



INSA

N°d'ordre NNT : xxx

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Ecole Doctorale N° ED162
Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité/ discipline de doctorat :
Mécanique

Soutenue publiquement/à huis clos le jj/mm/aaaa, par :
Tristan DJOURACHKOVITCH

Conception de matériaux micro- architecturés innovants : Application à l'optimisation topologique multi-échelle

Devant le jury composé de :

ESTEVEZ, Rafael
BONNET, Marc
BARANGER, Thouraya
SKOURAS, Mélina
YVONNET, Julien

Professeur, Université Grenoble Alpes
Directeur de recherche, ENSTA
Professeure, Université Lyon 1
Chargée de recherche, INRIA
Professeur, Université Paris-Est

Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examinatrice
Examinateur

GRAVOUIL, Anthony
BLAL, Nawfal
HAMILA, Nahiène

Professeur INSA-Lyon
Maître de conférence INSA-LYON
Maître de conférence HDR INSA-Lyon

Directeur de thèse
Co-encadrant
Co-encadrant

Table des matières

Table des matières	3
Résumé	5
Introduction	7
1 Une brève revue des méthodes d'optimisation de domaine	11
1.1 Introduction	12
1.2 Concepts généraux	12
1.2.1 Formulation d'un problème d'optimisation	12
1.2.2 Application à la mécanique	16
1.3 Description de domaine	18
1.3.1 Paramétrage en densité	20
1.3.2 Paramétrage implicite des interfaces	25
1.3.3 Dérivation de forme	32
1.3.4 Autres paramétrages et méthodes	37
1.4 Notions de convergence	38
1.5 Performance et Post-traitement	42
1.6 Conclusion	45
2 Optimisation de structures micro-architecturées	47
2.1 Introduction	48
2.2 Mécanique multi-échelle et séparation des échelles	51
2.2.1 Homogénéisation	52
2.3 Optimisation de matériaux architecturés	59
2.3.1 Illustration de l'algorithme d'optimisation de matériaux archi- tectués	65
2.4 Optimisation de structures macroscopiques	74
2.4.1 Formulation pour la compliance	74
2.4.2 Illustration de l'algorithme d'optimisation pour la compliance	79
2.4.3 Modèle Hyperélastique en grandes déformations	81
2.4.4 Formulation pour les mécanismes souples	82
2.4.5 Illustration de l'algorithme d'optimisation pour les mécanismes souples	87

2.5	Optimisation concourante des deux échelles	90
2.5.1	Différentes approches envisagées	91
2.6	Conclusion	96
3	Stratégie basée sur les données	99
3.1	Introduction	100
3.2	Construction d'un abaque de matériaux architecturés	101
3.3	Optimisation multi-échelle basée sur les données	110
3.3.1	Minimisation de la compliance	111
3.3.2	Mécanismes souples	118
3.4	Conclusion	121
	Conclusion	127
	Bibliographie	133

Résumé

La conception de nouveaux matériaux toujours plus performants est un enjeu de taille pour la science moderne des matériaux. On trouve plusieurs exemples de ces matériaux innovants, tels les composites, les mousses, ou encore, les matériaux micro-architecturés c'est-à-dire des matériaux hétérogènes ayant des propriétés ciblées améliorées du fait d'une conception morphologique et ou topologique prédéfinie. Le rapport entre masse et rigidité est un critère essentiel pour ces matériaux. L'optimisation topologique est particulièrement adaptée à la conception de ce type de matériaux car les quantités que l'on cherche à améliorer sont directement intégrées à la formulation du problème de minimisation. Nous proposons donc, dans un premier temps, des méthodes de conception de matériaux micro-architecturés par optimisation topologique pour différents critères. Dans un second temps, l'utilité de ces matériaux est illustrée via des simulations multi-échelle dans la théorie du premier gradient et l'hypothèse de séparabilité des échelles pour l'homogénéisation. Une méthode d'optimisation couplée des échelles macro/micro, dont l'objectif est d'optimiser simultanément ces deux échelles malgré leur interdépendance, est proposée. Le développement d'un démonstrateur numérique a permis d'illustrer ces différentes méthodes ainsi que de tester plusieurs critères d'optimisation, divers modèles mécaniques, etc. Afin de réduire les coûts de calculs qui peuvent croître rapidement, notamment pour les problèmes multi-échelle en raison de l'augmentation du nombre de variables de design, une approche "base de donnée" est proposée. Une large gamme de matériaux micro-architecturés est stockée (puis enrichie) pour des critères variés (masse, rigidité, comportement originaux). Cette base est ensuite consultée au cours de l'optimisation couplée.

Mots clefs : Optimisation topologique ; Méthodes multi-échelle ; Homogénéisation ; Approche basée sur les donnée.

Outlines

The design of innovative micro-architected materials is a key issue of modern material science. One can find many examples of this kind of materials such as composites materials, foams, and even micro-architected materials (materials that reach some predefined properties due to their topological design). A common criterion for these materials is their ratio between weight and stiffness. Topology optimization is well suited for the design of this kind of material since the criterion that is subject to improvement is directly integrated in the formulation of the minimization problem. In this context, we propose some methods for the design of micro-architected materials using topology optimization and with criteria. We afterwards illustrate the benefits of these materials through multi-scale simulations based on the theory of the first gradient and the scale separability assumption in the homogenization framework.

A coupled macro/micro optimization method is presented for the concurrent optimization of the these two interdependent scales. The development of a numerical demonstrator has allowed to illustrate those various methods and to test several optimization criteria, mechanical models ... In order to reduce the computational costs that might become exorbitant especially for multi-scale problems, since the number of design variables increases significantly, a database approach is proposed. A broad range of micro-architected materials is stored (and enhanced) for several criteria (weight, stiffness, original behaviour). This database is then consulted throughout the coupled optimization.

Keywords : Topology optimization ; Multi-scale methods ; Homogenization theory ; Data-driven simulations.

Introduction

Cette thèse est financée dans le cadre d'un contrat doctoral du ministère de la recherche et de l'innovation et a été effectuée au laboratoire de mécanique des contacts et des structures (LaMCoS). Elle s'inscrit dans le cadre des recherches sur les matériaux innovants tels que les matériaux architecturés, les composites, les mousses, etc. De plus, les aspects multi-échelles qui permettent d'intégrer le comportement de ces matériaux complexes à des calculs de structures sont également un axe de recherches important du laboratoire.

La conception optimale de structures

Un des objectifs de l'optimisation topologique est d'apporter un procédé automatisé de design qui permet d'améliorer les performances par rapport à une conception qui serait guidée par "l'intuition" et qui est souvent le fruit d'un processus itératif d'essai/erreur.

La conception d'un pont est considérée à titre d'exemple. Il s'agit de concevoir une structure suffisamment rigide pour assurer la tenue d'une charge verticale comme l'illustre la figure 1(a). Une première tentative de réponse peut être simplement une barre horizontale qui relie les deux extrémités. Cependant cette solution est peu performante en termes de rigidité et le pont risque de ne pas tenir. Pour améliorer cette conception, l'intuition ainsi que l'observation de notre environnement nous induisent à rigidifier la structure en ajoutant des piliers. Une seconde itération de conception est alors proposée avec un pilier centrale. Cependant la flexion reste grande et une nouvelle amélioration peut donc consister à ajouter plus de piliers équirépartis selon la charge. La Figure 1 illustre ces différentes conceptions ainsi que leurs performances mécaniques. On compare alors ces différentes conceptions avec une autre, issue de l'optimisation topologique, qui paraît plus complexe, moins intuitive, mais plus performante.

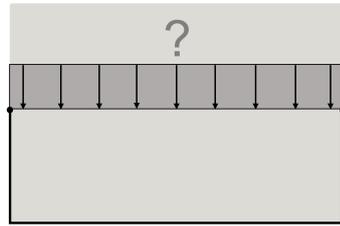
Il apparaît alors que le procédé de conception par essai/erreur est relativement lent dans le sens où il nécessite de supposer une solution, de la tester, puis de l'améliorer. De plus, l'amélioration guidée par l'intuition n'est souvent possible que dans des cas précis où la solution optimale est connue par avance car l'environnement permet de l'observer. Ainsi, améliorer des structures innovantes et originales est généralement plus complexe. L'optimisation topologique peut alors s'avérer un outil efficace d'aide au concepteur ou à la conceptrice car rend possible l'émergence de nouvelles solu-

tions originales et peu intuitives.

Cette science, bien que prometteuse, a rapidement rencontré l'obstacle majeur de la fabricabilité. En effet, les designs obtenus sont souvent complexes et impossibles à produire avec des méthodes d'usinage conventionnelle (fraisage, tournage par exemple). Les récentes avancées du procédé de fabrication additive ont permis de renouveler l'intérêt des chercheurs et chercheuses et du grand public car il devient de plus en plus envisageable de fabriquer de telles structures. Dès les années 80, l'idée d'optimiser des matériaux qui présentent une micro-structure émerge [Bendsoe et Kikuchi, 1988, Cheng et Olhoff, 1981]. Plusieurs problématiques sont investiguées comme la découverte de nouveaux matériaux aux propriétés inexistantes chez les matériaux naturels, la mise en évidence de l'impact de la micro-structure sur le comportement de la structure à l'échelle macro, ou encore, la recherche d'une optimisation couplée entre la structure et le matériau qui la compose. Cette dernière problématique, plus récente, est l'objet de nombreuses études comme [Kato *et al.*, 2018, Gao *et al.*, 2019, Wang *et al.*, 2017] pour n'en citer que quelques-unes. La complexité d'un problème d'optimisation topologique multi-échelle est considérable car le nombre de paramètres augmente fortement. Pour répondre à cette problématique, des auteurs tels que [Zhu *et al.*, 2017, Ferrer *et al.*, 2018] proposent une stratégie basée sur un abaque. L'idée est de construire un catalogue de microstructures optimisées à l'échelle fine (abaque) qui permettrait d'assister l'optimisation à une échelle macroscopique et de réduire ainsi considérablement les coûts de calcul du processus. Cette dernière méthode sera explorée dans le cadre de cette thèse.

Organisation du manuscrit

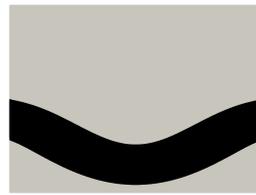
Le manuscrit est organisé en trois parties. La première se concentre sur les méthodes d'optimisation de domaine. Les concepts généraux liés à l'optimisation sont introduits puis deux applications à l'optimisation de domaine sont détaillées : le paramétrage en densité appelé Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) et le paramétrage via une fonction lignes de niveaux (level-set). La seconde partie met en application ces méthodes d'optimisation pour différents cas tels que l'optimisation de matériaux architecturés à comportement effectif prescrit, la conception de structures rigides ou le design de mécanismes souples. La notion d'optimisation multi-échelle y est introduite. Elle consiste à optimiser de manière concurrente la structure macroscopique et la distribution de matériaux qui la compose. La dernière partie du manuscrit propose une stratégie basée sur les données pour pallier l'explosion du coût numérique lié au couplage lors de l'optimisation multi-échelle. Une méthode de construction d'un abaque contenant plus de 3000 matériaux différents est proposée pour explorer l'espace des comportements admissibles. Cet abaque est ensuite utilisé au cours de l'optimisation couplée et permet de résoudre des problèmes complexes inenvisageables par des méthodes standards.



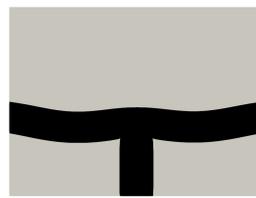
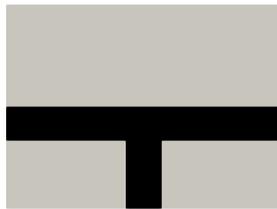
(a) Conditions aux limites

Conception 1	53.15
Conception 2	13.77
Conception 3	9.31
Optimisation	6.54

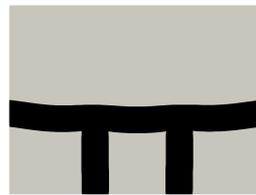
(b) Comparaison de la compliance



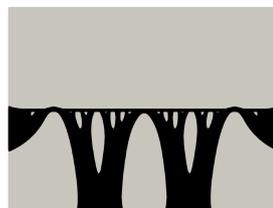
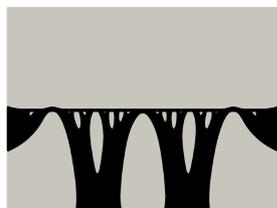
Conception 1 (c) et sa déformée (d)



Conception 2 (e) et sa déformée (f)



Conception 3 (g) et sa déformée (h)



Conception issue de l'optimisation topologique (i) et sa déformée (j)

FIGURE 1 – Comparaison entre des exemples de conceptions "intuitive" et une conception issue de l'optimisation topologique pour un modèle de pont.

Chapitre 1

Une brève revue des méthodes d'optimisation de domaine

Sommaire

1.1	Introduction	12
1.2	Concepts généraux	12
1.2.1	Formulation d'un problème d'optimisation	12
1.2.2	Application à la mécanique	16
1.3	Description de domaine	18
1.3.1	Paramétrage en densité	20
1.3.2	Paramétrage implicite des interfaces	25
1.3.3	Dérivation de forme	32
1.3.4	Autres paramétrages et méthodes	37
1.4	Notions de convergence	38
1.5	Performance et Post-traitement	42
1.6	Conclusion	45

1.1 Introduction

Les concepts de base de l'optimisation de domaine en mécanique feront l'objet de ce chapitre. Dans un premier temps, le concept d'optimisation au sens mathématique sera explicité, puis une attention particulière sera portée sur l'utilisation de ce type de formulation dans le cadre de l'optimisation de domaine en mécanique. Par la suite, les différentes méthodes de description de domaine seront évoquées, notamment le paramétrage en densité et la description par level-set, ces deux méthodes ayant été plus largement étudiées dans le cadre de cette thèse. Les concepts théoriques associés y seront en partie exposés et les principales différences mises en avant.

L'un des objectifs de l'optimisation topologique est de développer des procédés fortement automatisés dans le processus de conception d'une structure ou d'un matériau. Les limites associées à cet objectif seront également discutées en s'intéressant à des problématiques telles que la convergence ou le post-traitement des designs obtenus.

1.2 Concepts généraux

1.2.1 Formulation d'un problème d'optimisation

Le terme optimisation renvoie, dans le cadre de cette thèse, à la recherche de candidats au sein d'un ensemble qui vont minimiser ou maximiser une certaine quantité qualifiée de fonction objectif ou fonction coût.

Exemple : Trouver dans l'ensemble des réels compris dans l'intervalle $[-4, 5]$ le candidat qui minimise la fonction coût J définie par $J(x) = x \cos(x)$. Formellement, ce problème s'écrit :

$$\min_{x \in [-4, 5]} J(x) = x \cos(x) \quad (1.1)$$

Il existe un certain nombre de méthodes qui permettent de déterminer ce candidat, comme la résolution analytique ou la recherche graphique, pour n'en citer que quelques unes. Cependant, les méthodes de résolution numérique qui consistent à approcher itérativement la solution optimale sont bien souvent plus performantes de part la flexibilité de leur formulation et le peu d'information qu'elles nécessitent. Un processus numérique de recherche de minimum peut souvent être schématisé par l'algorithme 1.

Cet algorithme met en lumière deux étapes clés des processus d'optimisation itératifs : le choix d'une direction de recherche ainsi que la vérification du critère d'arrêt. Le paramètre tol est une tolérance maximale que doit vérifier le critère d'arrêt pour que l'algorithme s'arrête.

Le choix de la direction de recherche est une étape critique car elle doit permettre de s'assurer que la solution progresse bien vers un minimum. Un exemple classique de direction de recherche est l'algorithme de Newton qui utilise le gradient de la fonction coût comme direction de recherche. Une illustration est donnée en figure

Algorithm 1 Recherche du minimum d'une fonctionnelle**Initialisation** : x_0, ε_0 **while** $\varepsilon_k < tol$ Évaluation de la fonction objectif $J(x_k)$ Détermination d'une direction de recherche δx Mise à jour du modèle $x_{k+1} = x_k + \delta x$ Mise à jour du critère d'arrêt ε_{k+1} **end while**

1.1. A chaque itération la direction est recalculée et le candidat est incrémenté vers l'optimum.

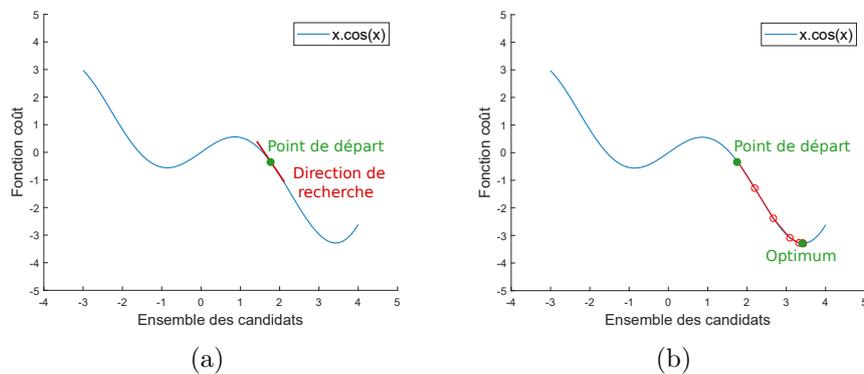


FIGURE 1.1 – La direction de recherche basée sur le gradient est illustrée sur la sous-figure (a). Le processus itératif de recherche de l'optimum est, quant à lui, représenté sous-figure (b).

Le principe de la recherche d'extremum guidée par le gradient de la fonctionnelle est que ce gradient diminue lorsque la solution se rapproche d'un extremum jusqu'à s'annuler lorsque celui-ci est atteint. Un point critique émerge alors : l'extremum atteint peut être local et non global ce qui signifie que l'algorithme peut converger vers une solution qui n'est optimale que localement et qu'il existe de meilleurs candidats dans l'espace de recherche. L'exemple de la fonctionnelle définie par l'équation (1.1) permet d'illustrer ce phénomène. En effet, il existe ici deux minimums en $x = -0.86$ et $x = 3.43$. Le choix du point de départ (candidat initial) de l'algorithme a alors un impact comme l'illustre la figure 1.2.

Dans le contexte de la recherche de performances mécaniques, il apparaît clairement que cette question de minimums locaux est cruciale car la variation de performances (valeur de la fonction coût) entre un minimum local et le minimum global peut être importante. Il semble ici "intuitif" que le choix du candidat initial devrait être assez proche du candidat optimal pour augmenter les chances de converger vers ce minimum global (bien que ce ne soit pas une règle générale et

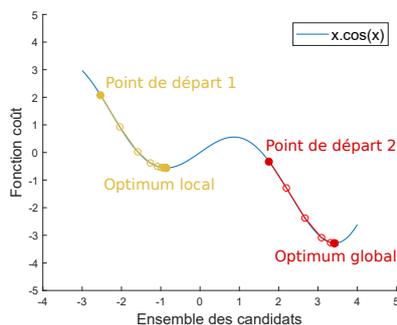


FIGURE 1.2 – Le premier point de départ (jaune) converge vers un minimum local tandis que le second (rouge) converge vers le minimum global.

qu'il existe des contre-exemples). De plus, dans la plupart des cas, le minimum global est inconnu et il est donc difficile de l'approcher au départ. Enfin lorsque ce minimum global est inconnu, il est difficile de juger, à convergence, si le candidat retenu par l'algorithme est bien ce minimum global. En effet, il est toujours possible de comparer deux candidats entre eux afin de trouver lequel est le plus performant, mais on aura souvent du mal à assurer que le meilleur candidat trouvé est bien le minimum global et qu'il n'existe donc aucun candidat plus performant (plus la complexité du problème est grande plus cette assertion est justifiée).

Bien qu'il existe diverses méthodes visant à contourner les extrema locaux, cette question reste aujourd'hui ouverte dans la littérature [Morris, 1993, Craven, 1981, Gori et Tesi, 1992]. En effet la plupart de ces méthodes demeurent spécifiques et sont peu adaptables, surtout lorsque le nombre de variables à optimiser est important.

L'exemple développé jusqu'ici peut être qualifié de problème d'optimisation libre dans le sens qu'aucune contrainte sur le candidat n'est présente (la restriction de l'ensemble de recherche n'est pas considérée comme une contrainte car c'est l'ensemble sur lequel la fonctionnelle est définie). La majorité des problèmes d'optimisation, et notamment ceux liés à l'optimisation topologique, sont l'objet de contraintes d'optimisation. On qualifie de contrainte d'optimisation toutes conditions supplémentaires que le candidat doit vérifier en plus de minimiser la fonction objectif. Ces contraintes peuvent être regroupées en deux catégories : les contraintes d'égalités et celles d'inégalités.

Exemple : Afin d'illustrer ces contraintes, un exemple légèrement plus complexe est étudié où la fonctionnelle à optimiser est définie sur un espace de dimension 2 :

$$\min_{(x_1, x_2) \in [8, 20]^2} J(x) = x_1 \cos(x_1) + x_2 \sin(x_2) \quad (1.2)$$

Le candidat à rechercher est un couple des réels (x_1, x_2) . Chaque variable du

candidat sera qualifiée par la suite de variable de design du problème d'optimisation. Les contraintes suivantes sont ajoutées au problème d'optimisation (1.2) :

$$\begin{aligned} h &: x_1 = 14 \\ g &: x_2 < 12 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les deux contraintes d'égalité et d'inégalité sont notées respectivement h et g . Le problème d'optimisation contraint s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{(x_1, x_2) \in [8, 20]^2} J(x) &= x_1 \cos(x_1) + x_2 \sin(x_2) \\ \text{t. q.} & \begin{cases} x_1 = 14 \\ x_2 < 12 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Une illustration de cet exemple est donnée en figure 1.3.

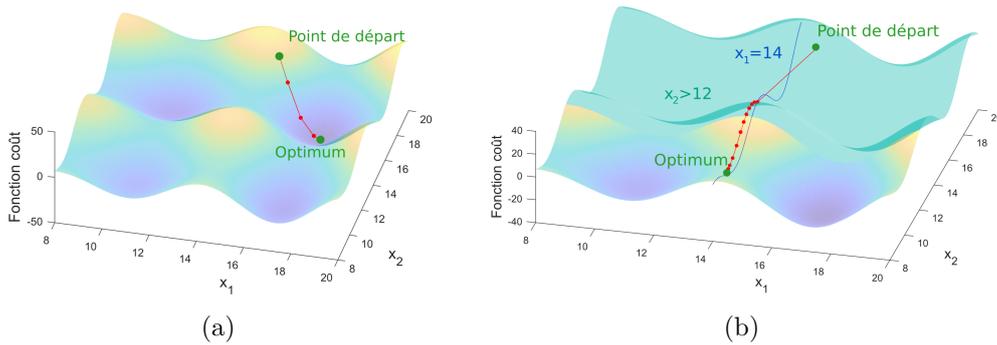


FIGURE 1.3 – Le problème libre est illustré en figure (a). La figure (b) présente le problème contraint ainsi que les conditions sur les variables de design.

Une approche commune pour traiter ce type de problème contraint consiste à employer une formulation lagrangienne pour remplacer la fonction objectif libre par une fonctionnelle qui comprend les différentes contraintes. Cette fonctionnelle s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1 \dots \lambda_n, \mu_1 \dots \mu_m) = J(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i h_i(x) \quad (1.5)$$

Elle consiste en la fonction objectif à laquelle s'ajoutent les m contraintes d'égalités ($h_i(x)$) et les n contraintes d'inégalités ($g_i(x)$). Les scalaires λ_i, μ_i sont des multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes.

Le nombre de variables de design se trouve alors augmenté des multiplicateurs de Lagrange et la direction de recherche du minimum est guidée par le gradient de

cette fonctionnelle. Les multiplicateurs de Lagrange sont nuls si la condition qu'ils augmentent est vérifiée.

La fonctionnelle augmentée de l'exemple défini par l'équation (1.4) s'écrit :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \mu) = x_1 \cos(x_1) + x_2 \sin(x_2) + \lambda(x_2 - 12) + \mu(x_1 - 14) \quad (1.6)$$

Les valeurs du gradient de la fonction objectif ainsi que des multiplicateurs de Lagrange au cours du processus d'optimisation sont illustrés table 1.1.

Itération	$ \nabla J $	λ	μ
1	0.887	0.600	1.457
5	0.069	0.600	0.001
7	0.429	0.000	0.001
10	0.224	0.000	0.001
15	0.061	0.000	0.001

TABLE 1.1 – Exemple (1.4)

Le point de départ est fixé à $(x_1 = 15, x_2 = 18)$ qui ne respecte pas les contraintes du problème. Ainsi à la première itération, la direction de recherche est influencée par ces contraintes ainsi que par le gradient de la fonction objectif comme l'illustre la première ligne de la table 1.1. La condition $x_1 = 14$ est vérifiée dès l'itération 5 tandis que la seconde condition est vérifiée à partir de l'itération 7. A partir de là, la direction de recherche est principalement guidée par le gradient de la fonction objectif jusqu'à convergence aux alentours de l'itération 15.

L'optimisation numérique est particulièrement efficace pour les problèmes à nombreuses variables de design. Les variantes d'algorithmes et de formulations en font un outil particulièrement flexible et adaptable à de nombreux problèmes. Il convient toutefois de porter attention aux différents paramètres heuristiques qui interviennent lors de ces procédés d'optimisation. En effet la stabilité et la convergence de ces algorithmes sont souvent sensibles au choix de la variation maximale entre deux itérations, à la manière de calculer les multiplicateurs, à la tolérance du critère d'arrêt etc... D'autre part, il a été montré, d'autant plus pour les problèmes où le minimum global est entièrement inconnu, que la présence de minima locaux a tendance à bloquer la recherche vers des solutions sous-optimales.

1.2.2 Application à la mécanique

Les problèmes d'optimisation associés à la mécanique qui seront traités dans le cadre de cette thèse consistent à minimiser certaines propriétés mécaniques telles que la compliance (ou souplesse), la masse ou les déplacements d'une structure soumise à des chargements. La définition d'un tel problème nécessite un certain nombre de

paramètres d'entrée. Tout d'abord, il convient de définir un domaine qui délimite l'espace de recherche qui sera noté D . Au sens mathématique du terme, D est un espace de \mathcal{R}^3 muni de bonnes conditions de régularité. Ce domaine de recherche correspond à l'espace disponible dans lequel la matière peut être distribuée. La topologie sera alors notée Ω . Il s'agit d'un sous-ensemble de D qui correspond à la zone où se trouve la matière. Il convient également de définir des conditions aux limites en efforts (type Neumann) et déplacements (type Dirichlet) auxquelles sera soumise la structure. Il existe dans la littérature un vaste panel de fonctions objectifs pour l'optimisation topologique qui concernent divers domaines tels que la mécanique qui sera l'objet principal de cette thèse, mais également la thermique, l'acoustique ou la fabrication, pour n'en citer que quelques-uns. Il existe également des combinaisons de plusieurs propriétés : maximiser la rigidité d'une structure tout en minimisant sa masse, plusieurs physiques : minimiser certains déplacements tout en maximisant la diffusion thermique, etc...

Tous les exemples qui seront traités dans cette thèse font appel à des propriétés mécaniques qui nécessitent de calculer des champs tels que des déplacements, des contraintes ou des déformations. Il est alors nécessaire de se munir d'une physique qui permet de mesurer ces champs. Cette physique vient de l'équilibre thermodynamique que doit vérifier la structure. Il induit un certain nombre d'équations d'état devant être vérifiées par les champs mécaniques :

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) &= \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_N & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \nabla^s \mathbf{u} \end{cases} \quad (1.7)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes. Les efforts extérieurs sont décrits respectivement par \mathbf{f} et \mathbf{t}_N pour les efforts volumiques et surfaciques. La surface sur laquelle s'exerce \mathbf{t}_N est notée Γ_N pour la surface de Neumann. Enfin, les déplacements prescrits sont notés \mathbf{u}_D et s'appliquent sur la surface de Dirichlet notée Γ_D . Ces différentes grandeurs sont illustrées en figure 1.4

Ce système implique de se munir d'une loi de comportement qui décrit la relation entre contraintes et déformations telle que la loi de Hooke pour les corps élastiques qui prévoit une relation linéaire entre contraintes et déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.8)$$

où \mathbb{C} est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 et qui est lié aux propriétés du matériaux qui compose la structure.

Un problème d'optimisation topologique en mécanique peut alors bien souvent s'écrire de la manière suivante :

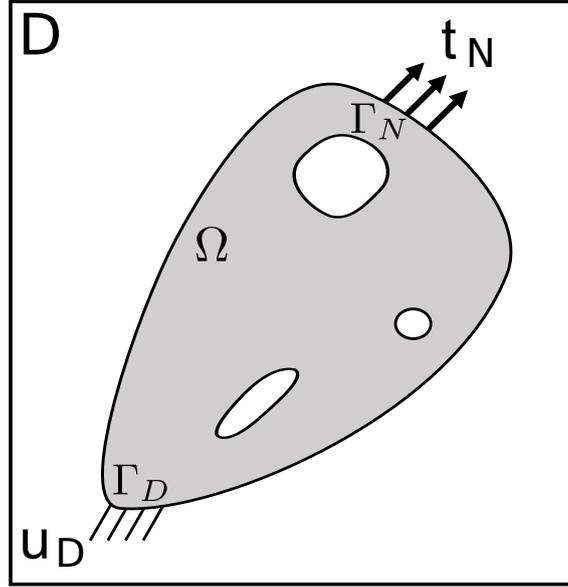


FIGURE 1.4 – Corps soumis à des efforts extérieurs et des déplacements imposés.

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Omega \in D} && J(\Omega) \\
 & t.q. && \\
 & h : && \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) = \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \end{cases} \quad (1.9) \\
 & g : && \text{contrainte d'inégalité}
 \end{aligned}$$

Avec ces notations, il apparait qu'un problème d'optimisation topologique est généralement soumis à un certain nombre de contraintes, notamment la contrainte d'égalité h qui impose que les champs mécaniques soient solutions des équations d'états de l'équilibre (i.e des champs cinématiquement admissibles et reliés entre eux par la loi de comportement). Ces équilibres seront calculés via des discrétisations par éléments finis.

1.3 Description de domaine

L'objectif de cette section est de présenter un certain nombre de méthodes utilisées dans la littérature afin de décrire des domaines D et des topologies Ω qui évoluent au sein de ces domaines. En théorie, comme le montre le problème d'optimisation type proposé par (1.9), la seule variable de design est Ω qui représente

la structure optimisée au sein du domaine D . Cependant il n'est pas aisé de définir mathématiquement une topologie. Une solution pour décrire Ω est alors de paramétrer la topologie, c'est-à-dire la décrire via un certain nombre de paramètres qui deviendront les variables de design. C'est l'évolution de ces paramètres qui va guider l'évolution de la topologie au cours du procédé d'optimisation. Une méthode de description de domaine consiste alors à choisir un paramétrage de Ω . Ce point est crucial car le choix du paramétrage peut fortement influencer le résultat optimal. L'exemple du pont présenté en introduction est utilisé ici pour illustrer l'impact que le paramétrage peut avoir. Les conditions aux limites sont présentées sur la figure 1.5 et l'objectif est de maximiser la rigidité de la structure en respectant un volume de matière total Ω inférieur à 20% du volume total du domaine D .

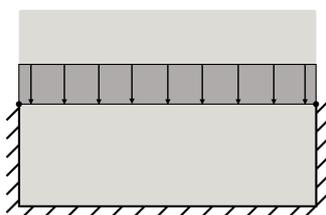


FIGURE 1.5 – Conditions aux limites proposées pour un pont en 2D.

Le premier paramétrage proposé consiste à utiliser deux poutres, l'une verticale, l'autre horizontale et les paramètres seront les positions de ligne moyenne ainsi que les épaisseurs des poutres. Le paramétrage ainsi que la solution optimisée sont illustrés sur la figure 1.6.

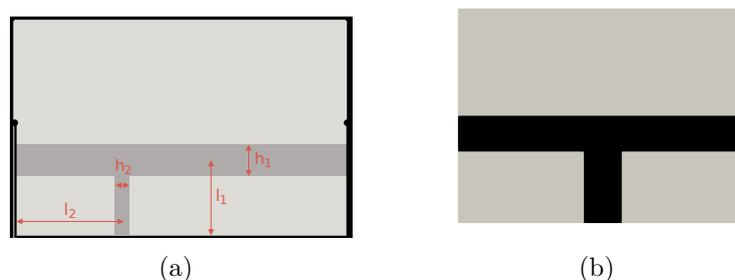


FIGURE 1.6 – La figure (a) illustre le paramétrage proposé (4 paramètres) dont les valeurs optimales sont observées sur la figure (b).

Il apparaît clairement que, du fait du paramétrage, ni la forme ni la topologie ne peuvent changer car la variation des variables de design ne le permet pas ici. On parle pour ce type d'exemple d'optimisation paramétrique. Ce type d'optimisation est très utile lorsque le concepteur ou la conceptrice connaît par avance la géométrie de sa solution et souhaite simplement en optimiser quelques dimensions. Afin d'augmenter la liberté de design de l'algorithme d'optimisation, il convient de choisir un paramétrage plus complexe de la structure en ajoutant plus de paramètres.

1.3.1 Paramétrage en densité

Le paramétrage en densité, communément associé à la méthode SIMP pour Solid Isotropic Material with Penalization, consiste à discrétiser le domaine D via un maillage éléments finis qui servira non seulement pour le calcul des champs mécaniques mais également pour le paramétrage de la topologie. L'ouvrage [Bendsoe et Sigmund, 2013] décrit de manière complète les différents aspects théoriques associés à cette méthode. L'idée principale est de représenter la topologie par une fonction densité généralement notée $\rho(\mathbf{x})$ définie en chaque point \mathbf{x} de la structure qui tend vers 1 lorsque le point x se trouve dans la structure et qui tend vers 0 sinon. Afin de rendre fini le nombre de points \mathbf{x} où la fonction densité est évaluée, une discrétisation éléments finis est appliquée et la densité devient alors définie en chaque élément du maillage comme illustré sur la figure 1.7.

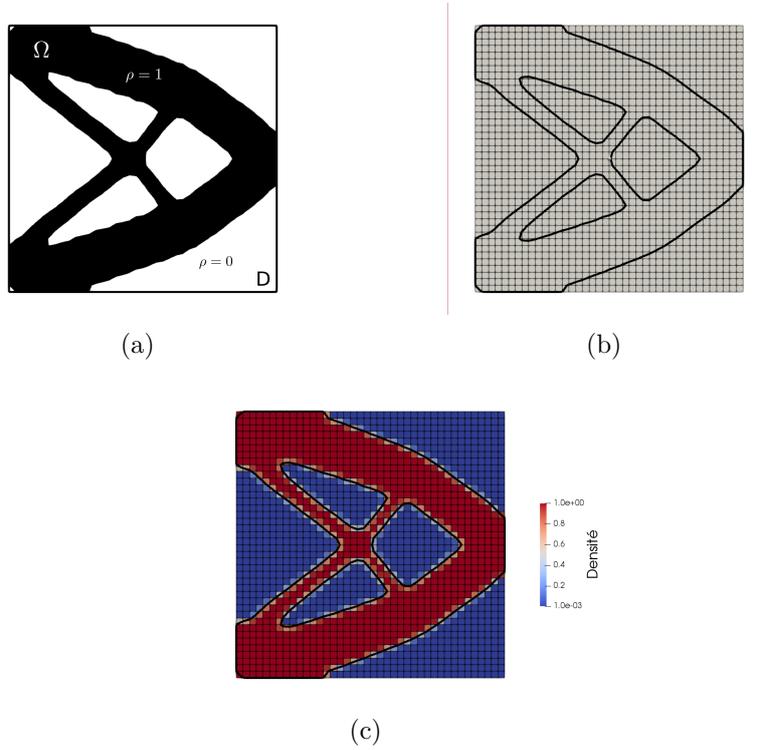


FIGURE 1.7 – Représentation de la fonction densité idéale (a), de la discrétisation éléments finis associée (b) et de la fonction densité discrétisée (c).

Cette densité influe sur le comportement mécanique au niveau du tenseur d'élasticité. Certaines propriétés matériaux sont attribuées à la phase solide comme un module d'élasticité et un module de poisson pour un matériau isotrope par exemple, ce qui permet de définir un comportement homogène de la phase solide $\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}_0$, la densité intervient souvent de la manière suivante :

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})^p \mathbb{C}_0 \quad (1.10)$$

où p est le paramètre de pénalisation. L'avantage de cette description est que le comportement mécanique qui découle du tenseur d'élasticité peut être défini pour tous les éléments de la même manière. Les zones qui se trouvent dans la phase solide ayant une densité de 1 auront bien le comportement du matériau, tandis que les zones qui correspondent au vide, donc de densité nulle, auront un tenseur d'élasticité nul. Pour des raisons pratiques, l'ensemble du domaine est maillé et le calcul des champs mécanique s'effectue sur chacune des phases solide et vide. Le comportement des zones vides ne peut donc pas être nul et une densité minimale ρ_{min} est attribuée aux zones de vide. Généralement, cette densité minimale est fixée à $\rho_{min} = 1.10^{-3}$. Il est important de noter que cette densité minimale est nécessaire à la stabilité du procédé d'optimisation mais n'a pas de réel sens physique. La fonction de densité doit être continue, ce qui implique l'existence de zones de densité intermédiaire dont la signification physique est ambiguë. Afin de minimiser ces zones et de maximiser le contraste entre vide et matière, un paramètre p de pénalisation est ajouté à l'expression du comportement comme l'illustre l'équation (1.10).

Avec un tel paramétrage, la densité devient la variable de design puisqu'elle repère la matière et donc la topologie. Un problème standard d'optimisation topologique par la méthode SIMP s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{\rho_e} \quad & J(\rho_e), \quad 1 \leq e \leq N_e \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & 0.001 \leq \rho_e \leq 1 \\ & \sum_e \rho_e < V_{max} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ici les ρ_e sont les densités de chaque élément d'indice e qui discrétisent la structure en N_e éléments.

Les contraintes ajoutées viennent de l'équilibre mécanique statique : $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ (écriture discrétisée des équations d'état (1.7) pour un corps élastique où \mathbf{K} est la matrice de raideur, \mathbf{u} le champ de déplacements et \mathbf{F} le champ des efforts extérieurs)[Alberty *et al.*, 2002]. La seconde contrainte $0.001 \leq \rho_e \leq 1$ impose des bornes locales sur la densité que chaque élément doit vérifier. Enfin, la dernière contrainte impose que la fraction totale de la phase solide soit inférieure à une valeur prescrite (il s'agit ici d'un type de contrainte très utilisé).

O. Sigmund propose, via un article académique [Sigmund, 2001], un code matlab pour résoudre ce type de problème où la fonction objectif à minimiser est la souplesse de la structure.

La souplesse s'exprime alors, en l'absence d'efforts volumiques :

$$S = \int_{\Gamma_N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_N \, dS \quad (1.12)$$

Il s'agit du travail des forces extérieures sur la structure. Les efforts \mathbf{t}_N sur le bord de Neumann Γ_N étant des données d'entrée qui sont nécessaires pour définir le problème d'optimisation, la variable non fixe dans cette expression est alors le champ de déplacements \mathbf{u} qui dépend de la topologie de la structure. La condition d'équilibre statique de la structure impose que le travail des forces extérieures soit égal au travail des forces intérieures. La compliance peut alors être réécrite :

$$S = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \quad (1.13)$$

En introduisant une loi de comportement élastique comme décrite par (1.8), cette équation devient :

$$S = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \quad (1.14)$$

En utilisant l'expression du tenseur d'élasticité faisant apparaître la densité comme décrite par (1.10), la compliance peut finalement être écrite de sorte à faire apparaître la variable de design :

$$S = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})^p \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \quad (1.15)$$

Et son gradient par rapport à la densité est obtenu directement :

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = \int_{\Omega} p \rho(\mathbf{x})^{p-1} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \quad (1.16)$$

Il apparaît ici que le gradient de la fonction objectif est toujours fonction du paramètre de pénalisation p et que le choix de sa valeur va influencer non seulement le contraste vide/matière mais également la direction de descente de l'algorithme. En effet, comme montré précédemment, les algorithmes d'optimisation basés sur le gradient mettent à jour les variables de design en fonction, entre autres, du gradient de la fonction objectif. Le choix de la valeur du paramètre p est donc subtil car, plus sa valeur est grande, meilleur est le contraste (ce qui est fortement apprécié) mais il y a un risque de perturber la stabilité de l'algorithme en augmentant la valeur du gradient de la fonction objectif.

Afin d'illustrer l'impact de certains paramètres tels que la pénalisation évoquée plus haut et d'autres paramètres liés à la méthode SIMP, l'exemple du problème d'optimisation défini par (1.11) est étudié où la fonction objectif est la compliance. Les conditions aux limites sont illustrées sur la figure 1.8. Les dimensions du domaine D sont $2m \times 1m$. Ce domaine est discrétisé par un maillage éléments finis quadrangle

structuré 80×40 et des fonctions d'interpolation d'ordre 1. Le matériau de base est isotrope avec un module de Young $E = 1Pa$ et un module de poisson $\nu = 0.3$. La pression est appliquée sur une longueur de $5cm$ (deux éléments) et sa norme vaut $1Pa$.

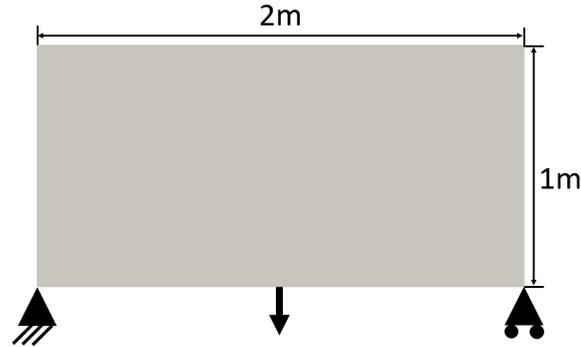


FIGURE 1.8 – Conditions aux limites de Dirichlet et Neumann

Les résultats sont illustrés sur la figure 1.11. L'impact du paramètre p est étudié dans un premier temps. La table 1.9(a) recense, pour différentes valeurs de pénalisation, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence N_{IT} , l'indice de contraste C (rapport entre le nombre d'éléments de densité intermédiaire et le nombre total d'éléments) et la valeur de la fonction objectif. Cette table illustre, comme annoncé précédemment, que la valeur de p a un impact sur la convergence. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence augmente de manière non linéaire et pour $p > 5$, la convergence n'est plus atteinte pour cet exemple. Dans le même temps, il apparaît, conformément aux attentes, que l'indice de contraste diminue avec p . Là encore, l'évolution est non linéaire et l'indice tend à se stabiliser pour $p > 3$. Enfin, l'évolution de la fonction objectif illustre que les meilleures valeurs sont obtenues pour les plus faibles pénalisations. Ce résultat est cohérent car le paramètre de pénalisation est, d'une certaine manière, une contrainte supplémentaire ajoutée au problème de distribution de la densité qui sert à donner un sens "plus physique" au problème d'optimisation au détriment de la formulation mathématique, et donc de la performance. La figure 1.9(b) illustre l'évolution de ces grandeurs normalisées (divisées par la plus grande valeur de la liste) en fonction de p .

