N° d'ordre 01 ISAL 0045 Année 2001

THESE

Présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Formation doctorale : Génie Mécanique
Ecole doctorale : Ecole doctorale de mécanique, énergétique, génie civil et acoustique (MEGA) de Lyon

Par

Colin-Yann JACQUIN

Ingénieur INSA de Lyon

MODELISATION ET OPTIMISATION DU COMPORTEMENT SOUS CHARGE DES ENGRENAGES FACE

Soutenue le 26 octobre 2001 devant la Commission d'examen

Jury

Mme	M. GUINGAND	Maître de conférence (INSA de Lyon)	
MM.	G. DEGALLAIX	Professeur (Ecole Centrale de Lille)	Président
	J.P. De VAUJANY	Maître de conférence (INSA de Lyon)	
	J.P. LALLEMAND	Professeur (Faculté de Poitiers)	Rapporteur
	P. MARET	Ingénieur (Eurocopter)	
	D. PLAY	Professeur (INSA de Lyon)	
	A. POTIRON	Professeur (ENSAM d'Angers)	Rapporteur
	M. SARTOR	Professeur (INSA de Toulouse)	

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Conception et Analyses des Systèmes Mécaniques de l'INSA de Lyon

Avant propos

Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Conception et Analyse des Systèmes Mécaniques (CASM) de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, sous la direction de Monsieur le Professeur D. PLAY, que je tiens à remercier pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et fait confiance pour mener à bien ces travaux de recherche.

Je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Michèle GUINGAND et Jean-Pierre de VAUJANY, Maîtres de Conférences à l'INSA de Lyon qui m'ont guidé et soutenu tout au long de ce travail.

Cette thèse s'inscrivant dans le cadre du contrat de recherche européen Brite-Euram FACET, je souhaite remercier tous les partenaires de ce projet, et particulièrement Monsieur R. RUHLAND, Ingénieur à ZF Friedrichshafen, pour sa précieuse collaboration.

Je suis honoré de l'attention que Messieurs les Professeurs J.P. LALLEMAND, de la Faculté de Poitiers, et A. POTIRON, de l'ENSAM d'Angers, ont porté à mon travail en tant que rapporteurs et membres du jury.

Je remercie également Messieurs les Professeurs G. DAGALLAIX, de l'Ecole Centrale de Lille, et M. SARTOR, de l'INSA de Toulouse, ainsi que Monsieur P. MARET, Ingénieur à EUROCOPTER, d'avoir accepté d'être membres du jury.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toutes les personnes, qui de manière directe ou indirecte, ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Parmi eux, un remerciement particulier à l'ensemble des membres du laboratoire CASM, Damien, Concetta, Sandrine, Adeline, Jarir, Lionel, Didier, Christophe, Jean, Yvan,… pour leur sympathie, leur aide et leur soutien.

Merci à Anne.

Introduction générale

Dans le domaine aéronautique, et notamment au niveau des rotors d'hélicoptères, les engrenages utilisés ont des géométries complexes, pouvant être composées de jantes et de voiles souvent minces et souples. Ils doivent en plus supporter des charges importantes. Ainsi les déformations subies par les différents composants sont importantes et le comportement sous charge diffère souvent du comportement à vide ou à faible puissance. En l'absence de tout modèle numérique, la conception et la mise au point des rotors d'hélicoptères nécessitent la fabrication de plusieurs prototypes testés ensuite dans les conditions de fonctionnement.

La modélisation du comportement sous charge des engrenages et le développement de logiciels de simulation, deviennent alors essentiels pour les phases de conception. Cette modélisation doit allier rapidité de calculs et précision des résultats, tout en permettant la prise en compte de la géométrie complexe mais réelle des engrenages.

Différents types d'engrenages ont été étudiés depuis de nombreuses années. Les approches et méthodologies utilisées sont variées, mais classiquement les études sont effectuées en trois étapes distinctes :

- Définition de la géométrie,
- Cinématique à vide,
- Comportement sous charge.

Bien que les logiciels de simulation actuels, notamment les modélisations par éléments finis, soient très performants, ils ne satisfont pas pleinement les critères de rapidité et de précision exigés en aéronautique pour les rotors d'hélicoptères, et ne sont généralement pas adaptés à l'étude des engrenages.
Ainsi, comme il n'existe pas à l'heure actuelle de modélisation complète et précise connue des engrenages face, elle a dû être totalement développée dans le cadre de cette thèse. Son utilisation a ensuite permis différentes exploitations scientifiques qui ont abouti à un gain de compréhension au niveau du comportement des engrenages face et à la mise au point d'un processus de conception optimal.

Un engrenage face (Fig. 1) est composé d'un pignon cylindrique droit ou hélicoïdal à profil en développante de cercle engrenant avec une roue plate. Cette roue plate est généralement taillée par un outil pignon également à développante de cercle.

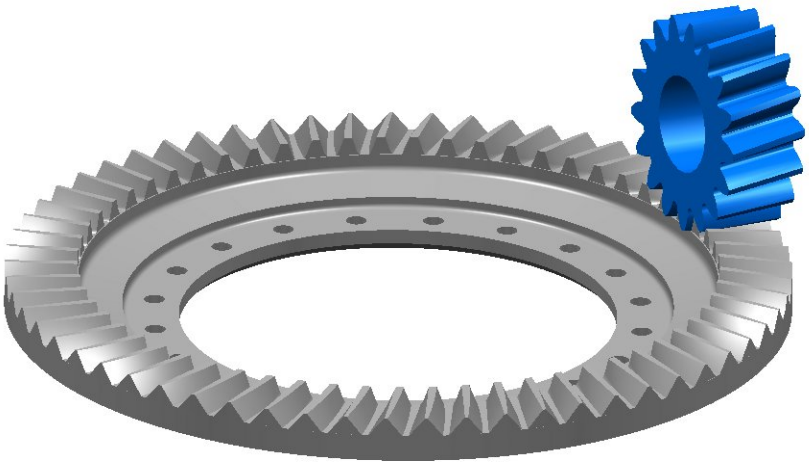


Figure 1 : Engrenage face hélicoïdal (Facet)

Un engrenage face est caractérisé par son pignon, sa roue et leur positionnement relatif.

Le pignon cylindrique est défini d'une manière classique [8], la roue face est caractérisée notamment par son nombre de dents, son rayon intérieur L_1 et son rayon extérieur L_2 (Fig. 2).

Les axes du pignon et de la roue peuvent être concourants ou décalés d'un offset et l'angle de tête γ qu'ils définissent peut prendre différentes valeurs (Fig. 2 et 3).

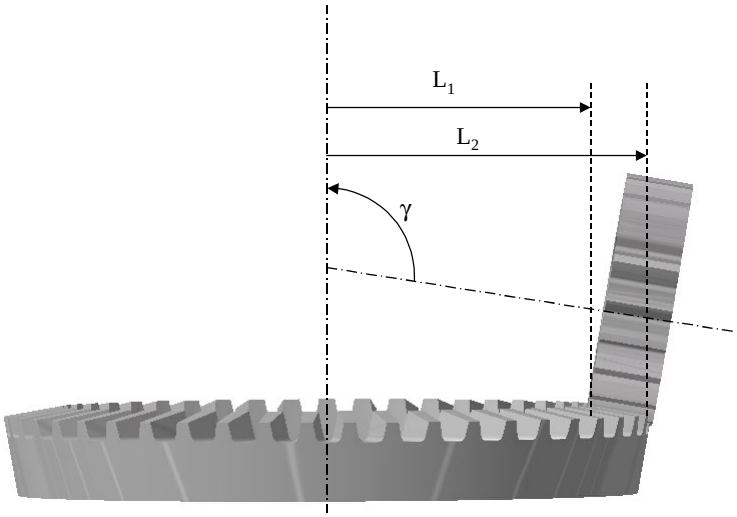


Figure 2 : Engrenage face vue de face

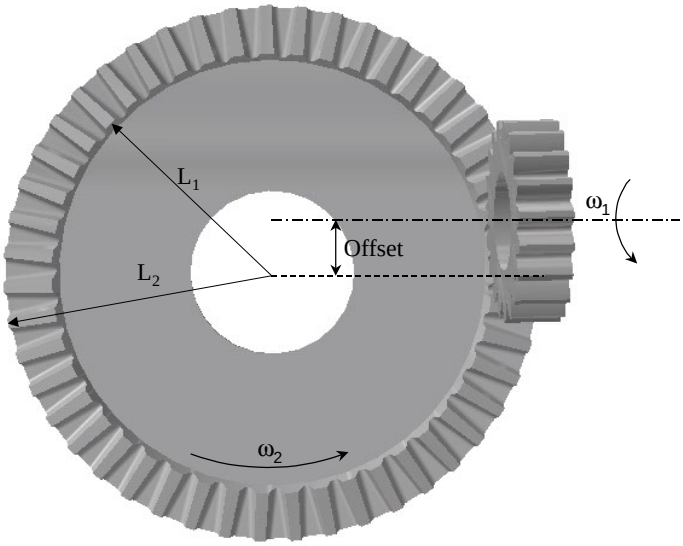


Figure 3 : Engrenage face vue de dessus

La particularité des roues face provient de leur mode de production. Le taillage des roues (Fig. 4) est effectué avec un outil pignon dont la géométrie est similaire à celle du pignon qui sera utilisé ensuite lors de l'engrènement.

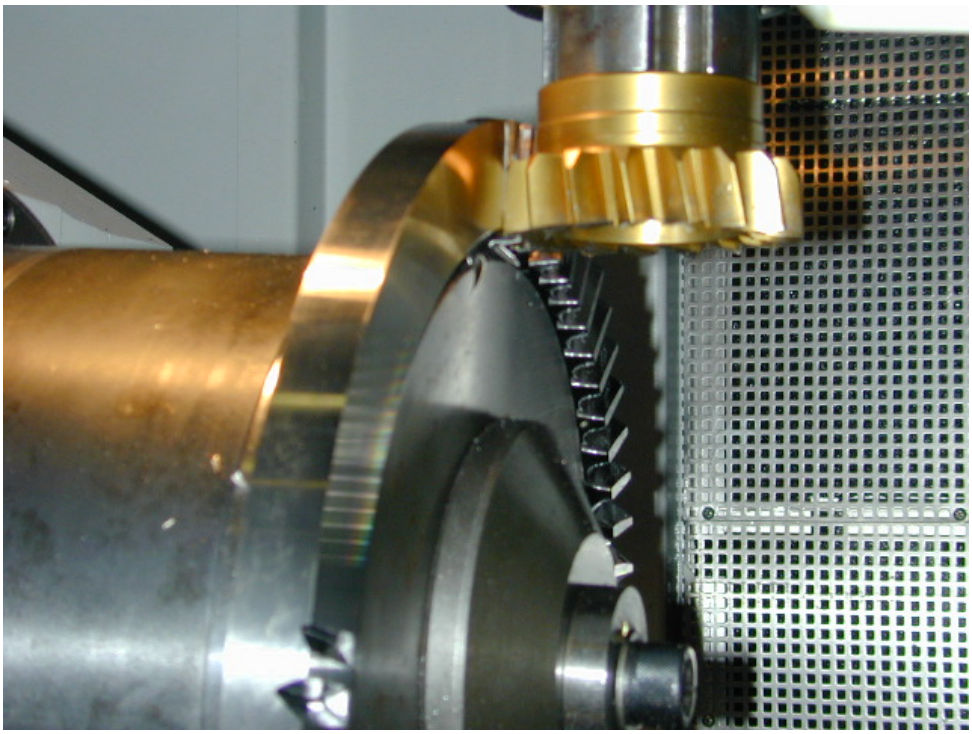


Figure 4 : Visualisation du taillage d'une roue face (Facet)

L'outil de taillage peut avoir le même nombre de dents que le pignon ou un nombre de dents supérieur (en général de 1 à 3 dents en plus).
Cette particularité de taillage a des conséquences directes, à la fois sur la géométrie et la cinématique des engrenages face.

La géométrie est limitée par deux phénomènes géométriques distincts aux rayons intérieur et extérieur (Fig. 5) :

- Le "pointing" ou pointe au rayon extérieur : l'épaisseur en tête de dent de la roue face devient nulle,
- L'"undercutting" ou interférences de taillage au rayon intérieur : les surfaces actives et trochoïde ne sont plus tangentes et une discontinuité apparaît sur la surface de denture.

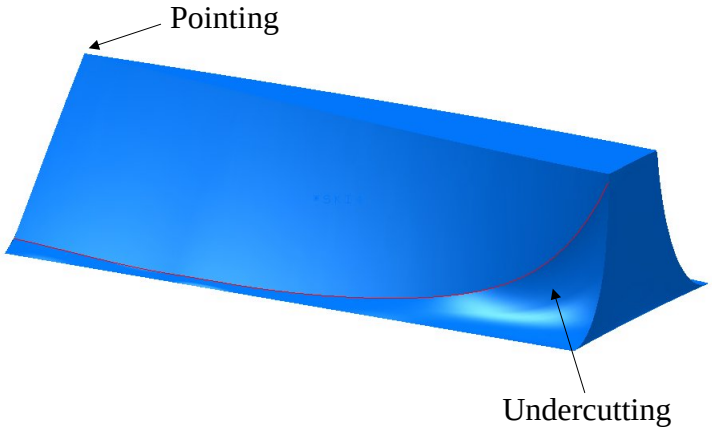


Figure 5 : Visualisation du Pointing et de l'Undercutting

Au niveau de la cinématique, deux cas de contact sont classiquement distingués en fonction du nombre de dents relatif de l'outil et du pignon (Fig. 6) :

- Lignes de contact lorsque le pignon et l'outil ont le même nombre de dents,
- Points de contact lorsque l'outil a un nombre de dents supérieur à celui du pignon.

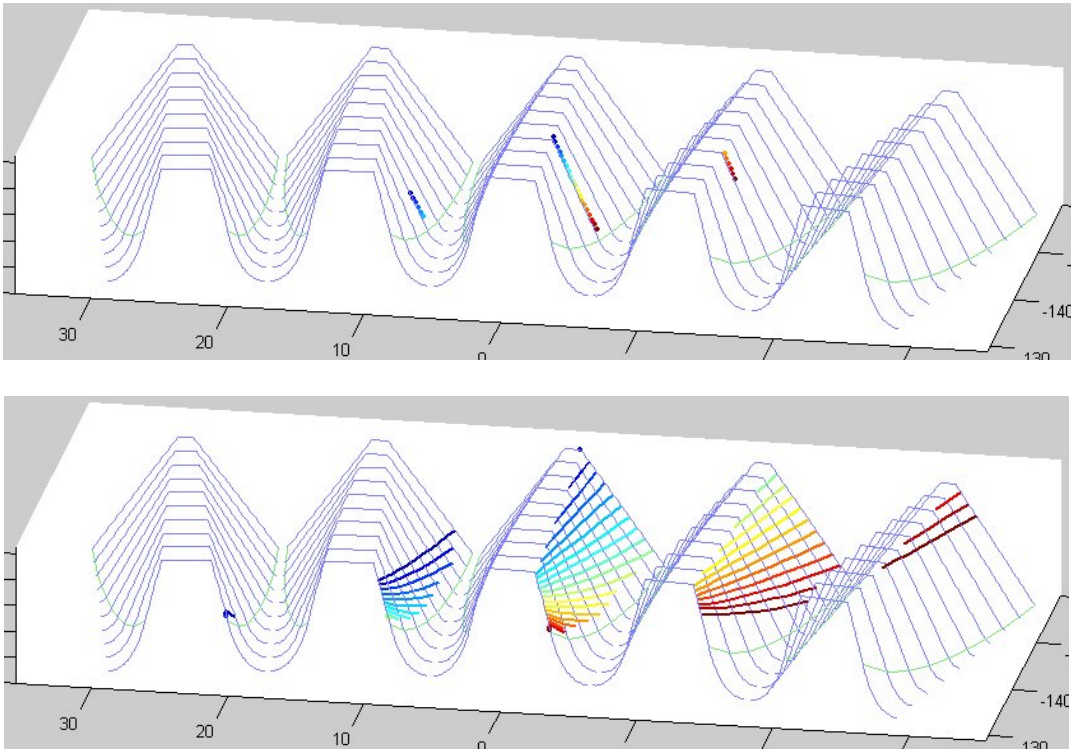


Figure 6 : Visualisation des points ou lignes de contact successifs au cours de l'engrènement

Les engrenages face sont utilisés depuis un certain temps dans des applications plus ou moins optimisées (cf. Annexe I). Ils permettent d'imaginer plusieurs architectures de mécanismes, notamment pour le partage et la transmission de couple mécanique. Mais aujourd'hui, le problème consiste à formaliser la définition de tels engrenages selon le processus déjà mentionné :

- Définition de la géométrie initiale issue des conditions de fabrication, un modèle numérique proche de la réalité peut ainsi être proposé. Il s'agit de mettre en place des méthodes géométriques adaptées à la fois au problème technologique posé et aux conditions de simulation numérique et informatique actuelles.

- Cinématique à vide correspondant à la simulation du fonctionnement sans aucune charge appliquée. Il s'agit d'expliciter dans le détail des fonctionnements de cinématiques complexes.

- Comportement sous charge dont l'objet est de déterminer le partage de charge entre les dentures en contact. Il s'agit de faire une étude de multi contacts où les aspects micro géométriques de zone de contact et macro géométriques de volume de pièce doivent être reliés.

Ainsi cette thèse, après un chapitre de bibliographie, présentera au chapitre 2 le modèle de simulation développé, au chapitre 3 sa validation et aux chapitres 4 et 5 son exploitation scientifique.

Le travail qui est présenté ici s'intègre dans un programme de recherche européen Brite Euram FACET. Ce programme est réalisé avec 9 partenaires européens (6 industriels : GKN Westland Helicopters Ltd, Agusta SpA, Eurocopter (France), ZF Luftfahrttechnik GMBH, ZF Friedrichshafen AG, Reishauer AG et 3 universitaires : Politecnico di Milano Werkzeugmaschinenlabor RWTH Aachen, INSA de Lyon). Il a été initié par le laboratoire CASM et Eurocopter à partir des travaux préliminaires de thèse de C. Toma faits au laboratoire.

Chapitre 1

Modélisation numérique du fonctionnement des engrenages Application aux engrenages face

1 Etudes théoriques

1.1 Premiers travaux

Les premières études sur les engrenages face ont été effectuées par B. Bloomfield [39] à partir des années 1950. Il a donné la première définition des engrenages face : "c'est une roue dont les dents sont dans un plan normal à son axe qui engrène sur un pignon droit en développante de cercle; les axes de la roue face et du pignon sont perpendiculaires". L'engrenage est dit "centré" si les axes du pignon et de la roue sont concourants ou "avec offset" dans le cas contraire.
Bloomfield fait les premières observations des propriétés importantes des engrenages face :

- Le déplacement du pignon le long de son axe n'a pas d'influence sur l'engrènement,
- Le point de contact sur le pignon varie du diamètre intérieur au diamètre extérieur de la roue face,
- La roue face a un angle de pression variable du diamètre intérieur au diamètre extérieur.

Afin d'étudier le fonctionnement d'un engrenage face, Bloomfield l'a modélisé comme une succession de roues de friction de largeur étroite, ayant des rayons égaux aux rayons primitifs de la roue et du pignon respectivement (Fig. 1.1).

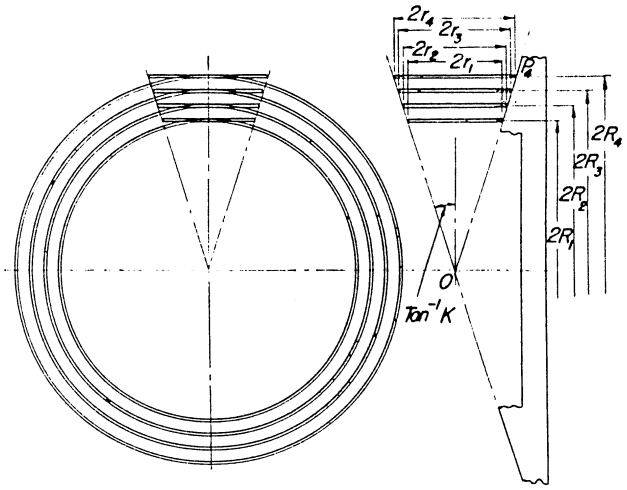


Figure 1.1: Roues de friction modélisant l'engrenage face [39]

Buckingham [10] a ensuite proposé une méthode d'approximation analytique de la géométrie des engrenages face. Les surfaces primitives étant des cônes, il traite les engrenages face comme les engrenages coniques. Pour développer des équations analytiques permettant d'obtenir la géométrie de la roue face, Buckingham procède en deux étapes distinctes.
Dans un premier temps, il fait une approximation de la géométrie en modélisant la roue par une crémaillère dont l'angle de pression et le rayon primitif sont variables en fonction de la distance au centre de la roue face. Il obtient ainsi des équations analytiques pour la partie active et pour la trochoïde. En faisant varier la valeur des rayons primitifs, il obtient une approximation des profils de dent de roue face (Fig. 1.2).

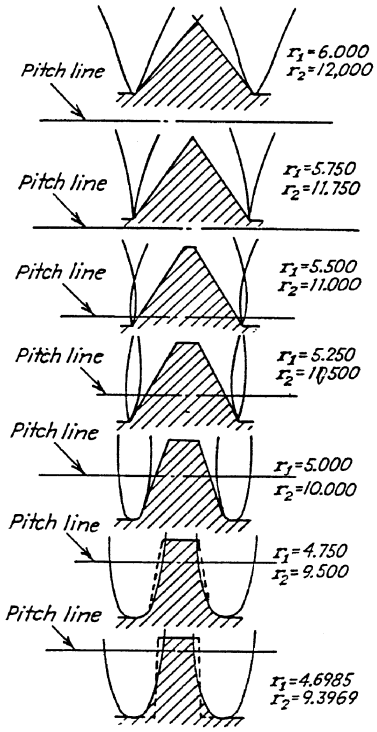


Figure 1.2: Profils de dents obtenus avec la méthode d'approximation de Buckingham [10]

La deuxième étape de cette méthode consiste a définir le profil exact de la dent de la roue face. Buckingham utilise la même méthode que précédemment en remplaçant la crémaillère par un pignon cylindrique droit. Il obtient ainsi des contours qui lui permettent de déduire graphiquement les profils de dents (Fig. 1.3).

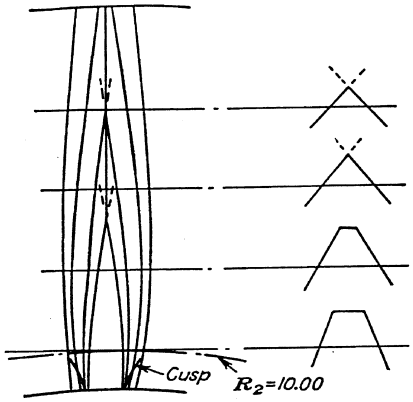


Figure 1.3: Profils de dents obtenus avec la méthode exacte [10]

Francis [59] définit alors de nombreuses géométrie de roue face et fournit alors des abaques pour déterminer les rayons d'interférences de taillage et de pointe en fonction de l'angle de pression et du module de taillage pour des engrenages face droits. Ces abaques sont encore approximatifs et limités à des cas précis, mais elles permettent déjà de concevoir rapidement des couples d'engrenages face.

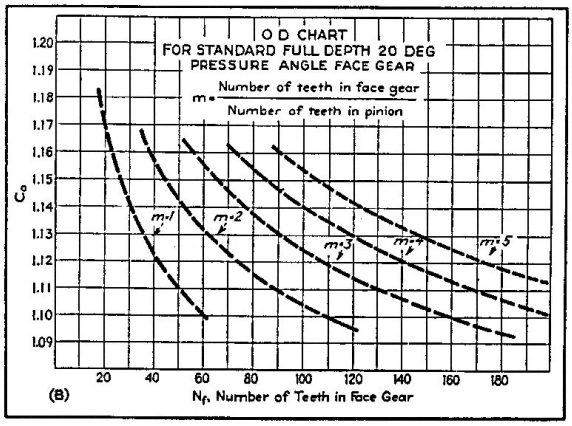


Figure 1.4: Abaque de Francis [59]

En Europe, d'importants travaux ont été menés à ELASIS Aeronautical Centre (Brindisi, Italie) par Schips [103] pour valider l'introduction de ce type d'engrenage dans les transmissions d'hélicoptères et des études théoriques et expérimentales ont été effectuées à UCN Aerospace (Almelo, Hollande) par Hermens [67].

En Asie, Ishii [68] s'est intéressé à la possibilité de tailler des engrenages face avec des machines CNC. L'utilisation des méthodes de taillages utilisées habituellement pour tailler des engrenages roue et vis permet de diminuer la rugosité de surface et le temps nécessaire pour tailler une roue face.

Enfin aux Etats-Unis ce sont surtout les premiers travaux de Litvin [80] [86] sur le sujet qui servent de référence aux études actuellement entreprises.

1.2 Etudes théoriques fondamentales

Ce n'est qu'à partir des années 90 que des études plus approfondies sur les engrenages face ont débuté.
Les premiers travaux les plus importants on été effectuées en Hollande par Crown Gear ainsi qu'aux Etats-Unis par Litvin et la NASA à travers le programme de recherche *Advanced Rotorcraft Technology* (ART).

1.2.1 Théories de Litvin

Litvin est l'un des premiers à avoir vraiment poussé l'étude théorique des engrenages face. Il traite le problème de manière complètement analytique [21] [83].
A partir des équations paramétriques qui définissent l'outil de taillage de la roue face, Litvin simule l'engrènement entre cet outil et la roue. En recherchant tous les points de contact de cet engrènement, il obtient des équations paramétriques qui définissent analytiquement la roue face. Cette méthode repose essentiellement sur l'utilisation de l'équation d'engrènement :

$$\vec{n}_s.\vec{V}_{s2} = 0$$

où $\vec{V}_{s2}$ est la vitesse relative entre les surfaces de l'outil et de la roue face au point de contact au moment du taillage et n_s le vecteur unitaire normal à ces surfaces. Cette équation sera utilisée par la suite et décrite en détail au chapitre 2.

Litvin a également développé des équations qui permettent d'obtenir le diamètre intérieur minimum théorique, à savoir la limite d'interférence de taillage, ainsi que le diamètre extérieur maximum théorique, à savoir la pointe de la dent.
Il a également développé des abaques et des formules simples qui permettent de déterminer rapidement les diamètres de la roue face à partir des caractéristiques du pignon et du rapport de transmission (Fig. 1.5) [87].

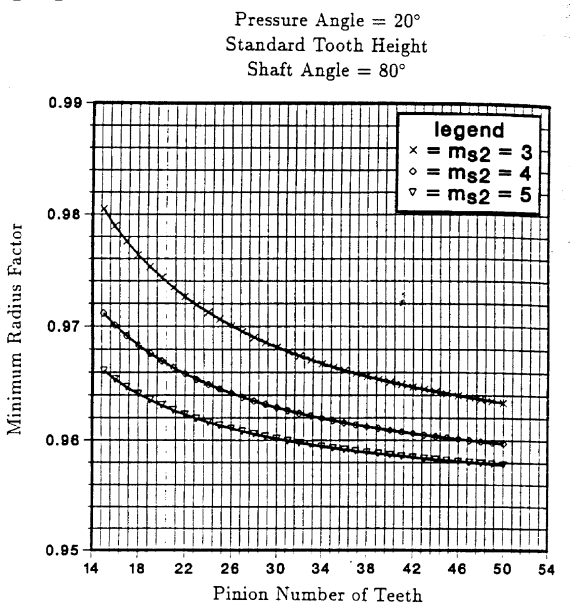


Figure 1.5: Exemple d'abaques pour déterminer le rayon minimum [87]

Litvin étudie ensuite la cinématique à vide des engrenages face en simulant toujours de manière analytique l'engrènement de la roue face et du pignon. Dans ses premières publications sur les engrenages face, Litvin préconisait plutôt l'emploi d'un outil de taillage avec un nombre de dent supérieur à celui du pignon afin d'obtenir un contact ponctuel à vide et donc localisé sous charge. Il a même développé des formules analytiques permettant de déterminer la taille de l'ellipse de contact sous charge à partir des rayons de courbure et des déformations élastiques supposées connues.

Ce n'est que récemment [83] qu'il a étudié plus en détail la possibilité d'utiliser un outil de taillage ayant le même nombre de dents que le pignon. Dernièrement [21], il préconise même ce cas en le couplant à une correction de bombé effectuée sur le pignon. Ainsi le contact est toujours localisé et le fait de partir sur une base de contact linéaire permet d'obtenir des ellipses de contact plus grande.

Cette méthode, à la base du travail présenté dans ce mémoire, est développée plus en détail dans le chapitre 2. Cette méthode est très théorique, en considérant par exemple toujours le pignon cylindrique comme une développante de cercle simple, sans prendre en compte toutes les modifications possibles (déport, corrections de profil, …..).

1.2.2 Approche de Crown Gear

Les travaux de recherche ont débutés chez Crown Gear en Hollande dès 1990. Basstein et Sijtstra [31] font le point sur leurs résultats après trois années de recherche. Crown Gear modélise les engrenages face en considérant la roue similaire à une crémaillère (comme Buckingham [10]) dont l'angle de pression serait variable en fonction du rayon considéré (Fig. 1.6).

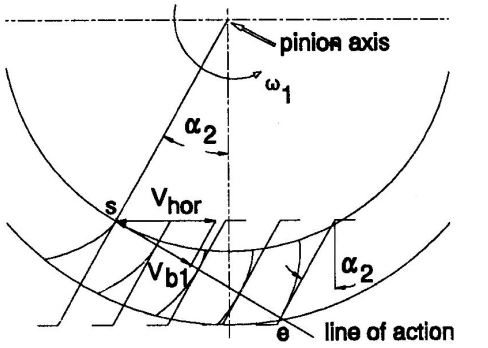


Figure 1.6: Modélisation d'une roue face par une crémaillère [31]

L'utilisation des valeurs extrêmes des angles de pressions du pignon permettent de définir les limitations géométriques de la roue face (Fig. 1.7), ainsi que la cinématique à vide des engrenages face. La géométrie précise de la roue face est toutefois définie à l'aide des méthodes développées par Litvin.

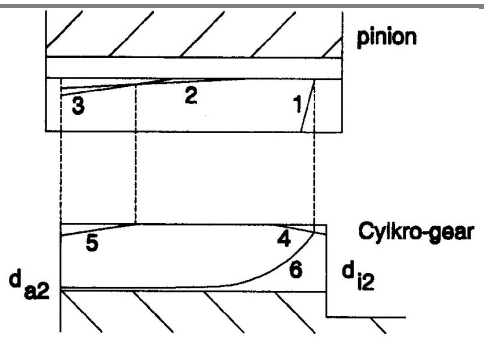


Figure 1.7: Limitations géométriques d'une dent de roue face [31]

Crown Gear considère toujours des cas de contact linéaire entre le pignon et la roue (outil et pignon avec le même nombre de dents). Cela leur permet de définir un rapport de conduite variable selon la largeur de denture. En effet sur la figure 1.8, les lignes de contact ont été représentées avec un intervalle de temps tel que 10 lignes de contact représentent un rapport de conduite de 1. Il suffit ensuite pour chaque rayon de la roue de compter le nombre de lignes pour connaître le rapport de conduite local. Le rapport de conduite global correspond au nombre total de lignes de contact. Ainsi sur la figure 1.8, le rapport de conduite local varie de 0.9 à 1.2 du rayon intérieur vers le rayon extérieur, et le rapport total est de 1.9.

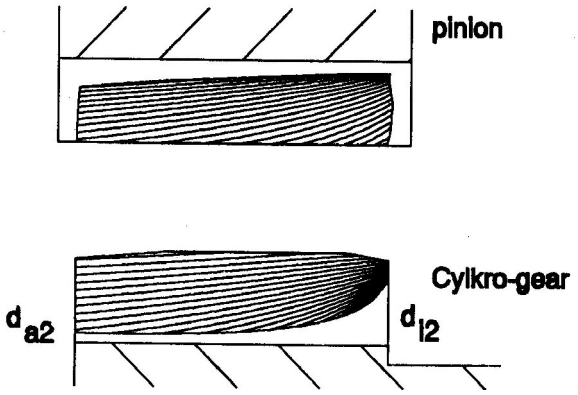


Figure 1.8 : Lignes de contact sur une roue face et un pignon [31]

Les contacts décrits précédemment sont des contacts linéaires et sont en théorie très sensibles aux désalignements. Pour obtenir un contact localisé, deux méthodes sont possibles : soit il faut utiliser un outil de taillage ayant un nombre de dent supérieur au pignon, soit il faut effectuer des corrections de bombé sur le pignon. Crown Gear préconise la seconde méthode, car elle s'adapterait mieux aux conditions d'engrènement [31].

Crown Gear détermine ensuite les contraintes en pied de dent ainsi que les contraintes dues au contact hertzien à l'aide de la norme DIN 3990 relatives aux engrenages cylindriques adaptée aux engrenages face en corrigeant certains facteurs grâce a une modélisation par éléments finis.

Pour finir, le champ de pression sur les lignes de contact est calculé numériquement en tenant compte de la raideur des dents, de la torsion du pignon, des déformations de Hertz, de la flexion des arbres, d'éventuelles erreurs de taillage ou de montage, ainsi que des corrections de bombé sur le pignon. Aucune précision n'est apportée sur la méthode utilisée ni sur les résultats obtenus, mais ces résultats sont apparemment utilisés pour optimiser les capacités de charge et réduire le bruit d'engrènement [31].

Les résultats issus de ces travaux de recherche sont difficilement exploitables puisque les publications et explications sont assez rares. Crown Gear affirme maîtriser tous les paramètres de conception et fabrication des engrenages face, mais sous couvert de brevets et secrets commerciaux, aucune précision n'est disponible.

Les communications les plus récentes de Crown Gear faites par Baastein [32] ne montrent pas de nouveaux résultats théoriques, et ne donnent pas de détails supplémentaires. La technologie de fabrication des engrenages face développée par Crown Gear est indéniable, mais il est difficile de savoir si les méthodes de conception sont totalement basées sur des théories précises où si il reste encore quelques paramètres déterminés empiriquement et basés sur l'expérience que Crown Gear s'est forgée durant ces 10 dernières années.

1.2.3 Autres contributions

Les méthodes développées par Litvin ont été utilisées dans différents travaux sur les engrenages face.
Zhang et Wu [122] [123] les ont étendues au cas des engrenages face droits avec offset. Les profils de dents obtenus avec un offset sont asymétriques (Fig. 1.9). Zhang et Wu ont étudié l'influence de l'offset sur la géométrie des dents de la roue face. Les phénomènes de pointe et d'interférence de taillage sont déplacés vers des rayons plus grands avec une augmentation de l'offset. Les diamètres intérieurs et extérieurs augmentent tous les deux, mais l'augmentation du diamètre intérieur est plus rapide que celle du diamètre extérieur, et la largeur de denture diminue donc. Zhang et Wu ont également développé des abaques pour un dimensionnement rapide des roues face avec offset à partir des caractéristiques du pignon.

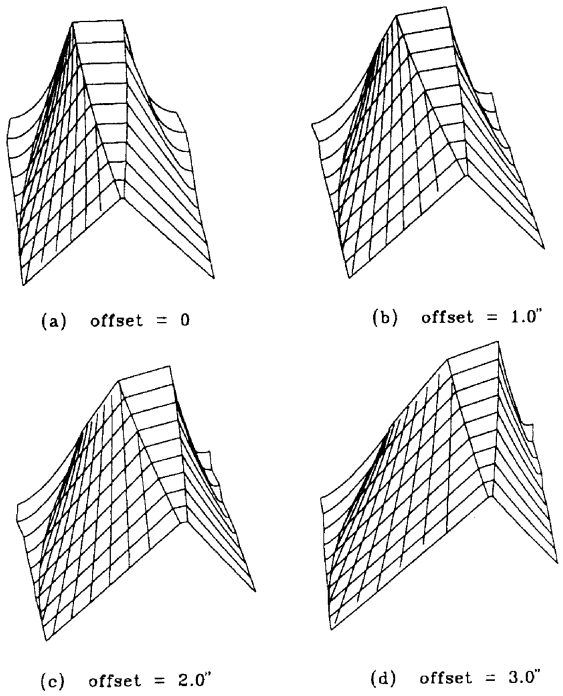


Figure 1.9: Profils de dents pour différents offset [122]

Chakraborty et Bhadoria [43] ont développé des formules empiriques de conception pour les dimensions extrêmes des roues face à partir de la méthode analytique et des abaques de Litvin [87]. Pour les engrenages face dont les axes sont perpendiculaires et pour les pignons cylindriques droits, il est alors possible d'obtenir le rayon intérieur minimal ainsi que la largeur de denture maximale uniquement à partir du nombre de dents du pignon et du rapport de transmission.

Chang et Chung ont utilisé la géométrie développée par Litvin pour étudier les phénomènes d'interférences de taillage et de pointe [49], ainsi que la cinématique à vide [45] pour étudier l'erreur de transmission à vide [44], [50] (Fig. 1.10), et l'influence de quelques erreurs de montage.

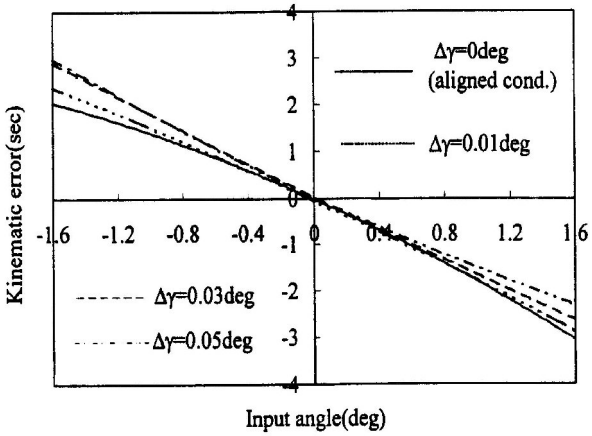


Figure 1.10 : Erreur de transmission à vide [45]

Roth [25] propose également une méthode analytique basée sur des considérations géométriques et l'utilisation de la norme DIN 867 pour définir la géométrie des roues face. L'utilisation de norme relative aux engrenages cylindriques ne permet toutefois pas d'obtenir des résultats très précis.

Une norme relative aux engrenages face droits engrenant avec des pignons d'angle de pression égal à 20° a été proposée (AGMA 203.03). Suite aux récents travaux effectués sur les engrenages face, cette norme s'est avérée dépassée et a pour l'instant été retirée.

Toma [27] [111] a défini numériquement des profils de dents de roue face. Elle a développé une méthode d'approximations de l'enveloppe de la trajectoire de l'outil en splines cubiques (Fig. 1.11 et 1.12) qui lui permet d'obtenir des profils de dents pour des roues générées avec des outils cylindriques droits, avec et sans offset.

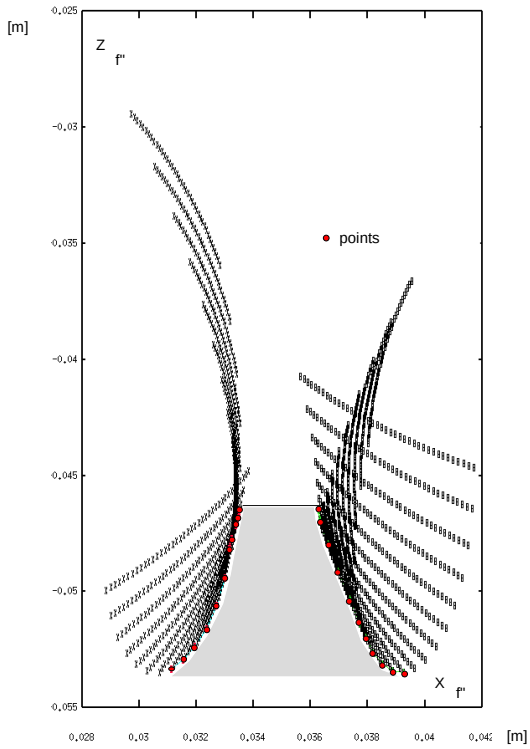


Figure 1.11 : Enveloppe de la trajectoire de l'outil [27]

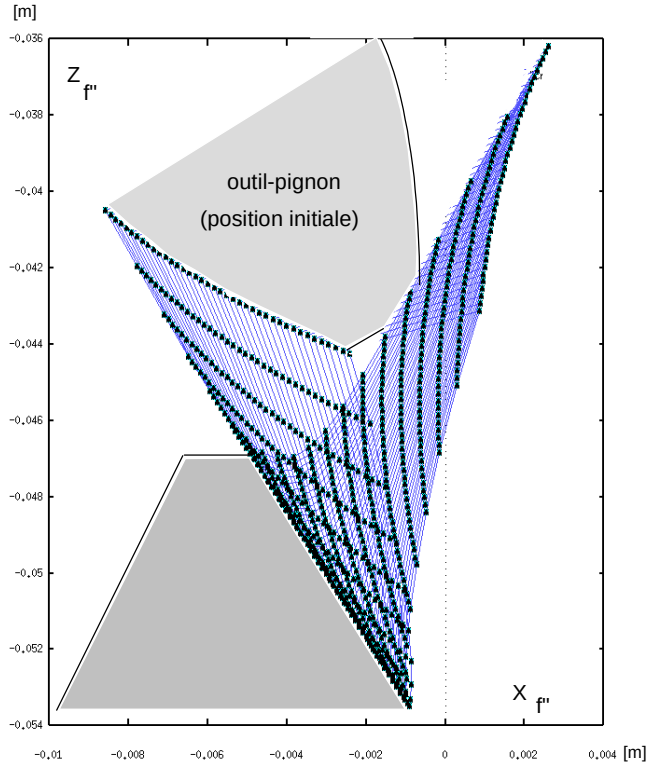


Figure 1.12 : Processus de taillage d'une dent de roue face [27]

Suite à tous ces travaux sur la géométrie et la cinématique à vide, Barone [34] semble être l'un des premiers à s'intéresser à la modélisation sous charge des engrenages face. Il a utilisé une modélisation par éléments finis couplée à un logiciel de CAO. L'utilisation d'éléments de contact entre les deux solides, puis une résolution non-linéaire par éléments finis permet de déterminer les contraintes dues aux pressions de contact. Cette technique n'est pour l'instant pas encore très concluante, dans le sens où elle requiert une définition très précise de la géométrie, spécialement au niveau de la zone de contact, ce qui semble difficile à obtenir avec les logiciels par éléments finis actuels (l'approximation de la géométrie par les éléments finis ne permet pas de modéliser assez précisément la zone de contact), ou alors il faudrait appliquer une finesse de maillage qui induirait des temps de calcul prohibitifs.

2 Etudes expérimentales

Depuis 1990, les études théoriques effectuées sur les engrenages face ont souvent été couplées avec des études expérimentales. Par exemple, différentes méthodes de taillage des engrenages face ont été étudiées chez Crown Gear afin d'optimiser le taillage des roues face [31]. Le taillage à la fraise mère semble être pour eux la meilleure solution à l'heure actuelle car le processus de taillage est continu et offre une meilleur qualité de surface. Un processus de taillage à l'outil-pignon suivi d'une rectification est actuellement en cours d'étude.

Les campagnes d'essais les plus poussées ont été effectuées à la NASA à travers le programme de recherche *Advanced Rotorcraft Technology* (ART) et d'autres sont actuellement en cours en Europe à travers le programme de recherche *Facet*.

Le programme de recherche Américain ART est un vaste programme de recherche mené par la NASA en collaboration avec Boeing Helicopter Company, Sikorsky, Mc Donnel Douglas Helicopter et Bell Helicopter Textron. Au sein du programme ART, l'un des objectifs annoncés est de réduire de 25% le poids des transmissions par engrenages des hélicoptères (Handshuh [66]) et de 10 dB leur niveau de bruit tout en atteignant un minimum de 5000 heures de MTBR (Mean Time Before Removal).
Dans le cadre de ce programme, Mc Donnel Douglas Helicopter a choisi d'étudier une configuration de partage de couple incluant des engrenages face (Fig. 1.13).

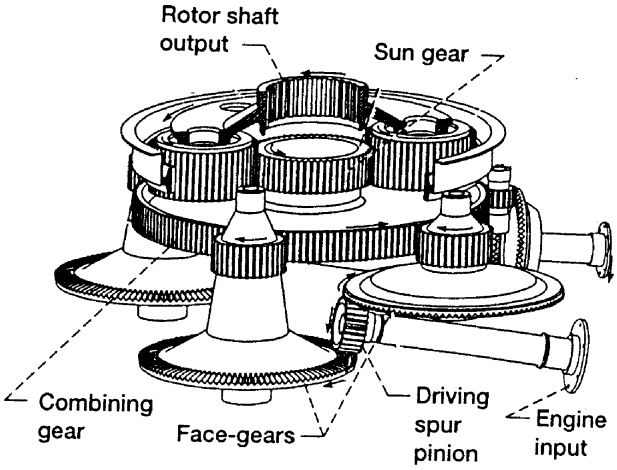


Figure 1.13 : Transmission planétaire simple avec deux étages de division de couple [66]

La partie d'analyse et de conception a été basée sur les travaux de Litvin [19], [20], [22], et effectuée en collaboration avec lui [81], [82], [84], [85]. Différents essais ont ensuite été entrepris par la Nasa à partir de 1991 sur les engrenages face (Bossler [41]).

Le banc d'essais utilisé par la NASA [66] pour étudier expérimentalement les engrenages face, fonctionne en boucle fermée de puissance avec une utilisation du moteur uniquement pour compenser les pertes du système. La figure 1.14 présente cette configuration d'essais.

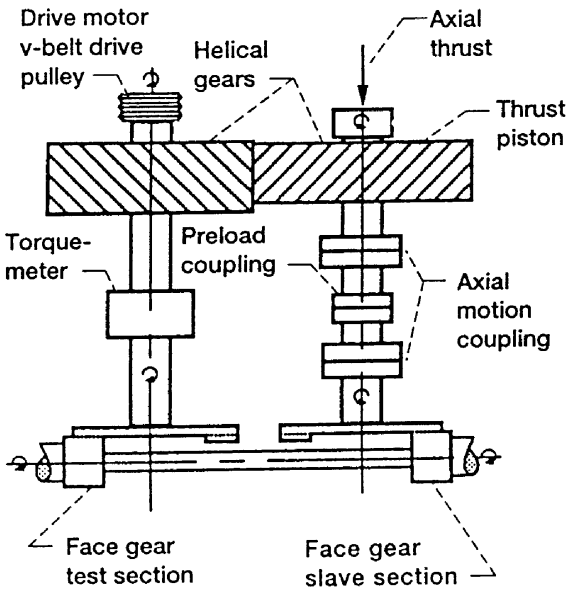


Figure 1.14 : Banc d'essais pour les engrenages face [66]

Le couple transmis peut être ajusté en jouant sur le déplacement axial du couple d'engrenages hélicoïdaux. Deux ensembles d'engrenages face sont testés simultanément. La partie gauche (section active d'essais) fonctionne en réducteur et simule les conditions de fonctionnement sur la transmission de l'arbre principal. La partie droite (section esclave d'essais) permet de fermer la boucle de puissance grâce aux deux pignons montés sur un arbre commun.

Dix ensembles roue face-pignon (rapport de réduction 3,82) ont été testés sur 30 millions de cycles du pignon avec une vitesse de rotation (100%) de 19100 tr/min et un couple (100%) de 67,8 N.m.

Neuf roues face sur dix ont supporté les tests à 100% de charge et de vitesse. Quatre ensembles ont supporté 200% de charge après avoir atteint 30 millions de cycles à 100%. Un ensemble de roues nitrurées a même accumulé 168 millions de cycles à 100% de charge puis plus de 30 millions à 200% sans atteindre la limite de rupture. Ces essais ont donc démontré la capacité des engrenages face à travailler dans de bonnes conditions à grande vitesse tout en transmettant une forte puissance.

Ces premiers résultats (Handshuh [66]) ont démontré la capacité des engrenages face à assurer un rôle identique à celui des spiro-coniques dans les transmissions de grande puissance à grande vitesse. Lors de ces essais, une étude sur les mécanismes de rupture des engrenages face a également été menée. Les résultats ont montré la nécessité d'une rectification car la qualité de surface due au processus de fabrication est un des principaux défauts des engrenages face.

Une deuxième campagne d'essais a été effectuée afin de mettre au point les techniques de rectification des engrenages face (Chen [47]) et de démontrer les réelles capacités des engrenages face lorsque le processus de fabrication et de rectification est complètement maîtrisé (Lewicki [77]).

3 Modélisation du comportement sous charge des engrenages

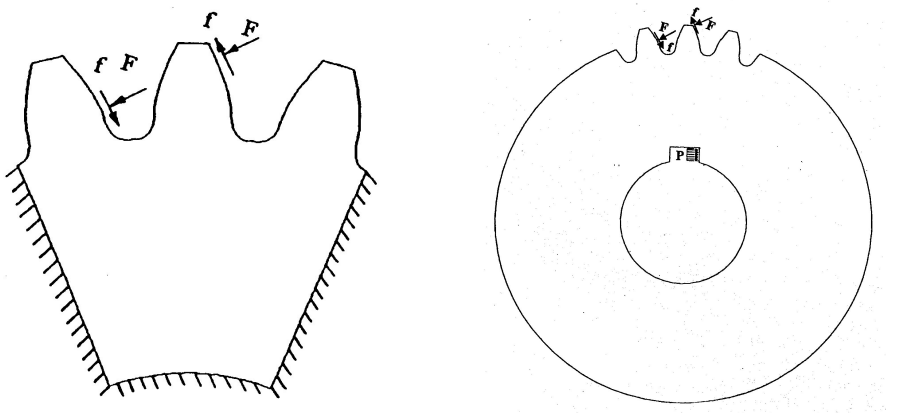
Bien qu'étudié expérimentalement, le comportement sous charge des engrenages face n'a quant à lui pas encore vraiment été modélisé de façon précise, ni publié. Il est donc nécessaire dans un premier temps, de faire un bilan des différentes méthodes utilisées pour étudier le comportement sous charge des différents types d'engrenages. Ceci permettra de déterminer la meilleure approche pour développer la modélisation sous charge des engrenages face.

L'étude de la modélisation numérique du comportement sous charge des engrenages fait apparaître trois aspects complémentaires : les modèles doivent prendre en compte le comportement élastique des couples d'engrenages, le contact entre le pignon et la roue, et le partage de la charge entre les différentes dents en prise simultanément.
Les études effectuées dans ce domaine sur différents types d'engrenages montrent une grande diversité de méthodes utilisées pour modéliser le comportement. Notamment, certaines modélisations découplent les différents effets, d'autres modélisent le comportement dans sa globalité.
Il convient donc d'étudier d'abord dans un premier temps les méthodes s'intéressant à un seul effet, puis les méthodes globales. Les différentes méthodes, souvent complexes, ne seront décrites ici que brièvement.

3.1 Modélisation du comportement élastique

3.1.1 Méthode des Eléments Frontières

Celik [42] modélise le comportement élastique des engrenages cylindriques droits en utilisant la méthodes des éléments frontières.
Il utilise deux modèles distincts : le premier ne modélise que trois dents de l'engrenage, le second l'engrenage complet (Fig. 1.15).



(a) : Modèle à trois dents *(b) : Modèle complet de l'engrenage*

Figure 1.15 : Modèles utilisés avec la méthode des Eléments Frontières [42]

Pour les deux modèles utilisés, la déflection et les répartitions de contraintes de Von Mises dans les dents ont été comparées avec des résultats expérimentaux. La différence entre les résultats expérimentaux et simulés est comprise entre 1.5 % et 5 %, ce qui montre la très grande précision de cette modélisation.
Par contre cette méthode demande des temps de calcul très importants pour converger, et est assez lourde car il faut faire autant de calculs qu'il y a de positions cinématiques voulues.

3.1.2 Méthode des Prismes Finis

De Vaujany [11], Kim [18] et Olakorédé [23] utilisent la méthode des Prismes Finis (Fig. 1.16) pour étudier le comportement élastique des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux.
Cette méthode est employée par le logiciel "PRINCE", développé au laboratoire CASM pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques.

L'intérêt de cette modélisation vient du fait que la formulation générale en 3 dimensions se réduit à une résolution du problème en 2 dimensions. Ainsi les déplacements ne sont pas modélisés de la même manière dans toute les directions : la fonction de déplacement est obtenue à partir de deux fonctions polynomiales dans les deux directions du plan apparent et de fonctions séries dans la troisième direction (largeur de denture).

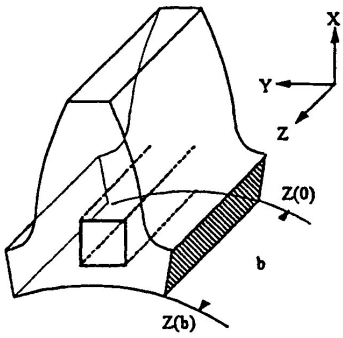
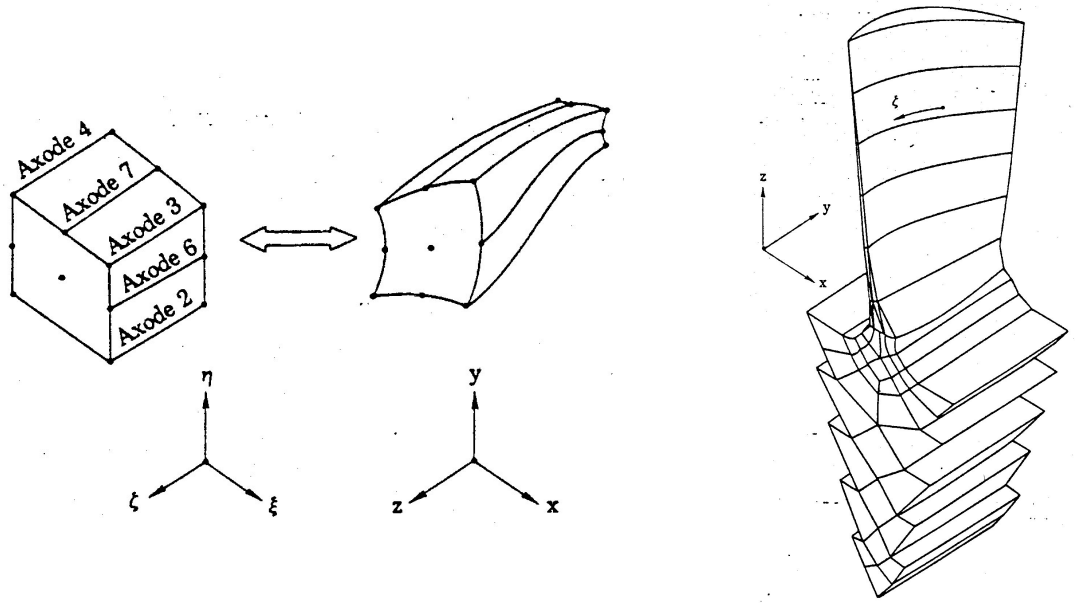


Figure 1.16 : Méthode des Prismes Finis [11]

Cette méthode est très intéressante au niveau du temps de calcul qui est beaucoup plus faible que celui d'une méthode classique par Eléments Finis 3D et au niveau de la mémoire nécessaire qui est également plus faible (respectivement 80 fois plus rapide et 6 fois moins de mémoire nécessaire).
L'inconvénient majeur vient par contre du fait que la géométrie de l'engrenage ne doit pas varier selon une direction, ce qui n'est pas le cas des engrenages face.

3.1.3 Méthode des Eléments Quasi-Prismes

Vijayakar [114] utilise la méthode des Eléments Quasi-Prismes pour étudier le comportement élastique de structures dont la section reste constante ou quasi-constante selon une direction.
Ce type de modélisation est applicable pour des structures comme les dents d'engrenages, les aubes de turbines, les arbres de transmission, etc. … La figure 1.17 montre un élément quasi-prisme dans le repère local et global ainsi que l'utilisation de ce type d'éléments pour modéliser le comportement élastique d'une aube de turbine.
Cette méthode est très intéressante car suivant la direction où la structure possède une section quasi-constante, elle permet de diminuer le nombre total d'éléments nécessaires pour obtenir une bonne précision. Cela se traduit donc par une diminution du temps de calcul par rapport à une modélisation classique par Eléments Finis 3 D.



(a) : Elément Quasi-Prisme dans le repère local et global

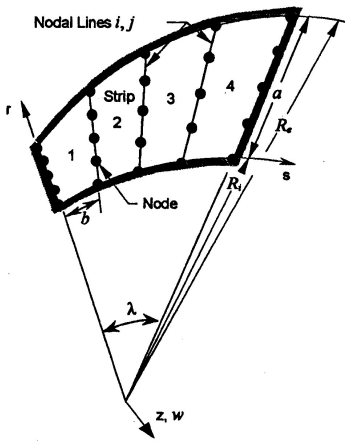
(b) : Modélisation d'une aube de turbine avec des Eléments Quasi-Prismes

Figure 1.17 : Méthode des Eléments Quasi-Prismes [114]

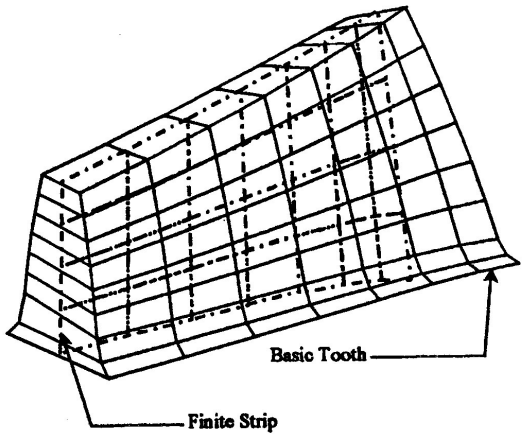
Par contre, cette méthode est limitée à des géométries quasi-prismatiques et la précision finale du résultat dépend du degré d'interpolation des fonctions de formes (polynômes de Chebyshev) suivant la direction de la section quasi-constante.
Cette méthode pourrait éventuellement être adaptée au cas des engrenages face sous certaines conditions, mais elle interdirait par la suite la prise en compte des jantes ou des voiles ayant des formes particulières non prismatiques.

3.1.4 Méthode des Bandes Finies

Gagnon et Gosselin [12], [61] et [62] utilisent la méthode des Bandes Finies (Fig. 1.18) pour étudier le comportement élastique des engrenages spiro-coniques.
L'engrenage modélisé est découpé en bandes dont la particularité est d'avoir des matrices de rigidité variables pour tenir compte de la largeur variable des dents d'engrenages spiro-coniques (Fig. 1.18). Les déplacements d'une bande finie sont calculés en utilisant la théorie des plaques en flexion.
Cette modélisation offre des temps de calcul très inférieurs à ceux d'une méthode classique par Eléments Finis. Par contre, cette méthode est approximative en ce qui concerne le calcul du comportement élastique car elle ne prend en compte que la flexion et car la théorie utilisée (théorie des plaques) modélise difficilement les encastrements. De plus, le support éventuel des dents (jantes et voiles) n'est pas modélisé.



(a) : Bande Finie circulaire pour une plaque de hauteur et de rayon variables

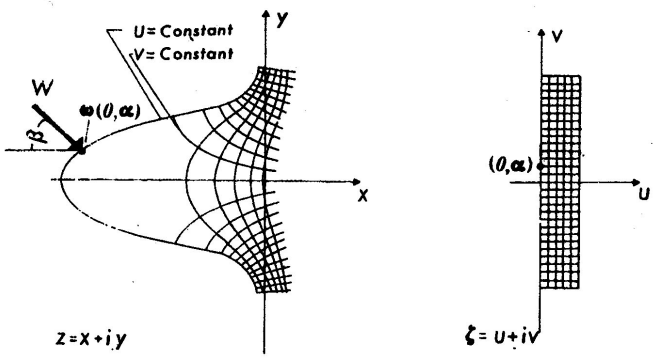


(b): Modèle classique de Bandes Finies

Figure 1.18 : Méthode des Bandes Finies utilisée pour un couple d'engrenages spiro-coniques [62]

3.1.5 Méthode des Transformations de Domaines

Baronet [35] utilise la méthode des transformations de domaines pour calculer la répartition de contraintes pour une dent d'un engrenage cylindrique droit soumis à une charge ponctuelle de direction et de norme connues (Fig. 1.19). La résolution du problème s'effectue dans le domaine transformé, c'est-à-dire dans un domaine géométrique plus simple, mais la grosse difficulté de cette méthode est la mise en place de la transformation bi-univoque permettant de passer du domaine physique au domaine transformé et réciproquement. L'utilisation de ce type de méthode par Baronet [35] est basée sur la simplicité de résolution du problème de comportement élastique des dents d'engrenages en 2 dimensions, mais pour une géométrie comme celle des engrenages face en 3 dimensions, la mise en place de la transformation semble quasiment impossible.



(a) : Domaine physique Ω *(b) : Domaine transformé Ω**

Figure 1.19 : Système de coordonnées utilisé pour le calcul de la répartition de contraintes [35]

3.2 Modélisation du contact entre les dents

Les modèles généraux de contact entre les dents d'engrenages se décomposent en trois types : des modèles analytiques de contact, des méthodes diverses de résolution du problème de contact et les algorithmes de contact de Kalker.

La plupart des modélisations de contact sont basées sur tout ou partie de la théorie de Hertz. Avant d'utiliser cette théorie, il convient toujours de vérifier ses conditions d'utilisations.

3.2.1 Rappels sur les conditions d'utilisation de la théorie de Hertz

Les principales conditions d'application de la théorie de Hertz [16] sont au nombre de trois et devront être vérifiées pour une éventuelle application aux engrenages face :

- Massif semi-infini,
- Contact non-conforme entre les deux solides et sans friction,
- Largeur (2a) du contact entre les deux solides très petite devant les autres dimensions (rayons de courbure, etc. …).

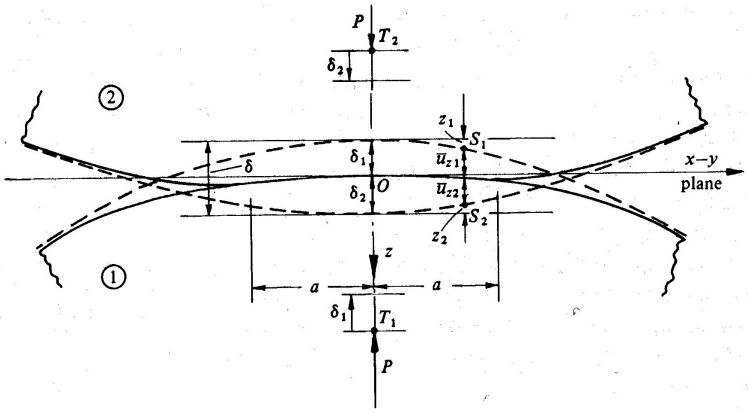


Figure 1.20 : Théorie de Hertz : contact uni-dimensionnel après déformation [16]

3.2.2 Modèles analytiques de contact

Altidis [28], Savage [99] et Simon [107] pour les engrenages spiro-coniques et hypoïdes, et Zhang [119] pour les engrenages à double arc circulaire, ont développé des méthodes analytiques pour déterminer les points potentiels de contact à partir de la géométrie des engrenages et des forces appliquées sur ceux-ci.
Tous ces modèles analytiques de contact sont présentés de façon très simplifiée et ne permettent d'obtenir qu'une estimation plus ou moins précise des zones de contact. Comme ces modèles ne fournissent ni la distribution de pression, ni le rapprochement des surfaces, il ne sera pas donné trop de détails à propos de ces modèles.

3.2.3 Diverses méthodes de résolution du problème de contact

Dans la plupart des problèmes de contact, la résolution consiste à déterminer une solution qui vérifie :

- Les équations de compatibilité,
- Les conditions d'équilibre,
- Le critère de contact,
- Les équations de l'élasticité.

Conry [51], Marshek [89] et Wriggers [117] utilisent la méthode "PENALTY" ou "SIMPLEX" avec une formulation Lagrangienne augmentée pour résoudre le problème de contact : c'est-à-dire garantir les différentes équations présentées ci-dessus.
Ces méthodes ne seront pas détaillées, car apparemment des problèmes importants de convergence existent.

Krishna [76] utilise deux méthodes pour la résolution d'un contact non-hertzien, appelées RFP (Redundant Field Points) et FR (Functional Regularization). Ces méthodes semblent très efficaces et permettent d'obtenir de bons résultats mais trop peu de détails sont fournis par l'auteur pour pouvoir approfondir l'étude.

3.2.4 Algorithmes de contact de Kalker

Les travaux de Kalker [17], [54], [69], [70], [71] et [72] sont une référence en ce qui concerne la résolution des problèmes de contact tridimensionnel, élastique, plastique, roulant et glissant.
Kalker a développé de nombreux algorithmes très efficaces permettant le calcul du contact élastique et plastique entre deux solides quelconques soumis à un chargement quelconque aussi bien en statique qu'en dynamique.

Il a développé des modèles bidimensionnels et tridimensionnels de contact pour des chargements normal, tangentiel et mixte : possibilité de dépendance entre le chargement normal et tangentiel.
A partir de la théorie des milieux continus, Kalker définit la résolution du problème qui est applicable à des solides en contact avec la possibilité d'avoir de la friction entre ceux-ci.

Tous les modèles de Kalker utilisent les équations, les relations et les définitions suivantes :

- Les équations d'équilibre,
- Les relations de l'élasticité, ou de la viscoélasticité, ou de la plasticité,
- Les équations de compatibilité,
- Les conditions de non-pénétration,
- La définition du glissement,
- La définition des zones d'adhérence et de glissement.

Kalker propose quatre algorithmes pour résoudre les différents problèmes de contact :

- L'algorithme "NORM" : résolution du problème de contact pour un chargement normal,
- L'algorithme "TANG" : résolution du problème de contact pour un chargement tangentiel,
- Les algorithmes "KOMBI" et "PANA" : résolution du problème de contact mixte avec friction.

Les principaux avantages des algorithmes de contact de Kalker sont la très grande rapidité de convergence, et une intégration possible avec d'autres modèles comme des modèles de comportement élastique, par exemple avec un modèle Eléments Finis.

L'inconvénient majeur provient de la nécessité de connaître les champs de contraintes à chaque itération du calcul. Dans le cas d'un couplage avec une méthode par Eléments Finis par exemple pour le calcul des contraintes, les temps de calculs deviennent très importants.

3.3 Modélisation du partage des charges

Börner [40], Conry [52] et Savage [100] pour les engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux, Elkholy [56] et Sentoku [104] pour les engrenages coniques, Gosselin [60] et Simon [107] pour les engrenages spiro-coniques et hypoïdes, et enfin Simon [105], [106] et Sudoh [110] pour les engrenages roue et vis présentent des modèles pour le calcul du partage de charge entre les dents.

Toutes ces modélisations utilisent des équations approchées avec des coefficients issus d'essais ou de modèles approchés (par exemple, la flexion d'une dent est modélisée par la flexion d'une poutre), pour modéliser le comportement en flexion et le partage de charge. La théorie de Hertz est utilisée pour calculer la pression de contact entre les dents. La figure 1.21 présente un exemple de modèle utilisé pour calculer le partage de charge entre les différents points de contact dans le cas de deux dents en prise. Ce modèle utilise une décomposition de la force totale en forces élémentaires, et de la rigidité des dents en rigidités élémentaires.

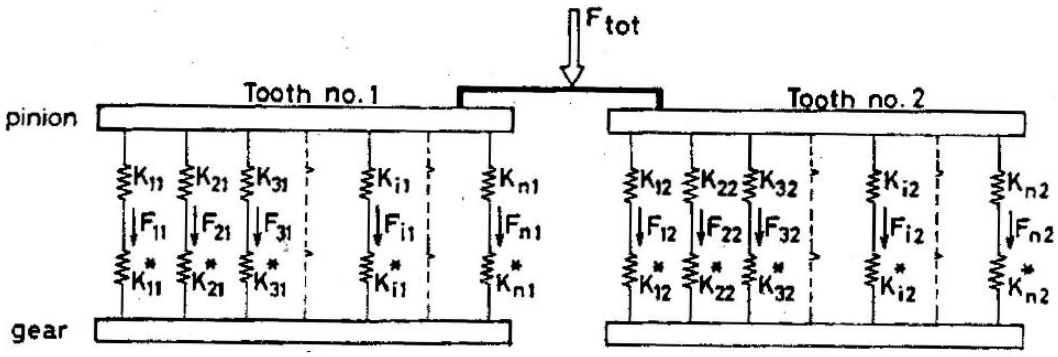


Figure 1.21 : Modèle de partage de la charge entre deux dents en prise [56]

L'avantage de tous ces modèles est la rapidité d'obtention des résultats. Par contre, la qualité des résultats est fonction des modèles d'approximation et aussi fonction de l'utilisation de la théorie de Hertz dans des cas non conventionnels.

3.4 Modélisation de la répartition de contraintes

Pour calculer la répartition de contraintes dans le cas des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux, Bibel [38], Chang [46], Gulliot [65], Oda et Sayama [91], [92], [93], [101], [102], Rao [98], Somprakit [108] et Von Eiff [116] utilisent la méthode des Eléments Finis. De Vaujany [55], Kim [73], [74], [75] et Olakorédé [95] utilisent quant à eux la méthode des Prismes Finis.
Pour calculer la répartition de contraintes pour des engrenages coniques Nalluveettil [90] utilise la méthode des Eléments Finis et Vaidyanathan [112] la méthode de la flexion d'une plaque à rigidité variable. Globalement les méthodes sont équivalentes et dérivent de la modélisation du comportement élastique utilisée.
Le problème ne consistera donc pas à déterminer le champ de contraintes qui est calculé de manière similaire par tous, mais à définir le chargement adéquat relatant précisément la répartition de pression réelle. L'influence des dimensions des voiles et des jantes sur la répartition de contraintes est aussi mise en évidence dans tous ces travaux.

3.5 Modélisation globale

3.5.1 Modélisation complète par Eléments Finis

Deux types de modélisation complète par Eléments Finis, incluant à la fois le modèle élastique et le modèle de contact, peuvent être utilisés pour résoudre le comportement sous charge de différents types d'engrenages.

La première modélisation est basée sur le calcul de la matrice de rigidité instantanée ainsi que sur celui de la matrice de rigidité et de flexibilité normale le long du contact. Ces matrices sont ensuite utilisées pour modifier les matrices du modèle Eléments Finis pour le comportement élastique des couples d'engrenages et ainsi prendre en compte le contact.

Cette modélisation est utilisée pour l'étude du comportement sous charge des engrenages cylindriques droits, des engrenages coniques (Li [78] et [79]) et des engrenages roue et vis (Qin [97]). La figure 1.22 donne une représentation du modèle Eléments Finis de deux dents en contact dans le cas d'un engrenage conique.

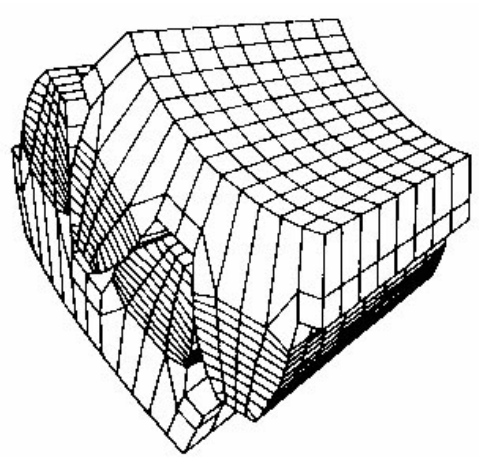


Figure 1.22 : Modèle EF pour un engrenage conique [79]

La deuxième modélisation est basée sur un maillage Eléments Finis classique du pignon et de la roue ainsi que sur l'utilisation d'éléments de contact ("GAP ELEMENT").
Les éléments de contact modifient la surface du maillage (Fig. 1.23) du pignon et de la roue afin de garantir la même normale extérieure pour les Eléments Finis dans la zone de contact. Ils garantissent également les conditions de non-pénétration pour deux corps flexibles en contact, c'est-à-dire empêchent l'interpénétration des maillages de deux corps par l'introduction de poutres rigides entre les nœuds des deux maillages en contact (Fig. 1.24).

Cette modélisation est utilisée pour l'étude du comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux (Ambruosi [29]) et des engrenages spiro-coniques (Bibel [36] et [37]).

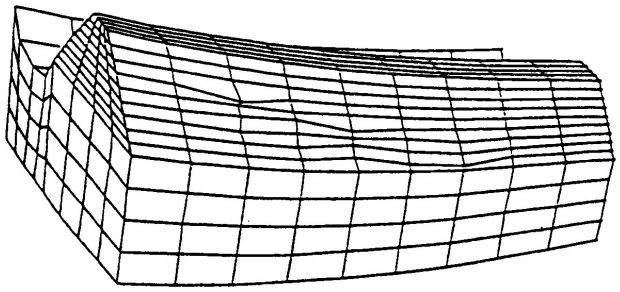


Figure 1.23 : Maillage EF distordu pour une orientation correcte des "GAP ELEMENT" [36]

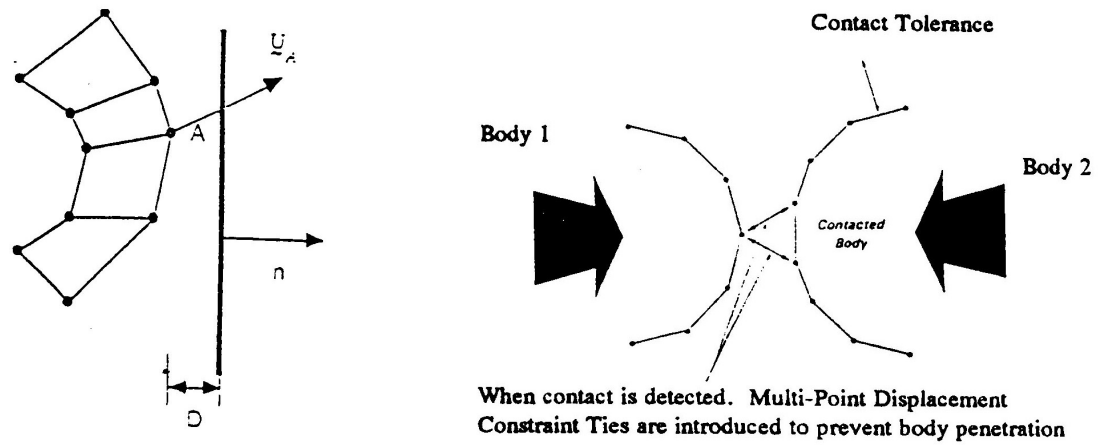


Figure 1.24 : Conditions de non-pénétration pour deux corps en contact [36]

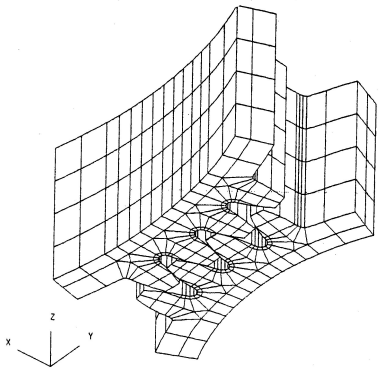
Ces modélisations complètes sont très intéressantes car le calcul est automatique à partir de la géométrie, et car les résultats sont très précis et en accord avec les résultats expérimentaux. L'inconvénient majeur est que ces modélisations sont très lourdes et nécessitent des temps de calculs très importants (de l'ordre de la dizaine de jours) pour obtenir une précision acceptable.

3.5.2 Modélisation par Eléments Finis Polynomiaux

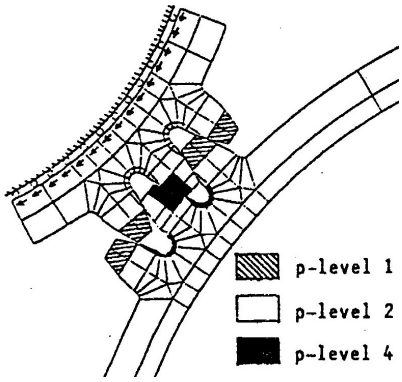
Baret [33], Curti [53] et Piazza [96] utilisent une modélisation par Eléments Finis Polynomiaux pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. Cette modélisation utilise un maillage Eléments Finis classique (Fig. 1.25a) mais les fonctions de forme des Eléments Finis utilisés sont des polynômes dont le degré varie en fonction de la zone du maillage et de la précision désirée (Fig. 1.25b) :

- Dans la zone de contact entre les deux dents d'engrenage, le degré du polynôme est élevé,
- Dans la zone de flexion des dents, le degré du polynôme est faible,
- Dans la zone du pied de denture, le degré du polynôme est élevé.

Des exemples de fonctions de forme de différents degrés pour un nœud, pour une arête et pour une face d'un Elément Fini sont présentés sur la figure 1.26.

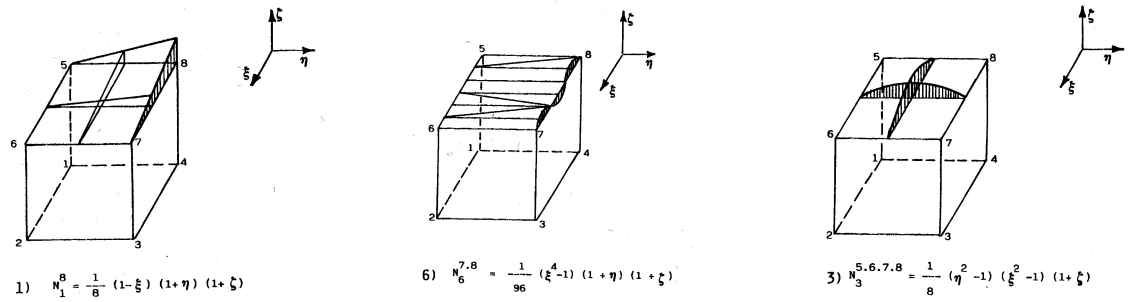


(a) : Maillage EF classique [33]



(b) : Variation du degré des polynômes en fonction de la zone [53]

Figure 1.25 : Exemple de modélisation par Eléments Finis Polynomiaux.



(a) : Fonction de forme de degré 1 pour un nœud. *(b) : Fonction de forme de degré 6 pour une arête.* *(c) : Fonction de forme de degré 3 pour une face.*

Figure 1.26 : Exemples de fonctions de forme polynomiale [53]

Le maillage Eléments Finis est effectué une seule fois et si la précision du calcul veut être augmentée, il suffit d'augmenter le degré des polynômes d'interpolation. Les résultats semblent précis et en accord avec les résultats expérimentaux. L'inconvénient majeur de cette modélisation est le temps de calcul qui est important en fonction du nombre de positions cinématiques voulues. Par contre, cette modélisation est plus rapide que les modélisations complètes par Eléments Finis mais moins que les modélisations mixtes par Eléments Finis présentées dans le paragraphe suivant.

3.5.3 Modélisation Mixte par Eléments Finis

3.5.3.1 Méthodes basées sur TCA/LTCA

Deux types de modélisations mixtes par Eléments Finis sont utilisées. Le modèle de comportement élastique utilisé est toujours un modèle par Eléments Finis, mais le modèle de contact utilisé est basé soit sur la méthode TCA/LTCA développée par GLEASON et Litvin, soit sur la méthode de Boussinesq.
Pour ces deux modélisations mixtes, étant donné que le modèle de comportement élastique des couples d'engrenages est un modèle classique par Eléments Finis, il ne sera pas détaillé. Le chargement et les conditions limites en déplacement de ce modèle Eléments Finis sont déterminés par les différents modèles de contact en fonction des différentes positions cinématiques.

Fang [57] et [58], Yongping [118] et Zhang [120], [121] utilisent le modèle de contact basé sur la méthode TCA/LTCA développée par GLEASON et Litvin pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques hélicoïdaux, coniques et hypoïdes. La méthode TCA/LTCA prend en compte la friction s'opposant au glissement relatif entre les dents d'engrenages.

La méthode TCA/LTCA est basée sur le calcul des matrices de flexibilité dans la direction normale, dans la direction tangentielle et dans les directions croisées pour les points de contact. La flexibilité $f_{ij}^{(pq)}\left(\vec{p}=\vec{n},\vec{t};\vec{q}=\vec{n},\vec{t}\right)$ exprime le déplacement au point i dans la direction $\vec{p}$ dû au chargement unitaire au point j dans la direction $\vec{q}$.

Le problème de contact élastique avec friction entre les dents d'engrenages peut-être ensuite linéarisé et résolu de façon conventionnelle par l'algorithme SIMPLEX Modifié.
L'inconvénient majeur de cette méthode est le problème de convergence de l'algorithme SIMPLEX Modifié qui dépend essentiellement des valeurs initiales données aux différentes variables.

3.5.3.2 Méthodes basées sur la théorie de Boussinesq

Cheng [48], Hiltcher [14] et Vijayakar [113] et [115] utilisent un modèle de contact basé sur la théorie de Boussinesq pour étudier le comportement sous charge des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux. Cette méthode repose la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements, dit problème aux conditions de Signorini (Kalker [17]). L'équation de compatibilité des déplacements est une condition géométrique de non pénétration des deux corps en contact, dans laquelle interviennent des termes liés aux déformations de flexion des deux corps et des termes liées aux déformations de surface au niveau de la zone de contact. Ces termes peuvent être exprimés sous la forme de coefficients, dits "coefficients d'influence". La théorie de Boussinesq permet de calculer les coefficients d'influence de surface et les coefficients d'influence de flexion sont calculés par la méthode des Eléments Finis.

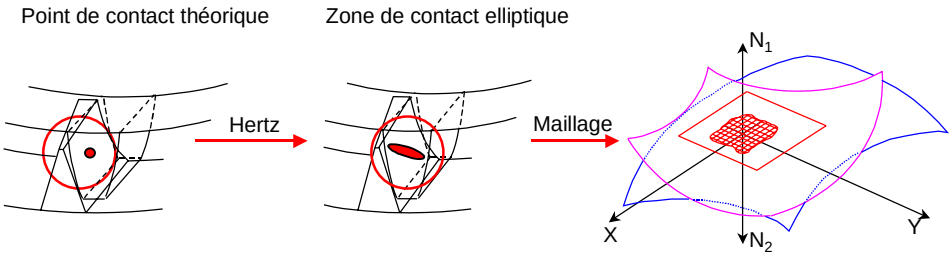


Figure 1.27 : Maillage de la zone potentielle de contact dans le plan tangent

A partir de la simulation cinématique à vide, les différents points de contact sont déterminés. Ensuite, la taille de la zone de contact potentielle est estimée en utilisant la théorie de Hertz puis maillée dans le plan tangent aux deux dents (Fig. 1.27). Les coefficients de surface de Boussinesq C_{kj}^{s} représentent le déplacement au point j pour une charge unitaire appliquée au point k (Fig. 1.28) et sont connus analytiquement.

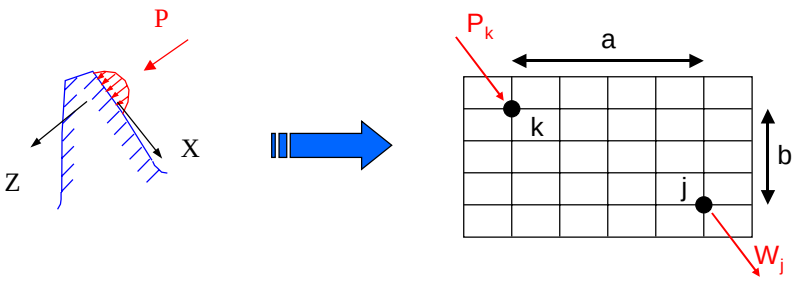


Figure 1.28 : Calcul des coefficients de surface de Boussinesq

Les coefficients de flexion sont calculés d'une manière similaire grâce à un calcul par Eléments Finis à partir de chargements unitaires en chaque point du maillage.

L'équation de compatibilité des déplacements peut être résolue par une méthode de point fixe qui ne pose aucun problème de convergence.

Le calcul par Eléments Finis est effectué une seule fois afin de calculer les coefficients de flexion pour toutes les positions cinématiques. Les résultats sont très précis et en accord avec les résultats expérimentaux. Ces modélisations mixtes sont les plus rapides de toutes les modélisations globales et l'utilisation des Eléments Finis permet de modéliser des structures ayant quasiment n'importe quelle géométrie.
Les inconvénients de ces modélisations sont pour la méthode TCA/LTCA, le problème de convergence et pour la méthode de Boussinesq, le fait que le contact se trouve dans un plan.

4 Conclusion

Depuis quelques années, diverses études ont déjà été effectuées sur les engrenages face. Elles concernent essentiellement la géométrie et la cinématique à vide. Comme pour l'étude de tous les types d'engrenages, certaines méthodes utilisées sont numériques, d'autres analytiques. Les approches numériques sont plus générales, mais leur principal défaut reste le temps de calcul et la précision des résultats. Les méthodes analytiques sont plus complexes à mettre en œuvre, mais elles sont très rapides et très précises, mais ne s'adaptent pas facilement à des géométries complexes.

Le travail présenté ici s'inscrivant dans un cadre industriel aéronautique, où la précision et la modélisation du comportement réel sont des priorités essentielles, l'utilisation d'une méthode analytique semble la plus adaptée. Pour la définition de la géométrie et de la cinématique à vide, les théories de Litvin sont incontournables. Elles sont scientifiquement très rigoureuses et permettent la modélisation précise de nombreux types d'engrenages. Mais elles nécessitent des adaptations et développements supplémentaires pour pouvoir être appliquées à des cas concrets d'engrenages face utilisés dans les rotors d'hélicoptères.

Au niveau de la géométrie de la roue face, Litvin considère toujours la surface mathématique de l'outil de taillage comme une développante de cercle simple. En pratique, les outils de taillage peuvent être déportés, le creux et la saillie ne sont pas nécessairement normalisés, la tête de l'outil peut être pointue ou arrondie, …, autant de caractéristiques qui se doivent d'être incluses dans une modélisation destinée à résoudre des cas industriels.
De même, pour la cinématique à vide, le pignon utilisé aura des caractéristiques similaires à l'outil de taillage et pourra de surcroît être corrigé, par un bombé ou par des corrections sur le profil en tête et en pied de dent. Il est également important de pouvoir concevoir des engrenages face hélicoïdaux.

