N^o d'ordre 2006-ISAL-0048 Année 2006

THESE

Dynamique non-linéaire des entraînements par courroies. Analyses théoriques et expérimentales.

Présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

École doctorale : MEGA

Spécialité : Mécanique

par

Guilhem MICHON

Maître ès Sciences, Université Paris XI

Ingénieur en Mécanique, INSA Lyon

soutenue le 25 juillet 2006 devant le jury composé de :

P. ARGOUL	Chargé de Recherche (ENPC - LAMI)	Rapporteur
A. BERLIOZ	Professeur (Université Paul Sabatier, Toulouse)	Président
R. DUFOUR	Professeur (INSA Lyon)	Directeur de Thèse
L. MANIN	Maître de Conférences (INSA Lyon)	Co-encadrant
R.G. PARKER	Professeur (Ohio State University, USA)	Rapporteur
M. POTIER-FERRY	Professeur (Université Paul Verlaine, Metz)	Rapporteur
G. TRANCHON	Diercteur R&D (Valeo)	Invité

Thèse préparée au Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures, INSA-Lyon, UMR-CNRS 5006.

Table des matières

Remerciements 1

Resumé 1

Préambule 3

I Synthèse des travaux 5

1 Introduction 7

2 Modèles non-linéaires des composants mécaniques 13

2.1 Caractérisation de la courroie 13

2.1.1 Caractéristiques longitudinales 14

2.1.2 Caractéristiques transverses 16

2.2 Caractérisation des tendeurs : modèles d'hystérésis 18

2.2.1 Modèle de force de restitution 19

2.2.2 Caractérisation expérimentale 20

2.2.3 Identification 22

3 Dynamique à l'arrêt 27

3.1 Vibrations longitudinales : rôle des comportements hystérétiques . . . 27

3.1.1 Description du système 27

3.1.2 Équations du mouvement 28

3.1.3 Réponse avec le tendeur mécanique 29

3.1.4 Réponse avec le tendeur hydraulique 30

3.2 Vibrations transverses : oscillateur de Duffing à excitation paramétrique 31

3.2.1 Modèle mécanique 32
3.2.2 Analyse expérimentale 35
3.2.3 Validation expérimentale du modèle 36

4 Dynamique en rotation 39
4.1 Méthode de mesure basée sur l'échantillonnage angulaire 40
4.1.1 Principe de mesure 40
4.1.2 Mesure de la différence de phase 42
4.2 Vibrations longitudinales 45
4.3 Instabilités paramétriques d'une transmission soumise à des excitations multi-fréquentielles 47
4.3.1 Modèle mécanique 47
4.3.2 Validation expérimentale du modèle 49
4.4 Rôle du tendeur sur le glissement poulie-courroie 52
4.4.1 Influence du tendeur 52
4.4.2 Influence de la tension de pose 52

Conclusions et perspectives 55

Références bibliographiques 61

II Articles et communications 63

1 Détermination expérimentale des caractéristiques mécaniques de courroies de transmission. 67

2 Hysteretic behavior of a belt tensioner : modelling and experimental investigation. 79

3 An analysis of the Masing and Modified Dahl models. Application to a belt tensioner. 95

4 Duffing oscillator with parametric excitation : analytical and experimental investigation on a belt-pulley system. 143

5 Parametric instability of an axially moving belt subjected to multi-frequency excitations : experiments and analytical validation. 165

6 Mesures des phénomènes non-linéaires dans une façade accessoires d'un moteur thermique. 191

Table des figures

1.1 Façade accessoire de moteur thermique 7
1.2 Évolution schématique de la vitesse vilebrequin 9
1.3 Évolution des vitesses de rotation de l'alterno-démarreur et du vilebrequin (au rapport de réduction près) au cours de la phase d'entraînement 10
1.4 Évolution des vitesses au cours du régime établi de la phase d'entraînement pour deux configurations de face-avant. 11

2.1 Vue en coupe d'une courroie Poly-V 14
2.2 Banc expérimental pour la détermination de la raideur statique. . . . 15
2.3 Banc pour la détermination dynamique des caractéristiques longitudinales. 15
2.4 Évanescence de l'accélération 16
2.5 Facteur d'amortissement adimensionné mesuré pour une courroie discrétisée en dix secteurs 17
2.6 Banc pour la détermination dynamique des caractéristiques longitudinales. 17
2.7 Évolution du carré des trois premières fréquences naturelles d'un poutre en fonction de sa tension, mesure ($\times$, $+$ et $*$), calcul (-) 18
2.8 Tendeur mécanique (a) et hydraulique (b). Vues éclatées (c) et (d). . 19
2.9 Boucle effort-déflexion : Chargement Γ_+, déchargement Γ_-. 20
2.10 Tendeurs mécanique (a) et hydraulique (c) montés sur le banc expérimental d'identification schématisé (b). 21
2.11 Boucles effort-déflexion pour les tendeurs mécanique (a) et hydraulique (b). 22
2.12 Identification du comportement du tendeur mécanique 24

2.13 Identification des courbes asymptotes pour de petites déflexions. . . . 24
2.14 Identification du comportement du tendeur hydraulique 25

3.1 Banc expérimental dynamique : système tendeur-courroie-masse (modèle (b)) avec tendeur mécanique (a) et hydraulique (c). 28
3.2 FRF : Amplitude $|\max(T) - \min(T)|$ fonction de la pulsation Ω pour plusieurs valeurs de f_1. Mesure (a), calcul (b) (ligne pour les valeurs de f_1 identique à l'expérimental, et pointillés pour des valeurs de f_1 supérieures). 30
3.3 FFT des signaux forces et déplacement du tendeur hydraulique mesurés (a) et calculés (b) 31
3.4 Banc expérimental : système à excitations paramétriques 35
3.5 Observation des phénomènes : (a) Flexion mode 1, (b) Flexion mode 3, (c) Torsion mode 1. 37
3.6 Zones d'instabilités paramétriques : Principale (Mesures : balayage croissant $(+)$ et décroissant $(*)$), et calculs $(--$: branche instable, $-$: branche stable), et d'ordre deux (Mesures $(\cdot)$ et calculs $(-)$). . . . 38
3.7 Réponse en fréquence σ pour une force $\varepsilon = 0.17$ (a) et réponse en force ε pour une fréquence $\sigma = 0.38$ (b). Mesures $(+$: balayage croissant, $*$: balayage décroissant), et calcul $(--$: branche instable, $-$: branche stable). , $\alpha = 0.04$. 38

4.1 Banc expérimental reproduisant une façade accessoires de moteur thermique. 40
4.2 Transmission équipée du tendeur mécanique (a) et hydraulique (b). . 41
4.3 Principe de mesure par codeurs optiques 42
4.4 Diagramme de Campbell : domaine temporel (a) et angulaire (b). . . 43
4.5 Méthode de re-échantillonnage : temporel (a), angulaire (b). 43
4.6 Erreur de transmission totale (a) et résiduelle (b) en fonction du temps. 44
4.7 Décomposition des composantes angulaires de la tension courroie et de l'erreur de transmission en fonction de la vitesse de rotation 45
4.8 Modèle de vibrations longitudinales 46
4.9 Exemple d'instabilité dans le brin inférieur 50

4.10 FFT waterfall dans le domaine angulaire : vibration transverse (a), fluctuation de tension dans la courroie (b), fluctuation de vitesses de la courroie (c) 50
4.11 Zones d'instabilités. Calculs (-) et mesures (*). 51
4.12 Influence du tendeur sur le glissement : poulie fixe (-.-), tendeur mécanique (- -), tendeur hydraulique(–). 53
4.13 Influence de la tension de pose sur le glissement (T=300 N (- -), T=200 N (–). Poulie Fixe (a) et Tendeur mécanique (b). 53

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement Régis Dufour, non seulement de m'avoir accueilli au sein du LDMS, mais surtout d'avoir été un formidable directeur de thèse, qui par son recul et son expérience a permis à cette thèse d'être une expérience inoubliable à mes yeux et une inestimable découverte du monde de la Recherche.

Je remercie également Daniel Richard et Georges Tranchon de la société Valeo Systèmes Électriques, pour la confiance qu'ils m'ont accordé en me proposant cette étude.

Lionel Manin, qui a été co-encadrant de cette thèse, a aussi été mon voisin de bureau pendant ces trois années. Sa présence sans faille, ses conseils et son expérience ont forgé entre nous une amitié durable. Je lui exprime ici toute ma gratitude.

Je suis très reconnaissant à Michel Potier-Ferry et à Pierre Argoul, rapporteurs de ce manuscrit, de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail ; ainsi qu'à Alain Berlioz.

I would like to thank Robert Parker for welcoming me in his Vibration Laboratory of the Ohio State University for three months, for his help in non-linear approach and in the writting process. Even if winter is not the best time in Colombus, it has been a very good opportunity to experience the oversea way of research.

Merci également à Karine Stofleth et Julien Quincerot, ingénieurs chez Valeo et acteurs du projet.

Je remercie Didier Rémond et Laurence Renaudin qui ont contribué sans conteste à la réalisation de la partie expérimentale.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Jérome Bastien, pour toutes les discussions animées autour des modèles de Masing et Dahl.

Je n'oublie pas l'ensemble des membres du laboratoire, permanents ou non, sans qui l'ambiance chaleureuse et amicale n'existerait pas. Cette atmosphère contribue tellement au plaisir de se rendre au travail chaque matin. Merci aux étudiants que j'ai pu encadrer au cours de projets ou de TP, nous obligeant à peaufiner nos savoirs et nous permettant d'exercer avec passion ce travail de formation.

Resumé

Le fonctionnement des groupes secondaires d'un moteur automobile dépend en grande partie de la stabilité de son type d'entraînement et de son architecture. Celui-ci met en jeu une courroie, des poulies et des tendeurs sur une façade d'accessoires (FEAD).

Dans le cadre d'une innovation sur les systèmes de démarrage des moteurs thermiques, l'alternateur est converti en alterno-démarreur. Une telle modification impose de considérer les répercussions engendrées sur la dynamique de l'ensemble et notamment sur celle de la courroie, lien souple de transmission dont l'aspect de durabilité est primordial.

Le glissement relatif élastomère/métal, la variation de conditions aux limites entre la poulie et la courroie, le comportement hystérétique des tendeurs, les vibrations transverses d'origines paramétriques sont autant de phénomènes qui rendent le comportement de l'entraînement non-linéaire. La dynamique non-linéaire en tant que discipline trouve dans ce système d'entraînement automobile des applications riches et variées.

La recherche présentée analyse les phénomènes linéaires et non-linéaires liés au comportement dynamique d'une façade d'accessoires. Le caractère de ce manuscrit réside dans une approche systématique d'association du calcul et de la mesure ; ceci pour une compréhension plus fine des mécanismes et de l'entraînement en prenant en compte le couplage des phénomènes non-linéaires. Le travail de thèse a porté sur l'observation et la caractérisation du comportement des composants mécaniques constituant la FEAD, la modélisation et la mesure des comportements d'ensemble lors de la dynamique à l'arrêt et en rotation. L'analyse théorique se base sur les méthodes de Floquet, des Echelles Multiples et de la Balance Harmonique, et l'analyse

expérimentale s'appuie sur l'identification de comportement, sur les techniques de mesures telles que l'échantillonnage angulaire, les plans d'expériences. Les apports de cette recherche sont notamment :

- Mise en évidence des phénomènes à partir de mesures réalisées sur un moteur thermique (vibrations longitudinales et transverses de la courroie, mouvement des tendeurs, glissement relatif poulie/courroie),
- Identification expérimentale et modélisation :
  - des éléments de base aux comportements élasto-plastique et visco-élastique modélisés par l'utilisation originale du modèle de Dahl modifié,
  - des phénomènes de vibrations transverses des brins de la courroie modélisés par un oscillateur de Duffing à excitations paramétriques,
- Réalisation et instrumentation d'un banc d'essai découplant et reproduisant les phénomènes,
- Compréhension du rôle de chaque élément par rapport aux phénomènes observés.

A l'issue de cette recherche, une meilleure connaissance du comportement a permis d'initier le développement d'une solution technologique optimisant le démarrage par alterno-démarreurs et réduisant les niveaux des réponses par une meilleure filtration des vibrations.

Préambule

Le développement d'une innovation technique justifie l'approfondissement des connaissances surtout lorsque les phénomènes observés se révèlent être non-linéaires. Ce manuscrit traduit la synthèse de ces phénomènes autour des approches théoriques et expérimentales. Le lecteur gardera à l'esprit que la trame de ce manuscrit reflète une méthode centrée sur le couplage des modèles et des mesures. Cette démarche est chère à l'auteur. A partir d'une problématique industrielle, en voici la teneur scientifique. Cette thèse se compose de la synthèse des travaux réalisés en première partie, puis en seconde partie, les publications rédigées à l'heure actuelle qui apportent des détails sur les différents aspects de la recherche menée :

- L. Manin, G. Michon, E. Comble et R. Dufour, *Détermination des caractéristiques mécaniques des courroies de transmission*, Revue des composites et matériaux avancés, 2003, Vol. 13(3), pp 317-326. **Section II.1**.
- G. Michon, L. Manin, R. Dufour, *Hysteretic Behavior of a Belt Tensioner : Modeling and Experimental Investigation*, Journal of Vibration and Control, 2005, Vol 11(9), pp 1147-1158. **Section II.2**.
- J. Bastien, G. Michon, M. Manin, R. Dufour, *An analysis of the Masing and Modified Dahl models. Application to a belt tensioner*, soumis au Journal of Sound and Vibration. **Section II.3**.
- G. Michon, L. Manin, R.G. Parker, R. Dufour, *Duffing oscillator with parametric excitation : analytical and experimental investigation on a belt-pulley system*, soumis à l'ASME Journal of Computational Nonlinear Dynamics, 2006. **Section II.4**.
- G. Michon, L. Manin, D. Rémond, R.G. Parker, *Parametric instability of an axially moving belt subjected to multi-frequency excitations : experiments*

and analytical validation, soumis à l'ASME Journal of Applied Mechanics, 2006. **Section II.5**.

- G. Michon, K. Stofleth, L. Manin, D. Rémond, R. Dufour, *Mesure des phénomènes non-linéaires dans la façade accessoire des moteurs thermiques*, Colloque Vibrations, Chocs et Bruits, Lyon, 2004. **Section II.6**.
- G. Michon, L. Manin, A. Al Majid, R. Dufour, *Identification of the non-linear behaviour of a belt tensioner*, Tenth Conference on Non-linear Vibration, Stability, Dynamics of Structures, Virginia Tech, Blacksburg, USA, 2004.
- G. Michon, L. Manin, D. Rémond, R. Dufour, *Rôle des tendeurs sur le comportement dynamique des transmissions par courroie*, Colloque Vibrations, Chocs et Bruits, Lyon, 2006.
- J. Bastien, G. Michon, M. Manin, R. Dufour, *Rheological and restoring force models regarding belt tensioner dymamic behavior : prediction and experiment*, ISMA 2006, International Conference on Noise and Vibration Engineering, Belgique, 2006.
- G. Michon, L. Manin, R.G. Parker, R. Dufour, *Parametric instability of an axially moving belt subjected to multi-frequency excitations : experiments and analytical validation*, Eleventh Conference on Non-linear Vibration, Stability, Dynamics of Structures, Virginia Tech, Blacksburg, USA, 2006.

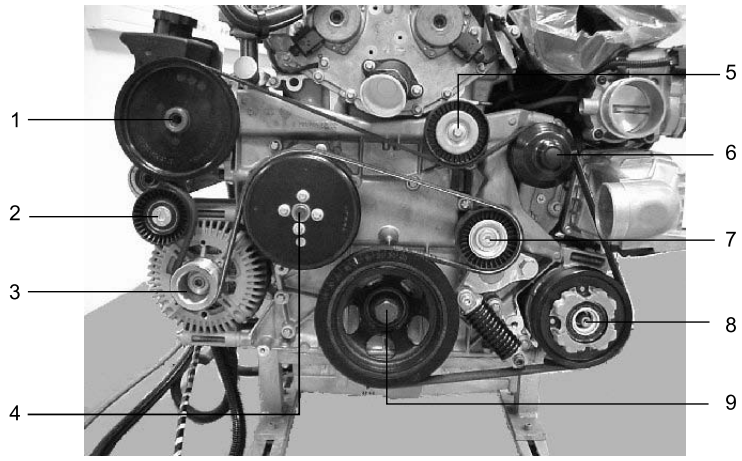
Première partie

Synthèse des travaux

Chapitre 1

INTRODUCTION

Une partie de la puissance générée par un moteur thermique d'automobile est transmise au groupe secondaire par une courroie qui serpente autour des poulies vilebrequin et accessoires (alternateur, compresseur de climatisation, pompe à eau, etc...). Cet ensemble qui constitue la FEAD (*Front End Accessory Drive*) est présenté Fig. 1. Les conditions optimales de fonctionnement dans un espace restreint sont assurées par des galets de renvois et des tendeurs articulés mécaniques ou hydrauliques.



1 direction assistée
2 tendeur mécanique
3 alterno-démarreur
4 pompe à eau
5 galet de renvoi
6 turbo-chargeur
7 tendeur hydraulique
8 pompe de climatiseur
9 vilebrequin

FIG. 1.1: Façade accessoire de moteur thermique

Les normes environnementales européennes de plus en plus drastiques forcent les constructeurs automobiles à concevoir des dispositifs électromécaniques innovants. Ainsi, dans un souci constant de réduction de la consommation d'énergie des véhicules, de récents développements sur la fonction démarrage des moteurs ont abouti à une

évolution des alternateurs classiques : les alterno-démarreurs [CSK05]. La technologie Stop&Go permet l'arrêt et le redémarrage instantané du moteur dans toutes les situations où la voiture est immobile. Elle conduit ainsi à une réduction de la consommation de carburant et de la pollution atmosphérique et sonore. Les alterno-démarreurs assurent le rôle de démarreur du moteur thermique via la courroie serpentine et celui d'un alternateur classique une fois le moteur démarré. Un boîtier d'électronique de puissance gère le passage d'une phase à l'autre. La transmission est ainsi dite réversible puisque les rôles des poulies vilebrequin et alternateur changent au cours du temps. Le principe de l'alterno-démarreur repose sur l'utilisation du même système de transmission pour les phases en modes démarreur et alternateur. Pour optimiser le système de démarrage, une modification des règles de conception de la face-avant est nécessaire. L'impact de l'adaptation de la transmission pour répondre aux besoins du démarrage ne doit pas détériorer le fonctionnement en mode alternateur qui représente la quasi totalité du temps d'utilisation de la transmission. Les composants majeurs concernés sont le vilebrequin, la courroie et les tendeurs. La maîtrise de ces éléments est donc essentielle. Cette inversion de motricité des poulies génère, sur des durées très courtes (de l'ordre du dixième de seconde), des phénomènes transitoires non-linéaires qui nécessitent d'être analysés. L'évolution de la vitesse de rotation du vilebrequin au cours du démarrage se divise en quatre phases principales, voir Fig. 1.2. A vitesse initiale nulle, le système de démarrage initie la rotation du vilebrequin. La vitesse moyenne augmente avec le passage de deux compressions. Lorsque la vitesse de rotation du vilebrequin atteint 200 tr/mn au point-mort haut, les injections débutent dans chaque cylindre jusqu'à se stabiliser dans le régime de ralenti.

Afin d'observer les conséquences d'un alterno-démarreur sur le fonctionnement d'un moteur, une analyse expérimentale est menée sur un moteur thermique quatre cylindres, équipé d'un alterno-démarreur et d'une face avant spécifique (voir Section II.6). Les poulies vilebrequin et alternateur sont instrumentées de codeurs optiques (2500 $raies/tour$) pour la mesure de vitesse de rotation instantanée. Les phases de fonctionnement sont filmées avec une caméra numérique rapide (2000 $images/s$)

La Figure 1.3 représente l'évolution de la vitesse de rotation de l'alterno-démarreur et celle du vilebrequin, multipliée par le rapport de réduction, au cours des deux premières phases du démarrage : la phase transitoire comprenant la mise

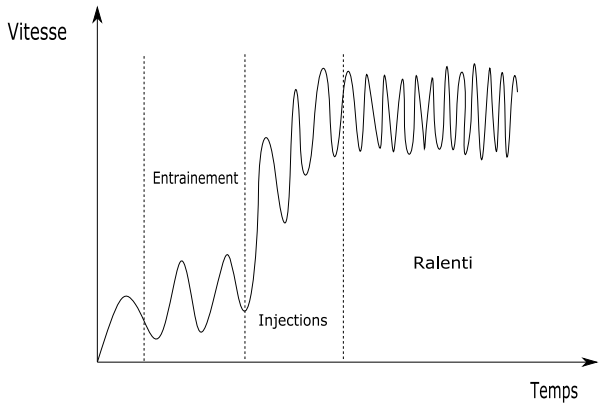


FIG. 1.2: Évolution schématique de la vitesse vilebrequin

en mouvement et le décollement des pistons, puis le régime établi où la vitesse évolue autour d'une valeur constante. L'évolution des vitesses en régime stationnaire et les écarts entre les deux poulies sont très sensibles à la configuration de face-avant installée, voir Fig. 1.4. Les films facilitent l'interprétation les courbes précédentes. La source principale d'excitation dans une transmission automobile est l'acyclisme du moteur thermique qui provient des explosions dans les cylindres, mais également des inerties en mouvement [LB02, Mou01]. Il génère des oscillations de rotation de la poulie vilebrequin. Mouvement des tendeurs, glissement poulie/courroie et vibrations longitudinales de la courroie expliquent les écarts de vitesses entre les deux arbres.

L'analyse des travaux menés sur les transmissions par courroie permet d'apporter des éléments de réponse sur le comportement dynamique observé. Elle identifie deux classes d'étude : l'étude mécanique du contact poulie/courroie et l'étude dynamique de l'entraînement.

La première classe porte sur le contact et le glissement poulie/courroie. Dans le cas de la transmission d'un couple constant entre deux poulies reliées entre elles par un lien souple, des variations de tensions entre les brins supérieur et inférieur existent et permettent la transmission du couple. La transition entre brins mou et tendu s'effectue par l'intermédiaire de la poulie. Il en résulte une variation de déformation de la courroie sur l'arc de contact poulie/courroie impliquant un glissement entre ces deux matériaux. Les premières études remontent à celles d'Euler en 1762 [Eul62] sur une courroie enroulée autour de poulies fixes, et, celles de Grashof [Gra83] sur les

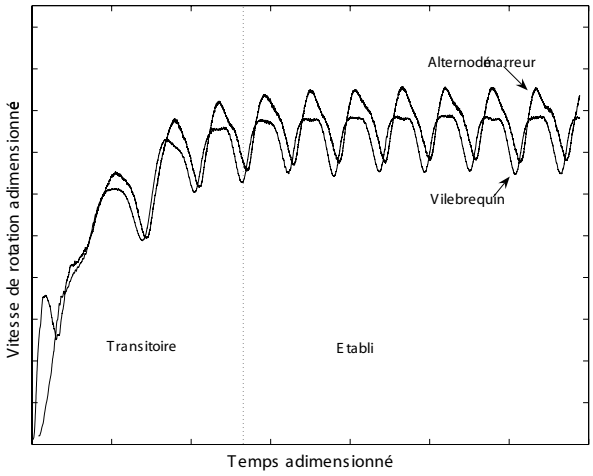
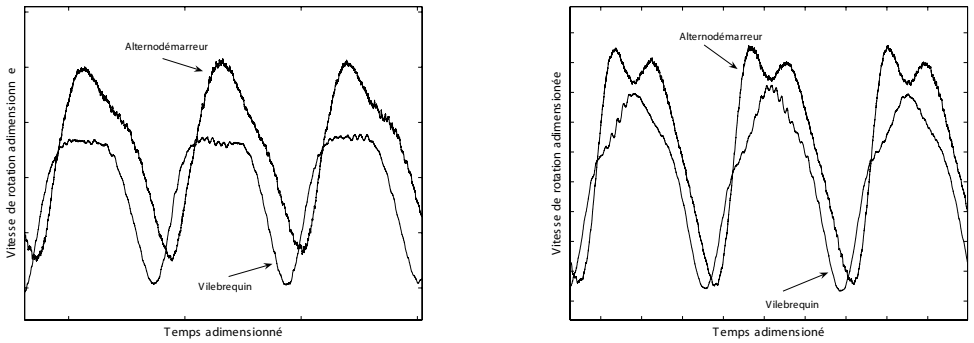


FIG. 1.3: Évolution des vitesses de rotation de l'alterno-démarreur et du vilebrequin (au rapport de réduction près) au cours de la phase d'entraînement

bases des mécanismes de friction des entraînements en régime établi. Ces deux études définissent les bases de la théorie classique du frottement dans laquelle un contact de type Coulomb est supposé entre courroie et poulies. L'arc de contact se divise en deux zones où la courroie, modélisée par une corde, adhère à la poulie au début de l'arc de contact puis glisse sur la seconde partie. Cette approche a été étudiée par Johnson [Joh85], affinée par Betchel en 2000 [BVJC00] avec la prise en compte des effets inertiels, et, validée expérimentalement par Gerbert [Ger81, GS02].

La deuxième classe, plus récente, est axée sur les modes de vibrations des entraînements excités par les fluctuations de couple du vilebrequin. Ces vibrations sont de deux types. Elles ont débuté par l'étude des modes de torsion des poulies (aussi appelés modes longitudinaux de la courroie) en 1989 par Gasper et Hawker [GH89, Haw91], puis par Arbate [Arb92]. Par ailleurs, d'autres études se sont progressivement orientées vers l'étude des vibrations transverses. Leurs origines proviennent d'une excitation directe liée à l'excentricité d'une poulie, ou paramétrique liée à la fluctuation de couple du vilebrequin conduisant à des instabilités de type Mathieu [Wic92, MPU96, JP03]. La prise en compte des tendeurs débute par des modèles simplifiés qui estiment un amortissement visqueux équivalent [UWH85, HPUM94], puis se spécifient en considérant le frottement sec présent dans ces systèmes [LP98, KI00]. Beikmann et al. [BPU97] ont démontré un couplage linéaire entre les modes de tor-



(a) (b)

FIG. 1.4: Évolution des vitesses au cours du régime établi de la phase d'entraînement pour deux configurations de face-avant.

sion et transverses pour les brins adjacents au tendeur. Un nombre important de publications dans ce domaine a été initié dans le laboratoire du Pr. C.D. Mote de l'Université de Berkley en Californie, qui a notamment dirigé les thèses de Perkins, Mockensturm et Parker.

Les deux classes présentées ont peu de liens entre elles à cause de l'absence d'excitation dynamique dans les études du contact poulie/courroie. Les travaux de Leamy tentent d'y pallier à l'aide d'un code de calcul par élements finis [LW02b, LW02a].

Peu de références bibliographiques font l'objet d'exploitations de résultats expérimentaux sur des systèmes d'entraînements automobiles. L'objet de cette étude est d'enrichir leur compréhension par la confrontation des modèles théoriques et des mesures expérimentales. Ainsi, l'orientation de ces travaux de recherche est de saisir et maîtriser les phénomènes vibratoires présents grâce à :

- l'identification du comportement dynamique de la courroie par le modèle de Voigt-Kelvin et des tendeurs par un modèle original de Dahl modifié,
- la mise en évidence des phénomènes de vibrations longitudinales et transverses des brins de courroie, modélisés par des oscillateurs de Duffing à excitation paramétrique,
- l'étude de l'interaction des composants sur les phénomènes détectés autour d'un système en rotation.

Chapitre 2

MODÈLES NON-LINÉAIRES DES COMPOSANTS MÉCANIQUES

Courroies et tendeurs sont des composants au comportement élasto-plastique et visco-élastique. Ce chapitre propose des méthodes d'identification et de modélisation de ces éléments de conception complexe par les modèles de Voigt-Kelvin et de Dahl modifié. Voir également les articles présentés en Sections II.1 et II.2.

2.1 Caractérisation de la courroie

Les courroies sont des liens souples constituant l'élément principal de la transmission du groupe secondaire d'un moteur automobile. La recherche constante d'optimisation des performances les amènent à être définies de plus en plus finement car leur rôle sur le comportement dynamique des transmissions qu'elles entraînent est important. Par conséquent la mesure de leurs caractéristiques mécaniques (raideurs longitudinale et transverse et amortissement) est nécessaire pour mieux appréhender leur comportement [Ger99].

La courroie poly-V est une courroie striée dans le sens de la longueur, Fig. 2.1. Elle assure une transmission par adhérence, et présente, à largeur égale par rapport aux courroies plates et trapézoïdales, une surface de contact optimale pour transmettre plus de puissance. Sa faible épaisseur permet de définir des chemins de courroie sinueux laissant plus de flexibilité dans le positionnement des poulies accessoires d'une face-avant. Elle possède un très large spectre d'application et existe en quatre types de profils différents.

FIG. 2.1: Vue en coupe d'une courroie Poly-V

La structure de la courroie est caractérisée par :

- le dos de la courroie, réalisé en caoutchouc renforcé de fibres tissées pour obtenir une bonne rigidité latérale,
- les V, constitués d'un élastomère qui donne une adhérence optimale à la courroie,
- les renforts (câbles sans fin), une armature en textile à hautes performances pour permettre le passage de la puissance ;
- les caoutchoucs, associés à un mélange résistant fortement à l'abrasion.

Deux approches sont utilisées pour la détermination du module de rigidité longitudinal EA : chargement statique et dynamique, [MMCD03]. Le module de rigidité de flexion EI est déterminé par l'analyse des vibrations transverses d'un brin de courroie. Les caractérisations locales et globales sont distinguées.

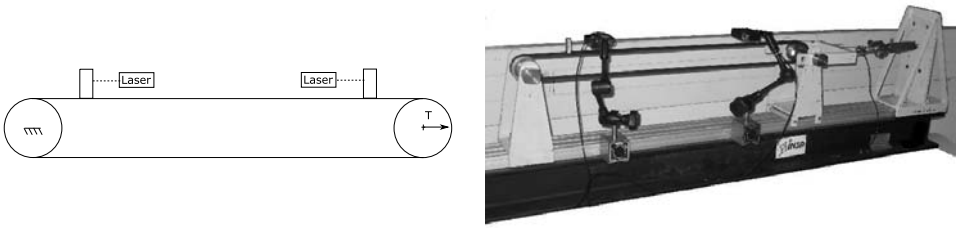
2.1.1 Caractéristiques longitudinales

Approche statique

La première méthode pour déterminer le module de rigidité EA consiste à tendre une courroie entre deux poulies à l'aide d'un système vis-écrou. Des cibles distantes d'une longueur L, perpendiculaires à l'axe de la courroie sont placées à chaque extrémité du brin supérieur, sur lesquelles pointe le faisceau d'un capteur de déplacement laser, voir Fig. 2.2. La variation de longueur entre les deux cibles ΔL est tracée en fonction de la tension statique P_s. La loi linéaire effort/allongement $P_s = EA\Delta L/L$ permet d'évaluer le module de rigidité statique (environ 150 000 N pour une courroie de type 6PK).

Approche dynamique

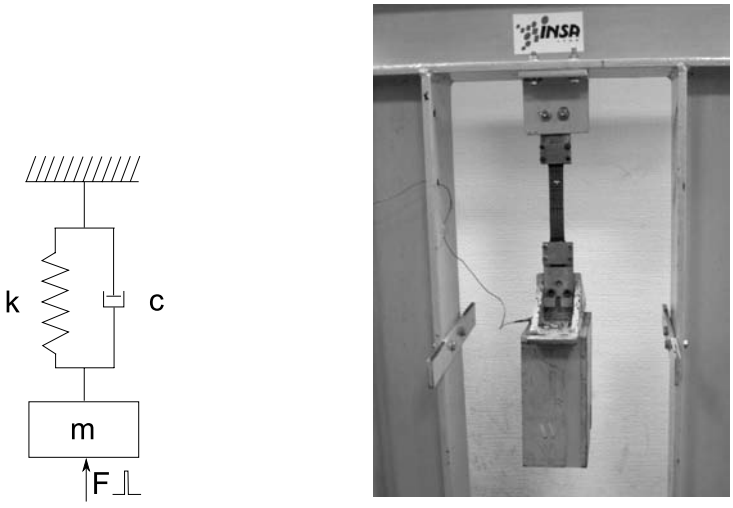
La seconde méthode permet d'accéder simultanément à la mesure du module



(a) (b)

FIG. 2.2: Banc expérimental pour la détermination de la raideur statique.

de rigidité dynamique et du facteur d'amortissement de la courroie pré-contrainte [LBDH84]. Une masse m, représentative de la tension, est suspendue à l'extrémité basse d'un brin de courroie de longueur L encastré à son extrémité haute. La réponse impulsionnelle de ce système dynamique à un degré de liberté est enregistrée par un accéléromètre placé sur la masse, voir Fig. 2.3. La détermination de la pulsation des



(a) (b)

FIG. 2.3: Banc pour la détermination dynamique des caractéristiques longitudinales.

oscillations ω conduit à la raideur dynamique : $k = \omega^2 \cdot m$. L'évolution des maxima et leur régression par une fonction exponentielle conduit au facteur d'amortissement

α. Dans le cas d'une excitation forcée de type harmonique, le module de rigidité

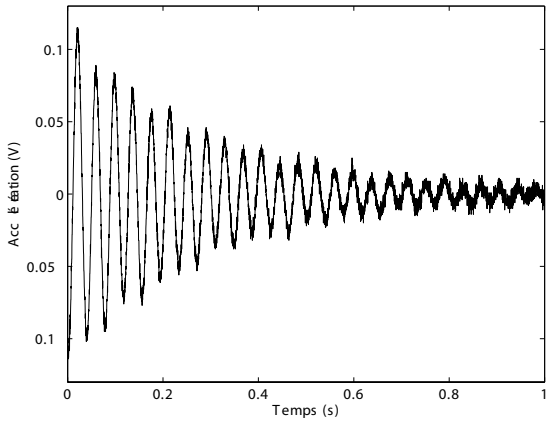


FIG. 2.4: Évanescence de l'accélération

longitudinale et le facteur d'amortissement peuvent être évalués par un balayage en sinus.

Si le brin est l'ensemble de la courroie, on parlera de caractéristiques globales, alors que si le brin est une portion de la courroie, on parlera de caractéristiques locales. Une courroie entière est divisée en dix secteurs de même longueur. La Figure 2.5 représente l'évolution relative du taux d'amortissement mesuré pour chacune de ces dix portions. Des écarts importants du facteur d'amortissement local par rapport à la valeur moyenne (ou globale) sont observés. Il est montré par la suite que cette irrégularité d'origine manufacturière est à l'origine de phénomène d'instabilité (cf Section 4.3).

2.1.2 Caractéristiques transverses

Un test d'impact transverse est effectué sur un brin de courroie dont la vibration latérale est enregistrée par un capteur laser pour plusieurs tensions statiques, voir Fig. 2.6.

Le carré de la n^{ime} fréquence naturelle ω_n^2 d'une poutre sans vitesse, de longueur L, prétendue, en appui simple est une fonction affine de sa tension P_s :

$$\omega_n^2 = EI\frac{n^4\pi^4}{\rho AL^4} + \frac{n^2\pi^2}{\rho AL^2}P_s \tag{2.1}$$

où EI représente le module de rigidité transverse, ρ la masse volumique et A la section du brin. Figure 2.7, cette évolution est comparée à la mesure pour les trois premières

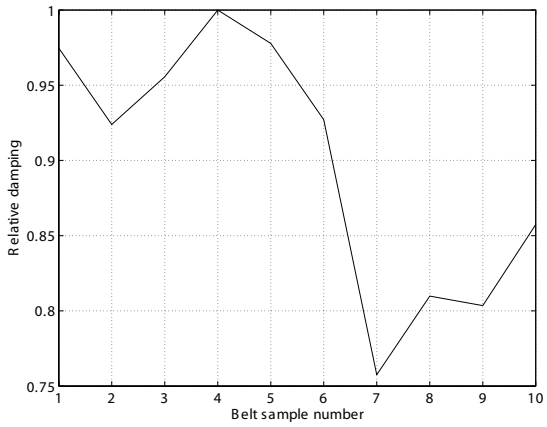
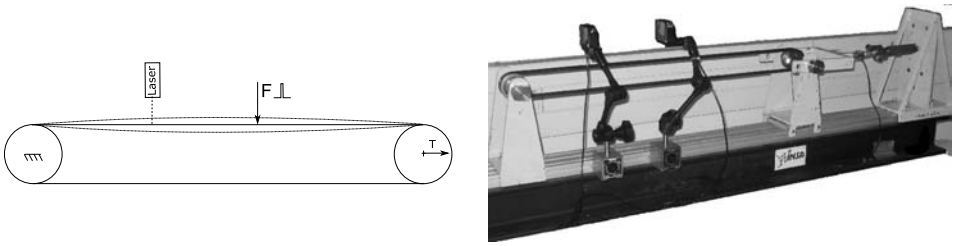


FIG. 2.5: Facteur d'amortissement adimensionné mesuré pour une courroie discrétisée en dix secteurs



(a) (b)

FIG. 2.6: Banc pour la détermination dynamique des caractéristiques longitudinales.

fréquences propres. Le module de rigidité transverse EI est déterminé graphiquement lorsque la tension statique P_s est nulle. Sa valeur est faible (de l'ordre de 0.2 Nm^2 pour une courroie de type 6PK) en comparaison de la raideur géométrique induite par des tensions de fonctionnement usuelles. Cette valeur introduite dans le modèle de l'Eq. 2.1 pour les deuxième et troisième modes montre une faible différence avec les mesures. Pour des brins de longueur importante (supérieur à 20 cm) et des tensions d'utilisation classiques (environ 300 N), la raideur de flexion pourra donc être négligée, et le comportement en flexion du brin sera ainsi supposé identique à celui d'une corde. Néanmoins, il conviendrait de la prendre en compte lors de l'étude de l'influence de la condition aux limites poulie-courroie.

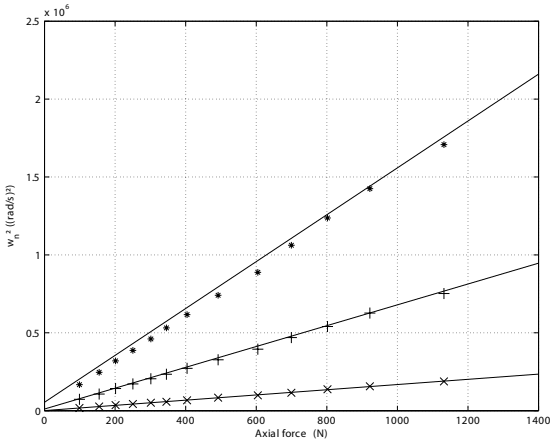
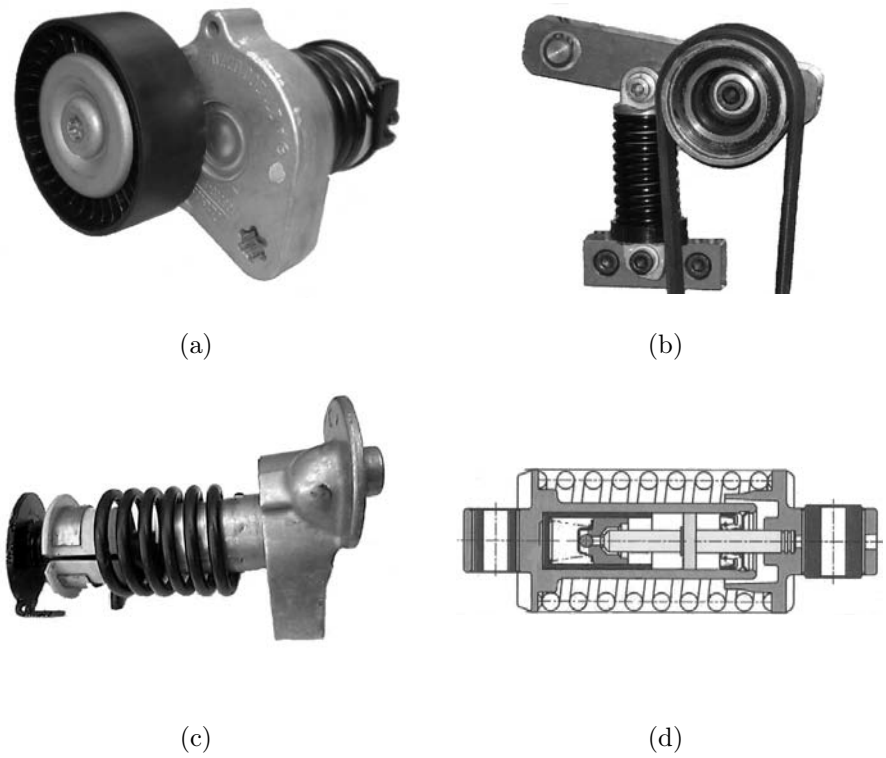


FIG. 2.7: Évolution du carré des trois premières fréquences naturelles d'un poutre en fonction de sa tension, mesure ($\times$, $+$ et $*$), calcul (-)

2.2 Caractérisation des tendeurs : modèles d'hystérésis

Le rôle des tendeurs est d'optimiser le fonctionnement du système en filtrant les vibrations et en maintenant une tension minimale dans un brin de la courroie [UWH85, LP98, KJ96, LW02a, CZ03]. Il sont placés dans le brin mou de la transmission. Or, dans le cadre des alterno-démarreurs, le changement de fonction des poulies inverse l'état brins tendus - brins mous au cours du fonctionnement. Tendeurs mécaniques et hydrauliques sont employés dans les FEAD. Les tendeurs mécaniques sont constitués d'un ressort de torsion et d'éléments de friction sèche et les tendeurs hydrauliques d'un amortisseur où le fluide emprunte des chemins différents selon le sens de la déflexion, voir Fig. 2.8. La complexité de leur principe (frottement sec, écoulement visqueux) et leur conception rendent difficile l'appréhension de leur fonctionnement. Les courbes mesurées effort-déflexion de ces tendeurs permettent l'identification de leur comportement non-linéaire. Celui-ci se révèle fortement dissipatif. Il est modélisé par une force de restitution fonction de la déflexion (cf Section II.2) à l'aide du modèle de Dahl modifié [AM02, AMD02, AMD04, SAMTD06]. Ce modèle présente l'avantage d'être compatible avec les deux types de tendeurs.



(a) (b)

(c) (d)

FIG. 2.8: Tendeur mécanique (a) et hydraulique (b). Vues éclatées (c) et (d).

2.2.1 Modèle de force de restitution

Le comportement dissipatif de ces composants se traduit par un phénomène d'hystérésis où l'état du système dépend de l'histoire de sa déflexion, donc des phases de chargement Γ_+ ou de déchargement Γ_-, voir Fig. 2.9.

La plupart des modèles existants s'appliquent à la prise en compte du frottement sec, comme par exemple le modèle statique de Coulomb et le modèle dynamique de Dahl où les courbes enveloppes Γ_+ et Γ_- sont des constantes, [Bli92]. Le modèle retenu est celui développé par Al Majid dans sa thèse [AM02]. De type force de restitution, il est une généralisation du modèle de Dahl où les courbes asymptotes sont fonctions de paramètres tels que température, fréquence des oscillations, déflexion. Il est suffisamment général pour prendre en compte des comportements élastoplastiques, viscoélastiques soumis à des excitations de type choc [AMD02] ou harmonique [AMD04]. C'est un modèle phénoménologique qui lie la force de restitution R à la déflexion u dans une équation différentielle du premier ordre dépendant du signe de

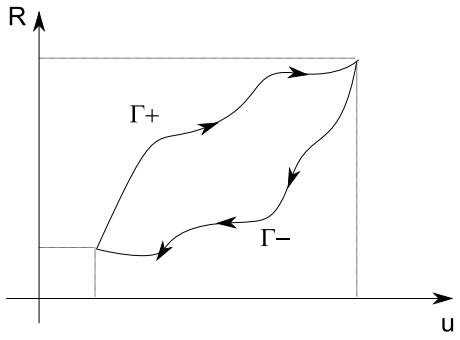


FIG. 2.9: Boucle effort-déflexion : Chargement Γ_+, déchargement Γ_-.

la déflexion :

$$\frac{dR}{dt} = \beta \frac{du}{dt} \left| h - R.\mathrm{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right) \right|^{\mu} \tag{2.2}$$

où μ et β sont des constantes, et la fonction h représente les courbes enveloppes haute h_u et basse h_l définie par :

$$h = \frac{1}{2}\left((h_u + h_l)\mathrm{sgn}\left(\frac{du}{dt}\right) + (h_u - h_l)\right) \tag{2.3}$$

Les fonctions h_u et h_l peuvent dépendre de la fréquence d'excitation, de la précharge ainsi que de la température. Le coefficient β contrôle la vitesse de la transition entre les deux phases. L'exposant μ agit sur l'inclinaison de la boucle.

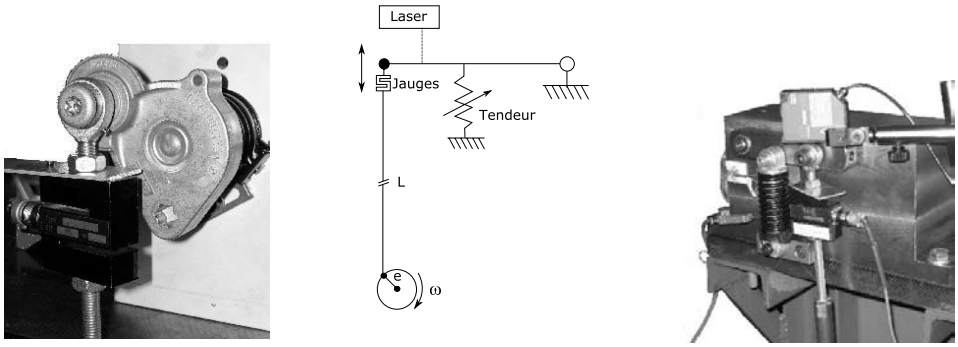
Les variables force/déflexion sont retenues par rapport à couple/angle pour faciliter l'insertion du modèle dans un système dynamique, où la force R apparaît dans le second membre des équations différentielles dynamiques (voir Section 3.1). La détermination des constantes de ce modèle s'appuie sur la mesure des boucles effort-déflexion pratiquées soit en quasi-statique soit à fréquence de sollicitation donnée.

2.2.2 Caractérisation expérimentale

L'identification expérimentale des constantes du modèle nécessite de soumettre le composant mécanique à un mouvement forcé. Le banc expérimental spécifique comprend un système bielle-manivelle entraîné par un moteur électrique asservi en vitesse. La longueur de la bielle est suffisamment grande par rapport à celle de la manivelle pour considérer le mouvement au niveau du tendeur comme sinusoïdal.

$$u = u_0 + u_1 \sin(\Omega t) \tag{2.4}$$

Le tendeur est encastré d'un coté (équivalent au bloc moteur dans son utilisation normale) et lié à la bielle de l'autre coté, voir Fig. 2.10. Le banc permet de soumettre le tendeur à différentes précharges, amplitudes et fréquences en ajustant respectivement la longueur de la bielle, l'excentricité et la vitesse de rotation du moteur électrique. Les essais sont réalisés lorsque la température, mesurée par un thermocouple, a atteint son régime établi. La vitesse de rotation du moteur électrique est mesurée par un codeur optique. La force de restitution et la déflexion sont mesurées respectivement par un capteur de force à jauges de déformation et un capteur de déplacement laser. Les signaux sont enregistrés de façon simultanée à la fréquence $F_e = 5000\ Hz$.



(a) (b) (c)

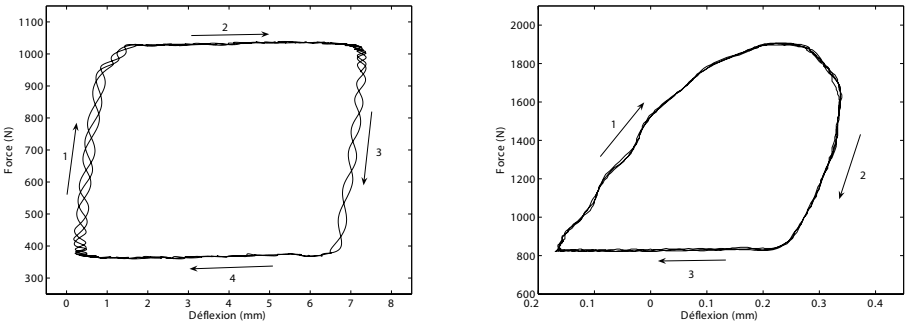
FIG. 2.10: Tendeurs mécanique (a) et hydraulique (c) montés sur le banc expérimental d'identification schématisé (b).

La figure 2.11 représente la forme générale des boucles effort-déflexion de chaque type de tendeur :

- le mouvement du tendeur mécanique est proche d'un mouvement de type collé-glissant, voir Fig. 2.11(a). Les parties 1 et 3 correspondent à un contact bloqué alors que les parties 2 et 4 correspondent à un contact glissant. La conception et l'assemblage du tendeur induisent un chargement composé de flexion et de torsion : la pression de contact augmente dans les parties 1 et 2 et diminue dans les parties 3 et 4. La pente de la partie 1 est principalement due à de la flexion du pivot. La transition entre les états bloqués et glissants est décalée lorsque la force normale de contact augmente. La pente de la

partie 2 est représentative du ressort de torsion et relative à la pression tangentielle de contact.

- le comportement du tendeur hydraulique est très différent dans les phases de chargement ou de déchargement, voir Fig. 2.11(b). La partie 1 correspond à la compression du tendeur. Le clapet anti-retour est obstrué par la bille et le fluide ne peut s'écouler qu'au travers du jeu entre le piston et la chemise. La raideur est importante. Durant la partie 2, la détente conduit à un équilibrage des pressions entre les deux zones. Dans ces deux phases, le comportement est similaire à celui d'un amortissement visqueux. Le fluide s'écoule ensuite librement dans la partie 3 où le ressort génère une force de rappel, et la pente de cette droite est assimilée à la raideur du ressort de compression.



(a) (b)

FIG. 2.11: Boucles effort-déflexion pour les tendeurs mécanique (a) et hydraulique (b).

