sera détaillée dans les sections suivantes. Afin de trouver un zéro de G , la position de la bille $(z_{bj,0}, r_{bj,0})$ est initialisée arbitrairement puis est actualisée à chaque étape comme suit jusqu'à ce que la norme de G_j soit jugée suffisamment faible. La position d'équilibre de la bille est le couple (z_{bj}, r_{bj}) ainsi obtenu.

$$\begin{pmatrix} z_{bj,n+1} \\ r_{bj,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{bj,n} \\ r_{bj,n} \end{pmatrix} - [J_G(z_{bj,n}, r_{bj,n})]^{-1} \cdot \vec{G}_j(z_{bj,n}, r_{bj,n}) \quad (37)$$

Ici, J_G est la matrice jacobienne de G_j et contient les dérivées spatiales des efforts.

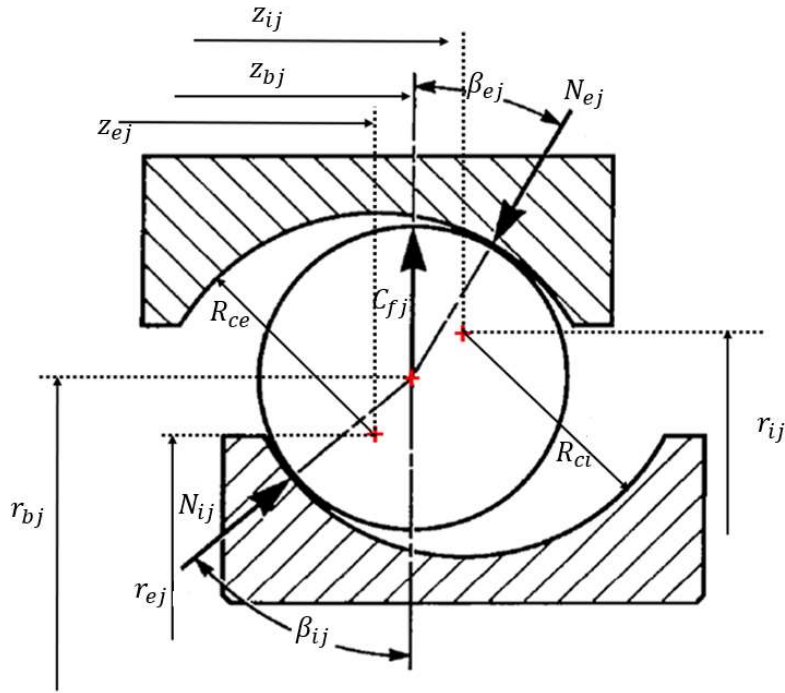


Figure 33 : Positions des centres de courbure et efforts sur la bille

II.3.2 – Ecrasements et angles de contact

Afin de calculer les écrasements et les angles de contact, déterminer les positions des centres de courbure des bagues dans le plan radial sont requises. Celles-ci ont été introduites dans la Figure 33 et peuvent se déduire en supposant les bagues indéformables à l'aide de l'angle ϕ_j repérant la bille et des déplacements $(x_{BI}, y_{BI}, z_{BI}, \theta_{x,BI}, \theta_{y,BI}, \theta_{z,BI})$ et $(x_{BE}, y_{BE}, z_{BE}, \theta_{x,BE}, \theta_{y,BE}, \theta_{z,BE})$ des centres des bagues comme suit.

$$r_{ej} = x_{BE} \cos(\phi_j) + y_{BE} \sin(\phi_j) + R_e - R_{ce} \quad (38)$$

$$r_{ij} = x_{BI} \cos(\phi_j) + y_{BI} \sin(\phi_j) + R_i + R_{ci} \quad (39)$$

$$z_{ej} = z_{BE} + (R_e - R_{ce})(\sin(\phi_j) \theta_{x,BE} - \cos(\phi_j) \theta_{y,BE}) \quad (40)$$

$$z_{ij} = z_{BI} + (R_i + R_{ci})(\sin(\phi_j) \theta_{x,BI} - \cos(\phi_j) \theta_{y,BI}) \quad (41)$$

Il est alors possible de calculer la distance séparant la bille des bagues. Celle-ci tient compte de la distance d_j séparant le centre de la bille du centre de courbure de la bague, du jeu radial J_r et des rayons des deux corps. La Figure 34 fait apparaître la quantité d_j dans le cas du contact bille – bague extérieure. Lorsque la distance séparant les corps est positive, l'écrasement est nul. Dans le cas contraire, il correspond à son opposé. L'écrasement sur les deux bagues s'exprime donc comme suit.

$$\delta_{ej} = -R_{ce} + R - \frac{J_r}{4} + d_{ej} \quad \text{et} \quad \delta_{ij} = -R_{ci} + R - \frac{J_r}{4} + d_{ij} \quad (42)$$

$$\text{Avec} \quad d_{ej} = \sqrt{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2} \quad \text{et} \quad d_{ij} = \sqrt{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2} \quad (43)$$

Les angles de contact sont quant à eux accessibles via les formules suivantes.

$$\sin(\beta_{ej}) = \frac{z_{bj} - z_{ej}}{d_{ej}} \quad \sin(\beta_{ij}) = \frac{z_{ij} - z_{bj}}{d_{ij}} \quad (44)$$

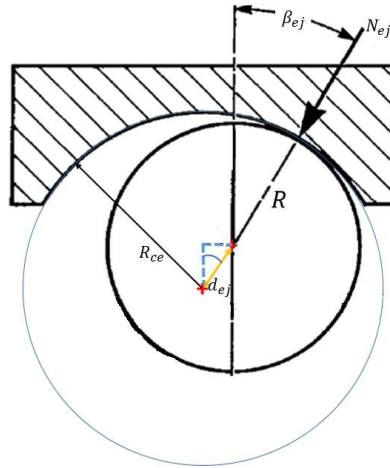


Figure 34 : Distance des centres des corps

II.3.3 – Efforts dans le plan radial

Efforts normaux de contact

Une fois les écrasements sur les bagues connus, une loi de comportement au contact est requise pour obtenir les efforts normaux et plusieurs méthodes sont envisageables. Toutefois, pour des raisons de simplicité et de temps de calcul, il a été décidé dans le cadre de cette étude de se limiter à une description analytique et d'utiliser les lois de comportement issues de la théorie de Hertz [51].

Celle-ci s'appuie sur plusieurs hypothèses dont certaines sont discutables lors de son application aux roulements. Elles sont toutefois supposées vérifiées et les principales sont rappelées ici.

- Au contact, la géométrie des solides peut être décrite par des expressions quadratiques à deux variables et les solides sont parfaitement lisses.
- Les matériaux sont homogènes, isotropes et élastiques.
- La charge est perpendiculaire aux surfaces en contact.
- Les dimensions de la zone de contact sont faibles devant les rayons de courbure des solides.

La géométrie et l'orientation des corps en contact est décrite sur la Figure 35. Chacun d'entre eux peut être décrit par deux rayons de courbure r_x et r_y . Les autres paramètres sont l'effort normal N et la rotation relative des solides σ .

On appelle courbure d'un solide l'inverse de son rayon de courbure et on introduit ainsi les courbures ρ_{1x} , ρ_{1y} , ρ_{2x} et ρ_{2y} telles que $\rho_i = r_i^{-1}$. Par convention, les courbures sont négatives lorsque les centres de courbure associés sont extérieurs aux solides. On note également a et b les demis axes de l'ellipse de contact et $\kappa = a/b$ le facteur d'ellipticité. La loi de comportement au contact reliant l'écrasement à l'effort normal est fournie par Hertz et peut s'écrire comme suit.

$$\delta = \frac{\mathcal{F}(\kappa)}{\pi} \left(\frac{\pi \Sigma \rho}{2 \kappa^2 \varepsilon(\kappa)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3N}{2E^*} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (45)$$

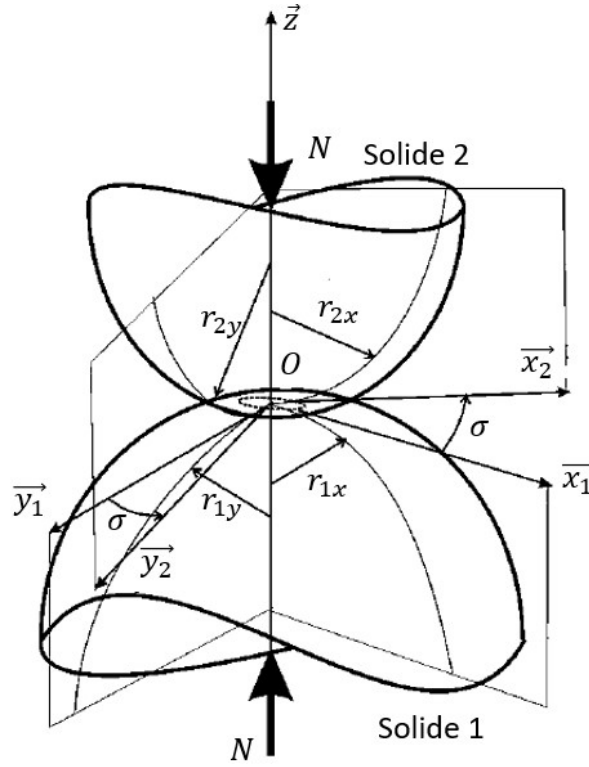


Figure 35 : Orientation et géométrie des solides en contact [76]

Afin d'être utilisée dans le calcul des efforts normaux de contact, cette expression doit être inversée. On obtient alors la forme générique suivante.

$$N = C \delta^{\frac{3}{2}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{2\sqrt{2}}{3} \kappa \pi E^* \sqrt{\frac{\varepsilon(\kappa)}{\Sigma \rho \mathcal{F}(\kappa)^3}} \quad (46)$$

Dans cette expression, $\Sigma \rho$ et E^* sont respectivement la somme des courbures et le module d'Young réduit. Ils sont définis comme suit.

$$\Sigma \rho = \rho_{1x} + \rho_{1y} + \rho_{2x} + \rho_{2y} \quad \text{et} \quad E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (47)$$

De plus, $\mathcal{F}(\kappa)$ et $\varepsilon(\kappa)$ sont les intégrales elliptiques de premier et second ordre dont les expressions sont données ci-après.

$$\mathcal{F}(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right)^{-\frac{1}{2}} d\phi \quad (48)$$

$$\varepsilon(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} d\phi \quad (49)$$

En pratique, leur calcul est difficile et plusieurs auteurs ont proposé des expressions analytiques approchées [76]–[79]. Dans cette étude, les formules utilisées sont celles fournies par Antoine & al. qui se veulent très précises.

L'application aux contacts bille-bague se fait facilement en raison des géométries considérées. En effet, puisque la bille ne présente pas de direction particulière, l'angle ω peut être imposé nul. De plus, les rayons de courbure de la bille dans les deux directions sont identiques et égaux à son rayon. Le cas des bagues est plus difficile puisque les deux courbures sont différentes. On peut également noter que le

rayon de courbure de la BI dans une direction est positif. Les rayons de courbure des bagues dépendent également des angles de contact et sont calculés comme suit.

$$r_{ijx} = -R_{ci} \quad r_{ijy} = \frac{R_i + R_{ci}(1 - \cos(\beta_{ij}))}{\cos(\beta_{ij})} \quad (50)$$

$$r_{ejx} = -R_{ce} \quad r_{ejy} = -\frac{R_e - R_{ce}(1 - \cos(\beta_{ej}))}{\cos(\beta_{ej})} \quad (51)$$

Enfin, les efforts normaux de contact peuvent s'écrire comme suit

$$\vec{N}_{ej} = C_{ej} \cdot \delta_{ej}^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -\sin(\beta_{ej}) \\ -\cos(\beta_{ej}) \end{pmatrix} \quad \vec{N}_{ij} = C_{ij} \cdot \delta_{ij}^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \sin(\beta_{ij}) \\ \cos(\beta_{ij}) \end{pmatrix} \quad (52)$$

Effort centrifuge

L'effort centrifuge correspond au produit de la masse de la bille par son accélération centrifuge. Il s'exprime donc en fonction de la masse volumique et du diamètre de la bille ainsi que de sa vitesse de rotation autour de l'axe de rotation de la bague intérieure. Vu l'hypothèse **H1** et toutes les billes étant supposées identiques, l'effort centrifuge est le même pour chacune.

$$C_f = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b R_p \omega_c^2 \quad (53)$$

Dans le cas d'une bague extérieure bloquée en rotation, la vitesse de rotation de la bille s'exprime en fonction de la vitesse de rotation de la bague intérieure et de la FTF : $\omega_c = FTF \cdot \omega_i$. Cependant, le calcul de la FTF n'est pas trivial. En effet, il fait intervenir l'angle β_j de rotation propre de la bille et une expression complète peut être trouvée dans le livre de Harris [54]. Afin de déterminer l'angle de rotation propre des billes, il est indispensable de faire une hypothèse cinématique. Ainsi, Jones [53] introduit une méthode dite « de contrôle » basée sur l'hypothèse que les mouvements de la bille sont contrôlés par l'une ou l'autre des bagues. L'angle de rotation de la bille correspond alors à l'angle de contact sur la bague de contrôle. Cette méthode est judicieuse pour de hautes vitesses de rotation car il est communément admis qu'un contrôle par la bague extérieure a lieu dans ce cas. Cependant, elle présente un défaut en général puisqu'elle impose une hypothèse *a priori* sur la bague de contrôle et une vérification *a posteriori* pouvant mener à des calculs supplémentaires lorsque l'hypothèse de départ est mise en défaut. De plus, son caractère binaire peut poser des problèmes lors de l'intégration numérique pour certains régimes pour lesquels le contrôle passerait d'une bague à l'autre au cours de la résolution. Une seconde méthode dite « hybride » est proposée par Changan & al. [80] basée sur le principe de d'Alembert appliqué sur la bille. Cette méthode est plus précise et présente l'avantage d'être continue mais s'appuie sur la prise en compte des effets élasto hydrodynamiques de lubrification au-delà des objectifs du modèle développé ici. Enfin, Noel [15], [65] utilise une méthode plus simple dite « géométrique » et supposant un *spin-to-roll ratio* identique aux contacts sur les deux bagues. Cette dernière méthode a été retenue dans le cadre du modèle de roulement présenté ici en raison de son caractère continu, de sa simplicité et de sa capacité à traiter les régimes rapides aussi bien que les régimes plus lents. Ainsi il est supposé la relation suivante :

$$\beta_j = \frac{\beta_{ej} + \beta_{ij}}{2} \quad (54)$$

La vitesse de rotation des billes étant unique vu les hypothèses adoptées et les angles de rotation propres β_j étant différents pour chaque bille, une hypothèse supplémentaire est requise pour déterminer la FTF. Ainsi, il est supposé que les billes contribuent à la cinématique de la cage proportionnellement à leur charge sur la bague intérieure. Un angle de rotation moyen β_m est donc calculé comme la moyenne des angles de rotation propres des billes pondérée par les efforts normaux de contact sur la bague intérieure.

$$\beta_m = \frac{\sum_j (\beta_j \|N_{ij}\|)}{\sum_j \|N_{ij}\|} \quad (55)$$

La FTF est alors calculée à l'aide de l'expression approchée suivante. Bien que la vitesse de rotation des billes ainsi calculée soit imposée identique pour chaque élément roulant, elle évolue au cours de la rotation en fonction de la position des billes autour de l'axe de rotation, des chargements et de la vitesse de rotation.

$$FTF = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{D_p} \cos(\beta_m) \right) \quad (56)$$

Finalement, le calcul de la fonction G de somme des efforts est effectué.

$$G_j(z_{bj}, r_{bj}) = \begin{pmatrix} -N_e(z_{bj}, r_{bj}) \sin \beta_e \\ -N_e(z_{bj}, r_{bj}) \cos \beta_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_i(z_{bj}, r_{bj}) \sin \beta_i \\ N_i(z_{bj}, r_{bj}) \cos \beta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_f \end{pmatrix} \quad (57)$$

Le calcul de la jacobienne de G_j , requise lors de l'implémentation de la méthode de Newton, est fastidieux et est détaillé en annexe.

II.3.4 – Efforts tangentiels

Une fois la position d'équilibre déterminée, les efforts normaux de contact sont connus. Ces efforts et leurs points d'application sont contenus dans le plan radial. Par conséquent, ils sont à l'origine de couple de basculement autour des axes radiaux X et Y. Cependant, ils ne génèrent aucun couple autour de l'axe Z de rotation principal sur la bague intérieure du roulement. Afin de faire le lien entre les chargements appliqués sur le roulement et la vitesse de rotation instantanée, il est nécessaire de prendre en compte les efforts tangentiels de contact introduisant un couple autour de l'axe de rotation principal sur les deux bagues. Le calcul de ceux-ci peut s'avérer délicat lorsque la lubrification est prise en compte. Plusieurs auteurs ont travaillé dans ce sens comme Houpert [61]. Dans le modèle présenté ici, il a été décidé de négliger les effets de la lubrification et de ne tenir compte que du phénomène de résistance au roulement schématisé sur la Figure 36 comme le proposent Gomez & al. [19]. Sous l'effet de l'effort presseur, les éléments roulants se déforment et le centre de pression se déplace vers l'entrée du contact. Ce déplacement, noté b_r , est proportionnel au rayon de la bille et s'exprime en fonction d'un coefficient μ_r de résistance au roulement qui dépend des propriétés matériaux tel que : $b_r = \mu_r R$

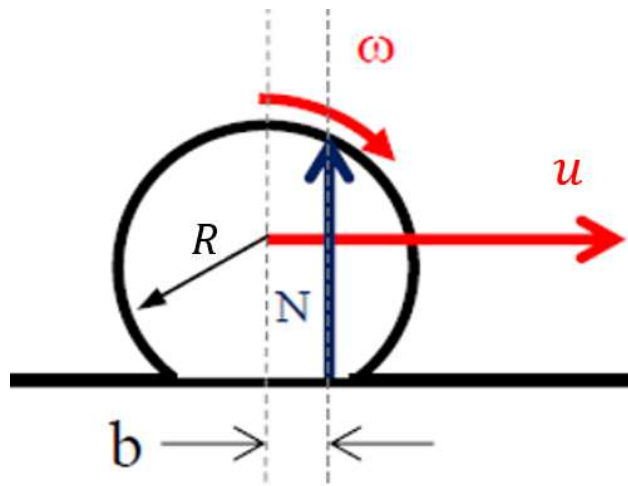


Figure 36 : Phénomène de résistance au roulement

L'équilibre dynamique de la bille en rotation autour de son axe propre et autour de l'axe de rotation de la bague intérieure, schématisé Figure 37, met en évidence l'existence d'efforts tangentiels de contact permettant son entraînement.

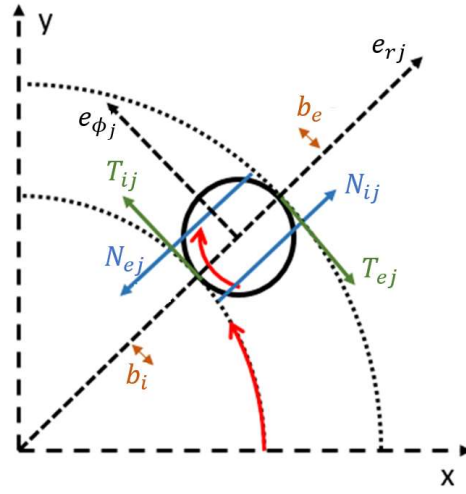


Figure 37 : Equilibre dynamique d'une bille et efforts tangentiels de contact

Cet équilibre peut s'écrire comme suit.

$$\begin{cases} m \cdot R_p \cdot \gamma_c = T_{ij} - T_{ej} \\ I \cdot \gamma_b = b_{ri} \cdot N_{ij} + b_{re} \cdot N_{ej} - R \cdot T_{ij} - R \cdot T_{ej} \end{cases} \quad (58)$$

Ici, m et I sont respectivement la masse et l'inertie de la bille.

De plus, γ_c et γ_b sont respectivement les accélérations angulaires de la cage et de la bille autour de son axe propre. Ces dernières peuvent être déterminées à partir de l'accélération angulaire de la bague intérieure comme suit.

$$\gamma_c = FTF \cdot \gamma_{BI} \quad \text{et} \quad \gamma_b = BSF \cdot \gamma_{BI} \quad (59)$$

Avec FTF la « Fundamental Train Frequency » introduite précédemment et BSF la « Ball Spin Frequency » calculées en fonction de la géométrie du roulement et des angles de contact.

$$FTF = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{D_p} \cos(\beta_m) \right) \quad \text{et} \quad BSF = \frac{D_p}{2D} \left(1 - \left(\frac{D}{D_p} \cos(\beta_m) \right)^2 \right) \quad (60)$$

La résolution du système (58) mène à l'expression des efforts tangentiels :

$$\begin{cases} T_{ij} = \frac{1}{D} (N_{ij} b_{ri} + N_{ej} b_{re}) + \frac{1}{D} (R \cdot m \cdot R_p \cdot \gamma_c + I \cdot \gamma_b) \\ T_{ej} = \frac{1}{D} (N_{ij} b_{ri} + N_{ej} b_{re}) + \frac{1}{D} (R \cdot m \cdot R_p \cdot \gamma_c - I \cdot \gamma_b) \end{cases} \quad (61)$$

Ces efforts tangentiels comptent donc un premier terme dépendant des efforts normaux et donc des déplacements du système et un second terme proportionnel à l'accélération de la bague intérieure. Pour des raisons pratiques on note respectivement T_{ij}^n et T_{ij}^d ces deux composantes (T_{ej}^n et T_{ej}^d dans le cas de la bague extérieure).

$$\begin{cases} T_{ij} = T_{ij}^n + \gamma_{BI} T_{ij}^d \\ T_{ej} = T_{ej}^n + \gamma_{BI} T_{ej}^d \end{cases} \quad (62)$$

II.3.5 – Torseurs globaux

Les torseurs d'effort complets ramenés aux centres des bagues s'expriment par sommation des efforts de contact sur chaque bille et des moments qu'ils génèrent aux centres des bagues. Le calcul de ceux-ci requiert la connaissance de la position dans le repère global des points de contact P_{ij} et P_{ej} . Celles-ci sont données par les vecteurs $\overrightarrow{OP_{ij}}$ et $\overrightarrow{OP_{ej}}$ détaillés ci-dessous.

$$\overrightarrow{OP_{ij}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_j) \cdot (R_i + (1 - \cos(\beta_{ij})) \cdot R_{ci}) + b_i \cdot \sin(\phi_j) \\ \sin(\phi_j) \cdot (R_i + (1 - \cos(\beta_{ij})) \cdot R_{ci}) - b_i \cdot \cos(\phi_j) \\ -R_{ci} \cdot \sin(\beta_{ij}) \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\overrightarrow{OP_{ej}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_j) \cdot (R_e - (1 - \cos(\beta_{ej})) \cdot R_{ce}) - b_e \cdot \sin(\phi_j) \\ \sin(\phi_j) \cdot (R_e - (1 - \cos(\beta_{ej})) \cdot R_{ce}) + b_e \cdot \cos(\phi_j) \\ R_{ce} \cdot \sin(\beta_{ej}) \end{pmatrix} \quad (64)$$

La norme des différents efforts est connue à ce stade et leur direction dans le repère global dépend des angles de contact et de la position angulaire ϕ_j de la bille. Leur expression complète est la suivante.

$$\overrightarrow{N_{ij}} = N_{ij} \begin{pmatrix} -\cos(\beta_{ij}) \cos(\phi_j) \\ -\cos(\beta_{ij}) \sin(\phi_j) \\ -\sin(\beta_{ij}) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{N_{ej}} = N_{ej} \begin{pmatrix} \cos(\beta_{ej}) \cos(\phi_j) \\ \cos(\beta_{ej}) \sin(\phi_j) \\ \sin(\beta_{ej}) \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$\overrightarrow{T_{ij}} = T_{ij} \begin{pmatrix} -\sin(\phi_j) \\ \cos(\phi_j) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{T_{ej}} = T_{ej} \begin{pmatrix} \sin(\phi_j) \\ -\cos(\phi_j) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Finalement les torseurs globaux d'efforts exprimés aux centres des bagues peuvent être calculés.

$$\mathcal{T}_i = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j (\overrightarrow{N_{ij}} + \overrightarrow{T_{ij}}) \\ \sum_j \overrightarrow{OP_{ij}} \wedge (\overrightarrow{N_{ij}} + \overrightarrow{T_{ij}}) \end{array} \right\}_{O_i} \quad \mathcal{T}_e = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j (\overrightarrow{N_{ej}} + \overrightarrow{T_{ej}}) \\ \sum_j \overrightarrow{OP_{ej}} \wedge (\overrightarrow{N_{ej}} + \overrightarrow{T_{ej}}) \end{array} \right\}_{O_e} \quad (67)$$

Ces torseurs constituent les véritables sorties du modèle mis en place dans ce chapitre. Ils sont calculés à chaque pas d'intégration et injectés dans le système différentiel décrivant le comportement dynamique de la transmission. Une partie des effort tangentiels est proportionnelle de l'accélération angulaire de la bague intérieure. Celle-ci n'étant pas directement contenue dans le vecteur d'état, il est préférable de séparer cette composante dans les torseurs de liaison afin de permettre l'intégration numérique comme cela a été présenté dans le premier chapitre. On obtient alors la forme finale des torseurs. A titre d'exemple le cas de la bague intérieure est détaillé ci-dessous.

$$\mathcal{T}_i^n = \left\{ \begin{array}{l} \sum_j (\overrightarrow{N_{ij}} + \overrightarrow{T_{ij}^n}) \\ \sum_j \overrightarrow{OP_{ij}} \wedge (\overrightarrow{N_{ij}} + \overrightarrow{T_{ij}^n}) \end{array} \right\}_{O_i} \quad \mathcal{T}_i^d = \gamma_{BI} \left\{ \begin{array}{l} \sum_j \overrightarrow{T_{ij}^d} \\ \sum_j \overrightarrow{OP_{ij}} \wedge \overrightarrow{T_{ij}^d} \end{array} \right\}_{O_i} \quad (68)$$

II.4 – Extension au cas des roulements à rouleaux cylindriques

II.4.1 – Particularités des rouleaux

La méthode de calcul des efforts de contact et de la position d'équilibre des rouleaux est similaire au cas des billes présenté précédemment. Cependant, en raison de leur géométrie différente, certaines adaptations doivent être opérées. En particulier, il est important de tenir compte des épaulements permettant de maintenir le rouleau en place dans les bagues. Selon les applications et les efforts transmis, il peut y avoir jusqu'à quatre épaulements et donc quatre efforts $\vec{F}_{igj}$, $\vec{F}_{idj}$, $\vec{F}_{egj}$ et $\vec{F}_{edj}$ sur les rouleaux en supplément des efforts $\vec{N}_{ij}$ et $\vec{N}_{ej}$ de contact sur les chemins de roulement et de la force centrifuge $\vec{C}_f$. Sur le chemin de roulement, en raison du contact de type cylindre-cylindre, les efforts sont linéairement répartis. Au niveau des épaulements en revanche, le contact est ponctuel. Contrairement au cas des billes, les différents efforts listés ici ne passent pas toujours par le centre du rouleau et génèrent donc un moment M_{tj} sur celui-ci. De plus, il est nécessaire de tenir compte de l'inclinaison des bagues et des rouleaux afin d'évaluer correctement les efforts axiaux sur les rouleaux et les efforts sur les épaulements qui les compensent. Par conséquent, les positions $(z_{ij}, r_{ij}, \theta_{ij})$ et $(z_{ej}, r_{ej}, \theta_{ej})$ des bagues de même que la position $(z_{rj,eq}, r_{rj,eq}, \theta_{rj,eq})$ d'équilibre du rouleau contiennent un degré de liberté supplémentaire. La Figure 38 schématise un rouleau et les différents efforts pouvant s'y appliquer ainsi que les positions des trois solides.

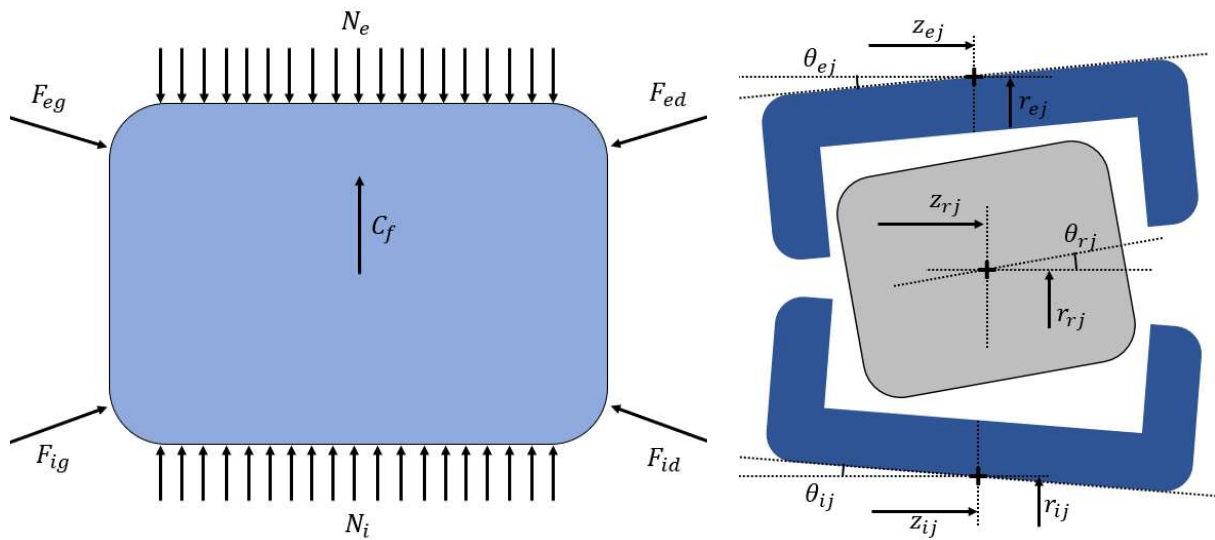


Figure 38 : Efforts appliqués sur un rouleau et positions des solides

La fonction G_j de somme des efforts à minimiser lors de la recherche d'équilibre et sa matrice jacobienne sont donc plus complexes. Néanmoins, la méthodologie mise en place reste la même.

$$G_j = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (z_{rj}, r_{rj}, \theta_{rj}) \rightarrow \begin{pmatrix} F_{aj} \\ F_{rj} \\ M_{tj} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (69)$$

II.4.2 – Discrétisation et écrasements aux contacts

En raison des inclinaisons du rouleau et des bagues ainsi que de la présence éventuelle d'un écaillage, l'effort linéique de contact sur le chemin de roulement n'est pas homogène sur la longueur du rouleau. Celui-ci est donc discrétisé en tranches minces dans la direction axiale comme le montre la Figure 39 et l'écrasement est calculé indépendamment sur chacune. Les positions des bagues dans le plan radial sont calculées de manière similaire au cas des roulements à billes à partir des déplacements $(x_{BI}, y_{BI}, z_{BI}, \theta_{x,BI}, \theta_{y,BI}, \theta_{z,BI})$ et $(x_{BE}, y_{BE}, z_{BE}, \theta_{x,BE}, \theta_{y,BE}, \theta_{z,BE})$ de leurs centres issus du vecteur d'état du système.

$$r_{ij} = x_{BI} \cos(\phi_j) + y_{BI} \sin(\phi_j) \quad r_{ej} = x_{BE} \cos(\phi_j) + y_{BE} \sin(\phi_j) \quad (70)$$

$$\theta_{ij} = \theta_{yBI} \cos(\phi_j) - \theta_{xBI} \sin(\phi_j) \quad \theta_{ej} = \theta_{yBE} \cos(\phi_j) - \theta_{xBE} \sin(\phi_j) \quad (71)$$

$$z_{ij} = z_{BI} + \frac{D_i}{2} (\sin(\phi_j) \theta_{xBI} - \cos(\phi_j) \theta_{yBI}) \quad (72)$$

$$z_{ej} = z_{BE} + \frac{D_e}{2} (\sin(\phi_j) \theta_{xBE} - \cos(\phi_j) \theta_{yBE})$$

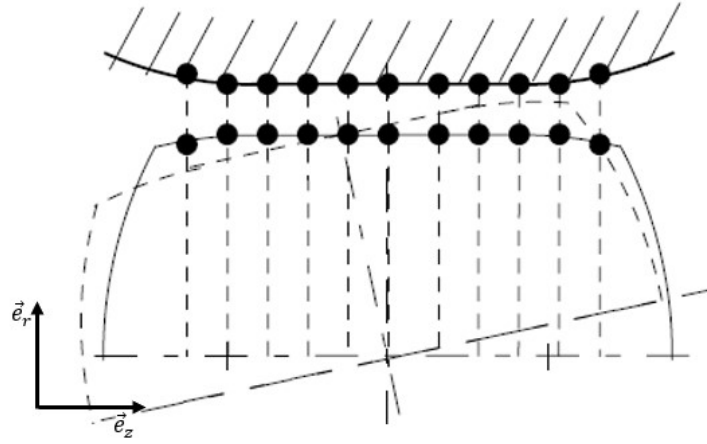


Figure 39 : Discrétisation axiale du rouleau

Pour chaque tranche k , l'écrasement sur le chemin de roulement est alors calculé en fonction de la position axiale z_k de celle-ci dans le référentiel du rouleau.

$$\delta_{ij}(z_k) = r_{ij} - r_{rj} - z_k \theta_{rj} + (z_k + z_{rj} - z_{ij}) \theta_{ij} - h_r(z_k) - \frac{J_r}{4} \quad (73)$$

$$\delta_{ej}(z_k) = r_{rj} - r_{ej} + z_k \theta_{rj} - (z_k + z_{rj} - z_{ej}) \theta_{ej} - h_r(z_k) - \frac{J_r}{4} \quad (74)$$

Ici, h_r est un terme associé à la forme du rouleau et permet de prendre la dépouille en compte. Ainsi, il peut s'exprimer comme suit. De plus, il est supposé que l'écrasement sur le congé d'extrémité du rouleau est nul au niveau du chemin de roulement.

$$h_r(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < \frac{L_c}{2} \\ R_d - \sqrt{R_d^2 - \left(|z| - \frac{L_c}{2}\right)^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (75)$$

Les écrasements sur les épaulements sont plus délicats à déterminer. Il est supposé que le contact entre le rouleau et un épaulement se fait toujours sur le congé d'extrémité, ce qui est

généralement observé lors du fonctionnement nominal des roulements de ce type. Le calcul de l'écrasement est donc équivalent au calcul des déplacements du centre C_s du congé par rapport au plan définissant l'épaulement. Ce calcul diffère pour chaque épaulement.

$$\delta_{egj} = -dz_{egj} \cos(\mu) + dr_{egj} \sin(\mu) - \frac{J_a}{2} \quad (76)$$

$$\delta_{edj} = dz_{edj} \cos(\mu) + dr_{edj} \sin(\mu) - \frac{J_a}{2} \quad (77)$$

$$\delta_{igj} = -dz_{igj} \cos(\mu) - dr_{igj} \sin(\mu) - \frac{J_a}{2} \quad (78)$$

$$\delta_{idj} = dz_{idj} \cos(\mu) - dr_{idj} \sin(\mu) - \frac{J_a}{2} \quad (79)$$

Avec

$$\begin{cases} dr_{egj} = r_{rj} - r_{ej} - z_s \theta_{rj} - (z_{rj} - z_{ej} - z_s - r_s \theta_{rj}) \theta_{ej} \\ dz_{egj} = z_{rj} - z_{ej} - r_s \theta_{rj} + \left(r_s + r_{jr} - r_{ej} - z_s \theta_{rj} - \frac{D}{2} - \frac{J_r}{4} \right) \theta_{ej} \end{cases} \quad (80)$$

$$\begin{cases} dr_{edj} = r_{rj} - r_{ej} + z_s \theta_{rj} - (z_{rj} - z_{ej} + z_s - r_s \theta_{rj}) \theta_{ej} \\ dz_{edj} = z_{rj} - z_{ej} - r_s \theta_{rj} + \left(r_s + r_{rj} - r_{ej} + z_s \theta_{rj} - \frac{D}{2} - \frac{J_r}{4} \right) \theta_{ej} \end{cases} \quad (81)$$

$$\begin{cases} dr_{igj} = r_{rj} - r_{ij} - z_s \theta_{rj} - (z_{rj} - z_{ij} - z_s + r_s \theta_{rj}) \theta_{ij} \\ dz_{igj} = z_{rj} - z_{ij} + r_s \theta_{rj} + \left(\frac{D}{2} + \frac{J_r}{4} - r_s + r_{rj} - r_{ij} - z_s \theta_{rj} \right) \theta_{ij} \end{cases} \quad (82)$$

$$\begin{cases} dr_{idj} = r_{rj} - r_{ij} + z_s \theta_{rj} - (z_{rj} - z_{ij} + z_s + r_s \theta_{rj}) \theta_{ij} \\ dz_{idj} = z_{rj} - z_{ij} + r_s \theta_{rj} + \left(\frac{D}{2} + \frac{J_r}{4} - r_s + r_{rj} - r_{ij} + z_s \theta_{rj} \right) \theta_{ij} \end{cases} \quad (83)$$

II.4.3 – Efforts dans le plan radial

Le calcul de l'effort centrifuge reste identique au cas des roulements à billes. Ce n'est pas le cas en revanche des efforts normaux de contact sur les chemins de roulement qui sont répartis de manière non uniforme sur la largeur du rouleau. Pour chaque tranche, un effort élémentaire de contact est calculé en fonction de l'écrasement observé. Le contact étant de type cylindre-cylindre, il n'est plus possible d'utiliser les résultats de Hertz présentés dans la section précédente. Par conséquent, la loi de contact de Palmgren est implémentée, et les expressions des efforts sont données ci-dessous.

$$N_{ij} = \sum_k n_{ijk} \quad \text{avec} \quad n_{ijk} = C_{il} \left(\delta_{ij}(z_k) \right)^{\frac{10}{9}} \quad (84)$$

$$N_{ej} = \sum_k n_{ejk} \quad \text{avec} \quad n_{ejk} = C_{el} \left(\delta_{ej}(z_k) \right)^{\frac{10}{9}} \quad (85)$$

Les coefficients C_{il} et C_{el} sont déterminés en fonction de la géométrie du roulement et des propriétés matériaux des solides. Il est supposé que la direction de ces efforts est donnée par la normale sortante à la bague et par conséquent :

$$\overrightarrow{N_{ij}} = N_{ij} \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{ij}) \\ \cos(\theta_{ij}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N_{ej}} = N_{ej} \begin{pmatrix} \sin(\theta_{ej}) \\ -\cos(\theta_{ej}) \end{pmatrix} \quad (86)$$

Le cas des contacts sur les épaulements peut quant à lui être traité de la même manière que pour les roulements à billes. En effet, les solides sont assimilables respectivement à un plan et un ellipsoïde. La théorie de Hertz peut être utilisée en remarquant que les courbures associées à l'épaulement sont nulles tandis que les courbures du rouleau sont positives et fournies ci-après.

$$\rho_x(\psi) = R_s \quad \text{et} \quad \rho_y(\psi) = \frac{R - R_s(1 - \cos(\psi))}{\cos(\psi)} \quad (87)$$

Où ψ est l'angle séparant la normale au contact et l'axe de révolution du rouleau. Les efforts aux épaulements s'expriment donc ainsi.

$$F_{egj} = C_{egj} \delta_{egj}^{\frac{3}{2}} \quad F_{edj} = C_{edj} \delta_{edj}^{\frac{3}{2}} \quad F_{igj} = C_{igj} \delta_{igj}^{\frac{3}{2}} \quad F_{idj} = C_{idj} \delta_{idj}^{\frac{3}{2}} \quad (88)$$

La direction des efforts sur les épaulements est donnée par les normales sortantes dont les expressions sont données ci-dessous.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{egj}} &= F_{egj} \begin{pmatrix} \cos(\mu - \theta_{ej}) \\ -\sin(\mu - \theta_{ej}) \end{pmatrix} & \overrightarrow{F_{edj}} &= F_{edj} \begin{pmatrix} -\cos(\mu - \theta_{ej}) \\ -\sin(\mu - \theta_{ej}) \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{F_{igj}} &= F_{igj} \begin{pmatrix} \cos(\mu - \theta_{ij}) \\ \sin(\mu - \theta_{ij}) \end{pmatrix} & \overrightarrow{F_{idj}} &= F_{idj} \begin{pmatrix} -\cos(\mu - \theta_{ij}) \\ \sin(\mu - \theta_{ij}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (89)$$

Les efforts de contact décrits ci-dessus génère des moments au centre du rouleau autour de l'axe azimutal. Les expressions de ceux-ci sont données ci-dessous.

$$M_{ej} = - \sum_k n_{ejk} \left(z_k \cos(\theta_{ej}) + \frac{D}{2} \sin(\theta_{ej}) \right) \quad (90)$$

$$M_{ij} = \sum_k n_{ijk} \left(z_k \cos(\theta_{ij}) + \frac{D}{2} \sin(\theta_{ij}) \right) \quad (91)$$

$$M_{egj} = -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ej}) F_{egj} \quad (92)$$

$$M_{edj} = d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ej}) F_{edj} \quad (93)$$

$$M_{igj} = d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ij}) F_{igj} \quad (94)$$

$$M_{idj} = -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ij}) F_{idj} \quad (95)$$

Avec

$$d_s = \sqrt{r_s^2 + z_s^2} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \text{atan} \left(\frac{r_s}{z_s} \right) \quad (96)$$

Finalement, le moment total exercé sur le rouleau correspond à la somme des moments élémentaires

$$M_{tj} = M_{ej} + M_{ij} + M_{egj} + M_{edj} + M_{igj} + M_{idj} \quad (97)$$

Le calcul de la matrice jacobienne de G_j est fastidieux et est donné en annexe pour des raisons de concision.

II.4.4 – Efforts tangentiels

De même que pour les roulements à billes, il est indispensable d'introduire des efforts tangentiels afin de faire le lien entre les efforts normaux de contact et les variations de couple résistant

dans le roulement. Ainsi, une modélisation similaire de la résistance au roulement est mise en place au contact linéique sur le chemin de roulement. Cependant, il faut également tenir compte des contacts ponctuels sur les épaulements. La cinématique des rouleaux et des bagues n'étant pas conformes à cet endroit, du frottement apparaît. Celui-ci est modélisé par une loi de Colomb en frottement pur permettant de lier l'effort normal et l'effort tangentiel ainsi $T_f = \mu_f F$. De même que les efforts tangentiels sur les chemins de roulement, les efforts de frottement sont orientés dans la direction azimutale comme le montre la Figure 40. Il est important de noter que le point de contact sur les épaulements se situe sur un rayon plus faible que le point de contact sur les chemins de roulement. Ce rayon peut se calculer comme suit.

$$\begin{aligned} r_{egj} &= r_s + R_s(\mu + \theta_r - \theta_{ej}) & r_{edj} &= r_s + R_s(\mu - \theta_r + \theta_{ej}) \\ r_{igj} &= r_s + R_s(\mu - \theta_r + \theta_{ij}) & r_{idj} &= r_s + R_s(\mu + \theta_r - \theta_{ij}) \end{aligned} \quad (98)$$

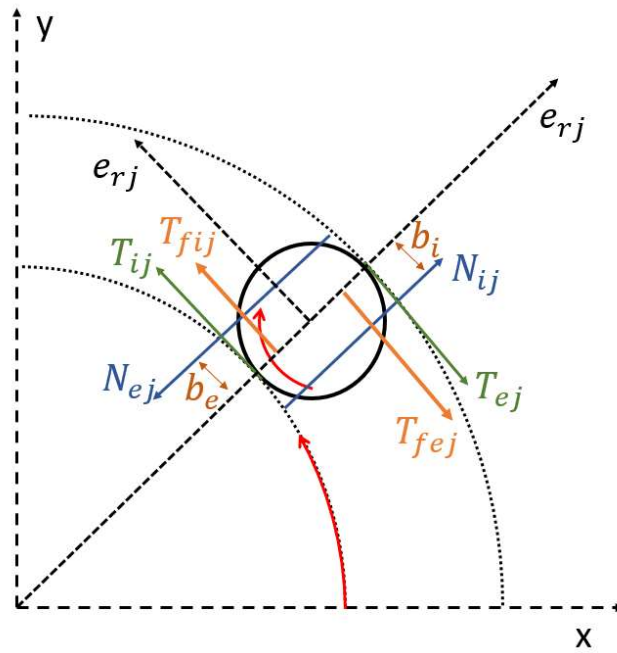


Figure 40 : Equilibre dynamique d'un rouleau et efforts tangentiels de contact

Les expressions des efforts tangentiels de contact se trouvent alors modifiées.

$$T_{ij} = T_{Nj} + T_{fij} + T_{vij} \quad \text{et} \quad T_{ej} = T_{Nj} + T_{fej} + T_{vej} \quad (99)$$

Avec

$$T_{fij} = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{r_{egj}}{2D}\right) T_{fejj} + \left(1 - \frac{r_{edj}}{2D}\right) T_{fedj} - \left(1 + \frac{r_{igj}}{2D}\right) T_{figj} - \left(1 + \frac{r_{idj}}{2D}\right) T_{fidj} \right) \quad (100)$$

$$T_{fej} = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{r_{igj}}{2D}\right) T_{figj} + \left(1 - \frac{r_{idj}}{2D}\right) T_{fidj} - \left(1 + \frac{r_{egj}}{2D}\right) T_{fejj} - \left(1 + \frac{r_{edj}}{2D}\right) T_{fedj} \right) \quad (101)$$

$$T_{Nj} = \frac{1}{2} \mu_r (N_{ij} + N_{ej}) \quad (102)$$

$$T_{vij} = m \frac{D_p}{2} \gamma_c - I \cdot \frac{\gamma_r}{D} \quad (103)$$

$$T_{vej} = -m \frac{D_p}{2} \gamma_c - I \cdot \frac{\gamma_r}{D} \quad (104)$$

Le calcul des torseurs d'efforts globaux au centre des bagues est réalisé de la même manière que dans le cas des billes en tenant compte des efforts supplémentaires aux épaulements. La même séparation

est effectuée entre les efforts dépendant de l'accélération angulaire de la bague intérieure et les autres. Le point d'application des efforts normaux et tangentiels sur les chemins de roulements est associé au barycentre des efforts normaux. La position de ce point dans le repère global peut s'écrire ainsi.

$$\overrightarrow{OP_{ij}} = \begin{cases} \frac{D_i}{2} \cos(\phi_j) + b_{ij} \sin(\phi_j) \\ \frac{D_i}{2} \sin(\phi_j) - b_{ij} \cos(\phi_j) \\ \frac{\sum z_k n_{ijk}}{\sum n_{ijk}} \end{cases} \quad \overrightarrow{OP_{ej}} = \begin{cases} \frac{D_e}{2} \cos(\phi_j) - b_e \sin(\phi_j) \\ \frac{D_e}{2} \sin(\phi_j) + b_e \cos(\phi_j) \\ \frac{\sum z_k n_{ejk}}{\sum n_{ejk}} \end{cases} \quad (105)$$

Les positions des points d'application des efforts aux épaulements sont données ci-dessous.

$$\overrightarrow{OP_{igj}} = \begin{cases} \left(\frac{D_i}{2} + \frac{D}{2} - r_{igj}\right) \cos(\phi_j) \\ \left(\frac{D_i}{2} + \frac{D}{2} - r_{igj}\right) \sin(\phi_j) \\ -\frac{L}{2} \end{cases} \quad \overrightarrow{OP_{idj}} = \begin{cases} \left(\frac{D_i}{2} + \frac{D}{2} - r_{igj}\right) \cos(\phi_j) \\ \left(\frac{D_i}{2} + \frac{D}{2} - r_{igj}\right) \sin(\phi_j) \\ \frac{L}{2} \end{cases} \quad (106)$$

$$\overrightarrow{OP_{egj}} = \begin{cases} \left(\frac{D_e}{2} - \frac{D}{2} + r_{edj}\right) \cos(\phi_j) \\ \left(\frac{D_e}{2} - \frac{D}{2} + r_{edj}\right) \sin(\phi_j) \\ -\frac{L}{2} \end{cases} \quad \overrightarrow{OP_{edj}} = \begin{cases} \left(\frac{D_e}{2} - \frac{D}{2} + r_{edj}\right) \cos(\phi_j) \\ \left(\frac{D_e}{2} - \frac{D}{2} + r_{edj}\right) \sin(\phi_j) \\ \frac{L}{2} \end{cases}$$

II.5 – Endommagements

L'un des objectifs principaux du modèle de roulement développé ici est d'être utilisable dans la simulation d'une transmission endommagée. Il est donc impératif qu'un écaillage puisse être introduit sur l'une des deux bagues. Ce type d'endommagement peut être de géométrie complexe en réalité et s'étendre sur une large zone de la bague concernée. Puisqu'il est désiré de pouvoir détecter un endommagement aussi tôt que possible, la simulation se limite à des écaillages de faibles dimensions. De plus, pour des raisons de simplicité, ceux-ci sont supposés rectangulaires. Ainsi, cinq paramètres introduits au début de ce chapitre et correspondant à leur profondeur, leur position et leur taille permettent de les définir complètement. Cette section est dédiée à l'implémentation de tels endommagements.

Un écaillage est implémenté comme une réduction locale de l'écrasement. Cette réduction est effective si les deux angles définissant la position du point de contact sont inclus dans les plages angulaires définissant l'écaillage. La vérification de ces conditions requiert de connaître les angles de contact sur les bagues et donc la position d'équilibre. Par conséquent, un premier calcul de celle-ci est effectué sans tenir compte de l'écaillage. Dans le cas où le point de contact sur la bague écaillée est suffisamment proche de l'écaillage pour que l'ellipse de contact recouvre une partie de la zone endommagée, une seconde recherche de la position d'équilibre est effectuée pour laquelle le calcul de l'effort normal de contact est modifié. La théorie de Hertz présentée dans la section précédente donne les expressions du demi grand axe a et du demi petit axe b de l'ellipse de contact.

$$a = \left(\frac{6 \cdot \varepsilon(\kappa) \cdot \kappa^2}{\pi \cdot \Sigma \rho \cdot E^*} N \right)^{\frac{1}{3}} \quad b = \left(\frac{6 \cdot \varepsilon(\kappa)}{\pi \cdot \kappa \cdot \Sigma \rho \cdot E^*} N \right)^{\frac{1}{3}} \quad (107)$$

Il est alors possible de calculer les largeurs angulaires de l'ellipse sur la bague dans les deux directions. Dans la suite de cette section, l'indice τ fait référence à la bague endommagée. Ainsi, $\tau \in \{i, e\}$.

$$\Delta\phi_{cont} = \frac{b}{R_\tau} \quad \Delta\beta_{cont} = \frac{a}{R_{c\tau}} \quad (108)$$

Les deux conditions à remplir simultanément pour que la bille j soit en contact partiel ou total sur l'écaillage peuvent donc s'écrire comme suit. La condition portant sur le repérage autour de l'axe de rotation principale est plus délicate en raison de la congruence modulo 2π de la position angulaire de la bille. Afin de rester concis, on ne présente ici que la condition à respecter dans le cas où l'écaillage est suffisamment loin de l'origine de l'angle repérant la rotation $\phi = 0$, c'est-à-dire que la plage angulaire définissant l'écaillage ne chevauche pas cette position.

$$\text{Condition en } \beta \quad \left(\beta_{\tau j} > \beta_{ec} - \frac{\Delta\beta_{ec}}{2} - \Delta\beta_{cont} \right) \& \left(\beta_{\tau j} < \beta_{ec} + \frac{\Delta\beta_{ec}}{2} + \Delta\beta_{cont} \right) \quad (109)$$

$$\text{Condition en } \phi \quad \left(\phi_j > \phi_\tau + \phi_{ec} - \frac{\Delta\phi_{ec}}{2} - \Delta\phi_{cont} \right) \& \left(\phi_j < \phi_\tau + \phi_{ec} + \frac{\Delta\phi_{ec}}{2} + \Delta\phi_{cont} \right) \quad (110)$$

Ici, ϕ_τ repère la position angulaire de la bague écaillée. Dans le cas d'un endommagement sur une bague extérieure bloquée en rotation, on a donc toujours $\phi_\tau = 0$.

Lorsque ces deux conditions sont respectées, une nouvelle recherche de la position d'équilibre de la bille doit être effectuée en tenant compte de l'écaillage. Puisque l'ellipse de contact peut n'être que partiellement incluse dans la zone écaillée A_e , il est nécessaire d'adopter un modèle de contact plus complexe que pour une bague saine. Les résolutions élément finis ou semi-analytique de type Boussinesq [81] sont à exclure en raison des temps de calcul qu'elle impliquent. Une méthode hybride a donc été développée pour ce cas d'application. Deux calculs de contact sont réalisés en utilisant les formules de Hertz et fournissent deux répartitions de pression différentes. Le premier considère un contact total sur une bague saine et ne tient pas compte de l'écaillage. Le second suppose que la totalité de l'ellipse de contact est incluse dans l'écaillage et calcule donc la répartition de pression obtenue pour un écrasement $\delta_{\tau jd}$ correspondant à l'écrasement sur bague saine $\delta_{\tau js}$ diminué de la profondeur de l'endommagement. On a donc $\delta_{\tau jd} = \delta_{\tau js} - \delta_{ec}$.

Les répartitions de pression sont obtenues comme suit :

$$p_{\tau js}(x, y) = \frac{3}{2} \frac{C_{\tau j} \delta_{\tau js}^{\frac{3}{2}}}{\pi \cdot a_{\tau js} \cdot b_{\tau js}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_{\tau js}} \right)^2 - \left(\frac{y}{b_{\tau js}} \right)^2} \quad \forall x < a_{\tau js}, \forall y < b_{\tau js} \quad (111)$$

$$p_{\gamma jd}(x, y) = \frac{3}{2} \frac{C_{\tau j} \delta_{\tau jd}^{\frac{3}{2}}}{\pi \cdot a_{\tau jd} \cdot b_{\tau jd}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_{\tau jd}} \right)^2 - \left(\frac{y}{b_{\tau jd}} \right)^2} \quad \forall x < a_{\tau jd}, \forall y < b_{\tau jd} \quad (112)$$

Ces deux répartitions de pression sont ensuite assemblées de sorte que la pression retenue dans la zone écaillée est celle calculée en utilisant un écrasement réduit tandis que la pression retenue en dehors de cette zone correspond à la pression obtenue pour un écrasement sur bague saine. La Figure 41 présente un exemple d'un tel assemblage de pression dans le cas d'un contact partiel sur un écaillage. On peut noter que dans l'exemple fourni, l'écaillage est peu profond puisque la pression de contact, et donc l'écrasement au fond de celui-ci, ne sont pas nuls. En général, la profondeur des écaillages est supérieure la taille caractéristique des écrasements sur les bagues et le contact est simplement perdu sur la zone endommagée.

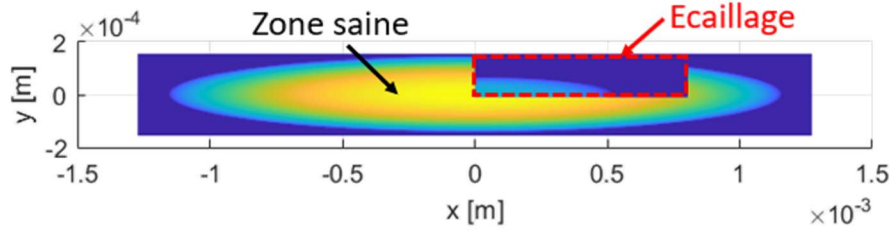


Figure 41 : Exemple d'assemblage de pressions pour un contact partiel sur écaillage.

L'effort normal de contact est finalement déterminé par intégration de la répartition de pression ainsi obtenue.

$$N_{\tau j} = \int_{A_e} p_{\tau jd}(x, y). dx. dy + \int_{\Omega \setminus A_e} p_{\tau js}(x, y). dx. dy \quad (113)$$

Il est important de noter que si cette méthode permet un calcul rapide et réaliste de l'effort de contact sur un écaillage, elle n'est pas exacte et ne prend pas en compte de nombreux effets mécaniques. Notamment, elle néglige les concentrations de pression sur les frontières de la zone endommagée, et suppose que l'effort normal est toujours appliqué au centre des répartitions de pression. Cependant, de telles approximations restent raisonnables dans le cadre de l'étude menée dans ce mémoire puisqu'il ne s'agit pas ici de proposer un modèle dédié au dimensionnement des roulements. De plus, comme mentionné précédemment, la géométrie adoptée pour les écaillages ne reflète pas leur complexité réelle ce qui rend une description exacte du contact superflue.

Le cas des roulements à rouleaux cylindriques est plus simple à traiter. En effet, les différentes tranches du rouleau sont supposées indépendantes ce qui revient à négliger les effets convectifs de déformation du contact. Ceux-ci ayant une longueur caractéristique très faible, l'hypothèse réalisée est facilement vérifiée. Par conséquent, la loi de contact présentée dans la section précédente reste valide et il suffit de tenir compte d'une réduction de l'écrasement calculé pour les tranches de rouleaux en contact sur l'écaillage. L'effort peut donc s'écrire comme suit.

$$N_{ij} = \sum_k n_{ijk} \quad \text{avec} \quad n_{ijk} = \begin{cases} C_{il} (\delta_{ij}(z_k))^{\frac{10}{9}} & \text{si contact sain} \\ C_{il} (\delta_{ij}(z_k) - \delta_{ec})^{\frac{10}{9}} & \text{si contact sur écaillage} \end{cases} \quad (114)$$

Les conditions à remplir pour qu'une tranche de rouleaux soit sur la zone écaillée sont similaire au cas des roulements à billes.

$$\text{Condition en } z \quad \left(z_k > z_{ec} - \frac{L_{ec}}{2} \right) \& \left(z_k < z_{ec} + \frac{L_{ec}}{2} \right) \quad (115)$$

$$\text{Condition en } \phi \quad \left(\phi_j > \phi_{\tau} + \phi_{ec} - \frac{\Delta\phi_{ec}}{2} \right) \& \left(\phi_j < \phi_{\tau} + \phi_{ec} + \frac{\Delta\phi_{ec}}{2} \right) \quad (116)$$

II.6 – Validation numérique en quasi-statique

Une fois le modèle de roulement à billes implémenté, une comparaison avec des outils certifiés ou des résultats expérimentaux s'impose afin de valider sa capacité à estimer les efforts de liaison transmis dans les roulements et son utilisation dans la simulation de la vitesse instantanée d'un système tournant. L'étude présentée dans cette section compare donc les résultats obtenus en conditions quasi-statiques à un code commercial. Une seconde étude prévoyait la comparaison de la vitesse instantanée de rotation mesurée sur un banc partiel destiné à l'étude de la propagation

d'écaillage à la vitesse simulée du même système à l'aide du modèle de roulement présenté dans ce chapitre. Cependant, les résultats des essais menés au sein de Safran Helicopter Engines se sont montrés difficiles à post traiter et la comparaison n'a pas pu être menée à bien et ne sera donc pas présentée. En effet, une étude a posteriori des résultats fournis a pu montrer que la roue phonique utilisée lors des essais présentait une imprécision importante de gravure. Par conséquent, le spectre de la vitesse de rotation était largement parasité par un peigne de raies aux ordres entier. De plus, le design des roulements utilisés leur conférait des fréquences caractéristiques très proches de nombre entier ce qui les rendait difficiles voire impossible à détecter dans le spectre.

II.6.1 – Cas des roulements à billes

La validation s'appuie sur une comparaison en quasi-statique des résultats donnés par le modèle avec ceux issus d'un code commercial. Pour cela, il a été choisi d'utiliser le code RBSDYN, un logiciel de calcul de dynamique d'arbre développé par le CNES et disponible en ligne sur leur site. En particulier, le module RBS2 (aussi appelé RMS4) fourni avec ce code, permet de calculer la répartition des charges sur les éléments roulants pour des pilotages en efforts ou en déplacements. Afin de se rapprocher au maximum du modèle développé dans ce chapitre, RBS2 a été utilisé dans son deuxième mode de fonctionnement. Ainsi, pour les deux modèles à comparer, les données d'entrées correspondaient aux déplacements de la bague intérieure du roulement. La bague extérieure était dans les deux cas supposée encastree. Les paramètres géométriques et matériaux requis pour la définition du roulement étaient identiques dans les deux cas et sont résumés dans le Tableau 5. La géométrie correspond à celle du roulement à billes à gorges profondes présent sur l'arbre de sortie du réducteur aéronautique présenté en introduction. Toutefois, pour des raisons de confidentialité et de simplicité, les paramètres matériaux utilisés sont arbitraires et correspondent à un acier classique.

Paramètres	Valeurs
Module d'Young (bagues et billes)	210 GPa
Coefficient de Poisson (bagues et billes)	0.3
Masse volumique (bagues et billes)	7 800 kg/m ³
Rayon fond de gorge BI	33.65 mm
Rayon fond de gorge BE	46.35 mm
Rayon de courbure BI	6.477 mm
Rayon de courbure BE	6.572 mm
Rayon de bille	6.35 mm
Nombre de billes	11
Jeu radial total	45 µm
Vitesse de rotation	6 000 tr/min

Tableau 5 : Paramètres géométriques et matériaux pour validation du modèle de roulement à billes

Quelques différences de modélisation existent entre les deux outils comparés. D'une part, RBS2 se passe de l'hypothèse selon laquelle les billes sont régulièrement espacées en angle. Par conséquent, le calcul de la vitesse de rotation et de l'effort centrifuge est effectué séparément pour chacune d'entre elles, ce qui peut engendrer de faibles différences par rapport au modèle proposé ici. De plus, la méthode de calcul des efforts tangentiels de contact n'est pas connue et se veut précise. Notamment, le couple de dissipation dans le roulement fourni par RBS2 tient compte du brassage du lubrifiant. Dans le modèle présenté ici, seules les variations de ce couple engendrées par l'évolution de la répartition des charges sur les éléments roulants sont considérées. Par conséquent, les résultats en termes de couple résistant ne sont pas comparables en quasi-statique. Enfin, RBS2 n'intègre pas la

possibilité de lancer des calculs en présence d'écaillage. La comparaison sera donc faite sur un roulement sain.

La confrontation des résultats est effectuée sur les efforts radiaux et axiaux ainsi que les couples de basculement transmis dans le roulement. De plus, les efforts normaux et les angles de contact seront comparés. Plusieurs cas test ont été effectués pour des déplacements de la bague intérieure de complexités différentes. Ceux-ci sont résumés dans le Tableau 6. Ainsi, les trois premiers cas test ne comprennent qu'un déplacement élémentaire de la bague intérieure (axial, radial et basculement). Les deux derniers sont plus complexes et combinent plusieurs types de déplacements. Afin de limiter les répétitions dans cette section, seuls les résultats des cas de validations le plus simple et le plus complexe sont détaillés ici.