En ce qui concerne la modélisation du comportement sous charge, les méthodes hybrides utilisant une modélisation par Eléments Finis pour prendre en compte la flexion des dents et les théories de Boussinesq pour prendre en compte les déformations de contact, semblent un excellent compromis entre précision et temps de calcul.
Les conditions d'utilisation de la théorie de Boussinesq devront être préalablement bien déterminées et les cas d'applications bien définis. De plus, pour atteindre une efficacité optimale, les équations analytiques caractérisant la géométrie et la cinématique à vide des engrenages face pourront être intégrées directement dans le modèle de contact sous charge.

Le développement complet de cette modélisation sous charge des engrenages face fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Modélisation du comportement sous charge des engrenages face

1 Introduction

La modélisation du comportement sous charge des engrenages face peut être effectuée selon un processus général divisé en trois étapes principales distinctes. Ce processus général a déjà été utilisé et validé pour l'étude des engrenages cylindriques [11], [18].

Le processus global de la modélisation du comportement sous charge est schématisé sur la figure 2.1. La première étape consiste à simuler le taillage de la roue face afin d'obtenir le profil de denture. Ensuite, la simulation de la cinématique à vide permet de définir des zones de contact potentiel, ainsi que l'erreur cinématique à vide. Les résultats de ces deux premières étapes peuvent déjà être utilisés pour étudier l'influence des différents paramètres de taillage et d'assemblage.
La répartition des charges va ensuite être déterminée par la résolution d'une équation de compatibilité des déplacements. Cette résolution permet d'obtenir outre la répartition des charges, les pressions instantanées de contact, l'erreur de transmission sous charge ainsi que la raideur d'engrènement. L'équation de compatibilité des déplacements prend en compte à la fois les déformations globales de flexion et les déformations locales de contact caractérisées par des coefficients d'influence. Ces coefficients sont obtenus par une modélisation du comportement élastique et un modèle de contact. Les résultats issus de cette dernière étape permettent ensuite de nombreuses exploitations, notamment des études paramétriques qui aboutissent à des lois de conception.

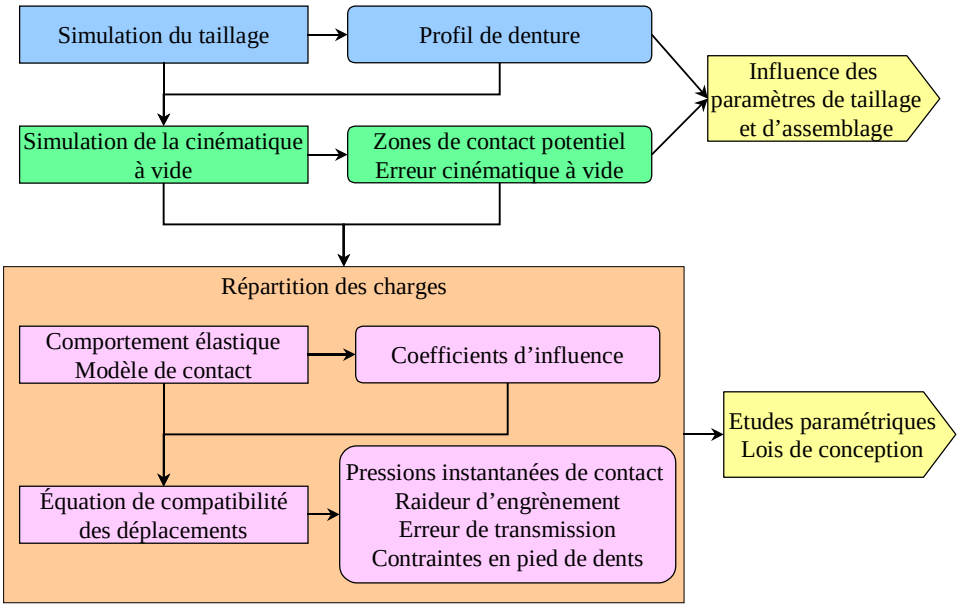


Figure 2.1 : Modélisation complète du comportement sous charge des engrenages face

La simulation du taillage et de la cinématique à vide seront basées sur les théories de Litvin, et la répartition des charges sur une méthode hybride utilisant une modélisation par Eléments Finis pour prendre en compte la flexion des dents et les théories de Boussinesq pour prendre en compte les déformations de contact.

2 Simulation du taillage de la roue face

La génération de denture des engrenages face est basée sur la simulation de l'engrènement entre la roue face et l'outil qui a servi à la tailler. Cette simulation repose sur les méthodes développées par Litvin et utilisées plus généralement pour tous les types d'engrenages [20].

La surface de denture de la roue face est générée par le mouvement de la surface de l'outil définie analytiquement. La rotation de cette surface dans un système lié à l'outil génère une famille de courbes dans un système lié à la roue face. L'utilisation d'une équation d'engrènement permet ensuite de déterminer les points exacts constituant la géométrie de la roue face.

Cette méthode reste néanmoins théorique et très restrictive en modélisant notamment l'outil de taillage uniquement par une développante de cercle.
Pour être appliquée à des transmissions plus complexes, cette méthode a du être étendue afin de prendre en compte toutes les caractéristiques réelles des engrenages et particulièrement de l'outil, ainsi que les engrenages face hélicoïdaux. La modélisation développée ici permet également de prendre en compte des erreurs de taillage et de montage. De plus, afin de permettre une définition de la géométrie conforme à la réalité et totalement maîtrisée, les équations de base de Litvin ont été inversées de façon à obtenir les paramètres de définition comme solutions du problème et non pas comme variables d'entrée. Ainsi il sera possible de déterminer n'importe quel point sur la surface de denture, indépendamment des bouclages successifs sur les équations qu'il faudrait faire en les utilisant de manière directe. Cette particularité prendra toute son utilité lors de la simulation de la cinématique à vide et surtout de la répartition des charge où il sera important de pouvoir connaître précisément des points de définition de la géométrie de la roue à des localisations très précises sur la surface de denture.

2.1 Génération de la géométrie de la roue face

2.1.1 Positionnement relatif de l'outil et de la roue

2.1.1.1 Systèmes de coordonnées de base

Les positionnements théoriques de la roue face et de son outil de taillage ont d'abord été définies par Litvin [80]. Zhang [122] y ajouta la prise en compte d'un offset.
Lors du processus de taillage de la roue face, les surfaces de l'outil Σ_s et de la roue Σ_2 sont liés à deux repères S_s (O_s,X_s,Y_s,Z_s) et S_2 (O_2,X_2,Y_2,Z_2). Ces systèmes sont en rotation autour de leurs axes respectifs Z_s et Z_2 avec les vitesses angulaires ω_s et ω_2. Ils sont définis par rapport à un système fixe S_f (O_f,X_f,Y_f,Z_f) lié à la machine-outil. Les rotations de S_s et S_2 sont définies par les angles ϕ_s et ϕ_2. Les axes de l'outil et de la roue sont décalés d'une distance C_s correspondant à l'offset et forment un angle de tête γ_s (Fig. 2.2 et 2.3).

La matrice de passage du repère S_s au repère S_2 s'exprime :

$$[M_{s2}]=\begin{bmatrix} \cos\phi_s\cos\phi_2 + \cos\gamma_s\sin\phi_s\sin\phi_2 & -\sin\phi_s\cos\phi_2 + \cos\gamma_s\cos\phi_s\sin\phi_2 & -\sin\gamma_s\sin\phi_2 & C_s\cos\phi_2 \\ -\cos\phi_s\sin\phi_2 + \cos\gamma_s\sin\phi_s\cos\phi_2 & \sin\phi_s\sin\phi_2 + \cos\gamma_s\cos\phi_s\cos\phi_2 & -\sin\gamma_s\cos\phi_2 & -C_s\sin\phi_2 \\ \sin\gamma_s\sin\phi_s & -\sin\gamma_s\cos\phi_s & \cos\gamma_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les angles de rotation ϕ_s et ϕ_2 sont liés par le rapport de réduction du processus de taillage R_s :

$$\phi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_s}\phi_s = R_s\phi_s \quad (2.2)$$

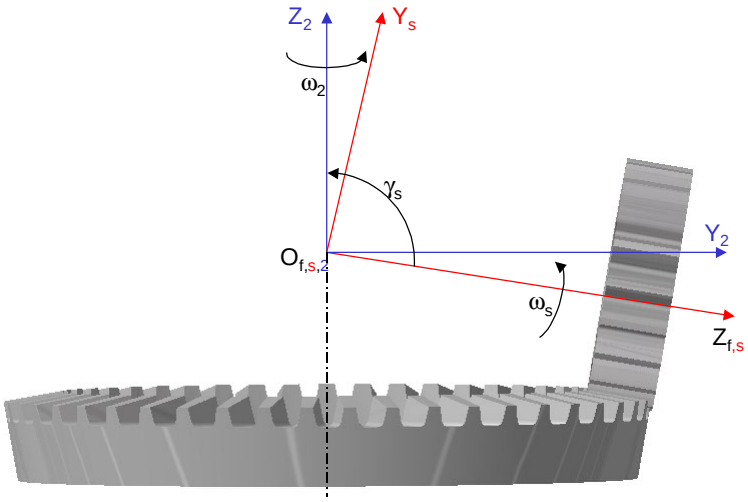


Figure 2. 2 : Systèmes de coordonnées utilisés lors de la simulation du taillage (1)

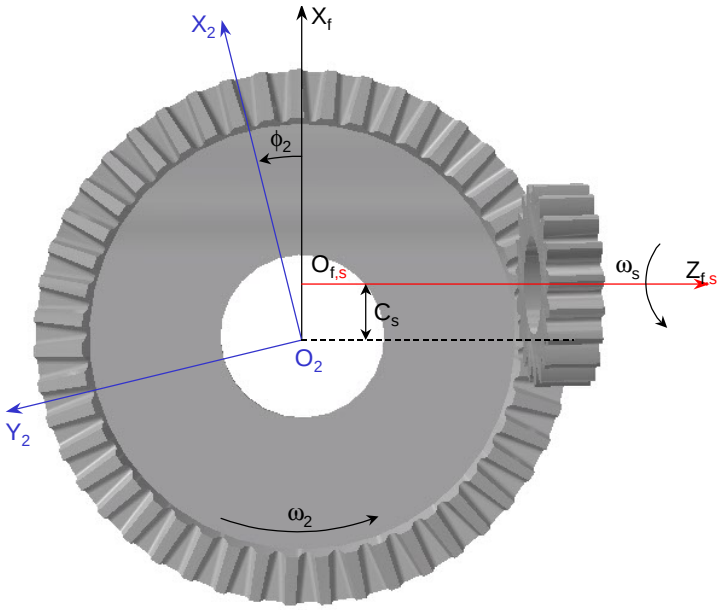


Figure 2. 3 : Systèmes de coordonnées utilisés lors de la simulation du taillage (2)

Afin de relater fidèlement un processus de taillage industriel, il convient d'ajouter au positionnement relatif de la roue et de son outil, diverses erreurs de taillage qui pourraient survenir lors de la fabrication des roues.

2.1.1.2 Erreurs de taillage prises en compte

Lors du processus de taillage, quatre erreurs de taillage peuvent être prises en compte (Fig. 2.4 et 2.5) :

- Déplacement radial de l'outil : δE_s
- Déplacement angulaire de l'outil : $\delta\alpha_s$
- Déplacement axial de la roue face : δq_s
- Déplacement angulaire de la roue face : $\delta\gamma_s$

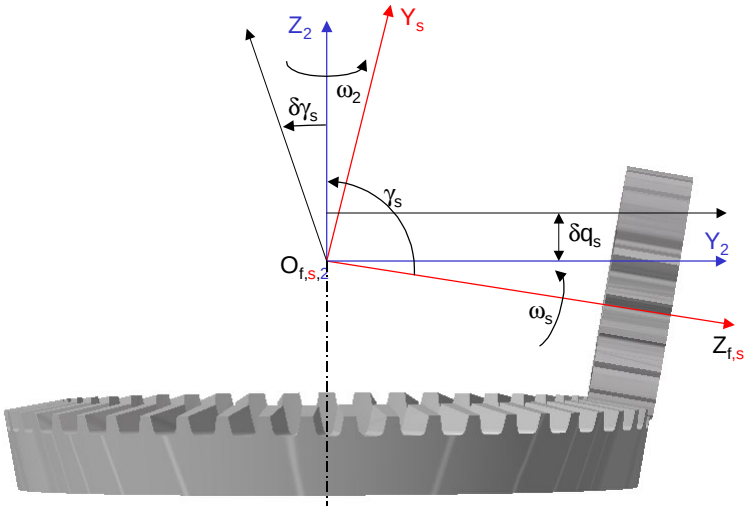


Figure 2.4 : Erreurs de taillage prises en compte (1)

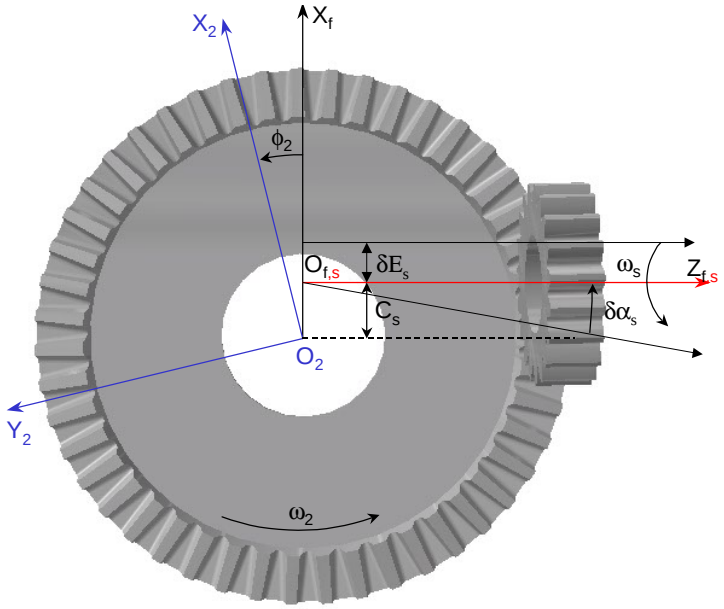


Figure 2.5 : Erreurs de taillages prises en compte (2)

Les erreurs de taillage sont prises en compte soit directement dans la valeur de certains paramètres, soit dans la matrice de passage du repère S_s au repère S_2 (Eq. 2.5) :

$$C_s = C_s + \delta E_s \tag{2.3}$$

$$\gamma_s = \gamma_s + \delta\gamma_s \tag{2.4}$$

$$[M_{s2}] = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\cos\phi_s \cos\phi_2 \cos\delta\alpha_s \\ +\cos\gamma_s \sin\phi_s \sin\phi_2 \\ +\sin\gamma_s \cos\phi_s \cos\phi_2 \sin\delta\alpha_s\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\phi_s \cos\phi_2 \cos\delta\alpha_s \\ +\cos\gamma_s \cos\phi_s \sin\phi_2 \\ -\sin\gamma_s \sin\phi_2 \sin\delta\alpha_s\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\gamma_s \sin\phi_2 \cos\delta\alpha_s \\ +\cos\phi_2 \sin\delta\alpha_s\end{matrix} & C_s \cos\phi_2 \\ \begin{matrix}-\cos\phi_s \sin\phi_2 \cos\delta\alpha_s \\ +\cos\gamma_s \sin\phi_s \cos\phi_2 \\ +\sin\gamma_s \cos\phi_s \cos\phi_2 \sin\delta\alpha\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\phi_s \sin\phi_2 \cos\delta\alpha_s \\ +\cos\gamma_s \cos\phi_s \cos\phi_2 \\ -\sin\gamma_s \cos\phi_s \cos\phi_2 \sin\delta\alpha_s\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\phi_2 \sin\delta\alpha_s \\ -\sin\gamma_s \cos\phi_2\end{matrix} & -C_s \sin\phi_2 \\ \begin{matrix}\sin\gamma_s \sin\phi_s \\ -\cos\gamma_s \cos\phi_s \sin\delta\alpha_s\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\gamma_s \cos\phi_s \\ +\cos\gamma_s \sin\phi_s \sin\delta\alpha_s\end{matrix} & \cos\gamma_s \cos\delta\alpha_s & \delta q_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

2.1.2 Définition des sections coniques

La roue face est caractérisée par ses rayons intérieur L_1 et extérieur L_2.
La géométrie de la dent de la roue face est définie dans des sections coniques perpendiculaires aux rayons de la roue.
Chaque section est repérée par un rayon R défini en tête de dent de la roue face. Dans chaque section, le point de tête de dent de la roue face où est défini le rayon sera caractérisé par une valeur connue de la coordonnée suivant Z_2 égale Z_{2a}. Dans ces sections coniques, les points de la roue sont repérés par deux angles de position α_1 et α_2 (Fig. 2.6 et 2.7).

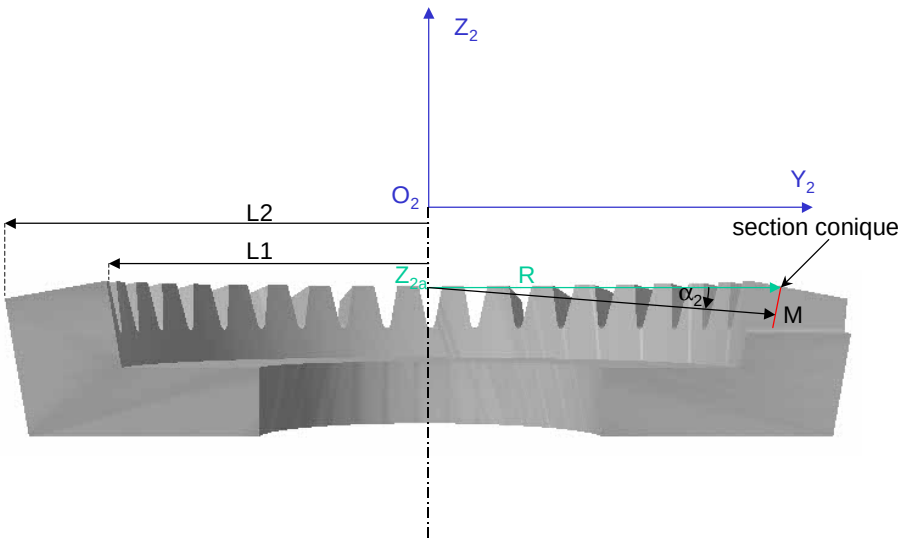


Figure 2.6 : Repérage d'un point par α_2

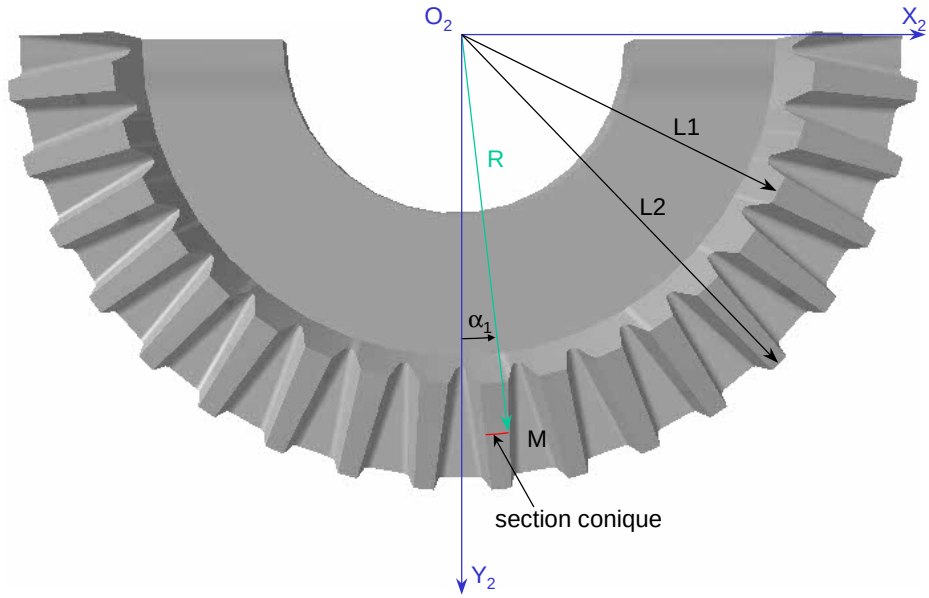


Figure 2.7 : Repérage d'un point par α_1

Enfin, un point de définition de la roue dans les sections coniques vérifiera les équations paramétriques du cône, soit :

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1+\alpha_2)\sin\alpha_1 \\ R(1+\alpha_2)\cos\alpha_1 \\ R\alpha_2 \tan(\gamma_s - \frac{\pi}{2}) + Z_{2a} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

2.1.3 Equation d'engrènement

Pour obtenir un point de la roue face, il faut et il suffit de savoir par quel point de l'outil et dans quelle position de l'outil il a été taillé, puis d'effectuer les changements de repères définis précédemment. Lorsqu'un point de la roue est taillé par un point de l'outil, il satisfait à cet instant l'équation d'engrènement (Litvin [22]) :

$$\vec{n}_s.\vec{V}_{s2} = 0 \tag{2.7}$$

où $\vec{V}_{s2}$ est la vitesse relative entre les surfaces de l'outil et de la roue face au point de contact au moment du taillage et n_s le vecteur unitaire normal à ces surfaces. La vitesse relative des surfaces et les normales unitaires de l'outil sont développées en annexe A2.1.1 et A2.1.2.

La combinaison de l'équation d'engrènement, de la matrice de passage de S_s vers S_2 et de la définition des sections coniques permet alors, en connaissant la géométrie exacte de l'outil, de déterminer précisément les points de définition de la roue face.

2.2 Définition de l'outil de taillage

2.2.1 Surface de l'outil

L'outil utilisé pour tailler les roues face est un outil-pignon cylindrique, droit ou hélicoïdal. Le profil théorique de l'outil en projection dans son plan apparent étant une développante de cercle, l'outil est défini classiquement à partir des équations paramétriques de la développante de cercle (Litvin [22]).
Les points M de cet outil (surface Σ_s) sont définis dans S_s avec Y_s comme axe de symétrie entre deux dents (Fig. 2.8).
Pour un outil hélicoïdal, cette symétrie d'entre dent est fixée arbitrairement sur une section, par exemple à $Z_s = 0$, mais n'a aucune influence sur la géométrie finale de la roue face.

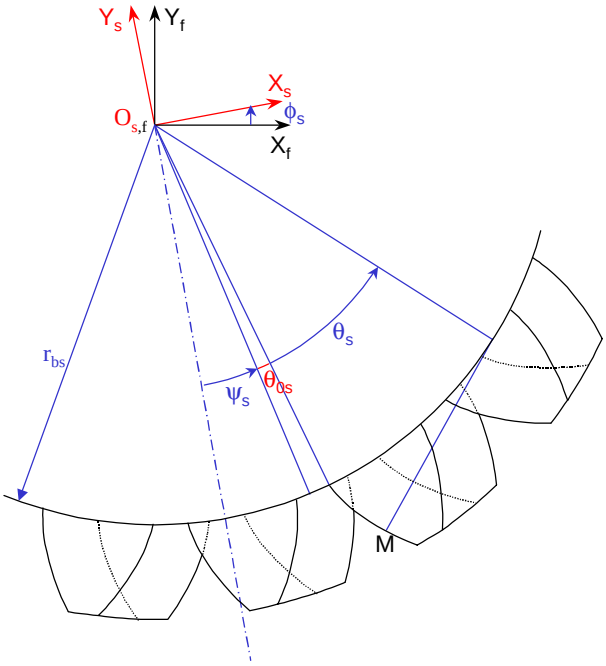


Figure 2.8 : Définition de la surface de l'outil

La surface de génération Σ_s est formée par la rotation de l'outil autour de son axe Z_s et peut être représentée dans le repère S_s par le vecteur suivant :

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{bs}\left[\sin(\theta_{0s}+\theta_s+\psi_s)-\theta_s\cos(\theta_{0s}+\theta_s+\psi_s)\right] \\ -r_{bs}\left[\cos(\theta_{0s}+\theta_s+\psi_s)+\theta_s\sin(\theta_{0s}+\theta_s+\psi_s)\right] \\ Z_s \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

où r_{bs} est le rayon de base de l'outil, r_s le rayon primitif et θ_s l'angle de position du point sur la développante (Fig. 2.8).

L'angle θ_{0s} est lié à l'épaisseur de base de la dent de l'outil et est déterminé par l'équation suivante (cf. Annexe A2.1.3) :

$$\theta_{0s} = \frac{\pi}{2N_s} - \mathrm{inv}\alpha_{ts} - \frac{2x_s \tan\alpha_{0s}}{N_s} \tag{2.9}$$

où N_s est le nombre de dents, α_{0s} l'angle de pression réel, α_{ts} l'angle de pression apparent et x_s le coefficient de déport de l'outil.

L'angle ψ_s est lié au pas d'hélice H_s et à Z_s (Fig. 2.9) :

$$\psi_s = \frac{2\pi}{H_s} Z_s \tag{2.10}$$

$$\text{avec } H_s = \frac{2\pi r_s}{\tan\beta_{ps}} \tag{2.11}$$

β_{ps} étant l'angle d'hélice au primitif.

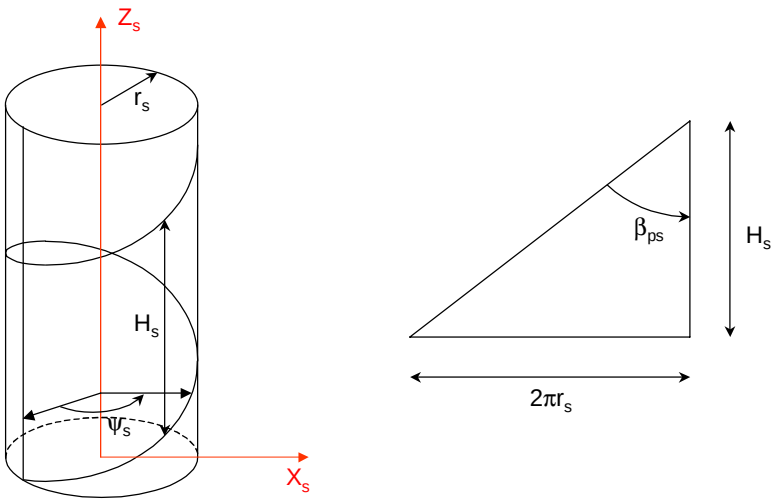


Figure 2.9 : Définition du pas d'hélice

NB : Règles de définition de l'outil :

- Pour un outil cylindrique droit, l'angle ψ_s est nul.
- Le profil gauche de l'outil (le profil droit d'une dent de la roue face) est obtenu avec des valeurs positives pour θ_s, θ_{0s} et ψ_s, le profil droit avec des valeurs négatives.
- Avec β_{ps} positif, l'hélice de l'outil est définie à droite et avec β_{ps} négatif, à gauche.

2.2.2 Tête de l'outil

Lors du processus de taillage, la tête de l'outil va générer la trochoïde de la dent de la roue face. Il est donc nécessaire de la définir également précisément.
Les premières modélisations d'engrenages face [81] ne définissent que des outils pointus, et donc des roues face dont la trochoïde est générée par un point unique. En pratique, la tête de l'outil peu être arrondie, et la trochoïde de la roue sera alors générée par un arc de cercle. Le cas d'arrondi d'outil n'a été développé ici que pour des outils cylindriques droits.

2.2.2.1 Outil pointu

Dans le cas d'un outil pointu, la tête de l'outil est définie par un point unique, repéré par une valeur fixe θ_{ms} du paramètre de développante θ_s (Fig. 2.10) :

$$\theta_{ms} = \pm \frac{\sqrt{r_{as}^2 - r_{bs}^2}}{r_{bs}} \tag{2.12}$$

où r_{as} est le rayon de tête de l'outil et r_{bs} le rayon de base.

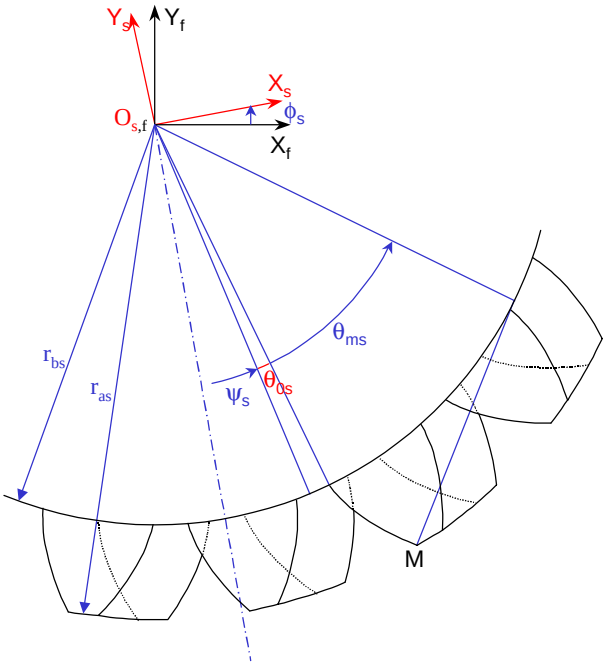


Figure 2.10: Définition de la tête d'un outil pointu

2.2.2.2 Outil arrondi

Dans le cas d'un outil arrondi, la tête de l'outil est définie par un arc de cercle qui est tangent à la développante et au cercle de tête (Fig. 2.11).
L'arrondi d'outil étant invariable suivant l'axe de l'outil et perpendiculaire à l'axe de l'outil, il convient de le définir dans une section quelconque de l'outil.

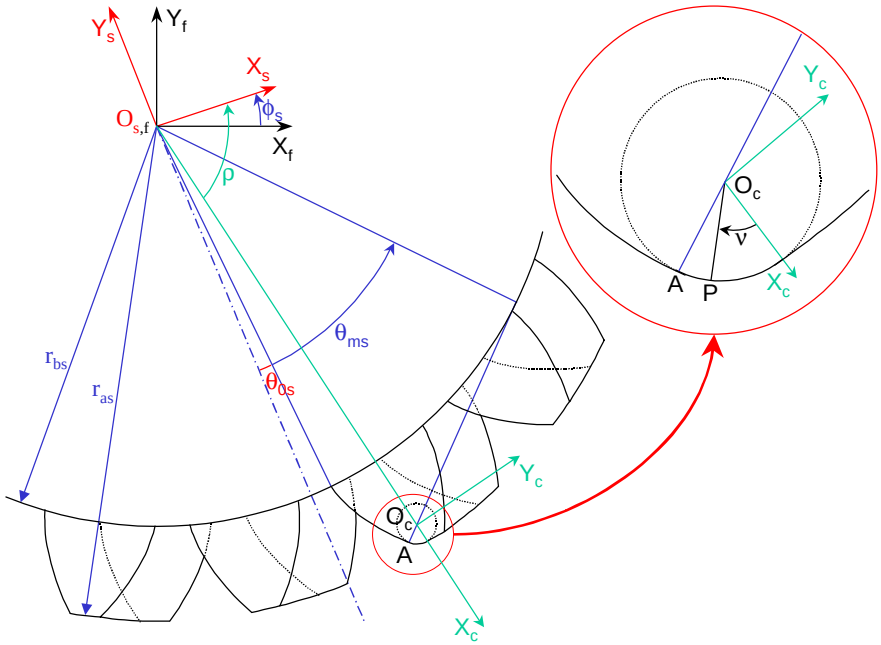


Figure 2.11 : Définition de la tête d'un outil arrondi

Pour définir un point P de l'arrondi d'outil, un nouveau repère S_c (O_c, X_c, Y_c) est utilisé. Ce repère est centré sur O_c qui est le centre du cercle d'arrondi d'outil, l'axe X_c formant un angle ρ avec X_s (Fig. 2.11).

Un point P sera défini dans S_c par :

$$\vec{r}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \cos\nu \\ r_p \sin\nu \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

où r_p est le rayon de pointe (ou rayon d'outil, $r_p = O_c P$) et ν l'angle de position de P sur l'arrondi.
Les coordonnées de P peuvent s'exprimer dans S_s, par le changement de repère suivant :

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\rho & -\sin\rho & X_{oc} \\ \sin\rho & \cos\rho & Y_{oc} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

où X_{oc} et Y_{oc} sont les coordonnées de O_c dans S_s (cf. Annexe A2.1.4).

2.3 Résolution du problème

2.3.1 Définition du profil de la roue face

Les points de définition de la roue face sont obtenus dans chaque section conique de rayon R, à intervalles réguliers par bouclage sur des valeurs fixées de α_1.

Le flanc actif et la trochoïde de la roue face sont définis séparément.

Afin d'obtenir une définition complète d'une roue face, il faut au préalable définir les valeurs de α_1 correspondantes à la tête (α_{1t}) et au pied (α_{1p}) de la roue face ainsi qu'à l'intersection trochoïde-développante (α_{1int}).

2.3.1.1 Génération du flanc actif

La combinaison des équations de changement de repères de S_s vers S_2 et les équations de définition des sections coniques ainsi que l'équation d'engrènement, permet d'obtenir un système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R(1+\alpha_2)\sin\alpha_1 \\ R(1+\alpha_2)\cos\alpha_1 \\ R\alpha_2 \tan(\gamma_s - \frac{\pi}{2}) + Z_{2a} \end{bmatrix} = [M_{s2}] \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \\ \vec{n}_s.\vec{V}_{s2} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

avec ϕ_s, θ_s, Z_s et α_2 comme inconnues.

La résolution de ce système par la méthode de Newton-Raphson (cf. Annexe A3.1) permet d'obtenir la définition d'un point du flanc actif de la roue face.

Le bouclage sur α_1 entre α_{1t} et α_{1int} permet d'obtenir la définition complète du flanc actif d'une section de la roue face.

2.3.1.2 Génération de la trochoïde

Pour la génération de la trochoïde, dans le cas d'un outil pointu, l'équation d'engrènement n'est plus vérifiée mais la valeur de θ_s est connue, c'est donc un système non linéaire de 3 équations à 3 inconnues qu'il faut résoudre :

$$\begin{bmatrix} R(1+\alpha_2)\sin\alpha_1 \\ R(1+\alpha_2)\cos\alpha_1 \\ R\alpha_2 \tan(\gamma_s - \frac{\pi}{2}) + Z_{2a} \end{bmatrix} = [M_{s2}] \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

avec ϕ_s, Z_s et α_2 comme inconnues.

Dans le cas d'un outil arrondi, la valeur de θ_s est toujours connue, mais l'équation d'engrènement est à nouveau satisfaite par les points de l'arrondi d'outil. Le système à résoudre est donc identique à celui du flanc actif (Eq. 2.15), mais les points de l'outil sont maintenant définis par l'équation 2.14.

La résolution de ces systèmes par la méthode de Newton-Raphson (cf. Annexe A3.1) permet d'obtenir la définition d'un point de la trochoïde de la roue face.

Le bouclage sur α_1 entre α_{1int} et α_{1p} permet d'obtenir la définition complète de la trochoïde d'une section de la roue face.

2.3.2 Définition des bornes de résolution

2.3.2.1 Tête de dent de la roue face

La tête de dent de la roue face est taillée par le premier point "utile" de développante en pied de l'outil, repéré par son rayon r_{devs}. Ce point peut être soit le point d'intersection trochoïde-développante de l'outil, soit un point situé légèrement au-dessus. Ce point est alors fonction du réglage de la machine de taillage et sera considéré comme connu.
La valeur Z_{2a} de Z_2 correspondante à la tête de dent de la roue face peut alors être déterminée analytiquement :

$$Z_{2a} = -\frac{R}{\tan(\pi - \gamma_s)} - \frac{r_{devs}}{\sin(\pi - \gamma_s)} \tag{2.17}$$

Si $Z_2 = Z_{2a}$, alors la valeur de α_2 est nulle (cf. Eq. 2.6).

Le système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues à résoudre est donc ici :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R\sin\alpha_1 \\ R\cos\alpha_1 \\ Z_{2a} \end{bmatrix} = [M_{s2}] \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \\ \vec{n}_s.\vec{V}_{s2} = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

avec ϕ_s, θ_s, Z_s et α_1 comme inconnues.

La résolution de ce système permet de définir dans chaque section le point de tête de la roue face et également d'obtenir la valeur α_{1t} de α_1 correspondante à la tête de dent de la roue face.

2.3.2.2 Pied de dent de la roue face

Le pied de dent de la roue face est taillé par le point de tête de l'outil dans une position particulière de celui-ci.
La position de l'outil correspond à l'enfoncement extrême du point de tête. Cette position est caractérisée par l'équation suivante :

$$Y_s = -r_{as}\cos\phi_s \tag{2.19}$$

En tête de dent de l'outil, la valeur de θ_s est connue, le système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues à résoudre est donc ici :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R(1+\alpha_2)\sin\alpha_1 \\ R(1+\alpha_2)\cos\alpha_1 \\ R\alpha_2\tan(\gamma_s - \frac{\pi}{2}) + Z_{2a} \end{bmatrix} = [M_{s2}] \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \\ Y_s = -r_{as}\cos\phi_s \end{cases} \tag{2.20}$$

avec ϕ_s, Z_s, α_1 et α_2 comme inconnues.

La résolution de ce système permet de définir dans chaque section le point de pied de la roue face et également d'obtenir la valeur α_{1p} de α_1 correspondante au pied de dent de la roue face.

2.3.2.3 Intersection trochoïde-développante de la roue face

Le point d'intersection trochoïde-développante de la roue face se caractérise par le fait qu'il appartient à la fois au flanc actif et à la trochoïde.
La valeur de θ_s en ce point est donc connue. De plus l'équation d'engrènement doit être vérifiée.

Le système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues à résoudre est donc ici :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R(1+\alpha_2)\sin\alpha_1 \\ R(1+\alpha_2)\cos\alpha_1 \\ R\alpha_2 \tan(\gamma_s - \frac{\pi}{2}) + Z_{2a} \end{bmatrix} = [M_{s2}] \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \\ \vec{n}_s.\vec{V}_{s2} = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

avec ϕ_s, Z_s, α_1 et α_2 comme inconnues.

La résolution de ce système permet de définir dans chaque section le point d'intersection trochoïde-développante de la roue face et également d'obtenir la valeur α_{1int} de α_1 correspondante à l'intersection trochoïde-développante de la roue face.

2.4 Prise en compte des phénomènes de pointe et d'interférence de taillage

La largeur de denture théorique des engrenages face est limitée physiquement au rayon extérieur et au rayon intérieur par deux phénomènes distincts : la pointe en tête de dent et les interférences de taillage en pied de dent.

2.4.1 Pointe

Le phénomène de pointe apparaît lorsque l'épaisseur en tête de dent de la roue face devient nulle au rayon extérieur.
Le rayon de pointe est déterminé numériquement en comparant les coordonnées X_{2g} et X_{2d} des points de tête gauche et droite de la roue face.

En pratique, des engrenages face dont la largeur de denture se termine au rayon de pointe ne seront pas conçus car le risque de rupture à cet endroit est évidemment trop important. Il peut par contre être utile de déterminer le rayon pour lequel une épaisseur de tête minimale sera atteinte.
Ce rayon se détermine aisément en recherchant les points de la roue qui vérifient :

$$\left| X_{2g} - X_{2d} \right| = a \tag{2.22}$$

où a est l'épaisseur minimale de tête requise.

2.4.2 Interférences de taillage

Au rayon intérieur de la roue, peut apparaître le phénomène d'interférences de taillage. Lorsqu'il y a interférences de taillage, le flanc actif et la trochoïde ne sont plus tangents au point d'intersection. Une discontinuité apparaît alors sur la surface de la dent. Le pied de dent est ainsi "creusé".
D'ordinaire, le concepteur d'engrenages essaie d'éviter ce phénomène, mais il peut arriver que certaines contraintes extérieures à l'engrenage lui-même (diamètre d'arbre, carter, ….) oblige à concevoir un engrenage face avec un rayon intérieur inférieur au rayon théorique d'interférence de taillage. Il devient alors nécessaire de connaître ce rayon théorique d'interférences de taillage.

L'intersection trochoïde-développante vérifiant les équations 2.21 est située au point A (Fig. 2.12 a). Dans le cas d'interférences de taillage, l'intersection réelle est située en B (Fig. 2.12 b), plus haut sur la dent.

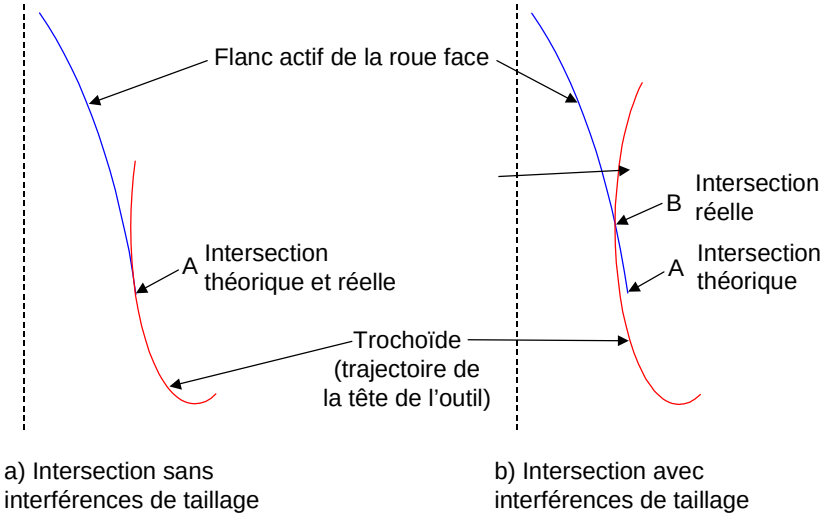


Figure 2.12 : Intersection trochoïde-développante, avec et sans interférences de taillage

Litvin propose une méthode analytique [84] pour déterminer le rayon théorique d'interférences de taillage dans le cas d'engrenages face "simples". Ici, avec les différents paramètres pris en compte, notamment les erreurs de taillage, le développement des équations analytiques devient quasiment impossible. Une détermination numérique du rayon d'interférence de taillage est utilisée ici.

En pratique, le rayon théorique de début d'interférence de taillage ne peut donc pas être déterminé facilement directement. Par contre il est possible de savoir si dans une section située à un rayon donné, il y a ou pas interférences de taillage. Il est ensuite facile de déterminer à partir de quel rayon le phénomène d'interférences de taillage apparaît.
Pour savoir si une section considérée est située avant ou après le rayon d'interférence de taillage, il suffit de déterminer le point A en utilisant uniquement les équations caractérisant le flanc actif de la roue face (système 2.15), puis de vérifier s'il a été effectivement taillé par la tête de l'outil ($\theta_s = \theta_{ms}$).

3 Simulation de la cinématique à vide

La simulation de la cinématique à vide permet de déterminer à vide les zones de contact lors d'un engrènement entre une roue face et un pignon cylindrique.

Cette simulation est basée sur les propriétés du contact entre deux surfaces définies analytiquement. Comme la simulation du taillage de la roue face, cette simulation repose sur les méthodes développées par Litvin [19].

Les propriétés mathématiques du contact entre les deux surfaces de la roue et du pignon, ainsi que les caractéristiques de leur positionnement relatif permettent de définir les points ou lignes de contact entre le pignon et la roue selon la configuration.
En effet, si le pignon utilisé a un nombre de dents inférieur à celui de l'outil de taillage de la roue face, le type de contact à vide sera ponctuel.
Par contre si le pignon et l'outil ont le même nombre de dents, le type de contact à vide sera linéaire.

Bien que basés sur la même théorie, deux modèles distincts ont dû être développés pour chaque type de contact.

3.1 Définition de l'engrènement

La simulation de la cinématique à vide est effectuée sur un engrènement complet d'une dent, soit entre l'instant où elle entre dans le contact jusqu'à l'instant où elle en sort.

Les simulations existantes (Litvin [83]) ne prennent en compte qu'une seule paire de dents en contact. Pour pouvoir étudier par la suite la répartition des charges sur plusieurs dents potentiellement en contact simultanément, il est nécessaire d'effectuer la simulation de la cinématique à vide sur plusieurs dents simultanément.

Le rapport de conduite des engrenages face étant généralement inférieur à 3, la simulation de la cinématique à vide prend en compte deux dents précédant et deux dents suivant la dent étudiée.
La simulation est donc effectuée sur 5 dents pouvant être en contact simultanément.

La cinématique à vide est étudiée en quasi-statique, il est donc nécessaire de définir des positions cinématiques repérées par l'angle de rotation de la roue face ϕ'_2 entre le début et la fin de l'engrènement de la dent centrale.
Le début de l'engrènement est repéré par l'angle ϕ'_{2i} et la fin de l'engrènement par l'angle ϕ'_{2f} (Fig. 2.13 et 2.14).

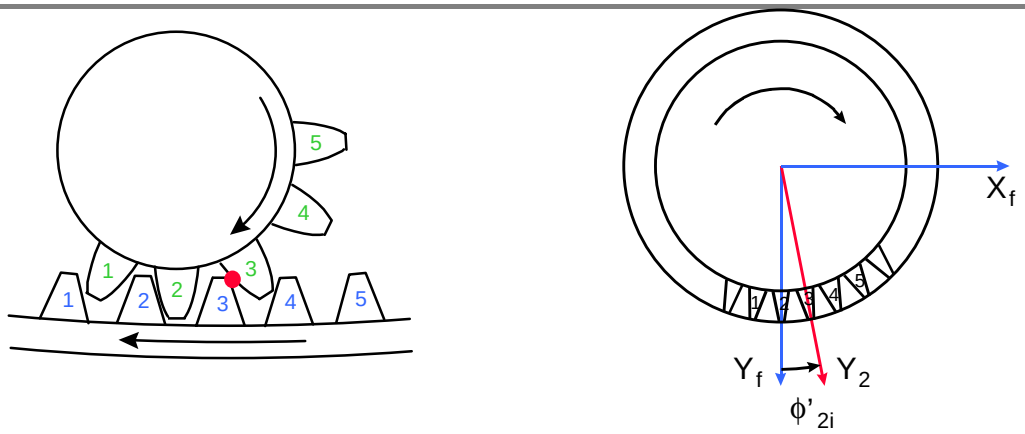


Figure 2.13 : Définition de la première position cinématique

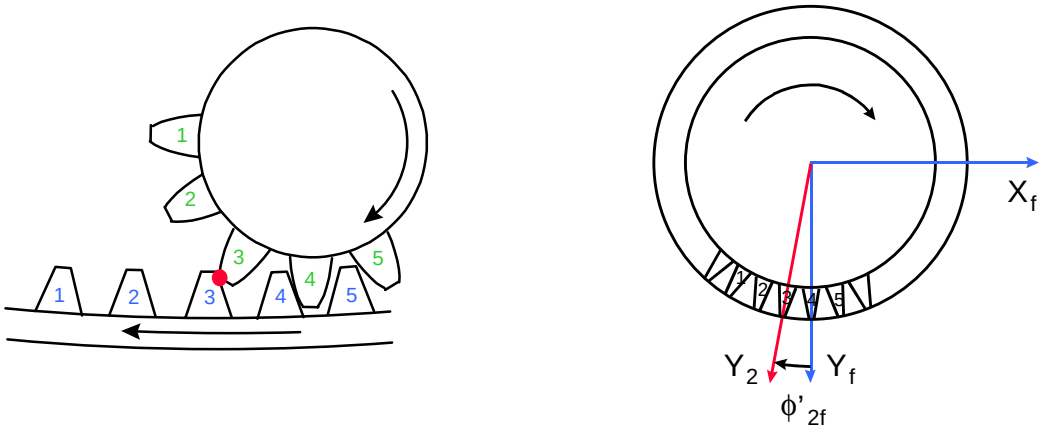


Figure 2.14 : Définition de la dernière position cinématique

Pour N positions cinématiques à étudier le pas d'engrènement est défini par :

$$\frac{\phi'_{2f} - \phi'_{2i}}{N-1} \tag{2.23}$$

NB : Dans cette simulation, le pignon cylindrique est toujours considéré comme organe moteur.

3.2 Définition des zones de contact

3.2.1 Positionnement relatif du pignon et de la roue

Les paramètres utilisés pour la simulation de la cinématique à vide sont des paramètres géométriques qui définissent les positions relatives du pignon et de la roue.
Les paramètres de base ont, comme pour la simulation du taillage, été définis par Litvin [83].

3.2.1.1 Systèmes de coordonnées de base

Lors de l'engrènement, les surfaces du pignon Σ_1 et de la roue Σ_2 sont liées à deux repères S_1 (O_1,X_1,Y_1,Z_1) et S_2 (O_2,X_2,Y_2,Z_2). Ces systèmes sont en rotation autour de leurs axes respectifs Z_1 et Z_2 avec les vitesses angulaires ω_1 et ω_2. Ils sont définis par rapport au système fixe S_f (O_f, X_f, Y_f, Z_f) défini pour la simulation du taillage et lié à la machine-outil.
La roue face étant toujours définie par son outil de taillage, le repère S_2 est également identique à celui utilisé pour générer la géométrie de la roue face.
Les rotations de S_1 et S_2 sont définies par les angles ϕ'_1 et ϕ'_2.
Les axes du pignon et de la roue sont décalés d'une distance C_1 correspondant à l'offset et forment un angle de tête γ_1 (Fig. 2.15 et 2.16).

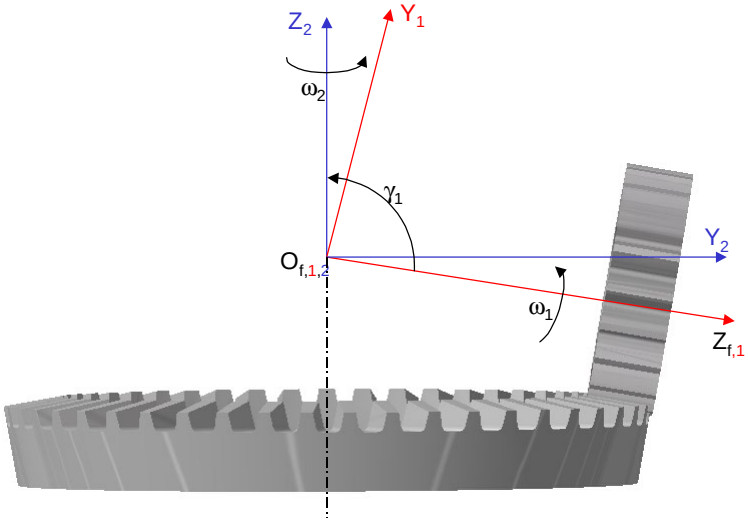


Figure 2.15 : Systèmes de coordonnées utilisés lors de l'assemblage (1)

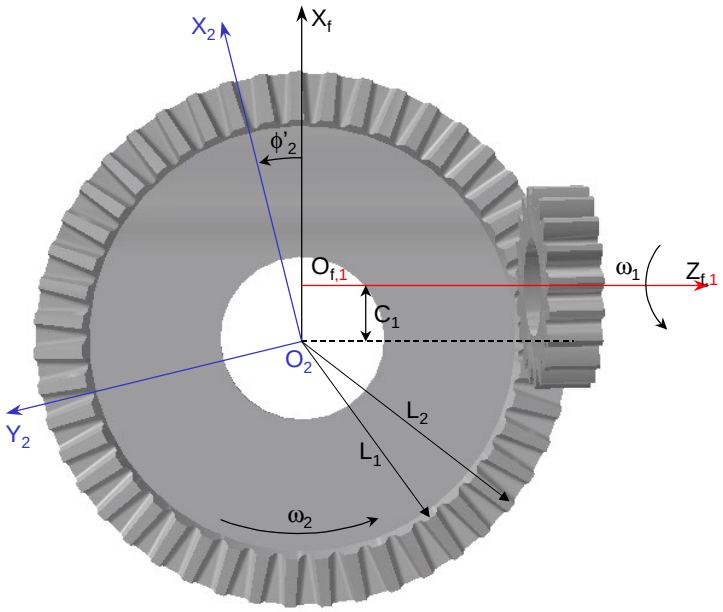


Figure 2.16 : Systèmes de coordonnées utilisés lors de l'assemblage (2)

La simulation cinématique étant effectuée sur 5 dents, il faut également définir les rotations pour passer de la dent de définition aux autres dents.
Pour la roue cette rotation est définie par l'angle :

$\rho_2 = -\frac{4\pi}{N_2}$, $\rho_2 = -\frac{2\pi}{N_2}$, $\rho_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ et $\rho_2 = \frac{4\pi}{N_2}$ respectivement pour les dents 1, 2, 4 et 5,

N_2 étant le nombre de dents de la roue face.

Pour le pignon cette rotation est définie par l'angle :

$\rho_1 = -\frac{4\pi}{N_1}$, $\rho_1 = -\frac{2\pi}{N_1}$, $\rho_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ et $\rho_1 = \frac{4\pi}{N_1}$ respectivement pour les dents 1, 2, 4 et 5.

Où N_1 est le nombre de dents du pignon.

La matrice de passage du repère S_2 au repère S_f s'exprime alors :

$$[M_{2f}] = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\cos\phi_2^{'}\cos\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\sin\rho_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\phi_2^{'}\cos\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\sin\rho_2\end{matrix} & 0 & -C_1 \\ \begin{matrix}-\cos\phi_2^{'}\sin\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\cos\rho_2\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\phi_2^{'}\sin\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\cos\rho_2\end{matrix} & \sin\gamma_1 & A \\ -\sin\gamma_1\sin\phi_2^{'} & -\sin\gamma_1\cos\phi_2^{'} & \cos\gamma_1 & -A/\tan\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Et la matrice de passage du repère S_1 au repère S_f :

$$[M_{1f}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_1^{'}\cos\rho_1 + \sin\phi_1^{'}\sin\rho_1 & -\sin\phi_1^{'}\cos\rho_1 + \cos\phi_1^{'}\sin\rho_1 & 0 & 0 \\ -\cos\phi_1^{'}\sin\rho_1 + \sin\phi_1^{'}\cos\rho_1 & \sin\phi_1^{'}\sin\rho_1 + \cos\phi_1^{'}\cos\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Pour pouvoir définir complètement les positions relatives du pignon et de la roue face il devient alors nécessaire de définir la position relative du pignon et de l'outil (Fig. 2.17).

La position radiale relative du pignon et de la roue est définie par défaut comme la différence A des rayons primitifs du pignon et de l'outil de taillage.
Lorsque le nombre de dents du pignon et de l'outil est le même, $A = 0$, dans les autres cas, $A = r_s - r_1$ (Litvin [21]), où r_s et r_1 sont les rayons primitifs de l'outils et du pignon.

En ce qui concerne la position axiale, les simulations existantes (Litvin [83]) considèrent un pignon de longueur infinie. Ici, le pignon a une largeur de denture donnée et il est supposé que le milieu d'une dent du pignon correspond au milieu d'une dent de la roue face.

Les valeurs extrêmes de Z_1 seront alors définies par :

$$Z_{1\min} = \frac{(L_1 + L_2)}{2\sin\gamma_1} - \frac{(r_{devs} + A)}{\tan\gamma_s} - \frac{b}{2} \tag{2.26}$$

et

$$Z_{1\max} = \frac{(L_1 + L_2)}{2\sin\gamma_1} - \frac{(r_{devs} + A)}{\tan\gamma_s} + \frac{b}{2} \tag{2.27}$$

avec L_1 rayon intérieur, L_2 rayon extérieur de la roue face et b largeur de denture du pignon

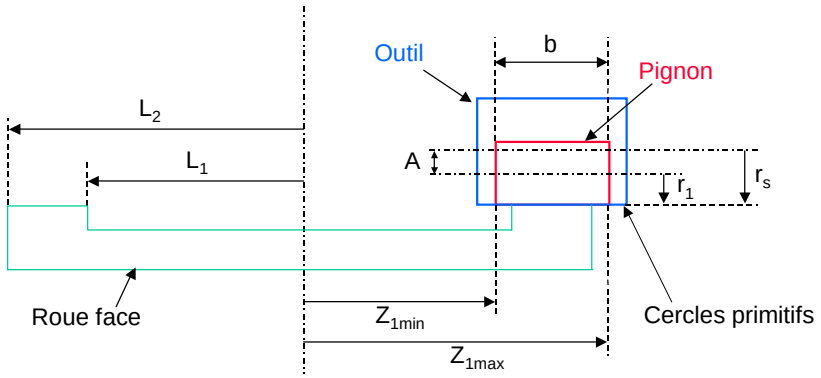


Figure 2.17 : Positions relatives du pignon et de l'outil

2.1.1.2 Erreurs de montage prises en compte

Lors de la simulation de l'engrènement, 5 erreurs de montage peuvent être prises en compte (Fig. 2.18 et 2.19) :

- Déplacement radial du pignon : δE_1
- Déplacement angulaire du pignon : $\delta\alpha_1$
- Déplacement axial du pignon : δr_1
- Déplacement axial de la roue face : δq_1
- Déplacement angulaire de la roue face : $\delta\gamma_1$

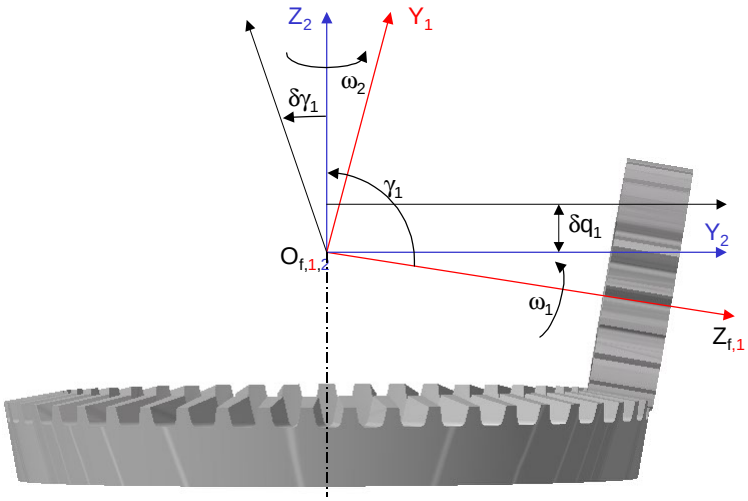


Figure 2.18 : Erreurs de montage prises en compte (1)

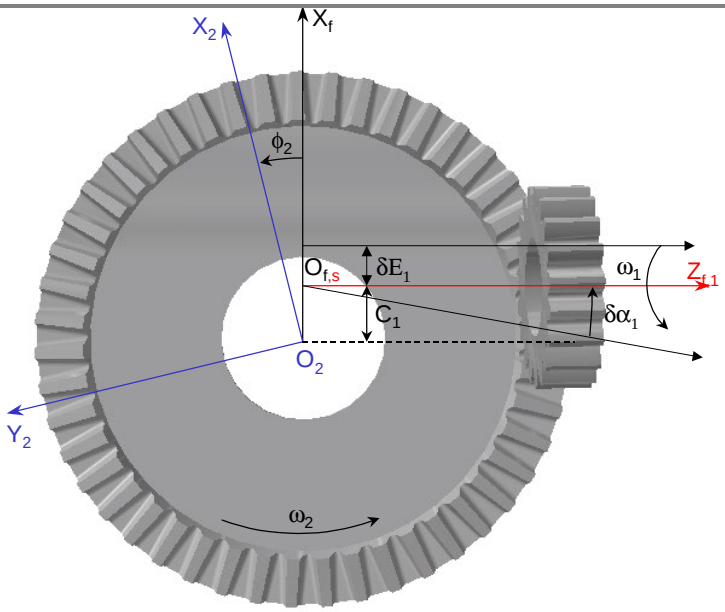


Figure 2.19 : Erreurs de montage prises en compte (2)

Les erreurs de montage sont prises en compte de différentes façons :

Soit directement dans la valeur de certains paramètres :

$$C_1 = C_1 + \delta E_1 \tag{2.28}$$

$$\gamma_1 = \gamma_1 + \delta\gamma_1 \tag{2.29}$$

Soit dans la matrice de passage du repère S_1 au repère S_f :

$$[M_{1f}] = \begin{bmatrix} (\cos\phi_1^{'}\cos\rho_1 + \sin\phi_1^{'}\sin\rho_1)\cos\delta\alpha_1 & (-\sin\phi_1^{'}\cos\rho_1 + \cos\phi_1^{'}\sin\rho_1)\cos\delta\alpha_1 & \sin\delta\alpha_1 & 0 \\ -\cos\phi_1^{'}\sin\rho_1 + \sin\phi_1^{'}\cos\rho_1 & \sin\phi_1^{'}\sin\rho_1 + \cos\phi_1^{'}\cos\rho_1 & 0 & 0 \\ (\cos\phi_1^{'}\cos\rho_1 + \sin\phi_1^{'}\sin\rho_1)\sin\delta\alpha_1 & -(-\sin\phi_1^{'}\cos\rho_1 + \cos\phi_1^{'}\sin\rho_1)\sin\delta\alpha_1 & \cos\delta\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Soit dans la matrice de passage du repère S_2 au repère S_f qui s'exprime alors :

$$[M_{2f}] = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\cos\phi_2^{'}\cos\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\sin\rho_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\phi_2^{'}\cos\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\sin\rho_2\end{matrix} & 0 & -C_1 \\ \begin{matrix}-\cos\phi_2^{'}\sin\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\cos\rho_2\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\phi_2^{'}\sin\rho_2 \\ +\cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\cos\rho_2\end{matrix} & \sin\gamma_1 & A - \delta q_1\sin\gamma_1 \\ -\sin\gamma_1\sin\phi_2^{'} & -\sin\gamma_1\cos\phi_2^{'} & \cos\gamma_1 & -A/\tan\gamma_1 - \delta q_1\cos\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Soit dans les valeurs extrêmes de Z_1 qui deviennent :

$$Z_{1\min} = \frac{(L_1 + L_2)}{2\sin\gamma_1} - \frac{(r_{devs} + A)}{\tan\gamma_s} - \frac{b}{2} + \delta r_1 \tag{2.32}$$

et

$$Z_{1\max} = \frac{(L_1 + L_2)}{2\sin\gamma_1} - \frac{(r_{devs} + A)}{\tan\gamma_s} + \frac{b}{2} + \delta r_1 \tag{2.33}$$

Deux erreurs peuvent également être prises en compte pour le pignon :

- Erreur d'angle d'hélice (microns) : $\delta\beta_1$
- Erreur de pas individuelle sur chaque dent (microns) : δp_i

Ces deux erreurs sont définies classiquement relativement au rayon primitif du pignon et sont rajoutées directement dans la valeur de l'angle d'hélice et de l'angle de rotation pour passer d'une dent à l'autre :

$$\beta_1 = \beta_1 + \delta\beta_1 / r_1 \tag{2.34}$$

$$\rho_i = \rho_i + \delta p_i / r_1 \tag{2.35}$$

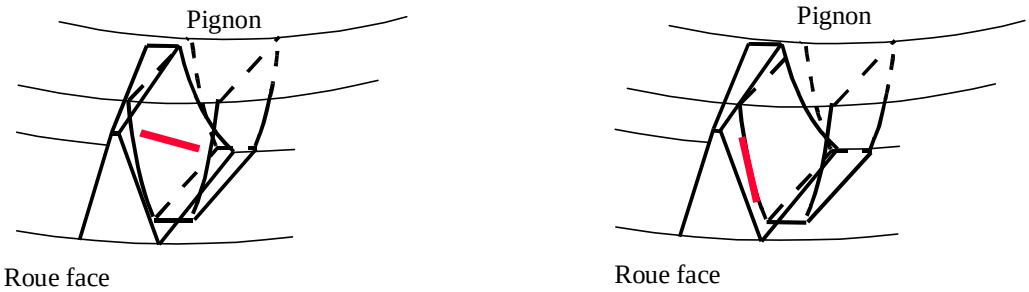
Il est considéré ici que la roue face n'a pas d'erreur d'hélice ni d'erreur de pas individuelle.

3.2.2 Définition mathématique du contact

Quel que soit le type de contact (ponctuel ou linéaire), il faut considérer deux cas de contact entre le pignon et la roue :

- Contact entre deux surfaces lorsque les deux surfaces sont tangentes au contact (Fig. 2.20 a),

- Contact entre une surface et une courbe lorsque les deux surfaces ne sont pas forcément tangentes, lorsque le contact est situé par exemple en tête ou en bord de dent (Fig. 2.20 b).



a) Contact entre deux surfaces *b) Contact entre une surface et une courbe*

Figure 2.20 : Différents cas de contact

3.2.2.1 Contact entre deux surfaces

Lorsque deux surfaces sont en contact, celles-ci sont tangentes au point de contact. Le point de contact doit donc avoir les mêmes coordonnées et les mêmes normales unitaires dans les systèmes de coordonnées respectifs des deux surfaces (Litvin [22]), soit :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

et

$$\begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{z2} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Le vecteur normal unitaire étant défini pour la roue face ou le pignon par :

$$\begin{bmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{xi} / \|N_i\| \\ N_{yi} / \|N_i\| \\ N_{zi} / \|N_i\| \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Les vecteurs unitaires étant normés, l'équation (2.37) ne traduit que 2 relations indépendantes. Le contact entre deux surfaces tangentes est alors défini par 5 relations indépendantes.

3.2.2.2 Contact entre une surface et une courbe

Lors d'un contact entre une surface et une courbe, un point de contact doit toujours avoir les mêmes coordonnées dans les systèmes de coordonnées respectifs des deux surfaces. L'équation (2.36) doit donc toujours être vérifiée en un point de contact.

Par contre, il est impossible de définir une normale unique à une courbe, l'équation (2.37) n'a donc plus raison d'être.

La surface du pignon dépendant de 2 paramètres θ_1 et Z_1 (ou u_1 et v_1, cf. § 3.3.1), les bords et la tête de dent du pignon sont caractérisés par une valeur constante de l'un de ces 2 paramètres :

- θ_1 (ou u_1) est constant en tête de dent,
- Z_1 (ou v_1) est constant en bord de dent.

Au point de contact entre un bord ou la tête du pignon et la surface de la roue, le vecteur unitaire normal de la surface et les dérivées de la courbe (selon le paramètre non constant) vérifient alors les relations suivantes : (Litvin [22]).

Contact en bord de dent du pignon : Z_1 est constant

$$\frac{\partial X_1}{\partial \theta_1} n_{x2} + \frac{\partial Y_1}{\partial \theta_1} n_{y2} + \frac{\partial Z_1}{\partial \theta_1} n_{z2} = 0 \tag{2.39}$$

Contact en tête de dent du pignon : θ_1 est constant

$$\frac{\partial X_1}{\partial Z_1} n_{x2} + \frac{\partial Y_1}{\partial Z_1} n_{y2} + \frac{\partial Z_1}{\partial Z_1} n_{z2} = 0 \tag{2.40}$$

Pour un contact en bord ou en tête de dent de la roue face, il est possible d'obtenir le même type de relations en considérant un contact fictif entre les surfaces du pignon et de l'outil de taillage de la roue face.

Contact en bord de dent de l'outil (bord dent de la roue) : Z_s est constant

$$\frac{\partial X_2}{\partial \theta_s} n_{x1} + \frac{\partial Y_2}{\partial \theta_s} n_{y1} + \frac{\partial Z_2}{\partial \theta_s} n_{z1} = 0 \tag{2.41}$$

Contact en pied de dent de l'outil (tête la roue) : θ_s est constant

$$\frac{\partial X_2}{\partial Z_s} n_{x1} + \frac{\partial Y_2}{\partial Z_s} n_{y1} + \frac{\partial Z_2}{\partial Z_s} n_{z1} = 0 \tag{2.42}$$

Le contact entre une surface et une courbe est donc globalement défini par 4 relations indépendantes.

3.3 Définition du pignon

Lors de l'engrènement avec la roue face, seule la surface active du pignon participe au contact. Il n'est donc pas nécessaire de définir ici la trochoïde du pignon. Seul le flanc actif sera généré.

3.3.1 Pignon non corrigé

Sans correction de denture, le pignon est un pignon cylindrique, droit ou hélicoïdal, défini classiquement à partir des équations paramétriques de la développante de cercle (Litvin [22]).
Sa définition étant similaire à la définition de l'outil de taillage de la roue face (Cf. § 2.2), uniquement les résultats principaux sont rappelés ici.

Le profil du pignon projeté dans son plan apparent est une développante de cercle. Les points M du pignon (surface Σ_1) sont définis dans S_1 avec Y_1 comme axe de symétrie entre deux dents (Fig. 2.21).

La surface du pignon Σ_1 est formée par la rotation du pignon autour de son axe Z_1 et peut être représentée dans le repère S_1 par le vecteur suivant :

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{b1}\left[\sin(\theta_{01}+\theta_1+\psi_1)-\theta_1\cos(\theta_{01}+\theta_1+\psi_1)\right] \\ -r_{b1}\left[\cos(\theta_{01}+\theta_1+\psi_1)+\theta_1\sin(\theta_{01}+\theta_1+\psi_1)\right] \\ Z_1 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

où r_{b1} est le rayon de base du pignon, r_1 le rayon primitif et θ_1 l'angle de position du point sur la développante.

L'angle θ_{01} est défini de manière identique à l'outil de taillage et est déterminé par l'équation suivante (cf. Annexe A2.1.3) :

$$\theta_{01} = \frac{\pi}{2N_1} - \operatorname{inv}\alpha_{t1} - \frac{2x_1\tan\alpha_{01}}{N_1} \tag{2.44}$$

où N_1 est le nombre de dents, α_{01} l'angle de pression réel, α_{t1} l'angle de pression apparent et x_1 le coefficient de déport du pignon.

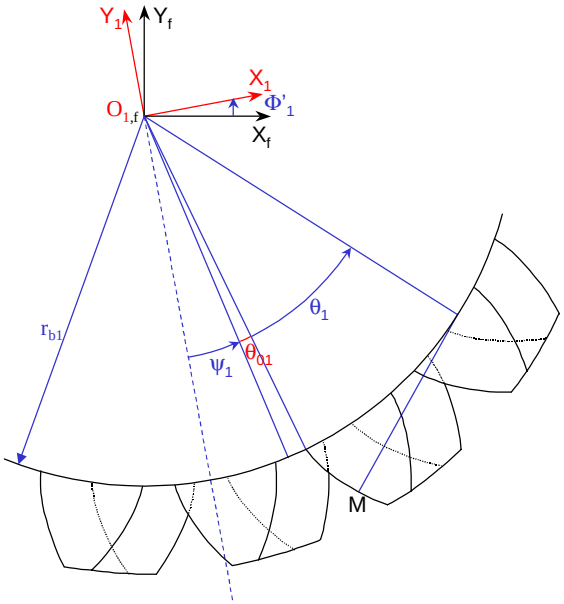


Figure 2.21 : Définition de la surface du pignon

L'angle ψ_1 est lié au pas d'hélice H_1 et à Z_1 :

$$\psi_1 = \frac{2\pi}{H_1} Z_1 \tag{2.45}$$

avec $H_1 = \dfrac{2\pi\, r_1}{\tan \beta_{p1}}$, β_{p1} étant l'angle d'hélice au primitif. (2.46)

Le vecteur unitaire normal du pignon est défini de manière identique à celui de l'outil (cf. Annexe A.1.2).

La tête de dent du pignon est définie par un point unique, repéré par une valeur fixe θ_{m1} du paramètre de développante θ_1 :

$$\theta_{m1} = \pm \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{r_{b1}} \tag{2.47}$$

L'intersection trochoïde-développante est caractérisée par un rayon r_{dev1}, qui est ici une donnée d'entrée. Mais elle peut également être définie par une valeur particulière θ_{min1} de θ_1 :

$$\theta_{\min 1} = \pm \frac{\sqrt{r_{dev1}^2 - r_{b1}^2}}{r_{b1}} \tag{2.48}$$

NB : Les règles de définition du pignon sont identiques à celles de l'outil :

- Pour un pignon cylindrique droit, l'angle ψ_1 est nul.
- Le profil gauche du pignon est obtenu avec des valeurs positives pour θ_1, θ_{01} et ψ_1, le profil droit avec des valeurs négatives.
- Avec β_{p1} positif, l'hélice du pignon est définie à droite et avec β_{p1} négatif, à gauche.

3.3.2 Pignon corrigé

Pour compenser les déformations dues aux efforts ainsi que les possibles erreurs de montages et obtenir un meilleur engrènement, il est souvent utile de corriger la surface de denture du pignon.

Les corrections de dentures ont une définition particulière et ne sont appliquées que sur des parties précises de la surface de denture. Il s'avère donc impossible d'obtenir directement une équation simple de la surface d'un pignon corrigé. La surface d'un pignon corrigé ne peut être définie simplement que numériquement.
Néanmoins, il est nécessaire d'avoir une représentation paramétrique de cette surface afin de pouvoir appliquer la méthode définie précédemment et simuler l'engrènement d'un pignon corrigé avec une roue face.
Il faudra donc générer la géométrie du pignon dans des sections définies, puis interpoler cette surface de façon à en obtenir une représentation paramétrique à 2 paramètres.

La génération d'un pignon corrigé hélicoïdal est basée sur celle d'un pignon corrigé droit. En effet, le profil hélicoïdal étant un profil droit dans le plan apparent et les corrections de denture étant également définies dans le plan apparent, il suffit de définir un pignon droit, puis d'appliquer une rotation fonction du pas d'hélice au profil afin d'obtenir un pignon hélicoïdal.

3.3.2.1 Types de corrections prises en comptes

Les corrections effectuées sur la surface de denture du pignon correspondent à une déviation du profil de la dent par rapport au profil théorique et peuvent être appliquées en pied de dent, en tête de dent, sur toute ou sur une partie seulement de la largeur denture.

Les corrections sont classées en deux catégories principales (Fig. 2.22) :

- Corrections de profil : le profil selon la hauteur de dent est dévié du profil théorique en développante de cercle.
- Corrections de bombé : le profil selon la largeur de dent théoriquement rectiligne est remplacé par un profil circulaire.

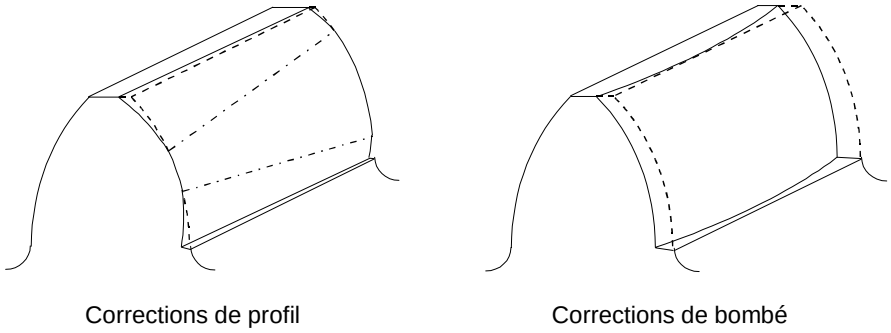


Figure 2.22 : Corrections de profil et de bombé

3.3.2.1.1 Définition de la droite d'action

Pour des engrenages cylindriques, les corrections de denture se définissent classiquement de 2 manières différentes : soit directement sur le profil, soit sur la droite d'action.

Lors de l'engrènement d'un pignon cylindrique avec une roue face, il n'existe pas de droite d'action. Il est donc préférable de définir les corrections directement sur le profil du pignon. Néanmoins, le calcul précis des profondeurs de corrections à prendre en compte aux différents points de définition du profil du pignon nécessite obligatoirement la définition d'une droite d'action, puisque l'équation de la droite ou de la parabole définissant la correction n'existe que sur une droite d'action (cf. § 3.3.2.2).

Il faut donc définir une droite d'action propre au pignon. Pour définir les corrections de denture, seules les longueurs issues de la droite d'action sont nécessaires. Son orientation n'a pas d'importance, il est donc possible de construire cette droite d'action en se basant sur la définition classique d'une droite d'action d'un engrenage cylindrique (Fig. 2.23).

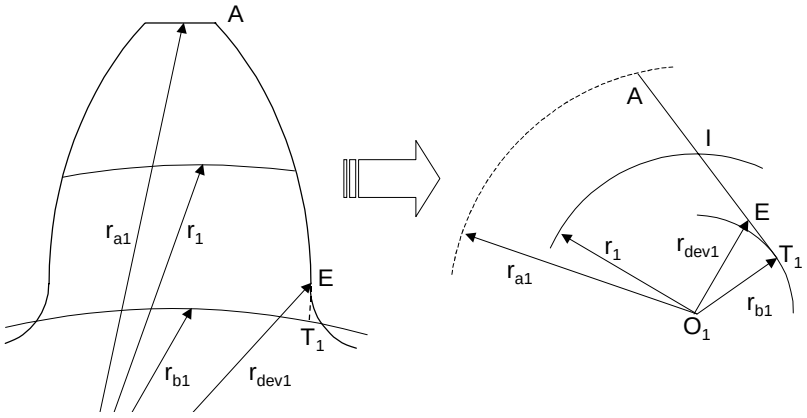


Figure 2.23 : Droite d'action du pignon

Cette droite d'action est tangente au cercle de base du pignon en T_1 et passe par le point I au primitif. Les points permettant de définir les corrections de denture sont les points A et E. Le point A est l'intersection de la droite d'action avec le cercle de tête, et le point E est l'intersection trochoïde-développante.

Les longueurs utiles de la droite d'action seront alors définies par :

$$T_1E = \sqrt{r_{dev1}^2 - r_{b1}^2} \tag{2.49}$$

$$T_1I = \sqrt{r_1^2 - r_{b1}^2} \tag{2.50}$$

$$T_1A = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \tag{2.51}$$

où r_{b1} est le rayon de base du pignon, r_1 le rayon primitif, r_{a1} le rayon de tête et r_{dev1} le rayon d'intersection trochoïde-développante.

3.3.2.1.2 Paramétrage des corrections de denture

Corrections de profil

Les corrections de profil sont définies en général par une profondeur de correction normale au profil et une longueur de correction. La profondeur et la longueur de correction peuvent varier linéairement selon la largeur de denture et ne couvrent pas forcément toute la largeur de denture. Les corrections sont ici définies à partir de la face "avant" du pignon qui correspond au rayon intérieur de la roue face.

Les corrections sont définies à partir d'une distance Dk sur une largeur Ek inférieure ou égale à la largeur de denture (Fig. 2.24). Ainsi, chaque correction nécessite un paramètre de profondeur et un paramètre de longueur, en Dk et en Ek.

Les corrections seront donc définies par les paramètres suivants (Fig. 2.24) :

- Dka : début de la correction en tête sur la largeur de denture
- Eka : largeur de la correction en tête
- lca_1 (LCA_1) : longueur de la correction de tête en Dka
- ca_1 (CA_1) : profondeur de la correction de tête en Dka
- lca_2 (LCA_2) : longueur de la correction de tête en Eka
- ca_2 (CA_2) : profondeur de la correction de tête en Eka

- Dkf : début de la correction en pied sur la largeur de denture
- Ekf : largeur de la correction en pied
- lcf_1 (LCF_1): longueur de la correction de pied en Dkf
- cf_1 (CF_1) : profondeur de la correction de pied en Dkf
- lcf_2 (LCF_2) : longueur de la correction de pied en Ekf
- cf_2 (CF_2) : profondeur de la correction de pied en Ekf

NB 1 : les notations de profondeur et longueur de corrections en minuscule correspondent aux corrections données sur la pseudo droite d'action, en majuscule sur le profil.

NB 2 : lorsque la correction de profil couvre toute la large de denture, le paramètre Dka (ou Dkf) est nécessairement nul, et le paramètre Eka (ou Ekf) sera alors égal à la largeur de denture du pignon. Lorsque la correction ne couvre pas toute la largeur de denture, le début ou la fin de la correction doit être tangent au profil initial, et certains paramètres de définition sont alors nécessairement nuls.

La forme des corrections ainsi définies pourra être de deux types (Fig. 2.25) :

- Linéaire : la déviation du profil par rapport au profil théorique évolue de façon linéaire par rapport à la pseudo droite d'action.

- Parabolique : la déviation du profil par rapport au profil théorique évolue de façon parabolique par rapport à la pseudo droite d'action.

Sur les figures 2.24 et 2.25, différentes possibilités de corrections sont représentées. Sur la figure 2.24, la correction de tête commence en Dka et se termine sur la face arrière du pignon (LCA_1 et CA_1 sont alors nuls). La correction de pied couvre toute la largeur de denture (Dkf est alors nul).
Sur la figure 2.25, la correction de tête est parabolique et couvre toute la largeur de denture (Dka est alors nul). La correction de pied est linéaire, commence sur la face avant et se termine en Ekf (Dkf, lcf_2 et cf_2 sont alors nuls).

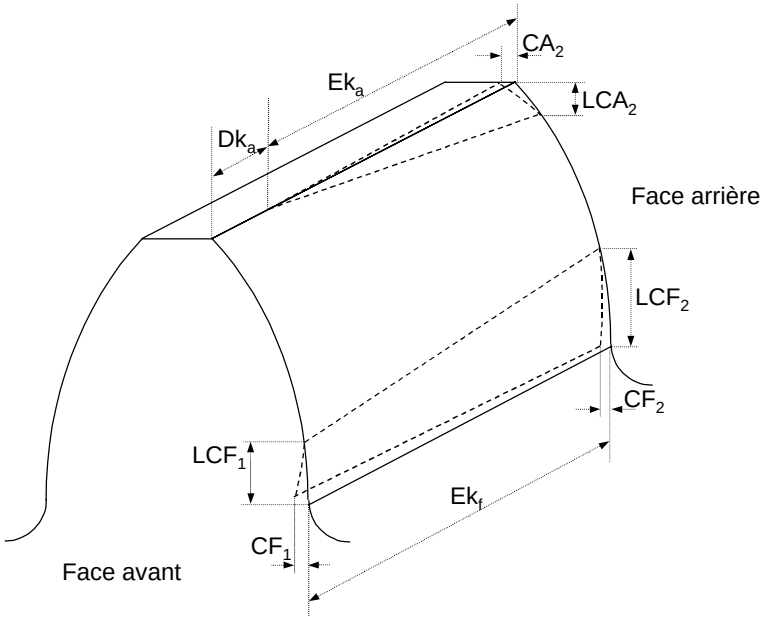


Figure 2.24 : Corrections définies sur le profil.

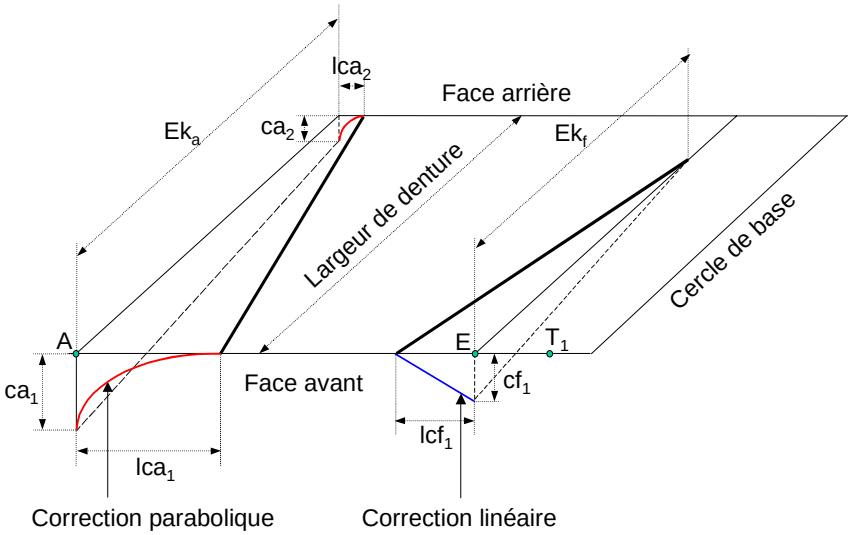


Figure 2.25 : Corrections définies sur la droite d'action.

Corrections de bombé

Les corrections de bombé sont définies au rayon primitif du pignon. Les bombés définis ici couvrent toute la largeur de denture et sont dits "en bateau". Ils peuvent être symétriques ou dissymétriques.
Un bombé est défini par deux longueurs Cbl_1 et Cbl_2 par rapport à la face avant et deux profondeurs Cb_1 et Cb_2 (Fig. 2.26).
La profondeur de bombé définit la profondeur maximum de matière à enlever sur la largeur de denture. Le bombé est tangent au profil théorique en ses deux points de définition repérés par Cbl_1 et Cbl_2. La profondeur de correction de bombé est constante dans une section du pignon.

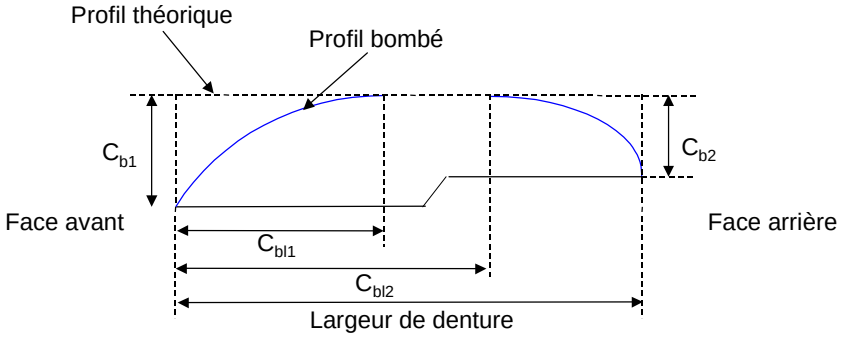


Figure 2.26 : Définition d'une correction de bombé

Corrections d'hélice

Des corrections d'hélice peuvent également être prises en compte dans le modèle. Elles sont définies par une variation C_β de l'angle d'hélice théorique au primitif β_p.
La valeur $\beta_p + C_\beta$ remplace simplement β_p dans la définition du profil du pignon.

3.3.2.2 Génération du pignon corrigé

La géométrie du pignon corrigé est générée dans des sections perpendiculaires à son axe. Le profil défini est donc un profil plan.
Pour chaque point de définition du profil du pignon, il faut d'abord calculer le point théorique du profil en développante, puis l'épaisseur à enlever au profil théorique en fonction des diverses corrections (Fig. 2.27).

