

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

**DE**

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MEGA  
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

par

Etienne LEMOINE

## **APPROCHE COUPLÉE POUR L'ÉTUDE DU CONTACT SOUS CHARGEMENT DYNAMIQUE VIBRATOIRE Application à l'usure par fretting du contact aube-disque**

Soutenue publiquement le 04/05/2021, devant le jury d'examen :

Jean-Luc DION	Professeur	LISMMA, SUPMECA	Rapporteur
Vincent MAGNIER	Maître de Conférences	LaMcube, Université de Lille	Rapporteur
Jean-Jacques SINOUE	Professeur	LTDS, École Centrale de Lyon	Président du jury
Caroline VINCENT	Ingénieure R&T	Safran Aircraft Engines	Examinatrice
Fabrice THOUVEREZ	Professeur	LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
Daniel NÉLIAS	Professeur	LaMCoS, INSA Lyon	Co-directeur de thèse



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Luc Dion et Vincent Magnier d'avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse, je leur suis sincèrement reconnaissant pour l'intérêt porté à l'étude de mes travaux et pour les échanges durant la soutenance. J'adresse également mes remerciements à Jean-Jacques Sinou qui a présidé ce jury en portant une grande attention à mes travaux.

Ces travaux de thèse n'auraient pu voir le jour sans mes directeurs de thèse, Fabrice Thouverez et Daniel Nélias, que je remercie vivement pour leur encadrement et leur confiance durant ces années. Ils ont su orienter mes travaux dans les bonnes directions tout en me laissant une grande autonomie. Les différentes réunions ou discussions m'ont souvent permis d'éclaircir ma vision et de trouver les perspectives et idées nécessaires à l'élaboration de cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes collègues de Safran. Je remercie d'abord grandement Caroline Vincent qui a suivi ces travaux avec intérêt en y apportant son expertise industrielle et une aide précieuse dans leur mise en œuvre. Je tiens aussi à remercier l'ensemble des personnes qui ont suivi ces travaux, notamment Marie-Océane Parent qui m'a beaucoup aidée en début de thèse, ainsi que l'ensemble du département des méthodes pour tous les bons moments lors de mes passages à Villaroche. Enfin, je tiens à remercier Adrien Darlet avec qui j'ai réalisé mon stage de fin d'études, et qui m'a donné l'envie et l'opportunité de poursuivre dans cette aventure.

Je remercie chaleureusement l'ensemble de mes collègues, doctorants ou permanents, avec qui j'ai passé ces années, que ce soit au LTDS ou au LaMCoS. Je remercie l'ensemble des locataires du G8(bis-ter-phare) pour tous ces bons moments, de réflexion sur nos travaux mais aussi de détente et de bavardages. Je tiens à adresser quelques remerciements particuliers : à Cécile pour son aide précieuse sur LaTeX ; à Nicolas DP pour son assistance informatique et son soutien le jour de ma soutenance ; à Thomas pour notre collaboration aéro/méca ; et à tous les autres que je ne citerai pas par peur d'en oublier.

Qu'auraient été ces années de thèse sans ceux avec qui j'ai partagé mon quotidien : mes amis. Je tiens à tous vous remercier pour votre soutien sans faille, et pour tous ces moments passés avec vous qui m'ont fait oublier - le temps d'un Week-End, d'une soirée ou encore d'un café - mon quotidien parfois difficile de doctorant. Merci à mes amis de Gargillesse, de Montrouand, de

Lyon, d'Orléans et d'ailleurs pour tous ces souvenirs passés et à venir. Je n'essaierai pas de tous vous citer, encore une fois par peur d'omission, mais je tiens à adresser quelques remerciements particuliers : à Quentin et Gus qui ont été très présents durant ces années et m'ont toujours soutenu ; à Julien qui m'a souvent hébergé quand je me rendais en région parisienne ; à Pioch' qui m'a accueilli dans son havre de paix durant le premier confinement et tant d'autres fois ; à Gaétan qui m'a aidé à corriger un bout de ce manuscrit ; et évidemment à tous les autres qui comptent tout autant, et qui se reconnaîtront, j'en suis sûr. Je remercie aussi l'OSIU et toutes les personnes que j'y ai rencontré, pour tous ces beaux instants de musique (entre autres) que nous avons partagé.

Mes derniers remerciements vont évidemment à ma famille : ma sœur Asseline, qui est passée par là avant moi, et qui a toujours su m'aiguiller et m'aider durant ces années de thèse et tant d'autres fois avant ; et enfin mes parents, qui m'ont toujours soutenu dans mes projets et m'ont tant apporté, allant jusqu'à relire mon manuscrit pour en traquer les fautes. Merci pour tout.

# Résumé

Les enjeux actuels imposent des modifications conséquentes des turboréacteurs, notamment dans un but de réduction des émissions sonores et polluantes. Ces modifications impliquent une meilleure compréhension et une maîtrise de l'ensemble des phénomènes physiques ayant lieu dans les moteurs afin d'en optimiser la conception. La maîtrise des niveaux vibratoires des aubages est alors un point d'intérêt important, permettant d'optimiser la conception tout en s'assurant du maintien de la fiabilité et de la sûreté du turboréacteur. Le contact frottant entre les aubes et le disque présente différents avantages, de la facilité d'assemblage à la réduction des niveaux vibratoires par dissipation d'énergie dans le contact. L'application d'un chargement dynamique répété sur les interfaces de contact peut cependant engendrer des phénomènes d'usure par fretting, qu'il est nécessaire d'anticiper lors des phases de conception afin de s'assurer de la tenue des aubages.

Ces travaux de thèse se placent dans ce cadre et ont pour objectif d'être en mesure de déterminer le comportement vibratoire des roues aubagées avec non-linéarités de contact, tout en considérant l'usure par fretting des interfaces de contact due au chargement vibratoire. Dans ce but, une méthode de simulation numérique a été mise en place via un couplage entre le calcul de la réponse forcée non-linéaire et une méthode de résolution du problème de contact semi-analytique. La réponse forcée vibratoire non-linéaire est déterminée via une méthode fréquentielle, l'équilibrage harmonique, permettant de traiter le régime périodique stationnaire directement. Les non-linéarités de contact y sont considérées via une approche temporelle par l'intermédiaire de transformées de Fourier. Cette méthode ne permet cependant pas de traiter un problème fortement discrétisé de par les temps de calculs qu'elle engendre. Une méthode semi-analytique de résolution du problème de contact est alors utilisée à la résonance non-linéaire, afin d'avoir un calcul rapide malgré une discrétisation très fine des interfaces. Cette finesse de discrétisation permet alors de déterminer avec précision l'usure du contact sous chargement vibratoire ainsi que les efforts de contact. Le couplage réalisé offre enfin la possibilité de mettre à jour les géométries, afin de déterminer l'impact de l'usure sur le comportement du contact et sur les niveaux vibratoires.

Le couplage développé est dans un premier temps appliqué à un modèle simplifié de roue aubagée, ayant un comportement mécanique représentatif d'une roue aubagée réelle et permettant une exploitation simple des résultats dans un but de mise au point et de validation. L'application à un modèle de soufflante industriel montre dans un second temps l'applicabilité des méthodes sur un cas complexe, mettant en évidence l'intérêt de ces recherches dans un cadre industriel.

**Mots-clés :** dynamique non-linéaire, frottement, équilibrage harmonique, fretting, usure, méthode semi-analytique, roue aubagée



# Abstract

Aircraft engines have been largely improved recently due to current issues, mainly in order to reach noise and pollution reduction goals. Such modifications involve a better understanding and mastering of physical phenomena taking place in the engines to be able to optimise their design. Precise prediction of blades vibration levels is then a key objective in order to optimise the design while maintaining reliability and safety of the engines. Contact interfaces between the blades and the disk involve several benefits such as easing the manufacturing process and decreasing vibration levels by dissipating energy due to dry friction in the contact interfaces. However, vibration induced repeated dynamic loading can cause fretting-wear, which needs to be anticipated during design phases to ensure blades fatigue resistance.

In this context, those doctoral works aim at predicting vibration behaviour of bladed-disks in presence of dry friction non-linearities and taking into account fretting-wear of the contact interfaces induced by the dynamic loading. This was achieved by implementing a simulation method by coupling a non-linear forced response computation and a semi-analytical method to solve the contact problem. Dynamic non-linear forced response is determined using harmonic balance method, which consists in researching the stationary periodic response directly using a frequential approach. The use of Fourier Transforms allows determining non-linear contact forces in time domain. However, this method can be computationally expensive, hence limiting the discretisation of the contact interfaces. In order to be able to use a very discretised mesh, a semi-analytical contact solving method is used at the non-linear vibration resonance, allowing to have fast computations with a very refined mesh. Then, the precision given by such fine discretisation allows to consider fretting-wear induced by the dynamic loading and estimate contact forces accurately. Finally, the model geometries can be updated using the proposed coupled approach, in order to determine the influence of wear on contact behaviour and dynamic levels.

The proposed coupled approach is firstly applied to a simplified bladed-disk model, representing the mechanical behaviour of a real bladed-disk, while allowing a simple analysis of the results and phenomena in order to develop and validate the method. An industrial fan model is considered in a second time to demonstrate the applicability of such methods on a complex case, highlighting the interest of this work for industrial purposes.

**Keywords :** non-linear dynamic, friction, harmonic balance, fretting, wear, semi-analytical method, bladed-disk



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Etat de l'art du contact aube-disque</b>	<b>5</b>
1 Turboréacteurs . . . . .	6
1.1 Principe de fonctionnement . . . . .	6
1.2 Evolution des soufflantes . . . . .	9
2 Dynamique des roues aubagées . . . . .	10
2.1 Sources d'excitation . . . . .	10
2.2 Dynamique d'un corps élastique en rotation . . . . .	13
2.3 Notion de symétrie cyclique . . . . .	19
2.4 Non-linéarités . . . . .	28
3 Contact aube-disque . . . . .	28
3.1 Zones de contact dans les roues aubagées . . . . .	28
3.2 Modélisation du contact frottant . . . . .	30
3.3 Endommagement par fretting . . . . .	31
4 Pratiques de modélisation du contact . . . . .	36
4.1 Dynamique vibratoire avec non-linéarités de contact . . . . .	36
4.2 Modélisation du contact . . . . .	37
5 Conclusion . . . . .	38
<b>II Dynamique d'une roue aubagée en présence de non-linéarités de contact</b>	<b>41</b>
1 Résolution d'un problème de dynamique non-linéaire . . . . .	43
1.1 Méthodes de résolution temporelle . . . . .	43
1.2 Méthodes de Ritz-Galerkin . . . . .	45
1.3 Continuation des solutions . . . . .	50
1.4 Condition d'excitabilité en symétrie cyclique . . . . .	53
1.5 Non-linéarités en symétrie cyclique . . . . .	54
2 Méthodes de sous-structuration . . . . .	54
2.1 Condensation statique de Guyan . . . . .	55
2.2 Sous-structuration à interfaces libres – MacNeal . . . . .	55
2.3 Sous-structuration à interfaces fixes – Craig-Bampton . . . . .	57
2.4 Autres méthodes de réduction . . . . .	59

3	Résolution du problème de contact – DLFT . . . . .	59
3.1	Équation du mouvement . . . . .	60
3.2	Calcul des efforts de contact . . . . .	62
3.3	Choix du coefficient de pénalité . . . . .	64
3.4	Équilibre statique . . . . .	65
4	Notion de modes non-linéaires . . . . .	65
4.1	Définition . . . . .	66
4.2	Modes complexes non-linéaires . . . . .	66
5	Dynamique non-linéaire d'une roue-aubagée simplifiée . . . . .	68
5.1	Modèle considéré . . . . .	68
5.2	Réponses forcées non-linéaires . . . . .	72
5.3	Modes complexes non-linéaires . . . . .	79
5.4	Remarques sur le comportement du contact . . . . .	81
6	Conclusion . . . . .	86
<b>III Etude détaillée du comportement du contact aube-disque</b>		<b>89</b>
1	Méthode semi-analytique d'étude du contact . . . . .	90
1.1	Contact entre espaces élastiques semi-infinis . . . . .	90
1.2	Discrétisation du problème de contact . . . . .	93
1.3	Méthode DC-FFT . . . . .	95
1.4	Définition du problème de contact . . . . .	96
1.5	Résolution du problème de contact . . . . .	97
2	Méthode de couplage des méthodes de l'équilibrage harmonique et semi-analytique	98
2.1	Méthodologie de couplage . . . . .	98
2.2	Convergence des données d'entrée du problème semi-analytique . . . . .	103
2.3	Définition de la géométrie discrétisée pour la résolution semi-analytique . .	105
3	Comportement du contact de la roue aubagée simplifiée discrétisée . . . . .	106
3.1	Définition du modèle pour le calcul semi-analytique . . . . .	107
3.2	Etude du comportement du contact . . . . .	111
4	Influence de l'usure . . . . .	113
4.1	Impact d'une boucle de mise à jour de la géométrie . . . . .	114
4.2	Influence de plusieurs mises à jour de la géométrie sur le comportement du contact . . . . .	118
4.3	Influence de l'usure sur le comportement dynamique . . . . .	120
5	Conclusion . . . . .	123
<b>IV Application des méthodes développées au cas d'une soufflante industrielle</b>		<b>127</b>
1	Modèle de soufflante industrielle . . . . .	128
1.1	Présentation du modèle . . . . .	128
1.2	Super-éléments considérés . . . . .	133
1.3	Chargement aéroélastique . . . . .	135

---

2	Etude dynamique non-linéaire . . . . .	138
2.1	Dynamique non-linéaire avec une excitation ponctuelle équivalente . . . . .	138
2.2	Dynamique non-linéaire avec excitation aéroélastique . . . . .	141
2.3	Étude des dissipations . . . . .	142
3	Comportement des interfaces de contact de la soufflante . . . . .	142
3.1	Étude du contact suite aux calculs dynamiques . . . . .	143
3.2	Étude du contact par la méthode semi-analytique . . . . .	148
4	Etude de l'usure des interfaces . . . . .	152
4.1	Usure des interfaces due au chargement vibratoire . . . . .	152
4.2	Impact de l'usure sur le comportement du contact . . . . .	154
4.3	Impact de l'usure sur le comportement vibratoire . . . . .	154
5	Conclusion . . . . .	156
	<b>Conclusion</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>173</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>179</b>



# Introduction

## Contexte industriel

Les motoristes aéronautiques ont toujours dû concevoir des moteurs respectant des contraintes de fiabilité, de sécurité et d'efficacité. Depuis plusieurs années, des enjeux environnementaux se sont ajoutés à ces contraintes. L'union européenne a fixé des objectifs de réduction conséquente du bruit généré par les turboréacteurs et des émissions d'éléments polluants tel le dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) et l'oxyde d'azote ( $\text{NO}_x$ ). Ces objectifs donnent lieu à de nombreuses recherches, réalisées notamment à travers le programme de recherche *CleanSky 2*.

Différentes solutions ont été développées pour atteindre cette cible. Une méthode parmi les plus efficaces consiste à augmenter le taux de dilution du réacteur, c'est à dire le rapport entre le flux d'air secondaire froid et le flux d'air primaire chaud passant dans la chambre de combustion. Cette augmentation du taux de dilution est notamment atteinte via l'augmentation du diamètre des réacteurs, et de ce fait de leur soufflante, qui est la première roue aubagée à l'entrée du moteur.

L'augmentation de la taille des soufflantes doit aussi s'accompagner d'une diminution de leur poids et d'une amélioration de leur efficacité aérodynamique, afin de respecter les contraintes précédemment évoquées. De nouveaux types de soufflantes ont alors vu le jour, utilisant des pales dites à large corde, optimisées aérodynamiquement. Cette technologie permet de diminuer le nombre de pales de la soufflante et par conséquent de réduire sa masse, conjointement à l'utilisation de matériaux composites tissés 3D plus légers et plus résistants. Ces modifications viennent cependant complexifier leur comportement mécanique par un chargement aérodynamique et une souplesse plus importants, engendrant notamment des amplitudes vibratoires conséquentes de l'aubage en comparaison aux soufflantes métalliques.

La conception de tels systèmes ne peut être réalisée via des essais. Leur cout est en effet prohibitif pour des phases de conception, les essais étant réservés à la validation. Il est alors nécessaire d'être en mesure de maîtriser l'ensemble des phénomènes physiques présents dans le réacteur dès les phases de conception. L'amélioration des méthodes de simulations numériques est donc primordiale pour réaliser une conception optimisée des réacteurs avec précision, et d'être en mesure de vérifier la tenue des pièces aux différents chargements.

## Enjeux de la thèse

Dans le cadre de la conception des soufflantes nouvelle génération, l'étude dynamique vibratoire est un sujet d'importance. De nombreux essais ont ainsi été menés afin de valider le comportement vibratoire dans différentes conditions. Une campagne d'essais en soufflerie a permis d'étudier la réponse dynamique d'un démonstrateur de soufflante, soumis à un vent de travers en présence d'un "faux sol", produisant un vortex de sol. Les résultats obtenus ont mis en évidence un manque de corrélation avec les simulations numériques, notamment dans les zones à proximité du contact aube-disque.

Ces travaux de thèse se placent dans ce cadre, et ont ainsi pour objectif de déterminer le comportement vibratoire avec précision, et en particulier le comportement des zones de contact au niveau de l'assemblage aube-disque. Ces zones étant très sollicitées, leur endommagement est aussi un point d'intérêt afin d'étudier la tenue en fatigue des pales. L'usure par fretting due au chargement dynamique dans les interfaces sera donc aussi un aspect étudié dans ces travaux.

Le frottement sec dans les zones de contact peut avoir un impact conséquent sur le comportement vibratoire. Les dissipations engendrées par le frottement induisent en effet un amortissement élevé, et donc une baisse des amplitudes de vibration. L'étude des amplitudes vibratoires d'un système est classiquement réalisée via des calculs de réponses forcées. Une méthode d'équilibrage harmonique sera utilisée dans ces travaux afin de résoudre le problème dynamique en fréquentiel, couplée à une méthode temporelle d'estimation des efforts de contact par des multiplicateurs de Lagrange [97]. Ces méthodes fréquentielles ont fait leurs preuves pour ce type d'étude, notamment dans de nombreux développements au LTDS [24, 116, 78, 63, 89, 87].

L'étude du comportement des interfaces de contact nécessite cependant un niveau de discrétisation très fin, non utilisable pour les calculs dynamiques sous peine de temps de calculs prohibitifs. Pour pallier ce problème, une méthode de résolution semi-analytique développée au LaMCoS [47, 45, 80, 13] sera utilisée à posteriori des calculs dynamiques, permettant l'utilisation de maillages finement discrétisés pour des temps de calculs rapides. De plus, cette méthode permet de par la finesse de discrétisation considérée, d'étudier l'usure des interfaces suite au chargement appliqué. La méthode semi-analytique a ainsi été appliquée par le passé à l'étude de l'usure par fretting pour des cas de chargements induisant de la fatigue oligo-cyclique, appelée Low Cycle Fatigue (LCF) [47]. Le couplage avec une méthode d'étude du comportement dynamique, tel que la méthode de l'équilibrage harmonique dans ces travaux, rend ainsi possible l'étude de la fatigue longue durée, appelée High Cycle Fatigue (HCF).

L'objectif de ces travaux de thèse est alors de déterminer le comportement vibratoire non-linéaire d'une roue aubagée en présence de non-linéarités de contact. Le comportement non-linéaire pourra ensuite être utilisé pour déterminer l'usure des interfaces de contact et les niveaux de chargement qu'elles subissent. L'impact de l'usure sur le comportement vibratoire sera enfin considéré par des mises à jour des modèles de contact de la résolution dynamique.

## Composition du manuscrit

Ce mémoire s'articule en quatre chapitres. Le Chapitre I a pour objectif d'introduire les notions utilisées dans la suite de ce manuscrit via un état de l'art des différentes problématiques considérées, à savoir la dynamique des roues aubagées et le contact aube-disque. Les difficultés inhérentes à ces disciplines ainsi que les pratiques de modélisation y sont présentées.

Le Chapitre II s'intéresse à la résolution du problème de dynamique avec non-linéarités de contact. Différentes méthodes de résolution y sont évoquées, en se focalisant particulièrement sur une méthode de résolution fréquentielle : la méthode de l'équilibrage harmonique. Le problème non-linéaire de contact n'ayant pas d'expression fréquentielle, une méthode de calcul des efforts de contact en temporel basée sur des lagrangiens dynamiques est considérée. De par la taille des modèles et les temps de calculs engendrés par la résolution dynamique, la taille des modèles est réduite à l'aide d'une méthode de sous-structuration. Ce chapitre se conclut par une application des méthodes à un modèle de roue aubagée simplifié. Le modèle simplifié permet de mettre en évidence aisément les phénomènes étudiés et ne nécessite pas de normalisation des résultats pour des raisons de confidentialité, facilitant donc son analyse.

A partir du chargement dynamique déterminé, le Chapitre III vise à étudier de façon détaillée le comportement des interfaces de contact, menant à l'usure par fretting sous chargement vibratoire. La théorie définissant la méthode semi-analytique de résolution du problème de contact y est d'abord décrite, de même que la méthodologie de couplage avec les calculs dynamiques, permettant de prendre en compte l'usure des interfaces. Ce chapitre permet enfin de conclure sur le comportement du contact du modèle simplifié et sur l'usure engendrée par le chargement vibratoire. A l'inverse, l'impact de l'usure sur le chargement vibratoire est pris en compte via la mise à jour des interfaces de contact.

Le Chapitre IV a finalement pour objectif d'appliquer l'ensemble des méthodes précédemment définies sur un modèle industriel. Le modèle considéré est un modèle de démonstrateur de soufflante. Il permet ainsi de mettre en œuvre le couplage sur un modèle complexe et complet, du chargement aérodynamique à l'usure des interfaces de contact.



# Chapitre I

## Etat de l'art du contact aube-disque

Ce chapitre a pour objectif de définir les problématiques qui seront considérées dans ce manuscrit. Dans un premier temps, le fonctionnement d'un turboréacteur sera rappelé. La deuxième section s'intéressera à la dynamique vibratoire des roues aubagées, de la cause des vibrations à la mise en équation du problème. La troisième section permettra de mettre en évidence les problématiques liées à l'étude du contact et les conséquences des phénomènes engendrés par celui-ci, notamment via l'étude de l'endommagement par fretting-wear. Enfin, la dernière section aura pour objectif de mettre en évidence le besoin de couplage entre les méthodes utilisées en dynamique vibratoire et la méthode semi-analytique d'étude du contact, afin de réaliser une étude complète et détaillée du comportement des zones de contact dans les ensembles aube-disque sous chargement vibratoire.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Turboréacteurs</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1	Principe de fonctionnement . . . . .	6
1.2	Evolution des soufflantes . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Dynamique des roues aubagées</b> . . . . .	<b>10</b>
2.1	Sources d'excitation . . . . .	10
2.2	Dynamique d'un corps élastique en rotation . . . . .	13
2.3	Notion de symétrie cyclique . . . . .	19
2.4	Non-linéarités . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Contact aube-disque</b> . . . . .	<b>28</b>
3.1	Zones de contact dans les roues aubagées . . . . .	28
3.2	Modélisation du contact frottant . . . . .	30
3.3	Endommagement par fretting . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Pratiques de modélisation du contact</b> . . . . .	<b>36</b>
4.1	Dynamique vibratoire avec non-linéarités de contact . . . . .	36
4.2	Modélisation du contact . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>38</b>

---

## 1 Turboréacteurs

Les turboréacteurs sont des systèmes de propulsion principalement utilisés pour la motorisation des avions, civils ou militaires. L'objectif de ces moteurs est de fournir une force de poussée suffisante et d'assurer le fonctionnement de l'ensemble de l'avion. La Figure I.1 représente un turboréacteur industriel d'avion moyen-courrier.



FIGURE I.1 – Coupe d'un moteur LEAP<sup>®</sup> de CFM International.

Les turboréacteurs sont des machines tournantes utilisant un principe simple de fonctionnement, le principe d'action-réaction de Newton. Cependant, la mise en œuvre de ce principe implique un mécanisme complexe dans lequel différents domaines de la physique sont considérés : l'aérodynamique, la mécanique du solide, la combustion, ou encore l'électronique. En effet, même si la production de la poussée nécessaire à l'avion est assurée par l'aérodynamique, sa mise en œuvre implique l'utilisation de pièces mécaniques dans des conditions extrêmes. De plus, le couplage de ces différents aspects de la physique, engendre des phénomènes peu communs, qu'il est nécessaire d'étudier avec précision afin de s'assurer du bon fonctionnement du moteur et du respect des contraintes de sécurité et de rendement. Il est ainsi nécessaire de comprendre et maîtriser l'ensemble des phénomènes présents dans le moteur et d'anticiper les causes possibles de défaillance, pour s'assurer de la bonne tenue des pièces mécaniques. Les motoristes considèrent donc l'ensemble du fonctionnement classique des moteurs : température et pressions très élevées, vitesses de rotation importantes ... ; de même que les contraintes plus rares : ingestion d'un corps étranger, perte d'aube, tenue au balourd ...

### 1.1 Principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement d'un turboréacteur est basé sur la différence de vitesse entre les flux d'air entrant et sortant du moteur. La quantité de mouvement créée par l'accélération du flux d'air à l'intérieur du moteur engendre alors le déplacement, suivant le principe d'action-réaction de Newton. Les turboréacteurs sont des machines tournantes constituées d'un enchaînement de roues

aubagées ayant pour objectif d'accélérer le flux d'air. Même si il existe différentes architectures de turboréacteurs, le principe de fonctionnement reste toujours le même. L'air entrant dans le moteur est d'abord comprimé et accéléré dans les compresseurs. Une fois comprimé, il arrive dans la chambre de combustion où il est enflammé grâce à un apport en kérosène. La combustion engendre un apport d'énergie, entraînant la détente des gaz. Une partie de l'énergie est alors récupérée par les turbines, entraînant les compresseurs reliés aux turbines par un arbre. Le reste de l'énergie cinétique des gaz permet alors de fournir de la poussée par réaction, lorsque les gaz sont expulsés à grande vitesse à la sortie du moteur.

Un ensemble turbines-compresseurs reliés par un arbre est appelé un "corps". Les premiers turboréacteurs étaient composés d'un seul corps et étaient donc appelés moteurs *simple-corps*. Afin d'augmenter le taux de compression, des moteurs *double-corps* ont ensuite été développés. Ceux-ci se sont généralisés à l'ensemble des turboréacteurs dans les années 60. Les moteurs double-corps, comme représenté Figure I.2, sont composés d'un corps haute pression (HP) et d'un corps basse pression (BP). Ces deux corps sont chacun composés de compresseurs et turbines. Le corps haute pression étant séparé du corps basse pression, il peut tourner plus rapidement, afin d'augmenter le taux de compression de l'air. Comme les vitesses de rotation des deux corps sont différentes, le moteur est constitué de deux arbres concentriques. Cette architecture permet d'améliorer grandement le rendement du moteur, malgré une augmentation de la taille et du poids des réacteurs. Il existe aussi des réacteurs *triple-corps*.

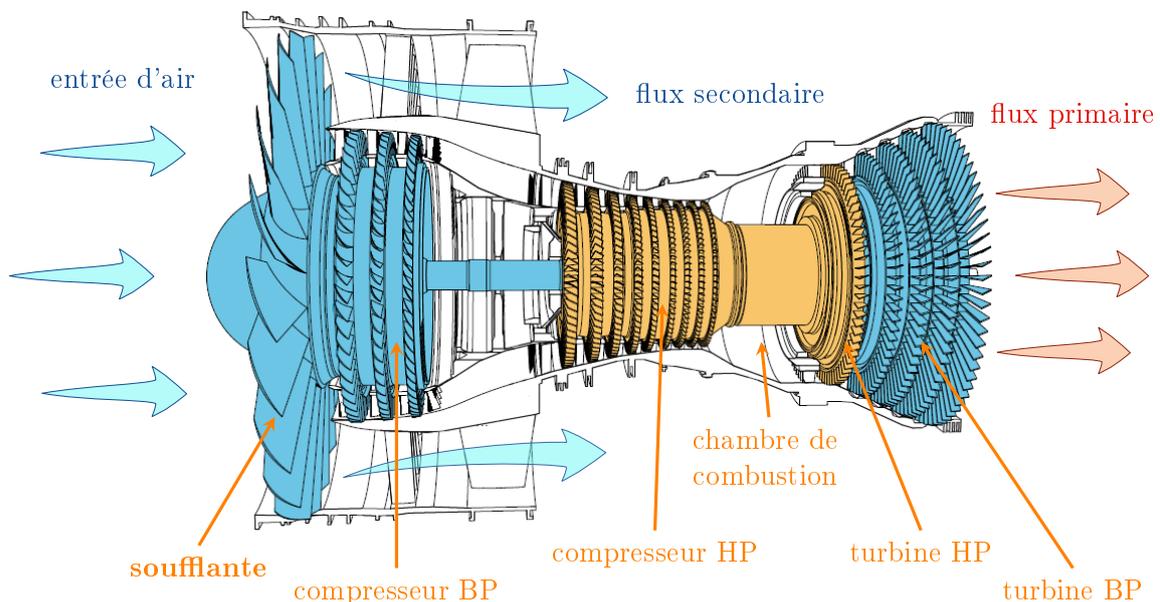


FIGURE I.2 – Schéma vue en coupe d'un turboréacteur double corps, double flux. [38]

Les architectures multi-corps permettent aussi l'utilisation d'une soufflante, ou fan, qui constitue le premier étage du compresseur basse pression à l'entrée du moteur. En effet, la vitesse de rotation du corps basse pression étant plus faible, il est possible d'y ajouter une roue aubagée plus grande. La soufflante permet alors de concevoir des turboréacteurs double flux. Comme représenté sur la Figure I.2, la soufflante permet l'entrée d'une plus grande quantité d'air, et il est alors possible

de séparer le flux d'air en un flux primaire et un flux secondaire. Le flux primaire passe dans la partie interne du moteur, où il est comprimé dans les compresseurs basse et haute pression afin d'être brûlé dans la chambre de combustion, puis d'entraîner les turbines lors de sa détente. Le flux secondaire passe quant à lui dans la partie externe du moteur en contournant le flux primaire. Il est alors éjecté autour des gaz chauds sortant du flux primaire. Les moteurs modernes cherchent à augmenter la taille de la soufflante, afin d'augmenter le taux de dilution entre les flux primaires et secondaires. Effectivement, plus le taux de dilution augmente, plus le flux secondaire participe à la poussée. Dans les moteurs modernes, le flux secondaire représente environ 80% de la poussée en régime de croisière, le reste étant fourni par les gaz chauds issus du flux primaire. Ainsi, le flux primaire a comme principale fonction d'entraîner la soufflante. L'utilisation du double-flux permet une diminution importante de la consommation en carburant et du bruit du réacteur.

Les turboréacteurs simple flux sont principalement utilisés pour les moteurs militaires, puisque cette technologie présente un bon rendement pour des vitesses supérieures à Mach 1.

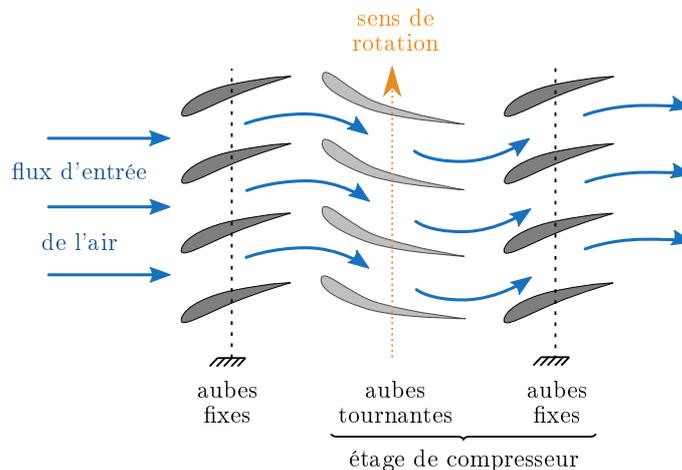


FIGURE I.3 – Schéma en vue dépliée du dessus d'un étage de compresseur axial.

Les compresseurs et les turbines sont composés d'un enchaînement de roues aubagées fixes et mobiles. Un *étage* de compresseur ou de turbine est composé d'une roue mobile en rotation et d'aubes fixes attachées à un stator. La Figure I.3 représente un stator, appelé *redresseur* pour les compresseurs, suivi d'un étage de compresseur. Les redresseurs, placés après les roues mobiles, permettent de redresser l'écoulement dans la direction axiale, après que celui-ci ait été mis en rotation par la roue mobile. Ils permettent ainsi de transformer l'énergie cinétique tournante en pression statique. La combinaison des enchaînements d'étages et du rétrécissement de la veine engendre alors une forte compression du fluide. Les stators de turbines sont quant à eux appelés distributeurs. Ils sont placés en amont des roues mobiles, dans le but d'engendrer l'effet inverse des redresseurs, c'est à dire de provoquer la rotation de l'écoulement, transformant les pressions statiques en énergie cinétique pouvant être récupérée par la turbine.

Enfin, les turboréacteurs nécessitent l'utilisation d'un moteur annexe pour démarrer. En effet, cela permet de lancer la rotation pour allumer la combustion, et d'assurer la circulation de l'air lors de l'allumage du moteur.

## 1.2 Evolution des soufflantes

Les enjeux actuels de diminution de la consommation des réacteurs et des nuisances sonores qu'ils entraînent, exigent des modifications importantes des réacteurs. Les motoristes ont donc amélioré leurs moteurs, donnant lieu à d'importantes modifications ces dernières années. Un des moyens pour augmenter le rendement des réacteurs est notamment d'augmenter le taux de dilution, ce qui peut être fait en augmentant la taille des soufflantes. Les soufflantes du moteur LEAP développé par Safran Aircraft Engines et General Electric sont donc plus grandes que celles de moteurs précédents. On peut aussi citer les recherches sur les moteurs avec soufflantes non-carénées type *Open-Rotor*, permettant une augmentation significative de la taille des soufflantes.

La forme des aubes de soufflantes a aussi été optimisée afin d'améliorer leur aérodynamisme. La Figure I.4 représente l'évolution des aubes de soufflantes entre les deux dernières versions du CFM56 et le LEAP. Les aubes avec nageoires en tête permettaient ainsi de diminuer les vibrations par friction entre les aubes, et d'augmenter leur résistance. Cependant, leur forme a été modifiée pour améliorer l'aérodynamique, via l'utilisation d'aubes à large corde optimisées aérodynamiquement. Celles-ci s'avèrent plus résistantes et permettent de diminuer considérablement le nombre d'aubes et donc le poids de la soufflante. La masse des moteurs a aussi été diminuée via l'utilisation de matériaux innovants, notamment par l'apparition de pièces en matériaux composites, comme les aubes de soufflantes en composite tissé 3D [33], cf Figure I.4.

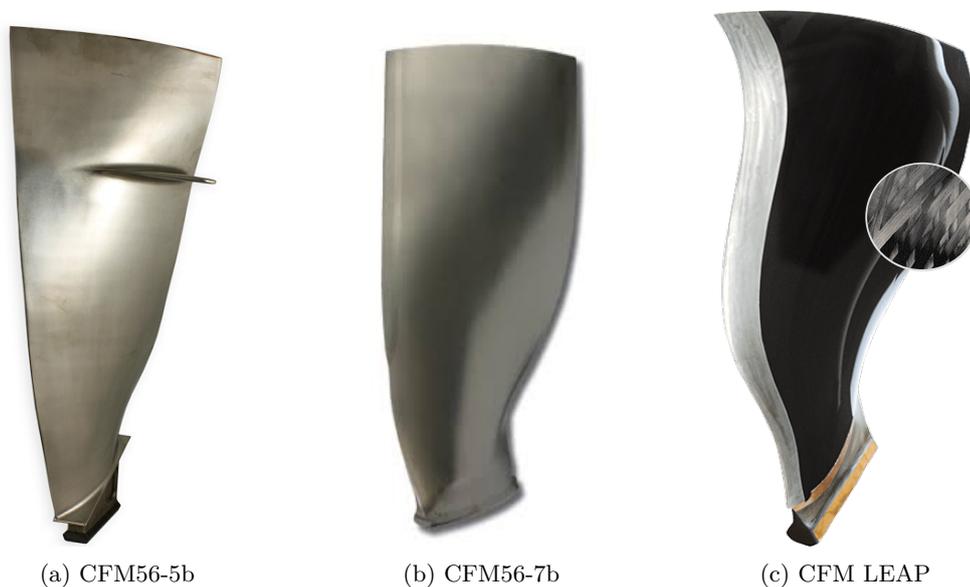


FIGURE I.4 – Évolution des aubes de soufflantes des moteurs CFM International.

L'ensemble des modifications sur le moteur a permis de réduire considérablement la consommation et les niveaux sonores des réacteurs. Cependant, ces nouvelles géométries et technologies complexifient le comportement du réacteur. Il est donc nécessaire d'utiliser de nouvelles méthodes de modélisation afin de comprendre et maîtriser l'ensemble des nouveaux phénomènes observés. De plus, ces modifications ont entraîné un assouplissement important des aubes de soufflantes, pouvant

engendrer leur détérioration. Cette thèse se place dans ce contexte d'amélioration des modélisations, plus particulièrement dans la modélisation du comportement dynamique des aubes de soufflantes. Le cas d'application présenté dans le Chapitre IV est en effet une aube de démonstrateur de soufflante de type LEAP.

## 2 Dynamique des roues aubagées

Les turboréacteurs sont des machines tournantes complexes composées d'un enchaînement de roues aubagées. Leur comportement dynamique complexe nécessite de prendre en compte leur rotation, entraînant des phénomènes particuliers. Ainsi, l'étude de telles structures nécessite l'utilisation de méthodes spécifiques via la dynamique des corps élastiques en rotation. Cette section s'intéresse aux sources d'excitation présentes dans les turboréacteurs. La théorie des solides déformables en rotation permettra ensuite de mettre en équation le problème, et de mettre en évidence les phénomènes particuliers présents dans les structures tournantes à géométrie cyclique : effets centrifuges, gyroscopiques, vibrations des systèmes en symétrie cyclique, désaccordage ...

### 2.1 Sources d'excitation

Les turboréacteurs étant des machines complexes dans lesquelles différents domaines de la physique sont couplés, les sources d'excitation y sont diverses et souvent d'origines multiples. Il est alors souvent difficile de prédire les sources de vibration, ainsi que le comportement vibratoire de la structure. Cependant, les vibrations sont une des causes principales de défaillance des turboréacteurs, allant de la perte de rendement, à l'endommagement des composants du moteur. Il existe principalement deux sources d'excitation dans les moteurs : les excitations d'origine mécanique et les excitations d'origine aérodynamique.

#### 2.1.1 Excitations mécaniques

Les sources d'excitation d'origine mécanique ne sont pas les sources d'excitation principales dans les turboréacteurs. Il est cependant important de les prendre en compte dans la conception, puisque celles-ci peuvent avoir un impact important sur le comportement du moteur.

#### **Balourd**

Le phénomène de balourd est un phénomène spécifique aux machines tournantes. Ce phénomène est dû à une répartition hétérogène de la masse du rotor autour de son axe de rotation. Un déséquilibre statique sera ainsi observé lorsque le centre de gravité du rotor est décalé de l'axe de rotation, créant une force d'excitation harmonique dans le repère fixe. De plus, un déséquilibre dynamique survient lorsque l'axe de rotation diffère de l'axe d'inertie principal, engendrant un moment d'excitation harmonique. L'hétérogénéité de la masse du rotor autour de son axe peut être due à différents phénomènes. Les premières causes de balourd sont des défauts de fabrication comme les hétérogénéités matériau dues à la fabrication ou à l'usinage, des défauts de centrage des pièces, ou des éléments consécutifs du montage (boulons, bagues, ...). Cependant, ces problèmes

sont minimisés par des tolérances de fabrication très strictes et un rééquilibrage des pièces par usinage ou ajout de masselottes. Un balourd peut aussi apparaître lors de l'exploitation du réacteur, notamment suite à la perte d'une aube par fatigue vibratoire ou ingestion d'un corps étranger. Ces phénomènes entraînent un déséquilibre fort du moteur. Des essais et des calculs sont alors réalisés pour connaître l'impact de ces phénomènes sur le moteur avant sa certification.

### Contact rotor/stator

Afin d'augmenter le rendement des turboréacteurs, les jeux entre les aubes et le carter sont diminués au maximum, limitant les pertes de flux par fuite d'écoulement en tête de pâle. Cependant, les contraintes thermiques et mécaniques imposées aux aubages durant le fonctionnement entraînent de grandes déformations, notamment par fluage. Ainsi, la réduction des jeux peut engendrer des contacts répétés entre les aubes et le carter, résultant dans des phénomènes d'instabilités vibratoires [81][100] et d'interactions modales [86]. Différentes méthodes sont alors utilisées pour pallier ce problème, notamment l'utilisation de matériaux à structure mono-cristalline plus résistants au fluage pour les aubes, ou d'abradable sur le carter afin d'adoucir le contact [93].

#### 2.1.2 Excitations aérodynamiques

Les sources d'excitation les plus courantes dans les turboréacteurs sont les excitations aérodynamiques, dues aux mouvements de l'air dans le moteur. Ils peuvent être synchrones, c'est à dire correspondre à un multiple de la vitesse de rotation de l'arbre, ou asynchrones. Cette section présente les excitations aérodynamiques les plus communes, ainsi que le phénomène d'ingestion de vortex étudié plus en détail dans l'application industrielle de ce manuscrit, cf Chapitre IV.

### Interactions avec les roues adjacentes

Les réponses forcées aéroélastiques sont causées par les interactions du fluide avec les roues

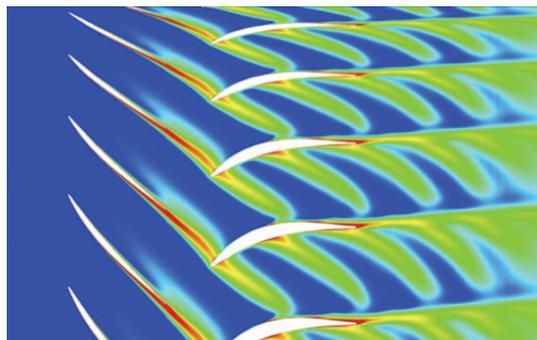


FIGURE I.5 – Représentation des effets de sillage en entropie [120].

adjacentes à l'aubage considéré. En effet, les obstacles présents dans la veine (redresseurs, distributeurs, bras de maintien) entraînent une perturbation de l'écoulement. Cette perturbation est appelée *sillage* et consiste en une variation du champ de pression en aval de chaque obstacle. Puisque les roues mobiles sont en rotation, les sillages des roues fixes entraînent des fluctuations périodiques de pression. Ainsi, la fréquence d'excitation correspond à la fréquence de rotation de

l'arbre multipliée par le nombre d'obstacles en amont. Ce phénomène est donc bien synchrone, puisque multiple de la vitesse de rotation. Il s'agit d'un problème facile à anticiper puisque les aubes peuvent entrer en résonance lorsqu'une de leurs fréquences propres croise une harmonique d'excitation [98]. De plus, lorsque la distance entre les roues est faible, il est possible que les perturbations induites par la roue aval excitent la roue en amont. On parle alors d'*effet potentiel*. Les phénomènes de sillage et les effets potentiels sont prédictibles à l'aide de calculs de réponse forcée. Il est alors possible de dimensionner les roues aubagées dans le but d'éviter la coïncidence entre leurs fréquences de résonance et les fréquences d'excitation possibles.

### **Flottement**

Le flottement est un phénomène aéroélastique engendré par une interaction entre les vibrations des pales et du fluide. C'est un phénomène asynchrone qui a lieu lorsque la perturbation de l'écoulement engendrée par les aubages induit un champ de pression dans le fluide excitant ces mêmes aubages, conduisant à un comportement vibratoire auto-entretenu, pouvant résulter dans la destruction des aubages. Le flottement est un phénomène complexe encore mal maîtrisé faisant l'objet de nombreuses recherches. En effet, ces phénomènes sont de plus en plus présents dans les réacteurs actuels et nécessitent la plupart du temps une modification du point de fonctionnement lorsqu'ils sont observés sur les moteurs, ou une reconception du rotor coûteuse. L'utilisation du désaccordage intentionnel peut, dans certains cas, permettre de limiter ce phénomène [58][29].

### **Décollement de manche**

Le décollement de manche est un phénomène qui apparaît à l'entrée du moteur lorsque l'avion est proche du sol, en présence de vent de travers [26]. Il se matérialise par un décollement de la couche limite entraînant une forte diminution de la pression sur une zone importante du plan de la soufflante. Les aubes de la soufflante sont donc soumises à des pressions très variables de façon périodique, entraînant des niveaux vibratoires importants. Cependant, des études [115] ont permis de montrer que la présence du fan a tendance à faire recoller le fluide en lui apportant de l'énergie localement.

### **Vortex de sol**

Un vortex de sol est une source d'excitation aérodynamique de la soufflante du turboréacteur qui apparaît lorsque le tube de courant du flux d'air intersecte le sol. Cela engendre une chute de pression au sein du vortex, ainsi qu'une distorsion d'angle. La Figure I.6 représente un vortex de sol sur un moteur en fonctionnement. L'impact des vortex de sol sur les vibrations des turboréacteurs est encore assez peu connu et n'a fait l'objet que de peu de publications [35][54]. Cependant, il a fait l'objet d'une étude récente lors de la thèse de Berthelon [10] menée conjointement à cette thèse, et qui a permis de modéliser l'excitation engendrée par un vortex de sol sur les aubes de soufflantes, de même que leur impact sur la réponse vibratoire du système. Ce chargement aérodynamique sera étudié plus en détail dans l'application industrielle, Chapitre IV.



FIGURE I.6 – Vortex de sol sur un turboréacteur.

## 2.2 Dynamique d'un corps élastique en rotation

Afin d'étudier la dynamique des soufflantes de turboréacteur, il est nécessaire de poser les bases de la dynamique des systèmes en rotation. Cette section décrit la mise en donnée d'un problème élément-finis pour un solide élastique en rotation, définissant les notations utilisées dans la suite de ce manuscrit. Cela permettra aussi de mettre en évidence les phénomènes particuliers présents dans les structures en rotation.

### 2.2.1 Formulation continue

Soit un solide déformable de volume  $\Omega$  et de frontière  $\partial\Omega$  dans le repère fixe inertiel et orthonormé  $\mathcal{R}_f = (O_f, \mathbf{X}_f, \mathbf{Y}_f, \mathbf{Z}_f)$  représenté Figure I.7. Chaque particule  $P$  de ce solide est repérée par ses coordonnées  $\mathbf{x} = [X Y Z]_{\mathcal{R}_f}^T$  dans le repère  $\mathcal{R}_f$ .

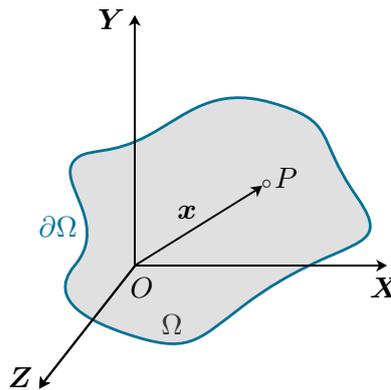


FIGURE I.7 – Solide déformable dans sa configuration de référence non déformée.

À l'instant initial, chaque particule du solide est soumise à un déplacement initial  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ . Les notations utilisées sont représentées sur la Figure I.7. La particule  $P$  se retrouve donc à la position  $P_{t=0}$  repérée par le vecteur  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  dans le repère mobile lié au solide  $\mathcal{R}_m = (O_m, \mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m)$

tel que :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

À l'instant  $t=0$ , le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  coïncide avec le repère fixe  $\mathcal{R}_f$ . À  $t > 0$ , le solide est mis en mouvement et déformé. Ainsi, la particule  $P$  se retrouve à la position  $P_{t>0}$  repérée par le vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  dans  $\mathcal{R}_f$ . De même, la position de la particule dans le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  est définie par  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

avec  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  le déplacement de la particule dans le repère  $\mathcal{R}_m$  dû à la déformation dynamique du solide, comme représenté sur la Figure I.8.

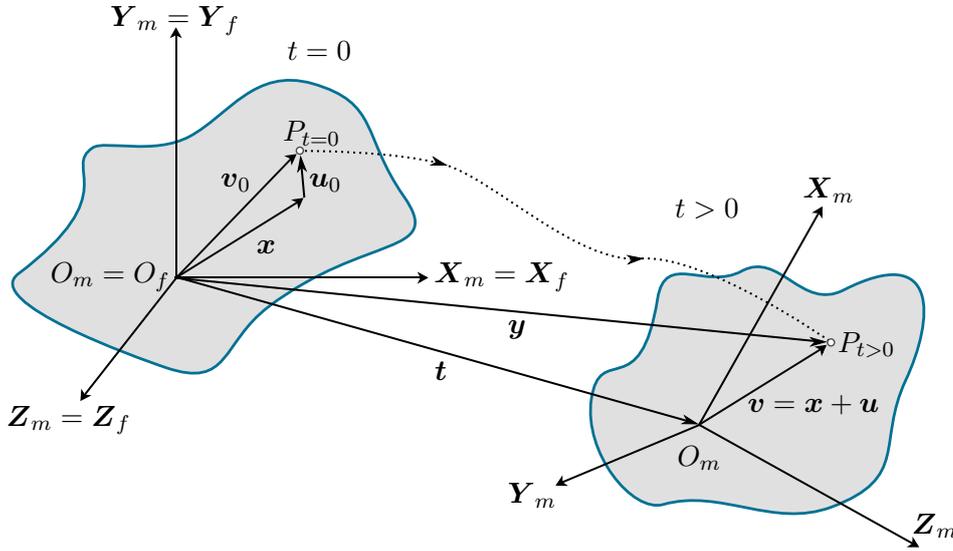


FIGURE I.8 – Solide déformable dans sa configuration initiale ( $t = 0$ ) et déformée ( $t > 0$ ).

Afin de définir la position de  $P_{t>0}$  à l'aide du vecteur  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  dans  $\mathcal{R}_f$ , il est nécessaire de définir le changement de repère de  $\mathcal{R}_f$  à  $\mathcal{R}_m$ . Le déplacement du repère mobile  $\mathcal{R}_m$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  peut s'exprimer comme la composition d'une translation  $\mathbf{t}(t) = [t_x, t_y, t_z]_{\mathcal{R}_f}^T$  de l'origine  $O_m$  du repère mobile  $\mathcal{R}_m$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  et d'une vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]_{\mathcal{R}_m}^T$  autour d'un axe passant par l'origine du repère mobile. La matrice de changement de repère  $\mathbf{R}(t)$  est composée des vecteurs de base du repère mobile exprimés dans le repère fixe. La matrice  $\mathbf{R}(t)$  vérifie  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  désigne la matrice identité, de par ses propriétés d'orthogonalité. Ainsi, la position de la particule  $P_{t>0}$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{t}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{t}(t) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

L'étude dynamique nécessite d'exprimer la vitesse de la particule  $P_{t>0}$  dans le repère fixe  $\mathcal{R}_f$  :

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{t}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.4})$$

où  $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Omega}(t)$  est la dérivée temporelle de la matrice de rotation exprimée à partir de la matrice antisymétrique  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  telle que :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

### 2.2.2 Discrétisation du problème – Principe d’Hamilton

L’utilisation du principe d’Hamilton permet d’obtenir l’équation du mouvement discrétisée matricielle. Le principe variationnel d’Hamilton exprime la stationnarité de l’énergie totale du système au cours du temps, entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta (\mathcal{W} - \mathcal{F}) dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

où  $\mathcal{T}$  est l’énergie cinétique du système,  $\mathcal{V}$  est l’énergie potentielle totale,  $\mathcal{W}$  est le travail des forces extérieures et  $\mathcal{F}$  est le travail des forces de dissipation ou fonction de dissipation.

#### Énergie cinétique

L’énergie cinétique  $\mathcal{T}$  du système dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_f$  s’exprime :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} d\Omega \quad (\text{I.7})$$

En remplaçant  $\dot{\mathbf{y}}$  à partir de l’équation (I.4), l’énergie cinétique peut s’exprimer à l’aide des déplacements  $\mathbf{u}$  dans le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{R}\dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R}\dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}) d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{t}}^T \dot{\mathbf{t}} + 2\dot{\mathbf{t}}^T \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

#### Énergie potentielle

L’énergie potentielle de déformation  $\mathcal{V}$  s’exprime :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (\text{I.9})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur des déformations.

Afin de considérer les effets non-linéaires géométriques dans l’équilibre statique du système, détaillé section I.2.2.3, il est nécessaire d’utiliser une loi matériau de type Saint-Venant-Kirchhoff [133]. Ainsi, la relation entre le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I.10})$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]$  est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff II,  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}]$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange.  $\mathbf{D}$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4, simplifié de par ses propriétés d'isotropie et défini tel que :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & 0 & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

avec les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  définis tels que :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{I.12})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.13})$$

avec  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau composant la structure. Dans le cadre de non-linéarités géométriques pour le calcul de précharge, le tenseur de Green-Lagrange s'exprime :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla^T \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \quad (\text{I.14})$$

En définissant les opérateurs  $\nabla$  de dérivation linéaire et  $\nabla_{\mathbf{u}}$  de dérivation non-linéaire :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad \nabla_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\ 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ 2 \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & 2 \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

le tenseur de Green-Lagrange défini équation (I.14) peut être ré-exprimé :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \nabla + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}} \right) \mathbf{u} \quad (\text{I.16})$$

En injectant les équations (I.10) et (I.16) dans l'équation (I.9), on obtient l'énergie potentielle de déformation du système :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \left( \nabla^T + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}}^T \right) \mathbf{D} \left( \nabla + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}} \right) \mathbf{u} \, d\Omega \quad (\text{I.17})$$

### Travail des forces extérieures

Le travail des forces extérieures volumiques  $\mathbf{f}_v$  et surfaciques  $\mathbf{f}_s$  est défini tel que :

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s \, d(\partial\Omega) \quad (\text{I.18})$$

### Travail des forces de dissipation

En considérant un amortissement visqueux de coefficient  $\eta$ , le travail des forces de dissipation peut s'exprimer :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{D} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \quad (\text{I.19})$$

### Équation de Lagrange

En utilisant une approximation de Rayleigh-Ritz pour les déplacements de la structure, les déplacements continus  $\mathbf{u}$  peuvent être décomposés à l'aide de fonctions de forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \quad (\text{I.20})$$

où  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  correspond aux fonctions de forme de l'espace cinématiquement admissibles et  $\mathbf{q}(t)$  est le vecteur des coordonnées généralisées, correspondant aux nouvelles inconnues du problème. En notant  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$  le Lagrangien du système, le principe d'Hamilton exprimé équation (I.6) peut être réécrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{I.21})$$

Il est alors possible d'obtenir l'équation du mouvement discrétisée par substitution des différents termes exprimés précédemment, dans le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) + \mathbf{P} + \mathbf{N}) \mathbf{q} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{\Omega} \quad (\text{I.22})$$

avec

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.23})$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \eta (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \quad (\text{I.24})$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} 2\rho \mathbf{H}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.25})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega \quad (\text{I.26})$$

$$\mathbf{K}_g(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_q(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_c(\mathbf{q}) \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{K}_q(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q}) \, d\Omega \quad (\text{I.28})$$

$$\mathbf{K}_c(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q}) \, d\Omega \quad (\text{I.29})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.30})$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.31})$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_v \mathbf{H} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_s \mathbf{H} \, d(\partial\Omega) \quad (\text{I.32})$$

$$\mathbf{F}_{\Omega} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T (\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{x} - \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega \quad (\text{I.33})$$

$\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement,  $\mathbf{G}$  est la matrice de Coriolis aussi appelée matrice gyroscopique quand le problème est exprimé dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_f$ ,  $\mathbf{K}$  la

matrice de raideur,  $\mathbf{K}_g$  la matrice correspondant aux non-linéarités géométriques ( $\mathbf{K}_q$  étant la partie quadratique et  $\mathbf{K}_c$  la partie cubique),  $\mathbf{P}$  la matrice d'accélération angulaire et  $\mathbf{N}$  la matrice d'assouplissement centrifuge.  $\mathbf{F}_{ext}$  est le vecteur des forces extérieures appliquées au système et  $\mathbf{F}_\Omega$  est le vecteur des excitations indirectes dues au mouvement du système de coordonnées  $\mathcal{R}_m$ .

Comme les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{\Omega}$  sont respectivement symétrique et antisymétrique, les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{N}$  sont symétriques par construction.  $\mathbf{M}$  est définie positive,  $\mathbf{K}$  est semi-définie positive et  $\mathbf{N}$  est semi-définie négative, ce qui induit une diminution des pulsations propres du système et justifie le terme de matrice d'assouplissement centrifuge. Les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P}$  sont quant à elles antisymétriques. La matrice  $\mathbf{K}_g$  représentant les effets non-linéaires géométriques issus du tenseur de Green-Lagrange, a quant à elle un effet raidissant sur la structure.

### 2.2.3 Equilibre du système préchargé en rotation

Les études présentées dans ce mémoire se placent dans le cadre d'une vitesse de rotation constante, i.e.  $\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$ . De plus, le repère mobile  $\mathcal{R}_m$  est en pure rotation, donc les origines  $O_f$  et  $O_m$  des repères  $\mathcal{R}_f$  et  $\mathcal{R}_m$  sont confondues et le vecteur translation  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ . Enfin, les effets gyroscopiques seront considérés négligeables dans la suite de ce manuscrit, ainsi :

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (\text{I.34})$$

$$\mathbf{F}_\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{x} d\Omega \quad (\text{I.35})$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (\text{I.36})$$

Dans le cadre de l'étude des systèmes en rotation, on considère le comportement dynamique autour de la position d'équilibre statique due au chargement centrifuge. La solution du problème peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}(t) \quad (\text{I.37})$$

où  $\mathbf{p}$  est l'inconnue dynamique et  $\mathbf{q}_0$  la position d'équilibre en rotation, vérifiant :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}_0) + \mathbf{N}) \mathbf{q}_0 = \mathbf{F}_\Omega \quad (\text{I.38})$$

De plus, en notant  $\mathbf{f}_g$  l'effort associé à la raideur non-linéaire  $\mathbf{K}_g$  tel que :

$$\mathbf{f}_g(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{q} \quad (\text{I.39})$$

il est alors possible d'utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 des efforts autour de la position d'équilibre  $\mathbf{q}^0$ , faisant apparaître la jacobienne de l'effort non-linéaire :

$$\mathbf{f}_g(\mathbf{q}^0 + \mathbf{p}) = \mathbf{f}_g(\mathbf{q}^0) + \frac{\partial \mathbf{f}_g}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0) \mathbf{p} \quad (\text{I.40})$$

En injectant cette équation (I.40) et l'équation d'équilibre statique (I.38) dans l'équation du mouvement (I.22), on obtient l'équation du mouvement autour de la position d'équilibre préchargée :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_\Omega \mathbf{p} = \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{I.41})$$

avec

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{K} + \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{f}_g}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0) \quad (\text{I.42})$$

où  $\mathbf{K}_\Omega$  est la matrice de raideur tangente du système en  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$ . La matrice  $\mathbf{N}$  a un effet assouplissant alors que le terme  $\frac{\partial \mathbf{f}_g}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^0)$  a un effet rigidifiant sur la structure. L'assouplissement diminue donc les fréquences propres du système alors que la rigidification vient les augmenter. Ces deux effets sont du même ordre de grandeur. Cependant, en pratique on observe une prépondérance de la rigidification et donc une augmentation des fréquences propres avec l'augmentation de la vitesse de rotation.

### 2.3 Notion de symétrie cyclique

Les roues aubagées sont des structures dites à symétrie cyclique. Cela signifie que leur géométrie peut être décomposée en un nombre fini de sous-structures identiques se refermant sur elles-mêmes, appelées secteurs. La Figure I.9 représente le schéma d'une roue aubagée simplifiée complète, composée de 16 secteurs identiques. La roue aubagée complète peut alors être obtenue par répétition circulaire du secteur de référence autour de l'axe de rotation de la roue, correspondant à l'axe de révolution. La prise en compte des propriétés de symétrie cyclique des roues aubagées permet d'étudier uniquement un secteur de référence au lieu de la roue aubagée complète, en utilisant les propriétés mathématiques associées aux conditions de symétrie. Cela donne la possibilité de reconstruire la réponse exacte de la structure entière, à partir des résultats sur le secteur de référence. Cette méthode permet donc de réduire considérablement la taille des modèles considérés, et donc les temps de calcul associés.

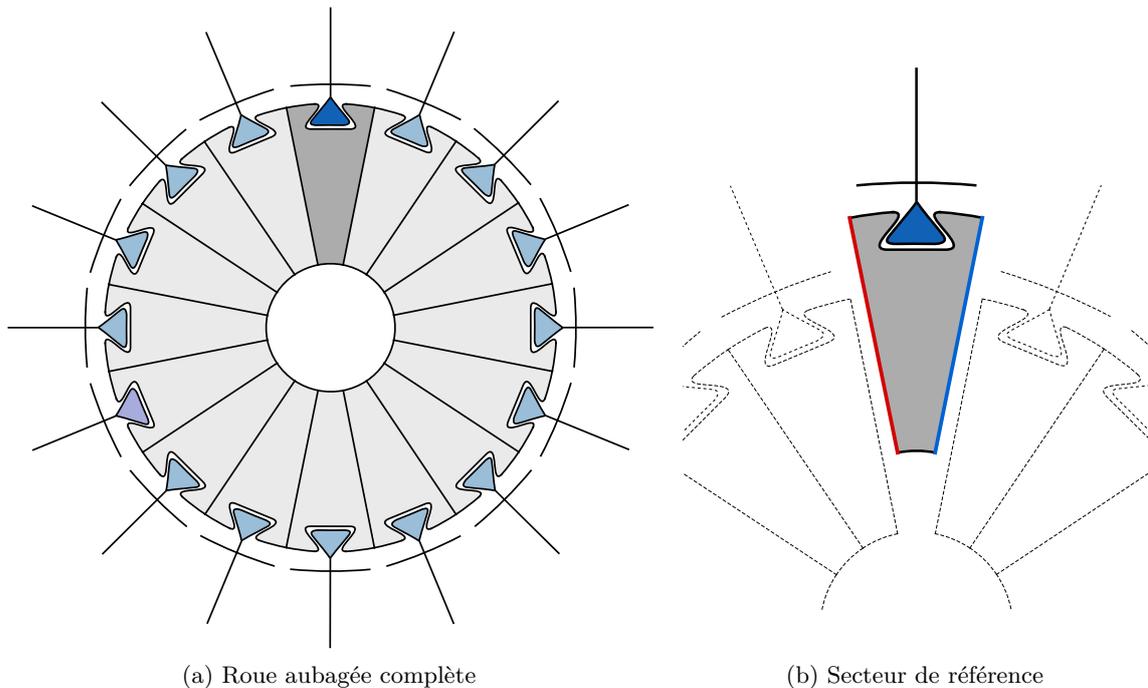


FIGURE I.9 – Schéma simplifié d'une roue aubagée présentant des propriétés de symétrie cyclique.

Cette section a pour objectif de présenter les outils mathématiques permettant de modéliser uniquement un secteur de la structure, ainsi que les limitations de cette simplification, notamment la notion de désaccordage.

### 2.3.1 Formulation du problème en base cyclique

L'omniprésence des structures à symétrie cyclique dans les systèmes en rotation a conduit à de nombreuses recherches sur ce sujet, dont les travaux de Thomas [125], Wildheim [131][130] ou Henry qui font référence dans ce domaine. Considérons une structure à symétrie cyclique composée de  $N_S$  secteurs numérotés de 0 à  $N_S - 1$ . Chaque secteur a donc un angle d'ouverture de  $\alpha = 2\pi/N_S$ .

#### Notion de composantes cycliques

En notant  $\mathbf{u}$  le champ de déplacement de la structure, exprimé dans le repère tournant pour s'affranchir des termes périodiques temporels, et  $\mathbf{u}_j$  sa restriction au secteur  $j$ , les propriétés de périodicité s'écrivent :

$$\mathbf{u}_{j+N_S} = \mathbf{u}_j, \quad \forall j \in \llbracket 0, N_S - 1 \rrbracket \quad (\text{I.43})$$

La théorie des groupes cycliques introduite par Valid et Ohayon [127] permet d'exprimer le champ de déplacement du secteur  $j$ ,  $\mathbf{u}_j$ , comme une superposition de fonctions harmoniques :

$$\mathbf{u}_j = \sum_{k=0}^{N_S-1} e^{ijk\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_0^k \quad (\text{I.44})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$  sont l'ensemble des amplitudes harmoniques d'ordre  $k$ , appelée *composante cyclique* d'ordre  $k$ . La composante cyclique d'ordre  $k$  est de nature complexe, et peut se décomposer en parties réelle et imaginaire :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^k = \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,c} + i\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,s} \quad (\text{I.45})$$

Les composantes cycliques constituent la *base cyclique*, qu'il est possible d'exprimer à l'aide de la relation inverse à l'équation (I.44) :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0^k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_S-1} \mathbf{u}_j e^{-ijk\alpha} \quad (\text{I.46})$$

Les relations (I.44) et (I.46) permettent alors de passer de la base physique à la base cyclique, et inversement. Elles correspondent à des transformées de Fourier spatiales, pouvant aussi être exprimées dans le domaine des réels à l'aide de la décomposition en parties réelles et imaginaires des composantes cycliques  $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$  (I.45), tel que :

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}_0^0 + \sum_{k=0}^K \left( \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,c} \cos(jk\alpha) + \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,s} \sin(jk\alpha) \right) + (-1)^j \tilde{\mathbf{u}}_0^{N_S/2} \quad (\text{I.47})$$

Il est à noter que le dernier terme de l'équation n'est utilisé que lorsque le nombre de secteurs  $N_S$  est pair, donc :

$$K = \begin{cases} \frac{N_S}{2} - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ \frac{N_S-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

A l'inverse, il est possible d'exprimer les composantes de la base cyclique telles que :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}_0^0 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_S-1} \mathbf{u}_j \\
\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,c} &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N_S-1} \mathbf{u}_j \cos(jk\alpha) \\
\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,s} &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N_S-1} \mathbf{u}_j \sin(jk\alpha) \\
\tilde{\mathbf{u}}_0^{N_S/2} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_S-1} (-1)^j \mathbf{u}_j
\end{aligned} \tag{I.49}$$

Il est aussi possible d'écrire l'équation (I.47) sous forme matricielle, plus compacte et pratique numériquement :

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}} \tag{I.50}$$

où le vecteur  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement physique complet :

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_j \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N_S}]^T \tag{I.51}$$

et  $\tilde{\mathbf{u}}$  est la base cyclique composée de l'ensemble des composantes cycliques sur le secteur 0, telle que :

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{\mathbf{u}}_0^0 \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{1,c} \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{1,s} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,c} \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,s} \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_0^{N_S/2}]^T \tag{I.52}$$

Ainsi, la matrice de transformée de Fourier  $\mathbf{F}$ , s'exprime :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) & \cdots & \sin(K\alpha) & -1 \\
1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(4\alpha) & \cdots & \sin(2K\alpha) & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & \cos((N_S-1)\alpha) & \sin((N_S-1)\alpha) & \cos((N_S-1)2\alpha) & \cdots & \cos((N_S-1)K\alpha) & (-1)^{N_S-1}
\end{pmatrix} \tag{I.53}$$

dont la dernière colonne n'existe que si  $N_S$  est pair.

La modélisation en base cyclique est applicable à toutes les grandeurs physiques de la structure. Cette modélisation permet de représenter l'ensemble de la structure à partir de composantes cycliques définies sur un secteur de référence et d'un indice harmonique  $k$ . Cette méthode permet d'obtenir exactement les mêmes résultats que si le problème était traité sur l'ensemble de la roue. De plus, les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques assurent que tous les sous-problèmes d'harmonique spatiale  $k$  sont décorrélés les uns des autres. Le modèle est donc partitionné par type d'onde se propageant dans la structure, ce qui permet de traiter uniquement les sous-problèmes d'intérêt, dont la taille est beaucoup plus faible que celle du modèle d'origine.

### Formulation du problème en base cyclique

En considérant un problème modélisé par la méthode des éléments finis dont chaque secteur a un maillage identique, il est alors possible d'exprimer les matrices structurelles en base cyclique.

Comme la construction des matrices en base cyclique est la même pour l'ensemble des matrices structurales, les développements suivants seront exprimés sur une matrice  $\mathbf{A}$ , correspondant à la matrice de masse, de raideur, ou d'amortissement. Dans un premier temps, en notant  $\mathbf{u}$  le vecteur des déplacements discrétisés et  $\tilde{\mathbf{u}}$  le vecteur des déplacements dans la base cyclique, on peut exprimer la relation suivante :

$$\mathbf{u} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.54})$$

où  $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité de taille  $n$ ,  $n$  est le nombre de degrés de liberté d'un secteur et  $\otimes$  le produit de Kronecker. La matrice  $\mathbf{A}$  représente l'ensemble de la structure. Elle est donc définie diagonale par bloc à l'aide des sous-matrices représentant chaque secteur :

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_j, \forall j \in \llbracket 0, N_S - 1 \rrbracket) \quad (\text{I.55})$$

De plus, chaque sous-structure possédant les mêmes propriétés mécaniques, toutes les matrices  $\mathbf{A}_j$  sont identiques. Il est donc possible d'exprimer la matrice  $\mathbf{A}$  à partir de sous-matrices du secteur de référence :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_{N_S} \otimes \mathbf{A}_0) \quad (\text{I.56})$$

Cette notation implique pour le moment que les secteurs sont disjoints, et que chaque secteur est traité indépendamment des secteurs voisins. Les conditions aux limites cycliques entre les secteurs permettant de reconstruire le comportement dynamique de la structure complète seront exprimées dans la section suivante.