Cas test	Déplacement axial (Z) [μm]	Déplacement radial (Y) [μm]	Basculement (Y) [$^\circ$]
1	150	0	0
2	0	55	0
3	0	0	0.25
4	130	30	0
5	110	20	0.1

Tableau 6 : Cas de validation quasi-statique pour les roulements à billes

Déplacement axial simple

Ce cas test occupe une place particulière. En effet, vu le déplacement imposé, toutes les billes sont dans un état identique. Par conséquent, il est inutile de tracer l'évolution des conditions de contact en fonction des billes. Les résultats sont donc donnés dans le Tableau 7. On remarque que pour ce cas de déplacement, les écarts constatés sont très faibles. Cela conduit à des écarts tout aussi faibles sur le torseur global donné dans le Tableau 8.

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Effort normal BI [N]	443.7	443.7	0.0 %
Effort normal BE [N]	465.7	465.7	0.0 %
Angle de contact BI [$^\circ$]	25.47	25.48	0.1 %
Angle de contact BE [$^\circ$]	24.19	24.18	0.0 %

Tableau 7 : Conditions de contact pour un déplacement axial

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Fx [N]	0	0	0.0 %
Fy [N]	0	0	0.0 %
Fz [N]	2 098.8	2 098.7	0.1 %
Cx [Nm]	0	0	0.0 %
Cy [Nm]	0	0	0.0 %

Tableau 8 : Efforts transmis en déplacement axial pur

Déplacement complexe

Ce cas de déplacement correspond au cas test 5 et combine des déplacements axiaux, radiaux et en basculement. La répartition des charges sur les billes n'étant pas uniforme, l'évolution des efforts et des angles de contact est tracée sur la Figure 42. Sur cette figure, les résultats donnés par RBS2 apparaissent en rouge tandis que les résultats fournis par le modèle de roulement présenté dans cette section sont tracés en bleu. De plus, les efforts et angles de contact sont repérés par des croix pour la bague intérieure et par des cercles pour la bague extérieure. On peut remarquer que les résultats sont

très proches. En effet, les tracés bleus et rouges sont quasiment confondus. Toutefois, les tracés d'efforts normaux s'espacent légèrement pour la bille numéro 6. Cela s'explique par les angles de contact particuliers pour cette bille. En effet, en raison de l'angle de contact sur bague intérieure extrême, la vitesse de rotation de cette bille et donc l'effort centrifuge calculé dans RBS2 sont très différents de ceux calculés dans notre modèle. Cependant, puisque cette bille est faiblement chargée, cela n'a que peu d'effet sur les efforts globaux comme le montre le Tableau 9.

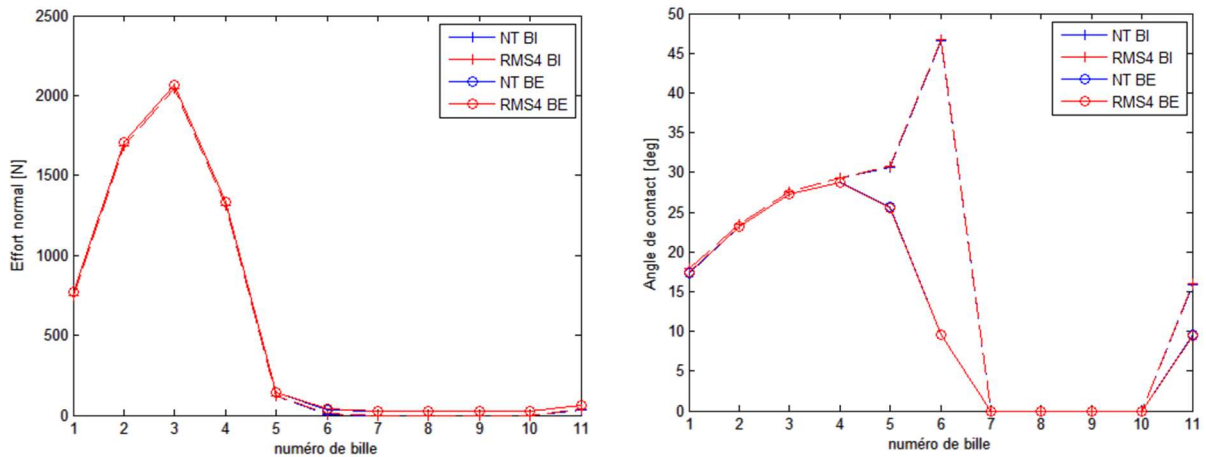


Figure 42 : Evolution des efforts et des angles de contact pour un déplacement complexe

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Fx [N]	3 677.3	3 676.3	0.0 %
Fy [N]	2 562	2 559.7	0.1 %
Fz [N]	2 568.5	2 572.2	0.1 %
Cx [Nm]	42.55	42.41	0.3 %
Cy [Nm]	76.12	76.12	0.0 %

Tableau 9 : Efforts transmis en déplacement complexe

II.6.2 – Cas des roulements à rouleaux cylindriques

Le modèle de roulement à rouleaux a été validé selon les mêmes principes. Le code utilisé comme comparaison se nomme Carol2 et est également intégré à RBSDYN. De même que pour les roulements à bille, la comparaison a été effectuée sur les efforts radiaux et axiaux transmis lors de l'imposition d'un déplacement sur la bague intérieure. De plus, les efforts linéiques de contact et les angles d'orientation des rouleaux obtenus sont confrontés à la référence. La géométrie du roulement utilisée est donnée dans le Tableau 10. Elle correspond à celle d'un roulement intégré sur l'arbre lent d'un réducteur aéronautique. Les différents cas de validation sont similaires à ceux utilisés pour les roulements à bille et sont listés dans le Tableau 11. Cependant, le roulement étudié ne comportant pas d'épaule sur la bague intérieure, aucun cas de chargement axial n'est étudié. Dans cette configuration, les efforts appliqués sur les épaulements sont le reflet de la partie axiale des efforts normaux de contact sur les chemins de roulement et assurent l'équilibre axial du rouleau. Par conséquent, leur étude n'apporte pas d'information supplémentaire. La comparaison des efforts obtenus avec les deux modèles ne présente pas d'intérêt particulier et, bien qu'elle ait été réalisée, elle ne sera pas présentée ici.

Paramètre	Valeur
Module d'Young (bagues et rouleaux)	210 GPa
Coefficient de Poisson (bagues et rouleaux)	0.3
Masse volumique (bagues et rouleaux)	7 800 kg/m ³
Diamètre BI	62.5 mm
Diamètre BE	82.5 mm
Largeur totale rouleau	10 mm
Rayon de congé	1.1 mm
Largeur de la partie cylindrique du rouleau	7 mm
Nombre de rouleaux	18
Jeu radial total	20 µm
Jeu axial total	20 µm
Vitesse de rotation	6 000 rpm
Epaulements présents	2 épaulements BE
Angle de dépouille épaulement	0.1 degré

Tableau 10 : Paramètres géométriques et matériaux du roulement à rouleaux utilisé en validation

Cas test	Déplacement axial (Z) [µm]	Déplacement radial (Y) [µm]	Basculement (Y) [°]
1	0	15	0
2	0	25	0
3	0	30	0
4	0	0	0.35
5	0	0	0.5
6	0	0	0.7
7	0	25	0.5

Tableau 11 : Cas de validation quasi-statique pour les roulements à rouleaux

Cas de déplacement radial

Il s'agit du cas de déplacement le plus simple pour les roulements à rouleaux cylindriques. En effet, lorsqu'un déplacement purement radial est imposé à la bague intérieure, aucun contact sur les épaulements n'est constaté et les angles d'orientation des rouleaux restent nuls. De même, aucun effort axial ni aucun couple de basculement ne sont générés. Par conséquent, seule la répartition des charges sur les éléments roulants et l'effort radial résultant sont discutés. Les résultats obtenus pour les trois premiers cas tests sont donnés sur la Figure 43 et le Tableau 12. Des différences sont observées entre les deux modèles comparés. En effet la loi de contact permettant de calculer l'effort en fonction de l'écrasement est inconnue dans le cas de Carol2 et est différente de celle utilisée dans le modèle à valider. On remarque en effet que pour de petits écrasements obtenus pour un déplacement radial faible, les efforts de contact fournis par Carol2 sont supérieurs alors que pour des écrasements plus grands, ils sont inférieurs. Ceci laisse penser que le caractère non-linéaire de la loi de contact implémentée dans Carol2 est plus faible que la loi de Palmgren retenue. Cependant, malgré les différences constatées, les efforts calculés et la répartition des charges sur les éléments roulants restent similaires.

Déplacement radial [µm]	Modèle à valider [N]	Référence [N]	Ecart
15	1 335.0	1 420.8	6.0 %
25	6 171.2	6 176.9	0.1 %
30	9 095.5	8 954	1.6 %

Tableau 12 : Comparaison des efforts radiaux transmis

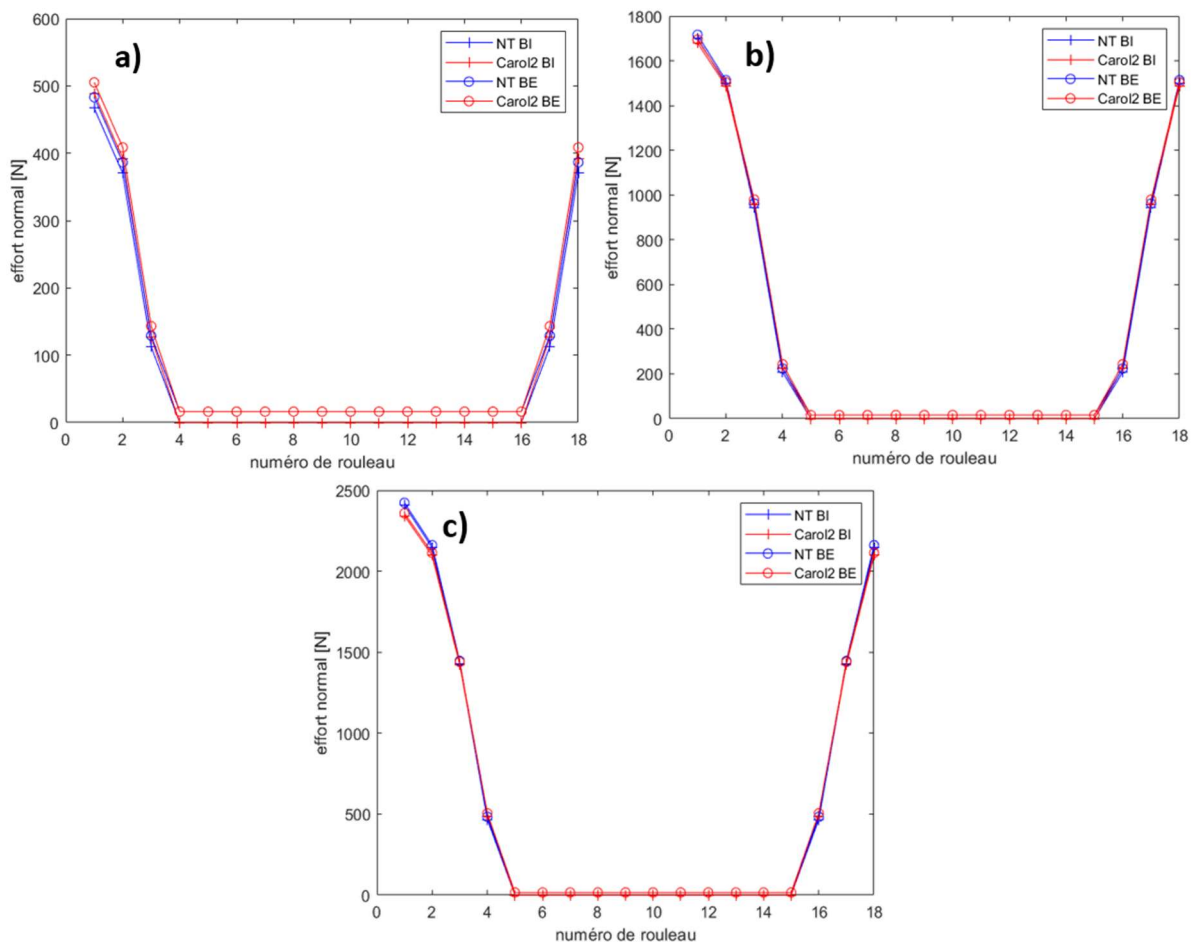


Figure 43 : Efforts de contact sur les chemins de roulement pour plusieurs déplacements radial (a) 15 μm ; (b) 25 μm ; (c) 30 μm

Cas de basculement

Le cas de basculement est plus complexe car les angles d'orientation des rouleaux sont modifiés. Les résultats obtenus sont comparés sur la Figure 44. Le Tableau 13 présente les couples de résistance au basculement calculés pour chaque cas test. A nouveau, en raison de la différence des lois de contacts linéiques, des différences sont observables entre les deux modèles pour les efforts de contact sur les chemins de roulement. Celle-ci sont néanmoins plus faibles pour de grands basculements. En revanche, les angles d'inclinaison des rouleaux calculés par le modèle présenté sont très proches des résultats de référence. Les couples de résistances au basculement constatés diffèrent quant à eux légèrement mais restent toutefois assez proches.

Basculement [degrés]	Modèle à valider [Nm]	Référence [Nm]	Ecart
0.35	4.80	4.54	5.7 %
0.5	14.56	13.69	6.4 %
0.7	32.43	33.39	2.9 %

Tableau 13 : Comparaison des moments de résistance au basculement

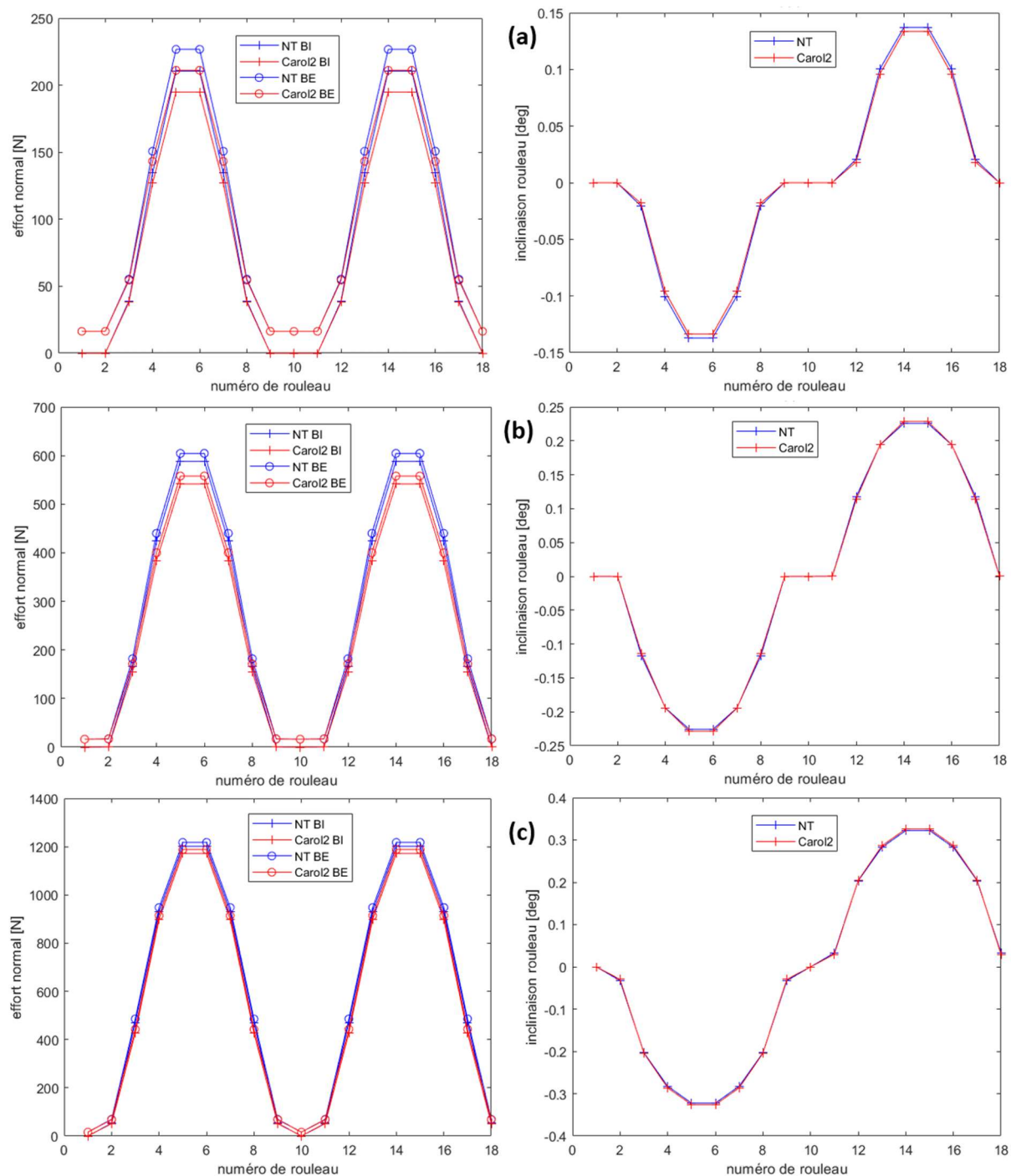


Figure 44 : Efforts de contact et angles d'inclinaison des rouleaux pour plusieurs basculements. (a) 0.35° ; (b) 0.5° ; (c) 0.7°

Cas de déplacements combinés

Le cas de déplacement combiné est le cas test le plus important puisqu'il est le plus proche des conditions réelles de fonctionnement du roulement. Les répartitions de charge et les angles d'inclinaison des rouleaux sont donnés sur la Figure 45 tandis que les torseurs totaux transmis sur la bague intérieure sont comparés dans le Tableau 14. Les résultats fournis par les deux modèles sont très proches pour ce cas de chargement.

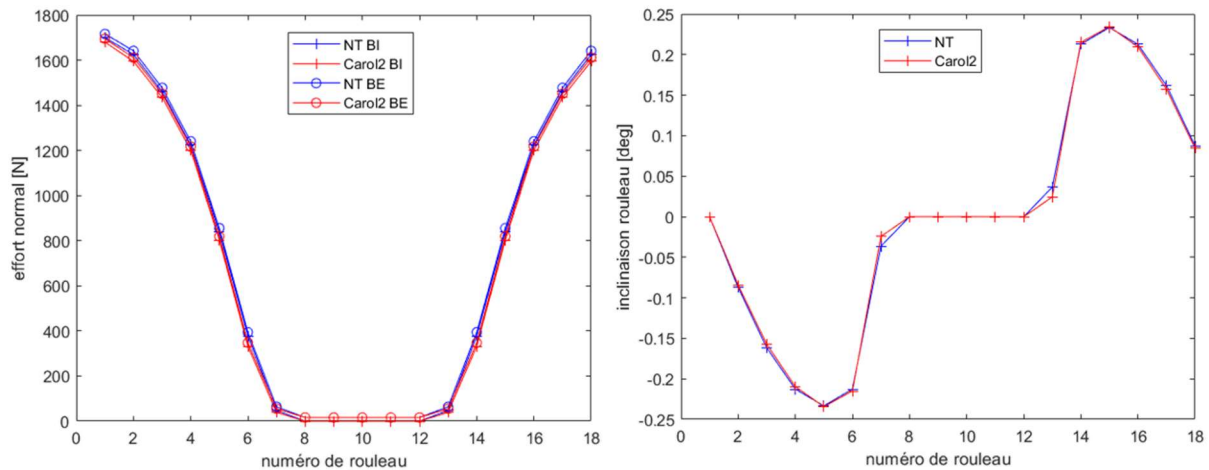


Figure 45 : Efforts de contact et angles d'inclinaison des rouleaux pour un déplacement composé

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Fx [N]	0	0	0.0 %
Fy [N]	8 328.5	8 200.5	1.6 %
Fz [N]	0	0	0.0 %
Cx [Nm]	0	0	0.0 %
Cy [Nm]	21.06	21.07	0.0 %

Tableau 14 : Comparaison des torseurs transmis pour un déplacement composé

II.6.3 – Décision

Les résultats fournis par le modèle de roulement à bille présenté dans cette section sont très proches des valeurs utilisées comme référence. Certaines différences de second ordre restent toutefois observables et sont liées aux hypothèses retenues lors de la création du modèle.

Bien que les écarts observés soient plus prononcés pour les roulements à rouleaux cylindriques que dans le cas des roulements à billes, ils restent de l'ordre de 5% ou inférieurs. De plus, ils sont majoritairement dus à la différence de loi de comportement au contact linéique. Sans information sur les choix réalisés lors de la création de Carol2, il a été décidé de conserver la loi de Palmgren dans le modèle présenté dans cette section.

Malgré quelques différences par rapports aux outils de référence expliquées par les choix de modélisation, la capacité des modèles de roulement à billes et à rouleaux cylindriques à estimer la répartition des charges sur les éléments roulants et les torseurs d'efforts transmis d'une bague à l'autre a donc été validée. Toutefois, une validation dynamique complémentaire des résultats obtenus sur la base de résultats expérimentaux serait souhaitable et constitue l'une des pistes à explorer lors de travaux futurs. De plus, la validation de la prise en compte des écaillages n'a pas pu être réalisée sur la base des outils présentés. Une comparaison des efforts de contact calculés sur un endommagement avec des résultats éléments finis est envisagée.

II.7 – Etude de comportement

Les modèles présentés dans cette section ont vocation à être intégrés dans une simulation de réducteur complet qui fait l'objet du dernier chapitre de ce mémoire. Cependant, une étude préliminaire du comportement des roulements à billes pour différentes conditions de chargement permet une meilleure compréhension de l'influence de celles-ci sur leur comportement dynamique. Cette section s'attache à la description du système académique minimaliste qui a été utilisé ainsi qu'à l'estimation qualitative de la sensibilité du roulement à des variations de charge axiale, de vitesse de rotation et à la présence d'un écaillage. Aucun roulement à rouleaux n'est introduit dans les simulations présentées ici. Cependant, ils seront utilisés lors de la modélisation d'un réducteur complet dans le dernier chapitre de ce manuscrit.

II.6.1 – Présentation du système d'étude

L'étude porte uniquement sur le comportement des roulements à billes. Par conséquent, le système modélisé a été volontairement réduit au minimum permettant des simulations réalistes. Celui-ci est schématisé sur la Figure 46 et se compose d'un arbre tournant de section constante supporté par deux roulements à billes. Un disque rigide dont les dimensions et l'inertie sont représentatives d'une roue d'engrenage est ajouté au centre de l'arbre. Un couple moteur C_m et un couple résistant C_r sont appliqués aux deux extrémités de l'arbre. De plus, des couples de dissipations sont ajoutés aux nœuds des roulements. Enfin, un effort radial F_r et un effort axial F_a sont appliqués sur le nœud associé au disque. Les paramètres géométriques matériaux et les chargements sont donnés dans le Tableau 15. Afin de simplifier l'analyse le matériau utilisé pour l'arbre, les bagues et les billes des roulements est le même. Les deux roulements ont des géométries identiques et correspondent à celle du roulement utilisé dans la section dédiée à la validation du modèle. Seul le nombre de billes diffère afin d'éviter qu'ils n'aient les mêmes fréquences caractéristiques. Afin d'étudier les différences de comportement en présence ou non de charge axiale et dans le but de se rapprocher d'une architecture réaliste, la bague extérieure du premier roulement est libre de se déplacer axialement tandis que les mouvements de celle du second sont bloqués dans cette direction de sorte qu'il supporte seul la charge axiale.

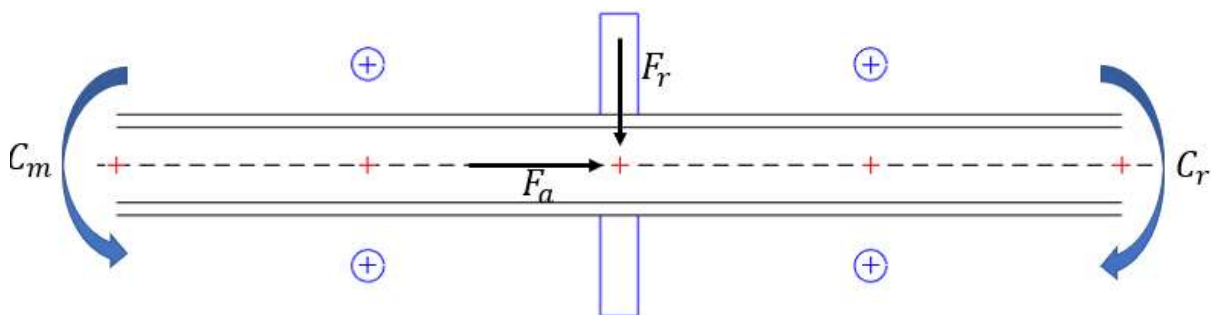


Figure 46 : Schéma du système académique minimaliste utilisé

Plusieurs simulations ont été lancées et comparées. Une première simulation, dite de référence, correspond au chargement nominal. Les autres ont été réalisées en ne faisant varier qu'un paramètre par rapport à la référence afin d'en étudier l'influence. Les différents jeux de paramètres sont récapitulés dans le Tableau 16.

Paramètre	Valeur
Diamètre intérieur de l'arbre	30 mm
Diamètre extérieur de l'arbre	40 mm
Longueur de l'arbre	400 mm
Diamètre bague intérieure	67.3 mm
Diamètre bague extérieure	92.7 mm
Nombre de billes	Roulement de gauche : 11 de droite : 10
Masse volumique	7800 kg/m ³
Coefficient de Poisson	0.3
Module d'Young	200 GPa

Tableau 15 : Paramètres de simulation

	1) Référence	2) Haute vitesse	3) Forte charge axiale	4) Ecaillage
Charge radiale F_r	600 N	600 N	600 N	600 N
Charge axiale F_a	200 N	200 N	1 000 N	200 N
Vitesse de rotation	6 000 tr/min	20 000 tr/min	6 000 tr/min	6 000 tr/min
Présence d'écaillage	Aucun	Aucun	Aucun	BE

Tableau 16 : Cas tests

Par la suite, comme indiqué dans le premier chapitre de ce manuscrit et bien que le modèle présenté permette l'estimation des vibrations, l'étude se porte essentiellement sur la vitesse instantanée de rotation. De plus, les évolutions de celle-ci sont tracées en fonction de la position angulaire de l'arbre et non du temps. De même, les transformées de Fourier sont effectuées en angle et non en temps. L'unité utilisée est l'évènement par tour (ev/tr) par analogie au Hertz. L'intérêt de cette représentation est discuté en détail dans le dernier chapitre de ce document. La Figure 47 montre la vitesse instantanée de rotation dans le domaine physique et dans le domaine spectral obtenue pour la simulation de référence. Sur cette figure, les pics associés aux « Ball Pass Frequency on Outer Ring » (BPFO) des roulements sont repérés par des carrés tandis que les multiples de ces fréquences sont marqués par des points.

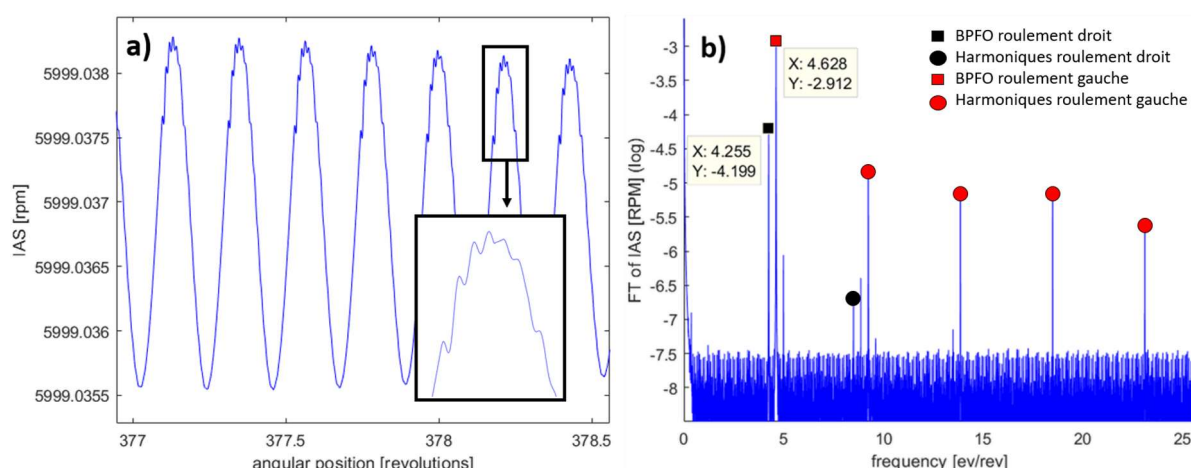


Figure 47 : IAS dans le domaine physique (a) et dans le domaine spectral (b)

Plusieurs remarques peuvent être faites sur ces résultats. D'une part, il ressort que même sans endommagement, les roulements génèrent des couples résistant variables et périodiques qui introduisent des variations de vitesse de rotation. Ce phénomène s'explique par l'évolution de la répartition des charges sur les différents éléments roulants au cours de la rotation. En effet, comme

cela a été introduit dans le premier chapitre, la somme des efforts normaux sur la BI varie à la fréquence de passage des billes sous la charge radiale. Cette somme est directement liée au couple résistant généré par la résistance au roulement, ce qui explique les variations de vitesse observées. Dans le spectre présenté Figure 47b, seule les BPFOs des deux roulements apparaissent car les chargements imposés sur ceux-ci sont fixes dans le repère global. La présence d'efforts tournants comme un balourd ou un endommagement sur la bague intérieure conduirait à l'apparition dans ce spectre de la BPFI.

D'autre part, il peut être noté que les perturbations de vitesse de rotation associées aux deux roulements sont de forme et d'amplitude différentes. Ainsi, le roulement supportant une charge axiale engendre des variations de vitesse beaucoup plus faibles que le roulement au chargement purement radial. En effet, en raison de la charge axiale, les billes sont chargées continuellement au cours de la rotation. De plus, l'intervalle angulaire au cours duquel les billes sont chargées de manière importante est plus étendu. Cette répartition plus uniforme de la charge mène à un partage de la charge radiale sur un plus grand nombre de billes. Par conséquent, les variations de la somme des efforts normaux sur la BI, et donc du couple résistant sur celle-ci, sont plus faibles.

De plus, des oscillations à plus hautes fréquences sont visibles sur la Figure 47a. Elles correspondent à l'excitation d'un mode propre du système par les roulements. Bien que porteuses d'information sur la dynamique de l'arbre, elles ne sont pas utiles dans l'étude du comportement des roulements. Par conséquent leur intérêt est limité dans notre étude et elles ne seront pas discutées par la suite. Des pics supplémentaires sont visibles sur la Figure 47b. Ils correspondent à des modulations et sont caractéristiques de la non linéarité du modèle.

Enfin, il est important de noter que les variations de vitesses de rotation observées ici sont de très faible amplitude. Sur un système réel ou dans une simulation plus complète, il sera impossible de les observer directement dans le domaine physique. En revanche, une transformée de Fourier en angle sur un intervalle angulaire suffisamment long permettra de les faire apparaître dans le spectre. Ce point sera vérifié numériquement dans le dernier chapitre de ce mémoire.

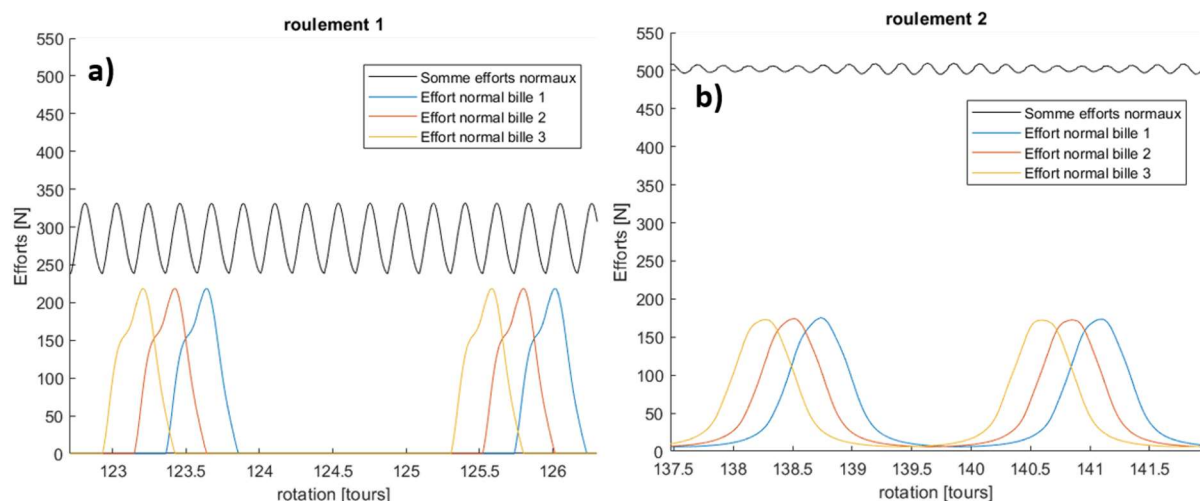


Figure 48 : Evolution des efforts normaux sur bague intérieure pour (a) le roulement chargé radialement et (b) le roulement au chargement mixte

II.6.2 - Influence de la vitesse de rotation

Une modification de la vitesse nominale de rotation a deux impacts majeurs sur le comportement des roulements. D'une part, les fréquences temporelles des excitations liées aux roulements se voient modifiées puisque proportionnelles à la vitesse de rotation. D'autre part l'effort centrifuge s'appliquant sur les billes change, ce qui impacte la position d'équilibre de celles-ci ainsi que les efforts de contact sur les bagues. Dans le but d'observer ces changements, une simulation a été effectuée en portant la vitesse de rotation moyenne à 20 000 tr/min. Pour cela, le couple résistant C_r , appliqué sur l'arbre a été réduit de sorte que, pour un couple d'entrée et un amortissement dans les roulements identiques à ceux de la simulation de référence, la vitesse de rotation se stabilise autour d'une valeur moyenne plus élevée. La Figure 49 compare les variations de vitesse de rotation obtenues pour une haute vitesse aux résultats de référence. Dans les spectres présentés sur cette figure, les BPFOs des deux roulements sont repérées par des marqueurs '+' et 'x' respectivement. Les harmoniques de ces fréquences sont distinguées par des carrés. Ces conventions de repérage seront réutilisées dans les autres spectres de cette section.

La comparaison de ces spectres met en évidence qu'à haute vitesse, les amplitudes des BPFOs sont plus faibles qu'à basse vitesse. En revanche les amplitudes des harmoniques sont plus importantes. Ceci peut s'expliquer par l'augmentation de l'importance des efforts centrifuges. Ceux-ci augmentent l'effort de contact et l'écrasement des billes sur la bague extérieure ce qui résulte en l'apparition d'un jeu équivalent et en une rigidification du contact. Ce phénomène réduit l'intervalle angulaire de contact sur la bague intérieure pour chaque bille comme le montre la Figure 51. Sur celle-ci les courbes inférieures représentent l'effort de contact sur la bague intérieure pour une bille choisie arbitrairement tandis que les courbes supérieures traduisent l'évolution de la somme sur toutes les billes des efforts de contact sur la bague intérieure. Dans le cas du premier roulement, l'intervalle angulaire de contact sur la bague réduit de 0.6 tour à 0.5 tour lors de l'augmentation de la vitesse de rotation. Dans le cas du roulement reprenant la charge axiale, le phénomène est plus visible encore puisque les billes perdent le contact sur la bague sur la moitié de la rotation à haute vitesse alors que ce contact perdurait à tout instant à basse vitesse. Pour les deux roulements, la somme des efforts sur les billes est proche d'une sinusoïde à basse vitesse et s'en éloigne à haute vitesse. Ceci génère un couple et des variations de vitesse instantanée dans lesquelles les harmoniques sont plus énergétiques à haute vitesse qu'à basse vitesse.

La réponse naturelle du système est également plus visible à haute vitesse. Ainsi, deux modes propres apparaissent dans le spectre à basse fréquence et sont repérés par des points rouges. De plus, une zone d'amplification est visible entre 25 et 30 ev/tr en raison de la présence d'un mode de torsion à 26 ev/tr. Il est important de noter que, puisque la fréquence dans le domaine temporel des modes propres ne dépend pas de la vitesse de rotation, leur fréquence dans le domaine angulaire varie comme l'inverse de celle-ci. Par conséquent, les fréquences propres du système apparaissent plus bas dans le spectre en angle à haute vitesse, ce qui les rapproche des excitations des roulements et des harmoniques d'importance. Pour finir, il peut être noté que si la BPFO du premier roulement ne varie pas avec la vitesse de rotation, celle du roulement reprenant la charge axiale diminue de 0.4% à haute vitesse en raison de l'augmentation des efforts centrifuges et de la modification des angles de contact. Afin de mettre ce dernier point en évidence, un zoom sur la BFO du roulement concerné est présenté sur la Figure 50.

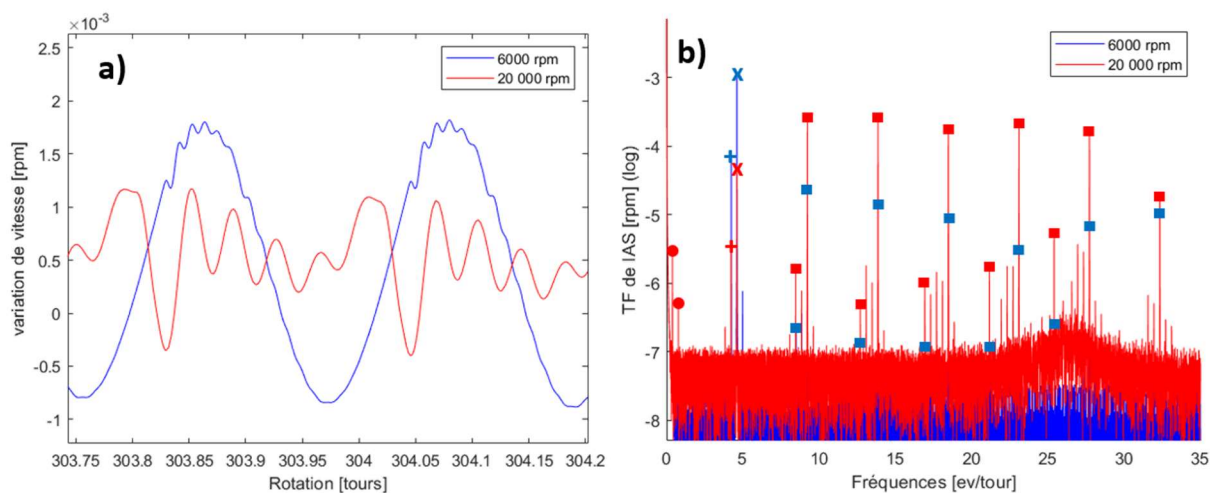


Figure 49 : Variations de vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et le domaine spectral (b) pour les cas test 1 et 2

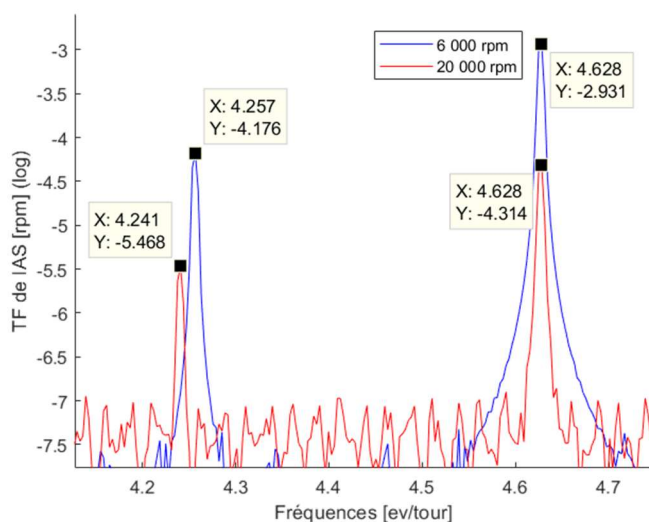


Figure 50 : Mise en évidence de la modification de la BPFO à haute vitesse

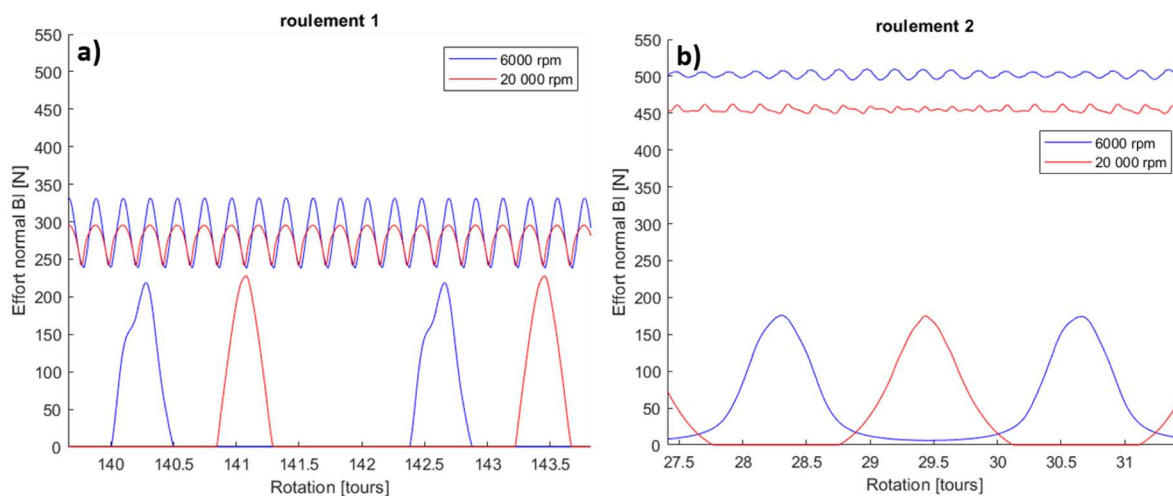


Figure 51 : Comparaison des efforts de contact BI pour les deux roulements à haute et basse vitesse

II.6.3 - Influence de la charge axiale

La charge axiale encaissée par un roulement a plusieurs impacts sur son fonctionnement. Une modification de celle-ci entraîne un changement des angles et des efforts de contact de chaque élément roulant. Par conséquent, la rigidité de contact est également affectée en raison de la loi non linéaire utilisée. De plus, la répartition des charges sur les différents éléments roulants est modifiée. Afin de mettre ces phénomènes en évidence, une troisième simulation a été effectuée pour laquelle l'effort normal appliqué au centre de l'arbre est augmenté de 200 N à 1000 N, le rendant prépondérant devant l'effort radial. Les résultats obtenus sont comparés à la référence. Cependant, la charge axiale n'étant reprise que par un seul roulement, le comportement du second n'est pas affecté par ses fluctuations et ne sera donc pas discuté ici.

La Figure 52 présente la comparaison des résultats obtenus pour une faible et une forte charge radiale. Les marqueurs utilisés restent identiques à ceux de la Figure 49. Il peut être remarqué qu'à forte charge axiale, l'excitation due au roulement d'intérêt n'est pas visible dans le spectre, de même que les modulations observées sur la référence. Ceci s'explique par une charge largement répartie sur les billes et un couple résistant variant très peu. La BPFO du roulement étant une sortie du modèle, elle peut toujours être relevée. Celle-ci augmente de 0.4% par rapport au cas de référence. D'autres simulations, non présentées ici et réalisées pour des charges axiales intermédiaires ont montré que la signature du roulement sur la vitesse de rotation diminue progressivement alors que la charge axiale augmente.

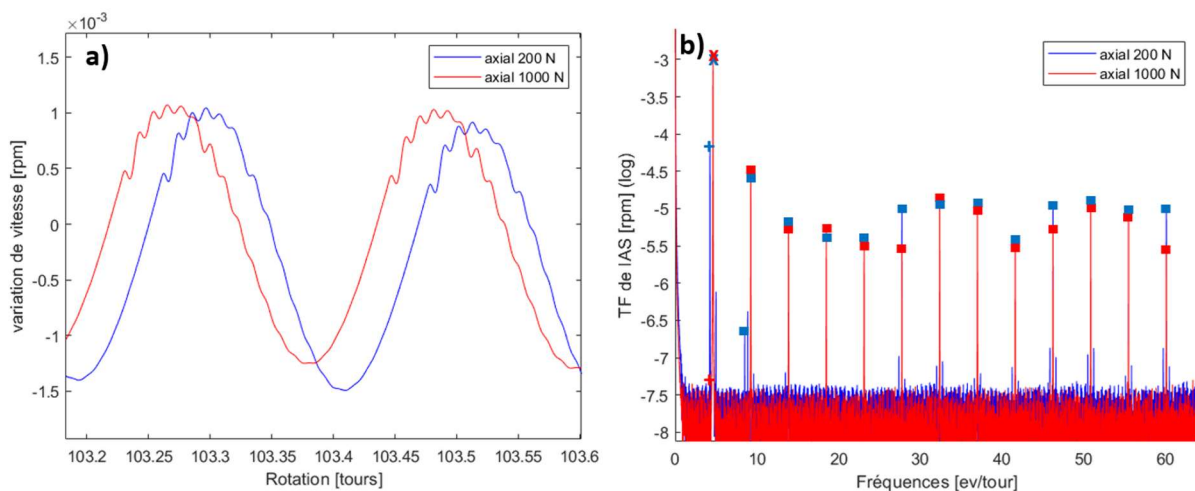


Figure 52 : Variations de vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et le domaine spectral (b) pour les cas test 1 et 3

II.6.4 - Influence d'un endommagement

Le passage d'une bille sur un écaillage modifie la répartition des charges sur les éléments roulants donc le couple résistant transmis dans le roulement et la vitesse de rotation instantanée de l'ensemble. Une quatrième simulation a donc été réalisée en introduisant un endommagement sur la bague extérieure du roulement au chargement purement radial. L'écaillage est localisé dans la zone de charge maximale qui correspond au fond de la gorge de la bague extérieure et dans la direction de l'effort radial. Ce choix est réaliste puisque qu'en conditions réelles les écaillages apparaissent plus facilement dans les zones les plus chargées. En raison des courbures des bagues, les pressions de contact sont en général plus importantes sur la bague intérieure en dehors des cas de haute vitesse. Ainsi, c'est sur cette dernière que les endommagements apparaissent en priorité dans les systèmes

réels. Cependant, bien que le modèle développé permette l'implémentation de défaut sur cette bague, il a été décidé de se focaliser sur un écaillage de la bague extérieure pour simplifier l'étude de la vitesse de rotation. Le défaut présente une profondeur de 100 μm afin d'être représentatif des endommagements constatés en réalité. Sa largeur dans la gorge correspond à environ 25% de la largeur de celle-ci tandis que sa longueur équivaut à 20% de la distance séparant deux billes. Ainsi, $\Delta\beta_e = 30^\circ$ et $\Delta\phi_e = 7^\circ$.

La vitesse de rotation ainsi simulée est comparée à la référence sur la Figure 53. Dans le domaine physique, il est possible de détecter visuellement l'entrée et la sortie d'une bille dans la zone écaillée. Ces deux événements ont été repérés à l'aide de lignes verticales noires. Lors du premier, la diminution de l'effort de contact d'une bille lors du passage sur l'écaillage mène à la diminution du couple résistant et donc une augmentation de la vitesse de rotation instantanée. A la sortie de la zone écaillée, l'effort de contact sur la bague augmente brutalement, générant une augmentation brusque du couple résistant et une diminution de la vitesse de rotation. Les oscillations suivant ces deux événements visibles sur la Figure 53a sont dues à la réponse dynamique du système. L'excitation générée par un roulement endommagé est proche d'un créneau en couple et excite par conséquent les différents modes propres de l'arbre. Comme le montre la Figure 53b, l'excitation produite par le roulement sain reprenant la charge axiale est négligeable devant celle du roulement écaillé. La présence d'un écaillage mène à une augmentation de l'amplitude des variations de vitesse de rotation ainsi qu'à un contenu harmonique plus riche que dans le cas d'un roulement sain. Par conséquent, un tel endommagement sera facilement détectable en pratique.

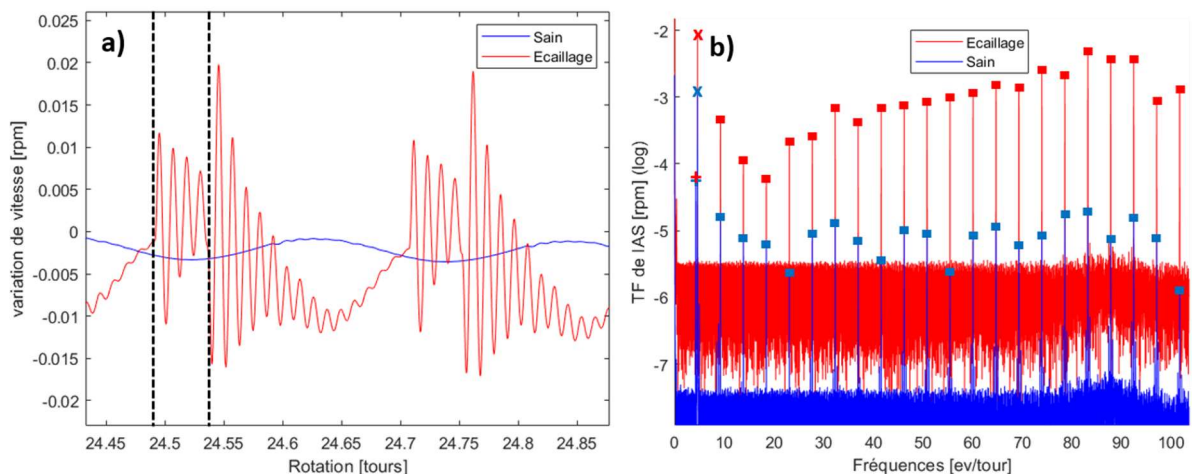


Figure 53 : Variations de vitesse de rotation dans le domaine physique (a) et le domaine spectral (b) pour les cas test 1 et 4

D'autres simulations non présentées ici ont montré que la réponse du système à l'excitation générée par un défaut dépend largement de la vitesse de rotation moyenne. En effet, la localisation fréquentielle des modes propres dans le spectre en fréquence angulaire varie avec cette dernière. De plus, les conditions de contact sur l'écaillage dépendent des efforts centrifuges. Ainsi, comme le montre la Figure 54, l'effort de contact sur la bague intérieure diminue sans s'annuler lors de l'entrée dans l'écaillage pour une vitesse de rotation de 6 000 tr/min. Pour de plus grandes vitesses, en raison des efforts centrifuges qui plaquent la bille sur la bague extérieure, le contact est momentanément perdu sur la zone écaillée. Cette diminution de l'effort de contact mène à un déplacement de compensation de la bague intérieure dans la direction de la charge. Cependant, un tel équilibrage est plus rapide dans le domaine angulaire à basse vitesse.

De même que la vitesse de rotation, la charge axiale joue un rôle d'importance. En effet, comme cela a été vu précédemment pour un roulement sain, lorsque celle-ci augmente, l'excitation produite par le roulement diminue jusqu'à disparaître. En présence de défaut, bien que l'augmentation de la charge axiale tende à une diminution des variations de couple résistant dans le roulement, celles-ci ne disparaissent jamais et restent détectables en se basant sur la vitesse de rotation instantanée. Ainsi, même pour des endommagements identiques, les variations de vitesse de rotation restent pilotées par la dynamique du système, la vitesse de rotation nominale et la charge axiale. Celles-ci doivent donc être maîtrisées et prises en compte dans le diagnostic des roulements.

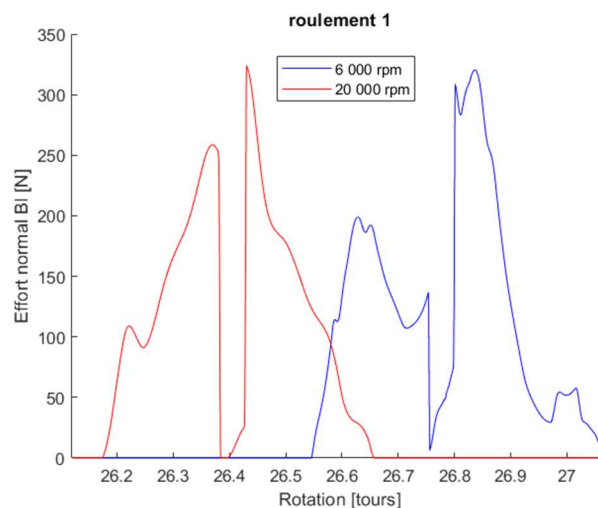


Figure 54 : Comparaison des efforts de contact B_I pour roulements endommagés à différentes vitesses

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, des modèles de calcul des efforts transmis dans les roulements à billes à gorges profondes et à rouleaux cylindriques ont été détaillés. Ces efforts dépendent des déplacements, vitesses et accélérations des centres des bagues. Dans le but d'une intégration dans une simulation dynamique d'un système complexe, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été retenues afin de limiter sa complexité et les temps de calcul requis. En particulier, les bagues sont supposées indéformables et les billes en équilibre quasi-statique dans le plan radial. De plus, il est supposé qu'à chaque contact bille-bague, du roulement sans glissement a lieu. Enfin, la cage n'a pas été modélisée et les éléments roulants sont supposés régulièrement répartis autour de l'axe de rotation.

Les modèles présentés ici intègrent de nombreux apports par rapport aux outils utilisés précédemment dans la simulation de la vitesse de rotation instantanée. D'une part ils tiennent compte des efforts axiaux supportés par les roulements. Des simulations ont mis en évidence que ceux-ci jouaient au premier ordre sur la dynamique du roulement et influent sur l'amplitude, la richesse harmonique et la fréquence des variations de vitesse de rotation générées. D'autre part, des forces centrifuges ont été ajoutés sur les éléments roulants. Il a été montré qu'à haute vitesse, ces efforts ont tendance à réduire la plage angulaire de chargement des billes et à augmenter la richesse harmonique des variations de vitesse engendrées par le roulement. Enfin, la méthode de calcul hybride de l'effort de contact sur un écaillage constitue une amélioration significative et permet de se passer de méthodes « tout ou rien » utilisées jusqu'à présent. Celle-ci menaient à une surestimation de l'influence d'un écaillage en négligeant la présence de contact autour de celui-ci.

Bien que ce ne soit pas là l'objet de l'étude, ce type de modèle est pertinent pour le calcul des efforts radiaux transmis dans le roulement et l'étude des vibrations classiquement utilisées dans le domaine du diagnostic et de la maintenance préventive. L'introduction de résistance au roulement permet d'estimer le couple résistant s'appliquant sur la bague intérieure et les variations de vitesse instantanée de rotation. La prise en compte des déplacements axiaux des bagues et des efforts centrifuges le rend adéquat pour l'étude de conditions de fonctionnement variées et/ou non stationnaires. De plus, l'implémentation d'un écaillage sur l'une ou l'autre des bagues permet la simulation du signal vitesse de rotation en présence de roulement sain ou endommagé et rend possible l'évaluation de méthodes de traitement du signal pour la détection de défaut.

Afin d'étendre l'étude numérique à des transmission complètes, le prochain chapitre portera sur un modèle d'engrenage adapté à l'étude de la vitesse de rotation instantanée. Celui-ci est construit dans les mêmes objectifs que les modèles de roulement présentés ici et des hypothèses similaires sont adoptées.

Chapitre III - Modélisation des engrenages hélicoïdaux

Nomenclature.....	102
Introduction.....	104
III.1 – Etat de l’art	104
<i>III.1.1 – Avant-propos</i>	<i>104</i>
<i>III.1.2 – Modèles à paramètres concentrés</i>	<i>105</i>
<i>III.1.3 – Calcul des variations de raideur d’engrènement.....</i>	<i>106</i>
<i>III.1.4 – Extension du calcul d’écrasement.....</i>	<i>108</i>
<i>III.1.5 – Endommagement des engrenages.....</i>	<i>110</i>
<i>III.1.6 – Positionnement de la thèse sur ces modèles</i>	<i>111</i>
III.2 – Conventions et hypothèses	112
<i>III.2.1 – Intégration dans le modèle de transmission</i>	<i>112</i>
<i>III.2.2 – Paramètres du modèle et définition de l’engrenage</i>	<i>113</i>
<i>III.2.3 – Hypothèses adoptées et fonctionnement du modèle</i>	<i>115</i>
<i>III.2.4 – Calculs préliminaires.....</i>	<i>116</i>
III.3 – Calcul de l’écrasement au contact.....	119
<i>III.3.1 – Ecrasement sur la ligne d’action.....</i>	<i>119</i>
<i>III.3.2 – Contacts hors plan d’action</i>	<i>120</i>
<i>III.3.3 – Congés de raccordement en tête.....</i>	<i>122</i>
<i>III.3.4 – Correction de denture.....</i>	<i>125</i>
III.4 – Loi de contact, raideur et calcul d’effort	126
<i>III.4.1 – Déformation de contact.....</i>	<i>127</i>
<i>III.4.2 – Déformation de denture</i>	<i>127</i>
<i>III.4.3 – Déformation de corps de roue</i>	<i>128</i>
<i>III.4.4 – Efforts normaux et tangentiels.....</i>	<i>130</i>
III.5 – Effets convectifs de flexion	131
III.6 – Validation quasi statique et recalage	132
<i>III.6.1 – Géométrie et modèle éléments finis.....</i>	<i>132</i>
<i>III.6.1 – Comparaison et recalage.....</i>	<i>134</i>
III.7 – Ecaillage et fissure	136
<i>III.7.1 – Ecaillages</i>	<i>136</i>
<i>III.7.2 – Fissures</i>	<i>136</i>
Conclusion partielle	139

Nomenclature

M_a	Matrice de masse des arbres de la transmission
M_{eng}	Matrice de masse relative aux engrenages
K_a	Matrice de raideur des arbres de la transmission
C	Matrice d'amortissement de la transmission
X	Vecteur d'état du système, contient tous les degrés de liberté
F_{ext}	Vecteur des efforts extérieurs
F_{eng}	Vecteur des efforts de restitution dans les engrenages
F_{roul}	Vecteur des efforts de restitution dans les roulements
$(x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$	Position en translation et en rotation du centre de la roue i
m_{di}	Masse du corps de la roue i
I_{dpi}	Inertie principale du corps de la roue i
I_{ddi}	Inertie transverse du corps de la roue i
m_r	Module réel d'engrènement
m_a	Module apparent d'engrènement
α_r	Angle réel de pression
α_a	Angle de pression apparent
β	Angle d'hélice
Z_i	Nombre de dents de la roue i
e	Largeur des dentures
R_{ci}	Rayon de congé en tête de denture pour la roue i
R_{ai}	Rayon d'alésage pour la roue i
R_{fi}	Rayon de fond de dent pour la roue i
R_{ti}	Rayon de tête pour la roue i
R_{ri}	Rayon de raccordement du profil en développante et du pied de dent
R_{pi}	Rayon primitif de la roue i
R_{bi}	Rayon de base de la roue i
h_{pmax}	Dépouille maximale en tête de denture
h_{hmax}	Dépouille maximale aux extrémités de denture
δ_{ec}	Profondeur de l'écaillage
Δz_{ec}	Largeur axiale de l'écaillage
z_{ec}	Position axiale de l'écaillage
Δr_{ec}	Hauteur de l'écaillage
r_{ec}	Position radiale de l'écaillage
$q_c(z)$	Loi de profondeur de la fissure en fonction de la position axiale
$\alpha_c(z)$	Loi d'orientation de la fissure en fonction de la position axiale
$r_c(z)$	Loi de position radiale de la fissure en fonction de la position axiale
K	Nombre de tranches de discrétisation des dents
E_i	Modules d'Young de la roue i
ν_i	Coefficient de Poisson de la roue i
ρ_i	Masse volumique de la roue i
μ	Coefficient de frottement au contact
α_e	Coefficient de dissipation visqueuse au contact
O_i	Centre de la roue i
A_i	Point d'intersection de la ligne d'action avec le cercle de tête de la roue i
G_i	Point de limitation de la ligne d'action tenant compte des congés
T_i	Point de tangence de la ligne d'action sur le cercle de base de la roue i
E, E'	Points d'intersection des cercles de tête
$R_0(O_0, x_0, y_0)$	Repère d'engrènement
P_{g0}	Matrice de passage du repère global au repère d'engrènement

ϕ_i	Angle de conduite partiel pour la roue i
ψ_i	Angle de conduite total pour la roue i
ε_c	Rapport de conduite
β_{rac}	Angle de contact au rayon de raccordement avec le congé de tête
r_{rac}	Rayon de raccordement avec le congé de tête
θ_{ijk}	Angle de repérage d'une tranche k de la dent j de la roue i
P_{jk}	Point de contact sur la tranche k de la dent j
$D_{v,jk}$	Distance à vide sur la tranche k de la dent j
$\Delta\theta_z$	Erreur de transmission
δ_{jk}	Déformation totale sous charge sur la tranche k de la dent j
F_{jk}	Effort de contact sur la tranche k de la dent j
$\delta_{c,jk}$	Déformation de contact sur la tranche k de la dent j
$\delta_{b,jk}$	Déformation de flexion sur la tranche k de la dent j
$\delta_{s,jk}$	Déformation en cisaillement sur la tranche k de la dent j
$\delta_{t,jk}$	Déformation en traction-compression sur la tranche k de la dent j
$\delta_{f,jk}$	Déformation de fondation sur la tranche k de la dent j
$\overrightarrow{F_{v,jk}}$	Effort d'amortissement visqueux au contact sur la tranche k de la dent j
$\overrightarrow{F_{t,jk}}$	Effort tangentiel de frottement au contact sur la tranche k de la dent j
$\overrightarrow{v_n}$	Vitesse normale relative au contact
$\overrightarrow{v_t}$	Vitesse tangentielle relative au contact
$T_{i \rightarrow j}$	Torseur de restitution appliqué sur le nœud j
L_c	Longueur caractéristique des effet convectifs de flexion

Introduction

Les engrenages assurent la transmission de puissance d'un arbre du réducteur à l'autre ainsi que la réduction de la vitesse de rotation qui s'accompagne d'une augmentation du couple transmis. De même que dans le cas des roulements, les efforts transmis à l'engrènement sont variables et les couples appliqués sur les deux arbres qu'il lie évoluent en fonction des déplacements et de la position angulaire de ceux-ci. Ainsi, même en fonctionnement nominal et sans perturbation extérieure, de par la variation du nombre de dents chargées et les déplacements des points de contact dans l'espace, les engrenages génèrent des perturbations de la vitesse de rotation du système. En complément de la modélisation des roulements et des arbres introduits dans les chapitres précédents, il est nécessaire de disposer d'un modèle d'engrènement pour la simulation du comportement d'une transmission aéronautique. De même que pour les roulements, celui-ci se doit d'estimer correctement le couple transmis au centre de chaque roue afin de permettre une simulation fidèle de la vitesse de rotation instantanée de chaque arbre. De plus, dans l'objectif d'une utilisation dans le cadre de la maintenance préventive, l'introduction d'endommagement est envisagée.