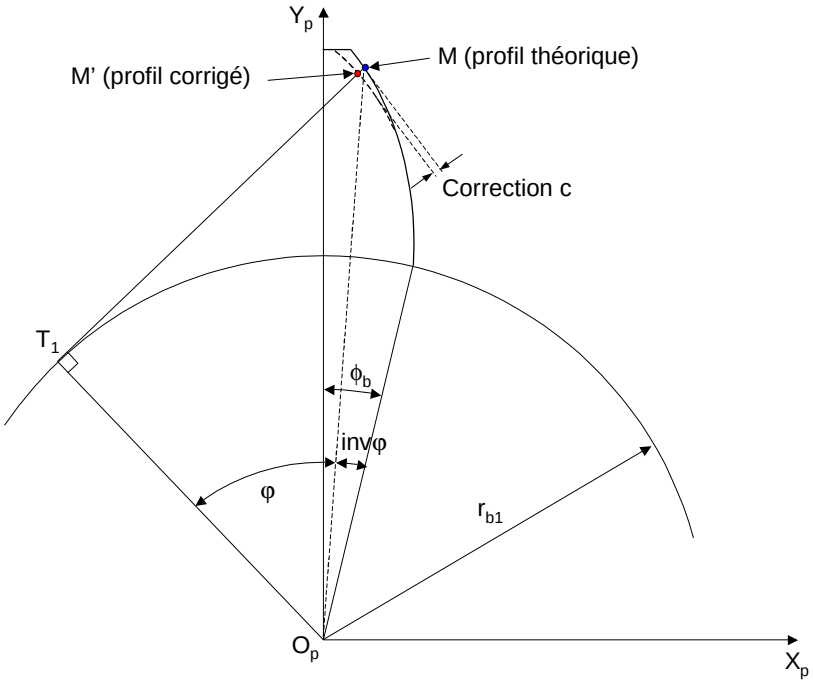


Figure 2.27 : Définition de la géométrie du pignon corrigé

Le repère de définition du pignon corrigé S_p (Fig 2.27) présente une symétrie au milieu de la dent du pignon, de façon à pouvoir définir le pas de calcul sur la droite d'action. L'origine du repère S_p est fixée sur la face avant du pignon (correspondant au rayon intérieur de la roue).

Les coordonnées d'un point M' du profil corrigé sont définies à partir des coordonnées d'un point M du profil théorique :

$$\vec{r}'=\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}-\overrightarrow{M'M} \tag{2.52}$$

avec

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{r_{b1}}{\cos\varphi}\sin(\phi_b-\mathrm{inv}\,\varphi) \\ \dfrac{r_{b1}}{\cos\varphi}\cos(\phi_b-\mathrm{inv}\,\varphi) \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

où φ peut être défini aussi bien sur le profil que sur la droite d'action (propriété de la développante) et est donné par :

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{T_1M}{r_{b1}} \tag{2.54}$$

L'épaisseur à enlever due aux diverses corrections est calculée simplement à partir de la valeur de la correction sur la droite d'action c (cf. Annexe A2.1.2) et du point T_1 (Fig. 2.27).

$$\overrightarrow{M'M}=\begin{bmatrix} c\dfrac{X-X_{T1}}{T_1M} \\ c\dfrac{Y-Y_{T1}}{T_1M} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

Le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ servira de support au vecteur unitaire normal à la surface :

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}=\frac{\overrightarrow{M'M}}{\left\|\overrightarrow{M'M}\right\|} \tag{2.56}$$

Dans le cas d'un pignon hélicoïdal, il faut ensuite appliquer une rotation à chaque profil due à l'angle d'hélice. La correction d'hélice est également prise en compte ici.

La rotation pour un profil d'abscisse z, sera (± en fonction du sens de l'hélice) :

$$\beta_i=\pm\frac{z}{r_1}\tan\left(\beta_p+\tan^{-1}\frac{C_\beta}{b_p}\right) \tag{2.57}$$

Les points du profil du pignon corrigé seront alors définis dans le repère S_p par (± en fonction du coté du profil) :

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_i & \sin\beta_i \\ -\sin\beta_i & \pm\cos\beta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

et les vecteurs unitaires normaux pour les deux premières coordonnées par :

$$\begin{bmatrix} n_{xp} \\ n_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_i & \sin\beta_i \\ -\sin\beta_i & \pm\cos\beta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

La troisième coordonnée du vecteur unitaire normal qui est nulle pour un pignon droit, est constante et fonction de l'angle d'hélice de base β_b pour un pignon hélicoïdal :

$$n_{zp} = \pm\sin\beta_b \tag{2.60}$$

3.3.2.3 Interpolation de la surface du pignon corrigé

Le profil du pignon corrigé étant défini numériquement dans son repère propre, il faut interpoler la surface de façon à obtenir une équation de la surface du pignon corrigé à deux paramètres.

Pour que les équations d'interpolation puissent être utilisées directement dans la méthode développée au § 3.2, les points du pignon corrigé ainsi que les normales unitaires définies dans le repère S_p sont préalablement projetés dans le repère S_1 par la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{L_1 + L_2 - b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

et

$$\begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{xp} \\ n_{yp} \\ n_{zp} \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

où $\lambda = \pm\dfrac{\pi}{N_1}$ selon le coté de la dent à interpoler.

Pour une précision optimale, la surface du pignon, ainsi que les normales unitaires sont ensuite interpolées individuellement grâce aux carreaux de Coons (cf. Annexe A3.2).

La surface obtenue est alors une surface à deux paramètres u et v qui sont alors utilisés à la place de θ_1 et Z_1 dans les différentes équations du § 3.2. Il en est de même pour les normales unitaires.

3.4 Résolution du problème

3.4.1 Différentes zones de contact

Les surfaces actives de la roue et du pignon étant physiquement limitées, les deux types de contact définis au § 3.2.1 (qui considèrent des surfaces mathématiquement infinies) aboutissent en pratique à de nombreux cas de contact.
En effet, que le contact soit un contact entre deux surfaces ou un contact entre une surface et une courbe, il pourra être situé physiquement sur l'une des limites des parties actives de la roue ou du pignon. En plus d'un contact quelconque défini au § 3.2.1 il faut donc considérer les zones suivantes :

- contact en tête de dent de la roue face,
- contact en tête de dent du pignon,
- contact en bord de dent de la roue face,
- contact en bord de dent du pignon,
- contact sur le dernier point du flanc actif de la roue,
- contact sur le dernier point du flanc actif du pignon.

Chacune de ces zones est régie par une relation géométrique.

Contact en tête de dent de la roue face

En tête de dent de la roue face, la valeur Z_{2a} de Z_2 est connue.

$$Z_{2a} = -\frac{R}{\tan(\pi - \gamma_s)} - \frac{r_{devs}}{\sin(\pi - \gamma_s)} \tag{2.63}$$

Contact en bord de dent de la roue face

Les points en bord de dent de la roue face sont situés sur le cône de rayon $R = L_1$ ou $R = L_2$ selon le bord considéré. Ils vérifient la relation suivante :

$$\mathrm{X}_2^2 + \mathrm{Y}_2^2 + \left(\frac{\mathrm{Z}_2 - Z_{2a}}{\tan(\pi/2 - \gamma_s)} \right)^2 = \mathrm{R}^2 \tag{2.64}$$

Contact sur le dernier point du flanc actif de la roue face :

Le dernier point du flanc actif de la roue face a été taillé par la tête de l'outil dont la valeur de θ_s est connue :

$$\theta_s = \theta_{ms} \tag{2.65}$$

Contact en tête de dent du pignon

En tête de dent du pignon la valeur de l'un des paramètres du pignon est connu :

$\theta_1 = \theta_{m1}$ pour un pignon non corrigé (2.66)
$u = 1$ pour un pignon corrigé (2.67)

Contact en bord de dent du pignon

En bord de dent du pignon, la valeur de l'un des paramètres du pignon est connue :

$Z_1 = Z_{1\min}$ ou $Z_1 = Z_{1\max}$ selon le bord considéré pour un pignon non corrigé (2.68)
$v = 0$ ou $v = 1$ selon le bord considéré pour un pignon corrigé (2.69)

Contact sur le dernier point du flanc actif du pignon :

Sur le dernier point du flanc actif du pignon, la valeur de l'un des paramètres du pignon est connue :

$\theta_1 = \theta_{\min 1}$ pour un pignon non corrigé (2.70)
$u = 0$ pour un pignon corrigé (2.71)

3.4.2 Détermination de la zone de contact

Les points de contact entre le pignon et la roue face dépendent toujours de 7 paramètres :

- 3 paramètres pour définir un point de la roue face :
  - 2 paramètres pour définir un point sur l'outil : θ_s, Z_s,
  - 1 paramètre pour définir la position de l'outil lors du taillage : ϕ_s,
- 2 paramètres pour définir un point du pignon: θ_1, Z_1 (ou u et v),
- 2 paramètres pour positionner respectivement la roue face et le pignon, leurs angles de rotation : ϕ'_2 et ϕ'_1.

Dans le cas général (contact de tangence entre les deux surfaces), aucun des paramètres n'est connu et la définition du contact n'est régie que par 5 équations indépendantes. Lors d'un contact en bord, la définition du contact est régie par 4 équations indépendantes auxquelles il est toujours possible de rajouter une relation géométrique (cf. § 3.4.1). Enfin tous les points du flanc actif de la roue face doivent toujours vérifier l'équation d'engrènement (cf. § 2.1.4).

Dans tous les cas, ce ne seront donc que 6 équations qui seront disponibles pour définir 7 paramètres. Le problème est isostatique, il est donc nécessaire de fixer un paramètre pour pouvoir résoudre.
La cinématique étant étudiée en quasi-statique, la position angulaire de la roue (paramètre ϕ'_2) est choisie comme paramètre d'entrée, le problème devient alors soluble.

Pour chaque position cinématique, les points ou lignes de contact sont alors recherchés sur 5 dents simultanément.

Lorsque le contact entre la roue face et le pignon est ponctuel, les deux surfaces ne sont tangentes qu'en un seul point unique, une utilisation adaptée de toutes les équations disponibles permet alors de déterminer le point de contact quelle que soit la configuration.

Lorsque le contact est linéaire, une indétermination survient car les équations proposées admettent alors une infinité de solutions (une infinité de points de contact constituant la ligne de contact). Le problème n'est donc pas soluble directement.

Afin de pouvoir résoudre le problème, la surface de dent de la roue face est considérée comme une succession de sections coniques (puisque sa géométrie est de base conique).
La surface ainsi discrétisée, un point de contact est recherché dans chaque section comme s'il s'agissait d'un contact en bord de dent.

Le système d'équations défini au § 3.2.2.2 est résolu dans chaque section conique de rayon R avec la relation géométrique supplémentaire suivante, correspondante à la définition analytique d'un cône :

$$X_2^2 + Y_2^2 + \left(\frac{Z_2 - Z_{2a}}{\tan(\pi/2 - \gamma_s)} \right)^2 = R^2 \qquad (2.72)$$

Pour qu'un point de contact soit validé, il faut en plus s'assurer qu'il vérifie bien l'équation (2.15), c'est-à-dire que les deux surfaces sont bien tangentes en ce point, puisque physiquement il ne s'agit pas d'un contact en bord.

Enfin, comme pour le cas de contact ponctuel, une utilisation ensuite adaptée de toutes les équations disponibles permet de déterminer les zones de contact quelle que soit la configuration.

3.4.3 Cas particuliers du premier et dernier point d'engrènement

La détermination des points de contact étant effectuée sur des valeurs fixes du paramètre de rotation de la roue face, il faut en premier lieu déterminer ses bornes, c'est-à-dire la position exacte de la roue lors du premier et dernier point d'engrènement, soit les valeurs ϕ'_{2i} et ϕ'_{2f} du paramètre ϕ'_2.

Le problème possède donc ici effectivement 7 inconnues. Il faudra alors rechercher un point de contact de tangence entre les deux surfaces (6 relations) dans des zones bien définies de la roue et du pignon (1 relation géométrique supplémentaire).

Premier point d'engrènement

Le pignon étant toujours considéré comme moteur, le premier point d'engrènement est recherché dans les zones suivantes :

- En tête de dent de la roue,
- Sur le dernier point du flanc actif du pignon.

Dernier point d'engrènement

De même, le dernier point d'engrènement est recherché dans les zones suivantes :

- En tête de dent du pignon,
- Sur le dernier point du flanc actif de la roue.

De même que pour la détermination de la zone de contact, les premier et dernier points d'engrènement peuvent également être trouvés en bord de dent, grâce à l'utilisation conjointe de 2 relations géométriques (exemple : tête de dent du pignon + bord de dent de la roue).

Dans le cas d'un contact linéaire, la méthode décrite ci-dessus pour trouver les premiers et derniers points d'engrènement s'avère inefficace. En effet, lors de l'engrènement, pour les positions cinématiques où la ligne de contact ne couvre pas toute la largeur de denture, celle-ci s'arrêtent soit en tête de dent, soit à l'intersection flanc actif-trochoïde. La recherche d'un point dans ces zones aboutira à un nombre infini de solutions.

La seule solution pour trouver ces premiers et derniers points d'engrènement est donc l'utilisation d'une méthode itérative. Une boucle est effectuée sur le paramètre ϕ'_2. Pour chaque valeur de ϕ'_2 au moins un point de contact sur la dent est recherché de la méthode du § 3.4.3.2. Comme précédemment les premier et dernier points d'engrènement seront bien sûr toujours recherchés dans les zones particulières de la tête de dent ou de l'intersection flanc actif-trochoïde.

La valeur de ϕ'_{2i} recherchée sera déterminée de la manière suivante :

- la dent 3 est en contact à la position cinématique $\phi'_2 = \phi'_{2i}$
- la dent 3 n'est pas en contact à la position cinématique $\phi'_2 = \phi'_{2i} - \varepsilon$, ε étant la précision avec laquelle ϕ'_{2i} est recherchée.

ϕ'_{2f} sera recherché de la même façon en considérant que la dent ne doit plus être en contact à la position cinématique $\phi'_2 = \phi'_{2f} + \varepsilon$

3.5 Rapport de conduite et erreur cinématique à vide

Rapport de conduite

Lors de la simulation de la cinématique, il est difficile de définir un rapport de conduite pour la roue face. En effet, les zones de contact n'étant pas régulières sur la largeur de denture, le rapport de conduite réel varie d'un côté à l'autre de la roue.

L'utilisation d'une valeur moyenne est préférable, surtout dans l'optique d'effectuer des comparaisons avec d'autres types d'engrenages.

Cette valeur moyenne est définie comme le nombre moyen de dents en prise durant un engrènement total de la dent centrale. Ce rapport de conduite moyen peut être défini à partir des angles de rotation des premier et dernier points d'engrènement, ϕ'_{2i} et ϕ'_{2f}, rapportés au nombre de dents total de la roue face N_2, soit :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{N_2}{2\pi}\left(\phi'_{2f} - \phi'_{2i}\right) \tag{2.73}$$

Erreur cinématique à vide

L'erreur cinématique à vide est définie à partir d'une position arbitraire calculée sans erreur de taillage ou d'assemblage. La position choisie est celle pour laquelle le paramètre ϕ'_2 est nul, mais cela aurait pu être n'importe quelle autre puisque l'erreur cinématique théorique à vide est toujours nulle sans erreur.

A cette valeur nulle du paramètre ϕ'_2, correspond une valeur $\phi'_{1(\phi'2 = 0)}$ du paramètre ϕ'_1.

L'erreur cinématique à vide peut alors être définie grâce à la différence de la position réelle du pignon par rapport à cette position sans erreur. Elle est ramenée à la roue face par la relation suivante :

$$\Delta\phi'_2 = \phi'_2 - \frac{N_2}{N_1}\left(\phi'_1 - \phi'_{1(\phi'_2=0)}\right) \tag{2.74}$$

où N_1 et N_2 sont les nombres de dents du pignon et de la roue face respectivement.

4 Répartition des charges

L'objectif de la détermination de la répartition des charges est d'étudier les capacités de charge des engrenages face, en prenant en compte à la fois les effets de flexion globale du corps et les propriétés mécaniques de déformations de surface au niveau du contact.

Pour une modélisation optimale, les deux effets sont séparés (Vijayakar [113], Hiltcher [14]) et peuvent être traduits par des coefficients d'influence. L'effet de flexion est calculé grâce à une modélisation par éléments finis, et celui de surface est déterminé par une approche locale. Cette approche est basée sur une discrétisation de la zone de contact à travers les théories de Hertz et Boussinesq.

Finalement la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements en tout point de contact potentiel permet d'obtenir la répartition des charges, conjointement avec la distribution de pression instantanée.

4.1 Résolution de l'équation de compatibilité des déplacements

4.2.1 Description du problème

Le problème de la répartition des charges est avant tout un problème de contact entre deux corps. Ce problème est un problème classique de mécanique des contacts défini par Signorini (Kalker [17]). L'idée de base pour la résolution de ce problème est d'éviter l'interpénétration des deux corps en présence tout en respectant le principe de l'énergie potentielle minimum.

Sur une zone de contact potentielle (Γ), la répartition des charges adéquate est recherchée, telle qu'elle satisfasse l'équation de compatibilité des déplacements (condition de non pénétration des corps) en tout point des deux corps solides (Fig. 2.28) :

$$\begin{cases} W_{1k} + W_{2k} + \varepsilon_k - \alpha = 0 \\ P_k \geq 0 \end{cases} \quad \text{dans la zone de contact } (\Gamma) \tag{2.75}$$

$$\begin{cases} W_{1k} + W_{2k} + \varepsilon_k - \alpha \geq 0 \\ P_k = 0 \end{cases} \quad \text{hors de la zone de contact } (\Gamma) \tag{2.76}$$

où W_{1k} et W_{2k} sont les déplacements normaux des corps 1 et 2 au point k, ε_k est l'écart initial au point k, α l'écrasement des surfaces en contact et P_k la pression au point k.

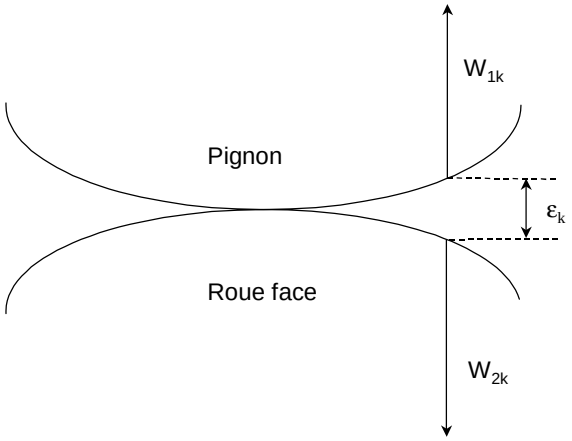


Figure 2.28 : Contact entre deux corps

La charge totale F doit en outre satisfaire :

$$\int_{\Gamma} p d\Gamma = F \tag{2.77}$$

En supposant la pression constante sur une petite surface rectangulaire S_k autour du point k, l'intégrale précédente devient :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k S_k = F \tag{2.78}$$

où N est le nombre de surfaces rectangulaires considérées.

4.2.2 Propriétés élastiques

Les propriétés élastiques des deux corps (respect du principe de l'énergie potentielle minimum) permettent d'écrire le déplacement normal du corps i au point k sous la forme :

$$W_{ik} = \sum_{j=1}^{N} C_{kj}^{i} p_j \tag{2.79}$$

où C_{kj}^{i} sont les coefficients d'influences du corps i.

Pour les deux corps :

$$C_{kj} = C_{kj}^{1} + C_{kj}^{2} \tag{2.80}$$

Il vient alors :

$$W_{1k} + W_{2k} = \sum_{j=1}^{N} C_{kj} P_j \tag{2.81}$$

Si la distance entre les deux corps au point k après chargement est notée y_k, le problème peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k - \alpha = y_k & k \in [1, N] \\ \sum_{k=1}^{N} p_k S_k = F \end{cases} \tag{2.82}$$

Le problème exprimé ici possède N+1 équations (N conditions de compatibilité des déplacements et 1 condition sur la charge totale), avec 2N+1 inconnues :

p_k N inconnues
y_k, N inconnues
α 1 inconnue

Il est toutefois possible de résoudre en utilisant les 2N conditions supplémentaires apportées par :

$$\begin{cases} P_k = 0 \\ y_k \geq 0 \end{cases} \quad k \in [1, N] \qquad \text{hors de la zone de contact } (\Gamma) \tag{2.83}$$

ou

$$\begin{cases} P_k \geq 0 \\ y_k = 0 \end{cases} \quad k \in [1, N] \qquad \text{dans la zone de contact } (\Gamma) \tag{2.84}$$

4.2.3 Résolution du problème

En utilisant les relations (2.83) et (2.84) et en posant $z_k = y_k + \alpha$, le problème peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k = z_k & k \in [1, N] \\ \sum_{k=1}^{N} p_k S_k = F \\ p_k (z_k - \alpha) = 0 & k \in [1, N] \end{cases} \tag{2.85}$$

avec P_k, z_k et α comme inconnues. Le problème défini possède maintenant 2N+1 équations avec 2N+1 inconnues.

Il peut être réduit par :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k S_k = F \\ p_k \left(\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k \right) = \alpha P_k \end{cases} \tag{2.86}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} p_k S_k = F \\ p_k = \dfrac{\alpha p_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k} \end{cases} \tag{2.87}$$

$$\begin{cases} \alpha \sum_{k=1}^{N} \dfrac{p_k S_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k} = F \\ p_k = \dfrac{\alpha p_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k} \end{cases} \tag{2.88}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{F}{\sum_{k=1}^{N} \dfrac{p_k S_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k}} \\ p_k = \dfrac{\alpha p_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k} \end{cases} \tag{2.89}$$

Et c'est finalement un système de N équations non linéaires à N inconnues qu'il faut résoudre :

$$p_k = \frac{F}{\sum_{k=1}^{N} \dfrac{p_k S_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k}} \frac{p_k}{\sum_{j=1}^{N} C_{kj} p_j + \varepsilon_k} \qquad k \in [1, N] \tag{2.90}$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$[P] = F([P]) \tag{2.91}$$

Qui peut être résolu par une méthode numérique itérative de la forme :

$$[P]^{i+1} = F\left([P]^{i}\right) \tag{2.92}$$

où $[P]^{i}$ est le vecteur des pressions à l'itération i.

4.2 Définition des coefficients d'influence

Le coefficient d'influence C_{ij} correspond au déplacement du point i dû à une pression unitaire autour du point j.

Ces coefficients pourraient être calculés directement numériquement (par une modélisation par éléments finis par exemple), mais le déplacement au point de chargement ne relaterait que médiocrement l'effet de surface si le maillage n'est pas d'une très grande finesse (Bibel [37]).
C'est pourquoi il est préférable de séparer l'effet de flexion de l'effet de surface (Vijayakar [115]) :

$$C_{ij} = C_{ij}^{1f} + C_{ij}^{2f} + C_{ij}^{s} \tag{2.93}$$

où C_{ij}^{1f} et C_{ij}^{2f} correspondent à la flexion des corps 1 et 2, et C_{ij}^{s} à la déformation de surface lorsque les corps 1 et 2 sont en contact.

4.2.1 Coefficients d'influence de surface

Pour chaque position cinématique, la zone potentielle de contact est maillée dans le plan tangent (cf. § 4.3.1) au contact (Fig. 2.29 et 2.30).
Le déplacement normal du corps i au point k de coordonnées (x,y) dans le plan tangent dû à une charge P au point j de coordonnées (x',y') est calculé en utilisant les résultats de la théorie de Boussinesq [16] :

$$W_i(x,y) = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \int_{Sc} \frac{P(x',y')dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \tag{2.94}$$

où S_c est la surface de contact, ν_i le coefficient de Poisson du corps i et E_i le module d'Young du corps i.

Remarque : comme la pression est nulle à l'extérieur de la zone de contact, l'intégrale peut être généralisée sur tout le plan tangent, quelles que soient ses dimensions.

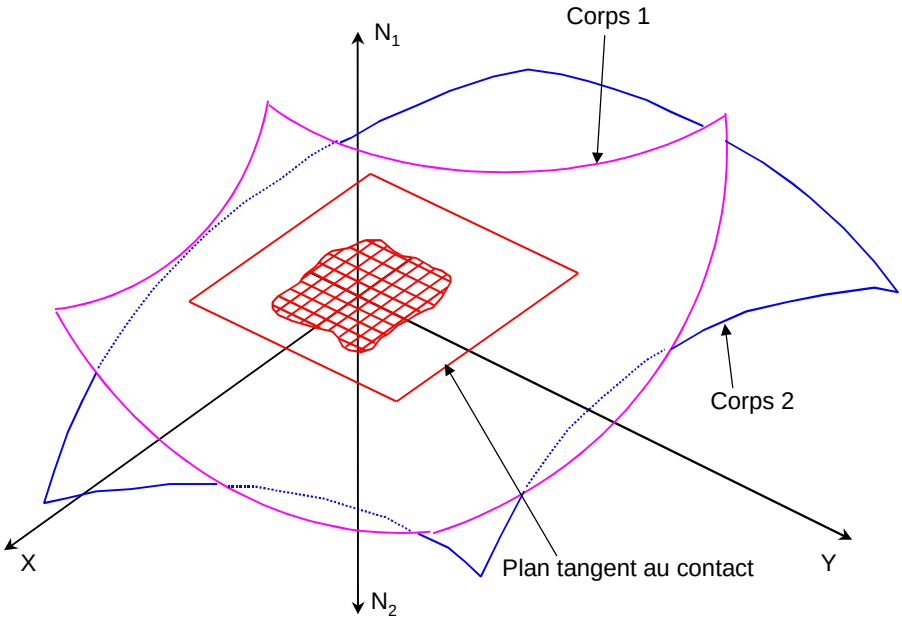


Figure 2.29 : Maillage dans le plan tangent (1)

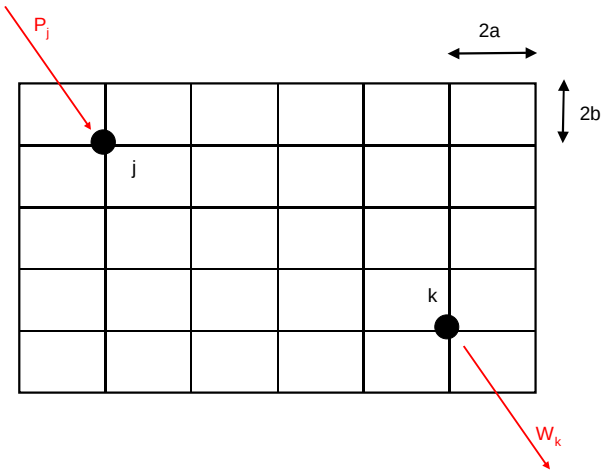


Figure 2.30 : Maillage dans le plan tangent (2)

4.2.1.1 Déplacement normal du corps i

En supposant la pression constante sur un carreau du maillage, le déplacement normal du corps i au point k peut s'écrire :

$$W_{ik} = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \sum_{j=1}^{N} p_j \int_{Sj} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}} \tag{2.95}$$

où S_j est la surface autour du point j $\left(\left[x_j - a; x_j + a\right], \left[y_j - b; y_j + b\right]\right)$

En effectuant le changement de base suivant :

$$\begin{cases} X = x - x_j \\ Y = y - y_j \end{cases} \tag{2.96}$$

Le déplacement normal devient :

$$W_{ik} = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \sum_{j=1}^{N} p_j \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \frac{dXdY}{\sqrt{(X + x_j - x_k)^2 + (Y + y_j - y_k)^2}} \tag{2.97}$$

avec $a_{kj} = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \frac{dXdY}{\sqrt{(X + x_j - x_k)^2 + (Y + y_j - y_k)^2}}$ (2.98)

Le déplacement normal peut finalement être exprimé par :

$$W_{ik} = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \sum_{j=1}^{N} a_{kj} p_j \tag{2.99}$$

4.2.1.2 Coefficients d'influence

Le déplacement du point k dû aux effets de surface correspond en fait au déplacement des deux corps 1 et 2 :

$$W_k^s = W_{1k} + W_{2k} \tag{2.100}$$

Soit :

$$W_k^s = \left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) \sum_{j=1}^{N} a_{kj} p_j \tag{2.101}$$

En exprimant le déplacement sous la forme :

$$W_k^s = \sum_{j=1}^{N} C_{kj}^s p_j \tag{2.102}$$

les coefficients de surfaces peuvent s'exprimer :

$$C_k^s = \left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) a_{kj} \tag{2.103}$$

Pour une surface rectangulaire de dimension $2a \times 2b$, la valeur de a_{kj} a été déterminée par Love [16] :

$$\begin{aligned} a_{kj} = {} & (x-a)\ln\frac{(y-b)+\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}{(y+b)+\sqrt{(y+b)^2+(x-a)^2}} \\ & +(x+a)\ln\frac{(y+b)+\sqrt{(y+b)^2+(x+a)^2}}{(y-b)+\sqrt{(y-b)^2+(x+a)^2}} \\ & +(y-b)\ln\frac{(x-a)+\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}{(x+a)+\sqrt{(y-b)^2+(x+a)^2}} \\ & +(y+b)\ln\frac{(x+a)+\sqrt{(y+b)^2+(x+a)^2}}{(x-a)+\sqrt{(y+b)^2+(x-a)^2}} \end{aligned} \tag{2.104}$$

avec :

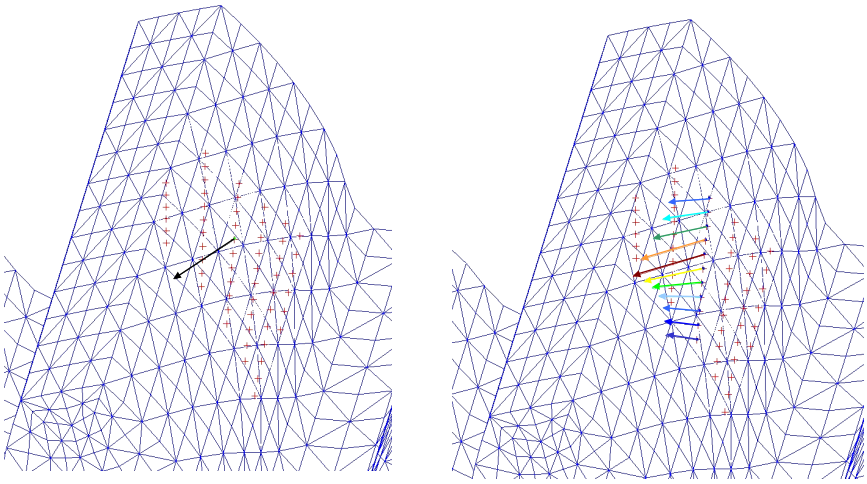
$$\begin{cases} x = x_k - x_j \\ y = y_k - y_j \end{cases} \tag{2.105}$$

4.2.2 Coefficients d'influence de flexion

Les coefficients d'influence de flexion sont calculés grâce à une modélisation par éléments finis.

Pour chaque position cinématique, les coefficients d'influence de flexion sont les déplacements induits par le chargement unitaire d'un point de contact potentiel sur tous les autres points de contact potentiel (Fig. 2.31). Les caractéristiques précises des modèles éléments finis utilisés sont décrites au chapitre 3.

Chaque point doit être chargé successivement afin d'obtenir tous les coefficients d'influence de flexion.



Charge appliquée = 1 N Déplacement induit sur une dent

Figure 2.31 : Chargement et déplacements dus à la flexion

Les points de contact potentiels considérés pour les calculs par éléments finis sont les points du maillage du plan tangent défini au § 4.2.1. La largeur de la zone de contact étant très faible devant la longueur (le contact est soit linéaire, soit ponctuel, mais aboutit à une ellipse de contact très allongée sous charge dont le rapport largeur/longueur est généralement au maximum égale à 1/20 pour des charges faibles), la flexion est considérée constante selon la largeur de contact. Les coefficients de flexion ne sont donc calculés que sur les nœuds centraux du maillage du plan tangent.

Lors d'un calcul classique par éléments finis, les déplacements calculés prennent en compte à la fois les effets de flexion, les déformations de surface ainsi que des effets dus au maillage lui-même qui se déforme notamment autour du point d'application de la charge.

Afin d'obtenir uniquement les effets de flexion, Sainsot [26] propose d'effectuer le calcul en deux étapes successives avec des conditions aux limites différentes (Fig. 2.32) :

- Calcul avec flanc antimologue au contact libre : permet d'obtenir le déplacement dû à la conjugaison de tous les effets cités précédemment,

- Calcul avec flanc antimologue au contact bloqué : permet d'obtenir le déplacement dû à la conjugaison de tous les effets cités précédemment sauf celui de flexion.

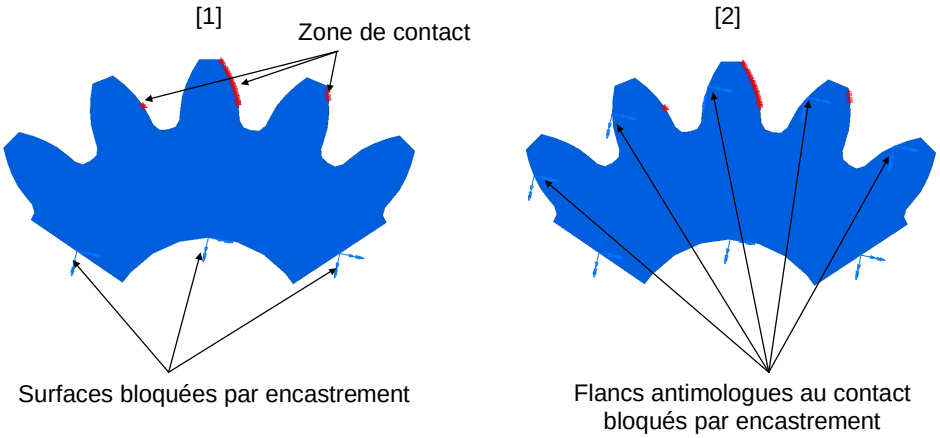


Figure 2.32 : Différents cas de conditions aux limites

Pour chaque cas p de conditions aux limites, le déplacement obtenu au point j pour une charge unitaire au point k peut s'écrire :

$$C_{kj}^{if[p]} = W_j \tag{2.106}$$

Les coefficients d'influence de flexion sont alors obtenus grâce à la différence des deux calculs :

$$C_{kj}^{if} = C_{kj}^{if[1]} - C_{kj}^{if[2]} \tag{2.107}$$

Finalement les coefficients d'influence de flexion pour les deux corps sont donnés par :

$$C_{kj}^{f} = C_{kj}^{1f} + C_{kj}^{2f} \tag{2.108}$$

4.3 Définition et maillage du plan tangent

Le calcul des coefficients d'influence nécessite un maillage rectangulaire plan, qui doit être défini très précisément.

4.3.1 Hypothèses sur la zone de contact

Pour définir le plan tangent, quelques hypothèses doivent être faites sur la zone de contact sous charges.

Tout d'abord, la zone de contact déformée doit être considérée plane dans le cas d'un contact pignon - roue face (Fig. 2.33).

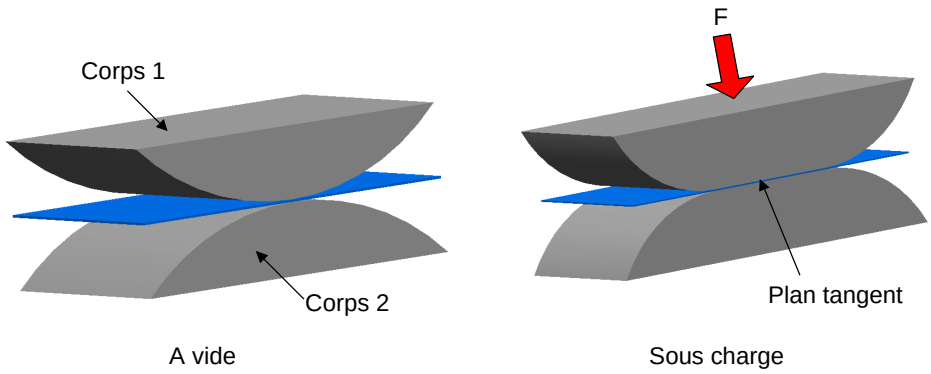


Figure 2.33 : Zone de contact sous charge

Cette hypothèse a plusieurs conséquences, notamment sur les normales aux surfaces des deux corps en contact.

Il est nécessaire d'assumer que les normales au plan tangent et les normales aux surfaces à vide sont égales, de manières à pouvoir considérer par la suite un chargement unidirectionnel (Fig. 2.34). Il est évident que sous charge, si le contact est plan alors les normales au plan et aux surfaces seront bien confondues.

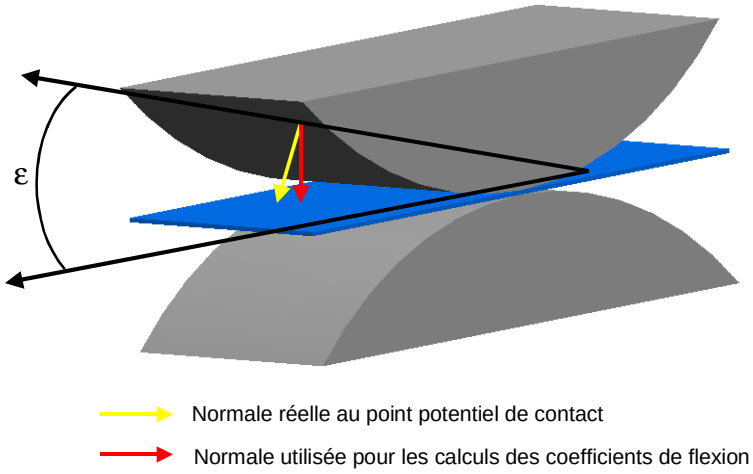


Figure 2.34 : Hypothèse des normales confondues à vide

Cette première conséquence en amène une deuxième : si les normales aux surfaces sont égales à celles du plan, alors elles sont toutes égales entre elles.
Il faut noter que ces hypothèse ne concernent que la zone de contact entre les deux surfaces et ne peuvent en aucun cas être généralisées à toute la surface de denture de l'engrenage face.

Le plan tangent doit être défini en un point de contact potentiel précis. Dans le cas d'un contact ponctuel où il n'y a qu'un seul point de contact potentiel, le choix est évident. Par contre dans le cas d'un contact linéaire, le choix est plus délicat puisque notamment les normales aux surfaces varient selon la largeur de contact, et elles vont toutes être assimilées à la normale du point de définition du plan tangent choisi.
Afin d'avoir une déviation angulaire ε (Fig. 2.34) qui reste la plus faible possible, il est nécessaire de choisir un point dont la normale est la plus proche possible de la moyenne de toutes les normales.
Ce point est situé au milieu de la ligne de contact, et sera par la suite utilisé pour définir le plan tangent.

Toutes les hypothèses effectuées ici ont été vérifiées et validées pour les engrenages face considérés dans cette modélisation (cf. Chapitre 3).

4.3.2 Estimation de la taille du contact

Afin de définir la distribution de pression la plus précise possible, il est nécessaire d'avoir une taille de maillage du plan tangent optimale.
La théorie de Hertz est utilisée pour définir cette taille. Il n'est pas ici nécessaires de vérifier précisément que toutes les conditions particulières d'application de cette théorie [16] sont bien vérifiées. En effet, le seul résultat utilisé sera la taille de la zone à mailler. Cette taille pourra n'être qu'un point de départ pour la définition du maillage et être éventuellement corrigée en pratique si elle s'avère trop grande ou trop petite par la suite. Néanmoins il est nécessaire de connaître une taille initiale précise pour pouvoir effectuer le maillage du plan tangent.

Dans le cas d'un contact ponctuel, la zone de contact sous charge est elliptique et le contact est assimilé au cas de contact général (hyperboloïde-hyperboloïde) de la théorie de Hertz.
Les demis axes de l'ellipse de contact sont alors donnés par :

$$b = \left(\frac{3FR'R''}{4E_k R'} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{2.109}$$

$$a = b\left(\frac{R'}{R''} \right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.110}$$

où F est la charge totale appliquée, E_k le module d'Young équivalent, R' et R'' sont les rayons de courbure équivalents au point de contact.

Pour un contact linéaire, la théorie de Hertz donne la demie largeur de contact en fonction de sa longueur :

$$b = \sqrt{\frac{8FR''}{\pi E_k L}} \tag{2.111}$$

où F est la charge totale appliquée, E_k le module d'Young équivalent, R'' le rayon de courbure équivalent et L la longueur de la zone de contact.

Le module d'Young équivalent est défini par :

$$E_k = \frac{1}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \tag{2.112}$$

où E_1 et E_2 sont les modules d'Young des corps 1 et 2, et ν_1 et ν_2 leurs coefficients de Poisson.

Les rayons de courbure équivalents sont calculés à partir des rayons de courbures du pignon et de la roue au point de contact considéré :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \tag{2.113}$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \tag{2.114}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure du pignon selon respectivement la longueur et la largeur de contact, R_3 et R_4 ceux de la roue.

4.3.3 Directions principales et rayons de courbure

Les dimensions données par la théorie de Hertz sont dépendantes des rayons de courbure des deux corps dans la direction du contact.

Il est donc nécessaire de calculer au préalable les rayons de courbure. Les rayons de courbure sont définis à partir des rayons de courbures principaux, qui sont calculés dans les directions principales de la roue et du pignon.

Pour des surfaces paramétriques à deux paramètres (pignon), les rayons de courbures et directions principales peuvent être calculées directement (cf. Annexe A2.3.1).

Par contre, lorsque la surface est définie à l'aide de 3 paramètres (roue face), le calcul direct est impossible. Il est donc nécessaire d'interpoler la surface de la roue sous une forme paramétrique à deux paramètres afin d'obtenir les rayons de courbures principaux et les directions de courbures principales de la roue.
L'interpolation utilisée est l'interpolation par carreaux de Coons (cf. Annexe A3.2).

Les rayons de courbure calculés principaux (R_{p1} et R_{p2} pour le pignon, R_{p3} et R_{p4} pour la roue) étant définis, les rayons dans les directions du contact (directions du maillage) sont donnés par les relations suivantes :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos^2\alpha}{R_{p1}} + \frac{\sin^2\alpha}{R_{p2}} \tag{2.115}$$

où α est l'angle entre les directions de R_{p1} et R_1.

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos^2\alpha}{R_{p1}} + \frac{\sin^2\alpha}{R_{p2}} \tag{2.116}$$

où α est l'angle entre les directions de R_{p2} et R_2.

$$\frac{1}{R_3} = \frac{\cos^2\alpha}{R_{p3}} + \frac{\sin^2\alpha}{R_{p4}} \tag{2.117}$$

où α est l'angle entre les directions de R_{p3} et R_3.

$$\frac{1}{R_4} = \frac{\cos^2\alpha}{R_{p3}} + \frac{\sin^2\alpha}{R_{p4}} \tag{2.118}$$

où α est l'angle entre les directions de R_{p4} et R_4.

4.3.5 Base du plan tangent

Pour pouvoir mailler le plan tangent, il faut au préalable définir les directions de maillage, c'est-à-dire la base du plan tangent dans le repère de la roue ou du pignon.

Le plan tangent est défini par rapport à la roue face. La modélisation développée ici permettant d'étudier plusieurs dents simultanément en contact, la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements doit être effectuée sur toutes les dents en contact en même temps. Afin de pouvoir appliquer la théorie de Boussinesq, les éléments de maillage doivent avoir la même taille sur toutes les dents, et les plans tangents à chaque dent doivent être parallèles entre eux pour que les déplacements normaux aient la même direction.

Il faut donc définir une dent de référence parmi les dents en contact pour déterminer la taille du maillage ainsi que son orientation (base du plan tangent), puis un point de référence sur chaque dent pour définir le plan tangent propre à chaque dent.

Le point de référence sur chaque dent, issu de la simulation de la cinématique à vide, aura pour coordonnées (X_{c2},Y_{c2},Z_{c2}) dans le repère de la roue face.
Le point de référence sur la dent de référence aura pour normale unitaire (n_{xc2},n_{yc2},n_{zc2}) dans le repère de la roue face. Les directions du plan tangent sont toujours définies en ce point.

Contact linéaire

Pour un cas de contact linéaire la longueur de contact peut varier d'une dent à l'autre. Afin de limiter au maximum les approximations définies au § 4.3.1.1 il convient de définir l'orientation du plan tangent sur la dent la plus chargée.
La dent de référence choisie pour orienter le plan tangent sera donc celle dont la ligne de contact est la plus longue (en supposant que la charge sera proportionnelle à la surface de contact).
La ligne de contact n'étant pas une droite, il n'y a pas de direction constante le long du contact. La solution la plus simple est alors d'orienter le plan tangent selon la largeur de denture de la roue face et d'utiliser par la suite un maillage "glissé" (Hiltcher [14]) qui suivra la ligne de contact (cf. § 4.3.2.2, Fig. 2.36).

Le plan tangent sera perpendiculaire à n_{zc2} et son axe x aura pour coefficient directeur :

$$\alpha = \frac{n_{xc2}}{n_{yc2}} \tag{2.119}$$

La base du plan tangent A_2 pourra alors être complètement exprimée dans le repère de la roue en fonction du vecteur normal unitaire en son point de définition :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} & \mp\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} & 0 \\ \pm\frac{\alpha.n_{zc2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} & \pm\frac{n_{zc2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} & \mp\frac{\alpha.n_{xc2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \mp\frac{n_{zc2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ n_{xc2} & n_{yc2} & n_{zc2} \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

NB : les signes des coefficients sont fonction du côté de la dent en contact.

Contact ponctuel

Pour un cas de contact ponctuel, il n'y a qu'un seul point potentiel sur chaque dent. La seule dent en permanence en contact durant l'engrènement étudié étant la dent centrale, c'est le point de contact de cette dent qui servira à définir le plan tangent.

La zone de contact sous charge étant elliptique, il est possible d'effectuer un maillage rectangulaire selon les axes de l'ellipse.
La direction de l'ellipse est définie grâce aux écarts entre les deux surfaces autour du point de contact potentiel. La zone de contact sous charge sera orientée selon les directions où l'écart à vide entre les deux surfaces est minimum.

La direction d'écart minimum est recherchée numériquement en calculant l'écart entre les deux surfaces sur un cercle unitaire entourant le point de définition du plan tangent.
Le point d'écart minimum, de coordonnées (X_{min},Y_{min},Z_{min}) permet de définir la base du plan, tangent A_2 dans le repère de la roue. Le base du plan tangent est exprimée directement à partir du point (X_{c2},Y_{c2},Z_{c2}), point de référence sur la dent centrale :

$$[A_2] = \begin{bmatrix} X_{\min} - X_{c2} & Y_{\min} - Y_{c2} & Z_{\min} - Z_{c2} \\ n_{yc2}(Z_{\min} - Z_{c2}) & -n_{xc2}(Z_{\min} - Z_{c2}) & n_{xc2}(Y_{\min} - Y_{c2}) \\ -n_{zc2}(Y_{\min} - Y_{c2}) & +n_{zc2}(X_{\min} - X_{c2}) & -n_{yc2}(X_{\min} - X_{c2}) \\ n_{xc2} & n_{yc2} & n_{zc2} \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

Que le contact soit ponctuel ou linéaire, la base du plan tangent dans le repère du pignon s'exprime alors en fonction de sa définition dans le repère de la roue par :

$$[A_1]=\begin{bmatrix} \cos\phi_2^{'}\cos\phi_1^{'} + \cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\sin\phi_1^{'} & -\sin\phi_2^{'}\cos\phi_1^{'} + \cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\sin\phi_1^{'} & +\cos\gamma_1\sin\phi \\ -\cos\phi_2^{'}\sin\phi_1^{'} + \cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\cos\phi_1^{'} & \sin\phi_2^{'}\sin\phi_1^{'} + \cos\gamma_1\sin\phi_2^{'}\cos\phi_1^{'} & \sin\gamma_1\cos\phi_1^{'} \\ -\sin\gamma_1\sin\phi_2^{'} & -\sin\gamma_1\cos\phi_2^{'} & \cos\gamma_1 \end{bmatrix}[A_2] \qquad (2.122)$$

4.3.6 Maillage de la zone de contact

L'orientation, la taille et la position du maillage étant définies, la zone potentielle de contact est discrétisée en fonction du nombre de points désirés puis maillée avec des rectangles.

Contact ponctuel

Dans le cas d'un contact ponctuel, le maillage effectué dans le plan tangent est un maillage rectangulaire classique (Fig. 2.35) centré sur le point de référence (point de contact théorique à vide) de chaque dent. Le repère (x,y) représente la base du plan tangent.

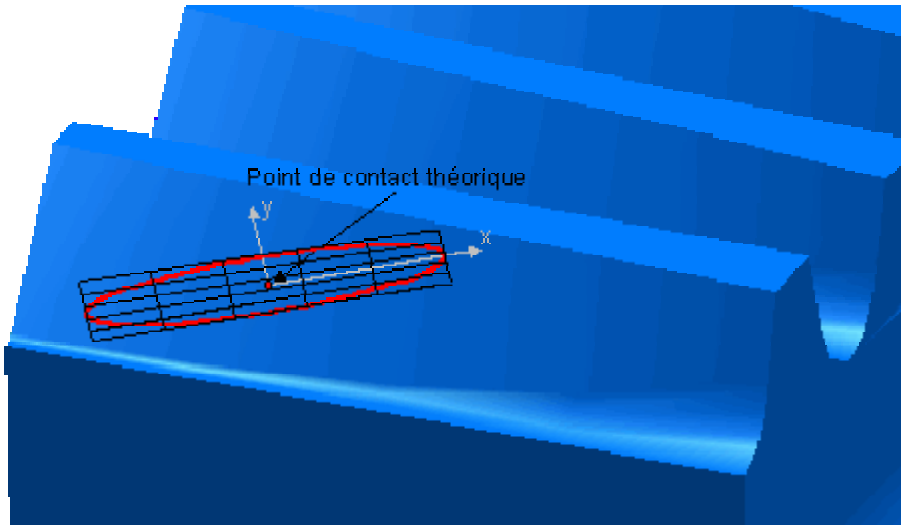


Figure 35: Exemple de maillage 5x5 du plan tangent pour un contact ponctuel

Contact linéaire

Dans le cas d'un contact linéaire, le maillage est appuyé sur les points de contact potentiels trouvés lors de la cinématique. Le nombre de points utilisés pour discrétiser la largeur de denture à ce moment sert à définir le nombre d'éléments du maillage selon la longueur de contact (Fig. 2.36).

Lorsque la ligne de contact à vide ne couvre pas toute la largeur de denture, le nombre d'éléments sera plus faible. De plus dans ce cas, la ligne de contact finit en général en tête de dent ou sur le dernier point du flanc actif. Sous charge, il est fort probable que ces zones entrent alors en contact. Afin de pouvoir les prendre en compte, il est nécessaire de les inclure au maillage.
Pour ce faire, une ligne de contact potentielle supplémentaire est alors rajoutée en tête de dent (Fig. 2.36) ou sur l'intersection trochoïde-développante.
Le maillage utilisé est alors un maillage "glissé" qui suit l'inclinaison de la ligne de contact puis la tête dent ou l'intersection trochoïde-développante.

Sur la figure 2.36, le repère (x,y) représente la base du plan tangent, les points rouge sont les points de contact calculés lors de la simulation de la cinématique à vide et définissant la ligne de contact théorique.

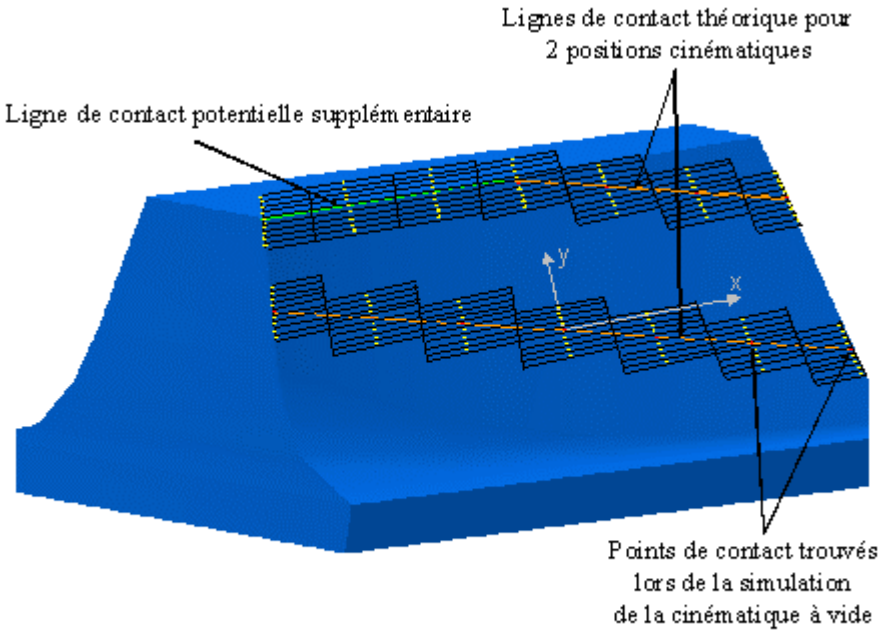


Figure 2.36 : Exemple de maillage" normal" et "glissé"
7x9 du plan tangent pour un contact linéaire

4.4 Ecarts initiaux

Les derniers éléments nécessaires à la résolution de l'équation de compatibilité des déplacements sont les écarts initiaux ε_k (cf. Eq. 2.75 et 2.76) entre les deux surfaces pour chaque point du maillage.

Les points du maillage sont projetés orthogonalement sur la dent du pignon et sur la dent de la roue. L'écart initial est alors simplement défini par :

$$\varepsilon_k = \sqrt{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2 + (z_1 - z_p)^2} + \sqrt{(x_2 - x_p)^2 + (y_2 - y_p)^2 + (z_2 - z_p)^2} \qquad (2.123)$$

Où (x_p, y_p, z_p) est un point du plan tangent, (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) ses projections orthogonales sur les surfaces du pignon et de la roue.

Les projections orthogonales du plan tangent sur la roue et le pignon sont calculées simplement à partir de la normale connue au point de référence du plan tangent et de l'équation d'engrènement (cf. § 2.1.4) qui doit toujours être vérifiée pour tous les points de la roue.

Les points M du maillage sont d'abord transposés dans le repère de la roue par :

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{c2} \\ Y_{c2} \\ Z_{c2} \end{bmatrix} + [A_2] \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \qquad (2.124)$$

Il suffit ensuite de résoudre le système :

$$\begin{cases} n_{xc_2} = X_p - X_2 \\ n_{yc_2} = Y_p - Y_2 \\ \vec{n}_s . \vec{V}_{s2} = 0 \end{cases} \qquad (2.125)$$

où les inconnues seront les paramètres d'un point de la roue : ϕ_s, θ_s et Z_s.

De même les points du plan tangent seront exprimés dans le repère du pignon par :

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Z_{c1} \end{bmatrix} + [A_1] \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \qquad (2.126)$$

Et le système à résoudre sera :

$$\begin{cases} n_{xc1} = X_p - X_1 \\ n_{yc_1} = Y_p - Y_1 \end{cases} \tag{2.127}$$

où les inconnues seront les paramètres d'un point du pignon : θ_1 et Z_1 (ou u et v pour un pignon corrigé).

4.5 Partage des charges, erreur de transmission sous charge et rigidité d'engrènement

L'équation de compatibilité des déplacements étant résolue (cf. § 4.1), le partage des charges entre les différentes dents en contact est déterminé à partir des pressions instantanées de contact.
Sur chaque dent, la charge L_i est ainsi donnée pour chaque position cinématique par :

$$L_i = \sum_{k=1}^{N} P_k S_k \tag{2.128}$$

où P_k sont les pressions instantanées en chaque point du plan tangent de la dent i et S_k la surface des carreaux du maillage.

L'erreur de transmission sous charge est liée au rapprochement global des corps α auquel est ajoutée l'erreur de transmission à vide. L'erreur de transmission sous charge ayant donc une composante à vide définie angulairement et une composante sous charge définie linéairement, il est nécessaire de transposer l'une des deux. Pour faciliter la comparaison avec d'autres types d'engrenages, la définition angulaire a été choisie.
Comme le rapport de conduite théorique à vide (cf. § 3.5), l'erreur de transmission sous charge est variable d'un coté à l'autre de la dent. Afin de déterminer un erreur de transmission sous charge moyenne et de limiter les approximations, le rayon du point de définition du plan tangent r a été choisi pour caractériser l'erreur de transmission.

L'erreur de transmission sous charge peut être exprimée alors par :

$$\varepsilon_t = r\alpha + \Delta\phi'_2 \tag{2.129}$$

où $\Delta\phi'_2$ est l'erreur de transmission à vide et r le rayon du point de définition du plan tangent.

La rigidité d'engrènement est également liée au rapprochement des corps par :

$$K = \frac{F}{\alpha} \tag{2.130}$$

où F est la charge totale appliquée.

Tous les résultats issus de cette modélisation du comportement sous charge sont présentés avec l'étude d'un cas complet au chapitre 4.

5 Conclusion

La modélisation du comportement sous charge en quasi-statique développée ici permet de prendre en compte toutes les caractéristiques des engrenages face utilisés dans l'industrie aéronautique.
La simulation du taillage de la roue face est basée sur les méthodes développées par Litvin qui ont été complétées par la prise en compte de la géométrie réelle des outils de taillage ainsi que d'éventuelles erreurs de taillage. L'utilisation d'outils déportés, pointus ou arrondis en tête, droits ou hélicoïdaux est maintenant possible. Toutes ces caractéristiques ont été introduites analytiquement dans la modélisation.
De même la simulation de la cinématique développée par Litvin a été étendue au cas des contacts linéaires ainsi qu'aux contacts en bord ou en tête de dent. Les zones de contact sont recherchées sur plusieurs dents en contact simultanément, le tout bien sur toujours analytiquement. La possibilité d'utiliser un pignon corrigé a également été ajoutée.
Enfin une utilisation couplée d'un modèle de contact avec les Eléments Finis permet de déterminer le partage des charges entre les dents, conjointement aux pressions instantanées de contact. La définition analytique de la roue face à partir de son outil de taillage et du pignon cylindrique sont prises en compte continuellement dans cette modélisation complète, afin d'assurer une précision optimale et une rapidité de calcul.

Cette modélisation a abouti au développement d’un logiciel de simulation complet, Gandalf (Generation, ANalysis and Design Aid for Loaded Face gears).

Chapitre 3

Validations

1 Introduction

L'étape de validation du modèle numérique développé ici est essentielle en termes de cohérence et de confiance pour assurer la qualité des résultats obtenus par les simulations. Cette étape de validation, bien qu'évidente en apparence, n'est pas aussi simple en pratique. En effet, du côté numérique, les comparaisons avec d'autres résultats (souvent obtenus d'une manière indirecte car les moyens numériques traditionnels ne sont pas forcément finalisés pour l'étude des engrenages) n'a de valeur que relative. L'ensemble des résultats représente une certaine valeur de vérité, mais elle n'est pas quantifiable. Du côté expérimental, la situation n'est pas triviale, car faire des essais suppose à la fois de maîtriser toutes les conditions d'essais (géométrie, charge,…) et ensuite de mesurer des grandeurs significatives. Dans la pratique, la validation expérimentale est alors extrêmement complexe. Cependant, à un premier niveau d'ordre de grandeurs et de tendances, ces résultats d'essais sont utiles pour continuer les travaux. Dans le travail présenté ici, essentiellement numérique, des validations ont été mises en place avec les moyens disponibles, à la fois numériques et expérimentaux.

Ainsi, différents éléments de modélisation, notamment au niveau de la répartition des charges, ainsi que certains résultats ont pu être validés numériquement ou expérimentalement. La géométrie des roues face a été vérifiée de différentes manières. Des comparaisons ont été effectuées dans un premier temps avec des résultats issus d'autres approches et dans un deuxième temps, indirectement en utilisant des mesures 3D de profil de roue face exploitées avec un autre logiciel.

La validation de la dernière étape de la modélisation, le calcul de la répartition des charges puis des contraintes en pied de dent, est la plus importante. Cette étape de validation permet alors de valider à fortiori le modèle complet. Cette validation a donc été effectuée selon deux approches distinctes. Tout d'abord, les différentes étapes du calcul et approximations utilisées ont été vérifiées par des analyses spécifiques effectuées grâce au logiciel Catia. Des comparaisons avec le logiciel de calcul d'engrenages cylindriques Prince [18] ont ensuite été faites. Enfin, les résultats obtenus par simulation ont été comparés à des résultats de mesures expérimentales.

Les résultats de validations sont présentés en deux parties, tout d'abord les validations numériques, c'est-à-dire la validation des éléments de calcul du modèle ainsi que les comparaisons avec d'autres simulations, puis la validation expérimentale.

2 Validations numériques

Plusieurs validations numériques s'appuient sur des analyses effectuées grâce au logiciel Catia. Dans un premier temps, il a donc été nécessaire de tester la précision de telles mesures.
L'unité de travail de Catia est le millimètre. Les différents tests ont montré que la précision des mesures étaient au mieux fiables au 1/1000, c'est-à-dire 1 micromètre.

2.1 Eléments de calcul de la répartition des charges

2.1.1 Calcul des rayons de courbure et directions principales de la roue face

Dans le calcul de la répartition des charges, les rayons de courbure et directions principales du pignon sont calculées directement, alors que celles de la roue face s'appuient sur des interpolations par carreaux de Coons. La vérification de ces approximations est importante puisque les rayons de courbure et les directions principales servent de base à l'estimation de la taille de la zone de contact sous charge.

Cette vérification a été effectuée grâce au logiciel Catia. En effet, avec ce logiciel, il est possible d'obtenir directement les valeurs des rayons de courbure et directions principales en un point d'une surface.
Une roue face, dont la géométrie est issue de la simulation, a été représentée sous Catia, puis les valeurs de rayons de courbure et directions ont été calculées en divers points. Ces valeurs ont ensuite été comparées aux valeurs calculées dans la simulation, directement ou à partir des interpolations de surface.

Les tableaux ci-après montrent les résultats obtenus pour deux points de la roue face. Ces analyses ont été effectuées sur les points de contact de référence de la dent 3 (c'est-à-dire les points de définition du plan tangent, cf. Chapitre 2, § 4.3.5) pour deux positions cinématiques différentes (lors d'un calcul sur 5 positions). Les valeurs comparées sont les valeurs des rayons de courbure R_1 et R_2, ainsi que les composantes des trois vecteurs définissant la base des directions principales.

Mesure	R_1	R_2	X_1	Y_1	Z_1	X_2	Y_2	Z_2	X_3	Y_3	Z_3
Simulation	63.64	-70.76	-0.30	0.76	-0.57	0.29	0.64	0.70	-0.90	-0.04	0.42
Catia	63.53	-70.76	-0.30	0.76	-0.57	-0.29	-0.64	0.70	0.90	0.04	-0.042
Différence	0.17%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 3.1 : Comparaison des rayons de courbure et directions principales, position cinématique 2

Mesure	R_1	R_2	X_1	Y_1	Z_1	X_2	Y_2	Z_2	X_3	Y_3	Z_3
Simulation	61.83	-72.58	-0.29	0.77	-0.57	0.30	0.64	0.70	-0.90	-0.03	0.42
Catia	61.61	-72.63	-0.29	0.77	-0.57	-0.30	-0.64	0.70	0.90	0.03	-0.42
Différence	0.35%	-0.04%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tableau 3.2 : Comparaison des rayons de courbure et directions principales, position cinématique 3

Les résultats obtenus sont excellents dans les limites fixées dans cette étude. L'écart maximum mesuré pour la valeur des rayons de courbure est de 0.35 %, et pour les composantes des trois vecteurs définissant la base des directions principales aucun écart n'a pu être mesuré. Seul le signe des deuxième et troisième vecteurs change, ceci étant dû au fait que Catia définit les normales entrantes à la surface alors que la simulation définit les normales sortantes.
Ces analyses permettent également par la même occasion de valider les valeurs des normales au profil, puisque la troisième composante de la base des directions principales est justement cette normale.

2.1.2 Approximation du plan tangent

La principale hypothèse faite au niveau du plan tangent dans la simulation suppose que la zone de contact à vide est plane. Cette approximation est obligatoire pour pouvoir utiliser les théories de Boussinesq et résoudre l'équation de compatibilité des déplacements.

La principale conséquence de cette approximation est l'assimilation de toutes les normales de la zone de contact à la normale du plan tangent. Cette normale sera utilisée ensuite comme direction de chargement lors du calcul par Eléments Finis des coefficients d'influence de flexion. Mais ce ne sera que la valeur du déplacement dans la direction de chargement ainsi calculée qui sera ensuite utilisée pour déterminer les coefficients d'influence de flexion et dans l'équation de compatibilité des déplacements. C'est donc sur ces résultats que la vérification de l'approximation doit être effectuée.

Il serait inopportun de se baser uniquement sur la différence des valeurs des composants N_x, N_y et N_z des vecteurs normaux réels et du vecteur normal de référence. En effet, cette différence directe ne traduit pas l'impact sur la valeur des chargements ou des déplacements (lors d'un calcul linéaire par éléments finis, la valeur du déplacement étant directement proportionnelle à la valeur du chargement, l'impact sera en proportion identique pour les deux). Pour connaître cet impact, il convient de projeter orthogonalement selon chaque direction le vecteur de référence sur les vecteurs normaux et de comparer alors la longueur projetée par rapport à la longueur réelle car c'est cette valeur qui sera effectivement utilisée pour le calcul à la place de la valeur réelle.

Il est clair sur un exemple en 2 dimensions (Fig. 3.1) qu'une variation du simple au double sur l'un des composants des vecteurs ($Y_a \approx 2Y_r$) n'aboutit pas à un écart aussi important sur la valeur de la contribution de la direction approchée sur la direction réelle.

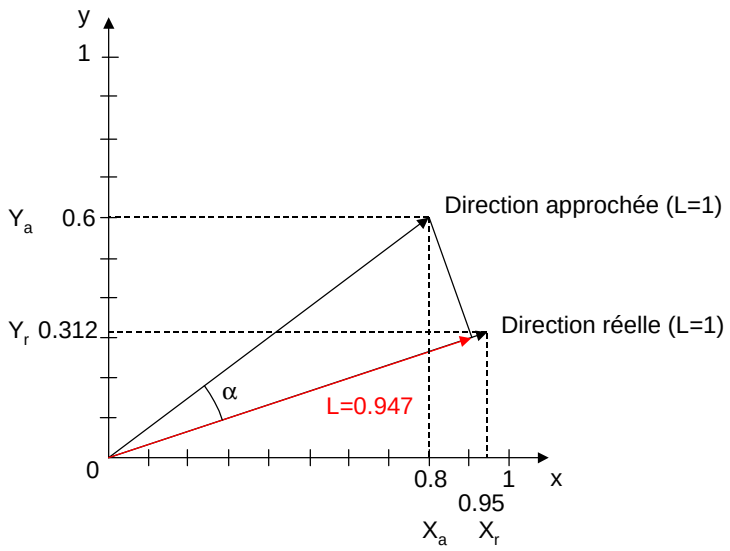


Figure 3.1 : Contribution du vecteur approché dans la direction réelle

Ici l'angle α entre les deux vecteurs est calculé par :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y_a}{X_a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y_r}{X_r}\right)$$

où (X_a,Y_a) sont les composants du vecteur approché et (X_r,Y_r) les composants du vecteur réel. La contribution du vecteur approché dans la direction réelle est donné par le cosinus de l'angle α (18,78°) et vaut ici par exemple 94.7% de la valeur réelle puisque les vecteurs sont normés. L'erreur commise ne sera que de 5.3% alors que la différence sur l'une des composantes des vecteurs était de près de 50%.

La méthode décrite ci-dessus a été généralisée en 3 dimensions et la contribution des vecteurs approchés dans la direction réelle mesurée. Les contributions mesurées pour un cas d'engrenage face droit et un cas d'engrenage face hélicoïdal sont synthétisées dans les tableaux ci-dessous :

Ecart entre la dent de mesure et la dent de définition du plan tangent	Moyenne des contributions mesurées	Contribution mesurée minimum	Contribution mesurée maximum
Dent de référence	99.21 %	94.98 %	100 %
Dent voisine	98.81 %	96.05 %	100 %

Tableau 3.3 : Contributions des vecteurs approchés par rapport aux vecteurs réels, roue droite

Ecart entre la dent de mesure et la dent de définition du plan tangent	Moyenne des contributions mesurées	Contribution mesurée minimum	Contribution mesurée maximum
Dent de référence	99.30 %	94.80 %	100 %
Dent voisine	97.16 %	88.52 %	99.33%

Tableau 3.4 : Contributions des vecteurs approchés par rapport aux vecteurs réels, roue hélicoïdale

Les mesures ont été bien sûr effectuées sur les cas les plus défavorables, c'est-à-dire en utilisant des engrenages face avec des contacts linéaires dont les lignes de contact couvrent toute la largeur de denture et sont fortement inclinées.
Ainsi les points de contact en bord de dent sont le plus éloignés possible des points de référence du plan tangent (Fig. 3.2). C'est d'ailleurs en ces points que les contributions minimum ont été relevées, mais ce sont également les points qui seront les moins chargés donc l'erreur commise ici aura un impact plus faible sur les résultats de la modélisation.

Pour des cas de contact ponctuels, l'erreur commise est bien moins importante et ne sera pas présentée ici.

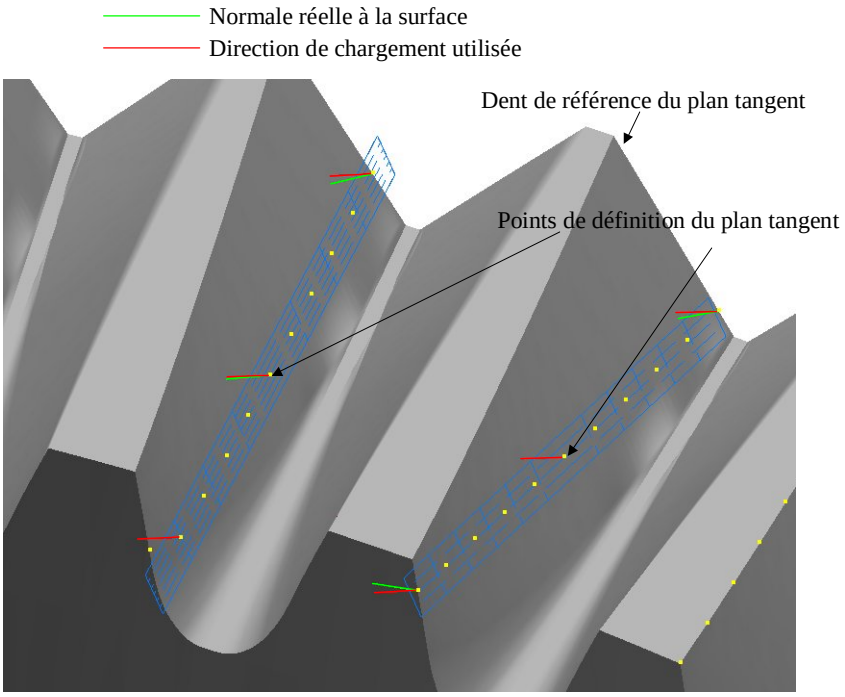


Figure 3.2 : Exemple de directions de chargement réelles et approchées sur la roue face

Ces résultats montrent, qu'en moyenne, l'erreur commise en utilisant le vecteur normal de référence comme approximation des vecteurs normaux réels est inférieure à 1 % sur la dent de référence qui sert de support de définition au plan tangent. De plus, c'est cette dent qui sera la plus chargée et qui subira les contraintes les plus importantes, il est donc nécessaire de limiter au maximum les approximations sur cette dent puisque toutes les études seront centrées sur elle.

Sur les dents voisines, l'écart devient plus important : 1,2% pour en engrenage face droit, et allant presque jusqu'à 3% pour un engrenage face hélicoïdal.

Les points où l'écart mesuré est le plus important sont tous situés en fait au niveau du bord de dent intérieur de la roue. Dans les deux cas proposés, la roue présente des interférences de taillage au rayon intérieur, la géométrie est donc fortement perturbée à cet endroit.
De plus, il existe peu de modèle de contact simple capable de relater fidèlement un contact réel en bord de dent (Vijayakar par exemple propose une méthode pour inclure les effets de bord dans le calcul des engrenages [113], mais sa mise en œuvre n'est pas aisée). Si les mesures effectuées au rayon intérieur sont exclues des moyennes, l'erreur commise diminue fortement. Elle tombe à environ 0,5% d'erreur sur toutes les dents pour un engrenage droit, et de 0,5% sur la dent de référence jusqu'à 2% sur les dents voisines pour un engrenage hélicoïdal.

Ecart entre la dent de mesure et la dent de définition du plan tangent	Moyenne des contributions mesurées	Contribution mesurée minimum	Contribution mesurée maximum
Dent de référence	99.48 %	97.32 %	100 %
Dent voisine	99.41 %	97.96 %	100 %

Tableau 3.5 : Contributions des vecteurs approchés par rapport aux vecteurs réels, roue droite, sans bord de dent intérieur

Ecart entre la dent de mesure et la dent de définition du plan tangent	Moyenne des contributions mesurées	Contribution mesurée minimum	Contribution mesurée maximum
Dent de référence	99.53 %	97.24 %	100 %
Dent voisine	98.00 %	96.02 %	99.33 %

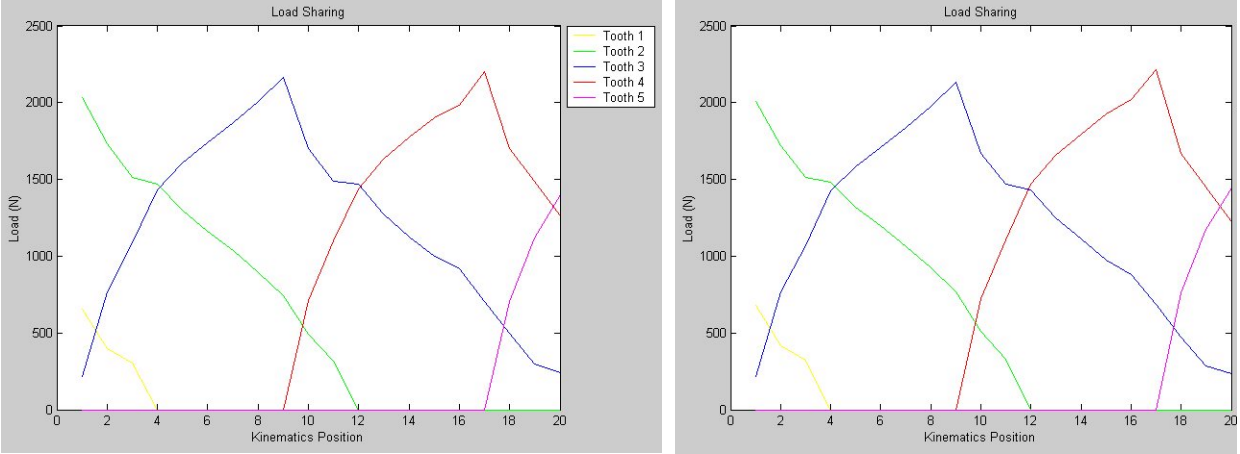
Tableau 3.6 : Contributions des vecteurs approchés par rapport aux vecteurs réels, roue hélicoïdale, sans bord de dent intérieur

Des calculs ont été effectués pour mesurer l'impact de ces approximations de chargement sur les déplacements calculés. En effet, en utilisant la normale du plan tangent pour effectuer le chargement à la place de la normale réelle, la norme du chargement correspond donc en moyenne à plus de 99% de la valeur réelle, et la direction de chargement varie de moins de 10° par rapport à la direction réelle. Les différences mesurées entre les déplacements ainsi calculés et les déplacements calculés avec le chargement réel, sont du même ordre de grandeur (99% de la norme et variation de direction inférieure à 10°). Comme c'est uniquement la valeur du déplacement dans la direction de chargement qui sera utilisée ensuite, l'écart semble tout à fait raisonnable pour le calcul des coefficients d'influence de flexion.

Pour conforter la validation de cette approximation, deux calculs ont été effectués sur un même engrenage face en utilisant deux points de référence différents pour la définition du plan tangent, ceci pour constater l'impact de cette approximation sur les résultats utilisant les déplacements ainsi calculés.
Le premier calcul utilise le point de référence "normal" pour définir le plan tangent, c'est-à-dire le milieu de la ligne de contact potentielle à vide, sur la dent la plus chargée. Le second calcul utilise un point situé en bord de dent au niveau du rayon intérieur, c'est-à-dire le cas le plus défavorable constaté précédemment.

L'écart entre les vecteurs utilisés pour effectuer le chargement (écart en contribution mesuré comme décrit précédemment) dans les deux cas est au maximum égal à 2% (variation de la direction de chargement de 11,4°). Cet écart est observé pour les points situés en bord de dent au niveau du rayon extérieur alors que le plan tangent est défini ici au niveau du rayon intérieur. Une telle distance entre un point de chargement et le point de définition du plan tangent ne pourra pas être atteinte lors des simulations puisque le plan tangent est défini au centre de la dent (Fig. 3.2). Les conditions utilisées lors des ce calcul sont donc encore plus défavorables. L'écart constaté entre les deux cas sur les coefficients d'influence de flexion issus du calcul par éléments finis est également au maximum de l'ordre de 2%.

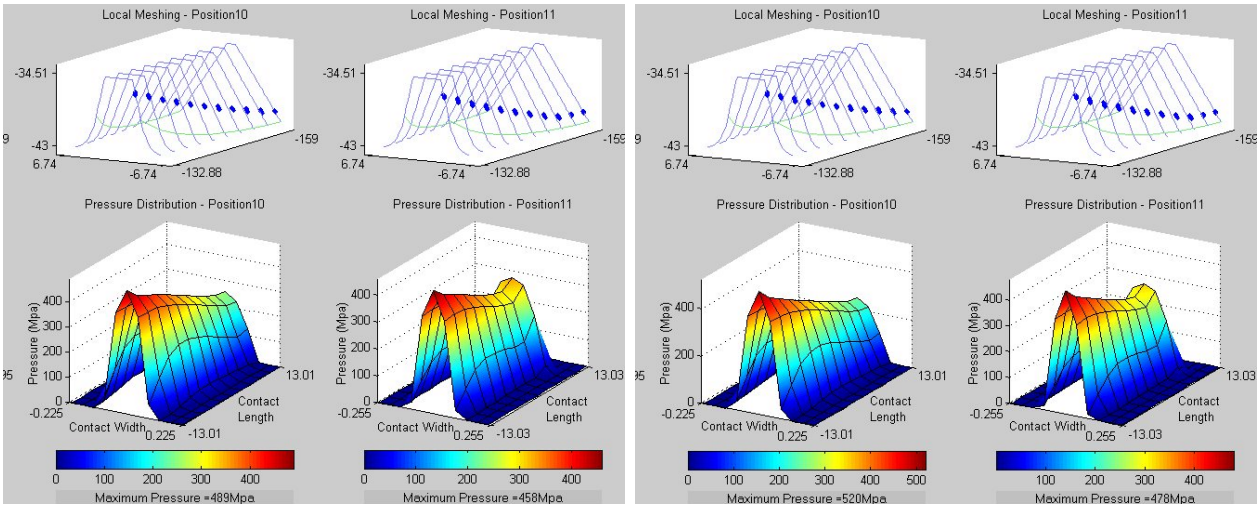
Les figures 3.3 et 3.4 montrent les résultats obtenus après résolution de l'équation de compatibilité des déplacements dans les deux cas, pour la répartition des charges, ainsi que pour les pressions de contact pour deux positions cinématiques sur une dent.



Point de référence au centre du contact *Point de référence en bord de dent*

Figure 3.3 : Répartition des charges en fonction du point de référence du plan tangent

La répartition des charges est identique dans les deux cas. Au niveau des pressions de contact, les écarts relevés sont également très faibles, compris globalement entre 0 et 5% avec des maxima de 8% au niveau des pics de pression.



Point de référence au centre du contact *Point de référence en bord de dent*

Figure 3.4 : Pressions de contact en fonction du point de référence du plan tangent

Les erreurs introduites par l'approximation du plan tangent dans le modèle développé ici semblent donc être tout à fait raisonnables. Le cas hélicoïdal en contact linéaire avec un angle d'hélice de 10° est évidemment le cas le plus défavorable possible, et la limite du modèle est ici atteinte pour garantir une grande précision du modèle. Pour un angle d'hélice supérieur à 10°, l'influence de l'angle d'hélice sur l'approximation du plan tangent devient plus importante. La définition du plan tangent utilisée ici pourrait être remise en cause et il serait peut être alors nécessaire de développer un nouveau modèle.

Il faut noter ici que l'approximation des normales à la surface par la normale au plan tangent n'est effectuée que pour le calcul des coefficients d'influence de flexion, où le résultat recherché est uniquement une valeur de déplacement. Cette approximation est nécessaire pour que toutes les distances exprimées dans l'équation de compatibilité des déplacements soient dans la même direction.

Par contre, pour le calcul des contraintes (mécanique des milieux continus), une telle approximation (variation de quelques degrés sur la direction de chargement) aurait des conséquences bien plus importantes et ne peut pas être utilisée. Même si la zone de contact entre le pignon et la roue n'est pas effectivement plane après déformation (hypothèse du plan tangent), l'effort appliqué sera lui par contre normal à la surface de la dent. Pour le calcul des contraintes, la direction de chargement utilisée est donc la normale réelle à la surface.

2.2 Comparaison avec d'autres simulations

2.2.1 Géométrie de la roue face

2.2.1.1 Catia

Grâce au logiciel Catia, il est possible de simuler et visualiser pas à pas le taillage de la roue face à partir de la géométrie de l'outil. L'outil est dessiné en solide, puis par itérations successives, son mouvement est simulé. A chaque itération, l'outil est retranché à un bloc de matière qui constituera la roue face. Ainsi, si le pas d'itération est suffisamment fin, l'enveloppe de l'outil sera reproduite et la roue face obtenue en solide. Cette méthode est approximative et laborieuse, mais peut tout de même servir pour comparer les géométries.

Le taillage d'une roue face a été simulé ainsi par un partenaire du projet FACET (GKN Westland Helicopter). Les points issus de la simulation analytique ont ensuite été transcrits sur le même modèle (Fig. 3.5). La distance entre le solide et les points a enfin été mesurée.

La précision du modèle Catia a d'abord été estimée en mesurant l'écart entre le milieu de la dent et les points de tête de dent sur chaque profil. La roue face modélisée étant droite, la dent doit être symétrique. Des différences comprises entre 1 et 10 microns ont été relevées en moyenne avec un maximum de 17 microns au rayon extérieur. La précision obtenue avec cette simulation à l’aide de Catia est donc loin d’être optimale.

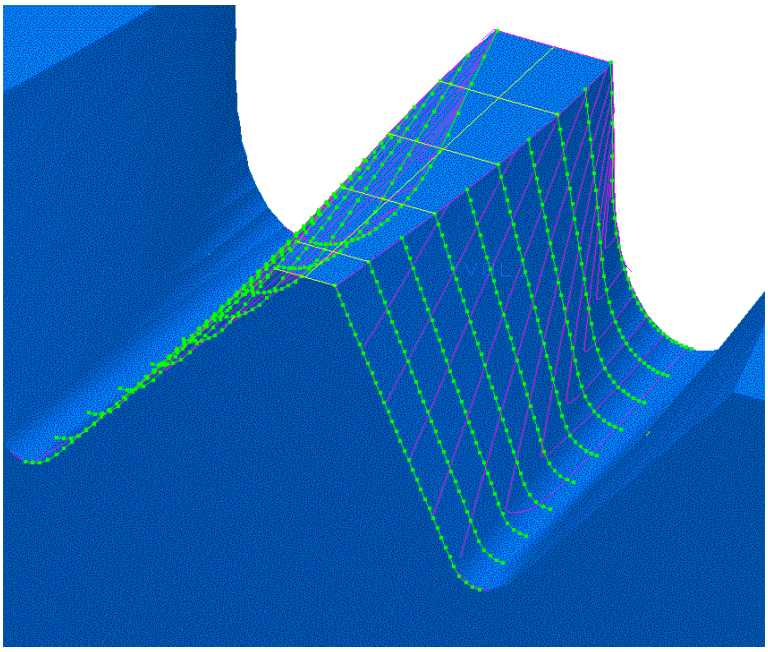


Figure 3.5 : Correspondance entre une roue face dessinée avec Catia et les points de définition issus de la simulation analytique

Les analyses ont ensuite été effectuées entre le solide généré sous Catia et les points issus de la simulation. Seules les tranches où l'erreur estimée sur le solide Catia était inférieure à 10 microns ont été retenues.

Le tableau ci-dessous montre les résultats des mesures pour deux tranches :

Rayon, côté	83,8 mm, droit	83,8 mm, gauche	80,6 mm, droit	80,6 mm, gauche
Maximum	9,23 microns	5,55 microns	12,35 microns	7,88 microns
Minimum	1,08 microns	0,24 microns	1,10 microns	0,64 microns
Moyenne	3,86 microns	2,20 microns	7,60 microns	7,20 microns

Tableau 3.7 : Distances mesurées entre une roue face simulée avec Catia et des points issus de la simulation analytique

Les distances mesurées sont en moyenne toujours inférieures à 10 microns, qui est la précision estimée du modèle Catia. Il est donc tout à fait raisonnable de considérer que les deux géométrie sont identiques.

2.2.1.2 Famous

Dans le cadre du projet Européen Facet, un deuxième logiciel de simulation du taillage a été développé. Cette deuxième simulation numérique était nécessaire car son objectif était orienté vers l'usinage. Elle est basée sur une approche complètement numérique et reproduit fidèlement le taillage à partir de la cinématique de la machine de taillage afin de pouvoir optimiser les réglages de la machine de taillage ainsi que la géométrie de l'outil.

Il existe donc à l'heure actuelle au sein du consortium Facet deux logiciels capables de simuler la géométrie de la roue face. Les temps de calculs ne sont pas comparables entre l'approche analytique développée dans ce travail (1 à 2 secondes de calcul) et l'approche numérique développée par l'autre partenaire (plusieurs heures de calcul) mais il était nécessaire de comparer les résultats issus des deux logiciels Gandalf et Famous.