La méthode SIMP telle qu'elle a été présentée ici tend à faire apparaître des zones d'épaisseurs fines ou des "trous" dont les dimensions avoisinent la taille d'un élément. De tels éléments topologiques sont problématiques car ils rendent la solution optimale fortement dépendante de la taille du maillage. Une solution généralement proposée consiste à ajouter un paramètre dit rayon d'homogénéisation. Il s'agit d'une longueur qui va servir à homogénéiser le gradient de la fonction objectif ou la variable de design. L'idée étant que la valeur de la fonction objectif ou de la variable de design calculée en un élément est pondérée par les valeurs des éléments voisins en fonction de leur distance (jusqu'à atteindre la valeur du

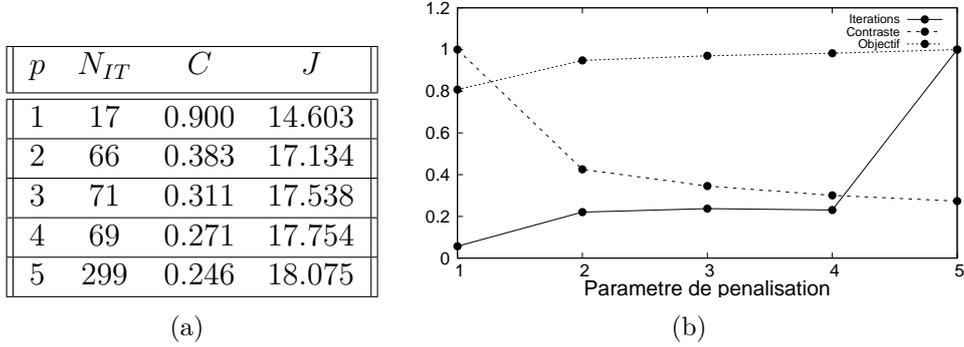


FIGURE 1.9 – Influence du paramètre de pénalisation.

rayon d'homogénéisation). Les figures 1.11(d), 1.11(e), 1.11(f) illustrent l'impact du rayon d'homogénéisation sur la topologie optimale. Lorsque ce paramètre est supprimé $R_h = 0$, la structure présente les éléments mentionnés précédemment (fines épaisseurs, trous de faible dimension). Lorsque le rayon d'homogénéisation est fixé à la taille d'un élément $R_h = 1$, la plupart des éléments de faible taille sont supprimés. Néanmoins, la dépendance au maillage perdure, comme l'illustre la figure 1.11(h) où le même problème est traité sur un maillage deux fois plus fin. En effet, ces deux topologies sont très proches mais pas identiques (on observe deux trous supplémentaires sur le maillage fin). Afin d'éviter ce genre de dépendance, le rayon d'homogénéisation peut être directement relié aux dimensions du domaine et non à la taille des éléments. Les figures 1.11(f) et 1.11(i) illustrent la cohérence obtenue pour des maillages 80×40 et 160×80 avec un rayon d'homogénéisation fixé à $R_h = l/40$ où l est la plus petite dimension de la structure (ici $1m.$). Dans ce cas, les deux maillages conduisent à la même topologie optimale. Ce rayon d'homogénéisation peut ainsi, dans une certaine mesure, pallier au problème de dépendance de la solution aux dimensions du maillage. Néanmoins, ce paramètre diminue le contraste et les performances, comme l'illustre la table 1.2. La diminution du contraste est induite par le fait que les longueurs caractéristiques des transitions vide/matière s'étendent nécessairement sur un nombre d'éléments proportionnel au rayon d'homogénéisation. La perte de performance est due au fait que ce paramètre se rajoute, à l'instar du paramètre de pénalisation, à la formulation pour apporter un sens physique et alourdit alors la formulation mathématique.

R_h	C	J
0	0.02	26.671
1	0.33	24.180
4	0.48	29.171

TABLE 1.2 – Influence du rayon d'homogénéisation sur la solution optimale

La valeur de la fraction volumique de phase solide maximale admissible V_{max} est une contrainte d'optimisation du problème (1.11). Elle définit le compromis entre légèreté et rigidité pour la structure optimale. Il peut être intéressant de faire varier sa valeur afin d'observer son impact sur la fonction objectif. La figure 1.10 illustre que le comportement de la rigidité par rapport à la fraction de matière disponible est non linéaire et que le gain de masse (diminution du volume maximal admissible) se fait au prix d'une perte de rigidité d'autant plus importante. Il convient alors, pour le concepteur ou la conceptrice, de bien connaître son objectif lorsqu'il ou elle utilise ce genre d'algorithme.

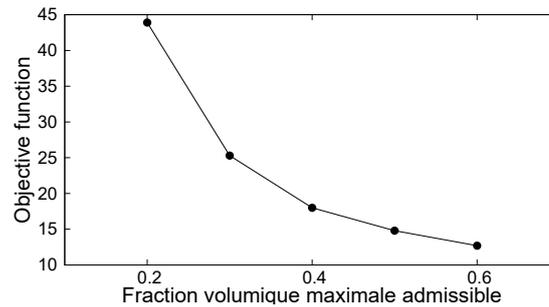


FIGURE 1.10 – Influence de la fraction volumique maximale admissible V_{max} sur la souplesse.

Conclusion sur le paramétrage en densité

Cette méthode de paramétrage peut être mise en place de manière relativement simple, comme le montrent un certain nombre de codes de moins de 100 lignes proposés dans des articles académiques [Andreassen *et al.*, 2011, Sigmund, 2001]. La compréhension des paramètres, ainsi que de leur impact sur la topologie obtenue, semble nécessaire pour manipuler cet outil efficacement.

1.3.2 Paramétrage implicite des interfaces

Le second paramétrage étudié dans le cadre de cette thèse consiste à décrire de manière implicite les interfaces entre vide et matière en utilisant une fonction lignes de niveaux (Level-Set function) notée ϕ qui s'appuie sur les concepts développés par [Sethian et Sethian, 1996]. Cette fonction est définie en tout point du domaine D et a des valeurs positives si le point se trouve dans la phase vide, des valeurs négatives si le point se trouve dans la phase solide et, étant continue, est nulle aux interfaces vide/matière :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 & \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

Il est usuel d'assigner à la level-set la fonction distance signée par rapport à l'interface la plus proche. La figure 1.12 illustre, pour un domaine D avec une structure

1. Une brève revue des méthodes d'optimisation de domaine

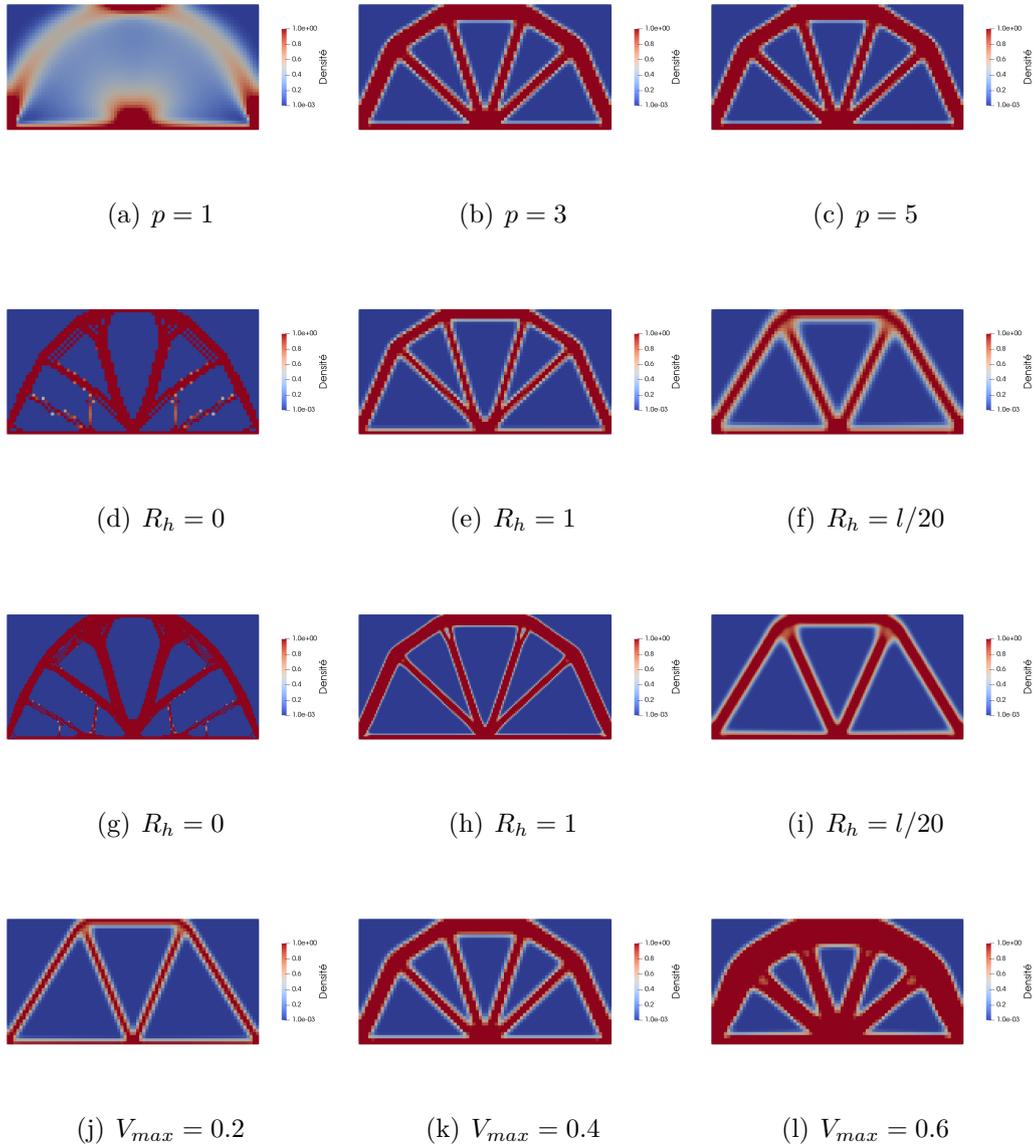


FIGURE 1.11 – Illustration de l'impact des différents paramètres de la méthode SIMP sur un exemple académique.

Ω qui correspond à une plaque trouée, la fonction distance signée.

L'équation d'Hamilton-Jacobi (1.18) permet de mettre à jour la fonction lignes de niveaux au cours du procédé d'optimisation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) + \|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)\| \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.18)$$

où $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ est la vitesse d'évolution de la level-set à l'instant t qui sera explicitée plus loin et $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ est la normale aux zones où la valeur de la level-set est nulle (ISO-0), ce

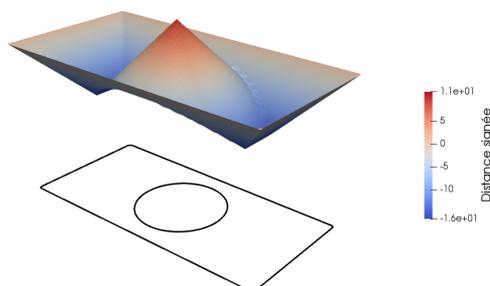


FIGURE 1.12 – Représentation de la fonction distance signée ainsi que de l'isovaleur $\phi(\mathbf{x}) = 0$ projetée en noir.

qui correspond aux interfaces vide/matière. Il apparaît alors que la level-set n'évolue qu'au niveau de son interface. Une illustration de la variation d'une topologie Ω entre deux instants t et $t + \delta t$ pour une vitesse d'évolution $V(\mathbf{x}, t)$ connue est donnée sur la figure 1.13.

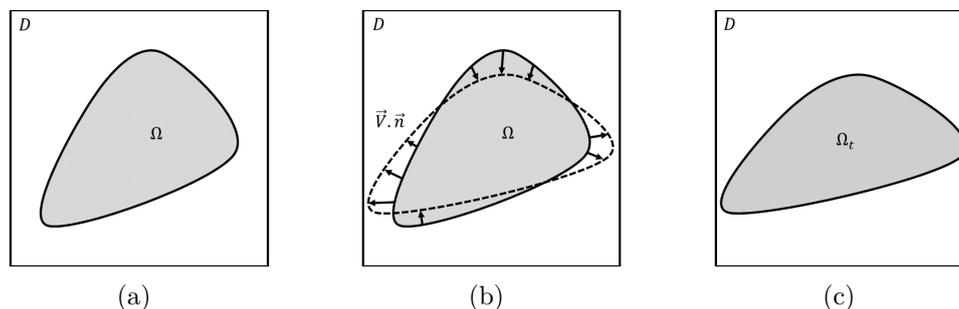


FIGURE 1.13 – Evolution d'une topologie Ω entre deux instants t et $t + \delta t$.

Une propriété de la fonction distance signée est de vérifier $\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1$ où $\|\cdot\|$ est une norme spatiale. Cependant, cette propriété n'est pas conservée lors de l'évolution de la level-set par l'équation d'Hamilton-Jacobi (1.18). Il convient alors d'ajouter une routine de ré-initialisation de la level-set, une fois celle-ci mise à jour à l'instant $t + \delta t$, afin de renforcer cette condition sur la norme du gradient et de préserver un bon lissage de cette fonction. Une illustration de l'évolution d'une fonction lignes de niveaux avec et sans ré-initialisation est donnée sur la figure 1.14 pour le même nombre d'itérations. Il est observé que la non ré-initialisation perturbe la stabilité de l'algorithme car si la propriété $\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1$ n'est plus garantie, alors les zones où la norme du gradient est élevée seront plus impactées à chaque itération temporelle et donc les variations de la fonction lignes de niveaux auront tendance à se "localiser" et la topologie aura du mal à évoluer.

Seules les interfaces déjà existantes vont se déplacer. On parle alors d'optimisa-

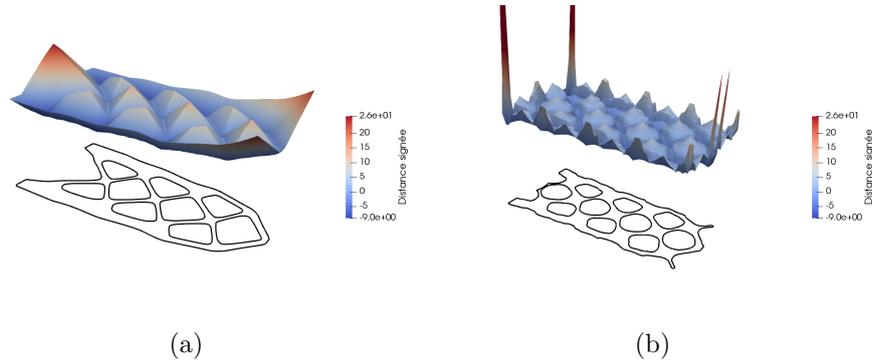


FIGURE 1.14 – Comparaison de l'évolution de deux structures avec (a) et sans (b) ré-initialisation de la fonction lignes de niveaux

tion de forme. Il apparaît que le choix du point de départ de l'algorithme d'optimisation aura un impact prépondérant sur le résultat optimale car seule la forme peut varier. Une illustration de l'impact du point de départ sur le résultat optimal est donnée sur la figure 1.15 et la valeur de la fonction objectif est donnée dans la table 1.3. Il apparaît que plus le nombre de trous dans la structure de départ est élevé, meilleurs sont les résultats pour la fonction objectif. D'aucuns pourraient également arguer que le résultat visuel est plus intuitif. Les performances semblent se stabiliser entre les deux derniers tests qui sont également plus proches en termes de topologie optimale. De fait, au cours du processus d'optimisation, les trous déjà existants peuvent se rencontrer et se combiner, ce qui entraîne une variation de topologie et donc augmente l'espace des configurations possibles que l'algorithme peut explorer. Ainsi il apparaît qu'avec ce type de paramétrage, il est intéressant de choisir comme point de départ une structure présentant un grand nombre de trous.

indice figure 1.15	Fonction coût
(a)	62.43
(c)	59.68
(e)	58.84
(g)	58.58

TABLE 1.3 – Évolution de la fonction coût en fonction de la topologie initiale.

Il existe dans la littérature un certain nombre de méthodes qui permettent d'outrepasser ce problème de limitation dans les variations topologiques possibles avec un paramétrage en level-set. Une première approche consiste à utiliser une vitesse étendue dans l'équation de mise à jour de la level-set qui ne soit plus calculée uniquement aux interfaces mais en tout point du domaine D [Wang *et al.*, 2007]. L'idée étant qu'avec une telle vitesse étendue, des variations topologiques seraient possibles

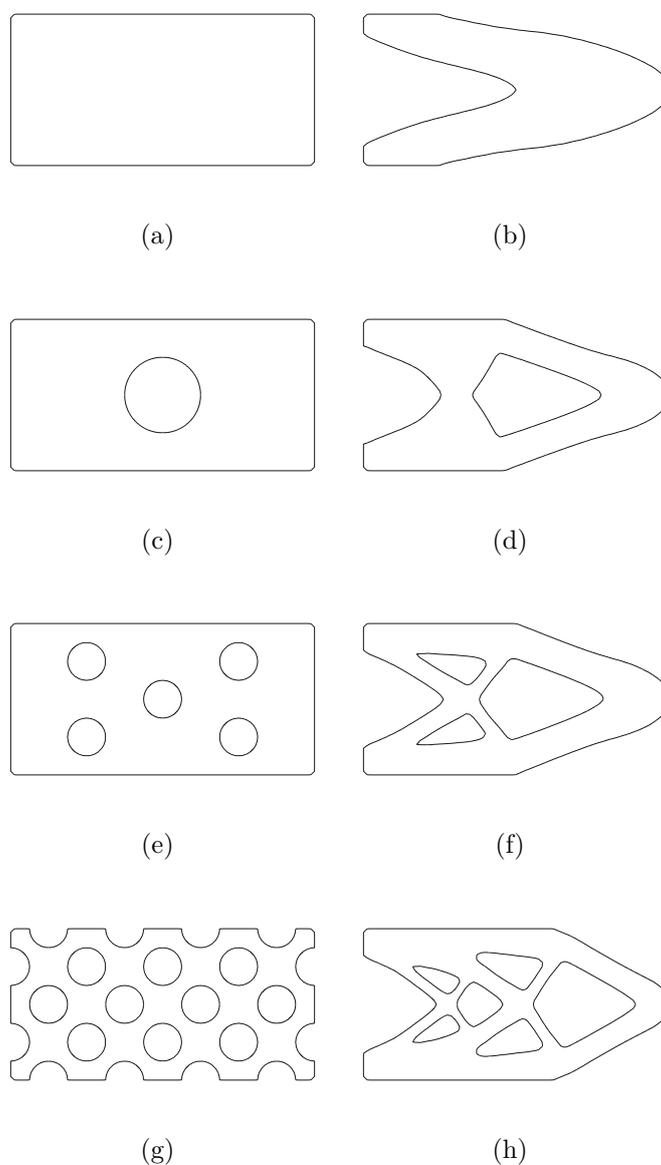


FIGURE 1.15 – Impact de la topologie initiale sur le résultat optimal pour un paramétrage implicite via la fonction distance signée.

ailleurs que sur l'ISO-0. Un schéma d'intégration temporel pour la mise à jour de la level-set via l'équation d'Hamilton-Jacobi (1.18) peut être proposé comme suit :

$$\phi(\mathbf{x}, t + \delta t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \delta t \|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)\| V(\mathbf{x}, t) \quad (1.19)$$

Cette équation permet de mettre en lumière un point crucial de l'utilisation de la fonction distance signée pour le paramétrage implicite des interfaces : les zones proches des interfaces vide/matière auront tendance à évoluer plus facilement que les

zones loin des interfaces. Ceci est dû au fait que les zones proches des interfaces ont une valeur absolue de la fonction distance signée $\phi(\mathbf{x}, t)$ qui est faible (précisément puisque cette fonction représente la distance à l'interface la plus proche). Ainsi le premier terme de l'équation du membre de droite de l'équation (1.19) est faible en valeur absolue et le second terme pourra avoir un impact plus important et éventuellement faire changer le signe de $\phi(\mathbf{x}, t + \delta t)$, ce qui signifie que la perturbation aura fait passer ce point de la phase solide à la phase vide ou inversement. En revanche, les zones situées plus loin des interfaces auront des valeurs absolues de $\phi(\mathbf{x}, t)$ plus importantes et le premier terme du membre de droite de l'équation (1.19) sera prépondérant, ce qui implique que le changement de signe de la level-set dans ces zones est moins probable et donc ces zones ne changeront pas de phase au cours de l'évolution de la level-set, même si leur vitesse (et donc le gradient de la fonction objectif) est élevée. Ceci est d'autant plus vrai en raison de la ré-initialisation de la fonction distance signée pour préserver la propriété $\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1$. En effet, sans cette ré-initialisation, il serait envisageable, à force d'itérer, de faire changer la valeur de la fonction distance signée même dans une zone éloignée de l'interface, mais cette ré-initialisation l'empêche. Ceci permet alors de conclure que le paramétrage implicite d'interfaces par la méthode des lignes de niveaux, en utilisant la fonction distance signée et une ré-initialisation appropriée pour conserver la propriété $\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1$ et donc le lissage de cette fonction, ne permet que des variations limitées de la topologie au cours du processus d'optimisation.

D'autres auteurs [Yamada *et al.*, 2010] proposent, quant à eux, d'utiliser pour la level-set une fonction différente de la distance signée. Il s'agit ici d'une fonction qui s'apparente à la distance signée au niveau des interfaces mais qui est bornée :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = \max\{d(\mathbf{x}), \phi_{max}\} & \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = \min\{d(\mathbf{x}), -\phi_{max}\} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (1.20)$$

avec $d(\mathbf{x})$ la fonction distance signée et ϕ_{max} la borne. Une illustration d'un tel paramétrage est donnée sur la figure 1.16. Une telle fonction peut présenter des problèmes de lissage similaires à ce qui a été évoqué pour la distance signée. Afin de pallier ce problème, un terme d'ordre 2 sur la level-set (similaire à un terme de diffusion) est ajouté à l'équation d'évolution (1.18) pour améliorer ce lissage :

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) + \|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)\|V(\mathbf{x}, t) - \tau \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.21)$$

L'avantage d'un tel paramétrage est que, lors de la mise à jour de la level-set par le schéma (1.19), les zones éloignées de l'ISO-0 auront plus tendance à évoluer si la vitesse étendue $V(x, t)$, qui est liée au gradient de la fonction objectif, est élevée. Ainsi, des variations topologiques, telles que l'apparition de nouvelles inclusions, sont possibles et l'impact de la topologie initiale est moins prépondérant que pour la fonction distance signée comme l'illustre la figure 1.17. En effet, il est observé que les

topologies optimales, malgré quelques légères variations de formes, sont identiques alors que les topologies initiales ne le sont pas.

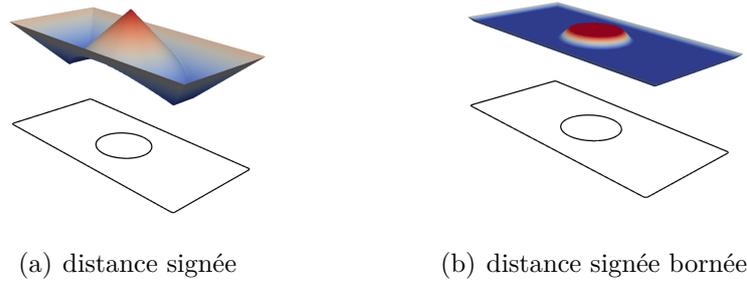


FIGURE 1.16 – Comparaison des paramétrages level-set avec la distance signée et son équivalent borné.

Ce paramétrage, avec la fonction distance signée bornée et une vitesse étendue, paraît alors particulièrement efficace pour obtenir des variations topologiques sans ajouter de complexité à l’algorithme standard Algorithme 2.

Algorithm 2 Optimisation topologique avec paramétrage implicite des interfaces

Initialisation : $\phi(\mathbf{x}, t = 0)$, ε_0

while $\varepsilon_k < tol$

Évaluation de la fonction objectif $J(\mathbf{x}, t)$

Calcul de la vitesse étendue $V(\mathbf{x}, t)$

Mise à jour de la level-set $\phi(\mathbf{x}, t + \delta t)$ via l’équation (1.21)

Mise à jour du critère d’arrêt ε_{k+1}

end while

Par la suite, c’est donc le paramétrage implicite via une level-set distance signée bornée qui sera utilisé.

Il existe d’autres manières d’obtenir des variations topologiques en utilisant un paramétrage level-set. Allaire *et al.* proposent par exemple une combinaison entre optimisation de forme et dérivée topologique [Allaire *et al.*, 2005] pour ajouter un critère qui permette la création d’inclusions sphériques dans les zones favorables, tout en utilisant une fonction distance signée pour la forme.

Un des intérêts fondamental de l’outil level-set est qu’il permet de manipuler très pratiquement des géométries (et, par extension, des topologies) sans les définir explicitement (ce qui peut être complexe).

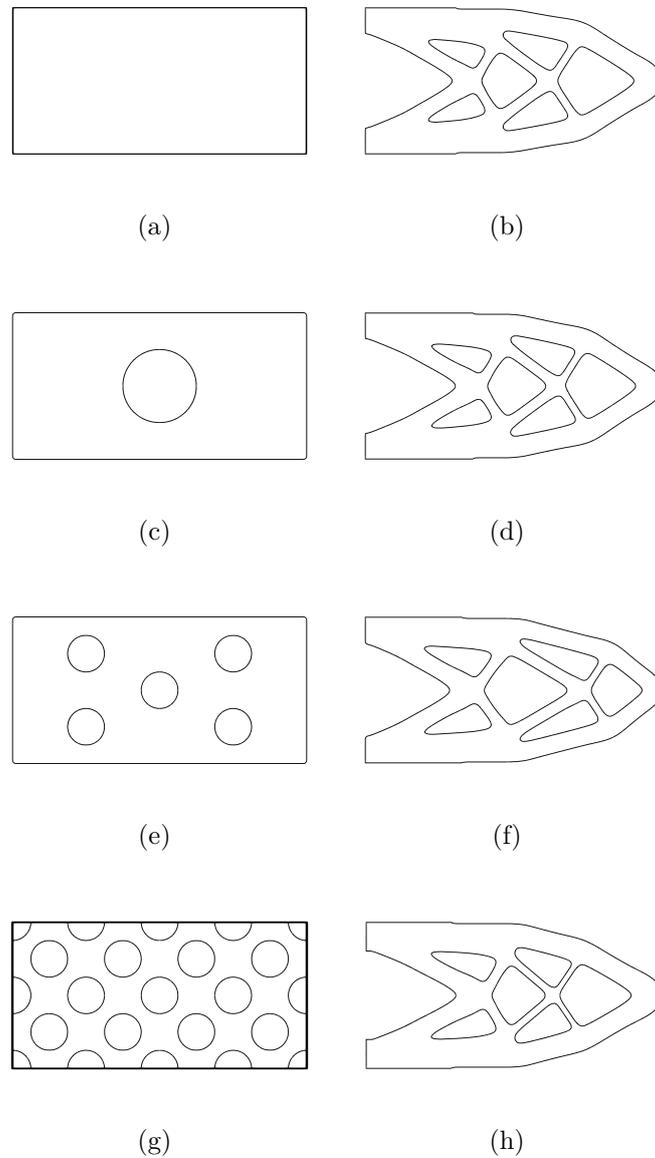


FIGURE 1.17 – Impact de la topologie initiale sur le résultat optimal pour un paramétrage implicite via la fonction distance signée bornée.

1.3.3 Dérivation de forme

La méthode d'optimisation topologique par paramétrage implicite via une fonction level-set évoquée dans la partie précédente s'appuie sur une évolution de la fonction guidée par une équation de la forme de celle d'Hamilton-Jacobi (1.18) ou d'éventuelles formes voisines comme celle proposée dans par l'équation (1.21). Dans tout les cas, ces évolutions sont guidées par une grandeur qualifiée de vitesse $V(\mathbf{x}, t)$ au sens eulérien qui qualifie la variation de la topologie de l'état t à l'état $t + \delta t$.

La question se pose alors de trouver une telle vitesse $V(\mathbf{x}, t)$ qui assure la minimisation de la fonction objectif du problème d'optimisation. La dérivée de forme consiste alors à déterminer la variation d'un critère, ou fonctionnelle (comme la fonction coût) évaluée sur un domaine, par rapport à une variation de la forme de ce domaine. Soit $J(\Omega_t)$ une fonctionnelle définie sur un domaine D et évaluée sur le sous-ensemble Ω_t de D qui représente la topologie à l'instant t . La dérivée de forme $DJ(\Omega_t)$ de $J(\Omega_t)$ par rapport à une variation de Ω_t est alors définie par :

$$DJ(\Omega_t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} (J(\Omega_{t+\delta t}) - J(\Omega_t)) \quad (1.22)$$

Dans le cadre de l'optimisation topologique, la plupart des fonctions objectifs $J(\Omega)$ (comme la compliance, la masse, etc...) peuvent être exprimées comme l'intégrale d'une grandeur scalaire sur la topologie Ω :

$$J(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} f(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \quad (1.23)$$

Pour ce type de fonction objectif, il existe un théorème [Sokolowski et Zolésio, 1992] qui permet d'obtenir une expression directe de la dérivée de forme de la fonction objectif :

Théorème : Soit J une fonction objectif qui s'exprime comme l'intégrale sur une topologie Ω d'une grandeur scalaire f qui dépend de la position \mathbf{X} , alors la dérivée de forme DJ de cette fonction objectif s'écrit :

$$DJ(\Omega_t) = \int_{\delta\Omega_t} f(\mathbf{X}, t) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{X} \quad (1.24)$$

Démonstration :

La position d'un point dans la configuration à l'état initiale t est notée \mathbf{X} . Sous l'effet de la variation de topologie (ou transformation), ce point se déplace et sa position dans la configuration déformée $t + \delta t$ est notée $\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t)$. La transformation peut alors s'écrire :

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t) = T_{\delta t}(\mathbf{X}) \quad (1.25)$$

et le gradient de la transformation noté $\mathbf{F}(\delta t)$ s'écrit :

$$\mathbf{F}(\delta t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla T_{\delta t} \quad (1.26)$$

Avec ces notations, la dérivée de forme d'une fonctionnelle exprimée comme l'intégrale d'une grandeur scalaire sur une topologie Ω de la forme (1.23) s'écrit via l'équation (1.22) comme suit :

$$DJ(\Omega_t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left(\int_{\Omega_{t+\delta t}} f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} f(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \right) \quad (1.27)$$

Un changement de variable introduisant le gradient de la transformation permet d'écrire :

$$DJ(\Omega_t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega_t} [(f \circ T_{\delta t})(\mathbf{X}, t) J_c(\delta t) - (f \circ T_0)(\mathbf{X}, t) J_c(0)] d\mathbf{X}$$

où \circ est l'opérateur de la composition pour les fonctions et J_c est le jacobien de la transformation qui représente la variation de volume. La limite et l'intégrale peuvent ensuite être permutées :

$$\begin{aligned} DJ(\Omega_t) &= \int_{\Omega_t} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [(f \circ T_{\delta t})(\mathbf{X}, t) J_c(\delta t) - (f \circ T_0)(\mathbf{X}, t) J_c(0)] d\mathbf{X} \\ &= \int_{\Omega_t} D[f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t) J_c(\delta t)]_{\delta t=0} d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ainsi, la dérivée de forme de la fonctionnelle exprimée comme l'intégrale d'une grandeur scalaire évaluée sur Ω est l'intégrale de la dérivée de forme de cette grandeur scalaire. La dérivée de forme d'un produit de fonctions obéit à la loi suivante [Sokolowski et Zolésio, 1992] :

$$D(AB) = A D(B) + B D(A) \quad (1.29)$$

Ceci permet alors d'écrire :

$$D(f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t) J_c(\delta t)) = f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t) D(J_c(\delta t)) + J_c(\delta t) D(f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t)) \quad (1.30)$$

De plus,

$$D(f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t + \delta t)) = \nabla(f(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t)$$

où

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t) = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t)}{dt}$$

est la vitesse eulérienne. Un résultat classique de la mécanique des milieux continus permet d'écrire $D(J_c(\delta t)) = J_c(\delta t) \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t))$. Ces deux résultats permettent de réécrire l'équation (1.30) :

$$\begin{aligned} D(f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t) J_c(\delta t)) &= f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t) J_c(\delta t) \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t)) \\ &\quad + J_c(\delta t) \nabla(f \circ T_{\delta t}(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Finalement, à $\delta t = 0$, $J_c(0) = 1$. La dérivée de forme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} DJ(\Omega_t) &= \int_{\Omega_t} (\nabla(f(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, 0) + f(\mathbf{X}) \operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, \delta t), t + \delta t))) d\mathbf{X} \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, 0)) d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Enfin, le théorème de flux-divergence de Green-Ostrogradski permet d'écrire :

$$DJ(\Omega_t) = \int_{\delta\Omega_t} f(\mathbf{X}, t) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{X} \quad (1.33)$$

avec \mathbf{n} la normale au bord $\delta\Omega_t$.

Le théorème (1.24) prend alors tout son sens car il montre qu'un choix de la vitesse de perturbation $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n} = -f(\mathbf{X}, t)$ permet d'obtenir une dérivée de forme négative, et donc de faire décroître la fonction objectif vers son minimum. En effet, un tel choix de la vitesse permet d'écrire la dérivée de forme :

$$DJ(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} -f(\mathbf{X}, t)^2 \, d\mathbf{X} \quad (1.34)$$

qui est donc bien négative.

Cette partie permet de conclure que lorsque la fonction objectif du problème d'optimisation topologique peut s'écrire comme l'intégrale d'une grandeur scalaire sur le domaine, alors il suffit de définir la vitesse de transformation comme l'opposé de cette grandeur scalaire pour s'assurer de faire décroître la fonction objectif par rapport à une telle transformation.

Un point important qu'il convient de soulever ici est que la majorité des fonctions objectifs étudiées dans cette thèse peuvent s'écrire comme des intégrales de fonctions scalaires évaluées sur le domaine. Cependant, ces fonctions dépendent bien souvent de champs mécaniques, comme le champ de déplacements, qui dépendent eux-même de la topologie et des fonctions d'état d'équilibre :

$$J(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) = \int_{\Omega_t} f(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) \, d\mathbf{X} \quad (1.35)$$

Le théorème (1.24) ne peut alors pas être appliqué directement car, à la dérivée de forme de $f(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))$, s'ajoutent des termes de dérivée des champs par rapport au domaine qui sont complexes (voir impossibles) à déterminer. Pour pallier ce problème, la méthode employée consiste à utiliser une fonction lagrangienne comme définie dans l'équation (1.5) et à déterminer un point selle par rapport aux variables de champs, c'est-à-dire le point où la dérivée de la fonction lagrangienne par rapport aux champs est nulle. La dérivée de forme de la fonctionnelle lagrangienne est ensuite calculée en ce point qui ne dépend plus de la topologie. Cette méthode attribuée à J. Cea [Cea, 1986] revient à diviser le problème d'optimisation en deux sous-problèmes découplés (résolution alternée). Dans un premier temps, le problème d'équilibre mécanique est résolu indépendamment de la variation de topologie. Ensuite, la variation de topologie est déterminée via l'équilibre mécanique de la topologie non-déformée.

Pour résumer, le problème d'optimisation peut s'écrire :

$$\min_{\Omega \in D} J(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) = \int_{\Omega_t} f(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) d\mathbf{X} \quad (1.36)$$

t.q.

$$A(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) = 0$$

où $A(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) = 0$ est une contrainte d'égalité sur le champ $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ comme l'ensemble des équations qui définissent le problèmes aux limites défini par (1.7) par exemple.

La fonctionnelle lagrangienne associée peut alors s'écrire :

$$\mathcal{L}(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)) = J(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) + \int_{\Omega} \mathbf{p} A(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) \quad (1.37)$$

où \mathbf{p} est un multiplicateur de Lagrange qui impose la condition d'égalité. Les conditions de stationnarités s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Omega_t} \mathcal{L}(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{L}(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathcal{L}(\Omega_t, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)) = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

La première condition de stationnarité fait apparaître la dérivée de forme de la fonctionnelle lagrangienne. Les deux autres conditions permettent de déterminer le point selle $(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*)$. Le problème est ici divisé pour rechercher, dans un premier temps, le point selle à Ω_t fixé. Puis, dans un second temps, calculer la dérivée de forme de la fonctionnelle lagrangienne au point selle donc pour $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}^*$; $\mathbf{p}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{p}^*$. Au point selle, les champs calculés ne dépendent plus de la topologie et le théorème (1.24) peut être directement appliqué. Les deux sous problèmes s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{L}(\Omega_t^*, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathcal{L}(\Omega_t^*, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \mathbf{p}(\mathbf{X}, t)) = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Omega_t} \mathcal{L}(\Omega_t, \mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*) = 0 \quad (1.40)$$

L'ouvrage [Allaire et Schoenauer, 2007] détaille les aspects théoriques associés au couplage entre le paramétrage implicite via une fonction level-set et la dérivée de forme. Ce paramétrage sera réutilisé par la suite pour traiter différents problèmes.

1.3.4 Autres paramétrages et méthodes

La plupart des paramétrages utilisés en optimisation topologiques sont associés à des discrétisations du domaine au sein duquel l'optimisation a lieu. C'est le cas du paramétrage en densité SIMP qui associe un paramètre de densité à chaque élément d'un maillage. De manière analogue, le paramétrage par une fonction level-set repose sur une discrétisation de cette fonction. Il existe d'autres approches telles que la méthode ESO (Evolutionary Structural Optimization) et sa version ultérieure BESO (Bi-directional) qui consiste à supprimer des éléments du maillage dont les contraintes sont faibles, c'est-à-dire qui travaillent peu et qui ne contribuent pas à la rigidité de la structure [Huang et Xie, 2010]. Cette méthode s'apparente à la méthode SIMP en ce sens que la topologie est directement paramétrée par le maillage élément finis et qu'elle évolue lorsque ce maillage est modifié.

Un autre exemple de méthode consiste à utiliser un paramétrage level-set et à ajouter un critère d'apparition de nouvelles inclusions sphériques en se basant sur la dérivée topologique. Cette méthode est alors différente de celle détaillée dans cette thèse car elle ne s'appuie pas nécessairement sur la dérivation de forme. À chaque itération, le gradient topologique (c'est-à-dire la dérivée de la fonction lagrangienne par rapport aux variables de design) est calculé par rapport à la création d'une inclusion sphérique en ce point. Cela revient à calculer la variation de la fonction objectif par rapport à une variation de la topologie qui consiste à introduire une telle inclusion. Elle est définie par le développement asymptotique de la topologie [Amstutz et Andrä, 2006] :

$$\mathcal{L}(\Omega \setminus \overline{B_\epsilon(\hat{x}, \epsilon)}) - \mathcal{L}(\Omega) \quad (1.41)$$

où \mathcal{L} est la fonction lagrangienne définie comme dans l'équation (1.5) et $B_\epsilon(\hat{x}, \epsilon)$ représente une boule sphérique de centre \hat{x} et de rayon ϵ comme illustré sur la figure ??.

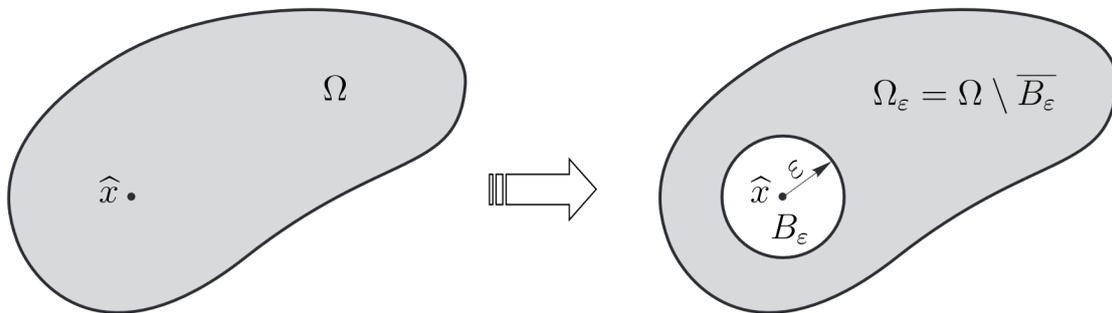


FIGURE 1.18 – Représentation d'un domaine perturbé par la nucléation d'une inclusion sphérique [Amstutz *et al.*, 2012].

Une autre méthode, plus récente, nommée MMC (moving morphable component) utilise un paramétrage plus explicite de la topologie en introduisant, à priori, un certain nombre de composants ou blocks de formes variables. L'évolution de la position et de la forme de ces composants permet alors de faire varier la topologie [Zhang *et al.*, 2016].

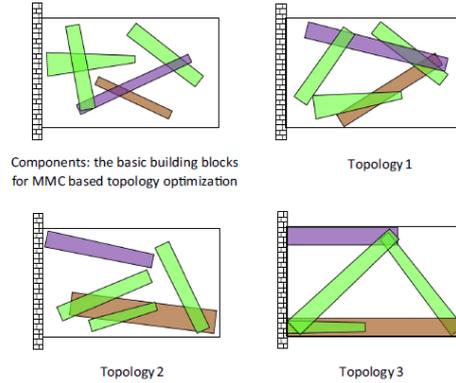


FIGURE 1.19 – Illustration de la méthode MMC issue de [Zhang *et al.*, 2016].

Enfin, il existe un certain nombre d'articles qui s'appuient sur des algorithmes génétiques pour faire évoluer la topologie vers un optimum [Ruiyi *et al.*, 2009, Shrestha et Ghaboussi, 1998].

1.4 Notions de convergence

La convergence est une notion qui peut être subtile en optimisation et plus particulièrement en optimisation topologique. Elle caractérise les dernières itérations du procédé. Il existe plusieurs aspects liés à la convergence. Le plus évident est que l'algorithme doit vérifier un critère pour s'arrêter. Si ce critère n'est jamais vérifié alors la solution n'est pas convergée. Un critère usuel est que la topologie ne doit pas varier plus qu'une certaine quantité ε entre l'itération n et l'itération $n + 1$. Une autre manière d'aborder le problème est de considérer que la fonction objectif ne varie pas au-delà d'une certaine quantité. Dans tout les cas, cette quantité est définie par l'utilisateur et peut avoir un impact sur le résultat final comme l'illustre la table 1.4 où la méthode SIMP est utilisée. Dans ce cas, le critère d'arrêt s'exprime :

$$\max_{e \in \{1..N\}} |\rho_e^{i+1} - \rho_e^i| < \varepsilon \quad (1.42)$$

ce qui signifie qu'entre deux itérations successives i et $i + 1$, le maximum sur tous les éléments de la variation de densité d'un élément doit être inférieur à une certaine quantité fixée ε . Le choix de la valeur de ε a donc un impact sur la topologie finale, sur le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le critère d'arrêt et sur la valeur

Critère ε	0.1	0.01
Nb d'itérations	19	117
Fonction objectif	12.1	11.7



(a) $\varepsilon = 0.1$

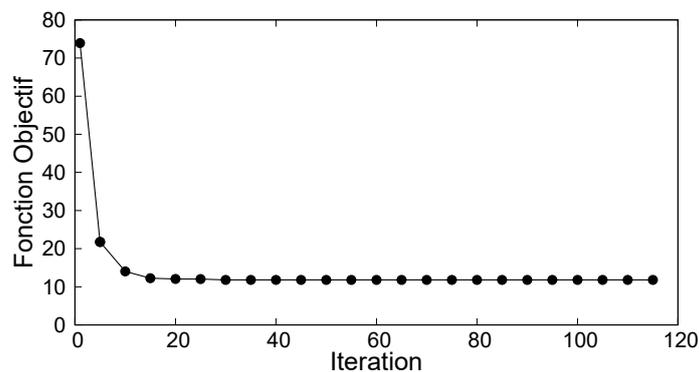


(b) $\varepsilon = 0.01$

TABLE 1.4 – Influence du critère d'arrêt sur un exemple avec la méthode SIMP.

de la fonction objectif. On parle alors de convergence lorsque la valeur de ε est suffisamment faible pour que le même procédé d'optimisation avec une valeur ε plus faible conduise à des résultats sensiblement identiques. En pratique, cette ε n'est pas aisée à déterminer et peut nécessiter de lancer le procédé d'optimisation un certain nombre de fois. Pour les calculs sur des maillages de faibles tailles, cela n'a généralement pas un impact trop important mais, dès lors que des maillages fins sont utilisés, et plus particulièrement pour des cas en 3D, ce point peut devenir problématique.