Dans une première section, une rapide revue de la littérature sur la modélisation des engrènements est proposée. Elle est majoritairement orientée vers les engrenages hélicoïdaux cylindriques extérieurs présents dans le réducteur étudié. De plus, de même que pour les roulements, les méthodes analytiques ou semi analytiques sont favorisées afin de limiter les temps de calcul et permettre la simulation dynamique d'un système complexe par intégration temporelle. Plusieurs améliorations des modèles classiques existants sont proposées afin d'estimer aussi précisément que possible les variations de vitesse de rotation. Dans les sections suivantes, un modèle d'engrenage adapté à l'étude de la vitesse de rotation et permettant la prise en compte d'endommagement est détaillé. Enfin, ce modèle est validé par comparaison à des calcul éléments finis.

III.1 – Etat de l'art

III.1.1 – Avant-propos

La modélisation des engrenages est un sujet largement abordé dans la littérature depuis plusieurs dizaines d'années. De nombreux papiers traitent de cette question avec des objectifs et des niveaux de détails variés. Cependant, certains outils de caractérisations tels que la raideur d'engrènement et l'erreur de transmission sont largement partagés. La pertinence de la raideur d'engrènement est limitée dans les travaux présentés ici. En effet, elle suppose une linéarisation du comportement de l'engrenage jugée inutile. De plus elle ne suffit à refléter les efforts à l'engrènement qu'en supposant l'écrasement à la denture constant et égal pour chaque paire de dents en contact. Or, comme cela sera discuté par la suite, plusieurs phénomènes peuvent être amenés à modifier localement celui-ci. L'erreur de transmission sera donc privilégiée pour caractériser le comportement de l'engrenage et plusieurs déclinaisons de cette grandeur peuvent être définies.

L'erreur de transmission à vide se définit en l'absence de charge, en conditions statiques ou quasi-statiques et pour une position angulaire donnée d'une roue dentée, par le déplacement angulaire de la seconde roue par rapport à sa position de référence sans erreur de montage ni correction de denture. Elle correspond donc au déplacement angulaire requis pour compenser la modification de distance à vide résultante de ces deux sources de séparation des profils. Un exemple d'une telle erreur de transmission est donné Figure 55.

L'erreur de transmission statique ajoute la prise en compte de la déformation des dentures sous l'effet de la charge appliquée à l'engrènement. Il s'agit de l'outil le plus fréquemment utilisé pour estimer les excitations générées par l'engrenage et optimiser la géométrie de celui-ci.

L'erreur de transmission dynamique correspond, pour une position angulaire donnée d'une roue dentée, au déplacement angulaire de la seconde par rapport à la position qu'elle occuperait sans erreur de montage, sans correction ou déformation de denture, sans chargement ni effet dynamique. Elle est donc représentative du déplacement relatif des roues dentées en conditions de fonctionnement.

Ces différentes erreurs de transmission sont parfois exprimées comme une distance en les ramenant dans le plan d'action. Ceci permet d'étendre leur définition en tenant compte des translations des roues dentées.

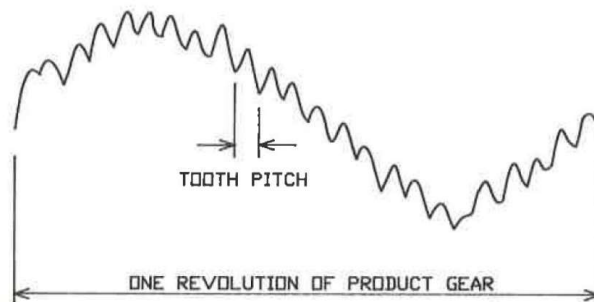


Figure 55 : Exemple d'erreur de transmission à vide selon Munro [82]

Les modèles d'engrènement se déclinent des plus simples, limités à un seul degré de liberté en torsion tels que ceux de Houser & al. [83], Gregory & al. [84] et Kubo [85] aux plus complexes incluant un maillage éléments finis complet des roues en trois dimensions comme ceux de Brauer [86] et Wang [87]. Ces derniers sont beaucoup plus précis et particulièrement adaptés à l'étude quasi-statique des engrenages. Ils permettent de très bonnes estimations des pressions de contact ainsi que des contraintes générées dans les zones critiques, telles que le pied de dent. Par conséquent, ils sont souvent utilisés dans le dimensionnement des engrenages, le calcul de leur durée de vie, l'étude de la propagation de fissures ou encore l'optimisation de la géométrie afin de limiter l'usure ou les vibrations. Cependant, les temps de calcul requis pour les modèles les plus complexes sont importants et en général incompatibles avec des simulations dynamiques. De plus, dans l'objectif du diagnostic d'une transmission, une grande part des informations qu'ils fournissent est superflue. Certains auteurs tels que Del Rincon & al. [88] ou Teixeira Alves & al. [89] développent des modèles hybrides et remplacent donc le calcul du contact, très coûteux en élément finis, par des méthodes semi-analytiques comme celle de Boussinesq [81]. Bien que beaucoup plus rapides, ces modèles restent trop lourds pour les méthodes d'intégration temporelle numériques utilisées en dynamique dans cette thèse. Par conséquent, il a été choisi de se focaliser sur des modèles analytiques à paramètres concentrés.

III.1.2 – Modèles à paramètres concentrés

Ce type de modèle s'appuie en général sur l'hypothèse de rigidité des roues d'engrenages. Leurs déplacements se réduisent alors aux translations et rotations de leur centres. L'un des premiers travaux de ce type est réalisé par Tuplin [90], [91] utilisant un modèle réduit d'engrènement à un degré de liberté présenté sur la Figure 56. Dans celui-ci, seule la torsion est considérée et la raideur

d'engrènement est supposée constante. Des excitations dynamiques sont ajoutées comme des variations de la longueur du ressort correspondant à des erreurs périodiques de montage ou de fabrication de l'engrenage. Ce modèle permet l'étude des efforts dynamiques d'engrènement sous sollicitations extérieures.

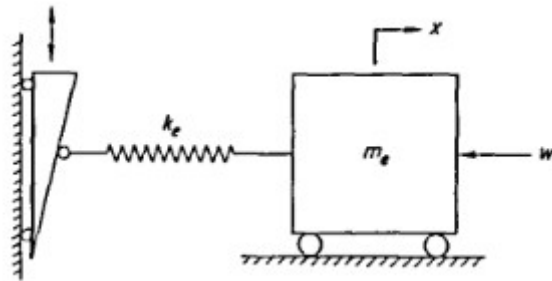


Figure 56 : Modèle équivalent à un degré de liberté de Tuplin [90]

Ces travaux se limitant à des modèles réduits aux phénomènes de torsion, il se sont montrés insuffisants pour décrire correctement la dynamique d'ensembles tournants sujet à des phénomènes de flexion ou de d'inclinaison. Ainsi, certains travaux plus récents se sont attachés à la prise en compte des autres degrés de liberté des roues d'engrenage. Kohler & al. [92] ont ainsi proposé un modèle à six degrés de libertés permettant l'ajout des translations des centres des roues dans le calcul des efforts de contact. Cependant, celui-ci reste limité à une raideur d'engrènement constante et une excitation par erreur de transmission imposée. De même, Fukuma & al. [93] ont couplé un modèle d'engrenage à six degrés de liberté à un arbre flexible et ont pris en compte la souplesse des roulements permettant une étude dynamique plus complète de l'ensemble tournant. L'ajout de ces degrés de liberté complémentaires sont vitaux pour la simulation du comportement des systèmes pour lesquels la torsion n'est pas prédominante ainsi que pour la prise en compte des couplages existants avec les autres composants d'une transmission comme les arbres, les carters et les roulements. D'autres modélisations supposant la raideur d'engrènement constante se retrouvent dans des travaux plus récents comme ceux de Bourdon [16] et Gomez [2]. Ceux-ci tiennent néanmoins compte des couplages introduits par les engrenages entre les phénomènes de torsion et de flexion. Ils sont par conséquent adéquats lorsque l'étude ne porte pas directement sur les excitations générées par les engrènements mais qu'une modélisation limitée de ceux-ci s'avère profitable à l'étude dynamique globale d'un ensemble tournant.

III.1.3 – Calcul des variations de raideur d'engrènement

Il est rapidement devenu évident que la considération de l'évolution du nombre de dents sous charge était nécessaire à la modélisation dynamique des engrènements et à l'estimation des excitations générées par ceux-ci. En effet, au cours de la rotation d'un engrenage droit, plusieurs phases se succèdent au cours desquelles le nombre de paires de dents chargées passe périodiquement d'une à deux comme le montre la Figure 57. Pour des angles d'hélice non nuls, le nombre de dents en contact peut être plus important. Ainsi, dans la même optique que Tuplin, Reswick [95] s'intéressait à l'influence des formes d'erreurs de fabrication des profils de dentures en étudiant un système similaire. La raideur des couples de dents en prise était supposée constante mais la possibilité de contact sur plusieurs dents était prise en compte, faisant ainsi varier la raideur équivalente d'engrènement.

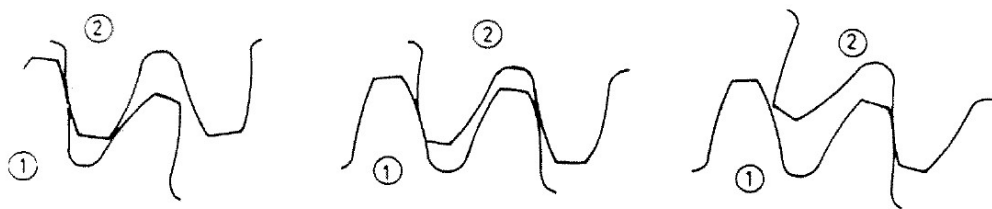


Figure 57 : Evolution du nombre de dents en contact au cours de la rotation [94]

Plus tard Harris [96] a proposé un modèle de torsion tenant compte des variations de raideur d'engrènement, des erreurs de fabrication et de la non linéarité de la raideur de contact due à des pertes de contact en raison de phénomènes dynamiques. La Figure 58 présente les variations d'erreur de transmission et d'effort de contact calculés. Ces travaux sont repris par Gregory & al. [84] afin de les étendre à la prédiction de perte de contact sous l'effet de phénomènes dynamiques. Une autre approche est proposée par Johnson [97], Kohler [98] et Wood [99] qui considèrent une raideur d'engrènement constante et utilisent l'erreur de transmission dynamique mesurée lors d'expérimentation comme une excitation extérieure au système. Cette approche empirique reste toutefois limitée car elle ne permet pas de couplage entre les efforts appliqués sur le système et l'erreur de transmission.

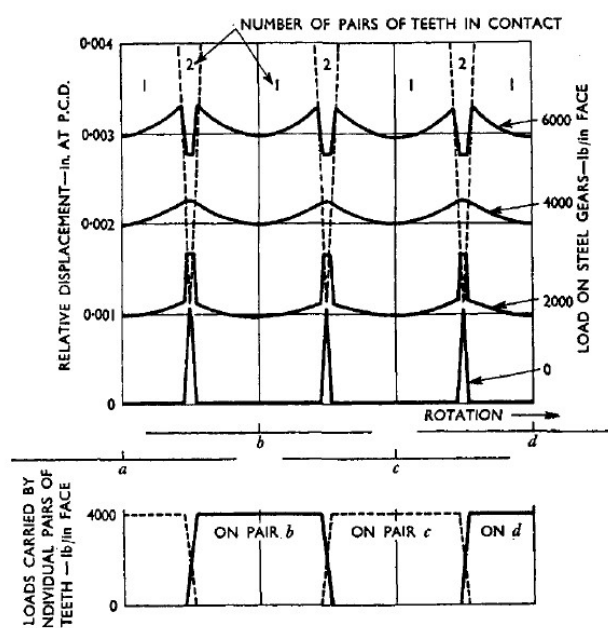


Figure 58 : Evolution de l'erreur de transmission et des efforts de contact selon Harris

Il apparait que la seule variation du nombre de dents en contact ne permet pas d'expliquer les fluctuations de raideur totale d'engrènement. En effet, la raideur de chacune des paires de dents en contact évolue en fonction du déplacement du point de contact sur les profils de denture. Des modèles plus proches de la physique réelle de l'engrènement ont donc été développés en parallèle et sont toujours largement utilisés dans les simulations dynamiques. L'un des premiers travaux proposant une estimation réaliste de la raideur d'engrènement fut réalisé par Weber [100] puis repris et amélioré avec Banaschek [101]. Ils se basent sur l'assimilation des dents d'engrenage à des poutres encastrees-libres à section non constantes. La raideur ainsi calculée tient compte de la déformation des dents, du contact et de la fondation, associée à un plan élastique semi-infini. Elle évolue au cours de la rotation en tenant compte d'une part du nombre de dents sous charge et d'autre part du déplacement du point d'application de l'effort de contact le long du profil des dentures. Plus tard, Lin & al. [102]–[104]

proposent un travail similaire. Ces travaux ont été repris et améliorés par de nombreux auteurs au cours des dernières décennies. La Figure 59 montre l'erreur de transmission statique ainsi calculée en fonction de la rotation des arbres. O'Donnell [105] est revenu sur le calcul des contraintes dans une poutre encastrée libre et a mis en évidence l'importance des hypothèses d'encastrement dans la souplesse de celle-ci. Notamment, l'influence d'un congé de raccordement à l'encastrement est discutée.

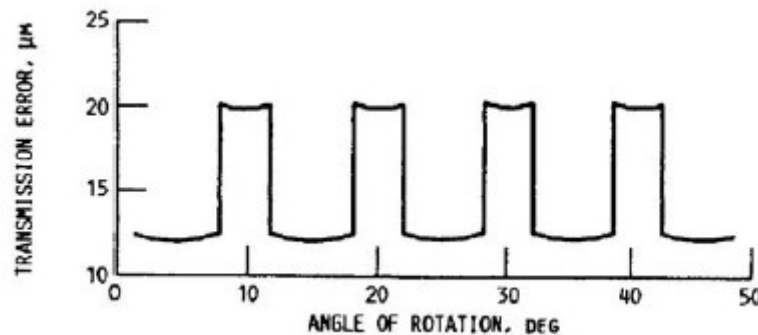


Figure 59 : Erreur de transmission statique sous charge en l'absence d'écart de géométrie [103]

Attia [106] a adapté les modèles de Weber et Banascheck à la simulation dynamiques des engrenages à voiles minces. Il met ainsi en évidence l'importance de la prise en compte de la souplesse du voile pour ce type de design sans toutefois entrer dans les détails mathématiques rigoureux du calcul de déformation des roues, trop complexes pour une étude analytique. De même, Cornell [107] et plus tard Sainsot & al. [108] ont repris les travaux d'Attia et ont amélioré la prise en compte de la raideur de fondation en assimilant le corps de roue à un disque plein travaillant en torsion. Ces méthodes de calcul de raideur d'engrènement ont depuis été reprises dans de nombreux travaux. Par exemple, ceux de Sainte-Marie [109] concernent leur utilisation dans des modèles de transmission multi étages en considérant l'erreur de transmission comme une excitation imposée à chaque engrènement. De leur côté, Ajmi & al. [17] ont ajouté à ce calcul de raideur une modélisation élément finis volumique des arbres supportant les roues dentées afin d'étudier les phénomènes de convection élastique de ces derniers et leur influence sur la répartition des pressions de contact sur des engrenages à denture large. Ils montrent ainsi que ces phénomènes ont un impact fort sur la dynamique du système à l'inverse des effets convectifs de contact et de flexion des dentures, négligeables dans le cas d'étude considéré. De même, Guilbert [110] a intégré ces calculs de raideur à des modèles d'engrenages à corps déformables. Ceux-ci intègrent une modélisation éléments finis des corps de roues permettant l'estimation de leurs déformations dynamiques. L'application aux engrenages à voiles minces utilisés en aéronautique a mis en évidence la participation de premier ordre de ces déformations dans le calcul de l'erreur de transmission dynamique et dans les vibrations générées par les engrènements.

III.1.4 – Extension du calcul d'écrasement

En parallèle des travaux concernant le calcul de la raideur équivalente d'engrènement et de ses variations, plusieurs auteurs se sont intéressés à la prise en compte des modifications de géométrie des flancs de denture. Les corrections de dentures peuvent être de plusieurs types et effectuées le long du profil ou dans la direction d'hélice. Les principaux types de correction sont présentés sur la Figure 60. Les modification du profil ont pour objectif d'adoucir les conditions d'entrées et de sorties de la zone de contact pour les dentures et de limiter les phénomènes de choc et les vibrations

engendrées [111]. Les modifications dans le sens de l'hélice ont quant à elles vocation à limiter les concentrations de pression et de contraintes aux extrémités des dents qui peuvent être générées par la flexion des arbres ou des erreurs de montage. Les plus courantes sont les bombés qui constituent une modification microscopique de la géométrie. Ainsi, Sun & al. [112] intègrent ces modifications microscopiques de géométrie dans un modèle dynamique d'engrènement comme une variation de la raideur équivalente.

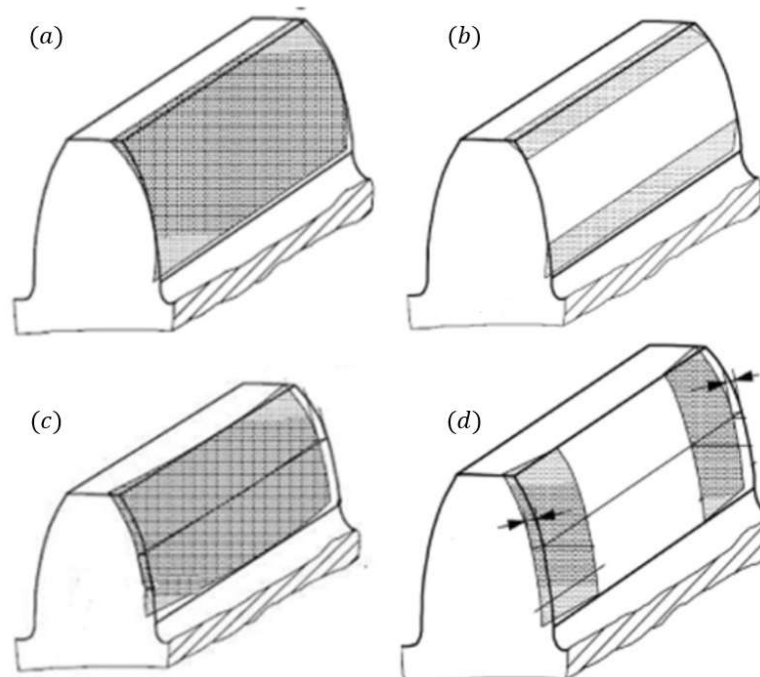


Figure 60 : Modifications de profil. (a) bombé de profil ; (b) retrait de tête et de pied ; (c) bombé dans la direction d'hélice ; (d) retraits d'extrémités [113]

Le retrait de matière correspondant suit souvent une loi parabolique et ne génère pas de modification de la position du point de contact ni de la direction de la normale à la denture en raison des très faibles dimensions de ce type de modification. Les retraits de tête, de pieds ou d'extrémité peuvent être de dimensions très variables et peuvent parfois prendre la forme de congés de raccordement dans le cas des têtes de dents. Ce type de modification est plus délicat à modéliser lorsque la profondeur envisagée est significative. Bien que ce sujet soit moins bien traité dans la littérature, il est possible de citer les travaux de Ma & al. [114] qui s'intéressent à la prise en compte des retraits de matière en tête de denture et les modélisent par une modification de la raideur équivalente d'engrènement. Ils mettent en évidence l'existence de contact hors plan d'action pour certaines conditions de fonctionnement et valident les résultats obtenus sur la base de calcul éléments finis.

Ainsi, le calcul d'écrasement peut être étendu au-delà du plan d'action théorique. En effet, en raison de la déformation sous charge des dentures, le contact existant entre deux paires de dents s'établit légèrement en amont du plan d'action et perdure en aval. Le contact est alors établi entre la tête d'une dent et le flanc de son homologue. Ceci se constate facilement dans les calculs éléments finis de raideur d'engrènement. En effet, ce type de calcul permet de prendre en compte tous les contacts existants pour une position donnée des roues. Ainsi, Rigaud & al. [115] ont étudié l'influence du couple sur l'erreur de transmission statique. Ils ont mis en évidence les variations du nombre de paires de dents sous charge dues aux variations des efforts appliqués sur les roues. Ce travail a été

approfondi plus récemment par Benaïcha & al. [116]. Une première modélisation analytique de ce phénomène a été élaborée par Duverger & al. [117] mettant en évidence des phénomènes dynamiques particuliers et caractéristiques de l'existence de ces contacts. Le modèle proposé reste toutefois rudimentaire et les variations d'angles de pression considérées sont arbitraires. Ils supposent également que la distance séparant deux dents en amont et en aval du plan d'action à vide suit une loi similaire aux variations d'angle de pression. Un calcul plus précis de la distance à vide est proposé par Lin & al. [118] qui ne considèrent toutefois pas les variations d'orientation de l'effort de contact et le supposent toujours contenu sur la ligne d'action théorique. Leur étude, limitée aux engrenages droits, permet de démontrer l'intérêt de la prise en compte des contacts hors ligne d'action dans les simulations dynamiques d'engrenages et leur impact sur l'erreur de transmission statique et les vibrations générées lors du fonctionnement. Ces travaux ont été étendus aux engrenages hélicoïdaux par Singh & al. [119]. Un modèle minimaliste et arbitraire a été introduit par Han & al. [120] afin d'étudier la stabilité dynamique des engrènements en tenant compte de ces contacts hors plan d'action.

III.1.5 – Endommagement des engrenages

La modélisation d'endommagement sur des éléments d'engrenage permet la simulation du comportement dynamique d'une transmission endommagée. Une fois encore, les approches utilisées sont nombreuses et ont des objectifs et des complexités variées. Plusieurs modèles d'engrenages basés sur des maillages trois dimensions et intégrant des fissures en pied de dents sont proposés et un exemple est donné sur la Figure 61. A titre d'exemple, Verma & al. [121] et Gueye [122] utilisent des modèles éléments finis dans l'étude de propagations de fissures et dans l'estimation de la raideur des dents endommagées. Bien que ces modèles permettent l'étude des déformations et des contraintes en pied de dent et l'estimation de la durée de vie résiduelle de l'engrenage, ils sont très coûteux en temps de calcul et ne peuvent être utilisés dans les calculs dynamiques. Cependant, leur utilisation dans le recalage de modèle analytique est précieuse. Ils permettent également un calcul précis des variations de la raideur d'une paire de dents en contact qui peuvent être ensuite réutilisées dans des calculs dynamiques comme le proposent Howard & al. [123], [124] et Chaari & al. [125].

D'autres auteurs se sont attachés au calcul analytique des raideurs d'engrènement en présence de fissures. Notamment, Chen & al. [18], [126] envisagent une fissure comme une modification de l'épaisseur de dent prise en compte dans le calcul de raideur. Ils définissent ainsi une zone morte dans la dent dont la limite joint le sommet de celle-ci et l'extrémité de la fissure. Ces travaux ont été approfondis par Mohammed & al. [127], [128]. Ces derniers apportent une amélioration de la définition de la zone morte en utilisant plusieurs profils de raccords et comparent les raideurs ainsi calculées à des résultats éléments finis. Ils mettent en évidence les défaillances des modèles de Chen pour de large fissure et l'intérêt dans ce cas de profils de délimitation paraboliques. De plus, ils étudient numériquement l'impact de la forme et de la profondeur d'une fissure sur les variations de raideur équivalente d'engrènement et sur la détectabilité de l'endommagement par des indicateurs statistiques tels que la RMS et le kurtosis. Pour finir, plusieurs auteurs ont modélisé des écaillages sur les flancs de dentures par des diminutions de raideur équivalente comme El-Yousfi & al. [129] ou, de manière plus réaliste, par des réductions locales de l'écrasement à la denture calculé comme Thoret-Bauchet & al. [130]. Ces derniers étudient l'influence de la position d'un écaillage sur les différents éléments d'un train planétaire et discutent de la détectabilité d'un tel endommagement.

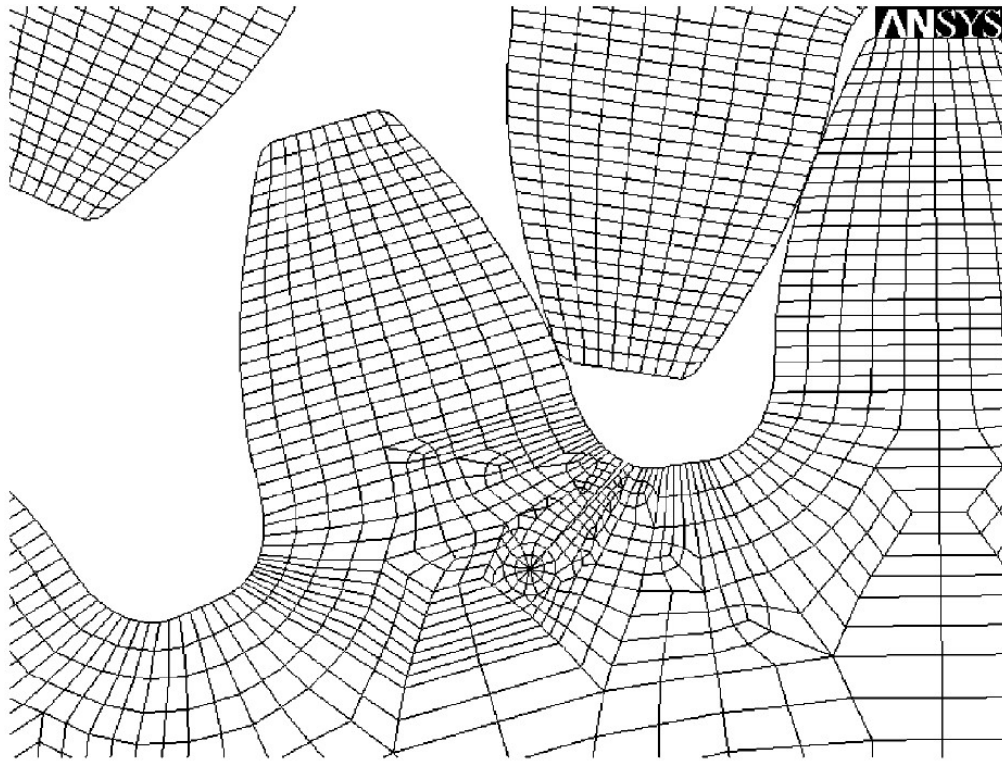


Figure 61 : Modélisation éléments finis de dents d'engrenage comportant une fissure, Howard [123]

III.1.6 – Positionnement de la thèse sur ces modèles

L'objectif dans le cadre de cette thèse est de disposer d'un modèle rapide de calcul des efforts transmis à l'engrènement et ramenés aux centres des roues dentées. Les modèles utilisés jusqu'à présent dans la simulation de la vitesse instantanée de rotation restaient basiques se limitaient à une raideur d'engrènement constante ou variable en créneaux ou en trapèzes dont la valeur était imposée arbitrairement. Le modèle proposé se doit d'être suffisamment précis pour estimer correctement les variations du couple transmis et pour permettre une bonne simulation des variations de vitesse instantanée de rotation sur chacun des arbres. Par conséquent, comme établi plus tôt, les travaux se sont focalisés sur un modèle analytique aussi complet que possible. Pour cela une méthode similaire à celle utilisée dans la modélisation des roulements est mise en place. Les torseurs de liaison entre les nœuds du modèle correspondant aux centres des roues sont calculés à partir des déplacements, vitesses et accélérations de ceux-ci ainsi que des paramètres géométriques et matériaux définissant les engrenages. Dans ce but, l'écrasement est calculé de manière indépendante au contact de chaque paire de dents. L'effort normal est ensuite déterminé en utilisant la loi de contact de Johnson [131], détaillée par la suite, et des raideurs des dentures et du corps de roue calculées sur la base des modèles de Weber & al. d'une part et de Sainsot & al. d'autre part. Afin de s'approcher au maximum des efforts transmis en réalité, les modifications de profil sont prises en compte comme des diminutions de l'écrasement calculé. De plus, dans le but d'améliorer l'estimation des variations de vitesse créées par les engrenages, plusieurs apports ont été réalisés par rapport à la littérature. D'une part, les contacts hors ligne d'action sont introduits à travers une distance à vide dont le calcul a été revu et se veut plus précis que les méthodes existantes par ailleurs. D'autre part la présence de congés en tête de denture est prise en compte dans le calcul de l'écrasement. Enfin, une approche originale est proposée afin de tenir compte des effets convectifs de flexion tout en limitant au maximum les temps de calcul et en évitant le recours à des options plus complexes. L'importance de ces effets convectifs est discutée dans une comparaison de l'erreur statique de transmission obtenue avec des calculs éléments finis.

III.2 – Conventions et hypothèses

Cette section est dédiée à la description de la structure du modèle d'engrenage mis en place. Elle introduit les hypothèses principales retenues ainsi que les paramètres permettant de définir ceux-ci. De plus elle détaille le fonctionnement du modèle et les méthodes de calcul utilisées.

III.2.1 – Intégration dans le modèle de transmission

Il est rappelé que le système d'équation décrivant le comportement de la transmission modélisée peut se mettre sous la forme suivante où les engrenages sont introduits comme des efforts de restitution.

$$M_a \ddot{X} + C \dot{X} + K_a X = F_{ext}(t) + F_{roul}(X, \dot{X}, \ddot{X}) + F_{eng}(X, \dot{X}, \ddot{X}) \quad (117)$$

Cette section fournit donc l'expression de la matrice de masse associée aux engrenages et détaille le calcul des efforts F_{eng} . Ces derniers correspondent aux efforts exercés sur les centres des roues dentées et sont déterminés en fonction de leurs déplacements, vitesses et des accélérations. Ils peuvent se décomposer en deux parties distinctes comme suit. La première partie correspond aux efforts exercés à l'engrènement et ramenés au centre des roues tandis que la deuxième est la prise en compte des inerties et des masses des roues. Cette dernière peut être ramenée au premier membre du système d'équations.

$$F_{eng}(X, \dot{X}, \ddot{X}) = F_{eng,s}(X, \dot{X}) + F_{eng,d}(\ddot{X}) \quad \text{avec} \quad F_{eng,d}(\ddot{X}) = -M_{eng} \ddot{X} \quad (118)$$

Le calcul de la matrice de masse de l'engrenage n'est pas détaillé ici mais peut se retrouver dans les travaux de Sghaier [14]. Les corps d'engrenages sont associés à des disques rigides dont le diamètre considéré est le diamètre primitif. Les différents paramètres sont introduits dans la section suivante.

$$M_{eng,i} = \begin{bmatrix} m_{di} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{di} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{di} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ddi} & 0 & I_{ddi}\theta_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ddi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ddi}\theta_{yi} & 0 & I_{dpi} \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$\text{Avec} \quad m_d = \rho_i \pi R_{pi}^2 e \quad (120)$$

$$I_{ddi} = \frac{1}{4} \rho_i e \pi \left(R_{pi}^2 \left(R_{pi}^2 + \frac{e^2}{3} \right) - R_{ai}^2 \left(R_{ai}^2 + \frac{e^2}{3} \right) \right) \quad (121)$$

$$I_{dpi} = \frac{1}{2} \rho_i e \pi (R_{pi}^4 - R_{ai}^4) \quad (122)$$

La difficulté réside dans le calcul de la composante quasi-statique des efforts de restitution et la suite de ce chapitre s'attache à la description du modèle le permettant. Les données d'entrée de celui-ci sont les paramètres géométriques et matériaux définissant les engrenages ainsi que les vecteurs de déplacement $(x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ et de vitesse $(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dot{\theta}_{xi}, \dot{\theta}_{yi}, \dot{\theta}_{zi})$ associés à chaque roue. Une fois encore, le degré de liberté θ_z associé à la rotation principale n'étant pas contraint, il contient la position angulaire complète des nœuds de l'arbre.

III.2.2 – Paramètres du modèle et définition de l’engrenage

Le modèle présenté ici concerne les engrenages hélicoïdaux, cylindriques et extérieurs. Par conséquent, l’extension aux engrenages droits est triviale mais la modélisation ne peut s’étendre rapidement aux engrenages à contact intérieurs ou aux engrenages coniques par exemple. Le Tableau 17 contient les différents paramètres géométriques de définition des engrenages. La Figure 62 donne un schéma d’une roue dentée et fait apparaître les différents rayons de définition de la géométrie. Dans toute la suite de ce chapitre, l’indice « i » fait référence au numéro de la roue dentée considérée et prend donc les valeurs 1 ou 2. Il est rappelé que dans le cas d’engrenages hélicoïdaux, il convient de distinguer le module m_r et l’angle de pression α_r réels (ou normalisés) du module m_a et de l’angle de pression α_a apparents. Ces derniers sont calculés en fonction des précédents et de l’angle d’hélice comme suit.

$$m_a = \frac{m_r}{\cos(\beta)} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha_a) = \frac{\tan(\alpha_r)}{\cos(\beta)} \quad (123)$$

Paramètre	Description
m_r	Module réel d’engrènement
α_r	Angle réel de pression
β	Angle d’hélice
Z_i	Nombre de dents de la roue i
e	Largeur des dentures
R_{ci}	Rayon de congé en tête de denture pour la roue i
R_{ai}	Rayon d’alésages pour la roue i
R_{fi}	Rayon de fond de dent pour la roue i
R_{ti}	Rayon de tête pour la roue i
R_{ri}	Rayon de raccordement du profil en développante de cercle et du pied de dent

Tableau 17 : Paramètres géométriques de définition des engrenages

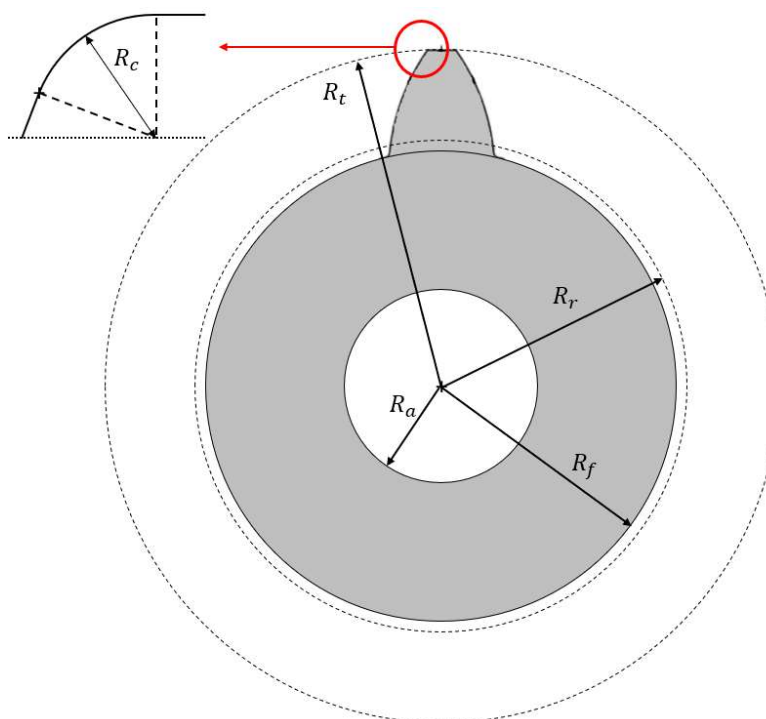


Figure 62 : Rayons de définition de la géométrie

D'autres paramètres géométriques sont requis lors de l'implémentation d'endommagements et sont introduits dans la Figure 63 et sont rassemblés dans le Tableau 18 et le Tableau 19. De même que pour les roulements, les écaillages envisagés dans ce modèle sont rectangulaires et sont donc définis par cinq paramètres similaires. La définition des géométries de fissure se fait à travers trois paramètres correspondants à sa profondeur, son inclinaison et sa position sur le profil de la dent. La modélisation des fissures se limite à des endommagements des dents et ne permet pas d'étudier des fissures radiales de la couronne. Cependant, les paramètres de définition peuvent varier avec la position axiale considérée afin d'implémenter des fissures non uniformes sur la largeur de la dent.

Paramètre	Description
δ_{ec}	Profondeur de l'écaillage
Δz_{ec}	Largeur axiale de l'écaillage
z_{ec}	Position axiale de l'écaillage
Δr_{ec}	Hauteur de l'écaillage
r_{ec}	Position radiale de l'écaillage

Tableau 18 : Paramètres de définition d'un écaillage sur un flanc de denture

Paramètre	Description
$q_c(z)$	Loi de profondeur de la fissure en fonction de la position axiale
$\alpha_c(z)$	Loi d'orientation de la fissure en fonction de la position axiale
$r_c(z)$	Loi de position radiale de la fissure en fonction de la position axiale

Tableau 19 : Paramètres de définition d'une fissure en pied de denture

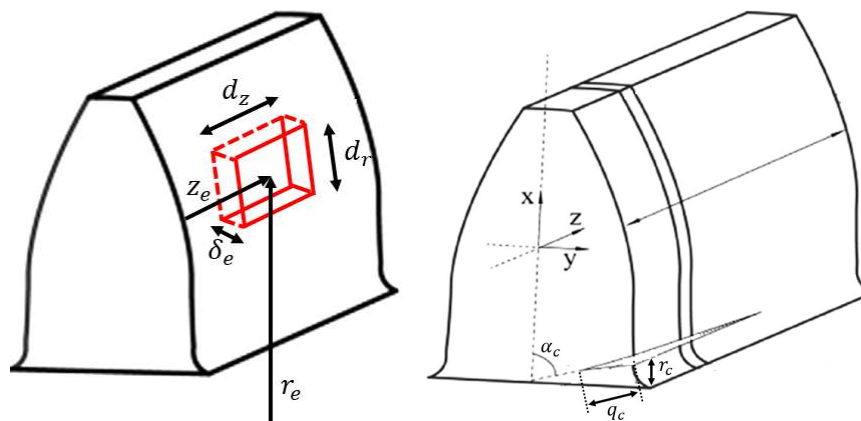


Figure 63 : Définition des endommagements d'un engrenage

Pour finir, des paramètres matériaux sont nécessaires à la description des comportements au contact et au calcul des masses et inerties. Ils regroupent les modules d'Young, coefficients de Poisson et masses volumiques des deux roues. De plus, des coefficients de frottement et d'amortissement fluide au contact entre dentures permettent l'estimation des pertes dans l'engrènement. Le Tableau 20 récapitule ces différents paramètres.

Paramètre	Description
E_i	Module d'Young de la roue i
ν_i	Coefficient de Poisson de la roue i
ρ_i	Masse volumique de la roue i
μ	Coefficients de frottement au contact
α_e	Coefficient de dissipation visqueuse au contact

Tableau 20 : Paramètres matériaux des engrenages

III.2.3 – Hypothèses adoptées et fonctionnement du modèle

De même que pour les roulements, de nombreux appels à la fonction de calcul des efforts de restitution dans l'engrènement sont réalisés à chaque pas d'intégration du modèle dynamique. Plusieurs hypothèses simplificatrices ont donc été réalisées afin de limiter la complexité du modèle et les temps de calculs associés. Les hypothèses principales sont listées ci-dessous.

H1 : Les effets convectifs au contact sont supposés négligeables contrairement aux effets convectifs de flexion.

H2 : Les corps des deux roues sont supposés assimilables à des disques travaillant en torsion uniquement.

H3 : Les dents sont supposées assimilables à des poutres encastrées-libres.

Quelques remarques peuvent être faites sur ces hypothèses. Les effets convectifs de contact et de flexion correspondent aux déformations d'un point de contact et de flexion d'un point d'un solide lorsqu'une force est appliquée sur un point voisin. Ce phénomène est schématisé sur la Figure 64. L'Hypothèse **H1** se justifie par la constatation que la largeur caractéristique des effets convectifs de contact est beaucoup plus courte que la largeur associée aux effets convectifs de flexion [17]. Bien que les hypothèses **H2** et **H3** indiquent que la déformation des corps de roues et des dentures soit considérée, les déplacements en résultant sont supposés faibles de sorte que le calcul de l'écrasement au contact est réalisé en supposant les roues rigides. Cela revient à négliger les déplacements du point de contact entre denture et les variations d'orientation de la normale au contact résultantes de la déformation des roues et correspond donc aux hypothèses de petits déplacements classiques en mécanique des structures.

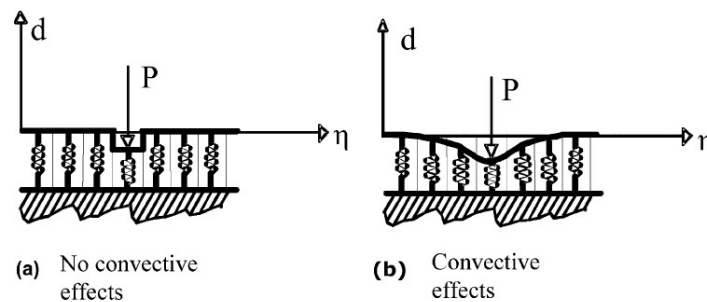


Figure 64 : Illustration des effets convectifs élastiques [17]

Le fonctionnement du modèle est similaire à celui des roulements à la différence que les efforts dynamiques engendrés par la masse et l'inertie des disques d'engrenage est traitée séparément. Les déplacements et vitesses des centres des roues sont extraits du vecteur d'état global du système. La position des dents des différentes roues est alors déterminée et les écrasements pour chaque paire de dents en contact sont calculés. L'effort résultant au contact est calculé en tenant compte de la raideur équivalente d'engrènement, des frottements et de la dissipation visqueuse à la denture. Pour finir les efforts transmis par chaque paire de dents sont ramenés aux centres des roues et sommés afin d'obtenir les torseur globaux appliqués sur les nœuds du système qui leur sont associés.

Afin de faciliter le calcul, les dents sont discrétisées en tranches minces dans la direction axiale (ou direction d'hélice) comme le schématise la Figure 65. Cette discrétisation permet le calcul d'un écrasement et d'une raideur variables sur la largeur de la dent. Des variations axiales d'écrasement et de raideur sont constatées en raison de l'angle d'hélice, de la présence d'endommagement non

uniforme et de basculement des roues en raison de la flexion des arbres les supportant. Ainsi, chaque grandeur rencontrée par la suite possède plusieurs indices.

- i est l'indice associé à la roue : $i \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$
- j est l'indice associé à la dent : $j \in \llbracket 1; Z_i \rrbracket$
- k est l'indice associé à la tranche : $k \in \llbracket 1; K \rrbracket$

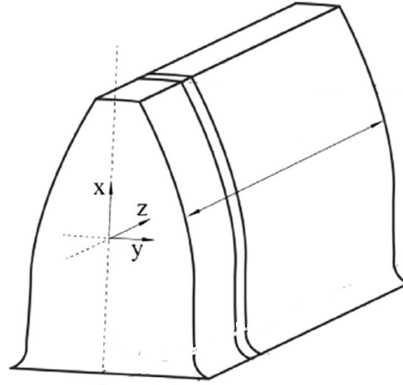


Figure 65 : Discretisation axiale des dents en tranches minces

III.2.4 – Calculs préliminaires

De même que précédemment, dans ce chapitre les vecteurs seront surmontés d'une flèche. De plus, soit $\vec{V}$ un vecteur, on note V sa norme. Pour chaque roue, plusieurs grandeurs utiles peuvent être calculées à partir des paramètres de définition. C'est le cas du rayon primitif $R_{pi} = \frac{1}{2}m_a Z_i$ et du rayon de base $R_{bi} = R_{pi} \cos(\alpha_a)$. En outre, plusieurs points d'intérêt sont introduits et repérés sur la Figure 66. Ainsi, on note O_i le centre de la roue i et A_i l'intersection de la ligne d'action avec son cercle de tête, de sorte qu'en l'absence de charge, d'erreur de montage et de correction de profil, le point de contact se déplace sur le segment $A_1 A_2$ au cours de la rotation. De plus, on note T_2 l'intersection de la ligne d'action avec le cercle de base de la roue 2. Un repère spécifique R_0 lié à l'engrènement est introduit dont l'origine se situe à l'intersection du cercle de base de la roue 1 et de la ligne d'action, dont l'axe $\vec{x}_0$ est dirigé vers T_2 . On note $(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, \theta_{xi}, \theta_{yi0}, \theta_{zi0})$ les déplacements dans le repère R_0 des centres des roues. Ils peuvent être déduits à partir des déplacements dans le repère global et de la matrice de passage P_{g0} comme suit.

$$\begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ z_{i0} \end{pmatrix} = P_{g0} \begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ z_{i0} \end{pmatrix} \quad P_{g0} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{g0}) & \sin(\alpha_{g0}) & 0 \\ -\sin(\alpha_{g0}) & \cos(\alpha_{g0}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_{g0} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \alpha_a & (\text{conf 1}) \\ \alpha_a - \frac{\pi}{2} & (\text{conf 2}) \end{cases} \quad (124)$$

Dans le cas de conditions d'engrènement à charge nulle, sans modification de profil et sans erreur de montage ou de fabrication, plusieurs valeurs intermédiaires peuvent être introduites. Ainsi, l'angle de conduite partiel ϕ_i est défini comme la rotation nécessaire à une tranche de largeur infinitésimale de la roue i pour que le point de contact sur celle-ci se déplace sur la totalité du segment $A_1 A_2$. De plus, on note ψ_i l'angle de conduite total correspondant à la plage angulaire pour laquelle une dent de la roue i reste en contact avec son homologue. Pour finir, le rapport de conduite ε_c , indépendant de la roue considérée, est le nombre moyen de dents en contact au cours de la rotation. On peut calculer la position des point A_1 , A_2 et T_2 sur l'axe x_0 comme suit.

$$x_{A1} = \sqrt{R_{t1}^2 - R_{b1}^2} \quad x_{T2} = (R_{p1} + R_{p2}) \cdot \sin(\alpha_a) \quad x_{A2} = x_{T2} - \sqrt{R_{t2}^2 - R_{b2}^2} \quad (125)$$

Par suite, les relations suivantes s'imposent.

$$A_1 A_2 = x_{A1} - x_{A2} \quad (126)$$

$$\phi_i = \frac{A_1 A_2}{R_{bi}} \quad \psi_i = \phi_i + e. \frac{\tan(\beta)}{R_{pi}} \quad (127)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\psi_i Z_i}{2\pi} \quad (128)$$

Deux configurations existent et correspondent chacune au contact sur l'un des deux flancs d'une des dents. La configuration 1 est observée lorsque la roue 1 est menante et a une rotation positive selon l'axe principal ou que la roue 1 est menée et a une rotation négative. La configuration 2 correspond aux autres cas de figure. L'écrasement calculé dans les sections suivantes de même que l'expression du torseur d'effort résultant sont toujours donnés en configuration 1. Les calculs en configuration 2 ne présente que peu de différences et sont obtenus en appliquant la même méthode. Ils ne sont pas présentés afin d'éviter les redondances.

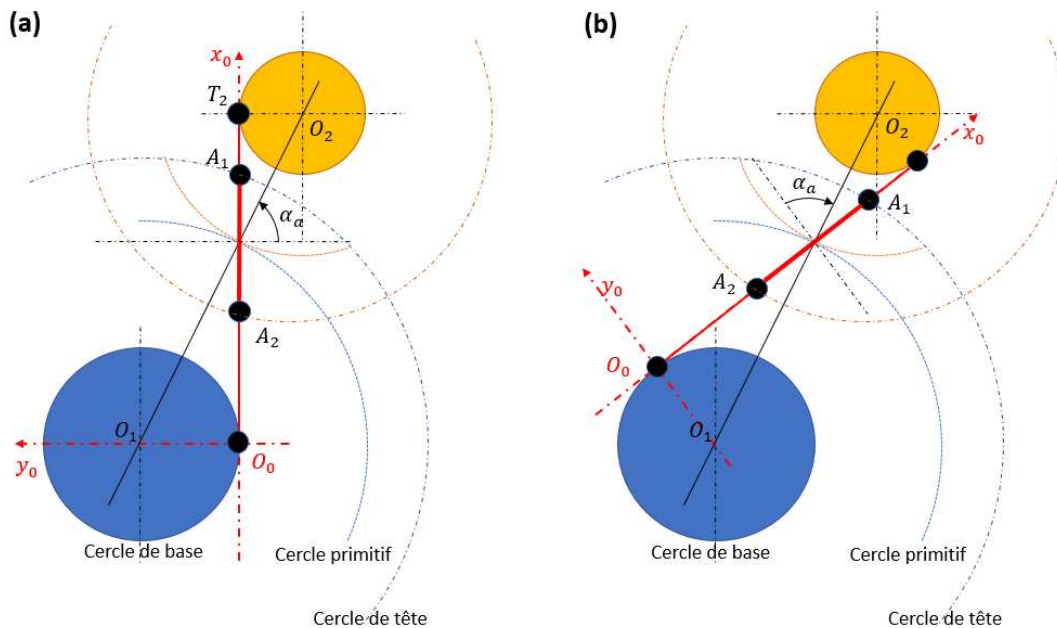


Figure 66 : Points d'intérêt et repère d'engrènement : (a) configuration 1 ; (b) configuration 2

La détection du flanc en contact et donc de la configuration se fait automatiquement dans l'algorithme lors de l'intégration temporelle. L'écrasement à la denture est dans un premier temps calculé en supposant la configuration 1 et, dans le cas où il est constaté nul, un second calcul est réalisé en configuration 2. La Figure 67 schématise la procédure suivie. Cette méthode ne permet toutefois pas de traiter les cas de chargement pour lesquels les deux flancs de denture sont actifs simultanément. Cependant, en raison des corrections de denture, des jeux en fonctionnement et des couples transmis, ces événements sont supposés transitoires voire inexistantes en réalité. En effet, ils requièrent un grand déplacement radial des roues et une faible erreur de transmission. Cela suppose donc un faible couple transmis et une importante flexion ou erreur de montage des arbres. La Figure 68 montre un cas de déplacement volontairement exagéré pour lequel les deux flancs de denture sont chargés simultanément. Il convient de noter qu'une paire de dents n'entre pas simultanément dans la zone de contact pour les deux configurations. Un déphasage angulaire existe et un angle de changement de configuration peut être défini. Le calcul de cet angle est l'objet de l'annexe C.

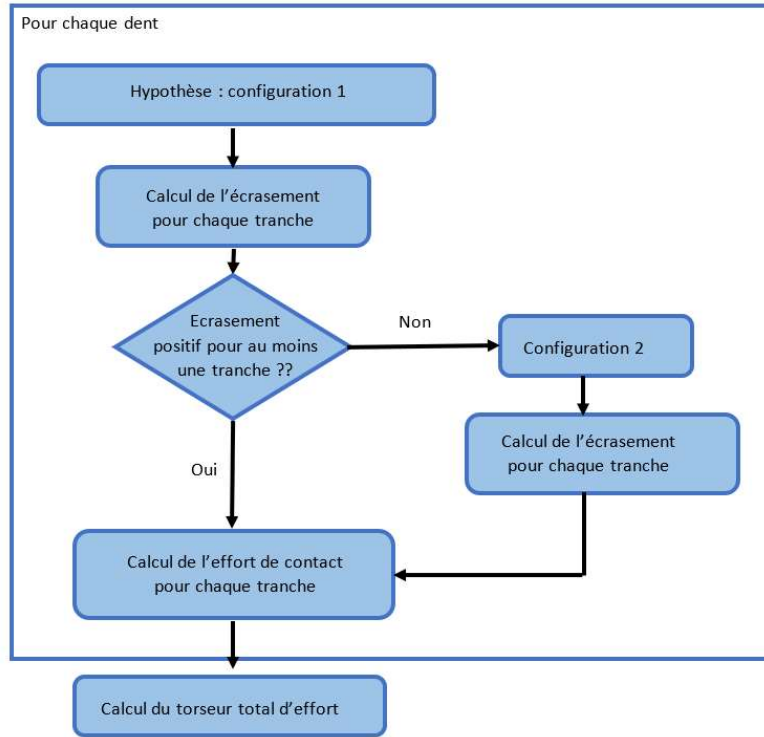


Figure 67 : Méthode de détection du flanc en contact

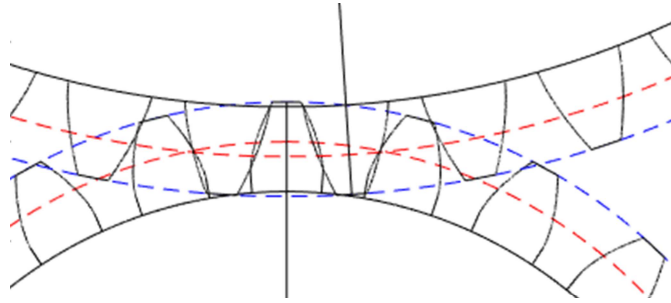


Figure 68 : Cas de déplacement engendrant un contact sur les deux flancs de denture

Chaque tranche de chaque dent est représentée par l'angle θ_{ijk} dépendant de l'orientation de l'hélice sur la roue considérée.

$$\theta_{ijk} = (j-1) \frac{2\pi}{Z_i} + \theta_k, \text{ avec } \theta_k = \begin{cases} -e \frac{k \tan(\beta)}{K R_{pi}} & \text{pour la roue droite} \\ +e \frac{k \tan(\beta)}{K R_{pi}} & \text{pour la roue gauche} \end{cases} \quad (129)$$

Par définition de l'angle de conduite partiel, chaque tranche reste en contact pendant une période angulaire ϕ_i à chaque tour. Par convention, définit la zone de charge comme l'intervalle angulaire $[0; \phi_i]$. En conséquence, une dent est en contact sur tout ou partie de sa largeur si et seulement si elle vérifie :

$$(j-1) \frac{2\pi}{Z_i} \in \left[-\frac{e \tan(\beta)}{2 R_{pi}}; \phi_i + \frac{e \tan(\beta)}{2 R_{pi}} \right] \quad (130)$$

Pour une tranche donnée, il est possible de calculer la position dans le repère R_0 du point de contact $P_{jk}(x_{jk}, y_{jk})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{jk} = x_{A2} + \frac{\theta_{1jk} + \theta_{z1}[2\pi]}{\phi_1} A_1 A_2 \\ y_{jk} = 0 \end{cases} \quad (131)$$

La prise en compte des contacts hors ligne d'action sous charge et des congés en tête de denture mènera plus tard à des réévaluations des différentes grandeurs introduites ici.

III.3 – Calcul de l'écrasement au contact

III.3.1 – Ecrasement sur la ligne d'action

On appelle distance à vide D_v la distance séparant les surfaces de deux dents homologues pour des déplacements des centre des roues nuls (donc sans erreur de montage et pour un chargement nul) et en l'absence de modification de géométrie. Par définition des profils en développante de cercle, cette distance à vide est nulle pour un point de contact situé sur le segment $A_1 A_2$. Par conséquent, l'écrasement calculé se limite alors au rapprochement des corps en ce point sous l'effet des déplacements des centres des roues. Il est important de noter que la participation de la rotation principale des corps est à traiter séparément car elle est composée d'une rotation macroscopique et d'une erreur de transmission $\Delta\theta_z$ définie comme suit :

$$\Delta\theta_z = \theta_{z20} - \frac{1}{r} \theta_{z10}, \quad \text{avec} \quad r = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (132)$$

On introduit les matrices de rotation $R_{\vec{\Delta}}(\theta)$ correspondant à la matrice de rotation d'un angle θ autour d'un axe $\vec{\Delta} \in \{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ et on note Id_n la matrice identité de taille n . Le déplacement des deux corps au point de contact, sans tenir compte de la rotation principale peut alors s'exprimer comme suit.

$$\vec{d}_{ijk} = \begin{pmatrix} x_{i0} \\ y_{i0} \\ z_{i0} \end{pmatrix} + [R_{\vec{x}0}(\theta_{xi0}) + R_{\vec{y}0}(\theta_{yi0}) - 2.Id_3] \vec{O_1 P_{jk}} \quad (133)$$

Le déplacement relatif associé à la rotation principale se calcul ainsi :

$$\vec{d}_{\theta z, jk} = (R_{\vec{z}0}(\Delta\theta_{z0}) - Id_3) \vec{O_2 P_{jk}} \quad (134)$$

L'écrasement total s'exprime alors comme la projection de la différence des déplacements relatifs des deux corps selon la normale au contact. Cette expression sera enrichie dans les section suivantes afin de tenir compte des corrections de denture et sera étendue aux contacts hors lignes d'action.

$$\delta_{jk} = (\vec{d}_{1jk} - \vec{d}_{2jk} - \vec{d}_{\theta z, jk}) \cdot \vec{n} \quad (135)$$

L'expression de celle-ci dans le repère d'engrènement dépend de l'orientation des dentures de la roue 1 et de l'angle d'hélice.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_d \\ 0 \\ \sin \alpha_d \end{pmatrix}_0 \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} \alpha_d = -\beta & \text{pour des dentures à droite} \\ \alpha_d = \beta & \text{pour des dentures à gauche} \end{cases}$$

III.3.2 – Contacts hors plan d'action

En raison de la charge appliquée à l'engrènement et des déplacements en translation et en rotation qu'ils génèrent aux centres des roues, les contacts entre deux dents peuvent s'étendre légèrement en amont et en aval du plan d'action théorique. Comme l'état de l'art a pu le mettre en évidence, ce phénomène est facilement vérifiable par des calculs éléments finis [115], [116]. La Figure 69 illustre ce type d'interactions. Elle schématise deux dents dont le contact s'établit avant le passage sur la ligne d'action théorique. Cette dernière est tracée en vert et le point de contact est repéré par un astérisque. L'erreur de transmission imposée lors du tracé de ce schéma a été volontairement exagérée afin de rendre le phénomène plus visible. Il est remarqué que le contact en amont ou en aval de la ligne d'action s'effectue toujours entre le flanc d'une dent et l'arrête de son homologue.

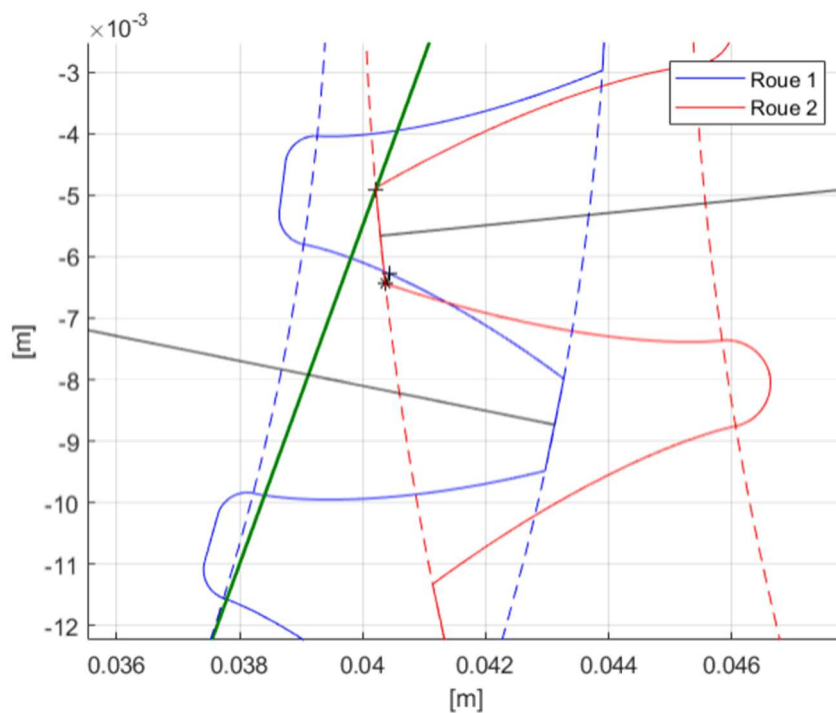


Figure 69 : Contact hors plan d'action

Sans prise en compte de ce genre de contact, l'évolution de l'effort est brutale à l'entrée et à la sortie de la zone de contact théorique représentée par la plage angulaire $[0; \phi_1]$. Leur intégration au modèle permet donc de se rapprocher du comportement réel de l'engrènement et d'obtenir une évolution plus réaliste de l'effort de contact en introduisant une période transitoire permettant la mise en charge progressive d'une dent, comme le montre la Figure 70.

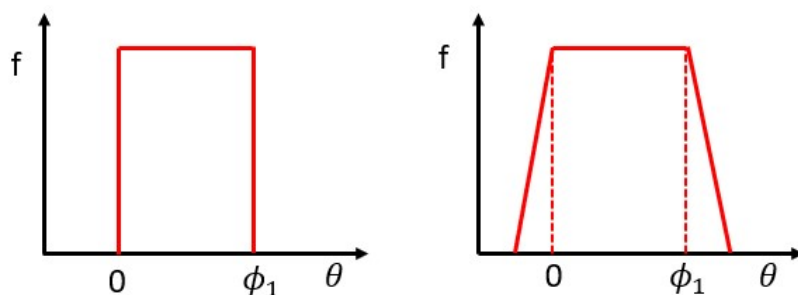


Figure 70 : Effort de contact sur une tranche de dent sans (gauche) et avec (droite) prise en compte des contacts hors ligne d'action

Le calcul de l'écrasement dans cette zone n'est pas aussi simple que le long de la ligne d'action car il doit tenir compte d'une distance à vide non nulle. Celle-ci correspond à la distance qui séparerait les deux profils de denture en l'absence de déplacement des roues et son calcul est détaillé en annexe D. La plage angulaire de recherche de contact ne peut plus se limiter au passage sur la ligne d'action comme c'était le cas précédemment. Puisque l'intervalle angulaire au cours duquel deux dents restent collées dépend de l'erreur de transmission et donc de la charge appliquée sur celle-ci, il est préférable d'imposer des bornes de recherche larges pour pouvoir traiter tous les cas de chargement. En dehors de la ligne d'action, le point de contact se déplace sur le cercle de tête de l'une ou l'autre des roues. La Figure 71 fait apparaître la trajectoire de ce point et l'intervalle de recherche de contact. Trois zones distinctes apparaissent et correspondent respectivement à la ligne d'action et à l'amont et l'aval de celle-ci. La plage angulaire de détection de contact est arbitrairement fixée à l'intersection des deux cercles de tête et est donc délimitée par les deux points E et E' . Il est important de remarquer qu'il s'agit ici d'une surestimation volontaire de la plage de détection.