Les points issus des deux simulations ont été représentés sous Catia, et leur déviation mesurée. Les pas de calcul des deux simulations étant définis de deux manières différentes, il est impossible d'obtenir des points de définition exactement identiques. Des splines ont été tracées à partir des points issus de Gandalf, et ceux de Famous superposés (Fig. 3.6 - Points de Gandalf en rouge, points de Famous en bleu). C'est ensuite la distance entre ces points et les splines qui a été mesurée.

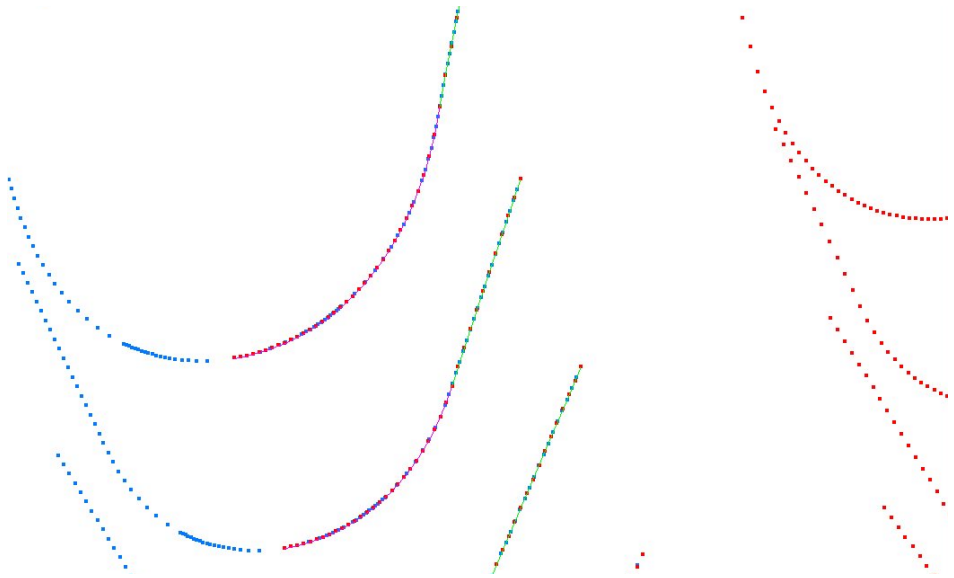


Figure 3.6 : Points issus de Famous représentés sur les splines issues des points de Gandalf

Au niveau du flanc actif de la roue face, toutes les mesures effectuées sont inférieures à 1 micron (la précision maximale de Catia étant atteinte, Catia considère que les points appartiennent à la courbe). Les deux simulations donnent donc des résultats parfaitement identiques et comme les deux approches sont complètement différentes, il est tout à fait raisonnable de considérer que les deux logiciels sont validés par cette comparaison.

Par contre au niveau du pied de dent, des oscillations sont observées pour les points issus de Famous (Fig. 3.7). Selon les réglages de la vitesse d'avance de la machine de taillage, elle sont plus ou moins prononcées. Les distances mesurées alors sont toujours inférieures à 9 microns et les points issus de Famous encadrent toujours la spline issue de Gandalf.

Il est impossible à l'heure actuelle de savoir si les oscillations observées représentent réellement le pied de dent taillé d'une roue face ou si elles sont dues à des perturbations numériques. Néanmoins le modèle développé ici considérant une roue face "parfaite", il ne semble pas que ces oscillations aient lieu d'être et il est alors raisonnable de considérer que la modélisation développée ici relate précisément la géométrie de la roue face.

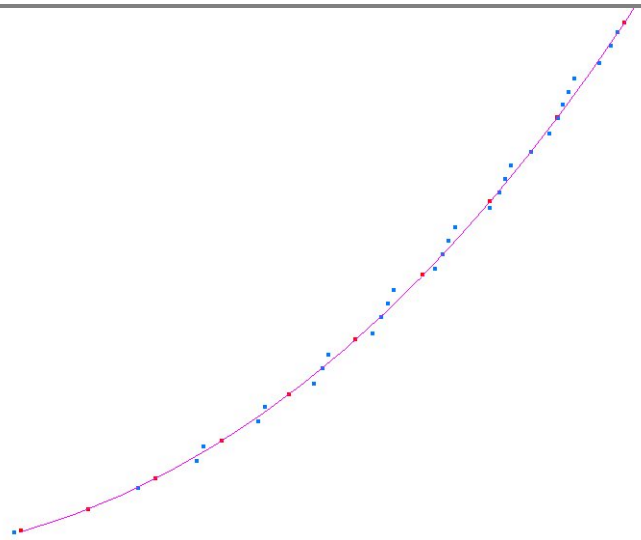


Figure 3.7 : Oscillations des points observées au niveau du pied de dent

2.2.2 Géométrie du pignon

Un logiciel de calcul, Prince, a été développé au laboratoire CASM il y a plusieurs années pour l'étude des engrenages cylindriques. Des mesures expérimentales sous charge (speckle vidéo, jauges de contraintes) ont permis de valider complètement le processus dans ce cas. Une comparaison entre les profils issus de Prince et ceux issus de Gandalf pour les pignons a donc été effectuée.

La figure 3.8 montre la superposition d'un profil de pignon issu de Prince avec un profil de pignon issu de Gandalf. De la même façon que pour les comparaisons de la géométrie de la roue face, les points issus des deux simulations ont été représentés sous Catia, et leur déviation mesurée. Des splines ont été tracées à partir des points issus de Gandalf, et ceux de Prince superposés (Fig. 3.8 - Splines issues des points de Gandalf en rouge, points de Prince en bleu).

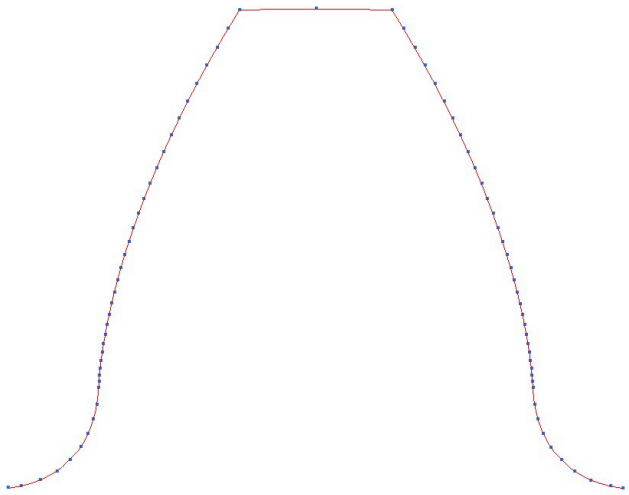


Figure 3.8 : Points issus de Prince représentés sur les splines issues des points de Gandalf

Aucune déviation de profil n'a pu être mesurée entre Gandalf et Prince, les deux géométries générées sont donc identiques.

En ce qui concerne les corrections de denture du pignon, une fois de plus des analyses ont été effectuées à l'aide de Catia. La géométrie du pignon non corrigé étant validée, il suffit de tracer un pignon corrigé et le même pignon non corrigé sous Catia, puis de mesurer l'écart des surfaces. Cet écart doit correspondre aux données d'entrée de correction de denture sur le profil.

Un exemple des mesures effectuées est donné dans le tableau ci-dessous :

Correction étudiée	Valeurs données en entrée	Valeurs mesurées sous Catia.	Ecart
Longueur de correction en tête (LCA)	3 mm	2.999 mm	0.001 mm
Profondeur de correction en tête (CA)	0,016 mm	0,016 mm	0.000 mm
Longueur de correction en pied (LCF)	2 mm	2.004 mm	0.004 mm
Profondeur de correction en pied (CF)	0.02 mm	0.019 mm	0.001 mm

Tableau 3.7 : Ecarts mesurés entre les valeurs de corrections imposées et obtenues

La corrélation est très bonne, les écarts mesurés sont du même ordre de grandeur que la précision de Catia. Les comparaisons des résultats issus de Prince et de Catia, montrent que la géométrie des pignons non corrigés et corrigés fournie par Gandalf correspond bien à la géométrie réelle des pignons.

2.2.3 Calculs par éléments finis

La modélisation développé ici utilise à plusieurs reprises des calculs par éléments finis. Les calculs éléments finis sont effectués avec Catia. Ceux-ci n'ayant jamais été utilisés auparavant dans ce genre de modèle, il a fallu vérifier la validité des résultats.

Pour effectuer ces vérifications, le logiciel Prince a, une nouvelle fois, été utilisé. Ce logiciel utilise une démarche également basée sur les coefficients d'influence et l'équation de compatibilité des déplacements pour déterminer la répartition des charges des engrenages cylindriques. Prince possède son propre solveur intégré et les coefficients d'influence de flexion ainsi que les contraintes en pied de dent sont calculés grâce à l'utilisation des prismes finis. Les contraintes issues de Prince ont été validées expérimentalement. Une comparaison des résultats de Prince avec ceux de Gandalf pour un pignon permet de donner une bonne indication sur la validité des résultats de Gandalf.

Diverses séries de calculs ont préalablement été menées afin de déterminer notamment les types d'éléments à utiliser, les conditions limites et les chargements adéquats, ainsi que les compromis optimaux entre finesse des maillages et précision des résultats.

2.2.3.1 Coefficients d'influence de flexion

Les résultats des coefficients d'influence de flexion entre Prince et Gandalf ont été comparés. Le même pignon a été utilisé dans les deux simulations. Un chargement unitaire identique a été appliqué aux deux modèles et les coefficients d'influence de flexion ont été calculés par Prince grâce aux prismes finis et par Gandalf grâce aux éléments finis de Catia.

Plusieurs comparaisons ont été effectuées en mesurant les déplacements de toute une ligne de contact, dus au chargement d'un nœud de cette ligne (Fig. 3.9). Les exemples présentés montrent les résultats pour des lignes de contact couvrant toute la largeur de denture d'un pignon et discrétisées en 9 nœuds.

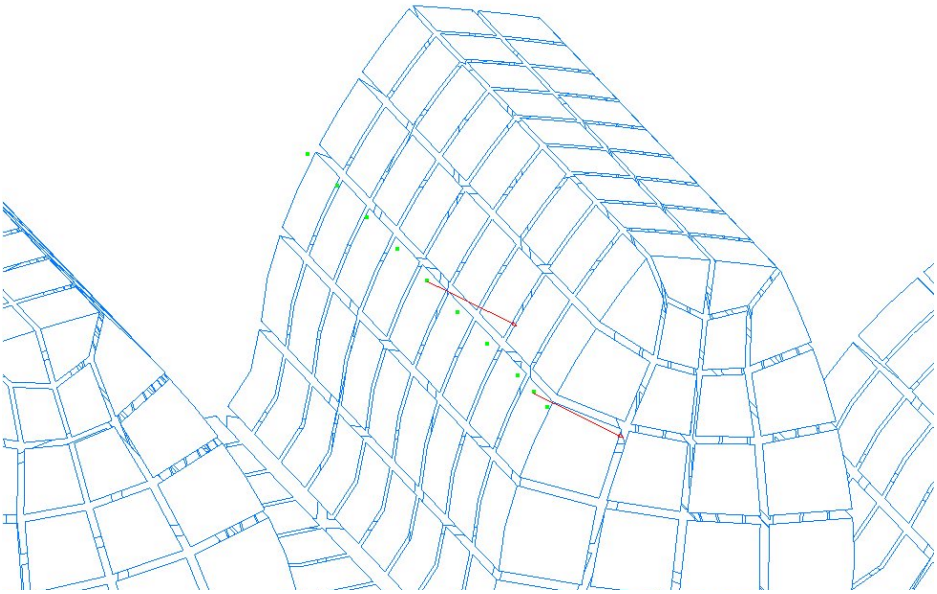


Figure 3.9 : Chargements appliqués pour la comparaison des coefficients d'influence

Le premier exemple montre les déplacements mesurés pour un chargement effectué sur le nœud central de la ligne, le second pour un chargement effectué en bord de dent (Fig. 3.10 et 3.11).

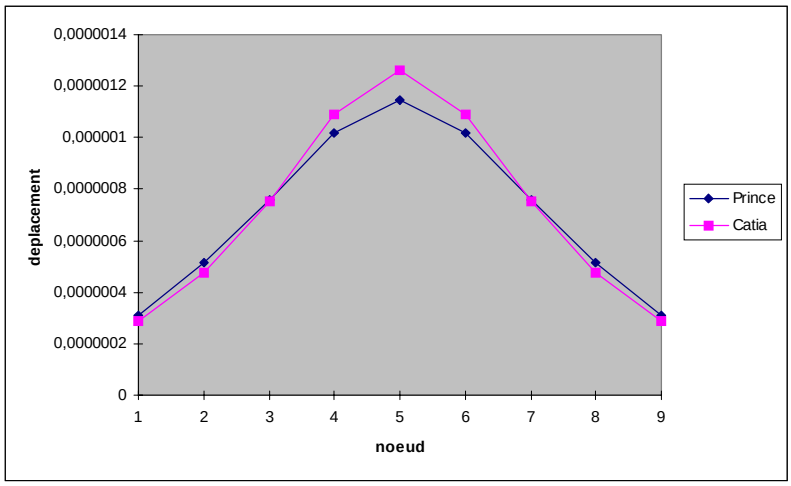


Figure 3.10 : Déplacements dus au chargement du nœud central (cas 1)

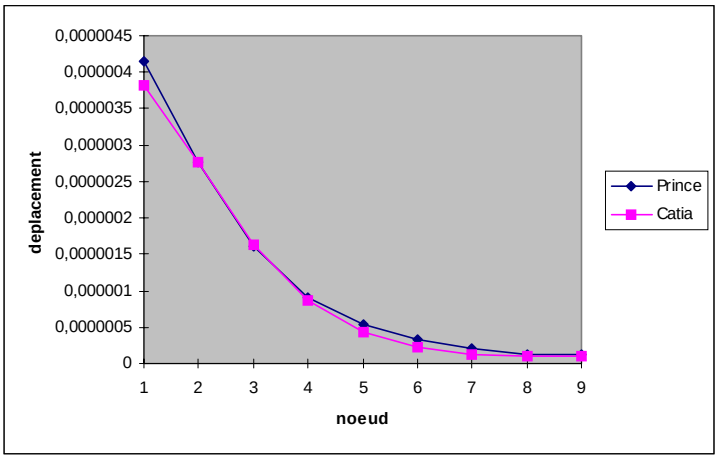


Figure 3.11 : Déplacements dus au chargement d'un nœud en bord de dent (cas 2)

Les écarts entre les deux courbes sont très faibles, sauf au point de chargement (nœud 5 pour le cas 1 et nœud 1 pour le cas 2). Le tableau ci-dessous récapitule les écarts mesurés pour les 2 cas présentés :

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cas 1	1.91 %	3.28 %	0.19 %	5.95 %	9.77 %	5.95 %	0.19 %	3.28 %	1.91 %
Cas 2	8.00 %	0.21 %	0.49 %	1.29 %	2.59 %	2.62 %	1.77 %	0.48 %	0.71 %

Tableau 3.8 : Ecart entre Prince et Catia pour le calcul des coefficients de flexion

A part au nœud de chargement où il est connu que les résultats ne sont jamais excellents, les écarts entre Prince et Catia sont toujours inférieurs à 6%.

Les différences entre les deux calculs pourraient être dues au chargement qui n'est pas appliqué de la même façon dans les deux cas. En effet, le point d'application de la charge ne correspondant pas forcément aux nœuds du maillage, la charge doit être répartie sur les nœuds du maillage (Fig. 3.12).

Prince répartit la charge sur les deux nœuds les plus proches. Sous Catia, la charge est appliquée grâce à des éléments spéciaux d'interpolation qui répartissent la charge sur tous les nœuds de la face de l'élément le plus proche. Les éléments utilisés étant des éléments hexaédriques à 20 nœuds, la charge est alors répartie sur 8 nœuds.

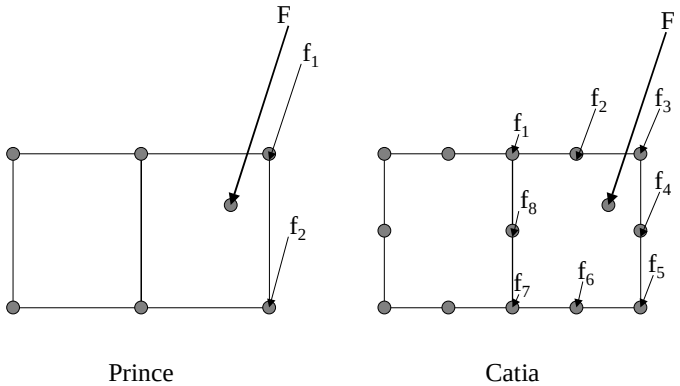


Figure 3.12 : Répartition du chargement sur les nœuds du maillage

Suite à ces remarques, les résultats obtenus ici peuvent donc être considérés comme satisfaisants. Une bonne corrélation entre Prince et Catia est satisfaisante ici, mais il est aussi important de valider les contraintes en pied de dent.

2.2.3.2 Contraintes en pied de dent

De la même manière que pour les coefficients d'influence de flexion, les contraintes en pied de dents calculées par Prince et par Catia ont été comparées.

La même distribution de pressions instantanées issue de Gandalf a été appliquée sur un pignon dans les deux cas (Fig. 3.13). Les contraintes ont alors été comparées dans différents creux de dents.
Afin de pouvoir comparer les contraintes exactement aux mêmes positions, le nombre de nœuds en creux de dents sous Catia a été imposé pour correspondre aux nœuds de Prince (13 nœuds par creux). De même, le nombre de sections selon la largeur de denture a été imposé (9 sections selon la largeur de denture).

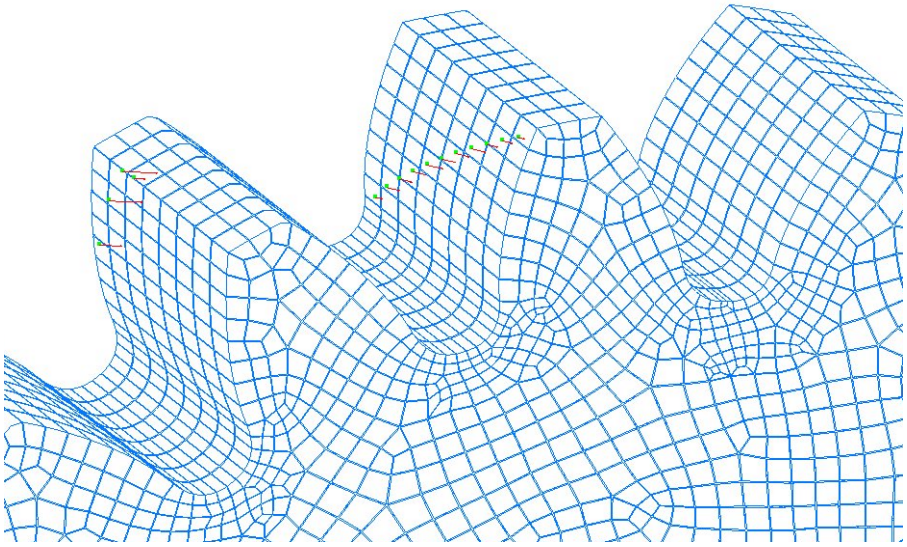


Figure 3.13 : Chargement appliqué pour la comparaison des contraintes

Un exemple des comparaisons pour 4 sections successives sur le creux de dent central (entre les deux dents chargées) est présenté sur la figure 3.14.

Les écarts observés varient entre 10 et 30 MPa selon les sections, ce qui pour les plages de valeurs de contraintes observées donne un écart moyen compris entre 4% et 8% pour les 4 sections présentées ci-dessus. Comme pour le calcul des coefficients de flexion, ces écarts pourraient être dus à la manière différente d'appliquer le chargement.
Cet écart est toutefois inférieur aux plages de validations expérimentales de Prince [18], les résultats apportés par Catia sont donc très satisfaisants.

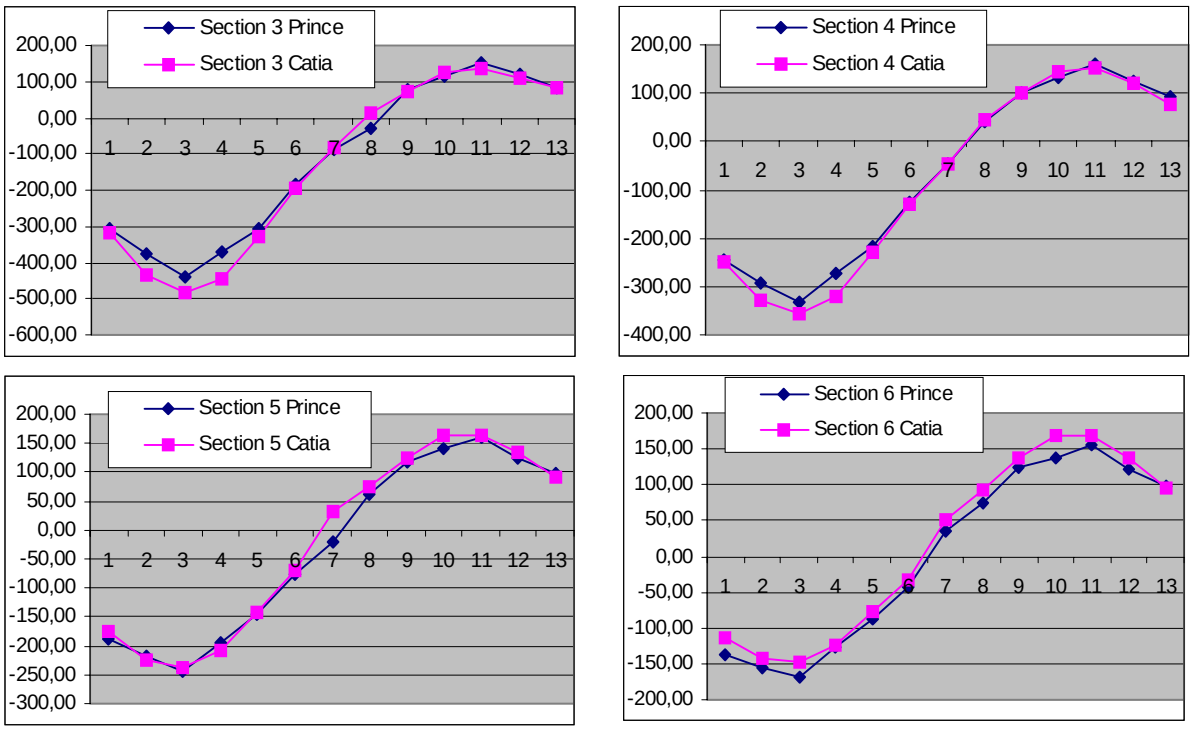


Figure 3.14 : Comparaisons des contraintes obtenues entre Prince et Catia pour 4 sections successives

Cette validation permet également de définir les caractéristiques du maillage, les cas de conditions limites utilisés ainsi que la manière de procéder au chargement qui seront utilisés ultérieurement. En effet, plusieurs essais et comparaisons ayant comme critères la qualité des résultats ainsi que les temps de calcul ont préalablement été effectués avant de retenir cette modélisation.

Les caractéristiques globales de la modélisation par éléments finis retenues sont les suivantes :

- Utilisation d'éléments hexaédriques à 20 nœuds (éléments quadratiques à 3ddl par nœud),
- Nombre de nœuds pour couvrir la zone du pied de dent : entre 10 et 15,
- Nombre de sections d'éléments sur la largeur de denture : $2b/m$, où b est la largeur de denture et m le module (soit par exemple environ 10 sections pour une largeur de 20 mm et un module de 4mm),
- Taille approximative des éléments :
  - $1/4$ du module globalement pour les dents,
  - $1/10$ du module au niveau du pied de dent,
  - de $1/2$ module à 1 module pour la jante,
- Chargement nodal appliqué grâce à des éléments d'interpolation de déplacements sur les nœuds de la surface de l'élément le plus proche du nœud à charger,
- Encastrement de la jante pour modéliser la rigidité due aux autres dents (seulement 5 dents sont représentées), et encastrement de la jante pour modéliser l'arbre.

Ceci conduit à un modèle éléments finis qui comporte environ 20000 nœuds pour un module de 4 mm et une largeur de denture de 20 mm, et induit un temps de calcul d'environ 1h (pour le pignon ou pour la roue) pour calculer les contraintes en pied de dent pour 20 positions cinématiques (20 calculs à effectuer).

En ce qui concerne le calcul des déplacements uniquement, les tests ont montré que l'utilisation d'éléments deux fois plus gros donnent exactement les même résultats.
Pour le calcul des coefficients d'influence de flexion, il est donc inutile d'avoir un maillage aussi fin. Des éléments de taille ½ module seront retenus pour mailler la dent et de taille variant de 1 à 2 modules pour la jante.

Toutes ces recommandations seront dès lors suivies pour effectuer les divers calculs éléments finis nécessaires aux exploitations exposées dans les chapitres suivants.

Le temps complet nécessaire pour une telle modélisation pour 20 positions cinématiques peut être estimé de la façon suivante :

- Calculs des coefficients d'influence de flexion :
    - Nombre de calculs à effectuer = nombre de postions cinématiques (ici 20) x nombre de nœuds sur une ligne de contact (ici 11) x rapport de conduite (ici 2) x 2 passages (flanc antimologue libre et bloqué) x 2 (roue et pignon) = 1760 dans ce cas,
    - Temps de calcul avec Catia : entre 6 et 8h.

- Calcul des contraintes :
    - Nombre de calculs à effectuer = nombre de positions cinématiques (ici 20) x 2 (pignon et roue) = 40 calculs,
    - Temps de calcul avec Catia : environ 2h.

Globalement, en comptant les temps de préparation des modèles, ce seront entre 10 et 12 h qui seront nécessaires pour effectuer un calcul complet pour 20 positions cinématiques.

Les temps de calculs obtenus ici sont excellents. Des calculs équivalents ont été effectués par un partenaire du projet FACET (ZF Friedrichshafen) en utilisant un solveur non linéaire (Marc) et des éléments finis de contact. Les résultats obtenus sont équivalents, mais le temps de calcul nécessaire a été de 13 jours.

3 Validations expérimentales

Les diverses validations numériques effectuées permettent déjà d'être confiant dans la précision des résultats fournis par la modélisation. Néanmoins, une validation expérimentale permet de finaliser complètement cette validation.
Peu d'essais ont à l'heure actuelle été effectués sur les engrenages face. Dans le cadre du projet Facet, deux parties expérimentales distinctes sont prévues. La première campagne d'essais a été effectuée sur un engrenage face monté seul sur un banc d'essai. Elle avait pour but d'obtenir des premiers résultats sur les caractéristiques des engrenages face afin de les comparer à celles des spiro-coniques.

La deuxième compagne d'essais doit être effectuée cette fois-ci sur des engrenages face montés à la place des spiro-coniques dans des boîtes de transmission d'hélicoptères existantes. Le but ici est de comparer le comportement global des engrenages face en utilisation et d'envisager pour eux la possibilité de remplacer les spiro-coniques.

La première campagne d'essais a été effectuée en Allemagne par ZF Friedrichshafen entre 1999 et 2000. La deuxième campagne devait être effectuée entre 2000 et 2001 chez les différents constructeurs d'hélicoptères Européens, à savoir Eurocopter en France, Agusta en Italie et GKN Westland en Angleterre. Malheureusement, suite à des problèmes liés à la fabrication et à la rectification des engrenages face qui s'avèrent plus compliquées que prévu, les essais ont dû être repoussés et ne devraient pas débuter avant fin 2001. Les seuls résultats disponibles sont ceux de la première campagne qui ont été effectués avec des engrenages face bruts, c'est-à-dire sans traitement thermique, ni rectification. La qualité des engrenages n'est donc pas optimale, mais des comparaisons peuvent tout de même être effectuées avec la modélisation développée ici.

3.1 Géométrie de la roue face

Des mesures 3D du flanc actif de roues face effectuées en Allemagne ont permis de valider la géométrie des flancs actifs obtenue par le logiciel Famous. Les mesures ne sont pas disponibles, mais les résultats entre Gandalf et Famous étant strictement identiques sur cette zone (cf. § 2.2.1.2), il est tout de même envisageable d'affirmer que cela valide par la même occasion expérimentalement la géométrie issue du modèle développé ici.

La mesure 3D des roues face utilisées ensuite lors des essais effectués par ZF Friedrichshafen ont montrés que la géométrie issue du taillage est loin d'être parfaite (Fig. 3.15). Des écarts de surface pouvant aller jusqu'à 40 microns ont été relevés, ce qui équivaut pour des engrenages cylindriques à une qualité de fabrication selon le norme DIN située entre 9 et 10, tant au niveau des erreurs de pas que des erreurs d'hélice. Cette qualité est inacceptable habituellement en Aéronautique. Il faut toutefois rappeler que les roues utilisées étaient brutes, ce qui ne sera jamais le cas par la suite lorsque le procédé de fabrication et de rectification sera totalement maîtrisé.

Cette qualité de fabrication ne devra toutefois pas être oubliée lors de l'interprétation des résultats issus des essais.

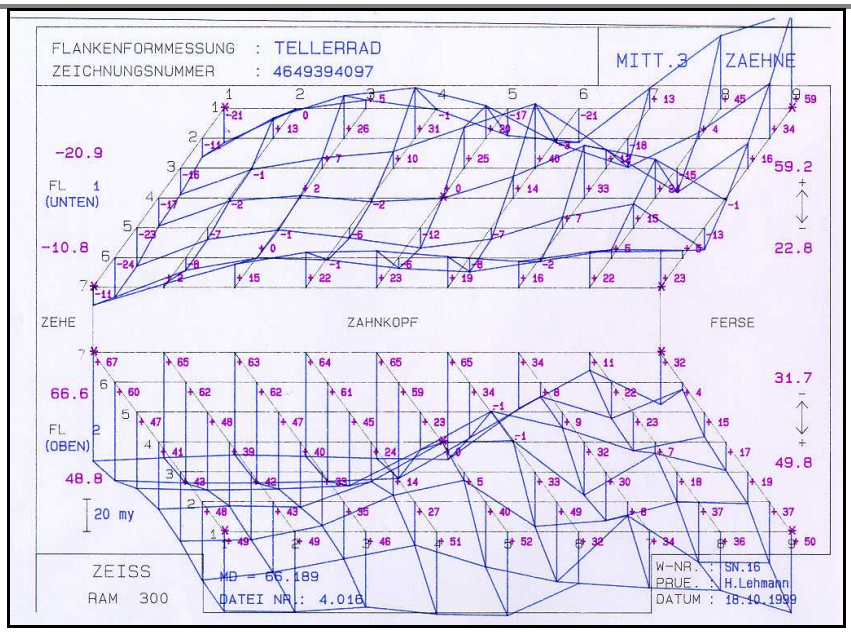


Figure 3.15 : Résultats d'une mesure 3D de roue face

3.2 Portée sous charge

Lors des essais effectués chez ZF Friedrichshafen, des analyses de portée sous charge ont été effectuées.
Les comparaisons possibles ici ne peuvent être que qualitatives. Avant toute comparaison, il faut définir une portée sous charge théorique. Il a été choisi de définir cette portée en fonction de la pression instantanée de contact. Tout point où la pression est supérieure à une valeur seuil est considéré comme faisant partie de la portée sous charge.
Le seuil a été déterminé par rapport aux essais. Les essais ont été effectués pour des couples d'entrée sur le pignon variant de 0 à 1000 Nm. En dessous de 250 Nm (Fig. 3.16), aucune portée n'est enregistrée à part une trace (en jaune sur la figure 3.16) correspondant à un contact en tête de dent du pignon. Cette trace correspond aux pics de pression provoqués par un contact en bord de dent. La valeur seuil pour la pression sera donc la valeur moyenne obtenue pour un calcul effectué avec un couple d'entrée de 250 Nm. La valeur seuil déterminée ainsi par simulation est de 800 MPa. Il est considéré qu’en dessous de cette valeur, les zones de contact ne sont pas détectées par les essais.

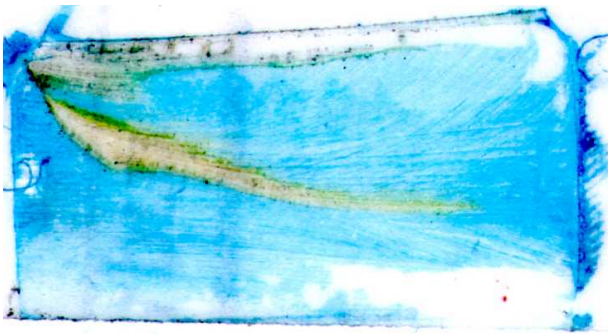
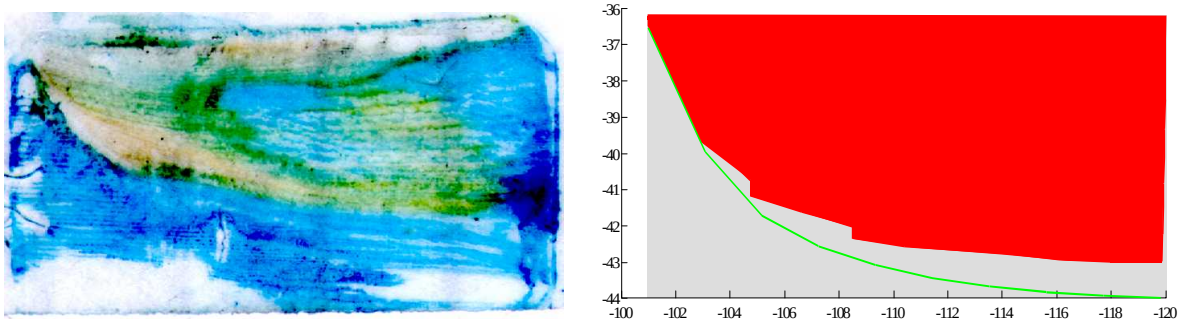


Figure 3.16 : Portée sous charge relevée à 250 Nm

Les comparaisons entre essais et simulations ont été effectuées avec un couple d'entrée de 500 Nm. En effet pour cette valeur, trois mesures successives ont été faites : une mesure à la distance de montage théorique (0 mm, la distance de montage est la distance entre l'axe du pignon et l'axe de l'outil de taillage de la roue face, cf. Chapitre 2, § 3.2.1.1), puis pour deux mesures avec une variation de distance de montage de ± 0.15 mm
Les schémas ci-dessous présentent les résultats des essais et des simulations. Sur les schémas des résultats d'essais la surface de denture est en bleu, la portée est représentée par les zones jaunes.
Sur les schémas des résultats des simulations, la surface de denture est représentée en gris. La courbe verte montre la limite du flanc actif, la portée sous charge est représentée en rouge. Le rayon intérieur de la roue est toujours à gauche, le rayon extérieur à droite.



Essai *Simulation*

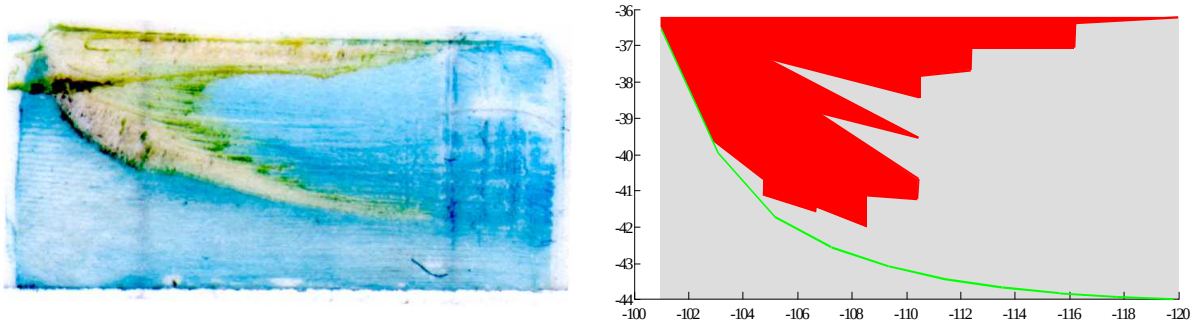
Figure 3.17 : Portée sous charge distance de montage théorique

A l'entraxe théorique, la forme globale de la portée obtenue par simulation est proche de celle obtenue avec les essais. La différence la plus notable se situe au niveau du rayon extérieur de la roue, qui ne semble pas en contact sur les essais, alors qu'avec la simulation, la portée couvre toute la largeur de denture.

Il est également possible ici de comparer également l'équilibrage de la portée, c'est à dire d'estimer les zones où la pression de contact est plus ou moins forte. Au niveau des essais, les zones de fortes pressions se distinguent par une couleur plus claire.
En ce qui concerne la simulation, il suffit de regarder la distribution de pression pour voir si la portée est équilibrée sur la largeur de denture. La figure 3.20 représente la distribution de pression pour un contact couvrant toute la largeur de denture (une position cinématique correspondant au milieu de l'engrènement de la dent étudiée).

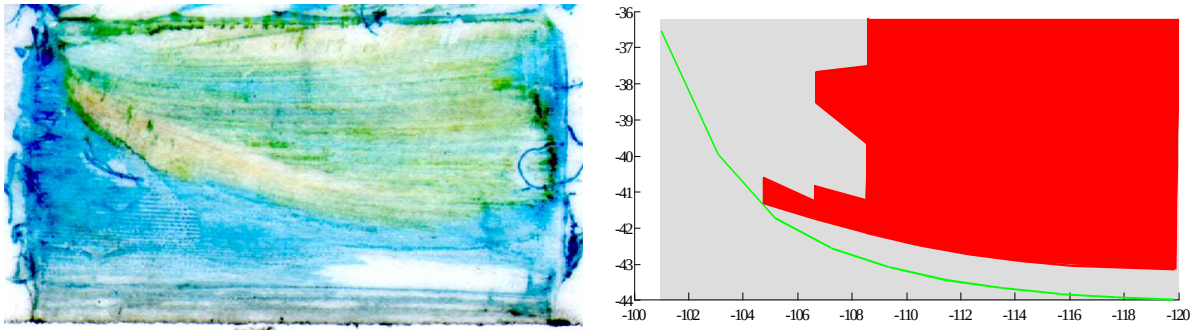
Les essais montrent un contact plutôt décalé vers le rayon intérieur de la roue face qui couvre 90% de la largeur de denture, alors que la simulation montre un contact assez équilibré couvrant toute la largeur de denture.

La distance de montage entre la roue et le pignon a ensuite été modifiée afin d'observer son influence sur la portée (Fig. 3.18 et 3.19).



Essai *Simulation*

Figure 3.18 : Portée sous charge distance de montage théorique + 0.15 mm



Essai *Simulation*

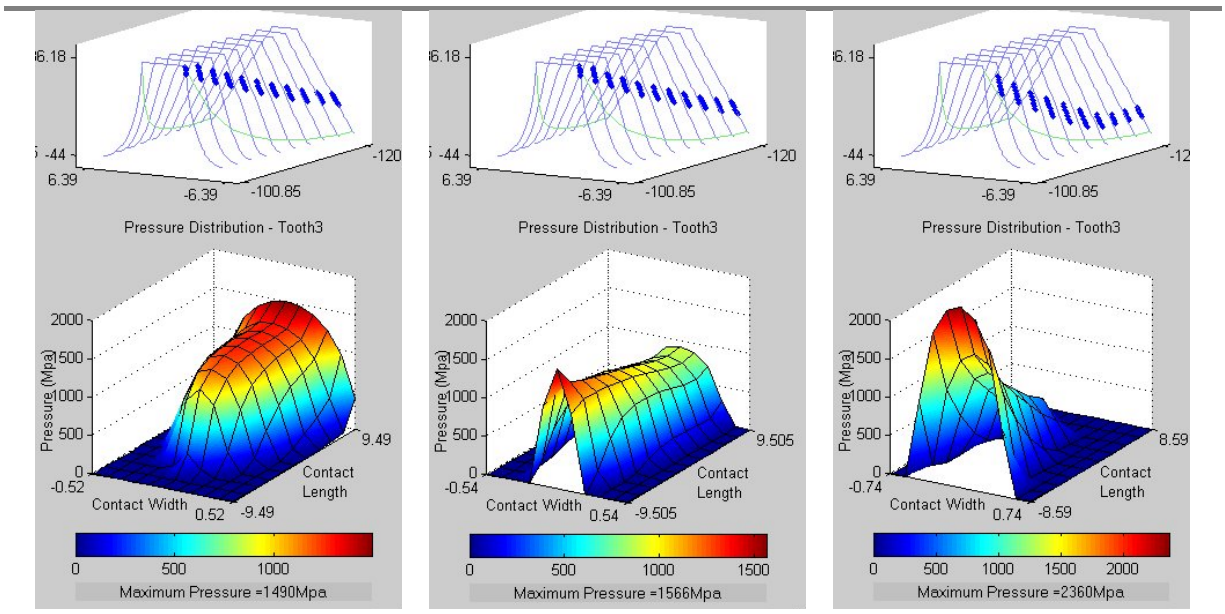
Figure 3.19 : Portée sous charge distance de montage théorique - 0.15 mm

Lorsque la distance de montage est modifiée, la portée est déplacée. Ceci s'observe aussi bien sur les essais que sur la simulation.

En augmentant la distance de montage (Fig. 3.18), la portée est déplacée vers le rayon intérieur. La portée ne couvre à peine plus de la moitié de la largeur de denture avec des zones de fortes pressions au rayon intérieur. Les résultats obtenus par simulation et par essais sont ici très proches.

En diminuant la distance de montage (Fig. 3.19), la portée est déplacée cette fois-ci vers le rayon extérieur de la roue. La simulation montre une portée qui ne va plus jusqu'au rayon intérieur, qui couvre environ 60% de la largeur de denture, alors que les essais montrent une portée qui est plutôt bien équilibrée maintenant et qui couvre toute la largeur de denture.

Globalement, les portées observées sous charge montrent une assez bonne corrélation entre les essais et la simulation. Une variation de distance de montage montre un effet similaire sur la position de la portée. Sur deux des trois mesures, les essais montrent toujours un contact plus décalé vers le rayon intérieur que les simulations. Ceci peut être dû à la qualité de surface de la roue face qui montre notamment une déviation de profil très importante (jusqu'à 40 microns positifs) au niveau du rayon intérieur de la roue (cf § 3.1).



Distance de montage -0.15 mm | *Distance de montage théorique* | *Distance de montage +0.15 mm*

Figure 3.20 : Variation de la distribution de pression en fonction de l'entraxe

3.3 Contraintes en pied de dent

Lors des essais effectués par ZF Friedrichshafen sur les engrenages face, les contraintes en pied de dent ont été mesurées à la fois sur le pignon et sur la roue par des jauges de déformations collées en pied de dent. Les résultats étant disponibles et les positions des jauges connues, il est possible de faire des comparaisons précises avec la simulation.

Le couple d'entrée sur le pignon pour les essais avait été fixé à 500 Nm. Trois dents à 120° de la roue ont été équipées de 3 jauges de déformations situées en pied de dent et respectivement au rayon intérieur (jauge 0/4), au quart de la largeur de denture (jauge 1/4) et au milieu de la dent (jauge 2/4) de la roue. Trois dents du pignon à 120° ont également été équipées de 5 jauges situées en pied de dent et respectivement au rayon intérieur (jauge 0/4), au quart de la largeur de denture (jauge 1/4), au milieu de la dent (jauge 2/4), au trois quart de la largeur de denture (jauge 3/4) et au rayon extérieur (jauge 4/4) de la roue (Fig. 3.21).

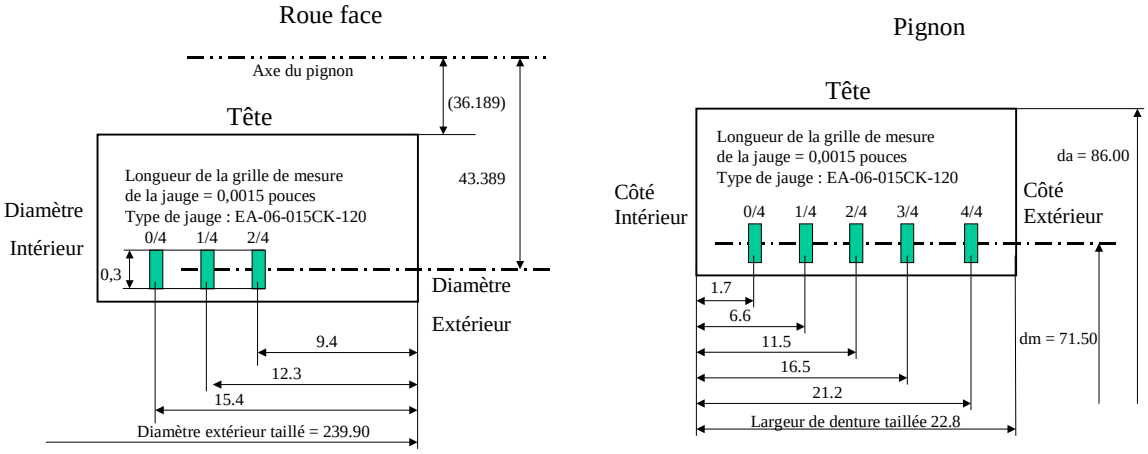


Figure 3.21 : Positions des jauges sur la roue face et le pignon

Trois séries d'essais ont été effectuées, ce qui donne donc 9 mesures différentes pour chaque position de jauge.

Une simulation a été effectuée avec exactement les mêmes caractéristiques que les engrenages face fabriqués et utilisés pour les essais. La simulation a été effectuée sur 20 positions cinématiques.

Les comparaisons avec les essais se sont avérées délicates pour plusieurs raisons :

- Lors des essais, le pignon a été tourné "manuellement" de façon à obtenir l'engrènement d'une dent sur environ une seconde. La vitesse n'est donc pas connue, de plus, il n'est pas certain qu'elle soit constante. Le recalage temporel entre les essais et la simulation s'est donc avéré assez délicat,

- Les erreurs d'hélices estimées (d'après la classe de qualité) sur la roue face peuvent aller jusqu'à 40 microns, notamment au niveau du rayon intérieur, ce qui peut déplacer la portée, et donc les contraintes maximum,

- Les erreurs de pas estimées (d'après la classe de qualité) sur la roue peuvent également aller jusqu'à 40 microns ce qui peut modifier le nombre de dents en prise simultanément,

- Les jauges de déformation sont placées assez haut sur le pied de dent (Fig. 3.22), presque à la limite de l'intersection flanc actif-trochoïde. Au niveau de la simulation, les nœuds sur lesquels sont relevés les contraintes sont, pour certaines positions cinématiques, très proches des nœuds chargés, ce qui donnent alors des résultats erronés. Ainsi, certaines fluctuations observées sur la simulation sont dues uniquement au fait que les mesures sont effectuées trop près des zones de chargement.

Pour toutes ces raisons, la comparaison effectuée ici est d'abord d'ordre qualitatif avant d'être quantitatif. Les diverses courbes obtenues par simulation ont été recalées en fonction du temps sur les courbes obtenues avec les essais de façon à obtenir un engrènement équivalent en fonction du temps.

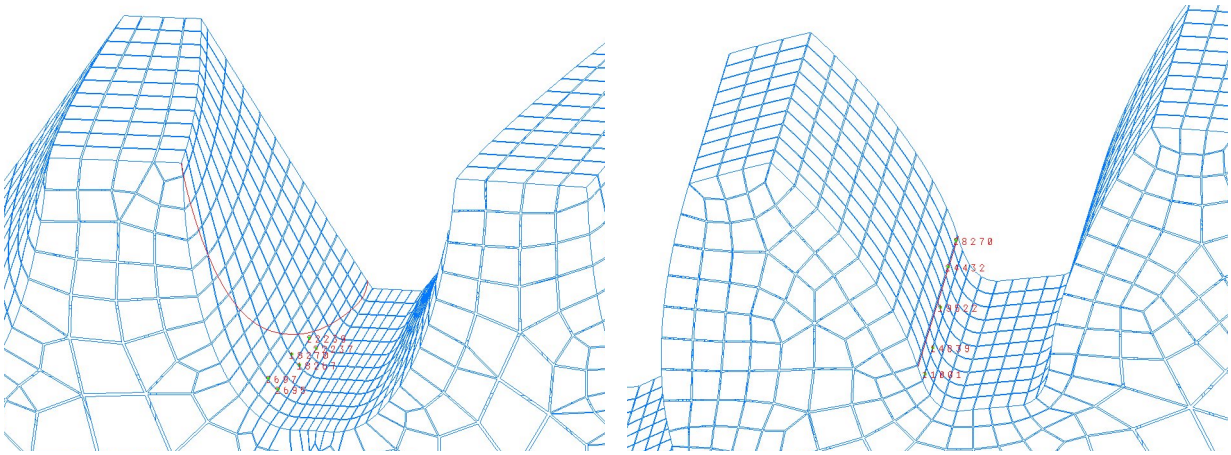


Figure 3.22 : Modélisation de la roue et du pignon - Position des jauges

La figure 3.23 montre les résultats obtenus sur la roue face et la figure 3.24 sur le pignon. Sur chaque graphe, les courbes bleues et vertes correspondent aux essais, et les courbes rouges et jaunes à la simulation. Les valeurs de la simulation utilisées sont les valeurs de contraintes calculées aux deux nœuds du maillage les plus proches de la position exacte de la jauge, et au nœud voisin. Ces nœuds sont toujours situés à moins de 0.1 mm de la position exacte de la jauge.

Les nœuds les plus proches sont respectivement pour la roue (Fig. 3.22) :

- jauge 0/4 : nœud 2697
- jauge 1/4 : nœud 18270
- jauge 2/4 : nœud 22239

Et pour le pignon (Fig. 3.22) :

- jauge 0/4 : nœud 11001
- jauge 1/4 : nœud 14839
- jauge 3/4 : nœud 24432
- jauge 4/4 : nœud 28270

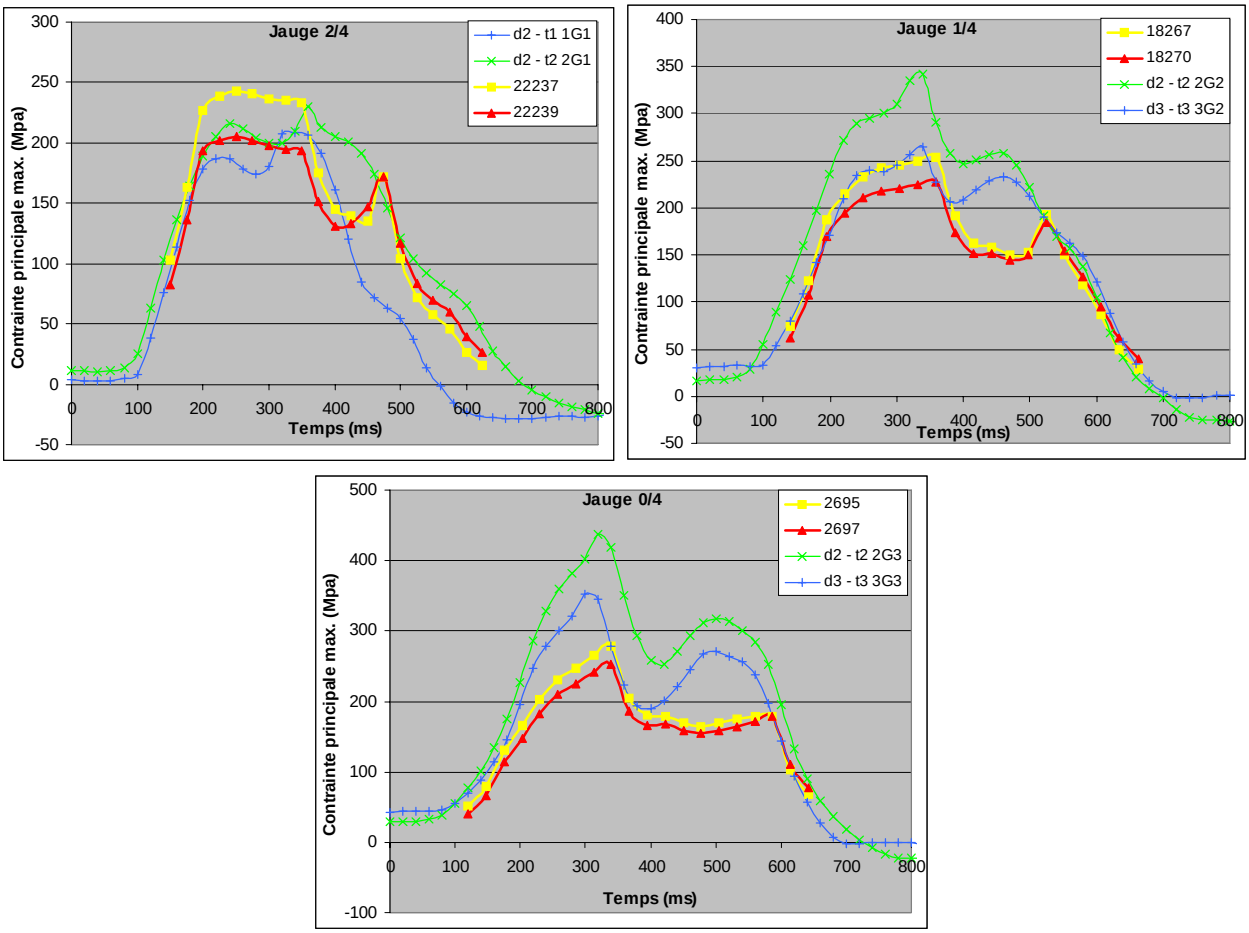


Figure 3.23 : Comparaisons des contraintes sur la roue

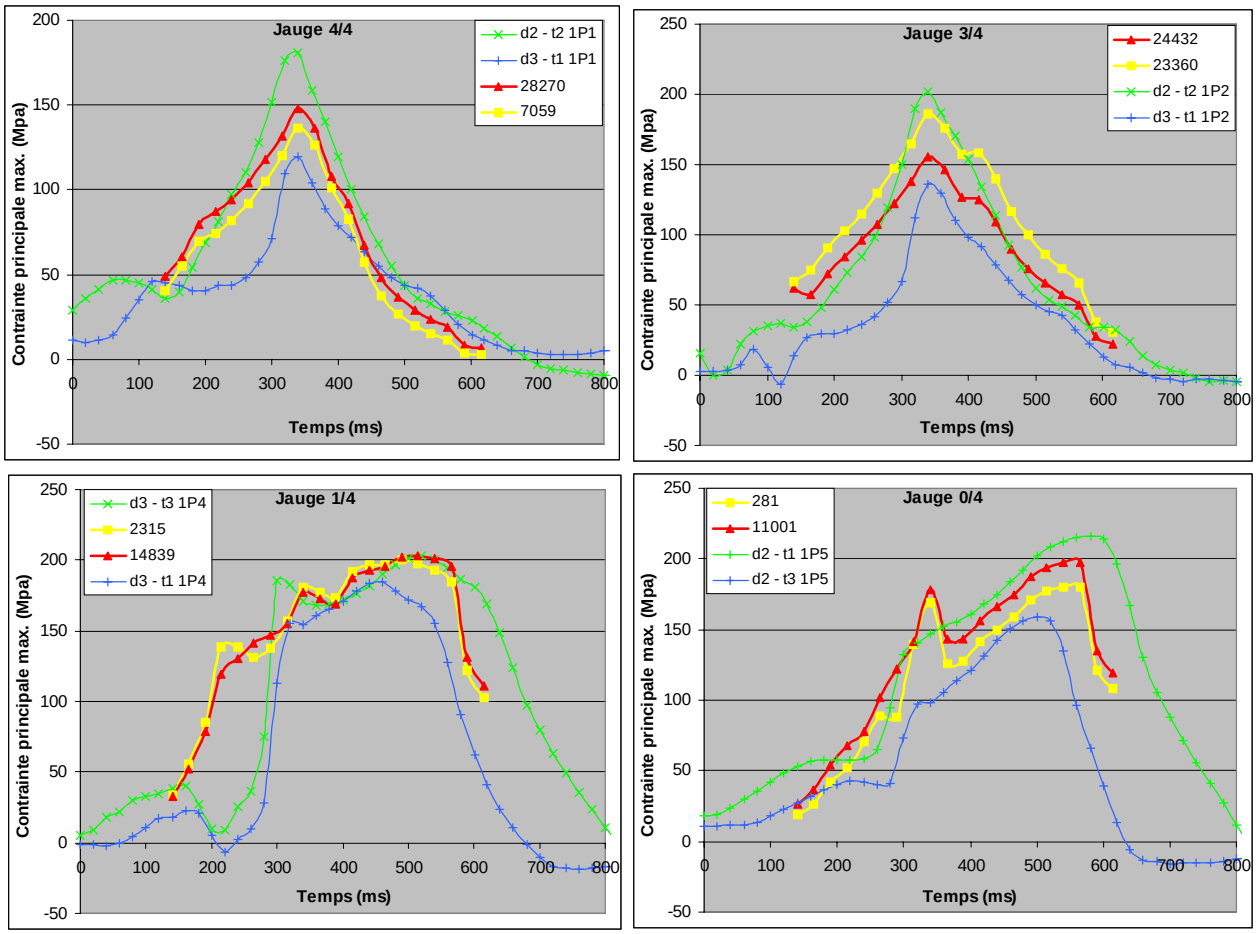


Figure 3.24 : Comparaisons des contraintes sur le pignon

NB: les derniers pics de contrainte obtenus par simulation pour la roue (Fig. 3.23) sur les jauges 2/4 (à 475 ms en abscisse) et 1/4 (à 525 ms en abscisse), et pour le pignon (Fig. 3.24) sur la jauge 0/4 (à 340 ms en abscisse) sont uniquement dus à la proximité du chargement et ne sont de ce fait pas représentatif.

La forme globale des courbes de contraintes obtenues par simulation et lors des essais est semblable, aussi bien pour la roue que pour le pignon.
Sur la roue (Fig. 3.23), pour la jauge 2/4, la corrélation est très bonne sur l'engrènement complet. Par contre pour les jauges 1/4 et 0/4, les courbes obtenues lors des essais montrent deux pics de pression, alors que les courbes obtenues par simulation n'en montrent qu'un seul (le premier). En se basant sur la répartition des charges obtenue par simulation (Fig. 3.25), la présence du deuxième pic obtenu par simulation ne s'explique pas vraiment. En effet, toutes les dents en contact ne présentent qu'un seul pic de chargement, il serait donc logique de n'avoir qu'un seul pic de contraintes par la suite. De plus, ce deuxième pic de contraintes n'est pas présent sur les contraintes mesurées lors des essais sur le pignon (Fig. 3.24), quelle que soit la jauge observée.
Sur le pignon, la corrélation au niveau de la forme des courbes entre essais et simulation est bonne pour toutes les jauges et pour toutes les positions cinématiques.

En se référant aux résultats obtenus lors de la comparaison des portées sous charge (cf. § 3.2), la présence du deuxième pic de contraintes obtenus lors des essais sur la roue pourrait s'expliquer par un décalage de la portée vers le rayon intérieur. En effet, lors de l'engrènement d'une roue face et d'un pignon cylindrique, le contact débute au niveau du rayon extérieur de la roue et se termine au niveau du rayon intérieur.
Si la portée est en plus décalée vers le rayon intérieur, cela pourrait alors entraîner une augmentation des contraintes à ce niveau en fin d'engrènement.

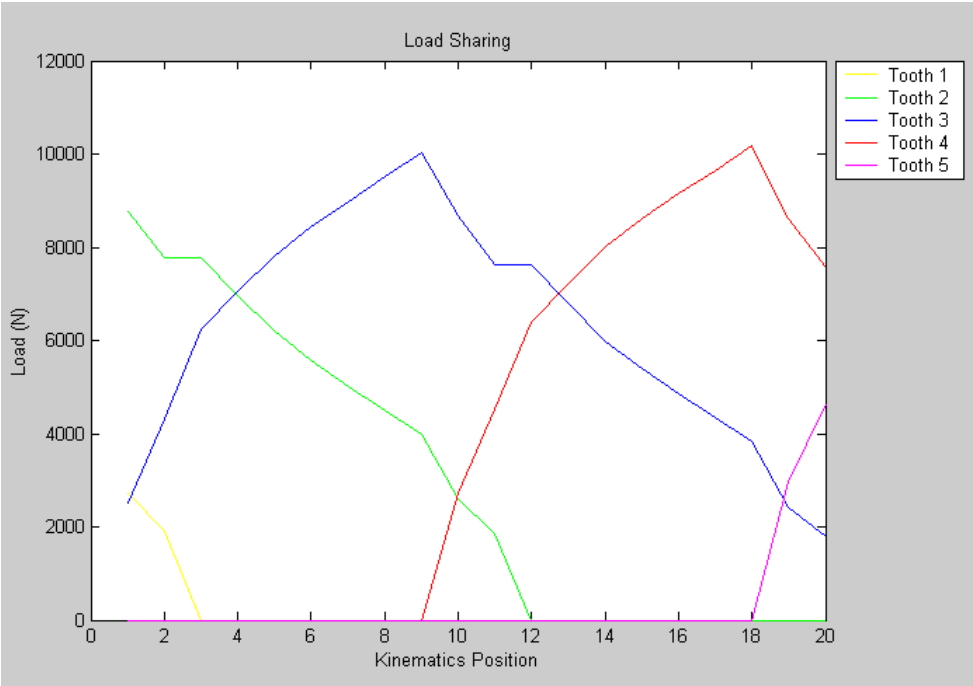


Figure 3.25 : Répartition des charges obtenue par simulation

Au niveau des valeurs de contraintes, les résultats obtenus par simulation et par essais sont très proches.
Sur la roue, pour la jauge 2/4, l'écart entre les courbes d'essai et de simulation est toujours inférieur à 10 %. Pour la jauges 1/4, les écarts sont également inférieurs à 10% jusqu'à 400 ms, mais peuvent atteindre 30% au niveau du deuxième pic de contrainte présent uniquement sur les essais. Pour la jauge 0/4, les écarts varient de 10 à 30 % du début à la fin de l'engrènement.
Sur le pignon, les résultats obtenus pour les valeurs de contraintes sont très proches quelles que soient les jauges observées. Les courbes obtenues par simulation sont toujours situées entre les courbes d'essais, aucun écart significatif n'a été relevé.

Suite aux remarques faites au début de ce paragraphe concernant tous les facteurs pouvant perturber les comparaisons et au vu des résultats obtenus pour la roue et le pignon, il est raisonnable de considérer ici que les résultats obtenus par simulation reflètent correctement le comportement sous charge des engrenages face.

4 Conclusion

Les différentes comparaisons effectuées aussi bien numériques qu'expérimentales, donnent dans l'ensemble des résultats satisfaisants.

Les comparaisons numériques ont permis de valider les différentes étapes de la modélisation développée ici, tout en soulignant toutefois certaines limitations du modèle, limitations qu'il ne faudra pas dépasser, notamment au niveau de l'angle d'hélice.
Les comparaisons expérimentales ne font que confirmer la cohérence des résultats obtenus par cette modélisation.

De plus, cela montre que la démarche complète consistant à coupler les éléments finis avec un modèle de contact, le tout basé sur une modélisation analytique, permet d'obtenir un modèle très performant, aussi bien au niveau des temps de calculs que de la précision des résultats.

Chapitre 4

Présentation de Gandalf et comportement sous charge des engrenages face

1 Introduction

Le comportement sous charge des engrenages face est encore très méconnu. La modélisation ainsi que le logiciel Gandalf développés dans ce travail vont permettre d'effectuer différentes études sous charge.
Avant d'effectuer des études complexes, il est nécessaire, dans un premier temps de comprendre parfaitement et de décrire le fonctionnement des engrenages face. Des résultats obtenus à vide et sous charge avec le logiciel Gandalf seront alors présentés.

Les engrenages face présentent théoriquement deux cas de contact différents, ponctuel ou linéaire. La comparaison sous charge doit être effectuée pour connaître leurs avantages et inconvénients respectifs. L'étude de l'influence des erreurs de montage sur le comportement sous charge devra permettre d'affiner ces résultats.

Enfin, l'optimisation des surfaces de denture du pignon par l'introduction de bombés et de corrections de profil de denture sera étudiée pour palier les éventuels inconvénients rencontrés et améliorer l'engrènement sous charge. Ces optimisations pourront alors être intégrées dans le processus de conception présenté au chapitre suivant.

2 Présentation du logiciel Gandalf

La modélisation développée au chapitre 2 a permis la réalisation d'un logiciel complet de simulation : Gandalf (Generation, ANalysis and Design Aid for Loaded Face gears). Ce logiciel est écrit en Fortran 77, selon une norme de programmation européenne (Eros) utilisée dans l'aéronautique et imposée dans le cadre du projet Facet.
Le développement complet du logiciel a été accompagné de 4 rapports [3], [4], [5], [6] ainsi que d'une notice d'utilisation [7] (description détaillée du logiciel fournie à travers la documentation en Annexe 7). Gandalf a été livré à tous les partenaires du projet de recherche Facet, et est maintenant utilisé au sein des bureaux d'études des constructeurs d'hélicoptères européens.
Cette version de Gandalf est composée de 4 modules distincts :

- Géométrie de la roue face,
- Cinématique à vide,
- Définition des maillages de Boussinesq et calcul des coefficients d'influence de surface,
- Résolution de l'équation de compatibilité des déplacements.

Une deuxième version a été développée dans le cadre de cette thèse afin d'intégrer les corrections de dentures du pignon. Elle comprend 3 modules supplémentaires :

- Géométrie du pignon corrigé,
- Cinématique à vide pour un pignon corrigé,
- Définition des maillages de Boussinesq et calcul des coefficients d'influence de surface pour un pignon corrigé.

Les coefficients d'influence de flexion sont calculés grâce au logiciel Catia. Une interface a été développée entre Catia et Gandalf, de façon à pouvoir représenter automatiquement des engrenages face avec Catia à partir des résultats de Gandalf. De même les maillages et les chargements utilisés pour les calculs par éléments finis, ainsi que la restitution des déplacements ont été automatisés par le développement de modules IUA spécifiques (l'IUA est un langage de programmation propre à Catia).

Les entrées et les sorties de Gandalf sont gérées par une interface graphique en Anglais (pré et post-processeur) développée avec le logiciel Matlab. La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont des graphiques produits directement par le post-processeur de Gandalf.

La modélisation développée permet de définir des géométries complexes et variées d'engrenages face. Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 illustrent différents cas d'engrenages face générés avec Gandalf et représentés avec Catia. Les figures 4.1 et 4.2 montrent des roues d'engrenages face droits dont les angles entre le pignon et la roue mesurent 110 et 70°. La figure 4.3 montre une roue face hélicoïdale.

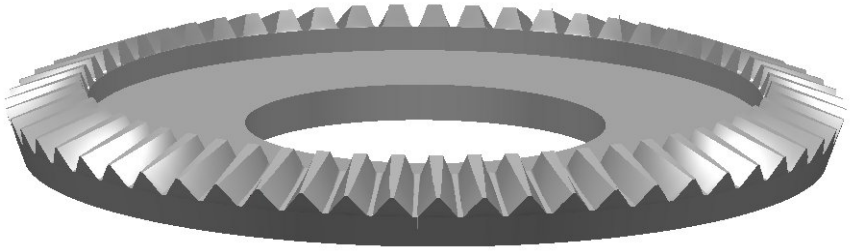


Figure 4.1 : Roue face - Angles entre les axes à 110°

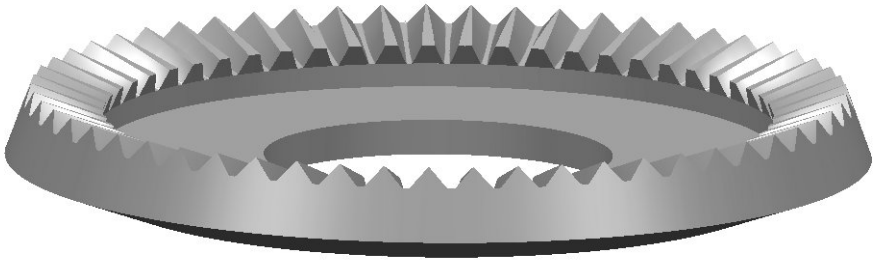


Figure 4.2 : Roue face - Angles entre les axes à 70°

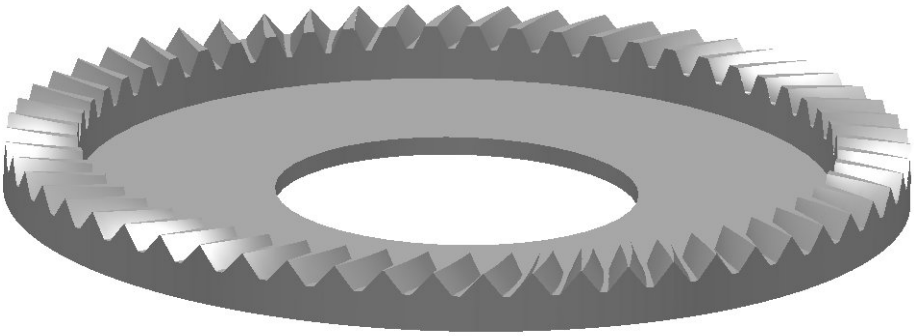


Figure 4.3 : Roue face hélicoïdale

Malgré la possibilité de pouvoir étudier de nombreuses configurations d'engrenages face, il est tout d'abord nécessaire de comprendre et de maîtriser le comportement dans des cas de géométries simples. L'étude présentée se limitera donc dans un premier temps à des engrenages face droits dont l'angle des axes est égal à 90°.

Pour illustrer les résultats des calculs effectués grâce à Gandalf et étudier le comportement sous charge des engrenages face, deux cas d'engrenages face sont présentés. Les deux engrenages utilisent la même roue face, mais deux pignons différents. La différence entre les deux pignons est uniquement leur nombre de dents. Toutes les autres caractéristiques sont identiques. Ainsi les deux types de contact (ponctuel et linéaire) seront comparés.

Les données principales utilisées sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

	Outil de taillage	Roue face	Pignon
Nombre de dents	19	71	18-19
Angle de pression (°)	25		25
Module (mm)	4		4
Coefficient de déport	0		0
Coefficient de saillie	1.25		1
Coefficient de creux	1.25		1.25
Rayon intérieur (mm)		133	
Rayon extérieur (mm)		159	
Largeur de denture (mm)			28
	Taillage / Montage		
Offset (mm)		0	
Angle entre les axes (°)		90	

Tableau 4.1 : Données de l'engrenage face

Ces deux engrenages face seront utilisés pour toutes les études présentées dans ce chapitre. Ils seront toujours identifiés par leur cas de contact théorique respectif : ponctuel ou linéaire.

2.1 Résultats à vide

La simulation du taillage permet d'obtenir la géométrie exacte de la roue face en fonction de son outil de taillage. La roue face utilisée pour cette étude est représentée sur la figure 4.4 avec le post processeur de Gandalf.

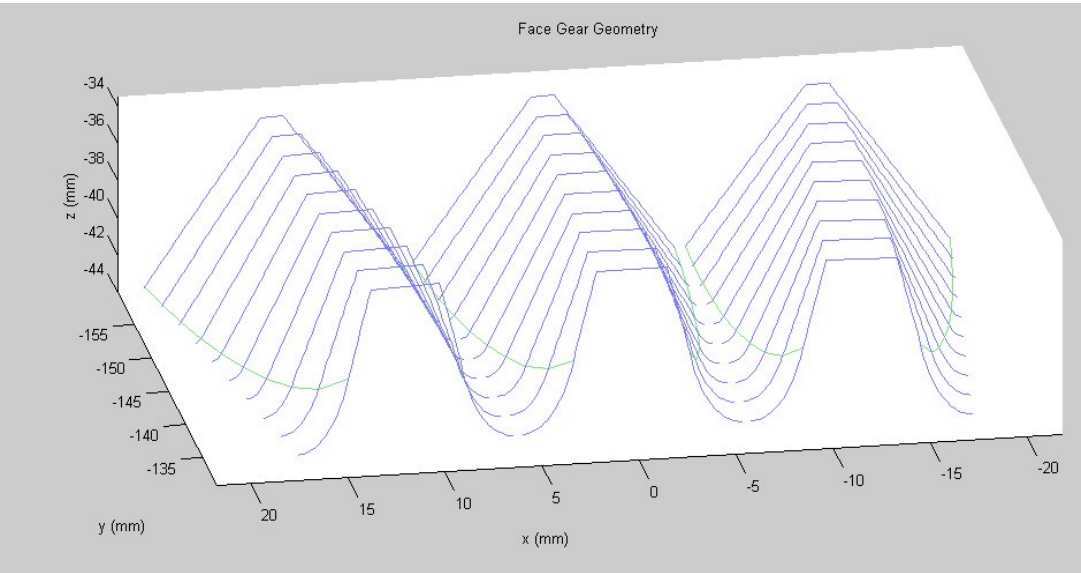


Figure 4.4 : Géométrie de la roue face

La simulation de la cinématique à vide permet d'obtenir les zones de contact potentiel à vide. Dans cette simulation, le pignon est toujours considéré comme organe moteur. Tous les résultats sont visualisés sur l'organe récepteur, la roue face.
Les figures 4.5 et 4.6 montrent les zones de contact potentiel à vide pour le cas linéaire (outil et pignon avec le même nombre de dents) et le cas ponctuel (pignon avec une dent de moins que l'outil).
Sur la figure 4.5, chaque ligne représente la zone de contact potentiel à vide pour une position cinématique. La simulation est effectuée sur un engrènement complet de la dent centrale (dent 3). 20 positions cinématiques ont été simulées. Pour chaque position cinématique, les zones de contact sont recherchées simultanément sur 5 dents (dent 1 et 2 à gauche de la dent centrale, dent 4 et 5 à droite). Pour un contact linéaire, l'engrènement débute toujours au rayon extérieur de la roue, en tête de dent. Il se termine au rayon intérieur, en pied de dent. Ainsi sur la figure 4.5, la première position cinématique est représentée en bleu foncé et la dernière position cinématique en rouge foncé.

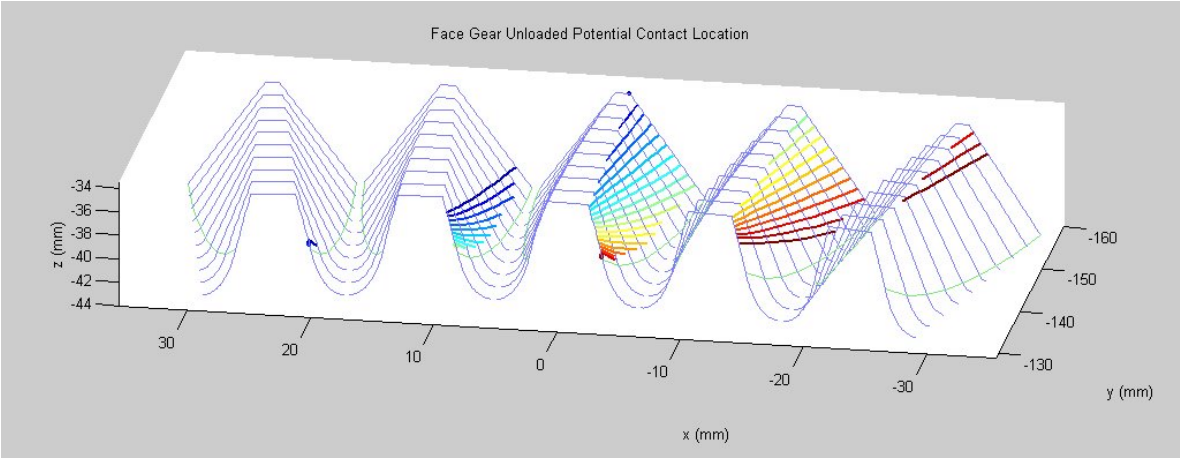


Figure 4.5 : Zones de contact potentiel à vide - Contact linéaire

Les lignes de contact sont inclinées sur le profil de denture, cette inclinaison variant du début à la fin de l'engrènement.

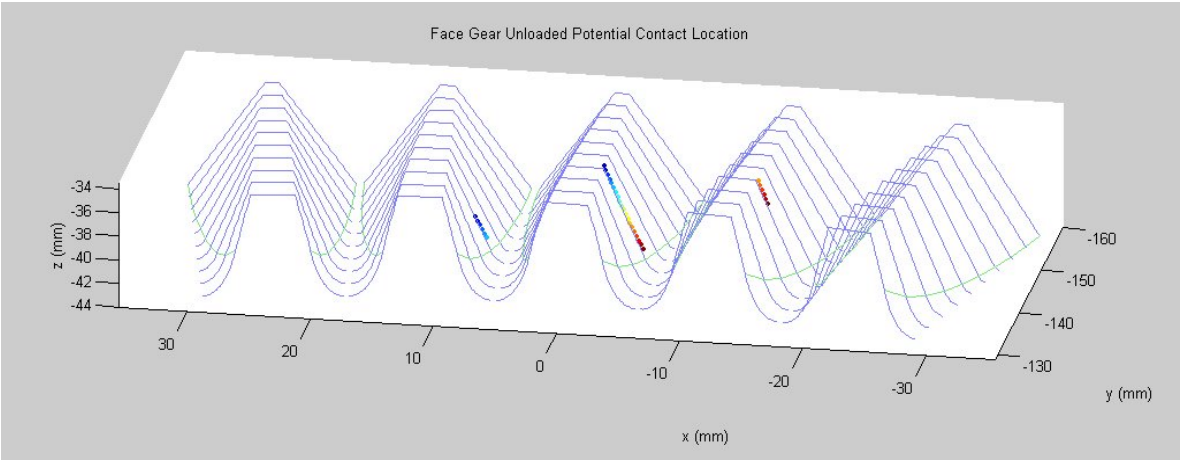


Figure 4.6 : Zones de contact potentiel à vide - Contact ponctuel

Pour un contact ponctuel (Fig. 4.6), les points de contact sont localisés sur un même rayon de la roue. L'engrènement débute toujours en tête de dent de la roue et se termine en pied de dent.

La comparaison des deux cas de contact montre un rapport de conduite à vide supérieur pour un contact linéaire : 2.33 contre 1.42 en ponctuel. De plus, les zones de contact potentiel couvrent toute la surface de denture dans le cas linéaire, alors qu'elles sont très localisées en ponctuel. Un contact linéaire semble déjà plus avantageux à vide, mais c'est sous charge qu'il faudra ensuite comparer les résultats des deux cas.
La figure 4.7 montre un exemple de l'erreur cinématique à vide, dans le cas du contact linéaire, provoquée par une erreur sur l'angle des axes de la roue et du pignon de 0,01°. L'angle utilisé pour la simulation de la cinématique à vide n'est donc plus ici 90°, mais 89,99°. Les valeurs de l'erreur cinématique sont négatives, la roue est donc en retard par rapport au pignon. L'amplitude de l'erreur cinématique est très faible, 4 micro radians seulement.

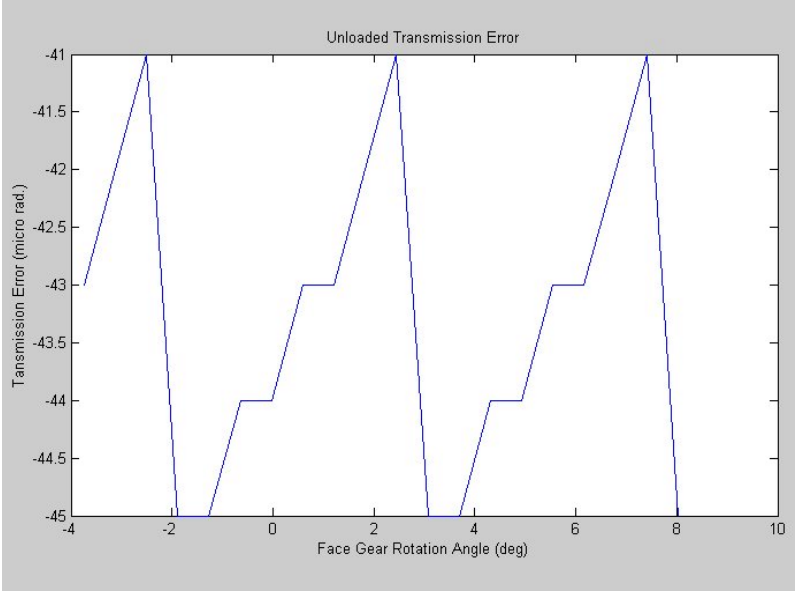


Figure 4.7 : Erreur cinématique à vide avec $\delta\gamma_1$ = -0,01°

NB : les erreurs de taillage donnent des résultats équivalents aux erreurs de montage, au signe près. Avec une erreur sur l'angle entre la roue et l'outil de taillage de -0,01°, la roue sera cette fois en avance sur le pignon, mais l'amplitude et la forme de l'erreur cinématique seront identiques. Face à cette similitude de résultats, seules les erreurs de montage seront présentées ici.

2.2 Résultats sous charge

Tous les résultats issus des simulations à vide présentés précédemment sont ensuite utilisés pour la simulation du comportement sous charge, c'est-à-dire notamment le calcul du partage des charges.
La figure 4.8 montre la répartition des charges entre les dents en contact durant l'engrènement complet de la dent 3 pour le cas de contact linéaire. Le couple appliqué au pignon en entrée est de 100 Nm.

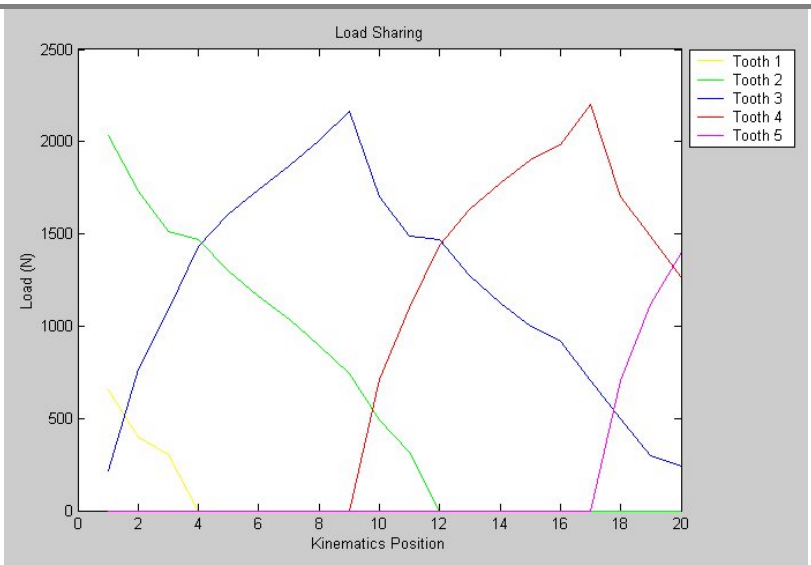


Figure 4.8 : Répartition des charges au cours de l'engrènement

Le nombre de dents en contact simultanément varie entre 2 et 3 dents au cours de l'engrènement.
La charge maximale observée est de 2200 N. La charge sur chaque dent varie au cours de l'engrènement. Globalement, elle est supérieure à la moitié de la charge maximale pendant la moitié de l'engrènement et inférieure pendant l'autre.

La figure 4.9 montre les répartitions de pressions sur la dent 3 pour 3 positions cinématiques. Sur chaque graphe, le schéma du haut représente la localisation des zones de contact potentiel à vide sur le profil de denture de la roue face. Les points représentés correspondent aux nœuds du maillage de Boussinesq utilisé pour le calcul sous charge (cf. Chapitre 2). Le schéma du bas représente la distribution de pressions instantanées sur cette zone de contact. La pression est calculée en chaque nœud de ce maillage local. Ce maillage étant déterminé à partir des zones de contact potentiel à vide, certaines zones peuvent ne pas être en contact sous charge.
Les 3 positions cinématiques représentées sont les positions 3, 9 et 14. Le calcul ayant été effectué sur 20 positions cinématiques, ces positions sont donc caractéristiques du début, du milieu et de la fin de l'engrènement. La position 9 correspond également à la charge maximale supportée par la dent 3 au cours de l'engrènement (Fig. 4.8).
Au début de l'engrènement (position 3), la zone de contact est située en tête de dent de la roue face, au niveau du rayon extérieur. Comme le contact est incliné, il se termine sur la tête de dent de la roue face. Un pic de pression apparaît alors à ce niveau. En dehors de ce pic de pression, la pression maximale est de 497 MPa.
Au milieu de l'engrènement, le contact couvre toute la largeur de denture, la pression est donc bien répartie, mais est tout de même légèrement supérieure au niveau du rayon intérieur de la roue. La portée sous charge est donc légèrement décalée vers le rayon intérieur. C'est à cette position que la pression maximale (hors pics) est relevée pour tout l'engrènement. Elle s'élève à 554 MPa.
A la fin de l'engrènement, le contact est situé en pied de dent de la roue, au niveau du rayon extérieur. Le niveau de la pression maximale a baissé et vaut ici 472 MPa.

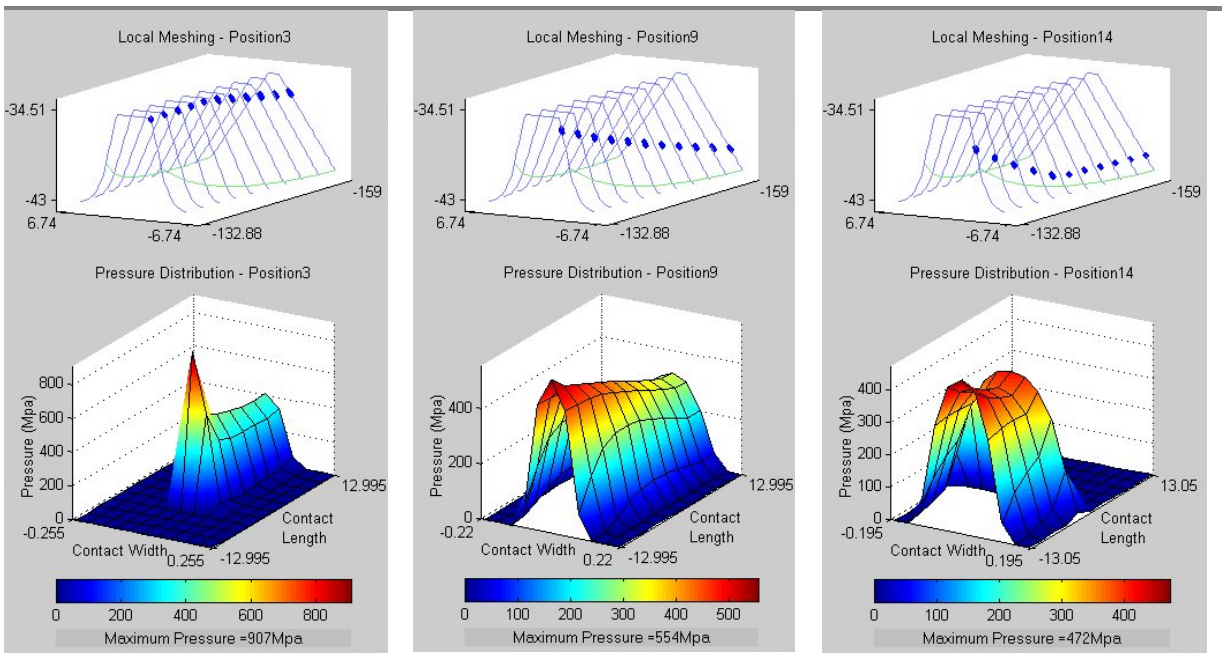


Figure 4.9 : Répartition de pressions instantanées

La figure 4.10 montre l'erreur de transmission sous charge. Sa valeur moyenne est de -42,75 micro radians pour une amplitude de 15,2 micro radians. L'erreur de transmission est négative, la roue est en retard par rapport au pignon. La forme de l'erreur de transmission s'apparente à une parabole.