2.2.3 Identification

Tendeur mécanique

Dans le cas du tendeur mécanique, les courbes asymptotes supérieure h_u et inférieure h_l sont des droites :

$$h_u(u_0, \Omega) = a_1(u_0, \Omega)u + a_0(u_0, \Omega) \tag{2.5}$$

$$h_l(u_0, \Omega) = b_1(u_0, \Omega)u + b_0(u_0, \Omega) \tag{2.6}$$

dont les coefficients $a_0,\ a_1,\ b_0,\ b_1$, fonction de la précharge et de la fréquence, sont

identifiés à partir des résultats expérimentaux. Les équations de chacune des parties sont extraites par la méthode des moindres carrés.

La position initiale (i.e. précharge) augmente la force normale sur le contact et ainsi la limite de la transition du comportement collé/glissant. Une légère dépendance à la fréquence d'excitation est caractéristique d'un comportement visqueux et donc représentative de la partie du contact lubrifié. Plus la fréquence augmente, plus l'effet dissipatif augmente, [MMD05].

Pour de grandes amplitudes de mouvement, μ peut prendre la valeur unité. Ainsi l'identification de β peut se faire en égalant les aires théorique et expérimentale de la boucle effort/déflexion. L'intégration analytique de l'Équation 2.2 pour une vitesse de déflexion positive conduit à :

$$R_u = K_u e^{-\beta(u-(u_0-u_1))} + a_0 + a_1 u - \frac{a_1}{\beta} \tag{2.7}$$

où R_u est la force restituée pour la partie supérieure. La constante d'intégration K_u est exprimée en utilisant la valeur de R_u pour $u = u_0 - u_1$:

$$K_u = \frac{a_1}{\beta} - a_0 - a_1(u_0 - u_1) + R_u|_{u=u_0-u_1} \tag{2.8}$$

Une expression comparable est obtenue dans le cas d'une vitesse de déflexion négative.

L'énergie dissipée E_{mod} issue du modèle, correspond à la différence des travaux des forces pour les parties supérieure et inférieure de la boucle :

$$E_{mod} = \int_{u_0-u_1}^{u_0+u_1} (R_u - R_l)du \tag{2.9}$$

$$E_{mod} = \frac{1}{\beta}(e^{-2\beta u_1}(K_l - K_u) + (K_u - K_l) + 2\beta u_0 u_1(a_1 - b_1) + 2\beta u_1(a_0 - b_0) - 2u_1(a_1 + b_1)) \tag{2.10}$$

expression dans laquelle toutes les constantes sont connues, excepté β. L'énergie expérimentale E_{exp} dissipée par le tendeur sur un cycle de chargement est approximée par l'aire comprise à l'intérieur de la boucle force-déflexion expérimentale. Égaler E_{mod} et E_{exp} permet d'identifier la valeur β.

Cette méthode d'identification de β n'est valable que lorsque l'amplitude du mouvement est importante (plusieurs millimètres), lié au choix $\mu = 1$. Lors de l'insertion du modèle dans un système dynamique (voir Section 3.1), l'amplitude des

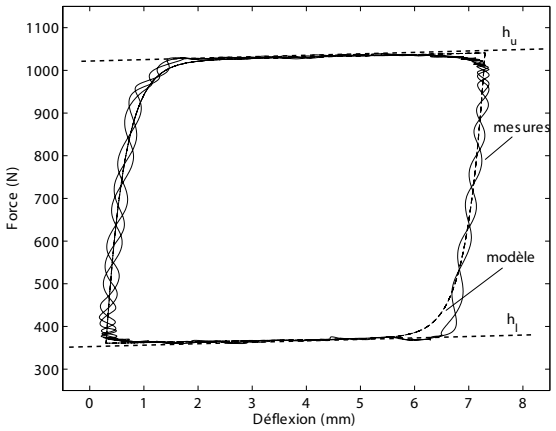


FIG. 2.12: Identification du comportement du tendeur mécanique

vibrations est plus faible, et il est nécessaire d'identifier de nouvelles valeurs pour μ et β. La méthode précédente d'identification de β n'est plus valable lorsque $\mu \neq 1$, et il faut procéder par approximations.

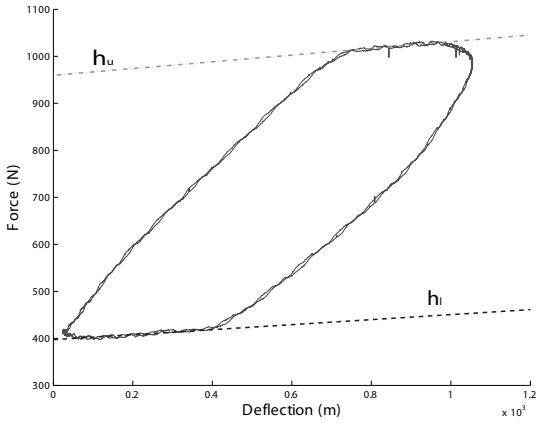


FIG. 2.13: Identification des courbes asymptotes pour de petites déflexions.

Une modélisation rhéologique du comportement du tendeur mécanique utilisant le modèle de Masing, basée une équation différentielle contenant une fonction multivaluée, est également réalisée. Cette étude est présentée Section II.3.

Tendeur hydraulique

La modélisation du comportement du tendeur hydraulique est basée sur le même principe, mais son comportement est plus complexe. La courbe enveloppe basse

reste décrite par une équation de droite :

$$h_l = a_l + b_l.u \tag{2.11}$$

Alors que la courbe asymptote supérieure est estimée dans un premier temps par des polynômes d'ordre six :

$$h_u = a_u + b_u.u + c_u.u^2 + d_u.u^3 + e_u.u^4 + f_u.u^5 + g_u.u^6 \tag{2.12}$$

L'influence de l'amplitude et de la fréquence d'excitation sur ces coefficients est identifiée à partir d'essais en déflexion forcée. La loi de comportement de l'équation h_u est déterminée à l'aide de la méthode des plans d'expérience.

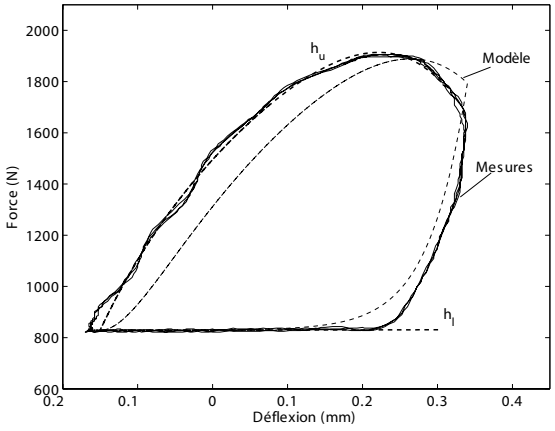


FIG. 2.14: Identification du comportement du tendeur hydraulique

Une seconde méthode consiste à modéliser les courbes enveloppes hautes par des équations d'ellipses dans un repère non orthogonal afin de traduire naturellement le comportement des tendeurs hydrauliques provenant d'un écoulement forcé de fluide visqueux. La prise en compte de l'influence de l'amplitude et de la fréquence d'excitation en est ainsi facilitée.

Chapitre 3

DYNAMIQUE À L'ARRÊT

La compréhension du comportement de l'ensemble d'une transmission par courroie nécessite une étape préalable de séparation des phénomènes de bases. Ainsi ce chapitre présente leur analyse autour de systèmes dynamiques à l'arrêt : rôle des tendeurs sur les vibrations longitudinales, et brins de courroie soumis à des excitations paramétriques (voir également Sections II.3 et II.4).

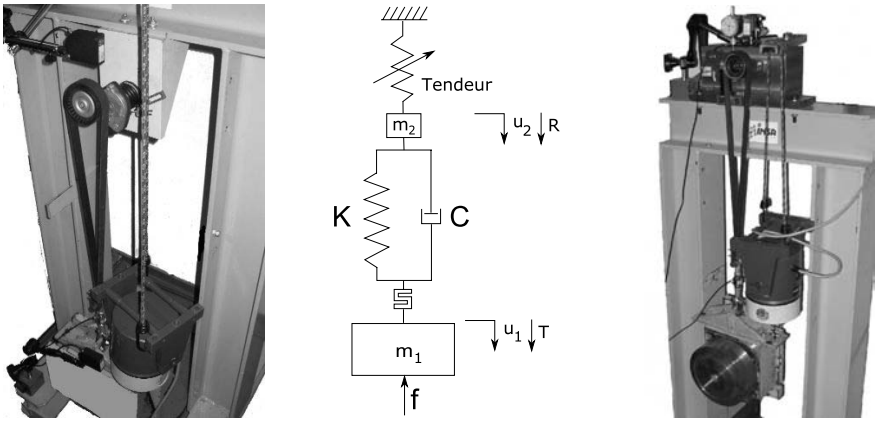
3.1 Vibrations longitudinales : rôle des comportements hystérétiques

Le chapitre précédent a montré que les tendeurs ont un comportement hystérétique. La plupart des études antérieures, comme celles de Leamy [LP98], Kwon [KI00] ou Cheng [CZ03], considèrent le tendeur comme l'association d'un élément de raideur et d'un amortisseur visqueux ou d'un élément de friction sèche. L'objet de cette partie est d'affiner les modèles pour mieux prendre en compte leur comportement hystérétique face aux vibrations longitudinales. Les modèles retenus sont ceux présentés Section 2.2.1. Ils présentent l'avantage d'être régis par une équation différentielle du premier ordre indépendamment du type de tendeur (mécanique ou hydraulique) utilisé. La force de restitution résultante apparaît dans le second membre des équations du mouvement.

3.1.1 Description du système

Le système dynamique considéré est composé d'un tendeur mécanique ou hydraulique étudié précédemment, d'une courroie poly-V et d'une masse, voir Fig. 3.1.

Le tendeur est fixé à sa base sur un support rigide. La courroie est enroulée autour de la poulie (de masse m_2) du tendeur. Les deux brins de la courroie sont reliés ensemble à la masse m_1. La masse m_1 est soumise à une excitation forcée fournie par un pot électrodynamique. Les déplacements u_1 et u_2 de chaque masse sont mesurés par des capteurs laser de déplacement. La force transmise par le pot à la masse m_1 est mesurée par un capteur piezo-électrique et la tension dans la courroie par un capteur à jauges. L'ensemble des mesures et la source d'excitation sont gérés par un analyseur de signaux. Dans ce système à deux degrés de liberté, la masse m_1 sert à la fois à établir une précharge sur le tendeur et à la dynamique du système.



(a) (b) (c)

FIG. 3.1: Banc expérimental dynamique : système tendeur-courroie-masse (modèle (b)) avec tendeur mécanique (a) et hydraulique (c).

3.1.2 Équations du mouvement

Soient u_1 et u_2 les déplacements verticaux respectifs des masses m_1 et m_2. Soit $f(t)$ la force exercée par le pot, T la tension globale de la courroie, et R la force de restitution exercée par le tendeur sur la courroie, voir Fig. 3.1. L'équilibre dynamique des masses m_1 et m_2 conduit aux équations suivantes :

$$m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} = T(t) - R(t) + m_2 g \tag{3.1}$$

$$m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -T(t) + f(t) + m_1 g \tag{3.2}$$

Le comportement dynamique de la courroie est régi par un modèle de Kelvin-Voigt (ressort-amortisseur en parallèle), de raideur équivalente K et d'amortissement visqueux C (detérminés Section 2.1) :

$$T(t) = K(u_1(t) - u_2(t)) + C\left(\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt}\right) + T_0, \tag{3.3}$$

où T_0 est la tension statique de la courroie correspondant au poids de la masse m_1. La force de restitution R est définie par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dR(u_2)}{dt} = \beta \frac{du_2}{dt}\left|h - R(u_2).\mathrm{sgn}\left(\frac{du_2}{dt}\right)\right|^{\mu} \tag{3.4}$$

La fonction h, représentative des courbes asymptotes, dépend du type de tendeur considéré. La force exercée par le pot est du type :

$$f(t) = f_0 + f_1 \cos(\Omega t + \phi), \tag{3.5}$$

Considérant le vecteur Y :

$$Y = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ R \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

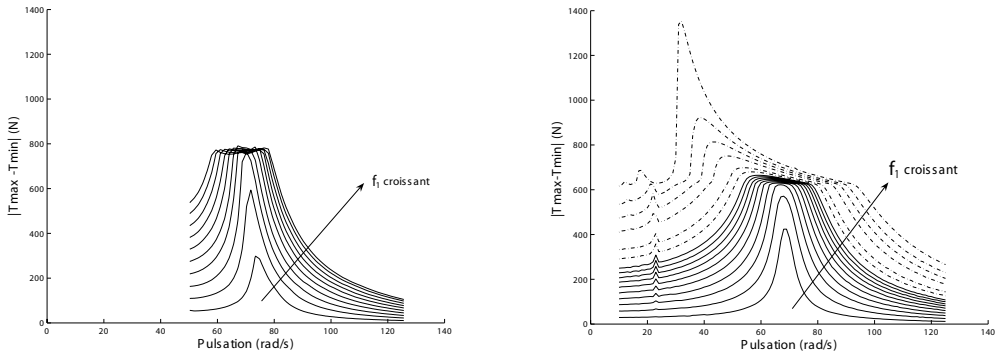
Le système peut être représenté sous sa forme d'état :

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \frac{-T+f}{m_1} + g \\ v_2 \\ \frac{T-R}{m_2} + g \\ \beta.\frac{du_2}{dt}\left(h - R\mathrm{sgn}\frac{du_2}{dt}\right) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

3.1.3 Réponse avec le tendeur mécanique

Les réponse harmoniques mesurées et calculées correspondant au dispositif, Fig. 3.1, dans le cas du tendeur mécanique, sont tracées Figure 3.2 pour plusieurs amplitudes f_1 de la force d'excitation. Les courbes expérimentales montrent que lorsque f_1 atteint une valeur importante, l'amplitude de la fluctuation de tension est bornée

à 800 N sur un large intervalle de fréquence. Par ailleurs les courbes calculées sont le résultat de l'intégration temporelle des équations différentielles précédentes. Le modèle permet d'atteindre des forces d'excitation que l'expérience ne peut reproduire. Le système mécanique offre deux états séparés par la zone où la variation de tension est bornée. Pour de faibles forces d'excitation f_1, le contact est bloqué, alors que pour de grandes amplitudes, il est principalement glissant. Dans ces deux états, aux limites de l'intervalle d'étude, le système peut être considéré comme linéaire.



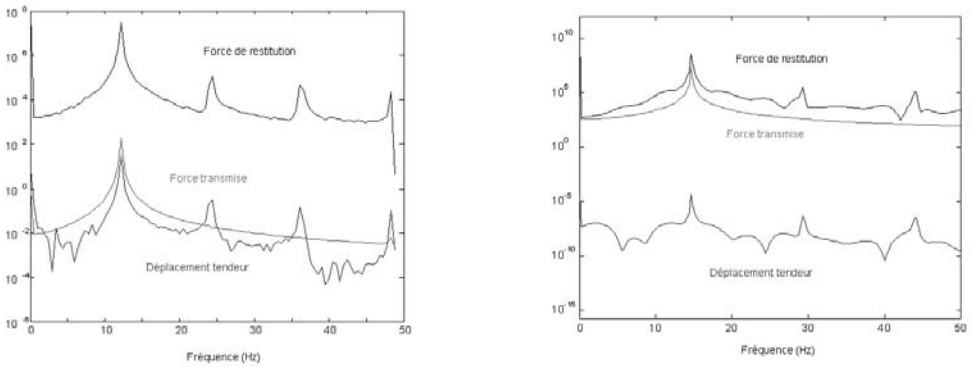
(a) (b)

FIG. 3.2: FRF : Amplitude $|\max(T) - \min(T)|$ fonction de la pulsation Ω pour plusieurs valeurs de f_1. Mesure (a), calcul (b) (ligne pour les valeurs de f_1 identique à l'expérimental, et pointillés pour des valeurs de f_1 supérieures).

3.1.4 Réponse avec le tendeur hydraulique

La représentation fréquentielle du système obtenue expérimentalement présente une réponse sur toutes les harmoniques de la même manière qu'avec la simulation, voir Fig. 3.3. La déflexion du tendeur ne présente pas de distorsion mais fait apparaître une rupture de pente durant le cycle, ce comportement est dû à l'ouverture ou à la fermeture du clapet hydraulique.

Le système dynamique a un comportement instable et il est difficile en régime permanent d'osciller autour d'une position intermédiaire qui soit fixe dans le temps, on obtient seulement un état métastable [Ket98]. A fréquence et précharge fixée, une très faible variation de l'amplitude d'excitation conduit à une dérive de l'ensemble et on évolue vers la butée haute ou vers la butée basse.



(a) (b)

FIG. 3.3: FFT des signaux forces et déplacement du tendeur hydraulique mesurés (a) et calculés (b)

3.2 Vibrations transverses : oscillateur de Duffing à excitation paramétrique

Les variations de couple produites par le vilebrequin se traduisent par des fluctuations de tension dans les brins de la courroie. Chaque brin devient alors un oscillateur à excitation paramétrique car soumis à une tension qui fluctue autour d'une valeur moyenne non nulle. Ceci a été montré dans [DB98] appliqué à la dynamique du forage dans [BDHDD96]. Le brin de courroie est alors le siège d'instabilités paramétriques, comme cela a déja été étudié analytiquement par Mockensturm [MG05, MPU96], Moon [MW97] et Zhang [ZZ99] et Parker [KP05], et synthétisé par Chen [Che05]. Lors de ces phénomènes d'instabilités, l'amplitude des vibrations transverses est trop importante pour être linéarisée et le modèle conduit à l'équation d'un oscillateur de Duffing à excitation paramétrique, étudié par Pellicano [PCF04, PFBV01] sur une système à excitation mixte paramétrique et directe. Réduire l'impact de ces vibrations sur la durée de vie des courroies et des paliers constitue la motivation principale au déroulement de cette étude théorique et expérimentale. Outre la réponse non-linéaire et l'étude des zones d'instabilités des vibrations transverses d'une corde en appui, d'autres phénomènes complexes, liés à l'utilisation d'une transmission automobile, font l'objet d'observations expérimentales.

3.2.1 Modèle mécanique

Le modèle mécanique d'une corde, sans vitesse de transport, en appui simple, soumise à des fluctuations de tensions harmoniques est le modèle simplifié utilisé pour prévoir la réponse non-linéaire et les zones d'instabilités du système. La section 2.1 justifie l'approximation de la modélisation de la courroie par une corde, le module de rigidité transverse EI étant négligeable. L'équation du mouvement transverse d'une corde de longueur L soumise à des fluctuations de tension est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\rho A \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - \left(P_s + P_d(T)\right) \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = 0 \tag{3.8}$$

où ρA est la masse par unité de longueur, V le déplacement transverse, P_s la tension statique, et $P_d(T)$ la tension dynamique, T et X les variables indépendantes du temps et de l'espace. La tension dynamique est le résultat du mouvement des extrémités de la courroie due à l'oscillation des poulies et de la déformation de la courroie provoquée par les vibrations transverses. Elle est donnée par :

$$P_d(T) = \frac{EA}{L} \left[U\left(L,T\right) - U\left(0,T\right) + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 dX \right] \tag{3.9}$$

où EA est le module de rigidité longitudinal et U le déplacement longitudinal.

En utilisant les paramètres adimensionés :

$$x, v, u = \frac{X, V, U}{L},\ t = T\sqrt{\frac{P_s}{\rho A L^2}},\ \zeta = \frac{EA}{P_s},\ \Omega_i = \sqrt{\frac{\rho A L^2}{P_s}}\tilde{\Omega}_i \tag{3.10}$$

l'Equation 4.11 devient :

$$\frac{\partial^2 v}{dt^2} - \frac{\partial^2 v}{dx^2} - \zeta \left[u\left(1,t\right) - u\left(0,t\right) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{3.11}$$

et la tension dynamique s'exprime sous la forme :

$$\zeta \left(u(1,t) - u(0,t) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right) = \varepsilon \left(\cos(\Omega t) + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right) \tag{3.12}$$

où ε représente le quotient entre les tensions dynamique et statique.

Le développement sur une base de Galerkin $v(x,t) = a_n(t)\psi_n(x)$ avec les fonctions de déplacement $\psi_n(x) = \frac{sin(n\pi x)}{n\pi}$, conduit l'Equation 3.8 à une équation de Duffing à excitation paramétrique ou une équation de Mathieu non-linéaire :

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \left(\omega_n^2 + n^2\pi^2\varepsilon\cos(\Omega t)\right)a_n + n^2\pi^2\frac{\varepsilon}{4}\alpha a_n^3 = 0 \tag{3.13}$$

où $\omega_n = n\pi$ sont les fréquences propres de cordes.

Zones d'instabilités

Les équations des frontières de zones d'instabilités sont obtenues par la méthode de la balance harmonique appliquée à l'équation linéarisée du mouvement :

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \left(\omega_n^2 + n^2\pi^2\varepsilon\cos(\Omega t)\right)a_n = 0 \tag{3.14}$$

Soit une solution sous la forme d'une série de Fourrier :

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{nt\Omega}{2} + \beta_n\sin\frac{nt\Omega}{2} \tag{3.15}$$

En introduisant cette solution dans l'Eq. 3.14, en simplifiant et regroupant les termes, il apparaît quatre équations :

$$\alpha_{pair} = \begin{vmatrix} \omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2-\Omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2-4\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.16}$$

$$\beta_{pair} = \begin{vmatrix} \omega^2-\Omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2-4\Omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2-9\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.17}$$

$$\alpha_{impair} = \begin{vmatrix} \omega^2-\Omega^2/4+n^2\pi^2\varepsilon/2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2-9\Omega^2/4 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2-25\Omega^2/4 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.18}$$

$$\beta_{impair} = \begin{vmatrix} \omega^2-\Omega^2/4-n^2\pi^2\varepsilon/2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2-9\Omega^2/4 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2-25\Omega^2/4 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.19}$$

Pour $\varepsilon = 0$, les zones d'instabilités apparaissent lorsque :

$$\omega^2 = \frac{n^2}{4}\Omega^2 \tag{3.20}$$

qui se développe en une série :

$$\omega = \frac{n}{2}\Omega + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots \tag{3.21}$$

Ainsi, les zones d'instabilités principales et d'ordre 2 sont délimités respectivement par les équations :

$$\Omega = 2\omega \pm \varepsilon\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2\frac{\pi^2}{32\omega} \tag{3.22}$$

$$\Omega = \omega \pm \varepsilon^2\frac{\pi^2}{\omega} - \varepsilon^2\frac{\pi^2}{3\omega} \tag{3.23}$$

Réponse harmonique non-linéaire

L'amplitude des vibrations transverses, de l'ordre de plusieurs centimètres au centre pour un brin de longueur $L = 46\ cm$, est trop grande pour être linéarisée. La méthode des échelles multiples du premier ordre est employée pour déterminer la réponse du système pour la résonance principale (Ω proche de $2\omega_n$) du premier mode ($a_n = a$, $\omega_n = \omega$). Le temps, variable indépendante, devient une fonction de plusieurs échelles T_i : $T_0 = t$ et $T_1 = \varepsilon t$. Alors

$$a(t, \epsilon) = a_0(T_0, T_1) + \varepsilon a_1(T_0, T_1) \tag{3.24}$$

En substituant la relation 3.24 dans l'Équation 3.13 et en égalant les coefficients d'une même puissance ε, il résulte :

$$D_0^2 a_0 + \omega^2 a_0 = 0 \tag{3.25}$$

$$D_0^2 a_1 + \omega^2 a_1 = -2D_0 D_1 a_0 - \pi^2 \cos(\Omega T_0)\, a_0 - \frac{\pi^2}{4}\alpha a_0^3 \tag{3.26}$$

où D_0 et D_1 indiquent la différentiation par rapport à T_0 et T_1. En introduisant le paramètre de désaccordage, $\Omega = 2\omega + \varepsilon\sigma$, les équations pour la phase et l'amplitude sont :

$$\frac{d\lambda}{dT_1} = -\pi^2\frac{\lambda}{4\omega}\sin(\nu) \tag{3.27}$$

$$\lambda\frac{d\nu}{dT_1} = \sigma\lambda - \frac{\pi^2}{2}\frac{\lambda}{\omega}\cos(\nu) - \frac{3}{16}\pi^2\frac{\alpha}{\omega}\lambda^3 \tag{3.28}$$

où la solution non-triviale pour le régime établi est :

$$a(t) = \lambda\cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \nu\right) + o(\varepsilon) \tag{3.29}$$

Ainsi

$$\lambda = \sqrt{\frac{16}{3\pi}\frac{\sigma}{\alpha} \pm \frac{8}{3\alpha}} \tag{3.30}$$

En introduisant la nouvelle notation $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$, alors $\Omega = 2\omega + \hat{\sigma}$, et l'amplitude λ devient une fonction de ε :

$$\lambda = \sqrt{\frac{16}{3\pi}\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\alpha}} \pm \frac{8\varepsilon}{3\hat{\alpha}}} \tag{3.31}$$

où $\hat{\alpha} = \alpha\varepsilon$ est le coefficient du terme non-linéaire.

3.2.2 Analyse expérimentale

Le système expérimental est composé d'une courroie automobile poly-V tendue entre trois poulies sur roulements. Un bras de levier, connecté à l'une des poulies, est relié à un pot électrodynamique, voir Fig. 3.4. La force transmise est mesurée par un capteur piezo-électrique, et le déplacement transverse du brin supérieur par un capteur laser. L'ensemble des mesures et de la source d'excitation est géré par un analyseur de signaux. Le pot applique une force alternative sur le bras de levier qui créé une fluctuation de tension dans la courroie. Le brin supérieur est donc soumis à une excitation paramétrique. Pour éviter des instabilités simultanées dans les brins supérieur et inférieur, la poulie située dans le brin inférieur sert à diviser le brin en deux brins de plus petites longueurs. La fréquence d'excitation est ajustable entre 30 et 150 Hz. Pour une tension de pose de 220 N, la fréquence du premier mode de flexion $\tilde{\omega}_1$ est de 50 Hz. Le comportement du brin en flexion étant le même que celui d'une corde, $\tilde{\omega}_i = i \cdot \tilde{\omega}_1$.

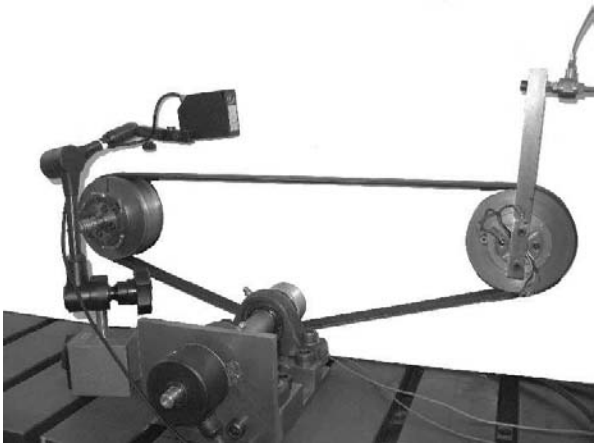


FIG. 3.4: Banc expérimental : système à excitations paramétriques

Ce banc permet de mettre en évidence les résultats classiques de la théorie des systèmes à excitation paramétrique. L'instabilité principale apparaît lorsque la fréquence d'excitation est dans le voisinage du double de la fréquence propre ($\tilde{\Omega} \approx 2\tilde{\omega}$), et la fréquence de battement du brin est égale à $\tilde{\omega}$. L'amplitude de la réponse peut atteindre plusieurs centimètres au centre du brin (voir Fig 3.5(a)), ce qui justifie la prise en compte des non-linéarités dans le modèle. L'instabilité d'ordre deux ($\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}$) présente des amplitudes beaucoup plus faibles.

Le modèle étudié en Section 3.2.1 fait l'hypothèse que le brin de courroie est une corde en appui simple. Cependant le banc se rapproche d'un transmission réelle, avec une courroie automobile enroulée autour de poulies. Des films réalisés avec une caméra rapide (1000 $images/s$) permettent de visualiser des phénomènes plus complexes. Des modes de vibrations de torsion des poulies (ou modes longitudinaux de la courroie) liés à l'inertie des poulies, sont détectés à proximité de 80 Hz. Le mode 3 de vibration transverse est proche de 150 Hz. La quatrième instabilité de ce mode apparaît donc pour $\tilde{\Omega} = 2\tilde{\omega}_3/4 = 75\ Hz$. Théoriquement, cette instabilité n'est observable que pour des amplitudes de force d'excitation très importantes. La résonance de torsion des poulies provoque une fluctuation de tension dans le brin plus importante que celle imposée par le pot et rend donc possible l'observation de ce mode, voir Fig 3.5(b). Par ailleurs, avec une largeur de plusieurs centimètres, les modes de torsions de la courroie présentent de grandes amplitudes qui mettent en évidence un couplage longi-torsion, voir Fig 3.5(c). Dans le cas d'une application en rotation, la présence de ce mode pourrait conduire au déchaussement de la courroie sur les stries des poulies.

3.2.3 Validation expérimentale du modèle

Les zones d'instabilités sont tracés Fig. 3.2.3 dans le domaine fréquence-amplitude pour les résultats théoriques et expérimentaux. Ils mettent en évidence une large zone d'instabilité pour la zone principale ($\Omega \approx 2\omega$), et beaucoup plus étroite pour la zone d'ordre deux ($\Omega \approx \omega$). Les résultats expérimentaux distinguent les balayages croissants ou décroissants en fréquence, alors que le modèle est basé sur les équations linéarisées et ne permet pas de prendre en compte ce phénomène.

Les résultats du modèle développé en Section 3.2.1 sont comparés aux résultats

(a) (b) (c)

FIG. 3.5: Observation des phénomènes : (a) Flexion mode 1, (b) Flexion mode 3, (c) Torsion mode 1.

expérimentaux. Ils mettent en évidence deux phénomènes d'hystérésis qui s'expliquent par la présence du terme en x^3 dans l'équation du mouvement et par les deux solutions résultantes. A force d'excitation ε constante, un balayage en fréquence Ω détecte le début d'une résonance à $\Omega = 6$ dans les deux sens de balayage. Un phénomène de saut en amplitude λ est ensuite mis en évidence pour $\Omega = 6.65$ pour les fréquences croissantes et $\Omega = 6.55$ pour les fréquences décroissantes, voir Fig. 3.7(a). Par ailleurs, à fréquence d'excitation constante proche de 2ω, un balayage en amplitude de force montre un autre phénomène d'hystérésis, voir Fig. 3.7(b). Les écarts entre calculs et mesures proviennent de l'absence de considération de l'amortissement.

Ces résultats mettent en évidence la présence d'instabilités paramétriques de grande amplitude dans une structure automobile. Une corrélation satisfaisante entre les résultats mesurés et calculés permet de valider le modèle utilisé qui prend en compte l'ensemble des termes non-linéaires.

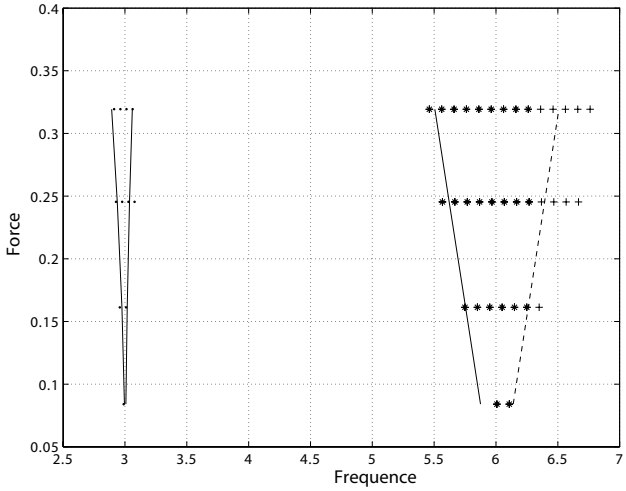
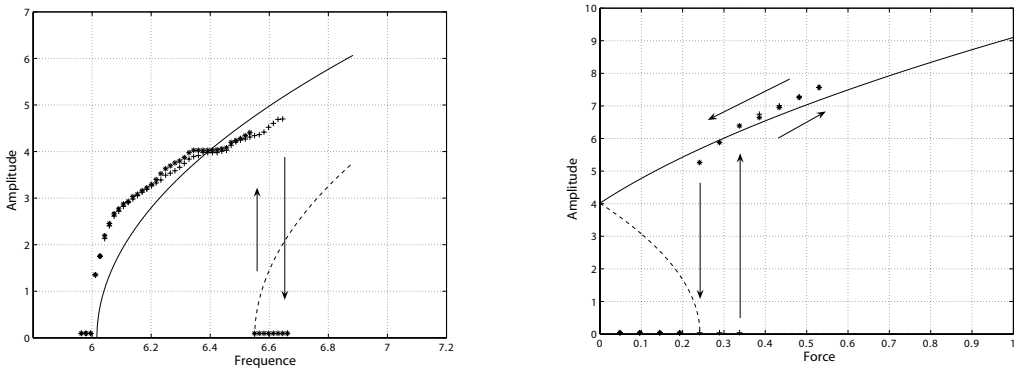


FIG. 3.6: Zones d'instabilités paramétriques : Principale (Mesures : balayage croissant (+) et décroissant (∗)), et calculs (−− : branche instable, − : branche stable), et d'ordre deux (Mesures (·) et calculs (−)).



(a) (b)

FIG. 3.7: Réponse en fréquence σ pour une force $\varepsilon = 0.17$ (a) et réponse en force ε pour une fréquence $\sigma = 0.38$ (b). Mesures (+ : balayage croissant, ∗ : balayage décroissant), et calcul (−− : branche instable, − : branche stable). , $\alpha = 0.04$.

Chapitre 4

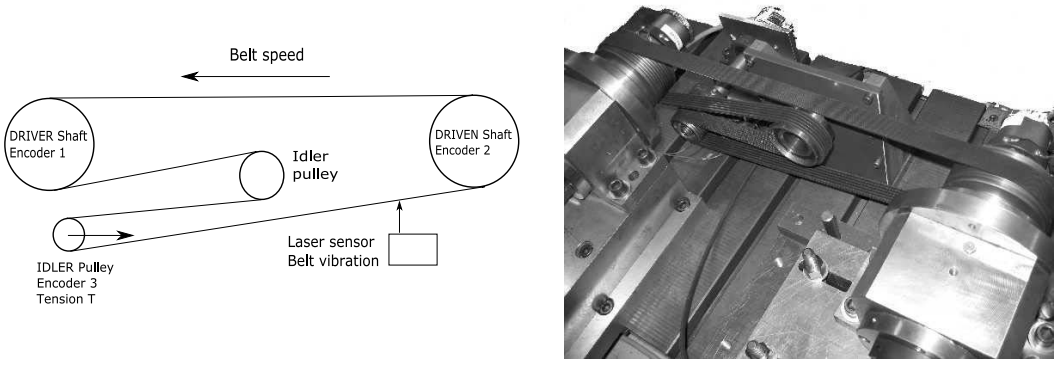
DYNAMIQUE EN ROTATION

L'ensemble des éléments étudiés jusqu'à présent est regroupé pour synthétiser l'étude au sein d'un banc d'essai reproduisant une façade accessoires simplifiée de moteur automobile, Fig. 4.1. Ce banc est composé de quatre poulies, la première est entraînée par un moteur électrique de 60 kW, la seconde est reliée à une pompe hydraulique mettant en charge la transmission, le troisième est un galet de renvoi et la dernière peut recevoir les deux types de tendeurs étudiés ou une poulie fixe, Fig. 4.2. La tension statique de la courroie est réglable. La pression de sortie de la pompe hydraulique est ajustable, ainsi que la vitesse de rotation du moteur électrique. La pompe hydraulique génère un couple variable d'harmonique 2 autour d'un couple moyen. Cette fluctuation est due à la conception de la pompe. Cette particularité est la source principale d'excitation dynamique de ce système (voir également Section II.5). Les deux poulies principales 1 et 2 et le galet de renvoi sont équipés de codeurs optiques (respectivement 2048, 2048 et 2500 $raies/tour$). Deux capteurs piezo-électriques permettent la mesure de la tension dynamique dans le brin inférieur de la transmission. Des capteurs laser donnent la mesure des vibrations transverses des brins et du déplacement du tendeur.

Ce banc permet de reproduire en rotation l'ensemble des phénomènes identifiés précédemment et présents dans les transmissions par courroies :

- Vibrations longitudinales,
- Vibrations transverses d'origines paramétriques,
- Glissement poulie/courroie,

et d'étudier l'influence des tendeurs sur ces phénomènes.



(a) (b)

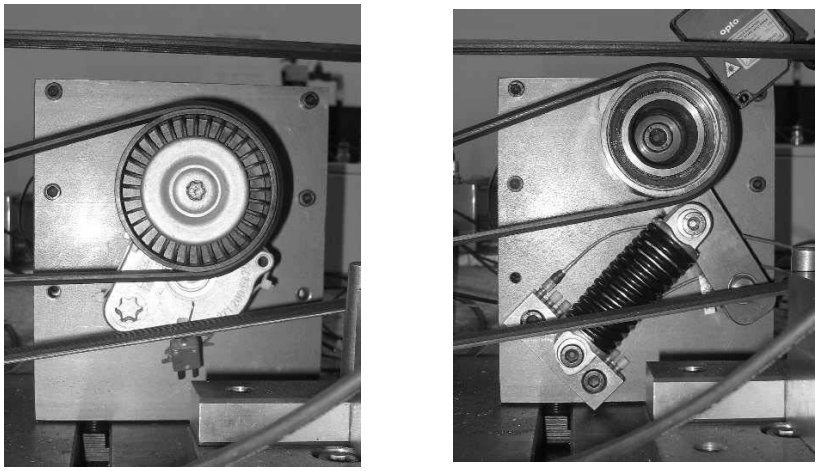
FIG. 4.1: Banc expérimental reproduisant une façade accessoires de moteur thermique.

4.1 Méthode de mesure basée sur l'échantillonnage angulaire

4.1.1 Principe de mesure

L'étude expérimentale des systèmes en rotation nécessite la reconstitution précise de l'évolution des vitesses instantanées de rotation ainsi que la localisation précise des composantes fréquentielles des signaux. Les techniques de mesure classiques utilisent des cibles marquées et des convertisseurs fréquence-tension, ou des accéléromètres en position ortho-radiale [HB89]. La première méthode, souvent utilisée dans l'industrie, fournit des résultats très bruités dont l'exploitation fréquentielle est difficile. La seconde méthode ne fonctionne que pour des vitesses de rotations supérieures à 2000 tr/mn, et présente des difficultés de mise en oeuvre et de transfert de signaux. La technique retenue est basée sur l'échantillonnage angulaire. Elle est utilisée ici pour la première fois sur un système à géométrie non-discrète ; les applications précédentes étant des transmissions par engrenages ou courroies dentées [RM05]. Pour compléter ce moyen, des films réalisés avec une caméra rapide permettent de visualiser d'autres phénomènes.

Le principe de mesure est basé sur le comptage des impulsions d'une horloge haute fréquence de manière à localiser les fronts montants de signaux TTL délivrés par des codeurs optiques, voir Fig. 4.3. Le principe de cette mesure est de dissocier



(a) (b)

FIG. 4.2: Transmission équipée du tendeur mécanique (a) et hydraulique (b).

les notions de résolution et de précision. La résolution dépend du nombre de raies de chaque codeur (par exemple 2500 raies/tour), alors que la précision théorique dépend de la fréquence de l'horloge (80 MHz) et de la vitesse de rotation de l'arbre. L'erreur correspond à l'angle $\Delta\theta_i(sec.\ d'arc)$ que peut faire l'arbre i, tournant à la vitesse moyenne $\Omega_i(tr/mn)$, pendant le temps entre deux impulsions horloge $t_h = 1/f_h$:

$$\Delta\theta_i = \frac{360 \cdot 60 \cdot \Omega_i}{f_h} \tag{4.1}$$

Ainsi, pour une fréquence horloge f_h de 80 MHz, et des vitesses de rotation inférieures à 2000 tr/mn, la précision de localisation d'un front montant est inférieure à la seconde d'arc. La précision théorique est altérée par la qualité du gravage du disque du codeur, ainsi que les éventuels bruits des signaux électriques et de leur conditionnement.

La donnée mesurée en sortie est un vecteur temps, dont l'intervalle entre deux valeurs correspond à une distance angulaire constante quelle que soit la vitesse de rotation. Cette technique permet de connaître l'évolution temporelle de la position angulaire de chaque arbre. La notion d'échantillonnage temporel classique est remplacée par celle d'échantillonnage angulaire.

Par ailleurs les données des voies analogiques additionnelles utilisées dans l'ap-

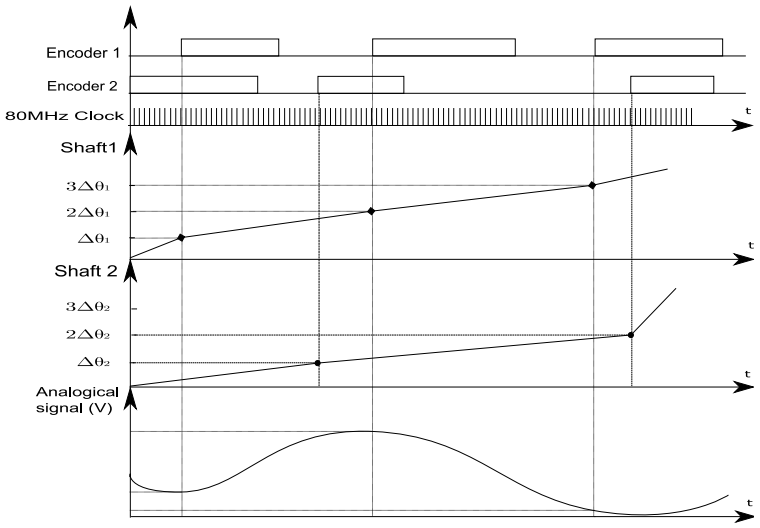


FIG. 4.3: Principe de mesure par codeurs optiques

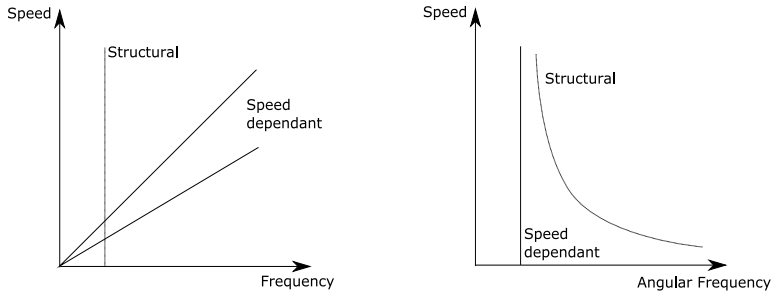
plication suivante (capteur de force, accéléromètres...) sont également échantillonnés sur les fronts montants du codeur désigné comme référence. Ce principe de mesure est installé au sein d'un châssis *National Instrument PXI*, et fait l'objet d'une programmation réalisée sous Labview.

Il convient de souligner que l'originalité de cette méthode se base sur des signaux temporels en fonction de positions angulaires, à l'inverse des systèmes de mesures traditionnels utilisant des signaux angulaires en fonction du temps. Ainsi l'analyse harmonique (FFT), s'effectue dans le domaine angulaire et la résolution angulaire fréquentielle reste constante quelle que soit la vitesse de rotation des arbres. La représentation d'un diagramme composantes harmonique-vitesse de rotation, appelé diagramme de Campbell par analogie à la dynamique des rotors [FL98], est donc modifiée par rapport à la représentation usuelle. Les composantes dépendantes de la vitesse de rotation deviennent parallèles à l'axe des ordonnées et les composantes structurelles de vibrations transverses appartiennent à des hyperboles, voir Fig. 4.4.

4.1.2 Mesure de la différence de phase

L'erreur de transmission ϵ est définie par la différence de position angulaire entre deux poulies i et j dont le rapport de réduction est η :

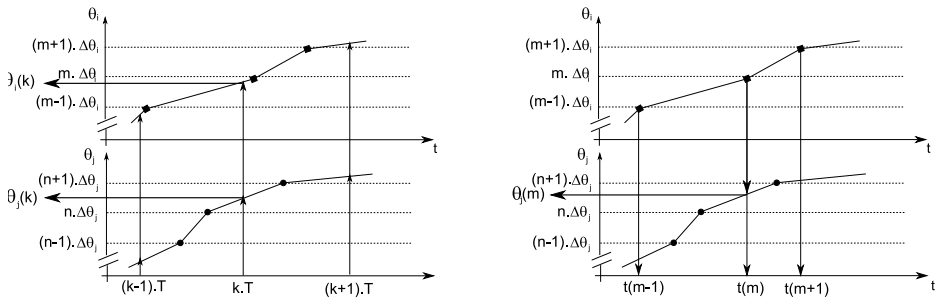
$$\epsilon = \theta_i - \eta \cdot \theta_j \tag{4.2}$$



(a) (b)

FIG. 4.4: Diagramme de Campbell : domaine temporel (a) et angulaire (b).

Pour connaître la différence de position entre deux arbres, il est nécessaire de ré-échantillonner une voie par rapport à l'autre. Deux méthodes sont possibles : le re-échantillonnage temporel, voir Fig. 4.5(a), où les deux vecteurs positions sont fonction d'un même vecteur temps à la période T, et le re-échantillonnage angulaire, où l'un des vecteurs position est fonction du vecteur temps de l'autre voie, voir Fig. 4.5(b).



(a) (b)

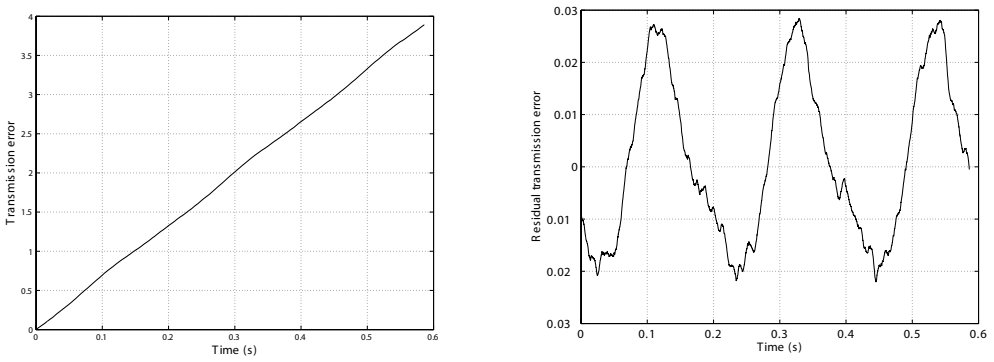
FIG. 4.5: Méthode de re-échantillonnage : temporel (a), angulaire (b).

Pour les systèmes de transmissions non-synchrones comme les courroies striées, du glissement fonctionnel existe entre les poulies et la courroie. La courroie s'allonge sur l'arc de contact lorsque sa tension augmente. Ainsi, le glissement correspond à la variation de position angulaire relative entre la courroie et la poulie. Lié à ce phénomène et considérant ici les poulies 2 et 3, la rotation de la poulie 3 n'est pas intégralement transmise à la poulie 2, et un déphasage angulaire apparaît. Contrairement

aux entraînements par obstacles (engrenage, courroies crantées), la valeur moyenne de l'erreur de transmission n'est pas nulle, mais croissante. L'erreur de transmission, Fig. 4.6(a), est alors la somme d'une fonction linéaire ϵ_{gliss}, correspondant au glissement, et d'un résidu ϵ_{res}, fonction périodique, Fig. 4.6(b), liée aux caractéristiques longitudinales de la courroie et à la dynamique de l'entraînement :

$$\epsilon = \epsilon_{res} + \epsilon_{gliss} \tag{4.3}$$

La fonction ϵ_{gliss} est relative au glissement fonctionnel, alors que la fonction ϵ_{res} est relative au comportement dynamique.



(a) (b)

FIG. 4.6: Erreur de transmission totale (a) et résiduelle (b) en fonction du temps.

La tension dynamique d'un brin de courroie est exprimée, lors de l'absence de vibrations transverses, par la différence de position des points extrêmes du brin considéré. L'erreur de transmission de transmission est donc proportionnelle à la tension dynamique. La Figure 4.7 présente l'analyse fréquentielle dans le domaine angulaire des signaux tension et erreur de transmission pour différentes vitesses de rotation. Les mêmes composantes fréquentielles apparaissent sur chaque graphique. La mesure de l'erreur de transmission par codeurs optiques permet donc d'évaluer les fluctuation de la tension de la courroie.

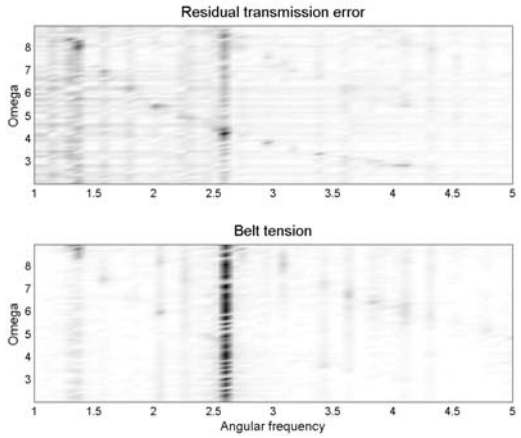


FIG. 4.7: Décomposition des composantes angulaires de la tension courroie et de l'erreur de transmission en fonction de la vitesse de rotation

4.2 Vibrations longitudinales

Les premiers modèles développés dans la bibliographie s'intéressent aux vibrations de torsion des poulies reliées entre elles par une courroie. La courroie est souvent modélisée par l'association en parallèle d'une raideur et d'un amortissement visqueux.