En utilisant la transformée de Fourier présentée équation (I.54), la matrice  $\mathbf{A}$  peut être exprimée en base cyclique :

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{I}_{N_S} \otimes \mathbf{A}_0)(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \quad (\text{I.57})$$

Les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques impliquent que la projection en base cyclique de la matrice  $\mathbf{A}$  est également diagonale par bloc, où chaque bloc représente l'onde  $k$  considérée :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{A}}^k, \forall k \in \llbracket 0, N_S/2 \rrbracket) \quad (\text{I.58})$$

Il est alors possible d'exprimer chacun des sous-blocs par rapport au secteur de référence :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}^k = N_S \mathbf{A}_0 & \text{si } k \in \llbracket 0, N_S/2 \rrbracket \\ \tilde{\mathbf{A}}^k = \frac{N_S}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} & \text{si } k \in \llbracket 1, K \rrbracket \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  est donc une décomposition en sous-problèmes indépendants pour chaque indice harmonique  $k$ . De plus, les sous-blocs de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  ne sont plus exprimés à partir d'une transformée de Fourier, mais uniquement à l'aide de la matrice  $\mathbf{A}_0$  du secteur de référence, ce qui rend leur expression facile à obtenir. Enfin, les sous-problèmes pour les harmoniques 0 et  $N_S/2$  sont de taille  $n$ , et les autres sous-problèmes sont de taille double  $2n$ , ce qui permet de diminuer fortement le nombre d'inconnues par rapport au modèle complet.

### Conditions aux limites cycliques

Afin de compléter les étapes précédentes de la formulation du problème en base cyclique, il est nécessaire d'ajouter des conditions aux limites sur les degrés de liberté des frontières entre les secteurs. Cette étape permet d'assembler les comportements vibratoires des secteurs adjacents, en imposant des déplacements communs aux surfaces à l'interface entre les frontières. La Figure I.10 représente les notations utilisées pour les déplacements aux frontières. Les conditions de symétrie cyclique seront exprimées pour le disque, l'aube n'ayant pas de conditions de symétrie cyclique.

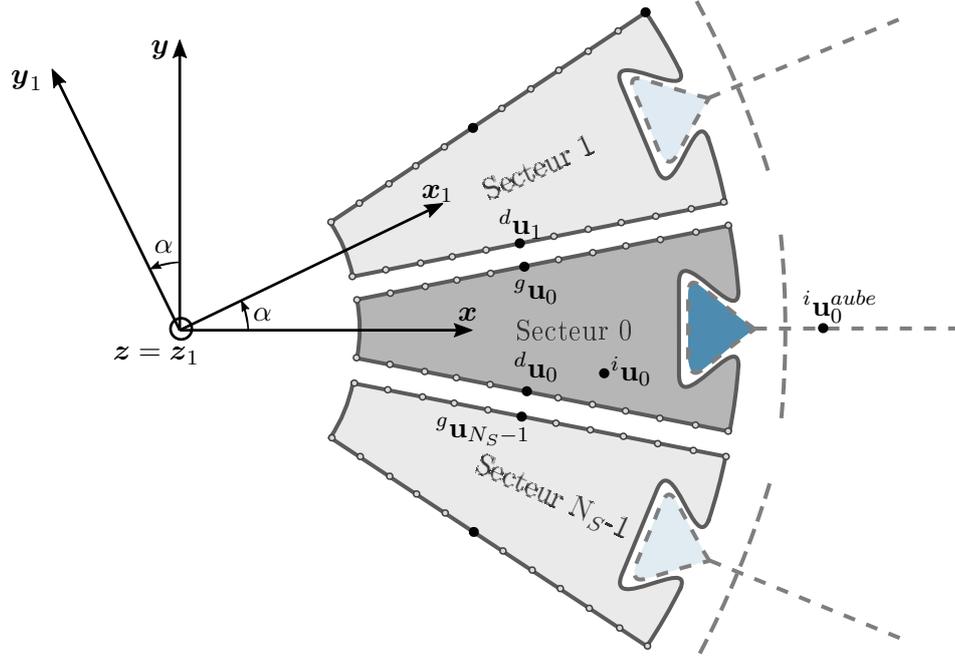


FIGURE I.10 – Conditions limites aux frontières entre les secteurs.

Les degrés de liberté du secteur sont d'abord séparés entre les degrés internes  $^i \mathbf{u}_0$ , les degrés appartenant à la frontière gauche  $^g \mathbf{u}_0$  et ceux appartenant à la frontière droite  $^d \mathbf{u}_0$ . Le vecteur des déplacements du secteur 0 est alors réorganisé :

$$\mathbf{u}_0 = \left[ ^g \mathbf{u}_0 \quad ^d \mathbf{u}_0 \quad ^i \mathbf{u}_0 \right]^T \quad (\text{I.60})$$

Les conditions de continuité en base physique imposent :

$$\begin{aligned} ^g \mathbf{u}_0 &= ^d \mathbf{u}_1 \\ ^d \mathbf{u}_0 &= ^g \mathbf{u}_{N_S-1} \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

En utilisant les formulations cycliques des déplacements obtenus équation (I.44), les conditions de continuité en base cyclique s'écrivent :

$$\begin{aligned} ^g \tilde{\mathbf{u}}_0^k &= ^d \tilde{\mathbf{u}}_0^k e^{ik\alpha} \\ ^d \tilde{\mathbf{u}}_0^k &= ^g \tilde{\mathbf{u}}_{N_S-1}^k e^{i(N_S-1)k\alpha} \end{aligned} \quad (\text{I.62})$$

Les deux équations (I.62) sont alors équivalentes et ne font intervenir que le secteur de référence en couplant ces deux frontières. Il a donc été choisi de conserver la première équation (I.62)

pour assurer la propagation des ondes entre les secteurs. Les conditions inter-secteur sont alors exprimées suivant l'indice harmonique  $k$  telles que :

$$\begin{cases} g\tilde{\mathbf{u}}_0^k & = d\tilde{\mathbf{u}}_0^k & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} g\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \\ g\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \end{pmatrix} & = \begin{bmatrix} \cos(k\alpha) & \sin(k\alpha) \\ -\sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \\ d\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \end{pmatrix} & \text{si } k \in \llbracket 1, K \rrbracket \\ g\tilde{\mathbf{u}}_0^k & = -d\tilde{\mathbf{u}}_0^k & \text{si } k = N_S/2 \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

Ces conditions de symétrie sont alors appliquées aux matrices structurales des sous-problèmes, finalisant la formulation en base cyclique.

### Modélisation de l'aube en base cyclique

Dans la suite de ce manuscrit, il sera nécessaire de pouvoir assembler l'aube et le disque pour traiter des problèmes dynamiques de contact aube-disque. Cependant, le disque est construit en symétrie cyclique, alors que l'aube est un solide indépendant ne possédant pas de propriétés de symétrie cyclique. Afin de réaliser l'assemblage, l'aube est considérée comme un solide en symétrie cyclique ayant uniquement des degrés de liberté internes  ${}^i\mathbf{u}_0^{aube}$ . Ainsi, il est possible d'utiliser la théorie présentée précédemment, sans lui appliquer de conditions aux limites cycliques.

#### 2.3.2 Problèmes en base cyclique

La théorie de la symétrie cyclique présentée dans la section précédente a permis de montrer qu'il est possible de décomposer le problème complet en sous-problème suivant l'harmonique  $k$  considérée, en appliquant la transformée de Fourier discrète (I.54) et les conditions de symétrie cycliques (I.63). L'équation du mouvement (I.22) peut donc être réexprimée en terme de composantes cycliques :

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_0^k(t) + \tilde{\mathbf{C}}^k \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0^k(t) + \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\mathbf{u}}_0^k(t) = \tilde{\mathbf{F}}_{ext}^k(t), \quad \forall k \in \llbracket 0, N_S/2 \rrbracket \quad (\text{I.64})$$

où les matrices  $\tilde{\mathbf{M}}^k$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^k$  et  $\tilde{\mathbf{K}}^k$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur en base cyclique à l'harmonique  $k$ .  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}^k$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_0^k$  sont respectivement les efforts extérieurs cycliques et le vecteur des déplacements du secteur de référence en composantes cycliques, à l'indice harmonique  $k$ .

#### Problème aux valeurs propres

L'analyse modale du système en base physique est réalisée en recherchant les valeurs propres et vecteurs propres du système libre, en résolvant :

$$\left( \mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M} \right) \Phi = 0 \quad (\text{I.65})$$

De manière analogue, il est possible de réaliser une analyse modale en base cyclique, en résolvant  $K + 1$  problèmes aux valeurs propres, suivant chaque indice harmonique  $k$  :

$$\left( \tilde{\mathbf{K}}^k - \lambda^2 \tilde{\mathbf{M}}^k \right) \tilde{\Phi}^k = 0 \quad (\text{I.66})$$

Il existe alors deux types de problèmes, les solutions non-dégénérées et les solutions dégénérées. Les sous-problèmes aux valeurs propres associés aux indices harmoniques  $k = 0$  et  $k = N_S/2$  sont

de dimension  $n$ . La multiplicité de la valeur propre est alors de 1 et les modes sont dit simples, ou non-dégénérés. Le problème pour les indices harmoniques  $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$  est de taille double, et comporte  $2n$  solutions. Les valeurs propres sont alors de multiplicité égale à 2. On parle de modes doubles, ou dégénérés. Dans ce cas, le sous-espace propre est composé de deux vecteurs propres orthogonaux. Cependant, les modes doubles ne sont plus orthogonaux lorsque les effets gyroscopiques sont non-négligeables. Les fréquences et les déformées des deux modes deviennent alors différentes. Dans ce manuscrit, les effets gyroscopiques seront considérés comme négligeables. La dégénérescence permet de mettre en évidence un phénomène particulier des roues aubagées, à savoir la notion d'onde tournante, la combinaison des deux vecteurs propres d'un mode dégénéré pouvant engendrer une onde tournante se propageant dans la structure.

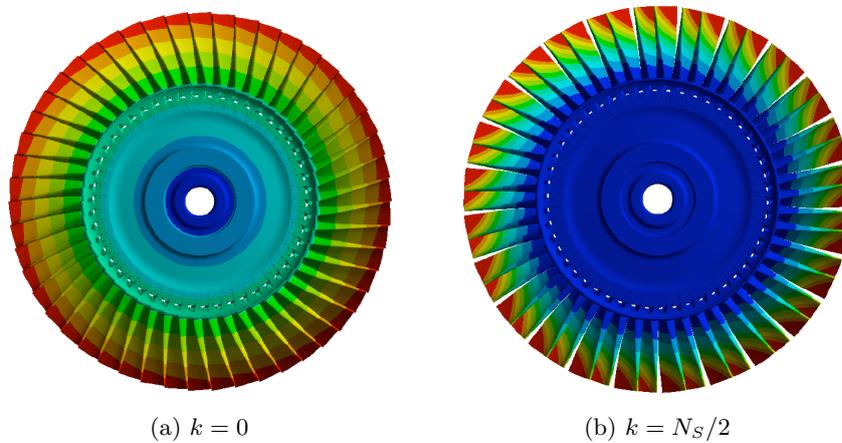


FIGURE I.11 – Déformées modales des modes simples, d'après [63].

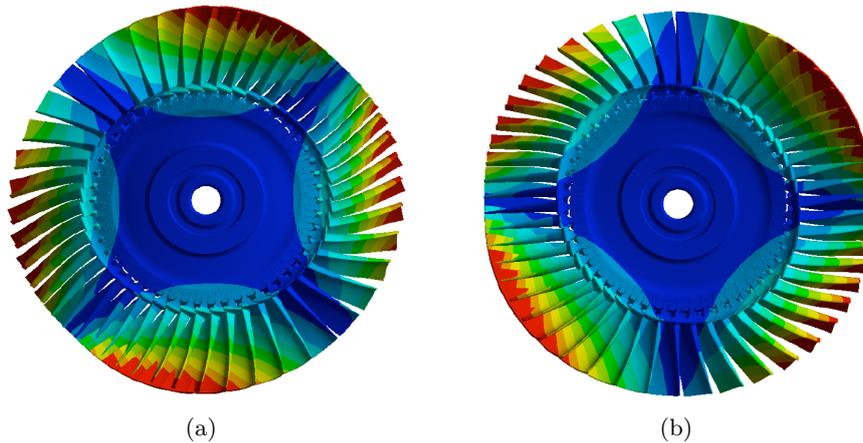


FIGURE I.12 – Déformées modales orthogonales d'un mode double pour l'indice harmonique  $k = 2$ , d'après [63].

La Figure I.11 représente les déformées modales pour les indices harmoniques  $k = 0$  et  $k = N_s/2$ . Dans le cas de l'indice harmonique  $k = 0$ , tous les secteurs sont en phase. A l'inverse, pour l'harmonique  $k = N_s/2$ , deux secteurs adjacents sont en opposition de phase. La Figure I.12

représente les déformées modales d'un mode double pour l'indice harmonique  $k = 2$ . On observe alors la présence de deux axes de symétrie, appelés *diamètres nodaux*. Le nombre de diamètres nodaux correspond toujours à l'indice harmonique  $k$ , le terme *mode à diamètre* est alors souvent utilisé pour caractériser l'indice harmonique.

### Réponse forcée

De la même manière que pour l'analyse modale, les problèmes de réponses forcées peuvent être traités indépendamment par sous-problèmes. De plus, dans ce cas il est possible de se limiter aux indices harmoniques  $k$  d'intérêt, dont le terme d'excitation  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}^k$  est non-nul. Par conséquent, cette méthode permet de diminuer fortement la taille du problème et est de plus propice aux calculs parallèles.

### 2.3.3 Notion de désaccordage

L'hypothèse de symétrie cyclique présentée dans la section précédente permet d'importants gains en temps de calcul. En pratique, il est cependant courant que les résultats obtenus en utilisant les hypothèses de symétrie cyclique ne permettent pas de recoller avec des résultats expérimentaux. L'hypothèse de symétrie cyclique implique que tous les secteurs soient identiques, mais du fait des imperfections dues à la fabrication, des hétérogénéités matériau, ou encore de l'usure en fonctionnement, les secteurs ne sont jamais véritablement identiques. Ces hétérogénéités entre les secteurs sont appelées *désaccordage* et donnent lieu à des phénomènes particuliers, qu'il peut être nécessaire de prendre en compte pour obtenir des résultats plus proches de la réalité. En effet, même un faible désaccordage peut avoir un impact significatif sur le comportement dynamique global d'une roue aubagée.

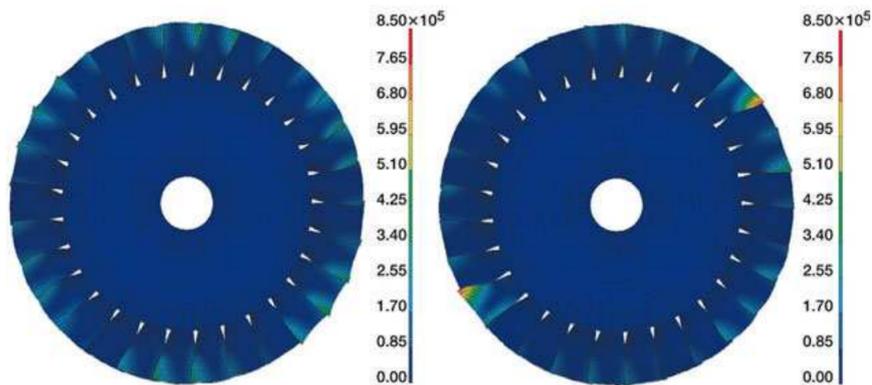


FIGURE I.13 – Déformées modales d'une roue aubagée accordée (à gauche) et désaccordée (à droite), représentant le phénomène de localisation de l'énergie vibratoire. [source Siemens].

Le taux de désaccordage est souvent quantifié à l'aide de l'écart type en fréquence propre par rapport à la valeur nominale. Il est alors possible de tracer le facteur d'amplification en amplitude par rapport à la structure accordée, en fonction de l'intensité du désaccordage, comme représenté sur la Figure I.14 [40]. Un des effets du désaccordage couramment observé est la localisation

de l'énergie vibratoire sur certains secteurs [106], induisant une amplification importante de l'amplitude, pouvant aller jusqu'à deux fois l'amplitude observée sur une structure accordée. La Figure I.13 représente ce phénomène de localisation en comparant les déformées d'une roue aubagée accordée et désaccordée. La Figure I.14 montre qu'un maximum d'amplification est atteint pour un taux de désaccordage faible. Ce maximum peut scinder la courbe en deux parties. La première partie de la courbe est relativement raide et implique donc une grande sensibilité. La deuxième partie de la courbe est plus lisse, où les variations du taux de désaccordage impliquent de faibles variations de l'amplification. En pratique, il a été observé que le désaccordage involontaire se situe principalement dans la première partie de la courbe, induisant donc de fortes amplifications de l'amplitude. Ainsi, afin de se placer dans la deuxième partie de la courbe, il peut être intéressant d'introduire du désaccordage appelé intentionnel, visant à casser volontairement la symétrie cyclique en modifiant certains secteurs de la roue aubagée [20][25]. L'optimisation des schémas de désaccordage intentionnel, notamment en modifiant les caractéristiques modales de la roue et la répartition des secteurs modifiés, a donné lieu à de nombreux travaux [14][15][68][121]. De plus, il a été montré que le désaccordage intentionnel peut avoir des effets positifs en augmentant la robustesse dans le cas d'instabilités aéroélastiques [73].

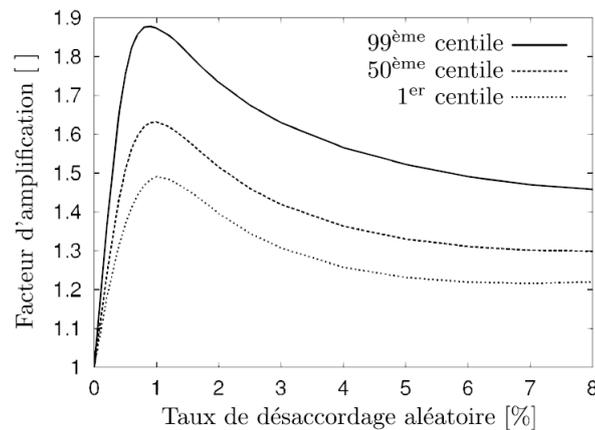


FIGURE I.14 – Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage, d'après [21].

La modélisation du désaccordage implique cependant de considérer le modèle complet de roue aubagée, sans utiliser d'hypothèse de symétrie cyclique. Différentes méthodes de réduction de modèles dans le cas de roues aubagées désaccordées ont alors été développées, notamment via l'utilisation de bases de modes propres linéaires [8][90] ou non-linéaires [64]. Cependant, ces techniques étant couteuses en temps de calcul et complexes de mise en œuvre, les problèmes de désaccordage ne seront pas traités dans la suite de ce manuscrit. La roue aubagée sera considérée accordée de manière à permettre l'utilisation des hypothèses de symétrie cyclique et de simplifier les calculs dynamiques, l'intérêt de ces travaux étant de se focaliser sur le comportement au niveau du contact aube-disque.

## 2.4 Non-linéarités

Les roues aubagées sont des structures complexes, dans lesquelles de nombreux comportements non-linéaires peuvent apparaître. Même si les comportements non-linéaires sont souvent négligés ou linéarisés dans un but de simplification des modélisations, les besoins croissants en précision dans les calculs nécessitent maintenant de prendre en compte ces non-linéarités afin de représenter au mieux le comportement réel des structures considérées. Dans le cas de l'étude vibratoire des soufflantes de turboréacteurs, les non-linéarités principales sont les effets non-linéaires géométriques, les non-linéarités matériau ou encore les problèmes de contact (décrits dans la section suivante I.3).

Les aubes de soufflantes étant de taille de plus en plus grande, et d'une souplesse accrue par leur géométrie et les matériaux les composant, l'hypothèse des faibles perturbations peut s'avérer invalidée. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte l'expression complète du tenseur des déformations. Cela ajoute donc un terme à l'équation du mouvement sous forme d'un effort non-linéaire. Cet effort non-linéaire est composé de termes polynomiaux quadratiques ou cubiques en déplacement [55]. Ce sujet fait actuellement l'objet de nombreuses études, de par la tendance à l'agrandissement des aubages engendrant des effets non-linéaires géométriques importants. Ainsi, des recherches ont permis de mettre en évidence ces non-linéarités sur des structures minces et élancées de type aube de soufflante [126][89]. Dans la suite de ce manuscrit, les comportements non-linéaires géométriques ne seront pas pris en compte, ceux-ci ayant un effet négligeable sur les aubes de soufflantes traitées ici.

## 3 Contact aube-disque

Le contact constitue une des non-linéarités principales à prendre en compte pour la modélisation des roues aubagées en dynamique vibratoire. En effet, le frottement dans ces zones entraîne une dissipation d'énergie importante, et donc une diminution des niveaux vibratoires. Cette section vise à décrire les différentes zones de contact présentes sur les roues aubagées en s'intéressant particulièrement au contact aube-disque. Les lois de contact et de frottement utilisées couramment seront ensuite explicitées avant de décrire plus précisément les problématiques de fretting, ces phénomènes étant à la base de ces travaux de thèse.

### 3.1 Zones de contact dans les roues aubagées

Les roues aubagées sont composées d'aubes autour d'un disque. La méthode la plus simple pour réaliser ce montage est d'usiner le disque et les aubes séparément, puis de les assembler via des assemblages en queue d'aronde ou en sapin, comme représenté Figure I.15. Ce type de montage est appelé : roue à pales rapportées. Le disque est alors creusé d'alvéoles où les pales viennent se loger. Le choix entre un assemblage en queue d'aronde (Figure I.16a) ou en queue de sapin (Figure I.16b) dépend du type d'aube et des efforts centrifuges et thermiques qu'il devra subir. La géométrie des pieds d'aubes est ainsi conçue pour répartir au mieux les efforts engendrés par le chargement centrifuge. Les nouvelles technologies d'usinage ont permis l'émergence des

roues aubagées monobloc, où le disque et les aubes ne forment qu'une seule et même pièce. Le rendement aérodynamique de ces roues monobloc est nettement plus élevé que celui des roues à pales rapportées, et elles tendent donc à se généraliser. Les roues à pales rapportées présentent cependant certains avantages par rapport aux disques aubagés monobloc (*DAM*), illustré Figure I.15b. En effet, elles permettent d'assembler les aubes avec un disque dont le matériau est différent. De plus, le contact frottant dans l'alvéole permet de diminuer la réponse vibratoire par dissipation d'énergie.



(a) Pales rapportées



(b) DAM

FIGURE I.15 – Roue aubagée à pales rapportées et disque aubagé monobloc (DAM).



(a) Queue d'arronde



(b) Sapin

FIGURE I.16 – Formes des pieds d'aubes en queue d'arronde (a) et en sapin (b).

Il existe d'autres zones de contact dans les roues aubagées, dont l'objectif est principalement le contrôle passif des vibrations, que ce soit par rigidification afin de décaler les fréquences propres, ou par dissipation d'énergie par frottement. Un exemple de système de rigidification est l'utilisation de nageoires ou de pales à talons, entraînant un contact entre les aubes en tête de pale. Les nageoires, illustrées Figure I.4a sont des excroissances placées sur un rayon intermédiaire pour des pales relativement grandes. Elles tendent cependant à disparaître, du fait de leur position au milieu du flux d'air. Les talons, Figure I.17a sont quant à eux placés en tête de pale. Lors du fonctionnement du moteur, le dévissage des pales dû au chargement centrifuge vient mettre en contact ces excroissances entre elles, ce qui vient rigidifier l'ensemble et donc modifier les fréquences des aubages. D'autres dispositifs ont eux pour objectif d'amortir les niveaux vibratoires par dissipation d'énergie par frottement. On peut notamment citer les amortisseurs sous-plateformes ou les jons

de friction. Les amortisseurs sous-plateformes sont des pièces qui viennent se placer sous les plateformes des aubes, comme représenté Figure I.17b. Sous l'effet du chargement centrifuge, elles viennent se plaquer entre deux aubes, dissipant ainsi de l'énergie par frottement, et modifiant les fréquences de la roue. Les jons de friction, Figure I.17c sont des anneaux placés dans des gorges, plaqués contre le disque par le chargement centrifuge, utilisés principalement pour l'amortissement des disques aubagés monobloc. Dans ce manuscrit, uniquement le contact aube-disque sera étudié,

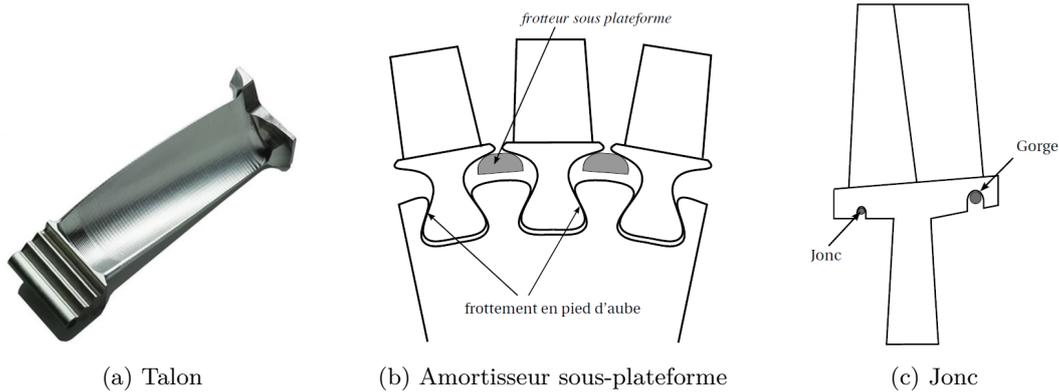


FIGURE I.17 – Méthodes d'amortissement passif utilisées pour les roues aubagées.

notamment dans le cas des pales de soufflantes, ayant un contact en queue d'aronde avec le disque. Dans ce cas, le frottement dans la zone de contact permet d'obtenir un amortissement important qu'il est nécessaire d'être en mesure de modéliser. Le frottement engendre cependant de l'usure par fretting au niveau des interfaces, qui sera aussi étudié par la suite, puisque ces problèmes d'usure peuvent avoir des conséquences importantes, notamment sur la résistance des aubes et la répartition des contraintes dans les interfaces de contact.

### 3.2 Modélisation du contact frottant

Le contact est un phénomène non-linéaire et non-régulier, les lois de contact étant discontinues. En pratique, il existe plusieurs méthodes pour modéliser le contact. Cette section vise à expliciter les lois de contact et de frottement qui seront utilisées dans le reste de ce manuscrit.

Les lois de contact permettent de déterminer l'état de contact. En effet, deux solides peuvent être soit séparés soit en contact. Il convient cependant de s'assurer qu'il n'y ait pas de pénétration entre les corps lorsqu'ils sont en contact. La façon la plus fidèle de définir un contact est par l'utilisation d'une loi de contact unilatéral, assurant la non-interpénétration des corps :

$$\begin{cases} f_N = 0 & \text{si } \delta_N < 0 \\ \delta_N = 0 & \text{si } f_N > 0 \end{cases} \quad (\text{I.67})$$

où  $f_N$  est l'effort normal et  $\delta_N$  est la distance relative normale entre deux nœuds en contact, i.e. la pénétration entre les solides. La Figure I.18a représente cette loi. Elle a l'avantage d'être exacte, cependant sa mise en œuvre numérique est assez complexe, du fait de sa non-régularité importante. D'autres modèles de contact existent afin de régulariser le problème. On peut notamment citer

la loi linéaire par morceau, ajoutant une raideur de contact à l'interface, ou la loi exponentielle. Cependant, afin de s'affranchir des approximations et d'avoir une meilleure représentation du contact, une loi unilatérale sera utilisée dans la suite de ce manuscrit.

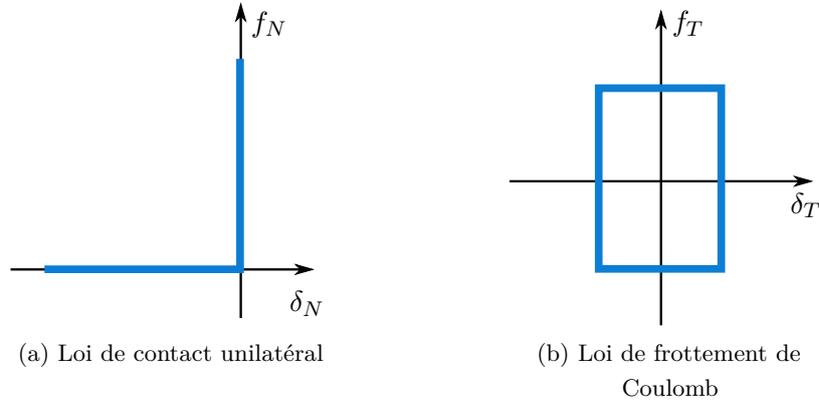


FIGURE I.18 – Lois de contact unilatéral (a) et de frottement de Coulomb (b).

Pour obtenir les efforts tangentiels, il est nécessaire d'ajouter une loi de frottement à la loi de contact unilatéral. Le contact entre solides est régi par la loi de Coulomb. Celle-ci est fortement non-régulière, puisqu'elle implique qu'il n'y a pas de mouvement relatif si l'effort tangentiel équivalent  $\mathbf{f}_T$  est inférieur à la force limite de Coulomb  $f_{lim} = \mu f_N$ . La formulation en vitesse est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\delta}_T = 0 & \text{si } \|\mathbf{f}_T\| < \mu f_N \\ \mathbf{f}_T = -\mu f_N \frac{\dot{\delta}_T}{\|\dot{\delta}_T\|} & \text{si } \dot{\delta}_T > 0 \end{cases} \quad (\text{I.68})$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_T &= [\delta_{T_1} \quad \delta_{T_2}]^T \\ \mathbf{f}_T &= [f_{T_1} \quad f_{T_2}]^T \\ \|\mathbf{f}_T\| &= \sqrt{(f_{T_1})^2 + (f_{T_2})^2} \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

où  $\delta_T$  est le déplacement tangentiel relatif dans les directions 1 et 2,  $\dot{\delta}_T$  est la vitesse relative tangentielle,  $\mathbf{f}_T$  est l'effort tangentiel et  $\mu$  est le coefficient de frottement. L'équivalent de cette formulation en déplacements relatifs permet d'obtenir le cycle d'hystérésis représenté Figure I.18b. De même que pour les lois de contact, il existe d'autres formulations des lois de frottement, ayant pour but de simplifier la résolution numérique. On peut notamment citer la méthode de régularisation par ajout d'une raideur tangentielle, ou les méthodes différentielles comme celle de Bouc-Wen [16][129].

Dans ce manuscrit, une loi de contact unilatéral avec un frottement de Coulomb sera utilisée. Les méthodes de résolution du contact par Lagrangiens dynamiques [97], décrite section II.3, et la méthode semi-analytique [47], cf section III.1, permettent de traiter ce type de lois non-régulières par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.

### 3.3 Endommagement par fretting

### 3.3.1 Définition

Le fretting est un phénomène d'endommagement qui a lieu lorsque deux surfaces en contact subissent des mouvements oscillatoires tangentiels de faible amplitude, appelés *micro-glissements*. Il s'agit d'un phénomène très courant, puisqu'il se retrouve dans tous les systèmes utilisant du contact pour l'assemblage : liaisons, empilages multiples, assemblages rivetés, câbles, ou encore conduites flexibles. Différents type d'endommagements peuvent être rencontrés suivant l'effort de chargement dans le contact et l'amplitude de glissement. Ceux-ci sont décrits dans la sous-section suivante.

### 3.3.2 Types de fretting

#### Modes de fretting

Afin d'être en mesure d'étudier les dégradations par fretting, les chercheurs ont dû s'intéresser à des contacts sur des géométries simples. En effet, les contacts réels présentent des géométries et donc des répartitions de chargements trop complexes pour en tirer des lois générales. Ainsi, les configurations les plus courantes d'études du fretting expérimentalement sont les suivantes :

- Contact plan/plan
- Contact cylindre/plan
- Contact sphère/plan

Le contact plan/plan présente des zones de singularités en bordure, caractérisées par des pics des efforts de pressions et de cisaillement. Il est alors difficile d'y évaluer le chargement imposé localement au matériau. Ainsi, les premières études des phénomènes de fretting se sont concentrées sur les contacts cylindre/plan et sphère/plan, notamment étudiés par Hertz [59]. On peut aussi citer les travaux de Ewen [91] ou Hills [60] qui ont permis de caractériser respectivement les distributions de contraintes et les chargements élastiques pour des contacts cylindre/plan et sphère/plan. Le contact aube-disque présente cependant une géométrie complexe, couplant un contact plan/plan et du contact cylindre/plan en bord de portées. Des configurations de type pion/plan avec bords arrondis ont été utilisées par plusieurs auteurs [44][101] pour caractériser ce type de contact.

Dans le cadre du contact sphère/plan, trois modes de fretting ont été définis par Mohrbacher [95]. Un quatrième mode, dit de roulement, peut y être ajouté :

- Mode I : déplacement tangent (a)
- Mode II : déplacement radial (b)
- Mode III : roulement (c)
- Mode IV : déplacement circonférentiel (d)

La Figure I.19 représente ces 4 modes de fretting, les flèches étant les zones de glissement et les zones blanches étant adhérentes.

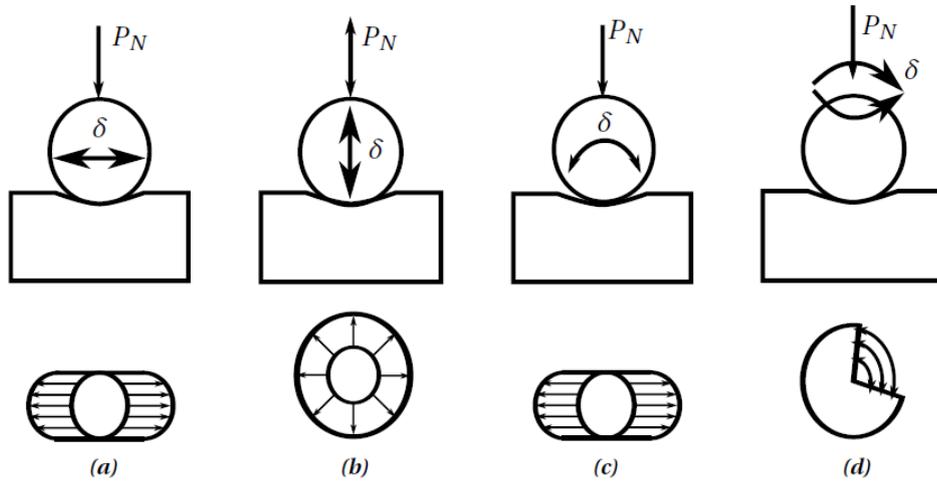


FIGURE I.19 – Modes de fretting, d'après [116].

### Condition de glissement

La caractérisation du fretting est principalement réalisée pour le mode I. En effet, celui-ci se rapproche de la plupart des configurations industrielles et permet la réalisation d'essais simples, notamment de fretting-wear. L'essai classique consiste à imposer une force normale  $P$  sur un cylindre en contact sur un plan. Un déplacement tangentiel est alors imposé à l'un des solides, l'autre étant fixé. L'effort tangentiel mesuré est noté  $Q$ . Le fretting est caractérisé par le rapport  $e$  entre l'amplitude de glissement  $\delta^*$  et la dimension du contact dans la direction du glissement  $a$  :

$$e = \frac{\delta^*}{a} \quad (\text{I.70})$$

Si  $e < 1$ , une zone du contact n'est jamais exposée à l'air ambiant, on parle alors de fretting. À l'inverse, si  $e > 1$  l'ensemble de la surface est à un moment exposée à l'air, on parle alors de glissement alterné. L'étude des paramètres de l'essai permet d'obtenir des informations sur l'état de contact :

- Le *glissement partiel* est caractérisé par une zone de contact séparable en une zone d'adhérence, et une zone de glissement. Dans ce cas, l'effort tangentiel maximal  $Q^*$  ne dépasse pas le produit de l'effort normal  $P$  par le coefficient de frottement  $\mu$ , i.e.  $|Q^*| < \mu P$ . Le cycle de fretting est alors de forme elliptique.
- Le *glissement total* est quant à lui caractérisé par le fait qu'il n'y ait aucune zone qui soit adhérente en permanence. Dans ce cas, l'effort tangentiel maximal  $Q^*$  est égal au produit  $\mu P$  :  $|Q^*| = \mu P$ . Le cycle de fretting est alors proche d'un parallélogramme.

Les cycles de fretting, représentés Figure I.20 dans les cas de glissement partiel et total, permettent ainsi de caractériser le glissement. Il est alors possible de quantifier l'énergie dissipée par frottement  $E_d$  comme étant l'aire à l'intérieur du cycle. Ces dissipations peuvent être dues à différentes causes, telles que l'augmentation de la température, la création de débris, ou des déformations plastiques par exemple. Enfin, on note  $\delta_0$  la valeur de débattement pour un effort

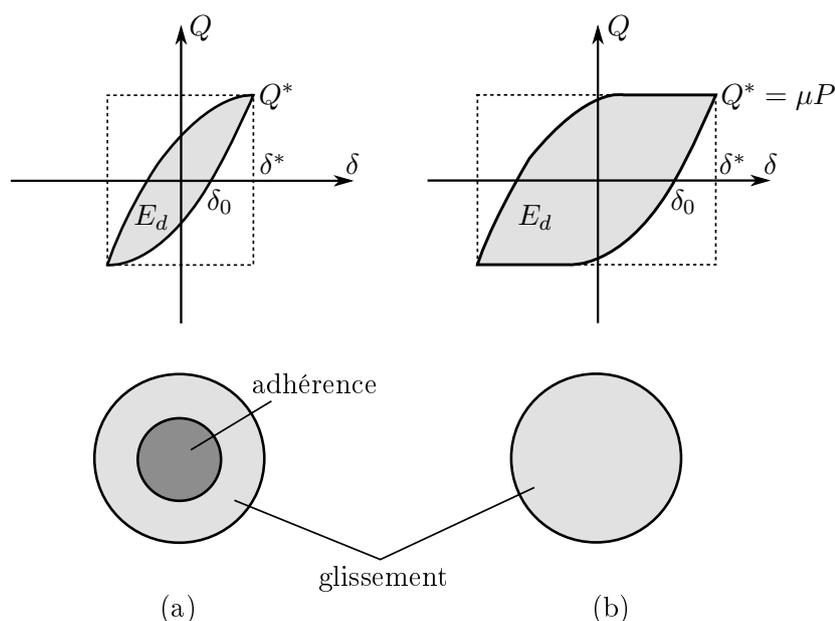


FIGURE I.20 – Représentation du cycle de fretting et des conditions de glissement, en glissement partiel (a) et en glissement total (b), d'après [47].

tangential nul. Celle-ci est indépendante de la rigidité du montage, et caractérise le glissement réel du centre du contact dans le cas du glissement total.

Ces conditions de glissement permettent de définir des régimes de glissement, associés à différents types d'endommagement, caractérisés par [43][42]. On parle de *régime de glissement partiel* et de *régime de glissement total* lorsque des conditions de glissement respectivement partiel et total sont observées tout au long de l'essai. Enfin, on parle de *régime de glissement mixte* lorsque le contact passe d'un glissement partiel à un glissement total au cours de l'essai.

### Endommagement par fretting

Lorsque des vibrations externes engendrent de faibles débattements au niveau de surfaces en contact n'étant pas soumises à des déplacements imposés, on parle de *fretting-wear*. Celui-ci entraîne de l'usure au niveau des surfaces par enlèvement de matière, suite à une déformation locale excessive. Ce type d'endommagement et la formulation des lois d'usure seront explicités dans la sous-section suivante I.3.3.3.

Le *fretting-fatigue* est un endommagement par fissuration suite à la déformation de l'une des structures en contact. En effet, il a été observé que le fretting est susceptible d'engendrer l'amorçage de fissures, se propageant ensuite dans la structure. Le retour d'expérience sur des portées d'aubes et de disque a montré que ce phénomène avait bien lieu en bordure de contact, où les contraintes sont maximales. Ce phénomène ne sera pas considéré dans ce manuscrit. Cependant, l'étude détaillée des efforts de contact réalisée à l'aide de la méthode semi-analytique d'étude du contact dans les chapitres III et IV pourrait constituer une première étape dans l'estimation de l'amorçage de fissures qu'il serait intéressant de prendre en compte dans des travaux ultérieurs.

Enfin, le dernier type d'endommagement est appelé *fretting-corrosion*. Il a lieu lorsque les

produits de dégradation sont le résultat d'une oxydation dans la zone de contact.

### 3.3.3 Fretting-wear

L'usure par fretting, ou *fretting-wear*, est un phénomène complexe qui fait intervenir un nombre important de mécanismes. Elle nécessite de considérer les débris, les modifications des surfaces, de même que des phénomènes thermo-dynamiques ou physico-chimiques. Ainsi, de nombreuses lois d'usure ont été développées. Dans un premier temps, les lois d'usure étaient principalement empiriques. Des lois utilisant la mécanique du contact se sont ensuite imposées, basées notamment sur la loi d'Archard [4] définie telle que :

$$W = Ks \frac{P}{p_m} \quad (\text{I.71})$$

où  $W$  est le volume usé,  $s$  la distance de glissement,  $P$  le chargement normal et  $p_m$  la limite d'écoulement en terme de pression du matériau le plus mou, équivalente à la dureté.  $K$  est une constante liée aux matériaux en contact, aux conditions de fonctionnement et à l'environnement. En pratique, elle est assimilable à un coefficient d'usure dont la valeur est obtenue expérimentalement. D'autres formulations plus récentes, telles que celles de Goryacheva [52], utilisent des reformulations locales de la loi d'Archard. Il existe aussi des formulations thermodynamiques [37] considérant l'usure comme un phénomène dissipatif lié au détachement des particules. D'autres formulations considèrent quant à elles directement la présence du troisième corps dans les phénomènes d'usure, on peut notamment citer les travaux de Godet [51].

Des lois d'usure spécifiques ont aussi été développées au LTDS par Paulin et Fouvry [101][42], pour traiter le cas de l'usure du contact aube-disque. Celles-ci présentent l'avantage d'être simples à mettre en œuvre, et ont été utilisées dans de nombreux travaux étudiant l'usure du contact aube-disque [47][116]. Paulin a développé une loi d'usure locale formulée en énergie, à partir de différents essais sur des matériaux utilisés dans les contacts aube-disque. Il a ainsi établi une relation basée sur une loi d'Archard, reformulée telle que :

$$V = \alpha_u \sum_{N_f} \delta_0(N_f) E_d(N_f) \quad (\text{I.72})$$

avec  $V$  le volume usé après  $N_f$  cycles de fretting,  $\alpha_u$  le coefficient d'usure,  $\delta_0(N_f)$  est l'amplitude de glissement au cycle  $N_f$  et  $E_d(N_f)$  est l'énergie dissipée au cours du cycle. Le coefficient d'usure  $\alpha_u$  est un coefficient déterminé expérimentalement et associé au matériau. Paulin a montré qu'il était possible de le considérer constant, puisqu'il n'évolue que lors des premiers cycles d'usure et très rapidement, avant d'atteindre une valeur stable. Cette loi d'usure sera donc utilisée dans la suite de ce manuscrit.

### 3.3.4 Chargements induisant du fretting dans les turboréacteurs

Comme expliqué précédemment, le fretting est un phénomène qui a lieu lorsqu'un contact est soumis à des sollicitations tangentielles répétées un grand nombre de fois. Il est principalement observé dans le cadre de chargements vibratoires durant les phases de vol à régime de croisière. Ainsi,

il sera étudié pour le premier cas d'application de ce manuscrit, qui est un modèle représentatif d'une roue aubagée de compresseur ou de turbine, dans lesquels des phénomènes vibratoires dus à des excitations de type excitations de sillage ont lieu. Le fretting sera aussi étudié sur le modèle industriel présenté Chapitre IV. Dans ce cas, l'excitation considérée pour ces travaux est une excitation par vortex de sol. Ce phénomène n'étant présent que dans les phases où l'avion est au sol, le nombre de cycles considérés n'est pas suffisant pour engendrer des phénomènes de fretting importants. L'usure due à ce chargement sera tout de même étudiée afin de prouver l'applicabilité des méthodes développées dans cette thèse sur un cas industriel complexe. De plus, il est à noter que des phénomènes de fretting peuvent être présents sur ce modèle, dus aux vibrations durant les phases de vol, non-considérées dans ces travaux.

## 4 Pratiques de modélisation du contact

La modélisation des phénomènes de contact est un problème numérique assez complexe, du fait de la non-régularité des lois de contact et de frottement. De plus, le contact aube-disque étant un contact de type pion/plan, il induit des effets de bords importants, nécessitant une discrétisation très fine des surfaces afin d'en rendre compte fidèlement. La figure I.21 représente les effets de bords pouvant être observés dans des contacts aube-disque. Cette section a pour objectif de faire un état des lieux des méthodes actuelles de modélisation du contact en général, ainsi qu'en dynamique vibratoire, permettant de justifier l'intérêt de coupler les méthodes utilisées en dynamique vibratoire, avec des méthodes spécifiquement développées pour l'étude du contact.

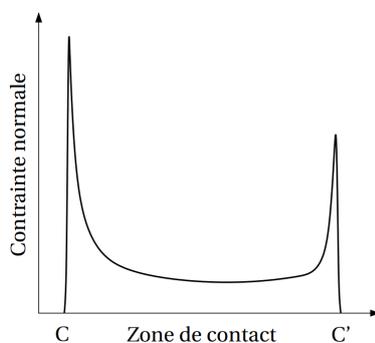


FIGURE I.21 – Représentation de l'effort de contact sur une portée d'aube, d'après [7].

### 4.1 Dynamique vibratoire avec non-linéarités de contact

Dans le cadre d'une étude dynamique vibratoire, le contact aube-disque est une non-linéarité fortement non-régulière qu'il convient de traiter avec des méthodes adaptées. La méthode de l'équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method* - HBM) couplée à une procédure d'alternance fréquence temps (AFT), détaillées dans le Chapitre II, ont fait leurs preuves de par leur efficacité pour traiter ce type de problème et la qualité des résultats qu'ils fournissent dans l'estimation du comportement dynamique [97][24][63]. Cependant, les calculs de dynamique vibratoire peuvent s'avérer assez coûteux en temps de calcul, et ne permettent pas de raffiner les interfaces de contact

avec précision, comme illustré dans la section II.5. Même si les phénomènes de contact sont représentés, telles les conditions de glissement partiel, les maillages peu raffinés au niveau des interfaces ne permettent pas d'étudier le comportement et les efforts de contact de façon précise [47]. Ce problème est particulièrement important dans le cas de contacts présentant d'importants effets de bord, tel le contact aube-disque. De plus, dans le cadre de l'étude de l'usure par fretting, il est nécessaire d'avoir un maillage suffisamment raffiné, les échelles d'usure étant de l'ordre du  $\mu\text{m}$ . Plusieurs études récentes ont donc cherché à coupler les méthodes de résolution dynamique avec des méthodes de résolution du contact permettant l'utilisation de maillages plus raffinés. On peut notamment citer les travaux de Armand [5], couplant des méthodes dynamiques à une méthode semi-analytique d'étude du contact.

## 4.2 Modélisation du contact

Différentes méthodes de modélisation du contact ont été développées afin d'être en mesure d'étudier ce problème. Il est possible de séparer ces méthodes en deux grandes catégories : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

### 4.2.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques ont émergé avec les travaux de Hertz [59] sur les contacts elliptiques sans frottement, dans le cadre des hypothèses des massifs élastiques semi-infinis. Suite à ces travaux, de nombreuses formulations analytiques pour des contact non-hertziens ont été développées, notamment répertoriées dans l'ouvrage de Johnson faisant référence dans ce domaine [65]. Lorsque les contacts ne peuvent être assimilés à des ellipsoïdes, il existe de nombreuses méthodes permettant d'obtenir des solutions analytiques, souvent dans des cas particuliers, tels que les problèmes bi-dimensionnels ou les problèmes présentant des symétries. Ces solutions ont été développées grâce à des outils mathématiques puissants permettant de traiter ces problèmes [96][92]. Le contact avec frottement a été considéré par la suite, via l'utilisation de la loi de Coulomb. On peut notamment citer les travaux de McEwen[91], Hamilton [57] et Sackfield [114] respectivement pour des contacts cylindriques, sphériques et elliptiques. Cataneo [22] et Mindlin [94] ont quant à eux permis d'élargir ces problèmes au cas du glissement partiel. Cependant, ces travaux ne permettent de traiter que des géométries de contact simples, qu'il est difficile d'appliquer sur des structures industrielles tel que le contact aube-disque.

### 4.2.2 Méthodes numériques

Afin d'être en capacité de traiter tout type de structure, et d'être intégré aux outils classiques de calculs de structures modernes, les problèmes de contact ont été résolus à l'aide de méthodes numériques. La méthode des éléments-finis (Finite Element Method (FEM)) permet par exemple de traiter les problèmes de contact. Cependant, comme dans le cas des problèmes dynamiques décrits dans la section précédente, dont la résolution est basée sur cette modélisation, il est nécessaire d'utiliser des maillages très fins pour capter précisément le comportement d'un contact. Ainsi, les calculs peuvent s'avérer très coûteux dans le cas de géométries impliquant de forts gradients

de contraintes et donc des maillages très fins. D'autres méthodes assez proches, notamment la méthode des éléments de frontière (Boundary Element Method - BEM), permettent de mailler uniquement les surfaces, mais engendrent tout de même des temps de calcul conséquents.

Une autre méthode, dite *semi-analytique*, a été développée pour traiter les problèmes de contact. Le principe de cette méthode, détaillée plus précisément dans le Chapitre III, est de discrétiser les interfaces afin de résoudre le problème global numériquement à l'aide de solutions analytiques de problèmes élémentaires sur chaque élément discrétisé. Ces méthodes ont d'abord été développées par Bental et Johnson [9] dans le cadre de chargements statiques. Cette méthode a été formalisée par Kalker [71] dans un ouvrage. Ces méthodes ont ensuite été améliorées via l'utilisation d'algorithmes plus efficaces que les algorithmes de Newton-Raphson utilisés par Kalker, tel l'algorithme du gradient conjugué. Enfin des méthodes d'accélération des calculs y ont été ajoutées comme les méthodes multigrilles [18] ou les transformées de Fourier spatiales [69][107]. Gallego [47] a réalisé la première application de ces méthodes aux cas du contact aube-disque. De plus, de nombreux travaux ont permis de complexifier les phénomènes considérés, tel que l'élasto-plasticité [17][128], la viscoélasticité [75], les matériaux hétérogènes composites [80][13] ou les inclusions matériaux [45][132] ou thermiques [83].

Dans la suite de ce manuscrit, la méthode semi-analytique développée dans un code du LaMCoS sera utilisée afin d'obtenir une discrétisation fine des interfaces de contact à partir du comportement dynamique à la résonance obtenu par les méthodes d'analyse dynamique vibratoire. En effet, comme expliqué précédemment, les méthodes d'analyse vibratoire non-linéaire donnent une réponse dynamique en amplitude fiable. Cependant, celles-ci ne permettent pas de discrétiser les interfaces de contact suffisamment précisément pour capturer l'ensemble du comportement du contact. Ainsi, en utilisant une méthode semi-analytique couplée aux méthodes de résolution dynamique, comme détaillé Chapitre III, il est possible d'obtenir des résultats précis dans les interfaces de contact. Les besoins actuels en modélisation de la part des motoristes impliquent en effet de connaître précisément le comportement des zones de contact. De plus, ce couplage permet une discrétisation très fine, et donc d'étendre l'étude à l'usure par fretting au niveau des interfaces.

## 5 Conclusion

Ce chapitre introductif a permis de présenter la problématique soulevée par ces travaux de thèse, à savoir l'étude détaillée des interfaces de contact aube-disque sous chargement dynamique vibratoire. Du fait des évolutions des turboréacteurs, les phénomènes présents sont de plus en plus complexes. Les motoristes ont alors besoin de développer de nouveaux moyens de modélisation plus avancés. Ce travail de thèse vise ainsi à être en mesure de modéliser précisément la dynamique vibratoire des ensembles aubes-disque, tout en permettant l'étude détaillée des phénomènes présents dans le contact : conditions de glissement, efforts, usure ...

La dynamique vibratoire non-linéaire est un domaine complexe de l'étude des machines tournantes. Les développements antérieurs ont permis d'améliorer leur modélisation, via l'utilisation de la méthode des éléments finis. De plus, les hypothèses de symétrie cyclique diminuent considérable-

ment la taille des systèmes à considérer. Cependant, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'avère problématique pour l'étude du contact. En effet, afin d'obtenir une compréhension complète du comportement du contact et de modéliser les effets de bords, il est nécessaire d'utiliser des maillages très raffinés engendrant des temps de calcul prohibitifs. Hors, il est possible d'obtenir une réponse dynamique cohérente pour des maillages plus grossiers. Dans ce cas, il s'avère intéressant de coupler les méthodes dynamiques aux méthodes semi-analytiques pour obtenir une description détaillée du contact.

Deux cas d'application seront considérés dans la suite de ce manuscrit. Le premier cas d'application sera une roue aubagée simplifiée, de type compresseur ou turbine, soumise à une excitation dynamique à diamètre de type sillage. Les problématiques évoquées précédemment seront alors mises en évidence, amenant au couplage des méthodes dynamiques et semi-analytiques. Ce couplage permettra alors de démontrer l'applicabilité des calculs d'usure par fretting sur des modèles de roues aubagées. L'usure est un phénomène complexe à prendre en compte, dont l'étude sera réalisée par une loi d'Archard locale formulée en énergie. Enfin, le deuxième cas d'application s'intéressera à une soufflante industrielle sous chargement aérodynamique de type vortex de sol. L'ensemble du couplage sera aussi mis en œuvre, prouvant l'applicabilité de ces travaux dans un cadre industriel.



## Chapitre II

# Dynamique d'une roue aubagée en présence de non-linéarités de contact

Ce chapitre vise à expliquer le choix des méthodes de résolution du problème dynamique utilisées dans cette thèse, la théorie qui leur est associée, ainsi que les résultats obtenus. Dans un premier temps, la méthode de résolution du problème dynamique non-linéaire sera explicitée. Afin de réduire la taille du système à résoudre, des méthodes de sous-structuration seront ensuite étudiées. La troisième partie se concentrera sur la résolution du problème de contact. Enfin, la dernière section présentera les résultats obtenus avec les méthodes détaillées dans ce chapitre, mettant en évidence l'intérêt et les limitations inhérents à ces méthodes.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Résolution d'un problème de dynamique non-linéaire . . . . .</b>	<b>43</b>
1.1	Méthodes de résolution temporelle . . . . .	43
1.2	Méthodes de Ritz-Galerkin . . . . .	45
1.3	Continuation des solutions . . . . .	50
1.4	Condition d'excitabilité en symétrie cyclique . . . . .	53
1.5	Non-linéarités en symétrie cyclique . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Méthodes de sous-structuration . . . . .</b>	<b>54</b>
2.1	Condensation statique de Guyan . . . . .	55
2.2	Sous-structuration à interfaces libres – MacNeal . . . . .	55
2.3	Sous-structuration à interfaces fixes – Craig-Bampton . . . . .	57
2.4	Autres méthodes de réduction . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Résolution du problème de contact – DLFT . . . . .</b>	<b>59</b>
3.1	Équation du mouvement . . . . .	60
3.2	Calcul des efforts de contact . . . . .	62
3.3	Choix du coefficient de pénalité . . . . .	64
3.4	Équilibre statique . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Notion de modes non-linéaires . . . . .</b>	<b>65</b>
4.1	Définition . . . . .	66

4.2	Modes complexes non-linéaires . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Dynamique non-linéaire d'une roue-aubagée simplifiée . . . . .</b>	<b>68</b>
5.1	Modèle considéré . . . . .	68
5.2	Réponses forcées non-linéaires . . . . .	72
5.3	Modes complexes non-linéaires . . . . .	79
5.4	Remarques sur le comportement du contact . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>86</b>

---

## 1 Résolution d'un problème de dynamique non-linéaire

La résolution des problèmes de dynamique non-linéaire a été largement étudiée et une littérature importante existe à ce sujet. Ainsi, différentes méthodes de résolution peuvent être envisagées suivant le cas pour obtenir la réponse dynamique d'un système non-linéaire. Le choix de la méthode dépend du type de problème, de la taille du modèle, des phénomènes étudiés ou encore du type de non-linéarités. Dans le cas des problèmes de dynamique non-linéaire qui vont nous intéresser, un terme d'effort non-linéaire est ajouté à l'équation du mouvement (I.41). Avec la présence d'efforts non-linéaires, le comportement de la structure est alors obtenu en résolvant l'équation différentielle du second ordre en temps suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (\text{II.1})$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur.  $\mathbf{F}_{nl}$  correspond aux efforts non-linéaires et  $\mathbf{F}_{ext}$  aux excitations extérieures.  $\mathbf{x}$  est le vecteur des déplacements, qui sont les inconnues du problème. La matrice de raideur  $\mathbf{K}$  correspond à la matrice de raideur tangente  $\mathbf{K}_\Omega$ , exprimée équation (I.42). Elle sera notée  $\mathbf{K}$  dans la suite de ce manuscrit afin de simplifier les notations.

La résolution de l'équation du mouvement non-linéaire peut s'avérer complexe et très couteuse en temps de calcul. Cependant, dans le cadre de la dynamique vibratoire, on est souvent amené à rechercher le régime permanent du système dynamique. Il est ainsi possible d'utiliser des méthodes dédiées à ce type de calcul, plus efficaces que l'intégration temporelle classique. Cette section a pour objectif de présenter les méthodes de résolution existantes, en développant plus particulièrement la méthode de l'équilibrage harmonique, utilisée dans la suite de ce manuscrit.

La dynamique des roues aubagées présente différents types de non-linéarités. Dans le cadre de ce manuscrit les non-linéarités de type contact en pied d'aube sont étudiées. Ces systèmes possédant de fortes non-linéarités, il est nécessaire d'utiliser des méthodes pouvant traiter le cas de régimes périodiques fortement non-linéaires et non-réguliers. Pour cela, deux types de méthodes sont utilisés : les méthodes dans le domaine temporel et les méthodes dans le domaine fréquentiel.

### 1.1 Méthodes de résolution temporelle

#### 1.1.1 Méthodes de perturbation

Lorsque les non-linéarités sont assez faibles, il est possible d'utiliser des méthodes analytiques dans le domaine temporel. Les méthodes de perturbation consistent à introduire un paramètre  $\epsilon$  caractérisant l'ordre de grandeur de la non-linéarité dans un développement de Taylor de la solution pour  $\epsilon$  proche de zéro :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \epsilon\mathbf{x}_1(t) + \epsilon^2\mathbf{x}_2(t) + \dots + \mathcal{O}(\epsilon^{m+1}) \quad (\text{II.2})$$

En utilisant cette expression de  $\mathbf{x}$  dans l'équation du mouvement (II.1), et en regroupant les termes d'une même puissance de  $\epsilon$ , on obtient une série de  $m$  équations différentielles linéaires. La

résolution de ces équations permet alors d'avoir une approximation de la solution recherchée. Plus de détails sur cette méthode sont donnés dans [55][116].

Ces méthodes permettent d'obtenir une expression analytique de la solution recherchée. Elles ont déjà été utilisées dans la littérature pour étudier la dynamique des rotors, notamment la méthode des échelles multiples, dans le cadre de non-linéarités régulières [48][62]. Il est cependant difficile de mettre en œuvre ces méthodes dans le cas de systèmes de taille importante, puisque leur utilisation engendre des expressions analytiques lourdes, limitant leur utilisation aux systèmes de petite taille, soit quelques DDLs. Enfin, l'utilisation d'un développement de Taylor impose une non-linéarité faible ( $\epsilon \ll 1$ ), ce qui rend impossible leur utilisation pour les cas présentant des non-linéarités fortes et irrégulières. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques comme présenté par la suite.

### 1.1.2 Intégration temporelle

Une des méthodes de résolution possibles est l'intégration temporelle. Cette méthode consiste à intégrer directement les équations du mouvement, grâce à des schémas d'intégration numériques tel que les méthodes de différences finies centrées, de Newmark, de Wilson, ou de Runge-Kutta [53]. Cette approche utilise peu d'hypothèses et elle est donc souvent utilisée comme référence pour valider les autres méthodes. Les méthodes d'intégration temporelles sont pour la plupart formalisées pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre en temps. Il est donc nécessaire de passer le système en formulation d'état. Pour cela on utilise un vecteur d'état  $\mathbf{y}(t)$  :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

L'équation du mouvement (II.1) est alors réécrite :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{y}) = \mathbf{H}_{ext}(t) \quad (\text{II.4})$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{nl} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{nl} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{ext}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Cette formulation permet de résoudre une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Cependant, elle double le nombre d'inconnues à résoudre, et augmente donc la taille du système.

Pour résoudre cette équation, la solution  $\mathbf{y}$  et les opérateurs de dérivation par rapport au temps sont discrétisés en temps. On note  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i)$  la solution obtenue à l'instant  $t_i$ . Deux types de méthodes de résolution peuvent alors être utilisés : les méthodes explicites ou les méthodes implicites.

Les méthodes explicites permettent une estimation rapide de la solution, puisqu'elles utilisent directement le résultat de l'instant précédent :

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_i, t_i) \quad (\text{II.6})$$

Avec  $h$  le pas de temps entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . Cependant, le pas de temps doit être limité afin d'assurer la stabilité de l'intégration temporelle.

Les méthodes implicites consistent à rechercher une solution vérifiant l'équation du mouvement à l'instant  $t_{i+1}$ , de la forme :

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_{i+1}, t_{i+1}) \quad (\text{II.7})$$

Elles nécessitent la résolution d'un système d'équations algébriques non-linéaires à chaque pas de temps, et sont donc très coûteuses en temps de calcul. Pour avoir une bonne précision, le schéma de résolution le plus utilisé est un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, même si celui-ci nécessite 4 évaluations de la fonction par instant. Il existe aussi des méthodes capable de traiter directement le problème d'ordre 2, comme la méthode de Newmark [82][30].

Les méthodes d'intégration temporelles sont assez simples à mettre en œuvre et permettent d'obtenir une très bonne approximation de la solution du système non-linéaire. Cependant, elles nécessitent de déterminer l'évolution du système dans les phases de régime transitoire, et ne permettent pas de considérer uniquement le régime établi. Elles conduisent donc à des temps de calcul prohibitifs, notamment dans le cadre de systèmes comportant un grand nombre de degrés de liberté (DDLs).

### 1.1.3 Méthodes de tir

Les méthodes de tir sont des méthodes temporelles utilisées pour la recherche de solutions périodiques. Le principe de cette méthode est de reformuler le problème aux conditions limites en un problème aux conditions initiales. En effet, l'objectif est de déterminer les conditions initiales d'un cycle permettant d'obtenir des conditions finales identiques, dans le cas d'un régime périodique. Le problème est alors un problème algébrique non-linéaire traité par un algorithme de Newton, optimisant la correction des valeurs initiales [123]. Même si cette méthode est efficace en terme de temps de calcul par rapport à une intégration temporelle directe, les temps de calculs restent conséquents du fait de l'utilisation d'une méthode itérative, et peuvent présenter des problèmes de stabilité.

## 1.2 Méthodes de Ritz-Galerkin

Certaines méthodes temporelles permettent d'obtenir le régime périodique par une approche itérative, et notamment la méthode de tir qui permet de rechercher directement le régime périodique. Les méthodes de Ritz-Galerkin peuvent quant à elles être utilisées afin de se placer dans un espace périodique, et d'y rechercher directement la solution. Les méthodes de Galerkin considèrent que la solution du système (II.1) peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \Psi_k \eta_k(t) \quad (\text{II.8})$$

où les fonctions  $\eta_k$  sont des fonctions d'approximation fixées à priori et  $\Psi_k$  sont les coefficients à déterminer. En dérivant (II.8) une et deux fois et en remplaçant l'expression dans (II.1), on obtient l'expression suivante sous forme de résidu :

$$\mathbf{R}(\Psi, \eta) = \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{M} \Psi_k \ddot{\eta}_k + \mathbf{C} \Psi_k \dot{\eta}_k + \mathbf{K} \Psi_k \eta_k \right] + \mathbf{F}_{nl}(\Psi, \eta) - \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (\text{II.9})$$

Les méthodes de Galerkin consistent ensuite à orthogonaliser le résidu  $\mathbf{R}$  par rapport à une base de fonctions test  $\{\zeta_k(t)\}_{k=1..N}$  en recherchant les coefficients  $\Psi$  vérifiant les équations de projection suivantes :

$$\int_0^T \mathbf{R}(\Psi, \eta(t)) \zeta_k(t) dt, \quad \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{II.10})$$

où  $T$  est la période. Si les fonctions tests sont égales aux fonctions utilisées pour l'approximation (i.e.  $\eta_k = \zeta_k$ ,  $k = 1..N$ ), on parle de projection de Galerkin. Sinon, on parle de projection de Petrov-Galerkin. Différentes fonctions d'approximation peuvent être utilisées suivant le type de cas à traiter. Dans le cas de la recherche de solutions périodiques, les fonctions d'approximation utilisées sont les fonctions trigonométriques. Il est aussi possible d'utiliser des bases d'ondelettes, notamment pour les problèmes non-réguliers de contact avec impact [66].

Une des méthodes utilisant la base des fonctions trigonométriques est la méthode de collocation trigonométrique. Cette méthode utilise les fonctions trigonométriques comme fonctions d'approximation  $\eta_k$  et les fonctions tests sont des fonctions de Dirac  $\zeta_k = \delta(t - t_k)$ . Cette méthode a été utilisée dans le cadre de la dynamique non-linéaire des rotors [34] ou l'amortissement par squeeze film [6]. Cependant, dans le cadre de la recherche de solutions périodiques, la méthode la plus répandue est la méthode de l'équilibrage harmonique. En effet, celle-ci a fait ses preuves pour l'étude de différents problèmes, notamment les problèmes dynamiques non-linéaires de contact [24][97], ou non-linéaires géométriques [55][89]. Elle sera utilisée dans la suite de ce manuscrit.

### 1.2.1 Méthode de l'équilibrage harmonique (HBM)

La méthode de l'équilibrage Harmonique (ou Harmonic Balance Method - HBM) est une méthode de Galerkin pour laquelle les fonctions d'approximation  $\eta_k$  et les fonctions tests  $\zeta_k$  sont égales et correspondent à la base de Fourier. Les solutions de l'équation du mouvement (II.1) sont donc recherchées sous la forme de séries de Fourier tronquées à l'harmonique  $N_h$  :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.11})$$

En dérivant l'expression (II.11) et en l'injectant dans l'équation du mouvement (II.1), on obtient l'équation suivante sous forme de résidu :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \sum_{k=0}^{N_h} \left[ (\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_k + (k\omega \mathbf{C}) \mathbf{b}_k \right] \cos(k\omega t) + \\ \sum_{k=0}^{N_h} \left[ (\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M}) \mathbf{b}_k - (k\omega \mathbf{C}) \mathbf{a}_k \right] \sin(k\omega t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) - \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

On note  $\mathbf{T}$  la base des fonctions trigonométriques (i.e. la base de Fourier), définie telle que :

$$\mathbf{T}(t) = [1 \ \cos(\omega t) \ \sin(\omega t) \ \cdots \ \cos(N_h \omega t) \ \sin(N_h \omega t)]^T . \quad (\text{II.13})$$

La méthode de Galerkin permet de supprimer la dépendance temporelle du système, en

orthogonalisant le résidu  $\mathbf{R}$  par rapport à la base  $\mathbf{T}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{R}(t) dt \\ \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R}(t) \cos(k\omega t) dt \quad , \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \\ \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{R}(t) \sin(k\omega t) dt \quad , \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \end{array} \right. \quad (\text{II.14})$$

Ainsi, le système (II.12) est transformé en un système algébrique non-linéaire de la forme :

$$\mathbf{Z}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{F}}_{ext} \quad (\text{II.15})$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}$  représente le vecteur des coefficients harmoniques des déplacements, aussi appelé vecteur multiharmonique des déplacements, qui sont les nouvelles inconnues du système.  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}$  représentent respectivement les vecteurs multiharmoniques des efforts non-linéaires et des efforts extérieurs, tel que :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{F}}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(\mathbf{F}_{nl}) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{F}_{nl}) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{F}_{nl}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{F}_{nl}) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{F}_{nl}) \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{F}}_{ext} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(\mathbf{F}_{ext}) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{F}_{ext}) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{F}_{ext}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{F}_{ext}) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{F}_{ext}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Dans le cas de l'étude de la réponse forcée d'un système, étudié dans la suite de ce manuscrit, les efforts extérieurs correspondent à une excitation périodique synchrone.  $\mathbf{Z}$  est la matrice de raideur dynamique, diagonale par bloc, définie telle que :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}^{(1)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{Z}^{(N_h)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

où

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & k\omega \mathbf{C} \\ -k\omega \mathbf{C} & \mathbf{K}^l - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \quad (\text{II.18})$$

L'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel (II.15) est un système algébrique de taille  $(2N_h + 1)N_{dls}$ , où  $N_{dls}$  représente le nombre de degrés de liberté du système.

La non-linéarité peut être directement traitée dans le domaine fréquentiel dans le cas d'une non-linéarité simple ayant une expression dans le domaine fréquentiel. Dans le cas d'une non-linéarité plus complexe, de type contact avec frottement par exemple, il est alors nécessaire d'estimer les efforts non-linéaires dans le domaine temporel grâce à une méthode d'alternance fréquence-temps (Alternating Frequency-Time - AFT) [19]. Cet aspect sera détaillé dans la sous-section suivante II.1.2.2.