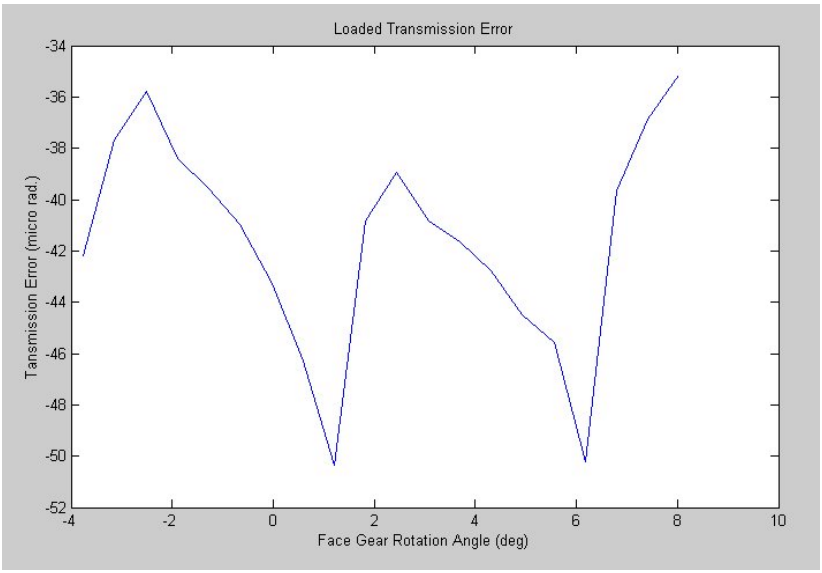


Figure 4.10 : Erreur de transmission sous charge

La figure 4.11 montre la répartition de contrainte de Von Mises en pied de dent calculée à partir de la répartition des charges de la figure 4.8. Les contraintes représentées correspondent à la position cinématique 9, c'est-à-dire la position pour laquelle la dent est la plus chargée. Les contraintes seront donc maximales pour cette position.

Les contraintes de traction varient dans le pied de dent de 80 MPa environ jusqu'à 183 MPa. Les contraintes maximales observées sont situées près du rayon intérieur de la roue, ce qui confirme le décalage de la portée vers le rayon intérieur observé à partir des pressions (Fig. 4.9).

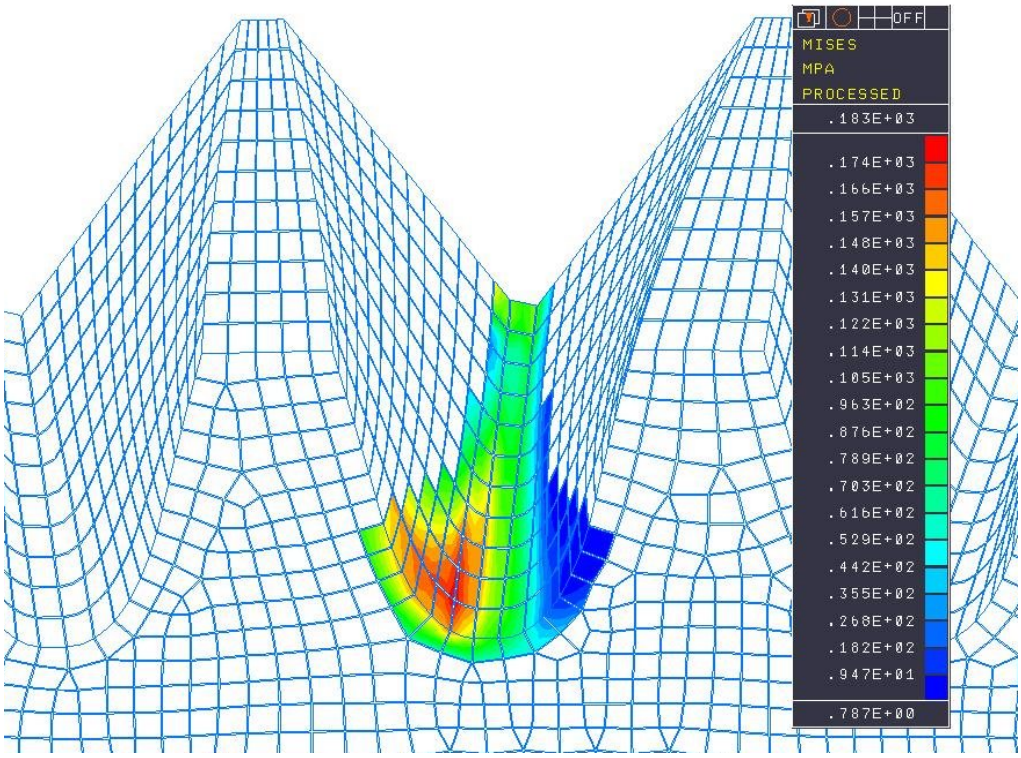


Figure 4.11 : Répartition de contraintes de Von Mises en pied de dent

Enfin, la figure 4.12 montre la variation de la rigidité d'engrènement de l'engrenage face étudié. Ici, l'erreur cinématique à vide étant nulle, la forme de la courbe de rigidité est identique à celle de l'erreur de transmission sous charge.

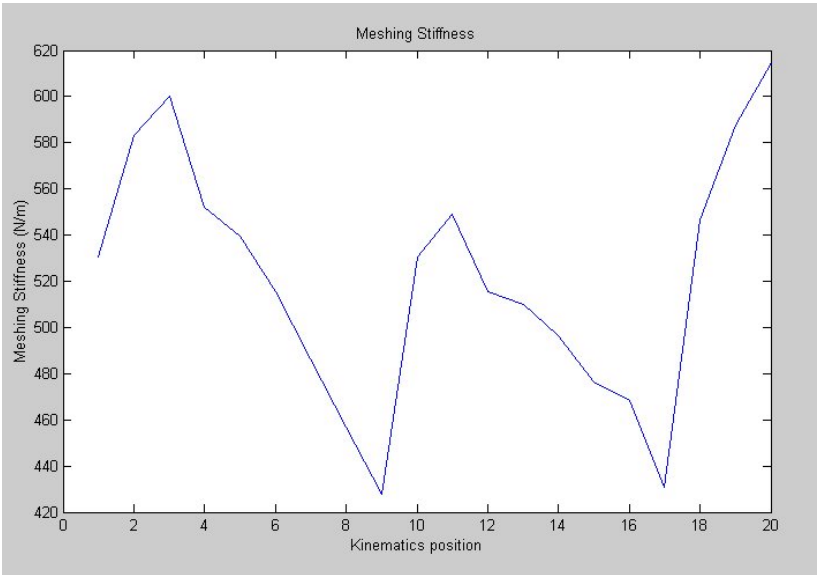


Figure 4.12 : Variation de la rigidité d'engrènement

3 Comparaison des contacts sous charge

Comme mentionné précédemment, les engrenages face présentent, à vide, deux cas de contact différents, dépendants des nombres de dents relatifs de l'outil et du pignon : ponctuel ou linéaire. Il s'avère nécessaire de les comparer pour connaître leurs avantages et inconvénients respectifs, non seulement à vide, mais également sous charge.

3.1 Validité de la modélisation d'un contact ponctuel

La première comparaison entre les deux cas concerne l'engrènement à vide. Les contacts linéaires commencent d'un côté de la largeur de denture (rayon extérieur) et finissent de l'autre (rayon intérieur), alors que les contacts ponctuels reste toujours au même rayon (cf. § 2.1).
Les premiers calculs sous charge de cas de contacts ponctuels ont montré que les points de contact potentiel à vide se transformaient en ellipses très allongées, quasi linéaires, couvrant plus de la moitié de la largeur de denture, même pour un couple d'entrée sur le pignon peu important (100 Nm). La forme du contact sous charge dans le cas ponctuel est donc assez similaire à celle du cas de contact linéaire. Une telle ressemblance sous charge semblait paradoxale, en regard de la différence observée à vide. Ceci a poussé à effectuer des calculs de cas ponctuels avec la modélisation développée pour les contacts linéaires et à reconsidérer la définition ponctuelle du contact. En utilisant la modélisation linéaire, des zones de contact supplémentaires ont été trouvées (Fig. 4.13) et le rapport de conduite à vide s'est trouvé grandement augmenté. Il est passé dans le cas présenté ici de 1,42 à 2,28.

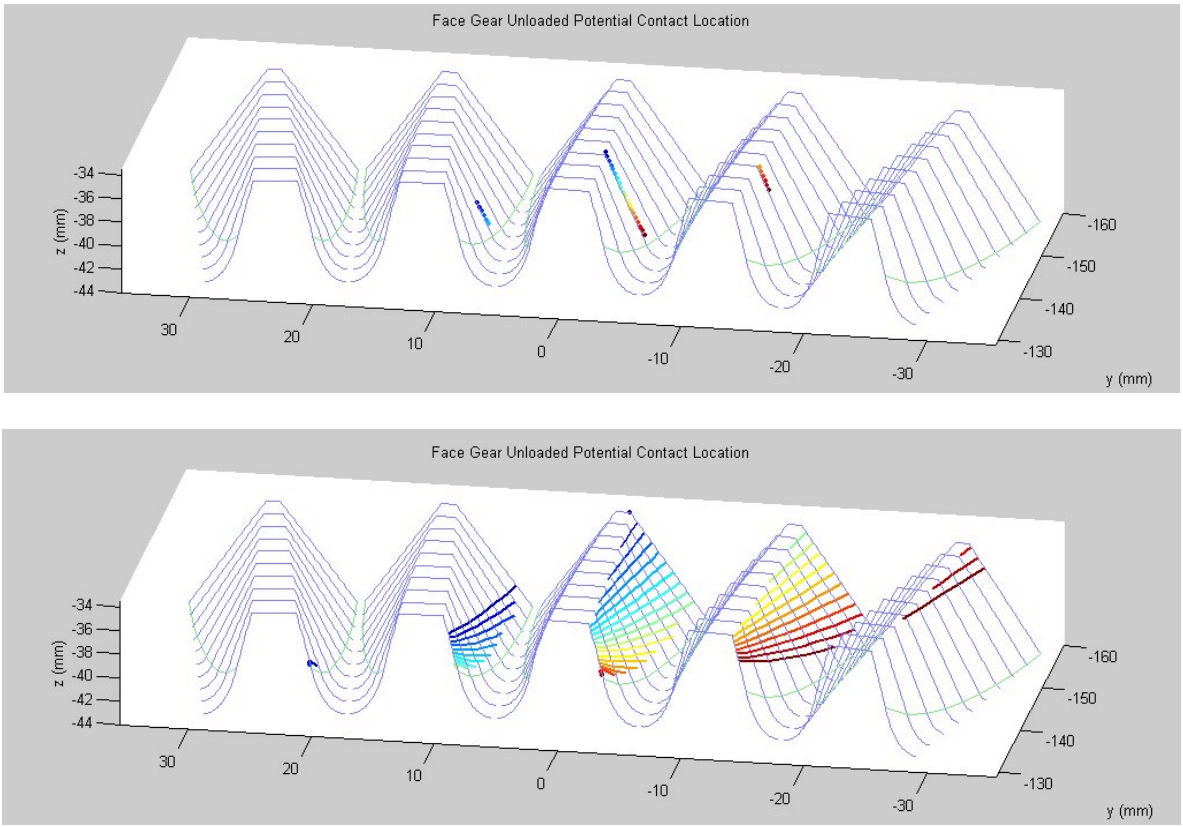


Figure 4.13 : Zones de contact potentiel à vide trouvées par un calcul ponctuel et un calcul linéaire

La différence observée entre les deux résultats provient directement de la définition du contact potentiel pour chaque cas de calcul. En effet, lors d'un calcul ponctuel, les équations définies au chapitre 2 considèrent un contact "pur", c'est-à-dire une distance nulle entre les deux surfaces. Tous les points de la surface respectant cette condition sont alors trouvés lors de la résolution des systèmes d'équations qui n'admettent qu'une seule solution.
Par contre la méthode de calcul linéaire est plus "souple". En effet comme les équations utilisées ont dans ce cas une infinité de solution (cf. Chapitre 2), les zones de contact sont recherchées à des rayons prédéfinis, et une tolérance sur les écarts de surface est utilisée pour déterminer les zones de contact. A chaque rayon prédéfini, le point d'écart minimum entre les surfaces est considéré comme point de contact potentiel (même si la distance n'est pas nulle) de façon à avoir toujours une ligne de contact à vide qui couvre toute la largeur de denture. Cela permet de définir des zones qui ne seront pas en contact à vide, mais qui seront en contact sous charge à cause de la flexion des dents. Ce sont toutes ces zones qui ne peuvent pas être déterminées à vide par la méthode ponctuelle (Fig. 4.14) car les équations utilisées n'ayant qu'une seule solution, elles ne permettent pas de définir à l'avance les zones de recherche du point de contact et de trouver des points où l'écart entre les surfaces n'est pas nul.

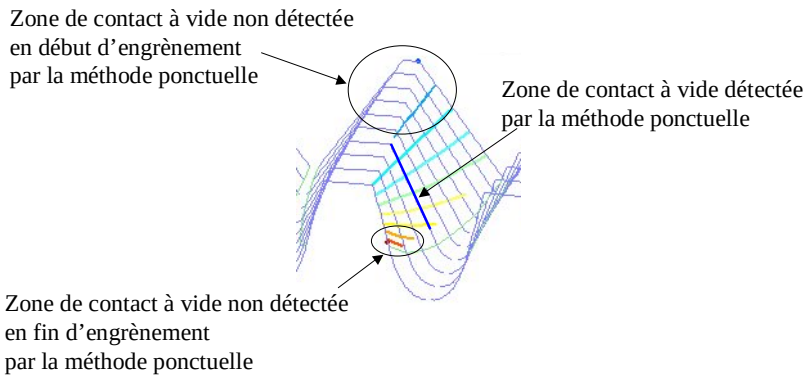
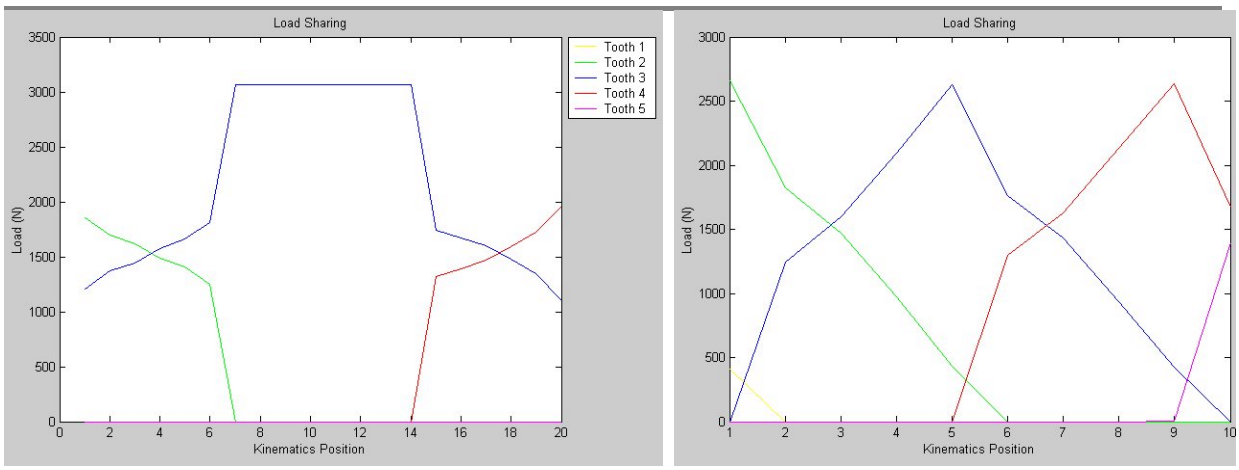


Figure 4.14 : Zones de contact non détectées par la méthode ponctuelle

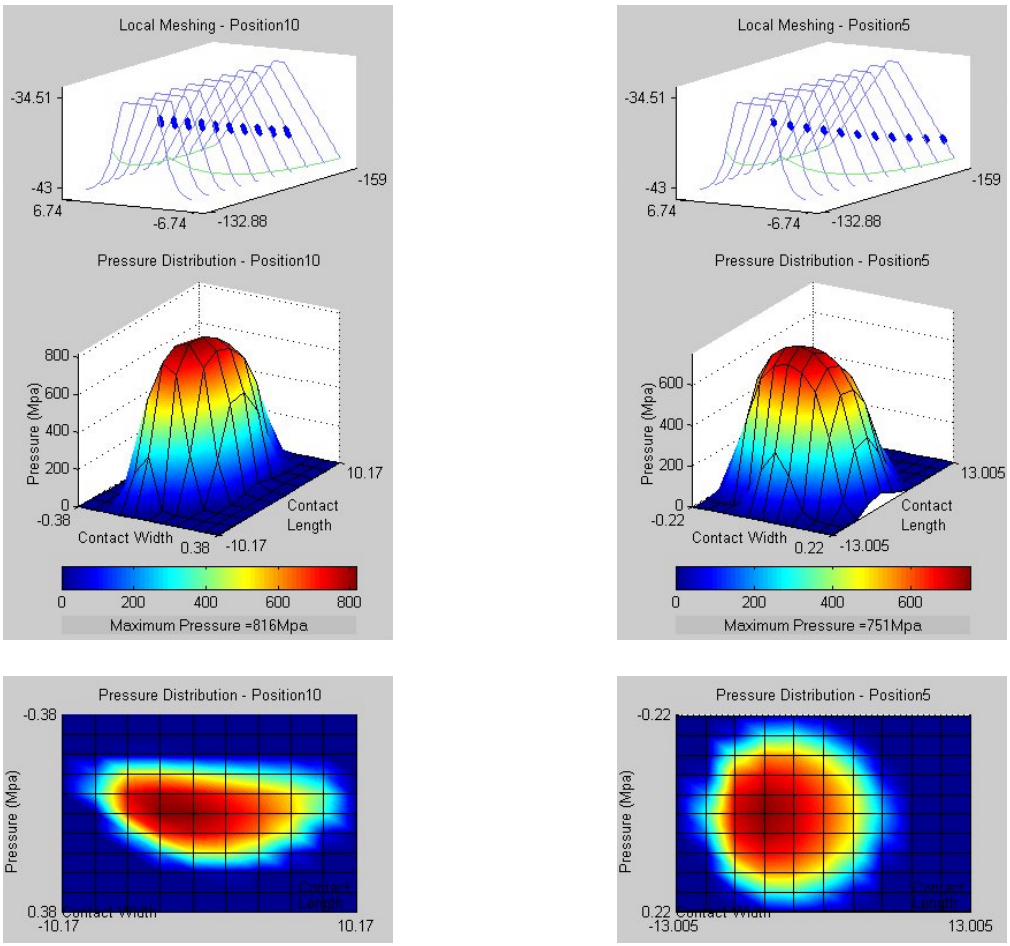
L'utilisation de la modélisation linéaire pour simuler le comportement des engrenages face avec un contact ponctuel à un impact direct sur tous les résultats, qui sont pour la plupart surestimés par la modélisation ponctuelle. Le rapport de conduite calculé avec la méthode ponctuelle est inférieur au rapport de conduite réel sous charge. Le nombre de dents en prise simultanément défini à vide est inférieur au nombre de dent réel en prise sous charge. Les charges réparties sur chaque dent seront alors surestimées. La figure 4.15 montre la répartition des charges obtenue en utilisant les deux modélisations. La charge maximale calculée en ponctuel était de 3050 N, alors qu'elle n'est en fait que de 2630 N.
La figure 4.15 permet également d'estimer le rapport de conduite sous charge. Le calcul en linéaire donne une valeur du rapport de conduite à vide (2,28) légèrement supérieur au rapport sous charge. En effet la dent 3 n'est pas chargée pour la première et la dernière position cinématique. Elle est en contact seulement pour 8 positions sur les 10 calculées. Le rapport de conduite sous charge sera donc égal au moins à $2{,}28 \times 0{,}8 = 2{,}05$, alors que la modélisation ponctuelle le déterminait à 1,42.



Modélisation ponctuelle *Modélisation linéaire*

Figure 4.15 : Influence de la modélisation sur la répartition des charges

Au niveau des pressions de contact, le calcul en ponctuel surestime également les résultats. La figure 4.16 montre les résultats obtenus pour la position la plus chargée avec les deux modélisations. Le calcul en ponctuel donnait une pression maximale de 816 MPa, alors que le calcul en linéaire l'évalue à 751 MPa. Ceci provient du fait que pour cette position cinématique, la modélisation ponctuelle ne définit qu'une seule dent en prise, alors qu'il y en a effectivement deux (même si la deuxième est très faiblement chargée).

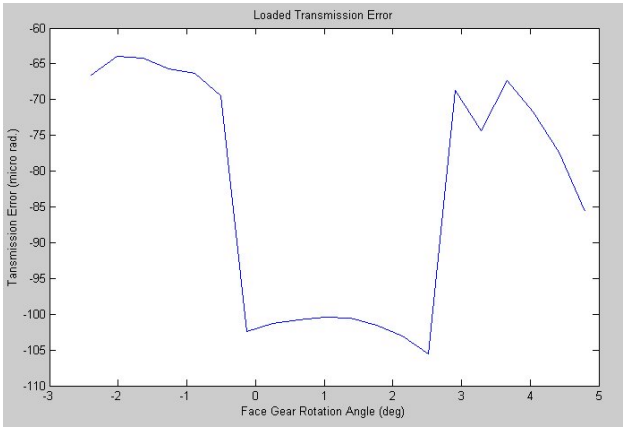


Modélisation ponctuelle *Modélisation linéaire*

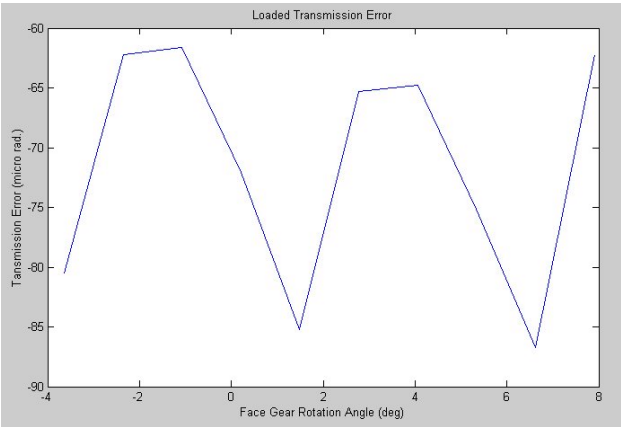
Figure 4.16 : Influence de la modélisation sur la distribution de pression

Sur la figure 4.16, le graphe inférieur montre la répartition de pression en projection sur le plan tangent au contact. Cela permet de visualiser notamment la forme du contact sur la surface de denture. Il apparaît ici que l'ellipse de contact est en fait légèrement courbée. Cette courbure est mieux prise en compte avec la modélisation linéaire. En effet, pour effectuer le calcul sous charge avec la modélisation ponctuelle, les points utilisés pour le maillage de Boussinesq (cf. Chapitre 2, § 4.3.6) sont définis à partir de l'ellipse théorique issue de la théorie de Hertz. La zone de contact est donc parfaitement rectangulaire. La modélisation linéaire appuie le maillage de Boussinesq sur les points de contact définis à vide (cf. Chapitre 2, § 4.3.6) et permet donc de prendre en compte cette légère courbure.

L'erreur de transmission sous charge est également surestimée avec la modélisation ponctuelle (Fig. 4.17). Elle était trouvée avec une moyenne de -85 micro radians pour une amplitude de 42 micro radians, alors qu'elle n'est que de -74 micro radians de moyenne pour une amplitude de 25 micro radians.



Modélisation ponctuelle



Modélisation linéaire

Figure 4.17 : Influence de la modélisation sur l'erreur de transmission sous charge

La modélisation utilisée à vide dans le cas de contact ponctuel s'avère donc inadaptée au comportement sous charge, car elle ne permet pas de définir des zones qui ne seront en contact que sous charge à cause de la flexion des dents. Par la suite, tous les calculs seront donc effectués en utilisant uniquement la modélisation de contact linéaire, quel que soit à priori le type de contact.
Il convient de rappeler ici que la modélisation ponctuelle n'a pas pu être validée expérimentalement, alors que la modélisation linéaire l'a été avec succès (cf. Chapitre 3).

3.2 Caractéristiques des contacts sous charge

Les différents calculs effectués avec des pignons à 18 dents (cas de contact ponctuel) et 19 dents (cas de contact linéaire) permettent de comparer les résultats (les calculs sont toujours effectués avec la modélisation linéaire).
Les résultats obtenus pour un couple d'entrée sur le pignon de 100 Nm sont synthétisés dans le tableau suivant :

	Ponctuel	Linéaire
Rapport de conduite à vide	2.28	2.33
Rapport de conduite sous charge	2.05	2.33
Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)	25.15	15.20
Moyenne de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)	74.18	42.75
Charge maximale sur la dent 3 (N)	2630	2164
Pression maximale à la position la plus chargée (MPa)	751	554

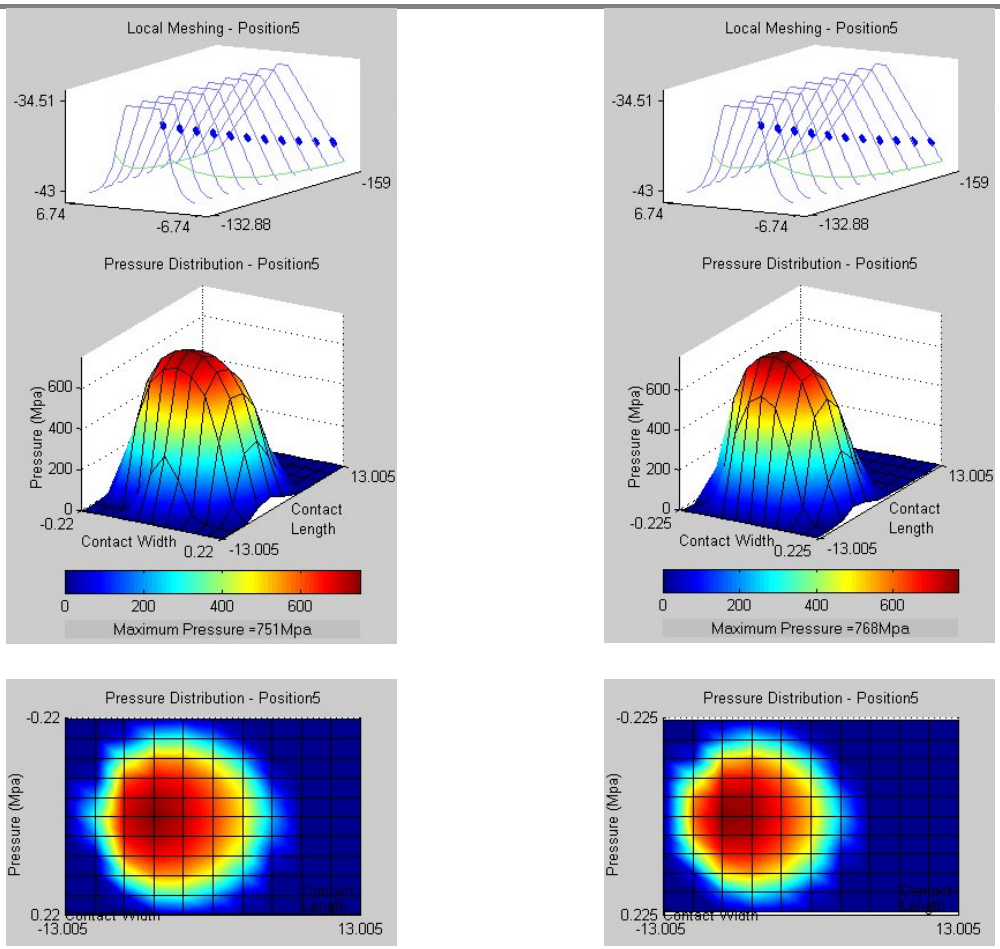
Tableau 4.2 : Caractéristiques sous charge des contacts linéaires et ponctuels

Le cas de contact linéaire semble présenter de nombreux avantages par rapport au cas ponctuel. Le rapport de conduite sous charge est légèrement supérieur et la zone de contact est répartie sur toute la largeur de denture. Ceci induit une charge maximale et des pressions maximales inférieures. L'erreur de transmission sous charge calculée est également plus faible pour un contact linéaire.

3.3 Sensibilité aux erreurs de montage

L'influence relative des diverses erreurs de montage sur la portée sous charge a été étudiée dans le cas de contact ponctuel et linéaire. Dans un premier temps, il a été nécessaire de caractériser cette portée sous charge. Pour cela, la distribution de pression instantanée correspondante à la position cinématique où la dent est la plus chargée a été utilisée. Pour effectuer le calcul sous charge et le maillage de Boussinesq, la largeur de denture a été discrétisée en 11 nœuds. Le nœud où la pression est maximale est utilisé pour définir la position de la portée sous charge. Pour définir la taille de la portée, les nœuds où la pression est supérieure à une valeur seuil sont utilisés. La valeur seuil choisie ici est 100 MPa, cette valeur permettant de caractériser une pression non négligeable par rapport à la pression maximale. Ainsi, la portée sous charge est définie par son nœud de position, son nœud de début et son nœud de fin. Par exemple sur la figure 4.18, sans erreur, la portée est positionnée au nœud 4, elle débute au nœud 2 et finit au nœud 8.

Les figures 4.18 et 4.19 montrent des exemples de l'influence d'une erreur de montage sur la portée sous charge. L'erreur introduite dans la modélisation est une erreur sur l'angle entre les axes du pignon et de la roue de -0,01°.

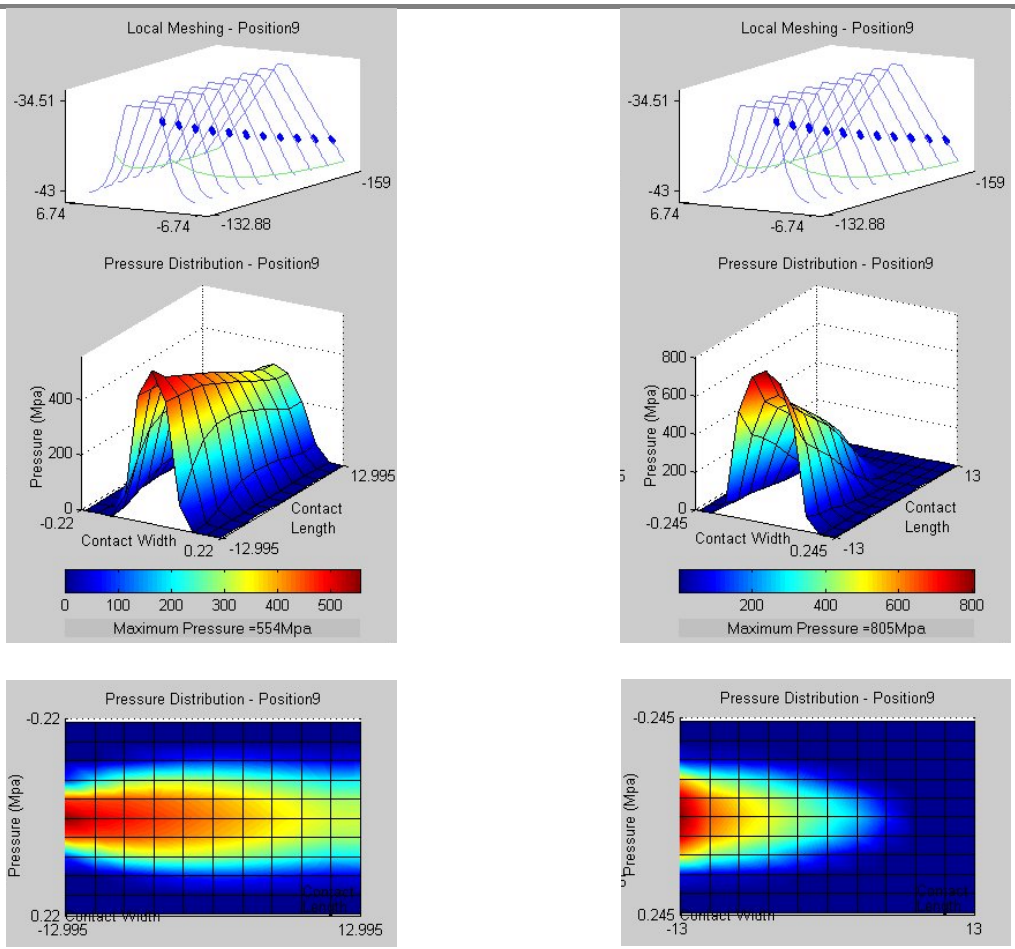


Sans erreur *Avec erreur $\delta\gamma_1$=-0,01°*

Figure 4.18 : Influence d'une erreur de montage sur la distribution de pression dans le cas d'un contact ponctuel

Ces deux figures montrent bien la différence de sensibilité des deux cas de contact à une erreur de montage.

Pour le cas de contact ponctuel, la portée sous charge n'est presque pas modifiée. La position et la forme sont identiques et les valeurs de pressions maximales sont presque inchangées (751 et 768 MPa). Par contre pour le contact linéaire, la portée est complètement déplacée vers le rayon intérieur de la roue. Il est évident que le contact sera très défavorable. Les valeurs des pressions de contact augmentent et passent de 554 à 804 MPa.



Sans erreur *Avec erreur $\delta\gamma_1$=-0,01°*

Figure 4.19 : Influence d'une erreur de montage sur la distribution de pression dans le cas d'un contact linéaire

Pour quantifier de façon plus précise l'influence des erreurs, un plan d'expérience a été effectué pour chaque cas de contact. L'utilisation des plans d'expériences permet ensuite grâce à une analyse de variance de connaître l'influence relative de chaque paramètre étudié ainsi que leurs éventuels couplages, tout en réalisant le minimum de calcul (cf. Annexe 4). De plus l'utilisation des plans d'expériences, permettra de s'assurer que l'influence de l'erreur observée précédemment sur la portée, n'est pas un cas particulier isolé, mais reflète bien une tendance générale.

Cinq erreurs de montage peuvent être introduites dans la simulation (cf. Chapitre 2 et Fig. 4.20). L'engrenage face étudié ici est droit et sans offset. Les dents sont donc symétriques, et le déplacement angulaire du pignon ($\delta\alpha_1$) ne provoquera qu'une rotation de la roue. Les résultats seront inchangés. De même, le pignon étant droit et non corrigé, sa géométrie est invariante dans la direction de son axe de rotation. Un déplacement axial du pignon (δr_1) n'aura donc également aucune influence sur les résultats.

Finalement, trois erreurs de montage ont donc été retenues et étudiées, avec chacune deux niveaux :

- Déplacement radial du pignon, δE_1 : -0,02 mm, 0,02 mm
- Déplacement axial de la roue face, δq_1 : -0,02 mm, 0,02 mm
- Déplacement angulaire de la roue face, $\delta\gamma_1$: -0,01°, 0,01°

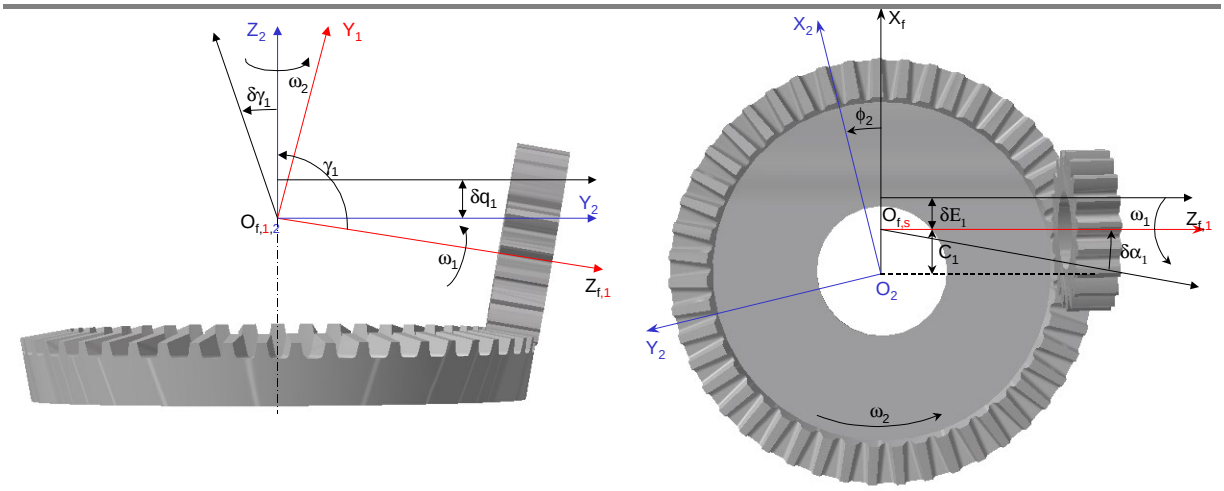


Figure 4.20 : Erreurs de montage prises en compte

Les résultats observés sont la position, le début et la fin de la portée, comme définis précédemment.

Le détail des expériences effectuées est fourni en annexe 5.1, les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous.

	Contact ponctuel			Contact linéaire		
Expérience	Position	Début	Fin	Position	Début	Fin
1	4	2	8	1	1	11
2	5	4	10	11	4	11
3	3	2	6	1	1	4
4	4	1	8	5	1	11
5	4	2	7	1	1	9
6	5	3	9	11	3	11
7	3	1	6	1	1	5
8	4	2	9	1	1	11
Sans erreur	4	2	8	1	1	11

Tableau 4.3 : Influence des erreurs d'assemblage sur la portée sous charge

Il apparaît clairement ici que, quelle que soit l'erreur de montage simulée, la portée sous charge est beaucoup moins perturbée pour un contact ponctuel que pour un contact linéaire. Pour le contact linéaire, la position de la portée est presque toujours déplacée en bord de dent, au rayon intérieur (carreau 1) ou au rayon extérieur (carreau 11). De plus, la taille de la portée est réduite dans plusieurs cas. La zone de contact ne couvre alors plus toute la largeur de denture.

L'analyse de variance effectuée à la suite de ces expériences permet de quantifier l'influence des paramètres de la façon suivante :

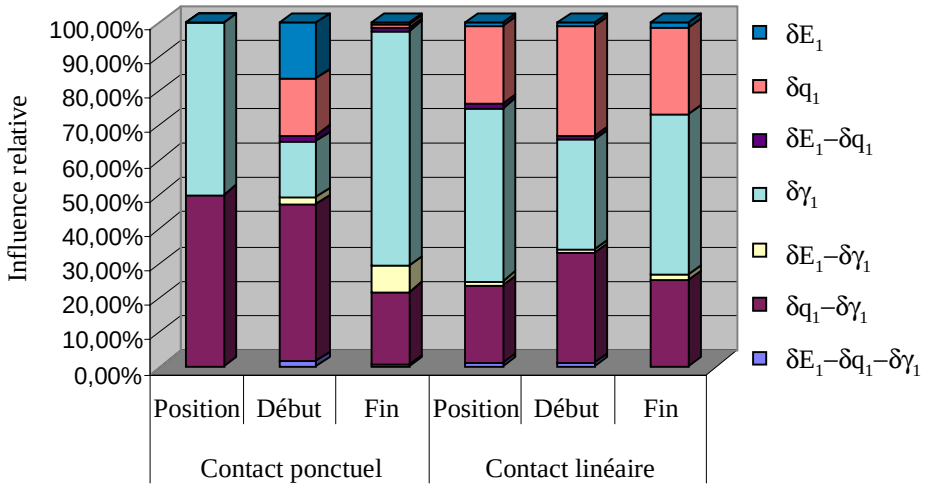


Figure 4.21 : Influence relative des erreurs d'assemblage sur la portée sous charge

D'après le graphe des influences relatives (Fig. 4.21), il apparaît nettement que le déplacement radial du pignon (δE_1) a globalement très peu d'influence sur la portée sous charge. Seuls le déplacement axial de la roue face (δq_1) et le déplacement angulaire de la roue face ($\delta\gamma_1$) jouent un rôle prépondérant sur la portée sous charge. Leur influence est du même ordre de grandeur, même si $\delta\gamma_1$ semble légèrement prépondérant dans le cas d'un contact linéaire.

L'étude effectuée ici a montré les avantages et inconvénients des deux types de contact au niveau du comportement sous charge.

Un contact linéaire présente de nombreux avantages par rapport au contact ponctuel :

- Rapport de conduite plus important,
- Charge maximale plus faible,
- Erreur de transmission sous charge plus faible,
- Pression de contact maximale plus faible,

Un engrenage face avec un contact linéaire aura donc a priori une capacité de charge plus importante. Par contre la sensibilité à la moindre erreur de montage semble trop importante pour pouvoir les utiliser tels quels. Un contact localisé et généralement absent du bord de dent comme le contact ponctuel est beaucoup moins sensible aux erreurs de montage et plus sûr à utiliser.
L'utilisation des engrenages face avec un contact linéaire nécessite donc des modifications qui améliorent la portée sous charge. L'introduction d'un bombé sur le pignon devrait permettre de localiser et maîtriser la position de la portée sous charge.

Une caractéristique fondamentale des engrenages face est apparue lors des calculs effectuées ici : l'amplitude de l'erreur cinématique à vide semble négligeable en présence d'erreurs de montage. En effet, l'erreur cinématique présentée au début de ce chapitre (Fig. 4.7), qui était de 4 micro radians, est la valeur la plus importante rencontrée au cours de cette étude. Les erreurs de montage ont donc un effet uniquement sur la valeur moyenne de l'erreur cinématique, mais celle ci reste ensuite quasiment constante au cours de l'engrènement.

4 Optimisation du pignon

4.1 Optimisation de la portée sous charge

Les observations effectuées précédemment montrent, sur le cas de l'engrenage face linéaire, une portée sous charge décalée vers le rayon intérieur de la roue. L'optimisation de la surface du pignon par l'introduction d'un bombé doit permettre d'équilibrer la portée sous charge. Un bombé est défini pour une charge précise. Le bombé pour l'engrenage face étudié précédemment a été calculé pour un couple d'entrée appliqué au pignon de 500 Nm.

Le bombé est défini par quatre paramètres (cf. Chapitre 2 et Fig. 4.22) : deux longueurs (C_{bl1} et C_{bl2}) et deux profondeurs (C_{b1} et C_{b2}).

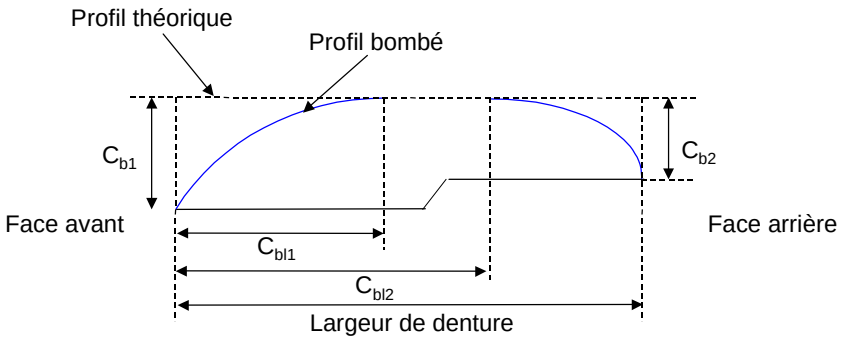


Figure 4.22 : Définition d'une correction de bombé

Afin de déterminer l'influence de ces quatre paramètres sur la portée sous charge, un plan d'expérience complet à deux niveaux a été effectué. Des calculs préliminaires ont été effectués afin d'observer les tendances de l'influence des paramètres et de fixer leurs valeurs pour cette étude. Il a aussi fallu déterminer quels allaient être les critères pour définir une "bonne" portée sous charge. La qualité de la portée sous charge est estimée grâce à la distribution de pression correspondante à la position cinématique où la dent 3 est la plus chargée. La largeur de denture du pignon est de 28 mm. Pour le calcul sous charge, la largeur de denture de la roue face est discrétisée en 11 carreaux.
Les critères retenus pour caractériser une "bonne" portée sont les suivants :

- Pression maximale située au centre de la dent, soit entre les carreaux 4 et 6,
- Pression au niveau du carreau 1 inférieure à la moitié de la pression maximale,
- Pression au niveau du carreau 11 inférieure à la moitié de la pression maximale,
- Valeur de la pression maximale équivalente ou inférieure à celle sans bombé.

De plus, il faudra veiller à ce que la portée sous charge ne soit pas trop sensible aux éventuelles erreurs de montage. Pour cela, un calcul sera effectué avec l'erreur de montage qui a été déterminée comme la plus influente au paragraphe précédent, c'est-à-dire, le déplacement angulaire de la roue face ($\delta\gamma_1$).

Les niveaux des paramètres suivants ont été choisis pour l'étude :

- C_{bl1} : 6 mm, 14 mm,
- C_{b1} : 10 microns, 30 microns,
- C_{bl2} : 14 mm, 22 mm,
- C_{b2} : 10 microns, 30 microns.

Le détail des expériences effectuées ainsi que les résultats numériques obtenus sont fournis en Annexe 5.2.

La figure 4.23 montre l'influence relative des paramètres du bombé sur la portée sous charge déterminée grâce au plan d'expériences.

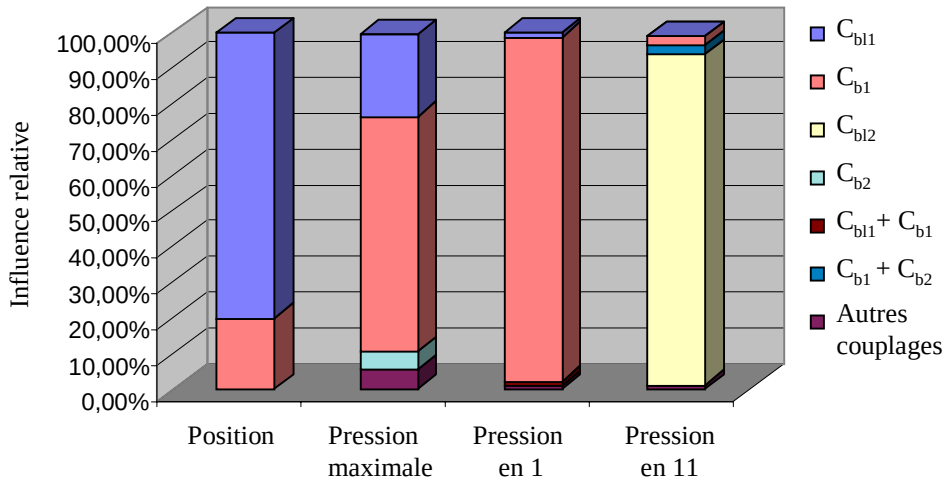


Figure 4.23 : Influence relative des paramètres du bombé sur la portée sous charge

La position de la portée sous charge et la pression maximale dépendent essentiellement de C_{bl1} et C_{b1}, c'est-à-dire de la partie du bombé située au niveau du rayon intérieur de la roue. La pression au carreau 1 dépend essentiellement de C_{b1}, la profondeur du bombé au niveau du rayon intérieur et la pression au carreau 11 de C_{bl1}, la position du bombé au niveau du rayon extérieur.

L'analyse de variance relative à ce plan d'expériences a permis d'obtenir des prédicteurs mathématiques pour les effets observés. Ainsi, des équations donnant la position du bombé, la pression maximale, la pression au carreau 1 et la pression au carreau 11 sont disponibles.
Il est important de noter ici que les prédicteurs mathématiques ainsi obtenus ne prennent en compte que les effets linéaires des différents paramètres puisque le plan effectué n'était qu'à deux niveaux. Ils pourront donc être plus ou moins approchés en fonction d'éventuelles influences quadratiques des paramètres (estimés faible ici). Ces éventuelles influences quadratiques pourraient être mises en évidence en effectuant un plan d'expériences à 3 niveaux, mais le nombre de simulations à effectuer serait alors beaucoup plus important. L'objectif ici étant uniquement de définir un bombé qui assure une portée sous charge de bonne qualité et non pas de déterminer des prédicteurs les plus fiables possibles, l'utilisation des prédicteurs mathématiques linéaires est suffisante.

Les prédicteurs mathématiques obtenus sont les suivantes :

$$Position = 0.25C_{bl1} + 0.05C_{b1}$$
$$Pression\ max = 1199.08 - 9.27C_{bl1} + 6.27C_{b1} - 4.33C_{bl2}$$
$$Pression\ 1 = 789.86 + 31.36C_{bl1} - 26.33C_{b1} - 1.05C_{bl1}C_{b1}$$
$$Pression\ 11 = 404.81 + 10.02C_{b1} - 13.49C_{b2} - 0.33C_{b1}C_{b2}$$

Les critères retenus pour définir une "bonne" portée permettent de choisir des valeurs pour la position du bombé, ainsi que les pressions. Les quatre équations précédentes pourront alors former un système de 4 équations où les 4 inconnues seront les paramètres du bombé. Mais ces équations ne sont valables que pour les plages de valeurs pour lesquelles les simulations ont été effectuées. Il faut alors veiller à ce que les valeurs choisies pour la position du bombé et les pressions permettent bien d'obtenir des valeurs pour les paramètres du bombé à l'intérieur de ces plages.

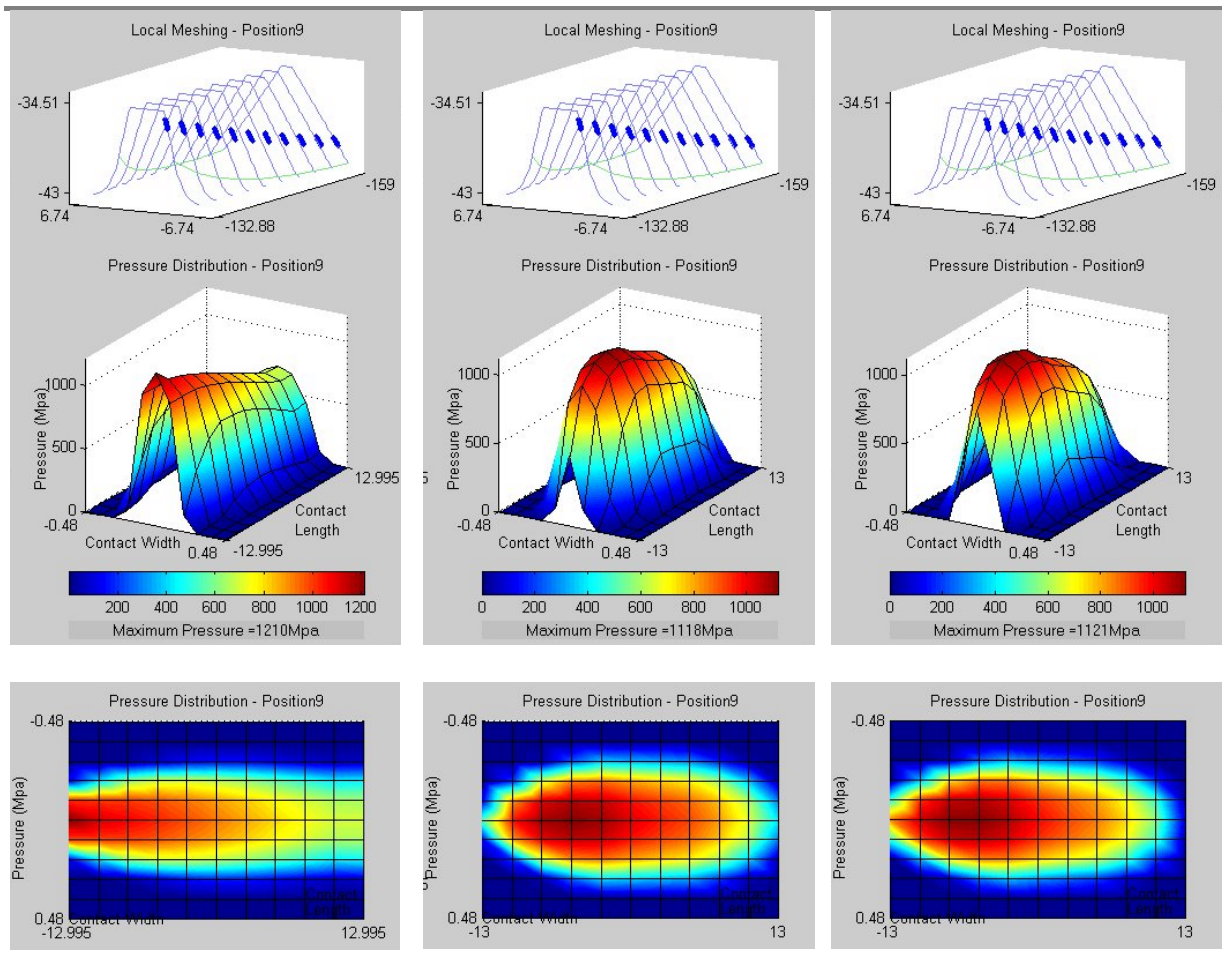
La solution suivante a été retenue pour définir le bombé :

- Position de la portée : carreaux 4,
- Pression au niveau du carreau 1 : 600 MPa,
- Pression au niveau du carreau 11 : 350 MPa,
- Pression maximale : 1100 MPa.

La résolution du système donne alors les caractéristiques suivantes au bombé (valeurs arrondies) :

- C_{bl1} = 13 mm,
- C_{b1} = 15 microns,
- C_{bl2} = 17 mm,
- C_{b2} = 11 microns.

La qualité de ce bombé a été validé par un calcul sous charge le prenant en compte. Deux autres calculs avec des erreurs de montage ont également été effectués.
La figure 4.24 montre la distribution de pression obtenue avec le pignon initial, avec le pignon bombé et avec le pignon bombé et une erreur d'assemblage, $\delta\gamma_1$=-0,01°.



Pignon initial | *Pignon bombé* | *Pignon bombé avec $\delta\gamma_1$=-0.01°*

Figure 4.24 : Influence du bombé sur la distribution de pression

Les résultats obtenus avec les calculs sous charge sont synthétisés dans le tableau suivant :

	Bombé seul	Bombé $\delta\gamma_1$=-0,01°	Bombé $\delta\gamma_1$=0,01°	Sans bombé
Position de la portée	4	4	4	1
Pression maximale (MPa)	1118	1121	1124	1210
Pression au carreau 1 (MPa)	510	843	15	1210
Pression au carreau 11 (MPa)	387	83	485	696

Tableau 4.4 : Influence du bombé sur la portée sous charge

Ces résultats montrent que le bombé ainsi défini assure une portée de bonne qualité, même en présence d'erreurs de montage. Les prédicteurs mathématiques donnent dans l'ensemble une bonne approximation des résultats.
Le bombé améliore également le comportement global sous charge. La charge maximale est légèrement diminuée, elle passe de 10473 à 10383 N. De même, la moyenne de l'erreur de transmission passe de 71 à 66 micro radians.
Mais pour diminuer de façon plus significative la moyenne de l'erreur de transmission, ce seront des corrections de profil de denture qui devront être appliquées au pignon.

4.2 Réduction de l'erreur de transmission sous charge

Dans tout type d'engrenage, l'erreur de transmission sous charge est source de bruit et d'excitations (Rémond [24]). Le concepteur d'engrenages cherchera toujours à la réduire au maximum. Généralement, dans un engrenage, l'erreur de transmission sous charge provient en majeure partie de la flexion des dents.
Avant de chercher à réduire l'amplitude de l'erreur de transmission pour les engrenages, il est nécessaire dans un premier temps de cibler son origine dans le cas des engrenages face. L'étude est effectuée ici, toujours sur le même engrenage face (contact linéaire) avec un couple d'entrée sur le pignon de 500 Nm, puisque l'optimisation de cette correction n'est valable qu'à un couple particulier.

4.2.1 Influence relative de la flexion et du contact

L'erreur de transmission sous charge peut provenir de trois effets distincts :

- Déformation de contact,
- Flexion de la roue,
- Flexion du pignon.

Pour connaître l'influence de ces trois effets, différents calculs sous charge on été effectués, en négligeant à chaque fois un ou plusieurs effets.

Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Calcul	Effet considéré	Valeur moyenne de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	Contact + flexion	-197	71
2	Contact seul	-73	19
3	Flexion seule	-123	49
4	Flexion du pignon	-43	36
5	Flexion de la roue	0	0
6	Contact + flexion du pignon	-128	52
7	Contact + flexion de la roue	-73	19

Tableau 4.5 : Influence du contact et de la flexion sur l'erreur de transmission sous charge

Les trois premiers calculs montrent que les contributions de la déformation due au contact et la déformation due à la flexion des dents sont bien distinctes et complémentaires. Il ne semble pas qu'il y ait de couplage important antre les deux effets, l'effet de flexion contribuant environ à 2/3 de l'erreur de transmission sous charge, et l'effet de contact à 1/3.
Le calcul prenant en compte uniquement la flexion de la roue (calcul 5) montre qu'elle n'a pas d'influence sur l'erreur de transmission sous charge. Lorsqu'elle est considérée seule, elle n'a d'ailleurs aucune influence sur le calcul sous charge complet.

La répartition des charges correspondante (Fig. 4.25) montre que la charge est répartie équitablement sur toutes les dents en contact : lorsque deux dents sont en contact, elles supportent chacune la moitié de la charge exactement, et lorsque trois dents sont en contact, elles supportent le tiers de la charge exactement.

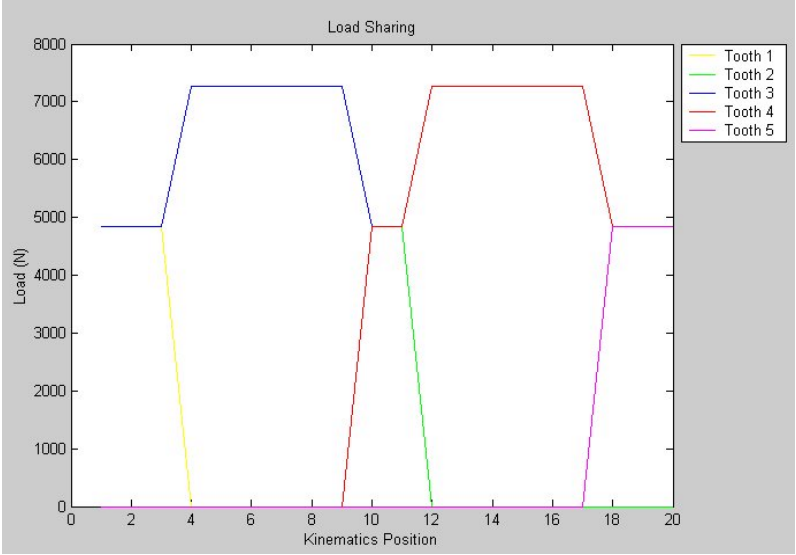


Figure 4.25 : Répartition des charges en considérant uniquement l'effet de flexion de la roue

De même, lorsque la flexion de la roue n'est associée qu'à l'effet de contact (calcul 7), celle-ci n'a pas d'influence sur l'erreur de transmission. Ce n'est qu'associé à la flexion du pignon que son influence apparaît, puisque l'influence de la flexion conjuguée de la roue et du pignon (calcul 3) est bien supérieure à l'influence de la flexion du pignon seul (calcul 4). Le calcul considérant l'effet de flexion globalement (calcul 3) tient compte non seulement de la flexion du pignon et de la roue, mais également de l'éventuel couplage entre ces deux effets. Grâce à ce calcul, il est possible d'estimer que ce couplage contribue à environ 2/3 de l'effet de flexion. Les deux derniers calculs confirment cette estimation de la contribution du couplage des flexions.

Globalement, la répartition des contributions des différents effets sur l'erreur de transmission sous charge peut être estimée ainsi :

- Effet de contact : 33,3%,
- Effet de flexion du pignon : 22,2 %,
- Effet du couplage de la flexion de la roue et de la flexion du pignon : 44,4 %.

La source principale de l'erreur de transmission étant donc la flexion, sa variation provient donc essentiellement des fluctuations de la flexion des dents au cours de l'engrènement. L'introduction de corrections de dentures adéquates devraient permettre de réduire cette fluctuation et donc l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.
Pour l'instant, il n'est pas prévu de corriger le profil de la roue face. Des corrections appliquées en tête de dent du pignon devraient permettre de compenser la flexion du pignon. Des corrections en pied de dent du pignon devraient corriger l'effet de couplage à travers la compensation de la flexion de la roue.

4.2.2 Etude de la flexion

Pour corriger les dentures des engrenages cylindriques, la profondeur de correction est généralement choisie de façon à compenser la flexion des dents. Par similitude, il est donc dans un premier temps nécessaire de connaître cette flexion des dents.
Pour quantifier la flexion des dents, la flèche maximale en tête de dent de la roue face et du pignon a été mesurée au cours de l'engrènement sur une dent. La flèche a également été mesurée au niveau du rayon intérieur de la roue, au milieu de la largeur de denture et au niveau du rayon extérieur de la roue , ceci afin d'évaluer l'évolution de la position de la flèche maximale sur la largeur de denture au cours de l'engrènement (Fig. 4.26). Les mesures ont été effectuées sur la dent 3, sur le flanc retro au contact, afin d'éviter les perturbations de déplacements dues au chargement.

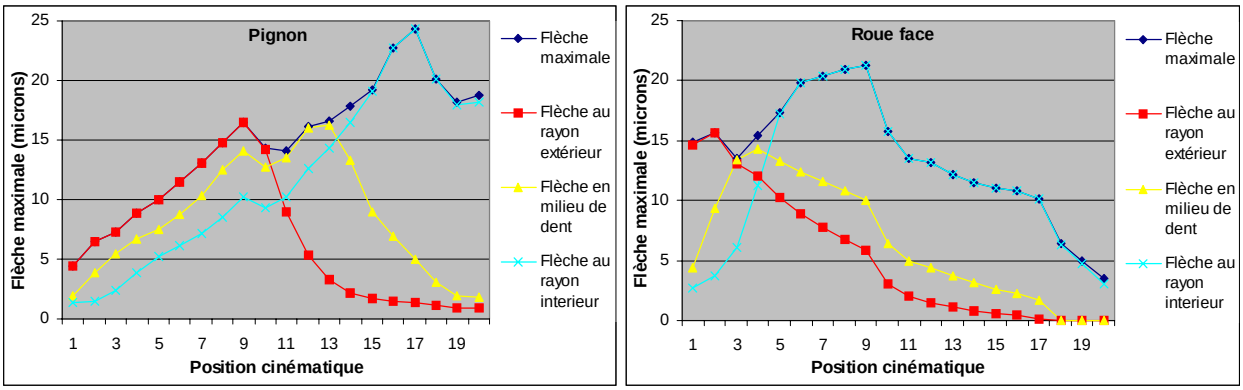


Figure 4.26 : Evolution de la flèche au cours de l'engrènement

Les courbes de flexion obtenues sont conformes à l'évolution de la position de la zone de contact durant l'engrènement (Fig. 4.27) déterminée par la cinématique à vide.

Pour le pignon, la flexion est maximale au niveau du rayon intérieur au début de l'engrènement, puis au centre de la dent au milieu de l'engrènement, et enfin au niveau du rayon intérieur à la fin de l'engrènement. Deux maxima de flexion sont relevés pour les positions cinématiques 9 et 17, ils correspondent au pics de variation de l'erreur de transmission sous charge (cf. Fig. 4.10). Ce sont donc ces maxima de flexion qu'il faut essayer de diminuer pour réduire l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Pour la roue, la flexion est également plus importante au rayon extérieur en début d'engrènement, puis au milieu de la dent, mais elle devient très rapidement maximale au rayon intérieur (à partir de la position 5). Ceci s'explique par l'inclinaison des lignes de contact sur le profil de denture (Fig. 4.27). En effet, à partir de la position cinématique 5, même si les lignes de contact couvrent toute la largeur de denture, le contact est plus haut sur le profil de dent au niveau du rayon intérieur. A partir de la position cinématique 10, le contact ne couvre plus toute la largeur de denture, il est situé au rayon intérieur et la roue ne fléchit plus qu'à cet endroit. Comme pour le pignon, le maximum de flexion de la roue face (position cinématique 9) correspond au pic d'erreur de transmission.

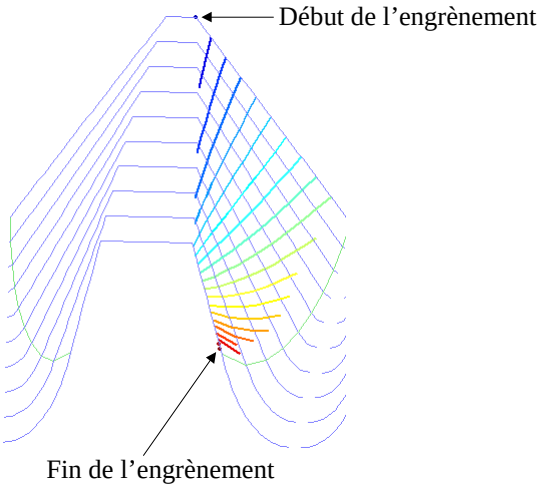


Figure 4.27 : Evolution de la zone de contact potentiel à vide sur la roue face au cours de l'engrènement

4.2.3 Etude des corrections de denture du pignon

Pour les engrenages cylindriques, les corrections de dentures longues et de type parabolique sont les plus efficaces pour réduire l'erreur de transmission sous charge (Guingand [64]). Par similitude, il semble logique pour les engrenages face d'étudier dans un premier temps ce type de corrections. L'étude effectuée ici portera donc uniquement sur les corrections paraboliques.
Les paramètres définissant les corrections de dentures étant nombreux (cf. Chapitre 2), leur étude a été séparée en 6 configurations différentes :

- Correction en tête de dent couvrant toute la largeur de denture,
- Correction en tête de dent au niveau rayon intérieur de la roue,
- Correction en tête de dent au niveau du rayon extérieur de la roue,
- Correction en pied de dent couvrant toute la largeur de denture,
- Correction en pied de dent au niveau rayon intérieur de la roue,
- Correction en pied de dent au niveau du rayon extérieur de la roue.

Un plan d'expériences à deux niveaux a été effectué pour chaque cas, pour déterminer l'influence des différents paramètres et l'éventuelle linéarité de cette influence. Pour les corrections couvrant toute la largeur de denture, deux paramètres définissent la correction : la longueur et la profondeur de correction. Pour les corrections ne couvrant pas toute la largeur de denture, trois paramètres les définissent : la longueur, la profondeur et la taille de correction sur la largeur de denture.

Les valeurs maximales de flexion relevées sur le pignon et sur la roue étant comprises entre 15 et 25 micromètres, la plage d'étude choisie pour la profondeur de correction est entre 10 et 30 microns. En ce qui concerne la longueur de correction, 2 mm caractériseront des corrections courtes, et 6 mm des corrections longues. Pour les corrections ne couvrant pas toute la largeur de denture, elles seront appliquées sur environ un tiers et deux tiers de la largeur de denture. Les résultats complets des plans d'expériences sont fournis en Annexe 5.3.

Les analyses effectuées à la suite de ces calculs montrent que l'influence des différents paramètres définissant les corrections de denture est assez complexe. Des calculs effectués avec des valeurs intermédiaires aux deux niveaux du plan d'expériences montrent que les paramètres dont l'influence est linéaire sont rares. L'étude précise de leur influence, ainsi que l'obtention d'équations caractérisant les corrections (comme celles déterminées pour le bombé) nécessiteraient l'utilisation de plans d'expériences à 3 niveaux.
De plus, des calculs effectués avec plusieurs corrections simultanément (en tête et en pied par exemple) ont montré qu'il existe des couplages des corrections entre elles : deux corrections dont l'effet est positif sur la réduction de l'erreur de transmission lorsqu'elles sont seules, peuvent avoir un effet négatif lorsqu'elles sont appliquées ensemble. De même, leur influence est également couplée avec les éventuels corrections de bombé.
Une étude complète impliquerait donc une analyse simultanée de l'influence de tous les paramètres caractérisant les toutes corrections de denture ainsi que les bombés. L'objectif ici étant uniquement de trouver des corrections adéquates pour réduire l'erreur de transmission et non pas forcément la correction optimale parmi toutes les configurations possibles, seule une analyse qualitative des résultats a été effectuée.

Dans le cas de l'engrenage face étudié ici, les corrections les plus efficaces semblent être les corrections en pied de dent couvrant toute la largeur de denture. Elles devront être alors longues et profondes. Ensuite il semble également avantageux de corriger le pignon en tête de dent, sur une partie seulement de la largeur de denture. Les corrections seront plus efficaces si elles sont situées au niveau du rayon extérieur de la roue, soit courtes sur une grande partie de la largeur de denture, soit longues sur une faible partie de la largeur de denture. Ces deux types de corrections appliquées seules laissent entrevoir un potentiel de réduction de l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge d'environ 40%.

Suite à ces premières observations, une étude plus complète a été réalisée sur un type de correction particulier, couplé au bombé défini précédemment. La correction choisie est celle qui semble la plus prometteuse en terme de réduction de l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge, c'est-à-dire une correction en pied de dent du pignon couvrant toute la largeur de denture.

Le nombre de paramètres définissant cette correction de denture n'étant que de deux, leur influence a pu être étudiée conjointement. La figure 4.28 montre l'évolution de l'amplitude de l'erreur de transmission en fonction de la longueur et de la profondeur de correction.

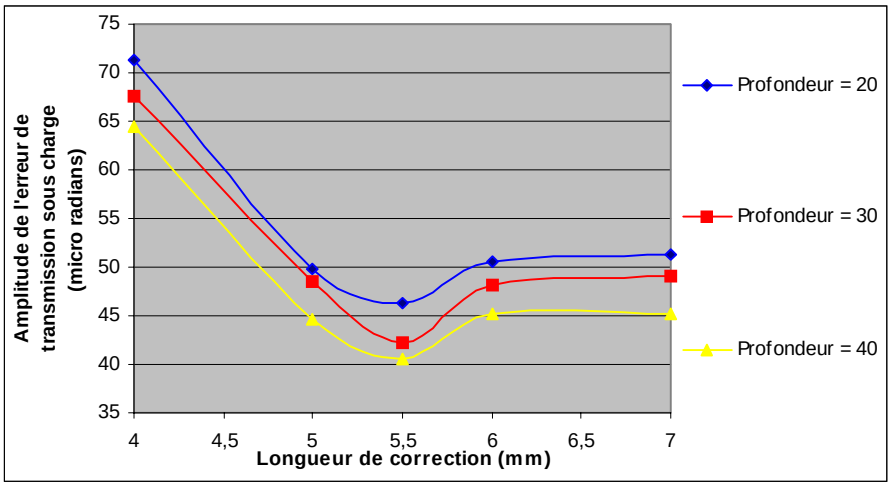


Figure 4.28 : Variation de l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge pour différentes profondeurs de corrections, en fonction de la longueur de correction

Les 3 courbes obtenues sont de forme identique. Elles présentent toutes un minimum pour une longueur de correction de 5,5 mm. Cette longueur de correction semble donc être optimale pour diminuer l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.
La courbe représentant l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge en fonction de la profondeur de correction pour cette longueur de correction de 5,5 mm (Fig. 4.29) présente également un minimum pour 45 microns.

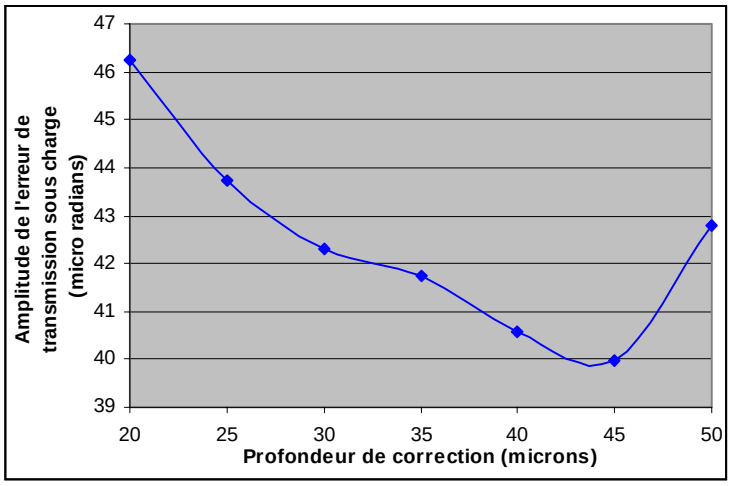


Figure 4.29 : Variation de l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge en fonction de la profondeur de correction pour une longueur de correction de 5,5 mm

Une correction de denture en pied de dent du pignon sur une longueur de 5,5 mm avec une profondeur de 45 microns est ici le compromis idéal pour diminuer l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge. Néanmoins, au delà de 40 microns de correction, les résultats montrent que les critères définis auparavant pour caractériser une bonne portée sous charge ne sont plus respectés. La portée est alors décalée vers le rayon extérieur de la roue et la pression de contact au niveau du rayon extérieur atteint près de 700 MPa pour la position cinématique la plus chargée. Une correction de 40 microns de profondeur sur une longueur de 5,5 mm sera alors retenue ici pour optimiser l'erreur de transmission sous charge.

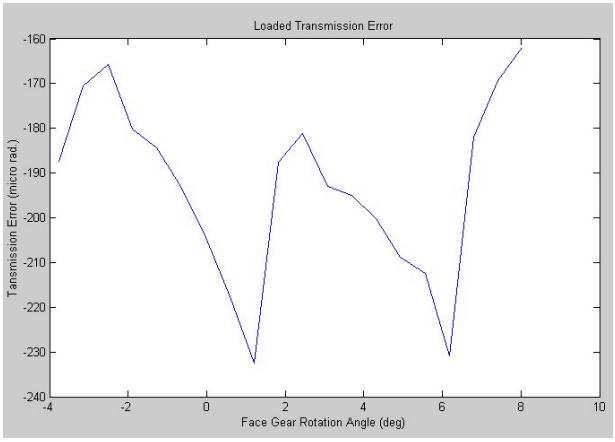
Les caractéristiques sous charge de l'engrenage face ainsi optimisé sont synthétisées dans le tableau suivant :

	Sans correction	Bombé seul	Bombé + correction
Rapport de conduite sous charge	2.33	2.33	2.33
Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)	70.63	66.32	40.56
Gain sur l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge		6.1 %	42.6 %
Moyenne de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)	-197.13	-218.29	-249.12
Charge maximale sur la dent 3 (N)	10473	10383	10062
Position de la portée	1	4	4
Pression maximale (MPa)	1210	1118	1077
Pression au carreau 1 (MPa)	1210	510	0
Pression au carreau 11 (MPa)	696	387	431

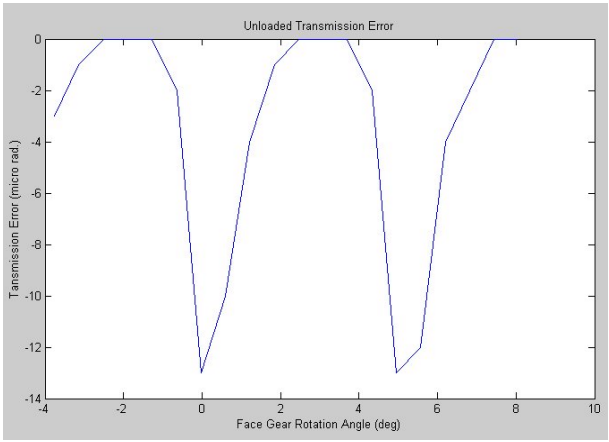
Tableau 4.6 : Caractéristiques sous charge après optimisation du pignon

Les corrections ainsi appliquées répondent aux compensations de flexion souhaitées et définies au § 4.2.2. En plus, d'équilibrer la portée, le bombé joue un rôle équivalent aux corrections de tête localisées en compensant la flexion du pignon au niveau des rayons extérieur et intérieur. La correction en pied de dent du pignon compense la flexion de la roue et régule ainsi l'influence du couplage flexion roue - flexion pignon.

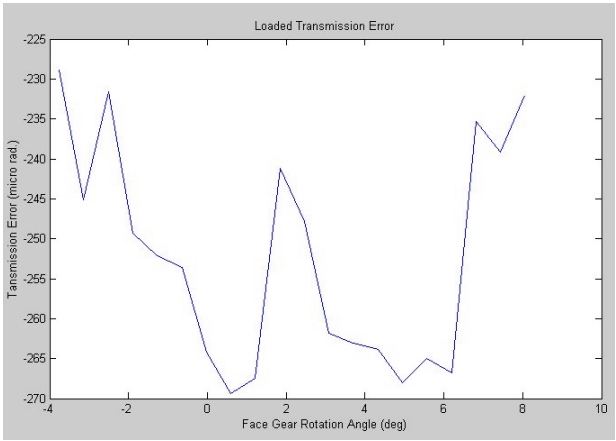
L'introduction de la correction en pied de dent du pignon a introduit une erreur cinématique à vide, légèrement décalée dans le temps par rapport à l'erreur de transmission sous charge initiale (Fig. 4.30). C'est notamment cette erreur cinématique qui permet de réduire l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.



Erreur de transmission sous charge initiale



Erreur cinématique à vide due à la correction du pignon



Erreur de transmission sous charge après correction

Figure 4.30 : Erreur de transmission sous charge avant et après optimisation du pignon

Après optimisation du pignon, la charge maximale supportée par chaque dent est légèrement diminuée, mais surtout la variation de charge est plus régulière (Fig. 4.31). L'augmentation et la diminution du chargement sur chaque dent autour de la position la plus chargée sont maintenant plus progressifs. Le chargement maximal est supporté plus longtemps par chaque dent. Sans corrections, un chargement supérieur à 9000 N était observé pour 3 positions cinématiques seulement (positions cinématiques 9 à 11 pour la dent 3). Après correction, il est observé pour 6 positions cinématiques (positions cinématiques 7 à 12 pour la dent 3). Ainsi la baisse brutale observée après le pic de chargement a disparu.

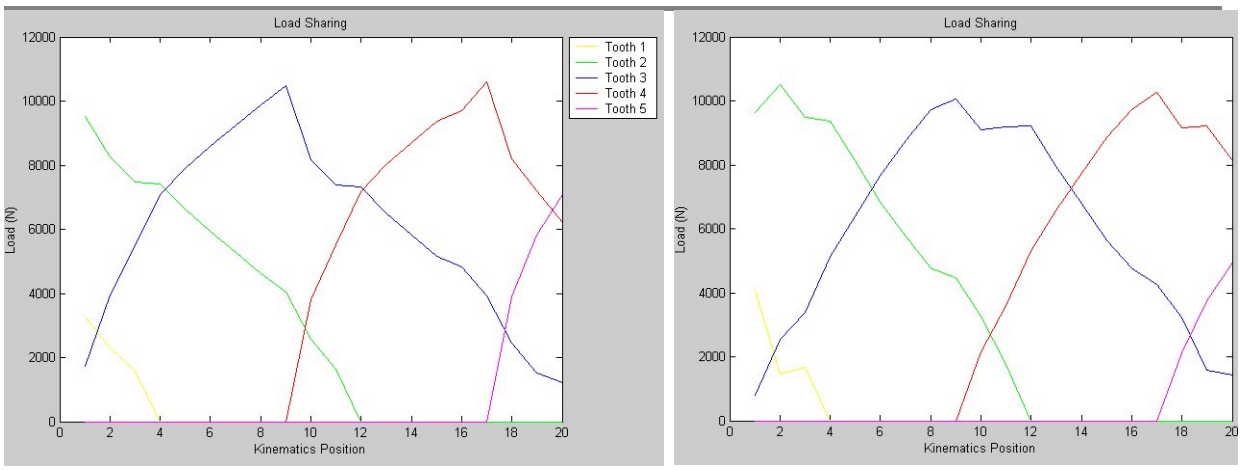
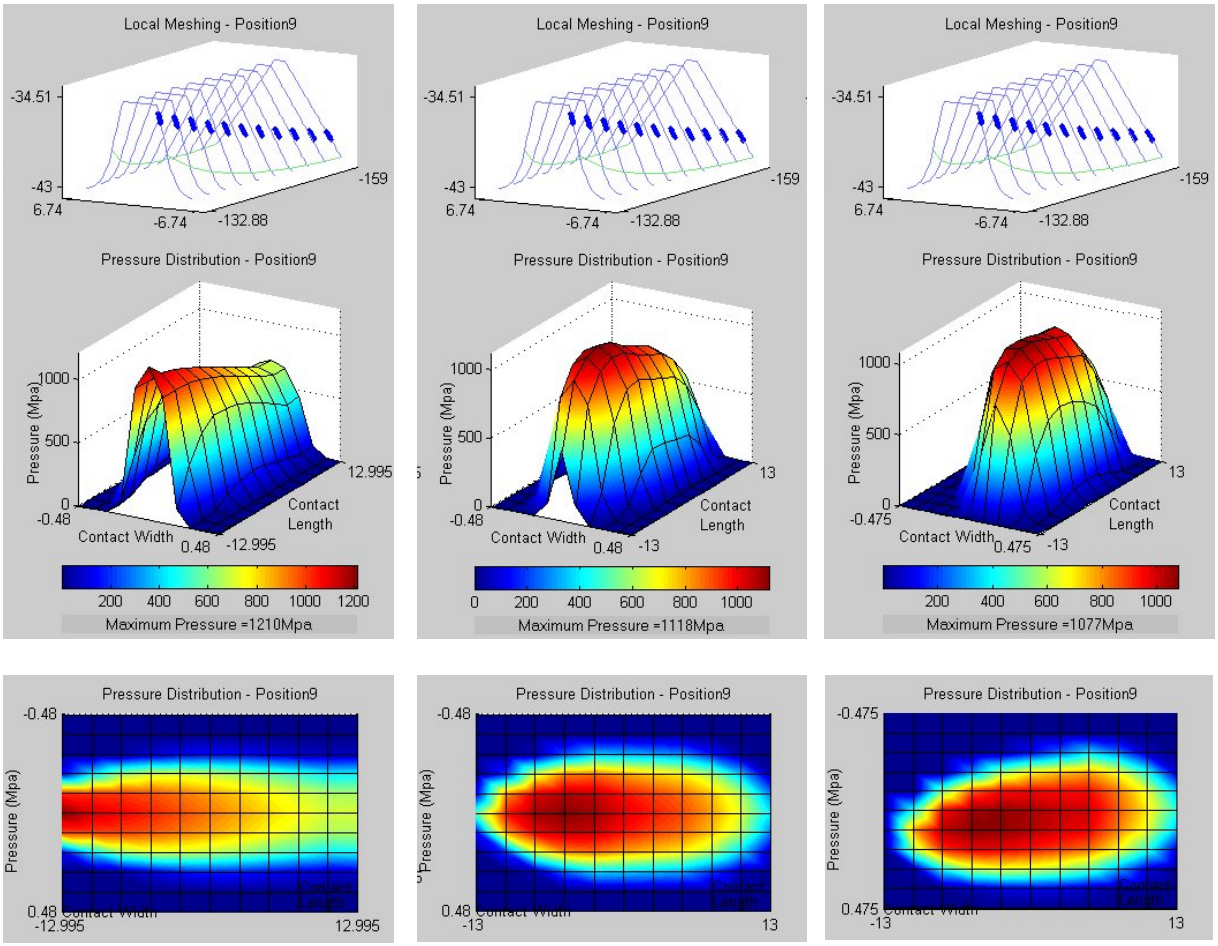


Figure 4.31 : Répartition des charges avant et après optimisation du pignon

La portée sous charge est toujours de bonne qualité (Fig. 4.32), même si elle est très légèrement décalée vers le rayon extérieur, et les pressions maximales de contact sont encore réduites.



Pignon initial *Pignon bombé* *Pignon bombé + correction*

Figure 4.32 : Distribution de pressions avant et après optimisation du pignon

5 Conclusion

Jusqu'à présent, les engrenages face avaient été étudiés essentiellement à vide. Leur comportement sous charge restait encore peu connu.

Grâce à la modélisation et au logiciel développés dans le cadre de cette thèse, de nombreux calculs sous charge ont pu être effectués. Ils ont abouti à une meilleure compréhension et à une description précise du comportement sous charge des engrenages face.

Le contact sous charge a pu être étudié en détail et reconsidéré dans le cas ponctuel. La modélisation du contact ponctuel s'est avérée inadaptée sous charge, et l'utilisation de la modélisation d'un contact linéaire est préconisée quel que soit le nombre de dents relatif du pignon et de l'outil.
La comparaison sous charge des deux cas de contact à vide (linéaire et ponctuel) ainsi que l'étude de l'influence des erreurs de montage ont montré leur intérêt respectif. Un engrenage face avec un contact linéaire dont l'assemblage est maîtrisé présente de nombreux avantages :

- Rapport de conduite plus important,
- Charge maximale supportée par les dents plus faible,
- Erreur de transmission sous charge plus faible,
- Pressions de contact plus faibles,
- Capacité de charge plus importante.

Par contre, ce type de contact est très sensible aux désalignements, et il est nécessaire de corriger le pignon par un bombé afin d'obtenir une portée sous charge de bonne qualité.