Les équations du mouvement sont obtenues par l'équilibre dynamique de chacune des poulies :

$$I_i \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = r_i \left(T_{i-1} - T_i\right) - Q_i \tag{4.4}$$

où la tension T_i est exprimée par

$$T_i = k_i \left(r_i\theta_i - r_{i+1}\theta_{i+1}\right) + c_i \left(r_i \frac{d\theta_i}{dt} - r_{i+1}\frac{d\theta_{i+1}}{dt}\right) + T_0 \tag{4.5}$$

qui conduit à :

$$I_i \frac{d^2\theta_i}{dt^2} + \left(c_{i-1} + c_i\right) r_i^2 \frac{d\theta_i}{dt} + \left(k_{i-1} + k_i\right) r_i^2 \theta_i = \pm c_{i-1} r_i r_{i-1} \frac{d\theta_{i-1}}{dt} \pm c_i r_i r_{i+1} \frac{d\theta_{i+1}}{dt} \pm k_{i-1} r_i r_{i-1} \theta_{i-1} \pm k_i r_i r_{i+1} \theta_{i+1} + Q_i \tag{4.6}$$

avec I_i le moment d'inertie de l'arbre i, θ_i le déplacement angulaire de la poulie i, k_i la raideur du brin i, c_i le coefficient d'amortissement du brin i, r_i le rayon de la poulie i, Q_i le moment extérieur appliqué sur la poulie i. Le signe $\pm$ de l'équation

précédente dépend de la configuration des poulies. L'application de l'Équation 4.6 s'exprime par le système matriciel :

$$[I]\frac{d^2\theta}{dt^2} + [C]\frac{d\theta}{dt} + [K]\theta = [Q] \tag{4.7}$$

Ainsi, pour l'exemple d'une transmission à quatre poulies, en négligeant l'amortissement :

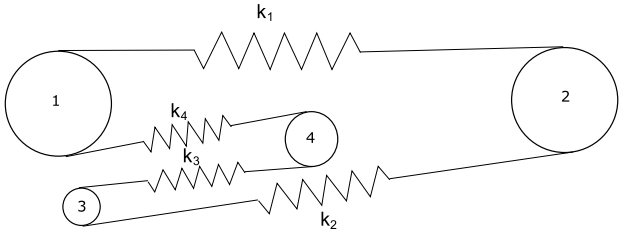


FIG. 4.8: Modèle de vibrations longitudinales

Les fréquences propres de ce système linéaire sont obtenues en résolvant l'équation :

$$det\left(K - \omega^2 I\right) = 0 \tag{4.8}$$

où

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

et

$$K = \begin{bmatrix} (k_4+k_1)r_1^2 & k_1 r_1 r_2 & 0 & k_4 r_1 r_4 \\ k_1 r_1 r_2 & (k_1+k_2)r_2^2 & -k_2 r_3 r_2 & 0 \\ 0 & -k_2 r_3 r_2 & (k_2+k_3)r_3^2 & -k_3 r_4 r_3 \\ k_4 r_1 r_4 & 0 & -k_3 r_4 r_3 & (k_3+k_4)r_4^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

En retenant les valeurs de matrices d'inertie et de raideur caractéristiques du banc, les trois fréquences sont situées dans la plage de fonctionnement mais n'ont pas pu être mises en évidence expérimentalement.

4.3 Instabilités paramétriques d'une transmission soumise à des excitations multi-fréquentielles

4.3.1 Modèle mécanique

Un modèle mécanique d'une corde en mouvement axial soumise à des fluctuations de tensions et de vitesses multi-fréquentielles, utilisé pour déterminer les zones d'instabilités paramétriques, a été étudié par Parker [PL01] et approfondi lors d'une collaboration à l'Ohio State University (voir Section II.5). Les équations du mouvement des vibrations transverses V pour une poutre de longueur L se déplaçant à la vitesse $c(T)$ est donnée par :

$$\rho A\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}+\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial X}+2c\frac{\partial^2 V}{\partial T\partial X}+c^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right)-\left(P_s+P_d(T)\right)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}=0 \tag{4.11}$$

où ρA est la masse par unité de longueur, V le déplacement transverse, P_s la tension statique, et $P_d(T)$ la tension dynamique, T et X les variables indépendantes du temps et de l'espace. La tension dynamique est le résultat du mouvement des extrémités de la courroie due à l'oscillation des poulies et de la déformation quasi-statique de la courroie due aux vibrations transverses. Elle est donnée par :

$$P_d(T)=\frac{EA}{L}\left[U\left(L,T\right)-U\left(0,T\right)+\frac{1}{2}\int_0^L\frac{\partial V}{\partial X}^2 dX\right] \tag{4.12}$$

où EA est le module de rigidité longitudinal et U le déplacement longitudinal. En utilisant les paramètres adimensionés :

$$x,v,u=\frac{X,V,U}{L},\ t=T\sqrt{\frac{P_s}{\rho AL^2}},\ \gamma=c/\sqrt{\frac{P_s}{\rho A}},$$
$$\zeta=\frac{EA}{P_s},\ \Omega_i=\sqrt{\frac{\rho AL^2}{P_s}}\tilde{\Omega}_i \tag{4.13}$$

L'Équation 4.11 devient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}-\left(1-\gamma^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\zeta\left[u\left(1,t\right)-u\left(0,t\right)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial v}{\partial x}^2 dx\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{4.14}$$

Les fluctuations de tension et de vitesse sont respectivement données par :

$$\zeta\left[u\left(1,t\right)-u\left(0,t\right)\right]=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\cos\left(\Omega_i t+\theta_i\right) \tag{4.15}$$

$$\gamma=\gamma_0+\sum_{i=1}^{k'}\varepsilon'_i\cos\left(\Omega'_i t+\theta'_i\right) \tag{4.16}$$

où $\varepsilon_i = EAu_i/P_s < 1$ représente le quotient de la i^{ime} composante de la tension dynamique par rapport à la tension statique.

Les équations des limites des zones d'instabilités sont obtenue par la théorie de Floquet couplée à une méthode de perturbation, comme étudié par Parker [PL01].

Linéarisant l'équation (4.14) et en l'écrivant sous forme d'état conduit à :

$$\begin{aligned}AW_t+BW+\sum_{i=1}^{k'}\varepsilon'_i\left\{\sin\left(\Omega'_i t+\theta'_i\right)C+\Omega'_i\cos\left(\Omega'_i t+\theta'_i\right)D\right\}W\\ -\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\cos\left(\Omega_i t+\theta_i\right)EW+\left(\sum_{i=1}^{k'}\varepsilon'_i\sin\left(\Omega'_i t+\theta'_i\right)\right)^2EW=0\end{aligned} \tag{4.17}$$

où

$$\begin{aligned}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\left(1-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2\gamma_0\frac{\partial}{\partial x} & -\left(1-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4}\\ \left(1-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0\end{bmatrix},\\ C=\begin{bmatrix}2\frac{\partial}{\partial x} & 2\gamma_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0\end{bmatrix},E=\begin{bmatrix}0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix},W=\begin{bmatrix}v_t\\ v\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Soit $E_{nm} = \langle E\Phi_n, \Phi_m\rangle == \int_0^1 (E\Phi_n)^T\overline{\Phi}_m dx$ et $E_{\overline{n}m} = \left\langle E\overline{\Phi}_n, \Phi_m\right\rangle$, et des relations similaires pour C et D, où Φ_n est issu d'une base de Galerkin :

$$\Phi_n=\begin{bmatrix}j\omega_n\psi_n\\ \psi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_n\psi_n\\ \psi_n\end{bmatrix} \tag{4.19}$$

où ψ_n sont les fonctions propres complexes de l'Eq.4.14 et ω_n les fréquences propres :

$$\psi_n=\frac{1}{n\pi\sqrt{1-\gamma_0}}e^{jn\pi\gamma_0 x}sin(n\pi x),\quad \lambda_n=jn\pi(1-\gamma_0^2) \tag{4.20}$$

Résultant d'une excitation paramétrique en vitesse et tension, la zone principale d'instabilité existe pour :

$$\Omega_l = \Omega'_l = 2\omega_n \pm \sqrt{\left(\varepsilon'_l \left|-jC_{\overline{n}n} + 2\omega_n D_{\overline{n}n}\right|\right)^2 + \left(\varepsilon_l \left|E_{\overline{n}n}\right|\right)^2} - \left|E_{\overline{n}n}\right|^2 \left[-\sum_{i=1,i\neq l}^{k} \varepsilon_i^2 \frac{2\omega_n}{\Omega_i^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{8\omega_n}\right] - \left|-jC_{\overline{n}n} + 2\omega_n D_{\overline{n}n}\right|^2 \left[-\sum_{i=1,i\neq l}^{k'} \varepsilon_i'^2 \frac{2\omega_n}{\Omega_i'^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{8\omega_n}\right] + \sum_{i=1}^{k'} \left(\frac{\varepsilon'_i}{2}\right)^2 \left|E_{nn}\right| \quad (4.21)$$

et la zone d'ordre 2 pour :

$$\Omega_l = \Omega'_l = \omega_n \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_l^2}{\omega_n} Im(E_{nn}) \left|E_{\overline{n}n}\right|\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_l'^2}{\omega_n} Im(-jC_{nn} + \omega_n D_{nn}) \left|-jC_{\overline{n}n} + \omega_n D_{\overline{n}n}\right|\right)^2} - \left|E_{\overline{n}n}\right|^2 \left[-\sum_{i=1,i\neq l}^{k} \varepsilon_i^2 \frac{\omega_n}{\Omega_i^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{3\omega_n}\right] - \left|-jC_{\overline{n}n} + \omega_n D_{\overline{n}n}\right|^2 \left[-\sum_{i=1,i\neq l}^{k'} \varepsilon_i'^2 \frac{\omega_n}{\Omega_i'^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{3\omega_n}\right] + \sum_{i=1}^{k'} \left(\frac{\varepsilon'_i}{2}\right)^2 \left|E_{nn}\right| \quad (4.22)$$

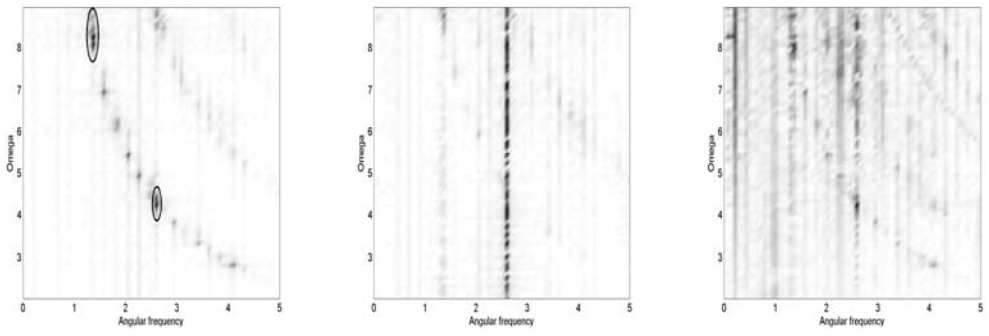
4.3.2 Validation expérimentale du modèle

La poulie 4 du banc décrit précédemment est équipée d'un galet de renvoi. Étant donné le sens de rotation du système et la position relative des poulies motrices et réceptrices, les instabilités apparaissent pour des fréquences plus basses dans le brin inférieur, voir Fig 4.9. Le système de mesure de la Section 4.1 est utilisé ici pour l'étude du système en rotation.

Pour une tension de pose et un couple moyen donnés, un balayage en vitesse de 500 à 1500 tr/mn est effectué par pas de 15 tr/mn. Les résultats expérimentaux sont présentés sur la Fig. 4.10 comme une vue de dessus d'un waterfall dans le domaine des fréquences angulaires pour la vibration transverse (a) et la tension de la courroie (b) et la vitesse de la courroie (c), où tous les paramètres sont adimensionées par rapport à la pulsation propre longitudinale du brin de courroie. L'étude de la décomposition fréquentielle de la tension de la courroie met en évidence des droites parallèles à l'axe des ordonnées qui prouve une excitation dépendant de la vitesse de rotation. Les instabilités transverses d'origines paramétriques sont représentées par des maximums d'amplitudes appartenant à une hyperbole. Le système

FIG. 4.9: Exemple d'instabilité dans le brin inférieur

est instable pour de nombreuses fréquences. La source d'excitation principale du système est liée à la conception de la pompe hydraulique qui génère une irrégularité de couple d'ordre 2. Cette fluctuation de couple entraîne des variations de tension, source d'excitation paramétrique. Les instabilités principale et secondaire, zones encerclées sur la Fig. 4.10(a), sont le résultat de cette excitation. La zone d'instabilité principale apparaît pour $\Omega_1 \in [7.9 \quad 8.8]$. Cette zone est classiquement plus large que la secondaire (qui existe pour $\Omega_1 \in [4.1 \quad 4.5]$). La non-homogénéité des caractéris-



(a) (b) (c)

FIG. 4.10: FFT waterfall dans le domaine angulaire : vibration transverse (a), fluctuation de tension dans la courroie (b), fluctuation de vitesses de la courroie (c)

tiques longitudinales de la courroie, mise en évidence Section 2.1.1, apparaît être une

source d'excitation paramétrique basse fréquence. Cette irrégularité n'étant pas purement sinusoïdale, sa décomposition fréquentielle est formée par un peigne de raies, lignes parallèles à l'axe des ordonnées distantes de 0.20, Fig. 4.10(b). Cette irrégularité explique l'ensemble des instabilités secondaires. Considérant la faible valeur du module de rigidité transverse devant la longueur du brin, EI est négligé. Le brin est considéré comme une corde ($\mu = 0$) et ainsi $C_{\overline{n}n} = (1 - e^{-2jn\pi\gamma_0})/2$, $D_{\overline{n}n} = 0$, $E_{\overline{n}n} = (1 - e^{-2jn\pi\gamma_0})/(4\gamma_0)$, $E_{nn} = jn\pi(1 + \gamma_0^2)/2$. Les valeurs de amplitudes d'excitations sont prélevée sur à partir des résultats expérimentaux et introduites dans le modèle : $\gamma_0 = 0.5,\ \omega_1 = 4.3, \Omega_2 = 8,\ \Omega_2' = 8,\ \varepsilon_1' = 0.001,\ \varepsilon_2 = 0.3,\ \varepsilon_2' = 0.001$. Pour $\varepsilon_1 = 0.7$, l'instabilité principale apparaît pour $\Omega_1 \in [7.8 \quad 9.2]$ et l'instabilité d'ordre 2 pour $\Omega_1 \in [4 \quad 4.4]$.

Les zones d'instabilités principales sont représentées Fig. 4.11 en fonction de la force d'excitation. L'existence d'une source secondaire d'excitation décale les zones d'instabilités vers des fréquences légèrement plus basses. Les mesures confirment les résultats théoriques.

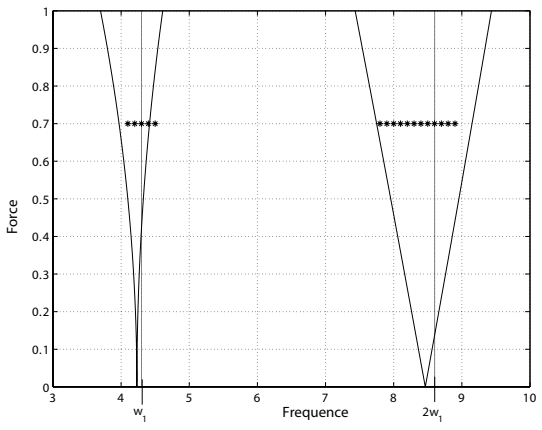


FIG. 4.11: Zones d'instabilités. Calculs (-) et mesures (*).

Dans le cas d'utilisation d'un tendeur à la place de la poulie fixe, les zones d'instabilités sont décalées vers des fréquences plus élevées qui n'ont pas pu être atteintes expérimentalement.

4.4 Rôle du tendeur sur le glissement poulie-courroie

Le glissement poulie/courroie est comparable à celui d'un pneumatique sur une chaussée sèche. Il est caractéristique d'un contact élastomère/métal avec un corps déformable visco-élastique et un corps indéformable. L'aire réelle de contact entre ces deux surfaces croit avec la pression normale. Avec la pénétration des rugosités du métal dans l'élastomère ; le coefficient de frottement n'est pas indépendant de la pression normale au contact. Les études sur ce coefficient sont principalement empiriques par Debbabi [Deb90], mais également théoriques [SE96, MM94, Ste00]. Ce type de contact particulier est à l'origine d'instabilités de frottement de type ondes de Schallamach. Des applications sur des systèmes de transmission par courroies ont été étudiés par Gerbert [GS02] et Betchel [BVJC00]. L'enroulement de la courroie autour d'une poulie,la différence de tension entre les brins adjacents et la présence des tendeurs au comportement hystérétiques compliquent cette étude. La section suivante présente l'étude expérimentale de l'influence du tendeur sur le glissement global.

4.4.1 Influence du tendeur

Le glissement poulie - courroie est caractérisé ici par la vitesse de glissement qui représente la pente de l'approximation linéaire de l'erreur de transmission. Cette pente a été déterminée pour une même tension de pose et à vitesse moyenne de rotation constante et pour différents couples dans les cas où la poulie 4 est soit fixe, soit celle d'un tendeur mécanique, soir celle d'un tendeur hydraulique, voir Fig. 4.12. On observe que la vitesse de glissement croît avec le couple pour les trois configurations étudiées. Les tendeurs permettent de réduire significativement le glissement (50%) par rapport à l'utilisation d'une poulie fixe. Au regard du glissement, le tendeur hydraulique apparaît légèrement plus efficace que le tendeur mécanique.

4.4.2 Influence de la tension de pose

La tension d'installation T_0, ou tension de pose, de la courroie permet d'assurer la transmission de la puissance, elle agit directement sur les conditions de contact poulie - courroie. Son influence sur le glissement est gommée lors du remplacement du galet enrouleur 4 par un tendeur mécanique, comme le montre la Fig. 4.13. Ainsi, avec l'utilisation d'un tendeur la tension de pose peut être réduite au minimum garantissant la transmission de la puissance ce qui préserve la courroie et sa durée de vie.

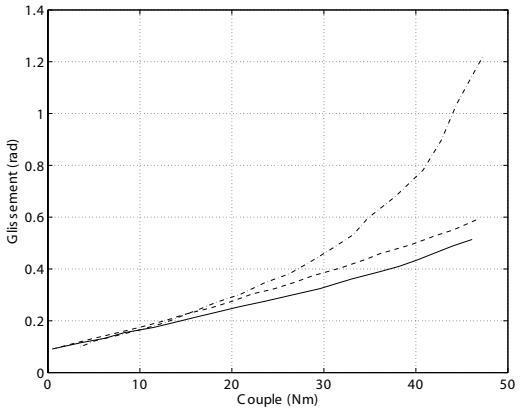
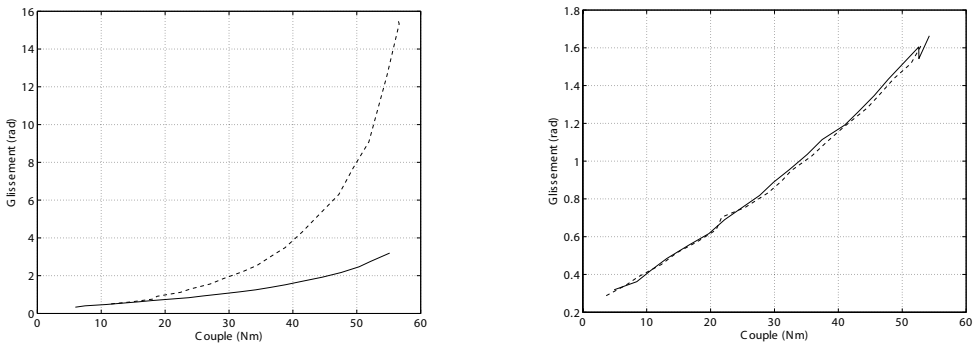


FIG. 4.12: Influence du tendeur sur le glissement : poulie fixe (-.-), tendeur mécanique (- -), tendeur hydraulique(–).



(a) (b)

FIG. 4.13: Influence de la tension de pose sur le glissement (T=300 N (- -), T=200 N (–). Poulie Fixe (a) et Tendeur mécanique (b).

Conclusions et perspectives

A partir d'un contexte industriel initial, des problématiques scientifiques ont été extraites pour un fonctionnement optimal d'une façade d'accessoires. Il s'est agi de comprendre le comportement dynamique d'ensemble de la face-avant. Pour cela, il a fallu effectuer des analyses le plus souvent non-linéaires du comportement des composants mécaniques ou de sous-ensembles constituant la façade. Des phénomènes indiqués dans la littérature sur des systèmes à excitations paramétriques ou dissipatifs ont été mis en évidence et analysés sur une face-avant de moteur thermique. Le comportement dynamique de l'entraînement a été observé, identifié et modélisé au travers de la double approche calcul-mesure. Les méthodes d'échantillonnage angulaire, des plans d'expériences, des échelles multiples, de Floquet ou de la balance harmonique ont été employées pour progresser dans la connaissance des comportements fortement non-linéaire.

Le caractère hystérétique des boucles effort-déflexion des tendeurs a été déterminé expérimentalement et modélisé grâce à l'utilisation originale du modèle de Dahl modifié. Les tendeurs mécaniques et hydrauliques jouent un rôle important dans le dynamique de la face-avant. Ils contribuent notablement à la diminution des niveaux vibratoires. Le tendeur hydraulique est le plus efficace dans la réduction du glissement poulie/courroie. Ainsi leur présence améliore le rendement des transmission par courroie.

De plus, il a été montré que les brins de courroie, oscillateurs de Duffing à excitations paramétriques, sont le siège d'instabilités latérales situées dans la gamme de fonctionnement des moteurs thermiques. Il convient donc de prendre en considération ces instabilités lors de la conception de face-avant.

Les modèles et dispositifs phénoménologiques ne prenant en compte que les

degrés de liberté les plus pertinents sont développés et regroupés autour d'un banc reproduisant une face-avant de moteur thermique. Ils serviront de base pour une étude ultérieure des comportements hystérétiques des tendeurs couplés à la dynamique en rotation.

A l'issue de cette thèse, une meilleure connaissance du comportement a permis d'initier le développement d'une solution technologique optimisant le démarrage par alterno-démarreurs et capable d'une meilleure filtration des vibrations décelées précédemment. Il conviendrait de prolonger cette recherche vers le contrôle actif et/ou passif [TC94, KS01, ZP03] des vibrations transmises par le vilebrequin à l'alternateur. Les perspectives se situent dans l'introduction de composants actifs pour pallier ou compléter les effets des tendeurs. Toutefois, le contrôle passif peut persister dans la mesure où le comportement des composants non-linéaires (tendeurs) peut être maîtrisé par des méthodes inverses d'optimisation.

Références bibliographiques

[AM02] A. Al Majid : *Dissipation de l'energie en mécanique vibratoire : opérateur d'hystéresis et phénomènes métriques.* Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2002.

[AMD02] A. Al Majid et R. Dufour : Formulation of a hysteretic restoring force model. application to vibration isolation. *Nonlinear Dynamics*, 27:69–85, 2002.

[AMD04] A. Al Majid et R. Dufour : Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator : Experiment and prediction. *Journal of Sound and Vibration*, 277:391–403, 2004.

[Arb92] S. Arbate : Vibrations of belts and belt drives. *Mechanisms and Machines Theory*, 27:645–659, 1992.

[BDHDD96] A. Berlioz, J. Der Hagopian, R. Dufour et E. Draoui : Dynamic behavior of a drill-string. experimental investigation of lateral instabilities. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 118:292–298, 1996.

[Bli92] P.-A. J. Bliman : Mathematical study of the dahl's friction model. *European Journal of Mechanics. A Solids*, 11(6):835–848, 1992.

[BPU97] R.S. Beikmann, N.C. Perkins et A.G. Ulsoy : Design and analysis of automotive belt drive systems for steady state performance. *ASME Journal of Mechanical Design*, 119:162–168, 1997.

[BVJC00] S.E. Betchel, S. Vohra, K.I. Jacob et C.D. Carslon : The stretching and slipping of belts and fibers on pulleys. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 67:197–206, 2000.

[Che05] L. Chen : Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings. *ASME Applied Mechanics Review*, 58:91–116, 2005.

[CSK05] L. Chabot, O. Simon et V. Kernen : Technologie stop-start, conception fonctionnelle de l'entraînement des accessoires. *Journal Ingénieurs de l'automobile*, 775 bis:12–18, 2005.

[CZ03] G. Cheng et J.W. Zu : Nonstick and stick-slip motion of a coulomb-damped belt drive system subjected to multifrequency excitations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 70:871–884, 2003.

[DB98] R. Dufour et A. Berlioz : Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 120:461–467, 1998.

[Deb90] C. Debbabi : *Contribution à l'étude dynamique des courroies de transmission soumises aux irrégularités cycliques de vitesse des moteurs.* Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1990.

[Eul62] L. Euler : Remarques sur l'effet du frottement dans l'équilibre. *Mém. Acad. Sci.*, pages 265–278, 1762.

[FL98] G. Ferraris et M. Lalanne : *Rotordynamics Prediction in Engineering.* Wiley, 1998.

[Ger81] G. Gerbert : Some notes on v-belt drives. *ASME - Journal of Mechanical Design*, 103:8–18, 1981.

[Ger99] G. Gerbert : *Traction belt mechanics.* MVD. Chalmers édition, 1999.

[GH89] R.G.S. Gasper et L.E. Hawker : Resonant frequency prediction of automotve serpentine belt drive system by computer modelling. *In 12th ASME Biennal Conf. Mech. Vibr. Noise, Montreal, Canada*, pages 13–16, 1989.

[Gra83] B.G. Grashof : *Theoretische Maschinenlehre.* Loepold Voss, Hamburg, 1883.

[GS02] G. Gerbert et F. Sorge : Full sliding adhesive-like contact of v-belts. *ASME - Journal of Mechanical Design*, 124:706–712, 2002.

[Haw91] L.E. Hawker : *A vibration analysis of automotive serpentine accesory drive.* Thèse de doctorat, University of Windsor, 1991.

[HB89] D.R. Houser et G.W. Blankenshio : Methods for measuring transmission error under load and at operating speeds. *SAE Transactions*, 98(6):1367–1374, 1989.

[HPUM94] S.J. Hwang, N.C. Perkins, A. Ulsoy et R.J. Meckstroth : Rotational response and slip prediction of serpentine belt dirve systems. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 116:71–78, 1994.

[Joh85] K.L. Johnson : *Contact Mechanics.* Cambridge University Press, London, 1985.

[JP03] R. Jha et R. Parker : Nonlinear oscillations of a particle in the plane under longitudinal end excitation. *In Proceeding of DETC'03*, 2003.

[Ket98] Y. KETEMA : Averaging and bifurcation in an oscillator with history dependent restoring force. *Journal of Sound and Vibration*, 209(1):187–198, 1998.

[KI00] Y.I. KWON et J.-G. IH : Vibrational power flow in the moving belt passing through a tensioner. *Journal of Sound and Vibration*, 229:329–353, 2000.

[KJ96] Fan G.W. KRAVER, T.C. et Shah J.J. : Complex modal analysis of a flat belt pulley system with belt damping and coulomb-damped tensioner. *ASME Journal of Mechanical Design*, 118:306–311, 1996.

[KP05] L. KONG et R.G. PARKER : Steady mechanics of belt-pulley systems. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 72:25–34, 2005.

[KS01] S. KIM et R. SINGH : Vibration transmission trough an isolator modelled by continuous system theory. *Journal of Sound and Vibration*, 248(5):925–953, 2001.

[LB02] J-l LIGIER et E BARON : *Acyclisme et Vibrations*. 2002.

[LBDH84] M. LALANNE, P. BERTHIER et J. DER HAGOPIAN : *Mechanical vibrations for engineers*. Wiley édition, 1984.

[LP98] M.J. LEAMY et N.C. PERKINS : Nonlinear periodic response of engine accessory drives with dry friction tensioners. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 120:909–916, 1998.

[LW02a] M.J. LEAMY et T.M. WASFY : Analysis of belt-drive mechanics using a creep-rate-dependent friction law. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 69:763–771, 2002.

[LW02b] M.J. LEAMY et T.M. WASFY : Transient and steady-state dynamic finite element modeling of belt-drives. *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*, 124:575–581, 2002.

[MG05] E. MOCKENSTURM et J. GUO : Nonlinear vibration of parametrically excited viscoelastic axially moving media. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 72:374–380, 2005.

[MM94] M. D. P. MONTEIRO MARQUES : An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction. *European Journal of Mechanics. A Solids*, 13(2):277–306, 1994.

[MMCD03] L. MANIN, G. MICHON, E. COMBLE et R. DUFOUR : Détermintation expérimentale des caractéristiques mécaniques des courroies de transmission. *Revue des composites et matériaux avancés*, 13(3):317–326, 2003.

[MMD05] G. MICHON, L. MANIN et R. DUFOUR : Hysteretic behavior of a belt tensioner :

Modeling and experimental investigation. *Journal of Vibration and Control*, 11(9): 1147–1158, 2005.

[Mou01] Z.P. Mourelatos : A crankshaft system model for stuctural dynamic analysis of internal combustion engines. *Computer and Structures*, 79:2009–2027, 2001.

[MPU96] E. Mockensturm, N. Perkins et A. Ulsoy : Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 118:346–351, 1996.

[MW97] J. Moon et J.A. Wickert : Non-linear vibrations of power transmission belts. *Journal of Sound and Vibrations*, 200(4):419–431, 1997.

[PCF04] F. Pellicano, G. Catellani et A. Fregolent : Parametric instability of belts : theory and experiments. *Computer and Structures*, 82:81–91, 2004.

[PFBV01] F. Pellicano, A. Fregolent, A. Bertuzzif et F. Vestroni : Primary and parametric non-linear resonances of a power transmission belt : experimental and theoretical analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 244:669–684, 2001.

[PL01] R. Parker et Y. Lin : Parametric instability of axially moving media subjected to multifrequency tension and speed fluctuation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 68:49–57, 2001.

[RM05] D. Remond et J. Mahfoudh : From transmission error measurements to angular sampling in rotating machines with discrete geometry. *Shock and Vibration. IOS Press*, 9:1–13, 2005.

[SAMTD06] P. Saad, A. Al Majid, F. Thouverez et R. Dufour : Equivalent rheological and restoring force models for predicting the harmonic response of elastomer specimens. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5):619–639, 2006.

[SE96] K.Y. Sanliturk et D.J. Ewins : Modelling two-dimensional friction contac and its application using harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2):511–523, 1996.

[Ste00] David E. Stewart : Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM Review*, 42(1):3–39, 2000.

[TC94] M.L. Tinker et M.A. Cutchins : Instabilities in a non-linear model of a passive damper. *Journal of Sound and Vibration*, 176(3):415–418, 1994.

[UWH85] A.G. Ulsoy, J.E. Whitesell et M.D. Hooven : Design of belt-tensioner system for dynamic stability. *ASME - Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in*

Design, 107:282–290, 1985.

[Wic92] J.A. Wickert : Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *Int. J Non-linear Mechanics*, 27(3):503–517, 1992.

[ZP03] F. Zhu et R.G. Parker : Non-linear dynamics of a one-way clutch in belt-pulley systems. *Journal of Sound and Vibration*, in press, 2003.

[ZZ99] L. Zhang et J.W. Zu : One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 232:783–806, 1999.

Deuxième partie

Articles et communications

Cette partie est constituée des articles suivants *(pour des raisons de Droits d'Auteurs, les versions présentées ici sont les versions soumises aux différents journaux. Se repporter à ces derniers pour consulter les versions finales)* :

- L. Manin, G. Michon, E. Comble et R. Dufour, *Détermination des caractéristiques mécaniques des courroies de transmission*, Revue des composites et matériaux avancés, 2003, Vol. 13(3), pp 317-326.
- G. Michon, L. Manin, R. Dufour, *Hysteretic Behavior of a Belt Tensioner : Modeling and Experimental Investigation*, Journal of Vibration and Control, 2005, Vol 11(9), pp 1147-1158.
- J. Bastien, G. Michon, M. Manin, R. Dufour, *An analysis of the Masing and Modified Dahl models. Application to a belt tensioner*, soumis au Journal of Sound and Vibration.
- G. Michon, L. Manin, R.G. Parker, R. Dufour, *Duffing oscillator with parametric excitation : analytical and experimental investigation on a belt-pulley system*, soumis à l'ASME Journal of Computational Nonlinear Dynamics, 2006.
- G. Michon, L. Manin, D. Remond, R.G. Parker, *Parametric instability of an axially moving belt subjected to multi-frequency excitations : experiments and analytical validation*, soumis à l'ASME Journal of Applied Mechanics, 2006.
- G. Michon, K. Stofleth, L. Manin, D. Remond, R. Dufour, *Mesure des phénomènes non-linéaires dans la façade accessoire des moteurs thermiques*, Colloque Vibrations, Chocs et Bruits, Lyon, 2004.

Détermination expérimentale des caractéristiques mécaniques de courroies de transmission.

Détermination expérimentale des caractéristiques mécaniques de courroies de transmission

Raideur et amortissement longitudinaux, module de flexion

Lionel MANIN, Guilhem MICHON, Emilie COMBLE et Régis DUFOUR

Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures,
Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
69621 Villeurbanne Cedex, France
lionel.manin@insa-lyon.fr
http://www.insa-lyon.fr/Laboratoires/LDMS/

RÉSUMÉ *Les courroies synchrones et poly-v sont des liens souples utilisés notamment dans les moteurs automobiles, elles ont un rôle important et sont définies de plus en plus finement. Leurs caractéristiques mécaniques influencent le comportement dynamique des transmissions qu'elles entraînent (entraînement de la distribution ou des accessoires). Par conséquent, la mesure des caractéristiques de raideur et d'amortissement de ces composants est nécessaire pour mieux appréhender leur comportement. De plus, ces quantités constituent des données d'entrée pour les modèles de calcul de comportement dynamique des transmissions par courroies. Deux approches pour la détermination de la raideur longitudinale sont présentées : chargement statique/dynamique. La rigidité de flexion a été mesurée également. Ces grandeurs sont déterminées depuis l'analyse des vibrations longitudinales et transverses des brins de courroie.*

ABSTRACT. *Timing and poly-v belts, used on automotive engine, are flexible links that play an important role and have an accurate design. Their mechanical characteristics influence the dynamic behaviour of the transmissions driven by the belts. Therefore, the measurement of stiffness and damping characteristics of these components is necessary for a better evaluation of their behaviour. Moreover these quantities are input data for belt transmission dynamic behaviour models. Two methods for the determination of the longitudinal stiffness are presented: static/dynamic loading. Bending rigidity has been measured also. All these quantities are determined from the analyses of longitudinal and transverse vibrations of belt span.*

MOTS-CLÉS : *courroie de transmission, raideur, amortissement, vibrations, mesures*

KEYWORDS: *transmission belt, stiffness, damping, vibrations, measurements*

1. Introduction

Les courroies synchrones ou poly-v sont des liens souples qui jouent un rôle important dans le comportement dynamique des transmissions dont elles assurent l'entraînement. Ce sont des composants mécaniques fortement hétérogènes de par leur constitution qui mélange un câblé en fibre de verre à plusieurs couches de caoutchouc (Fig. 1). Les courroies ont un effet sur la dynamique des transmissions par l'intermédiaire de leurs caractéristiques de raideurs et d'amortissement. Ainsi, la mesure de ces quantités est nécessaire pour mieux appréhender et maîtriser le comportement des transmissions par courroie. De plus, ces quantités constituent des données d'entrée pour les modèles de calcul de comportement dynamique des transmissions par courroie (Monternot, 1998, Beikmann, 1992, Dancé, 1992, Debabbi, 1990). D'une manière générale, dans ces modèles (Fig. 2), les degrés de liberté en rotation des poulies sont reliés entre eux par des raideurs et des amortisseurs représentant les différents brins de courroie. Les brins ayant des longueurs différentes dépendant de l'entraxe des poulies qu'ils relient, il convient de ramener les raideurs et amortissement à des valeurs par pas de courroie ou par unité de longueur.

Les valeurs de raideur et d'amortissement ne sont pas communiquées par les fabricants de courroie, les abaques des catalogues garantissent seulement une capacité de transmission de puissance et un rendement pour une plage de vitesse donnée. Afin de déterminer ces valeurs, des méthodes expérimentales ont été élaborées au laboratoire, elles permettent de mesurer : la raideur longitudinal, l'amortissement longitudinal ainsi que la rigidité de flexion.

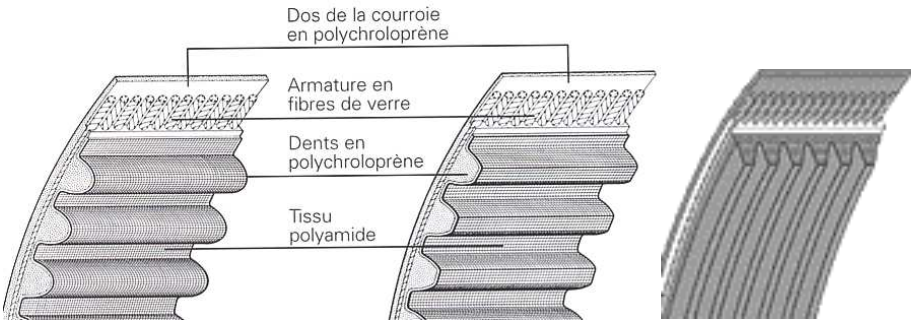
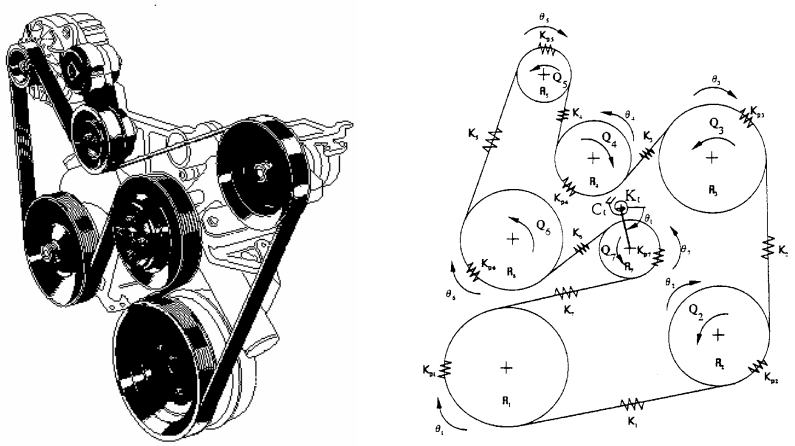


Figure 1. *Constitution des courroies de transmission (synchrones, poly-v)*



(a) (b)

Figure 2. (a) *Transmission d'entraînement des accessoires d'un moteur automobile par courroie poly-v,* **(b)** *exemple de modélisation d'une transmission*

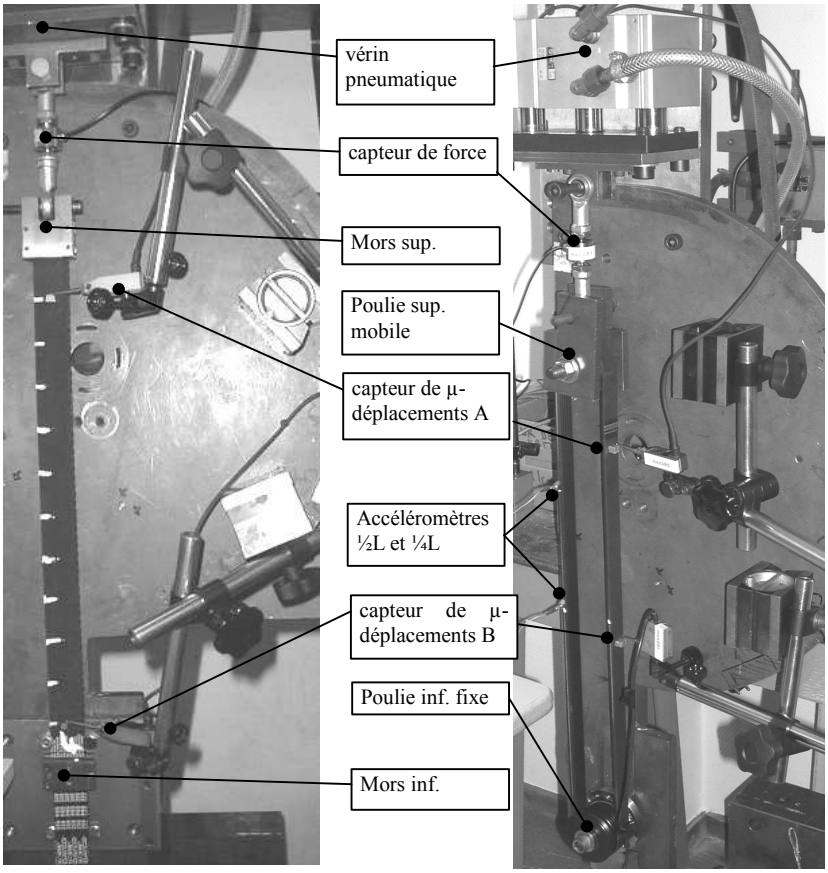
2. Raideur et amortissement longitudinal des courroies

Deux méthodes différentes ont été utilisées: une méthode dite "méthode statique" permettant d'accéder à la valeur de la raideur longitudinale - une méthode dite "méthode dynamique" permettant d'obtenir la raideur et l'amortissement longitudinaux de la courroie. Les principes sont les mêmes quelque soit le type de courroie étudié (poly-v ou synchrone).

2.1. *Méthode statique*

Une des extrémités de la courroie est fixe et l'autre mobile. Une courroie entière ou un brin peuvent être utilisés pour déterminer la raideur (Fig. 3). L'allongement d'une portion de courroie, située entre deux capteurs de µ-déplacement, est observé en fonction de l'effort de traction appliqué par un vérin pneumatique. Selon le type de courroie, la caractéristique finale mesurée diffère: pour une courroie synchrone, c'est la raideur par pas K_{pas}(N/m) – pour une courroie de type poly-v, c'est EA (N), avec E module d'Young équivalent et A section. L'allongement varie linéairement

avec l'effort de traction. Plusieurs montées en charge sont réalisées successivement et la répétabilité est bonne (Fig. 4).



a) *b)*

Figure 3. *Banc Raideur courroie « méthode statique »*

La raideur k_{np_i} d'un morceau de courroie, de *np_i* pas entre les capteurs A et B, est:

$$k_{np_i} = (F-F_0)/(x_A-x_B) \quad [1],$$

où (F-F_0) est la variation de l'effort de tension, et (x_A-x_B) l'allongement correspondant. En considérant chaque pas comme un ressort linéaire et la longueur de courroie AB comme l'association en série de *np_i* ressorts, la raideur par pas est donnée:

$$k_{abs/pas} = np_i * k_{np_i} \quad [2]$$

Deux raideurs peuvent être déduites des mesures, l'une absolue $k_{abs/pas}$ et l'autre relative $k_{rel/pas}$:

$$k_{abs/pas} = (F_j - F_0)/(dL_j) \quad [3]$$

$$k_{rel/pas} = (F_j - F_{j-1})/(dL_j - dL_{j-1}) \quad [4]$$

où F_0 est la tension initiale, F_{j-1} et F_j représentent des niveaux de charge avec F_{j-1} inférieur F_j, dL_j et dL_{j-1} les allongements correspondants aux niveaux de charge *j-1* et *j*.

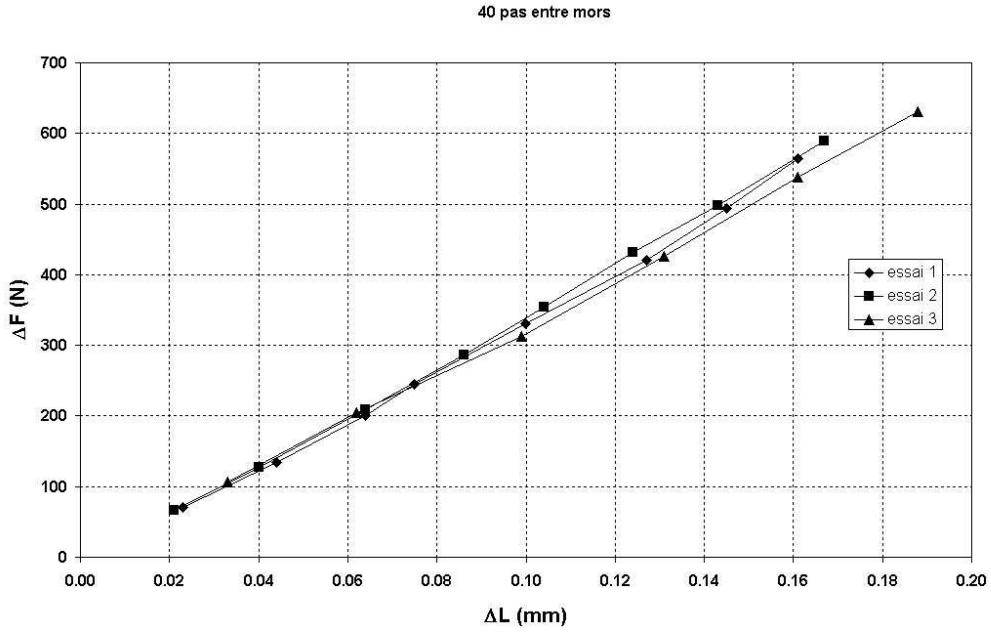


Figure 4. *Courbes efforts – allongement d'un brin de courroie*

Les mesures sont réalisées pour plusieurs longueurs ou nombre de pas (*np_i*) de courroie entre les mors afin de vérifier la linéarité de la raideur longitudinale en fonction du nombre de pas du brin étiré, ainsi que la constance de la raideur d'un pas de courroie (Tab. 1).

	(N/m)		
np_i	k_abs_np_i	k_abs/pas	k_rel/pas
30	3.81E+06	1.14E+08	1.12E+08
35	3.06E+06	1.07E+08	1.12E+08
40	2.80E+06	1.12E+08	1.15E+08
45	2.49E+06	1.12E+08	1.15E+08
50	2.34E+06	1.17E+08	1.18E+08

Tableau 1. *Raideurs du brin de np_i pas, absolue par pas (F-F0)/(L-L0), relative par pas ΔF/ΔL, en fonction du nombre de pas entre mors np_i, ici le pas vaut 8mm.*

Les résultats de mesure de raideur obtenus par la "méthode statique" donnent des résultats semblables pour les raideurs dites absolues et relatives avec un pourcentage d'incertitude de ± 3%. Les résultats présentés correspondent à un type de courroie, mais de nombreux autres essais ont montré les mêmes tendances.

2.2. Méthode dynamique

Le principe est de suspendre une masse *m* à l'extrémité basse d'un morceau de courroie de longueur *L* encastré en son extrémité haute, afin d'obtenir un système masse-ressort amorti (Fig. 5). *L* et *m* sont suffisamment importantes pour se rapprocher au mieux de l'idéalisation du modèle. L'excitation longitudinale de la courroie est assurée par un marteau à impulsion. Le fait de choquer la masse avec le marteau déclenche automatiquement l'acquisition. La vibration longitudinale amortie du système est observée via un accéléromètre collé sous la masse. L'analyse du signal enregistré (Fig. 6) permet de déterminer la fréquence de vibration du système *Fr* (par une fft) ainsi que le taux d'amortissement α (par décrément logarithmique, Lalanne, 1984). La raideur et l'amortissement globaux du système Kg_{ni} et Cg_{ni} sont ensuite déduits depuis les formules classiques de la théorie des vibrations en mécanique:

$$\delta = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+b}}\right) \qquad \alpha = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}} \qquad [5]$$

$$Kg_{ni}=\frac{4\pi^2 m}{1-\alpha^2}F_r^2 \quad Cg_{ni}=4\pi m F_r\,\alpha \qquad [6]$$

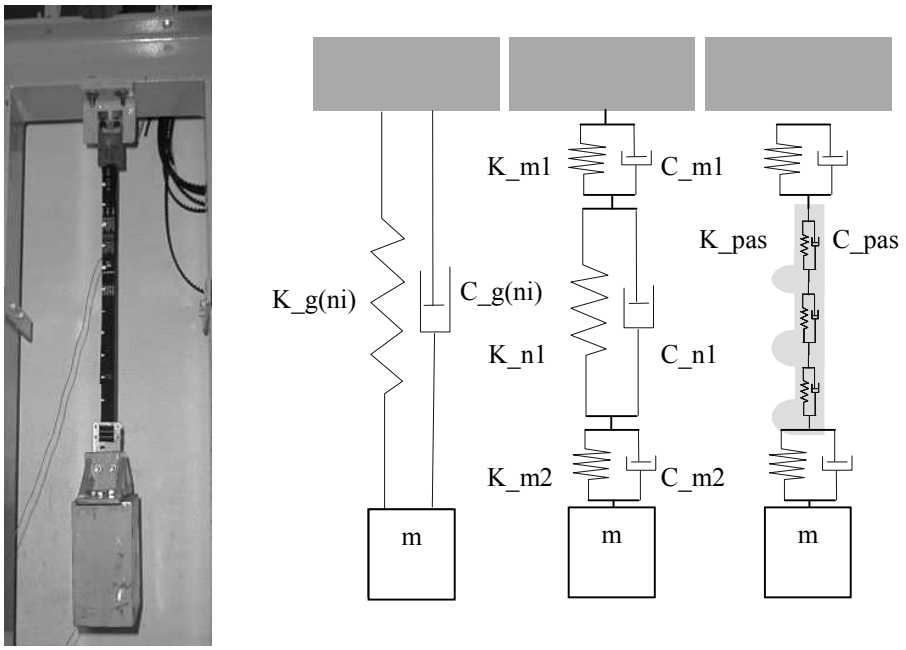


Figure 5. *Banc Raideur courroie "méthode dynamique", modèle du banc*

Des mesures pour plusieurs longueurs entre mors (ou nombre de pas), le post-traitement et le modèle du système réalisé permettent de s'affranchir de la raideur des mors de pincement de la courroie K_{m1} et K_{m2} (Fig. 5). En effet, les mors ne peuvent être considérés comme infiniment rigides, et il faut en tenir compte pour obtenir des résultats semblables à ceux de la méthode statique. Pour des nombres de pas *n1* et *n2*, les raideurs globales mesurées Kg_{n1} et Kg_{n2} s'expriment par:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{Kg_{n1}}=\dfrac{1}{K_{n1}}+\dfrac{1}{K_{m1}}+\dfrac{1}{K_{m2}}\\[2ex]\dfrac{1}{Kg_{n2}}=\dfrac{1}{K_{n2}}+\dfrac{1}{K_{m1}}+\dfrac{1}{K_{m2}}\end{cases} \text{ avec } K_{ni}=\frac{K_{pas}}{ni} \text{ devient } \begin{cases}\dfrac{1}{Kg_{n1}}=\dfrac{n_1}{K_{pas}}+\dfrac{1}{K_{m1}}+\dfrac{1}{K_{m2}}\\[2ex]\dfrac{1}{Kg_{n2}}=\dfrac{n_2}{K_{pas}}+\dfrac{1}{K_{m1}}+\dfrac{1}{K_{m2}}\end{cases} \qquad [7],$$

et permettent de déterminer la raideur par pas ou *EA* dans le cas d'une courroie poly-v (avec *E* module d'Young équivalent de la courroie et *A* section de la courroie):

$$Kpi=\frac{Kg_{n1}*Kg_{n2}}{Kg_{n2}-Kg_{n1}}*(n_1-n_2) \qquad EA=\frac{(L_{(i)}-L_{(i+1)})\ K_{G(i)}\ K_{G(i+1)}}{K_{G(i+1)}-K_{G(i)}} \qquad [8].$$

Le même principe est appliqué pour l'amortissement. Cette méthode est très fiable, et la répétitivité d'une mesure à l'autre est très bonne. Les valeurs de raideurs déterminées sont semblables à celles de la méthode "statique" à 5% prés.