De plus, la figure 1.20 illustre l'évolution de la fonction objectif au cours des itérations. Il apparaît ici que la fonction objectif atteint un plateau, c'est-à-dire qu'elle ne varie plus significativement autour de 20 itérations. C'est dans ces 20 premières itérations que la majorité des variations topologiques ont lieu. Le reste du procédé permet, via des modifications mineures de la topologie, de gagner quelques pourcentages sur la fonction objectif en atteignant le critère d'arrêt.

FIGURE 1.20 – Évolution de la fonction objectif pour $\varepsilon = 0.001$.

En conclusion, le choix du critère d'arrêt doit être atteignable pour que l'algorithme puisse s'arrêter (donc sa valeur ne doit pas être trop faible) mais

suffisamment restrictif pour que sa valeur n'impacte le résultat que de manière négligeable. Il est souvent fixé suite à un processus d'essai-erreur par dichotomie par exemple.

Un autre aspect de la convergence qui mérite d'être abordé est la discrétisation spatiale du domaine par éléments finis. En effet, à l'instar du critère d'arrêt, la taille des éléments peut avoir un impact sur le processus d'optimisation. Plus le maillage est fin, plus les configurations possibles sont nombreuses. Pour pallier cet effet de maillage-dépendance des solutions, des paramètres d'homogénéisation liés aux dimensions de la structure et non à la taille des éléments sont utilisés pour la méthode SIMP (cf. R_h table 1.2) et pour la méthode level-set (cf. τ équation (1.21)). Ces paramètres homogénéisent le gradient de la fonction objectif qui est calculé en chaque point du maillage sur une zone qui dépend des dimensions de la structure, ce qui permet de lisser les valeurs du dit gradient. Ces paramètres permettent notamment d'éviter l'apparition de portions de structure de faible épaisseur (de l'ordre de la taille des éléments). À l'effet sur la topologie s'ajoute l'impact de la discrétisation sur le calcul des champs mécaniques. Il convient alors de s'assurer que le maillage est suffisamment fin pour que la variation sur les champs mécaniques soit négligeable lorsqu'un même calcul est mené sur un maillage plus fin. Cependant, la topologie peut avoir un impact sur la taille du maillage nécessaire pour la convergence des champs. Au cours du procédé peuvent apparaître des portions de structures élancées qui requièrent un maillage plus fin. En théorie, il faudrait alors vérifier la convergence spatiale des champs à chaque itération du procédé d'optimisation, ce qui, à la connaissance de l'auteur, est rarement fait dans la littérature. Certaines études relativement récentes [Bertsch *et al.*, 2010, Jeong *et al.*, 2015] proposent des techniques de remaillage locales internes à l'algorithme d'optimisation.

La plupart des méthodes d'optimisations, dont celles présentées et qui seront utilisées dans le cadre de cette thèse s'appuient principalement sur des maillages structurés réguliers. C'est-à-dire que tous les éléments du maillage sont identiques en dimension et en degré d'interpolation. En 2D, des éléments quadrangles sont utilisés, tandis que des éléments volumiques sont des cubes. Il apparaît alors que les interfaces entre vide et matière sont nécessairement crénelées, comme l'illustre la figure 1.21. Une solution pour attribuer des propriétés mécaniques plus cohérentes aux éléments coupés par l'interface vide/matière est d'utiliser un comportement intermédiaire qui dépend directement de la fraction volumique de matière de l'élément :

$$\mathbb{C}_{interface} = \frac{f_{solide}}{f_{solide} + f_{vide}} \mathbb{C}_{solide} \quad (1.43)$$

où f_{solide} représente la fraction volumique de phase solide et f_{vide} celle de la phase vide. Ce recours à un matériau aux propriétés intermédiaires permet d'améliorer la cohérence du calcul d'équilibre mécanique. Le choix du maillage est impactant et un projet de fin d'étude co-encadré au cours de cette thèse a été mené sur l'étude

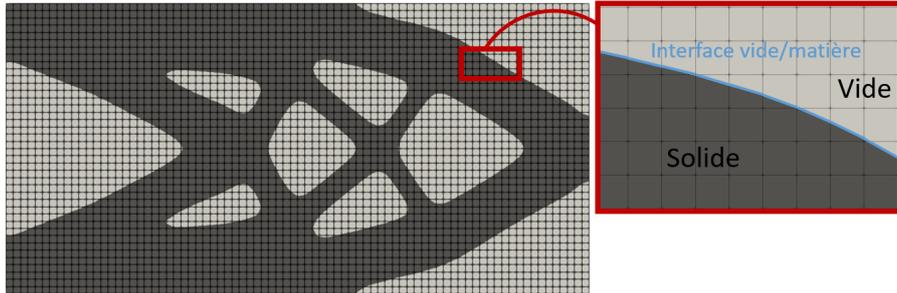


FIGURE 1.21 – Impact de la discrétisation structurée sur les interfaces vide/matière

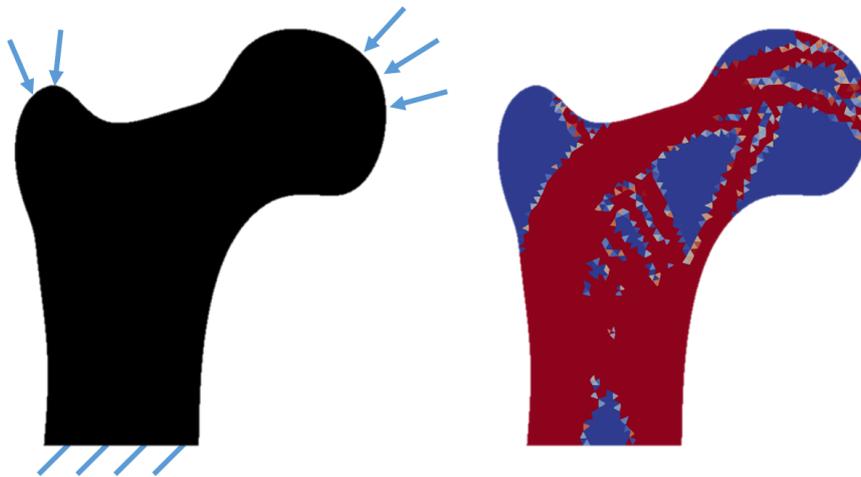


FIGURE 1.22 – Optimisation SIMP sur des maillages non structurés.

de maillages non-structurés pour la méthode SIMP. L'idée étant que les maillages non structurés interpolent de manière plus cohérente les courbes. Il en ressort que ces maillages perturbent généralement la stabilité du procédé d'optimisation car bien que meilleurs sur la topologie de départ, dès que des éléments passent de vide à matière, l'impact sur la topologie est trop important, comme l'illustrent les résultats de la figure 1.22 qui porte sur l'étude de l'optimisation d'une prothèse de fémur discrétisée par un maillage non structuré de triangles.

En conclusion, les maillages structurés semblent particulièrement adaptés aux problèmes d'optimisation topologiques car ils offrent une grande stabilité des champs mécaniques lors d'une variation de la topologie. Cependant, ces maillages interpolent mal les courbes et, lorsque la topologie présente des portions élancées, la convergence spatiale n'est souvent plus assurée. Il existe des techniques de remaillage mais au prix d'efforts de calcul qui peuvent être importants et donc ralentir significativement le processus d'optimisation. De plus, ces techniques récentes sont encore aujourd'hui un sujet de recherche à part entière et n'ont pas été abordées au cours de cette thèse où la limitation suivante est clairement posée : les résultats présentés ne sont valables

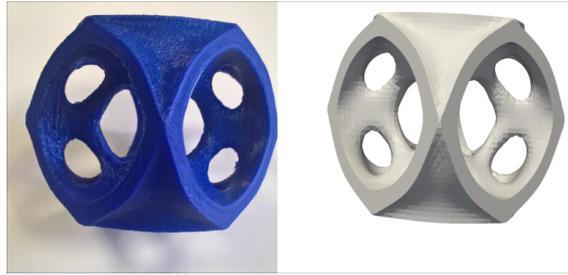


FIGURE 1.23 – Juxtaposition d’une pièce désignée par optimisation topologique et de sa réalisation par fabrication additive en PLM par dépôt de matière fondue.

que sur des maillage fixés et le choix de la discrétisation (bien que suffisamment fine pour être au minimum visuellement cohérente) ne garanti pas la convergence spatiale tout au long du procédé.

1.5 Performance et Post-traitement

Les problèmes d’optimisation topologiques présentés jusqu’à présents sont construits généralement de la même manière c’est-à-dire qu’ils visent à minimiser une fonction coût qui sera, dans le cadre de cette thèse, une propriété mécanique, tout en respectant un certain nombre de contraintes comme l’équilibre mécanique par exemple. Étant donné la complexité certaine des algorithmes mis en place pour résoudre ce genre de problème, notamment due au panel de paramètres qui influent sur le résultat optimal tels que la taille du maillage, le critère d’arrêt, ou autres évoqués précédemment, il est généralement appréciable de formuler le problème de la manière la plus "simple" possible, c’est-à-dire de limiter le nombre de contraintes qui seront associées au problème. Plus le nombre de contraintes associées à la formulation est faible, plus il est aisé d’obtenir un résultat. Cependant, dans la pratique du concepteur, les problèmes mécaniques d’optimisation sont complexes et il existe généralement des aspects de la conception qui ne sont pas pris en compte dans l’algorithme d’optimisation. A titre d’exemple, une fois la pièce conçue par l’algorithme d’optimisation, il convient de la produire. La fabrication additive est particulièrement adaptée à la production de pièces complexes et semble donc être le procédé idéal pour fabriquer des pièces conçues par optimisation topologique. Néanmoins ce procédé est soumis à un certain nombre de contraintes telles que l’ajout d’un support pour soutenir les zones en porte à faux ou les faibles propriétés mécaniques des matériaux utilisables. Un certain nombres d’études récentes [Brackett *et al.*, 2011, Michailidis, 2014] prennent en compte le procédé de fabrication additive lors de l’optimisation afin de coupler au mieux procédé et design.

Les topologies obtenues étant généralement basées sur des maillages structurés, comme évoqué précédemment, il est nécessaire d’utiliser des outils pour passer d’une structure crénelée à une structure lisse comme illustré sur la figure 1.24

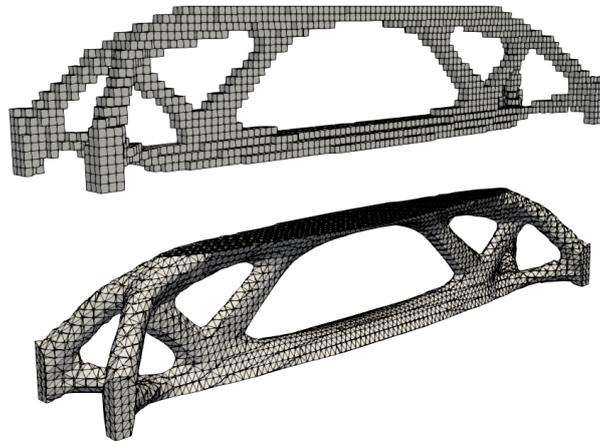


FIGURE 1.24 – Topologie 3D obtenue sur un maillage volumique structuré d’éléments cubiques et lissage associé.

De plus, l’objectif de l’optimisation topologique étant bien souvent d’alléger les structures, c’est-à-dire de supprimer un maximum de matière sans trop détériorer les propriétés mécaniques, les résultats obtenus présentent souvent des portions élancés, c’est-à-dire des éléments de faibles épaisseurs. Ces éléments rendent la structure sensibles au flambage. Ce phénomène d’instabilité prévoit que, lors du chargement, une instabilité peut apparaître bien avant que la charge nominale soit atteinte. Cette problématique est illustrée pour une poutre en flexion via la figure 1.25 où apparaissent respectivement les conditions aux limites, la déformée et les deux premiers modes de flambage d’Euler. La problématique du flambage est une grande question de la mécanique qui n’a été abordée que partiellement au cours de cette thèse et le but n’est pas ici d’en donner des détails mais de sensibiliser à la question qui fait d’ailleurs l’objet de recherches en optimisation topologique où certains articles proposent des critères dans la formulation du problème d’optimisation [Lindgaard et Dahl, 2013, Neves *et al.*, 1995, Neves *et al.*, 2002]. Un exemple de structure optimisée présentant une instabilité de flambage avant d’arriver à la charge nominale est donné en figure 1.26 pour la "cantilever beam" en flambage d’Euler. Le calcul numérique prévoit une charge critique de l’ordre de 4%, ce qui signifie que la structure devrait atteindre l’instabilité de flambage à seulement 4% de la charge statique prévue lors du procédé d’optimisation.

En conclusion, les algorithmes d’optimisations, bien que de plus en plus robustes, sont encore, pour la majorité, des codes de recherche sensibles aux paramètres de simulation et requièrent une certaine expertise. De plus, la complexité d’un processus de conception complet est difficile à intégrer de manière complète à la formulation, ce qui conduit généralement à la nécessité de post-traiter les topologies obtenues pour s’assurer de leur fabricabilité, de leur résistance au flambage, etc... Il est néanmoins

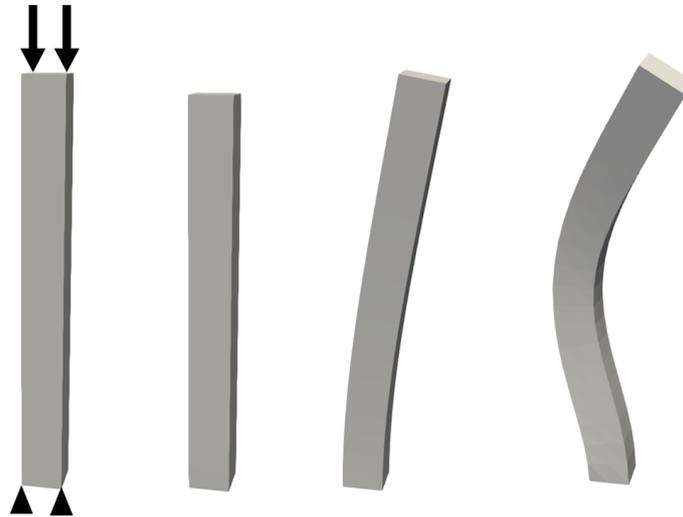


FIGURE 1.25 – Illustration des conditions aux limites (gauche), de la déformée (centre-gauche), du premier mode de flambage (centre-droite) et du second mode de flambage (droite) d'une poutre en compression.

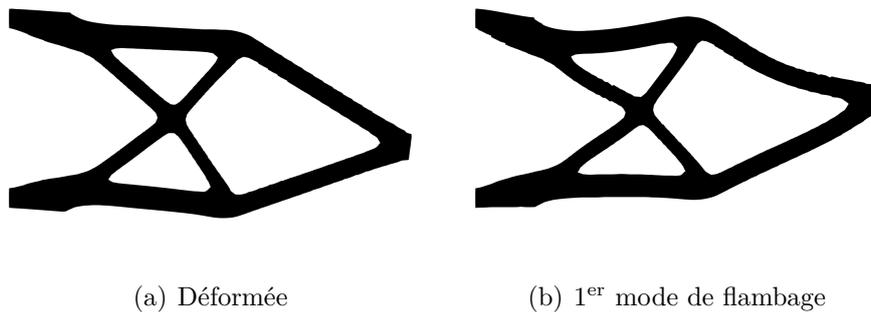


FIGURE 1.26 – Comparaison entre l'état déformé prévu par le chargement et le 1^{er} mode de flambage qui apparaît à 4% de cette charge.

intéressant de noter que ces aspects sont intégrables à la formulation du problème, comme en témoigne les articles cités précédemment.

1.6 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire, dans un premier temps, le contexte mathématique associé aux problèmes d'optimisation qui seront traités dans le cadre de cette thèse. La formulation lagrangienne qui consiste à ajouter les contraintes d'optimisation par le biais de multiplicateurs sera utilisée majoritairement. Un regard plus spécifique aux problèmes d'optimisation en mécanique a permis de présenter deux types de paramétrage d'un domaine sur lequel optimiser une structure. Le paramétrage en densité SIMP ainsi que le paramétrage implicite des interfaces par une fonction level-set couplée à la méthode de dérivation de forme. Pour ces deux types de paramétrage, la présence systématique de champs dans les formulations a permis de mettre en évidence un aspect crucial de l'optimisation topologique : ces champs doivent respecter la condition d'équilibre mécanique qui représente une contrainte d'égalité. Ainsi, le problème global consiste à mettre à jour, à chaque itération, les variables de design, c'est-à-dire la topologie (quelque soit son paramétrage) et les champs mécaniques ainsi que les multiplicateurs de Lagrange. Ce problème n'est alors pas traité de manière globale mais est divisé en deux étapes qui consistent successivement à déterminer l'équilibre mécanique, et donc à incrémenter les champs et les multiplicateurs de Lagrange, pour la topologie fixée, puis à calculer le gradient de la fonction lagrangienne par rapport à la topologie à champs mécaniques fixes.

Il a également été montré que malgré la grande automatisation des algorithmes d'optimisation et la flexibilité qu'offre leur formulation, ils requièrent un certain savoir faire du fait de l'impact important que peuvent avoir certains paramètres comme la discrétisation spatiale ou autre évoqués précédemment.

La cohérence des designs obtenus par optimisation topologique et les techniques de fabrication additives en fait des partenaires idéaux et les récentes avancées de ce procédé prédisent des débouchés de plus en plus concrets à ces méthodes de conception. Il serait alors possible d'obtenir des pièces à hautes-performances dans des matériaux métalliques comme en témoigne le procédé de fabrication additive avec poudres métalliques.

Chapitre 2

Optimisation de structures micro-architecturées

Sommaire

2.1	Introduction	48
2.2	Mécanique multi-échelle et séparation des échelles	51
2.2.1	Homogénéisation	52
2.3	Optimisation de matériaux architecturés	59
2.3.1	Illustration de l'algorithme d'optimisation de matériaux architecturés	65
2.4	Optimisation de structures macroscopiques	74
2.4.1	Formulation pour la compliance	74
2.4.2	Illustration de l'algorithme d'optimisation pour la compliance	79
2.4.3	Modèle Hyperélastique en grandes déformations	81
2.4.4	Formulation pour les mécanismes souples	82
2.4.5	Illustration de l'algorithme d'optimisation pour les mécanismes souples	87
2.5	Optimisation concourante des deux échelles	90
2.5.1	Différentes approches envisagées	91
2.6	Conclusion	96

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, les concepts théoriques de l'optimisation topologique à deux échelles seront présentés. L'idée sous-jacente suppose qu'il est possible d'améliorer encore les performances d'une structure en optimisant la distribution des propriétés mécaniques, ce qui revient à optimiser une distribution de micro-structure. En effet, conformément à l'idée proposée par A. Faure [Faure, 2017], la figure 2.1 présente une carte des matériaux connus, référencés par masse et raideur. Un des objectifs de la conception de matériaux micro-architecturés par optimisation topologique est de trouver des matériaux qui permettraient de remplir certaines zones vides de cette carte. Typiquement, des matériaux de faible masse qui conservent une bonne raideur.

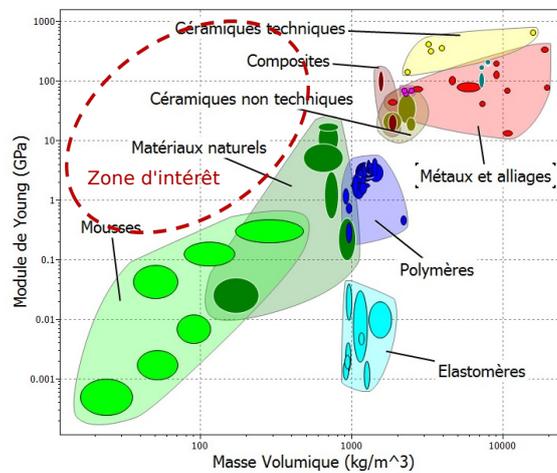


FIGURE 2.1 – Carte d'Ashby des matériaux connus répertoriés par le rapport rigidité-masse [Ashby et Brechet, 2003].

Il existe un large panel d'applications intéressantes pour ces matériaux, en plus de leur propriétés mécaniques avantageuses. En effet, la micro-structure permet d'obtenir des comportements originaux qui n'existent pas chez les matériaux naturels tels que des comportements auxétiques (matériaux à coefficient de Poisson négatif). Ces matériaux peuvent, par exemple, servir à atténuer des ondes, comme le montrent les travaux suivants [Billon, 2016, Kochmann et Bertoldi, 2017], ou à atténuer la propagation de fissures [Xia *et al.*, 2018]. Une autre application ayant rencontré un certain succès vis à vis du grand public est la conception de voiles d'invisibilité qui consiste, par diffraction/réflexion de la lumière dans des milieux architecturés, à rendre certains objets invisibles à l'oeil [Wood, 2009]. Le terme méta-matériaux est souvent employé pour ce type d'application. Les matériaux composites et les matériaux à gradient de propriétés sont également des exemples de matériaux avec des comportements originaux qui peuvent avoir des applications intéressantes. Le terme "micro-structure" peut avoir plusieurs significations et faire référence à divers concepts de science des matériaux, divers états de la matière. La plupart des

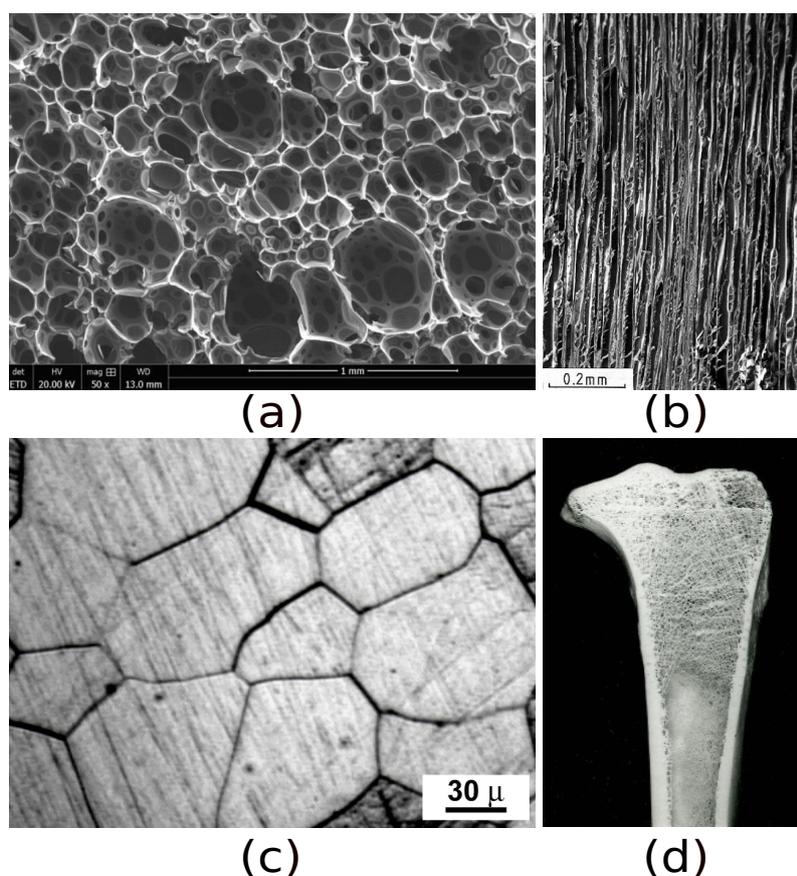


FIGURE 2.2 – Exemples de matériaux naturels présentant une micro-structure. (a) : matériau de type mousse [Letellier, 2015]; (c) : grains d’un alliage de titane [Adzima, 2016]; (b) : bois de cèdre [Gibson et Ashby, 1999]; (d) : os de tibia [Gibson et Ashby, 1999].

définitions s’accordent sur la notion d’hétérogénéités de petites dimensions permettant d’atteindre des propriétés spécifiques du fait de la conception topologique du matériau [Geers *et al.*, 2003]. En ce sens, les matériaux métalliques présentent une micro-structure à l’échelle atomique via leur structure cristallographique et à l’échelle du micromètre au millimètre pour les grains qui apparaissent lors de la solidification 2.2. Il existe d’autres exemples, comme le bois qui est un matériau fibreux dont la micro-structure est fortement anisotrope, les mousses dont la présence de bulles entraîne une porosité importante qui a un impact sur les propriétés mécaniques, etc...

L’étude de la structure de la matière et, plus généralement, de la science des matériaux, est un domaine large qui ne sera pas abordé au cours de cette thèse. Le terme ”micro-structure” renvoie, pour cette étude, à la topologie dupliquée d’un motif périodique dont les dimensions sont petites vis-à-vis de la structure comme l’illustre la figure 2.3. Le terme de ”matériaux architecturés” sera alors utilisé pour

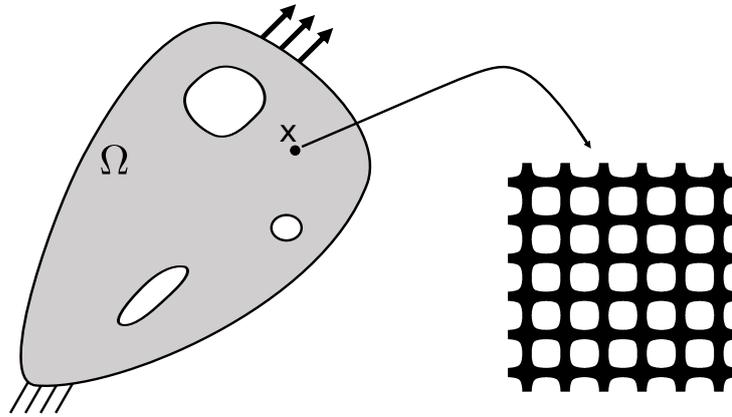


FIGURE 2.3 – Exemple de macro-structure avec une micro-structure, ou matériau architecturé, au point macroscopique \mathbf{x} .

cette signification de la micro-structure. Le matériau de base utilisé pour fabriquer ces matériaux architecturés est considéré isotrope, ses propriétés mécaniques étant définies et connues.

L'objectif de ce chapitre est de proposer, en s'appuyant sur la littérature existante et fournie dans ce domaine [Wang *et al.*, 2018, Li *et al.*, 2018, Wang *et al.*, 2017, Gao *et al.*, 2019, Kato *et al.*, 2018, Groen et Sigmund, 2018], une méthode de conception de matériaux architecturés par optimisation topologique qui soit couplée à la conception de structures à l'échelle macroscopique. Ce couplage est subtil car, s'agissant d'un algorithme d'optimisation, les topologies sont amenées à évoluer. Or, une variation du matériau architecturé peut perturber la macro-structure optimale et, inversement, une variation de la topologie de la macro-structure impliquer un changement de la distribution optimale du matériau.

Dans un premier temps, la théorie associée à la mécanique multi-échelle sera présentée. Cette théorie s'appuie principalement sur la notion de séparabilité des échelles qui sera explicitée. Les méthodes d'homogénéisation permettent d'obtenir des comportements moyens des micro-structures et, ainsi, de faire passer les informations locales de l'échelle micro vers l'échelle macro et permettent un couplage. Une fois ces concepts d'échelle macro/micro établis, une attention spécifique sera portée à l'optimisation de chacune de ces échelles, indépendamment pour différentes fonctions objectifs. Enfin, l'optimisation concourante des deux échelles sera abordée. Il sera alors montré que plusieurs approches, détaillées ultérieurement, sont envisageables, et les limites associées au couplage seront discutées.

2.2 Mécanique multi-échelle et séparation des échelles

La mécanique multi-échelle envisagée dans le cadre de ces travaux est une mécanique à deux échelles : respectivement l'échelle macroscopique, c'est-à-dire l'échelle de la structure, et l'échelle plus fine du matériau micro-architecturé. Comme suggéré dans l'introduction de ce chapitre, un matériau architecturé consiste en la duplication dans l'espace d'un motif périodique. Il est alors envisageable d'identifier un comportement équivalent pour ces motifs. L'idée de comportement équivalent ou homogène voit le jour notamment suite au constat qu'il est, inenvisageable de réaliser des calculs mécaniques pertinents en prenant en compte des hétérogénéités de faibles dimensions par rapport à la structure. En effet, pour capturer l'impact de ces hétérogénéités sur une pièce mécanique, il faudrait, dans un premier temps, disposer d'un modèle capable de reproduire ces hétérogénéités donc un maillage extrêmement fin et, par la suite, disposer d'un outil de calcul qui soit capable de résoudre des systèmes de très grande dimension. Dans la pratique, ce type de calcul étant particulièrement gourmand en termes de temps de calcul et de mémoire, il est commun d'avoir recours à la séparation des échelles. Cette hypothèse suppose qu'il existe un comportement homogénéisable, ou comportement moyen, de la micro-structure dont les dimensions sont petites par rapport à celles de la structure. Cette idée est illustrée sur la figure 2.3. Une équation fondamentale associée à cette idée peut alors être donnée pour le champ des déplacements d'une structure soumise à un chargement comme suit [de Souza Neto *et al.*, 2011] :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

où \mathbf{u} est la solution globale qui s'exprime comme la somme de $\bar{\mathbf{u}}$, composante macroscopique du déplacement et $\tilde{\mathbf{u}}$, composante fluctuante locale des hétérogénéités. Une illustration de cette décomposition est donnée par la figure 2.4.

Les dimensions de la zone homogénéisée définissent un volume élémentaire représentatif (VER). Dans tout l'espace du VER, les propriétés matériaux sont considérées constantes du point de vue macroscopique. Il est alors commun de considérer qu'un point se définit par deux variables de position, l'une globale \mathbf{x} et l'autre locale \mathbf{y} .

La figure 2.4 illustre que le comportement local fluctuant est périodique, ce qui suppose que le comportement des hétérogénéités l'est aussi. Autrement dit, la topologie du matériau architecturé doit être périodique, ce qui sera toujours le cas par la suite. Les champs fluctuants définis par rapport à la variable locale sont de moyenne nulle et donc, à l'échelle macroscopique, la loi de comportement élastique est inchangée et en tout point \mathbf{x} elle s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}^H(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

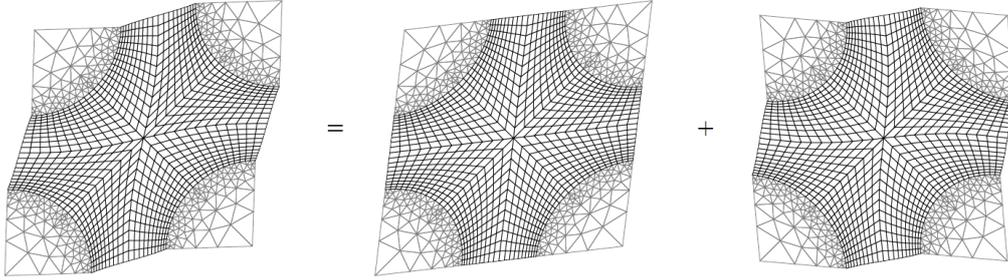


FIGURE 2.4 – Décomposition en partie moyenne et fluctuante du champ de déformation [Bornert *et al.*, 2001a].

En revanche, l'opérateur de Hooke homogénéisé $\mathbb{C}^H(\mathbf{x})$ dépend du matériau architecturé. Il est ici nécessaire de supposer qu'il est possible de définir un volume élémentaire représentatif autour de \mathbf{x} pour lequel le comportement ne varie pas. Ce comportement peut être calculé par la théorie de l'homogénéisation. Ainsi, les grandeurs macroscopiques associées à un calcul élastique multi-échelle sont les conditions aux limites et la topologie. Les grandeurs associées à l'échelle microscopique sont, quant à elles, les micro-structure qui, par homogénéisation, permettent l'assemblage de la matrice de raideur.

2.2.1 Homogénéisation

Comme évoqué en début de chapitre, la séparabilité des échelles suppose qu'il est possible, en tout point macroscopique, d'identifier un VER pour lequel les propriétés mécaniques sont homogénéisables. Dans le cadre de cette thèse, le comportement étudié se limite à un modèle élastique décrit par l'équation (2.2) où la grandeur homogénéisée correspond à l'opérateur de Hooke ou tenseur d'élasticité.

La méthode d'homogénéisation permettant de calculer l'opérateur de Hooke d'un matériau homogénéisé est tirée de [Bornert *et al.*, 2001a] et repose sur l'équation de séparabilité des échelles (2.1). En termes de déformation, cette équation s'écrit :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.3)$$

Soit Ω_m le VER délimitant la topologie du matériau architecturé. Il est alors possible d'intégrer l'équation de séparation des échelles en déformation (2.3) sur ce VER :

$$\frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega_m = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega_m + \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega_m \quad (2.4)$$

Pour que la condition de VER soit remplie, il est nécessaire que les champs locaux soient fluctuants sur Ω_m , ce qui impose que la moyenne de ces champs sur le VER est nulle donc $\frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \tilde{\epsilon} d\Omega_m = 0$. Le champ macroscopique, quant à lui, est défini sur la variable globale mais est considéré constant sur le VER à l'échelle locale. Autrement dit $\bar{\epsilon}$ est constant sur Ω_m et l'équation (2.4) peut alors être écrite :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \epsilon d\Omega_m \quad (2.5)$$

De manière analogue, il est possible d'écrire cette équation en contrainte :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \sigma d\Omega_m \quad (2.6)$$

Finalement en introduisant les équations (2.5) et (2.6) dans la loi de comportement (2.2) au point \mathbf{x} de la macro-structure, il vient :

$$\frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \sigma d\Omega_m = \mathbb{C}^H(\mathbf{x}) : \bar{\epsilon} \quad (2.7)$$

Ceci traduit le fait qu'en choisissant judicieusement un certain nombre de modes de déformations $\bar{\epsilon}$ sur un matériau architecturé, il est possible d'obtenir certaines composantes du tenseur d'élasticité homogène en intégrant les contraintes locales sur le VER. On parle alors pour $\bar{\epsilon}$ de chargement généralisé (ou déformation libre). L'équation (2.7) peut s'écrire composante par composante :

$$\frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \sigma_{ij} d\Omega_m = C_{ijkl}^H(\mathbf{x}) \bar{\epsilon}_{kl} \quad (2.8)$$

Les modes de déformation macroscopique sur la cellule (ou chargements généralisés) peuvent alors s'écrire :

$$\bar{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) \quad (2.9)$$

où δ représente le symbole de Kronecker. Le champ de déplacements local solution des équations d'équilibre sur le VER, pour un mode de déformation $\bar{\epsilon}_{kl}$, sera alors noté \mathbf{u}^{kl} . Les équations d'équilibre à l'échelle locale s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})) = \mathbf{0} & \forall \mathbf{y} \in \Omega_m & (1) \\ \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \bar{\epsilon} \cdot (\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-) & & (2) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^l(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\epsilon} & & (3) \end{cases} \quad (2.10)$$

Le système (2.10) se compose de trois équations. La première (1) traduit l'équilibre des efforts dans le volume. La seconde(2) représente les conditions aux limites en périodicité imposées sur le VER. Il s'agit ici d'une condition sur le champ

de déplacements qui décompose les bords de la micro-structure en deux ensembles : l'ensemble + et l'ensemble - qui correspondent aux bords opposés comme illustré sur la figure 2.5 où les déplacements des bords opposés sont égaux, il s'agit donc du champ fluctuant $\tilde{\mathbf{u}}$ et pas du champ total \mathbf{u} .

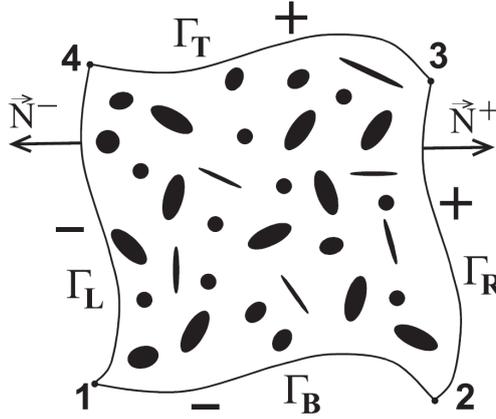


FIGURE 2.5 – Illustration des ensembles + et - sur la cellule. L'ensemble + est divisé entre le bord droit Γ_R et le bord haut Γ_T tandis que l'ensemble - est divisé entre le bord gauche Γ_L et le bord bas Γ_B [Geers *et al.*, 2003].

La dernière équation (3) est la loi de comportement locale. Il est important de noter que le comportement est élastique à la fois à l'échelle macroscopique et à l'échelle microscopique. Cependant les opérateurs $\mathbb{C}^H(\mathbf{x})$ et $\mathbb{C}^l(\mathbf{y})$ sont différents. En effet, $\mathbb{C}^H(\mathbf{x})$ représente le tenseur d'élasticité homogénéisé du VER au point macroscopique \mathbf{x} tandis que $\mathbb{C}^l(\mathbf{y})$ représente le tenseur d'élasticité de la matière à l'échelle locale dans le VER au point microscopique \mathbf{y} . Dans le cadre de cette thèse, le matériau architecturé est bi-phasique. Il est composé d'une phase solide isotrope (matériau de base) et d'une phase vide.

Il est alors possible d'identifier trois chargements élémentaires en 2D et 6 chargements élémentaires en 3D qui sont illustrés respectivement sur la figure 2.6. L'intérêt de définir ces chargements élémentaires vient du fait qu'il est possible d'écrire, du fait que le mode de déformation $\bar{\epsilon}_{kl}$ est unitaire :

$$C_{ijkl}^H(\mathbf{x})\bar{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^H(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

Et donc, pour un tel chargement, l'équation (2.8) peut se réécrire :

$$C_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{kl}) d\Omega_m \quad (2.12)$$

Il est possible d'obtenir toutes les composantes du tenseur d'élasticité homogénéisé en soumettant le VER à un certain nombre de modes de déformations

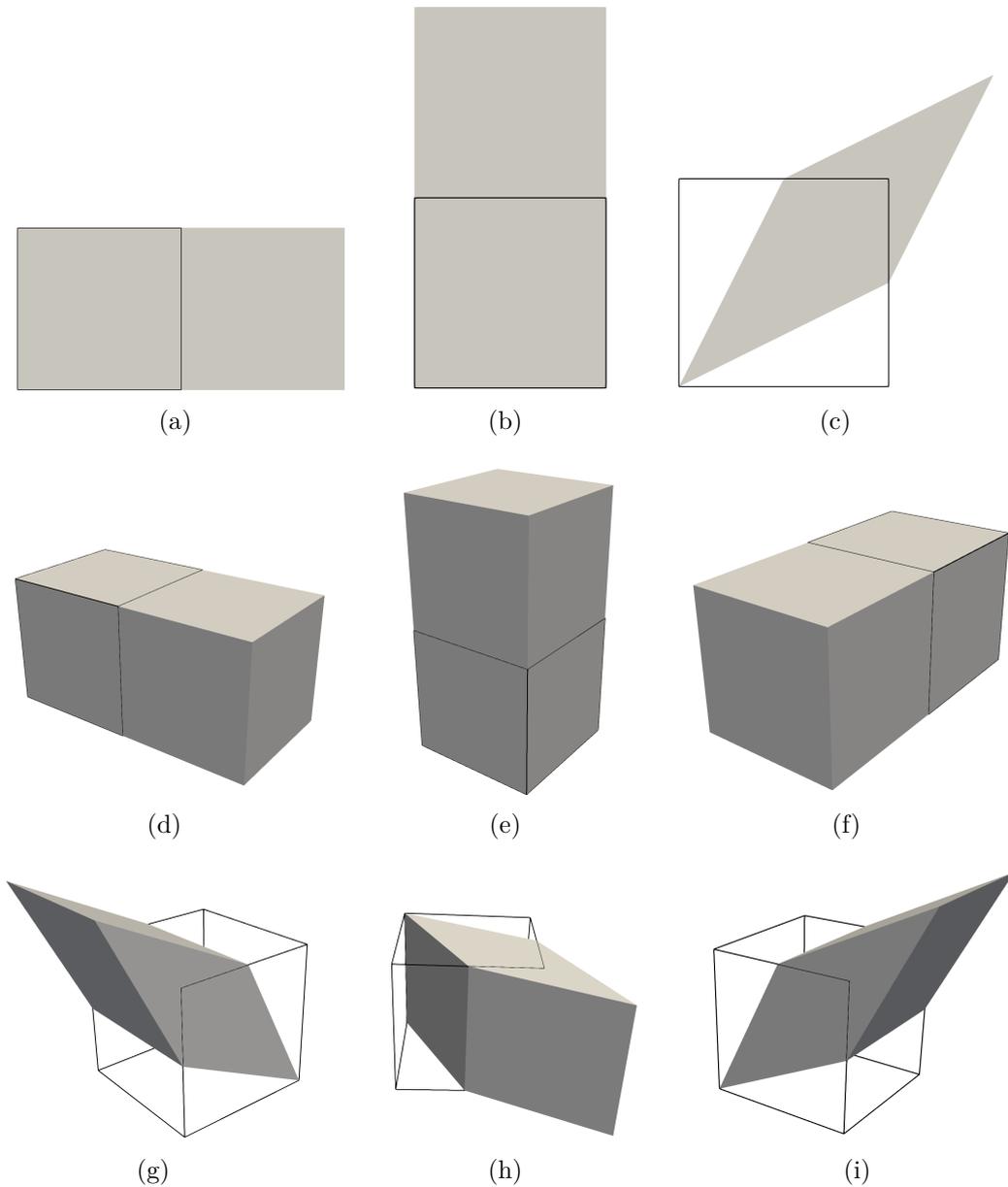


FIGURE 2.6 – Illustration des modes de déformation définis par l'équation (2.9). Les contours de la cellule non déformée sont illustrés en noir.

élémentaires définis par (2.9) et en intégrant les composantes du tenseur des contraintes locales associées à ce mode de déformations sur le VER.

Les matériaux architecturés considérés dans le cadre de cette thèse sont désignés en utilisant des conditions aux limites en périodicité. Par conséquent, les topologies obtenues seront périodiques à l'échelle locale. Cependant, il est important de faire ici la nuance entre volume élémentaire représentatif et cellule élémentaire représentative. La cellule élémentaire représente le plus petit motif identifiable qui,

par duplication dans toutes les directions, peut engendrer le matériau homogène. Cette distinction est illustrée par la figure 2.7.

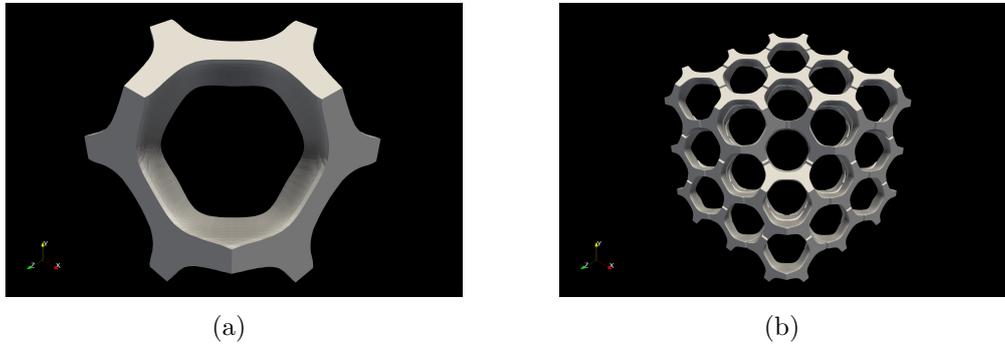
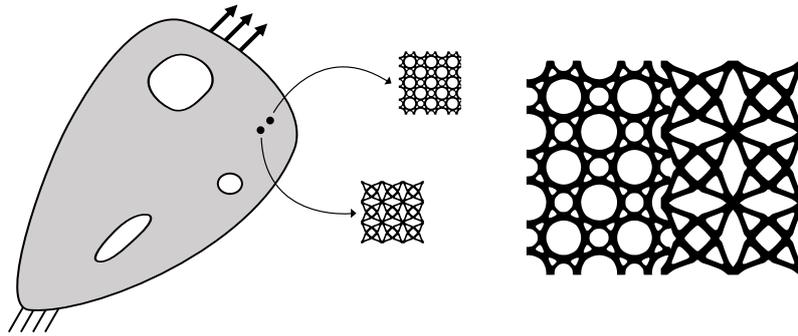


FIGURE 2.7 – Une cellule élémentaire et le matériau architecturé engendré par duplication de ce motif dans l’espace.