L'étude des bombés a montré qu'il est possible d'obtenir simplement les caractéristiques optimales d'un bombé qui permettent de maîtriser parfaitement la portée sous charge. De même l'introduction de corrections de profil de denture au pignon a permis de réduire de plus de 40 % l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge, tout en conservant un engrènement optimal.

Les optimisations sous charge définies ici pourront être couplées aux résultats à vide du chapitre suivant afin de définir un processus de conception des engrenages face.

Chapitre 5

Optimisation de la conception des engrenages face

1 Introduction

Dans le processus de conception des engrenages, l'optimisation sous charge décrite précédemment est effectuée en dernier afin d'affiner le comportement de l'engrenage pour des conditions d'utilisations particulières. Dans un premier temps, il est nécessaire de concevoir l'engrenage avec ses paramètres de bases, en fonction d'un certain nombre de contraintes extérieures. Monté dans une boîte de transmission, l'engrenage devra la plupart du temps respecter des conditions d'encombrement, de rapport de réduction et de capacité de charge.
Il est donc nécessaire de pouvoir dimensionner rapidement un engrenage face qui respectera ces critères, tout en optimisant dès le début de la conception certains paramètres, ceci sans avoir à effectuer de calculs complexes. Le développement de formules simples caractérisant la géométrie et la conduite à vide des engrenages face permettra ainsi d'optimiser la conception très rapidement.
Dans ce contexte, les paramètres définissant la géométrie des roues face ont été étudiés afin de caractériser leur influence sur la largeur de denture des roues face et le rapport de conduite à vide. Les observations effectuées, associées aux optimisations sous charge du chapitre précédent peuvent permettre de définir par la suite un processus de conception des engrenages face.

2 Optimisation de la géométrie des roues face

La géométrie des roues face, complètement liée à l'outil de taillage, est assez complexe à caractériser. Elle est notamment limitée au niveau de la largeur de denture par les phénomènes de pointe et d'interférences de taillage, respectivement au rayon extérieur et au rayon intérieur (cf. Chapitre 2). Ces deux rayons sont mesurables, alors que les autres caractéristiques, comme les épaisseurs de dent par exemple ne sont pas constantes et difficiles à évaluer. Le rayon d'interférence de taillage et le rayon de pointe sont alors des indicateurs efficaces pour caractériser la géométrie des roues face.
La recherche d'une largeur de denture optimale permettra au concepteur d'engrenages face d'avoir une zone de contact potentiel la plus grande possible, et ainsi un potentiel de capacité de charge optimal.
La définition de formules mathématiques simples permettant d'obtenir le rayon de début d'interférences de taillage et le rayon de pointe à partir des valeurs des différents paramètres caractérisant la géométrie permettra d'optimiser rapidement les engrenages face dès les premières phases de conception, tout en limitant les calculs. Deux études ont été réalisées pour définir l'influence des paramètres de définition des roues face sur le rayon d'interférences de taillage et le rayon de pointe.

2.1 Choix des paramètres

La géométrie des roues face dépend des paramètres de son outil de taillage, ainsi que des positionnements relatifs de l'outil et de la roue lors du processus de taillage. Les deux études effectuées pour déterminer l'influence relative des différents paramètres de définition de la roue face sur la valeur du rayon d'interférences de taillage et du rayon de pointe sont basées sur l'utilisation des plans d'expériences.
Comme dans le chapitre précédent, l'analyse est limitée dans un premier temps aux engrenages face dont l'angle entre les axes est à 90°.

Une étude préalable a été effectuée en faisant varier les paramètres de définition de la géométrie indépendamment pour éventuellement détecter des paramètres dont l'influence serait totalement négligeable. Ainsi le coefficient de creux de l'outil a pu être éliminé de l'étude, et ce sont 8 facteurs qui ont finalement été retenus pour cette étude :

- Nombre de dents de l'outil : N_S,
- Module de taillage de l'outil : m_{0s},
- Angle de pression de l'outil : α_{0s},
- Angle d'hélice de l'outil : β_s,
- Coefficient de saillie de l'outil : h_{as},
- Coefficient de déport de l'outil : x_s,
- Nombre de dents de la roue face : N_2,
- Offset de taillage : c_s.

L'étude préalable a également permis de définir les intervalles suivants pour tous les paramètres :

- $17 \leq N_s \leq 21$
- $43 \leq N_2 \leq 63$
- $2mm \leq m_{0s} \leq 6mm$
- $17,5° \leq \alpha_{0s} \leq 22,5°$
- $-10° \leq \beta_s \leq 10°$
- $-10mm \leq c_s \leq 10mm$.
- $1,1 \leq h_{as} \leq 1,4$
- $0,2 \leq x_s \leq 0,4$

Avec 8 paramètres, un plan d'expériences complet à 3 niveaux pour chaque paramètre, qui serait idéal pour étudier précisément l'influence de tous les paramètres, nécessiterait 3^8, soit 6561 expériences. Même en négligeant les effets quadratiques et en utilisant un plan complet à 2 niveaux, il reste 2^8, soit 256 expériences pour chaque étude.
Le choix s'est donc reporté sur l'utilisation des plans réduits de Taguchi de type L_{16} ne nécessitant que 16 expériences (cf. Annexe 4). Seuls les effets linéaires des paramètres étant pris en compte avec ce type de plan, il faudra vérifier que le fait de négliger les effets quadratiques n'est pas trop pénalisant pour la précision.
L'utilisation de ce type de plan entraîne également un certain nombre d'ambiguïtés, dans le sens où il n'est pas possible de distinguer l'influence relative des paramètres qui vont être aliassés (cf. Annexe 4). Une méthodologie particulière a due être mise en place pour palier cet inconvénient. Un premier plan d'expériences a été réalisé avec tous les paramètres, puis 3 autres plans ont ensuite été réalisés avec seulement quelques paramètres afin de lever les ambiguïtés et obtenir des prédicteurs mathématiques fiables.

Pour chaque étude, 4 plans ont ainsi été réalisés :

- Un plan avec les 8 paramètres,
- Un plan avec 6 paramètres : N_s, α_{0s}, β_s, h_{as}, c_s, x_s,
- Deux plans avec 5 paramètres : N_s, m_{0s}, α_{0s}, c_s, x_s et N_2, α_{0s}, β_s, h_{as}, x_s.

Le choix des paramètres étudiés dans les plans à 6 et 5 paramètres a été déterminé par les résultats du plan à 8 paramètres. Les paramètres N_2 et m_{0s}, ressortant largement comme les plus influents dans le plan à 8 paramètres, ont été ensuite fixés à leur niveau moyen. Ainsi leur influence n'est pas prise en compte dans le plan à 6 paramètres. Il est alors possible d'étudier les paramètres moins influents et d'éliminer des interactions jugées non influentes. Les paramètres N_2 et m_{0s} ont ensuite été réintroduits chacun dans un plan à 5 paramètres pour étudier en détail leurs couplages avec les autres paramètres.

Le plan à 8 paramètres est défini à partir du graphe linéaire suivant :

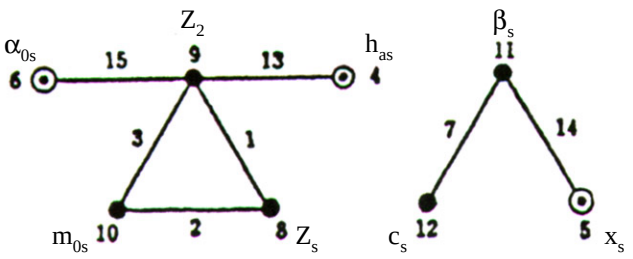


Figure 5.1 : Graphe linéaire pour le plan à 8 paramètres

Les aliassages suivants sont obtenus grâce aux tables orthogonales de Taguchi :

	1	2	3	4	5	6	7	8
Paramètres	N_S N_2	N_S m_{0s}	N_2 m_{0s}	h_{as}	x_s	α_{0s}	β_s c_s	N_S
Alias	h_{as} x_s m_{0s} β_s	α_{0s} h_{as} N_2 β_s	α_{0s} x_s N_S β_s	N_S c_s	N_2 c_s	m_{0s} c_s		c_s h_{as}

	9	10	11	12	13	14	15
Paramètres	N_2	m_{0s}	β_s	c_s	N_2 h_{as}	β_s x_s	$N_2\alpha_{0s}$
Alias	c_s x_s	α_{0s} c_s		N_S h_{as} N_2 x_s m_{0s} α_{0s}	N_S x_s α_{0s} β_s	N_S α_{0s} m_{0s} h_{as}	m_{0s} x_s β_s h_{as}

Tableau 5.1 : Alias du plan à 8 paramètres

Le plan à 6 paramètres est défini à partir du graphe linéaire suivant :

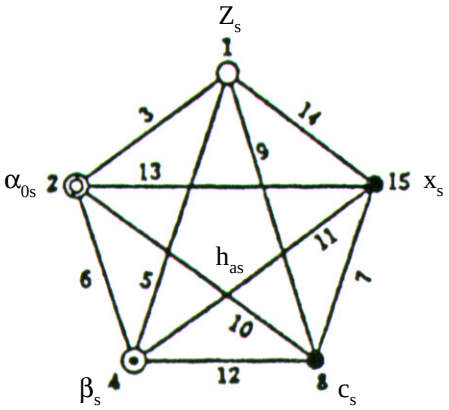


Figure 5.2 : Graphe linéaire pour le plan à 6 paramètres

Les aliassages suivants sont obtenus grâce aux tables orthogonales de Taguchi :

	1	2	3	4	5	6	7	8
Paramètres	N_S	α_{0s}	N_S α_{0s}	β_s	N_S β_s	α_{0s} β_s	c_s x_s	c_s
Alias	c_s h_{as}	h_{as} x_s					α_{0s} h_{as}	N_S h_{as}

	9	10	11	12	13	14	15
Paramètres	N_S c_s	α_{0s} c_s	h_{as}	β_s c_s	α_{0s} x_s	N_S x_s	x_s
Alias	β_s x_s				β_s h_{as}	c_s h_{as}	h_{as} x_s

Tableau 5.2 : Alias du plan à 6 paramètres

Les deux plans à 5 paramètres sont définis à partir du graphe linéaire suivant :

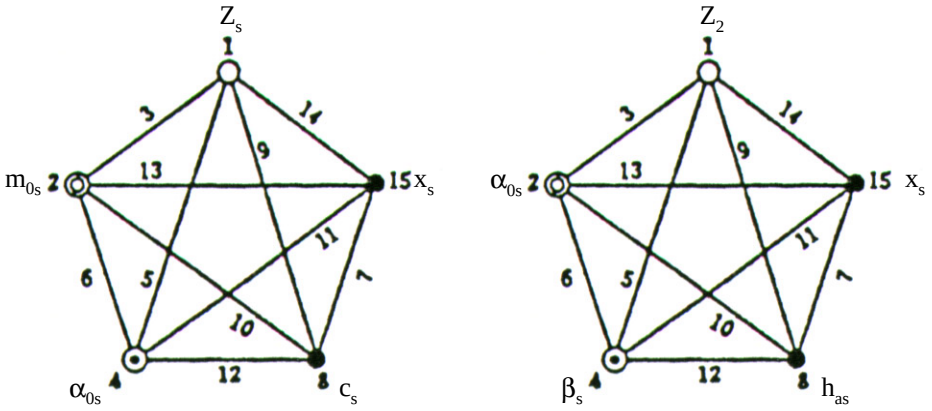


Figure 5.3 : Graphes linéaires pour les plans à 5 paramètres

Ces deux plans à 5 paramètres sont parmi les plus complets donnés par Taguchi car il ne présentent aucun aliassage entre les interactions. Ils permettent ainsi de lever toutes les ambiguïtés engendrées par les plans à 8 et 6 paramètres.

2.2 Optimisation de la largeur de denture

2.2.1 Analyse des résultats

NB : Les résultats numériques de cette analyse sont classés confidentiels. Les valeurs numériques des prédicteurs sont ici remplacés par des coefficient α_i et β_i. Le détail des calculs ainsi que les coefficients numériques sont fournis en Annexe 6.1, classée confidentielle.

Les analyses effectuées à la suite des plans d'expériences ont permis de lever toutes les ambiguïtés et de déterminer les paramètres influents pour le rayon intérieur et le rayon extérieur de la roue. Pour lever les ambiguïtés, les résultats des différents plans ont été croisés et analysés. Par exemple, pour l'étude du rayon intérieur de la roue face, le plan à 8 paramètres donne les facteurs de la colonne 3 du tableau des alias comme influents. Or, dans cette colonne, trois couplages sont aliassés : $N_2.m_{0s}$, $\alpha_{0s}.x_s$ et $N_S.\beta_s$. Le plan à 6 paramètres permet d'affirmer que les couplages $\alpha_{0s}.x_s$ et $N_S.\beta_s$. (colonnes 5 et 13 du plan à 6 paramètres) ne sont pas influents. Le deuxième plan à 5 paramètres confirme la non influence du couplage $\alpha_{0s}.x_s$. Ainsi l'influence trouvée dans le plan à 8 paramètres n'est due qu'au seul couplage $N_2.m_{0s}$.

Les paramètres et couplages influents ont alors été déterminés :

- Rayon intérieur de la roue : paramètres m_{0s}, N_2 et α_{0s} et couplages $m_{0s}.N_2$ et $\beta_s.c_s$,
- Rayon extérieur de la roue : paramètres m_{0s}, N_2, N_s, α_{0s}, et x_s et couplages $m_{0s}.N_s$, $m_{0s}.N_2$, $\beta_s.c_s$, $m_{0s}.\alpha_{0s}$ et $N_2.\alpha_{0s}$

Les prédicteurs mathématiques obtenus sont alors pour le rayon intérieur r_i et le rayon extérieur r_e :

$$r_i = \alpha_1 + \alpha_2.m_{0s} + \alpha_3.Z_2 + \alpha_4.\alpha_{0s} + \alpha_5.m_{0s}.Z_2 + \alpha_6.\beta_s.c_s$$

$$r_e = \beta_1 + \beta_2.m_{0s} + \beta_3.Z_2 + \beta_4.Z_s + \beta_5.\alpha_{0s} + \beta_6.x_s + \beta_7.m_{0s}.Z_s + \beta_8.m_{0s}.Z_2 + \beta_9.\beta_s.c_s + \beta_{10}.m_{0s}.\alpha_{0s} + \beta_{11}.Z_2.\alpha_{0s}$$

Parmi les 8 paramètres étudiés, la saillie de l'outil n'apparaît ni comme paramètre influent, ni dans aucun couplage influent. Elle n'a donc aucune influence sur les rayons intérieur et extérieur de la roue face.
Il est également intéressant de remarquer que tous les paramètres et couplages influents pour le rayon intérieur de la roue face le sont aussi pour le rayon extérieur. Ces 5 paramètres ou couplages peuvent être considérés comme prépondérant pour la géométrie des engrenages face.

2.2.2 Validation et limitation des prédicteurs

Les prédicteurs mathématiques pouvant être utilisés directement pour la conception des engrenages face, il est important de vérifier leur validité.
L'étude des écarts entre les prédicteurs mathématiques et les mesures effectuées à l'aide de la simulation montrent une erreur moyenne sur l'ensemble des plans (exemples de calculs fournis en Annexe 6.2) :

- Inférieure à 8% pour les rayons intérieurs,
- Inférieure à 3% pour les rayons extérieurs.

Les résultats obtenus avec les prédicteurs mathématiques ont également été comparés avec les calculs effectués lors de l'étude préalable qui a conduit au choix des paramètres. Les figures 5.4 et 5.5 montrent des exemples de l'évolution des rayons intérieur et extérieur calculés avec les prédicteurs mathématiques et par simulation.

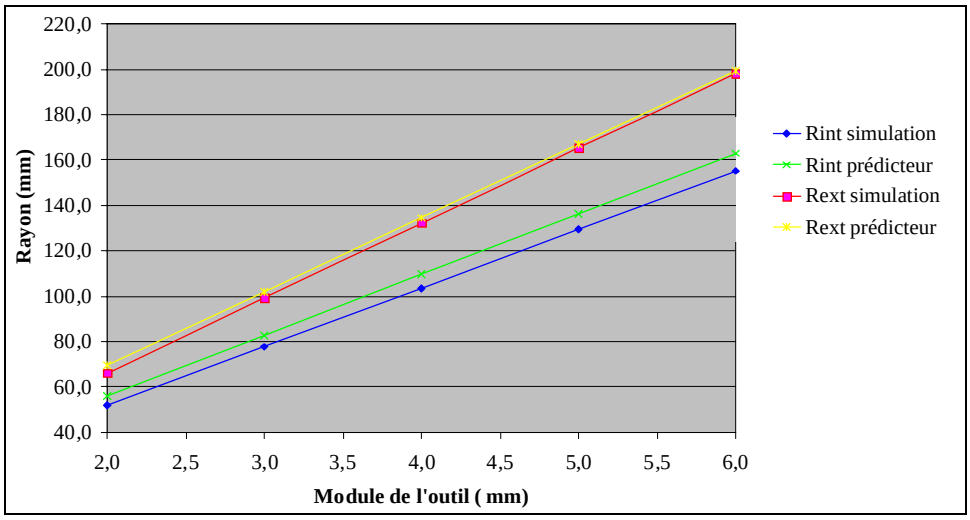


Figure 5.4 : Evolution des rayons intérieur et extérieur en fonction du module de l'outil

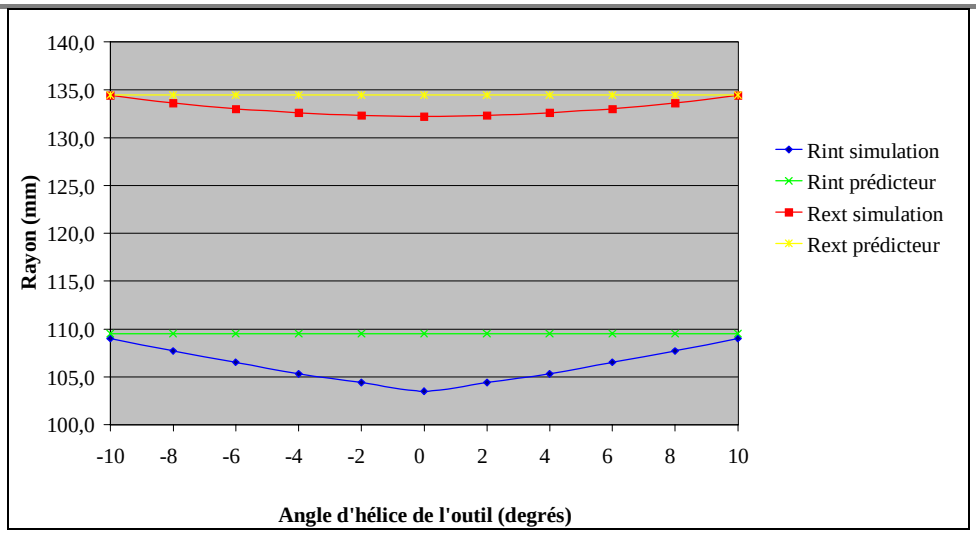


Figure 5.5 : Evolution des rayons intérieur et extérieur en fonction de l'angle d'hélice de l'outil

Les prédicteurs mathématiques définis ne prennent en compte que les effets linéaires des différents paramètres. L'effet quadratique de certains paramètres a pu être mis en évidence au cours de cette étude. La figure 5.5 permet de visualiser l'effet quadratique de l'angle d'hélice de l'outil. Les calculs effectués à travers les différents plans d'expérience ont montré qu'un effet quadratique est certainement présent pour 4 paramètres :

- Nombre de dents de l'outil : N_S,
- Angle de pression de l'outil : α_{0s},
- Angle d'hélice de l'outil : β_s,
- Offset de taillage : c_s.

Les différences obtenues entre les prédicteurs mathématiques et la simulation proviennent certainement en majeure partie de ces effets quadratiques négligés. Néanmoins, l'approximation linéaire faite ici est toute à fait acceptable au vu de la précision des deux prédicteurs (8% et 3%).

Théoriquement, les prédicteurs mathématiques ne peuvent être utilisés qu'à l'intérieur des plages définies pour chaque paramètre. Mais parfois, il pourrait être utile de pouvoir définir un ou plusieurs paramètres hors de cette plage. Il est alors possible d'étudier l'évolution des prédicteurs hors des plages d'utilisation en faisant varier la valeur d'un paramètre et d'éventuellement y apporter un coefficient correcteur afin de pouvoir continuer à les utiliser. Néanmoins, ces éventuelles extrapolations doivent être utilisées avec précautions, car les interactions entre les paramètres ne sont alors plus prises en compte. L'idéal serait de faire d'autres plans d'expériences afin d'élargir les plages de définition des paramètres.

2.2.3 Critères d'optimisation de la largeur de denture

Le but recherché est d'avoir la largeur de denture la plus importante, afin de pouvoir transmettre un maximum de puissance. L'étude effectuée permet de prédire que la largeur de denture sera maximale pour :

- N_2 et m_{0s} maximum,
- N_s, c_s, α_{0s}, β_s et x_s minimum

Grâce à cette étude, il est également possible d'établir un processus de conception, afin de déterminer les paramètres d'un engrenage face tout en évitant les phénomènes de pointe et d'interférences de taillage.
Lors de la phase de conception d'un engrenage, le module, le rapport de réduction et le nombre de dents du pignon et de la roue sont généralement imposés par des contraintes extérieures. D'autre part, il faut souvent respecter un encombrement maximum.

Dans un premier temps, il est possible de réduire la limite d'interférences de taillage en jouant sur l'angle de pression, l'angle d'hélice et l'offset. Le rayon minimum d'interférences de taillage sera ainsi réduit de la manière suivante :

- en augmentant α_{0s},
- si β_s et c_s sont de même signe, en les diminuant,
- si β_s et c_s sont de signes différents, en les augmentant.

Il faut savoir que le fait de modifier ainsi ces paramètres réduira également le rayon extérieur. Néanmoins, le rayon de pointe pourra par la suite être augmenté en diminuant N_s et x_s. Ainsi la largeur de denture pourra être globalement augmentée.

Si le résultat obtenu n'est pas satisfaisant, il est toujours possible de modifier m_{0s}, N_2 et N_s, puis de répéter l'opération décrite ci-dessus.

3 Optimisation de l'engrènement à vide

3.1 Influence des paramètres de conception sur le rapport de conduite

L'étude du rapport de conduite des engrenages face est plus complexe que celle de la géométrie. Pour la géométrie, une étude basée sur les plans d'expériences a permis de définir les paramètres influents ainsi qu'un prédicteur mathématique pour le rayon intérieur et le rayon extérieur de la roue face. Cette méthode n'est toutefois pas applicable pour l'étude du rapport de conduite. En effet, celui-ci est fortement dépendant des rayons intérieur et extérieur de la roue face, qui sont eux même dépendants des paramètres de l'outil. Il s'avère donc très délicat de fixer des intervalles d'étude pour les paramètres sans risquer de dépasser les limites d'interférences de taillage ou de pointe. Une analyse comme celle effectuée précédemment à l'aide des plans d'expériences ne pourrait être effectuée que pour une géométrie de roue face fixée.
La seule étude globale possible ici pour le rapport de conduite n'est qu'une étude de tendance pour chaque paramètre pris indépendamment. Cette étude est réalisée ici pour quelques paramètres.

3.1.1 Choix des paramètres

Afin d'éviter tout problème de pointe ou d'interférences de taillage au niveau de la géométrie de la roue face, les paramètres définis précédemment comme les plus influents sur la géométrie de la roue (module de l'outil et nombre de dents de la roue), ainsi que les rayons intérieur et extérieur de la roue ont été fixés. De plus, les outils et pignons utilisés ici sont normalisés afin de limiter le nombre de paramètres à étudier. Les déports sont étudiés séparément par la suite et ne sont pas pris en compte ici. Enfin, le nombre de dents du pignon n'est pas pris en compte directement, mais à travers la différence du nombre de dents de l'outil et du pignon ΔN (qui est compris classiquement entre 0 et 3 dents). Les autres caractéristiques du pignon et l'outil de taillage sont toujours identiques et ont ici une notation commune : $\alpha_0=\alpha_{0s}=\alpha_{01}$, $\beta=\beta_s=\beta_1$, $m_0=m_{0s}=m_{01}$, $c=c_s=c_1$.

Il faut aussi tenir compte du sens de rotation des engrenages. En effet, lorsque les dents de la roue face ne présentent pas de plan de symétrie (cas d'un engrenage hélicoïdal ou avec offset), les surfaces en contact avec le pignon ne sont pas les mêmes en fonction du sens de rotation.

Pour cette étude, 6 paramètres ont finalement été retenus :

- Nombre de dents de l'outil : N_S,
- Différence du nombre de dents de l'outil et du pignon : ΔN
- Angle de pression : α_0,
- Angle d'hélice : β,
- Offset : c,
- Sens de rotation : sens.

Les intervalles d'étude des paramètres sont ceux utilisés lors de l'étude paramétrique de la géométrie. Il sont définis ainsi :

- $17 \leq N_s \leq 21$
- $0 \leq \Delta N \leq 3$
- $17{,}5° \leq \alpha_0 \leq 22{,}5°$
- $-10° \leq \beta \leq 10°$
- $-10mm \leq c \leq 10mm$.
- Sens : "-" (horaire) ou "+" (trigonométrique)

3.1.2 Etude individuelle des paramètres

Dans cette étude, la valeur d'un paramètre varie tandis que les autres sont fixés à leur niveau moyen. Les caractéristiques retenues pour la roue face ont été choisies de manière à éviter les problèmes de pointe et d'interférences de taillage quelle que soit la valeur des différents paramètres étudiés. La roue face est ainsi définie par :

- Module de taillage : m_0 = 4 mm
- Nombre de dents : N_2 = 53 dents
- Rayon intérieur : R_{int} = 115 mm
- Rayon extérieur : R_{ext} = 130 mm

Tous les résultats des mesures effectuées ici sont fournis en Annexe 6.3.

3.1.2.1 Variation du nombre de dents de l'outil et de ΔN

Durant cette campagne de mesures, l'effet des variations du nombre de dents de l'outil et de ΔN a été étudié simultanément. La figure 5.6 montre les courbes obtenues, qui sont des droites parallèles entre elles.

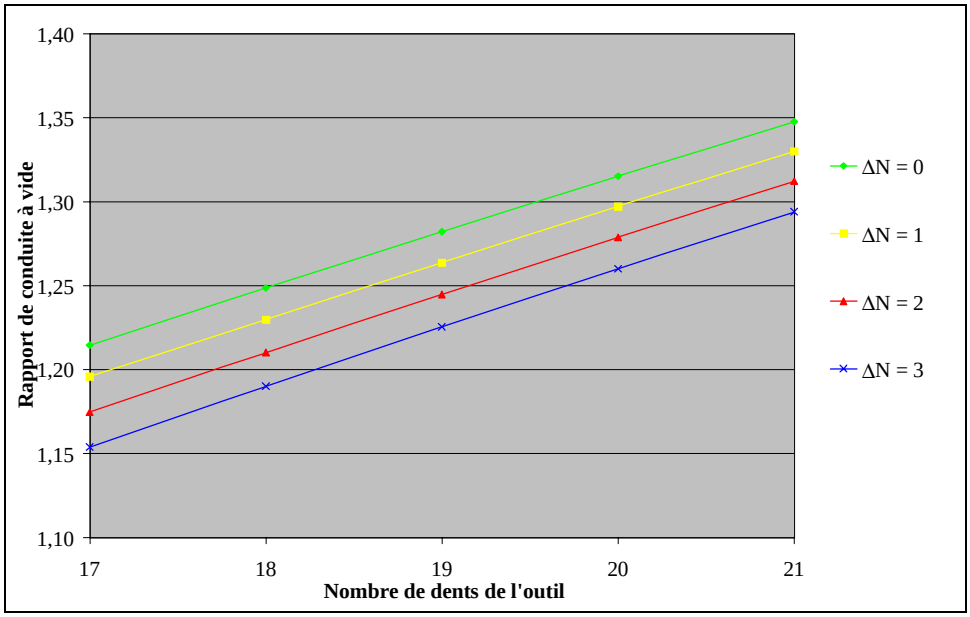


Figure 5.6 : Evolution du rapport de conduite à vide en fonction du nombre de dents de l'outil et de ΔN

L'effet de ces deux paramètres est donc linéaire, et le parallélisme des droites montre que ces deux paramètres n'interagissent pas l'un avec l'autre.

De plus, pour un écart ΔN donné, le rapport de conduite sera plus important pour un nombre de dents élevé sur l'outil. En fixant le nombre de dents de l'outil, le rapport de conduite sera plus faible pour un écart ΔN important. Comme cela a déjà été supposé au chapitre précédent, un cas de contact linéaire (ΔN=0) promet un rapport de conduite plus important.

3.1.2.2 Variation de l'angle de pression

L'étude de l'évolution du rapport de conduite en fonction de l'angle de pression (Fig. 5.7) montre la présence d'un effet quadratique. Bien que cet effet soit en apparence faible, il est possible qu'il s'accentue pour d'autres choix de paramètres.

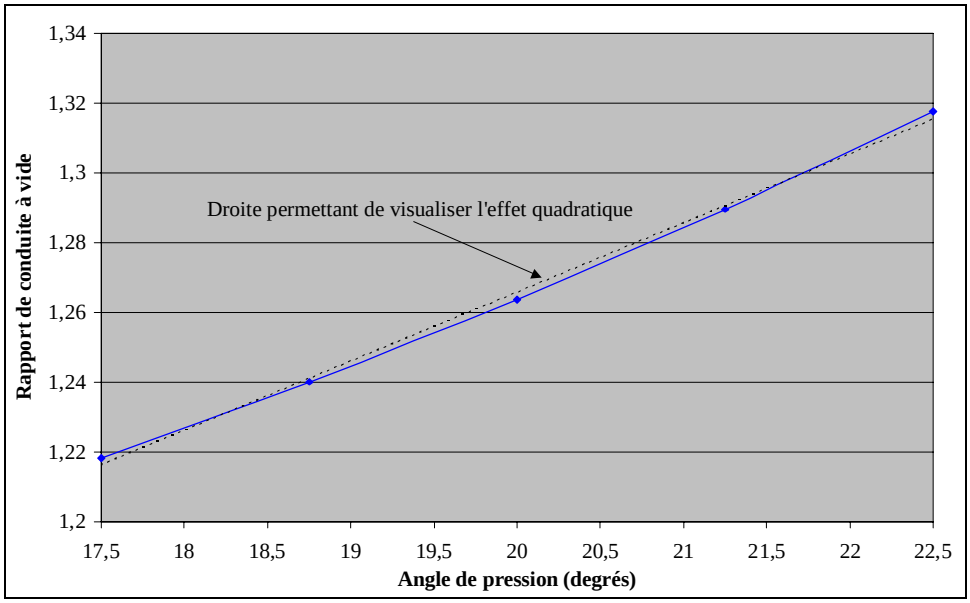


Figure 5.7 : Evolution du rapport de conduite à vide en fonction de l'angle de pression

La figure 5.7 montre que le rapport de conduite augmente avec l'angle de pression.

3.1.2.3 Variation de l'angle d'hélice et de l'offset en fonction du sens de rotation

L'étude de ces trois paramètres ensembles (Fig. 5.8) montre l'existence d'une forte interaction entre eux, à laquelle s'ajoute la présence d'un effet quadratique très important. Grâce à cette série de mesures, il est possible de mettre en évidence une symétrie du comportement à vide, fonction du sens de rotation.

De manière générale, le rapport de conduite à vide est plus important pour un angle d'hélice de signe opposé à celui du sens de rotation. De plus, pour un sens et un angle d'hélice donné, il est possible d'améliorer le rapport de conduite grâce à un offset de même signe que celui de l'angle d'hélice.

La valeur du rapport de conduite varie peu en fonction de l'offset quand l'angle d'hélice est de signe opposé au sens de rotation. Par contre, pour un angle d'hélice de même signe, l'écart entre les courbes est plus important.

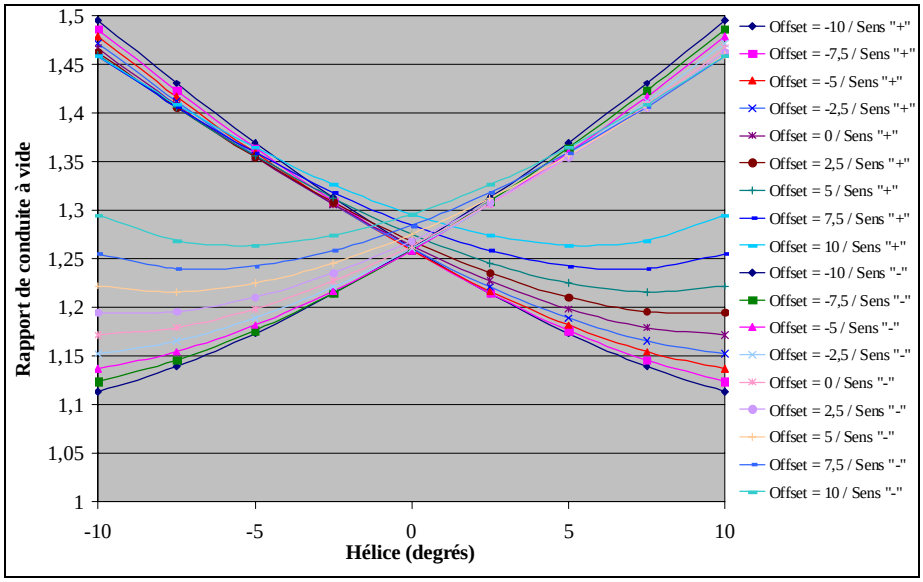


Figure 5.8 : Evolution du rapport de conduite à vide en fonction de l'angle d'hélice et de l'offset

3.1.3 Critères d'optimisation de la conduite à vide

Afin de pouvoir transmettre le maximum de puissance, l'intérêt est d'avoir un rapport de conduite à vide le plus grand possible. Comme pour la géométrie, l'étude effectuée ici permet d'optimiser les paramètres dans ce sens.

Tout d'abord, en fonction de l'angle d'hélice choisi, un sens de rotation sera privilégié afin d'avoir un rapport de conduite maximum :

- Si $\beta \geq 0$, il est préférable de tourner dans le sens horaire,
- Si $\beta \leq 0$, il est préférable de tourner dans le sens trigonométrique.

Rappel : $\beta \geq 0$ définit un pignon ou un outil avec une hélice à droite.

L'étude effectuée permet ensuite de prédire un rapport de conduite à vide maximum pour :

- N_s et α_0 maximum,
- β et c maximum en absolu,
- Contact linéaire ($\Delta N = 0$),
- Sens de rotation de même signe que l'offset.

Or, ces réglages s'opposent complètement à ceux définis pour obtenir une largeur de denture maximale (N_s, α_{0s}, β_s et c_s minimum). Par conséquent, il faudra choisir le meilleur compromis entre un rapport de conduite élevé ou une largeur de denture maximale afin de remplir au mieux les conditions de bon fonctionnement de la transmission, notamment au niveau des valeurs des pressions de contact et des contraintes en pied de dent.

3.2 Déport des engrenages face

Le pignon d'un engrenage face ainsi que l'outil de taillage de la roue face étant des pignons cylindriques, il est possible de les tailler en appliquant un déport de l'outil. Classiquement pour les engrenages cylindriques, l'utilisation de déports présente 4 intérêts principaux (Henriot [13]) :

- Optimisation des glissements spécifiques,
- Satisfaire un entraxe fixé,
- Eviter les interférences (par exemple de taillage dans le cas d'un petit nombre de dents),
- Augmenter la capacité de charge en flexion en augmentant la section d'encastrement.

Dans le cas des engrenages face ces intérêts ne semblent pas équivalents. Le glissement spécifique est difficilement définissable pour un engrenage face. En effet, comme la vitesse linéaire varie en fonction du rayon de la roue face (elle est plus grande au rayon extérieur), les vitesses de glissement ne seront certainement pas constantes non plus d'un côté à l'autre de la dent. L'optimisation des glissements nécessiteraient donc une définition de la cinématique des engrenages face encore plus précise que celle déjà établie ici.

L'entraxe de fonctionnement est également complexe à définir, puisque les axes de la roue et du pignon ne sont pas parallèles et qu'il n'est pas possible de définir de rayon primitif à la roue. Dans les engrenages face, un équivalent à l'entraxe de fonctionnement est la distance de montage, qui correspond en fait à la distance entre les axes du pignon et de l'outil de taillage de la roue face (cf. Chapitre 2). Cette distance de montage pourra éventuellement être modifiée par l'introduction de déport.

Les deux derniers intérêts quant à eux concernent uniquement le pignon et peuvent être appliqués aux engrenages face. En effet, les études effectuées précédemment ont montré que la taille de la roue face augmentait notamment avec le nombre de dents de l'outil. Ainsi l'utilisation de pignon avec un petit nombre de dents est plus favorable à l'encombrement, mais il devient alors parfois nécessaire de le déporter pour limiter les interférences de taillage et éviter d'avoir un pied de dent trop petit.

3.2.1 Aspect de montage

Lorsque le pignon d'un engrenage face (et/ou l'outil de taillage de la roue face) est déporté, il est nécessaire de respecter certaines règles qui conditionneront par la suite le montage. En effet, il faut veiller notamment à ce que le pignon et la roue puissent se monter correctement, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de serrage, et à ce que le jeu de fonctionnement soit adéquat. Ces deux aspects sont modifiés lorsque l'engrenage face est déporté.

Des essais de montage ont été effectués avec le logiciel Catia en utilisant des engrenages face avec des déports variés. Ces essais ont consisté à représenter une roue face et un pignon avec Catia puis à simuler l'assemblage. L'objectif était de rechercher la distance de montage optimale en fonction des déports appliqués au pignon et à l'outil de taillage de la roue.

Malheureusement, la cinématique complexe des engrenages face (due notamment au fait que le pignon et la roue ont des axes de rotation concourants et surtout au fait que les vitesses linéaires ne sont pas constantes selon le rayon de la roue face) a dépassé les limites des simulations cinématiques possibles avec Catia. Il n'a donc pas été possible de déterminer précisément la distance optimale de montage, mais par contre certaines observations qualitatives ont été pu être effectuées.

Lorsque l'engrenage face n'est pas déporté, les distances de montage proposées par Litvin [21] ont été vérifiées. Ce dernier préconise une distance de montage égale à la différence des rayons primitifs du pignon et de l'outil de taillage (cf. Chapitre 2). Lorsqu'ils ont le même nombre de dents, la distance de montage devient ainsi nulle, et dans ces conditions, un montage sans jeu, ni serrage a été observé avec des zones de contact linéaires entre le pignon et la roue. Cette distance de montage semble alors optimale.
Lorsque les nombres de dents sont différents, il devient très difficile de détecter un contact ponctuel avec Catia. Un montage à la différence des rayons primitifs ne semble pas contraire aux conditions de serrage et de jeu de fonctionnement, mais rien ne prouve non plus qu'il soit optimal. L'utilisation d'engrenages face avec un contact linéaire étant toutefois préférable (cf. Chapitre 3), l'étude n'a pas été poussée plus loin dans le cas de contacts ponctuels et a été focalisée sur les contacts linéaires uniquement.

L'introduction de déport dans les cas de contacts linéaires a permis de faire les observations qualitatives suivantes en fonction de la différence des déports appliqués à l'outil de taillage de la roue face (x_s) et au pignon (x_1) :

- lorsque $x_1 - x_s < 0$, le montage n'est pas possible à cause du serrage,
- lorsque $x_1 - x_s > 0$, le montage est possible, mais sa valeur optimale n'a pu être déterminée en raison du jeu du battement qui est variable selon le rayon de la roue face,
- lorsque $x_1 - x_s = 0$, une distance de montage nulle semble adéquate pour éviter le serrage et obtenir un jeu nul.

Dans l'attente d'études plus poussées concernant les conditions de montage, il semble donc préférable d'utiliser des déports égaux pour le pignon et l'outil de taillage de la roue face et utiliser une distance de montage nulle. Ceci peut être considéré comme équivalent aux conditions de déports sans variation d'entraxe appliquées classiquement pour les engrenages cylindriques.

3.2.2 Influence du déport sur le rapport de conduite

Suite aux conditions d'utilisation des déports préconisés, une étude a été effectuée afin de connaître l'influence du déport sur la conduite à vide des engrenages face. Cette influence a été étudiée pour des pignons avec un petit nombre de dents, c'est-à-dire lorsque l'introduction d'un déport au pignon est quasiment nécessaire pour limiter les interférences de taillage, sur des cas de contact linéaire, avec toujours $x_1 - x_s = 0$.

L'influence de nombreux paramètres sur le rapport de conduite à vide ayant déjà été déterminé, ils ne seront pas étudiés ici avec le déport. Mais afin de pouvoir tout de même étudier l'influence du déport sur différents engrenages face et de pouvoir généraliser les tendances, deux paramètres ont été étudiés avec le déport :

- Le nombre de dents du pignon N_1,
- Le nombre de dents de la roue face N_2.

Un plan d'expériences complet de 3 paramètres à 3 niveaux a été effectué. Les niveaux des paramètres suivants ont été choisis pour l'étude :

Paramètre	N_1	N_2	$x_1 = x_s$
Niveau bas	18	40	0
Niveau moyen	20	60	0,25
Niveau haut	22	80	0,5

En ce qui concerne les autres paramètres, l'engrenage face est droit et normalisé avec un module de 4 mm et un angle de pression de 20°. Les rayons intérieurs et extérieurs de la roue face sont tels que la limite d'interférence de taillage et la pointe sont atteintes, afin d'avoir potentiellement toujours une largeur de denture maximale. Le détail des calculs du plan d'expériences est fourni en Annexe 6.4
L'analyse de variance effectuée suite à cette étude a montré que tous les paramètres étudiés ont une influence sur le rapport de conduite à vide. Un prédicteur mathématique a été également obtenu pour définir le rapport de conduite à vide en fonction des nombres de dents respectifs de la roue et du pignon, et du déport appliqué :

$$\varepsilon_\gamma = 0{,}91 + 0{,}02.N_1 + 0{,}0175.N_2 + 0{,}012.x_1 + 0{,}0005.N_1.N_2 + 0{,}002.N_2.x_1 - 0{,}00015.N_2^2$$

Ce prédicteur mathématique montre que pour un engrenage face défini, le rapport de conduite à vide augmente avec le déport. Grâce à ce prédicteur, il est possible de tracer des abaques afin de déterminer le rapport de conduite de conduite à vide pour différentes valeurs du couple N_1, N_2 (Fig. 5.9). Ces abaques ne sont valables que pour un module et un angle de pression donné (ici m_0 = 4 et α_0 = 20°) mais l'étude effectuée ici pourrait être sans problème étendue à d'autres valeurs de module et d'angle de pression.

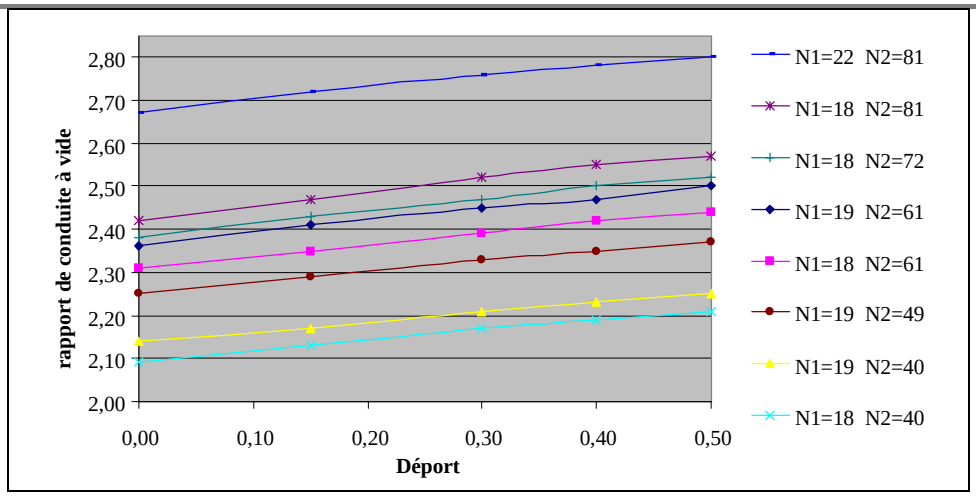


Figure 5.9 : Evolution du rapport de conduite à vide en fonction du déport

Ces courbes montrent un accord parfait avec la précédente étude effectuée sur le rapport de conduite qui prévoyait une augmentation du rapport de conduite également avec le nombre de dents de la roue et le nombre de dents du pignon (ou de l'outil).
Cependant, la première étude sur la géométrie a montré que l'augmentation du déport de l'outil (donc du pignon puisqu'ils sont ici égaux) entraîne la diminution de la largeur de denture maximale potentielle (Fig. 5.10).
Néanmoins, il est intéressant de remarquer que l'effet du déport sur la largeur de denture n'est significatif qu'au niveau du rayon extérieur de la roue face (cf. § 2.3.1). Or pour cette étude, la largeur de denture est définie de façon à être maximale, jusqu'au rayon de pointe.
En pratique, il pourra fréquemment arriver que le rayon de pointe ne puisse de toute façon pas être atteint pour des raisons d'encombrement maximal à respecter. Ainsi l'augmentation du déport pourra dans certains cas entraîner la diminution du rayon de pointe vers une valeur toujours supérieure aux conditions d'encombrement. Ainsi le rapport de conduite à vide sera augmenté sans changer la largeur de denture.

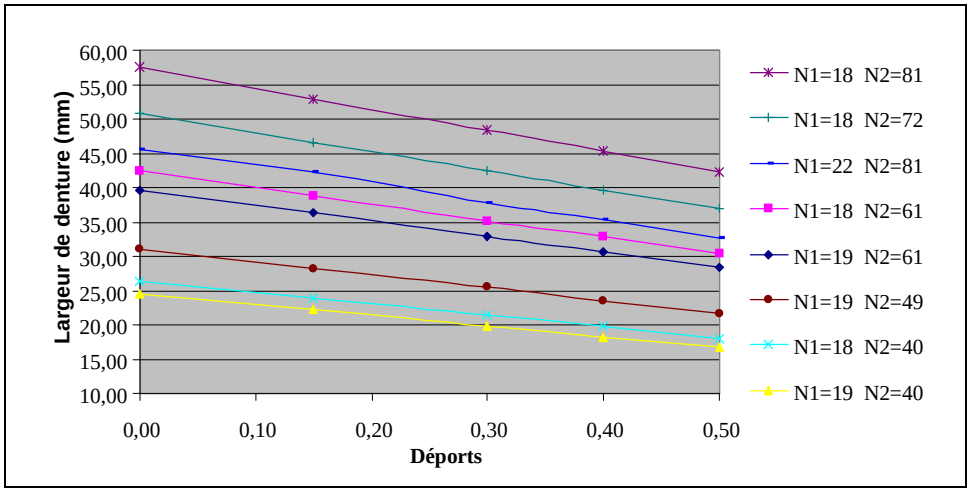


Figure 5.10 : Evolution de la largeur de denture en fonction du déport

Le seul paramètre qui permet d'augmenter à la fois la largeur de denture et le rapport de conduite à vide est le nombre de dents de la roue face. L'inconvénient est que l'augmentation de la largeur de denture est obtenue en fait par une augmentation plus importante du rayon de pointe que du rayon d'interférences de taillage. Il en résulte alors une perte en terme de place et de poids puisque la roue sera plus grande.

Dans les transmissions d'hélicoptères, où le poids et l'encombrement jouent un rôle primordial, il sera peut être plus intéressant de privilégier l'augmentation du rapport de conduite. Néanmoins, il faudra s'assurer que la diminution consécutive de la largeur de denture n'entraîne pas une augmentation trop importante des pressions de contact. En effet, les calculs effectués ici ont montré que la diminution de la largeur est plus importante que l'augmentation du rapport des conduite. Pour les valeurs maximales de déport (0,5), le gain en conduite est de l'ordre de 5-6% pour une diminution de la largeur de denture pouvant atteindre 30 %. Même si la charge appliquée sur chaque dent est diminuée, la surface totale de contact sur toutes les dents en contact simultanément sera globalement diminuée et les pressions de contact augmentées. La puissance à transmettre déterminera alors les pressions maximales et sera décisive pour le choix du compromis idéal.

4 Processus de conception

L'objectif principal des différentes études effectuées dans cette thèse était de décrire le fonctionnement ainsi que le comportement sous charge des engrenages face. Ceci a permis de déterminer l'influence des paramètres de conception, aussi bien sur le comportement à vide que sur le comportement sous charge.

La synthèse de tous les résultats présentés dans ce chapitre, couplés à l'optimisation sous charge décrite au chapitre 4, permet de définir un processus de conception optimal des engrenages face.

Comme pour la conception classique des engrenages cylindriques, ce processus est divisé en deux étapes principales. Il s'agit dans un premier temps de dimensionner l'engrenage face en déterminant les valeurs des macro-paramètres :

- Paramètres principaux : nombre de dents, module, angle de pression,
- Paramètres secondaires : angle d'hélice, offset, coefficient de déport.

Ceci peut être effectué grâce aux résultats obtenus lors des simulations à vide.

Ensuite, les micro-paramètres pourront être définis sur le pignon afin d'optimiser le comportement sous charge de l'engrenage face :

- Bombé longitudinal,
- Corrections de profils.

4.1 Définition des macro-paramètres

Lors de la conception d'une boîte de transmission, les différents organes sont liés entre eux. Ainsi chaque élément devra respecter certaines contraintes liées à son environnement et à son rôle dans la transmission. En général, pour les engrenages, le rapport de réduction et un encombrement à respecter sont fixés à l'avance par les contraintes extérieures à la transmission et ne peuvent pas être modifiés.
Tous les paramètres de l'engrenages face doivent être définis dans le respect de ces deux contraintes initiales.

Suite aux conclusions du chapitre 4, il est préférable d'utiliser un pignon et un outil pour la roue ayant le même nombre de dents (contact linéaire). Le module et le nombre de dents de la roue face étant les paramètres les plus influents au niveau de la géométrie, ils doivent être déterminés en premier.

4.1.1 Paramètres principaux

4.1.1.1 Nombre de dents

Les nombres de dents de la roue (N_2) et du pignon (N_1, ou de l'outil N_s) doivent être choisis afin de respecter le rapport de réduction imposé. Pour avoir une largeur de denture la plus grande possible, le nombre de dents de la roue devra être le plus grand possible, mais celui-ci sera toujours limité par l'encombrement maximal à respecter.

4.1.1.2 Module

L'équation définie au § 2.3.1 pour déterminer le rayon extérieur de la roue peut être utilisée pour déterminer le module de taillage (m_{0s}) tout en respectant l'encombrement défini. Les différents paramètres pris compte dans cette équation peuvent dans un premier temps être fixés à un niveau moyen, de façon à ne garder que le module comme paramètre variable.

4.1.3 Angle de pression

L'angle de pression (α_{0s}) devra être le plus petit possible pour garantir une largeur de denture maximale. L'utilisation des équations du § 2.3.1 définissant le rayon intérieur et le rayon extérieur de la roue permettent de déduire sa valeur optimale.

Il est toutefois conseillé à ce niveau de définir un rayon de pointe légèrement supérieur à l'encombrement autorisé, car l'ajustement des paramètres suivants (surtout si le choix nécessaire du compromis se porte sur une optimisation du rapport de conduite) provoquera le plus souvent sa diminution.

De plus, si le nombre de dents du pignon est petit, il ne faudra pas définir un angle de pression trop faible pour éviter que le pignon soit trop mince et donc moins résistant, notamment vis-à-vis des contraintes en pied de dent.

4.1.4 Paramètres secondaires

Les principaux paramètres étant définis, le choix des derniers paramètres va permettre d'optimiser la géométrie et la conduite à vide. Mais leur définition va entraîner le concepteur d'engrenages à faire un compromis. En effet, les deux objectifs consistant à augmenter la largeur de denture et le rapport de conduite, conduisent à des valeurs de paramètres souvent opposées. Le choix de l'angle d'hélice, de l'offset et du déport sera alors dépendant de l'objectif choisi et du compromis désiré.
Il faut toutefois respecter certaines contraintes. Tout d'abord le déport devra être identique sur le pignon et sur l'outil de la roue, soit $x_s = x_1$. De plus, le signe de l'angle d'hélice de l'outil (β_s) sera dépendant du sens de rotation de la roue :

- Si la roue tourne dans le sens horaire, alors $\beta_s \geq 0$,
- Si la roue tourne dans le sens trigonométrie, alors $\beta_s \leq 0$.

Si la largeur de denture définie semble trop faible, il est possible de l'augmenter en diminuant le rayon intérieur de la roue. Pour cela, l'angle d'hélice et l'offset (c_s) peuvent être ajustés de la façon suivante :

- Si β_s et c_s sont de même signe, en les diminuant,
- Si β_s et c_s sont de signes différents, en les augmentant.

La diminution d'un éventuel déport permet également de diminuer le rayon intérieur de la roue.

Le rapport de conduite à vide peut quant à lui être augmenté de deux façons :

- En augmentant le coefficient de déport,
- En augmentant β_s et c_s.

L'utilisation d'un prédicteur, comme celui développé au § 3.2.2 permet d'optimiser précisément le coefficient de déport en fonction du rapport de conduite désiré.

Si les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants au niveau de la géométrie ou du rapport de conduite, il est alors nécessaire de modifier les nombres de dents de la roue et du pignon et de recommencer le processus de conception. Un calcul sous charge doit également être effectué à ce niveau de la conception afin de s'assurer que les paramètres ainsi définis satisfont les critères de résistance des engrenages. Il convient de vérifier notamment les valeurs des pressions de contact et des contraintes en pied de dent.

4.2 Définition des micro-paramètres

Les macro-paramètres de l'engrenages face étant définis, le comportement sous charge de celui-ci peut être optimisé par l'introduction de corrections de denture sur le pignon, en fonction du couple appliqué.

Le bombé doit être défini en premier pour recentrer la portée sous charge et limiter les pressions de contact en bord de dent. Un bombé n'étant défini que par 4 paramètres, une étude comme celle effectuée au chapitre 4, § 4.1, peut être effectuée de façon quasi-systématique pour chaque engrenage face conçu. Cela permet de déterminer rapidement un système d'équations dont la résolution aboutit directement aux valeurs optimales du bombé, en fonction des critères de qualité choisis.

L'introduction de corrections de profil de denture sur le pignon permet ensuite de réduire l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge. Le nombre de combinaisons possibles pour définir les corrections étant très important, il est actuellement difficile de déterminer directement la correction optimale à effectuer. Néanmoins, couplées à un bombé, des corrections de denture effectuées en pied de dent sur toute la largeur de denture du pignon semblent parmi les plus efficaces pour réduire l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge. Un nombre de calculs sous charge limité, comme ceux effectués au chapitre 4, § 4.2.3, permet de fixer d'abord une longueur de correction optimale, puis une profondeur.

Si les corrections de profil ne sont pas obligatoires pour assurer un fonctionnement correct des engrenages face, le bombé semble quant à lui primordial. En effet, le cas de contact préconisé étant un contact linéaire (nombre de dents de l'outil et du pignon identique), un engrenage face non optimisé sera trop sensible aux erreurs de montage pour pouvoir être utilisé tel quel sans risque. Même si le concepteur ne souhaite pas optimiser le comportement sous charge, un léger bombé doit toujours être effectué sur le pignon afin d'assurer un engrènement correct.

Le processus complet de conception décrit précédemment peut être synthétisé par la figure 5.11.

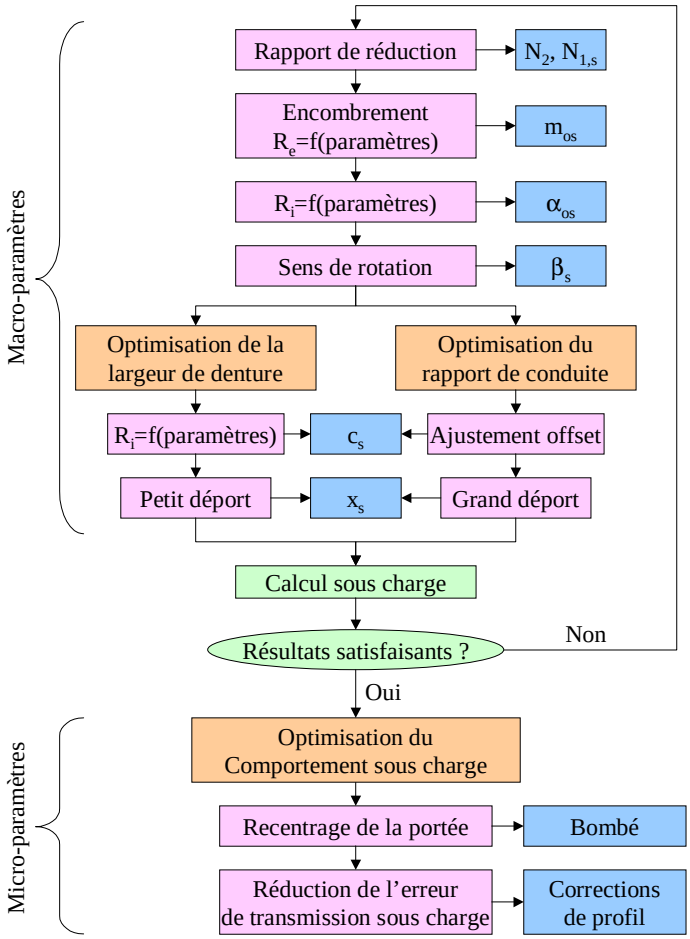


Figure 5.11 :Processus de conception des engrenages face

Les études particulières effectuées ici et les résultats obtenus, notamment les équations définissant les rayons intérieur et extérieur de la roue face, limitent pour l'instant l'application pratique de ce processus à des plages de paramètres bien définies.
Néanmoins, d'un point de vue méthodologique, ce processus global peut être utilisé pour concevoir tout type d'engrenages face.

5 Conclusion

Différentes études ont été effectuées pour étudier l'influence des différents paramètres de définition des engrenages face, sur la largeur de denture de la roue face et le rapport de conduite à vide. Le dimensionnement rapide des engrenages face est désormais possible grâce à la définition de formules simples qui permettent de déterminer les rayon d'interférences de taillage et de pointe.

Des conseils de conception ont été élaborés afin d'obtenir une largeur de denture et un rapport de conduite maximaux. Les deux objectifs aboutissant à des valeurs de paramètres opposées, il sera toujours nécessaire de faire un compromis entre augmentation de la largeur de denture et augmentation du rapport de conduite, en fonction des contraintes et des conditions d'utilisation.
Néanmoins, l'utilisation conjointe d'un prédicteur mathématique comme celui défini pour déterminer le rapport de conduite à vide avec celui défini pour déterminer les rayons d'interférences de taillage et de pointe, peut permettre une optimisation rapide de la conception des engrenages face et s'avérer être une aide précieuse dans la recherche du bon compromis.
L'approche explicitée ici pour définir ces équations simples est applicable à toute plage de données. Ainsi, sa généralisation future pourrait couvrir toute la gamme d'engrenages face utilisés dans l'aéronautique et ainsi devenir un atout indispensable pour les phases de conception des boîtes de transmission.

L'utilisation de tous les résultats présentés ici, couplés aux optimisations du chapitre 4 a permis la mise en place d'un processus de conception complet des engrenages face, en deux étapes :

- Définition des macro-paramètres à travers l'optimisation du comportement à vide,
- Définition des micro-paramètres à travers l'optimisation du comportement sous charge.

Conclusion générale

Le potentiel des engrenages face, notamment en regard des engrenages spiro-coniques, suscite l'intérêt des constructeurs aéronautiques. Les progrès récents des techniques d'usinage de précision permettent aujourd'hui d'envisager une production de grande qualité des roues face.
Le programme de recherche européen Facet, dans lequel s'inscrit cette thèse, a été initié dans ce contexte de développement et d'innovations techniques. Ainsi, la connaissance du comportement sous charge des engrenages face, à travers une modélisation adaptée aux conditions actuelles de simulation et répondant aux critères technologiques aéronautiques, est devenue un objectif fondamental pour envisager leur intégration dans la conception des rotors d'hélicoptères.

La première partie de cette thèse a consisté à formaliser cette modélisation selon une démarche classique pour l'étude des engrenages en trois étapes :

- Définition de la géométrie : les théories de Litvin ont servi de base au développement d'une simulation du taillage de la roue face totalement analytique prenant en compte toutes les caractéristiques géométriques réelles des engrenages face,

- Simulation de la cinématique à vide, également sous forme analytique, permettant de définir le comportement à vide des engrenages face et notamment de déterminer les zones de contact potentiel,

- Comportement sous charge prenant en compte les aspects de déformations locales de contact à travers l'utilisation des théories de Boussinesq, et les aspects de déformations globales de flexion grâce à l'utilisation d'une modélisation par éléments finis.

Afin d'obtenir une rapidité de calcul et une précision optimale, la modélisation complète intègre les définitions analytiques initiales tout au long du processus. L'utilisation couplée d'un modèle de contact et d'un modèle de flexion permet de ne négliger aucun des aspects fondamentaux régissant les importantes déformations subies par les composants dans une transmission de grande puissance.

La validation, à la fois numérique et expérimentale, de cette modélisation a montré qu'elle était totalement adaptée aux critères actuels d'étude des engrenages dans le domaine aéronautique. L'utilisation d'équations analytiques caractérisant des concepts mécaniques de base, associée à l'utilisation de logiciel commerciaux de modélisation par éléments finis, permettent d'ajouter à sa précision et sa rapidité, la généralité du processus d'étude. Ainsi son adaptation possible à tout type d'engrenages pourrait en faire une méthode standard pour l'étude des engrenages.

Les nombreuses simulations effectuées grâce à cette modélisation ont permis un apport de connaissances fondamentales sur les engrenages face. La description précise du comportement sous charge a abouti à une nouvelle caractérisation du contact sous charge.

La comparaison sous charge des deux cas de contact théoriques à vide (linéaire et ponctuel) ainsi que l'étude de l'influence des erreurs de montage ont montré leur intérêt respectif. Ainsi, l'utilisation des cas de contacts linéaires (pignon et outil avec le même nombre de dents) est préconisée pour les avantages qu'ils présentent :

- Rapport de conduite plus important,
- Charge maximale supportée par les dents plus faible,
- Erreur de transmission sous charge plus faible,
- Pressions de contact plus faibles,
- Capacité de charge plus importante.

L'extrême sensibilité de ce type de contact aux désalignements a nécessité la mise en place d'un processus d'optimisation du pignon cylindrique. La définition de bombés longitudinaux, dont les caractéristiques optimales peuvent être déterminées grâce à des études statistiques simples, permet de contrôler totalement l'équilibrage de la portée sous charge, quelles que soient les conditions de montage.
De même l'introduction de corrections de profil de dentures adéquates sur le pignon a montré qu'il était possible de réduire l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge de façon significative, tout en conservant un engrènement optimal.

La conception initiale des engrenages face a été considérée à travers l' étude de l'influence des paramètres de conception sur la géométrie des roues face et la cinématique à vide. L'utilisation particulière de plans d'expériences réduits a abouti à la définition de formules simples caractérisant la géométrie de la roue face. Le rôle déterminant des paramètres fondamentaux au niveau de la géométrie de la roue et de la conduite à vide a été mis en évidence. Un dimensionnement rapide des engrenages face répondant à des conditions d'utilisation définies, est désormais possible grâce à la mise en place d'un processus de conception.

Outre un apport de connaissances globales sur les engrenages face, ce travail a montré qu'une modélisation complète et précise du comportement sous charge permet d'aboutir à une maîtrise totale du processus de conception, de la détermination optimale des macro-paramètres jusqu'aux optimisations fines des micro-paramètres.

Perspectives

Les premières études précises concernant les engrenages face étant très récentes, le champ d'investigations sur les engrenages face est encore très vaste. L'utilisation du logiciel Gandalf développé dans cette thèse pourra permettre d'étendre les études déjà effectuées ici pour les généraliser à tous les types d'engrenages face.

Ainsi, l'étude de l'influence des paramètres de conception sur la géométrie pourra être étendue à des plages de paramètres plus grandes afin de permettre la conception rapide d'engrenages face aux caractéristiques variées. Notamment, pour leur potentiel d'applications variées, il sera intéressant d'étudier les engrenages face dont l'angle entre les axes n'est pas droit. Des gammes de paramètres équivalentes pourront ensuite servir de base à des études plus complètes sur la cinématique à vide. Le calcul des vitesses de glissements pourra être intégré afin de faciliter la comparaison des engrenages face avec d'autres types d'engrenages.
Des prédicteurs mathématiques généraux pourront également être développés afin de caractériser complètement le comportement à vide des engrenages face. Ainsi une conception rapide sera envisageable, quelle que soit la configuration proposée.

En ce qui concerne l'optimisation du comportement sous charge, une étude générale des corrections de profil prenant en compte différentes caractéristiques géométriques des engrenages face pourra être effectuée afin de généraliser les tendances déjà observées. De plus, une investigation sur l'influence des couplages entre les différentes corrections de profil, ainsi qu'avec les bombés, permettra d'améliorer l'optimisation sous charge des engrenages face. L'influence des chargements (intensité, forme) sur le comportement sous charge devra être étudiée. La prise en compte de tous les paramètres dans différentes études sous charge pourrait aboutir à la définition de formules permettant de caractériser les résultats sous charge sans avoir à effectuer de calculs complexes. Ainsi, une anticipation des résultats finaux dès les premières phases de conception permettra une définition optimale des caractéristiques des engrenages face tout en limitant les modélisations et les prototypes.

Enfin, lorsque le comportement et l'optimisation sous charge des engrenages face seront totalement maîtrisés, il serait intéressant d'introduire cette modélisation dans un modèle global de boîte de transmission afin d'étudier les interactions entre les engrenages face et les autres organes composant la transmission.

Annexes

Annexe 1 : Origine, applications et avantages potentiels des engrenages face

Les engrenages face sont apparus depuis très longtemps dans diverses structures mécaniques. Ils étaient déjà employés à l'époque des Romains dans les moulins à eau, puis les Chinois les utilisèrent pour la construction de gyroscopes mécaniques. Ils constituent enfin la base de la structure des moulins à vent en Hollande (Fig. A1.1 et A2.2) [30].

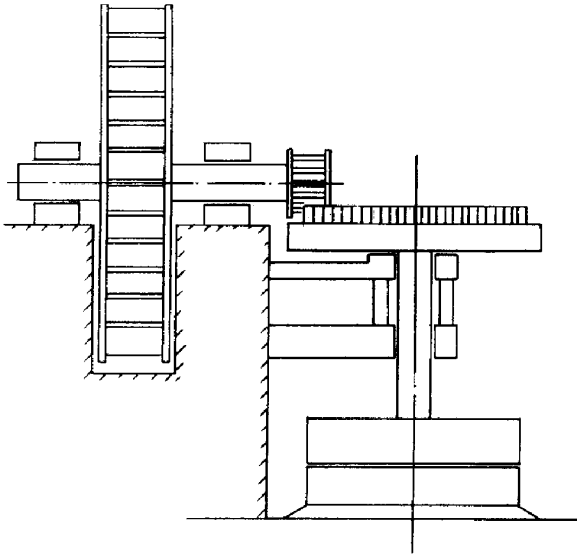


Figure A1.1 : Moulin à eau romain "Vitrius" [30]

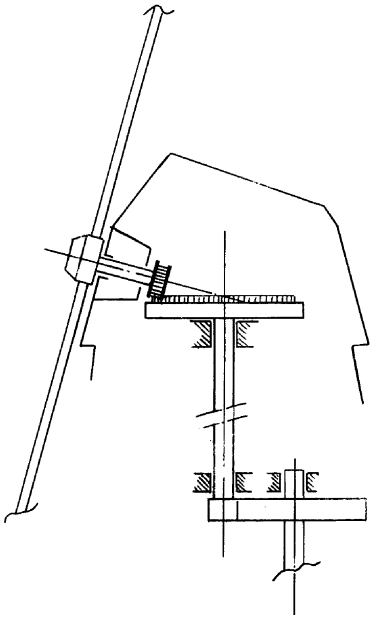


Figure A1.2 : Moulin à vent [30]

Aujourd'hui les engrenages face intéressent les scientifiques et les industriels devraient pouvoir trouver leur utilité dans de nombreux domaines.

Leur utilisation principale pourrait concerner les transmissions de grande puissance, notamment les transmissions d'hélicoptères, mais leurs nombreux avantages permettent d'envisager des applications variées.

Les engrenages face présentent un ensemble de caractéristiques qui permettent d'envisager leur intégration dans divers systèmes mécaniques (Grendel [63]).

Baastein [30] classe leurs principaux atouts par rapport aux autres types d'engrenages, notamment les spiro-coniques en trois catégories :

- Gamme étendue de rapports de transmission,
- Liberté axiale du pignon,
- Libre choix de l'angle de tête.

A1.1 Gamme étendue de rapports de transmission

Théoriquement les engrenages face conviennent pour tous les rapports de transmission possibles ($i \rightarrow \infty$). Néanmoins la largeur effective de denture devra être réduite au niveau du diamètre intérieur de la roue face à cause des phénomènes d'interférences, notamment pour des faibles rapports de transmission ($i \rightarrow 1,5$) avec un angle de tête de 90°. Dans ces conditions, la capacité de transmission de l'engrenage face est plus faible que celle des spiro-coniques pour des dimensions comparables. Les engrenages face présentent un intérêt d'utilisation lorsque le rapport de transmission est au minimum égal à 1,5.
Les plus hauts rapports de transmission réalisables avec des engrenages spiro-coniques sont de l'ordre de 6~8, en raison de limitations techniques issues du processus de fabrication. Les engrenages face ne connaissent pas ces limitations dues à la fabrication et des transmissions à haut rapport peuvent être envisagées avec un seul étage de réduction, ce qui permet de réduire le volume, le poids et le coût de fabrication de la transmission.

Un second domaine d'application s'ouvre aux engrenages face lorsqu'il est nécessaire de transmettre une vitesse angulaire avec une grande précision. La figure A1.3 montre une application où une transmission de rapport 10 est combinée avec une grande précision de vitesse angulaire au niveau du plateau tournant. Il est évident que la déviation de vitesse angulaire est plus faible en utilisant un engrenage face plutôt qu'un autre type d'engrenage où il serait nécessaire d'utiliser deux étages de réduction.

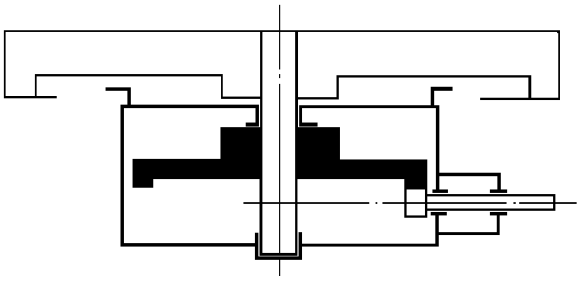


Figure A1.3: Plateau tournant avec un seul étage de réduction [63]

Enfin un troisième domaine d'application pour les engrenages face réside dans le remplacement des engrenages roue et vis (fig. A1.4). L'utilisation d'un engrenage face hélicoïdal avec un grand angle d'hélice et un large offset permet de réduire l'usure, les vitesses de frottement (rendement élevé), dans un ensemble compact autorisant des rapports de réduction supérieur à 100.

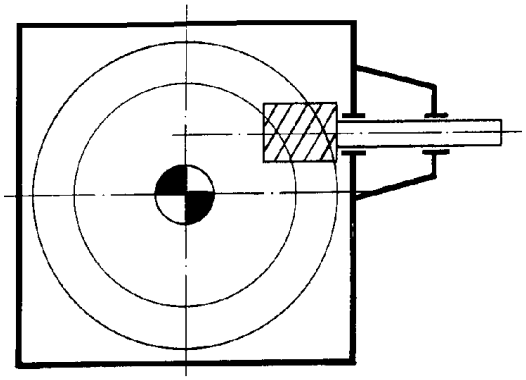
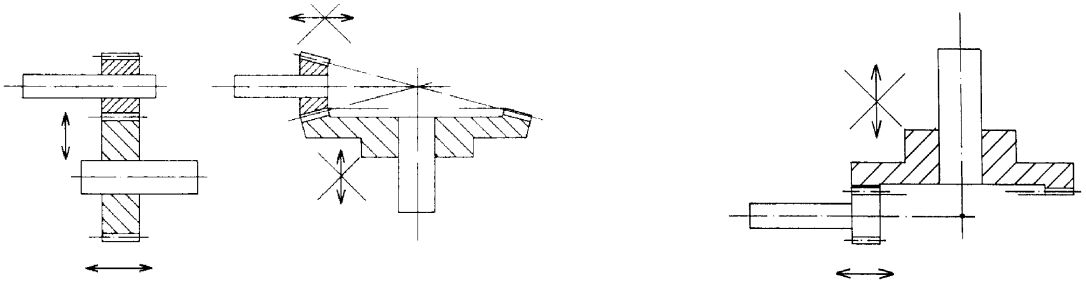


Figure A1.4 : Utilisation des engrenagse face à la place des roue et vis [30]

A1.2 Liberté axiale du pignon

Les engrenages cylindriques (Fig. A1.5) autorisent des déplacements axiaux et radiaux, qui dans des limites raisonnables n'ont pas d'influence négative sur les lignes de contact des dents en engrènement. Ces degrés de liberté sont inexistants avec les engrenages spiro-coniques qui nécessitent de plus un réglage précis afin d'obtenir un contact correct. Les engrenages face sont une combinaison de ces deux types d'engrenages. Un engrenage face ne nécessite que le réglage axial de la roue alors que le déplacement axial du pignon peut être laissé tout à fait libre. Le montage est donc grandement simplifié en comparaison des spiro-coniques et l'utilisation de plusieurs pignons avec une seule roue ou de deux roues avec un seul pignon ne pose aucun problème.



a b c

Figure A1.5 : Liberté axiale des engrenages cylindrique (a), spiro-conique (b), face (c) [30]

Cette propriété de liberté axiale laisse entrevoir un grand nombre d'applications.
La figure A1.6 montre un pignon d'engrenage face faisant partie intégrante d'un arbre moteur. Le pignon est monté directement sur l'axe du moteur et le mouvement axial du moteur n'a pas d'influence sur le contact.

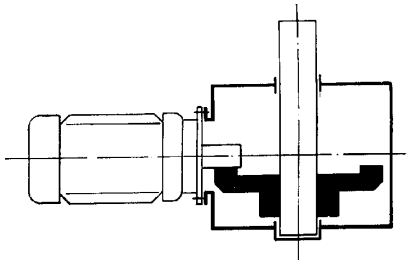


Figure A1.6 : Pignon de roue face monté sur un arbre moteur [30]

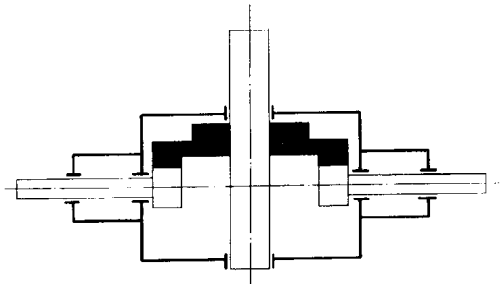


Figure A1.7 : Roue face engrenant avec deux pignons [63]

La figure A1.7 montre l'utilisation d'un engrenage face avec deux pignons. Ce type de montage est utilisé lorsqu'une roue entraîne plusieurs pignons à grande vitesse ou que plusieurs moteurs entraînent une roue face.

Les figures A1.8, A1.9 et A1.10 illustrent des applications utilisant des roues face engrenant à partir d'un arbre commun.

La figure A1.8 montre un arbre sur lequel sont montés deux pignons engrenant chacun avec une roue face. La dilatation axiale du pignon n'a aucune influence sur le contact. Ce type de montage est utilisé essentiellement dans des machines agricoles.
Le montage de la figure A1.9 est similaire avec des sens de rotations opposés pour les deux arbres de sortie.
La meilleure illustration de liberté axiale est donnée sur la figure A1.10. Grâce à cette propriété, la position des axes des tambours des moulins peut être réglée en fonction du diamètre des tambours. Il est ainsi possible d'utiliser des tambours de tailles différentes avec le même système de transmission.

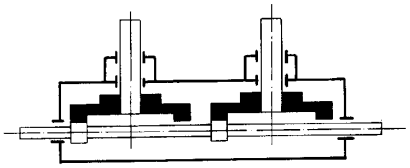


Figure A1.8 : Arbre central engrenant sur deux roues face [63]

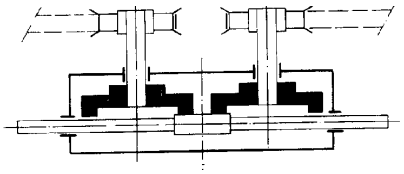


Figure A1.9 : Arbre central engrenant sur deux roues face avec sens de rotation opposés [30]

Les engrenages face peuvent également s'avérer utiles pour des montages où il est nécessaire d'avoir des arbres de sorties coaxiaux. La figure A1.11 montre un montage utilisé dans les propulsions de bateau. La puissance est amenée par un arbre unique et deux roues face permettent de la distribuer sur deux hélices coaxiales tournant en sens opposés.
Le montage de la figure A1.12 permet d'obtenir deux vitesses de rotation différentes et de sens opposés sur l'arbre de sortie.

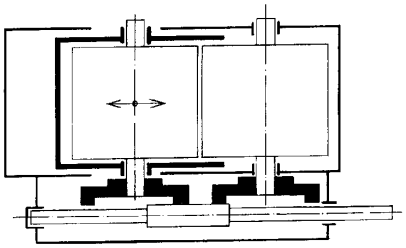


Figure A1.10 : Tambours de moulins à débit variable (breveté par Crown Gear) [63]

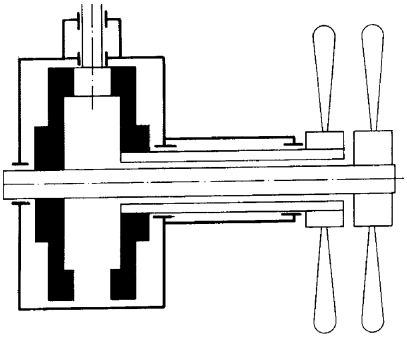


Figure A1.11 : Hélices avec sens de rotation opposés [63]

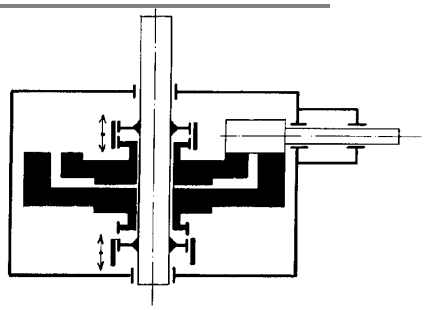


Figure A1.12 : Boîte de vitesses à double vitesse de sorties [63]

A1.3 Liberté du choix de l'angle de tête

Les engrenages face offrent la possibilité de choisir la valeur de l'angle de tête (Fig. A1.13).

Figure A1.13 : Engrenages face avec différents angle de tête [30]

Cette propriété peut s'avérer très utile par exemple pour les transmissions de bateau (Fig.A1.14) ou les machines d'extrusion et d'injection (Fig. A1.15).
Enfin les transmissions d'hélicoptères (Fig. A1.16 et A1.17) utilisent aussi largement des angles de tête de valeurs diverses.

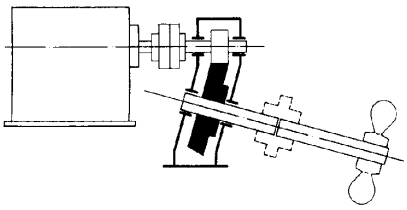


Figure A1.14 : Propulsion de bateau à hélice [30]

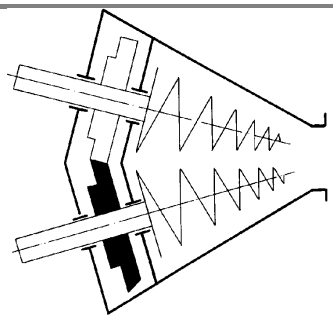


Figure A1.15 : Machine d'injection [30]

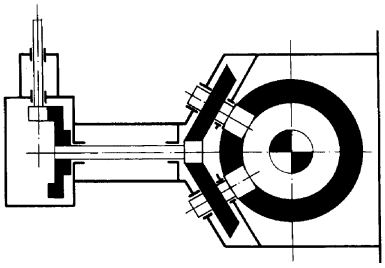


Figure A1.16 : Transmission d'hélicoptère, premier étage de réduction (breveté par Daf SP) [63]

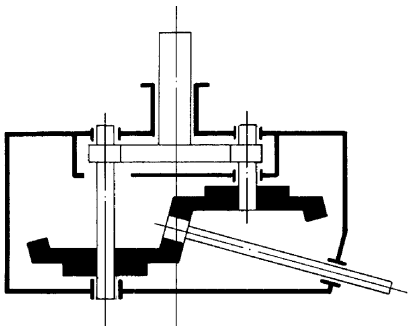


Figure A1.17 : Transmission d'hélicoptère, second étage de réduction (breveté par Lucas Western Inc.) [63]

A1.4 Application aux transmissions d'hélicoptères

Les hélicoptères nécessitent une transmission de grande puissance et l'utilisation des engrenages face peut s'avérer très utile dans ce cas, car ils peuvent permettre de diviser le couple entre deux roues face (Handshuh [66]). Cette division de couple est illustrée sur la figure A1.18. La figure A1.18(a) montre la version de division de couple avec deux pignons spiro-coniques montés sur un même arbre. La figure A1.18 (b) montre la version de division de couple avec un seul pignon cylindrique qui engrène simultanément avec deux roues face.
La deuxième version (Fig. A1.18 (b)) présente l'avantage de produire des efforts réduits sur les roulements par rapport à la première. De plus l'utilisation d'un pignon cylindrique droit permet un mouvement axial, ce qui est impossible avec un engrenage spiro-conique utilisé habituellement.
Le succès d'un tel système dépend de la division égale du moment entre les deux arbres de sortie. Le pignon cylindrique possède un système de montage qui permet l'auto-centrage entre les deux roues face. Cette solution offre une excellente précision au niveau de la division du couple (±1%) [66].

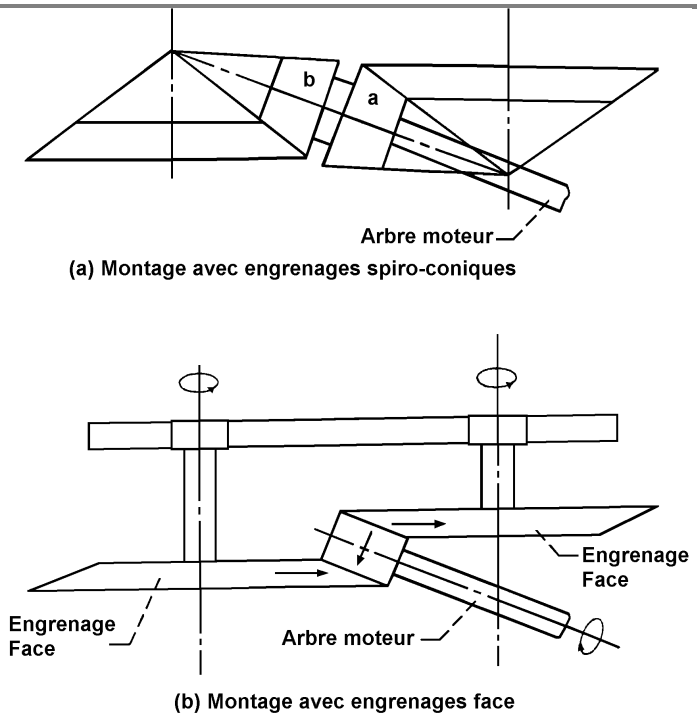


Figure A1.18 : Configurations de division du couple de transmission [80]

A1.5 Un potentiel controversé

Des études récentes sur les applications potentielles des engrenages face et leur avenir au sein de l'industrie montrent des avis assez controversés.
Mandt [88] synthétise la plupart des applications potentielles précédemment décrites et promet aux engrenages face un avenir certain dans diverses applications mécaniques. Des recherches approfondies doivent encore être effectuées et les techniques de fabrication améliorées, mais le potentiel des engrenages face est, pour lui, indéniable.

Stadtfeld [109] quant à lui ne voit que des inconvénients et des limitations dans l'utilisation des engrenages face. Pour lui, les engrenages face ont une largeur de denture beaucoup trop faible à cause des interférences de taillage et de la pointe, il sont trop sensibles aux désalignements et leur coût de production est trop élevé. Il n'envisage aucunement le détrônement des spiro-coniques dans les transmissions de puissance et insinue même que les chercheurs perdent leur temps à étudier les engranges face.

Les avis sont donc ici très partagés, mais il est assez difficile de savoir s'ils sont vraiment objectifs venant d'un côté d'une équipe qui cherche à mettre au point un processus de fabrication de haute précision des engrenages face et de l'autre de Gleason, l'un des premiers constructeurs mondiaux d'engrenages spiro-coniques.
Une seule chose est sure à l'heure actuelle, c'est que beaucoup de personnes commencent à s'intéresser et à parler des engrenages face.

Annexe 2 : Eléments de modélisation

A2.1 Simulation du taillage

A2.1.1 Vitesse relative des surfaces et équation d'engrènement

La vitesse relative entre les deux surfaces sans les erreurs de taillage, peut s'exprimer ainsi :

$$\vec{V}_{s2} = \begin{bmatrix} -Y_s(1-R_s\cos\gamma_s) - Z_s R_s \sin\gamma_s \cos\phi_s - C_s R_s \cos\gamma_s \sin\phi_s \\ X_s(1-R_s\cos\gamma_s) + Z_s R_s \sin\gamma_s \sin\phi_s - C_s R_s \cos\gamma_s \cos\phi_s \\ R_s \sin\gamma_s (X_s \cos\phi_s - Y_s \sin\phi_s + C_s) \end{bmatrix} \quad \text{(A2.1.1)}$$

NB : Le problème étant traité en quasi-statique, la vitesse de rotation angulaire de l'outil ω_s est toujours considérée comme unitaire et n'apparaît pas dans le développement des équations.