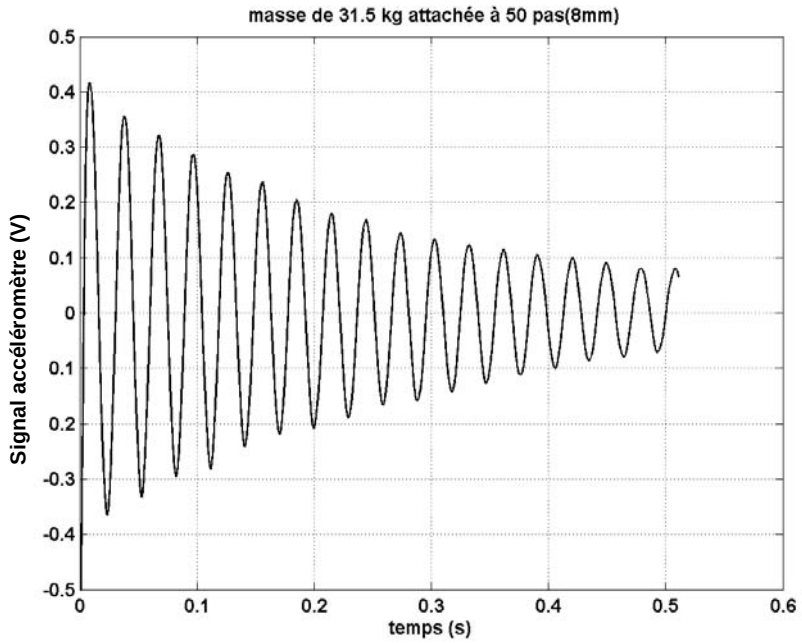


Figure 6. *Vibration longitudinale amortie de la masse dans le cas de la mesure de raideur et d'amortissement par la méthode "dynamique"*

3. Module de flexion EI

Si on considère un modèle de poutre et corde vibrante, les fréquences propres de vibrations transverses d'un brin de courroie à l'arrêt (de tension T_0, de longueur *L*, et de masse linéique *m*), associées aux différents modes sont données par (Gerbert, 1999, Abrate, 1992) :

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{m} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\frac{EI}{m}} \qquad \text{(n numéro du mode)} \qquad [9]$$

La détermination expérimentale de ces fréquences, permet d'obtenir la valeur de EI. Le même montage que celui réalisé pour la mesure de la raideur en statique est utilisé (Fig. 2-b). La courroie est choquée transversalement et les vibrations transverses sont mesurées via les accéléromètres placés sur le dos de la courroie de sorte à observer les premiers modes. Les fréquences propres sont extraites des spectres des signaux enregistrés. La variation linéaire du carré des fréquences propres en fonction de la tension de la courroie est vérifiée expérimentalement (Fig. 7). L'intersection des courbes avec l'axe des ordonnées, c'est-à-dire pour une tension dans la courroie nulle, permet de déduire le module de flexion *EI* pour chacune des fréquences analysées. Dans le cas présenté, la première fréquence conduit à EI =1.29 N.m², la deuxième conduit à EI=1.24 N.m².

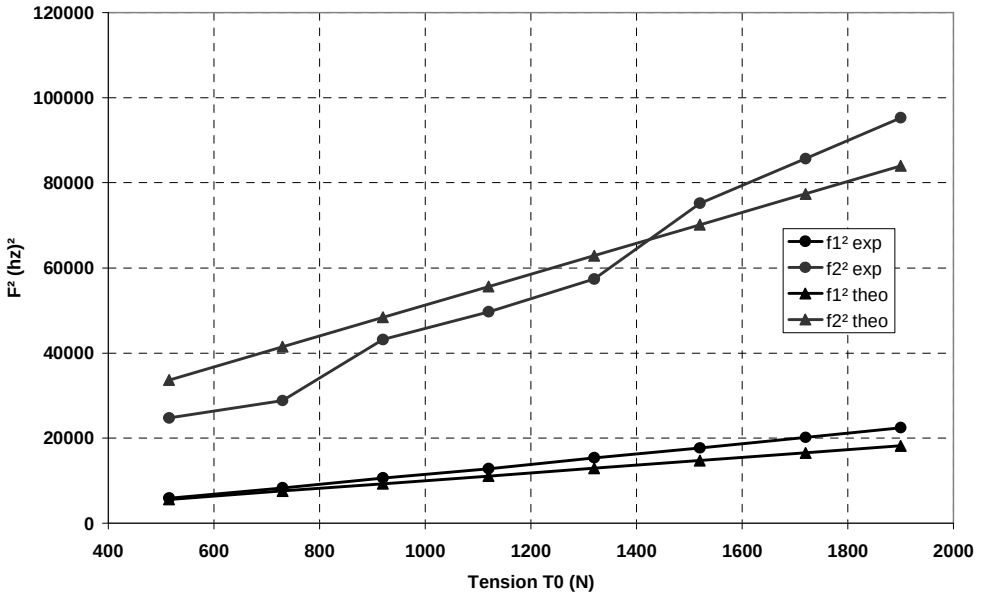


Figure 7. *Comparaison expérimental/théorie des fréquences propres des vibrations transverses de courroie en fonction de la tension*

4. Conclusion

Les méthodes de mesures présentées permettent avec un bon niveau de précision de déterminer les caractéristiques de raideur et d'amortissement des courroies de transmission. Ces méthodes ont été éprouvées au travers de multiples essais sur différentes courroies et en partenariat avec des constructeurs ou équipementiers automobiles. Deux méthodes de détermination de la raideur longitudinale ont été développées, elles donnent des résultats similaires. La méthode dynamique est cependant plus rapide et permet également la détermination de l'amortissement. Ces méthodes sont basées sur des modèles simples de vibrations linéaires et d'élasticité. La détermination du module de flexion à partir de l'analyse des vibrations transversales d'un brin de courroie a été mise en œuvre et donne des résultats satisfaisants.

5. Références

Abrate S., "Vibrations of belts and belt drives", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 27, n° 6, pp. 645-659, 1992.

Beikmann, R. S., *"Static and Dynamic Behavior of Serpentine Belt Drive Systems : Theory and Experiment."*, The University of Michigan, Ph. D., Order Number DA9308273, 1992, 173p.

Dancé, J.-M., *"Comportement Statique et Cinématique des Transmissions par Courroies Synchrones. Modélisation et Détermination des Paramètres Prépondérants."*, Thèse de doctorat, déc. 1992, n° 92 ISAL 0082, INSA de Lyon, 239 p.

Debbabi, C., *"Contribution à l'Étude Dynamique des Courroies de Transmission Soumises aux Irrégularités Cycliques de Vitesse des Moteurs."*, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre & Marie Curie (Paris VI), 1990, 182 p.

Gerbert G., "*Traction Belt Mechanics*", MVD, Chalmers 1999, 600p.

Lalanne M., Berthier P., Der Hagopian J., *"Mechanical vibrations for engineers"*, 1984, Ed. J. Wiley, 264p., ISBN0471901970

Monternot C., *« Comportement dynamique des transmissions de puissance par courroie dentée »,* Thèse Mécanique, INSA- Lyon, 1998, 279p, 98 ISAL 0045

Hysteretic behavior of a belt tensioner : modelling and experimental investigation.

Hysteretic behavior of a belt tensioner: modeling & experimental investigation

G. MICHON

guilhem.michon@valeo.com

Valeo Electrical Systems, 2 rue A. Boulle 94000 Créteil, France

L. MANIN, R. DUFOUR

lionel.manin@insa-lyon.fr, regis.dufour@insa-lyon.fr

Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures, UMR CNRS 5006,

INSA de Lyon, 18 rue des Sciences 69621 Villeurbanne, France

Short running headline:

Hysteretic behavior of a belt tensioner

Corresponding author:

Professor Régis Dufour

Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures, UMR CNRS 5006

INSA de Lyon, Bâtiment Jean d'Alembert, 18 rue des Sciences

69621 Villeurbanne, France

Phone 33 4 72 43 82 02, Fax 33 4 72 43 89 30

regis.dufour@insa-lyon.fr

The manuscript contains 14 double-spaced pages, 13 figures.

Abstract: This paper describes the modeling of the hysteretic behavior of belt tensioners. An initial experimental device composed only of the tensioner by using forcing frequencies, preloads and deflection amplitudes. It permits identifying the parameters of the restoring force model used. Comparison of the measured and predicted force-deflection loops of the tensioner subjected to large deflections permits preliminary validation of the model. The second experimental device consists of a belt-tensioner system. Its nonlinear modeling includes the above hysteretic model and the belt's longitudinal characteristics. Validation of the belt-tensioner model is completed by comparing the measured and predicted belt tension. Finally it is shown by using a parametric investigation and phase-plane portrait that the response of the belt-tensioner system increases with the frequency and the amplitude of the excitation.

Key Words: Damper, belt, tensioner, hysteresis

1. INTRODUCTION

Mechanical tensioners are widely used in belt drive systems. They play a predominant role in the dynamic behavior of the belt: they maintain nominal tension in the slack span and reduce the transverse vibration level, especially in the automotive serpentine belt drive system, (Beikmann et al., 1997). This type of mechanical system, known as a front-end accessory drive (FEAD), gives rise to many current technological challenges and scientific problems, see for example Kwon and Ih (2000), Leamy and Wasfy (2002), Cheng and Zu (2003), Parker (2004). Satisfying such industrial requirements calls for a device with a complicated design. Roughly speaking, it consists of a rotating device composed of different mechanical parts (spring, end-stops) and different types of contact (dry and lubricated). This type of design leads to considerably nonlinear behavior due to stick-slip motion (Leamy and Perkins, 1998) difficult identification of parameters such as stiffness, dry friction and viscous damping. Consequently, the establishment of a complete model based on the combination of classical models, as formulated by Maxwell, Kelvin-Voigt, and Prandtl, is not obvious. See, for example, Kraver et al. (1996). It therefore appears logical to use the restoring force model proposed by Al Majid and Dufour (2002, 2004), which depends, in particular, on preload, forcing frequency and amplitude of deflection. Its efficiency has been demonstrated with a continuous system equipped with localized nonlinearity subjected to both impacts and harmonic excitation.

In order to improve the modeling accuracy of a global belt drive system containing a tensioner, this article presents a nonlinear model of a real belt-tensioner system capable of strong dissipation essentially due to stick-slip motion. Its modeling uses an experimental and theoretical approach. Section 2 is devoted to the application of the restoring force model on the tensioner. A specific experimental set-up is assembled to measure the force-deflection loops of the tested tensioner subjected to several preloads and forcing frequencies for a given deflection amplitude. Moreover, these experiments are performed in order to adjust the parameters of the tensioner model. In Section 3, the tensioner is implemented in a simple belt-tensioner system. In particular the discrete modeling of the associated experimental device takes into account the hysteretic tensioner model and the longitudinal characteristics of a real belt. The harmonic response uses a classical time integration

method. The predicted and measured results are then compared to validate the tensioner model. Phase-plane portraits are investigated.

2. TENSIONER MODEL

2.1. General hysteretic model

The rotational hysteretic behavior of the tensioner can be described by a first order differential equation, see for example Al Majid and Dufour, 2004, that combines the restoring torque R_θ and the angular deflection θ as follows:

$$\dot{R}_\theta = \beta\dot{\theta}\left(h - R_\theta \operatorname{sgn}\dot{\theta}\right), \tag{1}$$

where $\dot{} = \frac{d}{dt}$, t being the time, β is a positive constant, and h is closely related to the asymptotic function of R_θ versus θ. Function h can be the upper h_u or lower h_l asymptotic lines depending on the sign of the speed of angular deflection according to:

$$h = \frac{1}{2}\left(\left(h_u + h_l\right)\operatorname{sgn}\dot{\theta} + \left(h_u - h_l\right)\right). \tag{2}$$

If necessary, h can be also a function of the initial angular position θ_0 and of the forcing frequency Ω. The upper and lower asymptotic lines are approximated using a polynomial expansion:

$$h_u(\theta_0, \Omega) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\theta_0, \Omega)\,\theta^i, \tag{3}$$

$$h_l(\theta_0, \Omega) = \sum_{i=0}^{n} b_i(\theta_0, \Omega)\,\theta^i. \tag{4}$$

In what follows, coefficients a_i and b_i are identified experimentally.

2.2. Experimental bench test

Figure 1 shows the tested tensioner and its exploded view. It is used in an automotive front-end accessory belt drive and is composed of two collinear shafts on which the idler, torsional spring and end-stops are connected by either oiled or dry contacts.

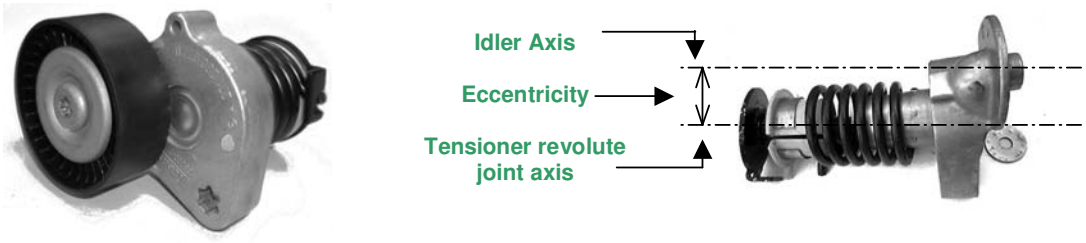


Figure 1. The tensioner tested

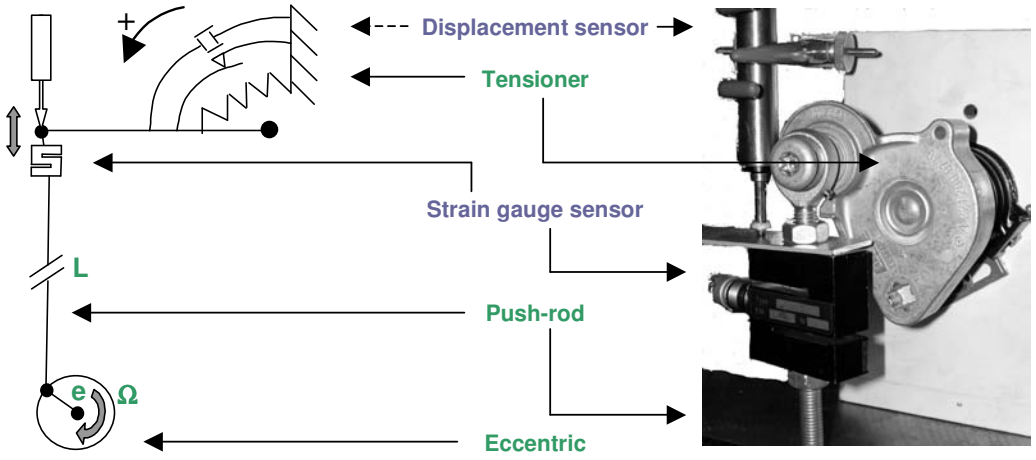


Figure 2. Schematic view (a) and picture (b) of the test rig #1

The tensioner is implemented on an experimental test bench in order to demonstrate its behavior. Its base is fixed on a very stiff frame, while its eccentric shaft is linked to a slider-crank mechanism activated by an electrical motor. Figure 2 gives a schematic view (a) and a photo (b) of the experiment. The length of the rigid connecting rod is long enough to assume that the excitation of the tensioner is a pure sine:

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 \sin(\Omega t)\,. \tag{5}$$

Forcing frequency Ω, excitation amplitude θ_1 and preload θ_0 are adjusted by the speed of rotation of the electrical motor, the eccentric of the crank and the length of the connecting rod respectively. The ranges of these three parameters are 0-300 rpm, 3.5-10 mm and 795-805 mm which correspond to the values observed during an engine start-up.

A strain gauge sensor and an inductive displacement probe permit simultaneous measurement of the transmitted force and the displacement exerted on the tensioner by the connecting rod. A data post-processing method developed with Matlab® filters and converts the force-displacement loop into a torque-angular displacement loop.

2.3. Identification tests

The identification tests are carried out when the heating temperature was reached, i.e. when there is no more evolution of the measured loops.

Let test #1 be performed with a constant speed of rotation of 100 rpm. Figure 3(a) shows the general shape of the measured loop. Schematically, the motion of the tensioner is close to a stick-slip motion. Parts 1 and 3 are devoted to the stick motion, while parts 2 and 4 are devoted to the slip motion. The design of the tensioner and its assembly in the experimental set-up introduce a composed bending and torsion loading: the contact pressure increases during parts 1 and 2, and decreases during parts 3 and 4. The slope of parts 1 is mainly due to the bending stiffness of the pivot axis. The transition between stick and slip motions is shifted while the normal force on the contact area increases. The slope of part 2 is due to the torsional spring stiffness and the tangential pressure on the contact.

As the loop area corresponds to the dissipation, we can conclude that a high dissipative effect is obtained.

Test #2 focuses on the role of the preload, Figure 4(a). Three initial angular positions are investigated (6°, 14° and 22°), while the alternative deflection amplitude remains constant (5.3°). It should be mentioned that an end-stop phenomenon slightly deforms the 6° loop. Nevertheless it can be observed that the higher the initial deflection, the higher the dissipative effect becomes. The preload increases the normal force on the pivot axis and consequently the stick-slip threshold.

In test #3, three different speeds of rotation (9, 19 and 29 rad.s^{-1}) are used while the alternative deflection amplitude remains constants, see Figure 5(a),. The higher the forcing frequency, the higher the dissipative effect becomes. A slight frequency dependence due to the lubricated contact, as mentioned in Section 2.2, is observed.

2.4. Asymptotic lines identification

The identification tests have shown that load-deflection loops are bounded by upper and lower lines which are assumed here to be straight:

$$h_u(\theta_0,\Omega) = a_1(\theta_0,\Omega)\theta + a_0(\theta_0,\Omega)\,, \tag{6}$$

$$h_l(\theta_0,\Omega) = b_1(\theta_0,\Omega)\theta + b_0(\theta_0,\Omega)\,. \tag{7}$$

The effects of the initial angular deflection, i.e. preload, and the forcing frequency on the measured loops permits expanding the coefficients a_0, a_1, b_0, b_1 as follows:

$$a_1 = -0.0057\,\Omega + 0.3376\,, \quad b_1 = a_1/2\,, \tag{8}$$

$$a_0 = 0.00144\,(\theta_0 + 129)\,(\Omega + 162), \quad b_0 = 12\,, \tag{9}$$

with Ω in rad.s^{-1} and θ_0 in degree.

Obtaining β can be made by equaling theoretical and experimental dissipated energy, i.e. the area defined by the loop. The linear expansions (6) and (7) make possible analytical integration of Equation (1). In the case of a positive deflection velocity, Equation (1) becomes:

$$\frac{dR_{\theta u}}{dt} = \beta\dot{\theta}\left(h_u - R_{\theta u}\right), \tag{10}$$

where $R_{\theta u}$ is the upper restoring torque. The integration gives:

$$R_{\theta u}\left(\theta\right) = K_u e^{-\beta(\theta-(\theta_0-\theta_1))} + a_0 + a_1\theta - \frac{a_1}{\beta}\,. \tag{11}$$

The integration constant K_u is expressed by using the value of $R_{\theta u}$ at $\theta=\theta_0-\theta_1$:

$$K_u = \frac{a_1}{\beta} - a_0 - a_1\left(\theta_0 - \theta_1\right) + R_{\theta u}\big|_{\theta=\theta_0-\theta_1}\,. \tag{12}$$

In the case of a negative deflection velocity, Equation (1) is:

$$\frac{dR_{\theta l}}{dt} = \beta\dot{\theta}\left(-h_l + R_{\theta l}\right), \tag{13}$$

where $R_{\theta l}$ is the lower restoring torque. The integration gives:

$$R_{\theta l}\left(\theta\right) = K_l e^{\beta(\theta-(\theta_0+\theta_1))} + b_0 + b_1\theta + \frac{b_1}{\beta}\,. \tag{14}$$

The integration constant K_l is expressed by using the value of $R_{\theta l}$ at $\theta=\theta_0+\theta_1$:

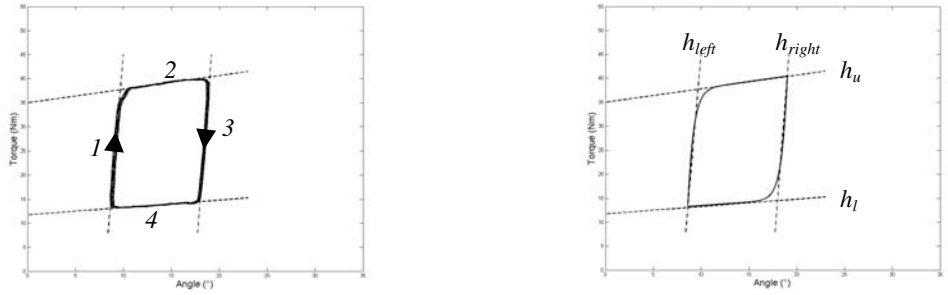
$$K_l = -\frac{b_1}{\beta} - b_0 - b_1\left(\theta_0 + \theta_1\right) + R_{\theta l}\big|_{\theta=\theta_0+\theta_1}\,. \tag{15}$$

The dissipated energy E_{mod} provided by the model, corresponds to the difference of the works of upper and lower restoring torques:

$$E_{\mathrm{mod}} = \int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} \left(R_{\theta u} - R_{\theta l} \right) d\theta \,, \tag{16}$$

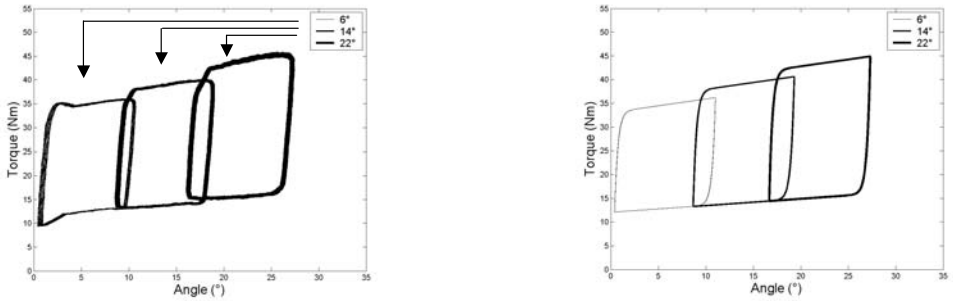
$$E_{\mathrm{mod}} = \frac{1}{\beta}\left(e^{-2\beta\theta_1} \left(K_l - K_u \right) + \left(K_u - K_l \right) + 2\beta\theta_0\theta_1 \left(a_1 - b_1 \right) + 2\beta\theta_1 \left(a_0 - b_0 \right) - 2\theta_1 \left(a_1 + b_1 \right) \right), \tag{17}$$

in which all constants, except β, are known. Actually, the experimental energy E_{exp} dissipated by the tensioner is obtained by evaluating the approximated area of the loops defined by the four straight lines h_u, h_l, h_{left} and h_{right} , see Figure 3. The equality $E_{\mathrm{mod}} = E_{\mathrm{exp}}$ yields the value $\beta = 2.0$.



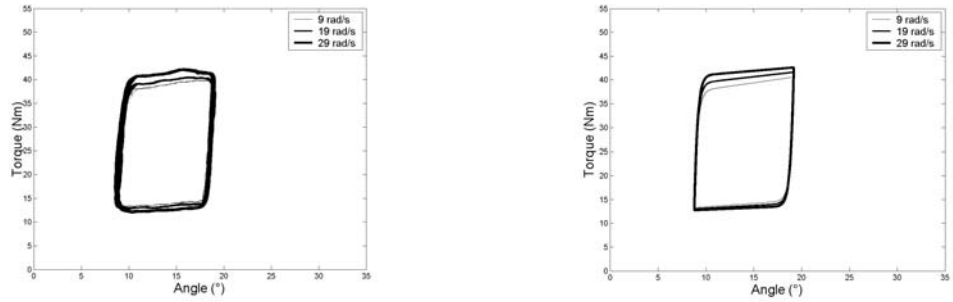
(a) **(b)**

Figure 3. Measured (a) and simulated (b) torque-angular deflection loops obtained at 100 rpm



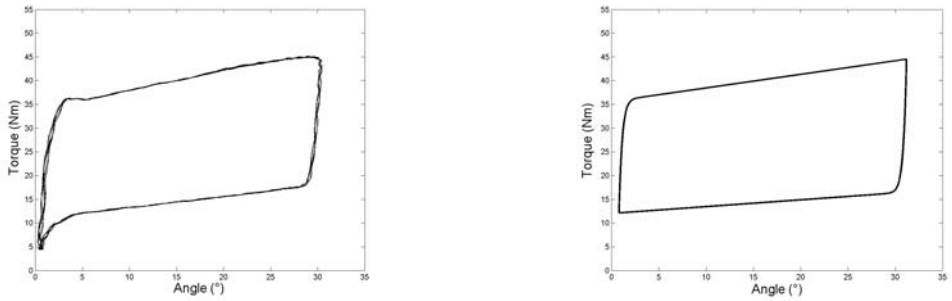
(a) **(b)**

Figure 4. Influence of initial angular position (6°, 14° and 22°) on the torque-angular deflection loops



(a) **(b)**

Figure 5. Influence of forcing frequency (9, 19 and 29 rad/s) on the torque-angular deflection loops



(a) **(b)**

Figure 6. Restoring torque of the tensioner subjected to large angular deflection amplitude

Consequently, the three tests described previously can be numerically simulated and the associated numerical loops obtained with Matlab® and plotted in Figures 3(b), 4(b) and 5(b) are quite close to the experimental ones.

In order to ensure the model is reliable, the device is subjected to a large deflection in test #4, see the measured loop plotted in Figure 6(a). The associated simulation permits obtaining the numerical loops plotted in Figure 6(b). The comparison of the predicted and measured loops is satisfactory in spite of the end-stop phenomenon observed close to 0° angular deflection.

3. EXPERIMENTAL VALIDATION ON A SIMPLE BELT-TENSIONER SYSTEM

The previous section was devoted to the parameters identification of the tensioner model expressed using restoring torque and angular deflection. The current section concerns the implementation in a MDOF mechanical system of the tensioner model expressed using restoring force and deflection. This is carried out by using an academic device investigated experimentally and numerically.

3.1. The simple belt-tensioner system tested

The investigated device is composed of the tensioner equipped with a pulley wrapped in an industrial multi-ribbed belt. The belt is linked to an S-shape load cell subjected to an alternative displacement exerted by the rotation of an eccentric, see Figure 7. This type of device uses only the longitudinal characteristics of the belt.

3.2. Response to a sine excitation

Figure 8 shows the model of the belt-tensioner device. The belt is modeled with 2 DOF u_1 and u_2. Its longitudinal stiffness k and damping c of the belt were obtained by using an experimental modal analysis, not presented here. Here, the influence of tensioner rotation is expressed by longitudinal motion u_2. Let M be the mass of the pulley, T the tension of the belt and R the restoring force given by the tensioner taking into account the hysteretic behavior of the tensioner.

Consequently the dynamic behavior of the academic device described is governed by the two following classical differential equations:

$$c\left(\dot{u}_1-\dot{u}_2\right)+k\left(u_1-u_2\right)=T\left(t\right) \tag{18}$$

$$M\,\ddot{u}_2+c\,\dot{u}_2+k\,u_2=R\left(u_2\right)+c\,\dot{u}_1+k\,u_1 \tag{19}$$

coupled with the first order differential equation describing the hysteretic behavior of the tensioner:

$$\dot{R}=\beta\,\dot{u}_2\left(h-R\,\mathrm{sgn}\left(\dot{u}_2\right)\right). \tag{20}$$

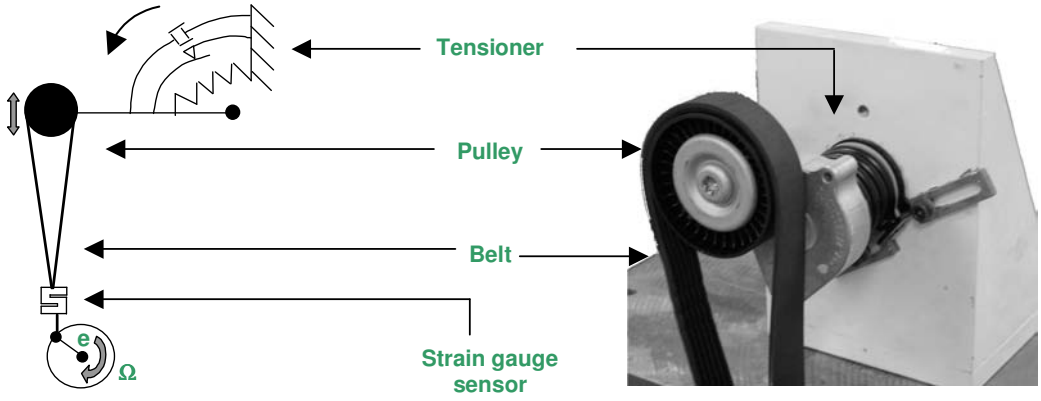
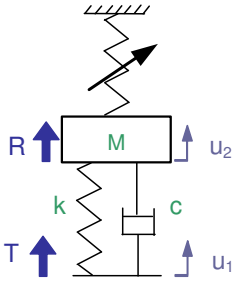


Figure 7. Schematic view (a) and picture (b) of the test rig #2 devoted to the validation test



M = 0.150 kg
k = 560 kN.m^{-1}
c = 6.4 kN.s.m^{-1}

U_0 = 5 mm
U_1 = 3 mm
Ω = 8.8 rad.s^{-1}

(b)

Figure 8. Belt-tensioner model

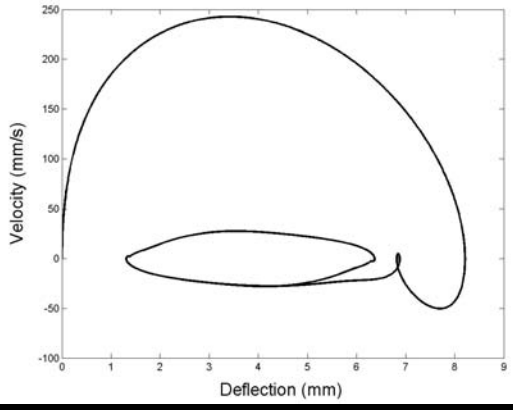


Figure 9. Transient phase-plane portrait at DOF #2

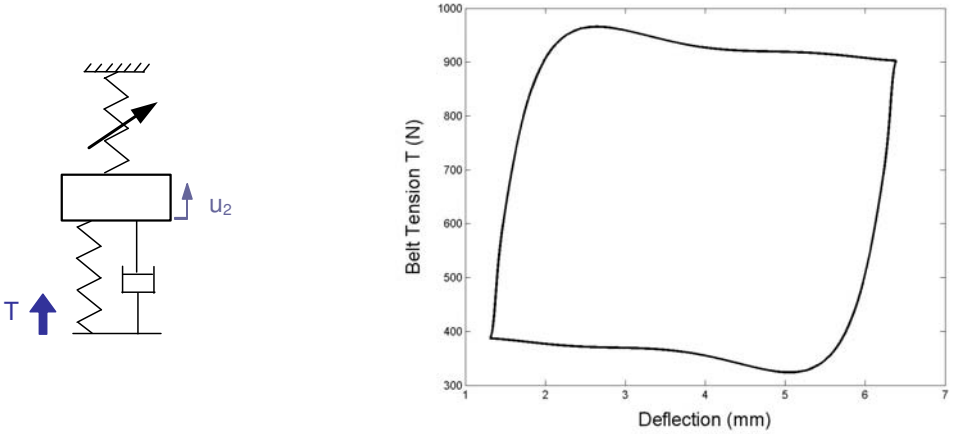


Figure 10. Predicted belt tension-deflection loop

The following imposed displacement:

$$u_1(t) = U_0 + U_1 \sin(\Omega t)\,, \tag{21}$$

forces the deflection of the two DOF system. The response to this sine excitation is obtained by using Simulink-Matlab® software and the classical RK-4 time integration method. The initial conditions at *t=0* are: $u_2(0) = \dot{u}_2(0) = R(0) = 0$ and the time step is 10^{-5} s. The steady-state behavior is rapidly achieved due to the presence of high dissipation. See the phase-plane portrait predicted at DOF #2 and plotted in Figure 9.

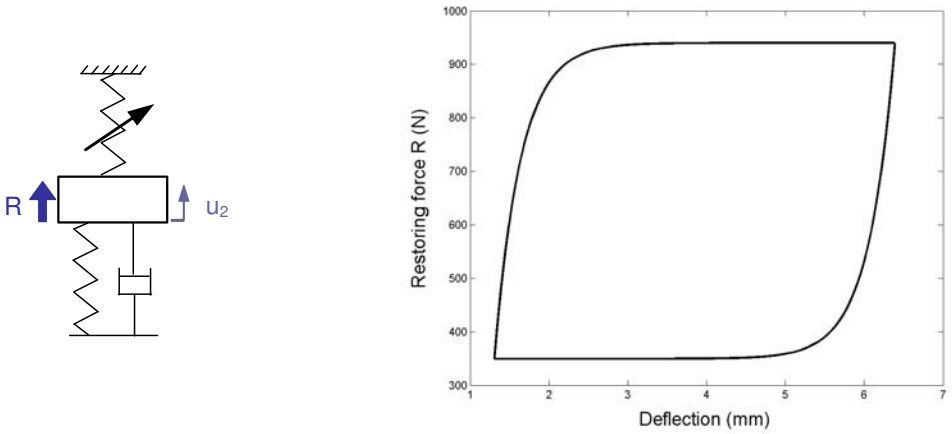


Figure 11. Predicted restoring force-deflection loop

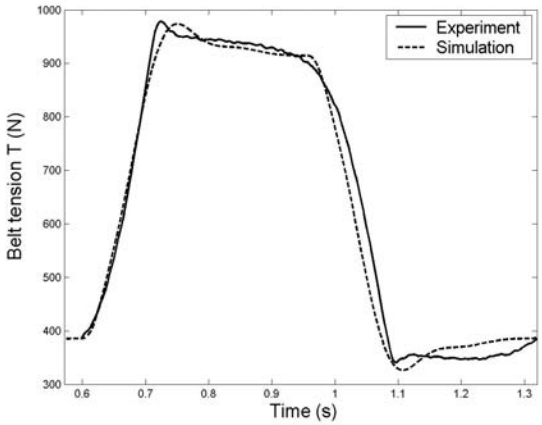


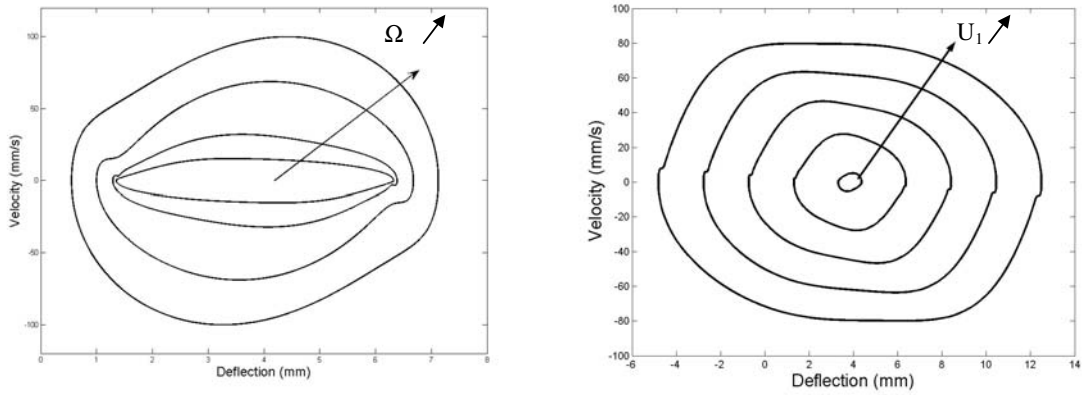
Figure 12. Time history predicted and measured belt tension

Figures 10 & 11 show the predicted belt tension-deflection loop and restoring force-deflection loop respectively obtained during steady-state behavior. The comparison of these two loops shows a difference due to the transfer function of the belt. In the case of rigid link (i.e. the belt has an infinite stiffness) the loop in Figure 10 fits the loop in Figure 11.

The time histories of the predicted and measured belt tension are compared in Figure 12. On the basis of this experimental validation, it is demonstrated that the proposed model is satisfactory.

3.3. Parametric response

After validation, the model was subjected to several forcing frequencies and deflection amplitudes within the usual operating range. Taking into account the assumptions made on the belt and the tensioner model, the predicted phase-plane portraits of the DOF #2 versus four forcing frequencies (5, 10, 20, 30 rad.s^{-1}), versus five deflection amplitudes (1, 3, 5, 7, 9 mm) are plotted in Figure 13 (a) and



(a) **(b)**

Figure 13. Steady-state phase-plane portrait of DOF #2 versus forcing frequency (a) and deflection amplitude (b)

(b) respectively. Each limit loop is obtained with ten cycles. The limit loops are stable and increase monotonically versus the forcing frequency or versus deflection amplitude because no resonance phenomenon is reached in the forcing frequency range. Moreover it can be observed that the rugged shape vanishes with the forcing frequency, see Figure 13(a): the elasticity of the belt and the inertia of the device filter the stick-slip phenomenon exhibited by loops 5, 10 and 20 rad.s^{-1}.

4. CONCLUSION

A hysteretic model was used to model the behavior of a belt tensioner mainly functioning with stick-slip motion. The parameters of the tensioner model were identified by three experimental tests with preload, forcing frequency and deflection amplitude. The proposed tensioner model can be implemented in the global model of the automotive front-end accessory drive especially during engine start-up.

The experimental belt-tensioner device permitted validating the tensioner model implemented in a two-DOF, i.e. the belt. Finally it is shown, by using a parametric investigation and phase-plane portrait, that the response of the belt-tensioner system increases with the frequency and the amplitude of the excitation for possible operating ranges.

Acknowledgements. The authors would like to thank Valeo Electrical Systems for its support.

REFERENCES

Al Majid, A. and Dufour, R., 2002, "Formulation of a Hysteretic Restoring Force Model. Application to Vibration Isolation", *Nonlinear Dynamics* **27**, 69-85.

Al Majid, A. and Dufour, R., 2004, "Harmonic Response of a Structure Mounted on an Isolator Modelled with a Hysteretic Operator : Experiment and Prediction", *Journal of Sound and Vibration* **277**, 391-403.

Beikmann, R.S., Perkins, N.C. and Ulsoy, A.G., 1997, "Design and Analysis of Automotive Belt Drive Systems for Steady State Performance", *ASME Journal of Mechanical Design* **119**, 162 168.

Cheng, G. and Zu, J.W., 2003, "Nonstick and Stick-Slip Motion of a Coulomb-Damped Belt Drive System Subjected to Multifrequency Excitations", *ASME Journal of Applied Mechanics* **70**, 871-884.

Leamy, M.J. and Perkins, N.C., 1998, "Nonlinear Periodic Response of Engine Accessory Drives With Dry Friction Tensioners", *ASME Journal of Vibration and Acoustics* **120**, 909-916.

Leamy, M.J. and Wasfy, T.M., 2002, "Transient and Steady-State Dynamic Finite Element Modeling of Belt-Drives", *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control* **124**, 575-581.

Kraver, T.C., Fan G.W. and Shah J.J., 1996, "Complex Modal Analysis of a flat Belt Pulley System With Belt Damping and Coulomb-Damped Tensioner", *ASME Journal of Mechanical Design* **118** , 306-311.

Kwon, Y.I. and Ih, J.-G., 2000, "Vibrational Power Flow in the Moving Belt Passing Through a Tensioner", *Journal of Sound and Vibration* **229**, 329-353.

Parker, R.G., 2004, "Efficient eigensolution, dynamic response, and eigensensitivity of serpentine belt drives", *Journal of Sound and Vibration* **270**, 15-38.

An analysis of the Masing and Modified Dahl models. Application to a belt tensioner.

An analysis of the Masing and modified Dalh models. Application to a belt tensioner.

Jérôme BASTIEN [a], Guilhem MICHON [b], Lionel MANIN [c], and Régis DUFOUR [c]

[a] *Laboratoire Mécatronique 3M, Équipe d'accueil A 3318*
Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 90010 Belfort cedex, France
jerome.bastien@utbm.fr

[b] *Valeo Electrical Systems, 2 rue A. Boulle, 94000 Creteil, France*
guilhem.michon@valeo.com

[c] *Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures, UMR CNRS 5006,*
INSA de Lyon, 18 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne, France
lionel.manin@insa-lyon.fr
regis.dufour@insa-lyon.fr

Abstract

The objective of this paper is to describe the Masing and modified Dahl models used for predicting hysteretic behavior, and tested on a belt tensioner for automotive engines. An experimental study with deflection imposed on the tensioner is first carried out to identify hysteresis loop parameters for the two models. The models are implemented in the general motion equations which govern the behavior of a belt - tensioner - mass system. Particular attention is paid to the use of numerical schemes. The numerical and experimental investigations show that these two models are satisfactory.

Key words: Belt tensioner, Dry friction, Restoring force, Dahl and Duhem models

1 Introduction

The hysteresis behavior of components permits efficient passive control of mechanical systems but makes response prediction delicate due to their high non linearity [12,20]: Basically it is necessary to choose an efficient hysteresis model associated with a numerical integration method to ensure convergence with the scheme. Therefore there is a much of scientific and technological research devoted to investigating such problems.

Vestroni and Noori in [20] and Visintin in [21] established an overview of hysteresis models. Among the latter mention can be made of those of Bouc and Wen, Bader and Noori, and Masing. Rheological models and restoring force models are the two main categories widely used in mechanical engineering. The former provide damping and stiffness parameters, while the latter provide a restoring force to be introduced in the second member of the equations.

Let the Masing model [5,11] and the modified Dahl model [1,2] be the rheological and restoring force models respectively selected for the current analysis. The classical Masing model is composed of a spring parallel to a spring - dry friction system, but in this study a viscous damping element is added. The modified Dahl model originates from the Dahl and Duhem models and is based on a first differential equation that provides the time derivative of the restoring force from the velocity of the deflection and from the envelop curves of the hysteresis loop. The Masing model is governed by a non-smooth differential equation containing a multi-valued function while the Dahl model is governed by a smooth nonlinear dynamic equation. Consequently, the numerical integration schemes have to take into account these two typical characteristics to obtain a convergence. The efficiency of these two hysteresis models have to be tested to predict the hysteretic behavior of a belt tensioner.

Tensioners used in belt drive systems play a predominant role in the dynamic behavior of the belt: they maintain nominal tension in the slack span and reduce transverse vibration levels, see [6]. Tensioners often require complicated designs in order to satisfy technological challenges, see for example [16]. This type of design leads to considerably nonlinear behavior mainly due to stick-slip motion [13].

The Masing and modified Dalh models are described in detail in Section 2 and then applied to a belt tensioner of an automotive engine in Section 3, where an initial experimental set-up is used for identifying the model parameters. Section 4 concerns the numerical and experimental investigations performed on a belt-tensioner-mass system in which tensioner behavior is described by the two models studied. This section permits comparing the predicted and measured harmonic responses in order to discuss model efficiency.

2 The Models

In this section, two models describing the hysteretic behavior of a one degree of freedom mechanical system are presented. The behavior of the mechanical system studied can be analyzed via the progression of the restoring force versus the deflection, as presented in Fig. 1.

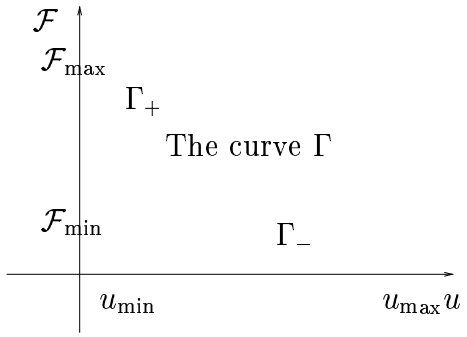


Fig. 1. The force-deflection loop Γ.

The objective is to find the relation between a restoring force $\mathcal{F}$ and a deflection u. It is assumed that after a transient phase $[0, t_0]$, the pair $(u(t), \mathcal{F}(t))$ belongs to a curve Γ as t belongs the interval $[t_0, t_f]$; Moreover, this curve is oriented clockwise as t increases on the interval $[t_0, t_f]$. This curve is called hysteresis loop, see Fig. 1 and also [1,21].

On this curve, let the loading phase be Γ_+ as u increases, and the unloading phase be Γ_- as u decreases.

The modified Dahl model (see Section 2.1) and the Masing model with viscous damping (see Section 2.2) are used in the present investigation for modeling such behavior.

2.1 Theory of modified Dahl model

The Dahl-Duhem model, used in [14], is briefly recalled in what follows.

2.1.1 Modified Dahl model

Original Dahl model

In this paper, let $\dot{}$ be the derivative according to time t and Λ be a non negative number. The Dahl model [21,7,8] is based on a differential equation expressing force $\mathcal{F}$ versus the deflection u

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{\mathcal{F}}(t) + \Lambda \mathcal{F}(t) \, |\dot{u}(t)| = \Lambda \dot{u}(t), \tag{1a}$$

$$\mathcal{F}(t_0) = \mathcal{F}_0. \tag{1b}$$

It should be mentioned that when Λ tends to infinity the Dahl model corre-

sponds to Coulomb's friction law. Eq. (1a) can be written as

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \frac{\dot{\mathcal{F}}(t)}{\Lambda} + \mathcal{F}(t)\,|\dot{u}(t)| = \dot{u}(t). \tag{2}$$

Then formally, as Λ tends to infinity,

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \mathcal{F}(t)\,|\dot{u}(t)| = \dot{u}(t).$$

And therefore:

$$\dot{u}(t) \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{F}(t) = \operatorname{sign}\Big(\dot{u}(t)\Big). \tag{3}$$

This equation implies

$$\mathcal{F}(t) = \pm 1. \tag{4}$$

If $\dot{u}(t)$ vanishes, Eq. (2) implies that $\mathcal{F}$ is constant; it is formally admitted that by continuity Eq. (4) implies

$$\dot{u}(t) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}(t) \in [-1, 1]. \tag{5}$$

The multivalued operator σ is introduced and defined by:

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 1 & \text{if } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{if } x = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Eqs. (3) and (5) are equivalent to the law of friction

$$\mathcal{F} \in \sigma\left(\dot{u}(t)\right). \tag{7}$$

Duhem model

The Dahl model (1) can be generalized by considering a function h from $\{-1, 1\} \times \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ and the following differential equation:

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{\mathcal{F}}(t) + \Lambda \mathcal{F}(t)\,|\dot{u}(t)| = \Lambda \dot{u}(t)\, h\Big(\operatorname{sign}\left(\dot{u}(t)\right), u(t)\Big), \tag{8a}$$

$$\mathcal{F}(t_0) = \mathcal{F}_0, \tag{8b}$$

where h_u and h_l are the applications defined by

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad h_u(u) = h(1, u), \quad h_l(u) = -h(-1, u). \tag{9}$$

Then, Eq. (8a) can then be rewritten as

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{\mathcal{F}}(t) = \begin{cases} \Lambda \dot{u}(t) \Big(h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)\Big), & \text{if } \dot{u}(t) \geq 0, \\ -\Lambda \dot{u}(t) \Big(h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)\Big), & \text{if } \dot{u}(t) \leq 0. \end{cases} \tag{10}$$

This model is also known as the Duhem model (see [21]).

Modified Dahl model

The model governed by Eq. (10) is presented and used in [1,2] or in [14]; in this last reference, Eq. (10) was used to simulate the behavior of a belt tensioner as presented in Section 3. In this study, the authors consider the simple case where h_u and h_l are of polynomial form. Let a, b, d and e be real numbers, it is assumed that, for any $u \in \mathbb{R}$,

$$h_u(u) = au + b, \quad h_l(u) = du + e. \tag{11}$$

Considering relation (9), Eq. (8a) is transformed to

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{\mathcal{F}}(t) = \Lambda \dot{u}(t) \operatorname{sign}\Big(h\Big(\operatorname{sign}\left(\dot{u}(t)\right), u(t)\Big) - \operatorname{sign}\left(\dot{u}(t)\right) \mathcal{F}(t)\Big) \Big|h\Big(\operatorname{sign}\left(\dot{u}(t)\right), u(t)\Big) - \operatorname{sign}\left(\dot{u}(t)\right) \mathcal{F}(t)\Big|^{\mu}, \tag{12}$$

with $\mu = 1$. In [1,2], the case where μ is not equal to 1 was also proposed. Thus, it is now considered that $\mu \in \mathbb{R}_+$.

If

$$h_u = 1 \text{ and } h_l = -1, \tag{13}$$

then it corresponds to the Dahl model.