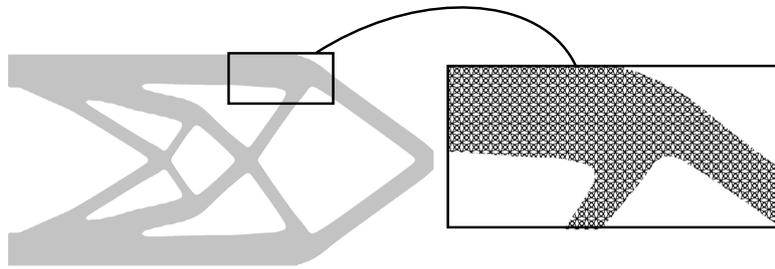
Le motif étant périodique, le comportement homogène reste inchangé par duplication entière du motif. Ainsi, un VER peut contenir un certain nombre de motifs tout en ayant le même comportement homogène que la cellule élémentaire tant que ce nombre est entier. Cette distinction entre cellule élémentaire et volume élémentaire est nécessaire du fait de l’hypothèse de séparabilité des échelles. En effet, comme suggéré en introduction de cette partie, l’hypothèse majeure faite dans le cadre de la mécanique multi-échelle utilisée ici est qu’il est possible d’identifier en tout point de la macro-structure \mathbf{x} un VER, c’est-à-dire une zone dans laquelle le comportement est homogénéisable et donc une zone dans laquelle le matériau architecturé est périodique. Deux enjeux majeurs apparaissent alors et viennent contredire cette hypothèse : la jonction de deux matériaux architecturés et les bords de la macro-structure. Ces deux aspects sont illustrés sur la figure 2.8. Il apparaît clairement que, dans ces deux cas de figure, la périodicité n’est plus respectée.

L’intérêt de la distinction entre cellule élémentaire et volume élémentaire intervient alors du fait de la constatation suivante : lorsqu’un milieu comporte un nombre suffisant de duplications de cellules élémentaires, alors le comportement homogène de ce milieu tend vers le comportement de la cellule même s’il n’est pas strictement périodique. Autrement dit, si la jonction entre deux zones de matériaux architecturés différents a lieu sur des VER qui contiennent un nombre suffisant de duplications de chaque motifs, alors le comportement homogène de chaque VER est assimilable à celui des cellules élémentaires, bien que l’hypothèse de périodicité soit invalidée au niveau de la jonction. De la même manière, au niveau des bords, il est nécessaire d’avoir des VER qui contiennent un grand nombre de cellules pour diminuer l’impact de la non périodicité.

Afin d’illustrer ce propos, une étude des propriétés homogénéisées de plusieurs VER est menée où chaque VER représente une duplication continue du motif comme l’illustre la figure 2.9. Les composantes homogénéisées de chaque VER sont illustrées



(a)



(b)

FIGURE 2.8 – Illustration des limites à l’hypothèse de séparabilité des échelles dans le cas de la jonction de deux matériaux architecturés et des effets de bords.

sur les graphes 2.10. Sur le sous graphe (a) apparaît également la norme au sens de Frobenius de la matrice d’erreur :

$$\mathbf{C}_{err} = \mathbf{C}_{CER} - \mathbf{C}_{VER} \quad (2.13)$$

Cette matrice consiste en la différence entre le tenseur de la cellule élémentaire \mathbf{C}_{CER} en notation de Voigt pour un seul motif, et le tenseur du VER \mathbf{C}_{VER} , également en notation de Voigt, pour la duplication du motif. La norme de Frobenius s’écrit :

$$Norm = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}_{err} \cdot \mathbf{C}_{err}^T)} \quad (2.14)$$

Il apparaît que plus le nombre de duplications du motif est grand plus les propriétés homogènes du VER tendent vers celles du motif. De même, la norme du tenseur erreur diminue, ce qui signifie que le tenseur du VER tend vers celui de la CER. Ainsi, même si le milieu n’est pas strictement périodique (nombre de duplications du motif non entier), si le VER contient suffisamment de motifs, alors le

comportement du VER tend vers celui du motif. Bien que la convergence du comportement du VER vers celui de la CER semble lente, cette étude conforte l'idée que le fait d'augmenter le nombre de motifs contenus dans le VER aura tendance à diminuer l'impact des effets de bords qui remettent en cause l'hypothèse de périodicité de la séparation des échelles.

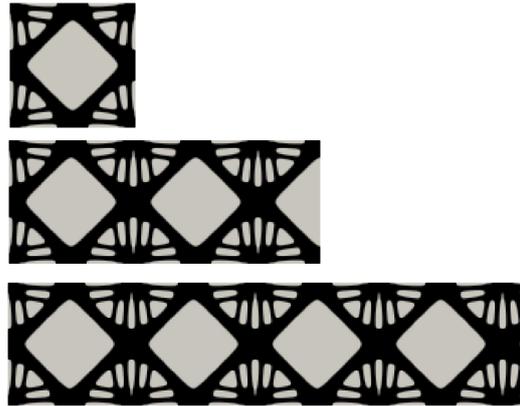


FIGURE 2.9 – Une CER et deux VER qui se composent respectivement de 2.5 CER et 4.2 CER.

Il conviendrait de définir une quantité associée au "nombre suffisant de motifs" et plus le nombre de motifs nécessaires est grand, plus les dimensions du motif de base devront être petites. Or le fait de diminuer les dimensions de ce motif pose le problème de la fabricabilité. En effet le procédé de fabrication impose des dimensions minimales en deçà desquelles le motif n'est plus fabricable, ce qui peut rapidement devenir une limite à l'utilisation des matériaux architecturés. Afin d'introduire une réponse au nombre de motifs nécessaire pour considérer que le comportement du VER est équivalent à celui du motif même si le VER n'est pas tout à fait périodique, une étude est menée pour 3 motifs. Les normes au sens de Frobenius sont illustrées sur les graphes 2.11. Il apparaît alors que le nombre de motifs nécessaire dépend de la topologie du matériau architecturé et qu'il faudrait mener une étude sur chaque matériau pour avoir une idée de ce nombre. Pour les matériaux (a) et (c), la convergence est en effet plus rapide que pour le matériau (b). Les résultats présentés sont toutefois limités car la convergence semble nécessiter un grand nombre de cellules mais le calcul n'a pas été mené sur plus de 10 cellules (car le nombre de degrés de liberté requis devient très grand). La tendance de la courbe laisse penser que la convergence peut être obtenue mais il serait mal avisé d'extrapoler en dehors du domaine pour lequel les calculs ont été menés. De plus, la duplication du motif est faite dans une unique direction, or, le matériau est obtenu en dupliquant la CER dans toutes les directions, ce qui peut modifier la vitesse de convergence du comportement du VER vers celui de la CER. Finalement, ces résultats permettent uniquement de conforter l'intuition que le fait d'augmenter le nombre de CER dans

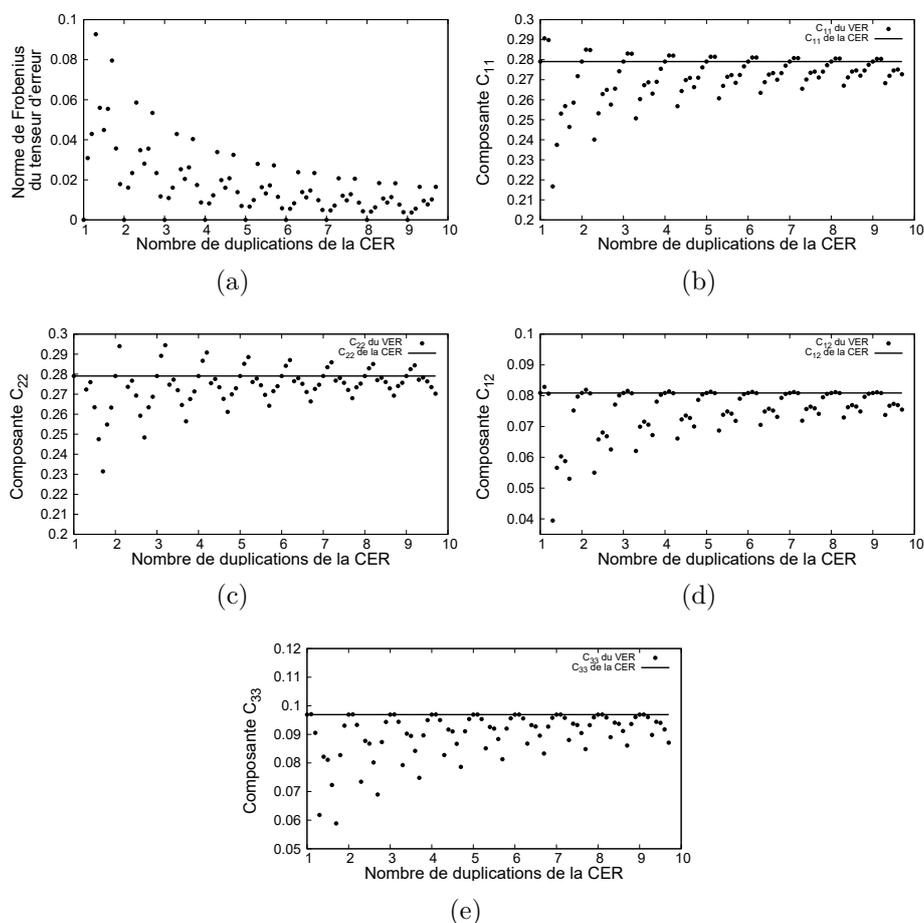


FIGURE 2.10 – Évolution des composantes homogénéisées du VER en fonction de la quantité de CER qu'il contient.

le VER permet de lisser le comportement du VER et de limiter l'impact des effets de bords.

2.3 Optimisation de matériaux architecturés

Il existe plusieurs manières de formuler un problème d'optimisation de matériaux architecturés. Tout d'abord, il convient de définir les propriétés à optimiser et les contraintes associées. Une manière classique d'optimiser un matériau consiste à maximiser sa rigidité pour un chargement donné tout en respectant la contrainte d'équilibre mécanique. Un tel problème s'écrit alors :

2. Optimisation de structures micro-architecturées

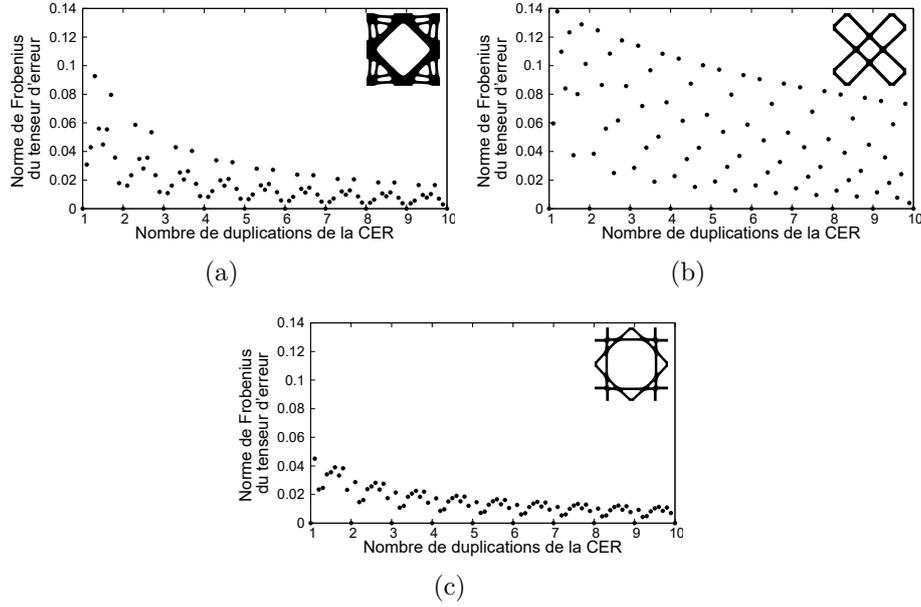


FIGURE 2.11 – Évolution du comportement du VER en fonction de la quantité de CER qu'il contient pour différentes topologie de la CER.

$$\begin{aligned}
 \min_{\Omega} \quad & J(\Omega, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega \\
 \text{t. q.} \quad & \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \\
 & \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-) \\
 & \int_{\Omega} d\Omega < V_{max}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où la topologie Ω fait référence à la microstructure Ω_m définie plus tôt. Il est commun de rajouter une contrainte sur le volume : $\int_{\Omega} d\Omega < V_{max}$ qui impose que la topologie comprise dans le domaine D ait un volume inférieur à une certaine porosité maximale admissible V_{max} . Le chargement imposé pour la CER se définit généralement par le tenseur de déformation macroscopique $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$. La table 2.1 illustre divers matériaux architecturés pour différents chargements. Ce type de formulation peut être trouvé par exemple dans l'article suivant [Ferrer *et al.*, 2016].

Un autre type de formulation consiste à optimiser la rigidité et la dilatation thermique dans une formulation couplée de thermomécanique. Ce problème s'écrit :

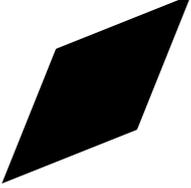
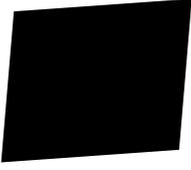
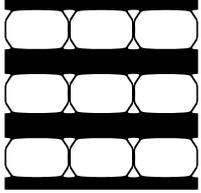
Déformation imposée	Illustration de la déformation	Matériau optimisé
$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix}$		
$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$		

TABLE 2.1 – Illustration des matériaux optimisés en rigidité pour différentes sollicitations macroscopiques $\bar{\epsilon}$

$$\begin{aligned} \max_{\Omega} \quad & J(\Omega, \mathbf{u}) = \sum_{ijkl} \eta_{ijkl} C_{ijkl}^H + \sum_{ij} \lambda_{ij} \alpha_{ij}^H \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{u}^{ij} = \mathbf{f}^{ij} \\ & \mathbf{K} \boldsymbol{\chi}^\alpha = \mathbf{f}^\alpha \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $(\eta_{ijkl}$ et λ_{ij} sont des coefficients de pénalisation qui visent à favoriser certaines composantes des tenseur \mathbb{C}^H et α^H , \mathbf{u}^{ij} est le champ de déplacements solution du problème mécanique défini par (2.10) pour un chargement \mathbf{f}^{ij} qui provient de $\bar{\epsilon}^{ij}$ défini par (2.9) et $\boldsymbol{\chi}$ est le champ solution du problème thermique où le chargement \mathbf{f}^α s'écrit :

$$\mathbf{f}^\alpha = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \alpha \, d\Omega \quad (2.17)$$

avec α le tenseur de dilatation thermique. Cette formulation revient donc à maximiser certains coefficients du tenseur d'élasticité et du tenseur de dilatation thermique. Les travaux suivants [Sigmund et Torquato, 1997] explicitent ce type de problème.

L'objectif étant d'intégrer ces matériaux dans un contexte multi-échelle, il peut être également intéressant de travailler directement sur l'opérateur de Hooke homogénéisé du matériau. Une formulation possible consiste alors à optimiser le matériau pour que son tenseur d'élasticité homogénéisé tende vers un tenseur cible [Gao *et al.*, 2020, Sigmund, 1994, Wang *et al.*, 2004]. Ce problème revient à trouver, pour un comportement effectif prédéfini, une topologie dont le comportement homogénéisé tend vers celui prescrit. Ce type de formulation a l'avantage de permettre d'intégrer directement le comportement homogénéisé qui sert pour le dialogue entre les échelles macro et micro dans le contexte de la séparation des échelles dans la

fonction objectif. De plus, avec ce genre de formulation, il est pratique de concevoir des matériaux avec des comportements originaux tels que des matériaux auxétiques. Ce problème s'écrit alors :

$$\min_{\Omega} J(\Omega, \mathbf{u}) = |\Omega| \sum_{ijkl} \eta_{ijkl} \left(C_{ijkl}^H - C_{ijkl}^T \right)^2 + \beta \int_{\Omega} d\Omega$$

(2.18)

t. q.

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- &= \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-) \end{aligned}$$

Cette formulation correspond à la minimisation de l'erreur, au sens des moindres carrés, entre certaines composantes $ijkl$ du tenseur d'élasticité homogénéisé \mathbb{C}^H et du tenseur prescrit \mathbb{C}^T avec η_{ijkl} un paramètre de pénalisation sans unité qui permet de favoriser certaines composantes imposées. Le second terme correspond à la minimisation du volume occupé par la matière, c'est-à-dire la minimisation de $\Omega \in D$. Le paramètre β [$kg^2.m^{-2}.s^{-4}$] permet d'assurer l'homogénéité de l'équation (2.18). Ce second terme apparait du fait qu'il n'y a pas unicité de la topologie pour un tenseur d'élasticité homogène donné. Autrement dit, il est possible de trouver plusieurs matériaux architecturés avec des topologies variées qui vont avoir le même tenseur d'élasticité homogène. Le terme sur le volume sert alors à favoriser le matériau le plus léger. S'agissant du type de formulation le plus utilisé pour concevoir des matériaux architecturés dans le cadre de cette thèse, la stratégie de résolution de ce type de problème est détaillée par la suite. La méthode utilisée est celle des lignes de niveaux couplée à la dérivation de forme qui est détaillée dans le chapitre 1.

Afin de calculer, à chaque itération, les composantes homogénéisées du tenseur d'élasticité, la méthode d'homogénéisation est utilisée. Elle nécessite d'utiliser les modes de déformation définis par (2.9). Ces modes de déformations génèrent des champs de déplacements qui doivent satisfaire les conditions d'état d'équilibre définies par (2.10). La fonction Lagrangienne associée à ce problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = J(\Omega, \mathbf{u}) + G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.19)$$

où $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^{11}, \mathbf{u}^{12}, \mathbf{u}^{13}, \mathbf{u}^{22}, \mathbf{u}^{23}, \mathbf{u}^{33}\}$ sont les champs de déplacements solutions des équilibres de la micro-structure par rapport au mode de déformation $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl}$ défini par (2.9). Et $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}^{11}, \mathbf{v}^{12}, \mathbf{v}^{13}, \mathbf{v}^{22}, \mathbf{v}^{23}, \mathbf{v}^{33}\}$ sont des multiplicateurs de Lagrange homogènes à des champs cinématiquement admissibles qui imposent les conditions d'équilibre via G :

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{ij} \left(- \int \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij})) \cdot \mathbf{v}^{ij} d\Omega \right) \quad (2.20)$$

Cette équation peut être réécrite via une intégration par parties :

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{ij} \left(\int \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^{ij}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^{ij} dS \right) \quad (2.21)$$

Or, le bord peut être divisé en quatre ensembles $\Gamma_R, \Gamma_L, \Gamma_B$ et Γ_T comme l'illustre la figure 2.5. Les conditions limites en périodicité imposent, par translation, que les vecteurs contraintes, sur les bords connectés par la périodicité, sont opposés (il y a anti-périodicité du champ de contraintes) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_L \cup \Gamma_B \quad (2.22)$$

Le multiplicateur de Lagrange \mathbf{v} est restreint à l'espace $H^1(\Omega)$, $v(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})$, $\forall \mathbf{y} \in \Gamma_L \cup \Gamma_B$ qui correspond aux champs périodiques. Le terme de bord sur la contrainte G définie par l'équation (2.21) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) dS = \\ & \int_{\Gamma_L} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) dS + \int_{\Gamma_R} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) dS \\ & + \int_{\Gamma_B} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) dS + \int_{\Gamma_T} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) dS \end{aligned} \quad (2.23)$$

or, les couples de bords opposés (Γ_B, Γ_T) et (Γ_L, Γ_R) sont identiques en termes de topologies du fait des conditions limites en périodicité. Par translation, les termes sur les bords opposés peuvent donc être regroupés :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_L} [(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) + (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})] dS \\ & + \int_{\Gamma_B} [(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y}) + (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta y})] dS \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ce terme de bord s'annule alors par anti-périodicité du champ des contraintes et périodicité du multiplicateur de Lagrange \mathbf{v} .

Comme explicité dans le chapitre 1, la résolution d'un tel problème se décompose en deux parties. La première consiste à déterminer à Ω fixé, le point-selle $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ qui correspond aux conditions de stationnarité de la fonction Lagrangienne par rapport à chacune des variables \mathbf{u} et \mathbf{v} . Puis, dans un second temps, la dérivée de forme, à $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ fixés, de la fonction Lagrangienne qui correspond à la condition de stationnarité par rapport à Ω . La fonction Lagrangienne définie par (2.19) peut être différenciée comme suit :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Omega}\delta\Omega + \sum_{ij} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}^{ij}}\delta\mathbf{u}^{ij} + \sum_{ij} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}^{ij}}\delta\mathbf{v}^{ij} = 0 \\ \forall\Omega \subset D \quad \forall(\mathbf{u}^{ij}, \mathbf{v}^{ij}, (i, j)) &\in (\mathcal{U}_{\mathbf{u}^{ij}}, \mathcal{U}_{\mathbf{v}^{ij}}, \{1, 2, 3\}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où les ensembles $\mathcal{U}_{\mathbf{u}^{ij}}, \mathcal{U}_{\mathbf{v}^{ij}}$ sont :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{\mathbf{u}^{ij}} &= \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-)\} \\ \mathcal{U}_{\mathbf{v}^{ij}} &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^-\} \end{cases} \quad (2.26)$$

Comme mentionné plus haut, cette différentielle peut être divisée en trois ensembles qui dépendent respectivement de $\delta\Omega$ pour la dérivée de forme, et de $\delta\mathbf{u}$ et $\delta\mathbf{v}$ pour le point-selle. Les termes en $\delta\mathbf{v}^{ij}$ imposent naturellement que les champs \mathbf{u}^{ij} doivent satisfaire les équations d'état d'équilibre associées au mode de déformation (ij) .

Afin d'écrire les termes de l'équation (2.25) qui dépendent des $\delta\mathbf{u}^{ij}$, il convient d'utiliser l'expression des C_{ijkl}^H définie par l'équation (2.12). De plus, la fonction objectif étant formulée au sens des moindres carrés, l'équation de la dérivée du produit est rappelée :

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}^{ij}} (C_{ijkl}^H - C_{ijkl}^T)^2 = 2(C_{ijkl}^H - C_{ijkl}^T) \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}^{ij}} C_{ijkl}^H \quad (2.27)$$

ce qui permet finalement d'écrire ces termes comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}^{ij}}\delta\mathbf{u}^{ij} &= 2 \times \sum_{kl} \eta_{ijkl} (C_{ijkl}^H - C_{ijkl}^T) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij})}{\partial\mathbf{u}^{ij}} \cdot \delta\mathbf{u}^{ij} \right) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{kl}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij})}{\partial\mathbf{u}^{ij}} \cdot \delta\mathbf{u}^{ij} \right) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^{ij}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cette équation peut être réécrite en introduisant la loi de comportement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}^{ij}}\delta\mathbf{u}^{ij} &= 2 \times \sum_{kl} \eta_{ijkl} (C_{ijkl}^H - C_{ijkl}^T) \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbb{C} : \partial\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{ij})}{\partial\mathbf{u}^{ij}} \cdot \delta\mathbf{u}^{ij} \right) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{kl}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbb{C} : \partial\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{ij})}{\partial\mathbf{u}^{ij}} \cdot \delta\mathbf{u}^{ij} \right) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^{ij}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Et $\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{ij})}{\partial\mathbf{u}^{ij}} \cdot \delta\mathbf{u}^{ij} = \boldsymbol{\epsilon}(\delta\mathbf{u}^{ij})$ donc par symétrie des tenseurs \mathbb{C} , $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$, il vient, pour tout $\delta\mathbf{u}^{ij}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{u}^{ij}}\delta\mathbf{u}^{ij} &= \sum_{kl} Q_{ijkl} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{kl}) : \boldsymbol{\epsilon}(\delta\mathbf{u}^{ij}) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}^{ij}) : \boldsymbol{\epsilon}(\delta\mathbf{u}^{ij}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec :

$$Q_{ijkl} = 2 \times \eta_{ijkl} (C_{ijkl}^H - C_{ijkl}^T) \quad (2.31)$$

Ces équations permettent de déterminer les multiplicateurs de Lagrange \mathbf{v}^{ij} :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^{ij}) = - \sum_{kl} Q_{ijkl} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{kl}) \quad (2.32)$$

Cette dernière équation permet alors de déterminer le point-selle $(\mathbf{u}^{ij*}, \mathbf{v}^{ij*})$ à Ω fixé.

La deuxième étape consiste alors à écrire la dérivée de forme de la fonction Lagrangienne (2.19) au point-selle. Pour cela, le théorème démontré dans le chapitre 1 est rappelé ici :

$$\mathcal{L}(\Omega) = \int_{\Omega} f(\mathbf{X}, t) d\Omega \Rightarrow D\mathcal{L}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{X}, t) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.33)$$

Au point-selle, la fonction Lagrangienne ne dépend plus des champs (\mathbf{u}, \mathbf{v}) et dépend alors uniquement de Ω , comme suggéré par ce théorème. La dérivée de forme au point-selle s'écrit alors finalement :

$$D\mathcal{L}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{ijkl} Q_{ijkl} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{ij}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{kl}) + \beta \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.34)$$

2.3.1 Illustration de l'algorithme d'optimisation de matériaux architecturés

Quelques exemples de designs de matériaux architecturés basés sur la formulation du problème (2.18) sont présentés dans cette section. La topologie initiale consiste en le domaine rempli de phase solide. Les dimensions de la cellule sont $1 \times 1 \text{ mm}^2$ en 2D et $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$ en 3D. Le matériau de base est isotrope avec un module de Young unitaire $E = 1 \text{ MPa}$ et un module de Poisson $\nu = 0.3$.

Le premier exemple 2D traité utilise une discrétisation via un maillage structuré de 100×100 éléments rectangulaires d'ordre 1.

Le tenseur d'élasticité cible en notation de Voigt \mathbf{C}^T vaut :

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (2.35)$$

La fonction objectif du problème (2.18) est composée de deux termes :

— La minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés entre le tenseur d'élasticité cible et le tenseur homogénéisé de la CER.

— La minimisation de la fraction volumique de phase solide de la CER.

L'équilibre entre ces deux propriétés est fixé par le paramètre β . Comme mentionné précédemment, la seconde propriété est ajoutée à la formulation afin de hiérarchiser les différents matériaux ayant un tenseur d'élasticité équivalent. Plus la valeur du paramètre β est grande, plus l'impact donné à la seconde propriété est grand, et donc, plus il peut être difficile de satisfaire le premier critère. Afin de quantifier le niveau de performance, le critère suivant est utilisé :

$$Err = \frac{\|\mathbb{C}^H - \mathbb{C}^T\|}{\|\mathbb{C}^T\|} \quad (2.36)$$

Afin de mesurer l'impact du paramètre β , une étude est menée sur plusieurs valeurs de β entre 0 et 7.5 pour le tenseur cible (2.35). Les différentes topologies sont illustrées sur la figure 2.12, tandis que l'évolution du critère d'erreur, ainsi que de la fraction de phase solide, sont illustrées sur le graphe 2.13. Il apparaît alors que faire varier ce paramètre β peut faire grandement varier la topologie, et ce de manière non lisse. En effet, les topologies et la forme pour $\beta = 2$ et $\beta = 0.5$ sont éloignées. Il existe une certaine proximité des matériaux, en termes de topologie, pour les cas $\beta = 1$ et $\beta = 7$ ou $\beta = 4$ et $\beta = 7.5$; toutefois il n'y a pas de tendance qui se dégage. Par exemple, les trois valeurs consécutives $\beta = \{6, 7, 7.5\}$ sont très peu semblables. Ceci illustre particulièrement bien l'assertion de non-unicité de la topologie pour un tenseur cible donné. De plus, la tendance prévue quant à l'impact de β sur le premier critère, s'illustre bien sur le graphe 2.13. En effet, plus β est grand, plus l'erreur augmente car la priorité est donnée au second critère qui porte sur la réduction de la fraction volumique de phase solide. Il est également intéressant de noter que la solution qui donne la meilleure valeur pour le premier critère (le critère d'erreur) ne correspond pas au cas $\beta = 0$, comme il aurait été légitime de le supposer, mais au cas $\beta = 1$ qui a, de plus, l'avantage de présenter une fraction volumique de phase solide plus faible que pour $\beta = 0$.

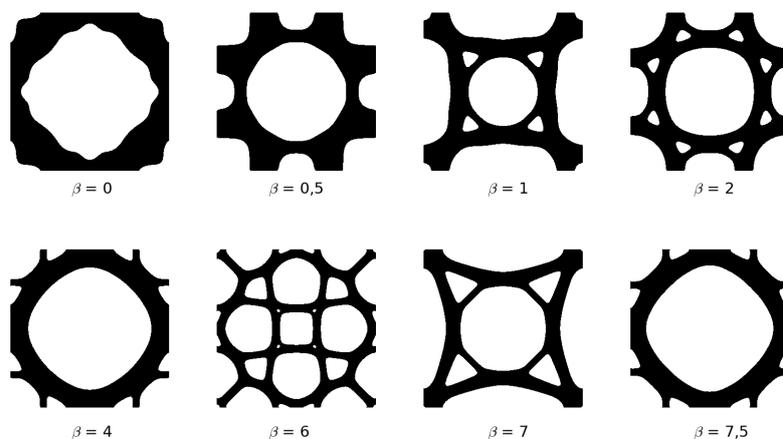


FIGURE 2.12 – Différentes topologies pour le même tenseur d'élasticité cible.

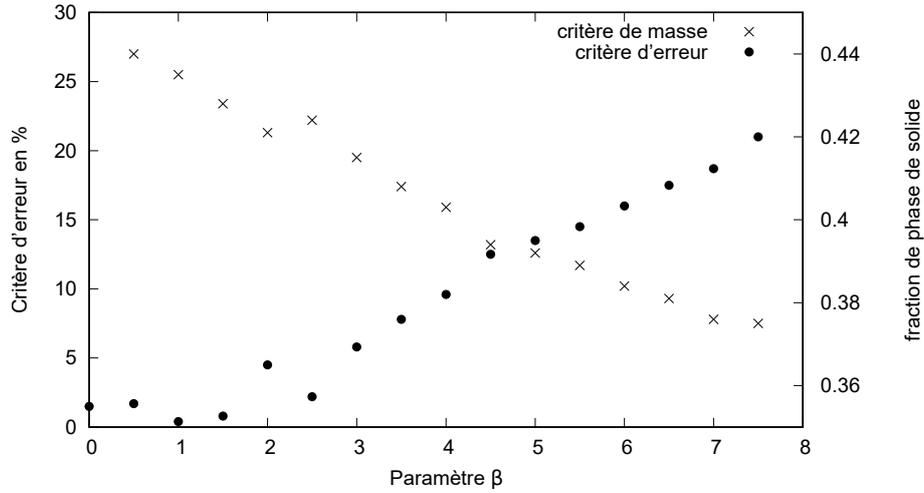


FIGURE 2.13 – Impact du paramètre β sur les deux critères de la fonction objectif.

Le second exemple traité permet d'illustrer le comportement original de l'auxétisme. Ce type de comportement se traduit par un coefficient de Poisson négatif, ce qui signifie que, lorsqu'elles sont sollicitées en traction, les sections transverses de ces matériaux, au lieu de rétrécir par effet Poisson, vont s'épaissir. Pour des matériaux isotropes, le tenseur d'élasticité peut s'écrire en fonction des modules de Young et de Poisson, en déformations planes, de la manière suivante :

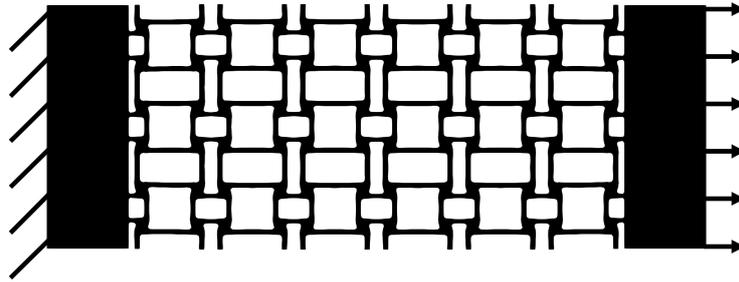
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Un matériau peut alors être qualifié d'auxétique si sa composante C_{1122} est négative. Le tenseur d'élasticité cible pour cet exemple s'écrit :

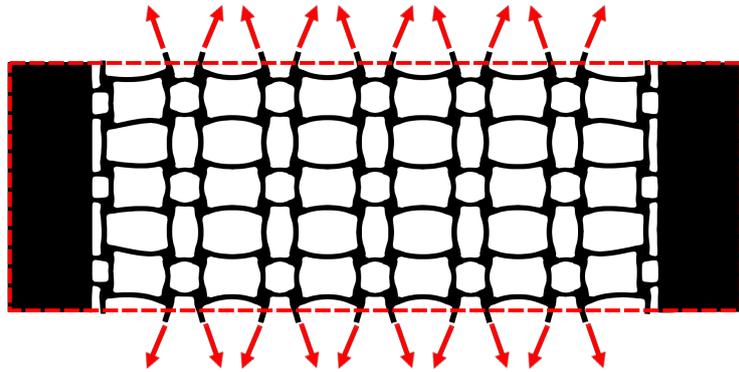
$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.06 & 0.0 \\ -0.06 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.01 \end{bmatrix} MPa \quad (2.38)$$

Afin d'illustrer l'auxétisme du matériau architecturé correspondant, un essai numérique de traction est réalisé sur un échantillon contenant 6×3 CER. Cet essai est illustré par la figure 2.14

Pour l'exemple suivant 3D, les composantes de la trace $C_{1111}, C_{2222}, C_{3333}$ ainsi que les composantes transverses $C_{1122}, C_{1133}, C_{2233}$ et les composantes de cisaillement $C_{1212}, C_{1313}, C_{2323}$ sont imposées. Les autres composantes sont libres. Les valeurs imposées, ainsi que celles obtenues par homogénéisation de la CER, sont données table 2.2. Une illustration de l'évolution de la topologie est donnée pour quelques itérations sur la figure 2.15.



(a)



(b)

FIGURE 2.14 – Illustration du comportement auxétique d'un matériau architecturé soumis à un essai de traction unidirectionnel.

Composante	Cible	Homogénéisation
C_{1111}	0.3	0.2786
C_{2222}	0.3	0.2786
C_{3333}	0.3	0.2786
C_{1122}	0.1	0.0841
C_{1133}	0.1	0.0841
C_{2233}	0.1	0.0841
C_{1212}	0.1	0.0764
C_{1313}	0.1	0.0764
C_{2323}	0.1	0.0764

TABLE 2.2 – Valeurs imposées et homogénéisées du tenseur d'élasticité de la CER pour l'exemple 3

Il est intéressant de noter que la formulation consistant en l'erreur au sens des moindres carrés entre le tenseur homogénéisé et le tenseur cible, les valeurs des composantes homogénéisées peuvent être légèrement éloignées des valeurs cibles. En

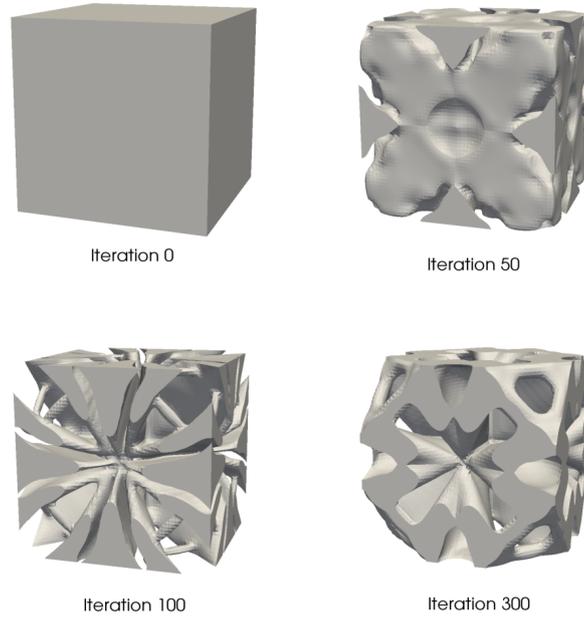


FIGURE 2.15 – Illustration de l'évolution de la topologie de la CER au cours du processus d'optimisation.

effet, la formulation des moindres carrés est moins contraignante qu'une formulation d'ordre 1. De fait, pour cet exemple où les η_{ijkl} sont fixés à 1, le premier critère de la fonction objectif s'écrit :

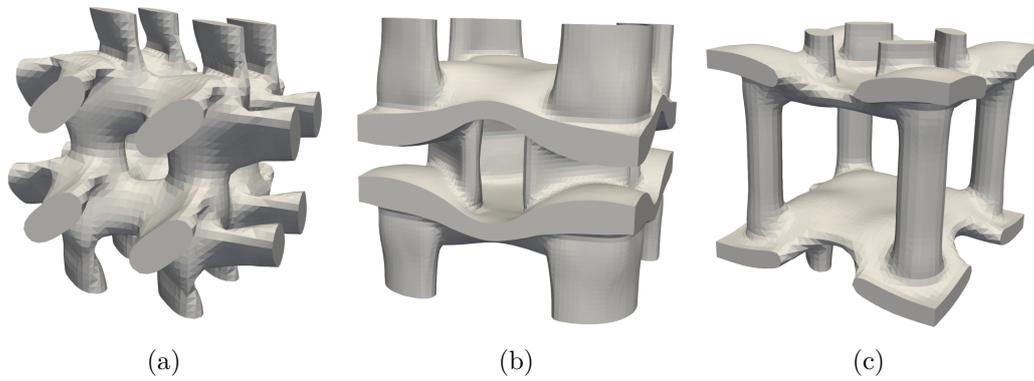
$$c = 3(0.3 - 0.2786)^2 + 3(0.1 - 0.0841)^2 + 3(0.1 - 0.0764)^2 = 0.0038 \quad (2.39)$$

dont la valeur est significativement inférieure à une formulation d'ordre 1 qui s'écrirait :

$$c = 3(0.3 - 0.2786) + 3(0.1 - 0.0841) + 3(0.1 - 0.0764) = 0.1827 \quad (2.40)$$

Cependant, cette formulation, du fait de sa flexibilité, permet de converger plus facilement vers une solution proche du tenseur cible qu'une formulation d'ordre 1. Ainsi, il apparaît que, malgré une erreur relative de l'ordre de 7% sur C_{1111} , de 16% sur C_{1122} et 23.6% sur C_{1212} , le critère d'erreur défini par (2.36) vaut $Err = 0.067$. Plus le nombre de composantes du tenseur cible qui sont prescrites est grand, plus il est difficile de faire baisser la valeur de ce critère et donc d'approcher plus précisément ces valeurs.

D'autres exemples de matériaux auxétiques 2D et 3D sont illustrés sur la figure 2.19



Module de Poisson	(a)	(b)	(c)
ν_{12}	-0.176	0.175	0.285
ν_{13}	-0.145	-0.438	-0.671
ν_{21}	-0.167	0.175	0.285
ν_{23}	-0.166	-0.438	-0.671
ν_{31}	-0.145	-0.203	-0.295
ν_{32}	-0.174	-0.203	-0.295

FIGURE 2.16 – Exemple de matériaux architecturés auxétiques conçus par la formulation (2.18).

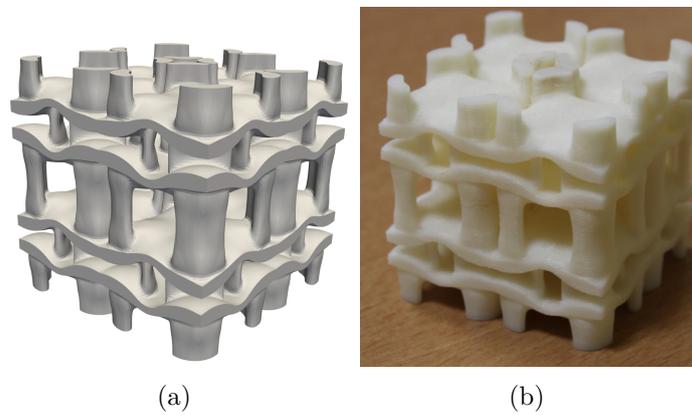


FIGURE 2.17 – Illustration du matériau architecturé (b) dupliqué ; comparaison entre la design numérique et la réalisation par fabrication additive.

Il est important de noter que les valeurs prescrites des composantes du tenseur d'élasticité ne peuvent pas être choisies de manière complètement indépendantes et qu'il n'est pas toujours possible de trouver une topologie qui corresponde au tenseur prescrit. Il est nécessaire que le tenseur cible soit défini positif. Il y a d'autres limites aux comportements dont il est possible de trouver une topologie. Ces limites seront

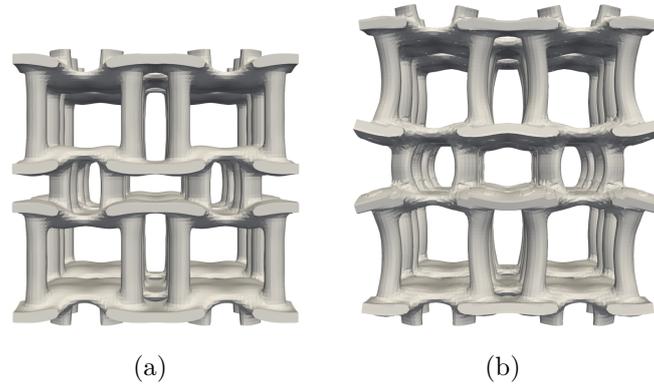


FIGURE 2.18 – Illustration du matériau architecturé (c) dupliqué et soumis à un chargement

discutées dans le chapitre 3 où un catalogue de matériaux architecturés sera établi avec pour but d’explorer au maximum l’espace des matériaux qu’il est possible de concevoir.

Impact de la discrétisation :

Afin d’observer l’impact de la discrétisation sur le comportement homogénéisé de la CER, une étude est menée sur un même tenseur d’élasticité cible \mathbb{C}^T pour plusieurs tailles de maillage. Les résultats sont illustrés sur la figure 2.20. Il apparaît que le critère d’erreur tend à diminuer pour des maillages plus fins, ce qui semble cohérent car l’espace des configurations admissibles est plus grand pour des maillages fins. Il paraît raisonnable d’utiliser des maillages qui contiennent au minimum 40^3 éléments.