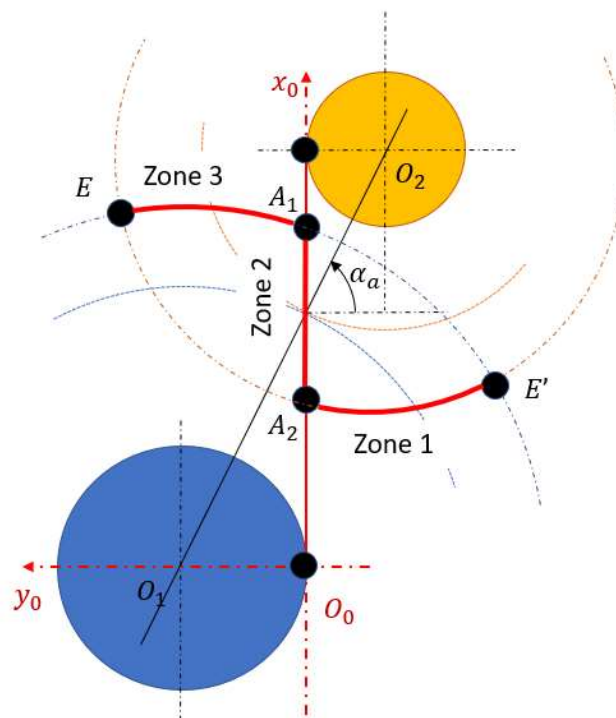


Figure 71 : Zone potentielle de charge et trajectoire du point de contact

La Figure 72 montre un exemple d'évolution de la distance à vide et de l'orientation de la normale au contact pour un engrenage réel. Comme expliqué précédemment, la distance à vide est nulle en zone 2, c'est-à-dire entre 0 et 100% de l'angle de conduite ϕ_1 . Elle grandit rapidement en zone 1 et 3 lorsque le point de contact s'éloigne de la ligne d'action. Il convient de remarquer que la normale au contact n'est alors plus donnée par la ligne d'action, comme cela était le cas en zone 2. L'expression de l'orientation de la normale est donnée en annexe.

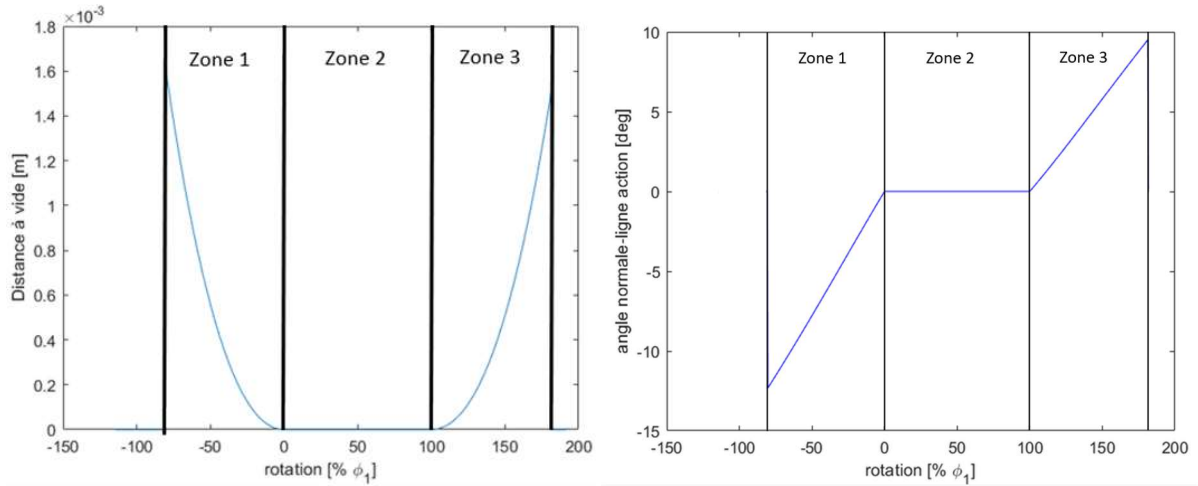


Figure 72 : Exemple de distance à vide et d'orientation de la normale au contact

L'expression de l'écrasement au contact pour chaque tranche est modifiée afin de tenir compte de la distance à vide.

$$\delta_{jk} = (\vec{d}_{1jk} - \vec{d}_{2jk} - \vec{d}_{\theta z,jk}) \cdot \vec{n} - D_{vjk} \quad (136)$$

La Figure 73 montre l'erreur de transmission statique calculée avec et sans prise en compte des contacts hors ligne d'action pour un engrenage droit. On peut remarquer que les limitations classiques à la ligne d'action sous-estiment l'intervalle angulaire pendant lequel deux dents sont en contact et mènent à des variations plus brutales de l'erreur de transmission.

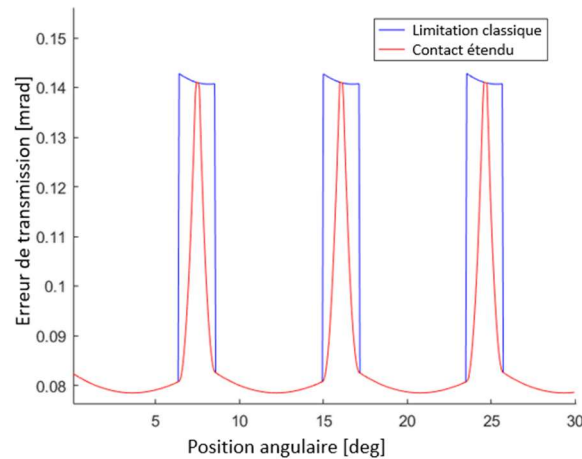


Figure 73 : Impact des contacts hors ligne d'action sur l'erreur de transmission statique

III.3.3 – Congés de raccordement en tête

La prise en compte des congés en tête de denture constitue une généralisation des calculs d'écrasement pour les contacts hors ligne d'action. En effet, considérer des congés de rayon nul dans la suite de cette section permet de retrouver les résultats obtenus précédemment. La Figure 74 présente la géométrie d'une tête de denture.

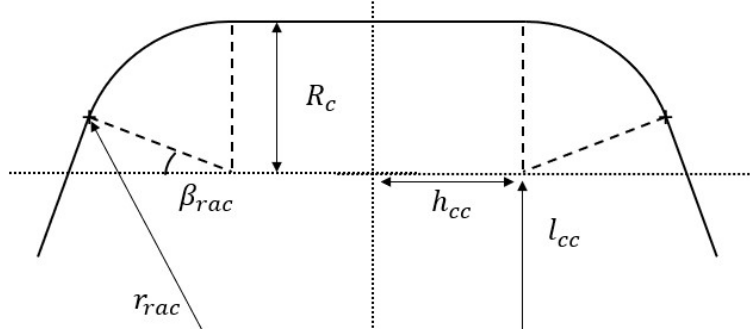


Figure 74 : Géométrie d'une tête de denture

Bien que le rayon du congé R_c à lui seul permette de le définir entièrement, plusieurs grandeurs utiles peuvent être déduites. Parmi celles-ci, on retrouve la position (l_{cc}, h_{cc}) du centre du congé, l'angle β_{rac} d'orientation de la normale au point de raccordement avec le profil en développante de cercle et le rayon r_{rac} de ce même point. On peut montrer que ce dernier vérifie l'égalité suivante.

$$r_{rac} \cos(a - \Theta(r_{rac})) = R_t \cos(a - \Theta(R_t)) + R_c \left(\sin \left(\frac{\sqrt{r_{rac}^2 - R_b^2}}{R_b} - a \right) - 1 \right) \quad (137)$$

$$\text{Où } a = \text{asin} \left(\frac{h_t}{R_t} \right) + \Theta(R_t) \quad \text{et} \quad \Theta(r) = \frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} - \arctan \left(\frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} \right) \quad (138)$$

Bien qu'une solution analytique de l'équation (137) ne puisse être déterminée directement, une approximation numérique précise de r_{rac} peut être obtenue par la méthode de Newton-Raphson. Le calcul des autres paramètres est alors rapide.

$$l_{cc} = R_t \cos(a - \Theta(R_t)) - R_c \quad (139)$$

$$h_{cc} = r_{rac} \sin(a - \Theta(r_{rac})) - R_c \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{r_{rac}^2 - R_b^2}}{R_b} - a \right) \quad (140)$$

$$\beta_{rac} = \frac{\sqrt{r_{rac}^2 - R_b^2}}{R_b} - a \quad (141)$$

En raison du congé, la plage angulaire de contact où la distance à vide est nulle est réduite. On introduit par conséquent les angles γ_1 et γ_2 correspondant aux positions angulaires de la roue 1 pour lesquels le contact est réalisé au rayon de raccordement entre le congé et le profil en développante de cercle pour la roue 1 et pour la roue 2 respectivement. On note G_1 et G_2 les points de la ligne d'action associés. On montre que :

$$\gamma_i = \frac{x_{G_i} - x_{A2}}{x_{A1} - x_{A2}} \phi_1 \quad (142)$$

$$\text{Avec } x_{G_1} = \sqrt{r_{rac1}^2 - R_{b1}^2} \quad \text{et} \quad x_{G_2} = x_{T2} - \sqrt{r_{rac2}^2 - R_{b2}^2}$$

Le calcul de l'écrasement est alors similaire à ce qui a été présenté dans les sections précédentes et trois zones sont définies. La zone de contact cinématique (ou zone 2) correspond à présent à la plage angulaire $[\gamma_2; \gamma_1]$ pour la roue 1. La zone 1, délimitée par $[\theta_{p1}; \gamma_2]$, voit un contact sur le congé de raccordement de la roue 2. La zone 3 s'étend quant à elle sur l'intervalle $[\gamma_1; \theta_{p2}]$ et

correspond à un contact sur le congé de la roue 1. Ces deux derniers cas sont représentés sur la Figure 75. Sur celle-ci, les cercles de définition des congés sont tracés en noir et leurs centres sont repérés par des croix de couleur. La ligne d'action apparaît en vert tandis que les cercles de base et de tête des roues dentées sont tracés en pointillés.

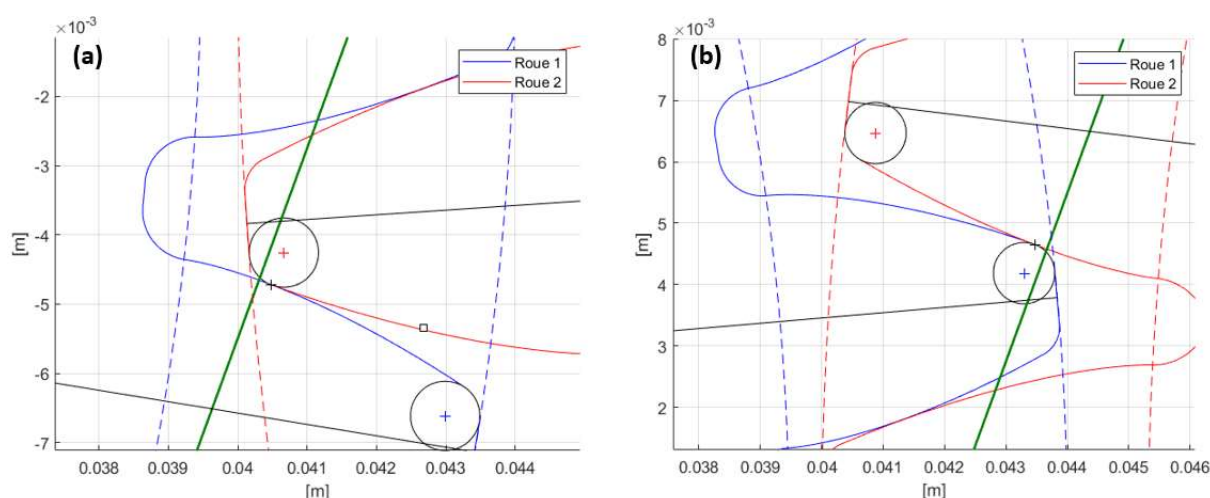


Figure 75 : Contact sur congés de raccordement : (a) zone 1 ; (b) zone 2

Le calcul de la distance à vide se base à présent sur la distance séparant le congé du profil de la dent opposée. Le problème revient donc à calculer la position du centre du congé par rapport au flanc de dent. La méthode est similaire à celle présentée dans la section précédente et le développement des calculs est fourni en annexe D. La trajectoire du point de contact est qualitativement schématisée sur la Figure 76. En raison du congé, le point de contact ne parcourt pas le profil jusqu'au sommet des dentures. On peut noter que les trajectoires en zone 1 et 3 ne sont pas des arcs de cercle parfaits car le point de contact se déplace légèrement sur le congé. La Figure 77 compare les distances à vide calculées pour une même géométrie d'engrenage en présence ou non de congés en tête de denture. On remarque que la plage angulaire sur laquelle la distance à vide est non nulle est plus courte lors de la prise en compte des congés tandis que pour une position angulaire donnée, la distance à vide est plus importante.

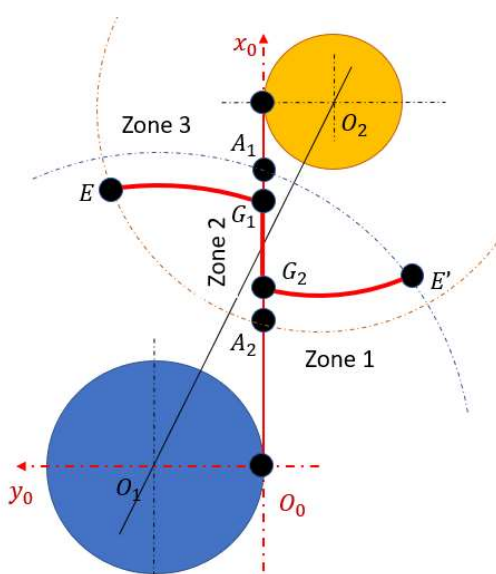


Figure 76 : Trajectoire qualitative du point de contact en présence de congés de raccordement

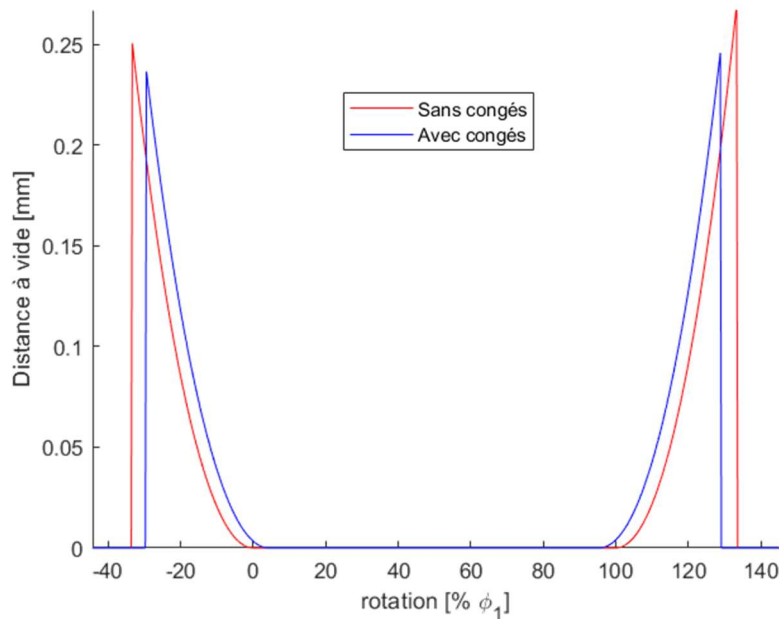


Figure 77 : Comparaison des distances à vide calculées avec et sans congés de raccordement

III.3.4 – Correction de denture

Les corrections de dentures envisagées ici sont des retraits de matière de quelques micromètres sur les flancs de denture et ont pour objectif d'adoucir l'établissement de l'effort de contact sur une dent et de limiter les concentrations de pression aux extrémités de la dent pouvant être engendrées par un désalignement des roues. Les modifications de profil considérées sont des bombés dans le sens de l'hélice et dans la direction radiale. La loi de retrait de matière est parabolique dans chaque cas. Elle est de plus symétrique par rapport au centre de la dent dans le cas des bombés d'hélice et par rapport au rayon primitif dans le sens du profil. Le retrait de matière au centre est toujours nul et il suffit donc pour définir ces corrections de connaître les dépouilles maximales h_{pmax} et h_{hmax} en tête de denture et aux extrémités de la dent respectivement. Ces paramètres sont introduits sur la Figure 78. Bien que cette modélisation ne soit pas tirée d'un élément de bibliographie particulier, de nombreuses publications proposent une approche similaire.

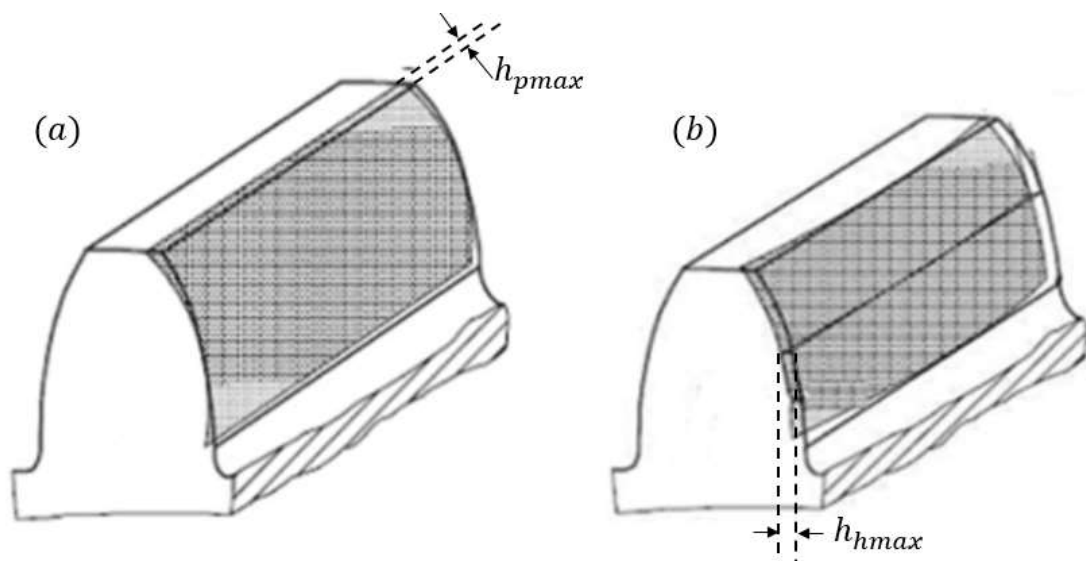


Figure 78 : Définition des corrections de denture

L'expression de la profondeur du retrait de matière s'exprime donc en fonction du rayon et de la position axiale du point considéré.

$$h_{pi}(r) = h_{pmax} \frac{(r - R_{pi})^2}{(R_{ti} - R_{pi})^2} \quad \text{et} \quad h_{hi}(z) = 4h_{hmax} \frac{z^2}{\phi^2} \quad (143)$$

L'expression de l'écrasement est modifiée afin de tenir compte des corrections de denture par l'ajout de termes correspondant aux profondeurs des retraits de matière effectués. Bien qu'en toute rigueur, ces termes doivent être inclus dans le calcul de la distance à vide, ils ont été ajoutés séparément pour des raisons de lisibilité. Le terme D_{vjk} ci-dessous garde donc l'expressions détaillée dans les sections précédentes. La profondeur des corrections de denture au point de contact dépend du rayon r_{ijk} de celui-ci sur la roue i ainsi que de sa position axiale z_k .

$$\delta_{jk} = (\overrightarrow{d_{1jk}} - \overrightarrow{d_{2jk}} - \overrightarrow{d_{\theta z,jk}}) \cdot \vec{n} - D_{vjk} - \sum_i h_{hi}(z_k) - \sum_i h_{pi}(r_{ijk}) \quad (144)$$

La Figure 79 présente l'erreur de transmission statique calculée pour un profil en développante de cercle non modifié et des profils incluant des congés en tête de denture et des corrections de type bombé. Ces deux types de modification de profil mènent à des changements de rapport de cyclique et d'amplitude de l'erreur de transmission. Les dépouilles maximales utilisées ici étaient faibles et les corrections de profil peuvent avoir un impact plus fort encore sur l'erreur de transmission statique.

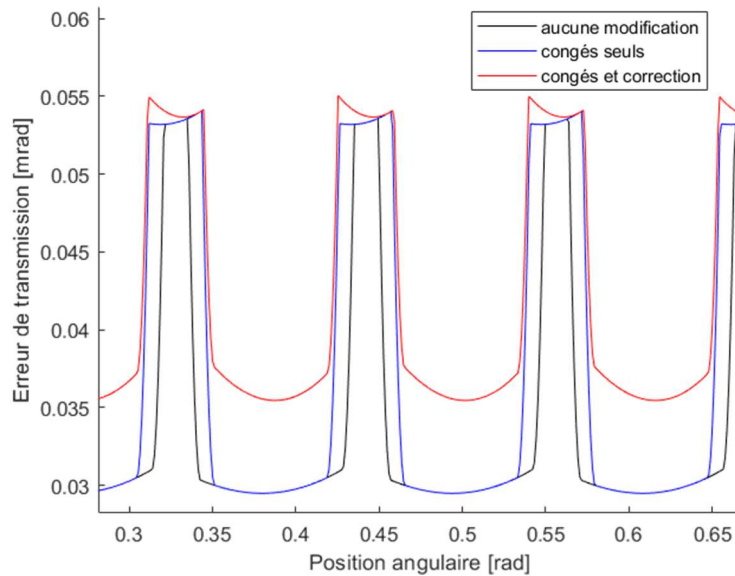


Figure 79 : Impact des modifications de profils sur l'erreur de transmission statique

III.4 – Loi de contact, raideur et calcul d'effort

La section précédente abordait le calcul de l'écrasement sur chacune des tranches de dent dans la zone de contact potentiel. Cette partie s'attache à la description de la loi reliant l'écrasement aux efforts de contact. Lors de l'application d'un effort à l'engrènement, les différentes parties de la roue dentée se déforment simultanément selon des lois de comportement différentes. Ainsi, on peut distinguer les déformations de contact, de denture et de corps de roue. La déformation totale au contact est la somme de ces participations qui sont détaillées une à une par la suite.

III.4.1 – Déformation de contact

De nombreux modèles de comportement au contact pour les engrenages sont disponibles dans la littérature avec des objectifs et des complexités variés. Ainsi, Weber et Banascheck [101], de même que de nombreux auteurs par la suite [94], [126], [127], proposent une linéarisation de la loi de contact et introduisent une raideur approximative basée sur la théorie de Hertz. Cependant, le contact à l'engrènement est assimilable à un contact de type cylindre-cylindre de longueur finie dont le comportement est connu pour être non-linéaire. Des modèles dédiés spécialisés ont été développés au cours des dernières dizaines d'années. Palmgren [50] fournit une loi empirique qu'il utilise dans la modélisation des roulements à rouleaux. D'autres travaux ont étendu la théorie de Hertz en élargissant ses hypothèses. C'est le cas de Goldsmith et Radimovski [132] par exemple ainsi que Johnson [131] dont la relation effort-déplacement a été retenue dans cette section et est rappelée ci-dessous. D'autres formulations plus précises ont été développées mais elles reposent sur une discrétisation 2D du contact et sont plus coûteuses en temps de calcul.

$$\delta_{c,jk}(F_{jk}) = \frac{F_{jk}}{\pi d_z E^*} \left(\ln \left(\frac{4\pi d_z E^* \Delta R}{F_{jk}} \right) - 1 \right) \quad (145)$$

Ici, d_z est la largeur d'une tranche de discrétisation axiale des dents, E^* est le module d'Young réduit et ΔR est la somme des rayons de courbure des profils au point de contact. Ils peuvent se déduire des paramètres du modèle comme suit.

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad d_z = \frac{e}{K} \quad \text{et} \quad \Delta R = \sqrt{r_{1jk}^2 - R_{b1}^2} + \sqrt{r_{2jk}^2 - R_{b2}^2} \quad (146)$$

III.4.2 – Déformation de denture

La déformation de la dent est calculée en adoptant le modèle de Weber et Banascheck dans lequel la tranche, assimilée à une poutre encastrée-libre, travaille en flexion, en cisaillement et en compression [18], [126]. Le comportement de cette partie est donc linéaire et trois raideurs correspondantes doivent être définies. La Figure 80 schématise la tranche de dent, et fait apparaître l'effort transmis ainsi que les paramètres utiles par la suite.

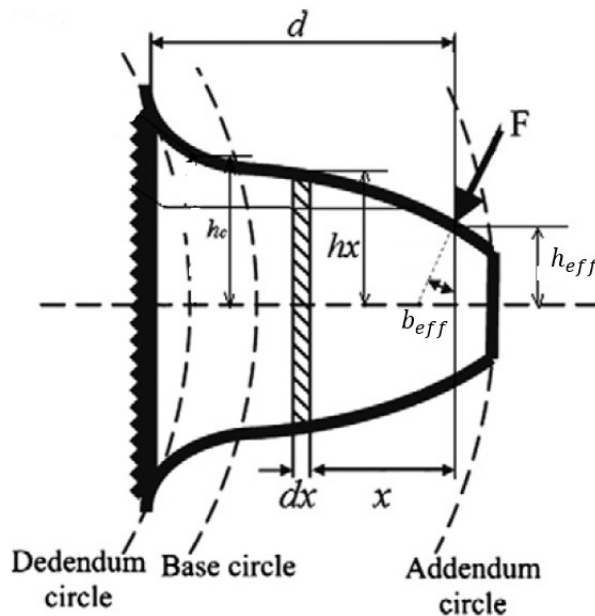


Figure 80 : Modélisation de la tranche [126]

On note ainsi b_{eff} l'angle formé entre la normale au contact et la fibre neutre de la tranche et chaque section infinitésimale de celle-ci est repérée par la distance x qui la sépare du point d'application de l'effort. De plus, pour une position x donnée, $h(x)$ représente la demi épaisseur de la section associée. Il est possible d'exprimer les énergies potentielles de flexion, compression et cisaillement contenue dans la dent sous la forme suivante :

$$U_b = \frac{F_{jk}^2}{2K_b} \quad U_s = \frac{F_{jk}^2}{2K_s} \quad U_c = \frac{F_{jk}^2}{2K_c} \quad (147)$$

Or la théorie des poutres donne :

$$\begin{aligned} U_b &= \int_0^d \frac{M^2}{2EI(x)} dx \quad \text{avec} \quad M = F_{jk}(x \cdot \cos(b_{eff}) - h_{eff} \cdot \sin(b_{eff})) \\ U_s &= \int_0^d \frac{1,2 \cdot F_y^2}{2GA(x)} dx \quad \text{avec} \quad F_y = F_{jk} \cdot \cos(b_{eff}) \\ U_c &= \int_0^d \frac{F_x^2}{2EA(x)} dx \quad \text{avec} \quad F_x = F_{jk} \cdot \sin(b_{eff}) \end{aligned} \quad (148)$$

On peut alors en déduire l'expression des déplacements normaux au profil au point de contact dus à la flexion, au cisaillement et à la compression de la dent.

$$\begin{aligned} \delta_{b,jk} &= F_{jk} \int_0^d \frac{(x \cdot \cos(b_{eff}) - h_{eff} \cdot \sin(b_{eff}))^2}{EI(x)} dx \\ \delta_{s,jk} &= F_{jk} \int_0^d \frac{1,2 \cdot \cos^2(b_{eff})}{GA(x)} dx \\ \delta_{t,jk} &= F_{jk} \int_0^d \frac{\sin^2(b_{eff})}{EA(x)} dx \end{aligned} \quad (149)$$

Avec

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad A(x) = 2h(x)\delta z \quad I(x) = \frac{(2h(x))^3 \delta z}{12} \quad (150)$$

Les propriétés du profil en développante de cercle permettent d'obtenir la position x et l'épaisseur h en fonction du rayon r d'un point du profil. En se basant sur les relations fournies en annexe C, on peut écrire :

$$x(r) = r_{eff} \cdot \cos(a - \Theta(r_{eff})) - r \cdot \cos(a - \Theta(r)) \quad (151)$$

$$h(r) = r \cdot \sin(a - \Theta(r)) \quad (152)$$

Ceci permet d'obtenir numériquement la loi $h(x)$. Cependant, ces expressions ne sont valables que pour la partie supérieure de la dent. Le pied de dent prend en général la forme d'une trochoïde et est assimilé ici par simplicité à un arc de cercle permettant le raccord entre le fond de dent et le profil en développante de cercle.

III.4.3 – Déformation de corps de roue

Le corps de roue est associé à un disque travaillant en torsion uniquement. Ainsi, ses déformations hors-plan sous l'effet de la composante axiale des efforts d'engrènement sont négligées. En effet, la prise en compte de celles-ci nécessiterait une grande complexification du modèle. De plus, bien que ces déformations influent sur l'erreur de transmission statique, elles ne changent que la valeur moyenne de celle-ci et n'ont pas d'impact sur la forme et l'amplitude de ses variations. Ceci a été vérifié lors de la validation du modèle d'engrenage présenté ici sur la base de calculs éléments finis

et est vérifiable sur la Figure 81 montrant les déformations axiales du corps de la roue sous l'effet de la composante axiale des efforts de contact ainsi que l'erreur de transmission calculée avec et sans blocage de ces déplacements axiaux.

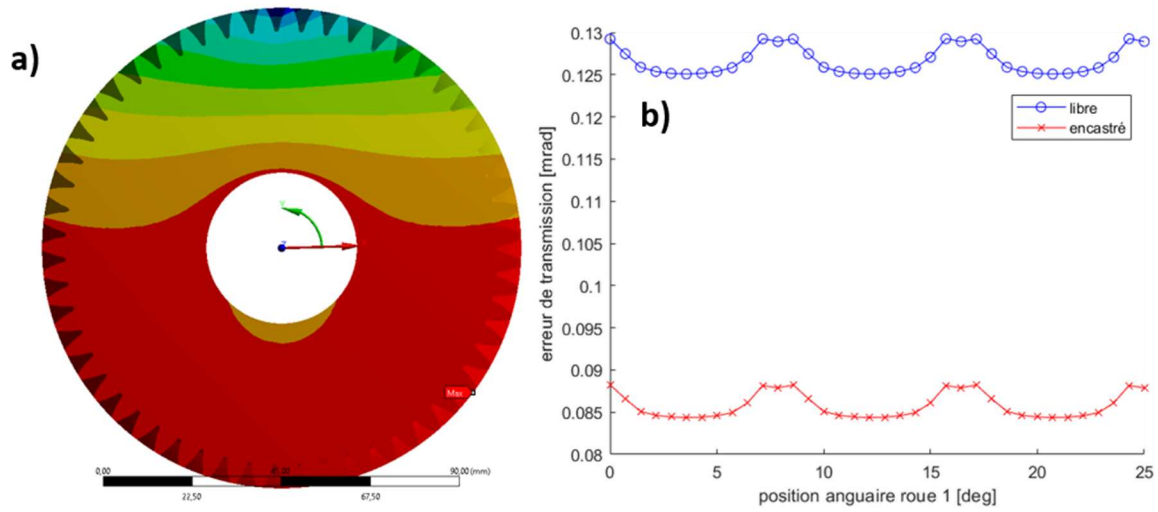


Figure 81 : (a) Déformation axiale de la roue sous l'effet de l'effort axial à la denture. Maximum de déplacement en bleu. (b) Erreur de transmission avec et sans blocage axial

En utilisant les travaux de Sainsot et al. [108], un déplacement selon la normale au contact est ajouté permettant de prendre en compte la déformation du disque de l'engrenage. On le nommera par la suite déplacement de fondation. Son calcul se base sur les travaux de Muskhelishvili [133] appliqués aux anneaux élastiques. Elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\delta_{f,jk} = F_{jk} \frac{\cos^2(b_{eff})}{E \cdot d_z} \left[L^* \left(\frac{u_{fjk}}{S_f} \right)^2 + M^* \frac{u_{fjk}}{S_f} + P^* (1 + Q^* \tan^2(b_{eff})) \right] \quad (153)$$

Ici, S_f est la corde en pied de denture tandis que u_{fjk} est la distance dans la direction de la fibre neutre entre le pied de dent et le point d'application de l'effort et θ_f est la demi largeur angulaire du pied de dent. Ces trois paramètres apparaissent sur la Figure 82.

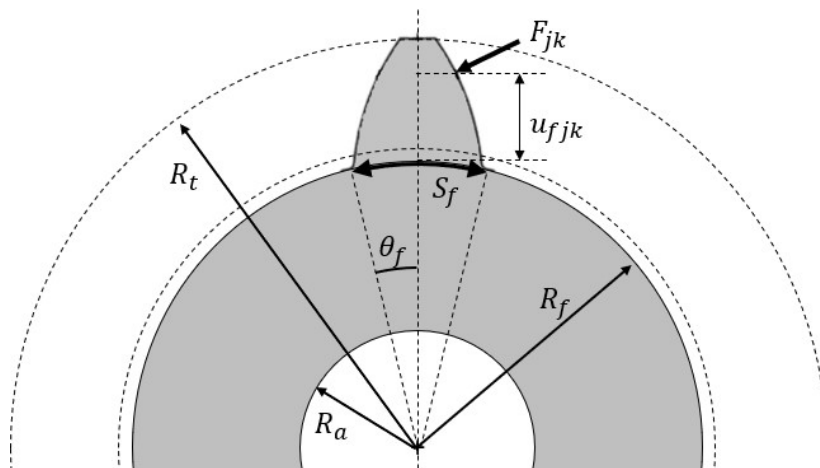


Figure 82 : Paramètres du calcul de raideur de fondation

Les coefficients X^* sont obtenus par régression polynomiale avec l'expression suivante :

$$X^* = \frac{A_X}{\theta_f^2} + B_X \left(\frac{R_f}{R_a} \right)^2 + C_X \frac{R_f}{\theta_f R_a} + \frac{D_X}{\theta_f} + E_X \frac{R_f}{R_a} + F_X \quad X^* \in \{L^*; M^*; P^*; Q^*\} \quad (154)$$

Les coefficients A_X , B_X , C_X , D_X , E_X et F_X sont renseignés dans le Tableau 21.

	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i	F_i
$L^* (h_{fi}, \theta_f)$	-5.574×10^{-5}	-1.9986×10^{-3}	-2.3015×10^{-4}	4.7702×10^{-3}	0.0271	6.8045
$M^* (h_{fi}, \theta_f)$	60.111×10^{-5}	28.100×10^{-3}	-83.431×10^{-4}	-9.9256×10^{-3}	0.1624	0.9086
$P^* (h_{fi}, \theta_f)$	-50.952×10^{-5}	185.50×10^{-3}	0.0538×10^{-4}	53.3×10^{-3}	0.2895	0.9236
$Q^* (h_{fi}, \theta_f)$	-6.2042×10^{-5}	9.0889×10^{-3}	-4.0964×10^{-4}	7.8297×10^{-3}	-0.1472	0.6904

Tableau 21 : Coefficients pour le calcul de L^* , M^* , P^* et Q^* [108]

III.4.4 – Efforts normaux et tangentiels

La déformation totale des deux solides est la somme des participations évoquées dans les sections précédentes. L'écrasement au contact est commun mais chacun se déforme au niveau de la dent et du corps de roue de manière différente puisque les géométries ne sont pas identiques. Ainsi, il est nécessaire de calculer séparément et de sommer les déplacements associés.

$$\delta_{tot,jk}(F) = \delta_{c,jk} + \sum_i (\delta_{b,ijk} + \delta_{s,ijk} + \delta_{t,ijk} + \delta_{f,ijk}) \quad (155)$$

Puisque les déplacements de structure sont linéaires, il est possible de définir des raideurs pour chacun d'entre eux. Ces raideurs sont toutefois dépendantes du point d'application de l'effort sur le profil. L'expression de la déformation totale peut alors se mettre sous la forme suivante.

$$\delta_{tot,jk}(F_{jk}) = \frac{F_{jk}}{K_{tot,jk}} + \frac{F_{jk}}{\pi \cdot L \cdot E^*} \left(\ln \left(\frac{4\pi \cdot L \cdot E^* \cdot \Delta R}{F_{jk}} \right) - 1 \right) \quad (156)$$

$$\text{Avec :} \quad K_{tot,jk} = \left[\sum_i \left(\frac{1}{K_{b,ijk}} + \frac{1}{K_{s,ijk}} + \frac{1}{K_{t,ijk}} + \frac{1}{K_{f,ijk}} \right) \right]^{-1} \quad (157)$$

Afin de calculer l'effort résultant sur chaque tranche chargée à partir de l'écrasement calculé dans les sections précédentes, il faut inverser la relation ainsi obtenue. Cependant, bien que celle-ci soit bijective sur son domaine de définition, son inverse fait appel à la fonction W de Lambert qui ne possède pas de forme analytique. Par conséquent, une expression approchée de F_{jk} est obtenue numériquement par la méthode de Newton-Raphson.

Une fois l'effort normal obtenu pour chaque tranche, deux forces supplémentaires sont introduites afin de tenir compte de la dissipation d'énergie dans l'engrènement. Dans un premier temps un second effort normal est ajouté et modélise l'amortissement à la denture. Celui-ci est proportionnel à la vitesse v_n relative des deux solides selon la normale au contact et dépend d'un coefficient d'amortissement visqueux α_e . Il peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\overrightarrow{F_{v,jk}} = -\alpha_{eng} v_n \vec{n} \quad (158)$$

$$\text{Avec} \quad v_n = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} \quad (159)$$

$$\text{Et} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{y}_{10} \\ \dot{z}_{10} \end{pmatrix} - \overrightarrow{O_1 P_{jk}} \wedge \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{x10} \\ \dot{\theta}_{y10} \\ \dot{\theta}_{z10} \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_{20} \\ \dot{y}_{20} \\ \dot{z}_{20} \end{pmatrix} - \overrightarrow{O_2 P_{jk}} \wedge \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{x20} \\ \dot{\theta}_{y20} \\ \dot{\theta}_{z20} \end{pmatrix} \quad (160)$$

Dans un second temps, un effort de frottement tangential aux surfaces en contact est introduit. Son calcul se base sur l'hypothèse de glissement total et une loi de Coulomb pour le frottement sec est retenue.

$$\overrightarrow{F_{t,jk}} = -\mu \cdot F_{jk} \cdot \overrightarrow{v_t} \quad (161)$$

$$\text{Avec} \quad \overrightarrow{v_t} = (\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) - [\vec{n} \cdot (\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})] \vec{n} \quad (162)$$

Il est important de noter que l'hypothèse de glissement total est simplificatrice et ne permet pas de rendre compte précisément du comportement au contact. Elle reste cependant adaptée lorsque la vitesse de glissement est suffisante, c'est-à-dire lorsque le point de contact n'est pas trop proche du primitif d'engrènement. De plus, une résolution plus avancée en stick-slip est inenvisageable car trop coûteuse.

Les torseurs d'effort aux centres des roues sont alors obtenus pour chacune par sommation des efforts normaux, d'amortissement et de frottement appliqués sur chaque dent.

$$T_{2 \rightarrow 1} = - \sum_j \sum_k \left(\frac{\overrightarrow{F_{jk}} + \overrightarrow{F_{v,jk}} + \overrightarrow{F_{t,jk}}}{O_1 P_{jk}} \wedge (\overrightarrow{F_{jk}} + \overrightarrow{F_{v,jk}} + \overrightarrow{F_{t,jk}}) \right)_0 \quad (163)$$

$$T_{1 \rightarrow 2} = \sum_j \sum_k \left(\frac{\overrightarrow{F_{jk}} + \overrightarrow{F_v} + \overrightarrow{F_t}}{O_2 P_{jk}} \wedge (\overrightarrow{F_{jk}} + \overrightarrow{F_{v,jk}} + \overrightarrow{F_{t,jk}}) \right)_0 \quad (164)$$

III.5 – Effets convectifs de flexion

L'approche utilisée dans le calcul des torseurs de restitution aux centres des roues et présentée dans les sections précédentes s'appuie sur l'hypothèse d'indépendance des différentes tranches de discrétisation des dents. Ainsi, l'écrasement est calculé séparément pour chaque tranche et un effort de restitution en est déduit sans prendre en compte le chargement sur les tranches voisines. Ceci revient à négliger les effets convectifs élastiques dont le principe a été introduit plus tôt, sur la Figure 64. Les différentes tranches, indépendantes, se comportent alors de manière non réaliste comme des touches de piano. Cette hypothèse est largement vérifiée pour les engrenages droits en l'absence d'endommagement ou lorsque ceux-ci sont réguliers sur la largeur de denture. En effet, dans ce cas de figure, la discrétisation axiale des dents ne présente pas d'intérêt majeur. Cependant, en raison de l'angle d'hélice ou à cause d'endommagements localisés, l'écrasement calculé peut varier brutalement d'une tranche à l'autre. C'est le cas par exemple pour les engrenages hélicoïdaux lors de l'entrée d'une dent dans la zone contact. Seule la première tranche est alors soumise à un écrasement non nul.

Afin de se rapprocher du comportement réel de l'engrenage et de tenir compte de la déformation des tranches libres voisines de tranches chargées, une modélisation originale des effets convectifs a été mise en place. Afin de garder une complexité algorithmique linéaire, un modèle simplifié a été adopté après le calcul d'écrasement mené sur chaque tranche. La Figure 83 schématise le profil d'une dent d'engrenage discrétisée en tranches minces soumise à un effort à son extrémité. Les traits pointillés correspondent à la position au repos et les traits pleins à la position déformée. Il est possible de déterminer empiriquement une longueur caractéristique L_c de déformation qui sera utilisée dans la modélisation. Lorsqu'une dent n'est chargée que partiellement et donc qu'une partie de ses tranches n'est soumise à aucun écrasement, la raideur des tranches subissant sous charge est artificiellement augmentée pour tenir compte de leurs voisines qui participent en réalité à la raideur en flexion de la dent. La raideur finale $K_{totf,jk}$ d'une tranche correspond donc à sa raideur propre $K_{tot,jk}$, calculée dans la section précédente, multipliée par un facteur λ_{cj} représentatif de la participation des tranches voisines. Ce facteur correspond au nombre de tranches participant aux effets de flexion divisé par le nombre de tranche sous charge.

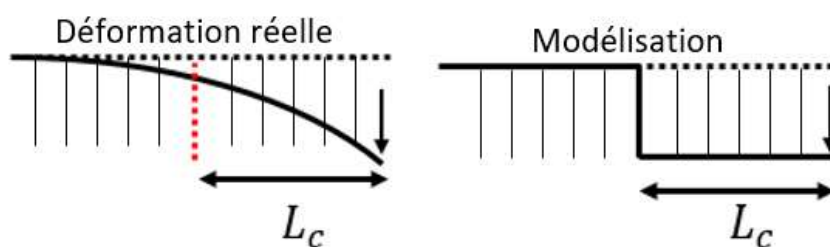


Figure 83 : Longueur caractéristique des effets convectifs

La Figure 84 présente un exemple de calcul. Dans cet exemple la dent est discrétisée en 18 tranches dont 8, repérées par des flèches, sont soumises à un écrasement. Les 14 tranches participant à la raideur en flexion, correspondant aux tranches sous charge et à leurs voisines sont repérées en rouge tandis que les tranches « mortes » apparaissent en bleu. On calcule alors la raideur équivalente K_f de chaque tranche comme suit :

$$K_{totf,jk} = \lambda_{cj} K_{totf,jk} \quad \text{avec, dans cet exemple, } \lambda_c = \frac{14}{8} \quad (165)$$

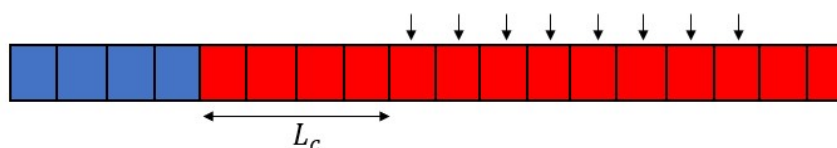


Figure 84 : Tranches prises en compte dans le calcul de raideur

Bien que l'effort total de restitution ainsi calculé sur la dent s'approche davantage de la réalité, cette méthode reste très approximative et ne tient pas compte de nombreux phénomènes mécaniques. De plus, le calcul de la largeur caractéristique L_c ainsi introduite est difficile et il est indispensable, à ce jour, de la déterminer empiriquement sur la base de calculs éléments finis comme cela sera discuté dans la section suivante. Cependant, cette méthode présente l'avantage de ne pas demander de calcul supplémentaire et de ne pas nécessiter le recours à une discrétisation particulière ou à une boucle d'équilibre. De plus dans l'objectif final d'estimer correctement le couple transmis d'une roue à l'autre et les variations de vitesse de rotation ainsi produites, cette méthode est suffisante et adaptée.

III.6 – Validation quasi statique et recalage

Afin de valider le calcul quasi-statique d'effort, une comparaison avec des résultats de modèles éléments finis sous ANSYS a été mise en place. La validation porte en majeure partie sur la valeur de l'erreur de transmission obtenue pour un couple donné. A cause de temps de calcul importants, les résultats éléments finis n'ont pu être obtenus que pour 12 positions régulièrement réparties sur une période d'engrènement. De plus, afin d'assurer la compatibilité des modèles, il a été décidé de se limiter à des contacts sans frottement et à des géométries d'engrenage parfaites, pour lesquelles toutes les dents sont identiques et sans défaut ni endommagement.

III.6.1 – Géométrie et modèle éléments finis

Deux géométries fictives très proches ont été utilisées lors de ce travail. Elles se différencient essentiellement par l'angle d'hélice nul pour la première et non nul pour la seconde. Le Tableau 22

contient les paramètres utilisés dans chaque cas. Les simulations ont été effectuées avec un matériau de module d'Young de 200 GPa et un coefficient de poisson de 0.3.

Paramètres	Géométrie 1	Géométrie 2
Module réel [mm]	2	2
Angle de contact [°]	20	20
Nombre de dents	42/55	42/55
Angle d'hélice [°]	0	20
Rayon de pied [mm]	38.8 / 50.8	41 / 54
Rayon de tête [mm]	44 / 57	46.7 / 60.5
Rayon de congé [mm]	0	0
Largeur de denture [mm]	20	20
Rayon de raccordement en pied [mm]	39.5 / 51.7	41.7 / 54.6
Rayon d'alésage [mm]	190	190

Tableau 22 : Paramètres géométriques pour validation

Lors de la modélisation en éléments finis, chaque roue est découpée en plusieurs sous parties sur lesquelles des contraintes de maillage différentes ont été imposées. Pour une période d'engrènement, cinq dents sont potentiellement en contact et ont été maillées plus finement que les autres. Le maillage est grossier pour les corps des roues. Les tailles de mailles sont réduites pour les pieds des dents d'intérêt et le maillage est à nouveau raffiné pour les corps des dents potentiellement en contact. Pour finir, la taille de maille la plus faible est imposée au niveau de la surface de contact. La Figure 85 et la Figure 86 donnent un aperçu du maillage. La roue 1 est bloquée sur son alésage tandis que des blocages axiaux et radiaux ainsi qu'un couple sont appliqués sur l'alésage de la roue 2. Un post traitement automatique permet d'exporter la charge normale vue par chaque dent ainsi que l'erreur de transmission.

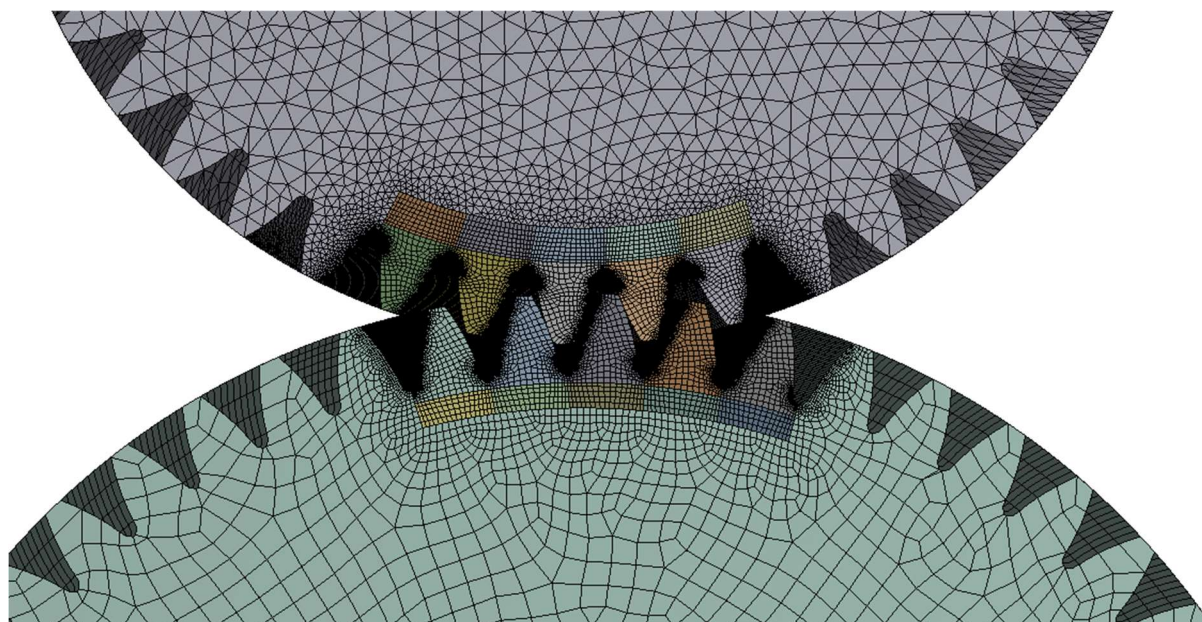


Figure 85 : Maillage – Aperçu

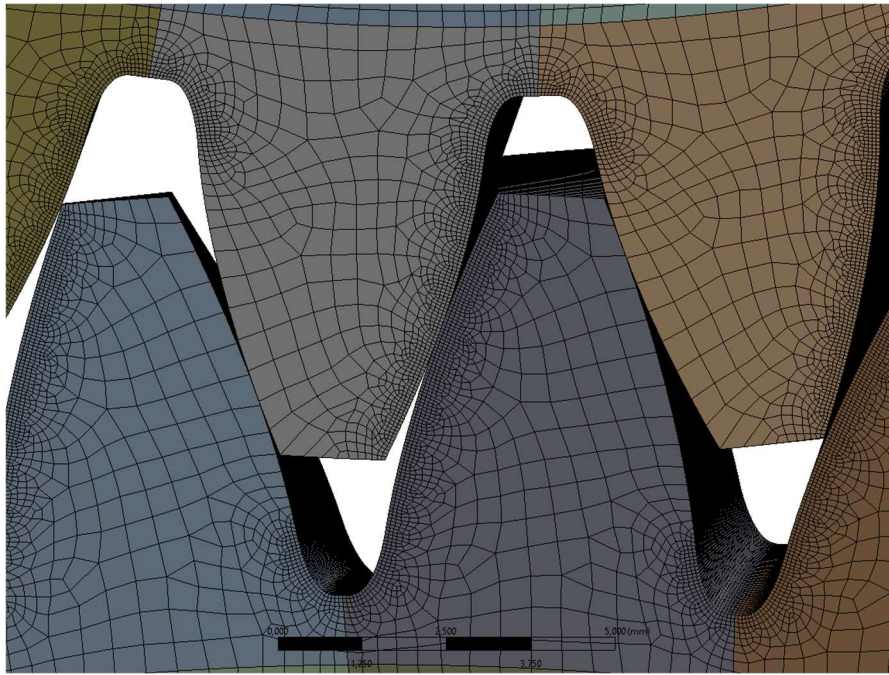


Figure 86 : Maillage – Zoom

III.6.1 – Comparaison et recalage

La Figure 87 montre les résultats obtenus avec le modèle éléments finis (rouge) et les résultats fournis par le modèle présenté dans ce document (bleu) pour l'engrenage droit. On remarque une bonne corrélation des résultats en effort normal et en erreur de transmission. Cependant, un point de calcul a fourni des résultats différents pour l'erreur de transmission. Il s'agit d'une position cinématique extrême. En effet, pour cette position une seule dent est en contact et ce cas de figure n'existe que pour un intervalle angulaire très faible pour la géométrie et le chargement utilisés. Il est possible que la différence observée soit le résultat d'une mauvaise résolution du contact ou de la flexion, aussi bien dans le modèle présenté dans ce document que dans le modèle éléments finis.

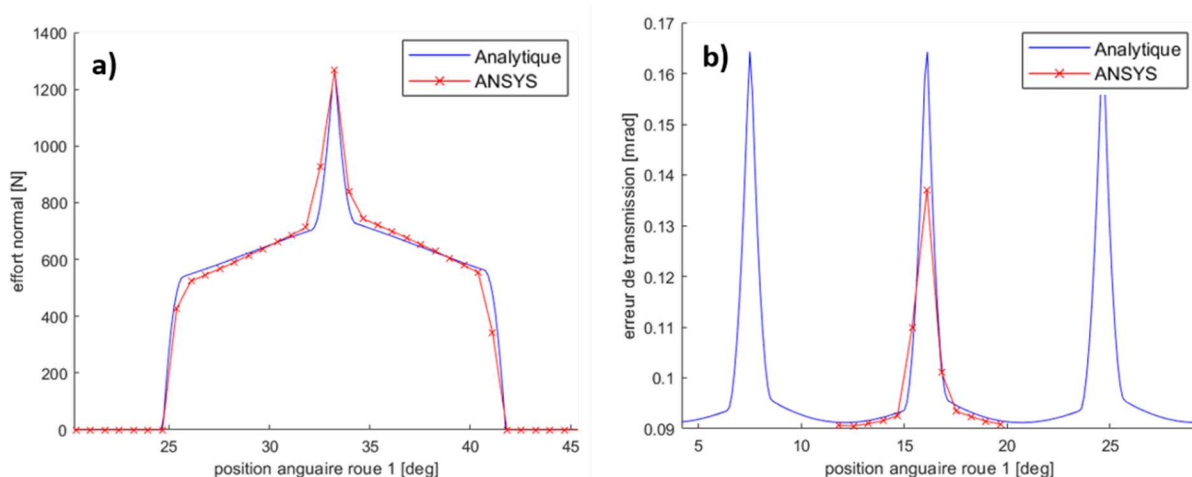


Figure 87 : Comparaison des efforts normaux (a) et de l'erreur de transmission (b) pour un engrenage droit

La Figure 88 compare les erreurs de transmission obtenues pour un engrenage hélicoïdal sans tenir compte dans le modèle analytique des effets convectifs de flexion. Elle met en évidence

l'importance de ceux-ci puisque la valeur moyenne de la raideur calculée est plus faible que ce que prédit le modèle éléments finis. De plus, il apparaît que les variations d'erreur de transmission sont mal estimées, en forme et en amplitude. En effet, la demi période correspondant à la plage angulaire sur laquelle trois dents sont en contact simultanément semble mal traitée par le modèle analytique. Dans ce cas de figure, deux dents ne sont chargées que sur une faible largeur et négliger les effets convectifs revient à ignorer la participation du reste de ces dents à la raideur totale. La Figure 89 présente les résultats obtenus pour un engrenage hélicoïdal en tenant compte des effets convectifs dans le modèle analytique et après recalage sur la largeur caractéristique des effets convectifs de flexion. L'erreur de transmission est alors très proche pour les deux modèles. En effet, l'amplitude et la forme de ces variations concordent. Une erreur d'un à deux pourcents est commise sur la valeur moyenne de l'erreur de transmission mais celle-ci n'influe pas sur la vitesse de rotation instantanée directement.

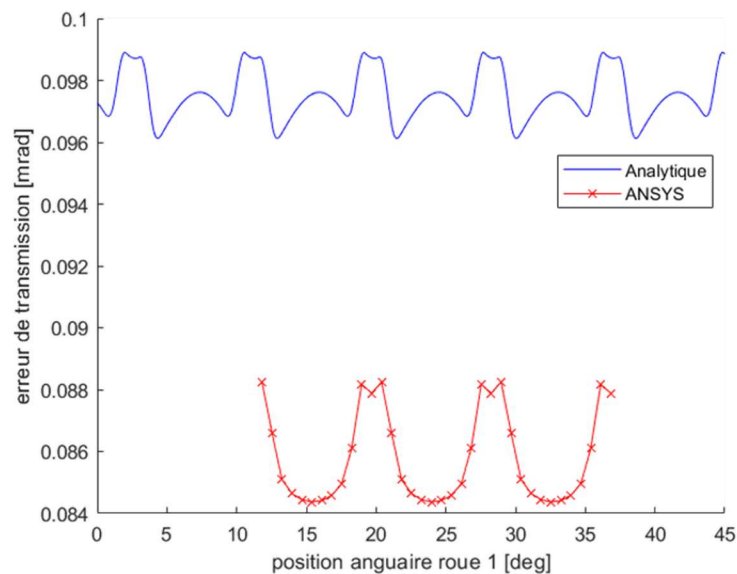


Figure 88 : Erreur de transmission pour un engrenage hélicoïdal sans recalage

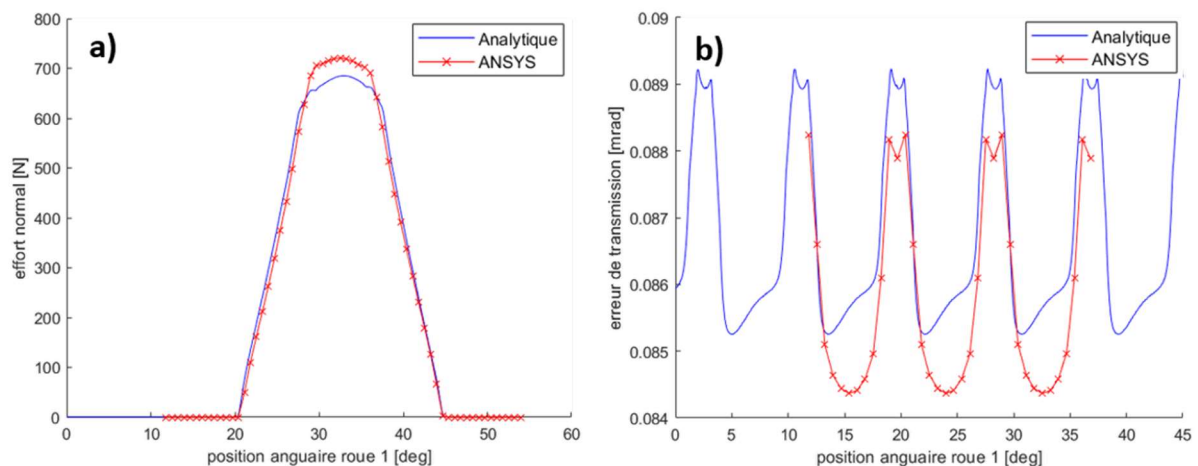


Figure 89 : Comparaison des efforts normaux (a) et de l'erreur de transmission (b) pour un engrenage hélicoïdal après recalage

Les résultats ont été jugés satisfaisants et le modèle validé. Cependant, il convient de souligner deux points importants de la validation. D'une part, lors des calcul éléments finis, les faces des deux roues sont bloquées axialement. En effet, la flexion de la roue sous l'effet de la composante axiale de

l'effort génère une erreur de transmission complémentaire quasi constante comme expliqué dans la section dédiée au calcul de la raideur de fondation. Celle-ci n'ayant pas d'influence sur la vitesse de rotation et la flexion axiale n'étant pas intégrable simplement au modèle présenté, il a été décidé d'effectuer la comparaison sans tenir compte de cette déformation, donc en bloquant les déformations axiales des corps des roues. D'autre part, il est nécessaire de connaître *a priori* la largeur caractéristique des effets convectifs de flexion ou de la déterminer empiriquement. Des travaux pourront être menés à l'avenir afin d'établir une loi empirique permettant d'estimer cette grandeur.

III.7 – Ecaillage et fissure

Afin de rendre le modèle présenté dans ce chapitre exploitable dans le cadre de la maintenance préventive, des endommagements ont été implémentés. Ceux-ci permettent de comparer les perturbations de vitesse instantanée générée par le fonctionnement d'engrenages sains et d'engrenages portant des écaillages sur les flancs de denture ou des fissures en pied de dent. Bien que la forme des endommagements implémentés reste basique, l'approche phénoménologique adoptée permet une estimation précise de l'impact de ceux-ci sur les variations de vitesse de rotation instantanée et permet de statuer sur leur détectabilité théorique. Il est toutefois à noter que le modèle n'a pas pour objectif de prévoir à lui seul la propagation des endommagements et la durée de vie résiduelle de l'engrenage.

III.7.1 – Ecaillages

De manière similaire au cas des roulements, un écaillage est implémenté comme une diminution artificielle de l'écrasement et vient se greffer au calcul de celui-ci. Cette diminution est réalisée lorsque le point de contact se situe dans la zone particulière du flanc de la dent portant l'endommagement. Les écaillages envisagés à ce stade sont rectangulaires de sorte qu'ils peuvent être décrits par cinq paramètres correspondant à leur hauteur Δr_{ec} , leur largeur Δz_{ec} et leur profondeur δ_{ec} ainsi que leurs positions z_{ec} et r_{ec} sur le profil de denture dans les deux directions. Enfin, le numéro j_{ec} de la dent écaillée doit être fourni. Ces paramètres ont été introduits au début de ce chapitre sur la Figure 63. L'expression de l'écrasement total est alors modifiée afin de tenir compte d'une écaille éventuelle :

$$\delta_{jk} = (\overrightarrow{d_{1jk}} - \overrightarrow{d_{2jk}} - \overrightarrow{d_{\theta z,jk}}) \cdot \vec{n} - D_{vjk} - \sum_i h_{hi}(z_k) - \sum_i h_{pi}(r_{ijk}) - \lambda_{ec} \delta_{ec} \quad (166)$$

Où λ_{ec} est un booléen permettant de détecter le contact sur écaillage et vérifie :

$$\lambda_{ec}(r_{ijk}, z_k, j) = 1 \text{ si } \begin{cases} j = j_{ec} \\ r_{ijk} \in [r_{ec} - \Delta r_{ec}; r_{ec} + \Delta r_{ec}] \\ z_k \in [z_{ec} - \Delta z_{ec}; z_{ec} + \Delta z_{ec}] \end{cases} \text{ et } \lambda_{ec}(r_{ijk}, z_k, j) = 0 \text{ sinon} \quad (167)$$

De même que pour les roulements il est important de préciser qu'un écaillage trop profond ou trop étroit mènera à une mauvaise modélisation du contact. En effet celui-ci ne s'établirait alors plus en fond d'écaillage mais sur les extrémités hautes et basses de celui-ci.