L'étape suivante de la méthode de l'équilibrage harmonique consiste à résoudre le système d'équations non-linéaires. Pour ce faire, un algorithme d'optimisation de systèmes non-linéaires est utilisé pour minimiser le résidu  $\mathbf{R}$  à chaque fréquence considérée  $\omega$  :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) - \tilde{\mathbf{F}}_{ex} = 0 \quad (\text{II.19})$$

Il existe de nombreux algorithmes itératifs capables de traiter ce genre de cas : les méthodes du gradient, du gradient conjugué, de Newton, de quasi-Newton, de Newton-Raphson, des régions de confiances etc. [41]. Dans notre cas, un algorithme par région de confiance [27] pré-implémenté dans MATLAB® est utilisé. Le choix du nombre d'harmoniques  $N_h$  à conserver dans la troncature de la série de Fourier dépend du problème à traiter. Plus les non-linéarités du problème sont importantes, plus il faudra conserver d'harmoniques. La taille du problème étant proportionnelle au nombre d'harmoniques, il est important de veiller à n'utiliser que le nombre nécessaire d'harmoniques permettant d'assurer une bonne précision. Grolet [55] a proposé une méthode de sélection d'harmoniques, permettant de ne conserver que les harmoniques prépondérantes. Dans la suite de ce manuscrit, une étude de convergence a été réalisée afin de statuer sur le nombre d'harmoniques à conserver dans les cas étudiés, cf section II.5.2.3.

### 1.2.2 Procédure d'alternance fréquence-temps

Le passage dans le domaine fréquentiel impose de déterminer les efforts non-linéaires  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  dans ce domaine, c'est à dire de déterminer la décomposition en série de Fourier de  $\mathbf{F}_{nl}$ . Cependant, ils ne peuvent être déterminés directement dans le domaine fréquentiel que dans certains cas particuliers, les non-linéarités polynomiales par exemple. Lorsqu'il n'est pas possible d'évaluer les efforts non-linéaires dans le domaine fréquentiel, une méthode AFT (Alternating Frequency Time) est utilisée. Cette méthode, proposée par Cameron et Griffin [19], consiste à repasser temporairement dans le domaine temporel pour estimer les efforts non-linéaires, comme représenté sur la Figure II.1. Le vecteur solution  $\tilde{\mathbf{x}}$  est alors exprimé dans le domaine temporel grâce à une transformée de Fourier inverse, pour reconstruire la solution  $\mathbf{x}(t)$  à  $n_t$  instants de la période  $T$ . Les efforts non-linéaires  $\mathbf{F}_{nl}$  sont calculés dans ce domaine, puis leur expression dans le domaine fréquentiel est calculée par transformée de Fourier afin d'obtenir le vecteur multiharmonique  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$ , dont on ne garde que les  $N_h$  premières harmoniques.

Les passages du domaine temporel au domaine fréquentiel sont en pratique réalisés grâce à une transformée de Fourier discrète (DFT). On définit  $n_t$  instants dans la période  $T$  tels que  $t_k = \frac{kT}{n_t}$  pour  $k = 1, \dots, n_t$ . La matrice de transformée de Fourier discrète est définie par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{n_t} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 2 \cos(\omega t_1) & \cdots & 2 \cos(\omega t_{n_t}) \\ 2 \sin(\omega t_1) & \cdots & 2 \sin(\omega t_{n_t}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 2 \cos(N_h \omega t_1) & \cdots & 2 \cos(N_h \omega t_{n_t}) \\ 2 \sin(N_h \omega t_1) & \cdots & 2 \sin(N_h \omega t_{n_t}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

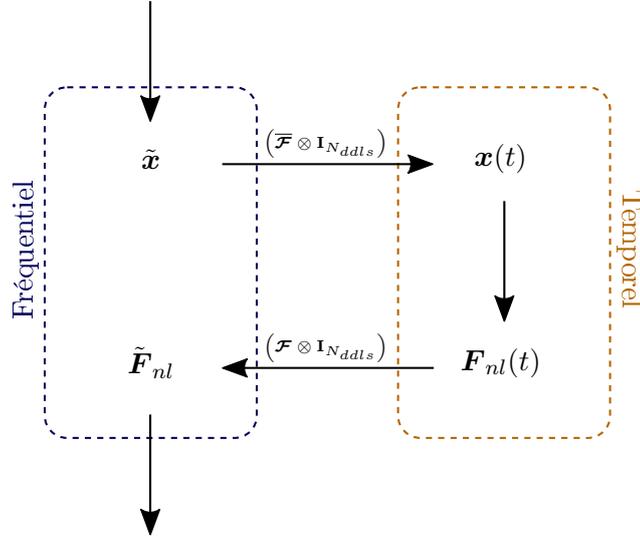


FIGURE II.1 – Schéma de principe de la méthode AFT

et la matrice de transformée inverse par :

$$\overline{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \cdots & \cos(N_h \omega t_1) & \sin(N_h \omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{n_t}) & \sin(\omega t_{n_t}) & \cdots & \cos(N_h \omega t_{n_t}) & \sin(N_h \omega t_{n_t}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

On note que ces matrices sont indépendantes de la pulsation puisque  $\omega t_k = \frac{2k\pi}{n_t}$ , il n'est donc pas nécessaire de les recalculer pour chaque pulsation.

Ainsi, la discrétisation en temps du vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \mathbf{x}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t_{n_t}) \end{bmatrix} = (\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{I}_{N_{dds}}) \tilde{\mathbf{x}} \quad (\text{II.22})$$

où  $\otimes$  représente le produit de Kronecker. À l'inverse, l'expression des fonctions non-linéaires temporelles dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{F}}_{nl} = (\mathcal{F} \otimes \mathbf{I}_{N_{dds}}) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{nl}(t_1) \\ \mathbf{F}_{nl}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{nl}(t_{n_t}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Afin de reconstruire les vecteurs vitesse et accélération, notamment la vitesse utilisée dans les lois de frottement, une méthode efficace consiste à utiliser l'opérateur de dérivation  $\nabla$ . Celui-ci permet d'exprimer la vitesse directement à partir des vecteurs de déplacements en fréquentiel  $\tilde{\mathbf{x}}$  :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{I}_{N_{dds}}) \nabla \tilde{\mathbf{x}} \quad (\text{II.24})$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\overline{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{I}_{N_{dds}}) \nabla^2 \tilde{\mathbf{x}} \quad (\text{II.25})$$

avec

$$\nabla = \text{diag}(\mathbf{0}, \nabla_1, \dots, \nabla_k, \dots, \nabla_{N_h}) \quad (\text{II.26})$$

où chaque sous-bloc s'exprime :

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_{N_{dls}}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \quad (\text{II.27})$$

### 1.3 Continuation des solutions

L'étude de la réponse forcée réalisée dans la suite de ce manuscrit implique d'étudier la réponse du système à une excitation dynamique sur une plage de fréquence  $[\omega_1 \ \omega_2]$  autour du pic de résonance considéré, afin de déterminer la fonction de réponse en fréquence. En présence de non-linéarités fortes et non-régulières, la convergence des algorithmes peut être compliquée, et le système peut avoir plusieurs réponses à une même fréquence due à des phénomènes de retournements ou de bifurcations. De manière à faciliter la convergence des algorithmes et à déterminer tous les phénomènes présents, des techniques dites de continuation peuvent être utilisées [1]. L'objectif des méthodes de continuation est alors de suivre la solution, en déterminant la réponse du système de proche en proche à partir d'une initialisation sur un point éloigné de la non-linéarité.

Les techniques de continuation consistent à ajouter une inconnue appelée paramètre de contrôle au problème initial, dans notre cas la pulsation  $\omega$ , pour déterminer le couple de solution  $(\tilde{\mathbf{x}}, \omega)$ . Ensuite, les solutions sont déterminées de proche en proche à partir d'un processus de prédiction-correction. La prédiction permet d'estimer la valeur initiale et la correction permet de converger vers la solution. Dans le cas considéré dans ce manuscrit, l'objectif est de déterminer la réponse forcée du système sur la plage de fréquence  $[\omega_1 \ \omega_2]$ , en résolvant l'équation du mouvement exprimée dans le domaine fréquentiel par la méthode HBM. Le problème de continuation est de taille  $((2N_h + 1)N_{dls} + 1)$ , correspondant aux  $(2N_h + 1)$  coefficients de Fourier des déplacements et au paramètre de continuation  $\omega$ . L'objectif est alors de minimiser le résidu suivant :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega) - \tilde{\mathbf{F}}_{ext} \quad (\text{II.28})$$

#### 1.3.1 Continuation

##### Continuation séquentielle

La continuation séquentielle consiste à fixer le paramètre de contrôle ( $\omega$  dans notre cas), puis à calculer la réponse du système pour la valeur choisie. Cela permet d'enlever la dépendance du système au paramètre de contrôle. On cherche donc à résoudre :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{X}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \quad (\text{II.29})$$

La valeur du paramètre de contrôle peut être fixée de différentes manières, la plus simple étant de diviser la plage d'étude  $[\omega_1 \ \omega_2]$  en  $N_\omega$  points de calculs de façon régulière. Cette méthode est très simple et pratique à utiliser, mais elle ne permet pas de traiter les problèmes de retournements.

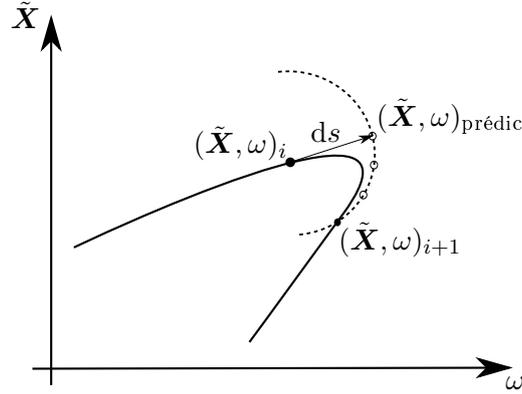


FIGURE II.2 – Continuation arc-length

Cependant, les phénomènes de retournement sont principalement présents pour des non-linéarités impliquant des changements de caractéristiques modales fortes [55] [89], qui ne sont que très rarement observées dans le type d'étude menées dans ce manuscrit. Cette méthode sera donc retenue pour la suite de ce manuscrit. En cas de présence de phénomènes de retournement, on lui préférera une continuation de type arc-length.

### Continuation arc-length

Les techniques de continuation par longueur d'arc (*arc-length*) consistent à considérer le paramètre de contrôle  $\omega$  comme une variable de l'algorithme non-linéaire, afin d'en déterminer la valeur optimale. Pour ce faire, une équation supplémentaire doit être ajoutée au système non-linéaire à résoudre. Dans le cadre de ces méthodes, on utilise l'abscisse curviligne  $s$  de la courbe pour paramétrer la solution. Pour définir cette nouvelle équation, on utilise l'incrément d'abscisse curviligne  $ds$ , choisi par l'utilisateur. L'objectif est de rechercher la solution sur une hypersphère de rayon  $ds$  centrée sur la dernière solution convergée, on cherche donc à vérifier :

$$ds^2 = (d\tilde{\mathbf{X}})^T(d\tilde{\mathbf{X}}) + d\omega^2 \quad (\text{II.30})$$

où  $d\tilde{\mathbf{X}}$  et  $d\omega$  désignent les écarts entre le dernier résultat convergé et le jeu de variables courant du solveur. En écrivant cette équation sous forme de résidu, on obtient la relation suivante que l'on ajoute au système à résoudre :

$$r(\tilde{\mathbf{X}}, \omega) = (d\tilde{\mathbf{X}})^T(d\tilde{\mathbf{X}}) + d\omega^2 - ds^2 \quad (\text{II.31})$$

Dans la plupart des cas, cette méthode offre des résultats satisfaisants. Cependant, il arrive qu'un point en aval sur la courbe soit plus attractif pour l'algorithme que le point recherché en amont. Dans ce cas, il est possible de modifier légèrement l'équation précédente, et de rechercher la solution sur l'hyperplan orthogonal à la tangente à la courbe et à une distance  $dl$  du point précédent. L'équation de l'hyperplan est alors déterminée par linéarisation de l'équation de l'hypersphère. Cette technique est donc appelée continuation *pseudo arc-length*. La Figure II.2 représente le principe de la méthode de continuation arc-length.

### 1.3.2 Prédicteurs

L'étape de prédiction a pour objectif de déterminer un point initial le plus proche de la solution, facilitant la convergence de l'étape de correction. Différentes méthodes de prédiction peuvent être utilisées. Les différentes méthodes de prédiction présentées ci-dessous sont représentées sur la Figure II.3, dans le cas d'une continuation arc-length.

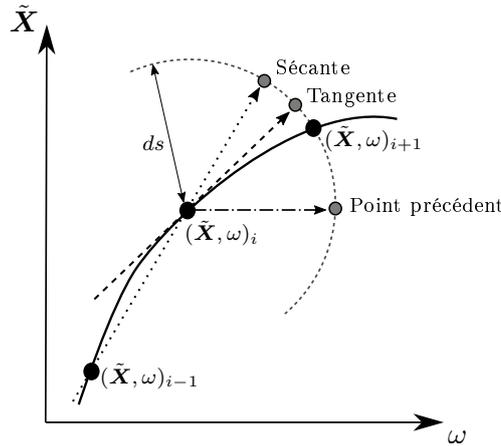


FIGURE II.3 – Illustration de différentes méthodes de prédiction.

#### Prédiction par point précédent

La plus simple des méthodes de prédiction consiste à réutiliser la valeur du point précédent comme prédiction pour le point suivant :  $\tilde{\mathbf{X}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{X}}_i$ . Cependant, cette méthode, appelée méthode du point précédent, donne une assez mauvaise approximation dans les cas présentant une forte évolution.

#### Prédiction sécante

La prédiction sécante est un cas particulier des prédictions par interpolation polynomiale. Ce type de méthode consiste à estimer la prédiction en construisant une interpolation polynomiale sur les points précédemment calculés. Dans le cas d'une interpolation polynomiale d'ordre  $d$ , il est alors nécessaire d'utiliser les  $d + 1$  derniers points. En pratique, l'utilisation d'un nombre de points important engendre une assez mauvaise approximation, ces méthodes sont donc principalement utilisées pour une interpolation cubique, quadratique, ou d'ordre 1. Dans le cas d'une interpolation d'ordre 1, les deux derniers points sont nécessaire, et la méthode est alors appelée méthode de prédiction par la sécante. Dans ce cas, la prédiction au point  $i + 1$  est déterminée par l'équation suivante :

$$(\tilde{\mathbf{X}}, \omega)_{\text{prédic}} = (\tilde{\mathbf{X}}, \omega)_i + ds \frac{(\tilde{\mathbf{X}}, \omega)_i - (\tilde{\mathbf{X}}, \omega)_{i-1}}{\|(\tilde{\mathbf{X}}, \omega)_i - (\tilde{\mathbf{X}}, \omega)_{i-1}\|} \quad (\text{II.32})$$

La Figure II.3 représente une prédiction par la sécante. Cette méthode est très utilisée par sa simplicité, celle-ci ne nécessitant pas le calcul de la jacobienne. De plus, elle est souvent plus efficace que la méthode du point précédent. Cependant, l'approximation réalisée peut s'avérer

moins efficace dans le cas de forte courbure. Cette méthode de prédiction sera retenue dans la suite de ce manuscrit pour sa simplicité d'utilisation et sa robustesse.

### Prédiction tangente

La prédiction tangente consiste quant à elle à utiliser la tangente à la courbe au point  $i$  pour déterminer la prédiction du point  $i+1$ . La tangente est alors déterminée en calculant la jacobienne au point  $i$  par différentiation. Cette méthode permet d'obtenir une bonne approximation. Cependant, le cout numérique du calcul du jacobien restreint son utilisation aux cas où la convergence est complexe.

#### 1.4 Condition d'excitabilité en symétrie cyclique

Il est important de noter que dans le cas de l'étude par la méthode de l'équilibrage harmonique d'un problème en symétrie cyclique, il existe un lien entre les harmoniques temporelles d'excitation et les harmoniques spatiales de la réponse, i.e. le diamètre nodal. En effet, Charleux [24] a montré dans sa thèse que chaque harmonique temporelle de l'excitation ne peut exciter que les modes ayant un nombre à diamètre particulier. Ainsi, l'harmonique temporelle  $k$  n'excite qu'une seule classe de modes à diamètre lorsque l'on considère un effort d'excitation ayant un diamètre nodal  $h_{ex}$  :

- Si  $kh_{ex} = qN_S$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , l'harmonique temporelle  $k$  excite le diamètre 0.
- Si  $kh_{ex} = N_S/2 + qN_S$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , l'harmonique temporelle  $k$  excite le diamètre  $N_S/2$ .
- Si  $kh_{ex} = \pm n + qN_S$ ,  $n \in \llbracket 1, N_S/2 \llbracket$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , l'harmonique temporelle  $k$  excite le diamètre  $n$ .
- Sinon, aucun diamètre n'est excité.

Il est à noter que la seconde condition n'existe que si  $N_S$  est pair.

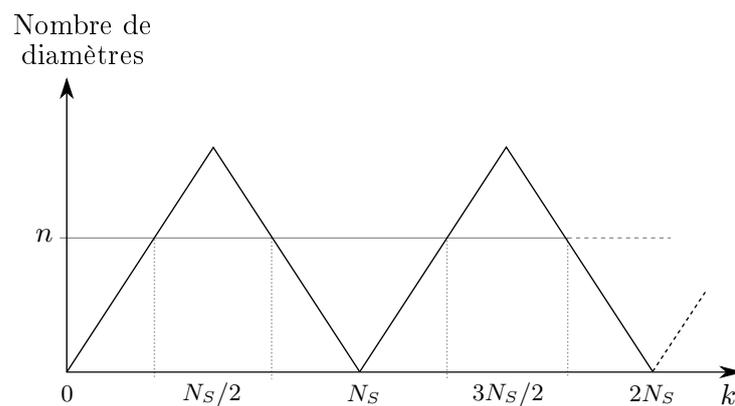


FIGURE II.4 – Diagramme Zig-Zag représentant les diamètres nodaux répondant à une excitation à  $n$  diamètres.

Cette condition d'excitabilité se représente par un diagramme Zig-Zag. Ce type de diagramme a d'abord été établi pour définir le phénomène d'appropriation modale, correspondant au repliement de spectre des harmoniques spatiales en nombre à diamètres nodaux équivalents [131]. De la même

manière, un diagramme Zig-Zag peut être établi pour définir le lien entre harmonique temporelle d'excitation et diamètre nodal de la réponse, cf Figure II.4.

En pratique, cette observation permet de réduire considérablement la taille du modèle en ne considérant que les diamètres excitables dans la résolution, à partir du diamètre nodal de l'effort d'excitation et des harmoniques temporelles considérées dans la série de Fourier tronquée. La résolution du problème peut donc être décomposée en plusieurs sous-problèmes indépendants.

### 1.5 Non-linéarités en symétrie cyclique

Les hypothèses de symétrie cyclique présentées précédemment présentent cependant des limitations dans les cas présentant des non-linéarités. Dans ce cas, l'hypothèse de superposition permettant de traiter les sous-problèmes indépendamment avant de reconstruire la réponse sur l'ensemble de la structure n'est plus valable. Il est alors nécessaire de traiter l'ensemble des nombres à diamètre. L'hypothèse de symétrie cyclique, permettant d'étudier la réponse d'un secteur plutôt que de l'ensemble du modèle peut cependant être utilisée sous-réserve de respecter deux conditions particulières. Premièrement, la non-linéarité doit respecter les conditions de symétrie cyclique au même titre que la structure. Cette hypothèse est bien respectée dans le cas du contact aube-disque. En effet, comme toutes les aubes sont similaires et que le disque respecte les conditions de symétrie cyclique, toutes les zones de contact aube-disque se comportent de la même manière, avec les mêmes non-linéarités. La seconde hypothèse nécessite que les déplacements de la structure respectent une relation de propagation tel que :

$$\mathbf{X}_j(t) = \mathbf{X}_0(t - j\Delta t) \quad (\text{II.33})$$

où  $\mathbf{X}_j(t)$  est le déplacement du secteur  $j$  à l'instant  $t$ . Petrov [104] montre que la condition de propagation des déplacements, équation (II.33), est respectée si l'effort d'excitation respecte aussi une relation de propagation. Or, cette propriété est bien vérifiée dans les cas considérés dans ce manuscrit. En effet, si l'on considère un effort fixe dans le repère fixe, comme une excitation par vortex de sol détaillée dans le Chapitre IV, chaque aube passe devant la distortion avec un déphasage :

$$\mathbf{F}_j(t) = \mathbf{F}_0 \left( t - k \frac{2\pi}{N_S \Omega} \right) \quad (\text{II.34})$$

où  $\mathbf{F}_j(t)$  est l'effort d'excitation sur le secteur  $j$  à l'instant  $t$ ,  $N_S$  est le nombre de secteurs et  $\Omega$  est la vitesse de rotation. Ainsi, la résolution peut bien être menée sur un seul secteur dans le cas des non-linéarités traitées dans ce manuscrit. De plus, il est possible d'utiliser des méthodes de réduction de type sous-structuration pour réduire la taille du modèle et donc diminuer les temps de calcul, comme détaillé dans la section suivante.

## 2 Méthodes de sous-structuration

Les méthodes de sous-structuration, ou de synthèse modale (Component Mode Synthesis - CMS), ont pour objectif de réduire la taille des modèles considérés, afin d'accélérer les temps de calcul. Le principe de ces méthodes est de diviser la structure en plusieurs sous-structures, en

appliquant des conditions de frontières à celle-ci. Il est alors possible d'utiliser des méthodes de condensation statique ou de sous-structuration dynamique. Un grand nombre de méthodes de sous-structuration dynamique existent. Parmi elles, les deux types de méthodes les plus classiques sont : les méthodes à interfaces fixes dont la méthode de Craig-Bampton [31] (la plus utilisée aujourd'hui), et les méthodes à interfaces libres généralisées par MacNeal [88]. D'autres méthodes de réduction seront aussi évoquées dans la dernière section. Les méthodes de réduction ont fait l'objet de nombreuses recherches, et sont donc très bien référencées dans la littérature.

La première étape d'application d'une méthode de sous-structuration consiste à diviser la structure complète en plusieurs sous-structure. Les degrés de liberté (DDLs) sont ensuite réorganisés, afin de séparer les degrés de liberté internes à la sous-structure, notés avec un indice  $\bullet_i$  et les degrés de liberté de frontière (ou boundary) conservés suite à la réduction, notés  $\bullet_b$ . L'équation du mouvement (I.41) peut alors être réécrite en réorganisant les matrices et les vecteurs :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ib} \\ \mathbf{C}_{bi} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{nl_i} \\ \mathbf{F}_{nl_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{ext_i} \\ \mathbf{F}_{ext_b} \end{pmatrix} \quad (\text{II.35})$$

## 2.1 Condensation statique de Guyan

La méthode de Guyan [56] a pour objectif de réaliser une condensation statique sur les degrés de liberté de frontière  $\bullet_b$ . Le principe de cette méthode est de négliger les effets d'inertie des degrés de liberté esclaves, notés  $\bullet_i$ , devant ceux des degrés de liberté maîtres, notés  $\bullet_b$ . Les degrés de liberté esclaves sont ainsi liés linéairement aux degrés de liberté maîtres par l'intermédiaire de la matrice des modes statiques de liaison  $\Psi_G$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \left( -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \right) \mathbf{x}_b \\ &= \Psi_G \mathbf{x}_b \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, le problème est projeté sur la base réduite dont le vecteur représentatif  $\mathbf{T}$  est exprimé :

$$\mathbf{T}_G = \begin{bmatrix} \Psi_G \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

Les inconnues du problème sont alors les coordonnées généralisées, notées  $\mathbf{q}(t)$ , correspondant aux degrés de liberté maîtres du modèle initial. L'hypothèse permettant d'exprimer les degrés de liberté maîtres en fonction des degrés de liberté esclaves est cependant très restrictive, et représente uniquement une approche statique du problème. Dans le cas de calculs dynamiques, d'autres méthodes seront alors préférées, telles que les méthodes de sous-structuration de Craig-Bampton ou de MacNeal, permettant d'ajouter des composantes dynamiques à la réduction. Il est cependant possible de coupler les méthodes de sous-structuration dynamique à la condensation statique de Guyan, afin de réduire la taille des frontières retenues pour ces méthodes de sous-structuration.

## 2.2 Sous-structuration à interfaces libres – MacNeal

Les méthodes de sous-structuration à interfaces libres ont été développées par Hou [61] et généralisées par MacNeal [88]. L'objectif est de représenter les sous-structures par leurs modes

propres libres et des modes d'attaches. Les modes propres à interfaces libres, notés  $\Phi_{MN}$ , sont déterminés en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \Phi_{MN} = \mathbf{0} \quad (\text{II.38})$$

L'influence des autres sous-structures sur la structure considérée est ensuite prise en compte via des modes d'attaches notés  $\Psi_{MN}$ . Ils représentent la réponse de la structure en imposant des efforts unitaires successivement sur chaque degré de liberté de frontière :

$$\Psi_{MN} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_u \quad (\text{II.39})$$

où  $\mathbf{F}_u$  correspond aux efforts unitaires imposés. Comme une structure à interfaces libres est considérée, celle-ci peut posséder des modes de corps rigides et la matrice  $\mathbf{K}$  n'est alors plus inversible. Il est donc nécessaire de modifier l'approche pour exprimer la matrice  $\Psi_{MN}$ . Afin de rendre le système isostatique, il est nécessaire d'imposer  $n_r$  contraintes, formant la matrice de souplesse  $\mathbf{G}_i$ , pour contrer les  $n_r$  modes de corps rigides. Les efforts  $\mathbf{F}_u$  sont ensuite soustraits, en projetant la matrice  $\mathbf{G}_i$  sur le sous-espace engendré par la matrice  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_i \mathbf{P} \quad (\text{II.40})$$

où  $\mathbf{G}_e$  est la matrice de souplesse projetée dans le sous-espace engendré par  $\mathbf{P}$ , exprimé :

$$\mathbf{P} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{M} \Phi_{MN_r} (\Phi_{MN_r}^T \mathbf{M} \Phi_{MN_r})^{-1} \Phi_{MN_r}^T \right) \quad (\text{II.41})$$

avec  $\Phi_{MN_r}$  les vecteurs propres associés aux modes de corps rigides. Ces projections sont d'avantage détaillées dans les travaux de MacNeal [88].

La matrice  $\mathbf{G}_e$  contient les contributions statiques de l'ensemble des modes de la base  $\Phi_{MN}$ . En notant  $N_m$  le nombre de modes retenus, il est possible de séparer les contributions des modes retenus et non-retenus dans la matrice  $\mathbf{G}_e$  :

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{G}_r + \mathbf{G} \quad (\text{II.42})$$

où  $\mathbf{G}_r$  correspond aux contributions des modes retenus et  $\mathbf{G}$  à la matrice de souplesse des modes non-retenus, telle que :

$$\mathbf{G} = \sum_{i=N_m+1}^n \frac{\phi_i \phi_i^T}{\omega_i^2} \quad (\text{II.43})$$

En pratique, l'utilisation de l'équation précédente (II.43) nécessite de calculer l'ensemble des modes propres de la sous-structure. Elle est donc peu utilisée. Cependant, il est possible d'exprimer  $\mathbf{G}$  par soustraction à partir de  $\mathbf{G}_e$ , en calculant uniquement les modes propres retenus :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_e - \mathbf{G}_r \quad (\text{II.44})$$

$$= \mathbf{G}_e - \sum_{i=1}^{N_m} \frac{\phi_i \phi_i^T}{\omega_i^2} \quad (\text{II.45})$$

En séparant les DDLs internes et de frontières dans la matrice  $\mathbf{G}$ , et comme uniquement les DDLs de frontières sont chargés pour le calcul des modes d'attaches, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{x}_i = \Psi_{MN} \mathbf{x}_b \quad (\text{II.46})$$

en exprimant  $\Psi_{MN}$  tel que :

$$\Psi_{MN} = \mathbf{G}_{ib} \mathbf{G}_{bb}^{-1} \quad (\text{II.47})$$

La dernière étape consiste à corriger les vecteurs propres des modes libres  $\Phi_{MN}$  pour garantir les déplacements aux interfaces :

$$\Phi_{MN} = \Phi_{MN_i} - \Psi_{MN} \Phi_{MN_b} \quad (\text{II.48})$$

La matrice de transformation de MacNeal représentant la base du sous-espace de réduction est alors :

$$\mathbf{T}_{MN} = \begin{pmatrix} \Phi_{MN} & \Psi_{MN} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{II.49})$$

Les méthodes de MacNeal sont très avantageuse dans le cas d'un recalage de modèle par rapport à des données expérimentales. En effet, il est plus facile en essais de déterminer les modes libre-libre pour les sous-structures que de recréer des conditions limites d'encastrement, qui seraient par nature imparfaites. Comme la méthode de MacNeal utilise les modes propres libres des structures, il est facile de recaler les paramètres du modèle sur les conditions expérimentales, notamment en ce qui concerne l'amortissement structural. Cependant, de par sa complexité de mise en œuvre, notamment pour le calcul de la matrice de souplesse résiduelle  $\mathbf{G}$ , cette méthode ne sera pas retenue pour la suite de ce manuscrit. Une méthode de sous-structuration à interfaces fixes de Craig-Bampton lui sera préférée.

### 2.3 Sous-structuration à interfaces fixes – Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [31] est une méthode de réduction de modèle par sous-structuration à interfaces fixes. Le principe de ce type de méthode est d'approcher la solution en la décomposant sur la base des modes propres encastres et de modes statiques de liaison. Les modes encastres sont définis comme les modes propres de la sous-structure en ayant encastres les DDLs de frontière  $\mathbf{x}_b$ , et sont donc des modes associés aux DDLs internes. Les modes encastres  $\Phi_{CB}$  sont donc calculés en recherchant les solutions du problème aux valeurs propres en imposant des déplacements nuls  $\mathbf{x}_b = \mathbf{0}$  :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Phi_{CB} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Ainsi :

$$\left( \mathbf{K}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii} \right) \Phi_{CB} = \mathbf{0} \quad (\text{II.51})$$

Les modes statiques de liaison  $\Psi_{CB}$  sont ensuite utilisés pour compléter la base et permettre de considérer l'influence du mouvement des DDLs de frontière sur les DDLs internes. Ils sont

calculés en imposant un déplacement unitaire sur chacun des DDLs de frontière indépendamment, dans le problème statique associé à l'équation (II.35), tel que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{CB} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.52})$$

soit

$$\mathbf{K}_{ii}\Psi_{CB} + \mathbf{K}_{ib}\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{II.53})$$

L'expression précédente peut donc être réécrite sous la forme :

$$\Psi_{CB} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} \quad (\text{II.54})$$

La réduction du système est ensuite réalisée via l'utilisation de la matrice de passage  $\mathbf{T}$  :

$$\mathbf{T}_{CB} = \begin{pmatrix} \Phi_{CB} & \Psi_{CB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{II.55})$$

L'utilisation de la matrice de passage telle que définie ci-dessus donne un résultat exact. La réduction entraînant une approximation est ensuite réalisée en ne retenant que les  $N_m$  premiers modes de la sous-structure, soit les  $N_m$  premières colonnes de la matrice  $\Phi_{CB}$ . Les termes de l'équation du mouvement peuvent alors être réduits en les projetant dans la base réduite de Craig-Bampton :

$$\mathbf{M}_{CB} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M} \mathbf{T}_{CB} \quad (\text{II.56})$$

$$\mathbf{C}_{CB} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{C} \mathbf{T}_{CB} \quad (\text{II.57})$$

$$\mathbf{K}_{CB} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_{CB} \quad (\text{II.58})$$

$$\mathbf{F}_{\bullet CB} = \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{F}_{\bullet} \quad (\text{II.59})$$

Une fois les matrices réduites, il est possible de résoudre le problème en termes de déplacements réduits  $\mathbf{X} = [\mathbf{q}_i; \mathbf{x}_b]^T$ , où  $\mathbf{q}_i$  correspond aux coordonnées généralisées des déplacements sur les modes conservés dans la base  $\Phi_{CB}$ . Les déplacements complets peuvent alors être obtenus à partir du modèle réduit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \quad (\text{II.60})$$

$$= \mathbf{T}_{CB} \mathbf{X} \quad (\text{II.61})$$

La méthode de Craig-Bampton permet d'obtenir une bonne approximation, moyennant l'utilisation d'un nombre de modes suffisants. Les modes sont généralement choisis grâce à un critère fréquentiel. La qualité de la base dépend aussi des degrés de liberté de frontière conservés. Cette méthode est particulièrement adaptée aux problèmes dynamiques présentant des non-linéarités localisées, puisqu'il est possible de retenir les degrés de liberté non-linéaires comme degrés de liberté de frontière. Les degrés de liberté de frontière sont donc des déplacements physiques, qu'il est possible de traiter comme un déplacement classique dans la résolution du problème. De par sa simplicité d'utilisation dans les cas de non-linéarités localisées comme le frottement aube-disque traité dans ce manuscrit, et sa facilité de mise en œuvre, la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton sera retenue dans les développements à venir. La mise en œuvre de cette méthode sur un cas éléments-finis aube-disque simplifié sera détaillée dans la section II.5.1.

## 2.4 Autres méthodes de réduction

D'autres méthodes de sous-structuration existent et peuvent s'avérer plus adaptées dans certains cas de figure. On peut évoquer notamment la double synthèse modale [70][105], qui permet d'ajouter une réduction supplémentaire à la sous-structuration de Craig-Bampton. La méthode de Craig-Bampton implique en effet de conserver un grand nombre de degrés de liberté de frontière. La double synthèse modale consiste donc à réduire les frontières en les projetant sur la base des modes  $\Phi_b$  appelés modes de branche, tel que :

$$\left(\mathbf{K}_{bb} - \omega^2 \mathbf{M}_{bb}\right) \Phi_b = \mathbf{0} \quad (\text{II.62})$$

Ainsi, en retenant  $N_b$  modes de branches dans la base  $\Phi_b$ , choisis par un critère fréquentiel, il est possible de construire une matrice de réduction des frontières  $\mathbf{T}_b$  telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{I}^{N_{SS}} & \\ & & & \Phi_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{N_{SS}} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

où  $\mathbf{q}^k$  représente les degrés de liberté généralisés de la sous-structure  $k$  réduits par la méthode de Craig-Bampton,  $N_{SS}$  est le nombre de sous-structures et  $\mathbf{q}_b$  les degrés de liberté généralisés correspondant aux frontières. En notant  $\mathbf{T}_{DSM}$  la matrice de réduction des frontières précédemment exprimée équation (II.63), il est possible d'exprimer le passage des coordonnées généralisées au modèle physique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{N_{SS}} \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \mathbf{T}_{DSM} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{N_{SS}} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} \quad (\text{II.64})$$

La double synthèse modale permet ainsi de transformer le problème en utilisant uniquement des coordonnées généralisées en s'affranchissant des degrés de liberté physiques conservés par la méthode de Craig-Bampton. Cette méthode est très utilisée de par sa simplicité et son efficacité [63][89].

D'autres méthodes de réduction sont aussi utilisées, telles que les méthodes de Craig-Chang [32], dont la principale différence vient du réassemblage des sous-structures réduites. De même, la méthode de Benfield-Hruda [8] est assez similaire à la méthode de Craig-Bampton, dans laquelle une substitution modale est utilisée pour l'identification des sous-structures.

## 3 Résolution du problème de contact – DLFT

L'étude de la dynamique des roues aubagées permet l'utilisation de l'hypothèse de symétrie cyclique, comme présenté dans la section I.2.3. En considérant un seul secteur de référence, le problème est alors un problème de dynamique avec contact au niveau des interfaces entre l'aube et le disque. Cette section vise à expliquer la méthode utilisée pour résoudre le problème de

dynamique avec contact. Dans un premier temps le système est condensé afin de réduire sa taille. Le problème de contact est ensuite résolu par une procédure d'alternance fréquence temps (AFT) appelée Dynamic Lagrangian Frequency Time (DLFT) et développée par Nacivet [97]. Cette méthode, détaillée dans cette section et développée dans un code interne, a fait l'objet de nombreuses études et validations dans le cas du contact frottant [97][55][116][63].

### 3.1 Équation du mouvement

En notant  $l$  le numéro du solide considéré tel que  $l = [1; 2]$ , on peut écrire une équation du mouvement par solide  $l$  :

$$\mathbf{M}^l \ddot{\mathbf{X}}^l + \mathbf{C}^l \dot{\mathbf{X}}^l + \mathbf{K}^l \mathbf{X}^l + \mathbf{F}_c^l = \mathbf{F}_{ext}^l \quad (\text{II.65})$$

où les matrices  $\mathbf{M}^l$ ,  $\mathbf{C}^l$  et  $\mathbf{K}^l$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur tangente du solide  $l$ .  $\mathbf{F}_c^l$  sont les efforts non-linéaires de contact et  $\mathbf{F}_{ext}^l$  les efforts extérieurs et d'excitation.  $\mathbf{X}$  est le vecteur des déplacements, inconnues du problème. Dans le cas d'une excitation périodique, il est possible de rechercher une solution périodique en régime permanent et donc d'utiliser la méthode HBM pour la résolution dans le domaine fréquentiel, tel que présenté dans la section II.1.2.1. Ainsi, les équations du mouvement pour les deux solides  $l$  s'écrivent :

$$\mathbf{Z}^l \tilde{\mathbf{X}}^l + \tilde{\mathbf{F}}_c^l(\tilde{\mathbf{X}}^l) = \tilde{\mathbf{F}}_{ext}^l \quad (\text{II.66})$$

avec  $\mathbf{Z}^l$  la matrice de raideur dynamique du solide  $l$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_c^l$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{ext}^l$  et  $\tilde{\mathbf{X}}^l$  les vecteurs multiharmoniques des efforts de contact, des efforts extérieurs et des déplacements respectivement. Dans le cas de non-linéarités localisées comme les problèmes de contact au niveau des interfaces, la résolution du problème peut être simplifiée en diminuant la taille du modèle à traiter par des méthodes de partitionnement des degrés de liberté appelées condensations. Elles ont été introduites par Nacivet [97].

#### 3.1.1 Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires

La première étape de condensation consiste à réduire le système pour ne conserver que les noeuds dits non-linéaires, c'est à dire les noeuds participant au contact. Pour chaque solide  $l$ , les degrés de liberté linéaires notés avec l'indice  $\bullet_A$  et les DDLs non-linéaires  $\bullet_C$  sont séparés dans l'équation du mouvement (II.66). Les degrés de liberté dits non-linéaires sont ceux participant au contact, c'est à dire ceux sur lesquels un effort de contact est exercé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{CC}^l & \mathbf{Z}_{CA}^l \\ \mathbf{Z}_{AC}^l & \mathbf{Z}_{AA}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_C^l \\ \tilde{\mathbf{X}}_A^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{extC}^l \\ \tilde{\mathbf{F}}_{extA}^l \end{bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

La deuxième ligne de l'équation (II.67) peut alors être réexprimée :

$$\tilde{\mathbf{X}}_A^l = (\mathbf{Z}_{AA}^l)^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{extA}^l - \mathbf{Z}_{AC}^l \tilde{\mathbf{X}}_C^l). \quad (\text{II.68})$$

En remplaçant  $\tilde{\mathbf{X}}_A^l$  dans la première ligne de (II.67) par l'expression (II.68), on obtient :

$$\mathbf{Z}_{red}^l \tilde{\mathbf{X}}_C^l + \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^l = \tilde{\mathbf{F}}_{red}^l \quad (\text{II.69})$$

avec

$$\mathbf{Z}_{red}^l = \mathbf{Z}_{CC}^l - \mathbf{Z}_{CA}^l \left( \mathbf{Z}_{AA}^l \right)^{-1} \mathbf{Z}_{AC}^l \quad (\text{II.70})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{red}^l = \tilde{\mathbf{F}}_{ext_C}^l - \mathbf{Z}_{CA}^l \left( \mathbf{Z}_{AA}^l \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{ext_A}^l \quad (\text{II.71})$$

Le nombre d'inconnues du système est alors réduit au nombre de nœuds de contact, les déplacements du reste de la structure  $\tilde{\mathbf{X}}_A^l$  étant déterminés à partir des déplacements des nœuds de contact  $\tilde{\mathbf{X}}_C^l$  via l'équation (II.68).

### 3.1.2 Condensation en degrés de liberté relatifs

Une seconde condensation peut ensuite être réalisée dans le cas de systèmes dont la non-linéarité peut être exprimée en terme de variables relatives, ce qui est le cas du contact lorsqu'une formulation nœud à nœud des lois de contact est utilisée. Le maillage est donc supposé coïncident au niveau des interfaces de contact entre les deux solides. Cette condensation permet ainsi de réduire d'un facteur deux le nombre d'inconnues. Considérons deux solides 1 et 2 en contact. En notant  $\tilde{\lambda}$  l'effort de contact, le principe d'action-réaction s'écrit :

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\mathbf{F}}_{c_C}^1 = -\tilde{\mathbf{F}}_{c_C}^2 \quad (\text{II.72})$$

Le vecteur des déplacements relatifs  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  est défini tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}_r &= \tilde{\mathbf{X}}_C^1 - \tilde{\mathbf{X}}_C^2 \\ &= \left( \mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} \left( \tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - \tilde{\lambda} \right) - \left( \mathbf{Z}_{red}^2 \right)^{-1} \left( \tilde{\mathbf{F}}_{red}^2 + \tilde{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

L'équation (II.73) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \tilde{\lambda} = \tilde{\mathbf{F}}_r \quad (\text{II.74})$$

où  $\mathbf{Z}_r$  est la matrice de raideur dynamique réduite aux déplacements relatifs et  $\tilde{\mathbf{F}}_r$  est le vecteur des forces extérieures réduit aux déplacements relatifs :

$$\mathbf{Z}_r = \left[ \left( \mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} + \left( \mathbf{Z}_{red}^2 \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{II.75})$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{Z}_r \left[ \left( \mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - \left( \mathbf{Z}_{red}^2 \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^2 \right] \quad (\text{II.76})$$

Afin d'éviter l'inversion d'une matrice singulière dans le cas où l'un des solides possède des modes de corps rigide (le solide 1 ici), la matrice de raideur dynamique réduite  $\mathbf{Z}_r$  peut être réexprimée en développant son expression par une méthode directe :

$$\mathbf{Z}_r = \mathbf{Z}_{red}^2 \left( \mathbf{Z}_{red}^2 + \mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} \mathbf{Z}_{red}^1 \quad (\text{II.77})$$

Dans le même but, en remplaçant  $\mathbf{Z}_r$  par cette nouvelle expression dans l'équation (II.76), une nouvelle formulation du vecteur des forces extérieures sans inversion de la matrice de raideur dynamique du solide 1 est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{F}}_r = \mathbf{Z}_{red}^2 \left( \mathbf{Z}_{red}^2 + \mathbf{Z}_{red}^1 \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^1 - \mathbf{Z}_r \left( \mathbf{Z}_{red}^2 \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{red}^2 \quad (\text{II.78})$$

La résolution de l'équation (II.74) par l'algorithme de résolution non-linéaire permet d'obtenir les déplacements relatifs  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  et les efforts de contact  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ . L'utilisation de (II.69) et (II.72) permet ensuite d'obtenir les déplacements sur chacune des surfaces de contact  $\tilde{\mathbf{X}}_C^l$  :

$$\tilde{\mathbf{X}}_C^l = \left( \mathbf{Z}_{red}^l \right)^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{F}}_{red}^l - \tilde{\mathbf{F}}_{cC}^l \right], \quad l = 1, 2 \quad (\text{II.79})$$

Dans la suite de ce manuscrit, les maillages seront construits coïncidents au niveau des interfaces, ce qui permet l'utilisation de cette méthode de condensation.

### 3.2 Calcul des efforts de contact

La résolution de l'équation du mouvement (II.74) est réalisée via un algorithme d'optimisation adapté aux cas non-linéaires, de type région de confiance [27]. Cependant, les efforts de contact n'ont pas d'expression dans le domaine fréquentiel. Une procédure d'alternance fréquence-temps (AFT) est donc utilisée pour vérifier les lois de contact. Cette procédure, appelée Dynamic Lagrangian Frequency Time (DLFT), utilise un processus de prédiction-correction pour déterminer l'état de contact et les efforts associés. Elle permet de vérifier la loi de frottement de Coulomb, ainsi que d'assurer la non-interpénétration entre les corps en contact, comme présenté dans la section I.3.2. Du fait du processus de prédiction-correction utilisé par la DLFT, celle-ci permet d'assurer une vérification exacte des lois de contact non-régulières, sans ajouter une approximation due à l'utilisation de lois de contact régularisées.

La méthode DLFT consiste à considérer l'effort de contact  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  comme des multiplicateurs de Lagrange dans l'équation du mouvement à résoudre. L'algorithme de résolution de l'équation du mouvement permet ainsi d'estimer une valeur de  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  à partir de laquelle la DLFT détermine les efforts de contact  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  associés. La valeur de la fonction  $\mathbf{f}$  peut alors être déterminée :

$$\mathbf{f} \left( \tilde{\mathbf{X}}_r \right) = \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \tilde{\mathbf{F}}_r \quad (\text{II.80})$$

L'algorithme de minimisation de la fonction  $\mathbf{f}$  corrige ensuite la valeur de  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  jusqu'à atteindre le critère de convergence.

#### 3.2.1 Pénalisation de l'équation du mouvement

Afin de vérifier les lois de contact, la méthode DLFT introduit un déplacement relatif inconnu  $\tilde{\mathbf{Y}}_r$ . Lorsque la convergence est atteinte, ce vecteur vérifie :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_r = \tilde{\mathbf{X}}_r \quad (\text{II.81})$$

Nacivet [97] propose de définir  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  comme étant des Lagrangiens dynamiques, utilisant une pénalisation des équations du mouvement dans le domaine fréquentiel :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \epsilon \left( \tilde{\mathbf{X}}_r - \tilde{\mathbf{Y}}_r \right) \quad (\text{II.82})$$

où  $\epsilon$  est un coefficient de pénalité positif, dont le choix de la valeur est détaillé section II.3.3. Le terme  $\epsilon \left( \tilde{\mathbf{X}}_r - \tilde{\mathbf{Y}}_r \right)$  force ainsi la vérification des lois de contact. En effet, si l'on reporte l'équation (II.82) dans (II.80), on obtient :

$$\mathbf{f} \left( \tilde{\mathbf{X}}_r \right) = \epsilon \left( \tilde{\mathbf{X}}_r - \tilde{\mathbf{Y}}_r \right) \quad (\text{II.83})$$

L'annulation de la fonction  $\mathbf{f}$  permet bien d'obtenir  $\tilde{\mathbf{Y}}_r = \tilde{\mathbf{X}}_r$ , ce qui assure que le couple  $(\tilde{\mathbf{X}}_r, \tilde{\boldsymbol{\lambda}})$  vérifie les lois de contact et de frottement, puisque  $\tilde{\mathbf{Y}}_r$  est déterminé en forçant la validation des lois de contact, comme expliqué dans la section suivante. En effet, la valeur de  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  permet d'obtenir une prédiction de l'état de contact et la vérification des lois de contact est ensuite imposée par la correction de  $\tilde{\mathbf{Y}}_r$ .

Les équations exprimées dans ce paragraphe et dans les suivants sont formulées en déplacements relatifs. Cependant, il est aussi possible de formuler le problème en vitesse relative, d'après les formulations de Nacivet [97]. Dans la suite de ce manuscrit, uniquement la formulation en déplacements relatifs de la DLFT a été considérée, de par sa simplicité d'utilisation.

### 3.2.2 Prédiction de l'état de contact

En reprenant l'expression de  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  définie dans l'équation (II.82), on peut séparer le terme dépendant de  $\tilde{\mathbf{X}}_r$ , que l'on notera  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x$ , et celui dépendant de  $\tilde{\mathbf{Y}}_r$ , noté  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_y$  :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}_r - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \epsilon \tilde{\mathbf{X}}_r}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x} - \underbrace{\epsilon \tilde{\mathbf{Y}}_r}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_y} \quad (\text{II.84})$$

Cette notation permet de séparer le terme  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x$  calculé à partir de  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  et le terme  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_y$  déterminé par le processus de prédiction-corrrection. Afin d'estimer les efforts, une procédure AFT est utilisée, présentée section II.1.2.2. Une transformée de Fourier inverse est utilisée pour exprimer le vecteur multiharmonique  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_x$  dans le domaine temporel sous la forme d'une suite de vecteurs  $\{\boldsymbol{\lambda}_x^{n_t}\}_{n_t=1..N_t}$ , représentant la valeur de  $\boldsymbol{\lambda}_x$  aux  $N_t$  instants de la période.

La prédiction de l'état de contact suivant la valeur de  $\mathbf{X}_r$  est réalisée en considérant le système adhérent. Dans ce cas, le vecteur des déplacements relatifs tangentiels  $\mathbf{Y}_r^T$  est constant entre les instants  $t_n$  et  $t_{n-1}$  et le déplacement relatif normal  $\mathbf{Y}_r^N$  est nul :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_r^{n,T} &= \mathbf{Y}_r^{n-1,T} \\ \mathbf{Y}_r^{n,N} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_y^{n,T} &= \boldsymbol{\lambda}_y^{n-1,T} \\ \boldsymbol{\lambda}_y^{n,N} &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{II.85})$$

où les exposants  $\bullet^N$  et  $\bullet^T$  correspondent respectivement aux composantes normales et tangentielles. Les exposants  $\bullet^n$  et  $\bullet^{n-1}$  correspondent à l'instant de la période considérée. La prédiction, notée  $\bullet_{pre}$ , est donnée par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{pre}^{n,T} &= \boldsymbol{\lambda}_x^{n,T} - \boldsymbol{\lambda}_y^{n-1,T} \\ \boldsymbol{\lambda}_{pre}^{n,N} &= \boldsymbol{\lambda}_x^{n,N} \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

### 3.2.3 Correction des efforts de contact

La prédiction permet de déterminer l'état de contact. L'effort de contact à l'instant  $n$ , noté  $\boldsymbol{\lambda}^n$ , est ensuite déterminé en corrigeant la prédiction, afin de vérifier les lois de contact et de frottement :

$$\boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{\lambda}_x^n - \boldsymbol{\lambda}_y^n \quad (\text{II.87})$$

La valeur de la correction est ensuite déterminée par l'état de contact prédit : séparation, adhérence ou glissement.

**Séparation :** Si  $\lambda_{pre}^{n,N} \geq 0$

Si la force prédite est positive, elle correspond à une force de traction, c'est à dire à une séparation des nœuds de contact. Dans ce cas, la force de contact  $\lambda^n$  doit être nulle :

$$\lambda_y^n = \lambda_x^n \quad (\text{II.88})$$

**Adhérence :** Si  $\lambda_{pre}^{n,N} < 0$  et  $\|\lambda_{pre}^{n,T}\| < \mu|\lambda_{pre}^{n,N}|$

Si la force normale prédite est négative, c'est donc une force de compression. Il y a donc contact entre les nœuds de l'élément de contact. La seconde condition implique que le contact est adhérent d'après la loi de Coulomb. Ainsi, le déplacement relatif normal  $Y_r^{n,N}$  est nul et le déplacement relatif tangentiel est constant :

$$\begin{cases} \lambda_y^{n,T} &= \lambda_y^{n-1,T} \\ \lambda_y^{n,N} &= 0 \end{cases} \quad (\text{II.89})$$

**Glissement :** Si  $\lambda_{pre}^{n,N} < 0$  et  $\|\lambda_{pre}^{n,T}\| \geq \mu|\lambda_{pre}^{n,N}|$

Comme pour la condition d'adhérence, la force normale implique un contact entre les solides. De plus, la seconde condition signifie que le solide est en glissement selon la loi de frottement de Coulomb. Le déplacement relatif normal  $Y_r^{n,N}$  est donc nul. De plus, la loi de frottement de Coulomb impose la valeur de la force de contact tangentiel  $\|\lambda_{pre}^{n,T}\| = \mu|\lambda_{pre}^{n,N}|$ , de même que sa direction et son sens. En effet, la force de contact tangentielle doit être colinéaire et de même sens que la vitesse relative  $V_r^{n,T}$ , puisque  $\lambda^n$  est défini comme l'opposé des forces de contact. La vitesse relative  $V_r^{n,T}$  est définie par :

$$V_r^{n,T} = \frac{Y_r^{n,T} - Y_r^{n-1,T}}{t_n - t_{n-1}} \quad (\text{II.90})$$

Il est alors possible d'exprimer l'effort tangentiel de correction  $\lambda_y^{n,T}$ , pour que  $\lambda^{n,T}$  vérifie les lois de contact de Coulomb, comme développé par Nacivet [97]. L'effort de correction peut alors s'exprimer :

$$\begin{cases} \lambda_y^{n,T} &= \lambda_y^{n-1,T} + \lambda_{pre}^{n,T} \left( 1 - \mu \frac{|\lambda_{pre}^{n,T}|}{\|\lambda_{pre}^{n,T}\|} \right) \\ \lambda_y^{n,N} &= 0 \end{cases} \quad (\text{II.91})$$

### 3.2.4 Initialisation à l'instant $n = 0$

Le processus de prédiction-correction expliqué ci-dessus permet de déterminer les efforts de contact, à l'aide d'un processus itératif. Cependant, il est nécessaire d'initialiser la valeur de l'effort à l'instant  $n = 0$ . L'initialisation est réalisée en définissant  $\lambda_y^{n=0}$  égale à la dernière valeur  $\lambda_y^N$  calculée à la fréquence précédente. Il est aussi possible de la choisir arbitrairement, mais cela nécessite de calculer l'effort sur plusieurs périodes au lieu d'une seule, afin de corriger l'erreur d'initialisation.

## 3.3 Choix du coefficient de pénalité

Pour assurer la bonne convergence de l'algorithme non-linéaire, il est nécessaire de choisir une valeur adaptée du coefficient de pénalité  $\epsilon$  de la DLFT, exprimé équation (II.82). En effet, la

valeur de ce paramètre influe sur la vitesse de convergence et sur la qualité du résultat [24]. Pour obtenir une convergence de la DLFT, il faut s'assurer que :

- Les équations du mouvement soient vérifiées :  $\tilde{\lambda} = \tilde{\mathbf{F}}_r - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r$
- Les conditions de contact et de frottement soient respectées :  $\tilde{\mathbf{X}}_r = \tilde{\mathbf{Y}}_r$

Ainsi, dans l'équation (II.82), il ne faut pas que l'un des termes représentant l'équation d'équilibre ( $\tilde{\mathbf{F}}_r - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r$ ) ou représentant les conditions de contact et de frottement ( $\epsilon(\tilde{\mathbf{X}}_r - \tilde{\mathbf{Y}}_r)$ ) soit prépondérant par rapport à l'autre. Pour cela, Charleux [24] propose de choisir  $\epsilon$  de sorte que son influence soit équivalente à celle de la composante de  $\mathbf{Z}_r$  correspondant à l'harmonique prépondérante (c'est à dire l'harmonique de l'excitation), que l'on note  $\mathbf{Z}_r^{(ex)}$ .  $\epsilon$  est donc choisi du même ordre de grandeur que le rayon spectral ( $\rho$ ) de  $\mathbf{Z}_r^{(ex)}$  :

$$\epsilon \sim \rho \left( \mathbf{Z}_r^{(ex)} \right) \quad (\text{II.92})$$

Des études d'influence sur ce paramètre ont permis de valider l'utilisation du rayon spectral d'un point de vue numérique.

### 3.4 Équilibre statique

L'initialisation de l'algorithme à la première fréquence étudiée nécessite de déterminer une valeur initiale proche de la valeur recherchée. La première fréquence de la plage de fréquence est choisie hors de la zone de non-linéarité. Ainsi, il est possible d'initialiser l'algorithme en utilisant l'équilibre statique avec frottement du système. Cet équilibre statique est déterminé en évaluant le terme  $\mathbf{a}_0(\mathbf{X}_r)$ , en annulant à l'aide de l'algorithme non-linéaire des fonctions  $\mathbf{f}_\theta$  définies par :

$$\mathbf{f}_\theta(\mathbf{X}_r) = \mathbf{Z}_r^{(0)} \frac{1}{2} \mathbf{a}_0(\mathbf{X}_r) + \boldsymbol{\lambda} + \theta \mathbf{F}_r, \quad \theta \in ]0, 1] , \quad (\text{II.93})$$

où  $\mathbf{Z}_r^{(0)} = \mathbf{K}_r$  est le terme de  $\mathbf{Z}_r$  associé à  $\mathbf{a}_0(\mathbf{X}_r)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  est la force de contact déterminée en utilisant la procédure de prédiction-correction décrite dans la section II.3.2 et  $\mathbf{F}_r$  désigne la charge statique incluant les efforts centrifuges et les pressions stationnaires. La charge est appliquée par paliers en augmentant  $\theta$  de 0 à 1 progressivement. Un déplacement relatif nul est utilisé pour déterminer la charge au premier pallier pour  $\theta = 0$ , puis les solutions sont calculées de proche en proche.

## 4 Notion de modes non-linéaires

La méthode de l'équilibrage harmonique présentée section (II.1.2) permet d'obtenir la réponse forcée du système, c'est à dire la réponse à une excitation sinusoïdale donnée. Cependant, celle-ci peut être étendue à l'étude d'un système dynamique non-linéaire autonome, via la notion de mode non-linéaire. Un mode non-linéaire est l'extension de la notion de mode linéaire à l'étude de système ayant un comportement non-linéaire. Cette section a pour but d'expliquer brièvement ce concept et la façon dont ils sont calculés dans le cas des modes complexes non-linéaires via l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique.

## 4.1 Définition

Les travaux de Rosenberg [111][113][110][112] ont permis de poser une première définition des modes non-linéaires dans le cas des systèmes conservatifs. Il définit un mode non-linéaire comme "une vibration à l'unisson du système", par extension du concept des modes linéaires. Cela revient donc à considérer que tous les degrés de liberté vibrent à la même fréquence, qu'ils atteignent leurs maxima et passent par 0 simultanément, et que tous les déplacements de tous les degrés de liberté peuvent être définis à partir d'un degré de liberté de référence. Dans le cas des systèmes non-conservatifs, les travaux de Shaw et Pierre [118][119] définissent alors les modes normaux comme "une variété invariante bidimensionnelle de l'espace des phases". Cette définition revient alors à paramétrer le système en déplacement, et en vitesse par rapport à un degré de liberté de référence. Ces deux méthodes ont permis de définir la notion de modes non-linéaires. Cependant, il s'agit de méthodes analytiques qu'il est compliqué d'utiliser pour des systèmes complexes. De nombreuses études ont alors émergé afin de mettre en œuvre la notion de modes non-linéaires par des méthodes numériques, notamment par l'utilisation de la méthode de tir [49][109] ou de l'équilibrage harmonique [63][79]. Dans un premier temps, les méthodes numériques ont traité le cas de systèmes conservatifs, ne prenant donc pas en compte l'amortissement du système. Laxalde et Thouverez [78] ont alors proposé une extension des méthodes d'équilibrage harmonique permettant de considérer l'amortissement via l'utilisation de modes complexes non-linéaires, décrite dans la section suivante.

## 4.2 Modes complexes non-linéaires

### 4.2.1 Définition

La notion de mode complexe non-linéaire permet de prendre en compte la dissipation d'énergie par amortissement structural, via la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$ , ou par des non-linéarités dissipatives, comme le contact frottant. En effet, ils sont définis par Laxalde et Thouverez [78] comme "une solution périodique ou pseudo-périodique d'un système non-linéaire autonome", la solution pseudo-périodique étant une oscillation amortie. Par analogie avec les modes complexes linéaires, la notion d'amortissement est considérée via la recherche de valeurs propres complexes :

$$\lambda = -\beta + i\omega \tag{II.94}$$

avec  $\beta$  le paramètre caractérisant l'amortissement,  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$  la pulsation propre amortie,  $\omega_0$  la pulsation propre du système et  $\xi = \beta/\omega_0$  le taux d'amortissement modal.

### 4.2.2 Résolution par équilibrage harmonique

Comme expliqué précédemment, l'étude des modes complexes non-linéaires permet la résolution de l'équation dynamique d'un système autonome non-linéaire amorti :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0} \tag{II.95}$$

Afin de résoudre cette équation, une méthode d'équilibrage harmonique sera utilisée. À l'image des développements de la section II.15, une procédure de Galerkin sera utilisée, dans laquelle les

solutions seront recherchées sous la forme d'une fonction pseudo-périodique faisant apparaître un terme d'amortissement :

$$\mathbf{x}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N_h} e^{-k\beta t} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.96})$$

De la même manière que pour la méthode HBM classique II.15, le résidu dynamique peut être exprimé en injectant les expressions dérivées une et deux fois de l'équation (II.96) dans l'équation du mouvement (II.95). Il est alors nécessaire d'orthogonaliser le résidu par rapport à une base de fonction, supprimant la dépendance temporelle du problème. L'utilisation de la base des fonctions trigonométriques  $\mathbf{T}$  définie équation (II.13) nécessite cependant une base de solutions périodiques et non pseudo-périodiques. La décroissance de la solution sera donc négligée sur une période  $T$ . Cela revient à considérer une solution périodique et donc un amortissement  $\beta$  nul, sur la période considérée. Cette hypothèse est pertinente car le temps caractéristique de décroissance est grand en comparaison de la période de vibration [78], i.e.  $\beta \ll \omega$ , ce qui est vérifié dans les problèmes considérés, notamment pour le contact frottant aube-disque. En orthogonalisant le résidu de l'équation du mouvement par rapport à la base des fonctions trigonométriques, on obtient le système algébrique suivant :

$$\mathbf{Z}(\omega, \beta) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{x}}, \omega, \beta) = \mathbf{0} \quad (\text{II.97})$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}}$  le vecteur multiharmonique des déplacements,  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  le vecteur multiharmonique des efforts non-linéaires, et  $\mathbf{Z}$  la matrice de rigidité dynamique diagonale par bloc déjà définie équation (II.17) dans laquelle les sous-blocs  $\mathbf{Z}_k$  sont modifiés :

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - k\beta\mathbf{C} + (k^2\beta^2 - k^2\omega^2)\mathbf{M} & -(2k^2\omega\beta\mathbf{M} - k\omega\mathbf{C}) \\ (2k^2\omega\beta\mathbf{M} - k\omega\mathbf{C}) & \mathbf{K} - k\beta\mathbf{C} + (k^2\beta^2 - k^2\omega^2)\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \quad (\text{II.98})$$

De la même manière que pour l'étude de la réponse forcée par la méthode de l'équilibrage harmonique, les efforts non-linéaires peuvent être déterminés par une procédure AFT (cf section II.1.2.2) en tenant compte de l'hypothèse de la décroissance négligeable sur une période. Cependant, les sous-blocs de l'opérateur de dérivation  $\nabla$ , définis équation (II.27) doivent être modifiés pour tenir compte de l'amortissement pour l'expression du vecteur vitesse :

$$\nabla_k = \begin{bmatrix} -k\beta & k\omega \\ -k\omega & -k\beta \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \quad (\text{II.99})$$

La résolution du problème se fait ensuite de la même manière que pour la méthode HBM dans le cadre de la réponse forcée. L'initialisation est faite à partir du mode linéaire associé au problème sous-jacent. Il est cependant important d'utiliser une méthode de continuation efficace dans laquelle le paramètre  $\beta$  est considéré [63]. De plus, il est primordial d'utiliser une formulation analytique du jacobien, dans le but de réduire les temps de résolution du solveur non-linéaire. L'expression du jacobien analytique est donnée dans la thèse de Joannin [63]. Enfin, il est aussi possible d'utiliser les méthodes de condensation sur les DDLs non-linéaires et relatifs présentées section II.3.1.

## 5 Dynamique non-linéaire d'une roue-aubagée simplifiée

Dans l'objectif de valider les différentes méthodes d'étude dynamique vibratoire non-linéaire présentées dans les sections précédentes, celles-ci seront appliquées à un modèle éléments-finis (*EF*) de roue aubagée simplifiée. Dans un premier temps, le modèle ainsi que sa réduction en super-éléments seront présentés. Des études d'influence sur les différents paramètres du calcul de réponse forcée permettront ensuite de statuer sur les paramètres à conserver pour les calculs suivants et de valider les calculs dynamiques. Un calcul de mode non-linéaire sera ensuite mené pour étudier le comportement non-linéaire complet du système. Enfin, une étude du comportement du contact sur le modèle considéré sera réalisée, afin de comprendre les phénomènes en jeu dans les contacts aube-disque et de valider les calculs par la méthode DLFT.

### 5.1 Modèle considéré

#### 5.1.1 Présentation du modèle

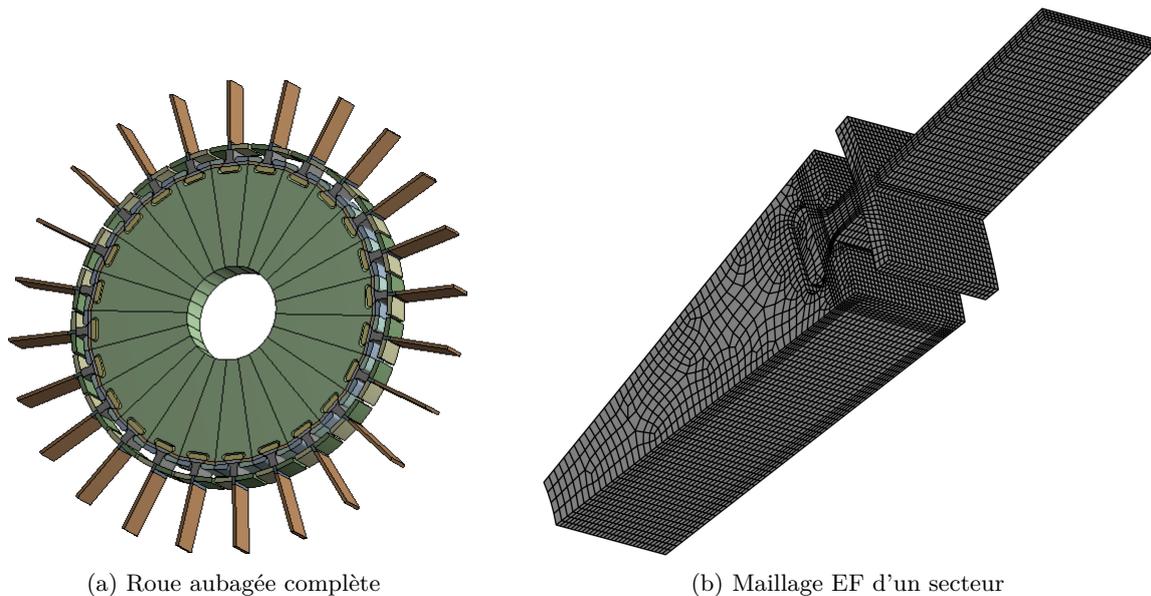


FIGURE II.5 – Modèle de la roue aubagée simplifiée.

Le cas test considéré dans un premier temps dans ce manuscrit est un modèle éléments-finis d'une roue aubagée simplifiée. L'objectif est de démontrer l'applicabilité des méthodes développées sur un cas test ayant une géométrie simple, représentative des propriétés mécaniques d'une roue aubagée réelle. Celle-ci peut être assimilée à une roue de compresseur ou de turbine. Ce modèle est composé d'un disque et de 24 aubes. Les pales ont une géométrie plane puisqu'aucun effet aérodynamique ne sera considéré sur ce modèle. La roue aubagée est composée de 24 secteurs identiques, permettant d'utiliser les hypothèses de symétrie cyclique présentées dans la section I.2.3 afin d'étudier un seul secteur. Le disque et les aubes sont constitués du même matériau : l'alliage de titane Ti6Al4V couramment utilisé dans l'aéronautique. La Figure II.5 représente le

modèle complet de la roue aubagée et le maillage d'un secteur de la roue. Le contact aube-disque

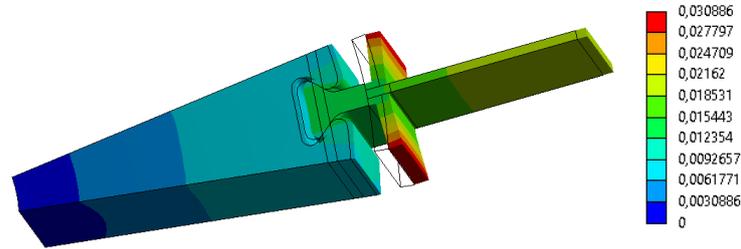


FIGURE II.6 – Déformée statique due au chargement centrifuge en [mm].

est en forme de queue d'arronde, afin d'être représentatif des modèles industriels qui pourront être traités à l'avenir, notamment le cas d'une soufflante traité dans le Chapitre IV. La vitesse de rotation est modélisée en fixant l'alésage du disque, et en appliquant un chargement centrifuge autour de l'axe de rotation ( $\omega_z = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$ ). La Figure II.6 représente la déformée statique du secteur, calculée par le code EF commercial SAMCEF.