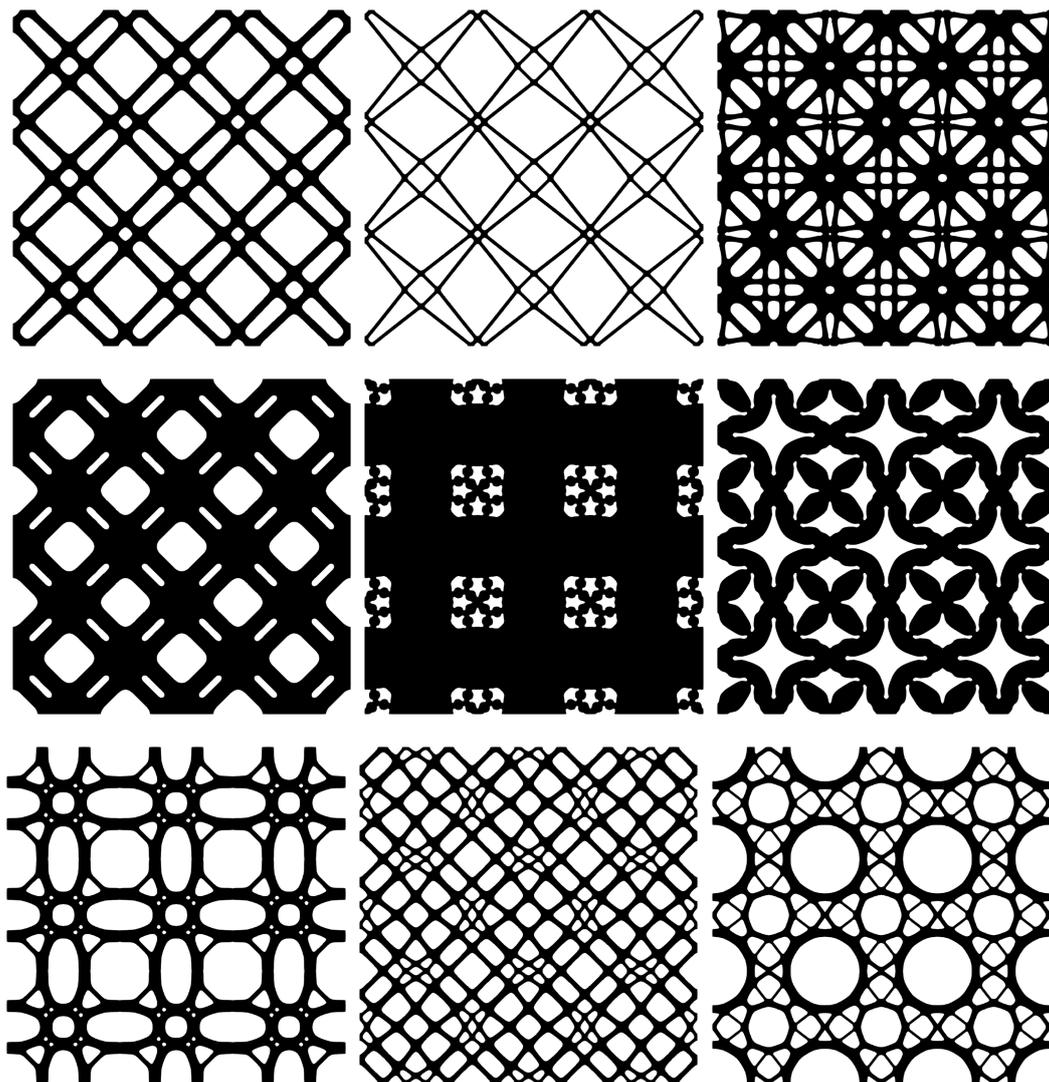


FIGURE 2.19 – Exemples de matériaux architecturés conçus via la formulation (2.18).

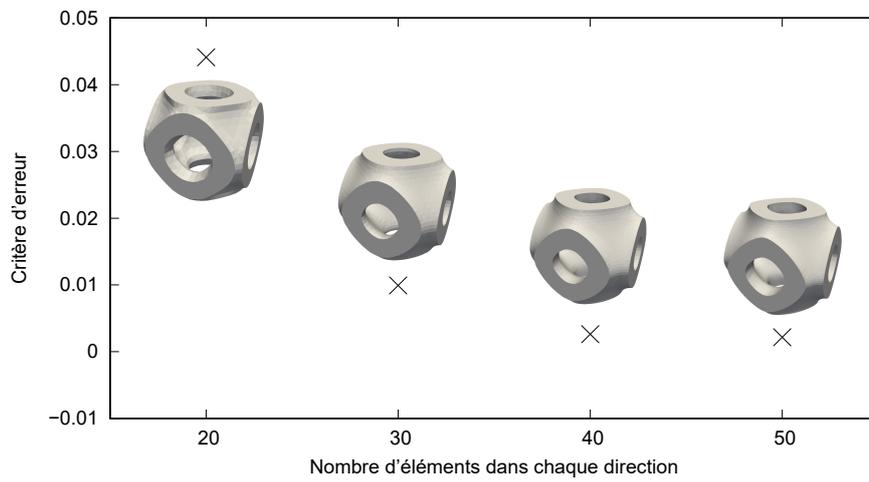


FIGURE 2.20 – Impact de la discrétisation sur le critère d'erreur.

2.4 Optimisation de structures macroscopiques

Dans cette section, les méthodes d'optimisation de structures macroscopiques seront détaillées. Deux types de fonctions objectifs seront étudiées : le problème classique de la minimisation de la compliance pour une structure soumise à des conditions aux limites bien définies et le problème de la conception de mécanismes souples.

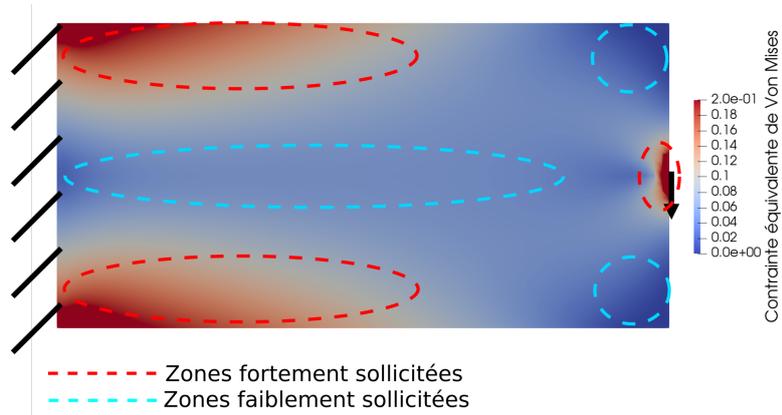
2.4.1 Formulation pour la compliance

Ce problème, bien connu de la communauté de l'optimisation topologique, est très fréquemment étudié dans la littérature [Rozvany, 2009, Sigmund et Maute, 2013, van Dijk *et al.*, 2013]. Minimiser la souplesse d'une structure est un problème qui, s'il n'est pas soumis à des contraintes, mènera toujours au même résultat : un domaine D rempli de matière. En effet, bien que certaines zones de la structure soient plus sollicitées que d'autres, toute la matière contribue à la rigidité. La figure 2.21 illustre la distribution des contraintes de Von Mises sur la cantilever beam. Afin de retirer de la matière dans les zones où elle est moins utile, il convient d'ajouter à la formulation du problème d'optimisation un critère sur la fraction volumique de la phase solide. Retirer la matière dans les zones où elle travaille moins aura alors tendance à lisser les contraintes de Von Mises sur la structure et à diminuer le contraste entre les zones très sollicitées et les zones peu sollicitées, comme l'illustre la figure 2.21.

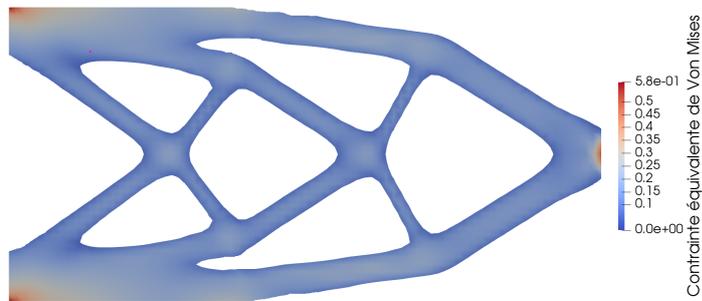
Il existe plusieurs manières de formuler ce critère. Une première méthode consiste à ajouter une contrainte d'inégalité au problème d'optimisation qui prévoit que la fraction volumique de la phase solide doit être inférieure à une certaine valeur prédéfinie. Ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \min_{\Omega} \quad & J(\Omega, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma^N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dS \\
 \text{t.q.} \quad & \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) &= \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \\ & \int_{\Omega} d\Omega < V_M \end{cases} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

où la compliance s'exprime comme le travail des forces extérieures \mathbf{t} définies sur les bords de Neumann Γ^N . La première contrainte correspond à la conditions d'équilibre des champs mécaniques. La seconde contrainte porte sur la fraction volumique de phase solide qui doit rester inférieure à une certaine valeur fixée V_M . Ce problème revient alors à distribuer une certaine quantité de matière délimitée par V_M au sein



(a) Structure non optimisée



(b) Structure optimisée

FIGURE 2.21 – Répartition des contraintes de Von Mises pré et post optimisation.

du domaine D pour minimiser la compliance. Ce type de formulation prévoit donc que la quantité de matière finale est une donnée d'entrée.

Une autre manière d'aborder ce problème peut consister à minimiser la masse de la structure tout en limitant la compliance en dessous d'une certaine valeur [Bruggi et Duysinx, 2012]. Ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Omega} && J(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega \\
 & t.q. && \left\{ \begin{array}{ll} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) & = \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{t} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} & = \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\sigma} & = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \end{array} \right. && (2.42) \\
 & && \int_{\Gamma^N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dS < C_M
 \end{aligned}$$

avec C_M la valeur maximale admissible de la compliance. Cependant, cette valeur maximale de la souplesse admissible est difficile à définir car il s'agit d'une grandeur qui se calcule sur la structure déjà conçue. Une manière plus pratique d'aborder ce problème de minimisation de la masse tout en conservant une bonne rigidité est d'utiliser une information locale comme la contrainte de Von Mises. Ce problème s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Omega} && J(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega \\
 & t.q. && \left\{ \begin{array}{ll} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) & = \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{t} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} & = \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\sigma} & = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \end{array} \right. && (2.43) \\
 & && \boldsymbol{\sigma}_{VM}^{max} < \boldsymbol{\sigma}_M
 \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{VM}^{max}$ est la contrainte de Von Mises locale maximale de la structure qui doit rester inférieure à une certaine valeur $\boldsymbol{\sigma}_M$ prescrite, typiquement la limite élastique du matériau de base. Ce type de formulation est plus difficile à mettre en oeuvre car la contrainte devient locale et non plus globale.

Enfin, une autre manière d'aborder ce problème est de formuler la fonction objectif comme une combinaison des deux critères sur la rigidité et la fraction volumique de phase solide, ce qui revient à déterminer un compromis entre minimiser la compliance et minimiser la masse [Allaire *et al.*, 2004]. Cette formulation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \min_{\Omega} \quad & J(\Omega, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma^N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dS + \beta \int_{\Omega} d\Omega \\
 \text{t.q.} \quad & \begin{cases} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) & = \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{t} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} & = \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\sigma} & = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \end{cases} \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Cette formulation a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre car elle ne présente pas de critères locaux tout en ne supposant pas à l'avance la quantité de matière disponible. Ce compromis est géré par le paramètre β , à l'instar de la formulation pour les matériaux architecturés présentée précédemment. Ainsi, une grande valeur de β conduira à une structure moins rigide mais plus légère, et inversement, une faible valeur β favorisera une structure rigide au détriment de sa légèreté. Cette formulation est retenue par la suite et la méthode des lignes de niveaux, couplée à la dérivée de forme, est utilisée. Afin de déterminer cette dérivée de forme, il convient d'écrire la fonction Lagrangienne du problème d'optimisation :

$$\mathcal{L}(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = J(\Omega, \mathbf{u}) + G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.45)$$

où $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est une fonction qui traduit l'équilibre mécanique via des multiplicateurs de Lagrange (les forces volumiques \mathbf{f} sont considérées nulles) :

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \, dS \\
 &+ \int_{\Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

où \mathbf{r} est le champ des efforts associés aux déplacements imposés sur le bord Γ_D . Afin de déterminer la dérivée de forme de la fonction Lagrangienne \mathcal{L} définie par (2.45), il convient de chercher le point-selle $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ à Ω fixé. La dérivée de forme peut ensuite être calculée directement à ce point-selle, comme expliqué dans le chapitre 1.

Le point-selle est déterminé par différenciation de la fonction Lagrangienne :

$$\delta \mathcal{L}(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} \delta \Omega + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \delta \mathbf{v} \quad (2.47)$$

$$\forall \Omega \subset D \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{U}_u, \mathcal{U}_v)$$

où les ensembles $(\mathcal{U}_u, \mathcal{U}_v)$ sont définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_u &= \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_D \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D\} \\ \mathcal{U}_v &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)\} \end{cases} \quad (2.48)$$

À Ω fixé, le premier terme du membre de droite de l'équation (2.47) disparaît. Le terme facteur de $\delta \mathbf{v}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dS \\
 & + \int_{\Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dS
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Cette équation traduit directement le fait que le champ \mathbf{u} doit satisfaire les conditions d'équilibre.

Avant d'écrire le second terme, facteur de $\delta \mathbf{u}$, qui va permettre de déterminer le multiplicateur \mathbf{v} , il est nécessaire de reformuler l'équation (2.46) via une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} \, dS \\
 & + \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

La différentielle de la fonction Lagrangienne par rapport à $\delta \mathbf{u}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS \\
 & + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{v} \, dS + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dS
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Les termes sur les bords se simplifient alors et l'équation (2.51) se réécrit finalement :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dS \tag{2.52}$$

En réutilisant l'intégration par parties, l'équation (2.52) devient finalement :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \tag{2.53}$$

Cette équation permet alors de montrer le résultat connu [Allaire et Schoenauer, 2007] que le multiplicateur de Lagrange \mathbf{v} cinématiquement admissible vérifie $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans le domaine Ω et sur le bord $\Gamma \setminus \Gamma_D$. Le problème est

dit "auto-adjoint".

Les conditions de stationnarité développées ont permis de déterminer le point-selle $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ avec \mathbf{u}^* solution de l'équilibre mécanique et $\mathbf{v}^* = -\mathbf{u}$.

En introduisant ces résultats dans la formulation de la fonction Lagrangienne, il vient :

$$\mathcal{L}(\Omega, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \int_{\Omega} (\beta - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) : \boldsymbol{\epsilon}) d\Omega + 2 \int_{\Gamma^N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Gamma^D} \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}^* dS \quad (2.54)$$

À ce stade, la dérivée de forme de la fonction Lagrangienne peut être calculée au point-selle, dans le volume et en imposant $\mathbf{V} = 0$ sur les bords, où les conditions aux limites sont imposées, en utilisant le théorème (2.33) :

$$D\mathcal{L}(\Omega, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \int_{\partial\Omega \setminus \{\Gamma^N \cup \Gamma^D\}} (\beta - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^*) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*)) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.55)$$

2.4.2 Illustration de l'algorithme d'optimisation pour la compliance

Quelques exemples de designs de structures, basés sur la formulation du problème (2.73), sont présentés dans cette section .

Le premier exemple concerne un domaine dont la forme correspond à un "L" (L-shaped). La surface supérieure est encastree en quatre zones de géométrie triangulaire isocèle de surface $0.005m^2$. Une pression $P = 1Pa$ est appliquée. Les conditions aux limites, ainsi que la topologie optimisée et la topologie pour quelques itérations de l'algorithme d'optimisation, sont illustrées sur la figure 2.22. Le matériau de base est isotrope de module de Young $E = 1MPa$ et de Poisson $\nu = 0.3$. Les dimensions de la structure sont de $1.5 \times 1 \times 1mm^3$ et le maillage comporte $120 \times 80 \times 80$ éléments volumiques. Le paramètre β , qui gère le compromis entre rigidité et masse, est fixé à 10.

Le second exemple est une extension de la poutre cantilever en 3D. La surface arrière est encastree en quatre zones de géométrie rectangulaire de surface $0.01m^2$. Une pression bidirectionnelle est appliquée à $l = \{L/3, 2L/3, L\}$ Les dimensions du domaine sont de $2 \times 1 \times 1mm^3$ et le maillage comporte $120 \times 60 \times 60$ éléments volumiques. Le paramètre β est fixé à 4. Les conditions aux limites, ainsi que la topologie optimale et la topologie pour quelques itérations de la l'algorithme d'optimisation, sont illustrées sur la figure 2.23.

Le dernier exemple correspond à un pont où les extrémités basses sont encastrees d'un côté, appuyées de l'autre, et une pression verticale est appliquée sur la surface basse. Les dimensions du domaine sont $4 \times 1 \times 1mm^3$ et le maillage contient $200 \times 50 \times$

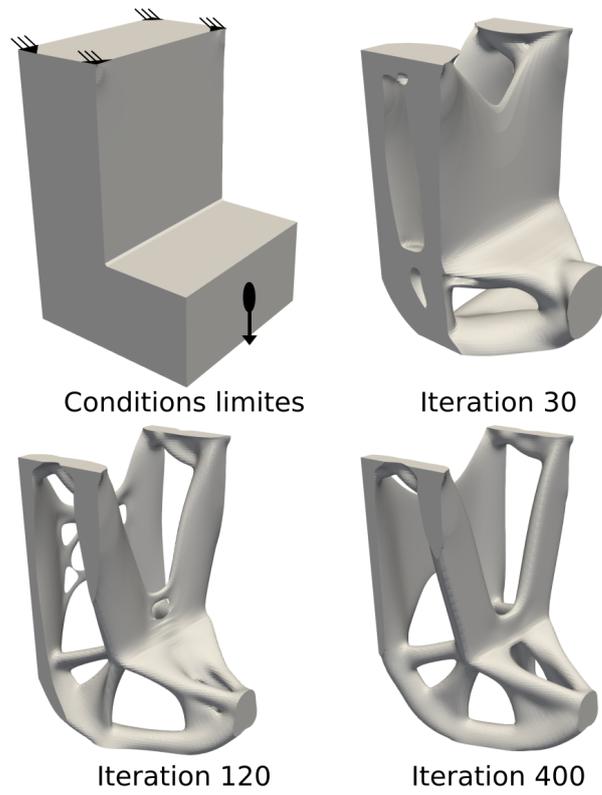


FIGURE 2.22 – Exemple d’optimisation de structure via la formulation (2.73)

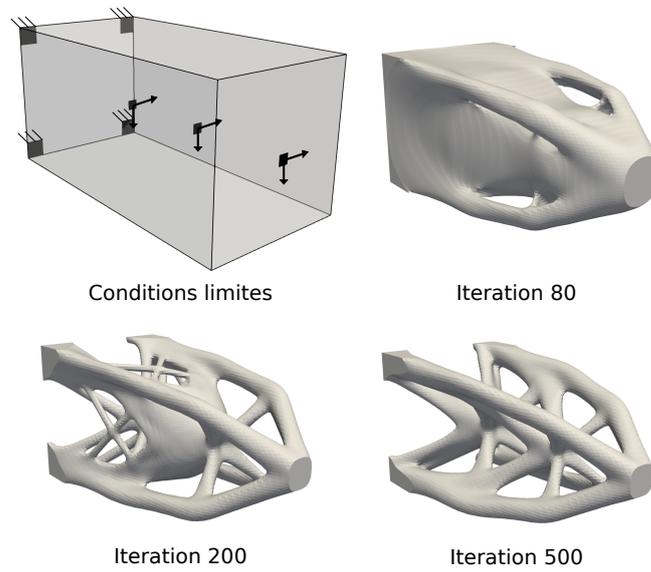


FIGURE 2.23 – Exemple d’optimisation de structure via la formulation (2.73)

50 éléments volumiques. Les conditions aux limites, ainsi que la topologie optimale, sont illustrées sur la figure 2.24.

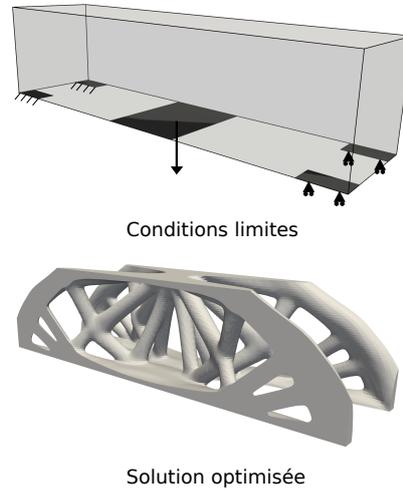


FIGURE 2.24 – Exemple d’optimisation de structure via la formulation (2.73)

2.4.3 Modèle Hyperélastique en grandes déformations

Afin d’outrepasser le cadre des petites transformations linéaires utilisé jusqu’à présent, un modèle hyperélastique est implémenté dans le cadre de la minimisation de la compliance. Ce modèle s’appuie sur un calcul des contraintes en Lagrangien totale via le tenseur de Piola-Kirchoff 2 dont la relation avec le tenseur de Cauchy s’écrit :

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.56)$$

où \mathbf{S} est le second tenseur de Piola-Kirchoff, \mathbf{F} est le gradient de la transformation et J est le jacobien de \mathbf{F} . Le modèle utilisé est Néo-Hookéen [Bonet et Wood, 1997] pour des matériaux isotropes et permet d’écrire la relation suivante :

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda(\ln J)\mathbf{C}^{-1} \quad (2.57)$$

où (λ, μ) sont les coefficients de Lamé pour les matériaux isotropes et \mathbf{C} est le tenseur des élongations de Cauchy-Green droit qui s’exprime à partir du gradient de la transformation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (2.58)$$

L’équilibre associé à un tel modèle prend en compte les non-linéarités géométriques associées aux grandes déformations. Le champ de déplacement solution d’un tel problème se trouve à l’aide d’un algorithme de Newton-Raphson :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_s) \delta \mathbf{u} = -\mathbf{R} \quad (2.59)$$

avec \mathbf{K}_s la matrice des non-linéarités géométriques de dimensions $N \times N$ avec N le nombre de degrés de liberté. \mathbf{K} est la matrice de raideur également de dimensions $N \times N$ et \mathbf{u} et \mathbf{R} sont des matrices colonnes nodales généralisées de dimensions $N \times 1$. La matrice \mathbf{R} représente le résidu et la matrice \mathbf{K}_s est calculée à partir du résidu qui est minimisé par l'algorithme de Newton-Raphson et qui s'écrit :

$$\mathbf{R}_a^e = \mathbf{T}_a^e - \mathbf{F}_a^e \quad (2.60)$$

où \mathbf{R}_a est le résidu nodal par élément e au point a , \mathbf{T}_a est l'effort nodal interne et \mathbf{F}_a l'effort nodal externe :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_a^e &= \int_{v_e} \boldsymbol{\sigma} : \nabla(N_a) dv \\ \mathbf{F}_a^e &= \int_{v_e} N_a \mathbf{f} dv + \int_{\partial v_e} N_a \mathbf{t} dv \end{cases} \quad (2.61)$$

où N_a est la fonction de forme du modèle éléments finis. L'exemple de la poutre cantilever est optimisé en grandes déformations. La topologie optimale déformée est illustrée sur la figure 2.25. Il est intéressant de noter que cette conception est très proche de celle obtenue dans l'hypothèse des petites perturbations.

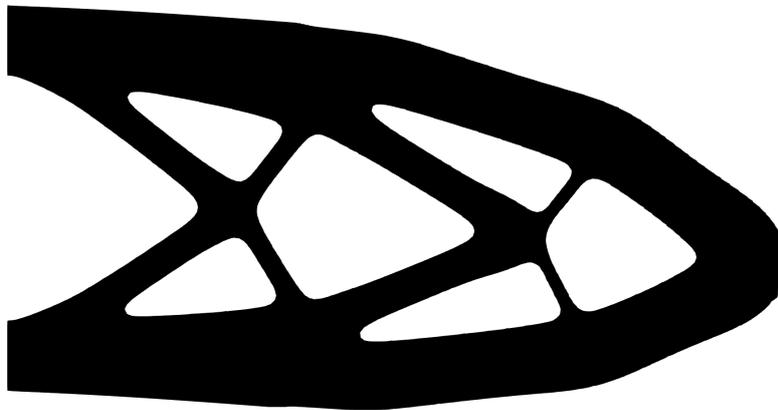


FIGURE 2.25 – Poutre cantilever optimisée en grandes déformations.

2.4.4 Formulation pour les mécanismes souples

Les mécanismes souples sont des structures constituées d'un unique ensemble de matière qui, sous l'effet d'une action extérieure (mécanique, thermique, etc...),

se déforment selon une cinématique relativement complexe. L'avantage de ces mécanismes, par rapport aux mécanismes standards constitués de plusieurs pièces et de liaisons, est leur fiabilité et potentiellement leur durabilité. En effet, pour la plupart des mécanismes standards, la dégradation des pièces est due au contact entre celles-ci (phénomènes d'usure, d'endommagement). Ainsi, le fait de multiplier les pièces intermédiaires augmente les risques de dégradation du mécanisme et également la complexité pour changer les pièces en cas de maintenance : nécessité de démonter le mécanisme. Les mécanismes souples s'affranchissent de ces problématiques puisqu'ils sont constitués d'une seule pièce et étant donné que la déformation de cette pièce joue le rôle des liaisons. A titre d'exemple, l'étude [Ion *et al.*, 2016] compare un mécanisme de loquet de porte avec la version souple et la version constituée de différentes pièces (voir la figure 2.26).

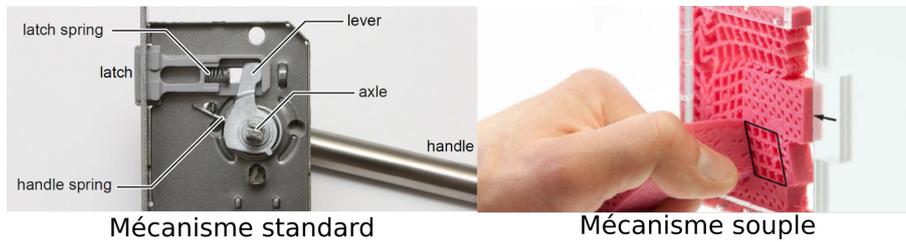


FIGURE 2.26 – Mécanisme de loquet de porte issu de [Ion *et al.*, 2016]

Il existe diverses manières de formuler un problème d'optimisation de mécanismes souples. A l'instar de la formulation cherchant à minimiser la compliance, les inputs seront la topologie initiale et un certain ensemble de conditions aux limites type Neumann et Dirichlet. En revanche, l'objectif portera sur la cinématique de la transformation. Ceci peut être exprimé comme une condition sur les déplacements d'une zone Γ^P de la structure. Cette condition peut être de maximiser certains déplacements, comme proposé via la formulation suivante (page 96 de [Bendsoe et Sigmund, 2013]) :

$$\begin{aligned} \max_{\Omega} \quad & J(\Omega, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{u} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & \sum_e \rho_e < V_M \end{aligned} \quad (2.62)$$

où $\boldsymbol{\gamma}$ et \mathbf{u} sont des matrices colonnes de dimensions $N \times 1$ avec N le nombre de degrés de libertés du problème discrétisé. $\boldsymbol{\gamma}$ est homogène à un effort qui pointe vers les degrés de liberté du bord Γ^P et \mathbf{u} est la matrice nodale généralisée des déplacements. Autrement dit :

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \begin{cases} 1 \forall i \in \Gamma^P \\ 0 \forall i \in \Omega \setminus \Gamma^P \end{cases}$$

Ici, l'équilibre $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ est écrit de manière discrétisée et la condition sur le volume $\sum_e \rho_e < V_M$ fait appel à la fonction de densité utilisée dans le paramétrage SIMP qui sera la méthode retenue dans ce paragraphe. La fonction Lagrangienne du problème (2.62) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\rho_e, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \Lambda) = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}) + \Lambda \left(\sum_e \rho_e - V_M \right) \quad (2.63)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ et Λ sont des multiplicateurs de Lagrange qui traduisent respectivement les deux conditions $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ et $\sum_e \rho_e < V_M$.

L'analyse de sensibilité consiste alors à écrire les dérivées partielles de la fonctionnelle par rapport à chacune des variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} = (\boldsymbol{\gamma}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \Lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \boldsymbol{\gamma}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = \sum_e \rho_e - V_M = 0 \end{array} \right. \quad (2.64)$$

La seconde équation de ce système traduit que le multiplicateur $\boldsymbol{\lambda}$ est solution du système $\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\gamma}$ (car \mathbf{K} est symétrique). Ce système correspond à un second problème d'équilibre mécanique avec les mêmes conditions aux limites de Dirichlet mais des conditions de Neumann définies par le champ $\boldsymbol{\gamma}$ qui vaut 1 sur les degrés de liberté où le déplacement est imposé et 0 ailleurs. Les troisièmes et quatrièmes équations traduisent les conditions imposées par les multiplicateurs $\boldsymbol{\lambda}$ et Λ . Ces trois équations permettent de déterminer un point-selle $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$.

La première équation peut alors être simplifiée car $\boldsymbol{\gamma}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0$ et devient donc : $\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \Lambda = 0$. Il est alors possible d'écrire :

$$-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}}{\Lambda} = 1 \quad (2.65)$$

Lorsque l'algorithme atteint la convergence, il doit vérifier $\frac{\rho_e n + 1}{\rho_e^n} = 1$ car les densités ne changent plus. En introduisant cette relation dans l'équation (2.68), il est possible d'obtenir un schéma de mise à jour de la densité comme suit :

$$\rho_e^{n+1} = \rho_e^n \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}}{\Lambda} \right) \quad (2.66)$$

Le multiplicateur de Lagrange Λ est alors recherché par dichotomie pour assurer la condition $\sum_e \rho_e < V_M$.

A l'instar de l'algorithme présenté pour la méthode des level-set, l'algorithme SIMP utilisé dans cette partie peut être divisé en deux étapes majeures à chaque itération : la première consiste à déterminer le point-selle $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ en utilisant les équations d'équilibre. La seconde étape à mettre à jour la densité par l'équation (2.66), tout en recherchant Λ^* par dichotomie. Un aperçu est donné sur l'algorithme 3.

Algorithm 3 Optimisation de mécanismes souples par paramétrage SIMP

Initialisation : ρ_0

while $\max \rho^{n+1} - \rho^n < tol$

Recherche du point-selle $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ en résolvant :

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^* = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\gamma}$$

Mise à jour de la densité par l'équation : $\rho_e^{n+1} = \rho_e^n \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{\lambda}^{*T} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u}^*}{\Lambda} \right)$

end while

Un autre exemple de formulation relativement similaire pour l'optimisation de mécanisme souple consiste, non plus à maximiser les déplacements de la zone Γ^T , mais à obtenir une valeur prescrite de ces déplacements. On parle de "path-generating mechanism". C'est-à-dire que la structure, lorsqu'elle est soumise à un chargement bien défini, se déformera d'une manière contrôlée et prédéfinie. Ce type de formulation s'écrit alors (page 99 de [Bendsoe et Sigmund, 2013]) :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & J(\Omega \mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P) \\ \text{t. q.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & \sum_e \rho_e < V_M \end{aligned} \quad (2.67)$$

où \mathbf{u}^P est le champ des déplacements prescrits et \mathbf{D} est une matrice carrée de dimension $N \times N$, avec N le nombre de degrés de liberté. Cette matrice vaut 0

partout, sauf là où les degrés de liberté sont prescrits. Autrement dit, \mathbf{D} est un opérateur qui pointe vers les degrés de liberté pour lesquels le déplacement est prescrit. L'écriture de la sensibilité est tout à fait similaire au problème précédent et s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} = \left(2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_e} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} + \Lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = \sum_e \rho_e - V_M = 0 \end{array} \right. \quad (2.68)$$

La différence majeure vient alors du fait que multiplicateur $\boldsymbol{\lambda}$ est solution d'un nouveau problème :

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -2\mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^P) \quad (2.69)$$

Bien que les mécanismes souples soient prometteurs en termes de précision et de durée de vie par rapport à des mécanismes standards, ils souffrent du problème de la transmission de puissance. En effet, il est généralement difficile de transmettre des puissances élevées avec ce genre de structures car, étant prévues pour subir de grandes déformations, elles sont généralement faites de matériaux eux-même souples pour limiter le niveau de contraintes et ne pas endommager la pièce. Afin de pallier ce problème de faible transmission de puissance, Sigmund et al. (page 99 de [Bendsoe et Sigmund, 2013]) proposent de rajouter à la formulation un critère de performance mécanique qui consiste à maximiser la rigidité de la structure face à des contre-chargements, c'est-à-dire des chargements opposés aux déplacements ciblés. Cette formulation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \max_{\Omega} \quad & J(\Omega, \mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P) + \alpha \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{F}' \\ & \sum_e \rho_e < V_M \end{aligned} \quad (2.70)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est un champ de déplacements qui correspond à une sollicitation $-\mathbf{F}'$ de contre-chargements aux degrés de libertés où le déplacement est prescrit et α est un facteur de pondération qui permet de donner plus ou moins d'importance au critère de rigidité.

2.4.5 Illustration de l'algorithme d'optimisation pour les mécanismes souples

Afin d'illustrer ces différentes formulations pour la conception de mécanismes souples, l'exemple d'une "pince" (gripping mechanism) est utilisé. Les dimensions du domaine sont de $1 \times 0.75 \text{ mm}^2$ et le maillage contient 120×90 éléments. Les conditions aux limites, ainsi que les topologies obtenues pour chacune des formulations, sont illustrées sur la figure 2.27.

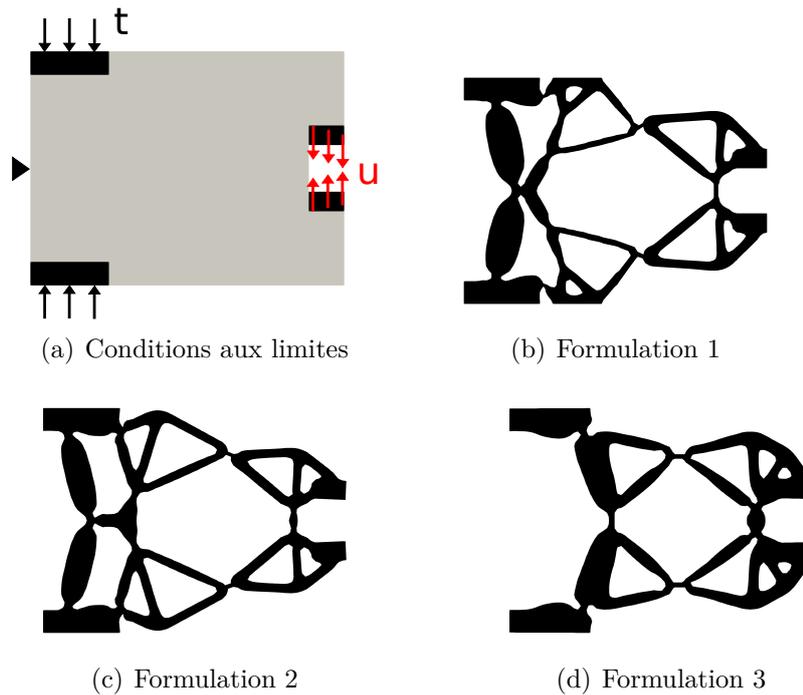
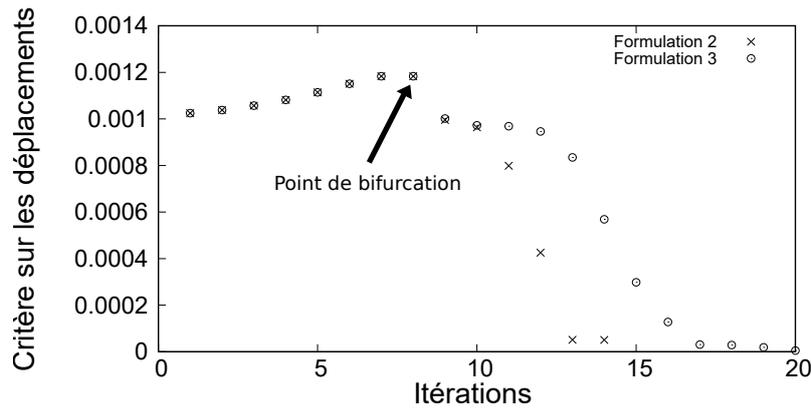


FIGURE 2.27 – Illustration des topologies optimisées des différentes formulations pour le "gripping mechanism".

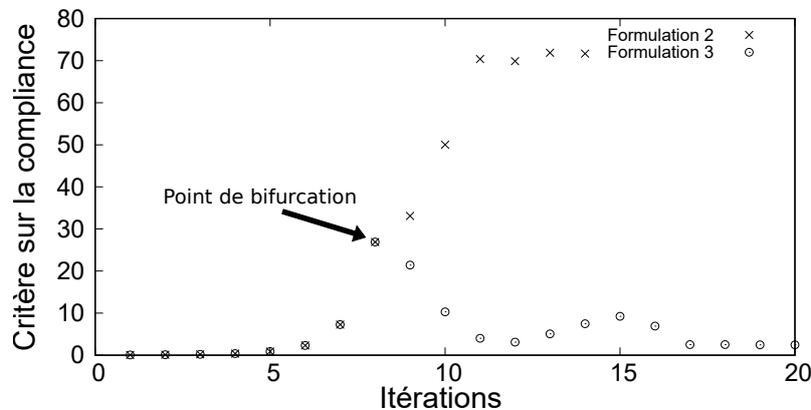
Pour les formulations 2 et 3, les déplacements imposés sont affines. La valeur du coefficient α , pour la formulation 3, est de 0.01. Le graphe 2.28 illustre l'évolution du critère des déplacements et du critère sur la rigidité. Il apparaît que, pour la formulation 2, le critère sur les déplacements $(\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)$ est satisfait au bout de 14 itérations, soit 6 itérations plus tôt que pour la formulation 3. En revanche, le même niveau de satisfaction du critère est atteint pour les deux formulations. En revanche, le critère en rigidité est naturellement bien meilleur pour la formulation 3 (facteur 12), que pour la formulation 2, puisque le critère en rigidité n'apparaît pas dans la formulation 2. Pour les 8 premières itérations, l'évolution est identique car la topologie initiale est constituée du domaine rempli de phase solide, et donc sa compliance est minimale. Plus la matière est retirée, plus cette compliance augmente jusqu'à ce que le critère sur la rigidité ait un impact pour la formulation 3. Il y a alors une séparation dans l'évolution de la topologie et les deux formulations conduisent

à des résultats différents.

Ces résultats permettent alors d'illustrer que le fait d'introduire un critère en rigidité à la formulation a un impact minime, sur cet exemple, sur le critère en déplacement, mais permet d'améliorer grandement les performances mécaniques de la structure. En effet, ce critère de contre chargement correspond au fait que, lorsque un objet est placé dans la zone d'accrochage de la pince, le contact entre la pince et l'objet va générer un chargement opposé aux déplacements prescrits.



(a) Évolution du critère sur les déplacements au cours du procédé d'optimisation



(b) Évolution du critère sur la rigidité au cours du procédé d'optimisation

FIGURE 2.28 – Évolution des critères sur les déplacements (minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés) et sur le critère de rigidité (minimisation de la compliance).

La figure 2.30 illustre les conditions aux limites ainsi que le résultat obtenu pour la formulation 3 avec un coefficient $\alpha = 0.01$ pour le mécanisme dit "force inverser" ou inverseur de force qui consiste à changer la direction des déplacements entre la zone d'input et la zone d'output.

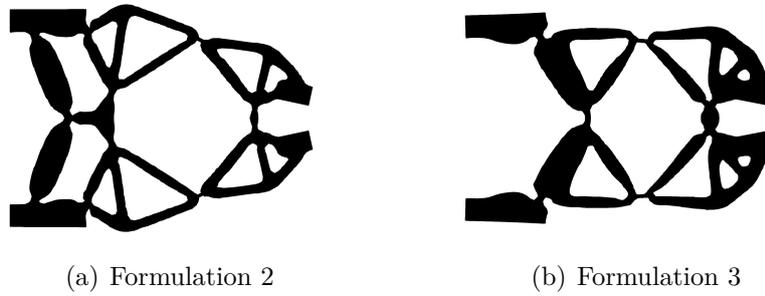


FIGURE 2.29 – Illustration des topologies déformées pour les formulations 2 et 3.

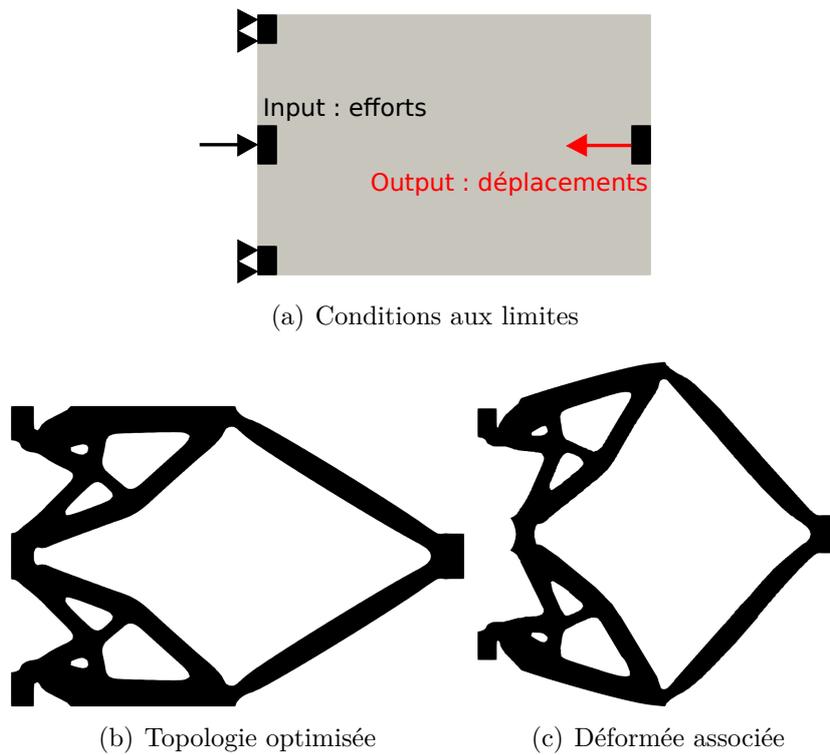


FIGURE 2.30 – Exemple de l'inverseur de force optimisé par la formulation 3.

2.5 Optimisation concourante des deux échelles

L'un des objectifs principaux de cette thèse est de combiner les deux échelles, c'est-à-dire l'échelle fine du matériau architecturé et l'échelle large de la structure, pour une optimisation couplée et concourante. Le problème posé est alors : pour une fonction objectif donnée, trouver la meilleure structure (optimisation macro) qui est composée de la meilleure distribution de matériau architecturé (optimisation micro). Cet objectif de couplage vient de la constatation que les matériaux architecturés peuvent apporter de nouveaux types de comportements (comme l'auxétisme) ou présenter de bons rapports masse/raideur qu'il est difficile de trouver chez les matériaux usuels. Ces propriétés, avantageuses à l'échelle locale, peuvent alors avoir un intérêt au niveau de l'échelle macro. La problématique qui émerge alors, pour ce type de couplage, est la suivante : modifier le matériau architecturé a un impact sur le comportement homogénéisé, et donc perturbe le calcul des champs macroscopiques et, parallèlement, le fait de modifier la topologie de la structure macro a un impact sur ces champs mécaniques, et donc sur le choix du meilleur matériau.