III.7.2 – Fissures

Le cas de la fissure est plus délicat à traiter. La modélisation adoptée se base sur les travaux de Chen & al. [18], [126] ainsi que ceux de Mohammed & al [127], [128]. Elle ne couvre que le cas des fissures en pied de dent, dont l'orientation est proche de la perpendiculaire à la fibre neutre de la dent.

La présence de la fissure est implémentée à travers une réduction de la largeur utile de la dent pour le calcul de la raideur de celle-ci. Une zone morte est définie dans le profil de la dent et ne sera pas prise en compte au moment de déterminer la raideur. Plusieurs méthodes existent pour délimiter cette zone morte et sont comparées à des résultats éléments fini par Mohammed & al. La Figure 90 présente les zones obtenues pour trois options possibles. La première consiste à considérer que la séparation entre la zone utile et la zone morte est une droite radiale partant de la pointe de la fissure. La seconde suppose que cette séparation est une courbe parabolique reliant la pointe de la fissure à l'extrémité du profil en développante de cercle. Enfin, la troisième est hybride et utilise une droite reliant ces deux mêmes points. Il a été montré par Mohammed & al. que la seconde méthode est la plus précise et c'est donc celle-ci qui est implémentée par la suite. On note donc $h(x)$ la demi largeur de la dent saine et $h_c(x)$ la demi largeur de la dent en tenant compte de la zone morte. Le calcul de la raideur se fait comme précédemment en considérant cette fois que la surface et l'inertie de la section de la dent en fonction de la position radiale sont diminuées. On utilisera pour les calculer la largeur L définie comme suit.

$$L = \begin{cases} 2h(x) & \text{si } x < x_c(z) - q(z) \cdot \sin(\alpha_c(z)) \\ h(x) + h_c(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (168)$$

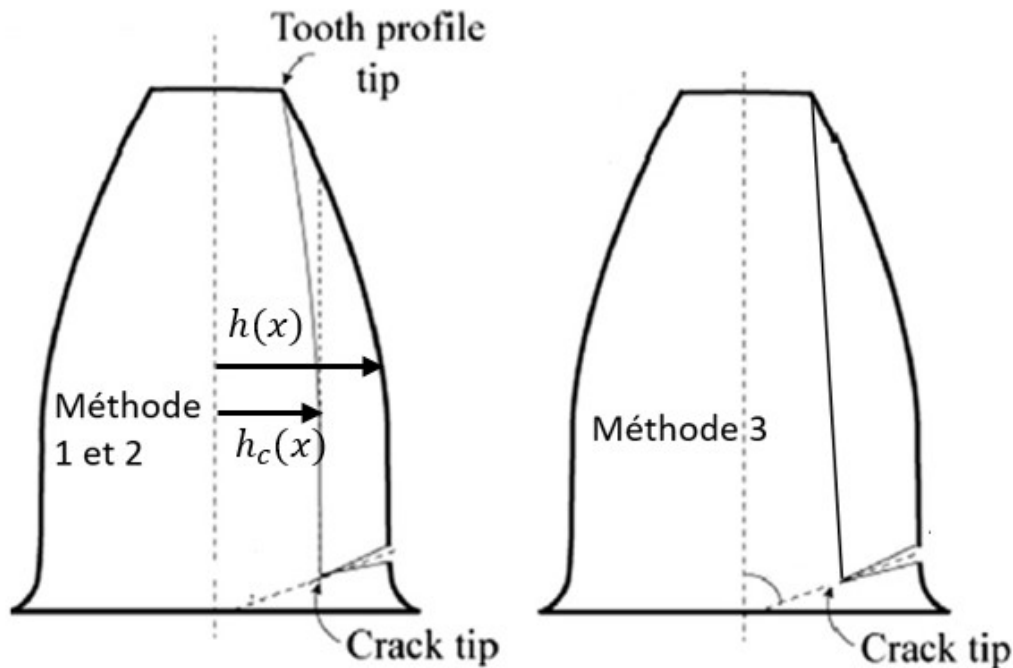


Figure 90 : Définition d'une zone morte pour une dent fissurée

L'impact dynamique de ces endommagements sera étudié dans le chapitre suivant dédié à la simulation de la vitesse de rotation d'une transmission complète. Toutefois, l'influence d'écaillage couvrant tout ou partie de la largeur de la dent sur l'erreur de transmission statique peut être observée sur la Figure 91. On observe que lors du passage d'une dent écaillée sur toute sa largeur, l'erreur de transmission augmente car elle compense la profondeur de l'écaillage. Cependant, ce cas de figure n'est pas réaliste car en règle générale, l'écaillage ne se forme que sur une partie de la dent et le contact est maintenu autour de celui-ci. Cela mène à une augmentation plus faible de l'erreur de transmission générée par la diminution de raideur de la dent bien que toujours détectable malgré la prise en compte des effets convectifs de flexion.

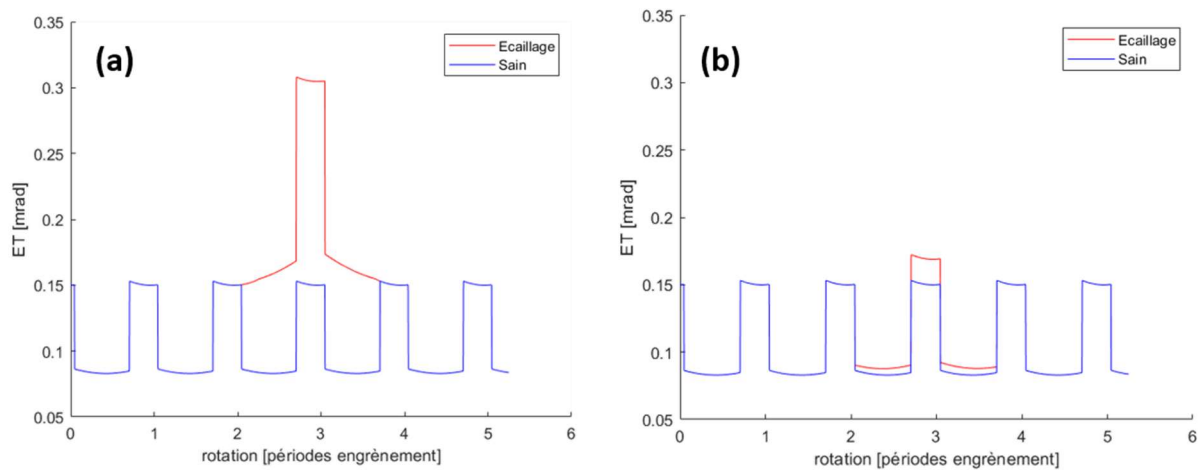


Figure 91 : Erreur de transmission statique en présence d'écaillage total (a) et partiel (b)

Le passage d'une dent fissurée peut être observé sur la Figure 92. Une augmentation de l'erreur de transmission statique est également observée bien que de forme et d'amplitude différentes de celles provoquées par des écaillages. Elle s'explique par la raideur réduite de la dent concernée. La dissymétrie observée sur cette figure est due au placement du point de contact sur le profil. En effet, lorsque celui-ci se trouve en pied de denture, la dent fissurée ne se déforme que très peu et ne participe donc presque pas à la raideur équivalente d'engrènement. A l'inverse, lors d'un contact en tête de denture, la raideur totale du couple de dent est pilotée par la raideur de la dent endommagée.

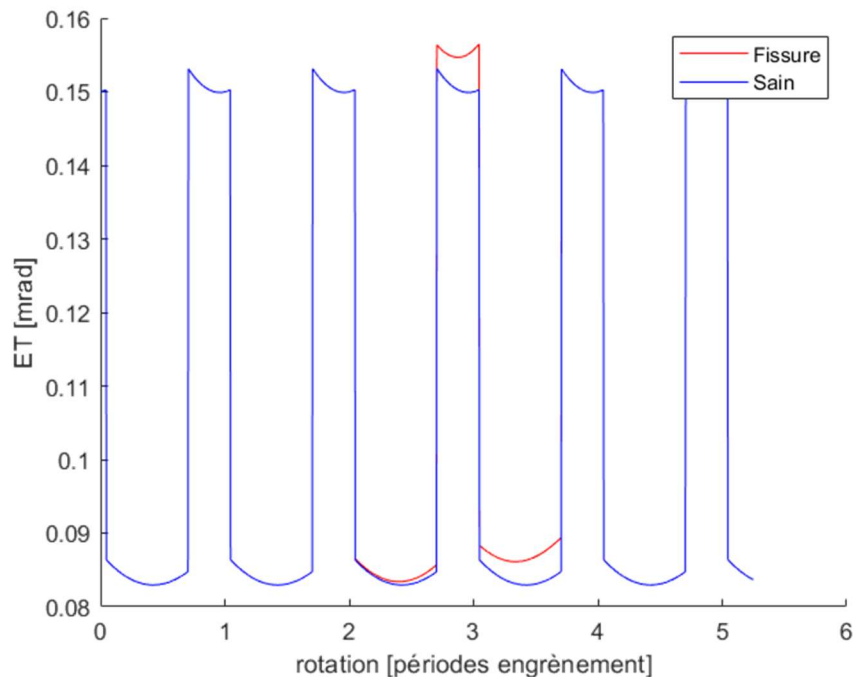


Figure 92 : Erreur de transmission en présence d'une dent fissurée

Il est important de noter que les dimensions de ces endommagements influent sur les variations d'erreur de transmission qu'il génèrent. Une étude paramétrique serait envisageable mais pourrait se montrer fastidieuse en considération du nombre de paramètres pouvant varier et présente peu d'intérêt ici. Une validation quasi-statique des modèles d'endommagement a été jugée inutile puisque les méthodes de modélisation sont tirées de publications proposant des comparaisons avec des calculs éléments finis et montrant de bonnes corrélations.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, un modèle dédié à l'estimation des perturbations de la vitesse de rotation instantanée par un engrenage a été détaillé. Afin de limiter les temps de calcul un modèle analytique a été adopté et plusieurs hypothèses simplificatrices ont été retenues. Ainsi, le modèle ne tient compte que des déformations en torsion du corps de roue et néglige les effets convectifs de contact. Plusieurs enrichissements ont été apportés par rapport à la littérature dans le but d'approcher au maximum les excitations réelles en vibration et en vitesse de rotation instantanée produites par l'engrenage. En particulier, la prise en compte de congés en tête de dentures, présents sur les technologies aéronautiques, permet une meilleure estimation de la direction et de l'intensité de l'effort de contact dans les phases transitoires de mise en contact et de relâchement d'une dent. De plus, les calculs des contacts hors ligne d'action ont été entièrement repris de manière plus précise et introduits comme des variations d'écrasement plutôt que de raideur. Enfin, l'ajout d'endommagements représentatifs des modes de défaillance classiques des engrenages permet de rendre le modèle exploitable dans le cadre de la maintenance préventive. En effet, la comparaison de simulations effectuées avec des engrenages sains et endommagés permet la mise en évidence et la caractérisation de la signature des écaillages et des fissures. Ces connaissances peuvent ensuite être utilisées afin de détecter précocement des endommagements sur des systèmes réels.

Des travaux menés à l'avenir devraient permettre la validation de ce modèle sur la base d'essais dynamiques qui n'ont pas pu être menés dans le cadre de cette thèse. De plus, une étude plus approfondie sur la base de calcul éléments finis sera effectuée afin de déterminer une loi empirique permettant le calcul automatique de la largeur caractéristique des effets convectifs de flexion en fonction des paramètres de définition de l'engrenage.

Le chapitre suivant permettra l'exploitation du modèle présenté ici dans la simulation dynamique d'une transmission académique complète mettant en évidence les interactions roulements-engrenages ainsi que les modes de fonctionnement de ces derniers en présence ou non d'endommagements.

Chapitre IV – Etude d’une transmission complète

Introduction	142
IV.1 – Présentation du système	142
IV.2 – Etude d’un signal type de vitesse instantanée	146
IV.2.1 – Engrenages	146
IV.2.2 – Roulements	150
IV.2.3 – Modulations	152
IV.2.4 – Surveillance d’éléments distants	154
IV.3 – Intérêt des approches angulaires et des régimes non stationnaires	156
IV.3.1 – Approches angulaires et conditions non-stationnaires	156
IV.3.2 – Apport des régimes transitoires	158
IV.4 – Influence d’endommagements	163
IV.4.1 – Ecaillage de roulements	163
IV.4.2 – Endommagements d’engrenages	167
Conclusion partielle	172

Introduction

La mise en place d'indicateurs pertinents de la présence de dégradations repose sur une compréhension approfondie du comportement du système tournant, de ses différents composants et de leurs interactions. La simulation dynamique d'une transmission complète sous différentes conditions de fonctionnement et en présence ou non d'endommagement s'avère alors profitable afin de maîtriser les phénomènes observés et d'établir un diagnostic fiable. Les chapitres précédents ont détaillé les modèles d'arbres, de roulements et d'engrenages requis lors de la construction d'une transmission complète. L'approche modulaire envisagée et l'introduction des éléments de liaison sous forme d'effort de restitution permettent la construction de n'importe quelle forme de transmission et son étude sous des conditions de fonctionnement variables. Dans le but de comprendre les interactions dynamiques des roulements et des engrenages et de valider l'approche par la surveillance de la vitesse instantanée de rotation, ce chapitre se concentre sur la description d'un modèle de réducteur académique.

Une première section est dédiée à la description de la transmission étudiée. Elle introduit la disposition des arbres, les géométries des différents éléments et les chargements imposés. Une seconde section s'attache à l'étude approfondie d'un signal de vitesse de rotation instantanées et décrit les différentes composantes observables dans son spectre. Une étude des interactions existantes entre roulements et engrenages est ensuite réalisée mettant ainsi en évidence l'importance de celles-ci dans la dynamique globale de la transmission et leur intérêt dans le cadre de la surveillance. La troisième section met en avant l'intérêt des approches angulaires et de l'utilisation de régimes non stationnaires dans l'étude des variations de vitesse instantanée générées par les éléments à périodicité cyclique tels que les roulements et les engrenages. Pour finir, une dernière section présente les résultats de simulations effectuées en introduisant des endommagements sur les différents composants et s'intéresse à la détectabilité de ceux-ci.

IV.1 – Présentation du système

L'objectif des études menées dans ce chapitre est avant tout d'acquérir des connaissances sur le fonctionnement dynamique d'une transmission de puissance et d'établir de bonnes pratiques de surveillance. Il est donc important de comprendre les phénomènes à l'œuvre et leurs interactions. Le comportement des différents éléments de la transmission doit être étudié pour des conditions de fonctionnement diverses afin de permettre de tirer des conclusions générales utiles à la détection précoce d'endommagements. C'est pourquoi, il a été décidé de se concentrer sur la modélisation d'un réducteur académique. La géométrie globale utilisée ne correspond donc pas à un système existant bien que les différents paramètres restent réalistes. Toutefois, la géométrie des roulements et engrenages est identique à celle d'éléments réels. Il est important de noter qu'aucun effort n'a été fait pour obtenir une architecture avantageuse pour l'exploitation des signaux de vitesse de rotation. Il n'a pas été recherché non plus de se placer dans une configuration défavorable. Une amélioration des conditions de surveillance serait donc possible en choisissant judicieusement la géométrie des différents éléments constitutifs de ce cas d'étude. Un schéma de la transmission simulée est fourni Figure 93. Elle est constituée de trois arbres creux de géométries identiques. Ceux-ci sont parallèles et contenus dans le même plan. De plus, leurs extrémités sont alignées et les paramètres géométriques et matériaux utilisés sont regroupés dans le Tableau 23. Les arbres sont discrétisés en cinq éléments de poutre de Timoshenko comme détaillé dans le premier chapitre de ce document. Par conséquent, chaque arbre porte 6 nœuds numérotés dans le sens de l'axe principal de rotation et de l'arbre le plus lent à l'arbre le plus rapide. La position dans le repère global des différents nœuds est fournie dans le

Tableau 24 et ils sont repérés par des croix rouges sur le schéma. Dans celui-ci les positions selon l'axe y des arbres sont les entraxes et correspondent aux sommes des rayons primitifs des engrenages.

$$ea_1 = R_{p11} + R_{p12} = 145.5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad ea_2 = R_{p21} + R_{p22} = 134.1 \text{ mm} \quad (169)$$

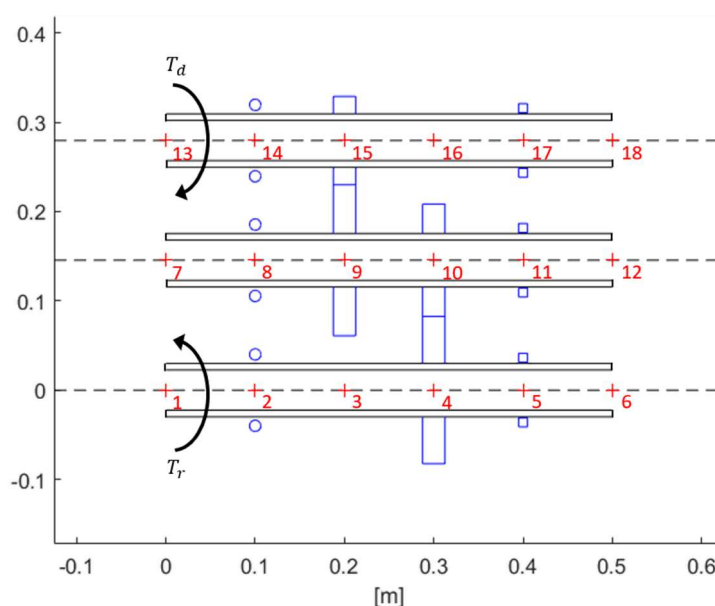


Figure 93 : Réducteur académique modélisé

Paramètre	Valeur
Longueur	500 mm
Diamètre intérieur	45 mm
Diamètre extérieur	60 mm
Module d'Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0.3
Masse volumique	7800 kg/m3

Tableau 23 : Paramètres de définition des arbres

Numéro	Position X	Position Y	Position Z	Numéro	Position X	Position Y	Position Z
1	0	0	0	10	0	145.5	300
2	0	0	100	11	0	145.5	400
3	0	0	200	12	0	145.5	500
4	0	0	300	13	0	279.6	0
5	0	0	400	14	0	279.6	100
6	0	0	500	15	0	279.6	200
7	0	145.5	0	16	0	279.6	300
8	0	145.5	100	17	0	279.6	400
9	0	145.5	200	18	0	279.6	500

Tableau 24 : Position en millimètres des différents nœuds du maillage

Afin de se rapprocher d'une architecture classique, chaque arbre est supporté par un roulement à rouleaux cylindriques et un roulement à billes reprenant la charge axiale. Les roulements à billes sont situés aux nœuds 2, 8 et 14 et sont repérés par des cercles sur la Figure 93 tandis que les roulements à rouleaux sont situés aux nœuds 5, 11 et 17 et sont repérés par des rectangles. La géométrie des roulements est identique à celles de roulements aéronautiques réels. Le Tableau 25 et

le Tableau 26 donnent les paramètres géométriques et matériaux utilisés. Afin de limiter le nombre de paramètres et la complexité du modèle, les trois roulements à billes sont identiques entre eux et il en va de même pour les roulements à rouleaux. Les roulements à rouleaux ne comportent des épaulements que sur la bague extérieure. Ceux-ci permettent donc le maintien en position des éléments roulants mais n'assurent aucune reprise de la charge axiale. Le modèle de transmission présenté ici ne tient pas compte de la participation du carter et les bagues extérieures des roulements sont donc encastrées.

Paramètre	Valeur
Nombre de billes	11
Diamètre primitif	80 mm
Diamètre de billes	12.7 mm
Courbure relative bague intérieure	0.51
Courbure relative bague extérieure	0.5175
Jeu radial total	45 μm
Module d'Young	179 GPa
Coefficient de Poisson	0.3
Masse volumique	7870 kg/m ³

Tableau 25 : Paramètres géométriques et matériaux des roulements à billes

Paramètre	Valeur
Nombre de rouleaux	18
Diamètre primitif	72.5 mm
Rayon des rouleaux	10 mm
Largeur totale des rouleaux	10 mm
Rayon de dépouille	350 mm
Rayon de congé d'arrêt	1.1 mm
Jeu radial total	40 μm
Jeu axial total	20 μm
Présence d'épaulements	Bague extérieure seulement
Module d'Young	179 GPa
Coefficient de Poisson	0.3
Masse volumique	7870 kg/m ³

Tableau 26 : Paramètres géométriques et matériaux des roulements à rouleaux

Afin d'assurer des conditions de fonctionnement des roulements, des conditions d'engrènement et des rapports de réduction différents, les deux trains d'engrenages ont des caractéristiques différentes. Le premier train, reliant l'arbre lent et l'arbre intermédiaire est un engrenage droit de sorte que le roulement à billes de l'arbre lent fonctionne sous chargement purement radial. A l'inverse, le second train d'engrenage est hélicoïdal, générant des efforts axiaux sur l'arbre intermédiaire et l'arbre rapide. De même, les nombres de dents utilisés ne sont pas identiques de sorte que les rapports de réduction diffèrent. Cela permet d'éviter la superposition dans les spectres étudiés de composantes fréquentielles associées à des éléments distincts. Le premier étage de réduction relie l'arbres lent et l'arbre intermédiaire aux nœuds 4 et 10 tandis que le second assure la transmission de puissance entre l'arbre intermédiaire et l'arbre rapide aux nœuds 9 et 15. Les engrènements sont schématisés par des rectangles représentant la section de coupe des disques primitifs et les paramètres les définissant sont données dans le Tableau 27.

Paramètre	Premier étage de réduction	Second étage
Nombres de dents	55/42	53/31
Angle d'hélice	0°	20°
Rayon de tête	85.5 / 66 mm	87.6 / 52.5 mm
Rayon de pied	76.8 / 58.5 mm	80 / 45 mm
Largeur de denture	25 mm	
Angle de pression réel	20°	
Module réel	3 mm	
Rayon de conté en tête de denture	0.5 mm	
Module d'Young	202 GPa	
Coefficient de Poisson	0.255	
Masse volumique	7850 kg/m ³	

Tableau 27 : Paramètres de définition des engrenages

Les seuls chargements imposés sur ce système sont des couples moteur T_d et résistant T_r , modélisant le moteur et l'arbre à entraîner respectivement. Dans le cas d'un moteur d'hélicoptère, ces couples correspondent au couple d'entraînement fourni par la turbine libre et au couple résistant généré par le rotor de l'hélicoptère. Le couple de sortie est constant et vaut 100 Nm. Le couple d'entrée est quant à lui variable et est ajusté afin d'obtenir la vitesse de rotation moyenne souhaitée comme cela sera exposé par la suite. Des couples de dissipation visqueuse de la forme $T_v = -\alpha_v \omega$, proportionnels à la vitesse de rotation ω , sont ajoutés dans les six roulements. Ceux-ci permettent de tenir compte du brassage du lubrifiant et des effets EHL non inclus dans les modèles de contact des roulements. Le coefficient de dissipation α_v est identique pour chaque roulement et est réglé empiriquement de sorte que le rendement total de la transmission soit d'environ de 95% en tenant compte également des dissipations aux engrènements

Comme expliqué dans le premier chapitre, le régime nominal n'est pas imposé comme une condition limite afin de permettre l'étude des variations de vitesse instantanée. Le réglage de la vitesse est effectué à l'aide du couple d'entrée de sorte que le régime se stabilise naturellement autour de la valeur souhaitée. A l'équilibre dynamique, le couple moteur compense le couple résistant et les pertes et peut donc se calculer comme suit en fonction de la vitesse de rotation macroscopique cible en entrée $\omega_{e,c}$ et du couple résistant T_r . Ici, r_1 et r_2 sont les rapports de réduction des deux engrènements.

$$T_d = r_1 r_2 T_r + 2\omega_{e,c} \alpha_v \left(1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1 r_2} \right) \quad (170)$$

En raison des pertes introduites à l'engrènement et de la résistance au roulement dans les roulements, la vitesse de rotation en régime établi est légèrement plus faible que la vitesse cible. Ces phénomènes ne peuvent pas être introduits dans ce calcul car la valeur de la puissance dissipée n'est pas connue *a priori*. Cependant, cette dernière est déterminée empiriquement afin de corriger le couple moteur de manière itérative. Cette méthode permet cependant d'éviter d'imposer une vitesse de rotation à un nœud et de fausser les résultats obtenus. Ainsi, lors d'une simulation, après une période transitoire, la vitesse de rotation se stabilise autour d'une valeur souhaitée. Il est alors possible de la faire varier en agissant sur le couple moteur afin d'étudier des rampes en vitesse par exemple.

Dans ce chapitre, pour des raisons de lisibilité, on notera BPFO (Ball Pass Frequency on Outer ring) et BPFI (Ball Pass Frequency on Inner ring) les fréquences de passage des billes sur la bague extérieure et la bague intérieure respectivement. La structure est volontairement bornée aux éléments décrits plus tôt afin de limiter la complexité des spectres présentés par la suite et d'améliorer leur lisibilité. Par exemple, bien qu'ils soient quasiment inévitables en réalité, aucun balourd n'est

implémenté ici. En effet, leur présence complexifierait grandement les spectres de vitesse de rotation déjà très chargés et difficilement lisibles. Leur influence a été étudiée sur des systèmes plus simples ne comportant qu'un arbre, deux roulements et un balourd. Il a été montré qu'en plus des composantes spectrales décrites par la suite, la présence de balourd conduisait à l'apparition des BPFs des roulements et de leurs harmoniques. De plus des pics étaient visibles aux ordres entiers et des modulations existaient entre ces deux types de fréquences.

De manière générale, les simulations sont initialisées en imposant la vitesse de rotation cible aux différents nœuds et en annulant tous les autres degrés de libertés. En cas de chargement constant, une phase transitoire permet donc de combler les jeux dans les différents éléments de liaison et de converger naturellement vers une position d'équilibre quasi-statique. Même lors d'une simulation en conditions de fonctionnement non stationnaires, une première phase de simulation à chargements fixes est effectuée en amont afin de laisser le système converger vers un équilibre quasi-statique qui sert ensuite de point de départ à la simulation en régime non stationnaire. Comme expliqué dans le premier chapitre, les différentes grandeurs seront tracées dans le domaine physique en fonction de la position angulaire du nœud d'extrémité de l'arbre concerné plutôt qu'en temps. De même, dans le domaine des fréquences, les fréquences « angulaires » sont utilisées à la place des fréquences « temporelles ». Ainsi, les axes des abscisses seront gradués en tours [tr] (ou en radians [rad]) et en événements par tour [ev/tr] respectivement. Un schéma est toujours placé sur les figures présentant une vitesse de rotation dans le domaine physique ou spectral afin de repérer l'arbre sur lequel est effectué l'observation.

IV.2 – Etude d'un signal type de vitesse instantanée

Cette section s'attache à la description des variations de vitesse de rotation générées par les différents éléments d'une transmission dans leurs conditions de fonctionnement nominale. Elle ne traite toutefois pas des sources d'excitation extérieures au réducteur ou générées par des erreurs de montage ou de fabrication. La totalité des figures de cette section IV.2 présentant un spectre de vitesse de rotation correspondent à un seul et même signal obtenu pour une simulation en conditions de fonctionnement idéales et non stationnaires. Il s'agit d'une montée en régime du réducteur avec une vitesse d'entrée évoluant linéairement en angle de 200 rpm à 3000 rpm sur environ 200 tours. L'utilisation répétée de ces mêmes résultats de simulation permet de mettre en évidence la possibilité de surveiller tous les éléments d'une ligne d'arbre sans avoir besoin d'adapter à chaque fois les conditions de fonctionnement. En effet, une seule mesure réalisée selon des méthodes adéquates permet l'observation du comportement complet de la transmission. De très nombreux points d'intérêt sont mis en valeur dans un même spectre à travers plusieurs figures en effectuant des zooms ou en plaçant des marqueurs sur les différents pics observables. Ainsi, pour chaque figure, l'accent est mis sur une famille de composantes spectrales différentes et de nombreuses autres sont temporairement ignorées car traitées dans des paragraphes différents. Il convient de remarquer qu'en raison du caractère borné du système modélisé et de l'attention apportée aux conditions d'intégration numériques, chacun des pics visibles dans ce spectre correspond à un phénomène mécanique identifiable et, à l'inverse, tous types d'excitations dues aux roulements et aux engrenages sont visibles dans le spectre.

IV.2.1 – Engrenages

Les engrenages constituent la principale source de perturbations de la vitesse de rotation instantanée. En effet, ils transmettent un couple largement variable, même en conditions de

fonctionnement nominales. Celui-ci est le reflet des efforts aux dentures et varie donc avec le nombre de dents en contact. De plus, pour chaque paire de dents, l'écrasement change au cours de la rotation comme cela a été détaillé dans le chapitre précédent. Ces variations sont dues aux déplacements des roues, aux corrections de dentures, à la présence de congés en tête de denture et aux contacts hors ligne d'action. Les efforts transmis évoluent également avec la raideur équivalente d'une paire de dents. Celle-ci dépend de la position du point de contact sur les profils de denture et de la valeur de l'écrasement en raison de la non-linéarité de la loi de contact. En l'absence d'erreur de fabrication ou d'endommagement, les dents sont identiques entre elles. Par conséquent le passage dans l'engrènement de chacune est équivalent aux autres et la perturbation de vitesse de rotation est périodique. Pour un arbre donné, la fréquence associée correspond simplement au nombre de dents de la roue placée sur celui-ci. Dans le cas de l'arbre intermédiaire du réducteur modélisé, les fréquences d'engrènement sont donc de 42 et 53 ev/tr respectivement. La Figure 94 présente le spectre de la vitesse de rotation de cet arbre sur lequel sont repérées les harmoniques des fréquences d'engrènement en noir (42) et en rouge (53) respectivement.

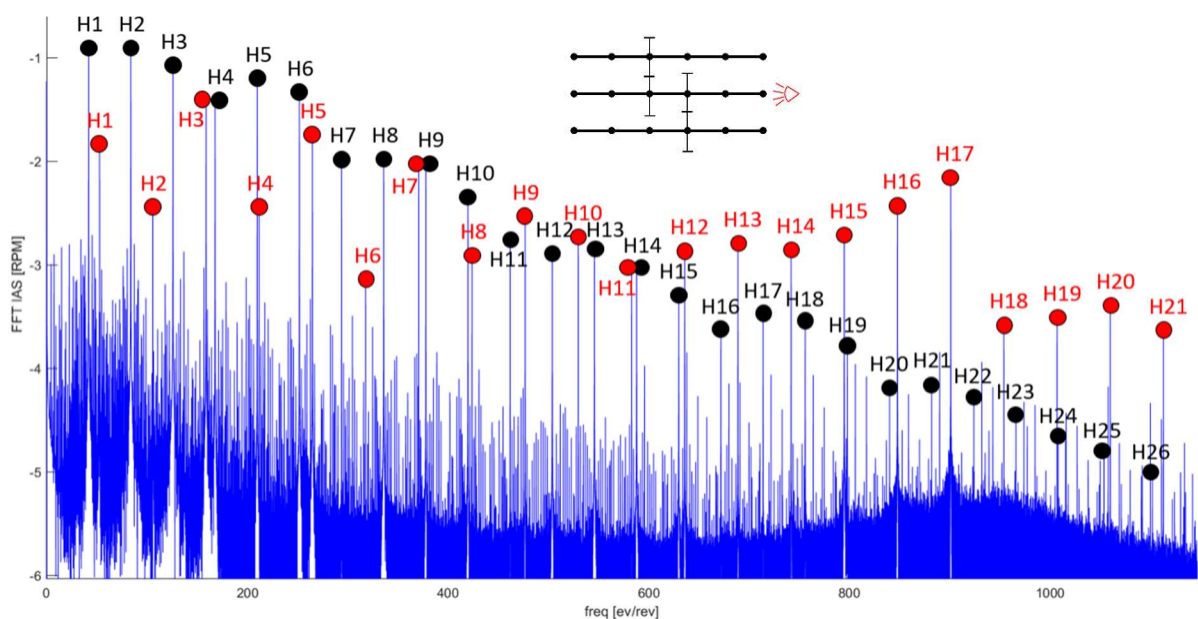


Figure 94 : Harmoniques des fréquences d'engrènement sur l'arbre intermédiaire

Cette figure montre que les perturbations de la vitesse de rotation instantanée dues aux engrenages sont prépondérantes dans le signal. De plus, pour chaque engrènement de nombreuses harmoniques sont visibles. La vitesse de rotation semble donc permettre de traduire la richesse du comportement des engrenages. L'amplitude des harmoniques diminue rapidement quand la fréquence augmente. En effet, dans le cas du premier engrènement, la septième harmonique a une amplitude dix fois inférieure à la fondamentale et la onzième ne représente qu'un pourcent de cette dernière. Le cas de la signature du second engrènement est plus complexe car il s'agit d'un étage de réduction à denture hélicoïdale. La perturbation de vitesse est plus faible et, jusqu'à la dixième, les harmoniques de rangs impairs ont plus d'importance que les autres. De plus, l'amplitude des différentes harmoniques baisse moins vite que pour le premier engrènement de sorte que la dix-septième reste significative. Dans le cas d'un engrenage hélicoïdal, la raideur équivalente d'engrènement et l'erreur de transmission statique varient moins au cours de la rotation car le nombre de dents en contact est plus important. De plus la phase de chargement d'une dent est progressive grâce à l'angle d'hélice. La Figure 95 compare les erreurs de transmission statiques et les raideurs équivalentes d'engrènement pour des engrenages droits et hélicoïdaux. Dans les deux cas, le couple

imposé est identique et les profils de denture ne sont pas modifiés. Bien que les variations des deux grandeurs affichées soient liées, il est important de noter qu'elles ne sont pas directement images l'une de l'autre en raison de l'évolution de l'écrasement sur tranche au cours de la rotation et des effets convectifs de flexion ayant beaucoup plus d'importance pour un engrenage hélicoïdal. De plus, il est rappelé que la notion de raideur équivalente n'est qu'un outil utilisé en post-traitement afin de mieux se représenter le comportement à l'engrènement. Dans le modèle, lors du calcul du torseur de restitution, seul l'écrasement et l'effort de contact calculés tranche par tranche entrent en ligne de compte. De manière très schématique, la forme des variations d'erreur de transmission statique est proche de rectangles dans le cas d'un engrenage droit alors que leur forme est plus complexe et leur amplitude plus faible pour un engrenage hélicoïdal. Par conséquent, la richesse harmonique de l'excitation liée à un engrenage hélicoïdal est plus importante tandis que l'amplitude des premières raies est plus faible.

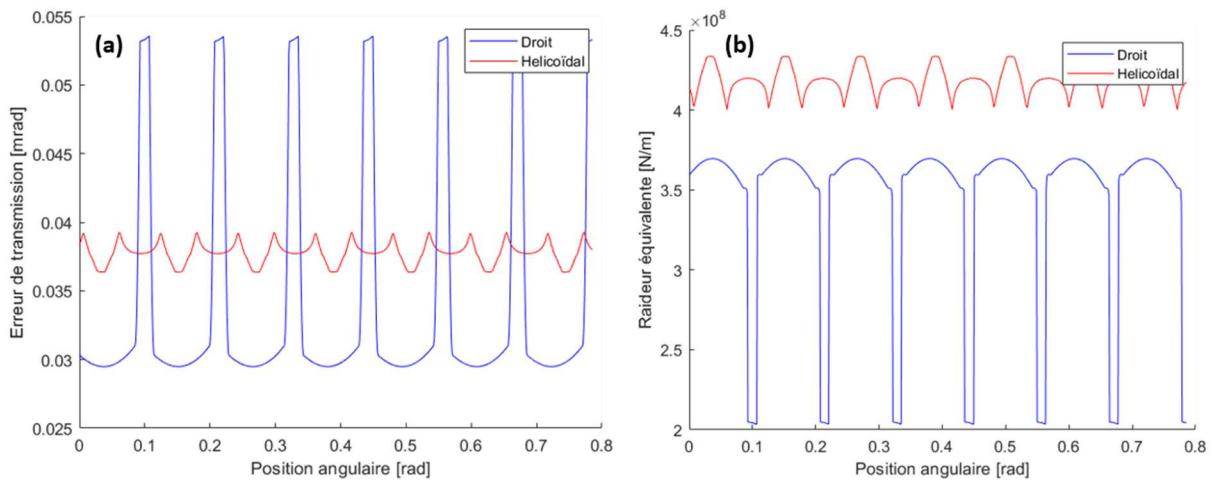


Figure 95 : Erreur de Transmission statique (a) et raideur équivalente d'engrènement (b) pour des engrenages droits et hélicoïdaux

Cependant, bien que l'étude des variations d'erreur de transmission quasi-statique permettent de se représenter qualitativement le comportement des engrènement lorsqu'une charge leur est imposée, elles ne permettent pas à elles seules d'expliquer leur comportement dynamique. En effet, l'erreur de transmission quasi-statique est calculée en fixant l'une des deux roues et en appliquant un déplacement en rotation sur la seconde de sorte à obtenir un couple transmis donné. Par conséquent, elle ne tient compte ni des autres déplacements des centres des roues ni des effets dynamiques. La Figure 96 présente la décomposition spectrale des erreurs de transmission quasi-statique tracées plus haut. Elle met en évidence des différences notables avec les signatures des engrènements sur la vitesse de rotation instantanée. En particulier, la décroissance régulière de l'amplitude des harmoniques dans le cas de l'engrenage droit et l'importance supérieure des harmoniques d'ordres impairs pour l'engrenage hélicoïdal ne sont pas retrouvées. De même, pour l'engrenage hélicoïdal, les harmoniques 14 à 17 n'ont plus une amplitude croissante. Ces différences peuvent s'expliquer par le fait que les erreurs de transmission dynamiques dans les deux étages de réduction sont très éloignées des erreurs de transmission statiques présentées sur la Figure 95 et calculables avec des modèles quasi-statiques, quelle que soit la méthode utilisée. En effet, le couplage des deux engrenages via l'arbre intermédiaire, la présence de roulements introduisant de la souplesse, la souplesse en flexion des arbres et les effets dynamiques viennent largement les modifier.

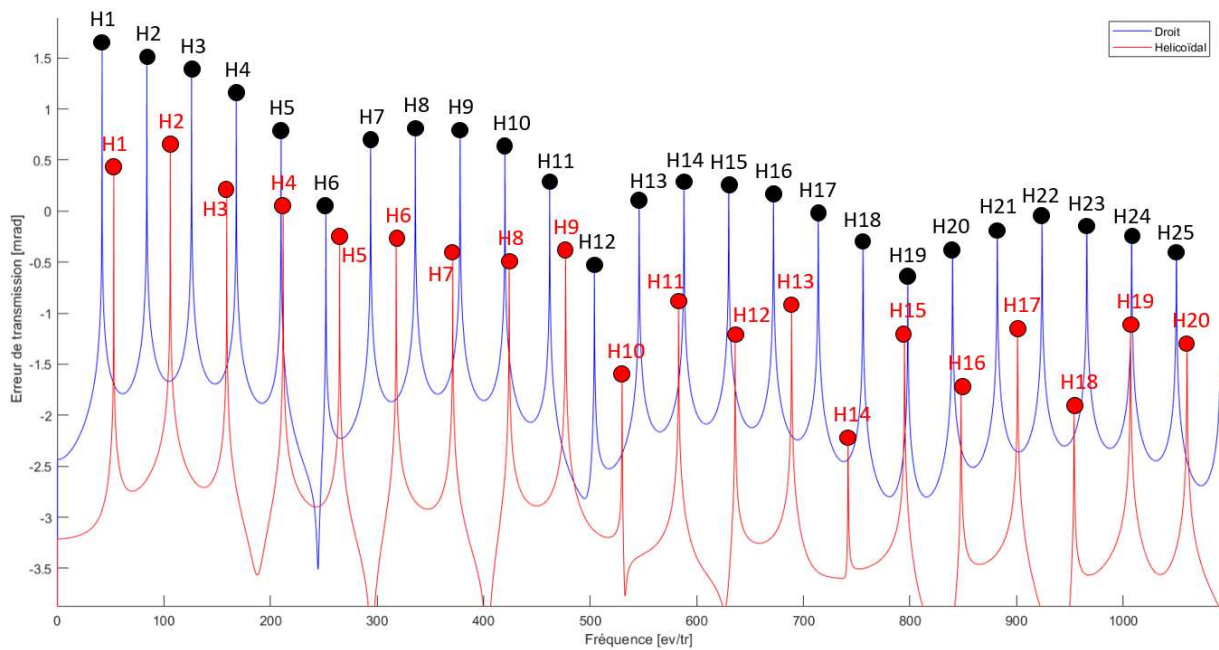


Figure 96 : Analyse angulaire spectrale des erreurs de transmission quasi-statiques

La Figure 97 compare les erreurs de transmission en dynamique et en quasi-statique. Afin d'obtenir les résultats présentés sur cette figure, le couple transmis dans les deux types de calcul est identique pour chaque engrenement. Contrairement à l'erreur de transmission statique, l'erreur de transmission dynamique est à la fois une excitation et une réponse. La raison principale de la différence d'amplitude constatée entre ces deux types de grandeurs est la présence, dans le modèle dynamique, d'arbres flexibles et de roulements souples. Ceux-ci entraînent un décalage des centres de roues selon la ligne d'action qui amènent à réduire l'erreur de transmission angulaire présentée ici. Cette comparaison permet de justifier l'approche adoptée dans la modélisation en montrant qu'un modèle imposant une erreur de transmission calculée en statique comme source d'excitation ne permettrait pas de rendre compte de la complexité réelle du comportement des engrenages car elle ne respecterait qu'une partie des interactions existantes entre les engrenages et le reste de la transmission.

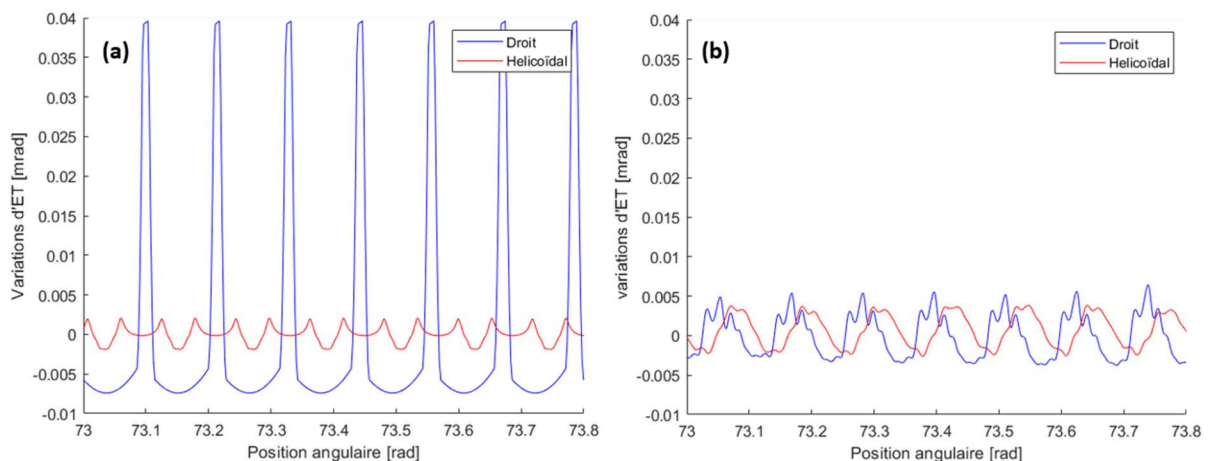


Figure 97 : Erreur de transmission statique (a) et dynamique (b) pour des engrenages droits et hélicoïdaux

IV.2.2 – Roulements

Comme cela a été introduit dans le chapitre dédié à la modélisation des roulements, ceux-ci génèrent un couple résistant variable sur l'arbre en rotation. Ce couple est constitué de plusieurs composantes liées aux différents phénomènes dissipatifs dans le roulement. Une partie est constante ou quasi-constante et correspond aux effets de la lubrification. Cela comprend essentiellement le brassage du lubrifiant qui, bien que dépendant de la vitesse de rotation, ne génère pas de variations rapides significatives du couple résistant. Les phénomènes de frottement et de résistance au roulement en revanche sont largement variables car les efforts tangentiels de contact qu'ils impliquent dépendent des efforts normaux sur les éléments roulants de sorte que le couple de résistance au roulement varie à la fréquence de passage des billes dans la zone de charge. Dans le cas de bagues extérieures fixes et de chargement à direction constante, cette fréquence correspond à la BPFO dont le calcul est détaillé dans le second chapitre. La valeur de la BPFO est fixe dans le cas des roulements à rouleaux cylindriques et vaut ici 7.55 ev/tr. Pour les roulements à billes, la BPFO dépend des angles de contact et donc des efforts axiaux et radiaux. Elle vaut 4.63 ev/tr pour le roulement à billes de l'arbre lent et 4.68 ev/tr pour ceux des deux autres arbres. La présence de chargements tournants dans le même système ferait apparaître, entre autres, une variation de couple à la BPFI. La Figure 98 distingue les BPFO et leurs harmoniques des deux roulements de l'arbre lent sur la vitesse de rotation instantanée de celui-ci et permet plusieurs remarques.

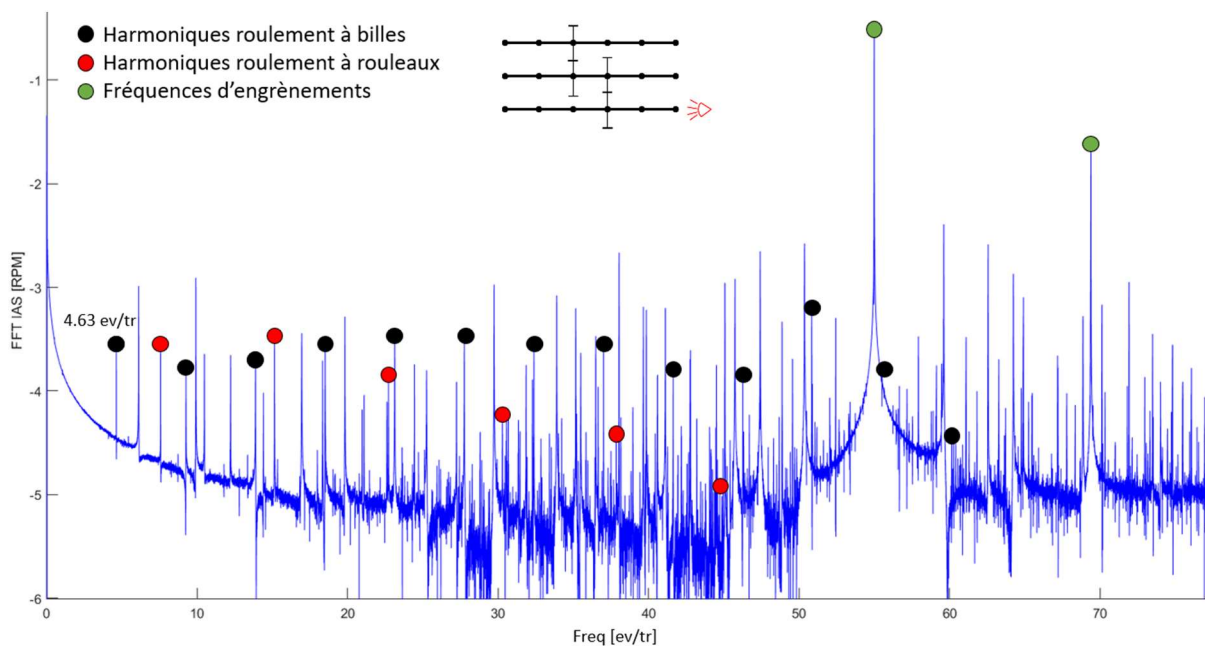


Figure 98 : BPFO roulements et harmoniques pour l'arbre lent

D'une part, les perturbations de vitesse de rotation générées par les roulements sont plus basse fréquence que celles des engrenages ce qui limite la plage angulaire nécessaire à leur observation. Elles sont aussi de beaucoup plus faibles amplitudes. En effet, un facteur mille peut être observé. Ce constat souligne l'importance de l'observation de la vitesse de rotation instantanée dans le domaine spectral puisque les variations dues aux roulements ne seraient pas visibles dans le domaine physique. Même ainsi, il est essentiel de disposer de mesures relativement précises afin de distinguer ces pics. Cela impose entre autres un bruit de quantification relativement faible et donc une horloge suffisamment rapide. De plus, certaines bonnes pratiques d'observation détaillées dans la section suivante telles que les approches angulaires, l'exploitation de régimes non stationnaires et l'utilisation de simulation ou d'acquisition de longue durée s'avèrent primordiales. Toutefois, en

portant une attention particulière à ces différents points, la surveillance des roulements par la vitesse de rotation instantanée est largement réalisable, comme cela a pu être montré expérimentalement dans des travaux précédents.

D'autre part les deux roulements de cet arbre ont des signatures différentes. Leurs BPFOs sont éloignées en raison de leurs nombres d'éléments roulants différents principalement. Le roulement à billes en a onze tandis que le roulement à rouleaux en compte dix-huit. De plus, les amplitudes des différents pics associés au roulement à billes sont plus importantes. Cela s'explique également par le nombre d'élément roulant plus faible. En effet, cela entraîne une évolution de la répartition des charges et du couple résistant est alors plus importante au cours de la rotation.

Enfin, la richesse harmonique de la perturbation de la vitesse par le roulement à billes est plus importante. En effet, plus de dix harmoniques sont détectable dans le spectre contre seulement cinq pour le roulement à rouleaux. Il s'agit de la conséquence du chargement imposé sur le roulement à billes. Les dentures de l'engrènement reliant l'arbre lent et l'arbre intermédiaire sont droites, de sorte que l'effort axial transmis est nul. Le roulement à billes fonctionne donc de manière purement radiale et, comme cela a été vu dans l'étude préliminaire menée dans le second chapitre, ceci favorise une excitation à haute richesse harmonique.

Afin de comparer l'influence des conditions de fonctionnement des roulements, la Figure 99 trace le spectre de la vitesse de rotation de l'arbre rapide sur lequel les BPFOs des roulements de cet arbre ainsi que leurs harmoniques sont mises en évidence.

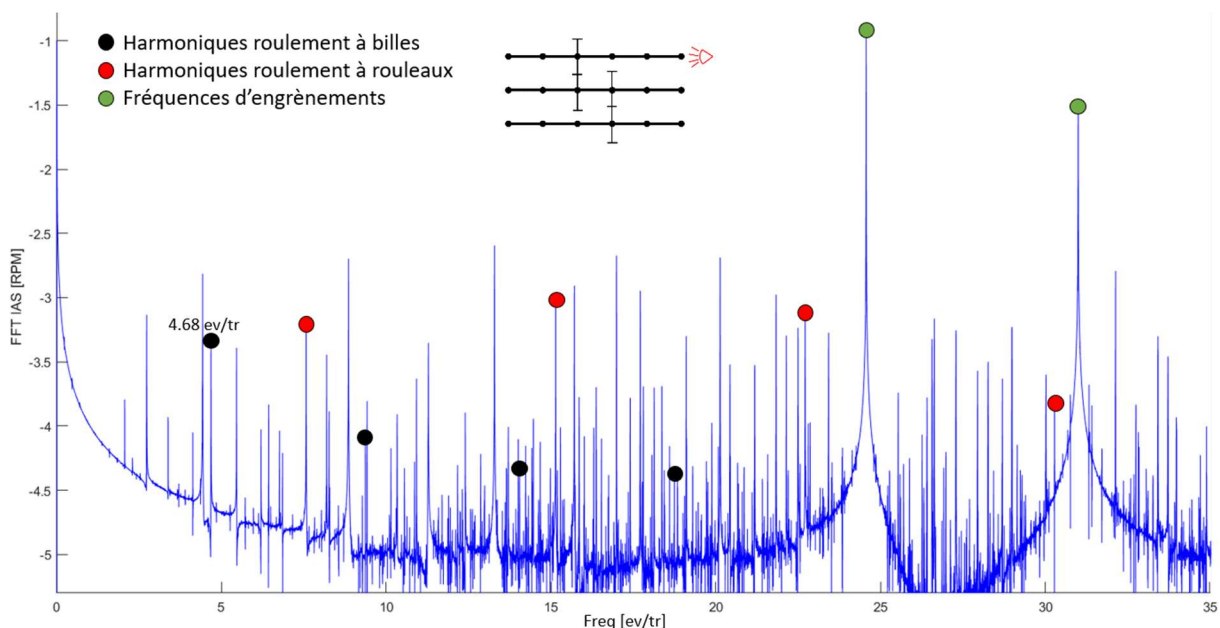


Figure 99 : BPFO roulements et harmoniques pour l'arbre rapide

Une première différence visible avec le cas de l'arbre lent est l'importance relative des roulements. En effet, ici, les variations de vitesses générées par le roulement à rouleaux sont plus importantes que celles du roulement à billes. En raison de l'effort axial imposé par l'engrenage hélicoïdal, la répartition des charges sur les différentes billes est plus homogène sur cet arbre et celles-ci sont chargées sur un intervalle angulaire plus large. La Figure 100 illustre ceci en comparant la répartition instantanée des charges sur les billes pour les roulements de l'arbre lent et de l'arbre rapide. Par conséquent, les variations de la somme des efforts normaux de contact sur la bague intérieure et donc du couple de résistance au roulement sont plus faibles pour un chargement mixte

(radial + axial). De plus, leur contenu harmonique se limite presque à la fondamentale. La forme et l'amplitude des variations de vitesses dues au roulement à rouleaux sont quant à elles similaires à celles constatées sur l'arbre lent. Une seconde distinction est le décalage de la BPFO du roulement à billes. En effet, dans le cas de l'arbre lent, celle-ci vaut 4.63 ev/tr tandis que dans le cas de l'arbre rapide elle se situe à 4.68 ev/tr. Cette différence est à nouveau imputable à la présence d'effort axial sur l'arbre rapide. La modification des angles de contact qu'il induit dans le roulement à billes modifie la valeur de la BPFO. Bien que le changement de la BPFO reste faible, sa prise en compte est primordiale afin d'interpréter correctement le spectre de la vitesse de rotation. En effet, même pour un système simple comme celui qui est modélisé ici et sans tenir compte de nombreuses sources d'excitation, le spectre est très riche et présente de très nombreux pics significatifs proches les uns des autres. Il est donc primordial de connaître les fréquences associées aux différents composants avec précision afin de ne pas confondre leurs signatures ce qui pourrait conduire à d'établir un diagnostic erroné.

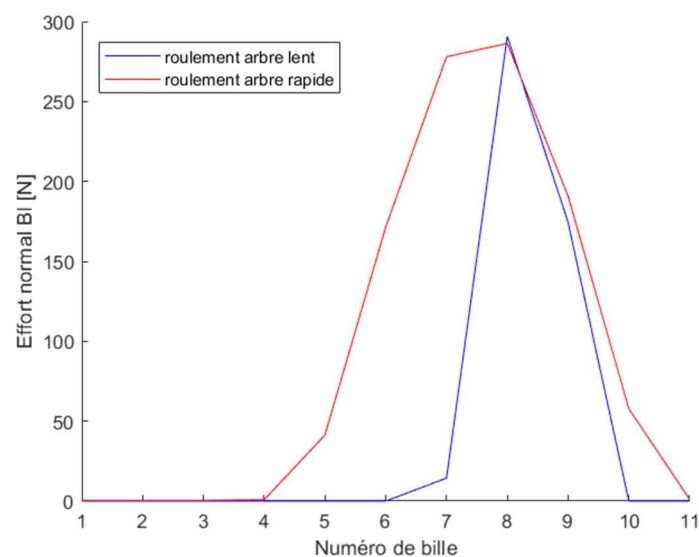


Figure 100 : Répartition des charges sur les billes pour les roulements de l'arbre lent (chargement radial pur) et de l'arbre rapide (chargement mixte)

Ainsi, les efforts axiaux supportés par le roulement agissent au premier ordre sur les variations de vitesse de rotation qu'il génère et modifient aussi bien leur amplitude que leur richesse harmonique et leur fréquence. Ce constat justifie *a posteriori* l'un des apports de cette thèse consistant à ajouter la prise en compte des efforts axiaux dans les modèles de roulements existants afin de prédire correctement les variations de vitesse de rotation.

IV.2.3 – Modulations

En plus des raies associées aux fréquences d'engrènement et aux BPFOs des roulements, un troisième type de raies peut être remarqué. Il s'agit de modulations des fréquences de roulements autour des fréquences d'engrènement. Celle-ci sont très nombreuses puisque pour chaque roulement, la BPFO et ses harmoniques génèrent des modulations autour de chaque pic associé aux engrènements. Ces raies de modulation sont toujours symétriques ou quasi-symétriques. Afin d'illustrer ceci, la Figure 101 présente le spectre de la vitesse de rotation de l'arbre lent sur lequel sont repérées les modulations des fréquences de trois roulements distincts autour des trois premières harmoniques de la fréquence de l'engrènement liant les arbres lent et intermédiaire. Un travail similaire peut être effectué pour les harmoniques de rang plus élevés et pour les pics associés au second engrènement. Les couleurs des marqueurs correspondent à l'harmonique d'engrènement considérée. Les Figure

101a et b présentent les modulations des BPFOs et de leurs premières harmoniques pour les roulements à billes et à rouleaux de l'arbre lent. Il convient de noter que des modulations existent aussi entre les fréquences de roulements et d'engrènements présents sur des arbres différents. Ainsi, la Figure 101c, met en évidence les modulations des fréquences du roulement à billes de l'arbre rapide autour des fréquences de l'engrènement reliant les arbres lent et intermédiaire. Celles-ci sont toutefois d'amplitude plus faibles et plus difficilement décelables.

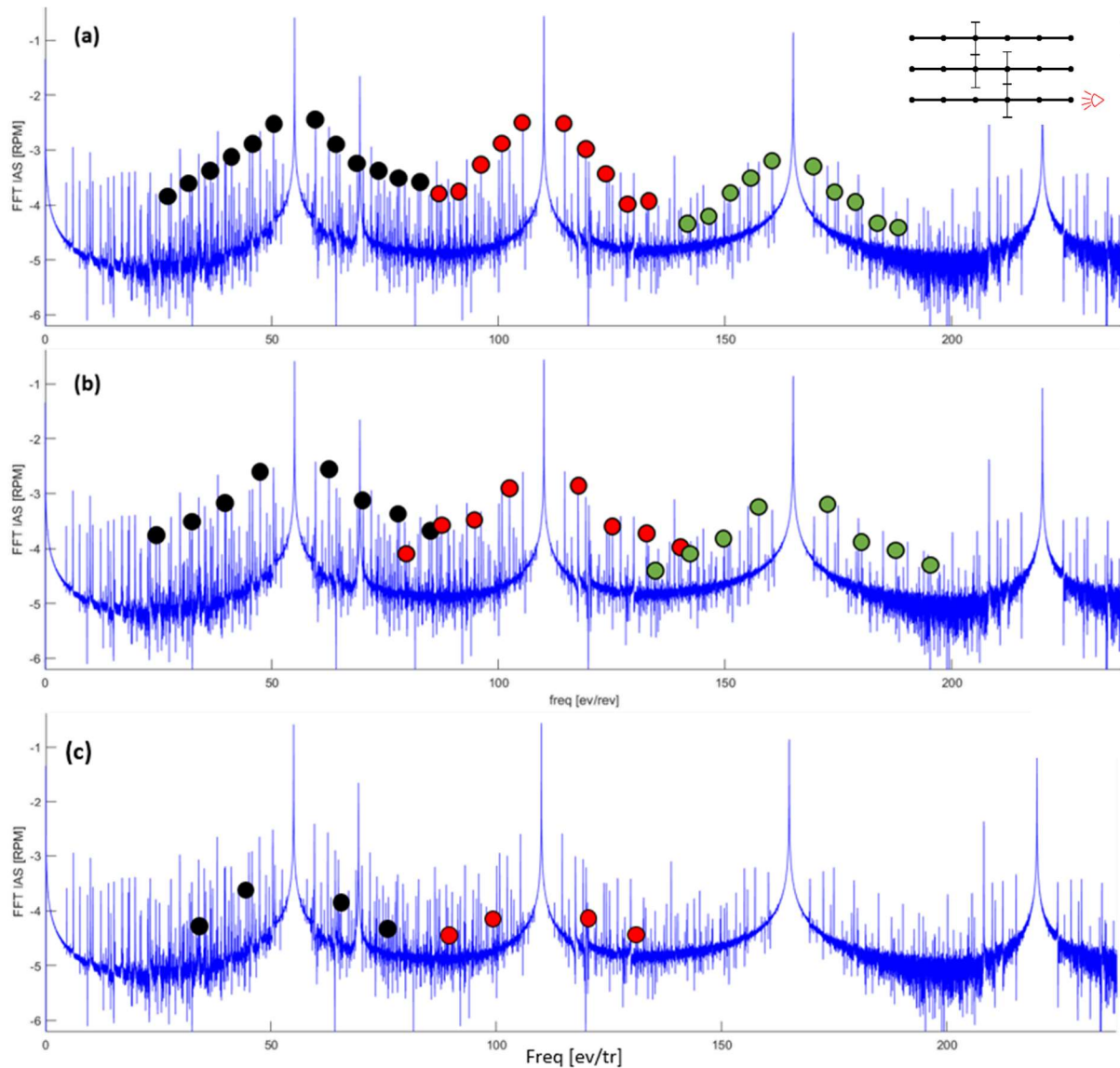


Figure 101 : Modulations des fréquences de roulements à billes (a) et à rouleaux (b) de l'arbre lent ainsi que du roulement à bille de l'arbre rapide (c) autour des fréquences d'engrènement

Ces modulations se caractérisent donc dans le domaine spectral par des raies latérales autour des fréquences d'engrènement. Cela s'explique par le fait que les efforts tangentiels aux contacts dus à la résistance au roulement dans les roulements sont proportionnels aux efforts normaux. Or ceux-ci sont le reflet des charges axiales et radiales reprises par le roulement. Dans le système étudié, en l'absence d'erreur de montage, de balourd ou d'efforts extérieurs, ces charges sont les résultats des efforts aux engrènements nécessaires à la transmission du couple. Par conséquent, le couple résistant généré dans le roulement est directement lié aux efforts transmis à l'engrènement. Bien qu'il ne

s'agisse pas d'une simple multiplication de deux phénomènes périodiques dans le domaine physique en raison du comportement non linéaire des roulements, cela explique schématiquement l'apparition de modulations. Il convient de rappeler que celles-ci constituent un résultat du modèle et ne sont pas imposées arbitrairement. De ce fait, leur présence est une justification supplémentaire aux méthodes de démodulation utilisées de manière classique en traitement du signal. Cependant, les résultats obtenus par une approche angulaire laissent penser qu'il n'est pas forcément nécessaire de travailler sur une plage haute fréquence autour d'une résonance mais qu'il serait possible de se concentrer sur les abords des fréquences d'engrènement. De même, le recours à des simulations comme celle présentée ici permet de déterminer les plages de démodulation idéales et de se passer des méthodes de recherche automatiques telles que le kurtogramme par exemple.