In what follows, the model governed by Eq. (12), with $\mu \in \mathbb{R}_+$ and where h_u and h_l are defined by Eqs. (9) and (11), is called the modified Dahl model. It is also governed by the relation

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \dot{\mathcal{F}}(t) = \begin{cases} \Lambda \dot{u}(t) \operatorname{sign}\Big(h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)\Big) \Big|h_u(u(t)) - \mathcal{F}(t)\Big|^{\mu}, & \text{if } \dot{u}(t) \geq 0, \\ -\Lambda \dot{u}(t) \operatorname{sign}\Big(h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)\Big) \Big|h_l(u(t)) - \mathcal{F}(t)\Big|^{\mu}, & \text{if } \dot{u}(t) \leq 0. \end{cases} \tag{14}$$

2.1.2 Existence, uniqueness and regularity results for the Modified Dahl model

According to the results of [1,7,8,17], differential Eq. (12) is a particular case of the Krasnosel'skiĭ -Pokrovskiĭ model: if u belongs to the Sobolev space of absolutely continuous functions $W^{1,1}(t_0, t_f)$, solution $\mathcal{F}$ of Eq. (12) with initial condition exists is unique and belongs to $W^{1,1}(t_0, t_f)$.

By using the notion of hysteresis operator (see for example [21]), let $\mathcal{C}_1$ be the operator which is associated to function u from $[t_0, t_f]$ to $\mathbb{R}$ and to number

$\mathcal{F}_0$, the unique function $\mathcal{F}$ from $[t_0, t_f]$ to $\mathbb{R}$, satisfying (8b) and (14). $\mathcal{C}_1$ is an operator from $W^{1,1}(t_0, t_f) \times \mathbb{R}$ to $W^{1,1}(t_0, t_f)$ and (8b)-(14) is equivalent to (see chapter V of [21]):

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \mathcal{F}(t) = \left[\mathcal{C}_1(u, \mathcal{F}_0)\right](t). \tag{15}$$

2.1.3 Analysis of hysteresis and identification of parameters h_u, h_l, μ and Λ.

Parameter Λ characterizes the transient velocity between h_u and h_l while exponent μ plays a predominant role in the loop shape.

Here, it is assumed that u and $\mathcal{F}$ are periodic. If $\mu = 1$, then the form of the hysteresis $(u, \mathcal{F})$ and the analytical expression of $\mathcal{F}$ permit estimating functions h_u and h_l and parameter Λ. Bliman in [7,8] showed that h_u and h_l are reached asymptotically: this property enables estimating h_u and h_l. Moreover, the comparison of the measured hysteresis loop area with the analytical one permits adjusting the value of Λ (with the method used in [14], for example).

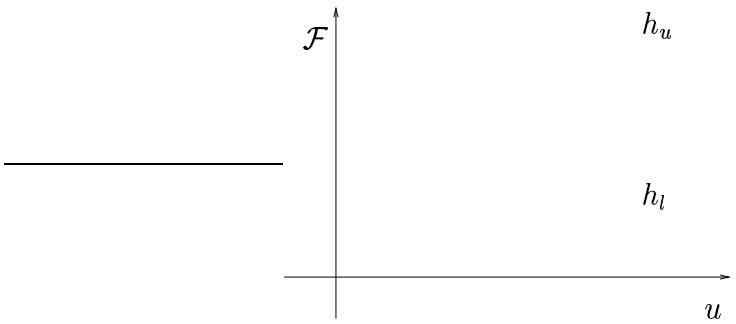


Fig. 2. The force-deflection loop Γ for the modified Dahl model.

For a general case, μ belongs to $\mathbb{R}_+$, as the analytical expression of $\mathcal{F}$ is not known and the identification of h_u, h_l, Λ and μ is not possible. However, h_u and h_l remain asymptotes of the hysteresis loop which makes their determination possible. The analytical determination of Λ and μ is not possible, but they are identified by successive comparisons between measured and predicted loops until satisfactory concordance is obtained.

2.1.4 Numerical scheme

Differential Eqs. (8b)-(14), are solved by using a multistep solver of Matlab, based on backward differentiation formulae (Gear's method).

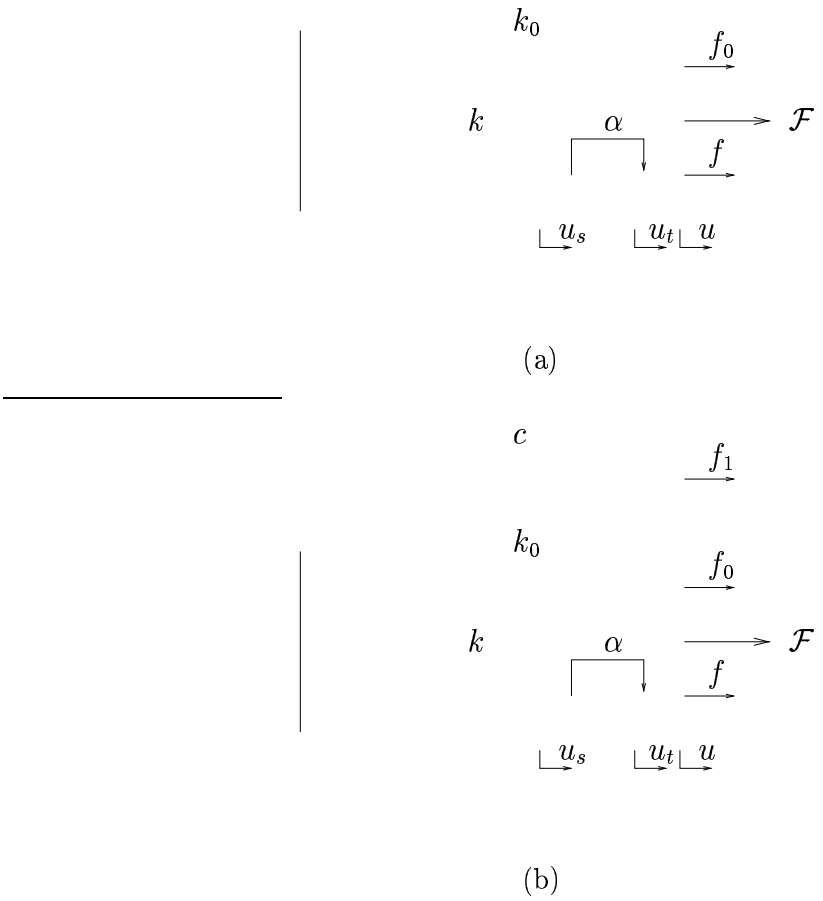


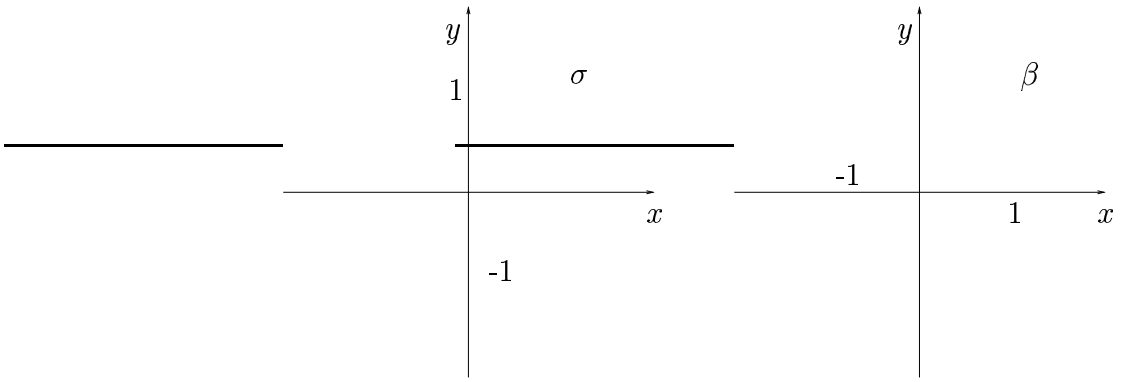
Fig. 3. The Masing model (a) with viscous damping (b).

2.2 Theory of the Masing model

Multivalued friction models have been studied in [15] and in the survey [19]. Numerous works have founded on the Masing model (without damping) (see for example [11]). More elastoplastic models with finite numbers of degrees of freedom are presented in [4,5].

2.2.1 Presentation of the classical Masing model

The Masing model is often used in the case of elastoplastic behavior. It is composed of two springs and a dry friction element (St-Venant element) connected together, as shown in Fig. 3(a), where parameters k and k_0 are the stiffnesses of the two springs and α the threshold of the dry friction element. This association was studied for example in [5]. The aim is to establish a relation between load $\mathcal{F}$ and deflection u. Let u_s and u_t be the deflections of



(a) The graph σ (b) The graph β

Fig. 4. The two used multivalued maximal monotone graphs.

spring k and the dry friction element, f and f_0 the forces exerted by springs k and k_0, and l and l_0 the spring free lengths.

Considering the graph of the multivalued operator σ defined by Eq. (6) (see Fig. 4(a)) and its inverse graph β (see Fig. 4(b)), we obtain:

$$\beta(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \\ \{0\} & \text{if } x \in]-1, 1[, \\ \mathbb{R}_- & \text{if } x = -1, \\ \mathbb{R}_+ & \text{if } x = 1. \end{cases} \tag{16}$$

The graphs β and σ are maximal monotone (see for example [9]). The notion of sub-differential is recalled in Appendix A.1 (see Eqs. (A.4) and (A.6)). The maximal monotone graphs σ and β are sub-differentials of proper semi-continuous convex functions $|x|$ and $\psi_{[-1,1]}$ defined by

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-1, 1], \\ +\infty & \text{if } x \notin [-1, 1]. \end{cases} \tag{17}$$

Setting

$$w = u_s - l, \tag{18a}$$
$$\mathcal{F}_0 = k_0 l_0, \tag{18b}$$
$$\eta = \frac{\alpha}{k}. \tag{18c}$$

the Masing model is governed by the following differential inclusion

$$\dot{w} + \beta\left(\frac{w}{\eta}\right) \ni \dot{u}, \tag{19a}$$
$$w(t_0) = w_0, \tag{19b}$$
$$\mathcal{F} = kw + k_0 u - \mathcal{F}_0. \tag{19c}$$

2.2.2 Description of the Masing Model with viscous damping

A viscous damping element c is added in the previous model, as shown in Fig. 3(b), its reaction force is noted f_1.

First, several equations similar to those presented in [5] are recalled. The constitutive law of the dry friction element is given by

$$f = \begin{cases} \tau \text{ with } \tau \in [-\alpha, \alpha], & \text{if } \dot{u}_t = 0, \\ -\alpha \text{Sign}\left(\dot{u}_t\right), & \text{if } \dot{u}_t \neq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Then, by using the multivalued operator σ defined by (6) (see Fig. 4(a)), it is possible to write (20) in the form of the following differential inclusion: $f \in -\alpha\sigma\left(\dot{u}_t\right)$. By considering the constitutive laws of the springs, the dry friction element and the viscous damping element provide the following forces:

$$f_0 = -k_0(u - l_0), \tag{21a}$$
$$f = -k(u_s - l), \tag{21b}$$
$$f \in -\alpha\sigma\left(\dot{u}_t\right), \tag{21c}$$
$$f_1 = -c\dot{u}. \tag{21d}$$

The system equilibrium leads to

$$f + f_0 + f_1 + \mathcal{F} = 0, \tag{21e}$$

and the geometrical relation gives

$$u_s + u_t = u. \tag{21f}$$

By considering w, $\mathcal{F}_0$, η, defined by Eq. (18), $w_0 = w(t_0) \in [-\eta, \eta]$ and β

defined by (16), it can be proved that system (21) is equivalent to

$$\dot{w} + \beta\left(\frac{w}{\eta}\right) \ni \dot{u}, \tag{22a}$$

$$w(t_0) = w_0, \tag{22b}$$

$$\mathcal{F} = kw + k_0 u + c\dot{u} - \mathcal{F}_0. \tag{22c}$$

In what follows, the Masing model with the viscous damping defined above is applied.

2.2.3 Existence, uniqueness and regularity results for the Masing model with viscous damping

Appendix A.3 shows that the solution of (22a)-(22b) exists and is unique. Thus, function $\mathcal{F}$ defined by (22c), exists and is unique.

Thanks to differential inclusion (22a)-(22b), Eq. (22c) gives $\mathcal{F}$. By considering the notion of operator we prove that there exists an operator $\mathcal{C}_2$ from $H^2(t_0, t_f) \times [-\eta, \eta]$ to $W^{1,\infty}(t_0, t_f)$ such that (22) is equivalent to

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \mathcal{F}(t) = \left[\mathcal{C}_2(u, w_0)\right](t). \tag{23}$$

Consequently, the Masing model with viscous damping and the modified Dahl model are both hysteresis operators.

2.2.4 Analysis of hysteresis and parameter identification.

As in [5], it is assumed that function $\mathcal{F}$, defined by Eq. (22c), is also periodic; under this assumption, it is proved that the loop $(u, \mathcal{F})$ permits determining mechanical parameters of the Masing model with viscous damping.

Eq. (22c) can be rewritten as

$$\mathcal{F}_{\text{ep}}(t) = kw(t) + k_0 u(t) - \mathcal{F}_0, \tag{24a}$$

$$\mathcal{F}_{\text{v}}(t) = c\dot{u}(t), \tag{24b}$$

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_{\text{ep}}(t) + \mathcal{F}_{\text{v}}(t). \tag{24c}$$

The terms $\mathcal{F}_{\text{ep}}$ and $\mathcal{F}_{\text{v}}$ correspond to the elastoplastic part and to the viscous part of the model respectively.

It is now assumed that

$$u \text{ is } \tau\text{-periodic;} \tag{25a}$$

$$\text{there exists } \tau_1,\ \tau_2 \text{ and } \tau_3 = \tau_1 + \tau, \text{ such that } u \text{ is strictly increasing on } [\tau_1, \tau_2] \text{ and strictly decreasing on } [\tau_2, \tau_3]; \tag{25b}$$

$$u \in C^2([t_0, t_f]), \tag{25c}$$

and setting

$$u_{\min} = \min(u), \quad u_{\max} = \max(u). \tag{26}$$

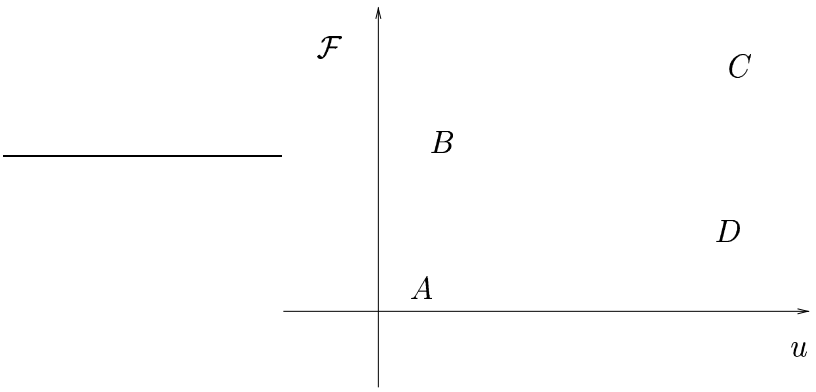


Fig. 5. The parallelogram loop for classical Masing model.

If no damping is considered, then $\mathcal{F}_{\rm v}$ is nil and we can prove under assumption (25a), as in [5], that the pair $(u, \mathcal{F})$ versus time plots a hysteresis loop. This loop represents a clockwise oriented parallelogram as t is increasing on the interval $[t_0, t_f]$ (see Fig. 5). A direct correspondence exists between the six parallelogram parameters and the six system parameters $u_{\min}$, $u_{\max}$, k_0, k, α and $\mathcal{F}_0$, thus permitting their identification.

On the other hand, when damping is considered, the pair $(u, \mathcal{F})$ does not plot a hysteresis loop, in the classical sense of [21]. Indeed, the pair $(u, \mathcal{F}_{\rm ep})$ plots a hysteresis loop called the dry skeleton. However, since the second term $\mathcal{F}_{\rm v}$ depends on the deflection history, the pair $(u, \mathcal{F}_{\rm v})$ does not draw a hysteresis loop. Moreover, with $c \neq 0$, the identification of the mechanical parameters is still possible due to geometrical data of the loop .

The loop studied $(u(t), \mathcal{F}(t))$ for t belonging to $[t_0, t_f]$ is symmetric and only the upper half part of this curve is studied, as in [5]. In this last part $[\tau_1, \tau_2]$, u is strictly increasing and there is a bijection ψ_+ such that, for any $t \in [\tau_1, \tau_2]$,

$t = \psi_+(u(t))$; moreover, $u(\tau_1) = u_{\min}$ and $u(\tau_2) = u_{\max}$. By considering $\mathcal{G}_+ = \dot{u} \circ \psi_+$, we obtain

$$\forall t \in [\tau_1, \tau_2], \quad \dot{u}(t) = \mathcal{G}_+(u(t)), \tag{27}$$

and Eq. (24) can be rewritten as

$$\forall u \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad \mathcal{F}_{\rm v}(u) = c\mathcal{G}_+(u), \tag{28}$$

and

$$\forall u \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}_{\rm ep}(u) + \mathcal{F}_{\rm v}(u), \tag{29}$$

where

$$\mathcal{F}_{\rm ep}(u) = kw(u) + k_0 u - \mathcal{F}_0, \tag{30}$$

where w depends only on u via the differential inclusion (22a).

If the deflection amplitude is large enough, then it exists $\tau_4 \in [\tau_1, \tau_2]$ so that

$$w(\tau_1) = -\eta, \quad w(\tau_4) = \eta. \tag{31}$$

Henceforth, we consider

$$t_A = \tau_1, \quad t_B = \tau_4, \quad t_C = \tau_2, \tag{32a}$$
$$u_A = u(\tau_1), \quad u_B = u(\tau_4), \quad u_C = u(\tau_2), \tag{32b}$$
$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}(u_A), \quad \mathcal{F}_B = \mathcal{F}(u_B), \quad \mathcal{F}_C = \mathcal{F}(u_C). \tag{32c}$$

On the interval $[\tau_1, \tau_4]$, the dry friction element sticks and the model sketched in Fig. 3(b) is identical to the association of a spring with stiffness $k + k_0$ and a damping viscous element. After computation, thanks to Eq. (31), we obtain

$$\forall u \in [u_A, u_B], \quad \mathcal{F}(u) = (k + k_0)u - \mathcal{F}_0 - k(u_A + \eta) + c\mathcal{G}_+(u). \tag{33a}$$

On the contrary, on the interval $[\tau_4, \tau_2]$, the dry friction element slips and the model sketched on Fig. 3(b) is identical to the association of a spring with stiffness k_0 and a damping viscous element. After computation, we obtain

$$\forall u \in [u_B, u_C], \quad \mathcal{F}(u) = k_0 u + k\eta - \mathcal{F}_0 + c\mathcal{G}_+(u). \tag{33b}$$

By using Eqs. (33), the shape of the loop $(u, \mathcal{F})$ is given in the Fig. 6, where the dry skeleton corresponds to the pair $(u, \mathcal{F}_{\rm ep})$. Corners A and C represent

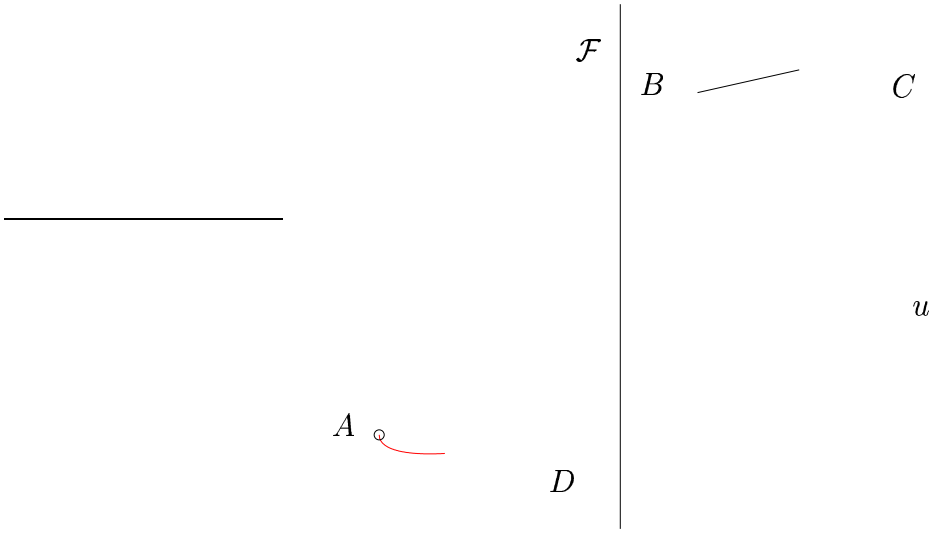


Fig. 6. The force-deflection loop Γ for the Masing model with viscous damping (solid line), the dry skeleton (dot-dashed line), and the corners A, B, C and D.

slip stick state change whereas the corners B and D represent stick slip state change.

For $u = u_A$, $\dot{u}$ is equal to zero and then $\mathcal{G}_+(u_A)$ is equal to zero; thus, Eqs. (33) gives

$$\mathcal{F}_A = (k + k_0)u_A - \mathcal{F}_0 - k(u_A + \eta). \tag{34a}$$

and

$$\mathcal{F}_C = k_0 u_C + k\eta - \mathcal{F}_0. \tag{34b}$$

With Eq. (33a), for $u = u_A$ and $u = u_B$, we obtain

$$u_B - u_A = 2\eta. \tag{34c}$$

By definition,

$$u_A = u_{\min}, \quad u_C = u_{\max}. \tag{34d}$$

Let p_B^+ and p_B^- be the right and left derivatives of $\mathcal{F}$ according to u at point u_B; According to Eq. (33) and since u is of class C^1:

$$p_B^+ = k_0 + c\mathcal{G}'_+(u_B). \tag{35a}$$
$$p_B^- = k + k_0 + c\mathcal{G}'_+(u_B). \tag{35b}$$

Thanks to assumption (25c), $\mathcal{G}'_+$ is continuous in u_B and we obtain

$$p_B^- - p_B^+ = k. \tag{36}$$

Moreover,

Point B is the unique point of the upper part of the loop $(u, \mathcal{F})$ where the derivative is not continuous. (37)

Similarly, on the decreasing part of the loop, the same approach is developed. We consider, if u is strictly decreasing, $t = \psi_-(u(t))$ and we obtain

$$\forall u \in [u_D, u_C], \quad \mathcal{F}(u) = (k + k_0)u - \mathcal{F}_0 - k(u_C - \eta) - c\mathcal{G}_-(u). \tag{38a}$$
$$\forall u \in [u_A, u_D], \quad \mathcal{F}(u) = k_0 u - k\eta - \mathcal{F}_0 - c\mathcal{G}_-(u). \tag{38b}$$

As in [5], the following equations remain true and permit parameter identification:

$$u_{\min} = u_A, \tag{39a}$$
$$u_{\max} = u_C, \tag{39b}$$
$$k = p_B^- - p_B^+, \tag{39c}$$
$$\alpha = \frac{k}{2}(u_B - u_A), \tag{39d}$$
$$k_0 = \frac{\mathcal{F}_C - \mathcal{F}_A - 2\alpha}{u_C - u_A}, \tag{39e}$$
$$\mathcal{F}_0 = k_0 u_A - \alpha - \mathcal{F}_A. \tag{39f}$$

These equations are obtained by Eqs. (34) and (36).

However, the value of c must be determined. A similar method to that of [14] is used to estimate the value of Λ for $\mu = 1$. By equaling the calculated and measured energies dissipated by the viscous damping element, *i.e.* the inside area of the loops $(u, c\dot{u})$, we can write Eq. (24) as:

$$\mathcal{F} - (kw + k_0 u - \mathcal{F}_0) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_{\text{ep}} = \mathcal{F}_{\text{v}} = c\dot{u} = c\mathcal{G}_+,$$

or thanks to Eqs. (33) and (38),

$$\forall u \in [u_A, u_B], \quad \mathcal{F}(u) - ((k + k_0)u - \mathcal{F}_0 - k(u_A + \eta)) = c\mathcal{G}_+(u), \tag{40a}$$
$$\forall u \in [u_B, u_C], \quad \mathcal{F}(u) - (k_0 u + k\eta - \mathcal{F}_0) = c\mathcal{G}_+(u), \tag{40b}$$
$$\forall u \in [u_D, u_C], \quad \mathcal{F}(u) - ((k + k_0)u - \mathcal{F}_0 - k(u_C - \eta)) = -c\mathcal{G}_-(u), \tag{40c}$$
$$\forall u \in [u_A, u_D], \quad \mathcal{F}(u) - (k_0 u - k\eta - \mathcal{F}_0) = -c\mathcal{G}_-(u). \tag{40d}$$

The loop $(u, c\dot{u})$ is plotted in Fig. 7. The two functions $\mathcal{G}_+$ and $\mathcal{G}_-$ are known

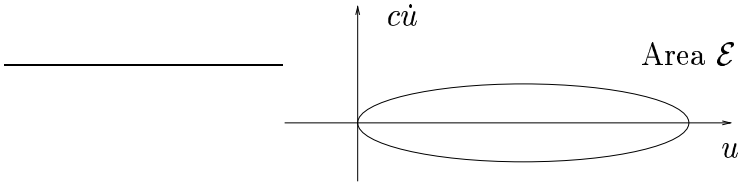


Fig. 7. The loop $(u, c\dot{u})$

and the energy dissipated $\mathcal{E}$ has the following expression:

$$\mathcal{E} = c\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \mathcal{G}_+(u) - \mathcal{G}_-(u)du = c\left(\int_{\substack{t_A \\ u \text{ increasing}}}^{t_C} \dot{u}^2(t)dt - \int_{\substack{t_C \\ u \text{ decreasing}}}^{t_A} \dot{u}^2(t)dt\right). \tag{41}$$

If u is defined by

$$\forall t, \quad u(t) = x_0 + x_1 \sin(\Omega t + \phi), \tag{42}$$

Eq. (41) yields

$$\mathcal{E} = \pi x_1^2 \Omega c. \tag{43}$$

The value of damping c is determined for pulsation Ω. In Section 4, the value of c will be used, but pulsation Ω_0 will be equal to Ω. It is now assumed that the shape of the loop $(u, \mathcal{F})$ does not depend on pulsation Ω_0. In Section 4, value c_0 will be used:

$$c_0 = \frac{\Omega}{\Omega_0} c, \tag{44}$$

where c is given by (43).

This assumption is based on the experiments performed in [14] and is confirmed by the calculations presented in Section 4.

2.2.5 Resolution

The analytical solution of Eqs. (22a) and (22b) can be calculated for certain particular cases, for example for u defined by Eq. (42). See Appendix A.4 and A.5. Consequently, function $\mathcal{F}$ is determined by Eq. (22c).

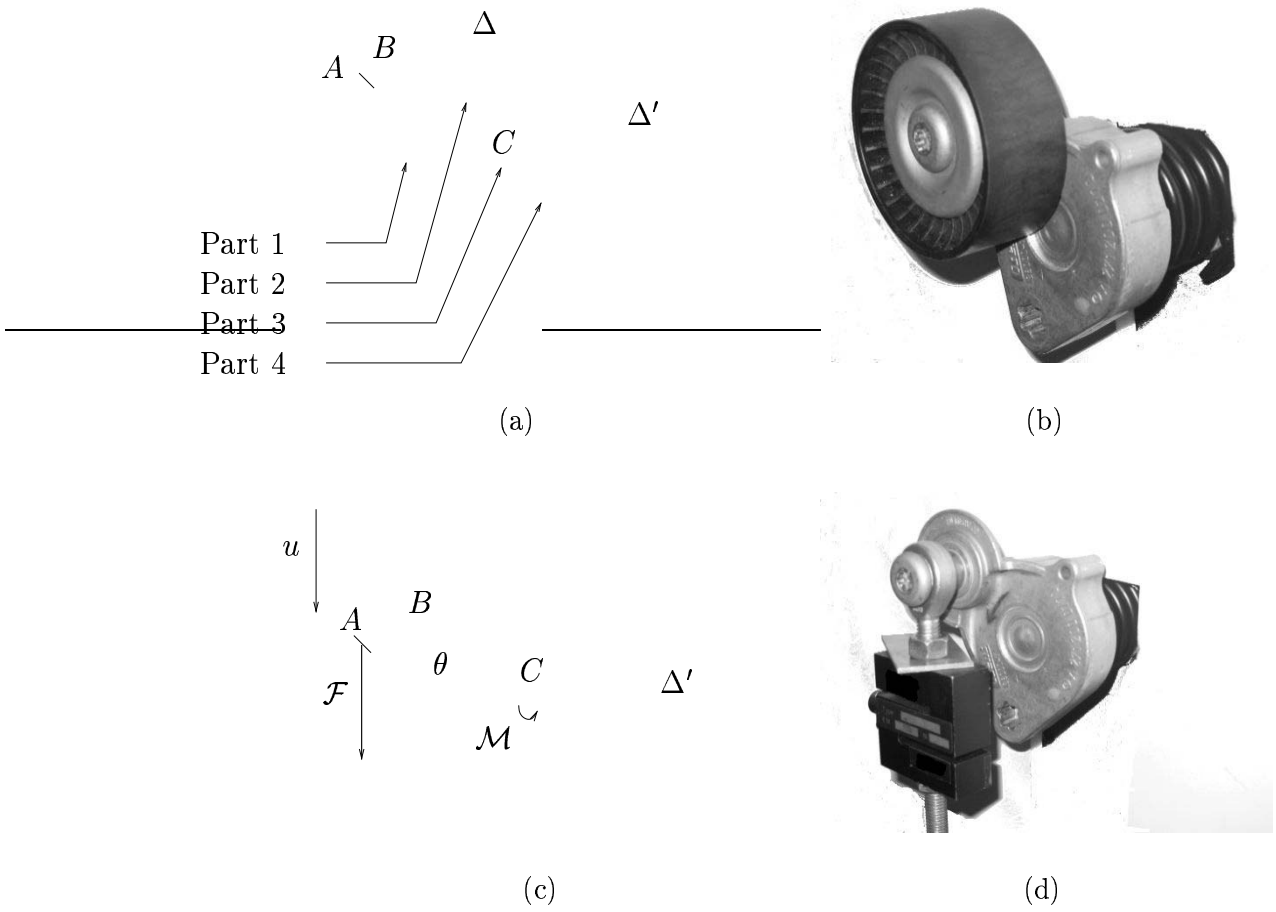


Fig. 8. Tensioner schemes and pictures: complete (a-b) and without pulley (c-d).

3 Experimental investigation and parameter identification

The tensioner is composed of three parts, see Fig. 8(a): Part 1 is a solid (Idler pulley) that rotates around axis $\Delta = (AB)$ of part 2; part 2 is the tensioner arm ABC, that rotates around the fixed axis Δ' of part 3, bolted to the reference part 4 (i.e an engine for automotive applications). All the parts are considered as rigid bodies. The pin joint of axis Δ' between parts 2 and 3 includes a torsion spring and friction components that cause dry and lubricated contact forces, and a moment between parts 2 and 3. The phenomena involved result in highly non linear behavior of the joint.

An experimental set up has been designed for identifying the belt tensioner model parameters. The idler pulley is removed and segment AB is connected to a rigid bar that subjects a vertical alternative displacement on point A. The vertical components of point A, displacement $u(t)$, and of force $\mathcal{F}$ are considered positive when oriented toward the ground, since in use, the tensioner is

always preloaded. Force $\mathcal{F}$ remains positive.

The displacements are measured using laser optical sensors, while the forces are measured with load cells. Data acquisition is performed simultaneously with a sample frequency $f_{\text{sto}} = 5000$ Hz. The measurements can be filtered to remove measurement noise.

3.1 Experimental set-up for identifying the parameters of the models

An alternative vertical displacement is imposed on point A, defined by Eq. (42), with

$$\Omega = 9.4 \text{ rad/s}, \quad \phi = 4.8 \text{ rad}, \quad x_0 = 5.4\,10^{-4} \text{ m}, \quad x_1 = 5.2\,10^{-4} \text{ m}. \tag{45}$$

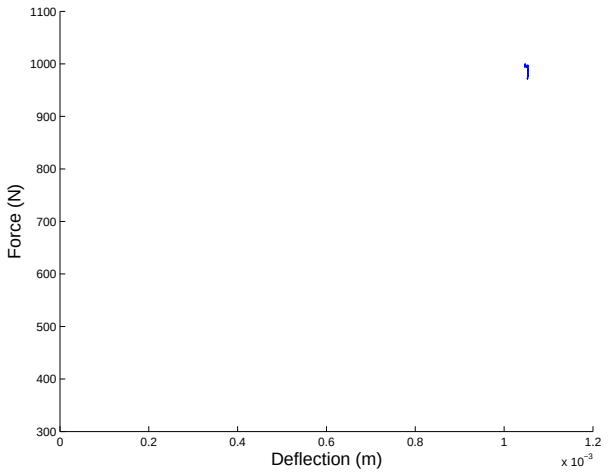


Fig. 9. Measured loop $(u, \mathcal{F})$, small deflection amplitude.

After a transient state (start from initial position), a steady hysteretic loop is observed as shown on Fig. 9 and the measured force $\mathcal{F}$ versus time is periodic.

If u and $\mathcal{F}$ are measured in the case of a larger imposed displacement amplitude, then a hysteresis loop as shown on Fig. 10 is observed.

Compared to the loop of Fig. 9, the $\max(u) - \min(u)$ range of deflection is larger. In [14], the authors have shown that the Dahl modified model parameters are dependent on x_0 and to a lesser extent on Ω. This dependency is not considered here: The values of x_0 and x_1, given by Eq. (45), have been chosen so that the $\max(u) - \min(u)$ range, observed on Fig. 9 should be similar to that observed in Section 4. Moreover, it is supposed that the characteristics of the models studied depend on the $\max(u) - \min(u)$ range but do not depend on frequency forcing Ω.

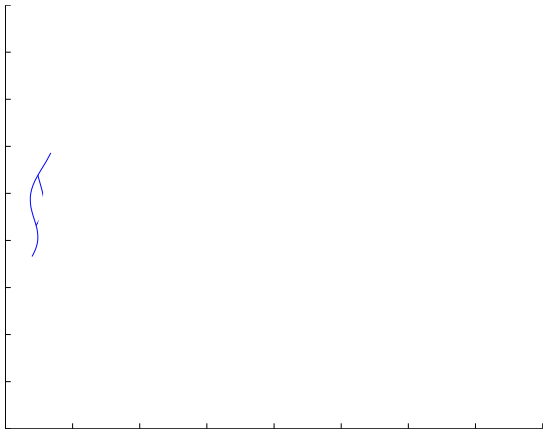


Fig. 10. Measured loop $(u, \mathcal{F})$, large deflection amplitude.

3.2 Identification of the model parameters

3.2.1 Modified Dahl model

In order to identify the parameters defining h_u and h_l, the method of Section 2.1.3 is used: As in [14], we use the fact that h_u and h_l represent the upper and lower envelop curves of the hysteretic loop Γ to which the pair $(u(t), \mathcal{F}(t))$ belongs when t describes $[t_0, t_f]$. For the next development it is considered that u is defined by Eqs. (42) and (45).

From the analysis of the measured loop represented in Fig. 9, the envelop curves h_u and h_l can be considered as straight lines and therefore the values of a, b, d and e are determined using the mean squares approximation method (see Fig. 11):

$$a = 7.146\,10^4 \text{ N/m}, \quad b = 9.596\,10^2 \text{ N}, \quad d = 5.322\,10^4 \text{ N/m}, \quad e = 3.972\,10^2 \text{ N}. \tag{46}$$

In order to use the modified Dahl model, the initial conditions $(t_0, \mathcal{F}_0)$ are determined by choosing an arbitrary point of the loop:

$$t_0 = 1.988\,10^{-1} \text{ s}, \quad \mathcal{F}_0 = 1.009\,10^3 \text{ N}. \tag{47}$$

Moreover, using the results of Section 2.1.3 and after several numerical itera-

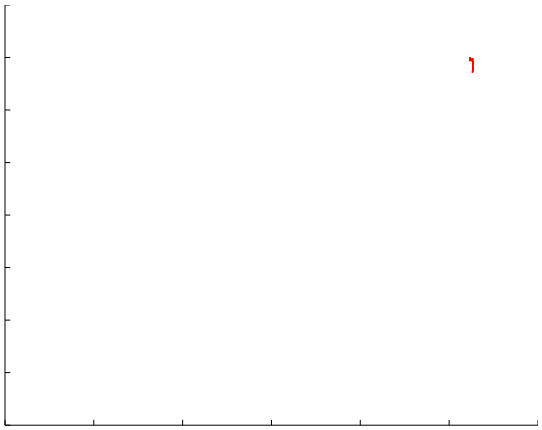


Fig. 11. Identification of the envelop curves h_u (dot-dashed line) and h_l (dashed line), measured loop (solid line).

tions, the optimal values of parameters Λ and μ are determined:

$$\Lambda = 117355, \quad \mu = 0,37. \tag{48}$$

3.2.2 Masing model with viscous damping

In order to identify the parameters of the Masing model with viscous damping i.e. $\{u_{\min}, u_{\max}, k, k_0, \alpha, \mathcal{F}_0, c\}$, the results of section 2.2.4 are applied to the experimental loop represented on Fig. 9.

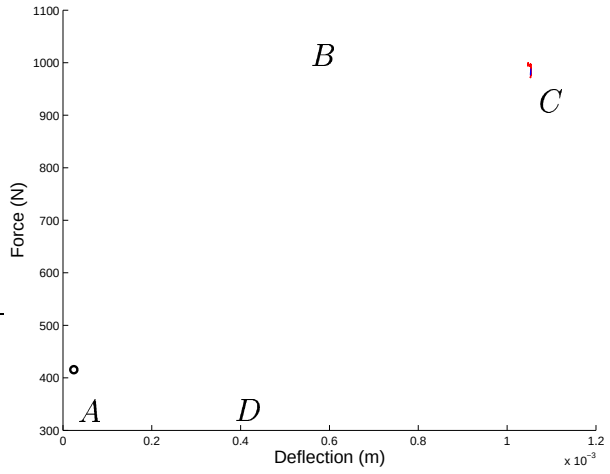


Fig. 12. Predicted (Masing model with viscous damping, dashed line) and measured (solid line) loops and the corners A, B, C and D.

As shown on Fig. 12, the numerical values of u_A, u_B, u_C, $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_C$, p_B^-, and p_B^+

are determined, and thanks to Eqs. (39) and (43) we obtain the following:

$$u_{\min} = 2\,10^{-5}\ \text{m}, \quad u_{\max} = 1.05\,10^{-3}\ \text{m}, \tag{49a}$$

$$k = 4.84\,10^{5}\ \text{N/m}, \quad k_0 = 2.34\,10^{5}\ \text{N/m}, \quad \alpha = 1.63\,10^{2}\ \text{N}, \quad \mathcal{F}_0 = -5.73\,10^{2}\ \text{N}. \tag{49b}$$

$$c = 1.93\,10^{4}\ \text{Ns/m}. \tag{49c}$$

As in Section 3.2.1, the initial conditions $(t_0, w_0 = w(t_0))$ are determined choosing an arbitrary point of the loop:

$$t_0 = 1.55\,10^{-2}\ \text{s}, \quad w(t_0) = -3.24\,10^{-4}\ \text{m}. \tag{50}$$

3.3 Comparison of the results obtained with the modified Dahl and Masing models and with the experiment

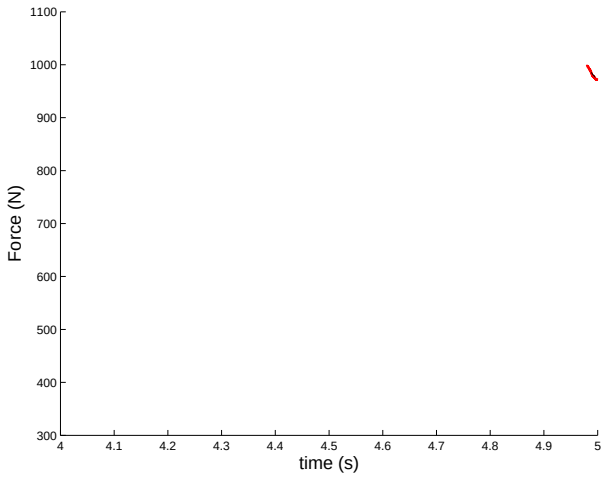
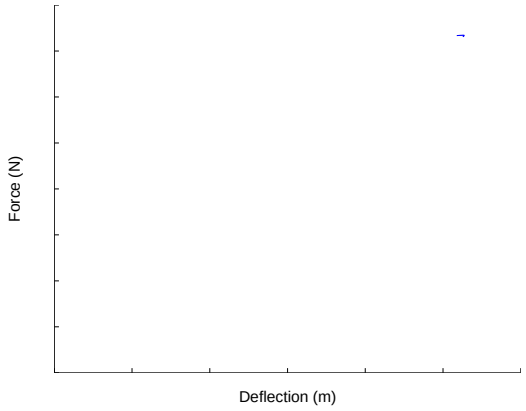


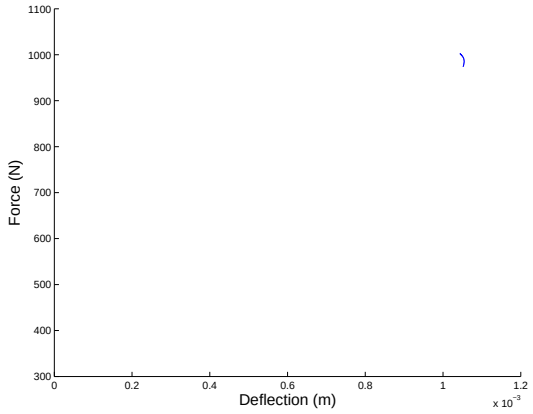
Fig. 13. Identification part: the force $\mathcal{F}$ versus time measured (solid line) and predicted with the modified Dahl model (dashed line) and with the Masing model (dot-dashed line).

The previous identification permits predicting the force for an imposed deflection; Numerical and analytical computations were performed for the modified Dahl model and the Masing model. The curves $t \mapsto \mathcal{F}$ are plotted in Fig. 13. Since the curves obtained are periodic, not all the periods are shown.

The force deflection loop $u \mapsto \mathcal{F}$ is plotted on Fig. 14. By comparing the force deflection loops, it appears that the stick slip state transition is modeled differently. Indeed, for the Dahl model (Fig. 14(a)), the stick slip transition is continuous through it is not for the slip stick transition. This is the contrary for the Masing model with viscous damping (Fig. 14(b)). In addition, the higher the viscous damping, the smoother the slip stick transition will be.



(a)



(b)

Fig. 14. Identification part: the predicted load $\mathcal{F}$ versus deflection u with the modified Dahl model (a) and with the Masing model (b).

Both experimental and numerical results are presented in Figs. 13 and 15. Good agreement can be observed between the two theoretical models and also between each model and the experiment performed to validate the models used and their identification.

4 Comparison, validation and prediction

In the previous section, the Modified Dahl and Masing models were formulated for the belt tensioner. The tensioner is now a part of a mechanical system subjected to a variable load excitation. The purpose is to test the models efficiency considering a multi-degree of freedom system and an experimental investigation. Each tensioner model is implemented in the system motion

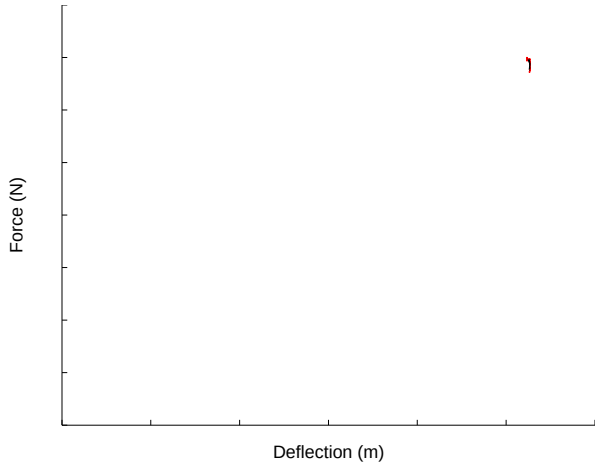


Fig. 15. Identification part: load $\mathcal{F}$ versus deflection u measured (solid line) and predicted with the modified Dahl model (dashed line) and with the Masing model (dot-dashed line).

equations that are solved numerically The predicted and measured results are compared.

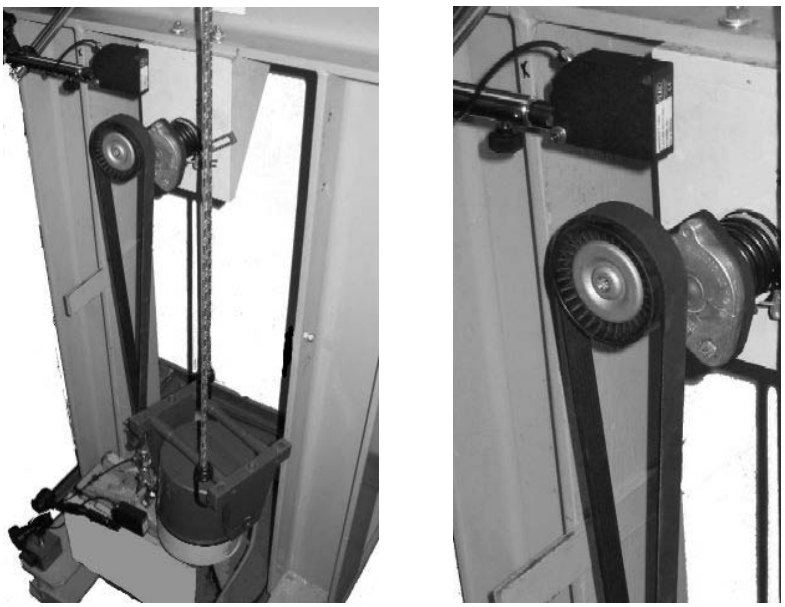
4.1 Equations of motion for the system

4.1.1 System description

The dynamic system considered is composed of the previously studied tensioner, a poly-V belt and a mass (see Fig. 16). The tensioner base is fixed on a rigid frame. Its idler pulley of mass m_2 has a belt wrapped around it. The two adjacent belt spans are joined at their other end and connected to a mass m_1. The mass m_1 is excited by the imposed force f generated by an electro-dynamic shaker (see Figs. 16). Two Displacements u_1 and u_2 (see Fig. 17) of the two masses are measured with laser-optical displacement sensors. The transmitted force f is measured with a piezo-electric load sensor, and the belt tension is measured with an S-shape load sensor. In this two degrees of freedom system, mass m_1 is used both for the tensioner preload and for the system dynamics.

4.1.2 System equations

Let u_1 and u_2 be the vertical displacements of masses 1 and 2, along the x



(a) (b)

Fig. 16. Experimental set-up: Belt-tensioner-mass system; total system (a) and zoom (b).

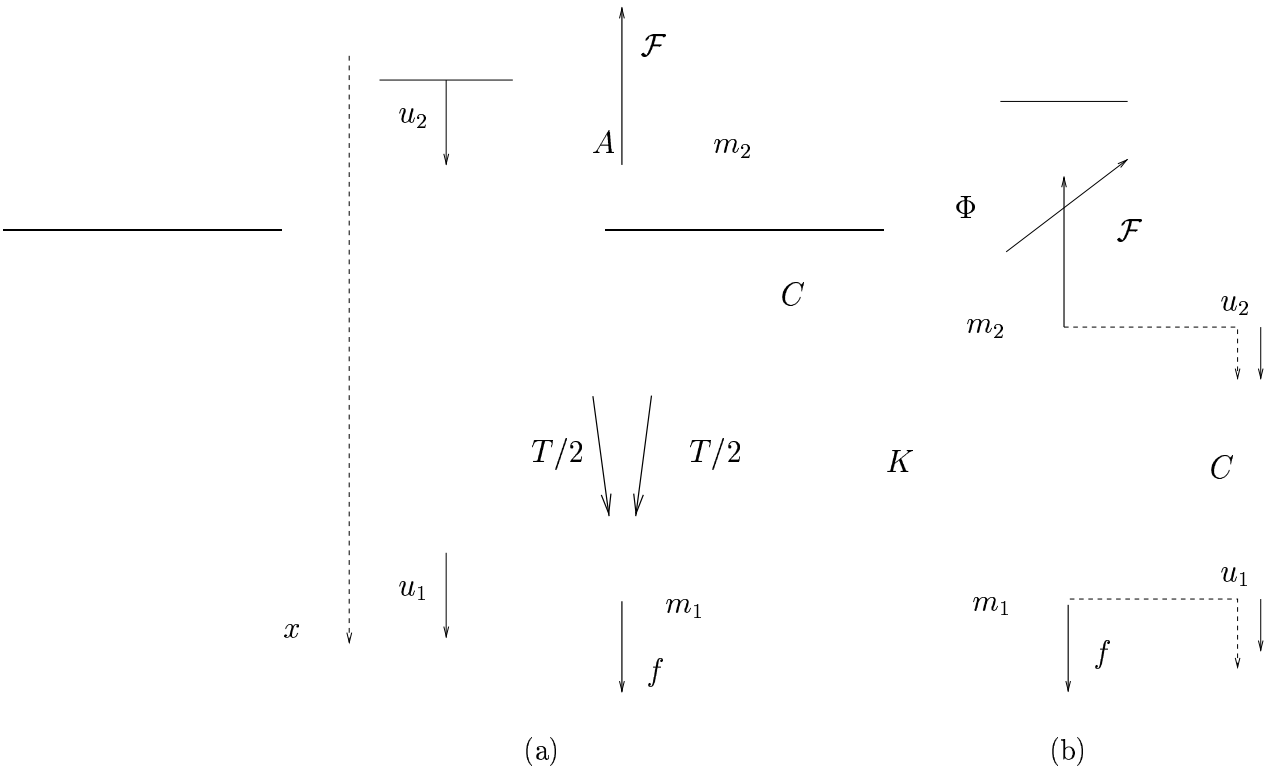


Fig. 17. sketch (a) and model (b) of Belt-tensioner-mass system.

axis, both positive oriented downward. As in section 3, $\mathcal{F}$ is the force exerted by the tensioner, it is positive oriented upward. Force f is positive oriented downward (see Fig. 17). Let $T/2$ be the tension in each belt span. Due to the ratio between the radius of the pulley and the belt span length, it is assumed that tension T is oriented vertically.