Comme mentionné en début de chapitre, l'opérateur de Hooke noté $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ est celui qui permet de faire remonter l'information de l'échelle fine vers l'échelle large. En effet, cet opérateur, qui dépend de la topologie du matériau architecturé, sert dans la loi de comportement macroscopique $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ qui est nécessaire pour l'écriture des équations d'état d'équilibre et conduit à la fameuse loi $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ pour les corps élastiques. Il s'agit d'une écriture discrétisée où \mathbf{K} est la matrice de raideur qui se calcule de la manière suivante :

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{v_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbb{C}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) dv \quad (2.71)$$

où N_{el} est le nombre d'éléments du maillage, v_e le volume de chaque élément, \mathbf{B} est la matrice qui relie les champs de déplacements et de déformation et \mathbb{C} est la matrice d'élasticité en notation de Voigt. L'équation (2.71) illustre bien que, pour obtenir une expression de la matrice de raideur assemblée \mathbf{K} , qui est nécessaire pour résoudre l'équilibre macro, il faut connaître le comportement du matériau $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ en tout point de Gauss du maillage. Ainsi, à chaque point de Gauss du maillage élément fini, l'hypothèse de séparabilité des échelles est supposée valide.

Un problème d'optimisation multi-échelle peut alors être schématisé par la figure 2.31 où les différentes étapes décrites au préalable (homogénéisation, localisation, optimisation macro/micro, résolution des équilibres mécaniques) sont repérées les unes par rapport aux autres.

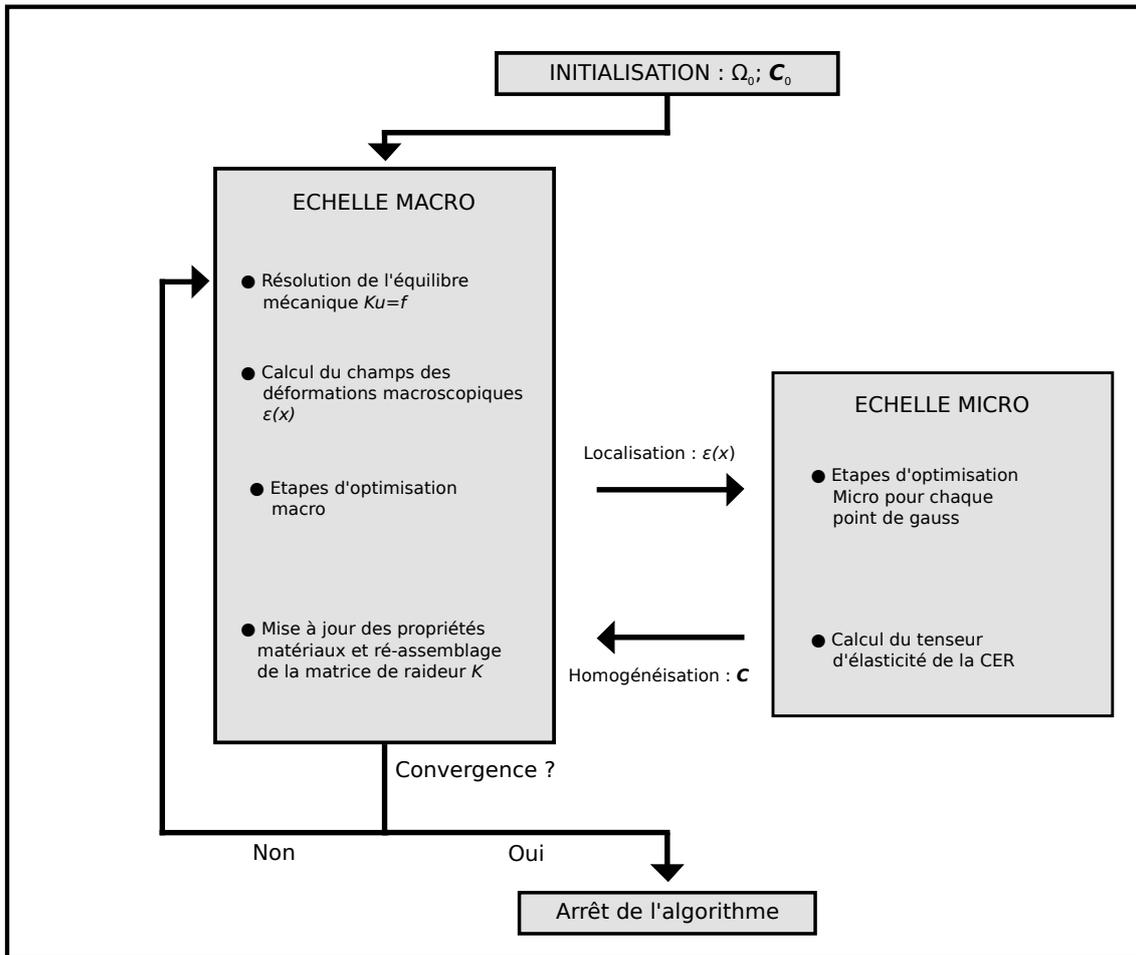


FIGURE 2.31 – Schéma des différentes étapes d'un problème d'optimisation multi-échelle.

2.5.1 Différentes approches envisagées

Sur la figure 2.31, les étapes d'optimisation macro/micro restent à définir. Deux problèmes d'optimisation sont envisagés :

- 1 La minimisation de la compliance globale, c'est-à-dire macro/micro de la structure .
- 2 La minimisation de l'erreur, au sens des moindres carrés, entre des déplacements prescrits sur une zone de la structure et les déplacements obtenus sous sollicitation (path-generating mechanism).

Ces deux problèmes sont identiques à ceux présentés pour l'optimisation de structures macroscopique, à ceci prêt que le matériau architecturé devient également une variable de design.

Il y a plusieurs manières d'aborder un tel problème d'optimisation. Les différentes

approches envisagées sont les suivantes :

- Optimisation complète de la macro-structure à matériau fixé, puis optimisation complète du ou des matériaux architecturés pour cette macro-structure fixée.
- Optimisation complète du ou des matériaux architecturés à macro-structure fixée; puis optimisation de la macro-structure pour cette distribution de matériaux architecturés
- Pour chaque itération d'optimisation de la macro-structure, effectuer une itération d'optimisation du ou des matériaux architecturés.
- Pour chaque itération d'optimisation de la macro-structure, effectuer une optimisation complète de la distribution du ou des matériaux architecturés.

Il apparait clairement que les deux premières solutions envisagées ne sont pas satisfaisantes en raison du fait que changer la macro-structure a un impact sur la distribution optimale de matériaux et, inversement, changer la distribution de matériaux a un impact sur la macro-structure optimale. Ces deux solutions ne sont pas réellement des approches d'optimisation couplées des échelles. Par exemple, pour la première solution envisagée, il est clair qu'une fois la distribution de matériaux obtenue à topologie fixée, le fait de relancer l'optimisation macro pour cette distribution de matériaux donnera lieu à une modification de la macro structure optimale; la solution obtenue n'est donc pas optimale au sens de l'optimisation multi-échelle dont le but est de trouver simultanément la meilleure topologie de la structure et la meilleure distribution de matériaux architecturés.

La troisième et la quatrième solutions sont plus satisfaisantes car l'évolution des deux échelles se fait simultanément et il y a une influence mutuelle de l'une sur l'autre au cours du procédé d'optimisation. Il est intéressant de noter que, pour ces méthodes, la convergence n'est en rien garantie. En effet, à chaque itération d'optimisation de la macro-structure, les comportements homogénéisés locaux $\mathbb{C}](\boldsymbol{x})$ sont modifiés par les étapes d'optimisation micro. Or, ces comportements sont ensuite utilisés pour le calcul du gradient de la fonction objectif macro pour les deux cas d'étude (compliance et path generating mechanisms). il est donc possible que la topologie macro ne se stabilise jamais.

De plus, la mise en œuvre de la troisième solution s'est avérée non concluante pour les cas testés car la convergence n'était pas atteinte. C'est donc la dernière option qui est retenue.

2.5.1.1 Minimisation de la compliance globale

La formulation retenue pour ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Omega, \mathbb{C}(\mathbf{x}), V_m(\mathbf{x})} J(\Omega, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) : \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \beta V_m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d\Omega \\
 & \quad t.q. \quad \begin{cases} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) & = \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{t} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} & = \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} & = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\sigma} & = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \\ & \mathbb{C}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{adm} \end{cases} \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

où $V_m(\mathbf{x})$ représente la fraction de phase solide du matériau architecturé et \mathcal{C}_{adm} représente l'ensemble des tenseurs d'élasticité admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons de composantes de C_{ijkl} pour lesquelles il est possible de concevoir un matériau dont les propriétés homogénéisées correspondent à ces combinaisons de C_{ijkl} . Ainsi, à l'échelle macro, la variable de design est la topologie Ω de la structure tandis qu'à l'échelle micro il s'agit du tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ et de la fraction de phase solide $V_m(\mathbf{x})$ en chaque point de Gauss.

En pratique, à chaque itération d'optimisation macro, le champ des déformations macroscopiques est calculé et sert de chargement sur la CER. Le problème à l'échelle micro est alors :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Omega_m} J(\Omega_m, \mathbf{u}) = \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) \, d\Omega_m + \beta_m \int_{\Omega_m} d\Omega_m \\
 & \quad t.q. \quad \begin{cases} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})) & = \mathbf{0} & \forall \mathbf{y} \in \Omega_m \\ \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- & = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-) & \text{sur } \Gamma^+ \text{ et } \Gamma^- \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) & = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

où \mathbf{y} représente la variable locale sur la CER de topologie Ω_m . β_m est le multiplicateur gérant le compromis masse/rigidité à l'échelle locale et $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ est le tenseur de déformation macro qui est interprété comme un chargement sur la CER. Étant donné que les matériaux architecturés optimaux sont conçus à chaque itération macro, la condition $\mathbb{C}(\mathbf{X}) \in \mathcal{C}_{adm}$ est forcément vérifiée.

L'inconvénient majeur de cette méthode de couplage est que le nombre de variables de design augmente de manière considérable. En effet, la topologie est paramétrée par des level-set ou des maillages éléments finis qui doivent être suffisamment fins, comme évoqué dans le 1^{er} chapitre. Les maillages utilisés à l'échelle macro contiennent généralement entre 5k et 1000k éléments (donc variables de design) en 2D entre 60k et 1000k éléments en 3D. Il s'agit du même ordre de grandeur à l'échelle micro. Le fait de coupler les échelles signifie qu'à chaque point de Gauss du maillage macro (4 points de Gauss pour les éléments 2D et 8 pour les éléments 3D) est attribué un matériau architecturé.

Soit N_G le nombre de points de Gauss, N_M le nombre de variables de design de macro et N_m le nombre de variables de design micro, le nombre de variables de design du problème couplé devient donc :

$$N = N_G \times N_M \times N_m \quad (2.74)$$

A titre d'exemple, une optimisation couplée a été tentée sur un maillage macro 80×40 et micro 80×80 qui sont des maillages relativement grossiers pour du 2D. Chaque optimisation séparée est réalisée en moins de quinze minutes, tandis que l'optimisation couplée, qui passe à 8.2 millions de variables de design, nécessite au minimum une dizaine de jours. Les calculs sont fait sur une machine portable avec un processeur à 2.7 GHz et le code développé dans le cadre de cette thèse n'est que partiellement parallélisé, l'objet étant simplement d'illustrer l'augmentation considérable du temps de calcul associé au couplage des échelles.

Il apparait alors clairement qu'il serait très compliqué de raffiner davantage les maillages voire d'envisager des cas 3D. Pour toutes ces raisons une approche dite "basée sur les données" est envisagée. L'idée étant de supprimer complètement l'étape d'optimisation à l'échelle micro pour utiliser un catalogue de matériaux optimisés a priori. Cette méthode sera explicitée dans le dernier chapitre de cette thèse.

2.5.1.2 Path generating mechanisms

Concernant les "path-generating mechanisms" ou mécanismes souples avec critère au sens des moindres carrés sur les déplacements, l'objectif est de déterminer une distribution de matériaux architecturés au sein de la structure qui permette de minimiser la fonction coût. Les variables de design de ce problème sont les composantes du tenseur d'élasticité homogénéisé $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ en tout point de Gauss. Ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{C_{ijkl}, \{i,j,k,l\} \in \{1,2,3\}^4} \quad & J(C_{ijkl}, \{i,j,k,l\} \in \{1,2,3\}^4, \mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P) \\ \text{t. q.} \quad & \\ & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & \mathbb{C}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{adm} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Il s'agit bien d'un problème multi-échelle puisque le chargement est macroscopique et la fonction objectif porte sur les déplacements macroscopiques mais les variables de design portent sur les matériaux architecturés donc sur l'échelle micro.

La fonction Lagrangienne du problème (2.75) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(C_{ijkl}, \{i,j,k,l\} \in \{1,2,3\}^4) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^P) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}) \quad (2.76)$$

De manière analogue à ce qui a été présenté pour l'optimisation des mécanismes souples, l'analyse de sensibilité de la fonction Lagrangienne s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{ijkl}} = \left(2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial C_{ijkl}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial C_{ijkl}} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = 2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^P)^T \mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F} = 0 \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Les secondes et troisièmes équations de ce système sont identiques à celles écrites pour le problèmes macro. La principale différence s'observe sur la première équation où apparait la dérivée de la matrice de raideur par rapport aux propriétés matériaux. En utilisant l'équation (2.71) sur l'assemblage de la matrice de raideur, cette dérivée peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial C_{ijkl}} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_m} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial C_{ijkl}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) dv \quad (2.78)$$

Le schéma de mise à jour des variables de design suivant est proposé :

$$C_{ijkl}^{m+1} = C_{ijkl}^m + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial C_{ijkl}} \mathbf{u} \quad (2.79)$$

Cette formulation suppose que les composantes du tenseur d'élasticité C_{ijkl} sont indépendantes, ce qui est vrai dans le cas de l'anisotropie générale. Ainsi, à chaque itération du procédé d'optimisation, les distributions des C_{ijkl} dans la structure évoluent jusqu'à obtenir une distribution qui permette de valider l'objectif. La figure 2.32 illustre les distributions optimales obtenues par cette formulation pour le mécanisme de pince (gripping mechanism). Il est intéressant de noter que les matériaux correspondants aux propriétés mécaniques obtenues à chaque itération du processus d'optimisation n'ont pas besoin d'être construits. De manière pratique, il suffit de laisser les propriétés converger vers une distribution optimale et de reconstruire, a posteriori, les matériaux correspondants. Cette étape de construction des matériaux correspondants à la distribution optimale est toutefois sensible pour deux raisons notables : (1) c'est une étape lourde numériquement parlant car il faut construire autant de matériaux que de points de Gauss à l'échelle macro ; (2) il n'y a pas de garantie qu'il soit possible de trouver un matériau architecturé pour toutes les combinaisons de C_{ijkl} de la distribution. Autrement dit, la condition $\mathbb{C}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{adm} \forall \mathbf{x} \in \Omega_m$ n'est pas introduite dans la formulation et n'a donc aucune raison d'être validée.

En pratique, seulement 30% des matériaux architecturés ont pu être construits avec une erreur acceptable dans l'exemple de la figure 2.32, ce qui n'est bien sûr pas

acceptable. Pour pallier ces deux enjeux d'importance, une stratégie basée sur les données est, ici aussi, envisagée. L'idée étant qu'à chaque itération de l'optimisation macro, l'algorithme va chercher, dans un catalogue de matériaux architecturés construit a priori, le matériau le plus proche, au sens de Frobenius, de celui obtenu par la condition (2.79). L'avantage de procéder ainsi est que, si l'algorithme parvient à converger, alors la distribution optimale de matériaux architecturés appartiendra forcément à l'espace admissible, précisément puisque ces matériaux sont déjà conçus, et il ne sera pas nécessaire de les reconstruire. Les détails sur la méthode basée sur les données sera explicitée dans le chapitre 3.

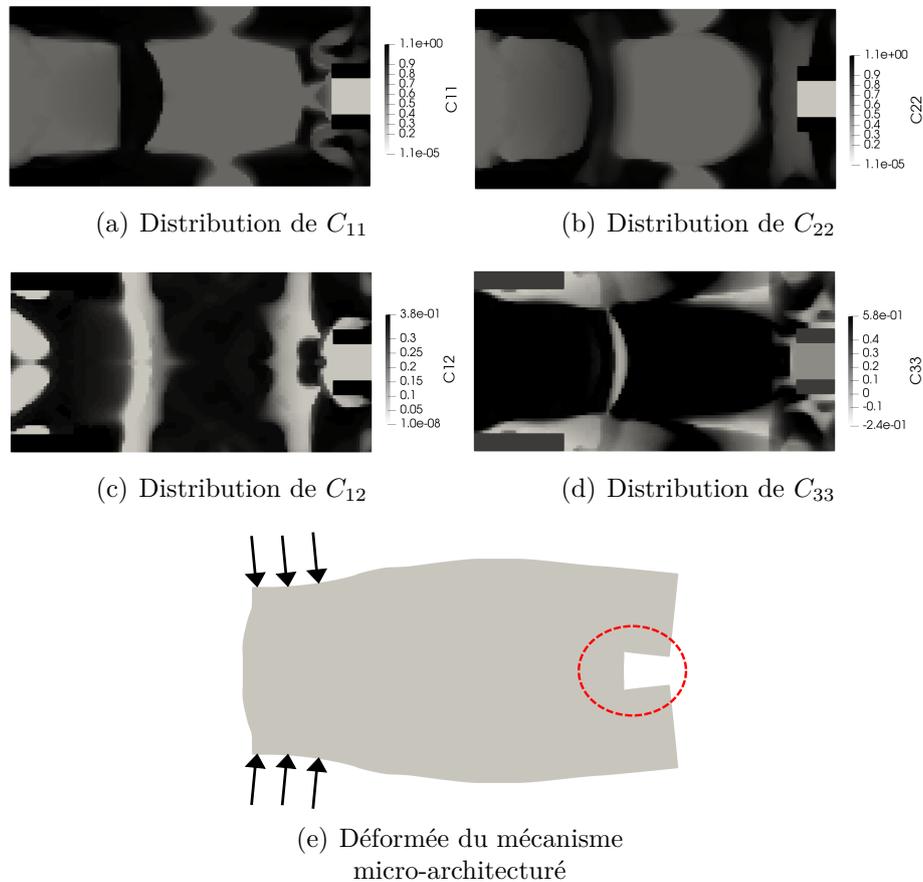


FIGURE 2.32 – Illustration de la distribution des composantes en notation de Voigt du tenseur d'élasticité pour le gripping mechanism.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de préciser la notion de matériaux architecturés considérée dans le cadre de cette thèse. Il s'agit d'une définition particulière qui consiste à dupliquer un motif élémentaire périodique défini par une cellule élémentaire représentative

CER. L'objectif principal de cette thèse, qui consiste à intégrer ces matériaux architecturés au sein de structures macroscopiques, a été présenté. La mécanique multi-échelle considérée ici s'appuie sur l'hypothèse forte de séparabilité des échelles qui considère qu'en tout point d'intégration de la macro-structure, il est possible d'attribuer une zone pour laquelle les grandeurs mécaniques sont homogénéisables, c'est-à-dire qu'elles sont constantes dans cette zone qui sera qualifiée de volume élémentaire représentatif (VER). Cette mécanique est donc une mécanique à 3 échelles : l'échelle macroscopique, qui est l'échelle de la structure ; l'échelle du volume élémentaire représentatif, pour lequel les propriétés sont homogénéisables ; et l'échelle de la CER, qui correspond au plus petit motif périodique identifiable au sein du VER. De fait, le VER est construit par duplication de la CER et son comportement effectif est identifiable à celui de la CER et donc en pratique il n'y a que deux échelles distinctes. L'hypothèse de séparabilité des échelles suppose des milieux périodiques et souffre donc, entre autres, de deux limites qui sont les effets de bords au niveau des limites de la macrostructure $\partial\Omega$ et des effets de bords au niveau de la jonction des micro-structures. En tant qu'élément de réponse, il a été proposé d'introduire au sein du VER un grand nombre de CER afin de limiter les effets de bords.

Une fois ces concepts éclaircis, les méthodes d'optimisation de matériaux architecturés ont été présentées. La méthode retenue dans le cadre de ces travaux consiste à minimiser l'erreur, au sens des moindres carrés, entre les composantes d'un tenseur d'élasticité cible et les composantes obtenues par homogénéisation. Cette formulation semble intéressante car elle permet d'obtenir des comportements originaux tels que l'auxétisme et également par ce qu'elle permet de classer les matériaux par leurs propriétés homogénéisées, ce qui sera l'objet du chapitre suivant où un catalogue de matériaux architecturés sera construit. Les méthodes d'optimisation de structures macroscopiques ont également été présentées pour deux types de problèmes : la minimisation de la compliance et la conception de mécanismes souples. Ces deux objectifs ont ensuite été repris pour le couplage des échelles où le but est d'optimiser de manière concurrente la topologie de la macrostructure et la distribution de matériaux architecturés qui la composent. L'enjeu principal qui apparaît avec ce couplage est l'augmentation considérable de la complexité algorithmique, en raison de l'explosion du nombre de variables de design. Pour pallier ce problème, une stratégie basée sur les données sera présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Stratégie basée sur les données

Sommaire

3.1	Introduction	100
3.2	Construction d'un abaque de matériaux architecturés	101
3.3	Optimisation multi-échelle basée sur les données	110
3.3.1	Minimisation de la compliance	111
3.3.2	Mécanismes souples	118
3.4	Conclusion	121

3.1 Introduction

Le développement des différentes méthodes d'optimisation multi-échelle proposées dans le chapitre précédent aboutit à la conclusion que l'augmentation considérable du nombre de variables de design devient prohibitif en termes de ressources de calculs. En effet, une optimisation mono-échelle met en jeu, du fait du paramétrage en densité ou par une fonction lignes de niveaux, un nombre de variables de design qui est lié à la discrétisation du domaine. Le couplage des échelles envisagée dans cette thèse s'apparente à la méthode FE2 introduite en 2003 par F. Feyel [Feyel, 2003]. Les deux échelles mise en jeux doivent alors être optimisées de manière concourante. Ainsi, le nombre de variables de design total devient proche du produit entre les variables de design macroscopiques et les variables de design microscopique (qui sont du même ordre de grandeur) et donc ce nombre augmente considérablement, d'autant plus que l'optimisation des variables de design microscopique doit être réalisée plusieurs fois (à chaque itération de l'optimisation macroscopique). Face à ce verrou numérique, une stratégie basée sur les données est proposée dans ce chapitre. Cette idée, introduite dans des articles tels que [Ferrer *et al.*, 2016, Ferrer *et al.*, 2018, Zhu *et al.*, 2017], consiste à remplacer les étapes d'optimisation microscopique (c'est-à-dire l'optimisation des variables de design microscopiques) par la recherche d'un matériau architecturé au sein d'un abaque prédéfini une fois pour toute avant de lancer l'optimisation multi-échelle. La construction de l'abaque consiste alors en une étape dite "off-line", c'est-à-dire qu'elle est faite une fois pour toute au préalable. Le problème d'optimisation multi-échelle est dit "on-line" et s'appuie sur cet abaque. Le coût numérique est alors largement amoindri pour l'étape "on-line" car il n'est plus nécessaire d'effectuer les étapes d'optimisation microscopiques. La construction de l'abaque peut s'avérer lourde en temps de calcul mais, s'agissant d'un procédé effectué une fois seulement, il est amorti par le nombre de fois qu'il est utilisé.

L'utilisation de bases de données pour la réalisation de calculs de pointe est un sujet fondamentale de la mécanique numérique moderne. En effet, face à des problématiques de plus en plus complexes, il est souvent difficile de réaliser des calculs en temps réel. L'utilisation d'abaque peut alors être vue comme un changement de paradigme en ce sens qu'elle bouscule la méthode "traditionnelle" de l'utilisation d'un modèle numérique qui consiste à réaliser un calcul pour répondre à une interrogation. Typiquement, pour des conditions aux limites données, quelles sont les contraintes vues par la structure. Le problème de ce genre d'utilisations d'un modèle est que, dès qu'un paramètre du modèle varie, quel qu'il soit, il devient nécessaire de réaliser un nouveau calcul pour répondre à l'interrogation initiale et les calculs menés sur les anciens paramètres du modèle deviennent inutiles. L'idée d'utiliser un abaque vient donc changer cette pratique dans le sens que tout les calculs menés pour un jeu de paramètres du modèle sont utiles et constituent des snapshots. Une fois l'abaque suffisamment consistant, il n'est plus nécessaire de réaliser un calcul lorsque les paramètres du modèles sont modifiés en temps réel et la nou-

velle solution est interpolée sur l'abaque pré-construit. Cette idée de réaliser des calculs complexes via une étape de construction d'abaque "off-line" consultée pour l'interpolation de la solution "on-line" peut être trouvée dans les articles suivants [Canales *et al.*, 2016, Sevilla *et al.*, 2019] qui traitent de mécanique multi-échelle. Ce chapitre présente la mise en place des deux étapes "off-line" et "on-line", c'est-à-dire, dans un premier temps, la construction d'un abaque (ou catalogue) de matériaux architecturés aux propriétés variées, puis, dans un second temps, l'optimisation multi-échelle s'appuyant sur l'abaque construit au préalable.

3.2 Construction d'un abaque de matériaux architecturés

Construire un abaque de matériaux architecturés consiste à concevoir et à catégoriser un certain nombre de matériaux qui seront associés à des snapshots en fonction d'un certain jeu de paramètres. Par exemple, il est possible de catégoriser les matériaux isotropes en fonction de leur coefficient de Poisson et de leur module de Young. Il existe plusieurs manières de catégoriser ou classer des matériaux architecturés. Dans l'article [Ferrer *et al.*, 2016], ils sont classés en fonction de la sollicitation qui est appliquée pour concevoir le matériau. Le choix des paramètres d'entrée de l'abaque dépend principalement des objectifs multi-échelles pour lesquels ils vont être utilisés. Dans le cadre de cette thèse, les deux objectifs multi-échelles visés sont la minimisation de la compliance et la conception de mécanismes souples. L'expression de la compliance est rappelée ici en statique :

$$c = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) : \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (3.1)$$

Le tenseur d'élasticité du matériau architecturé $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ apparait directement dans la fonction objectif pour ce problème. De plus, cet opérateur permet de décrire localement la cinématique d'une structure puisqu'il permet de relier les contraintes aux déformations par la loi de Hooke. Ainsi, cet opérateur est nécessaire pour les deux problèmes multi-échelles visés et le parti est donc pris de catégoriser, dans l'abaque, les matériaux en fonction de leur tenseur d'élasticité. Un tel choix semble d'autant plus judicieux que n'importe quel problème d'optimisation multi-échelle (sous entendu d'éventuelles autres applications que la minimisation de la compliance et la conception de mécanismes souples) met en jeu les équations d'équilibre mécanique macroscopiques pour lesquelles ce tenseur est requis. Il semble donc que catégoriser les matériaux en fonction de cet opérateur soit également cohérent pour d'autres applications.

La notation de Voigt, qui sera utilisée par la suite, permet d'écrire le tenseur d'élasticité d'ordre 4 de manière généralisée comme un opérateur d'ordre 2 $C_{ijkl} = C_{\alpha,\beta}$, avec la correspondance d'indice décrite par la table 3.1 (les correspondances

$k, l \rightarrow \beta$ sont identiques à celles $i, j \rightarrow \alpha$).

i	j	$\rightarrow \alpha$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
2	3	4
1	3	5
1	2	6

TABLE 3.1 – Correspondance des indices du tenseur d'élasticité avec la notation de Voigt.

Ainsi en notation de Voigt, le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$\mathbb{C}_{2D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ \text{Sym} & & C_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbb{C}_{3D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{Sym} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Afin de paramétrer le tenseur d'élasticité pour la catégorisation des matériaux dans l'abaque, il est envisageable d'utiliser chaque composante $C_{ij}, \{i, j\} \in \{1, \dots, 6\}^2$, ce qui conduit à 6 paramètres indépendants en 2D et 21 paramètres indépendants en 3D. Ce paramétrage est cohérent avec la méthode d'optimisation de matériaux architecturés présentée dans le chapitre précédent car la fonction objectif était formulée de sorte à obtenir des matériaux architecturés pour certaines valeurs de ces composantes.

Ainsi, dans le but de parcourir l'espace paramétrique, il convient de lancer l'algorithme d'optimisation de matériaux architecturés présenté dans le chapitre précédent pour obtenir un snapshot. Il convient ensuite de remplir l'espace des snapshots, qui correspond à un hypercube de dimension N où N est le nombre de paramètres matériaux indépendants, et donc répéter ce processus un grand nombre de fois pour des comportements (i.e. des combinaisons de C_{ij}) variés. Dans le cas de l'anisotropie générale évoqué jusqu'ici, l'hypercube des propriétés matériaux à parcourir est de dimensions respectivement 6 et 21 pour les cas 2D et 3D. Bien qu'il soit tout à fait envisageable de fournir des snapshots pour de tels espaces, le choix est fait de réduire la dimension des hypercubes en considérant des classes de matériaux pour lesquels il existe des symétries (pour la topologie et donc pour le tenseur d'élasticité). En effet, pour de tels matériaux, les composantes du tenseur d'élasticité ne sont plus indépendantes et donc le nombre de paramètres nécessaires pour catégoriser

les matériaux dans l'abaque est amoindri. D'après [Chadwick *et al.*, 2001], il existe 8 classes de symétries différentes qui permettent de classer tous les tenseurs de matériaux architecturés. Ces huit classes sont illustrées sur la figure 3.1 et la table 3.2 précise, pour chaque classe de symétrie, le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire le tenseur d'élasticité.

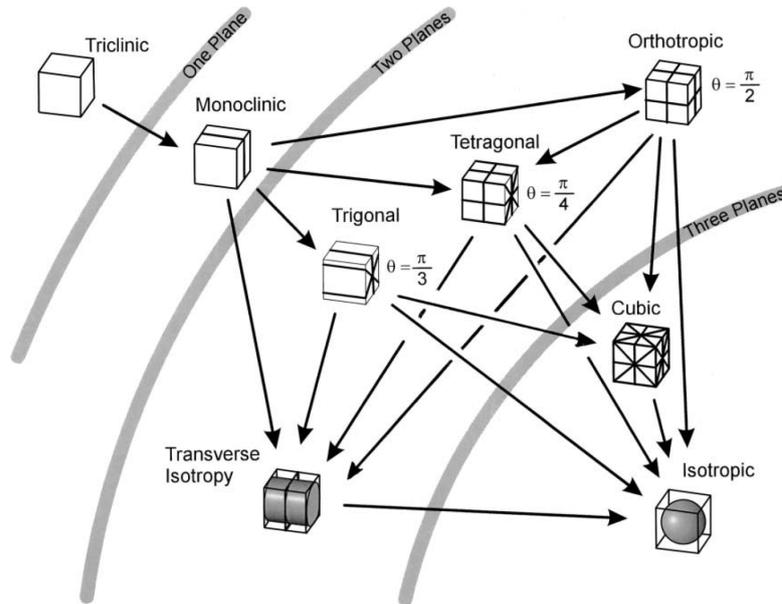


FIGURE 3.1 – Génération des huit classes de symétries pour les matériaux élastiques linéaires par introductions successives des plans de symétries [Chadwick *et al.*, 2001].

Classe de symétrie	Nombre de paramètres indépendants en 3D
Isotropique	2
Cubique	3
Isotropique transverse	5
Tétraogonale	6
Trigonale	6
Orthotropique	9
Monoclinique	13
Anistropique (Tricinclique)	21

TABLE 3.2 – Classes de symétries des matériaux architecturés.

Pour les matériaux isotropes, il faut donc deux paramètres, ou coefficients. Il y a plusieurs manières de définir ces coefficients matériaux. Les plus fréquemment utilisés sont le couple module de Young/module de Poisson (E, ν), les coefficients

de Lamé (λ, μ) ou encore les modules de compressibilité et de cisaillement (k, μ) qui permettent d'écrire le tenseur d'élasticité comme suit :

$$\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K} \quad (3.3)$$

où (\mathbb{J}, \mathbb{K}) sont les projecteurs sur les espaces d'ordre deux isotropes et déviatoriques respectivement :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3}\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (3.4)$$

où \mathbb{I} est l'identité d'ordre 4 : $2I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, \mathbf{i} est l'identité d'ordre 2 : $i_{ij} = \delta_{ij}$ et \otimes est le produit tensoriel.

Ainsi, pour construire un abaque de matériaux architecturés, il suffit de parcourir l'espace paramétrique (k, μ) en optimisant un grand nombre de matériaux dont le tenseur d'élasticité prescrit est de la forme donnée dans l'équation (3.3), via la formulation proposée dans le chapitre 2.

L'exemple des matériaux isotropes est le plus simple car l'hypercube correspondant est de dimension 2. Il peut s'agir d'un bon point de départ pour construire un abaque. Cependant, il est important d'avoir en tête que plus la dimension de l'hypercube est petite, moins la variété de comportements possibles est grande. En effet les matériaux isotropes sont inclus dans les matériaux cubiques qui sont eux-mêmes inclus dans les symétries plus restrictives jusqu'au cas général de l'anisotropie. Finalement, plus l'espace est restreint, moins les comportements seront variés dans l'abaque, ce qui peut être restrictif en termes de performances multi-échelle mais cela permet de limiter le nombre de snapshots nécessaires pour parcourir l'espace. De plus, il n'est pas simple d'obtenir des comportements isotropes en utilisant la méthode d'optimisation de matériaux architecturés présentée dans le chapitre 2 en raison de la forme du domaine admissible D de la CER. En effet, il s'agit d'un carré en dimension 2 et d'un cube en dimension 3. Or les matériaux isotropes sont caractérisés, géométriquement, par le fait qu'ils n'ont aucune orientation spécifique, ce qui signifie que tout plan est plan de symétrie pour le matériau. Cette condition n'est pas respectée par le domaine comme l'illustre la figure 3.2 qui montre les 4 plans de symétries du domaine D en 2D. En effet, de part la forme "cubique" du domaine D , qui possède respectivement 4 et 9 plans de symétries en 2D et 3D, il sera impossible d'obtenir des matériaux présentant des symétries pour tout plan. Cette géométrie du domaine est, en revanche, bien adaptée à la symétrie cubique dont le tenseur d'élasticité peut être exprimé en fonction de trois coefficients (k, μ_a, μ_b) comme suit :

$$\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu_a\mathbb{K}_a + 2\mu_b\mathbb{K}_b \quad (3.5)$$

où k est le module de compressibilité et μ_a et μ_b sont les modules de cisaillement. Le projecteur \mathbb{J} est le même que dans le cas isotrope et les projecteurs \mathbb{K}_a et \mathbb{K}_b s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K}_a &= \mathbb{L} - \mathbb{J} \\
 \mathbb{K}_b &= \mathbb{I} - \mathbb{L} \\
 \mathbb{L} &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ engendrent l'espace Euclidien. Ces décompositions sont issues de [Bornert *et al.*, 2001b].

Le choix est alors fait de construire un abaque de matériaux architecturés cubiques car :

- Cela permet de réduire considérablement la dimension de l'espace paramétrique à remplir (de 21 paramètres à seulement 3).
- À la vue de la forme du domaine admissible de la CER, il est aisé d'imposer les symétries qui correspondent aux matériaux cubiques.

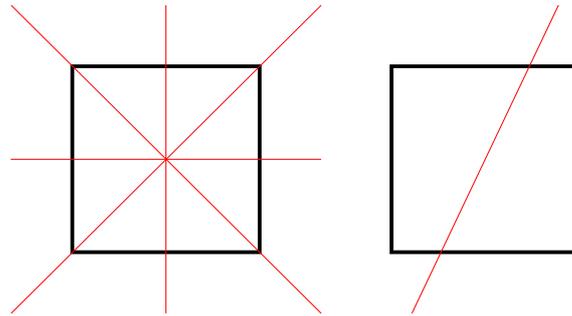


FIGURE 3.2 – Illustration des plans de symétries de la CER (gauche) et d'un plan quelconque qui n'est pas plan de symétrie.

Comme évoqué dans le chapitre précédent, toute combinaison des composantes C_{ij} n'est pas atteignable. Autrement dit, il y a des tenseurs d'élasticité pour lesquels il n'est pas possible de trouver un matériau architecturé correspondant. En effet, il est nécessaire que le tenseur d'élasticité soit défini positif, ce qui impose des bornes sur les paramètres (k, μ_a, μ_b) qui ne peuvent être négatifs. De plus, les matériaux architecturés conçus dans cette thèse sont bi-phasiques, car ils sont constitués d'une phase solide et d'une phase de vide. Les travaux de Hashin Shtrikman [Hashin et Shtrikman, 1963] proposent des bornes théoriques pour les matériaux bi-phasiques isotropes. Une extension pour les matériaux cubiques, en considérant un module de cisaillement équivalent du type $\mu_{cubic} = (2\mu_a + 3\mu_b)/5$, est proposée dans les travaux suivants [Kantor et Bergman, 1984, Cohen, 2004]. Ces bornes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k \leq k^b - \frac{1 - \phi}{\frac{1}{k^b} - \frac{\phi}{k^b + \mu^b}} \\ 0 \leq \frac{2\mu_a + 3\mu_b}{5} \leq \mu^b \frac{1 - \phi}{\frac{1}{\mu^b} - \phi \frac{k^b + 2\mu^b}{2\mu^b(k^b + \mu^b)}} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

avec (k^b, μ^b) les modules de compressibilité et de cisaillement de la phase solide (bulk) et ϕ la fraction volumique de cette dernière (aussi écrite V_m). La méthode de construction de l'abaque de matériaux architecturés consiste à tirer de manière aléatoire des valeurs des coefficients (k, μ_a, μ_b) à l'intérieur des bornes de Hashin Shtrikman et ce de manière indépendante les unes des autres. Le paramètre β , qui gère le compromis masse/précision sur le tenseur d'élasticité, est, lui aussi, choisi de manière aléatoire dans les bornes suivantes : $\beta \in [0; 10]$. Des conditions de symétries sont imposées sur le gradient de la CER selon les plans de symétries cubiques illustrés sur la figure 3.2. Ces symétries ont pour effet de garantir que le matériau obtenu en fin de procédé aura un tenseur d'élasticité cubique et pourra donc faire partie du catalogue. En effet, comme mentionné dans le chapitre précédent, les valeurs homogénéisées des composantes du tenseur d'élasticité de la CER obtenues peuvent être légèrement différentes de celles prescrites, notamment du fait de la formulation au sens des moindres carrés. Néanmoins, même si l'algorithme ne converge pas tout à fait vers le comportement attendu, il produit tout de même un matériau dont le comportement est cubique et qui peut donc être utilisé. Un ensemble de 3 000 matériaux architecturés a été optimisé. Pour chacun d'eux, le comportement effectif ainsi que la fraction volumique de phase solide et la topologie sont stockés dans l'abaque. La figure 3.3 représente la répartition des comportements obtenus sur un graphe (k, μ_{cubic}) . Il est intéressant d'observer que ces matériaux ne remplissent pas tout l'espace délimité par les bornes d'Hashin-Shtrikman en pointillés violets. En effet, les comportements prescrits sont aléatoirement (et de manière homogène) répartis dans cette zone violette, mais il apparaît que certaines combinaisons ne sont pas atteignables avec la formulation utilisée. Typiquement, il n'est pas possible d'obtenir des matériaux avec un haut coefficient de cisaillement équivalent et un faible module de compressibilité. De même, il n'est pas possible de concevoir des matériaux à haut module de compressibilité pour un faible module de cisaillement équivalent. Les bornes de Hashin-Shtrikman apparaissent ici comme des bornes supérieures qui délimitent un espace plus grand que le domaine atteignable. Ce résultat est cohérent car les bornes donnent une bonne estimation des limites de comportement lorsque les deux matériaux ont des propriétés mécaniques voisines, ce qui n'est pas le cas ici. Les bornes obtenues numériquement sont illustrées en rouge. Il apparaît qu'au plus proche de ces bornes, la densité de matériaux obtenus est plus faible et il faudrait enrichir ces zones pour renforcer le crédit qui leur est attribué. Enfin, il semble que la plupart des matériaux obtenus sont concentrés autour d'une droite dont l'équation

est $\mu_{cubic} = \frac{k}{2}$.

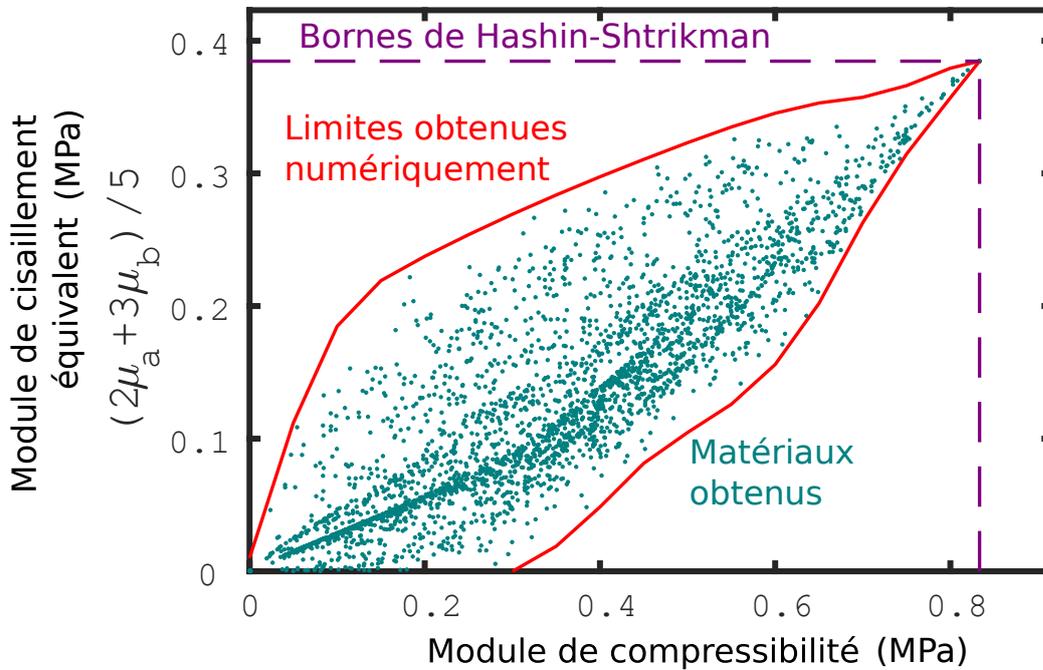


FIGURE 3.3 – Illustration de la répartition des comportements effectifs obtenus pour les 3 000 matériaux.

La figure 3.4 illustre la répartition des fractions volumiques de phase solide de chaque matériau (ce qui est équivalent à une distribution des masses de ces matériaux). Il est observé, comme attendu, que plus le couple de paramètres matériaux (k, μ_{cubic}) est grand, plus la fraction volumique de phase solide est élevée. De plus, il apparaît que le module de cisaillement a un impact légèrement plus important que le module de compressibilité sur la masse.