Ces raies latérales peuvent s'avérer utiles dans la surveillance des roulements. En effet, tout autant que les raies à la BPFO et à ses harmoniques, elles sont le reflet du comportement d'un roulement et peuvent porter des informations similaires ou complémentaires à celles contenues dans les pics aux fréquences caractéristiques de celui-ci. Par exemple, comme cela sera développé dans une section dédiée, la présence d'endommagement affecte ces modulations. Etant en général de plus grande amplitude que les raies classiquement étudiées, elles sont souvent plus facilement détectables. Ce cas de figure a également été rencontré en simulation pour un régime stabilisé. En effet, pour ce type de régime, le spectre en angle de la vitesse de rotation peut se trouver largement influencé par des phénomènes à dépendance temporelle, phénomène faisant l'objet de la section suivante. Lorsque c'est le cas, certaines plages de fréquences angulaires peuvent être inexploitable alors que d'autres se retrouvent amplifiées. Il est alors pertinent de disposer de plusieurs indicateurs du comportement des roulements sur des plages de fréquence angulaires différentes afin de faire face à tout type de situations.

Les modulations, issues des interactions entre roulements et engrenages, ne peuvent être observées qu'avec une modélisation permettant un couplage fort entre ces deux composants mécaniques. Ainsi, l'approche phénoménologique utilisée et l'introduction de ces éléments sous forme d'effort de liaison se montrent plus pertinents que l'introduction de l'un ou l'autre de ces composants sous forme de perturbations arbitraires et indépendantes de la dynamique de la transmission. De plus, l'étude des roulements seuls en utilisant un modèle réduit d'engrenage à raideur constante ne permettrait pas de faire apparaître ces raies latérales et pourrait limiter la capacité de surveillance du réducteur. Le modèle présenté ici se veut à même de produire des signaux utiles dans la validation de méthodes de traitement de signal comme les techniques de démodulation par exemple.

IV.2.4 – Surveillance d'éléments distants

La vitesse de rotation instantanée assure une bonne transmission des informations d'un arbre à l'autre permettant l'utilisation d'un seul capteur pour assurer la surveillance de la transmission complète. En effet, les variations de couple dans les roulement et engrenages sont naturellement transmises dans les engrènements à condition que les effets dynamiques soient suffisamment faibles pour assurer un contact constant à la denture. En cas de perte de contact, aucune information n'est plus transmise. A titre d'exemple, la Figure 102 présente le spectre des variations de vitesse de rotation instantanée de l'arbre lent. Les marqueurs noirs pointent les pics associés à la signature du roulement à bille de l'arbre rapide. Celle-ci prend la forme de la BPFO de ce roulement et de ses harmoniques ainsi que de ses modulations autour des fréquences d'engrènement des deux étages de réduction. Une signature de même type peut être relevée pour le roulement à rouleaux du même arbre et est repérée en rouge. Pour finir la fréquence d'engrènement du second étage de réduction est visible et repérée

en vert. Les composants de l'arbre intermédiaires sont également repérables mais n'ont pas été marqués pour des raisons de lisibilité.

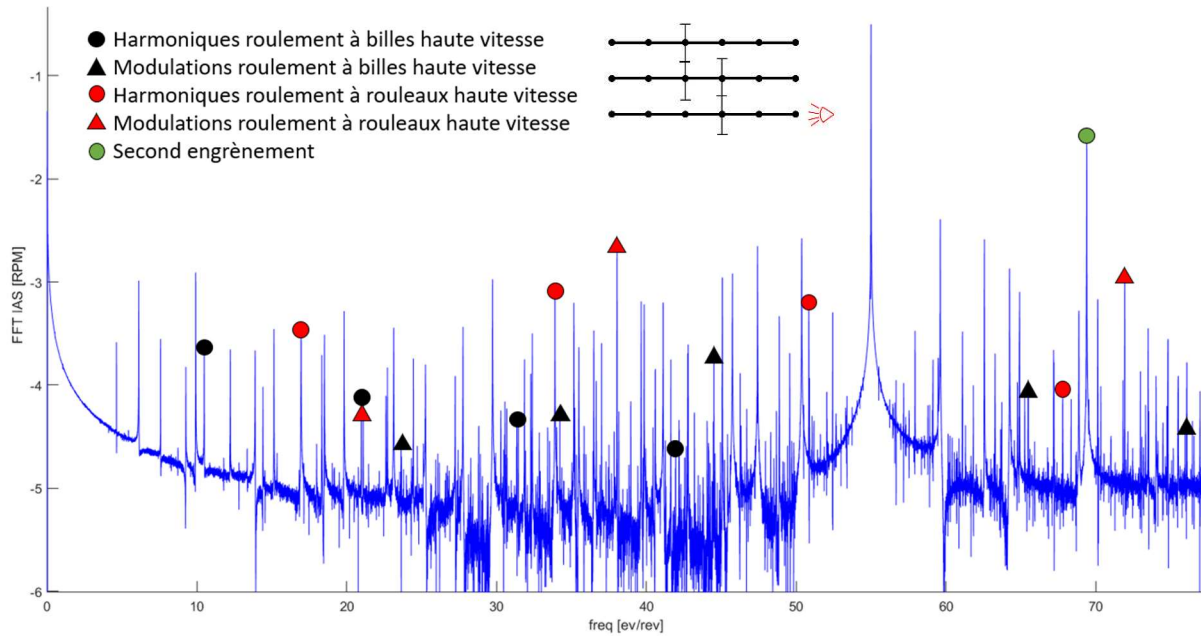


Figure 102 : Détection des composants distants sur arbre lent

Une constatation symétrique peut être réalisée. Ainsi, il est possible par exemple d'observer la signature des composants de l'arbre de sortie sur la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée comme le montre la Figure 103. Sur cette figure, les BPFOs et leurs harmoniques des deux roulements rapides sont marquées par des points tandis que leurs modulations sont repérées par des triangles.

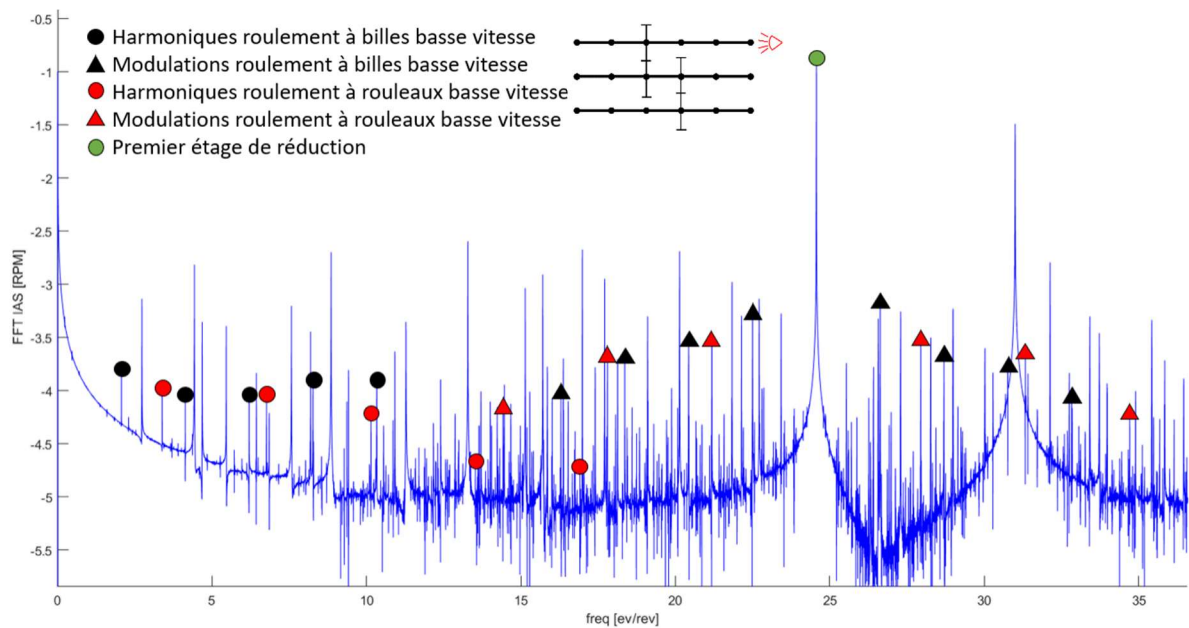


Figure 103 : Détection des composants distants sur arbre rapide

Malgré les deux étages de réduction à traverser, les signatures des différents éléments se distinguent largement du pied de spectre dans chaque cas. On remarque cependant que les pics associés aux roulements distants sont moins démarqués du pied de spectre sur le spectre de vitesse de l'arbre rapide que sur celui de l'arbre lent. Ainsi, en conditions réelles, il semble préférable d'instrumenter l'arbre le plus lent afin de maximiser le rapport signal sur bruit. Plusieurs tentatives d'explication de ce résultat *a posteriori*, parfois contradictoires, ont été avancées et se basent sur des raisonnements en couple ou en vitesse. A ce stade de l'étude, seule la simulation semble permettre de trancher définitivement sur l'arbre permettant une observation optimale de la transmission.

IV.3 – Intérêt des approches angulaires et des régimes non stationnaires

IV.3.1 – Approches angulaires et conditions non-stationnaires

Les méthodes de surveillance classiques se basent en général sur une approche temporelle et tracent ainsi l'évolution des différentes grandeurs en fonction du temps dans le domaine physique et en fonction des fréquences temporelles dans le domaine spectral. Cette approche s'avère particulièrement adaptée à l'étude des modes de résonance d'un système. Cependant, son application à la surveillance des roulements et engrenages limite les études à des vitesses de rotation constantes. De plus, en raison des couples de perturbation générés par les différents éléments d'une transmission et étudiés dans les travaux présentés ici, la vitesse de rotation fluctue toujours autour d'une valeur moyenne. Ce phénomène est aggravé dans le cas d'expérimentations réelles car il est alors très difficile de stabiliser parfaitement la vitesse de rotation et la valeur moyenne de celle-ci évolue toujours dans le temps. En raison des fluctuations de vitesse, les fréquences caractéristiques des éléments à périodicité cyclique évoluent dans le domaine temporel. Cela a pour conséquence principale de répartir l'énergie de leur signature dans le signal vitesse sur des canaux fréquentiels de largeur non nulle et de diminuer voire d'effacer leur participation du spectre de la vitesse de rotation.

Avec l'approche angulaire adoptée dans les travaux présentés ici, les fréquences caractéristiques des roulements et des engrenages sont fixes de sorte qu'une transformée de Fourier en angle accumule l'énergie des perturbations de vitesse qu'ils génèrent sur des canaux fréquentiels très minces et rend l'étude du spectre de vitesse de rotation plus facile. Pour illustrer ce point, une comparaison des deux approches est effectuée sur la base d'un signal vitesse quasi-stabilisé dont le profil est donné sur la Figure 104. On peut remarquer que la valeur macroscopique de la vitesse varie très peu sur la plage temporelle considérée. En conditions réelles, il est fréquent que ces fluctuations soient plus importantes. De plus, le temps d'exposition à une vitesse donnée n'est pas uniforme. Par exemple, la valeur macroscopique de vitesse évolue moins vite sur la plage 436-438 rpm que sur la plage 432-434 rpm.

Les spectres de ce signal vitesse ont été tracés sur la Figure 105 et la Figure 106 avec une approche angulaire et une approche temporelle respectivement. Il peut être remarqué que l'élargissement des pics constaté dans le spectre en temps augmente avec la fréquence considérée. En effet, l'étalement d'un pic est généré par de petites variations de vitesse et est proportionnel à sa fréquence centrale. Les pics associés aux harmoniques de la fréquence d'engrènement, repérés par des points ou des lignes pointillés sur les figures, sont trop étalés pour rester exploitables à partir de la troisième harmonique.

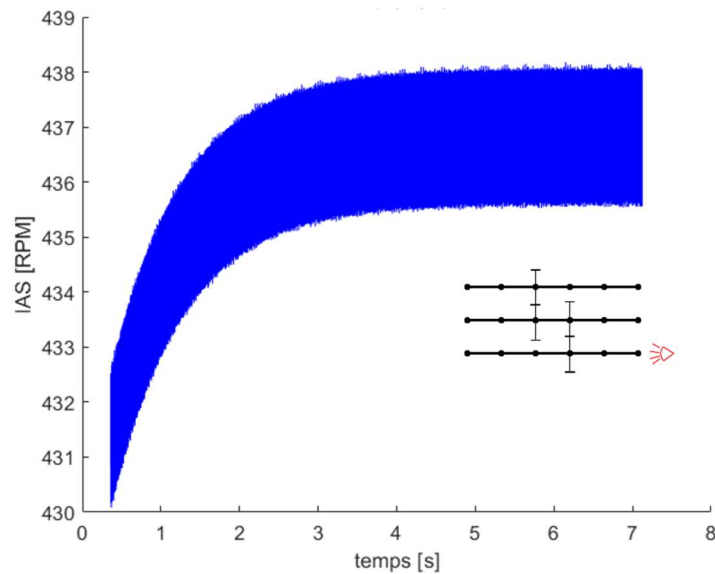


Figure 104 : profil de vitesse quasi-stabilisée pour comparaison des approches angulaire et temporelle

De plus, l'amplitude observée de ces pics diminue lorsque leur largeur augmente en raison de la répartition d'énergie sur une plage fréquentielle plus large. Ainsi, le pic principal du spectre, correspondant à l'harmonique H1 d'engrènement, s'élève à 0.45 rpm pour le spectre en angle et 0.28 rpm pour le spectre en temps. En outre, la forme en trapèze des pics dans le spectre obtenu par une approche temporelle est due au temps d'exposition non uniforme discuté ci-dessus. En effet, puisque le système passe plus de temps à haut régime, l'énergie accumulée sur les canaux fréquentiels associés est plus importante. Bien que l'exemple fourni considère une variation très faible de la composante macroscopique de la vitesse de rotation afin de garder une certaine lisibilité dans le spectre « temporel », l'approche angulaire ne se limite pas à ce type d'évolution et reste robuste pour des régimes largement variables.

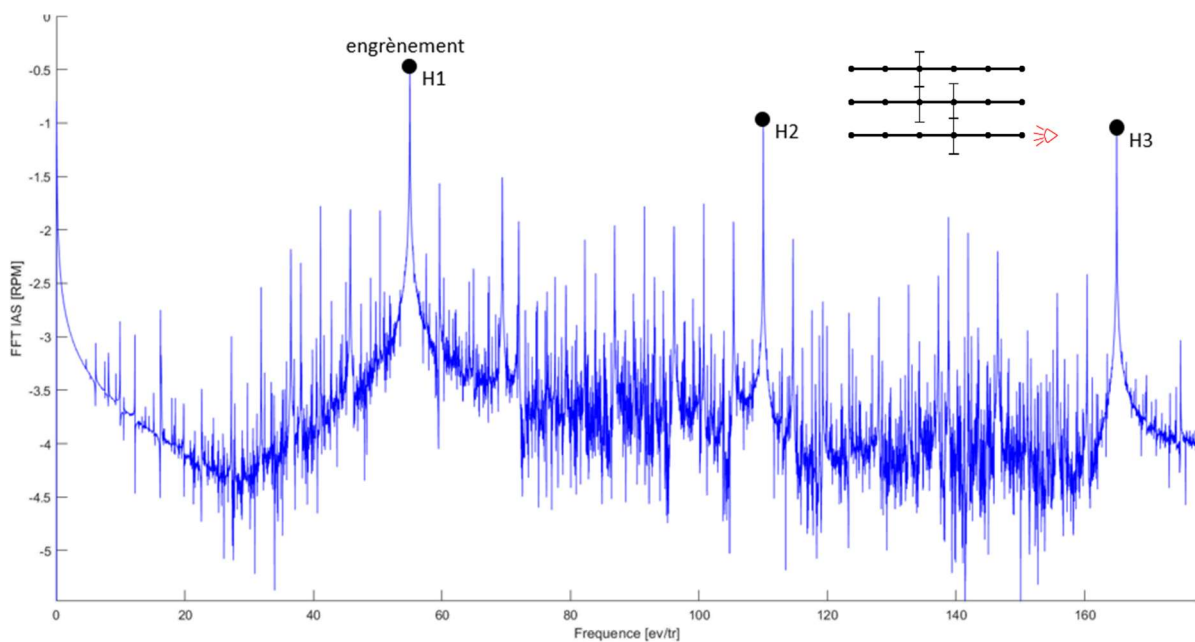


Figure 105 : Spectre angulaire de la vitesse de rotation pour un régime stationnaire

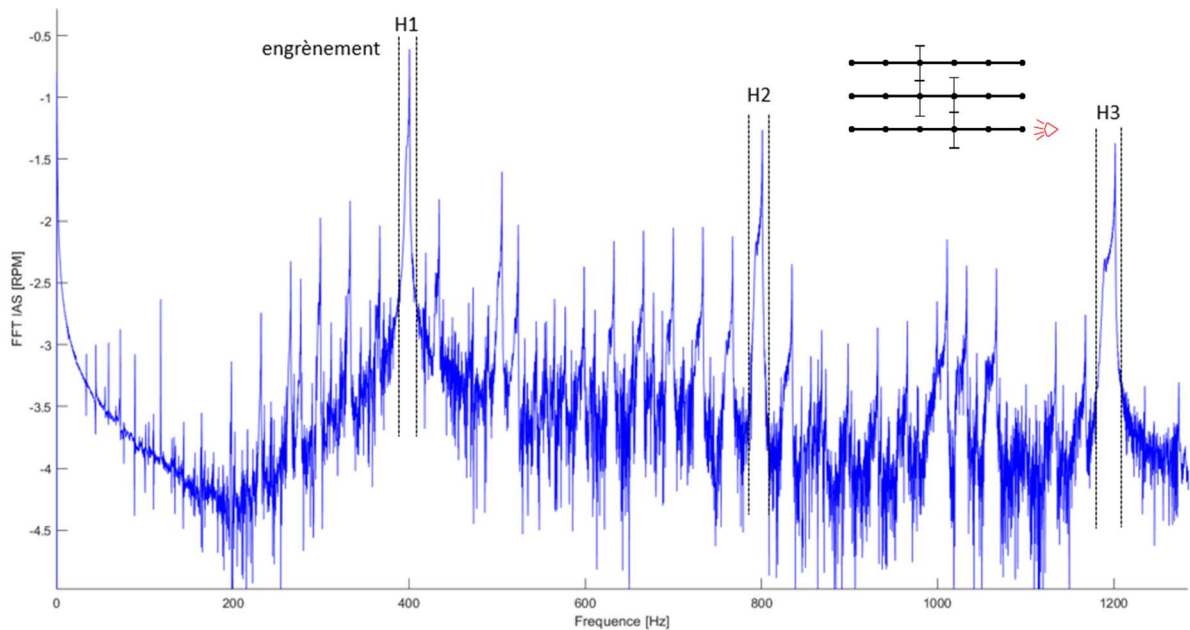


Figure 106 : Spectre temporel de la vitesse de rotation pour un régime stationnaire

IV.3.2 – Apport des régimes transitoires

Comme expliqué précédemment, le passage dans le domaine angulaire permet de se libérer facilement des conditions de vitesse stabilisée et de traiter des jeux de données obtenus en conditions non stationnaires. Ces dernières présentent deux avantages majeurs. D'une part, elles sont facilement accessibles lors d'essais réels. D'autre part elles permettent de séparer les participations dans le spectre des phénomènes à dépendance temporelle, tels que la réponse du système à une excitation extérieure, des phénomènes à dépendance angulaire, tels que les excitations liées aux roulements et engrenages. Ce dernier point est approfondi dans cette section.

Le spectre de vitesse de rotation observé est l'image de la réponse du système aux excitations générées par les différents composants de la transmission et aux excitations extérieures. Or, dans le cadre de cette étude, les efforts extérieurs sont constants ou quasi-constants et n'induisent pas de variations de vitesse de rotation visibles dans le spectre. Les modes propres de déformation du système ont une fréquence temporelle fixe tandis que celle des excitations est proportionnelle à la vitesse de rotation. Par conséquent, les interactions observées dépendent du régime ce qui peut perturber le diagnostic d'une transmission. En effet, l'observation du spectre à vitesse de rotation moyenne constante nécessite une très bonne connaissance de la dynamique du système et des plages de fréquences amplifiées ou amorties. Afin d'illustrer ce propos, la Figure 107 présente le spectre dans le domaine angulaire des variations de vitesse de rotation pour un régime quasi stabilisé autour de 500 rpm, du même type que celui utilisé dans la section précédente. Sur ce spectre, les fréquences caractéristiques des deux étages de réduction sont repérées par des points verts tandis que les harmoniques de BPFO du roulement à billes de l'arbre lent sont marquées en noir et que leurs modulations autour de la première fréquence d'engrènement sont en rouge. Une dissymétrie peut être observée dans les modulations car leur nombre et leurs amplitudes sont plus importants côté basses fréquences. Ceci n'est en rien représentatif du fonctionnement des roulements et des engrenages mais reflète l'existence de plages de fréquences sur lesquelles la réponse du système est plus forte comme par exemple l'intervalle de 35 à 65 ev/tr repéré par des lignes verticales en pointillés.

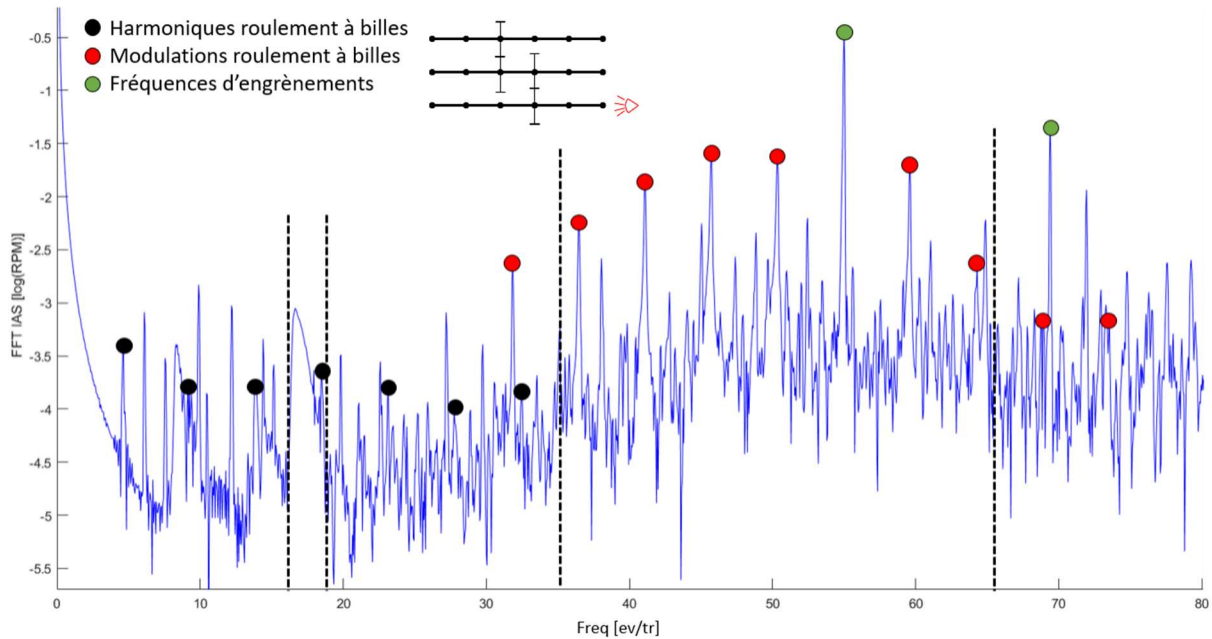


Figure 107 : Spectre de vitesse de rotation à vitesse moyenne quasi-constante

De plus, le spectre est parasité par des pics associés aux fréquences de résonances isolées du système. Un exemple est délimité sur la Figure 107 par des lignes verticales entre 16 et 19 ev/tr. Le pic observé sur cette plage de fréquences a une largeur non nulle en raison des faibles variations de la composante macroscopique de la vitesse de rotation. De plus, sa forme est trapézoïdale plutôt que rectangulaire en raison d'une exposition angulaire non homogène aux différentes vitesses de rotation. Il s'agit du même phénomène déjà discuté dans la section précédente, appliqué cette fois à un mode propre dans un spectre exprimé en fréquences angulaires. Ce type de pics issus de la présence de modes propres peuvent être amenés à dissimuler des fréquences angulaires d'intérêt comme c'est le cas sur cette figure où la BPFO du roulement à rouleaux de l'arbre rapide n'est plus détectable. Ainsi, afin d'assurer une bonne exploitation du spectre et de tirer des conclusions pertinentes, il est important de maîtriser la dynamique du système à une vitesse donnée. Dans ce but, il peut être profitable d'utiliser des spectrogrammes de simulations à vitesse variable. Ce type de figure présente l'évolution du spectre d'un signal en fonction de la position angulaire de l'arbre. Pour cela elle juxtapose de très nombreuses transformées de Fourier effectuées sur des tronçons du signal pouvant se superposer. La vitesse nominale de l'arbre d'entrée utilisée lors de la simulation évolue de 100 à 2000 rpm de manière continue et son évolution dans le domaine physique est présentée sur la Figure 108 tandis que son spectrogramme est donné sur la Figure 109. Il est rappelé que le passage dans le domaine spectral est effectué sur la base d'un échantillonnage en angle. De plus, sur cette figure, il a été choisi d'orienter l'axe des abscisses vers le bas. La difficulté dans le tracé de ce type de figure réside dans le choix de la taille des tronçons à utiliser lors du calcul des transformées de Fourier à court terme. En effet, ceux-ci doivent être suffisamment longs pour assurer une précision en fréquence angulaire correcte tout en restant assez courts pour que la composante macroscopique de la vitesse reste quasi-constante sur la largeur de chacun d'entre eux. Cette deuxième condition permet d'assurer une bonne visibilité des phénomènes à dépendance temporelle dont l'énergie serait répartie sur de trop larges plages de fréquence angulaire si elle n'était pas respectée. Idéalement il faut donc disposer de jeux de données très longs avec des variations de vitesse lentes devant les temps caractéristiques de la dynamique du système, permettant ainsi de définir des tronçons de grande largeur angulaire sur lesquelles la composante macroscopique de la vitesse ne varie que très peu.

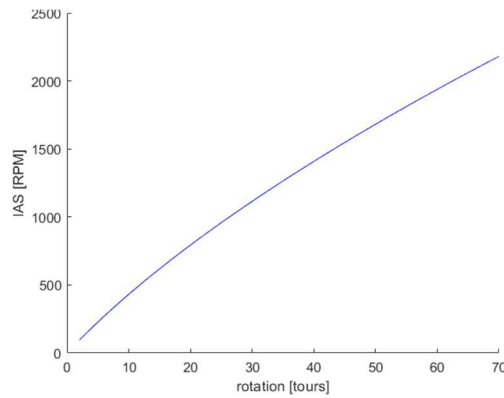


Figure 108 : Profil de vitesse utilisée pour établir le spectrogramme de la Figure 109

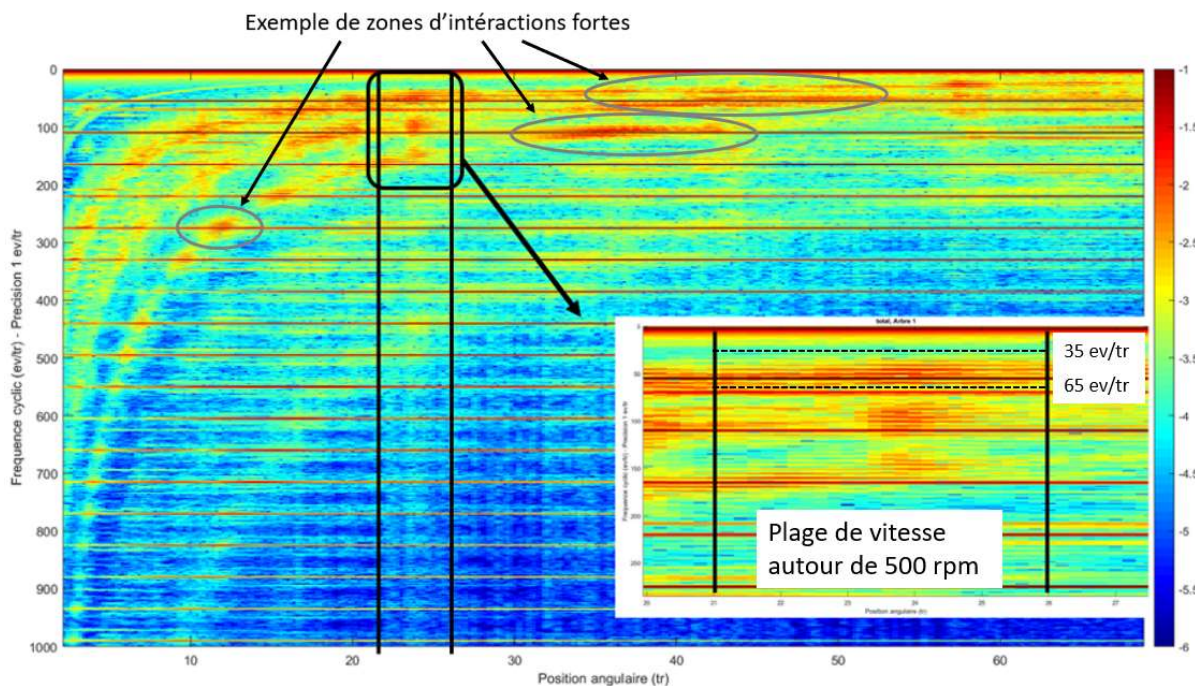


Figure 109 : Spectrogramme d'une montée en vitesse

Puisque le spectrogramme est tracé en angle, les lignes horizontales sont les excitations angulaires associées aux roulements et engrenages tandis que les formes paraboliques sont les fréquences propres du système. En effet, dans le domaine angulaire, celle-ci sont inversement proportionnelles à la vitesse de rotation. Les excitations les plus visibles sur cette figure sont liées aux harmoniques du premier engrènement et sont donc régulièrement espacées. Cependant il faut garder en mémoire que des excitations secondaires, liées aux roulements, aux modulations et au second engrènement sont aussi présentes même si elles sont difficilement perceptibles sans zoom. Il peut être observé qu'à chaque croisement des excitations et des modes propres, des interactions sont visibles sous la forme de points « chauds » dont quelques exemples ont été entourés en gris. Certaines de ces zones ont une largeur non négligeable expliquée par les interactions avec des raies latérales de modulation discutées plus tôt. La plage de vitesse correspondant à la simulation utilisée pour le spectre de la Figure 107 est repérée par des lignes verticales noires et un zoom est réalisé sur les basses fréquences du spectre à cette vitesse. Sur cet agrandissement, les lignes en pointillés délimitant la plage 35-65 évènements par tour, déjà présentes sur la Figure 107, ont été tracée à nouveaux. Ce zoom permet de mettre en évidence que les dissymétries des modulations mentionnées plus tôt sont bien

générées par la présence de modes propres qui, pour cette vitesse de rotation particulière, sont situés proches des harmoniques du premier engrènement et du côté basses fréquences de celles-ci.

Ce type de figure permet également de déterminer les principaux modes de déformation du système tournant. En effet la superposition des fréquences des modes propres au graphe présenté précédemment peut donner des informations sur les modes ayant le plus d'influence sur la vitesse de rotation. Cet exercice a été réalisé et les résultats sont donnés sur la Figure 110. La fréquence temporelle f_i , en Hertz, des modes propres est déterminée de manière approchée comme cela été présenté dans le premier chapitre. Leur fréquence angulaire dépend de la vitesse de rotation ω et donc de la position angulaire θ de l'arbre. Puisque la loi $\omega(\theta)$ est connue, la fréquence angulaire $f_{\theta i}$, en événement par tour, d'un mode propre pour une position angulaire donnée est donc facilement déterminée :

$$f_{\theta i}(\theta) = 60 \frac{f_i}{\omega(\theta)} \quad (171)$$

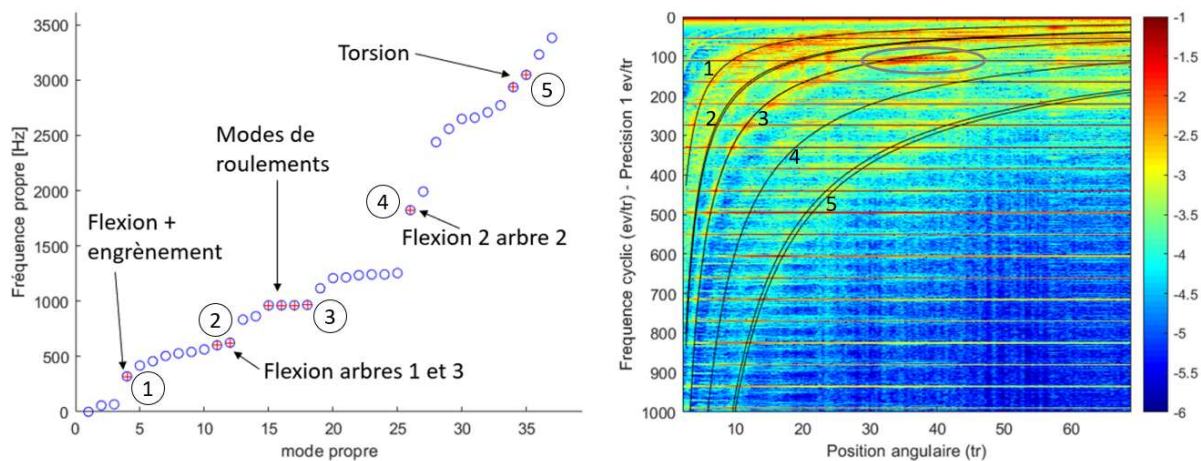


Figure 110 : Etude des modes d'intérêt

Plus d'une centaine de modes propres ont été calculés de cette manière. Cependant, seuls les modes aux plus basses fréquences semblent avoir une influence sur la vitesse de rotation. Les fréquences des modes ayant une action visible sur le spectre de la vitesse ont été tracées en noir sur le spectrogramme et repérées par des croix rouges sur la partie gauche de la figure. Il est important de remarquer que les modes ainsi identifiés sont de nature variée. On retrouve des modes de palier, de torsion, de flexion et d'engrènement. Ce sont en général des modes couplant les déplacements sur plusieurs degrés de liberté des arbres. Cela permet de souligner l'importance d'un modèle complet, incluant tous les degrés de liberté de chaque nœud. Des modèles plus simples ne tenant compte que de la torsion et éventuellement de la flexion ne suffiraient pas à décrire correctement la dynamique du système. Sur la même figure, il peut être noté que les croisements de modes propres et d'excitations angulaires donne naissance à des oscillations de la vitesses instantanées de rotation qui durent dans le temps après la coïncidence des fréquences. En exemple a été entouré en gris. Ce phénomène se matérialise par des zones « chaudes » étendues à droite des croisements dans le spectrogramme et est le reflet du temps nécessaire à l'amortissement des oscillations générées.

Bien que les informations portées par ce type d'analyse soient intéressantes dans l'étude du comportement dynamique du système tournant complet, la surveillance des roulements et engrenages peut être menée à partir de simples spectres. Cependant, afin de s'affranchir de l'influence

des différents modes propres et de maximiser la détectabilité des différents éléments, les transformées de Fourier doivent être réalisées sur de longs intervalles angulaires au cours desquels la valeur moyenne de la vitesse de rotation doit évoluer largement. De cette manière, les phénomènes à dépendance temporelle voient leur énergie répartie sur de large bandes de fréquence angulaire tandis que les phénomènes à dépendance angulaire se retrouvent concentrés sur des canaux fréquentiels très étroits. La Figure 111 compare le spectre ainsi obtenu et déjà présenté à de nombreuses reprises dans la section précédente au spectre obtenu pour le régime quasi-stabilisé introduit sur la Figure 107.

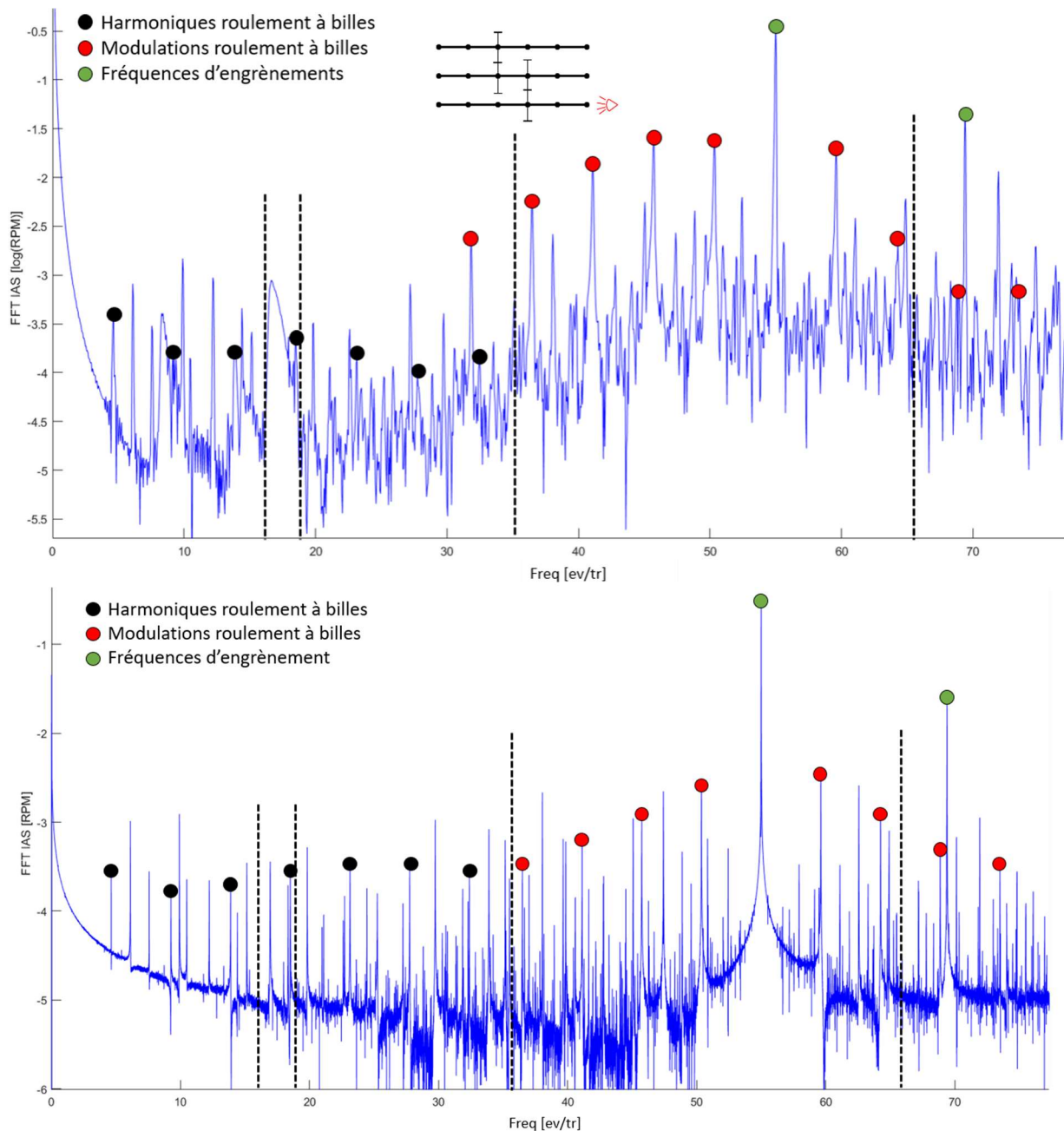


Figure 111 : Spectre de vitesse de rotation pour une large et lente augmentation de vitesse moyenne

Plusieurs points ont été améliorés grâce à l'utilisation du régime transitoire. D'une part, les pics associés aux modes propres ont été atténués car répartis sur de très larges plages de fréquence. D'autre part, le spectre ne présente plus d'intervalles de fréquences amplifiés ce qui permet, entre autres, de retrouver la symétrie des modulations attendue. Les mêmes lignes en pointillés que la Figure

107 ont été tracées à nouveau afin de mettre ces deux premiers points en évidence. Enfin, les différents pics se démarquent d'avantage du pied de spectre ce qui améliore la détectabilité de la signature des différents éléments. A titre d'exemple, les harmoniques de la BPFO du roulement à billes sont beaucoup plus visibles que précédemment. Bien que seules les premières aient été repérées pour des raisons de lisibilité, elles sont détectables jusqu'à l'ordre quinze alors que dans le cas du régime quasi-stabilisé, seules les sept premières étaient visibles. Ce type de jeu de données nécessite toutefois de se passer de fenêtrages classiquement utilisés avant une transformée de Fourier. En effet, ceux-ci minimisent ou atténuent une part non négligeable du signal vitesse à traiter. Ceci ne pose aucun problème dans des conditions stationnaires mais réduit largement l'utilité des régimes transitoires présentés ici. Il convient donc d'apporter une attention particulière à la fenêtre choisie ou de se tourner vers d'autres méthodes de suppression de la partie macroscopique de la vitesse de rotation telles que le retrait d'une moyenne glissante ou d'une interpolation polynomiale.

Cette section a montré l'intérêt des approches angulaires et des régimes non stationnaires dans l'étude d'une transmission en séparant les excitations de la fonction de réponse en fréquence du système. L'utilisation de conditions non stationnaires constitue donc une alternative simple aux méthodes de déconvolutions classiques. Toutefois, l'importance de disposer de jeux de données de taille conséquente a été soulignée et, en simulation, ceux-ci requièrent des temps de calcul très longs, variant de quelques heures à une dizaine de jours, qui gênent leur utilisation lors d'études paramétriques. C'est pourquoi, dans la section suivante, l'influence d'endommagement sera étudiée sur des spectres de moins bonne qualité sans toutefois que cela ne remette en question la pertinence de l'analyse qualitative effectuée.

IV.4 – Influence d'endommagements

L'utilisation des modèles présentés dans le cadre de la maintenance préventive et de la détection d'endommagement passe par la simulation et comparaison de signaux de vitesse instantanée de rotation pour des composants sains et endommagés. Cette dernière section, dédiée à l'étude de l'influence des endommagements, représente donc l'aboutissement du travail présenté dans les chapitres et sections précédents et constitue le véritable objectif de cette thèse. Dans un premier temps, l'influence d'écaillage dans les roulements est étudiée puis, dans une seconde partie, des dégradations sont introduites sur les dentures d'engrenage.

IV.4.1 – Ecaillage de roulements

L'influence d'un écaillage de bague extérieure sur un roulement à billes dans un système simpliste a déjà été discuté dans le second chapitre. Il a permis de mettre en évidence que ce type d'endommagement modifiait momentanément la répartition des charges sur les différents éléments roulants et menait à une augmentation de l'amplitude et de la richesse harmonique des variations de vitesse de rotation générées par le roulement. Cependant, ces constatations sont limitées puisque le système ne comportait que deux roulements et aucun engrenage. De nouvelles simulations ont été réalisées en introduisant des écaillages sur différents roulements. Dans une première simulation, l'écaillage est à nouveau positionné sur le roulement à bille en fonctionnement radial, donc sur l'arbre lent et dans la direction de la charge qu'il reprend afin de maximiser son influence et sa détectabilité. Profonde de 100 μm , l'écaille a une largeur angulaire $\Delta\beta$ de 25 degrés et une longueur angulaire $\Delta\phi$ de 11.5 degrés. Ces deux paramètres ont été introduits dans la première section du chapitre 2. La longueur $\Delta\phi$ correspond à environ deux tiers de la distance angulaire $\phi_0 = \frac{360}{Z}$ séparant deux corps

roulants. La Figure 112, à l'échelle, permet de visualiser les dimensions et la position de l'écaillage par rapport à celles de la bille et des bagues.

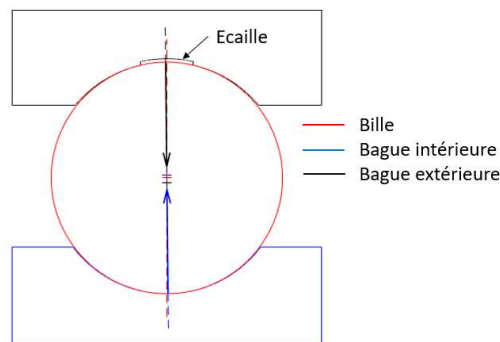


Figure 112 : Schéma de l'écaille implémentée

La Figure 113 compare les spectres de vitesse de rotation de l'arbre lent obtenus avec et sans écaillage sur le roulement à billes de cet arbre. Elle montre d'une part que les conclusions tirées sur un modèle réduit sont toujours vérifiables sur une transmission complète. En effet, l'amplitude et le nombre d'harmoniques visibles de la BPFO augmentent considérablement en présence d'écaillage. Les pics associés ont été repérés par des points de couleur. D'autre part, les raies latérales à gauche du pic de la fréquence d'engrènement sont d'amplitude beaucoup plus faible que dans le cas d'un roulement sain. Ainsi, en présence d'écaillage, elles se trouvent dépassées par les harmoniques de la BPFO du roulement. Ce constat n'est toutefois pas un bon indicateur en général de la présence d'un défaut de roulement comme cela sera montré ensuite.

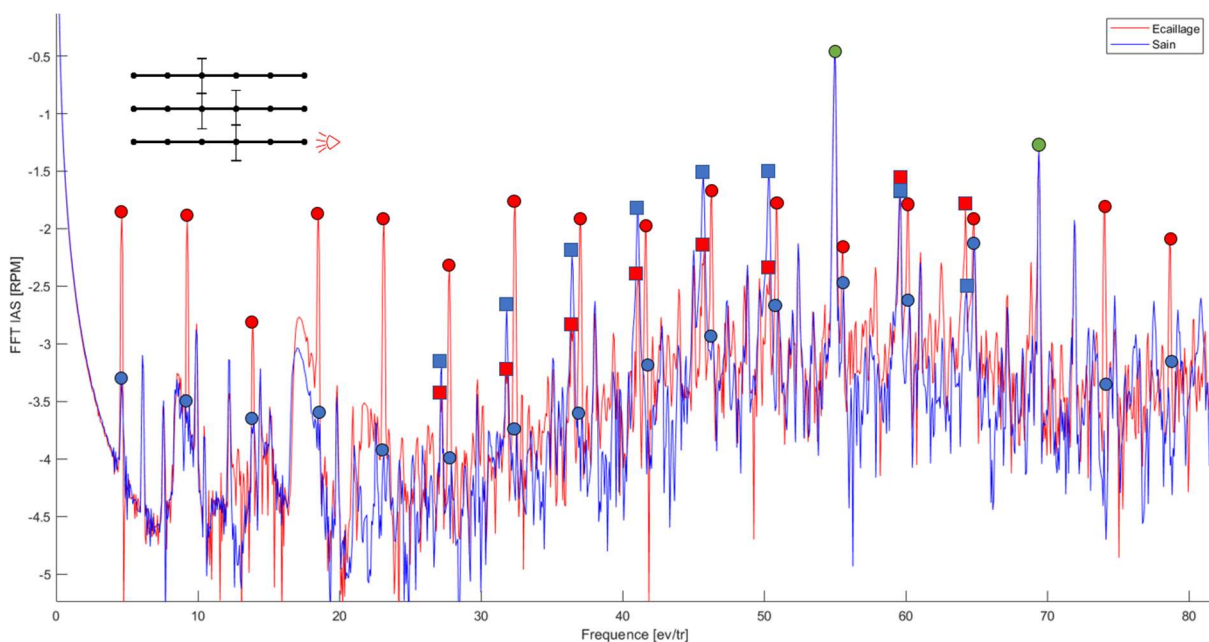


Figure 113 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage sur le roulement à billes de l'arbre lent

Sur cette figure, les pics associés aux fondamentales des deux engrènements, repérée en vert, ne semblent pas modifiés par la présence de l'écaillage sur le roulement. Ceci se confirme sur la Figure 114 qui présente un élargissement du spectre de la vitesse de rotation. Les harmoniques de la première

fréquence d'engrènement ont été repérées par des points et il est possible de constater qu'à de rares et négligeables exceptions près, elles ne sont pas affectées par la présence de l'endommagement.

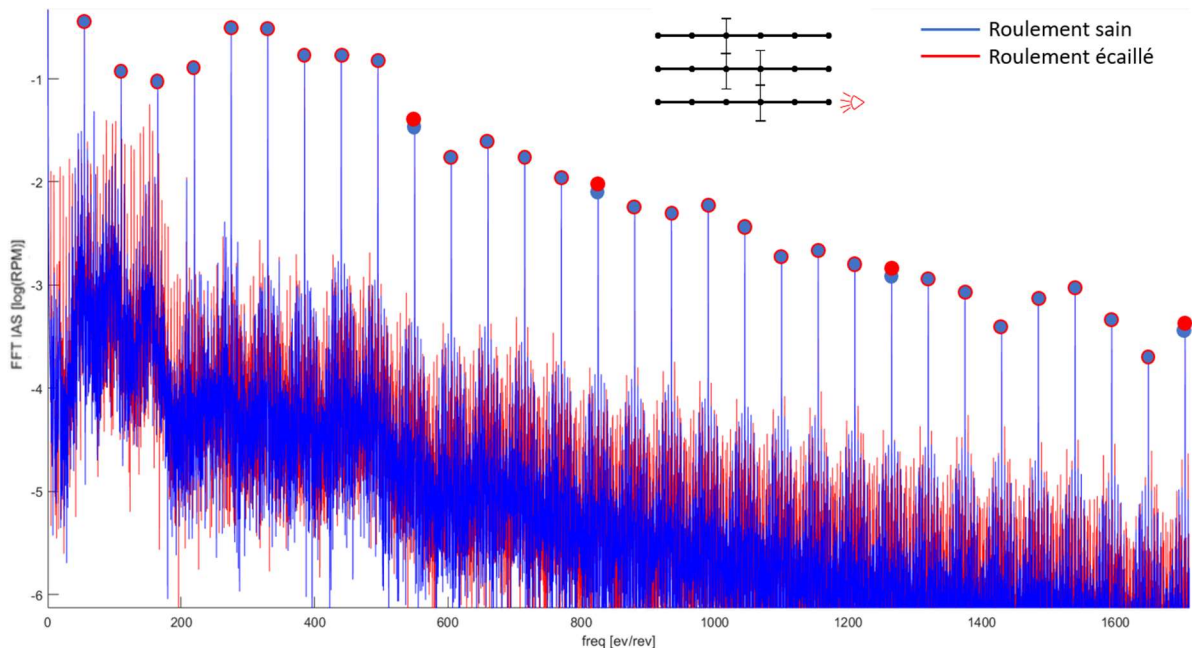


Figure 114 : Elargissement des spectres présentés sur la figure précédente

L'introduction, dans une seconde simulation, d'un écaillage identique sur le roulement à billes de l'arbre rapide a toutefois mené à des constatations en partie différentes. En effet, comme le montre la Figure 115, la présence d'un écaillage sur cet arbre a engendré une augmentation de l'amplitude et du nombre d'harmoniques de la BPFO dans le spectre. De plus, comme précédemment, les pics associés aux engrènements n'ont pas été modifiés. Cependant, l'importance déjà faible des modulations de la fréquence de ce roulement autour de la fréquence d'engrènement, marquées par des carrés, a augmenté au lieu de diminuer. Les interactions entre roulements et engrenages ne sont donc pas aisément prévisibles. Une fois encore, l'utilisation de simulations en amont de l'analyse d'essais réels peut s'avérer nécessaire afin de permettre une bonne interprétation de ceux-ci.

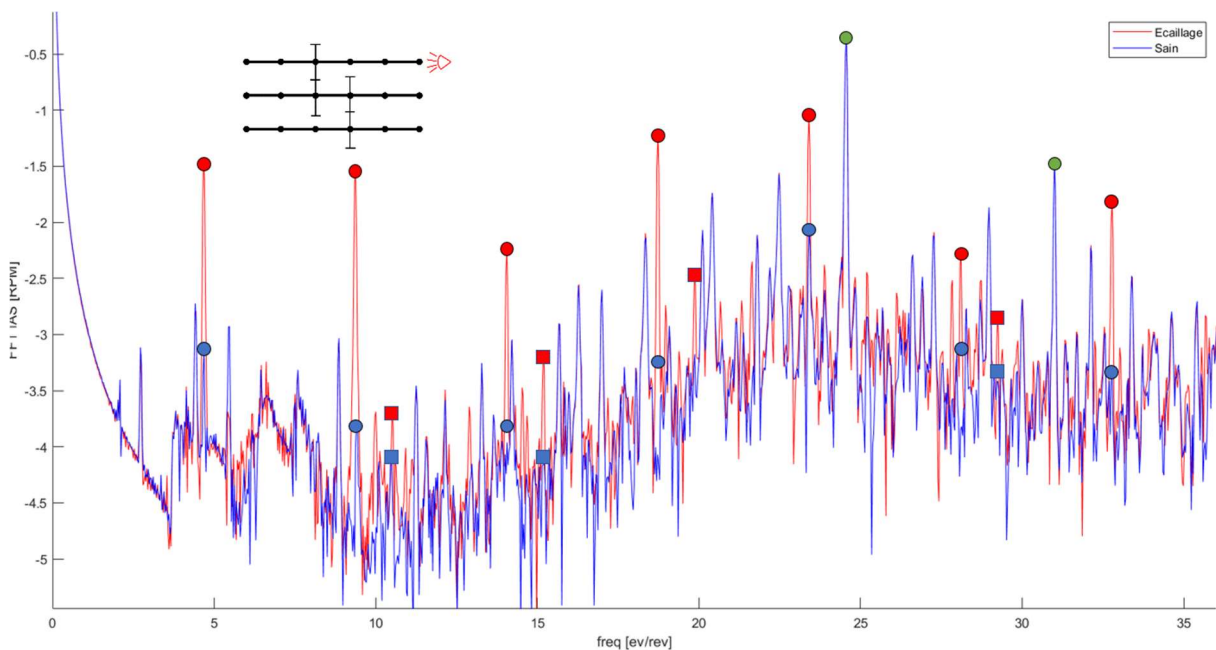


Figure 115 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage sur le roulement à billes de l'arbre rapide

L'influence d'un écaillage sur le roulement de l'arbre intermédiaire est plus délicate à caractériser. En effet, le hasard de la géométrie et des conditions de fonctionnement utilisées ont conduit à une coïncidence de fréquences. Ainsi, la fréquence du premier étage d'engrènement sur cet arbre correspond à un multiple de la BPFO du roulement à billes ($42 = 9 \times 4.66$). Par conséquent, les pics de modulations sont confondus avec les harmoniques de la BPFO et il est difficile de déterminer l'évolution de chacun en présence d'un endommagement.

Une troisième simulation a ensuite été réalisée en introduisant ce même endommagement sur la bague intérieure du roulement à bille de l'arbre lent. Un écaillage de la bague intérieure mène à des perturbations de la vitesse de rotation plus complexes que pour une bague extérieure endommagée. En effet, le passage d'un élément roulant sur la zone écaillée ne peut perturber la charge qu'il supporte que lorsque celle-ci est non nulle. Ainsi, plus l'élément roulant est chargé plus les efforts de contact sur celui-ci et sur ses voisins sont modifiés. Dans le cas d'une charge fixe, l'écaillage de la bague intérieure se retrouve dans la direction de celle-ci une fois par tour. Par conséquent, de nombreux pics sont ajoutés dans le spectre de la vitesse de rotation, présenté sur la Figure 116, en comparaison du cas d'un roulement sain. D'une part, la BPFI du roulement et ses harmoniques émergent et ont été repérées par des carrés. D'autre part, des raies latérales autour de ces fréquences apparaissent et sont marquées par des points. Ils correspondent aux modulations des premiers ordres entiers avec les fréquences de roulement. Il convient de remarquer que si la BPFI et ses harmoniques peuvent être visibles dans le spectre en présence d'un chargement tournant, ce n'est pas le cas de ces modulations qui sont caractéristiques de la présence d'un écaillage ou plus largement, d'un défaut ponctuel.

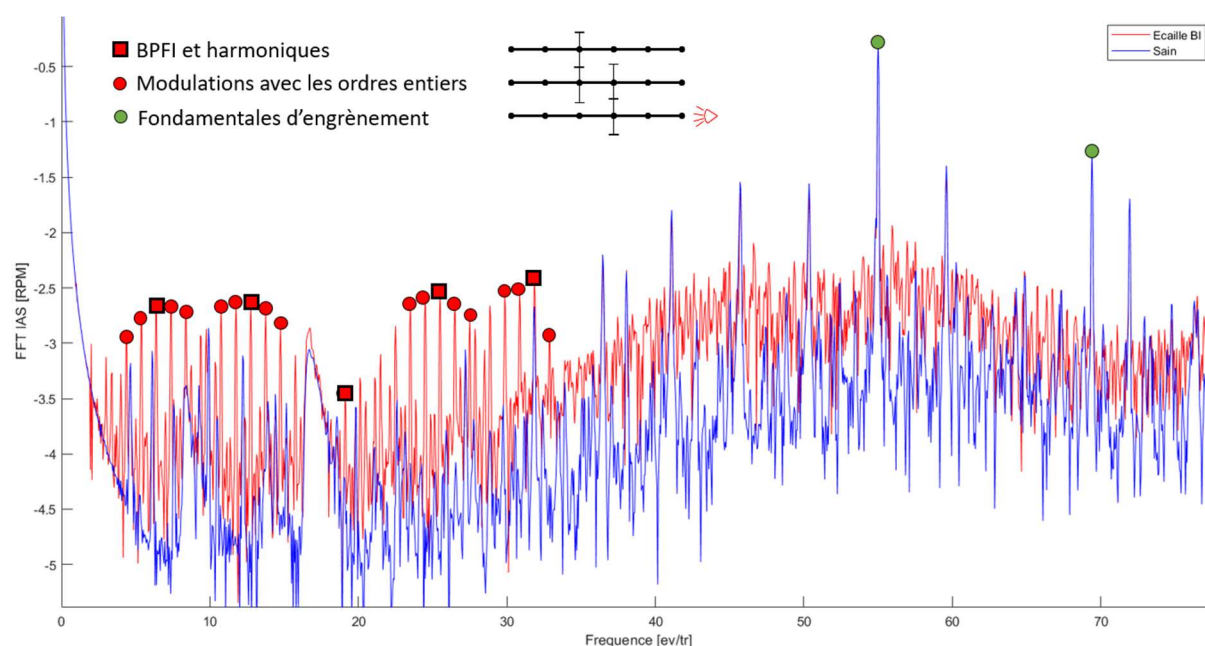


Figure 116 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage BI sur le roulement à billes de l'arbre lent

Afin de compléter l'étude des usures de roulements, une dernière simulation a été réalisée en introduisant un écaillage de longueur $\Delta\phi$ identique et de largeur $\Delta z = 3 \text{ mm}$ sur la bague extérieure du roulement à rouleaux de l'arbre lent. Il est rappelé que les trois roulements à rouleaux sont identiques et il a été vérifié que la présence d'un écaillage sur un autre roulement a un impact similaire

qualitativement. La Figure 117 permet de constater que l'a signature d'une telle détérioration est similaire à celle d'un écaillage du roulement à bille. Elle se traduit par l'augmentation de l'amplitude des pics situés à la BPFO et à ses harmoniques. On peut toutefois remarquer que l'intensité des perturbations de vitesse reste plus faible que pour le roulement à billes car le nombre d'éléments roulants est plus important. Par conséquent, chacun se retrouve moins chargé et les variations de répartition des charges lors du passage sur l'écaillage sont moins importantes.

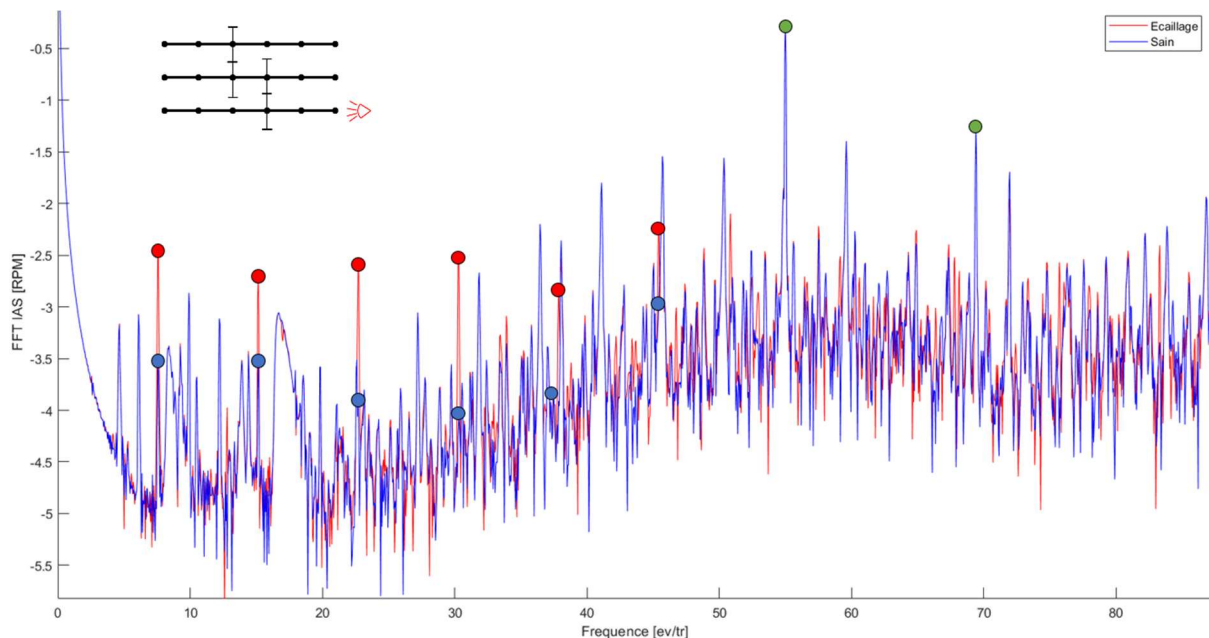


Figure 117 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage BE sur le roulement à rouleaux de l'arbre lent

IV.4.2 – Endommagements d'engrenages

La description des endommagements envisagés pour les engrenages a été faite dans la section dédiée du troisième chapitre. Ceux-ci peuvent prendre la forme de fissure en pied de dent ou d'écaillage sur le flanc en contact. Dans le premier cas, l'endommagement se manifeste par une réduction de la raideur des tranches de dent concernées tandis que dans le second, il prend la forme d'une diminution locale de l'écrasement. Dans les deux cas, il mène à une augmentation de l'erreur de transmission statique lorsque la dent concernée est chargée. Lors d'une simulation dynamique, la présence de ce type d'endommagement mène à la perturbation de la vitesse de rotation instantanée par rapport au cas sain une fois par tour. Par conséquent, dans les deux cas, la fréquence caractéristique de l'endommagement est identique et vaut exactement 1 ev/tr par rapport à l'arbre portant le pignon défectueux. Des simulations ont été effectuées pour chaque type de détérioration.