### 5.1.2 Etude dynamique linéaire

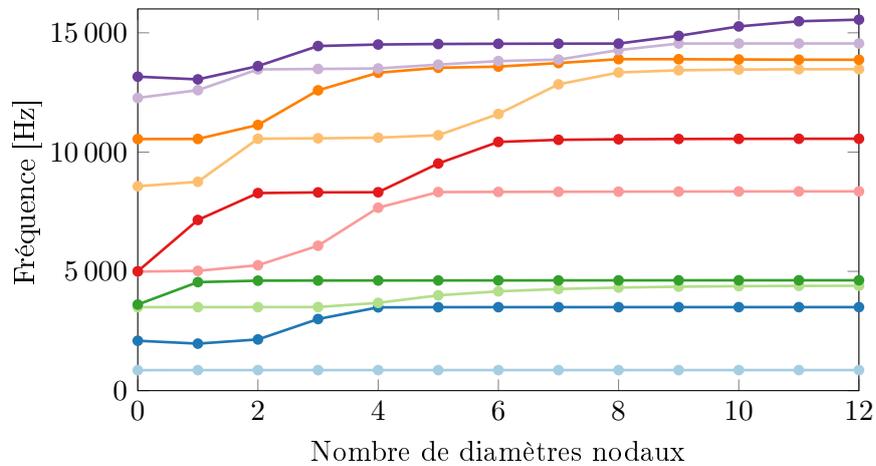


FIGURE II.7 – Diagramme fréquence-diamètre du modèle de roue aubagée simplifiée.

Dans un premier temps, une étude dynamique linéaire a été réalisée à l'aide du logiciel SAMCEF. Le diagramme *fréquence-diamètre*, Figure II.7, représente l'évolution des fréquences propres de chaque mode en fonction du nombre de diamètres nodaux. La première famille modale, représentée par la courbe bleu clair ( $\bullet$ ), correspond au premier mode de flexion qui sera étudié par la suite. Les fréquences de cette famille modale ne sont que très peu modifiées suivant le nombre de diamètres nodaux, mettant en évidence le fait que le disque intervient très peu dans cette déformée. Il est à noter que les lignes n'ont pas été tracées par famille modale, mais uniquement par soucis de visualisation. Elles peuvent donc ne pas correspondre aux familles modales. Les courbes correspondant aux modes plus élevés présentent des évolutions significatives de fréquences

en fonction du nombre de diamètres, ce qui implique une contribution du disque importante dans la déformée modale. De plus, il est possible d'observer des rapprochements ou des croisements entre les familles modales. Ces zones de rapprochement sont appelées zones de *veering*, par exemple entre les courbes bleu foncé (●) et vert clair (●) autour du quatrième diamètre nodal. Les zones de *veering* correspondent à des échanges d'énergie entre deux familles de modes, pouvant donner lieu à une augmentation significative des amplitudes de vibration. Ainsi, il est d'usage d'éviter de croiser des zones de *veering* lors du fonctionnement, afin de limiter ces échanges d'énergie et les phénomènes d'amplification.

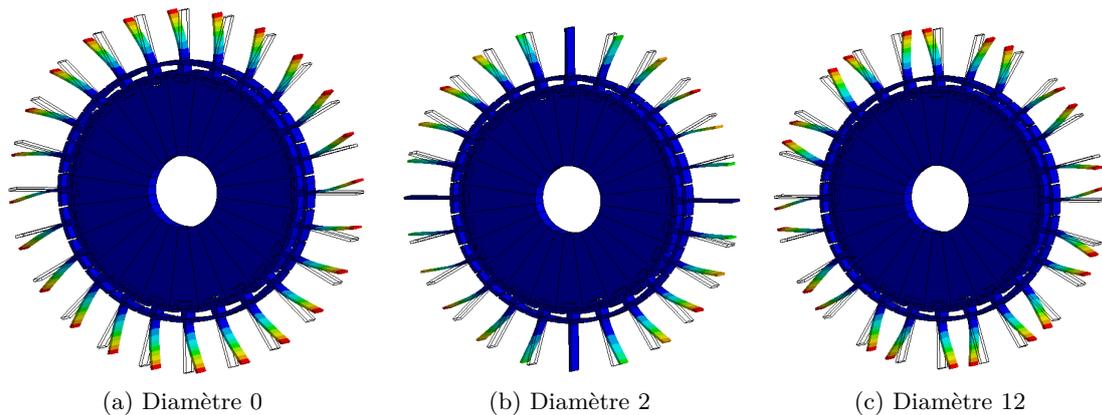


FIGURE II.8 – Déformée modale du premier mode de flexion flapwise à différents diamètres.

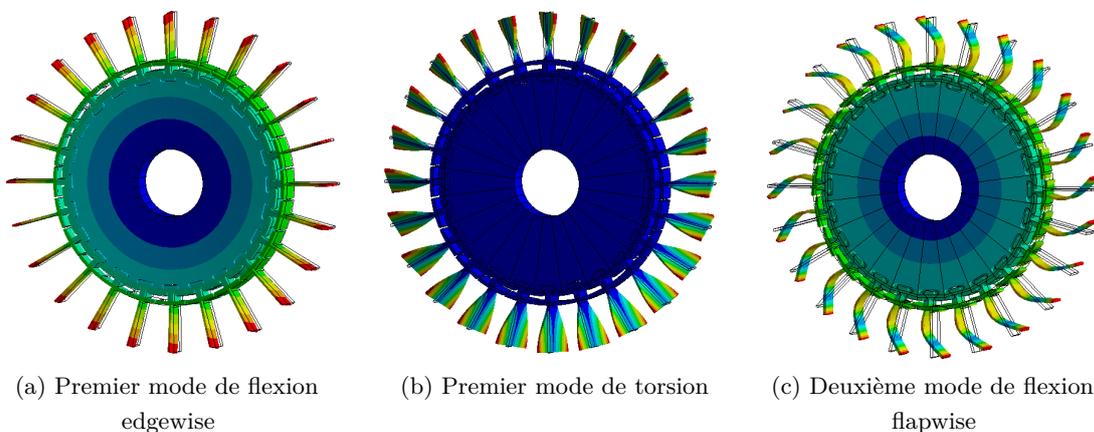


FIGURE II.9 – Déformées modales des premiers modes en diamètre 0.

La Figure II.8 représente les déformées modales du premier mode de flexion de la pale à différents diamètres. La Figure II.9 représente quant à elle les premiers modes de la structure en diamètre 0. On appelle le premier mode de flexion dans la direction de la pale *flapwise* (direction circonférencielle) et le premier mode de flexion dans la direction des bordures *edgewise* (direction de l'axe moteur). Les modes de flexion flapwise sont principalement dus à des déformations des aubages (Figure II.8a), alors que les modes edgewise (Figure II.9a) sont principalement des modes de disque. Cependant, le deuxième mode de flexion flapwise (Figure II.9c) implique aussi des déformations du disque. Comme expliqué section I.2.3 et visible sur les déformées modales de

la Figure II.8, le mode en diamètre 0 correspond à une réponse de toutes les aubes en phase. A l'inverse, le mode en diamètre 12 ( $N_S/2$ ) est un mode où les aubes sont en opposition de phase deux à deux. Enfin, les deux symétries sont facilement observables sur le mode à 2 diamètres nodaux. Dans les exemples suivants, le premier mode de flexion à 0 diamètre sera étudié. Les méthodes ont aussi été testées sur d'autres modes et pour différents diamètres, afin de valider les méthodes utilisées dans tous les cas de figures pouvant être étudiés.

### 5.1.3 Réduction en super-éléments

Une première réduction a été réalisée en modélisant le système en symétrie cyclique. Dans un second temps, il est nécessaire de réduire le modèle sectorisé à l'aide de super-éléments de Craig-Bampton. En effet, comme détaillé section II.2, cette méthode permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté du modèle en ne conservant que les nœuds d'intérêt comme nœuds dits *physiques* et des modes dynamiques et statiques représentant le comportement de la structure complète. Les super-éléments conservent comme nœuds physiques les nœuds de contact nécessaires à l'étude non-linéaire, un nœud d'excitation en tête de pale sur lequel sera appliqué l'excitation par la suite, et un nœud d'observation situé aussi en tête de pale sur lequel les résultats en amplitude seront observés. Les super-éléments de l'aube et du disque sont construits indépendamment dans le but de traiter le problème de contact entre les deux solides par la suite. 20 modes dynamiques sont conservés pour l'aube et 15 modes sont conservés pour le disque. Deux super-éléments ont été considérés pour ce modèle, pour voir l'impact du nombre de degrés de liberté conservés au niveau des interfaces sur les résultats en réponse forcée. Le premier super-élément, appelé *SE1*, est construit en conservant l'ensemble des nœuds d'interface et le second (*SE2*) est construit en ne conservant qu'une partie des nœuds. La Figure II.10 représente les nœuds conservés pour les super-éléments SE1 et SE2. Le tableau II.1 résume le nombre de DDLs des différents modèles.

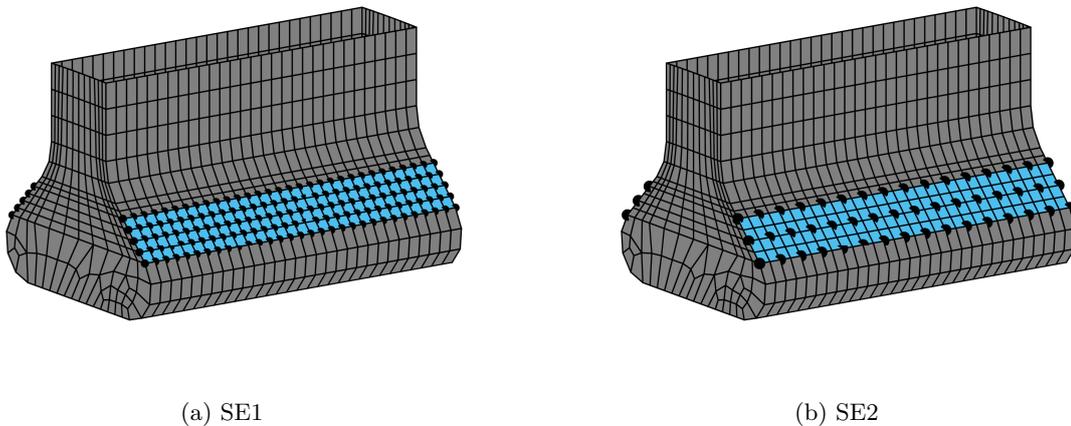


FIGURE II.10 – Nœuds conservés sur une portée du pied d'aube pour la construction des super-éléments.

	Aube			Disque		
	Modèle complet	SE1	SE2	Modèle complet	SE1	SE2
Contact	930	930	288	930	930	288
Total	47 802	956	314	68 448	950	303

TABLE II.1 – Nombre de degrés de liberté des différents super-éléments et du modèle complet.

Afin de valider les super-éléments considérés, les fréquences de l'aube seule, du disque seul et de l'ensemble aube-disque avec contact collé, sont comparées dans le tableau II.2. Pour le disque et l'assemblage, les modes à diamètre 0 ont été considérés. L'erreur en fréquence pour les 6 premiers modes de l'aube est très faible pour les deux super-éléments puisqu'elle est inférieure à 0.02%, ce qui valide la suffisance de la conservation de 20 modes dynamiques dans la réduction. De même, les erreurs en fréquences pour les modes du disque sont très faibles, avec une légère augmentation pour le cinquième mode. Cependant, l'étude dynamique portera par la suite sur le premier mode de flexion flapwise, dont les déformations interviennent principalement sur l'aube. Ainsi, la réduction du disque est suffisante avec 15 modes dynamiques conservés. On remarque que les erreurs sont quasiment similaires entre les deux super-éléments pour l'aube et le disque, ce qui implique que le nombre de nœuds de contact conservés n'influe que très peu sur les fréquences obtenues pour les solides indépendamment. De plus, on remarque que l'erreur est positive, ce qui veut dire que les fréquences des super-éléments de l'aube et du disque sont supérieures aux fréquences du modèle complet. Ce phénomène s'explique du fait de l'utilisation de modes statiques de liaisons dans la réduction de Craig-Bampton, rigidifiant légèrement les structures [31]. Enfin, les deux dernières colonnes comparent les fréquences pour le modèle aube-disque assemblé avec un contact aube-disque collé. L'erreur en fréquence pour le super-élément SE1 est quasiment nulle, moins de 0.02%, validant la précision du modèle pour ce super-élément. Cependant, pour le super-élément SE2, l'erreur est nettement supérieure et les fréquences plus faibles que le modèle complet. En effet, comme tous les nœuds de contact ne sont pas conservés, le comportement des interfaces de contact est assoupli par l'assemblage moins restrictif, entraînant un assouplissement général de la structure et donc une diminution des fréquences. Néanmoins, le nombre de DDLs étant nettement plus faible pour ce super-élément, il permet d'avoir des calculs dynamiques plus rapides. Il sera donc considéré par la suite et une attention particulière sera donnée à l'erreur en amplitude dans les calculs de réponse forcée non-linéaire, pour statuer sur la validité du comportement dynamique de ce super-élément.

## 5.2 Réponses forcées non-linéaires

Suite à l'étude linéaire du modèle et à la réduction en super-élément, cette section vise à étudier la réponse forcée du système afin de statuer sur le comportement dynamique forcé et les paramètres de calcul. Les études d'influence ont été réalisées pour le super-élément SE2. Cependant, une étude de l'impact de la discrétisation du super-élément sur la réponse forcée sera présentée à la fin de cette section, justifiant ce choix.

Modes	Aube		Disque		Aube et disque collés	
	SE1	SE2	SE1	SE2	SE1	SE2
1	0,000	0,000	0,002	0,002	0,000	-0,261
2	0,001	0,002	0,013	0,013	0,002	-0,712
3	0,000	0,000	0,030	0,030	0,005	-0,064
4	0,002	0,005	0,030	0,030	0,009	-0,343
5	0,008	0,010	1,247	1,247	0,014	-2,306
6	0,012	0,019	0,173	0,173	0,009	-0,957

TABLE II.2 – Erreur en % des fréquences propres des super-éléments par rapport au modèle complet, pour l'aube seule, le disque seul et l'assemblage aube-disque avec interfaces collées.

### 5.2.1 Amortissement structural

Afin de réaliser le calcul de réponse forcée, il est nécessaire de définir l'amortissement structural dû au matériau via l'utilisation de la matrice d'amortissement visqueux  $\mathbf{C}^l$  pour chaque sous-structure  $l = 1, 2$ . Cet amortissement est modélisé via un taux d'amortissement modal  $\xi_i$  défini pour chaque mode propre  $i$ , appliqué en utilisant la formulation modale du système, définie dans la base des modes propres  $\Phi$ . La base modale est construite en recherchant les solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (\text{II.100})$$

avec  $\Phi_i$  les vecteurs propres de la sous-structure considérée et  $\omega_i$  les modes propres associés au mode  $i$ . Ainsi, les matrices structurales projetées dans la base modale normée par la masse, notées avec l'indice  $\bullet_m$ , sont diagonales :

$$\mathbf{M}_m = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (\text{II.101})$$

$$\mathbf{K}_m = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (\text{II.102})$$

$$\mathbf{C}_m = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}(2\omega_i \xi_i) \quad (\text{II.103})$$

La matrice d'amortissement dans la base de Craig-Bampton peut alors être exprimée :

$$\mathbf{C} = \Phi^{-T} \mathbf{C}_m \Phi^{-1} \quad (\text{II.104})$$

En exprimant  $\Phi^{-T}$  et  $\Phi^{-1}$  en fonction de la matrice de masse d'après l'équation II.101 et en les remplaçant dans l'équation II.104, il est possible d'exprimer la matrice  $\mathbf{C}$  à partir des taux d'amortissement modaux  $\xi_i$  :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \mathbf{C}_m \Phi^T \mathbf{M} \quad (\text{II.105})$$

soit

$$\mathbf{C} = 2\xi \mathbf{M} \Phi \Omega \Phi^T \mathbf{M} \quad (\text{II.106})$$

avec  $\Omega$  la matrice diagonale des pulsations propres et  $\xi$  le taux d'amortissement modal appliqué à tous les modes.

### 5.2.2 Effort d'excitation

L'effort d'excitation pour ce modèle est imposé sur un nœud en tête de pale dans la direction principale du premier mode de flexion flapwise, qui sera étudié par la suite. L'excitation est périodique et définie telle que :

$$\mathbf{F}_{ext}(t) = \mathbf{f}_{e0} + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{f}_{e_k}^c \cos(k\omega t) + \mathbf{f}_{e_k}^s \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.107})$$

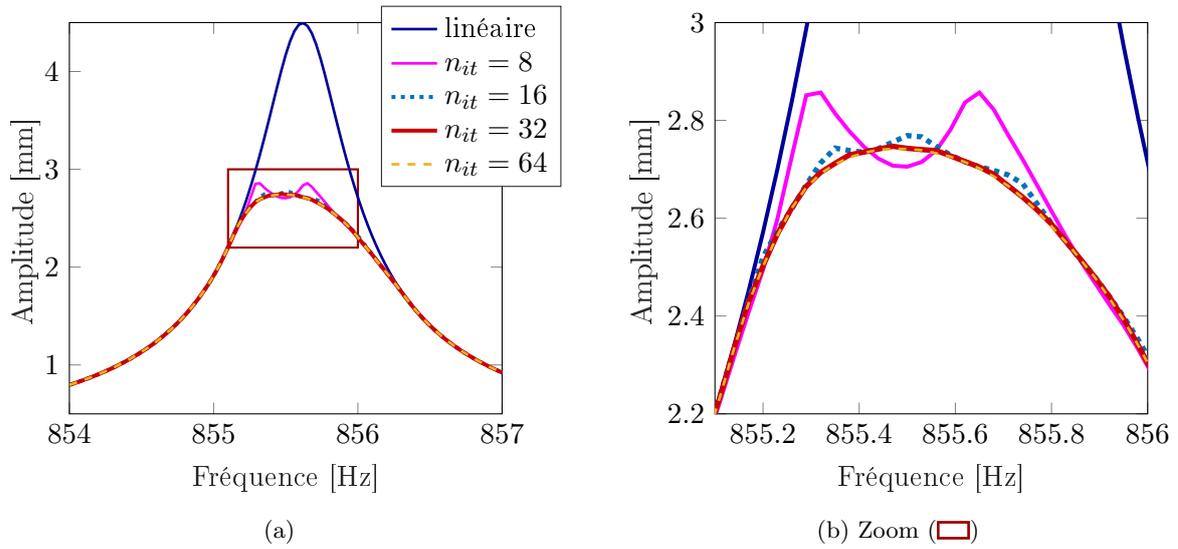
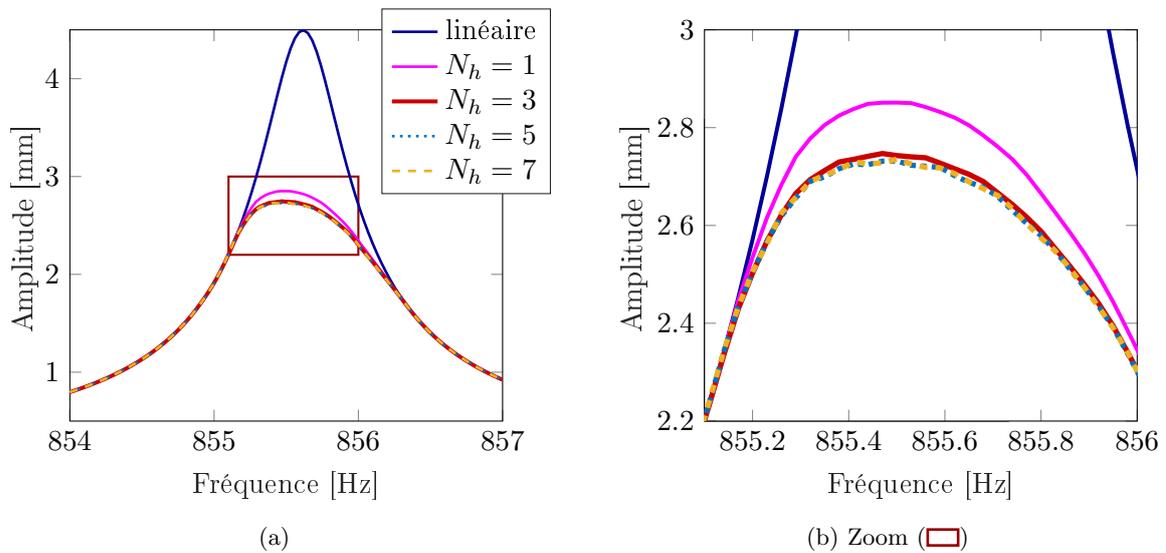
avec  $\mathbf{f}_{e0}$  l'effort statique correspondant au chargement centrifuge déterminé par le code EF SAMCEF.  $\mathbf{f}_{e_k}^c$  et  $\mathbf{f}_{e_k}^s$  sont les amplitudes d'excitations respectivement en cosinus et sinus. Dans l'exemple de la roue aubagée traité dans cette section, l'excitation est appliquée sur la première harmonique en cosinus, via  $\mathbf{f}_{e_1}^c$ . Pour des raisons de lisibilité, l'amplitude de l'effort d'excitation  $\mathbf{f}_{e_1}^c$  sur le nœud excité en tête de pale sera notée  $F_e$  par la suite. Les autres composantes de l'effort extérieur sont nulles, sauf l'effort statique  $\mathbf{f}_{e0}$ .

### 5.2.3 Influence des paramètres de calcul

Dans un premier temps, il est nécessaire de statuer sur les paramètres liés aux transformées de Fourier, à savoir le nombre d'instants temporels considérés par période  $n_{it}$  et le nombre d'harmoniques temporelles à retenir pour le calcul. Pour cela, une étude d'influence a été réalisée sur chacun de ces paramètres, afin de les fixer pour les calculs à venir. Par la suite, on appellera réponse forcée linéaire la réponse du système avec interfaces de contact collées. La réponse forcée sera dite non-linéaire lorsque le problème de contact frottant est traité au niveau des interfaces via la méthode DLFT.

La Figure II.11 représente la réponse forcée linéaire et les réponses forcées non-linéaires pour différents nombres d'instants temporels  $n_{it}$  testés. La Figure II.11b est un zoom sur la zone d'intérêt, correspondant à la zone de fortes non-linéarités, encadrée en rouge () sur la Figure II.11a. Les calculs ont été réalisés pour un nombre d'harmoniques  $N_H = 3$ , dont le choix est justifié dans le paragraphe suivant. De fortes non-régularités sur les résultats sont observées dans le cas utilisant 8 instants temporels (—). En effet, la limitation à 8 instants par période implique de ne pas forcément capter l'ensemble du comportement dynamique et engendre une erreur importante lors de la transformée de Fourier pour repasser en fréquentiel. La réponse forcée pour 16 instants temporels (- -) présente elle aussi des erreurs, cependant celles-ci sont nettement plus faibles. A partir de  $n_{it} = 32$ , la réponse forcée non-linéaire semble convergée. L'erreur entre les résultats est négligeable entre  $n_{it} = 32$  (—) et  $n_{it} = 64$  (- -). Ainsi, 32 instants temporels seront conservés pour les calculs suivants.

De même que pour le nombre d'instants, la Figure II.12 représente les réponses forcées pour différents nombres d'harmoniques  $N_h$  conservés. Dans le cas conservant une seule harmonique (—), le résultat est nettement surestimé, les déplacements non-linéaires n'étant représentés que par une oscillation sinusoïdale. Cependant, à partir de  $N_h = 3$  harmoniques (—), le résultat semble convergé. Il reste une légère surestimation par rapport aux résultats pour  $N_h = 5$  (- -) et  $N_h = 7$  (- -). Cependant, la réponse forcée pour 3 harmoniques permet d'obtenir des calculs assez rapides, et sera donc considérée suffisante pour la suite des calculs.

FIGURE II.11 – Influence du nombre d'instants temporels  $n_{it}$  sur la réponse forcée, pour  $N_h = 3$ .FIGURE II.12 – Influence du nombre d'harmoniques  $N_h$  sur la réponse forcée, pour  $n_{it} = 32$ .

Un paramètre de calcul important est le coefficient de pénalité  $\epsilon$  considéré pour la DLFT, cf section II.3.3. En effet, celui-ci permet de faciliter la convergence et donc d'obtenir le bon résultat tout en diminuant les temps de calcul lorsqu'il est bien estimé. Une étude d'influence a donc été menée pour valider le choix de sa valeur, représenté Figure II.13. Comme attendu suite aux travaux de Charleux [24], la valeur du coefficient de pénalité minimisant les temps de calculs correspond bien à l'ordre de grandeur du rayon spectral de la matrice de raideur dynamique, représentée par le point rouge (•). Cette valeur sera donc calculée et utilisée pour chacun des cas suivants.

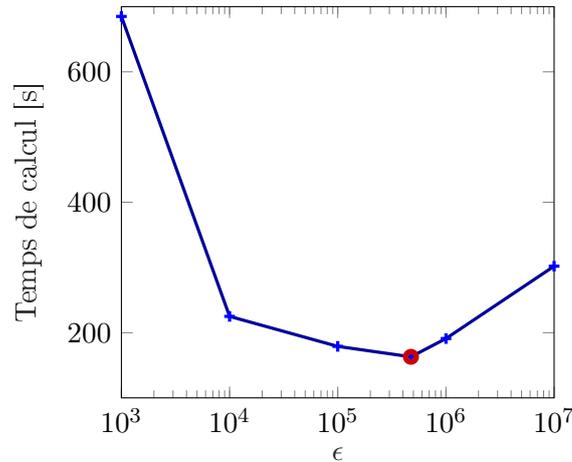


FIGURE II.13 – Influence de la valeur du coefficient de pénalité  $\epsilon$  sur le temps de calcul.

### 5.2.4 Influence des paramètres du modèle

Suite à l'étude des paramètres de calcul de la réponse forcée dans la section précédente,  $n_{it}$  sera pris égal à 32 et  $N_h$  égal à 3 à partir de maintenant. Les paramètres du calcul ayant été déterminés, cette section a pour objectif d'étudier les paramètres du modèle via des études d'influence sur le coefficient de frottement  $\mu$  et l'amplitude de l'effort d'excitation considérée  $F_e$ . En effet, ce modèle étant un modèle phénoménologique de roue aubagée n'ayant pas pour objectif de représenter un système réel, ces études d'influence permettront de déterminer les valeurs choisies pour la suite de l'étude afin d'avoir la réponse forcée désirée. De plus, il sera possible de vérifier la cohérence des calculs de réponse forcée avec l'évolution de ces paramètres. La Figure II.14a représente les

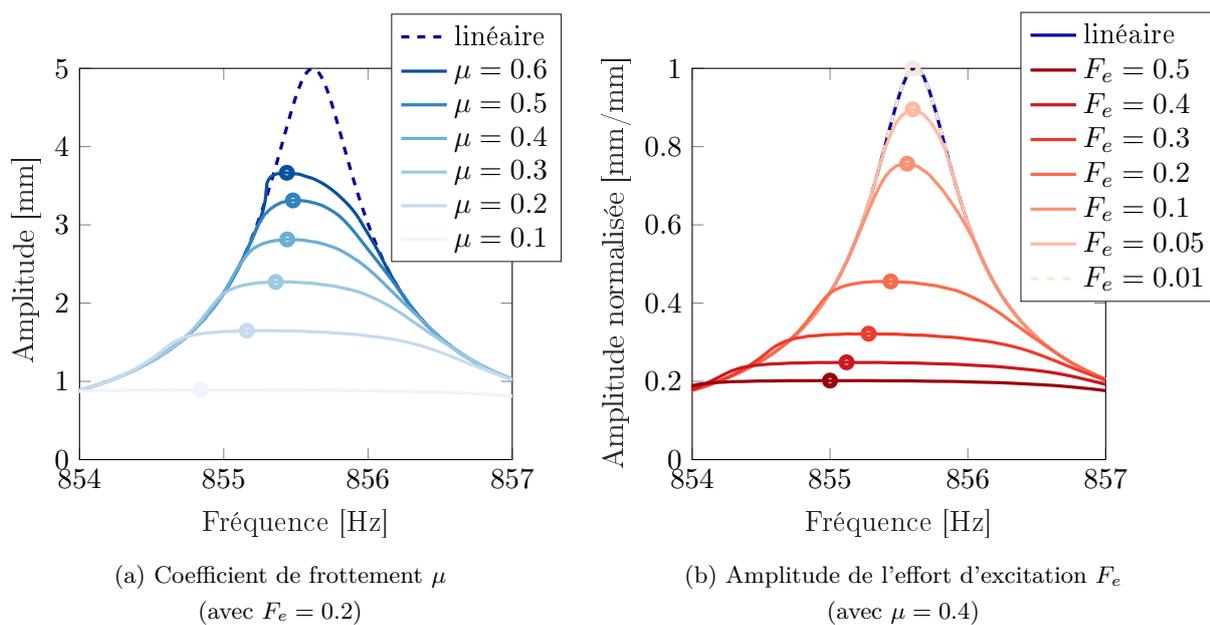


FIGURE II.14 – Influence des paramètres du modèle sur la réponse forcée non-linéaire.

réponses forcées non-linéaires pour différents coefficients de frottement  $\mu$ , pour une amplitude d'excitation  $F_e = 0.2$ . Les résultats obtenus confirment le bon comportement de la DLFT. En effet, lorsque le coefficient de frottement est faible, le glissement est favorisé. Cela entraîne une plus grande dissipation d'énergie dans le contact et donc une diminution de l'amplitude de réponse. De plus, on observe que le maximum en fréquence, représenté par un marqueur ( $\bullet$ ), diminue lorsque le coefficient de frottement diminue. Cet effet est dû à l'effet assouplissant au niveau des interfaces, créé par l'augmentation du glissement sur celle-ci. Cependant, pour  $\mu = 0.6$ , on remarque que la fréquence du maximum d'amplitude diminue. Ce cas particulier sera discuté par la suite. A l'inverse, plus le coefficient de frottement est élevé, plus la réponse non-linéaire se rapproche de la réponse forcée linéaire, calculée avec des interfaces collées. Un coefficient de frottement élevé aura en effet tendance à minimiser le glissement, et donc la dissipation d'énergie. Dans la suite de cette étude, un coefficient de frottement  $\mu = 0.4$  sera considéré, afin d'avoir un comportement présentant des non-linéarités non-négligeables mais pas trop importantes.

Comme remarqué précédemment, dans le cas où  $\mu = 0.6$ , la fréquence du maximum d'amplitude est plus faible que pour  $\mu = 0.5$ . Cette exception à la tendance générale s'explique par le comportement du contact dans ce cas. En effet, du fait du coefficient de frottement très élevé, les interfaces présentent peu de glissement. Ainsi, les zones qui présentent du glissement dans les autres cas se retrouvent collées, ou en séparation. De plus, les zones de séparation sont plus grandes et présentes sur une plus longue plage de la période vibratoire. La Figure II.15 représente le comportement du contact à l'instant de déformation maximale de la période vibratoire, pour  $\mu = 0.4$  et  $\mu = 0.6$ . L'apparition de zones de séparation importantes assouplit fortement le contact, d'où la diminution de la fréquence observée. Des zones de glissement apparaissent tout de même au cours de la période vibratoire, d'où l'amortissement par rapport au calcul linéaire (avec interfaces collées), du fait de la dissipation d'énergie par frottement.

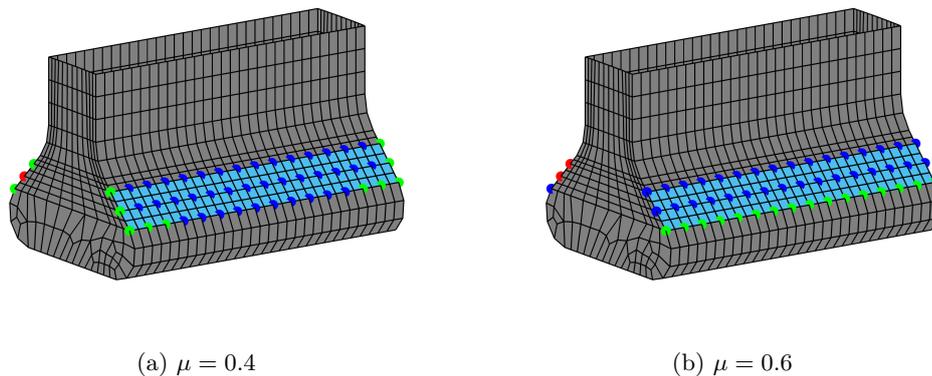


FIGURE II.15 – Etat de contact d'une portée de l'aube pour  $\mu = 0.4$  et  $\mu = 0.6$ , au même instant de la période.

( $\bullet$ ) : collé ; ( $\bullet$ ) : glissant ; ( $\bullet$ ) : séparé.

La Figure II.14b représente quant à elle l'impact de l'amplitude de l'effort d'excitation sur la réponse forcée non-linéaire en comparaison avec la réponse forcée linéaire. Toutes les courbes

ont été normalisées par rapport au maximum de la réponse forcée linéaire associée, à des fins de comparaison. On remarque que plus l'amplitude de l'effort d'excitation est faible, plus la réponse forcée non-linéaire se rapproche de la réponse forcée linéaire. En effet, un effort d'excitation faible entrainera de faibles déformations modales, et donc peu de glissement au niveau des interfaces de contact. Au même titre que pour l'étude du coefficient de frottement, plus le glissement sera important plus la dissipation d'énergie dans le contact et l'assouplissement des interfaces seront importants. Ainsi, en augmentant l'effort d'excitation, la réponse forcée non-linéaire diminue fortement par rapport à la réponse forcée linéaire associée, ce qui s'explique par une augmentation des déformations, favorisant le glissement. Dans la suite de cette section, un effort d'excitation  $F_e = 0.2$  sera considéré.

### 5.2.5 Influence de la discrétisation du super-élément

La discrétisation du super-élément, i.e. du nombre de nœuds d'interface retenus, a un impact qu'il est important de connaître sur les fréquences des modes propres, comme expliqué section II.5.1. Cependant, l'utilisation d'un super-élément contenant moins de DDLs permet d'avoir des temps de calcul beaucoup plus rapides. Cette section a donc pour objectif de comparer les réponses forcées obtenues pour les deux super-éléments, afin de confirmer la validité de l'utilisation du super-élément 2 (SE2), moins discrétisé.

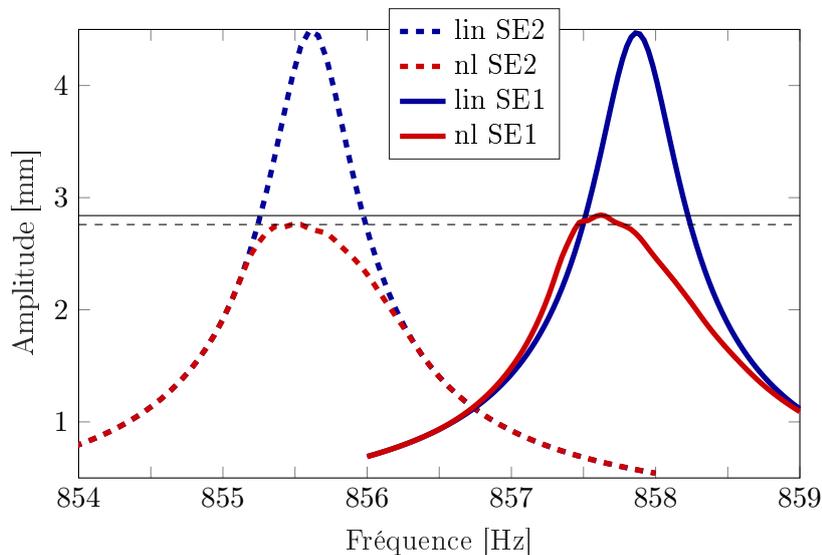


FIGURE II.16 – Influence de la discrétisation du super-élément sur la réponse forcée.

La Figure II.16 représente les réponses forcées linéaires en bleu (—) et non-linéaires en rouge (—) pour les super-éléments SE1 en traits pleins (—) et SE2 en tirets (- -). Les lignes horizontales représentent les maxima des deux réponses forcées non-linéaires à des fins de comparaison. Comme mis en évidence lors de l'étude des fréquences propres du système collé, les réponses forcées sont décalées fréquentiellement entre les deux modèles, du fait de l'assouplissement des interfaces de contact engendré par le nombre de nœuds de contact réduit pour le super-élément SE2 par rapport au SE1. Cependant, les réponses forcées linéaires sont équivalentes en amplitude et en

amortissement, c'est à dire en largeur. De plus, les réponses forcées non-linéaires sont quasiment équivalentes en amplitude, avec une erreur de l'ordre de -2,5%. Ainsi, malgré l'erreur en fréquence, les résultats en amplitude pour le super-élément SE2 sont assez proches de ceux du super-élément discrétisé. Les calculs pour le super-élément SE2 étant beaucoup plus rapides que pour le super-élément SE1, le super-élément SE2 sera conservé pour les études dynamiques. Cette étude montre l'intérêt de ces méthodes de résolution dynamique, permettant d'avoir une bonne approximation des amplitudes de réponses, même dans les cas de zones de contact assez peu discrétisées.

### 5.3 Modes complexes non-linéaires

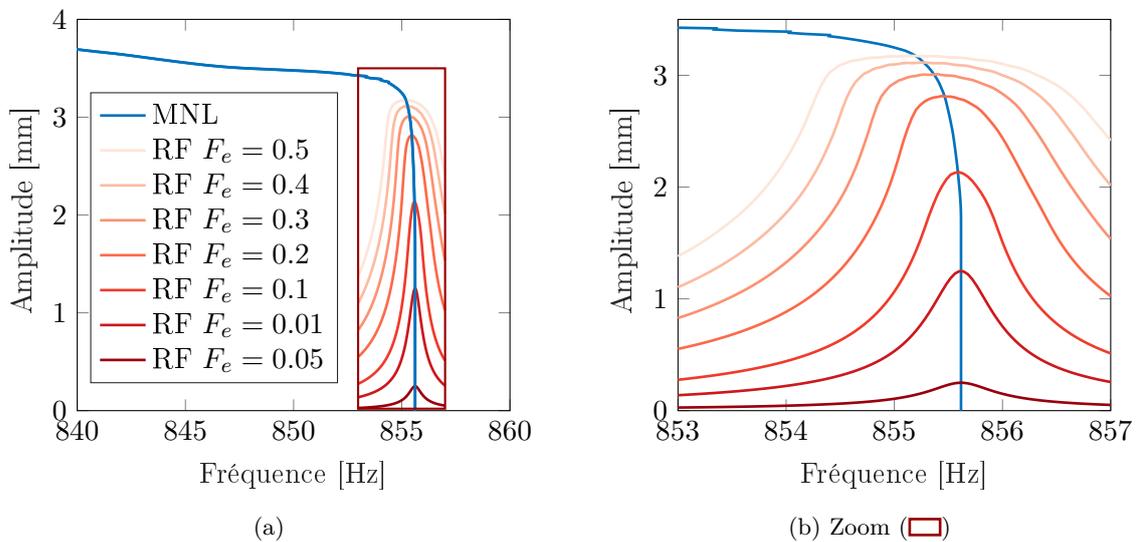


FIGURE II.17 – Mode complexe non-linéaire (—) et réponses forcées non-linéaires pour différentes amplitudes d'excitation  $F_e$  (—).

Les calculs de modes complexes non-linéaires permettent de statuer sur le comportement dynamique non-linéaire complet de la structure. La théorie de ces méthodes est exposée dans la section II.4.2. Les calculs ont été réalisés sur le super-élément SE2 pour un coefficient de frottement  $\mu = 0.4$ , et avec les paramètres de calcul choisis précédemment :  $n_{it} = 32$  et  $N_h = 3$ . Un DDL de contrôle en tête pale, correspondant au DDL d'observation utilisé pour les calculs de réponse forcée, permet de piloter le calcul en amplitude. La Figure II.17 représente l'évolution de la fréquence avec l'amplitude calculée par modes complexes non-linéaires (MNL) en bleu (—), aussi appelé *backbone* fréquentielle. Les réponses forcées calculées pour différentes amplitudes d'excitation  $F_e$  ont été superposées sur la Figure en rouge, et un zoom sur la zone de calcul des réponses forcées est représenté Figure II.17b. L'évolution de la fréquence par rapport à l'amplitude du DDL de contrôle, permet de valider les résultats observés précédemment. En effet, à faible amplitude (jusqu'à 1,8mm) la fréquence reste inchangée et correspond à la fréquence du mode linéaire, ce qui signifie que la non-linéarité n'est pas activée du fait de faibles déformations. On remarque ensuite une activation de la non-linéarité, correspondant à l'apparition de glissement entre les interfaces de contact, lorsque les amplitudes augmentent. La présence de glissement dans

le contact implique alors un assouplissement de celui-ci, et donc une diminution des fréquences. De plus, en comparant les réponses forcées non-linéaires pour différentes amplitudes d'excitation, on remarque que la courbe représentant le mode complexe non-linéaire passe par les maxima en amplitude des courbes de réponses forcées. Il s'agit d'un résultat classique lors de l'étude de modes complexes non-linéaires [74][78]. Il est à noter que le calcul de mode complexe non-linéaire a été arrêté à partir d'une amplitude de 3,7mm. En effet, de par un comportement non-linéaire trop important, correspondant à du glissement total sur les interfaces de contact, l'algorithme n'arrivait plus à converger vers la solution. De plus, de tels niveaux d'activation de la non-linéarité ne sont jamais atteints dans des cas de roues aubagées réelles.

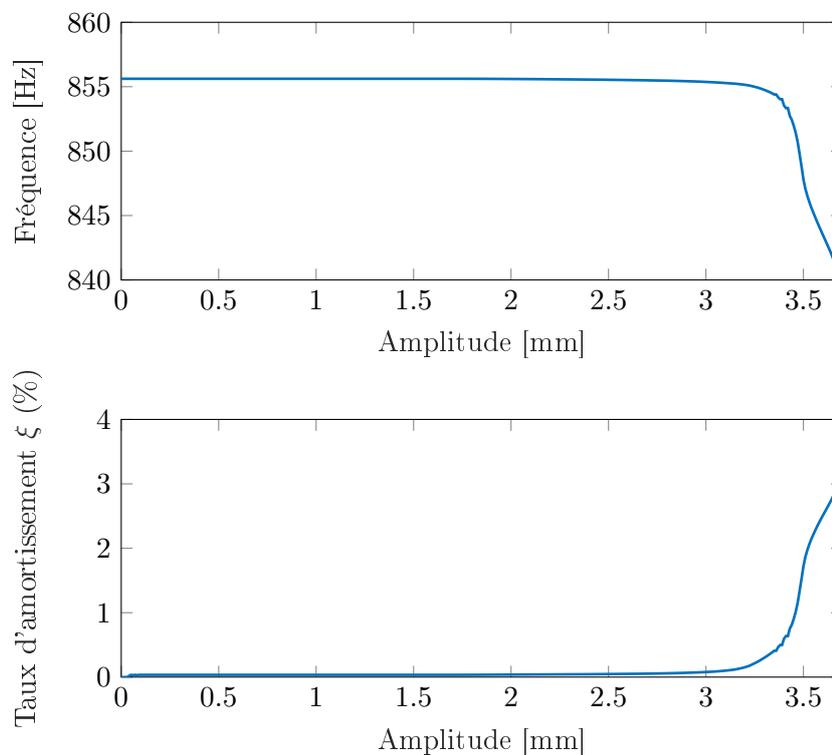


FIGURE II.18 – Fréquence et taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du DDL de contrôle.

Les réponses forcées non-linéaires tracées sur la Figure II.17b ont été calculées à l'aide de calculs de réponses forcées classiques, comme présenté section II.1. Cependant, il existe une méthode efficace permettant de reconstruire les réponses forcées à partir du mode complexe non-linéaire : la synthèse modale non-linéaire. Cette méthode, mise en évidence par Szemplinska [124] dans le cadre de systèmes non-dissipatifs, a depuis fait l'objet de nombreux travaux. Setio [117] et plus tard Gibert [50] qui l'ont appliquée de façon inverse pour de l'identification modale non-linéaire. Plus récemment, Laxalde [78] l'a généralisée aux modes complexes non-linéaires permettant ainsi de traiter les modèles dissipatifs. De nombreux travaux récents utilisent cette méthode dans la littérature [77][76][63][64][87] pour son efficacité et les possibilités qu'elle offre.

De même que pour les fréquences, le taux d'amortissement  $\xi$  est constant jusqu'à l'appari-

tion de la non-linéarité et égal à l'amortissement structural introduit précédemment. En effet, l'amortissement supplémentaire est dû aux dissipations d'énergie par frottement dans les contacts. Pour de faibles amplitudes, le système n'est donc pas amorti par ces dissipations. La Figure II.18 représente les backbones en fréquence et en taux d'amortissement calculées à l'aide du mode complexe non-linéaire. On remarque comme expliqué précédemment l'activation de la non-linéarité autour de 1,8mm. A partir de l'activation, le taux d'amortissement augmente, signifiant une augmentation des dissipations dans le contact. Il a été observé dans la littérature que le taux d'amortissement atteint un maximum avant de diminuer, sur des cas académiques [78]. Dans l'exemple traité dans cette thèse, ce maximum d'amortissement n'a pas été atteint. Cependant, on note une augmentation plus faible du taux d'amortissement à partir de 3,5mm d'amplitude.

#### 5.4 Remarques sur le comportement du contact

Suite aux validations précédentes des résultats en réponse forcée, l'objectif de cette sous-section est de valider les résultats locaux obtenus sur les interfaces de contact. Dans un premier temps, l'étude s'intéressera à l'impact des transformées de Fourier sur les résultats obtenus en DLFT. Dans un second temps, l'impact de la discrétisation de l'interface sur les résultats dans le contact sera étudié, mettant en évidence les limitations de ces méthodes.

##### 5.4.1 Impact des transformées de Fourier

Comme expliqué section II.1.2, l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique implique une résolution fréquentielle du problème. Cependant, il est nécessaire d'utiliser une procédure d'alternance fréquence-temps (section II.1.2.2) pour évaluer les efforts de contact non-linéaires dans le domaine temporel, ceux-ci n'ayant pas d'expression dans le domaine fréquentiel. Une transformée de Fourier discrète est utilisée pour les passages entre les domaines temporels et fréquentiels. La Figure II.19 représente l'effort tangentiel  $T$  et l'effort normal multiplié par le coefficient de frottement  $\mu N$  en un nœud de l'interface de contact, à chaque instant de la période vibratoire. L'objectif est de comparer le résultat obtenu par la méthode DLFT dans le domaine temporel, noté *temp* sur la Figure, avec le résultat obtenu en fréquentiel suite à la transformée de Fourier pour la résolution du problème dynamique non-linéaire, noté *freq*. L'effort normal est multiplié par le coefficient de frottement afin de le comparer à l'effort tangentiel, mettant en évidence la loi de frottement de Coulomb, impliquant du glissement avec frottement lorsque  $T = \mu N$ . Les résultats obtenus en DLFT respectent bien la loi de frottement de Coulomb, exprimée équation I.68. En effet, l'effort tangentiel  $T$  (-●-) est inférieur ou égal à l'effort normal multiplié par le coefficient de frottement  $\mu N$  (-●-) à chaque instant de la période vibratoire :  $T \leq \mu N$ . Ce phénomène est notamment visible sur le zoom local de la Figure II.19b. De plus, une étude des déplacements relatifs au niveau des interfaces a permis de valider la condition de non-interpénétration entre les corps. Les lois de contact unilatéral et de frottement explicitées section I.3.2 sont donc bien respectées lors de la résolution par la méthode DLFT. La projection de  $\mu N$  dans le domaine fréquentiel (-●-) est quant à elle exacte par rapport à cette même courbe en temporel, ce qui est dû à son comportement purement sinusoïdal. Cependant, on remarque que l'effort tangentiel  $T$

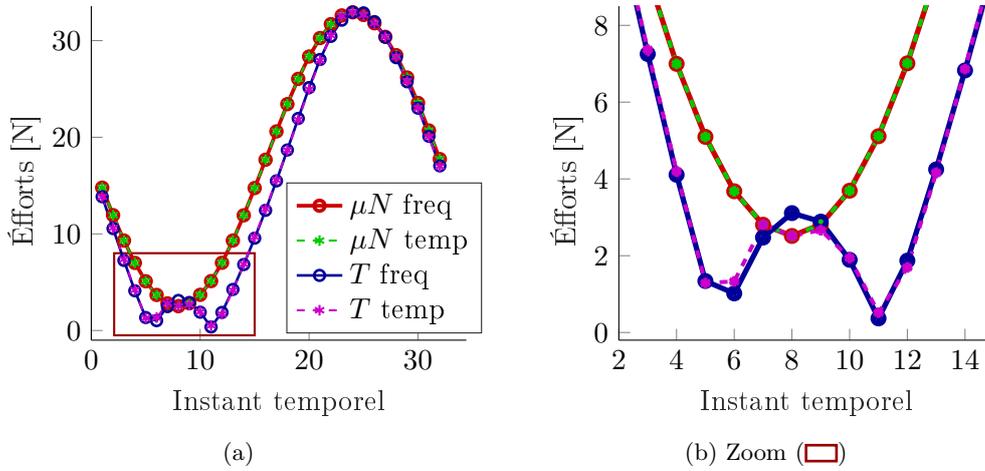


FIGURE II.19 – Comparaison entre les résultats obtenus par la DLFT en temporel et en fréquentiel sur un nœud de l'interface de contact au cours d'une période vibratoire : Efforts tangentiels ( $T$ ) et efforts normaux multipliés par le coefficient de frottement ( $\mu N$ ).

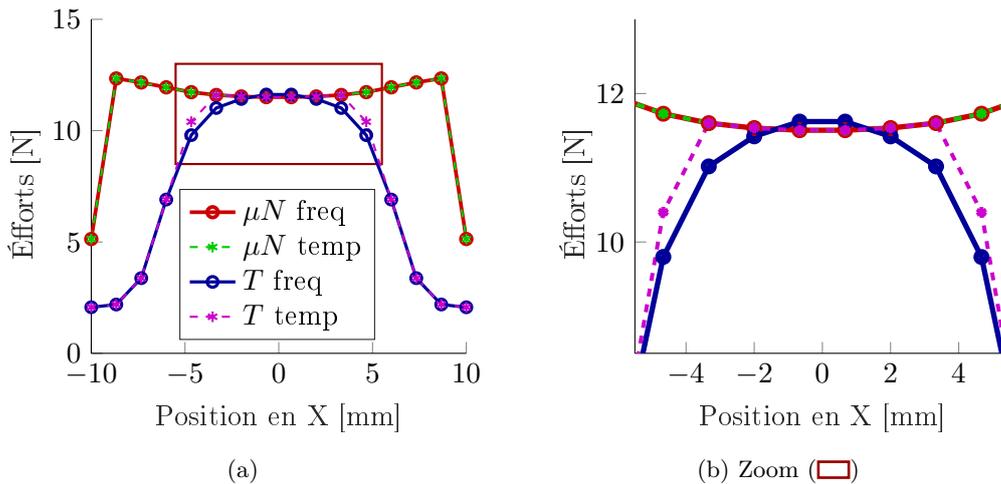


FIGURE II.20 – Comparaison entre les résultats obtenus par la DLFT en temporel et en fréquentiel sur une ligne de nœuds en milieu de portée de contact à un instant de la période vibratoire : Efforts tangentiels ( $T$ ) et efforts normaux multipliés par le coefficient de frottement ( $\mu N$ ).

transformé en fréquentiel (—●—) présente une erreur assez importante par rapport à son équivalent temporel, notamment autour de l'instant 8 de la période vibratoire. En effet, dans ce cas l'effort tangential fortement non-régulier doit être représenté en fréquentiel par une série de Fourier à 3 harmoniques (calculs réalisés pour  $N_h = 3$ ), ce qui n'est pas suffisant pour représenter cette courbe complexe. On appelle cette erreur entre le signal temporel et le signal fréquentiel l'*erreur de Fourier*. Ainsi, on remarque une erreur dans le domaine fréquentiel, l'effort tangential devenant supérieur à l'effort normal multiplié par le coefficient de frottement  $\mu N$ . Il est à noter qu'il faudrait un nombre d'harmoniques très élevé pour pouvoir représenter précisément cette courbe, rendant les temps de calcul prohibitifs. De plus, même si cette erreur apparaît dans le domaine fréquentiel,

elle a un impact très faible sur la réponse dynamique globale en tête de pale.

De la même manière que pour la Figure II.19, la Figure II.20 représente l'effort de contact sur une ligne de nœuds en milieu de portée, représentée Figure II.21b, à un instant de la période. On observe que l'erreur de Fourier engendre un manque de précision dans la répartition des efforts sur la portée à certains instants de la période. Ainsi, dans la suite de ce manuscrit, les résultats locaux au niveau des interfaces de contact seront étudiés à l'aide des résultats obtenus en temporel via la méthode DLFT, mettant de côté l'erreur de Fourier, afin de représenter les résultats exacts.

#### 5.4.2 Impact de la discrétisation du super-élément

En utilisant les résultats obtenus par la méthode DLFT en temporel, il est maintenant possible d'étudier l'impact de la discrétisation du super-élément sur les résultats locaux au niveau des interfaces de contact. L'étude menée dans la sous-section II.5.2.5 a permis de montrer que malgré l'erreur fréquentielle observée, les amplitudes vibratoires calculées par réponses forcées ne sont que très peu impactées par la discrétisation du super-élément. En effet, les résultats en amplitudes sont considérés sur un nœud en tête de pale, lissant le comportement dynamique de la structure de par la distance entre les nœuds d'observation et la zone de contact où les non-linéarités sont en œuvre. De plus, ces résultats en réponses forcées permettent de conclure que l'énergie dissipée par friction sur un cycle vibratoire est convergée par rapport aux maillages considérés. Les Figures II.22 et II.23 représentent respectivement les efforts et l'amplitude de glissement sur une ligne de nœuds en milieu de portée, représentée Figure II.21, pour les deux super-éléments SE1 et SE2 à un instant de la période vibratoire. Dans un premier temps, la représentation des efforts de contact tangentiels  $T$  et de l'effort normal multiplié par le coefficient de frottement  $\mu N$  sur la Figure II.22 permet d'observer une forte différence en intensité des efforts. Cette différence est due à la répartition des efforts sur un plus grand nombre de nœuds pour le super-élément SE1 dans les deux directions du contact. De même, la discrétisation impacte fortement la taille de la zone de glissement, correspondant à l'égalité  $T = \mu N$  d'après la loi de frottement de Coulomb.

De plus, les effets de bords classiquement observés pour les contacts pion/plan tel le contact aube-disque, caractérisés par des efforts élevés en bord de contact, ne sont que très faibles dans ces deux exemples de discrétisation. En effet, la matérialisation des effets de bords nécessite un maillage très raffiné à proximité des bords du contact.

La Figure II.23 représente l'amplitude de glissement sur la même ligne de nœuds que précédemment, au même instant temporel. Elle est calculée à partir des déplacements relatifs entre les nœuds de l'aube et du disque. Le comportement du contact aube-disque étant caractérisé par un régime de glissement partiel, les amplitudes de glissement sont très faibles, de l'ordre de  $10^{-1}\mu\text{m}$  dans le cas considéré. Les zones de glissement, caractérisées par une amplitude de glissement non-nulle, correspondent bien aux zones d'égalité  $T = \mu N$ , validant les résultats obtenus par la méthode DLFT. Comme précédemment, la taille de la zone de glissement ainsi que l'amplitude de glissement sont différentes pour les deux super-éléments considérés, la répartition sur l'interface étant impactée par sa discrétisation.

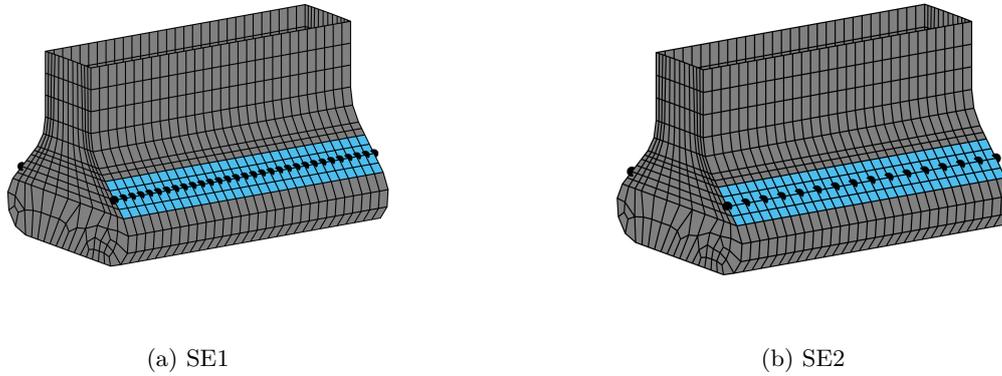


FIGURE II.21 – Représentation des nœuds en milieu de portée d'aube pour les deux super-éléments considérés.

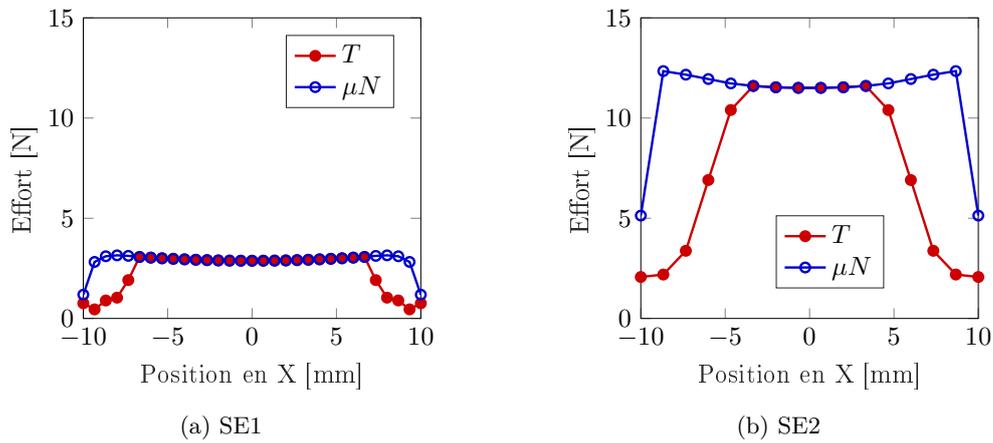


FIGURE II.22 – Influence de la discrétisation du super-élément sur les efforts de contact, sur une ligne de nœuds en milieu de portée.

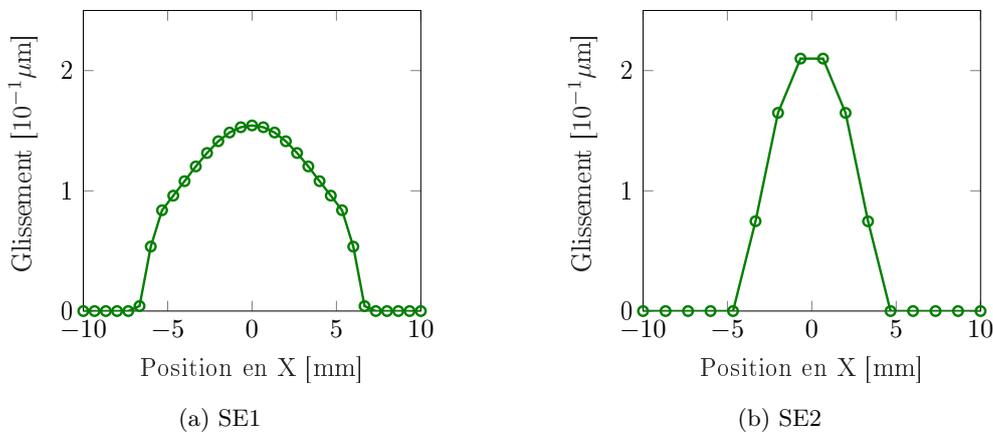


FIGURE II.23 – Influence de la discrétisation du super-élément sur les efforts de contact, sur une ligne de nœuds en milieu de portée.

La Figure II.24 représente l'état de contact sur l'ensemble des nœuds de contact, à un autre instant de la période vibratoire. Les nœuds représentés en bleu (●) sont collés, les nœuds en rouge (●) sont en glissement, et les nœuds en vert (●) sont en séparation. Le comportement général est cohérent entre les deux super-éléments avec des zones de séparation et glissement correspondantes. Cependant, la répartition de ces zones diffère entre les deux modèles, notamment la taille de la zone de glissement.

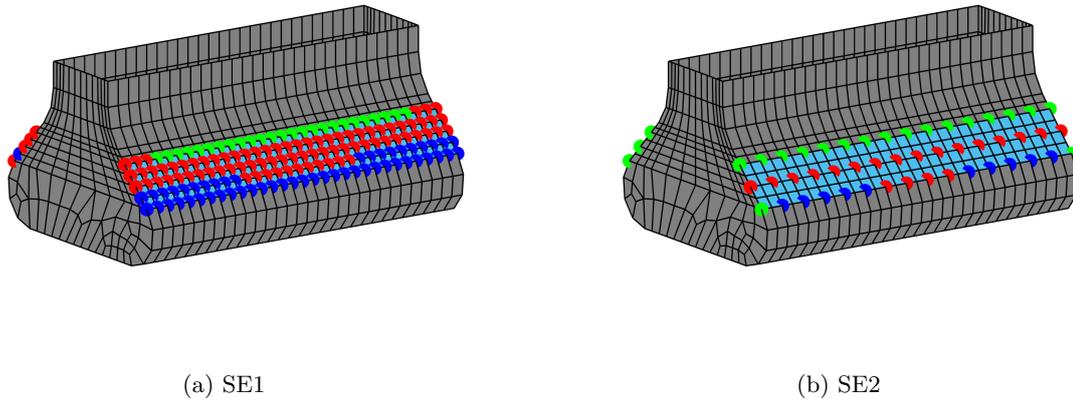


FIGURE II.24 – Etat de contact d'une portée de l'aube pour les deux super-éléments SE1 et SE2, au même instant de la période.

(●) : collé ; (●) : glissant ; (●) : séparé.

L'ensemble des résultats détaillés dans cette section permet de conclure qu'une bonne approximation des efforts de contact nécessiterait un maillage beaucoup plus discrétisé que ceux considérés pour ces deux super-éléments.

### 5.4.3 Limitations

Le temps de calcul pour l'étude de la réponse forcée dépend du nombre de DDLs non-linéaires, i.e. DDLs de contact, considérés dans le modèle. En effet, un calcul de réponse forcée prend environ 800s pour le super-élément SE2, contre 17 000s pour le super-élément SE1. On remarque ainsi que le temps de calcul n'évolue pas linéairement avec le nombre de DDLs, et que les temps de calculs peuvent vite devenir conséquents en fonction du nombre de DDLs. L'objectif de ces méthodes étant d'être utilisées en contexte industriel lors des phases de conception, et sachant que les maillages industriels comportent beaucoup plus de nœuds que le maillage considéré pour ce modèle, les temps de calculs peuvent s'avérer prohibitifs. Les réponses forcées étant convergées même pour un maillage assez grossier, il est possible de considérer ce maillage pour l'étude dynamique du système, en prenant en compte le décalage fréquentiel dû à l'assouplissement des interfaces par manque de nœuds. Cependant, dans le but d'étudier le comportement du contact avec précision, il serait nécessaire d'utiliser un maillage beaucoup plus raffiné. Celui-ci permettrait de mettre en avant les phénomènes d'effets de bords, d'obtenir une répartition des zones de contact plus

proche de la réalité, et des profils de glissement pouvant éventuellement permettre de traiter les phénomènes d'usure. Afin de pallier ce problème de temps de calcul dynamique, un couplage avec une méthode semi-analytique d'étude du contact sera présenté dans le Chapitre III. Ce couplage utilisera les résultats dynamiques pour déterminer le comportement structural, et résoudra le problème de contact localement, permettant l'utilisation d'un maillage très raffiné avec des temps de calculs assez rapides.

## 6 Conclusion

Afin de mener à bien l'étude dynamique non-linéaire des roues aubagées en présence de non-linéarités de contact, différentes méthodes de résolution peuvent être considérées. Grâce à son efficacité pour traiter les problèmes périodiques, une méthode de Ritz-Galerkin en base de Fourier a été choisie pour traiter ce problème dans ce manuscrit : la méthode de l'équilibrage harmonique. Cette méthode permet de considérer directement le régime stabilisé périodique, sans considérer le régime transitoire, en résolvant le problème dans le domaine fréquentiel. Les lois de contact, à savoir la non-interpénétration des corps et la loi de frottement de Coulomb, sont des lois fortement non-régulières. Ainsi, le problème de contact ne peut être résolu dans le domaine fréquentiel par manque d'une expression fréquentielle des lois de contact. Une procédure d'alternance fréquence-temps basée sur des Lagrangiens dynamiques, la DLFT, a donc été utilisée pour la résolution du problème de contact dans le domaine temporel. Les résultats étant ensuite repassés dans le domaine fréquentiel via l'utilisation de transformées de Fourier discrètes. De plus, le temps de résolution dépend du nombre de degrés de liberté du modèle. La méthode de sous-structuration à interfaces fixes de Craig-Bampton a donc été retenue pour réduire le modèle en super-éléments.

L'étude des résultats obtenus avec ces méthodes sur un modèle de roue aubagée simplifiée a permis de mettre en avant l'efficacité des méthodes de résolution considérées pour les calculs dynamiques. Deux super-éléments ont été considérés afin d'étudier l'impact de la discrétisation des interfaces de contact. Malgré un décalage fréquentiel lorsque les interfaces de contact du super-élément ne sont pas assez discrétisées, il a été observé que la réponse forcée non linéaire est convergée en amplitude, les résultats entre les deux super-éléments étant similaires. Cette observation permet de considérer l'énergie dissipée par frottement comme convergée sur un cycle vibratoire pour les deux modèles. L'étude du mode complexe non-linéaire a permis de statuer sur le comportement vibratoire global de la roue-aubagée, mettant en évidence la diminution de la fréquence et l'augmentation de l'amortissement avec l'augmentation de l'amplitude vibratoire.

Les différentes études d'influences menées ont permis de valider le comportement attendu, et donc les résultats obtenus. Cependant, l'étude détaillée du comportement du contact montre que les discrétisations ne sont pas suffisantes pour étudier le comportement local au niveau des interfaces de contact. En effet, le comportement local n'est pas convergé entre les deux modèles, et même pour le super-élément le plus discrétisé, le maillage reste insuffisant pour mettre en évidence les effets de bords qui devraient apparaître dans les contacts pion/plan, tel le contact aube-disque. Ainsi, les méthodes dynamiques présentées dans ce chapitre seront couplées à une

---

méthode semi-analytique d'étude du contact dans le chapitre suivant. Cette méthode permet en effet l'utilisation d'un maillage très fin au niveau des interfaces avec des temps de calculs rapides en ne modélisant que le contact, le comportement dynamique structural étant déterminé par la méthode de l'équilibrage harmonique.



## Chapitre III

# Etude détaillée du comportement du contact aube-disque

Ce chapitre a pour objectif de définir et de valider une méthode de résolution du contact semi-analytique utilisée à posteriori du calcul dynamique, permettant l'étude détaillée des interfaces de contact via un maillage finement discrétisé. Le couplage mis en place permettra dans un second temps l'étude de l'usure des interfaces par fretting, due au chargement dynamique vibratoire. Enfin, l'impact de l'usure sur le comportement vibratoire de la structure sera réalisé via la mise à jour des interfaces de contact des modèles considérés pour les calculs dynamiques et semi-analytiques.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Méthode semi-analytique d'étude du contact . . . . .</b>	<b>90</b>
1.1	Contact entre espaces élastiques semi-infinis . . . . .	90
1.2	Discrétisation du problème de contact . . . . .	93
1.3	Méthode DC-FFT . . . . .	95
1.4	Définition du problème de contact . . . . .	96
1.5	Résolution du problème de contact . . . . .	97
<b>2</b>	<b>Méthode de couplage des méthodes de l'équilibrage harmonique et semi-analytique . . . . .</b>	<b>98</b>
2.1	Methodologie de couplage . . . . .	98
2.2	Convergence des données d'entrée du problème semi-analytique . . . . .	103
2.3	Définition de la géométrie discrétisée pour la résolution semi-analytique . . . . .	105
<b>3</b>	<b>Comportement du contact de la roue aubagée simplifiée discrétisée . . . . .</b>	<b>106</b>
3.1	Définition du modèle pour le calcul semi-analytique . . . . .	107
3.2	Etude du comportement du contact . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Influence de l'usure . . . . .</b>	<b>113</b>
4.1	Impact d'une boucle de mise à jour de la géométrie . . . . .	114
4.2	Influence de plusieurs mises à jour de la géométrie sur le comportement du contact . . . . .	118
4.3	Influence de l'usure sur le comportement dynamique . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>123</b>

---

## 1 Méthode semi-analytique d'étude du contact

La méthode de l'équilibrage harmonique couplée à la procédure d'alternance fréquence-temps basée sur les Lagrangiens dynamiques DLFT, présentée et testée dans le chapitre précédent, a montré son efficacité dans l'étude dynamique du système. En effet, celle-ci permet d'obtenir une bonne estimation des amplitudes vibratoires en considérant les non-linéarités de contact en pied d'aube. Cependant, du fait des temps de résolution engendrés par cette méthode, il n'est pas possible d'utiliser une discrétisation suffisante pour étudier en détail le comportement du contact. Les résultats globaux, notamment le comportement dynamique sur une période vibratoire, sont effectivement convergés, contrairement aux résultats locaux au niveau du contact. Il a notamment été remarqué que les effets de bords, habituellement rencontrés dans le cas des contacts pion/plan type contact aube-disque, ne sont pas représentés par les maillages précédemment considérés. De même, la répartition des efforts ou du glissement sur l'interface sont différents pour les deux modèles de super-éléments SE1 et SE2. Afin d'être en mesure de mener une étude détaillée du contact, la méthode de l'équilibrage harmonique sera couplée à une méthode semi-analytique d'étude du contact. Cela permettra alors d'étudier le comportement détaillé du contact à une fréquence donnée, via un couplage faible utilisant les données vibratoires structurales déterminées par la méthode de l'équilibrage harmonique. La méthode semi-analytique permettra alors d'atteindre des niveaux de discrétisation élevés, autorisant notamment l'étude de l'usure des interfaces de contact.