The gravity constant is noted as g and equations governing the complete system are given by:

- The belt behavior law, by considering the belt as a spring-damper of stiffness K and equivalent viscous damping C:

$$T(t) = K(u_1(t) - u_2(t)) + C\left(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\right) + \mathcal{T}_0, \tag{51a}$$

  where $\mathcal{T}_0$ is related to the initial belt tension.
- The dynamic equilibrium of the tensioner pulley projected along the vertical axis x, by neglecting effects on the horizontal axis:

$$m_2\ddot{u}_2(t) = T(t) - \mathcal{F}(t) + m_2 g. \tag{51b}$$

- The dynamic equilibrium of the lower mass projected along the vertical axis x, by neglecting effects on the horizontal axis:

$$m_1\ddot{u}_1(t) = -T(t) + f(t) + m_1 g. \tag{51c}$$

- Initial data at t_0 for u_1 and u_2:

$$u_1(t_0) = u_{1,0}, \quad \dot{u}_1(t_0) = \dot{u}_{1,0}, \quad u_2(t_0) = u_{2,0}, \quad \dot{u}_2(t_0) = \dot{u}_{2,0}. \tag{51d}$$

- The relation between force $\mathcal{F}$ and displacement u_2 is written formally as:

$$\mathcal{F} = \Phi(u_2), \tag{51e}$$

  where Φ is an operator.

Belt stiffness K and damping C are obtained by using an experimental model analysis non presented here. The parameter values of the system are fixed:

$$m_1 = 73.84 \text{ kg}, \quad m_2 = 0.15 \text{ kg}, \quad K = 560000 \text{ N/m}, \quad C = 160 \text{ Ns/m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2. \tag{52}$$

The initial conditions are chosen arbitrarily

$$t_0 = 1,6\,10^{-3}, \quad u_{1,0} = 0, \quad \dot{u}_{1,0} = 0, \quad u_{2,0} = 0, \quad \dot{u}_{2,0} = 0, \tag{53}$$

4.1.3 Application of the modified Dahl model

Applying the modified Dahl model for the tensioner implemented in the system, consists in replacing u by u_2 in Eqs. (8b)-(14):

$$\dot{\mathcal{F}}(t) = \begin{cases} \Lambda \dot{u}_2(t) \text{sign}\Big(h_u(u_2(t)) - \mathcal{F}(t)\Big) \Big|h_u(u_2(t)) - \mathcal{F}(t)\Big|^{\mu}, & \text{if } \dot{u}_2(t) \geq 0, \\ -\Lambda \dot{u}_2(t) \text{sign}\Big(h_l(u_2(t)) - \mathcal{F}(t)\Big) \Big|h_l(u_2(t)) - \mathcal{F}(t)\Big|^{\mu}, & \text{if } \dot{u}_2(t) \leq 0, \end{cases} \tag{54}$$

$$\mathcal{F}(t_0) = \mathcal{F}_0. \tag{55}$$

Finally, it is necessary to solve the system formed by Eqs. (51a), (51b), (51c), (54) and initial conditions (51d) and (55). It is admitted that u_1, u_2, T and $\mathcal{F}$ exist and are unique.

4.1.4 Application of the Masing model with viscous damping

For the Masing model with viscous damping, replacing u by u_2 transforms Eq. (22) in:

$$\dot{w} + \beta \left(\frac{w}{\eta}\right) \ni \dot{u}_2, \text{ on } [t_0, t_f] \tag{56a}$$

$$w(t_0) = w_0, \tag{56b}$$

$$\mathcal{F} = kw + k_0 u_2 + c\dot{u}_2 - \mathcal{F}_0, \text{ on } [t_0, t_f]. \tag{56c}$$

Finally, we obtain the system of Eqs. (51a), (51b), (51c), (56a), (56c), and initial conditions (51d) and (56b). These equations are written as a differential inclusion of the first order studied in [5,9]. See Example 4 of Appendix A.3.

4.2 The numerical scheme used and numerical simulations

4.2.1 Modified Dahl model

In order to solve numerically the differential system formed by Eqs. (51a), (51b), (51c) and (54), it is written in the form of a first order equation. Func-

tion G from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}$ is introduced and defined by:

$$\forall (u,v,\mathcal{F}) \in \mathbb{R}^3, \quad G(u,v,\mathcal{F}) = \begin{cases} \Lambda v \operatorname{sign}\Big(h_u(u) - \mathcal{F}\Big) \Big|h_u(u) - \mathcal{F}\Big|^{\mu}, & \text{if } v \geq 0, \\ -\Lambda v \operatorname{sign}\Big(h_l(u) - \mathcal{F}\Big) \Big|h_l(u) - \mathcal{F}\Big|^{\mu}, & \text{if } v \leq 0, \end{cases} \tag{57}$$

with functions h_u and h_l defined by Eq. (11). Then Eq. (54) is equivalent to

$$\dot{\mathcal{F}}(t) = G\Big(u_2(t), \dot{u}_2(t), \mathcal{F}(t)\Big)$$

Let $\mathcal{G}$ be the function from $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^5$ to $\mathbb{R}^5$ defined by: for any $(t, X) = (t, u_1, v_1, u_2, v_2, \mathcal{F}) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^5$

$$\mathcal{G}(t,X) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{1}{m_1}\left(-T + f(t)\right) + g \\ v_2 \\ \frac{1}{m_2}\left(-\mathcal{F} + T\right) + g \\ G\Big(u_2, v_2, \mathcal{F}\Big) \end{pmatrix}, \tag{58a}$$

where

$$T = K(u_1 - u_2) + C(v_1 - v_2) + \mathcal{T}_0. \tag{58b}$$

By considering $X(t) = \Big(u_1(t), \dot{u}_2(t), u_2(t), \dot{u}_2(t), \mathcal{F}(t)\Big)$ and $X_0 = \Big(u_{1,0}, \dot{u}_{1,0}, u_{2,0}, \dot{u}_{2,0}, \mathcal{F}_0\Big)$, Eqs. (51a), (51b), (51c) and (54) with initial conditions (51d) and (55) are equivalent to

$$\forall t \in [t_0, T], \quad \dot{X}(t) = \mathcal{G}(t, X(t)), \tag{59a}$$

with the initial condition

$$X(t_0) = X_0. \tag{59b}$$

Then T is deduced from Eq. (51a). To define $\mathcal{F}_0$ and $\mathcal{T}_0$, it is assumed that the system of Eqs. (51a), (51b), (51c) and (54) is still valid for the static equilibrium of the system, where u_1 and u_2 are nil at $t = t_0$:

$$\mathcal{F}(t_0) = f(t_0) + (m_1 + m_2)g, \tag{60a}$$
$$\mathcal{T}_0 = f(t_0) + m_1 g. \tag{60b}$$

Step h is chosen as:

$$h = 10^{-4}. \tag{61}$$

It is assumed that

$$f(t) = f_0 + f_1 \cos(\Omega t + \phi), \tag{62}$$

with

$$f_0 = 3.5 \text{ N}, \quad f_1 = 122.1 \text{ N}, \quad \Omega = 73.15 \text{ rad/s}, \quad \phi = 0.40 \text{ rad}. \tag{63}$$

The excitation force amplitude f_1 was chosen so that the $\max(u_2) - \min(u_2)$ displacement range is similar in magnitude to that of the parameter identification test (see Fig. 9). Therefore the identified values of parameters a, b, d, e Λ and μ can be used.

To solve the differential Eqs. (59), a numerical multistep solver of Matlab, based on backward differentiation formulae (Gear's method), is used. It is admitted that the scheme is convergent.

The values chosen for $u_{1,0}$, $\dot{u}_{1,0}$, $u_{2,0}$, and $\dot{u}_{2,0}$, have little influence on the solution in periodic steady state. The results are presented in Section 4.3.

4.2.2 The Masing model with viscous damping

Example 4 presented in appendix A.3 is considered. By using the formulae (A.20), it is possible to numerically calculate u_1, $\dot{u}_1$, $\ddot{u}_1$, u_2, $\dot{u}_2$, $\ddot{u}_2$, w, T and $\mathcal{F}$ at time t_p.

Assuming that at time t_n the values of $u_{2,n}$, $v_{2,n}$, w_n and $g_n = g(t_n, u_{2,n}, v_{2,n}, w_n)$ are known, the values at time t_{n+1} : $u_{2,n+1}$, $v_{2,n+1}$, w_{n+1} and g_{n+1} can be calculated, and the values of T_{n+1}, $\mathcal{F}_{n+1}$ and $M\ddot{u}_{2,n+1}$ are obtained.

The discretizations of Eqs. (56a), (56c), (51a), (51c) and (51b) are detailed in (A.20).

The numerical scheme is a discrete formulation of the motion equations. Using an implicit Euler scheme produces a first order error whereas higher order schemes seem to be better adapted (as Runge Kutta 4). However, as a counter example, it has been shown in [4] that even when using more accurate schemes, the error remains of first order. Fundamentally, the presence of the multivalued term A in (A.3) can lead to a discontinuous derivative of u and limits the order of the scheme to one.

Another method can be to use a different type of discretization based on the differentiation of the states in which the tensioner is stuck or slips. In each of

the two states an ordinary differential equation has to be solved. This method has three main difficulties: firstly, it implies the determination of instant of change of state that can require long calculation times; secondly, nothing guarantees this is a first order method, which can lead to inconsistent results in the case of large number of change of state. Finally, the model developed here has only one dry friction element; the numerical scheme used remains the same in the case of several elements, and it can be easily generalized without many additional calculations. Solving the system separating the different states is difficult to manage.

It is assumed that f is defined by Eqs. (62) and (63). The initial conditions defined in Section 4.1.2 are used with an additional one:

$$w_0 = 0. \tag{64}$$

As with the modified Dahl model, Eq. (60) is used and gives:

$$\mathcal{T}_0 = 338 \text{ N}. \tag{65}$$

The values chosen for t_0, $u_{1,0}$, $\dot{u}_{2,0}$, $u_{2,0}$, $\dot{u}_{2,0}$, and w_0 have little influence on the solution in periodic steady state. The values of $u_{\min}$, $u_{\max}$, k, k_0, α and $\mathcal{F}_0$ identified can be used. For the value of c_0, Eq. (44) is used, where c is numerically supplied by Eq. (49c), Ω is defined by Eq. (45), and $\Omega_0 = \Omega$, defined by (63). We obtain

$$c = 2.498\,10^3 \text{ Ns/m}. \tag{66}$$

For the Masing model with viscous damping, a numerical Euler implicit scheme of step h defined by Eq. (A.33) is used. See appendix A.2. The results are presented in the next section.

4.3 Predicted and measured responses

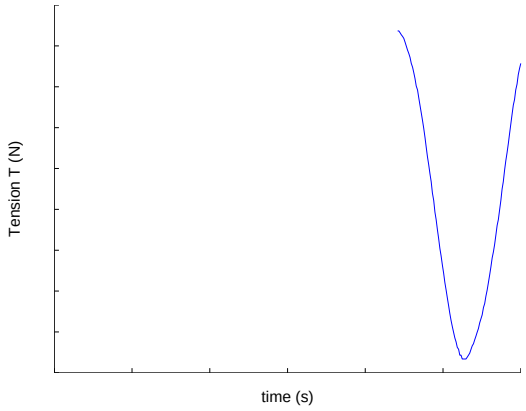
In this section, the predicted and measured responses of the multi degrees of freedom system are presented and compared (see Figs. 18). No transient phase is observed for the measured responses.

The value of force $\mathcal{F}$ is reached using Eq.(51b) which gives

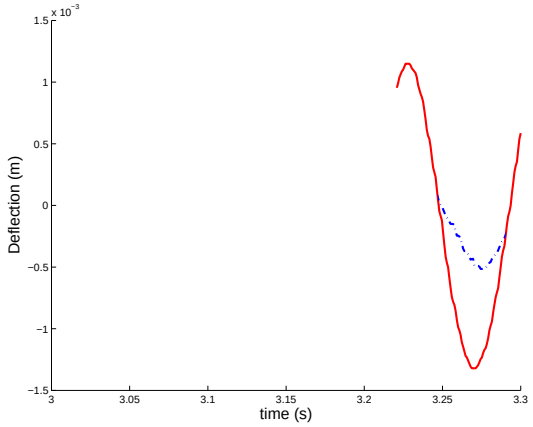
$$T(t) - \mathcal{F}(t) = m_2(\ddot{u}_2(t) - g).$$

and since m_2 defined by (52) is negligible compared to m_1, it leads to:

$$T(t) \approx \mathcal{F}(t). \tag{67}$$



(a)



(b)

Fig. 18. Measured curves T (a), u_1 (b, solid line) and u_2 (b, dot-dashed line) versus time (on time interval $[3, 3.3]$).

To confirm this assumption, we calculate $\mathcal{F}$, T and $|\mathcal{F} - T|$ for the two belt tensioner models studied. The computations give:

$$\max_{t\in[3,3.15]} |(\mathcal{F}(t) - T(t))/T(t)| = 4.36\,10^{-3},$$
$$\max_{t\in[3,3.15]} |(\mathcal{F}(t) - T(t))/\mathcal{F}(t)| = 4.34\,10^{-3},$$

for the modified Dahl model and

$$\max_{t\in[3,3.15]} |(\mathcal{F}(t) - T(t))/T(t)| = 4.42\,10^{-3},$$
$$\max_{t\in[3,3.15]} |(\mathcal{F}(t) - T(t))/\mathcal{F}(t)| = 4.40\,10^{-3},$$

for the Masing model with viscous damping. Thus it is considered that the

value of $T(t)$ is roughly $\mathcal{F}(t)$. Therefore, each experimental value of $\mathcal{F}(t)$ is then replaced by the corresponding experimental value $T(t)$.

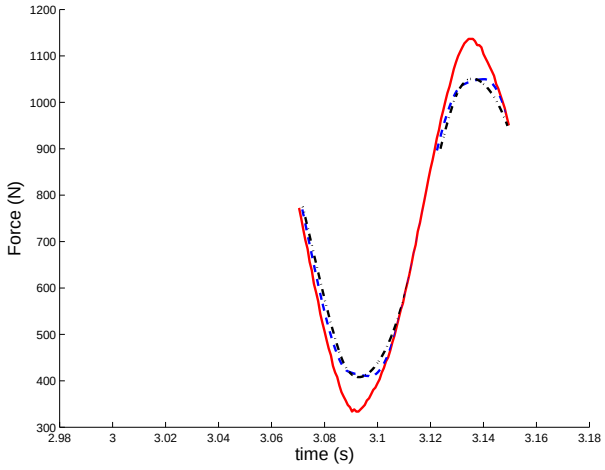


Fig. 19. Validation part: force $\mathcal{F}$ versus time measured (solid line) and predicted with the modified Dahl model (dashed line) and with the Masing model (dot-dashed line).

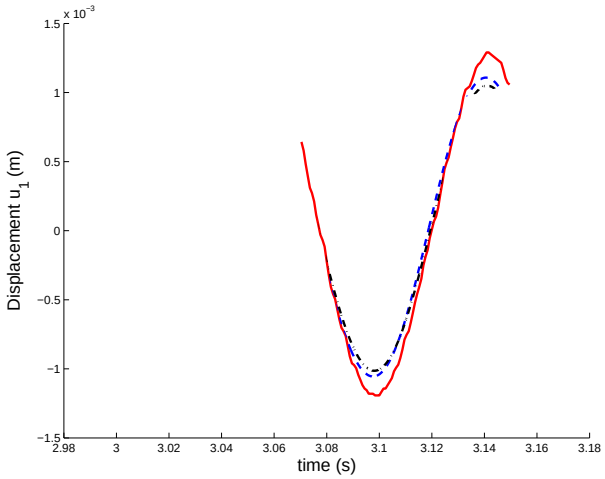


Fig. 20. Validation part: displacement u_1 versus time measured (solid line) and predicted with the modified Dahl model (dashed line) and with the Masing model (dot-dashed line).

After a short transient phase, functions $t \mapsto \mathcal{F}$, $t \mapsto u_1$ and $t \mapsto u_2$ are periodic. Thus, only some periods of these functions $t \mapsto \mathcal{F}$, $t \mapsto u_1$ and $t \mapsto u_2$ are plotted. Both measured and predicted results are presented in Figs. 19, 20 and 21,. The two theoretical models give satisfactory results. The short time deviation Δt is due to the unknown initial conditions. For the same reason, there are also shifts Δu_1 and Δu_2 between the experimental and computed curves u_1 and u_2; Δu_1 and Δu_2 are determined so that the mean values of u_1 and u_2 are nil. Finally, displacement shifts Δu_1, Δu_2 and Δt are introduced in the model and function $\mathcal{F}$ is plotted versus the deflection u_2 (see Fig. 22).

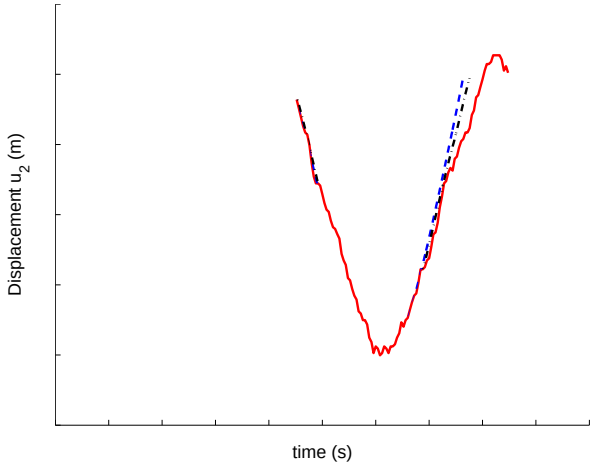


Fig. 21. Validation part: displacement u_2 versus time measured (solid line) and predicted with the modified Dahl model (dashed line) and with the Masing model (dot-dashed line).

4.4 Global behavior

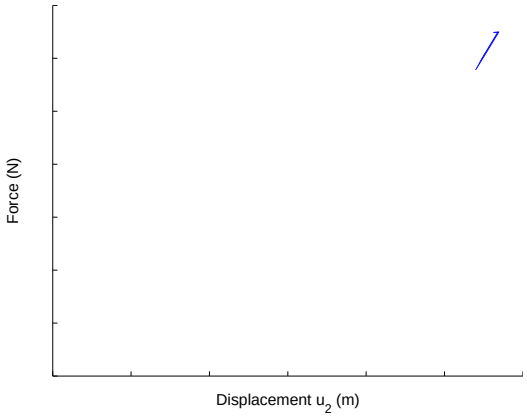
The comparisons of the results on Fig. 22 shows that there is a small difference between the measured and predicted loops. This is probably due to the fact that the mechanical parameters of the two models studied depend on the $\max(u_2) - \min(u_1)$ displacement range. According to Section 3.1, the parameters of the modified Dahl and Masing models with viscous damping depend on u_2 and the analysis can be improved.

Finally some values of $|\max(T) - \min(T)|$ versus forcing pulsation Ω are measured for several values of f_1 (and with f_0 and ϕ fixed) within Eq. (62). For each value of Ω, c_0 is defined by (44). We choose

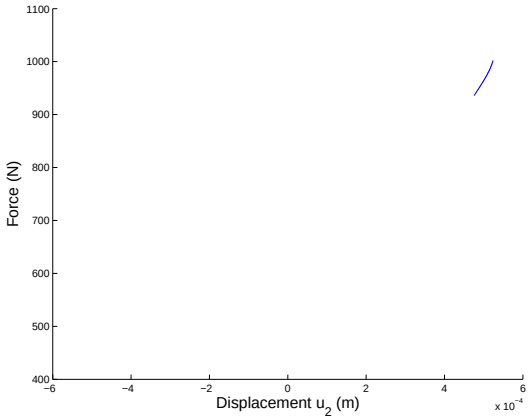
$$t_0 = 17 \text{ s}, \quad t_f = 20 \text{ s}, \quad h = 10^{-5} \text{ s}, \tag{68a}$$
$$f_0 = 0, \quad \phi = 0, \tag{68b}$$
$$f_1 \in [13,\ 27,\ 41,\ 54,\ 67,\ 79,\ 90,\ 100,\ 110,\ 120], \tag{68c}$$
$$\Omega \in [10, 125] \text{ (with 116 values arranged linearly).} \tag{68d}$$

Measured and predicted responses are plotted in Fig. 23. The computed frequency response represented in this figure is obtained after a series of calculations in the time domain: each point of a frequency response curve corresponds to the tension fluctuation amplitude calculated when steady state is reached for a given frequency and excitation amplitude. The dot-dashed curves correspond to the predicted results obtained for higher excitation force amplitudes not obtained experimentally:

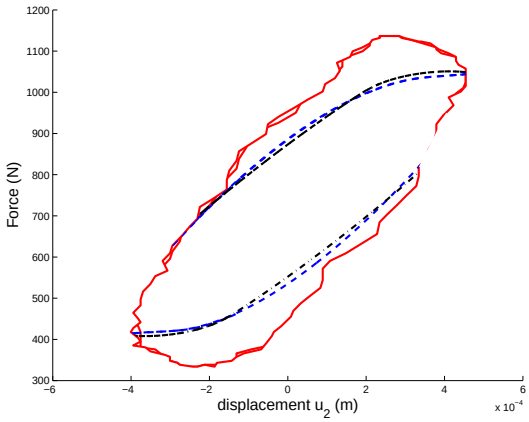
$$f_1 \in [140,\ 160,\ 200,\ 230,\ 260,\ 300]. \tag{69}$$



(a)

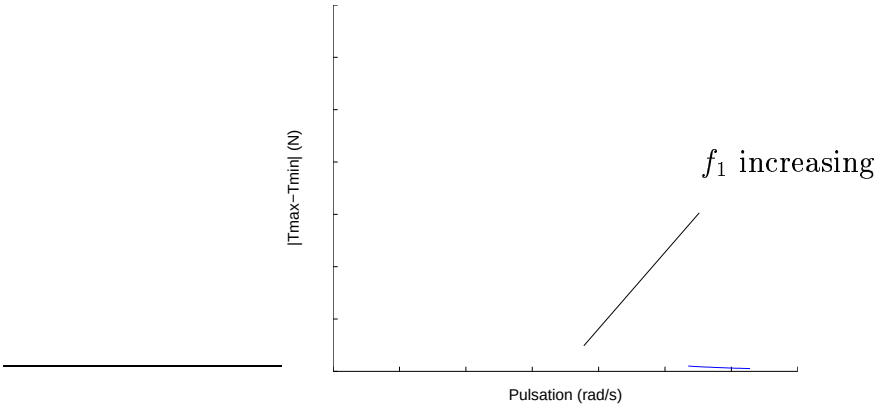


(b)

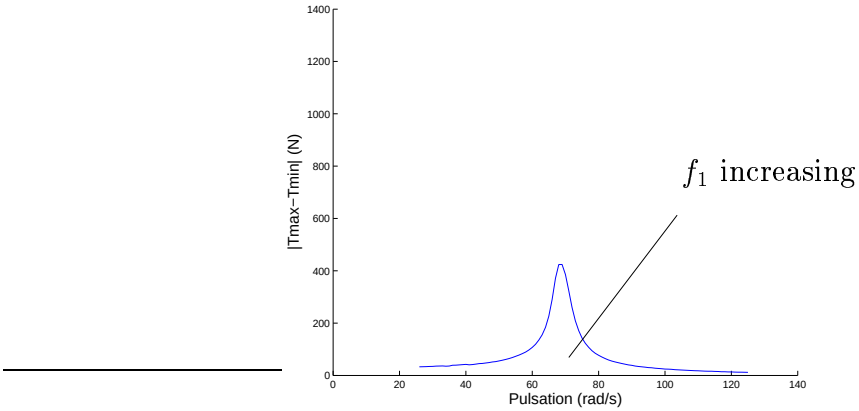


(c)

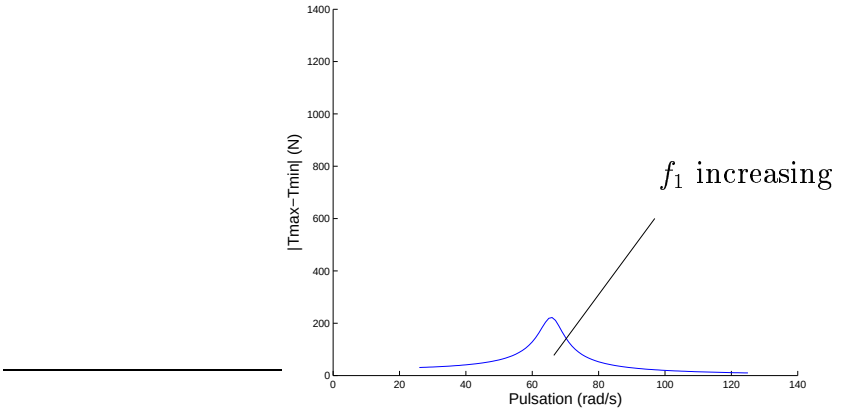
Fig. 22. Validation part: force $\mathcal{F}$ versus deflection u_2 predicted with the modified Dahl model ((a) and (c) with the dashed line) and with the Masing model ((b) and (c) with the dot-dashed line), and measured ((c) with the solid line).



(a)



(b)



(c)

Fig. 23. Prediction part: Amplitude $|\max(T) - \min(T)|$ versus pulsation Ω for several values of f_1 for the experiment (a), the modified Dahl model (b) and the Masing model with viscous damping (c) for f_1 defined by (68c) (solid curves) and for f_1 defined by (69) (dot-dashed curves), with f_1 increasing in the direction of the arrow.

It can be observed experimentally that even if the excitation force amplitude increases, the resulting belt tension variation is bounded within a frequency range. This phenomenon is predicted better if the tensioner is modeled with the modified Dahl model rather than with the Masing model with viscous damping.

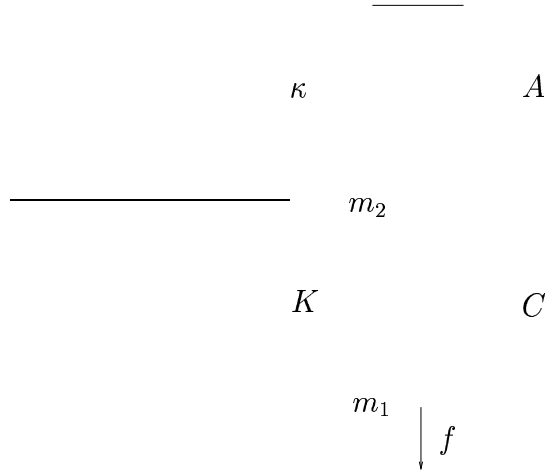


Fig. 24. Linear simplified model of Belt - tensioner - mass system.

The system behavior observed in Figs. 23 is similar to that described in [10,18] For small forcing amplitudes, the tensioner is stuck and equivalent to a spring-dashpot linear model (see Fig. 24). For high forcing amplitudes, it mainly slips and therefore can also be modeled by a spring-dashpot linear model (see Fig. 24).

contact state	model	κ	A	f_1	Ω_{exp}	Ω_{l}	Ω_{nl}
Stuck	Masing	$k + k_0$	c	13	72	$65,7$	66
	Dahl	p_0	0	13	72	$72,4$	69
Slipping	Masing	k_0	c	300	$*$	$49,8$	56
	Dahl	$(a+d)/2$	0	300	$*$	$27,5$	32

Table 1
Simplified linear models: data and results (measured and calculated resonance pulsations).

Table 1 gives the retained stiffness and damping for both models depending on the contact state, as well as experimental and calculated resonance pulsations for the linear models and the non linear models. p_0 is the slope at the origin in the $(u_2, \mathcal{F})$ plane for the Dahl model given by (see Fig. 14(a)):

$$p_0 = 1.26 \times 10^6.$$

The results are satisfactory between experimental resonance pulsation Ω_{exp}, linear resonance pulsation Ω_{l} and non linear resonances pulsation Ω_{nl}. The

forced response of the linear simplified belt-tensioner system is well predicted with the two models proposed, more particularly with the modified Dahl model.

5 Conclusion

This paper has described in detail two different models usually used to reproduce hysteretic behavior.

It has been shown that the stick-slip behavior exhibited of a belt tensioner can be modeled either by the Masing model or the modified Dahl model.

Model parameters have been identified experimentally with an imposed deflection and a low forcing frequency. The numerical and experimental investigations carried out on a belt-tensioner-mass system in a larger forcing frequency range have shown that the use of these two models is satisfactory in the time history and frequency domains.

It should be noted that particular attention must be given to the use of the numerical schemes in order to make the predicted responses reliable.

A A few theoretical reminders about the class of maximal monotone differential equations used

In this section, it is assumed that H is a Hilbert-space, equipped with a scalar product $<,>$ and its associated norm $|.|$. Let A be a multivalued maximal monotone operator from H with domain $D(A)$ (see for example [9]).

A.1 Summary of existence and uniqueness result

In this section, we recall an existence and uniqueness result. Proof of this result can be found in [3,4]. It is assumed that f is a function from $[t_0, t_f] \times H$ to H, Lipschitz continuous with respect to its second argument and whose derivative maps the bounded sets of $L^2(t_0, t_f; H)$ into bounded sets of $L^2(t_0, t_f; H)$, i.e.,

$$\exists L \geq 0 : \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad \forall x_1, x_2 \in H, \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|\,, \tag{A.1}$$

and there exits a function Φ so that

$$\forall R \geq 0, \quad \Phi(R) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(.,v) \right\|_{L^2(t_0,t_f;H)} : \|v\|_{L^2(t_0,t_f;H)} \leq R \right\} < +\infty. \tag{A.2}$$

The existence and uniqueness result is developed in what follows.

Proposition 1 *If u_0 belongs to $D(A)$, and if assumptions* (A.1) *and* (A.2) *hold, then there exists a unique solution $u \in W^{1,\infty}(t_0,t_f;H)$ of the differential inclusion*

$$\dot{u}(t) + A\Big(u(t)\Big) \ni f\Big(t,u(t)\Big), \text{ almost everywhere on }]t_0,t_f[, \tag{A.3a}$$

$$u(t_0) = u_0. \tag{A.3b}$$

If ϕ is a convex proper and lower semi-continuous function from H to $]-\infty,+\infty]$, one can define its sub-differential $\partial\phi$ by

$$\begin{cases} y \in \partial\phi(x) \iff \forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \phi(x+h) - \phi(x) \geq < y,h >, \\ \\ D(\partial\phi) = \{x : \partial\phi(x) \neq \emptyset\}\,; \end{cases} \tag{A.4}$$

moreover, $\partial\phi$ is a maximal monotone graph in H. If K is a closed convex nonempty subset of H, we denote by ψ_K the indicatrix of K defined by

$$\forall x \in H, \quad \psi_K(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in K, \\ +\infty, & \text{if } x \notin K. \end{cases} \tag{A.5}$$

In this particular case, $\partial\psi_K$ which is the subdifferential of ψ_K, is given by

$$\forall (x,y) \in K \times H, \quad y \in \partial\psi_K(x) \Longleftrightarrow \forall z \in K, \quad \langle y, x-z \rangle \geq 0, \tag{A.6a}$$

and

$$\forall x \notin K, \quad \partial\psi_K(x) = \emptyset. \tag{A.6b}$$

The domain of the maximal monotone operator $\partial\psi_K$ is equal to K.

A.2 Summary of result for numerical schemes

In this section, the error estimation proved in [3,4] is recalled.

Let N be an integer, $h = (t_f - t_0)/N$ and U^p the solution of the numerical scheme

$$\forall p \in \{0, ..., N-1\}, \quad \frac{U^{p+1} - U^p}{h} + A\left(U^{p+1}\right) \ni f\left(t_0 + ph, U^p\right), \tag{A.7}$$

$$U^0 = u_0. \tag{A.8}$$

Solution U^p exists and is unique since A is maximal monotone; Indeed, in this case the operator $(I + hA)^{-1}$, where I is the identity of H, is a single-valued operator defined by the entire space H with U^{p+1} so that (see [9]):

$$\forall p \in \{0, ..., N-1\}, \quad U^{p+1} = (I + hA)^{-1}\Big(hf\left(t_0 + ph, U^p\right) + U^p\Big). \tag{A.9}$$

Denote $u_h \in C^0\left([t_0, t_f], H\right)$ the linear interpolation at time $t_p = t_0 + hp$ of the solution U^p. The result of convergence is now detailed.

Proposition 2 *Under the assumptions* (A.1) *and* (A.2)*, if ψ_K is defined by* (A.5) *and if A is equal to $\partial\psi_K$, the numerical scheme* (A.7)-(A.8) *is of first order, i.e. there exists C so that, for any h,*

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad |u(t) - u_h(t)| \leq Ch, \tag{A.10}$$

where u is the solution of (A.3).

A.3 Application of these results

Several examples of applications of Propositions 1 and 2 are now given for the Masing model with viscous damping.

Example 3 *It is assumed that $H = \mathbb{R}$ and $\eta > 0$. A closed bounded interval of $\mathbb{R}$ $K = [-\eta, \eta]$ is considered. The maximal monotone graph β, defined by* (16) *and $A = \beta(./\eta)$, is considered. Note that $A = \partial\psi_K$. If the function u belongs to $H^2(t_0, t_f)$, then by using Proposition 1, there exists a unique solution $w \in W^{1,\infty}(t_0, t_f)$ of*

$$\dot{w} + \beta\left(\frac{w}{\eta}\right) \ni \dot{u}, \quad \text{a.e. on } [t_0, t_f] \tag{A.11a}$$

$$w(t_0) = w_0. \tag{A.11b}$$

For N an integer and $h = (t_f - t_0)/N$, for any $i \in \{0, ..., N\}$, it is set $t_i = t_0 + hi$. Each value of w in t_i is approximated by w_i defined by

$$\forall i \in \{0, ..., N-1\}, \quad w_{i+1} = \left(I + h\beta\left(\frac{\cdot}{\eta}\right)\right)^{-1}\Big(h\dot{u}(t_0 + hp) + w_i\Big), \tag{A.12}$$

where, for any number ξ,

$$\left(I + h\beta\left(\frac{\cdot}{\eta}\right)\right)^{-1}(\xi) = \begin{cases} x, & \text{if } \eta \leq \xi \leq \eta, \\ \eta, & \text{if } \xi > \eta, \\ -\eta, & \text{if } \xi < -\eta. \end{cases} \tag{A.13}$$

Moreover, from Proposition 2, there exists M so that, for any N,

$$\forall i \in \{0, ..., N\}, \quad |w(t_i) - w_i| \leq Mh. \tag{A.14}$$

Example 4 *Now considering $H = \mathbb{R}^5$, $\eta > 0$, and $K = \mathbb{R}^4 \times [-\eta, \eta]$ a closed bounded interval of $\mathbb{R}$, the maximal monotone graph A is defined by*

$$\forall X = (u_1, v_1, u_2, v_2, w) \in K, \quad A(X) = \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \beta\left(\frac{w}{\eta}\right), \tag{A.15}$$

where β is defined by (16)*. Note that $A = \partial\psi_K$. Let K, C, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{F}_0$, c, k, k_0 and g, be numbers and m_1, m_2 be two non negative numbers, function $\mathcal{H}$ from $[t_0, t_f] \times \mathbb{R}^5$ to $\mathbb{R}^5$ is defined by: for any $(t, X) = (t, u_1, v_1, u_2, v_2, w) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^5$*

$$\mathcal{H}(t, X) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{1}{m_1}(-T + f(t)) + g \\ v_2 \\ \frac{1}{m_2}(-\mathcal{F} + T) + g \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{A.16a}$$

where

$$T = K(u_1 - u_2) + C(v_1 - v_2) + \mathcal{T}_0, \tag{A.16b}$$

$$\mathcal{F} = kw + k_0 u_2 + cv_2 - \mathcal{F}_0. \tag{A.16c}$$

For $(u_{1,0}, \dot{u}_{1,0}, u_{2,0}, \dot{u}_{2,0}, w_0) \in K$, we consider

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ \dot{u}_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \dot{u}_{2,0} \\ w_0 \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Let f be a function belonging to $H^1(t_0, t_f)$. By using Proposition 1, there exists a unique solution $X \in W^{1,\infty}((t_0, t_f); \mathbb{R}^5)$ of

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) + A\Big(X(t)\Big) \ni \mathcal{H}\Big(t, X(t)\Big), \ \text{a.e. on }]t_0, t_f[, \\ &X(t_0) = u_0. \end{aligned}$$

We define X by: for any t,

$$X(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

with $\dot{u}_1 = v_1$ and $\dot{u}_2 = v_2$. Then functions T and $\mathcal{F}$ are defined by

$$T(t) = K\left(u_1(t) - u_2(t)\right) + C\left(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\right) + \mathcal{T}_0, \tag{A.18a}$$
$$\mathcal{F}(t) = kw(t) + k_0 u_2(t) + c\dot{u}_2(t) - \mathcal{F}_0 \tag{A.18b}$$

Finally the two following equations have to be solved

$$m_1 \ddot{u}_1(t) = -T(t) + f(t) + m_1 g, \tag{A.19a}$$
$$m_2 \ddot{u}_2(t) = T(t) - \mathcal{F}(t) + m_2 g. \tag{A.19b}$$

Moreover, since X belongs to $W^{1,\infty}((t_0, t_f); \mathbb{R}^5)$, then u_1 and u_2 belong to $W^{2,\infty}(t_0, t_f)$ and w belongs to $W^{1,\infty}(t_0, t_f)$. Thus, it can be deduced, from (A.18) *that T and $\mathcal{F}$ belong to $W^{1,\infty}(t_0, t_f) \subset C^0([t_0, t_f])$, and from* (A.19) *that u_1 and u_2 belong to $C^2([t_0, t_f])$.*

Denote, for any integer N, $h = (t_f - t_0)/N$ and for any n in $\{0, ..., N\}$, $t_n = t_0 + hn$. Denote for any n, $u_{1,n}$, $v_{1,n}$ and $a_{1,n}$ (respectively $u_{2,n}$, $v_{2,n}$ and $a_{2,n}$) the approximations of u_1, $\dot{u}_1$ and $\ddot{u}_1$ (respectively of u_2, $\dot{u}_2$ and $\ddot{u}_2$), and w_n, $\mathcal{F}_n$ and T_n the approximations of w, $\mathcal{F}$ and T at time t_n. Then, with $T_n = K\left(u_{1,n} - u_{2,n}\right) + C\left(v_{1,n} - v_{2,n}\right) + \mathcal{T}_0$ and $\mathcal{F}_n = kw_n + k_0 u_{2,n} + cv_{2,n} - \mathcal{F}_0$ it can be proved that the numerical scheme (A.9) *is equivalent to: for any*

$n \in \{0, ..., N-1\}$

$$u_{1,n+1} = hv_{1,n} + u_{1,n}, \tag{A.20a}$$
$$v_{1,n+1} = ha_{1,n} + v_{1,n}, \tag{A.20b}$$
$$u_{2,n+1} = hv_{2,n} + u_{2,n}, \tag{A.20c}$$
$$v_{2,n+1} = ha_{2,n} + v_{2,n}, \tag{A.20d}$$
$$w_{n+1} = \left(I + h\beta\left(\frac{\cdot}{\eta}\right)\right)^{-1}\left(hv_{2,n} + w_n\right), \tag{A.20e}$$

where $\left(I + h\beta\left(\frac{\cdot}{\eta}\right)\right)^{-1}$ *is defined by* (A.13),

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}), \tag{A.20f}$$
$$T_{n+1} = K\left(u_{1,n+1} - u_{2,n+1}\right) + C\left(v_{1,n+1} - v_{2,n+1}\right) + \mathcal{T}_0, \tag{A.20g}$$
$$\mathcal{F}_{n+1} = kw_{n+1} + k_0 u_{2,n+1} + cv_{2,n+1} - \mathcal{F}_0, \tag{A.20h}$$
$$a_{1,n+1} = \frac{1}{m_1}\left(-T_{n+1} + f_{n+1}\right) + g, \tag{A.20i}$$
$$a_{2,n+1} = \frac{1}{m_2}\left(-\mathcal{F}_{n+1} + T_{n+1}\right) + g. \tag{A.20j}$$

Moreover, from Proposition 2, there exists M *so that, for any* i *in* $\{0, ..., N\}$

$$|u_1(t_i) - u_{1,i}| \leq Mh, \quad |v_1(t_i) - v_{1,i}| \leq Mh, \quad |a_1(t_i) - a_{1,i}| \leq Mh, \tag{A.21a}$$
$$|u_2(t_i) - u_{2,i}| \leq Mh, \quad |v_2(t_i) - v_{2,i}| \leq Mh, \quad |a_2(t_i) - a_{2,i}| \leq Mh, \tag{A.21b}$$
$$|w(t_i) - w_i| \leq Mh, \quad |\mathcal{F}(t_i) - \mathcal{F}_i| \leq Mh, \quad |T(t_i) - T_i| \leq Mh. \tag{A.21c}$$

A.4 Analytical resolution of (A.11) *for the case* (42)

The analytical solution of Example 3 is now determined for a simple case. If the dry friction element sticks or slips, differential inclusion (A.11) takes two different forms. If w belongs to $]-\eta, \eta[$ on a time interval I with non zero measure, differential inclusion (A.11) is equivalent to

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad w(t) = u(t) + C. \tag{A.22a}$$

This phase is called static. On the contrary, if w is equal to $\varepsilon\eta$, on a time interval I with a non zero measure, differential inclusion (A.11) is equivalent to:

$$\forall t \in I, \quad \varepsilon\dot{u}(t) \geq 0. \tag{A.22b}$$

This phase is called dynamic.

Recalling that u belongs to $H^2(t_0,t_f) \subset C^1([t_0,t_f])$, it is assumed that u does not indefinitely oscillate, i.e.: there exists a finite partition of intervals on $[t_0,t_f]$, such that over each of these intervals, u is strictly monotone. Moreover, it is assumed that $\dot{u}$ possesses a finite number of zeros on $[t_0,t_f]$. Another possibility is to consider intervals where u is constant, but this case is simple because if u is constant on an interval, then the solution w of (A.11) is also constant.

Thanks to the previous assumptions, considering an integer m, a strictly increasing sequence $(\tau_i)_{0\leq i\leq m}$ of elements of $[t_0,t_f]$ and a sequence $(\varepsilon_i)_{0\leq i\leq m-1}$ of elements of $\{-1,0,1\}$ are built such that

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{m-1} < \tau_m = t_f, \tag{A.23a}$$

$$\forall i \in \{0,...,m-1\}, \quad \varepsilon_i = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \forall t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad |w(t)| < \eta, \\ \text{if } i > 0,\ |w(\tau_i)| = \eta, \\ \text{if } i < m-1,\ |w(\tau_{i+1})| = \eta. \end{cases} \tag{A.23b}$$

$$\forall i \in \{0,...,m-1\}, \quad \varepsilon_i \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad w(t) = \varepsilon_i \eta, \\ \forall t \in]\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad \varepsilon_i \dot{u}(t) > 0, \\ \text{if } i < m-1,\ \dot{u}(\tau_{i+1}) = 0. \end{cases} \tag{A.23c}$$

The numbers $(\tau_i)_{0\leq i\leq m}$ and $(\varepsilon_i)_{0\leq i\leq m-1}$ are determined by induction on i.

For each of these phases, the dry friction element sticks until w belongs to $]-\eta,\eta[$ and it slips until $\dot{u}$ takes the sign of w. Then its ending has to be predicted for each interval. For the general case, a non linear equation has to be solved. When u is defined by (42), the solution of this non linear equation is known.

It is then possible to fully determine the solution of (A.11) for the case (42).

A priori, the number of static and dynamical phases is unknown and can be infinite. In fact, this number is finite thanks the to assumption on u (u is strictly monotone and with a finite number of zeros of $\dot{u}$).

A.5 Comparison between the analytical and the numerical solution of (A.11) *for the case* (42)

The solution of the differential inclusion (A.11) was determined by an analytical way (A.4). However, as presented in Section 4.2.2, the analytical solution of the dynamical complete system is more difficult to obtain; A numerical scheme is used. The numerical and the analytical solutions of (22) and the corresponding error are presented, for several values of the discretization step.

This choice has been made for two reasons: First, is will corroborate the error estimation proved in [4]; Secondly, this computation will permit the correct choice of the discretization step, in order to obtain a relatively small error. This value of the discretization step is chosen in Section 4.2.2.

Eq. (22c) is discretized by setting

$$\forall i \in \{0, ..., N\}, \quad \mathcal{F}_i = kw_i + k_0 u(t_i) + c\dot{u}(t_i) - \mathcal{F}_0. \tag{A.24}$$

From (A.14) and (A.24), there exists M such that for any N and for any $i \in \{0, ..., N\}$

$$|\mathcal{F}(t_i) - \mathcal{F}_i| \leq kMh. \tag{A.25}$$

For any $i \in \{0, ..., N\}$, the absolute error $\varepsilon_{h,i}^{w,\mathrm{a}}$ is considered on w:

$$\varepsilon_{h,i}^{w,\mathrm{a}} = |w(t_i) - w_h(t_i)|, \tag{A.26}$$

and the relative error $\varepsilon_{h,i}^{\mathcal{F},\mathrm{r}}$ on $\mathcal{F}$:

$$\varepsilon_{h,i}^{\mathcal{F},\mathrm{r}} = \left| \frac{\mathcal{F}(t_i) - \mathcal{F}_h(t_i)}{\mathcal{F}(t_i)} \right|, \text{ if } \mathcal{F}(t_i) \neq 0. \tag{A.27}$$

According to (22c), if $\mathcal{F}(t_i) \neq 0$, we obtain

$$\varepsilon_{h,i}^{\mathcal{F},\mathrm{r}} = \frac{k}{|\mathcal{F}(t_i)|} \varepsilon_{h,i}^{w,\mathrm{a}}. \tag{A.28}$$

With the values of parameters of Section 3, this leads to

$$\mathcal{F}(t_i) \geq 383 \tag{A.29}$$

and thus

$$\varepsilon_{h,i}^{\mathcal{F},\mathrm{r}} \leq 1264,14\, \varepsilon_{h,i}^{w,\mathrm{a}}. \tag{A.30}$$

On Fig. A.1, the relative error $\varepsilon_{10^{-5},i}^{w,\mathrm{a}}$ according to t_i is plotted. It can also be seen from Fig. A.1, that the relative error for w is nil periodically on intervals where w is equal to $\pm\eta$, the value reached exactly by the numerical scheme.

Finally the maximum of the errors is calculated

$$\varepsilon_h^{w,\mathrm{a,max}} = \max_{i \in \{0,...,N\}} \varepsilon_{h,i}^{w,\mathrm{a}}. \tag{A.31}$$

and indicated in table A.1.

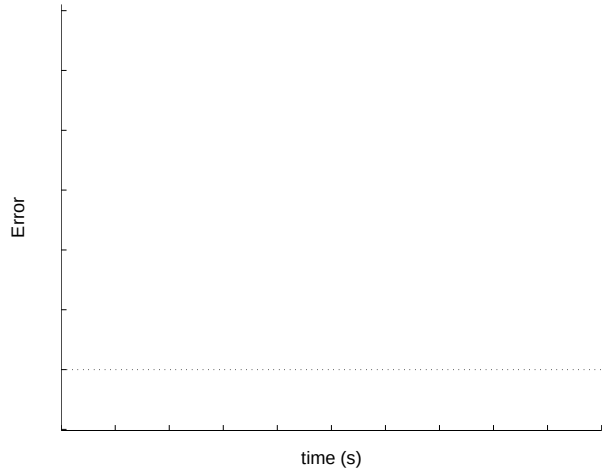


Fig. A.1. The relative error $\varepsilon^{w,\mathrm{a}}_{10^{-5},i}$ versus t_i.

h	$\varepsilon_h^{w,\mathrm{a},\max}$
10^{-1}	$2.80\,10^{-4}$
10^{-2}	$2.46\,10^{-5}$
10^{-3}	$2.43\,10^{-6}$
10^{-4}	$2.43\,10^{-7}$
10^{-5}	$2.54\,10^{-8}$
10^{-6}	$3.58\,10^{-9}$
10^{-7}	$1.41\,10^{-9}$
10^{-8}	$1.20\,10^{-9}$

Table A.1
The values of $\varepsilon_h^{w,\mathrm{a},\max}$ for $h = 10^{-k}$, with $k \in \{1, ..., 8\}$.

In the same way, thanks to (A.30), a bound can be given for

$$\varepsilon_h^{\mathcal{F},\mathrm{r},\max} = \max_{i\in\{0,\ldots,N\}} \varepsilon_{h,i}^{\mathcal{F},\mathrm{r}}. \tag{A.32}$$

The results are indicated in table A.2.

The results given in tables A.1 and A.2 corroborate the estimations (A.14) and (A.25), deduced from the results of [4]. It is observed that for a discretization step lower than $h = 10^{-7}$, the errors seem be stationary, due to the precision used for computations (with Fortran). For the next development (in Section 4) the following value will be kept for h:

$$h = 10^{-5}. \tag{A.33}$$

h	$\varepsilon_h^{\mathcal{F},\mathrm{r},\max}$ bounded by
10^{-1}	$3.54\,10^{-1}$
10^{-2}	$3.11\,10^{-2}$
10^{-3}	$3.07\,10^{-3}$
10^{-4}	$3.08\,10^{-4}$
10^{-5}	$3.21\,10^{-5}$
10^{-6}	$4.53\,10^{-6}$
10^{-7}	$1.78\,10^{-6}$
10^{-8}	$1.51\,10^{-6}$

Table A.2
Bound for $\varepsilon_h^{\mathcal{F},\mathrm{r},\max}$ for $h = 10^{-k}$, with $k \in \{1, ..., 8\}$.

References

[1] A. Al Majid and R. Dufour. Formulation of a hysteretic restoring force model. Application to vibration isolation. *Nonlinear Dynamics*, 27:69–85, 2002.

[2] A. Al Majid and R. Dufour. Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator: Experiment and prediction. *Journal of Sound and Vibration*, 277:391–403, 2004.

[3] Jérôme Bastien and Michelle Schatzman. Schéma numérique pour des inclusions différentielles avec terme maximal monotone. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7):611–615, 2000.