L'abaque présenté ici est constitué de snapshots qui consistent en des CER 2D discrétisées par un maillage éléments finis 100×100 . La construction des 3 000 snapshots a nécessité environ un mois de calcul sur une machine portable. Il aurait été possible de diminuer ce temps de calcul en utilisant un cluster et en lançant les optimisations de matériaux en parallèle. Un tel gain de temps, certes non négligeable, ne permettrait tout de même pas de réaliser l'optimisation couplée sans la stratégie d'abaque. Ceci illustre alors bien le fait que la phase "off-line" est la plus contraignante en termes de temps de calcul. Cependant, une fois l'abaque construit, il peut être utilisé à maintes reprises pour les optimisations "on-line" basées sur les données et donc ce temps de calcul est fortement amorti. D'aucuns pourraient même arguer que ce temps de calcul ne doit pas être pris en compte dans

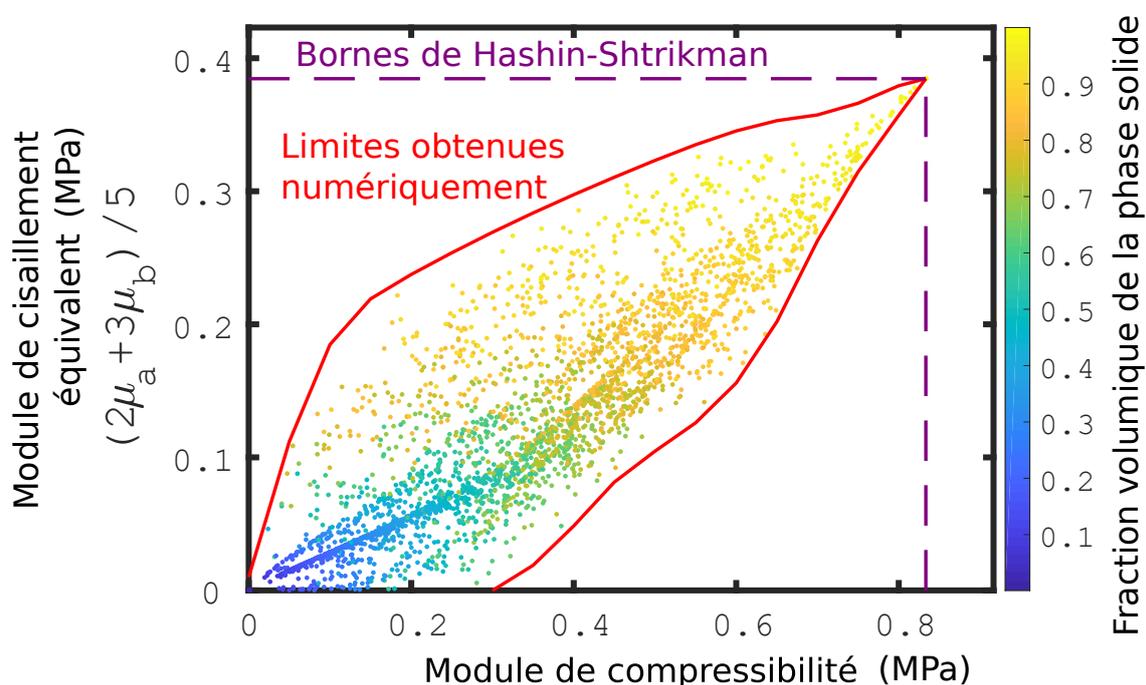


FIGURE 3.4 – Répartition des fractions volumiques de phase de solide des matériaux de l'abaque.

l'optimisation multi-échelle basée sur les données, puisqu'il s'agit d'une phase amont.

223 snapshots ont été conçus en 3D. Les points obtenus sont illustrés sur la figure 3.6 dans la même base que pour les snapshots 2D. Une autre illustration est donnée sur la figure 3.5 dans la base (E, ν, G) qui sont des paramètres plus utilisés en ingénierie. Les équivalences entre ces paramètres sont rappelées par l'équation (3.8). Il y a trop peu de points pour tirer des conclusions significatives mais il apparaît tout de même que ces points restent dans les limites obtenues pour le cas 2D. Le coût de calcul pour obtenir un abaque de matériaux architecturés en 3D (c'est-à-dire la phase "off-line") est significativement plus important que pour le cas 2D car, au vu de l'impact de la discrétisation illustré dans le chapitre précédent, il faut un maillage d'au moins $40 \times 40 \times 40$ éléments avec 3 degrés de liberté (ddl) par élément soit 192 000 ddls (contre 12 800 pour les maillages 2D). De plus, à chaque itération microscopique, chaque mode élémentaire de déformation doit être calculé. Or il y en a 6 en 3D contre 3 en 2D. Donc au total, il est envisageable d'estimer que le coût en calcul d'une itération 3D est environ 30 fois plus élevé qu'une itération 2D et donc, pour obtenir les 3 000 snapshots il faudrait, en assumant un comportement linéaire du procédé (qui est parait crédible), environ trente mois. Il est clair que, pour ce genre de cas, il deviendrait nécessaire d'utiliser un cluster et de se

pencher sur les performances du code. Face à cette problématique, la construction de l'abaque 3D n'a pas été poussée plus loin et il est certain que le nombre de snapshots est un facteur limitant, comme cela sera discuté dans la partie suivante. Néanmoins l'objectif de cette thèse est avant-tout de faire un démonstrateur qui permette une preuve de concept et l'efficacité demeure, dans un premier temps, de second ordre. Les travaux présentés dans [Zhu *et al.*, 2017] exposent une méthode où la génération de snapshots est basée sur la modification plus ou moins significative des snapshots déjà existants, ce qui permet d'améliorer l'efficacité de la génération de nouveaux matériaux et particulièrement l'exploration des limites du domaine des comportements atteignables.

$$\begin{cases} E &= \frac{9k\mu_a}{3k + \mu_a} \\ \nu &= \frac{3k - 2\mu_a}{6k + 2\mu_a} \\ G &= \mu_b \end{cases} \quad (3.8)$$

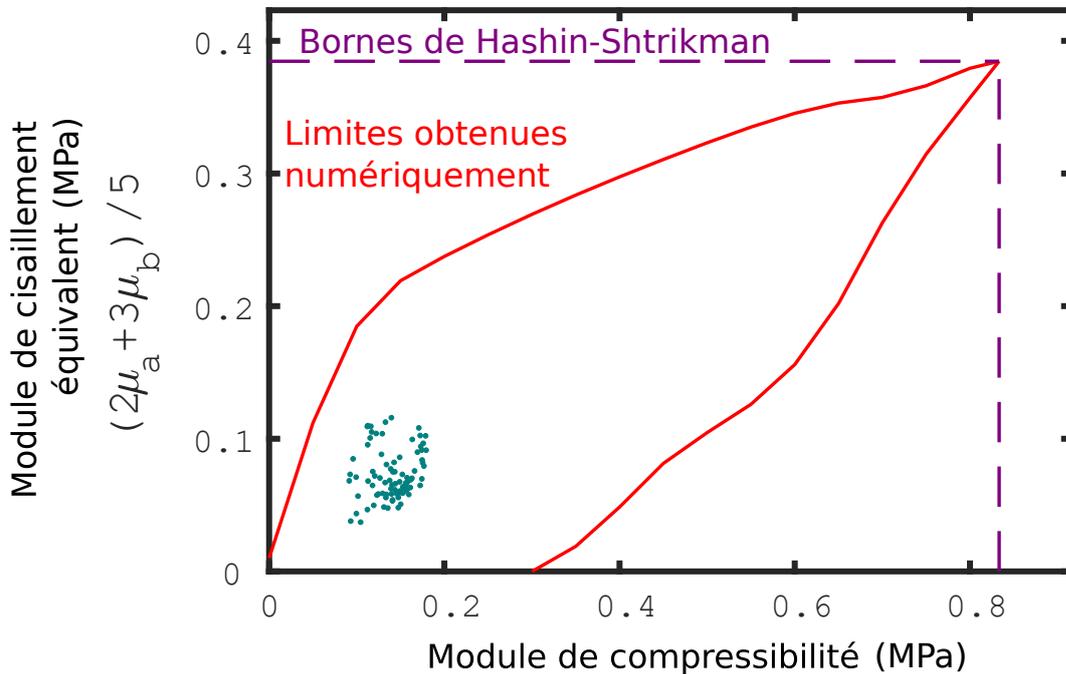


FIGURE 3.5 – Répartitions des comportements homogénéisés des snapshots 3D dans la base (k, μ_a, μ_b) .

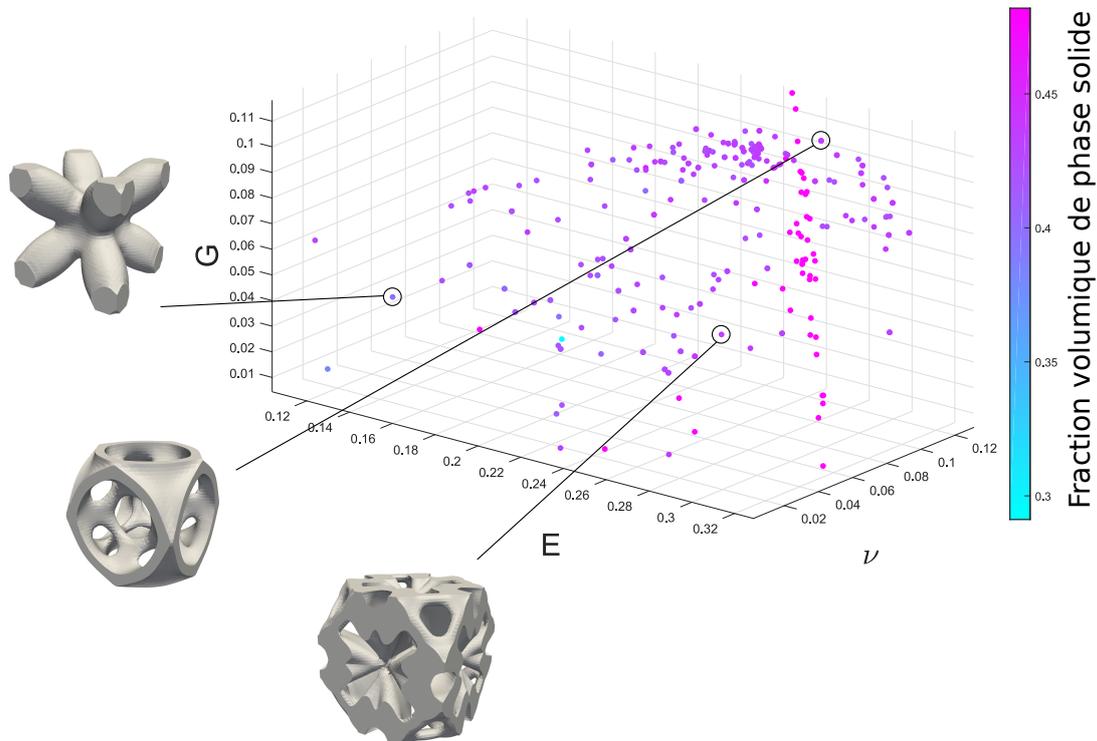


FIGURE 3.6 – Répartitions des comportements homogénéisés des snapshots 3D dans la base des paramètres ingénieurs (E, ν, G).

3.3 Optimisation multi-échelle basée sur les données

Une fois l’abaque de matériaux architecturés construit, l’optimisation multi-échelle qui correspond à la phase ”on-line” peut être pratiquée en se basant sur le schéma proposé sur la figure 2.30. Les étapes d’optimisation microscopiques sont alors remplacées par une recherche dans l’abaque du meilleur matériau pour la fonction objectif. Comme mentionné dans la partie précédente, l’optimisation multi-échelles qui consiste en la phase ”on-line” va conduire à rechercher un matériaux, en chaque point de Gauss, qui correspond à un certain jeu de paramètres de l’hypercube des propriétés matériaux. Dans le cadre de cette application, cette recherche consiste à sélectionner le snapshot dont le jeu de paramètres est le plus proche, au sens euclidien, de celui produit requis par le problème multi-échelle. Il existe une littérature fournie concernant l’utilisation d’abaques, et, plus particulièrement, son interpolation, pour la méthode on-line. Afin de compresser les données stockées dans l’abaque, il est commun d’avoir recours à des stratégies de réduction de modèles qui consistent à construire des bases réduites $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ pour un petit nombre de modes k .

La solution interpolée $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{m})$ consiste alors en une somme de produits de fonctions sur cette base :

$$\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(\mathbf{m}) \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

où la variable \mathbf{m} correspond aux paramètres d'entrées de l'hypercube des propriétés matériaux et \mathbf{x} correspond aux paramètres de la topologie Ω . Les fonctions α_i et ϕ_i sont des fonctions d'interpolation.

Il existe alors plusieurs méthodes pour construire ces bases réduites qui peuvent être regroupées en deux grandes familles : les approches a posteriori et les approches a priori. Les approches a posteriori sont basées sur l'utilisation de snapshots calculées par le modèle standard. Parmi ces approches, on trouve notamment la POD pour "Proper Orthogonal Decomposition" [Liberge, 2008, Atwell, 2000, Holmes *et al.*, 2012], la SVD pour "Single Value Decomposition" [Mandel, 1982, de Souza *et al.*, 2015]. Les méthodes a priori, quant à elles, ne nécessitent pas la connaissance de snapshots et les bases réduites sont calculés pendant la phase on-line [Ammar *et al.*, 2006]. Parmi ces méthodes, on trouve notamment la PGD pour "Proper Generalized Decomposition" [Ladevèze, 1985] et la HOPGD pour "High Order Proper Generalized Decomposition" [Modesto *et al.*, 2015]. Dans le cadre de ces travaux, la grandeur à interpoler serait directement la topologie du matériau architecturé correspondant au jeu de paramètres d'entrées (k, μ_a, μ_b) requis par le calcul macroscopique. La non-unicité de la topologie pour un jeu de paramètre donné apparaît ici comme un frein à l'utilisation de telles techniques car : les snapshots pourvus dans l'abaque induisent un biais sur le résultat et il serait possible de construire un abaque avec des snapshots correspondants aux mêmes paramètres d'entrées mais avec des topologies différentes ; le topologie interpolée est biaisée par le choix des snapshots.

3.3.1 Minimisation de la compliance

La problème de la minimisation de la compliance s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega, \mathbb{C}(\mathbf{x}), V_m(\mathbf{x})} J(\Omega, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) : \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \beta V_m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d\Omega \\ t.q. & \begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) &= \mathbf{f} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_N & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \{\Gamma_N \cup \Gamma_D\} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \\ & \mathbb{C}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{adm} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3. Stratégie basée sur les données

À chaque itération de l'optimisation macroscopique, le champ de déplacements est calculé, ce qui permet d'obtenir le gradient de la fonction objectif macroscopique, conformément à ce qui a déjà été présenté dans le chapitre précédent. De plus ce champ de déplacements permet également de calculer le champ des déformations $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})$. Ce champ de déformations est ensuite utilisé comme conditions aux limites sur la CER afin de choisir le meilleur matériau dans l'abaque. Dans un premier temps, et afin de satisfaire l'hypothèse de périodicité, le même matériau architecturé est utilisé pour toute la structure et c'est la déformation moyenne qui sert de chargement. La stratégie de résolution peut alors être schématisée par l'algorithme 4.

Algorithm 4 Optimisation de la compliance multi-échelle basée sur les données

Initialisation : \mathbb{C}_0, Ω_0

while $\epsilon_k < tol$

Résolution de l'équilibre macroscopique

Calcul du tenseur de déformation $\boldsymbol{\epsilon}_{moy} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e=1}^N v_e \boldsymbol{\epsilon}_e$

Choix du meilleur matériau architecturé au sein de l'abaque par rapport au critère suivant :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{moy} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{moy} + \beta V_m \int_{\Omega} d\Omega$$

Mise à jour du comportement effectif en utilisant celui du matériau sélectionné

Calcul du gradient de la fonction coût

Mise à jour de la topologie macroscopique Ω via le gradient

end while

Comme expliqué dans le chapitre précédent, la fonction coût consiste en un compromis entre masse et rigidité. Ces deux critères sont multi-échelles puisque la rigidité se calcule via le tenseur de déformation macroscopique et le tenseur du comportement effectif local. De plus, la fraction volumique de phase solide est le produit de la fraction volumique du matériau architecturé V_m et de la fraction volumique de la structure macroscopique $\int_{\Omega} d\Omega$. Pour la méthode proposée, l'abaque est consulté à grandeurs macroscopiques fixées (c'est-à-dire $\boldsymbol{\epsilon}_{moy}$ et $\int_{\Omega} d\Omega$ fixés). Concernant le temps de calcul, il apparaît que plus l'abaque contient de snapshots, plus l'étape du choix du matériau architecturé peut être numériquement coûteuse car tout les candidats sont testés. Néanmoins, s'agissant d'une simple opération de type produit matrice vecteur, le temps de calcul associé à cette étape reste négligeable pour 3k snapshots comparé au coût numérique associé au calcul éléments finis de l'équilibre macroscopique (3 secondes pour le calcul EF contre 0.3 seconde pour la recherche dans l'abaque) et donc, il n'apparaît pas comme nécessaire, dans un premier temps, d'améliorer cette étape de l'algorithme en utilisant des

méthodes plus sophistiquées de recherche dans l’abaque. Comme évoqué dans l’introduction sur les méthodes ”on-line”, des pistes d’amélioration de l’utilisation de l’abaque consisteraient à interpoler les snapshots via des méthodes type HOPGD par exemple. Les travaux de Ye Lu [Lu, 2017] proposent des méthodes efficaces de construction et d’interpolation d’abaque numériques basées sur des variétés Grassmanniennes [Amsallem et Farhat, 2008]. Afin d’optimiser les données stockées au sein de l’abaque, la méthode des *sparse grids* est utilisée. Elle consiste à parcourir l’hypercube selon certaines directions préférentielles sans dégrader la précision d’interpolation, ce qui permet de réduire la complexité du problème.

Pour les exemples de minimisation de la compliance traités, la microstructure correspondant au matériau plein (donc non architecturé) apparaît souvent comme le meilleur candidat et on peut se poser la question, dans ce contexte précis, de l’utilité d’introduire ce type de matériaux.

Ainsi, dans le but d’illustrer cet algorithme multi-échelle, et dans le but de réaliser une preuve de concept, le choix est fait d’imposer, dans la recherche du matériau, une fraction volumique de phase solide inférieure à 0.5, conformément à la méthode proposée dans [Ferrer *et al.*, 2016]. Cela revient à imposer une porosité du matériau de l’ordre de 50% et la contrainte suivante est ajoutée au problème d’optimisation (3.10) : $V_m < 0.5$.

3.3.1.1 Illustration de l’algorithme d’optimisation multi-échelle.

L’exemple de la poutre cantilever est étudié dans un premier temps. Un maillage 160×80 est utilisé. Les conditions aux limites ainsi que l’évolution de la macrostructure et du matériau architecturé pour les itérations 130 et 200 sont illustrées table 3.3. L’évolution de la fonction objectif est illustrée sur la figure 3.7. Il apparaît que la convergence est lisse malgré les sauts dans les propriétés matériaux qui ont lieu lorsque le matériau change car l’abaque est suffisamment dense (nombre de snapshots suffisant).

Afin d’illustrer l’importance d’un abaque suffisamment dense, un deuxième exemple est traité pour un abaque qui contient seulement 200 snapshots (il s’agit en fait du premier essai de cette formulation lorsque l’abaque ne contenait que 200 snapshots). Cet exemple est un pont où les conditions aux limites, ainsi que l’évolution de la topologie pour les itérations 100 et 200, sont illustrées table (3.3.1.1) et l’évolution de la fonction objectif est illustrée par la figure 3.8. Il apparaît ici que la convergence est beaucoup moins lisse et les sauts observés sur la fonction objectif sont dus au changement de matériau optimal. L’abaque contenant trop peu de snapshots, l’écart des propriétés mécaniques entre deux snapshots peut être important et donc, lorsque le matériau optimal change, l’impact sur la rigidité est très important. De plus, le fait que la variation de la topologie à l’échelle macroscopique a un impact sur le matériau optimal et que, réciproquement, la variation du matériau optimal a un impact sur l’évolution de la macro-structure s’illustre particulièrement bien entre les itérations 110 et 150 où le matériau optimal alterne entre deux candidats. En effet,

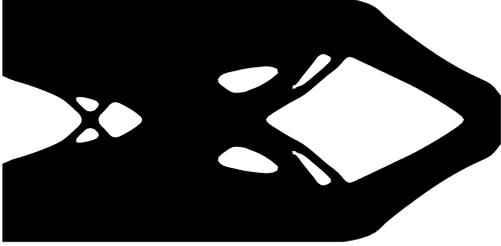
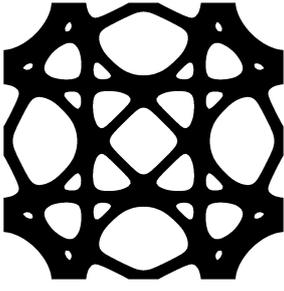
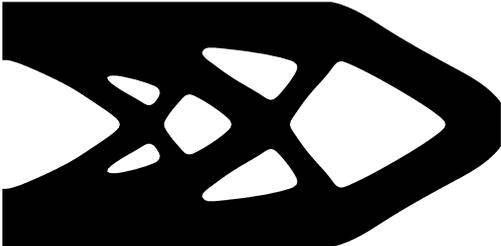
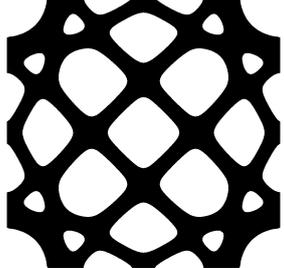
Itération	Macro-structure	Matériau architecturé
0		
130		
200		

TABLE 3.3 – Procédé d’optimisation multi-échelle pour la poutre cantilever.

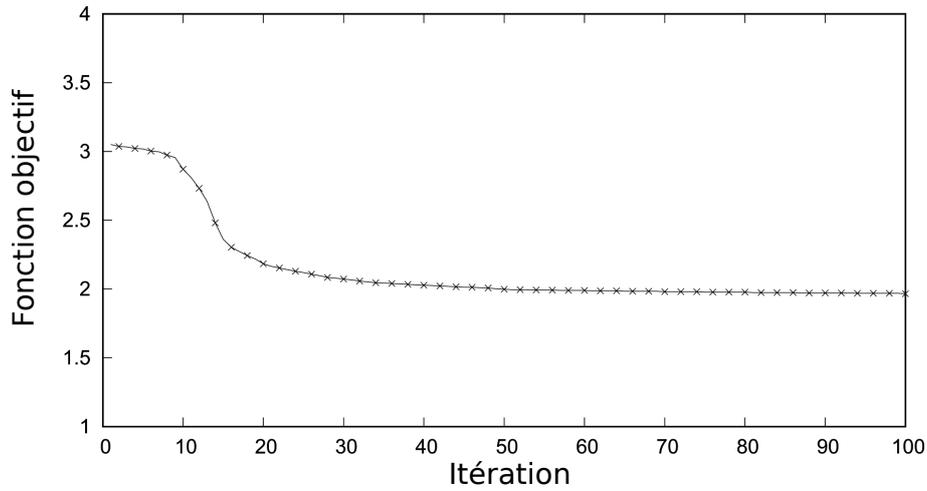


FIGURE 3.7 – Évolution de la fonction objectif au cours du procédé d’optimisation.

pour la topologie à l’itération i , le matériau optimal passe de A à B mais le changement des propriétés mécaniques induit par le choix du matériau B impose qu’à l’itération $i + 1$, le matériau optimal redevient A . Cette alternance s’arrête lorsque la topologie macroscopique a suffisamment évolué (itération > 150) et une convergence est finalement atteinte mais il est clair qu’augmenter le nombre de snapshots dans l’abaque est un point clé pour le lissage de la fonction objectif et donc, pour le bon déroulé du procédé d’optimisation.

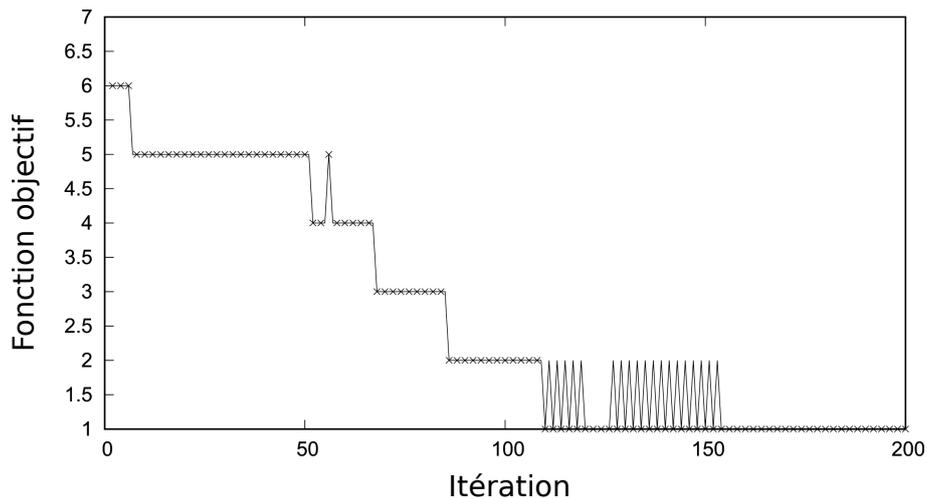


FIGURE 3.8 – Évolution de la fonction objectif au cours du procédé d’optimisation

Comme mentionné précédemment, l’abaque 3D comporte seulement 200 snapshots, ce qui est trop peu pour avoir une convergence lisse du procédé multi-échelle.

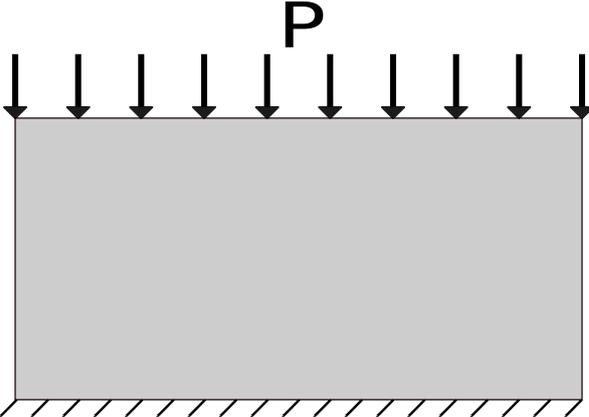
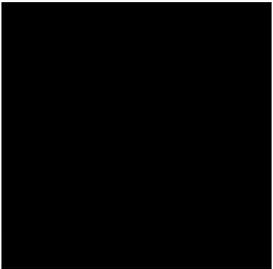
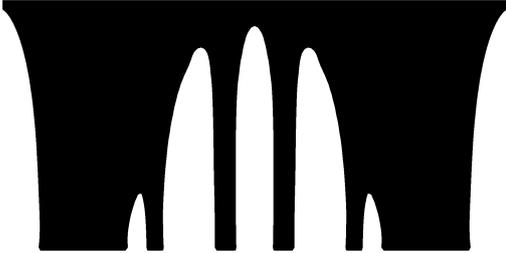
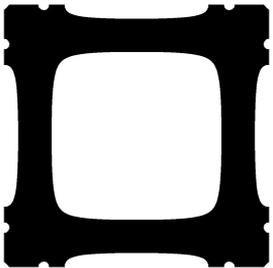
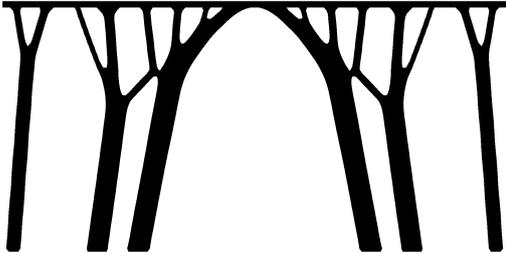
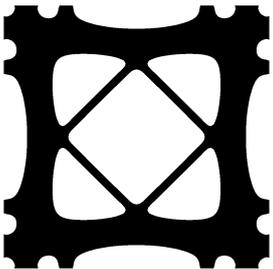
Itération	Macro-structure	Matériau architecturé
0		
100		
200		

TABLE 3.4 – Procédé d’optimisation multi-échelle pour le pont.

Afin de tenter une illustration du procédé d'optimisation multi-échelle en 3D, des snapshots sont ajoutés à l'abaque en se basant sur une interpolation des propriétés mécaniques au sein du domaine pour lequel les points ont été déterminés. Il s'agit donc de snapshots "virtuels" c'est-à-dire que le matériau correspondant n'a pas été designé, ce qui pose le problème de l'existence d'un tel matériau car, comme évoqué précédemment, tous les matériaux au sein du domaine délimité par les bornes d'Hashin-Shtrikman ne sont pas forcément concevables. Cependant, en interpolant à l'intérieur des points obtenus, il est plus probable d'arriver à concevoir le matériau. L'interpolation est faite sur la fraction volumique de phase solide V_m de la manière suivante :

$$V_{interp} = \frac{1}{N_{snap}} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} V_i}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{d_j}} \quad (3.11)$$

où V_{interp} est la fraction volumique d'un point virtuel issu de l'interpolation, N_{snap} est le nombre de snapshots "réels" et d_i est la distance sur la carte (k, μ) entre le point virtuel et le point réel d'indice i . Environ 800 snapshots virtuels sont ajoutés afin de porter l'abaque à 1000 snapshots.

L'exemple traité consiste en une poutre encastée à une extrémité où une pression verticale de flexion est imposée sur une partie de l'extrémité opposée. Le procédé d'optimisation est réalisé sur deux maillages de $40 \times 40 \times 20$ et $80 \times 40 \times 40$ éléments. Les conditions aux limites, ainsi que les topologies optimales pour les deux maillages, sont illustrées sur la figure 3.9. L'évolution de la fonction objectif donnée sur la figure 3.10 montre que le maillage plus fin permet d'atteindre une meilleure valeur à convergence de la fonction objectif, comme cela a déjà pu être observé via d'autres exemples. De plus, il est possible d'identifier trois zones, sur la figure d'évolution de la fonction objectif, délimitées par des pointillés rouges. La première zone, pour les itérations inférieures à 75, correspond à la variation principale de la topologie macroscopique, d'où la variation lisse, mais conséquente, de la fonction objectif. Dans cette zone, le matériau optimal ne varie que faiblement (4 fois en 75 itérations). La seconde zone, pour les itérations comprises entre 75 et 102, correspond à la phase de recherche du matériau optimal. En effet, dans cette zone, la topologie macroscopique ne varie plus de manière conséquente ; en revanche, le matériau optimal change de façon plus régulière (8 fois en 27 itérations). Passées les 102 itérations, la macrostructure ne varie plus que très faiblement jusqu'à convergence et le matériau optimal ne change plus. Certains snapshots virtuels considérés comme optimaux, au cours du procédé, ont été reconstruits avec succès post optimisation, pour s'assurer que ces points sont bien atteignables.

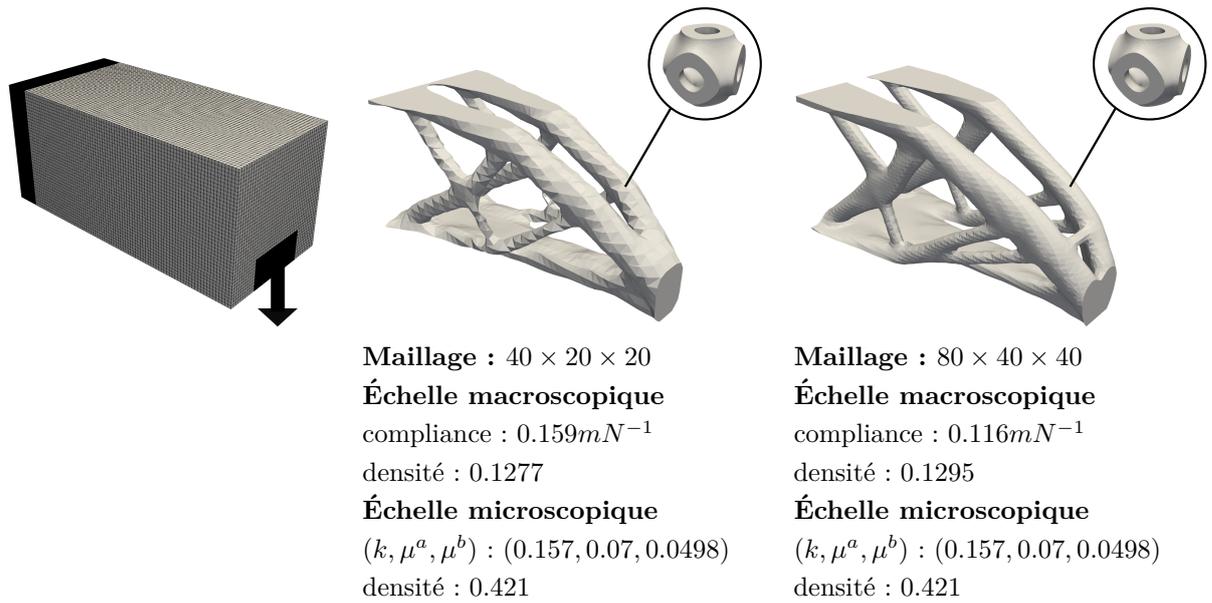


FIGURE 3.9 – Conditions aux limites et topologies optimales pour l'exemple 3D. Les matériaux optimisés ainsi que les performances sont également données pour chaque maillage.

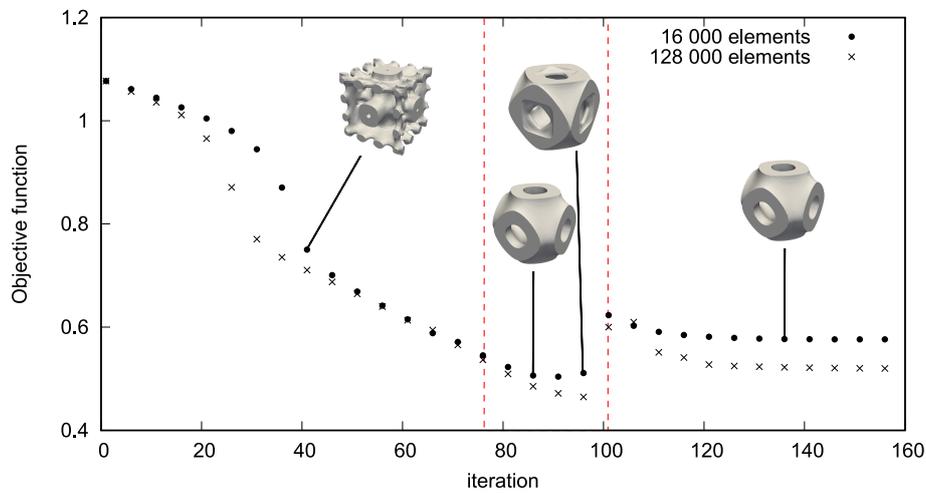


FIGURE 3.10 – Évolution de la fonction objectif au cours du procédé d'optimisation

3.3.2 Mécanismes souples

Le problème d'optimisation de mécanismes souples consiste à optimiser la structure pour obtenir des conditions aux limites type Neumann ou Dirichlet dans une zone d'intérêt, lorsque la structure est sollicitée. Ce problème, présenté dans le chapitre précédent, dans la partie multi-échelle, permet de mettre à jour itération par

itération les propriétés matériaux (k, μ_a, μ_b) jusqu'à obtenir une distribution qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés entre les déplacements prescrits dans la zone d'intérêt et les déplacements obtenus sous sollicitation. L'inconvénient principal de cette formulation était alors que cette distribution mettait en jeu, en certains points, des combinaisons de propriétés pour lesquelles il n'était pas forcément possible de trouver une topologie de la CER qui permette d'obtenir ces propriétés. En d'autres termes, certains matériaux n'étaient pas concevables et ne respectaient donc pas la condition $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{C}_{adm}$. Afin d'améliorer cet algorithme et de permettre de respecter cette condition nécessaire à la fabricabilité du mécanisme, il est proposé d'utiliser l'abaque de matériaux pré-construit. Le schéma de mise à jour des propriétés est alors le suivant :

- À chaque itération, le gradient de la fonction objectif est utilisé pour mettre à jour, en chaque point de Gauss, les propriétés matériaux optimales via la formule proposée dans le chapitre 2 :

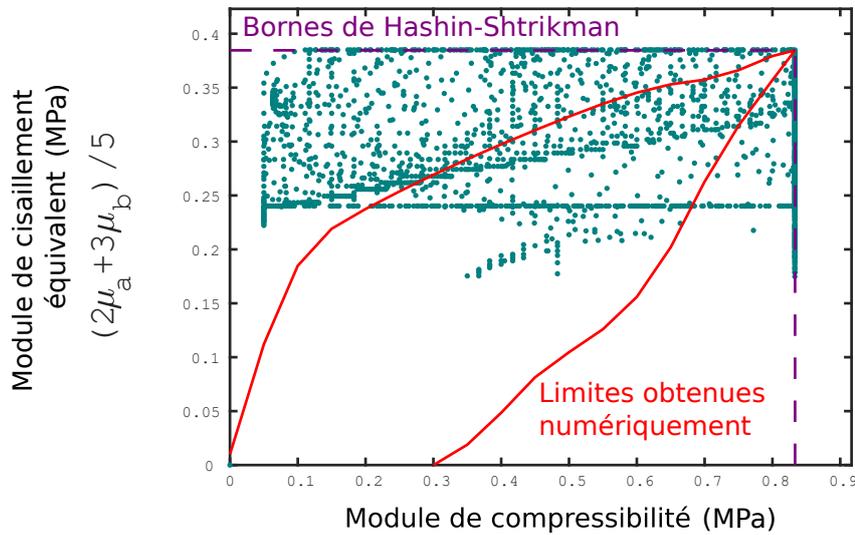
$$C_{ijkl}^{m+1} = C_{ijkl}^m + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial C_{ijkl}} \mathbf{u}$$

- Pour chaque nouveau triplet (k, μ_a, μ_b) obtenu, le triplet le plus proche, au sens de la norme Euclidienne, est choisi dans l'abaque.

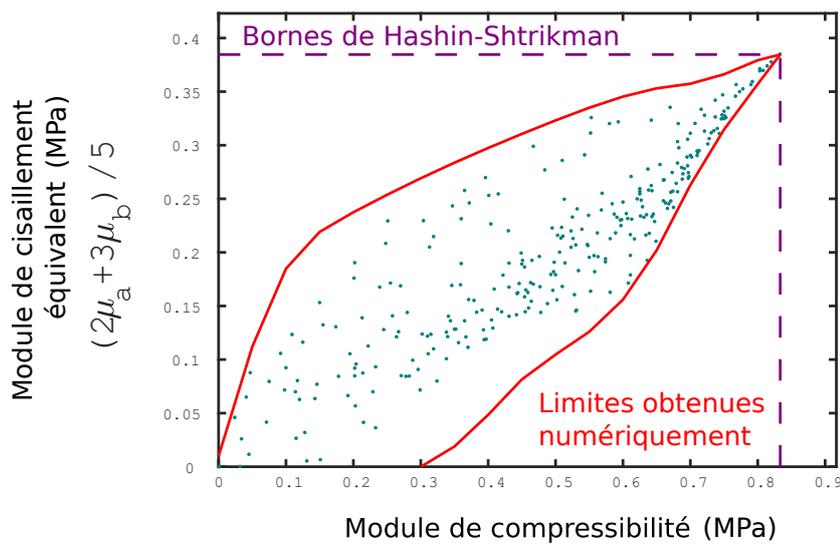
3.3.2.1 Illustration de l'algorithme d'optimisation multi-échelle.

Le premier exemple traité est celui de la pince. Afin d'illustrer l'intérêt de l'approche basée sur les données dans le contexte multi-échelle, il est proposé de comparer les deux méthodes, c'est-à-dire avec et sans abaque. Dans le cas sans abaque, les propriétés matériaux sont mises à jour indépendamment de l'existence du matériau correspondant tandis que, pour la méthode avec abaque, à chaque itération, les propriétés matériaux sont mises à jour en calculant le nouveau triplet (k, μ_a, μ_b) optimal et en sélectionnant le plus proche, au sens de la norme Euclidienne parmi les matériaux disponibles au sein de l'abaque. Dans le premier cas, la condition $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{C}_{adm}$ n'est donc pas imposée et n'a aucune raison d'être respectée, tandis que pour la méthode avec abaque, cette condition est respectée naturellement. La distribution des propriétés optimales est illustrée pour les deux cas sur la figure 3.11. Dans les deux cas, le même niveau de fonction objectif est atteint, ce qui signifie que les deux mécanismes atteignent le même niveau de performance vis à vis du critère d'erreur au sens des moindres carrés. Comme attendu, dans le premier cas, la distribution de matériaux optimale requiert un certain nombre de jeu de paramètres matériaux qui sont en dehors des limites numériques observées lors de l'élaboration de l'abaque. Pour ces jeux de paramètres, il n'est donc pas possible de concevoir un matériaux correspondant et la structure n'est donc pas fabricable. Dans le second cas, la distribution de matériaux est connue car chaque matériau est connu à l'avance du fait de son appartenance à l'abaque.

Les distributions de propriétés mécaniques, pour les deux méthodes avec et sans abaque, sont illustrées sur la figure 3.12.



(a) Sans abaque



(b) Avec abaque

FIGURE 3.11 – Distribution des propriétés matériaux optimales pour le mécanisme de pince.

Le second exemple traité est celui de l'inverseur d'effort, qui permet de confirmer la tendance observée dans le premier exemple. En effet, pour cet exemple également, la première méthode ne permet pas d'assurer la condition $\mathbb{C}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{adm}$ tandis que la méthode basée sur l'abaque le fait naturellement. La répartition des propriétés mécaniques optimales est illustrée sur la figure 3.13 tandis que la distribution de

celles-ci est illustrée sur la figure 3.14

Il est intéressant de noter que la méthode basée sur l’abaque, a donc pour double objectif de diminuer les temps de calcul et d’assurer l’existence des matériaux requis. Il s’agit ici d’un avantage significatif par rapport à la méthode sans abaque initiale proposée dans le chapitre 2. Il est, de plus, particulièrement intéressant de noter que le fait de restreindre, pour la seconde méthode basée sur l’abaque, les matériaux à l’espace numériquement admissible limite les comportements possibles et donc la flexibilité de l’algorithme par rapport à la méthode sans abaque où les limites des comportements correspondent aux bornes d’Hashin-Shtrikman. En d’autres termes, la méthode basée sur l’abaque est plus restrictive concernant les comportements matériaux (donc les variables de design). Il est alors intéressant de noter que cette restriction aurait pu conduire la méthode basée sur l’abaque à ne pas converger ou à converger vers un niveau de performance de la fonction objectif plus faible. Cependant, il est observé pour ces deux exemples, malgré la restriction sur les comportements admissibles, l’algorithme basé sur l’abaque parvient à un niveau de performance de la fonction objectif équivalent à celui de l’algorithme sans abaque. Enfin, il est observé que les distributions de comportement sont très différentes, sur chaque exemple, pour les deux méthodes, ce qui n’empêche pas la déformée de correspondre aux spécifications requises. Cette remarque permet d’illustrer, une fois de plus, la non unicité des solutions fréquemment observée sur les problèmes d’optimisation topologique.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l’optimisation multi-échelle de structures micro-architecturées basée sur les données a été présentée. Dans un premier temps, la construction d’un abaque de matériaux architecturés a été détaillée. Il est proposé de classer les matériaux dans l’abaque en fonction de leur comportement homogénéisé, c’est-à-dire l’opérateur de Hooke. Dans le cas le plus général de l’anisotropie, ce tenseur contient 6 et 21 paramètres indépendants en 2D et 3D. Dans le but de simplifier l’étude et de réduire le nombre de snapshots nécessaires à la construction de cet abaque, il est proposé de restreindre l’espace paramétrique en considérant des matériaux qui présentent certains types de symétries. En effet, ces symétries topologiques impliquent des relations entre les composantes du tenseur d’élasticité et réduisent le nombre de paramètres indépendants. La symétrie cubique est choisie car la topologie du CER permet d’imposer directement ces symétries topologiques. Le nombre de paramètres indépendants passe alors à 3 en 2D et en 3D. L’objectif était alors de remplir au maximum l’espace des comportements cubiques admissibles délimités par les bornes de Hashin-Shtrikman. La technique proposée consiste à tirer de manière aléatoire un triplet (k, μ_a, μ_b) au sein du domaine admissible. Le tenseur d’élasticité correspondant à ce triplet est calculé par l’équation (3.5) et la méthode d’optimisation de matériaux architecturés présentée dans le chapitre 2

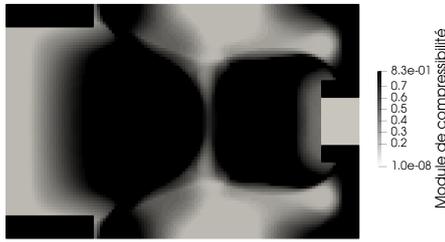
peut directement être appliquée pour obtenir un snapshot correspondant à ce triplet. Néanmoins, il a été observé que toutes les combinaisons de propriétés matériaux ne sont pas atteignables et que les bornes de Hashin-Shtrikman surestiment les comportements qu'il est possible d'atteindre dans le cas des matériaux bi-phasiques qui présentent un grand écart de propriétés mécaniques comme c'est le cas pour l'application traitée où les deux phases sont le solide et le vide. La méthode de tirage aléatoire semble tout de même adaptée car même les points qui ne sont pas atteints donnent un résultat exploitable. En effet, si l'algorithme d'optimisation de snapshot ne parvient pas à converger vers le comportement initialement prescrit (car celui-ci n'est pas atteignable), il permettra toujours d'obtenir un matériau de symétrie cubique dont le comportement effectif, bien qu'éloigné du comportement prescrit, peut être stocké dans l'abaque. Un abaque de plus 3 000 matériaux architecturés a été construit en 2D. La construction d'un abaque similaire pour des matériaux 3D a également été tentée mais le temps de calcul associé n'a pas permis d'obtenir autant de snapshots. Un ensemble de 200 snapshots a néanmoins été réalisé et, afin de réaliser un démonstrateur avec preuve de concept, il est proposé de générer des snapshots virtuels dont la fraction volumique est interpolée par rapport aux points réels.