Dans ce cas, l'équation d'engrènement s'écrit alors après simplifications :

$$\begin{gathered}(1-R_s\cos\gamma_s)(X_s n_{ys} - Y_s n_x) + Z_s R_s \sin\gamma_s (n_{ys}\sin\phi_s - n_{xs}\cos\phi_s) \\ -C_s R_s \cos\gamma_s (n_{xs}\sin\phi_s + n_{ys}\cos\phi_s) + R_s \sin\gamma_s n_{zs}(X_s\cos\phi_s - Y_s\sin\phi_s + C_s) = 0\end{gathered} \quad \text{(A2.1.2)}$$

Avec les erreurs de taillage, la vitesse relative entre les deux surfaces s'exprime :

$$\vec{V}_{s2} = \begin{bmatrix} X_s R_s \cos\phi_s(\cos\phi_s \sin\gamma_s \sin\delta\alpha_s + \sin\phi_s \cos\gamma_s(\cos\delta\alpha_s - 1)) \\ -Y_s(1-R_s\cos\gamma_s(\cos^2\phi_s\cos\delta\alpha_s + \sin^2\phi_s) + R_s\sin\gamma_s\cos\phi_s\sin\phi_s\sin\delta\alpha_s) \\ +Z_s R_s \sin\gamma_s \cos\phi_s \cos\delta\alpha_s - C_s R_s \cos\gamma_s \sin\phi_s \cos\delta\alpha_s \\ +R\delta Q_s(\sin\gamma_s\cos\phi_s - \cos\gamma_s\sin\phi_s\sin\delta\alpha_s) \\ \\ X_s(1-R_s\cos\gamma_s(\sin^2\phi_s\cos\delta\alpha_s + \cos^2\phi_s) - R_s\sin\gamma_s\cos\phi_s\sin\phi_s\sin\delta\alpha_s) \\ +Y_s R_s \sin\phi_s(\sin\gamma_s\sin\phi_s\sin\delta\alpha_s - \cos\gamma_s\cos\phi_s(\cos\delta\alpha_s - 1)) \\ +Z_s R_s \sin\gamma_s \sin\phi_s \cos\delta\alpha_s - C_s R_s \cos\gamma_s \cos\phi_s \cos\delta\alpha_s \\ +\delta Q_s R_s(\cos\gamma_s\cos\phi_s\sin\delta\alpha_s + \sin\gamma_s\sin\phi_s) \\ \\ X_s R_s(\sin\gamma_s\cos\phi_s\cos\delta\alpha_s - \cos\gamma_s\sin\phi_s\sin\delta\alpha_s) \\ -Y_s R_s(\sin\gamma_s\sin\phi_s\cos\delta\alpha_s + \cos\gamma_s\cos\phi_s\sin\delta\alpha_s) \\ +Z_s R_s \sin\gamma_s \sin\delta\alpha_s + C_s R_s \sin\gamma_s) \end{bmatrix} \quad \text{(A2.1.3)}$$

Dans ce cas, l'équation d'engrènement ne se réduit pas à une forme simple.

A2.1.2. Normales unitaires de l'outil (ou d'un pignon)

Le vecteur unitaire normal de l'outil est défini par :

$$\begin{bmatrix} n_{xs} \\ n_{ys} \\ n_{zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{xs} / \|N_s\| \\ N_{ys} / \|N_s\| \\ N_{zs} / \|N_s\| \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.1.4)}$$

avec :

$$N_{xs} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y_s}{\partial \psi_s} & \dfrac{\partial Z_s}{\partial \psi_s} \\ \dfrac{\partial Y_s}{\partial \theta_s} & \dfrac{\partial Z_s}{\partial \theta_s} \end{vmatrix} \qquad N_{ys} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Z_s}{\partial \psi_s} & \dfrac{\partial X_s}{\partial \psi_s} \\ \dfrac{\partial Z_s}{\partial \theta_s} & \dfrac{\partial X_s}{\partial \theta_s} \end{vmatrix} \qquad N_{zs} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_s}{\partial \psi_s} & \dfrac{\partial Y_s}{\partial \psi_s} \\ \dfrac{\partial X_s}{\partial \theta_s} & \dfrac{\partial Y_s}{\partial \theta_s} \end{vmatrix} \qquad \text{(A2.1.5)}$$

En posant $A_s = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{r_{bs}^2 \tan \beta_{bs}}{r_s}}}$ (A2.1.6)

où r_s est le rayon primitif de l'outil, r_{bs} le rayon de base et β_{bs} l'angle d'hélice de base.

Il est possible d'obtenir la définition du vecteur unitaire normal :

$$\begin{bmatrix} n_{xs} \\ n_{ys} \\ n_{zs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s \cos(\theta_{0s} + \theta_s + \psi_s) \\ A_s \sin(\theta_{0s} + \theta_s + \psi_s) \\ -A_s H_s r_{bs} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.1.7)}$$

où H_s est le pas d'hélice : $H_s = \dfrac{2\pi r_s}{\tan \beta_{ps}}$ (A2.1.8)

β_{ps} étant l'angle d'hélice au primitif.

A2.1.3 Calcul de θ_0

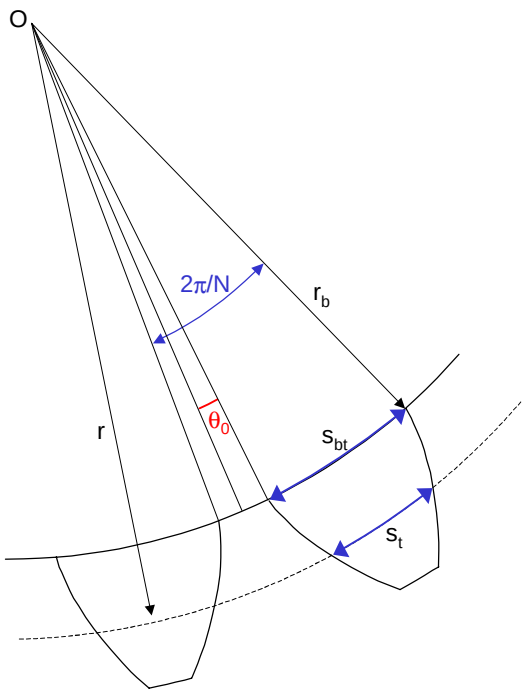


Figure A2.1 : Calcul de θ_0

Dans le cas d'un pignon cylindrique (ou un outil pignon cylindrique), l'angle θ_0 représente un demi entre-dent (Fig. A2.1). Il est lié à l'épaisseur de base s_{bt} par :

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N} - \frac{s_{bt}}{r_b}\right) \qquad \text{(A2.1.9)}$$

où N est le nombre de dents du pignon et r_b son rayon de base.
L'épaisseur de base est donnée par :

$$s_{bt} = r_b\left(\frac{s_t}{r} - 2(inv\alpha_{bt} - inv\alpha_t)\right) \qquad \text{(A2.1.10)}$$

où s_t est l'épaisseur au primitif, r le rayon primitif, α_{bt} l'angle d'incidence apparent au rayon de base et α_t l'angle de pression apparent au primitif.

L'épaisseur au primitif est égale à :

$$s_t = \frac{\pi.m_t}{2} + 2x.m_n \tan\alpha_t \qquad \text{(A2.1.11)}$$

où m_t est le module apparent, m_n le module réel et x le coefficient de déport.

Au rayon de base, $inv\alpha_{bt} = 0$ (A2.1.12)

Il vient donc :

$$\theta_0 = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N} - \frac{s_t}{r} + 2 - inv\alpha_t) = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N} - \frac{\pi.m_t}{2r} - \frac{2x.m_n \tan\alpha_t}{r} - 2inv\alpha_t) \quad \text{(A2.1.13)}$$

Or $N = \frac{2r}{m_t}$ (A2.1.14)

donc : $\theta_0 = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N_1} - \frac{\pi}{N_1} - \frac{2x.m_n \tan\alpha_t}{r} - 2inv\alpha_t)$ (A2.1.15)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2N_1} - \frac{x.m_n \tan\alpha_t}{r} - inv\alpha_t \quad \text{(A2.1.16)}$$

A2.1.4 Détermination du centre d'arrondi d'outil

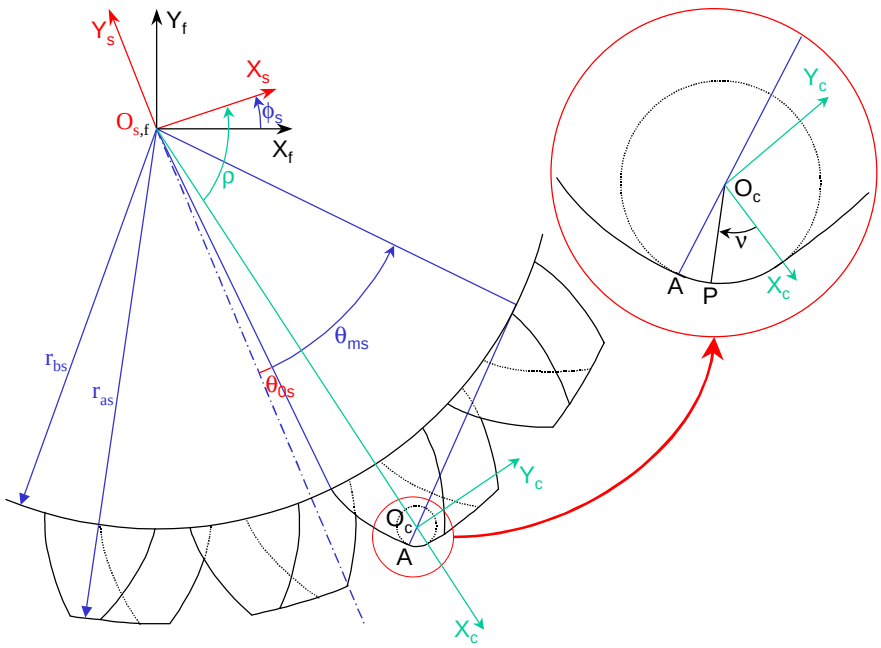


Figure A2.2 : Définition du centre d'arrondi d'outil

Le centre d'arrondi d'outil (Fig. A2.2) O_c est défini grâce aux propriétés de tangence entre le cercle d'arrondi et la développante de cercle.
Il est situé sur un cercle de rayon $r_{as} - r_p$, soit :

$$X_{oc}^2 + Y_{oc}^2 = (r_{as} - r_p)^2 \quad \text{(A2.1.17)}$$

Le point de tangence A entre le cercle d'arrondi d'outil et la développante vérifie :

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{oc} + r_p \cos t = \mathrm{r_{bs}} \sin(\theta_{0s} + \theta_s) - r_{bs}\theta_s \cos(\theta_{0s} + \theta_s) \\ \mathrm{Y_{oc}} + \mathrm{r_p} \sin t = \text{-}\mathrm{r_{bs}} \cos(\theta_{0s} + \theta_s) - r_{bs}\theta_s \sin(\theta_{0s} + \theta_s) \end{bmatrix} \quad \text{(A2.1.18)}$$

Par élimination du paramètre t, il vient que la valeur θ_{ms} du paramètre de développante θ_s au point A doit satisfaire l'équation du second degré suivante :

$$r_{bs}^2\theta_{ms}^2 - 2r_{bs}r_p\theta_{ms} + r_{bs}^2 - 2r_{as}^2 + 2r_{as}r_p = 0 \quad \text{(A2.1.19)}$$

O_c aura alors pour coordonnées :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X_{oc}} \\ \mathrm{Y_{oc}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{r_{bs}} \sin(\theta_{0ms} + \theta_{ms}) + (r_p - r_{bs}\theta_{ms}) \cos(\theta_{0s} + \theta_{ms}) \\ \text{-}\,\mathrm{r_{bs}} \cos(\theta_{0ms} + \theta_{ms}) + (r_p - r_{bs}\theta_{ms}) \sin(\theta_{0s} + \theta_{ms}) \end{bmatrix} \quad \text{(A2.1.20)}$$

Et ρ sera donné ensuite par :

$$\rho = \arctan\left(\frac{Y_{Oc}}{X_{Oc}}\right) \quad \text{(A2.1.21)}$$

Les coordonnées d'un point P de l'arrondi d'outil peuvent alors être exprimées en fonction de ν dans le repère S_s de définition de l'outil par :

$$\vec{\mathrm{r}}_s = \begin{bmatrix} \mathrm{X_s} \\ \mathrm{Y_s} \\ \mathrm{Z_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{r_p}(\cos\nu \cos\rho - \sin\nu \sin\rho) + X_{oc} \\ \mathrm{r_p}(\cos\nu \sin\rho + \sin\nu \cos\rho) + Y_{oc} \\ Z_s \end{bmatrix} \quad \text{(A2.1.22)}$$

A2.2 Simulation de la cinématique à vide

A2.2.1 Calcul de la profondeur de correction dans le cas d'une correction de profil

La profondeur de correction c est calculée en considérant la position du point M sur la droite d'action et l'équation de la correction linéaire ou parabolique dans la section considérée.

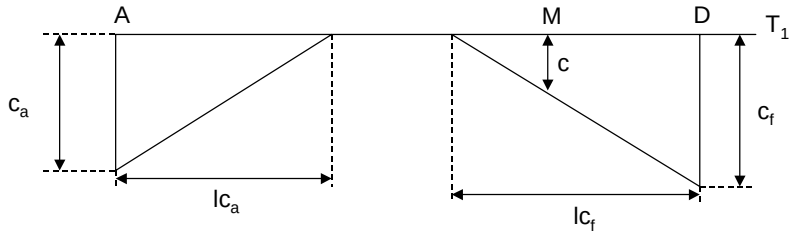


Figure A2.3 : Profondeur de correction sur la droite d'action

Pour une correction linéaire, c sera donné :

En tête par : $c = c_a \dfrac{T_1A - T_1M - lca}{lca}$ et en pied par : $c = c_f \dfrac{T_1D + lcf - T_1M}{lcf}$ (A2.2.1)

Pour une correction parabolique, c sera donné par :

$$c = a_p.T1M^2 + b_p.T1M + c_p \quad \text{(A2.2.2)}$$

où a_p, b_p et c_p sont les coefficients de l'équation de la parabole et sont donnés par :

En tête : $\begin{cases} a_p = \dfrac{c_a}{lca^2} \\ b_p = \dfrac{-2c_a(T_1A - lca)}{lca^2} \\ c_p = \dfrac{c_a(T_1A - lca)^2}{lca^2} \end{cases}$ et en pied : $\begin{cases} a_p = \dfrac{c_f}{lcf^2} \\ b_p = \dfrac{-2c_f(T_1D + lcf)}{lca^2} \\ c_p = \dfrac{c_f(T_1D - lcf)^2}{lcf^2} \end{cases}$ (A2.2.3)

L'évolution des corrections de denture étant linéaire selon la largeur de denture, l'utilisation du théorème de Thalès permet simplement de définir les profondeurs (c_a et c_f) et les longueurs (lc_a et lc_f) de définition des corrections à appliquer dans chaque section à partir des définitions de corrections initiales (Fig. A2.4).

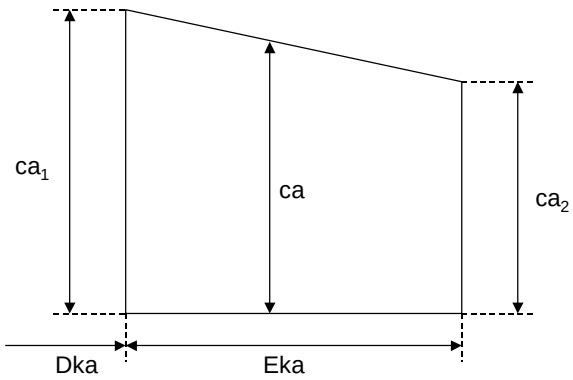


figure A2.4 : Evolution des corrections sur la largeur de denture

Pour une section d'abscisse z, c_a, c_f, lc_a et lc_f seront donnés par :

$$\begin{cases} c_a = ca_2 + \dfrac{ca_1 - ca_2}{Eka}(Dka + Eka - z) \\ lc_a = lca_2 + \dfrac{lca_1 - lca_2}{Eka}(Dka + Eka - z) \\ c_f = cf_2 + \dfrac{cf_1 - cf_2}{Ekf}(Dkf + Ekf - z) \\ lc_f = lcf_2 + \dfrac{lcf_1 - lcf_2}{Ekf}(Dkf + Ekf - z) \end{cases} \quad \text{si } ca1 \geq ca2 \text{ ou } cf1 \geq cf2 \qquad \text{(A2.2.4)}$$

et

$$\begin{cases} c_a = ca_1 + \dfrac{ca_2 - ca_1}{Eka}(z - Dka) \\ lc_a = lca_1 + \dfrac{lca_2 - lca_1}{Eka}(z - Dka) \\ c_f = cf_1 + \dfrac{cf_2 - cf_1}{Ekf}(z - Dkf) \\ lc_f = lcf_1 + \dfrac{lcf_2 - lcf_1}{Ekf}(z - Dkf) \end{cases} \quad \text{si } ca1 \leq ca2 \text{ ou } cf1 \leq cf2 \qquad \text{(A2.2.5)}$$

Enfin, il faut au préalable convertir les corrections éventuellement données sur le profil en corrections sur la droite d'action.

A2.2.2 Conversion des corrections de profils

Lorsque les corrections de profils sont données directement sur le profil, il faut les convertir sur la droite d'action.

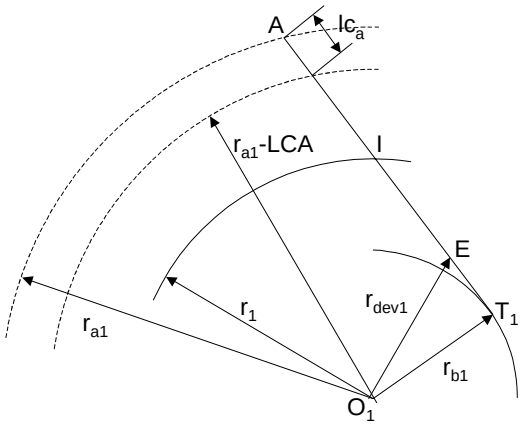


Figure A2.5 : Conversion de la longueur de correction en tête de dent

La conversion de la longueur de correction en tête de dent est donnée par (Fig. A2.5) :

$$lca = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{(r_{a1} - LCA)^2 - r_{b1}^2} \qquad \text{(A2.2.6)}$$

En pied de dent, elle est donnée de manière équivalente par :

$$lcf = \sqrt{(r_{dev1} + LCF)^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{dev1}^2 - r_{b1}^2} \qquad \text{(A2.2.7)}$$

Pour convertir la profondeur de correction en tête de dent, il faut prolonger artificiellement la droite d'action jusqu'au point A_2 (Fig. A2.2.4). En effet, il est évident que le point de tête du profil théorique auquel va être appliqué la correction en tête afin d'obtenir le point de tête corrigé est situé à un rayon supérieur au rayon de tête de l'outil. La conversion de correction en tête de dent va être déterminée par la position de ce point sur la droite d'action.

Le point théorique de tête de dent A est connu et est donné par :

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r_{b1}}{\cos\varphi_A}\sin(\phi_b - \mathrm{inv}\,\varphi_A) \\ \dfrac{r_{b1}}{\cos\varphi_A}\cos(\phi_b - \mathrm{inv}\,\varphi_A) \\ Z \end{bmatrix} \text{ avec } \varphi_A = tan^{-1}\left(\frac{T_1A}{r_{b1}}\right) \qquad \text{(A2.2.8)}$$

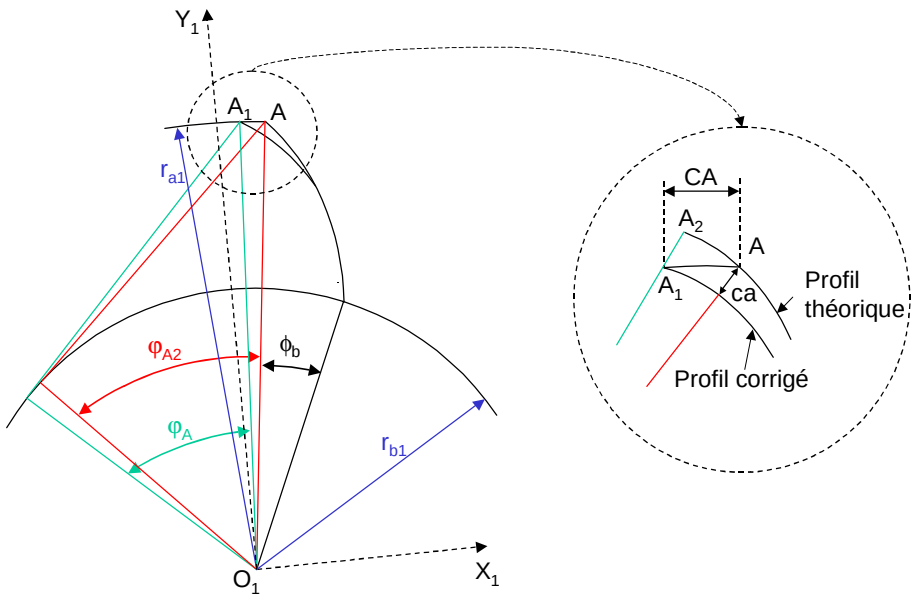


Figure A2.6 : Conversion de la profondeur de correction en tête de dent

Le point A1 de tête de dent corrigée qui est également situé sur le cercle de tête est alors défini par :

$$\begin{bmatrix} X_{A1} \\ Y_{A1} \\ Z_{A1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A - CA \\ \sqrt{r_a^2 - (X_A - CA)^2} \\ Z_A \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.2.9)}$$

L'angle φ_{A2}, paramètre de développante pour le point A_2, projeté orthogonal de A_1 sur la développante théorique est donné par :

$$\varphi_{A2} = \tan^{-1}\left(\varphi_B - \tan^{-1}\left(\frac{X_{A1}}{Y_{A1}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{r_{b1}}{r_{a1}}\right)\right) \qquad \text{(A2.2.10)}$$

et A_2 par :

$$\begin{bmatrix} X_{A2} \\ Y_{A2} \\ Z_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r_{b1}}{\cos\varphi_{A2}} \sin(\phi_b - \mathrm{inv}\,\varphi_{A2}) \\ \dfrac{r_{b1}}{\cos\varphi_{A2}} \cos(\phi_b - \mathrm{inv}\,\varphi_{A2}) \\ Z \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.2.11)}$$

Le point A_2 sera repéré sur la droite d'action par :

$$T_1A_2 = r_{b1} \tan\varphi_{A2} \qquad \text{(A2.2.12)}$$

La correction c à effectuer en A_2 pour obtenir A_1 sera :

$$c = \sqrt{(X_{A1} - X_{A2})^2 + (Y_{A1} - Y_{A2})^2} \qquad \text{(A2.2.13)}$$

Et la valeur c_a de la correction convertie sur la droite d'action sera donnée directement par les équations A3.1 et A3.2, soit par exemple pour une correction linéaire :

$$c_a = c\frac{|AA_2 - lca|}{lca} \qquad \text{(A2.2.14)}$$

La conversion en pied de dent s'effectue d'une manière similaire et sera donnée par :

$$cf = c\frac{|EE_2 - lcf|}{lcf} \text{ avec } c = \sqrt{(X_{E1} - X_{E2})^2 + (Y_{E1} - Y_{E2})^2} \qquad \text{(A2.2.15)}$$

où E_1 sera le point d'intersection trochoïde-développante corrigé et E_2 son projeté orthogonal sur le profil théorique.

A2.2.3 Calcul de la profondeur de correction dans le cas d'un bombé

La valeur C recherchée ici est la profondeur de correction due au bombé normale au profil. Elle est constante dans chaque section.

Il suffit dès lors de déterminer l'équation de l'arc de cercle le caractérisant, et sa valeur dans chaque section deviendra immédiate. Le repère de définition de cet arc n'a pas d'influence sur la profondeur. Le bombé sera défini dans le repère (x_p,y_p) (Fig. A2.7).

Dans chaque partie, le cercle qui définit le bombé, passe par 3 points connus :

- Partie (1) du bombé : A (0,0), B (C_{bl1},C_{b1}), C (2C_{bl1},0)
- Partie (2) du bombé : D (-B_p+2C_{bl2},0), E (C_{bl2},C_{b2}), F (B_p, 0)

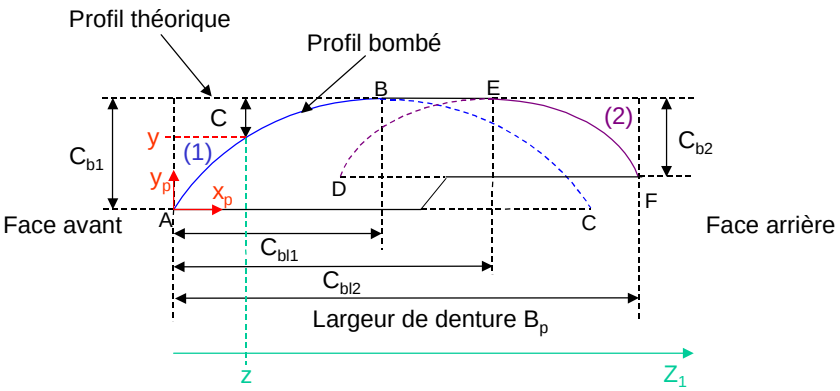


Figure A2.7 : Définition d'un bombé

L'arc de cercle qui caractérise le bombé a alors pour équation dans (x_p,y_p) :

$$(X-a)^2+(Y-b)^2=R^2 \qquad \text{(A2.2.16)}$$

où

$$\begin{cases} a=C_{bl1} \\ b=\dfrac{C_{b1}}{2}-\dfrac{C_{bl1}^2}{2C_{b1}} \\ R=\sqrt{C_{bl1}{}^2+b^2} \end{cases} \text{ dans la partie (1) et } \begin{cases} a=C_{bl2} \\ b=\dfrac{C_{b2}}{2}-\dfrac{(b_p-C_{bl2})^2}{2C_{b2}} \\ R=\sqrt{(B_p-C_{bl2})^2+b^2} \end{cases} \text{ dans la partie (2)} \qquad \text{(A2.2.17)}$$

pour une section d'abscisse z dans le repère du pignon, la valeur C de la correction due au bombé sera :

$$C=C_{b1}-y \text{ dans la partie (1) et dans la partie (2) } C=C_{b2}-y \qquad \text{(A2.2.18)}$$

où $y=b\pm\sqrt{R^2-(z+a)^2}$ (A2.2.19)

Cas de plusieurs corrections simultanées (bombé + correction de profil)

Lorsqu'un bombé et une correction de profil sont appliqués en même temps, deux configurations sont possibles et utilisées de manière équivalente dans l'industrie :

- Prise en compte de profondeur de correction la plus contraignante,
- Ajout des deux corrections.

A2.3 Répartition des charges

A2.3.1 Calcul des rayons de courbures et directions principales

Pour définir les rayons de courbure et directions principales d'une surface, cette dernière doit être définie par une équation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{A2.3.1}$$

Les rayons de courbure principaux sont alors solution de l'équation :

$$\left(DD''-D'^2\right)R^2 - \left(ED''-2FD'+GD\right)R + \left(EG-F^2\right) = 0 \tag{A2.3.2}$$

où D, D' et D'' sont les coefficients de la seconde forme quadratique :

$$D = \frac{d}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{A2.3.3}$$

$$D' = \frac{d'}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{A2.3.6}$$

$$D'' = \frac{d''}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{A2.3.7}$$

avec E, F et G les coefficients de la première forme quadratique :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \tag{A2.3.8}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \tag{A2.3.9}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \tag{A2.3.10}$$

et d, d' et d'' les déterminants suivants :

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{(A2.3.11)}$$

$$d' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{(A2.3.12)}$$

$$d'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{(A2.3.13)}$$

Les directions principales quant à elles sont solutions de l'équation :

$$(GD' - FD'')\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 + (GD - ED'')\frac{\partial v}{\partial u} + (FD - ED') = 0 \qquad \text{(A2.3.13)}$$

Annexe 3 : Méthodes numériques

A3.1 Résolution d'un système d'équations non linéaires par la méthode de Newton-Raphson

Un système d'équations non linéaires se présente sous la forme :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad \text{(A3.1.1)}$$

où x_1, x_2, …, x_n sont des inconnues réelles indépendantes et f_1, f_2, …, f_n des fonctions réelles données des n variables x_i. Un tel système à n inconnus est dit d'ordre n.

Soit $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ un point initial donné de R^n. $X^{(0)}$ est considéré comme une approximation de la solution $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ du système non linéaire défini ci-dessus. En supposant que $X^{(0)}$ est suffisamment voisin de X^* et que les fonctions $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, n$ soient suffisamment dérivables, alors le développement en série de Taylor de ces fonctions s'écrit :

$$f_i\left(X^*\right) = f_i\left(X^{(0)}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(x_j^* - x_j^{(0)}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(X^{(0)}\right) + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_j^* - x_j^{(0)}\right)\left(x_k^* - x_k^{(0)}\right)\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\left(X^{(0)}\right) + \ldots \quad \text{(A3.1.1)}$$

pour $i = 1, n$

Si les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligés, une nouvelle approximation de X^* peut être définie par $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$, avec :

$$f_i\left(X^{(0)}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(x_j^1 - x_j^{(0)}\right)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(X^{(0)}\right) = 0 \text{ pour } i = 1, n \qquad \text{(A3.1.2)}$$

Ainsi le vecteur $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ est défini comme la deuxième approximation de la solution et peut s'exprimer par :

$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X^{(0)}$, les composants $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}, \ldots, \Delta x_n^{(0)}$ étant solution du système linéaire mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(0)} + \dfrac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x_2}\Delta x_2^{(0)} + \ldots + \dfrac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(0)} + f_1^{(0)} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n^{(0)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(0)} + \dfrac{\partial f_n^{(0)}}{\partial x_2}\Delta x_2^{(0)} + \ldots + \dfrac{\partial f_n^{(0)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(0)} + f_n^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{A3.1.3}$$

où $\begin{cases} \dfrac{\partial f_i^{(k)}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(X^{(k)}\right) \\ f_i^{(k)} = f_i\left(X^{(k)}\right) \end{cases}$ (A3.1.4)

Le processus est itéré à partir de la nouvelle approximation $X^{(1)}$ de X^*. Le passage de l'itération i à l'itération i+1 se fera par la relation :

$X^{(i+1)} = X^{(i)} + \Delta X^{(i)}$, les composants de $\Delta x_1^{(i)}, \Delta x_2^{(i)}, \ldots, \Delta x_n^{(i)}$ étant toujours solution du système linéaire mis sous la forme développée :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(i)} + \dfrac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_2}\Delta x_2^{(i)} + \ldots + \dfrac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(i)} + f_1^{(i)} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(0)} + \dfrac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_2}\Delta x_2^{(i)} + \ldots + \dfrac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(i)} + f_n^{(i)} = 0 \end{cases} \tag{A3.1.5}$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit :

$$J(X) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right] \text{ pour } i = 1, n \text{ et } j = 1, n \tag{A3.1.6}$$

La matrice J est appelée matrice jacobienne des fonctions f_i évaluée au point X. A l'aide de ces notations, le système permettant d'obtenir l'approximation à l'itération i+1 à partir de l'itération i peut se mettre sous la forme :

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - J^{-1}\left(X^{(i)}\right)F\left(X^{(i)}\right) \tag{A3.1.7}$$

Le processus itératif est arrêté lorsque le critère de convergence ε est atteint, lorsque :

$$\sup\left|x_j^{(i)} - x_j^{(i-1)}\right| < \varepsilon \tag{A3.1.8}$$

A3.2 Interpolation en carreaux de Coons

L'interpolation d'une surface en carreaux de Coons est une interpolation de surface de degré 3. Ce type d'interpolation est très précis sous quelques conditions.

Chaque carreau de Coons est appuyé sur 16 points d'interpolation dont la valeur des paramètres doit être estimée au plus juste. Pour que l'interpolation soit la meilleure possible, les points de définition doivent avoir une répartition homogène sur la surface (Fig. A3.1).
Enfin, même si l'interpolation est très précise, ceci n'est vrai qu'à l'ordre 1. Lors de dérivations éventuelles de la surface interpolée, des faibles oscillations surviennent fréquemment.

Lorsqu'il sera nécessaire de calculer les normales à la surface interpolée, une deuxième interpolation sera effectuée à partir des valeurs numériques des normales aux points d'interpolation, afin d'avoir également une description de degré 3 des normales.

Qu'il s'agisse d'interpoler la surface de la roue ou du pignon selon les cas, celle-ci est toujours générée à partir d'équations, et il est possible de définir des points dans des zones désirées précises.

Il sera donc toujours possible de définir des points qui satisfassent les conditions optimum d'interpolation et dont les valeurs de u et v seront : 0, 1/3, 2/3 et 1.

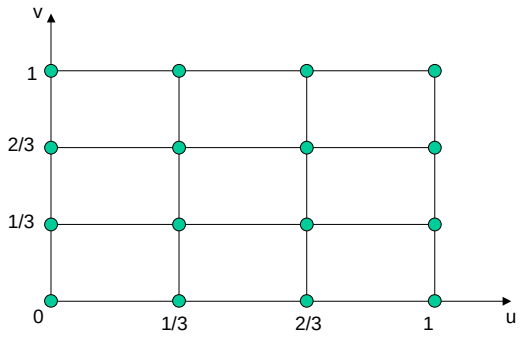


Figure A3.1 : Interpolation en carreaux de Coons

L'interpolation de la surface en carreaux de Coons est donnée par :

$$Q(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(A3.2.1)}$$

Les 16 coefficients de chaque interpolation sont obtenus par la méthode du pivot de Gauss en remplaçant successivement Q(u,v) par les valeurs de X, Y et Z (et n_x, n_y et n_z si nécessaire) des 16 points de définition où les paramètres u et v sont connus.

Annexe 4 : Utilisation des plan d'expériences

A4.1 Généralités

La technique des plans d'expériences est utilisée d'ordinaire pour des expériences pratiques basées sur des essais, mais elle peut également être utilisée dans le cas d'expériences basées sur des calculs ou simulations.
L'objectif d'un plan d'expériences est de connaître le comportement d'un phénomène, dans le cadre d'une expérimentation, en fonction de plusieurs paramètres. Il permet de mettre en place une procédure optimisée d'expérimentation pour atteindre un objectif précisé préalablement, prenant en compte certaines hypothèses.
Le résultat est une maîtrise du processus, une amélioration des performances et évidemment de la qualité par une élimination des dispersions, par la connaissance des facteurs les plus influents sur le processus et la détermination de leur valeur optimale, en un minimum d'expériences [8].

La démarche d'un plan d'expériences peut être décrite en quatre parties :

- Fixer les objectifs, c'est-à-dire connaître et définir précisément le but à atteindre et imaginer les aboutissements de l'expérimentation,
- Choix du plan d'expériences et réalisation des essais,
- Traitement statistique des résultats,
- Interprétation et validation phénoménologique.

La variable de sortie représentative du comportement, appelée variable expliquée ou réponse, doit être quantifiable. Le phénomène est étudié en fonction de paramètres nommés facteurs contrôlés ou plus simplement facteurs. Les paramètres sont généralement notés A, B, C, … Ils peuvent être qualitatifs (type de montage, opérateur, …) ou quantitatifs (pression, température, …). Ils doivent obligatoirement être contrôlables, c'est-à-dire que des valeurs spécifiques doivent pouvoir leur être imposées. Ces valeurs imposées aux paramètres sont appelées niveaux ou modalités du paramètre. Pour l'analyse des résultats, le niveau des facteurs est généralement représenté par des entiers. Pour un plan à trois niveaux par exemple, le niveau bas d'un facteur sera représenté par -1, le niveau moyen par 0 et le niveau haut par 1.

A4.2 Analyse de variance

L'analyse de l'influence des facteurs se fait en comparant la variabilité liée au facteur considéré et la variabilité totale. On décompose ainsi la variabilité totale en variabilités élémentaires, exprimée en pourcentage. La recherche des facteurs influents est basée sur la construction du test d'hypothèse de "non influence" (test de SNEDECOR). Le principe de ce test, basé sur l'analyse de variance, conduit à définir un intervalle d'acceptation $[0;F\varepsilon]$, $F\varepsilon$ désignant la variable de SNEDECOR caractérisant le seuil décisionnel d'acceptation ou de refus d'influence d'un facteur contrôlé. Cette valeur limite peut être vue comme la valeur au-delà de laquelle, si l'hypothèse de non influence est erronée, il y a seulement une probabilité ε de trouver des réalisations de cette variable aléatoire. En termes plus clairs, cela signifie que si la décision est prise de retenir un facteur comme influent, il n'y a qu'une probabilité ε de le retenir comme influent alors qu'il ne l'est pas.

La figure A4.1 montre un exemple d'analyse de variance pour plan complet de 3 paramètres à 2 niveaux. Ici le risque de retenir un facteur influent alors qu'il ne l'est pas est de 5%. Les facteurs retenus ici sont A, B et le couplage BC, avec une influence respective de 53,6%, 12% et 26,9%.

	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	k	
	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	57	
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	24	
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	27	
	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	35	
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	78	
	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	65	
	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	43	
	1	1	1	1	1	1	1	1	67	
Alpha	8	8	8	8	8	8	8	8		
L	396	110	-52	-14	-14	36	78	-4		
E	49,50	13,75	-6,50	-1,75	-1,75	4,50	9,75	-0,50		
SCE		1512,50	338,00	24,50	24,50	162,00	760,50	2,00	2824,00	SCE totale
%		53,6%	12,0%	0,9%	0,9%	5,7%	26,9%	0,1%	0,5%	limite residue
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC		
	Première analyse de variance									
		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	2	résiduel
		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1	2,00
	Fexp	756,25	169,00	12,25	12,25	81,00	380,25	1,00	5,0%	risque
facteurs retenus		**A**	**B**				**BC**		161,45	Fisher
	risque	2,3%	4,9%	17,7%	17,7%	7,0%	3,3%	50,0%		

Figure A4.1 : Exemple d'analyse de variance

Les différents calculs conduisent également à la mise en place d'un prédicteur mathématique associé à l'analyse de variance définissant la loi polynomiale d'évolution de la grandeur de sortie en fonction des paramètres influents. Pour appliquer la formule du prédicteur mathématique, il est nécessaire de connaître le site expérimental sur lequel cette formule est appliquée, c'est-à-dire le niveau que chaque facteur contrôlé présente pour ce site. Ce prédicteur donne les coefficients de la régression multiple d'une réponse en fonction des paramètres mis en jeux. Les coefficients du prédicteur sont d'abord établis comme une régression dans un repère lié aux modalités des facteurs. Un changement de variable permet d'exprimer le prédicteur directement en fonction des valeurs des facteurs analysés.

A4.3 Différents types de plans d'expériences

Deux types de plans d'expériences ont été utilisés au cours de ce travail, des plans factoriels complets et des plans réduits dits de Taguchi [8].

A4.3.1 Plans factoriel complets

Un plan d'expériences factoriel complet étudie toutes les combinaisons possibles des facteurs essayés. Ce type d'expérimentation permet de déterminer les dépendances et interactions entre paramètres et les influences parasites. Les plans d'expériences factoriels complets sont théoriquement parfaits, mais les délais et les coûts d'expérimentation deviennent prohibitifs dès que l'on dépasse 3 ou 4 facteurs. Dans un plan factoriel complet le nombre d'expériences croît de manière exponentielle par rapport au nombre de paramètres retenus dans l'étude. Un plan complet de n facteurs à k niveaux nécessite k^n expériences, soit par exemple 81 expériences pour un plan de 4 facteurs à 3 niveaux.

A4.3.2 Plans réduits de Taguchi

Les plans réduits, ou fractionnaires, sont des plans optimaux permettant de réduire la charge expérimentale en ne retenant que les expériences les plus intéressantes pour l'étude. Le nombre d'expériences est diminué grâce au phénomène d'alliassage. Il s'agit de fixer des paramètres (ou des interactions) aux mêmes niveaux, pour les mêmes expériences.

Cela signifie qu'au moment de l'étude d'influence des différents paramètres et interactions, l'effet d'un facteur est lié à une ou plusieurs interactions. Des ambiguïtés sont alors inévitablement engendrées car les influences des paramètres alliassés ne peuvent être séparées.
Les plans ainsi fractionnés conservent l'étude de l'influence des principaux facteurs, mais des contrastes proviennent de la somme des effets aliassés. Le choix dans la manière de diviser le plan conditionne les résultats et les possibilités d'analyse du plan.

Un cas particulier de plan fractionné a été développé par G. Taguchi [8]. La méthodologie est constituée par des tables orthogonales donnant la description d'un plan fractionnaire orthogonal permettant l'étude de facteurs et de quelques-unes de leurs interactions. Ces plans sont généralement utilisés pour "débroussailler" un problème et définir les facteurs influents retenus pour un plan complet.

La méthodologie Taguchi ne prend pas en compte les interactions ayant un degré d'interaction supérieur à 2. Elle suppose la connaissance des paramètres et de quelques interactions influentes afin de pouvoir réaliser un graphe linéaire minimum. Ce graphe linéaire minimum utilisé avec les tables orthogonales permet de déterminer les allias ainsi que les expériences à réaliser.

Les plans de Taguchi utilisés ici sont des plans $L_{16}(2^{15})$. Ils permettent d'étudier jusqu'à 15 paramètres et le plan nécessite 16 expériences. Toutefois, plus le nombre de paramètres étudiés est élevé, plus le nombre d'interactions pouvant être étudié sera réduit. Par exemple, avec 8 paramètres, il est seulement possible de visualiser 7 interactions d'ordre 2. Toutes les autres interactions seront aliassées.
Taguchi fournit des graphes pour des nombres de paramètres déterminés, et il est parfois nécessaire de faire des extrapolations.
La figure A4.2 montre un exemple de graphe linéaire pour 5 paramètres extrapolé à 6 paramètres. Le dernier paramètre est alors aliassé avec une interaction.

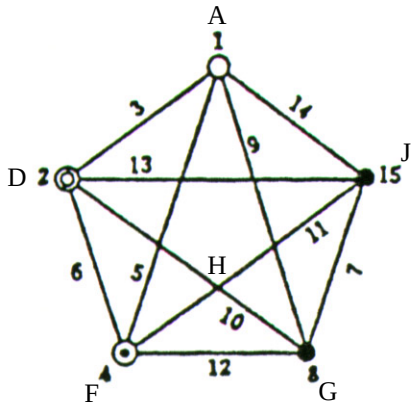


Figure A4.2 : Graphe linéaire à 5 paramètres extrapolé à 6 paramètres (A, D, F, G, H et J avec H aliassé à FJ)

Le tableau A4.1 donne les allias définis alors à partir de ce graphe et des tables orthogonales de Taguchi.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Paramètres	A	D	AD	F	AF	DF	GJ	G	AG	DG	H	FG	DJ	AJ	J
Alias			GH	HJ					DH	AH	FJ				FH

Tableau A4.1 : Définitions des allias du plan L_{16} à 6 paramètres

Ainsi, par exemple, l'influence des paramètres A et D pourra être déterminée directement, alors que celle du paramètre F ne pourra pas être dissociée de son alias, l'interaction HJ. Le choix de l'emplacement des paramètres sur le graphe linéaire est alors capital pour l'interprétation des résultats.

Annexe 5 : Détails des plans d'expériences du chapitre 4

A5.1 Sensibilité aux erreurs de montage

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 3 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- Déplacement radial du pignon, δE_1 : -0.02 mm, 0.02 mm
- Déplacement axial de la roue face, δq_1 : -0.02 mm, 0.02 mm
- Déplacement angulaire de la roue face, $\delta \gamma_1$: -0.01°, 0.01°

Les résultats observés sont la position, le début et la fin de la portée.

Les expériences effectuées sont les suivantes :

Expérience	δE_1 (mm)	δq_1 (mm)	$\delta \gamma_1$ (°)
1	-0.02	-0.02	-0.01
2	-0.02	-0.02	0.01
3	-0.02	0.02	-0.01
4	-0.02	0.02	0.01
5	0.02	-0.02	-0.01
6	0.02	-0.02	0.01
7	0.02	0.02	-0.01
8	0.02	0.02	0.01

Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

	Contact ponctuel			Contact linéaire		
Expérience	Position	Début	Fin	Position	Début	Fin
1	4	2	8	1	1	11
2	5	4	10	11	4	11
3	3	2	6	1	1	4
4	4	1	8	5	1	11
5	4	2	7	1	1	9
6	5	3	9	11	3	11
7	3	1	6	1	1	5
8	4	2	9	1	1	11
Sans erreurs	4	2	8	1	1	11

A5.2 Etude des paramètres du bombé du pignon

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 4 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- C_{bl1} : 6 mm, 14 mm,
- C_{bl2} : 14 mm, 22 mm,
- C_{b1} : 10 microns, 30 microns,
- C_{b2} : 10 microns, 30 microns.

Les résultats observés sont la position de la portée, la pression maximale, la pression au carreau 1 et la pression au carreau 11.

Les expériences effectuées sont les suivantes :

Expérience	C_{bl1} (mm)	C_{bl2} (mm)	C_{b1} (µm)	C_{b2} (µm)
1	6	14	10	10
2	6	14	10	30
3	6	14	30	10
4	6	14	30	30
5	6	22	10	10
6	6	22	10	30
7	6	22	30	10
8	6	22	30	30
9	14	14	10	10
10	14	14	10	30
11	14	14	30	10
12	14	14	30	30
13	14	22	10	10
14	14	22	10	30
15	14	22	30	10
16	14	22	30	30

Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	Position	Pression maximale (Mpa)	Pression au carreau 1 (Mpa)	Pression au carreau 11 (Mpa)
1	2	1195	539	299
2	2	1167	725	0
3	2	1152	665	301
4	2	1158	679	0
5	3	1309	0	388
6	3	1335	0	0
7	3	1242	0	502
8	3	1316	0	0
9	4	1116	781	398
10	4	1147	886	0
11	4	1074	807	349
12	4	1067	803	0
13	5	1219	0	431
14	5	1228	0	0
15	5	1218	0	531
16	5	1212	0	0
Sans corrections	1	1210	1210	696

A5.3 Etude des paramètres des corrections de denture du pignon

A.5.3.1 Correction en tête de dent sur toute la largeur de denture

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 2 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- longueur de la correction de tête (lca_1 et lca_2) : 2 mm, 6 mm,
- profondeur de la correction de tête (ca_1 et ca_2) : 10 microns, 30 microns.

Les résultats observés sont la moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	lca_1 et lca_2 (mm)	ca_1 et ca_2 (µm)	Erreur de transmission sous charge moyenne (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	2	10	-206	69
2	2	30	-218	65
3	6	10	-218	77
4	6	30	-259	90

A.5.3.2 Correction en tête de dent au niveau du rayon intérieur

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 3 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- longueur de la correction de tête (lca_1) : 2 mm, 6 mm,
- profondeur de la correction de tête (ca_1) : 10 microns, 30 microns,
- largeur de la correction en tête (Eka) : 7 mm, 21 mm.

Les résultats observés sont la moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	lca_1 (mm)	ca_1 (µm)	Eka (mm)	Erreur de transmission sous charge moyenne (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	2	10	7	-182	60
2	2	10	21	-179	51
3	2	30	7	-186	45
4	2	30	21	-186	54
5	6	10	7	-160	77
6	6	10	21	-194	69
7	6	30	7	-203	50
8	6	30	21	-214	82

A.5.3.3 Correction en tête de dent au niveau du rayon extérieur

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 3 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- longueur de la correction de tête (lca_2) : 2 mm, 6 mm,
- profondeur de la correction de tête (ca_2) : 10 microns, 30 microns,
- début de la correction en tête sur la largeur de denture (Dka) : 21 mm, 7 mm.

Les résultats observés sont la moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	lca_1 (mm)	ca_1 (µm)	Dka (mm)	Erreur de transmission sous charge moyenne (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	2	10	21	-176	51
2	2	10	7	-175	44
3	2	30	21	-176	52
4	2	30	7	-177	45
5	6	10	21	-184	43
6	6	10	7	-198	63
7	6	30	21	-184	43
8	6	30	7	-202	69

A.5.3.4 Correction en pied de dent sur toute la largeur de denture

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 2 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- longueur de la correction de tête (lcf_1 et lcf_2) : 2 mm, 6 mm,
- profondeur de la correction de tête (cf_1 et cf_2) : 10 microns, 30 microns.

Les résultats observés sont la moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	lcf_1 et lcf_2 (mm)	cf_1 et cf_2 (µm)	Erreur de transmission sous charge moyenne (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	2	10	-202	63
2	2	30	-208	54
3	6	10	-210	58
4	6	30	-234	42

A.5.3.5 Correction en pied de dent au niveau du rayon intérieur

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 3 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- longueur de la correction de tête (lcf_1) : 2 mm, 6 mm,
- profondeur de la correction de tête (cf_1) : 10 microns, 30 microns,
- largeur de la correction en tête (Ekf) : 7 mm, 21 mm.

Les résultats observés sont la moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	lcf_1 (mm)	cf_1 (µm)	Ekf (mm)	Erreur de transmission sous charge moyenne (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	2	10	7	-196	73
2	2	10	21	-195	87
3	2	30	7	-197	73
4	2	30	21	-196	87
5	6	10	7	-198	72
6	6	10	21	-203	64
7	6	30	7	-200	72
8	6	30	21	-210	61

A.5.3.6 Correction en pied de dent au niveau du rayon extérieur

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 3 paramètres à 2 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- longueur de la correction de tête (lcf_2) : 2 mm, 6 mm,
- profondeur de la correction de tête (cf_2) : 10 microns, 30 microns,
- début de la correction en tête sur la largeur de denture (Dkf) : 21 mm, 7 mm.

Les résultats observés sont la moyenne et l'amplitude de l'erreur de transmission sous charge.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci dessous :

Expérience	lcf_1 (mm)	cf_1 (µm)	Dkf (mm)	Erreur de transmission sous charge moyenne (micro radians)	Amplitude de l'erreur de transmission sous charge (micro radians)
1	2	10	21	-197	69
2	2	10	7	-190	89
3	2	30	21	-197	69
4	2	30	7	-185	74
5	6	10	21	-173	56
6	6	10	7	-189	89
7	6	30	21	-173	56
8	6	30	7	-202	65

Annexe 6 : Détails des calculs du chapitre 5

A6.1 Plans d'expériences pour l'optimisation de la géométrie

A.6.1.1 Plan à 8 paramètres

Confidentiel

A.6.1.2 Plan à 6 paramètres

Confidentiel

A.6.1.3 Plans à 5 paramètres

Confidentiel

A.6.1.3 Prédicteurs mathématiques

Confidentiel

A6.2 Comparaison des résultats issus des prédicteurs avec la simulation

Les calculs effectués utilisent la simulation numérique et le prédicteurs

Les paramètres variables sont :

- Nombre de dents de l'outil : N_S,
- Module de taillage de l'outil : m_{0s},
- Angle de pression de l'outil : α_{0s},
- Angle d'hélice de l'outil : β_s,
- Coefficient de saillie de l'outil : h_{as},
- Coefficient de déport de l'outil : x_s,
- Nombre de dents de la roue face : N_2,
- Offset de taillage : c_s.

Les résultats observés sont le rayon d'interférence de taillage r_i et le rayon de pointe r_e.

Les calculs effectués et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

N_S	17	19	21	16	17	21	19	21
N_2	43	53	63	60	63	43	53	63
m_{0s} (mm)	2	4	6	8	4	4	2	2
α_{0s} (°)	17.5	20	22.5	25	17.5	20	22.5	17.5
β_s (°)	-10	0	10	0	0	0	8	-10
c_s (mm)	-10	0	10	0	0	0	-2	10
h_{as}	1.1	1.2	1.4	1.0	1.1	1.1	1.4	1.1
x_s	0.2	0.3	0.4	0.5	0.3	0.2	0.4	0.2
r_i prédicteur (mm)	51.566	109.513	193.733	240.805	129.586	90.723	54.102	62.874
r_i simulation (mm)	49.132	103.337	187.188	224.644	122.954	84.675	54.095	68.320
Ecart r_i	4.95%	5.98%	3.50%	7.19%	5.39%	7.14%	0.01%	-7.97%
r_e prédicteur (mm)	61.399	133.347	215.872	270.863	170.473	107.773	63.243	84.933
r_e simulation (mm)	61.657	131.360	214.790	269.225	167.125	105.399	62.374	83.679
Ecart r_e	-0.42%	1.51%	0.50%	0.61%	2.00%	2.25%	1.39%	1.50%

A6.3 Influence des paramètres sur le rapport de conduite à vide

A6.3.1 Variation du nombre de dents de l'outil et de ΔN

ΔN Ns	0	1	2	3
17	1,2145	1,1959	1,1747	1,1538
18	1,2486	1,2297	1,2101	1,1900
19	1,2821	1,2637	1,2448	1,2254
20	1,3151	1,2972	1,2788	1,2600
21	1,3475	1,3301	1,3122	1,2939

A6.3.2 Variation de l'angle de pression

α_{0s} (°)	17,5	18,75	20	21,25	22,5
Rapport	1,2182	1,24	1,2637	1,2895	1,3174

A6.3.3 Variation de l'angle d'hélice et de l'offset en fonction du sens de rotation

Sens de rotation "+"

c β	-10	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5	7,5	10
-10	1,4955	1,4864	1,4786	1,4721	1,4667	1,4628	1,4601	1,4589	1,4592
-7,5	1,4308	1,4233	1,4171	1,4122	1,4086	1,4065	1,4058	1,4066	1,4092
-5	1,37	1,3642	1,3597	1,3566	1,355	1,3549	1,3565	1,3597	1,3647
-2,5	1,3134	1,3094	1,3069	1,3059	1,3065	1,3088	1,3128	1,3188	1,3267
0	1,2614	1,2595	1,2592	1,2606	1,2637	1,2687	1,2756	1,2847	1,2962
2,5	1,2145	1,215	1,2173	1,2214	1,2274	1,2356	1,2459	1,2589	1,2746
5	1,1736	1,1768	1,1821	1,1893	1,1988	1,2108	1,2254	1,2431	1,2643
7,5	1,1395	1,146	1,1547	1,1658	1,1796	1,1963	1,2163	1,2403	1,2691
10	1,1137	1,1241	1,1371	1,1529	1,1722	1,1951	1,2225	1,2555	1,2956

Sens de rotation "-"

c β	10	7,5	5	2,5	0	-2,5	-5	-7,5	-10
10	1,4955	1,4864	1,4786	1,4721	1,4667	1,4628	1,4601	1,4589	1,4592
7,5	1,4308	1,4233	1,4171	1,4122	1,4086	1,4065	1,4058	1,4066	1,4092
5	1,37	1,3642	1,3597	1,3566	1,355	1,3549	1,3565	1,3597	1,3647
2,5	1,3134	1,3094	1,3069	1,3059	1,3065	1,3088	1,3128	1,3188	1,3267
0	1,2614	1,2595	1,2592	1,2606	1,2637	1,2687	1,2756	1,2847	1,2962
-2,5	1,2145	1,215	1,2173	1,2214	1,2274	1,2356	1,2459	1,2589	1,2746
-5	1,1736	1,1768	1,1821	1,1893	1,1988	1,2108	1,2254	1,2431	1,2643
-7,5	1,1395	1,146	1,1547	1,1658	1,1796	1,1963	1,2163	1,2403	1,2691
-10	1,1137	1,1241	1,1371	1,1529	1,1722	1,1951	1,2225	1,2555	1,2956

A6.4 Influence du déport sur le rapport de conduite

Le plan d'expériences effectué est un plan complet pour 3 paramètres à 3 niveaux.

Les paramètres étudiés sont :

- Le nombre de dents du pignon : N_1,
- Le nombre de dents de la roue face : N_2,
- Le coefficient déport : x.

Le résultat observé est le rapport de conduite à vide.

Les expériences effectuées et résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :

Expérience	N1	N2	x	ε_γ
1	18	40	0	2,09
2	18	40	0.25	2,15
3	18	40	0.5	2,21
4	18	60	0	2,3
5	18	60	0.25	2,37
6	18	60	0.5	2,44
7	18	80	0	2,42
8	18	80	0.25	2,5
9	18	80	0.5	2,57
10	20	40	0	2,18
11	20	40	0.25	2,23
12	20	40	0.5	2,28
13	20	60	0	2,41
14	20	60	0.25	2,48
15	20	60	0.5	2,54
16	20	80	0	2,55
17	20	80	0.25	2,63
18	20	80	0.5	2,69
19	22	40	0	2,25
20	22	40	0.25	2,3
21	22	40	0.5	2,34
22	22	60	0	2,51
23	22	60	0.25	2,58
24	22	60	0.5	2,63
25	22	80	0	2,67
26	22	80	0.25	2,74
27	22	80	0.5	2,8

Annexe 7 : Gandalf – User Software Manual

1 Introduction

One of the main objectives of the Facet project is to study the behaviour of face gears under load. To achieve this goal, it was necessary to dispose of a complete simulation tool.
Within the theoretical studies, a software called Gandalf (Generation, ANalysis and Design Aid for Loaded Face gears) has hence been developed according to these objectives.

The main purpose of the task 2.1.8 is to deliver a user software manual to the software Gandalf.

Gandalf, is divided into four main modules :

- **Geom** to simulate the cutting process and define the geometry of the face gear,
- **Kine** to simulate the unloaded kinematics process and define the potential contact points,
- **Coef** to define the contact influence coefficient and define the meshing characteristics for F.E. calculations,
- **Comp** to solve the compatibility condition for contact displacements to obtain the instantaneous pressure distribution and load sharing.

The input and output files of the software have been formatted with a neutral format, so that they might fit to all commercial F.E. solver.
Indeed two F.E. calculations are necessary to study the whole elastic behaviour of face gears under load :

- between **Coef** and **Comp** to define the coefficients of influence for tooth deflexion,
- after **Comp** to obtain the stresses in the tooth root issued from the pressure distribution.

The final part of task 2.1.8 is to develop a graphic interface for the software using Matlab.

Graphic interface, fortran source codes and software manual will delivered within a whole software package.

2 Installation

The compiled version of Gandalf provided is a Win32 standard application, tested under Windows NT and Windows 2000. The graphic interface has been optimised for a 1024x768 resolution.
20 Mo of disk space is required to install Gandalf itself. Less than 10 Mo of disk space is required for each complete calculation.
Pentium II with 32 Mb of RAM is enough to run Gandalf, but a more powerful PC will increase the resolution speed.

Gandalf is provided within a single compressed package. To install Gandalf, create a destination directory, called for example *Gandalf* and run *install.exe* to unzip the entire package in this directory.

The following subdirectories will be created :

- *Calc* : to store the calculations results,
- *Code* : fortran source code of the software,
- *Data* : to store the input data of the calculations for the graphic user interface,
- *Fortran* : fortran executable modules,
- *Gandalf* : graphic user interface.

The graphic user interface provided has been written with Matlab. To avoid any problem of Matlab version, it has been compiled into a stand-alone application. To run this stand-alone application, it is necessary to install first the graphic library used by Matlab.
All the necessary files are provided in a single compressed file. Run *lib.exe* and unzip all the files in *Gandalf* subdirectory.

A whole calculation is also provided as example. Run *calc.exe* and unzip it in *calc* subdirectory.

To run Gandalf, run gandalf.exe in *Gandalf* subdirectory.

All the background theory used to develop the software might be found in the technical reports FACET-TR-202-1.2/INSA, FACET-TR-210-1.2/INSA and FACET-TR-226-1.2/INSA.

3 Pre-Processor

3.1 Pre-Processor Main Window

The default window of Gandalf is the pre-processor main window (Fig. 1).
A pop up menu allows the user to switch from pre-processing to post-processing process.

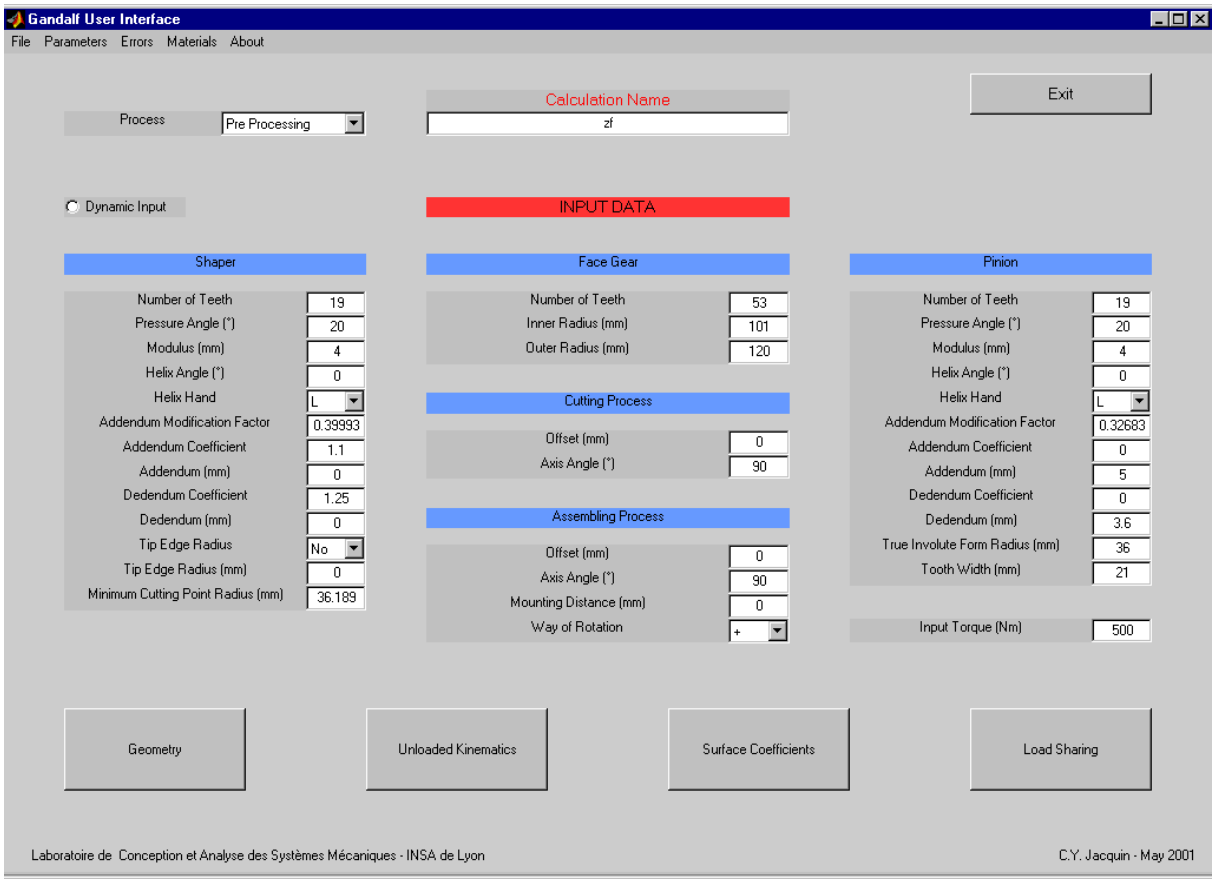


Fig. 1 : Pre-Processor Main Window

The pre-processing window is a general input window. All fields must be completed before running the different modules of Gandalf by pressing on the specific press buttons.

A default file containing default data is loaded on startup.

The geometry module must always be run first, since it will generate all the input files necessary to the four modules, and the directories for the output files corresponding to the calculation name.

A main directory with the name of the calculation is first created. This directory will then contain fives subdirectories :

- *Data* which will contain all the input files
- *Geom* which will contain all the output files of Geom
- *Kine* which will contain all the output files of Kine
- *Coef* which will contain all the output files of Coef
- *Comp* will contain all the output files of Comp

(See § 3.2 and 4.3 for more information on input and output files)

Dynamic Input Option

Switching on the radio button “Dynamic Input” allows to adapt the face gear and pinion data to the shaper data (Fig. 2).

All the data that are then linked are distinguished with a specific background colour. Changing a yellow data will have an impact on a blue data.

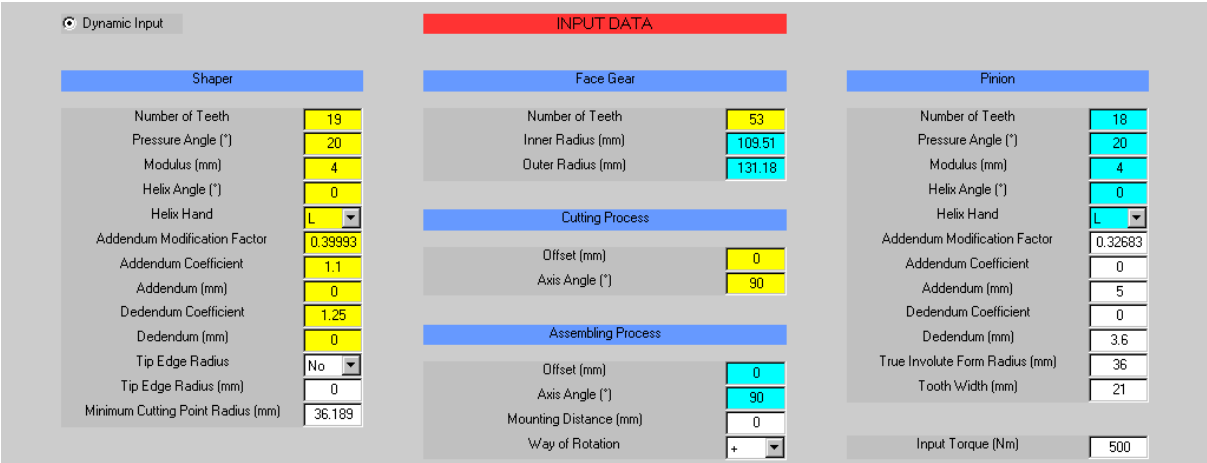


Fig. 2 : Dynamic Input

The links between the data are defined as follow :

Face Gear :

The inner and outer radii, R_i and R_o, are computed according to the formulae of TR-223-1.2/INSA.

NB : The formulae of TR-223-1.2/INSA are only an estimation of the true values of undercutting and pointing radii.
They of have been validated only for a specific range of shaper and cutting process data. If the chosen data are not within this range, it is not recommended to use the *dynamic input* option.

Assembling Process:

Offset and axis angle of assembling process are equal to offset and axis angle of cutting process.

Pinion :

The number of teeth of the pinion will be equal to the number of teeth of the shaper minus 1. The pressure angle, modulus, helix angle and helix hand of the pinion will be equal the ones of the shaper.

3.2 Other Pre-Processor Windows

The pre processor main window includes five menus.

3.2.1 File

Allows loading or saving input data files.

3.2.2 Parameters

The parameters window allows to define all the parameters specific to each module (Fig. 3).

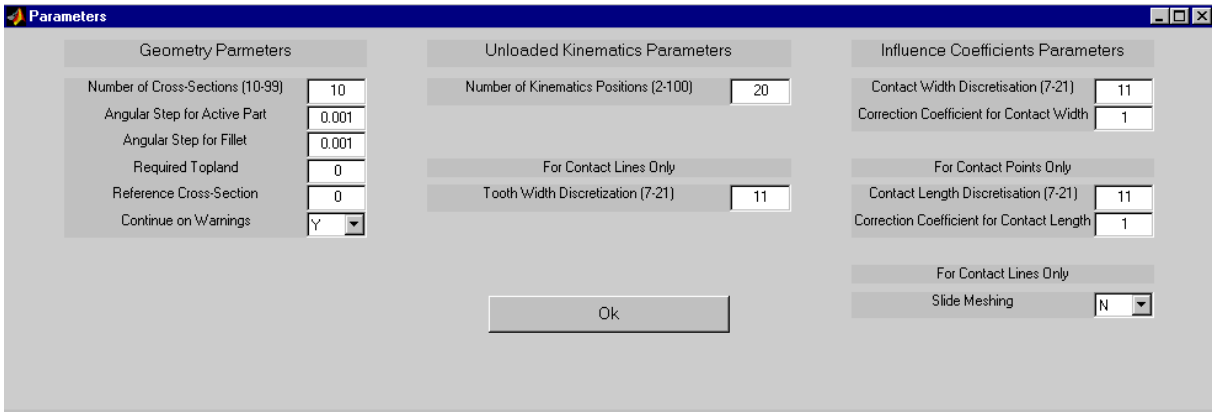


Fig. 3 : Pre-Processor Parameters Window

Geometry Parameters :

- Number of Cross-Sections : as the geometry of the face gear is defined in conical (when shaft angle is different from 90°) or cylindrical (when shaft angle is equal to 90°) cross-sections, it is possible to choose to compute between 10 and 99 cross-sections.

- Angular Step for Active Part : defines the angular step in radians between two points of the active part. Changing this value will change the number of point computed on the active in each cross-section.

- Angular Step for Fillet : as the angular step for the active part, it defines the step between two points on the fillet.

- Required Topland : for each calculation, the software computes the radius of pointing. Sometimes it could be more useful to have a radius with a specific minimum topland. The radius corresponding to this required topland will replace the radius of pointing in the output files. A required topland of 0 mm allows to compute the radius of pointing.

- Reference Cross-Section : to compute **helical** face gears only, a reference cross-section is required to define an origin to the rotation due to the helix angle. By default (let Reference Cross-Section to 0), this origin is set to the middle of the tooth. But it could happen that the computation does not converge correctly with this default value. In this case, changing the value of the Reference Cross-Section might solve the non-convergence problem. The value should be in this case the radius of the cross-section which be used as Reference Cross-Section.

- Continue on Warnings : during the computation of the geometry of face gears, some warnings might be displayed by the software (undercutting, pointing, etc….). It is possible to choose whether the software stops or continues when a warning occurs.

Unloaded Kinematics Parameters :

- Number of Kinematics Positions : defines the number of kinematics positions for which the contact zone will be computed between the first and last point of contact on the middle tooth.

- Tooth Width Discretization : the method used to define the contact zone allows only to find contact points. In case of a **linear** contact only (same number of teeth for pinion and shaper), it is necessary to split the tooth width into slices and to search a contact point in each slice. The succession of the points will then define the contact line.
  The number of points chosen here is also very important for the Influence Coefficients module (*Coef*). Indeed in case of contact lines, the points of contact computed within the unloaded kinematics simulation will be used to define the local meshing of the contact zone. These points will then be used to compute the deflexion influence coefficients with F.E. calculations.

A great number of points chosen here will hence induce a great number of F.E. calculations for the next module.

Influence Coefficients Parameters :

- Contact Width Discretization : to define the local meshing of the contact zone, it is necessary to choose a local meshing size. The contact width discretization defines the number of points that will be used for the local meshing along the contact width.

- Correction for Contact Width Discretization : the size of the contact zone that will be meshed (i.e. the estimated size of the contact zone under load) is defined using Hertz theory. As the contact face gears is not a perfect conform contact, it is often necessary to correct the size found with Hertz theory, by multiplying it with a correction coefficient in order to obtain a pressure distribution over the whole real contact zone.

- Contact Length Discretization : in case of contact lines, the points found within the unloaded kinematics simulation impose the discretiztion of the contact length.

But in case of contact points, the loaded contact zone will be elliptic and the number of points that will be used for the local meshing along the contact length must be chosen.

- Correction for Contact Length Discretization : as for the contact width discretization, the contact length discretization might require a correction.

- Slide Meshing : allows the user to choose if points will be added for the local meshing in the case of contact lines when the contact line dies not cover the whole tooth width.
  Warning : the use of a slide meshing improves the quality of the results, but also increases the number of F.E. calculations.

Figures 4 and 5 show examples of meshing. On figure 4, the theoretical contact case is point. The discretization chosen for the meshing is 5x5.

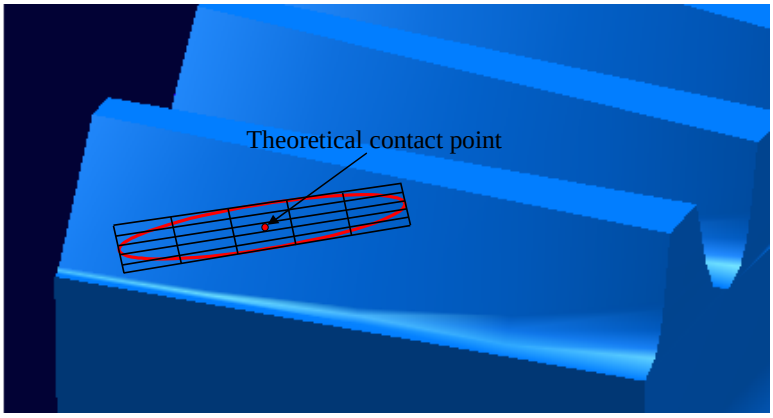


Fig. 4 : Example of meshing, case of contact point

On figure 5, the theoretical contact case is a line. The number of points chosen for tooth width discretization in the unloaded kinematics simulation was 7. If the contact is found along the whole tooth width, we have then 7 points of contact to define the line (kinematics position k), else we have less than 7 points (4 points for kinematics position j).
If the option of slide meshing is chosen, supplementary contact points are added on tip of face gear (or tip of pinion) in order to have the same number of points along the tooth width for all kinematics position.
For the meshing, the tooth width (contact length) disretization is here hence 7 (disretization chosen for unloaded kinematics simulation), and the tooth width disretization is 9. The meshing is hence 7x9.

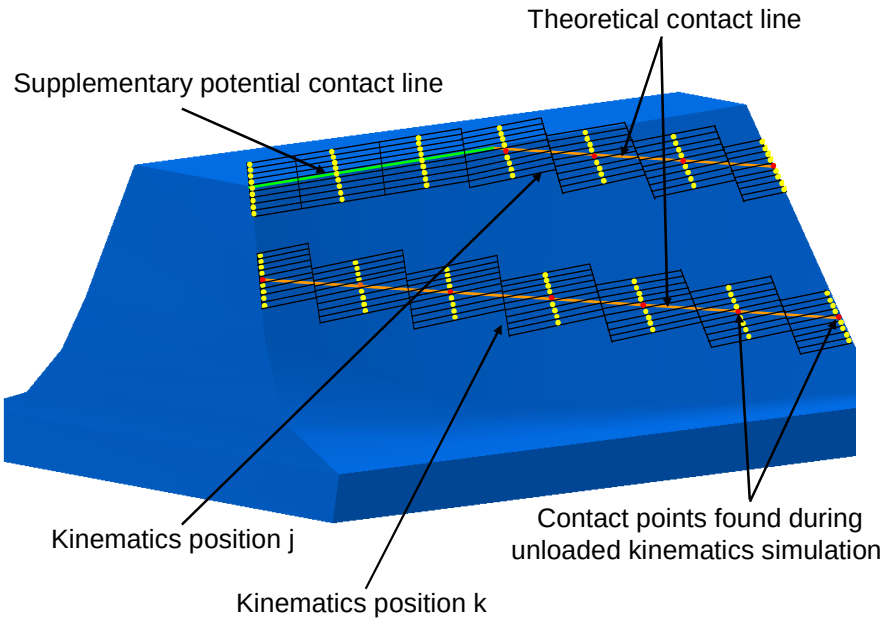


Fig. 5 : Example of meshing, case of contact lines

Tips to eventually correct the contact size are given on page 35.

3.2.3 Errors

The Errors window allows to define all the errors that might be taken into account within the different simulations (Fig. 6).

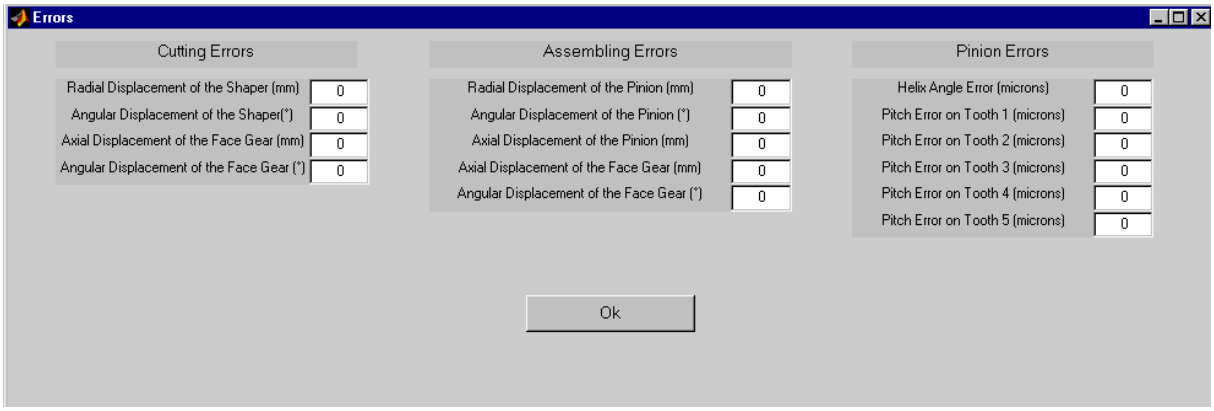


Fig. 6 : Pre-Processor Errors Window

3.2.4 Materials

The Materials window allows to define the characteristics of the materials used for the face gear and the pinion (Fig. 7).

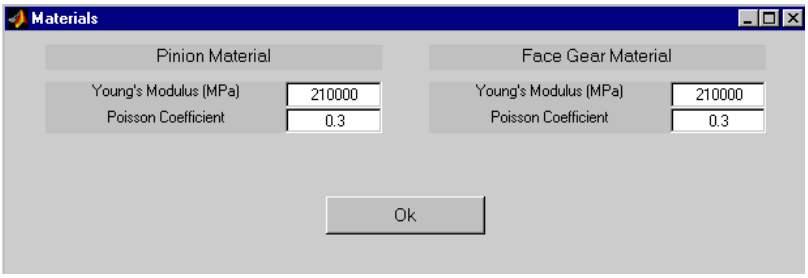


Fig. 7 : Pre-Processor Materials Window

3.2.5 About

The About window gives information on the actual version of Gandalf (Fig. 8).

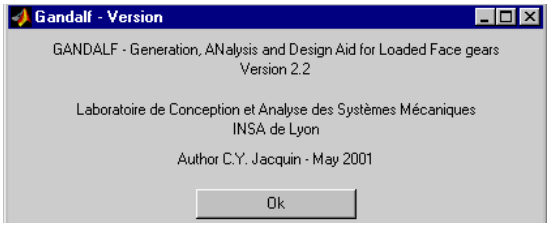


Fig. 8 : Version Window

3.3 Input Data and Input Files

All the data taken into account in the simulation have been discussed and agreed by all partners in January 1999 (cf. FACET-MM-208-1.2/INSA).

Running *Geom* will automatically generate all the input files necessary to the four modules. It is also possible (while not recommended) to fill the input files without using the pre-processor.

There are 4 different input files :

- PATH.DAT contains the path for the directory of the calculation.

- DONNEES.DAT contains all the geometric data needed for the simulation (characteristics of shaper, face gear, pinion, cutting and assembling process).

- PARAM.DAT contains all the non-geometric parameters needed for the simulation (number of points, steps,….).

- MATER.DAT contains the characteristics of the materials

NB : PATH.DAT is located in the same directory than the executable modules. DONNEES.DAT, PARAM.DAT and MATER.DAT are located under the *Data* subdirectory of the calculation directory

3.3.1 Shaper

The shaper used for the simulation of the cutting process is in fact a virtual involute profiled shaper (Fig. 9).
The required data are summarised in the following table :

SHAPER DATA	
Number of teeth	Z_s
Pressure angle (d°)	α_0
Module (mm)	m_0
Helix angle (d°)	β
Helix hand (left or right)	
Addendum modification factor	x
Addendum coefficient	coefs
Addendum (mm)	h_a
Dedendum coefficient	coefc
Dedendum (mm)	h_f
Tip Edge radius (mm) (spur shaper)	r_p
Minimum cutting point radius	r_{dev}

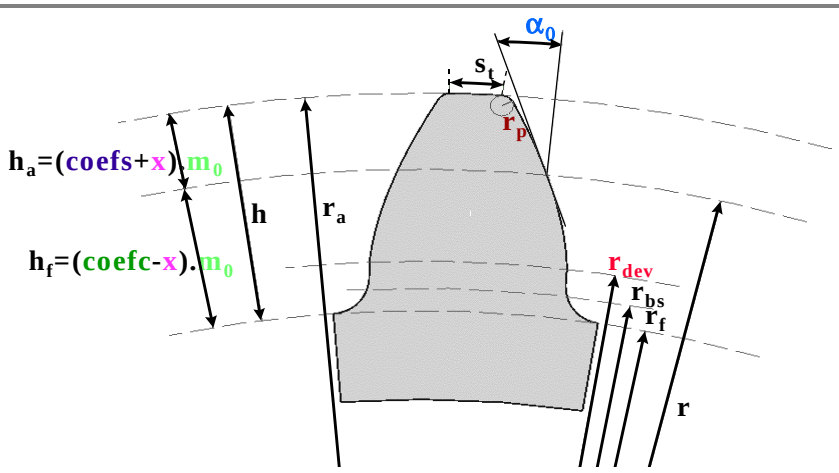


Fig. 9 : Definition of the shaper Geometry

NB 1 : Concerning the addendum (or dedendum) of the shaper, it is possible to give in input either the addendum coefficient or directly the addendum value.
If the coefficient is given, the software takes this data for computation, even if a value of addendum (or dedendum) is given. If the coefficient is set to zero, then the software will take the given value of addendum (or dedendum) in input.

NB 2 : The minimum cutting point radius defines the radius of the shaper point that will cut the tip of the face gear. It depends in reality on the machine setting used to cut the face gear.
If the value is unknown, it is possible to set it to zero in the input file and the software will compute a default value according to :

$$r_{dev} = r_{bs} + \frac{m_0}{50}$$

3.3.2 Cutting Process / Cutting Errors

The data used for the cutting process are the offset C_s and the axis angle γ_s. They are represented on Fig. 10 and Fig. 11 with the cutting errors that might be taken into account :

- Radial displacement of the shaper : δE_s
- Angular displacement of the shaper : $\delta\alpha_s$
- Axial displacement of the face gear : δq_s
- Angular displacement of the face gear : $\delta\gamma_s$

On Fig. 10 and Fig. 11, the blue coordinate system is linked with the face gear, and the red one with the shaper.

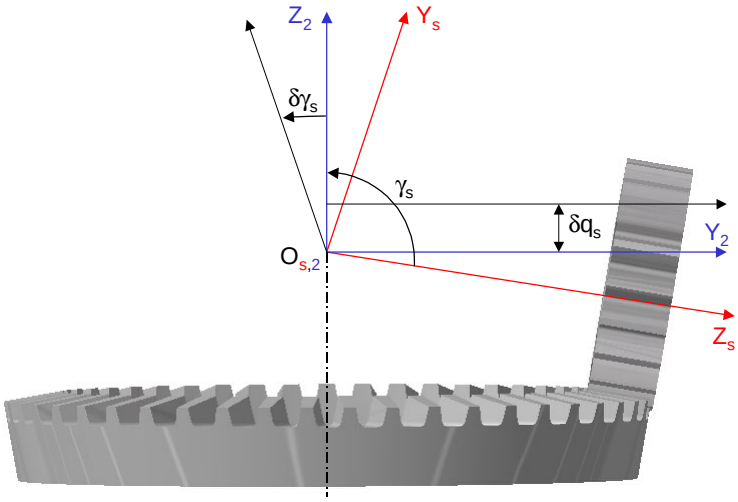


Fig. 10 : Cutting Process Parameters and Errors (1)

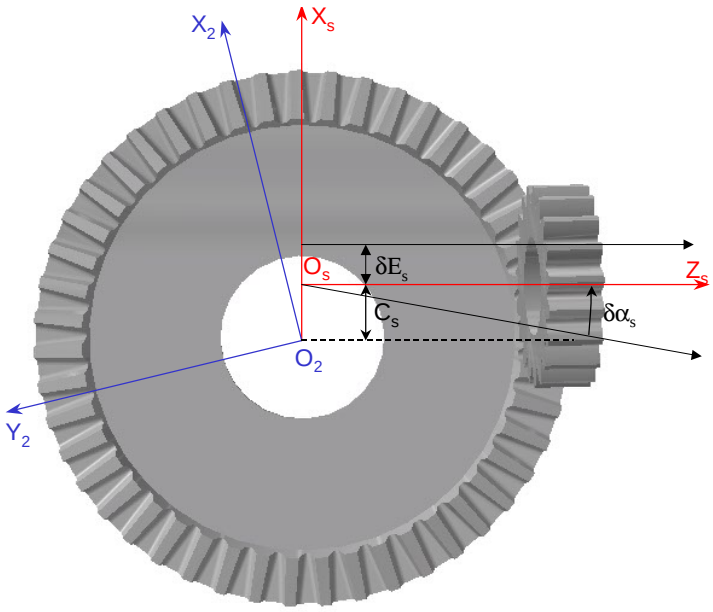


Fig. 11 : Cutting Process Parameters and Errors (2)

3.3.3 Face Gear

The face gear data are the number of teeth Z_2, the inner and outer radii L_1 and L_2 (Fig. 12). The inner and outer radii are defined on tip face gear tooth.