Une fissure a été implémentée sur la roue de l'arbre lent et est uniforme sur la largeur de la dent ce qui signifie que sa position sur le profil, sa profondeur et son orientation restent identiques quelle que soit la tranche considérée. Ce choix se justifie par l'absence dans le système étudié de phénomènes pouvant mener à de l'usure sur un côté de la dent plutôt que sur l'autre. La profondeur de la fissure équivaut à environ 15% de l'épaisseur de la dent ce qui correspond à un endommagement sérieux. Elle se situe proche du pied de dent où les contraintes sont connues pour être plus importantes. L'écaillage couvre quant à lui la moitié de la largeur de la dent et est centré sur le milieu de celle-ci dans la direction axiale. Dans la direction radiale, il est centré sur le rayon primitif et couvre le tiers du profil. Ceci correspond à la section du profil pour laquelle une seule paire de dents est

chargée de sorte que les pressions de contact sont maximales. La profondeur de l'écaillage est fixée à 100 μm , valeur typique pour ce type de dégradation. La Figure 118 présente la géométrie des endommagements implémentés.

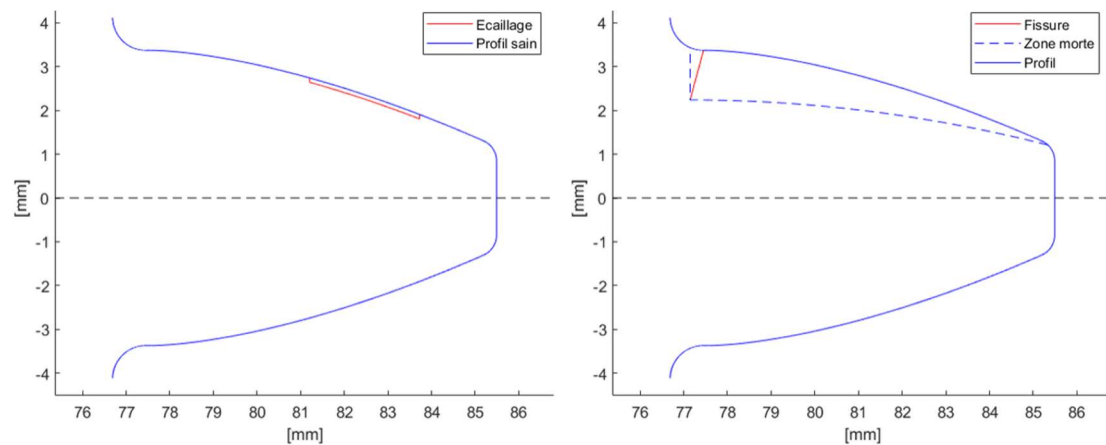


Figure 118 : Profils d'endommagements implémentés

La Figure 119 compare le spectre de la vitesse de rotation instantanée obtenu en implémentant une fissure sur la roue de l'arbre lent avec le cas d'un engrenage sain. Des marqueurs ronds permettent de mettre en évidence l'apparition d'un peigne de raies aux multiples de l'ordre un. Celui-ci est caractéristique de la présence d'un évènement périodique survenant une fois par tour et donc ici du passage sous charge de la dent fissurée. Cependant, une étude du spectre complet montre que les pics aux fréquences d'engrènement et à leurs harmoniques ne sont pas modifiés. De plus, les fréquences des roulements ne sont pas affectées par la présence d'une fissure sur l'engrenage. Enfin, les spectres de vitesse des autres arbres présentent eux aussi les mêmes symptômes. Cependant, la fréquence du peigne de raies engendré par l'endommagement est divisée par le rapport de réduction.

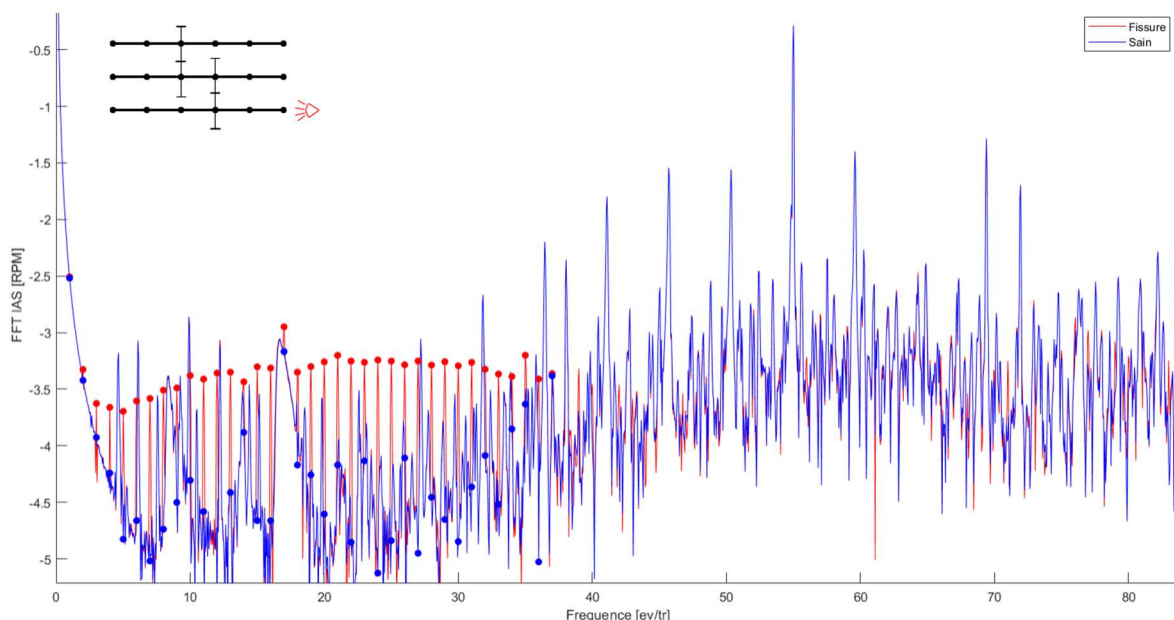


Figure 119 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans fissure sur la roue de l'arbre lent

La Figure 120 présente le cepstre réel de ces deux mêmes signaux de vitesse de rotation. Il est rappelé que le cepstre c d'un signal réel x est défini comme la transformée inverse du logarithme du module élevé au carré de la transformée du signal et sera par la suite simplement nommé « cepstre ».

$$c = \mathcal{F}^{-1}\{\ln(|\mathcal{F}\{x\}|^2)\} \quad (172)$$

L'impact d'une fissure y est encore plus facilement visible et se présente sous la forme de rhamoniques espacées d'un tour. De fait, le cepstre est un outil permettant la détection de structure périodiques dans le spectre et s'avère donc très adapté lorsqu'une signature recherchée prend la forme d'un peigne de raies tel qu'il peut apparaitre dans les analyses de la vitesse instantanée.

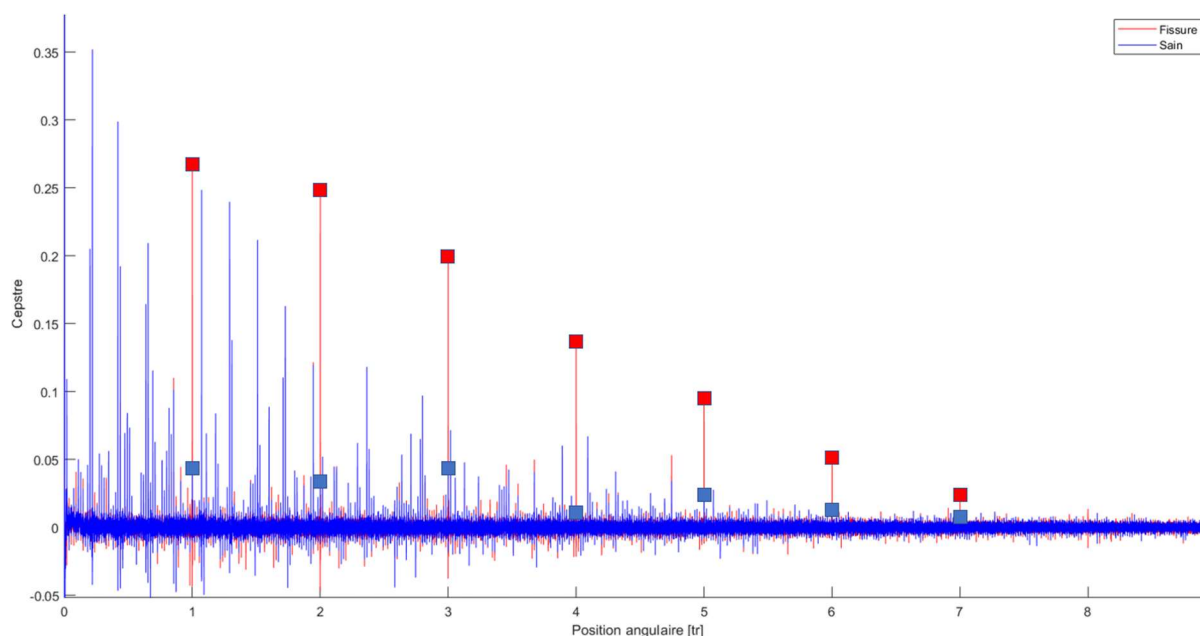


Figure 120 : Cepstre de vitesse de rotation avec et sans fissure sur la roue de l'arbre lent

Le cas d'un écaillage du flanc de dent est similaire à celui d'une fissure. En effet, comme le montre la Figure 121, un peigne de raie apparait également aux ordres entiers et les pics aux fréquences caractéristiques des roulements et engrènements ne sont pas modifiés.

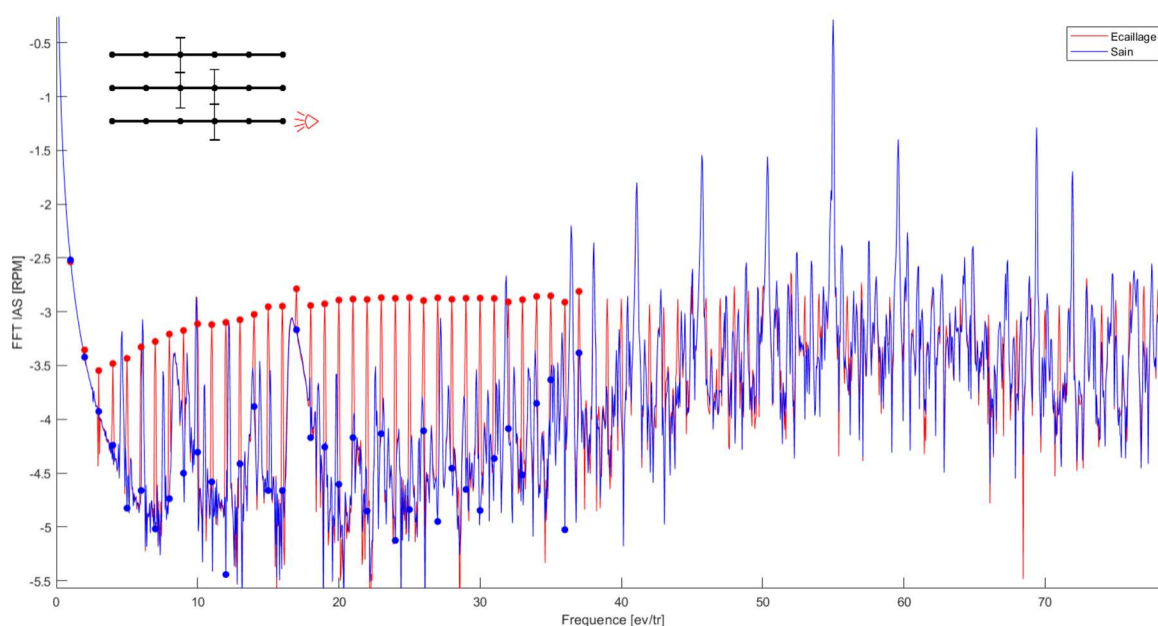


Figure 121 : Spectre de vitesse de rotation avec et sans écaillage sur la roue de l'arbre lent

Il est toutefois notable que l'influence de la fissure est moindre. Ceci peut s'expliquer par l'étude de l'erreur de transmission statique présentée sur la Figure 91 et la Figure 92 dans le chapitre précédent. En effet, la modification de raideur équivalente d'engrènement dans le cas d'une dent fissurée reste relativement faible, même pour un endommagement sévère tandis qu'elle est plus importante dans le cas d'un écaillage. Il est toutefois possible de considérer des tailles de dégradations telles que les signatures dans le spectre sont très similaires. Cet exercice a été réalisé et le résultat est fourni sur la Figure 122.

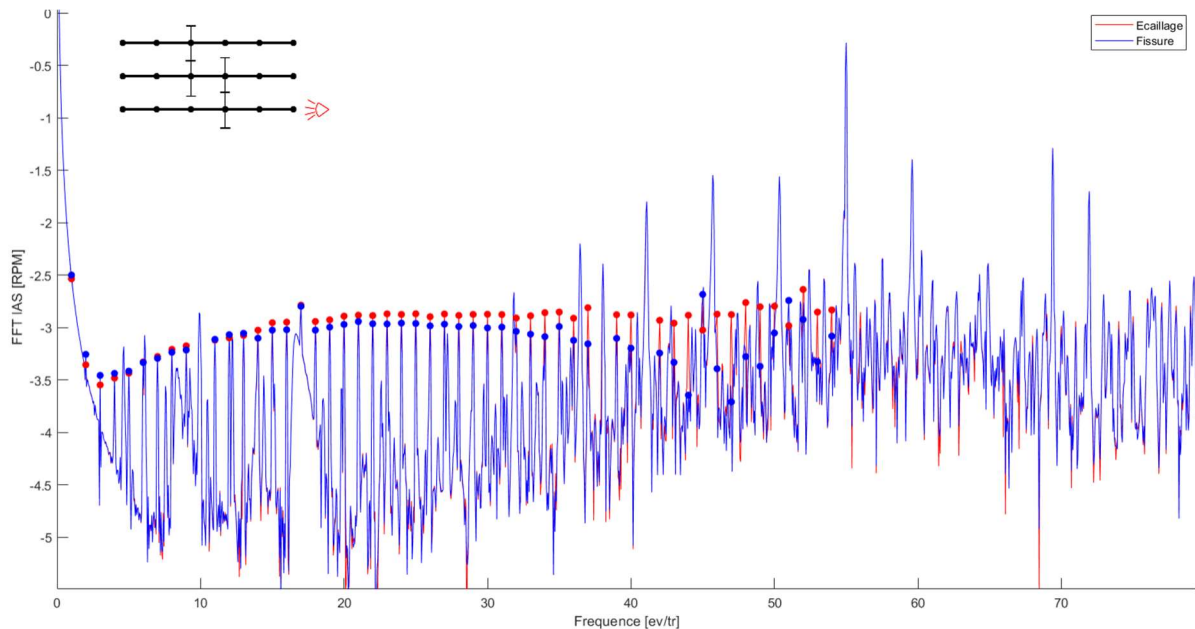


Figure 122 : Comparaison de spectre pour un écaillage et une fissure

Sur cette figure, il est très difficile de distinguer les signatures caractéristiques de l'écaillage et de la fissure. Cependant, une analyse cepstrale des mêmes signaux, présentée sur la Figure 123 mène à une constatation différente.

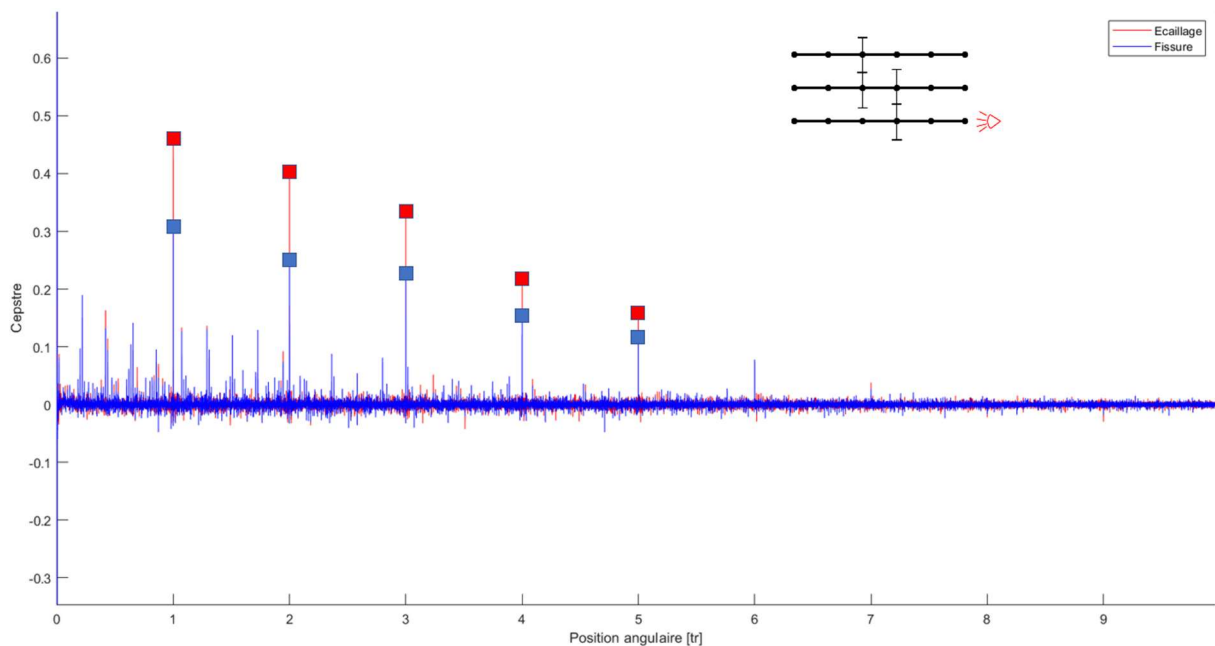


Figure 123 : Comparaison de cepstres pour un écaillage et une fissure

En effet, il apparaît que les rhamoniques engendrées par l'écaillage portent plus d'énergie que celles de la fissure, ce qui souligne une richesse harmonique plus importante. L'utilisation du cepstre semble donc prometteuse dans le but d'établir un diagnostic fiable. Cependant, le manque d'expertise de l'auteur dans ce domaine limite l'exploitation d'un tel outil et la coopération avec d'autres personnes spécialisées en traitement de signal permettrait certainement d'exploiter au mieux ce type de résultats. Le fait qu'un écaillage conduise à une signature plus riche en harmonique qu'une fissure peut se justifier par le caractère plus ponctuel (et donc impulsionnel) d'un écaillage par rapport à une fissure qui se manifeste pendant toute la durée de la charge de la dent endommagée. Ceci peut se confirmer à l'aide de l'étude des différences de vitesse instantanée observées dans le domaine physique entre un engrenage écaillé et un engrenage sain et fournies sur la Figure 124. Celle-ci permet de repérer facilement les instants de passage de la dent endommagée. Dans le cas d'une fissure, lors de la mise en charge de celle-ci, sa raideur plus faible a tendance à faire accélérer un arbre par rapport à l'autre sur une courte période afin de stabiliser le système autour d'une erreur de transmission plus importante. De même lors de sa libération, l'un des arbres est ralenti un bref instant afin de retrouver l'erreur de transmission nominale. Ces deux phases donnent naissance à deux pics très proches sur cette figure et se répètent une fois par tour. Pour un écaillage, ces pics sont plus importants que pour une fissure et explique le caractère impulsionnel accru visible dans le spectre. Des traitements supplémentaires sont envisageables. En effet, puisque l'écaillage semble être plus impulsionnel, du moyennage synchrone sur le signal vitesse pourrait permettre de distinguer correctement ces deux types d'endommagement. Cependant, il conviendrait dans ce cas de travailler en régime stabilisé afin que les fréquences des ordres entier et des modes propres du système restent constants que l'approche adoptée soit angulaire ou temporelle et donc que les oscillations transitoires suivant l'entrée en contact de la dent endommagée ne soient pas éliminées par le moyennage synchrone.

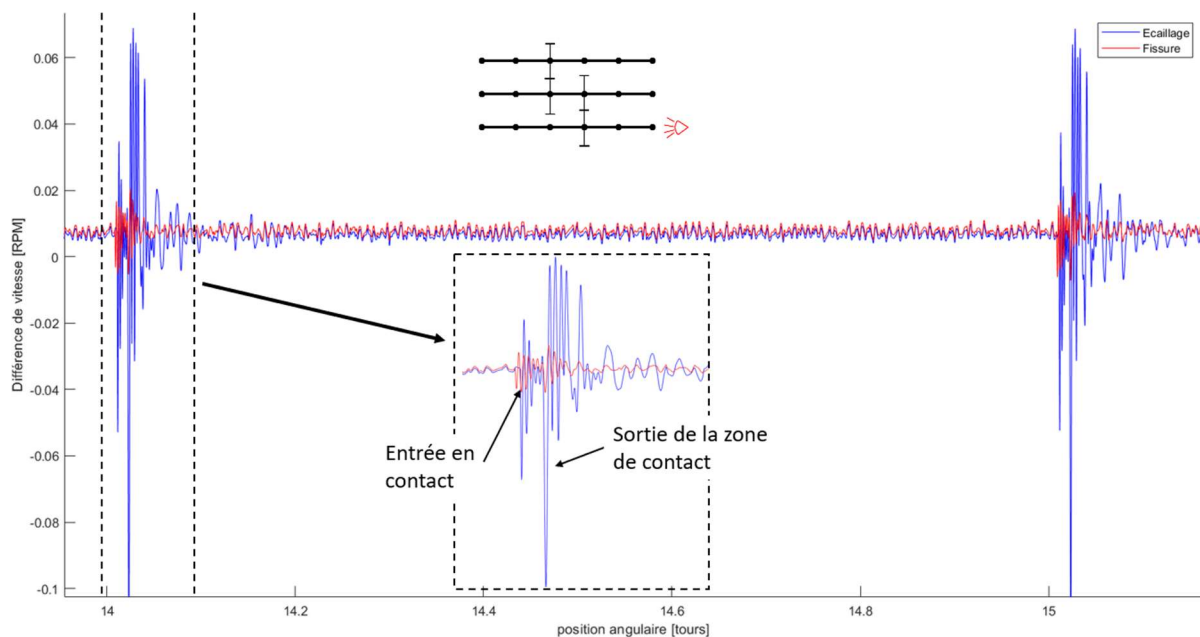


Figure 124 : Différence de vitesse de rotation entre le cas sain et les cas d'endommagement

Conclusion partielle

Ce chapitre dédié à la simulation numérique a permis l'utilisation des modèles d'engrenages et de roulements présentés précédemment et l'étude du comportement d'une transmission dans différentes conditions de fonctionnement. Pour cela un modèle de réducteur à engrenage académique a été mis en place. Bien que ne correspondant pas à un système réel, celui-ci reste réaliste dans sa conception et s'approche de l'architecture d'un réducteur aéronautique. De plus, la géométrie et les propriétés matériaux des différents composants sont tirées d'éléments réels afin de garantir une étude pertinente. Le réducteur étudié est composé de trois arbres coplanaires, chacun supporté par un roulement à billes et un roulement à rouleaux cylindriques. La transmission de puissance est assurée par des engrenages. Dans le but d'étudier différentes conditions de fonctionnement pour les roulements, les dentures du second étage de réduction ont été hélicoïdales droites tandis que celles du premier sont droites assurant ainsi que le roulement à billes de l'arbre de sortie ne reprenne que des efforts radiaux.

Des études préliminaires ont permis de montrer la pertinence de la vitesse de rotation instantanée dans la surveillance d'une transmission. En effet, les simulations effectuées ont pu mettre en évidence que chacun des éléments d'un tel système produit une signature observable quel que soit l'arbre sur lequel est implémentée la mesure. Le comportement dynamique d'une transmission saine a été analysé et les signatures caractéristiques des engrenages et des roulements sous différentes conditions de fonctionnement ont été repérées dans le spectre de la vitesse de rotation. Des interactions entre ces deux types de composants ont été mises en évidence. Elles se manifestent par des modulations faisant apparaître des raies latérales autour des fréquences d'engrènement dans les spectres. Cette étude se limite toutefois au contenu fréquentiel de la vitesse de rotation d'un système borné. En conditions réelles, d'autres éléments s'ajouteraient au spectre tels que les fréquences propres du carter, les perturbations induites par les sources de puissance telles qu'un moteur électrique, la turbine libre d'un turbomoteur ou encore un moteur à explosion.

L'intérêt des approches angulaires et des régimes non stationnaires a été confirmé. Leur utilisation simultanée permet d'épurer le spectre de la vitesse de rotation en supprimant les parasites liés aux phénomènes à dépendance temporelle tels que la participation des modes propres. En effet, lorsque la vitesse de rotation varie largement comme pour une montée en régime, le caractère intégral de la transformée de Fourier dans le domaine angulaire permet de répartir l'énergie de ces phénomènes sur de larges bandes de fréquence angulaire et d'éviter la formation de pics dans le spectre. En cela, tirer profit des conditions de fonctionnement non-stationnaires constitue une alternative simple aux méthodes de démodulation. Il a ainsi été montré qu'une montée en vitesse lente et des mesures longues constituent des conditions idéales pour l'étude du comportement des roulements et engrenages. Il en résulte qu'en simulation, il faut et il suffit de travailler dans le domaine angulaire et en régime variable afin d'assurer la surveillance d'une transmission. Les apports de la thèse dans la modélisation des roulements et engrenages a été mis en évidence en montrant l'impact des efforts normaux dans les roulements et l'importance d'un calcul précis de l'écrasement et de la raideur équivalente au contact pour les engrenages.

Plusieurs simulations ont été effectuées en introduisant des endommagements sur les éléments de liaison. Ainsi, il a été vérifié numériquement qu'un écaillage sur la bague extérieure d'un roulement mène à l'augmentation dans le spectre de l'amplitude des pics situés à sa BPFO et du nombre d'harmoniques significatives. Lorsque l'écaillage se trouve sur la bague intérieure, la signature est plus complexe et comprend des modulations en plus de la BPFI du roulement. Les écaillages et fissures sur les engrenages génèrent quant à eux des peignes de raies aux ordres entiers. Bien que

l'écaillage semble avoir un impact plus fort sur la vitesse de rotation instantanée, cela reste largement dépendant des dimensions d'endommagement implémenté. Il semble difficile, sans information extérieure de déterminer précisément de quel type de détérioration il s'agit. De plus, la présence de phénomènes périodiques à l'ordre un tels que du balourd ou un faux rond peuvent encore compliquer le diagnostic. Cependant, l'utilisation de cepstre, l'observation dans le domaine physique, ou du signal vitesse issu d'un autre arbre peut pallier à cette difficulté en apportant des informations complémentaires. En outre, le recours à d'autres types de capteurs peut permettre de croiser les informations disponibles et d'établir un diagnostic plus facilement. Par exemple, la détection de particules métalliques véhiculée dans le film d'huile peut permettre de statuer sur la nature de l'endommagement. En effet, un écaillage se caractérise par un arrachement de matière et donc la libération de particules métalliques dans le lubrifiant, ce qui n'est pas le cas d'une fissure.

Conclusion générale

Bilan des travaux

Cette thèse a permis de fournir un modèle dynamique d'une transmission de puissance endommagée dans le but de faire de la maintenance préventive. Les travaux présentés ici contribuent à explorer la voie de la vitesse de rotation instantanée comme vecteur d'information pour la surveillance. Celle-ci s'avère prometteuse en permettant d'une part de limiter le nombre de capteurs nécessaires à la surveillance d'une transmission grâce à sa capacité à transmettre l'information à travers les différents étages de réduction. D'autre part, elle fournit la relation angle temps et sa mesure mène à un échantillonnage naturel dans le domaine angulaire. Ces conditions s'avèrent propices à l'étude des composants à périodicité cyclique tels que les roulements et les engrenages. La mesure de la vitesse de rotation engendre toutefois des erreurs sur le signal obtenu et celle-ci ont été détaillées et quantifiées lorsque cela était possible. Le modèle mis en place suit une approche phénoménologique de sorte que les excitations associées aux différents éléments de la transmission sont les conséquences des phénomènes physiques à l'œuvre et ne sont pas imposées selon des lois analytiques arbitraires. La modélisation repose sur une discrétisation 1D des arbres selon la théorie des poutres de Timoshenko à six degrés de liberté par nœud. Afin de permettre le calcul des variations de couple dans les roulements et engrenages en fonction de la position angulaire, le degré de liberté correspondant à la rotation est conservé en totalité dans le système d'équation et ne se limite donc pas aux effets de torsion. De plus, la vitesse de rotation, sujet de l'étude, n'est jamais imposée directement sur un nœud mais est la conséquence du choix de couples moteurs et résistants pour se rapprocher des conditions limites réelles. Les roulements et les engrenages sont modélisés comme des efforts de restitution sur les nœuds des arbres correspondants respectivement aux centres des bagues et des roues dentées. Cette approche permet l'implémentation de fonctions complexes, la prise en compte de tous types de non linéarités et un couplage fort entre les différents éléments. Les torseurs de liaison ainsi obtenus dépendent des déplacements, vitesses et accélérations des différents nœuds plutôt que du temps. L'apport principal des travaux présentés ici réside dans les nombreuses améliorations apportées aux modèles d'engrenages et de roulement permettant de mieux estimer les variations de vitesse de rotation qu'ils génèrent ainsi que leurs interactions.

Dans le cas des roulements, l'équilibre de chaque élément roulant doit être déterminé séparément et dépend de la position angulaire de la cage ainsi que des déplacements en translation et en rotation des bagues. Les apports principaux de la thèse concernent la prise en compte des efforts centrifuges ainsi que des composantes axiales des forces transmises. Les écrasements aux contacts sont alors déterminés de manière géométrique et les efforts associés sont obtenus par application de la théorie de Hertz. Des endommagements de type écaillage sont introduits sous forme de diminutions locales de l'écrasement et un modèle approché original de calcul de l'effort de contact est proposé en adéquation avec les objectifs de la thèse. Une validation quasi-statique a été effectuée sur la base de codes mis à disposition par le CNES et a montré de très bonnes corrélations. Une première étude paramétrique est menée afin d'étudier le comportement des roulements à billes sous plusieurs conditions de fonctionnement. Elle permet de vérifier que la présence d'une charge axiale tend à modifier la BPFO du roulement et à diminuer les variations de vitesse de rotation engendrées par un tel roulement, rendant sa signature plus difficile à détecter. De même, il a été montré qu'à haute vitesse, l'importance de la composante fondamentale de l'excitation d'un roulement est moindre tandis que les harmoniques de la BPFO se trouvent amplifiées, en raison surtout des efforts centrifuges. Ces différents constats soulignent l'importance des améliorations apportées au cours de

la thèse aux modèles de roulement existants. Pour finir, il a été vérifié que la présence d'un écaillage de bague extérieure mène à une augmentation significative de l'amplitude et de la richesse harmonique des variations de vitesse dues au roulement, et s'avère donc facilement détectable.

Le modèle d'engrenages a été établi de manière similaire. Il comporte de nombreuses améliorations par rapport aux modèles utilisés précédemment dans la simulation de la vitesse de rotation, limités à des raideurs d'engrènement variant en créneaux. Il s'appuie sur une discrétisation des dentures en tranches minces dans la direction axiale. Ceci permet la prise en compte de l'angle d'hélice lorsque celui-ci est non nul ainsi que des inégalités d'écrasement et de raideur le long d'une dent pouvant être générés des endommagements non uniformes par exemple. Afin de rendre compte au mieux des variations de couple transmis, le calcul d'écrasement au contact, réalisé localement, considère les contacts hors ligne d'action en introduisant une distance à vide variable en dehors de la zone de contact théorique. Le calcul de l'effort normal est réalisé en combinant la souplesse des dentures, du contact et des corps de roues. Un modèle original est proposé afin de tenir compte de la participation des tranches non chargées d'une dent à sa raideur totale. Une validation numérique est réalisée à travers une comparaison avec des résultats éléments finis. Elle permet de mettre en évidence l'importance des effets convectifs de flexion pour le calcul de l'erreur de transmission dans le cas des engrenages hélicoïdaux. Une longueur caractéristique de ces effets convectifs est ainsi introduite et est déterminée empiriquement. Les différentes subtilités introduites au cours de cette thèse dans le calcul des efforts de contact ont été montrées significatives sur l'erreur de transmission statique calculée et donc sur l'excitation liée à l'engrènement. Les endommagements implémentés correspondent à des fissures en pied de dent et des écaillages du flanc de denture et peuvent être non-uniformes.

Un modèle de transmission académique complète a été élaboré en mettant à profit les différentes briques évoquées plus tôt. La conception de celle-ci est proche d'un réducteur aéronautique et permet l'étude du comportement des différents éléments dans des conditions de fonctionnement différentes. Les résultats obtenus ont notamment prouvé la pertinence de l'utilisation de la vitesse instantanée comme signal de surveillance en démontrant sa capacité à convoyer les informations d'un arbre à l'autre à travers les engrènements. Les signatures respectives dans le signal vitesse de rotation instantanée des roulements à billes chargés radialement et axialement, des roulements à rouleaux cylindriques et des engrenages droits et hélicoïdaux ont été caractérisées. L'observation des spectres de la vitesse a révélé la présence d'interactions entre les roulements et les engrenages prenant la forme de raies latérales de modulation autour des fréquences d'engrènement dans le spectre de la vitesse de rotation, justifiant ainsi le recours à des méthodes de démodulation en traitement de signal. Cependant, la nécessité d'appliquer ces méthodes sur une bande haute fréquence est remise en question. Il a été montré que l'amplitude des raies de modulation est difficilement prévisible et dépend de la proximité des modes propres du système, des conditions de fonctionnement et de la présence d'endommagement. La possibilité d'observer ce type de raies est dépendant du couplage introduit entre roulements et engrenages ainsi que de la précision du calcul des efforts transmis dans chaque élément et constitue donc un apport des modèles développés ici par rapport à la littérature. De même, l'intérêt de la conservation de tous les degrés de liberté est souligné dans les analyses temps fréquence par l'existence de modes propres de types variés à fort impact sur la vitesse de rotation. Les interactions entre ces modes et les excitations angulaires mènent à des phénomènes de résonance qu'il est nécessaire de maîtriser afin de réaliser un diagnostic correct de la transmission. Les signaux générés étant obtenus selon une approche phénoménologique, ils peuvent être utilisés dans l'objectif de tester et valider de outils de traitement de signal. L'exploitation de régimes non stationnaires et d'approches angulaires s'est montrée d'une grande utilité dans la séparation des composantes spectrales à dépendances angulaire et temporelle. Ce type de méthodes

peut donc se substituer à des méthodes de déconvolution classiques telles que le cepstre ou la déconvolution par minimum d'entropie, par exemple. Elles s'avèrent intéressantes car elles permettent de se passer de la contrainte classique de régime stabilisé et de la nécessité de maîtriser des outils parfois compliqués.

Pour finir, les conséquences de plusieurs types d'endommagement ont pu être étudiées. Dans le cas des roulements, il a été vérifié qu'un écaillage était détectable dans le spectre de la vitesse de rotation par l'augmentation de l'amplitude des oscillations à la fréquence associée à la bague détériorée ainsi qu'à ses harmoniques. En fonction de la bague touchée et de la nature du chargement radial (fixe ou tournant), des pics peuvent également émerger aux ordres entiers en raison de la coïncidence périodiques de la direction de la charge et de la position angulaire de l'endommagement. Il a également été montré qu'en raison de l'influence de la présence d'un écaillage sur les raies de modulation observées, celle-ci peuvent également servir d'indicateur. Cependant, leur utilisation requiert une grande connaissance de la dynamique du système. Les écaillages et fissures de dentures d'engrenages sont quant à eux difficiles à distinguer l'un de l'autre car ils laissent des traces similaires. En effet, puisqu'une dent dégradée revient en contact une fois par tour quel que soit le type d'avarie, les fréquences excitées dans le spectre sont les multiples de l'ordre entier. Dans un système réel, ces fréquences sont également associées à d'autres phénomènes tels que le balourd ou le faux rond et peuvent être porteuses d'artefacts liés à la mesure, ce qui limite la détectabilité des avaries liées aux engrenages. Cependant, plusieurs solutions peuvent être envisagées pour pallier ce problème. D'une part, la mesure de la vitesse de rotation sur un arbre différent permet de modifier les fréquences concernées. D'autre part, l'utilisation d'outils de traitement simples comme le cepstre ou le moyennage synchrone permet d'améliorer le diagnostic. Enfin, des données extérieures, issues d'un bouchon magnétique détectant la présence de particules métalliques dans le circuit d'huile par exemple peut permettre de trancher quant à la nature de l'endommagement en apportant des informations supplémentaires.

Perspectives

Bien que cette thèse apporte une contribution à la surveillance des machines tournantes par le biais de la vitesse instantanée de rotation, de nombreux travaux de recherche restent à réaliser et plusieurs perspectives sont ouvertes. En premier lieu, une validation dynamique des modèles mis en place serait profitable. Celle-ci permettrait de vérifier la justesse de la vitesse de rotation simulée et pourrait être effectuée en partie sur la base de résultats numériques. La confrontation à des résultats expérimentaux n'a pas pu être effectuée au cours de cette thèse et permettrait de valider l'approche proposée et les conclusions tirées. En particulier la richesse des spectres de la vitesse de rotation issus de systèmes réels pourrait constituer un frein à l'étude de certains composants et pourrait justifier le recours à des outils de traitement de signal plus avancés. Cela nécessiterait une bonne maîtrise de ceux-ci ainsi que des approches angulaires présentées dans ce manuscrit et une collaboration de chercheurs issus de chaque domaine pourrait s'avérer profitable.

Les modèles mis en place sont également ouverts à de nombreuses améliorations. Ainsi, il serait intéressant d'étudier l'impact des déformations des bagues de roulements sur la vitesse de rotation instantanée et sur la détectabilité d'endommagement. En particulier, l'influence de paramètres tels que la chaleur et la vitesse de rotation sur les expansions des bagues et les jeux en fonctionnement pourrait être ajoutée. De même, un modèle de cage permettant de déterminer la position réelle des éléments roulants en se passant de l'hypothèse d'équi-répartition améliorerait le calcul des efforts tangentiels de contact et du couple résistant. Toujours dans le même domaine, un

modèle de contact plus fin tenant compte de la présence du lubrifiant et des effets élasto-hydrodynamiques associés serait profitable. Dans le cas des engrenages, une loi permettant le calcul de la largeur des effets convectifs de flexion doit encore être déterminée. De plus, la prise en compte plus complète des déformations du corps de roue pourrait s'avérer bénéfique à la simulation, surtout dans le cas de voiles minces typiquement utilisés en aéronautique.

D'autres éléments extérieurs participant à la dynamique globale peuvent être ajoutés aux modèles. Ainsi, une simulation plus fine de la motorisation serait profitable afin de tenir compte d'excitations cycliques supplémentaires pouvant interagir avec les phénomènes déjà étudiés. En effet, qu'il s'agisse d'un moteur électrique, d'une turbine libre ou d'un moteur à explosion, la source de puissance n'est jamais idéale et présente toujours des périodicités cycliques. De même, la prise en compte des excitations par la base pourrait rendre compte avec plus de fidélité des conditions de fonctionnement réelles des transmissions embarquées dans les différents engins de transport. Des travaux à venir s'intéresseront à la modélisation du carter afin de permettre la simulation et l'optimisation de systèmes de mesure accélérométriques sur ce dernier. Pour finir, un modèle de roulement à rouleaux coniques, actuellement en cours de développement, permettra d'élargir le champ d'application des travaux réalisés ici.

Bibliographie

- [1] H. André, « Surveillance angulaire d'une ligne d'arbre d'éolienne sous conditions non stationnaires », INSA Lyon, 2011.
- [2] J. L. Gomez, « Angle modeling of a rotating machine. Application to wind turbine surveillance », INSA, Lyon, France, 2017.
- [3] M. Lalanne et G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*, 2nd Edition. John Wiley and Sons, 1998.
- [4] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] R. Tiwari, *Rotor systems : analysis and identification*. CRC press, 2017.
- [6] S. Timoshenko et J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Co., 1934.
- [7] H. D. Nelson, « A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory », *Journal of Mechanical Design*, vol. 102, n° 4, p. 793-803, 1980.
- [8] W. Kim, A. Argento, et R. Scott, « Forced vibration and dynamic stability of a rotating tapered composite Timoshenko shaft : bending motions in end-milling operations », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 246, n° 4, p. 583-600, 2001.
- [9] S. Mirtalaie et M. Hajabasi, « A new methodology for modeling and free vibrations analysis of rotating shaft based on the timoshenko beam theory », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 138, n° 2, 2016.
- [10] A. Pigé, P. Vexé, R. Lanquetin, et P. Cutuli, « A model for the quasi-static and dynamic simulation of bevel gears », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 175, 2022.
- [11] F. Lin et G. Meng, « Study on the dynamics of a rotor in a maneuvering aircraft », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 125, n° 3, p. 324-327, 2003.
- [12] Y. Briend, M. Dakel, E. Chatelet, M.-A. Andrianoely, R. Dufour, et S. Baudin, « Effect of multi-frequency parametric excitations on the dynamics of on-board rotor-bearing systems », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 145, 2020.
- [13] Y. Briend, « Dynamique de rotors embarqués sous sollicitations multi-axiales et multi-fréquentielles : modélisation et expérimentation », INSA Lyon, 2020.
- [14] E. Sghaier, « Dynamique des rotors à très hautes vitesses en régime non stationnaire – Identification par le filtre de Kalman », Université Paris-Saclay, 2020.
- [15] D. Noel, M. Ritou, B. Furet, et S. Le Loch, « Complete Analytical Expression of the Stiffness Matrix of Angular Contact Ball Bearings », *Journal of Tribology*, vol. 135, n° 4, 2013.
- [16] A. Bourdon, « Modélisation dynamique globale des boîtes de vitesses automobile », INSA, Lyon, France, 1997.
- [17] M. Ajmi et P. Vexé, « A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears », *Mech. Mach. Theory*, vol. 40, n° 2, p. 173-190, 2005.
- [18] Z. Chen et Y. Shao, « Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth », *Eng. Fail. Anal.*, vol. 18, n° 8, p. 2149-2164, 2011.
- [19] J. L. Gomez, A. Bourdon, H. André, et D. Rémond, « Modelling deep groove ball bearing localized defects inducing instantaneous angular speed variations », *Tribol. Int.*, vol. 98, p. 270-281, 2016.
- [20] N. Thibault, A. Bourdon, D. Remond, et D. Lecouvreur, « Dynamic model of a deep grooves ball bearing dedicated to the study of instantaneous angular speed of rotating assemblies », *Tribology International*, vol. 174, 2022.
- [21] N. Sawalhi et R. B. Randall, « Vibration response of spalled rolling element bearings: Observations, simulations and signal processing techniques to track the spall size », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, n° 3, p. 846-870, 2011.
- [22] C. A. Carbelli, « Minimum entropy deconvolution and simplicity : A noniterative algorithm », *Geophysics*, vol. 50, n° 3, p. 394-413, 1984.
- [23] J. Antoni, « Calcul Rapide du Kurtogramme et Applications », Compiègne, 2005.

- [24] J. Antoni, « The spectral kurtosis: A useful tool for characterising non-stationary signals », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, p. 282-307, 2006.
- [25] B. P. Bogert, M. J. R. Healy, et J. W. Tukey, « The quefrency analysis of time series for echoes: cepstrum pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking », New York, 1963, p. 209-243.
- [26] R. B. Randall, J. Antoni, et W. A. Smith, « A survey of the application of the cepstrum to structural modal analysis », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 118, p. 716-741, 2019.
- [27] R. B. Randall, *Vibration-based Condition Monitoring*, WILEY&Sons. 2011.
- [28] J. Antoni et M. Sidahmed, « Contrôle et diagnostic à partir des signaux acoustiques et vibratoires », *Acoust. Tech.*, vol. 38, p. 9-15, 2004.
- [29] S. Baudin, « Detection et extraction des bruits de type grenaille des boites de vitesses par approche cyclostationnaire angle/temps », INSA, Lyon, 2014.
- [30] S. Baudin, D. Rémond, J. Antoni, et O. Sauvage, « Non-intrusive rattle noise detection in non-stationary conditions by an angle/time cyclostationary approach », *J. Sound Vib.*, vol. 366, p. 501-513, 2016.
- [31] D. Abboud, J. Antoni, S. Sieg-Zieba, et M. Eltabach, « Envelope analysis of rotating machine vibrations in variable speed conditions: A comprehensive treatment », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 84, p. 200-226, 2017.
- [32] D. Abboud, S. Baudin, J. Antoni, D. Rémond, M. Eltabach, et O. Sauvage, « The spectral analysis of cyclo-non-stationary signals », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 75, p. 280-300, 2016.
- [33] G. Rizzoni, « Diagnosis of individual Cylinder Misfires by Signature Analysis of Crankshaft Speed Fluctuations », 1989, vol. 1.
- [34] J. Yang, L. Pu, Z. Wang, Y. Zhou, et X. Yan, « Fault detection in a diesel engine by analysing the instantaneous angular speed », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 15, n° 3, p. 549-564, 2001.
- [35] M. Desbazeille, R. B. Randall, F. Guillet, et M. El Badaoui, « Model-based diagnosis of large diesel engines based on angular speed variations of the crankshaft », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, n° 5, p. 1529-1541, 2010.
- [36] D. Remond, « Practical performances of high-speed measurement of gear transmission error or torsional vibrations with optical encoders », *Meas. Sci. Technol.*, vol. 9, n° 3, p. 347-353, 1998.
- [37] C. J. Stander et P. S. Heyns, « Instantaneous angular speed monitoring of gearboxes under non-cyclic stationary load conditions », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 19, p. 817-835, 2005.
- [38] Q. Zeng, M. Zainab, Y. Shao, F. Gu, et A. D. Ball, « Planetary gear fault diagnosis based on instantaneous angular speed analysis », Huddersfield, United Kingdom, 2017, p. 1-6.
- [39] S. K. Roy, A. R. Mohanty, et C. H. Kumar, « Fault detection in a multistage gearbox by time synchronous averaging of the instantaneous angular speed », *Journal of Vibration and Control*, p. 1-13, 2014.
- [40] L. Renaudin, F. Bonnardot, O. Musy, J. B. Doray, et D. Rémond, « Natural roller bearing fault detection by angular measurement of true instantaneous angular speed », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, p. 1998-2011, 2010.
- [41] H. André, A. Bourdon, et D. Remond, « On the use of the Instantaneous Angular Speed measurement in non-stationary mechanism monitoring », présenté à ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences, Washington, DC, USA, 2011.
- [42] H. André, F. Girardin, A. Bourdon, J. Antoni, et D. Remond, « Precision of the IAS monitoring system based on the elapsed time method in the spectral domain », *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [43] A. Bourdon, S. Chesné, H. André, et D. Rémond, « Estimation of the size of a spall defect on a rolling bearing outer ring using Instantaneous Angular Speed measurements », présenté à SMA International conference on Noise and Vibration Engineering, 2014.

- [44] A. Bourdon, H. André, et D. Rémond, « Introducing angularly periodic disturbances in dynamic models of rotating systems under non-stationary conditions », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 44, n° 1-2, p. 60-71, 2014.
- [45] Y. Li, F. Gu, G. Harris, A. Ball, N. Bennett, et K. Travis, « The measurement of instantaneous angular speed », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 19, n° 4, p. 786-805, 2005.
- [46] F. Bonnardot, M. El Badaoui, R. B. Randall, J. Danière, et F. Guillet, « Use of the acceleration signal of a gearbox in order to perform angular resampling (with limited speed fluctuation) », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 19, n° 4, p. 766-785, 2005.
- [47] K. C. Gryllias et I. A. Antoniadis, « Estimation of the instantaneous rotation speed using complex shifted Morlet wavelets », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 38, n° 1, p. 78-85, 2013.
- [48] K. Rodopoulos, C. Yiakopoulos, et I. A. Antoniadis, « A parametric approach for the estimation of the instantaneous speed of rotating machinery », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 44, n° 1-2, p. 31-46, 2014.
- [49] A. Bourdon, H. André, et D. Remond, « A new way of writing motion equation in rotating machines by translation into the angular domain. », présenté à 8th IFToMM international conference on rotor dynamics, Seoul, Korea : KIST, 2010.
- [50] A. Palmgren, *Les roulements descriptions, théorie, applications*, SKF. Paris, 1967.
- [51] H. Hertz, « The Contact of Elastic Solids », *J. Reine Angew. Math.*, vol. 92, p. 156-171, 1882.
- [52] A. B. Jones, « Ball motion and sliding friction in ball bearings », *Journal of Basic Engineering*, vol. 81, n° 1, p. 1-12, 1959.
- [53] A. Jones, « A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. », *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, n° 2, p. 309-320, 1960.
- [54] T. A. Harris, *Rolling Bearing Analysis*, 4th Edition. John Wiley & Sons, 2001.
- [55] P. Gupta, « Dynamics of rolling-element bearings-Part I: Cylindrical roller bearing analysis », *Journal of Lubrication Technology*, vol. 101, n° 3, p. 293-302, 1979.
- [56] P. K. Gupta, « Dynamics of Rolling-Element Bearings-Part III: Ball Bearing Analysis », *Journal of Lubrication Technology*, vol. 101, n° 3, p. 312-318, 1979.
- [57] B. J. Hamrock et W. J. Anderson, « Rolling-Element Bearings », *NASA Reference Publication 1105*, 1983.
- [58] B. J. Hamrock et D. Dowson, « Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts: Part I - Theoretical Formulation », *Journal of Lubrication Technology*, vol. 98, p. 223-229, 1975.
- [59] B. J. Hamrock et D. Dowson, « Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts: Part III-Fully Flooded Result », *Journal of Lubrication Technology*, vol. 99, p. 264-276, 1976.
- [60] L. Houpert, « Piezoviscous-Rigid Rolling and Sliding Traction Forces, Application: The Rolling Element-Cage Pocket Contact », *Journal of Tribology*, vol. 109, p. 363-370, 1987.
- [61] L. Houpert, « Ball Bearing and Tapered Roller Bearing Torque: Analytical, Numerical and Experimental Results », *Tribology Transactions*, vol. 45, n° 3, p. 345-353, 2002.
- [62] S. Fukata, E. H. Gad, T. Kondou, T. Ayabe, et H. Tamura, « On the radial vibration of ball bearings : computer simulation. », *Bulletin of JSME*, vol. 28, n° 239, p. 899-904, 1985.
- [63] M. Tiwari et P. K. Gupta, « Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 238, n° 5, p. 723-756, 2000.
- [64] M. Tiwari et P. K. Gupta, « Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 238, n° 5, p. 757-779, 2000.
- [65] D. Noel, « Modélisation et identification du comportement dynamique des broches UGV à montages de roulements préchargés », Université de Nantes, Nantes, France, 2013.
- [66] B. R. Jorgensen et Y. C. Shin, « Dynamics of Machine Tool Spindle/Bearing Systems Under Thermal Growth », *Journal of Tribology*, vol. 119, n° 4, p. 875-882, 1997.
- [67] C. Wagner, A. Krinner, T. Thümmel, et D. Rixen, « Full Dynamic Ball Bearing Model with Elastic Outer Ring for High Speed Applications », *Lubricants*, vol. 5, 2017.

- [68] S. Lacroix, « Analyse et validation expérimentale d'un modèle de roulement à billes à quatre points de contact à bagues déformables par découplage des effets locaux et structuraux », INSA Lyon, Villeurbanne - France, 2014.
- [69] P. D. Mc Fadden et J. D. Smith, « Model for the vibration produced by a single point defect in a rolling element bearing », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 96, n° 1, p. 69-82, 1984.
- [70] D. Brie, « Modelling of the spalled rolling element bearing vibrations signal: an overview and some new results », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 14, n° 3, p. 353-369, 2000.
- [71] N. Tandon et A. Choudhury, « An analytical model for the prediction of the vibration response of rolling element bearing due to a localized defect », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 205, n° 3, 1997.
- [72] M. Behzad, A. R. Bastami, et D. Mba, « A New Model for Estimating Vibrations Generated in the Defective Rolling Element Bearings. », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 133, n° 4, 2011.
- [73] N. Feng, E. Hahn, et R. B. Randall, « Using transient analysis software to simulate vibration signals due to rolling element bearing defects. », Sydney : World Scientific, 2002, vol. 20, p. 22.
- [74] J. Sopanen et A. Mikkola, « Dynamic model of a deep-groove ball bearing including localized and distributed defects », 2003, vol. 217.
- [75] J. L. Gomez, I. Khelf, A. Bourdon, H. André, et D. Remond, « Angular modeling of a rotating machine in non-stationary conditions: Application to monitoring bearing defects of wind turbines with instantaneous angular speed », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 136, p. 27-51, 2019.
- [76] J.-F. Antoine, C. Visa, C. Sauvey, et G. Abba, « Approximate Analytical Model for Hertzian Elliptical Contact Problems », *J. Tribol.*, vol. 128, n° 3, p. 660-664, 2006.
- [77] B. J. Hamrock et D. Brewe, « Simplified Solution for Stresses and Deformations », *Journal of Lubrication Technology*, vol. 105, n° 2, p. 171-177, 1983.
- [78] G. Inglebert, T. Da Silva Botelho, et I. Lemaire Caron, « Théorie du contact de Hertz - Contacts ponctuels ou linéiques », *Techniques de l'ingénieur*, 2011.
- [79] L. Houpert, « An Engineering Approach to Hertzian Contact Elasticity - Part I », *Journal of Tribology*, vol. 123, n° 3, p. 589-594, 2001.
- [80] D. Changan, Z. Fuzhang, Z. Jun, et Z. Lei, « Raceway control assumption and the determination of rolling element attitude angle. », 2000, p. 158-163.
- [81] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.*, Albert BLANCHARD. Paris, 1959.
- [82] R. G. Munro, « The D. C. component of gear transmission error », Chicago, 1989, p. 467-470.
- [83] H. N. Özgüven et D. R. Houser, « Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 125, n° 1, p. 71-83, 1988.
- [84] R. W. Gregory, S. L. Harris, et R. G. Munro, « Torsional Motions of a Pair of Spur Gears », 1963, vol. 178, p. 166-173.
- [85] A. Kubo, « Stress Condition, Vibrational Exciting Force, and Contact Pattern of Helical Gears with Manufacturing and Alignment Error », *Journal of Mechanical Design*, vol. 100, n° 1, p. 77-84, 1978.
- [86] J. Brauer, « A general finite element model of involute gears », *Finite Elements in Analysis and Design*, n° 40, p. 1857-1872, 2004.
- [87] J. Wang, « Numerical and Experimental Analysis of Spur Gears in Mesh », Curtin University of Technology, 2003.
- [88] A. F. Del Rincon, F. Viadero, M. Iglesias, P. García, A. De-Juan, et R. Sancibrian, « A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 61, p. 30-58, 2013.
- [89] J. Teixeira Alves, « Définition analytique des surfaces de denture et comportement sous charge des engrenages spiro-coniques », INSA Lyon, 2012.
- [90] W. A. Tuplin, « Gear tooth stresses at high speed », 1950, vol. 1-196, p. 162-175.
- [91] W. A. Tuplin, « Dynamic loads on gear teeth », *Machine Design*, vol. 25, p. 203-211, 1953.

- [92] H. Kohler, A. Pratt, et A. M. Thompson, « Dynamics and Noise of Parallel-axis Gearing », 1970, vol. 184, p. 111-121.
- [93] H. Fukuma, T. Furukawa, et T. Aida, « Fundamental Research on Gear Noise and Vibration », *Bulletin of JSME*, p. 1094-1107, 1973.
- [94] P. Velez, « Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles », INSA Lyon, 1988.
- [95] J. B. Reswick, « Dynamic loads on spur and helical gear teeth », *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 77, p. 635-644, 1955.
- [96] S. L. Harris, « Dynamic loads on the teeth of spur gears », 1958, vol. 1-196, p. 87-112.
- [97] D. C. Johnson, « Excitation of resonant vibrations by gear tooth meshing effects. », 1958, p. 18-23.
- [98] H. Kohler, « The mechanism and measurement of dynamic loading in spur gears », University of Sheffield, 1959.
- [99] B. Wood, « Sources of vibration excitation in spur gears », University of Leeds, 1960.
- [100] C. Weber, *The deflection of loaded gears and the effects on their load carrying capacity*, Department of Scientific and Industrial Research. 1949.
- [101] C. Weber et K. Banaschek, *Formänderung und Profilrücknahme bei Gerad- und Schrägverzahnten*. Germany: F. Vieweg und Sohn, 1953.
- [102] H. H. Lin, « Computer-aided design and analysis of spur gear dynamics », University of Cincinnati, 1985.
- [103] H. H. Lin, D. P. Townsend, et F. B. Oswald, « Profile modification to minimize spur gear dynamic loading », Chicago, 1989, vol. 1, p. 455-465.
- [104] H. H. Lin et C.-H. Liou, « A parametric study of spur gear dynamics », *NASA CR 206598*, Memphis, 1998.
- [105] W. J. O'Donnell, « Stresses and Deflections in Built-In Beams », *Journal of Engineering for Industry*, vol. 85, n° 3, p. 265-272, 1963.
- [106] A. Y. Attia, « Deflection of Spur Gear Teeth Cut in Thin Rims », *Journal of Engineering for Industry*, vol. 86, n° 4, p. 333-341, 1964.
- [107] R. W. Cornell, « Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth », *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, n° 2, p. 447-459, 1981.
- [108] P. Sainsot, P. Velez, et O. Duverger, « Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula », *J. Mech. Des.*, vol. 126, n° 4, p. 748-752, juill. 2004.
- [109] N. Sainte-Marie, « A transmission-error-based gear dynamic model: Applications to single- and multi-mesh transmissions », INSA, Lyon, France, 2016.
- [110] B. Guilbert, « Hybrid modular models for the dynamic study of high-speed thin-rimmed webbed gears », INSA, Lyon, France, 2017.
- [111] M. Maatar et P. Velez, « Quasi-Static and Dynamic Analysis of Narrow-Faced Helical Gears With Profile and Lead Modifications », *Journal of Mechanical Design*, vol. 119, n° 4, p. 474-480, 1997.
- [112] Z. Sun, S. Chen, Z. Hu, et X. Tao, « Improved mesh stiffness calculation model of comprehensive modification gears considering actual manufacturing », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 167, 2022.
- [113] G. Goch, K. Ni, Y. Peng, et A. Guenther, « Future gear metrology based on areal measurements and improved holistic evaluations », *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 66, p. 469-474, 2017.
- [114] H. Ma, J. Zeng, R. Feng, X. Pang, et B. Wen, « An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief », *Mechanism and Machine Theory*, n° 98, p. 64-80, 2016.
- [115] E. Rigaud et D. Barday, « Modelling and Analysis of Static Transmission Error. Effect of Wheel Body Deformation and Interactions between Adjacent Loaded Teeth », Paris, France, 1999, p. 1961-1972.

- [116] Y. Benaïcha, J. Perret-Liaudet, J.-D. Beley, E. Rigaud, et F. Thouverez, « On a flexible multibody modelling approach using FE-based contact formulation for describing gear transmission error », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 167, 2022.
- [117] O. Duverger, P. Velex, L. Vedmar, et P. Sainsot, « A model of the dynamic behavior of spur gears with consideration of off-line-of-action contacts », présenté à ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference, Chicago, Illinois, USA, 2003.
- [118] H. H. Lin, J. Wang, F. B. Oswald, et J. J. Coy, « Effect of extended tooth contact on the modeling of spur gear transmission », *Gear Technology*, 1994.
- [119] A. Singh et D. R. Houser, « Analysis of off-line of action contact at the tips of gear teeth », présenté à International Off-Highway & Powerplant Congress & Exposition, Milwaukee, Wisconsin, 1994.
- [120] Q. Han, J. Wang, et Q. Li, « Analysis of parametric stability for a spur gear pair system considering the effect of extended tooth contact », *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 223, p. 1787-1797, 2009.
- [121] J. G. Verma, S. Kumar, et P. K. Kankar, « Crack growth modeling in spur gear tooth and its effect on mesh stiffness using extended finite element method », *Engineering Failure Analysis*, vol. 94, p. 109-120, 2018.
- [122] B. Gueye, Z. Chen, et S. Yimin, « Prediction of gear tooth crack propagation path based on pseudo evolutionary structural optimization », *International journal of COMADEM*, vol. 20, n° 1, 2017.
- [123] I. Howard, S. Jia, et J. Wang, « The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and crack », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 15, n° 5, p. 831-853, 2001.
- [124] S. Jia, I. Howard, et J. Wang, « The Dynamic Modeling of Multiple Pairs of Spur Gears in Mesh, Including Friction and Geometrical Errors », *The International Journal of Rotating Machinery*, vol. 9, n° 6, p. 437-442, 2003.
- [125] F. Chaari, T. Fakhfakh, et M. Haddar, « Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness », *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 28, p. 461-468, 2009.
- [126] Z. Chen, W. Zhai, Y. Shao, K. Wang, et G. Sun, « Analytical model for mesh stiffness calculation of spur gear pair with non-uniformly distributed tooth root crack », *Eng. Fail. Anal.*, vol. 66, p. 502-514, 2016.
- [127] O. D. Mohammed, M. Rantatalo, et J.-O. Aidanpää, « Improving mesh stiffness calculation of cracked gears for the purpose of vibration-based fault analysis », *Eng. Fail. Anal.*, vol. 34, p. 235-251, 2013.
- [128] O. D. Mohammed, M. Rantatalo, J.-O. Aidanpää, et U. Kumar, « Vibration signal analysis for gear fault diagnosis with various crack progression scenarios », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 41, n° 1-2, p. 176-195, 2013.
- [129] B. Elyousfi, A. Soualhi, K. Medjaher, et F. Guillet, « New approach for gear mesh stiffness evaluation of spur gears with surface defects », *Engineering Failure Analysis*, 2020.
- [130] Q. Thoret-Bauchet, P. Velex, M. Guingand, et P. Casanova, « Simulations of the dynamic response of planetary gears in the presence of localised tooth faults », *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 233, n° 21-22, p. 7212-7223, 2019.
- [131] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [132] C. M. Pereira, A. L. Ramalho, et J. A. Ambrósio, « A critical overview of internal and external cylinder contact force models », *Nonlinear Dyn. Springer Verl.*, vol. 63, n° 4, p. 681-697, 2011.
- [133] N. L. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd english Edition. The Netherlands: P. Noordhoff Limited, 1975.