Cette approche est basée sur l'utilisation de solutions analytiques connues pour des géométries de contact simples entre espaces élastiques semi-infinis. Le problème de contact est alors résolu en superposant les solutions analytiques précédemment évoquées sur les surfaces de contact réelles discrétisées. Des méthodes d'accélération des calculs sont ensuite utilisées, notamment via l'utilisation de transformées de Fourier spatiales. Ces méthodes sont développées dans un code interne au LaMCoS, où elles ont donné lieu à de nombreuses études et validations. Gallego [47] a notamment été le premier à appliquer ces méthodes sur un cas de contact aube-disque. D'autres études ont par la suite permis d'étendre les cas considérés, comme expliqué section I.4.2.2. Ces méthodes sont maintenant couramment utilisées, et notamment plus récemment dans le cadre de l'étude dynamique d'amortisseurs sous plateforme par Armand [5] et Pesaresi [103].

### 1.1 Contact entre espaces élastiques semi-infinis

#### 1.1.1 Notations utilisées

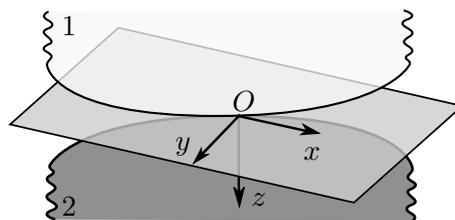


FIGURE III.1 – Définition du repère entre corps en contact.

La Figure III.1 représente les deux corps  $l = 1, 2$  en contact, définis par leurs surfaces non-déformées  $z^l$  dans le repère  $(Oxyz)$ , telles que :

$$z^l = f_l(x, y), \quad l = 1, 2 \quad (\text{III.1})$$

Les pentes  $f_l$  sont supposées assez faibles afin de permettre d'approcher les surfaces par le plan  $(x - y)$  au niveau du contact, celui-ci étant défini pour séparer les deux corps au mieux. La séparation entre les deux corps est notée  $h$ . Elle est définie au point de coordonnées  $(x, y)$  tel que :

$$h(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y) \quad (\text{III.2})$$

La distance entre les deux corps en un point  $(x, y)$  est donnée par :

$$g(x, y) = h(x, y) + \bar{u}_z - \delta_z - y \phi_x + x \phi_y \quad (\text{III.3})$$

avec  $\bar{u}_z = \bar{u}_z^1 + \bar{u}_z^2$  le déplacement élastique des surfaces dans la direction  $z$  normale au contact,  $\delta_z = \delta_z^1 + \delta_z^2$  le déplacement structural aussi appelé déplacement de corps rigide dans la direction normale, et  $\phi_x = \phi_x^1 + \phi_x^2$  et  $\phi_y = \phi_y^1 + \phi_y^2$  les contributions des angles, représentant le mésalignement entre les surfaces [46]. Afin de simplifier les explications, le mésalignement ne sera pas détaillé dans cette section. Il sera cependant bien pris en compte dans l'algorithme de résolution et dans les calculs menés par la suite. Le détail de la prise en compte du mésalignement est donné dans la thèse de Gallego [47]. La définition de la distance entre les deux corps est illustrée Figure III.2.

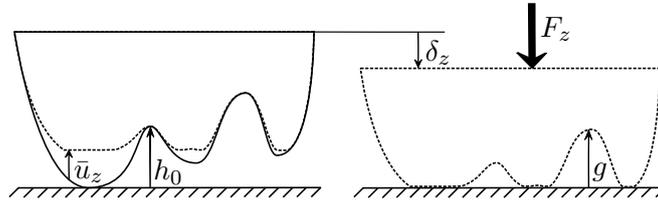


FIGURE III.2 – Définition des notations des distances entre les corps, d'après [2].

Il est aussi nécessaire de définir le glissement à l'interface. La distance de glissement  $s$  quand le système passe d'un temps  $t'$  à  $t$  s'exprime :

$$s = \Delta \bar{\mathbf{u}}_\tau - \Delta \boldsymbol{\delta}_\tau \quad (\text{III.4})$$

où l'opérateur  $\Delta$  représente la différence entre l'instant  $t'$  et  $t$ , et où

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_\tau = \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}_x \\ \Delta \bar{u}_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \boldsymbol{\delta}_\tau = \begin{pmatrix} \Delta \delta_x + y \Delta \phi_z \\ \Delta \delta_y - x \Delta \phi_z \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

L'indice  $\tau$  fait référence à la partie tangentielle.

Enfin, on note  $p$  les pressions de contact (ou contraintes normales) et  $\mathbf{q}_\tau$  les cisaillements surfaciques (ou contraintes tangentielles) définis :

$$\mathbf{q}_\tau = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Le torseur des efforts transmis dans le contact  $\{\mathcal{T}_c\}$  est alors défini grâce à ces efforts surfaciques à travers la zone de contact  $\Gamma_c$ . Ce torseur constituera par la suite les données d'entrée du problème de contact, déterminées via un modèle éléments finis, dans le cas présent par la méthode de l'équilibrage harmonique, alors que les champs de contraintes  $p$ ,  $q_x$  et  $q_y$  en constitueront une inconnue et devront vérifier les équations d'équilibre (III.8). Le torseur  $\{\mathcal{T}_c\}$  est défini de la manière suivante :

$$\{\mathcal{T}_c\} = \left\{ \begin{array}{l|l} Q_x & M_x \\ Q_y & M_y \\ P & M_z \end{array} \right\} \quad (\text{III.7})$$

où

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{\Gamma_c} q_x \, dS & M_x &= \int_{\Gamma_c} p y \, dS \\ Q_y &= \int_{\Gamma_c} q_y \, dS & M_y &= - \int_{\Gamma_c} p x \, dS \\ P &= \int_{\Gamma_c} p \, dS & M_z &= \int_{\Gamma_c} (x q_y - y q_x) \, dS \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

avec  $P$  l'effort normal transmis dans le contact,  $Q_x$  et  $Q_y$  les composantes de l'effort tangentiel  $\mathbf{Q}$  et  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_z$  les composantes du moment  $\mathbf{M}$  transmis au point  $O$ . Le calcul des efforts et moments définissant le torseur des efforts transmis à partir des résultats du calcul dynamique issu du calcul HBM sera détaillé dans la section III.2.2.

### 1.1.2 Espaces élastiques semi-infinis en contact

La théorie du contact entre espaces élastiques semi-infinis est à l'origine de la solution du contact de Hertz et constitue la base des méthodes numériques dites *semi-analytiques* de résolution du contact. Cette théorie consiste à considérer un demi-espace élastique homogène isotrope, limité par le plan  $z = 0$ . Les déplacements de ce demi-espace sont nuls à l'infini. L'objectif est alors de résoudre le problème de Neumann, qui consiste à déterminer les contraintes et déformations élastiques de ce demi-espace soumis à des contraintes normales  $p(x, y)$  et tangentielles  $q_x(x, y)$  et  $q_y(x, y)$  appliquées sur une surface fermée  $S$  proche de l'origine.

Boussinesq [67] et Cerruti [23] ont résolu ce problème en déterminant les champs de contraintes et déformations du demi-espace élastique grâce à la théorie des potentiels. Hertz [59] a repris cette méthode et a utilisé la solution en déplacement pour un chargement en forme de demi-ellipsoïde pour résoudre le problème du contact elliptique. Love [85], dont les travaux ont été résumés par Johnson [65], a développé la solution du déplacement dans le cas d'une pression constante sur une surface rectangulaire. Une formulation des champs de déplacements et de contraintes est donnée, dans le demi-espace soumis à une pression constante  $p$  ou à un cisaillement  $q_x$  ou  $q_y$  constant sur une zone rectangulaire de taille  $\Delta_x \times \Delta_y$  centrée en  $O$ . Ces solutions analytiques sont extraites des fonctions de Green et sont appelées *coefficients d'influence*. Ainsi, la contribution des pressions  $p$  sur les contraintes  $\sigma_{IJ}^p$  du massif semi-infini est donnée équation (III.9), et la contribution de  $p$

sur les déplacements élastiques en surface  $\bar{u}_J^p$  est donnée équation (III.10) :

$$\frac{\sigma_{IJ}^p}{p} = C_{IJ}^p(x, y, z, E, \nu) \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\bar{u}_J^p}{p} = K_J^p(x, y, E, \nu) \quad (\text{III.10})$$

où les indices  $I$  et  $J$  font référence aux directions  $x$ ,  $y$ , ou  $z$ .  $C_{IJ}^p$  et  $K_J^p$  correspondent respectivement à la contribution de la pression  $p$  sur les contraintes et les déplacements. Ils sont aussi appelés coefficients d'influence en contrainte ou en déplacement. Leurs formules sont développées par Johnson [65].  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau composant le demi-espace.

Les contributions dans le cas d'un cisaillement  $q_x$  ou  $q_y$  sont définies de la même manière [65]. Les contributions sur les contraintes sont notées  $C_{IJ}^{q_x}$  et  $C_{IJ}^{q_y}$ , celles sur les déplacements sont notées  $K_J^{q_x}$  et  $K_J^{q_y}$ .

## 1.2 Discrétisation du problème de contact

Le principe de la méthode semi-analytique de résolution numérique du problème de contact est de discrétiser les deux demi-espaces élastiques représentant les deux corps en contact. Les surfaces de contact de chaque corps sont alors discrétisées par une grille de  $N_p = N_x \times N_y$  points espacés de  $\Delta_x$  dans la direction  $x$  et  $\Delta_y$  dans la direction  $y$ , comme représenté Figure III.3. Ce pas est gardé constant afin de permettre l'application de la transformée de Fourier spatiale, décrite dans la section suivante III.1.3. Chaque point représente le centre d'une zone d'aire  $S = \Delta_x \Delta_y$  sur laquelle sont appliqués des champs de pressions  $p$  et de cisaillements  $q_x$  et  $q_y$  constants. Les points sont définis par leurs coordonnées  $(x_i, y_j)$ , aussi notées  $(i, j)$ . La coordonnée  $z_i$  est ajoutée afin de déterminer les contraintes en sous-couche, et on note  $\Delta_z$  la distance entre chaque plan en sous-couche.

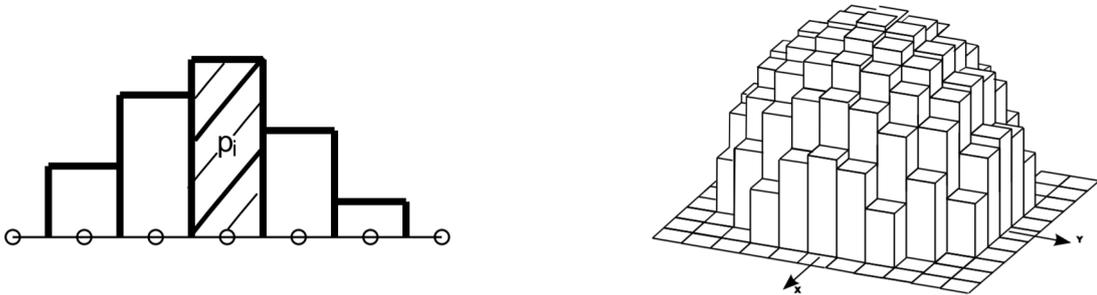


FIGURE III.3 – Chargement normal sur une interface discrétisée, d'après [45].

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, il est possible de superposer les solutions obtenues pour les chargements de chaque élément discret. Ainsi, les contraintes d'un point  $M(i, j, k)$  du massif sont données par sommation des contributions de chaque élément discret, d'après les

solutions analytiques pour un demi-espace élastique :

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}(i, j, k) = & \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} p(l, m) C_{IJ}^p(i-l, j-m, k) + \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} q_x(l, m) C_{IJ}^{q_x}(i-l, j-m, k) \\ & + \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} q_y(l, m) C_{IJ}^{q_y}(i-l, j-m, k) \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

De même, les déplacements d'un point  $\bar{M}(i, j)$  en surface sont donnés par sommation des contributions de chaque élément discret. Afin d'étudier le contact, il est nécessaire d'exprimer les déplacements relatifs entre les deux surfaces :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ . En tenant compte du changement de repère, puisque le massif 2 n'est pas orienté dans le même sens que le massif 1, l'équilibre entre les deux corps au niveau du contact donne :

$$p = p_1 = p_2 \quad (\text{III.12})$$

$$q_x = q_{x1} = -q_{x2} \quad (\text{III.13})$$

$$q_y = q_{y1} = -q_{y2} \quad (\text{III.14})$$

Ainsi, en utilisant les expressions des coefficients d'influence, les déplacements tangentiels pour  $J = x$  ou  $y$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{u}_J(i, j) = & \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} p(l, m) [K_J^p(i-l, j-m, E_1, \nu_1) - K_J^p(i-l, j-m, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} q_x(l, m) [K_J^{q_x}(i-l, j-m, E_1, \nu_1) + K_J^{q_x}(i-l, j-m, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} q_y(l, m) [K_J^{q_y}(i-l, j-m, E_1, \nu_1) + K_J^{q_y}(i-l, j-m, E_2, \nu_2)] \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

De même, les déplacements relatifs normaux s'expriment :

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(i, j) = & \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} p(l, m) [K_z^p(i-l, j-m, E_1, \nu_1) + K_z^p(i-l, j-m, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} q_x(l, m) [K_z^{q_x}(i-l, j-m, E_1, \nu_1) - K_z^{q_x}(i-l, j-m, E_2, \nu_2)] \\ & + \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} q_y(l, m) [K_z^{q_y}(i-l, j-m, E_1, \nu_1) - K_z^{q_y}(i-l, j-m, E_2, \nu_2)] \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Ces expressions mettent en évidence le découplage des problèmes normaux et tangentiels dans le cas de deux matériaux identiques, c'est à dire pour  $E_1 = E_2$  et  $\nu_1 = \nu_2$ . En effet, dans ce cas, la contribution des efforts tangentiels sur le déplacement normal et la contribution de l'effort normal sur l'effort tangentiel sont nulles. Cependant, l'utilisation de la loi de Coulomb fait que la solution du problème tangentiel dépend toujours de la solution du problème normal. Le problème normal et le problème tangentiel seront donc résolus séparément, en commençant par le problème normal, avant de résoudre le problème tangentiel en utilisant les résultats du problème normal. Dans le

cas de deux matériaux différents, les deux solutions sont couplées, et une procédure itérative est utilisée afin d'actualiser le problème normal à l'aide des résultats du problème tangentiel, jusqu'à convergence [99].

### 1.3 Méthode DC-FFT

Afin d'accélérer le calcul, les doubles sommations permettant d'obtenir les déplacements sont calculées en utilisant des transformées de Fourier. En effet, ces doubles sommations correspondent à un produit de convolution discret, qui devient un produit classique dans le domaine fréquentiel. Ainsi, en appliquant des transformées de Fourier discrètes 2D aux efforts, à savoir les pressions et cisaillements, et aux coefficients d'influence, il est possible de déterminer les expressions des déplacements ou des contraintes dans le domaine fréquentiel par un produit terme à terme classique. La réponse dans le domaine spatial est ensuite obtenue en utilisant une transformée de Fourier discrète inverse (IFFT). La transformée de Fourier 2D se fait en réalisant successivement une transformée de Fourier pour chacune des variables  $x$  et  $y$ , peu importe l'ordre [84].

En pratique, un algorithme de transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform - FFT) est utilisé. Cet algorithme a été développé par Cooley et Tukey [28] pour des tailles  $N$  puissances de 2. Il a ensuite été généralisé par Singleton [122] pour tout  $N$ . L'algorithme de Singleton sera utilisé pour réaliser la DC-FFT. Cet algorithme permet de réaliser la transformée de Fourier en  $O(N \log N)$  opérations au lieu de  $O(N^2)$  opérations. Le même nombre d'opérations est nécessaire pour réaliser la transformée de Fourier rapide inverse (IFFT). Le produit de convolution nécessite ensuite  $O(N)$  opérations. Ainsi, l'ensemble du calcul du produit de convolution demande  $O(N + 3N \log N)$  opérations par la méthode DC-FFT, au lieu de  $O(N^2)$ . Cette méthode s'avère donc très avantageuse pour  $N$  élevé, et permet d'avoir des calculs rapides même dans le cas où les interfaces sont discrétisées très finement [47].

Cependant, les déplacements et les contraintes du problème de contact sont exprimés par une convolution linéaire. Il est donc nécessaire de transformer ce problème en une convolution circulaire afin de pouvoir utiliser le théorème de convolution. Comme les fonctions à convoluer ne sont pas périodiques, une erreur est introduite par le calcul de la convolution circulaire. Cette erreur est due au problème de recouvrement [84][47]. Afin de pallier ce problème, les techniques appelées "zero-padding" [108] et "wrap-around order" sont utilisées. Ces méthodes consistent à étendre la taille des échantillons de  $N$  à  $2N$ . Les déplacements sont ensuite réduits à l'espace réel, après calcul des déplacements à l'aide des méthodes suivantes.

#### Zero-padding

Le "zero-padding" consiste à ajouter des valeurs nulles pour étendre la taille de l'échantillon des efforts  $\{p_j\}_{j=0..(N-1)}$ ,  $\{q_{x_j}\}_{j=0..(N-1)}$  et  $\{q_{y_j}\}_{j=0..(N-1)}$ , précédemment définis de 0 à  $(N - 1)$ , jusqu'à  $(2N - 1)$ . On note  $\{\underline{p}_j\}_{j=0..(2N-1)}$  la série nouvellement créée :

$$\underline{p}_j = \begin{cases} p_j & \text{pour } j = 0, \dots, (N - 1) \\ 0 & \text{pour } j = N, \dots, (2N - 1) \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

### Wrap-around order

Les coefficients d'influence sont quant à eux étendus avec la méthode "wrap-around order". Les coefficients d'influence sont calculés de 0 à  $(N - 1)$ . Le coefficient d'indice  $N$  est fixé égal à 0. Les coefficients d'indices  $(N + 1)$  à  $(2N - 1)$  sont ensuite obtenus à partir des coefficients 1 à  $(N + 1)$ , rangés en sens inverse. Un coefficient négatif est ajouté pour les coefficients d'influence correspondant aux efforts tangentiels, pour vérifier la parité de la fonction. Ces étapes sont détaillées dans la thèse de Gallego [47].

$$\underline{K}_j = \begin{cases} K_j & \text{pour } j = 0, \dots, (N - 1) \\ 0 & \text{pour } j = N \\ \pm K_{2N-j} & \text{pour } j = (N + 1), \dots, (2N - 1) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

## 1.4 Définition du problème de contact

### 1.4.1 Problème de contact normal

La résolution du problème normal revient à déterminer l'état de contact en vérifiant des conditions de non-interpénétration des corps, et à assurer l'équilibre de la charge. La zone de contact est notée  $\Gamma_c$  et le domaine d'étude  $\Gamma_p$ . Afin de simplifier la lisibilité, une notation indicielle sera utilisée. La pression au point de coordonnées  $(x_i, y_j)$  sera par exemple notée  $p_{ij}$  par la suite. Ainsi, la résolution du problème de contact normal consiste à rechercher l'unique solution du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} g_{ij} = \bar{u}_{z\,ij}^p + h_{ij} - \delta_z + \bar{u}_{z\,ij}^{q\tau} & \\ g_{ij} = 0, p_{ij} > 0, (i, j) \in \Gamma_c & \text{(contact)} \\ g_{ij} > 0, p_{ij} = 0, (i, j) \notin \Gamma_c & \text{(séparation)} \\ \sum_{(i,j) \in \Gamma_p} p_{ij} S = P & \text{(équilibre de la charge)} \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

où  $\bar{u}_{z\,ij}^p$  est la contribution de l'effort normal  $p$  sur le déplacement dans la direction normale  $z$ ,  $\bar{u}_{z\,ij}^{q\tau}$  est la contribution des efforts dans les deux directions tangentielles, calculés à l'aide des coefficients d'influence comme expliqué précédemment.

### 1.4.2 Problème de contact tangentiel

De la même manière que pour le problème de contact normal, le problème de contact tangentiel peut être défini comme la recherche de l'unique solution d'un système d'équation. Le contact tangentiel est résolu via l'utilisation de la loi de frottement de Coulomb. En notant  $\Gamma_{sl}$  la zone de glissement (slip) et  $\Gamma_{st}$  la zone d'adhérence (stick), tel que  $\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{st} = \Gamma_c$ , le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{ij} = \Delta \bar{\mathbf{u}}_{\tau\,ij}^{q\tau} - \Delta \boldsymbol{\delta}_{\tau} + \bar{\mathbf{u}}_{\tau}^p & \\ \mathbf{s}_{ij} = 0, \|\mathbf{q}_{\tau\,ij}\| < \mu p_{ij}, (i, j) \in \Gamma_{st} & \text{(adhérence)} \\ \mathbf{s}_{ij} \neq 0, \mathbf{q}_{\tau\,ij} = -\mu p_{ij} \frac{\mathbf{s}_{ij}}{\|\mathbf{s}_{ij}\|}, (i, j) \in \Gamma_{sl} & \text{(glissement)} \\ \sum_{(i,j) \in \Gamma_p} \mathbf{q}_{\tau\,ij} S = \mathbf{Q}_{\tau} & \text{(équilibre de la charge)} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

avec les notations définies précédemment.

### 1.5 Résolution du problème de contact

Duvaut et Lions [39] ont développé les formulations variationnelles en mécanique, en particulier pour étudier le problème de contact, dont ils ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution. Ces formulations ont été réécrites par Kalker [72] dans le cadre de la résolution du contact entre massifs élastiques semi-infinis. Ainsi, la résolution du problème de contact peut être formulée comme un problème de minimisation. Il s'agit de déterminer  $p$  et  $\mathbf{q}_\tau$  qui minimisent l'énergie complémentaire, en respectant les contraintes de positivité des pressions et la loi de Coulomb :

$$\begin{aligned} \min_{(p, \mathbf{q}_\tau)} f(p, \mathbf{q}_\tau) &= \int_{\Gamma_c} \left( h^* + \frac{1}{2} \bar{u}_z \right) p \, dS + \int_{\Gamma_c} \left( \mathbf{W}_\tau^* + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_\tau^{(t)} - \bar{\mathbf{u}}_\tau^{(t-1)} \right) \mathbf{q}_\tau \, dS \\ p &\geq 0 \\ \|\mathbf{q}\| &\leq \mu p \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

où  $h^*$  est défini de façon à exprimer  $g$  tel que :

$$g = \bar{u}_z + h^* \quad (\text{III.22})$$

$$\text{donc } h^* = h - \delta_z + \bar{u}_z^{q_\tau} \quad (\text{III.23})$$

de la même façon,  $\mathbf{W}^*$  est défini tel que :

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{u}}_\tau^{(t)} + \mathbf{W}^* \quad (\text{III.24})$$

$$\text{donc } \mathbf{W}^* = -\bar{\mathbf{u}}_\tau^{(t-1)} + \bar{\mathbf{u}}_\tau^p - \Delta \delta_\tau \quad (\text{III.25})$$

Il est alors possible de considérer deux problèmes séparés. En supposant le problème tangentiel connu, la forme variationnelle discrétisée du problème normal s'exprime :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} f_p(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} + \mathbf{h}^{*T} \mathbf{p} + c_\tau \\ p_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

où  $\mathbf{A}_z^p$  est dérivé des coefficients d'influence, en utilisant une notation matricielle :

$$\bar{\mathbf{u}}_z^p = \mathbf{A}_z^p \mathbf{p} \quad (\text{III.27})$$

et  $c_\tau$  est une constante dépendant des solutions du problème tangentiel :

$$c_\tau = \frac{1}{2} \mathbf{q}_\tau^T \mathbf{A}_\tau^{q_\tau} \mathbf{q}_\tau - (\Delta \delta_\tau - \bar{\mathbf{u}}_\tau) \mathbf{q}_\tau \quad (\text{III.28})$$

De même, la forme variationnelle du problème tangentiel discrétisé est donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}_\tau} f_q(\mathbf{q}_\tau) &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_\tau^T \mathbf{A}_\tau^q \mathbf{q}_\tau + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{q}_\tau + c_p \\ \|\mathbf{q}_{ij}\| &\leq \mu p_{ij} \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Les formulations (III.29, III.26) correspondent à des problèmes de minimisation de formes quadratiques convexes sous contraintes. Les matrices sont symétriques d'après les propriétés des coefficients d'influence. Ces problèmes d'optimisation sous contraintes seront donc résolus par un

algorithme de gradient conjugué [107], permettant d’obtenir une valeur exacte de la solution du problème de minimisation de formes quadratiques. Cet algorithme a initialement été développé pour les problèmes non-contraints. Il est cependant applicable aux problèmes d’optimisation sous contraintes, via l’utilisation de conditions d’optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) par exemple. Gallego [47] détaille l’ensemble du principe de l’algorithme de résolution dans sa thèse. Les calculs seront accélérés en utilisant la méthode DC-FFT pour calculer les différents produits de convolution.

## 2 Méthode de couplage des méthodes de l’équilibrage harmonique et semi-analytique

Comme expliqué précédemment, la méthode de l’équilibrage harmonique utilisée dans le Chapitre II permet d’obtenir une bonne estimation du comportement structurel dynamique. Cependant, celle-ci ne permet pas l’utilisation de maillages très raffinés, puisqu’ils engendrent à l’heure actuelle des temps de calcul prohibitifs. Cette section décrit la méthodologie utilisée par la suite pour coupler la méthode de l’équilibrage harmonique à la méthode semi-analytique d’étude du contact. Dans un premier temps, la méthodologie d’extraction des résultats dynamiques calculés par la méthode de l’équilibrage harmonique et utilisés comme données d’entrée de la méthode semi-analytique d’étude du contact sera détaillée. Dans un second temps, la prise en compte de l’usure grâce au maillage raffiné du modèle semi-analytique ainsi que la mise à jour des surfaces de contact et du modèle dynamique seront explicités, menant au couplage multi-échelle complet. Afin de valider les données structurelles, une étude de convergence en fonction du super-élément considéré sera menée. Enfin, la dernière sous-section présentera la méthode de génération des géométries pour le modèle utilisé par la résolution semi-analytique.

### 2.1 Méthodologie de couplage

#### 2.1.1 Utilisation des résultats dynamiques pour la résolution semi-analytique du problème de contact

L’utilisation de la méthode semi-analytique implique de respecter l’hypothèse des espaces élastiques semi-infinis. En pratique, cela revient à considérer la géométrie à proximité du contact pour les deux corps et à faire l’hypothèse que l’influence de la structure est négligeable au niveau du contact. Dans le cas de l’étude des modes de vibration, et notamment des modes considérés dans ce manuscrit, la déformation de la structure est localisée sur la pale et non sur son pied. Ainsi, l’hypothèse de l’espace élastique semi-infini est bien valide dans les cas considérés.

Afin de prendre en compte le comportement structural, un trajet de chargement est extrait des résultats dynamiques obtenus par la méthode de l’équilibrage harmonique. Dans la suite, l’étude portera sur le comportement vibratoire au maximum d’amplitude des réponses forcées non-linéaires considérées. Les résultats seront extraits en temporel à l’aide de la méthode DLFT, afin de considérer les valeurs non-approximées par les séries de Fourier tronquées utilisées en HBM. En effet, il a été montré section II.5.4.1 que les résultats fréquentiels locaux au niveau du contact

présentent des approximations, et donc des erreurs concernant le comportement du contact, les résultats temporels obtenus par DLFT leur seront donc préférés. Le calcul HBM permet donc de déterminer le comportement structural vibratoire, dont les efforts et moments appliqués au niveau du contact sont récupérés pour constituer le torseur des efforts transmis dans le contact, comme exprimé équations (III.7-III.8). Afin de compléter ces données, l'énergie dissipée dans le contact ainsi que la position du centre de pression seront ajoutées pour modéliser le comportement structural. L'ensemble des données sera exprimé à chaque instant de la période vibratoire.

Un repère local  $Oxyz$  de normale  $z$  est défini au centre de chaque surface de contact. Le torseur des efforts et des moments transmis dans le contact  $\{\mathcal{T}_c\}$  est calculé en sommant les efforts (pressions et cisaillements) obtenus aux différents nœuds de la surface de contact par le calcul HBM en DLFT. Ce torseur est calculé à chaque instant temporel  $n$  de la période vibratoire. Ainsi, sous sa forme discrétisée, il est exprimé :

$$\{\mathcal{T}_c^n\} = \left\{ \begin{array}{l|l} Q_x^n & M_x^n \\ Q_y^n & M_y^n \\ P^n & M_z^n \end{array} \right\}_{n=1..n_{it}} \quad (\text{III.30})$$

$$\begin{aligned} Q_x^n &= \sum_{i=1}^{N_{nds}} T_{xi}^n & M_x^n &= \sum_{i=1}^{N_{nds}} y_i N_i^n \\ Q_y^n &= \sum_{i=1}^{N_{nds}} T_{yi}^n & M_y^n &= \sum_{i=1}^{N_{nds}} x_i N_i^n \\ P^n &= \sum_{i=1}^{N_{nds}} N_i^n & M_z^n &= \sum_{i=1}^{N_{nds}} x_i T_{yi}^n - y_i T_{xi}^n \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

où  $T_{xi}^n$  et  $T_{yi}^n$  sont les efforts tangentiels respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ , au nœud  $i$  à l'instant  $n$  de la période vibratoire.  $N_i^n$  est l'effort normal au nœud  $i$  à l'instant  $n$ .  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$  dans le repère  $Oxyz$  normal à la portée.  $N_{nds}$  est le nombre de nœuds sur la portée. Les moments  $M_\bullet$  sont exprimés au point  $O$ , centre de la surface de contact. L'énergie dissipée par frottement  $E_{df}$  est quant à elle calculée à partir des cisaillements et des glissements, telle que :

$$E_{df}^n = \sum_{i=1}^{N_{nds}} \|\mathbf{T}_i^n\| \|s_i^n\| \quad (\text{III.32})$$

où  $s_i^n$  est le déplacement relatif entre les instants  $n-1$  et  $n$  entre l'aube et le disque, correspondant au glissement, et  $\mathbf{T}_i^n$  est l'effort tangentiel. La convergence des données d'entrée utilisées par la méthode semi-analytique présentée ci-dessus en fonction du super-élément considéré dans le calcul dynamique sera discutée dans la section III.2.2.

Afin de limiter le nombre de calculs semi-analytiques, le nombre d'instants temporels par période sera  $n_{it} = 16$  dans la suite de ce manuscrit pour les calculs semi-analytiques. En effet, même si le nombre d'instants temporels peut avoir un impact sur la réponse forcée, les données contenues dans le torseur transmis dans le contact sont recalculées à posteriori par la méthode DLFT en temporel. L'utilisation des résultats temporels permet d'éviter les limitations observées

section II.5.2.3 dues aux transformées de Fourier temporelles utilisées par la procédure d’alternance fréquence temps (AFT), qui nécessite un certain nombre d’instantes sur la période pour être correcte, en l’occurrence  $n_{it} = 32$  au minimum d’après les études d’influences réalisées. Ainsi, les calculs dynamiques par la méthode de l’équilibrage harmonique seront toujours menés avec  $n_{it} = 32$  instants temporels pour la procédure AFT, mais les résultats seront extraits sur 16 instants temporels pour les calculs par la méthode semi-analytique.

### 2.1.2 Prise en compte de l’usure

#### Loi d’usure

Afin de réaliser un couplage complet, l’usure des surfaces de contact sera considérée dans ce manuscrit, pour modéliser l’impact du fretting-wear sur le comportement du contact et sur le comportement dynamique. Ainsi, une loi d’usure locale formulée en énergie à partir des glissements sur l’ensemble de l’interface développée par Paulin [102][101] sera utilisée dans ce manuscrit. Il s’agit d’une reformulation locale de la loi d’Archard [4] définie telle que :

$$V = \alpha_u \sum_{N_f} \delta_0(N_f) E_d(N_f) \quad (\text{III.33})$$

où  $N_f$  est le numéro du cycle de fretting,  $V$  est le volume usé après  $N_f$  cycles,  $\alpha_u$  est un coefficient lié aux matériaux en contact caractérisant l’usure,  $\delta_0(N_f)$  est l’amplitude de glissement pour le cycle  $N_f$  et  $E_d(N_f)$  est l’énergie dissipée par frottement au cours du cycle. Gallego [47] propose une adaptation de cette loi en profondeur d’usure  $\Delta h$ , en ré-exprimant l’amplitude de glissement à l’aide du glissement et l’énergie dissipée à l’aide du glissement  $\mathbf{s}^{(t)}$  et du cisaillement  $\mathbf{q}_\tau^{(t)}$ , tel que :

$$\Delta h = \alpha_u \sum_{N_f} \left[ \frac{1}{4} \sum_{1cycle} \|\mathbf{s}^{(t)}\| \sum_{1cycle} \|\mathbf{q}_\tau^{(t)}\| \|\mathbf{s}^{(t)}\| \right] \quad (\text{III.34})$$

#### Prise en compte de l’usure dans le modèle de contact semi-analytique

L’implémentation de la loi d’usure consiste ensuite à modifier les surfaces en contact  $f_1$  et  $f_2$ . La séparation initiale des corps  $h$  est définie tel que :

$$h(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y) \quad (\text{III.35})$$

L’usure est considérée en modifiant les surfaces des corps en contact. En pratique, elle peut être répartie entre les deux surfaces suivant un ratio  $\beta$  compris entre 0 et 1 et dépendant des matériaux en contact. La profondeur est calculée après un cycle de fretting, et est donc très faible. Ainsi un facteur d’accélération  $\Delta N_c$  correspondant à un certain nombre de cycles est utilisé. Ce facteur peut être déterminé de différentes manières, comme détaillé dans la thèse de Gallego [47] et discuté section III.4.1.2. L’utilisation de ce facteur d’accélération revient à considérer l’usure trop faible pour avoir une influence sur les résultats avant  $\Delta N_c$  cycles de vibration. Les surfaces mises à jour sont alors définies par :

$$f_1^{(N_f + \Delta N_c)}(x, y) = f_1(x, y) + \Delta N_c \beta \Delta h(x, y) \quad (\text{III.36})$$

$$f_2^{(N_f + \Delta N_c)}(x, y) = f_2(x, y) - \Delta N_c (1 - \beta) \Delta h(x, y) \quad (\text{III.37})$$

De cette manière, il est possible de réactualiser les surfaces dans le modèle semi-analytique, afin de déterminer l'impact de l'usure sur le contact. Cette étape correspond à la boucle en tirets sur la représentation du couplage Figure III.4.

### Prise en compte de l'usure dans le modèle dynamique

De la même manière, il peut être intéressant de mettre à jour la géométrie du modèle utilisée pour l'étude dynamique, afin de voir l'impact de l'usure sur le comportement dynamique structural. Pour ce faire, la profondeur d'usure calculée équation (III.34) sur le maillage du modèle de contact est projetée sur le maillage élément-finis utilisé par le modèle dynamique. Celle-ci est ensuite définie comme un jeu  $\mathbf{G}$  dans la loi de contact normale utilisée en DLFT définie équation (II.82), de la même façon que celle présentée dans la thèse de Salles [116]. Ainsi, la loi de contact normale, notée avec l'exposant  $N$ , est réexprimée à l'aide du jeu  $\mathbf{G}$ , telle que :

$$\tilde{\lambda}^N = \tilde{\mathbf{F}}_r^N - \mathbf{Z}_r^N \tilde{\mathbf{X}}_r^N + \epsilon \left( \tilde{\mathbf{X}}_r^N - \mathbf{G} - \tilde{\mathbf{Y}}_r^N \right) \quad (\text{III.38})$$

avec les notations définies dans le chapitre précédent. Cette modification de la géométrie par la prise en compte du jeu dans la loi de contact permet de recalculer la réponse forcée du système par la méthode de l'équilibrage harmonique, mettant en évidence l'influence de l'usure sur la réponse vibratoire du système. Cette mise à jour est représentée par la boucle en trait plein sur la Figure III.4 et sera discutée dans la section III.4.3.

#### 2.1.3 Couplage multi-échelle

Comme expliqué précédemment, l'objectif du couplage présenté dans cette section est de compléter les résultats dynamiques vibratoires non-linéaires en utilisant une méthode semi-analytique pour résoudre le problème de contact. Cette approche permet donc de considérer un maillage de taille raisonnable pour traiter le problème de contact. Un autre maillage beaucoup plus discrétisé peut ensuite être défini pour la résolution du problème de contact par la méthode semi-analytique. En effet, celle-ci présente des temps de calculs faibles même pour des maillages très discrétisés, de l'ordre du micromètre, et permet ainsi notamment l'étude de l'usure par fretting-wear des interfaces de contact. Le couplage réalisé permet ensuite la mise à jour des surfaces de contact de deux façons : la mise à jour du modèle utilisé pour la résolution par la méthode semi-analytique et l'utilisation d'un jeu pour déterminer le comportement vibratoire de la géométrie usée. Ces deux mises à jour de la géométrie rendent possible l'étude de l'influence de l'usure sur le comportement du contact et sur le comportement vibratoire de la structure. La Figure III.4 représente les différentes étapes du couplage réalisé dans ce manuscrit, s'inspirant notamment de la méthode de couplage multi-échelle établie par Gallego [47] et réutilisée dans le cadre d'une étude dynamique par Armand [5].

Le couplage complet est ainsi réalisé en plusieurs étapes :

1. **Calcul des matrices structurales (EF)** : La première étape consiste à construire les matrices structurales préchargées en symétrie cyclique et réduites par la méthode de Craig-Bampton, via un code de calcul éléments-finis industriel (SAMCEF).

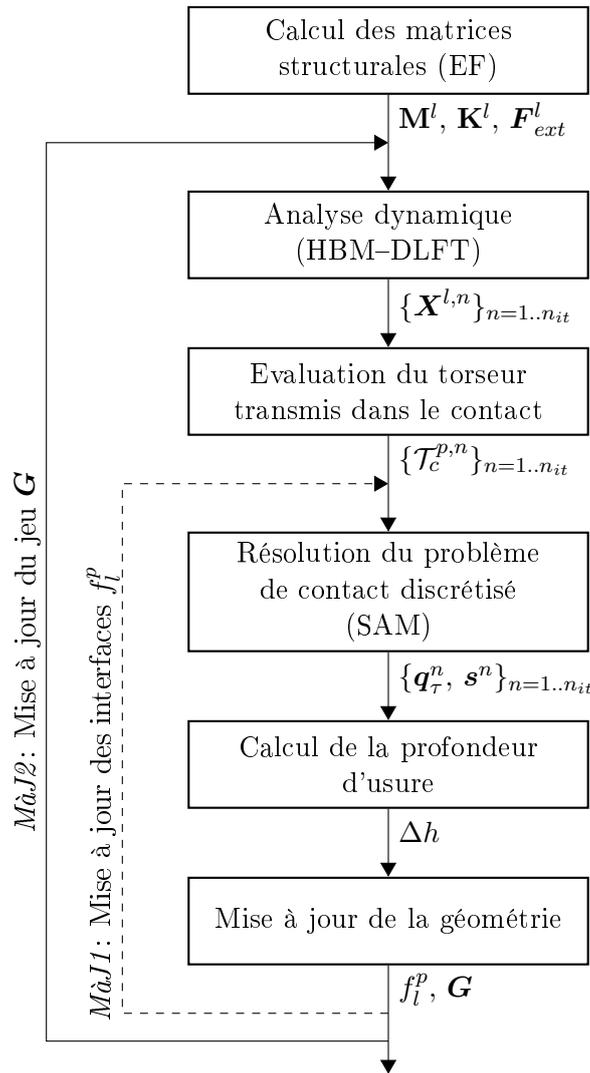


FIGURE III.4 – Représentation de la procédure de couplage multi-échelle.

2. **Analyse dynamique(HBM-DLFT)** : Les matrices structurales précédemment calculées sont ensuite utilisées pour déterminer la réponse dynamique de la structure non-usée, comme détaillé dans le Chapitre II. Le résultat de ce calcul est le déplacement de l'ensemble des DDLs du super-élément à la fréquence de résonance non-linéaire  $\{\mathbf{X}^{l,n}\}_{n=1..n_{it}}$ , calculé en temporel sur chaque instant  $n$  de la période vibratoire grâce à la méthode DLFT.
3. **Évaluation du torseur transmis dans le contact** : A partir des résultats dynamiques, le torseur  $\{\mathcal{T}_c^{p,n}\}_{n=1..n_{it}}$  est calculé sur chacune des portées  $p$  de l'aube à chaque instant temporel  $n$ . En effet, il est à noter que deux calculs semi-analytiques seront nécessaires. Les deux interfaces de contact, une par portée, seront considérées séparément, puisque leur comportement dépend du chargement structural transmis dans le contact via les torseurs calculés pour chacune des interfaces.
4. **Résolution du problème de contact discrétisé** : Après avoir défini le maillage discrétisé, comme expliqué dans la section suivante, un calcul semi-analytique par portée est réalisé.

Celui-ci permet alors d'étudier le comportement détaillé du contact grâce à un maillage très fin, ainsi que de calculer les efforts et glissements considérés pour le calcul d'usure suivant.

5. **Calcul de la profondeur d'usure** : Comme détaillé dans la section précédente, il est possible de réaliser un calcul de la profondeur d'usure sur les interfaces de contact discrétisées, via l'utilisation de la loi de contact définie équation (III.34).
6. **Mise à jour de la géométrie** : suite aux différents calculs réalisés, les géométries des deux portées de l'aube et du disque peuvent être mises à jour via l'utilisation des équations (III.36-III.37).
7. **Boucles de mise à jour** : Enfin, suite à la mise à jour des surfaces en contact, les géométries usées peuvent être réutilisées pour la résolution semi-analytique via la boucle en tirets (- -), notée *MàJ1*, ou pour calculer le comportement dynamique de la géométrie usée via l'utilisation d'un jeu de contact  $\mathbf{G}$ , comme représenté par la boucle en trait plein (—), notée *MàJ2*.

## 2.2 Convergence des données d'entrée du problème semi-analytique

Afin de valider les données d'entrée utilisées par la méthode semi-analytique, une comparaison entre ces données pour les super-éléments SE1 et SE2 décrit dans la section II.5 a été menée. Les résultats seront présentés pour une des interfaces de contact. Pour rappel,  $n_{it} = 16$  instants temporels seront considérés pour les calculs semi-analytiques. Le torseur des efforts transmis est ainsi calculé pour 16 instants sur la période vibratoire, à l'aide des résultats dynamiques obtenus à la fréquence de résonance non-linéaire, dans les conditions choisies à partir de la section II.5.2.5 :

- $\mu = 0.4$
- $F_e = 0.2$
- $n_{it} = 32$  (pour le calcul HBM)
- $N_H = 3$

Les Figures III.5 représentent les valeurs des efforts et des moments dans les 3 directions, l'énergie dissipée par frottement, et la position du centre de pression, pour les deux super-éléments SE1 en trait plein (—) et SE2 en tirets (- -). Le repère utilisé est le repère local normal à la portée, défini Figure III.6. L'ensemble de ces données constitue les données d'entrée de la méthode semi-analytique de résolution du problème de contact. Dans un premier temps, on remarque que les sommes des efforts dans les trois directions présentent une bonne convergence. Cela confirme les résultats obtenus dans le Chapitre II. En effet, même si les efforts ne sont pas convergés localement en chaque nœud, leur somme sur l'interface est convergée, et donc le comportement structural sur le contact est bien respecté de ce point de vue. De plus, même si les moments présentent une moins bonne convergence que les efforts, l'erreur reste raisonnable dans le cas considéré ici. En effet, le super-élément SE2 étant constitué de peu de nœuds, notamment dans la direction  $Y$  ayant uniquement 3 nœuds, la répartition des efforts ne peut pas être convergée, entraînant des erreurs sur le calcul des moments. De même, la position du centre de pression présente une erreur raisonnable, due aussi à la répartition des efforts moins précise dans le cas du super élément

SE2. Cependant, la Figure III.5c permet de remarquer que les énergies dissipées calculées pour les deux super-éléments présentent des différences significatives. Il s'agit d'un phénomène classique en éléments-finis, l'énergie dissipée par frottement n'étant convergée que pour des maillages très fins. Il est cependant intéressant de remarquer que l'énergie dissipée totale, en cumulant les deux portées, sur un cycle vibratoire, soit l'intégrale sur le cycle, est quasiment égale pour les deux super-éléments considérés. Cette quasi-égalité confirme les résultats obtenus en réponse forcée entre les deux super-éléments. En effet, il a été observé dans la section II.5.2.5 que les maxima d'amplitudes vibratoires des deux super-éléments étaient quasi-identiques, or l'amplitude dépend de la dissipation par friction.

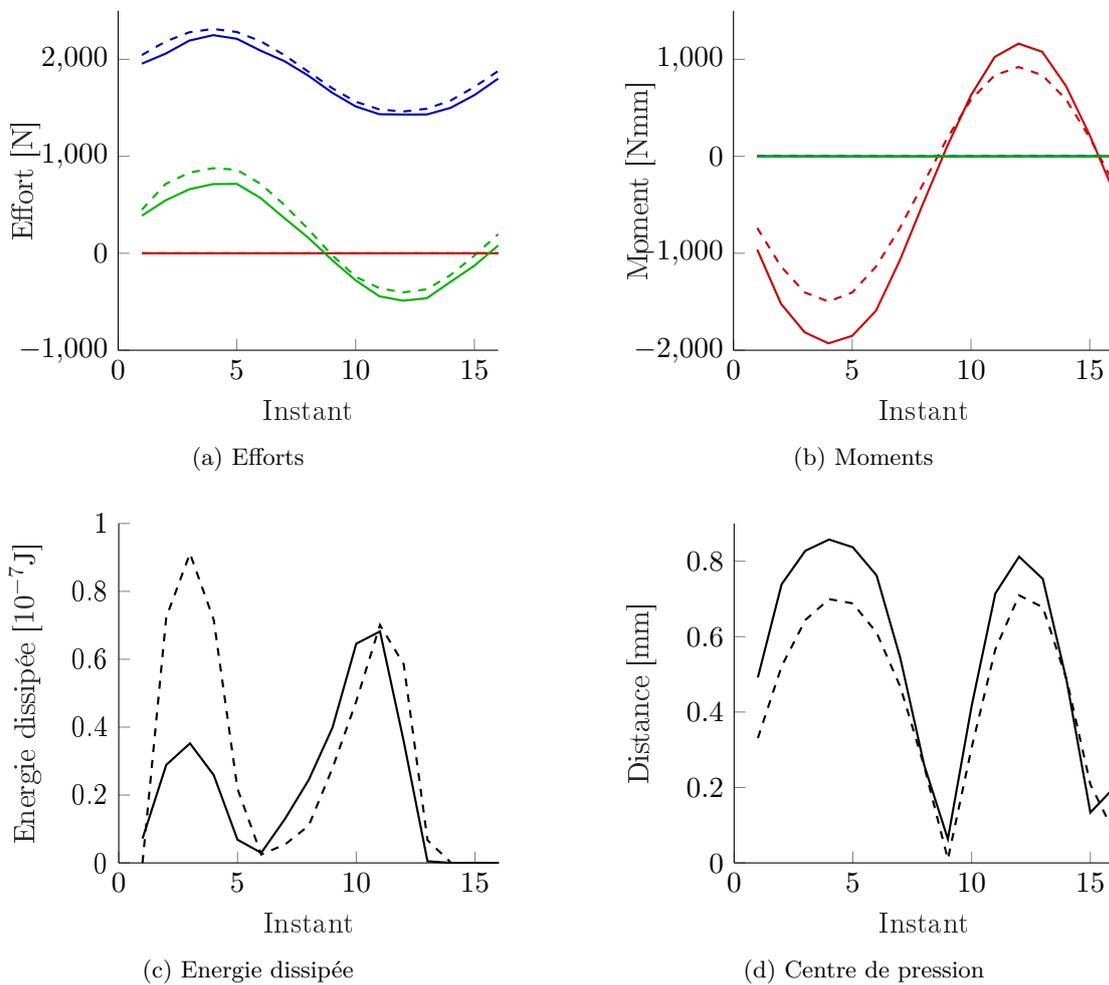


FIGURE III.5 – Comparaison des données d'entrée utilisées pour la méthode semi-analytique, extraites des calculs dynamiques pour les deux super-éléments SE1 en traits pleins (—) et SE2 en tirets (- -). Les courbes représentent les directions X en rouge (—), Y en vert (—) et Z en bleu (—).

Les différences observées entre les deux super-éléments permettent de mettre en évidence les limitations de l'utilisation d'un super-élément peu discrétisé. Ce point sera étudié plus en détail dans le cas d'application industrielle utilisée dans le Chapitre IV, pour lequel 3 super-éléments

seront considérés. Dans la suite de ce chapitre, les résultats obtenus avec le super-élément SE2 seront considérés, afin d'avoir des calculs dynamiques rapides notamment lors de la prise en compte de l'usure. Cependant, une comparaison entre les résultats obtenus à l'aide de la méthode semi-analytique pour les données d'entrée extraites des deux super-éléments SE1 et SE2, sera réalisée dans la section III.3.1.3.

### 2.3 Définition de la géométrie discrétisée pour la résolution semi-analytique

Afin de réaliser le couplage décrit précédemment, il est nécessaire de définir le modèle considéré pour représenter les interfaces de contact pour la résolution semi-analytique. En pratique, la géométrie est générée à partir du modèle éléments-finis utilisé à la première étape du couplage multi-échelle pour déterminer les matrices structurales, le maillage étant le modèle fourni par les bureaux d'études industriels. Il est alors nécessaire de générer une géométrie représentative de chaque portée sur lequel le maillage désiré sera défini, et pouvant traiter les deux problèmes de contact par la suite.

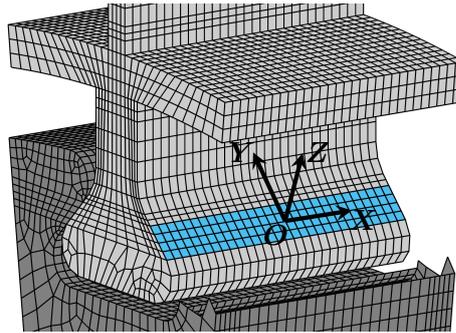


FIGURE III.6 – Repère utilisé pour le modèle résolu par la méthode semi-analytique, représenté sur une portée de l'aube avec le disque coupé pour la visualisation.

Dans un premier temps, le maillage des deux portées et les nœuds à proximité sont extraits. Un repère local  $OXYZ$  normal à la portée est défini sur chacune des portées en leur centre. La géométrie est ensuite interpolée à partir du maillage éléments-finis à proximité des portées, afin de pouvoir définir le maillage discrétisé. Un léger congé est ensuite ajouté en bordure de portée dans la direction  $Y$ , afin de faciliter la convergence du calcul semi-analytique. En effet, l'utilisation d'un bord sans congé entraîne une concentration de contrainte trop élevée et donc des problèmes de convergences de l'algorithme du gradient conjugué utilisé pour la résolution par la méthode semi-analytique. Le congé considéré est cependant très faible, comparable aux congés obtenus suite à l'usinage des pieds d'aube. Enfin, des zones de calcul fictives hors du contact sont ajoutées pour pouvoir appliquer les méthodes Wrap-around order et Zero-padding décrites section III.1.3, permettant de corriger les erreurs induites par les transformées de Fourier spatiales. Ces zones de calcul fictives ne seront jamais en contact, et n'interviennent donc pas dans celui-ci. Elles doivent être au minimum égales à la taille de la zone de contact, comme représenté Figure III.7. De plus, il est à noter qu'elles ne sont pas représentatives de la géométrie et permettent uniquement d'utiliser les méthodes de calcul présentées précédemment. Sans l'ajout de ces zones fictives, de fortes

incohérences apparaissent en bordure de contact, où se localisent les concentrations de contraintes élevées. Différents résultats utilisant des zones de calculs de différentes tailles seront présentés dans la section III.3.1.2, mettant en évidence leur utilité pour la résolution.

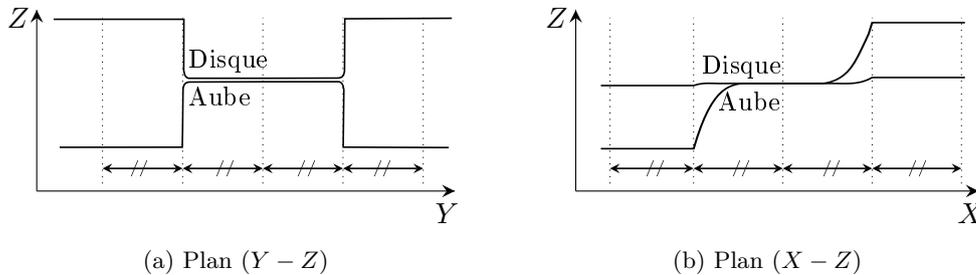


FIGURE III.7 – Schéma de représentation de la géométrie utilisée pour la résolution semi-analytique sur une portée de contact.

### 3 Comportement du contact de la roue aubagée simplifiée discrétisée

A partir de la méthode de résolution du contact semi-analytique définie dans les sections précédentes, cette section vise à étudier le comportement de l'interface de contact aube-disque avec un maillage finement discrétisé. Dans un premier temps, le modèle considéré par la suite sera défini. Une étude de l'impact de la discrétisation sur les résultats dans le contact permettra ainsi de statuer sur la finesse du maillage à utiliser pour la suite des calculs. De même, l'utilité de la zone de calcul fictive nécessaire aux corrections de la méthode DC-FFT sera mise en évidence. Une étude comparative entre les résultats obtenus avec les données d'entrée issues des calculs dynamiques pour les super-éléments SE1 et SE2 permettra ensuite de justifier le choix de l'utilisation des données du super-élément SE2 pour la suite des calculs. Dans un second temps, le comportement du contact résolu par la méthode semi-analytique sera détaillé et comparé aux résultats obtenus lors du calcul dynamique avec la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) couplée à la procédure DLFT, réalisés dans la section II.5.

Du fait de l'étude du premier mode de flexion sur une aube ne présentant pas de vrillage, le comportement des deux portées de contact est identique avec un déphasage d'une demi-période vibratoire. Ainsi, l'ensemble des résultats de cette section sera présenté sur la même portée. L'application industrielle réalisée dans le Chapitre IV permettra quant à elle d'étudier une pale vrillée où le comportement des deux portées diffère. De plus, les résultats seront tous étudiés sur un instant identique de la période vibratoire, afin de simplifier leur comparaison. L'instant choisi est le 4<sup>ème</sup> de la période vibratoire comportant 16 instants. Il correspond au maximum de chargement, où les efforts et glissements maximaux sont observés.

La Figure III.8 représente la méthode de visualisation utilisée pour les résultats surfaciques. La Figure de gauche représente les pressions de contact, i.e. les efforts normaux, à l'instant 4 de la période vibratoire sur le pied d'aube. Par la suite, tous les résultats surfaciques seront représentés

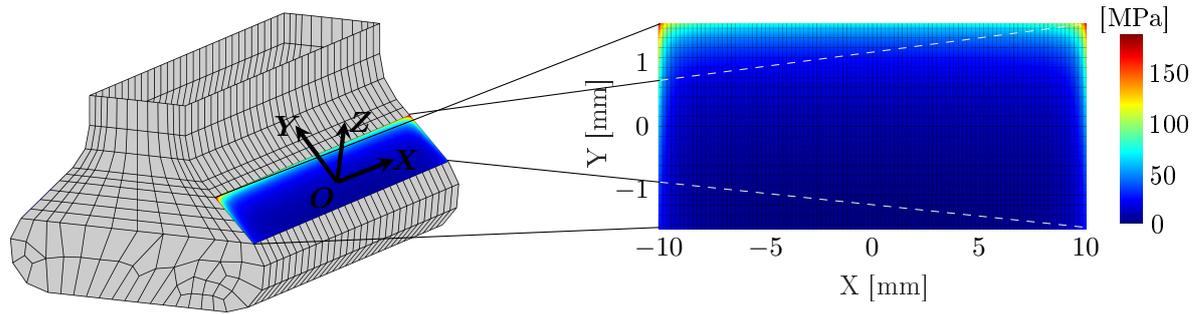


FIGURE III.8 – Méthode de visualisation des contraintes de pression sur une portée de l'aube.

via une nappe sur le pied d'aube dans le repère local normal à la portée ( $OXYZ$ ), cf Figure III.8. Ainsi, la Figure de droite permet d'observer les pressions de contact sur la portée, dans le plan ( $X - Y$ ). L'étude des efforts de contact sera menée dans la sous-section III.3.2, la Figure III.8 ayant uniquement pour objectif d'expliquer la méthode de visualisation utilisée.

### 3.1 Définition du modèle pour le calcul semi-analytique

Dans un premier temps, cette section vise à définir le modèle de contact qui sera utilisé par la suite. En effet, il est nécessaire de choisir la discrétisation du maillage semi-analytique considéré ainsi que les données d'entrée choisies entre les deux super-éléments SE1 et SE2. La nécessité de l'utilisation d'une zone de calcul fictive autour du contact, nécessaire aux méthodes de correction de la DC-FFT, sera aussi mise en évidence.

#### 3.1.1 Choix de la discrétisation

Afin de choisir la discrétisation considérée dans la suite de ce chapitre, trois discrétisations ont été testées. Pour le moment, les simulations seront réalisées à l'aide des données issues du calcul dynamique pour le super-élément SE2. Le tableau III.1 donne le nombre de nœuds considérés pour ces trois discrétisations dans les directions  $X$  et  $Y$ ,  $N_X$  et  $N_Y$  étant respectivement le nombre de nœuds dans les directions  $X$  et  $Y$ . A titre de comparaison, le nombre de nœuds considérés dans les calculs dynamiques (HBM) du Chapitre II est aussi rappelé dans le tableau.

	$N_X$	$N_Y$
Discrétisation 1	51	11
Discrétisation 2	101	23
Discrétisation 3	201	45
HBM SE1	31	5
HBM SE2	16	3

TABLE III.1 – Nombre de nœuds dans les directions  $X$  et  $Y$  des différents modèles considérés pour le calcul semi-analytique et les super-éléments des calculs dynamiques (HBM SE1 et SE2).

La Figure III.9 représente les résultats surfaciques en contraintes de pression dans la colonne de gauche (Figures III.9-(a)(c)(e)) et en amplitudes de glissement dans la colonne de droite (Figures III.9-(b)(d)(f)), pour les trois discrétisations considérées. Les représentations surfaciques des pressions sont cohérentes pour les trois cas, avec des contraintes localisées principalement sur les bords du contact. Cependant, les amplitudes de glissement ne semblent pas cohérentes pour le modèle le moins discrétisé (discrétisation 1) par rapport aux deux autres modèles. En effet, la discrétisation 1 présente du glissement sur toute l'interface et une zone sans glissement (en gris sur la Figure III.9(b)) en milieu de portée. Les deux autres discrétisations ont quant à elles des zones de glissement comparables et correspondant au comportement observé lors des calculs dynamiques.

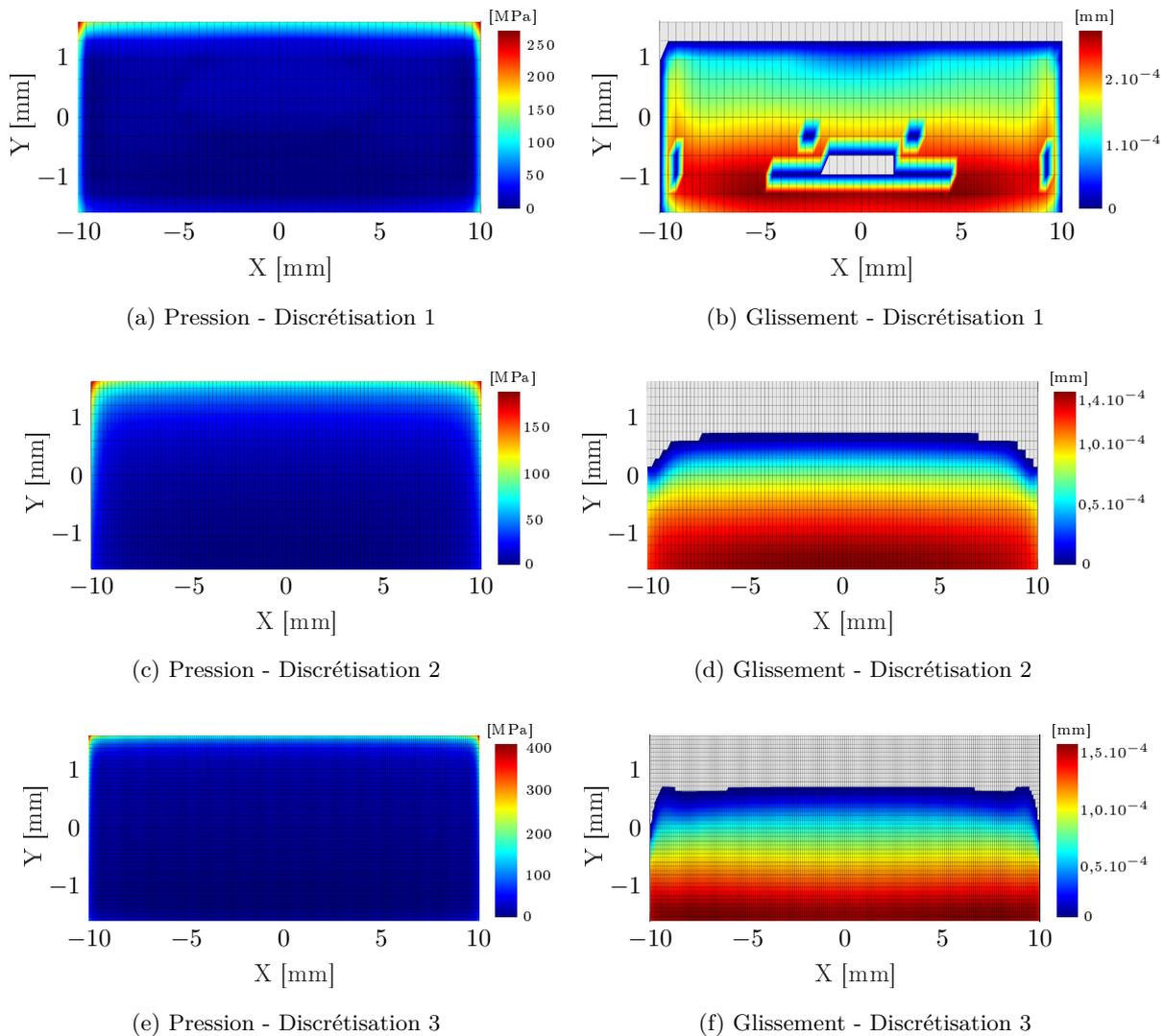


FIGURE III.9 – Pressions et amplitudes de glissement pour les différentes discrétisations du modèle semi-analytique.

La Figure III.10 représente les efforts normaux et amplitudes de glissement sur une ligne de nœuds en milieu de portée : les Figures III.10(a-b) sur une ligne de nœuds en  $Y = 0$  (grande direction) et les Figures III.10(c-d) sur une ligne de nœuds en  $X = 0$  (petite direction). De même que pour les répartitions présentées précédemment, la discrétisation 1 semble trop grossière pour offrir une bonne évaluation des efforts et des glissements par rapport aux autres modèles. Les discrétisations 2 et 3 donnent quant à elles des amplitudes d'efforts normaux et de glissement similaires, mis à part une concentration de contrainte plus importante en bord de portée pour la discrétisation 3.

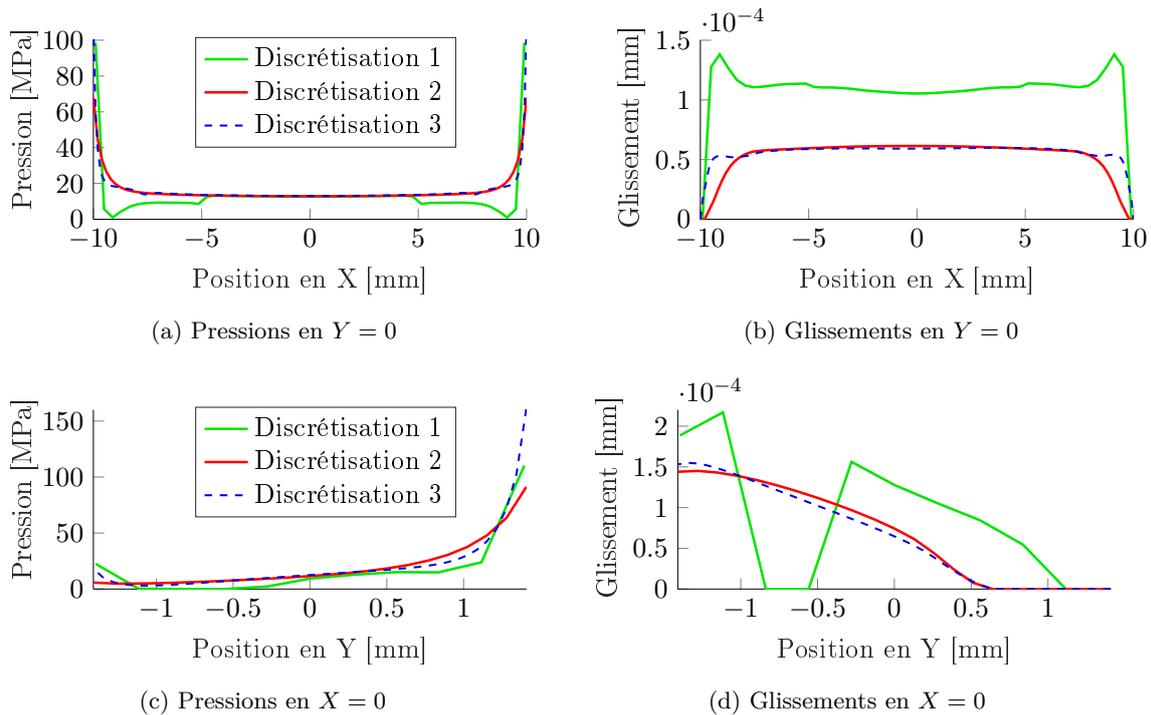


FIGURE III.10 – Pressions et amplitudes de glissement sur des lignes de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact, pour les différentes discrétisations du modèle semi-analytique.

Les résultats observés permettent ainsi de statuer sur la discrétisation nécessaire pour obtenir une bonne évaluation des données sur le contact. La discrétisation 1, la plus grossière, ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants, puisqu'elle présente notamment des irrégularités en glissement. Les discrétisations 2 et 3 semblent quant à elles convergées, en répartition et en amplitude pour les efforts et les glissements. Ainsi, afin de limiter la taille des modèles, la discrétisation 2 sera retenue pour les calculs semi-analytiques dans la suite de ce chapitre.

### 3.1.2 Influence de la taille de la zone de calcul

Comme expliqué dans la section III.1.3, l'utilisation de transformées de Fourier spatiales afin de transformer les doubles sommations en produits de convolution dans le domaine de Fourier via la méthode DC-FFT, nécessite la prise en compte de méthodes de correction. Ces méthodes impliquent d'ajouter des zones de calcul fictives représentant deux fois la taille de la zone de contact. Afin de mettre en évidence l'impact de l'élargissement des zones de calculs, un calcul

sans zone supplémentaire sera effectué. La Figure III.11 représente les résultats obtenus avec zone de calcul fictive de la FFT en rouge (—) et sans zone de calcul en bleu (- -). Une irrégularité importante apparaît en bord de portée pour le modèle sans zone de calcul fictive, engendrant des efforts nuls juste après la zone de concentration de contrainte. Les transformées de Fourier spatiales n'arrivent alors pas à représenter cette singularité sans l'ajout des zones de calcul fictives autour du contact. Les résultats obtenus avec une zone de calcul fictive ne présentent cependant pas d'irrégularité à proximité des bords, validant la nécessité et la taille de la zone de calcul considérée pour ce modèle.

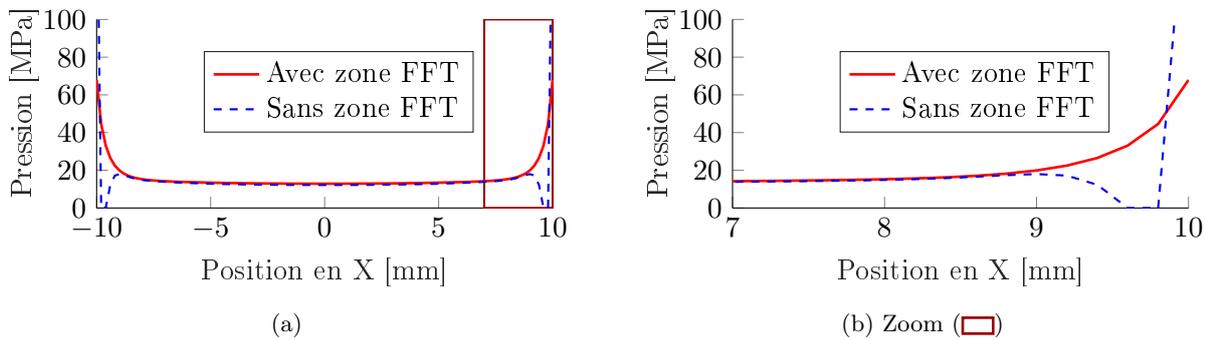


FIGURE III.11 – Impact de la zone de calcul de la transformée de Fourier sur les résultats obtenus par la méthode semi-analytique.