[4] Jérôme Bastien and Michelle Schatzman. Numerical precision for differential inclusions with uniqueness. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 36(3):427–460, 2002.

[5] Jérôme Bastien, Michelle Schatzman, and Claude-Henri Lamarque. Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom. *Eur. J. Mech. A Solids*, 19(2):277–307, 2000.

[6] R.S. Beikmann, N.C. Perkins, and A.G. Ulsoy. Design and analysis of automotive belt drive systems for steady state performance. *ASME Journal of Mechanical Design*, 119:162–168, 1997.

[7] P.-A. J. Bliman. *Étude mathématique d'un modèle de Frottement sec : Le modèle de P.R. Dahl.* PhD thesis, Université de Paris IX-Dauphine, 1990.

[8] P.-A. J. Bliman. Mathematical study of the Dahl's friction model. *European J. Mech. A Solids*, 11(6):835–848, 1992.

[9] Haïm Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[10] F. D'Ambrosio, E. Chatelet, and G. Jacquet. Influence of contact states on the dynamic behavior of rubbing structures. In *Proceedings of IGTI 2005, ASME Turbo Expo*, Reno-Tahoe, Nevada, USA, June 6-9 2005.

[11] R. Fougeres and F. Sidoroff. The evolutive masing model and its application to cyclic plasticity and ageing. *Nuclear Engineering and Design*, 114:273–284, 1989.

[12] W. Lacarbonara and F. Vestroni. Nonclassical responses of oscillators with hysteresis. *Nonlinear Dynamics*, 32:235–258, 2003.

[13] M.J. Leamy and N.C. Perkins. Nonlinear periodic response of engine accessory drives with dry friction tensioners. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 120:909–916, 1998.

[14] G. Michon, L. Manin, and R. Dufour. Hysteretic behavior of a belt tensioner: Modeling and Experimental investigation. *Journal of Vibration and Control*, 11(9):1147–1158, 2005.

[15] Manuel D. P. Monteiro Marques. An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction. *European J. Mech. A Solids*, 13(2):277–306, 1994.

[16] R.G. Parker. Efficient eigensolution, dynamic response, and eigensensitivity of serpentine belt drives. *Journal of Sound and Vibration*, 270:15–38, 2004.

[17] A.V. Pokrovskiĭ. On the theory of hysteresis nonlinearities. *Soviet Math. Dokl.*, 14(3):896–900, 1973.

[18] K.Y. Sanliturk and D.J. Ewins. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2):511–523, 1996.

[19] David E. Stewart. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM Rev.*, 42(1):3–39 (electronic), 2000.

[20] F. Vestroni and M. Noori. Hysteresis in mechanical systems - modeling and dynamic response. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37:1261–1262, 2002.

[21] A. Visintin. *Differential models of hysteresis*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Duffing oscillator with parametric excitation : analytical and experimental investigation on a belt-pulley system.

Duffing oscillator with parametric excitation: analytical and experimental investigation on a belt-pulley system.

Guilhem MICHON [a], Lionel MANIN [c], Robert G. PARKER [b], and Régis DUFOUR [c]

[a] *Valeo Electrical Systems,*

2 rue A. Boulle, 94000 Creteil, France

guilhem.michon@valeo.com

[b] *Department of Mechanical Engineering,The Ohio State University*

650 Ackerman Road, Columbus, OH 43202, USA

parker.242@osu.edu

[c] *Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures, UMR CNRS 5006,*

INSA de Lyon

18 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne, France

lionel.manin@insa-lyon.fr

regis.dufour@insa-lyon.fr

Abstract

This paper is devoted to the theoretical and experimental investigation of a sample automotive belt-pulley system subjected to tension fluctuations. The equation of motion for transverse vibrations leads to a Duffing oscillator parametrically excited.

The analyzes are performed via either the harmonic balance method for establishing the instability regions or the multiple scale approach for predicting the nonlinear response. An experimental set-up gives rise to non-linear parametric instabilities and also exhibits more complex phenomena. The experimental investigation shows that the model is satisfactory.

Key words: Duffing oscillator, parametric instabilities, harmonic balance, multiple scale, automotive belt, experimental investigation.

1 Introduction

Today, front end accessory drives (FEAD) uses flat, multi-ribbed belts running over multiple accessory pulleys in a serpentine configuration [1,2]. The advantages of serpentine drives over classical V-belts include simplified assembly and replacement, longer belt life, tension compensation from tensioner device, and compactness. This system is subjected to numerous linear and nonlinear phenomena: belt-pulley slippage [3,4], time-varying boundary conditions of each belt span between two successive pulleys [5], hysteresis behavior due to mechanical [6,7] or hydraulic tensioners, and parametric excitations due to crankshaft torque pulsations that introduce a pulsating tension in the belt [8]. Moreover, in the instability zone, the belt exhibits large transverse deflection such as a Duffing oscillator with parametric excitation. For example such nonlinear oscillations have been investigated numerically and experimentally by Pellicano et al. [9] by using a specific device comprising two pulleys, one of them imposing parametric excitation by the way of eccentric pulley mounting. See also the theoretical nonlinear dynamic analysis of an axially moving

string parametrically excited of Mockenstrum et al. [10,11]. Similar behaviors are observed in cable [12–14], drill-string [15], and rod parametrically excited by a force or a torque [16], etc.

Reducing the impact of this large transverse deflection on the belt life requires to improve the knowledge on these nonlinear phenomena. This article deals with one of the modeling steps of the nonlinear global behavior of the entire FEAD. Its purpose is based on a theoretical and experimental investigation, limited to a non-moving belt-pulley system parametrically excited, leading to lateral instabilities, Duffing oscillations and other observed nonlinear phenomena.

In the theoretical part, the equation including Duffing term and parametric excitation is established. The instability region boundaries are derived from harmonic balance method applied on the previous linearized equation. Meanwhile the nonlinear response amplitude is predicted by keeping all of the nonlinear terms and by using the multiple scale method. The experimental part permits, apart identifying the longitudinal and transverse belt moduli, measuring transverse vibrations on a sample belt-pulley set-up equipped with automotive mechanical components. Finally predicted and measured results are compared with regards of the nonlinear response and instability region determination.

2 Mechanical model

2.1 Equation of motion

A mechanical model of an axially moving beam subjected to tension fluctuation is used to predict the nonlinear response and the parametric instability region transition curves. The equation of motion for transverse vibration of a beam of length L moving with time dependent transport velocity $c(T)$ is governed by [17]

$$\rho A\left(V_{,TT}+c_{,T}V_{,X}+2cV_{,TX}+c^2V_{,XX}\right)-\left(P_s+P_d(T)\right)V_{,XX}+EIV_{,XXXX}=0 \tag{1}$$

where ρA is the mass per unit length, EI the transverse rigidity modulus, V the transverse displacement, P_s the static belt tension, $P_d(T)$ the dynamic tension, and T and X are the temporal and spatial variables. The dynamic tension is due to longitudinal motion of the endpoints from pulley oscillations and quasi-static mid-plane stretching from transverse deflection, and is given by

$$P_d(T)=\frac{EA}{L}\left[U\left(L,T\right)-U\left(0,T\right)+\frac{1}{2}\int_0^L V_{,X}^2dX\right] \tag{2}$$

where EA is the longitudinal rigidity modulus and U the longitudinal displacement. With the dimensionless parameters,

$$x,v,u=\frac{X,V,U}{L},\ t=T\sqrt{\frac{P_s}{\rho AL^2}},\ \gamma=c\sqrt{\frac{\rho A}{P_s}},$$
$$\zeta=\frac{EA}{P_s},\ \mu=\frac{EI}{P_sL^2},\ \Omega_i=\sqrt{\frac{\rho AL^2}{P_s}}\tilde{\Omega}_i \tag{3}$$

Equation 1 becomes

$$v_{,tt}+2\gamma v_{,tx}+\gamma_{,t}v_{,x}-\left(1-\gamma^2\right)v_{,xx}+\mu v_{,xxxx}-\zeta\left[u\left(1,t\right)-u\left(0,t\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 v_{,x}^2 dx\right]v_{,xx}=0 \tag{4}$$

In the case of a long, non-moving belt span preloaded with a high static tension and subjected to sinusoidal tension fluctuation, the transverse stiffness is dominated by tension (μ neglected, see Section 3.1), $\gamma = 0$, and the tension fluctuation is given by

$$\zeta\left(u(1,t)-u(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^1 v_{,x}^2 dx\right)=\varepsilon\left(\cos(\Omega t)+\frac{\alpha}{2}\int_0^1 v_{,x}^2 dx\right) \tag{5}$$

where $\varepsilon = P_d/P_s$ represents the ratio of the dynamic tension fluctuation to the static span tension, and $\alpha = \zeta/\varepsilon$ is the coefficient of the nonlinear term. Then, Equation 4 leads to

$$v_{,tt}-\left(1+\varepsilon\cos(\Omega t)+\varepsilon\frac{\alpha}{2}\int_0^1 v_{,x}^2 dx\right)v_{,xx}=0 \tag{6}$$

Considering the single mode Galerkin expansion $v(x,t) = a_n(t)\psi_n(x)$ with the basis $\psi_n(x) = \frac{sin(n\pi x)}{n\pi}$, Equation 6 becomes a parametrically excited Duffing equation

$$\ddot{a}_n+\left(\omega_n^2+n^2\pi^2\varepsilon\cos(\Omega t)\right)a_n+n^2\pi^2\frac{\varepsilon}{4}\alpha a_n^3=0 \tag{7}$$

where $\omega_n = n\pi$ are the natural frequencies of a tensioned string.

2.2 Instability region determination

In order to establish the instability region transition curves by the harmonic balance method, Equation 7 is linearized and becomes a Mathieu equation

$$\ddot{a}_n + \left(\omega_n^2 + n^2\pi^2\varepsilon\cos(\Omega t)\right) a_n = 0 \tag{8}$$

The solution is written in the form of a Fourier series

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{nt\Omega}{2} + B_n \sin\frac{nt\Omega}{2} \tag{9}$$

Introducing this solution in Eq. 8, simplifying and collecting terms, leads the following equations

$$A_{even} = \begin{vmatrix} \omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2 - \Omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2 - 4\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$B_{even} = \begin{vmatrix} \omega^2 - \Omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2 - 4\Omega^2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2 - 9\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

$$A_{odd} = \begin{vmatrix} \omega^2 - \Omega^2/4 + n^2\pi^2\varepsilon/2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2 - 9\Omega^2/4 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2 - 25\Omega^2/4 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

$$B_{odd} = \begin{vmatrix} \omega^2 - \Omega^2/4 - n^2\pi^2\varepsilon/2 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & 0 \\ n^2\pi^2\varepsilon & \omega^2 - 9\Omega^2/4 & n^2\pi^2\varepsilon/2 \\ 0 & n^2\pi^2\varepsilon/2 & \omega^2 - 25\Omega^2/4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

For $\varepsilon = 0$, instability zones appears when

$$\omega^2 = \frac{n^2}{4}\Omega^2 \qquad (14)$$

which is developed as a series

$$\omega = \frac{n}{2}\Omega + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \ldots \qquad (15)$$

The instability regions for the primary and secondary instabilities are respectively bounded by the curves

$$\Omega = 2\omega \pm \varepsilon\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2\frac{\pi^2}{32\omega} \qquad (16)$$

$$\Omega = \omega \pm \varepsilon^2\frac{\pi^2}{\omega} - \varepsilon^2\frac{\pi^2}{3\omega} \qquad (17)$$

2.3 Nonlinear forced response

Experimental observations show that the lateral vibration amplitude is sufficiently large that the system equation can not be linearized. To solve the response of the system for primary resonance ($\Omega \approx 2\omega$) of the first mode ($a_n = a$, $\omega_n = \omega$), a first order multiple scale method is used [18]. The independent time variable is a function of multiple scales $T_0 = t$ and $T_1 = \varepsilon t$. Then

$$a(t, \epsilon) = a_0(T_0, T_1) + \varepsilon a_1(T_0, T_1) \qquad (18)$$

Substituting Equation 18 into Equation 7 and equating coefficients of like powers of ε yields

$$D_0^2 a_0 + \omega^2 a_0 = 0 \tag{19}$$

$$D_0^2 a_1 + \omega^2 a_1 = -2D_0 D_1 a_0 - \pi^2 \cos(\Omega T_0)\, a_0 - \frac{\pi^2}{4}\alpha a_0^3 \tag{20}$$

where D_0 and D_1 indicate differentiation with respect to T_0 and T_1. The solution of Equation 19 is

$$a_0 = A(T_1)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0} \tag{21}$$

Introducing the frequency expansion $\Omega = 2\omega + \varepsilon\sigma$, and eliminating the secular terms in Eq. 20 lead to

$$-2i\omega D_1 A - \frac{\pi^2}{2}\bar{A}e^{i\sigma T_1} - \frac{3\pi^2}{4}\alpha A^2 \bar{A} = 0 \tag{22}$$

with the substitutions $A = \frac{\lambda}{2}e^{i\beta}$, with λ and β real, and $\nu = \sigma T_1 - 2\beta$, the equations governing amplitude and phase are

$$\frac{d\lambda}{dT_1} = -\pi^2 \frac{\lambda}{4\omega}\sin(\nu) \tag{23}$$

$$\lambda\frac{d\nu}{dT_1} = \sigma\lambda - \frac{\pi^2}{2}\frac{\lambda}{\omega}\cos(\nu) - \frac{3}{16}\pi^2\frac{\alpha}{\omega}\lambda^3 \tag{24}$$

From the equilibria of Eq.23 and 24, non-trivial solutions for the steady state response are

$$\lambda = \sqrt{\frac{16}{3\pi}\frac{\sigma}{\alpha} \pm \frac{8}{3\alpha}} \tag{25}$$

and

$$a(t) = \lambda\cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \nu\right) + O(\varepsilon) \tag{26}$$

Recalling that $\Omega = 2\omega + \varepsilon\sigma$, and introducing the new notation $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$ in order to exhibit ε influence, then $\Omega = 2\omega + \hat{\sigma}$ and yields

$$\lambda = \sqrt{\frac{16}{3\pi}\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\alpha}} \pm \frac{8\varepsilon}{3\hat{\alpha}}} \tag{27}$$

where $\hat{\alpha} = \alpha\varepsilon$ is the coefficient of the nonlinear term.

3 Experimental investigation

An experimental investigation is conducted in order to observe the predicted phenomenon and to validate the mechanical model.

3.1 Belt characteristic identification

To establish the model parameters for practical serpentine drives, an automotive belt is experimentally examined to extract its longitudinal and lateral elastic moduli.

Experimentally, the belt is stretched between two pulleys for several static tensions. Its longitudinal stretching is captured with two laser sensors directed at two targets perpendicular to the belt axis at a known separation distance. The longitudinal stretching of the span is assumed to be linearly related to the static tension P_s according to $P_s = EA\frac{\Delta L}{L}$. The longitudinal stiffness results from the linear fitting of the tension/stretching relation and leads to the value $EA = 110,000\ N$.

To estimate the bending stiffness, a transverse impact test is performed on a belt span for several initial tensions. The transverse vibration is captured with a laser sensor. The square of the n^{th} transverse natural frequency $\tilde{\omega}_n^2$ of a simply supported, stationary, tensioned beam is a linear function of the

tension P_s

$$\tilde{\omega}_n^2 = EI\frac{n^4\pi^4}{\rho AL^4} + P_s\frac{n^2\pi^2}{\rho AL^2} \tag{28}$$

The evolution of the square of the first three natural frequencies versus P_s are presented in Figure 1. When the tension P_s is nil, identification of EI for the first mode exhibits a small value of this modulus ($EI = 0.22\ N \cdot m^2$ when $\rho A = 0.107\ kg/m$ and $L = 0.73\ m$). This value introduced in Eq. 28 for the second and third modes shows only small difference with the experiment. Considering this small modulus and the span lengths of this application, the bending stiffness modulus is neglected. Thus, in the following, the belt span is considered as a string ($\mu = 0$).

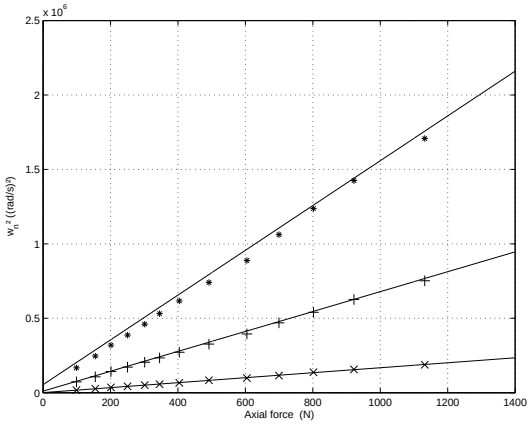
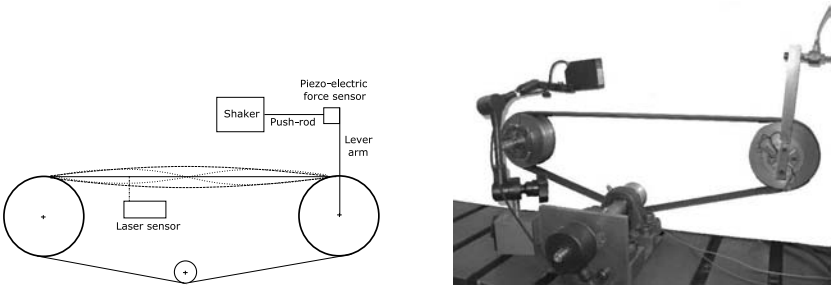


Fig. 1. Square of first three natural frequencies of a beam as a function of its tension, measured ($\times$, $+$ and $*$), predicted (solid lines)

3.2 Experimental set-up of a parametrically excited belt-pulley system

The set-up is composed of an industrial, automotive, multi-ribbed belt tensioned in a three-pulley drive. A lever arm linked to one of the pulleys is connected to an electrodynamic shaker, as presented in Figure 2. The tested

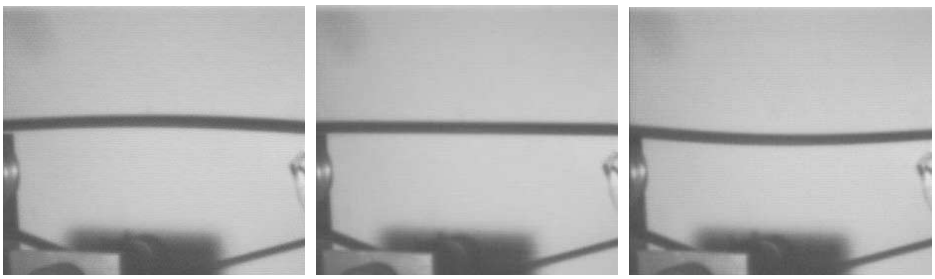
belt span is $L = 0.46\ m$, its cross section area is $A = 93.10^{-6}\ m^2$, its width being $l = 2.15\ cm$, its mass density is $\rho = 1150\ kg/m^3$, and subjected to a static tension $P_s = 222\ N$. It is composed of a ply of aramid cables having an angle with the longitudinal axis, molded within elastomer. The upper area is plane, while the lower one is composed of six ribs. The shaker applies an axial alternating force of amplitude f_1 and frequency η to the lever arm which creates tension fluctuation in the belt span. Thus, the system is parametrically excited. Instability will occur for lower frequencies in the upper span. The idler pulley in the lower span divides it into two shorter ones to avoid simultaneous instabilities in the lower and upper spans. The transmitted force is measured with a piezo-electric force sensor, and the transverse displacement of the upper span with a laser sensor.



(a) (b)

Fig. 2. Parametric excitation experimental set-up.

This set-up permits frequency sweeps (from 30 to $150Hz$) with different amplitudes and static belt tensions. Figure 3 shows a visualization of the transverse vibration of the upper span under the primary instability region for $\eta = 2\tilde{\omega}_1$. It exhibits the classical primary instability result: when the span is subjected to $2\tilde{\omega}_1$, its transverse vibration frequency is $\tilde{\omega}_1$. As an illustration, the peak-to-peak vibration amplitude is about 2 cm in the middle of the span.



(a) (b) (c)

Fig. 3. Three different positions captured with a high speed camera of the first mode shape of the tested belt span for the primary instability. $\Omega = 6.2$, $\varepsilon = 0.2$.

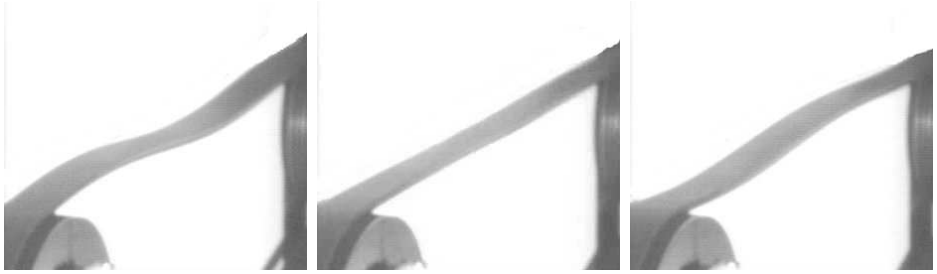
3.3 Observed phenomena of a parametrically excited belt-pulley system

The given model considers only a single belt span as a simply supported string. The experimental set-up however consists of a circular belt wrapped around three pulleys, see also Figure 2. Observations of other complex phenomena are obtained using a high speed camera capable of 1000 frames/sec. For each following phenomenon, three different deformed positions are captured.

Longitudinal and transverse coupling

Consider the simplified model of the three pulley-shaft assembly rotational inertia linked by the belt longitudinal stiffness. This 3-DOF model and has a resonance at 80 Hz. The third lateral vibration mode of the upper span is close to 150 Hz, so the fourth instability region ($\Omega = 2\omega_3/4$) is in the vicinity of 75 Hz. Theoretically, observation of the instability region requires a large level of excitation that the available shaker is unable to produce. Due to the longitudinal resonance, the level of tension fluctuation increases and makes the parametric excitation of transverse instability based on higher natural frequencies possible. For instance, Figure 4 shows such a phenomenon concerning

the third mode shape of the tested belt span.

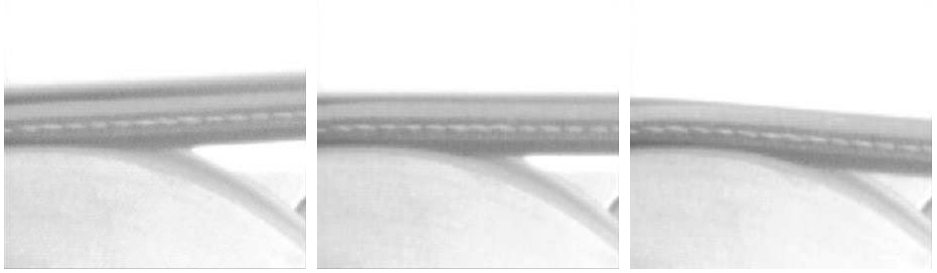


(a) (b) (c)

Fig. 4. Three different positions captured with a high speed camera of the third mode shape of the tested belt span due to longitudinal-transverse coupling. $\Omega = 4.8$, $\varepsilon = 0.2$.

Boundary condition

The multi-ribbed belt is wrapped around pulleys. While typically approximated as simply supported, the boundary condition is more complex, and uncertainty of the contact point condition makes definition of the boundary condition difficult. When it laterally vibrates, the length of the span is a function of time and varies approximately ± 1 *cm* as shown on Figure 5 where the pulley diameter is 10 *cm* and the span length is 46 *cm*.



(a) (b) (c)

Fig. 5. Three different positions captured with a high speed camera of a belt end showing the boundary condition evolution. $\Omega = 6.0$, $\varepsilon = 0.3$.

Transverse-Torsional coupling

When the belt span is subjected to parametric tension fluctuations, large amplitudes of the first torsional mode are observed and captured, see Figure 6. This is mostly due to the coupling between torsional and longitudinal modes initiated by the presence of the angle of aramid fiber ply. Theoretical investigation of this coupling can be found in [19,20].

(a) (b) (c)

Fig. 6. Three different positions captured with a high speed camera of torsion mode of the tested belt span due to longitudinal-torsion coupling. $\Omega = 5.6$, $\varepsilon = 0.12$.

Discussion on the observed phenomena

The three previous phenomena are mainly due to either longitudinal-transverse or longitudinal-torsion couplings. They can be source of noise pollution, wear, efficiency loss and belt failures in FEAD such as: fatigue, leaving the pulley ribs, belt/pulley slippage.

4 Experimental validation of the proposed model

The model developed in Section 2 permits comparing predicted and measured forced response of the belt span.

4.1 Instability region

The instability region boundaries are plotted in Fig. 7 in the frequency-amplitude domain for both experimental and model results. The results exhibit the classical narrow secondary instability region for $\Omega \approx \omega_1 = \pi$ and wide primary region for $\Omega \approx 2\omega_1 = 2\pi$. Experimental results are distinguished for the primary region depending on Ω increasing or decreasing. The theoretical results consider the linearized equation of motion which is unable to capture this hysteretic behavior. The importance of the nonlinear hysteresis grows with the excitation amplitude.

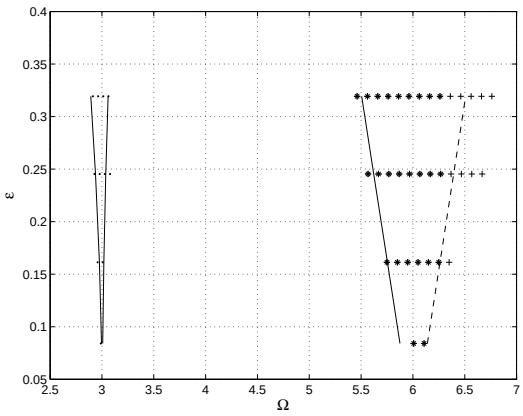


Fig. 7. Parametric instability region for varying amplitude and frequency: Measured ($\cdot$: secondary instability region, $+$: sweep-up, $*$: sweep-down), and predicted ($--$: unstable branch, $-$: stable branches).

4.2 Frequency response

For a given forcing amplitude ε, the response amplitude λ in Eq. 27 is plotted versus the forcing frequency Ω in Fig.8. Non-reversible behavior and jump

phenomena occur for changing excitation frequency. The swept-up sine investigation leads to a parametric instability phenomenon starting from $\Omega = 6$ to a jump down at $\Omega = 6.65$. For a swept-down sine investigation, the resonance phenomenon starts by a jump up at $\Omega = 6.55$ and finishes at $\Omega = 6$. Predicted and measured responses are very close on the upper branch and at the beginning of the unstable branch.

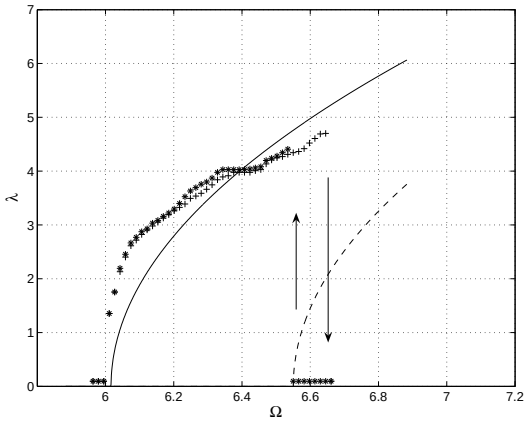


Fig. 8. Frequency responses. Measured (+: sweep-up, ∗: sweeep-down), and predicted (−−: unstable branch, −: stable branch). $\varepsilon = 0.17$, $\alpha = 0.04$.

4.3 Amplitude response

For a given forcing frequency Ω, the response amplitude λ in Eq. 27 is plotted versus the forcing amplitude ε In Fig. 9. Sweeping ε highlights another type of hysteresis phenomenon. The deviation between theoretical and experimental branches is due to the damping not considered in the model.

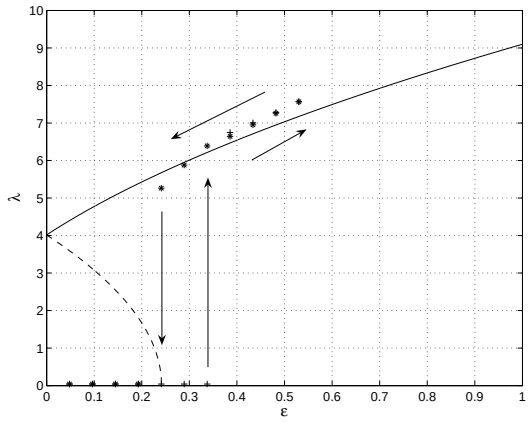


Fig. 9. Force response. Measured (+: tunning-up, ∗: tunning-down), and predicted (−−: unstable branch, −: stable branch). $\Omega = 6.4$, $\alpha = 0.04$.

5 Conclusion

The presented experimental and theoretical investigation shows that automotive multi-ribbed belts exhibit large transverse vibrations and important nonlinear and parametric instability features. Comparing measured and predicted instability region curves shows that the model is satisfactory in the case of low forcing amplitude, but is limited in the case of large amplitude. This is due to the nonlinear Duffing term that harmonic balance methods is unable to consider. By keeping all the nonlinear terms in the equations and using the multiple scale method, the nonlinear response versus forcing frequency or forcing amplitude show an hysteretic behavior due to the jumps which depend on the sweep-up and sweep-down. Moreover, the experimental set-up highlights other nonlinear phenomena: the coupling between longitudinal and torsion behavior, the coupling between the longitudinal mode shape and the third transverse mode shape, and the presence of a time varying boundary condition, not considered in the presented theoretical investigation.

References

[1] R.S. Beikmann, N.C. Perkins, and A.G. Ulsoy. Design and analysis of automotive belt drive systems for steady state performance. *ASME Journal of Mechanical Design*, 119:162–168, 1997.

[2] L. Zhang and J.W. Zu. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 232:783–806, 1999.

[3] S.E. Betchel, S. Vohra, K.I. Jacob, and C.D. Carslon. The stretchong and slipping of belts and fibers on pulleys. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 67:197–206, 2000.

[4] G. Gerbert and F. Sorge. Full sliding adhesive-like contact of v-belts. *ASME - Journal of Mechanical Design*, 124:706–712, 2002.

[5] L. Kong and R.G. Parker. Steady mechanics of belt-pulley systems. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 72:25–34, 2005.

[6] M.J. Leamy and N.C. Perkins. Nonlinear periodic response of engine accessory drives with dry friction tensioners. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 120:909–916, 1998.

[7] G. Michon, L. Manin, and R. Dufour. Hysteretic behavior of a belt tensioner: Modeling and Experimental investigation. *Journal of Vibration and Control*, 11(9):1147–1158, 2005.

[8] R.G. Parker and Y. Lin. Parametric instability of axially moving media subjected to multifrequency tension and speed fluctuation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 68:49–57, 2001.

[9] F. Pellicano, G. Catellani, and A. Fregolent. Parametric instability of belts: theory and experiments. *Computer and Structures*, 82:81–91, 2004.

[10] E. Mockensturm, N. Perkins, and A. Ulsoy. Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 118:346–351, 1996.

[11] E. Mockensturm and J. Guo. Nonlinear vibration of parametrically excited viscoelastic axially moving media. *ASME Journal of applied mechanics*, 72:374–380, 2005.

[12] A. Berlioz and C.H. Lamarque. A non-linear model for the dynamic of an inclined cable. *Journal of Sound and Vibration*, 279:619–639, 2005.

[13] N.C. Perkins. Modal interactions in the nonlinear response of elastic cables under parametric/external excitation. *Int. Journal of Non-Linear Mechanics*, 27(2):233–250, 1992.

[14] G. Rega and F. Benedettini. Planar non-linear oscillations of elastic cables under uubharmonic resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 132 (3):367–381, 1989.

[15] A. Berlioz, J. Der Hagopian, R. Dufour, and E. Draoui. Dynamic behavior of a drill-string. experimental investigation of lateral instabilities. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 118:292–298, 1996.

[16] R. Dufour and A. Berlioz. Parametric instability of a beam due to axial excitations and to boundary conditions. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 120:461–467, 1998.

[17] A.L. Thurman and C.D. Mote Jr. Free, periodic, non-linear oscillation of an axially moving string. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 36:83–91, 1969.

[18] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979.

[19] K. Orloske, M.J. Leamy, and R.G. Parker. Flexural-torsion buckling of misaligned axially moving beam. I. Three-dimensional modeling, equilibria, and bifurcations. *International Journal of Solids and Structures*, 43:4297–4322, 2006.

[20] K. Orloske and R.G. Parker. Flexural-torsion buckling of misaligned axially moving beam. II.Vibration and stability analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43:4323–4341, 2006.

Parametric instability of an axially moving belt subjected to multi-frequency excitations : experiments and analytical validation.

Parametric instability of an axially moving belt subjected to multi-frequency excitations: experiments and analytical validation.

Guilhem MICHON [a], Lionel MANIN [b], Didier REMOND [b], and Robert G. PARKER [c]

[a] *Valeo Electrical Systems,*

2 rue A. Boulle, 94000 Creteil, France

guilhem.michon@valeo.com

[b] *LDMS, UMR CNRS 5006, INSA de Lyon*

18 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne, France

lionel.manin@insa-lyon.fr

didier.remond@insa-lyon.fr

[c] *Department of Mechanical Engineering,The Ohio State University*

650 Ackerman Road, Columbus, OH 43202, USA

parker.242@osu.edu

Abstract

This paper experimentally investigates the parametric instability of an industrial axially moving belt subjected to multi-frequency excitation. Based on the equations of motion, an analytical perturbation analysis is achieved to identify instabilities. The second part deals with an experimental set-up that subjects a moving belt to

multi-frequency parametric excitation. A data acquisition technique using optical encoders and based on the angular sampling method is used with success for the first time on a non-synchronous belt transmission. Transmission error between pulleys, pulley/belt slip and tension fluctuation are deduced from pulley rotation angle measurements. Experimental results validate the theoretical analysis. Of particular note is that the instability regions are shifted to lower frequencies than the classical ones due to the multi-frequency excitation. This experiment also demonstrates non-uniform belt characteristics (longitudinal stiffness and friction coefficient) along the belt length that are unexpected sources of excitation. These variations are shown to be sources of parametric instability.

Key words: automotive belt, parametric instabilities, multifrequency excitation, experimental investigation, angular sampling

1 Introduction

Instead of classical V-belts, serpentine drives are used in front end accessory drives (FEAD). They use flat and multi-ribbed belts running over multiple accessory pulleys, leading to simplified assembly and replacement, longer belt life and compactness [1]. Numerous mechanical phenomena occur in this application: rotational vibrations [2], hysteretic behavior of belt tensioner [3], nonlinear transverse vibration due the existence of pulley eccentricity [4], dry friction tensioner behavior [5], or parametric excitation.

Commonly known under the category of axially moving media, belt spans are subjected to parametric excitation from their operating environment as studied by Zhang [6]. A theoretical nonlinear dynamic analysis is also analyzed

by Mockenstrum et al. [7,8]. But only Pellicano et al. [9,10] present a coupled theoretical and experimental investigation, where the excitation comes from pulley eccentricity which causes simultaneous direct and parametric excitation.

Widely used in automotive engines, belt spans experience multi-frequency excitation caused by engine firing and accessory variable torques [11]. Belt parametric instability occurs as transverse vibration in these applications, where the problems are noise and belt fatigue.

This paper builds on a previous work of Parker and Lin [12] as an experimental illustration and model validation. First, it deals with the general moving belt model subjected to multi-frequency tension and speed fluctuations. Then a specific test bench is presented, which produce this kind of excitation. Data acquisition is based on the principle of pulse timing method and leads to angular sampling for frequency analysis [13]. This method is applied here for the first time on a non-discrete geometry. The theoretical results from perturbation analysis are compared with the experimental ones. An unexpected source of parametric excitation is also highlighted.

2 Mathematical model

A mathematical model of an axially moving beam subjected to multi-frequency tension and speed parametric excitation is used to establish the parametric instability region transition curves. The equation of motion for transverse vibration of a beam of length L moving with time dependent transport velocity

$c(T)$ is governed by [14]

$$\rho A\left(V_{,TT}+c_{,T}V_{,X}+2cV_{,TX}+c^2V_{,XX}\right)-\left(P_s+P_d(T)\right)V_{,XX}+EIV_{,XXXX}=0 \tag{1}$$

where ρA is the mass per unit length, EI the bending stiffness, V the transverse displacement, P_s the mean belt tension, $P_d(T)$ the dynamic tension, and T and X the independent time and spatial variables. The dynamic tension results from longitudinal motion of the endpoints as a result of pulley oscillations and quasi-static mid-plane stretching from transverse deflection, and is given by

$$P_d(T)=\frac{EA}{L}\left[U\left(L,T\right)-U\left(0,T\right)+\frac{1}{2}\int_0^L V_{,X}^2dX\right] \tag{2}$$

where EA is the longitudinal stiffness modulus and U the longitudinal displacement. With the dimensionless parameters,

$$x,v,u=\frac{X,V,U}{L},\ t=T\sqrt{\frac{P_s}{\rho AL^2}},\ \gamma=c\Big/\sqrt{\frac{P_s}{\rho A}},$$
$$\zeta=\frac{EA}{P_s},\ \mu=\frac{EI}{P_sL^2},\ \Omega_i=\sqrt{\frac{\rho AL^2}{P_s}}\tilde{\Omega}_i \tag{3}$$

(1) becomes

$$v_{,tt}+2\gamma v_{,tx}+\gamma_{,t}v_{,x}-\left(1-\gamma^2\right)v_{,xx}+\mu v_{,xxxx}-\zeta\left[u\left(1,t\right)-u\left(0,t\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 v_{,x}^2dx\right]v_{,xx}=0 \tag{4}$$

The belt tension and speed fluctuations are respectively

$$\zeta\left[u\left(1,t\right)-u\left(0,t\right)\right]=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\cos\left(\Omega_it+\theta_i\right) \tag{5}$$

$$\gamma = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{k'} \varepsilon_i' \cos\left(\Omega_i' t + \theta_i'\right) \tag{6}$$

where $\varepsilon_i = EAu_i/P_s < 1$ represents the ratio of the i^{th} spectral component of the dynamic tension fluctuation to the mean span tension.

As investigated in [12], the boundaries of the instability regions can be obtained on the basis of Floquet theory and perturbation analysis.

Linearizing equation (4) and writing in state space form gives [12]

$$\begin{aligned} AW_t + BW + \sum_{i=1}^{k'} \varepsilon_i' \left\{\sin\left(\Omega_i' t + \theta_i'\right) C + \Omega_i' \cos\left(\Omega_i' t + \theta_i'\right) D\right\} W \\ - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \cos\left(\Omega_i t + \theta_i\right) EW + \left(\sum_{i=1}^{k'} \varepsilon_i' \sin\left(\Omega_i' t + \theta_i'\right)\right)^2 EW = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\left(1-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\gamma_0\frac{\partial}{\partial x} & -\left(1-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4} \\ \left(1-\gamma_0^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x} & 2\gamma_0\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} v_{,t} \\ v \end{bmatrix}. \tag{8}$$

The inner product in the state space is $\langle W, V\rangle = \int_0^1 W^T \overline{V} dx$, where overbar denotes complex conjugate and superscript T denotes transpose. The Galerkin basis consists of the state-space eigenfunctions of the non-parametrically ex-

cited moving string ($\mu = 0$) system [15]

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} j\omega_n\psi_n \\ \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_n\psi_n \\ \\ \psi_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

where ψ_n are the complex eigenfunctions of (4) and ω_n the natural frequencies

$$\psi_n = \frac{1}{n\pi\sqrt{1-\gamma_0^2}} e^{jn\pi\gamma_0 x} sin(n\pi x), \quad \lambda_n = jn\pi(1-\gamma_0^2) \tag{10}$$

Let us define $E_{nm} = \langle E\Phi_n, \Phi_m \rangle$ and $E_{\overline{n}m} = \left\langle E\overline{\Phi}_n, \Phi_m \right\rangle$, with similar relations for the C and D operators.

Using perturbation analysis to consider speed and tension fluctuations, primary instability occurs when

$$\begin{aligned} \Omega_l = \Omega_l' = 2\omega_n \pm \sqrt{\left(\varepsilon_l' \left|-jC_{\overline{n}n} + 2\omega_n D_{\overline{n}n}\right|\right)^2 + \left(\varepsilon_l \left|E_{\overline{n}n}\right|\right)^2} \\ - \left|E_{\overline{n}n}\right|^2 \left[- \sum_{i=1, i\neq l}^{k} \varepsilon_i^2 \frac{2\omega_n}{\Omega_i^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{8\omega_n} \right] \\ - \left|-jC_{\overline{n}n} + 2\omega_n D_{\overline{n}n}\right|^2 \left[- \sum_{i=1, i\neq l}^{k'} \varepsilon_i'^2 \frac{2\omega_n}{\Omega_i'^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{8\omega_n} \right] + \sum_{i=1}^{k'} \left(\frac{\varepsilon_i'}{2}\right)^2 \left|E_{nn}\right| \end{aligned} \tag{11}$$

and secondary instability occurs when

$$\begin{aligned} \Omega_l = \Omega_l' = \omega_n \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_l^2}{\omega_n} Im(E_{nn}) \left|E_{\overline{n}n}\right|\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_l'^2}{\omega_n} Im(-jC_{nn} + \omega_n D_{nn}) \left|-jC_{\overline{n}n} + \omega_n D_{\overline{n}n}\right|\right)^2} \\ - \left|E_{\overline{n}n}\right|^2 \left[- \sum_{i=1, i\neq l}^{k} \varepsilon_i^2 \frac{\omega_n}{\Omega_i^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{3\omega_n} \right] \\ - \left|-jC_{\overline{n}n} + \omega_n D_{\overline{n}n}\right|^2 \left[- \sum_{i=1, i\neq l}^{k'} \varepsilon_i'^2 \frac{\omega_n}{\Omega_i'^2 - 4\omega_n^2} + \frac{\varepsilon_l^2}{3\omega_n} \right] + \sum_{i=1}^{k'} \left(\frac{\varepsilon_i'}{2}\right)^2 \left|E_{nn}\right| \end{aligned} \tag{12}$$

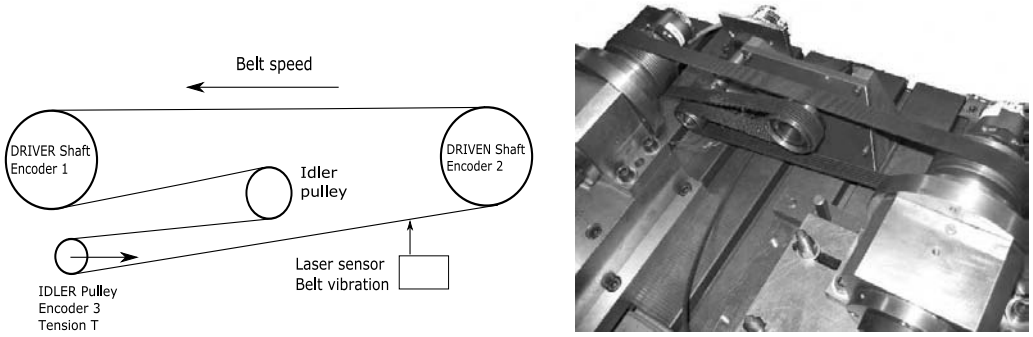
3 Experimental Setup

In industrial applications, excitation sources are not at a single frequency, especially in an automotive engine. Engine firing and driven accessories cause multi-frequency speed and tension fluctuations. Furthermore, practical belt speeds are such that they impact the dynamics and must be included. The following experiment examines parametric instabilities from this kind of excitation in a moving belt system.

3.1 Belt drive description

The studied transmission consists of four pulleys linked together by an automotive multi-ribbed belt, as shown in Fig. 1. The input shaft speed (from 0 to 2000 rpm) is controlled by a 60 kW electric motor. The driven shaft is connected to a hydraulic pump. The output pressure of the fluid is controlled to apply a mean torque on the driven pulley. Due to its design, however the pump generates torque fluctuations of order 2 (i.e., 2 pulses/rev) around the mean value. These fluctuations cause tension variations that parametrically excite the moving belt.

Due to the rotation direction, the upper span is tight and the lower one is slack. As these two spans have approximately the same length, the instability will appear in the slack span for the lowest excitation frequencies. Figure 2 shows an example of transverse vibration of the lower span.



(a) (b)

Fig. 1. Experimental set-up for parametrically excited moving belt drive.

Fig. 2. Example of instability in slack belt span

3.2 Measurement devices

Angular positions are measured by optical encoders mounted on pulleys 1, 2 and 3 (respectively, 2048, 2048 and 2500 pulses/rev). Belt tension is measured by a piezo-electric sensor on the pulley 3 support, and belt lateral vibration by a laser displacement sensor (0.02 m range, 10 μm dynamic resolution).

The data acquisition system is custom made with a PXI frame including classical data acquisition boards and a four-channel counter board permitting the use of the pulse timing method. Each optical encoder delivers a square signal (TTL) as it rotates. Between two rising edges of this signal, a counter records the number of pulses given by a high frequency clock (80 MHz), see Fig.3. For each encoder, it is therefore possible to build a time vector that contains

the times of occurence of the TTL signal's rising edges. Hence, the total rotation angle of each shaft is determined and instantaneous rotation speed and acceleration are deduced. In this application, measurement is triggered on the reference encoder mounted on the driving shaft and analog signals are acquired at each instant of the reference encoder's rising edge. Obviously, when an analog signal is sampled in the angular domain, the speed conditions are taken into account in order to set the cut-off frequency of anti-aliasing filters. An important characteristic of this measurement principle is to separate resolution and precision. Resolution is given by the number of pulses per revolution, and the theoretical angular precision is proportional to the ratio between rotation speed and counter clock frequency. The grating quality of the optical encoder disk, as well as the electronic signal conditioning and processing may also affect the practical accuracy.

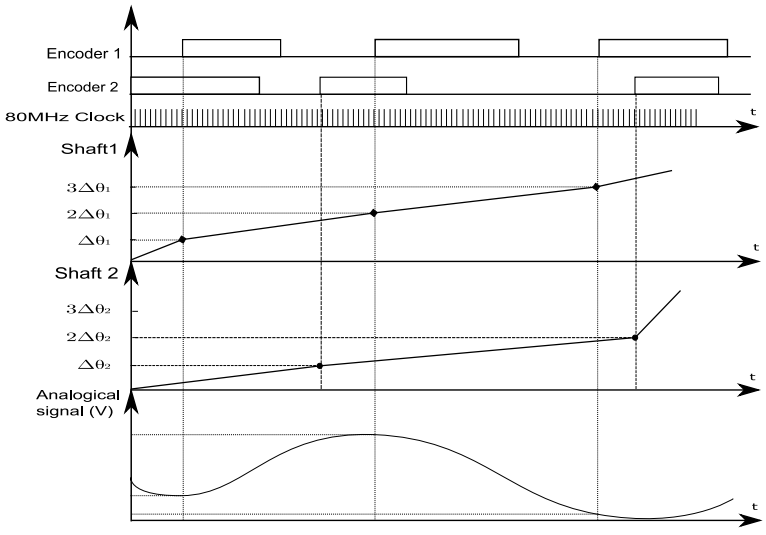


Fig. 3. Angular sampling principle

3.3 Angular sampling benefits

Compared with classical acquisition [16], data are re-sampled based on the angular rotation of a chosen encoder which is not necessarily the reference one. It consists in calculating the angular rotations of the other encoders at the times corresponding to the rising edges of the sampling encoder. Hence, if angular sampling is performed on encoder i, the angular positions of each of the slave encoders are computed from linear interpolation at the times corresponding to the encoder i rising edge locations, see Fig. 5.

For the analog signals, the same method is applied and they are recorded at the angular frequency of the reference encoder. This method is called angular sampling and is detailed in [13]. It is mainly applied in rotating machines with synchronous transmission elements such as gears or timing belts. Its application to a transmission in the presence of belt slip is novel and provides important advantages as described below. This technique is especially useful for systems with variable speed because the position of the sampling points and the angular resolution remain exactly the same when the speed fluctuates.

As the angular sampling frequency is constant based on the encoder resolution, instead of performing the FFT analysis in the time domain, this is performed in the angular domain. In other words, the measured signals are treated as functions of the angular position of the sampling encoder. The sampling encoder's position plays the role typically filled by time in classical FFT analysis. The spectral data is a function of angular frequency, which has units of rad^{-1}. The maximum angular frequency is $\frac{1}{\delta\theta}$, where $\delta\theta = \frac{2\pi}{N_g}$ is the angular resolu-

tion of the sampling encoder based on N_g gratings. Increments on the angular frequency axis are spaced at $\delta f = \frac{1}{N \cdot \delta\theta}$ where N is the number of sampling encoder rising edges in the collected data. Examples of classical Campbell and angular frequency diagrams are compared in Figure 4. On Figure 4a , natural frequencies are located at a constant frequency when speed increases while speed-dependent frequency orders increase linearly. In the angular frequency domain, however, natural frequencies appear as hyperbola ($f = \omega \cdot \frac{1}{\theta}$) and speed-dependent frequency orders are located at a constant angular frequency ($f = a \cdot \omega$ leads to $\frac{1}{\theta} = a$), vertical lines parallel to the speed axis.

Thus, the main advantages of performing angular sampling in this application are:

- sampling points are exactly located in reference to the geometry of the rotating machine, even when speed varies. It permits to compare several measurement results based on the same sampling conditions.
- spectral analysis is always performed with the same accuracy and the same resolution. Angular sampling also insures that the magnitude of harmonic components are exactly estimated [13].
- by choosing the encoder 3 as reference, and assuming that no slip occurs between belt and the idler pulley since no torque is being transmitted, the sampling points are attached to the belt.

Therefore, it is more convenient to identify speed-dependent frequency components on a graph with an angular frequency axis related to a chosen reference encoder.