Une fois ces abaques construits dans la phase préalable dite "off-line", l'optimisation multi-échelle peut être mise en œuvre. Les étapes d'optimisation de la microstructure sont remplacées par une recherche, dans le catalogue des matériaux disponibles, du meilleur candidat par rapport à la fonction objectif. Cette méthode a le double avantage d'imposer le respect de la condition $\mathbb{C}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_{adm}$ et de diminuer significativement le nombre de variables de design du problème couplé. Il en résulte un gain en termes de coût numérique considérable (aucune comparaison quantitative n'est donnée car le calcul sans abaque n'a pas été mené jusqu'au bout justement à cause de la limitation du temps de calcul).

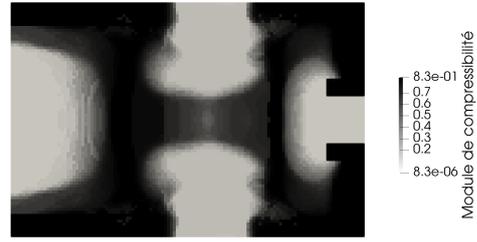
Les deux applications proposées pour l'algorithme multi-échelles sont la minimisation de la compliance et la conception de mécanismes souples. Dans les deux cas, le même abaque est utilisé car, comme mentionné en début de chapitre, le paramétrage en fonction des propriétés matériaux est nécessaire pour ces deux formulations. Cela permet, dans un premier temps, d'illustrer que le fait de construire l'abaque via un paramétrage judicieux permet de l'utiliser ensuite pour différentes applications, ce qui le rend d'autant plus utile et flexible. Cependant la manière d'interroger l'abaque est différente pour les deux applications. En effet, dans le cas de la minimisation de la compliance, le calcul des déformations macroscopiques permet de déterminer un chargement à appliquer sur le matériaux et tout les candidats de l'abaque sont testés pour trouver celui qui conduit à la meilleure rigidité. Pour la seconde application de la conception de mécanismes souples, à chaque itération, un triplet de paramètres matériaux (k, μ_a, μ_b) est calculé via le gradient de la fonction objectif. L'abaque est alors interrogé pour trouver le matériaux pré-conçu dont les paramètres matériaux sont les plus proches, au sens de la norme Euclidienne, de ceux requis par le calcul macroscopique. Il est intéressant de noter que ces deux applications sont fondamen-

talement différentes dans leur façon de mettre à profit l'abaque de matériaux alors qu'elles fonctionnent sur ce même abaque.

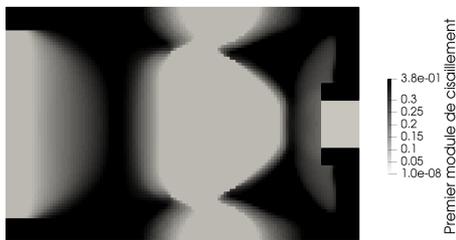
L'intérêt des matériaux architecturés s'illustre particulièrement bien sur la conception de mécanismes souples où des cinématiques relativement complexes peuvent être obtenues en distribuant des matériaux de comportements variés dans la structure. En effet, ce sont les différents comportements locaux (microscopiques) qui vont piloter la cinématique globale (macroscopique). La méthode d'optimisation présentée est originale car ce sont directement les propriétés matériaux qui deviennent variables de design et l'abaque permet d'imposer la condition d'existence des matériaux pour la distribution de propriétés optimale. Il a été montré, pour les exemples traités, que le fait de restreindre les comportements admissibles aux limites obtenues numériquement lors de la construction de l'abaque par tirage aléatoire permet une variété suffisante pour que l'algorithme converge. En effet, la convergence n'est pas garantie du fait de la discrétisation des comportements disponibles dans l'abaque. Typiquement, il serait envisageable que l'algorithme alterne entre deux matériaux sans se stabiliser. Les méthodes proposées n'utilisent, pour l'instant, pas de méthodes d'interpolations type POD ou autres. Par conséquent, il est capital que l'abaque contiennent un grand nombre de snapshots afin de recouvrir au maximum l'hypercube de propriétés matériaux en laissant le moins de vides possible. Les exemples traités pour la minimisation de la compliance ont permis de mettre en lumière l'impact de la densité de snapshots sur le lissage de la fonction objectif.



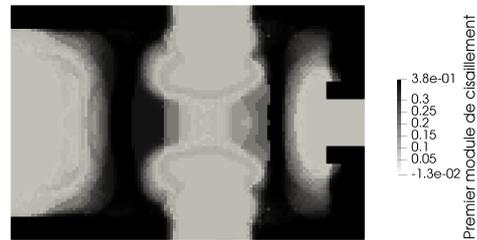
(a) Distribution du module de compressibilité pour la méthode sans abaque



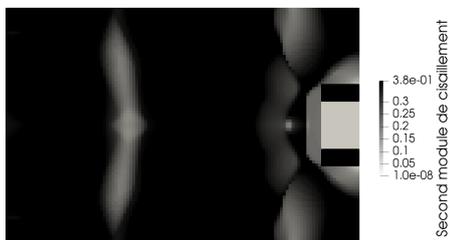
(b) Distribution du module de compressibilité pour la méthode avec abaque



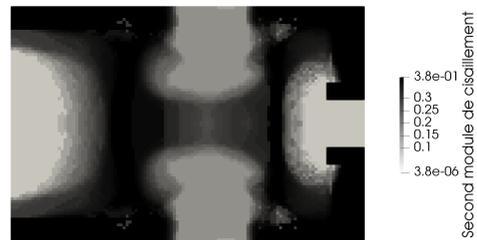
(c) Distribution du premier module de cisaillement pour la méthode sans abaque



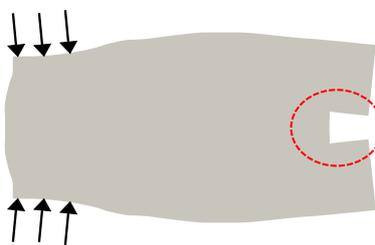
(d) Distribution du premier module de cisaillement pour la méthode avec abaque



(e) Distribution du second module de cisaillement pour la méthode sans abaque

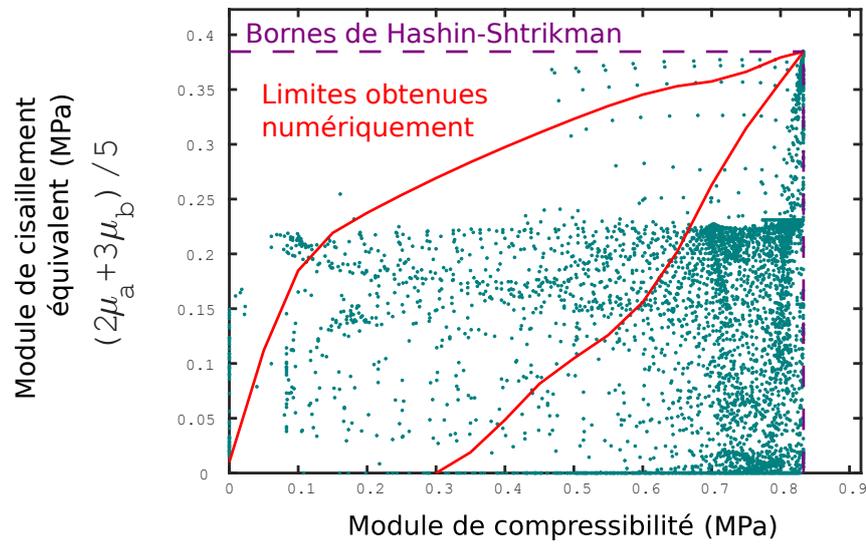


(f) Distribution du second module de cisaillement pour la méthode avec abaque

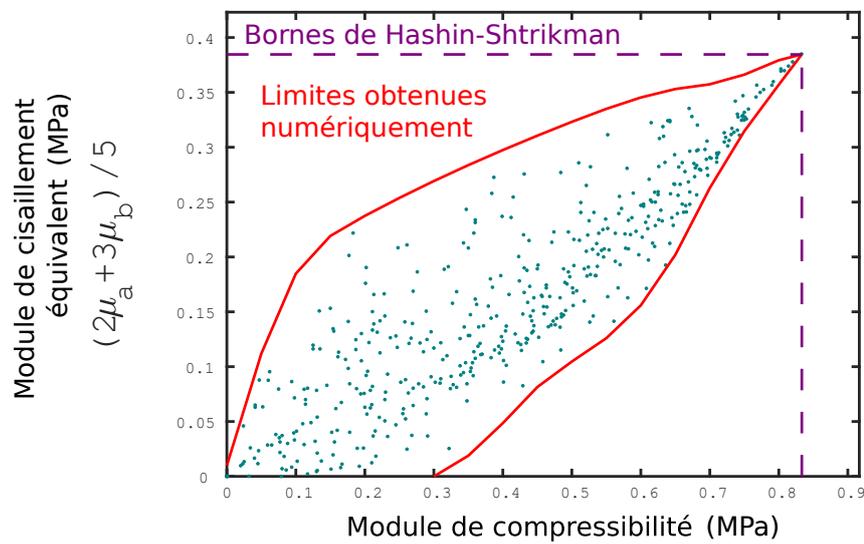


(g) Déformée du mécanisme

FIGURE 3.12 – Comparaison de la distribution des propriétés matériaux optimales pour les deux méthodes dans l'exemple de la pince.

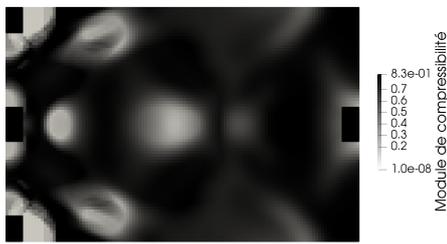


(a) Sans abaque

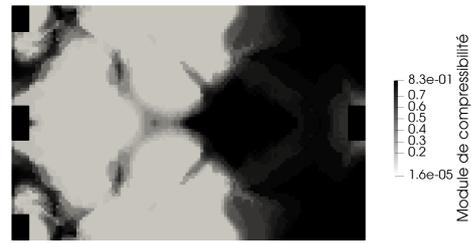


(b) Avec abaque

FIGURE 3.13 – Distribution des propriétés matériaux optimales pour le mécanisme d'inverseur d'effort.



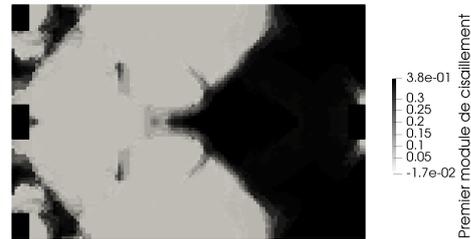
(a) Distribution du module de compressibilité pour la méthode sans abaque



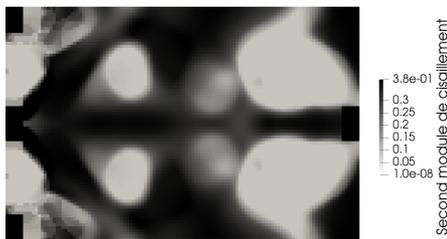
(b) Distribution du module de compressibilité pour la méthode avec abaque



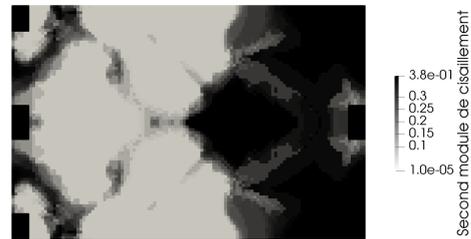
(c) Distribution du premier module de cisaillement pour la méthode sans abaque



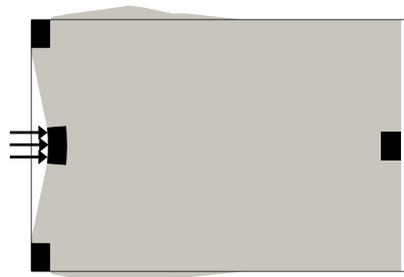
(d) Distribution du premier module de cisaillement pour la méthode avec abaque



(e) Distribution du second module de cisaillement pour la méthode sans abaque



(f) Distribution du second module de cisaillement pour la méthode avec abaque



(g) Déformée du mécanisme

FIGURE 3.14 – Comparaison de la distribution des propriétés matérielles optimales pour les deux méthodes dans l'exemple de l'inverseur de force.

Conclusion

L'objectif de cette thèse était, dans un premier temps, de se familiariser avec les concepts théoriques associés à l'optimisation topologique. Pour ce faire, un certain nombre de méthodes ont été étudiées et le choix a été fait d'implémenter un démonstrateur pour le paramétrage en densité et pour le paramétrage via une fonction lignes de niveaux. Le démonstrateur a été testé pour des cas standards tels que la minimisation de la compliance pour la poutre cantilever en 2D dans l'hypothèse des déformations planes. Une fois le démonstrateur validé sur ces cas académiques, des formulations plus innovantes ont été ajoutées, telles que l'optimisation de matériaux architecturés à comportement effectif prescrit (ces formulations existent dans la littérature mais sont généralement moins nombreuses que pour la compliance).

Le second objectif, plus ambitieux, était de parvenir à coupler optimisation de structures et optimisation de matériaux. En effet, les matériaux innovants sont, depuis quelques années, un sujet d'intenses recherches en ce qui concerne les performances mécaniques et il a donc été intuité qu'il serait possible d'améliorer encore les performances d'une structure en optimisant la distribution du matériau qui la compose. La fabricabilité de ce genre de structure demeure un enjeu de taille du fait des faibles dimensions des microstructures comparées à celles de la macrostructure et les effets issus du procédé sont négligés dans le cadre de ces travaux. Toutefois, l'incorporation des problématiques associées au procédé, notamment pour la fabrication additive, est un sujet de recherche florissant. Les formulations d'optimisation multi-échelle existent également dans la littérature mais souffrent généralement de limitations numériques associées aux temps de calculs importants. Ainsi, les maillages utilisés sont souvent grossiers. La solution proposée pour amoindrir ces temps de calculs conséquents consiste à utiliser un abaque de matériaux architecturés. Bien que la construction de cet abaque soit une étape subtile et numériquement coûteuse, elle est faite une fois pour toute dans une étape amont dite "off-line". Le procédé d'optimisation multi-échelle basé sur cet abaque devient alors réalisable sur des temps beaucoup plus faibles et il est possible d'utiliser des maillages fins.

Les apports de cette thèse peuvent être résumés selon les points suivants :

- Le développement d'un démonstrateur numérique d'optimisation topologique pour diverses applications macro/micro, 2D/3D mono et multi échelle, optimisation basée sur les données.
- L'introduction d'un critère de nucléation d'interfaces permettant des variations topologiques dans le cadre d'une formulation level-set (qui dans le cas

général ne le permet pas).

- La conception de matériaux innovants avec des comportements originaux comme des matériaux auxétiques en 2D et en 3D.
- La construction d'un abaque de matériaux architecturés 2D et 3D à symétrie cubique dont la génération aléatoire a permis de faire émerger des bornes plus restrictives que celles théoriques d'Hashin-Shtrikman.
- L'utilisation de cet abaque pour permettre une optimisation à deux échelles en des temps relativement faibles.
- Le calcul du gradient topologique de la fonction objectif par rapport aux propriétés matériaux (k, μ_a, μ_b) dans le cadre des mécanismes souples.

Il a été observé que, pour que le bon déroulement du procédé d'optimisation à deux échelles basé sur les données, il est important que l'abaque contienne un nombre de snapshots suffisant. En effet, d'une itération à l'autre, le matériau optimal est amené à varier ce qui entraîne des sauts dans les propriétés mécaniques et donc se répercute sur l'évolution de la fonction objectif. Le fait de densifier l'abaque permet d'amoinrir ces sauts, puisque l'abaque contient plus de points, jusqu'à l'obtention d'un lissage du procédé satisfaisant (environ 1000 points pour les exemples traités dans cette thèse).

Il a également été montré, dans le cadre de l'optimisation de mécanismes souples que le fait d'utiliser un abaque permet de s'assurer que les comportements effectifs mis en jeu correspondent à des matériaux bien réels sans impacter trop négativement la fonction coût. La formulation proposée, pour faire émerger ces microstructures, a été divisée en deux étapes majeures. La première consistait à introduire le calcul du gradient topologique d'une fonction objectif (celle qui porte sur l'erreur au sens des moindres carrés entre des déplacements imposés et les déplacements obtenus, sous sollicitation, dans une zone d'intérêt) par rapport aux propriétés matériaux. Ce type de formulation induit donc l'optimisation de la distribution des propriétés matériaux au sein de la structure. Ce procédé est grandement inspiré de la méthode SIMP qui cherche à optimiser la distribution de la densité. D'une certaine manière, la méthode SIMP peut être vue comme une distribution de microstructures avec un comportement effectif prescrit $\mathbb{C} = \rho^p \mathbb{C}_0$ mais avec un seul paramètre. Le paramètre de pénalisation maximise le contraste sur la densité ce qui implique de favoriser les zones où la densité est nulle et qui peuvent être assimilées à la phase vide, et les zones où la densité est unitaire qui correspondent à la phase solide. Néanmoins, du fait de la continuité de la fonction densité, il subsiste toujours des zones de densité intermédiaire qui peuvent être vues comme des microstructures. Le fait de calculer le gradient topologique, non plus par rapport à la densité mais directement par rapport aux propriétés matériaux, favorise naturellement l'émergence de microstructures avec des comportements variés et originaux qui vont piloter la cinématique de la transformation et qui peuvent conduire à des états déformés intéressants comme cela a été montré dans les deux exemples de la pince et de l'inverseur d'effort. Néanmoins, cette première méthode présentée en fin de chapitre 2, qui consistait à faire évoluer les propriétés matériaux d'un état initial vers une distribution opti-

misées, souffrait de deux limitations majeures. D'un part, elle était numériquement coûteuse, car l'ensemble des microstructures requises devaient être optimisées à posteriori, afin de bien définir la topologie correspondant aux propriétés matériaux en chaque point de Gauss. D'autre part, l'espace des propriétés matériaux atteignables, même dans le cas cubique, n'est pas clairement défini. Les bornes d'Hashin Shtrikman ont été utilisées, dans un premier temps, pour s'assurer que les comportements respectent ces limites supérieures de l'espace des propriétés matériaux, mais il a été observé, lors de la création de l'abaque dans le troisième chapitre, que ces bornes étaient surestimantes pour l'application proposée. Ainsi, pour certains points de Gauss, la microstructure requise n'était tout bonnement pas atteignable ce qui rendait la structure impossible à définir complètement et rendait caduc la possibilité de les fabriquer. La seconde étape présentée dans le troisième chapitre visait à outrepasser ces deux limitations que sont le coût numérique d'une part, et la fabricabilité d'autre part. Pour ce faire, l'abaque de matériaux architecturés est utilisé en imposant, à chaque itération, de choisir, en chaque point de Gauss, la microstructure, au sein de l'abaque, dont le comportement est le plus proche, au sens de la norme Euclidienne, de celui requis par le procédé d'optimisation. L'avantage de cette méthode est qu'elle impose de restreindre l'évolution des paramètres matériaux dans les limites plus restrictives qui ont été observées numériquement. Ainsi, en chaque point de Gauss, la microstructure choisie correspond à un snapshot pré-construit de l'abaque. En procédant de cette façon, les matériaux obtenus appartiennent à l'ensemble des propriétés atteignables et il n'est plus nécessaire de les concevoir à posteriori (ils sont construits à priori dans l'abaque). Le procédé "on-line" devient donc sensiblement plus rapide et la structure est, en théorie, fabricable car les topologies de toutes les microstructures sont connues. Il est également intéressant de noter que la seconde méthode introduit plus de contraintes dans la recherche de la distribution optimale, puisque les limites de l'abaque sont plus restrictives que celles d'Hashin Shtrikman. Néanmoins, l'algorithme basé sur les données parvient à converger vers un niveau de performance équivalent à celui à l'autre méthode.

Cette application phare a donc permis de montrer, d'une part, l'utilité des matériaux architecturés dans le cadre de la mécanique multi-échelle et, d'autre part, l'importance d'une stratégie basée sur un abaque dans un tel contexte où les variables de design deviennent particulièrement nombreuses.

Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont permis de soulever certains points intéressants qui méritent d'être développés à l'avenir. Le choix de limiter les matériaux de l'abaque à la symétrie cubique introduit un biais important et il serait bienvenu de réaliser le même type d'étude sur des espaces paramétriques plus grands. L'idéal serait de construire un abaque de dimension 21 pour les matériaux anisotropes 3D car, comme mentionné dans le chapitre 3, plus les symétries imposées sont importantes, plus le nombre de paramètres matériaux est réduit, moins les comportements au sein de l'abaque seront variés, ce qui diminue les libertés de design. Cependant, augmenter la dimension de l'abaque implique d'augmenter de manière significative le nombre de snapshots pour assurer le lissage de la fonction objectif. Une telle étude induirait des coûts de calcul importants, en particulier pour la conception de matériaux 3D. Il serait alors intéressant d'envisager d'autres méthodes de génération de snapshots moins coûteuses numériquement. Par exemple, certains auteurs ont proposé [Schumacher *et al.*, 2015] des méthodes d'interpolation de la topologie qui permettraient d'obtenir de nouveaux matériaux issus du mélange entre des matériaux déjà conçus. Cependant ces méthodes se heurtent à la question de la non-unicité de la topologie de la CER pour un comportement donné. Il serait également intéressant d'étudier la possibilité d'utiliser des techniques de réductions de modèle pour l'abaque de matériaux architecturés dans la phase "on-line" afin d'interpoler les snapshots construits.

Un autre aspect qu'il serait judicieux de développer est la recherche du meilleur candidat dans l'abaque. En effet, la méthode proposée consiste à tester tout les candidats disponibles à chaque itération. Pour un abaque à seulement 3k snapshots, le temps de calcul associé à ces tests reste marginale mais il est clair que le fait d'augmenter le nombre de paramètres et donc le nombre de snapshot finirait par avoir un impact non négligeable sur le temps de calcul, voir à devenir un facteur limitant. Il serait alors intéressant d'envisager des techniques d'interpolation de l'abaque type POD, SVD, PGD, etc... En effet ces techniques permettent, via l'utilisation de bases réduites de l'hypercube des propriétés matériaux, d'obtenir directement un nouveau snapshot pour une nouvelle entrée de l'hypercube, sans avoir besoin de réaliser une optimisation de matériau complète.

La construction de l'abaque par une génération aléatoire de points dans l'hypercube des propriétés matériaux a permis de faire émerger des limites sur les comportement atteignables pour les microstructures à symétries cubiques. Néanmoins ces matériaux sont constitués d'une phase solide faite d'un seul matériau. Il serait intéressant d'envisager des microstructures plus complexes où la phase solide pourrait être constituée de deux matériaux différents (bi-matériaux). En effet, il est envisageable d'optimiser des bi-matériaux via un paramétrage par plusieurs fonctions lignes de niveaux qui représente chacune des phases [Faure, 2017].

Il serait également intéressant de trouver de nouvelles applications qui permettent d'illustrer l'utilité des matériaux architecturés. Typiquement, des problèmes d'op-

timisation multi-physiques, pour lesquels, l'objectif consiste en deux propriétés indépendantes qui sont impactées par la topologie. Il serait alors envisageable d'imposer que chaque échelle optimise une des propriétés.

Enfin, comme cela a été mentionné dans le premier chapitre de cette thèse, le procédé d'optimisation a vocation à concevoir des structures élancées qui présentent des éléments géométriques de faibles dimensions assimilables, par exemples, à des poutres de faible section par rapport à leur longueur. Ces éléments sont particulièrement sensibles aux instabilités de type flambage. De plus, pour les structures micro-architecturées obtenues par l'algorithme multi-échelle présenté, le flambage peut être observé à l'échelle macroscopique et/ou à l'échelle microscopique. Certains auteurs ont introduits un critère pour maximiser la charge critique de flambage pour les structures macroscopiques [Neves *et al.*, 1995, Lindgaard et Dahl, 2013] et pour les microstructures [Neves *et al.*, 2002]. Cependant, la question du flambage dans le cadre de l'optimisation multi-échelle soulève un certain nombre d'enjeux [Bendsøe et Triantafyllidis, 1990] et de solutions innovantes comme la réduction de modèle [Yvonnet *et al.*, 2007]. Il serait, par exemple, intéressant d'observer si le premier mode de flambage d'une structure micro-architecturée est plus influencé par l'échelle macroscopique ou l'échelle microscopique.

Bibliographie

- [Adzima, 2016] ADZIMA, F. (2016). *Modélisation et simulation de procédés de mise en forme de toles métalliques ultrafines*. Thèse de doctorat.
- [Alberty *et al.*, 2002] ALBERTY, J., CARSTENSEN, C., FUNKEN, S. A. et KLOSE, R. (2002). Matlab implementation of the finite element method in elasticity. *Computing*, 69(3):239–263.
- [Allaire *et al.*, 2005] ALLAIRE, G., DE GOURNAY, F., JOUVE, F. et TOADER, A.-M. (2005). Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and cybernetics*, 34(1):59.
- [Allaire *et al.*, 2004] ALLAIRE, G., JOUVE, F. et TOADER, A.-M. (2004). Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of computational physics*, 194(1):363–393.
- [Allaire et Schoenauer, 2007] ALLAIRE, G. et SCHOENAUER, M. (2007). *Conception optimale de structures*, volume 58. Springer.
- [Ammar *et al.*, 2006] AMMAR, A., RYCKELYNCK, D., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2006). On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 134(1-3):136–147.
- [Amsallem et Farhat, 2008] AMSALLEM, D. et FARHAT, C. (2008). Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *AIAA journal*, 46(7):1803–1813.
- [Amstutz et Andrä, 2006] AMSTUTZ, S. et ANDRÄ, H. (2006). A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of computational physics*, 216(2):573–588.
- [Amstutz *et al.*, 2012] AMSTUTZ, S., NOVOTNY, A. et de SOUZA NETO, E. (2012). Topological derivative-based topology optimization of structures subject to drucker–prager stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233:123–136.
- [Andreassen *et al.*, 2011] ANDREASSEN, E., CLAUSEN, A., SCHEVENELS, M., LAZAROV, B. S. et SIGMUND, O. (2011). Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1):1–16.
- [Ashby et Brechet, 2003] ASHBY, M. et BRECHET, Y. J. (2003). Designing hybrid materials. *Acta materialia*, 51(19):5801–5821.

- [Atwell, 2000] ATWELL, J. A. (2000). *Proper orthogonal decomposition for reduced order control of partial differential equations*. Thèse de doctorat, Virginia Tech.
- [Bendsoe et Kikuchi, 1988] BENDSOE, M. P. et KIKUCHI, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.
- [Bendsoe et Sigmund, 2013] BENDSOE, M. P. et SIGMUND, O. (2013). *Topology optimization : theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.
- [Bendsøe et Triantafyllidis, 1990] BENDSØE, M. P. et TRIANTAFYLLIDIS, N. (1990). Scale effects in the optimal design of a microstructured medium against buckling. *International journal of solids and structures*, 26(7):725–741.
- [Bertsch *et al.*, 2010] BERTSCH, C., CISILINO, A. P. et CALVO, N. (2010). Topology optimization of three-dimensional load-bearing structures using boundary elements. *Advances in engineering software*, 41(5):694–704.
- [Billon, 2016] BILLON, K. (2016). *Composites périodiques fonctionnels pour l'absorption vibroacoustique large bande*. Thèse de doctorat.
- [Bonet et Wood, 1997] BONET, J. et WOOD, R. D. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge university press.
- [Bornert *et al.*, 2001a] BORNERT, M., BRETHEAU, T. et GILORMINI, P. (2001a). *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*.
- [Bornert *et al.*, 2001b] BORNERT, M., BRETHEAU, T. et GILORMINI, P. (2001b). Homogenisation en mécanique des matériaux, tome 2 : Comportements non linéaires et problèmes ouverts.
- [Brackett *et al.*, 2011] BRACKETT, D., ASHCROFT, I. et HAGUE, R. (2011). Topology optimization for additive manufacturing. In *Proceedings of the solid freeform fabrication symposium, Austin, TX*, volume 1, pages 348–362.
- [Bruggi et Duysinx, 2012] BRUGGI, M. et DUYSINX, P. (2012). Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(3):369–384.
- [Canales *et al.*, 2016] CANALES, D., LEYGUE, A., CHINESTA, F., GONZÁLEZ, D., CUETO, E., FEULVARCH, E., BERGHEAU, J.-M. et HUERTA, A. (2016). Vademecum-based gfem (v-gfem) : optimal enrichment for transient problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108(9):971–989.
- [Céa, 1986] CÉA, J. (1986). Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20(3):371–402.
- [Chadwick *et al.*, 2001] CHADWICK, P., VIANELLO, M. et COWIN, S. C. (2001). A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11):2471–2492.

-
- [Cheng et Olhoff, 1981] CHENG, K.-T. et OLHOFF, N. (1981). An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 17(3):305–323.
- [Cohen, 2004] COHEN, I. (2004). Simple algebraic approximations for the effective elastic moduli of cubic arrays of spheres. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(9):2167–2183.
- [Craven, 1981] CRAVEN, B. (1981). Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of the Australian Mathematical society*, 24(3):357–366.
- [de Souza *et al.*, 2015] de SOUZA, J. C. S., ASSIS, T. M. L. et PAL, B. C. (2015). Data compression in smart distribution systems via singular value decomposition. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 8(1):275–284.
- [de Souza Neto *et al.*, 2011] de SOUZA NETO, E. A., FEIJÓO, R. A. et NOVOTNY, A. (2011). Variational foundations of large strain multiscale solid constitutive models : kinematical formulation. *Advanced computational materials modeling : from classical to multi-scale techniques-scale techniques*.
- [Faure, 2017] FAURE, A. (2017). *Optimisation de forme de matériaux et structures architecturés par la méthode des lignes de niveaux avec prise en compte des interfaces graduées*. Thèse de doctorat, Grenoble Alpes.
- [Ferrer *et al.*, 2018] FERRER, A., CANTE, J. C., HERNÁNDEZ, J. et OLIVER, J. (2018). Two-scale topology optimization in computational material design : An integrated approach. *International journal for numerical methods in engineering*, 114(3):232–254.
- [Ferrer *et al.*, 2016] FERRER, A., OLIVER, J., CANTE, J. C. et LLOBERAS-VALLS, O. (2016). Vademecum-based approach to multi-scale topological material design. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1):23.
- [Feyel, 2003] FEYEL, F. (2003). A multilevel finite element method (fe2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in applied Mechanics and engineering*, 192(28-30):3233–3244.
- [Gao *et al.*, 2020] GAO, J., LI, H., LUO, Z., GAO, L. et LI, P. (2020). Topology optimization of micro-structured materials featured with the specific mechanical properties. *International Journal of Computational Methods*, 17(03):1850144.
- [Gao *et al.*, 2019] GAO, J., LUO, Z., LI, H. et GAO, L. (2019). Topology optimization for multiscale design of porous composites with multi-domain microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 344:451–476.
- [Geers *et al.*, 2003] GEERS, M., KOUZNETSOVA, V. et BREKELMANS, W. (2003). Multi-scale modelling : Computational homogenization in solid mechanics. *Eindhoven University of Technology*.
- [Gibson et Ashby, 1999] GIBSON, L. J. et ASHBY, M. F. (1999). *Cellular solids : structure and properties*. Cambridge university press.
-

- [Gori et Tesi, 1992] GORI, M. et TESI, A. (1992). On the problem of local minima in backpropagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, (1):76–86.
- [Groen et Sigmund, 2018] GROEN, J. P. et SIGMUND, O. (2018). Homogenization-based topology optimization for high-resolution manufacturable microstructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(8):1148–1163.
- [Hashin et Shtrikman, 1963] HASHIN, Z. et SHTRIKMAN, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140.
- [Holmes et al., 2012] HOLMES, P., LUMLEY, J. L., BERKOOZ, G. et ROWLEY, C. W. (2012). *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge university press.
- [Huang et Xie, 2010] HUANG, X. et XIE, Y.-M. (2010). A further review of eso type methods for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(5):671–683.
- [Ion et al., 2016] ION, A., FROHNHOFEN, J., WALL, L., KOVACS, R., ALISTAR, M., LINDSAY, J., LOPES, P., CHEN, H.-T. et BAUDISCH, P. (2016). Metamaterial mechanisms. In *Proceedings of the 29th Annual Symposium on User Interface Software and Technology*, pages 529–539.
- [Jeong et al., 2015] JEONG, S., LIM, S. et MIN, S. (2015). Level-set-based topology optimization using remeshing techniques for magnetic actuator design. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):1–4.
- [Kantor et Bergman, 1984] KANTOR, Y. et BERGMAN, D. (1984). Improved rigorous bounds on the effective elastic moduli of a composite material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 32(1):41–62.
- [Kato et al., 2018] KATO, J., YACHI, D., KYOYA, T. et TERADA, K. (2018). Micro-macro concurrent topology optimization for nonlinear solids with a decoupling multiscale analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(8):1189–1213.
- [Kochmann et Bertoldi, 2017] KOCHMANN, D. M. et BERTOLDI, K. (2017). Exploiting microstructural instabilities in solids and structures : from metamaterials to structural transitions. *Applied mechanics reviews*, 69(5).
- [Ladevèze, 1985] LADEVÈZE, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-rendus des séances de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, 300(2):41–44.
- [Letellier, 2015] LETELLIER, M. (2015). *Optimisation de mousses de carbone dérivées de tannin par l’étude et la modélisation de leurs propriétés physiques*. Thèse de doctorat, These de doctorat, Université de Lorraine, France.

-
- [Li *et al.*, 2018] LI, H., LUO, Z., GAO, L. et QIN, Q. (2018). Topology optimization for concurrent design of structures with multi-patch microstructures by level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331:536–561.
- [Liberge, 2008] LIBERGE, E. (2008). *Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, La Rochelle.
- [Lindgaard et Dahl, 2013] LINDGAARD, E. et DAHL, J. (2013). On compliance and buckling objective functions in topology optimization of snap-through problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3):409–421.
- [Lu, 2017] LU, Y. (2017). *Construction d'abaques numériques dédiés aux études paramétriques du procédé de soudage par des méthodes de réduction de modèles espace-temps*. Thèse de doctorat.
- [Mandel, 1982] MANDEL, J. (1982). Use of the singular value decomposition in regression analysis. *The American Statistician*, 36(1):15–24.
- [Michailidis, 2014] MICHAILIDIS, G. (2014). *Manufacturing constraints and multi-phase shape and topology optimization via a level-set method*. Thèse de doctorat.
- [Modesto *et al.*, 2015] MODESTO, D., ZLOTNIK, S. et HUERTA, A. (2015). Proper generalized decomposition for parameterized helmholtz problems in heterogeneous and unbounded domains : application to harbor agitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295:127–149.
- [Morris, 1993] MORRIS, P. (1993). The breakout method for escaping from local minima. In *AAAI*, volume 93, pages 40–45.
- [Neves *et al.*, 1995] NEVES, M., RODRIGUES, H. et GUEDES, J. (1995). Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. *Structural optimization*, 10(2):71–78.
- [Neves *et al.*, 2002] NEVES, M. M., SIGMUND, O. et BENDSØE, M. P. (2002). Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(6):809–834.
- [Rozvany, 2009] ROZVANY, G. I. (2009). A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*, 37(3):217–237.
- [Ruiyi *et al.*, 2009] RUIYI, S., LIANGJIN, G. et ZIJIE, F. (2009). Truss topology optimization using genetic algorithm with individual identification. In *Proceedings of the world congress on engineering*, volume 2. Citeseer.
- [Schumacher *et al.*, 2015] SCHUMACHER, C., BICKEL, B., RYS, J., MARSCHNER, S., DARAIO, C. et GROSS, M. (2015). Microstructures to control elasticity in 3d printing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 34(4):1–13.
- [Sethian et Sethian, 1996] SETHIAN, J. A. et SETHIAN, J. (1996). *Level set methods : Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 1999. Cambridge University Press Cambridge.
-

- [Sevilla *et al.*, 2019] SEVILLA, R., ZLOTNIK, S. et HUERTA, A. (2019). Parametric solutions involving geometry integrated with computer-aided design. *arXiv preprint arXiv :1902.09248*.
- [Shrestha et Ghaboussi, 1998] SHRESTHA, S. M. et GHABOUSSI, J. (1998). Evolution of optimum structural shapes using genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, 124(11):1331–1338.
- [Sigmund, 1994] SIGMUND, O. (1994). Materials with prescribed constitutive parameters : an inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, 31(17):2313–2329.
- [Sigmund, 2001] SIGMUND, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 21(2):120–127.
- [Sigmund et Maute, 2013] SIGMUND, O. et MAUTE, K. (2013). Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(6):1031–1055.
- [Sigmund et Torquato, 1997] SIGMUND, O. et TORQUATO, S. (1997). Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(6):1037–1067.
- [Sokolowski et Zolésio, 1992] SOKOLOWSKI, J. et ZOLÉSIO, J.-P. (1992). Introduction to shape optimization. In *Introduction to Shape Optimization*, pages 5–12. Springer.
- [van Dijk *et al.*, 2013] van DIJK, N. P., MAUTE, K., LANGELAAR, M. et VAN KEULEN, F. (2013). Level-set methods for structural topology optimization : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3):437–472.
- [Wang *et al.*, 2018] WANG, L., CAI, Y. et LIU, D. (2018). Multiscale reliability-based topology optimization methodology for truss-like microstructures with unknown-but-bounded uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339:358–388.
- [Wang *et al.*, 2007] WANG, S., LIM, K. M., KHOO, B. C. et WANG, M. (2007). An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, 221(1):395–421.
- [Wang *et al.*, 2004] WANG, X., MEI, Y. et WANG, M. Y. (2004). Level-set method for design of multi-phase elastic and thermoelastic materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 1(3):213–239.
- [Wang *et al.*, 2017] WANG, Y., XU, H. et PASINI, D. (2017). Multiscale isogeometric topology optimization for lattice materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316:568–585.
- [Wood, 2009] WOOD, B. (2009). Metamaterials and invisibility. *Comptes Rendus Physique*, 10(5):379–390.
- [Xia *et al.*, 2018] XIA, L., DA, D. et YVONNET, J. (2018). Topology optimization for maximizing the fracture resistance of quasi-brittle composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 332:234–254.

- [Yamada *et al.*, 2010] YAMADA, T., IZUI, K., NISHIWAKI, S. et TAKEZAWA, A. (2010). A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48):2876–2891.
- [Yvonnet *et al.*, 2007] YVONNET, J., ZAHROUNI, H. et POTIER-FERRY, M. (2007). A model reduction method for the post-buckling analysis of cellular microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(1-4):265–280.
- [Zhang *et al.*, 2016] ZHANG, W., YUAN, J., ZHANG, J. et GUO, X. (2016). A new topology optimization approach based on moving morphable components (mmc) and the ersatz material model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53(6):1243–1260.
- [Zhu *et al.*, 2017] ZHU, B., SKOURAS, M., CHEN, D. et MATUSIK, W. (2017). Two-scale topology optimization with microstructures. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 36(4):1.

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr INSA : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	M. Philippe NORMAND UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Université Claude Bernard Lyon 1 Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX philippe.normand@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ http://www.ediss-lyon.fr Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie RICARD-BLUM Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Curien - 3ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tel : +33(0)4 72 44 82 32 sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES http://edinfomaths.universite-lyon.fr Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Hamamache KHEDDOUCI Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tel : 04.72.44.83.69 hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr
Matériaux	MATÉRIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIÈRE INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr
MEGA	MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://edmega.universite-lyon.fr Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bât. Direction mega@insa-lyon.fr	M. Jocelyn BONJOUR INSA de Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69 621 Villeurbanne CEDEX jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://ed483.univ-lyon2.fr Sec. : Véronique GUICHARD INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 veronique.cervantes@univ-lyon2.fr	M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 christian.montes@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : DJOURACHKOVITCH

DATE de SOUTENANCE : XX/XX/XXXX

Prénoms : Tristan

TITRE : Conception de matériaux micro-architecturés innovants : Application à l'optimisation topologique multi-échelle

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : AAAALYSEIXXXX

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique – Génie Mécanique – Génie Civil

RESUME :

La conception de nouveaux matériaux toujours plus performants est un enjeu de taille de la science des matériaux moderne. On trouve plusieurs exemples de ces matériaux innovants, tels les matériaux composites, les mousses, ou encore, les matériaux micro-architecturés (matériaux qui présentent certaines propriétés de périodicité à une échelle petite par rapport aux dimensions de la structure). Un critère fréquent que l'on retrouve chez ces matériaux est leur rapport entre masse et rigidité. L'optimisation topologique est particulièrement adaptée à la conception de ce genre de matériaux car le critère que l'on cherche à améliorer est directement intégré à la formulation du problème de minimisation. Nous proposons donc, dans un premier temps, des méthodes de conception de matériaux micro-architecturés par optimisation topologique pour différents critères. Dans un second temps l'utilité de ces matériaux est illustrée via des simulations multi-échelle dans la théorie du premier gradient et l'hypothèse de séparabilité des échelles pour l'homogénéisation. Une méthode d'optimisation couplée des échelles macro/micro est proposée où l'objectif est d'optimiser simultanément ces deux échelles malgré leur interdépendance. Le développement d'un démonstrateur numérique a permis d'illustrer ces différentes méthodes ainsi que de tester différents critères d'optimisation, différents modèles mécaniques, etc. Afin de réduire les coûts de calculs qui peuvent croître rapidement notamment pour les problèmes multi-échelle en raison de l'augmentation du nombre de variables de design, une approche "base de donnée" est proposée. Une large gamme de matériaux micro-architecturés est stockée (puis enrichie) pour différents critères (masse, rigidité, comportement originaux). Cette base est ensuite consultée au cours de l'optimisation couplée.

MOTS-CLÉS : Optimisation topologique ; Méthodes multi-échelle ; Homogénéisation ; Approche basée sur les données.

Laboratoire (s) de recherche : Laboratoire de Mécanique de Contacts et des Structures

Directeur de thèse: Anthony Gravoil

Président de jury :

Composition du jury : R. ESTEVEZ
M. BONNET

J. YVONNET
T. BARANGER

M. SKOURAS
A. GRAVOUIL

N. HAMILA
N. BLAL