### 3.1.3 Influence du super-élément considéré

Les résultats obtenus dans le Chapitre II ont permis de montrer que l'utilisation du super-élément SE2, peu discrétisé, est suffisante pour l'évaluation du comportement vibratoire de la structure. Cependant, l'étude du comportement local au niveau du contact a montré qu'un maillage plus fin était nécessaire à l'étude du contact. Afin de déterminer si le super-élément SE2 était suffisant pour obtenir les données d'entrées du calcul semi-analytique, celles-ci ont été comparées dans la Figure III.5. Cette Figure met en évidence la convergence partielle du torseur transmis dans le contact. Ainsi, des calculs semi-analytiques utilisant les données issues de deux super-éléments ont été réalisées. La Figure III.12 représente les résultats en efforts normaux obtenus, pour ces deux super-éléments : SE1 en bleu (- -) et SE2 en rouge (—). Les résultats ne sont représentés que pour les efforts à l'instant 4 de la période, car les mêmes observations ont été faites aux autres instants et pour les autres données. On remarque une bonne corrélation entre les résultats obtenus pour les deux super-éléments. Malgré les légères différences, il paraît cependant cohérent de considérer les résultats extraits du calcul dynamique pour le super-élément SE2 dans la suite de ce chapitre.

De façon plus générale, cette observation permet ainsi de considérer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage trop discrétisé dans le calcul dynamique pour obtenir de bons résultats à l'aide de la résolution semi-analytique. En effet, un maillage plus discrétisé engendre des temps de calcul très importants pour la génération des super-éléments et pour le calcul par la méthode de

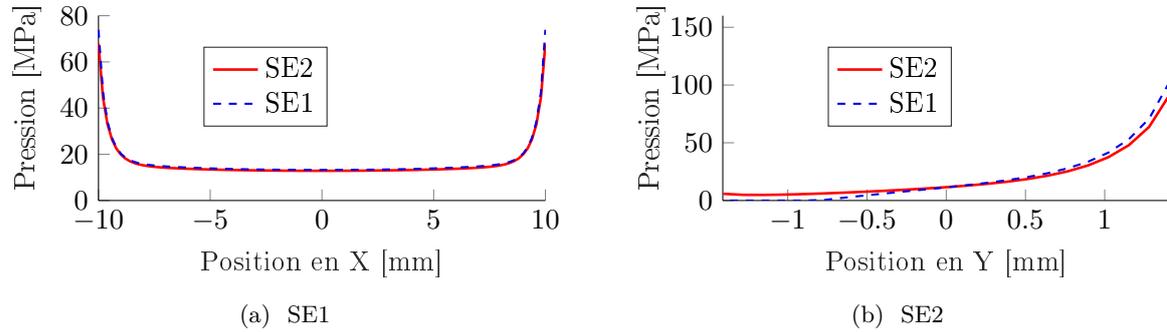


FIGURE III.12 – Comparaison des résultats semi-analytiques obtenus avec les données d’entrées extraites des calculs dynamiques pour les super-éléments SE1 et SE2, sur une ligne de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact.

l’équilibrage harmonique, que nous cherchons à éviter dans ces travaux.

### 3.2 Etude du comportement du contact

Après avoir validé la discrétisation et les données d’entrée considérées pour le calcul semi-analytique, cette section vise à étudier plus précisément le comportement local du contact. En effet, la discrétisation fine du modèle semi-analytique permet d’obtenir des résultats au niveau du contact beaucoup plus détaillés et proches de la réalité que les modèles éléments-finis étudiés précédemment dans les calculs dynamiques. De plus, les discrétisations atteintes par ce modèle permettront par la suite d’étudier notamment l’usure des interfaces de contact due aux phénomènes vibratoires. Cette section vise donc à déterminer les apports de la méthode semi-analytique par rapport aux calculs réalisés dans le Chapitre II, ainsi qu’à valider les différents résultats obtenus.

#### 3.2.1 Efforts de contact

De la même manière que l’étude du contact réalisée dans le chapitre précédent section II.5.4.2, la Figure III.13 représente la contrainte de cisaillement  $\sigma$  en rouge (—) et le coefficient de frottement multiplié par la contrainte de pression  $\mu p$ , sur une ligne de nœuds en milieu de portée en  $Y = 0$ , sur la grande direction du contact. On remarque que l’égalité de la loi de Coulomb ( $\sigma = \mu p$ ) est présente quasiment sur l’ensemble de la ligne de nœuds, sauf sur le bord, comme représenté dans le Zoom (□) dans la Figure de droite. Ainsi, l’ensemble de la ligne de nœuds devrait présenter du glissement, sauf les nœuds où l’égalité n’est pas respectée en bord de portée.

De plus, par rapport à la Figure II.22 du chapitre précédent représentant les efforts calculés par la méthode DLFT en dynamique, les effets de bords sont beaucoup plus importants. En effet, la forme du contact de type pion/plan engendre des concentrations de contraintes sur les bordures du contact. Ces effets de bords n’étaient pas représentés par les maillages considérés pour les calculs dynamiques. Ainsi, la discrétisation fine considérée pour le modèle semi-analytique met en évidence ce phénomène physique important à prendre en compte, notamment pour l’étude de l’usure qui sera réalisée dans la section III.4 de ce chapitre.

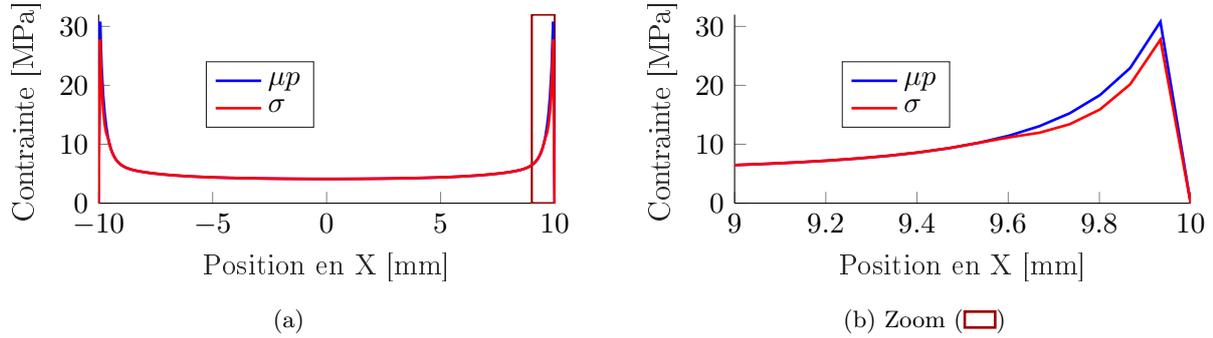


FIGURE III.13 – Contrainte de cisaillement  $\sigma$  et coefficient de frottement multiplié par la contrainte de pression  $\mu p$ , sur une ligne de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact.

### 3.2.2 Etat de contact

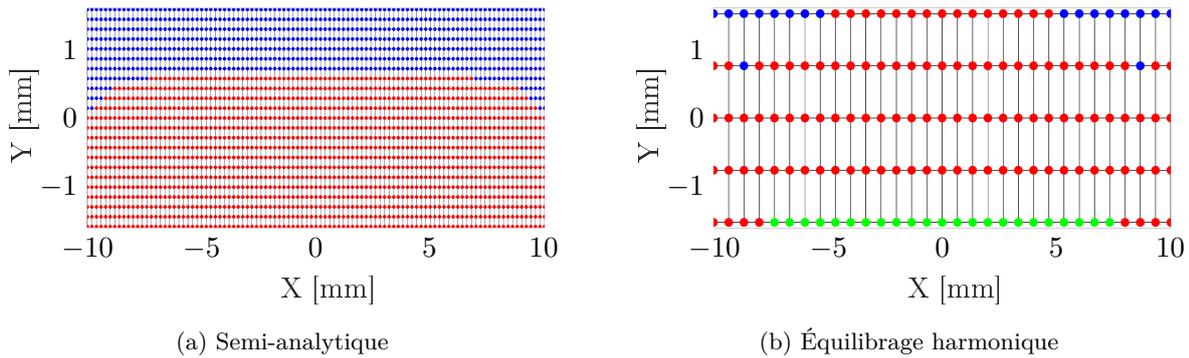


FIGURE III.14 – États de contact déterminés par résolution semi-analytique (a) et par la méthode de l'équilibrage harmonique (b). Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés.

De même que pour les efforts de contact, la discrétisation fine des interfaces rendue possible par l'utilisation de la méthode semi-analytique permet d'obtenir une meilleure répartition de l'état de contact sur l'interface. La Figure III.14 représente l'état de contact de l'interface obtenu par la méthode semi-analytique et par la méthode de l'équilibrage harmonique : les nœuds en bleu (●) étant collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. On remarque dans un premier temps un comportement similaire entre les deux modèles avec des nœuds collés en haut de portée ( $Y > 0$ ) et glissants en bas de portée ( $Y < 0$ ). Cependant, la discrétisation fine du modèle semi-analytique offre une meilleure répartition, notamment observable par la taille de la zone collée, beaucoup plus grande dans ce cas. En effet, les calculs dynamiques ne présentant que 3 nœuds (SE2) ou 5 nœuds (SE1) dans la direction  $Y$ , la discrétisation grossière ne permet pas d'obtenir une bonne répartition des résultats. Enfin, il est à noter qu'aucun nœud n'est en état de séparation avec le calcul semi-analytique. En effet, la séparation observée dans le cas des calculs dynamiques est due

au manque de discrétisation des bords de portées, créant une discontinuité géométrique. La finesse de la discrétisation du modèle semi-analytique permet de lisser cette discontinuité de la géométrie, et donc de se rapprocher de la physique réelle du contact, ne faisant pas apparaître de séparation.

### 3.2.3 Etude du glissement

La Figure III.9(d) présentée précédemment a permis d'observer la répartition de l'usure sur l'ensemble de l'interface de contact. Afin de valider les résultats obtenus par rapport aux résultats des calculs dynamiques du chapitre précédent, la Figure III.15 représente les amplitudes de glissement déterminées par le calcul semi-analytique (SAM) (—) et pour les deux super-éléments SE1 (---) et SE2 (⋯) lors des calculs dynamiques (HBM), sur les lignes de nœuds en milieu de portée dans les deux directions. Les amplitudes de glissement calculées par la méthode semi-analytique sont cohérentes avec les résultats observés en efforts Figure III.13, avec des zones sans glissement uniquement en bords de portée sur la Figure III.15(a). De plus, les profils de glissement sont bien équivalents entre les modèles semi-analytiques et dynamiques. Cependant, le modèle semi-analytique permet d'obtenir une meilleure répartition, proche de la physique réelle du contact.

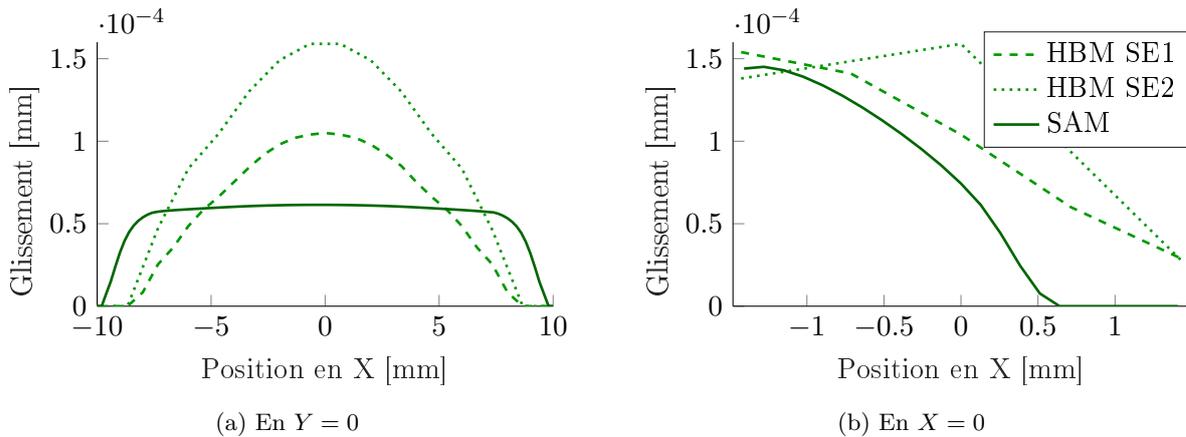


FIGURE III.15 – Amplitudes de glissement pour les modèles semi-analytiques et dynamiques pour les super-éléments SE1 et SE2, sur une ligne de nœuds dans les deux directions du contact.

La méthode semi-analytique d'étude du contact permet ainsi d'obtenir des résultats plus physiques au niveau du contact, grâce à l'utilisation d'un maillage finement discrétisé. Ces résultats seront utilisés par la suite afin de modéliser l'usure des interfaces de contact due au chargement vibratoire. En effet, le maillage très discrétisé se rapproche de l'échelle de l'usure, de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ .

## 4 Influence de l'usure

Les résultats obtenus dans la section précédente à l'aide de la résolution semi-analytique du problème de contact ont permis de valider celui-ci, ainsi que de justifier de son intérêt. En effet,

cette méthode permet l'utilisation d'un maillage discrétisé très finement tout en gardant des temps de calcul rapides. La finesse de la discrétisation permet ainsi d'obtenir une grande précision dans la résolution du problème de contact. Il est donc possible d'utiliser les résultats obtenus pour étudier l'usure des interfaces de contact due au chargement vibratoire.

Cette section a pour objectif d'étudier l'usure des interfaces de contact. L'usure sera d'abord calculée après un cycle de chargement, et un facteur d'accélération  $\gamma$  sera appliqué. Dans un premier temps, l'impact de l'usure après une boucle de mise à jour des interfaces de contact sur le comportement de celle-ci sera étudié. Plusieurs boucles de mise à jour du modèle de contact semi-analytique (mise à jour MâJ1) seront ensuite réalisées afin d'étudier un plus grand nombre de cycles. Enfin, la dernière section visera à étudier l'influence de l'usure sur le comportement dynamique, notamment sur les amplitudes vibratoires, via la seconde boucle de mise à jour (MâJ2).

## 4.1 Impact d'une boucle de mise à jour de la géométrie

### 4.1.1 Etude de l'usure après un cycle vibratoire

Comme expliqué dans la section III.2.1.2, l'usure est calculée à partir d'une reformulation locale de la loi d'usure d'Archard [4] étudiée par Paulin [101]. Cette formulation est basée sur les résultats obtenus en glissement et en efforts tangentiels sur un cycle de chargement, à savoir une période vibratoire dans notre cas. L'ensemble de ces données est calculé via la méthode de résolution semi-analytique du contact. Afin de comprendre les profils d'usure obtenus après un cycle vibratoire, la Figure III.16 représente l'effort tangentiel cumulé sur un cycle vibratoire et l'amplitude de glissement cumulée sur un cycle. Les efforts tangentiels sont principalement concentrés sur les bords et dans les coins du contact. Le glissement se localise quant à lui sur l'ensemble de la portée, et notamment sur le haut de la portée ( $Y > 0$ ). L'amplitude de glissement cumulée est particulièrement importante sur le haut de la portée car cette zone de la portée est en glissement durant un nombre important d'instantanés de la période vibratoire.

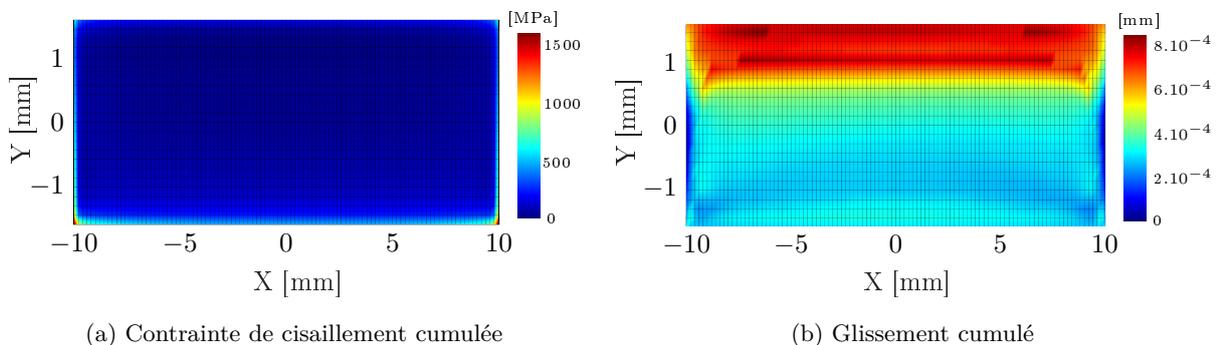


FIGURE III.16 – Contrainte de cisaillement (a) et amplitudes de glissement (b) cumulés sur un cycle vibratoire.

La Figure III.17 représente la profondeur d'usure sur la portée de l'aube. Puisque les localisations des efforts tangentiels présentés précédemment sont sur les bords du contact, l'usure  $y$  est

principalement concentrée. En effet, lors des premiers cycles d'usure d'un contact de type pion/plan, il est couramment observé [47][116] que les bords du contact s'usent rapidement, entraînant donc une diminution des concentrations de contraintes. Il est important de noter l'ordre de grandeur de l'usure après un cycle vibratoire :  $10^{-12}$ mm. Cette profondeur d'usure minimale n'ayant pas de sens physique justifie alors l'utilisation d'un facteur  $\Delta N_c$  d'accélération de l'usure, celle-ci étant trop faible après un seul cycle. La zone grise sur la Figure III.17 présente bien de l'usure, mais la profondeur d'usure  $y$  est négligeable par rapport au reste de la portée (de l'ordre de  $10^{-14}$ mm).

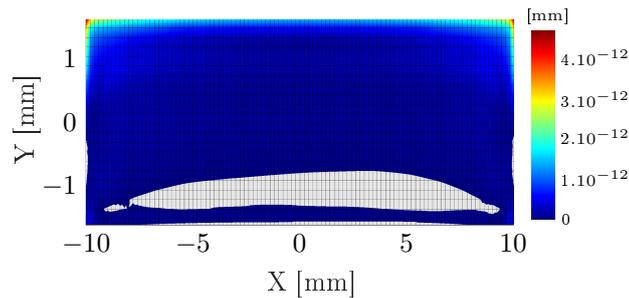


FIGURE III.17 – Profondeur d'usure calculée après 1 cycle vibratoire.

#### 4.1.2 Accélération de l'usure

La profondeur d'usure après un cycle étant trop faible, un facteur d'accélération de l'usure est utilisé, multipliant la profondeur d'usure par un nombre de cycles donné, comme expliqué section III.2.1.2. L'utilisation de ce facteur revient alors à considérer que l'usure n'a pas d'impact significatif sur le comportement du contact avant les  $\Delta N_c$  cycles considérés. Cette section vise à déterminer le facteur d'accélération à appliquer afin d'avoir des résultats cohérents. Pour ce faire, différents facteurs d'accélération ont été appliqués à la profondeur d'usure calculée après un cycle. Les géométries des contacts ont ensuite été mises à jour en considérant les profondeurs d'usure calculées à l'aide des différents facteurs d'accélération. Enfin, le problème de contact a été résolu une seconde fois en considérant les géométries mises à jour. Cela correspond ainsi à une boucle de mise à jour *MàJ1* des interfaces, c'est à dire la boucle en tirets (- -), de la procédure de couplage Figure III.4. Le tableau III.2 donne les différents facteurs d'accélération testés ainsi que les profondeurs d'usure maximales engendrées par ceux-ci.

Nombre de cycles $\Delta N_c$	Profondeur d'usure max $\Delta h_{max}$ [mm]
$1.10^7$	$4,5.10^{-5}$
$1.10^8$	$4,5.10^{-4}$
$2.10^8$	$9.10^{-4}$
$1.10^9$	$4,5.10^{-3}$
$2.10^9$	$9.10^{-3}$

TABLE III.2 – Facteurs d'accélération de l'usure et profondeurs d'usure maximales associées.

Les Figures III.18 représentent les efforts normaux, ou pressions, et les amplitudes de glissement calculés à l'aide des géométries mises à jour à partir des profondeurs d'usure en considérant les facteurs d'accélération précédemment définis. Les résultats sont donnés pour l'instant 4 de la période vibratoire, représentatif du comportement général, sur une des portées. Dans un premier temps, les résultats en efforts seront étudiés, avant ceux en glissement, afin de choisir le facteur d'accélération considéré pour la suite de ce chapitre.

### Modification des contraintes

Dans un premier temps, les pressions de contact pour le premier facteur d'accélération considéré ( $\Delta N_c = 1.10^7$ ) sont identiques à ceux obtenus par le modèle sans usure. Ainsi, cela implique que l'usure n'est pas encore suffisante avec ce nombre de cycles.

Les 2 modèles suivants ( $\Delta N_c = 1.10^8$  et  $\Delta N_c = 2.10^8$ ) présentent quant à eux une forte diminution du maximum de pression, passant de 190MPa à 100MPa. De plus les maxima se sont très légèrement décalés vers l'intérieur du contact, dû à l'usure des bords de portées. Ce comportement correspond bien au comportement attendu lors des premiers cycles d'usure de ce type de contact.

Les deux derniers modèles ( $\Delta N_c = 1.10^9$  et  $\Delta N_c = 2.10^9$ ) présentent un décalage du maximum de contrainte très important et de nouvelles concentrations de contraintes élevées et très localisées. Ainsi, le facteur d'usure considéré est trop important sur ces deux modèles.

### Modification du glissement

L'étude des efforts permet de ne considérer que les facteurs d'efforts  $\Delta N_c = 1.10^8$  et  $\Delta N_c = 2.10^8$ . De plus, comme pour les efforts, l'amplitude de glissement du premier modèle n'est pas modifiée, alors que les amplitudes des deux derniers modèles sont trop modifiées par la mise à jour de la géométrie, notamment sur le bas de portée présentant une zone sans glissement. Le modèle mis à jour après  $\Delta N_c = 2.10^8$  présente lui aussi une modification du profil de contact en bas de portée, qui semble signifier une modification trop importante de la géométrie. Contrairement au modèle précédent, le modèle mis à jour pour  $\Delta N_c = 1.10^8$  garde un profil de glissement similaire à ceux observés précédemment.

### Choix du facteur d'accélération

Comme expliqué ci-dessus, la mise à jour de la géométrie avec un facteur d'accélération  $\Delta N_c = 1.10^8$  permet d'observer les effets de l'usure sans que ceux-ci ne soient trop importants, notamment via la diminution des effets de bords. Ainsi, ce facteur d'accélération sera retenu pour le premier cycle de mise à jour. Cependant, pour la suite des calculs, la mise à jour sera réalisée en profondeur d'usure, c'est à dire que le facteur d'accélération sera choisi en fonction d'une profondeur d'usure limite. En effet, le critère de mise à jour en nombre de cycles peut engendrer des usures trop importantes après plusieurs mises à jour, comme cela sera représenté dans la section III.4.2.3. Ainsi, comme le facteur d'accélération  $\Delta N_c = 1.10^8$  correspond à une profondeur d'usure maximale d'environ  $\Delta h = 4,5.10^{-4}$  [mm], la mise à jour sera réalisée pour une valeur limite maximale  $\Delta h = 5.10^{-4}$  [mm]. Cette valeur a été validée comme n'engendrant pas une usure trop importante et permet une utilisation simple.

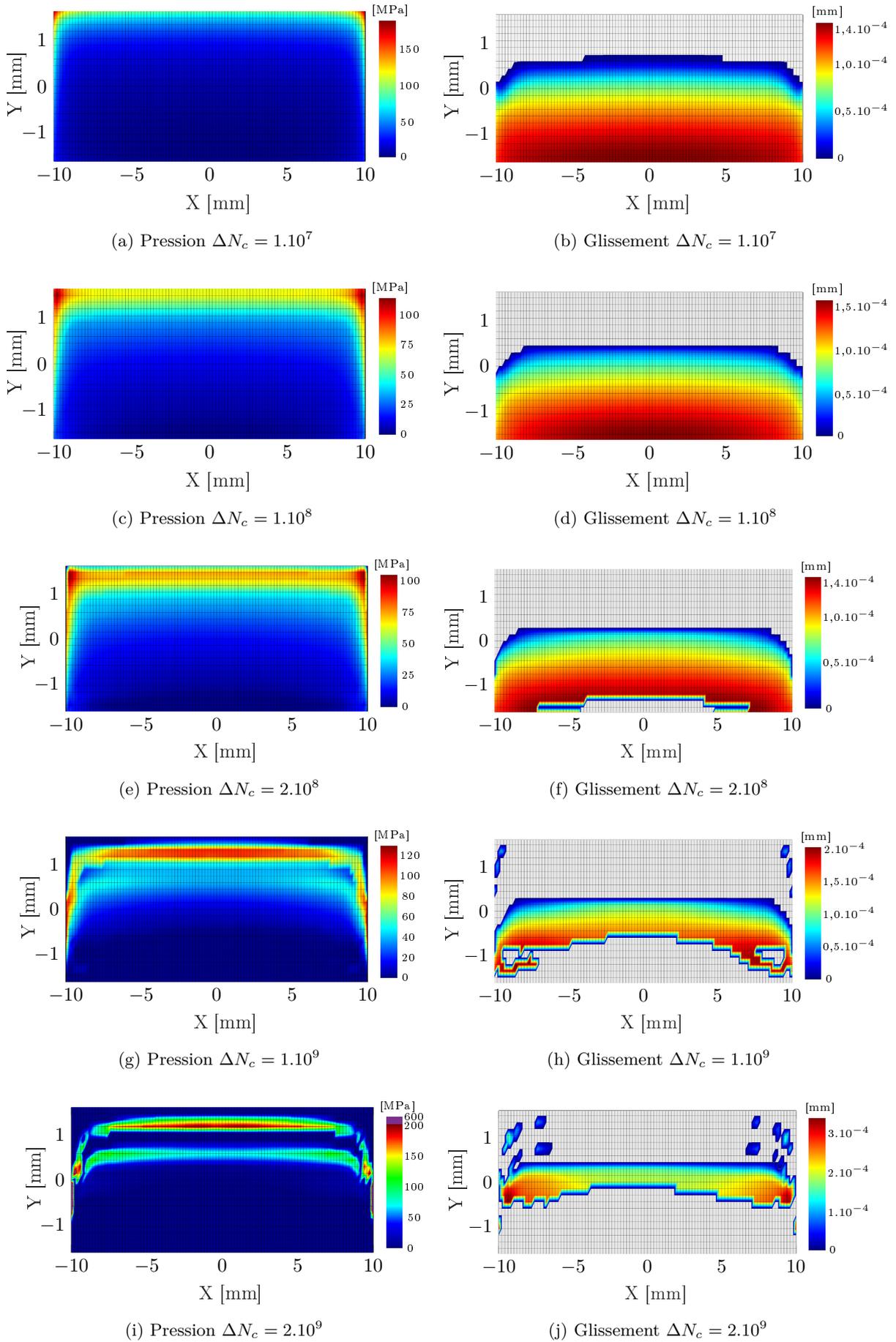


FIGURE III.18 – Pressions et amplitudes de glissement pour les géométries de contact mises à jour avec différents facteurs d'accélération  $\Delta N_c$ .

## 4.2 Influence de plusieurs mises à jour de la géométrie sur le comportement du contact

Suite au choix du facteur d'accélération réalisé dans la section précédente, cette section a pour objectif d'étudier l'usure des interfaces due au chargement vibratoire en considérant plusieurs boucles de mise à jour des interfaces. Comme expliqué précédemment la géométrie sera mise à jour à l'aide d'un facteur d'accélération  $\Delta N_c$  défini pour que l'usure soit de  $\Delta h = 5.10^{-4}$  mm au maximum par rapport au cycle précédent. Suite à cela, les géométries seront mises à jour à l'aide des profondeurs d'usures calculées, et un nouveau cycle de chargement vibratoire (i.e. une période) sera appliqué et résolu via la méthode semi-analytique d'étude du contact. Cette boucle sera réalisée jusqu'à atteindre un nombre de cycles  $\Delta N_c(\text{fin}) = 10.10^8$ . Cette valeur a été choisie arbitrairement, car le modèle considéré dans ce chapitre est un modèle de roue aubagée académique, n'ayant pas d'application. Cependant, cela correspondrait environ à une durée totale de 333 heures étant donnée la durée d'une période vibratoire à la fréquence considérée de 855Hz. Le tableau III.3 donne le numéro des cycles mis à jour, i.e. lorsque la profondeur d'usure atteint  $\Delta h$ .

N° de mise à jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N° cycle ( $\times 10^6$ )	112	292	304	344	383	392	394	475	480	495	498	501

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
503	514	535	648	761	774	784	781	871	875	891	952	955	963	1000

TABLE III.3 – Numéro des cycles mis à jour.

Le tableau III.3 permet de remarquer que le nombre de cycles nécessaires pour atteindre la profondeur d'usure  $\Delta h$  de mise à jour est très variable. En effet, suivant les cas, le nombre de cycles avant mise à jour est de plus de  $100.10^6$  cycles, alors que certaines mises à jour ont lieu après seulement  $2.10^6$  cycles. En effet, certaines itérations d'usure engendrent des localisations de contraintes pouvant entraîner une usure importante, et nécessitant donc une mise à jour rapide. A l'inverse, certaines mises à jour présentent une profondeur d'usure répartie sur l'ensemble de l'interface, engendrant donc un grand nombre de cycles avant mise à jour. Cette remarque permet de mettre en évidence le choix d'une mise à jour en profondeur d'usure, évitant des localisations trop importantes à certains cycles.

### 4.2.1 Evolution de la profondeur d'usure

La Figure III.19 représente les profondeurs d'usure observées après  $304.10^6$  cycles III.19(a),  $475.10^6$  cycles III.19(b),  $774.10^6$  cycles III.19(c) et à la fin du calcul, pour  $1000.10^6$  cycles III.19(d). Dans un premier temps, l'usure semble rester principalement localisée sur les bords en haut de la portée ( $Y > 0$ ) au cycle  $304.10^6$ , comme à la première mise à jour (cf Figure III.17). Cependant, celle ci se répartit ensuite sur la portée, notamment sur le bas ( $Y < 0$ ), où elle augmente pour les cycles  $475.10^6$  et  $774.10^6$ . Enfin, l'usure semble se propager de façon plus aléatoire sur l'ensemble

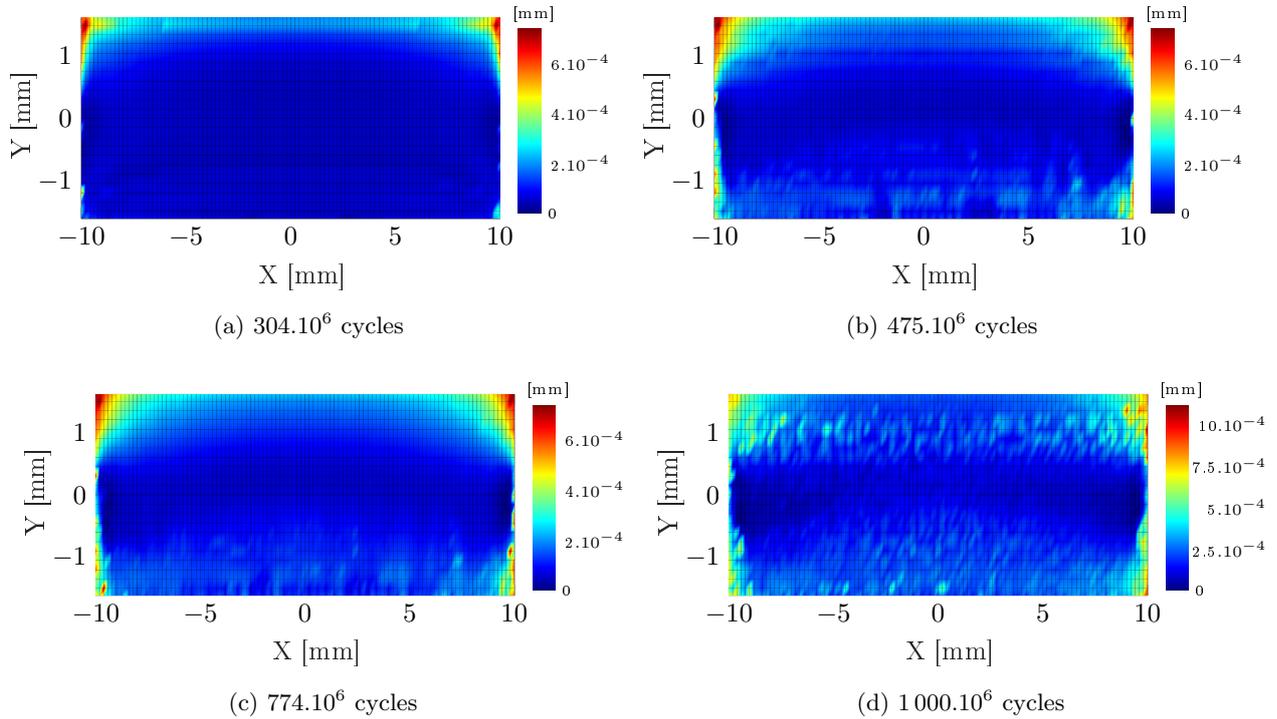


FIGURE III.19 – Profondeur d'usure après plusieurs cycles de mise à jour.

de la portée à la dernière mise à jour. Ce phénomène semble montrer l'adaptation des interfaces de contact, c'est à dire une usure des zones de concentrations de contraintes dans un premier temps, menant à terme à une usure globale de l'interface. Il s'agit d'un phénomène couramment observé [47] pour ce type d'application.

#### 4.2.2 Evolution des efforts de contact

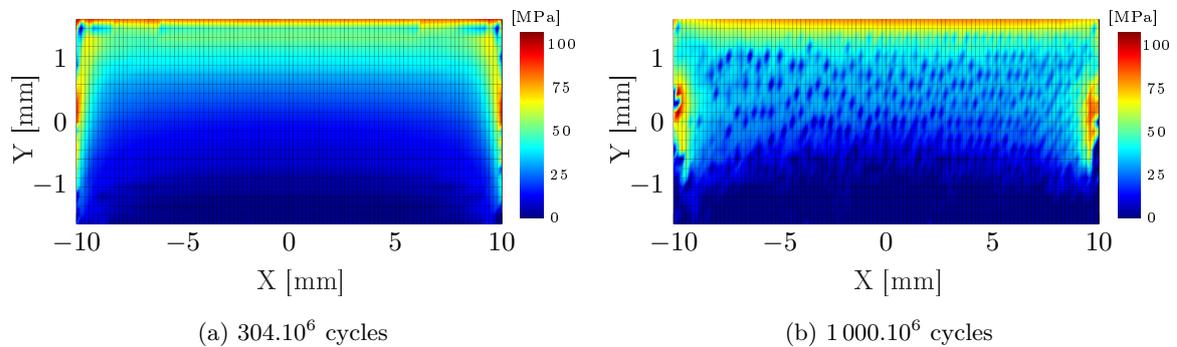


FIGURE III.20 – Pression sur les portées après plusieurs cycles de mise à jour.

La Figure III.20 représente l'évolution de la pression aux cycles  $304.10^6$  et au cycle final  $1000.10^6$ . Dans un premier temps, la pression semble se répartir de façon plus homogène sur une zone importante de l'interface de contact. De plus, les contraintes ont nettement diminué dans les

zones de concentration de contraintes et se sont localisées sur l'ensemble du bord de la portée. Pour la dernière mise à jour, de fortes irrégularités en pression sont observables sur la portée, à l'image des résultats en profondeur d'usure précédents. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que la profondeur d'usure choisie pour la mise à jour était légèrement trop élevée, engendrant des concentrations de contraintes lors de certaines mises à jour, dont le nombre augmente au fil des calculs. Cependant, le comportement global reste cohérent avec les calculs précédents, du fait de la répartition plus globale des efforts sur la portée.

### 4.2.3 Remarques sur la mise à jour en nombre de cycles

Comme remarqué précédemment, une mise à jour avec un trop grand nombre de cycles peut engendrer des concentrations de contraintes locales trop importantes, et donc une usure importante de ces zones au cycle suivant. La Figure III.21 représente la profondeur d'usure III.21(a) et l'effort normal III.21(b) après  $1\,000 \cdot 10^6$  cycles, en ayant mis à jour par nombre de cycles pour  $\Delta N_c = 100 \cdot 10^6$  cycles. Les zones usées sont alors complètement différentes du modèle précédent, et présentent des localisations d'usure importantes. De plus, la répartition des efforts n'est pas du tout cohérente avec les autres calculs, mettant en évidence l'erreur commise lors de ce calcul. Ainsi, il est important de veiller à conserver une profondeur de mise à jour assez faible pour éviter ce type de phénomène.

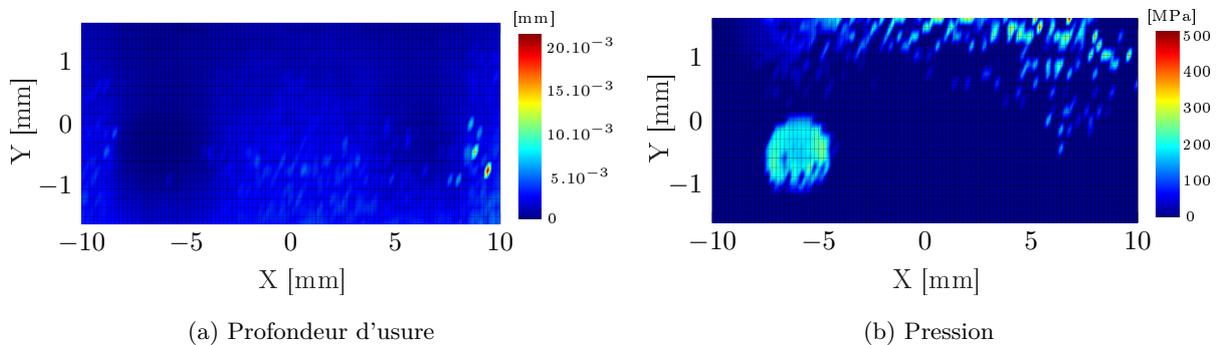


FIGURE III.21 – Profondeur d'usure et pression de contact pour un modèle avec un nombre de cycles avant mise à jour trop élevé.

## 4.3 Influence de l'usure sur le comportement dynamique

Suite à l'étude de l'usure sur un grand nombre de cycles vibratoires, après plusieurs mises à jour de la géométrie (*MàJ1*), cette section vise à étudier l'impact de l'usure sur le comportement vibratoire de la structure. Cela consiste ainsi à mettre à jour la géométrie du modèle éléments-finis utilisé par la méthode de l'équilibrage harmonique lors du calcul dynamique. Cette mise à jour est réalisée par l'ajout d'un jeu  $G$  dans la loi de contact normale utilisée par la DLFT, comme expliqué III.2.1.2. Cela correspond à la boucle de mise à jour en trait plein sur la procédure Figure III.4, appelée *MàJ2*. Cette dernière section permet ainsi de considérer l'ensemble du couplage réalisé

dans ces travaux, via des mises à jour du modèle semi-analytique et du modèle dynamique, afin d'étudier l'usure engendrée par le comportement dynamique ainsi que l'impact de l'usure sur le comportement dynamique. Dans un premier temps, l'impact de l'usure à différents cycles de mise à jour sur les amplitudes vibratoires en réponse forcée sera étudiée. Les problèmes engendrés par une géométrie mise à jour après un trop grand nombre de cycles seront ensuite mis en évidence. Enfin, la dernière section permettra de statuer sur la nécessité ou non de la mise à jour du chargement dynamique appliqué aux calculs semi-analytiques via le torseur des efforts, en étudiant l'influence de l'usure sur les données extraites du calcul HBM pour le calcul semi-analytique.

### 4.3.1 Evolution du comportement dynamique

La Figure III.22 représente l'impact de l'usure à différents cycles de mise à jour (*MàJ1*) sur la réponse forcée du système, toujours pour le premier mode de flexion considéré dans le Chapitre II, ainsi qu'un zoom sur la zone d'intérêt, représenté par le rectangle rouge (□). Les géométries usées ont été extraites à partir des calculs d'usure présentés précédemment, pour une mise à jour en profondeur d'usure  $\Delta h = 5.10^{-4}$  mm. Les géométries usées engendrent une légère diminution des amplitudes vibratoires des calculs non-linéaires. En effet, l'adaptation des interfaces de contact due à l'usure a tendance à favoriser le glissement, et donc à augmenter légèrement la dissipation d'énergie, diminuant de fait l'amplitude vibratoire. Cependant, même si les premiers cycles de mise à jour ont un léger impact sur la réponse dynamique, celle-ci semble se stabiliser à partir de  $N_c = 3.10^8$  cycles vibratoires, les interfaces étant globalement adaptées à partir de ce nombre de cycles. En effet, comme observé précédemment, l'usure se généralise à l'ensemble de l'interface de façon plus homogène à partir de ce nombre de cycles, engendrant une dissipation similaire entre les différents calculs.

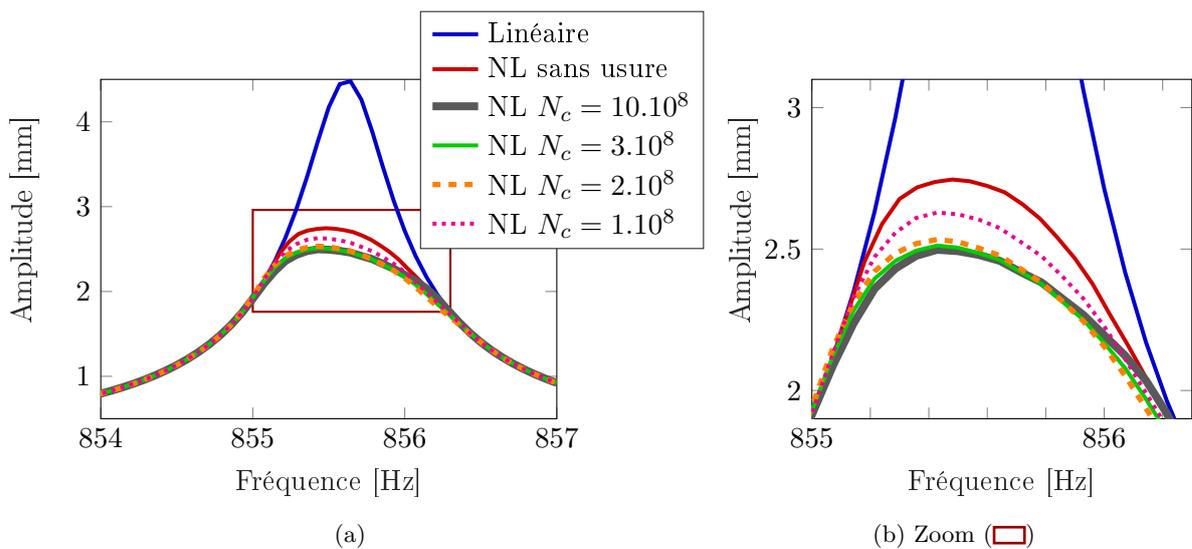


FIGURE III.22 – Réponses forcées non-linéaires pour des géométries usées extraites à différents cycles de mise à jour  $\Delta N_c$

### 4.3.2 Remarques sur les fréquences de mise à jour

De même que dans la section III.4.2.3, une mise à jour de la géométrie après un trop grand nombre de cycles peut avoir un impact significatif sur le résultat obtenu en réponse forcée. A titre d'exemple, la Figure III.23 représente les réponses forcées obtenues après  $N_c = 5.10^8$  cycles de chargement. La courbe orange (---) considère une géométrie usée après plusieurs cycles de mise à jour. La courbe (—) est quant à elle déterminée avec une géométrie n'ayant été mise à jour qu'une fois pour le même nombre de cycles. Cet exemple permet de mettre en évidence l'importance des mises à jour régulières du modèle semi-analytique pour le calcul de l'usure. En effet, on remarque que le modèle sans mise à jour implique un décalage fréquentiel et une diminution d'amplitude très importants, n'ayant pas de sens physique en comparaison avec les résultats de la section précédente.

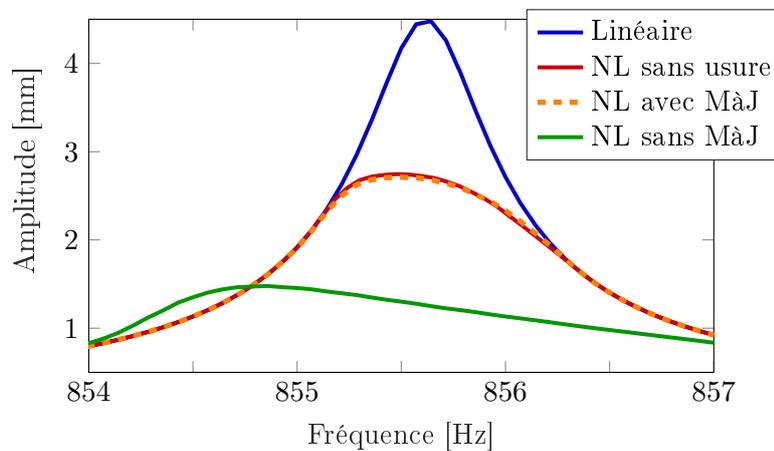


FIGURE III.23 – Réponse forcée du modèle usé pour un trop grand nombre de cycles sans mise à jour (MàJ) des interfaces intermédiaires.

### 4.3.3 Impact de l'usure sur le torseur transmis au contact

La procédure de couplage présentée dans ce manuscrit inclut des mises à jour du modèle semi-analytique ( $M\grave{a}J1$ ) et du modèle dynamique ( $M\grave{a}J2$ ) pour déterminer l'impact de l'usure sur le comportement structural et du contact. Cependant, il peut être nécessaire de remettre à jour le torseur des efforts transmis dans le contact au cours des calculs, si le comportement dynamique est modifié significativement par l'usure engendrée. La Figure III.24 représente les données contenues dans le torseur transmis dans le contact ainsi que l'énergie dissipée et la position du centre de pression, à savoir les données d'entrée du modèle semi-analytique, recalculées suite aux calculs dynamiques avec les géométries usées en traits pleins (—) et avant usure en tirets (---), dans les trois directions du contact. L'ensemble des données représentées ne sont que très peu impactées par la modification de la géométrie suite à l'usure. En effet, l'usure est principalement concentrée sur les bords des protées de contact, or le maillage grossier utilisé pour la résolution dynamique ne permet pas de bien modéliser ces zones et notamment les effets de bords. Ainsi, le comportement général de l'interface de contact n'est que très peu modifié par l'usure.

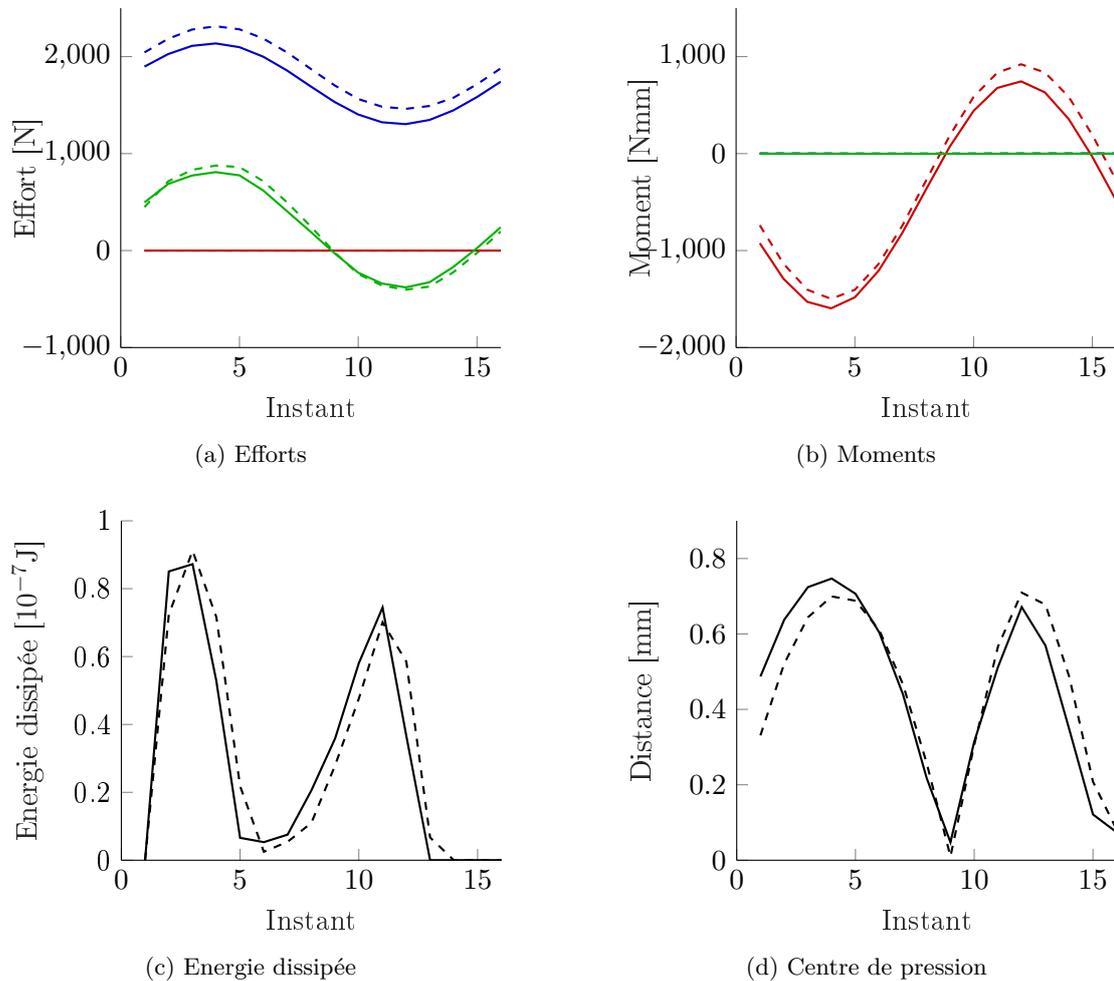


FIGURE III.24 – Comparaison des données d’entrée utilisées pour la méthode semi-analytique, extraites des calculs dynamiques pour le super-élément SE2 sans usure en tirets (--) et avec usure pour  $N_c = 3.10^8$  cycles en traits pleins (—). Les courbes représentent les directions  $X$  en rouge (—),  $Y$  en vert (—) et  $Z$  en bleu (—).

Les données transmises dans le contact n’étant que très peu modifiées par l’usure, il n’est alors pas nécessaire de mettre à jour le torseur des efforts transmis et donc le chargement fourni au modèle semi-analytique au cours des cycles de mise à jour.

## 5 Conclusion

La méthode de l’équilibrage harmonique couplée à la procédure DLFT ont montré leur efficacité et leur précision pour l’étude du comportement dynamique d’une roue aubagée dans le chapitre précédent. Cependant, cette méthode a montré ses limites dans l’étude du comportement détaillé des interfaces de contact. En effet, à cause des temps de calculs engendrés par la génération des super-éléments et le calcul de la réponse forcée dynamique non-linéaire, il n’est pas possible d’utiliser un maillage finement discrétisé, nécessaire à l’étude détaillée des phénomènes de contact.

Ainsi, afin d'être en mesure d'analyser le comportement du contact en détail menant à l'étude de l'usure des interfaces, une méthode semi-analytique de résolution du problème de contact a été couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique. La méthode de résolution semi-analytique offre en effet une résolution rapide du problème de contact malgré une discrétisation très fine, via la superposition de solutions analytiques existantes et l'utilisation de méthodes d'accélération comme les transformées de Fourier spatiales.

Le couplage entre les deux méthodes de calcul a été réalisé via un couplage faible, les données de sortie du calcul dynamique servant de données d'entrée du calcul semi-analytique. Il a ainsi été montré que l'utilisation des données extraites du calcul dynamique pour le modèle le moins discrétisé était suffisante pour obtenir de bons résultats. A terme, cela permet de n'utiliser qu'un super-élément moyennement discrétisé dans le calcul dynamique pour mener à bien une étude détaillée du contact via un calcul semi-analytique. De plus, la finesse des maillages utilisés par la méthode semi-analytique a permis d'améliorer la compréhension des phénomènes présents dans les interfaces de contact, mettant notamment en évidence les effets de bords importants liés à la géométrie du contact aube-disque et offrant une meilleure répartition des résultats sur les interfaces de contact.

La précision obtenue a aussi rendu possible l'étude de l'usure des interfaces de contact. En effet, le couplage réalisé offre la possibilité de déterminer la profondeur d'usure des interfaces de contact après un cycle via une loi d'usure locale en énergie dissipée, pouvant être accélérée par un facteur d'accélération, afin de déterminer l'usure après plusieurs cycles. Il est alors possible de mettre à jour les géométries de contact du modèle semi-analytique ou du modèle dynamique via deux boucles de couplage. La mise à jour des interfaces a ensuite été réalisée via un facteur d'accélération en profondeur d'usure, afin de minimiser les erreurs dues à des concentrations de contraintes localisées. Dans un premier temps, un grand nombre de cycles de mise à jour des interfaces de contact dans le modèle utilisé pour le calcul semi-analytique a mis en évidence le phénomène d'adaptation des interfaces. En effet, l'usure se présente principalement sur les bords du contact dans un premier temps, menant à un lissage des effets de bords. Une fois les concentrations de contraintes dues aux effets de bords gommés, l'usure se répartit sur l'ensemble de l'interface.

La seconde boucle de mise à jour de la géométrie utilise ensuite la profondeur d'usure calculée comme un jeu dans la loi de contact normal du calcul dynamique, revenant à mettre à jour la géométrie de ce modèle afin de déterminer l'impact de l'usure sur celui-ci. Une faible diminution des amplitudes vibratoires a donc pu être observée via les calculs dynamiques non-linéaires sur les géométries usées après différents nombres de cycles d'usure. Il a enfin été montré que la prise en compte de l'usure dans le modèle dynamique ne modifie que très peu les résultats utilisés comme données d'entrée pour le calcul semi-analytique. Ainsi, il n'est pas nécessaire de réaliser d'études dynamiques ayant pour objectif de mettre à jour le chargement utilisé par les calculs semi-analytiques entre les boucles d'usure.

Ce chapitre ainsi que le précédent ont permis de montrer l'intérêt et la validité du couplage réalisé pour l'étude dynamique non-linéaire et l'étude du comportement détaillé du contact menant à l'usure des interfaces. Il a alors été possible de déterminer les profils d'usure engendrés par

---

le chargement dynamique ainsi que l'impact de cette usure sur le comportement dynamique structural. Ce couplage permet ainsi de considérer l'usure sous chargement dynamique après des milliards de cycles tout en gardant des temps de calcul limités. L'ensemble des calculs a été réalisé sur un modèle de roue aubagée simplifié, pour l'étude du premier mode de flexion, engendrant un comportement assez simple du contact sur les portées. L'objectif du prochain chapitre est maintenant de mettre en application l'ensemble de ces méthodes sur un cas industriel complexe.



## Chapitre IV

# Application des méthodes développées au cas d'une soufflante industrielle

Suite à la description de la méthode de couplage dans les précédents chapitres, celui-ci s'intéresse maintenant à l'applicabilité de ces méthodes sur un cas industriel complet. Le modèle de soufflante et son chargement dynamique par vortex de sol seront d'abord présentés. Une première étude à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique permettra d'obtenir la réponse forcée de la soufflante pour différents super-éléments. Les résultats au niveau des interfaces de contact seront ensuite détaillés, avant d'appliquer la méthode semi-analytique de résolution du problème de contact, permettant l'utilisation d'un maillage finement discrétisé et donnant donc la possibilité de considérer l'usure des interfaces de façon fiable.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modèle de soufflante industrielle</b>	<b>128</b>
1.1	Présentation du modèle	128
1.2	Super-éléments considérés	133
1.3	Chargement aéroélastique	135
<b>2</b>	<b>Etude dynamique non-linéaire</b>	<b>138</b>
2.1	Dynamique non-linéaire avec une excitation ponctuelle équivalente	138
2.2	Dynamique non-linéaire avec excitation aéroélastique	141
2.3	Étude des dissipations	142
<b>3</b>	<b>Comportement des interfaces de contact de la soufflante</b>	<b>142</b>
3.1	Étude du contact suite aux calculs dynamiques	143
3.2	Étude du contact par la méthode semi-analytique	148
<b>4</b>	<b>Etude de l'usure des interfaces</b>	<b>152</b>
4.1	Usure des interfaces due au chargement vibratoire	152
4.2	Impact de l'usure sur le comportement du contact	154
4.3	Impact de l'usure sur le comportement vibratoire	154
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>156</b>

---

## 1 Modèle de soufflante industrielle

Suite à la validation des méthodes de calcul considérées dans les chapitres précédents, ce chapitre a pour objectif de les appliquer sur un cas industriel complexe, afin de démontrer leur applicabilité et leur intérêt pour les motoristes aéronautiques. Ce chapitre vise donc à décrire le comportement dynamique et à étudier le comportement du contact et l'usure des interfaces d'un modèle industriel de roue aubagée.

Des essais réalisés sur un démonstrateur de soufflante de turbo-réacteur, représentatifs des soufflantes nouvelle génération, ont notamment permis d'obtenir des résultats sur le comportement vibratoire des aubages. Ces essais seront brièvement décrits dans la section IV.1.3. La réponse forcée de la soufflante sera donc étudiée, à partir d'un chargement aéroélastique déterminé par Berthelon dans sa thèse [10]. Les méthodes d'étude du contact pourront alors être appliquées sur un cas industriel complet avec un chargement réel.

Dans un premier temps, cette section permettra de décrire le modèle considéré, et d'étudier son comportement dynamique linéaire en considérant les chargements statiques de précharge qui lui sont appliqués. Les différents super-éléments considérés seront ensuite présentés. En effet, comme dans le Chapitre II, différents super-éléments ont été construits afin de statuer sur le super-élément à choisir pour avoir la meilleure représentation du comportement dynamique, tout en gardant des temps de calcul raisonnables. Enfin, la dernière partie de cette section décrira brièvement la méthode utilisée pour déterminer le chargement aéroélastique, ainsi que l'application de ce chargement pour les calculs de réponses forcées non-linéaires.

De manière à respecter la confidentialité industrielle inhérente au modèle de soufflante utilisé dans ce chapitre, l'ensemble des images représentant le modèle ont été déformées. Les maillages représentés ont aussi été déformés à des fins de confidentialité. Tous les résultats ont été normalisés pour les mêmes raisons.

### 1.1 Présentation du modèle

#### 1.1.1 Modèle de soufflante

Le modèle considéré pour cette application industrielle est un modèle de démonstrateur de soufflante nouvelle génération. Il s'agit de pales représentatives des pales utilisées sur les turbo-réacteurs actuels, cependant celles-ci ne sont utilisées qu'à des fins de recherche et développement. La Figure IV.1 représente la géométrie du modèle complet (Figure IV.1(a)), et la géométrie d'un secteur Figure IV.1(b). Les différentes couleurs représentent les différents matériaux constituant la roue aubagée. Comme expliqué dans la section I.1.2, les aubes de soufflante nouvelle génération sont composées d'un matériau composite tissé 3D, en bleu sur la Figure (●). Le bord d'attaque de celle-ci est cependant composé de titane (en vert (●)), permettant d'augmenter la rigidité de la pale et sa solidité au niveau de l'entrée d'air en cas d'ingestion de corps étranger. Le disque est quant à lui en métal, en rouge sur la Figure (●). Le modèle de soufflante est composé de 18 secteurs identiques, permettant ainsi l'application des hypothèses de symétrie cyclique décrites section I.2.3. Enfin, dans le but de limiter l'usure du composite 3D au niveau du pied d'aube, les

interfaces de contact sont recouvertes d'une couche de matériau abrasable appelée *wearstrip*. De plus, un clinquant, c'est à dire une pièce intermédiaire, est ajoutée entre l'aube et le disque. Le clinquant et le wearstrip ne sont pas considérés dans le modèle éléments-finis de la soufflante, et sont remplacés par une surépaisseur au niveau des portées du disque.

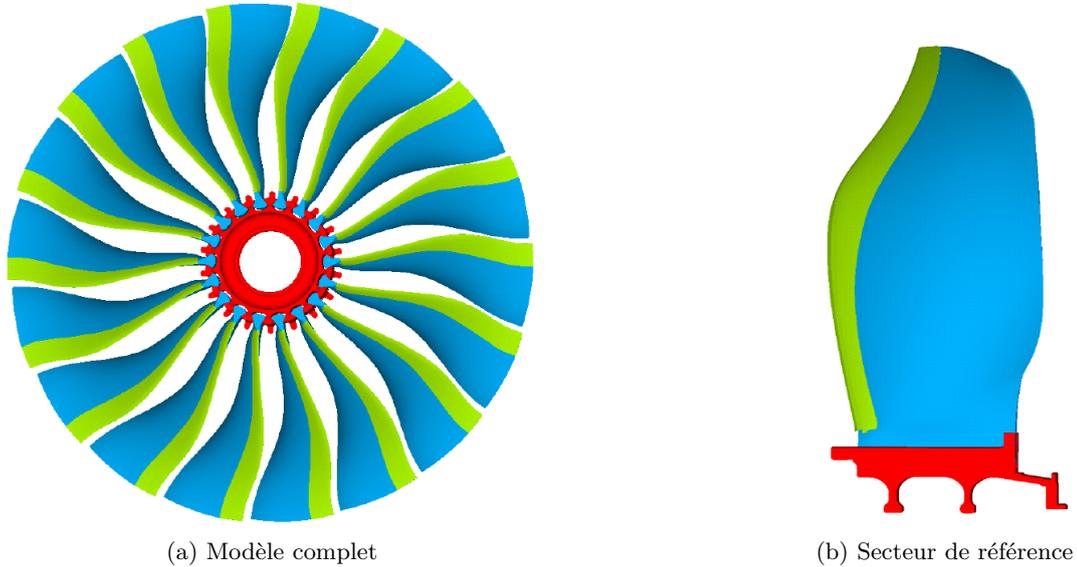


FIGURE IV.1 – Modèle de soufflante complet et secteur de référence, d'après [87]

Le modèle sera étudié par l'intermédiaire de la méthode des éléments-finis pour l'étude du chargement statique, la génération des super-éléments et les calculs dynamiques. La Figure IV.2 représente le maillage d'un secteur de la roue aubagée dans le repère global  $(X_1Y_1Z_1)$ ,  $Z_1$  étant l'axe de rotation de la roue. Les différents termes définissant la géométrie, qui seront utilisés dans la suite de ce manuscrit, y sont représentés :

- *Bord d'attaque* (BA) : bord de l'aube du côté de l'entrée d'air
- *Bord de fuite* (BF) : bord de l'aube du côté de la sortie d'air
- *Intrados* (I ou Intra) : face de l'aube intérieure à la cambrure
- *Extrados* (E ou Extra) : face de l'aube extérieure à la cambrure

De plus, un nœud d'excitation, qui servira aussi de nœud d'observation, est défini en tête de pale coté bord d'attaque, correspondant à la zone d'amplitude maximale du mode étudié par la suite. L'aube est composée de 30 286 nœuds, soit 90 858 degrés de liberté. Le disque est quant à lui composé de 37 320 nœuds, soit 111 960 degrés de liberté. Les calculs éléments-finis seront réalisés à l'aide du logiciel SAMCEF.

La modélisation du composite tissé 3D par la méthode des éléments finis est réalisée via des méthodes d'homogénéisation du composite. En effet, le tissage de l'aube n'est pas uniforme afin d'optimiser les propriétés de l'aube suivant les contraintes qu'elle subit. Les méthodes d'homogénéisation, dont Ansar *et al.* [3] proposent une revue générale, permettent alors de généraliser le comportement microscopique du composite au niveau macroscopique, via la définition de plusieurs zones ayant des propriétés matériau différentes. L'aube est ainsi décomposée en

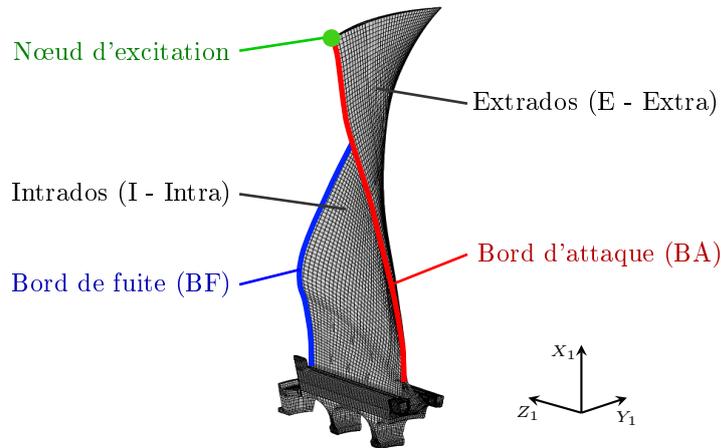


FIGURE IV.2 – Modèle éléments-finis d'un secteur de la soufflante et définition des notations utilisées.

plusieurs zones, notamment le pied de l'aube subissant des contraintes élevées. En pratique, les propriétés matériaux sont alors définies comme orthotropes par zone avec différentes orientations via des repères locaux liés au maillage.

### 1.1.2 Chargement statique

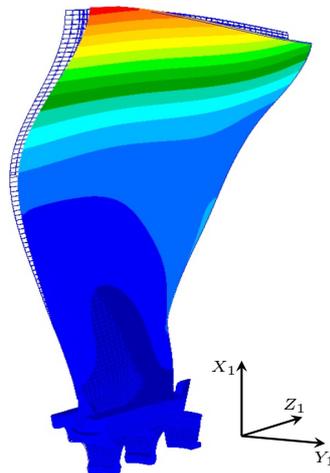


FIGURE IV.3 – Déformation du modèle de soufflante soumis au chargement statique : précharge centrifuge et pression statique.

Afin de réaliser l'étude dynamique du système, il est nécessaire de déterminer les conditions limites du modèle et le chargement statique qui lui sera appliqué. De la même manière que pour la roue aubagée simplifiée présentée dans les précédents chapitres, le modèle de soufflante sera considéré comme ayant 18 secteurs parfaitement identiques, autorisant l'utilisation des hypothèses de symétrie cyclique. L'étude sera donc menée uniquement sur un secteur de référence auquel

des conditions de symétrie ont été appliquées. De plus, le modèle de soufflante est soumis à une vitesse de rotation constante. Cette rotation est appliquée via un effort centrifuge, en fixant la zone d'attache du disque. L'aube est aussi soumise à une pression stationnaire due au fluide. L'ensemble de ces conditions sera utilisé pour les calculs dynamiques à venir.

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer les matrices préchargées du système, permettant de considérer les effets statiques sur les matrices structurales, et notamment les effets centrifuges et les pressions statiques ayant chacun tendance à rigidifier le modèle. La Figure IV.3 représente la déformée statique du modèle de soufflante, calculée à l'aide du solveur éléments-finis SAMCEF. Cette déformée montre notamment le léger dévissage de l'aube dû aux deux chargements considérés.

### 1.1.3 Dynamique linéaire du modèle

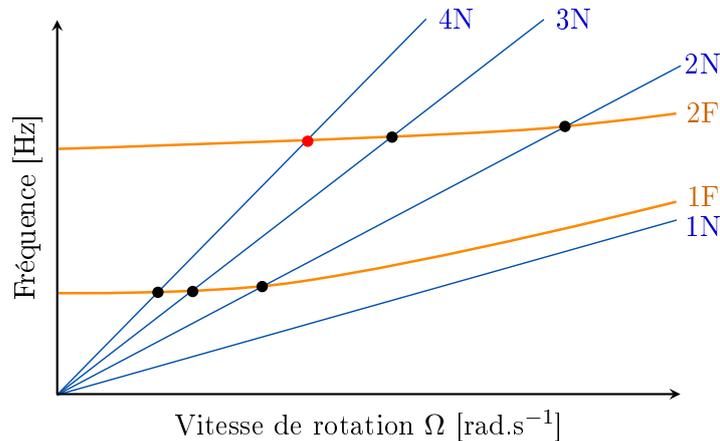


FIGURE IV.4 – Diagramme de Campbell.

Dans le cadre de l'étude dynamique des roues aubagées, le diagramme de Campbell est l'un des premiers outils utilisé. Un exemple de ce type de diagramme est donné Figure IV.4. Ce diagramme représente l'évolution des fréquences propres du système en fonction de la vitesse de rotation pour un diamètre nodal fixé, en orange (—) sur la Figure IV.4, ainsi que les harmoniques de la vitesse de rotation, appelées ordres moteur et notées N, en bleu (—). Les ordres moteur représentent les potentielles fréquences d'excitation pour les sources d'excitations synchrones. Un des objectifs de conception est d'éviter les zones de coïncidence entre les fréquences propres et les ordres moteur. Cependant, même si les coïncidences sont évitées pour les phases critiques de fonctionnement du moteur, tel que le décollage, la croisière ou le ralenti, il est irrémédiable de les croiser à d'autres instants de fonctionnement. Il est donc nécessaire d'identifier les vitesses de rotation et les fréquences critiques de manière à valider la tenue de la roue aubagée lors de ces coïncidences. Le diagramme de Campbell permet ainsi d'identifier les coïncidences possibles, réduisant considérablement les études dynamiques à mener, et de déterminer les vitesses de rotation et les modes à étudier. De plus, ce diagramme permet de mettre en évidence le phénomène de rigidification centrifuge, observable par l'augmentation des fréquences propres avec la vitesse de

rotation. Dans la suite de ce chapitre, l'étude portera sur la coïncidence du deuxième mode de flexion pour une excitation d'ordre moteur 4, ce mode ayant été étudié lors des essais qui seront brièvement présentés section IV.1.3.1.