Annexe A – Développement du calcul des matrices jacobiennes pour les roulements

Cette annexe détaille les expressions utilisées dans le calcul de la position d'équilibre des éléments roulants. On introduit pour cela la fonction G_j correspondant à la somme des efforts appliqués sur l'élément roulant j . Cette fonction est minimisée par la méthode de Newton-Raphson.

A.1 – Roulements à billes

On pose

$$G_j = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_{bj}, r_{bj}) \rightarrow \vec{N}_{ij} + \vec{N}_{ej} + \vec{C}_f \end{array} \right. \quad (173)$$

Avec

$$\vec{N}_{ij}(z_{bj}, r_{bj}) = \begin{pmatrix} N_{ij} \sin(\beta_{ij}) \\ N_{ij} \cos(\beta_{ij}) \end{pmatrix} \quad \vec{N}_{ej} = \begin{pmatrix} -N_{ej} \sin(\beta_{ej}) \\ -N_{ej} \cos(\beta_{ej}) \end{pmatrix} \quad \vec{C}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ m \cdot R_p \cdot \omega_c^2 \end{pmatrix} \quad (174)$$

On introduit alors J_{G_j} la matrice jacobienne de G_j telle que :

$$[J_{G_j}](z_{bj}, r_{bj}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_j}{\partial z_{bj}} & \frac{\partial G_j}{\partial r_{bj}} \end{pmatrix} \quad (175)$$

En toute rigueur, la force centrifuge dépend de la vitesse de rotation de la cage qui dépend elle-même des angles de contact sur les différentes billes et donc de la position d'équilibre de celles-ci. Cependant, afin de simplifier les calculs cette dépendance est négligée ici. De même, les coefficients de contact C_{ij} et C_{ej} dépendent des angles de contact sur les deux bagues et donc des variables z_{bj} et r_{bj} , ce qui n'est pas pris en compte par la suite. Il convient de noter que ces approximations n'engendrent aucune perte de précision sur la position d'équilibre et les efforts normaux calculés. En revanche elles peuvent ralentir la convergence de la boucle de Newton-Raphson. On obtient alors :

$$\frac{\partial G_j}{\partial z_{bj}} = C_{ij} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \delta_{ij}^2 \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial z_{bj}} \sin \beta_{ij} + \delta_{ij}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial z_{bj}} \cos \beta_{ij} \\ \frac{3}{2} \delta_{ij}^2 \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial z_{bj}} \cos \beta_{ij} - \delta_{ij}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial z_{bj}} \sin \beta_{ij} \end{pmatrix} - C_{ej} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \delta_{ej}^2 \frac{\partial \delta_{ej}}{\partial z_{bj}} \sin \beta_{ej} + \delta_{ej}^2 \frac{\partial \beta_{ej}}{\partial z_{bj}} \cos \beta_{ej} \\ \frac{3}{2} \delta_{ej}^2 \frac{\partial \delta_{ej}}{\partial z_{bj}} \cos \beta_{ej} - \delta_{ej}^2 \frac{\partial \beta_{ej}}{\partial z_{bj}} \sin \beta_{ej} \end{pmatrix} \quad (176)$$

$$\frac{\partial G_j}{\partial r_{bj}} = C_{ij} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \delta_{ij}^2 \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial r_{bj}} \sin \beta_{ij} + \delta_{ij}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial r_{bj}} \cos \beta_{ij} \\ \frac{3}{2} \delta_{ij}^2 \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial r_{bj}} \cos \beta_{ij} - \delta_{ij}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial r_{bj}} \sin \beta_{ij} \end{pmatrix} - C_{ej} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \delta_{ej}^2 \frac{\partial \delta_{ej}}{\partial r_{bj}} \sin \beta_{ej} + \delta_{ej}^2 \frac{\partial \beta_{ej}}{\partial r_{bj}} \cos \beta_{ej} \\ \frac{3}{2} \delta_{ej}^2 \frac{\partial \delta_{ej}}{\partial r_{bj}} \cos \beta_{ej} - \delta_{ej}^2 \frac{\partial \beta_{ej}}{\partial r_{bj}} \sin \beta_{ej} \end{pmatrix} \quad (177)$$

Les différents termes de ces expressions sont détaillés ci-après.

Dérivées spatiales des angles de contact

$$\beta_{ej} = \arcsin \left(\frac{z_{bj} - z_{ej}}{\sqrt{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2}} \right) \quad \beta_{ij} = \arcsin \left(\frac{z_{ij} - z_{bj}}{\sqrt{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2}} \right) \quad (178)$$

$$\frac{\partial \beta_{ej}}{\partial z_{bj}} = \frac{\sqrt{(r_{bj} - r_{ej})^2}}{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2} \quad \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial z_{bj}} = \frac{-\sqrt{(r_{bj} - r_{ij})^2}}{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2} \quad (179)$$

$$\frac{\partial \beta_{ej}}{\partial r_{bj}} = \begin{cases} \frac{-(z_{bj} - z_{ej})}{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2} \text{ si } r_{bj} > r_{ej} \\ \frac{(z_{bj} - z_{ej})}{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2} \text{ si } r_{bj} < r_{ej} \end{cases} \quad (180)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial r_{bj}} = \begin{cases} \frac{(z_{bj} - z_{ij})}{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2} \text{ si } r_{bj} > r_{ij} \\ \frac{-(z_{bj} - z_{ij})}{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2} \text{ si } r_{bj} < r_{ij} \end{cases} \quad (181)$$

Dérivées spatiales des écrasements

$$\delta_{ej} = R - R_e + \sqrt{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2} \quad \delta_{ij} = R - R_i + \sqrt{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2} \quad (182)$$

$$\frac{\partial \delta_{ej}}{\partial z_{bj}} = \frac{(z_{bj} - z_{ej})}{\sqrt{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2}} \quad \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial z_{bj}} = \frac{(z_{bj} - z_{ij})}{\sqrt{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2}} \quad (183)$$

$$\frac{\partial \delta_{ej}}{\partial r_{bj}} = \frac{(r_{bj} - r_{ej})}{\sqrt{(z_{bj} - z_{ej})^2 + (r_{bj} - r_{ej})^2}} \quad \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial r_{bj}} = \frac{(r_{bj} - r_{ij})}{\sqrt{(z_{bj} - z_{ij})^2 + (r_{bj} - r_{ij})^2}} \quad (184)$$

A.2 – Roulements à rouleaux

Dans le cas des rouleaux, la fonction G_j de somme des efforts est plus complexe puisqu'elle possède 3 paramètres et trois sorties. On pose donc :

$$G_j = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (z_{rj}, r_{rj}, \theta_{rj}) \rightarrow \begin{pmatrix} F_{aj} \\ F_{rj} \\ M_{tj} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (185)$$

Avec

$$F_{aj} = N_{ej} \sin(\theta_{ej}) - N_{ij} \sin(\theta_{ij}) + \cos(\mu - \theta_{ej})(F_{egj} - F_{edj}) + \cos(\mu - \theta_{ij})(F_{igj} - F_{idj}) \quad (186)$$

$$F_{rj} = N_{ij} \cos(\theta_{ij}) - N_{ej} \cos(\theta_{ej}) - \sin(\mu - \theta_{ej}) (F_{egj} + F_{edj}) + \sin(\mu - \theta_{ij}) (F_{igj} + F_{idj}) \quad (187)$$

$$M_{tj} = M_{ej} + M_{ij} + M_{egj} + M_{edj} + M_{igj} + M_{idj} \quad (188)$$

Les expressions de ces différents efforts ont été détaillées dans le chapitre II dédié aux modèles de roulements. On introduit alors J_{G_j} la matrice jacobienne de G_j telle que :

$$[J_{G_j}](z_{rj}, r_{rj}, \theta_{rj}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{aj}}{\partial z_{rj}} & \frac{\partial F_{aj}}{\partial r_{rj}} & \frac{\partial F_{aj}}{\partial \theta_{rj}} \\ \frac{\partial F_{rj}}{\partial z_{rj}} & \frac{\partial F_{rj}}{\partial r_{rj}} & \frac{\partial F_{rj}}{\partial \theta_{rj}} \\ \frac{\partial M_{tj}}{\partial z_{rj}} & \frac{\partial M_{tj}}{\partial r_{rj}} & \frac{\partial M_{tj}}{\partial \theta_{rj}} \end{pmatrix} \quad (189)$$

Le calcul des dérivées spatiales de F_{aj} et F_{rj} passe par le calcul des dérivées spatiales des différents efforts. Dans les expressions suivantes, les variations spatiales du coefficient de contact ponctuel aux épaulements sont négligées afin de limiter la complexité des calculs. Quand cela est possible, la variable générique ρ remplace les coordonnées du rouleau de sorte que $\rho \in \{z_{rj}, r_{rj}, \theta_{rj}\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{aj}}{\partial \rho} = & \frac{\partial N_{ej}}{\partial \rho} \sin(\theta_{ej}) - \frac{\partial N_{ij}}{\partial \rho} \sin(\theta_{ij}) + \cos(\mu - \theta_{ej}) \left(\frac{\partial F_{egj}}{\partial \rho} - \frac{\partial F_{edj}}{\partial \rho} \right) \\ & + \cos(\mu - \theta_{ij}) \left(\frac{\partial F_{igj}}{\partial \rho} - \frac{\partial F_{idj}}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{rj}}{\partial \rho} = & \frac{\partial N_{ij}}{\partial \rho} \cos(\theta_{ij}) - \frac{\partial N_{ej}}{\partial \rho} \cos(\theta_{ej}) - \sin(\mu - \theta_{ej}) \left(\frac{\partial F_{egj}}{\partial \rho} + \frac{\partial F_{edj}}{\partial \rho} \right) \\ & + \sin(\mu - \theta_{ij}) \left(\frac{\partial F_{igj}}{\partial \rho} + \frac{\partial F_{idj}}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad (191)$$

Avec

$$\frac{\partial N_{ij}}{\partial z_{rj}} = \frac{10}{9} C_{il} \theta_{ij} \sum_k \delta_{ijk}^{\frac{1}{9}} \quad \frac{\partial N_{ij}}{\partial r_{rj}} = -\frac{10}{9} C_{il} \sum_k \delta_{ijk}^{\frac{1}{9}} \quad \frac{\partial N_{ij}}{\partial \theta_{rj}} = -\frac{10}{9} C_{il} \sum_k z_k \delta_{ijk}^{\frac{1}{9}} \quad (192)$$

$$\frac{\partial N_{ej}}{\partial z_{rj}} = -\frac{10}{9} C_{el} \theta_{ej} \sum_k \delta_{ejk}^{\frac{1}{9}} \quad \frac{\partial N_{ej}}{\partial r_{rj}} = \frac{10}{9} C_{el} \sum_k \delta_{ejk}^{\frac{1}{9}} \quad \frac{\partial N_{ej}}{\partial \theta_{rj}} = \frac{10}{9} C_{el} \sum_k z_k \delta_{ejk}^{\frac{1}{9}} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{egj}}{\partial z_{rj}} = & -\frac{3}{2} (\cos(\mu) + \theta_{ej} \sin(\mu)) C_{egj} \delta_{egj}^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\partial F_{egj}}{\partial r_{rj}} = \frac{3}{2} (\sin(\mu) - \theta_{ej} \cos(\mu)) C_{egj} \delta_{egj}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial F_{egj}}{\partial \theta_{rj}} = & \frac{3}{2} (\sin(\mu) (r_s \theta_{ej} - z_s) + \cos(\mu) (z_s \theta_{ej} + r_s)) C_{egj} \delta_{egj}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (194)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{edj}}{\partial z_{rj}} = & \frac{3}{2} (\cos(\mu) - \theta_{ej} \sin(\mu)) C_{edj} \delta_{edj}^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\partial F_{edj}}{\partial r_{rj}} = \frac{3}{2} (\sin(\mu) + \theta_{ej} \cos(\mu)) C_{edj} \delta_{edj}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial F_{edj}}{\partial \theta_{rj}} = & \frac{3}{2} (\sin(\mu) (r_s \theta_{ej} + z_s) + \cos(\mu) (z_s \theta_{ej} - r_s)) C_{edj} \delta_{edj}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (195)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{igj}}{\partial z_{rj}} &= \frac{3}{2}(-\cos(\mu) + \theta_{ij} \sin(\mu)) C_{igj} \delta_{igj}^{\frac{1}{2}} & \frac{\partial F_{igj}}{\partial r_{rj}} &= -\frac{3}{2}(\sin(\mu) + \theta_{ij} \cos(\mu)) C_{igj} \delta_{igj}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial F_{igj}}{\partial \theta_{rj}} &= \frac{3}{2}(\sin(\mu)(r_s \theta_{ij} + z_s) + \cos(\mu)(z_s \theta_{ij} - r_s)) C_{igj} \delta_{igj}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (196)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{idj}}{\partial z_{rj}} &= \frac{3}{2}(\cos(\mu) + \theta_{ij} \sin(\mu)) C_{idj} \delta_{idj}^{\frac{1}{2}} & \frac{\partial F_{idj}}{\partial r_{rj}} &= -\frac{3}{2}(\sin(\mu) - \theta_{ij} \cos(\mu)) C_{idj} \delta_{idj}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial F_{idj}}{\partial \theta_{rj}} &= \frac{3}{2}(\sin(\mu)(r_s \theta_{ij} - z_s) + \cos(\mu)(z_s \theta_{ij} + r_s)) C_{idj} \delta_{idj}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (197)$$

Le calcul des dérivées spatiales de M_{tj} est similaire et peut s'écrire comme suit.

$$\frac{\partial M_{tj}}{\partial \rho} = \frac{\partial M_{ej}}{\partial \rho} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial \rho} + \frac{\partial M_{egj}}{\partial \rho} + \frac{\partial M_{edj}}{\partial \rho} + \frac{\partial M_{igj}}{\partial \rho} + \frac{\partial M_{idj}}{\partial \rho} \quad (198)$$

Avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{ij}}{\partial z_{rj}} &= \frac{10}{9} C_{il} \theta_{ij} \sum_k \left(z_k \cos(\theta_{ij}) - \frac{D}{2} \sin(\theta_{ij}) \right) \delta_{ijk}^{\frac{1}{9}} \\ \frac{\partial M_{ij}}{\partial r_{rj}} &= -\frac{10}{9} C_{il} \sum_k \left(z_k \cos(\theta_{ij}) - \frac{D}{2} \sin(\theta_{ij}) \right) \delta_{ijk}^{\frac{1}{9}} \\ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_{rj}} &= -\frac{10}{9} C_{il} \sum_k z_k \left(z_k \cos(\theta_{ij}) - \frac{D}{2} \sin(\theta_{ij}) \right) \delta_{ijk}^{\frac{1}{9}}\end{aligned}\quad (199)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{ej}}{\partial z_{rj}} &= \frac{10}{9} C_{el} \theta_{ej} \sum_k \left(z_k \cos(\theta_{ej}) + \frac{D}{2} \sin(\theta_{ej}) \right) \delta_{ejk}^{\frac{1}{9}} \\ \frac{\partial M_{ej}}{\partial r_{rj}} &= -\frac{10}{9} C_{el} \sum_k \left(z_k \cos(\theta_{ej}) + \frac{D}{2} \sin(\theta_{ej}) \right) \delta_{ejk}^{\frac{1}{9}} \\ \frac{\partial M_{ej}}{\partial \theta_{rj}} &= -\frac{10}{9} C_{el} \sum_k z_k \left(z_k \cos(\theta_{ej}) + \frac{D}{2} \sin(\theta_{ej}) \right) \delta_{ejk}^{\frac{1}{9}}\end{aligned}\quad (200)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{egj}}{\partial z_{rj}} &= -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ej}) \frac{\partial F_{egj}}{\partial z_{rj}} \\ \frac{\partial M_{egj}}{\partial r_{rj}} &= -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ej}) \frac{\partial F_{egj}}{\partial r_{rj}} \\ \frac{\partial M_{egj}}{\partial \theta_{rj}} &= -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ej}) \frac{\partial F_{egj}}{\partial \theta_{rj}} + d_s \cos(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ej}) F_{egj}\end{aligned}\quad (201)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{edj}}{\partial z_{rj}} &= d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ej}) \frac{\partial F_{edj}}{\partial z_{rj}} \\ \frac{\partial M_{edj}}{\partial r_{rj}} &= d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ej}) \frac{\partial F_{edj}}{\partial r_{rj}} \\ \frac{\partial M_{edj}}{\partial \theta_{rj}} &= d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ej}) \frac{\partial F_{edj}}{\partial \theta_{rj}} + d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ej}) F_{edj}\end{aligned}\quad (202)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{igj}}{\partial z_{rj}} &= d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ij}) \frac{\partial F_{igj}}{\partial z_{rj}} \\
\frac{\partial M_{igj}}{\partial r_{rj}} &= d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ij}) \frac{\partial F_{igj}}{\partial r_{rj}} \\
\frac{\partial M_{igj}}{\partial \theta_{rj}} &= d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ij}) \frac{\partial F_{igj}}{\partial \theta_{rj}} + d_s \sin(\alpha_0 - \mu + \theta_{rj} - \theta_{ij}) F_{igj}
\end{aligned} \tag{203}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{idj}}{\partial z_{rj}} &= -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ij}) \frac{\partial F_{idj}}{\partial z_{rj}} \\
\frac{\partial M_{idj}}{\partial r_{rj}} &= -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ij}) \frac{\partial F_{idj}}{\partial r_{rj}} \\
\frac{\partial M_{idj}}{\partial \theta_{rj}} &= -d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ij}) \frac{\partial F_{idj}}{\partial \theta_{rj}} + d_s \sin(\alpha_0 - \mu - \theta_{rj} + \theta_{ij}) F_{idj}
\end{aligned} \tag{204}$$

Annexe B – Cas de validation quasi-statique pour les roulements

Comme exposé dans la section dédiée, la validation des modèles de roulements a été réalisée en quasi-statique par comparaison avec les codes RBSDYN mis en ligne par le CNES. Toutefois, tous les cas de déplacements imposés sur les bagues intérieures n'ont pas été présentés dans le corps du manuscrit pour éviter les répétitions. Les cas de validation non traités précédemment sont donc consignés dans cette annexe, accompagnés d'une brève description. Il est rappelé que chaque calcul est réalisé pour une bague extérieure fixe. Le pilotage est effectué en imposant des déplacements sur la bague intérieure et la comparaison porte sur les efforts totaux au centre de celle-ci ainsi que sur les efforts de contact pour chaque élément roulant.

Les cas de validations des roulements à billes sont donnés dans le Tableau 6 dans la section dédiée à la validation des roulements à billes. Seuls les cas de déplacement axial pur et de déplacement complexe (axial, radial et en basculement) ont été présentés. Les trois cas de validation intermédiaires sont discutés ici.

Déplacement radial pur

Pour ce cas de déplacement, la charge n'est pas répartie uniformément sur les billes. Les efforts au centre de la bague intérieure sont comparés dans le Tableau 28 tandis que les évolutions des efforts normaux sur les deux bagues sont données dans la Figure 125. Il est notable qu'en l'absence d'effort radial, les angles de contact restent nuls sur les deux bagues. Cela a pour conséquence une grande simplification du calcul des efforts centrifuges qui sont par conséquent égaux dans les deux modèles comparés. Ce dernier point étant la principale source de différence entre les deux modèles, les résultats obtenus pour ce cas de déplacement sont quasi-identiques. Les tracés bleus et rouges sont donc confondus. On peut remarquer que dans le cas d'un déplacement radial et pour un jeu positif, la charge n'est reprise que par certaines billes. Les autres sont plaquées sur la bague extérieure par la force centrifuge et ne sont pas en contact avec la bague intérieure.

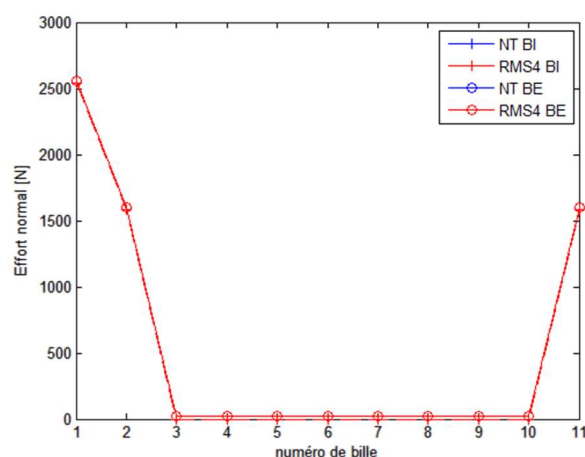


Figure 125 : Répartition des charges pour un déplacement radial pur

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Fx [N]	0	0	0.0 %
Fy [N]	5 197.8	5 197.6	0.0 %
Fz [N]	0	0	0.0 %
Cx [Nm]	0	0	0.0 %
Cy [Nm]	0	0	0.0 %

Tableau 28 : Torseur d'effort sur la bague intérieure pour un déplacement radial pur

Déplacement en basculement pur

Dans le cas du basculement, les efforts et les angles de contact diffèrent pour chaque bille. A nouveau, bien que de très faibles différences soit observables, les résultats obtenus et exposés sur la Figure 126 et dans le Tableau 29 sont très proche de la référence.

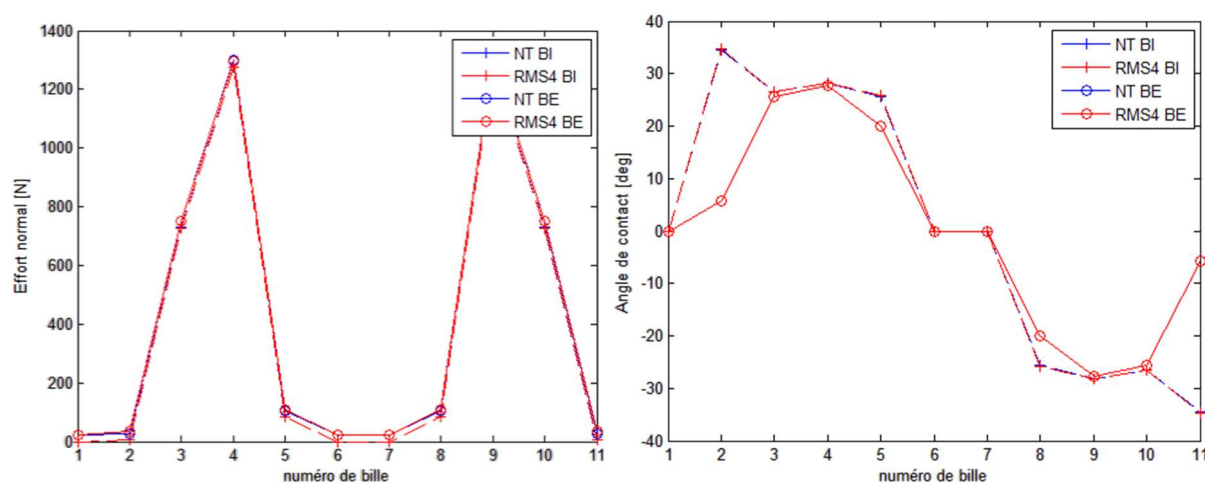


Figure 126 : Evolution des angles et des efforts de contact pour un déplacement en basculement pur

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Fx [N]	0	0	0.0 %
Fy [N]	129.1	130.5	1.1 %
Fz [N]	0	0	0.0 %
Cx [Nm]	0	0	0.0 %
Cy [Nm]	73.51	73.53	0.0 %

Tableau 29 : Torseur d'effort sur la bague intérieure pour un déplacement en basculement pur

Déplacement radial et axial

Il s'agit du cas de validation pour lequel les différences observées sont les plus marquées. En effet, la faible charge des bille 4 à 9 sur la bague intérieure mènent à des angles de contact important sur celle-ci et donc de grandes variations de vitesse et d'effort centrifuge dans RBS2. Les écarts restant inférieurs à 1%, cette différence de modélisation est jugée négligeable.

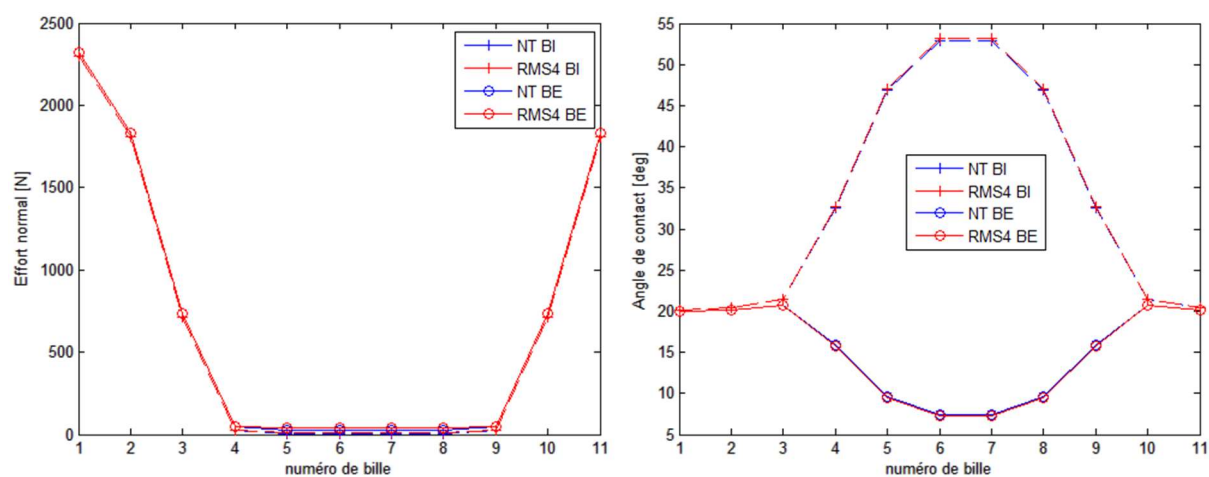


Figure 127 : Evolution des efforts et des angles de contact pour un déplacement axial et radial

	Modèle à valider	Référence	Ecart
Fx [N]	0	0	0.0 %
Fy [N]	5 545.6	5 535.6	0.2%
Fz [N]	2 615.9	2 6341	0.7%
Cx [Nm]	-82.436	-81.963	0.6 %
Cy [Nm]	0	0	0.0 %

Tableau 30 : Torseur d'effort sur la bague intérieure pour un déplacement en axial et radial

Annexe C – Calcul de l'angle de changement de configuration pour l'engrènement

C.1 – Notations et méthode

Par simplicité, on suppose dans cette annexe que la roue 1 tourne en sens trigonométrique. Les calculs restent toutefois identiques dans le cas d'une rotation inverse. Il a été décidé arbitrairement qu'une tranche se trouvait dans la zone d'engrènement pour la configuration 1 si l'angle qui la repère est compris dans l'intervalle $[0; \phi_1]$. La plage angulaire d'engrènement pour la configuration 2 est décalée d'un angle θ_{chg} . Ainsi, l'intervalle angulaire d'engrènement en configuration 2 est $[\theta_{chg}; \phi + \theta_{chg}]$. Ce phénomène est mis en évidence Figure 128. On y observe qu'une dent vient d'entrer en contact sur son flanc gauche (configuration 1) mais que le contact sur son flanc droit (configuration 2) ne sera possible qu'après une faible rotation θ_{chg} . Cette annexe s'attache au détail du calcul de celle-ci.

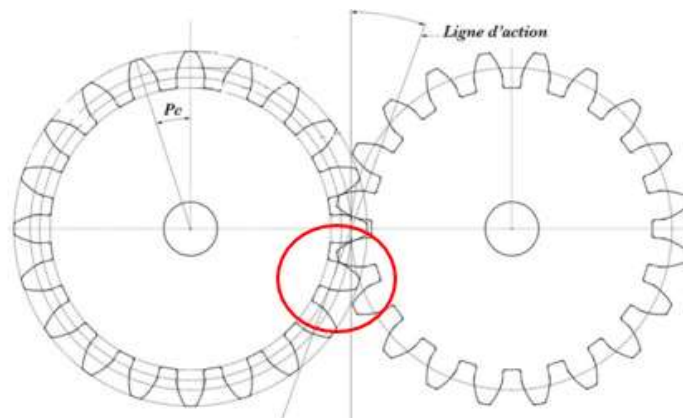


Figure 128 : Décalage de l'entrée dans la zone de contact pour les deux configurations

Cet angle est la somme de l'angle associé au déplacement du point de contact sur le profil θ_{prof} et de l'angle de changement de flanc $\theta_{conf} = \theta_{A2} - \theta_{A1}$ introduits respectivement sur la Figure 129a et b. Un schéma équivalent permettant la représentation des angles θ_{A1} et θ_{A2} est donné sur la Figure 129c. On peut noter que les points A_1 et A_2 présents sur cette figure correspondent aux points de d'entrée sur la ligne d'action pour les deux configurations et ont été introduits dans le chapitre dédié aux engrenages.

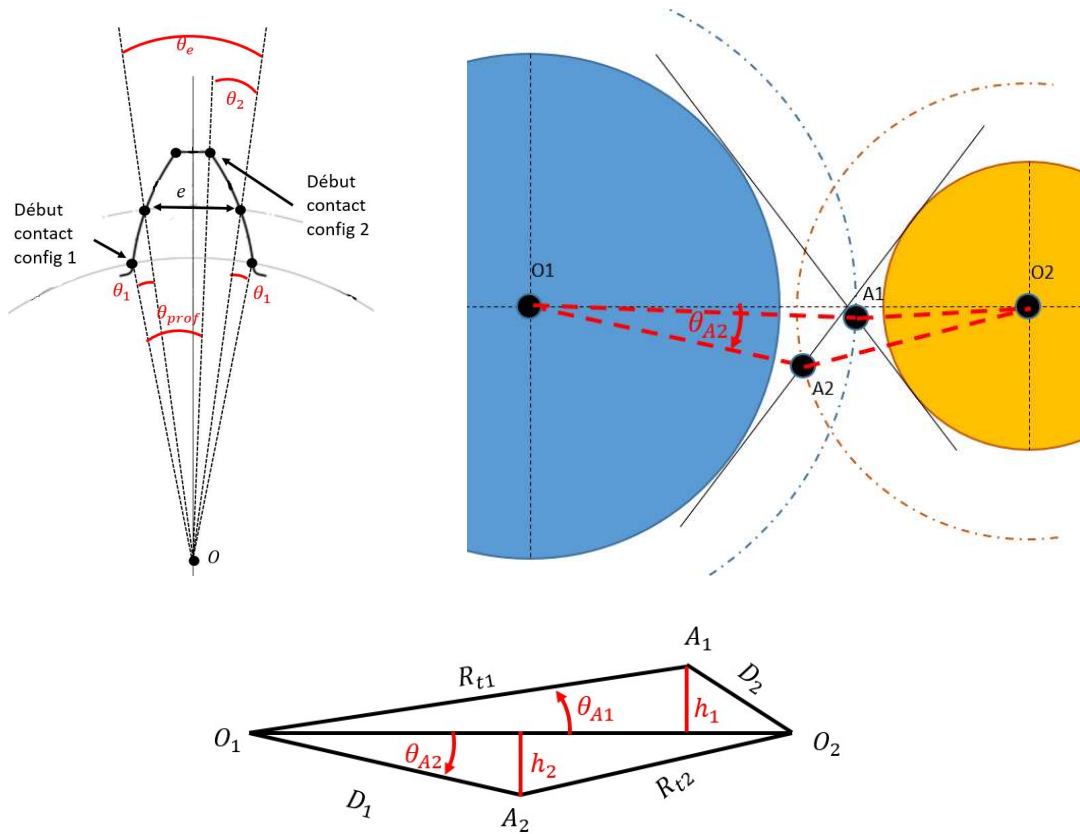


Figure 129 : (a) angle entre les points d'entrée en contact sur le profil, (b) points d'entrée des zones d'engrènement, (c) schéma équivalent

C.2 – Calcul de θ_{prof}

Chaque point du profil en développante de cercle peut être repéré par un rayon r et un angle θ par rapport à l'intersection du profil et du cercle de base. La Figure 130 présente le paramétrage du profil en développante de cercle. On montre que le rayon r d'un point du profil et l'angle θ_i sont liés par la relation suivante [104] :

$$\theta_i(r) = \frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b} - \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 - R_b^2}}{R_b}\right) \quad (205)$$

De même, on montre que θ_{prof} s'exprime :

$$\theta_{prof} = 2\theta_1 + \theta_e - \theta_2 = 2\theta_1(R_p) + \frac{\pi}{Z} - \theta(R_t) - \theta_1(R_{min1}) \quad (206)$$

Où R_{min1} représente le rayon minimal de contact sur la roue 1 et se calcule comme suit :

$$R_{min1} = \sqrt{R_{b1}^2 + x_{A2}^2} \quad (207)$$

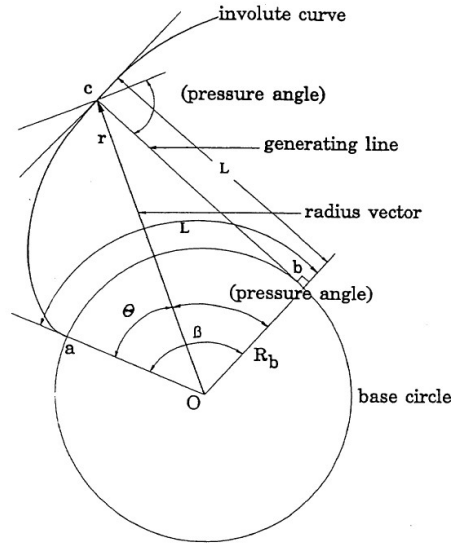


Figure 130 : Paramétrage du profil en développante de cercle [104]

C.3 – Calcul de θ_{conf}

Une étude de la Figure 129c permet d'établir les expressions suivantes qui permettent le calcul de θ_{conf} .

$$\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = R_{p1} + R_{p2} \quad (208)$$

$$D_1 = \sqrt{x_{A2}^2 + R_{b1}^2} \quad D_2 = \sqrt{\left((R_{p1} + R_{p2}) \sin(\alpha) - x_{A1}\right)^2 + R_{b2}^2} \quad (209)$$

$$\theta_{A1} = \text{acos} \left(\frac{R_{t1}^2 + \|\overrightarrow{O_1O_2}\|^2 - D_2^2}{2 \cdot \|\overrightarrow{O_1O_2}\| \cdot R_{t1}} \right) \quad \theta_{A2} = \text{acos} \left(\frac{D_1^2 + \|\overrightarrow{O_1O_2}\|^2 - R_{t2}^2}{2 \cdot \|\overrightarrow{O_1O_2}\| \cdot D_1} \right) \quad (210)$$

$$\theta_{conf} = \theta_{A2} - \theta_{A1} \quad (211)$$

Annexe D – Développement du calcul de la distance à vide pour l'engrènement

Comme présenté dans le chapitre dédié aux engrenages, la prise en compte des contacts hors ligne d'action passe par un élargissement de la plage angulaire pour laquelle l'écrasement est calculé et par l'introduction d'une distance à vide non nulle en amont et en aval de la ligne d'action. Trois zones distinctes ont donc été définies dans le corps du manuscrit et correspondent à des cas de contact différents. Cette annexe détaille le calcul de la distance à vide et de l'orientation de la normale au contact en dehors de la ligne d'action théorique. Dans un premier temps la méthodologie est présentée pour un profil non modifié puis une extension est réalisée afin de tenir compte des congés en tête de denture. L'utilisation d'un rayon de congé nul permet de retrouver les expressions associées à un profil en développante de cercle. Afin de limiter les redondances, seuls les calculs associés à la configuration 1 et à un contact en zone 3 sont présentés. Le contact s'établit alors entre le flanc de la dent de la roue 2 et l'arrête de la dent de la roue 1. Quelques modifications des expressions obtenues sont nécessaires afin de les adapter au contact en zone 1 et à la seconde configuration mais elles ne sont pas détaillées ici car la méthode reste identique.

D.1 – Cas d'un profil non modifié

Comme indiqué précédemment, on limite le calcul de l'écrasement à la zone d'intersection des cercles de tête des deux roues. Cela permet d'introduire les points E et E' définissant les extremums de cette zone ainsi que les angles θ_{p1} et θ_{p2} associés aux positions angulaires de la roue 1 pour lesquelles le point de contact potentiel se situe en E et E' respectivement. Un contact entre deux tranches de dents homologues est envisageable en zone 3 si et seulement si l'angle repérant la tranche de la roue 1 est compris dans l'intervalle $[\phi_1; \theta_{p1}]$ avec :

$$\theta_{p1} = \arccos\left(\frac{R_{t1}^2 + (R_{p1} + R_{p2})^2 - R_{t2}^2}{2R_{t1}(R_{p1} + R_{p2})}\right) \quad (212)$$

Pour la tranche de la roue 1, le contact se fait alors sur le cercle de tête et il suffit de connaître le rayon du point de contact pour la tranche de la roue 2. Pour cela l'angle α_{1jk} entre l'axe O_1O_2 et la projection dans le plan de l'axe O_1P_{jk} ainsi que son équivalent α_{2jk} pour la roue 2 sont introduits comme le montre la Figure 131. De plus, on note τ_1 l'angle formé par les axes O_1O_2 et O_1A_1 et P le point primitif d'engrènement, c'est-à-dire l'intersection des deux cercles primitifs. Pour finir, on note r_{ijk} le rayon du point de contact sur la roue i . On montre que ces angles sont donnés par les relations :

$$\tau_1 = \arccos\left(\frac{R_{p1}^2 + R_{t1}^2 - \|PA_1\|^2}{2 \cdot R_{p1} \cdot R_{t1}}\right) \quad \text{avec} \quad \|PA_1\| = \sqrt{R_{t1}^2 - R_{b1}^2 - R_{p1} \sin(\alpha_a)} \quad (213)$$

$$\text{Puis} \quad \alpha_{1jk} = \theta_{1jk} - \phi_1 + \tau_1 \quad \text{et} \quad \alpha_{2jk} = \arcsin\left(\frac{R_{t1} \sin \alpha_{1jk}}{r_{1jk}}\right) \quad (214)$$

Il est alors possible de connaître le rayon de contact pour la roue 2, correspondant à la norme de la projection du vecteur $\overrightarrow{O_2P_{jk}}$ dans le plan :

$$r_{2jk} = \sqrt{(R_{t1} \sin \alpha_{1jk})^2 + (R_{p1} + R_{p2} - R_{t1} \cos \alpha_{1jk})^2} \quad (215)$$

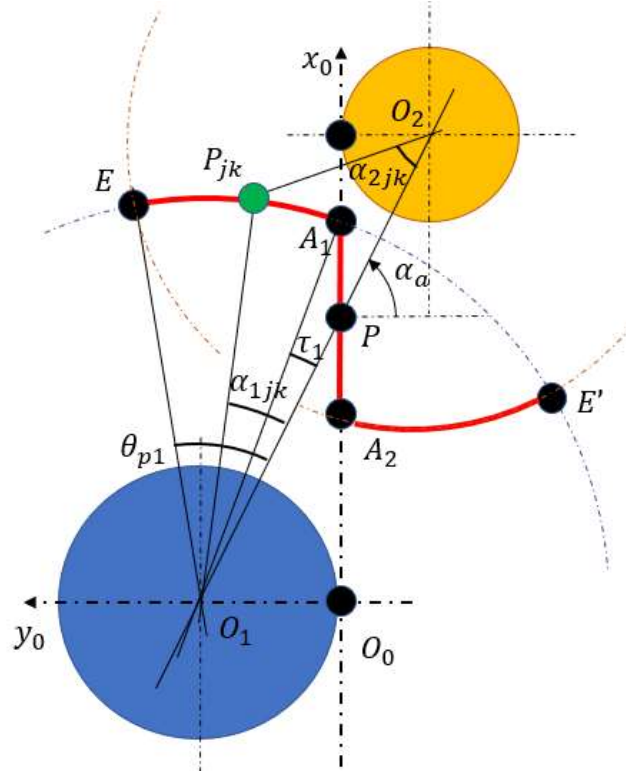


Figure 131 : Point de contact en zone 3 et angles de repérage

La normale au profil de la tranche de la roue 2 n'étant plus donnée par la ligne d'action comme cela était le cas en zone 2, on donne ci-dessous l'expression de l'angle α_{n2} entre la normale au profil et la ligne d'action.

$$\alpha_{n2} = \xi_2 + \alpha_{2jk} - \alpha_a \quad (216)$$

Où ξ_2 représente l'angle entre le segment O_2P_{jk} et la normale au profil. Il se calcule de la manière suivante.

$$\xi_i = \arccos\left(\frac{R_{bi}}{r_{ijk}}\right) \quad (217)$$

L'expression de la normale au contact définie sortante par rapport à la roue 1 dans le repère R_0 de l'engrènement s'exprime alors ainsi.

$$\vec{n}_{1jk} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{n2} \cos \beta \\ -\sin \alpha_{n2} \\ -\cos \alpha_{n2} \sin \beta \end{pmatrix}_0 \quad (218)$$

Afin de calculer la distance à vide, on note C_1 et C_2 respectivement les points de la roue 1 et de la roue 2 correspondant à la distance minimale séparant les deux solides. Ceux-ci sont introduits sur la Figure 132a. La distance les séparant ne peut être calculée immédiatement. Pour pallier à ce problème, la position relative des points C_1 et C_2 est calculée pour une position angulaire de la roue 1 assurant un contact sur l'extrémité de la ligne d'action comme présenté sur la Figure 132b. Le point C_1 est alors confondu avec le point A_1 correspondant à la jonction de la zone 2 et de la zone 3. Le déplacement des points C_1 et C_2 au cours d'une rotation de $\theta_{1jk} - \phi_1$ est ensuite calculé de manière à obtenir leurs positions relatives pour un angle θ_{1jk} .

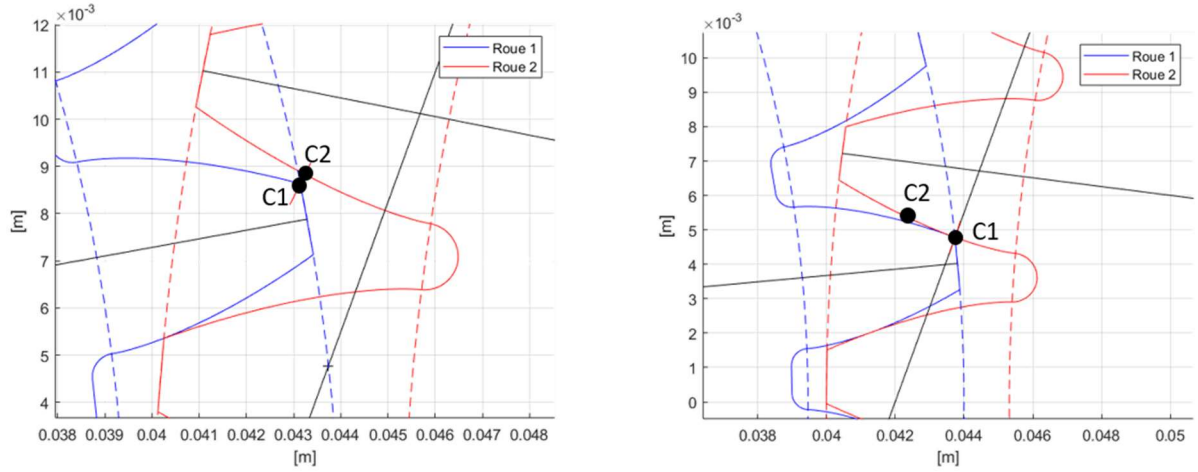


Figure 132 : (a) distance à vide et (b) position relative en ϕ_1

Positions relatives de C_1 et C_2 en ϕ_1 (Figure 132b)

On montre que la position relative de C_1 et C_2 en ϕ_1 est donnée par :

$$\overrightarrow{C_1 C_2}_{\phi_1} = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(b_{C1}) & \cos(b_{C1}) & 0 \\ \cos(b_{C1}) & \sin(b_{C1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_l \\ \delta_h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (219)$$

Les quantités δ_l et δ_h sont introduites sur la Figure 133 et leurs expressions sont fournies ci-dessous.

$$\delta_l = |l(r_{2jk}) - l(R_{min2})| \quad \delta_h = |h(r_{2jk}) - h(R_{min2})| \quad (220)$$

$$R_{min2} = \sqrt{R_{b2}^2 + (x_{T2} - x_{A1})^2} \quad (221)$$

Avec

$$l(r) = r \cos(a_2 - \theta_2(r)) \quad h(r) = r \sin(a_2 - \theta_2(r)) \quad (222)$$

$$\text{Où } a_i = \arcsin\left(\frac{h(R_{ti})}{R_{ti}}\right) + \theta_i(R_{ti}) \quad \text{et} \quad \theta_i(r) = \frac{\sqrt{r^2 - R_{bi}^2}}{R_{bi}} - \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 - R_{bi}^2}}{R_{bi}}\right) \quad (223)$$

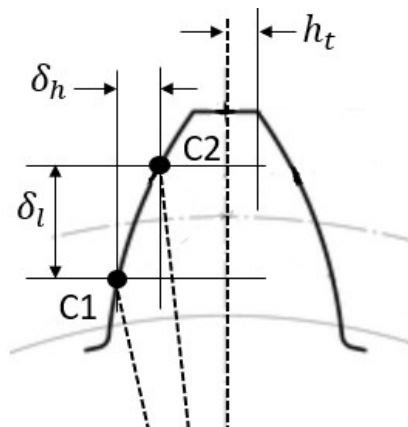


Figure 133 : Position relative des points C_1 et C_2 sur le profil d'une dent

Pour finir l'angle b_{C1} est quant à lui donné par la relation suivante.

$$b_{C1} = \frac{\sqrt{R_{min2}^2 - R_{b2}^2}}{R_{b2}} - a_2 \quad (224)$$

Déplacements de C_1 et C_2 (Figure 132a)

Le déplacement des points C_1 et C_2 au cours d'une rotation $\theta_{1jk} - \phi_1$ est donné par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta_{C1}} &= [R_z(\theta_{1jk} - \phi_1) - Id_3] \begin{pmatrix} x_{A1} \\ -R_{b1} \\ z_k \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\Delta_{C2}} &= \left[R_z \left(-\frac{Z_1}{Z_2} (\theta_{1jk} - \phi_1) \right) - Id_3 \right] \begin{pmatrix} x_{A1} - x_{T2} + \delta_x \\ R_{b2} + \delta_y \\ z_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (225)$$

On en déduit alors leur position relative pour une position angulaire θ_{1jk} :

$$\overrightarrow{C_1 C_{2\theta_{1jk}}} = \overrightarrow{C_1 C_{2\phi_1}} + \overrightarrow{\Delta_{C2}} - \overrightarrow{\Delta_{C1}} \quad (226)$$

Pour finir, la distance à vide correspond à la projection de cette position relative sur la normale au profil de la tranche de la roue 2 :

$$D_{vjk} = \overrightarrow{C_1 C_{2\theta_{1jk}}} \cdot \vec{n}_{1jk} \quad (227)$$

D.2 – Cas d'un congé en tête de denture

Il est rappelé que la prise en compte des congés en tête de denture constitue une généralisation des calculs d'écrasement pour les contacts hors ligne d'action. Ainsi, considérer des congés de rayon nul dans la suite de cette section permet de retrouver les résultats obtenus dans la section précédente. La Figure 134 présente la géométrie d'une tête de denture.

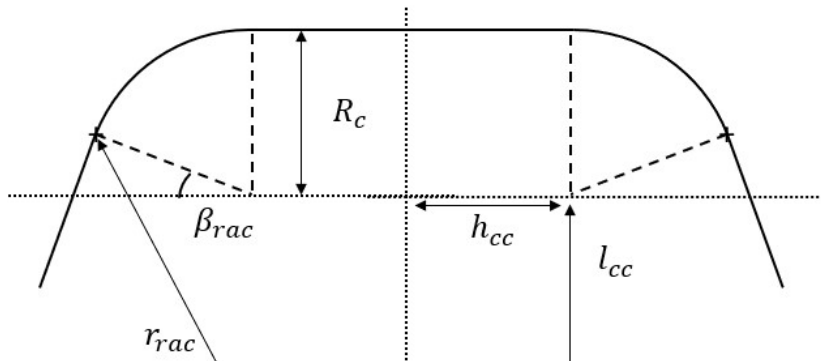


Figure 134 : Géométrie d'un congé de raccordement et paramètres associés

Les égalités vérifiées par les différents paramètres introduits sur ce schéma sont rappelées ci-dessous.

$$r_{rac} \cos(a - \Theta(r_{rac})) = R_t \cos(a - \Theta(R_t)) + R_c \left(\sin \left(\frac{\sqrt{r_{rac}^2 - R_b^2}}{R_b} - a \right) - 1 \right) \quad (228)$$

$$l_{cc} = R_t \cos(a - \Theta(R_t)) - R_c \quad (229)$$

$$h_{cc} = r_{rac} \sin(a - \Theta(r_{rac})) - R_c \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{r_{rac}^2 - R_b^2}}{R_b} - a\right) \quad (230)$$

$$\beta_{rac} = \frac{\sqrt{r_{rac}^2 - R_b^2}}{R_b} - a \quad (231)$$

On introduit également les angles γ_1 et γ_2 correspondant aux positions angulaires de la roue 1 pour lesquels le contact est réalisé au rayon de raccordement entre le congé et le profil en développante de cercle pour la roue 1 et pour la roue 2 respectivement. On note G_1 et G_2 les points de la ligne d'action associés. Lorsque les rayons de congés sont nuls, ces points sont confondus à A_1 et A_2 respectivement. On montre que :

$$\gamma_i = \frac{x_{Gi} - x_{A2}}{x_{A1} - x_{A2}} \phi_1 \quad (232)$$

Avec
$$x_{G1} = \sqrt{r_{rac1}^2 - R_{b1}^2} \quad \text{et} \quad x_{G2} = x_{T2} - \sqrt{r_{rac2}^2 - R_{b2}^2}$$

Par extension de la méthode de calcul présentée dans la section précédente, les angles τ_1 et τ_2 sont définis comme les angles séparant l'axe O_1O_2 des axes O_1G_1 et O_2G_2 respectivement, et s'expriment comme suit. A nouveau, le point P est le primitif d'engrènement.

$$\tau_i = \arccos\left(\frac{R_{pi}^2 + r_{raci}^2 - \|PG_i\|^2}{2R_{pi}r_{raci}}\right) \quad \text{avec} \quad \|PG_i\| = \sqrt{r_{raci}^2 - R_{bi}^2} - R_{pi} \sin(\alpha_a) \quad (233)$$

Le calcul des grandeurs a_{1jk} , a_{2jk} , a_{n2} , ξ_i et $\vec{n}_{1jk}$ reste inchangé. Cependant, l'expression de $\|O_2P_{jk}\|$ doit être adaptée à un rayon de congé non nul.

$$r_{2jk} = \sqrt{(r_{rac1} \sin(\alpha_{1jk}))^2 + (R_{p1} + R_{p2} - r_{rac1} \cos(\alpha_{1jk}))^2} \quad (234)$$

La méthode de calcul de la distance à vide est similaire. Elle correspond désormais à la distance séparant le congé du profil de la dent opposée. Le problème revient donc à déterminer la position relative du centre du congé C_c par rapport au point le plus proche, noté C_2 , sur le flanc de denture. A cette fin, un point intermédiaire C_1 est introduit et correspond au point de contact sur le profil de la roue 2 lorsque la position angulaire de la roue 1 vaut γ_1 . Pour cette position, C_1 est donc confondu avec G_1 . La Figure 135 fait apparaître la distance à vide D_{vjk} et les points de calcul intermédiaires.

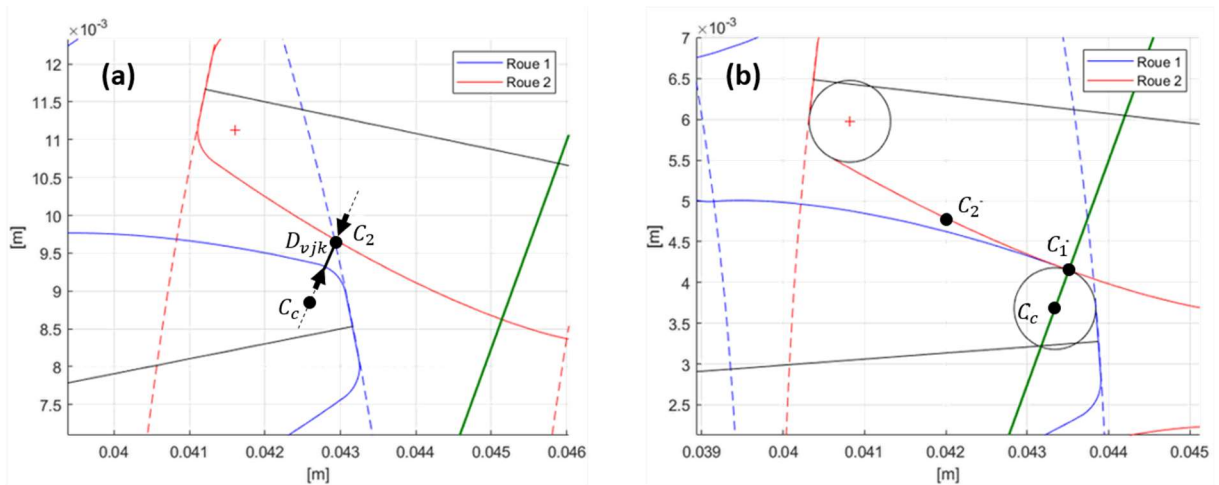


Figure 135 : Introduction des points intermédiaires (a) distance à vide et (b) position relative en γ_1

De même que dans la section précédente, le calcul de la distance séparant les points C_c et C_2 pour une position angulaire θ_{1jk} donnée est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, la position relative de ces deux points est déterminée pour une position angulaire de la roue égale à γ_1 puis les déplacements de chacun lors d'une rotation $\theta_{1jk} - \gamma_1$ sont ajoutés. Le calcul du vecteur $\overrightarrow{C_c C_2}$ lorsque la position angulaire de la roue 1 est égale à γ_1 , se décompose en deux parties

$$\overrightarrow{C_c C_{2\gamma_1}} = \overrightarrow{C_c C_{1\gamma_1}} + \overrightarrow{C_1 C_{2\gamma_1}} \quad (235)$$

Avec

$$\overrightarrow{C_1 C_{2\gamma_1}} = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(b_{c1}) & \cos(b_{c1}) & 0 \\ \cos(b_{c1}) & \sin(b_{c1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_l \\ \delta_h \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C_c C_{1\gamma_1}} = \begin{pmatrix} R_{c1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (236)$$

Les quantités δ_l et δ_h et b_{c1} sont introduites dans la section précédente et leurs expressions restent identiques. Seule la définition du rayon minimum de contact est modifiée.

$$R_{min2} = \sqrt{R_{b2}^2 + (x_{T2} - x_{G1})^2} \quad (237)$$

Les déplacements Δ_{Cc} et Δ_{C2} des points C_c et C_2 au cours d'une rotation $\theta_{1jk} - \gamma_1$ sont donnés par :

$$\Delta_{Cc} = [R_z(\theta_{1jk} - \gamma_1) - Id_3] \begin{pmatrix} x_{G1} - R_{c1} \\ -R_{b1} \\ z_k \end{pmatrix} \quad (238)$$

$$\Delta_{C2} = \left[R_z \left(-\frac{Z_1}{Z_2} (\theta_{1jk} - \gamma_1) \right) - Id_3 \right] \begin{pmatrix} x_{G1} - x_{T2} + \delta_x \\ R_{b2} + \delta_y \\ z_k \end{pmatrix}$$

La position relative des points C_1 et C_2 pour une position angulaire θ_{1j} s'exprime alors :

$$\overrightarrow{C_1 C_{2\theta_{1jk}}} = \overrightarrow{C_1 C_{2\gamma_1}} + \Delta_{Cc} - \Delta_{C1} \quad (239)$$

La distance à vide correspond à la projection de cette position relative sur la normale au profil de la tranche de la roue 2 dont l'expression reste identique à celle fournie dans la section précédente.

$$D_{vjk} = \overrightarrow{C_1 C_{2\theta_{1jk}}} \cdot \vec{n}_{1jk} \quad (240)$$

Annexe E – Expressions des matrices de masse et de raideur des éléments de poutre

Cette annexe présente les matrices de masse et de raideur des arbres creux de forme cylindrique modélisés par des éléments de poutre de Timoshenko. Celles-ci sont calculées en exprimant les énergies cinétiques et potentielles des poutres puis en appliquant les équations de Lagrange. On note ici R_i et R_e les rayons intérieurs et extérieurs des arbres et L leur longueur. De plus, on note ρ leur masse volumique, E leur module d'Young et G leur module de cisaillement. Pour finir k_s est le coefficient correctif de cisaillement. On introduit également le moment d'inertie principal I , et la surface S comme suit.

$$I = 8\pi(R_e^4 - R_i^4) \quad \text{et} \quad S = \pi(R_e^2 - R_i^2) \quad (241)$$

On utilisera également les grandeurs intermédiaires suivantes.

$$S_r = \frac{3}{4}S \left(1 - \frac{R_i}{R_e}\right) \frac{\left(1 + \frac{R_i^2}{R_e^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_i^3}{R_e^3}\right)} \quad \Phi = \frac{12EI}{GS_r k_s l^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{EI}{L^3(1 + \Phi)} \quad (242)$$

Dans un premier temps les matrices de taille 12x12 associées à un élément de poutre sont détaillées ci-dessous.

$$M_{a1} = \rho SL \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 \\ \frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I}{3S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I}{6S} \\ \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 \\ -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I}{6S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I}{3S} \end{bmatrix} \quad (243)$$

$$M_{a2} = \frac{\rho I}{60L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 \\ 0 & 36 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 \\ 0 & -36 & 0 & 3L & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 3L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (244)$$

La matrice totale de masse est la somme des deux matrices élémentaires décrites ci-dessus :

$$M_a = M_{a1} + M_{a2} \quad (245)$$

$$K_a = \frac{\rho I}{60L} \begin{bmatrix} 12b & 0 & 0 & 0 & 6bL & 0 & -12b & 0 & 0 & 0 & 6bL & 0 \\ 0 & 12b & 0 & -6bL & 0 & 0 & 0 & -12b & 0 & -6bL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6bL & 0 & (4 + \Phi)bL^2 & 0 & 0 & 0 & 6bL & 0 & (2 - \Phi)bL^2 & 0 & 0 \\ 6bL & 0 & 0 & 0 & (4 + \Phi)bL^2 & 0 & -6bL & 0 & 0 & 0 & (2 - \Phi)bL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI}{L} \\ -12b & 0 & 0 & 0 & -6bL & 0 & 12b & 0 & 0 & 0 & -3L & 0 \\ 0 & -12b & 0 & 6bL & 0 & 0 & 0 & 12b & 0 & 3L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6bL & 0 & (2 - \Phi)bL^2 & 0 & 0 & 0 & 3L & 0 & (4 + \Phi)bL^2 & 0 & 0 \\ 6bL & 0 & 0 & 0 & (2 - \Phi)bL^2 & 0 & -3L & 0 & 0 & 0 & (4 + \Phi)bL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} \end{bmatrix} \quad (246)$$

FOLIO ADMINISTRATIF**THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON**

NOM : THIBAUT

DATE de SOUTENANCE : 30/11/22

Prénoms : Nathanaël

TITRE : Prédire par la modélisation, la réponse d'une transmission endommagée : manifestations et nouvelles voies de transfert

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2022ISAL0104

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique – Génie Mécanique – Génie Civil

RESUME :

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit ont été réalisés au Laboratoire de Mécanique des Contact et des Structures (LaMCoS) à l'INSA de Lyon en partenariat avec Safran Helicopter Engines. Ils se sont déroulés dans le cadre du Consortium Industrie Recherche sur les Transmissions (CIRTrans) et ont été suivis de près par Alstom. Ils se concentrent sur la dynamique d'une transmission de puissance en présence de dégradations des engrenages et roulements qui la composent. Les endommagements de ces composants peuvent s'avérer critiques pour l'intégrité d'un moteur d'hélicoptère et doivent par conséquent être détectés le plus tôt possible. L'étude de la transmission est réalisée à travers la vitesse instantanée de rotation plutôt que sur la base des signaux vibratoires classiques explorant ainsi de nouvelles voies de transfert. De plus, l'observation est réalisée dans le domaine angulaire plutôt que temporel afin de tirer profit des régimes transitoires dans l'étude des éléments à périodicité cyclique. Cette thèse propose un modèle dynamique d'une transmission et entre dans le détail du comportement des différents éléments. Il se base sur une discrétisation éléments finis à une dimension des arbres sous la forme d'éléments de poutre de Timoshenko à six degrés de liberté. Les roulements et engrenages sont quant à eux introduits comme des torseurs de liaison reliant entre eux deux nœuds du système discrétisé. Les modèles mis en place accordent une attention particulière aux phénomènes dynamiques susceptible d'influencer les variations de vitesse de rotation instantanée tels que les contacts hors ligne d'action à l'engrènement et la résistance au roulement dans les paliers. En outre, ils permettent la prise en compte de plusieurs types d'endommagements et leur validation a été effectuée sur la base d'outils numériques certifiés.

Une transmission complète a été modélisée afin de permettre l'étude du comportement des différents composants dans des conditions de fonctionnement variées. Ainsi, l'influence de la vitesse de rotation et des chargements sur la signature des roulements et des engrenages est analysée. De plus les interactions existantes entre ces deux types d'éléments sont mises en évidence et l'intérêt de leur modélisation et de leur étude est discuté. Pour finir les signatures des différents endommagements envisageables sur la transmission sont caractérisées afin de permettre la détection de ceux-ci sur des signaux issus de transmissions en conditions de fonctionnement réelles.

MOTS-CLÉS : Vitesse instantanée, simulation, surveillance, diagnostic, roulements, égrenages, angulaire, non-stationnaire

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures

UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon

18-20 rue des Sciences

69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

Directeur de thèse : Didier REMOND

Président de jury : Jean-Luc DION

Composition du jury : Daniel NELIAS

Jean-Luc Dion

Didier Rémond

Adeline Bourdon

Xavier CHIEMENTIN

Roger SERRA

Damien LECOUVREUR

Nicolas NEUVEUX