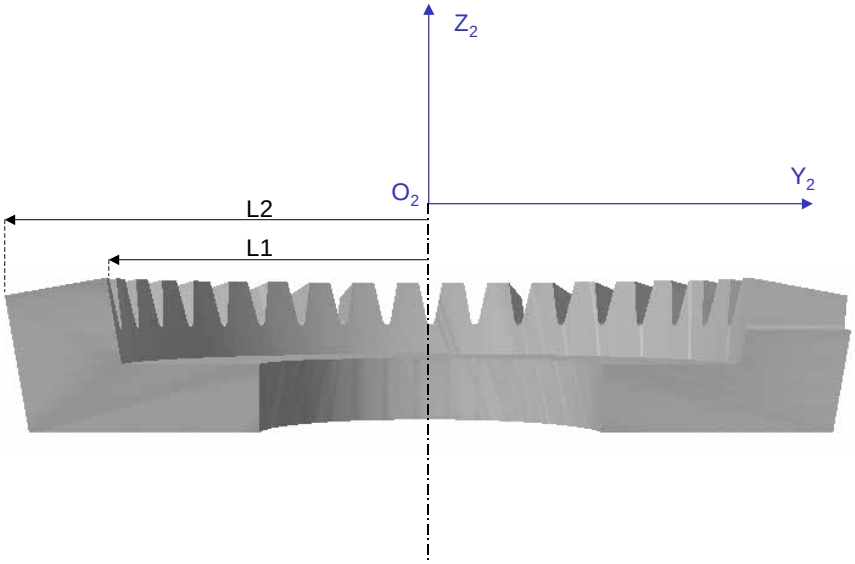


Fig. 12 : Face Gear Parameters

3.3.4 Assembling Process / Assembling Errors

The data used for the assembling process are the offset C_1 and the axis angle γ_1, the mounting distance A and the way of rotation. They are represented on Fig. 13 and Fig. 14 with the assembling errors that might be taken into account :

- Radial displacement of the pinion : δE_1
- Angular displacement of the pinion : $\delta\alpha_1$
- Axial displacement of the pinion : δr_1
- Axial displacement of the face gear : δq_1
- Angular displacement of the face gear $\delta\gamma_1$

On Fig. 13 and Fig. 14, the blue coordinate system is linked with the face gear, and the red one with the shaper.

NB : if the mounting distance is not specified (set to 0), the software will compute the default value according to :

$$A = r_s - r_1$$

where r_s is the pitch radius of shaper and r_1 the pitch radius of the pinion.

Convention for rotation way is as follow :

Way - : face gear is going clockwise,
Way + : face gear is going counter clockwise.

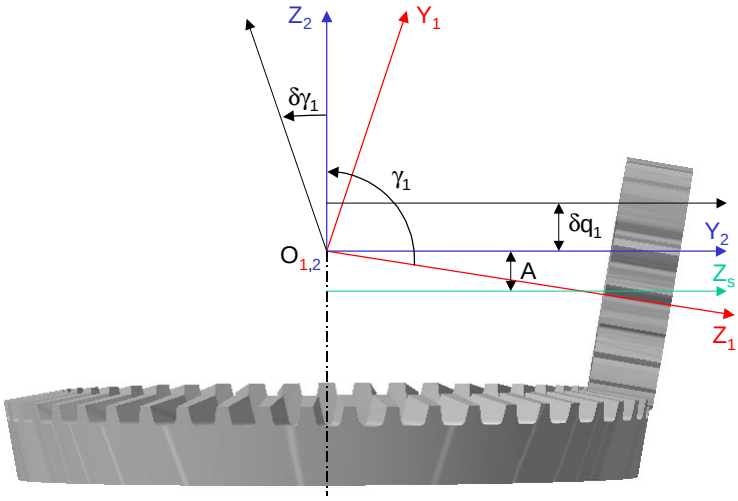


Fig. 13 : Assembling Process Parameters and Errors (2)

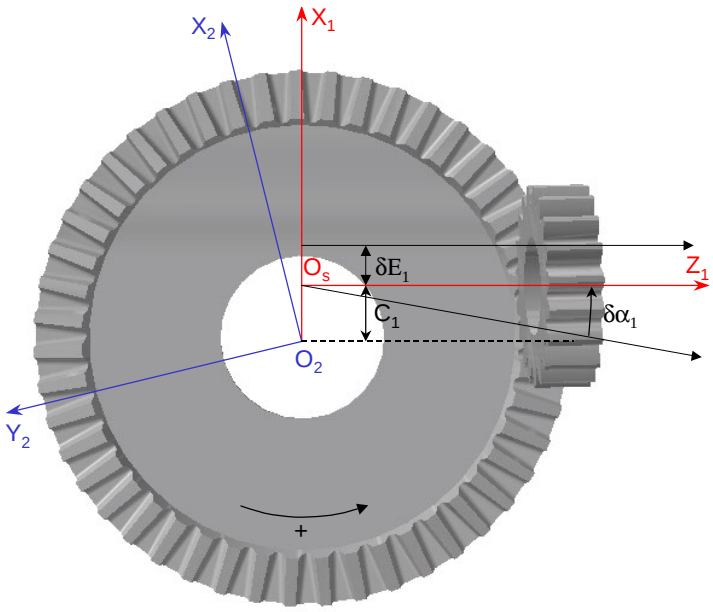


Fig. 14 : Assembling Process Parameters and Errors (2)

3.3.5 Pinion

The pinion used for the simulation is a cylindrical pinion (Fig. 15). The required data are summarised in the following table :

PINION DATA	
Number of teeth	Z_1
Pressure angle (d°)	α_0
Module (mm)	m_0
Helix angle (d°)	β
Helix hand (left or right)	
Addendum modification factor	x
Addendum coefficient	coefs
Addendum (mm)	h_a
Dedendum coefficient	coefc
Dedendum (mm)	h_f
True involute form radius (mm)	r_{dev}
Tooth width (mm)	b

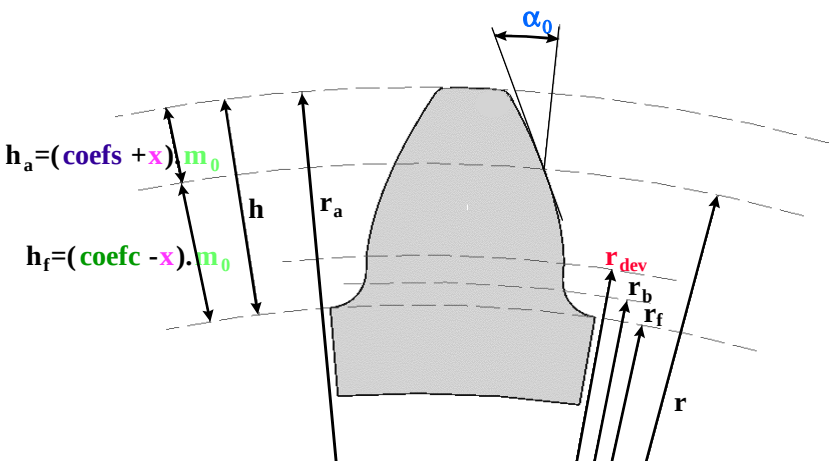


Fig. 15 : Definition of the pinion Geometry

The pinion might have the following errors taken into account : helix angle error and individual pitch error on each tooth.

NB 1 : Like for the shaper, it is possible to give in input either the coefficient or directly the value for the addendum and dedendum.

NB 2 : The true involute form radius defines the real intersection of the active part and the fillet of the pinion. If the value is unknown, it is possible to set it to zero in the input file and the software will compute a default value according to :

$$r_{dev} = r_b + \frac{m_0}{50}$$

3.3.6 Limitations

To ensure a good performance of the software, the available range of some input data is limited. A check of the input data is performed in the module *Geom*. An error message appears if the limits are reached.
The limited data and their range are summarized in the following table :

Parameters	**Minimum value**	**Maximum value**
Shaper / Pinion		
Module (mm)	0	20
Pressure angle (°)	0	45
Helix angle (°)	0	30
Addendum coefficient	0	2
Addendum (mm)	0	40
Dededum coefficient	0	2
Dedendum (mm)	0	40
Addendum Modification factor	-1	1
First Cutting Point (mm)	0	1000
Face Gear		
Inner radius (mm)	0	1000
Outer radius (mm)	0	1000
Cutting / Assembling Process		
Axis angle (°)	70	110
Offset (mm)	-100	100
Mounting Distance (mm)	-100	100
All Errors (° or mm)	-1	1
Geometry Parameters		
Number of Cross-Sections	0	99
Angular Step (rad)	0	1
Reference Cross-Section (mm)	0	Face gear outer radius
Required Topland (mm)	0	1000

4 Post-Processor

4.1 Post-Processor Main Window

The main window of the post-processor (Fig. 16) is very similar to the pre-processor one. All the input data are displayed for information purpose.

The main window allows to visualize different results by pressing on the specific press buttons.

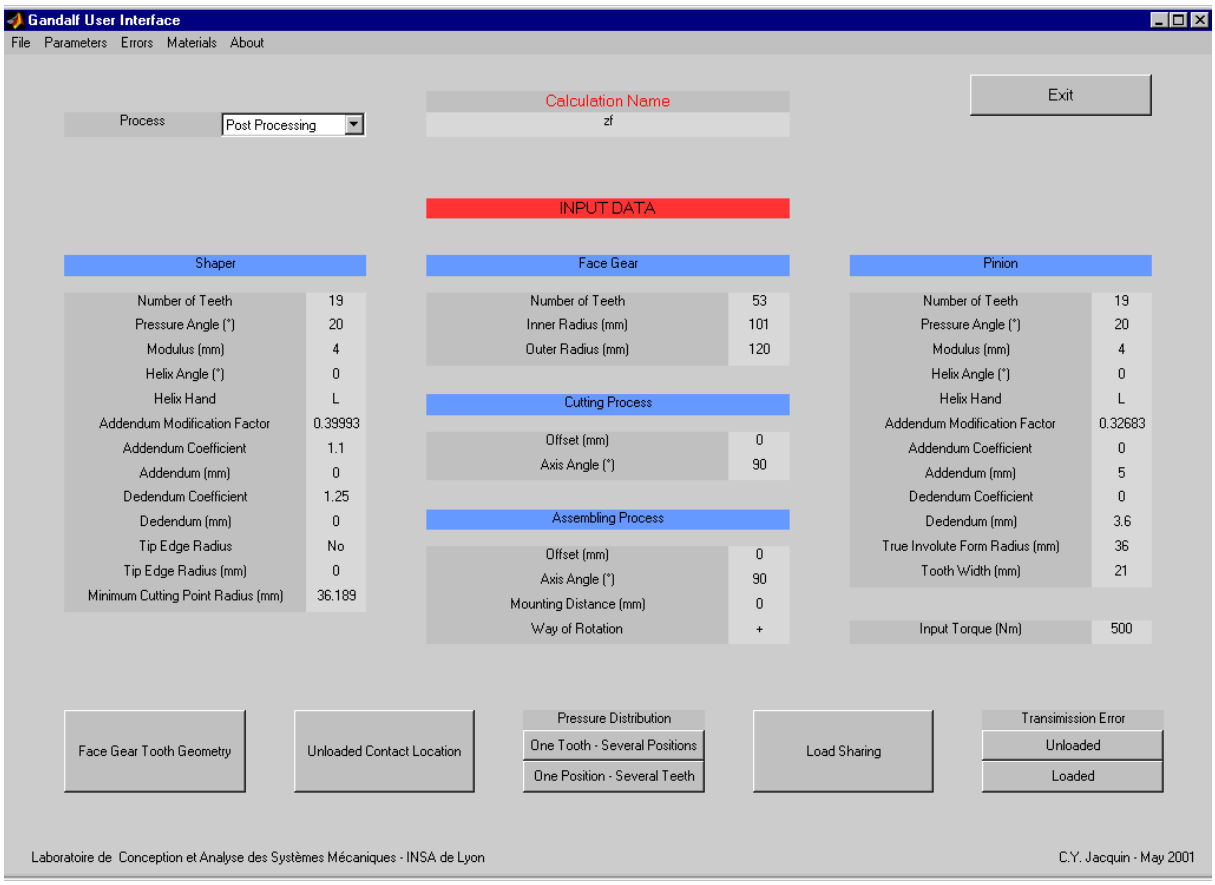


Fig. 16 : Post-Processor Main Window

When launching the postprocessor, a Main Results window (Fig.17) appears. It resumes some useful results of the calculation.

NB : In the whole Post-Processor, LTE means Loaded Transmission Error.

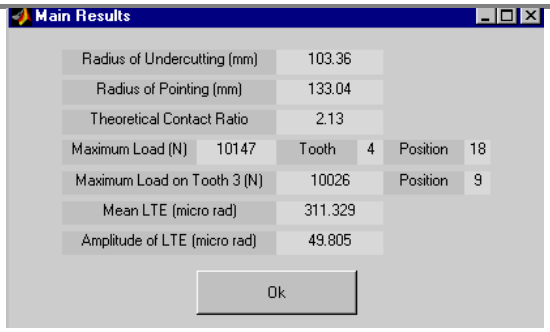


Fig. 17 : Post-Processor Main Results Window

4.2 Other Post-Processor Windows

4.2.1 Face Gear Tooth Geometry Visualization

To visualize the face geometry it is possible to choose to see one, three or five teeth simultaneously (Fig. 18). If the shaft angle was equal to 90°, the geometry of the face gear is defined in cylindrical cross-sections. For all other values of the shaft angle, the sections are conical.

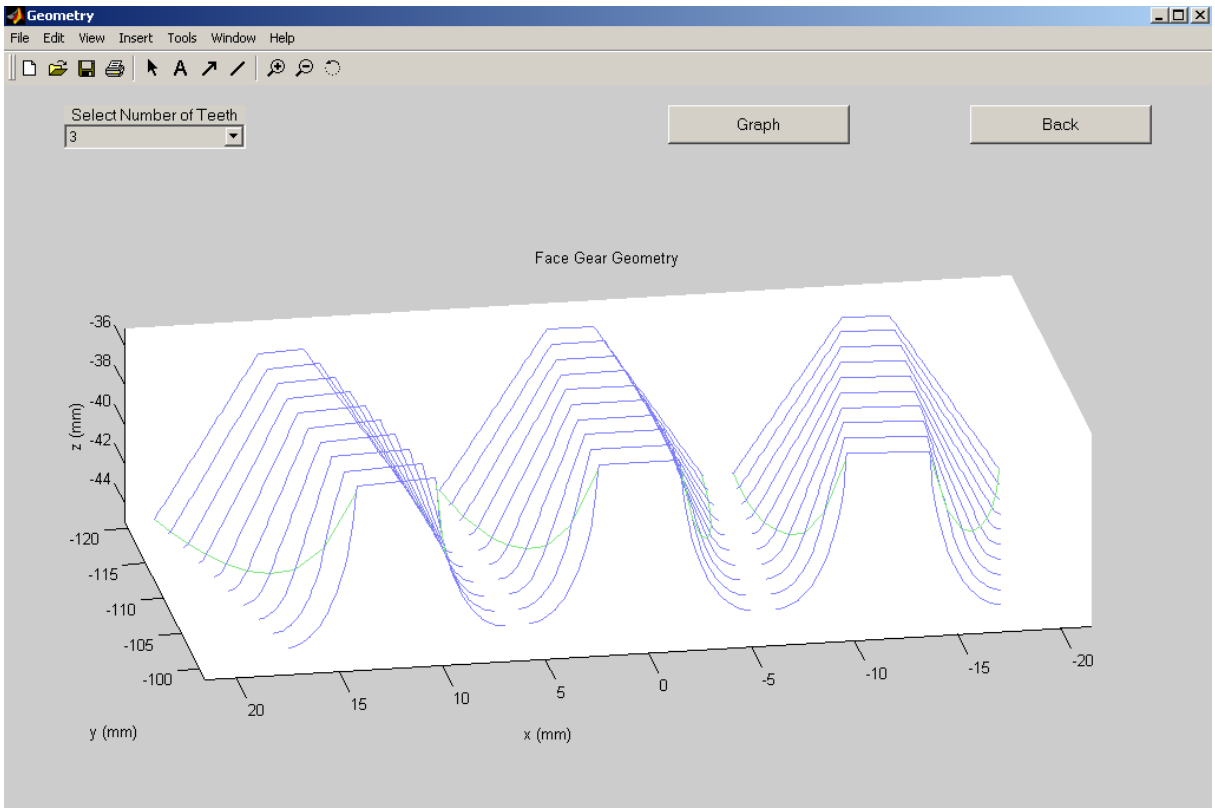


Fig. 18 : Post-Processor Geometry Window

4.2.2 Unloaded Contact Location Visualization

The location of the contact points or lines computed within the unloaded kinematics simulation is represented on five teeth of the face gear (Fig. 19).
The teeth are numbered as specified in TR-210-1.2/INSA. The middle tooth is always the tooth number 3. The two teeth that are in contact before tooth 3 during the meshing are the teeth number 1 and 2. If the rotation way, was +, they are then on the left side of tooth three (Fig. 19), if the rotation way was -, they are on the right. The two last teeth (number 4 and 5) are in contact after tooth 3 during the meshing.

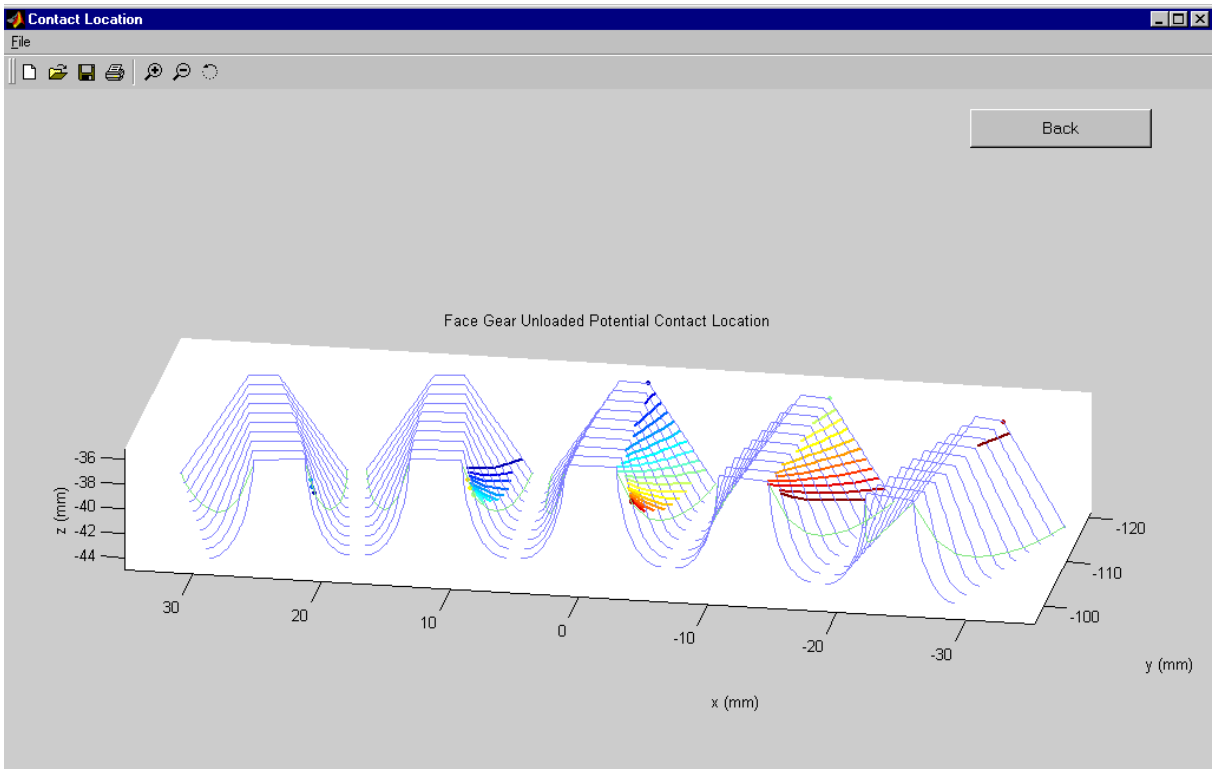


Fig. 19 : Post-Processor Contact Location Window

NB : Each colour correspond to one kinematics position. As the meshing is always studied on the central tooth (tooth 3), position 1 is located on tip of face gear on this tooth (generally at the outer radius), and last position is located on root of face gear (generally at the inner radius).

4.2.3 Pressure Distribution Visualization

Two options might be used to visualize the pressure distribution :

- choose one tooth and visualize the pressure distribution on three successive kinematics positions (Fig. 20). The tooth are numbered as for the unloaded kinematics simulation.

- choose one kinematics position and visualize the pressure distribution on three successive teeth.

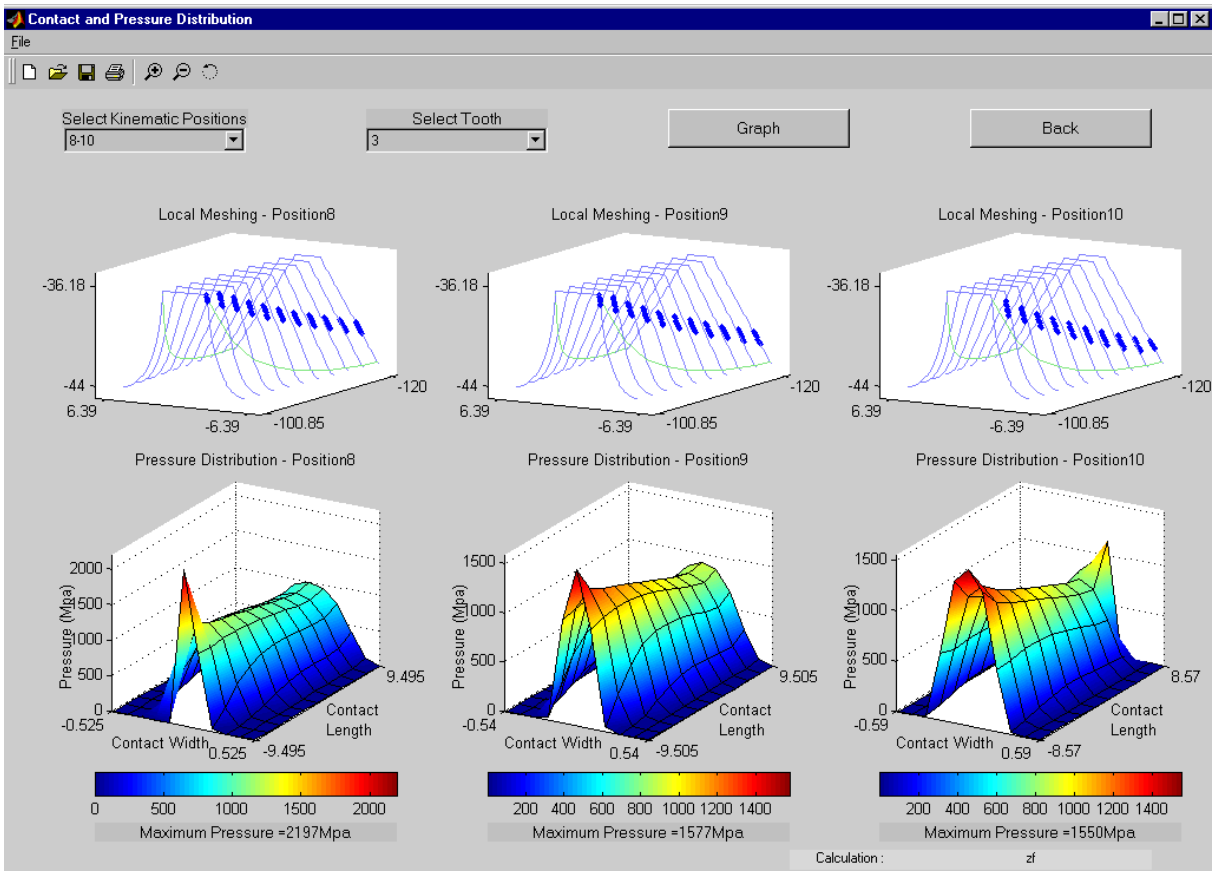


Fig. 20 : Post-Processor Pressure Distribution Window

For each tooth and each kinematics position, two figures are used to visualize the pressure distribution.
The upper figure allows to locate on the tooth the points on which the pressure has been computed.
The lower figure represents the pressure distribution on the contact zone. The contact zone is represented as a rectangle with a length and a width corresponding to the local meshing size.
The origin used to represent the pressure distribution is located on the centre of the contact zone.

4.2.4 Load Sharing Visualization

The load sharing between the five teeth on which the whole simulation has been performed, is represented for all the kinematics positions defined (Fig. 21).

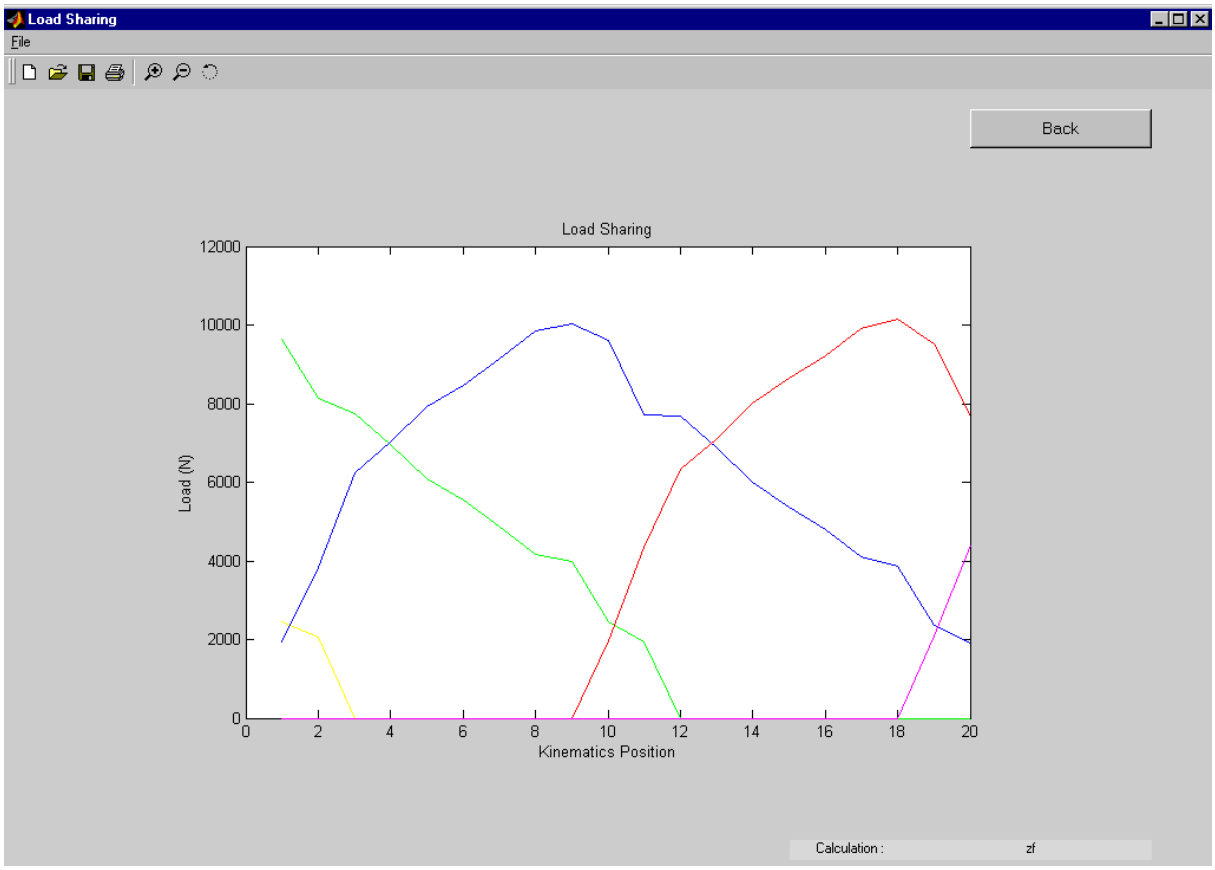


Fig. 21 : Post-Processor Load Sharing Window

4.2.5 Transmission Error Visualization

Two options might be used to visualize the transmission error :

- Unloaded (Fig. 22),
- Loaded (Fig. 23).

The transmission error represented is the one of the middle tooth, i.e. the tooth that is in contact for all the kinematics positions computed. The transmission error is represented versus the face gear rotation angle.

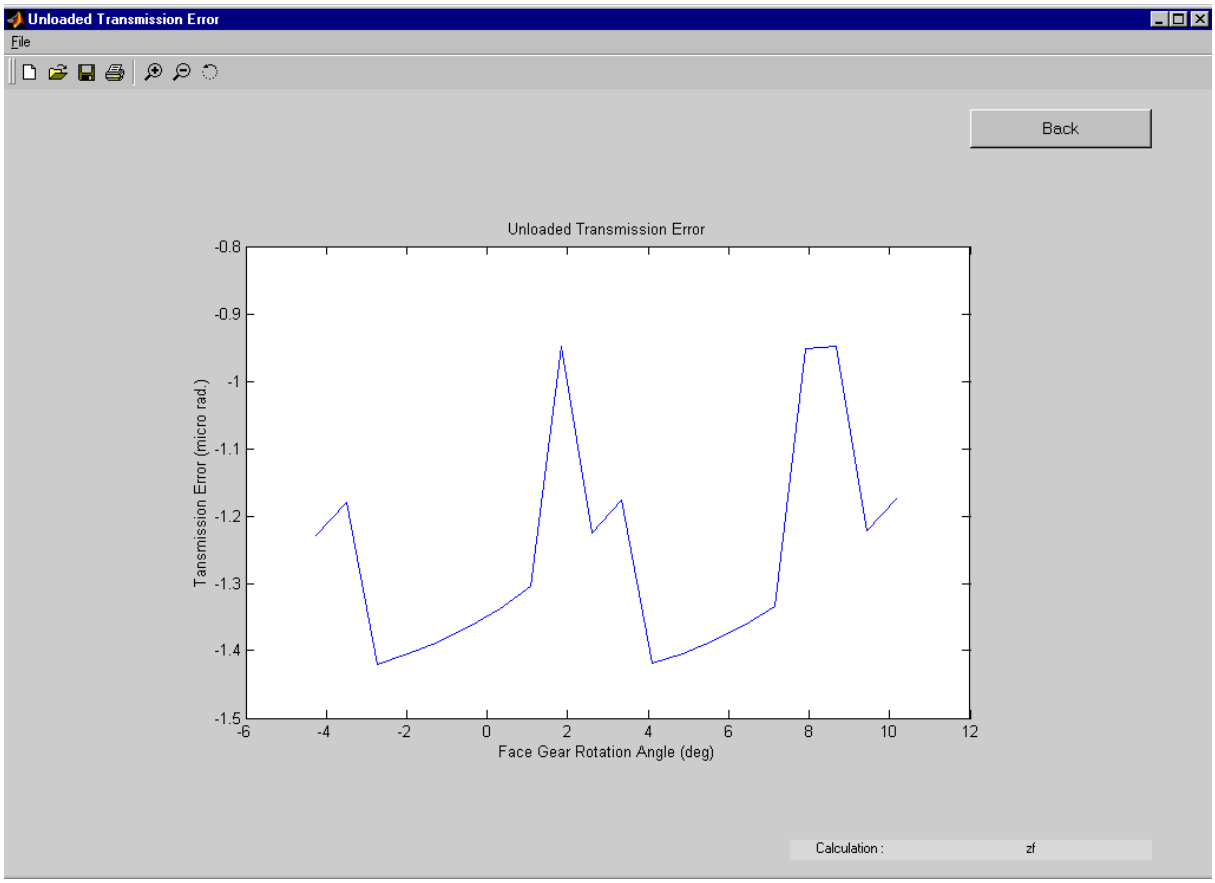


Fig. 22 : Post-Processor Unloaded Transmission Error Window

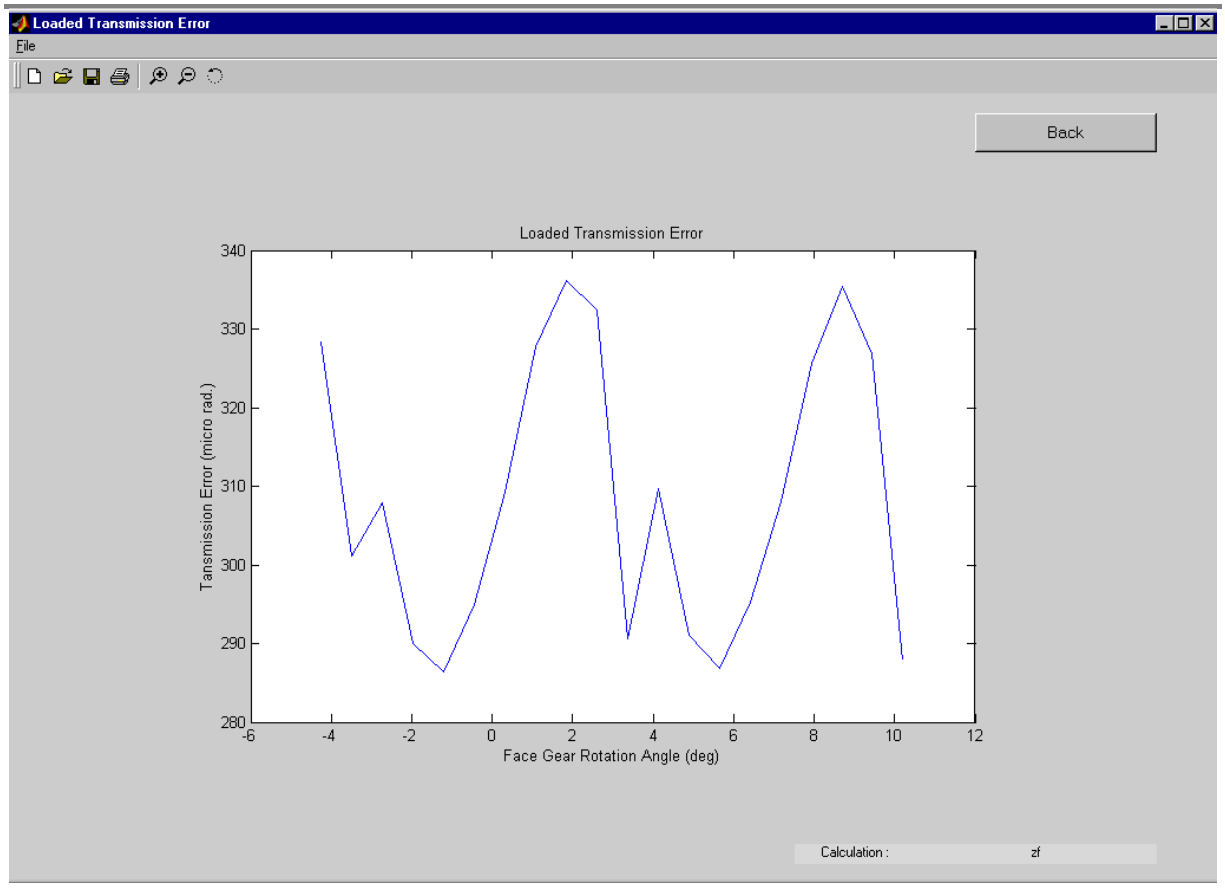


Fig. 23 : Post-Processor Loaded Transmission Error Window

4.3 Output Files

While running each module of Gandalf, everything that is displayed in the MS-DOS prompt is saved in the output file *module*.cal (ie geom.cal, kine.cal, coef.cal and compa.cal). These files are only for information, in order to check that the calculation was ok

NB : the number of output files is quite large, some of the files might now be superfluous, but since some partners might have develop their own F.E. interface, it has been decided not to modify the output files from the beta versions of the software.

4.3.1 Geom

Useful files :

CHARACT.DAT contains some computed characteristics of the shaper, gear, pinion, ...

NBPOIN.DAT contains the characteristics of the face geometry, i.e. the file **POINTS.DAT**.

The first line contains the number of cross-sections used to define the geometry, the inner and outer radii.
The following lines correspond each to one cross-section and contain the number of points of the left fillet, the left active part, the right active part, the right fillet, the total number of points of the whole cross-section, the pressure angle at the left tip of the tooth and the pressure angle at the right tip of the tooth.
The last line contains the theoretical radii of undercutting and pointing.

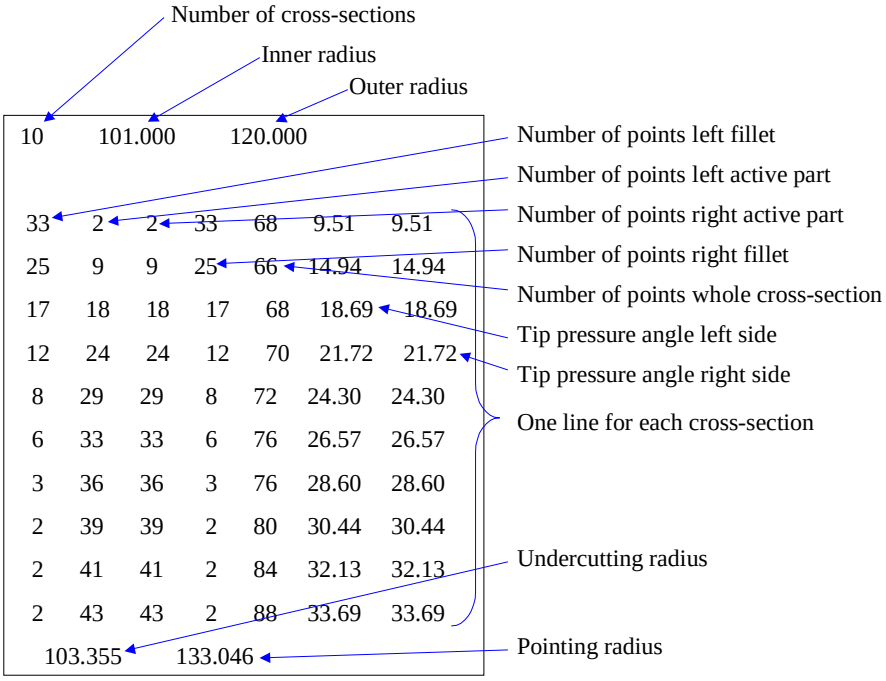


Fig. 24 : Example of NBPOIN.DAT file

POINTS.DAT contains the geometry of the face gear as xyz coordinates in its reference axis system. It begins with the left fillet of the first cross-section (inner radius) and ends with the right active part of the last cross-section (outer radius).

More files :

ACTI01D.DON, ACTI02D.DON, ACTI03D.DON, … contain xyz coordinates of right active part of cross-section number 01, number 02, number 03, ... and the xyz coordinates of the unit normal surface at these points.

ACTI01G.DON, ACTI02G.DON, ACTI03G.DON, … contain xyz coordinates of left active part of cross-section number 01, number 02, number 03, ... and the xyz coordinates of the unit normal surface at these points.

TROC01D.DON, TROC02D.DON, TROC03D.DON, … contain xyz coordinates of right fillet of cross-section number 01, number 02, number 03, ...

TROC01G.DON, TROC02G.DON, TROC03G.DON, …contain xyz coordinates of left fillet of cross-section number 01, number 02, number 03,...

PROF01A.DON, PROF02A.DON, PROF03A.DON, …contain xyz coordinates of cross-section number 01, number 02, number 03,...

PROF01B.DON, PROF01C.DON, PROF01D.DON, PROF01E.DON, PROF02B.DON, PROF02C.DON, PROF02D.DON, PROF02E.DON, … contain xyz coordinates of the 1st, 2nd, …, cross-section for 2 previous on the left (B and C) and 2 next teeth on the right (D and E), looking from the axis of the face gear (this is useful to draw several teeth).

UNDER.DAT contains the coordinates of three points of intersection fillet-active part in the undercutting zone. Kine and coef will use them.

4.3.2 Kine

For the unloaded kinematics simulation the tooth number 3 is the tooth studied. Tooth number 1 is the first to go in contact, so teeth 1 and 2 are before tooth 3 during the meshing. They might be on the left or right side, depending on the rotation way. Teeth 4 and 5 are after tooth 3 during the meshing.

Useful files :

CONTACT.DAT contains the characteristics of the unloaded kinematics simulation.

The first line contains the number of kinematics positions computed.

The second line gives the contact case (0 for contact point, 1 for contact line) and the number of contact points searched along the tooth width.

Then groups of 6 lines correspond to each kinematics positions :

The first one contains the number of the kinematics position, the position angle of the face gear and the pinion.

The next 5 lines contain for each tooth, the number of the tooth and the number of contact points found.

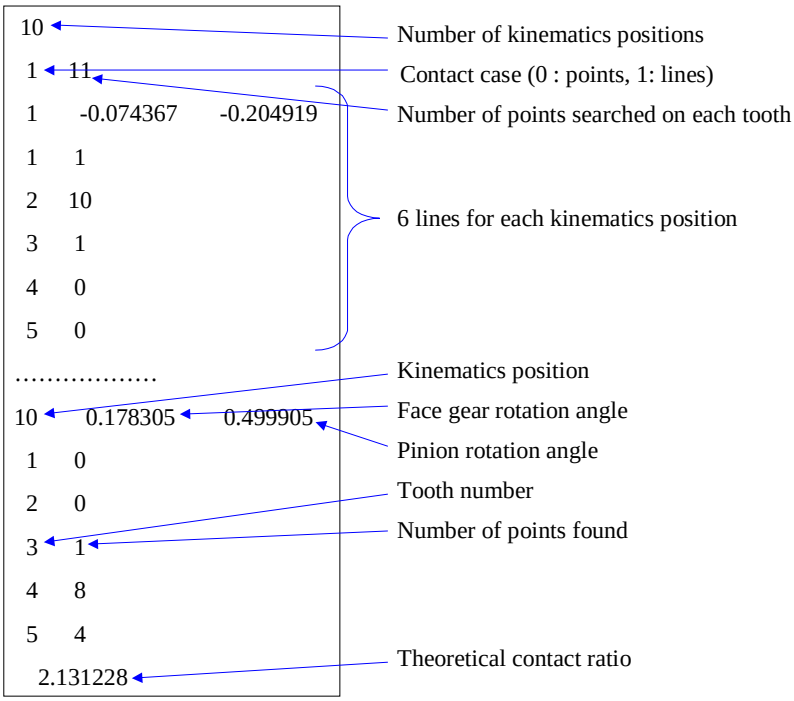


Fig. 25 : Example of CONTACT.DAT file

The last line of the file contains the theoretical contact ratio.

CONTACT1.XYZ and **CONTACT2.XYZ** contain the xyz coordinate of the contact points in the pinion coordinate system (1) and in the face gear coordinate system (2).

NORMAL1.XYZ and **NORMAL2.XYZ** contain the xyz coordinate of the unit normal surface on each contact point in the pinion coordinate system (1) and in the face gear coordinate system (2).

LENGTHS.DAT contains the length of the contact lines for the case of contact lines only. Groups of 5 lines correspond to each kinematics position for the five teeth. Each line contains the position angle of the face gear and the length of the contact line. If the contact line is made from one point only, the length will be equal to zero.

ERTRANS.DAT contains the unloaded kinematics transmission errors, each line corresponds to one position and contains the position angle of the face gear and the kinematics transmission error.

More files :

COEF.DAT contains some geometric data needed as input in *coef*.

KIN2COEF.DAT contains some characteristics of the contact points needed as input in *coef*.

4.3.3 Coef

For each kinematics position and each tooth there are several files. In all names of files, *** corresponds to the number of the tooth (1 number) and the kinematics position (2 numbers). For example CINFS302 corresponds to the tooth number 3, kinematics position number 02. If one tooth is not in contact for this position, the files will not exist.

CISCAR.DAT contains the characteristics of the influence coefficients for surface deformations.

The first line contains the number of kinematics positions.
The second line contains the total load applied.

Then groups of 5 lines correspond to each kinematics position :

> Each line corresponds to one tooth and contains the number of the kinematics position, the number of the tooth, the number of points in the local meshing length (NA), the number of points in the local meshing width (NB), the local meshing length, the local meshing width, the 3 coordinates of the unit normal surface at the reference contact point in pinion system and the 3 coordinates of the unit normal surface at the reference contact point in face gear system.

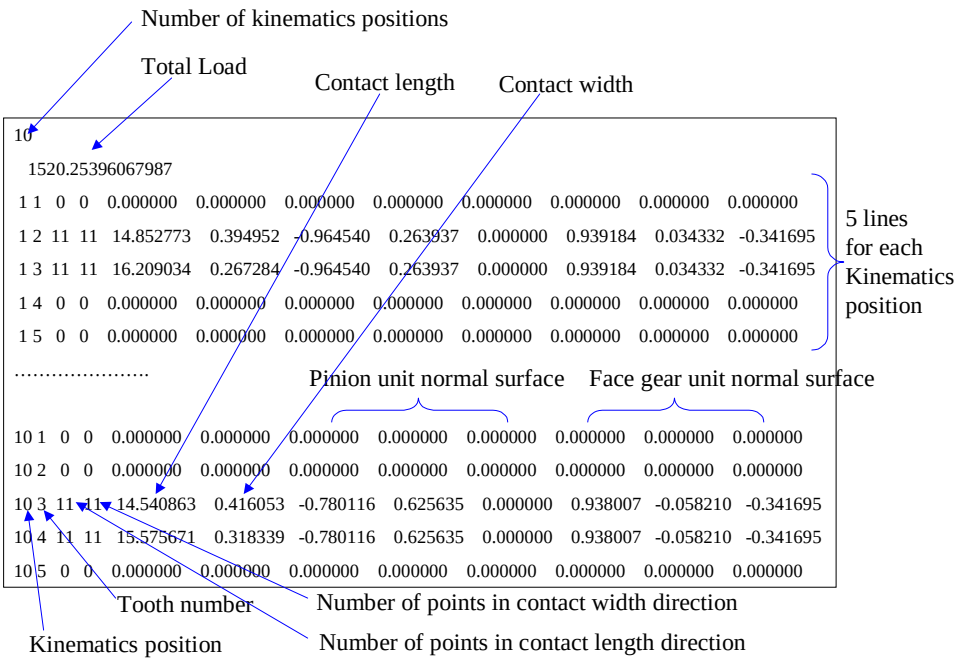


Fig. 26 : Example of CISCAR.DAT file

CINFS*.DAT** contain the influence coefficients for surface deformations for all points of the local meshing.

ECINI*.DAT** contain the initial distance between the surfaces for all points of the local meshing.

MAILCAR.DAT contains the characteristics of the local meshing defined for FE calculation. The first line contains the number of kinematics position.

Then groups of 5 lines correspond to each kinematics position :

> Each line corresponds to one tooth and contains the number of the kinematics position, the number of the tooth, the number of points on which influence coefficients for tooth deflexion are needed for this position.

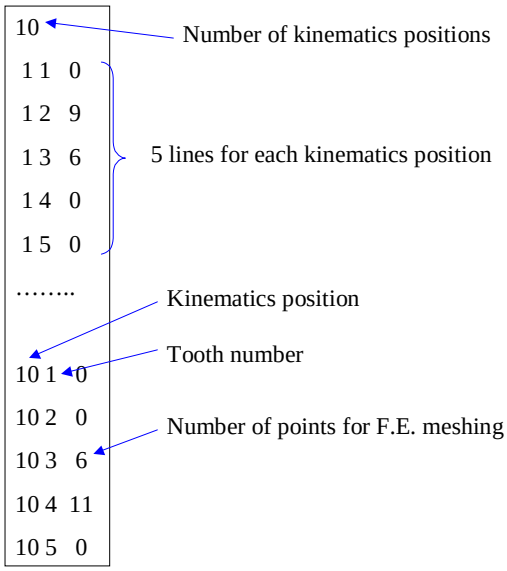


Fig. 27 : Example of MAILCAR.DAT file

MAIL1*.XYZ** contain the xyz coordinates of the points on which influence coefficients for tooth deflexion are needed for this position in the coordinate system of the pinion.

MAIL2*.XYZ** contain the xyz coordinates of the points on which influence coefficients for tooth deflexion are needed for this position in the coordinate system of the face gear.

MAILP*.XYZ** contain the xyz coordinate of the local meshing for surface deformation, i.e. all points on which influence coefficients for surface deformation are computed for this position in the coordinate system of the tangent plane.

FORC1*.DAT** contain the xyz coordinates of the load to be applied on each point on which influence coefficients for tooth deflexion are needed for this position in the coordinate system of the pinion.

FORC2*.DAT** contain the xyz coordinates of the load to be applied on each point on which influence coefficients for tooth deflexion are needed for this position in the coordinate system of the face gear.

SURF*.DAT** contain the surface of the elements of the local meshing.

MESH1*.XYZ** contains the xyz coordinates of the points on which the pressure distribution will be computed for this position in the coordinates system of the pinion.

MESH2*.XYZ** contains the xyz coordinates of the points on which the pressure distribution will be computed for this position in the coordinates system of the face gear.

NB : **MESH1***.XYZ** and **MESH2***.XYZ** contain only the points of the local meshing which are effectively on the tooth surface. These files might hence contain less lines than indicated in the file **CISCAR.DAT**.
For the points which are not on the surface (and hence not in **MESH1***.XYZ** and **MESH2***.XYZ**), the initial distance and the final distance is set to 1000 mm in the files **ECINI***.DAT**).

RADIUS.DAT contains the radii of the reference contact points to compute the loaded transmission error.

4.3.4 F.E. Calculation Results

MAIL1*.XYZ**, **MAIL2***.XYZ**, **FORC1***.DAT**, **FORC2***.DAT** and **MAILCAR.DAT** might be used as input files for the F.E. calculations.

The required output files are **CIF1***.DAT**, **CIF2***.DAT** that contain the influence coefficients for tooth deflexion and must be provided by each partner.

CIF1*.DAT** contain the coefficients for the pinion and **CIF2***.DAT** for the face gear. Each file should correspond to the files **MAIL1***.XYZ** and **FORC1***.XYZ** for the pinion and **MAIL2***.XYZ** and **FORC2***.XYZ** for the face gear.
Each line of **CIF1***.DAT** should contain the x, y and z displacement of one point of the meshing due to the load of another point of the meshing.

In practice, take the first point of **MAIL1***.XYZ**, apply the first load of **FORC1***.XYZ** and write in **CIF1***.DAT** the displacements of all points of **MAIL1***.XYZ** (displacements of one point on each line). Then do the same with the second point of **CIF1***.DAT** and the second load of **FORC1***.XYZ**. Do it for all points and you obtain the right file **CIF1***.DAT**.
The process is the same for the pinion and the face gear.
If the file **MAIL1***.XYZ** is composed of n lines (i.e. the coordinates of n points), then the file **CIF1***.DAT** will contain n*n lines (i.e. the displacements of n points due to a load at n points).

4.3.5 Compa

PRESS*.DAT** contain the pressure at each point defined in **MAILP***.XYZ**.

CHARGE.DAT contains the load sharing.
The first line indicates the number of kinematics position.
Then each line contains the number of the kinematics position and the load on each of the five teeth.

ECFIN*.DAT** contain the final distance between the surfaces for all points of the local meshing.

LOAD1*.DAT** contain the xyz coordinates of the load corresponding to the computed pressure distribution for this position in the coordinates system of the pinion.

LOAD2*.DAT** contain the xyz coordinates of the load corresponding to the computed pressure distribution for this position in the coordinates system of the face gear.

LTE.DAT contains the loaded transmission errors, each line corresponds to one position and contains the position angle of the face gear and the kinematics transmission error.

5 Problems and Tips

5.1 Errors

While running Geom, if the software does not converge correctly, an error number is automatically generated. This errors number might be read in the MS-DOS window or in the file *geom.cal*.

When the software scratches, the first thing to do is to check the input data. Then it is possible to try to change some parameters in order to avoid these errors.

When a problem occurs while computing an helical face gear, for all errors it is always possible to try to change the reference cross-sections in the geometry parameters.
When a problem occurs while computing the fillet using a shaper with a tip edge radius, it is always possible to try to change the value of the tip edge radius.

Other times the solutions are listed in the table above depending on the error number :

Error	Cause of Error	Solution to try
1	Wrong input data	Check input data
3	No convergence for pointing calculation	Change outer
5	No convergence for undercutting calculation	Change inner radius
8	Undercutting radius not found after 1000 iterations	Change inner radius or reference cross-section (helical only)
6	No convergence in calculation of fillet for determination of intersection active part-fillet in case of undercutting	If calculation of first cross-section, change inner radius If calculation of other cross-sections, change number of cross-sections
7	No convergence in calculation of intersection active part-fillet in case of undercutting	
9	Intersection active part-fillet not found	If calculation of first cross-section, change inner radius If calculation of last cross-section, change outer radius If calculation of other cross-sections, change number of cross-sections
10	Last point of fillet not found (sharp edge)	
11	Last point of fillet not found (tip edge radius)	
12	No convergence in active part calculation	
13	No convergence in fillet calculation (sharp edge)	
14	No convergence in fillet calculation (tip edge radius)	
15	Tip edge radius bigger than calculated plain radius	Change tip radius

While running the other modules (kine, coef and compa), there are no listed errors. Sometimes a warning might be displayed on the screen. Warnings are in fact often due to a bad geometry of the face gear or bad input data.
Usually if the geometry of the face gear and the input data are correct, the calculation should run correctly.

5.2 Calculation Tips

Adjust calculation time

The calculation time of Gandalf itself is nearly negligible (no more than 1 minute).

The whole calculation time is strongly dependent of the F.E. calculations. The number of F.E. calculations necessary to obtain the influence coefficients depends of two main input parameters :

- Number of kinematics positions,
- Local meshing size.

Concerning the kinematics simulation, the contact ratio will also increase the number of F.E. calculations.

As the F.E. calculations are performed only on the central line of the local meshing, only the local meshing length discretization is important for the calculation time.
The local meshing length is defined in *kine* in case of contact lines and in *coef* in case of contact points.

For each F.E. simulation, if the partners follow the method develop for the Task 2.1.5 (cf. TR-226-1.2/INSA), it induces in fact 2 F.E. calculations.

Note : the maximal potential number of F.E. calculations is rarely achieved since the number of teeth in contact might vary from one position to the other and the required number of points for the contact width discretization is only reached if the contact zone covers the whole tooth width.

Example of calculation time :

Calculation of ZF face gear with **20 kinematics positions** computed, **11 points** for contact length discretization (calculation provided with the software).

The contact ratio found is equal to 2.13.
For 6 kinematics positions, 3 teeth are in contact simultaneously.
For 14 kinematics positions, 2 teeth are in contact simultaneously.

481 F.E. calculations were necessary for each restrain case (cf. TR-226-1.2/INSA) for the pinion and for the face gear, hence a total of **1924 F.E. calculations** !

Using Catia software for the F.E. calculations, it is possible to run several calculations at the same time. Anyway due to memory limitation there is a maximum number of calculations that might be run at the same time. This calculation was hence split into 8 different models (4 models for the pinion and 4 for the gear).
The face gear and pinion were meshed with standard 20 nodes hexahedron elements, each with around 20.000 nodes.

Each FE calculation (~240 FE calculations at the same time) on a workstation IBM RS 6000 43P Model 150 with1024 Mo Ram, took between 55 minutes and 1hour.

The total calculation time was hence around **8 hours**.

For only 10 kinematics positions, it would have take around 4 hours….
For 20 kinematics positions and 21 points on contact length discretization, it would have take around 16 hours !

Local meshing size

As the F.E. calculation time could be important it is necessary to have the good local meshing size at the first run.

In *coef*, it is possible to adjust the local meshing size. It is strongly recommended to run a whole Gandalf calculation **without** deflexion influence coefficients (it takes less than 1 minute) and visualize the pressure distribution in order to be sure of the local meshing size (especially along the contact width).

If the number of elements on which the pressure is equal to zero is too important, reduce the correction coefficient for local meshing size. If there are no elements with a pressure equal to zero, increase the correction coefficient.

A correct local meshing size occurs when only one row of elements on the edge of the contact zone has a pressure equal or near to zero.

Once the correct local meshing size has been found, the whole calculation **with** deflexion coefficients might be run.

Références bibliographiques

1 Publications personnelles

[1] **JACQUIN C.Y., GUINGAND M., DE VAUJANY J.P, PLAY D.** Tooth geometry of helical face gears. *Proceeding of 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, C.N.I.T Paris-La Défense, France, March 16-18 1999*, 10 p.

[2] **JACQUIN C.Y., GUINGAND M., DE VAUJANY J.P, PLAY D.** Contact analysis of helical face fears. *Proceedings of DETC'00, 8th International ASME Power Transmission and Gearing Conference, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*, [CD-ROM] DETC2000/PTG-14370, 8 p.

2 Rapports personnels

[3] **JACQUIN C.Y., GUINGAND M., PLAY D.** *Geometry of spur and helical face gear drives.* FACET-TR-202-1.2/INSA, Laboratoire CASM, INSA de Lyon, Juin 1998, 37 p.

[4] **JACQUIN C.Y., GUINGAND M., DE VAUJANY J.P., PLAY D.** *Unloaded kinematics simulation.* FACET-TR-210-1.2/INSA, Laboratoire CASM, INSA de Lyon, Octobre 1999, 31 p.

[5] **GUINGAND M., KORNATZ Y., JACQUIN C.Y.** *Influence of parameters on face gear radii and contact ratio.* FACET-TR-223-1.2/INSA, Laboratoire CASM, INSA de Lyon, Mai 2000, 30 p.

[6] **JACQUIN C.Y., GUINGAND M., DE VAUJANY J.P., PLAY D.** *High load and contact pressure meshing simulation.* FACET-TR-226-1.2/INSA, Laboratoire CASM, INSA de Lyon, Janvier 2001, 30 p.

[7] **JACQUIN C.Y.** *Gandalf – User Software Manual*. FACET-TR-230-1.2/INSA, Laboratoire CASM, INSA de Lyon, Mai 2001, 36 p.

3 Ouvrages et thèses

[8] **ALEXIS J.**, *Pratique industrielle de la méthode Taguchi : les plans d'expériences*. Paris : AFNOR Gestion, 1995, 170 p.

[9] **BRONSTEIN I.N., SEMENDIAEV .K.A.** *Aide-Mémoire de Mathématique. Paris :* Editions Eyrolles, 1988, 935 p.

[10] **BUCKINGHAM E.** *Analytical mechanics of gears.* New-York : Dover Publication, 1949, 546 p.

[11] **DE VAUJANY J. P.** *Comportement d'engrenage cylindrique intérieur. Effets de jante et de voile.* Thèse Génie Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, n°96-ISAL-0128, 1996, 178 p.

[12] **GAGNON P.** *Développement d'une méthode de calcul et d'une approche expérimentale pour l'obtention des déplacements en flexion des dents d'engrenages coniques à denture spirale*. Thèse Génie Mécanique : Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval, Québec, 1995, 254 p.

[13] **HENRIOT G.** *Engrenages : conception, fabrication, mise en oeuvre.* Paris : Dunod, 1999, 875 p.

[14] **HILTCHER Y.** *Répartition de charge des engrenages cylindriques*. DEA de Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Laboratoire CASM, 1993, 67 p.

[15] **JACQUIN C.Y.** *Géométrie des engrenages face à dentures droites et hélicoïdales.* DEA de Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Laboratoire CASM, 1998, 82 p.

[16] **JOHNSON K. L.** *Contact mechanics*. New York : Cambridge University Press, 1985, 452 p.

[17] **KALKER J. J.** *Three dimensional elastic bodies in rolling contact*. Solid Mechanics and its Applications, volume 2. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990, 314 p.

[18] **KIM H. C.** *Etude des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la méthode des Prismes Finis.* Thèse Génie Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, n° 96-ISAL-0045, 1996, 152 p.

[19] **LITVIN F. L.** *Development of Gear Technology and Theory of Gearing.* NASA Reference Publication 1406, 1997, 113 p.

[20] **LITVIN F. L.** *Gear Geometry and Applied Theory*. New York : Prentice Hall, 1994, 724 p.

[21] **LITVIN F. L.** *Handbook of Face Gear Drives with a Spur Involute Pinion.* NASA Final Contractor Report CR-209909, 2000, 101 p.

[22] **LITVIN F. L.** *Theory of Gearing.* NASA Reference Publication 1212, 1989, 470 p.

[23] **OLAKOREDE A. A.** *Répartition de charges et résistance en conception d'engrenages cylindriques, application de la méthode des Prismes Finis en CAO.* Thèse Génie Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, n° 90-ISAL-0049, 1990, 157 p.

[24] **REMOND D., SABOT J., VELEX P.** *Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages.* Publications CETIM, 1993, 189 p.

[25] **ROTH K.** *Evolventen – Sonderverzahnungen zur Getriebeverbeserrung*. Berlin : Springer, 1998, 614 p.

[26] **SAINSOT P.** *Analyse du contact entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteur*. Thèse Génie Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989, 205 p.

[27] **TOMA C.** *Conception des Engrenages Face Simulation de la Fabrication et du Fonctionnement.* Thèse Génie Mécanique : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, n°97-ISAL-0067, 1997, 176 p.

4 Publications, articles de périodiques et congrès

[28] **ALTADIS P. C., SAVAGE M., LEWICKI D. G. et al.** On contact analysis in spiral bevel gear transmission. *Proceedings of the Spring National Design Engineering Show and Conference, Chicago, March 2-5 1987,* Stamford : Cahners Exposition Group, 1987, p. 153-187

[29] **AMBRUOSI G., BIANCO G., DELLA CORTE O. et al.** FEM model for the tooth root bending stress analysis of mating helical gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000,* [CD-ROM] DETC2000/PTG-14359, 9 p.

[30] **BAASTEIN G.** Cylkro gears - A new challenge. *Translation from "Antriebstechnik"*, 1994, vol. 33, n° 11, 4 p.

[31] **BAASTEIN G., SIJTSTRA A.** New developpments in design, manufacturing and applications of cylkro-(face) gears. *AGMA Technical Paper 93FTM7,* 1993, 12 p.

[32] **BAASTEIN G.** Calculation, manufacturing and applications of cylkro angular face gear transmissions. *SME, Basic Gear Design and Manufacturing, Detroit, January 26-27 2000,* 8 p.

[33] **BARET C., PIDELO A., RAFFA F. A. et al.** Stress path along the face width in spur gears fillet by 3D P-FEM models. p. 173-179

[34] **BARONE S., BORGIANNI L., FORTE P. et al.** An integrated application of CAD-FEM systems for the analysis of face gear drives. *18 CAD-FEM Users Meeting, Friedrichshafen, Germany, September 20-22 2000,* 8 p.

[35] **BARONET C. N., TORDION G. V.** Exact stress distribution in standard gear teeth and geometry factors. *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME,* 1973, p. 1159-1163

[36] **BIBEL G. D., HANDSCHUH R.** Meshing of a spiral bevel gear set with 3D finite element analysis. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 703-708

[37] **BIBEL G. D., KUMAR A., REDDY S. et al.** Contact stress analysis of spiral bevel gears using finite element analysis. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1995, vol. 117, n° 2 (A), p. 235-240

[38] **BIBEL G. D., REDDY S. K., SAVAGE M., et al.** Effects of rim thickness on spur gear bending stress. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 1994, vol. 116, n° 4, p. 1157-1162

[39] **BLOOMFIELD B.** Designing face gears. *Machine Design*, 1947, p. 129-134

[40] **BORNER J.** Very efficient calculation of the load distribution on external gear sets - the method and applications of the program LVR. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 219-225

[41] **BOSSLER R. B., HEATH G., SHETH V.** Advanced rotorcraft transmission (ART) program status. *Rotary Wing Propulsion Specialist Meeting, American Helicopter Society, Williamsburg, Virginia, October 23-28 1993*, 15 p.

[42] **CELIK M.** Comparison of three teeth and whole body models in spur gear analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, vol. 34, n° 8, p. 1227-1235

[43] **CHAKRABORTY J., BHADORIA B. S.** Surface durability ratings for on center and offset face gears.

[44] **CHANG S. H., CHUNG S. D.** Analysis of the kinematics error of a face gear harmonic drive. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 1998, vol. 19, No 4, p. 359-367

[45] **CHANG S. H., CHUNG S. D., LU S. S.** Tooth contact analysis of face-gear drives. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2000, vol. 42 p. 487-502

[46] **CHANG S. H., HUSTON R. L., COY J. J.** A finite element stress analysis of spur gears including fillet radii and rim thickness effects. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Transactions of the ASME*, 1983, vol. 105, p. 327-330

[47] **CHEN Y.D., HEATH G., GILBERT R. et al.** Advanced Rotorcraft Transmission Development - A Technology Reconversion Program. *American Helicopter Society 51st Annual Forum, Fort Worth, Texas*, 1995, p. 1366-1374

[48] **CHENG Y., LIM T. C.** Dynamics of hypoid gear transmission with non-linear time-varying mesh. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*, [CD-ROM] DETC2000/PTG-14432, 7 p.

[49] **CHUNG S. D., CHANG S. H.** The undercutting and pointing of face gears. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 1998, vol. 21, No 2, p. 181-188

[50] **CHUNG S. D., CHANG S. H., LU S. S.** Analysis of the transmission error of face gear drives. *Proceedings of DETC'97 ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, California, September 14-17 1997*, DETC97DAC3989, 9 p.

[51] **CONRY T. F., SEIREG A.** A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME*, 1971, vol. 38, n° 2, p. 387-392

[52] **CONRY T. F., SEIREG A.** A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems. *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, 1973, vol. 95, n° 4, p. 1115-1122

[53] **CURTI G., RAFFA F. A., GARAVELLI D. et al.** Three-dimensional stress analysis of thin-rimmed gears by the p-FEM approach. *Proceedings of MPT'91 JSME International Conference on Motion and Power Transmission, Hiroshima, November 23-26 1991*, p. 787-794

[54] **DE MUL J. M., KALKER J. J., FREDRIKSSON B.** The contact between arbitrarily curved bodies of finite dimensions. *Journal of Tribology, Transactions of the ASME*, 1986, vol. 108, n° 1, p. 140-148

[55] **DE VAUJANY J. P., KIM H. C., GUINGAND M., et al.** Effects of rim and web on stresses of internal cylindrical gears. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 73-80

[56] **ELKHOLY A. H., ELSHARKAWY A. A., YIGIT A. S.** Effect of meshing tooth stiffness and manufacturing error on the analysis of straight bevel gears. *Mechanics of Structures and Machines*, 1998, vol. 26, n° 1, p. 41-61

[57] **FANG Z., YANG H.** Loaded tooth contact analysis with friction on hypoid gears. *Proceeding of 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, March 16-18 1999*, Paris : MCI, 1999. vol. 1, p. 703-709

[58] **FANG Z., YANG H., ZHOU Y. et al.** Optimization for the dynamic behaviour of high speed spiral bevel gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*, [CD-ROM] DETC2000/PTG-14395, 7 p.

[59] **FRANCIS V., SILVAGI J.** Face gear design factors. *Product Engineering*, 1950, vol. 21, p. 117-121

[60] **GOSSELIN C., CLOUTIER L., NGUYEN Q. D.** A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, vol. 30, n° 3, p. 433-450

[61] **GOSSELIN C., DE VAUJANY J. P.** Loaded tooth contact analysis of spur, helical and hypoid gears based on the finite strips and finite prisms models. *Proceeding of 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris, March 16-18 1999*, Paris : MCI, 1999, vol. 1, p. 29-41

[62] **GOSSELIN C., GAGNON P., CLOUTIER L.** Accurate tooth stiffness of spiral bevel gear teeth by the finite strip method. *Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME*, 1998, vol. 120, n° 4, p. 599-605

[63] **GRENDEL H. F.** Cylkro gears : an alternative in mechanical power transmission. *Gear Technology*, 1996, vol. 13, n° 3, p. 26-31

[64] **GUINGAND M., De VAUJANY J.P., CHEVAL C. et al.** Influence of Design parameters and tooth profile modification for reducing gear transmission error. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000,* [CD-ROM] DETC2000/PTG-14424, 8 p.

[65] **GULLIOT M., TORDION G. V.** Stress analysis of thin-rim spur gears by finite element method. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989,* New York : ASME, 1989. p. 167-172

[66] **HANDSCHUH R. F., LEWICKI D. G., HEATH G. F. et al.** Experimental evaluation of face gears for aerospace drive system applications. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996,* p. 581-587

[67] **HERMENS E., VERSHUREN N.** New transmission components for helicopter applications. *Fifteenth European Rotorcraft Forum,* Amsterdam, 1989, p. 32.008-32.014

[68] **ISHII H., NAGATA S.** Tooth cutting method of face gear by CNC hobing machine. *Proceedings of MPT'91 JSME International Conference on Motion and Power Transmission, Hiroshima, November 23-26 1991,* p. 351-356

[69] **KALKER J. J**. Contact mechanical algorithms. *Communications in Applied Numerical Methods,* 1988, vol. 4, n° 1, p. 25-32

[70] **KALKER J. J.** Mathematical models of friction for contact problems in elasticity. *Wear,* 1986, vol. 113, n° 1, p. 61-77

[71] **KALKER J. J**. Numerical calculation of the elastic field in a half-space. *Communications in Applied Numerical Methods,* 1986, vol. 2, n° 4, p. 401-410

[72] **KALKER J. J.** Two algorithms for the contact problem in elastostatics. *Proceedings of the International Symposium, Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Vancouver, July 6-9 1982,* Waterloo : University of Waterloo Press, 1982, p. 103-120

[73] **KIM H. C., DE VAUJANY J. P., GUINGAND M., et al.** Effects of rim, web and constraint conditions on stresses of external and internal cylindrical gears. *Proceedings of the International Congress, Gear Transmission'95, Sofia, Bulgaria, September 26-28 1995,* vol. 2, p. 164-171

[74] **KIM H. C., DE VAUJANY J. P., GUINGAND M., et al.** Stress analysis of cylindrical webbed spur gears: Parametric study. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME,* 1998, vol. 120, n° 2, p. 349-357

[75] **KIM H. C., DE VAUJANY J. P., GUINGAND M., et al.** Stresses of external and internal cylindrical gears. Effects of rim, web and mechanical constraint conditions. *Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Milan, Italy, August 29-September 2 1995,* vol. 1, p. 565-569

[76] **KRISHNA P. S., BURTON P.** Numerical solution of non-Hertzian elastic Contact Problems. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME,* 1974, p. 1-8

[77] **LEWICKI D. G., HANDSCHUH R. F., HEATH G. et al.** Evaluation of carburized and ground face gears. *American Helicopter Society 55th Annual Forum, Montreal, May 25-27 1999*, 9 p.

[78] **LI J., WANG Z., XU M., WANG S.** Finite element analysis of instantaneous mesh stiffness of cylindrical gears (with and without flexible gear body). *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 15, n° 8, p. 579-587

[79] **LI J., WANG Z., ZHANG G. et al.** Static analysis of bevel gears using finite element method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1998, vol. 14, n° 4, p. 367-380

[80] **LITVIN F. L. ,WANG J. C., BOSSLER R. B., et al.** Face gear drives : design, analysis and testing for helicopter transmission application. *NASA Technical Report 92-C-009*, 1992, 11 p.

[81] **LITVIN F. L., CHEN N. X., HSIAO C. L., et al.** Design, manufacture and applications of face gear drives in helicopter transmissions. *Proceedings of International Gearing Conference, Newcastle, September 1994*, p. 427-432

[82] **LITVIN F. L., DE DONNO M., PENG A., et al.** Enhanced computer aided simulation of meshing and contact with application for spiral bevel gear drives. *NASA Technical Memorandum TM-209438*, 1999, 19 p.

[83] **LITVIN F. L., EGELJA A., TAN J., et al.** Computerized design, generation and simulation of meshing of orthogonal face-gear drive with a spur involute pinion with localized bearing contact. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, vol. 33, n° 1, p. 87-102

[84] **LITVIN F. L., SEOL I. H., KIM D., Lu J., et al.** Kinematics and geometric models of gear drives. *Transaction of the ASME, Journal of mechanical design*, 1996, vol. 118, p. 544-550

[85] **LITVIN F. L., TOWNSEND D. P., HAWKINS M.** Computerized simulation of meshing of conventional helical involute gears and modification of geometry. *NASA Technical Memorandum 107451*, 1997, 20 p.

[86] **LITVIN F. L., ZHANG Y., WANG J. C., et al.** Application of face gear drives in helicopter transmissions. *Transaction of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 1994, vol. 116, p. 672-676

[87] **LITVIN F. L., ZHANG Y., WANG J. C., et al.** Design and geometry of face gear drives. *Transaction of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 1992, vol. 114, p. 642-647

[88] **MANDT D.** Face gears an interesting alternative for special applications – calculation, production and use. *Proceeding of 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, C.N.I.T Paris-La Défense, France, March 16-18 1999*, Paris : MCI, 1999, vol. 2, p. 825-834

[89] **MARSHEK K. M., CHEN H. H**. Discretization Pressure-wear theory for bodies in sliding contact. *Journal of Tribology, Transaction of the ASME*, 1989, vol. 111, n° 1, p. 95-100

[90] **NALLUVEETTIL S. J., MUTHUVEERAPPAN G.** Finite element modelling and analysis of a straight bevel gear tooth. *Computers and Structures*, 1993, vol. 48, n° 4, p. 739-744

[91] **ODA S., NAGAMURA K., AOKI K.** Stress analysis of thin rim spur gears by finite element method. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1981, vol. 24, n° 193, p. 1273-1280

[92] **ODA S., SAYAMA T., FUKUSHIMA Y.** Study on welded structure gears (2nd report, web structures and root stresses distributions). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1981, vol. 24, n° 192, p. 1078-1085

[93] **ODA S., SAYAMA T., SHIMATOMI Y.** Study on welded structure gears (1st report, effect of rim thickness on root stresses and bending fatigue strength). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1980, vol. 23, n° 175, p. 132-139

[94] **OLAKOREDE A. A., PLAY D.** Development of the finite prism method in computer aided design of spur gear. *Proceedings of the fourth SAS World Conference, FEMCAD, Paris, October 17-19 1988*, IITT-International, vol. 1, p. 384-391

[95] **OLAKOREDE A. A., PLAY D.** Load sharing, load distribution and stress analysis of cylindrical gears by finite prism method in a CAD environment. *Proceedings of Design Productivity International Conference, Honolulu, Hawaii, February 3-9 1991*, vol. 2, p. 921-927

[96] **PIAZZA A., UBERTI M.** The combined influence of helix angle and total contact ratio on the p-FEM calculated tooth root stress in cylindrical gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*, [CD-ROM] DETC2000/PTG-14369, 10 p.

[97] **QIN D., YANG Y., HU J. Et al.** Tooth contact analysis of double enveloping hourglass worm gearing on the condition that errors mixed with deformation. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*, [CD-ROM] DETC2000/PTG-14401, 7 p.

[98] **RAO M., RAMA C., MUTHUVEERAPPAN G.** Finite element modelling and stress analysis of helical gear teeth. *Computers and Structures*, 1993, vol. 49, n° 6, p. 1095-1106

[99] **SAVAGE M., ALTIDIS P. C., LEWICKI D. G. et al.** Tooth contact shift in loaded spiral bevel gears. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*, p. 203-212

[100] **SAVAGE M., CALDWELL R. J., WISOR G. D. et al.** Gear mesh compliance modelling. *NASA Technical Memorandum 88843*, 1986, 16 p.

[101] **SAYAMA T., ODA S., UMEZAWA K.** Study on welded structure gears (11th report, optimum structure for thin-rimmed spur gear). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1986, vol. 29, n° 256, p. 3582-3586

[102] **SAYAMA T., ODA S., UMEZAWA K.** Study on welded structure gears (6th report, effects of web arrangements on root stresses and tooth deflection). *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineering*, 1984, vol. 27, n° 230, p. 1773-1779

[103] **SCHIPS C.** Face Gear Application on Helical Power gearbox transmission. *Twentieth European Rotorcraft Forum, Amsterdam, 1994*, p. 122.1-122.13

[104] **SENTOKU H.** Load distribution and tooth root stress of bevel gears. *International Journal of the Japan Society of Mechanical Engineering, series C*, 1999, vol. 42, n° 2, p. 404-409

[105] **SIMON V. V.** Load distribution in cylindrical worm gears. *Proceedings of DETC'00, Baltimore, Maryland, September 10-13 2000*, [CD-ROM] DETC2000/PTG-14400, 9 p.

[106] **SIMON V. V.** Load distribution in double enveloping worm gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions Of the ASME*, 1993, vol. 115, n° 3, p. 496-501

[107] **SIMON V. V.** Tooth contact analysis of mismatched hypoid gears. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 789-798

[108] **SOMPRAKIT P., POURAZADY M., HUSTON R. L.** Effect of fitting parameters on spur gear stresses. *Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, Chicago, April 25-28 1989*, p. 815-822

[109] **STADTFELD H. J.** The concern in design, manufacturing and service of face gears or "crown gears". New York : The Gleason Works, 1999, 14 p.

[110] **SUDOH K., TANAKA Y., MATSUMOTO S. et al.** Load distribution analysis method for cylindrical worm gear teeth. *International Journal of the Japan Society of Mechanical Engineering, series C*, 1996, vol. 39, n° 3, p. 606-613

[111] **TOMA C., PLAY D**. Design of face gears : manufacturing simulation and mechanical behaviour. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 687-692

[112] **VAIDYANATHAN S., BUSBY H. R., HOUSER D. R.** Numerical approach to the static analysis of an annular sector mindlin plate with applications to bevel gear design. *Computers and Structures*, 1994, vol. 51, n° 3, p. 255-266

[113] **VIJAYAKAR S. M.** Edge effects in gear tooth contact. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 205-212

[114] **VIJAYAKAR S. M., BUSBY H. R., HOUSER D. R.** Finite element analysis of quasi-prismatic bodies using Chebychev polynomials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, vol. 24, n° 8, p. 1461-1477

[115] **VIJAYAKAR S. M., HOUSER D. R.** Contact analysis of gears using a combined finite element and surface integral method. *Gear Technology*, 1993, vol. 10, n° 4, p. 26-33

[116] **VON EIFF H., HIRSCHMANN K. H., LECHNER G.** Influence of gear tooth geometry on tooth stress of external and internal gears. *Journal of Mechanical Design, Transactions Of the ASME*, 1990, vol. 112, n° 4, p. 575-583

[117] **WRIGGERS P., SIMO J. C., TAYLOR R. L.** Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems. *Proceedings of the NUMETA'85 Conference, Swansea, January 7-11 1985*, p. 97-106

[118] **YONGPING H., ZHONGKAI E.** Elastic contact finite element analysis of spiral bevel gear meshing. *Proceedings of Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, March 08 1993*, p. 107-111

[119] **ZHANG T.** The calculation of contact deformation for double circular-arc gears. *Proceedings of the 1992 International Power Transmission and Gearing Conference, Scottsdale, September 13-16 1992*, p. 147-151

[120] **ZHANG Y., FANG Z.** Analysis of tooth contact and load distribution of helical gears with crossed axes. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, vol. 34, n° 1, p. 41-57

[121] **ZHANG Y., FANG Z.** Analysis of transmissions errors under load of helical gears with modified tooth surfaces. *Transaction of the ASME Journal of Mechanical Design*, 1997, vol. 119, p. 120-125

[122] **ZHANG Y., WU Z.** Offset face gear drives : tooth geometry and contact analysis. *Transaction of the ASME Journal of Mechanical Design*, 1997, vol. 119, p. 114-119

[123] **ZHANG Y., WU Z.** The tooth geometry and contact analysis of offset face gears. *Proceedings of the 7th International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, October 6-9 1996*, p. 493-500

Table des matières

Avant-propos ***2***

Introduction générale *3*

Chapitre 1 Modélisation numérique du fonctionnement des engrenages Application aux engrenages face ***8***

1 Etudes théoriques **8**
1.1 Premiers travaux 8
1.2 Etudes théoriques fondamentales 11

2 Etudes expérimentales **17**

3 Modélisation du comportement sous charge des engrenages **19**
3.1 Modélisation du comportement élastique 19
3.2 Modélisation du contact entre les dents 23
3.3 Modélisation du partage des charges 25
3.4 Modélisation de la répartition de contraintes 26
3.5 Modélisation globale 26

4 Conclusion **32**

Chapitre 2 Modélisation du comportement sous charge des engrenages face ***33***

1 Introduction **33**

2 Simulation du taillage de la roue face **35**
2.1 Génération de la géométrie de la roue face 35
2.2 Définition de l'outil de taillage 40
2.3 Résolution du problème 44
2.4 Prise en compte des phénomènes de pointe et d'interférence de taillage 47

3 Simulation de la cinématique à vide 49
3.1 Définition de l'engrènement 49
3.2 Définition des zones de contact 50
3.3 Définition du pignon 57
3.4 Résolution du problème 67
3.5 Rapport de conduite et erreur cinématique à vide 71

4 Répartition des charges 72
4.1 Résolution de l'équation de compatibilité des déplacements 72
4.2 Définition des coefficients d'influence 76
4.3 Définition et maillage du plan tangent 81
4.4 Ecarts initiaux 89
4.5 Partage des charges, erreur de transmission sous charge et rigidité d'engrènement 90

5 Conclusion 91

Chapitre 3 Validations 92

1 Introduction 92

2 Validations numériques 93
2.1 Eléments de calcul de la répartition des charges 93
2.2 Comparaison avec d'autres simulations 99

3 Validations expérimentales 109
3.1 Géométrie de la roue face 109
3.2 Portée sous charge 110
3.3 Contraintes en pied de dent 113

4 Conclusion 118

Chapitre 4 Présentation de Gandalf et comportement sous charge des engrenages face 119

1 Introduction 119

2 Présentation du logiciel Gandalf 120
2.1 Résultats à vide 122
2.2 Résultats sous charge 124

3 Comparaison des contacts sous charge 128
3.1 Validité de la modélisation d'un contact ponctuel 128
3.2 Caractéristiques des contacts sous charge 132
3.3 Sensibilité aux erreurs de montage 132

4 Optimisation du pignon 137
4.1 Optimisation de la portée sous charge 137
4.2 Réduction de l'erreur de transmission sous charge 141

5 Conclusion 149

Chapitre 5 Optimisation de la conception des engrenages face 150

1 Introduction 150

2 Optimisation de la géométrie des roues face 151
2.1 Choix des paramètres 151
2.2 Optimisation de la largeur de denture 154

3 Optimisation de l'engrènement à vide 158
3.1 Influence des paramètres de conception sur le rapport de conduite 158
3.2 Déport des engrenages face 162

4 Processus de conception 167
4.1 Définition des macro-paramètres 167
4.2 Définition des micro-paramètres 169

5 Conclusion 171

Conclusion générale 172

Perspectives 174

Références bibliographiques 175

1 Publications personnelles 175

2 Rapports personnels 175

3 Ouvrages et thèses 176

4 Publications, articles de périodiques et congrès 177

Annexes 185

Annexe 1 : Origine, applications et avantages potentiels des engrenages face 185
A1.1 Gamme étendue de rapports de transmission 186
A1.2 Liberté axiale du pignon 187
A1.3 Liberté du choix de l'angle de tête 189
A1.4 Application aux transmissions d'hélicoptères 190
A1.5 Un potentiel controversé 191

Annexe 2 : Eléments de modélisation 192
A2.1 Simulation du taillage 192
A2.2 Simulation de la cinématique à vide 197
A2.3 Répartition des charges 203

Annexe 3 : Méthodes numériques 205
A3.1 Résolution d'un système d'équations non linéaires par la méthode de Newton-Raphson 205
A3.2 Interpolation en carreaux de Coons 207

Annexe 4 : Utilisation des plan d'expériences 208
A4.1 Généralités 208
A4.2 Analyse de variance 208
A4.3 Différents types de plans d'expériences 209

Annexe 5 : Détails des plans d'expériences du chapitre 4 212
A5.1 Sensibilité aux erreurs de montage 212
A5.2 Etude des paramètres du bombé du pignon 213
A5.3 Etude des paramètres des corrections de denture du pignon 214

Annexe 6 : Détails des calculs du chapitre 5 218
A6.1 Plans d'expériences pour l'optimisation de la géométrie 218
A6.2 Comparaison des résultats issus des prédicteurs avec la simulation 222
A6.3 Influence des paramètres sur le rapport de conduite à vide 223
A6.4 Influence du déport sur le rapport de conduite 225

Annexe 7 : Gandalf – User Software Manual 226
1 Introduction 226
2 Installation 227
3 Pre-Processor 228
4 Post-Processor 242
5 Problems and Tips 256

Table des matières 259

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : JACQUIN (avec précision du nom de jeune fille, la cas échéant) Prénoms : Colin-Yann	DATE de SOUTENANCE : 26 Octobre 2001
TITRE : MODELISATION ET OPTIMISATION DU COMPORTEMENT SOUS CHARGE DES ENGRENAGES FACE	
NATURE : Doctorat Formation doctorale : Mécanique	Numéro d'ordre : 01ISAL0045
Cote B.T.U. – Lyon : T50/210/19 / et bis	CLASSE :

RESUME :

Le potentiel des engrenages face suscite l'intérêt des constructeurs aéronautiques. Le programme de recherche européen Facet, dans lequel s'inscrit cette thèse, a pour objectif d'étudier la possibilité d'intégrer des engrenages face dans les transmissions d'hélicoptères.
Cette thèse a consisté à formaliser la modélisation du comportement des engrenages face selon une démarche en trois étapes :

- Définition de la géométrie sous forme analytique,
- Simulation analytique de la cinématique à vide pour déterminer les zones de contact potentielles,
- Comportement sous charge, utilisant un modèle de contact couplé à une simulation par éléments finis afin de ne négliger aucun des aspects fondamentaux régissant les importantes déformations subies par les composants dans une transmission de grande puissance.

La validation, à la fois numérique et expérimentale, de cette modélisation a montré qu'elle était bien adaptée aux conditions actuelles de simulation et répondait parfaitement aux critères technologiques aéronautiques.

L'étude et la comparaison sous charge des deux cas de contact théoriques des engrenages face (linéaire et ponctuel) ont montré leur intérêt respectif. L'extrême sensibilité du contact linéaire aux désalignements a nécessité la mise en place d'un processus d'optimisation du profil du pignon. Ainsi l'équilibrage de la portée sous charge est totalement contrôlé et l'amplitude de l'erreur de transmission réduite, quelles que soient les conditions de montage.

La conception initiale des engrenages face a été considérée à travers l'étude de l'influence des paramètres de conception sur la géométrie et la cinématique à vide. Le rôle déterminant des paramètres fondamentaux a été mis en évidence grâce à une utilisation particulière de plans d'expériences réduits. Un dimensionnement rapide des engrenages face, répondant à des conditions d'utilisation définies, est désormais possible grâce à la mise en place d'un processus de conception optimal.

MOTS-CLES :
Engrenage, Contact quasi statique, Répartition Charge, Erreur transmission, Distribution Pression, Correction denture, Cinématique, Optimisation

Laboratoire(s) de recherches :
CONCEPTION ET ANALYSES DES SYSTEMES MECANIQUES

Directeur de thèse : D. PLAY

Président du jury : G. DEGALLAIX

Composition du jury :
M. GUINGAND, G. DEGALLAIX, J.P. De VAUJANY,J.P. LALLEMAND, P. MARET, D. PLAY, A. POTIRON, M. SARTOR