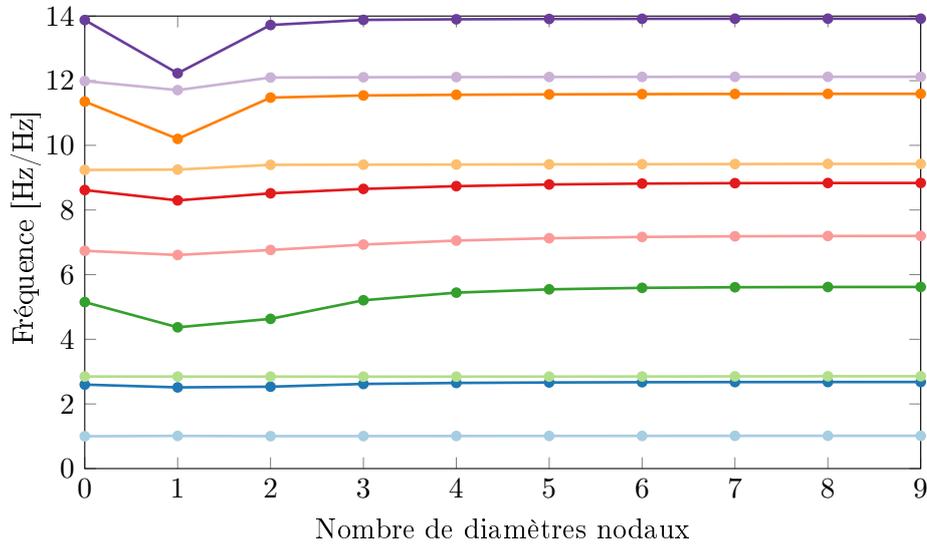


FIGURE IV.5 – Diagramme fréquence-diamètre du modèle de soufflante, normalisé par rapport à la fréquence du premier mode.

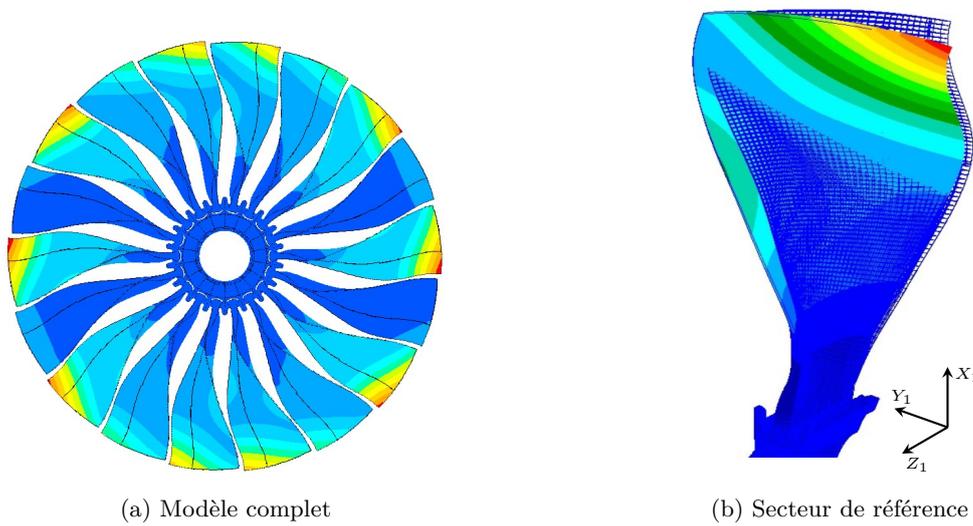


FIGURE IV.6 – Déformée modale linéaire du deuxième mode de flexion à 4 diamètres nodaux.

Le diagramme de Campbell ayant permis de déterminer la vitesse de rotation de la coïncidence à étudier, il est alors possible de tracer le diagramme fréquence-diamètre de la soufflante à la vitesse de rotation choisie. La Figure IV.5 représente le diagramme fréquence-diamètre du modèle, dont les fréquences ont été normalisées par celle du premier mode. Contrairement au modèle de roue aubagée simplifiée étudié dans le Chapitre II, les différents modes n'évoluent que très peu suivant le diamètre, montrant la prévalence des modes d'aubes due à la rigidité importante du disque.

Effectivement, les couplages entre modes et les zones de veering, peu observés sur ce cas, sont principalement dus à la souplesse du disque. Les modes restent donc globalement indépendants. On remarque cependant la proximité des modes 2 (—) et 3 (—). Il s'agit respectivement du deuxième mode de flexion (2F) et du premier mode de torsion (1T). Une étude des déformées modales et des réponses forcées dans cette zone a permis de montrer la séparation des deux déformées, malgré une légère amplification des réponses forcées du mode 2F due à la proximité du mode suivant. Pour finir l'étude dynamique linéaire de la soufflante, la Figure IV.6 représente la déformée modale du deuxième mode de flexion à 4 diamètres qui sera étudié dans la suite de ce chapitre, pour le modèle complet (a) et sur le secteur de référence (b).

## 1.2 Super-éléments considérés

L'étude de la réponse forcée de la soufflante nécessite de réduire la taille du modèle considéré pour limiter les temps de calcul engendrés par la méthode de l'équilibrage harmonique, comme détaillé dans le Chapitre II. Le modèle sera donc réduit par la méthode de sous-structuration à interfaces fixes de Craig-Bampton, cf section II.2. Trois super-éléments ont été considérés pour ce modèle dans le but de comparer les résultats obtenus et de déterminer quelle discrétisation de super-élément est suffisante à l'étude dynamique. La Figure IV.7 représente les nœuds d'interfaces retenus pour ces 3 super-éléments, appelés :

- *SE1* pour le Super-élément le moins discrétisé
- *SE2* pour le super-élément moyennement discrétisé
- *SE3* pour le super-élément le plus discrétisé, retenant l'ensemble des nœuds des portées du modèle EF.

Aux nœuds de contact s'ajoute un nœud d'observation, qui servira aussi de nœud d'excitation pour certains calculs, et les modes dynamiques nécessaires à la construction des super-éléments. 20 modes ont été retenus pour l'aube et 15 pour le disque. Le Tableau IV.1 donne le nombre de degrés de liberté retenus pour les différents super-éléments. Les super-éléments de l'aube et du disque sont construits séparément pour permettre de traiter le problème de contact par la suite. Les réductions en super-éléments permettent ainsi une diminution du nombre de degrés de liberté considérable par rapport aux modèles complets. Les modèles de l'aube et du disque sont chacun composés d'environ 100 000 éléments avant réduction, contre respectivement environ 230, 560 et 1855 pour les super-éléments SE1, SE2 et SE3.

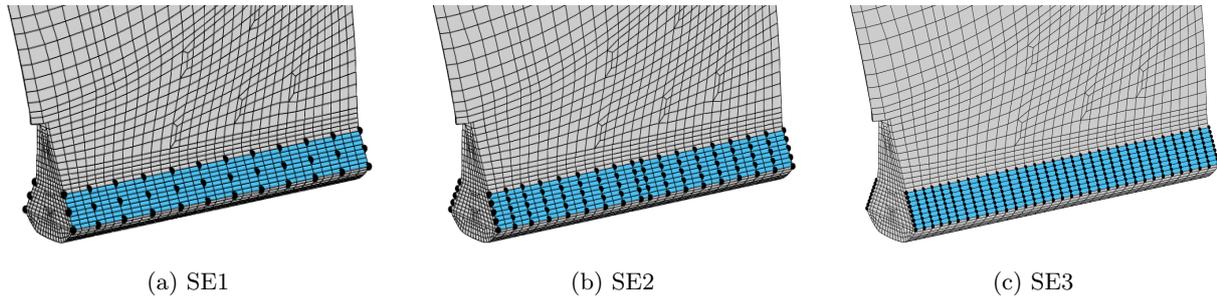


FIGURE IV.7 – Nœuds conservés sur une portée du pied d'aube pour la construction des super-éléments.

	Aube				Disque			
	Modèle complet	SE1	SE2	SE3	Modèle complet	SE1	SE2	SE3
Contact	1 836	216	540	1 836	1 836	216	540	1 836
Total	90 858	242	566	1 862	111 960	231	555	1 851

TABLE IV.1 – Nombre de degrés de liberté des différents super-éléments et du modèle complet.

Les super-éléments sont construits à l'aide du solveur éléments-finis SAMCEF, en considérant la précharge statique présentée dans la section IV.1.1.2, ainsi que les conditions de symétrie cyclique. Le tableau IV.2 donne les temps de calcul en heures qui ont été nécessaires à la génération des 3 super-éléments, et les temps de calcul par la méthode de l'équilibrage harmonique pour les résultats qui seront présentés dans la section IV.2. Il est à noter que les calculs de génération des super-éléments comprennent la génération du super-élément de l'aube et la génération des super-éléments du disque aux différents diamètres considérés pour les calculs dynamiques. Les temps de calcul de génération des super-éléments SE1 et SE2, les moins discrétisés, restent raisonnables. Cependant, les temps de calcul du super-élément SE3, considérant l'ensemble des degrés de liberté des interfaces, sont prohibitifs pour des calculs en phase de conception, pour lesquels sont destinés les méthodes étudiées dans ce manuscrit. De même, les temps de calcul par la méthode de l'équilibrage harmonique pour ce modèle sont assez conséquents, justifiant l'intérêt de l'utilisation d'un super-élément ne retenant qu'une partie des nœuds d'interface. Le super-élément SE3 ne sera donc utilisé qu'à des fins de validation.

	SE1	SE2	SE3
Temps calculs SE (h)	9,5	23,5	120
Temps calculs HBM (h)	0,4	2,25	52,5

TABLE IV.2 – Temps de calcul pour la génération des super-éléments et pour les calculs dynamiques par la méthode HBM, en heures.

Afin de valider les super-éléments considérés d'un point de vue fréquentiel, le tableau IV.3

donne les erreurs en fréquence par rapport au modèle EF complet, pour les 6 premières fréquences propres, pour les modèles en super-éléments avec aube et disque assemblés. Le super-élément SE3 permet d'obtenir une très bonne estimation des fréquences par rapport au modèle complet, avec une erreur inférieure à 0,1% pour tous les modes. Cette observation confirme que le nombre de modes dynamiques retenus pour la construction des super-éléments est suffisant. Les super-éléments SE1 et SE2 présentent cependant des erreurs plus importantes. Cela s'explique par le fait que certains nœuds ne sont pas retenus dans le contact, ce qui vient assouplir l'assemblage du modèle complet et donc diminuer les fréquences. Les fréquences obtenues à l'aide du modèle SE2 restent cependant convenables, notamment pour le deuxième mode qui sera étudié par la suite, avec une erreur d'environ 2%. En effet, même si les fréquences sont moins proches du modèle complet que pour le super-élément SE3, les temps de calcul pour leur génération et pour les calculs dynamiques sont beaucoup plus raisonnables, rendant acceptable l'erreur de 2% obtenue en fréquence. De plus, il est facile et rapide de réaliser un calcul dynamique linéaire donnant la fréquence du modèle complet, et offrant la possibilité de recalculer les fréquences des calculs en super-éléments à terme.

Modes	Aube et disque collés		
	SE1	SE2	SE3
1	-4,675	-1,881	0,022
2	-4,838	-2,024	0,017
3	-3,988	-1,915	0,024
4	-8,882	-3,936	0,066
5	-5,037	-2,502	0,038
6	-1,643	-0,822	0,097

TABLE IV.3 – Erreur en % des fréquences propres des super-éléments par rapport au modèle complet, pour l'assemblage aube-disque avec interfaces collées.

### 1.3 Chargement aéroélastique

Cette section a pour objectif de décrire le chargement aérodynamique utilisé pour la suite de ce manuscrit. Ce chargement a été calculé dans le cadre de simulations avec vent de travers et un "faux sol", générant une excitation par vortex de sol. L'objectif de ces calculs, réalisés dans la thèse de Berthelon [10] était d'obtenir une réponse dynamique similaire à celle mesurée lors d'essais en soufflerie. Dans un premier temps, les essais réalisés sur la soufflante seront présentés. La méthodologie utilisée par Berthelon pour réaliser les calculs aérodynamiques sera ensuite brièvement expliquée, menant à la méthode d'application de ce chargement pour les calculs dynamiques non-linéaires.

#### 1.3.1 Description de la configuration d'essais

Le modèle de soufflante considéré dans ce chapitre est un démonstrateur de soufflante à l'échelle 1, ayant servi à de nombreux essais de caractérisation des soufflantes de nouvelle génération. Une



FIGURE IV.8 – Soufflerie *General Electric* de Peebles lors des essais en vent de travers avec faux sol pour le démonstrateur de soufflante.

campagne d'essais a notamment été réalisée sur ce démonstrateur afin d'étudier la performance, l'acoustique et l'opérabilité de la soufflante. Les essais considérés dans ce manuscrit ont été réalisés dans une soufflerie ouverte à Peebles, générant un vent de travers. Un "faux sol" a été ajouté sous le moteur pour capter l'interaction entre le moteur et le sol, à savoir l'apparition d'un vortex de sol, comme évoqué section I.2.1.2. La Figure IV.8 montre une photographie des essais réalisés à Peebles, sur la soufflerie ouverte de *General Electric*. Ces essais de réponse forcée en présence de vent de travers avec "faux sol" n'ont pas fait l'objet d'une caractérisation aérodynamique de la distorsion due au vortex de sol. Cependant, les aubes étaient instrumentées afin de capter les niveaux de réponse forcée obtenus. La modélisation du chargement aérodynamique réalisée par Berthelon [10] dans sa thèse et utilisée dans ce manuscrit, a donc pour objectif d'être en mesure de retrouver les amplitudes de réponses forcées observées lors de ces essais. Il est à noter que l'étude est réalisée pour la coïncidence  $2F_4N$  car l'apparition d'un vortex de sol a été constatée dans ce cas.

### 1.3.2 Détermination du chargement aéroélastique

La méthodologie de calcul aérodynamique mise en place par Berthelon [12] consiste à réaliser deux calculs successifs pour déterminer le chargement aéroélastique qui sera appliqué par la suite pour les calculs dynamiques. Un premier calcul RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) stationnaire considérant le vent de travers et un faux sol appliqué à la nacelle est réalisé. Ce calcul permet ainsi de déterminer les distorsions des champs aérodynamiques dues au vortex de sol, sur un plan de coupe au sein du moteur en amont de la position de la soufflante, celle-ci n'étant pas considérée dans ce calcul. La Figure IV.9a représente les lignes de courant obtenues à l'aide de ce calcul et la cartographie de pression totale sur le plan de coupe au sein du moteur. Une chute de pression est observable au niveau du vortex. Cette chute de pression localisée entrainera alors une excitation synchrone des aubes de soufflante.

Les champs aérodynamiques obtenus à l'aide du calcul RANS stationnaire sont ensuite

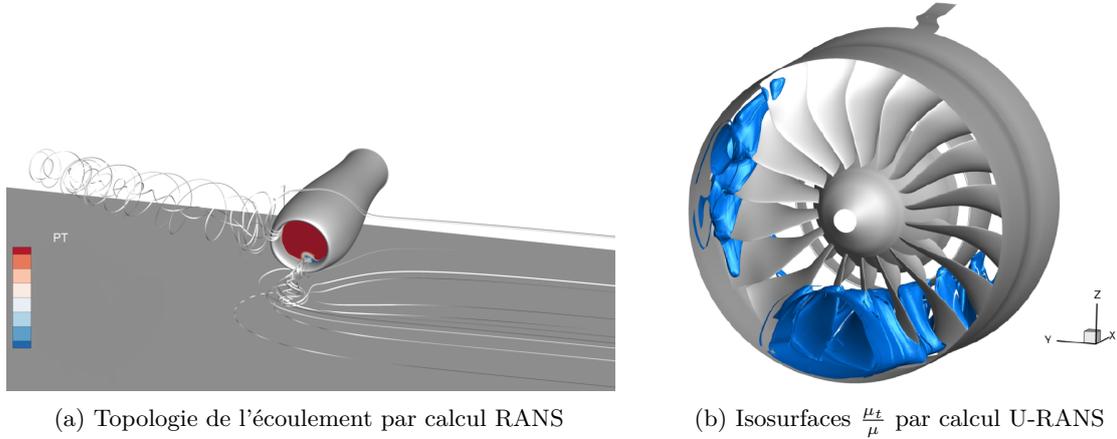


FIGURE IV.9 – Calculs aérodynamiques, d'après Berthelon [10].

utilisés comme données d'entrée d'un calcul U-RANS, qui est une extension instationnaire de la méthode RANS. Ce second calcul a été réalisé en considérant toutes les aubes du fan et un OGV (Outlet Guide Van : redresseur après soufflante), en imposant les champs de distorsion à l'aide d'une cartographie sur le plan de coupe du moteur considéré pour le premier calcul RANS. La Figure IV.9b, donne une illustration du calcul U-RANS réalisé, représentant les isosurfaces  $\frac{\mu_t}{\mu}$  correspondant à la viscosité turbulente. Cette Figure permet de représenter les structures tourbillonnaires, à savoir le vortex de sol en bas de la soufflante et le vortex de contournement du vent de travers sur la gauche, ainsi que leurs interactions avec les aubes de la soufflante.

### 1.3.3 Application du chargement aéroélastique aux calculs dynamiques non-linéaires

A partir des résultats obtenus avec les calculs aérodynamiques précédents, une approche découplée est mise en place pour appliquer le chargement aéroélastique aux calculs dynamiques. Celle-ci consiste à modéliser le comportement aérodynamique par une matrice de raideur aérodynamique  $\mathbf{A}$ , une matrice d'amortissement aérodynamique  $\mathbf{B}$  et des forces d'excitation aérodynamiques notées  $\mathbf{F}^f$ . Ces trois données sont extraites des calculs précédents et seront donc utilisées par la suite dans les calculs par la méthode HBM. En vue de limiter le nombre de calculs aéroélastiques, ceux-ci seront réalisés dans la base modale assemblée, c'est à dire avec l'aube et le disque collés, cette base étant particulièrement adaptée à ce type de calculs. Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  seront donc exprimées dans la base modale. Pour être en mesure d'utiliser ces données dans les calculs dynamiques par la méthode de l'équilibrage harmonique, Berthelon a proposé une stratégie de reprojction de celles-ci dans la base réduite du super-élément de Craig-Bampton de l'aube. Cette méthode est décrite en détail dans la thèse de Berthelon [10]. La projection dans la base de Craig-Bampton des matrices d'amortissement  $\mathbf{B}$  et de raideur  $\mathbf{A}$  aérodynamiques et du vecteur des efforts d'excitation aérodynamique  $\mathbf{F}^f$  ont été utilisés dans les travaux de ce manuscrit, via leur ajout à l'équation du mouvement (II.65) de l'aube :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \mathbf{A})\mathbf{X} + \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}^f \quad (\text{IV.1})$$

## 2 Etude dynamique non-linéaire

La première section de ce chapitre a permis de définir le modèle étudié. Différents super-éléments y ont été construits en prenant en compte la précharge centrifuge du système. De plus, la méthode d'application du chargement aéroélastique a pu être définie. Cette section a maintenant pour objectif d'étudier le comportement vibratoire non-linéaire de la structure via l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique présentée section II.1.2.1, couplée à la procédure DLFT permettant de considérer les non-linéarités de contact, cf section II.3.

Dans un premier temps, l'étude dynamique sera réalisée à l'aide d'une excitation appliquée sur un nœud en tête de pale coté bord d'attaque, afin de faciliter la compréhension des résultats et la réalisation des calculs pour l'étude dynamique non-linéaire générale. Cette étude permettra de comparer les résultats obtenus sur les différents super-éléments testés, et d'en étudier le mode non-linéaire associé. La réponse forcée dynamique du modèle soumis au chargement aéroélastique sera ensuite étudiée. Pour finir, une comparaison des énergies dissipées induites par les différentes formes de dissipation sera menée.

### 2.1 Dynamique non-linéaire avec une excitation ponctuelle équivalente

Afin de faciliter l'étude dynamique non-linéaire générale, une excitation ponctuelle sera utilisée dans cette sous-section. Cette excitation est appliquée sur un nœud en tête de pale côté bord d'attaque, au niveau du maximum d'amplitude du deuxième mode de flexion. De façon à se rapprocher des résultats présentés dans la section suivante à l'aide du chargement aéroélastique, un amortissement modal équivalent à l'amortissement aérodynamique a été appliqué à la structure. De plus, l'amplitude d'excitation a été définie dans le but d'obtenir une amplitude de réponse forcée équivalente. L'ensemble des calculs dynamiques de ce chapitre prend en compte un nombre d'harmoniques temporelles  $N_h = 3$  et  $n_{it} = 32$  instants temporels, ces paramètres permettant d'obtenir des résultats convergés, comme exposé dans le Chapitre II.

#### 2.1.1 Réponses forcées des différents super-éléments

Cette section a pour objectif de statuer sur le choix du super-élément qui sera considéré par la suite, via l'étude de l'impact de la discrétisation du super-élément sur le résultat obtenu en réponse forcée. La Figure IV.10 représente les réponses forcées calculées pour les 3 super-éléments considérés en linéaire en tirets (---), c'est à dire avec interfaces collées, et en non-linéaire en considérant le contact avec frottement au niveau des interfaces aube-disque, en traits pleins (—). Les résultats ont été normalisés par rapport à la fréquence et au maximum d'amplitude du super-élément SE2, en bleu (—), et représentent l'amplitude d'un degré de liberté en tête de pale. Comme remarqué dans la section IV.1.2, le super-élément le plus discrétisé, appelé SE3 et représenté en vert (—) sur la Figure IV.10, ne présente pas d'erreur en fréquence par rapport au modèle complet. De plus, de par sa discrétisation fine utilisant l'ensemble des nœuds d'interface du modèle éléments-finis, il sera utilisé comme référence pour étudier les réponses forcées des deux autres super-éléments. En effet, ce modèle ne pourra être considéré par la suite à

cause des temps de calcul qu'il engendre. On observe tout d'abord une différence notable entre les amplitudes obtenues pour les calculs linéaires. Moins le super-élément est discrétisé, plus l'interface de contact est souple, entraînant une augmentation de la réponse vibratoire lorsque les nœuds sont collés. Cependant, ce comportement semble "gommé" dans le cas des réponses forcées non-linéaires, les trois super-éléments ayant des amplitudes de réponses similaires. La discrétisation du super-élément n'a donc que peu d'impact sur le comportement dynamique global de la structure avec non-linéarités. De plus, comme remarqué lors de la construction des super-éléments dans le tableau IV.3, le manque de discrétisation implique un décalage en fréquence du pic linéaire.

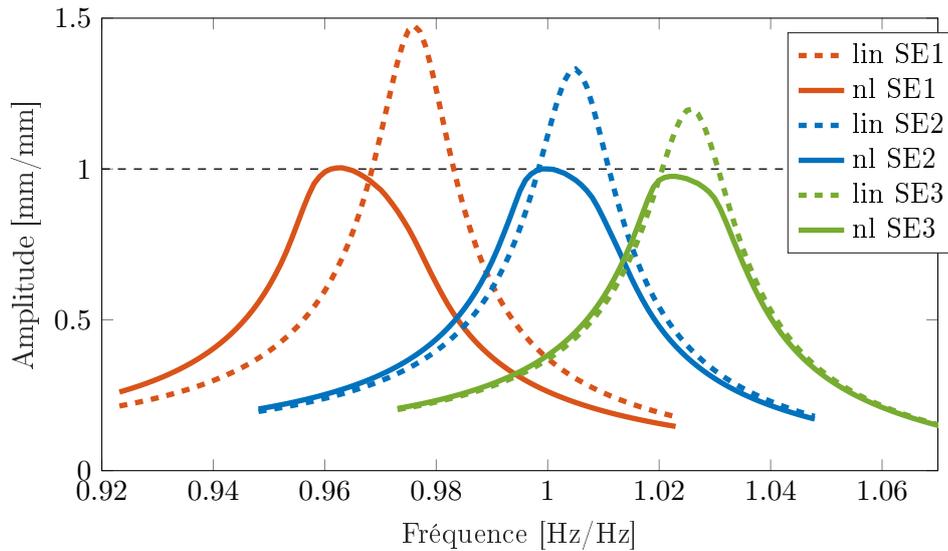


FIGURE IV.10 – Réponses forcées linéaires (lin) avec interfaces collées (--) et non-linéaires (nl) avec frottement (—) pour les trois super-éléments considérés. Les résultats sont normalisés par rapport à la fréquence et à l'amplitude maximale du SE2.

La Figure IV.10 permet aussi de remarquer que la diminution du nombre de nœuds sur l'interface de contact implique un décalage plus important du pic non-linéaire par rapport au pic linéaire de ce même super-élément. Ce phénomène peut avoir différentes explications. Premièrement, la diminution du nombre de nœuds sur l'interface induit un assouplissement du contact, et donc un décalage fréquentiel et un amortissement plus importants par rapport au calcul linéaire. Ce phénomène permet alors de compenser l'erreur en amplitude, mais induit une erreur en fréquence plus importante. Deuxièmement, les super-éléments SE1 (—) et SE2 (—) ne comportent que 3 et 5 nœuds dans la petite direction de l'interface, impliquant une répartition ou un impact plus large des zones de glissement notamment, cf section II.5.4.2. Comme observé pour la roue aubagée simplifiée, une ligne de nœuds en bord de portée se trouve en permanence en séparation, due au maillage considéré. Or, de même que pour le glissement, l'impact de cette séparation est d'autant plus important que le nombre de nœuds sur l'interface diminue, chaque nœud ayant un impact sur une zone plus grande. La séparation induit ainsi un assouplissement se traduisant par un décalage important du mode non-linéaire. Une comparaison de l'état de contact pour les différents super-éléments sera réalisée dans la section IV.3, mettant en évidence ce phénomène.

Suite aux remarques de cette section, le super-élément SE2 sera considéré pour les calculs dans la suite de ce manuscrit. Il permet effectivement d'obtenir une réponse forcée assez proche de celle obtenue avec le super-élément SE3 de référence, et les temps de calcul engendrés par ce super-élément ne sont pas prohibitifs, contrairement à ceux du super-élément SE3.

### 2.1.2 Mode complexe non linéaire

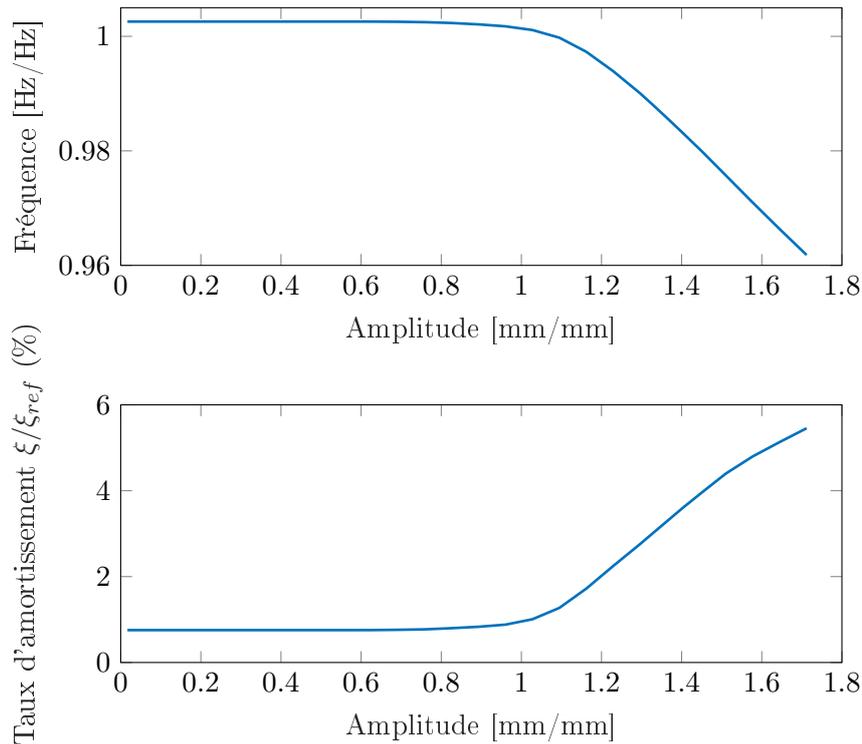


FIGURE IV.11 – Backbones du mode non-linéaire normalisées.

Pour compléter l'étude dynamique non-linéaire générale du deuxième mode de flexion à 4 diamètres nodaux de la soufflante industrielle, cette section s'intéresse au mode complexe non-linéaire. Pour rappel, le calcul du mode complexe non-linéaire consiste à rechercher une solution périodique ou pseudo-périodique d'un système non-linéaire autonome, dont la définition et la méthode de calcul sont données section II.4.2. Les calculs ont été réalisés en considérant un degré de liberté de contrôle de l'amplitude en tête de pale, correspondant au degré de liberté d'excitation utilisé précédemment. La Figure IV.11 représente l'évolution de la fréquence et de l'amortissement en fonction de l'amplitude, aussi appelés *backbones*. Les résultats ont été normalisés par rapport à la fréquence et à l'amplitude maximale de la réponse forcée du super-élément SE2, comme dans la section précédente. De la même manière que pour le cas de la roue aubagée simplifiée, la fréquence et l'amortissement restent inchangés jusqu'à 0.7 mm/mm d'amplitude. Cette première partie constante correspond à la partie linéaire du calcul, la non-linéarité n'ayant pas été activée de par des amplitudes d'excitation trop faibles. A partir de 0.7 mm/mm, on remarque une diminution de la fréquence et une augmentation de l'amortissement, correspondant à l'apparition des non-linéarités

et notamment du glissement sur les interfaces. En effet, le glissement engendre un assouplissement des interfaces de contact, et donc une diminution de la fréquence du système, correspondant à l'augmentation de l'amortissement engendré par la dissipation due aux effets de glissement dans le contact.

## 2.2 Dynamique non-linéaire avec excitation aéroélastique

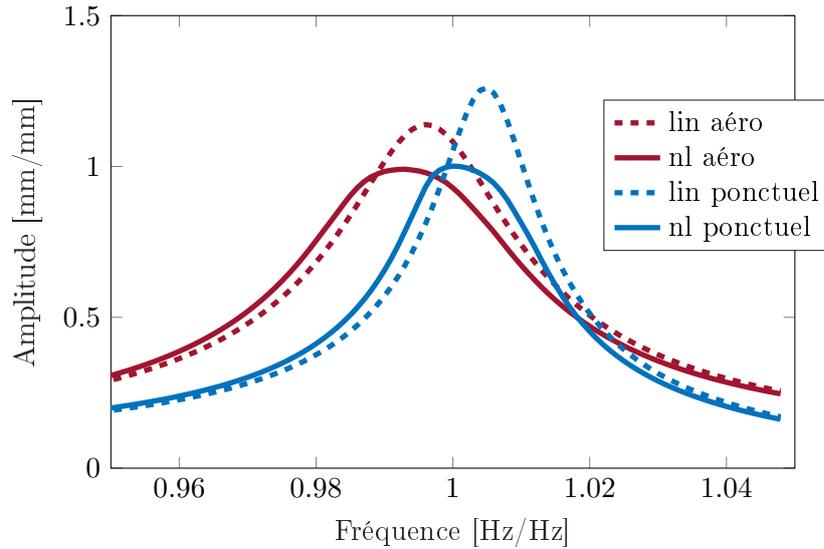


FIGURE IV.12 – Réponses forcées linéaires (lin) avec interfaces collées (--) et non-linéaires (nl) avec frottement (—) pour les modèles avec chargement ponctuel (—) et avec chargement aérodynamique (—). Les résultats sont normalisés par rapport à la fréquence et à l'amplitude maximale du SE2 avec chargement ponctuel.

Suite à l'étude générale du deuxième mode de flexion à 4 diamètres présentée dans la section précédente à l'aide d'une excitation ponctuelle en tête de pale, cette section s'intéresse aux résultats obtenus en réponse forcée à l'aide du chargement aéroélastique détaillé section IV.1.3. Ainsi la Figure IV.12 représente les réponses forcées linéaires en tirets (--) et non-linéaires en traits pleins (—), pour le modèle avec chargement ponctuel équivalent en bleu (—) et avec le chargement aéroélastique en rouge (—). Toutes les courbes de cette figure ont été calculées à l'aide du super-élément SE2. Tout d'abord, les réponses forcées entre les deux types de chargement n'ont pas la même fréquence. Cette différence en fréquence, de l'ordre de 1%, s'explique par l'effet assouplissant de la raideur aéroélastique ajoutée au modèle avec chargement aéroélastique. La raideur aéroélastique exprime le couplage entre le mode dynamique structural et le mode de vibration du fluide dans lequel il se trouve. Ce couplage vient ainsi légèrement assouplir la réponse vibratoire de la soufflante, à la différence du chargement aérostatique appliqué aux deux modèles lors des calculs de précharge qui a tendance à avoir un effet raidissant. De même, on remarque que la réponse forcée du modèle avec chargement aéroélastique est plus amortie que celle du modèle avec chargement ponctuel, de par le couplage entre le fluide et la structure via l'ajout de l'amortissement aéroélastique. Cependant, le modèle avec chargement ponctuel permet

bien d'obtenir une réponse forcée non-linéaire similaire en amplitude à celle obtenue à l'aide du chargement aérodynamique.

La corrélation entre la réponse dynamique obtenue à l'aide du chargement aérodynamique n'est pas présentée dans ces travaux, car elle est détaillée par Berthelon [11] et s'avère être proche des essais. De plus, cette corrélation n'est pas l'objectif des recherches menées dans ce manuscrit, l'objectif étant uniquement d'utiliser le chargement aérodynamique pour pouvoir étudier le comportement du contact aube-disque sur un cas réel, ce qui sera réalisé dans la section suivante.

### 2.3 Étude des dissipations

L'étude de la dynamique non-linéaire de la soufflante avec excitation aérodynamique permet maintenant de statuer sur les énergies dissipées par les différentes formes de dissipation présentes. Le Tableau IV.4 donne les pourcentages d'énergie dissipée par rapport à l'énergie dissipée totale pour les trois formes de dissipation présentes dans le système : l'amortissement aérodynamique, l'amortissement structural et la dissipation par frottement dans le contact. L'amortissement aérodynamique apparaît être prépondérant, mais du même ordre de grandeur que l'amortissement par frottement dans le contact. L'amortissement structural est quant à lui quasiment négligeable en comparaison des deux autres formes de dissipations.

	Aéroélastique	Frottement	Structurale
Energie dissipée	53%	44%	3%

TABLE IV.4 – Proportion d'énergie dissipée par rapport à l'énergie dissipée totale pour les différentes formes de dissipation.

## 3 Comportement des interfaces de contact de la soufflante

L'étude réalisée dans la section précédente a permis de statuer sur le comportement dynamique de la structure, via un calcul par la méthode de l'équilibrage harmonique. Cette méthode a été couplée à la procédure d'alternance fréquence-temps DLFT basée sur des Lagrangiens dynamiques afin de traiter le problème de contact. Cette section vise maintenant à étudier le comportement des interfaces de contact aube-disque. Dans un premier temps, l'étude portera sur les résultats obtenus par la procédure DLFT des calculs dynamiques, en s'intéressant à l'état de contact au cours de la période vibratoire ainsi qu'aux écarts entre les super-éléments considérés. Dans un second temps, la méthode semi-analytique de résolution du problème de contact sera appliquée afin d'étudier le comportement des interfaces en considérant un maillage beaucoup plus discrétisé que ceux utilisés pour les calculs dynamiques. La précision offerte par cette discrétisation fine permettra alors de statuer sur l'usure des interfaces de contact sous ce chargement vibratoire.

De la même manière que dans le Chapitre III, les résultats seront présentés sur l'ensemble des interfaces via des cartographies surfaciques. La Figure IV.13 représente la méthode de visualisation,

illustrée sur l'état de contact à un instant de la période vibratoire. La légende associée à la cartographie sera présentée section IV.3.1.1, lors de l'étude de l'état de contact. Les cartographies surfaciques seront faites dans les repères locaux normaux aux portées, cf Figure IV.13. Certains résultats seront présentés pour les deux portées de l'aube, cotés intrados et extrados. L'étude se focalisera ensuite sur la portée intrados uniquement, le comportement étant assez similaire sur les deux portées.

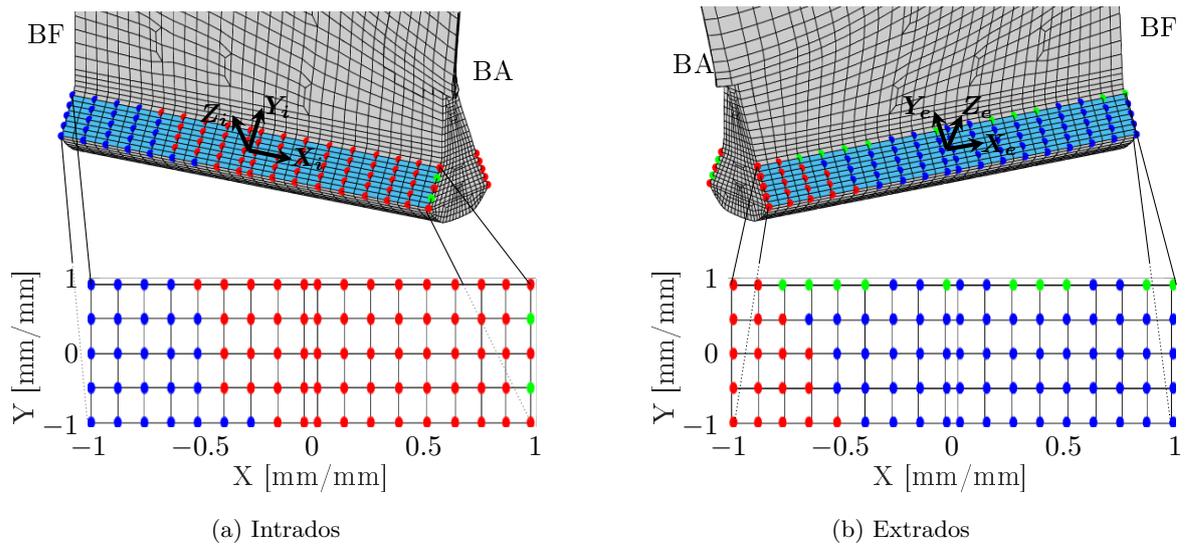


FIGURE IV.13 – Représentation de la méthode de visualisation des résultats surfaciques sur les interfaces de contact dans les repères locaux normaux aux portées. Illustration pour l'état de contact à l'instant  $i_t = 4$  de la période vibratoire. Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés.

### 3.1 Étude du contact suite aux calculs dynamiques

Les calculs par la méthode HBM ayant permis d'étudier le comportement dynamique du système, utilisent la méthode DLFT pour résoudre le problème de contact. Cette section présente une étude du comportement des interfaces de contact calculé par cette méthode. De même que dans le Chapitre II, les résultats sont extraits à la fréquence de résonance en temporel, évitant de considérer l'erreur induite par les transformées de Fourier en fréquentiel. Bien que les calculs dynamiques aient été réalisés en considérant  $n_{it} = 32$  instants temporels afin d'améliorer leur précision, les résultats présentés dans la suite ont été reconstruits pour  $n_{it} = 16$  instants temporels, ce nombre étant suffisant pour l'étude menée ici. Les résultats seront comparés pour les différents super-éléments, pour statuer sur l'impact de la discrétisation du super-élément sur le comportement du contact.

### 3.1.1 Impact de la discrétisation du super-élément sur l'état de contact

L'analyse des résultats sur la roue aubagée simplifiée a montré l'impact de la discrétisation du super-élément sur l'état de contact, cf section II.5.4.2. Cependant, le modèle simplifié ne considérait que deux maillages, tous deux assez grossiers. L'étude du modèle de soufflante a été réalisé pour trois maillages différents des interfaces des super-éléments, représentés Figure IV.7. Dans un premier temps, l'étude du comportement du contact s'intéresse à l'impact de la discrétisation sur l'état de contact. La Figure IV.14 représente l'état des nœuds de contact pour les super-éléments SE1 et SE3, pour la portée coté intrados à l'instant  $i_t = 4$  de la période vibratoire. L'état de contact pour le super-élément SE2 au même instant est donné Figure IV.13. Les nœuds en bleu (●) sont collés, ceux en rouge (●) glissants et ceux en vert (●) séparés. Les trois discrétisations présentent des résultats similaires, avec une zone de glissement sur une partie importante de la portée, coté bord d'attaque à cet instant. Les discrétisations plus fines permettent cependant d'apporter de la précision pour la détermination de la zone de glissement. Contrairement au modèle de roue aubagée simplifiée, le vrillage de la pale vient désaxer les zones de glissement du modèle de soufflante industriel. Les zones de glissement étaient effectivement réparties symétriquement sur la portée pour le cas simplifié (cf Figure III.14).

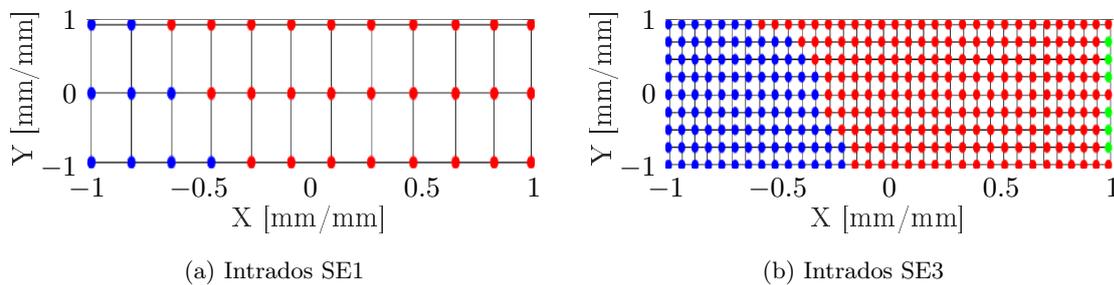


FIGURE IV.14 – État de contact de la portée Intrados pour les super-éléments SE1 et SE3, à l'instant  $i_t = 4$ . Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. Résultats calculés par la méthode HBM-DLFT.

Comme pour l'étude des réponses forcées, le super-élément SE2 semble apporter une précision suffisante pour l'étude de l'état de contact, et offre bien plus de détails que le super-élément SE1. De plus, celui-ci présente des temps de calcul acceptables, contrairement au super-élément SE3. Une étude plus approfondie sur la convergence des données du contact sera menée par la suite.

Pour les super-éléments SE2 et SE3, certains nœuds présentent de la séparation coté bord d'attaque. Il s'agit de nœuds qui sont en séparation sur l'ensemble de la période vibratoire. Cette séparation est uniquement due au maillage qui n'est pas assez fin pour décrire la géométrie précisément en bord de portée, et n'a pas de sens physique, comme observé pour la roue aubagée simplifiée. Ce phénomène est aussi remarqué sur certains nœuds en haut de portée coté extrados, à l'image de la Figure IV.13.

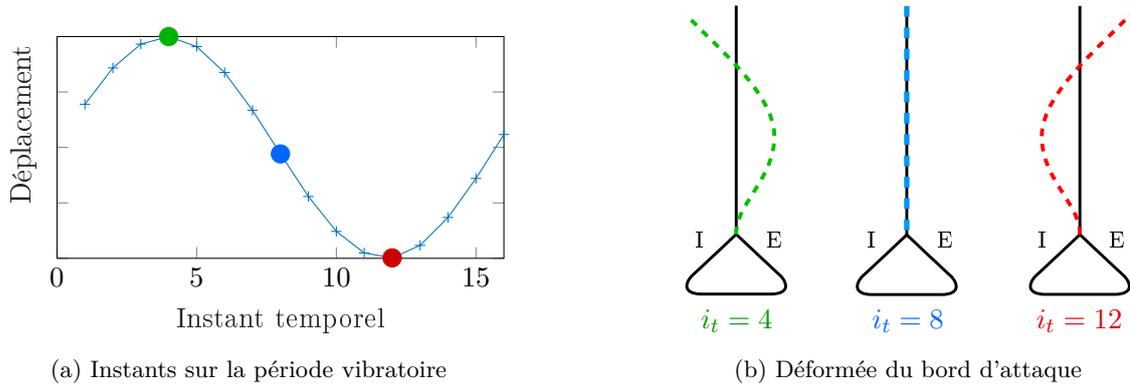


FIGURE IV.15 – Représentation des instants de la période vibratoire (a) et schéma de la déformée du bord d'attaque aux trois instants considérés : en vert (●)  $i_t = 4$ , en bleu (●)  $i_t = 8$  et en rouge (●)  $i_t = 12$ .

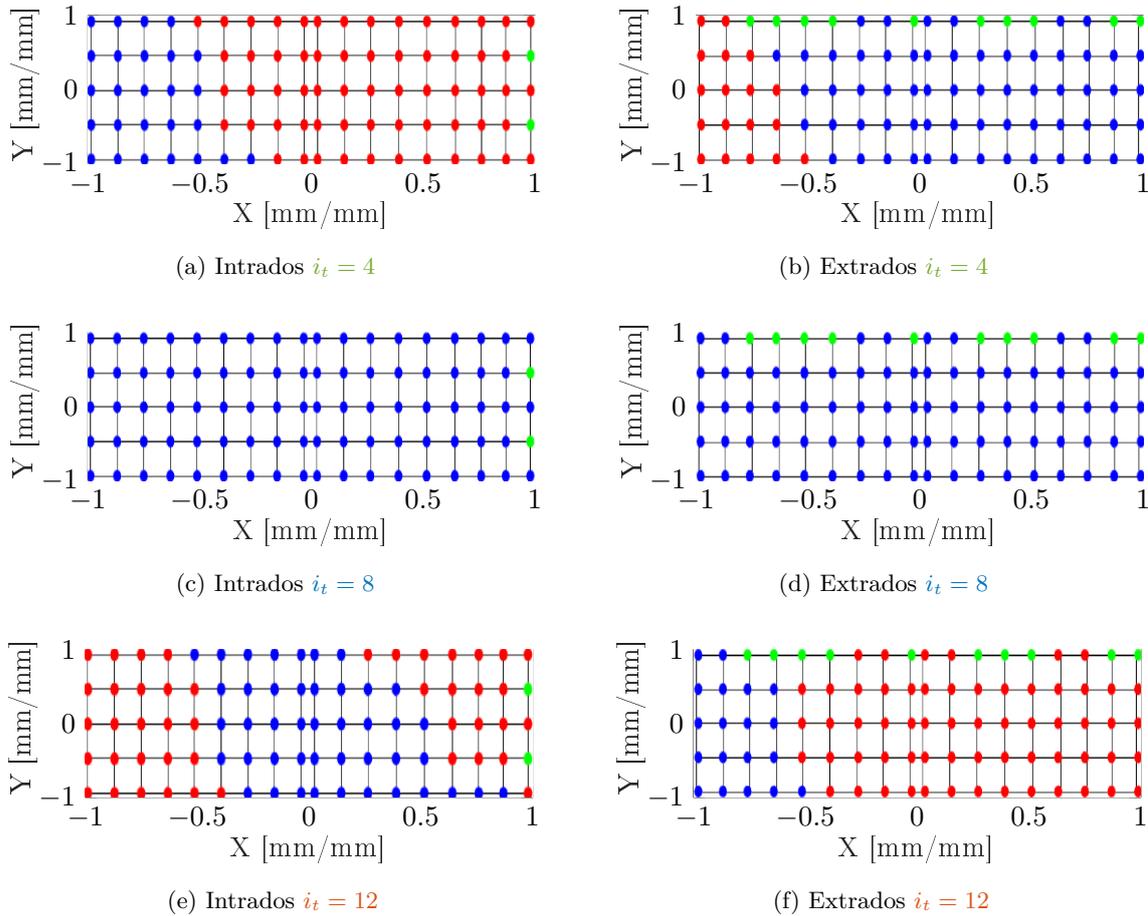


FIGURE IV.16 – Etat de contact à différents instants de la période vibratoire pour le super-élément SE2. Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. Résultats calculés par la méthode HBM-DLFT

### 3.1.2 Évolution de l'état de contact sur une période

Pour le moment, l'étude de l'état de contact s'est limitée à un instant de la période vibratoire. Pour compléter ces résultats, différents instants de la période seront maintenant considérés. Les instants en question ont été choisis afin d'être représentatifs du comportement général. Trois instants ont été retenus : deux aux maxima de vibration, et un instant intermédiaire où la déformée de l'aube est nulle. La Figure IV.15 représente ces trois instants sur le déplacement en tête de pale, ainsi qu'un schéma représentant les déformations du bord d'attaque de l'aube à ces instants. Il est effectivement plus simple de visualiser que la déformation du bord d'attaque, le vrillage de la pale entraînant une "torsion" dans la déformée modale de l'aube pour le deuxième mode de flexion considéré ici et représenté Figure IV.6. Les notations I et E signifient respectivement Intrados et Extrados.

Pour les trois instants représentatifs du comportement général sur la période, la Figure IV.16 représente l'état de contact sur les portées intrados et extrados, calculé à l'aide du super-élément SE2. Premièrement, à l'instant intermédiaire  $i_t = 8$ , l'ensemble des portées est collé. Cet instant est représentatif de la majorité des instants de la période vibratoire. Les instants  $i_t = 4$  et  $i_t = 12$  correspondent quant à eux aux maxima de déformations dans les deux sens. Pour l'instant  $i_t = 4$ , le glissement se localise du côté du bord d'attaque pour les deux portées. A l'inverse, le glissement se localise principalement du côté du bord de fuite sur les deux portées à l'instant  $i_t = 12$ , malgré une zone glissante côté bord d'attaque pour la portée intrados. Ce changement de côté de la zone de glissement est principalement dû au vrillage de la pale, entraînant une torsion au niveau du pied d'aube. De plus, quasiment tous les nœuds présentent du glissement à au moins un instant de la période, hormis quelques nœuds pour les deux portées, autour de  $X = -0.5$ . On remarque enfin la présence de nœuds en séparation à tous les instants. Comme évoqué précédemment, cette séparation est due au maillage du modèle éléments-finis, le manque de discrétisation en bord de portée venant créer une séparation non-physique sur ces nœuds à tous les instants de la période.

### 3.1.3 Amplitudes de glissement des différents super-éléments

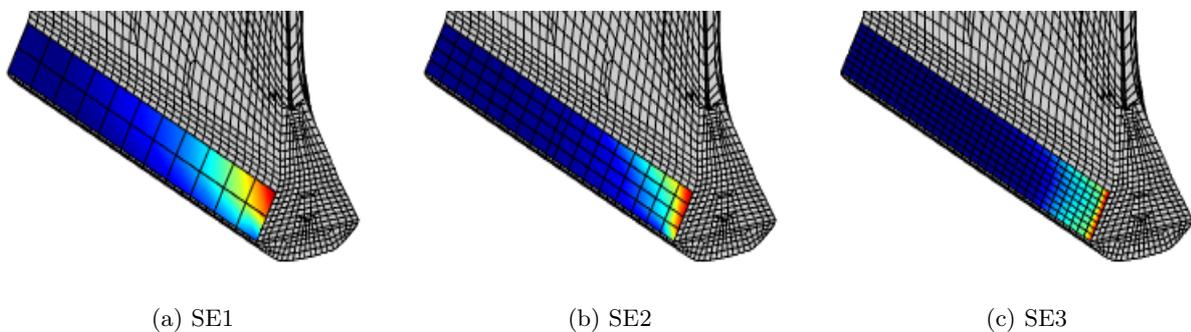


FIGURE IV.17 – Amplitudes de glissement sur la portée intrados à l'instant  $i_t = 4$  pour les différents super-éléments considérés. Résultats normalisés par le maximum de chaque super-élément indépendamment et calculés par la méthode HBM-DLFT.

L'étude de l'état de contact a permis de statuer sur l'évolution de celui-ci au cours de la période pour les deux portées. Dorénavant, tous les résultats s'intéresseront à l'instant  $i_t = 4$  de la période sur la portée intrados. Cette section vise à comparer les amplitudes de glissement obtenues pour les trois super-éléments afin de statuer sur la convergence du maillage. La Figure IV.17 représente les cartographies d'amplitudes de glissement sur le pied d'aube pour ces trois super-éléments. Les résultats ont été normalisés indépendamment pour chaque calcul, l'objectif étant de statuer sur la répartition des amplitudes dans un premier temps. Une comparaison des valeurs d'amplitudes sera réalisée par la suite. La comparaison des cartographies surfaciques permet d'observer un comportement similaire pour les trois super-éléments considérés. En effet, les maxima se localisent tous du côté du bord d'attaque. Cependant, le super-élément SE3 présente une meilleure répartition du glissement sur la hauteur de la portée, contrairement aux super-éléments SE1 et SE2 pour lesquels les maxima se trouvent principalement dans le coin en haut coté bord d'attaque. De par sa discrétisation plus fine, le comportement du super-élément SE3 devrait mieux se rapprocher du comportement réel. Ce résultat sera confirmé par la suite à l'aide de la résolution semi-analytique.

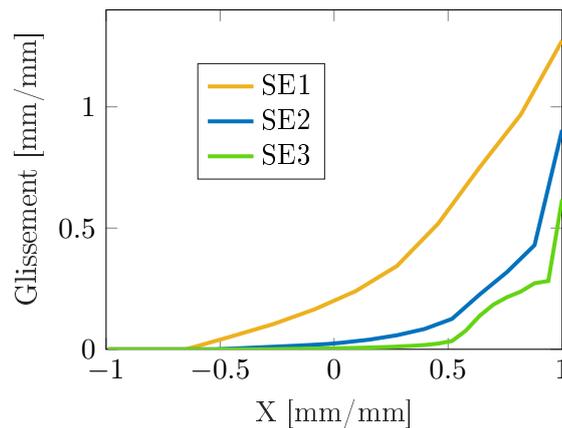


FIGURE IV.18 – Amplitudes de glissement à l'instant  $i_t = 4$  pour la portée intrados, sur la ligne de nœuds en milieu de portée dans la grande direction pour  $Y = 0$ , calculés par la méthode HBM-DLFT.

Dans le but de compléter ces résultats, la Figure IV.18 offre une comparaison des amplitudes de glissement sur une ligne de nœuds en milieu de portée dans la grande direction du contact (pour  $Y = 0$ ), normalisées par rapport au maximum de glissement du super-élément SE2. L'amplitude de glissement pour le super-élément SE1 présente un écart significatif par rapport au super-élément SE3. Le super-élément SE2 est quant à lui assez proche et donc quasiment convergé. Le super-élément SE3, utilisé comme référence, présente une amplitude de glissement plus faible, due à sa répartition plus importante sur la hauteur de l'interface. Cependant, comme remarqué précédemment, les résultats SE2 présentent une bonne estimation et des temps de calcul raisonnables.

### 3.1.4 Efforts de contact

Pour finir cette étude du contact par la méthode DLFT du calcul dynamique, la Figure IV.19 représente les efforts de contact normaux sur la ligne de nœuds en milieu de portée dans la grande direction (pour  $Y = 0$ ). De même que pour les amplitudes de glissement, les résultats du super-élément SE2 sont assez proches de ceux du super-élément SE1, validant ainsi cette discrétisation. On remarque aussi que les efforts sont légèrement plus élevés coté bord d'attaque (en  $X > 0$ ), dans la zone où se localise le glissement. Enfin, à l'image des résultats observés dans le cas de la roue aubagée simplifiée, les trois super-éléments ne présentent pas d'effets de bords pourtant caractéristiques de ce type de contact, du fait de la discrétisation trop grossière utilisée. Cette observation justifie ainsi l'utilisation de la méthode semi-analytique de résolution par la suite.

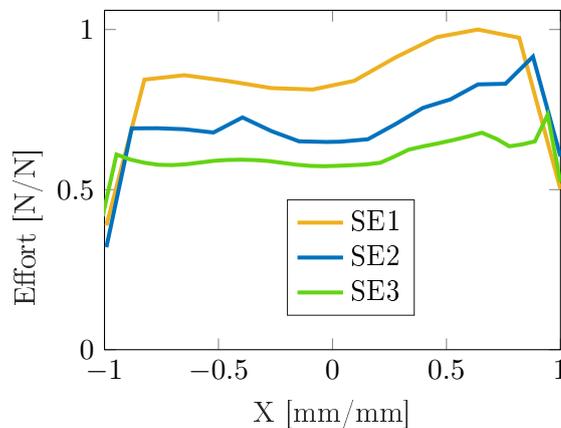


FIGURE IV.19 – Efforts normaux à l'instant  $i_t = 4$  pour la portée intrados, sur la ligne de nœuds en milieu de portée dans la grande direction (pour  $Y = 0$ ), calculés par la méthode HBM-DLFT.

## 3.2 Étude du contact par la méthode semi-analytique

Les limitations en termes de discrétisation des modèles utilisés pour la résolution dynamique ont mis en évidence différents problèmes. En effet, du fait des temps de calcul engendrés pour la résolution dynamique non linéaire par la méthode HBM, il n'est pas possible d'utiliser un maillage finement discrétisé. Malgré de bons résultats dynamiques globaux, les résultats locaux au niveau des interfaces de contact manquent de discrétisation afin de décrire les phénomènes mis en jeu, comme les effets de bords ou la répartition du glissement. Ces études permettent de mettre en évidence la nécessité d'utiliser une autre méthode pour étudier les interfaces de contact en détail, les résultats locaux nécessitant une discrétisation très fine pour être convergés. La méthode semi-analytique de résolution du contact présentée dans le Chapitre III peut dès lors permettre d'utiliser une discrétisation très fine des interfaces tout en gardant des temps de calcul rapides, en utilisant les données structurales extraites du calcul dynamique à la résonance non-linéaire.

Cette section définit le modèle utilisé pour la résolution semi-analytique du contact pour les interfaces aube-disque de la soufflante industrielle. Ce modèle sera par la suite utilisé pour mener

une étude détaillée du comportement du contact, menant à l'usure des interfaces engendrée par le chargement vibratoire considéré.

### 3.2.1 Définition du modèle semi-analytique

A l'image du modèle considéré pour la roue aubagée dans le Chapitre III, les géométries des interfaces intrados et extrados de la soufflante ont été reconstruites pour la résolution semi-analytique. Pour rappel, les géométries à proximité du contact sont extraites puis interpolées pour pouvoir y appliquer la nouvelle discrétisation. Un léger congé est aussi ajouté en bord de portée afin de faciliter la convergence, de même que des zones de calcul fictives limitant les erreurs dues aux transformées de Fourier spatiales utilisées par cette méthode, cf section III.1.3. La discrétisation comprend ainsi  $N_x = 200$  nœuds dans la grande direction et  $N_y = 30$  nœuds dans la petite direction du contact sur l'interface. Cette discrétisation correspond à avoir un écart entre deux nœuds de l'ordre de grandeur de quelques dizaines de  $\mu\text{m}$ . L'aube étant composée d'un matériau composite tissé 3D, ces propriétés varient localement. Un matériau homogénéisé sur l'ensemble de la portée a été considéré pour les calculs semi-analytiques, en moyennant les propriétés matériau sur les portées dans un but de simplification du calcul.

Le comportement structural appliqué au calcul semi-analytique est extrait depuis le calcul dynamique via le torseur transmis dans le contact, défini section III.2.1. Il s'agit de données globales sur l'interface, permettant ainsi de limiter l'erreur due à la discrétisation. La Figure IV.20 représente l'ensemble de ces données d'entrée pour les trois super-éléments SE1 en tirets (- -), SE2 en traits pleins (—) et SE3 en pointillés (⋯), dans les trois directions du contact dans le repère local, pour la portée intrados. D'après les temps de calcul évoqués précédemment, les données extraites du super-élément SE3 ne seront pas utilisées pour les calculs semi-analytiques, mais serviront de référence pour les autres super-éléments. Les efforts globaux sur l'interface sont bien convergés pour les trois super-éléments. Cependant, à l'image des données de la roue aubagée simplifiée considérée dans le chapitre précédent, les moments ne sont pas convergés, puisqu'ils sont dépendants de la discrétisation pour leur calcul. Les moments extraits du super-élément SE2 ne présentent cependant qu'une faible erreur par rapport au SE3. De même, l'énergie dissipée n'est pas complètement convergée. La position du centre de pression est quant à elle bien estimée pour le super-élément SE2. Pour conclure, les résultats obtenus pour le SE2 sont globalement proches de ceux du super-élément SE3 de référence. Du fait des temps de calculs dynamiques du super-élément SE2 raisonnables, celui-ci sera retenu par la suite.

### 3.2.2 État de contact

De façon à déterminer avec précision l'état du contact soumis au chargement vibratoire, un premier calcul semi-analytique a été réalisé. Les résultats obtenus seront utilisés par la suite pour étudier l'usure des interfaces. La Figure IV.21 représente les amplitudes de glissement (a) et les efforts normaux (b) sur la portée intrados à l'instant  $i_t = 4$ . Les deux figures ont été normalisées par leur maximum respectif. Cette normalisation sera utilisée comme référence pour les calculs d'usure qui seront présentés par la suite. Les zones grises sur la cartographie du glissement Figure

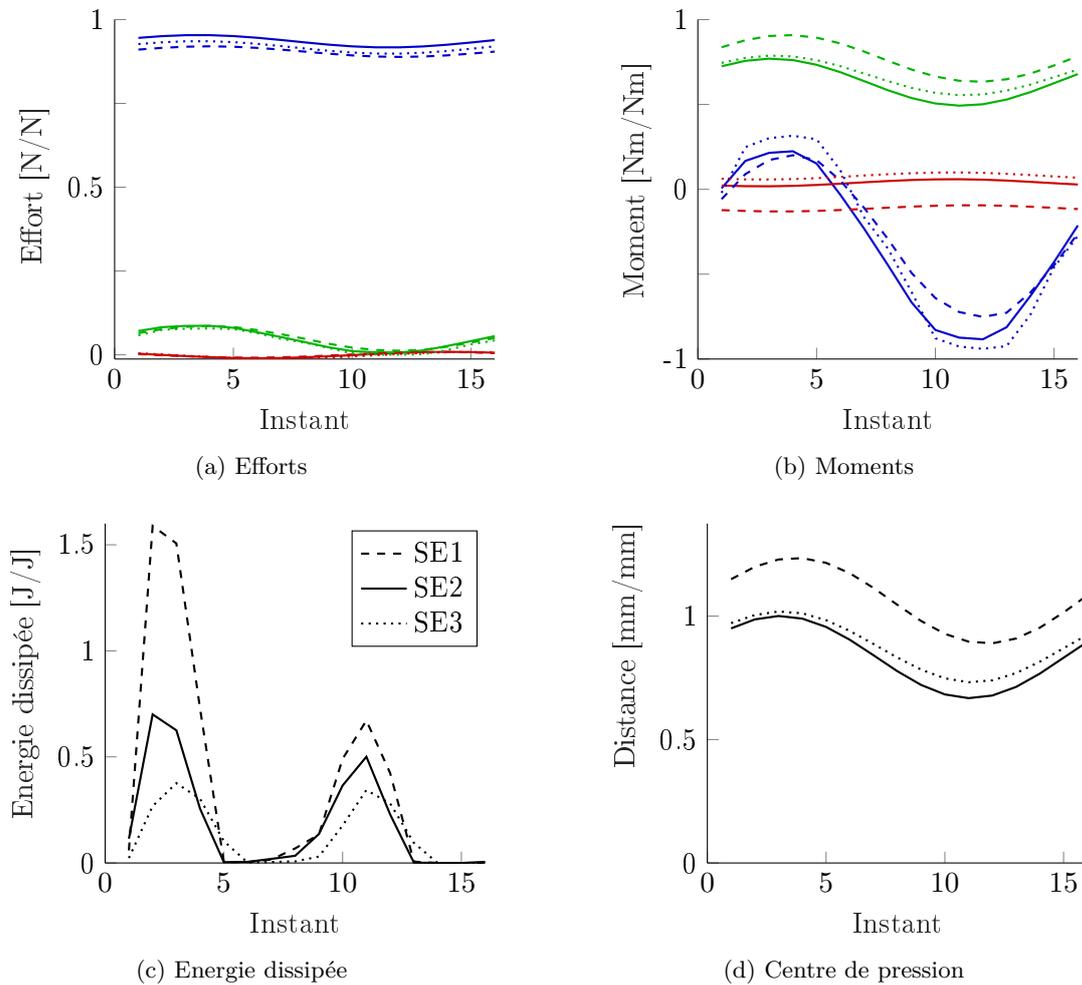


FIGURE IV.20 – Comparaison des données d’entrée utilisées pour la méthode semi-analytique, extraites des calculs dynamiques pour les trois super-éléments SE1 en tirets (---), SE2 en traits pleins (—) et SE3 en pointillés (⋯). Les courbes représentent les directions  $X$  en rouge (—),  $Y$  en vert (—) et  $Z$  en bleu (—).

IV.21a ont une amplitude de glissement nulle et sont donc collées. Le glissement est principalement localisé du côté du bord d’attaque et réparti sur la hauteur de la portée, confirmant les résultats obtenus dans la section précédente pour le super-élément SE3. Cependant, la discrétisation fine permet d’observer une complexification de la répartition du glissement, notamment via l’apparition d’une zone collée au milieu de la zone de glissement, à proximité du bord.

### 3.2.3 Efforts de contact

Les résultats obtenus lors de l’étude du contact par la résolution dynamique ont mis en évidence le manque de discrétisation des maillages, notamment par l’absence d’effets de bords. Les effets de bords se matérialisent par des concentrations de contraintes en bord de contact, pour les contacts de type pion/plan à l’image du contact aube-disque. La Figure IV.21b donne la cartographie des

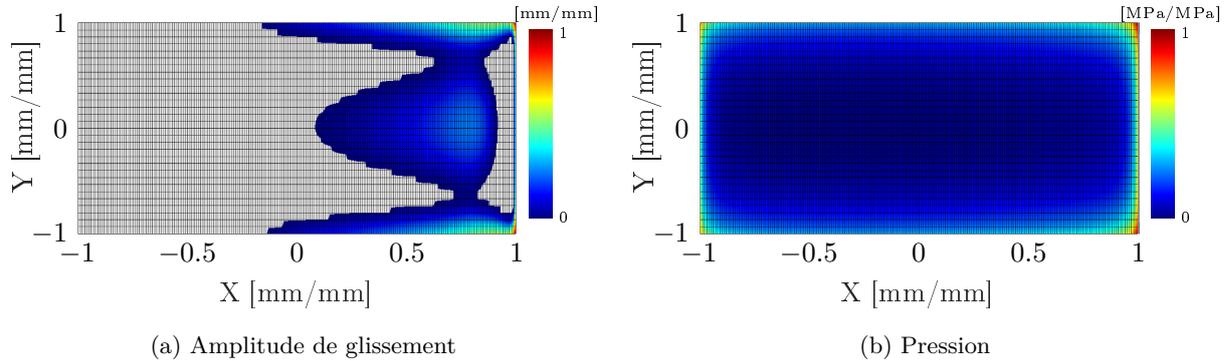


FIGURE IV.21 – Amplitude de glissement (a) et pression (b) à l'instant  $i_t = 4$  sur la portée intrados, calculés par la méthode semi-analytique.

efforts de pression sur l'interface. La Figure IV.22 représente les efforts normaux sur une ligne de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact : (a) dans la grande direction (pour  $Y = 0$ ) et (b) dans la petite direction (pour  $X = 0$ ). Les résultats obtenus en effort normal montrent une répartition assez constante sur l'ensemble de l'interface. De plus, les effets de bords sont facilement observables via les augmentations brutales des efforts en bord de portée, confirmant les résultats attendus pour ce type de contact.

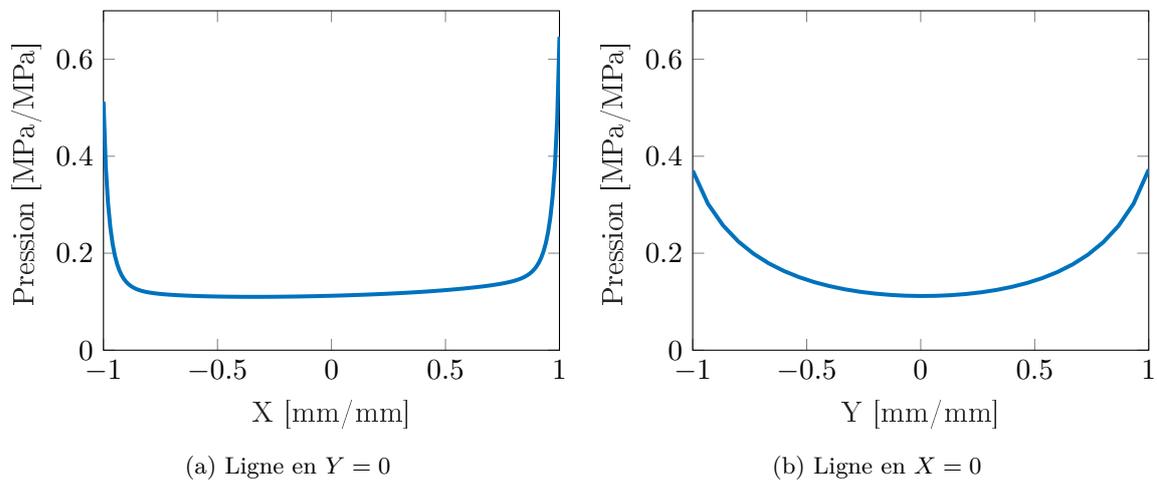


FIGURE IV.22 – Contraintes de pression sur des lignes de nœuds en milieu de portée dans la grande direction (en  $Y = 0$  - (a)) et dans la petite direction (en  $X = 0$  - (b)), à l'instant  $i_t = 4$  sur la portée intrados et calculés par la méthode semi-analytique.

La finesse de la discrétisation considérée par le modèle analytique donne ainsi la possibilité d'avoir une grande précision quant à l'estimation du comportement du contact. Ce niveau de détail rend ainsi possible l'étude de l'usure des interfaces de contact soumises au chargement vibratoire engendré par le vortex de sol, considéré dans ce manuscrit.

## 4 Etude de l'usure des interfaces

A partir des résultats obtenus par la méthode semi-analytique, il est possible de mener une étude de l'usure des interfaces. Comme expliqué section III.2, l'usure est calculée sur un cycle de chargement vibratoire, puis un facteur d'accélération  $\Delta_N$  est appliqué afin d'avoir une usure suffisante pour obtenir un impact sur le comportement du contact, l'usure après un cycle étant très faible. Les géométries du contact peuvent alors être mises à jour afin d'étudier l'impact de l'usure. Plusieurs cycles de mise à jour sont ensuite considérés afin de déterminer les profils d'usure à long terme, après un grand nombre de cycles.