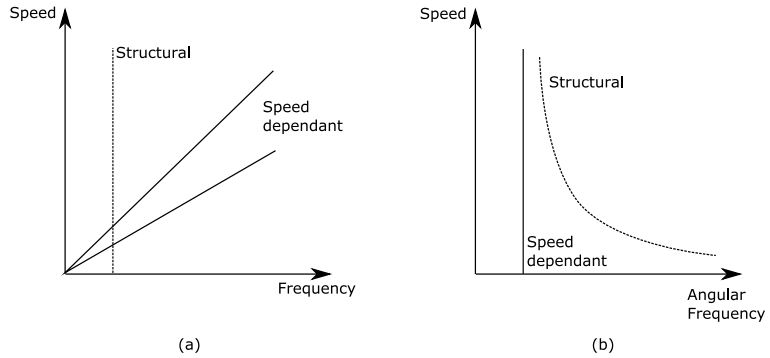


Fig. 4. Campbell diagrams in (a) time and (b) angular frequency domain

For standard Fourier analysis, it is necessary to get the measurements as a function of one single time vector with equally spaced intervals. This requires a time re-sampling of the data using linear interpolation as shown in Fig. 5(b).

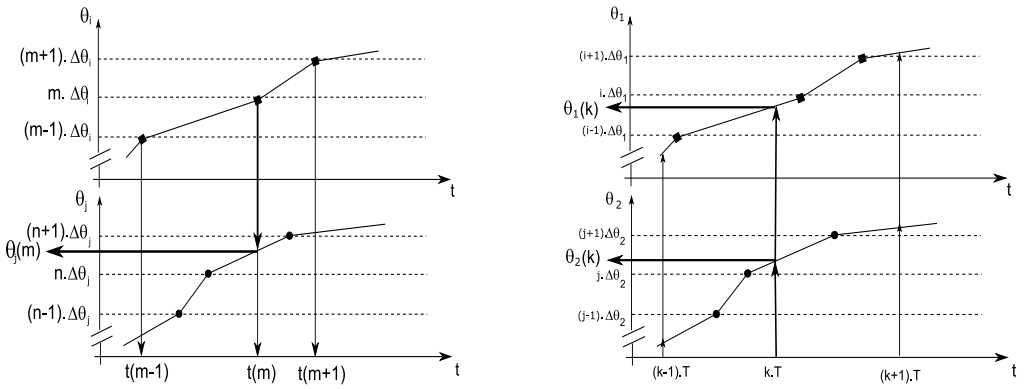
3.4 Phase difference measurement

This angular sampling method has already been used for many synchronous transmission studies (gearbox, timing belt drive) but never for non synchronous transmissions such as serpentine multi-ribbed belt drives. The transmission error ϵ is defined as the angular rotation difference between shaft i and shaft j,

$$\epsilon = \theta_i - \eta \cdot \theta_j \tag{13}$$

where η and $\theta_{i,j}$ are respectively the transmission ratio and the angular positions of shaft $i,\ j$.

In the case of non-synchronous belt drive systems, some creep occurs between the belt and the pulleys due to the power transmission by friction [17,18]. Indeed, the creep corresponds to the relative slip between the belt and the driven pulley as the belt elongates on the pulley contact arc as its tension



(a) (b)

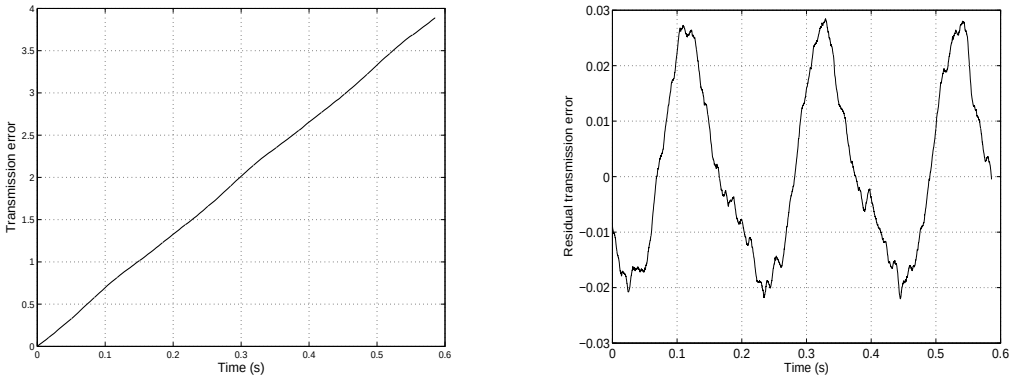
Fig. 5. Angular re-sampling method(a) and Time re-sampling method (b).

increases. Here, the transmission error between pulleys 3 and 2 is considered. The rotation of pulley 3 is not totally transmitted to pulley 2 due to the belt stretching on pulley 2 which causes a delay. Therefore, the mean value of the transmission error is not zero as it is for a synchronous drive, but rather always increases (Fig.6). In our application, analysis permits decomposition of the observed transmission error as the sum of a linear function of time representing the transmission error due to pulley belt creep ϵ_{creep}, and the residual transmission error ϵ_{res} due to the system dynamic as in synchronous transmission.

$$\epsilon = \theta_3 - \eta \cdot \theta_2 = \epsilon_{res} + \epsilon_{creep} \tag{14}$$

where ϵ_{creep} is identified from ϵ as a linear regression of time assuming a constant mean rotation speed. Removing the linear part ϵ_{creep} from the transmission error ϵ yields the zero-mean periodic residual transmission error ϵ_{res} (Fig. 6).

As mentioned in the theoretical model description, the dynamic belt tension can be expressed as the difference of the endpoint positions and mid-plane



(a) (b)

Fig. 6. Total (a) and residual (b) transmission error versus time.

stretching from transverse vibration, see Equation 2. Considering the belt span that connects pulleys 3 and 2, and taking into account the belt translation direction, $U(L,T)$ and $U(0,T)$ correspond respectively to the belt unseating point on pulley 3 and to the belt seating point on pulley 2. These two points are not fixed in space since pulley rotations oscillate around the linearly increasing angles w_3t and w_2t. Assuming a no-slip condition at these two points, $U(L,T)$ and $U(0,T)$ can be estimated from pulley angle oscillations multiplied by the respective pulley pitch radius. Finally, the difference between $U(L,T)$ and $U(0,T)$ corresponds to the residual transmission error at time T. Therefore, residual transmission error and belt tension fluctuation are related. Figure 7 presents the measured progression of belt tension and residual transmission error angular waterfall analysis with change in rotation speed (note that all waterfall plots are topviews). The same frequency components appear on each graph and prove that the measurement system with optical encoders and angular sampling permits evaluation of belt tension fluctuation. Finally, this analysis shows that the transmission error includes the pulley belt creep plus the system dynamic.

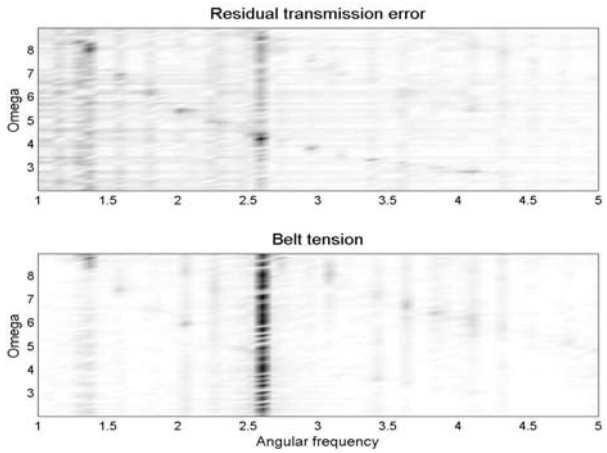
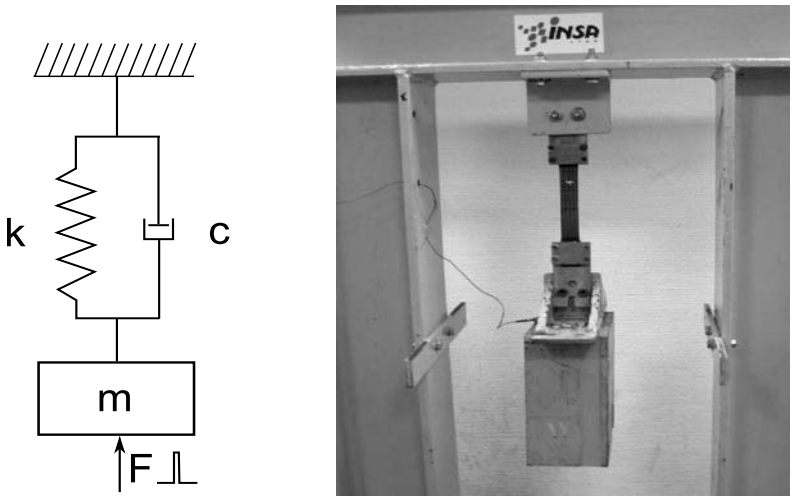


Fig. 7. Belt tension and transmission error angular top-view waterfall as a function of rotation speed

3.5 Non uniform belt characteristic identification and consequences

The low modulation observed on the dynamic transmission error (Fig. 6) corresponds to the belt traveling frequency and demonstrates there are non-uniform belt characteristics. In order to check this non-uniformity, a belt has been cut in ten equal parts. Each part has been tested to determine longitudinal rigidity modulus k and damping C. Each belt sample is clamped at one end and has a mass m suspended at the other, see Fig. 8. This system is excited via a shock hammer. The free response is recorded via an accelerometer and post-processed to obtain belt longitudinal stiffness and damping. Longitudinal damping coefficients of belt samples, normed by the maximum measured value, are plotted versus belt sample number in Fig. 9. Non negligible variation is observed for C while local stiffness, and therefore EA, is constant. This irregularity is probably due to the manufacturing process (printing, cord winding,



(a) (b)

Fig. 8. Experimental set-up for the local belt characteristics identification.

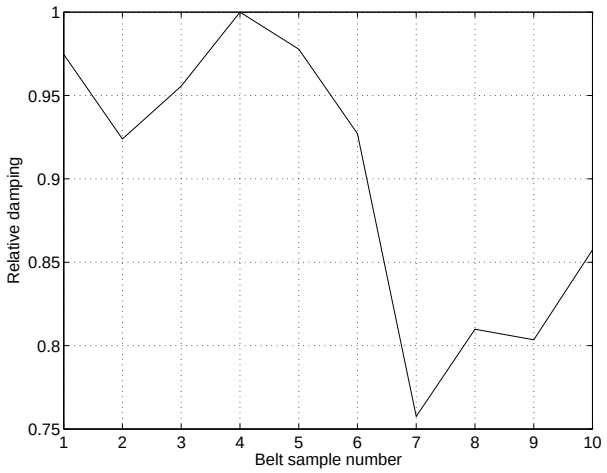


Fig. 9. Dimensionless damping evolution along the belt length C_i/C_{max}.

cutting). The low frequency modulation observed is shown to be a parametric excitation source next.

4 Belt span instability analysis

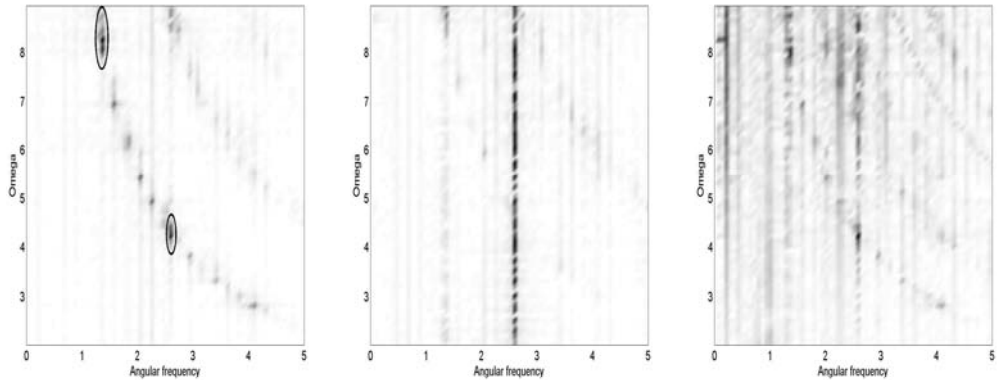
4.1 Experimental investigation

On the global experimental set-up for a given initial belt tension and mean torque, a speed sweep of the driving shaft is performed from 532 to 1512 *rpm* in 14 *rpm* increments (70 tests). The experimental results are presented in Figure 10 as a top-view waterfall in the angular frequency domain for: (a) the transverse vibration , (b) belt tension and (c) belt speed . All parameters are dimensionless as defined in Section 2 (waterfall FFT in the time-frequency domain are given in Appendix 1).

The belt tension angular waterfall, Fig.10(b), exhibits lines parallel to the speed axis, which proves a speed dependent excitation. The belt transverse vibration angular waterfall is presented on Fig.10(a). The instabilities are represented by the black spots located on a hyperbola. which proves parametric instability. The system is unstable for numerous frequencies.

4.2 Main instability regions

The main excitation of the system comes from the pump design which creates torque fluctuations of order 2, inducing speed and tension fluctuations. Regarding belt instability, speed variation is a negligible source of excitation compared to the tension fluctuation. The latter is observed to be the principle



(a) (b) (c)

Fig. 10. Experimental angular top-view waterfall: (a) transverse vibration , (b) belt tension fluctuation , (c) belt speed fluctuation

source of parametric excitation and is located on the angular frequency waterfall graph at abscissa 2.60 as a vertical line. Primary and secondary instability regions, circled on Figure 10(a), are the response to this torque excitation.

Experimentally, the primary instability occurs for $\Omega_1 \in [7.9, 8.8]$. This region is classically wider than the corresponding secondary region (which occurs for $\Omega_1 \in [4.1, 4.5]$), but also shifted of 0.3 from $2\omega_1$ toward lower frequencies due to the multi-frequency excitation.

Considering the small transverse rigidity modulus and the large span length in this application, the bending stiffness modulus is neglected. Therefore, in the following, the belt span is considered as a string ($\mu = 0$). Thus, using Eq. (7) and (8) and $C_{\overline{n}n} = (1 - e^{-2jn\pi\gamma_0})/2$, $D_{\overline{n}n} = 0$, $E_{\overline{n}n} = (1 - e^{-2jn\pi\gamma_0})/(4\gamma_0)$, and $E_{nn} = jn\pi(1 + \gamma_0^2)/2$. The experimental parameters introduced in the model are: $\gamma_0 = 0.5,\ \omega_1 = 4.3, \Omega_2 = 8,\ \Omega_2' = 8,\ \varepsilon_1' = 0.001,\ \varepsilon_2 = 0.3,\ \varepsilon_2' = 0.001$. For $\varepsilon_1 = 0.7$, the instability region occurs for $\Omega_1 \in [7.8 \quad 9.2]$.

The instability region boundaries are plotted as a function of the excitation amplitude ε_1 in Fig. 11. When $\Omega_2 < 2\omega_1$, the second source of excitation

shift the instability region to lower frequencies. While this phenomenon is not classical, the experimental observations confirm the theoretical results of [12].

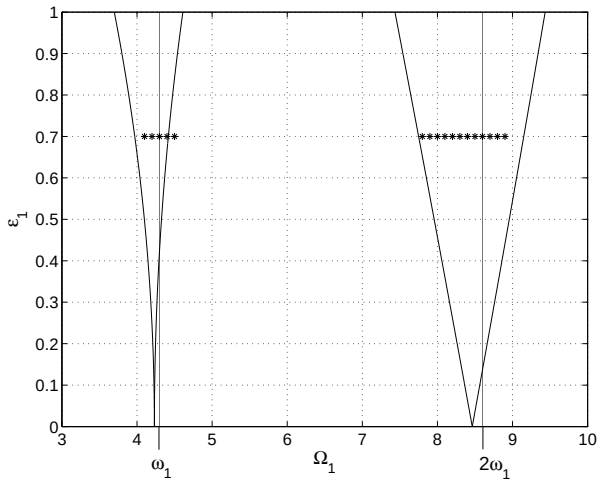


Fig. 11. Instability region. Model (solid line) and experiment (stars).

4.3 Low amplitude instability region

The low frequency modulation observed on the residual transmission error due to belt characteristic irregularity highlighted in Section 3.5 is a source of parametric excitation. It appears on the waterfall plot of the tension fluctuation as low level parallel lines separated by 0.20 that is the belt traveling frequency. This irregularity explains the peripheral instabilities presented on Fig. 10(a).

5 Conclusion

This paper focuses on an experimental investigation of an industrial axially moving belt subjected to multi frequency excitation. Comparison with analytical results from a perturbation analysis is presented and permits to validate

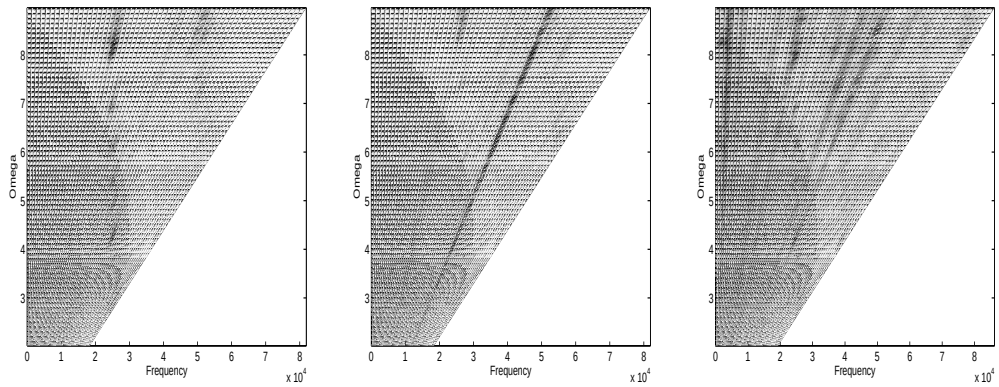
theoretical instabilities. The main conclusion are:

- Parametric instabilities occur in experimental system such as belt drive,
- Measurement system based on angular sampling is shown to be an efficient tool for instability analysis in belt drive systems,
- Irregular belt characteristics have been detected and highlighted as unexpected source of parametric excitation,,
- Instability regions are shifted when subjected to multi-frequency excitation,
- Experimental observations confirm the theoretical results.

Further analysis will focus on the role of the hysteretic behavior of the belt tensioners on these instabilities.

6 Appendix

Figure 12 represents the top-view waterfall in the classical Campbell like diagram.



(a) (b) (c)

Fig. 12. Experimental classical Campbell like diagram top-view waterfall: transverse vibration (a), belt tension fluctuation (b), belt speed fluctuation (c)

References

[1] G. Gerbert. Some notes on v-belt drives. *ASME - Journal of Mechanical Design*, 103:8–18, 1981.

[2] S.J. Hwang, N.C. Perkins, A. Ulsoy, and R.J. Meckstroth. Rotational response and slip prediction of serpentine belt dirve systems. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 116:71–78, 1994.

[3] G. Michon, L. Manin, and R. Dufour. Hysteretic behavior of a belt tensioner: Modeling and experimental investigation. *Journal of Vibration and Control*, 11(9):1147–1158, 2005.

[4] J.A. Wickert. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *Int. J Nonlinear Mechanics*, 27-3:503–517, 1992.

[5] M.J. Leamy and N.C. Perkins. Nonlinear periodic response of engine accessory drives with dry friction tensioners. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 120:909–916, 1998.

[6] L. Zhang and J.W. Zu. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 232:783–806, 1999.

[7] E. Mockensturm, N. Perkins, and A. Ulsoy. Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings. *ASME - Journal of Vibration and Acoustics*, 118:346–351, 1996.

[8] E. Mockensturm and J. Guo. Nonlinear vibration of parametrically excited viscoelastic axially moving media. *ASME - Journal of applied mechanics*, 72:374–380, 2005.

[9] F. Pellicano, G. Catellani, and A. Fregolent. Parametric instability of belts: theory and experiments. *Computer and Structures*, 82:81–91, 2004.

[10] F. Pellicano, A. Fregolent, A. Bertuzzi, and F. Vestroni. Primary and parametric non-linear resonances of a power transmission belt: experimental and theoretical analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 244:669–684, 2001.

[11] G. Cheng and J.W. Zu. Nonstick and stick-slip motion of a coulomb-damped belt drive system subjected to multifrequency excitations. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 70:871–884, 2003.

[12] R. Parker and Y. Lin. Parametric instability of axially moving media subjected to multifrequency tension and speed fluctuation. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 68:49–57, 2001.

[13] D. Remond and J. Mahfoudh. From transmission error measurements to angular sampling in rotating machines with discrete geometry. *Shock and Vibration. IOS Press.*, 9:1–13, 2005.

[14] A.L. Thurman and C.D. Mote Jr. Free, periodic, non-linear oscillation of an axially moving string. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 36:83–91, 1969.

[15] R. Jha and R. Parker. Spatial discretization of axially moving media vibration problems. *ASME- Journal of Vibration and Acoustics*, 122:290–294, 2000.

[16] D.R. Houser and G.W. Blankenshio. Methods for measuring transmission error under load and at operating speeds. *SAE Transactions*, 98(6):1367–1374, 1989.

[17] G. Gerbert and F. Sorge. Full sliding adhesive-like contact of v-belts. *ASME - Journal of Mechanical Design*, 124:706–712, 2002.

[18] S.E. Betchel, S. Vohra, K.I. Jacob, and C.D. Carslon. The stretching and slipping of belts and fibers on pulleys. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 67:197–206, 2000.

Mesures des phénomènes non-linéaires dans une façade accessoires d'un moteur thermique.

MESURES DES PHENOMENES NON-LINEAIRES DANS LA FAÇADE ACCESSOIRES D'UN MOTEUR THERMIQUE

MEASUREMENT OF NON-LINEAR PHENOMENA ON THE FRONT END ACCESSORY DRIVE OF AN AUTOMOTIVE ENGINE

Guilhem MICHON*, Doctorant, Karine STOFLETH*, Ingénieur,

Lionel MANIN**, Maître de conférences, Didier REMOND**, Maître de conférences, Régis DUFOUR**, Professeur.

guilhem.michon@valeo.com, karine.stofleth@valeo.com,
lionel.manin@insa-lyon.fr, didier.remond@insa-lyon.fr, regis.dufour@insa-lyon.fr

*VALEO Systèmes Electriques,
2 rue A. Boulle,
94 000 CRETEIL, FRANCE.

** Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures, UMR CNRS 5006, INSA de Lyon,
Bât. Jean d'Alembert, 8 rue des Sciences,
69 621 VILLEURBANNE, FRANCE.

Mots clefs : transmission par courroie, alterno-démarreur, tendeurs, moteur thermique, mesure de vitesses, codeurs optiques, caméra rapide, transitoire, dynamique non-linéaire.

Le démarrage des moteurs thermiques entraînés par courroie poly-V à partir d'un alterno-démarreur met en jeu des phénomènes transitoires fortement non-linéaires dans la façade d'accessoires. Ceux-ci sont dus au comportement de la courroie combiné à ceux des poulies et des tendeurs, et à la réversibilité du système. Lors du démarrage se succèdent les phases d'entraînement par l'alterno-démarreur, d'injection et de ralenti.

Les mesures effectuées sur un moteur quatre cylindres pendant la phase d'entraînement ont pour but de mettre en évidence ces phénomènes et de comparer plusieurs configurations de la façade d'accessoires. Une caméra rapide numérique et deux codeurs optiques solidaires des arbres vilebrequin et alterno-démarreur, sont utilisés pour obtenir les positions des tendeurs et les vitesses instantanées de rotation des poulies.

Des phénomènes tels que la mise en place initiale des tendeurs sur des durées inférieures au dixième de seconde ainsi que le glissement courroie-poulies sont mis en évidence. Les écarts entre les vitesses mesurées sur les différentes poulies sont importants, notamment au début du démarrage. Les films permettent d'en identifier les causes : glissement de la courroie, mouvement combiné des deux tendeurs.

Keywords : belt transmission, starter-alternator, tensioner, engine, angular speed measurement, optical encoder, high speed camera, transient and non-linear dynamics.

The starting of an automotive engine driven by a poly-V belt in the case of starter-alternator applications generates transient non-linear phenomena in the front end accessory drive (FEAD). These are due to the coupled behaviours of the belt, the pulleys and tensioners, and also to the system reversibility. Indeed, during the starting, the role of the starter-alternator changes from a driving to a driven pulley.

The objectives of the measurements done on a four cylinders engine, during the starting phase, were to observe and identify these phenomena and also to compare several configurations of FEAD. A high speed digital camera and two optical encoders with a specific data acquisition board were used to measure instantaneous rotation speeds of the crankshaft and starter pulleys and the tensioner positions. Phenomena like, the initial positioning of the tensioners during time smaller than $1/10^{th}$ second, belt-pulley slip, have been identified. The differences between pulley linear speeds are quite large particularly at the very beginning of the starting. The causes were determined from the movies analysis: belt- pulley slip, combined motion of the tensioners.

1 Introduction

Dans le cadre de récents développements de la fonction démarrage d'un moteur automobile ainsi que dans un souci constant de réduction de la consommation des véhicules, les alterno-démarreurs sont une évolution des alternateurs classiques. Ils permettent de démarrer le moteur thermique via la courroie et l'alternateur en fonction moteur.

Cette évolution impacte la transmission par courroie poly-v entraînant les organes accessoires aussi bien dans son comportement que dans sa conception. En effet, en phase de démarrage, c'est l'alterno-démarreur qui est la poulie motrice de la transmission, puis une fois le moteur démarré, la poulie du vilebrequin qui devient motrice ; avec un recoupement de ces deux phases.

La transmission est ainsi dite réversible puisque les poulies du vilebrequin et de l'alterno-démarreur changent de rôle au cours du fonctionnement. Cette inversion des rôles génère sur des durées très courtes ($1/10^{ème}$ s) des phénomènes transitoires non linéaires qui nécessitent, pour être identifiés, des moyens de mesures de haute précision et résolution. Ainsi, un dispositif utilisant des codeurs optiques et une carte d'acquisition spécifique mesure les rotations instantanées des poulies. Par ailleurs, la présence de deux poulies potentiellement motrices dans la même transmission implique l'utilisation de deux tendeurs ce qui jusqu'à présent n'était pas le cas. Afin de pouvoir observer la mise en place des tendeurs et l'éventuel glissement de la courroie sur les poulies [1], un système de mesure vidéo à caméra rapide a été utilisé.

L'objectif des travaux présentés ici est de valider une démarche de mesure ainsi que l'instrumentation associée dans le cadre de l'observation du comportement de la transmission par courroie poly-v lors d'une phase de démarrage. Les essais réalisés concernent uniquement la phase d'entraînement du moteur (passage des compressions) par l'alterno-démarreur.

2 Dispositif expérimental

2.1 Face avant du moteur

Un moteur thermique quatre cylindres est monté sur un banc moteur de Valeo Systèmes Electriques (Figure 1). La transmission par courroie poly-v de la façade d'accessoires comporte, dans la configuration présentée, neuf poulies dont deux tendeurs mécaniques articulés fortement dissipatifs.

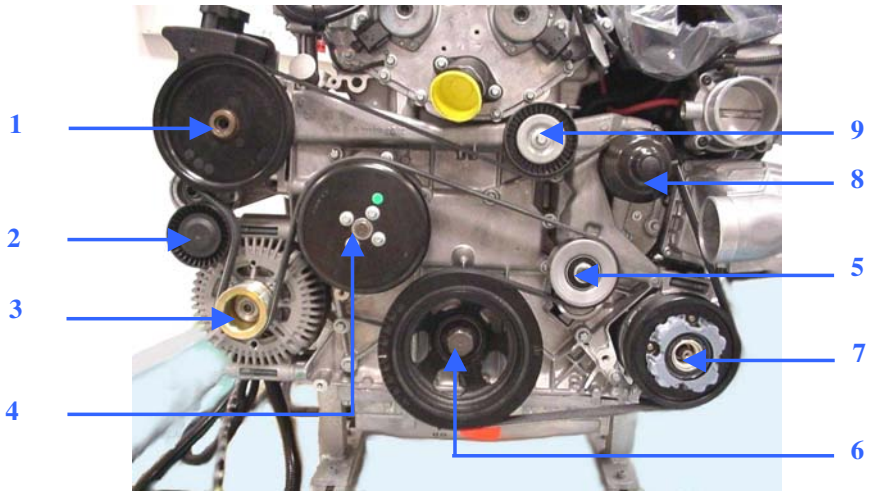


Figure 1. Façade accessoires du moteur.

1	Pompe de direction assistée	6	Vilebrequin
2	Tendeur mécanique (alternateur)	7	Pompe de climatisation
3	Alterno-Démarreur	8	Compresseur mécanique
4	Pompe à eau	9	Galet fixe
5	Tendeur mécanique (vilebrequin)		

2.2 Principe de mesure par codeurs optiques

Le principe de la mesure est basé sur le comptage des impulsions d'une horloge cadencée à haute fréquence de manière à localiser les fronts montants des signaux TTL délivrés par les codeurs optiques. L'intérêt de cette mesure est de permettre des mesures à vitesse élevée à l'aide de codeurs bon marché tout en conservant une bonne précision. Le schéma de principe est donné sur la Figure 2. Cette technique de mesure nécessite l'utilisation d'une carte d'acquisition spécifique développée au laboratoire [2].

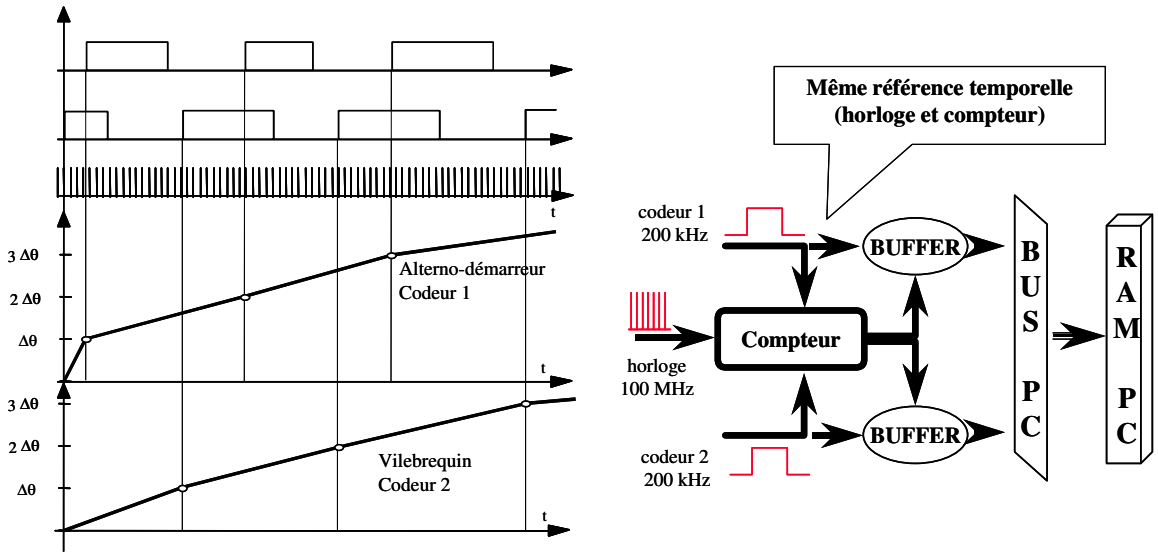


Figure 2. Principe de la mesure de vitesse.

Ce principe de mesure permet de dissocier la précision de la résolution:

- la précision dépend uniquement de la fréquence de l'horloge et de la vitesse de rotation de l'arbre. En effet l'erreur correspond à l'angle de rotation que peut faire le codeur i, tournant à la vitesse moyenne Ω_i *(tr/min)*, pendant le temps entre deux impulsions horloge $t_h = 1/f_h$:

$$\Delta\theta_i = \frac{360*60*\Omega_i}{f_h} \quad (seconde\ d'arc) \tag{1}$$

  Ainsi pour une fréquence de l'horloge f_h de 100 MHz, et dans les vitesses considérées (Ω de 0 à 2000 rpm), la précision en position est inférieure à la seconde d'arc.

- la résolution est, quant à elle, donnée par le nombre de raies du codeur : ici 2500 raies/tour. Un front montant correspond au passage d'une raie devant la cellule optique du codeur.

Cette technique de mesure d'angle de rotation instantanée de poulie a déjà été utilisée sur des transmissions à courroie synchrone entraînant la distribution de moteur automobile [3]. La différence, ici, est que les rotations des poulies ne sont pas synchrones et par conséquent l'analyse des signaux enregistrés en est compliquée (§2.4).

Les éventuelles erreurs d'acquisition (front montant non détecté) sont corrigées par des post-traitements adéquats sur les signaux enregistrés.

2.3 Installation sur le moteur

Il convient d'apporter un soin particulier à l'interface entre le moteur et les codeurs (Figure 3) : les pièces d'adaptation relativement fragiles interviennent dans une mesure de précision. Elles ne doivent pas être à l'origine d'erreurs additionnelles (bruit, jeu mécanique, mauvaise coaxialité…).

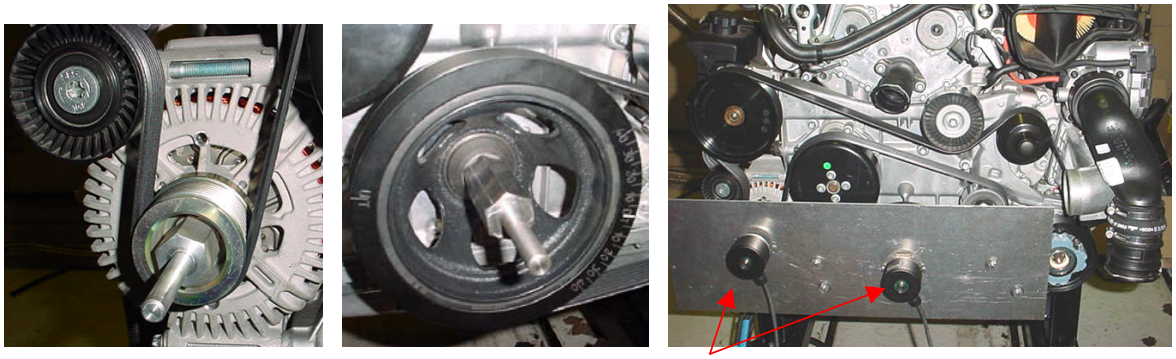


Figure 3. Instrumentation : codeurs optiques.

2.4 Calcul des vitesses de rotation depuis les signaux des codeurs

Le système de mesure de vitesse délivre le temps entre deux passages de front montant pour chaque codeur sous forme d'un fichier de points. Ce temps est codé en 16 bits et est en 10^{-8}s, il est noté t_1 (pour l'alterno-démarreur) et t_2 (pour le vilebrequin).

Pour chaque voie, le départ de l'acquisition est indépendant et correspond au début de la rotation de chaque arbre. La fin de l'acquisition sur les deux voies est décidée par la voie maître, ici l'alterno-démarreur, fixée ici à 40000 points (soit 16 tours).

Ceci pose un problème au moment de la construction des vitesses. En effet, à cause de la mécanique du système, les deux arbres ne commencent pas à tourner en même temps. De plus, les deux arbres n'ont pas la même vitesse (rapport de réduction d'environ 3), le fichier du plus rapide a exactement 40000 points (noté N_1), l'autre environ 13000 (noté N_2), l'acquisition étant stoppée une fois le nombre maximum de points atteint. Afin de synchroniser les deux voies pour le tracé, il est nécessaire de calculer les vecteurs temps de chacune d'elle.

Vecteurs temps :

Chaque voie doit donc posséder son propre vecteur temps :

$$T_1(j)=\sum_{i=2}^{j} t_1(i) \qquad T_2(k)=\sum_{i=2}^{k} t_2(i) \quad \text{avec} \quad 2< j <N_1 \quad \text{et} \quad 2< k <N_2 \qquad (2)-(3)$$

$$\text{où, } t_1(i)=n_1(i)*10^{-8}s \text{ et } t_1(i)=n_1(i)*10^{-8}s \qquad (4)$$

On définit ensuite l'écart entre ces deux temps qui correspond au décalage entre les débuts de l'acquisition sur chaque voie. Cet écart apparaît au tout début de l'enregistrement des signaux et est constant:

$$\Delta=T_2(N_2)-T_1(N_1) \qquad (5)$$

Puis pour recaler les signaux sur la même origine temporelle (début acquisition de la voie 1, la plus rapide), il faut translater le vecteur temps de la deuxième voie de Δ en chaque point enregistré :

$$T_2(k) = T_2(k) + \Delta \qquad (6)$$

Vecteurs vitesses :

La vitesse instantanée de l'arbre i en *tours par minute* au temps $T_i(j)$ s'exprime par:

$$V_i(j) = \frac{1}{t_i(j).\frac{1}{f_h}.Nb_raies}.60 \quad (7)$$

où, f_h : fréquence de l'horloge de la carte compteur (ici 100 MHz)
et Nb_raies : nombre de raies du codeur (ici 2500)

On obtient ainsi les deux vecteurs vitesse V_1 et V_2 en fonction de leurs propres vecteurs temps T_1 et T_2 synchronisés, ce qui permet par la suite de superposer leur tracé en fonction du temps.

2.5 Caméra rapide

Afin de visualiser le glissement poulie/courroie, les poulies ont été habillées avec des mires et la courroie d'une alternance de bandes noires et blanches (Figure 4). Ces films sont également utilisés pour comprendre la dynamique du système pendant les phases transitoires, notamment la mise en place des tendeurs.

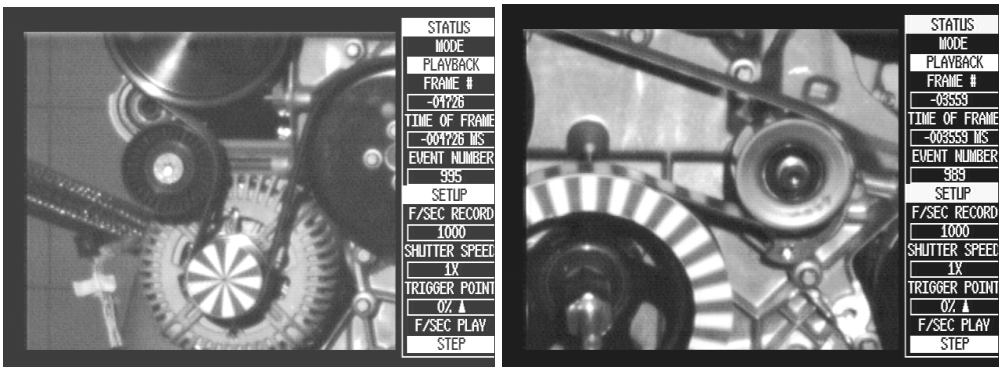


Figure 4. Mires utilisées pour la visualisation par caméra rapide.

3 Résultats

3.1 Vitesses

La Figure 5 représente le tracé temporel des vitesses alterno-démarreur, vilebrequin, cette dernière étant multipliée par le rapport de réduction dans un souci de comparaison par rapport à celle de l'alterno-démarreur.

A partir de l'observation de l'évolution des vitesses, on peut décomposer ces mesures en deux phases principales :

1. La phase transitoire : mise en mouvement et décollement du moteur, puis l'accélération,
2. Le régime stationnaire, où la vitesse évolue autour d'une valeur constante. On voit nettement le passage de chaque compression (deux compressions par tour de vilebrequin).

De façon générale, les écarts de vitesse entre le vilebrequin et l'alterno-démarreur viennent :

- du mouvement des tendeurs,
- du glissement de la courroie sur les poulies,
- de l'élongation de la courroie.

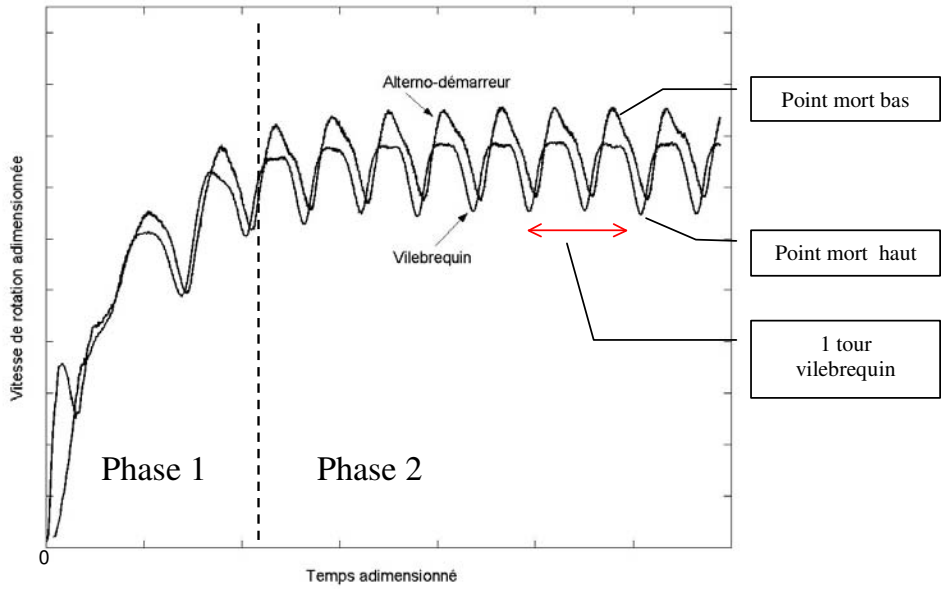


Figure 5. Vitesses vilebrequin et alterno-démarreur.

Au tout début de la phase transitoire, Figure 6, l'écart de vitesse entre l'alterno-démarreur et le vilebrequin est dû à l'action des galets tendeurs. Ceux ci sont entraînés par la courroie et se mettent en place successivement avant la rotation du vilebrequin. Les vidéos confirment cette explication.

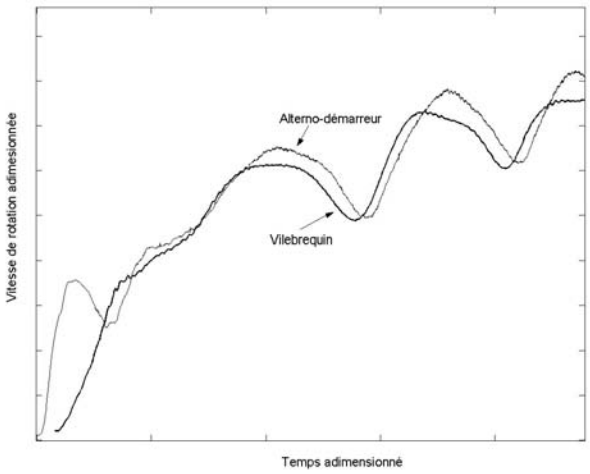
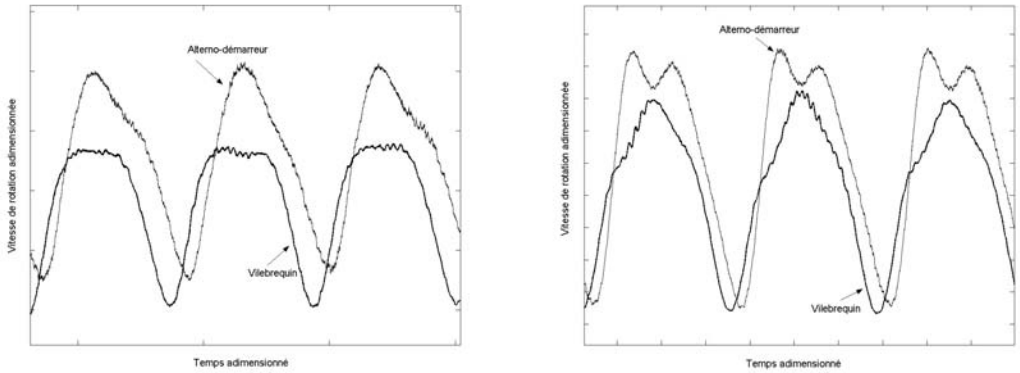


Figure 6. Régime transitoire.

En régime établi, phase 2 de la Figure 5 et Figure 7, les deux signaux sont décalés (en phase et en amplitude point mort haut et bas). Le vilebrequin est en retard sur l'alterno-démarreur.

La phase d'entraînement d'un moteur thermique est une succession de compressions et de détentes sans injections. Les phases d'accélérations correspondent à la détente des gaz dans les cylindres, le vilebrequin est alors moteur. Pendant les phases de décélération, il y a compression des gaz ; l'alterno-démarreur est moteur. Il y a donc une alternance de la motricité de la poulie vilebrequin dans la transmission. Les différences d'inerties entre ces deux arbres ont un rôle important dans les écarts d'amplitudes.



(a) (b)

Figure 7. Régime établi.

Pour une configuration de face-avant composée d'autres systèmes de tension, on remarque (Figure 7-b) que l'évolution des vitesses et leur décalage change sensiblement. Cet aspect peut avoir des conséquences importantes sur la dynamique du système. Les gains ainsi obtenus en vitesse sont plus importants et peuvent pallier à des insuffisances lors du démarrage.

3.2 Vidéo caméra rapide

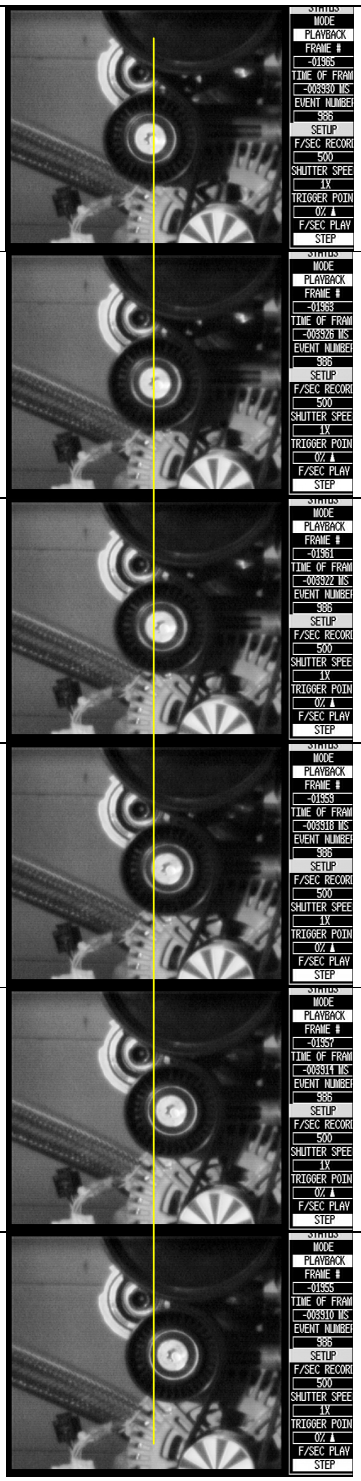


Figure 8. Tendeur alterno-démarreur

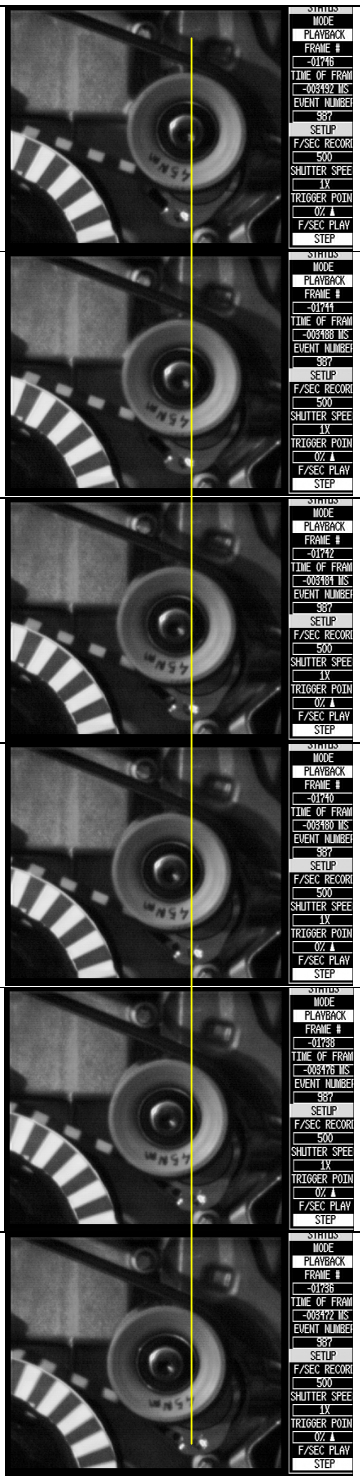


Figure 9. Tendeur vilebrequin

On met ici en évidence le temps de mise en place des tendeurs avant la mise en rotation du vilebrequin (Figures 8 et 9). Les deux extraits de vidéo ne sont pas synchrones (origines différentes). L'intervalle de temps entre deux images successives est 1/500ème s, la durée du phénomène est de l'ordre d'un centième de seconde.

D'autres films permettent de qualifier le glissement de la courroie sur chacune des poulies. Celui ci apparaît sur les deux poulies en question, principalement lors des fortes variations de vitesse et surtout lors de l'alternance de poulie motrice.

4 Conclusion

Le démarrage des moteurs thermiques par courroie poly-V est une innovation récente qui modifie de façon importante l'architecture de la transmission de la façade accessoires. Le système mécanique étudié est source de phénomènes dynamiques transitoires. Pour sa connaissance et sa compréhension, il nécessite la mise en place d'instruments de mesures de haute précision.

Le dispositif expérimental développé et utilisant des systèmes optiques a permis de mettre en évidence des phénomènes transitoires non linaires :

- glissement poulie/courroie,
- mouvement des tendeurs,
- élongation éventuelle de la courroie.

L'observation et les résultats de mesures ont abouti à une analyse fine du comportement. Les méthodes spécifiques de mesures et de traitement de données ont été validées et pourront être étendues à d'autres systèmes.

Les mesures effectuées constituent une base de référence pour les modèles en cours de développement.

Remerciements :

Les auteurs remercient Valeo Systèmes Electriques pour leur soutien dans cette recherche.

Références :

[1] DEBBABI, C., Contribution à l'étude dynamique des courroies de transmission soumises aux irrégularités cycliques de vitesse des moteurs, thèse de doctorat de l'Université de Paris VI, 182 p, 1990

[2] REMOND, D., "Practical Performances of High-speed Measurement of Gear Transmission Error or Torsional Vibrations with Optical Encoders" – *Journal Measurement Science and Technology*, N°9 et N°3, pp 347-353, 1998.

[3] MANIN, L., REMOND, D., GABOREL, J-P., *"Experimental/Numerical analysis of the timing belt drive of a V6 engine"*, Proceedings of DETC'03, 9th International Power Transmission and Gearing Conference 2003, ASME Conferences, Chicago, Illinois/USA, 2-6 September 2003.