Cette section a pour objectif de montrer l'applicabilité des calculs d'usure sur le cas industriel de la soufflante de turboréacteur. De par la nature occasionnelle du chargement dynamique par vortex de sol, ces calculs ne sont réalisés que comme preuve d'applicabilité. Un grand nombre de cycles est effectivement nécessaire pour atteindre des profondeurs d'usure suffisantes pouvant impacter le système. Cependant, les vortex de sol n'apparaissent que dans des conditions particulières, en l'occurrence en présence de vent de travers lorsque l'avion est au sol. En pratique, ces conditions ne sont que rarement réunies, et ne peuvent ainsi pas engendrer une usure importante. De l'usure pourra tout de même être observée sur les interfaces pour d'autres types de chargements, d'où l'intérêt de prouver l'applicabilité des méthodes sur un cas industriel complexe.

Afin de réaliser cette étude, la profondeur d'usure des interfaces sera d'abord calculée via la mise à jour des interfaces de contact du modèle semi-analytique. L'impact de l'usure sur les résultats sera ensuite considérée. Pour finir, la géométrie du modèle dynamique sera aussi mise à jour, afin de déterminer l'influence de l'usure sur la réponse vibratoire de la soufflante.

### 4.1 Usure des interfaces due au chargement vibratoire

La loi d'usure évoquée section III.2.1.2 permet de calculer l'usure après un cycle de chargement à partir des glissements et des efforts tangentiels. Un facteur d'accélération est ensuite appliqué afin d'avoir une usure suffisante avant la mise à jour des interfaces du modèle semi-analytique. Pour le cas de la soufflante, une mise à jour en profondeur d'usure a été considérée, pour une profondeur d'usure de l'ordre de quelques  $\mu m$ . La Figure IV.23 représente la profondeur d'usure pour les portées intrados (a-c) et extrados (b-d), après un cycle de mises à jour (a-b) ( $N_{M\grave{a}J} = 1$ ) et à la fin du processus de mise à jour (c-d) ( $N_{M\grave{a}J} = fin$ ), où  $N_{M\grave{a}J}$  est le nombre de mises à jour réalisées. Environ 20 cycles de mise à jour ont été calculés au total, menant à une profondeur d'usure finale maximale de l'ordre d'une centaine de microns. Au total, cela revient à considérer un nombre de cycles vibratoires de l'ordre de  $N_c = 10^9$ , soit environ  $10^3$  heures. Comme évoqué en introduction de cette section, le moteur ne subit pas un chargement par vortex de sol sur une durée aussi longue. L'étude est tout de même menée dans un but de validation de la méthode sur un cas industriel, ces phénomènes pouvant être présents sous d'autres conditions de chargement.

Après une mise à jour de la géométrie, la Figure IV.23(a-b) montre que l'usure se concentre principalement coté bord d'attaque pour la portée intrados, et coté bord de fuite pour la portée extrados. Cette différence s'explique par le vrillage de la pale. Pour les deux portées, une zone n'est pas du tout usée (en gris sur les Figures), correspondant à la zone n'étant jamais en glissement

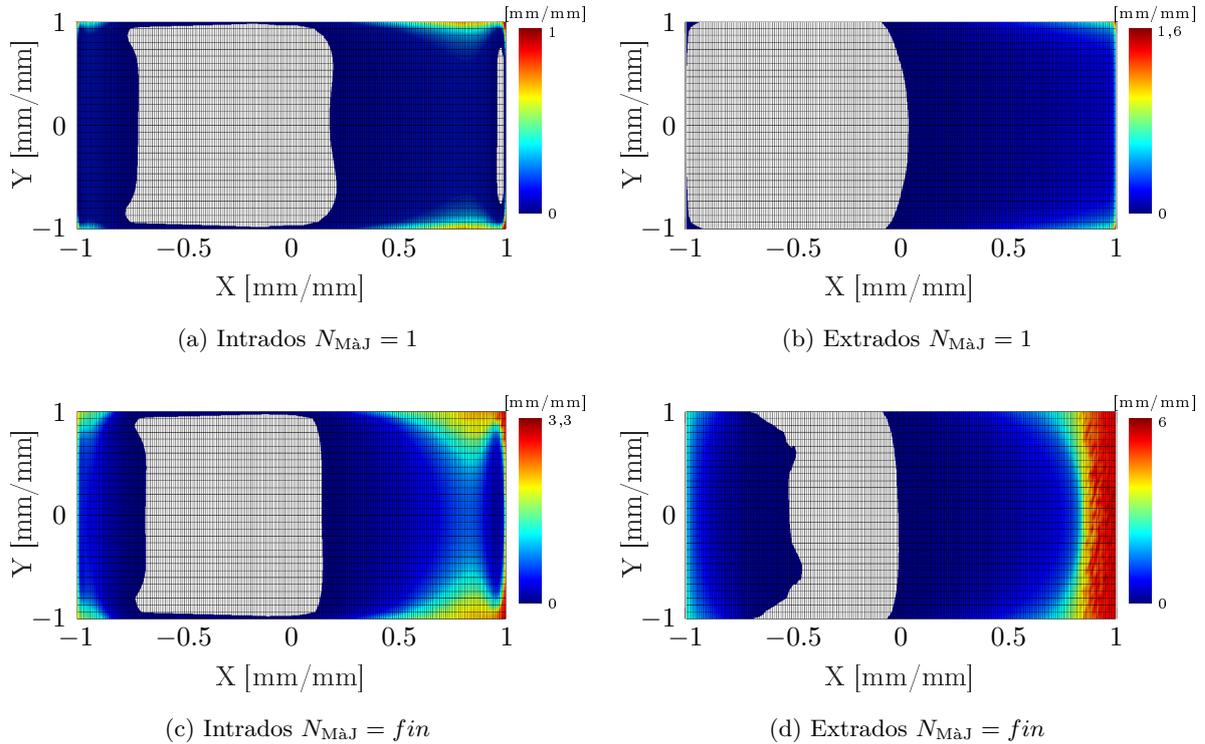


FIGURE IV.23 – Profondeurs d'usure pour les interfaces intrados et extrados, après 1 cycle de mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = 1$ ) et après la dernière mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = fin$ ). Maxima des échelles normalisés par rapport au maximum d'usure de la portée Intrados pour 1 mise à jour.

au cours de la période vibratoire, comme évoqué section IV.3.1.3. Suite à une seule mise à jour, l'usure se concentre aussi principalement sur les bords des portées, où elle est maximale. Cette observation confirme le comportement attendu et les résultats observés sur le modèle simplifié section III.4.1. En effet, l'usure a principalement lieu dans un premier temps dans les zones de concentration de contraintes, venant ainsi régulariser les géométries en bord de portée et lisser les effets de bords pour les cycles suivants. Il est à noter que l'usure de l'interface coté extrados est plus importante que celle de la portée intrados pour un même nombre de cycles, comme observable sur les échelles des cartographies des Figures, normalisées par rapport à l'usure maximale de la portée intrados suite à la première mise à jour.

Après l'ensemble des cycles de mise à jour, l'usure semble se répartir sur une zone plus importante de la portée, comme représenté Figure IV.23(c-d). L'usure apparait en effet sur une zone plus importante, notamment coté bord d'attaque pour la portée extrados. De plus, la profondeur d'usure se répartit plus globalement sur la zone usée, et n'est plus concentrée sur les bords. Suite aux premiers cycles de mise à jour, les effets de bords ayant été lissés, l'usure vient effectivement se répartir sur une zone plus importante de façon conséquente. Une zone reste cependant non-usée, en gris sur la Figure, signifiant que celle-ci ne présente toujours pas de glissement sur le cycle vibratoire, malgré l'adaptation des interfaces de contact. Ce phénomène d'adaptation des interfaces, généralisant l'usure à une zone plus importante au cours des cycles

de mise à jour avait déjà été remarqué pour le modèle simplifié, venant ainsi valider les résultats attendus. Il est à noter que la portée extradados présente une profondeur d'usure maximale environ deux fois plus importante que la portée intrados.

## 4.2 Impact de l'usure sur le comportement du contact

L'usure de la géométrie a une conséquence importante sur le comportement des interfaces. La Figure IV.24 donne les cartographies d'amplitudes de glissement (a) et d'efforts normaux (b) après l'ensemble des cycles de mise à jour, pour la portée intrados à l'instant  $i_t = 4$ . Les résultats ont été normalisés par rapport aux maxima observés sur le modèle sans usure au même instant de la période vibratoire, représentés Figure IV.21. A l'image des résultats obtenus pour la roue aubagée simplifiée, l'amplitude de glissement a nettement augmenté, de l'ordre de trois fois plus élevée. L'usure vient en effet adapter les interfaces et favoriser le glissement dans les zones usées. De même, suite à l'usure des bords des portées, les concentrations d'efforts normaux sont beaucoup plus faibles dans ces zones. L'usure des bords vient en effet diminuer les efforts de ces zones, et donc les lisser sur l'ensemble de la portée. L'effort maximal observé après usure est en effet 0.68 fois l'effort maximal observé avant usure, comme remarqué sur l'échelle de la cartographie d'effort. Enfin, un effort important est observé coté bord d'attaque ( $X = 1$ ), correspondant à la zone peu usée, car présentant peu de glissement.

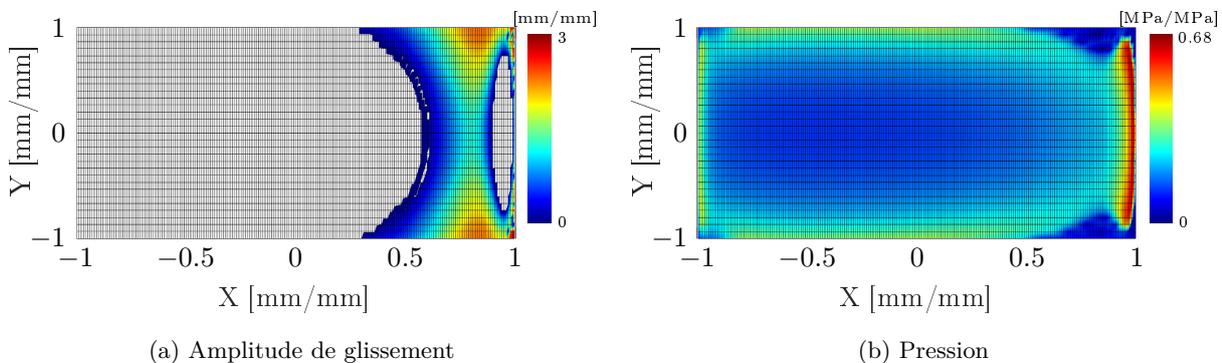


FIGURE IV.24 – Amplitude de glissement (a) et pression (b) à l'instant  $i_t = 4$  sur la portée intrados, après la dernière mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = fin$ ). Maxima des échelles normalisés par rapport aux maxima des mêmes résultats sans usure, représentés Figure IV.21.

## 4.3 Impact de l'usure sur le comportement vibratoire

Suite au calcul de la profondeur d'usure après un grand nombre de cycles vibratoires, il est maintenant possible de mettre à jour le modèle dynamique afin de déterminer l'impact de l'usure sur le comportement vibratoire de la soufflante. Cette mise à jour est réalisée en ajoutant un jeu dans la loi normale de contact utilisée pour la résolution par la méthode de l'équilibrage harmonique, cf section III.2.1.2. Différents calculs dynamiques ont été réalisés : au milieu du processus de mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = 1/2 fin$ ) et à la fin du processus de mise à jour  $N_{M\grave{a}J} = fin$ .

Afin de compléter ces résultats, un troisième calcul a été réalisé en multipliant la profondeur d'usure déterminée à la fin du processus de mise à jour par 5 (noté  $N_{M\grave{a}J} = 5 \text{ fin}$ ). Ce dernier calcul est fictif et vise uniquement à avoir une idée de l'impact d'une usure plus importante sur les réponses forcées vibratoires.

La Figure IV.25 représente les réponses forcées pour le super-élément SE2 en considérant ces différentes géométries usées, ainsi qu'un zoom sur la zone en rouge (□). De façon globale, l'usure considérée ici n'a quasiment pas d'impact sur la réponse dynamique. En effet, l'amplitude vibratoire diminue de moins d'1% pour les trois cas considérés. L'impact de l'usure sur le comportement vibratoire global peut ainsi être considéré comme négligeable pour ce cas d'application. Cependant, malgré la faible modification, le même comportement que pour le modèle de la roue aubagée simplifiée est observé : plus la géométrie est usée, plus l'amplitude a tendance à diminuer. Ce comportement s'explique par le fait que l'usure a tendance à favoriser le glissement, et donc à augmenter la dissipation d'énergie, correspondant à une diminution de l'amplitude. Il est à noter que même pour le cas fictif  $N_{M\grave{a}J} = 5 \text{ fin}$ , la modification de l'amplitude vibratoire reste négligeable.

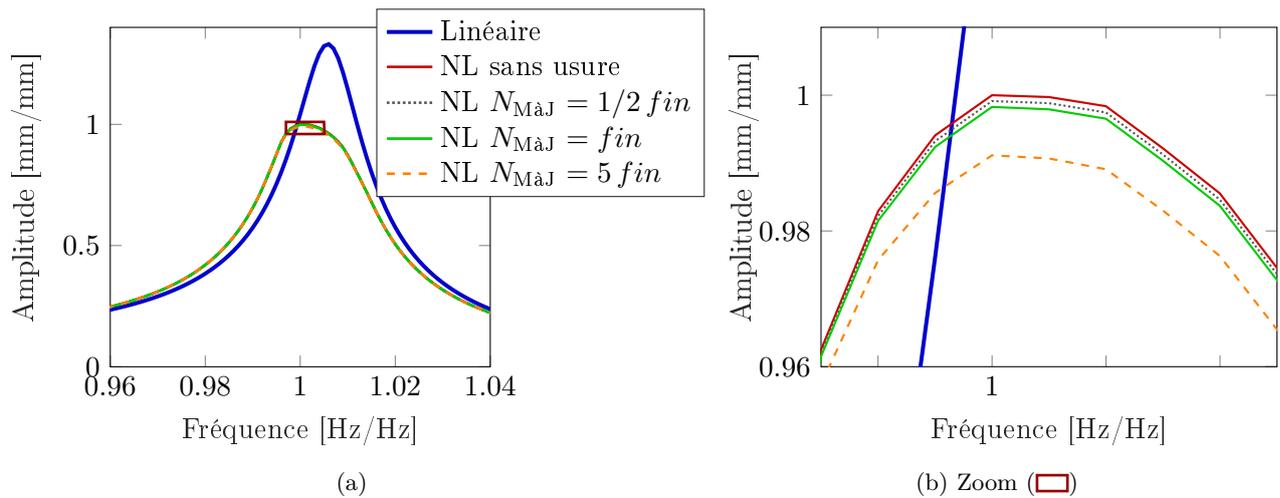


FIGURE IV.25 – Réponses forcées non-linéaires pour des géométries usées extraites à différents cycles de mise à jour  $N_{M\grave{a}J}$ . Le calcul pour  $N_{M\grave{a}J} = 5 \text{ fin}$  est un calcul fictif considérant la surface usée au dernier cycle multipliée par 5, à titre illustratif.

Pour conclure, malgré un nombre de cycles de mise à jour de la géométrie important, l'usure des interfaces reste assez faible pour ce chargement vibratoire et n'induit qu'une diminution négligeable des amplitudes vibratoires. Il pourrait cependant être intéressant d'étudier l'usure induite par d'autres chargements, et l'impact sur les niveaux vibratoires du mode considéré ici. Gallego [47] avait notamment étudié l'usure d'une soufflante en considérant le cycle complet du moteur, à savoir la mise en rotation menant à l'application du chargement centrifuge, et donc à des glissements importants. Il serait aussi possible de considérer d'autres chargements vibratoires induisant des glissements plus importants et pouvant être présents sur une plage de fonctionnement plus longue.

## 5 Conclusion

Le modèle du démonstrateur de soufflante considéré dans ce chapitre a permis de démontrer l'applicabilité et de valider l'ensemble du couplage réalisé dans ce manuscrit sur un cas d'application industriel complet. Ce modèle comprend l'ensemble des critères d'un modèle industriel réel : une géométrie complexe, soumise à un chargement centrifuge et aérostatique, ainsi qu'une excitation aérodynamique due à un vortex de sol. Dans un premier temps, l'étude dynamique de la soufflante à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique et de la procédure DLFT pour la résolution du problème non-linéaire de contact, a montré l'efficacité de cette méthode pour l'étude de la réponse forcée non-linéaire d'un système. Malgré un léger décalage en fréquences entre les différents super-éléments, dû à l'assemblage des super-éléments, les amplitudes de réponses forcées sont similaires pour les trois super-éléments considérés, quelque soit la discrétisation. Les temps de calcul pouvant s'avérer très importants pour une discrétisation fine, jusqu'à être prohibitifs pour des phases de conception industrielle, il est intéressant d'observer une bonne convergence des amplitudes vibratoires même pour un super-élément moyennement discrétisé.

L'objectif de ces travaux de thèse était de s'intéresser au comportement des interfaces de contact sous chargement dynamique vibratoire. Ainsi, une première étude a permis d'étudier le contact via la méthode DLFT utilisée pour les calculs dynamiques. Les résultats observés sont cohérents entre les différents super-éléments et correspondent aux résultats attendus. Cependant, ces maillages éléments finis ne permettent pas d'avoir une discrétisation suffisante pour observer l'ensemble des phénomènes de contact, notamment les effets de bords, ni d'offrir une bonne répartition des données du contact. La méthode semi-analytique donne ainsi la possibilité de considérer un maillage très raffiné en gardant des temps de calcul rapides, en considérant uniquement le problème de contact. Les résultats obtenus par cette méthode, en utilisant le chargement dynamique calculé par la méthode de l'équilibrage harmonique, s'avèrent être cohérents avec les résultats obtenus par DLFT. Ils donnent cependant une répartition plus détaillée des différentes données du contact.

Pour finir, la finesse de discrétisation considérée pour la résolution semi-analytique a permis d'étudier l'usure des interfaces de contact, correspondant aux dernières étapes du couplage mis en œuvre dans ces travaux. Ces calculs d'usure ont été réalisés pour le chargement par vortex de sol même si celui-ci n'est pas approprié à ce type d'étude, dans un but de prouver l'applicabilité de la méthode complète. Comme observé pour le modèle de la roue aubagée simplifiée, l'usure est d'abord importante sur les bords de portées, dans les zones de concentrations de contraintes. Suite au lissage des bords, celle-ci se répartit ensuite sur une zone plus importante de l'interface. L'usure vient alors à terme diminuer les concentrations de contraintes en bords de portées et favoriser le glissement sur les interfaces. Pour finir, le modèle dynamique a pu être mis à jour afin de statuer sur l'impact de l'usure sur le comportement dynamique. Malgré un nombre de cycles d'usure considéré important, l'usure est assez faible, et son impact sur la réponse forcée de la soufflante reste négligeable. Le même comportement que sur la roue aubagée simplifiée est cependant observé, avec une diminution de l'amplitude vibratoire avec l'augmentation de la profondeur d'usure. Le couplage réalisé a cependant bien permis de mettre en avant l'importance de considérer l'usure, du fait de son impact sur le comportement local dans les interfaces.

# Conclusion

## Bilan des travaux

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit avaient pour objectif d'étudier le comportement dynamique vibratoire non linéaire avec frottement des roues aubagées en se concentrant sur l'étude détaillée des interfaces de contact aube-disque. Ce chargement dynamique impliquait aussi l'apparition d'usure par fretting au niveau des interfaces de contact, pouvant impacter les réponses vibratoires à terme.

L'étude du comportement dynamique vibratoire a été réalisée par une méthode fréquentielle, la méthode de l'équilibrage harmonique, permettant d'étudier directement le régime périodique stationnaire en s'affranchissant des calculs transitoires. Du fait de la taille des modèles considérés et les temps de calculs pouvant être engendrés par la résolution non-linéaire, le système a été étudié sur un seul secteur de référence via les hypothèses de symétrie cyclique, et réduit par une méthode de sous-structuration à interfaces fixes. Le problème de contact avec frottement étant fortement non-linéaire et n'ayant pas d'expression dans le domaine fréquentiel, une procédure d'estimation en temporel des efforts de contact a été appliquée, via l'utilisation de transformées de Fourier permettant le passage entre domaines temporel et fréquentiel. Cette méthode basée sur des Lagrangiens dynamiques et couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique permet ainsi d'étudier à la fois la réponse forcée de la roue aubagée, et les modes complexes non-linéaires représentant le comportement non-linéaire général.

Du fait des durées des calculs dynamiques non-linéaires, il est impossible d'y considérer un maillage finement discrétisé, pourtant nécessaire à l'étude détaillée du contact et notamment à la prise en compte de l'usure par fretting. Une méthodologie de couplage faible avec une méthode de résolution du contact permettant de traiter ce type de maillage a alors été mise en place. Le comportement dynamique structural a donc été extrait du calcul par équilibrage harmonique à la résonance non-linéaire et utilisé comme chargement pour une méthode semi-analytique de résolution du problème de contact à posteriori. Cette méthode est basée sur la superposition de solutions analytiques développées pour le contact entre massifs élastiques semi-infinis, et nécessite donc le respect de cette hypothèse impliquant que le comportement du contact n'a pas d'impact sur le comportement structural éloigné du contact, bien respectée dans les cas considérés dans ce manuscrit. La superposition est en pratique réalisée via la sommation de coefficients analytiques dans les deux directions du contact. Cette double sommation équivaut à un produit de convolution

transformable en un produit classique dans l'espace de Fourier, suite à l'utilisation de transformées de Fourier spatiales. Cette astuce numérique permet alors de traiter un problème de contact entre interfaces très finement discrétisées pour des temps de calcul relativement rapides, offrant une grande précision dans les résultats.

La finesse du maillage considéré rend alors possible l'étude de l'usure par fretting des interfaces de contact, via l'utilisation d'une reformulation locale de la loi d'Archard après un cycle de chargement vibratoire. La profondeur calculée après un cycle peut être accélérée via un facteur multiplicatif après un certain nombre de cycles. Le couplage mis en place dans ces travaux permet ensuite de mettre à jour les interfaces de contact des modèles utilisés pour les calculs semi-analytiques ou dynamiques, afin de déterminer l'impact de l'usure sur le comportement du contact et sur le comportement vibratoire.

L'ensemble du couplage mis en place dans ces travaux a pu être testé sur deux cas d'application. Le premier cas considéré était un modèle de roue aubagée simplifié, ayant une géométrie permettant d'avoir un comportement mécanique représentatif d'un modèle réel. Ce modèle présente l'avantage d'avoir des temps de calcul limités, une analyse des résultats simple et non-confidentielle. L'étude dynamique non-linéaire a montré l'impact non-négligeable de la dissipation par frottement, induisant une diminution des niveaux vibratoires. Deux super-éléments ont été considérés afin de statuer sur la convergence des résultats vis à vis du nombre de nœuds d'interface. Malgré un léger décalage en fréquence, les réponses forcées non-linéaires ont bien la même amplitude, montrant une bonne estimation des niveaux vibratoires non-linéaires quelque soit la discrétisation. L'étude des résultats locaux dans le contact a cependant montré les limitations des maillages peu discrétisés par l'absence d'observation des effets de bords du contact par exemple.

L'utilisation de la méthode semi-analytique a alors permis de considérer un maillage finement discrétisé, mettant en évidence ces phénomènes particuliers au contact de type pion/plan, tel le contact aube-disque. En effet, les effets de bords, à savoir les concentrations de contraintes en bord de contact, sont alors bien observés. Cette discrétisation offre aussi une meilleure estimation de la répartition des efforts et glissements sur les interfaces de contact. Il est à noter que les résultats obtenus à l'aide du chargement dynamique issu du modèle le moins discrétisé sont similaires à ceux obtenus pour l'autre super-élément, permettant à terme de ne considérer qu'un super-élément moyennement discrétisé lors des phases de conception en bureau d'étude, minimisant les temps de calculs dynamiques.

En appliquant la loi d'usure locale sur les résultats par la méthode semi-analytique, l'usure a pu être prise en compte via la mise à jour des interfaces de contact. Lors des premiers cycles d'usure, celle-ci se localise principalement sur les bords de portées, venant alors diminuer les concentrations de contraintes dues aux effets de bords. L'usure se généralise dans un second temps à l'ensemble de l'interface de façon plus homogène. Le modèle utilisé pour l'étude dynamique a aussi pu être mis à jour, montrant une légère diminution des amplitudes vibratoires pour les modèles usés. En effet, l'usure a tendance à favoriser le glissement sur les interfaces et donc à augmenter la dissipation d'énergie par frottement, se traduisant par une diminution des amplitudes vibratoires. Cet impact de l'usure sur la réponse vibratoire reste cependant assez faible. Il est à noter qu'il est préférable

de déterminer le facteur d'accélération de l'usure à l'aide d'un critère en profondeur d'usure, afin d'éviter de considérer une usure trop profonde engendrant des modifications conséquentes et non-physiques du comportement général.

Dans un second temps, la méthodologie de couplage a été appliquée au cas d'une soufflante industrielle. Ce cas d'application permet de montrer l'applicabilité de l'ensemble du couplage à un modèle complexe sous différents aspects : aubes en matériaux composites, géométrie complexe ou encore chargement aérodynamique. Afin de valider les observations faites sur le modèle simplifié quant à la convergence de la discrétisation des interfaces, 3 super-éléments ont été construits. Le super-élément avec la discrétisation la plus fine confirme la limitation quant aux temps de calculs engendrés, et a donc été utilisé à des fins de validation car il serait difficilement employable par des bureaux d'étude en conception.

L'ensemble des résultats obtenus pour ce modèle est cohérent avec ceux du modèle simplifié. La réponse dynamique non-linéaire est en effet convergée pour les trois super-éléments et montre la dissipation induite par le frottement en comparaison aux résultats avec interfaces de contact collées. Les résultats dans le contact évalués lors des calculs dynamiques à l'aide de la méthode DLFT sont quant à eux cohérents et représentatifs du comportement attendu, mettant en évidence la torsion du pied d'aube due à son vrillage, par une alternance des zones de glissement entre les cotés bord d'attaque et bord de fuite des portées. La méthode semi-analytique a cependant bien dû être utilisée afin d'obtenir une discrétisation suffisante à une bonne répartition des données du contact sur les interfaces et à l'observation des effets de bords notamment.

La prise en compte de l'usure des interfaces a confirmé les résultats obtenus pour le modèle simplifié, par une usure principalement dans les zones de concentration de contraintes dans un premier temps, puis se généralisant à l'ensemble de la portée. Cependant, de par le type de chargement considéré, l'usure s'avère être faible malgré un grand nombre de cycles vibratoires, n'impliquant alors pas de modification significative des réponses dynamiques. Ce modèle a cependant bien montré l'applicabilité de l'ensemble des méthodes à un cas industriel complexe, ainsi que la cohérence des résultats obtenus, donnant de nombreuses informations sur le comportement vibratoire non-linéaire et sur le comportement détaillé du contact.

## Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent la voie à plusieurs perspectives. Cette section présente ces différentes possibilités de perspectives et s'organise en trois parties : les améliorations pouvant être apportées aux méthodes de calcul, le perfectionnement du modèle numérique industriel de soufflante, et les champs d'application envisageables pour ces travaux.

La méthode de l'équilibrage harmonique a montré son efficacité et sa précision dans l'estimation du comportement dynamique de la structure. Cependant, différentes hypothèses ont été considérées afin de simplifier la résolution qu'il pourrait être nécessaire de lever afin d'améliorer les résultats, notamment à des fins de corrélation avec des essais. Dans un premier temps, il

serait intéressant de lever l'hypothèse de symétrie cyclique en considérant les phénomènes de désaccordage induisant une amplification de la réponse vibratoire localisée sur certains secteurs. Les roues aubagées réelles présentent effectivement des irrégularités entre les différents secteurs, dues à la fabrication par exemple, qu'il est important de considérer. De nombreux travaux récents ont pour objectif de modéliser le désaccordage, notamment via l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique couplée à une méthode de réduction par triple synthèse modale utilisant la notion de modes complexes non-linéaires, appelée CNCMS [63][87], qui pourrait être facilement applicable à ces travaux.

La prise en compte des effets de Coriolis dans les calculs dynamiques pourrait aussi apporter une meilleure représentativité et compréhension des phénomènes vibratoires. L'effet de Coriolis peut induire une ouverture des fréquences propres des modes dégénérés, venant modifier les fréquences en fonction de la vitesse de rotation, particulièrement notable sur des applications de soufflantes nouvelle génération avec des aubes à large corde et des disques plus souples. D'autres non-linéarités pourraient aussi être considérées pour les calculs dynamiques, notamment les non-linéarités géométriques pouvant se matérialiser sur les aubes de taille importante, et qui font l'objet de nombreuses recherches actuellement [89][36].

Les études expérimentales mettent aussi régulièrement en avant les limitations des lois de frottement. Il pourrait ainsi être intéressant de prendre en compte un coefficient de frottement variable en fonction de la vitesse de rotation ou des amplitudes de glissement [87], afin de mieux représenter le comportement réel du contact et d'offrir une meilleure corrélation avec des essais, que ce soit pour la résolution du contact en dynamique via la DLFT ou pour la résolution semi-analytique.

L'étude du cas d'application industriel a permis de confirmer les résultats attendus. Différentes simplifications ont cependant été introduites afin de faciliter l'étude. Dans un premier temps, il serait possible d'améliorer la modélisation de la zone de contact en considérant le clinquant, qui est une pièce intermédiaire placée entre l'aube et le disque n'ayant pas été prise en compte dans ces travaux. Une couche de matériau abrasable est aussi appliquée sur le pied d'aube, dans l'objectif de s'user à la place du composite. Cette couche, appelée *wearstrip*, pourrait facilement être modélisable via l'introduction d'un revêtement. Enfin, les propriétés du matériau composite en pied d'aube ont été moyennées sur les interfaces pour le calcul semi-analytique. Les propriétés du composite pourraient être modélisées par zones, à l'image des méthodes d'homogénéisation utilisées dans le modèle éléments-finis.

A terme, un des objectifs de ces travaux est aussi de réaliser une corrélation avec les données d'essais mesurées lors des essais en vent de travers à Peebles. Afin de mener à bien cette corrélation et donc de valider les méthodes de modélisation, il faudrait déterminer les contraintes dans des zones à proximité des portées de contact, où les jauges de déformation étaient placées lors des essais. Du fait de la réduction en super-éléments réalisée dans ces travaux, les résultats dans ces zones n'ont pas été déterminés. Cette étude pourrait cependant être menée en restituant les résultats sur le modèle complet à partir des résultats en super-éléments.

L'usure par fretting due au comportement vibratoire s'est montrée assez faible pour le cas

d'application considéré, n'impliquant qu'une modification négligeable des amplitudes vibratoires. Il pourrait cependant être intéressant de considérer l'impact de l'usure sous d'autres chargements sur les niveaux vibratoires. L'usure oligocyclique (LCF), notamment étudiée par Gallego [47], pourrait ainsi être prise en compte dans les modèles, de même que l'usure sous d'autres chargements vibratoires présents sur des plages de fonctionnement plus longues que le vortex de sol.

Pour finir, le couplage réalisé dans ce manuscrit pourrait être appliqué à de nombreux autres cas industriels, donnant alors la possibilité d'étudier le comportement dynamique et le comportement détaillé des interfaces de contact pour ces cas. En effet, le contact frottant est régulièrement utilisé dans les turboréacteurs pour réduire les niveaux vibratoires. Ces travaux pourraient ainsi être appliqués pour les contacts entre aubes sur les aubes à talons, pour le contact entre les aubes et les amortisseurs sous plateforme, ou encore pour les joncs de friction.



# Bibliographie

- [1] ALLGOWER, E. L., AND GEORG, K. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. 50
- [2] ALLWOOD, J. Survey and Performance Assessment of Solution Methods for Elastic Rough Contact Problems . *Journal of Tribology* 127, 1 (02 2005), 10–23. 91,174
- [3] ANSAR, M., XINWEI, W., AND CHOUWEI, Z. Modeling strategies of 3d woven composites : A review. *Composite Structures* 93, 8 (2011), 1947 – 1963. 129
- [4] ARCHARD, J. F. Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of Applied Physics* 24, 8 (1953), 981–988. 35, 100, 114
- [5] ARMAND, J., SALLES, L., SCHWINGSHACKL, C. W., SÜSS, D., AND WILLNER, K. On the effects of roughness on the nonlinear dynamics of a bolted joint : a multiscale analysis. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 70 (July 2018), 44–57. 37, 90, 101
- [6] ASSIS RODRIGUES, F. *Etude de la dynamique non linéaire d’amortisseurs du type squeeze film*. PhD thesis, 2003. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. 46
- [7] BEISHEIM, J. R., AND SINCLAIR, G. B. On the Three-Dimensional Finite Element Analysis of Dovetail Attachments . *Journal of Turbomachinery* 125, 2 (04 2003), 372–379. 36,173
- [8] BENFIELD, W. A., AND HRUDA, R. F. Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal* 9, 7 (1971), 1255–1261. 27,59
- [9] BENTALL, R. H., AND JOHNSON, K. L. Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers. *International Journal of Mechanical Sciences* 9 (1967), 389–404. 38
- [10] BERTHELON, T. *Réponse forcée du fan sous ingestion de vortex*. PhD thesis, 2020. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon. 12, 128, 135, 136, 137, 176
- [11] BERTHELON, T., DUGEAI, A., LANGRIDGE, J., AND THOUVEREZ, F. Ground effet on fan forced response. In *Proceedings of the 15th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines, ISUAAAT15* (10 2018). 142
- [12] BERTHELON, T., DUGEAI, A., LANGRIDGE, J., AND THOUVEREZ, F. Analysis of vortex ingestion impact on the dynamic response of the fan in resonance condition. In *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2019 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition. Volume 7A : Structures and Dynamics*. (06 2019). 136

- [13] BEYER, T. *Semi-analytical modeling of damage under contact loading : Application to heterogeneous materials*. PhD thesis, 2019. Thèse de doctorat dirigée par Nélias, Daniel Mécanique Lyon 2019. 2,38
- [14] BLADH, R., CASTANIER, M. P., AND PIERRE, C. Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks—Part I : Theoretical Models . *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 1 (04 2000), 89–99. 27
- [15] BLADH, R., CASTANIER, M. P., AND PIERRE, C. Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks—Part II : Application . *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123, 1 (04 2000), 100–108. 27
- [16] BOUC, R. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. 31
- [17] BOUCLY, V., NELIAS, D., LIU, S., WANG, Q., AND KEER, L. Contact analysis for bodies with frictional heating and plastic behavior. In *World Tribology Congress III* (United States, Sept. 2005). 38
- [18] BRANDT, A., AND LUBRECHT, A. Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations. *Journal of Computational Physics* 90 (oct 1990), 348–370. 38
- [19] CAMERON, T. M., AND GRIFFIN, J. H. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics* 56, 1 (Mar. 1989), 149–154. 47,48
- [20] CASTANIER, M., AND PIERRE, C. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA Journal* 40 (01 2002), 2077–2086. 27
- [21] CASTANIER, M. P., AND PIERRE, C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : Current status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power* 22, 2 (2006), 384–396. 27,173
- [22] CATANEO, C. Sul contatto di due corpi elastici : distribuzione locale degli sforzi. *Accademia Nazionale Lincei, Rendiconti, Ser. 6, vol. XXVII* (1938), 342–348, 434–436, 474–478. 37
- [23] CERRUTI, V. *Ricerche intorno all'equilibrio de'corpi elastici isotropi, memoria del Valentino Cerruti*. Salviucci, Roma, 1882. OCLC : 83344683. 92
- [24] CHARLEUX, D. *Etude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, 2006. Thèse de doctorat dirigée par Thouverez, Fabrice Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2006. 2, 36, 46, 53, 65, 75
- [25] CHOI, B.-K., LENTZ, J., RIVAS-GUERRA, A. J., AND MIGNOLET, M. P. Optimization of Intentional Mistuning Patterns for the Reduction of the Forced Response Effects of Unintentional Mistuning : Formulation and Assessment . *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125, 1 (12 2002), 131–140. 27
- [26] COLIN, Y. *Simulation numérique de la distorsion générée par une entrée d'air de moteur civil par vent de travers*. PhD thesis, 2007. Thèse de doctorat dirigée par Aupoix, Bertrand Dynamique des fluides Toulouse, ISAE 2007. 12
- [27] CONN, A. R., GOULD, N. I. M., AND TOINT, P. L. *Trust Region Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. 48,62

- [28] COOLEY, J. W., AND TUKEY, J. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation* 19, 297–301. 95
- [29] CORRAL, R., KHEMIRI, O., AND MARTEL, C. Design of mistuning patterns to control the vibration amplitude of unstable rotor blades. *Aerospace Science and Technology* 80 (2018), 20–28. 12
- [30] COUDEYRAS, N. *Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein*. PhD thesis, 2009. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis et Sinou, Jean-Jacques Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2009. 45
- [31] CRAIG, R., AND BAMPTON, M. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal* 6, 7 (1968), 1313–1319. 55, 57, 72
- [32] CRAIG, R. R., AND CHANG, C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal* 14, 11 (1976), 1633–1635. 59
- [33] DAMBRINE, B., MOLINARI, O., AND COUPE, D. Turbomachine blade, in particular a fan blade, and its method of manufacture, US Patent 7, 101 154, sept. 5 2006. 9
- [34] DEMAILLY, D. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application à la dynamique rotor*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, Jan. 2003. 46
- [35] DI MARE, L., SIMPSON, G., AND SAYMA, A. I. Fan forced response due to ground vortex ingestion. vol. Volume 5 : Marine ; Microturbines and Small Turbomachinery ; Oil and Gas Applications ; Structures and Dynamics, Parts A and B of *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, pp. 1123–1132. 12
- [36] DI PALMA, N., MARTIN, A., THOUVEREZ, F., AND COURTIER, V. Nonlinear Harmonic Analysis of a Blade Model Subjected to Large Geometrical Deflection and Internal Resonance. In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2019 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition* (Phoenix, United States, June 2019). 160
- [37] DRAGON-LOUISET, M. On a predictive macroscopic contact-sliding wear model based on micromechanical considerations. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), 1625–1639. 35
- [38] DUMARTINEIX, C. *Modélisation et étude de la dynamique complexe d'un système bi-rotor aubagé couplé*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2019. 7,173
- [39] DUVAUT, G., AND LIONS, J.-L. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972, Paris, France, 1972. 97
- [40] EWINS, D. J. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound Vibration* 9, 1 (Jan. 1969), 65,IN2,73–72,IN2,79. 26
- [41] FLETCHER, R. *Practical Methods of Optimization*, 2 edition ed. Wiley, Chichester, May 2000. 48
- [42] FOUVRY, S., DUÓ, P., AND PERRUCHAUT, P. A quantitative approach of ti-6al-4v fretting damage : Friction, wear and crack nucleation. *Wear* 257 (11 2004), 916–929. 34,35

- [43] FOUVRY, S., VINCENT, L., KAPSA, P., AND DANG VAN, K. Theoretical analysis of fatigue cracking under dry friction for fretting loading conditions. *Wear* 195 (1996), 21–34. 34
- [44] FRIDRICI, V. *Fretting d'un alliage de titane revêtu et lubrifié : application au contact aube/disque*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002. 32
- [45] FULLERINGER, B. *Semi-analytical modeling of complex mechanical contacts : application to inclusions and wear of coated surfaces*. PhD thesis, 2011. Thèse de doctorat dirigée par Nélias, Daniel Mécanique Lyon, INSA 2011. 2, 38, 93, 174
- [46] GALLEGO, L., FULLERINGER, B., DEYBER, S., AND NELIAS, D. Multiscale computation of fretting wear at the blade/disk interface. *Tribology International* 43, 4 (2010), 708–718. 91
- [47] GALLÉGO, L. *Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique*. PhD thesis, 2007. Thèse de doctorat dirigée par Nélias, Daniel Mécanique. Génie mécanique. Génie civil Lyon, INSA 2007. 2, 31, 34, 35, 37, 38, 90, 91, 95, 96, 98, 100, 101, 115, 119, 155, 161, 173
- [48] GANESAN, R. Nonlinear Vibrations and Stability of a Rotor-Bearing System With Nonsymmetric Clearances. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 119, 2 (Apr. 1997), 418–424. 44
- [49] GEORGIADIS, F., PEETERS, M., KERSCHEN, G., GOLINVAL, J. C., AND RUZZENE, M. Modal analysis of a nonlinear periodic structure with cyclic symmetry. *AIAA Journal* 47, 4 (2009), 1014–1025. 66
- [50] GIBERT, C. Fitting measured frequency response using non-linear modes. *Mechanical Systems and Signal Processing* 17, 1 (2003), 211 – 218. 80
- [51] GODET, M. The third-body approach : a mechanical view of wear. *Wear* 100 (1984), 437–452. 35
- [52] GORYACHEVA, I. G., RAJEEV, P. T., AND FARRIS, T. N. Wear in Partial Slip Contact . *Journal of Tribology* 123, 4 (11 2000), 848–856. 35
- [53] GÉRADIN, M. *Théorie des Vibrations : Application à la Dynamique des Structures*. Elsevier Masson, Paris ; Milan, 2000. 44
- [54] GREEN, J. S. Forced Response of a Large Civil Fan Assembly. vol. Volume 5 : Structures and Dynamics, Parts A and B of *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, pp. 685–692. 12
- [55] GROLET, A. *Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique*. PhD thesis, 2013. Thèse de doctorat dirigée par Thouverez, Fabrice Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2013. 28, 44, 46, 48, 51, 60
- [56] GUYAN, R. J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal* 3, 2 (Feb. 1965), 380. 55
- [57] HAMILTON, G. M., AND GOODMAN, L. E. The Stress Field Created by a Circular Sliding Contact. *Journal of Applied Mechanics* 33, 2 (06 1966), 371–376. 37

- [58] HENDERSON, G., AND FLEETER, S. Aerodynamically forced response and flutter of structurally mistuned bladed disks in subsonic flow. *Journal de Physique III* 2, 9 (1992), 1813–1833. 12
- [59] HERTZ, H. On the Contact of Elastic Solids. *J Reine Angew. Math* 92 (1882), 156–171. 32, 37, 92
- [60] HILLS, D., AND NOWELL, D. Mechanics of fretting fatigue. *Springer* (1994). 32
- [61] HOU, S. Review of modal synthesis techniques and a new approach, 1969. 55
- [62] JI, Z., AND ZU, J. W. Method of multiple scales for vibration analysis of rotor shaft systems with non-linear bearing pedestal model. *Journal of Sound and Vibration* 218, 2 (Nov. 1998), 293–305. 44
- [63] JOANNIN, C. *Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires : Application à la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Thouverez, Fabrice et Chouvion, Benjamin Mécanique Lyon 2017. 2, 25, 36, 59, 60, 66, 67, 80, 160, 173
- [64] JOANNIN, C., CHOUVION, B., THOUVEREZ, F., OUSTY, J.-P., AND MBAYE, M. A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems. *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 (06 2016). 27,80
- [65] JOHNSON, K. Contact Mechanics. *Cambridge University Press, London* (1985). 37, 92, 93
- [66] JONES, S., AND LEGRAND, M. Vibrations of mechanical systems undergoing regularized unilateral contact conditions through the wavelet balance method. working paper or preprint, Mar. 2013. 46
- [67] JOSEPH BOUSSINESQ. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques ...* Gauthier-Villars, 1885. 92
- [68] JOSHI, A. G. S., AND EPUREANU, B. I. Reduced Order Models for Blade-To-Blade Damping Variability in Mistuned Blisks. *Journal of Vibration and Acoustics* 134, 5 (09 2012). 051015. 27
- [69] JU, Y., AND FARRIS, T. N. Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems. *Journal of Tribology* 118, 2 (04 1996), 320–328. 38
- [70] JÉZÉQUEL, L. *Synthèse modale : théorie et extensions*. PhD thesis, 1985. Thèse de doctorat dirigée par Sidoroff, François Sciences Lyon 1 1985. 59
- [71] KALKER, J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht* (1990). 38
- [72] KALKER, J. J., AND VAN RANDEN, Y. A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems. *Journal of engineering mathematics* 6, 2 (1972), 193–206. 97
- [73] KAZA, K. R. V., AND KIELB, R. E. Vibration and flutter of mistuned bladed-disk assemblies. *Journal of Propulsion and Power* 1, 5 (1985), 336–344. 27
- [74] KERSCHEN, G., PEETERS, M., GOLINVAL, J.-C., AND VAKAKIS, A. Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing* 23, 1 (Jan. 2009), 170–194. 80

- [75] KOUMI, K. E. *Modélisation du contact entre matériaux hétérogènes : Application au contact Aube/Disque*. PhD thesis, 2015. Thèse de doctorat dirigée par Nélias, Daniel Mécanique - Génie mécanique - Génie civil Lyon, INSA 2015. 38
- [76] KRACK, M., AND PANNING-VON SCHEIDT, L. *Nonlinear Modal Analysis and Modal Reduction of Jointed Structures*. 07 2018, pp. 525–538. 80
- [77] KRACK, M., PANNING-VON SCHEIDT, L., AND WALLASCHEK, J. A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems. *Journal of Sound Vibration* 332 (12 2013), 6798–6814. 80
- [78] LAXALDE, D., AND THOUVEREZ, F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration* 322 (05 2009), 1009–1025. 2, 66, 67, 80, 81
- [79] LAXALDE, D., THOUVEREZ, F., AND LOMBARD, J.P. Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures. *Mechanics Research Communications* (2007), 379–384. 66
- [80] LEROUX, J. *Modélisation numérique du contact pour matériaux composites*. PhD thesis, 2013. Thèse de doctorat dirigée par Nélias, Daniel Mécanique du contact Lyon, INSA 2013. 2,38
- [81] LESAFFRE, N., , SINOUE, J.-J., AND THOUVEREZ, F. Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure. *Journal of Sound and Vibration* 299, 4–5 (2007), 1005–1032. 11
- [82] LESAFFRE, N. *Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator*. PhD thesis, 2007. Thèse de doctorat dirigée par Thouverez, Fabrice Sciences. Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2007. 45
- [83] LI, D., WANG, Z., AND WANG, Q. Explicit analytical solutions for elastic fields in two imperfectly bonded half-spaces with a thermal inclusion. *International Journal of Engineering Science* 135 (Feb. 2019), 1–16. 38
- [84] LIU, S., WANG, Q., AND LIU, G. A versatile method of discrete convolution and fft (dc-fft) for contact analyses. *Wear* 243, 1 (2000), 101 – 111. 95
- [85] LOVE, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 92
- [86] M. LEGRAND, M., PIERRE, C., AND PESEUX, B. Structural modal interaction of a four-degree-offreedom bladed disk and casing model. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* (oct 2010). 11
- [87] MABILIA, A. *Dynamique non-linéaire d'une soufflante en rotation*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2020. 2, 80, 129, 160, 176
- [88] MACNEAL, R. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures* 1, 4 (1971), 581–601. 55,56
- [89] MARTIN, A. *Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2019. 2, 28, 46, 51, 59, 160

- [90] MBAYE, M., SOIZE, C., AND OUSTY, J.-P. A reduced-order model of detuned cyclic dynamical systems with geometric modifications using a basis of cyclic modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the Asme* 132, 11 (2010), Article Number 112502. 27
- [91] M'EWEN, E. Xli. stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix (including the effect of tangential friction). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 40, 303 (1949), 454–459. 32,37
- [92] MIKHLIN, S. Integral Equations. *Pergamon press, London* (1957). 37
- [93] MILLECAMPS, A. *Interaction aube-carter : contribution de l'usure de l'abradable et de la thermomécanique sur la dynamique d'aube*. PhD thesis, 2010. Thèse de doctorat dirigée par Dufrénoy, Philippe et Brunel, Jean-François Mécanique Lille 1 2010. 11
- [94] MINDLIN, R. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics* (1949). 37
- [95] MOHRBACHER, H., BLANPAIN, B., CELIS, J., ROOS, J., STALS, L., AND STAPPEN, M. Oxidational wear of tin coatings on tool steel and nitrided tool steel in unlubricated fretting. *Wear* 188 (1995), 130–137. 32
- [96] MUSKHELISHVILI, N. Singular Integral Equations. *P. Nordhoff N.V., Gronnigen* (1953). 37
- [97] NACIVET, S. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. PhD thesis, 2002. Thèse de doctorat dirigée par Jézéquel, Louis Sciences. Mécanique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2002. 2, 31, 36, 46, 60, 62, 63, 64
- [98] NELSON, F. A review of the origins and current status of rotor dynamics. *Sixth International Conference on Rotor Dynamics* (Sydney, Australia, 2002). 12
- [99] PANAGIOTOPOULOS, P. D. A nonlinear programming approach to the unilateral contact-, and friction-boundary value problem in the theory of elasticity. *Ingenieur-Archiv* 44 (1975), 421–432. 95
- [100] PARENT, M.-O., AND THOUVEREZ, F. Phenomenological model for stability analysis of bladed rotor-to-stator contacts. In *International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, (Honolulu, United States)* (apr 2016). 11
- [101] PAULIN, C. *Étude de l'endommagement du contact multicouche aube/disque sous chargement de fretting : impact des sollicitations variables et de la dimension du contact*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006. 32, 35, 100, 114
- [102] PAULIN, C., FOUVRY, S., AND DEYBER, S. Wear kinetics of ti-6al-4v under constant and variable fretting sliding conditions. *Wear* 259 (07 2005), 292–299. 100
- [103] PESARESI, L., SALLES, L., ELLIOTT, R., JONES, A., GREEN, J., AND SCHWINGSHACKL, C. Numerical and Experimental Investigation of an Underplatform Damper Test Rig. *Applied Mechanics and Materials* 849 (Aug. 2016), 1–12. 90
- [104] PETROV, E. P. A Method for Use of Cyclic Symmetry Properties in Analysis of Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Bladed Disks . *Journal of Turbomachinery* 126, 1 (03 2004), 175–183. 54

- [105] PHILIPPE, J. *Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés*. PhD thesis, 2016. Thèse de doctorat dirigée par Thouverez, Fabrice Mécanique Lyon 2016. 59
- [106] PIERRE, C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration* 126 (1985), 485–502. 27
- [107] POLONSKY, I. A., AND KEER, L. M. Fast Methods for Solving Rough Contact Problems : A Comparative Study . *Journal of Tribology* 122, 1 (04 1999), 36–41. 38,98
- [108] PRESS, W. H., Ed. *FORTRAN numerical recipes*, 2nd ed ed. Cambridge University Press, Cambridge [England]; New York, 1996. 95
- [109] RENSON, L., KERSCHEN, G., AND COCHELIN, B. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration* 364 (2016), 177 – 206. 66
- [110] ROSENBERG, R. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. vol. 9 of *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, 1966, pp. 155 – 242. 66
- [111] ROSENBERG, R. M. Normal Modes of Nonlinear Dual-Mode Systems. *Journal of Applied Mechanics* 27, 2 (06 1960), 263–268. 66
- [112] ROSENBERG, R. M. The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems. *Journal of Applied Mechanics* 29, 1 (03 1962), 7–14. 66
- [113] ROSENBERG, R. M., AND KUO, J. K. Nonsimilar Normal Mode Vibrations of Nonlinear Systems Having Two Degrees of Freedom. *Journal of Applied Mechanics* 31, 2 (06 1964), 283–290. 66
- [114] SACKFIELD, A., AND HILLS, D. A. Some useful results in the classical hertz contact problem. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 18, 2 (1983), 101–105. 37
- [115] SADOUDI, Y. *Simulation numérique de l'interaction soufflante/nacelle en présence de vent de travers*. Theses, INSTITUT SUPERIEUR DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE , Mar. 2016. 12
- [116] SALLES, L. *Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d'aubes de turbomachines*. PhD thesis, 2010. Thèse de doctorat dirigée par Thouverez, Fabrice et Gouskov, Alexandre Electronique, Electrotechnique et Automatique Ecully, Ecole centrale de Lyon 2010. 2, 33, 35, 44, 60, 101, 115, 173
- [117] SETIO, S., SETIO, H., AND JEZEQUEL, L. A method of non-linear modal identification from frequency response tests. *Journal of Sound and Vibration* 158, 3 (1992), 497 – 515. 80
- [118] SHAW, S., AND PIERRE, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration* 150, 1 (1991), 170 – 173. 66
- [119] SHAW, S., AND PIERRE, C. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration* 164, 1 (1993), 85 – 124. 66
- [120] SICOT, F. *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2009. 11,173

- [121] SIEWERT, C., AND STÜER, H. Forced response analysis of mistuned turbine bladings. In *Proceedings of the ASME Turbo Expo* (10 2010), vol. 6. 27
- [122] SINGLETON, R. An algorithm for computing the mixed radix fast fourier transform. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 17, 2 (1969), 93–103. 95
- [123] SUNDARARAJAN, P., AND NOAH, S. T. Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method—Application to Rotor Systems. *Journal of Vibration and Acoustics* 119, 1 (01 1997), 9–20. 45
- [124] SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, W. The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration* 63, 4 (1979), 475 – 489. 80
- [125] THOMAS, D. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1979), 81 – 102. 20
- [126] THOMAS, O. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI; Telecom ParisTech, Oct. 2001. 28
- [127] VALID, R., AND OHAYON, R., J. Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. *La Recherche aérospatiale* 4 (1985), 261–263. 20
- [128] WANG, F., AND KEER, L. M. Numerical Simulation for Three Dimensional Elastic-Plastic Contact with Hardening Behavior. *Journal of Tribology* 127, 3 (03 2005), 494–502. 38
- [129] WEN, Y. Method for Random Vibration of Hysteretic Systems. *Journal of Engineering Mechanics* 102 (2016), 249–263. 31
- [130] WILDHEIM, J. Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration* 75, 3 (1981), 397–416. 20
- [131] WILDHEIM, S. J. Excitation of Rotationally Periodic Structures. *Journal of Applied Mechanics* 46, 4 (12 1979), 878–882. 20,53
- [132] ZHOU, K., CHEN, W., KEER, L., AND WANG, Q. A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (02 2009), 885–892. 38
- [133] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The Finite Element Method, Volume 2 : Solid Mechanic*. 01 2000. 15



# Table des figures

I.1	Coupe d'un moteur LEAP® de CFM International.. . . . .	6
I.2	Schéma vue en coupe d'un turboréacteur double corps, double flux. [38] . . . . .	7
I.3	Schéma en vue dépliée du dessus d'un étage de compresseur axial. . . . .	8
I.4	Évolution des aubes de soufflantes des moteurs CFM International. . . . .	9
I.5	Représentation des effets de sillage en entropie [120]. . . . .	11
I.6	Vortex de sol sur un turboréacteur. . . . .	13
I.7	Solide déformable dans sa configuration de référence non déformée. . . . .	13
I.8	Solide déformable dans sa configuration initiale ( $t = 0$ ) et déformée ( $t > 0$ ). . . . .	14
I.9	Schéma simplifié d'une roue aubagée présentant des propriétés de symétrie cyclique.	19
I.10	Conditions limites aux frontières entre les secteurs. . . . .	23
I.11	Déformées modales des modes simples, d'après [63].. . . .	25
I.12	Déformées modales orthogonales d'un mode double pour l'indice harmonique $k = 2$ , d'après [63]. . . . .	25
I.13	Déformées modales d'une roue aubagée accordée (à gauche) et désaccordée (à droite), représentant le phénomène de localisation de l'énergie vibratoire. [source Siemens]. . . . .	26
I.14	Facteur d'amplification en fonction du taux de désaccordage, d'après [21]. . . . .	27
I.15	Roue aubagée à pales rapportées et disque aubagé monobloc (DAM). . . . .	29
I.16	Formes des pieds d'aubes en queue d'arronde (a) et en sapin (b).. . . . .	29
I.17	Méthodes d'amortissement passif utilisées pour les roues aubagées.. . . .	30
I.18	Lois de contact unilatéral (a) et de frottement de Coulomb (b). . . . .	31
I.19	Modes de fretting, d'après [116].. . . .	33
I.20	Représentation du cycle de fretting et des conditions de glissement, en glissement partiel (a) et en glissement total (b), d'après [47].. . . .	34
I.21	Représentation de l'effort de contact sur une portée d'aube, d'après [7]. . . . .	36
II.1	Schéma de principe de la méthode AFT. . . . .	49
II.2	Continuation arc-length . . . . .	51
II.3	Illustration de différentes méthodes de prédiction.. . . .	52
II.4	Diagramme Zig-Zag représentant les diamètres nodaux répondant à une excitation à $n$ diamètres. . . . .	53
II.5	Modèle de la roue aubagée simplifiée. . . . .	68

II.6	Déformée statique due au chargement centrifuge en [mm]. . . . .	69
II.7	Diagramme fréquence-diamètre du modèle de roue aubagée simplifiée. . . . .	69
II.8	Déformée modale du premier mode de flexion flapwise à différents diamètres. . . . .	70
II.9	Déformées modales des premiers modes en diamètre 0. . . . .	70
II.10	Nœuds conservés sur une portée du pied d'aube pour la construction des super-éléments. . . . .	71
II.11	Influence du nombre d'instants temporels $n_{it}$ sur la réponse forcée, pour $N_h = 3$ . . .	75
II.12	Influence du nombre d'harmoniques $N_h$ sur la réponse forcée, pour $n_{it} = 32$ . . . . .	75
II.13	Influence de la valeur du coefficient de pénalité $\epsilon$ sur le temps de calcul. . . . .	76
II.14	Influence des paramètres du modèle sur la réponse forcée non-linéaire. . . . .	76
II.15	Etat de contact d'une portée de l'aube pour $\mu = 0.4$ et $\mu = 0.6$ , au même instant de la période. (●) : collé ; (●) : glissant ; (●) : séparé. . . . .	77
II.16	Influence de la discrétisation du super-élément sur la réponse forcée. . . . .	78
II.17	Mode complexe non-linéaire (—) et réponses forcées non-linéaires pour différentes amplitudes d'excitation $F_e$ (—). . . . .	79
II.18	Fréquence et taux d'amortissement en fonction de l'amplitude du DDL de contrôle. .	80
II.19	Comparaison entre les résultats obtenus par la DLFT en temporel et en fréquentiel sur un nœud de l'interface de contact au cours d'une période vibratoire : Efforts tangentiels ( $T$ ) et efforts normaux multipliés par le coefficient de frottement ( $\mu N$ ). .	82
II.20	Comparaison entre les résultats obtenus par la DLFT en temporel et en fréquentiel sur une ligne de nœuds en milieu de portée de contact à un instant de la période vibratoire : Efforts tangentiels ( $T$ ) et efforts normaux multipliés par le coefficient de frottement ( $\mu N$ ). . . . .	82
II.21	Représentation des nœuds en milieu de portée d'aube pour les deux super-éléments considérés. . . . .	84
II.22	Influence de la discrétisation du super-élément sur les efforts de contact, sur une ligne de nœuds en milieu de portée. . . . .	84
II.23	Influence de la discrétisation du super-élément sur les efforts de contact, sur une ligne de nœuds en milieu de portée. . . . .	84
II.24	Etat de contact d'une portée de l'aube pour les deux super-éléments SE1 et SE2, au même instant de la période. (●) : collé ; (●) : glissant ; (●) : séparé. . . . .	85
III.1	Définition du repère entre corps en contact. . . . .	90
III.2	Définition des notations des distances entre les corps, d'après [2]. . . . .	91
III.3	Chargement normal sur une interface discrétisée, d'après [45]. . . . .	93
III.4	Représentation de la procédure de couplage multi-échelle. . . . .	102
III.5	Comparaison des données d'entrée utilisées pour la méthode semi-analytique, extraites des calculs dynamiques pour les deux super-éléments SE1 en traits pleins (—) et SE2 en tirets (- -). Les courbes représentent les directions $X$ en rouge (—), $Y$ en vert (—) et $Z$ en bleu (—). . . . .	104

III.6	Repère utilisé pour le modèle résolu par la méthode semi-analytique, représenté sur une portée de l'aube avec le disque coupé pour la visualisation. . . . .	105
III.7	Schéma de représentation de la géométrie utilisée pour la résolution semi-analytique sur une portée de contact. . . . .	106
III.8	Méthode de visualisation des contraintes de pression sur une portée de l'aube. . . . .	107
III.9	Pressions et amplitudes de glissement pour les différentes discrétisations du modèle semi-analytique. . . . .	108
III.10	Pressions et amplitudes de glissement sur des lignes de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact, pour les différentes discrétisations du modèle semi-analytique. . . . .	109
III.11	Impact de la zone de calcul de la transformée de Fourier sur les résultats obtenus par la méthode semi-analytique. . . . .	110
III.12	Comparaison des résultats semi-analytiques obtenus avec les données d'entrées extraites des calculs dynamiques pour les super-éléments SE1 et SE2, sur une ligne de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact. . . . .	111
III.13	Contrainte de cisaillement $\sigma$ et coefficient de frottement multiplié par la contrainte de pression $\mu p$ , sur une ligne de nœuds en milieu de portée dans les deux directions du contact. . . . .	112
III.14	États de contact déterminés par résolution semi-analytique (a) et par la méthode de l'équilibrage harmonique (b). Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. . . . .	112
III.15	Amplitudes de glissement pour les modèles semi-analytiques et dynamiques pour les super-éléments SE1 et SE2, sur une ligne de nœuds dans les deux directions du contact. . . . .	113
III.16	Contrainte de cisaillement (a) et amplitudes de glissement (b) cumulés sur un cycle vibratoire. . . . .	114
III.17	Profondeur d'usure calculée après 1 cycle vibratoire. . . . .	115
III.18	Pressions et amplitudes de glissement pour les géométries de contact mises à jour avec différents facteurs d'accélération $\Delta N_c$ . . . . .	117
III.19	Profondeur d'usure après plusieurs cycles de mise à jour. . . . .	119
III.20	Pression sur les portées après plusieurs cycles de mise à jour. . . . .	119
III.21	Profondeur d'usure et pression de contact pour un modèle avec un nombre de cycles avant mise à jour trop élevé. . . . .	120
III.22	Réponses forcées non-linéaires pour des géométries usées extraites à différents cycles de mise à jour $\Delta N_c$ . . . . .	121
III.23	Réponse forcée du modèle utilisé pour un trop grand nombre de cycles sans mise à jour (MàJ) des interfaces intermédiaires. . . . .	122
III.24	Comparaison des données d'entrée utilisées pour la méthode semi-analytique, extraites des calculs dynamiques pour le super-élément SE2 sans usure en tirets (---) et avec usure pour $N_c = 3.10^8$ cycles en traits pleins (—). Les courbes représentent les directions X en rouge (—), Y en vert (—) et Z en bleu (—). . . . .	123

IV.1	Modèle de soufflante complet et secteur de référence, d'après [87] . . . . .	129
IV.2	Modèle éléments-finis d'un secteur de la soufflante et définition des notations utilisées.	130
IV.3	Déformation du modèle de soufflante soumis au chargement statique : précharge centrifuge et pression statique. . . . .	130
IV.4	Diagramme de Campbell. . . . .	131
IV.5	Diagramme fréquence-diamètre du modèle de soufflante, normalisé par rapport à la fréquence du premier mode. . . . .	132
IV.6	Déformée modale linéaire du deuxième mode de flexion à 4 diamètres nodaux. . . . .	132
IV.7	Nœuds conservés sur une portée du pied d'aube pour la construction des super-éléments. . . . .	134
IV.8	Soufflerie <i>General Electric</i> de Peebles lors des essais en vent de travers avec faux sol pour le démonstrateur de soufflante. . . . .	136
IV.9	Calculs aérodynamiques, d'après Berthelon [10]. . . . .	137
IV.10	Réponses forcées linéaires (lin) avec interfaces collées (---) et non-linéaires (nl) avec frottement (—) pour les trois super-éléments considérés. Les résultats sont normalisés par rapport à la fréquence et à l'amplitude maximale du SE2. . . . .	139
IV.11	Backbones du mode non-linéaire normalisées. . . . .	140
IV.12	Réponses forcées linéaires (lin) avec interfaces collées (---) et non-linéaires (nl) avec frottement (—) pour les modèles avec chargement ponctuel (—) et avec chargement aérodynamique (—). Les résultats sont normalisés par rapport à la fréquence et à l'amplitude maximale du SE2 avec chargement ponctuel. . . . .	141
IV.13	Représentation de la méthode de visualisation des résultats surfaciques sur les interfaces de contact dans les repères locaux normaux aux portées. Illustration pour l'état de contact à l'instant $i_t = 4$ de la période vibratoire. Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. . . . .	143
IV.14	État de contact de la portée Intrados pour les super-éléments SE1 et SE3, à l'instant $i_t = 4$ . Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. Résultats calculés par la méthode HBM-DLFT. . . . .	144
IV.15	Représentation des instants de la période vibratoire (a) et schéma de la déformée du bord d'attaque aux trois instants considérés : en vert (●) $i_t = 4$ , en bleu (●) $i_t = 8$ et en rouge (●) $i_t = 12$ . . . . .	145
IV.16	Etat de contact à différents instants de la période vibratoire pour le super-élément SE2. Les nœuds en bleu (●) sont collés, en rouge (●) glissants et en vert (●) séparés. Résultats calculés par la méthode HBM-DLFT . . . . .	145
IV.17	Amplitudes de glissement sur la portée intrados à l'instant $i_t = 4$ pour les différents super-éléments considérés. Résultats normalisés par le maximum de chaque super-élément indépendamment et calculés par la méthode HBM-DLFT. . . . .	146
IV.18	Amplitudes de glissement à l'instant $i_t = 4$ pour la portée intrados, sur la ligne de nœuds en milieu de portée dans la grande direction pour $Y = 0$ , calculés par la méthode HBM-DLFT. . . . .	147

IV.19	Efforts normaux à l'instant $i_t = 4$ pour la portée intrados, sur la ligne de nœuds en milieu de portée dans la grande direction (pour $Y = 0$ ), calculés par la méthode HBM-DLFT. . . . .	148
IV.20	Comparaison des données d'entrée utilisées pour la méthode semi-analytique, extraites des calculs dynamiques pour les trois super-éléments SE1 en tirets (---), SE2 en traits pleins (—) et SE3 en pointillés (⋯). Les courbes représentent les directions $X$ en rouge (—), $Y$ en vert (—) et $Z$ en bleu (—).. . . .	150
IV.21	Amplitude de glissement (a) et pression (b) à l'instant $i_t = 4$ sur la portée intrados, calculés par la méthode semi-analytique. . . . .	151
IV.22	Contraintes de pression sur des lignes de nœuds en milieu de portée dans la grande direction (en $Y = 0$ - (a)) et dans la petite direction (en $X = 0$ - (b)), à l'instant $i_t = 4$ sur la portée intrados et calculés par la méthode semi-analytique. . . . .	151
IV.23	Profondeurs d'usure pour les interfaces intrados et extrados, après 1 cycle de mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = 1$ ) et après la dernière mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = fin$ ). Maxima des échelles normalisés par rapport au maximum d'usure de la portée Intrados pour 1 mise à jour.153	
IV.24	Amplitude de glissement (a) et pression (b) à l'instant $i_t = 4$ sur la portée intrados, après la dernière mise à jour ( $N_{M\grave{a}J} = fin$ ). Maxima des échelles normalisés par rapport aux maxima des mêmes résultats sans usure, représentés Figure IV.21. . . .	154
IV.25	Réponses forcées non-linéaires pour des géométries usées extraites à différents cycles de mise à jour $N_{M\grave{a}J}$ . Le calcul pour $N_{M\grave{a}J} = 5 fin$ est un calcul fictif considérant la surface usée au dernier cycle multipliée par 5, à titre illustratif. . . . .	155



# Liste des tableaux

II.1	Nombre de degrés de liberté des différents super-éléments et du modèle complet. . .	72
II.2	Erreur en % des fréquences propres des super-éléments par rapport au modèle complet, pour l'aube seule, le disque seul et l'assemblage aube-disque avec interfaces collées. . . . .	73
III.1	Nombre de nœuds dans les directions $X$ et $Y$ des différents modèles considérés pour le calcul semi-analytique et les super-éléments des calculs dynamiques (HBM SE1 et SE2). . . . .	107
III.2	Facteurs d'accélération de l'usure et profondeurs d'usure maximales associées. . . .	115
III.3	Numéro des cycles mis à jour. . . . .	118
IV.1	Nombre de degrés de liberté des différents super-éléments et du modèle complet. . .	134
IV.2	Temps de calcul pour la génération des super-éléments et pour les calculs dynamiques par la méthode HBM, en heures. . . . .	134
IV.3	Erreur en % des fréquences propres des super-éléments par rapport au modèle complet, pour l'assemblage aube-disque avec interfaces collées. . . . .	135
IV.4	Proportion d'énergie dissipée par rapport à l'énergie dissipée totale pour les différentes formes de dissipation. . . . .	142



## **AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. J-L. DION

Professeur - SUPMECA - Vibration Acoustique et Structures - 3 rue Fernand Hainaut  
93400 Saint-Ouen

et de

M. V. MAGNIER

Maître de Conférences HDR - Ecole Polytechnique - Université de Lille - LamCube  
Avenue Paul Langevin - Cité Scientifique - 59655 Villeneuve d'Ascq cedex

**Monsieur LEMOINE Etienne**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique**

Fait à Ecully, le 27 avril 2021

P/Le directeur de l'E.C.L.  
Le directeur des Etudes



Gregory VIAL